منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

أسس التحليل العقدي

التحليل (٧)

الدكتور
شحادة الأسدي
أستاذ في قسم الرياضيات

السنة الثالثة
فرع الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٠٨ هـ - ١٩٨٨ م

الفصل الأول

نظرية الروابب

١ — النقاط الشاذة المنعزلة ذات الطبيعة الواحدة

سندرس في هذه الفقرة النقاط التي يفقد فيها التابع تحليليته كما سندرس سلوك التابع في جوار موخوذ لتلك النقاط وفقاً لسلسلة لوران .

تعريف (١) . نقول عن النقطة $a \in \bar{C}$ أنها نقطة **شاذة منعزلة بالنسبة** للتابع $f(z)$ ، إذا اوجد جوار موخوذ لهذه النقطة (مجموعةالنقاط $0 < |z-a| < r$ إذا كانت a محدودة أو مجموعة النقاط $R < |z| < \infty$ إذا كانت $a = \infty$) بحيث يكون فيه التابع f تحليلياً .

وتصنف النقاط الشاذة المنعزلة في ثلاثة نماذج تبعاً لسلوك التابع $f(z)$ حين الاقتراب من تلك النقاط .

تعريف (٢) . تسمى النقطة الشاذة المنعزلة a بالنسبة للتابع $f(z)$:

(I) **نقطة قابلة للاصلاح** إذا كانت النهاية $\lim_{z \to a} f(z) = A$ محدودة .

(II) **قطباً** إذا كانت $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$

(III) **نقطة شاذة أساسية** إذا لم توجد نهاية محدودة أو غير محدودة للتابع $f(z)$ عندما $z \to a$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (2)$$

لزوم الشرط . لتكن a نقطة قابلة للاصلاح ، عندئذٍ يكون $\lim f(z) = A$ ، وبالتالي فإن التابع $f(z)$ محدود في جوار موخوذ للنقطة a ، $0 < |z-a| < R$ ، ليكن في هذا الجوار $|f(z)| \leqslant M$. لنأخذ أي عدد ρ حيث $0<\rho<R$ عندئذٍ تحقق أمثال نشر لوران المتراجحة(*) :

$$|c_n| \leqslant M/\rho^n \qquad (n = 0, \pm -1, \pm 2, \ldots)$$

فإذا كان $n<0$ ، فإن الطرف الأيمن من المتراجحة ينتهي إلى الصفر عندما $\rho \leftarrow 0$ ، وبالتالي فإن الطرف الأيسر ينتهي إلى الصفر لكونه غير متعلق بـــ ρ . أي أن $c_n = 0$ من أجل $n<0$ وبالتالي فإن نشر لوران للتابع $f(z)$ يكون من الشكل (2) .

كفاية الشرط . ليكن (2) نشر لوران للتابع $f(z)$ في جوار موخوذ للنقطة a . إن هذا النشر هو نشر تايلور للتابع $f(z)$ وبالتالي فإن :

$$\lim_{z \to a} f(z) = c_0$$

أي أن النقطة a هي نقطة قابلة للإصلاح .

ملاحظة . بنفس الطريقة نبرهن النظرية الآتية :

نظرية (١) . الشرط اللازم والكافي كي تكون النقطة الشاذةالمنعزلة a نقطة قابلة الاصلاح هو أن يكون التابع $f(z)$ محدوداً في جوار موخوذ للنقطة a . بتمديد التابع $f(z)$ على النقطة القابلة للاصلاح a وبوضع $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$ نحصل على تابع تحليلي في النقطة a (أي أننا أزلنا الشذوذ) وهذا مايعلل تسمية النقطة الشاذة في هذه الحالة بنقطة قابلة للاصلاح . مستقبلاً سنعتبر النقاط غير الشاذة بالنسبة لتابع $f(z)$ نقاطاً عادية

(*) تسمى هذه المتراجحة بمتراجحة كوشي لأمثال سلسلة لوران للتابع $f(z)$ وتبرهن تماماً بنفس الطريقة التي برهنا بها متراجحة كوشي لأمثال سلسلة تايلور .

نظرية (٢) . الشرط اللازم والكافي كي تكون النقطة الشاذة المنعزلة $a \neq \infty$ قطباً للتابع $f(z)$ ، هو أن يكون نشر لوران في جوار للنقطة a للتابع $f(z)$ من الشكل :

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad , N > 0 \qquad (3)$$

لزوم الشرط . لتكن النقطة a قطباً . بما أن $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ فإنه يوجد جوار موخوذ في النقطة a يكون فيه التابع $f(z)$ تحليلياً ولا يساوي الصفر . وفي هذا الجوار يكون التابع $\varphi(z) = 1/f(z)$ تحليلياً كما أن $\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0$ ، وبالتالي فإن النقطة a قابلة للاصلاح (صفر) بالنسبة للتابع $\varphi(z)$ وفي ذلك الجوار يتحقق النشر الآتي :

$$\varphi(z) = b_N (z-a)^N + b_{N+1} (z-a)^{N+1} + \ldots \qquad (b_N \neq 0)$$

وعندئذٍ يكون لدينا في ذلك الجوار

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \ldots} \qquad (4)$$

إضافة إلى أن الحد الثاني في الجداء هو تابع تحليلي في النقطة a ، وهذا بدوره يعني إمكانية نشر ذلك الحد في سلسلة تايلور . أي أن :

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \ldots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots$$

$$(c_{-N} = 1/b_N \neq 0)$$

وبتعويض هذا النشر في العلاقة (4) نجد :

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

وهذا هو نشر لوران للتابع $f(z)$ في الجوار الموخوذ في النقطة a .

كفاية الشرط . يكن التابع $f(z)$ ممثلاً بنشر لوران (3) في جوار موخوذللنقطة a، وليكن أيضاً $c_{-N}\neq 0$. عندئذ يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في ذلك الجوار، وكذلك التابع $\varphi(z) = (z-a)^N f(z)$ ويكون نشر التابع الأخير في ذلك الجوار هو :

$$\varphi(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots .$$

من الواضح بأن النقطة a قابلة للإصلاح وأن $\lim_{z\to a}\varphi(z) = c_{-N} \neq 0$ وعندئذٍ فإن التابع $f(z) = \varphi(z)/(z-a)^N$ ينتهي إلى اللانهاية عندما تنتهي z إلى a : $z\leftarrow a$ وبالتالي فإن النقطة a قطب للتابع $f(z)$.

سنذكر الآن الصلة بين الأقطاب والأصفار .

نظرية (٢) . الشرط اللازم والكافي كي تكون النقطة a قطباً للتابع $f(z)$ هو أن يكون التابع $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ ، $\varphi \neq 0$ ، تحليلياً في جوار للنقطة a وأن يكون $\varphi(a) = 0$.

إنلزوم الشرط قد برهن في النظرية (٢) . لنبرهن الآن الكفاية . إذا كان التابع $\varphi(z)$ غير مطابق للصفر وتحليلياً في النقطة a وكان كذلك $\varphi(a) = 0$ فإنه : (إستناداً إلى نظرية الوحدانية) ، يوجد جوار موخوذ للنقطة a يكون فيه التابع $\varphi(z) \neq 0$ ، وفي ذلك الجوار يكون التابع $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ تحليلياً . وبالتالي فإن النقطة a هي نقطة شاذة منعزلة بالنسبة للتابع $f(z)$ ، وبما أن $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ فإن النقطة a هي قطب للتابع $f(z)$.

إن الصلة القائمة بين الأقطاب والأصفار تمكننا من صياغة التعريف الآتي :

تعريف (٣) . تسمى مرتبة n – صفر التابع $1/f = \varphi$ مرتبة القطب a للتابع f . من الواضح ، اعتماداً على برهان النظرية (٢) ، أن مرتبة القطب تتطابق مع أس الحد الأول N من القسم الرئيسي في نشر لوران للتابع في جوار موخوذ للقطب .

نظرية (٣) . الشرط اللازم و الكافي لكي تكون النقطة الشاذة المنعزلة a نقطة

أساسية للتابع f هو أن يكون القسم الرئيسي في نشر لوران للتابع f في جوار للنقطة a مؤلفاً من عدد غير منته من الحدود .

إن هذه النظرية ، في الحقيقة ، محتواة في النظريتين (١) و (٢) وذلك لأنه إذا كان القسم الرئيسي من نشر لوران مؤلفاً من عدد غير منته من الحدود ، فإن النقطة a لايمكن أن تكون نقطة شاذة قابلة للإصلاح أو قطباً . ومن ناحية ثانية إذا كانت النقطة نقطة شاذة أساسية ، فإن القسم الرئيسي من نشر لوران في جوار لتلك النقطة لايمكن أن يغيب كما أنه لايمكن أن يكون مؤلفاً من عدد منته من الحدود .

سنستعرض الآن نظرية تعتبر صفة مميزة لسلوك التابع في جوار النقطة الشاذة الأساسية

نظرية (٣) (سوخوتسكي) . إذا كانت a نقطة شاذة أساسية للتابع f فإنه من أجل أي عدد $A \in \bar{C}$ يمكن إيجاد متتالية من النقاط $\{z_n\}$ متقاربة إلى a $(z_n \to a)$ وبحيث يكون

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A \qquad (5)$$

البرهـــان . ليكن $A = \infty$: بما أن التابع f ، استناداً إلى النظرية (١) ، لايمكن أن يكون محدوداً في الجوار الموخوذ $\{0 < |z-a| < r\}$ ، فإنه في هذا الجوار توجدنقطة مثل z_1 بحيث يكون فيهـــا $|f(z_1)| > 1$. وبالمثل تماماً توجد نقطة مثل z_2 في الجوار $\{0 < |z-a| < |z-a|/2\}$ يكون فيها $|f(z_2)| > 2$ وهكذا .... توجد نقطة في الجوار $\{0 < |z-a| < |z-a|/n\}$ مثل z_n يكون فيها $|f(z_n)| > n$. من الواضح أن $z_n \to a$ وأن $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

لنفرض الآن أن $A \neq \infty$. عندئذٍ إما أن تكون النقطة a نقطة تجمع للمواضع A للتابع f ، وفي هذه الحالة يمكننا فصل متتالية z_n من تلك المواضع متقاربة إلى a ويكون من أجلها $f(z_n) = A$. وإما أن يوجد جوار موخوذ $\{0 < |z-a| < r'\}$ يكون فيه $f(z) \neq A$. وفي هذه الحالة تكون النقطة a نقطة شاذة أساسية أيضاً للتابع $\varphi(z) = \frac{1}{(f(z)-A)}$ (وذلك لأن $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ ، ولأنه لو كانت هناك نهاية محدودة أو غير محدودة للتابع φ عندما $a\leftarrow z$ ، لكانت للتابع $f(z)$ ، أيضاً نهاية محدودة أو غير محدودة) وبالتالي فإن التابع $\varphi(z)$ يكون غير محدود في جوار موخوذ للنقطة a .

ووفقاً لما برهنا أعلاه توجد متتالية من النقاط (z_n) في ذلك الجوار متقاربة إلى a ، ويكون من أجلها $\varphi(z_n) \to \infty$ ، وبالتالي فإن :

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A$$

مثال (١) . ليكن $f(z) = \sin\frac{1}{z}$. إن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة أساسية لهذا التابع. فإذا كان $A = \infty$ ، فإنه على سبيل المثال ، وبفرض $z_n = \frac{i}{n}$ نجد $\frac{1}{z_n} = -in$ ، وبالتالي فإن :

$$\sin\frac{1}{z_n} = -i \operatorname{sh} n \to \infty \quad ; \quad n \to \infty$$

ليكن الآن $A \neq \infty$ ، في هذه الحالة وبغية إيجاد المتتالية (z_n) نحل المعادلة :

$$\sin\frac{1}{z} = A$$

ونجد

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Arc}\sin A = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iA + \sqrt{1-A^2}\right)$$

ومنه نجد

$$z = \frac{i}{\operatorname{Ln}\left(iA + \sqrt{1-A^2}\right)} = \frac{i}{\ln\left(iA + \sqrt{1-A^2}\right) + 2k\pi i}$$

وبوضع

$$z_n = \frac{i}{\ln\left(iA + \sqrt{1-A^2}\right) + 2n\pi i}$$

وباعطاء n القيم $1, 2, 3, \ldots$ نحصل على المتتالية (z_n) المتقاربة إلى الصفر والمحققة للشرط

$$f(z_n) = A \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$

مثال (٢) . ليكن $f(z) = e^{1/z}$. هنا ، كما في المثال السابق ، النقطة $z = 0$

نقطة شاذة أساسية . فإذا كان $A = \infty$ فإننا نأخذ $z_n = \frac{1}{n}$ ويكون $f(z_n) = e^n$ ، $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$. أي أن المتتالية $(1/n)$ تحقق نظرية سوخوتسكي، من أجل $A = \infty$. ليكن الآن $A = 0$ في هذه الحالة وبفرض $z_n = -\frac{1}{n}$ نجد $f(z_n) = e^{-n}$ ، $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ ومرة ثانية تتحقق نظرية سوخوتسكي .

لنفرض أخيراً أن $A \neq \infty$ ، $A \neq 0$ ، في هذه الحالة ، ولإيجاد متتالية النقاط (z_n) الموافقة نقوم بحل المعادلة :

$$e^{1/z} = A$$

ونجد $\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A$ ومنه يكون :

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}$$

وبوضع :

$$z_n = \frac{1}{\ln A + 2n\pi i} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

نحصل على المتتالية (z_n) والمتقاربة إلى الصفر والمحققة للشرط $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

تسمى مجموعة نهايات قيم التابع f في المتتاليات المختلفة (z_n) والمتقاربة إلى a بمجموعة عدم التعيين للتابع f في النقطة a . فإذا كانت تلك النقطة a نقطة قابلة للإصلاح أو قطباً ، فإن مجموعة عدم التعيين في تلك النقطة تكون مؤلفة من نقطة واحدة محدودة أو غير محدودة . ومن نظرية سوخوتسكي ينتج بأنه إذا كانت النقطة a نقطة شاذة أساسية فإن مجموعة عدم التعيين مضافاً إليها نقاط تجمعها (لصاقة المجموعة) تتطابق مع المستوي العقدي $\overline{C}$.

في الواقع ، إن كل نقطة A من المستوي العقدي تكون نهاية لمتتالية النقاط $\{f(z_n)\}$ المنتمية إلى مجموعة عدم التعيين وبالتالي فإن A تنتمي إلى لصاقة تلك المجموعة .

نأتي الآن لدراسة الحالة $a = \infty$. أي عندما تكون نقطة اللانهاية نقطة شاذة منعزلة .

إن تصنيف النقاط الشاذة المنعزلة المذكور أعلاه ، والنظريات (١) — (٣) تنقل تلقائياً إلى الحالة $a=\infty$ ، غير أن النظريات (١) — (٣) المتعلقة بشكل نشر لوران تحتاج إلى تعديل لكون طبيعة الشذوذ ، في النقاط المحدودة ، تتعين بالقسم الرئيسي من نشر لوران المشكل من الحدود ذات الأسس الصحيحة السالبة الـ $(z-a)$ وهي الحدود التي لها شذوذ في تلك النقطة (من هنا جاء مفهوم القسم الرئيسي) . وأما من أجل نقطة اللانهاية فإن الحدود ذات الأسس السالبة تكون عادية ويتعين الشذوذ بمجموعة الحدود ذات الأسس الموجبة، لذلك فإنه من البديهي أن نسمي ، في هذه الحالة ، مجموعة الحدود ذات الأسس الموجبة في نشر لوران ، في جوار موخوذ لنقطة اللانهاية بالقسم الرئيسي . وبعد هذا التعديل تصبح النظريات (١) — (٣) صحيحة من أجل $a=\infty$. يمكننا الحصول على هذه النتيجة مباشرة بإجراء التحويل $z=\frac{1}{w}$. وإذا وضعنا $f(z)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\varphi(w)$ فإنه من الواضح أن :

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w=0} \varphi(w)$$

ولذلك يكون شذوذ التابع φ في النقطة $w=0$ هو نفس شذوذ التابع f في النقطة $z=\infty$. على سبيل المثال ، في حالة القطب يكون نشر التابع φ في الجوار $\{0<|w|<r\}$ من الشكل :

$$\varphi(w)=\frac{b_{-N}}{w^{-N}}+\ldots+\frac{b_{-1}}{w}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n,\ (b_{-N}\neq 0)$$

وباستبدال $w=\frac{1}{z}$ نحصل على نشر التابع f في الحلقة $\{R<|z|<\infty\}$ حيث $R=\frac{1}{r}$

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n + c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N$$

حيث $c_n=b_{-n}$, $c_N\neq 0$, c_n . ومن الواضح بأن القسم الرئيسي من نشر التابع يحتوي على عدد منته من الحدود . وبالمثل تماماً تعالج مسألة النقطة القابلة للاصلاح وكذلك مسألة النقطة الشاذة الأساسية .

