

التحليل العددي 2

منشورات جامعة تشرين
كلية العلوم

التحليل العددي (2)

السنة الثالثة-قسم الإحصاء الرياضي

الدكتور

سليمان محمد محمود

مدرس في كلية العلوم

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

2008 - 2009 م

1429 - 1430 هـ

محتويات الكتاب

11	المقدمة
15	1- الفصل الأول: تمثيل الأعداد وحساب الأخطاء
15	1.1 تمثيل الأعداد
15	1.1.1 تمثيل الأعداد الصحيحة حاسوبيا
17	1.1.2 تمثيل الأعداد الحقيقية حاسوبيا
17	a- طريقة النقطة الثابتة: Fixed- point Method
18	b- طريقة النقطة العائمة: Floating-Point Method
22	1.2 حساب الأخطاء (Error computation)
22	1.2.1 أنواع الأخطاء
23	a- أخطاء الصيغ
23	b- أخطاء الاقتصار
23	c - أخطاء القياس
24	d- أخطاء التدوير وعدم الاستقرار
24	1.2.2 تدوير الأعداد: Rounding off
26	1.2.3 الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية
28	1.2.4 الأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية
36	تمارين
38	2- الفصل الثاني الطرائق العددية لتقريب الدوال Numerical Methods for Approximation of Functions
38	2.1 مقدمة (Introduction)

39	2.2 الاستيفاء الداخلي وجدول الفروق
39	2.2.1 كثيرات الحدود (Polynomials)
39	a- خواص كثيرات الحدود
42	b- طريقة هونر للقسمة المختزلة
49	2.2.2 الفروق المنتهية
52	a- جدول الفروق
54	b- خواص الفروق التقدمية
58	2.2.3 الاستيفاء الداخلي (Interpolation)
59	2.2.4 طرائق الاستيفاء الداخلي بكثيرات حدود
59	a- طريقة نيوتن غريغوري التقدمية
62	b- تقدير أخطاء استيفاء دالة
64	c- طريقة لاغرانج (Lagrange method)
71	d- طريقة الاستيفاء الداخلي العامة
75	2.3 تقريبات المربعات الصغرى: Least Squares Approximation
75	2.3.1 تقريب المربعات الصغرى بحدودية من الدرجة m في الحالة المنفصلة
77	a- التقريب الخطي
91	2.3.2 تقريبات المربعات الصغرى في الحالة المستمرة
97	a- التوزين: Weighting
98	2.3.3 الدوال المتعامدة: Orthogonal Functions
99	a- كثيرات حدود ليجندر: Legendre Approximations
101	b- خواص كثيرات حدود ليجندر

104	c-استخدام حدوديات ليجندر المتعامدة في تقريبات المربعات الصغرى
109	d-حدوديات تشيبيتشيف (Chebyshev Approximations)
110	e- خواص كثيرات حدود تشيبيتشيف
114	f- تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبيتشيف في الحالة المستمرة
119	g-تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبيتشيف في الحالة المنفصلة
127	تمارين
131	3- الفصل الثالث الطول العددية للمعادلات الجبرية
131	3.1 طرائق عزل جذور معادلة
132	3.1.1 الطريقة البيانية
132	3.1.2 الطريقة الجبرية
137	3.2 الطرائق التقريبية لحل المعادلات
137	3.2.1 طريقة تنصيف المجال (Bisection method)
141	3.2.2 طريقة القواطع (Secants method)
148	3.2.3 طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson method)
154	3.2.4 طريقة هالي (Halley's methods)
162	3.3 الحل العددي لجمال المعادلات غير الخطية
161	3.3.1 طريقة نيوتن
170	3.3.2 طريقة نيوتن المعدلة
176	3.3.3 طريقة التكرارات المتتالية (النقطة الثابتة)
186	تمارين

	4- الفصل الرابع التفاضل والتكامل العددي Numerical Differentiation and Integration
190	4.1 الطرائق العددية لحساب التفاضل العددي Numerical Methods for Numerical Differentiation
190	4.1.1 تقريب المشتق باستخدام نهاية الفرق التقدمي The Limit of Difference Quotient
194	4.1.2 صيغ الفروق المركزية The Central-Difference Formulas
194	a- صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب المشتق الأول
199	b- صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب المشتق الأول
205	c- صيغ الفروق المركزية لإيجاد المشتقات من مراتب عليا
205	أ- صيغة فروق من المرتبة الثانية لحساب المشتق الثاني
208	ب- صيغة فرقية من المرتبة الرابعة للمشتق الثاني
212	4.1.3 صيغ لاغرانج لحساب المشتقات الأولى والثانية
212	a- صيغة لاغرانج لتقريب المشتق الأول
215	b- صيغة لاغرانج لتقريب المشتق الثاني
216	c- الخطأ المقتطع في صيغ لاغرانج
222	2.4 الطرائق العددية لحساب التكامل العددي Numerical Methods for Numerical Integration
223	4.2.1 طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)
224	a- الخطأ المقتطع بطريقة المستطيلات
228	4.2.2 طريقة أشباه المنحرفات (Trapezoidal Method)
230	a- الخطأ المقتطع بطريقة أشباه المنحرفات
233	4.2.3 طريقة سيمبسون (Simpson Method)

235	a- الخطأ المقطع بطريقة سيمبسون
243	4.2.4 طريقة سيمبسون المعدلة (Modified Simpson Method)
246	4.2.5 طريقة تربيعية- غوص (Gauss-Quadrature)
248	a- تكامل غوص- ليجندر (Gauss-Legendre Integration)
248	b- تعميم صيغة غوص - ليجندر
264	تمارين
	5- الفصل الخامس الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية Numerical Solutions of Differential equations
268	5.1 مقدمة: Introduction
270	5.2 مسائل القيمة الابتدائية: Initial Value Problems
272	5.3 طرائق عددية للمعادلات التفاضلية العادية ذات القيم الابتدائية Numerical Methods of differential equations with initial values
273	a-الطرائق ذات الخطوة الواحدة (single step methods)
274	b-الطرق ذات خطوات متعددة (Multi Step Methods)
274	5.3.1 طريقة منشور تايلور (Tylor's Series Method)
281	5.3.2 طريقة أولر (Euler's Method)
285	5.3.3 طريقة هيون (أولر المعدلة) (Heun's Method)
292	5.3.4 طرائق رانج كوتا (Rung Kutta Methods)
293	a-طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية
300	b- طرائق رانج - كوتا من المرتبة الثالثة
307	c-مجموعة طرائق رانج - كوتا من المرتبة الرابعة
318	d-طرائق رانج - كوتا من مراتب عليا

319	أ- طرائق رانج - كوتا من المرتبة الخامسة
320	ب- طرائق رانج - كوتا من المرتبة السادسة
326	5.4 الحلول العددية لجمل المعادلات التفاضلية ذات القيم الابتدائية Numerical Solutions for Systems of differential equations with initial values
326	5.4.1 طريقة أولر لحل جملة معادلات تفاضلية بشروط ابتدائية
330	5.4.2 طريقة تايلور لحل جملة معادلات تفاضلية بشروط ابتدائية
334	5.4.3 طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية لحل جملة معادلات تفاضلية
340	5.4.4 طرائق رانج-كوتا من المرتبة الرابعة لحل جملة معادلات تفاضلية
346	5.5 الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية من المرتبة m
351	تمارين
	6- الفصل السادس الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية The Numerical Solution of Partial Differential Equations
356	6.1 مقدمة (Introduction)
360	6.2 المعادلات الزائدية (Hyperbolic Equation)
360	6.2.1 - معادلة الموجة (Wave Equation)
360	6.3 طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة
363	6.3.1 - القيم الابتدائية
364	6.3.2 - حل دالمبير (D'Alembert's Solution)
376	تمارين
378	المراجع
379	المصطلحات العلمية

المقدمة Introduction

يهتم التحليل العددي بتطوير طرائق الحل العددي للمسائل العلمية في الفروع المختلفة. ومن المتعارف عليه أن هذه الطرائق قد استخدمت لحل مسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية. ومع هذا، فقد وجد أنها تزداد ارتباطاً بمواضيع يمتد مداها لتشمل الدراسات الإحصائية والاقتصادية والتجارية، وتكمن المرحلة الأولى في حل مشكلة خاصة في صياغتها في نموذج رياضي، حيث تستخدم الرموز الرياضية لتمثيل المتغيرات المأخوذة في الاعتبار وتطبيق الأسس الفيزيائية (الاقتصادية) لاستنباط معادلات تصف سلوك هذه المتغيرات. ولسوء الحظ، غالباً ما يكون مستحيلاً إيجاد الحل الدقيق للمسألة الرياضية الناتجة باستخدام طرائق قياسية. وفي الحقيقة، إن القليل من المسائل فقط يمكن تعيين حلها تحليلياً. فمثلاً توجد قوانين لحل المعادلات الجبرية حتى الدرجة الرابعة، ولكن لا توجد مثل هذه القوانين لحل المعادلات الجبرية من درجات تزيد عن الرابعة أو حتى لمعادلة بسيطة مثل:

$$x - \sin x = 0$$

أيضاً، يمكننا حساب التكامل:

$$\int_a^b e^x dx$$

والذي قيمته $e^b - e^a$ ، ولكن لا نستطيع إيجاد الحل الدقيق (exact) للتكامل

$$\int_a^b e^{x^2} dx$$

وذلك لعدم وجود دالة تفاضلها e^{x^2} . حتى وإن أمكن إيجاد الحل التحليلي فقد

يكون استخدامه من الناحية النظرية أكثر منه من الناحية العملية.

فعلى سبيل المثال، إذا عبرنا عن حل المعادلة التفاضلية:

$$y'' = f(x, y, y')$$

كمجموع لانهائي من دوال Bessel، فإن هذا الحل غالبا ما يكون غير مناسب لحساب القيم العددية لـ y المقابلة لبعض القيم العددية لـ x .

تتكون الخوارزمية العددية من متتالية من العمليات الحسابية والمنطقية، ينتج عنها حل تقريبي دقيق لأي درجة مفروضة من الدقة. وتوجد غالبا خوارزميات مختلفة لحل مسألة واحدة. ويعتمد اختيار الخوارزمية الخاصة على المصدر الذي أخذت منه المسألة. في الإحصاء، على سبيل المثال، قد يكون المطلوب هو السلوك العام للمتغير، وفي هذه الحالة يكون من المناسب استخدام طريقة بسيطة، منخفضة الدقة، تستخدم عددا قليلا فقط من الحسابات. من ناحية أخرى قد يكون من الضروري في علوم الهندسة المدنية استخدام طريقة معقدة ذات درجة عالية من الدقة، بصرف النظر عن الكلفة الحسابية المطلوبة.

بعد اختيار الخوارزمية العددية يكتب عادة برنامج حاسب آلي بإحدى لغات البرمجة لإنجازها. وكتابة البرنامج هو مرحلة هامة في إجراء الحل لأنه إذا ما كتب البرنامج بصورة سيئة فإن هذا من شأنه أن يوجد نقطة ضعف في كفاءة الطريقة العددية. وفي الحقيقة، فإن اختيار الخوارزمية قد يتأثر بسهولة بمتطلبات البرمجة.

ورغم أن الحل (للمسائل الحقيقية) بالطرائق العددية يشتمل على استخدام حاسب آلي أو آلة حاسبة، إلا أن دراسة التحليل العددي يعود تاريخه إلى زمن بعيد، قبل أن تتوفر هذه الآلات. فالأفكار الأساسية التي تميز كثيرا من الطرائق الجارية استخدامها قد عرفت من مئات السنين. ومع ذلك هناك تغيرات كبيرة حدثت في الخمسين سنة الأخيرة، حيث زاد حجم وتعقيدات المسائل اللازم حلها بصورة هائلة. فعلى سبيل المثال، لم تكن مسألة إيجاد القيم الذاتية لمصفوفات كبيرة قضية واقعية بسبب كمية الحسابات المشتملة عليها إلى أن أصبحت الحاسبات الإلكترونية متوفرة. فاليوم يمكن إجراء أي طريقة عددية، على الأقل على

حاسب آلي شخصي بالرغم من أن هناك بعض المسائل التي يمكن حلها فقط باستخدام حاسبات ذات سرعة وطاقة تخزين عاليتين. ونتيجة للإضافات الحديثة لقوة الحاسب، أمكن التخلص من الملل في العمليات الحسابية المتكررة في حل المسائل. ومع هذا، فإن التحليل العددي وظيفته أكبر بكثير من كونه مجرد حساب عددي، فالغالبية العظمى إن لم نقل جميع الطرائق العددية يمكن أن تعطي نتائج خاطئة من أجل مدخلات وبيانات خاطئة (غير دقيقة) وغير مناسبة، ولهذا السبب فإن دراسة التحليل العددي يعد ضرورة أساسية.

يتناول الفصل الأول تمثيل الأعداد الصحيحة والحقيقية في ذاكرة الحاسب وطرق كتابتها وفق الصيغ العلمية. كما يتناول حساب الأخطاء وأنواعها ومصادرها مع بعض الأمثلة التوضيحية.

يقدم الفصل الثاني طرائق عددية لتقريبات الدوال، فيركز على مسألتين أساسيتين، الأولى هي مسألة الاستيفاء الداخلي وجداول الفروق، حيث ركزت هذه المسألة على كثيرات الحدود وأهم خواصها وطرائق الاستيفاء الداخلي بكثيرات الحدود، والثانية هي تقريبات المربعات الصغرى بكثيرات حدود في الحالتين المنفصلة والمستمرة، فاستخدمت الأوزان وعقد تشييتشيف لمعالجة الشذوذ الذي يحصل أحيانا في طرفي مجال التقريب، واستخدمت كثيرات حدود ليجنדר وتشيتشيف المتعامدة لتخفيض كلفة العمليات الحسابية الهائلة الناتجة عن هذه المسألة وخاصة إذا كان المطلوب التقريب بكثيرة حدود ذات درجة عالية نسبيا.

ويعرض الفصل الثالث الحلول العددية للمعادلات الجبرية، فيقدم طريقتين لعزل الجذور، هما الطريقة البيانية والطريقة العددية، ويضع مجموعة من

الطرائق لحل المعادلات غير الخطية، مثل طريقة تصنيف المجال، طريقة القواطع، طريقة نيوتن رافسون، وطريقة هالي، ويختم هذا الفصل بثلاث طرائق لحل جمل المعادلات غير الخطية.

وخصص الفصل الرابع لحساب التفاضل والتكامل العددي، فقدم العديد من الصيغ لحساب المشتق الأول والثاني لدالة، ومن أهمها صيغ الفروق المركزية من مراتب مختلفة، وصيغ لاغرانج مع تقدير الأخطاء لجميع هذه الصيغ. واستعرضنا أيضا مجموعة من الطرائق لحساب التكامل العددي مع أخطائها، نذكر منها طريقة المستطيلات، طريقة أشباه المنحرفات، طريقة سيمبسون، طريقة تربيعية غوص ليجندر.

الفصل الخامس يتضمن الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية، فركزنا على التعريف بمسألة القيمة الابتدائية، ومجموعة من الطرائق لحلها، مثل طريقة منشور تايلور، طريقة أولر، طرائق رانج كوتا من مراتب مختلفة، وتم استخدام هذه الطرائق أيضا لحل مسائل القيم الابتدائية في جمل المعادلات التفاضلية، وتم أيضا حل مسألة القيمة الابتدائية من المرتبة m ، بتحويلها إلى جملة معادلات تفاضلية.

وفي الفصل السادس نبدأ بتعريف المعادلات التفاضلية الجزئية وتصنيفها إلى ثلاثة أنواع، ونعطي مسألة فيزيائية لكل حالة، ونركز بشكل خاص على معادلة الموجة والحلول العددية لها.

يحتوي كل فصل من هذه الفصول مجموعة من الأمثلة المحلولة مع تطبيقاتها البرمجية، مقدمة بلغة باسكال، ونذكر أيضا إلى أننا استخدمنا برنامج الرياضيات Mathematica لإنجاز الرسوم والمنحنيات البيانية.

المؤلف

1- الفصل الأول

تمثيل الأعداد وحساب الأخطاء

1.1 تمثيل الأعداد:

تُصنف الأعداد إلى صنفين، الأول خاص بالأعداد الصحيحة، والثاني بالأعداد الحقيقية، حيث تقتيد الحاسبات الإلكترونية بعدد محدود من الأمكنة لتخزين الأرقام في ذواكرها. ونظرا لأن ذواكر الحاسبات الإلكترونية لا تستطيع استيعاب أعداد غير منتهية، فقد تم تقسيم كل من الأعداد الصحيحة و الأعداد الحقيقية إلى مجموعات جزئية منتهية منهما.

1.1.1 تمثيل الأعداد الصحيحة حاسوبيا

يوجد خمسة أنواع صحيحة في لغة الباسكال، حيث يحدد كل نوع مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، ويمكن إدراجها وفق الجدول (1.1).

الجدول (1.1): تمثيل الأعداد الصحيحة في ذاكرة الحاسب

النوع	مجالات القيم	حجم المكان المخصص في الذاكرة
Shortint	-128 .. 127	Signed 8-bit
Byte	0 .. 255	Unsigned 8-bit
Integer	-32768 .. 32767	Signed 16-bit
Word	0 .. 65535	Unsigned 16-bit
Longint	-2147483648 .. 2147483647	Signed 32-bit

ويفترض أن جميع العمليات التي تجري على متحولات من هذه الأنواع الصحيحة تنفذ بدقة تامة، وحسب قواعد الحساب العادية. كما ويمكن للمصنف في اللغة البرمجية المستخدمة أن يقطع التنفيذ إذا خرجت نتائج الحسابات عن مجال مجموعة قيم النوع المعرف للمتحول.

يعرف على مجموعات قيم هذه الأنواع الصحيحة العمليات القياسية التالية: الجمع (+)، والطرح (-)، والضرب (*)، والقسمة الصحيحة (div) التي تعطي ناتج القسمة الصحيحة دون باق.

تطبيق برمجي: بفرض أننا نريد التعامل مع المتحولات الصحيحة التالية:

n1, n2, n3, n4, n5 والتي سيتم إسنادها بالقيم التالية:

n1:=50, n2:=215, n3:=-300, n4:=60000, n5:=55000000

فإذا تم الاتفاق على أن أفضل برنامج لحل مسألة هو البرنامج الذي يشغل أقل حجم في الذاكرة، والمطلوب: كتابة أفضل برنامج لطباعة قيم المتحولات المذكورة.

البرنامج: بعد مراجعة الأنواع الصحيحة الخمسة وجدنا أن قسم التصريح عن المتحولات يجب أن يتعامل مع الأنواع الصحيحة التالية:

Var n1: Shortint; n2: Byte; n3: Integer; n4: Word;
n5: Longint;

وبالتالي نكتب البرنامج كالآتي:

```
Program optimal;  
uses wincrt;  
Var n1: Shortint; n2: Byte; n3: Integer; n4: Word;  
n5: Longint;  
Begin  
n1:=50; n2:=215; n3:=-300; n4:=60000; n5:=55000000;
```

writeln('n1=',n1,' n2=',n2,' n3=',n3,' n4=',n4,' n5=',n5)
End.

1.1.2 تمثيل الأعداد الحقيقية حاسوبيا

تمثل الأعداد الحقيقية بأسلوبين:

a- طريقة النقطة الثابتة: Fixed point

يمثل العدد الحقيقي بهذه الطريقة بحيث يبقى موضع الفاصلة ثابتا ، أي يكون عدد الأماكن المخصصة للجزأين الصحيح والكسري من العدد ثابتا، حيث يكتب من العدد ما يوافق عدد الأماكن المتاحة في ذاكرة الحاسب الالكتروني ويحذف ما يفيض منه بحسب قواعد التقريب. ولتوضيح ذلك نفرض أن عدد الأماكن المتوفرة في آلة حاسبة هو M ، و بفرض أن عدد الأماكن المخصصة للجزء الصحيح هو M_1 وعدد الأماكن المخصصة للجزء الكسري هو M_2 فيكون:

$$M=M_1+M_2$$

مثال 1: بفرض أن عدد الأماكن المتاحة في آلة حاسبة هو $M=16$ ، وأن $M_1=8$ و $M_2=8$ ، وعلى هذا الأساس يكتب العدد الحقيقي 234.74602 كما يلي:

00000234	74602000

والعدد الكسري 0.092588127 يمثل بالشكل:

00000000	09258813

وكذلك الأمر بالنسبة لأنظمة العد الأخرى فالعدد $(10101.1110101)_2$ يكتب بالشكل:

00010101	11101010

b- طريقة النقطة العائمة: Floating-Point

إن هذه الطريقة هي الأكثر استعمالاً في الحاسبات وهي الطريقة الملائمة للنتائج العملية. يكون موضع الفاصلة بهذه الطريقة غير ثابت، وبالتالي فإن مبدأ التمثيل بطريقة النقطة العائمة يعتمد على إمكانية كتابة أي عدد حقيقي على الصورة

$$x = \alpha \beta^E$$

حيث β هو أساس للنظام العددي المستخدم وهنا $\beta=10$ و E هو عدد صحيح و α هو عدد حقيقي، إما أن يكون $|\alpha| < 1$ أو $|\alpha| < 10$ وهذا يتعلق بأسلوب عرض الشريط العددي في اللغة المستخدمة. وفي حالة $x=0$ يكون $\alpha=E=0$ أما عندما يكون $x \neq 0$ ، فمثلاً يعرض العدد الحقيقي 310.1234 في الآلات الحاسبة على الصورة 0.3101234×10^3 ، أو بالشكل E3 0.3101234، أو الشكل 03 0.3101234.

أما بلغة الباسكال فيعرض بالشكل E+0002 3.101234000000000، ويكون $|\alpha| < 10$.

يحتوي النوع الحقيقي في لغة الباسكال مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R ، يتم تمثيلها بفاصلة عائمة، ولتوضيح ذلك نفرض على سبيل المثال أن لدينا الأعداد الحقيقية التالية:

$$\frac{15}{10^{35}}, 49.01, \frac{1}{1000}, 0.00010465, 990 \times 10^{208}$$

إلى متحولات من النوع الحقيقي، عندئذ يتم إخراجها حاسوبياً على الصورة:

$$\frac{15}{10^{35}} \equiv 1.500000000000000E-0034$$

$$49.01 \equiv 4.901000000000000E+0001$$

$$\frac{1}{1000} \equiv 1.000000000000000E-0003$$

$$0.00010465 \equiv 1.046500000000000E-0004$$

$$990 \times 10^{208} \equiv 9.900000000000000E+0210$$

حيث E يساوي العدد 10، والأرقام التي تليه على اليمين تمثل قوة العدد 10، والإشارة تمثل إشارة القوة.

تتعامل لغة الباسكال مع خمسة أنواع حقيقية كمجموعات جزئية من R ويمكن تصنيف هذه الأنواع وإدراجها في الجدول (1.2).

الجدول (1.2): تمثيل الأعداد الحقيقية في ذاكرة الحاسب

النوع	مجالات القيم	دقة الأرقام بعد الفاصلة	حجم المكان في الذاكرة
real	2.9 E-39 .. 1.7E 38	11-12	6 bytes
single	1.5 E-45 .. 3.4E 38	7 - 8	4 bytes
double	5.0E-324 .. 1.7E308	15-16	8 bytes
extended	3.4 E-4932 .. 1.1 E4932	19-20	10 bytes
Comp	-9.2 E 18 .. 9.2 E 18	19-20	8 bytes

ملاحظة: يتعامل النوع comp مع قيم صحيحة فقط ضمن مجموعة قيمة، أي أنه يدور الجزء العشري بكاملة إلى أقرب عدد صحيح، ويحول جميع الأعداد الكسرية إلى أصفار، فمثلاً:

$$10.55 \equiv 1.100000000000000E+0001;$$

تعرّف على مجموعة قيم الأنواع الحقيقية العمليات الحسابية الجمع (+)، والطرح (-)، والضرب (*)، بالإضافة إلى عملية القسمة الحقيقية (/). تنفذ العمليات على النوع الحقيقي بدقة تقريبية وبخطأ تدوير يتعلق بالنوع الحقيقي المستخدم.

نرتب في الجدول (1.3) بعض الدوال الحقيقة القياسية المستخدمة في مكتبة لغة الباسكال.

الجدول (1.3): بعض الدوال الحقيقة القياسية المستخدمة في مكتبة لغة الباسكال

دالة حسابية تعطي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أو الصحيح X	Abs(X)
تعطي جيب الزاوية X مقدرة بالراديان	Sin(X: Real): Real
تعطي جيب الزاوية X مقدرة بالراديان	Cos(X: Real): Real
دالة حقيقية تعطي قيمة الزاوية التي ظلها يساوي X	ArcTan(X: Real): Real
تعطي قيمة الدالة الأسية e^x ، لعدد حقيقي X	Exp(X: Real): Real
دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد X	Ln(X: Real): Real
دالة حقيقية تعطي قيمة العدد الثابت $\pi = \text{Pi} = 3.14159265358979\text{E}+0000$	Pi: Real
دالة حقيقية تقطع الجزء الكسري من العدد الحقيقي X	Int(X: Real): Real
دالة تعطي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي غير السالب X	Sqrt(X: Real): Real
دالة تعطي مربع العدد الحقيقي أو الصحيح X.	Sqr(X: real or Integer): real or Integer

دالة تقترح عددا عشوائيا حقيقيا في المجال [0,1]	Random
دالة تقترح عددا عشوائيا صحيحا في المجال الصحيح [0,n-1]	Random (n: Word): Word
دالة تحويل من النوع الحقيقي إلى النوع الصحيح حيث يدور العدد الحقيقي X إلى أقرب عدد صحيح	Round(X: Real): Longint
دالة تحويل من النوع الحقيقي إلى النوع الصحيح حيث تقطع الجزء الصحيح من العدد الحقيقي X	Trunc(X: Real): Longint
دالة منطقية تعطي True إذا كان العدد الصحيح X فرديا وإلا تعطي False	Odd(X: Longint): Boolean
دالة من النوع الصحيح تعطي طول الشريط المحدد بـ S	Length(S: String): Integer

تطبيق برمجي: بفرض لدينا عدة متحولات حقيقية تم إسنادها بالقيم التالية:

$$p:=20/3, r:=2/3, z:=\exp(1), y:=\pi, x:=2/3$$

وهي قيم كسرية غير منتهية، والمطلوب: كتابة برنامج لإخراج نتائج كل متحول

منها بدقة مختلفة عن الآخر كالآتي: x بدقة بين 7-8، y بين 11-12، z بين

15-16، r بين 19-20، و p من النوع comp.

البرنامج

```

Program optimal;
uses wincrt;
Var x:single; y:real; z:double; r:extended; p:comp;
Begin
  x:=2/3; y:=Pi; z:= exp(1) ; r:=2/3; p:=20/3;
  writeln('x=',x); writeln('y=',y); writeln('z=',z);
  writeln('r=',r); writeln('p=',p);
End.

```

نتائج شاشة التنفيذ:

$$x = 6.66666686534882E-0001$$

$$y = 3.14159265358830E+0000$$

$$z = 2.71828182845905E+0000$$

$$r = 6.66666666666667E-0001$$

$$p = 7.00000000000000E+0000$$

نلاحظ أن ناتج العدد الحقيقي x دقيق لستة أرقام فقط لأنه من النوع الحقيقي single في حين أن العدد الحقيقي r دقيق لجميع أرقامه الظاهرة في الشريط لأنه من النوع الحقيقي extended وهو أوسع الأنواع الحقيقية وأدقها.

12 حساب الأخطاء Error computation

يعتمد التحليل العددي على البحث عن أفضل الطرائق للحصول على نتائج حسابية من معطيات معينة، حيث من النادر أن تكون تلك المعطيات معلومة بدقة تامة، أي دون أخطاء، لأنها غالبا ما تكون ناتجة عن قياسات أو قوانين تقريبية، إضافة إلى ذلك، فإن طرائق الحل في معظم الحالات يعتمد على مبدأ تكرار العمليات الحسابية وهذا ما يسبب في بعض الأحيان أخطاء إضافية لا يستهان بها. لذا سنتطرق إلى بعض أنواع الأخطاء لتحديد مصادرها وطرائق حسابها، كي نتمكن من الحد من تضخمها في المسائل المدروسة.

12.1 أنواع الأخطاء

إن الكثير من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها على صورة عدد منته من الأرقام العشرية. فنضطر إلى التعبير عنها بشكل تقريبي حتى ولو باستخدام الحاسب، فمثلا نقول إن العدد π يساوي تقريبا 3.141592654 والعدد $\sqrt{2}$

يساوي تقريبا 1.414213562، والعدد $\frac{1}{3}$ يساوي تقريبا 0.3333333333.

تقسم الأخطاء إلى عدة أنواع:

a. أخطاء الصيغ: وهي الأخطاء الناتجة عن الصيغ المستخدمة للتعبير عن الحوادث الطبيعية والقوانين الفيزيائية والهندسية، وهي صيغ تقريبية في معظم الحالات، أو أنها تحوي ثوابت لا يمكن تعيينها بدقة نهائية كما في جميع الثوابت الفيزيائية، لذا نسمي هذا النوع من الأخطاء بأخطاء الصيغ.

b. أخطاء الاختصار: (المقتطعة): تنشأ هذه الأخطاء من القوانين الرياضية، حيث أنه في معظم الأحيان نكتب الدوال على شكل متسلسلات غير منتهية، وعند إجراء العمليات الرياضية نكتفي بعدد منته من حدود تلك المتسلسلات وهذا ما يؤدي إلى أخطاء مرتكبة، وكمثال على ذلك:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{x^i}{i!} \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots (-1)^{2i} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

c. أخطاء القياس: تنشأ هذه الأخطاء عن قياس بعض المقادير، الذي يكون في معظم الأحيان تقريبا، حيث أن دقة القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة في القياس، ويمكن أن تكون هذه الأخطاء ناتجة عن حواس الشخص الذي يقوم بتلك القياسات.

d. أخطاء التدوير وعدم الاستقرار

Round Error And Instability

تشتمل معظم الطرائق العددية على عدد كبير من الحسابات يتم إجراؤها على أحسن وجه على حاسوب أو آلة حاسبة ولسوء الحظ، فإن الكثير من هذه الآلات ليسى قادراً على العمل إلا بدقة محدودة. وبالتالي فإن أخطاء صغيرة تحدث بالتأكيد في كل عملية حسابية تقريباً. فمثلاً إذا افترضنا أن الحاسب يستخدم عشرة أرقام حسابية، فإنه سيخزن العدد $2/3$ على الصورة:

0.6666666667

يسمى الفرق بين القيم المضبوطة والقيم المخزنة، أخطاء التدوير Rounding Errors. وفي أغلب الأحوال لا تتأثر النتائج النهائية بأخطاء التدوير ومع ذلك، فإن هذه الأخطاء يمكن أن تؤدي في حالات معينة إلى فقدان مفرط في الدقة لدرجة أن النتائج المحسوبة باستخدام حاسوب ذي دقة عادية قد تكون مختلفة جداً عن تلك النتائج المحسوبة بواسطة حاسوب مضبوط (أكثر دقة). ويستخدم التعبير "عدم الاستقرار Instability" لوصف هذه الظاهرة.

ويوجد نوعان أساسيان من عدم الاستقرار في التحليل العددي وهما:

- ❖ عدم استقرار ملازم (متأصل) Inherent ويطلق على خطأ المسألة، حيث يقال أن لمسألة ما عدم استقرار ملازم (أو ضعيفة الشرطية-III Conditioned) إذا كانت التغيرات الطفيفة في معطيات المسألة يتسبب عنها تغيرات كبيرة في حلها.

❖ عدم استقرار محاث Induced ويطلق على الخطأ في طريقة الحل، حيث يقال إن لمسألة ما عدم استقرار محاث إذا كانت الأخطاء الصغيرة التي تحدث في إحدى المراحل من الطريقة تؤثر على الحسابات الجارية في المراحل اللاحقة، وتجعل النتائج النهائية غير دقيقة كلياً.

يمكن تجنب عدم الاستقرار المحاث إما بتعديل الطريقة ذاتها، أو باستخدام طريقة حل مختلفة تماماً. كما ويمكن معالجة عدم الاستقرار الملازم ليس فقط بمعالجة الاعتلال، وإنما بالرجوع أيضاً إلى المصدر الذي أخذت منه المعطيات.

12.2 تدوير الأعداد: Rounding off

طريقة التدوير في النظام العشري:

نفرض أنه لدينا العدد الكسري التالي:

$$R=0.a_1 a_2 \dots a_n$$

نقصد بتدوير هذا العدد يعني الاكتفاء بـ $n-1$ رقماً بعد الفاصلة بدلاً من n وبالتالي، فإن العدد R بعد عملية التدوير يكتب على الصورة:

$$\tilde{R}=0.a_1 a_2 \dots a'_{n-1}$$

حيث أن إشارة الفتحة فوق الرقم الأخير من هذا العدد تدل على أن الرقم ذا المرتبة ما قبل الأخيرة قد تغير. ولتدوير الأعداد نتبع القاعدة التالية:

$$a'_{n-1} = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & a_n > 5 \\ a_{n-1}, & a_n < 5 \end{cases}$$

وعندما $a_n = 5$ نميز حالتين:

$$a'_{n-1} = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{زوجي} : a_{n-1} \\ a_{n-1} + 1, & \text{فردى} : a_{n-1} \end{cases}$$

وأن الخطأ المرتكب في التدوير لا يتجاوز 5×10^{-n} .

مثال 2: دور العدد $R=0.31415$ إلى أربعة أرقام ثم إلى ثلاثة أرقام عشرية.

الحل: نلاحظ أن $\tilde{R}_1=0.3142$ هو أول تدوير للعدد R إلى أربعة أرقام، وأن $\tilde{R}_2=0.314$ هو تدوير ثانٍ للعدد R إلى ثلاثة أرقام، و الخطأ في التدوير الأول لا يتجاوز 5×10^{-5} ، وفي التدوير الثاني لا يتجاوز 5×10^{-4} .

1.2.3 الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية:

Absolute And Relative Error

تعريف (1): الخطأ المطلق: (Absolute Error)

بفرض أن R هي القيمة الفعلية أو الحقيقية لعدد ما، ولتكن $\tilde{R}$ القيمة التقريبية له، ندعو بالخطأ المطلق للفرق بين القيمتين الفعلية والتقريبية بالقيمة المطلقة، ونرمز له بـ δ_R أي أن:

$$\delta_R = |\Delta_R| = |R - \tilde{R}| \quad (1-1)$$

$$\Delta_R = R - \tilde{R} \quad \text{حيث}$$

تعريف (2): الخطأ النسبي: (Relative Error)

إن الخطأ النسبي لعدد ما هو نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة الفعلية لهذا العدد. ونرمز للخطأ النسبي للعدد R بالرمز e_R ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالعلاقة:

$$e_R = \delta_R / R \quad (1.2)$$

في حال كون القيمة الفعلية للعدد R غير معلومة، نستبدلها بالقيمة التقريبية له، وبالتالي نستبدل العلاقة (1.2) بالعلاقة:

$$e_R = \delta_R / \tilde{R}$$

مثال 3: دَوِّر العدد $R=0.1238$ إلى ثلاثة أرقام عشرية، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين أثناء عملية التدوير:

الحل: لدينا $n=4$ ، والرقم ذو المرتبة الرابعة وهو 8 أكبر من 5 وبالتالي فيكون الرقم بعد التدوير $\tilde{R}=0.124$ ، أما الخطأ المطلق فيكون:

$$\delta_R = |R - \tilde{R}| = |0.1238 - 0.124| = 0.0002 \equiv 2.E-4;$$

والخطأ النسبي هو:

$$e_R = \frac{\delta_R}{R} = 0.0002 / 0.1238 = 0.00161551 \equiv 1.61551E-3$$

برنامج لحساب الخطأ المطلق والخطأ النسبي للمثال 3:

```
Program Error;
uses wincrt;
Var R, PR, E, D : real;
Begin
  R := 0.1238; PR := 0.124;
  D := Abs (R-PR);
  E := D/R;
  Writeln (' Absolute Error = ', D);
  Writeln (' Relative Error = ', E);
End.
```

النتائج كما تظهر على شاشة التنفيذ:

Absolute Error= 2.00000000063483E-0004

Relative Error= 1.61550888581274E-0003

12.4 الأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية:

مبرهنة 1: إن الخطأ المطلق المرتكب الناتج عن حاصل جمع عدة أعداد لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة المرتكبة في كل عدد منها.

البرهان: بفرض أن $\tilde{R}_1$ هي القيمة التقريبية للعدد R_1 ، والخطأ المطلق المرتكب هو δ_{R_1} ، وبفرض أن $\tilde{R}_2$ هي القيمة التقريبية للعدد R_2 ، والخطأ المطلق المرتكب δ_{R_2} . وبجمع العددين نجد:

$$R_1 + R_2 = (\tilde{R}_1 + \Delta_{R_1}) + (\tilde{R}_2 + \Delta_{R_2}) = (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) + (\Delta_{R_1} + \Delta_{R_2})$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\Delta_{R_1 + R_2} = (R_1 + R_2) - (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) = \Delta_{R_1} + \Delta_{R_2}$$

وبأخذ القيمة المطلقة للطرفين، نجد:

$$|\Delta_{R_1 + R_2}| = |\Delta_{R_1} + \Delta_{R_2}| \leq |\Delta_{R_1}| + |\Delta_{R_2}|$$

وبحسب العلاقة (1.1) نستطيع أن نكتب:

$$\delta_{R_1 + R_2} \leq \delta_{R_1} + \delta_{R_2} \quad (1.3)$$

وبشكل عام إذا كانت $\tilde{R}_i$ قيمة تقريبية لـ R_i ، حيث $i=1, 2, \dots, n$ ؛ وإذا كان:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

فإن الخطأ المطلق الناتج عن المجموع لا يتجاوز مجموع

الأخطاء المطلقة المرتكبة في كل قيمة تقريبية، أي أن:

$$\delta_R \leq \sum_{i=1}^n \delta_{R_i}$$

نتيجة 1: إن الخطأ النسبي الناتج عن جمع عدة أعداد لا يتجاوز مجموع

الأخطاء النسبية المرتكبة في حساب كل منها، أي أنه إذا كان: $R = \sum_{i=1}^n R_i$ فيكون:

$$e_R \leq \sum_{i=1}^n e_{R_i} \quad (1.4)$$

نتيجة 2: إن الخطأ المطلق الناتج عن طرح عددين لا يتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين، أي أن :

$$\delta_{R_1-R_2} \leq \delta_{R_1} + \delta_{R_2} \quad (1.5)$$

مبرهنة 2: إن الخطأ المطلق الناتج في حاصل جداء عددين غير صفريين يعطى بالعلاقة:

$$\delta_{R_1 \times R_2} \leq \delta_{R_1} |\tilde{R}_2| + \delta_{R_2} |\tilde{R}_1| \quad (1.6)$$

وأن الخطأ المطلق الناتج في جداء مجموعة أعداد تقريبية يحقق المراجعة:

$$\delta_R \leq \sum_{i=1}^n \delta_{R_i} \prod_{j=1}^n |\tilde{R}_j|, \quad i \neq j \quad (1.7)$$

$$. R = \prod_{i=1}^n R_i \quad \text{حيث}$$

نتيجة 3: الخطأ النسبي الناتج عن حاصل جداء عدة أعداد لا يتجاوز مجموع

الأخطاء النسبية المرتكبة في حساب كل منها ، أي أنه إذا كان: $R = \prod_{i=1}^n R_i$ فإن:

$$e_R \leq \sum_{i=1}^n e_{R_i} \quad (1.8)$$

نتيجة 4: إن الخطأ المطلق الناتج عن حاصل قسمة عددين يحقق المترابطة:

$$\delta_{R_1/R_2} \leq \frac{\delta_{R_1}}{|\tilde{R}_2|} + \frac{\delta_{R_2}}{\tilde{R}_2^2} |\tilde{R}_1|, \tilde{R}_2 \neq 0 \quad (1.9)$$

نتيجة 5: إن الخطأ النسبي الناتج عن حاصل قسمة عددين لا يتجاوز مجموع خطأيهما النسبيين ، أي أن:

$$e_{R_1/R_2} \leq e_{R_1} + e_{R_2}$$

مبرهنة 3: بفرض لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — من المتحولات الحقيقية $x_1, x_2, \dots, x_n$ عندئذ يعطى الخطأ المطلق في حساب قيمة هذه الدالة بالعلاقة:

$$(\delta_f)_{\max} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i} \quad (1.10)$$

ويعطى الخطأ النسبي:

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{\delta_f}{f} \quad (1.11)$$

حيث δ_{x_i} ، هي الأخطاء المطلقة للمتحولات $x_i, i=1, 2, \dots, n$.

مثال 4: بفرض أن $R_1=2.1845$ و $R_2=5.79218$ عدنان تقريبيان مدوران والمطلوب تقدير الأخطاء المطلقة والنسبية أثناء حساب العلاقات التالية:

$$R_1+R_2, \quad R_1-R_2, \quad R_1 \cdot R_2, \quad R_1/R_2,$$

الحل: نعلم أن الخطأ في تدوير R_1 لا يتجاوز 5×10^{-5} ، والخطأ في تدوير R_2 لا يتجاوز 5×10^{-6} ، وبحسب المبرهنة 1 فإن الخطأ المطلق في حساب المجموع

$R_1+R_2=7.97698$ ، لا يتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين:

$$\delta_{R_1+R_2} \leq \delta_{R_1} + \delta_{R_2}$$

وهكذا يكون الخطأ المطلق في المجموع

$$\delta_{R_1+R_2} \leq \delta_{R_1} + \delta_{R_2} \leq 5 \times 10^{-5} + 5 \times 10^{-6} = 0.000055$$

وبحسب العلاقة (1.4) فإن الخطأ النسبي في المجموع:

$$e_{R_1+R_2} \leq e_{R_1} + e_{R_2} \leq \frac{5 \times 10^{-5}}{2.1845} + \frac{5 \times 10^{-6}}{5.79218} = 0.0000237486$$

أما الخطأ المطلق في حساب الطرح $R_1-R_2= 3.60738$ ، فبحسب العلاقة (1.5) يكون:

$$\delta_{R_1-R_2} \leq \delta_{R_1} + \delta_{R_2} \leq 5 \times 10^{-5} + 5 \times 10^{-6} = 0.000055$$

وهو نفس قيمة الخطأ المطلق في حساب المجموع.

يمكن حساب الخطأ النسبي في عملية الطرح بالعلاقة:

$$e_{R_1-R_2} \leq \frac{\delta_{R_1-R_2}}{R_1 - R_2} \leq \frac{0.000055}{3.60738} = 0.0000152465$$

الخطأ المطلق الناتج عن حساب الجداء $R_1 \times R_2 = 12.6548$ ، يقدر من العلاقة (1.6):

$$\delta_{R_1 \times R_2} \leq \delta_{R_1} |\tilde{R}_2| + \delta_{R_2} |\tilde{R}_1|$$

$$\leq 5 \times 10^{-5} \times 5.79218 + 5 \times 10^{-6} \times 2.1848 = 0.000300533$$

والخطأ النسبي لهذا الجداء

$$e_{R_1 \times R_2} \leq \frac{\delta_{R_1 \times R_2}}{R_1 \times R_2} \leq \frac{0.000300533}{12.6548} = 0.0000237486$$

نستخدم العلاقة (1.9) لتقدير الخطأ المطلق الناتج عن حساب القسمة
أي أن: $R_1/R_2=0.377198$

$$\delta_{R_1/R_2} \leq \frac{\delta_{R_1}}{|\tilde{R}_2|} + \frac{\delta_{R_2}}{\tilde{R}_2^2} |\tilde{R}_1| \leq$$

$$\frac{5 \times 10^{-5}}{5.79218} + \frac{5 \times 10^{-6}}{(5.79218)^2} \times 2.1848 = 8.95794E-6$$

والخطأ النسبي لهذه القسمة:

$$e_{R_1/R_2} \leq \frac{\delta_{R_1/R_2}}{R_1/R_2} \leq \frac{8.95794E-6}{0.377198} = 0.0000237486 = 2.37486E-5$$

مثال 5: قدر الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين من حساب قيمة العلاقة
التالية:

$$R = \frac{A + BC}{A - B}$$

إذا علمت أن A, B, C بعد التدوير تأخذ القيم $A=2.7183, B=3.1416$, و
 $C=0.410781$.

الحل: إن الأخطاء المطلقة الناتجة عن تدوير الأعداد A, B, C :

$$\delta_A \leq 5 \times 10^{-5}, \delta_B \leq 5 \times 10^{-5}, \delta_C \leq 5 \times 10^{-7}$$

وبالتالي فإن الخطأ المطلق والنسبي الناتجين في حساب قيمة العلاقة:

$$R = \frac{A+BC}{A-B} = \frac{2.7183+3.1416*0.410781}{2.7183-3.1416} = \frac{2.7183+2.7183}{-0.4233}$$

$$= \frac{4.00881}{-0.4233} = -9.47037$$

يمكن حسابهما وفق عدة مراحل، ومن أجل ذلك نفرض أولاً أن:

$$R_2=A-B \quad , \quad R_1=A+BC$$

نطبق العلاقة (1.9) في النتيجة 4، نجد:

$$\delta_R = \delta_{R_1/R_2} \leq \frac{\delta_{R_1}}{|\tilde{R}_2|} + \frac{\delta_{R_2}}{\tilde{R}_2^2} |\tilde{R}_1| =$$

$$\frac{\delta_{A+BC}}{|A-B|} + \frac{\delta_{A-B}}{|A-B|^2} |A+BC|$$

وهكذا يجب أولاً حساب δ_{A-B} , δ_{A+BC} :

$$\delta_{A+BC} \leq \delta_A |BC| + \delta_{BC} |A| \leq \delta_A |BC| + (\delta_B |C| + \delta_C |B|) |A|$$

$$\leq 5 \times 10^{-5} (3.1416 * 0.410781) + (5 \times 10^{-5} * 0.410781 +$$

$$5 \times 10^{-7} * 3.1416) * (2.7183) = 0.000124627$$

$$\delta_{A-B} \leq \delta_A + \delta_B \leq 5 \times 10^{-5} + 5 \times 10^{-5} = 10^{-4} ,$$

ولحساب الخطأ المطلق لـ R نعوض في علاقة حساب الخطأ المطلق التالية:

$$\delta_R = \delta_{R_1/R_2} \leq \frac{\delta_{A+BC}}{|A-B|} + \frac{\delta_{A-B}}{|A-B|^2} |A+BC|$$

$$= \frac{0.000124627}{|2.7183-3.1416|} + \frac{0.0001}{|2.7183-3.1416|^2} \times$$

$$|2.7183+3.1416*0.410781| = 0.00253169$$

أصبح بالإمكان حساب الخطأ النسبي لـ R مباشرة:

$$e_R = e_{(A+BC)/(A-B)} = \frac{\delta R}{R} = \frac{\delta R_1 / R_2}{R} =$$

$$\frac{\delta_{(A+BC)/(A-B)}}{(A+BC)/(A-B)} = \frac{0.00253169}{-9.47037} = -0.000267327$$

وهو المطلوب.

مثال 6: احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين من حساب قيمة الدالة التالية:

$$f(x, y, z) = \sin(x^2) y^3 + \frac{e^x}{z^2}$$

علما بأن المتحولات بعد التدوير تأخذ القيم:

$$z=0.49001, y=1.99999, x=-2.50000$$

الحل: يمكن حساب قيمة الدالة بالتعويض بقيم المتحولات:

$$f(-2.5, 1.99999, 0.49001) = \sin[(-2.5)^2] (1.99999)^3 + \frac{e^{-2.5}}{(0.49001)^2}$$

$$= 0.0764346736$$

إن الأخطاء المطلقة الناتجة عن تدوير قيم المتحولات x, y, z تقدر كما يلي:

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-7}, \delta_y \leq 5 \times 10^{-6}, \delta_z \leq 5 \times 10^{-6}$$

وبحسب العلاقة (1.10) من المبرهنة 3، يمكن وضع قانون حساب الخطأ المطلق

$$(\delta_f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta_z,$$

حيث لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2) y^3 + \frac{e^x}{z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \sin(x^2) y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2e^x}{z^3},$$

وباستخدام المشتقات الجزئية والتعويض بقيم المتحولات والأخطاء الناتجة عن التدوير نحصل على:

$$\begin{aligned} (\delta_f)_{\max} &\leq \left| 2x \cos(x^2) y^3 + \frac{e^x}{z^2} \right| \delta_x + \left| 3 \sin(x^2) y^2 \right| \delta_y + \left| \frac{-2e^x}{z^3} \right| \delta_z \\ &\leq \left| 2(-2.5) \cos[(-2.5)^2] (1.99999)^3 + \frac{e^{-2.5}}{(0.49001)^2} \right| \times 10^{-7} \\ &\quad + \left| 3 \sin[(-2.5)^2] (1.99999)^2 \right| \times 10^{-6} + \left| \frac{-2e^{-2.5}}{(0.49001)^3} \right| \times 10^{-6} \\ &= 5.67086 \text{E} - 6 \end{aligned}$$

وهو الخطأ المطلق الناتج عن حساب قيمة الدالة، أما الخطأ النسبي فيمكن حسابه بالاعتماد على العلاقة (1.11) في المبرهنة 3، لنجد أن:

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{\delta_f}{f} \leq \frac{5.67086 \times 10^{-6}}{0.0764346736} = 0.0000741922 = 7.41922 \text{E} - 5$$

تمارين

1- اكتب الأعداد الناتجة عن الحسابات التالية بطريقة الفاصلة الثابتة ثم

الفاصلة العائمة:

$$\pi^{-15}, \frac{1}{0.9999999}, \left(\frac{1}{5}\right)^{20}, \sqrt[3]{64000}, \left(\frac{1}{10}\right)^{10}, \left(\frac{1}{10}\right)^{-10}$$

2- بفرض أن $A = \pi$ ، و $B = \exp(1)$ والمطلوب تدوير العددين B, A

إلى أقرب ثلاثة أعداد عشرية، ثم حساب الخطأ المطلق والخطأ النسبي

الناتج عن تدوير كل منهما.

3- احسب الخطأ المطلق الناتج من حساب قيمة النسبة:

$$\frac{(24.3)(12.16)}{16.1}$$

4- قَدِّر الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية الناتجة من حساب قيم العلاقات

التالية:

$$\frac{A+B}{A-B}, \quad \frac{A*B}{C}, \quad A + \frac{B}{C}, \quad A*B - C$$

إذا علمت أن A, B, C بعد التدوير تأخذ القيم $A=-0.7183, B=9.118,$

و $C=11.821$.

5- احسب قيمة الحدودية:

$$x^2 + 3.12x + 2.71$$

إذا علمت أن $x=1.12$ بعد التدوير، واحسب الخطأ المطلق والنسبي

الناتجين عن عملية الحساب.

6- أوجد الفرق $\sqrt{2.01} - \sqrt{2}$ بدقة أربعة أرقام صحيحة، واحسب الخطأ المطلق الناتج عن حساب هذا الفرق.

7- احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن حساب قيمة الدالة:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

علما بأن $x=8000$ ، والقيمة التقريبية هي $\tilde{x} = 8000.0001$

8- احسب قيمة الدالة التالية:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{z} + \frac{\ln(x) z}{y}$$

ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن الحساب علما بأن المتحولات بعد التدوير تأخذ القيم:

$$z=101.00001, y=-99.99999, x=100.00000$$

9- احسب قيمة الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \log(\sqrt{x})}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

واحسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن الحساب، إذا علمت

أن $x=400$ ، والقيمة التقريبية هي $\tilde{x} = 800.005$

2- الفصل الثاني

الطرائق العددية لتقريبات الدوال

Numerical Methods for Approximation of Functions

2.1 مقدمة (Introduction)

في هذا الفصل سيتم التركيز بشكل خاص على تقريبات الدوال بكثيرات حدود (حدوديات) نظراً لاستخداماتها الواسعة لعدة أسباب نذكر منها:

- 1- سهولة حساباتها.
 - 2- تحتوي فقط على قوى صحيحة بسيطة.
 - 3- دوال مستمرة دائماً، ويمكن إيجاد مشتقاتها وتكاملاتها بسهولة.
 - 4- جمع وضرب وطرح الحدوديات هي حدودية.
 - 5- يمكن إيجاد هذه الحدوديات بطرق كثيرة.
- وعلاوة على ذلك فإن كثيرات الحدود تعتبر الأساس في تطوير الكثير من الطرائق العددية للتكاملات والمشتقات والمعادلات التفاضلية... الخ كما سنرى في فصول لاحقة.

إن اختيار الطريقة العددية الأفضل لمسألة ما يعتمد على المصدر الذي أخذت منه المسألة. فمثلاً إذا كان المطلوب هو السلوك العام للمتغير، يكون من المناسب استخدام طريقة بسيطة، منخفضة الدقة، تستخدم عدداً قليلاً فقط من الحسابات. من ناحية أخرى، قد يكون من الضروري استخدام طريقة عددية معقدة ذات درجة عالية من الدقة، بصرف النظر عن كلفتها الحسابية العالية.

وبالتالي فإن الطريقة الأفضل لمسألة ما قد لا تكون هي المناسبة والأفضل لمسألة أخرى.

2.2 الاستيفاء الداخلي وجدول الفروق

Interpolation and Difference Table

تعد مسألة الاستيفاء الداخلي أو تلاؤم كثيرة الحدود مع دالة من أهم المسائل في التحليل العددي، وذلك لكثرة تطبيقاتها ولكونها تشكل أساسا لكثير من الطرائق العددية في المعادلات الجبرية والتفاضلية، وفي حساب التفاضلات والتكاملات العددية. توجد طرائق متعددة للاستيفاء. قبل البدء بعرضها، نوضح أهم خواص كثيرات الحدود وجدول الفروق.

2.2.1 كثيرات الحدود: Polynomials

يمكن تعريف كثيرة الحدود بالشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.1)$$

حيث الأمثال a_i ، $i=0,1,\dots,n$ ، ثوابت عددية، وعددها $n+1$.

تتمتع كثيرات الحدود بخواص هامة جدا تجعلها من أكثر الكائنات الرياضية ملائمة للدوال، فهي بالإضافة لسهولة حساب قيمها وحساب تفاضلها وتكاملها، تعتبر دوال حسنة السلوك ومشتقاتها موجودة ومستمرة.

-a خواص كثيرات الحدود:

بفرض أن Π_n هو فضاء يشكل مجموعة جميع كثيرات الحدود من الدرجة n على الأكثر، إن أي كثيرة حدود من الدرجة n مثل $P_n(x) \in \Pi_n$ يمكن كتابتها كما في الصيغة (2.1)، وهي تتمتع بالخواص التالية:

1- يمكن كتابة أية كثيرة الحدود من الشكل (2.1) كما يلي:

$$P_n(x) = (x-v).q_1(x) + R_0 \quad (2.2)$$

حيث أن $q_1(x)$ هي حدودية من الدرجة $(n-1)$ وهي ناتج قسمة $P_n(x)$ على $(x-v)$ ، و v عدد حقيقي، أما R_0 فهو عدد ثابت يمثل باقي القسمة.

2- إن باقي القسمة R_0 هو الناتج عن قسمة $P_n(x)$ على $(x-v)$ ، يساوي $P_n(v)$

وهذا يتضح مباشرة بعد تعويض كل x بـ v في العلاقة (2.2)

$$P_n(v) = (v-v).q_1(v) + R_0 = R_0$$

3- إذا كان v جذرا لكثيرة الحدود $P_n(x)$ أي أن: $P_n(v) = 0$ ، فإن $P_n(x)$ تكتب بالشكل:

$$P_n(x) = (x-v).q_1(x)$$

أي أن $(x-v)$ يشكل أحد عوامل كثيرة الحدود $p(x)$.

4- لكثيرة الحدود $P_n(x) \in \Pi_n$ ، n جذر حقيقي على الأكثر.

وإذا افترضنا أن v_i ، $i=1, \dots, n$ هي جذور لـ $P_n(x)$ ، وبتطبيق الخاصة السابقة عدداً من المرات المتتالية فإننا نجد:

$$P_n(x) = A(x-v_1).(x-v_2) \dots (x-v_n).$$

حيث A قيمة ثابتة تساوي a_n .

5- لا يمكن لأكثر من كثيرة حدود واحدة من الدرجة n على الأكثر أن تأخذ قيما

عددها $n+1$ مساوية لقيم الدالة $f(x)$ عند $n+1$ من النقاط المختلفة هي x_i حيث أن: $i=0, 1, \dots, n$

ولإثبات ذلك، نفرض وجود حدوديتين مثل $P_1, P_2 \in \Pi_n$ ، تحققان الشروط:

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n$$

إن كثيرة الحدود $P = P_1 - P_2 \in \Pi_n$ لأن من الدرجة n على الأكثر، ولكثيرة الحدود هذه $n+1$ من الجذور هي:

$$P(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = 0, i=0,1,\dots,n$$

وهذا يناقض الخاصة التي نقول إن لكثيرة الحدود من الدرجة n ، n جذرا على الأكثر، و لا يصح ذلك إلا إذا كانت الدالة $P(x)$ صفرية وبالتالي:

$$P_1 - P_2 = P = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

إذن، لا يوجد سوى حدودية وحيدة من الدرجة n تحقق الشروط السابقة.

6- بما أن كثيرات الحدود هي توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق، فإن مشتق $P(x)$ بالنسبة لـ x

$$P_n(x) = (x-v) q_1(x) + R_0$$

$$P'_n(x) = q_1(x) + (x-v) \cdot q'_1(x)$$

$$P'_n(v) = q_1(v) \text{ ومنه فإن}$$

فإذا قسمنا حاصل القسمة الأول $q_1(x)$ على $(x-v)$ ، نحصل على باقي قسمة جديد R_1 :

$$q_1(x) = (x-v) q_2(x) + R_1 \Rightarrow q_1(v) = R_1$$

مثال 1: لتكن كثيرة الحدود:

$$P(x) = x^4 + 6x^2 - 7x + 8$$

والمطلوب حساب $P(2)$ ، $P'(2)$ باستخدام أسلوب القسمة دون الاشتقاق.

الحل: نقسم على التالي $P(x)$ ، و $q_1(x)$ على $(x-2)$ نحصل على:

$$\begin{array}{r}
 x^4+6x^2-7x+8 \quad | \quad (x-2) \\
 \hline
 \mp x^4 \pm 2x^3 \\
 \hline
 2x^3+6x^2 \\
 \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\
 \hline
 10x^2-7x \\
 \mp 10x^2 \pm 20x \\
 \hline
 13x+8 \\
 \mp 13x \pm 26 \\
 \hline
 34 \text{ الباقي}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^3+2x^2+10x+13 \quad | \quad (x-2) \\
 \hline
 \mp x^3 \pm 2x^2 \\
 \hline
 4x^2+10x \\
 \mp 4x^2 \pm 8x \\
 \hline
 18x+13 \\
 \mp 18x \pm 36 \\
 \hline
 49 \text{ الباقي}
 \end{array}$$

أي أن: $P(x)=(x-2)(x^3+2x^2+10x+13)+34$ ، إذن، $P(2)=R_0=34$ ، ولدينا

$$q_1(x)=x^3+2x^2+10x+13=(x-2)(x^2+4x+18)+49 \rightarrow$$

$$P'(2)=q_1(2)=R_1=49$$

ونظرا لعدم سهولة عملية القسمة في كثيرات الحدود، نتبع فيما يلي طريقة هورنر (Horner) للقسمة المختزلة.

b-طريقة هورنر للقسمة المختزلة:

نقدم طريقة هورنر لقسمة كثيرات الحدود $P_n(x) \in \Pi_n$ على $(x-v)$

ولتوضيح الطريقة، نكتب كثيرة الحدود بالشكل:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

❖ **مبدأ الطريقة:**

نرتب أمثال كثيرة الحدود $P_n(x)$ في سطر (السطر الأول) من اليسار إلى

اليمين بدءا من الأس الأكبر ونضع صفر مكان الأس المعلوم، ثم نضع في بداية

السطر الثالث من اليسار الرمز C_{n-1} ونساويه مع a_n (أمثال x^n)، ثم نضرب

C_{n-1} بالعدد v ونضع الناتج في السطر الثاني تحت أمثال x^{n-1} ، الآن نجمع $C_{n-1} * v$ مع a_{n-1} (أمثال x^{n-1}) ينتج C_{n-2} نضعه في السطر الثالث وعلى يمين C_{n-1} ، وهكذا من جديد نضرب C_{n-2} بالعدد v والناتج نضعه في السطر الثاني تحت a_{n-2} (أمثال x^{n-2}) وبجمع $C_{n-2} * v$ مع a_{n-2} (أمثال x^{n-2}) ينتج C_{n-3} نضعه في السطر الثالث وعلى يمين C_{n-2} . نتابع بهذا الأسلوب، نحصل على الباقي R_0 في نهاية السطر الثالث من اليمين، والأعداد التي تسبقه $C_{n-1}, C_{n-2}, C_{n-3}, \dots$ ، C_1, C_0 هي أمثال كثيرة الحدود $q_1(x)$ الناتجة عن القسمة ودرجتها $n-1$ ، وفي النهاية يمكننا تلخيص الطريقة بالمخطط الحسابي التالي:

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}		x^2	x^1	x^0	
v	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0	السطر الأول ←
	$C_{n-1} * v$	$C_{n-2} * v$	$C_{n-3} * v$		$C_2 * v$	$C_1 * v$	$C_0 * v$	السطر الثاني ←
	C_{n-1}	C_{n-2}	C_{n-3}		C_1	C_0	$a_0 + C_0 * v = R_0 = P(v)$	السطر الثالث

إذن، من السطر الثالث نجد كثيرة الحدود الناتجة عن القسمة:

$$q_1(x) = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1x + C_0$$

نرتب العلاقات التي استخدمت لحساب أمثال كثيرة الحدود $q_1(x)$ كالآتي:

$$C_{n-1} = a_n$$

$$C_{n-2} = a_{n-1} + C_{n-1} * v$$

$$C_{n-3} = a_{n-2} + C_{n-2} * v$$

⋮

$$C_1 = a_2 + C_2 * v$$

$$C_0 = a_1 + C_1 * v$$

$$R_0 = a_0 + C_0 * v$$

تكون الطريقة أكثر وضوحاً في المثال التالي.

مثال 2: ليكن المطلوب إيجاد قسمة $x^4 + 6x^2 - 7x + 8$ على $(x-2)$.

الحل: نضع أمثال كثيرة الحدود $P(x)$ في السطر الأول من اليسار إلى اليمين بدءاً من الأس الأكبر، ثم نضع في بداية السطر الثالث من اليسار أمثال x^4 وهو واحد وبالتالي $C_3=1$ ، نضربه بالعدد $v=2$ ونضع الناتج وهو 2 في السطر الثاني تحت أمثال x^3 وبجمع الناتج الذي حصلنا عليه مع أمثال x^3 ينتج $C_2=2$ نضعه في السطر الثالث على يمين العدد 1، وهكذا نضرب العدد $C_2=2$ بالعدد $v=2$ والناتج 4 نضعه في السطر الثاني تحت أمثال x^2 ، وبجمع العدد 4 مع أمثال x^2 نحصل على العدد $C_1=10$ نضعه في السطر الثالث وعلى يمين العدد 2، نتابع بهذا الأسلوب، نحصل على $C_0=13$ والباقي $R_0=34$ في نهاية السطر الثالث من اليمين. نلخص ذلك في المخطط الحسابي التالي:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$v=2$	1	0	6	-7	8
		2	4	20	26
	1	2	10	13	34

$\underline{34=R_0=P(2)} \Rightarrow$

$q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 10x + 13$

ونكرر استخدام طريقة هورنر من جديد لحساب $P'(2)$ الذي يساوي إلى باقي

قسمة كثيرة الحدود $q_1(x)$ الناتجة عن القسمة السابقة على $(x-2)$ ، فنجد:

	x^3	x^2	x^1	x^0
$v=2$	1	2	10	13
		2	8	36
	1	4	18	49

$\underline{49=R_1=P'(2)=q_1(2)}$

$x^3 + 2x^2 + 10x + 13 = (x-2)(x^2 + 4x + 18) + 49$

نجد أن $P'(v)=q_1(v)$ ، أي أن المشتق عند النقطة v يساوي باقي قسمة $q_1(x)$

على $(x-v)$ وبهذا نستطيع تعيين قيم $P'(x)$ دون حساب المشتق التحليلي.

مما تقدم نستطيع تعيين المشتقات المتتالية بشكل مماثل كما يلي:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(v) + (x-v) q_1(x) \\ &= P(v) + (x-v) [q_1(v) + (x-v) q_2(x)] \\ &= P(v) + (x-v) \{ q_1(v) + (x-v) [q_2(v) + (x-v) q_3(x)] \} \\ &= P(v) + (x-v) q_1(v) + (x-v)^2 q_2(v) + (x-v)^3 q_3(v) + \dots \end{aligned}$$

وبمطابقة هذه النتيجة مع سلسلة منشور تايلور للدالة $P(x)$ حول v :

$$P(x) = P(v) + \frac{(x-v)}{1!} P'(v) + \frac{(x-v)^2}{2!} P''(v) + \dots + \frac{(x-v)^n}{n!} P^{(n)}(v) \quad (2.3)$$

نجد أن:

$$q_1(v) = \frac{P'(v)}{1!}, \quad q_2(v) = \frac{P''(v)}{2!}, \quad q_i(v) = \frac{P^{(i)}(v)}{i!} \quad (2.4)$$

مثال 3: بفرض لدينا كثيرة الحدود: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$

والمطلوب إيجاد قيمة كثيرة الحدود $P(x)$ عند $x=2$ وكذلك قيم مشتقاتها المتتالية

دون اشتقاقها، مستخدماً طريقة هورنر للقسمة المختزلة:

الحل: بحسب الطريقة نضع:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$v=2$	1	-2	3	4	-1
		2	0	6	20
	1	0	3	10	<u>19=R=P(2)</u>

$$\Rightarrow q_1(x) = x^3 + 3x + 10 \Rightarrow$$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = (x-2)(x^3 + 3x + 10) + 19$$

نحسب $P'(2)$ بإعادة الخطوات السابقة نفسها على الحدودية $q_1(x)$:

$$\begin{array}{rcccc}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 v=2 & 1 & 0 & 3 & 10 \\
 & & 2 & 4 & 14 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 7 & \underline{24=R_1=P'(2)=q_1(2)}
 \end{array}$$

$$\rightarrow q_2(x)=x^2+2x+7 \rightarrow$$

$$x^3+3x+10=(x-2)(x^2+2x+7)+24$$

و بالمتابعة، نجد:

$$\begin{array}{rccc}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 v=2 & 1 & 2 & 7 \\
 & & 2 & 8 \\
 \hline
 & 1 & 4 & \underline{15=R_2=q_2(2)=P''(2)/2!}
 \end{array}$$

$$\rightarrow q_3(x)=x+4 \rightarrow x^2+2x+7=(x-2)(x+4)+15$$

$$\begin{array}{rcc}
 & x^1 & x^0 \\
 v=2 & 1 & 4 \\
 & & 2 \\
 \hline
 & 1 & \underline{6=R_3=q_3(2)=P'''(2)/3!}
 \end{array}$$

$$\rightarrow q_4(x)=1 \rightarrow x+4=(x-2)(1)+6,$$

$$1=R_4=q_4(2)=P^{(4)}(2)/4!,$$

$$P(2)=19; P'(2)=24; P''(2)=30; P'''(2)=36; P^{(4)}(2)=24;$$

وبناء على ما تقدم نستطيع إيجاد منشور $P(x)$ وفق قوى $(x-v)$ ، فعلى سبيل

المثال نكتب حدودية المثال 3 بالشكل:

$$P(x)=19+24(x-2)+15(x-2)^2+6(x-2)^3+(x-2)^4$$

مثال 4: لنفرض أنه لدينا كثيرة الحدود:

$$P(x)=x^5-13x^3+12x^2+x-4$$

والمطلوب إيجاد قيمة كثيرة الحدود عند $x=3$ وكذلك قيم مشتقاتها المتتالية دون اشتقاقها تحليليا، ثم استنتاج منشور $P(x)$ وفق قوى $(x-3)$ مستخدما طريقة هورنر للقسمة المختزلة.

الحل: بالأسلوب السابق نفسه في حل المثال 3، نتبع المخطط الحسابي التالي:

$$\begin{array}{rcccccc} & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ v=3 & 1 & 0 & -13 & 12 & 1 & -4 \\ & & 3 & 9 & -12 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 1 & | -1=R=P(3) \end{array}$$

$$\rightarrow q_1(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 1 \rightarrow$$

$$x^5 - 13x^3 + 12x^2 + x - 4 = (x-3)(x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 1) - 1$$

نعيد تطبيق الخطوات السابقة نفسها على الحدودية $q_1(x)$ ، لحساب $P'(3)$ ، فنجد

$$\begin{array}{rcccccc} & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ v=3 & 1 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ & & 3 & 18 & 42 & 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 14 & 42 & | 127=q_1(3)=P'(3)/1! \end{array}$$

$$\rightarrow q_2(x) = x^3 + 6x^2 + 14x + 42$$

$$x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 1 = (x-3)(x^3 + 6x^2 + 14x + 42) + 127$$

ونحسب $P''(3)$ بمتابعة تطبيق القسمة على الحدودية $q_2(x)$:

$$\begin{array}{rcccccc} & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ v=3 & 1 & 6 & 14 & 42 \\ & & 3 & 27 & 123 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 9 & 41 & | 165=q_2(3)=P''(3)/2! \end{array}$$

$$\rightarrow q_3(x) = x^2 + 9x + 41$$

$$x^3 + 6x^2 + 14x + 42 = (x-3)(x^2 + 9x + 41) + 165$$

ونحسب $P'''(3)$ و $P^{(4)}(3)$ ، $P^{(5)}(3)$ أيضا على التوالي:

$$v=3 \quad \begin{array}{ccc} x^2 & x^1 & x^0 \\ 1 & 9 & 41 \\ & 3 & 36 \end{array}$$

$$1 \quad 12 \quad |77 = q_3(3) = P'''(3)/3!$$

$$\rightarrow q_4(x) = x + 12 \rightarrow x^2 + 9x + 41 = (x-3)(x+12) + 77$$

$$v=3 \quad \begin{array}{cc} x^1 & x^0 \\ 1 & 12 \\ & 3 \end{array}$$

$$1 \quad |15 = R_4 = q_4(3) = P^{(4)}(3)/4!$$

$$\rightarrow q_5(x) = 1, \rightarrow x + 12 = (x-3)(1) + 15$$

$$1 = R_5 = q_5(3) = P^{(5)}(3)/5!,$$

إذن مما تقدم يكون لدينا:

$$P(3) = -1; P'(3)/1! = 127; P''(3)/2! = 165; P'''(3)/3! = 77;$$

$$P^{(4)}(3)/4! = 15; P^{(5)}(3)/5! = 1$$

وبناء على ذلك نكتب منشور $P(x)$ وفق قوى $(x-3)$ بالشكل:

$$P(x) = -1 + 127(x-3) + 165(x-3)^2 + 77(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5$$

برنامج 2.1: طريقة هورنر: لحساب بواقي قسمة كثيرة حدود من الدرجة n على حدودية من الشكل $(x-v)$ ، و تحويل الحدودية إلى منشور وفق قوى $(x-v)$.

PROGRAM HornerMethod;

Uses wincrt;

Var a,b:array[0..20] of Real ;

i,j,k,n,v:integer;

BEGIN

write('Input degree of Polynomial n=');readln(n);

writeln('Input coefficients of Polynomial');

for i:=n **downto** 0 **do**

```

begin
  write('a',i,'=');readln(a[i]);
end; {end for i}
write('Input v=');readln(v);
For k:=0 to n-1 do
Begin
  for j:=n-1 downto k do a[j]:=a[j]+v*a[j+1];
  write('q',k+1,'(X)=');
  for j:=n-1 downto k+1 do Write('(',a[j+1]:3:1,')','X^',j-k,'+');
  write('(',a[k+1]:3:1,') ');
  writeln;
  writeln('R',k,'=',a[k]:3:1);
  writeln('=====');
End; {end for k}
writeln('R',n,'=',a[n]:3:1);
writeln('=====');
writeln("The Remainders");
write('p',v,'='); Writeln(a[0]:2:0);
for i:=1 to n do writeln('q',i,'(v,)=',a[i]:0:0);
writeln("The expansion");
write('P(x)='); Write(a[0]:2:0);
For i:=1 to n do
begin
  Write('+');
  if v>0 then
    Write('(',a[i]:3:1,')','(X-',v,')^',i)
  else
    Write('(',a[i]:3:1,')','(X+',v,')^',i)
  End; {end for i}
END.

```

2.2.2 الفروق المنتهية: Finite-Difference

لنفرض أنه لدينا الدالة $y=f(x)$ المعرفة على مجموعة ما من مجموعة الأعداد الحقيقية، لنعط المتحول x قيمًا مختلفة، $x_0, x_1, \dots, x_n$ ، من مجموعة التعريف، عندئذ يعرف المؤثر التفاضلي التقدمي في الدالة $y=f(x)$ بالعلاقة التالية:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (2.5)$$

حيث $y_i = f(x_i)$ ، $i=0,1,2,\dots$. هي قيم الدالة y المقابلة لقيم المتحول x ، نسمي العلاقة (2.5) بالفروق التقدمية من المرتبة الأولى للدالة $y=f(x)$ ، ونجد وفقا لذلك أن:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

وتكون الفروق التقدمية من المرتبة الثانية:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) \\ &= y_2 - 2y_1 + y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_1 &= \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) \\ &= y_3 - 2y_2 + y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \end{aligned}$$

أما الفروق التقدمية من المرتبة الثالثة:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(y_2 - 2y_1 + y_0) = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0 \\ &= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i \\ &= (y_{i+3} - y_{i+2}) - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \end{aligned}$$

ومن المرتبة الرابعة:

$$\Delta^4 y_i = \Delta(\Delta^3 y_i) = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i$$

وبشكل عام نكتب الفروق من المرتبة n :

$$\begin{aligned} \Delta^n y_i &= y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y_{i+n-3} + \\ &\dots + (-1)^n y_i \end{aligned}$$

ويمكن إعادة كتابته على الشكل

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}, \quad (2.6)$$

حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. تدعى العلاقة (2.6) بالقانون العام للفروق التقدمية من المرتبة n . وهو يسمح لنا بحساب الفروق التقدمية من أي مرتبة بدلالة قيم الدالة في عدد من النقاط.

وعلاوة على ما تقدم، نستطيع حساب قيم الدالة y_k ، $k=1, \dots, n$ بدلالة علاقات الفروق التقدمية، فمثلا من علاقة الفروق من المرتبة الأولى (2.5)، نجد

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \rightarrow y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

ومن علاقة الفروق من المرتبة الثانية، نجد أيضا:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0 \rightarrow y_2 = 2y_1 - y_0 + \Delta^2 y_0 = 2(y_0 + \Delta y_0) - y_0 + \Delta^2 y_0 \\ &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \end{aligned}$$

ومن علاقة الفروق من المرتبة الثالثة، ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \rightarrow \\ y_3 &= 3y_2 - 3y_1 + y_0 + \Delta^3 y_0 \\ &= 3(y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) - 3(y_0 + \Delta y_0) + y_0 + \Delta^3 y_0 \\ &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \end{aligned}$$

وهكذا من علاقة الفروق من المرتبة k نكتب بشكل عام:

$$y_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i y_0, \quad k=1, \dots, n$$

تسمح لنا العلاقة الأخيرة بحساب قيمة الدالة y_k عند أي نقطة بدلالة الفروق التقدمية من مراتب مختلفة.

a-جدول الفروق : Difference Table

يمكن تنظيم الفروق التقدمية للدالة $y=f(x)$ التي تأخذ القيم

$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ في النقاط المختلفة $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ في الجدول التالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	...
x_0	y_0							
		Δy_0						
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$					
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$				
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$			
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		$\Delta^6 y_0$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$		...
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		$\Delta^6 y_1$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		$\Delta^5 y_2$		$\ddots$
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_3$		$\ddots$	
		Δy_5		$\Delta^3 y_4$		$\ddots$		
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$		$\ddots$			
		Δy_6		$\ddots$				
x_7	y_7		$\ddots$					
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$						

مثال 5: أوجد جدول الفروق التقدمية للدالة $y=\ln(x)$ حتى المرتبة السادسة،

حيث $h=0.1, i=0,1,\dots,9, x_i=0.3+ih$

الحل: نحسب قيم الفروق التقدمية للدالة y من المرتبة الأولى وحتى السادسة ونرتب الحسابات في الجدول التالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0.3	-1.20397						
		0.28768					
0.4	-0.91629		-0.06454				
		0.22314		0.02372			
0.5	-0.69315		-0.04082		-0.01106		
		0.18232		0.01266		0.00593	
0.6	-0.51083		-0.02816		-0.00513		-0.00345
		0.15416		0.00753		0.00248	
0.7	-0.35667		-0.02063		-0.00265		
		0.13353		0.00488			
0.8	-0.22314		-0.01575				
		0.11778					
0.9	-0.10536						

ملاحظة 1: إذا كانت النقاط موزعة على أبعاد متساوية أي: $x_{i+1}-x_i=h$ حيث h

مقدار ثابت، فيعرف المؤثر التفاضلي التقدمي على الدالة $y=f(x)$ بالشكل:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta[f(x+h) - f(x)] = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) -$$

$$2f(x+h) + f(x)$$

$$= \Delta^3 f(x) = \Delta[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] = f(x+3h) -$$

$$3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f[x + (n-k)h]$$

يمكن إعادة كتابة الفروق من المرتبة الأولى بالشكل:

$$f(x+h) = \Delta f(x) + f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \rightarrow f(x+2h) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) \rightarrow$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$

وبالاستقراء الرياضي نستنتج:

$$f(x+nh) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(x)$$

تمكننا العلاقة الأخيرة من معرفة قيمة الدالة $f(x)$ عند أي نقطة مثل $(x+nh)$ وذلك بمعرفة قيمتها عند النقطة x .

١ب- خواص الفروق التقدمية:

أ- إذا كانت c قيمة ثابتة فإن $\Delta c = 0$.

ب- بفرض c قيمة ثابتة و y دالة ما فإن: $\Delta(cy_i) = c \Delta y_i$.