٢ — التوابع الميرومورفية

في هذه الفقرة سنضع تصنيفاً للتوابع التحليلية تبعاً لنقاطها الشاذة . لقد وجدنا أن التوابع التحليلية والتي ليس لها أي شذوذ ، أي التوابع التحليلية في $\overline{C}$ ، تكون ، استناداً إلى نظرية ليوفيل ، ثوابت . إن صف التوابع التحليلية هذا هو أبسط الأنواع وأما الصف الأكثر بساطة بعد ذلك فهو صف التوابع الصحيحة .

تعريف (١) . نسمي التابع التحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي C ، أي التابع الذي لاتوجد له نقاط شاذة محدودة ، بتابع صحيح .

وفقاً لذلك تكون النقطة $a=\infty$ نقطة شاذة منعزلة للتابع الصحيح f . فإذا كانت تلك النقطة قابلة للإصلاح فإن $f\equiv const$ وأما إذا كانت قطباً ، فإن القسم الرئيسي من نشر لوران للتابع f في جوار اللانهاية يكون في شكل كثير حدود : $g(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots+c_N z^N$ وبطرح القسم الرئيسي من f نحصل على التابع $(f-g)$ وهو أيضاً تابع صحيح إلا أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة قابلة للاصلاح بالنسبة لهذا التابع ، وبالتالي فإن $f-g$ ثابت . وبالتالي نستنتج بأنه **إذا كانت نقطة اللانهاية قطباً لتابع صحيح فإن هذا التابع يكون كثير حدود** . في الحالة التي تكون فيها نقطة اللانهاية نقطة شاذة أساسية بالنسبة لتابع صحيح فإننا نسمي ذلك التابع **بتابع صحيح متسام** ، وكمثال على التوابع الصحيحة المتسامية نذكر التوابع الآتية : $\sin z$, $\cos z$, e^z :

تعريف (٢) . نسمي التابع والذي نقاطه الشاذة في المستوي العقدي المفتوح C أقطاب فقط بتابع ميرومورفي .

إن صف التوابع الصحيحة هو صف جزئي من صف التوابع الميرومورفية (لايوجد لأي منها نقاط شاذة في C) . بما أن كل قطب هو نقطة شاذة منعزلة ، فإن أقطاب تابع ميرومورفي في C لايمكن أن تكون أكثر من مجموعة قابلة للعد . في الواقع ، في كل دائرة : $\{|z|<n\}$; $(n=1,2,\ldots)$ يكون عدد أقطاب التابع الميرو مورفي منته (في الحالة المغايرة توجد نقطة تجمع محدودة تكون بدورها نقطة شاذة غير منعزلة للتابع وليست قطباً) وبالتالي يمكننا عد جميع أقطاب التابع . كمثال على تابع ميرومورفي له عدد غير منته من الأقطاب نذكر التابعين tgz , ctgz .

نظرية (١) . إذا كانت نقطة اللانهاية نقطة شاذة متحركة أوقطباً لتابع ميرومورفي f (أي أن النقاط الشاذة للتابع f في C هي أقطاب فقط) فإن f يكون تابعاً كسرياً .

البرهان . إن عدد أقطاب التابع f منته ، وذلك لأنه في الحالة المعاكسة ، ونتيجة لكون $\overline{C}$ فضاء متراصاً ، فإنه توجد نقطة تجمع للأقطاب تكوّن بدورها نقطة شاذة غير منعزلة وليست قطباً . لنرمز بـ a_ν $(\nu = 1, 2, \dots n)$ للأقطاب المحدودة للتابع f ولنرمز بـ

$$g_\nu(z) = \frac{c_{-N_\nu}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{N_\nu}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z-a_\nu} \qquad (1)$$

للقسم الرئيسي من نشر لوران للتابع f في جوار القطب a_ν . ولنرمز أيضاً بـ

$$g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N \qquad (2)$$

للقسم الرئيسي من نشر لوران للتابع f في جوار النقطة $a = \infty$ ؛ فإذا كانت $a = \infty$ نقطة شاذة قابلة للاصلاح فإننا نضع $g(z) \equiv 0$.

لنأخذ التابع

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1}^{N} g_\nu(z)$$

ان جميع النقاط $z \ni \overline{C}$ هي نقاط عادية بالنسبة لهذا التابع واستناداً إلى نظرية ليوفيل يكون $\varphi(z) \equiv c_0$ ، وبالتالي نجد :

$$f(z) = C_0 + g(z) + \sum_{\nu=1}^{N} g_\nu(z) \qquad (3)$$

أي أن f تابع كسري .

ملاحظة . إن العلاقة (٣) تمثل نشر التابع الكسري f في قسم صحيح وكسور أولية وهذا بدوره يعطينا برهاناً مبسطاً على وجود ذلك النشر .

في بعض الأحيان يستخدم مفهوم التابع الميرومورفي بشكل أوسع فيقال إن التابع f ميرومورفي في الساحة D إذا كانت نقاطه الشاذة في D هي أقطاب فقط . إن مجموعة أقطاب مثل تلك التوابع لاتزيد أيضاً عن مجموعة قابلة للعد . في الواقع ، بإيجاد تغطية متراصة (G_n) للساحة D(*) نجد أن عدد الأقطاب ، في كل ساحة G_n ، للتابع f يكون منتهياً . ووفقاً لذلك نجد أنه إذا كان عدد أقطاب تابع ميرومورفي غير منته في ساحة D فإن نقاط تجمع الأقطاب تنتمي إلى حدود الساحة ∂D .

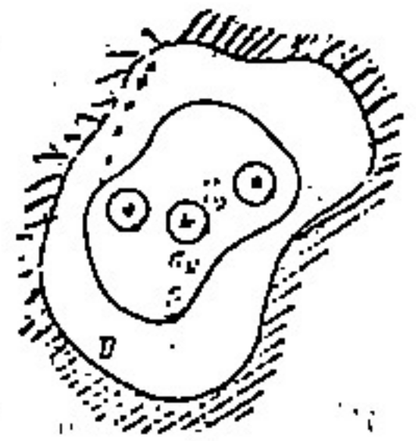
٣ – الرواسب

تعتبر النقاط الأكثر أهمية في دراسة التوابع التحليلية هي النقاط التي تفقد فيها التوابع تحليليتها ، أي نقاطها الشاذة . لاحقاً ، سنرى العديد من الحقائق التي تؤكد لنا على أن النقاط الشاذة ، والأقسام الرئيسية من نشر لوران في جواراتها تعطينا المعلومات الأساسية عن تلك التوابع التحليلية . لنوضح هذه المسألة بحساب تكامل التوابع التحليلية . لتكن f تابعاً تحليلياً في جميع نقاط ساحة D باستثناء مجموعة من النقاط الشاذة المنعزلة ، ليست أكثر من المجموعة القابلة للعد . ولتكن G ساحة محتواة بتراص في D $(D \supset G)$ ، ولتكن حدودها ∂G مؤلفة من عدد منته من المنحنيات المستمرة غير المارة بأية نقطة من النقاط الشاذة المنتمية إلى G والتي سنرمز لها بـ $a_1, \dots a_n$ (عددها منته) . لننشىء الدوائر γ_ν : $(\nu = 1, 2, \dots n)$ $\gamma_\nu = \{|z - a_\nu| = r_\nu\}$ والتي أنصاف أقطارها r_ν صغيرة بقدر كاف ، بحيث تكون الجوارات $\overline{U}_\nu$ المحددة بها غير متقاطعة فيما بينها ومحتواة في G . لنفرض أن γ_ν موجهة بالاتجاه الموجب المخالف لدوران عقارب الساعة . الشكل (١) .

(*) من أجل أية ساحة $D \subset C$ يمكن إيجاد تغطية متراصة ، أي متتالية K_n من المجموعات المغلقة (بمفهوم التوبولوجيا في $\overline{C}$) والتي من أجلها :

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots ,$$

حيث أن جميع K_n محتواة في D ، كما أن كل نقطة $z \ni D$ تنتمي إلى جميع المجموعات K_n ، بدءاً من رقم ما $\left(D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$.



الشكل (١)

لنرمز بـ G_r للساحة $G \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{U_\nu}$. إن التابع f تحليلي في الساحة $\overline{G_r}$. واستناداً إلى نظرية كوشي التكاملية من أجل ساحة متعددة الاتصال يكون :

$$\int_{\partial G_r} f\,dz = 0 \qquad (1)$$

غير أن الحدود الموجهة ∂G_r مؤلفة من ∂G والدوائر γ_ν^- ($\nu = 1, 2, \dots n$) الموجهة بالاتجاه السالب ، وحسب خواص التكامل نجد :

$$\int_{\partial G} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f\,dz \qquad (2)$$

وهذا يعني أن حساب تكامل تابع تحليلي على طول حدود ساحة يؤول إلى حساب تكاملات ذلك التابع على طول دوائر أنصاف أقطارها صغيرة بالقدر الذي نريد ومراكزها هي النقاط الشاذة للتابع.

تعريف (١) : نسمي جداء $1/2\pi i$ في تكامل التابع f على طول دائرة صغيرة γ_r : $\gamma_r = \{|z-a| = r\}$ مركزها النقطة الشاذةالمنعزلة $a \in C$ للتابع f براسب التابع f في النقطة a ، ونرمز لذلك بـ

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f\,dz \qquad (3)$$

بما أن قيمة التكامل لاتتغير من أجل تشوه هوموتوبي لطريق المكاملة ، فإننا نستنتج بأن الراسب لايتعلق بالمقدار r (r صغير بقدر كاف) ، وأنه يتعرف بالسلوك الموضعي للتابع f في نقطته الشاذة .

إن العلاقة ، المبرهنة أعلاه ، (2) تعبر عن النظرية المسماة **بنظرية كوشي في الرواسب :**

نظرية (١) . ليكن f تابعاً تحليلياً في ساحة D باستثناء مجموعة من النقاط الشاذة المنعزلة . ولتكن G ساحة محتواة بتراص في D $(G) \subset D)$ وحدودها ∂G لاتحتوي على أية نقطة شاذة ، عندئذ يكون :

$$\int_{\partial G} f\,dz = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname*{res}_{a_\nu} f \qquad (4)$$

حيث أن المجموع ممتد على جميع النقاط الشاذة a_ν للتابع f والمنتمية لـ G. لهذه النظرية أهمية كبيرة إذ أنها ترجع حساب القيمة الشاملة لتكامل تابع تحليلي f على طول حدود الساحة إلى حساب قيم موضعية ، هي رواسب التابع في نقاطه الشاذة . وسنرى الآن أن رواسب تابع في نقاطه الشاذة تتعرف كلياً (تماماً) بالأقسام الرئيسية من نشور لوران في جوارات تلك النقاط ، وعندئذ يمكننا القول بأنه في مسألة حساب تكامل تابع تحليلي يكفي معرفة نقاطه الشاذة والأقسام الرئيسية فيها .

نظرية (٢) . راسب التابع f في النقطة الشاذةالمنعزلة $a \in C$ يساوي أمثال $(z-a)^{-1}$ من نشر لوران في جوار النقطة a :

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1} \qquad (5)$$

البرهان . ليكن نشر لوران للتابع f في جوار موخوذ للنقطة a هو

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

علماً بأن هذه السلسلة تتقارب بانتظام على الدائرة γ_r : $\gamma_r = \{|z-a| = r\}$ من أجل

القيم الصغيرة لـــ z . بالمكاملة حداً حداً نجد $\int_{\gamma_r} f(z) = c_{-1}\, 2\pi i$ وبالاستفادة من تعريف الراسب نجد العلاقة (5) .

نتيجة . إذا كانت النقطة $a \ni c$ نقطة شاذة قابلة للاصلاح ، فإن راسب التابع f في هذه النقطة يكون مساوياً للصفر .

نأتي الآن لاستنتاج العلاقات المعرفة لراسب تابع في حالة كون النقطة الشاذة المنعزلة قطباً . لتكن $a \ni c$ قطباً من المرتبة الأولى . وعندئذٍ يكون لنشر لوران، للتابع f في جوار لها ، الشكل :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ومن هذه العلاقة نجد مباشرة العلاقة المعرفة للراسب في حالة القطب البسيط :

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z) \qquad (6)$$

وبتعديل طفيف على هذه العلاقة نحصل على علاقة أكثر ملاءمة في حساب الراسب في حالة القطب البسيط . ليكن للتابع f في جوار النقطة a الشكل :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

حيث أن التابعين $\varphi(z)$, $\psi(z)$ تحليليان في النقطة a وأن $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$ و $\psi'(a) \neq 0$ (هذا يعني أن a قطب بسيط للتابع f) . وعندئذٍ واستناداً إلى العلاقة (6) نجد :

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)\,\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}$$

أي أن :

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (6')$$

لتكن الآن النقطة a قطباً من المرتبة n للتابع f . في هذه الحالة ، وفي جوار لهذه النقطة يكون لدينا :

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بـــ $(z-a)^n$ وبالاشتقاق $(n-1)$ مرة والانتقال إلى النهاية عندما $z \to a$ نجد :

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \qquad (7)$$

ونذكر هنا ، بأنه لحساب الراسب في النقاط الشاذة الأساسية لاتوجد علاقات مماثلة ، وينبغي إيجاد الأقسام الرئيسية من نشر لوران . نأتي الآن لتعريف الراسب في اللانهاية .

تعريف (٢) . لتكن نقطة اللانهاية ∞ نقطة شاذة منعزلة بالنسبة للتابع f . إن راسب التابع f في اللانهاية بالتعريف هو :

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} f(z)\, dz \qquad (8)$$

حيث γ_R^- هي الدائرة $\{|z| = R\}$ والتي نصف قطرها R كبير بقدر كاف والمرسومة بالاتجاه السالب ؛ الموافق لدوران عقارب الساعة .

لقد اخترنا الاتجاه γ_R^- بحيث يبقى جوار اللانهاية $\{\infty > |z| > R\}$، حين الدوران، على يسارنا . بكتابة نشر لوران للتابع f في ذاك الجوار

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

وبالمكاملة حداً حداً على طول γ_R^- نجد :

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$$

بما أن الحدود ذات الاسس السالبـــة تنتمي إلى القسم الصحيح (التحليلي) من نشر لوران في جوار اللانهاية ، ولا تنتمي إلى القسم الرئيسي ، فإنه خلافاً للنقاط المحدودة يمكن للراسب في اللانهاية أن يكون غير معدوم ، في الحالة عندما تكون النقطة $z = \infty$ نقطة عادية بالنسبة للتابع .

نأتي الآن إلى النظرية المتعلقة بالمجموع الكلي للرواسب

نظرية (٣) . ليكن f تابعاً تحليلياً في جميع نقاط المستوي C ، باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة المنعزلة a_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ ، عندئذٍ يكون مجموع رواسبه في نقاطه الشاذة a_ν وراسبه في نقطة اللانهاية مساوياً للصفر :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_\nu} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0 \qquad (10)$$

البرهـــان . لنتشيء دائرة $\gamma_R = \{|z| = R\}$: نصف قطرها كبير بقدر كاف ، وبحيث تحتوي داخلها على جميع النقاط الشاذة a_ν . ولتكن γ_R موجهة بالإتجاه الموجب المخالف لدوران عقارب الساعة . عندئذٍ واستناداً إلى نظرية كوشي في الرواسب يكون

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{a_\nu} f$$

وبما أن قيمة الطرف الأيسر لاتتغير بازدياد R ، فإن تلك القيمة تمثل نظير الراسب في اللانهاية $(-\operatorname*{res}_{\infty} f)$. وهو مايبرهن صحة العلاقة (10) .

ملاحظة . لتكن النقطة $z=\infty$ صفراً من المرتبة k بالنسبة للتابع $f(z)$. عندئذٍ يكون نشر لوران للتابع $f(z)$ في جوار نقطة اللانهاية من الشكل :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-(k+1)}}{z^{k+1}} + \dots \qquad (c_{-k} \neq 0)$$

ومن أجل $z \to \infty$ تكون لدينا العلاقة التقاربية الآتية :

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \qquad (A = c_{-k} \neq 0)$$

فإذا كان $k = 1$ ، فإن $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -A$ أما إذا كان $k \geqslant 2$ فإن $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ وبذلك يكون لدينا :

$$f(z) \sim \frac{A}{z}\ (z \to \infty) \implies \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A \qquad (11)$$

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k}\ ((z \to \infty), k \geqslant 2) \implies \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0 \qquad (12)$$

مثال (١) . من أجل التابع $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots$ لدينا $c_{-1}=1$ وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -1$. ولنلاحظ هنا بأن التابع $e^{1/z}$ تحليلي في جوار اللانهاية وبالرغم من ذلك فإن راسبه في هذه النقطة لايساوي الصفر .

مثال (٢) . بالنسبة للتابع $f(z) = \frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$ نجد أن نقطة اللانهاية هي صفر بسيط كما أن $f(z) \sim \frac{1}{z}$ عندما $(z \to \infty)$ وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$

مثال (٣) . ليكن $f(z) = \frac{z}{z^3+1}\sin\frac{1}{z}$. إن النقطة $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الثالثة بالنسبة لـ $f(z)$ ؛ كما أن $f(z) \sim \frac{1}{z^3}$ عندما $(z \to \infty)$. واستناداً إلى العلاقة (12) يكون $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

نأتي الآن إلى تعميم النظرية (١)

نظرية (٤) . ليكن $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً في ساحة D من المستوي العقدي الموسع $\overline{C}$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة . وليكن $f(z)$ مستمراً على ∂D حدود الساحة D المؤلفـــة من عدد منته من المنحنيات الملساء – جزئياً والمحدودة .
عندئذٍ ١) إذا لم تحتو D على النقطة $z = \infty$ فإن :

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \qquad (13)$$

٢) إذا انتمت النقطة $z=\infty$ إلى الساحة D فإن :

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right) \qquad (14)$$

حيث $z_1, z_2, \dots, z_n$ جميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ والواقعة في الساحة D .

البرهان . ١) لتكن D ساحة محدودة ولنستعرض الساحة $\widetilde{D}$ الناتجة عن الساحة D باقتطاع الدوائر $K_j : K_j = \{|z-z_j| < r_j\}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ والتي أنصاف أقطارها r_j صغيرة بقدر كاف ولتكن $\partial\widetilde{D}$ الحدود الموجهة للساحة $\widetilde{D}$. عندئذ واستناداً إلى نظرية كوشي من أجل ساحات متعددة الاتصال يكون :

$$\int_{\partial \widetilde{D}} f(z)\,dz = \int_{\partial D} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0 \qquad (15)$$

حيث γ_j حدود الدائرة K_j والموجهة بالاتجاه الموافق لدوران عقارب الساعة وبما أن :

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$$

فإن العلاقة (15) تؤدي إلى (13) .

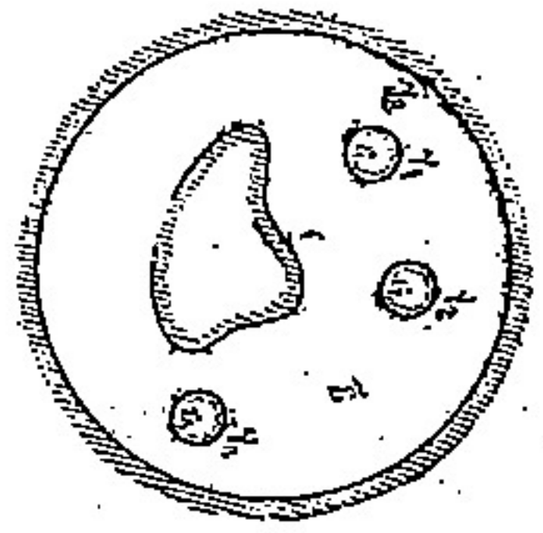
٢) لتكن K هي الدائرة $\{|z| < R\}$ والتي تحتوي في داخلها حدود الساحة D وجميع النقاط الشاذة والمحدودة للتابع $f(z)$ الشكل (٢) . لكن $\widetilde{G}$ هي الساحة الناتجة عن الساحة $G = D \cup K$ باقتطاع الدوائر K_j المذكورة أعلاه . إن $\partial\widetilde{G}$ حدود الساحة $\widetilde{G}$ تتألف من الحدود ∂D للساحة D و γ_j حدود الدوائر K_j و γ_R حدود الدائرة $|z| = R$ ويكون لدينا :

$$\int_{\partial \widetilde{G}} f(z)\,dz = \int_{\partial D} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0 \qquad (16)$$

حيث γ_R موجه بالاتجاه الموجب . وبما أن :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$$

فإننا نجد العلاقة (14) استناداً إلى العلاقة (16) .



الشكل (٢)

نستعرض الآن بعض الأمثلة في حساب تكاملات على طول طريق مغلق .

مثال (١) . ليكن المطلوب حساب التكامل $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$. بما أنه للتابع المستكمل $f(z) = (\cos z)/z^3$ توجد نقطة شاذة واحدة في الدائرة $|z| < 2$, $z = 0$ وهي قطب من المرتبة الثالثة ؛ فإننا نجد وفقاً للعلاقة (7) أن :

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(\cos z) = -\tfrac{1}{2}$$

وبالتالي فإن :

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz = -\pi i$$

مثال (٢) . ليكن $f(z) = 1/(e^z + 1)$. عندئذٍ يكون

$$I = \int_{|z-2i|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z)$$

وذلك لأنه التابع $f(z)$ داخل الدائرة $|z-2i| < 2$

توجد نقطة شاذة وحيدة $z = \pi i$ وهي قطب بسيط . ووفقاً للعلاقة (6) نجد :

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{1}{(e^z z+1)'|_{z=\pi i}} = -1$$

وبالتالي فإن : $I = -2\pi i = 1$.

مثال (٣) . احسب التكامل $\int_{|z|=2} (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz$. إن التابع المستكمل

تحليلي في جميع نقاط الدائرة $|z| < 2$ باستثناء النقطة $z = 1$. وهي نقطة شاذة أساسية للتابع وذلك لأن

$$\cos\frac{z}{z-1} = \cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1 \cos\frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z-1} =$$

$$= \cos 1 \left(1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \ldots\right) - \sin 1 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \ldots\right.$$

$$2z - 1 = 2(z-1) + 1$$

ونجد أن c_{-1} أمثال $(z-1)^{-1}$ في نشر لوران للتابع المستكمل هي :

$$c_{-1} = -(\cos 1 + \sin 1)$$

وبالتالي فإن

$$\int_{|z|=2} (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz = -2\pi i\,(\cos 1 + \sin 1)$$

مثال (٤) . ليكن المطلوب حساب التكامل $I = \int_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz$

طريقة أولى . طريقة أولى . للتابع المستكمل $f(z) = \frac{1}{z-2} e^{1/(z-1)}$ ،

في الدائرة $|z| < 4$ ، نقطتان شاذاتان هما $z = 1$ ، $z = 2$. وبالتالي فإن :

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right)$$

وبما أن :

$$e^{1/(z-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z-1)^n}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

فإننا نجد :

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = e^{1/(z-1)}\Big|_{z=2} = e, \quad \operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 - e$$

وبالتالي فإن $I = 2\pi i$

طريقة ثانية . لنحسب راسب التابع $f(z)$ في نقطة اللانهاية $z = \infty$. إن النقطة $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الأولى بالنسبة للتابع $f(z)$ وذلك لأن :

$$f(z) \sim \frac{1}{z} \,(z\to\infty), \quad e^{1/(z-1)} \sim 1, \quad \frac{1}{z-2} \sim \frac{1}{z}$$

واستناداً إلى العلاقة (11) نجد أن $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -1$ وبالتالي فإن $I = 2\pi i$

مثال (٥) : ليكن المطلوب حساب التكامل $I = \int \frac{dz}{(z^8+1)^2}$. في الواقع

لاتوجد ضرورة لحساب رواسب التابع المستكمل في نقاطه الشاذة الواقعة داخل الدائرة $|z| = 2$ وهي ثمانية أقطاب كل منها من المرتبة الثانية ، إذ أنه يمكننا تطبيق نظرية المجموع الكلي للرواسب ، والتي وفقاً لها يكون لدينا :

$$\sum_{\nu=1}^{8} \operatorname*{res}_{a_\nu} \frac{1}{(z^8+1)^2} + \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{(z^8+1)^2} = 0$$

إن النقطة $z=\infty$ هي صفر من المرتبة (16) للتابع المستكمل . واستناداً إلى العلاقة (12) يكون $\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z^8+1)^2} = 0$ وبالتالي فإن $I = 0$.

مثال (٦) . ليكن $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ كثير حدود من الدرجة $n \geq 2$. ولتكن γ دائرة تقع في داخلها جميع أصفار كثير الحدود $p(z)$. لنبرهن على أن التابع

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{z\xi}}{p(\xi)} d\xi \qquad (17)$$

يحقق المعادلة التفاضلية

$$p\left(\frac{d}{dz}\right) w(z) \equiv w^{(n)}(z) + a_1 w^{(n-1)}(z) + \ldots + a_{n-1} w'(z) + a_n w(z) = 0 \quad (18)$$

والشرط الابتدائية التالية

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, \ldots, w^{(n-2)}(0) = 0, w^{(n-1)}(0) = 1 \qquad (19)$$

من العلاقة (17) نجد $w^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi^k e^{z\xi}}{p(\xi)} d\xi$. ووفقاً لذلك يكون لدينا

$$p\left(\frac{d}{dz}\right) w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{z\xi} d\xi = 0$$

وهو مايبرهن صحة العلاقة (18) . لنتأكد من تحقق الشروط (19) . لدينا

$$w^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi^k}{p(\xi)} d\xi = -\operatorname*{res}_{\xi=\infty} \frac{\xi^k}{p(\xi)} \qquad (20)$$

فإذا كان $n > k$ فإن النقطة $\xi=\infty$ تكون صفراً من المرتبة $(n-k)$ بالنسبة للتابع $\xi^k/p(\xi)$

وبالتالي فإنه من أجل $(n-2) \geq k$ يكون $\operatorname*{res}_{\xi=\infty} \frac{\xi^k}{p(\xi)} = 0$ أي أن $w^{(k)}(0) = 0$ من أجل $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$. لتكن $(n-1) = k$ عندئذ يكون $\frac{1}{\xi} \sim \xi^{n-1}/p(\xi)$ عندما $(\xi \to \infty)$ وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{\xi=\infty} \frac{\xi^{n-1}}{p(\xi)} = -1$ وبالتالي يكون لدينا وفقاً للعلاقة (20) : $w^{(n-1)}(0) = 1$

تمـــارين غير محلولة

١ — أوجد النقاط الشاذة لكل من التوابع الآتية وبين طبيعة كل نقطة منها ثم ادرس سلوك كل تابع في اللانهاية

1) $\frac{1}{z-z^2}$, 2) $\frac{e^z}{1+z^2}$, 3) $\frac{1-e^z}{1+e^z}$

4) $\frac{e^{(1/(z-1))}}{e^z-1}$, 5) $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, 6) $\sin\frac{1}{1-z}$

7) $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$, 8) $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$, 9) $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$

10) $\sin\left(\frac{1}{\sin 1/z}\right)$

٢ — ماهو شذوذ التابع $F(z) = f[\varphi(z)]$ في النقطة $z = z_0$ (من الممكن أن تكون $z_0 = \infty$) إذا كان التابع $\varphi(z)$ تحليلياً في هذه النقطة أو كانت هذه النقطة قطباً وأما النقطة $\xi_0 = \varphi(z_0)$ بالنسبة للتابع $f(\xi)$ فهي : ١) نقطة شاذة قابلة للاصلاح . ٢) قطب من المرتبة n ٣) نقطة شاذة أساسية .

٣ — أوجد النهايات : $\lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\sin z}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} z}$

هل يناقض وجود النهايات نظرية سوخوتسكي ؟ .

٤ — أوجد رواسب كل من التوابع الآتية في جميع نقاطه الشاذة المنعزلة وكذلك في نقطة اللانهاية (إذا لم تكن نقطة تجمع للنقاط الشاذة) .

1) $\dfrac{1}{z\,(1-z^2)}$ ، 2) $\dfrac{z^3+z-1}{z^2(z-1)}$ ، 3) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n عدد طبيعي)

4) $\operatorname{ctg}^3 z$ ، 5) $z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$ ، 6) $e^{z\,+\,1/z}$

7) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$ ، 8) $z^n \sin\dfrac{1}{z}$ (n صحيح) ، 9) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$

10) $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ (n عدد طبيعي)

٥ — أوجد $\operatorname{res}_{z=a}[\varphi(z)\,f(z)]$ إذا كان التابع $\varphi(z)$ تحليلياً في النقطة a وكان للتابع $f(z)$ في هذه النقطة : ١) قطب بسيط وكان $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = A$ ، ٢) قطب من المرتبة k وكان القسم الرئيسي من نشر لوران هو $\dfrac{c_{-1}}{z-a} + \ldots + \dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

٦ — أوجد $\operatorname{res}_{z=a}\left[\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]$ إذا كان التابع $\varphi(z)$ تحليلياً في هذه النقطة وكان ١) a صفر من المرتبة n للتابع $f(z)$ ، ٢) a قطب من المرتبة n للتابع $f(z)$

٧ — أوجد $\operatorname{res}_{z=a}\{f[\varphi(z)]\}$ إذا كان التابع $\varphi(z)$ تحليلياً في النقطة a وكان $\varphi'(a)\neq 0$ وللتابع $f(\xi)$ قطب بسيط في النقطة $\xi=\varphi(a)$ وراسبه هناك هو A .

٨ — احسب التكاملات الآتية علماً بأن المنحنيات المغلقة موجهة بالاتجاه الموجب :

1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$; $\{C$ هي الدائرة $x^2+y^2=2x\}$

2) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$; $\{C: |z-2|=\frac{1}{z}\}$

3) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$; $\{C: |z|=2\}$

4) $\displaystyle\int_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$; $\{C: |z|=1\}$

5) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$ ، $\{C: |z|=1\}$

6) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$ ، $\{C: |z|=r\}$

7) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, $\{C: |z|=r\}$

8) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C z^n\, e^{2/z}dz$ ، $\{C: |z|=r\}$; (n عدد صحيح)

9) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z\,g(z)}\,dz$

حيث C منحن بسيط مغلق يحد ساحة G تحتوي على النقطة $z=0$ و $f(z)$ تابع تحليلي في الساحة المغلقة $\overline{G}$ وأما التابع $1/g(z)$ فهو تحليلي على C وله في الساحة G فقط أقطاب بسيطة في النقاط $a_0, \ldots, a_2, a_1$ والمختلفة عن الصفر ، $(a_k \neq 0)$.

الفصل الثاني

التمديد التحليلي

سنستعرض في هذا الفصل مفهوماً أساسياً آخراً من مفاهيم التحليل العقدي وهو مفهوم التمديد التحليلي ، الذي سيمكننا ، بشكل خاص ، من ادخال مفهوم التوابع المسماة بالتوابع التحليلية المتعددة القيم . إن أبسط المسائل تقودنا إلى ضرورة استعراض الحلول المتعددة والمختلفة للمسألة . على سبيل المثال ، للمعادلة $w = z^2$ ، من أجل أية نقطة $z \neq 0$ حلان مختلفان بالإشارة . لنرمز لمجموعة هذين الحلين بـ $\sqrt{z}$ ولا يمكننا اعتبار $\sqrt{z}$ تابعاً لـ z إذ أنه بتعريف التابع بشرط وحدانية القيمة . وإن محاولة الابتعاد عن شرط وحدانية القيمة في تعريف التابع تقودنا إلى صعوبات كبيرة . على سبيل المثال ليكن المجموع $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ (1) . والسؤال ماهو المعنى الذي يمكننا اعطاءه لذلك المجموع إذا كان كل حد فيه يأخذ قيمتين ؟ وبشكل عام إن أبسط العمليات الرياضية في التحليل يصعب اجراؤها على مثل تلك التوابع « التوابع المتعددة القيم » . إن مفهوم التمديد التحليلي يمكننا من التغلب على تلك الصعاب .

---

(1) إذا جمعنا $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ كمجموعة فإن المجموع يكون ثلاثي القيمة (قيمه هي $0, -w_1, 2w_1$ ، حيث w_1 احدى قيمتي $\sqrt{z}$) وهل تجمع فقط القيم ذات الإشارات المتماثلة ؟ إن هذا الأمر لامعنى له في التحليل العقدي : ليكن $\sqrt{z_1} = \pm(1+i)$ و $\sqrt{z_2} = \pm(1-i)$ فأي إشارات لحدود المجموع $\sqrt{z_1} + \sqrt{z}$ متماثلة ؟

١ ــ مفهوم التمديد التحليلي

١ ــ العناصر ــ تمديد العناصر لنبدأ دراستنا لمفهوم التمديد التحليلي، مع بقاءنا في اطار التوابع التحليلية الوحيدة القيمة . ومن وجهة النظر هذه نفهم التمديد التحليلي لتابع f_0 معرف على مجموعة $M \subset C$ على أنه تمديد لذلك التابع f إلى تابع معرف وتحليلي على مجموعة مـا $M \subset D$ وبحيث أن مقصوره على المجموعة M يتطابق مع f_0 :

$$f|_M = f_0$$

إن هذه المسألة يمكن حلها بطرق مختلفة . فقد قمنا في التحليل (٦) بتمديد التوابع $\sin x$, e^x وغيرها والمعرفة على المحور الحقيقي R، تحليلياً على المستوي العقدي C . أما التابع $\sin z/z$ المعرف في الساحة $C \setminus \{o\}$ (التابع غير معرف في النقطة $z = 0$) فيمكننا تمديده على المستوي C بكتابة نشره في سلسلة في قوى z :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

كمثال آخر ، إن مجموع السلسلة

$$f_0(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

معرف وتحليلي فقط في الدائرة $\{|z| < 1\}$ ، وذلك لأنه من أجل $|z| \geq 1$ تتباعد تلك السلسلة . من ناحية ثانية ، ان مجموع السلسلة الهندسية تلك في دائرة تقاربها هو $f(z) = \frac{1}{1-z}$. وهذه العلاقة تعطينا تمديداً تحليلياً للتابع f_0 على الساحة $C \setminus \{1\}$.