ج- بفرض c_1, c_2 قيمتان ثابتتان و y, g دالتان، فإن:

$$\Delta(c_1 y_i + c_2 g_i) = c_1 \Delta y_i + c_2 \Delta g_i$$

د- بفرض أن y, g دالتان، فإن

$$\Delta(y_i + g_i) = \Delta y_i + \Delta g_i$$

هـ- بفرض أن y, g دالتان، فإن

$$\Delta(y_i g_i) = y_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta y_i = g_i \Delta y_i + y_{i+1} \Delta g_i$$

و- بفرض أن y, g دالتان، فإن

$$\Delta(y_i / g_i) = \frac{g_i \Delta y_i - y_i \Delta g_i}{g_i g_{i+1}}$$

ز- إذا كانت $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n ،

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

فإن $\Delta P_n(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n-1$.

وبالتالي فإن: $\Delta^n P_n(x) = a_n h^n n!$ ، ويكون $\Delta^m P_n(x) = 0$ لأجل $m > n$

نستنتج من هذه الخاصة أن الفروق من المرتبة n لأي حدودية من المرتبة n هي مقدار ثابت.

مثال 6: أوجد جدول الفروق التقدمية حتى المرتبة الرابعة لكثيرة الحدود:

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

حيث $h=1, i=0, 1, \dots, 5, x_i = i h$

الحل: ننظم الفروق التقدمية حتى المرتبة الرابعة لكثيرة الحدود في الجدول:

	x_i	$P(x_i)$	$\Delta P(x_i)$	$\Delta^2 P(x_i)$	$\Delta^3 P(x_i)$	$\Delta^4 P(x_i)$
x_0	0	1				
			-1			
x_1	1	0		2		
			1		6	
x_2	2	1		8		0
			9		6	
x_3	3	10		14		0
			23		6	
x_4	4	33		20		
			43			
x_5	5	76				

نلاحظ من الجدول السابق أن الفروق من المرتبة الثالثة ثابتة، وهي تحقق الخاصة ز، لأن:

$$\Delta^3 P(x_i) = a_3 h^3 3! = 1 * 1^3 * 6 = 6$$

و نلاحظ أيضا أن الفروق من مراتب أعلى جميعها تساوي الصفر.

برنامج 2.2: لإيجاد جدول الفروق التقدمية لدالة $y=f(x)$ ، حيث يضعك هذا البرنامج أمام إمكانية الاختيار بين الحالة المنفصلة لمجموعة من النقاط الكيفية المعلومة المدخلة (x_i, y_i) ، أو الحالة المستمرة ، ستظهر قائمة من الدوال وجدنا أنها مناسبة؛ سيتم أيضا الاختيار منها، وهذه الدوال هي:

1- $f(x)=\cos(x)$,	ملاحظة: تتم طباعة نتائج الفروق على شكل أسطر متتالية من الشكل:
2- $f(x)=\sin(x)$,	
3- $f(x)=e^x$,	$D0 \equiv y_i, i=0, \dots, n$
4- $f(x)=\ln(x+1)$,	$D1 \equiv \Delta y_i, i=0, \dots, n$
5- $f(x)=x^3-2x^2+1$,	$D2 \equiv \Delta^2 y_i, i=0, \dots, n$
	$\vdots$

```

PROGRAM DifferenceTables;
Uses wincrt;
Var d:array[0..20,0..20] of Real ;
    y,x:array[0..20] of real; i,j,n,k:integer;
FUNCTION f(t:real):real;
Begin
  Case k of
    1: f:=cos(t);
    2: f:=sin(t);
    3: f:=exp(t);
    4: f:=ln(t+1);
    5: f:=t*sqr(t)-2*sqr(t)+1
  end; end case
End;
BEGIN {main}
  write('Input n='); readln(n); { يبدأ عد النقاط من الصفر }
  for i:=0 to n do
    begin
      write('x',i,'=' );readln(x[i]);
    end;
  writeln('1:Continuous Function');
  writeln('2:Discrete pointes');
  write('Select Number for input ='); readln(J);
  if J=1 then

```

```

Begin
writeln('1:f:=cos(t)');
writeln('2:f:=Sin(t)');
writeln('3:f:=Exp(t)');
writeln('4:f:=Ln(t+1)');
writeln('5:f:=t*sqr(t)-2*sqr(t+1)');
write('Select Nunmber function for input ');readln(k);
for i:=0 to n do y[i]:=f(x[i]);
End {if }
else
  Begin
    for i:=0 to n do
      begin
        write('y',i,'=');readln(y[i]);
      end;
  End;{else}
for j:=0 to n do d[0,j]:=y[j]; {إدخال قيم الدالة كسطر في مصفوفة}
for i:=1 to n do
  for j:=0 to n-i do
    d[i,j]:=d[i-1,j+1]-d[i-1,j];
  writeln('Difference Table');
  writeln('=====');
  for i:=0 to n do
    begin
      write('D',i,'=');
      for j:=0 to n-i do
        write(d[i,j]:2:5,' ');
      writeln;
    end;{for}
  END.

```

مبرهنة 1: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ ، فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد n_ε ، و كثيرة حدود $P_n(x)$ من الدرجة n ، تحقق العلاقة التالية:

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]; n > n_\varepsilon$$

2.2.3 الاستيفاء الداخلي: (Interpolation)

إن مسألة الاستيفاء الداخلي: هي مسألة إيجاد كثيرة حدود $P_n(x)$ تمر بـ

$n+1$ من النقاط المختلفة (x_i, y_i) ($i=0,1,\dots,n$). وقد تكون الأعداد y_i قيما لدالة معلومة f عند $x=x_i$.

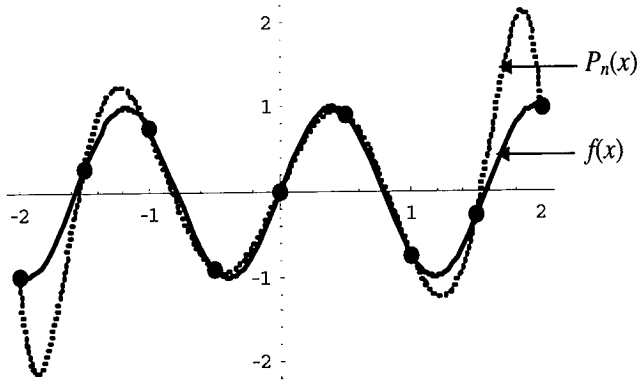
بمعنى آخر هي عملية استبدال دالة من الشكل $y=f(x)$ (معلومة تحليليا أو معلومة فقط في عدد محدود من النقاط) بكثيرة حدود $P_n(x)$ من الدرجة n بحيث تتطابق الدالة مع كثيرة الحدود بـ $n+1$ من النقاط المختلفة وبالتالي فهي تحقق العلاقة التالية:

$$P_n(x_i)=y_i, i=0,1,\dots,n \quad (2.7)$$

تدعى هذه العلاقة **بعلاقة الاستيفاء الداخلي**، وهي تسمح لنا باستبدال دالة معقدة التركيب تحليليا بكثيرة حدود أبسط منها، وأكثر سهولة في التعامل. تدعى القيم x_i ($i=0,1,\dots,n$) بنقاط (عقد) الاستيفاء، أو نقاط الاستناد، وأحيانا نقاط الاستكمال، حيث نلاحظ أن هناك تطبيقا ما بين الدالة وكثيرة الحدود عند نقاط الاستيفاء. بشكل عام تكتب علاقة الاستيفاء كما يلي:

$$P_n(x) \cong f(x)$$

يمكن توضيح الاستيفاء الداخلي بيانيا بالشكل التالي:



تعد مسألة الاستيفاء الداخلي أو ملائمة دالة لكثيرة حدود من أهم المسائل في التحليل العددي، وذلك لكثرة تطبيقاتها ولكونها تشكل أساسا لكثير من الطرائق العددية في المعادلات الجبرية والتفاضلية، وفي حساب التفاضل والتكامل. توجد طرائق متعددة للاستيفاء.

2.2.4 طرائق الاستيفاء الداخلي بكثيرات حدود.

a - طريقة نيوتن - غريغوري التقديمية:

تعد هذه الطريقة من أكثر الطرائق استخداما في التطبيقات العملية، وهي تعتمد على جداول الفروق التقديمية، وتطبق في حالة كون النقاط x_i موزعة على أبعاد متساوية، أي أن $x_{i+1} - x_i = h$ و $i=0,1,...,n-1$.

تكتب كثيرة حدود نيوتن غريغوري بالشكل:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (2.8)$$

ولتعيين الثوابت $a_0, a_1, \dots, a_n$ نتبع مايلي: من أجل تعيين a_0 نبدل في المساواة السابقة كل x بـ x_0 نجد أن كل الحدود تصبح مساوية للصفر باستثناء الأول منها، وباستخدام علاقة الاستيفاء الداخلي: $P_n(x_i) = y_i$ نجد أن

$$a_0 = y_0$$

ولحساب a_1 نعوض من جديد في العلاقة (2.8) كل x بـ x_1 وباستخدام علاقة الاستيفاء من جديد، ينتج لدينا:

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_0 + a_1 h \Rightarrow a_1 = (y_1 - y_0)/h = \frac{\Delta y_0}{h}$$

وبأسلوب مشابه يتم حساب a_2 بالتعويض في العلاقة (2.8) كل x بـ x_2 واستخدام علاقة الاستيفاء نحصل على:

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(2h) + a_2(2h)(h) \rightarrow$$

$$a_2 = (y_2 - y_0) / (2h^2) - \Delta y_0 / h^2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

ونجد أيضا أن

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

وبالاستمرار نحصل على علاقة من الشكل:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, \quad i=0,1,\dots,n$$

وبعد إيجاد كل الثوابت واستبدالها في العلاقة (2.8)، ينتج لدينا:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

وللاختصار يمكن إجراء تغيير للمتحول بأن نفرض $s = (x - x_0)/h$ ، وبالتبديل في الحدودية الأخيرة نكتب حدودية نيوتن غريغوري بالشكل:

$$P_n(s) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2.9)$$

ونكتبها بشكل مختصر كما يلي:

$$P_n(s) = C_0^s \Delta^0 y_0 + C_1^s \Delta y_0 + C_2^s \Delta^2 y_0 + \dots + C_n^s \Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^n C_k^s \Delta^k y_0$$

ومن الواضح أن حدودية نيوتن غريغوري تحقق علاقة الاستيفاء لأن $s=0$ من أجل $x=x_0$ و $s=1$ من أجل $x=x_1$ وهكذا $s=n$ من أجل $x=x_n$ ، أي أن:

$$s=0(1)n, P_n(s)=y_s$$

مثال 7: لتكن لدينا الدالة $y = \cos x$ المقدرة قيمها بالراديان والمعرفة بالجدول التالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0.2	0.98007				
		-0.05901			
0.4	0.92106		-0.03671		
		-0.09572		0.00380	
0.6	0.82534		-0.03291		0.00133
		-0.12863		0.00513	
0.8	0.69671		-0.02777		
		-0.15641			
1.0	0.54030				

والمطلوب: 1- إيجاد حدودية استيفاء نيوتن-غريغوري من الدرجة الثالثة الموافقة لهذه الدالة.

2- حساب قيمة تقريبية للدالة y عند $x=0.7$ وحساب الخطأ المطلق.

الحل: نستنتج من الجدول أن $h=0.2$ ، $x_0=0.2$ ، ونضع علاقة تغيير المتحول

$$s=(x-x_0)/h=(x-0.2)/0.2=5x-1$$

$$P_3(s)= y_0 + C_1^s \Delta y_0 + C_2^s \Delta^2 y_0 + C_3^s \Delta^3 y_0 = 0.98007 + S(-0.05901) +$$

$$\frac{S(S-1)}{2}(-0.03671) + \frac{S(S-1)(S-2)}{6}(0.00380) \rightarrow$$

$$P_3(x)= 0.98007 + (5x-1)(-0.05901) + \frac{(5x-1)(5x-2)}{2}(-0.03671) +$$

$$\frac{(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{6}(0.00380)$$

$$= 0.99857 + 0.0151083x - 0.553875x^2 + 0.0791667x^3$$

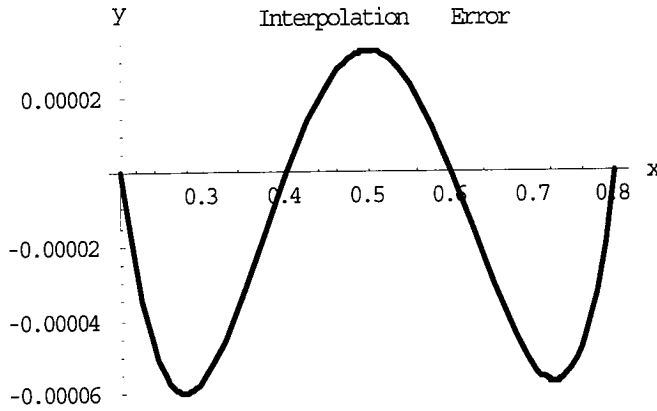
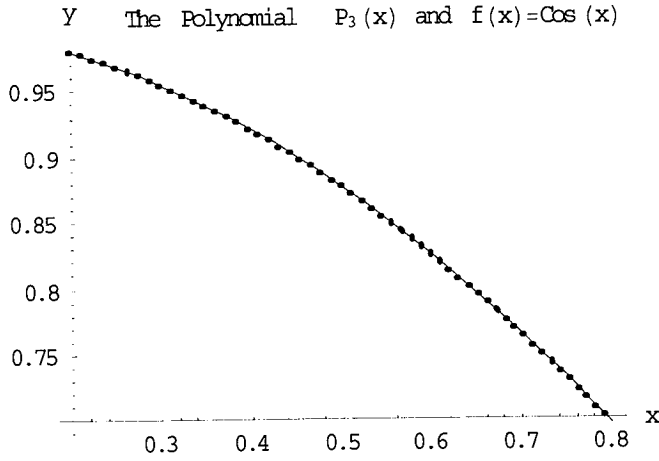
ولحساب قيمة تقريبية للدالة y نعوض $x=0.7$ في $P_3(x)$:

$$P_3(0.7)=0.99857+0.0151083(0.7)-0.553875(0.7)^2+0.0791667(0.7)^3$$

$$= 0.764901;$$

$$\delta = |\cos(0.7) - P_3(0.7)| = |0.764842 - 0.764901| = 0.000059 = 5.9E-5;$$

وللتوضيح نرسم في الشكل التالي حدودية استيفاء نيوتن-غريغوري من الدرجة الثالثة مع الدالة الأساسية، ونرسم في الشكل الذي يليه دالة الخطأ.



b - تقدير أخطاء استيفاء دالة

إن تقدير الخطأ المرتكب عند استخدام طريقة ما لحل إحدى مسائل التحليل العددي تعتبر من الأمور الهامة. ولتقدير صيغة الخطأ المرتكب عند استيفاء دالة $f(x)$ بكثيرة حدود $P_n(x)$ ، نرمز للخطأ بـ $\delta(x)$ ونكتب:

$$\delta(x) = f(x) - P_n(x), i=0,1,\dots,n, x \neq x_i$$

حيث $x_i, i=0,1,...,n$ هي نقاط الاستيفاء، ومن الممكن تقدير صيغة لحساب القيمة العظمى للخطأ اعتماداً على المبرهنة التالية:

مبرهنة 2: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة بشكل متتالٍ، فإنه من أجل كل قيمة لـ x مثل $\bar{x}$ يوجد عدد ξ ينتمي إلى المجال $[a,b]$ ، الذي يتضمن النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$ بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\delta(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{W(\bar{x})f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (2.10)$$

$$W(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)$$

و $P_n(x)$ حدودية الاستيفاء من الدرجة n الموافقة لـ $f(x)$ في النقاط المختلفة $x_i, i=0,1,...,n$.

وهكذا يعطى الخطأ المرتكب بطريق نيوتن-غريغوري وفقاً للمبرهنة 2 بالصيغة:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}_s) &= \frac{W(\bar{x})f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{S(S-1)(S-2)\dots(S-n)h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= C_{n+1}^S h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned} \quad (2.10a)$$

حيث:

$$S = (\bar{x} - x_0)/h \rightarrow (\bar{x} - x_0) = hS;$$

$$(\bar{x} - x_1) = (\bar{x} - x_0 + x_0 - x_1) = (hS - h) = h(S-1);$$

$$(\bar{x} - x_i) = (\bar{x} - x_{i-1} + x_{i-1} - x_i) = [h(S-i+1) - h] = h(S-i);$$

تعطينا العلاقة (2.10a) عبارة الخطأ في الحالة التي تكون فيها صيغة الدالة $f(x)$ معلومة تحليلياً، أما في الحالة التي لم تتوفر فيها الصيغة التحليلية نستعاض عن عبارة مشتق الدالة $f(x)$ من المرتبة $(n+1)$ بعبارة الفرق التقدمي التي تربط بينهما العلاقة $f^{(n+1)}(x) = \Delta^{n+1}f_0/h^{n+1}$ ، وعندئذ تصبح الصيغة (2.10a) بالشكل:

$$\delta(\bar{x}_s) = C_{n+1}^S \Delta^{n+1}f_0 \quad (2.10b)$$

إذن، نجد أن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن-غريغوري تساوي إلى قيمة الحد الذي يلي الحد الأخير في صيغة استيفاء نيوتن-غريغوري التقدمية (2.9).

مثال 8: قدر الخطأ المرتكب الحاصل في حل مسألة المثال 7 بتطبيق الصيغتين (2.10a) و (2.10b).

الحل: لدينا $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ ، $s = 5x - 1 = 5 * 0.7 - 1 = 2.5$ ، $\Delta^4 f_0 = \Delta^4 y_0 = 0.00133$ نعوض أولاً في (2.10a):

$$\delta(0.7) = C_4^s h^4 f^{(4)}(\xi) = s(s-1)(s-2)(s-3)\cos(\xi)h^4/24 \rightarrow$$

$$|\delta(0.7)| \leq |2.5 * 1.5 * 0.5 * (-0.5)(0.2)^4/24| = 6.25E-5;$$

ونعوض أيضاً في صيغة (2.10b):

$$\delta(0.7) = C_4^s \Delta^4 f_0 = 0.00133 * s(s-1)(s-2)(s-3)/24$$

$$= 0.00133(-0.03906) = -5.195E-5$$

c - طريق لاغرانج (Lagrange method):

لنكن لدينا الدالة $y=f(x)$ ، تأخذ قيمها y_i في x_i ، $i=0(1)n$ ، وليكن المطلوب تقريب هذه الدالة بكثيرة حدود من الدرجة n التي نكتبها بالشكل:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ومن المعروف أن لكثيرة الحدود هذه $n+1$ من المعاملات المجهولة هي a_i ، $i=0(1)n$. إذن، لتعيين كثيرة الحدود $P_n(x)$ يجب تعيين معاملات المجهولة، بحيث تتحقق شروط الاستيفاء (2.7)، أي العلاقة $P_n(x_i) = y_i$ التي تربط قيم الدالة بقيم كثيرة الحدود. من أجل ذلك نكتب صيغة لاغرانج للاستيفاء بالشكل:

$$P_n(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + \dots + L_n(x) y_n = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_j \quad (2.11)$$

تسمى $L_j(x)$ بحدوديات لاغرانج أو مضاريب لاغرانج، وتعرف كما يلي:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)},$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})},$$

إن $L_j(x)$ هي كثيرات حدود من الدرجة n ، وتحقق العلاقة التالية:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

وبما أن مجموع كثيرات حدود من الدرجة n هو كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر، تكون:

$$\sum_{j=0}^n L_j(x) y_j = P_n(x),$$

كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر.

وبحساب قيم العلاقة (2.11) في النقاط $x_i, i=0(1)n$ ، نجد:

$$P_n(x_i) = L_0(x_i) y_0 + L_1(x_i) y_1 + \dots + L_i(x_i) y_i + \dots + L_n(x_i) y_n,$$

$$y_n = L_i(x_i) y_i = y_i$$

أي أن $P_n(x)$ هي كثيرة الحدود التقريبية للدالة $f(x)$ ، وتحقق شروط الاستيفاء.

ملاحظة 2: إن تطبيق طريقة لاغرانج لا تتطلب بالضرورة تحقيق علاقة

المسافات المتساوية بين النقاط كما اشترطت طريقة نيوتن-غريغوري.

ملاحظة 3: يمكننا حساب الخطأ المرتكب عند استيفاء دالة بكثيرة حدود وفق

طريقة لاغرانج بتطبيق العلاقة (2.10):

$$\delta(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{W(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad W(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

مثال 9: استخدام صيغة لاغرانج لإيجاد كثيرة الحدود التقريبية للدالة $y=f(x)$ المعطاة قيمها في الجدول

x_i	-1	0	1	2
y_i	0.4	1	2.5	6.25

ثم احسب قيمة تقريبية للدالة y عند النقطة $x=1.5$ ، إذا علمت أن الدالة $f(x) = 2.5^x$ ، واحسب قيمة الخطأ الأعظمي، والمطلق الحاصل في التقريب.

الحل: نستنتج من الجدول أن $n=3$ ، $x_0=-1$ ، $x_1=0$ ، $x_2=1$ ، $x_3=2$ ، نحسب مضاريب لاغرانج: $y_0=0.4, y_1=1, y_2=2.5, y_3=6.25$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -(x^3-3x^2+2x)/6$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = 0.5(x^3-2x^2-x+2),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -0.5(x^3-x^2-2x),$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = (x^3-x)/6,$$

نعوض مضاريب لاغرانج في صيغة لاغرانج من أجل $n=3$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + L_3(x) y_3 \\ &= -(x^3-3x^2+2x)/6 \cdot 0.4 + [0.5(x^3-2x^2-x+2)] \cdot 1 + \\ &\quad [-0.5(x^3-x^2-2x)] \cdot 2.5 + [(x^3-x)/6] \cdot 6.25 \\ &= 0.225x^3 + 0.45x^2 + 0.825x + 1; \end{aligned}$$

نحسب قيمة تقريبية للدالة y بتعويض $x=1.5$ في $P_3(x)$:

$$P_3(1.5) = 0.225(1.5)^3 + 0.45(1.5)^2 + 0.825(1.5) + 1 = 4.00938;$$

نكتب صيغة الخطأ، من أجل $n=3$

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)f^{(3+1)}(\xi)}{(3+1)!}$$

لدينا $f^{(4)}(x) = [Ln(2.5)]^4 2.5^x$ ، وبالتعويض في الصيغة نجد:

$$e(1.5) = \frac{(1.5+1)(1.5-0)(1.5-1)(1.5-2)[Ln(2.5)]^4 (2.5)^\xi}{24}$$

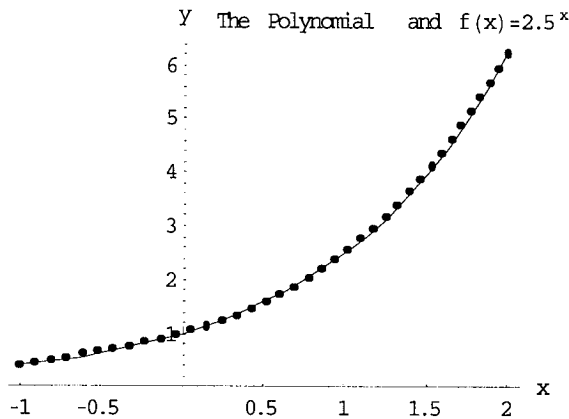
$$= (-0.03906) * (0.70491) 2.5^\xi = (-0.02753) 2.5^\xi \rightarrow$$

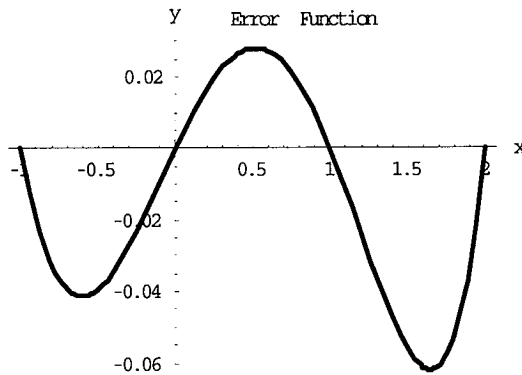
$$|e(1.5)| = |f(1.5) - P_3(1.5)| \leq |(-0.02753) 2.5^2| = 0.172063;$$

وهي القيمة العظمى للخطأ المقطوع، ونحسب الخطأ المطلق بالتعويض المباشر.

$$\delta = |f(1.5) - P_3(1.5)| = |2.5^{1.5} - 4.00938| = 0.05653;$$

لتوضيح التقريب نرسم في الشكل التالي حدودية استيفاء لاغرانج من الدرجة الثالثة مع الدالة الأساسية، ودالة الخطأ في الشكل الذي يليه.





برنامج 2.3: طريقة لاغرانج لإيجاد قيمة تقريبية لكثيرة حدود الاستيفاء $P(x)$ من الدرجة n لدالة $f(x)$ معرفة ومدخلة بإحدى حالتها إما كمجموعة من النقاط المنفصلة، أو بشكلها المستمرة باختيار إحدى الدوال.

- 1 - $f(x) = \cos(x)$,
- 2 - $f(x) = \sin(x)$,
- 3 - $f(x) = e^x$,
- 4 - $f(x) = \ln(x+1)$,
- 5 - $f(x) = 2^x$,

البرنامج:

```
PROGRAM LagrangeMethod;
Uses wincrt;
VAR y,x:array[0..10] of real;
    n,j,i,k,H:byte; sum,T,Lx:real; ch:char;
FUNCTION f(t:real):real;
begin
case k of
1:f:=cos(t);
2:f:=sin(t);
3:f:=Exp(t);
4:f:=Ln(t+1);
5:f:=Exp(t*ln(2));
end; {end case}
end;
BEGIN {main}
writeln('Lagrange Interpolation of f(x) by P(x)=a0+a1 x+a2 x^2+...');
write(' input degree of Lagrange Polynomial n:'); readln(n);
for i:=0 to n do
```



```

begin
  write('input x',i,'='); readln(x[i]);
end;
writeln('1:Continuous Function');
writeln('2:Discrete pointes');
write('Input 1 for Continuous f(x) else 2 for discrete pointes =');
readln(H);
If H=1 then
begin
  writeln('1:f=cos(t)');
  writeln('2:f:=Sin(t)');
  writeln('3:f:=Exp(t)');
  writeln('4:f:=Ln(t+1)');
  writeln('5:f:=2^x');
  write('Input Number of function for select '); readln(k);
  for i:=0 to n do y[i]:=f(x[i]);
end
ELSE
begin
  for i:=0 to n do
    begin
      write('y',i,'='); readln(y[i]);
    end;
  end;{end else}
Repeat
  write('To evaluate the Lagrange polynomial of f(x) at x=T input T =');
  readln(t); sum:=0;
  For i:=0 to n do
    begin
      Lx:=1;
      for j:=0 to n do
        if j<>i then Lx:=Lx*(T-x[j])/(x[i]-x[j]);
      sum:=sum+Lx*y[i];
    end; {end for}
  writeln('The value of Lagrange interpolating polyno is=',sum:2:4);
  if H=1 then writeln('Error=',Abs(f(T)-sum):2);
  write('To exit Press y or Y else To continue press any key ');
  readln(ch);
  Until (ch='y') or (ch='Y');
END.

```

برنامج 2.4: طريقة نيوتن-غورغوري لإيجاد قيمة تقريبية لكثيرة حدود الاستيفاء $P(x)$ من الدرجة n لدالة $f(x)$ معرفة ومدخلة بإحدى حالتها إما كمجموعة من النقاط المنفصلة، أو بشكلها المستمرة باختيار إحدى دوال البرنامج السابق.

```

Program NewtonMethod;
Uses wincrt;
var y,x:array[0..10] of real;
    d:Array[0..20,0..20] of real;
    n,j,i,k,H:byte;sum,T,Lx:real;    ch:char;
FUNCTION f(t:real):real;
begin
case k of
  1:f:=cos(t);
  2:f:=Sin(t);
  3:f:=Exp(t);
  4:f:=Ln(t+1);
  5:f:=Exp(t*ln(5));
end;
end;
Begin { min}
writeln('Newton Interpolation of f(x) by P(x)=a0+a1 x+a2 x^2+...');
writeln('=====');
write(' input degree of Polynomail n:');readln(n);
for i:=0 to n do
begin
  write('input x',i,'=');readln(x[i]);
end;
writeln('1:Continuous Function');
writeln('2:Discrete pointes');
write('Input 1 for Continuous f(x) else 2 for discrete pointes =');
readln(H);
if H=1 then
begin
  writeln('1:f=cos(t)');
  writeln('2:f:=Sin(t)');
  writeln('3:f:=Exp(t)');
  writeln('4:f:=Ln(t+1)');
  writeln('5:f:=2^x');
  write('Input Nunmber of function for select ');readln(k);
  for i:=0 to n do y[i]:=f(x[i]);
end

```

```

else
  begin
    for i:=0 to n do
      begin
        write('y',i,'=');readln(y[i]);
      end;
    end;{end else}
  Repeat
    for i:=0 to n do d[i,0]:=y[i];
    for j:=1 to n do
      for i:=j to n do
        d[i,j]:=(d[i,j-1]-d[i-1,j-1])/(x[i]-x[i-j]);
      write('To evaluate the Newton polynomial P(x) at x=T input T =');
      readln(t);
      sum:=d[n,n];
      for i:=n-1 downto 0 do
        sum:=sum*(t-x[i])+d[i,i];
      writeln('The value of Newton polynomial at T is=', sum:2:4);
      if H=1 then writeln('Error=',Abs(f(T)-sum):2);
      write('To exit Press y or Y else To continue press any key ');
      readln(ch);
      until (ch='y') or (ch='Y');
    End.

```

d - طريقة الاستيفاء الداخلي العامة :

بفرض أن y_i هي قيم الدالة $y=f(x)$ في النقاط x_i ، $i=0,1,...,n$ ، وليكن المطلوب إيجاد حدودية $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ من الدرجة n ، تمر من النقاط المذكورة ، أي تأخذ قيم الدالة $y=f(x)$ نفسها في النقاط x_i . إن للحدودية $P_n(x)$ ، $n+1$ من المعاملات الثابتة $a_0, a_1, ..., a_n$ ، تعتبر مجاهيل يطلب تعيينها ، من أجل ذلك نضع علاقة الاستيفاء التالية:

$$P_n(x_i)=f(x_i)=y_i ; i=0,1,...,n$$

تنتج العلاقة السابقة $n+1$ من المعادلات الجبرية الخطية في المجاهيل $a_0, a_1, ..., a_n$ ، التي نستطيع كتابتها:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$

⋮

(2.12)

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

ونعيد كتابتها بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

نحل جملة المعادلات السابقة بطرق متعددة نذكر منها طريقة كرامر. تقتضي

طريقة كرامر أولاً تعيين محدد معاملات الأمثال:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

الذي يدعى W بمحدد فاندروند، ويعطى منشور هذا المحدد بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} W &= (x_1 - x_0) \times (x_2 - x_0) \times (x_3 - x_0) \dots (x_n - x_0) \times & \{n\} \\ & (x_2 - x_1) \times (x_3 - x_1) \times (x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1) \times & \{n-1\} \\ & (x_3 - x_2) \times (x_4 - x_2) \times (x_5 - x_2) \dots (x_n - x_2) \times & \{n-2\} \\ & \vdots & \vdots \\ & (x_n - x_{n-1}) \neq 0 & \{1\} \end{aligned}$$

وهكذا لتعيين المحدد W ، نحتاج لجداء $n!$ من الأقواس السابقة من أجل $n+1$

من نقاط الاستيفاء. وبما أن $W \neq 0$ فالجملة (2.12) تملك حلاً وحيداً.

نعين بعد ذلك المحددات W_i ، $i=0,1,\dots,n$ ، المشابهة للمحدد W وذلك باستبدال

العمود رقم i في محدد فاندروند بعمود الثوابت الأيمن لجملة المعادلات (2.12)،

نحصل على:

$$W_0 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \dots$$

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

وبالتالي:

$$a_0 = W_0/W, \quad a_1 = W_1/W, \quad a_2 = W_2/W, \dots, \quad a_n = W_n/W$$

نحسب الخطأ المركب في هذه الطريقة من صيغة الخطأ العامة في الاستيفاء العلاقة (2.10)، أي لحساب الخطأ الحاصل عند النقطة $\bar{x}$ من مجال الاستيفاء نستخدم العلاقة:

$$\delta(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{W(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$$W(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

أما إذا كانت الصيغة التحليلية للدالة $f(x)$ غير معلومة فلا يمكن حساب مشتقاتها مباشرة، بل ويمكن بدل ذلك حساب القيم المشتقات بطرائق تقريبية.

مثال 10: لتكن الدالة $y=f(x)$ معرفة وفق الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
y_i	4	1	0	1

والمطلوب استخدام الطريقة العامة لإيجاد كثيرة الحدود التقريبية الملائمة لبيانات الجدول السابق.

الحل: لدينا $n=3$ ، وعدد النقاط يساوي 4، والحدودية المطلوبة من الدرجة الثالثة:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

لحساب المجاهيل a_0, a_1, a_2, a_3 ، نجد أولاً من الجدول:

بعدئذ نستطيع ، $y_0=4, y_1=1, y_2=0, y_3=1, x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3$

حساب المحددات:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \\ = (1)(2)(3)(1)(2)(1) = 12,$$

$$W_0 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 4 \left(\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \right) \\ = 4[(108-72)-(54-24)+(18-12)] = 4(36-30+6) = 4(12) = 48,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 9 & 27 \end{vmatrix} = -48, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 27 \end{vmatrix} = 12,$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

وهكذا نحصل بسهولة على المجاهيل:

$$a_0 = W_0/W = 48/12 = 4, \quad a_1 = W_1/W = -48/12 = -4,$$

$$a_2 = W_2/W = 12/12 = 1, \quad a_3 = W_3/W = 0.$$

وبالتعويض في كثيرة الحدود نحصل على المطلوب:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = x^2 - 4x + 4.$$

2.3 تقريبات المربعات الصغرى: Least Squares Approximation

سميت هذه الطريقة بهذا الاسم لأنها تسعى لجعل مجموع مربعات الأخطاء أصغريا (أصغر ما يمكن). وهي طريقة شائعة الاستخدام، ليس بين الرياضيين وحسب وإنما أيضا بين المهتمين في الفيزياء والإحصاء وعلوم أخرى، نظرا لأهميتها، حتى أن هؤلاء يفترضون أن مبدأ المربعات الصغرى هو قانون الطبيعة. تستخدم هذه الطريقة في الحالة التي تكون فيها المعطيات مأخوذة من التجارب، وهي غير موثوق بها بشكل كبير، وفي هذه الحالة ليس بالضرورة أن يمر المنحني التقريبي من هذه النقاط كما مر معنا في موضوع الاستيفاء الداخلي لدالة بكثيرات حدود، وبالتالي فإن إيجاد المنحني الملائم لهذه المعطيات أمر له أهميته.

2.3.1 تقريب المربعات الصغرى بحدودية من الدرجة m في الحالة المنفصلة

إن تقريب المربعات الصغرى في الحالة المنفصلة لدالة f معلومة في

النقاط $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ التي عددها $N+1$ هي كثيرة حدود $P_m \in \Pi_m$ تحقق:

$$\begin{aligned} \|f - P_m\|_2^2 &= \min \sum_{i=0}^N [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \\ &= \min_{a_0, a_1, \dots, a_m} \sum_{i=0}^N [y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m]^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

حيث Π_m : هو فضاء مجموعة جميع كثيرات الحدود من الدرجة m على الأكثر

و $P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$: كثيرة حدود من الدرجة m ,

$x_i, (i=0, 1, \dots, N)$: هي مجموعة من العقد المختلفة و $N > m$

ملاحظة 4: إذا كان $N=m$ ، فإن منحنى المربعات الصغرى التقريبي سيمر بالضبط من نقاط المعطيات المفروضة، وعندئذ سينطبق على منحنى الاستيفاء الداخلي لهذه المعطيات.

إذن لإيجاد تقريب المربعات الصغرى لمجموعة النقاط $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ بكثيرة الحدود $P_m(x)$ ، من أجل $N > m$ ، يتطلب منا تعيين الحدودية $P_m(x)$ التي تملك $m+1$ من المعاملات المجهولة هي $a_0, a_1, \dots, a_m$. من أجل ذلك يمكننا أن نضع:

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m)]^2 \quad (2.14)$$

إن تعيين المعاملات في (2.13) يكافئ تعيينها لـ (2.14)، ولإيجاد نهاية دنيا للدالة E في المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_m$ ، يجب تحقق الشروط:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

ومنه نحصل على الجملة:

$$-2 \sum_{i=0}^N (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m) x_i^j = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

التي يمكن ترتيبها بالشكل:

$$\sum_{i=0}^N a_0 x_i^j + a_1 x_i^{j+1} + \dots + a_m x_i^{m+j} = \sum_{i=0}^N x_i^j y_i, \quad (i = 0, 1, \dots, m) \quad (2.15)$$

إذن، تم الحصول على جملة معادلات خطية مؤلفة من $m+1$ من المعادلات بـ $m+1$ من المعاملات المجهولة:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N y_i \\
a_0 \sum_{i=0}^N x_i + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N y_i x_i \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^N y_i x_i^m
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ونكتب بالشكل المصفوفي:

$$X A = F \tag{2.17}$$

حيث: X مصفوفة مربعة من الشكل $(m+1) \times (m+1)$ ، F متجهة تملك $m+1$ عنصر، و A متجهة المعاملات المجهولة. يمكن حساب عناصر X, F كالآتي:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \sum_{k=0}^N x_k^{j+i-2} \\
&\quad (i, j=1, 2, \dots, m+1) \\
f_i &= \sum_{k=0}^N x_k^{i-1} y_i
\end{aligned} \tag{2.18}$$

تدعى المعادلات (2.16) بالمعادلات النظامية الخطية للمسألة، وهي مؤلفة من $m+1$ معادلة بـ $m+1$ من المعاملات المجهولة، وبايجاد حلولها يتم تعيين معاملات كثيرة الحدود والحصول على المطلوب. ويكون أيضا للجملة الخطية المكافئة (2.16) أو المكافئة (2.17) حل وحيد غير صفري إذا كانت نقاط المعطيات مختلفة وهذا محقق من شروط التقريبات.

a - التقريب الخطي:

بفرض أن $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ كثيرة حدود خطية، أي أن $m=1$ ، عندئذ يمكن بسهولة استنتاج أن عدد معادلات الجملة (2.16) سيؤول إلى معادلتين بمجهولين على الشكل:

$$a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i = \sum_{i=0}^N y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^N x_i + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 = \sum_{i=0}^N y_i x_i$$

وأيضاً يمكن بسهولة استنتاج تقريبات المربعات الصغرى بكثيرات حدود من درجات أعلى بحسب الحاجة، كالدرجة التربيعية والتكعيبية... الخ.

مثال 11: لنكن لدينا الدالة $y=f(x)$ معلومة في النقاط المرتبة في الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	1	3	8

والمطلوب إيجاد كثيرتي حدود المربعات الصغرى من الدرجتين الخطية والتربيعية، ثم حساب القيمة التقريبية للدالة f في الحالتين الخطية والتربيعية عند $x=1.5$ ، مستنتجا أيهما أدق برأيك؟.

الحل: إن تقريب المربعات الصغرى الخطي هو كثيرة حدود من الشكل $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ ، حيث $m=1$ و $N=4$ ، عندئذ نستنتج من جملة المعادلات (2.16) أن:

$$a_0 \sum_{i=0}^4 x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^4 x_i = \sum_{i=0}^4 y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^4 x_i + a_1 \sum_{i=0}^4 x_i^2 = \sum_{i=0}^4 y_i x_i$$

وبتعويض معطيات الجدول في الجملة نحصل على المعادلتين:

$$5 a_0 = 7, \quad (1)$$

$$10 a_1 = 27, \quad (2) \rightarrow$$

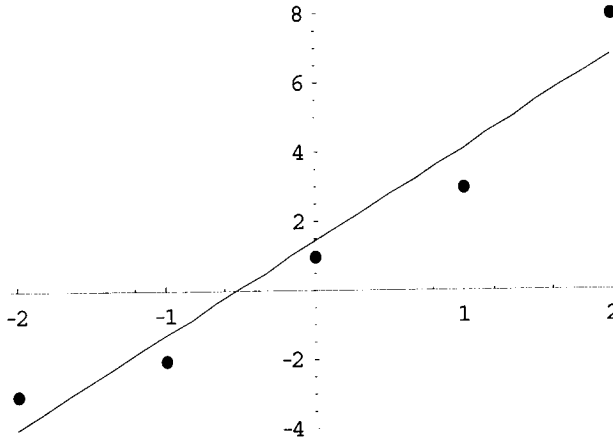
من المعادلة (1) نجد أن $a_0 = 1.4$ ، ومن (2) نجد $a_1 = 2.7$ ، وهكذا نحصل على الحدودية الخطية التقريبية:

$$P_1(x)=1.4+2.7x$$

ولحساب قيمة تقريبية للدالة f ، نعوض في التقريب الخطي

$$P_1(1.5)=1.4+2.7(1.5)=5.45$$

نبين في الشكل (2.1) تقريب المربعات الصغرى الخطي في المجال $[-2,2]$ ونقاط الدالة f المجدولة.



الشكل (2.1): تقريب المربعات الصغرى الخطي ونقاط الدالة f المعرفة في الجدول للمثال 11

أما تقريب المربعات الصغرى التربيعي فهو كثيرة حدود من الشكل

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

يتحقق من أجل $m=2$ ، ولدينا $N=4$ ، نؤول عندئذ

الجملة (2.16) إلى المعادلات:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^4 x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^4 x_i + a_2 \sum_{i=0}^4 x_i^2 &= \sum_{i=0}^4 y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^4 x_i + a_1 \sum_{i=0}^4 x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^4 x_i^3 &= \sum_{i=0}^4 y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^4 x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^4 x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^4 x_i^4 &= \sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 \end{aligned}$$

وبأسلوب مشابه، نعوض معطيات الجدول في المعادلات السابقة، نحصل على:

$$5 a_0 + 10 a_2 = 7 \quad (1)$$

$$10 a_1 = 27 \quad (2)$$

$$10 a_0 + 34 a_2 = 21 \quad (3)$$

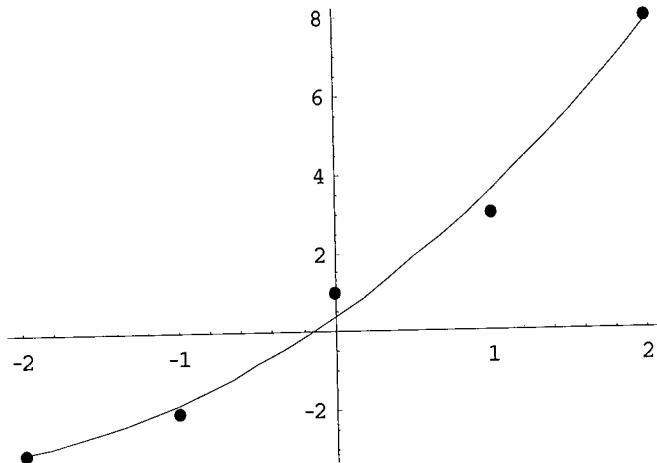
من المعادلة (2) ينتج لدينا $a_1 = 2.7$ ، وبضرب المعادلة (1) بـ 2 وطرحها من 3 نحصل على $a_2 = 0.5$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) أو (3) يكون $a_0 = 0.4$. وهكذا نحصل على الحدودية المطلوبة:

$$P_2(x) = 0.4 + 2.7x + 0.5x^2$$

الآن، يمكن لنا حساب قيمة كثيرة حدود المربعات الصغرى التربيعية عند $x = 1.5$ ، كقيمة تقريبية للدالة f ، بالتعويض المباشر:

$$P_2(1.5) = 0.4 + 2.7(1.5) + 0.5(1.5)^2 = 5.95$$

يبين الشكل (2.2) الرسم البياني لحدودية تقريب المربعات الصغرى التربيعية ونقاط الدالة f المجدولة.



الشكل (2.2): تقريب المربعات الصغرى التربيعية ونقاط الدالة f المجدولة للمثال 11

ملاحظة 5: نتوقع أن يكون التقريب التربيعي أفضل من الخطي لأنه كما هو واضح من الشكل (2.2) فالنقاط المجدولة أكثر ملائمة واقترباً من منحنى المربعات الصغرى التربيعي، وهذا الكلام ليس قاعدة بشكل عام، أما القيمة التقريبية للدالة عند نقطة معينة قد تكون دقيقة في التقريب الخطي وأقل دقة في التقريب التربيعي، لأن طريقة المربعات الصغرى تنظر إلى الملاءمة مع جميع النقاط دون الانحياز إلى نقطة على حساب النقطة الأخرى.

مثال 12: لتكن لدينا الدالة $y = \sin(x^2)$ معرفة في النقاط المجدولة التالية:

x_i	0	0.5	3	5
y_i	0	0.247404	0.412118	-0.132352

والمطلوب، أوجد تقريبات المربعات الصغرى للدالة المذكورة بكثيرات حدود من الخطية وحتى التكعيبية، ثم أحسب قيمة تقريبية للدالة في كل حالة من الحالات الثلاث من الخطية وحتى التكعيبية عند $x=4$ ، مستنتجا أي القيم التقريبية أدق؟.

الحل: لتعيين التقريب الخطي يتطلب تحديد معاملات الحدودية الخطية $P_1(x) = a_0 + a_1x$ ، حيث $m=1$ و $N=3$ ، نستنتج من جملة المعادلات (2.16) أن:

$$a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i = \sum_{i=0}^3 y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^3 x_i + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^2 = \sum_{i=0}^3 y_i x_i$$

وبالتعويض بالاعتماد على نقاط الجدول نحصل على المعادلتين:

$$4 a_0 + 8.5 a_1 = 0.527171 \quad (1)$$

$$8.5 a_0 + 34.25 a_1 = 0.698299 \quad (2)$$

وبضرب المعادلة (1) بـ 2.125 ، نضع

$$8.5 a_0 + 18.0625 a_1 = 1.120238 \quad (3)$$

ونطرح المعادلة (3) من (2) نحصل على:

$$16.1875 a_1 = -0.421939 \Rightarrow a_1 = -0.0260657;$$

وبالتالي بعد التعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد $a_0 = 0.187182$.
إذن الحدودية المطلوبة هي الخطية:

$$p_1(x) = 0.187182 - 0.0260657 x$$

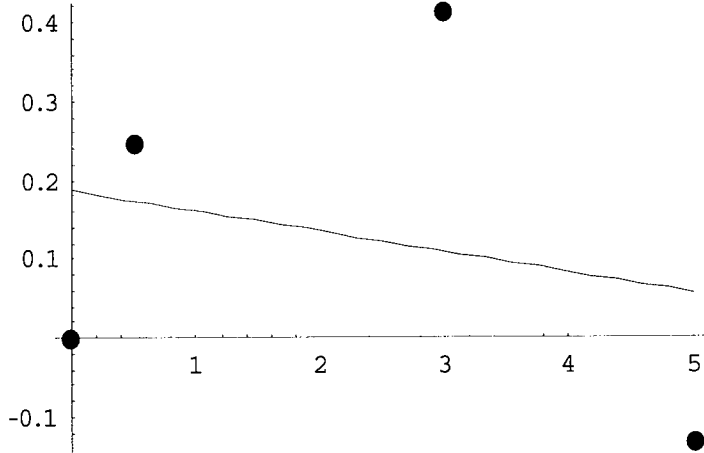
نحسب قيمة تقريبية للدالة عند $x=4$ ، باستخدام التقريبي الخطي:

$$p_1(4) = 0.187182 - 0.0260657(4) = 0.0829192$$

والخطأ المطلق:

$$|P_1(4) - \sin(4^2)| = |0.0829192 - (-0.287903)| = 0.370823$$

يبين الشكل (2.3) الرسم البياني لتقريب المربعات الصغرى الخطي ونقاط الدالة المدرجة في جدول المثال 12.



الشكل (2.3): تقريب المربعات الصغرى الخطي ونقاط الدالة المجدولة للمثال 12

نجد أيضا تقريب المربعات الصغرى التربيعي للدالة بتعيين المعاملات المجهولة لكثيرة الحدود $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. نحقق ذلك من أجل $m=2$ ، و $N=3$ تصبح عندئذ المعادلات (2.16):

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^2 &= \sum_{i=0}^3 y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^3 x_i + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^3 &= \sum_{i=0}^3 y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^4 &= \sum_{i=0}^3 y_i x_i^2 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$4 a_0 + 8.5 a_1 + 34.25 a_2 = 0.527171 \quad (1)$$

$$8.5 a_0 + 34.25 a_1 + 152.125 a_2 = 0.698299 \quad (2)$$

$$34.25 a_0 + 152.125 a_1 + 706.063 a_2 = 0.462124 \quad (3)$$

بحل هذه المعادلات بالطرق المعروفة ينتج لدينا:

$$a_0 = 0.0333013; \quad a_1 = 0.380918; \quad a_2 = -0.0830316$$

وتكون الحدودية المطلوبة:

$$P_2(x) = 0.0333013 + 0.380918 x - 0.0830316 x^2$$

يمكن حساب قيمة تقريبية للدالة $y = \sin(x^2)$ عند $x=4$ ، بالتعويض المباشر:

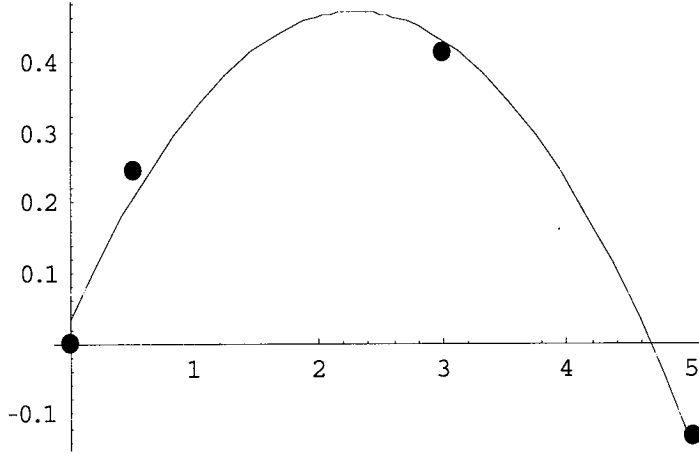
$$P_2(4) = 0.0333013 + 0.380918 (4) - 0.0830316 (4)^2 = 0.228468$$

والخطأ المطلق:

$$|P_2(4) - \sin(4^2)| = |0.228468 - (-0.287903)| = 0.516371$$

نلاحظ أن الخطأ في التقريب الخطي أفضل من الخطأ في التقريب التربيعي عند $x=4$ بسبب سلوك الدالة المتذبذب.

يبين الشكل (2.4) الرسم البياني لحدودية تقريب المربعات الصغرى التربيعية ونقاط الدالة f المجدولة.



الشكل (2.4): تقريب المربعات الصغرى التربيعي والنقاط المجدولة للمثال 12

يمكن تعيين كثيرة حدود تقريبية $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ من الدرجة الثالثة، أي من أجل $m=3$ ، و $N=3$ ، وفي هذه الحالة المنحني التقريبي سيمر تماما من النقاط الأربع، وهي تتطابق مع كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي، وبعد التعويض في المعادلات (2.16)، ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^1 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + a_3 \sum_{i=0}^3 x_i^3 &= \sum_{i=0}^3 y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^3 + a_3 \sum_{i=0}^3 x_i^4 &= \sum_{i=0}^3 y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^4 + a_3 \sum_{i=0}^3 x_i^5 &= \sum_{i=0}^3 y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=0}^3 x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^3 x_i^4 + a_2 \sum_{i=0}^3 x_i^5 + a_3 \sum_{i=0}^3 x_i^6 &= \sum_{i=0}^3 y_i x_i^3 \end{aligned}$$

وباستخدام بيانات الجدول لحساب المجاميع نكتب المعادلات السابقة بالشكل:

$$4 a_0 + 8.5 a_1 + 34.25 a_2 + 152.125 a_3 = 0.527171 \quad (1)$$

$$8.5 a_0 + 34.25 a_1 + 152.125 a_2 + 706.063 a_3 = 0.698299 \quad (2)$$

$$34.25 a_0 + 152.125 a_1 + 706.063 a_2 + 3368.03 a_3 = 0.462124 \quad (3)$$

$$152.125 a_0 + 706.063 a_1 + 3368.03 a_2 + 16354 a_3 = -5.38584 \quad (4)$$

بحل هذه المعادلات، نحصل على المعاملات المجهولة:

$$a_0 = 0.0; \quad a_1 = 0.586646; \quad a_2 = -0.190459; \quad a_3 = 0.013567$$

وهكذا نعين الحدودية المطلوبة:

$$P_3(x) = 0.586646 x - 0.190459 x^2 + 0.013567 x^3$$

نحسب قيمة تقريبية للدالة $y = \sin(x^2)$ عند $x=4$ ، بالتعويض المباشر:

$$\begin{aligned} P_3(4) &= 0.586646 (4) - 0.190459 (4)^2 + 0.013567 (4)^3 \\ &= 0.167528 \end{aligned}$$

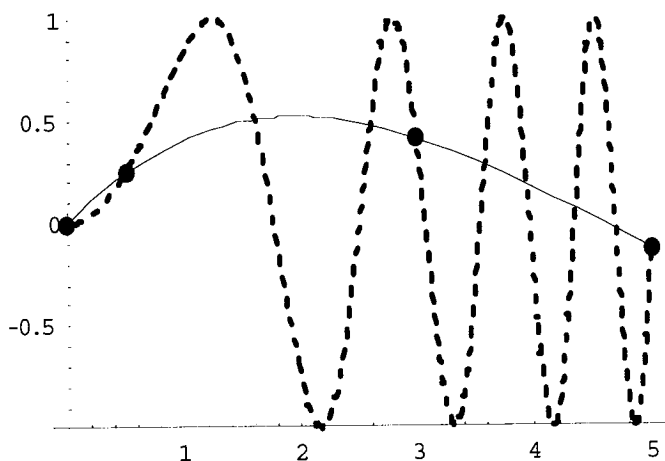
والخطأ المطلق:

$$|P_3(4) - \sin(4^2)| = |0.167528 - (-0.287903)| = 0.455431$$

كما هو ملاحظ فإن خطأ الدالة عند $x=4$ في التقريب التكعيبي أصغر منه في التقريب التربيعي، إلا أن الخطأ في التقريب الخطي هو أصغر الجميع.

يبين الشكل (2.5) الرسم البياني لكثيرة الحدود التكعيبية ومنحني الدالة

الأساسي ونقاط الدالة f المجدولة، حيث الخط المتقطع يشير إلى المنحني الأساسي للدالة، والخط المستمر يشير إلى المنحني التكعيبي.



الشكل (2.5): التقريب التكميبي ومنحني الدالة الأساسي والنقاط المجدولة للمثال 12

مثال 13: أوجد تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الرابعة للدالة

$$f(x) = \frac{1}{1+12x^2} \text{ باستخدام العقد } x_i = -1 + hi, \quad (i=0, \dots, 10) \text{ الموزعة على}$$

أبعاد متساوية في المجال $[-1, 1]$ ، وفق خطوة طولها $h = 0.2$.

الحل: يمكن تنظيم المعطيات والحسابات في الجدول التالي:

x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i^3 y_i$	$x_i^4 y_i$
-1	0.076923	-0.076923	0.076923	-0.07692	0.076923
-0.8	0.115207	-0.0921659	0.0737327	-0.058986	0.0471889
-0.6	0.187970	-0.112782	0.0676692	-0.040602	0.0243609
-0.4	0.34247	-0.136986	0.0547945	-0.021918	0.0087671
-0.2	0.675676	-0.135135	0.027027	-0.005405	0.0010811
0	1	0	0	0	0
0.2	0.675676	0.135135	0.027027	0.005405	0.0010811
0.4	0.342466	0.136986	0.0547945	0.021918	0.0087671
0.6	0.18797	0.112782	0.0676692	0.040602	0.0243609
0.8	0.115207	0.0921659	0.0737327	0.058986	0.0471889
1	0.076923	0.0769231	0.076923	0.076923	0.076923

إن المطلوب هو تعيين كثيرة حدود من الشكل:

$$P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

حيث لدينا $N=10$ ، و $m=4$ ، وهكذا من الجملة (2.16)، نحصل على

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^{10} x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{10} x_i^1 + a_2 \sum_{i=0}^{10} x_i^2 + a_3 \sum_{i=0}^{10} x_i^3 + a_4 \sum_{i=0}^{10} x_i^4 &= \sum_{i=0}^{10} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{10} x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{10} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{10} x_i^3 + a_3 \sum_{i=0}^{10} x_i^4 + a_4 \sum_{i=0}^{10} x_i^5 &= \sum_{i=0}^{10} y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{10} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{10} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{10} x_i^4 + a_3 \sum_{i=0}^{10} x_i^5 + a_4 \sum_{i=0}^{10} x_i^6 &= \sum_{i=0}^{10} y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=0}^{10} x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^{10} x_i^4 + a_2 \sum_{i=0}^{10} x_i^5 + a_3 \sum_{i=0}^{10} x_i^6 + a_4 \sum_{i=0}^{10} x_i^7 &= \sum_{i=0}^{10} y_i x_i^3 \\ a_0 \sum_{i=0}^{10} x_i^4 + a_1 \sum_{i=0}^{10} x_i^5 + a_2 \sum_{i=0}^{10} x_i^6 + a_3 \sum_{i=0}^{10} x_i^7 + a_4 \sum_{i=0}^{10} x_i^8 &= \sum_{i=0}^{10} y_i x_i^4 \end{aligned}$$

يمكن استخدام معطيات الجدول في حساب المجاميع، فنجد:

$$\sum_{i=0}^{10} x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^3 = 0, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^5 = 0, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^7 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 4.4, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^4 = 3.1328, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^6 = 2.6259,$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^8 = 2.3705, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^2 y_i = 0.60029,$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^3 y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{10} x_i^4 y_i = 0.31664$$

بالتعويض تصبح الجملة:

$$11a_0 + 4.4a_2 + 3.1328a_4 = 3.7965 \quad (1)$$

$$4.4a_1 + 3.1328a_3 = 0 \quad (2)$$

$$4.4a_0 + 3.1328a_2 + 2.6259a_4 = 0.60029 \quad (3)$$

$$3.1328a_1 + 2.6259a_3 = 0 \quad (4)$$

$$3.1328a_0 + 2.6259a_2 + 2.3705a_4 = 0.31664 \quad (5)$$

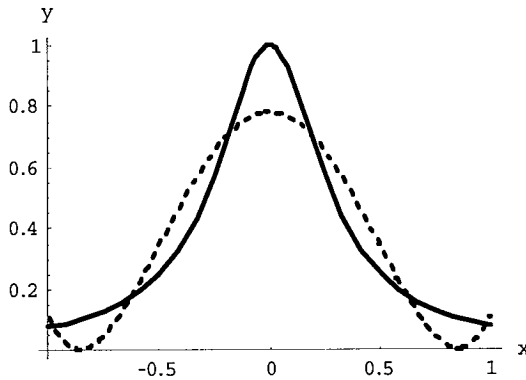
نحل المعادلات (1) و (3) و (5) ثم المعادلتين (2) و (4) حلا مشتركا فنحصل على المعاملات المجهولة:

$$a_0 = 0.780496, a_1 = 0, a_2 = -2.12546, a_3 = 0, a_4 = 1.45655$$

وبالتالي كثيرة حدود المربعات الصغرى:

$$P_4(x) = 0.7804957 - 2.1254643x^2 + 1.4565534x^4$$

نوضح في الشكل (2.6) المنحني البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ مع كثيرة حدود المربعات الصغرى، حيث يشير المنحني المتقطع إلى التقريب، والمستمر إلى منحنى الدالة الأساسي.



الشكل (2.6): المنحني البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ مع الحدودية التقريبية $P_4(x)$

برنامج 2.5: لإيجاد كثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية التقريبية لدالة في الحالة المنفصلة

```

PROGRAM LeastSquares;
  uses wincrt;
  var y,x:array[0..10] of real;
      N,j,i:byte;A,B,sumx0,sumx1,sumx2,sumy0,sumy1:real;
  Begin { min}
  clrscr;
  writeln('Least-Squares of f(x) by polynomial P(x)=A+B x');
  writeln('=====');
  write(' input N :=');readln(n);
  for i:=0 to n do
  begin
    write('input x',i,':');readln(x[i]);
    write('input y',i,':');readln(y[i]);
  end;
  sumx0:=N+1;
  sumx1:=0;
  sumx2:=0;
  sumy0:=0;
  sumy1:=0;
  for i:=0 to n do
  begin
    sumx1:=sumx1+x[i];
    sumx2:=sumx2+sqr(x[i]);
    sumy0:=sumy0+y[i];
    sumy1:=sumy1+x[i]*y[i];
  end;
  A:=(sumy0*sumx2-sumy1*sumx1)/(sumx0*sumx2-
    sumx1*sumx1);
  B:=(sumx0*sumy1-sumx1*sumy0)/(sumx0*sumx2-
    sumx1*sumx1);
  Writeln('The Linear Approximation of Points is:');
  writeln('(',A:1:5,')+(,B:1:5,) X');
End.

```

برنامج 2.6: لتقريب دالة معرفة تحليليا بكثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية

Program LeastSquares;

```
uses wincrt;
var x,y:array[0..10] of real;
    N,j,i:byte;a0,a1,sumx0,sumx1,sumx2,sumy0,sumy1:real;
function f(x:real):real;
begin
    f:=sin(sqr(x));
end;
Begin { min}
clrscr;
writeln('Least-Squares of f(x) by polynomial P(x)=a0+a1 x');
writeln('=====');
write(' input N :=' );readln(n);
for i:=0 to n do
begin
    write('input x',i,':=' );readln(x[i]);
end;
for i:=0 to n do y[i]:=f(x[i]);
sumx0:=N+1;
sumx1:=0;
sumx2:=0;
sumy0:=0;
sumy1:=0;
for i:=0 to n do
begin
    sumx1:=sumx1+x[i];
    sumx2:=sumx2+sqr(x[i]);
    sumy0:=sumy0+y[i];
    sumy1:=sumy1+x[i]*y[i];
end;
a0:=(sumy0*sumx2-sumy1*sumx1)/(sumx0*sumx2-
    sumx1*sumx1);
a1:=(sumx0*sumy1-sumx1*sumy0)/(sumx0*sumx2-
    sumx1*sumx1);
Writeln('The Linear Approximation of Points is:');
writeln('(',a0:1:5,')+(',a1:1:5,') X');
```

End.

2.3.2 تقريبات المربعات الصغرى في الحالة المستمرة

إن تقريب المربعات الصغرى في الحالة المستمرة لدالة $f \in C[a, b]$ في

المجال $[a, b]$ هو دالة $P \in \Pi_m$ تحقق:

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2^2 &= \min_a^b \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx \\ &= \min_{a_0, a_1, \dots, a_m} \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_m x^m]^2 dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

حيث $C[a, b]$: هو فضاء الدوال المستمرة في المجال $[a, b]$.

ولتعيين كثيرة حدود المربعات الصغرى $P_m(x)$ من الدرجة m للدالة f وفق

الصيغة (2.19)، نضع:

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b (f(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_m x^m)^2 dx \quad (2.20)$$

وكما رأينا في حالة النقاط المنفصلة، نشق الصيغة (2.20) جزئياً بالنسبة

للمعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_m$ ، ونحقق الشروط:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

تنتج لدينا المعادلات:

$$-2 \int_a^b (f(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_m x^m) x^j dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

نوزع التكامل على جميع الحدود، وننقل الحدود السالبة إلى الطرف الأيمن، نجد

$$a_0 \int_a^b x^j dx + a_1 \int_a^b x^{j+1} dx + \dots + a_m \int_a^b x^{j+m} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

وهكذا نكتبها بشكل عمودي:

$$\begin{aligned} a_0 \int_a^b x^0 dx + a_1 \int_a^b x dx + \dots + a_m \int_a^b x^m dx &= \int_a^b f(x) dx, \\ a_0 \int_a^b x dx + a_1 \int_a^b x^2 dx + \dots + a_m \int_a^b x^{1+m} dx &= \int_a^b x f(x) dx, \\ \vdots \\ a_0 \int_a^b x^m dx + a_1 \int_a^b x^{m+1} dx + \dots + a_m \int_a^b x^{2m} dx &= \int_a^b x^m f(x) dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

ويمكن إعادة كتابتها وفق الصيغة المصفوفاتية:

$$XA=F \quad (2.22)$$

حيث: X مصفوفة مربعة من الشكل $(m+1) \times (m+1)$ و F متجهة تملك $m+1$ عنصرا، يمكن حساب عناصرها بطريق مشابهة للحالة المنفصلة كما يلي:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \int_a^b x^{i+j-2} dx \\ (i, j=1, 2, \dots, m+1) \\ f_i &= \int_a^b x^{i-1} f(x) dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

وبإيجاد حلول الجملة (2.21) أو (2.22) بإحدى الطرائق المعروفة يتم تعيين معاملات حدودية تقرب المربعات الصغرى من الدرجة m المطلوبة.

ملاحظة 6: يمكن استخدام أي من العلاقتين (2.17), (2.22) لإيجاد حدودية التقريب الملائمة في الحالتين المنفصلة والمستمرة، إلا أنهما غير مفضلتين في بعض الحالات للسببين التاليين:

أ- تتميز المصفوفة X بأنها من نمط مصفوفات هلبيرت المعتلة الشرطية: حيث تكون النتائج التي نحصل عليها باستخدام هذا النوع من المصفوفات حساسة

لأخطاء التدوير، لأنها تملك عناصر من الشكل m/n ، حيث m, n عددين صحيحين، وبالتالي فإن هذا الاعتلال سيؤثر على الدقة العددية لحدوديات التقريب الناتجة.

ب- الكلفة الزائدة في الحساب وخاصة إذا كانت درجة الحدودية كبيرة. يمكن تجنب هذه المعوقات بإدخال عاملين مهمين هما: التوزين والتتابع المتعمدة.

مثال 14: أوجد تقريبات المربعات الصغرى من الدرجتين التربيعية والتكعيبية للدالة $f(x) = e^x$ على المجال $[0,1]$ في الحالة المستمرة.

الحل: نجد أولاً أن $m=2$ تتسجم مع تقريب المربعات الصغرى التربيعية، بالتالي بالتعويض في الجملة (2.21) سنحصل على المعادلات الثلاث التالية:

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^1 x^0 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 e^x dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx &= \int_0^1 x e^x dx \\ a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx &= \int_0^1 x^2 e^x dx \end{aligned}$$

إن حساب تكاملات الطرف الأيسر للمعادلات سهل، لذلك سنقوم بحساب تكاملات الطرف الأيمن للمعادلتين الأخيرتين بالتجزئة:

$$I_1 = \int x e^x dx \rightarrow u=x, dv=e^x dx, \rightarrow I_1 = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx \rightarrow u=x^2, dv=e^x dx, \rightarrow I_2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

وبالتعويض في جملة المعادلات بعد حساب تكاملات الطرف الأيسر، نحصل على:

$$a_0 + (1/2)a_1 + (1/3)a_2 = e - 1$$

$$(1/2)a_0 + (1/3)a_1 + (1/5)a_3 = 1$$

$$(1/3)a_0 + (1/4)a_1 + (1/5)a_2 = e - 2$$

وبالاكتفاء بالتدوير إلى خمسة أرقام بعد الفاصلة، ينتج لدينا:

$$a_0 + 0.5a_1 + 0.33333a_2 = 1.71828$$

$$0.5a_0 + 0.33333a_1 + 0.25a_2 = 1$$

$$0.33333a_0 + 0.25a_1 + 0.2a_2 = 0.71828$$

وبحل هذه المعادلات بإحدى الطرائق الجبرية نحصل على:

$$a_0 = 1.01294; \quad a_1 = 0.851356; \quad a_2 = 0.838981$$

وبالتالي حدودية تقريب المربعات الصغرى التربيعية المطلوبة:

$$P_2(x) = 1.01294 + 0.851356x + 0.838981x^2$$

أما من أجل $m=3$ فتنتج حدودية تقريب المربعات الصغرى التكعيبية، من الجملة

(2.21)، بالتالي سنحصل على المعادلات الخطية الأربع التالية:

$$a_0 \int_0^1 x^0 dx + a_1 \int_0^1 x^1 dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx + a_3 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 e^x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^1 dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx + a_3 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x e^x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx + a_3 \int_0^1 x^5 dx = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^3 dx + a_1 \int_0^1 x^4 dx + a_2 \int_0^1 x^5 dx + a_3 \int_0^1 x^6 dx = \int_0^1 x^3 e^x dx$$

نلاحظ أن معادلات الجملة الناتجة تتشابه إلى حد كبير مع معادلات الجملة

السابقة في الحالة التربيعية، وتكاملات الطرف الأيسر بسيطة وسهلة، أما

تكاملات الطرف الأيمن فقد تم حسابها سابقاً، ويبقى تكامل المعادلة الأخيرة الذي سنجده بالتجزئة:

$$I_3 = \int x^3 e^x dx \rightarrow u = x^3, dv = e^x dx \rightarrow$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x \rightarrow$$

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = -2e + 6$$

وبالعودة إلى جملة المعادلات بعد حساب تكاملات الطرف الأيسر والتعويض بقيمتها، نحصل على:

$$a_0 + (1/2)a_1 + (1/3)a_2 + (1/4)a_3 = e - 1$$

$$(1/2)a_0 + (1/3)a_1 + (1/4)a_2 + (1/5)a_3 = 1$$

$$(1/3)a_0 + (1/4)a_1 + (1/5)a_2 + (1/6)a_3 = e - 2$$

$$(1/4)a_0 + (1/5)a_1 + (1/6)a_2 + (1/7)a_3 = -2e + 6$$

وبالتالي بعد تدوير الأرقام نكتب المعادلات السابقة:

$$a_0 + 0.5a_1 + 0.33333a_2 + 0.25a_3 = 1.71828$$

$$0.5a_0 + 0.33333a_1 + 0.25a_2 + 0.2a_3 = 1$$

$$0.33333a_0 + 0.25a_1 + 0.2a_2 + 0.16667a_3 = 0.71828$$

$$0.25a_0 + 0.2a_1 + 0.16667a_2 + 0.14286a_3 = 0.14286$$

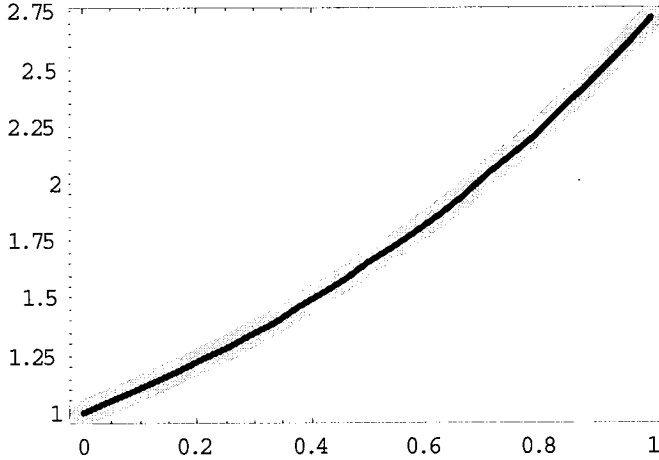
نلاحظ أنه ليس من السهل إيجاد حل مثل هذه الجمل على الرغم من وجود العديد من الطرائق لكلفتها الحسابية العالية، وبعد الحل نصل إلى أن:

$$a_0 = 0.999145; a_1 = 1.01655; a_2 = 0.426507; a_3 = 0.274774$$

وبالتالي حدودية التقريب المطلوبة هي:

$$p_3(x) = 0.999145 + 1.01655x + 0.426507x^2 + 0.274774x^3$$

وللتوضيح سنقدم الآن المخطط البياني لكثيرة حدود المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة والدالة الأساسية $f(x) = e^x$ ، حيث سيظهر في الشكل (2.7) أن الخط الدقيق يكون للمنحنى التقريبي والخط النخين للمنحنى الأساسي.



الشكل (2.7): تقريب المربعات الصغرى التكميبي المستمر للدالة $f(x) = e^x$ في المجال $[0, 1]$

مثال 15: أوجد تقريب المربعات الصغرى الخطي للدالة $f(x) = 2^x$ على المجال $[0, 1]$ في الحالة المستمرة.

الحل: لدينا $m=1$ ، نعوض في الجملة (2.21)، نحصل على المعادلتين:

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^1 dx + a_1 \int_0^1 x^1 dx &= \int_0^1 2^x dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 x 2^x dx \end{aligned}$$

نحسب تكاملات الطرف الأيمن بالتجزئة:

$$I_0 = \int_0^1 2^x dx = 2^x / \ln(2); I_1 = \int_0^1 x 2^x dx \rightarrow u = x, dv = 2^x dx,$$

$$\rightarrow I_1 = x 2^x / \ln(2) - (1/\ln(2)) \int x 2^x dx = \frac{2^x (x \ln(2) - 1)}{\ln(2)^2}$$

وبالتعويض ينتج لدينا:

$$a_0 + (1/2) a_1 = 1/\ln(2) \rightarrow a_0 + 0.5 a_1 = 1.442695 \quad (1)$$

$$(1/2)a_0 + (1/3)a_1 = \frac{\ln(4)-1}{\ln(2)^2} \rightarrow 0.5a_0 + 0.33333a_1 = 0.80402 \quad (2)$$

نضرب المعادلة (2) بـ 2 ونطرح (1) من (2) نحصل على:

$$0.16666 a_1 = 0.16535 \rightarrow a_1 = 0.99211,$$

نعوض قيمة a_1 بالمعادلة (1)، نحصل على المجهول الثاني:

$$a_0 = 0.94664$$

وأخيراً، نعين تقريب المربعات الصغرى الخطي:

$$p_1(x) = 0.94664 + 0.99211x$$

a - التوزين Weighting

تُستخدم عادة أعداد موجبة معلومة $\{w_i\}_{i=0}^n$ عددها يساوي إلى عدد نقاط المعطيات، وتُستخدم أيضاً في الحالة المستمرة دوال $w(x)$ موجبة وقابلة للمكاملة على المجال المستخدم. تدعى هذه الأعداد أوزاناً، كما وتدعى $w(x)$ دالة التوزين. إن زيادة التوزين عند النقاط التي تظهر فيها انحرافات زائدة يساهم في جذب المنحني التقريبي نحو هذه النقاط وهذا يتسبب في تخفيض هذه الانحرافات.

تأخذ هذه الدوال العديد من الصيغ أهمها:

أ- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، تستخدم على المجال $[-1,1]$ ، حيث $w(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \pm 1$ و $w(0)=1$

ب- $w_i(x) = \frac{1}{|x-x_i|^k}$ ، $w_i(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow x_i$ ، وتأخذ أعظم قيمها عندما تكون النقطة المراد تقريبها في جوار x_i .

ج- $w_i(x) = \exp \frac{-(x-x_i)^2}{C}$ ، $w_i(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow x_i$ ، C ثابت عددي.

2.3.3 الدوال المتعامدة Orthogonal Functions

تعريف 1: نقول عن الدالتين الحقيقيتين $q(x), g(x)$ المعرفتين على المجال $[a, b]$ أنهما متعامدتان فوق ذلك المجال إذا كان:

$$\int_a^b g(x)q(x)dx = 0$$

لتكن لدينا $\{f_i(x)\}$ ، $(i=0,1,\dots)$ مجموعة من الدوال الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال $[a, b]$ وأن أياً منها لا يطابق الصفر فيه، عندئذ نقول عن هذه الدوال إنها متعامدة مثني مثني فوق المجال $[a, b]$ بالنسبة لدالة وزن $\rho(x) \geq 0$ ، إذا تحقق:

$$\int_a^b \rho(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \lambda_n & (n = m) \end{cases} \quad (2.24)$$

ويكون التعامد منتظماً إذا كان $\lambda_n = 1$.

وفي الحالة المنفصلة، يكون من أجل مجموعة من العقد x_k :

$$\sum_k w_k f_i(x_k) f_j(x_k) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \lambda_i & (i = j) \end{cases}$$

حيث w_k أوزان موجبة.

تلعب الدوال المتعامدة دوراً بارزاً في الرياضيات التطبيقية والبحث. ومن أهمها جمل كثيرات الحدود المتعامدة، وأكثر هذه الحدوديات شهرة : حدوديات ليجنדר - تشيبشيف - ليفير - هرميت - جاكوبي. سنهتم هنا فقط بكثيرات حدود ليجنדר و تشيبشيف.

a- كثيرات حدود ليجنדר: Legendre Approximations

نعرف حدوديات ليجنדר من الدرجة n وفق صيغة Rodrigue التالية:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

وباستخدام المنشور:

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

نحصل أيضاً على الدستور:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.26)$$

حيث يستخدم الترميز: [] للإشارة إلى أن $[n/2]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي $n/2$.

تتميز حدوديات ليجنדר $L_n(x)$ بأنها، من أجل عدد صحيح فردي n تتضمن فقط حدوداً من قوى x الفردية، وإذا كان العدد n زوجياً فهي تتضمن حدود القوى الزوجية فقط.