إن مسألة التمديد التحليلي ، بالطبع ، ليست قابلة للحل بشكل دائم ؛ فعلى سبيل المثال نأخذ التابع :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

وكنا قد وجدنا بأن هذا التابع تحليلي في دائرة الوحدة $U : \{|z| < 1\} = U$ ، إلا أن نقاط المحيط $\{|z| = 1\}$ هي نقاط شاذة (خط شاذ) وبالتالي فإنه لايمكن بأي شكل تمديد التابع $f(z)$ تحليلياً على ساحة تحتوي تماماً الساحة U .

إذا كان التابع f تحليلياً في ساحة ما D ، ولا يمكن تمديده تحليلياً على ساحة تحتوي تماماً الساحة D ، فإن الساحة D تسمى ساحة تحليلية التابع f .

إن مفهوم التمديد التحليلي المذكور مفهوم ضيق ، ونذكر هنا مثالاً يرغمنا على توسيع ذلك المفهوم . إن $\sqrt{z}$ من أجل أية نقطة $z \neq 0$ ثنائي القيمة ولا يعرف تابعاً . وفي ساحة ما D يمكننا فصل فرع وحيد القيمة بفرض شروط إضافية تضمن لنا وحدانية اختيارنا لقيم $\varphi = \arg z$ من أجل جميع النقاط $D \ni z$. لنأخذ ، على سبيل المثال الفرع

$$w = f_0(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i\varphi/2} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \qquad (1)$$

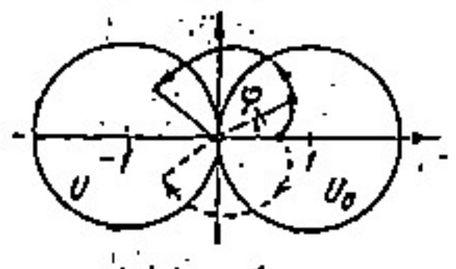
في الدائرة $U_0 = \{|z-1| < 1\}$ ، ومن أجل $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. وبما أن التابع المعاكس $z = w^2$ وحيد القيمة فإن f_0 وحيد القيمة (وحيد الصفحة) في U_0 ، كما أنه يمكننا استخدام قاعدة اشتقاق التابع العكسي (المعاكس) ونجد :

$$f'_0(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2f_0(z)}$$

أي أن التابع f_0 تحليلي في U_0 (لدينا $f_0 \neq 0$ في U_0) . لنمدد الآن تحليلياً التابع f_0 بتوسيع ساحة تغير $\arg z = \varphi$ شريطة بقاء اختيارنا لـ φ وحيد القيمة (و فقاً لما ذكرنا يكون التابع تحليلياً . فإذا وسعنا تلك الساحة باتجاه تزايد φ ، فإننا نحصل ، على سبيل المثال ، في الدائرة $U = \{|z+1| < 1\}$ ، على تابع f معرف بالشروط

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \qquad \pi/2 < \varphi < 3\pi/2 \qquad (2)$$

وأما إذا وسعنا تلك الساحة باتجاه تناقص φ الشكل (٣) فإننا نحصل في تلك الدائرة على التابع



الشكل (٣)

$$g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \quad , -3\pi/2 < \varphi < -\pi/2 \qquad (3)$$

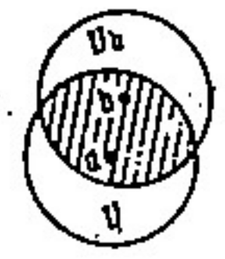
وعندئذ تكون القيمة الثانية لـ $\varphi = \arg z$ ، في نفس النقطة $z \ni U$ ، أصغر من القيمة الأولى بـ 2π . وبالتالي فإن قيمتي التابعين $f(z)$ و $g(z)$ تكونان مختلفتين بالإشارة (على سبيل المثال ، في النقطة $z = -1$ ينبغي كتابة $\varphi = \pi$ في التمديد الأول ، وهذا يعني أن $f(-1) = e^{i\pi/2} = i$ وأما في التمديد الثاني فإن $\varphi = -\pi$ ، وبالتالي فإن $g(-1) = e^{-i\pi/2} = -i$) ، أي أنه بتمديد التابع f_0 في الدائرة U بطريقتين مختلفتين نحصل على تابعين مختلفين f و g . إن هذا الفهم الجلي لتلك القضية، المذكورة في المثال السابق ، يعود إلى أواسط القرن التاسع عشر ومرتبط بالرياضيين الألمانيين : ك . واير شتراس وب . ريمان .

لقد بدأ وايرشتراس دراسته لمسألة التمديد التحليلي في عام ١٨٦١ ، مبتعداً عن الصعوبات المتعلقة بالتوابع المتعددة القيم . فقد وضع ، أساساً لطريقته ، جملة سلاسل قوى وكل واحدة منها مرتبطة بالأخرى بشكل خاص . وعلى وجه الدقة ، أخذ وايرشتراس تابعاً تحليلياً في دائرة U مركزها a ، معرفاً بنشر تايلور له

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (4)$$

وأخذ إلى جانب ذلك جميع النشور الممكنة لتلك السلسلة في قوى $(z-b)$ حيث $U \ni b$

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n \qquad (5)$$



الشكل (٤)

فإذا كانت السلسلة (5) متقاربة في دائرة ما U_b مركزها النقطة b ، فإنه في التقاطع $U \cap U_b$

يتطابق التابعان f و f_b : $f_b = f$. إن الدائرة U_b تبلغ بالتأكيد حدود الدائرة U ، وفي بعض الحالات تخرج خارج الحدود الشكل (٤) وعندئذ يكون التابع f_b تمديداً تحليلياً للتابع f في الدائرة U_b[1] . بإعادة هذه العملية في التمديد التحليلي ، نأتي إلى دائرة V ، والتي تتقاطع مع الدائرة الأولى U (وقد تتطابق معها) . وفي النقاط المشتركة بين الدائرتين U , V نحصل على تابع مختلف عن التابع f . وكي نبتعد عن التوابع المتعددة القيم، فإنه استناداً إلى طريقة واير شتراس ينبغي الانتباه ، وبشكل مستمر ، إلى التوابع وأيضاً إلى الدوائر حيث هي معرفة .

قبيل عشر سنوات من ذلك ، اعتمد ريمان طريقة هندسية في دراسة التوابع المتعددة القيم . فقد اقترح بأن لاتنسب القيم الجديدة للتوابع الناتجة عن التمديد التحليلي (لنفرض القيم في الدائرة V) إلى النقاط القديمة z بل إلى نقاط جديدة واقعة فوقها (على سبيل المثال نعتبر الدائرة V واقعة فوق الدائرة U) . وبذلك نحصل على سطح متعدد الصفحات فوق المستوي العقدي ، والذي من أجل كل نقطة منه z يوجد فوقها عدد من الصفحات مساوٍ لعدد من قيم التابع المتعدد القيم ، المدروس ، في تلك النقطة . وعلى ذلك السطح (حالياً يسمى بسطح ريمان) يصبح التابع المتعدد القيم تابعاً وحيد القيمة . ان الفكرة الرئيسية في بناء التوابع المتعددة القيم ، والتي تنسب إلى ريمان وواير شتراس ، تتلخص في دراسة هيكل جديد مؤلف من التابع الوحيد القيمة والساحة حيث هو معرف . ومن هذا الزوج ، وبنتيجة التمديد التحليلي يتشكل تابع تحليلي . نأتي الآن إلى التعريف الدقيق .

تعريف (١) . نسمي المجموعة المشكلة من الدائرة $U = \{|z-a| < R\}$ والتابع f حيث U هي الدائرة الأعظمية ذات المركز a والتي يكون فيها التابع f تحليلياً **بعنصر** قانوني ، أو اختصاراً ، عنصراً ونرمز له بـ $F = (U,f)$. وتسمى النقطة a **بمركز** العنصر F وتسمى U **بدائرة** العنصر . وأما قيمة $f(z)$ في نقطة $U \ni z$ فتسمى **بقيمة العنصر**

(١) على سبيل المثال السلسلة الهندسية $1 + z + z^2 + \ldots$ متقاربة في الدائرة إلى التابع $1/(1-z)$ ، وإذا نشرنا هذا التابع في قوى $(z + \frac{1}{2})$ فإن السلسلة الناتجة تتقارب في الدائرة $\{|z + \frac{1}{2}| < 3/2\}$. نصف قطر تقاربها يساوي المسافة بين المركز $a = -\frac{1}{2}$ والنقطة $z = 1$ حيث يفقد التابع تحليليته .

F في النقطة z . إذا كانت $c \ni a$ ، فإن التابع f يمثل بسلسلة تايلور (3) وتكون U دائرة تقارب السلسلة . وأما إذا كانت $a = \infty$ فإن النشر يكون من الشكل :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \qquad (6)$$

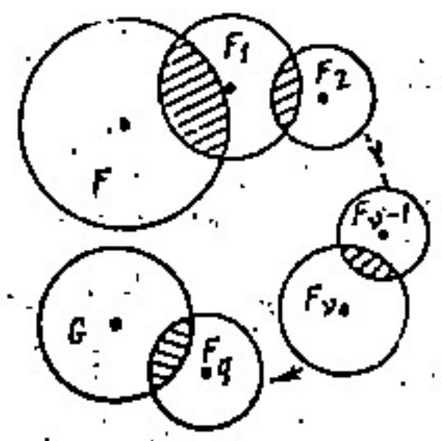
وتكون الدائرة U هي $U = \{|z| > R\}$.

أحياناً يكون من الأنسب استعراض أزواج $F = (U, f)$ ، حيث أن التابع f تحليلي في الدائرة U ، إلا أن U ليست هي الدائرة الأعظمية ذات نفس المركز . مثل هذه الأزواج تسمى بعناصر. وإذا كان التمييز ضرورياً فإننا نسميها بعناصر غير قانونية .

تعريف (٢) . نقول عن عنصرين $F=(U,f)$, $G=(V,g)$ أنهما تمديد تحليلي مباشر واحد للآخر إذا كان تقاطع دائرتيهما U , V غير خال (لايساوي المجموعة الخالية) وإذا تتطابق f و g : $f \equiv g$ في ذلك التقاطع .

إذا كانت b ، مركز العنصر G ، منتمية للدائرة U فإنه يعبر عن التابع g بواسطة f ، وفقاً للعلاقة (5) . أي أن سلسلة التابع g نتج من سلسلة التابع f بإعادة نشر هذا التابع في قوى $(z - b)$ غير أن b في الحالة العامة يمكن أن لاتنتمي إلى U ، ولكنه بمعرفة U_0 و V_0 يعرف التابع g كتابع وحيد القيمة وذلك لأن هذا التابع يتطابق مع التابع f في التقاطع $U \cap V$ (انظر نظرية الوحدانية) .

تعريف (٣) . نقول عن عنصرين $G = (V,g)$, $F(U,f)$ أنهما تمديد تحليلي واحد للآخر (بدون كلمة « مباشر ») ، إذا وجدت سلسلة منتهية العدد من العناصر



الشكل (٥)

$F_\nu = (U_\nu, f_\nu)$ $\nu = 1, 2, \ldots q$ الشكل (٥) بحيث أن F_1 يكون تمديداً تحليلياً مباشراً لـ F والعنصر F_0 تمديداً تحليلياً مباشراً للعنصر G وبحيث أن كل عنصر F_ν تمديد تحليلي مباشر لـ $F_{\nu-1}$ ($\nu = 2, 3, \ldots q$) .

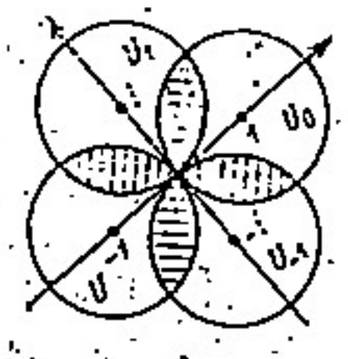
مثال . ليكن العنصران $F_0 = (U_0, f_0)$ حيث $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$ و f_0 فرع التابع $\sqrt{z}$ المعرف في (1) و $F = (U,f)$ حيث $U = \{|z + 1| < 1\}$ و f الفرع $\sqrt{z}$ المعرف في (2) . إن هذين العنصرين قانونيين لكون النقطة $z = 0$ واقعة على حدودهما، وحيث لايمكن تمديدهما تحليلياً (المشتقان $f_0(z) = \frac{1}{2} f_0(z)$ $f'_0(z)$ وبالمثل $f'(z)$ يسعيان إلى اللانهاية عندما $z \to 0$) وكل واحد منهما ليس تمديداً تحليلياً للآخر إذ أن دائرتيهما غير متقاطعتين . لنأخذ العنصر $F_1 = (U_1, f_1)$ ، حيث $U_1 = \{|z - i| < 1\}$ و

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \qquad 0 < \varphi < \pi \qquad (7)$$

من الواضح أنه تمديد تحليلي مباشر لكل من F_0 و F . وبالتالي فإن F_0 و F تمديدان تحليليان كل للآخر . وبالمثل نجد أن العنصر $F_{-1} = (U_{-1}, f_{-1})$ حيث $U_{-1} = \{|z + i| < 1\}$ و

$$f_{-1}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \qquad -\pi < \varphi < 0$$

هو تمديد تحليلي مباشر لـ F_0 وكذلك للعنصر G المعرف في (3) انظر الشكل (٦) . تبعاً لذلك ولوجود السليسلة F, F_1, F_0, F_{-1}, G نستنتج أن كلا العنصرين F و G تمديد تحليلي واحد للآخر . لنلاحظ بأن دائرتي هذين العنصرين متطابقان ، غير أن التابعين الموافقين لهما مختلفان بالإشارة .



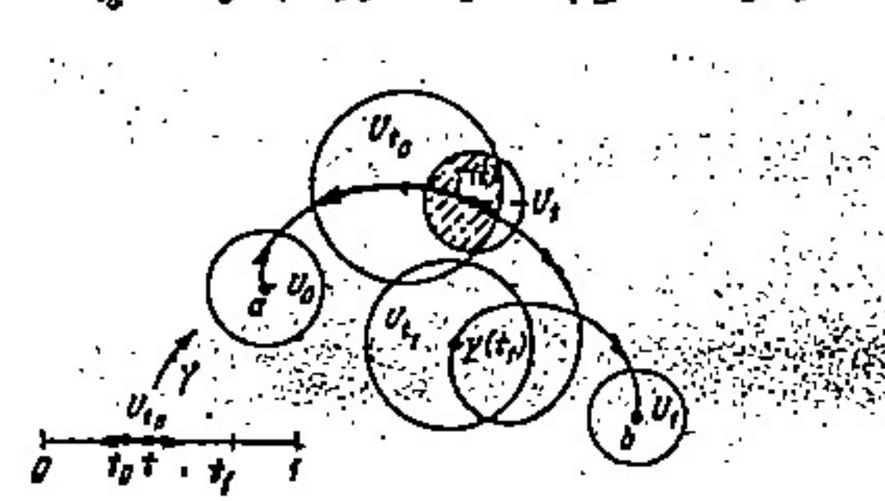
الشكل (٦)

٢ ــ نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي . (Monodromy theorem) سنستعرض هنا مفهوم التمديد التحليلي على طول طريق . دون أن نحد من عمومية المسألة بشيء ، يمكننا أن نفرض بأن الوسيط t في جميع الطرق المدروسة يتحول في المجال المغلق $I = [0 , 1]$.

تعريف (١) . نقول إننا مددنا العنصر القانوني $F_0 = (U_0 , f_0)$ على طول الطريق γ : $\gamma : I \to C$ الذي بدايته $a = \gamma (0)$ ، مركز ذلك العنصر ، إذا وجدت مجموعة من العناصر :

$$F_t = (U_t , f_t) , t \in I \qquad (1)$$

مراكزها $a_t = \gamma (t)$ وأنصاف أقطارها ليست معدومة ، محققة للشرط الآتي: إذا كان $I \supset u (t_0)$ جواراً متصلاً للنقطة $I \ni t_0$ وبحيث أن $U_{t_0} \ni \gamma (t)$ من أجل جميع النقاط $t \in u (t_0)$ (هذا الجوار موجود نتيجة لاستمرارية الطريق) ، فإنه من أجل أية قيمة $t \in u (t_0)$ يكون العنصر F_t تمديداً تحليلياً مباشراً لـــ F_{t_0} الشكل (٧) .



الشكل (٧)

إن الأمر الجوهري في التعريف المذكور هو أن F_t تمديد تحليلي مباشر لـــ F_{t_0} ، فقط من أجل قيم t القريبة من t_0 . أما إذا وقعت في الدائرة U_{t_0} نقطة بعيدة عن t_0 فإن العنصر الموافق لها ، لايتمتع بالضرورة بتلك الخاصة ، بالرغم من أن دائرته تتقاطع مع U_{t_0}

إذا مددنا العنصر F_0 على طول الطريق γ ، فإننا نقول إن العنصر F_1 من المجموعة (١) (الذي مركزه النقطة b نهاية الطريق $b = \gamma (1)$) ينتج من F_0 **بتمديد تحليلي على طول الطريق** γ .

لنبرهن قبل كل شيء على وحدانية التمديد على طول طريق . وبغية هذا

الأمر سنعتبر أن عنصرين قانونيين $F = (U,f)$ و $G = (V,g)$ متساويان $(F = G)$ إذا كان $U = V$ وكان $f \equiv g$ في تلك الدائرة .

نظرية (١) . إذا مددنا العنصر القانوني F_0 على طول طريق γ فإننا نحصل بنتيجة تمديده تحليلياً على طول ذلك الطريق على عنصر يتعرف تماماً بغض النظر عن اختيار المجموعة التي بواسطتها تم التمديد .

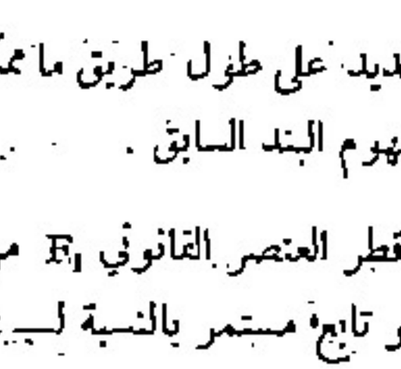
البرهان . لنفرض أن العنصرين F_1 و G_1 ناتجان عن التمديد التحليلي للعنصر F_0 على طول الطريق γ : الأول فيهما بواسطة مجموعة العناصر F_t والثاني بواسطة المجموعة G_t $(I \ni t , F_0 = G_0)$. لنستعرض المجموعة $E = \{t \in I : F_t = G_t\}$. هذه المجموعة ليست خالية لكونها تحتوي على النقطة $t = 0$ ، ولنبرهن على أن هذه المجموعة مفتوحة (بالنسبة للتوبولوجيا على I) . في الحقيقة ، لتكن $E \ni t_0$ ، أي أن $F_{t_0} = G_{t_0}$. وتبعاً لاستمرارية الطريق يوجد جوار $I \supset u (t_0)$ بحيث أنه من أجل جميع النقاط $t \in u (t_0)$ تكون النقطة $\gamma (t)$ منتمية لدائرة تقارب العنصرين F_{t_0} ، G_{t_0} . واستناداً إلى التعريف (١) ومن أجل جميع النقاط $t \in u (t_0)$ نجد أن العنصرين ينتجان بتمديد تحليلي مباشر لعنصرين متساويين $F_{t_0} = G_{t_0}$ ، وبالتالي فإنهما يتطابقان . (تابعاهما ينتجان من إعادة نشر سلسلة f_{t_0} في قوى $z - \gamma (t)$. انظر العلاقة (5) من البند السابق) وتبعاً لذلك يكون $E \supset u (t)$. لنبرهن الآن على أن E مغلقة . في الحقيقة ، لتكن $I \ni t_0$ نقطة تجمع لـــ E وليكن $u (t_0)$ جواراً لتلك النقطة بحيث أنه من أجل جميع النقاط $t \in u (t_0)$ تكون النقطة $\gamma (t)$ منتمية إلى أصغر دائرة من دائرتي تقارب العنصرين F_{t_0} ، G_{t_0} (لنرمز لها بـــ W) . في الجوار $u (t_0)$ توجد نقطة مثل $E \ni t_1$ ويكون فيها $F_{t_1} = G_{t_1}$. وبما أن $W \ni \gamma (t_1)$ فإن F_{t_0} و G_{t_0} يكونان تمديدين تحليليين مباشرين لعنصرين متساويين F_{t_1} و G_{t_1} . وبالتالي فإن $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ في تقاطع W مع دائرة تقارب F_{t_1} و G_{t_1} . واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التوابع التحليلية نجد أن $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ في W وبالتالي فإن $F_{t_0} = G_{t_0}$. أي أن $E \ni t_0$. هكذا تكون المجموعة الجزئية غير الخالية $I \supset E$ مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت في I وبالتالي فإن $E \equiv I$ وبشكل خاص يكون $F_1 = G_1$.

الآن سنبرهن على أن التمديد على طول طريق ما ممكن بشكل دائم وبعددمنته من الخطوات . أي كتمديد تحليلي بمفهوم البند السابق .

توطئة . إن $R(t)$ نصف قطر العنصر القانوني F_t من المجموعة (I) ،المؤدية للتمديد التحليلي على طول الطريق γ ، هو تابع مستمر بالنسبة لـ t من المجال المغلق I أو يطابق اللانهاية ∞ .

البرهان . إذا كان $R(t)$ من أجل نقطة ما $t_0 \ni I$ يساوي ∞ ، أي أن $R(t_0) = \infty$ ، فإن التابع الموافق f_{t_0} يكون تابعاً صحيحاً . واستناداً إلى نظرية الوحدانية تكون جميع التوابع f_t توابع صحيحة . أي أن $R(t) \equiv \infty$. ولبرهان التوطئة في الحالة المغايرة، علينا أن نلاحظ ، بان دائرتي العنصرين القانونيين F_{t_0} و F_t ، واللذي كل منهما تمديد تحليلي مباشر للآخر ، لايمكن أن تكونا محتوتين بتراص واحدة في الأخرى ، فعلى سبيل المثال ، إذا كان $U_t \supset U_{t_0}$) فإن f_{t_0} يكون تحليلياً في دائرة أكبر من U_t مركزها $\gamma(t)$ ، لذلك على الأقل يكون تحليلياً في دائرة مركزها النقطة المذكورة وتمس ∂U_{t_0} من الداخل . وفقاً لذلك نجد أن المحيطين U_{t_0} و U_t يشتركان على الأقل بنقطة . من المثلث المرسوم في الشكل (٨) (هذا المثلث يؤول إلى مجال إذا مست الدائرة U_t من الداخل ∂U_{t_0}) نستنتج بأن :

$$|R(t) - R(t_0)| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \qquad (2)$$



الشكل (٨)

واستناداً إلى تعريف التمديد التحليلي على طول طريق ، نجد أن العناصر F_t تكون تمديدات تحليلية مباشرة لـ F_{t_0} إذا كان $t \ni u(t_0)$ حيث $u(t_0)$ الجوار المذكور في التعريف . ولهذا فإن العلاقة (٢) محققة من أجل جميع النقاط $t_0 \ni I$ وجميع النقاط $t \ni u(t_0)$. وباستخدام استمرارية γ على I نجد المطلوب .

نظرية (٢) . إذا كان العنصر G ناتجاً من العنصر F بتمديد تحليلي على طول طريق فإن G يكون تمديداً تحليلياً لـ F بالمفهوم المذكور في البند الأول .

البرهان . لتكن $F_t \ ; \ t \ni I$ هي مجموعة العناصر المحققة للتمديد التحليلي على طول γ . فإذا كان $R(t) \equiv \infty$ فإن النظرية تكون بديهية . وفي الحالة المغايرة ، يكون $R(t)$ نصف قطر العنصر F_t مستمراً (حسب التوطئة أعلاه) على I . وبالتالي فإنه يوجد عدد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $\varepsilon \leqslant R(t)$ من أجل جميع النقاط $t \ni I$. وبما أن التابع $\gamma \ni t$ مستمر بانتظام على I فإنه يمكننا اختيار عدد منته من النقاط t_ν :

$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ والتي من أجل أية نقطتين $t', t'' \ni [t_{\nu-1}, t_\nu]$ ؛ $\nu = 1, 2, \ldots, n$ يكون $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon$. ومن تعريف التمديد التحليلي على طول طريق ينتج بأن العنصر $F^{(\nu)} = F_{t_\nu}$ هو تمديد تحليلي مباشر للعنصر

$$F^{(\nu-1)} = F_{t_{\nu-1}} \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ولكن $F^{(0)} = F$ و $F^{(n)} = G$. أي أن G هو تمديد تحليلي للعنصر F .

كتهاية لهذه الفقرة سنذكر النظرية المتعلقة بثبات (عدم تغير) التمديد التحليلي على طول طريق بنتيجة تشوهات هوموتوبية لذلك الطريق .

نظرية (٣) . ليكن γ_0 و γ_1 طريقين هوموتوبيين لهما نفس نقطة البداية ونفس نقطة النهاية . ولنمدد العنصر F على طول أي طريق γ_s $(I \ni s)$ محقق للهوموتوبية $\gamma_0 \sim \gamma_1$ عندئذ يتطابق ناتجا تمديد العنصر F على طول الطريقين γ_0 و γ_1 .

البرهان . ليكن $\gamma : I \times I \to C$ هو التابع المحقق للهوموتوبية $\gamma_0 \sim \gamma_1$ بحيث أن $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ [انظر التحليل (٦)] . نرمز بـ G^s_t لمجموعة العناصر المحققة للتمديد التحليلي لـ F على طول الطريق γ_s و بـ G^s لـ G^s_1 : $G^s = G^s_1$ ناتج ذلك التمديد . سنبرهن على أن G^s ، في إطار شروط النظرية ، لايتغير بتغيرات صغيرة بقدر كاف لـ s . واستناداً لاتصال المجال المغلق I نستنتج استقلالية G^s عن s . أي أن $G^0 = G^1$ ويكون هو المطلوب . استناداً إلى الاستمرار المنتظم للتابع γ على $I \times I$ تكون جميع أنصاف أقطار العناصر G^s_t ليست أصغر من عدد موجب ما $\varepsilon > 0$. ولنفس السبب ومن

أجل أية نقطة $s_0 \ni I$ يوجد جوار لهذه النقطة $I \supset u(s_0)$ وبحيث أنه من أجل أية نقطة منه $s \ni u(s_0)$ ومن أجل جميع النقاط $t \ni I$ يكون

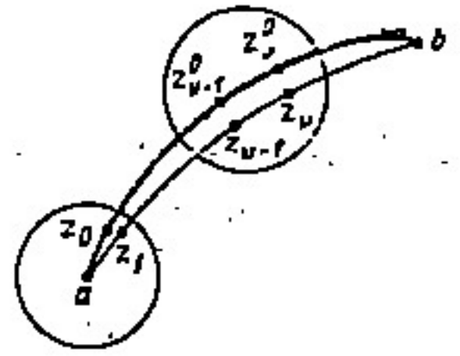
$$|\gamma(s,t) - \gamma(s_0,t)| < \varepsilon/2 \qquad (3)$$

وبالمثل ، كما في النظرية (٢) ، توجد نقاط $I \ni t_\nu$; $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ بحيث أنه من أجل أية نقطتين $t', t'' \ni [t_{\nu-1}, t_\nu]$ ومن أجل جميع النقاط $s \ni u(s_0)$ يكون

$$|\gamma(s,t') - \gamma(s,t'')| < \varepsilon/2 \qquad (4)$$

لنرمز بـ $z_\nu = \gamma(s,t_\nu), z_\nu^0 = \gamma(s_0,t_\nu)$ الشكل (٩) . وبغية التبسيط نضع

$$G^s_{t_\nu}0 = G^s_\nu 0 \quad , \quad G^s_\nu$$



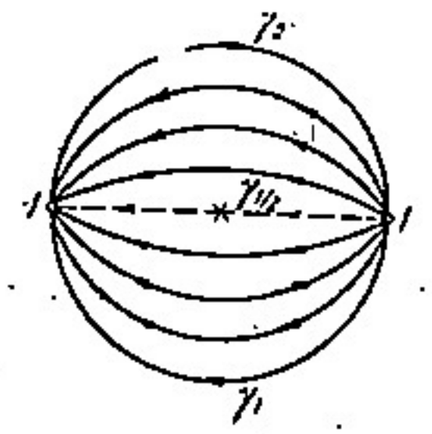
الشكل (٩)

من الواضح أن $G^s_1 0$ و G^s_1 هما تمديد تحليلي مباشر واحد للآخر : استناداً إلى العلاقة (4) لدينا $|z_1 - a| < \varepsilon/2$ و $|z^0_1 - a| < \varepsilon/2$ ، وبالتالي فإن هذين العنصرين ينتجان من العنصر F بإعادة نشر السلاسل الذي تحدثنا عنه في البند السابق . وبالاستقراء الرياضي وبفرض أن $G^s_{\nu-1}$ و $G^s_{\nu-1}0$ تمديد تحليلي مباشر واحد للآخر ونتيجة لكون $|z_{\nu-1} - z^0_{\nu-1}| < \varepsilon/2$ حسب (3) نجد أن العنصر $G^s_{\nu-1}$ ينتج أيضاً من $G^s_{\nu-1}0$ بإعادة نشر السلسلة . وبطريقة بناء $G^s_\nu 0$ و G^s_ν نجد أنهما تمديد تحليلي مباشر ، على الترتيب ، للعنصرين $G^s_{\nu-1}0$ و $G^s_{\nu-1}$ ولكن حسب العلاقتين (3) و (4) لدينا

$$|z_\nu - z^0_{\nu-1}| \leqslant |z_\nu - z^0_\nu| + |z^0_\nu - z^0_{\nu-1}| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |z^0_\nu - z^0_{\nu-1}| < \varepsilon/2$$

وبذلك فإن $G^s_\nu 0$ و G^s_ν ينتجان من $G^s_{\nu-1}0$ باعادة نشر السلسلة وبالتالي هما تمديد تحليلي واحد للآخر . بذلك ، وبالاستقراء ، نجد أن جميع العناصر $G^s_\nu 0$ و G^s_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ هي تمديدات تحليلية مباشرة واحد للآخر . وبما أن لـ $G^s_\nu 0$ و G^s_ν مركز مشترك (النقطة b) فإنهما متساويان .

ملاحظة . إذا كان العنصر F غير قابل للتمديد على طول أحد الطرق γ_0 المحققة للهوموتوبية $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ، فإن ناتجي تمديده على طول الطريقين γ_0, γ_1 يمكن أن يكونا مختلفين . في الواقع ليكن γ_0, γ_1 ، على الترتيب ، هما نصفا الدائرة $\{|z| = 1\}$ العلوي والسفلي . من الواضح أنهما هوموتوبيان ويمكن تحقيق الهوموتوبية بينهما بواسطة أقواس الدائرة γ_s $0 \leqslant s \leqslant 1$ المارة بالنقطتين ± 1 [الشكل (١٠)] . وبغية التحديد ليكن $\gamma_{1/2}$ هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $+1, -1 : [1, -1]$ ، ان العنصر $F_0 = (U_0, f_0)$ ، المذكور في البند السابق ، حيث $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$ و f_0 هو فرع $\sqrt{z}$ الذي من أجله $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$ يمكن تمديده تحليلياً على طول أي قوس γ_s مع $s \neq 1/2$ (من أجل هذا التمديد يكفي تحويل argz على طول القوس باستمرار) ولنلاحظ بأن التمديد على طول المجال $\gamma_{1/2}$ غير ممكن وذلك لأنه يحتوي على النقطة $z = 0$ (انظر الصفحة (٣٨) وتبعاً لذلك لا يمكننا تطبيق النظرية (٣) . إن التمديد على طول γ_0 و γ_1 يؤديان إلى عنصرين مختلفين : F و G (المذكورين في المثال الوارد في البند



الشكل (١٠)

السابق) . في الواقع إن جمع الطرق γ_0 والتي من أجلها $0 \leqslant s < \frac{1}{2}$ تؤدي إلى التابع F بينما الطرق γ_0 والتي من أجلها $\frac{1}{2} < s \leqslant 1$ تؤدي إلى العنصر G .

من المعلوم بأن أي طريقين ، في ساحة وحيدة الاتصال ، ولهما نفس النهايتين يكونان هوموتوبيين . واستناداً إلى النظرية (٣) نجد ، في حالة خاصة ، النظرية الآتية .

نظرية (٤) . إذا كان العنصر F_0 قابلاً للتمديد تحليلياً على طول أي طريق، في ساحة وحيدة الاتصال D (بدايته في مركز العنصر F_0) فإن ناتج تمديده على طول جميع الطرق في الساحة D لايتعلق بالطريق ويتعرف بشكل وحيد بنهايته .

تسمى هذه النظرية ، عادة ، بنظرية الوحدانية في التمديد التحليلي (باللغة اليونانية μονοδρομία تعني مكان الجري) ويمكن تسميتها بالنظرية الضيقة في وحدانية التمديد التحليلي مع الاحتفاظ بالتسمية الأولى للنظرية (٣) .

٢ ـ التوابع التحليلية

إن نظرية التمديد التحليلي ، المعروضة في الفقرة السابقة ، تسمح لنا باعطاء معنى شامل (تصور) للتوابع المتعددة القيم ، بعيداً عن عدم الوضوح والصعوبات المشار إليهما أعلاه . ويقع في أساس هذا التصور مفهوم التابع التحليلي ، ورغم أن هذا المصطلح ليس جيداً كثيراً ، من وجهة النظر المعاصرة ، لكونه لايصف تابعاً وإنما يصف موضوعاً هو مجموعة العناصر والتي كل منها عنصر مرتبط بالآخر بتمديد تحليلي .