كما أن $L_n(1) = 1$ و $L_n(-1) = (-1)^n$ ، $(n = 0, 1, 2, \dots)$. ويمكن لنا تعيين

بعض من كثيرات حدود ليجنדר من درجات مختلفة كما يلي:

$$L_0(x) = 1 \quad \text{في حالة } n=0, \text{ نجد:}$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2*1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x \quad \text{ونجد في حالة } n=1, \text{ أن:}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2^2 * 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{ومن أجل } n=2, \text{ يكون:}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2^3 * 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \quad \text{وهكذا من أجل } n=3, \text{ ينتج:}$$

نلاحظ أنه عندما تكون n كبيرة نسبيا، فإن عملية الحصول على حدوديات ليجنדר بهذه الطريقة، يكون عسيرا وصعبا، بسبب ارتفاع مرتبة المشتق التي يتوجب علينا حسابها، ولكن يمكن الاستغناء عن حساب هذه المشتقات إذا علمنا أن حدوديات ليجنדר تحقق العلاقة التكرارية التالية:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

وهي تعطي كثيرة حدود ليجنדר من درجة ما بدلالة كثيرتي الحدود السابقتين بدءا من الدرجة الثانية. وبالتالي يمكن استخدام العلاقة التكرارية السابقة لحساب كثيرات حدود ليجنדר من مراتب عليا، فمثلا:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= \frac{7}{4} x L_3(x) - \frac{3}{4} L_2(x) \\ &= \frac{7}{4} x \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

b- خواص كثيرات حدود ليجنדר:

بفرض أن $f(x)$ دالة مستمرة هي ومشتقاتها حتى المرتبة n على المجال

$[-1, 1]$. نشاهد كثيراً في الحسابات تكاملات من الشكل:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx$$

يمكن كتابته بالشكل:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \quad (2.27)$$

وبالمكاملة بالتجزئة، ينتج:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \left\{ f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \end{aligned}$$

وبتكرار المكاملة بالتجزئة n مرة، نحصل على:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx \quad (2.28)$$

ولحساب العلاقة (2.28)، نميز عدداً من الحالات التي تحدد الخواص التالية:

الخاصة الأولى: إذا كان $f(x) = x^m$ و m عدداً صحيحاً، $0 \leq m < n$ ، عندئذ

سيكون $\frac{d^n f}{dx^n} = 0$ ، وبالتالي:

$$\int_{-1}^{+1} x^m L_n(x) dx = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.29)$$

الخاصة الثانية: وإذا كان $f(x) = x^n$ ، فإن:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx = \frac{(2^{n+1})(n!)^2}{(2n+1)!}$$

الإثبات: نعوض في العلاقة (2.28) $f(x) = x^n$ ، و $\frac{d^n x^n}{dx^n} = n!$ ، فيكون

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \frac{d^n x^n}{dx^n} dx = \frac{(-1)^n n!}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx \end{aligned}$$

ولحساب قيمة التكامل الأخير نغير المتحول، فنضع $x = \sin(t)$ ، ويكون
عندئذ: $dx = \cos(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x) L_n(x) dx &= \frac{1}{2^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \sin t dt = \frac{2}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dx \\ &= \frac{2}{2^n} \left[\frac{(2^n)^2 (n!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)\dots(3)(2)(1)} \right] = \frac{(2^{n+1})(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

الخاصة الثالثة: إذا كان $f(x) = L_n(x)$ ، فإن:

$$\int_{-1}^{+1} [L_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (2.30)$$

الإثبات: في العلاقة (2.28) نضع $f(x) = L_n(x)$ ، ولدينا

$$\begin{aligned} \frac{d^n L_n(x)}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right] = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} - nx^{2n-2} + \dots) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(2n)!}{n!} x^n - n \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{(2n)!}{n!} n! \right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حيث استخدمنا المنشور:

$$(x^2 - 1)^n = (x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2} x^{2n-4} \dots + (-1)^n)$$

الذي تم اشتقاقه $2n$ مرة، وبالعودة إلى التكامل نجد:

$$\int_{-1}^{+1} [L_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx$$

كما ويمكن الاستفادة من الخاصة الثانية في حساب التكامل الأخير، حيث:

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

وبالتالي، نحصل على:

$$\int_{-1}^{+1} [L_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

وهو المطلوب.

الخاصة الرابعة: وهي خاصة التعامد، حيث نقول أنه إذا كان $f(x) = L_m(x)$

و $m \neq n$ فإن:

$$\int_{-1}^{+1} L_m(x) L_n(x) dx = 0, \quad \forall m \neq n \quad (2.31)$$

الإثبات: لبرهان هذه الخاصة نميز عدة حالات:

أ- إذا كانت $m < n$ ، ننشر $L_m(x)$ حسب قوى x ، فنجد أن:

$$L_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^{2m} - nx^{2m-2} + \frac{m(m-1)}{2} x^{2m-4} \dots + (-1)^m)$$

ويكون الحد الأعلى فيها هو x^m وجميع الحدود الأخرى في المنشور هي من درجة أقل من m ، وبالتالي وبحسب الخاصة الأولى سوف يكون تكامل جداء هذه الحدوديات بـ $L_n(x)$ معدوماً وهو ما يثبت صحة هذه الخاصة.

ب- إذا كانت $n < m$ ، ننشر $L_n(x)$ حسب قوى x ، ونحصل على حالة مشابهة للحالة أ.

ج- وإذا كان $m = 0$ ، و $n \neq 0$ ، فيكون:

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^{+1} = 0$$

تؤكد هذه الخاصة أن حدوديات ليجنדר متعامدة فوق المجال $[-1, 1]$.

C- استخدام حدوديات ليجنדר في تقريبات المربعات الصغرى

لتكن f دالة مستمرة في المجال $[-1, 1]$ ، و Π_m هو فضاء الحدوديات من الدرجة m على الأكثر، ولتكن $\{L_i(x)\}_{i=0}^m$ قاعدة من حدوديات ليجنדר المتعامدة لهذا الفضاء، وإذا كان $P \in \Pi_m$ ، يعطى النظيم:

$$\|f - P\|_2^2 = \text{Min} \int_{-1}^{+1} [f(x) - P(x)]^2 dx$$

$$= \text{Min}_{a_0, a_1, \dots, a_m} \int_{-1}^{+1} [f(x) - a_0 L_0(x) - a_1 L_1(x) - \dots - a_m L_m(x)]^2 dx \quad (2.32)$$

حيث $P(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \dots + a_m L_m(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة m ، و $L_0(x), L_1(x), \dots, L_m(x)$ هي حدوديات ليجنדר.

الآن، يجب تعيين المعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_m$ للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى $P(x)$ من الدرجة m ، ومن أجل ذلك نكتب:

$$I = \int_{-1}^1 [f(x) - a_0 L_0(x) - a_1 L_1(x) - \dots - a_m L_m(x)]^2 dx$$

ولكي يكون هذا المقدار أصغرياً، نشق، ونعدم المشتق، ونعين المعاملات كالآتي:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, i = 0, 1, \dots, m,$$

$$-2 \int_{-1}^1 [f(x) - a_0 L_0(x) - a_1 L_1(x) - \dots - a_m L_m(x)] L_i(x) dx = 0$$

وبالاعتماد على الخاصة الرابعة لحدوديات ليجنדר، وهي خاصة التعمد تختزل العلاقة الأخيرة:

$$\int_{-1}^1 [f(x) - a_i L_i(x)] L_i(x) dx = 0$$

مرة أخرى، يمكن استخدام خاصية حدوديات ليجنדר الثالثة، لحساب a_i :

$$a_i = \frac{\int_{-1}^1 L_i(x) f(x) dx}{\int_{-1}^1 [L_i(x)]^2 dx} = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x) f(x) dx, i = 0, 1, \dots, m \quad (2.33)$$

إذن، باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة تم الاستغناء عن حل الجملة المعتلة الشرطية وذات الكلفة الحسابية العالية (2.21) أو الجملة المكافئة (2.22) والاكتفاء فقط بحساب العلاقات البسيطة (2.33).

مثال 16: أوجد تقريبات المربعات الصغرى المستمرة من الدرجة الخطية وحتى التكعيبية باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة للدالة:

$$f(x) = 2^x$$

فوق المجال $[-1, 1]$.

الحل: نلاحظ أنه لإيجاد التقريبات المذكورة نحتاج أولاً لحدوديات ليجنדר من الدرجة صفر وحتى الدرجة الثالثة التالية:

$$L_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad L_1(x) = x, \quad L_0(x) = 1$$

وبالتالي من العلاقة (2.33)، نجد:

$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x) f(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

إذن يمكننا حساب المعاملات المجهولة كالتالي:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2^x dx = \frac{1}{2} \frac{2^x}{\ln(2)} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{\ln(4)} = 1.08202 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x 2^x dx = \frac{3}{2} \frac{[x \ln(2) - 1] 2^x}{[\ln(2)]^2} \Big|_{-1}^1 \\ &= 0.727026 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{2} \int_{-1}^1 L_2(x) f(x) dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) 2^x dx \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{3[2 - x \ln(4) + x^2 \ln^2(2)] 2^{x-1}}{[\ln(2)]^3} \Big|_{-1}^1 - \frac{5}{2} \times \frac{2^{x-1}}{\ln(2)} \Big|_{-1}^1 \\ &= 0.165721 \end{aligned}$$

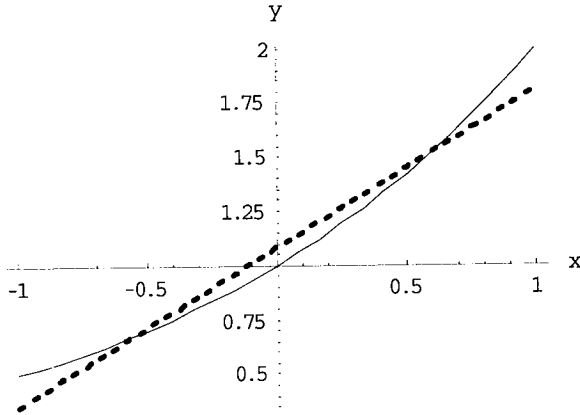
$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{7}{2} \int_{-1}^1 L_3(x) f(x) dx = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{3}{2} x \right) 2^x dx \\
&= \frac{7}{2} \frac{[x \ln(64) 2 - 3x^2 \ln^2(2) + x^3 \ln^3(2) - 6] 2^{x-1}}{[\ln(2)]^4} \Big|_{-1}^1 + \\
&\quad \frac{7}{2} \frac{[3 - \ln(8)] 2^{x-1}}{[\ln(2)]^2} \Big|_{-1}^1 = 0.0228008
\end{aligned}$$

ولتعيين تقريب المربعات الصغرى الخطي يلزمنا تعويض a_0, a_1 في كثيرة الحدود الخطية:

$$P_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) = 1.08202 + 0.727026 x$$

يبين الشكل (2.8) تقريب المربعات الصغرى الخطية المستمرة للدالة $f(x) = 2^x$

باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة في المجال $[-1, 1]$



الشكل (2.8): تقريب المربعات الصغرى الخطي المستمر مع الدالة

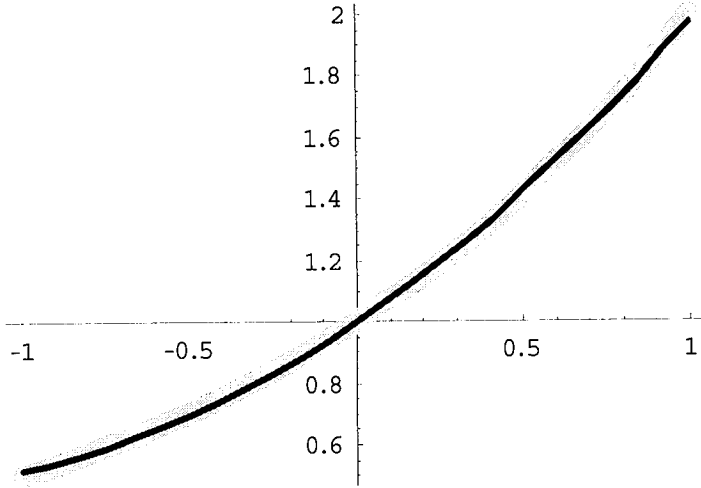
$f(x) = 2^x$ باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة فوق المجال $[-1, 1]$

أما الحصول على تقريب المربعات الصغرى التربيعي، يلزمنا تعويض

a_0, a_1, a_2 في كثيرة الحدود ذات الدرجة التربيعية:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) = \\
&= 1.08202 + 0.727026x + 0.165721\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 0.99916 + 0.727026x + 0.248582x^2
\end{aligned}$$

يبين الشكل (2.9) تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية المستمر مع الدالة $f(x) = 2^x$ باستخدام حدوديات ليجندر المتعامدة فوق المجال $[-1, 1]$.



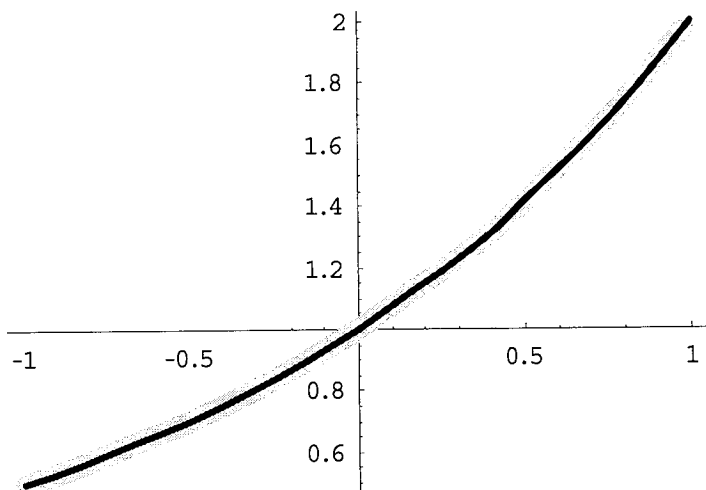
الشكل (2.9): تقريب المربعات الصغرى التربيعي المستمر مع الدالة $f(x) = 2^x$ باستخدام حدوديات ليجندر المتعامدة في المجال $[-1, 1]$

وأخير نعوض بقيم الثوابت a_0, a_1, a_2, a_3 ، نحصل على تقريب المربعات الصغرى التكعيبي التالي:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x) = \\
&= 1.08202 + 0.727026x + 0.165721\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + 0.0228008\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \\
&= 0.9991595 + 0.6928248x + 0.2485815x^2 + 0.057002x^3
\end{aligned}$$

نبين في الشكل (2.10) تقريب المربعات الصغرى التكميبي المستمر مع الدالة

$$f(x) = 2^x \text{ باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة في المجال } [-1, 1]$$



الشكل (2.10): تقريب المربعات الصغرى التكميبي المستمر مع الدالة

$$f(x) = 2^x \text{ باستخدام حدوديات ليجنדר المتعامدة في المجال } [-1, 1]$$

d- كثيرات حدود تشيبشيف (Chebyshev Approximations)

نعرف كثيرات حدود تشيبشيف من الدرجة n بالصيغة:

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)], \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2.34)$$

وتأخذ قيمها فقط ضمن المجال $[-1, 1]$ ، وتحقق الشرط $T_n(x) = T_{-n}(x)$

ويكون من السهل إيجاد أن $T_0(x) = 1$ ، $T_1(x) = \cos[\cos^{-1}(x)] = x$.

فإذا فرضنا أن $\theta = \cos^{-1}(x)$ ، يكون $x = \cos(\theta)$ ، وبالتالي

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 4x^3 - 3x$$

e- خواص كثيرات حدود تشيبيتشيف :

الخاصة الأولى: إن كثيرات حدود تشيبيتشيف تحقق العلاقة التكرارية التالية:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, (n = 1, 2, \dots) \quad (2.35)$$

وهي صحيحة لأن: $\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$ وباستخدام العلاقة التكرارية (2.35) يمكن تعيين كثيرات حدود تشيبيتشيف من أي مرتبة بدلالة الحدوديتين السابقتين، فمثلاً:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 + 3x) \\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \end{aligned}$$

الخاصة الثانية: $T_{2n}(x)$ حدودية زوجية لأن جميع قوى x فيها زوجية و $T_{2n+1}(x)$ حدودية فردية لأن جميع قوى x فيها فردية.

الخاصة الثالثة: إن لكثيرة حدود تشيبيتشيف $T_n(x)$ ، n صفراً (جزراً) مختلفاً في المجال $[-1, 1]$:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.36)$$

إن إثبات ذلك يكون سهلاً بملاحظ أن $\theta = \cos^{-1}(x)$ ، $T_n(x) = \cos(n\theta)$ ومنه يكون $x = \cos(\theta)$ ، و $-1 \leq x \leq +1$ ، و $0 \leq \theta \leq \pi$.

فإذا وضعنا $T_n(x) \equiv \cos(n\theta) = 0$ ، ينتج لدينا:

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

وبالتالي $x_k = \cos\theta = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi$ ، هي جذور

المختلفة $T_n(x)$ وجميعها تقع في المجال $[-1, 1]$ وهو المطلوب.

الخاصة الرابعة: إن $|T_n(x)| \leq 1$ لأن $| \cos[n \cos^{-1}(x)] | \leq 1$

الخاصة الخامسة: (خاصية التعامد): إن كثيرات حدود تشيبيشيف متعامدة فوق

المجال $[-1, 1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، وهي تحقق العلاقات:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \pi/2 & , i=j \neq 0 \\ \pi & , i=j=0 \end{cases} \quad (2.37)$$

نشبت هذه الخاصية بالاعتماد على تغيير المتحول فنضع $\theta = \cos^{-1}(x)$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(i\theta) \cos(j\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((i+j)\theta) + \cos((i-j)\theta)] d\theta \end{aligned}$$

هنا سنميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان $i \neq j$ ، فإن التكامل الأخير

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(i+j)\theta]}{i+j} + \frac{\sin[(i-j)\theta]}{i-j} \right]_0^\pi = 0$$

الحالة الثانية: إذا كان $i = j \neq 0$ ، فنحصل من التكامل الأخير على:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos[(2i)\theta] d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{2}$$

الحالة الثالثة: إذا كان $i = j = 0$ ، فتعطي قيمة التكامل I في هذه الحالة:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

وهو المطلوب.

الخاصة السادسة: إن كثيرات حدود تشيبيشيف متعامدة في الحالة المنفصلة

بالنسبة لأصفار تشيبيشيف: $k = 0, 1, \dots, n$ ، $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$ ، وهي

تحقق العلاقات:

$$\sum_{k=0}^n T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{n+1}{2} & i=j \neq 0 \\ n+1 & i=j=0 \end{cases} \quad (2.38)$$

الإثبات: نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى: سنثبت العلاقة (2.38) من أجل $i \neq j$ ، وهي خاصة التعمد ومن

أجل ذلك نضع:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^n T_i(x_k) T_j(x_k) = \sum_{k=0}^n \cos[i \cos^{-1}(x_k)] \cos[j \cos^{-1}(x_k)] \\ &= \sum_{k=0}^n \cos\left[i \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right] \cdot \cos\left[j \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right] \end{aligned}$$

نستخدم التطبيق المثلثي:

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

لتحويل الجداء إلى مجموع، فنجد

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i-j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i+j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = 0$$

بسبب تناظر قيم $x_k = \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right)$, $k=0,1,\dots,n$ في المجال $[-1,1]$ من

أجل أي عدد صحيح $n \neq 0$.

الحالة الثانية: سنثبت صحة العلاقة (2.38) من أجل $i = j \neq 0$:

لدينا من الحالة الأولى

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i-j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i+j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(0) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(2i) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos[(0)] + \frac{1}{2}(0) = \frac{n+1}{2}$$

الحالة الثالثة: أخيرا سنثبت صحة العلاقة (2.38) من أجل $i = j = 0$ ، يتم ذلك

بسهولة لأن:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i-j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(i+j) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(0) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos \left[(0) \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos[(0)] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos[(0)] = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1$$

f- تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبيتشيف في الحالة المستمرة

لتكن f دالة مستمرة في المجال $[-1,1]$ ، و Π_m هو فضاء كثيرات الحدود من الدرجة m على الأكثر، ولتكن $\{T_i(x)\}_{i=0}^m$ قاعدة من حدوديات تشيبيتشيف المتعامدة لهذا الفضاء، عندئذ فإنه من أجل أي $P_m \in \Pi_m$ ، يمكن تقريب f بكثيرة حدود من الشكل:

$$P_m(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_m T_m(x) \quad (2.39)$$

حيث $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$ هي حدوديات تشيبيتشيف، و $a_0, a_1, \dots, a_m$ معاملات مجهولة يطلب تعيينها بحيث يتحقق التنظيم التالي مع دالة الوزن

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\|f - P_m\|_2^2 = \text{Min} \int_{-1}^1 W(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

$$= \text{Min}_{a_0, a_1, \dots, a_m} \int_{-1}^1 W(x) [f(x) - a_0 T_0(x) - a_1 T_1(x) - \dots - a_m T_m(x)]^2 dx \quad (2.40)$$

الآن أصبح معلوما كيف سيتم تعيين المعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_m$ للحصول

على كثيرة حدود المربعات الصغرى $P_m(x)$ من الدرجة m ، ولهذا نكتب:

$$I = \int_{-1}^1 W(x) [f(x) - a_0 T_0(x) - a_1 T_1(x) - \dots - a_m T_m(x)]^2 dx$$

وبالتالي يكون لهذا المقدار نهاية صغرى عند $a_0, a_1, \dots, a_m$ ، بالاشتقاق بالنسبة

للمعاملات a_i وتحقق الشروط:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, i = 0, 1, \dots, m \rightarrow$$

$$-2 \int_{-1}^1 W(x) [f(x) - a_0 T_0(x) - a_1 T_1(x) - \dots - a_m T_m(x)] T_i(x) dx = 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

أو بنقل الحدود السالبة إلى الطرف الأيمن:

$$\int_{-1}^1 W(x) f(x) T_i(x) dx = \int_{-1}^1 W(x) [a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_m T_m(x)] T_i(x) dx,$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

وبالاعتماد على الخاصة الخامسة (التعامد-الحالة الأولى) لحدوديات تشيبيتشيف تختزل العلاقات الأخيرة، فتصبح:

$$\int_{-1}^1 W(x) f(x) T_i(x) dx = \int_{-1}^1 W(x) a_i [T_i(x)]^2 dx$$

وبإخراج الثابت a_i خارج التكامل السابق، ينتج لدينا:

$$a_i = \frac{\int_{-1}^1 W(x) T_i(x) f(x) dx}{\int_{-1}^1 W(x) [T_i(x)]^2 dx}, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

و بحسب العلاقات (2.37) من الخاصة الخامسة (الحالة الثالثة)، نجد أن:

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^1 W(x) T_0(x) f(x) dx}{\int_{-1}^1 W(x) [T_0(x)]^2 dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W(x) f(x) dx \quad (2.41a)$$

وأيضاً بحسب (2.37) الحالة الثانية، نحصل على بقية المعاملات:

$$a_i = \frac{\int_{-1}^1 W(x) T_i(x) f(x) dx}{\int_{-1}^1 W(x) [T_i(x)]^2 dx} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 W(x) T_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.41b)$$

إذن، تقريبات المربعات الصغرى المستمرة باستخدام حدوديات تشيبيتشيف المتعامدة، نحصل عليها بحساب المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_m$ في كثيرة الحدود التقريبية (2.39) مباشرة من العلاقات البسيطة (2.41a)-(2.41b) وهذه العلاقات بالتأكيد أقل كلفة في الحساب بكثير من كلفة حل جملة المعادلات الخطية المعتلة الشرطية (2.21) للحصول على المعاملات المذكورة.

مثال 17: أوجد تقريبات المربعات الصغرى من الدرجة الخطية وحتى الرابعة للدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ باستخدام حدوديات تشيبيتشيف المتعامدة فوق المجال

$$[-1,1] \text{ مع دالة الوزن } W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

الحل: لإيجاد التقريبات المطلوبة نحتاج لحدوديات تشيبيتشيف التالية:

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

ولدينا من العلاقة (2.41a):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} = 0.63662 \end{aligned}$$

ومن العلاقة (2.41b)، نجد بقية المعاملات كما يلي:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 W(x) T_i(x) f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

إذن:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (2x^2 - 1) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2x^3}{3} - x \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) = -0.424413,$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_3(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (4x^3 - 3x) dx = \frac{2}{\pi} \left(x^4 - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 0,$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_4(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (8x^4 - 8x^2 + 1) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{8x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(-\frac{2}{15} \right) = -0.0848826$$

وهكذا بتعويض قيم المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_4$ ، نحصل على التقريبات:

$$P_1(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) = 0.63662$$

$$P_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) =$$

$$= 0.63662 + (0)(x) - 0.42441(2x^2 - 1) = 1.06103 - 0.848826x^2$$

$$P_3(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + a_3 T_3(x) =$$

$$= 0.63662 + (0)(x) - 0.424413(2x^2 - 1) + (0)(4x^3 - 3x)$$

$$= 1.06103 - 0.848826x^2$$

$$P_4(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + a_3 T_3(x) + a_4 T_4(x) =$$

$$= 0.63662 + (0)(x) - 0.424413(2x^2 - 1) + (0)(4x^3 - 3x) -$$

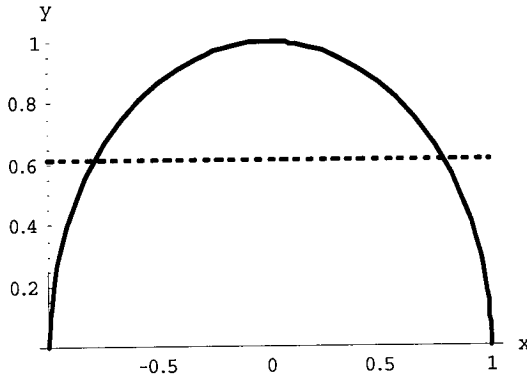
$$0.084883(4x^3 - 3x) = 0.97615 - 0.169765x^2 - 0.67906x^4$$

نلاحظ أن هناك تطابقاً بين تقريب المربعات الصغرى التربيعي والتكعيبي بسبب

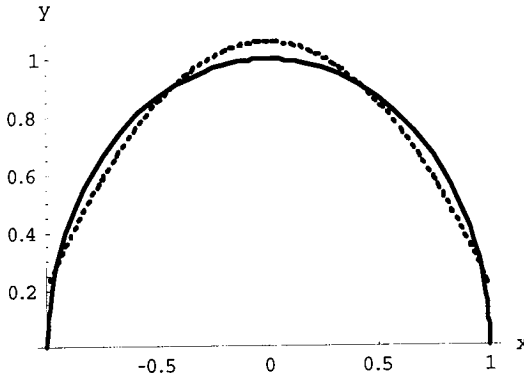
انعدام قيم المعاملات الفردية.

نبين في الأشكال (2.11)-(2.12)-(2.13) المنحنيات البيانية للدالة

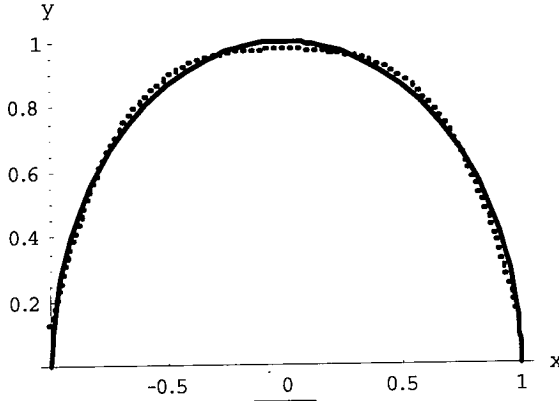
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، مع تقريبات المربعات من الخطية وحتى الدرجة الرابعة حيث يشير الخط المتقطع إلى المنحني التقريبي والمستمر إلى منحني الدالة الأساسية.



الشكل (2.11): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ وتقريب المربعات الصغرى الخطي باستخدام حدوديات تشيبيتشيف المتعامدة فوق المجال $[-1, 1]$.



الشكل (2.12): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ وتقريب المربعات الصغرى التربيعي باستخدام حدوديات تشيبيتشيف فوق المجال $[-1, 1]$.



الشكل (2.13): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ وتقريب المربعات الصغرى من الدرجة الرابعة باستخدام حدوديات تشيبتيشف فوق المجال $[-1, 1]$.

ج- تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبتيشف في الحالة المنفصلة

يمكن إيجاد تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبتيشف

المتعامدة في الحالة المنفصلة في العقد $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$, $k=0,1,\dots,n$ التي

هي أصفار كثيرة حدود تشيبتيشف $T_{n+1}(x)$ وعددها $(n+1)$ عقدة. ومن المعلوم

أن جميع هذه العقد تقع في المجال $[-1, 1]$ ، وبالتالي نستطيع تقريب الدالة f

المعلومة في النقاط $\{(x_k, f_k)\}_{k=0}^n$ بحدودية $P_m(x) \in \Pi_m$ من الدرجة m ، أي

كان $m \leq n$ ، بتحويل التكامل (2.40) إلى مجموع من الشكل:

$$\begin{aligned} \|f - P_m\|_2^2 &= \min \sum_{k=0}^n [f(x_k) - P_m(x_k)]^2 \\ &= \min_{a_0, a_1, \dots, a_m} \sum_{k=0}^n [f(x_k) - a_0 T_0(x_k) - a_1 T_1(x_k) - \dots - a_m T_m(x_k)]^2, \end{aligned}$$

حيث:

$$W(x)=1, \quad P_m(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_m T_m(x)$$

وبأسلوب مشابه لما سبق نضع

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n [f(x_k) - a_0 T_0(x_k) - a_1 T_1(x_k) - \dots - a_m T_m(x_k)]^2$$

ثم نجد نهاية دنيا للدالة E في المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_m$ كما يلي:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

وهذا يؤدي إلى:

$$-2 \sum_{k=0}^n [f_k - a_0 T_0(x_k) - a_1 T_1(x_k) - \dots - a_m T_m(x_k)] T_i(x_k) = 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

وباستخدام العلاقة (2.38) من الخاصة السادسة (الحالة الأولى) في تعامد حدوديات تشيبيتشيف المنفصلة، وبعد انعدام جميع مجاميع جداءات الحدوديات ذات الدرجات المختلفة، يمكن ترتيب العلاقات السابقة بالشكل:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) T_i(x_k) = a_i \sum_{k=0}^n T_i(x_k) T_i(x_k), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

ومنه نجد بسهولة:

$$a_i = \frac{\sum_{k=0}^n f(x_k) T_i(x_k)}{\sum_{k=0}^n [T_i(x_k)]^2}, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

وأيضاً باستخدام العلاقة (2.38) في الحالتين الثالثة والثانية على الترتيب نحصل على المعاملات المجهولة في كثيرة حدود المربعات الصغرى $P_m(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \quad (2.42a)$$

$$a_i = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_i(x_k)$$

$$= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \cos\left(i \frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right), \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.42b)$$

حيث:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right), \quad k=0,1,\dots,n \quad (2.43)$$

هي عقد (أصفار) حدودية تشيبيتشيف $T_{n+1}(x)$ من الدرجة $n+1$.

مثال 18: أوجد تقريبات المربعات الصغرى من الدرجة التربيعية وحتى الثامنة

للدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ باستخدام حدوديات تشيبيتشيف في الحالة المنفصلة في

عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة فوق المجال $[-1,1]$.

الحل: لدينا $n=10$ و $m=2,3,\dots,8$ ، أولاً، نحسب عقد كثيرة حدود تشيبيتشيف من العلاقة (2.43):

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right), \quad k=0,1,\dots,10$$

فينتج لدينا:

$$x_2 = 0.75575, \quad x_1 = 0.909632, \quad x_0 = 0.98982$$

$$x_5 = 0, \quad x_4 = 0.281733, \quad x_3 = 0.540641$$

$$x_8 = -0.75575, \quad x_7 = -0.540641, \quad x_6 = -0.281733$$

$$x_{10} = -0.98982, \quad x_9 = -0.909632$$

لتقريب الدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ بكثيرات حدود من الدرجة الثانية وحتى

الثامنة، نحتاج لتعيين قيم المعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_8$ من العلاقات

(2.42a)-(2.42b) كما يلي:

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) = 0.278406 ,$$

$$a_i = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{i\pi(2k+1)}{22}\right), \quad i=1,2,\dots,10$$

$$a_1 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{22}\right) = 0 ,$$

$$a_2 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{2\pi(2k+1)}{22}\right) = -0.316281 ,$$

$$a_3 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{3\pi(2k+1)}{22}\right) = 0 ,$$

$$a_4 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{4\pi(2k+1)}{22}\right) = 0.1811767 ,$$

$$a_5 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{5\pi(2k+1)}{22}\right) = 0 ,$$

$$a_6 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{6\pi(2k+1)}{22}\right) = -0.106465 ,$$

$$a_7 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{7\pi(2k+1)}{22}\right) = 0 ,$$

$$a_8 = \frac{2}{11} \sum_{k=0}^{10} f(x_k) \cos\left(\frac{8\pi(2k+1)}{22}\right) = 0.067241$$

نلاحظ أن جميع المعاملات الفردية للتقريبات معدومة، وبالتالي سنحسب فقط كثيرات الحدود ذات الدرجات الزوجية، لأن كثيرة الحدود ذات الدرجة الثانية مطابقة للدرجة الثالثة، والرابعة مطابقة للخامسة وهكذا.... إذن كثيرات الحدود المطلوبة نحصل عليها بالترتيب:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= a_0T_0(x) + a_2T_2(x) = 0.278406 - 0.316281(2x^2-1) \\ &= 0.594687 - 0.632562x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= a_0T_0(x) + a_2T_2(x) + a_4T_4(x) \\ &= 0.278406 - 0.31628(2x^2 - 1) + 0.181177(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 0.775864 - 2.081978x^2 + 1.449416x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_6(x) &= a_0T_0(x) + a_2T_2(x) + a_4T_4(x) + a_6T_6(x) \\ &= 0.278406 - 0.31628(2x^2 - 1) + 0.181177(8x^4 - 8x^2 + 1) - \\ &\quad 0.106465(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) \\ &= 0.882329 - 3.998348x^2 + 6.559736x^4 - 3.40688x^6 \end{aligned}$$

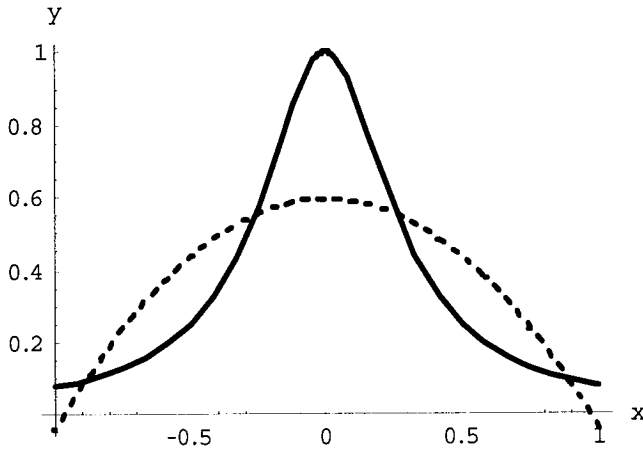
$$\begin{aligned} P_8(x) &= a_0T_0(x) + a_2T_2(x) + a_4T_4(x) + a_6T_6(x) + a_8T_8(x) \\ &= 0.278406 - 0.31628(2x^2 - 1) + 0.181177(8x^4 - 8x^2 + 1) - \\ &\quad 0.106465(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) + \\ &\quad 0.067241(128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1) \\ &= 0.94957 - 6.15006x^2 + 17.3183x^4 - 20.6206x^6 + 8.60685x^8 \end{aligned}$$

نبين في الأشكال (2.14)-(2.15)-(2.16)-(2.17) المنحنيات البيانية

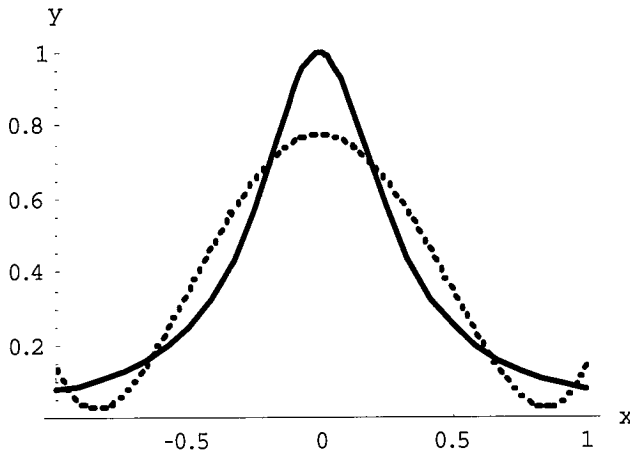
للدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ مع تقريباتها من الدرجات الثانية والرابعة والسادسة

والثامنة على الترتيب باستخدام حدوديات تشيبيتشيف في الحالة المنفصلة في عقد

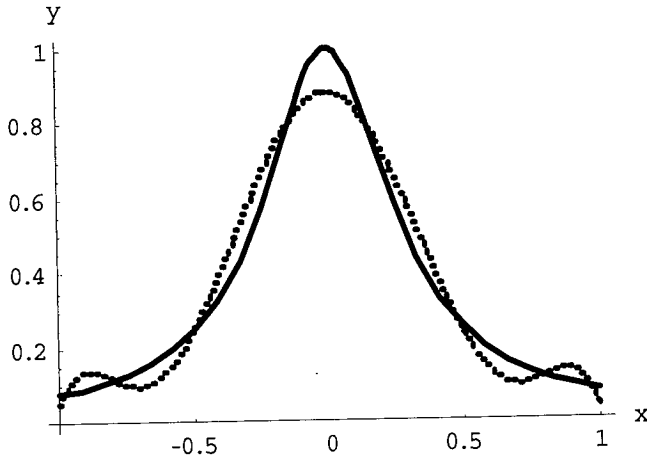
كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1,1]$.



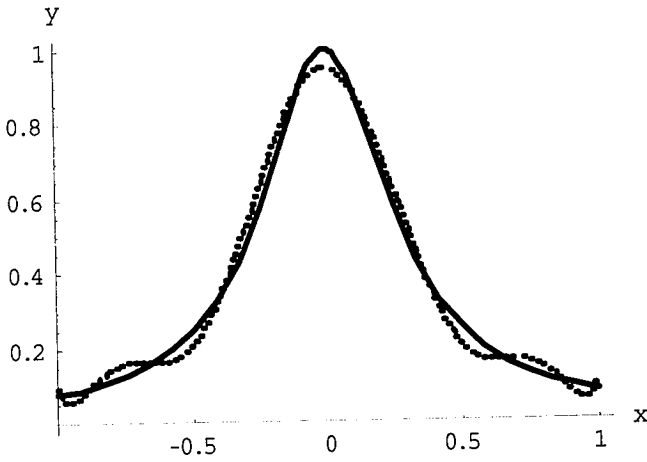
الشكل (2.14): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = 1/(1+12x^2)$ والتقريب التربيعي باستخدام حدوديات تشيبشيف في الحالة المنفصلة في عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1, 1]$.



الشكل (2.15): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = 1/(1+12x^2)$ والتقريب من الدرجة الرابعة باستخدام حدوديات تشيبشيف في الحالة المنفصلة في عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1, 1]$.



الشكل (2.16): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = 1/(1+12x^2)$ والتقريب من الدرجة السادسة باستخدام حدوديات تشيبشيف في الحالة المنفصلة في عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1,1]$.



الشكل (2.17): المنحنيان البيانيان للدالة $f(x) = 1/(1+12x^2)$ والتقريب من الدرجة الثامنة باستخدام حدوديات تشيبشيف المنفصلة في عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1,1]$.

نقدم فيما يلي برنامجاً لحساب معاملات تقريبات المربعات الصغرى من

الدرجة الثانية وحتى الدرجة الثامنة للدالة $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ في المثال 18، يتم

فيه حساب عقد كثيرة الحدود $T_{11}(x)$ المتناظرة في المجال $[-1,1]$ ، وحساب

معاملات تقريبات المربعات الصغرى $a_0, a_1, \dots, a_8$.

برنامج 2.7: تنفيذ المثال 18

PROGRAM LeastSquares;

uses wincrt;

Var n,k,i,m:integer;

x,y,a:Array[0..10] of real;

R:real;

Function f(x:real):real;

begin

f:=1/(1+12*Sqr(x))

End;

Begin

n:=10; m:=8;

For k:=0 to n do

begin

x[k]:=Cos((2*k+1)*Pi/(2*n+2));

writeln('x',k,'=', x[k]:2:6);

end;

a[0]:=0;

For k:=0 to n do

a[0]:=a[0]+1/(n+1)*f(x[k]);

writeln('x',k,'=', a[0]:2:6);

For i:=1 to m do

begin a[i]:=0;

For k:=0 to n do

a[i]:=a[i]+2/(n+1)*f(x[k])*Cos(i*(2*k+1)*Pi/(2*n+2));

writeln('a',i,'=', a[i]:2:6);

end;

End.

تمارين

1- لتكن لدينا كثيرة الحدود: $P(x) = x^3 + (x-a)^2$ ، حيث a عدد ثابتة، والمطلوب:

أ- إيجاد منشور الحدودية $P(x)$ وفق قوى $(x+2)$ وذلك بحساب قيمة كثيرة الحدود المذكورة ومشتقاتها المتتالية باستخدام طريقة هورنر للقسمة المختزلة.
ب- إيجاد جدول الفروق التقدمية حتى المرتبة الرابعة لكثيرة الحدود السابقة، إذا علمت أن: $x_i = i - 2$, $(i = 0, 1, \dots, 4)$.

2- لتكن لدينا الدالة: $g(x) = a(-1)^x$ ، حيث a ثابت عددي والمطلوب إيجاد جدول الفروق التقدمية حتى المرتبة الرابعة لـ $g(x)$ ، عند: $x_i = i - 2$, $(i = 0, 1, \dots, 4)$ ، ثم حساب قيمة $\Delta^2 g_2$.

3- لتكن لدينا كثيرة الحدود: $P(x) = x^4 - 2x^2 + ax$ ، و a ثابت عددي يطلب مايلي:

أ- إيجاد منشور الحدودية $P(x)$ وفق قوى $(x+2)$ وذلك بحساب قيمة كثيرة الحدود المذكورة ومشتقاتها المتتالية باستخدام طريقة هورنر للقسمة المختزلة.
ب- إيجاد جدول الفروق التقدمية حتى المرتبة الرابعة لـ $P(x)$ ، وحساب P_4 باستخدام العلاقة التي تربطها بالفروق التقدمية إذا علمت أن: $x_i = -2 + i$, $(i = 0, 1, \dots, 4)$.

4- لتكن لدينا الدالة $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ، فإذا علمت أن $\frac{\pi}{2}x$ معطاة بالراديان يطلب مايلي:

أ- استخدام طريقة استيفاء لاغرانج لإيجاد كثيرة الحدود التقريبية من الدرجة الثانية للدالة y ، علماً بأن $x_0 = 1$ ، والخطوة $h=1$.

ب- حساب القيمة التقريبية للدالة y عند $x=1.5$ ، ثم حساب الخطأ المطلق المرتكب ، وتقدير الحد الأعلى للخطأ عند تلك النقطة. مكتفياً بتقريب الأجوبة لخمسة أرقام عشرية.

5- لتكن الدالة $f(x) = x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ، فإذا علمت أن قيم $\frac{\pi}{2}x$ مقدرة بالراديان يطلب مايلي:

أ- إيجاد كثيرة حدود استيفاء نيوتن-غريغوري من الدرجة الثانية للدالة $f(x)$ ، إذا علمت أن $x_0 = 1$ ، والخطوة $h=1$ ، ثم كتابة صيغة الحد الأعلى للخطأ لهذه الحدودية دون حسابها.

ب- حساب قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند النقطة $x=1.5$ ، ثم تقدير قيمة للحد الأعلى للخطأ المرتكب في الحساب عند تلك النقطة.

6- لتكن لدينا الدالة $f(x) = 1 - \cos(\pi x)$ ، فإذا علمت أن قيم πx مقدرة بالراديان والمطلوب، إيجاد كثيرة حدود المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للدالة $f(x)$ ، في النقاط $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^4$ ، إذا علمت أن $x_0 = -2$ ، والخطوة $h=1$ ، $f_i = f(x_i)$.

7- لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ معرفة في النقاط المدرجة في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4	7	11
y_i	-1	2	7	6	9	14

والمطلوب تعيين الأمثال a_0, a_1 في الحدودية الخطية $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ بطريقة المربعات الصغرى، ثم حساب قيمة تقريبية للدالة عند $x=10$.

8- لنكن لدينا الدالة $y = x^2 \cos(x)$ ، يراد استبدالها بكثيرة حدود خطية وأخرى تكعيبية لتتلاءم أفضل مايمكن مع النقاط المجدولة التالية:

x_i	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y_i	π^3	$\frac{4\pi^3}{27}$	0	0	0	$-\frac{4\pi^3}{27}$	$-\pi^3$

ثم احسب قيمة تقريبية للدالة عند $x = \frac{\pi}{4}$ في الحالتين الخطية والتكعيبية، واستنتج أي القيمتين التقريبتين أدق.

9- أوجد تقريبات المربعات الصغرى من الدرجة الخطية وحتى التكعيبية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على المجال $[1, 3]$ في الحالة المستمرة.

10- بفرض لدينا الدالة $y = Ce^{Ax}$ ، المعرفة في النقاط $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^N$ ، يطلب تعيين كثيرة حدود المربعات الصغرى الخطية للدالة المذكورة.

5- أوجد تقريبات المربعات الصغرى المستمرة من الدرجة الخطية وحتى التكعيبية باستخدام حدوديات ليجندر المتعامدة للدالة:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

فوق المجال $[-1, 1]$.

11- أوجد تقريبات المربعات الصغرى من الدرجة الأولى وحتى الثالثة للدالة $f(x) = \cos(x)$ باستخدام حدوديات تشيبيشيف المتعامدة فوق المجال $[-1, 1]$ مع

$$دالة الوزن $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.$$

12- أثبت صحة العلاقات التالية:

$$\int_0^L \cos \frac{2\pi}{L} m x \cos \frac{2\pi}{L} n x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m = n \neq 0 \\ L, & m = n = 0 \end{cases} .a$$

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi}{L} m x \sin \frac{2\pi}{L} n x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases} .b$$

$$\int_0^L \cos \frac{2\pi}{L} m x \sin \frac{2\pi}{L} n x dx = 0 .c$$

13- أوجد تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبيشيف من الدرجات

الثانية والثالثة والرابعة للدالة $f(x) = x^3 e^x$ في الحالة المنفصلة في عقد كثيرة الحدود $T_9(x)$ فوق المجال $[-1,1]$.

14- أثبت أن كثيرات حدود تشيبيشيف $T_n(x)$ ، تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1-x^2)y'' - x y' + n^2 y = 0$$

3- الفصل الثالث

الحلول العددية للمعادلات الجبرية

يوجد نوعان من المعادلات الجبرية، فمنها ما يحتوي فقط حدود جبرية مشكلة من x وقواها على شكل كثيرات حدود، ومنها ما يتضمن بالإضافة إلى ذلك توابع مثل e^x , $\cos$, $\sin$ ، وهذا ما يولد بعض الصعوبات في إيجاد حلول لمثل هذه المعادلات بشكل مباشر.

إن مسألة إيجاد الجذور الحقيقية لمعادلة من الشكل:

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

تعد من المسائل الهامة، وهي تدخل في كثير من التخصصات العلمية. وهناك طرائق أولية لإيجاد القيم التقريبية لجذور تلك المعادلة.

تعريف (1): إن ξ عدد مثل ξ يجعل الدالة $f(x)$ معدومة أي، $f(\xi) = 0$ يسمى جذراً أو حلاً أو صفرًا للمعادلة (3.1). قبل البدء بعرض الطرائق العددية لحل معادلة من الشكل (3.1)، لابد من تقديم فكرة عن عزل الجذور وأهم طرائق الوصول إليها.

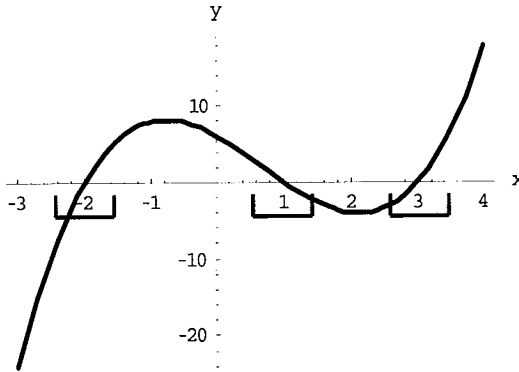
3.1 طرائق عزل جذور معادلة:

لنكن لدينا دالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً من المرات في مجال ما $[a, b]$ ، عندئذ نقول عن ξ أنه جذر معزول للمعادلة (3.1) في المجال $[a, b]$ ، إذا كان هذا الجذر هو الجذر الوحيد لتلك المعادلة في ذلك

المجال، بمعنى أدق البحث عن أصغر مجال ممكن مثل $[\alpha, \beta]$ يحوي جذرا واحدا فقط للمعادلة (3.1). يوجد العديد من طرائق عزل الجذور نذكر منها.

3.1.1 الطريقة البيانية:

تعتمد الطريقة البيانية لعزل جذور المعادلة $f(x)=0$ في مجال ما، على رسم المنحني البياني للدالة الحقيقية $y=f(x)$ في ذلك المجال، وعندئذ تمثل الجذور التي نبحث عنها فواصل نقاط تقاطع منحني الرسم مع المحور OX . فبعد حصولنا على تلك النقاط يكون من السهل تعيين المجالات التي تقع فيها تلك الجذور، انظر الشكل (3.1).



الشكل (3.1): جذور المعادلة: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

وقد يكون الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ ، عملية معقدة، عندئذ نلجأ في هذه الحالة إلى تجزئة الدالة f إلى دالتين $g(x)$, $\phi(x)$ ، بحيث تتحقق العلاقة:

$$f(x) = \phi(x) - g(x) = 0$$

نرسم المنحنيين البيانيين للدالتين $g(x)$, $\varphi(x)$ والتي من المفترض أن تكونا أبسط من الدالة $f(x)$. وتكون جذور المعادلة المطلوبة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنيين لدالتي التجزئة.

مثال 1:

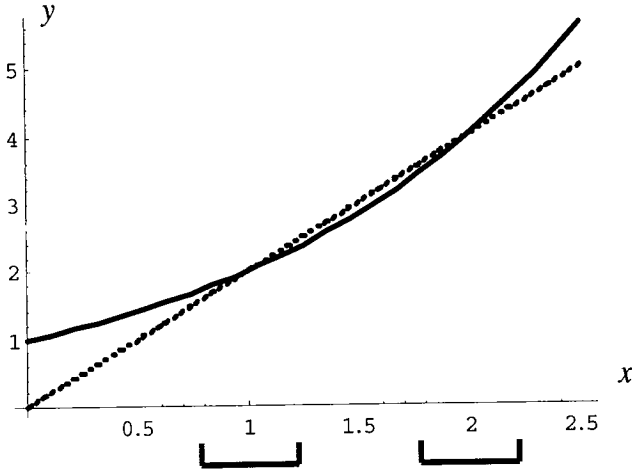
لنكن لدينا المعادلة:

$$f(x) = 2^x - 2x = 0$$

نجزئ الدالة الأساسية إلى الدالتين:

$$\varphi(x) = 2^x, g(x) = 2x$$

يبين الشكل (3.2) فاصلتي نقطتي تقاطع الدالتين وهما $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ وبالطبع فهما جذران للمعادلة المطلوبة، ويمكن عزل الجذر الأول مثلاً في المجال $x_1 \in [1.8, 2.2]$ والجذر الثاني في المجال $x_2 \in [0.8, 1.2]$.



الشكل (3.2): تحديد فواصل نقطتي تقاطع دالتي التجزئة.

3.12 الطريقة الجبرية:

نبدأ شرحنا للطريقة الجبرية بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 1:

إذا أخذت الدالة المستمرة $f(x)$ قيمتين من إشارتين مختلفتين عند x_1, x_2 ، أي إذا كان

$$f(x_1).f(x_2) < 0$$

فإن المجال $[x_1, x_2]$ يتضمن جذرا واحدا على الأقل للمعادلة $f(x)=0$.

إن المبرهنة 1 ضرورية ولكن ليست كافية لعزل جذر في مجال ما فهي تؤكد أنه يوجد جذر في مجال ما وهذا أمر مهم ولكن لا تضمن بأن هذا الجذر هو الوحيد في ذلك المجال.

فيمكن لخواص الدالة أن تساعدنا كثيراً من الأحيان في الوصول إلى جذر وحيد في مجال ما. فمثلاً، إذا حققت دالة $f(x)$ المبرهنة 1 في مجال ما وكانت هذه الدالة مطردة (متزايدة دوماً أو متناقصة دوماً) في ذلك المجال فإن الجذر الموجود في ذلك المجال يكون وحيداً. وللأسف فإن هذه الخواص لا تتوفر في جميع الدوال.

بديلاً عن ذلك، يمكننا الاعتماد على **مبرهنة رول** التي تقول بأنه يوجد بين كل جذرين متتاليين x_1, x_2 لـ $f'(x)=0$ جذر وحيد لـ $f(x)=0$ ، شريطة أن يكون

$$f(x_1).f(x_2) < 0$$

وبشكل عام يمكننا عزل جذر في مجال ما $[a,b]$ باتباع الشروط التالية:

1. إذا كان $f(a).f(b) < 0$ ، فبحسب المبرهنة 1 يوجد جذر واحد على الأقل في المجال $[a,b]$.

2. إذا كان $f'(x) \neq 0$ دوماً في المجال $[a, b]$.

إن الشرطيين السابقين كافيين لعزل جذر في المجال $[a, b]$.

ويمكن أيضاً عزل جذر بأخذ الشرط الأول واستبدال الشرط الثاني بمبرهنة رول

أي إذا كان a, b جذرين متتاليين لـ $f'(x) = 0$.

أما إذا كان $f(a).f(b) > 0$ فهذا يعني أننا نميز احتمالين: الأول أن لا يكون للمعادلة

$f(x) = 0$ أي جذر في المجال $[a, b]$.

والثاني: أن يكون للمعادلة $f(x) = 0$ عدد مضاعف من الجذور في المجال المذكور.

مثال 2: تأكد من وجود جذور معزولة للمعادلة:

$$f(x) \equiv x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

في المجالات $[-1.5, -0.5]$, $[0.5, 1.5]$, $[2.5, 3.5]$.

الحل: نلاحظ أن $f(-1.5).f(-0.5) = (-5.625)(2.625) = -14.7656 < 0$ وهذا

يعني وجود جذر واحد على الأقل في المجال $[-1.5, -0.5]$ ، ونجد أن هذا الجذر

وحيد لأن $f'(x) \equiv 3x^2 - 6x - 1 \neq 0$ في المجال $[-1.5, -0.5]$ ، انظر الشكل

(3.3b).

ونلاحظ أيضاً أن $f(0.5).f(1.5) = (1.875)(-1.875) = -3.51563 < 0$ هذا

يعني وجود جذر واحد على الأقل في المجال $[0.5, 1.5]$ ، وأنه جذر وحيد لأن

$f'(x) \equiv 3x^2 - 6x - 1 \neq 0$ في المجال $[0.5, 1.5]$ ، كما هو موضح في الشكل

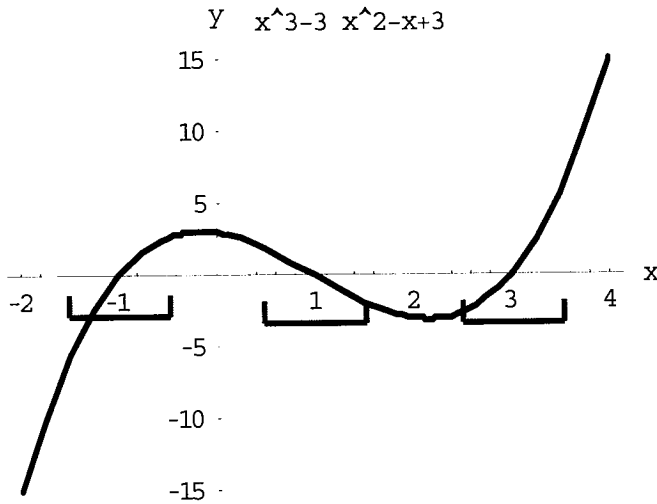
(3.3b).

في المجال الثالث أيضاً يتحقق :

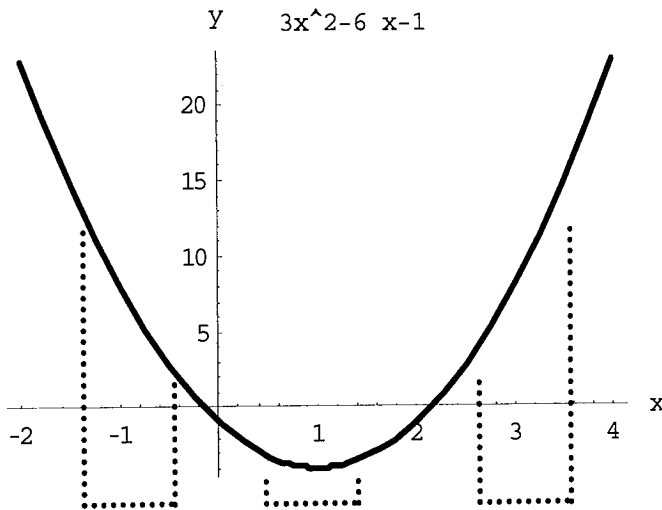
$$f(2.5).f(3.5) = (-2.625)(5.625) = -14.7656 < 0$$

يعني وجود جذر واحد على الأقل في المجال $[2.5, 3.5]$ ،

وبما أن: $f'(x) \equiv 3x^2 - 6x - 1 \neq 0$ مهما تكن قيم x في هذا المجال $[2.5, 3.5]$ ،
يبين الشكل (3.3b) وجود جذر وحيد ضمن هذا المجال.



الشكل (3.3a): المخطط البياني لـ $f(x)$ في $[-2, 4]$



الشكل (3.3b): المخطط البياني لـ $f'(x)$ في $[-2, 4]$

مما تقدم نستطيع القول أننا استطعنا عزل جذور معادلة وحصر كل جذر في مجال لا يحوي غيره. ويجب التنويه أيضا إلى أنه من السهل تحقيق الشرط الأول لعزل جذر، أي حساب قيمتي دالة عند طرفي مجال ما، ولتحقيق الشرط الثاني، أي إثبات $f'(x) \neq 0$ في مجال $[a, b]$ يمكن تحقيق ذلك بتجزئة هذا المجال إلى n من المجالات المتساوية وحساب قيم دالة المشتق $f'(x)$ عند $x_i = a + h$ $i = 0(1)n$ حيث $h = (b-a)/n$.

بعد أن قدمنا لمحة بسيطة حول عزل جذور معادلة في مجالات محددة، لم يتبق سوى إيجاد تلك الجذور التي سنفترض أنها معزولة. نقدم في الفقرة القادمة بعض الطرائق العددية لحساب جذر معزول في مجال محدد.

3.2 الطرائق التقريبية لحل المعادلات:

3.2.1 طريقة تنصيف المجال: Bisection method

بفرض لدينا المعادلة $f(x)=0$ ، وأن الدالة $f(x)$ مستمرة في المجال $[a, b]$ ، ويوجد جذر معزول r للمعادلة المذكورة في المجال $[a, b]$ ، أي يتحقق الجداء $f(a).f(b) < 0$ ، عندئذ نحسب منتصف المجال $[a, b]$ وليكن x_0 ، هذه النقطة تقسم المجال السابق إلى المجالين الجزئيين $[a, x_0]$ ، $[x_0, b]$ ، وبإجراء الاختبار، حتما الجذر المعزول سيقع في أحدهما، ومن جديد نحسب نقطة منتصف المجال الجزئي الذي وجدنا أن الجذر يقع فيه، ولتكن x_1 ، تقسم هذه النقطة بدورها المجال الجزئي إلى مجالين جزئيين جديدين، نستمر بهذا الأسلوب حتى نحصل على مجال جزئي صغير جداً، ينحصر الجذر فيه، ويكون منتصفه هو الجذر التقريبي الذي نبحث عنه، بخطأ لا يتجاوز طول هذا المجال الصغير. يمكن تلخيص خوارزمية طريقة تنصيف المجال في النقاط التالية:

1- ندخل قيم a, b, n (أو $\Delta = 1.0E-6$) ثم نضع $i=0$.

2- نحسب $x_i = (a+b)/2$ ، ثم نحسب $f(x_i)$ ، فإذا كان $f(x_i)=0$ يكون x_i هو الحل ننتقل إلى الخطوة 6.

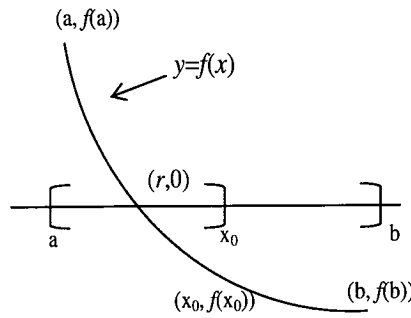
3- إذا كان $f(a) \cdot f(x_i) < 0$ ، يعني أن الجذر سيقع في المجال $[a, x_i]$ ، نضع $b := x_i$ (كما في الشكل (3.4)) وإلا

4- إذا كان $f(x_i) \cdot f(b) < 0$ ، يعني أن الجذر سيقع في المجال $[x_i, b]$ ، نضع $a := x_i$ (كما في الشكل (3.5)).

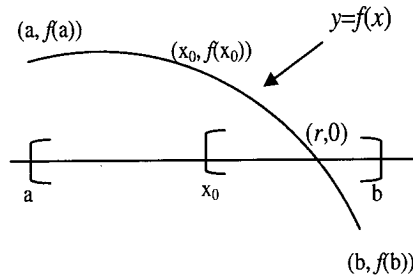
5- إذا كان $i = n$ (أو $\text{Abs}(f(x_i)) < \text{Delta}$) ننتقل إلى الخطوة 6، وإلا نضع $i := i + 1$ ثم نعود إلى التكرار بدءاً من الخطوة 2.

6- طباعة قيم $x_i, f(x_i)$

7- النهاية.



الشكل (3.4): $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ ، ينحسر المجال من اليمين



الشكل (3.5): $f(b) \cdot f(x_0) < 0$ ، ينحسر المجال من اليسار

مثال 3: استخدم طريقة تنصيف المجال Bisection: لإيجاد جذر تقريبي معزول في المجال $[0, 1]$ للمعادلة:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

الحل: نجد أولاً أن $f(0) = -1$ ، $f(1) = 1$ ، وبالتالي $f(0) \cdot f(1) < 0$ ، يعني حتماً أن الجذر الوحيد موجود في المجال $[0, 1]$.

نحسب $x_0 = (a+b)/2 = 0.5$ ، ثم $f(0.5) = -1.18750$ ، لنجد أن x_0 ليست جذراً للمعادلة وهذه النقطة قسمت المجال $[0, 1]$ إلى مجالين سيقع الجذر الذي نبحث عنه في أحدهما؛ بسهولة نجد أن $[0.5, 1]$ هو المجال الذي ينتمي إليه الجذر لأن $f(0.5) \cdot f(1) < 0$

نحسب منتصف المجال الجديد $[0.5, 1]$:

ثم نحسب قيمة الدالة فيه $f(0.75) = -0.58984$ لنلاحظ أيضاً x_1 ليست جذراً وهي قسمت المجال $[0.5, 1]$ إلى مجالين سيقع الجذر في أحدهما؛ بسهولة نجد أن $[0.75, 1]$ هو مجال الجذر لأن $f(0.75) \cdot f(1) < 0$ ، نكرر الخطوات السابقة بحساب منتصف المجال الذي يقع فيه الجذر نجد:

$x_2 = (0.75 + 1)/2 = 0.875$ ، و $f(0.875) = 0.05103$ ، x_2 ليس جذراً لكنه يقترب منه، وبالحساب ينتج أن

$f(0.875) \cdot f(1) > 0$ و $f(0.75) \cdot f(0.875) < 0$ ، إذن $[0.875, 0.75]$ هو مجال الجذر، نحسب منتصفه:

$x_3 = (0.75 + 0.875)/2 = 0.8125$ ، و $f(0.8125) = -0.30394$ ، x_3 ليس جذراً

ومن جديد يكون مجال الجذر $[0.875, 0.8125]$ لأن

$$f(0.875) \cdot f(0.8125) < 0$$

$x_4 = (0.875 + 0.8125)/2 = 0.84375$ ، و $f(0.84375) = -0.135573$

وبالمتابعة نجد أن :

$x_5=0.85938$, $[0.84375, 0.875]$, $f(0.85938)=-0.04461$;
 $x_6=0.86719$, $[0.85938, 0.875]$, $f(0.86719)=-0.00261$;
 $\vdots$
 $x_{13}=0.86676$, $[0.86670, 0.86682]$, $f(0.86676)=-0.000001$;

مخطط خوارزمي لطريقة تنصيف المجال في مقدمته تمثيل الدالة $f(x)$

```

Function f(x:real):real;
begin
f:=expression;
end;
  
```

```

1-begin
2- read (a,b,n); i:=0,
3-  $x_0=(a+b)/2$ ;
4-write('x',i,' ',x0:2:4,' f(' ,x0:2:4,')=' ,f(x0));
5- if  $f(x_0)=0$  then goto 10
6- If  $f(a)*f(x_0)<0$  then b:=x0
   else a:=x0;
7- i:=i+1
8- if i=n then goto 10
9- goto 2
10- End
  
```

برنامج 3.1: لإيجاد جذر معزول للمعادلة الجبرية في المثال 3 بطريقة

تنصيف المجال:

```

Program BisectionMethod;
uses wincrt; label 10;
Var x0,a,b:real; i,n:integer;
Function f(x:real):real;
begin
  f:=  $\text{sqr}(x*x)+2*\text{sqr}(x)*x-x-1$ ;
end;
Begin
writeln(Bisection Method to find a root of  $f(x)=0$ , in
[a=0,b=1]);
write('Input a='); readln(a); { start [0,1]}
  
```



```

write('Input b=');readln(b);
write('Input n=');readln(n); i:=0;
Repeat x0:=(a+b)/2;
writeln('a,i,=',a:2:5,' ', 'x,i,=',x0:2:4,' ',b',
        i,=',b:2:5,' f('x0:2:4,')=,f(x0):2:6);
if f(x0)=0 then goto 10
else
  If f(a)*f(x0)<0 then b:=x0
  else a:=x0;
i:=i+1;
until i=n;
10:writeln('The Root is=',x0:2:7,'
          iteration=',i)
End.

```

3.2.2 طريقة القواطع : Secants Method

بفرض، لدينا المعادلة $f(x)=0$ ، حيث $f(x)$ دالة مستمرة في المجال $[a,b]$ ، وبفرض أنه يوجد جذر معزول لهذه المعادلة في المجال $[a,b]$ وأن a, b قريبان من هذا الجذر كفاية، وبالتالي من الطبيعي أن يكون $f(a).f(b)<0$. تعتمد هذه الطريقة على المستقيم القاطع لمنحني الدالة $y=f(x)$ في النقطتين:

$$p_2(b, f(b)), p_1(a, f(a))$$

الواقعتين على الخط البياني للدالة $y=f(x)$ ، نلاحظ أن هذا الوتر سوف يقطع محور الفواصل في نقطة فصلها c الشكل (3.6) أو (3.7).

لإيجاد قيمة c نحسب ميل المستقيم المنطبق على الوتر القاطع $\overline{p_1 p_2}$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad m = \text{يكون الميل} \quad p_2(b, f(b)), p_1(a, f(a)) \text{ باستخدام النقطتين}$$

$$\frac{0 - f(b)}{c - b} \quad m = \text{يكون الميل} \quad (c, f(c)=0), (b, f(b)) \text{ باستخدام النقطتين}$$

وبالمساواة بينهما نجد أن:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{0-f(b)}{c-b} \rightarrow$$

يكون من السهل إيجاد قيمة c من العلاقة السابقة:

$$c = b - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} f(b) \quad (3.2)$$

نميز هنا ثلاثة احتمالات:

1- إذا كانت قيمتا $f(a)$ ، $f(c)$ مختلفتين بالإشارة سيقع الجذر في المجال

$[a, c]$ ، كما هو موضح في الشكل (3.7).

2- إذا كانت قيمتا $f(b)$ ، $f(c)$ مختلفتين بالإشارة سيقع الجذر في المجال $[c, b]$ ،

كما هو موضح في الشكل (3.6).

3- إذا كان $f(c)=0$ ، يكون c هو الجذر المطلوب.

تقارب الطريقة:

إذا لم يكن c المحسوب من العلاقة (3.2) هو جذر للمعادلة $f(x)=0$ ،

عندئذ يمكننا البحث عنه وفق الاحتمالين (1) أو (2)، وبالتالي سيتم حصر هذا

الجذر بمتتالية من المجالات $\{[a_i, b_i]\}$.

إن في كل خطوة تقترب من الجذر r وفق علاقة تكرارية من الشكل:

$$c_i = b_i - \frac{(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} f(b_i), i=0,1,... \quad (3.3)$$

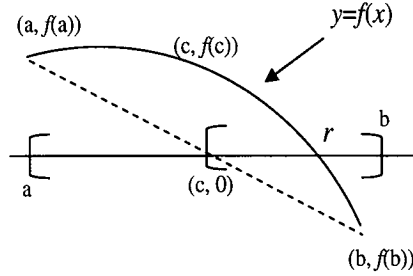
وهكذا إذا تم اختيار مجال $[a, b]$ وكانت a, b قريبين من الجذر r بقدر كاف

وكانت الدالة $f(x)$ ملساء في هذا المجال، سنحصل على تقارب للمتتالية (3.3)

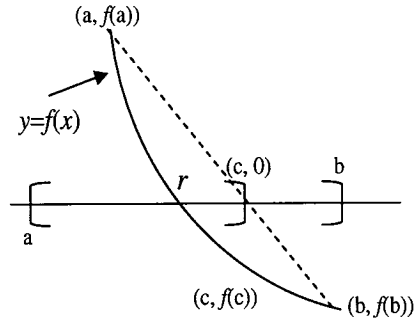
$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = r$$

نلخص خوارزمية الطريقة بالنقاط التالية:

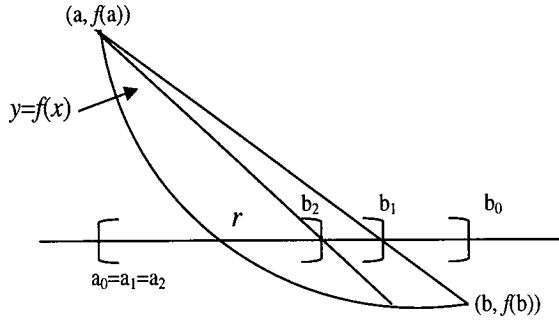
- 1- ندخل قيمة $a_0 \equiv a$, $b_0 \equiv b$, n , (أو $\Delta = 1.0E-6$) ثم نضع $i=0$.
- 2- نحسب قيمة c_i من العلاقة (3.3)، ثم نحسب قيمة $f(c_i)$ ، فإذا كان $f(c_i)=0$ يكون c_i هو الجذر، ننتقل إلى الخطوة 6
- 3- إذا كان $f(a_i) * f(c_i) < 0$ ، يعني أن الجذر يقع في المجال $[a_i, c_i]$ ، نضع $b_i := c_i$ ، كما في الشكل (3.7)، وإلا:
- 4- إذا كان $f(c_i) * f(b_i) < 0$ ، يعني أن الجذر يقع في المجال $[c_i, b_i]$ ، نضع $a_i := c_i$ ، كما في الشكل (3.6).
- 5- إذا كان $i=n$ أو $(\text{Abs}(f(x_i)) < \Delta)$ ننتقل إلى الخطوة 6، وإلا نضع $i := i+1$ ، $a_i = a_{i-1}$ ، $b_i = b_{i-1}$ ، ثم نعود إلى التكرار بدءاً من الخطوة 2.
- 6- طباعة قيم x_i ، $f(x_i)$
- 7- النهاية.



الشكل (3.6): $f(b).f(c) < 0$ ، ينحسر المجال من اليسار



الشكل (3.7): $f(a) \cdot f(c) < 0$ ، ينحسر المجال من اليمين



الشكل (3.8): بقاء نقطة بداية المجال $[a, b]$ ثابتة في طريقة القواطع

مثال 4: استخدم طريقة القواطع Secants: لإيجاد جذر تقريبي معزول في المجال $[0, 1]$ للمعادلة:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

الحل: نجد أولاً من المجال أن $b_0=1, a_0=0$ ، وأن $f(0)=-1$ ، $f(1)=1$ ، يؤدي

إلى $f(0) \cdot f(1) < 0$ ، يعني يوجد جذر في المجال $[0, 1]$ ،

نحسب قيمة c_0 وهي أول تكرار في المجال $[0, 1]$:

$$c_0 = b_0 - \frac{(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0) = 1 - \frac{(1 - 0)}{f(1) - f(0)} f(1) = 0.5$$

نحسب قيمة الدالة $f(c_0)=f(0.5)=-1.18750$ ، لنجد أن c_0 ليست جذرا للمعادلة وقبل الانتقال إلى الخطوة التالية لابد من ملاحظة أن:

$$f(c_0)*f(b_0)=-1.18750<0$$

وبالتالي يجب إبدال $b_1=b_0=1$ ، $a_1=c_0=0.5$ ، ويكون المجال الجديد هو $[a_1, b_1] \equiv [0.5, 1]$ ، نحسب التكرار الثاني c_1 ،

$$c_1 = b_1 - \frac{(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} f(b_1) = 1 - \frac{(1 - 0.5)}{f(1) - f(0.5)} f(1) = 0.77143$$

نحسب قيمة الدالة $f(c_1)=f(0.77143)=-0.49913$ ، نجد أن c_1 ليست جذرا للمعادلة، كما ونلاحظ أن $f(c_1)*f(b_1)<0$ وبالتالي بحسب الخوارزمية سنضع:

$$b_2=b_1=1, a_2=c_1=0.77143$$

ويصبح المجال الجديد هو $[a_2, b_2] \equiv [0.77143, 1]$ ، نحسب من جديد c_2 :

$$c_2 = b_2 - \frac{(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} f(b_2) = 1 - \frac{(1 - 0.77143)}{f(1) - f(0.77143)} f(1) = 0.84753$$

ونحسب قيمة الدالة عند هذا التكرار $f(c_2)=f(0.84753)=-0.113991$ ، نجد أن c_2 ليست جذرا للمعادلة، وأن $f(c_2)*f(b_2)=-1.113991<0$ ، إذن سنضع:

$$b_3=b_2=1, a_3=c_2=0.84753$$

والمجال الجديد هو $[a_3, b_3] \equiv [0.84753, 1]$ ، وبالمتابعة بالأسلوب نفسه

سنحصل على نتائج التكرارات المتتالية:

$$c_3=0.86313, a_3=0.84753, b_3=1, f(c_3)=f(0.86313)=-0.022052,$$

$$c_4=0.86608, a_4=0.86313, b_4=1, f(c_4)=f(0.86608)=-0.004125,$$

$$c_5=0.86663, a_5=0.86608, b_5=1, f(c_5)=f(0.86663)=-0.000767,$$

$$c_6=0.86674, a_6=0.86663, b_6=1, f(c_6)=f(0.86674)=-0.000142,$$

$$c_7=0.86676, a_7=0.86674, b_7=1, f(c_7)=f(0.86676)=-0.000026,$$

$$c_8=0.86676, a_8=0.86676, b_8=1, f(c_8)=f(0.86676)=-0.000005,$$

The Root is= $c_8=0.86676$

برنامج 3.2: لطريقة القواطع (Secants Method): لإيجاد جذر معزول

للمعادلة الجبرية $f(x)=0$ بإدخال طرفي مجال $[a,b]$ يحوي جذرا معزولا داخله.

يضعك هذا البرنامج أمام قائمة من المعادلات لتختار واحدة منها، وستظهر نتائج

التكرارات بمجرد الانتهاء من إدخال البيانات المطلوبة، وقائمة المعادلات هي:

$$1: f(x) \equiv e^x - t - 2 = 0$$

$$2: f(x) \equiv \sin(t) - 2t = 0$$

$$3: f(x) \equiv 2^t - 2t = 0$$

$$4: f(x) \equiv \ln(t) + t - 5 = 0$$

$$5: f(x) \equiv t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$$

$$6: f(x) \equiv t^4 + 2t^3 - t - 1 = 0$$

البرنامج:

PROGRAM SecantsMethod;

Uses wincrt; **Label 10;**

Var c,a,b, **delta**:Real;

i,n,k:integer; ch:char;

CHOICE:ARRAY[1..15] OF STRING[50];

FUNCTION f(t:real):real;

Begin

case k of

1:f:=exp(t)-t-2;

```

2:f:=Sin(t)-2*t;
3:f:=Exp(t*ln(2))-2*t;
4:f:=Ln(t)+t-5;
5:f:=t*t*t-3*sqr(t)-t+3;
6:f:=sqr(t*t)+2*t*sqr(t)-t-1
end;{end case}
End; {end func}
BEGIN {main}
writeln('Secants method to find a root of f(x)=0, in [a,b]');
choice[1]:='f(t)=exp(t)-t-2=0   [a,b]=[0 , 1.5]';
choice[2]:='f(t)=Sin(t)-2 t=0   [a,b]=[-1 , 0.5]';
choice[3]:='f(t)=2^t-2 t=0      [a,b]=[0.5, 1.8]';
choice[4]:='f(t)=Ln(t)+t-5=0     [a,b]=[3.5 , 4]';
choice[5]:='f(t)=t^3-3*t^2-t+3=0 [a,b]=[-1.5 , 0]';
choice[6]:='f(t)=t^4+2*t^3-t-1=0 [a,b]=[0 , 1]';
choice[7]:='Exit';
REPEAT clrscr;
for i:=1 to 7 do writeln(choice[i]);
write('Select Nunmber of function for its input:');readln(k);
writeln(choice[k]);if k=7 then exit;
write('Input a='); readln(a);
write('Input b='); readln(b);
i:=0; delta:=0.1E-6;
Repeat
c:=b-(b-a)*f(b)/(f(b)-f(a));
writeln('a,i,','a:2:5,' ,',c,i,','c:2:5,' ,b,i,','b:2:5,
' f('c:2:5,')=,f(c):2:6);
if f(c)=0 then goto 10
else
    If f(a)*f(c)<0 then b:=c   else a:=c;
i:=i+1;
Until {i=n} Abs(f(c))<delta;
10:writeln('The Root is=',c:2:7,' iteration=',i);
write('To Exit Press n or N else To Continue press y Or Y
:'); readln(ch);
UNTIL (ch='n') or (ch='N');
END.

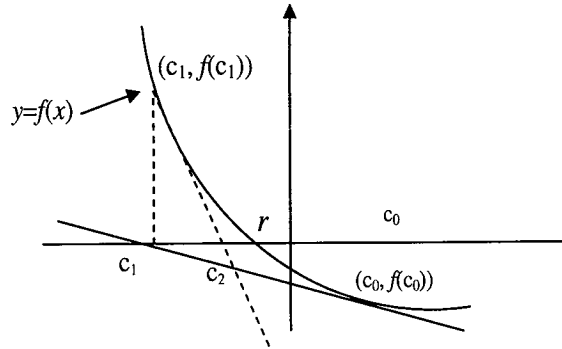
```

3.2.3 طريقة نيوتن-رافسون : Newton-Raphson Method

بفرض أن $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ دوال مستمرة قرب جذر معزول r ، عندئذ فإن هذه المعلومات الإضافية حول الدالة $f(x)$ يمكن الاستفادة منها في تطوير خوارزميات، ستنتج عنها متتالية من التقريبات $\{c_k\}$ ، $k=0,1,2,\dots$ ، تقاربها سيكون أسرع إلى r من تقارب الطريقتين السابقتين.