١ ـ مفهوم التابع التحليلي . نأتي أولاً إلى تعريف التابع التحليلي .

تعريف (١) . نسمي مجموعة العناصر القانونية J الناتجة بتمديد تحليلي عن عنصر ما $F = (U, f)$ على طول جميع الطرق ، التي يمكن التمديد على طولها ، والتي بدايتها النقطة a مركز العنصر F بتابع تحليلي .

من الواضح ، أن هذا المفهوم غير مرتبط باختيار العنصر F . في الواقع ، إذا كان $G = (V, g)$ عنصراً ما منتمياً للتابع التحليلي J فإن G ينتج من F بتمديد تحليلي على طول طريق γ . وبالتالي فإن F ينتج من G بتمديد تحليلي على طول الطريق γ^{-1} ، كما أن أي عنصر H ناتج عن F بتمديد تحليلي على طول طريق λ يمكن استنتاجه من G بتمديد تحليلي

على طول الطريق $\lambda \cup \gamma^{-1}$ (انظر اجتماع الطرق في التحليل (٦)) . وعلى هذا الأساس يمكننا تعريف التابع التحليلي J بتعداد عناصره : $J = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$

حيث A مجموعة ما من الأدلة . في بعض الأحيان يسمون المجموعة J المذكورة في التعريف (١) **بتابع تحليلي تام** ، بينما يكون التابع التحليلي هو أية مجموعة جزئية متصلة من J بمعنى أن أي عنصرين منها يكونان تمديداً تحليلياً واحد للآخر .

تعريف (٢) . سنعتبر تابعين تحليليين **متساويين** إذا وجد عنصر ، على الأقل ، مشترك بينهما . (استناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي على طول طريق تكون جميع العناصر الموافقة لهما متساوية) .

لنأخذ اجتماع دوائر العناصر المنتمية للتابع التحليلي J : $D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ولنبرهن على أن D ساحة . من الواضح أن D مفتوحة وأما كونها متصلة فإنه ينتج من إمكانية وصل أي نقطتين $z' \in D$ و $z'' \in D$ بخط منكسر واقع في اجتماع دوائر عناصر السلسلة والتي وفق النظرية (٢) من البند الثاني من الفقرة الأولى تحقق تمديداً للعنصرين $F_{\alpha'}$ و $F_{\alpha''}$ (z' و z'' تنتميان للدائرتين الموافقتين) .

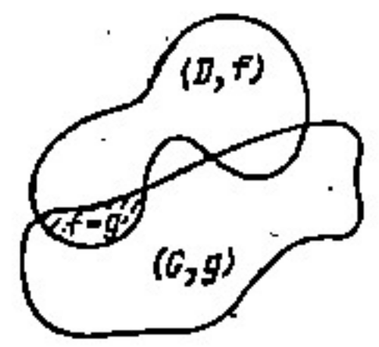
إذا كانت الساحة D **وحيدة الاتصال** ، وكان $F_0 = (U_0, f_0)$ عنصراً ما دائرته $U_0 \subset D$ قابلاً للتمديد التحليلي على طول جميع الطرق في D فإن التابع التحليلي J المشكل من جميع التمديدات التحليلية لـ F_0 على طول جميع الطرق في D يكون تحليلياً (بالمفهوم العاذي هولومورفياً) في الساحة D : استناداً إلى نظرية الوحدانية من البند السابق نجد أنه في كل نقطة $z \in D$ تكون قيم العناصر $F \in J$ والتي دوائرها تحتوي على النقطة z متساوية . أما في الحالة العامة ، وعندما تكون شروط نظرية الوحدانية غير محققة فإن الأمر لايكون كذلك : في نفس النقطة يمكن أن تكون قيم العناصر المختلفة والمنتمية إلى التابع التحليلي J مختلفة (كمثال على ذلك انظر $\sqrt{z}$ في البنود السابقة) . في هذه الحالة يقولون إن J هو **تابع تحليلي متعدد القيم** في D . ومن ناحية ثانية ، وحتى إذا كان J متعدد القيم في D ، فإنه يمكن أن توجد ساحات جزئية $G \subset D$ بحيث تؤدي تمديدات عناصر J على طول طرق مغلقة من G إلى تابع وحيد القيمة وبالتالي تحليلي (هولومورفي) في G . مثل هذه التوابع تسمى **بفروع** التابع التحليلي J . على سبيل المثال يمكن فصل فروع في أية ساحة جزئية وحيدة الاتصال

$D \supset G$ إذا وجدت عناصر $F \ni J$ قابلة للتمديد على طول جميع الطرق في G (في حالة خاصة يمكن فصل فرع في دائرة أي عنصر $(U , f) \ni J$ وهو التابع f). وسنأتي لدراسة هذا الموضوع بالتفصيل في الفقرة التالية .

من أجل تابع تحليلي متعدد القيم ، توجد نقاط تنتمي إلى دوائر عناصر مختلفة لذلك التابع وتأخذ فيها العناصر (في كل واحدة منها) قيماً مختلفة . وهنا يطرح السؤال التالي : ماهو عدد القيم التي يمكن أن يأخذها تابع تحليلي في نقطة معلومة ما . إن الإجابة على هذا السؤال متضمنة في النظرية التالية ، التي سنذكرها دون التعرض للبرهان (يترك البرهان للطالب) .

نظرية (بوانكاريه – فولتيرا) . إن مجموعة العناصر المختلفة وذات مركز معلوم لتابع تحليلي ليست بأكبر من مجموعة قابلة للعد .

تتطلب دراسة التوابع التحليلية في بعض الأحيان تعميماً لمفهوم العنصر المذكور أعلاه وعلى وجه التحديد نسمي **عنصراً للتابع التحليلي** J أي زوج $F = (D , f)$ حيث D ساحة ما من المستوي العقدي الموسع $\overline{C}$ $(\overline{C} \supset D)$ و f فرع تحليلي في تلك الساحة لـــ J (يفترض بالطبع وجود فرع تحليلي في D) . كما نسمي أي زوج (D , f) حيث f تابع تحليلي في D **بعنصر تحليلي** . ونقول عن عنصرين من هذا النوع $(D , f) , (G , g)$ أنهما **تمديد تحليلي مباشر** واحد للآخر إذا كان $D \cap G \neq \varnothing$ وكان $f \equiv g$ في إحدى المركبات المتصلة لذلك التقاطع (في المركبات الأخرى ، إذا كانت موجودة ليس من الضروري أن يتطابق التابعان f و g) الشكل (١١) . وبالمثل تماماً ، كما في الفقرة السابقة ، يعرف التمديد التحليلي (وبدون كلمة مباشر) .



الشكل (١١)

تعريف (٣) . نقول عن العنصرين (D , f) و (G , g) واللذين تحتوي ساحتاهما على نقطة $a \ni \overline{C}$ أنهما **متكافئان في النقطة a** ، إذا وجد جوار لهذه النقطة يتطابق فيه f و g : $f \equiv g$. ونسمي مجموعة العناصر المكافئة في النقطة $a \ni D$ للعنصر (D , f) **بمنبت (أصل) التابع التحليلي في النقطة a** ونرمز لذلك بالرمز f_a .

إن الفائدة من مفهوم المنبت تتلخص في حصر مفهوم العنصر : بدلاً من دراسة عنصر منبت ما نقوم بدراسة صف العناصر المكافئة له (وفي عداد تلك العناصر ، أيضاً العناصر التي ساحاتها صغيرة بقدر كاف) وذلك بفصل الشيء المشترك الذي يربط بين العناصر المتكافئة . ولهذا فإن المنبت يصف الخواص الموضعية للتابع في النقطة المستعرضة من الواضح أنه يمكن مطابقة منبت f_a مع مجموعة الأعداد المركبة $f^{(k)}(a)$ المعرفة لنشر تايلور للتابع f في النقطة a .

للاحظ أنه بدلالة منبت تابع تحليلي f_a يمكننا تعريف ذلك التابع تماماً ، وبغية هذا الأمر ، يكفي أن نأخذ عنصراً ما (D , f) ممثلاً لـــ f_a ومن ثم تنجز جميع التمديدات التحليلية الممكنة له . وبالعكس ، من أجل كل تابع تحليلي وفي أية نقطة z منتمية إلى اجتماع ساحات العناصر المنتمية لذلك التابع ، يمكن إيجاد مجموعة من المنابت f_z لصفوف تكافؤ تلك العناصر في النقطة z (هذه المجموعة ليست بأكبر من المجموعة القابلة للعد) وبالتالي فإنه يمكننا النظر إلى التابع التحليلي كمجموعة من المنابت المنتمية له .

من أجل أية نقطة $C \ni z$ يمكن تعريف العمليات المعروفة في التحليل على منابت التوابع التحليلية . إن مشتق المنبت f_z والذي سنرمز له بـــ f'_z يعني صف العناصر المكافئة لـــ (D , f') حيث (D , f) أي ممثل لصف f_z . (من الواضح أن f'_z لايتعلق باختيار الممثل) . وبالمثل يعرف المجموع $f_z + g_z$ وكذلك الجداء $f'_z . g_z$ (على سبيل المثال $f_z + g_z$ يكون صف العناصر المكافئة للعنصر $(U , f + g)$ حيث (D , f) و (G , g) ممثلاً f_z , g_z واللذين من أجلهما يحتوي التقاطع $D \cap G$ على الجوار $U \ni z$) وأما القسمة f_z / g_z فتعرف من أجل المنابت g_z غير المعدومة في النقطة z .

من ناحية ثانية ، إن العمليات على التوابع التحليلية (لاعلى المنابت) لايمكن تعريفها بشكل دائم . كمثال على ذلك نأخذ مجموع تابعين تحليليين . قبل كل شيء يجب أن تكون هناك إمكانية في اختيار عناصر لذلك التابعين لها ساحة تعريف مشتركة . لكن هذان

العنصران هما (D, f) ، (D, g) . إن التابعين التحليليين f و g هما فرعان للتابعين المستعرضين في الساحة D ويمكن جمعهما وتشكيل العنصر $(D, f+g)$. إن مجموعة العناصر الناتجة عن $(D, f+g)$) بالتمديدات التحليلية الممكنة تشكل تابعاً تحليلياً جديداً. والذي سنعتبره مجموع التابعين المستعرضين . وفي خلاف ذلك يجب أن يكون هذا التعريف (دقيقاً) أي أنه لايتعلق باختيار العنصرين، وهذا الأمر لايتحقق بشكل دائم .

وجدنا أن التابع $\sqrt{z}$ يعطي في كل ساحة وحيدة الاتصال $D \subset \overline{C}$ ولا تحتوي على النقطة $z = 0$ فرعين f_2, f_1 يختلفان بالإشارة . وبنتيجة الاختيارات المختلفة للفرعين ، يمكننا أن نأخذ بمثابة عنصر للمجموع $\sqrt{z} + \sqrt{z}$: $(D, 2f_1)$ ، $(D, 2f_2)$ ، $(D, 0)$ وإذا أعطى العنصران الأول والثاني بنتيجة التمديد التحليلي نفس التابع التحليلي والذي سنرمز له بـ $2\sqrt{z}$ ، فإن العنصر الثالث يعطينا تابعاً آخر مطابقاً للصفر . ولهذا فإن العملية $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ ليست معرفة (بدقة) .

لنلاحظ بأن مطلب الدقة يتحقق بالتأكيد إذا أضفنا أو ضربنا التوابع التحليلية بتوابع وحيدة التعيين وتحليلية كما أن التراكيب لتوابع تحليلية وتوابع وحيدة التعيين تحليلية تكون أيضاً معرفة بدقة . على سبيل المثال $e^{\sqrt{z}}$ ، $\cos\sqrt{z}$ .....

٢ ــ التوابع الشهيرة . استعرضنا في الجزء الأول من هذا الكتاب (التحليل (٦)) بعض التوابع المتعددة القيم وكيفية فصل فروع منها وحيدة القيمة . وهنا سنستعرض بعضاً من تلك التوابع كتطبيق على مفهوم التمديد التحليلي

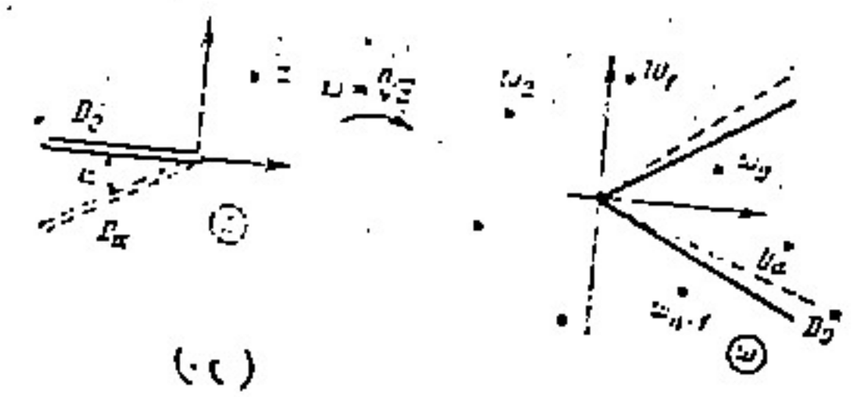
١) الجذر النوني . نقصد بالجذر النوني لـ z التابع التحليلي .

$$w = \sqrt[n]{z} \quad ; \quad (n \text{ عدد طبيعي}) \qquad (1)$$

والمعرف في المستوي العقدي $\overline{C}$ باستثناء القسم السالب من المحور الحقيقي : $D_0 = \overline{C} \setminus R_-$ لنستعرض التابع

$$f_0(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} \quad , -\pi < \varphi < \pi \qquad i\varphi \qquad (2)$$

حيث فرضنا $z = re^{i\varphi}$. إن هذا التابع مستمر في D_0 ويحقق تطبيقاً متبايناً لهذه الساحة على القطاع $D^*_0 = \left\{ -\frac{\pi}{n} < \psi < \frac{\pi}{n} \right\}$ من المستوي العقدي في المتحول $w = \rho e^{i\psi}$: w الشكل (١٢) .



(٢)

الشكل رقم (١٢)

وبما أن المشتق $f'_0(z)$ موجود ومعرف بالعلاقة :

$$f'_0(z) = \frac{1}{n\{f_0(z)\}^{n-1}} \qquad (3)$$

فإن $F_0 = (D_0, f_0)$ يمثل عنصراً تحليلياً . إن التابع التحليلي الناتج عن تمديد ذلك العنصر يسمى بالجذر النوني لـ z . ويمكن وصف ذلك التمديد على النحو الآتي . لتكن الساحة $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ ولنستعرض فيها التابع التحليلي :

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} \quad , \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha \qquad (4)$$

من الواضح أن العنصر $F_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$ هو تمديد تحليلي لعنصر (D_0, f_0) من أجل جميع $\alpha \in R$ (من أجل $|\alpha| < \pi$ تمديد تحليلي مباشر) وتعرف جميع العناصر F_α تابع الجذر . إن اجتماع جميع ساحات تلك العناصر هي الساحة : $D = \bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha$

وتمثل المستوي العقدي $\overline{C}$ الموخوذ في النقطتين $z = 0$ و $z = \infty$ (هاتان النقطتان هما النقطتان الوحيدتان المنتميتان إلى حدود جميع الساحات D_α ولا تنتميان إلى أية ساحة من D_α) .

إن تابع الجذر المذكور ، يمكن أيضاً تعريفه بواسطة عناصر قانونية . لنأخذ كمنطاق العنصر G_0 الذي مركزه $z = 1$ ودائرته $U = \{|z-1| < 1\}$ والتابع التحليلي في تلك الدائرة

$$g_0(z) = \{1 + (z-1)\}^{1/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right)(z-1)^k \qquad (5)$$

(وذلك بملاحظة أنه من أجل القيم الحقيقية الموجبة $z = x$ يكون $g_0(x) = \sqrt[n]{x}$ وباستخدام دستور ثنائي الحد في نشر هذا التابع ومن ثم بتمديد النشر من المجال $(0, 2)$ على الدائرة U) . ان العنصر G_0 يكافئ العنصر F_0 وذلك لأنه من أجل $z = x$ و $x \ni (0,2)$ لدينا $\varphi = 0 , r = x$ وبالتالي فإن $f_0(x) = g_0(x) = \sqrt[n]{x}$. وبما أن كلا التابعين f_0 , g_0 تحليلي في U فإن $f_0(z) = g_0(z)$ في الدائرة U $(U \ni z \; \forall)$ حسب نظرية الوحدانية . واستناداً الى البند السابق يتطابق التابعان التحليليان المعرفان بالعنصرين G_0 , F_0 .

وفي أية نقطة $D \ni z_0$ يأخذ التابع التحليلي $w = \sqrt[n]{z}$ n قيمة مختلفة . في الحقيقة ان قيم جميع التوابع التحليلية المتممة للعناصر F_0 (فروع التابع التحليلي) تعرف بالعلاقة

$$w = \sqrt[n]{r_0}\, e^{\,i\,\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}}$$

حيث $|z_0| = r_0$ و φ_0 إحدى قيم $\arg z_0$ الممكنة و k عدد صحيح ما . يوضح $w_0 = \sqrt[n]{r_0}\, e^{\,i\,\frac{\varphi_0}{n}}$ نجد أن القيم الأخرى لـ w تختلف عن القيمة w_0 بالعوامل $e^{\,i\,\frac{2\pi}{n}k}$ وهذه العوامل (الجذر النوني للواحد) تنتج من الشعاع 1 بدوران بزاوية مقدارها مضاعفات $2\pi/n$ أي أنه يكون لدينا n قيمة مختلفة . بالتالي يمكن الحصول على جميع قيم w باعطاء k القيم $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

وفقاً لما ذكرنا واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يمكننا فصل فرع من $\sqrt[n]{z}$ في أية ساحة وحيدة الاتصال G لاتحتوي على النقطتين $z = 0 , z = \infty$. كمثال على تلك الساحة يمكن أن نأخذ المستوي العقدي باستثناء قطع يصل تلك النقطتين (يجب أن تكون الحدود مجموعة متصلة) . ونشير أخيراً إلى أنه يمكن القيام بعمليات على الجذور آخذين بعين الاعتبار ماتحدثنا عنه في نهاية البند السابق . في حالة خاصة يكون المشتق معرفاً بدقة :

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{z})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz}$$

٢) التابع اللوغاريتمي . يمكن تعريف لوغاريتم المتحول المركب z

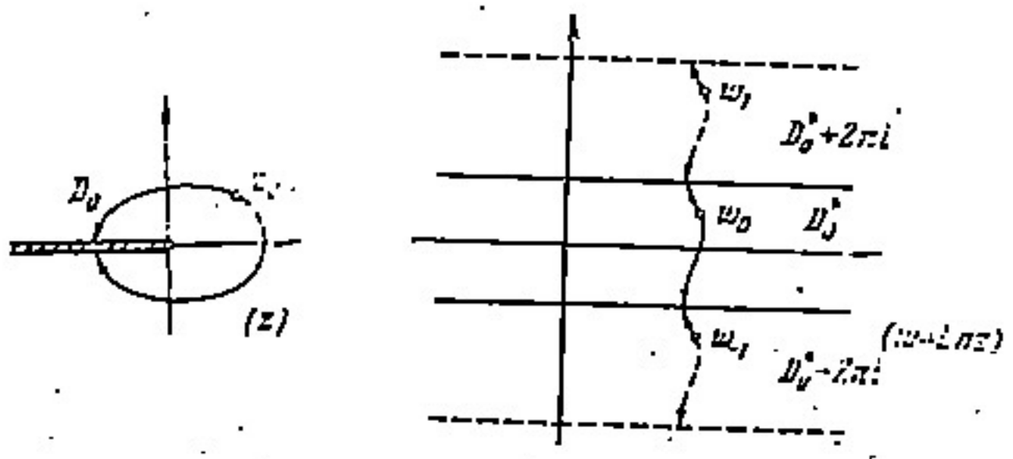
$$w = \mathrm{Ln}z \tag{6}$$

بالتمديد التحليلي للعنصر المنطلق المشكل من الساحة $D_0 = \{-\alpha < \varphi < \pi\}$ والتابع المعرف فيها

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi \quad , \quad -\pi < \varphi < \pi \tag{7}$$

والذي يسمى الفرع الرئيسي للوغاريتم (فرضنا $z = re^{i\varphi}$). ان التابع (7) تحليلي في D_0 ويطبق هذه الساحة على الشريط $D_0^* = \{w : -\pi < \mathrm{Im}w < \pi\}$ الشكل (١٣) وأن مشتقه في أية نقطة $D_0 \ni z$ يعطى بالعلاقة :

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \tag{8}$$



الشكل رقم (١٣)

وبالتالي فإن العنصر $F_0 = (D_0 , \ln z)$ تحليلي . ويمكن تعريف التمديد التحليلي لـ F_0 ، كما ذكرنا أعلاه ، بواسطة مجموعة العناصر F_α $(R \ni \alpha)$ والمشكلة من الساحة $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ والتابع التحليلي فيها $f_\alpha(z)$:

$f_\alpha(z) = \ln r + i\varphi \; , \; -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$. ويكون اجتماع الساحات D_α مجدداً هو المستوي العقدي $\bar{C}$ باستثناء النقطتين $z = 0$ و $z = \infty$.

ويمكننا تعريف التابع $\mathrm{Ln}z$ أيضاً بواسطة عناصر قانونية . لنأخذ كمنطلق العنصر المشكل من الساحة $U = \{|z-1| < 1\}$ والتابع التحليلي فيها :

$$\ln z\,|_U = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{(z-1)^n}{n} \tag{9}$$

والذي ينتج عن تمديد التابع الحقيقي :

$$\ln x = \ln\{1 + (x-1)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

من المجال (0,2) من المحور الحقيقي على الدائرة U التي قطرها (0,2) . نتيجة لذلك يكون العنصران $(D_0 , \ln z)$, $(U , \ln z|_U)$ متكافئين) .

في كل نقطة $z_0 \in D$ حيث $D = DU_0$ تكون مجموعة قيم التابع Lnz هي المجموعة القابلة للعد وتعطى بالعلاقة :

$$w = \ln r_0 + i(\varphi_0 + 2k\pi) \qquad (10)$$

حيث $r_0 = |z_0|$ و φ_0 إحدى قيم $\operatorname{Arg} z_0$ و k عدد صحيح ما .

إن جميع هذه القيم مختلفة فيما بينها ومتوضعة على المستقيم الشاقولي $\operatorname{Re} w = \ln r_0$ وعلى مسافات من بعضها البعض هي من مضاعفات 2π . إن فروع التابع التحليلي Ln z يمكن فصلها كما في التابع $\sqrt[n]{z}$ في أية ساحة وحيدة الاتصال لاتحتوي على النقطتين $z = 0$ و $z = \infty$ وهذه الفروع تختلف عن بعضها البعض بعدد صحيح من $2\pi i$. ونشير أيضاً هنا إلى أنه يمكن القيام بعمليات على اللوغاريتم في إطار ماذكرنا في نهاية البند السابق . في حالة خاصة يكون المشتق :

$$(\operatorname{Ln} z)' = 1/z$$

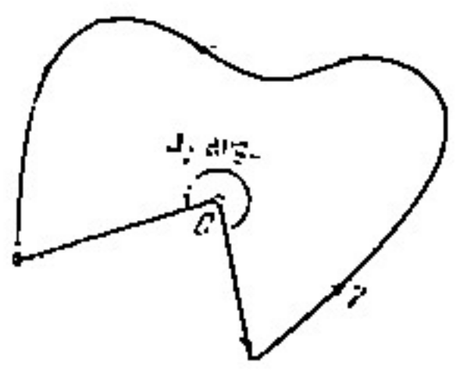
تابع وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D . كما يكون $z \equiv e^{\operatorname{Ln} z}$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلي . وأما من أجل العمليات الجبرية على اللوغاريتم فإن الأمر مختلف فعلى سبيل المثال لانستطيع أن نكتب $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = 2 \operatorname{Ln} z$ وذلك لأن الطرف الأيسر من هذه المساواة غير معرف بدقة .

٣ ــ الفروع التحليلية

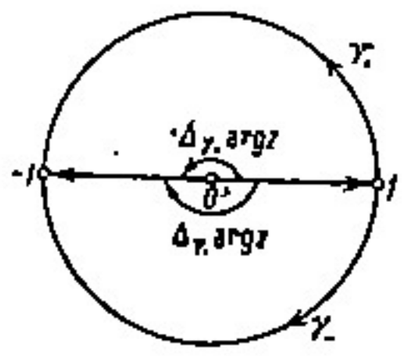
سنتناول في دراستنا ، في هذه الفقرة ، بعض التوابع التحليلية في ساحات وحيدة ومتعددة الاتصال وكيفية فصل فروع وحيدة التعيين وتحليلية من تلك التوابع وسنمهد

لذلك بدراسة تغيرات التابع $\arg z$(*) على طول طريق γ .

١ ــ تزايد العمدة على طول طريق . ليكن γ طريقاً ما غير مار بالنقطة $z = 0$ نسمي زاوية دوران الشعاع z ، عندما ترسم النقطة z الطريق γ من بدايته حتى نهايته بتغير عمده z على طول الطريق γ ونرمز لذلك بـ $\Delta_\gamma \arg z$ الشكل (١٤) .



الشكل (١٤)



الشكل (١٥)

مثال (١) . a) إذا كان γ هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $1 - i$ و $1 + i$ (بدايتها $(1 - i)$ ونهايتها $(1 + i)$) ، فإن $\Delta_\gamma \arg z = \frac{\pi}{2}$.

b) إذا كان γ هو نصف الدائرة : $\{|z| = 1 , \operatorname{Im} z \geq 0\}$ المرسوم بالاتجاه الموجب فإن $\Delta_\gamma \arg z = \pi$. الشكل (١٥) .

c) إذا كان γ هو نصف الدائرة : $\{|z| 1 , \operatorname{Im} z \leq 0\}$ المرسوم بالاتجاه السالب فإن $\Delta_\gamma \arg z = -\pi$ الشكل (١٥) .

لنستنتج الآن العلاقة المعبرة عن $\Delta_\gamma \arg z$. من العلاقتين :

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \qquad (1)$$

نجد $dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi d\varphi$, $dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$ ومنه يكون

$r\, d\varphi = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy$ وبالتالي فإن :

$$d\varphi = d\arg z = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

(*) أحد فروع التابع $\operatorname{Arg} z$.

نتأخذ التكامل $\int_{\gamma} d\arg z$. إن هذا التكامل يساوي الفرق بين عمدتي z في نهاية وبداية الطريق γ . أي أنه يساوي تغير العمدة على طول الطريق : $\Delta_\gamma \arg z$ وبالتالي فإن :

$$\Delta_\gamma \arg z = \int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

ويمكن كتابة العلاقة (3) على الشكل :

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi} \qquad (4)$$

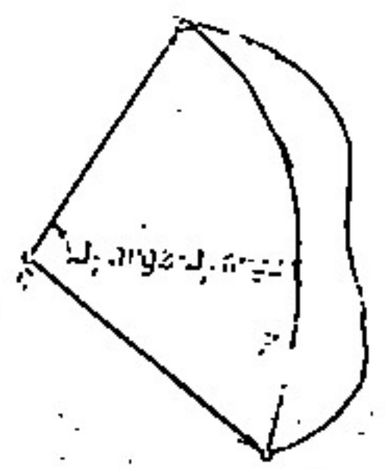
وذلك لأن :

$$\operatorname{Im} \frac{dz}{z} = \operatorname{Im} \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

لنستعرض الآن الخواص التي يتمتع بها تغير العمدة .

١. ليكن γ طريقاً يمكن تشويهه بشكل مستمر إلى الطريق γ_1 ، دون المرور بالنقطة $z = 0$ (الطريقان γ و γ_1 هوموتوبيان في الساحة $\infty > |z| > 0$) الشكل (١٦) . عندئذ تتحقق المساواة

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z \qquad (5)$$



الشكل (١٦)

البرهان . لنستعرض التكامل :

$$\int_{\gamma} p\,dx + Q\,dy \qquad (6)$$

حيث التوابع $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ ، $\frac{\partial P}{\partial y}$ ، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ مستمرة في ساحة D و γ طريق واقع في هذه الساحة . ومن المعلوم في التحليل الرياضي بانه إذا كانت الساحة D وحيدة الاتصال فإن الشرط اللازم والكافي ليكون التكامل (6) على طول أي طريق مغلق γ واقع في الساحة D معدوماً ، هو أن يتحقق في جميع نقاط الساحة D بالعلاقة :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (7)$$

ومن هذه النظرية ينتج بأنه إذا تحققت العلاقة (7) في الساحة D (من الممكن D أن لاتكون وحيدة الاتصال) . وكان γ و γ_1 هوموتوبيين في D ، فإنه يكون :

$$\int_{\gamma} p\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} p\,dx + Q\,dy \qquad (8)$$

بوضع $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ، $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ، نجد أن العلاقة (7) محققة في الساحة $\infty > |z| > 0$ وهذا بدوره يؤدي لتحقق العلاقة (5) . ولنلاحظ أيضاً بأن العلاقة (5) تنتج من المعنى الهندسي لتغير العمدة على طول طريق γ . انظر الشكل (١٦) أعلاه . من هذه الخاصة تنتج الحالة الخاصة التالية :

٢ . إذا كان الطريق γ مغلقاً وهوموتوبياً للصفر في الساحة $\infty > |z| > 0$ فإن :

$$\Delta_\gamma \arg z = 0 \qquad (9)$$

لنلاحظ بأن العلاقة (5) لاتتحقق من أجل أي طريقين γ و γ_1 ، لهما نفس نقطة البداية ونفس نقطة النهاية (قارن في المثال (١) : b) مع c)) . وبالمثل فإن العلاقة (9) لاتتحقق من أجل أي منحن مغلق γ .

مثال (٢) . إذا كان γ هو الدائرة $|z| = 1$ والمرسومة في الاتجاه الموجب مرة واحدة ، فإن $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$.

٣ . إذا كان γ غير مار بالنقطة $z = 0$ ، فإن :

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^-} \arg z \tag{10}$$

٤ . وإذا كان $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ فإن :

$$\Delta_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z \tag{10}$$

إن هاتين الخاصتين تنتجان من العلاقة (4) ومن خواص التكاملات .

لتكن D ساحة وحيدة الاتصال ، لاتحتوي على النقطتين $z = 0$ و $z = \infty$. ولنثبت نقطة z_0 ولتكن $\arg z$ إحدى قيم $\operatorname{Arg} z_0$. لنضع :

$$\arg z = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z \tag{12}$$

حيث γ طريق في الساحة بدايته النقطة z_0 ونهايته النقطة z . إن هذا التابع وحيد القيمة، وذلك لأن $\Delta_\gamma \arg z$ لايتعلق بالطريق γ الواصل بين النقطتين z_0 و z (أي طريقين في D يصلان z_0 بـ z هوموتوبيين) . وبما أنه يمكننا كتابة العلاقة (12) على الشكل

$$\arg z = \arg z_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \tag{13}$$

وبذلك يكون التابع (12) وحيد القيمة ومستمراً وهو أحد فروع التابع المتعدد (اللانهائي) القيم $\operatorname{Arg} z$ في الساحة D :

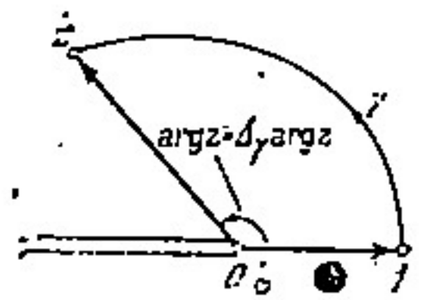
$$\operatorname{Arg} z = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2k\pi\,, (k = 0\,, \mp 1\,, \mp 2, \dots) \tag{14}$$

ومن هذا يتضح بأنه لمعرفة أحد الفروع المستمرة للتابع $\operatorname{Arg} z$ في الساحة D يكفي معرفة قيمته في نقطة واحدة $D \ni z_0$.

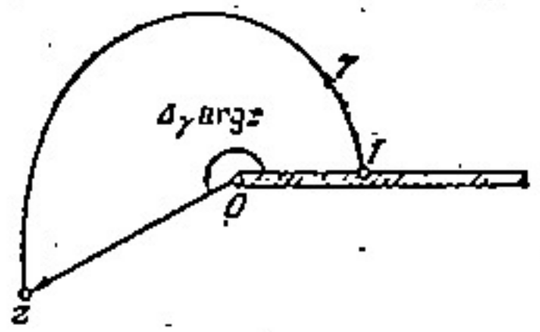
مثال (٣) . لتكن D_0 هي المستوي العقدي بأكمله باستثناء القطع على طول الشعاع $(-\infty\,, 0]$. ولنضع $\arg 1 = 0\,, z_0 = 1$ ، عندئذ نجد :

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z$$

حيث γ طريق ما بدايته النقطة $z_0 = 1$ ونهايته النقطة z الواقعة في الساحة D_0 الشكل (١٧)



الشكل (١٧)



الشكل (١٨)

مثال (٤) . لتكن الساحة D_1 هي المستوي العقدي بأكمله باستثناء القطع على طول الشعاع $[0\,, +\infty)$. ولنضع $z_0 = 1$ النقطة الواقعة على الضفة العليا للقطع $\arg z_0 = \arg z\,1 = 0$ عندئذ نجد :

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z$$

حيث γ طريق ما بدايته النقطة $z_0 = 1$ ونهايته النقطة z المنتمية للساحة D_1 الشكل(١٨) . لنوجد قيمتي التابع على ضفتي القطع العليا والسفلى . من أجل $x > 0$ لدينا :

$$\arg (x + i0) = \lim_{y \to +0} \arg (x + iy) = 0$$

وبالمثل نجد $\arg (x - i0) = 2\pi$. وهكذا نجد أن هذا التابع غير مستمر في نقاط القسم الموجب من المحور الحقيقي . كما أن التابع في المثال (٣) غير مستمر في نقاط القسم السالب من المحور الحقيقي . وهذا بدوره يؤكد لنا على أنه في الساحة $0 < |z| < \infty$ لايمكن فصل فرع مستمر للتابع $\operatorname{Arg} z$.