تعتبر طريقة نيوتن-رافسون من أفضل الطرائق التي تستخدم خوارزميات تعتمد على استمرارية $f'(x)$ ، $f''(x)$.

بفرض أن c_0 تقريب ابتدائي (قريب من الجذر r بقدر كاف)، عندئذ المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ يقطع محور السينات في النقطة $(r,0)$ ، والنقطة $(c_0, f(c_0))$ تقع على المنحني بالقرب من النقطة $(r,0)$ ، انظر الشكل (3.9)



الشكل (3.9): مخطط هندسي لطريقة نيوتن رافسون

ننشئ المستقيم المماس لمنحني الدالة $f(x)$ في النقطة $(c_0, f(c_0))$ ، نحصل على c_1 فاصلة نقطة تقاطع المماس مع المحور OX ، فتكون c_1 أقرب إلى الجذر r من c_0 .

ثم ننشي من جديد المماس عند النقطة $(c_1, f(c_1))$ ، نحصل على c_2 فاصلة نقطة تقاطع المماس الجديد مع المحور OX ، فتكون c_2 أقرب إلى الجذر r من c_1 وهكذا نستمر بهذا الأسلوب حتى نحصل على تقريب مناسب.

نحسب ميل المستقيم المماس للمنحني في النقطة $(c_0, f(c_0))$ من خلال حساب الميل في النقطتين $(c_0, f(c_0))$ ، $(c_1, 0)$:

$$m = \frac{0 - f(c_0)}{c_1 - c_0}$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$m = f'(c_0)$$

هو ميل المستقيم المماس للمنحني في النقطة $(c_0, f(c_0))$ بالمساواة بين الميلين نحصل على:

$$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)} \quad (3.4)$$

يمكن تكرار العلاقة (3.4) والحصول على متتالية $\{c_k\}$ متقاربة من الجذر r وبالتالي تنتج علاقة تكرارية من الشكل:

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.5)$$

بتطبيق هذا الدستور نحصل على القيم المتتالية:

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$$

التي نأمل أن تكون متقاربة من الجذر الحقيقي r ، ونعتبر أن c_n هو الجذر التقريبي المطلوب إذا تحقق أحد المعيارين:

$$|c_n - c_{n-1}| < \epsilon, \quad |f(c_n)| < \epsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب.

مبرهنة 2: بفرض أن f تحقق الشروط التالية في المجال $[a, b]$:

أ- $f(a)f(b) < 0$

ب- $f'(x)$ لا تملك أصفاراً في المجال $[a, b]$

ج- $f''(x)$ لا تغير إشارتها في المجال $[a, b]$.

د- $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b-a, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b-a$

عندئذ من أجل أي $c_0 \in [a, b]$ ، تتقارب تكرارية نيوتن (3.5) إلى حل

وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a, b]$.

مثال 5: استخدم طريقة نيوتن-رافسون: لإيجاد جذر تقريبي معزول في المجال

$[0.5, 2]$ للمعادلة:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

معتبراً أن $c_0 = 1$ هو تقريب ابتدائي، وبتفاوت لايزيد عن $\varepsilon = 0.001 = 1.E-3$

الحل: بما أن $f(0.5) = -1.1875$ و $f(2) = 29$ ، يكون

$$f(0.5) \cdot f(2) = -34.4375 < 0$$

لدينا من المسألة $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ ، والمشتق $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1$

نطبق صيغة نيوتن (3.5)، نجد:

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)} = c_k - \frac{(c_k)^4 + 2(c_k)^3 - c_k - 1}{4(c_k)^3 + 6(c_k)^2 - 1}$$

نحصل على التكرار الأول، إذا وضعنا $k=0$

$$c_1 = c_0 - \frac{(c_0)^4 + 2(c_0)^3 - c_0 - 1}{4(c_0)^3 + 6(c_0)^2 - 1} = 1 - \frac{1 + 2 - 1 - 1}{4 + 6 - 1} = 0.88889;$$

إن هذا التكرار لا يحقق التفاوت لأن

$$|c_1 - c_0| = |0.88889 - 1| = 1.111E-1 > 1.E-3,$$

$$f(c_1) = 0.140077$$

نتابع التكرار من أجل $k=1$ ، نحصل على التكرار الثاني:

$$c_2 = c_1 - \frac{(c_1)^4 + 2(c_1)^3 - c_1 - 1}{4(c_1)^3 + 6(c_1)^2 - 1} =$$

$$0.88889 - \frac{(0.88889)^4 + 2(0.88889)^3 - 0.88889 - 1}{4(0.88889)^3 + 6(0.88889)^2 - 1} =$$

$$0.88889 - \frac{0.14007}{6.550069} = \underline{0.86750}$$

وللتأكد من تحقق من التفاوت نجد:

$$|c_2 - c_1| = |0.86750 - 0.88889| = 2.139E-3 > 1.E-3,$$

$$f(c_2) = 0.004526$$

وهو غير محقق لذلك نضع $k=2$ ، للحصول على التكرار الثالث:

$$c_3 = c_2 - \frac{(c_2)^4 + 2(c_2)^3 - c_2 - 1}{4(c_2)^3 + 6(c_2)^2 - 1} =$$

$$0.86750 - \frac{(0.86750)^4 + 2(0.86750)^3 - 0.86750 - 1}{4(0.86750)^3 + 6(0.86750)^2 - 1} =$$

$$0.86750 - \frac{0.004553}{6.126793} = \underline{0.86676}$$

وهكذا نتوقف عن التكرار ونعتبر أن $c_3 = 0.86676$ هو الجذر التقريبي المطلوب

بخطأ أصغر من التفاوت المفروض لأن:

$$|c_3 - c_2| = |0.86676 - 0.86750| = 7.4E-4 < 1.E-3$$

ونلاحظ أيضاً أن قيمة الدالة عند هذا التكرار قريبة من الصفر:

$$f(c_3) = f(0.86676) = 0.000005 = 5.E-6$$

برنامج 3.3: لطريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson Method): يجد جذر معزول في مجال ما $[a,b]$ للمعادلة غير الخطية $f(x)=0$ بإدخال قيمة تقريبية ابتدائية $c_0 \in [a,b]$. سيضعك هذا البرنامج أمام قائمة من المعادلات لتختار واحدة منها، وستجد نتائج التكرارات بمجرد الانتهاء من إدخال البيانات وقائمة المعادلات هي:

$$1: f(x) \equiv e^x - t - 2 = 0$$

$$2: f(x) \equiv \sin(t) - 2t = 0$$

$$3: f(x) \equiv 2^t - 2t = 0$$

$$4: f(x) \equiv \ln(t) + t - 5 = 0$$

$$5: f(x) \equiv 3\cos(t) + 2\sin(t) = 0$$

$$6: f(x) \equiv t^4 + 2t^3 - t - 1 = 0$$

البرنامج:

```
PROGRAM NewtonRaphsonMethod;
uses wincrt; label 10;
Var c, c0, eps, delta :real; i,n,k:integer; ch:char;
  CHOICE:ARRAY[1..15] OF STRING[50];
FUNCTION f(t:real):real;
Begin
Case k of
1:f:=exp(t)-t-2;
2:f:=sin(t)-2*t;
3:f:=Exp(t*ln(2))-2*t;
4:f:=ln(t)+t-5;
5:f:=3*cos(t)+2*sin(t);
6:f:=sqr(t*t)+2*t*t*t-t-1;
end;{end case}
End;
FUNCTION df(t:real):real;{derivatives f(x)}
Begin
Case k of
1:df:=exp(t)-1;
2:df:=Cos(t)-2;
```

```

3:df:=Exp(t*ln(2))*ln(2)-2;
4:df:=1/t+1;
5:df:=-3*sin(t)+2*cos(t);
6:df:=4*t*sqr(t)+6*sqr(t)-1;
end;{end case}
end;
BEGIN {main}
  writeln('Newton-Raphson method to find a root of f(x)=0, in
[a,b]');
  choice[1]:='1:f(t)=exp(t)-t-2=0   Input c0 in [0.1, 1.5]';
  choice[2]:='2:f(t)=Sin(t)-2 t=0   Input c0 in [-1 , 0.5]';
  choice[3]:='3:f(t)=2^t-2 t=0     Input c0 in [0 , 1.5]';
  choice[4]:='4:f(t)=Ln(t)+t-5=0   Input c0 in [3.5 , 4]';
  choice[5]:='5:f(t)=-3*sin(t)+2*cos(t)=0 Input c0 in [2 ,3]';
  choice[6]:='6:f(t)=t^4+2*t^3-t-1=0 Input c0 in [0.4 , 2]';
  choice[7]:='7: Exit';
  Repeat clrscr;
  For i:=1 to 7 do   writeln(choice[i]);
  writeln('=====');
  write('Select Number of equation for its solving:'); readln(k);
  writeln(choice[k]);if k=7 then exit;
  write('Input c0='); readln(c0);
  i:=0; delta:=1.0E-6;
  Repeat
  if df(c0)=0 then
  begin writeln(' Estimating c0 is failing'); exit end;
  c:=c0-f(c0)/df(c0);
  i:=i+1; eps:=c-c0;
  writeln(' c,i,','c:2:7,',' f(c,i,')=','f(c):2:7,');
  f('c,i,')=','df(c):2:7);
  writeln(' |c,i,-c,i-1,|=' ,Abs(eps), ' ; f(' ,c:2:7,')=','f(c));
  writeln('-----');
  if f(c)=0 then goto 10 else   c0:=c;
  Until {i=n} Abs(eps)<delta;
  10:writeln('The Root is=','c:2:7,' iteration=',i);
  write(' To Continue Press y else To Exit Press n or N :');
  readln(ch);
  Until (ch='n') or (ch='N');
END.

```

3.2.4 طريقة هالي: (Halley's methods)

تعد طريقة هالي نموذجا مطورا ومسرعا لتقارب طريقة نيوتن رافسون، وللحصول على صيغة لهذه الطريقة نفرض أن f قابلة للاشتقاق ثلاث مرات متتالية على المجال $[a, b]$ ، يعني أن $f \in C^3[a, b]$ ، وليكن $c_k \in [a, b]$ جذر تقريبي للجذر الحقيقي r للمعادلة $f(x)=0$ ، بحيث يكون $|c_k - r|$ صغيرا بقدر كاف. ننشر $f(x)$ حول c_k ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى:

$$f(x) = f(c_k) + (x - c_k)f'(c_k) + \frac{(x - c_k)^2}{2}f''(c_k) + \frac{(x - c_k)^3}{6}f'''(\xi(x))$$

حيث $\xi(x)$ تنتمي إلى المجال الذي يقع بين x و c_k .

وبما أن r جذر للمعادلة يكون $f(r)=0$ ، إذن بتعويض كل x ب r في المنشور السابق نحصل على:

$$0 = f(c_k) + (r - c_k)f'(c_k) + \frac{(r - c_k)^2}{2}f''(c_k)$$

فإذا وضعنا بشكل تقريبي $c_{k+1} = r$ ، يمكننا كتابة المعادلة الأخيرة على الشكل

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k) + \frac{(c_{k+1} - c_k)}{2}f''(c_k)} \quad (3.6)$$

ومن تكرارية نيوتن رافسون لدينا:

$$c_{k+1} - c_k = -\frac{f(c_k)}{f'(c_k)}$$

نعوض قيمة $c_{k+1} - c_k$ من العلاقة الأخيرة في العلاقة (3.6) نحصل على الصيغة التكرارية لطريقة هالي:

$$c_{k+1} = c_k - \frac{2f(c_k)f'(c_k)}{2[f'(c_k)]^2 - f(c_k)f''(c_k)} \quad (3.7)$$

وبتطبيق العلاقة (3.7) بشكل تكراري، نحصل على متتالية القيم التكرارية

$$c_1, c_2, c_2, c_3, \dots, c_n$$

التي نأمل أن تكون متقاربة من الجذر الحقيقي r ، ونعتبر أن c_n هو الجذر التقريبي المطلوب إذا تحقق أحد المعيارين:

$$|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon, \quad |f(c_n)| < \varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب.

مثال 6: استخدم طريقة هالي لإيجاد جذر تقريبي معزول في المجال $[0.5, 2]$ للمعادلة:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

معتبرا أن $c_0 = 1$ هو تقريب ابتدائي للجذر، وبتفاوت لايزيد عن $\varepsilon = 0.0001 = 1.E-4$

الحل: نعيد في هذا المثال المسألة نفسها في المثال 5 لمعرفة مدى تسارع طريقة هالي مقارنة مع طريقة نيوتن-رافسون.

لدينا $-34.4375 < 0 = f(0.5) * f(2)$ ، إذن الجذر موجود في المجال $[0.5, 2]$ ،

لدينا أيضا $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ و $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1$ ، $f''(x) = 12x^2 + 12x$

نطبق صيغة هالي (3.7) نجد:

$$c_{k+1} = c_k - \frac{2f(c_k)f'(c_k)}{2[f'(c_k)]^2 - f(c_k)f''(c_k)} = c_k - \frac{2[(c_k)^4 + 2(c_k)^3 - c_k - 1][4(c_k)^3 + 6(c_k)^2 - 1]}{2[4(c_k)^3 + 6(c_k)^2 - 1]^2 - [(c_k)^4 + 2(c_k)^3 - c_k - 1][12(c_k)^2 + 12c_k]}$$

ونحصل على التكرار الأول من أجل $k=0$

$$c_1 = c_0 - \frac{2f(c_0)f'(c_0)}{2[f'(c_0)]^2 - f(c_0)f''(c_0)} = c_0 - \frac{2[(c_0)^4 + 2(c_0)^3 - c_0 - 1][4(c_0)^3 + 6(c_0)^2 - 1]}{2[4(c_0)^3 + 6(c_0)^2 - 1]^2 - [(c_0)^4 + 2(c_0)^3 - c_0 - 1][12(c_0)^2 + 12c_0]}$$

$$= 1 - \frac{2[(1)^4 + 2(1)^3 - 1 - 1][4(1)^3 + 6(1)^2 - 1]}{2[4(1)^3 + 6(1)^2 - 1]^2 - [(1)^4 + 2(1)^3 - 1 - 1][12(1)^2 + 12 \cdot 1]}$$

$$= \underline{0.869565}$$

إن هذا التكرار لا يحقق التفاوت لأن

$$|c_1 - c_0| = |0.869565 - 1| = 1.30435E-1 > 1.E-3,$$

$$f(c_1) = 0.0172192$$

نلاحظ أن التكرار الأول ساهم في تخفيض قيمة الدالة في طريقة هالي أكثر منه

عند نفس التكرار في طريقة نيوتن رافسون وهذا متوقع.

نتابع التكرار من أجل $k=1$ ، نحصل على التكرار الثاني:

$$c_2 = c_1 - \frac{2f(c_1)f'(c_1)}{2[f'(c_1)]^2 - f(c_1)f''(c_1)} =$$

$$= 0.869565 - \frac{2[0.017219152][6.166922693]}{2[6.166922693]^2 - [0.017219152][19.50849947]}$$

$$= \underline{0.8667604348}$$

حيث أن:

$$f(c_1) = f(0.869565) = 0.017219152$$

$$f'(c_1) = f'(0.869565) = 6.1669226925$$

$$f''(c_1) = f''(0.869565) = 19.5084994707$$

وللتأكد من تحقق التفاوت نجد أن:

$$|c_2 - c_1| = |0.8667604348 - 0.869565| = 2.80457E-3 > 1.E-3$$

$$f(c_2) = 2.17759E-7$$

وهو غير محقق على الرغم من أن هذا التكرار ساهم في تخفيض قيمة الدالة بشكل كبير وملحوظ، وللمتابعة نضع $k=2$ ، نحصل على التكرار الثالث:

$$\begin{aligned} c_3 &= c_2 - \frac{2f(c_2)f'(c_2)}{2[f'(c_2)]^2 - f(c_2)f''(c_2)} = \\ &= 0.8667604348 - \frac{2[2.17759E-7][6.1123390147]}{2[6.1123390147]^2 - [2.17759E-7][19.4164090336]} \\ &= \underline{0.86676039917} \end{aligned}$$

حيث استخدمنا:

$$f(c_2) = f(0.8667604348) = 2.17759E-7$$

$$f'(c_2) = f'(0.8667604348) = 6.1123390147$$

$$f''(c_2) = f''(0.8667604348) = 19.4164090336$$

وهكذا نتوقف عن التكرار ونعتبر أن $c_3 = 0.86676039917$ هو جذر تقريبي للجذر المطلوب، وبخطأ:

$$|c_3 - c_2| = |0.86676039917 - 0.8667604348| = 3.563E-8 < 1.E-3$$

وهو لا يزيد عن التفاوت المفروض، نلاحظ أيضا أن $f(c_3) = -2.36062.E-11$ وفي النتيجة فإن تقارب طريقة هالي أسرع بكثير من تقارب طريقة نيوتن-رافسون.

برنامج 3.4: لتنفيذ طريقة هالي (Halley's Method): يجد جذر معزول في

مجال $[a, b]$ لمعادلة غير خطية $f(x) = 0$ بإدخال قيمة تقريبية ابتدائية

$c_0 \in [a, b]$. بمجرد تنفيذ هذا البرنامج ستظهر قائمة من المعادلات سيطلب

منك اختيار واحدة منها، وبمجرد إدخال الرقم الذي يشير إلى واحدة منها ستظهر

لك المعادلة التي اخترتها والمجال المعزول الذي سنتقي منه تقريباً ابتدائياً، وبعد تنفيذ الإدخال ستظهر نتائج التكرارات التقريبية للجذر، وبالتأكيد فإن عدد التكرارات مرتبط بقيمة التفاوت $\delta = \epsilon$ ، والتفاوت مرتبط بدقة الجذر، فكلما كان التفاوت صغيراً كلما ازداد عدد التكرارات وكان الجذر أدق. قائمة المعادلات المستخدمة في البرنامج هي:

$$1: f(x) \equiv x^3 - t - 2 = 0$$

$$2: f(x) \equiv 4t^2 - \exp(t) = 0$$

$$3: f(x) \equiv t^4 + 2t^2 - t - 1 = 0$$

$$4: f(x) \equiv 3\cos(t) + 2\sin(t) = 0$$

البرنامج: نستخدم في البرنامج $\delta = \epsilon = 1.0E-8$

```
PROGRAM HalleyMethod;
uses wincrt; label 10;
Var c: Array[0..50] of real;
    c0, delta: real;
    i,n,k: integer; ch: char;
    CHOICE: ARRAY[1..15] OF STRING[50];
FUNCTION f(t: real): real;
Begin
Case k of
1: f:=t*sqr(t)-t-2;
2: f:=4*sqr(t)-exp(t);
3: f:=sqr(t*t)+2*t*sqr(t)-t-1;
4: f:=3*cos(t)+2*sin(t);
end; {end case}
End;
FUNCTION df(t: real): real; {derivatives f(x)}
Begin
Case k of
1: df:=3*sqr(t)-1;
2: df:=8*t-exp(t);
3: df:=4*t*sqr(t)+6*sqr(t)-1;
```

```

4: df:=-3*sin(t)+2*cos(t);
end;{end case}
End;
FUNCTION ddf(t:real):real; ;{Second derivatives f(x)}
Begin
Case k of
1: ddf:=6*(t)-1;
2: ddf:=8-exp(t);
3: ddf:=12*sqr(t)+12*t;
4: ddf:=-3*cos(t)-2*sin(t);
end;{end case}
End;
BEGIN {main}
writeln('Haley method to find the root of f(x)=0, in [a,b]');
choice[1]:='1:f(t)=t^3-t-2=0      Input c0 in [1, 2]';
choice[2]:='2:f(t)=4*sqr(t)-exp(t)=0  Input c0 in [-1, 0]';
choice[3]:='3:f(t)=t^4+2 t^3-t-1=0   Input c0 in [0.5, 2]';
choice[4]:='4:f(t)=3*cos(t)+2*sin(t)=0 Input c0 in [2, 3]';
choice[5]:='5:Exit';
Repeat
For i:=1 to 5 do   writeln(choice[i]);
writeln('=====');
write('Select Number of equation for finding its root:');
readln(k);
writeln(choice[k]);if k=5 then exit;
write('Input c0='); readln(c0);
delta:=1.0E-8;
i:=0; c[i]:=c0;
Repeat
if (2*sqr(df(c[0]))-f(c[0])*ddf(c[0]))=0 then
begin writeln(' Estimating c0 is failing'); exit end;
c[i+1]:=c[i]-2*f(c[i])*df(c[i])/(2*sqr(df(c[i]))-
f(c[i])*ddf(c[i]));
i:=i+1;
writeln(' c',i,':',c[i]:2:8,'; f(c',i,')=',f(c[i]),';
f'(c',i,')=',df(c[i]):2:6,'; f''(c',i,')=',ddf(c[i]):2:6);
writeln(' |c',i,'-c',i-1,'|=',Abs(c[i]-c[i-1]),'
; f'(c[i]:2:7,')=',f(c[i]));
writeln('-----');

```

```

if f(c[i])=0 then goto 10
Until Abs(c[i]-c[i-1])<delta;
10:writeLn("The Root is=",c[i]:2:9,' iteration=',i);
write("To Exit Press y or Y else To Continue press any key :");
readLn(ch);
Until (ch='y') or (ch='Y');
END.

```

مثال 7: استخدم البرنامج 3.3 لطريقة نيوتن-رافسون والبرنامج 3.4 لطريقة هالي لإيجاد جذر تقريبي معزول في المجال [2, 3] للمعادلة:

$$f(t) \equiv 3\cos(t) + 2\sin(t) = 0$$

معتبرا أن $c_0=3$ هو تقدير ابتدائي للجذر المطلوب بكلتا الطريقتين، مستخدماً تفاوتاً لا يزيد عن $\delta=1.E-8$. نسل نتائج تنفيذ البرنامجين والتكرارات التي حصلنا عليها للطريقتين في الجدول (3.1).

جدول (3.1): نتائج تنفيذ البرنامجين 3.3 و 3.4 لطريقتي نيوتن-رافسون وهالي لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة $3\cos(t) + 2\sin(t) = 0$ من أجل $c_0=3$ ، $\delta=1.E-8$

طريقة نيوتن رافسون			طريقة هالي		
الجذر	التفاوت	قيمة الدالة	الجذر	التفاوت	قيمة الدالة
c_i	$ c_i - c_{i-1} $	$f(c_i)$	c_i	$ c_i - c_{i-1} $	$f(c_i)$
1.8816681	1.11833193	0.9864684	2.31193680	0.6880632	-0.5499909
2.1661186	0.2844505	-0.0263911	2.15940734	0.15252946	-2.1937E-3
2.1587988	7.31977E-3	0.0000005	2.15879893	6.0841E-4	1.3796E-10
2.1587989	1.30723E-7	6.330E-12	2.15879893	4.0018E-11	6.3303E-12
2.1587989	0.000E+0	6.330E-12	----	----	----

3.3 الحل العددي لجمل المعادلات غير الخطية

3.3.1 طريقة نيوتن

لنعتبر جملة المعادلات غير الخطية بشكل عام:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ونكتبها بالشكل المختصر:

$$f(X) = 0 \quad (3.9)$$

حيث $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ، هي متجهة ذي n بعد، و $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ هي متجهة ذي n بعد عناصرها مجموعة من الدوال المستمرة.

بفرض أنه يوجد حل للجملة (3.9)، وأن الحل التقريبي من المرتبة p ، يمكننا كتابته على الشكل:

$$X^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})^T$$

لأحد الجذور المعزولة $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ لجملة المعادلات غير الخطية (3.9) في المتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، فيكون الجذر الدقيق لهذه المعادلة:

$$X = X^{(p)} + E^{(p)} \quad (3.10)$$

حيث أن $E^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})^T$ هو التصحيح (الخطأ في الجذر). وبالتالي نستطيع كتابة الجملة (3.9) بالشكل:

$$f(X^{(p)} + E^{(p)}) = 0 \quad (3.11)$$

بفرض أن الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل بشكل مستمر في المنطقة المحدبة التي تحوي $X, X^{(p)}$ ، ننشر دالة المعادلة (3.11) في سلسلة تايلور حول $X^{(p)}$ وفق قوى المتجهة $E^{(p)}$ ونحتفظ بالحدود الخطية:

$$f(X^{(p)} + E^{(p)}) = f(X^{(p)}) + f'(x^{(p)})E^{(p)} = 0 \quad (3.12)$$

ينتج من الصيغة أن المشتق $f'(x)$ يجب أن يفهم على أنه مصفوفة جاكوبي لمجموعة الدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$ بالنسبة للمتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، و تعطى بالشكل:

$$f'(X) = W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

أو بشكل مختصر:

$$f'(X) = W(X) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right], \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

نعيد كتابة الجملة (3.12) بالشكل

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})E^{(p)} = 0$$

فإذا كانت المصفوفة $W(x^{(p)})$ غير شاذة، يمكن حساب خطأ التصحيح من المعادلة السابقة كمايلي:

$$E^{(p)} = -[W(x^{(p)})]^{-1} f(x^{(p)})$$

نعوض قيمة $E^{(p)}$ السابقة في العلاقة (3.10)، بعد أن نضع بشكل تقريبي

$$X^{(p+1)} \equiv X$$

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - [W(X^{(p)})]^{-1} f(X^{(p)}), \quad p=0,1,2,\dots \quad (3.13)$$

وهي تكرارية طريقة نيوتن لحل جملة المعادلات غير الخطية (3.8) أو (3.9).
ومن أجل متجهة بدء اختيارية $X^{(0)}$ قريبة من الجذر بقدر كاف يمكن تطبيق
الصيغة (3.13) للحصول على متتالية من القيم التكرارية

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}, \dots$$

التي نأمل أن تكون متقاربة من الحل الذي نسعى إليه، ونعتبر أن $X^{(n)}$ هو الجذر
التقريبي المطلوب إذا تحقق أحد المعيارين:

$$\|f(X^{(n)})\| < \varepsilon, \quad \|X^{(n)} - X^{(n-1)}\| < \varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب.

مثال (8): استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الحل التقريب الموجب لجملة المعادلات:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

من أجل التقريب الابتدائي : $x_0=y_0=z_0=0.5$.

الحل: لدينا من المسألة:

$$f_1(X) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f_2(X) \equiv 2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$f_3(X) \equiv 3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

وبالتالي:

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}$$

$$f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 - 1 \\ 2 * 0.5^2 + 0.5^2 - 4 * 0.5 \\ 3 * 0.5^2 - 4 * 0.5 + 0.5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix} \quad \text{فيكون:}$$

نشكل مصفوفة جاكوبي:

$$f'(X) = W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

نحسب مصفوفة جاكوبي عند الشعاع الابتدائي $X^0 = (0.5, 0.5, 0.5)^T$

$$W(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

ثم نحسب قيمة معين هذه المصفوفة:

$$\text{Det}W(X^{(0)}) = -40,$$

و نحسب مقلوبها :

$$W^{-1}(X^{(0)}) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -14 & -11 \\ -5 & -2 & 7 \\ -5 & 6 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

نستخدم تكرارية نيوتن وفق الصيغة (3.13) من أجل $p=0$ ، نجد التقريب الأول

للحل العددي:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - [W(X^{(0)})]^{-1} f(X^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 7/20 & 1/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

ولحساب التقريب $X^{(2)}$ في التكرار الثاني نحتاج لإعادة الحسابات السابقة ولكن

من أجل $X^{(1)} = (0.875, 0.500, 0.375)^T$ ، بمثابة تقريب ابتدائي:

$$f(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.875^2 + 0.5^2 + 0.375^2 - 1 \\ 2*0.875^2 + 0.5^2 - 4*0.375 \\ 3*0.875^2 - 4*0.5 + 0.375^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix}$$

نحسب مصفوفة جاكوبي وقيمتها معيها ومقلوبها في $X^{(1)}$ على التوالي:

$$W(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1.750 & 1 & 0.750 \\ 3.500 & 1 & -4 \\ 5.250 & -4 & 0.750 \end{bmatrix},$$

$$\text{Det } W(X^{(1)}) = -64.75$$

ومقلوب المصفوفة يكون:

$$W^{-1}(X^{(1)}) = -\frac{1}{64.75} \begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.6250 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

نستخدم تكرارية نيوتن (3.13) من أجل $p=1$ نحصل على:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - [W(X^{(1)})]^{-1} f(X^{(1)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix} + \frac{1}{64.75} \begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78982 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix},$$

إذن:

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.78982 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.00729 \\ 0.01452 \\ 0.02179 \end{bmatrix},$$

$$\|f(X^{(2)})\| = \sqrt{[f_1(X^{(2)})]^2 + [f_2(X^{(2)})]^2 + [f_3(X^{(2)})]^2} = \\ \sqrt{(0.00729)^2 + (0.01452)^2 + (0.02179)^2} = 2.7186 \times 10^{-2}$$

نحسب التقريب التالي بشكل مشابه، نجد:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49661 \\ 0.36992 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00004 \\ 0.00006 \end{bmatrix},$$

ونحسب قيمة تنظيم الدالة عند هذا التكرار، والذي من المفترض أن يكون أصغر من قيمته عند التكرارات السابقة:

$$\|f(X^{(3)})\| = \sqrt{[f_1(X^{(3)})]^2 + [f_2(X^{(3)})]^2 + [f_3(X^{(3)})]^2} = \\ \sqrt{(0.00002)^2 + (0.00004)^2 + (0.00006)^2} = 7.9385 \times 10^{-5}$$

فإذا توقفنا عند التكرار التقريبي الثالث نجد أن

$x=0.78521$, $y=0.49661$, $z=0.36993$ هو الحل التقريبي للجملـة

المذكورة.

مثال 9: استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر تقريبي للمعادلتين:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^3 - y = 0$$

مبتدئاً بالشعاع $X^{(0)} = (0.9, 0.5)^T$ كتقريب ابتدائي. مكتفياً بالتكرار الذي يحقق

$$\|X^{(p+1)} - X^{(p)}\| < 5 \times 10^{-5} = 5.E-5 \text{ التفاوت}$$

الحل: لدينا من المسألة

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^3 - y \end{bmatrix}$$

وبالتالي مصفوفة جاكوبي:

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix},$$

نعوض في شعاع البدء $X^{(0)} = (0.9, 0.5)^T$ ، نجد:

$$f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.9^2 + 0.5^2 - 1 \\ 0.9^3 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.229 \end{bmatrix},$$

$$W(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2*0.9 & 2*0.5 \\ 3*0.9^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix}$$

نحسب قيمة معين مصفوفة جاكوبي ومقلوبها في النقطة $X^{(0)}$ على التوالي:

$$|W(X^{(0)})| = 1.8*(-1) - 2.43*1 = -4.23;$$

$$W^{-1}(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.23641 & 0.23641 \\ 0.57447 & -0.42553 \end{bmatrix};$$

نعوض $p=0$ في تكرارية نيوتن ، نحصل على التكرار الأول:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - [W(X^{(0)})]^{-1} f(X^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.23641 & 0.23641 \\ 0.57447 & -0.42553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.229 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83168 \\ 0.56298 \end{bmatrix},$$

$$f(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.83168^2 + 0.56298^2 - 1 \\ 0.83168^3 - 0.56298 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00863 \\ 0.01228 \end{bmatrix};$$

نلاحظ أن التقريب في التكرار الأول $X^{(1)}$ أقرب إلى الحل الدقيق من التقريب الابتدائي $X^{(0)}$ لأنه ساهم في تخفيض قيمة الدالة كما هو ملاحظ.

$$\|f(X^{(1)})\| = \sqrt{[f_1(X^{(1)})]^2 + [f_2(X^{(1)})]^2} =$$

$$\sqrt{(0.00863)^2 + (0.01228)^2} = 1.5009173 \times 10^{-2}$$

نتأكد من تحقق معيار التفاوت الذي يعبر عن الخطأ في هذا التكرار، نجد:

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \sqrt{(x^{(1)} - x^{(0)})^2 + (y^{(1)} - y^{(0)})^2} =$$

$$\sqrt{(0.9 - 0.83168)^2 + (0.5 - 0.56298)^2} = \sqrt{8.634103 \times 10^{-3}} \\ = 9.291987 \times 10^{-2} > 5 \times 10^{-5}$$

نتابع بالأسلوب نفسه لإيجاد تكرار جديد، فنحسب مصفوفة جاكوبي عند $X^{(1)}$:

$$W(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2*0.83168 & 2*0.56298 \\ 3*0.83168^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.66336 & 1.12596 \\ 2.07507 & -1 \end{bmatrix}$$

وأيضا نحسب قيمة معين مصفوفة جاكوبي ومقلوبها عند التكرار $X^{(1)}$:

$$|W(X^{(1)})| = 1.66336*(-1) - 2.07507*1.12596 = -3.99979;$$

$$W^{-1}(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.25001 & 0.28150 \\ 0.51879 & -0.41586 \end{bmatrix};$$

نحصل على التكرار الثاني $X^{(2)}$ ، بتعويض $p=1$ في تكرارية نيوتن كما يلي:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - [W(X^{(1)})]^{-1} f(X^{(1)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.83168 \\ 0.56298 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.25001 & 0.28150 \\ 0.51879 & -0.41586 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00863 \\ 0.01228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.826062 \\ 0.563608 \end{bmatrix},$$

$$f(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.82606^2 + 0.56361^2 - 1 \\ 0.82606^3 - 0.56361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00003 \\ 0.00008 \end{bmatrix};$$

نلاحظ أن الجذر في التكرار الثاني $X^{(2)}$ يقترب من الحل لأن مركبات الدالة f تقترب من الصفر أكثر منها في التكرار $X^{(1)}$ ، وقيمة التنظيم:

$$\|f(X^{(2)})\| = \sqrt{[f_1(X^{(2)})]^2 + [f_2(X^{(2)})]^2}$$

$$\sqrt{(0.00003)^2 + (0.00008)^2} = 8.544 \times 10^{-5}$$

ومعيار التفاوت في التكرار $X^{(2)}$ غير محقق لأن:

$$\|X^{(2)} - X^{(1)}\| = \sqrt{(x^{(2)} - x^{(1)})^2 + (y^{(2)} - y^{(1)})^2} =$$

$$\sqrt{(0.826062 - 0.83168)^2 + (0.563608 - 0.56298)^2}$$

$$= 5.708449 \times 10^{-3} > 5 \times 10^{-5}$$

أما التكرار الثالث الذي وجدناه بأسلوب مماثل فهو:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.826031 \\ 0.563624 \end{bmatrix},$$

$$f(X^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.82603^2 + 0.563624^2 - 1 \\ 0.82603^3 - 0.563624 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1898 \times 10^{-9} \\ 2.2938 \times 10^{-9} \end{bmatrix}$$

وبحساب معيار الخطأ والتأكد من تحقق التفاوت في التقريب $X^{(3)}$ نجد أن:

$$\|f(X^{(3)})\| = \sqrt{[f_1(X^{(3)})]^2 + [f_2(X^{(3)})]^2} = 2.58397 \times 10^{-9}$$

$$\begin{aligned} \|X^{(3)} - X^{(2)}\| &= \sqrt{(x^{(3)} - x^{(2)})^2 + (y^{(3)} - y^{(2)})^2} = \\ &= \sqrt{(0.826031 - 0.826062)^2 + (0.563624 - 0.563608)^2} \\ &= 3.48855 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

إذن معيار التفاوت محقق، لهذا نكتفي بالتكرار الثالث $X^{(3)}$ ، ويكون $x = 0.826031$, $y = 0.563624$ هو الحل التقريبي المطلوب.

3.3.2 طريقة نيوتن المعدلة

تنشأ صعوبات كثيرة عند تطبيق طريقة نيوتن الأساسية:

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - [W(X^{(p)})]^{-1} f(X^{(p)})$$

وخاصة في عملية حساب معكوس مصفوفة جاكوبي $[W(x^{(p)})]^{-1}$ قبل كل تكرار، ولتلافي هذه الكلفة الزائدة في حساب العمليات التكرارية، يمكن أن نضع بشكل تقريبي:

$$[W(x^{(0)})]^{-1} \cong [W(x^{(p)})]^{-1}$$

وهذا لايؤثر على تقارب الطريقة خاصة إذا كان التقريب الابتدائي $X^{(0)}$ قريباً من الحل الأساسي (الدقيق) بشكل كاف، وبتعويض التعديل الجديد في طريقة نيوتن (3.13) نحصل على صيغة نيوتن المعدلة التكرارية:

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - [W(X^{(0)})]^{-1} f(X^{(p)}), \quad p=0,1,2,\dots \quad (3.14)$$

كما نلاحظ أن التكرار الأول $X^{(1)}$ من أجل $p=0$ في طريقة نيوتن المعدلة (3.14) هو نفسه في طريقة نيوتن الأساسية (3.13).

مثال 10: استخدم طريقة نيوتن المعدلة لإيجاد الجذر التقريبي للمعادلتين في المثال 9 السابق:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^3 - y = 0$$

مبتدءا بالشعاع $x^{(0)} = (0.9, 0.5)^T$ كتقريب ابتدائي للجذر.

الحل: لدينا من الحل السابق

$$f(X) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^3 - y \end{bmatrix}, \quad W(X) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في نقطة البدء نجد:

$$f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.9^2 + 0.5^2 - 1 \\ 0.9^3 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.229 \end{bmatrix},$$

$$W(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2*0.9 & 2*0.5 \\ 3*0.9^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix},$$

وقيمة معين مصفوفة جاكوبي ومقلوبها في النقطة $X^{(0)}$:

$$|W(X^{(0)})| = -4.23 ; \quad W^{-1}(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.23641 & 0.23641 \\ 0.57447 & -0.42553 \end{bmatrix},$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} - [W(X^{(0)})]^{-1} f(X^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.23641 & 0.23641 \\ 0.57447 & -0.42553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.229 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83168 \\ 0.56298 \end{bmatrix},$$

$$f(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.83168^2 + 0.56298^2 - 1 \\ 0.83168^3 - 0.56298 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.008638 \\ 0.012286 \end{bmatrix};$$

نلاحظ أن التقريب الأول $X^{(1)}$ هو نفسه الذي حصلنا عليه في طريقة نيوتن.

أما التكرار الثاني فنستخدم مقلوب مصفوفة جاكوبي في $X^{(0)}$ نفسه، ونضع $p=1$

نجد:

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} - [W(X^{(0)})]^{-1} f(X^{(1)}) = \\ &= \begin{bmatrix} 0.83168 \\ 0.56298 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.23641 & 0.23641 \\ 0.51879 & -0.42553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00863 \\ 0.01228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.82673 \\ 0.56325 \end{bmatrix}, \\ f(X^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0.82673^2 + 0.56325^2 - 1 \\ 0.82673^3 - 0.56325 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00073 \\ 0.00181 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

نحسب معياري الخطأ في التكرار $X^{(2)}$ ، حيث التنظيم:

$$\begin{aligned} \|f(X^{(2)})\| &= \sqrt{[f_1(X^{(2)})]^2 + [f_2(X^{(2)})]^2} = \\ &= \sqrt{(0.00073)^2 + (0.00181)^2} = 1.951666 \times 10^{-3} \\ &\text{والخطأ المتوقع في } X^{(2)}: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X^{(2)} - X^{(1)}\| &= \sqrt{(x^{(2)} - x^{(1)})^2 + (y^{(2)} - y^{(1)})^2} = \\ &= \sqrt{(0.82673 - 0.83168)^2 + (0.56325 - 0.56298)^2} \\ &= 4.957358 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

أما التكرار الثالث $X^{(3)}$ الذي وجدناه بأسلوب مماثل:

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0.82613 \\ 0.56360 \end{bmatrix}, \\ f(X^{(3)}) &= \begin{bmatrix} 0.82613^2 + 0.56360^2 - 1 \\ 0.82613^3 - 0.56360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.133 \times 10^{-4} \\ 2.29 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

والخطأ المتوقع في $X^{(3)}$ لايزيد عن:

$$\|X^{(3)} - X^{(2)}\| = \sqrt{(x^{(3)} - x^{(2)})^2 + (y^{(3)} - y^{(2)})^2} =$$

$$\sqrt{(0.82613 - 0.82673)^2 + (0.56360 - 0.56325)^2}$$

$$= 6.946222 \times 10^{-4}$$

نتبع أيضاً، فنحصل فالتكرار الرابع:

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.826045 \\ 0.563618 \end{bmatrix},$$

$$f(X^{(4)}) = \begin{bmatrix} 0.826045^2 + 0.563618^2 - 1 \\ 0.826045^3 - 0.563618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.538 \times 10^{-5} \\ 3.284 \times 10^{-5} \end{bmatrix},$$

والخطأ المتوقع في $X^{(4)}$ لايزيد عن:

$$\|X^{(4)} - X^{(3)}\| = \sqrt{(x^{(4)} - x^{(3)})^2 + (y^{(4)} - y^{(3)})^2}$$

$$= \sqrt{(0.826045 - 0.82613)^2 + (0.563618 - 0.56360)^2}$$

$$= 8.6885 \times 10^{-5}$$

نلاحظ أن المعيار $\|X^{(p+1)} - X^{(p)}\| < 5 \times 10^{-5}$ ، غير محقق عند $X^{(4)}$.

ملاحظة: بالمقارنة بين طريقتي نيوتن ونيوتن المعدلة في حل المثال 9، نجد أن تقارب طريقة نيوتن أسرع من تقارب نيوتن المعدلة لأن الخطأ في التكرار الرابع في طريقة نيوتن المعدلة أكبر من الخطأ في التكرار الثالث في طريقة نيوتن، لهذا تحتاج طريقة نيوتن المعدلة إلى المتابعة في تكرارات جديدة لأن معيار التفاوت المفروض في المسألة لم يتحقق بعد، إلا أن السمة البارزة في تكرارية نيوتن المعدلة هي أنها أقل كلفة بكثير من تكرارية نيوتن.

برنامج 3.5: لطريقة نيوتن لحل جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$f_1: 5x^2 - y^2 = 0$$

$$f_2: y - 0.25[\sin(x) + \cos(y)] = 0$$

مبتدئاً بالتقريب الابتدائي $y_0=0.5, x_0=0.5$

```

PROGRAM NewtonMethodTwoDimensions ;
uses wincrt;
Var X,Y, Xf: Array [0..50] of real;
    x0, y0, Det, delta, normf, normX :real;
    i :integer;
FUNCTION f1(t1,t2:real):real;
Begin
    f1:=5*t1*t1-t2*t2;
End;
FUNCTION f2(t1,t2:real):real;
Begin
    f2:=t2-0.25*(sin(t1)+cos(t2));
End;
FUNCTION df1(t1:real):real;
Begin
    df1:=10*t1
End;
FUNCTION df2(t2:real):real;
Begin
    df2:=-2*t2
end;
FUNCTION df3(t1:real):real;
Begin
    df3:=-0.25*cos(t1)
End;
FUNCTION df4(t2:real):real;
Begin
    df4:=1+0.25*sin(t2)
End;
BEGIN {main}
writeln('Newton method in two dimensions to solve nnlinear
system f1(x,y)=0,f2(x,y)=0');
writeln('=====');
write('Input x0='); readln(x0);
write('Input y0='); readln(y0);
delta:=1.0E-8;
i:=0; x[i]:=x0;y[i]:=y0;
REPEAT
Det:=df1(x[i])*df4(y[i])-df3(x[i])*df2(y[i]);

```

```

X[i+1]:=X[i]- (df4(y[i])*f1(x[i],y[i])/Det-
df2(y[i])*f2(x[i],y[i])/Det);
Y[i+1]:=Y[i]- (-
df3(x[i])*f1(x[i],y[i])/Det+df1(x[i])*f2(x[i],y[i])/Det);
normf:=sqrt(sqr(f1(x[i+1],y[i+1]))+sqr(f2(x[i+1],y[i+1])));
normX:=Sqrt(Sqr(x[i+1]-x[i])+sqr(y[i+1]-y[i]));
i:=i+1;
writeln(' X',i,'=',X[i]:2:8,'; Y',i,'=',Y[i]:2:8);
writeln(' |X',i,'-X',i-1,'|=',normX);
writeln(' f1(X',i,')=',f1(x[i],y[i]),' ; f2(X',i,')=',f2(x[i],y[i]),' ;
NormF=',normf);
writeln('-----');
Until normf<delta;
END.

```

نتائج تنفيذ البرنامج 3.5 لحل جملة المعادلتين غير الخطيتين السابقتين

باستخدام طريقة نيوتن وبتفاوت لا يزيد عن $\Delta=1.0E-8$

تكرار p	$X^{(p)}$	$\ f(X^{(p)})\ $	$\ X^{(p)} - X^{(p-1)}\ $
1	$x^{(1)}=0.261964$ $y^{(1)}=0.309822$	2.4723562E-1	3.0467782E-1
2	$x^{(2)}=0.1607169$ $y^{(2)}=0.2806192$	5.040401E-2	1.053749E-1
3	$x^{(3)}=0.126468$ $y^{(3)}=0.272348$	5.7967563E-3	3.5233885E-2
4	$x^{(4)}=0.1213608$ $y^{(4)}=0.27113335$	1.2892041E-4	5.249266E-3
5	$x^{(5)}=0.12124198$ $y^{(5)}=0.27110517$	6.9798343E-8	1.2211738E-4
6	$x^{(6)}=0.12124191$ $y^{(6)}=0.27110516$	2.1902686E-13	6.618203E-8

3.3.3 طريقة التكرارات المتتالية (النقطة الثابتة):

بفرض أننا استطعنا كتابة جملة المعادلات (3.8) بالشكل:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.15)$$

حيث $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ توابع حقيقية معرفة ومستمرة في جوار ما للحل المعزول

للجملة (3.15). $(p_1, p_2, \dots, p_n)$

يمكن إعادة كتابة جملة المعادلات (3.15) بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$X = \varphi(X) \quad (3.16)$$

حيث $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ، $\varphi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X))^T$.

تعريف 2: النقطة الثابتة (Fixed-Point)

النقطة الثابتة للجملة (3.15) هي نقطة $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ تحقق الشروط:

$$\begin{cases} p_1 = \varphi_1(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ p_2 = \varphi_2(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ \vdots \\ p_n = \varphi_n(p_1, p_2, \dots, p_n) \end{cases} \quad (3.17)$$

وبالتالي بحسب التعريف 2 فإن النقطة الثابتة لجملة المعادلتين:

$$y = \varphi_2(x, y), \quad x = \varphi_1(x, y) \quad (3.18)$$

هي نقطة (p, q) تحقق:

$$q = \varphi_2(p, q), \quad p = \varphi_1(p, q)$$

تعريف 3: تكرار النقطة الثابتة (Fixed-Point Iteration)

إن تكرار النقطة الثابتة لجملة المعادلات غير الخطية (3.15) هي المعادلات التكرارية:

$$,k=0,1,\dots \begin{cases} p_1^{(k+1)} = \varphi_1(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) \\ p_2^{(k+1)} = \varphi_2(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) \\ \vdots \\ p_n^{(k+1)} = \varphi_n(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) \end{cases} \quad (3.19)$$

وهكذا بحسب التعريف 3 فإن تكرار النقطة الثابتة لجملة المعادلتين (3.18):

$$q^{(k+1)} = \varphi_2(p^{(k)}, q^{(k)}), \quad ,k=0,1,\dots \quad p^{(k+1)} = \varphi_1(p^{(k)}, q^{(k)})$$

مبرهنة 3: تكرار النقطة الثابتة (Fixed-Point Iteration)

بفرض أن الدوال $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ في الجملة (3.15) هي ومشتقاتها الجزئية مستمرة في المنطقة المجاورة للنقطة الثابتة $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ، وإذا تم اختيار نقطة بدء $(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ قريبة من النقطة الثابتة بقدر كاف، و تحققت المتراجحات:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| < K$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| < K$$

⋮

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right| < K$$

من أجل $0 < K < 1$ ، عندئذ فإن التكرارات (3.19) تتقارب من النقطة الثابتة $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ، أي أن:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} p_1^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = p_1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} p_2^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = p_2 \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} p_n^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_n(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = p_n \end{cases}$$

ونعتبر أن $(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)})$ هو جذر تقريبي من الجذر الدقيق $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ للجملة (3.15) إذا تحقق المعيار:

$$\|P^{(n)} - P^{(n-1)}\| < \varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير موجب، و $P^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_n^{(n)})$.

مثال 11: استخدم طريقة التكرارات المتتالية (النقطة الثابتة) لإيجاد الحل لجملة

المعادلتين:

$$x - \sin(x+y) = 0$$

$$y - \cos(x-y) = 0$$

في المنطقة $0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2$ إذا علمت أن شروط البدء $\begin{bmatrix} p^{(0)} \\ q^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

متوقفا عن التكرار عندما يتحقق التفاوت: $\|P^{(n)} - P^{(n-1)}\| < 1.E - 4$.

الحل: نكتب معادلتنا هذا المثال بالشكل الخاص: $x = \sin(x+y)$ ،

$y = \cos(x-y)$ ، وبالتالي يكون لدينا

$$\varphi_1(x, y) = \sin(x+y),$$

$$\varphi_2(x, y) = \cos(x-y)$$

نحسب المشتقات الجزئية للدالتين φ_1, φ_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \cos(x+y), & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= \cos(x+y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= -\sin(x-y), & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= \sin(x-y)\end{aligned}$$

قبل الدخول في حساب تكرارات النقطة الثابتة، يجب أولاً التأكد من ضمان كون الطريقة متقاربة، وبالتالي يجب تحقق المتراجحتين:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(p, q) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(p, q) \right| < 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(p, q) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(p, q) \right| < 1,$$

وهكذا بعد الاختزال نحصل على المتراجحتين :

$$|\sin(p-q)| < 1/2 \text{ و } |\cos(p+q)| < 1/2$$

ومن الملاحظ أن نقطة البدء تحقق المتراجحتين السابقتين لأن:

$$|\sin(1-1)| = 0 < 1/2 \text{ و } |\cos(2)| = 0.416147 < 1/2$$

إذا الطريقة متقاربة من أجل هذا الاختيار لنقطة البدء. سنقوم حالياً بحساب

تكرارات النقطة الثابتة في كل خطوة:

$$\begin{cases} p^{(k+1)} = \varphi_1(p^{(k)}, q^{(k)}) = \sin(p^{(k)} + q^{(k)}) \\ q^{(k+1)} = \varphi_2(p^{(k)}, q^{(k)}) = \cos(p^{(k)} - q^{(k)}) \end{cases},$$

من أجل $k=0$ ، نحسب التكرار الأول بالتعويض في $(p^{(0)}, q^{(0)})$:

$$\begin{cases} p^{(1)} = \varphi_1(p^{(0)}, q^{(0)}) = \sin(p^{(0)} + q^{(0)}) \\ q^{(1)} = \varphi_2(p^{(0)}, q^{(0)}) = \cos(p^{(0)} - q^{(0)}) \end{cases},$$

$$\begin{cases} p^{(1)} = \sin(2) = 0.909297 \\ q^{(1)} = \cos(0) = 1.0 \end{cases}$$

نحسب معيار التفاوت بين التكرارين:

$$\|P^{(1)} - P^{(0)}\| = \sqrt{(p^{(1)} - p^{(0)})^2 + (q^{(1)} - q^{(0)})^2} \\ = 9.07E-2 > 1.E-4,$$

نجد أن معيار التفاوت غير محقق، لذلك نتابع التكرار من أجل $k=1$:

$$\begin{cases} p^{(2)} = \sin(0.909297 + 1) = 0.94325 \\ q^{(2)} = \cos(0.909297 - 1) = 0.99589 \end{cases},$$

$$\|P^{(2)} - P^{(1)}\| = \sqrt{(p^{(2)} - p^{(1)})^2 + (q^{(2)} - q^{(1)})^2} = 3.42E-2$$

نجد أيضا أن المعيار غير محقق، نتابع التكرار من أجل $k=2,3,...$ حتى يتحقق

التفاوت:

$$\begin{cases} p^{(3)} = 0.93292 \\ q^{(3)} = 0.99862 \end{cases},$$

$$\|P^{(3)} - P^{(2)}\| = \sqrt{(p^{(3)} - p^{(2)})^2 + (q^{(3)} - q^{(2)})^2} = 1.07E-2;$$

$$\begin{cases} p^{(4)} = 0.93563 \\ q^{(4)} = 0.99784 \end{cases},$$

$$\|P^{(4)} - P^{(3)}\| = \sqrt{(p^{(4)} - p^{(3)})^2 + (q^{(4)} - q^{(3)})^2} = 2.82E-3;$$

$$\begin{cases} p^{(5)} = 0.93495 \\ q^{(5)} = 0.99807 \end{cases},$$

$$\|P^{(5)} - P^{(4)}\| = \sqrt{(p^{(5)} - p^{(4)})^2 + (q^{(5)} - q^{(4)})^2} = 7.21E-4;$$

$$\begin{cases} p^{(6)} = 0.93511 \\ q^{(6)} = 0.99801 \end{cases},$$

$$\|P^{(6)} - P^{(5)}\| = \sqrt{(p^{(6)} - p^{(5)})^2 + (q^{(6)} - q^{(5)})^2} = 1.74E-4;$$

$$\begin{cases} p^{(7)} = 0.93508 \\ q^{(7)} = 0.99802 \end{cases},$$

$$\|P^{(7)} - P^{(6)}\| = \sqrt{(p^{(7)} - p^{(6)})^2 + (q^{(7)} - q^{(6)})^2} \\ = 4.06E-5 < 1.E-4,$$

نلاحظ أن التكرار السابع $P^{(7)} = (p^{(7)}, q^{(7)}) = (0.93508, 0.99802)$ يحقق

التفاوت لذلك يعتبر هو الحل التقريبي المطلوب لجملته المعادلتين.

برنامج 3.5: لحل معادلتين المثال 11 بطريقة النقطة الثابتة وفق الشروط

المفروضة نفسها

```
PROGRAM FixedPointIteration;
uses winCRT;
Var p,q:array[0..100] of real;
    i:integer;error:real;
FUNCTION fi1(x,y:real):real;
begin
    fi1:=sin(x+y);
End;
FUNCTION fi2(x,y:real):real;
begin
    fi2:=cos(x-y);
end;
BEGIN
p[0]:=1;q[0]:=1;
if (abs(cos(p[0]+q[0]))+abs(cos(p[0]-q[0]))<1) and
    (abs(-sin(p[0]-q[0]))+abs(sin(p[0]+q[0]))<1)
    then writeln('the method is converged') else
        begin writeln('the method is not converged'); exit end;
i:=0; error:=1.0E-4;
Repeat
p[i+1]:=fi1(p[i],q[i]);
q[i+1]:=fi2(p[i],q[i]);
i:=i+1;
writeln('p^',i,'=',p[i]:2:5,' ',q^',i,'=',q[i]:2:5,
```

```

error=sqrt(sqrt(p[i]-p[i-1])+sqrt(q[i]-q[i-1]))
Until sqrt(sqrt(p[i]-p[i-1])+sqrt(q[i]-q[i-1]))<error;
END.

```

مثال 12: استخدم طريقة التكرارات المتتالية (النقطة الثابتة) لإيجاد جذر معزول
لجملة المعادلتين:

$$0.1x^2 + 0.1y^2 + 0.8 - x = 0$$

$$0.1x + 0.1xy^2 + 0.8 - y = 0$$

في المنطقة $0 \leq x \leq 1.5, 0 \leq y \leq 1.5$ إذا علمت أن الحل الابتدائي

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} p^{(0)} \\ q^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ باستخدام تفاوت لايزيد عن } 1.E-3.$$

الحل: نكتب المعادلتين بالشكل الخاص: $x = 0.1x^2 + 0.1y^2 + 0.8$

$$y = 0.1x + 0.1xy^2 + 0.8 \text{ ، وبالتالي يكون لدينا:}$$

$$\varphi_1(x, y) = 0.1x^2 + 0.1y^2 + 0.8,$$

$$\varphi_2(x, y) = 0.1x + 0.1xy^2 + 0.8$$

ولإيجاد تكرار تقريبي للنقطة الثابتة يجب أولاً ضمان تقارب الطريقة، وبالتالي

يجب تحقق المتراجتين:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(p, q) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(p, q) \right| < 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(p, q) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(p, q) \right| < 1,$$

وبالتالي بعد الاختزال تحقق المتراجتين :

$$|0.1 + 0.1q^2| + |0.2pq| < 1 \quad \text{و} \quad |0.2p| + |0.2q| < 1$$

واللحصول على حل متقارب، يجب أن يحقق الحل الابتدائي المتراجعتين
السابقتين، وبالتعويض نجد أن:

$$|0.1+0.1*0^2|+|0.2*0*0|=0.1<1 \text{ و } |0.2*0|+|0.2*0|=0<1$$

إذن، الطريقة متقاربة من أجل هذا الاختيار لنقطة البدء. سنقوم حالياً بحساب
تكرارات النقطة الثابتة بشكل متتال:

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = \varphi_1(p^{(i)}, q^{(i)}) = 0.1(p^{(i)})^2 + 0.1(q^{(i)})^2 + 0.8 \\ q^{(i+1)} = \varphi_2(p^{(i)}, q^{(i)}) = 0.1p^{(i)} + 0.1p^{(i)}(q^{(i)})^2 + 0.8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} p^{(1)} = 0.1(p^{(0)})^2 + 0.1(q^{(0)})^2 + 0.8 = 0.8 \\ q^{(1)} = 0.1p^{(0)} + 0.1p^{(0)}(q^{(0)})^2 + 0.8 = 0.8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(1)} - P^{(0)}\| = \sqrt{(p^{(1)} - p^{(0)})^2 + (q^{(1)} - q^{(0)})^2} = 1.13E+00$$

$$\begin{cases} p^{(2)} = 0.1(p^{(1)})^2 + 0.1(q^{(1)})^2 + 0.8 = 0.92800 \\ q^{(2)} = 0.1p^{(1)} + 0.1p^{(1)}(q^{(1)})^2 + 0.8 = 0.93120 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(2)} - P^{(1)}\| = \sqrt{(p^{(2)} - p^{(1)})^2 + (q^{(2)} - q^{(1)})^2} = 1.83E-1$$

$$\begin{cases} p^{(3)} = 0.1(p^{(2)})^2 + 0.1(q^{(2)})^2 + 0.8 = 0.97283 \\ q^{(3)} = 0.1p^{(2)} + 0.1p^{(2)}(q^{(2)})^2 + 0.8 = 0.97327 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(3)} - P^{(2)}\| = \sqrt{(p^{(3)} - p^{(2)})^2 + (q^{(3)} - q^{(2)})^2} = 6.15E-2;$$

$$\begin{cases} p^{(4)} = 0.98937 \\ q^{(4)} = 0.98944 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(4)} - P^{(3)}\| = \sqrt{(p^{(4)} - p^{(3)})^2 + (q^{(4)} - q^{(3)})^2} = 2.31E-2;$$

$$\begin{cases} p^{(5)} = 0.99578 \\ q^{(5)} = 0.99579 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(5)} - P^{(4)}\| = \sqrt{(p^{(5)} - p^{(4)})^2 + (q^{(5)} - q^{(4)})^2} = 9.03E-3;$$

$$\begin{cases} p^{(6)} = 0.99832 \\ q^{(6)} = 0.99832 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(6)} - P^{(5)}\| = \sqrt{(p^{(6)} - p^{(5)})^2 + (q^{(6)} - q^{(5)})^2} = 3.58E-3;$$

$$\begin{cases} p^{(7)} = 0.99933 \\ q^{(7)} = 0.99933 \end{cases} \rightarrow$$

$$\|P^{(7)} - P^{(6)}\| = \sqrt{(p^{(7)} - p^{(6)})^2 + (q^{(7)} - q^{(6)})^2} = 1.4E-3;$$

$$\begin{cases} p^{(8)} = 0.99973 \\ q^{(8)} = 0.99973 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|P^{(8)} - P^{(7)}\| &= \sqrt{(p^{(8)} - p^{(7)})^2 + (q^{(8)} - q^{(7)})^2} \\ &= 5.70E-4 < 1.E-3 \end{aligned}$$

نلاحظ أن التكرار الثامن $P^{(8)} = (p^{(8)}, q^{(8)}) = (0.93508, 0.99802)$ يحقق التفاوت، لذلك نكتفي بهذا التكرار ونعتبره الحل التقريبي المطلوب لجملة المعادلتين.

برنامج 3.6: لطريقة النقطة الثابتة لحل جملة المعادلتين

$$0.1x^2 + 0.1y^2 + 0.8 - x = 0$$

$$0.1x + 0.1xy^2 + 0.8 - y = 0$$

باستخدام الحل الابتدائي $p^{(0)} = 0, q^{(0)} = 0$ ، والاكتفاء بالتكرارات التي تفاوتها

لايزيد عن $\delta = 1.0E-4$

```

PROGRAM FixedPointIteration;
  uses winCRT;
  Var p,q : array[0..100] of real;
      i:integer; delta :real;
  FUNCTION fi1(x,y:real):real;
  begin
    fi1:=(0.1*sqr(x)+0.1*sqr(y)+0.8);
  End;
  FUNCTION fi2(x,y:real):real;
  begin
    fi2:=(0.1*x+0.1*x*sqr(y)+0.8) ;
  end;
  BEGIN
    p[0]:=0;q[0]:=0;
    if (abs(0.2*p[0])+abs(0.2*q[0])<1) and
      (abs(0.1+0.1*sqr(q[0]))+abs(0.2*p[0]*q[0])<1)
    then writeln('the method is converged') else
      begin writeln('the method is not converged'); exit end;
  i:=0; delta:=1.0E-4;
  Repeat
    p[i+1]:=fi1(p[i],q[i]);
    q[i+1]:=fi2(p[i],q[i]);
    i:=i+1;
    writeln('p^',i,'=',p[i]:2:5,' ', 'q^',i,'=',q[i]:2:5,
      ' error=',sqrt(sqr(p[i]-p[i-1])+sqr(q[i]-q[i-1])))
  Until sqrt(sqr(p[i]-p[i-1])+sqr(q[i]-q[i-1]))< delta;
  END.

```

تمارين

1- اعزل الجذور الحقيقية للمعادلة:

$$f(x) \equiv x^4 - 4x - 1 = 0$$

إذا علمت أنها تملك جذرين حقيقيين فقط.

2- عين عدد الجذور الحقيقية للمعادلة:

$$f(x) \equiv e^x + x = 0$$

3- أوجد الجذر المعزول للمعادلة الجبرية غير الخطية:

$$f(x) \equiv x \sin(x) - 1 = 0$$

في المجال $[0, 2]$ ، باستخدام طريقة تنصيف المجال (Bisection Method) مكتفياً بالتكرار الذي يحقق معيار التقارب التالي:

$$\|f(c_k)\| \leq 10^{-3}$$

4- استخدام طريقة تنصيف المجال مبتدئاً بالمجال $[a_0, b_0]$ ، لإيجاد الجذر المعزول لكل معادلة من المعادلات الجبرية التالية:

أ- $f(x) \equiv e^x - 2 - x = 0$; $[a_0, b_0] = [-2.4, -1.6]$

ب- $f(x) \equiv e^x - 2 - x = 0$; $[a_0, b_0] = [1.0, 1.8]$

ج- $f(x) \equiv \cos(x) + 1 - x = 0$; $[a_0, b_0] = [0.8, 1.6]$

د- $f(x) \equiv \ln(x) - 5 + x = 0$; $[a_0, b_0] = [3.2, 4.0]$

هـ- $f(x) \equiv x^2 - 10x + 23 = 0$; $[a_0, b_0] = [6.0, 6.8]$

مكتفياً بالتكرار الذي يقع في مجال لا يزيد طوله عن 0.05

5- إذا علمت أنه يوجد جذر حقيقي وحيد للمعادلة الجبرية:

$$f(x) \equiv x^5 - x^4 + x - 1 = 0$$

في إحدى المجالات التالية:

$$[-3, -1], [0, 1], [2, 3]$$

يطلب استخدام طريقة القواطع (Secant Method) لإيجاده مكتفياً بتكرار

يحقق التفاوت:

$$\|f(c_k)\| \leq 1.E-4$$

6- استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد جذر حقيقي للمعادلة الجبرية:

$$f(x) \equiv x^5 - x^4 + x - 1 = 0$$

في المجال $[0, 1.5]$ ، مبتدئاً بالحل الابتدائي $c_0=0$ ، ومكتفياً بالتكرار الذي

يحقق معيار التقارب:

$$\|c_k - c_{k-1}\| \leq 1.E-5$$

7- لتكن جملة المعادلتين الجبريتين غير الخطيتين:

$$f_1(x, y) \equiv x^2 - 2x - y + 0.5 = 0,$$

$$f_2(x, y) \equiv x^2 + 4y^2 - 4 = 0,$$

يطلب مايلي:

أ- إيجاد مصفوفة جاكوبي $W(x, y)$ للمشتقات الجزئية:

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ثم احسب قيم $[W(X^{(0)})]^{-1}$ ، $W(X^{(0)})$ ، $f(X^{(0)})$ ، من أجل

$$X^{(0)} = (2.00, 0.25)^T$$

ب- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد قيم التكرارات $X^{(k)}$ ، $(k=1, 2, \dots, 5)$ ،

وحساب قيم $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$ ، $\|f(X^{(k)})\|$ في التكرارات المتتالية.

ج- استخدم طريقة نيوتن المعدلة لحساب قيم التكرارات $X^{(k)}$, $(k=1,2,...,5)$ ، ثم مقارنة تقارب هذه الطريقة مع تقارب طريقة نيوتن من خلال حساب قيم $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$ ، $\|f(X^{(k)})\|$ للطريقتين.

8- لتكن لدينا جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$x = \varphi_1(x, y), \quad y = \varphi_2(x, y) \quad (*)$$

يطلب مايلي:

أ- إيجاد مصفوفة المشتقات الجزئية $G(x, y)$:

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ثم حساب قيمة المصفوفة $G(p^{(0)}, q^{(0)})$.

ب- حساب قيمة $(p^{(1)}, q^{(1)})$ ، $(p^{(2)}, q^{(2)})$ ، باستخدام تكرارية النقطة الثابتة.

ج- استخدم برنامج كمبيوتر لإيجاد الحل عند التكرار:

$$(p, q) \approx (p^{(10)}, q^{(10)})$$

إذا علمت أن جملة المعادلتين (*) تأخذ النماذج التالية:

$$x = \varphi_1(x, y) = \frac{8x - 4x^2 + y^2 + 1}{8} \quad \diamond$$

$$y = \varphi_2(x, y) = \frac{2x - x^2 + 4y - y^2 + 3}{4} \quad \text{(دائرة)}$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (1.1, 2.0)$

$$(قَطْع مَكَافِئ) \quad x = \varphi_1(x, y) = \frac{2x + x^2 - y}{2} \quad \diamond$$

$$(قَطْع نَاقِص) \quad y = \varphi_2(x, y) = \frac{2x - x^2 + 8}{9} + \frac{4y - y^2}{4}$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (-1.2, 1.4)$

$$(قَطْع مَكَافِئ) \quad x = \varphi_1(x, y) = \frac{2x + x^2 - y}{2} \quad \diamond$$

$$(قَطْع نَاقِص) \quad y = \varphi_2(x, y) = \frac{2x - x^2 + 8}{9} + \frac{4y - y^2}{4}$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (1.4, 2.0)$

$$(تَكْعِيْبِيَّة) \quad x = \varphi_1(x, y) = \frac{4x - x^3 - y}{4} \quad \diamond$$

$$(قَطْع نَاقِص) \quad y = \varphi_2(x, y) = \frac{-x^2}{9} + \frac{4y - y^2}{4} + 1$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (1.2, 1.8)$

$$(قَطْع مَكَافِئ) \quad x = \varphi_1(x, y) = \frac{4x - x^3 + y + 3}{4} \quad \diamond$$

$$(قَطْع زَائِد) \quad y = \varphi_2(x, y) = \frac{3 - xy - 2y}{2}$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (2.1, 1.4)$

$$(تَكْعِيْبِيَّة) \quad x = \varphi_1(x, y) = \frac{y - x^3 + 3x^2 + 3x}{7} \quad \diamond$$

$$(قَطْع مَكَافِئ) \quad y = \varphi_2(x, y) = \frac{y^2 + 2y - x - 2}{2}$$

في النقطة الابتدائية $(p^{(0)}, q^{(0)}) = (-0.3, -1.3)$

4- الفصل الرابع

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Integration

ندرس في هذا الفصل طرقاً عددية للتفاضل والتكامل. وكلا المسألتين يمكن معالجتهما بالأسلوب نفسه. إذ يتم استبدال الدالة f المعلومة والمعطاة إما بشكل صريح أو كمجموعة من النقاط بدالة أبسط منها. وكثيرة الحدود هي الاختيار البديهي كدالة تقريب، لأن عمليات التفاضل والتكامل تكون سهلة الإجراء على كثيرات الحدود.

تؤخذ كثيرة الحدود $P(x)$ ومشتقاتها كبديل تقريبي للدالة $f(x)$ ومشتقاتها، ثم نعتبر أن قيمة مشتق كثيرة الحدود عند قيمة عددية ما x بمثابة تقريب لقيمة مشتق الدالة عند تلك القيمة x . وكذلك فإننا نعتبر تكامل $P(x)$ كبديل تقريبي لتكامل $f(x)$ على مجال ما $[a, b]$.

4.1 الطرائق العددية لحساب التفاضل العددي

Numerical Methods for Numerical Differentiation

4.1.1 تقريب المشتق باستخدام نهاية الفرق التقدّمي

The Limit of Difference Quotient

بحسب تعريف المشتق هو نهاية النسبة :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

والطريقة تبدو مباشرة، وهي اختيار متتالية $\{h_k\}$ بحيث تكون $h_k \rightarrow 0$ ، وحساب نهاية المتتالية:

$$d_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}, k=1,2,\dots,n,\dots \quad (4.2)$$

والسؤال الذي يبدو الآن ما هي قيمة h_k التي يفضل اختيارها لتكون d_k تقريب جيد للمشتق $f'(x)$ ؟ للإجابة على هذا السؤال نأخذ المثال التالي:

مثال 1: احسب المشتق التقريبي للدالة $y=e^x$ في النقطة $x=1$ مستخدماً الخطوات $h_k=(10)^{-k}$ ، من أجل $k=0,1,\dots,5$ ، ثم نفذ هذه الحسابات على برنامج حاسوبي.

الحل: نطبق العلاقة التقريبية (4.2) لحساب القيمة التقريبية للمشتق الأول للدالة

$$f(x)=e^x \text{ عند النقطة } x=1:$$

$$d_k = \frac{f(1+h_k) - f(1)}{h_k} = \frac{e^{(1+h_k)} - e}{h_k}$$

وهكذا من أجل التكرار $k=0$ ، $h_0=(10)^0=1$ ، نجد أن

$$d_0 = \frac{f(1+h_0) - f(1)}{h_0} = \frac{e^{(1+h_0)} - e}{h_0} = \frac{e^2 - e}{1} = 4.67077$$

و من أجل التكرار $k=1$ ، $h_1=(10)^{-1}=0.1$ ، نجد قيمة المشتق في هذه الخطوة:

$$d_1 = \frac{e^{(1+0.1)} - e}{0.1} = \frac{e^{1.1} - e}{0.1} = 2.85884$$

وبنفس الأسلوب من أجل التكرار $k=2$ ، $h_2=(10)^{-2}=0.01$ ،

$$d_2 = \frac{e^{(1+0.01)} - e}{0.01} = \frac{e^{1.01} - e}{0.01} = 2.73192$$

نرتب في الجدول (4.1) نتائج حسابات المشتق التقريبي وفق العلاقة (4.2) والقيمة الفعلية للمشتق مع الخطأ المطلق الناتج عن الحساب التقريبي.

الجدول (4.1): نتائج حسابات المشتق التقريبي للمثال 1

k	h_k	d_k	$y=e$	Error= $ e - d_k $
0	1	4.67077	2.7182818	1.95249E+0000
1	0.1	2.85884	//	1.40560E-0001
2	$(0.1)^2$	2.73192	//	1.36368E-0002
3	$(0.1)^3$	2.71964	//	1.35959E-0003
4	$(0.1)^4$	2.71842	//	1.35880E-0004
5	$(0.1)^5$	2.71830	//	1.33896E-0005
6	$(0.1)^6$	2.71828	//	1.38429E-0006
7	$(0.1)^7$	2.71830	//	1.59362E-0005
8	$(0.1)^8$	2.71830	//	1.59362E-0005
10	$(0.1)^{10}$	2.69210	//	2.61775E-0002

ملاحظة 1: إن العلاقة (4.2) تعطي قيمة المشتق الأول للدالة f في النقطة x بخطأ مقتطع من المرتبة الأولى، لأننا من منشور تايلور نجد:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c), \quad c \in [x, x+h]$$

وبالتالي:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ويكون الخطأ المقتطع:

$$E_{Trunc}(f, h) = -\frac{h}{2} f''(c), c \in [x, x+h]$$

إذن، يمكن حساب الخطأ المقتطع وفق الصيغة السابقة للمثال 1

$$E_{Trunc}(f, h) = -\frac{h}{2} f''(c) = -\frac{h}{2} e^c, c \in [1, 1+h]$$

ومنه نستنتج الخطأ من أجل الخطوة $h=h_0=1$:

$$E_{Trunc}(f, 1) = -\frac{1}{2} e^c \leq \frac{1}{2} e^2 = 3.69453$$

طبعاً الخطأ من أجل هذه الخطوة كبير جداً وغير مقبول نظراً لأن قيمة الخطوة كبيرة نسبياً.

أما الخطأ في الخطوة $h=h_1=0.1$:

$$E_{Trunc}(f, 0.1) = -\frac{0.1}{2} e^c \leq \frac{0.1}{2} e^{1.1} = 0.150208$$

فهو أفضل بكثير من سابقه، وبمتابعة حساب الأخطاء في الخطوات المتتالية:

$$E_{Trunc}(f, 0.01) = -\frac{0.01}{2} e^c \leq \frac{0.01}{2} e^{1.01} = 0.013728, h = 10^{-2}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-3}) = -\frac{10^{-3}}{2} e^c \leq \frac{10^{-3}}{2} e^{1.001} = 0.0013605, h = 10^{-3},$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-4}) = -\frac{10^{-4}}{2} e^c \leq \frac{10^{-4}}{2} e^{1.0001} = 1.35928 \times 10^{-4}, h = 10^{-4}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-5}) = -\frac{10^{-5}}{2} e^c \leq \frac{10^{-5}}{2} e^{1.00001} = 1.35915 \times 10^{-5}, h = 10^{-5}$$

برنامج 4.1: لإنجاز حسابات المثال 1.

```
PROGRAM differentiation;
uses wincrt;
Var D:array[0..100] of real;
    k,i : integer;x, error :real;
FUNCTION y(x:real):real;
```

```

begin
y:=EXP(x);
end;
FUNCTION h(k:byte):real;
begin
h:=Exp(-k*ln(10));;
end;
Begin
write('input x=');readln(x);
write('input k=');readln(k);
For i:=0 to k do
begin
D[i]:=(y(x+h(i))-y(x))/h(i);
writeln('h',i,'=',h(i):2:5,' D',i,'=',D[i]:2:5,
' y(x)=',y(x):2:5,' error=',Abs(y(x)-D[i]))
end;
END.

```

ينتج مما سبق أن الاعتماد على تعريف المشتق لا يفي بالغرض المطلوب، أي أنه لا يعتبر تقريباً مناسباً لأنه من جهة أولى يحتاج إلى اختيار مقدار الخطوة h صغيرة جداً لإنتاج تقريب مقبول، ومن جهة ثانية إذا تم تجاوز هذه الخطوة بخطوات أصغر منها تسوء الدقة نتيجة عدم الاستقرار العددي وبالتالي سنبحث عن طرائق بديله.

4.1.2 صيغ الفروق المركزية:

The Central-Difference Formulas

a - صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب المشتق الأول

نبدأ الفقرة بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 1: صيغ الفروق المركزية من المرتبة الثانية $O(h^2)$:

بفرض أن $f \in C^3[a, b]$ وأن $x-h, x, x+h \in [a, b]$ ، عندئذ يكون:

$$df(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.3)$$

علاوة على ذلك، يوجد عدد $c, c=c(x) \in [x-h, x+h]$ ، بحيث يكون:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E_{Trunc}(f, h)$$

حيث:

$$E_{Trunc}(f, h) = -h^2 \frac{f^{(3)}(c)}{6} \equiv O(h^2), \quad c \in [x-h, x+h] \quad (4.4)$$

تسمى العلاقة (4.3) بصيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية للمشتق التقريبي للدالة f عند x ، ويسمى الحد $E_{Trunc}(f, h)$ بالخطأ المقطع الحاصل في المشتق.

البرهان: ننشر الدالتين $f(x-h)$ و $f(x+h)$ وفق تايلور حول x :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(c_1), \quad (4.5)$$

$$c_1 \in [x, x+h]$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(c_2), \quad (4.6)$$

$$c_2 \in [x-h, x]$$

وبطرح العلاقة (4.6) من (4.5) نجد أن:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)}{3!} h^3 \quad (4.7)$$

وبما أن $f^{(3)}(x)$ دالة مستمرة في المجال $[a, b]$ فإنه بحسب نظرية القيمة

الوسطى يوجد $c \in [c_1, c_2] \equiv [x-h, x+h]$ بحيث يكون:

$$f^{(3)}(c) = \frac{f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)}{2} \quad (4.8)$$

وبتعويض العلاقة (4.8) بالعلاقة (4.7) نحصل على:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(c)}{3!} h^2 \quad (4.9)$$

وبالتالي فالنسبة $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ هي صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية، والحد $-\frac{f^{(3)}(c)}{3!} h^2$ هو الخطأ المقتطع فيها. وهو المطلوب.

مثال 2: لتكن الدالة $f(x) = \cos(x)$ ، والقيمة الفعلية للمشتق الأول لهذه الدالة عند $x=0.8$ هي $f'(0.8) = -\sin(0.8)$ والمطلوب:

أ- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب القيم التقريبية $df(0.8)$ لـ $f'(0.8)$.

ب- احسب الأخطاء المطلقة الناتجة بالمقارنة مع قيمة $f'(0.8) = -\sin(0.8)$ في الخطوات $h_k = (0.1)^k$ ، من أجل $k=1, \dots, 7$.

ج- اكتب برنامجاً حاسوبياً لإنجاز الحسابات السابقة.

د- احسب الأخطاء المقتطعة في الخطوات $h_k = (0.1)^k$ ، من أجل $k=0, \dots, 5$.

الحل: نطبق صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية (4.3) لحساب القيمة التقريبية للمشتق الأول للدالة $f(x) = \cos(x)$ عند $x=0.8$:

$$df(0.8) = \frac{f(0.8+h) - f(0.8-h)}{2h} = \frac{\cos(0.8+h) - \cos(0.8-h)}{2h}$$

من أجل الخطوة $h=0.1$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} df(0.8) &= \frac{f(0.8+0.1) - f(0.8-0.1)}{(2)(0.1)} \\ &= \frac{\cos(0.8+0.1) - \cos(0.8-0.1)}{(2)(0.1)} = -0.7161611 \end{aligned}$$

ومن أجل الخطوة $h=0.01$:

$$df(0.8) = \frac{\cos(0.8+0.01) - \cos(0.8-0.01)}{(2)(0.01)} = -0.7173441$$

وبنفس الأسلوب من أجل الخطوة $h=10^{-3}$:

$$df(0.8) = \frac{\cos(0.8+0.001) - \cos(0.8-0.001)}{(2)(0.001)} = -0.7173560$$

نسجل في الجدول (4.2) نتائج حسابات المشتق التقريبي وفق صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية (4.3)، والقيمة الفعلية للمشتق مع الخطأ المطلق الناتج عن الحساب التقريبي.

ولحساب الأخطاء المقطعة، لدينا من العلاقة (4.4):

$$E_{Trunc}(f, h) = -h^2 \frac{f^{(3)}(c)}{6}, c \in [1-h, 1+h]$$

نوجد المشتق الثالث للدالة $f^{(3)}(x) = \sin(x)$ ، نحدد قيمة c تجعل $f^{(3)}(c) = \sin(c)$ ، يأخذ أكبر قيمة له على المجال $[1-h, 1+h]$ ، وفي كل الأحوال فإن $|\sin(c)| \leq 1$ من أي قيمة c .

ومنه نستنتج الحد الأعلى للخطأ المقطع من أجل الخطوة $h=h_1=1$:

$$E_{Trunc}(f, 1) = \left| -(1)^2 \frac{\sin(c)}{6} \right| \leq (1)^2 \frac{1}{6} = 0.166667$$

وبمقارنة الخطأ في هذه الخطوة الكبيرة مع الخطأ في المثال 1، نعتبره مقبولاً نسبياً.

والحد الأعلى للخطأ المقطع من أجل الخطوة $h=h_1=0.1$:

$$E_{Trunc}(f, 0.1) = \left| -(0.1)^2 \frac{\sin(c)}{6} \right| \leq (0.1)^2 \frac{1}{6} = 0.00166667$$

فهو أفضل بكثير من سابقه، وبمتابعة حساب الأخطاء في الخطوات المتتالية، نجد:

$$E_{Trunc}(f, 10^{-2}) \leq (10^{-2})^2 \frac{1}{6} = 1.66667E-5, \quad h = 10^{-2}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-3}) \leq (10^{-3})^2 \frac{1}{6} = 1.66667E-7, \quad h = 10^{-3},$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-4}) \leq (10^{-4})^2 \frac{1}{6} = 1.66667E-9, \quad h = 10^{-4}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-5}) \leq (10^{-5})^2 \frac{1}{6} = 1.66667E-11, \quad h = 10^{-5}$$

الجدول (4.2): نتائج حسابات المشتق التقريبي للمثال 2

h_k	$df_k = \frac{f(0.8 + h_k) - f(0.8 - h_k)}{2h_k}$	$f'(0.8) = -\sin(0.8)$	Error = $ df_k - f'(0.8) $
0.1	-0.7161611	-0.7173561	1.1950E-3
$(0.1)^2$	-0.7173441	//	1.1956E-5
$(0.1)^3$	-0.7173560	//	1.1933E-7
$(0.1)^4$	-0.7173561	//	1.6371E-9
$(0.1)^5$	-0.7173561	//	1.2005E-8
$(0.1)^6$	-0.7173562	//	1.2442E-7
$(0.1)^7$	-0.7173549	//	1.2398E-6

ملاحظة 2: بعد مطالعة نتائج الجدول (4.2) نجد أن أفضل قيمة تقريبية لصيغة

الفروق المركزية من المرتبة الثانية هي من أجل الخطوة $h=10^{-4}$ بخطأ مطلق

. 1.6371E-9

برنامج 4.2: لإنجاز حسابات المثال 2.

```

PROGRAM Centraldiffer;
uses wincrt;
Var df:array[0..100] of real;
    k,i:integer;x,error:real;

```

```

FUNCTION f(x:real):real;
begin
  f:=Cos(x);
end;
FUNCTION h(k:byte):real;
begin
  h:=Exp(-k*ln(10));;
end;
Begin
  write('input x=');readln(x);
  write('input k=');readln(k);
  For i:=1 to k do
  begin
    df[i]:=(f(x+h(i))-f(x-h(i)))/(2*h(i));
    writeln('h',i,'=',h(i):2:5, ' df',i,'=',df[i]:2:7,
    ' f(x)=-sin(x):2:7, ' error=','Abs(-sin(0.8)-df[i])
  end;
END.

```

b- صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب المشتق الأول:

مبرهنة 2: صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة $O(h^4)$:

بفرض أن $f \in C^5[a, b]$ وأن $x-2h, x-h, x, x+h, x+2h \in [a, b]$ عندئذ

يكون:

$$df(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} \quad (4.10)$$

علاوة على ذلك، يوجد عدد $c, c=c(x) \in [x-2h, x+2h]$ ، بحيث يكون

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + E_{Trunc}(f, h) \quad (4.11)$$

حيث:

$$E_{Trunc}(f, h) = h^4 \frac{f^{(5)}(c)}{30} \equiv O(h^4), c \in [x-2h, x+2h] \quad (4.12)$$

البرهان: باستخدام منشور تايلور للدالتين $f(x+h)$ و $f(x-h)$ حول x ، نحصل على:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(c_1), \quad c_1 \in [x, x+h] \quad (4.13)$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(c_2), \quad c_2 \in [x-h, x] \quad (4.14)$$

وبطرح (4.14) من (4.13)، نجد أن:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{2f^{(5)}(c_{11})}{5!}h^5 \quad (4.15)$$

حيث بحسب نظرية القيمة الوسطى استخدمنا:

$$f^{(5)}(c_{11}) = \frac{f^{(5)}(c_1) + f^{(5)}(c_2)}{2}, \quad c_{11} \in [x-h, x+h]$$

وباستبدال الخطوة h بـ $2h$ ، في العلاقتين (4.13) و (4.14)، نجد:

$$f(x+2h) = f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x) + \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{32h^5}{5!} f^{(5)}(c_3), \quad c_3 \in [x, x+2h]$$

$$f(x-2h) = f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x) - \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{32h^5}{5!} f^{(5)}(c_4), \quad c_4 \in [x-2h, x]$$

نطرح العلاقة الثانية من الأولى نحصل على:

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4f'(x)h + 16\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{64f^{(5)}(c_{22})}{5!}h^5, \quad c_{22} \in [x-2h, x+2h] \quad (4.16)$$

$$\text{حيث } f^{(5)}(c_{22}) = \frac{f^{(5)}(c_3) + f^{(5)}(c_4)}{2} \quad (\text{بحسب نظرية القيمة الوسطى})$$

نضرب العلاقة (4.15) بـ 8 ونطرح منها العلاقة (4.16)، نحصل على:

$$8f(x+h) - 8f(x-h) - f(x+2h) + f(x-2h) = 12f'(x)h + \frac{16f^{(5)}(c_{11}) - 64f^{(5)}(c_{22})}{5!}h^5 \quad (4.17)$$

وبفرض أن الدالة $f^{(5)}(x)$ تملك إشارة واحدة ولا تتغير قيمها بشكل مفاجئ فوق

المجال $c \in [x-2h, x+2h]$ عندئذ يوجد $c \in [x-2h, x+2h]$ بحيث يكون:

$$16f^{(5)}(c_{11}) - 64f^{(5)}(c_{22}) = -48f^{(5)}(c)$$

نعوض العلاقة الأخيرة في العلاقة (4.17)، ونحسب المشتق منها لينتج لدينا:

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + \frac{f^{(5)}(c)h^4}{30}$$

وهكذا، فالنسبة الأولى في العلاقة السابقة هي صيغة الفروق المركزية من

المرتبة الرابعة وللاختصار نرمز لها:

$$df(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} \quad (4.18)$$

والحد الثاني $\frac{f^{(5)}(c)}{30}h^4$ هو الخطأ المقتطع. وهو المطلوب.

مثال 3: لتكن الدالة $f(x) = \sin(x)$ و $f(1.2) = \cos(1.2)$ والمطلوب:

أ- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة (4.18) لحساب القيم

التقريبية $df(1.2)$ لـ $f'(1.2)$ في الخطوات $h_k = (0.1)^k$ ، $k=1, \dots, 7$.

ب- احسب الأخطاء المطلقة الناتجة بالمقارنة مع قيمة $f'(1.2)=\cos(1.2)$ في

$$\text{الخطوات } h_k=(0.1)^k, k=1, \dots, 7.$$

ج- اكتب برنامجا حاسوبيا لإنجاز الحسابات السابقة.

د- احسب الأخطاء المقتطعة في الخطوات $h_k=(0.1)^k, k=0, \dots, 5$.

الحل: نطبق الصيغة (4.18) لحساب القيمة التقريبية للمشتق الأول للدالة

$$f(x)=\sin(x) \text{ عند } x=1.2$$

$$\begin{aligned} df(1.2) &= \frac{f(1.2-2h) - 8f(1.2-h) + 8f(1.2+h) - f(1.2+2h)}{12h} \\ &= \frac{\sin(1.2-2h) - 8\sin(1.2-h) + 8\sin(1.2+h) - \sin(1.2+2h)}{12h} \end{aligned}$$

من أجل الخطوة $h=0.1$ ، نجد أن:

$$\begin{aligned} df(1.2) &= \frac{\sin(1.2-0.2) - 8\sin(1.2-0.1) + 8\sin(1.2+0.1) - \sin(1.2+0.2)}{(12)(0.2)} \\ &= 0.3623565 \end{aligned}$$

ومن أجل الخطوة $h=0.01$:

$$\begin{aligned} df(1.2) &= \frac{\sin(1.2-0.02) - 8\sin(1.2-10^{-2}) + 8\sin(1.2+10^{-2}) - \sin(1.2+0.02)}{(12)(0.02)} \\ &= 0.3623578 \end{aligned}$$

وبنفس الأسلوب من أجل الخطوة $h=(0.1)^3$:

$$\begin{aligned} df(1.2) &= \frac{\sin(1.2-2 \times 10^{-3}) - 8\sin(1.2-10^{-3}) + 8\sin(1.2+10^{-3}) - \sin(1.2+2 \times 10^{-3})}{(12)(2 \times 10^{-3})} \\ &= 0.3623578 \end{aligned}$$

ندرج في الجدول (4.3) نتائج حسابات البندين أ ب .

نحسب الخطأ المقتطع في صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة من العلاقة

$$(4.12):$$

$$E_{Trunc}(f, h) = h^4 \frac{f^{(5)}(c)}{30}, c \in [1.2 - 2h, 1.2 + h]$$

من أجل ذلك نحتاج لحساب المشتق الخامس للدالة $f(x)$ ، فنجد أن $f^{(5)}(x) = \cos(x)$ ، ومن المعلوم أنه يجب تحديد قيمة لـ c ، تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له على المجال $[1.2 - 2h, 1.2 + 2h]$ ، ولدينا $|\cos(c)| \leq 1$ مهما تكن قيمة c .

وهكذا مما تقدم يقدر الحد الأعلى للخطأ المقطوع من أجل الخطوة $h=h_1=1$:

$$E_{Trunc}(f, 1) = |(1)^4 \frac{\cos(c)}{30}| \leq (1)^4 \frac{1}{30} = 0.0333333$$

نستنتج أن الخطأ الذي حصلنا عليه هنا أصغر بحوالي خمس مرات من الخطأ المقطوع في المثال 2 وأصغر بحوالي 111 مرة من الخطأ المقطوع في المثال 1 عند نفس الخطوة.

ونقدر الحد الأعلى للخطأ المقطوع من أجل الخطوة $h=h_1=0.1$:

$$E_{Trunc}(f, 0.1) \leq |(0.1)^4 \frac{1}{30}| = 3.33333E - 6$$

فهو أفضل بكثير من سابقة، وبمتابعة حساب الأخطاء في الخطوات المتتالية، نجد:

$$E_{Trunc}(f, 10^{-2}) \leq (10^{-2})^4 \frac{1}{30} = 3.33333E - 10, \quad h = 10^{-2}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-3}) \leq (10^{-3})^4 \frac{1}{30} = 3.33333E - 14, \quad h = 10^{-3},$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-4}) \leq (10^{-4})^4 \frac{1}{30} = 3.33333E - 18, \quad h = 10^{-4}$$

$$E_{Trunc}(f, 10^{-5}) \leq (10^{-5})^4 \frac{1}{30} = 3.33333E - 22, \quad h = 10^{-5}$$

الجدول (4.3): نتائج حسابات المشتق التقريبي للمثال 3

h_k	$df_k(1.2)$	$f'(2)=\text{Cos}(1.2)$	Error= $ df_k - f'(1.2) $
0.1	0.3623565	0.3623578	1.2064E-06
$(0.1)^2$	0.3623578	//	8.6091E-11
$(0.1)^3$	0.3623578	//	1.1610E-10
$(0.1)^4$	0.3623577	//	4.8155E-09
$(0.1)^5$	0.3623577	//	1.3152E-08
$(0.1)^6$	0.3623577	//	5.8627E-08
$(0.1)^7$	0.3623624	//	4.6404E-06

ملاحظة 3: بمطالعة نتائج الجدول (4.3) نجد أن أفضل قيمة تقريبية لصيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة هي من أجل الخطوة $h=10^{-2}$ بخطأ مطلق $8.6091\text{E}-11$ وهي أصغر من الخطأ المطلق لصيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية بحوالي 15 مرة تقريبا عند الخطوة $h=10^{-4}$.

نستنتج من الأمثلة المقدمة أن السبب المباشر في انخفاض الدقة العددية من أجل الخطوات ذات القيم الصغيرة جدا هو تقسيم النسب في العلاقات (4.2) (4.3) و (4.18) على أعداد صغير جدا، وهذا يكافئ ضرب البسط في النسب المذكورة بأعداد كبير جدا، مما يساهم في نمو الخطأ بشكل كبير، لهذا يجب علينا اختيار خطوة مناسبة لتقريبات الصيغ السابقة.

برنامج 4.3: صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لإنجاز حسابات المثال 3.

```

PROGRAM Centralfour;
uses wincrt;
Var df:array[0..100] of real; k,i:integer;x,error:real;
FUNCTION f(x:real):real;
begin
  f:=Sin(x);
end;
FUNCTION h(k:byte):real;
begin
  h:=Exp(-k*ln(10));;
end;
Begin {main}
write('input x='); readln(x);   write('input k='); readln(k);
For i:=1 to k do
begin
df[i]:=f(x-2*h(i))-8*f(x-h(i))+8*f(x+h(i))-
      f(x+2*h(i))/(12*h(i));
  writeln('h',i,'=',h(i):2:5,' df',i,'=',df[i]:2:7,
' f(x)=',Cos(x):2:7,' error=',Abs(Cos(x)-df[i]))
end;
END.

```

C- صيغ الفروق المركزية لإيجاد المشتقات من مراتب عليا:

أ- صيغة الفروق من المرتبة الثانية لحساب المشتق الثاني:

نستطيع الحصول على صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية

لحساب قيمة تقريبية لـ $f''(x)$ ، و باستخدام منشور تايلور، نجد أن:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

وبجمع العلاقتين السابقتين ينتج لدينا:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^2}{24} f^{(4)}(x) \dots \quad (4.19)$$

ومن المعادلة (4.19) يمكننا إيجاد:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \quad (4.20)$$

تعطينا العلاقة (4.20) صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب المشتق الثاني التقريبي للدالة $f(x)$ عند $x=x_0$ ، التي يمكن تعريفها بالعلاقة:

$$d2f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_{-1}) - 2f(x_0)}{h^2} \quad (4.21a)$$

والحد الثاني:

$$E_{Trunc}(f, h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c), \quad c \in [x-h, x+h] \quad (4.21b)$$

هو الخطأ المقتطع الحاصل في الصيغة المذكورة.

لتسهيل الاستخدام نرمز بـ $d2f(x_0)$ للمشتق التقريبي $f''(x)$ عند $x=x_0$.

مثال 4: لتكن لدينا الدالة $f(x) = \text{Log}(x)$ ، والمطلوب استخدام صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب القيم التقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=1$ والأخطاء المطلقة الناتجة بالمقارنة مع القيمة الفعلية $f''(1) = -1$ في الخطوات:

$$h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$$

الحل: أولاً، لدينا $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ، $x_0=1$ ، $x_1=1+h$ ، $x_{-1}=1-h$ ، وبالتالي:

$$f(x_0) = \text{Log}(x_0) = \text{Log}(1),$$

$$f(x_1) = \text{Log}(x_1) = \text{Log}(1+h),$$

$$f(x_{-1}) = \text{Log}(x_{-1}) = \text{Log}(1-h),$$

نطبق الصيغة (4.21a) لحساب قيمة تقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=1$ ، فنجد:

$$d2f(1) = \frac{f(1+h) + f(1-h) - 2f(1)}{h^2}$$

$$= \frac{\text{Log}(1+h) + \text{Log}(1-h) - 2\text{Log}(1)}{h^2}$$

وهكذا من أجل الخطوة $h=0.1$:

$$d2f(1) = \frac{\text{Log}(1+0.1) + \text{Log}(1-0.1) - 2\text{Log}(1)}{(0.1)^2} = -1.0050336$$

ومن أجل الخطوة $h=0.01$:

$$d2f(1) = \frac{\text{Log}(1.01) + \text{Log}(0.99) - 2\text{Log}(1)}{(0.01)^2} = -1.0000500$$

وبنفس الأسلوب من أجل الخطوة $h=(0.1)^3$:

$$d2f(1) = \frac{\text{Log}(1.001) + \text{Log}(0.999) - 2\text{Log}(1)}{(0.001)^2} = -1.0000005$$

ندرج في الجدول (4.4) نتائج حسابات المشتق الثاني التقريبي $d2f_k(1)$ للدالة $f(x)$ عند $x=1$ والخطأ المطلق الحاصل من أجل أطوال مختلفة للخطوات.

الجدول (4.4): نتائج حسابات المشتق الثاني التقريبي للمثال 4

h_k	$d2f_k(1)$	$f''(1)=-1$	Error= $ d2f_k - f''(1) $
0.1	-1.0050336	-1	5.0336E-0003
$(0.1)^2$	-1.0000500	//	5.0003E-0005
$(0.1)^3$	-1.0000005	//	5.0019E-0007
$(0.1)^4$	-1.0000909	//	9.0948E-0005
$(0.1)^5$	-1.0000001	//	8.2740E-0008
$(0.1)^6$	-1.0000004	//	4.2969E-0007

برنامج 4.4: طريقة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لإنجاز حسابات المثال 4.

```

PROGRAM CentralTwoDiffdf2;
uses wincrt;
Var df:array[0..100] of real;
    k,i:integer;x,error:real;
FUNCTION f(x:real):real;
begin
    f:=ln(x);
end;
FUNCTION h(k:byte):real;
begin
    h:=Exp(-k*ln(10));;
end;
Begin {Main}
write('input x=');readln(x);
write('input k=');readln(k);
For i:=1 to k do
begin
    df[i]:=(f(x+h(i))-2*f(x)+f(x-h(i)))/sqr(h(i));
    writeln('h',i,'=',h(i):2:5,' d2f',i,'=',df[i]:2:7,
    ' f`'(x)=-1/sqr(x):2:7,' error=',Abs(-1/sqr(x)-df[i]));
end;
END.

```

ب-صيغة فرقية من المرتبة الرابعة للمشتق الثاني:

نستطيع الحصول على صيغة من المرتبة الرابعة لحساب قيمة تقريبية

لـ $f''(x)$ عند $x=x_0$ بشكل مشابه لما سبق، حيث لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) \\
 &\quad + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(6)}(x), \\
 f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) \\
 &\quad + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(6)}(x),
 \end{aligned}$$

وبالجمع نجد:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2}{2!} f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{2h^6}{6!} f^{(6)}(x) \quad (4.22)$$

وبإبدال كل h بـ $2h$ في العلاقة (4.22)، ينتج لدينا:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + \frac{8h^2}{2!} f''(x) + \frac{32h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{128h^6}{6!} f^{(6)}(x) \quad (4.23)$$

نضرب العلاقة (4.22) بـ 16 ونطرح منها العلاقة (4.23) نحصل على:

$$16f(x+h) + 16f(x-h) - f(x+2h) - f(x-2h) = 30f(x) + \frac{24h^2}{2} f''(x) - \frac{96h^6}{6!} f^{(6)}(c)$$

نحسب المشتق الثاني من العلاقة السابقة:

$$f''(x) = \frac{16f(x+h) + 16f(x-h) - f(x+2h) - f(x-2h) - 30f(x)}{12h^2} \quad (4.24)$$

$$-\frac{h^4}{90} f^{(6)}(c), \quad c \in [x-2h, x+2h]$$

نعطينا العلاقة (4.24) صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب قيمة

تقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=x_0$:

$$d2f(x_0) = \frac{16f(x_1) + 16f(x_{-1}) - f(x_2) - f(x_{-2}) - 30f(x_0)}{12h^2} \quad (4.25a)$$

والحد الثاني:

$$E_{Trunc}(f, h) = -\frac{h^4}{90} f^{(6)}(c), \quad c \in [x-2h, x+2h] \quad (4.25b)$$

هو الخطأ المقطوع الحاصل في الصيغة المذكورة.

مثال 5: لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ، والمطلوب استخدام صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة (4.25a) لحساب القيم التقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=2$ والأخطاء المطلقة الناتجة بالمقارنة مع قيمة $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ عند $x=2$ ، في الخطوات:

$$h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$$

الحل: نحسب قيمة المشتق الثاني للدالة f عند $x=2$ ، فنجد أن $f''(2) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$ ولدينا أيضا:

$$x_2=2-2h, \quad x_2=2+2h, \quad x_1=2-h, \quad x_1=2+h, \quad x_0=2$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sqrt{x_0} = \sqrt{2}, \\ f(x_1) &= \sqrt{x_1} = \sqrt{2+h}, \\ f(x_{-1}) &= \sqrt{x_{-1}} = \sqrt{2-h}, \\ f(x_2) &= \sqrt{x_2} = \sqrt{2+2h}, \\ f(x_{-2}) &= \sqrt{x_{-2}} = \sqrt{2-2h}, \end{aligned}$$

وباستخدام الصيغة التقريبية (4.25a):

$$\begin{aligned} d2f(2) &= \frac{16\sqrt{x_1} + 16\sqrt{x_{-1}} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_{-2}} - 30\sqrt{x_0}}{12h^2} \\ &= \frac{16\sqrt{2+h} + 16\sqrt{2-h} - \sqrt{2+2h} - \sqrt{2-2h} - 30\sqrt{2}}{12h^2} \end{aligned}$$

من أجل الخطوة $h=0.1$ ، نجد أن:

$$\begin{aligned} d2f(2) &= \frac{16\sqrt{2+0.1} + 16\sqrt{2-0.1} - \sqrt{2+0.2} - \sqrt{2-0.2} - 30\sqrt{2}}{(12)(0.2)^2} \\ &= -0.0883880 \end{aligned}$$

ومن أجل الخطوة $h=0.01$:

$$d^2 f(2) = \frac{16\sqrt{2+0.01} + 16\sqrt{2-0.01} - \sqrt{2+0.02} - \sqrt{2-0.02} - 30\sqrt{2}}{(12)(0.02)^2}$$

$$= -0.0883884$$

ندرج في الجدول (4.5) نتائج حسابات المشتق الثاني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ في النقطة $x \equiv x_0 = 2$ باستخدام الصيغة التقريبية (4.21a)، والخطأ المطلق الحاصل فيها.

الجدول (4.5): نتائج حسابات المشتق الثاني التقريبي للمثال 5

h_k	$d^2 f_k(2)$	$f''(2) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$	Error = $ d^2 f_k - f''(2) $
0.1	-0.0883880	-0.0883883	3.6548E-0007
$(0.1)^2$	-0.0883884	//	2.9408E-0008
$(0.1)^3$	-0.0883882	//	1.6613E-0007
$(0.1)^4$	-0.0884029	//	1.4537E-0005

برنامج 4.5: صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لإنجاز حسابات المثال 5.

```

Program CentrFourDiffdf62;
uses wincrt;
Var d2f :array[0..100] of real;  k,i: integer; x,error: real;
FUNCTION f(x:real): real;
begin
  f:= sqrt(x);
end;
FUNCTION h(k:byte): real;
begin
  h:= Exp(-k*ln(10));
end;
Begin
write('input x='); readln(x);
write('input k='); readln(k); {Number of steps}
For i:=1 to k do
begin

```

```

d2f[i]:=(16*f(x+h(i))+16*f(x-h(i))-f(x+2*h(i))-f(x-2*h(i))-
30*f(x))/(12*h(i)*h(i));
writeln('h',i,'=',h(i):2:5,' d2f',i,'=',d2f[i]:2:7,' f`'(x)=',
-1/(4*x*sqrt(x)):2:7,' error=',Abs(-1/(4*x*sqrt(x))-d2f[i]))
end;
END.

```

4.13 صيغة لاغرانج لحساب المشتقات الأولى والثانية:

نستخدم في هذه الفقرة كثيرات حدود لاغرانج للاستيفاء الداخلي كتقريب للدالة f في مجموعة من العقد، ثم تهيئة هذه الحدوديات كبداية تقريبية عن الدالة لحساب مشتقاتها عند نقطة معينة.

a- صيغة لاغرانج لتقريب المشتق الأول

بفرض أن $P_2(x)$ هي كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثانية التي تستوفي داخليا الدالة $f(x)$ في العقد x_0, x_1, x_2 ، عندئذ نستطيع أن نكتب:

$$f(x) \equiv P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

نشتق ونعوض كل x بـ x_0 ، لنجد على التوالي:

$$f'(x) = \frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(2x-x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(2x-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$$f'(x_0) = \frac{(-3h)}{(-h)(-2h)} f_0 + \frac{(-2h)}{(h)(-h)} f_1 + \frac{(-h)}{(2h)(h)} f_2$$

$$= \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

نتنتج لدينا العلاقة التقريبية:

$$f'(x_0) \approx df(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \quad (4.26)$$

وهي صيغة لاغرانج من المرتبة الثانية لحساب $f'(x)$ عند النقطة $x=x_0$

مثال 6: لتكن لدينا الدالة $f(x) = \tan(x)$ ، والمطلوب استخدام صيغة لاغرانج من المرتبة الثانية (4.26) لحساب القيم التقريبية لـ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ والأخطاء المطلقة

بالمقارنة مع قيمة $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$ ، وفق الخطوات:

$$h=0.1, (0.1)^2, (0.1)^3, (0.1)^4$$

الحل: لدينا $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ، $x_1 = \frac{\pi}{4} + h$ ، $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2h$ ، وبالتالي فإن:

$$f(x_2) = \tan(x_2) , f(x_1) = \tan(x_1) , f(x_0) = \tan(x_0)$$

وباستخدام صيغة لاغرانج (4.26) ، نضع:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx df\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right)}{2h}$$

ولحساب قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عند $x = \frac{\pi}{4}$ ، من أجل الخطوة $h=0.1$ ، نجد أن:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx df\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{4} + 0.1\right) - f\left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0.1\right)}{2 \cdot 0.1}$$

$$= 1.91848937$$

ومن أجل $h=(0.1)^2$ ، ينتج:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx df\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{4} + 0.01\right) - f\left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0.01\right)}{2 \cdot 0.01}$$

$$= 1.99944605$$

وأيضا من أجل الخطوة $h=(0.1)^3$ ، نجد:

$$f'(\frac{\pi}{4}) \approx df(\frac{\pi}{4}) = \frac{-3f(\frac{\pi}{4}) + 4f(\frac{\pi}{4} + 0.001) - f(\frac{\pi}{4} + 2*0.001)}{2*0.001}$$

$$= 1.99999465$$

من أجل الخطوة الأصغر $h=(0.1)^4$ ، نحصل على:

$$f'(\frac{\pi}{4}) \approx df(\frac{\pi}{4}) = \frac{-3f(\frac{\pi}{4}) + 4f(\frac{\pi}{4} + 0.0001) - f(\frac{\pi}{4} + 2*0.0001)}{2*0.0001}$$

$$= 1.99999995$$

يمكننا وضع النتائج في الجدول (4.6).

الجدول (4.6): نتائج تقريبات المشتق الأول للدالة في المثال 6

h_k	$df(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$	$f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2(x_0)}$	Error = $ df(\frac{\pi}{4}) - f'(\frac{\pi}{4}) $
0.1	1.91848937	2	8.15106E-0002
$(0.1)^2$	1.99944605	//	5.53947E-0004
$(0.1)^3$	1.99999465	//	5.35339E-0006
$(0.1)^4$	1.99999995	//	5.33564E-0008

برنامج 4.6: صيغة لاغرانج من المرتبة الثانية لإنجاز حسابات المثال 6.

```

PROGRAM DifferLagrangedf;
uses wincrt;
Var df:array[0..100] of real;
    k,i:integer;x0,error:real;
FUNCTION f(x:real):real;
begin
    f:=Sin(x)/Cos(x);
end;
FUNCTION fl(x:real):real;
begin

```

```

f1:=1/Sqr(Cos(x));
end;
FUNCTION h(k:byte):real;
begin
  h:=Exp(-k*ln(10));;
end;
Begin
{write('input x0='); readln(x0);}
x0:=Pi/4;
write('input k='); readln(k); {Number of steps}
For i:=1 to k do
begin
  df[i]:=(-3*f(x0)+4*f(x0+h(i))-f(x0+2*h(i)))/(2*h(i));
  writeln('h',i,',h(i):2:4,' df=',df[i]:2:8
  , ' error=',Abs(f1(x0)-df[i]):2)
end;
END.

```

b- صيغة لاغرانج لتقريب المشتق الثاني

لإيجاد صيغة لحساب قيمة $f''(x)$ عند النقطة $x=x_0$ ، نفرض أن $P_3(x)$ هي كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثالثة تستوفي داخلها الدالة $f(x)$ في النقاط x_0, x_1, x_2, x_3 ، وعندئذ نستطيع أن نكتب:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3$$

وبالاشتقاق مرتين وتعويض كل x بـ x_0 ينتج لدينا:

$$f''(x) = \frac{(6x-2x_1-2x_2-2x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)} f_0 + \frac{(6x-2x_0-2x_2-2x_3)}{(h)(-h)(-2h)} f_1 +$$

$$\frac{(6x-2x_0-2x_1-2x_3)}{(2h)(h)(-h)} f_2 + \frac{(6x-2x_0-2x_1-2x_2)}{(3h)(2h)(h)} f_3$$

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{2(-h-2h-3h)}{-6h^3} f_0 + \frac{2(-2h-3h)}{2h^3} f_1 + \\
&\quad \frac{2(-h-3h)}{-2h^3} f_2 + \frac{2(-h-2h)}{6h^3} f_3 = \\
&\quad \frac{2}{h^2} f_0 + \frac{-5h}{h^2} f_1 + \frac{4}{h^2} f_2 + \frac{-1}{h^2} f_3 = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}
\end{aligned}$$

أي أن:

$$f''(x_0) \approx d2f(x_0) = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \quad (4.27)$$

هي صيغة لاغرانج التقريبية لحساب قيمة $f''(x)$ عند $x=x_0$.

ج- الخطأ المقتطع في صيغ لاغرانج

من المعروف أن الخطأ المقتطع في كثيرة حدود استيفاء لاغرانج الداخلي لدالة f ما في العقد الداخلية $x_0, x_1, \dots, x_n$ هو:

$$\Delta = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$. وبالتالي من أجل $n=2$ نحصل على الخطأ في حدودية لاغرانج من الدرجة الثانية:

$$\Delta = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(3)!} f^{(3)}(c), c \in [x_0, x_2]$$

وهكذا نحصل على الخطأ في الصيغة (4.26) من حساب قيمة المشتق الأول لـ Δ عند النقطة x_0 ، كما يلي:

$$\Delta' = \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(3)!} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(3)!} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(3)!} \right] f^{(3)}(c),$$

و بتعويض كل x بـ x_0 نجد أن:

$$\Delta'_{x_0} = \left[\frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(3)!} + \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2)}{(3)!} + \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)}{(3)!} \right] f^{(3)}(c)$$

وبالتالي:

$$Error = \Delta'_{x_0} = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c), c \in [x_0, x_2] \quad (4.28)$$

هو الخطأ المقتطع في صيغة لاغرانج ذات المرتبة الثانية (4.26) لحساب قيمة $f'(x)$ عند $x=x_0$.

أما الخطأ المقتطع في الصيغة التقريبية (4.27) لحساب قيمة تقريبية للمشتق الثاني للدالة، ينتج من حساب قيمة المشتق الثاني للحد:

$$\Delta = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(4)!} f^{(4)}(c)$$

عند النقطة $x=x_0$ ، أي أن:

$$\Delta'' = \left\{ \frac{2(x - x_0)(x - x_1)}{(4)!} + \frac{2(x - x_0)(x - x_2)}{(4)!} + \frac{2(x - x_0)(x - x_3)}{(4)!} + \right. \\ \left. \frac{2(x - x_1)(x - x_2)}{(4)!} + \frac{2(x - x_2)(x - x_3)}{(4)!} + \frac{2(x - x_1)(x - x_3)}{(4)!} \right\} f^{(4)}(c)$$

و بتعويض كل x بـ x_0 نجد أن:

$$Error = \Delta''_{x_0} = \left[\frac{2(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(4)!} + \frac{2(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(4)!} + \right. \\ \left. \frac{2(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)}{(4)!} \right] f^{(4)}(c) \\ = \left[\frac{2(-h)(-2h)}{(4)!} + \frac{2(-2h)(-3h)}{(4)!} + \frac{2(-h)(-3h)}{(4)!} \right] f^{(4)}(c) \\ = \frac{11h^2}{12} f^{(4)}(c)$$

وهكذا يكون:

$$Error = \Delta_{x_0}'' = \frac{11}{12} h^2 f^{(4)}(c), c \in [x_0, x_3] \quad (4.29)$$

هو الخطأ المقتطع الحاصل في صيغة لاغرانج ذات المرتبة الثانية (4.27) لحساب قيمة $f''(x)$ عند $x=x_0$.

مثال 7: لتكن الدالة $f(x)=x^3+5x+4$ ، والمطلوب استخدام صيغتي لاغرانج من المرتبة الثانية لحساب القيم التقريبية لـ $f'(x)$ و لـ $f''(x)$ والأخطاء المطلقة الناتجة بالمقارنة مع قيم $f'(x)=3x^2+5$ و $f''(x)=6x$ عند $x=1$ ، وفق الخطوات:

$$h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$$

ثم حساب الأخطاء المقتطعة الناتجة عن استخدام الصيغتين المذكورتين، من أجل الخطوة $h=0.001$.

الحل: لدينا $x_0=1, x_1=1+h, x_2=1+2h, x_3=1+3h$ ، وبالتالي فإن:

$$f_0=x_0^3+5x_0+4, f_1=x_1^3+5x_1+4, f_2=x_2^3+5x_2+4, f_3=x_3^3+5x_3+4$$

وباستخدام صيغة لاغرانج (4.26) لحساب $f'(x)$ عند $x=1$ ، من أجل الخطوة $h=0.1$ ، نجد أن:

$$\begin{aligned} f'(1) \approx df(1) &= \frac{-3f(1)+4f(1+0.1)-f(1+2*0.1)}{2*0.1} \\ &= 7.980000000 \end{aligned}$$

ومن أجل الخطوة $h=(0.1)^2$ ، نحصل على القيمة التقريبية:

$$\begin{aligned} f'(1) \approx df(1) &= \frac{-3f(1)+4f(1+0.01)-f(1+2*0.01)}{2*0.01} \\ &= 7.99980000 \end{aligned}$$

وأيضاً من أجل الخطوة $h=(0.1)^3$ ، ينتج لدينا:

$$f'(1) \approx df(1) = \frac{-3f(1) + 4f(1+0.001) - f(1+2*0.001)}{2*0.001}$$

$$= 7.999997999$$

و من أجل الخطوة الأصغر $h=(0.1)^4$ ، نجد:

$$f'(1) \approx df(1) = \frac{-3f(1) + 4f(1+0.0001) - f(1+2*0.0001)}{2*0.0001}$$

$$= 7.9999997997$$

نضع النتائج في الجدول (4.7).

الجدول (4.7): نتائج تقريبات المشتق الأول للدالة في المثال 7

h_k	$df(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$	$f'(x_0) = 3x_0^2 + 5$	Error= $ df(1) - f'(1) $
0.1	7.97999999999	8	2.00000E-02
$(0.1)^2$	7.99980000000	//	2.00000E-04
$(0.1)^3$	7.99999799999	//	2.00000E-06
$(0.1)^4$	7.99999979998	//	2.00204 E-08

نستخدم أيضاً صيغة لاغرانج (4.27) لحساب $f''(x)$ عند $x=1$ من أجل الخطوة

$h=0.1$ ، نجد أن:

$$f''(1) \approx d2f(1) = \frac{2f(1) - 5f(1+0.1) + 4f(1+2*0.1) - f(1+3*0.1)}{(0.1)^2}$$

$$= 5.99999999999$$

ومن أجل الخطوة $h=(0.1)^2$ ، نحصل على القيمة التقريبية:

$$f''(1) \approx d2f(1) = \frac{2f(1) - 5f(1+0.01) + 4f(1+2*0.01) - f(1+3*0.01)}{(0.01)^2}$$

$$= 6.00000000000$$

وأيضاً من أجل الخطوة $h=(0.1)^3$ ، ينتج التقريب:

$$f''(1) \approx d2f(1) = \frac{2f(1) - 5f(1+(0.1)^3) + 4f(1+2(0.1)^3) - f(1+3(0.1)^3)}{[(0.1)^3]^2}$$

$$= 6.00000000079$$

ومن أجل الخطوة الأصغر $h=(0.1)^4$ ، ينتج:

$$f''(1) \approx d2f(1) = \frac{2f(1) - 5f(1+(0.1)^4) + 4f(1+2(0.1)^4) - f(1+3(0.1)^4)}{[(0.1)^4]^2}$$

$$= 6.0000001411$$

نضع النتائج في الجدول (4.8).

الجدول (4.8): نتائج تقريبات المشتق الثاني مع الخطأ المطلق للدالة في المثال 7

h_k	$d2f(x_0) = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$	$f''(x_0) = 6x_0$	Error = $ d2f(1) - f''(1) $
0.1	5.9999999999987	6	1.28786E-13
$(0.1)^2$	6.00000000000378	//	3.78009E-12
$(0.1)^3$	6.00000000079	//	7.9441E-09
$(0.1)^4$	6.0000001412	//	1.41171E-07

نطبق الصيغة (4.28) من أجل $h=0.001$ لحساب الخطأ المقطع الناتج عن

حساب قيمة تقريبية لـ $f'(x) = 3x^2 + 5$ عند $x=x_0=1$:

$$Error = \Delta'_{x_0} = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c) = \frac{(0.001)^2}{3} * 6 = 2.00E-06,$$

حيث: $f^{(3)}(x) = 6$ وبالتالي، $f^{(3)}(c) = 6$ ، $c \in [1, 1+2h]$.

نطبق أيضاً الصيغة (4.29) لحساب الخطأ المقطع الناتج عن حساب قيمة

تقريبية لـ $f''(x) = 6x$ عند $x=x_0=1$ ، من أجل $h=0.001$ ، حيث نجد أن،

$$f^{(4)}(x) = 0, \text{ إذن } f^{(4)}(c) = 0, \text{ وبالتالي:}$$

$$Error = \Delta_{x_0}'' = \frac{11}{12} h^2 f^{(4)}(c) = \frac{11}{12} (0.001)^2 * 0 = 0,$$

$$. c \in [1, 1 + 3h]$$

برنامج 4.7: صيغتي لاغرانج من المرتبة الثانية لحساب القيم التقريبية للمشتق الأول والثاني مع الأخطاء المطلقة للدالة في المثال 7.

```
PROGRAM LagrangeFormulaTwo;
Var df, d2 f:array[0..100] of real; k,I :integer; x0, error :real;
FUNCTION f(x:real): real;
begin
  f:=x*x*x+5*x+4;
end;
FUNCTION f1(x:real): real;
begin
  f1:=3*x*x+5;
end;
FUNCTION f2(x:real): real;
begin
  f2:=6*x;
end;
FUNCTION h(k:byte): real;
begin
  h:=Exp(-k*ln(10));
end;
Begin
  write('input x0='); readln(x0);
  write('input k='); readln(k); {Number of steps}
  For i:=1 to k do
    begin
      df[i]:=(-3*f(x0)+4*f(x0+h(i))-f(x0+2*h(i)))/(2*h(i));
      d2f[i]:=(2*f(x0)-5*f(x0+h(i))+4*f(x0+2*h(i))-
        f(x0+3*h(i)))/sqr(h(i));
      writeln('h',i,'=',h(i):2:4,' df=',df[i], ' error=', Abs(f1(x0)-df[i]):2,
        ' d2f=',d2f[i]:2:10,' error=', Abs(f2(x0)-d2f[i]):2)
    end;
  END.
```

4.2 الطرائق العددية لحساب التكامل العددي

Numerical Methods for Numerical Integration

إن إيجاد قيمة:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (4.30)$$

على مجال محدود $[a,b]$ هي إحدى المسائل التي تظهر كثيرا في الرياضيات. فإذا وجدت دالة F تحقق $F'=f$ ، فإن $F(b)-F(a)$ هي قيمة هذا التكامل. ولسوء الحظ، قد يكون من الصعب، أو المستحيل أحيانا، إيجاد تعبير صريح للدالة F في المسائل العملية. فقد تكون الدالة f معلومة فقط عند مجموعة منفصلة من النقاط وفي هذه الحالة تكون المعالجة العددية لإيجاد هذا التكامل ضرورية.

لقد مر معنا في فصول سابقة أنه يمكن تقريب الدالة $f(x)$ بكثيرة حدود $P(x)$ وبالتالي يمكن أن نأخذ التكامل المحدود لكثيرة الحدود $P(x)$:

$$\int_a^b P(x)dx$$

كتقريب للتكامل المحدود (4.30). وهذا يكافئ هندسيا استبدال المساحة التي تقع تحت منحنى الدالة $f(x)$ ، والمحدودة في الخططين المستقيمين $x=a$ و $x=b$ والمحور الأفقي ox ، بالمساحة التي تقع تحت المنحنى $P(x)$ والمحدودة بالخططين المستقيمين نفسيهما.

تعتمد معظم طرائق حساب التكاملات العددية على تجزئة مجال التكامل $[a,b]$ ، إلى n من المجالات الجزئية المتساوية، طول كل منها h ، أي أن:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (4.31)$$

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ حيث } x_i = x_0 + ih \ (i=0,1,\dots,n)$$

ثم يمكن أن نعتبر بشكل تقريبي أن:

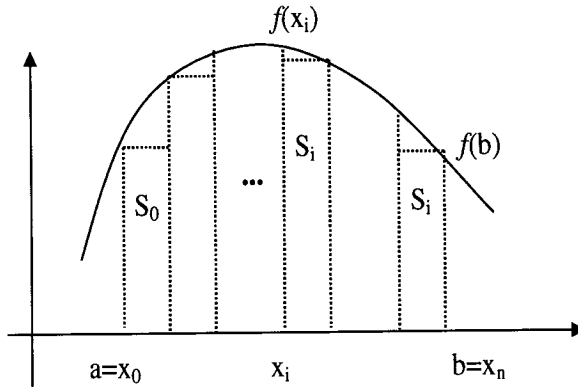
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx \quad (4.32)$$

حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي من الدرجة n على الأكثر تمر بالنقاط (x_i, f_i) ($i=0,1,\dots,n$).

4.2.1 طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

تعتمد هذه الطريقة على تجزئة المجال $[a, b]$ الذي يمثل حدود التكامل إلى n من المجالات الجزئية المتساوية طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ ، وعندئذ فإن التكامل العددي يساوي إلى مجموع سطوح مستطيلات التجزئة S_i حيث $i=0,1,\dots,n-1$ كما في الشكل (4.1)، وبما أن طول المستطيل S_i يساوي إلى قيمة الدالة f عند x_i وعرضه يساوي طول الخطوة h ، ومساحته عندئذ $S_i = h \cdot f(x_i)$ ، وتكون المساحة التقريبية الكلية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} S_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (4.33)$$



الشكل (4.1): الشكل الهندسي للتكامل العددي بطريقة المستطيلات

بمعنى آخر تنتج طريقة المستطيلات من استبدال الدالة $f(x)$ بكثيرة حدود تقريبية ثابتة $P_0(x)$ فوق كل مجال جزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ، ثم تحسب قيمة تكامل هذه الحدودية فوق جميع المجالات الجزئية كما يلي:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_0(x_i) dx = \sum_{i=0}^{n-1} P_0(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

وهي مكافئة للعلاقة (4.33).

a- الخطأ المقتطع بطريقة المستطيلات:

بما أن طريقة المستطيلات نتجت من استبدال دالة التكامل $f(x)$ بحدودية تقريبية ثابتة، يمكننا استنتاج الخطأ في الطريقة المذكورة كما يلي:

تكامل حد الخطأ المرتكب في حدودية استكمال لاغرانج الثابتة على المجال الجزئي الأول $I_0 = [x_0, x_1]$:

$$\Delta = \frac{(x-x_0)}{1!} f'(c_0), \quad c_0 \in [x_0, x_1];$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0) f'(c_0)}{1!} dx = f'(c_0) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx$$

نغير المتحول بالعلاقة $\frac{x-x_0}{h} = t$ ، وبالتالي $dx = h dt$ ، نحسب عندئذ التكامل:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta dx = f'(c_0) \int_0^1 (ht) h dt = \frac{f'(c_0) h^2}{2}, \quad c_0 \in [x_0, x_1]$$

وهو يعطي الخطأ المقتطع فوق المجال الجزئي الأول $I_0 = [x_0, x_1]$.

وبالقياس نحصل على الخطأ المقتطع فوق المجال الجزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta dx = f'(c_i) \int_0^1 (ht) h dt = \frac{f'(c_i) h^2}{2}, \quad c_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

وهكذا يمكننا استنتاج الخطأ المقتطع على كامل المجال $[a, b] \equiv [x_0, x_n]$:

$$\int_{x_0}^{x_n} \Delta dx = \frac{h^2}{2} [f'(c_0) + f'(c_1) + \dots + f'(c_{n-1})],$$

$$c_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

ولتسهيل استخدام العلاقة السابقة، نفرض أن:

$$f'(c) = \text{Max}\{f'(c_0), f'(c_1), \dots, f'(c_{n-1})\}$$

وعندئذ يعطى الخطأ المقتطع وفق الصيغة التالية:

$$\text{Error} = \frac{h^2}{2} [n f'(c)] = \frac{(b-a) h f'(c)}{2}, \quad c \in [x_0, x_n] \quad (4.34)$$

مثال 8: استخدم طريقة المستطيلات لحساب التكامل العددي:

$$\int_0^1 \cos(x+1) dx$$

من أجل $n=10$ ، ثم لحساب الخطأ المطلق، وتقدير قيمة الخطأ المقتطع.

الحل: لدينا $a=0$ ، $b=1$ ؛ $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$ ، وبالتالي $x_i = ih$ من أجل

$i=0, 1, \dots, 10$ و $f(x) = \cos(x+1)$ ، نطبق طريقة المستطيلات:

$$\begin{aligned} S &= h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0.1 \sum_{i=0}^9 \cos(x_i + 1) = \\ &= 0.1 [0.540302 + 0.453596 + 0.362358 + 0.267499 + 0.169967 + \\ &\quad 0.0707372 + (-0.0291995) + (-0.128844) + (-0.227202) + \\ &\quad (-0.32329)] = 0.115592, \end{aligned}$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل وهي:

$$\int_0^1 \cos(x+1) dx = \sin(2) - \sin(1),$$

وعندئذ يكون الخطأ المطلق: "الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة التقريبية للتكامل":

$$\delta = |S - (\sin(2) - \sin(1))| = 4.77659E-2$$

يقدر الخطأ المقطع من العلاقة:

$$Error = \frac{h(b-a)f'(c)}{2} = \left| \frac{0.1(1-0)(-\sin(c+1))}{2} \right| \leq 5.0E-2,$$

$$c \in [0,1]$$

أخذنا هنا أكبر قيمة لـ $f'(c) = -\sin(c+1)$ في المجال $c \in [0,1]$ ، وهي تساوي 1 بالقيمة المطلقة، عند $c = \frac{\pi}{2} - 1$.

مثال 9: لتكن لدينا الدالة $f(x) = 2 + \sin(2\sqrt{x})$ ، والمطلوب: استخدام طريقة المستطيلات بحساب 11 قيمة للدالة، لإيجاد تقريب لتكامل الدالة $f(x)$ فوق المجال $[1, 6]$ ، ثم حساب الخطأ المطلق والخطأ المقطع.

الحل: لدينا $a=1$ ، $b=6$ ، وبالتالي نستخدم $n=10$ لضمان 11 قيمة للتجزئة،

$$i=0,1,\dots,10, \quad x_i=1+ih; \quad h = \frac{6-1}{10} = 0.5$$

$$S = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0.5 \sum_{i=0}^9 [2 + \sin(2\sqrt{x_i})] =$$

$$= 0.5(2.9092974 + 2.6381576 + 2.30807174 + 1.97931648 +$$

$$1.68305285 + 1.435304101 + 1.243197505 + 1.108317745 +$$

$$1.0287222 + 1.00024140) = 8.6668395105$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل وهي:

$$\int_1^6 2 + \sin(2\sqrt{x}) dx =$$

$$\frac{1}{2} (20 + 2 \cos[2] - 2\sqrt{6} \cos[2\sqrt{6}] - \sin[2] + \sin[2\sqrt{6}])$$

$$= 8.18347920766067$$

وعندئذ يكون الخطأ المطلق في التكامل:

$$\delta = |8.6668395105 - 8.18347920766| = 4.8336030E-1$$

لتقدير الخطأ المقتطع لدينا أولاً $f'(x) = \frac{\cos[2\sqrt{x}]}{\sqrt{x}}$ ، وبالتالي فإن أكبر قيمة

مطلقة لهذا المشتق في المجال $[1,6]$ هي من أجل $c=1.958$ ، وبهذا نجد أن:

$$Error = \frac{h(b-a)f'(c)}{2} = \left| \frac{0.5(6-1)}{2} \times \frac{\cos(2\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right| \leq$$

$$\left| \frac{0.5(5)}{2} \times \frac{\cos(2\sqrt{1.958})}{\sqrt{1.958}} \right| = |1.25 \times -0.673017| = 8.41271E-1,$$

برنامج 4.8: طريقة المستطيلات لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق للمثال 9:

```
PROGRAM RectangleMethod;
uses wincrt;
Var x:array[0..800] of real;    a,b,h,S: real; n,i: integer;
Function f(x:real):real;
begin
    f:=2+Sin(2*Sqrt(x));
end;
Function fi(x:real):real;
begin
    fi:=2*x-Sqrt(x)*Cos(2*Sqrt(x))+0.5*Sin(2*Sqrt(x));
end;
Begin
    Write('input a='); readln(a);
    Write('input b='); readln(b);
    Write('input n='); readln(n);
    h:=(b-a)/n;
    for i:=0 to n do
        x[i]:=a+i*h;;
    S:=0;
    for i:=0 to n-1 do
        S:=S+f(x[i]);
    S:=h*S;
    Writeln('S=',S:2:5,' ','AbsError=',
        Abs(fi(b)-fi(a)-S));
End.
```

نضع في الجدول (4.9)، نتائج استخدام البرنامج السابق لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق بطريقة المستطيلات للمثال 9 من أجل مجموعة مختلفة من الخطوات.

الجدول (4.9): نتائج حسابات التكامل العددي للمثال 9

n	h	S : (التكامل العددي)	δ : الخطأ المطلق
10	0.1	8.66683953	4.8336E-1
20	0.05	8.44225417	2.3906E-1
40	0.025	8.30236643	1.1889E-1
80	0.0125	8.24276248	5.9283E-2
160	0.00625	8.21308080	2.9602E-2
320	0.003125	8.19827000	1.4791E-2
640	0.0015625	8.19087210	7.3929E-3

4.2.2 طريقة أشباه المنحرفات (Trapezoidal Method)

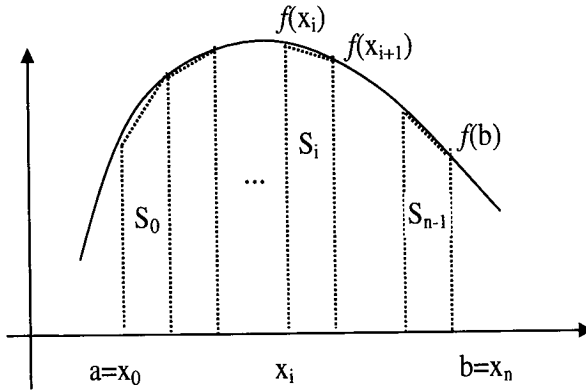
وهي مشابهة لطريقة المستطيلات إلا أن التجزئة ستحدد مساحات أشباه منحرفات S_i بدلا من مساحات مستطيلات، ويكفي عندئذ حساب مساحة شبه المنحرف ذي الدليل i الذي طولاً قاعدتيه هما قيمتا الدالة عند النقطتين المتتاليتين $f(x_{i+1}), f(x_i)$ وارتفاعه h ، وبالتالي فإن مجموع سطوع أشباه المنحرفات S_i من أجل $i=0,1,\dots,n-1$ يساوي تقريبا التكامل العددي المطلوب كما هو مبين بالشكل (4.2). وبما أنه يمكننا حساب مساحة شبه المنحرف

$$S_i = \frac{[f(x_i) + f(x_{i+1})] \times h}{2}$$

نحصل على المساحة التقريبية الكلية للتكامل بهذه الطريقة كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] =$$

$$h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \quad (4.35)$$



الشكل (4.2): الشكل الهندسي للتكامل العددي بطريقة أشباه المنحرفات

أما بلغة التقريبات فيمكن استنتاج أن طريقة أشباه المنحرفات تكافئ استبدال دالة التكامل $f(x)$ بكثيرة حدود تقريبية من الدرجة الأولى $P_1(x)$ ، ومن المعروف أن تكامل كثيرات الحدود من أبسط أنواع التكاملات، حيث لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_1(x)dx$$

نعين كثيرة الحدود $P_1(x)$ من استيفاء لاغرانج للدالة $f(x)$ في النقطتين (x_{i+1}, f_{i+1}) ، (x_i, f_i)

$$P_1(x) = f_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

ونكامل على المجال الجزئي $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ، فنجد:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} dx + f_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} dx = h \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$$

وهكذا فالتكامل الكلي يساوي إلى مجموع التكاملات على جميع المجالات الجزئية:

$$\int_{x_0}^{x_n} P_1(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f_i + f_{i+1}}{2} = h \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

وهي مكافئة للصيغة (4.35).

a- الخطأ المقتطم بطريقة أشباه المنحرفات:

نجد بشكل مشابه لطريقة المستطيلات أن صيغة الخطأ تنتج من تكامل حد الخطأ المقتطم في حدودية استكمال لاغرانج من الدرجة الأولى على المجال $[x_0, x_n]$ ، وبالتالي فالخطأ على المجال الجزئي $I_0 = [x_0, x_1]$:

$$\Delta = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(c_0), \quad c_0 \in [x_0, x_1];$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1) f''(c_0)}{2!} dx = f''(c_0) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx$$

نغير المتحول بالعلاقة $\frac{x - x_0}{h} = t$ ، نجد أن $dx = h dt$ ، وبالتعويض بالتكامل السابق، نجد أن:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta dx = f''(c_0) \int_0^1 (ht) h(t-1) h dt = -\frac{f''(c_0) h^3}{12}$$

وبناء على ما سبق، يمكن استنتاج الخطأ المقتطم على كامل المجال $[x_0, x_n]$:

$$\int_{x_0}^{x_n} \Delta dx = -\frac{h^3}{12} [f''(c_0) + f''(c_1) + \dots + f''(c_{n-1})],$$

$$c_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

ولتسهيل استخدام العلاقة السابقة، نفرض أن:

$$f''(c) = \text{Max}\{f''(c_0), f''(c_1), \dots, f''(c_{n-1})\}$$

تأخذ عندئذ الصيغة النهائية للخطأ المقطع العلاقة بطريقة أشباه المنحرفات:

$$\text{Error} = -\frac{h^3}{12}[nf''(c)] = -\frac{h^2(b-a)f''(c)}{12}, \quad c \in [x_0, x_n] \quad (4.36)$$

مثال 10: استخدم طريقة أشباه المنحرفات لحساب التكامل العددي:

$$\int_1^2 x e^x dx$$

من أجل $n=10$ ، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ المقطع في التكامل العددي.

الحل: لدينا $a=1$; $b=2$; وبالتالي $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$ ، وبالتالي $x_i = 1 + ih$ ، من أجل

$f(x) = x e^x$ ، $i=0,1,\dots,10$ ، نطبق صيغة أشباه المنحرفات:

$$\begin{aligned} S &= h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] = 0.1 \left[\frac{e + 2e^2}{2} + \sum_{i=1}^9 x_i e^{x_i} \right] \\ &= 0.1 \left[\frac{e}{2} + e^2 + 3.3045826 + 3.9841403 + 4.770085667 + \right. \\ &\quad \left. 5.67727995 + 6.7225336 + 7.9248519 + 9.3057105 + \right. \\ &\quad \left. 10.8893654 + 12.70319942 \right] = 7.40299464 \end{aligned}$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل:

$$\int_1^2 x e^x dx = e^x (x-1) \Big|_1^2 = e^2$$

وعندئذ فالخطأ المطلق هو الفرق بالقيمة المطلقة بين القيمة الفعلية والقيمة

التقريبية للتكامل:

$$\delta = |e^2 - S| = |7.3890561 - 7.40299465| = 1.39385E - 2$$

نقدر الخطأ المقطع من العلاقة:

$$Error = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c), c \in [1, 2]$$

وبالتالي نحسب المشتق الثاني للدالة $f''(x) = e^x(2+x)$ نبحث عن قيمة لـ c تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له بالقيمة المطلقة فوق المجال $[1, 2]$ ، لنجد أنه من أجل $c=2$ ، يكون $Max f''(c) = e^c(2+c) = e^2(2+2)$ ، إذن:

$$Error = \left| -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c) \right| = \left| \frac{0.01(2-1)}{12} [e^c(c+2)] \right| \leq$$

$$\left| \frac{0.01(1)(e^2(4))}{12} \right| = 2.4630186E-2$$

برنامج 4.9: طريقة أشباه المنحرفات لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق للمثال 10:

```

PROGRAM Trapezoidal ;
Uses wincrt;
Var x:array[0..800] of real; a,b,h,S:real; n,i:integer;
Function f(t:real):real;
begin
  f:=t * Exp(t); {Integration Function}
end;
Function fi(t:real):real;
begin
  fi:=(t-1) * Exp(t); { Integration }
end;
Begin
Write('input a=');readln(a);
Write('input b=');readln(b);
Write('input n=');readln(n);
h:=(b-a)/n;
for i:=0 to n do x[i]:=a+i*h;;
S:=(f(a)+f(b))/2;
for i:=1 to n-1 do S:=S+f(x[i]);
S:=h*S;
Writeln('S=',S:2:8,' ', 'AbsError=', Abs(fi(b)-fi(a)-S));
End.

```

نضع في الجدول (4.10)، نتائج استخدام البرنامج 4.9 لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق بطريقة أشباه المنحرفات للمثال 10 من أجل أطوال مختلفة من الخطوات.

الجدول (4.10): نتائج حسابات التكامل العددي للمثال 10

n	h	S : (التكامل العددي)	δ : الخطأ المطلق
10	0.1	7.40299465	1.393855E-0002
20	0.05	7.39254142	3.485316E-0003
40	0.025	7.38992747	8.713715E-0004
80	0.0125	7.38927394	2.178455E-0004
160	0.00625	7.38911056	5.446153E-0005
320	0.003125	7.38906971	1.361536E-0005
640	0.0015625	7.38905950	3.403897E-0006

4.2.3 طريقة سيمبسون Simpson Method

للحصول على قاعدة سيمبسون نضع $n=2m$ ، ثم نقسم المجال $[a, b]$ إلى $2m$ من المجالات الجزئية المتساوية $[x_i, x_{i+1}]$ طول كل منها $h = (b-a)/(2m)$ ، باستخدام $x_i = a + ih$ حيث $i = 0, 1, \dots, 2m$ ، نضم بعد ذلك كل مجالين جزئيين متجاورين إلى مجال جزئي واحد بدءاً من اليسار ليصبح طول كل مجال منهم $2h$ ، ويشتمل عندئذ كل مجال جزئي جديد على ثلاث نقاط متتالية أي نحصل على المجالات الجزئية:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$$

التي عددها يساوي إلى m ، وبالتالي نستطيع أن نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

وباستبدال دالة التكامل $f(x)$ بكثيرة حدود تقريبية من الدرجة الثانية على كل مجال جزئي من المجالات المذكورة، نجد :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} P_2(x)dx$$

حيث $P_2(x)$ هي كثيرة حدود استيفاء لاغرانج للدالة $f(x)$ في النقاط الثلاث $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$:

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

نحسب التكامل على المجال الجزئي الأول $[x_0, x_2]$ ، وللسهولة نجري تغييراً

للمتحول بالعلاقة $\frac{x-x_0}{h} = t$ ، لنجد أن $dx = hdt$ ، $(x-x_1) = h(t-1)$ ،

وبالتعويض يكون: $(x-x_2) = h(t-2)$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx +$$

$$f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx$$

$$= f_0 \int_0^2 \frac{h(t-1)h(t-2)}{(-h)(-2h)} hdt + f_1 \int_0^2 \frac{ht h(t-2)}{(h)(-h)} hdt + f_2 \int_0^2 \frac{ht h(t-1)}{(2h)(h)} hdt$$

$$= \frac{f_0 h^2}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt + f_1 h^2 \int_0^2 -(t^2 + 2t)dt + \frac{f_2 h^2}{2} \int_0^2 (t^2 - t)dt$$

$$= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

وهكذا نحصل على تكامل سيمبسون على المجال الجزئي الأول $[x_0, x_2]$:

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

أما التكامل على المجال الجزئي الثاني $[x_2, x_4]$ ، فنحصل عليه بأسلوب مشابه:

$$\int_{x_2}^{x_4} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f_2 + 4f_3 + f_4]$$

مما تقدم نستطيع استنتاج تكامل سيمبسون على المجال الكلي $[a, b] = [x_0, x_{2m}]$ (الذي يساوي إلى مجموع جميع التكاملات على المجالات الجزئية التي عددها m) وفق الصيغ المتكافئة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + \dots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}] \quad (4.37a)$$

أو

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_2(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \quad (4.37b)$$

أو الصيغة:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_2(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) \right] \quad (4.37c)$$

a- الخطأ المقتطع بطريقة سيمبسون:

ينتج الخطأ المقتطع بهذه الطريقة من تكامل حد الخطأ المرتكب في حدودية استيفاء لاغرانج من الدرجة الثانية على المجال $[a, b]$. لذلك نجد أولاً الخطأ على المجال الجزئي الأول $[x_0, x_2]$:

$$\Delta = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f^{(3)}(c_0), \quad c_0 \in [x_0, x_2],$$

$$\begin{aligned} Error_{[x_0, x_2]} &= \int_{x_0}^{x_2} \Delta dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f^{(3)}(c_0)}{3!} dx \\ &= \frac{f^{(3)}(c_0)}{6} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) dx \end{aligned}$$

نحسب التكامل السابق مباشرة أو نجري للسهولة تغييراً للمتحول كما رأينا سابقاً
ينتج لدينا:

$$= \frac{f^{(3)}(c_0)}{6} \int_0^2 ht h(t-1)h(t-2)hdt = \frac{f^{(3)}(c_0)h^4}{6} \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2 \right]_0^2 = 0$$

وبما أن حد الخطأ من هذه المرتبة معدوم، سينتج الخطأ من الحد الذي يليه
بالمرتبة ، أي أن:

$$\begin{aligned} Error_{[x_0, x_2]} &= \int_{x_0}^{x_2} \Delta dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f^{(4)}(c_0)}{4!} dx \\ &= \frac{f^{(4)}(c_0)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx \\ &= \frac{f^{(4)}(c_0)}{24} \int_0^2 ht h(t-1)h(t-2)h(t-3)hdt \\ &= \frac{f^{(4)}(c_0)h^5}{24} \int_0^2 (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) dt \\ &= \frac{f^{(4)}(c_0)h^5}{24} \left[-\frac{4}{15} \right] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_0), \end{aligned}$$

إذن:

$$Error_{[x_0, x_2]} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_0), \quad c_0 \in [x_0, x_2]$$

هو حد الخطأ المقطع على المجال الجزئي الأول $[x_0, x_2]$.

وقياسا لما تقدم، نستنتج الخطأ الشامل على كامل المجال $[x_0, x_{2m}]$:

$$Error_{[a,b]} = -\frac{h^5}{90} [f^{(4)}(c_0) + f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_{m-1})],$$

$$c_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}], \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

وبفرض أن:

$$f^{(4)}(c) = \text{Max}[f^{(4)}(c_0) + f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_{m-1})], \quad c \in [a, b]$$

نحصل على الصيغة النهائية للحد الأعلى للخطأ المقطع بالعلاقة:

$$Error_{[a,b]} = -\frac{h^5}{90} [m f^{(4)}(c)] = -\frac{h^5 n f^{(4)}(c)}{180} \quad (3.38)$$

$$= -\frac{h^4 (b-a) f^{(4)}(c)}{180}, \quad c \in [a, b]$$

مثال 11: استخدم طريقة سيمبسون لحساب التكامل العددي:

$$I = \int_1^2 x e^x dx$$

من أجل $m=5$ ، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ المقطع في التكامل العددي.

الحل: لدينا $a=1$ ، $b=2$ ، $m=5$ وبالتالي $n=2m=10$ ، $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$

ودالة التكامل $f(x) = x e^x$ ، $i=0, 1, \dots, 10$ ، $x_i = 1 + ih$

إذا رمزنا بـ S لصيغة سيمبسون (4.37c) التقريبية للتكامل، نكتب عندئذ:

$$S = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) \right]$$

$$= \frac{0.1}{3} \left[f(1) + f(2) + 2 \sum_{i=1}^4 f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0.1}{3} \{ f(x_0) + f(x_{10}) + 2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] + \\
&\quad 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] \} \\
&= \frac{0.1}{3} \{ f(1) + f(2) + 2[f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8)] + \\
&\quad 4[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)] \} \\
&= \frac{0.1}{3} \{ 2.7182818 + 14.7781122 + 2(28.47563758) + \\
&\quad 4(36.8061119) \} = \underline{7.38907056}
\end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق من الفرق بالقيمة المطلقة بين القيمة الفعلية والقيمة التقريبية للتكامل، فنجد:

$$\int_1^2 x e^x dx = e^x (x-1) \Big|_1^2 = e^2$$

وعندئذ :

$$\delta = |e^2 - S| = |7.3890560989 - 7.38907056| = 1.44611E-5$$

يقدر الحد الأعلى للخطأ (الخطأ المقطوع) من العلاقة:

$$Error_{[1,2]} = -\frac{h^4 (b-a) f^{(4)}(c)}{180}, \quad c \in [1,2]$$

ولتعيين هذا الخطأ نحسب المشتق الرابع للدالة $f^{(4)}(x) = e^x (4+x)$ ، ثم نبحث عن قيمة c تجعل هذا المشتق للدالة يأخذ أكبر قيمة له بالقيمة المطلقة فوق المجال $[1,2]$ ، ويتحقق ذلك من أجل $c=2$ ، ويكون $Max f^{(4)}(c) = 6e^2$ ، وبالتالي:

$$\begin{aligned}
Error_{[1,2]} &= \left| -\frac{(0.1)^4 (2-1)}{180} [e^2 (4+2)] \right| \leq \\
&\frac{0.0001 * e^2 (6)}{180} = 2.46302E-5
\end{aligned}$$

ولو أجرينا مقارنة نجد أن الخطأ المقتطع بطريقة أشباه المنحرفات لتكامل المثال 10 أكبر بحوالي 1000 مرة تقريبا من الخطأ المقتطع بطريقة سيمبسون لنفس التكامل في المثال 11 من أجل الخطوة $h=0.1$.

مثال 12: بفرض لدينا الدالة $f(x) = 1 + e^{-x} \sin(4x)$ استخدم طريقة سيمبسون لحساب التكامل العددي:

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

من أجل تجزئة مختلفة لمجال التكامل وهي على الترتيب 10, 20, 40, 80, 160، ثم حساب الخطأ المطلق والحد الأعلى للخطأ المرتكب في التكامل.

الحل: لدينا $a=0$ ، $b=1$ ، $n=10, 20, 40, 80, 160$ إذن $m=5, 10, 20, 40, 80, 160$

وسنستخدم الطريقة من أجل $h = \frac{1}{n} = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$

$$x_i = a + ih; i=0, 1, \dots, n$$

نرمز لصيغة سيمبسون (4.37c) بـ S ، نكتب عندئذ:

$$S = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) \right],$$

ومن أجل $m=5$ ، $h=0.1$ نحصل على التكامل التقريبي:

$$S = \frac{0.1}{3} \left[f(1) + f(0) + 2 \sum_{i=1}^4 f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) \right] = 1.308279289$$

وإذا علمنا أن القيمة الفعلية للتكامل:

$$\int_0^1 [1 + e^{-x} \sin(4x)] dx = \frac{\sin(4) + 4\cos(4) - 21e}{17e} = 1.30825060464$$

يكون الخطأ المطلق:

$$\delta = |1.30825060464 - 1.308279289| = 2.86844E-5$$

ومن أجل $m=10$ ، $h=0.05$ نحصل على التكامل التقريبي:

$$S = \frac{0.05}{3} \left[f(1) + f(2) + 2 \sum_{i=1}^9 f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{10} f(x_{2i-1}) \right] = 1.30825239194$$

يكون الخطأ المطلق:

$$\delta = |1.30825060464 - 1.30825239194| = 1.7873E - 6$$

ومن أجل $m=20$ ، $h=0.025$ نحصل على التكامل التقريبي:

$$S = \frac{0.025}{3} \left[f(1) + f(2) + 2 \sum_{i=1}^{19} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{20} f(x_{2i-1}) \right] = 1.30825071626$$

والخطأ المطلق:

$$\delta = |1.30825060464 - 1.30825071626| = 1.1162E - 7$$

ومن أجل $m=40$ ، $h=0.0125$ نحصل على التكامل التقريبي:

$$S = \frac{0.0125}{3} \left[f(1) + f(2) + 2 \sum_{i=1}^{39} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{40} f(x_{2i-1}) \right] = 1.30825061162$$

والخطأ المطلق:

$$\delta = |1.30825060464 - 1.30825061162| = 6.98E - 9$$

أيضا من أجل $m=80$ ، $h=0.00625$ نحصل على التكامل التقريبي:

$$S = \frac{0.00625}{3} \left[f(1) + f(2) + 2 \sum_{i=1}^{79} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{80} f(x_{2i-1}) \right] = 1.30825060508$$

والخطأ المطلق:

$$\delta = |1.30825060464 - 1.30825060508| = 4.4E - 10$$

يقدر الحد الأعلى للخطأ من العلاقة:

$$Error_{[1,2]} = -\frac{h^4(b-a)f^{(4)}(c)}{180}, \quad c \in [0,1]$$

ولتعيين هذا الخطأ، نحسب المشتق الرابع للدالة

$$f^{(4)}(x) = e^{-x} [240 \cos(4x) + 161 \sin(4x)]$$

ثم نجد أن قيمة $c = 0.0864758$ تجعل هذا المشتق للدالة يأخذ أكبر قيمة له بالقيمة المطلقة فوق المجال $[0,1]$ ، أي أن:

$$\text{Max} f^{(4)}(c) = 257.145$$

وبالتالي:

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq \left| -\frac{(h)^4(1-0)}{180} (257.145) \right| = 1.42858 h^4$$

إذن، نقدر الحد الأعلى للأخطاء المقطوعة في الخطوات المختلفة كالآتي:

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq 1.42858E-4, \quad h = 0.1$$

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq 8.92863E-6, \quad h = 0.05$$

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq 5.58039E-7, \quad h = 0.025$$

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq 3.48774E-8, \quad h = 0.0125$$

$$\text{Error}_{[0,1]} \leq 2.17984E-9, \quad h = 0.00625$$

برنامج 4.10: طريقة سيمبسون لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق للمثال 12:

```
PROGRAM SimpsonMethod;
uses wincrt;
Var x:array[0..800] of real;
a,b,h,S:real; n,i:integer;
Function f(t:real):real;
begin
  f:=1+Exp(-t)*Sin(4*t);
end;
Function fI(t:real):real;
begin
  fI:=t-Exp(-t)*(Sin(4*t)+4*Cos(4*t))/17;
```

```

end;
BEGIN
Write('input a=');readln(a);
Write('input b=');readln(b);
Write('input n=');readln(n);
h:=(b-a)/n;
for i:=0 to n do
  x[i]:=a+i*h;;
S:=0;
for i:=1 to n div 2 do
  S:=S+4*f(x[2*i-1]);
for i:=1 to n div 2-1 do
  S:=S+2*f(x[2*i]);
S:=S+f(x[0])+f(x[n]);
S:=h*S/3;
Writeln('S=',S:2:5,' ','AbsError=',Abs(fI(b)-fI(a)-S));
END.

```

نضع في الجدول (4.11)، نتائج استخدام البرنامج 4.10 لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المطلق بطريقة سيمبسون للمثال 12 من أجل أطوال مختلفة من الخطوات.

الجدول (4.11): نتائج حسابات التكامل العددي للمثال 12

n	h	S : (التكامل العددي)	δ : الخطأ المطلق
10	0.1	1.30827929	2.868433E-0005
20	0.05	1.30825239	1.787301E-0006
40	0.025	1.30825072	1.1161665E-0007
80	0.0125	1.30825061	6.981054E-0009
160	0.00625	1.308250605	4.272351E-0010
320	0.003125	1.3082506047	3.251444E-0011
640	0.0015625	1.3082506046	3.865352E-0012

4.2.4 طريقة سيمبسون المعدلة: Modified Simpson Method

تعد هذه الطريقة مطورة عن طريقة سيمبسون، وللحصول على صيغة

تقريبية، نرمز بـ S_1 لصيغة سيمبسون لحساب التكامل $I = \int_a^b f(x)dx$ باستخدام

المجالين الجزئيين $[a, \frac{a+b}{2}]$ ، $[\frac{a+b}{2}, b]$ بحيث يكون طول كل مجال منهما h

فيكون:

$$S_1 = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right],$$

بخطا مقتطع:

$$Error = I - S_1 = -\frac{f^{(4)}(c)h^5}{90} \quad (4.39)$$

$$. h = \frac{b-a}{2}, c \in [a, b] \text{ حيث}$$

ولنرمز أيضا بـ S_2 لتقريب قاعدة سيمبسون لقيمة التكامل باستخدام المجالات

$$[a, \frac{3a+b}{4}], [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}], [\frac{a+3b}{4}, b]$$

أي أن طول كل مجال من المجالات السابقة هو $\frac{h}{2}$ ، وبالتالي نستطيع كتابة الصيغة

التقريبية المذكورة بالشكل:

$$S_2 = \frac{1}{3} \frac{h}{2} \left[f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right],$$

وبخطا مقتطع:

$$Error = I - S_2 = -\frac{2}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}(c) = -\frac{h^4(b-a)f^{(4)}(c)}{90 \times 32} \quad (4.40)$$

$$. h = \frac{b-a}{2} \text{ حيث } c \in [a, b] \text{ و}$$

وبطرح (4.40) من (4.39) ينتج:

$$S_2 - S_1 = -\frac{h^4}{90} f^{(4)}(c) + \frac{h^4 f^{(4)}(c)}{16 \times 90} = -\frac{15h^4}{16 \times 90} f^{(4)}(c) \\ \approx 15(I - S_2)$$

إذن:

$$|I - S_2| \approx \frac{1}{15} |S_2 - S_1| \quad (4.41)$$

تعطينا العلاقة (4.41) أسلوباً بسيطاً لحساب الخطأ في سيمبسون المعدلة S_2 وذلك

لتسهيل حساب $|S_2 - S_1|$. ولتوضيح العلاقة (4.41) نقدم المثال التالي.

مثال 13: استخدم طريقة سيمبسون المعدلة لحساب قيمة التكامل العددي:

$$I = \int_{1/2}^1 e^x dx$$

الحل: لدينا $a=1/2$ ، $b=1$ ، وبالتالي $h = \frac{(b-a)}{2} = \frac{(1-1/2)}{2} = \frac{1}{4}$

نحسب القيم المناظرة لـ S_1 ، S_2 :

$$S_1 = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] =$$

$$\frac{0.25}{3} \left[f(0.5) + 4f\left(\frac{0.5+1}{2}\right) + f(1) \right] = \underline{1.0695836}$$

$$S_2 = \frac{1}{3} \frac{h}{2} \left[f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{8} \left[f(1/2) + 4f\left(\frac{3/2+1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1/2+1}{2}\right) + 4f\left(\frac{1/2+3}{4}\right) + f(1) \right]$$

$$= \underline{1.0695620}$$

نحصل عندئذ على تقدير خطأ الاقتران باستخدام العلاقة (4.41) كالآتي:

$$|I - S_2| \approx \frac{1}{15} |S_2 - S_1| = \frac{1}{15} |1.0695620 - 1.0695836| = 1.4E-6$$

نجد في هذه المسألة أن تقدير الخطأ وفق العلاقة (4.41) ممتاز للغاية لأن الخطأ المطلق:

$$\delta = |(e - e^{1/2}) - S_2| = 1.4E-6$$

وكلاهما دقيق لسبعة أرقام عشرية.

ونقدر أيضا الخطأ المقتطع باستخدام العلاقة (4.40):

$$Error = -\frac{h^4 (b-a) f^{(4)}(c)}{90 \times 32} = -\frac{(0.25)^4 (0.5)(e^c)}{2880} = 2.1305E-6,$$

$$c \in [1/2, 1]$$

برنامج 4.11: طريقة سيمبسون المعدلة لحساب قيمة التكامل العددي وحساب الخطأ المقتطع والخطأ المطلق للمثال 13:

```
PROGRAM ModifiedSimpson;
uses winCRT;
Var a, b, h, S1, S2, Error :real;
    n, i:integer;
Function f(t:real):real;
begin
    f:=Exp(t);
end;
BEGIN
    Write('input a=');readln(a);
    Write('input b=');readln(b);
    n:=2;
    h:=(b-a)/n;
    S1:=(h/3)*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b));
    S2:=(h/6)*(f(a)+4*f((3*a+b)/4)+ 2*f((a+b)/2)+
        4* f((a+3*b)/4)+f(b));
    Error:=Abs(S2-S1)/15;
    Writeln('S1=',S1:2:5, ' S2=',S2:2:5, ' Error=',Error,
        ' AbsError=',Abs(f(b)-f(a)-S2));
END.
```

4.2.5 طريقة تربيعية- غوص (GAUSS QUADRATURE)

يوجد العديد من طرائق غوص لإيجاد التكاملات العددية، نذكر منها
تكامـل غوص - ليجندر ، وتكامـل غوص - هرميت ، تكامـل غوص - ليغريـر
وتكامـل غوص - تشيبشيف. تُستَخدم الطرائق المذكورة جميعها لتقريب تكاملات
عددية من الشكل:

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt, \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) dt, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f(t) dt$$

تكتب هذه التكاملات على شكل مجموع لجداء قيم الدالة $f(t_i)$ بأعداد ثابتة w_i على
الشكل:

$$\sum_{i=1}^N w_i f(t_i)$$

حيث تسمى w_i أوزاناً، وتدعى t_i بنقاط الشبكة أو (نقاط غوص)، وتبدو المسألة
هي كيف يمكننا تثبيت الأوزان w_i ونقاط غوص t_i .
سنركز هنا على تكامل غوص- ليجندر.

a- تكامل غوص - ليجندر (Gauss-Legendre Integration)

إن فكرة تكامل غوص-ليجنـدر تقول أنه إذا كانت دالة التكامل $f(t)$ هي كثيرة حدود
من الدرجة أصغر أو تساوي $3(2N-1)$ ، عندئذ فإن تكامل هذه الدالة:

$$I(-1,1) = \int_{-1}^1 f(t) dt \quad (4.42)$$

يمكن الحصول عليه بشكل دقيق باستخدام ($N=2$) نقطة لغوص تماما وفق الصيغة:

$$I[t_1, t_2] = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) \quad (4.43)$$

عندئذ سنعين الأوزان w_2, w_1 ونقاط غوص (نقاط الشبكة) t_2, t_1 بحيث تتطابق الصيغة التكاملية (4.43) مع التكامل (4.42) من أجل:

$$f(t)=1 \text{ (حدودية من الدرجة 0)}$$

$$f(t)=t \text{ (حدودية من الدرجة 1)}$$

$$f(t)=t^2 \text{ (حدودية من الدرجة 2)}$$

$$f(t)=t^3 \text{ (حدودية من الدرجة 3)}$$

للقيام بذلك سنحل جملة المعادلات التالية:

$$f(t)=1; \quad w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = w_1 + w_2 \equiv \int_{-1}^1 1 dt = 2 \quad (4.44a)$$

$$f(t)=t; \quad w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = w_1 t_1 + w_2 t_2 \equiv \int_{-1}^1 t dt = 0 \quad (4.44b)$$

$$f(t)=t^2; \quad w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 \equiv \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3 \quad (4.44c)$$

$$f(t)=t^3; \quad w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 \equiv \int_{-1}^1 t^3 dt = 0 \quad (4.44d)$$

نضرب طرفي المعادلة (4.44b) بـ t_1^2 ونطرح منها (4.44d) ينتج:

$$w_2 (t_2^3 - t_1^2 t_2) = w_2 t_2 (t_2 + t_1)(t_2 - t_1) = 0$$

وبالتالي $t_2 = t_1$ (لا معنى له)، و $t_2 = -t_1$

نعوض $t_2 = -t_1$ في (4.44b) نحصل على:

$$t_2 = -t_1 \xrightarrow{(4.44b)} (w_1 - w_2)t_1 = 0 \rightarrow (w_1 = w_2)$$

نعوض $(w_1 = w_2)$ في (4.44a) نحصل على

$$(w_1 + w_1) = 2 \rightarrow w_1 = w_2 = 1$$

نعوض أيضا $w_1 = w_2 = 1$ و $t_2 = -t_1$ في (4.44c) ينتج لدينا:

$$w_1 = w_2 = 1 \xrightarrow{(4.44c)} t_1^2 + (-t_1)^2 = 2/3, \quad t_1 = -t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي المعادلة (4.43) تصبح:

$$I[t_1, t_2] = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.45)$$

إذن نستطيع التأمل بأن الصيغة التربيعية (4.43) تعطينا قيمة دقيقة للتكامل (4.42) عندما تكون دالة التكامل $f(t)$ على شكل كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي 3.

الآن سنركز اهتمامنا حول كيفية تعميم صيغة غوس - ليجندر ذات النقطتين إلى N نقطة غوسية.

b- تعميم صيغة غوس - ليجندر

إذا كانت دالة التكامل $f(t)$ هي كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي $(2N-1)$ فإن التكامل (4.42) يعطى بدقة (exact) باستخدام N نقطة غوسية t_i وفق الصيغة التالية:

$$I[t_1, t_2, \dots, t_N] = \sum_{i=1}^N w_i f(t_i) \quad (4.46)$$

ولكن نحن نعلم أن جملة المعادلات غير الخطية (4.44) من الصعب إيجاد حلها بالطرق المباشرة وخاصة عندما يزداد بعدها (عدد معادلاتها). يمكننا حل هذه

المشكلة باستخدام أصفار كثيرات حدود ليجنדר التي سبق ذكرها في فصول سابقة. نلاحظ أنه لحسن الحظ نستطيع تعيين نقاط غوص $t_1, t_2, \dots, t_N$ التي عددها N لصيغة تكامل غوص - ليجنדר (4.46) من أصفار (جذور) كثيرة حدود ليجنדר من الدرجة N التي تعرف بالصيغة التالية:

$$L_N(t) = \sum_{i=0}^{[N/2]} (-1)^i \frac{(2N-2i)!}{2^N i!(N-i)!(N-2i)!} t^{N-2i} \quad (4.47a)$$

حيث $[N/2]$: هي أكبر عدد صحيح موجب أصغر أو يساوي $N/2$.

وكثيرات حدود ليجنדר $L_N(t)$ تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$L_N(t) = \frac{1}{N} [(2N-1)t L_{N-1}(t) - (N-1)L_{N-2}(t)], \quad N \geq 2 \quad (4.47b)$$

باستخدام العلاقتين (4.47a) - (4.47b) نستنتج بعض حدوديات ليجنדר من مراتب مختلفة:

$$N=0 \rightarrow L_0(t) = 1,$$

$$N=1 \rightarrow L_1(t) = t,$$

$$N=2 \rightarrow L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1],$$

$$N=3 \rightarrow L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t],$$

$$N=4 \rightarrow L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^4 - 30t^2 + 3],$$

$$N=5 \rightarrow L_5(t) = \frac{1}{8}[63t^5 - 70t^3 + 15t],$$

إذن بعد تعيين نقاط غوص t_i ($i=1,2,\dots,N$) التي أصبحت معلومة كجذور لـ $L_N(t) = 0$ ، يمكننا بعد ذلك الحصول على الأوزان w_i ($i=1,2,\dots,N$) لصيغة تكامل غوص ليجنדר ذات الـ N نقطة غوصية بحل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n & \dots & t_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} & \dots & t_N^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \dots & t_n^{N-1} & \dots & t_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ [1 - (-1)^n]/n \\ \vdots \\ [1 - (-1)^N]/N \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

كما يمكننا تعيين عناصر شعاع الطرف الأيمن (RHS) ذي الدليل n كما يلي :

$$RHS(n) = \int_{-1}^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n} t^n \Big|_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (4.49)$$

ملاحظة 4: كما هو معلوم فإن تكامل غوص - ليجنדר يستخدم حدود التكامل (4.42) في المجال $[-1, 1]$ ، وحتى لا تنحصر تطبيقاتنا فقط في هذا المجال نستطيع إجراء تغيير للمتحول x في المجال $[a, b]$ إلى متحول t في المجال $[-1, 1]$ كما يلي:

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2},$$

حيث $t \in [-1, 1]$, $x \in [a, b]$

مبرهنة 3: (غوص ليجنדר لنقطتين)

إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة على المجال $[-1, 1]$ ، عندئذ

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx I[t_1, t_2] = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وتملك صيغة غوص ليجنדר دقة من الدرجة $2N-1=3$ ، إذا كان $f \in C^4[-1, 1]$ ، ويكون:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E_2(f)$$

حيث $E_2(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{135}$ هو خطأ الاقتطاع.

مبرهنة 4: (غوص ليجندر لثلاث نقاط غوصية)

إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة على المجال $[-1, 1]$ ، عندئذ

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx I[t_1, t_2, t_3] = \frac{5}{9} f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{3/5})$$

وتملك صيغة غوص ليجندر دقة من الدرجة $2N-1=5$ ، إذا كان $f \in C^6[-1, 1]$ ويكون:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{5}{9} f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{3/5}) + E_3(f)$$

حيث $E_3(f) = \frac{f^{(6)}(c)}{15750}$ هو خطأ الاقتطاع.

تقبل المبرهنتان السابقتان بدون برهان.

ملاحظة 5: ويمكن في الحالة العامة إثبات أن صيغة الخطأ المقطوع بطريقة

غوص ليجندر، من أجل n نقطة غوصية تعطى بالعلاقة:

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(c)}{(2n+1)[(2n)!]^3}, \quad c \in [-1, 1]$$

لتوضيح صيغة غوص ليجندر التكاملية نقدم الأمثلة التالية.

مثال 14: استخدم صيغة غوص ليجندر لحساب التكامل العددي:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x} + 1}$$

من أجل نقطتين ثم ثلاث نقاط غوصية، ثم احسب الخطأ المقتطع في كل منهما.

الحل: أولاً من أجل $N=2$ يكون لدينا:

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ و } w_1 = w_2 = 1$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x} + 1} \approx I[t_1, t_2] = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

حيث دالة التكامل $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ ، إذن:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x} + 1} \approx I[t_1, t_2] = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{-2}{\sqrt{3}}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + 1}$$

$$= 0.76036844 + 0.239631558 = \underline{0.999999998}$$

والخطأ المقتطع بحسب المبرهنة 3، يقدر من العلاقة $E_2(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{135}$ ، نحسب

المشتق الرابع للدالة ونعين قيمة c في المجال $[-1, 1]$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له لنجد أن:

$$f^{(4)}(c) = \frac{16e^{2c}(e^{6c} - 11e^{4c} + 11e^{2c} - 1)}{(1 + e^{2c})^5} = \begin{cases} \text{Max } f^{(4)}(-0.5) = 1.97611 \\ \text{Min } f^{(4)}(0.5) = -1.97611 \end{cases}$$

وهكذا تنتج أعلى قيمة للخطأ المقتطع وهي لا تتجاوز:

$$E_2(f) = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{135} \right| \leq \frac{1.97611}{135} = 0.0146379, \quad c = \pm 0.5$$

ثانياً من أجل $N=3$ لدينا:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x} + 1} \approx I[t_1, t_2, t_3] = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

نعين t_1, t_2, t_3 ، من كثيرة حدود ليجنדר ذات الدرجة الثالثة:

$$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$$

وبحل الحدودية السابقة كمعادلة $\frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$ ، نجد أن $t_1 = -\sqrt{3/5}$

$t_2 = 0$ ، $t_3 = \sqrt{3/5}$ ، هي جذورها، وهي بنفس الوقت نقاط غوص المطلوبة.

(ترتب دائما أدلة الجذور بحيث تنسجم مع الترتيب التصاعدي لقيم الجذور).

أما الأوزان w_1, w_2, w_3 نحصل عليها بحل الجملة الخطية (4.48) من أجل

$$N=3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3/5} & 0 & \sqrt{3/5} \\ 3/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2, \quad (1)$$

$$-\sqrt{3/5} w_1 + \sqrt{3/5} w_3 = 0, \quad (2)$$

$$3/5 w_1 + 3/5 w_3 = 2/3, \quad (3)$$

لحل هذه الجملة نجد من المعادلة (2) أن $w_1 = w_3$ ، وبالتعويض في المعادلة (3)

ينتج لدينا $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$ ، نعوض أيضا في (1) لنحصل على $w_2 = \frac{8}{9}$ ، وهي

تؤكد صحة المبرهنة 4.

نعوض قيم الأوزان ونقاط غوص في صيغة غوص التكاملية، نجد:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x}+1} &\approx I[t_1, t_2, t_3] = \frac{5}{9} f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{3/5}) \\
&= \frac{5}{9} \times \frac{1}{e^{-2\sqrt{3/5}}+1} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{e^0+1} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{e^{2\sqrt{3/5}}+1} \\
&= \frac{5}{9} \times 0.8247971943148 + \frac{8}{9} \times 0.5 + \frac{5}{9} \times 0.175202805685 \\
&= \underline{0.999999999999988}
\end{aligned}$$

نقدر الخطأ المقتطع من المبرهنة 4 بنفس الأسلوب السابق، لهذا نحسب المشتق السادس لدالة التكامل ونعين قيمة لـ c في المجال $[-1, 1]$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له، لنجد أن:

$$\begin{aligned}
f^{(6)}(c) &= \frac{64e^{2c}(e^{10c} - 57e^{8c} + 302e^{6c} - 302e^{4c} + 302e^{2c} - 1)}{(1 + e^{2c})^7} \\
&= \begin{cases} \text{Max } f^{(6)}(0.313) = 26.1329, \\ \text{Min } f^{(6)}(-0.313) = -26.1329 \end{cases}
\end{aligned}$$

وهكذا تنتج أعلى قيمة للخطأ المقتطع، وهي لا تتجاوز:

$$E_3(f) = \left| \frac{f^{(6)}(c)}{15750} \right| \leq \frac{26.1329}{15750} = 0.00165923, \quad c = \pm 0.313$$

مثال 15: إذا علمت أن:

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx = [4 \text{ArcTan}(x)]_0^1 = \pi$$

المطلوب: استخدام صيغة غوص ليجندر لحساب قيمة تقريبية لـ π من أجل نقطتين ثم ثلاث نقاط غوصية، وحساب الخطأ المطلق والمقتطع في كل حالة.

الحل: يعني هذا المثال أنه يتطلب منا إيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx$

وهذه القيمة التقريبية بدورها ستعطي قيمة تقريبية للعدد π . ولاستخدام صيغة غوص ليجندر بشكلها الصحيح يجب إجراء تحويل للمتحول من المجال $[0, 1]$ إلى المجال $[-1, 1]$ ، حيث لدينا $x \in [a, b] = [0, 1]$ وبتطبيق التحويل (4.50):

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} = \frac{1-0}{2}t + \frac{0+1}{2} = \frac{t+1}{2},$$

يكون عندئذ:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}, \quad x \in [0, 1]$$

وباستخدام التحويل $x = \frac{t+1}{2}$ ، نحصل على الدالة الجديدة

$$f(t) = \frac{4}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{16}{5 + 2t + t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$

وهكذا بأخذ تفاضل التحويل $dx = \frac{1}{2} dt$ ، يتطابق التكاملان:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(t) \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^1 \frac{8}{5 + 2t + t^2} dt = \pi$$

إذن:

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx \equiv \int_{-1}^1 \frac{8}{5 + 2t + t^2} dt = \pi$$

وتصبح عندئذ مسألتنا إيجاد تقريب للتكامل:

$$\int_{-1}^1 \frac{8}{5 + 2t + t^2} dt$$

$$\bar{f}(t) = \frac{8}{5 + 2t + t^2}$$

ودالة التكامل الجديدة هي:

أولا من أجل $N=2$ لدينا:

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ و } w_1 = w_2 = 1$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 \frac{8}{5+2t+t^2} dt \approx I[t_1, t_2] = \bar{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

إذن:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{8}{5+2t+t^2} dt &= \bar{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{8}{5+2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{8}{5+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 1.91450179821 + 1.233039185396 = \underline{3.147540983606} \end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق من الفرق بين القيمة الفعلية $\pi = 3.141592654$ بدقة عشرة أرقام والقيمة التقريبية:

$$\delta = |\pi - 3.1475409836| = 0.00594833$$

ولتقدير الخطأ المقتطع $E_2(\bar{f}) = \frac{\bar{f}^{(4)}(c)}{135}$ نحسب المشتق الرابع للدالة ونعين قيمة

c في المجال $[-1, 1]$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له، لنجد أن:

$$\bar{f}^{(4)}(t) = \frac{192(5t^4 + 20t^3 - 10t^2 - 60t)}{(1+2t+t^2)^5}$$

وبالتالي:

$$\text{Max } \bar{f}^{(4)}(c) = \frac{192(5c^4 + 20c^3 - 10c^2 - 60c)}{(1+2c+c^2)^5} = 3, \quad c = -1$$

عندئذ تنتج أعلى قيمة للخطأ المقتطع، وهي لا تتجاوز:

$$E_2(f) = \left| \frac{\bar{f}^{(4)}(c)}{135} \right| \leq \frac{3}{135} = 0.0222222$$

ثانياً من أجل $N=3$ لدينا:

$$\int_{-1}^1 \frac{8}{5+2t+t^2} dt \approx I[t_1, t_2, t_3] = w_1 \bar{f}(t_1) + w_2 \bar{f}(t_2) + w_3 \bar{f}(t_3)$$

نعين t_1, t_2, t_3 ، كأصفار لكثيرة حدود ليجنדר $L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$ ، نجد أن

$$t_3 = \sqrt{3/5}, t_2 = 0, t_1 = -\sqrt{3/5}$$

أما الأوزان w_1, w_2, w_3 نحصل عليها بحل الجملة الخطية (4.48) من أجل

$$N=3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3/5} & 0 & \sqrt{3/5} \\ 3/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2, \quad (1)$$

$$-\sqrt{3/5} w_1 + \sqrt{3/5} w_3 = 0, \quad (2)$$

$$3/5 w_1 + 3/5 w_3 = 2/3, \quad (3)$$

بحل هذه الجملة نجد من المعادلة (2) أن $w_1 = w_3$ ، وبالتعويض في المعادلة (3)

$$\text{نجد أن } w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, \text{ نعوض أيضا في (1) نحصل على } w_2 = \frac{8}{9}.$$

مما تقدم نجد أن:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{8}{5+2t+t^2} dt &\approx I[t_1, t_2, t_3] = \frac{5}{9} \bar{f}(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} \bar{f}(0) + \frac{5}{9} \bar{f}(\sqrt{3/5}) \\
&= \frac{5}{9} \times \frac{8}{5+2(-\sqrt{3/5})+(-\sqrt{3/5})^2} + \frac{8}{9} \times \frac{8}{5+2(0)+(0)^2} + \\
&\quad \frac{5}{9} \times \frac{8}{5+2(\sqrt{3/5})+(\sqrt{3/5})^2} \\
&= \frac{5}{9} \times 1.9749152868737 + \frac{64}{45} + \frac{5}{9} \times 1.1190073650599 = \underline{3.141068139963}
\end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق من الفرق بين القيمة الفعلية $\pi = 3.141592654$ بدقة عشرة أرقام والقيمة التقريبية :

$$\delta = |\pi - 3.147540984| = |3.141592654 - 3.14106814| = 5.5245E - 4$$

لتقدير الخطأ المقتطع، نحسب المشتق السادس لدالة التكامل:

$$\bar{f}^{(6)}(t) = \frac{5760(7t^6 + 42t^5 - 35t^4 - 420t^3 - 399t^2 + 145t + 139)}{(5 + 2t + t^2)^7}$$

نجد أن قيمة $c = -1$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة له بالقيمة المطلقة فوق المجال $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
\text{Max} |\bar{f}^{(6)}(c)| &= \left| \frac{5760(7c^6 + 42c^5 - 35c^4 - 420c^3 - 399c^2 + 145c + 139)}{(5 + 2c + c^2)^7} \right| \\
&= 22.5, \quad c = -1
\end{aligned}$$

وهكذا، نقدر أعلى قيمة للخطأ المقتطع :

$$E_3(\bar{f}) = \left| \frac{\bar{f}^{(6)}(c)}{15750} \right| \leq \frac{22.5}{15750} = 0.00142857$$

مثال 16: إذا علمت أن التكامل الدقيق للدالة $f(x) = 3x^5 + x^3 + 1$ يعطى

بالتكامل:

$$\int_0^2 f(x) dx = 38$$

المطلوب: استخدام صيغة غوص ليجندر لحساب قيمة تقريبية لهذا التكامل من أجل نقطتين، ثم ثلاث نقاط غوصية، وحساب الخطأ المطلق والمقتطع في كل حالة.

الحل: كما هو ملاحظ يجب إجراء تحويل للمتحول من المجال $[0, 2]$ إلى المجال

$[-1, 1]$ ، حيث لدينا $x \in [a, b] = [0, 2]$ ، وبتطبيق التحويل (4.50):

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} = \frac{2-0}{2}t + \frac{0+2}{2} = t+1,$$

يكون عندئذ:

$$f(x) = 3x^5 + x^3 + 1, \quad x \in [0, 2]$$

وباستخدام التحويل $x = t+1$ ، نحصل على الدالة

$$f(t) = 1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5, \quad t \in [-1, 1]$$

وهكذا بأخذ تفاضل التحويل $dx = dt$ ، يتطابق التكاملان:

$$\int_0^2 (1 + x^3 + 3x^5) dx \equiv \int_{-1}^1 [1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5] dt$$

وتصبح مسألتنا إيجاد تقريب للتكامل:

$$\int_{-1}^1 [1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5] dt$$

ودالة التكامل الجديدة هي:

$$\bar{f}(t) = 1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5$$

أولا من أجل $N=2$ لدينا:

$$w_1 = w_2 = 1 \text{ و } t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 \bar{f}(t) dt \approx I[t_1, t_2] = \bar{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

إذن:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5] dt &= \bar{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= [1 + (-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^3 + 3(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^5] + [1 + (\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^3 + 3(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^5] \\ &= 1.115958949897 + 34.2173743834 = \underline{35.333333333} \end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق من الفرق بين القيمة الفعلية للتكامل 38 والقيمة التقريبية:

$$\delta = |38 - 35.333333333| = 2.66667$$

ولتقدير الخطأ المقتطع $E_2(\bar{f}) = \frac{\bar{f}^{(4)}(c)}{135}$ ، نحسب المشتق الرابع للدالة ونعين

قيمة c في المجال $[-1, 1]$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة مطلقة له، لنجد أن:

$$\bar{f}^{(4)}(t) = 360(t+1)$$

وبالتالي:

$$\text{Max } \bar{f}^{(4)}(c) = 360(c+1) = 720, \quad c = 1$$

عندئذ تنتج أعلى قيمة للخطأ المقتطع وهي لا تتجاوز:

$$E_2(f) = \left| \frac{\bar{f}^{(4)}(c)}{135} \right| \leq \frac{720}{135} = 5.33333$$

نلاحظ من خلال النتيجة أن صيغة غوص ليجندر باستخدام نقطتين غوصيتين ليست فعالة من أجل حدوديات تزيد درجتها عن 3 ، لأن الخطأ المطلق وخطأ الاقترع لدالة التكامل التي هي كثيرة حدود من الدرجة الخامسة يعتبر كبيراً جداً.
ثانياً من أجل $N=3$ لدينا:

$$\int_{-1}^1 \bar{f}(t) dt \approx I[t_1, t_2, t_3] = w_1 \bar{f}(t_1) + w_2 \bar{f}(t_2) + w_3 \bar{f}(t_3)$$

نعين t_1, t_2, t_3 كأصفار لكثيرة حدود ليجندر $L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$ ، نجد أن $t_3 = \sqrt{3/5}$ ، $t_2 = 0$ ، $t_1 = -\sqrt{3/5}$ هي نقاط غوص المطلوبة.

ونحصل على الأوزان w_1, w_2, w_3 بحل الجملة الخطية (4.48) من أجل $N=3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3/5} & 0 & \sqrt{3/5} \\ 3/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2, \quad (1)$$

$$-\sqrt{3/5} w_1 + \sqrt{3/5} w_3 = 0, \quad (2)$$

$$3/5 w_1 + 3/5 w_3 = 2/3, \quad (3)$$

بحل هذه الجملة كما في الأمثلة السابقة، نجد أن:

$$w_2 = \frac{8}{9} \text{ و } w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$$

وبتعويض الأوزان ونقاط غوص التي حصلنا عليها في صيغة غوص ليجندر:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 [1 + (t+1)^3 + 3(t+1)^5] dt \approx I[t_1, t_2, t_3] = \\
& = \frac{5}{9} \bar{f}(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} \bar{f}(0) + \frac{5}{9} \bar{f}(\sqrt{3/5}) \\
& = \frac{5}{9} * [1 + (-\sqrt{3/5} + 1)^3 + 3(-\sqrt{3/5} + 1)^5] + \frac{8}{9} * [1 + (0+1)^3 + 3(0+1)^5] + \\
& \quad \frac{5}{9} * [1 + (\sqrt{3/5} + 1)^3 + 3(\sqrt{3/5} + 1)^5] \\
& = \frac{5}{9} * 1.0131975029809064 + \frac{8}{9} * 5 + \frac{5}{9} * 59.3868024970191 = \underline{38}
\end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق من الفرق بين القيمة الفعلية 38 والقيمة التقريبية :

$$\delta = |38 - 38| = 0$$

ونقدر أيضا الخطأ المقتطع، وذلك بحساب المشتق السادس لدالة التكامل، وتعيين قيمة c من المجال $[-1, 1]$ تجعل هذا المشتق يأخذ أكبر قيمة مطلقة له، لنجد أن:

$$\bar{f}^{(6)}(t) = 0,$$

$$\text{Max } \bar{f}^{(6)}(c) = 0, \quad \forall c$$

وتكون عندئذ قيمة الخطأ المقتطع :

$$E_3(\bar{f}) = \left| \frac{\bar{f}^{(6)}(c)}{15750} \right| = \frac{0}{15750} = 0$$

إن كلا الخطأين المطلق والمقتطع لصيغة غوص ليجندر باستخدام ثلاث نقاط غوصية يطابق الصفر، وهذا متوقع لأن هذه الصيغة تعطي نتائج دقيقة من أجل جميع كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 5 ، ودالة التكامل لدينا هي كثيرة حدود من الدرجة الخامسة.

برنامج 4.12: لحساب قيمة تكامل غوص ليجنדר وحساب الخطأ المقتطع والخطأ

المطلق للمثال 14:

```
PROGRAM GaussLegendre;
uses wincrt;
Var t, w :array[1..3] of real;
    a, b, It1t2, It1t2t3, AbsError, error :real; N:integer;
Function f(t:real):real;
begin
    f:=1/(Exp(2*t)+1);
end;
Function fl(t:real):real;
begin
    fl:=t-0.5*ln(1+Exp(2*t));
end;
BEGIN
a:=-1; b:=1;
N:=2;
t[1]:=-1/Sqrt(3);
t[2]:=1/Sqrt(3);
w[1]:=1; w[2]:=1;
It1t2:=w[1]*f(t[1])+w[2]*f(t[2]);
AbsError:=Abs(fl(b)-fl(a)-It1t2);
Error:=1.97611/135;
Writeln('N=2,' I[t1,t2]='',It1t2:2);
Writeln('TruncError=',Error,' ; AbsError=',AbsError);
N:=3;
t[1]:=-Sqrt(3/5);
t[2]:=0;
t[3]:=Sqrt(3/5);
w[1]:=5/9; w[2]:=8/9;w[3]:=5/9;
It1t2t3:=w[1]*f(t[1])+w[2]*f(t[2])+w[3]*f(t[3]);
AbsError:=Abs(fl(b)-fl(a)-It1t2t3);
Error:=26.1329/15750;
Writeln('N=3,' I[t1,t2,t3]='',It1t2t3:2);
Writeln('TruncError=',Error,' ; AbsError=',AbsError);
END.
```

تمارين

2- لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+e^x}}$$

فإذا علمت أن القيمة الفعلية للمشتق الأول لهذه الدالة عند $x=1$ هي

$$f'(1) = 0.65806747 \text{ بدقة سبعة أرقام عشرية والمطلوب:}$$

أ- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب القيم

التقريبية $df(1)$ لـ $f'(1)$ وفق الخطوات $h_k=(0.1)^k$, $k=1, \dots, 7$.

ب- حساب الأخطاء المطلقة المرتكبة في كل خطوات $h_k=(0.1)^k$, من

$$k=1, \dots, 7.$$

ج- اكتب برنامجا حاسوبيا لإنجاز الحسابات السابقة أ و ب.

د- احسب أخطاء الاقتطاع في الخطوات $h_k=(0.1)^k$, $k=0, \dots, 5$.

3- لتكن الدالة $f(x)=\text{ArcTan}(x)$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ يطلب مايلي:

أ- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب القيم

التقريبية $df(0)$ لـ $f'(x)$ عند $x=0$ في الخطوات $h_k=(0.1)^k$,

$$k=1, \dots, 7.$$

ب- حساب الأخطاء المطلقة المرتكبة في كل خطوة.

ج- كتابة برنامج حاسوبي لإنجاز الحسابات السابقة أ و ب.

د- حساب الأخطاء المقطوعة في الخطوات $h_k=(0.1)^k$, $k=0, \dots, 5$.

4- لتكن الدالة $f(x) = \frac{4x^2\sqrt{x}}{15}$ ، والمطلوب استخدام صيغة الفروق

المركزية من المرتبة الثانية والرابعة لحساب القيم التقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=4$ والأخطاء المطلقة المرتكبة وفق الخطوات:

$$h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$$

5- لتكن الدالة $f(x) = 2^x$ ، والمطلوب: استخدم صيغتي لاغرانج من

المرتبة الثانية لحساب القيم التقريبية لـ $f'(x)$ و لـ $f''(x)$ عند $x=0$ والأخطاء المطلقة الناتجة وفق الخطوات:

$$h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$$

إذا علمت أن القيم الفعلية لهذين المشتقين هما $f'(0) = \log(2)$ و $f''(0) = \log^2(2)$.

واحسب الأخطاء المقطوعة الناتجة عن استخدام الصيغتين المذكورتين، من أجل $h=0.0001$.

6- استخدم طريقة أشباه المنحرفات لحساب التكامل العددي:

$$I = \int_1^2 e^x 2^x dx$$

من أجل $n=2,4,6$ ، ثم قَدِّر الخطأ المقطوع المرتكب في الحساب. مكتفياً بتدوير الأجوبة لخمس أرقام عشرية.

7- بفرض لدينا الدالة $f(x) = e^x \cos(x)$ والمطلوب:

أ- استخدام طريقة قاعدة أشباه المنحرفات لحساب التكامل العددي:

$I = \int_0^1 f(x) dx$ من أجل $n=4$ ، ثم تقدير الخطأ المقطوع المرتكب في التكامل العددي.

ب- استخدام صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عند $x=0$ من أجل $h=0.1$. مكتفيا بتدوير الأجوبة لخمس أرقام عشرية في الطلبين.

8- لتكن الدالة $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ، فإذا علمت أن $\frac{\pi}{2}x$ مقدرة بالراديان يُطلب

تطبيق صيغة لاغرانج من المرتبة الثانية لحساب القيمة التقريبية لـ y' عند $x=1.5$ ، مستخدماً خطوة h تجعل الخطأ المطلق لا يزيد عن 10^{-3} ، ثم حساب الخطأ المقطع المرتكب وفق الخطوة المذكورة. مكتفياً بتدوير الأجوبة لخمس أرقام عشرية.

9- لتكن لدينا الدالة $f(x) = 1 - \cos(\pi x)$ ، فإذا علمت أن قيم πx مقدرة بالراديان يطلب مايلي:

أ- استخدام صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عند $x = \frac{1}{2}$ بخطوة $h=0.25$ ، ثم تقدير الحد الأعلى للخطأ المقطع المرتكب فيها.

ب- استخدام صيغة سيمسون من أجل $n=2,4$ لحساب قيمة التكامل العددي: $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ، ثم تقدير الخطأ المقطع المرتكب في التكامل.

ج- استخدام البرنامج 4.10 من أجل $n=6,8,10$ لحساب التكامل في البند ب.

10- لتكن لدينا الدالة $f(x) = x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ، فإذا علمت أن قيم $\frac{\pi}{2}x$

مقدرة بالراديان يطلب مايلي:

أ- استخدام صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية لـ $f''(x)$ عند $x=1$ بخطوة $h=0.1$ ، ثم حساب الخطأ المقطع المرتكب فيها.

ب- استخدام صيغة غوص- ليجندر لحساب التكامل العددي: $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$ من أجل $n=2,3$.

11- لتكن لدينا الدالة $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ، فإذا علمت أن قيم $\frac{\pi}{2}x$ مقدرة بالراديان يطلب مايلي:

أ- استخدم صيغة غوص ليجندر لحساب التكامل العددي: $I = \int_0^2 f(x) dx$ لأجل $n=3,4$.

ب- استخدم البرنامج 4.12 من أجل $n=2,3$ لحساب التكامل في البند أ.

ج- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الرابعة لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عند $x=0$ ، بالخطوة $h=0.1$ ، ثم اكتب صيغة الخطأ دون حسابه.

12- إذا علمت أن:

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \log(2)$$

يُطلب استخدام صيغة غوص ليجندر لحساب قيمة تقريبية لـ $\log(2)$ من أجل نقطتين ثم ثلاث نقاط غوصية، وحساب الخطأ المطلق في كل حالة.

13- لتكن لدينا الدالة $f(x) = L_5(x)$ حيث $L_5(x)$ هي كثيرة حدود ليجندر من الدرجة الخامسة، إذا علمت أن التكامل الدقيق لهذه الدالة يعطى بالتكامل

$$\int_0^3 f(x) dx = \log(3)$$

يُطلب استخدام صيغة غوص ليجندر لحساب قيمة تقريبية لهذا التكامل من أجل نقطتين، ثم ثلاث نقاط لغوص، وحساب الخطأ المطلق في كل حالة. ماذا تستنتج عند استخدامك ثلاث نقاط لغوص؟

إذا استخدمت صيغة غوص ليجندر لأربع نقاط غوصية هل هذا سيقدم فائدة في تحسين الدقة؟ ولماذا؟

5- الفصل الخامس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية Numerical Solutions of Ordinary Differential equations

5.1 مقدمة: Introduction

تعتبر المعادلات التفاضلية من الفروع العلمية الهامة نظراً لاستخداماتها الواسعة كنماذج رياضية في شتى العلوم المختلفة، فمثلاً في الفيزياء نجد مسائل السوائل غير القابلة للانضغاط، وفي الكيمياء مسائل لحساب حركة التفاعلات الكيميائية وشدتها، وفي الهندسة لدراسة حركة الآلات، وفي الميكانيك السماوي لدراسة حركة مسارات الأقمار الصناعية والمراكب الفضائية، وفي الملاحة البحرية لدراسة أزمنة وصول السفن والمراكب البحرية وتأخرها، وفي علوم السكان لدراسة حركة تغير السكان، وفي العلوم الطبية لحساب فترة حضانة الأمراض المعدية والوبائية وفي حقول شتى واسعة النطاق.

إن لكل معادلة تفاضلية عدداً لا نهائياً من الحلول ويعتمد ذلك على القيم العددية التي تعطى للثوابت التي تتضمنها حلول المعادلة التفاضلية والتي عددها يساوي إلى مرتبة المعادلة التفاضلية، ولتعيين حل معين بشكل خاص يجب أن نعرف شروطاً ابتدائية أو حدية يتوجب أن يحققها الحل، حيث يشترط أن تكون المعادلة التفاضلية قابلة للحل.

وبشكل عام ليس لجميع المعادلات التفاضلية حلولاً تحليلية أو أنه قد يكون من الصعب إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية، وبالتالي فإن الحلول العددية قد تكون هي الملجأ الوحيد لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية.

إن الحصول على حلول عددية دقيقة للمعادلات التفاضلية وتحديدًا للأنظمة الفيزيائية هي دائماً مسألة مهمة بالنسبة للعلماء والمهندسين. تصنف

المعادلات التفاضلية إلى صنفين عادي وجزئي، وهذا يعتمد على عدد المتغيرات المستقلة الموجودة في المعادلة التفاضلية، بحيث يكون متغير واحد للمعادلة التفاضلية العادية، وأكثر من متغير واحد للمعادلة التفاضلية الجزئية. يكتب الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية بالعلاقة:

$$L[y] = r \quad (5.1)$$

حيث L مؤثر تفاضلي و r دالة معطاة في المتغير المستقل t .
تعرف مرتبة المعادلة التفاضلية بأنها مرتبة أعلى مشتق فيها، ودرجة المعادلة التفاضلية هي درجة أعلى مشتق فيها وذلك بعد اختزال المعادلة التفاضلية.
نقول عن المعادلة التفاضلية إنها خطية إذا لم تضرب أياً من الدالة $y(t)$ ومشتقاتها بنفسها وفيما عدا ذلك يقال إنها غير خطية. وبالتالي يعطى الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة m بالعلاقة:

$$L[y] \equiv \sum_{p=0}^m g_p(t) y^{(p)}(t) = r(t) \quad (5.2)$$

حيث $p = 0, 1, \dots, m$, $g_p(t)$ دوال معلومة.

أما الشكل العام للمعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة m يعطى بالصيغة:

$$F(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}, y^{(m)}) = 0 \quad (5.3a)$$

أو يمكن التعبير عنها بشكل صريح كما يلي:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (5.3b)$$

تدعى المعادلة (5.3b) بالتمثيل النظامي للمعادلة التفاضلية (5.3a).

عموماً يحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة m على m ثابت اختياري مستقل، ولتحديد الثوابت المستقلة يجب أن يتوفر m شرطاً مفروضاً عند نقطة واحدة أو أكثر. إذا توفر m شرطاً مفروضاً عند نقطة واحدة ندعو هذه الشروط بالشروط الابتدائية وتدعى المعادلة التفاضلية مع الشروط

الابتدائية بمسألة القيمة الابتدائية. أما إذا توفر m شرطاً مفروضاً عند أكثر من نقطة واحدة ندعو هذه الشروط بالشروط الحدية، وتدعى المعادلة التفاضلية مع الشروط الحدية بمسألة القيمة الحدية.

5.2 مسائل القيمة الابتدائية: Initial Value Problems

يمكن تعريف مسألة القيمة الابتدائية كجملة من المعادلات التفاضلية مؤلفة من m معادلة من المرتبة الأولى كالاتي:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad a \leq t \leq b \\ &\vdots \\ \frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}\tag{5.4a}$$

وهي تخضع للشروط الابتدائية:

$$y_1(a) = a_0, y_2(a) = a_1, \dots, y_m(a) = a_{m-1}, \tag{5.4b}$$

علاوة على ذلك، يمكن التعبير عن مسألة القيمة الابتدائية المعممة ذات المرتبة m بالشكل:

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_{m-1} \end{cases}\tag{5.5}$$

والتي يمكن دوماً تحويلها إلى جملة مؤلفة من m معادلة من المرتبة الأولى من الشكل (5.4a)-(5.4b). وللقيام بذلك نضع الترميز: $v_1(t) = y(t)$ ، $v_m(t) = y^{(m-1)}(t) \dots, v_2(t) = y'(t)$ الذي يمكننا من الحصول على جملة من المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned}
y' &= v_1' = v_2, & v_1(a) &= \alpha_0 \\
v_2' &= v_3, & v_2(a) &= \alpha_1 \\
&\vdots & & \vdots \\
v_{m-1}' &= v_m, & v_{m-1}(a) &= \alpha_{m-2} \\
v_m' &= f(t, v_1, \dots, v_m), & v_m(a) &= \alpha_{m-1}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

وبلغة المتجهات نكتب (5.6):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \tag{5.7}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta} &= [y_0 \ y_0' \ \dots \ y_0^{(m-1)}]^T, \quad \mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]^T \\
\mathbf{f}(t, \mathbf{v}) &= [v_2 \ v_3 \ \dots \ f(t, v_1, v_2, \dots, v_m)]^T
\end{aligned}$$

تعريف (5.1):

بفرض أن الدالة $f(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$ معرفة على المجموعة:

$$D = \{(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \mid a \leq t \leq b, \ -\infty < y_i < \infty, \ i = 1, 2, \dots, m\}$$

عندئذ نقول إن هذه الدالة تحقق شرط ليبشيتز (Lipschitz) على D في المتغيرات $y_1, y_2, \dots, y_m$ إذا وجد ثابت $L > 0$ (ثابت ليبشيتز)، بحيث يتحقق:

$$|f(t, y_1, y_2, \dots, y_m) - f(t, z_1, z_2, \dots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^m |y_j - z_j|$$

مهما يكن $(t, y_1, y_2, \dots, y_m), (t, z_1, z_2, \dots, z_m) \in D$.

مبرهنة (5.1): (وحدانية الحل)

بفرض أن:

$$D = \{(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \mid a \leq t \leq b, \ -\infty < y_i < \infty, \ i = 1, 2, \dots, m\}$$

ولتكن $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ، $i=1,2,\dots,m$ دول مستمرة على D وتحقق شرط ليبشيز ، عندئذ فإن جملة المعادلات (5.4a) مع الشروط الابتدائية (5.4b) تملك حلا وحيدا $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ ، في المجال $a \leq t \leq b$.
سنركز على الحلول العددية لمسألة القيمة الابتدائية من الشكل:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0, t \in [a, b] \quad (5.8)$$

حيث هنا سنعتبر دائما $t_0 = a$

5.3 طرائق عددية للمعادلات التفاضلية العادية ذات القيم الابتدائية

Numerical Methods of differential equations with initial values

إن الطرائق العددية للمعادلات التفاضلية تنتج حلولاً عددية تقريبية كما هو معروف، وهذا يحتاج إلى حسابات هائلة جدا، وخاصة إذا كانت الطريقة المستخدمة بطيئة التقارب، مما يؤدي بنا للحاجة إلى تكرارات كثيرة لتحسين الحل. كما يمكننا القول، إنه لولا وجود الحواسيب لبقيت كثير من المسائل دون حل، وجدير بنا القول إن "الحل" يعتبر هنا نسبيا، لأن دقة الحل الذي تقدمه طريقة ما قد تختلف عنه في طريقة أخرى، لأن هذا الحل تقريبي. وبشكل عام فإن الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية من الشكل (5.8) هي خوارزميات تنتج جدولا من القيم التقريبية لـ $y(t)$ عند نقاط غالبا ماتكون موزعة على أبعاد متساوية، تدعى شبكة أو عقداً على طول المحور t . كل نقطة من الشبكة يمكن كتابتها بدلالة النقطة السابقة لها وفق العلاقة التكرارية:

$$t_{i+1} - t_i = h \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad , t_0 = a \quad t_n = b$$

التي يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$t_{i+1} = t_i + h = t_0 + (i+1) h \quad (5.9)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

تعمل العلاقة (5.9) على تجزئة المجال $[a, b]$ (مجال المتغير t للمعادلة

التفاضلية) إلى n نقطة أو عقدة، حيث $h = \frac{b-a}{n} = t_{i+1} - t_i$ هو طول الخطوة.

تعريف (5.2) :

نقول عن طريقة عددية إنها متقاربة إذا كان:

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_i = y(t_i) \quad , \quad \forall t_i \in [t_0, b]$$

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots$$

حيث نرمز بـ $y(t_i)$ إلى القيمة الفعلية للحل الدقيق عند t_i ، و بـ y_i إلى

القيمة التقريبية لها عند نفس النقطة.

نقدم مجموعة من الطرائق العددية لحل المعادلة التفاضلية العادية:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in [a, b] \quad (5.10a)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(a) = y_0 \quad (5.10b)$$

أو ما يدعى بمسألة القيمة الابتدائية (5.10a)-(5.10b).

هناك نوعان من الطرائق لمسألة القيمة الابتدائية (5.10a)-(5.10b):

a- الطرائق ذات الخطوة الواحدة: (single step methods)

تعتمد هذه الطرائق على معلومات في نقطة (عقدة) واحدة $t=t_i$ ،

للحصول على قيمة y عند النقطة $t=t_{i+1}$ حيث $i = 0, 1, \dots$.

ومن أشهر هذه الطرائق نذكر: طريقة تايلور، طريقة أولر، طريقة أولر

المعدلة وطرائق رونج كوتا الخ. ...

b- الطرق ذات الخطوات المتعددة: (multi step methods)

تعتمد هذه الطرائق على معلومات متوفرة عن الحل في أكثر من نقطة واحدة وأشهر هذه الطرائق هي طريقة آدامس باشفورس، وطريقة سيمبسون-ميلن والطرائق الخطية المعممة، وطرائق التصحيح والتنبؤ... الخ.

وهنا سنتطرق فقط إلى الطرائق ذات الخطوة الواحدة.

5.3.1 طريقة منشور تايلور (Tylor's series method):

نفرض أن المسألة (5.10a)-(5.10b) تملك حلا وحيدا هو $y(t)$ على المجال $[t_0, b]$ وأن $y(t) \in C^{p+1}[t_0, b]$ ، عندئذ يمكننا نشر الحل $y(t)$ وفق سلسلة تايلور بجوار النقطة t_i ونكتفي بالحدود حتى المرتبة p ، لنحصل على:

$$y(t) = y(t_i) + (t-t_i)y'(t_i) + \frac{(t-t_i)^2}{2!}y''(t_i) + \dots + \frac{(t-t_i)^p}{p!}y^{(p)}(t_i) + \frac{(t-t_i)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\theta)$$

يكون هذا المنشور دقيق جيدا من أجل $t \in [t_0, b]$ و $t_i < \theta < t$.

وبما أن المنشور في جوار t_i نضع $t \equiv t_i + h = t_{i+1}$ ، وبالتعويض ينتج:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1}-t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2!}y''(t_i) + \dots + \frac{(t_{i+1}-t_i)^p}{p!}y^{(p)}(t_i) + \frac{(t_{i+1}-t_i)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\theta)$$

وبالتالي:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \dots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(t_i) + O(h^{p+1}) \quad (5.11)$$

ويعطى باقي منشور تايلور بالحد:

$$O(h^{p+1}) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\theta) \quad (5.12)$$

وباستبدال القيمة الفعلية الدقيقة $y(t_i)$ بالقيمة التقريبية y_i نستطيع كتابة الصيغة (5.11) بشكل تقريبي كما يلي:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}_i \\ &= y_i + h f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y_i) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(t_i, y_i), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

حيث أن الدالة f قابلة للاشتقاق المتتالي بالنسبة لكل من t ، y ، وتربط بين مشتقاتها ومشتقات الدالة $y(t)$ العلاقة التالية:

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t)), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

وهكذا بتطبيق العلاقة التكرارية (5.13) نحصل على متتالية من القيم التقريبية $\{y_i\}$ التي تمثل الحل العددي للمسألة التفاضلية (5.10) عند النقطة $t_i = t_0 + ih$ ، انطلاقاً من الشرط الابتدائي الذي يكون معلوماً فيه الحل y_0 عند النقطة الابتدائية t_0 . تسمى الصيغة التكرارية (5.13) بطريقة منشور تايلور لحل المسألة (5.10a)-(5.10b).

إن المشتقات الواردة في الطرف الأيمن للعلاقة (5.13) غير معلومة، ولكن بما أن $f(t, y)$ ، قابلة للاشتقاق، يمكننا حساب المشتق الكلي للدالة $f(t, y)$ بالنسبة للمتحول t آخذين بعين الاعتبار أن y تابعة لـ t ، فنجد:

$$y'(t) = f(t, y),$$

$$y''(t) = f'(t, y) = f_t + f_y \cdot y' = f_t + f_y \cdot f,$$

$$\begin{aligned}
y^{(3)}(t) &= f''(t, y) \\
&= f_{tt} + f_{ty} \cdot y' + (f_{yt} + f_{yy} \cdot y') y' + f_y (f_t + f_y \cdot y') \\
&= f_{tt} + 2f_{ty} \cdot y' + f_y \cdot y'' + f_{yy} \cdot [y']^2 \\
&= f_{tt} + 2f_{ty} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_t + f_y^2 \cdot f \\
y^{(4)}(t) &= f'''(t, y) = f_{ttt} + 3f_{tty} \cdot y' + 3f_{tyy} \cdot [y']^2 + 3f_{ty} \cdot y'' + \\
&\quad f_y \cdot y''' + f_{yyy} \cdot [y']^3 = \\
&= f_{ttt} + 3f_{tty} \cdot f + 3f_{tyy} \cdot f^2 + f_{yyy} \cdot f^3 + f_t (f_{tt} + 2f_{ty} \cdot f + \\
&\quad f_{yy} \cdot f^2) + 3(f_t + f_y \cdot f)(f_{ty} + f_{yy} \cdot f) + f_y^2 (f_t + f_y \cdot f)
\end{aligned}$$

مبرهنة (5.2): (الدقة في طريقة تايلور من المرتبة p)

بفرض أن $y(t)$ هو الحل لمسألة القيمة الابتدائية (5.10a)-(5.10b) فإذا

كان $y(t) \in C^{p+1}[t_0, b]$ و $\{(t_i, y_i)\}_{i=0}^M$ متتالية من التقريبات العددية تم توليدها

بطريقة تايلور من المرتبة p ، عندئذ يعطى الخطأ الموضعي (Local)

(Error) عند كل نقطة t_i :

$$|e_i| = |y(t_i) - y_i| = O(h^{p+1}),$$

$$|\varepsilon_{i+1}| = |y(t_{i+1}) - y_i - hT_p(t_i, y_i)| = O(h^p),$$

حيث:

$$T_p(t_n, y_n) = \sum_{j=1}^p \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} h^{j-1}$$

وبشكل خاص الخطأ الكلي (Global error) عند الطرف النهائي للمجال يحقق

العلاقة:

$$E[y(b), h] = |y(b) - y_M| = O(h^p)$$

مثال 1: استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثالثة لإيجاد الحل العددي

لمسألة القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية:

$$x y' = x - y$$

$$y(2)=2$$

في المجال $[2, 2.5]$ بخطوة طولها $h=0.05$ ، واحسب الخطأ المطلق الحاصل في الحل العددي عند النقطة $x=2.5$ إذا علمت أن الحل التحليلي معطى بالعلاقة:

$$y(x) = \frac{4+x^2}{2x}$$

الحل: لدينا $x_0=2$ ، $h=0.05$ ، وباستخدام صيغة تايلور (5.13) من المرتبة الثالثة

وذلك باستبدال كل p بـ 3 وأيضاً استبدال المتحول المستقل t بـ x ، نجد:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^3}{3!} f''(x_i, y_i)$$

$$i = 0, 1, 2 \dots$$

نحتاج هنا لحساب مشتقات الدالة f :

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{x-y}{x};$$

$$y''(x) = f'(x, y) = -\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2y-x}{x^2}$$

$$y^{(3)}(x) = f''(x, y) = \frac{(2y-x)'x^2 - 2x(2y-x)}{x^4} =$$

$$\frac{2y'x^2 - x^2 - 4xy + 2x^2}{x^4} = \frac{3x-6y}{x^3}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^3}{3!} f''(x_i, y_i) =$$

$$= y_i + h \frac{x_i - y_i}{x_i} + \frac{h^2}{2} * \frac{2y_i - x_i}{x_i^2} + \frac{h^3}{6} * \frac{3x_i - 6y_i}{x_i^3}$$

نضع $i=0$:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} f'(x_0, y_0) + \dots + \frac{h^3}{3!} f''(x_0, y_0)$$

$$= y_0 + h \frac{x_0 - y_0}{x_0} + \frac{h^2}{2} * \frac{2y_0 - x_0}{x_0^2} + \frac{h^3}{6} * \frac{3x_0 - 6y_0}{x_0^3}$$

وبتعويز $x_0 = 2$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.05$ ، نحصل على الحل العددي y_1 عند

$$\text{النقطة } x_1 = x_0 + h = 2.05$$

$$y_1 = 2 + (0.05) \frac{2-2}{2} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2*2-2}{(2)^2} + \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{3*2-6*2}{(2)^3}$$

$$= \underline{2.000609}$$

وللحصول على الحل العددي y_2 عند النقطة $x_2 = x_1 + h = 2.1$ ، نضع $i=1$:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) + \frac{h^2}{2!} f'(x_1, y_1) + \dots + \frac{h^3}{3!} f''(x_1, y_1)$$

$$= y_1 + h \frac{x_1 - y_1}{x_1} + \frac{h^2}{2} * \frac{2y_1 - x_1}{x_1^2} + \frac{h^3}{6} * \frac{3x_1 - 6y_1}{x_1^3}$$

ثم نعوض $x_1 = 2.05$ ، $y_1 = 2.000609$ ، $h = 0.05$ ، لنحصل على:

$$y_2 = 2.000609 + (0.05) \frac{2.05 - 2.000609}{2.05} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2 * 2.000609 - 2.05}{(2.05)^2}$$

$$+ \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{(3 * 2.05 - 6 * 2.000609)}{(2.05)^3}$$

$$= \underline{2.00238}$$

نعوض من جديد $i=2$ ، ثم $x_2 = 2.1$ ، $y_2 = 2.00238$ ، $h = 0.05$ ، نحصل على:

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) + \frac{h^2}{2!} f'(x_2, y_2) + \dots + \frac{h^3}{3!} f''(x_2, y_2)$$

$$= y_2 + h \frac{x_2 - y_2}{x_2} + \frac{h^2}{2} * \frac{2y_2 - x_2}{x_2^2} + \frac{h^3}{6} * \frac{3x_2 - 6y_2}{x_2^3}$$

$$y_3 = 2.00238 + (0.05) \frac{2.1 - 2.00238}{2.1} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2 * 2.00238 - 2.1}{(2.1)^2}$$

$$+ \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{(3 * 2.1 - 6 * 2.00238)}{(2.1)^3}$$

$$= \underline{2.00523}$$

نتابع بنفس الأسلوب نجد:

$$y_4=2.00909; \quad y_5=2.013887; \quad y_6=2.019564; \quad y_7=2.02606;$$

$$y_8=2.03333; \quad y_9=2.041325; \quad y_{10}=2.049998;$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_{10} عند النقطة $x_{10} = 2.5$

$$\delta = |y(x_{10}) - y_{10}| = \left| \frac{4 + x_{10}^2}{2 * x_{10}} - 2.049998 \right| = \left| \frac{4 + 6.25}{2 * 2.5} - 2.049998 \right|$$

$$= |2.05 - 2.049998| = 2.E - 6$$

برنامج 5.1: طريقة تايلور لإنجاز حسابات المثال 1:

```

PROGRAM Tylormethod;
Uses wincrt;
var yy:array[0..200] of real; b,h,x0,y0,x:real;
    i,n:integer;
Function f(x:real;y:real):real;
begin
    f:=(x-y)/x;
end;
Function f1(x:real;y:real):real;
begin
    f1:=(2*y-x)/(x*x);
end;
Function f2(x:real;y:real):real;
begin
    f2:=(3*x-6*y)/(x*x*x);
end;
Function y(x:real):real;
begin
    y:=(4+x*x)/(2*x);
end;
begin
    writeln('Tylor series method to solve xy`=x-y,
    with y(2)=2 ,x0=2; b=3');
    write('x0:='); readln(x0);
    write('b:='); readln(b);
    write('initial condition, y0:='); read(y0);
    write('number of subintervals N:='); readln(n);
    h:=(b-x0)/n;    yy[0]:=y0;

```

```

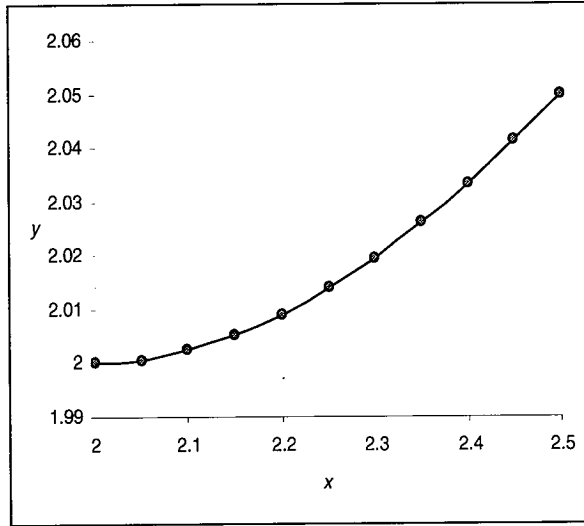
writeln('xi','yi','y(xi)
','|yi-y(xi)|');
Writeln('=====');
for i:=0 to n do
begin
x:=x0+i*h;
yy[i+1]:=yy[i]+h*f(x,yy[i])+h*h*(1/2)*f1(x,yy[i])+
h*h*h*(1/6)*f2(x,yy[i]);
end;
for i:=0 to n do
begin
x:=x0+i*h;
writeln('x,i','x:2:2','yy[i]:2:6','
y(x):2:6','abs(yy[i]-y(x)):6');
end;
END.

```

نتائج تنفيذ البرنامج 5.1 للمثال 1:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
$x_0=2.00$	2.000000	2.000000	0.0E+0000
$x_1=2.05$	2.000609	2.000610	3.8E-0007
$x_2=2.10$	2.002380	2.002381	7.1E-0007
$x_3=2.15$	2.005232	2.005233	9.9E-0007
$x_4=2.20$	2.009090	2.009091	1.2E-0006
$x_5=2.25$	2.013887	2.013889	1.4E-0006
$x_6=2.30$	2.019564	2.019565	1.6E-0006
$x_7=2.35$	2.026062	2.026064	1.8E-0006
$x_8=2.40$	2.033331	2.033333	1.9E-0006
$x_9=2.45$	2.041325	2.041327	2.0E-0006
$x_{10}=2.50$	2.049998	2.050000	2.1E-0006

نرسم في الشكل (5.1) مسار الحل التحليلي مع مسار الحل العددي للمثال 1 بطريقة تايلور حيث يمثل الخط المتواصل الحل التحليلي والخط المتقطع الحل العددي.



الشكل (5.1): سلوك الحل العددي مع الحل التحليلي —

5.3.2 طريقة أولر: Euler's method

بفرض أن (5.10) تملك حلاً وحيداً هو $y(t)$ على المجال $[t_0, b]$ ، وأن $y(t)$ قابل للاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لـ t ، نحصل من تعريف المشتق على:

$$y' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

وبأخذ المقدار $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ كتقريب للمشتق y' ، يمكننا كتابة:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}, \Rightarrow \Delta y = y' \Delta t \quad (5.14)$$

ومن جهة ثانية، لدينا من تعريف الفروق التقدمية $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ، وباستخدام العلاقة (5.14):

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i = y'_i \Delta t_i = h y'_i$$

نحصل على صيغة أولر التالية:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i = y_i + h f(t_i, y_i), i=0,1,2,\dots \quad (5.15)$$

وهي تكافئ صيغة تايلور (5.13) من أجل $p=1$ ، وبحسب المبرهنة (5.2) فإن دقة هذه الطريقة من المرتبة الأولى.

مثال 2: لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية التالية:

$$x y' + y = 0,$$

$$y(1) = 2,$$

والمطلوب إيجاد الحل التقريبي للمسألة التفاضلية المذكورة عند النقطة $x=2$ بطريقة أولر، ثم إيجاد الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند تلك النقطة؛ علماً بأن الخطوة $h=0.2$ والحل التحليلي: $y = \frac{2}{x}$.

الحل: لدينا من المسألة $x_0 = 1$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.2$ ، نستخدم صيغة أولر (5.15)

بعد استبدال المتحول المستقل $x \rightarrow t$ نجد:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i = y_i + h f(x_i, y_i), i=0,1,2,\dots$$

ومن المعادلة التفاضلية نحدد الدالة f :

$$y' = f(x, y) = -\frac{y}{x} \rightarrow y'_i = f(x_i, y_i) = -\frac{y_i}{x_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i - h \frac{y_i}{x_i} = y_i \left(1 - h \frac{1}{x_i}\right)$$

نضع $i=0$ ، ونعوض $x_0 = 1$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.2$:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 \left(1 - h \frac{1}{x_0}\right)$$

$$= 2 \left(1 - 0.2 \frac{1}{1}\right) = 1.6$$

نحصل على قيمة y_1 وهو الحل العددي عند النقطة $x_1 = x_0 + h = 1.2$.

نضع $i=1$ ، ونعوض $x_1 = 1.2$ ، $y_1 = 1.6$ ، $h = 0.2$:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 \left(1 - h \frac{1}{x_1}\right)$$

$$= 1.6 \left(1 - 0.2 \frac{1}{1.2}\right) = \underline{1.33333333}$$

نحصل على y_2 وهو الحل العددي عند النقطة $x_2 = x_1 + h = 1.4$.

نضع $i=2$ ، ونعوض $x_2 = 1.4$ ، $y_2 = 1.333333$ ، $h = 0.2$ نجد أن:

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = y_2 \left(1 - h \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= 1.333333 \left(1 - 0.2 \frac{1}{1.4}\right) = \underline{1.142857}$$

وهو الحل العددي عند النقطة $x_3 = x_2 + h = 1.6$ ، وهكذا نتابع بتعويض القيم

السابقة بالقيم اللاحقة نحصل على القيم التقريبية المتبقية:

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = y_3 \left(1 - h \frac{1}{x_3}\right)$$

$$= 1.142857 \left(1 - 0.2 \frac{1}{1.6}\right) = \underline{0.9999999}$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = y_4 \left(1 - h \frac{1}{x_4}\right)$$

$$= 0.999999 \left(1 - 0.2 \frac{1}{1.8}\right) = \underline{0.888889}$$

حيث وجدنا أخيرا y_5 وهي القيمة التقريبية للحل العددي عند $x_5 = x_4 + h = 2$.

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي عند النقطة $x_5 = 2$:

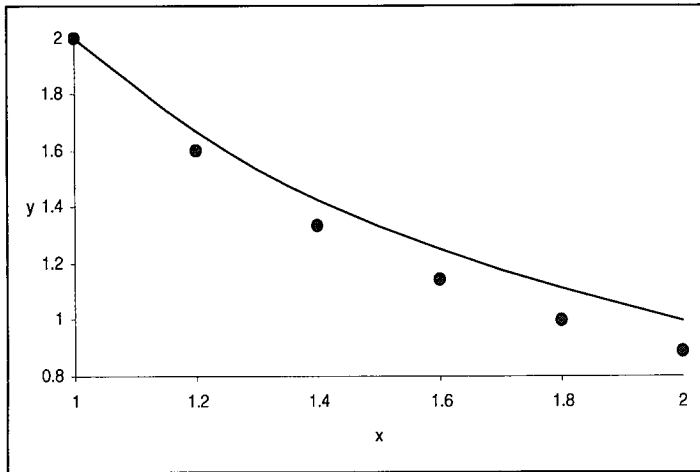
$$\delta = |y(x_5) - y_5| = \left| \frac{2}{x_5} - 0.888889 \right| = \left| \frac{2}{2} - 0.888889 \right| = 1.11111E-1;$$

أما الخطأ النسبي فهو نسبة الخطأ المطلق على القيمة الفعلية:

$$E = \frac{\delta}{y(x_5)} = \frac{0.111111}{1} = 1.11111E-1$$

والخطأ النسبي مطابق هنا للخطأ المطلق وهو كبير نسبياً لأن دقة الطريقة من المرتبة الأولى، والخطوة ليست صغيرة نسبياً.

نرسم في الشكل (5.2) مسار الحل التحليلي مع مسار الحل العددي للمثال 2 بطريقة أولر حيث يمثل الخط المتواصل الحل التحليلي والخط المنقطع الحل العددي.



الشكل (5.2): سلوك الحل العددي مع الحل التحليلي ————— بطريقة أولر

برنامج 5.2: طريقة أولر لإيجاد حسابات المثال 2:

```

Program EulerMethod;
Uses wincrt;
var yy:array[0..200] of real; x0,b,h,x,y0:real; i,n:integer;
Function f(x,y:real):real;
begin
  f:=-y/x;
end;
Function y(x:real):real;
begin
  y:=2/x;
end;
BEGIN
writeln('Euler`s method to solve x y`= y, y(1)=2 , b=2');

```



```

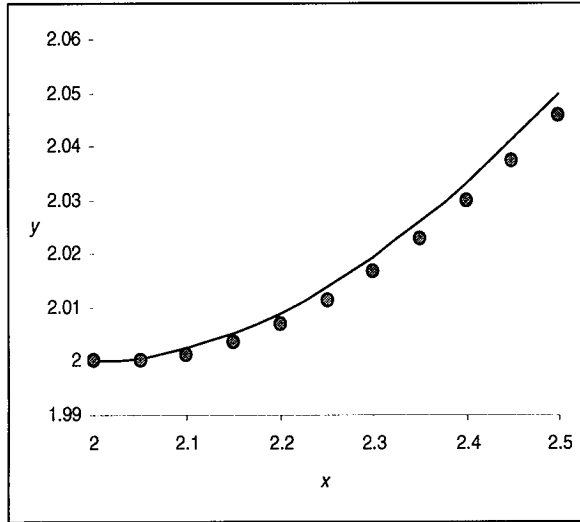
write('x0:='); readln(x0); write('b:='); readln(b);
write('initial condition, y0 :='); read(y0);
write('number of subintervals N:='); readln(n);
h:=(b-x0)/n; yy[0]:=y0;
writeln('xi', ' ', 'y,i', ' ', 'y(xi)', ' ', '|yi-y(xi)|');
for i:=0 to n do
begin
x:=x0+i*h;
yy[i+1]:=yy[i]+h*f(x,yy[i]);
end;
for i:=0 to n do
begin
x:=x0+i*h;
writeln('x',i,':',x:2:1, ' ', 'yy[i]:2:6, ' ',
y(x):2:6, ' ', 'abs(yy[i]-y(x))');
end;
END.

```

نتائج تنفيذ البرنامج 5.2 للمثال 2 من أجل الخطوة $h=0.05$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
$x_1 = 1.05$	1.9	1.90476	0.0047619
$x_2 = 1.1$	1.80952	1.81818	0.00865801
$x_3 = 1.15$	1.72727	1.73913	0.0118577
$x_4 = 1.2$	1.65217	1.66667	0.0144928
$x_5 = 1.25$	1.58333	1.6	0.0166667
$x_6 = 1.3$	1.52	1.53846	0.0184615
$x_7 = 1.35$	1.46154	1.48148	0.019943
$x_8 = 1.4$	1.40741	1.42857	0.021164
$x_9 = 1.45$	1.35714	1.37931	0.0221675
$x_{10} = 1.5$	1.31034	1.33333	0.0229885
$x_{11} = 1.55$	1.26667	1.29032	0.0236559
$x_{12} = 1.6$	1.22581	1.25	0.0241935
$x_{13} = 1.65$	1.1875	1.21212	0.0246212
$x_{14} = 1.7$	1.15152	1.17647	0.0249554
$x_{15} = 1.75$	1.11765	1.14286	0.0252101
$x_{16} = 1.8$	1.08571	1.11111	0.0253968
$x_{17} = 1.85$	1.05556	1.08108	0.0255255
$x_{18} = 1.9$	1.02703	1.05263	0.0256046
$x_{19} = 1.95$	1.	1.02564	0.025641
$x_{20} = 2.$	0.974359	1.	0.025641

نبين في الشكل (5.3) مسار الحل التحليلي مع الحل العددي للمثال 1 بطريقة أولر، ومن الواضح تباعد الحلين وخاصة في الخطوات الأخيرة من الحل، في حين أن طريقة تايلور لنفس المثال تحافظ على تطابق الحلين إلى حد كبير كما رأينا في الشكل (5.1) لأننا استخدمنا طريقة تايلور بدقة من المرتبة الثالثة.



الشكل (5.3): الحل العددي والحل التحليلي ————— بطريقة أولر للمثال 1

5.3.3 طريقة هيون (أولر المعدلة): Heun's Method

لاستنتاج صيغة لهذه الطريقة، من طريقة منشور تايلور (5.13) نستطيع أن

نكتب بشكل تقريبي:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i \quad (5.16)$$

ومن تعريف المشتق لدينا:

$$y'' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta' y}{\Delta t}, \quad \Delta t = h$$

$$y''_i \approx \frac{\Delta' y_i}{h} \quad \text{وبشكل تقريبي يمكن أن نكتب:}$$

وباستخدام تعريف الفروق التقدمية نكتب العلاقة (5.16) بالشكل:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\Delta y'_i}{h} \\ &= y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} \frac{y'_{i+1} - y'_i}{h} = y_i + \frac{h}{2} (y'_i + y'_{i+1}) \end{aligned}$$

ولكن نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن قيمة y'_{i+1} في الطرف الأيمن مجهولة، يجب معرفة قيمة y_{i+1} ، وهذه الأخيرة يمكن إيجاد قيمتها من صيغة أولر (5.15)، أي أن:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

وبالتالي تصبح $y'_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$ معلومة، وللتمييز سنضع إشارة خط فوق y_{i+1} المحسوبة بطريقة أولر (5.15)، وبالتالي تصبح صيغة أولر المعدلة:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y'_i + \bar{y}'_{i+1})$$

$$\bar{y}'_{i+1} = f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) ; \quad i=0,1,2,\dots \quad (5.17)$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i);$$

مثال 3: أوجد الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية التالية

$$y' = y + e'$$

$$y(-1) = -\frac{1}{e}$$

بطريقة أولر المعدلة في المجال $[-1,1]$ إذا علمت أن $h=0.2$ ، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الحاصل في كل خطوة، علما أن الحل التحليلي هو:

$$y(t) = t e'$$

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = -1$ ، $y_0 = -\frac{1}{e}$ ، $h=0.2$ ، نستخدم صيغة أولر المعدلة (5.17)، نجد:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + \bar{y}'_{i+1})$$

$$\bar{y}'_{i+1} = f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) ; \quad i=0,1,2,\dots$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i);$$

لدينا:

$$\bar{y}'_{i+1} = f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) = \bar{y}_{i+1} + e^{t_{i+1}}$$

$$= y_i + h f(t_i, y_i) + e^{t_{i+1}},$$

$$= y_i + h(y_i + e^{t_i}) + e^{t_{i+1}}$$

$$y'_i = f(t_i, y_i) = y_i + e^{t_i}$$

إذن:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + \bar{y}'_{i+1}) =$$

$$= y_i + \frac{h}{2}[(y_i + e^{t_i}) + y_i + h(y_i + e^{t_i}) + e^{t_{i+1}}]$$

$$= y_i + \frac{h}{2}[y_i(2+h) + e^{t_i}(h+1) + e^{t_{i+1}}]$$

نضع $i=0$ ، ونعوض $t_0 = -1$ ، $t_1 = -1 + h = -0.8$ ، $y_0 = -\frac{1}{e}$ ، $h = 0.2$ في

العلاقة الأخيرة، نجد:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[y_0(2+h) + e^{t_0}(h+1) + e^{t_1}]$$

$$= -\frac{1}{e} + \frac{0.2}{2} \left[\left(-\frac{1}{e}\right)(2+0.2) + e^{-1}(0.2+1) + e^{-0.8} \right]$$

$$= \underline{-0.359734}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_1 عند النقطة $t_1 = -0.8$:

$$\delta = |y(t_1) - y_1| = |t_1 e^{t_1} - 0.359734| = |-0.359463 - (-0.359734)|$$

$$= 0.000271$$

و يحسب الخطأ النسبي :

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{0.000271}{-0.359734} = -0.000753334$$

نتابع فنضع $i=1$ ونعوض $t_1 = -0.8$ ، $t_2 = -0.8 + h = -0.6$ ، $y_1 = -0.359734$ في الصيغة التكرارية نجد: $h = 0.2$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} \left[y_1(2 + 0.2) + e^{t_1}(0.2 + 1) + e^{t_2} \right] \\ &= -0.359734 + \frac{0.2}{2} \left[(-0.359734)(2.2) + e^{-0.8}(1.2) + e^{-0.6} \right] \\ &= -0.330075 \end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_2 عند النقطة $t_2 = -0.6$:

$$\begin{aligned} \delta &= |y(t_2) - y_2| = \left| t_2 e^{t_2} - 0.330075 \right| = \left| -0.329287 - (-0.330075) \right| \\ &= 0.000788 \end{aligned}$$

و الخطأ النسبي :

$$E = \frac{\delta}{y(t_2)} = \frac{0.000788}{-0.329287} = -0.00239305$$

نضع أيضا $i=2$ ونعوض $t_2 = -0.6$ ، $t_3 = -0.4$ ، $y_2 = -0.330075$ في الصيغة نجد:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{2} \left[y_2(2 + 0.2) + e^{t_2}(0.2 + 1) + e^{t_3} \right] \\ &= -0.330075 + \frac{0.2}{2} \left[(-0.330075)(2.2) + e^{-0.6}(1.2) + e^{-0.4} \right] \\ &= -0.269802 \end{aligned}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_3 عند النقطة $t_3 = -0.4$:

$$\begin{aligned} \delta &= |y(t_3) - y_3| = \left| t_3 e^{t_3} - 0.269802 \right| = \left| -0.268128 - (-0.269802) \right| \\ &= 0.001674 \end{aligned}$$

و الخطأ النسبي :

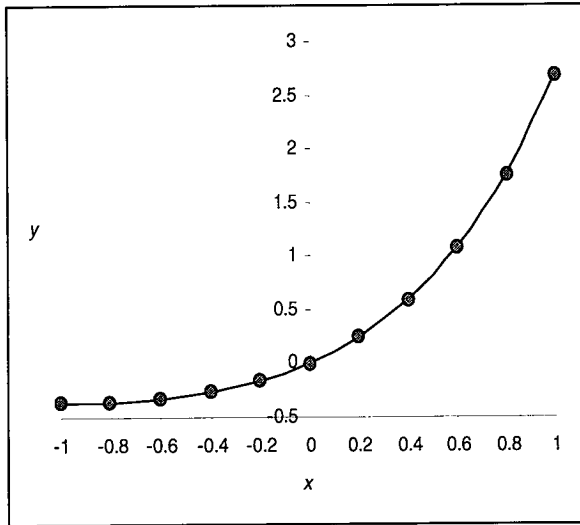
$$E = \frac{\delta}{y(t_2)} = \frac{0.001674}{-0.269802} = -0.00620455$$

نسجل بقية النتائج التي حصلنا عليها بالمتابعة كما يلي:

$t_4 = -0.2$	$y_4 = -0.166848$	$\delta = 0.0031016$	$E = -0.018941$
$t_5 = 0.0$	$y_5 = -0.005307$	$\delta = 0.0053065$	-----
$t_6 = 0.2$	$y_6 = 0.235666$	$\delta = 0.0086143$	$E = 0.0352638$
$t_7 = 0.4$	$y_7 = 0.583264$	$\delta = 0.0134662$	$E = 0.0225667$
$t_8 = 0.6$	$y_8 = 1.07281$	$\delta = 0.0204587$	$E = 0.0187133$
$t_9 = 0.8$	$y_9 = 1.75004$	$\delta = 0.0303931$	$E = 0.0170706$
$t_{10} = 1.0$	$y_{10} = 2.67394$	$\delta = 0.0443404$	$E = 0.0163119$

حيث نرسم δ إلى الخطأ المطلق، و E إلى الخطأ النسبي في الحل العددي، ونشير بـ ---- إلى عدم وجود نتيجة للخطأ النسبي لأن القيمة الفعلية للحل تساوي الصفر عند $t_5 = 0.0$.

نبين في الشكل (5.4) مسار الحل الفعلي مع الحل العددي للمثال 3 بطريقة أولر المعدلة، ومن الواضح تقارب الحل العددي من الحل النظري في جميع خطوات الحل، وبالتالي فهي أفضل من طريقة أولر وأدق منها.



الشكل (5.4): الحل العددي والحل التحليلي ————— بطريقة أولر المعدلة للمثال 3

مثال 4: لتكن مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية التالية:

$$x y' - 2y = 0,$$

$$y(-2) = 4,$$

والمطلوب كتابة برنامج لطريقة أولر المعادلة لإيجاد الحل العددي للمسألة المذكورة في المجال $[-2, -1]$ بخطوة $h=0.1$ ، ثم حساب الخطأ المطلق عند كل خطوة إذا علمت أن الحل التحليلي هو: $y(x) = x^2$.

برنامج 5.3: طريقة أولر المعادلة لإيجاد حسابات المثال 4:

```

Program ModifierEuler;
uses wincrt;
var w, yy:array[0..200] of real;
    x0,b,h,y0,x : real;   i,n:integer;
Function f(x:real;y:real):real;
begin
    f:=2*y/x;
end;
Function y(x:real):real;
begin
    y:=Sqr(x);
end;
BEGIN
writeln('Modifier Euler`s to solve t y`-2y=0, with
    y(-1)=1 ;x0=-1;b=0');
write('x0:='); readln(x0);
write('b:='); readln(b);
write('initial condition,f(x0):='); read(y0);
write('number of subintervals N:='); readln(n);
h:=(b-x0)/n;
w[0]:=y0;
writeln(' xi',      'w,i',      'y(xi)',      |wi-y(xi)|');
for i:=0 to n do
begin
    x:=x0+i*h;
    w[i+1]:=w[i]+h*f(x,w[i]);
    w[i+1]:=w[i]+0.5*h*(f(x,w[i])+f(x0+(i+1)*h,w[i+1]));
end;

```

```

for i:=0 to n do
begin
  x:=x0+i*h;
  writeln(' x',i,'=',x:2:2,' ',w[i]:2:6,' ',
    y(x):2:6,' ',abs(w[i]-y(x)));
end;
END.

```

نتائج تنفيذ البرنامج 5.3 للمثال 4 من أجل الخطوة $h=0.1$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $	E
$x_1 = -1.9$	3.61053	3.61	0.000526316	E= 0.000145794
$x_2 = -1.8$	3.24103	3.24	0.00102801	E= 0.000317287
$x_3 = -1.7$	2.89151	2.89	0.00150538	E= 0.000520893
$x_4 = -1.6$	2.56196	2.56	0.00195881	E= 0.000765161
$x_5 = -1.5$	2.25239	2.25	0.00238879	E= 0.00106168
$x_6 = -1.4$	1.9628	1.96	0.00279594	E= 0.0014265
$x_7 = -1.3$	1.69318	1.69	0.00318112	E= 0.00188232
$x_8 = -1.2$	1.44355	1.44	0.00354544	E= 0.00246211
$x_9 = -1.1$	1.21389	1.21	0.00389048	E= 0.00321528
$x_{10} = -1.$	1.00422	1.	0.00421849	E= 0.00421849

5.3.4 طرائق رانج - كوتا Rung Kutta Methods

تعتبر طرائق رانج-كوتا من أكثر الطرائق استخداما وشيوعا رغم قدمها، وما نزال حتى الآن نرى الكثير من الباحثين يعملون على تطوير هذه الطرائق. يوجد لهذه الطرائق العديد من الصيغ التقريبية من المرتبة الثانية وحتى مراتب عالية.

تكتب طريقة رانج - كوتا المعممة بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^v w_i K_i, \quad (5.18)$$

$$K_i = h \cdot f(t_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j), \quad c_1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

أو الشكل:

$$\begin{aligned}
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
K_2 &= h.f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1) \\
K_3 &= h.f(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2) \\
K_4 &= h.f(t_n + c_4 h, y_n + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3) \\
&\vdots \\
y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^v w_i K_i.
\end{aligned}$$

حيث $w_i, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{v(v-1)}, c_2, c_3, \dots, c_v$ وسطاء اختيارية.

ولحساب الوسطاء، ننشر y_{n+1} وفق قوى h بحيث تتطابق مع سلسلة تايلور لحل المعادلة التفاضلية لعدد معين من الحدود.

a-طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية

لحل من أبسط دساتير رانج-كوتا الدستور الذي ينتج من (5.18) كما يلي:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^2 w_i K_i = y_n + w_1 K_1 + w_2 K_2 \\
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
K_2 &= h.f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

حيث w_2, w_1, a_{21}, c_2 معاملات مجهولة يجب تعيينها لتتطابق القيمة y_{n+1} في (5.19) مع طريقة منشور تايلور من أعلى مرتبة ممكنة. من أجل ذلك نفرض أن $y(t)$ هو حل للمسألة (5.10)، وأنه مستمر ويقبل الاشتقاق عدداً من المرات حسب الحاجة على مجال ما $[a, b]$ ، عندئذ يمكن نشر $y(t)$ حول t_n ، وتعويض

كل $t \rightarrow t_{n+1}$ ، لينتج لدينا:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \dots + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots$$

وبصيغة أخرى:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_t + f_y \cdot f)_n + y''(t_n) + \frac{h^3}{6} (f_{tt} + 2f_{ty} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_t + f_y^2 \cdot f)_n \quad (5.20)$$

حيث جميع مشتقات الدالة f محسوبة في النقطة (t_n, y_n) .

نستخدم أيضا منشور تايلور لدالة بمتحولين حول النقطة (t_n, y_n) ، نجد أن:

$$\frac{K_2}{h} = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1) = f(t_n, y_n) + c_2 h f_t + a_{21} K_1 f_y + \frac{c_2^2 h^2}{2} f_{tt} + \frac{a_{21}^2 K_1^2}{2} f_{yy} + c_2 h a_{21} K_1 f_{ty} \quad (5.21)$$

حيث جميع مشتقات الدالة f محسوبة في النقطة (t_n, y_n) .

وبتعويض قيمة $K_1 = h \cdot f(t_n, y_n)$ و K_2 من العلاقة (5.21) في العلاقة (5.19) وترتيبها بحسب قوى h ، نجد أن:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) h f + w_2 h^2 (c_2 f_t + a_{21} f f_y) + a_{21} h^2 \left(\frac{c_2^2}{2} f_{tt} + c_2 a_{21} f_{ty} f + \frac{a_{21}^2}{2} f^2 f_{yy} \right) \quad (5.22)$$

وبمطابقة العلاقة (5.20) مع العلاقة (5.22) نسجل المعادلات التالية:

$$(w_1 + w_2) h = h \Rightarrow (w_1 + w_2) = 1$$

$$w_2 h^2 c_2 = a_{21} h^2 w_2 = \frac{h^2}{2}$$

إن أبسط حل لجملة المعادلتين السابقتين هو

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$$

وهكذا نكون قد عينا الوسطاء المجهولة الأربعة التي تنتج منها طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية وهي تكتب عندئذ بالصيغة التكرارية التالية:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] \\
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
K_2 &= h.f(t_n + h, y_n + K_1)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

مثال 5: نستخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية :

$$y' = t - y$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 2$$

في المجال $[0, 1]$ ، باستخدام خطوة $h = 0.1$. ثم نحسب الخطأ المطلق والنسبي الحاصل عند الحساب التقريبي في كل خطوة، علماً بأن الحل النظري معلوم ويعطى بصيغته التحليلية التالية:

$$y(t) = t + 3e^{-t} - 1$$

نوضح سلوك الحل العددي للطريقة برسم المخططات البيانية للحل التحليلي والحل العددي ولدالة الخطأ المطلق.

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.2$ ، نستخدم طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية (5.23) نجد:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] \\
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots \\
K_2 &= h.f(t_n + h, y_n + K_1)
\end{aligned}$$

لدينا أيضاً $y' = f(t, y) = t - y$ ، وبالتالي $f(t_n, y_n) = t_n - y_n$ ، نضع

$n=0$ ، ونحسب الحل التقريبي y_1 عند النقطة $t_1 = 0.1$ كما يلي:

$$\begin{aligned}
K_1 &= h.f(t_0, y_0) = h(t_0 - y_0) = 0.1(0 - 2) = -0.2 \\
K_2 &= h.f(t_0 + h, y_0 + K_1) = 0.1.f(0 + 0.1, 2 - 0.2) \\
&= 0.1(0.1 - 1.8) = -0.17
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 2 + \frac{1}{2}[-0.2 - 0.17] = \underline{1.815}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_1 عند النقطة $t_1 = 0.1$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\delta &= |y(t_1) - y_1| = |(t_1 + 3e^{-t_1} - 1) - 1.815| = |1.814512254 - 1.8145| \\ &= 0.00048775\end{aligned}$$

و يمكننا حساب الخطأ النسبي أيضا مباشرة:

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{0.00048775}{1.81451225} = 0.000268805$$

نتابع في تكرار جديد فنضع $n=1$ ، ونعوض $t_1 = 0.1$ ، $y_1 = 1.815$ ، $h = 0.2$

لحساب k_1 ، k_2 في الصيغة التكرارية ثم نعين y_2 كما يلي:

$$K_1 = h.f(t_1, y_1) = h(t_1 - y_1) = 0.1(0.1 - 1.815) = \underline{-0.1715}$$

$$\begin{aligned}K_2 &= h.f(t_1 + h, y_1 + K_1) = 0.1.f(0.1 + 0.1, 1.815 - 0.1715) \\ &= 0.1(0.2 - 1.6435) = -0.14435\end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 1.815 + \frac{1}{2}[-0.1715 - 0.14435] = \underline{1.657075}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_2 عند النقطة $t_2 = 0.2$

$$\begin{aligned}\delta &= |y(t_2) - y_2| = |(t_2 + 3e^{-t_2} - 1) - 1.657075| = |1.656192259 - 1.657075| \\ &= 0.000882741\end{aligned}$$

و الخطأ النسبي :

$$E = \frac{\delta}{y(t_2)} = \frac{0.000882741}{1.656192259} = 0.000532994$$

نضع أيضا $n=2$ ، ونعوض $t_2 = 0.2$ ، $y_2 = 1.657075$ ، في الصيغة التكرارية

لحساب k_1 ، k_2 ، ثم نعين y_3 :

$$K_1 = h.f(t_2, y_2) = h(t_2 - y_2) = 0.1(0.2 - 1.657075) = \underline{-0.145708}$$

$$K_2 = h.f(t_2 + h, y_2 + K_1) = 0.1.f(0.2 + 0.1, 1.657075 - 0.145708) \\ = 0.1(0.3 - 1.51137) = \underline{-0.121137}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 1.657075 + \frac{1}{2}[-0.145708 - 0.121137] \\ = \underline{1.52365}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_3 عند النقطة $t_3 = 0.3$

$$\delta = |y(t_3) - y_3| = |(t_3 + 3e^{-t_3} - 1) - 1.52365| = |1.52245466 - 1.52365287| \\ = 0.00119821$$

و الخطأ النسبي :

$$E = \frac{\delta}{y(t_2)} = \frac{0.00119821}{1.52245466} = 0.000787025$$

نسجل بقية النتائج التي حصلنا عليها بالمتابعة كما يلي:

$$t_4 = 0.4 ; y_4 = 1.41241; K_1 = -0.122365; K_2 = -0.100129; \\ \delta = 0.00144571;$$

$$t_5 = 0.5 ; y_5 = 1.32123; K_1 = -0.101241; K_2 = -0.0811165; \\ \delta = 0.00163532$$

$$t_6 = 0.6 ; y_6 = 1.24821; K_1 = -0.0821227; K_2 = -0.0639105; \\ \delta = 0.00177579$$

$$t_7 = 0.7 ; y_7 = 1.19163; K_1 = -0.0648211; K_2 = -0.048339; \\ \delta = 0.00187477$$

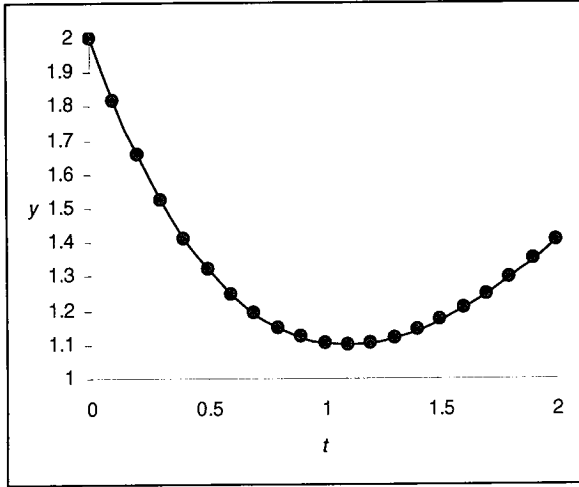
$$t_8 = 0.8 ; y_8 = 1.14993; K_1 = -0.0491631; K_2 = -0.0342468; \\ \delta = 0.00193888$$

$$t_9 = 0.9 ; y_9 = 1.12168; K_1 = -0.0349926; K_2 = -0.0214933; \\ \delta = 0.00197384$$

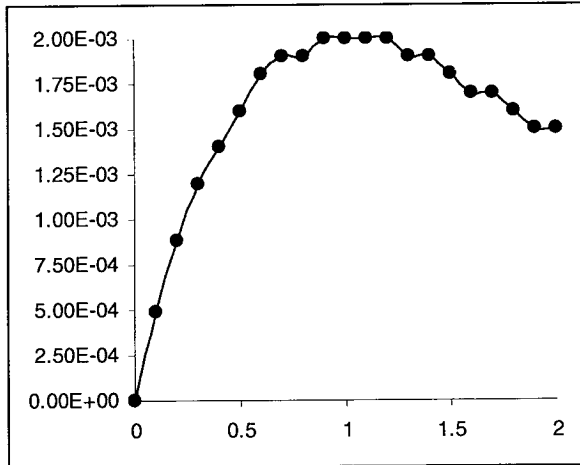
$$t_{10} = 1.0 ; y_{10} = 1.10562 ; K_1 = -0.0221683; K_2 = -0.00995145; \\ \delta = 0.00198463$$

نرسم في الشكل (5.5) الحل العددي مع الحل التحليلي للمثال 5 بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية في المجال $[0,2]$ والخطوة $h=0.1$ ، وهذه الطريقة لا تقل دقتها عن طريقة هيون لأن الخطأ في كليهما من المرتبة الثانية، ومن الواضح تقارب الحل العددي من الحل التحليلي في جميع خطوات الحل.

نرسم أيضا في الشكل (5.6) الخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 5.



الشكل (5.5): سلوك الحل العددي مع الحل التحليلي — للمثال 5 بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية



الشكل (5.6): سلوك الخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 5

برنامج 5.4: طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية لإيجاد حسابات المثال 5 في المجال $[a, b]$ طرفيه مدخلين بالإضافة إلى تجزئة N للمجال و y_0 .

```

PROGRAM RungKuttaOrderTwo;
Uses wincrt;
var w:array[0..300] of real;
t,k1,k2, b,t0,h, y0:real; i,n:integer;
Function f(t,y:real):real;
begin
    f:= t - y;
end;
Function y(x:real):real;
begin
    y := t+3*exp(-t)-1;
end;
BEGIN
    writeln('Runge-Kutta from order Two to solve y`=t-y,
        y(0)=2 , t0=0;b=2');
    write('input t0:='); readln(t0); write('input b='); readln(b);
    write('input y0:='); readln(y0);
    write('number of subintervals N:=');readln(n);
    h:=(b-t0)/n;    w[0]:=y0;
    for i:=0 to n do
        begin
            t:=t0+i*h;
            k1:=h*f(t,w[i]);
            k2:=h*f(t+h,w[i]+k1);
            w[i+1]:=w[i]+(k1+k2)/2;
            Writeln('k1=',k1:2:5,' k2=',k2:2:5,' y=',w[i+1]:2:5);
        end; {for} readln;
    writeln(' ti,'    ',w1,i,'    ',y(ti)    ',    ',|w1i-y(ti)|');
    for i:=1 to n do
        begin
            t:=t0+i*h;
            writeln(' t,i,=',t:2:4,' ',w[i]:2:5,' ',
                y(t):2:5,' ',abs(w[i]-y(t)):10);
        end;
    END.

```

b- طرائق رانج - كوتا من المرتبة الثالثة

تكتب طرائق رانج-كوتا المعممة من المرتبة الثالثة بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 \quad (5.24)$$

$$K_1 = h.f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = h.f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)$$

$$K_3 = h.f(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$

حيث يتم اختيار الوسطاء $w_3, w_2, w_1, a_{32}, a_{31}, a_{21}, c_3, c_2$ بمطابقة y_{n+1} إلى

أعلى مرتبة مع منشور تايلور لـ $y(t)$ حول t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + \dots$$

وينتج عن هذه المطابقة مجموعة المعادلات التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = c_2 \\ a_{31} + a_{32} = c_3 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ c_2 w_2 + c_3 w_3 = \frac{1}{2} \\ c_2^2 w_2 + c_3^2 w_3 = \frac{1}{3} \\ c_2 a_{32} w_3 = \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

وهي جملة مؤلفة من ست معادلات بثمانية وسطاء مجهولة، تملك العديد من

الحلول، نعرضها ضمن جدول من الشكل:

$$\begin{array}{c|ccc} c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

وكل حل يقدم طريقة جديدة مختلفة من المرتبة الثالثة:

$$\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 2 & 0 \quad 2 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}$$

Nystrom

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 3 & 0 \quad 3 \\ 4 & 4 \end{array}$$

$$\frac{2}{9} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{9}$$

Nearly optimal

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & -1 \quad 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6}$$

Classical

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ \hline 2 & 0 \quad 2 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4}$$

Heun

وبتعيين الوسطاء $w_3, w_2, w_1, a_{32}, a_{31}, a_{21}, c_3, c_2$ من المخطط الجدولي

(Classical)، تنتج طريقة رانج-كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة

الثالثة، التي سنستخدمها في تطبيقاتنا وهي تملك الصيغة التالية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = h.f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = h.f(t_n + h/2, y_n + K_1/2)$$

$$K_3 = h.f(t_n + h, y_n + 2K_2 - K_1)$$

(5.26)

مثال 6: نستخدم طريقة رانج كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الثالثة لحل

مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{t}{2} y' - y + 1 = 0$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0.5) = 1.25$$

في المجال $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ، باستخدام خطوة $h = 0.05$. ثم نحسب الخطأ المطلق والنسبي الحاصل عند الحساب التقريبي في كل خطوة، علماً بأن الحل النظري معلوم بصيغته التحليلية التالية:

$$y(t) = t^2 + 1$$

نوضح سلوك الحل العددي للطريقة برسم المخططات البيانية للحل التحليلي والحل العددي ولدالة الخطأ المطلق.

الحل: لدينا $t_0 = 0.5$ ، $y_0 = 1.25$ ، $h = 0.05$. نكتب طريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الثالثة كمايلي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = h \cdot f(t_n, y_n) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

$$K_2 = h \cdot f(t_n + h/2, y_n + K_1/2)$$

$$K_3 = h \cdot f(t_n + h, y_n + 2K_2 - K_1)$$

حيث من المسألة نحصل على $y' = f(t, y) = \frac{2(y-1)}{t}$ ، وبالتالي

$$f(t_n, y_n) = \frac{2(y_n - 1)}{t_n} \quad \text{إذن يمكن أن نكتب:}$$

$$K_1 = h.f(t_n, y_n) = h \frac{2(y_n - 1)}{t_n}$$

$$K_2 = h.f(t_n + h/2, y_n + K_1/2) = h \frac{2(y_n + K_1/2 - 1)}{t_n + h/2}$$

$$K_3 = h.f(t_n + h, y_n + 2K_2 - K_1) = h \frac{2(y_n + 2K_2 - K_1 - 1)}{t_n + h}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

نضع $n=0$ ، ونحسب K_3, K_2, K_1 ، ثم نحسب الحل التقريبي y_1 عند النقطة

$$t_1 = t_0 + h = 0.55 \text{ كما يلي:}$$

$$K_1 = h.f(t_0, y_0) = h \frac{2(y_0 - 1)}{t_0} = 0.05 \frac{2(1.25 - 1)}{0.5} = \underline{0.05}$$

$$K_2 = h.f(t_0 + h/2, y_0 + K_1) = h \frac{2(y_0 + K_1/2 - 1)}{t_0 + h/2}$$

$$= 0.05 \frac{2(1.25 + 0.05/2 - 1)}{0.5 + 0.05/2} = \underline{0.052381}$$

$$K_3 = h.f(t_0 + h, y_0 + 2K_2 - K_1) = h \frac{2(y_0 + 2K_2 - K_1 - 1)}{t_0 + h}$$

$$0.05 * \frac{2(1.25 + 2 * 0.052381 - 0.05 - 1)}{0.5 + 0.05} = \underline{0.0554113}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3] =$$

$$= 1.25 + \frac{1}{6}[0.05 + 4 * 0.052381 + 0.0554113]$$

$$= \underline{1.302489177}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_1 عند النقطة $t_1 = 0.55$:

$$\delta = |y(t_1) - y_1| = |(t_1^2 + 1) - 1.302489177| = |1.3025 - 1.302489177|$$

$$= \underline{0.000010823}$$

و يمكننا حساب الخط النسبي أيضا مباشرة:

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{0.000010823}{1.302489177} = 8.30947E - 6$$

نتابع في تكرار جديد فنضع $n=1$ ، ونعوض $t_1 = 0.55$ ، $y_1 = 1.302489177$ بحساب K_1 ، K_2 ، K_3 في الصيغة التكرارية ثم نعين y_2 بأسلوب مماثل كما يلي:

$$K_1 = h.f(t_1, y_1) = h \frac{2(y_1 - 1)}{t_1} = 0.05 \frac{2(1.30249 - 1)}{0.55} = \underline{0.054998}$$

$$K_2 = h.f(t_1 + h/2, y_1 + K_1) = h \frac{2(y_1 + K_1/2 - 1)}{t_1 + h/2}$$

$$= 0.05 \frac{2(1.30249 + 0.054998/2 - 1)}{0.55 + 0.05/2} = \underline{0.0573893}$$

$$K_3 = h.f(t_1 + h, y_1 + 2K_2 - K_1) = h \frac{2(y_1 + 2K_2 - K_1 - 1)}{t_1 + h}$$

$$0.05 * \frac{2(1.30249 + 2 * 0.0573893 - 0.054998 - 1)}{0.55 + 0.05} =$$

$$\underline{0.0603783}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6} [K_1 + 4K_2 + K_3] =$$

$$= 1.30249 + \frac{1}{6} [0.054998 + 4 * 0.0573893 + 0.0603783]$$

$$= \underline{1.35997806}$$

نحسب الخط المطلق في الحل العددي y_2 عند النقطة $t_2 = 0.6$:

$$\delta = |y(t_2) - y_2| = |(t_2^2 + 1) - 1.35997806| = |1.36 - 1.35997806|$$

$$= \underline{0.00002194}$$

و يمكننا حساب الخط النسبي أيضا مباشرة:

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{0.00002194}{1.36} = 1.61324E-5$$

نسجل بقية النتائج التي حصلنا عليها بالمتابعة كما يلي:

$$t_3 = 0.65 ; y_3 = 1.42247 ; K_1 = 0.0599963 ; K_2 = 0.0623962 ; \\ K_3 = 0.0653499 ; \delta = 0.0000334377$$

$$t_4 = 0.7 ; y_4 = 1.48995 ; K_1 = 0.0649949 ; K_2 = 0.0674021 ; \\ K_3 = 0.0703251 ; \delta = 0.0000453931 ;$$

$$t_5 = 0.75 ; y_5 = 1.56244 ; K_1 = 0.0699935 ; K_2 = 0.0724071 ; \\ K_3 = 0.0753034 ; \delta = 0.000057856 ;$$

$$t_6 = 0.8 ; y_6 = 1.63993 ; K_1 = 0.0749923 ; K_2 = 0.0774114 ; \\ K_3 = 0.0802841 ; \delta = 0.0000708671 ;$$

$$t_7 = 0.85 ; y_7 = 1.72242 ; K_1 = 0.0799911 ; K_2 = 0.0824151 ; \\ K_3 = 0.0852668 ; \delta = 0.0000844581 ;$$

$$t_8 = 0.9 ; y_8 = 1.8099 ; K_1 = 0.0849901 ; K_2 = 0.0874184 ; \\ K_3 = 0.0902514 ; \delta = 0.0000986544 ;$$

$$t_9 = 0.95 ; y_9 = 1.90239 ; K_1 = 0.089989 ; K_2 = 0.0924212 ; \\ K_3 = 0.0952373 ; \delta = 0.000113476 ;$$

$$t_{10} = 1. ; y_{10} = 1.99987 ; K_1 = 0.0949881 ; K_2 = 0.0974236 ; \\ K_3 = 0.100225 ; \delta = 0.00012894 ;$$

$$t_{11} = 1.05 ; y_{11} = 2.10235 ; K_1 = 0.0999871 ; K_2 = 0.102426 ; \\ K_3 = 0.105213 ; \delta = 0.00014506 ;$$

$$t_{12} = 1.1 ; y_{12} = 2.20984 ; K_1 = 0.104986 ; K_2 = 0.107428 ; \\ K_3 = 0.110202 ; \delta = 0.000161846 ;$$

$$t_{13} = 1.15 ; y_{13} = 2.32232 ; K_1 = 0.109985 ; K_2 = 0.112429 ; \\ K_3 = 0.115192 ; \delta = 0.000179309 ;$$

$$t_{14} = 1.2 ; y_{14} = 2.4398 ; K_1 = 0.114984 ; K_2 = 0.117431 ; \\ K_3 = 0.120183 ; \delta = 0.000197456 ;$$

$$t_{15} = 1.25 ; y_{15} = 2.56228 ; K_1 = 0.119984 ; K_2 = 0.122432 ; \\ K_3 = 0.125175 ; \delta = 0.000216294$$

$$t_{16} = 1.3 ; y_{16} = 2.68976 ; K_1 = 0.124983 ; K_2 = 0.127433 ; K_3 = 0.130167 ; \delta = 0.000235829$$

$$t_{17} = 1.35 ; y_{17} = 2.82224 ; K_1 = 0.129982 ; K_2 = 0.132434 ; K_3 = 0.135159 ; \delta = 0.000256065 ;$$

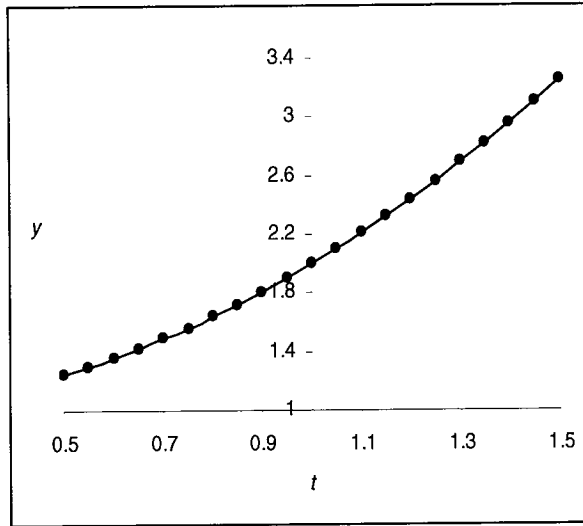
$$t_{18} = 1.4 ; y_{18} = 2.95972 ; K_1 = 0.134981 ; K_2 = 0.137435 ; K_3 = 0.140152 ; \delta = 0.000277007 ;$$

$$t_{19} = 1.45 ; y_{19} = 3.1022 ; K_1 = 0.13998 ; K_2 = 0.142436 ; K_3 = 0.145146 ; \delta = 0.000298659 ;$$

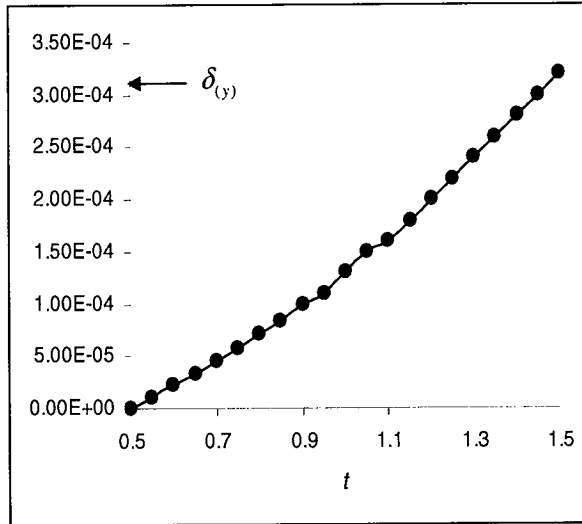
$$t_{20} = 1.5 ; y_{20} = 3.24968 ; K_1 = 0.144979 ; K_2 = 0.147437 ; K_3 = 0.15014 ; \delta = 0.000321024 .$$

نرسم في الشكل (5.7) مسار الحل التحليلي مع الحل العددي للمسألة في المثال 6 بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الثالثة، وهذه الطريقة أفضل في دقتها من طرائق أولر وهيون و رانج-كوتا من المرتبة الثانية، لأن الخطأ فيها دقيق من المرتبة الثالثة.

نوضح في الشكل (5.8) الرسم البياني للخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 6.



الشكل (5.7): الحل العددي والحل التحليلي — للمثال 6
بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الثالثة



الشكل (5.8): سلوك الخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 6
بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الثالثة

برنامج 5.5: طريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الثالثة لإنجاز حسابات
المثال 6 في مجال مدخل [a, b] مع N عدد نقاط التجزئة و y_0 .

```

PROGRAM RungKuttaOrderThree ;
Uses wincrt;
var w:array[0..300] of real;
K1,K2,K3, b, t0, h, y0, t :real; i,n:integer;
Function f(t,y:real):real;
begin
  f:= 2*(y-1)/t;
end;
Function y(t:real):real;
begin
  y := Sqr(t)+1;
end;
BEGIN {Main Program}
writeln('Runge-Kutta from order Three to solve
  1/2 t y'-y+1=0, y(0.5)=1.25 , t0=0.5; b=1.5');
write('input t0:='); readln(t0);
write('input b:='); readln(b);

```

```

write('input y0:='); readln(y0);
write('number of subintervals N:='); readln(n);
h:=(b-t0)/n;
w[0]:=y0;
for i:=0 to n do
begin
  t:=t0+i*h;
  k1:=h*f(t,w[i]);
  k2:=h*f(t+h/2,w[i]+k1/2);
  k3:=h*f(t+h,w[i]+2*k2-k1);
  w[i+1]:=w[i]+(k1+4*k2+k3)/6;
  Writeln('k1=',k1:2:5,' k2=',k2:2:5,' k3=',k3:2:5,'
    y',i+1,'=',w[i+1]:2:5);
end; {for} readln;
writeln(' t', ' ', 'w1,i', ' ', 'y(ti)', ' ', '|w1i-y(ti)|');
for i:=1 to n do
begin
  t:=t0+i*h;
  writeln(' t',i,'=',t:2:4,' ',w[i]:2:5,' ',
    y(t):2:5,' ',abs(w[i]-y(t)):10);
end;
END.

```

C- مجموعة طرائق رانج - كوتا من المرتبة الرابعة

نكتب صيغة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة المعممة وفق العلاقات التكرارية التالية:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 + w_4 K_4.$$

$$K_1 = h.f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = h.f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)$$

$$K_3 = h.f(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$

$$K_4 = h.f(t_n + c_4 h, y_n + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$$

حيث نستنتج بأسلوب مشابه لصيغ رانج-كوتا من مراتب سابقة، مجموعة من الصيغ التكرارية، وجميعها طرائق من المرتبة الرابعة. تنتج هذه الطرائق مباشرة بمجرد تعيين الوسطاء

$$w_4, w_3, w_2, w_1, a_{43}, a_{42}, a_{41}, a_{32}, a_{31}, a_{21}, c_4, c_3, c_2$$

من المخططات الجدولية التالية:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \\ 2 & & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{6}$$

Classical

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 3 & 3 & & \\ \hline 2 & -\frac{1}{3} & 1 & \\ 3 & & 3 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$$

Kutta

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ \hline 1 & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \\ 2 & & 2 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{6} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

Gill

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 3 & 3 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \\ 3 & & 6 & \\ \hline 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ 2 & & 8 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}$$

Merson

نستخدم في تطبيقاتنا طريقة رانج-كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الرابعة والتي بعد تعيين وسطائها من الجدول المناسب، تأخذ الصيغة التالية:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\
 K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
 K_2 &= h.f(t_n + h/2, y_n + K_1) \\
 K_3 &= h.f(t_n + h/2, y_n + K_2/2) \\
 K_4 &= h.f(t_n + h, y_n + K_3)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

مبرهنة (5.3): (الدقة في طريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة)

بفرض أن $y(t)$ هو الحل لمسألة القيمة الابتدائية (5.10a)-(5.10b) وإذا

كان $y(t) \in C^5[t_0, b]$ و $\{(t_n, y_n)\}_{n=0}^M$ متتالية من التقريبات العددية تم توليدها بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة ، عندئذ يعطى الخطأ الموضعي عند النقطة t_n :

$$|e_n| = |y(t_n) - y_n| = O(h^5),$$

$$|\varepsilon_{n+1}| = |y(t_{n+1}) - y_n - hT_4(t_n, y_n)| = O(h^5),$$

حيث:

$$T_4(t_n, y_n) = \sum_{j=1}^4 \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} h^{j-1}$$

وبشكل خاص يحقق الخطأ الكلي (Global error) عند الطرف النهائي للمجال العلاقة:

$$E[y(b), h] = |y(b) - y_M| = O(h^4)$$

مثال 7: نستخدم طريقة رانج كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الرابعة

لحل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية:

$$y' + y = \cos(t) - \sin(t)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 1$$

في المجال $[0, 3]$ ، باستخدام خطوة $h = 0.1$. ثم نحسب الخطأ المطلق والنسبي الحاصل عند الحساب التقريبي في كل خطوة علماً بأن الحل التحليلي:

$$y(t) = \cos(t)$$

نوضح سلوك الحل العددي للطريقة برسم المخططات البيانية للحل التحليلي والحل العددي ولدالة الخطأ المطلق.

الحل: لدينا $t_0 = 0$ ، $y_0 = 1$ ، $h = 0.1$ ونحصل أيضاً من المسألة على

$$y' = f(t, y) = \cos(t) - \sin(t) - y$$

$$f(t_n, y_n) = \cos(t_n) - \sin(t_n) - y_n$$

نكتب طريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة (5.27) كما يلي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = h \cdot f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = h \cdot f(t_n + h/2, y_n + K_1/2) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

$$K_3 = h \cdot f(t_n + h/2, y_n + K_2/2)$$

$$K_4 = h \cdot f(t_n + h, y_n + K_3)$$

إن بتطبيقها على المسألة تصبح:

$$K_1 = h \cdot f(t_n, y_n) = h [\cos(t_n) - \sin(t_n) - y_n]$$

$$K_2 = h \cdot f(t_n + h/2, y_n + K_1/2) =$$

$$= h [\cos(t_n + h/2) - \sin(t_n + h/2) - y_n + K_1/2]$$

$$K_3 = h.f(t_n + h/2, y_n + K_2/2) =$$

$$= h[\cos(t_n + h/2) - \sin(t_n + h/2) - y_n + K_2/2]$$

$$K_4 = h.f(t_n + h, y_n + K_3) =$$

$$= h[\cos(t_n + h) - \sin(t_n + h) - y_n + K_3]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

نضع $n=0$ ، ونحسب K_4, K_3, K_2, K_1 ، ثم نحسب الحل التقريبي y_1 عند النقطة $t_1 = t_0 + h = 0.2$ كما يلي:

$$K_1 = h.f(t_0, y_0) = h[\cos(t_0) - \sin(t_0) - y_0]$$

$$= 0.1[\cos(0) - \sin(0) - 1] = 0$$

$$K_2 = h.f(t_0 + h/2, y_0 + K_1/2) =$$

$$= h[\cos(t_0 + h/2) - \sin(t_0 + h/2) - y_0 - K_1/2]$$

$$= 0.1[\cos(0 + 0.1/2) - \sin(0 + 0.1/2) - 1 - 0/2]$$

$$= \underline{-0.00512289}$$

$$K_3 = h.f(t_0 + h/2, y_0 + K_2/2) =$$

$$= h[\cos(t_0 + h/2) - \sin(t_0 + h/2) - y_0 - K_2/2]$$

$$= 0.1[\cos(0 + 0.1/2) - \sin(0 + 0.1/2) - 1 + 0.00512289/2]$$

$$= \underline{-0.00486675}$$

$$K_4 = h.f(t_0 + h, y_0 + K_3) =$$

$$= h[\cos(t_0 + h) - \sin(t_0 + h) - y_0 - K_3]$$

$$= h[\cos(0 + 0.1) - \sin(0 + 0.1) - 1 + 0.00486675]$$

$$= \underline{-0.00999625}$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0 - 2*0.00512289 - 2*0.00486675 - 0.00999625]$$

$$= \underline{\underline{0.995004079}}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_1 عند النقطة $t_1 = 0.1$:

$$\delta = |y(t_1) - y_1| = |\cos(t_1) - 0.995004079| = |0.995004165 - 0.9950040797|$$

$$= 8.61054 \text{E} - 8$$

و يحسب الخطأ النسبي:

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{8.61054 \text{E} - 8}{0.995004165} = 8.65377 \text{E} - 8$$

نتابع في تكرار جديد فنضع $n=1$ ، ونعوض $t_1 = 0.1$ ، $y_1 = 0.995004079$

ونحسب K_1, K_2, K_3, K_4 في الصيغة التكرارية، ونعين y_2 بأسلوب مماثل لما سبق كما يلي:

$$K_1 = h.f(t_1, y_1) = h[\cos(t_1) - \sin(t_1) - y_1]$$

$$= 0.1[\cos(0.1) - \sin(0.1) - 0.995004] = \underline{-0.00998333}$$

$$K_2 = h.f(t_1 + h/2, y_1 + K_1/2) =$$

$$= h[\cos(t_1 + h/2) - \sin(t_1 + h/2) - y_1 - K_1/2]$$

$$= 0.1 [\cos(0.1 + 0.1/2) - \sin(0.1 + 0.1/2) - 0.995004 +$$

$$0.00998333/2] = \underline{-0.0150679}$$

$$K_3 = h.f(t_1 + h/2, y_1 + K_2/2) =$$

$$= h[\cos(t_1 + h/2) - \sin(t_1 + h/2) - y_1 - K_2/2]$$

$$= 0.1[\cos(0.1 + 0.1/2) - \sin(0.1 + 0.1/2) -$$

$$0.995004 + 0.0150679/2] = \underline{-0.0148137}$$

$$K_4 = h.f(t_0 + h, y_0 + K_3) =$$

$$= h[\cos(t_0 + h) - \sin(t_0 + h) - y_0 - K_3]$$

$$= h[\cos(0.1 + 0.1) - \sin(0.1 + 0.1) - 0.995004 + 0.0148137]$$

$$= \underline{-0.0198793}$$

$$y_2 = 0.995004 + \frac{1}{6} [0.00998333 + 2 * 0.0150679 + \\ 2 * 0.0148137 - 0.0198793] \\ = \underline{\underline{0.980066417}}$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_2 عند النقطة $t_2 = 0.2$:

$$\delta = |y(t_2) - y_2| = |\cos(0.2) - 0.980066417| = 1.60841E-7$$

و الخطأ النسبي أيضا:

$$E = \frac{\delta}{y(t_1)} = \frac{1.60841E-7}{\cos(0.2)} = 1.64113E-7$$

نسجل بقية النتائج التي حصلنا عليها بالمتابعة كما يلي:

$$t_3 = 0.3 ; y_3 = 0.955336 ; K1 = -0.0198669 ; K2 = -0.0248624 \\ K3 = -0.0246127 ; K4 = -0.0295637 ; \delta = 2.23078 E-7$$

$$t_5 = 0.5 ; y_5 = 0.877582 ; K1 = -0.0389418 ; K2 = -0.0436108 \\ K3 = -0.0433774 ; K4 = -0.0479526 ; \delta = 3.15177E-7$$

$$t_6 = 0.6 ; y_6 = 0.825335 ; K1 = -0.0479425 ; K2 = -0.0523774 \\ K3 = -0.0521556 ; K4 = -0.0564733 ; \delta = 3.45271E-7$$

$$t_8 = 0.8 ; y_8 = 0.696706 ; K1 = -0.0644217 ; K2 = -0.0682581 \\ K3 = -0.0680663 ; K4 = -0.0717425 ; \delta = 3.75552E-7$$

$$t_{10} = 1. ; y_{10} = 0.540302 ; K1 = -0.0783327 ; K2 = -0.0814176 \\ K3 = -0.0812633 ; K4 = -0.0841515 ; \delta = 3.69038E-7$$

$$t_{12} = 1.2 ; y_{12} = 0.362357 ; K1 = -0.0891207 ; K2 = -0.0913312 \\ K3 = -0.0912207 ; K4 = -0.0932056 ; \delta = 3.29944E-7$$

$$t_{14} = 1.4 ; y_{14} = 0.169967 ; K1 = -0.0963558 ; K2 = -0.0976037 \\ K3 = -0.0975413 ; K4 = -0.098544 ; \delta = 2.63067E-7$$

$$t_{16} = 1.6 ; y_{16} = -0.0291997 ; K1 = -0.0997495 ; K2 = -0.0999851 \\ K3 = -0.0999733 ; K4 = -0.0999537 ; \delta = 1.73726E-7$$

$$t_{18} = 1.8 ; y_{18} = -0.227202 ; K1 = -0.0991665 ; K2 = -0.0983804 \\ K3 = -0.0984197 ; K4 = -0.0973785 ; \delta = 6.76522E-7$$

$$t_{20} = 2. ; y_{20} = -0.416147 ; K1 = -0.09463 ; K2 = -0.0928536$$

$$K3 = -0.0929424 ; K4 = -0.0909212; \delta = 4.91468E-7$$

$$t_{22} = 2.2 ; y_{22} = -0.588501 ; K1 = -0.0863209 ; K2 = -0.083625$$

$$K3 = -0.0837598 ; K4 = -0.0808392; \delta = 1.7056E-7$$

$$t_{24} = 2.4 ; y_{24} = -0.737393 ; K1 = -0.0745705 ; K2 = -0.0710625$$

$$K3 = -0.0712379 ; K4 = -0.0675343 \delta = 2.90554E-7$$

$$t_{26} = 2.6 ; y_{26} = -0.856888 ; K1 = -0.0598472 ; K2 = -0.055667$$

$$K3 = -0.055876 ; K4 = -0.0515371; \delta = 4.03372E-7$$

$$t_{28} = 2.8 ; y_{28} = -0.942222 ; K1 = -0.042738 ; K2 = -0.0380523$$

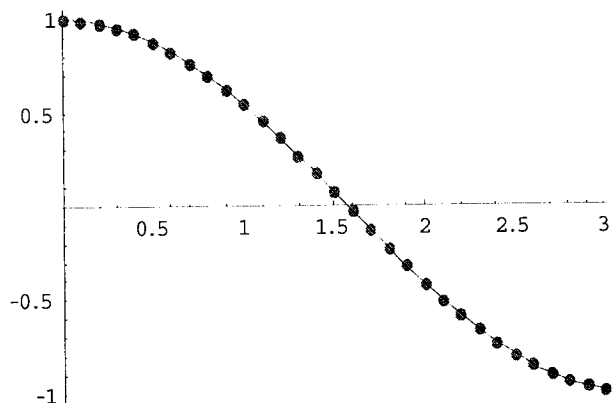
$$K3 = -0.0382866 ; K4 = -0.0334852; \delta = 5.03716 E-7$$

$$t_{30} = 3. ; y_{30} = -0.989992 ; K1 = -0.023925 ; K2 = -0.0189205$$

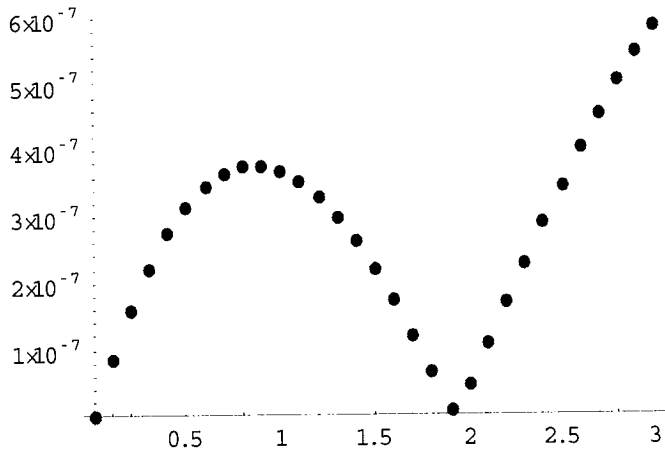
$$K3 = -0.0191707 ; K4 = -0.0140984 ; \delta = 5.86931 E-7$$

نبين في الشكل (5.9) مسار الحل التحليلي مع الحل العددي للمسألة في المثال 7 بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة، وهذه الطريقة أفضل في دقتها من جميع الطرائق السابقة، لأن الخطأ فيها دقيق من المرتبة الرابعة.

نرسم في الشكل (5.10) المخطط البياني للخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 7.



الشكل (5.9): سلوك الحل العددي مع الحل التحليلي للمثال 7
بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة



الشكل (5.10): سلوك الخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 6
بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة

برنامج 5.6: طريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة لإنجاز حسابات
المثال 7 في مجال مدخل $[a, b]$ مع تجزئة N والقيمة الابتدائية y_0 ، نستخدم في
هذا البرنامج نظام الملفات لتخزين النتائج على وسائط دائمة.

```
PROGRAM RungKuttaOrderFour;
Uses wincrt;
var ye, x :array[0..300] of real;
    k1,k2,k3,k4,b,x0,h,y0:real;  i,n:integer;
    fe:text;
Function f(x,y:real):real;
begin
    f:=cos(x)-sin(x)-y;
end;
Function y(x:real):real;
begin
    y:=Cos(x);
end;
BEGIN
assign(fe,'rung.txt');
rewrite(fe);
writeln('Runge-Kutta from order 2 to solve
```



```

y`+y=cos(x)-sin(x), with y(0)=1 ,in x0=0;b=1');
write('input x0:=');readln(x0);
write('input b:=');readln(b);
write('input y0:=');readln(y0);
write('number of subintervals N:=');readln(n);
h:=(b-x0)/n;
for i:=0 to n do x[i]:=x0+i*h;
ye[0]:=y0;
for i:=0 to n-1 do
begin
  k1:=h*f(x[i],ye[i]);
  k2:=h*f(x[i]+h/3,ye[i]+k1/3);
  k3:=h*f(x[i]+2*h/3,ye[i]+k2-K1/3);
  k4:=h*f(x[i]+h,ye[i]+k1-k2+k3);
  ye[i+1]:=ye[i]+(k1+3*k2+3*k3+k4)/8;
  Writeln('x',i+1,'=',x[i+1]:2:2,' k1=',k1:2:5,' k2=',k2:2:5,'
  k3=',k3:2:5,' k4=',k4:2:5,
  ' y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,' ',abs(ye[i+1]-y(x[i+1])):2);
  Writeln(fe,'x',i+1,'=',x[i]:2:2,' k1=',k1:2:5,' k2=',k2:2:5,'
  k3=',k3:2:5,' k4=',k4:2:5,
  ' y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,' ',abs(ye[i+1]-y(x[i+1])):2);
end; {for}
close(fe);
END.

```

مثال 8: أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1$$

بطريقة رانج-كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الرابعة في المجال $[0,1]$ ،

بخطوة $h=0.1$ ، قارن الحل العددي مع الحل التحليلي: $y(t) = 2e^t - t - 1$.

يمكن الاستفادة من البرنامج 5.6 لحل مسألة المثال 8 التي سنقدم نتائجها في

الجدول (5.1).

الجدول (5.1): نتائج الحل التقريبي مع الخطأ المطلق للمثال 8
 بطريقة رانج- كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة

t_n	y_n	$\delta = y_n - y(t_n) $
0.1	1.1103416667	1.6948615666E-07
0.2	1.2428051417	3.7462450564E-07
0.3	1.3997169941	6.2103208620E-07
0.4	1.5836484802	9.1512629297E-07
0.5	1.7974412772	1.2642121874E-06
0.6	2.3275032532	1.6765989130E-06
0.7	2.0442359242	2.1617488528E-06
0.8	2.6510791266	2.7304013202E-06
0.9	3.0192028276	3.3947617339E-06
1.0	3.4365594883	4.1686544137E-06

d-طرائق رانج . كوتا من مراتب عليا

وجدنا سابقاً أن القيم $v = 2, 3, 4$ في المعادلة (5.18) تعطي صيغاً من المرتبة الثانية والثالثة والرابعة على الترتيب. وأن $v = 5$ تعطي فقط صيغاً من المرتبة الرابعة. أما الحصول على طريقة من المرتبة الخامسة نحتاج إلى $v = 6$ ، والمرتبة السادسة يلزمنا $v = 7$ أو $v = 8$. وبشكل عام $v = k$ تعطي طريقة من المرتبة $(k-2)$ حيث $k \geq 9$. نعرض الآن بعض الطرائق من مراتب عالية:

أ- طرائق رانج . كوتا من المرتبة الخامسة

يوجد طريقتان لرانج كوتا من المرتبة الخامسة هما طريقة (Nystrom) وطريقة (Lawson):

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$			
1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{12}{4}$	$\frac{15}{4}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{90}{81}$	$-\frac{50}{81}$	$\frac{8}{81}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{75}$	$\frac{36}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{8}{75}$	0
	$\frac{23}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$-\frac{81}{192}$
					$\frac{125}{192}$

Nystrom

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$			
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$
					$\frac{7}{90}$

Lawson

ب- طرائق رانج .كوتا من المرتبة السادسة

يوجد طريقتان لرانج كوتا من المرتبة السادسة هما طريقة (Butcher)

وطريقة (Huta):

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$							
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$					
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{24}{8}$	$\frac{6}{8}$				
$\frac{2}{3}$	$\frac{221}{9}$	$-\frac{981}{9}$	$\frac{867}{9}$	$-\frac{102}{9}$	$\frac{1}{9}$			
$\frac{5}{6}$	$-\frac{183}{48}$	$\frac{678}{48}$	$-\frac{472}{48}$	$-\frac{66}{48}$	$\frac{80}{48}$	$\frac{3}{48}$		
1	$\frac{716}{82}$	$-\frac{2079}{82}$	$\frac{1002}{82}$	$\frac{834}{82}$	$-\frac{454}{82}$	$-\frac{9}{82}$	$\frac{72}{82}$	
	$\frac{41}{840}$	0	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

Huta

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	
1	$\frac{9}{44}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{63}{44}$	$\frac{18}{11}$	0	$-\frac{16}{11}$
	$\frac{11}{120}$	0	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$
						$\frac{11}{120}$

Butcher

مثال 9: اكتب برنامجين لطريقتي رانج-كوتا من المرتبتين الخامسة (Nystrom) والسادسة (Butcher) لإيجاد الحل التقريبي والخطأ المطلق عند كل خطوة لمسألة القيمة الابتدائية في المثال 8. ثم قم بتنفيذ البرنامجين وإظهار النتائج من أجل المعطيات $t_0 = 0$, $b = 1$, $y_0 = 1$, عدد النقاط $N=10$.

الحل: للحصول على دستور لطريقة رانج كوتا من المرتبة الخامسة (Nystrom) نطابق الوسطاء المجهولة:

$$w_6, w_5, w_4, w_3, w_2, w_1,$$

$$a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}, a_{65}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{42}, a_{41}, a_{32}, a_{31}, a_{21},$$

$$c_6, c_5, c_4, c_3, c_2$$

في صيغة رانج-كوتا المعممة (5.18) مع جدول Nystrom لطريقة رانج كوتا من المرتبة الخامسة نحصل على الصيغة التكرارية التالية:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{192} [23K_1 + 125K_3 - 81K_5 + 125K_6] \\
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
K_2 &= h.f\left(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}K_1\right) \\
K_3 &= h.f\left(t_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{4}{25}K_1 + \frac{6}{25}K_2\right) \quad ; n=0,1,2,\dots \\
K_4 &= h.f\left(t_n + h, y_n + \frac{1}{4}K_1 - \frac{12}{4}K_2 + \frac{15}{4}K_3\right) \\
K_5 &= h.f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{6}{81}K_1 + \frac{90}{81}K_2 - \frac{50}{81}K_3 + \frac{8}{81}K_4\right) \\
K_6 &= h.f\left(t_n + \frac{4}{5}h, y_n + \frac{6}{75}K_1 + \frac{36}{75}K_2 + \frac{10}{75}K_3 + \frac{8}{75}K_4\right)
\end{aligned}$$

نطابق بنفس الأسلوب مع جدول Butcher لطريقة رانج كوتا من المرتبة السادسة
نحصل على الصيغة التكرارية لهذه الطريقة كالآتي:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{120} [11K_1 + 81K_3 + 81K_4 - 32K_5 - 32K_6 + 11K_7] \\
K_1 &= h.f(t_n, y_n) \\
K_2 &= h.f\left(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}K_1\right) \\
K_3 &= h.f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}K_2\right) \quad , \quad n=0,1,2,\dots \\
K_4 &= h.f\left(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{12}K_1 + \frac{1}{3}K_2 - \frac{1}{12}K_3\right) \\
K_5 &= h.f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{6}{16}K_1 + \frac{9}{8}K_2 - \frac{3}{16}K_3 - \frac{3}{8}K_4\right) \\
K_6 &= h.f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{9}{8}K_2 - \frac{3}{8}K_3 - \frac{3}{4}K_4 + \frac{1}{2}K_5\right) \\
K_7 &= h.f\left(t_n + h, y_n + \frac{9}{44}K_1 - \frac{9}{11}K_2 + \frac{63}{44}K_3 + \frac{18}{11}K_4 - \frac{16}{11}K_6\right)
\end{aligned}$$

برنامج 5.7: طريقة رانج كوتا (Nystrom) من المرتبة الخامسة لحل المثال 8

```

PROGRAM RungKuttaNystromOrderFifth;
Uses wincrt;
var ye, x :array[0..300] of real;
    k1,k2, k3, k4, k5, k6, b, x0, h,y0: real;  i,n:integer;
    fe:text;
Function f(t,y:real):real;
begin
    f:=t+y;
end;
Function y(t:real):real;
begin
    y:=2*Exp(t)-t-1;
end;
BEGIN
Assign(fe,'rungFifth.Dat'); rewrite(fe);
writeln('Runge-Kutta from order 5 to solve y`=t+y, with y(0)=1,
    in x0=0;b=1');
write('input x0:=');readln(x0); write('input b='); readln(b);
write('input y0:='); readln(y0);
write('number of subintervals N:='); readln(n);
h:=(b-x0)/n;
for i:=0 to n do x[i]:=x0+i*h;
ye[0]:=y0;
for i:=0 to n-1 do
begin
    k1:=h*f(x[i],ye[i]);
    k2:=h*f(x[i]+h/3,ye[i]+k1/3);
    k3:=h*f(x[i]+2*h/5,ye[i]+4*k1/25+6*k2/25);
    k4:=h*f(x[i]+h,ye[i]+k1/4-12*k2/4+15*k3/4);
    k5:=h*f(x[i]+2*h/3,ye[i]+6*k1/81+90*k2/81-50*k3/81+8*k4/81);
    k6:=h*f(x[i]+4*h/5,ye[i]+6*k1/75+36*k2/75+10*k3/75+8*k4/75);
    ye[i+1]:=ye[i]+(23*k1+125*k3-81*k5+125*k6)/192;
    Writeln('x',i+1,'=',x[i+1]:2:2,';k1=',k1:2:5,';k2=',k2:2:5,'k3=',k3:2:5,'
;k4=',k4:2:5,';k5=',k5:2:5,';k6=',k6:2:5);
    Writeln(' y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,';abs(ye[i+1]-y(x[i+1])));
    Writeln(fe,'x',i+1,'=',x[i]:2:2,'; k1=',k1:2:5,'; k2=',k2:2:5,';
    k3=',k3:2:5,'; k4=',k4:2:5,'; k5=',k5:2:5,'; k6=',k6:2:5,';
    y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,';abs(ye[i+1]-y(x[i+1])):2);
end; {for}
close(fe);
END.

```

برنامج 5.8: طريقة رانج كوتا (Butcher) من المرتبة السادسة لحل المثال 8

```

PROGRAM RungKuttaButcherOrderSixth;
Uses wincrt;
var ye, t :array[0..300] of real;
    k1,k2,k3, k4, k5, k6, k7,b, x0, h, y0: real; i,n:integer;
    fe:text;
Function f(t,y:real):real;
begin
    f:=t+y;
end;
Function y(t:real):real;
begin
    y:=2*Exp(t)-t-1;
end;
BEGIN
Assign(fe,'rungSixth.Dat'); Rewrite(fe);
writeln('Runge-Kutta Butcher from order 6 to solve  $y'=t+y$ , with
y(0)=1 ,in x0=0;b=1');
write('input x0:='); readln(x0); write('input b:=');readln(b);
write('input y0:='); readln(y0);
write('number of subintervals N:='); readln(n); h:=(b-x0)/n;
for i:=0 to n do t[i]:=x0+i*h;
ye[0]:=y0;
for i:=0 to n-1 do
begin
    k1:=h*f(t[i],ye[i]);
    k2:=h*f(t[i]+h/3,ye[i]+k1/3);
    k3:=h*f(t[i]+2*h/3,ye[i]+2*k2/3);
    k4:=h*f(t[i]+h/3,ye[i]+k1/12+k2/3-k3/12);
    k5:=h*f(t[i]+h/2,ye[i]-k1/16+9*k2/8-3*k3/16-3*k4/8);
    k6:=h*f(t[i]+h/2,ye[i]+9*k2/8-3*k3/8-3*k4/4+k5/2);
    k7:=h*f(t[i]+h,ye[i]+9*k1/44-9*k2/11+63*k3/44+18*k4/11-
        16*k6/11);
    ye[i+1]:=ye[i]+(11*k1+81*k3+81*k4-32*K5-32*K6+11*K7)/120;
    Writeln('t,i+1,','t[i+1]:2:2,','k1=',k1:2:5,','k2=',k2:2:5,'k3=',k3:2:5,
        ',k4=',k4:2:5,','k5=',k5:2:5,','k6=',k6:2:5,','k7=',k7:2:5);
    Writeln(' y',i+1,','ye[i+1]:2:5,','abs(ye[i+1]-y(t[i+1])):2);
    Writeln(fe,'t,i+1,','t[i]:2:2,','k1=',k1:2:5,','k2=',k2:2:5,','k3=',
        k3:2:5,','k4=',k4:2:5,','k5=',k5:2:5,','k6=',k6:2:5,','k7=',
        k7:2:5,',' y',i+1,','ye[i+1]:2:5,','abs(ye[i+1]-y(t[i+1])):2);
end; {for} close(fe);
END.

```


نقدم في الجدول (5.2)، نتائج تنفيذ البرنامجين 5.7-5.8 للطريقتين المذكورتين وإظهار الحل العددي مع الخطأ المطلق من أجل المعطيات $b=1, t_0=0$ ، $y_0=1$ وعدد نقاط التجزئة للمجال $N=10$.

الجدول (5.2): نتائج حل المسألة $y' = t + y, y(0) = 1$ بطريقتي رانج كوتا من المرتبتين الخامسة والسادسة مع الخطأ المطلق

t_n	رانج - كوتا من المرتبة الخامسة (Nystrom)		رانج - كوتا من المرتبة السادسة (Butcher)	
	y_n	$ y_n - y(t_n) $	y_n	$ y_n - y(t_n) $
0.1	1.1103418333	2.81761458E-09	1.1103418360	1.34605215E-10
0.2	1.2428055101	6.23185769E-09	1.2428055160	2.98314262E-10
0.3	1.3997176048	1.03282218E-08	1.3997176147	4.91127138E-10
0.4	1.583649380	1.52176653E-08	1.5836493946	7.23957782E-10
0.5	1.7974425204	2.10220605E-08	1.7974425404	9.98625182E-10
0.6	2.0442375729	2.78741936E-08	2.0442375995	1.32058630E-09
0.7	2.3275053790	3.59395926E-08	2.3275054132	1.70257408E-09
0.8	2.6510818116	4.53983375E-08	2.6510818548	2.15368345E-09
0.9	3.0192061659	5.64505171E-08	3.0192062196	2.68482835E-09
1.0	3.4365635876	6.93180481E-08	3.4365636536	3.29237082E-09

5.4 الحلول العددية لجمل المعادلات التفاضلية ذات القيم الابتدائية

Numerical Solutions for Systems of differential equations with initial values

نتعرف في هذه الفقرة على بعض الطرائق العددية لحل جملة من المعادلات التفاضلية، تخضع لمجموعة من الشروط الابتدائية. سنوضح ذلك من خلال جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\begin{cases} y'(t) = f_1(t, y(t), z(t)) \\ z'(t) = f_2(t, y(t), z(t)) \end{cases} \quad (5.28a)$$

مع الشرطين الابتدائيين:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (5.28b)$$

إن $y(t)$, $z(t)$ يمثلان الحل لجملة المعادلتين (5.28a) مع الشرطين الابتدائيين (5.28b). نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال 10: إن المعادلتين:

$$\begin{aligned} y(t) &= 4e^{4t} + 2e^{-t} \\ z(t) &= 6e^{4t} - 2e^{-t} \end{aligned}$$

هما حل لمسألة القيمة الابتدائية:

$$\begin{cases} y'(t) = y + 2z \\ z'(t) = 3y + 2z \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 6 \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

ويتم إثبات ذلك باشتقاق الحل والتعويض المباشر في المسألة.

5.4.1 طريقة أولر لحل جملة معادلات تفاضلية بشروط ابتدائية.

يمكن تعميم طريقة أولر التكرارية (5.15) لحل مسألة القيمة الابتدائية في

جملة المعادلتين التفاضليتين (5.28) على الشكل:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad i=0,1,\dots \quad (5.29)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

مثال 11: استخدم طريقة أولر لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y' = (y - z) + e^t$$

$$z' = (z - y) + e^t$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

في المجال $[0,1]$ ، وبخطوة $h=0.1$ ، ثم احسب الخطأ المطلق إذا علمت أن الحل التحليلي هو: $y(t) = e^t$ ، $z(t) = e^t$.

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ، $z_0 = y_0 = 1$ ، $f_1(t, y, z) = (y - z) + e^t$

وباستخدام $f_2(t, y, z) = (z - y) + e^t$ ، في المجال $[0,1]$ ، باستخدام الخطوة $h=0.1$ ، نحتاج إلى تجزئة مؤلفة من النقاط: $t_i = t_0 + ih$ ، $i=0,1,\dots,10$ ، ثم بتطبيق طريقة أولر (5.29)، نحصل على:

$$y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) = y_i + h(y_i - z_i) + e^{t_i}$$

$$z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) = z_i + h(z_i - y_i) + e^{t_i}, \quad i=0,1,\dots,10$$

ينتج الحل عند $t_1 = 0.1$ مباشرة بوضع $i=0$:

$$y_1 = y_0 + h[(y_0 - z_0) + e^{t_0}] = 1 + 0.1[(1 - 1) + e^0] = 1.100000$$

$$z_1 = z_0 + h[(z_0 - y_0) + e^{t_0}] = 1 + 0.1[(1 - 1) + e^0] = 1.100000,$$

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707E-3$$

$$\delta(z_1) = |z_1 - z(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707E-3$$

أيضا ينتج الحل عند $t_2 = 0.2$ بوضع $i=1$:

$$y_2 = y_1 + h[(y_1 - z_1) + e^{t_1}] = 1.1 + 0.1[(1.1 - 1.1) + e^{0.1}] = 1.210517$$

$$z_2 = z_1 + h[(z_1 - y_1) + e^{t_1}] = 1.1 + 0.1[(1.1 - 1.1) + e^{0.1}] = 1.210517,$$

والخطأ المطلق:

$$\delta(y_2) = |y_2 - e^{t_2}| = |1.210517 - e^{0.2}| = 1.08857E-2$$

$$\delta(z_2) = |z_2 - e^{t_2}| = |1.210517 - e^{0.2}| = 1.08857E-2$$

نضع $i=2$ ينتج الحل عند $t_3 = 0.3$

$$y_3 = y_2 + h(y_2 - z_2 + e^{t_2}) = 1.210517 + 0.1(1.210517 - 1.210517 + e^{0.2}) \\ = \underline{1.33266}$$

$$z_3 = z_2 + h(z_2 - y_2 + e^{t_2}) = 1.210517 + 0.1(1.210517 - 1.210517 + e^{0.2}) \\ = \underline{1.33266}$$

الخطأ المطلق:

$$\delta(y_3) = |y_3 - e^{t_3}| = |1.33266 - e^{0.3}| = 1.71E-2$$

$$\delta(z_3) = |z_3 - e^{t_3}| = |1.33266 - e^{0.3}| = 1.71E-2;$$

نلاحظ أن الحل متناظر، بالتالي بالمتابعة بنفس الأسلوب نحصل على الحل في بقية النقاط:

$$y_4 = z_4 = 1.46764; \quad \delta(y_4) = \delta(z_4) = 2.418E-2$$

$$y_5 = z_5 = 1.616826; \quad \delta(y_5) = \delta(z_5) = 3.1896E-2$$

$$y_6 = z_6 = 1.781698; \quad \delta(y_6) = \delta(z_6) = 4.0421E-2$$

$$y_7 = z_7 = 1.963910; \quad \delta(y_7) = \delta(z_7) = 4.984E-2$$

$$y_8 = z_8 = 2.165285; \quad \delta(y_8) = \delta(z_8) = 6.026E-2$$

$$y_9 = z_9 = 2.387839; \quad \delta(y_9) = \delta(z_9) = 7.176E-2$$

$$y_{10} = z_{10} = 2.633799; \quad \delta(y_{10}) = \delta(z_{10}) = 8.448E-2$$

برنامج 5.9: لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين في المثال 11

بطريقة أولر

```

PROGRAM EulerSystemMethod;
uses wincrt;
var ye,ze,x:array[0..200] of real;
    x0,b,h,y0,z0:real;
    i,n:integer;
Function f1(x,y,z:real):real;
begin
    f1:=(y-z)+Exp(x);
end;
Function f2(x,y,z:real):real;
begin
    f2:=(z-y)+Exp(x);
end;
BEGIN
    writeln('Euler`s method to solve the system
            :y`=(z-y)+Exp(x), z`=(z+y)-Exp(x)');
    writeln( 'with conditions: y(0)=1 ,z(0)=1,
            in interval [x0=0,b=1]');
    writeln('=====');
    write('x0:='); readln(x0);
    write('b:='); readln(b);
    write('initial condition,y(x0):='); read(y0);
    write('initial condition,z(x0):='); read(z0);
    write('number of subintervals N:='); readln(n);
    h:=(b-x0)/n;
    for i:=0 to n do x[i]:=x0+i*h;
    ye[0]:=y0;
    ze[0]:=z0;
    writeln('xi',' ','yi',' ','Zi'
            ,',' ,'|yi-exp(xi)|',' ','|Zi-exp(xi)|');
    for i:=0 to n-1 do
    begin
        ye[i+1]:=ye[i]+h*f1(x[i],ye[i],ze[i]);
        ze[i+1]:=ze[i]+h*f2(x[i],ye[i],ze[i]);
        writeln('x',i+1,'=',x[i+1]:2:2,' ','ye[i+1]:2:6,' ',
                ze[i+1]:2:6,' ','abs(ye[i+1]-exp(x[i+1])):2,' ','abs(ze[i+1]-
                exp(x[i+1])):2);
    end;
END.

```

5.4.2 طريقة تايلور لحل جملة معادلات تفاضلية بشروط ابتدائية.

يمكن تعميم طريقة تايلور (5.13) من أي مرتبة نريد لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين (5.28)، وإذا اكتفينا بالمرتبة الثانية نحصل على الصيغة التكرارية:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i), \quad i=0,1,\dots \end{cases} \quad (5.30)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

مثال 12: استخدم طريقة تايلور من المرتبة الثانية (5.30) لحل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y' = (y + z) - \sin(t),$$

$$z' = (z - y) - \cos(t),$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

في المجال $[0, 1]$ ، بخطوة طولها $h=0.1$ ، ثم احسب الخطأ المطلق إذا علمت أن الحل التحليلي هو $y(t) = \sin(t)$ ، $z(t) = \cos(t)$.

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 1$ ، $f_1(t, y, z) = (y + z) - \sin(t)$ ،

$$f_2(t, y, z) = (z - y) - \cos(t), \quad \text{نحتاج أيضا لحساب المشتقات:}$$

$$\begin{aligned} f_1'(t, y, z) &= (y' + z') - \cos(t) = [(y + z) - \sin(t)] + \\ &[(z - y) - \cos(t)] - \cos(t) = 2z - 2\cos(t) - \sin(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(t, y, z) &= (z' - y') + \sin(t) = [z - y - \cos(t)] - \\ &[y + z - \sin(t)] + \sin(t) = -2y + 2\sin(t) - \cos(t) \end{aligned}$$

ولإيجاد الحل العددي في المجال $[0,1]$ ، باستخدام الخطوة $h=0.1$ نحتاج إلى تجزئة مؤلفة من النقاط: $t_i = t_0 + ih$ ، $i=0,1,...,10$. نطبق طريقة تايلور (5.30)، نجد:

$$y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i) =$$

$$= y_i + h[y_i + z_i - \sin(t_i)] + \frac{h^2}{2}[2z_i - 2\cos(t_i) - \sin(t_i)]$$

$$z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i) =$$

$$= z_i + h[z_i - y_i - \cos(t_i)] + \frac{h^2}{2}[-2y_i + 2\sin(t_i) - \cos(t_i)]$$

ينتج الحل التقريبي z_1, y_1 عند $t_1 = 0.1$ مباشرة بوضع $i=0$:

$$y_1 = y_0 + h[y_0 + z_0 - \sin(t_0)] + \frac{h^2}{2}[2z_0 - 2\cos(t_0) - \sin(t_0)]$$

$$= 0 + 0.1[0 + 1 - \sin(0)] + \frac{0.01}{2}[2*1 - 2\cos(0) - \sin(0)] = \underline{0.1}$$

$$z_1 = z_0 + h[z_0 - y_0 - \cos(t_0)] + \frac{h^2}{2}[-2y_0 + 2\sin(t_0) - \cos(t_0)]$$

$$= 1 + 0.1[1 - 0 - \cos(0)] + \frac{0.01}{2}[-2*0 + 2\sin(0) - \cos(0)] ,$$

$$= \underline{0.995}$$

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |0.1 - \sin(0.1)| = |0.1 - 0.0998334| = 1.666E - 4$$

$$\delta(z_1) = |z_1 - z(t_1)| = |0.995 - \cos(0.1)| = 4.16528E - 6$$

أيضا ينتج الحل عند $t_2 = 0.2$ بوضع $i=1$:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + h[y_1 + z_1 - \sin(t_1)] + \frac{h^2}{2}[2z_1 - 2\cos(t_1) - \sin(t_1)] \\
&= 0.1 + 0.1[0.1 + 0.995 - \sin(0.1)] + \frac{0.01}{2}[2 * 0.995 - \\
&\quad 2\cos(0.1) - \sin(0.1)] = \underline{0.199017}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= z_1 + h[z_1 - y_1 - \cos(t_1)] + \frac{h^2}{2}[-2y_1 + 2\sin(t_1) - \cos(t_1)] \\
&= 0.995 + 0.1[0.995 - 0.1 - \cos(0.1)] + \frac{0.01}{2}[-2 * 0.1 + \\
&\quad 2\sin(0.1) - \cos(0.1)] = \underline{0.980023}
\end{aligned}$$

والخطأ المطلق:

$$\delta(y_2) = |y_2 - y(t_2)| = |0.199017 - \sin(0.2)| = 3.4812E - 4$$

$$\delta(z_2) = |z_2 - \cos(t_2)| = |0.980023 - \cos(0.2)| = 4.3681E - 5$$

نضع $i=2$ ينتج الحل عند $t_3 = 0.3$

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + h[y_2 + z_2 - \sin(t_2)] + \frac{h^2}{2}[2z_2 - 2\cos(t_2) - \sin(t_2)] \\
&= 0.199017 + 0.1[0.199017 + 0.980023 - \sin(0.2)] + \\
&\quad \frac{0.01}{2}[2 * 0.980023 - 2\cos(0.2) - \sin(0.2)] = \underline{0.296061}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3 &= z_2 + h[z_2 - y_2 - \cos(t_2)] + \frac{h^2}{2}[-2y_2 + 2\sin(t_2) - \cos(t_2)] \\
&= 0.980023 + 0.1[0.980023 - 0.199017 - \cos(0.2)] + \\
&\quad \frac{0.01}{2}[-2 * 0.199017 + 2\sin(0.2) - \cos(0.2)] = \underline{0.955213}
\end{aligned}$$

الخطأ المطلق:

$$\delta(y_3) = |y_3 - y(t_3)| = |0.296061 - \sin(0.3)| = 5.4056E - 4$$

$$\delta(z_3) = |z_3 - \cos(t_3)| = |0.955213 - \cos(0.3)| = 1.2352E - 4$$

بالمتابعة بنفس الأسلوب نحصل على الحل في بقية النقاط ، ندرجها في

الجدول (5.3).

الجدول (5.3): بقية النتائج في حل المسألة في المثال 12
بطريقة تايلور من المرتبة الثانية مع الخطأ المطلق

t_i	y_i	z_i	$\delta_{y_i} = y_i - y(t_i) $	$\delta_{z_i} = z_i - z(t_i) $
0.4	0.390157	0.920812	7.38942E-4	2.485411E-4
0.5	0.480363	0.877159	9.37308E-4	4.23385E-4
0.6	0.565771	0.824683	1.12866E-3	6.52348E-4
0.7	0.645523	0.763903	1.30490E-3	9.39233E-4
0.8	0.718813	0.695420	1.45680E-3	1.28719E-3
0.9	0.784901	0.619911	1.57396E-3	1.69856E-3
1.0	0.843116	0.538128	1.64480E-3	2.17463E-3

برنامج 5.10: طريقة تايلور من المرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية في

المعادلتين التفاضليتين في المثال 12

```
PROGRAM TylorMethodTwoSystem;
```

```
uses wincrt;
```

```
var ye,ze,t:array[0..200] of real;
```

```
    t0,b,h,y0,z0:real;    i,n:integer;
```

```
Function f1(t,y,z:real):real;
```

```
begin
```

```
    f1:=(y+z)-sin(t);
```

```
end;
```

```
Function f2(t,y,z:real):real;
```

```
begin
```

```
    f2:=(z-y)-Cos(t);
```

```
end;
```

```
Function df1(t,y,z:real):real;
```

```
begin
```

```
    df1:=2*z-2*Cos(t)-sin(t);
```

```
end;
```

```
Function df2(t,y,z:real):real;
```

```
begin
```

```
    df2:=-2*y+2*sin(t)-Cos(t);
```

```

end;
BEGIN
writeln('Tylor`s method to solve the system: y`=(y+z)-Sin(x),
      z`=(z-y)-Cos(x)');
writeln('with conditions: y(0)=1 ,z(0)=1, in [x0=0,b=1]');
writeln('=====');
write('t0:='); readln(t0); write('b:='); readln(b);
write('initial condition,y(x0):='); read(y0);
write('initial condition,z(x0):='); read(z0);
write('number of subintervals N:='); readln(n); h:=(b-t0)/n;
for i:=0 to n do t[i]:=t0+i*h;
ye[0]:=y0;
ze[0]:=z0;
writeln('xi',' ','yi',' ','Zi'
      ',' ','|yi-exp(xi)|',' ','|Zi-exp(xi)|');
for i:=0 to n-1 do
begin
ye[i+1]:=ye[i]+h*f1(t[i],ye[i],ze[i])+Sqr(h)*df1(t[i],ye[i],ze[i])/2;
ze[i+1]:=ze[i]+h*f2(t[i],ye[i],ze[i])+Sqr(h)*df2(t[i],ye[i],ze[i])/2;
writeln('x',i+1,'=',t[i+1]:2:2,' ','ye[i+1]:2:6,' ','ze[i+1]:2:6,' ',
abs(ye[i+1]-Sin(t[i+1])),',' ','abs(ze[i+1]-Cos(t[i+1])));
end;
END.

```

5.4.3 طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية لحل جملة معادلات تفاضلية.

نعمم طريقة رانج-كوتا (5.23) من المرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين (5.28)، وذلك بتطبيقها على محوري الحل الثنائي لـ y_i, z_i نحصل عندئذ على الصيغة التكرارية:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] \\
z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] \\
K_1 &= h.f_1(t_i, y_i, z_i) \quad , i=0,1,\dots \quad (5.31) \\
L_1 &= h.f_2(t_i, y_i, z_i) \\
K_2 &= h.f_1(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1) \\
L_2 &= h.f_2(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1)
\end{aligned}$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

مثال 13: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y'(t) = 3y(t) - z(t),$$

$$z'(t) = 4y(t) - z(t),$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(0) = \frac{1}{5}, \quad z(0) = \frac{1}{2}$$

في المجال $[0, 2]$ ، بخطوة $h=0.2$ ، ثم احسب الخطأ المطلق إذا علمت أن الحل

$$التحليلي معطى بالعلاقين: $y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{10}te^t$ ، $z(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{5}te^t$.$$

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ، $y_0 = 0.2$ ، $z_0 = 0.5$ ، $f_1(t, y, z) = 3y - z$ ،

$f_2(t, y, z) = 4y - z$ لإيجاد الحل العددي بخطوة $h=0.2$ في المجال $[0, 2]$

يلزمنا تجزئة مؤلفة من النقاط: $t_i = t_0 + ih$ ، $i=0, 1, \dots, 10$ ، وبالتالي نحتاج

لحساب الحل التقريبي عند عشر نقاط. نطبق طريقة رانج-كوتا (5.31)، نجد:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

$$K_1 = h.f_1(t_i, y_i, z_i) = h(3y_i - z_i)$$

$$L_1 = h.f_2(t_i, y_i, z_i) = h(4y_i - z_i)$$

$$K_2 = h.f_1(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1) = h[3(y_i + K_1) - (z_i + L_1)]$$

$$L_2 = h.f_2(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1) = h[4(y_i + K_1) - (z_i + L_1)]$$

ينتج الحل التقريبي y_1, z_1 عند $t_1 = 0.2$ من النظام السابق مباشرة بوضع $i=0$:

$$K_1 = h.f_1(t_0, y_0, z_0) = h(3y_0 - z_0) = 0.2(3*0.2 - 0.5) = 0.02$$

$$L_1 = h.f_2(t_0, y_0, z_0) = h(4y_0 - z_0) = 0.2(4*0.2 - 0.5) = 0.06$$

$$K_2 = h.f_1(t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h[3(y_0 + K_1) - (z_0 + L_1)] \\ = 0.2[3(0.2 + 0.02) - (0.5 + 0.06)] = 0.02$$

$$L_2 = h.f_2(t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h[4(y_0 + K_1) - (z_0 + L_1)] \\ = 0.2[4(0.2 + 0.02) - (0.5 + 0.06)] = 0.064$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 0.2 + 0.5(0.02 + 0.02) = \underline{\underline{0.22000}}$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] = 0.5 + 0.5(0.06 + 0.064) = \underline{\underline{0.56200}}$$

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |0.22 - (\frac{1}{5}e^{0.2} - \frac{1}{10} * 0.2 * e^{0.2})| = 1.475035E - 04$$

$$\delta(z_1) = |z_1 - z(t_1)| = |0.562 - (\frac{1}{2}e^{0.2} - \frac{1}{5} * 0.2 * e^{0.2})| = 1.547312E - 04$$

نجد أيضا بأسلوب مشابه الحل التقريبي z_2, y_2 عند $t_2 = 0.4$ بوضع $i=1$:

$$K_1 = h(3y_1 - z_1) = 0.2(3*0.22 - 0.562) = 0.0196$$

$$L_1 = h(4y_1 - z_1) = 0.2(4*0.22 - 0.562) = 0.0636$$

$$K_2 = h[3(y_1 + K_1) - (z_1 + L_1)] \\ = 0.2[3(0.22 + 0.0196) - (0.562 + 0.0636)] = 0.01864$$

$$L_2 = h[4(y_1 + K_1) - (z_1 + L_1)] \\ = 0.2[4(0.22 + 0.0196) - (0.562 + 0.0636)] = 0.06656$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 0.22 + 0.5(0.0196 + 0.01864) = \underline{\underline{0.23912}}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] = 0.5 + 0.5(0.0636 + 0.06656) = \underline{\underline{0.62708}}$$

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_2) = |y_2 - y(t_2)| = |0.23912 - (\frac{1}{5}e^{0.4} - \frac{1}{10} * 0.4 * e^{0.4})| = 4.280483E-04$$

$$\delta(z_2) = |z_2 - z(t_2)| = |0.62708 - (\frac{1}{2}e^{0.4} - \frac{1}{5} * 0.4 * e^{0.4})| = 5.136269E-04$$

بالمطابقة بنفس الأسلوب نحصل على الحل التقريبي في بقية النقاط $\{t_i\}_{i=3}^{10}$

ندرجها في الجدول (5.4).

الجدول (5.4): بقية النتائج في حل المسألة في المثال 13
بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية مع الخطأ المطلق

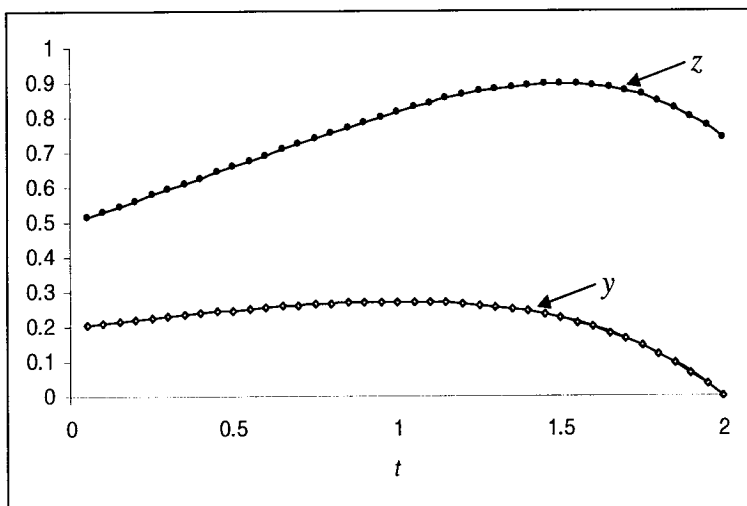
t_i	y_i	z_i	$\delta_{y_i} = y_i - y(t_i) $	$\delta_{z_i} = z_i - z(t_i) $
0.6	0.25600	0.69359	9.081679E-04	1.189255E-03
0.8	0.26875	0.75902	1.680593E-03	2.340548E-03
1.0	0.27470	0.81967	2.873302E-03	4.189238E-03
1.2	0.27027	0.87027	4.661462E-03	7.041628E-03
1.4	0.25060	0.90346	7.283102E-03	1.131729E-02
1.6	0.20918	0.90913	1.105966E-02	1.758681E-02
1.8	0.13742	0.87357	1.642285E-02	2.662123E-02
2.0	0.02395	0.77836	2.394961E-02	3.945675E-02

نبين في الشكل (5.11) مسار الحل العددي مع الحل التحليلي للمسألة في

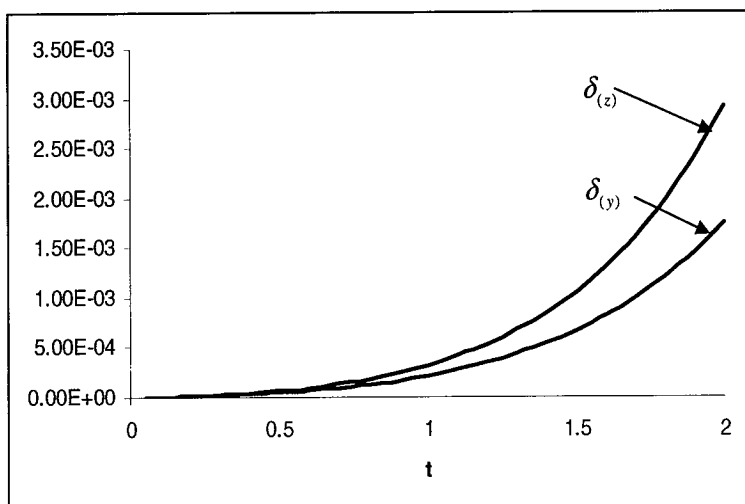
المثال 13 بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية بخطوة $h=0.05$.

نرسم في الشكل (5.12) المخطط البياني لسلوك الخطأ المطلق في الحل

العددي للمثال 13، بخطوة $h=0.05$.



الشكل (5.11): سلوك الحل العددي مع الحل التحليلي — للمثال 13
بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية



الشكل (5.12): الخطأ المطلق في الحل العددي للمثال 13
بطريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية

برنامج 5.11: طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية

في جملة المعادلتين التفاضليتين في المثال 13

```
PROGRAM RungKuttaOrderTwoSystem;
Uses wincrt;
var ye,ze,t:array[0..300] of real;
    k1,k2,L1,L2,b,t0,h,y0,z0:real; i,n:integer;
Function f1(t,y,z:real):real;
begin
    f1:=3*y-z;
end;
Function f2(t,y,z:real):real;
begin
    f2:=4*y-z;
end;
Function y(t:real):real;
begin
    y:=1/5*Exp(t)-1/10*t*Exp(t);
end;
Function z(t:real):real;
begin
    z:=1/2*Exp(t)-1/5*t*Exp(t);
end;
BEGIN
writeln('Runge-Kutta from order 2 to solve  $y'=3y-z, z'=4y-z$ ');
writeln('with initial  $y(0)=0.2$   $z(0)=0.5$ , in  $[t_0=0, b=2]$ ');
write('input t0:=');readln(t0);
write('input b:=');readln(b);
write('input y0:=');readln(y0);
write('input z0:=');readln(z0);
write('number of subintervals N:=');readln(n);
h:=(b-t0)/n;
for i:=0 to n do t[i]:=t0+i*h;
ye[0]:=y0;
ze[0]:=z0;
for i:=0 to n-1 do
begin
    k1:=h*f1(t[i],ye[i],ze[i]);
    L1:=h*f2(t[i],ye[i],ze[i]);
```

```

k2:=h*f1(t[i]+h,ye[i]+k1,ze[i]+L1);
L2:=h*f2(t[i]+h,ye[i]+k1,ze[i]+L1);
ye[i+1]:=ye[i]+(k1+k2)/2;
ze[i+1]:=ze[i]+(L1+L2)/2;
Writeln('t',i+1,'=',t[i+1]:2:2,' k1=',k1:2:5,' k2=',k2:2:5,'
L1=',L1:2:5,' L2=',L2:2:5);
Writeln('y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,' z',i+1,'=',ze[i+1]:2:5,'
error(y)=';
abs(ye[i+1]-y(t[i+1])):2,' error(z)=';abs(ze[i+1]-z(t[i+1])):2);
end;{for}
END.

```

5.4.4 طرائق رانج-كوتا من المرتبة الرابعة لحل جملة معادلات تفاضلية.

نكتفي بتعميم طريقة رانج-كوتا التقليدية (5.27) من المرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين (5.28)، وبتطبيقها على محوري الحل الثنائي لـ z_i, y_i نحصل عندئذ على الصيغة التكرارية:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\
 z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6} [L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] \\
 K_1 &= h f_1(t_i, y_i, z_i) \\
 L_1 &= h f_2(t_i, y_i, z_i) \\
 K_2 &= h f_1(t_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + L_1/2), i=0,1,\dots \quad (5.32) \\
 L_2 &= h f_2(t_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + L_1/2) \\
 K_3 &= h f_1(t_i + h, y_i + K_2/2, z_i + L_2/2) \\
 L_3 &= h f_2(t_i + h, y_i + K_2/2, z_i + L_2/2) \\
 K_4 &= h f_1(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3) \\
 L_4 &= h f_2(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)
 \end{aligned}$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

نوضح الطريقة (5.32) من خلال المثال التالي.

مثال 14: نستخدم طريقة رانج كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة (5.32) لحل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y' = 5z + \sin(5t),$$

$$z' = -5y + \cos(5t),$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(0) = z(0) = 0$$

في المجال $[0, 2.5]$ ، بخطوة $h=0.1$ ، ثم حساب الخطأ المطلق مع العلم أن الحل التحليلي هو: $y(t) = t \sin(5t)$ ، $z(t) = t \cos(5t)$.

الحل: لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ، $z_0 = y_0 = 0$ ، $f_1(t, y, z) = 5z + \sin(5t)$ ، $f_2(t, y, z) = -5y + \cos(5t)$ ، نحتاج باستخدام الخطوة $h=0.1$ ، لحساب الحل العددي عند 25 نقطة موزعة على مسافات متساوية في المجال $[0, 2.5]$. نطبق طريقة رانج-كوتا (5.32)، نجد:

$$K_1 = h f_1(t_i, y_i, z_i) = h[5z_i + \sin(5t_i)]$$

$$L_1 = h f_2(t_i, y_i, z_i) = h[-5y_i + \cos(5t_i)]$$

$$K_2 = h f_1(t_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + L_1/2) = h\{5(z_i + L_1/2) + \sin[5(t_i + h/2)]\}$$

$$L_2 = h f_2(t_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + L_1/2) = h\{-5(y_i + K_1/2) + \cos[5(t_i + h/2)]\}$$

$$K_3 = h f_1(t_i + h/2, y_i + K_2/2, z_i + L_2/2) = h\{5(z_i + L_2/2) + \sin[5(t_i + h/2)]\}$$

$$L_3 = h f_2(t_i + h/2, y_i + K_2/2, z_i + L_2/2) = h\{-5(y_i + K_2/2) + \cos[5(t_i + h/2)]\}$$

$$K_4 = h f_1(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3) = h\{5(z_i + L_3) + \sin[5(t_i + h)]\}$$

$$L_4 = h f_2(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3) = h\{-5(y_i + K_3) + \cos[5(t_i + h)]\}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

ينتج الحل التقريبي z_1, y_1 عند $t_1 = 0.1$ من النظام السابق مباشرة بوضع $i=0$:

$$K_1 = h[5z_0 + \sin(5t_0)] = 0.5[5*0 + \sin(5*0)] = 0$$

$$L_1 = h[-5y_0 + \cos(5t_0)] = 0.1[-5*0 + \cos(5*0)] = 0.1$$

$$K_2 = h\{5(z_0 + L_1/2) + \sin[5(t_0 + h/2)]\} \\ = 0.1\{5(0 + 0.1/2) + \sin[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.04974$$

$$L_2 = h\{-5(y_0 + K_1/2) + \cos[5(t_0 + h/2)]\} = \\ = 0.1\{-5(0 + 0/2) + \cos[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.09689$$

$$K_3 = h\{5(z_0 + L_2/2) + \sin[5(t_0 + h/2)]\} = \\ = 0.1\{5(0 + 0.1/2) + \sin[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.04896$$

$$L_3 = h\{-5(y_0 + K_2/2) + \cos[5(t_0 + h/2)]\} = \\ = 0.1\{-5(0 + 0.04974/2) + \cos[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.08446$$

$$K_4 = h\{5(z_0 + L_3/2) + \sin[5(t_0 + h/2)]\} = \\ = 0.1\{5(0 + 0.08446/2) + \sin[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.09017$$

$$L_4 = h\{-5(y_0 + K_3/2) + \cos[5(t_0 + h/2)]\} = \\ = 0.1\{-5(0 + 0.04896/2) + \cos[5(0 + 0.1/2)]\} = 0.06328$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] =$$

$$0 + \frac{1}{6}[0 + 2*0.04974 + 2*0.04896 + 0.09017] = \underline{\underline{0.04793}}$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] =$$

$$0 + \frac{1}{6}[0.1 + 2*0.09689 + 2*0.08446 + 0.06328] = \underline{\underline{0.08766}}$$

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |0.04793 - 0.1 \sin(5*0.1)| = 1.29155E-05$$

$$\delta(z_1) = |z_1 - z(t_1)| = |0.08766 - 0.1 \cos(0.1*5)| = 9.63522E-05$$

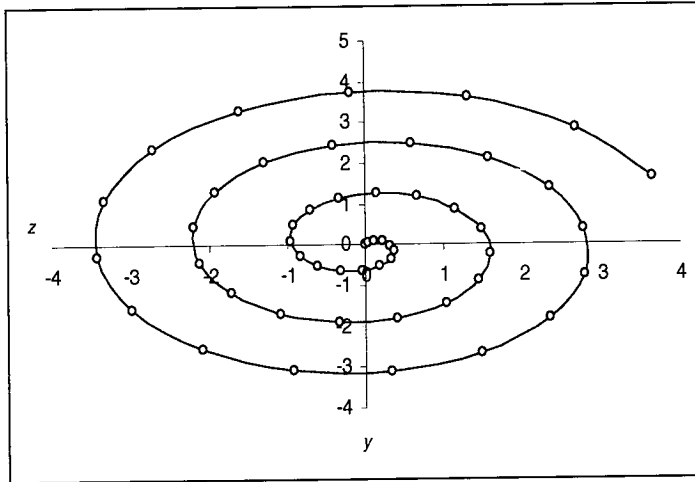
بالتتابعه بنفس الأسلوب نحصل على الحل التقريبي في بقية النقاط $\{t_i\}_{i=2}^{25}$.

سنكتفي بإدراج النتائج العددية في النقاط $\{t_i\}_{i=2}^9$ في الجدول (5.5).

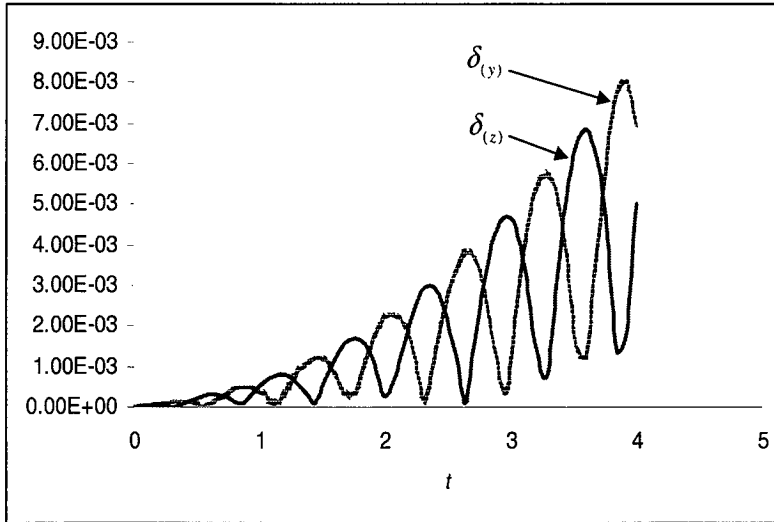
الجدول (5.5): بعض النتائج في حل مسألة المثال 14
بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة مع الخطأ المطلق

t_i	y_i	z_i	$\delta_{y_i} = y_i - y(t_i) $	$\delta_{z_i} = z_i - z(t_i) $
0.2	0.16816	0.10792	1.367139E-04	1.4242851E-04
0.3	0.29895	0.02117	3.006214E-04	5.4777148E-05
0.4	0.36333	-0.16628	3.861269E-04	1.7996810E-04
0.5	0.29895	-0.40009	2.839204E-04	4.8536098E-04
0.6	0.08472	-0.59328	4.624379E-05	7.1573106E-04
0.7	-0.24501	-0.65481	5.383253E-04	7.12266778E-04
0.8	-0.60442	-0.52254	1.024015E-03	3.7511200E-04
0.9	-0.87850	-0.18999	1.282070E-03	2.7629794E-04

يبين الشكل (5.13) مسار الحل العددي في النقاط $\{(y_i, z_i)\}_{i=0}^{50}$ مع الحل التحليلي في المجال $[0, 4]$ لمسألة المثال 14 بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة، ونرسم في الشكل (5.14) المخطط البياني لسلوك الخطأ المطلق في الحل.



الشكل (5.13): مسار الحل العددي مع الحل التحليلي — لـ y, z
لمسألة المثال 14 بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة في المجال $[0, 4]$



الشكل (5.14): سلوك الخطأ المطلق في الحل العددي لـ z, y لمسألة المثال 14

بطريقة رانج-كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة في المجال $[0, 4]$

برنامج 5.12: طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية

في جملة المعادلتين التفاضليتين المثال 14

```

PROGRAM RungKuttaOrderFourSystem;
  Uses winCRT;
  var ye, ze, t: array[0..300] of real;
      k1, k2, k3, k4, L1, L2, L3, L4, b, t0, h, y0, z0: real; i, n: integer;
  Function f1(t, y, z: real): real;
  begin
    f1 := 5 * z + Sin(5 * t);
  end;
  Function f2(t, y, z: real): real;
  begin
    f2 := -5 * y + Cos(5 * t);
  end;
  Function y(t: real): real;
  begin
    y := t * sin(5 * t);
  end;

```

```

Function z(t:real):real;
begin
  z:=t*cos(5*t);
end;
BEGIN
writeln('RungeKutta order 4 to solve  $y'=5z+\sin 5t, z'=-5y+\cos 5t$ ');
writeln('with initial  $y(0)=z(0)=0$ , in  $[t_0=0, b=4]$ ');
write('input t0:=');readln(t0);
write('input b:=');readln(b);
write('input y0:=');readln(y0);
write('input z0:=');readln(z0);
write('number of subintervals N:=');readln(n);
h:=(b-t0)/n;
for i:=0 to n do t[i]:=t0+i*h;
ye[0]:=y0;
ze[0]:=z0;
for i:=0 to n-1 do
begin
  k1:=h*f1(t[i],ye[i],ze[i]);
  L1:=h*f2(t[i],ye[i],ze[i]);
  k2:=h*f1(t[i]+h/2,ye[i]+k1/2,ze[i]+L1/2);
  L2:=h*f2(t[i]+h/2,ye[i]+k1/2,ze[i]+L1/2);
  k3:=h*f1(t[i]+h/2,ye[i]+k2/2,ze[i]+L2/2);
  L3:=h*f2(t[i]+h/2,ye[i]+k2/2,ze[i]+L2/2);
  k4:=h*f1(t[i]+h,ye[i]+k3,ze[i]+L3);
  L4:=h*f2(t[i]+h,ye[i]+k3,ze[i]+L3);
  ye[i+1]:=ye[i]+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
  ze[i+1]:=ze[i]+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
  Writeln('t',i+1,'=',t[i+1]:2:2,' k1=',k1:2:5,' K2=',K2:2:5,'
    K3=',K3:2:5,' K4=',K4:2:5);
  Writeln('t',i+1,'=',t[i+1]:2:2,' L1=',L1:2:5,' L2=',L2:2:5,'
    L3=',L3:2:5,' L4=',L4:2:5);
  Writeln('y',i+1,'=',ye[i+1]:2:5,' z',i+1,'=',ze[i+1]:2:5);
  Writeln(' Error(y)=,abs(ye[i+1]-y(t[i+1])), Error(z)=,
    abs(ze[i+1]-z(t[i+1])));
end;{for}
END.

```

5.5 الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية من المرتبة m

The Numerical Solution of m th-Order Initial Value Problem.

تكتب المعادلة التفاضلية من المرتبة m بالشكل النظامي كما يلي:

$$F(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}, y^{(m)}), \quad a \leq t \leq b$$

أو بالشكل الصريح:

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (5.33a)$$

يتضمن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة m مجموعة من الثوابت الاختيارية عددها m . ولتعيين الثوابت المجهولة في الحل العام يفترض توفر m شرطاً عند نقطة البدء والتي تسمى بالشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية كما مر معنا سابقاً. تدعى المعادلة التفاضلية (5.33a) مع الشروط الابتدائية:

$$y^{(p)}(a) = y_0^{(p)}, \quad p = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5.33b)$$

بمسألة القيمة الابتدائية من المرتبة m .

يمكن تحويلها المعادلة التفاضلية (5.33a) مع الشروط (5.33b) ببساطة إلى جملة مؤلفة من m معادلة من المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned} y' &= y_1', & y_1(a) &= y_0 \\ y_1' &= y_2', & y_2(a) &= y_0' \\ y_2' &= y_3', & y_3(a) &= y_0'' \\ &\vdots & & \\ y_{m-1}' &= y_m', & y_m(a) &= y_0^{(m-1)} \end{aligned} \quad (5.34)$$

وهكذا سنحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلات (5.34) بدلا من مسألة القيمة الابتدائية (5.33a)-(5.33b) لأنهما متكافئتان، مما يجعل مسألة القيمة

الابتدائية من المرتبة m محلولة دائما باستخدام الطرائق سابقة الذكر وطرائق أخرى كثيرة. سنوضح الحل العددي لهذه المسألة بالاختصار على المرتبة $m=2$ وعندئذ تتحول مسألتنا:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad (5.35a)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0, \quad (5.35b)$$

إلى مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y'(t) = z(t), \quad y(a) = y_0 \quad (5.36a)$$

$$y''(t) = z'(t) = f(t, y(t), z(t)), \quad z(a) = z_0 \equiv y'_0 \quad (5.36b)$$

مثال 15: بفرض لدينا مسألة القيمة الابتدائية:

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -5$$

يطلب مايلي:

أ- تحويل هذه المسألة إلى المسألة المكافئة في جملة معادلتين من الدرجة الأولى.

ب- استخدام طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة في المجال $[0, 2]$ بخطوة $h=0.1$.

ج- مقارنة الحل العددي مع الحل التحليلي:

$$y(t) = 3e^{-2t} \cos(t) + e^{-2t} \sin(t)$$

الحل: إن المعادلة التفاضلية هي من الشكل:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) = -4y'(t) - 5y(t)$$

وباستخدام التحويل (5.36a)-(5.36b)، نحصل على الجملة المكافئة في جملة

المعادلتين من الدرجة الأولى:

$$y'(t) = z(t), \quad y(0) = 3$$

$$z'(t) = -4z(t) - 5y(t), \quad z(a) = -5$$

نحلها في المجال $[0,2]$ ، من أجل ذلك، لدينا من المسألة $t_0 = 0$ ،
 $f_2(t, y, z) = -5y - 4z$ ، $f_1(t, y, z) = z$ ، $z_0 = -5$ ، $y_0 = 3$
تجزئة مؤلفة من النقاط: $t_i = t_0 + ih$ ، $i=0,1,...,20$ ، بالخطوة $h=0.1$ ، وبالتالي
نحتاج لحساب الحل التقريبي عند 20 نقطة. وبتطبيق طريقة رانج-كوتا (5.31)،
نجد الحل التقريبي y_1 عند $t_1 = 0.1$ بوضع $i=0$:

$$K_1 = h.f_1(t_0, y_0, z_0) = h(z_0) = 0.1(-5) = -0.5$$

$$L_1 = h.f_2(t_0, y_0, z_0) = h(-5y_0 - 4z_0) = 0.1(-5*3 - 4*(-5)) = 0.5$$

$$K_2 = h.f_1(t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h(z_0 + L_1) \\ = 0.1(-5 + 0.5) = -0.45$$

$$L_2 = h.f_2(t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h[-5(y_0 + K_1) - 4(z_0 + L_1)] \\ = 0.1[-5(3 - 0.5) - 4(-5 + 0.5)] = 0.55$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 3 + 0.5(-0.5 - 0.45) = \underline{\underline{2.52500}}$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] = -5 + 0.5(0.50.55) = \underline{\underline{-4.47500}}$$

نلاحظ في مثل هذه المسائل أننا نحسب قيم z_i لأنها تدخل في حساب قيم y_i في التكرارات المتتالية، ولسنا بحاجة إلى إخراج قيمها إلا إذا تطلبت الحاجة، فقيم z_i تمثل القيم التقريبية للمشتق الأول للحل y .

نحسب الخطأ المطلق:

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |2.525 - (3e^{-0.2} \cos(0.1) + e^{-0.2} \sin(0.1))| \\ = 6.58217E-04$$

نجد أيضاً بأسلوب مشابه الحل التقريبي y_2 عند $t_2 = 0.4$ من أجل $i=1$:

$$K_1 = h(z_1) = 0.1(-4.47500) = -0.44750$$

$$L_1 = h(-5y_1 - 4z_1) = 0.1[-5 * 2.52500 - 4 * (-4.47500)] = 0.52750$$

$$K_2 = h(z_0 + L_1) = 0.1(-4.47500 + 0.52750) = -0.39475$$

$$L_2 = h[-5(y_1 + K_1) - 4(z_1 + L_1)] = 0.1[-5(2.52500 - 0.44750) - 4(-4.47500 + 0.52750)] = 0.54025$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] = 2.52500 + 0.5(-0.44750 - 0.39475) = \underline{\underline{2.10388}}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] = -4.47500 + 0.5(0.52750 + 0.54025) = \underline{\underline{-3.94113}}$$

نحسب الخطأ المطلق في y_2 :

$$\delta(y_2) = |y_2 - y(t_2)| = |2.10388 - (3e^{-0.4} \cos(0.2) + e^{-0.4} \sin(0.2))|$$

$$= 1.7185569E-04$$

بالمتابعة بالأسلوب نفسه، نحصل على القيم التقريبية المتتالية لـ y_i في المجال

$[0,2]$ التي عددها يساوي إلى 20 قيمة، وآخر قيمة تقريبية هي y_{20} عند $t_{20} = 2$

(طرف المجال الأيمن)، ندرج بقية النتائج في الجدول (5.6).

الجدول (5.6): بقية الحلول العددية للمسألة في المثال 15
بطريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية في مقارنة مع الحل التحليلي

t_i	y_i	$y(t_i)$	z_i
0.3	1.73599	1.73508	-3.42299
0.4	1.41875	1.41656	-2.93645
0.5	1.14836	1.14490	-2.49088
0.7	0.73011	0.72469	-1.73767
1.0	0.33972	0.33325	-0.94132
1.2	0.18933	0.18317	-0.59523
1.6	0.04156	0.03717	-0.20563
2.0	-0.00374	-0.00621	-0.05058

برنامج 5.13: طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية المثال 15.

```

PROGRAM RungKuttaOrderTwoSystem;
var ye,ze,t:array[0..300] of real;
    k1,k2,L1,L2,b,t0,h,y0,z0:real; i,n:integer;
Function f1(t,y,z:real):real;
begin
    f1:=z;
end;
Function f2(t,y,z:real):real;
begin
    f2:=-5*y-4*z;
end;
Function y(t:real):real;
begin
    y:=3*Exp(-2*t)*cos(t)+Exp(-2*t)*sin(t);
end;
Function z(t:real):real;
begin
    z:=1/2*Exp(t)-1/5*t*Exp(t);
end;
BEGIN
writeln('Runge-Kutta from order 2 to solve y``+4y`+5y=0');
writeln('with initial y(0)=3 y`(0)=-5, in [0,b=2]');
write('input t0:=');readln(t0); write('input b:=');readln(b);
write('input y0:=');readln(y0); write('input z0:=');readln(z0);
write('number of subintervals N:='); readln(n); h:=(b-t0)/n;
for i:=0 to n do t[i]:=t0+i*h;
ye[0]:=y0; ze[0]:=z0;
for i:=0 to n-1 do
begin
    k1:=h*f1(t[i],ye[i],ze[i]);
    L1:=h*f2(t[i],ye[i],ze[i]);
    k2:=h*f1(t[i]+h,ye[i]+k1,ze[i]+L1);
    L2:=h*f2(t[i]+h,ye[i]+k1,ze[i]+L1);
    ye[i+1]:=ye[i]+(k1+k2)/2;
    WriteLn('t,i+1,','t[i+1]:2:2,' K1=',K1:2:5,' K2=',k2:2:5,'
        L1=',L1:2:5,' L2=',L2:2:5);
    WriteLn('y,i+1,','ye[i+1]:2:5,' error(y)='abs(ye[i+1]-y(t[i+1]))');
end;{for}
END.

```

تمارين

- 1-** استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبتين الثانية والثالثة لإيجاد الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية:

$$y' = y$$

$$y(1)=e$$

في المجال [1, 2] بخطوة طولها $h=0.5$ ، ثم احسب الخطأ المطلق الحاصل في الحل العددي عند $t=2$ إذا علمت أن الحل التحليلي:

$$y(t) = e^t$$

- 2-** لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' y = \frac{\text{Log}(x)}{x},$$

$$y(1) = 0,$$

والمطلوب إيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية المذكورة عند النقطة $x=1.5$ بطريقة أولر ، ثم حساب الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند النقطة المذكورة علماً بأن الخطوة $h=0.1$ والحل التحليلي: $y(x) = \text{Log}(x)$ ، ثم استخدم البرنامج 5.2 لحل المسألة بخطوة $h=0.01$.

- 3-** أوجد الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية :

$$y' + y^2 = t(2 + t^3)$$

$$y(-1) = 1$$

بطريقة أولر المعدلة في المجال $[-1, 0]$ مستخدماً الخطوة $h=0.2$ ، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الحاصل في كل خطوة، بالمقارنة مع الحل التحليلي:

$$y(t) = t^2$$

4- استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 0$$

في المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، باستخدام خطوة $h = \frac{\pi}{20}$. ثم احسب الخطأ المطلق والنسبي الحاصل في كل خطوة علماً بأن الحل النظري يعطى بصيغته التحليلية:

$$y(t) = \tan(t)$$

5- استخدم طريقة رانج كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الثالثة لحل

مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية:

$$y' + ty = 0$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 0$$

في المجال $[0, 0.2]$ ، باستخدام خطوة $h = 0.05$. ثم قارن الحل العددي مع الحل التحليلي:

$$y(t) = e^{-t^2/2}$$

6- استخدم طريقة رانج كوتا التقليدية (Classical) من المرتبة الرابعة لحل

مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية:

$$y' = 2t y^2$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 1$$

في المجال $[0, 0.3]$ ، باستخدام الخطوات $h = 0.1, 0.05, 0.01$. ثم قارن الحل العددي مع الحل التحليلي المعلوم بالصيغة :

$$y(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

7- استخدم البرنامج 5.7 للحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = t^2 - y ; y(0) = 1 , t \in [0, 2]$$

بطريقة رانج-كوتا (Nystrom) من المرتبة الخامسة، إذا علمت أن الحل التحليلي هو: $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$. ثم أعد تنفيذ البرنامج وإظهار النتائج من أجل المعطيات $N = 5, 10, 20$ (عدد النقاط)، $b = 2, t_0 = 0$ ، $y_0 = 1$.

8- اكتب دستور طريقة رانج كوتا من المرتبة الخامسة (Lawson)، بالمطابقة

مع جدول (Lawson) وقم بتعيين الوسطاء المجهولة:

$$w_6, w_5, w_4, w_3, w_2, w_1,$$

$$a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}, a_{65}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{42}, a_{41}, a_{32}, a_{31}, a_{21},$$

$$c_6, c_5, c_4, c_3, c_2$$

ثم اكتب برنامجاً لتنفيذ هذه الطريقة بالاستئناس بالبرنامج 5.7 لإيجاد الحل التقريبي والخطأ المطلق عند كل خطوة لمسألة القيمة الابتدائية في التمرين 7.

9- أثبت أن المعادلتين:

$$y(t) = -2e^t + 4e^t \cos^2(t) - 12e^t \cos(t) \sin(t)$$

$$z(t) = -3e^t + 6e^t \cos^2(t) + 2e^t \cos(t) \sin(t)$$

هما حل لمسألة القيمة الابتدائية:

$$\begin{cases} y'(t) = y - 4z \\ z'(t) = y + z \end{cases} , \begin{cases} y(0) = 2 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

10- استخدم طريقة أولر لحل مسألة القيمة الابتدائية في جملة المعادلتين

التفاضليتين:

$$y' = (y + z) - t^2,$$

$$z' = y + \frac{1}{2}tz - e^t,$$

$$y(0)=1, z(0)=0$$

في المجال $[0, 0.2]$ ، بالخطوات $h=0.2, 0.1, 0.05$ ، ثم احسب الخطأ المطلق من أجل كل خطوة عند $t=0.2$ إذا علمت أن الحل التحليلي يعطى بالعلاقيتين:

$$z(t) = t^2, y(t) = e^t$$

11- استخدم طريقة تايلور من المرتبة الثانية (5.30) لحل المسألة:

$$y' = (y - z) - \cos(t),$$

$$z' = (z + y) - \sin(t),$$

$$y(0)=1, z(0)=0$$

في المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، وفق تجزئة تستخدم الخطوات $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}$ ، ثم احسب

الخطأ المطلق من أجل كل خطوة عند $t = \frac{\pi}{4}$ إذا علمت أن الحل التحليلي هو:

$$z(t) = \sin(t), y(t) = \cos(t)$$

12- استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y' = -y/z,$$

$$z' = y z,$$

$$y(1)=1, z(1)=1$$

في المجال $[1, 1.2]$ ، وفق الخطوات $h=0.2, 0.1, 0.05$ ، ثم احسب الخطأ

المطلق من أجل كل خطوة عند $t=1.2$ بالمقارنة مع الحل التحليلي:

$$z(t) = t, y(t) = \frac{1}{t}$$

13- استخدم طريقة رانج كوتا التقليدية من المرتبة الرابعة (5.32) لحل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$y' - 2t y z = 0$$

$$z' + 2t z^2 + y = 1 + t^2$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

في المجال $[0, 1]$ ، وفق الخطوات $h=1, 0.5, 0.2$ ، ثم حساب الخطأ المطلق

$$z(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad y(t) = t^2 + 1. \quad \text{بالمقارنة مع الحل التحليلي:}$$

14- بفرض لدينا مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'' + 2y' + y = e^t$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

يطلب مايلي:

أ- تحويل هذه المسألة إلى المسألة المكافئة في جملة معادلتين من الدرجة الأولى.

ب- استخدام طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة في المجال $[0,1]$

بخطوة $h=0.1$.

ج- قارن الحل العددي مع الحل التحليلي:

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-t} (3 + e^{2t} - 2t)$$

6- الفصل السادس

الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية

The Numerical Solution of Partial Differential Equations

6.1 مقدمة Introduction

إن العديد من المسائل في العلوم التطبيقية والفيزياء والهندسة تشكل نماذج للمعادلات التفاضلية الجزئية. لقد مر معنا في الفصل السابق الحلول العددية للمعادلات التفاضلية بمتغير مستقل واحد، أما المعادلة التي تستخدم أكثر من متغير مستقل تسمى "معادلات تفاضلية جزئية". سنتعرف في هذا الفصل على طرائق الفروق المنتهية المعتمدة على صيغ لتقريبات المشتقات من الدرجة الأولى والثانية لدالة. نبدأ بتصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى ثلاثة أنواع، ونعطي مسألة فيزيائية لكل حالة.

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$A \Phi_{xx} + B \Phi_{xy} + C \Phi_{yy} = F(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) \quad (6.1)$$

حيث A, B, C ثوابت عددية.

تسمى المعادلة (6.1) بمعادلات تفاضلية جزئية شبه خطية (quasilinear)

ويوجد ثلاثة أنواع من المعادلات شبه الخطية:

a. إذا كان $B^2 - 4AC < 0$ ، تدعى المعادلة "ناقصة القطع"

b. إذا كان $B^2 - 4AC = 0$ ، تدعى المعادلة "قطع مكافئ"

c. إذا كان $B^2 - 4AC > 0$ ، تدعى المعادلة "زائدية القطع"

كمثال على معادلة زائدية القطع نقدم نموذج ببعد واحد لاهتزاز خيط

(Vibrating String). تمثل الإزاحة $u(x, t)$ معادلة الموجة:

$$\rho u_{tt}(x, t) = T u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \quad (6.2)$$

مع موضع ابتدائي ودوال سرعة:

$$u(x, 0) = f(x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.3)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad t = 0, \quad 0 < x < L$$

والقيم الحدية:

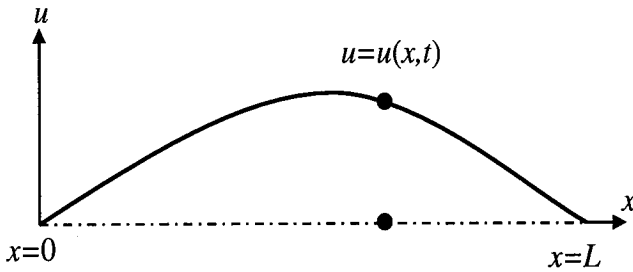
$$u(0, t) = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq t < \infty \quad (6.4)$$

$$u(L, t) = 0, \quad x = L, \quad 0 \leq t < \infty$$

حيث الثابت ρ هو كتلة الخيط في واحدة الطول، و T هو توتر الخيط. نبين في

الشكل (6.1) المخطط البياني لخيط مثبت في نهايتيه عند الموضع $(0, 0)$ ، و

$(L, 0)$.



الشكل (6.1): معادلة الموجة تشكل نموذج لاهتزاز خيط.

مثال أيضا على معادلة قطع مكافئ نعتبر نموذج ببعد واحد لتدفق الحرارة في

قضيب معزول طوله L ، الشكل (6.2).

تعطى معادلة الحرارة التي ترتبط بالحرارة $u(x,t)$ في القضيب عند الموضع x والزمن t ، بالمعادلة:

$$k u_{xx}(x,t) = \sigma \rho u_t(x,t), 0 < x < L, 0 < t < \infty \quad (6.5)$$

وتوزيع الحرارة الابتدائية عند $t=0$ هو:

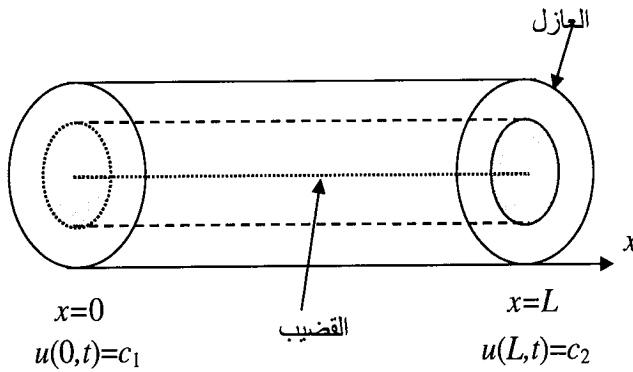
$$u(x,0) = f(x), t=0, 0 \leq x \leq L \quad (6.6)$$

والقيم الحدية عند نهايتي القضيب:

$$u(0, t) = c_1, x=0, 0 \leq t < \infty \quad (6.7)$$

$$u(L, t) = c_2, x=L, 0 \leq t < \infty$$

حيث الثابت k هو معامل الانتشار الحراري، σ الحرارة النوعية، ρ كثافة المادة في القضيب.



الشكل (6.2): معادلة الحرارة كنموذج لدرجة الحرارة في قضيب معزول.

مثال أيضا على معادلة قطع ناقص، نعتبر دالة الطاقة الكامنة $u(x, y)$ التي تمثل الطاقة الكهربائية في الحالة المستقرة أو توزيع درجة الحرارة في منطقة مستطيلة في المستوي. يمكن صياغة معادلة لابلاس (Laplace's Equation) في المستوي في الحالات التالية:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \quad (6.8)$$

مع الشروط الحدية:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{على الجهة السفلى})$$

$$u(x, 1) = f_2(x), \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{على الجهة العليا})$$

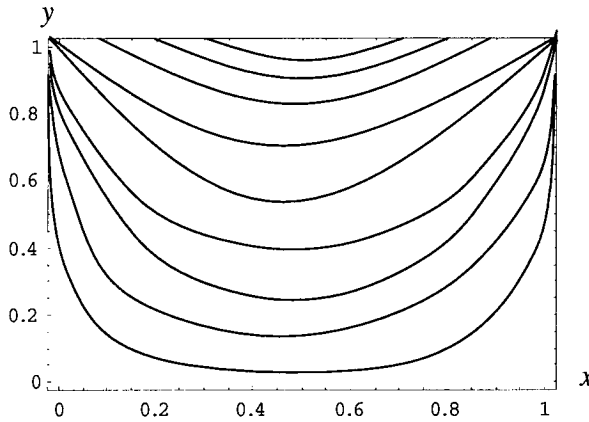
$$u(0, y) = f_3(y), \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{على جهة اليسار})$$

$$u(1, y) = f_4(y), \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{على جهة اليمين})$$

نبين في الشكل (6.3) المخطط البياني لـ $u(x, y)$ مع الدوال $f_1(x) = 0$ ،

$$f_4(x) = 0, \quad f_3(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin(\pi x)$$

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$



الشكل (6.3): منحنيات الحل $u(x, y) = C$ لمعادلة لابلاس .

6.2 المعادلات الزائدية Hyperbolic Equation

6.2.1 معادلة الموجة (Wave Equation):

من الأمثلة على المعادلة التفاضلية الجزئية زائدية القطع، نعتبر معادلة الموجة:

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b \quad (6.9)$$

مع الشروط الحدية:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad u(a,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq b \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq a \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (6.10)$$

تمثل معادلة الموجة الإزاحة u لاهتزاز خيط من المطاط مثبت الطرفين عند $x=0$ و $x=a$. كما ويمكن الحصول على الحلول التحليلية لمعادلة الموجة باستخدام متسلسلة فورييه.

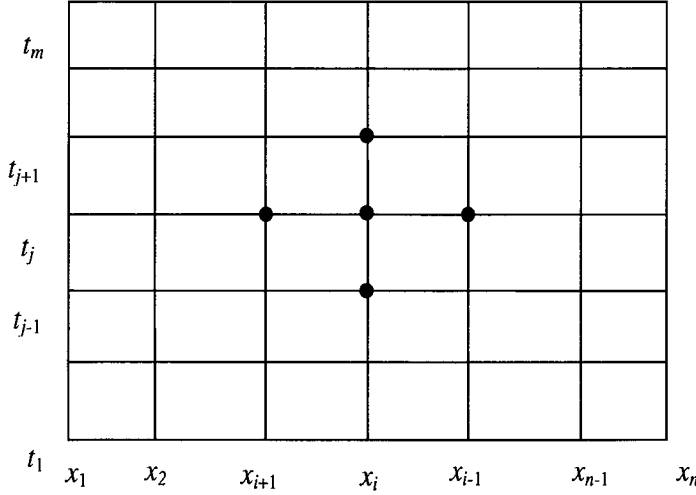
6.3 طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة:

نجزئ المستطيل $R = \{(x,t) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}$ في شبكة مؤلفة من $n-1$ إلى $m-1$ من المستطيلات أطوال أضلاعها $\Delta x = h$ ، $\Delta t = k$ ، كما هو موضح في الشكل (6.4). نبدأ من السطر الأسفل، حيث $t = t_1 = 0$ ، الحل المعلوم هو $u(x_i, t_1) = f(x_i)$. نستخدم طريقة معادلة الفروق لحساب التقريبات العددية:

$$\{u_{i,j} : i = 1, 2, \dots, n\};$$

في الأسطر المتتالية: $j = 2, 3, \dots, m$.

وقيمة الحل التحليلي عند نقاط الشبكة هي $u(x_i, t_j)$.



الشكل (6.4): شبكة لحل $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ فوق المستوي R .

صيغتا الفروق المركزية لتقريب $u_{tt}(x, t)$ و $u_{xx}(x, t)$ هما:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2) \quad (6.11)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (6.12)$$

شبكة القسمة منتظمة في كل سطر $x_{i+1} = x_i + h$ $x_{i-1} = x_i - h$ ، وهي منتظمة

في كل عمود $t_{j+1} = t_j + k$ $t_{j-1} = t_j - k$.

نحذف الحدين $O(k^2)$ ، $O(h^2)$ ، ونستخدم $u_{i,j}$ كتقريب لـ $u(x_i, t_j)$ في

المعادلتين (6.11)-(6.12)، ثم نعوض في المعادلة (6.9)، تنتج معادلة الفروق:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (6.13)$$

التي تقدم الحل العددي للمعادلة (6.9). للتبسيط وسهولة الاستخدام، نضع

$$r = \frac{ck}{h}, \text{ في (6.13) نحصل على العلاقة:}$$

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (6.14)$$

تستعمل المعادلة (6.14) لإيجاد السطر $j+1$ في الشبكة، مفترضين أن التقريبات

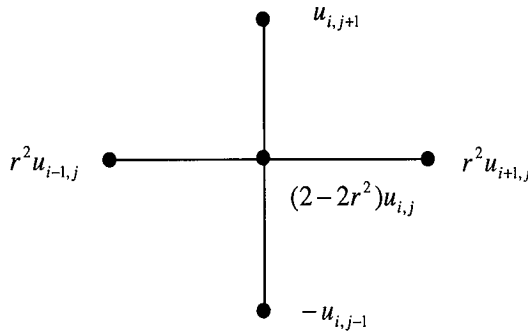
في كلا السطرين j و $j-1$ معلومة، ويمكن إعادة كتابتها:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad (6.15)$$

$$i=2,3,\dots,n-1$$

نبين في الشكل (6.5) القيم الأربع المعلومة في الجهة اليمنى للمعادلة (6.15)

التي تستخدم لتوليد التقريب $u_{i,j+1}$.



الشكل (6.5): مخطط الصيغة التقريبية لمعادلة الموجة (6.15).

ملاحظة: يجب الانتباه والحذر عند استخدام العلاقة (6.15)، فإذا كان الخطأ

الناشئ في إحدى مراحل العمليات الحسابية متضائلاً ويمكن إهماله، تدعى

الطريقة مستقرة. ولضمان استقرار الصيغة (6.15) من الضرورة أن يتحقق

$$r = \frac{ck}{h} \leq 1$$

6.3.1 القيم الابتدائية:

لحساب السطر الثالث في الصيغة (6.15) يجب توفر السطرين الابتدائيين للقيم الموافقة لـ j و $j-1$. وبما أن السطر الثاني لا يعطى عادة، تستخدم الدالة الحدية $g(x)$ للمساعدة في إنتاج التقريبات الابتدائية في السطر الثاني. نثبت $x=x_i$ عند الحد ونطبق صيغة تايلور من المرتبة الأولى لنشر $u(x,t)$ حول $u(x_i,0)$.

إن قيم $u(x_i,k)$ تحقق:

$$u(x_i,k) = u(x_i,0) + u_t(x_i,0)k + O(k^2), \quad (6.16)$$

وبالتالي نستخدم $u(x_i,0) = f(x_i) = f_i$ و $u_t(x_i,0) = g(x_i) = g_i$ في (6.16) لتقييم صيغة لحساب التقريبات العددية في السطر الثاني:

$$u_{i,2} = f_i + k g_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (6.17)$$

عادة، $u(x_i, t_2) \neq u_{i,2}$ ومثل هذه الأخطاء المقدمة في الصيغة (6.17) ستتمو خلال الشبكة ولا يمكن إهمالها عند تنفيذ التقريب (6.15). ولهذا يكون من المفيد استخدام خطوة صغيرة لـ k لكي لا تشمل قيم $u_{i,2}$ المعطاة بالعلاقة (6.17) على مقدار كبير من الخطأ المقطوع.

تملك الدالة الحدية $f(x)$ ، في أغلب الأحيان، مشتقات من المرتبة الثانية $f''(x)$ فوق المجال. في هذه الحالة، يكون لدينا $u_{xx}(x,0) = f''(x)$ ، وهي مهمة لاستخدام صيغة تايلور من المرتبة $n=2$ التي تساعد في إنشاء السطر الثاني. للقيام بهذا العمل، نعود لمعادلة الموجة ونستخدم العلاقة بين المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية، نحصل على:

$$u_{tt}(x_i, 0) = c^2 u_{xx}(x_i, 0) = c^2 f_{xx}(x_i) = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (6.18)$$

وباستدعاء صيغة تايلور من المرتبة الثانية:

$$u(x, k) = u(x, 0) + u_t(x, 0)k + \frac{u_{tt}(x, 0)k^2}{2} + O(k^3) \quad (6.19)$$

نطبق الصيغة (6.19) عند $x = x_i$ مع العلاقتين (6.17) - (6.18)، نحصل على:

$$u(x_i, k) = f_i + k g_i + \frac{c^2 k^2}{2h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + O(h^2)O(h^2) + O(k^3) \quad (6.20)$$

نستخدم $r = \frac{ck}{h}$ ، في (6.20) التي يمكن تبسيطها للحصول صيغة الفروق

لانجاز التقريبات العددية في السطر الثاني:

$$u_{i,2} = (1 - r^2)f_i + k g_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}), \quad (6.21)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

6.3.2 حل دالمبير (D'Alembert's Solution)

اكتشف العالم الفرنسي الرياضي جين لي روند دالمبير أن:

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (6.22)$$

هو حل لمعادلة الموجة (6.9)، فوق المجال $0 \leq x \leq a$ ، شريطة أن تكون

G'' , G' , F'' , F' جميعها موجودة و G , F لهما دور يساوي $2a$ ، ويخضعان

للعلاقات

$$G(z + 2a) = G(z), \quad G(-z) = -G(z), \quad F(z + 2a) = F(z), \quad F(-z) = -F(z)$$

مهما تكن z . نستطيع التأكد من ذلك بالتعويض المباشر. تعطى المشتقات الجزئية

من المرتبة الثانية للحل (6.22) كمايلي:

$$u_{tt}(x,t) = c^2 F''(x+ct) + c^2 G''(x-ct), \quad (6.23)$$

$$u_{xt}(x,t) = F''(x+ct) + G''(x-ct), \quad (6.24)$$

وبتعويض (6.23)، (6.24) في (6.9) تنتج العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= c^2 F''(x+ct) + c^2 G''(x-ct) \\ &= c^2 [F''(x+ct) + G''(x-ct)] \\ &= c^2 u_{xx}(x,t) \end{aligned}$$

والحل الخاص الذي له القيم الحدية $u(x,0) = f(x)$ ، $u_t(x,0) \equiv 0$ ، يحتاج أن

يكون $F(x) = G(x) = f(x)/2$.

مثال 1: استخدم طريقة الفروق المحدودة لحل معادلة الموجة لخط يهتز:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5 \quad (6.25)$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.26)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

الحل: نختار $h=0.1$ ، و $k=0.05$ ، ولدينا من المسألة $c=2$ ، وبالتالي

$$r = \frac{ck}{h} = \frac{2 \cdot 0.05}{0.1} = 1$$

وبما أن $g(x)=0$ و $r=1$ ، نعوض في الصيغة

(6.21) لتوليد السطر الثاني:

$$\begin{aligned}
u_{i,2} &= (1-r^2)f_i + k g_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \\
&= (1-1^2)f_i + (0.05)(0) + \frac{1^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \\
&= \frac{(f_{i+1} + f_{i-1})}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, 9
\end{aligned} \tag{6.27}$$

نعوض أيضا $r=1$ في المعادلة (6.15)، نستنتج معادلة الفروق المبسطة:

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1} &= (2-2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \\
&= (2-2*1^2)u_{i,j} + 1^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \\
&= u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

ولحساب تقريبات $u(x,t)$ نطبق الصيغتين (6.27)، (6.28) على التالي، ومن أجل ذلك نلاحظ أولاً أن الشبكة وفق الخطوات المفروضة تشكل تجزئة في النقاط $x_i = 0.1(i-1)$, $i = 1, \dots, 10$ ، $t_i = 0.05(i-1)$, $i = 1, \dots, 11$ ، وعندئذ نحصل على تقريبات السطر الأول مباشرة من شروط البدء في المسألة ويتوافق ذلك مع $t_1=0$ ، إذن:

$$\begin{aligned}
u(x_i, 0) &= f(x_i) = \sin(\pi x_i) + \sin(2\pi x_i) \equiv u_{i,1} \rightarrow \\
u(x_1, 0) &= \sin(\pi x_1) + \sin(2\pi x_1) = \sin(\pi * 0) + \sin(2\pi * 0) = u_{1,1} = 0 \\
u(x_2, 0) &= \sin(\pi x_2) + \sin(2\pi x_2) = \sin(\pi * 0.1) + \sin(2\pi * 0.1) \\
&= u_{2,1} = 0.896802 \\
u(x_3, 0) &= \sin(\pi x_3) + \sin(2\pi x_3) = \sin(\pi * 0.2) + \sin(2\pi * 0.2) \\
&= u_{3,1} = 1.53884 \\
u(x_4, 0) &= \sin(\pi x_4) + \sin(2\pi x_4) = u_{4,1} = 1.76007
\end{aligned}$$

$$u(x_5, 0) = \sin(\pi * 0.4) + \sin(2\pi * 0.4) = u_{5,1} = 1.53884$$

$$u(x_6, 0) = \sin(\pi * 0.5) + \sin(2\pi * 0.5) = u_{6,1} = 1.00000$$

$$u(x_7, 0) = \sin(\pi * 0.6) + \sin(2\pi * 0.6) = u_{7,1} = 0.363271$$

$$u(x_8, 0) = \sin(\pi * 0.7) + \sin(2\pi * 0.7) = u_{8,1} = -0.14204$$

$$u(x_9, 0) = \sin(\pi * 0.8) + \sin(2\pi * 0.8) = u_{9,1} = -0.363271$$

$$u(x_{10}, 0) = \sin(\pi * 0.9) + \sin(2\pi * 0.9) = u_{10,1} = -0.278768$$

أيضا نحسب تقريبات السطر الثاني من العلاقة (6.27) ويتوافق هذا مع

$$t_2 = 0.05$$

$$\begin{aligned} u_{i,2} &= \frac{(f_{i+1} + f_{i-1})}{2} = \\ &= \frac{\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(2\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1}) + \sin(2\pi x_{i-1})}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2,2} &= \frac{\sin(\pi x_3) + \sin(2\pi x_3) + \sin(\pi x_1) + \sin(2\pi x_1)}{2} \\ &= \frac{\sin(\pi * 0.2) + \sin(2\pi * 0.2) + \sin(\pi * 0.0) + \sin(2\pi * 0.0)}{2} \\ &= 0.769421 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3,2} &= \frac{\sin(\pi x_4) + \sin(2\pi x_4) + \sin(\pi x_2) + \sin(2\pi x_2)}{2} \\ &= \frac{\sin(\pi * 0.3) + \sin(2\pi * 0.3) + \sin(\pi * 0.1) + \sin(2\pi * 0.1)}{2} \\ &= 1.32844 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{4,2} &= \frac{\sin(\pi * 0.4) + \sin(2\pi * 0.4) + \sin(\pi * 0.2) + \sin(2\pi * 0.2)}{2} \\ &= 1.53884 \end{aligned}$$

بالمتابعة بنفس الأسلوب نجد:

$$\begin{aligned} u_{5,2} &= 1.38004, & u_{6,2} &= 0.951057, & u_{7,2} &= 0.42898 \\ u_{8,2} &= 0.00000, & u_{9,2} &= -0.210404, & u_{10,2} &= -0.181636 \end{aligned}$$

أما الحسابات التقريبية الأهم فهي للأسطر المتبقية التي يمكن حسابها من العلاقة (6.28)، وبالتالي كما هو معلوم السطر الثالث موافق لـ $t_3=0.1$ ، أي $j=2$ إذن بتطبيق العلاقة المذكورة:

$$u_{i,3} = u_{i+1,2} + u_{i-1,2} - u_{i,1}$$

نتج لدينا تقريبات السطر الثالث من أجل $i=2,3,\dots,10$:

$$u_{2,3} = u_{3,2} + u_{1,2} - u_{2,1} = 1.32844 + 0.0 - 0.896802 = 0.431636$$

حيث من شروط البدء لدينا $u(0,t) = 0 \Leftrightarrow u(x_1, t_2) = u_{1,2} = 0$ ، نتابع إيجاد بقية تقريبات السطر الثالث:

$$u_{3,3} = u_{4,2} + u_{2,2} - u_{3,1} = 1.538842 + 0.769421 - 1.53884 = 0.769421,$$

$$u_{4,3} = u_{5,2} + u_{3,2} - u_{4,1} = 1.38004 + 1.32844 - 1.76007 = 0.94841,$$

$$u_{5,3} = u_{6,2} + u_{4,2} - u_{5,1} = 0.951057 + 1.53884 - 1.53884 = 0.951056,$$

$$u_{6,3} = u_{7,2} + u_{5,2} - u_{6,1} = 0.42898 + 1.38004 - 1 = 0.80902,$$

$$u_{7,3} = u_{8,2} + u_{6,2} - u_{7,1} = 0.0 + 0.951057 - 0.363271 = 0.587785,$$

$$u_{8,3} = u_{9,2} + u_{7,2} - u_{8,1} = -0.210404 + 0.42898 - (-0.14204) = 0.360616$$

$$u_{9,3} = u_{10,2} + u_{8,2} - u_{9,1} = -0.181636 + 0.0 - (-0.363271) = 0.181635,$$

$$u_{10,3} = u_{11,2} + u_{9,2} - u_{10,1} = 0.0 - 0.210404 - (-0.278768) = 0.068364,$$

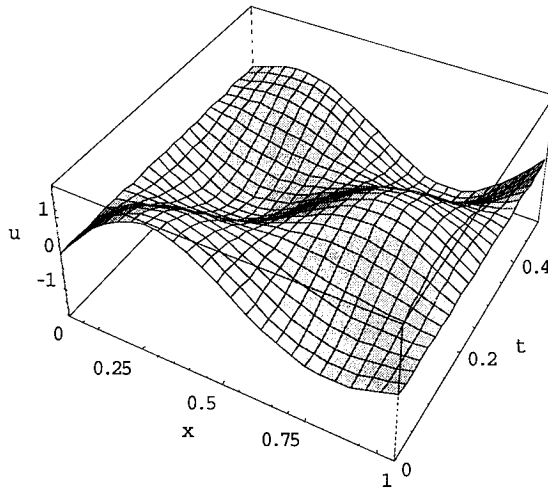
حيث استخدمنا من شروط البدء $u(1,t) \equiv u_{11,2} = 0 \Leftrightarrow u(1,t) = 0$

ندرج في الجدول (6.1) حسابات الحل التقريبي لمعادلة الموجة (6.25) مع

الشروط الحدية (6.26).

نرسم في الشكل (6.6) المخطط البياني في البعد الثالث لاهتزاز الخيط الذي يمثل

معادلات الموجة (6.25) - (6.26).



الشكل (6.6) المخطط البياني لاهتزاز خيط للمسألة في المثال 1.

الجدول (6.1): الحلول العددية لمعادلة الموجة (6.25) مع الشروط الحدية (6.26)

$t_j \backslash x_i$	x_2	x_3	x_4	x_5
$t_1=0.0$	0.896802	1.538842	1.760074	1.538842
$t_2=0.05$	0.769421	1.328438	1.538842	1.380037
$t_3=0.10$	0.431636	0.769421	0.948401	0.951056
$t_4=0.15$	0.000000	0.051599	0.181636	0.377381
$t_5=0.20$	-0.380037	-0.587785	-0.519421	-0.181636
$t_6=0.25$	-0.587785	-0.951056	-0.951056	-0.587785
$t_7=0.30$	-0.571020	-0.951056	-1.019421	-0.769421
$t_8=0.35$	-0.363271	-0.639384	-0.769421	-0.740653
$t_9=0.40$	-0.068364	-0.181636	-0.360616	-0.587785
$t_{10}=0.45$	0.181636	0.210404	0.000000	-0.428980
$t_{11}=0.50$	0.278768	0.363271	0.142040	-0.363271

تتمة حسابات الجدول (6.1)

$t_j \backslash x_i$	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$t_1=0.0$	1.000000	0.3632471	-0.142040	-0.363271	-0.278768
$t_2=0.05$	0.951056	0.428980	0.000000	-0.210404	-0.181636
$t_3=0.10$	0.809017	0.587785	0.360616	0.181636	0.068364
$t_4=0.15$	0.587785	0.740653	0.769421	0.639384	0.363271
$t_5=0.20$	0.309017	0.769421	1.019421	0.951056	0.571020
$t_6=0.25$	0.000000	0.587785	0.951056	0.951056	0.587785
$t_7=0.30$	-0.309017	0.181636	0.519421	0.587785	0.380037
$t_8=0.35$	-0.587785	-0.377381	-0.181636	-0.051599	0.000000
$t_9=0.40$	-0.809017	-0.951056	-0.948401	-0.769421	-0.431636
$t_{10}=0.45$	-0.951056	-1.380037	-1.538842	-1.328438	-0.769421
$t_{11}=0.50$	-1.000000	-1.538842	-1.760074	-1.538842	-0.896802

مثال 2: استخدم طريقة الفروق المحدودة لحل معادلة الموجة لخط يهتز:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5 \quad (6.29)$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{3}, & 0 \leq x \leq 3/5 \\ \frac{5-5x}{2}, & 3/5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (6.30)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

الحل: بداية نختار $h=0.1$ و $k=0.05$ ولدينا من المسألة $c=2$ وبالتالي

$$r = \frac{ck}{h} = \frac{2 \cdot 0.05}{0.1} = 1, \quad \text{وبما أن } g(x)=0 \text{ و } r=1, \text{ نطبق الصيغة (6.27)}$$

لتوليد السطر الثاني:

$$u_{i,2} = \frac{(f_{i+1} + f_{i-1}))}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, 9$$

والصيغة (6.28):

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$$

لتوليد بقية الأسطر المتتالية. نلاحظ أن الشبكة تستخدم نفس التجزئة في المثال 1

$$\text{وعندئذ } x_i = 0.1(i-1), \quad i = 1, \dots, 10, \quad t_i = 0.05(i-1), \quad i = 1, \dots, 11$$

نحسب تقريبات السطر الأول مباشرة من شروط البدء في المسألة، ويتوافق ذلك

مع $t_1=0$ ، إذن:

$$u(x_i,0) = u_{i,1} = f(x_i) = \begin{cases} \frac{5x_i}{3}, & 0 \leq x_i \leq 3/5 \\ \frac{5-5x_i}{2}, & 3/5 \leq x_i \leq 1 \end{cases}$$

$$u(x_1, 0) = \frac{5x_1}{3} = \frac{5*0}{3} = u_{1,1} = 0.0$$

$$u(x_2, 0) = \frac{5x_2}{3} = \frac{5*0.1}{3} = u_{2,1} = 0.166667$$

$$u(x_3, 0) = \frac{5x_3}{3} = \frac{5*0.2}{3} = u_{3,1} = 0.333333$$

$$u(x_4, 0) = \frac{5x_4}{3} = \frac{5*0.3}{3} = u_{4,1} = 0.5$$

$$u(x_5, 0) = \frac{5x_5}{3} = \frac{5*0.4}{3} = u_{5,1} = 0.666667$$

$$u(x_6, 0) = \frac{5x_6}{3} = \frac{5*0.5}{3} = u_{6,1} = 0.833333$$

$$u(x_7, 0) = \frac{5x_7}{3} = \frac{5*0.6}{3} = u_{7,1} = 1.0$$

$$u(x_8, 0) = \frac{5-5x_8}{2} = \frac{5-5*0.7}{2} = u_{8,1} = 0.75$$

$$u(x_9, 0) = \frac{5-5x_9}{2} = \frac{5-5*0.8}{2} = u_{9,1} = 0.5$$

$$u(x_{10}, 0) = \frac{5-5x_{10}}{2} = \frac{5-5*0.9}{2} = u_{10,1} = 0.25$$

أيضا نحسب تقريبات السطر الثاني من العلاقة (6.27)، ويكون في هذا السطر

إذن: $t_2=0.05$

$$u_{i,2} = \frac{(f_{i+1} + f_{i-1}))}{2} = \frac{\frac{5x_{i+1}}{3} + \frac{5x_{i-1}}{3}}{2} = \frac{5(x_{i+1} + x_{i-1}))}{6},$$

$$u_{2,2} = \frac{5(x_3 + x_1)}{6} = \frac{5(0.2+0.0)}{6} = 0.166667$$

$$u_{3,2} = \frac{5(x_4 + x_2)}{6} = \frac{5(0.3+0.1)}{6} = 0.333333$$

$$u_{4,2} = \frac{5(x_5 + x_3)}{6} = \frac{5(0.4+0.2)}{6} = 0.5$$

$$u_{5,2} = \frac{5(x_6 + x_4)}{6} = \frac{5(0.5 + 0.3)}{6} = 0.666667$$

$$u_{6,2} = \frac{5(x_7 + x_5)}{6} = \frac{5(0.6 + 0.4)}{6} = 0.833333$$

$$u_{7,2} = \frac{\frac{5-5x_8}{2} + \frac{5x_6}{3}}{2} = \frac{15-15x_8+10x_6}{12} = 0.791667$$

$$u_{8,2} = \frac{\frac{5-5x_9}{2} + \frac{5x_7}{3}}{2} = \frac{15-15x_9+10x_7}{12} = 0.75$$

$$u_{9,2} = \frac{\frac{5-5x_{10}}{2} + \frac{5-5x_8}{2}}{2} = \frac{10-5x_{10}-5x_8}{4} = 0.5$$

$$u_{10,2} = \frac{10-5x_{11}-5x_9}{4} = \frac{10-5*1-5*0.8}{4} = 0.25$$

أما الحسابات التقريبية الأهم كما رأينا فهي للأسطر المتبقية التي يمكن حسابها من العلاقة (6.28)، وبالتالي كما هو معلوم فإن السطر الثالث موافق لـ $t_3=0.1$ ، أي $j=2$ ، إذن بتطبيق العلاقة المذكورة تنتج لدينا التقريبات:

$$u_{i,3} = u_{i+1,2} + u_{i-1,2} - u_{i,1}$$

$$u_{2,3} = u_{3,2} + u_{1,2} - u_{2,1} = 0.33333 + 0.0 - 0.166667 = 0.166666$$

حيث من شروط البدء لدينا $u(0,t) = 0 \Leftrightarrow u(x_1, t_2) = u_{1,2} = 0$ ، نتابع لإيجاد

بقية تقريبات السطر الثالث:

$$u_{3,3} = u_{4,2} + u_{2,2} - u_{3,1} = 0.5 + 0.666667 - 0.333333 = 0.833333,$$

$$u_{4,3} = u_{5,2} + u_{3,2} - u_{4,1} = 0.666667 + 0.333333 - 0.5 = 0.5,$$

$$u_{5,3} = u_{6,2} + u_{4,2} - u_{5,1} = 0.833333 + 0.5 - 0.666667 = 0.666666,$$

$$u_{6,3} = u_{7,2} + u_{5,2} - u_{6,1} = 0.791667 + 0.66667 - 0.83333 = 0.625001,$$

$$u_{7,3} = u_{8,2} + u_{6,2} - u_{7,1} = 0.75 + 0.833333 - 1.0 = 0.583333,$$

$$u_{8,3} = u_{9,2} + u_{7,2} - u_{8,1} = 0.5 + 0.791667 - 0.75 = 0.541667$$

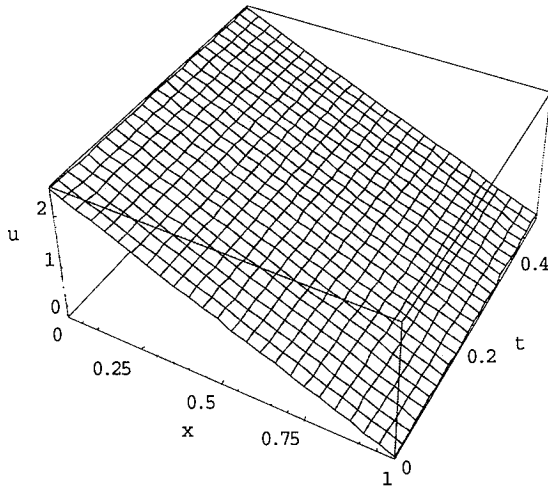
$$u_{9,3} = u_{10,2} + u_{8,2} - u_{9,1} = 0.25 + 0.75 - 0.5 = 0.5,$$

$$u_{10,3} = u_{11,2} + u_{9,2} - u_{10,1} = 0.0 + 0.5 - 0.25 = 0.25,$$

حيث استخدمنا من شروط البدء $u(1,t) = 0 \Leftrightarrow u(1,2) \equiv u_{11,2} = 0$.

ندرج في الجدول (6.2) حسابات الحل التقريبي لمعادلة الموجة (6.29) مع الشروط الحدية (6.30).

نرسم في الشكل (6.7) المخطط البياني في البعد الثالث لاهتزاز خيط ممثل بالمعادلات (6.29) - (6.30).



الشكل (6.7) المخطط البياني لاهتزاز خيط للمسألة في المثال 2.

الجدول (6.2): الحلول العددية لمعادلة الموجة (6.29) مع الشروط الحدية (6.30)

$t_j \backslash x_i$	x_2	x_3	x_4	x_5
$t_1=0.0$	0.166667	0.333333	0.5	0.666667
$t_2=0.05$	0.166667	0.333333	0.5	0.666667
$t_3=0.10$	0.166667	0.333333	0.5	0.666667
$t_4=0.15$	0.166667	0.333333	0.5	0.458334

تتمة حسابات الجدول (6.2)

$t_j \backslash x_i$	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$t_1=0.0$	0.833333	1.0	0.75	0.5	0.25
$t_2=0.05$	0.833333	0.791667	0.75	0.5	0.25
$t_3=0.10$	0.625001	0.583333	0.541667	0.5	0.25
$t_4=0.15$	0.916666	0.375001	0.333333	0.291667	0.25

تمارين

1- أثبت بالتعويض المباشر أن:

$$u(x,t) = \sin(n\pi x) \cos(2n\pi t)$$

هو حل لمعادلة الموجة $u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t)$ ، من أجل كل عدد صحيح

موجب $n=1,2,\dots$.

2- أثبت بالتعويض المباشر أن:

$$u(x,t) = \sin(n\pi x) \cos(cn\pi t)$$

هو حل لمعادلة الموجة $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ ، من أجل كل عدد صحيح

موجب $n=1,2,\dots$.

3- استخدم طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0.5$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

بالخطوات $k=0.1$ ، $h=0.2$ و $r=1$ ، وطبق الصيغتين (6.27) و (6.28)

لحساب التقريبات لـ $u(x,t)$ من أجل $0 \leq t \leq 0.5$ ، إذا علمت أن السطر

الابتدائي هو:

$$0.00000, 0.587785, 0.951057, 0.951057, 0.857785, 0.00000$$

4- استخدم طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلة $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ ، من

أجل $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ ، بالشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

وفق الخطوات $h=0.1, k=0.1$.

5- أعد حل المسألة 4 ولكن باستخدام الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2-2x & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

مع الخطوات: $h=0.1, k=0.05$.

المراجع

1. BUCHANAN J. and P. R., Turner, *Numerical Methods and Analysis*, McGraw-Hill, Inc. New York, (1992).
2. BURDEN, R. L. and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS-KENT, Boston Massachusetts, (1993), 559-587.
3. BURDEN, R. L., and F., J., Douglas, *Numerical Analysis*, 7th ed., Brooks/ColeThomson, Pacific Grove, CA, (2001).
4. HAMMING, R., W., *Introduction to Applied Numerical Analysis*, Mcgraw-hill book company, New York, (1971).
5. JAIN, M. K., *Numerical solution of differential equations*, Wiley Eastern Limited, (1991).
6. KORNEICHUK, N., *Exact constants in approximation theory*, Cambridge University Press, New York, (1991).
7. MATHEWS J. H., *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice-Hall international, Inc., California State University, Fullerton, (1992).
8. YANG, W. Y., W., Cao, Tac-Sang Chung, and J., Morris, *Applied Numerical Methods Using MATLAB*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2005).
9. KORNEICHUK, N, *Algorithm design*, Wiley Publishing Company, New York, (2001).
10. BAASE, S., *Computer Algorithms Introduction to Design and Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, (1993).
11. Johnsonbaugh (1998), R., *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York.

المصطلحات العلمية

A

Absolute Error	خطأ مطلق
Absolute Stability	استقرار مطلق
Absolute Value	قيمة مطلقة
Accuracy	الدقة
Actual	فعلي
Algorithm	خوارزمية
Analytic Solution	حل تحليلي
Approximate	تقريبي
Approximate Solution	حل تقريبي

B

Basis	قاعدة
Behavior	سلوك
Bisection Method	طريقة تنصيف المجال
Boundary conditions	شروط حدية
Boundary Value Problem	مسألة القيمة الحدية

C

Central-Difference Formulas	صيغ الفروق المركزية
Chebyshev Nodes	عقد تشيبشيف
Chebyshev Polynomials	كثيرات حدود تشيبشيف
Closed interval	مجال مغلق
Closer to	أقرب إلى
Coefficients	معاملات
Column	عمود

Computational Formula	صيغة حسابية
Computer	حاسب آلي
Computer Accuracy	دقة الكمبيوتر
Constant	ثابت
Continuity	الاستمرارية
Continuous	مستمر
Control	تحكم
Convergence	تقارب
Convergence analysis	تحليل التقارب
Convergence Integral	تكامل متقارب
Corollary	نتيجة-فرضية
Cramer's Rule	قاعدة غرامر
Cubic	تكعيبي
Classical	تقليدي

D

D'Alembert's Solution	حل دالمبير
Data	معطيات (بيانات)
Decimal Form	صيغة عشرية
Discrete Data	معطيات منفصلة
Discrete Function	دالة منفصلة
Definite	محدود
Definite integral	تكامل محدود
Definition	تعريف
Degree	درجة
Degree of Precision	درجة الدقة

Derivative	اشتقاق
Determinant	معين (محدد)
Difference	فروق
Difference Equation	معادلة فروق
Difference Table	جدول الفروق
Differentiable	قابل للمفاضلة
Differential Equations	معادلات تفاضلية
Direct	مباشر
Displacement	إزاحة
Distinct	متمايزة
Divergent Iteration	تكرار متباعد
Double Precision	دقة مضاعفة
Double Root	جذر مضاعف

E

Elimination	حذف
Ellipse Equation	معادلة قطع ناقص
Implicit Method	طريقة ضمنية
Error	خطأ
Error Analysis	تحليل الخطأ
Euler's Method	طريقة أولر
Equally Spaced Points	نقاط متساوية البعد فيما بينها
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Explicit Method	طريقة صريحة
Exact Solution	حل دقيق

F

Figure	شكل
Finite- Difference Method	طريقة الفروق المنتهية
Fitting Curve	المنحني الملام
Fixed point	نقطة ثابتة
Fixed value	قيمة ثابتة
Fixed-Point Iteration	تكرار النقطة الثابتة
Floating-Point	نقطة عائمة
Forward Difference	فرق تقديمي
Fourier series	متسلسلة فورييه
Function approximation	تقريب دالة

G

Gauss-Legendre Integration	تكامل غوص ليجندر
Gauss-Legendre Quadrature	تربيعية غوص ليجندر
Global Error	خطأ شامل (كلي)
Graph	خط بياني
Grid	شبكة

H

Heat Equation	معادلة الحرارة
Heun's Method	طريقة هيون
Higher-degree	درجة عالية
Horner's Method	طريقة هورنر
Hyperbolic Equation	معادلة زائنية القطع

I

Ill-Conditioned	معتلة الشرطية

Independent	مستقل
Index	دليل
Inequality	متراجحة (متباينة)
Infinite	غير محدود
Infinity	لانهاية
Initial Value Problem	مسألة القيمة الابتدائية
Information Theory	نظرية المعلومات
Instability	عدم استقرار
Integer Number	عدد حقيقي
Interpolation	استيفاء داخلي
Iteration	تكرار

J

Jacobian Matrix	مصفوفة جاكوبي

L

Lagrange Approximation	تقريب لاغرانج
Lagrange Coefficients	معاملات لاغرانج
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Least-Squares	المربعات الصغرى
Least-Squares Polynomial	كثيرة حدود المربعات الصغرى
Legendre Polynomials	حدوديات ليجنדר
Lemma	تمهيدية
Lipschitz Constant	ثابت ليبشيتز
Local Error	خطأ موضعي

M

Matrix Inversion	مقلوب مصفوفة

Maximization	الأعظمية
Median Value	القيمة المتوسطة
Mean Value Theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Midpoint	نقطة وسطى
Minimum	قيمة صغرى
Model	نموذج
Modified Newton Method	طريقة نيوتن المعدلة
Monotone	مطرّد
Multiple Root	جذر مضاعف

N

Newton method	طريقة نيوتن
Newton-Raphson Method	طريقة نيوتن رافسون
Nodes	عقد
Nonlinear Equations	معادلات غير خطية
Nonlinear System	جملّة معادلات غير خطية
Norm	معيّار (نظيم)
Numerical	عددي
Numerical Analysis	تحليل عددي
Numerical Differentiation	تفاضل عددي
Numerical Integration	تكامل عددي
Numerical Method	طريقة عددية

O

One-Dimensional	وحيد البعد
Order of Approximation	مرتبة التقريب
Orthogonal	تعامد

Orthogonal Functions

توابع متعامدة

Orthogonal Property

خاصية التعامد

Oscillations

تذبذب (اهتزاز)

P

Parabola

قطع مكافئ

Parabolic

القطع المكافئ

Partial

جزئي

Partial Differential Equations

معادلات تفاضلية جزئية

Phase

طور-صفحة

Polynomial

كثيرة حدود

Positive

موجب

Program

برنامج

Proof

برهان

Properties

خصائص

Proposition

فرضية

Prototype

النموذج الأصلي

Q

Quadrature Formulas

صيغ تربيعية

Quasilinear

شبه خطية

R

Rate of Convergence

معدل التقارب

Real Number

عدد حقيقي

Rectangular Rule

قاعدة المستطيل

Relation

علاقة

Relative Error

خطأ نسبي

Representation	تمثيل
Root lies in	الجذر يقع في
Root of the equation	جذر المعادلة
Rounding off	التدوير
Round-off Error	خطأ التدوير
Row	سطر
Runge-Kutta method	طريقة رانج-كوتا

S

Scalar	سلمي
Secant Method	طريقة القواطع
Second-Order	المرتبة الثانية
Simple Root	جذر بسيط
Simpson Rule	قاعدة سيمسون
Singular	شاذ
Smooth	أملس
Speed of Convergence	تسريع التقارب
Stability	استقرار
Step	خطوة
Step-Size	طول الخطوة
Substitute	يستعيز - يستبدل
Symbol	رمز

T

Taylor Series	متسلسلة تايلور
Taylor's Theorem	مبرهنة تايلور
The m st Derivative of	المشتق من المرتبة m

The $x y$ - Plane	المستوي $x y$
Theorem	مبرهنة
Tolerance	تفاوت
Transformation	تحويل
Trapezoidal Rule	قاعدة أشباه المنحرفات
Truncation Error	خطأ الاقتطاع
Typical	نموذجي
U	
Unbounded	غير محدد
Uniformly	منتظم
Unique	وحيد
Unique Solution	حل وحيد
V	
Value	قيمة
Variable	متغير
Vibrating String	خيط اهتزاز
X	
x -Axis	المحور x
W	
Wave Equation	معادلة الموجة
Weights	أوزان
Weighting Function	دالة وزن
Z	
Zero of the Function	صفر الدالة
Zigzag	خط متعرج

لجنة التقدير العلمية:

الأستاذ المساعد الدكتور محمد علي	كلية العلوم جامعة تشرين
الأستاذ المساعد الدكتور حامد عباس	كلية العلوم جامعة البعث
الدكتور نضال حسن	كلية العلوم جامعة البعث

المدقق اللغوي:

الأستاذ الدكتور يوسف جابر	كلية الآداب جامعة تشرين

www.facebook.com/groups/Applied-Mathematics-Tishreen-University/