٢ — الفروع التحليلية لتابع تحليلي في ساحة وحيدة الاتصال . إن نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي تمكننا من بناء خوارزمية مناسبة وبسيطة بواسطتها يمكننا تجزئة التابع التحليلي المتعدد القيم إلى فروع تحليلية . وعلى وجه التحديد ليكن $F(z)$ تابعاً تحليلياً في الساحة المنتهية الاتصال D . ولننشىء قطوعاً في هذه الساحة بحيث تؤول إلى ساحة وحيدة الاتصال $\widetilde{D}$. لنثبت عنصراً $f_0(z)$ في النقطة $\widetilde{D} \ni z_0$ (٥) . إن هذا العنصر ، استناداً إلى

(٥) نقصد بذلك العنصر $(U\,, f_0(z))$ حيث U هي الدائرة الأعظمية التي مركزها z_0 والتي يكون فيها $f_0(z)$ تحليلياً .

نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يولد في الساحة $\widetilde{D}$ تابعاً تحليلياً $F_0(z)$ هو فرع تحليلي للتابع $F(z)$. كما أن العناصر المختلفة في النقطة z_0 تولد فروعاً تحليلية مختلفة للتابع وبهذه الصورة يتجزأ التابع $F(z)$ في الساحة D إلى فروع تحليلية . لنلاحظ بأن القطوع المنشأة في الساحة D (التي من أجلها تؤول D إلى ساحة وحيدة الاتصال) يمكن تشكيلها بطرق مختلفة وبالتالي فإنه يمكن تجزئة التابع المتعدد القيم بطرق مختلفة .

مثال (١) . لننشىء في المستوي العقدي قطعاً بسيطاً بواسطة طريق γ يصل النقطتين 0 و ∞ فنحصل على ساحة وحيدة الاتصال D ولنبين كيف يتجزأ التابع $\operatorname{Ln} z$ إلى فروع تحليلية . لنثبت نقطة $D \ni z_0$ وعنصر اللوغاريتم $f(z)$ في هذه النقطة . بما أن هذا العنصر قابل للتمديد التحليلي على طول أي طريق غير مار بالنقطتين 0 , ∞ فإننا نحصل ، استناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي ، على فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي $\operatorname{Ln} z$ في الساحة D . كما أنه يتجزأ إلى عدد لانهائي من الفروع التحليلية في الساحة وذلك لأنه إذا كان $f_1(z)$, $f_2(z)$ فرعين تحليليين للتابع $\operatorname{Ln} z$ فإن $f_1(z) - f_2(z) = 2k\pi i$ من أجل $D \ni z$ وحيث k عدد صحيح .

وبالمثل فإن z^α يتجزأ في الساحة D إلى فروع تحليلية . فإذا كان α عدداً حقيقياً أصماً أو كان $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$ فإن عدد الفروع يكون لانهائياً . أما إذا كان $\alpha = p/q$ حيث p و q عددان صحيحان أوليان فيما بينهما و $q > p$ فإن z^α يتجزأ إلى q فرعاً مختلفاً، وذلك لأنه إذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ فرعين تحليليين للتابع z^α فإن $f_2(z) = e^{2k\pi i\alpha} f_1(z)$ حيث $0 \neq k$ عدد صحيح .

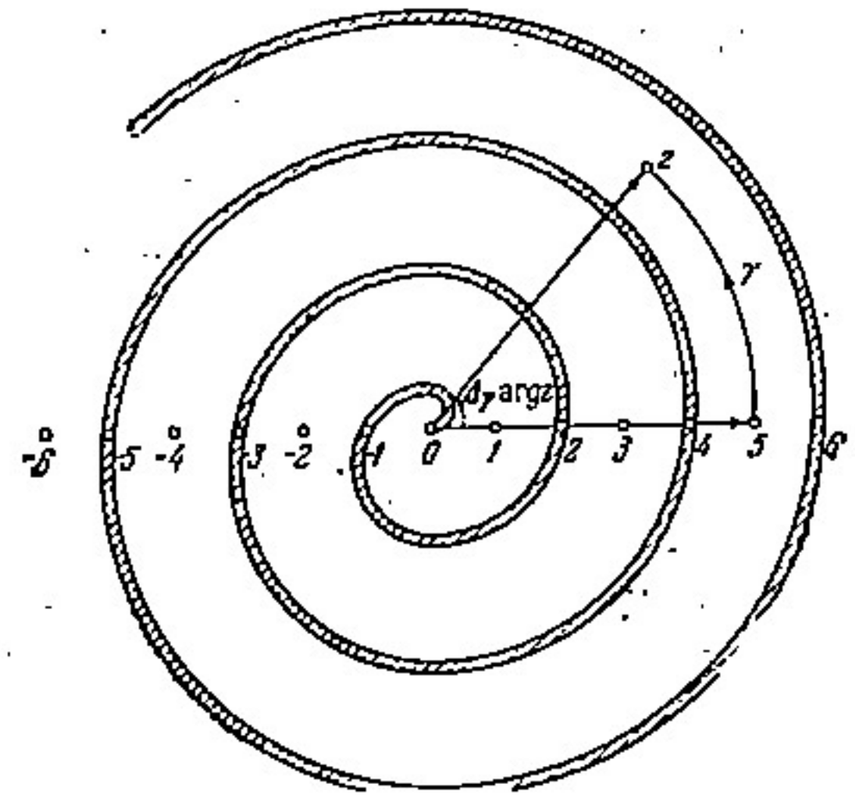
مثال (٢) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي بأكمله باستثناء قطع على طول الطريق : $z = \frac{1}{\pi} e^{it}$ $\quad 0 \leqslant t < \infty$ ولنضع $\arg 5 = 2\pi$ ، عندئذ نجد :

حيث γ طريق يصل النقطة z_0 بالنقطة $D \ni z$. وفقاً لذلك نجد $\arg 7 = 4\pi$

$\arg(-4) = \pi$, $\arg 3 = 0$, $\arg(-2) = -\pi$, $\arg(-6) = 3\pi$

$\arg 1 = -2\pi$ وهكذا ... لنفرض الآن $f(z)$ هو أحد فروع التابع $\operatorname{Ln} z$ في الساحة D والذي من أجله $f(1) = 0$ ولنحسب قيم هذا الفرع في النقاط (-2) , 3 , (-4) . بما أن $f(z) = \ln|z| + i\Delta_{\gamma_1} \arg z$ حيث γ_1 طريق يصل النقطة 1 بالنقطة z من D . ويقع في الساحة D فإننا نجد

$f(-4) = \ln 4 + 3\pi i$, $f(3) = \ln 3 + 2\pi i$, $f(-2) = \ln 2 + \pi i$



الشكل (١٩)

مثال (٣) . لتكن D_α الساحة الناتجة من قطع المستوي العقدي C على طول الشعاع $z = re^{i\alpha}$ حيث $0 \leqslant r < \infty$, $0 < \alpha < 2\pi$ استناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يتجزأ التابع $\sqrt[\alpha]{z}$ في الساحة D_α إلى فرعين تحليليين . ليكن $f_\alpha(1) = 1$ ولنحسب $f_\alpha(i)$; $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$. لدينا :

$$f_\alpha(i) = e^{i\varphi/2} \quad , \quad \varphi = \Delta_\gamma \arg z$$

حيث γ طريق واقع في الساحة D ويصل النقطة 1 بالنقطة i

١) $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ؛ في هذه الحالة وبمثابة الطريق γ يمكننا أخذ المجال $[1 , i]$ وبالتالي فإن $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ويكون $f_\alpha(i) = e^{i\pi/4}$.

٢) $0 < \alpha < \pi/2$ في هذه الحالة يمكننا أخذ الطريق γ قوس الدائرة

$$\left\{ z = e^{-it} \ , \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$$

وبالتالي نجد $\varphi = \frac{-3\pi}{2}$ ويكون

$f_\alpha(i) = -e^{-i\pi/4}$.

قبل أن نأتي إلى أمثلة أخرى في هذا الموضوع ، سنعطي بعض التوضيحات المتعلقة بالعبارات من الأشكال $\operatorname{Ln} f(z)$, $\sqrt{f(z)}$, $(f(z))^{\alpha}$ حيث $f(z)$ تابع وحيد التعيين وتحليلي . إن العلاقة $F(z) = \operatorname{Ln} f(z)$ لاتعرف بحد ذاتها تابعاً تحليلياً وبغية ذلك ينبغي معرفة العنصر المنطلق أومعرفة قيمة التابع في نقطة ما . وتبعاً لذلك تعرف العلاقة :

$$F(z) = \operatorname{Ln} f(z) \quad , \quad F(z_0) = w_0$$

حيث w_0 احدى قيم $\operatorname{Ln} f(z_0)$ ، تماماً ، تابعاً تحليلياً $F(z)$.

مثال (٤) . ليكن $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً ومغايراً للصفر في ساحةوحيدة الاتصال D ، عندئذٍ يكون التابع :

$$F(z) = \operatorname{Ln} f(z) \quad , \quad F(z_0) = w_0$$

تحليلياً في الساحة D حيث $e^{w_0} = f(z_0)$.

في الواقع ان التابع $F(z)$ تحليلي في الساحة D وذلك لأن $F(z) = \operatorname{Ln} w$ $(F(z_0) = w_0)$. واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يكون $F(z)$ تحليلياً ، بالمفهوم العادي ، في الساحة D وهذا التابع يتعين بشكل وحيد بالعلاقتين :

$$e^{F(z)} = f(z) \; ; \; F(z_0) = w_0$$

وبشرط تحليلية في الساحة D ، وأما قيمه فتحسب بالعلاقة (*)

$$F(z) = \ln f(z) + i\,[\operatorname{Im} w_0 + \Delta_\gamma \arg f(z)] \qquad (1)$$

حيث γ طريق واقع في الساحة D ويصل النقطة z_0 بالنقطة z .

مثال (٥) . ليكن $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً ومختلفاً عن الصفر في ساحة وحيدة الاتصال D ، عندئذٍ يكون التابع

(*) هذه العلاقة تنتج من العلاقة :

$$\ln f(z) = \ln f(z_0) + \int_{\gamma} \frac{d f(\xi)}{f(\xi)}$$

$$F(z) = \sqrt{f(z)} \quad , \quad F(z_0) = w_0$$

حيث $w_0^2 = f(z_0)$ وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D .

لنستعرض الآن بعض العلاقات التابعية للتابع اللوغاريتمي والتابع الأسي . ليكن $f_1(z)$, $f_2(z)$ تابعين وحيدي التعيين وتحليليين ومختلفين عن الصفر في ساحة وحيدة الاتصال D عندئذٍ تكون التوابع :

$$F_1(z) = \operatorname{Ln} f_1(z) \quad , \quad F_1(z_0) = w_1 \; ;$$

$$F_2(z) = \operatorname{Ln} f_2(z) \quad , \quad F_2(z_0) = w_2 \; ;$$

$$F_0(z) = \operatorname{Ln}(f_1(z)) \quad , \quad F_0(z_0) = w_0$$

وحيدة التعيين وتحليلية في الساحة D (المثال (٤)) .

توطئة (١) . إذا كان $w_0 = w_1 + w_2$ ، فإنه في الساحة D يكون

$$F_0(z) \equiv F_1(z) + F_2(z) \qquad (2)$$

البرهان . إن التابع $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$ وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D و $e^{F(z)} = f_1(z) f_2(z)$, $F(z_0) = w_0$ وهذه الشروط تعرف تابعاً وحيداً ، وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D (المثال ٤) . وبما أن التابع $F_0(z)$ يحقق أيضاً هذه الشروط . أي أن :

$$e^{F_0(z)} = f_1(z) f_2(z) \quad , \quad F_0(z_0) = w_0$$

فإن $F(z) \equiv F_0(z)$ في الساحة D .

ويمكن كتابة المساواة (2) شكلياً على الشكل

$$\operatorname{Ln}[f_1(z) f_2(z)] = \operatorname{Ln} f_1(z) + \operatorname{Ln} f_2(z) \qquad z \in D \qquad (3)$$

وأما المعنى الدقيق لـ (3) فهو مبين في التوطئة (١) .

وبشكل مماثل للعلاقة (3) تبرهن العلاقات

$$\operatorname{Ln} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \operatorname{Ln} f_1(z) - \operatorname{Ln} f_2(z)$$

$$\sqrt{f_1(z)\,f_2(z)} = \sqrt{f_1(z)}\,\sqrt{f_2(z)}$$

$$\sqrt{\frac{f_1(z)}{f_2(z)}} = \frac{\sqrt{f_1(z)}}{\sqrt{f_2(z)}} \qquad (4)$$

$$(f_1(z)\,f_2(z))^{\alpha} = f_1(z))^{\alpha}\,(f_2(z))^{\alpha}$$

حيث $f_1(z)$, $f_2(z)$ وحيدا التعيين وتحليليان ومختلفان عن الصفر في ساحة وحيدةالاتصال D . إن المعنى الدقيق للعلاقات (4) يتلخص فيما يلي : إن التوابع في كل من الطرف الأيمن والطرف الأيسر في أية علاقة من العلاقات (4) هي توابع تحليلية وتتطابق في نقطة ما $z_0 \ni D$ لنأخذ ، على سبيل المثال العلاقة الثانية من (4) . إن هذه المساواة تفهم على الشكل التالي :

$$F_0(z) = F_1(z)\,F_2(z)$$

حيث :

$$F_0(z) = \sqrt{f_1(z)\,f_2(z)} \quad , \quad f_0(z_0) = w_0$$

$$F_j(z) = \sqrt{f_j(z)} \quad , \quad F_j(z_0) = w_j \quad , \quad j = 1,2$$

وبحيث يتحقق الشرط $w_0 = w_1 , w_2$.

من العلاقتين (3) و (4) نستنتج العلاقات الهامة بالنسبة لعمدة جداء وقسمة التوابع .

نتيجة . ليكن $f_1(z)$, $f_2(z)$ تابعين وحيدي التعيين وتحليليين ومختلفين عن الصفر في الساحة D ، وليكن γ طريقاً ما في الساحة D ، عندئذٍ يكون :

$$\Delta_\gamma \arg(f_1(z)\,f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z) \qquad (5)$$

$$\Delta_\gamma \arg\left(\frac{f_j(z)}{fz_2(z)}\right) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) - \Delta_\gamma \arg f_2(z) \qquad (6)$$

في الواقع ، لتكن الساحة D وحيدة الاتصال وليكن γ هو الطريق الذي يصل z_0 و z ولتكن التوابع $F_j(z)$ حيث $j = 0\,;\,1\,,2$ هي ذاتها المذكورة في التوطئة (1) ، عندئذ من أجل أية نقطة $z \ni D$ يكون لدينا :

$$F_j(z) = \mathrm{Ln}\,|f_j(z)| + i[\mathrm{Im}\,w_j + \Delta_\gamma \arg f_j(z)]\,,\ j = 1\,,2$$

$$F_0(z) = \mathrm{Ln}\,|f_1(z)\,f_2(z)| + i[\mathrm{Im}\,w_0 + \Delta_\gamma \arg (f_1(z)\,f_2(z)]\ (f_1(z)\,.\,f_2(z))$$

وبتعويض هذه العبارات في العلاقة (2) ، وبالأخذ بعين الاعتبار أن $w_0 = w_1 + w_2$ نجد العلاقة (5) ، إن العلاقة (6) تبرهن بالمثل بواسطة العلاقة الأولى من (4) .

بما أن تساوي تابعين تحليليين يعني وجود عنصر مشترك ، على الأقل ، بينهما وفي حالة خاصة تساوي عنصريهما المنطلقين ، فإن العلاقات من الشكل (2) و (3) تبقى صحيحة من أجل التوابع التحليلية ، ليكن ، للسهولة ، $f_1(z)$, $f_2(z)$ تابعين وحيدي التعيين وتحليليين ومختلفين عن الصفر في الساحة D . ولنثبت نقطة $z_0 \ni D$ ، عندئذٍ (المثال (٥)) في جوار ما U لهذه النقطة تكون التوابع

$$g_j(z) = \sqrt{f_j(z)}\ ,\ g_j(z_0) = w_j\ ,\ j = 1,2$$

$$g_0(z) = \sqrt{f_1(z)\,f_2(z)} \quad , \quad g_0(z_0) = w_0$$

وحيدة التعيين وتحليلية . لتكن w_j هي بحيث $w_0 = w_1\,w_2$ ، عندئذٍ ، ووفقاً لما برهنا أعلاه يكون :

$$g_0(z) = g_1(z)\,g_2(z) \qquad z \in U \qquad (7)$$

فإذا كان $F_j(z)$ تابعاً تحليلياً مولداً بالعنصر $g_j(z)$ المعرف في النقطة z_0 و $j = 0\,,1\,,2$ فإنه استناداً إلى (7) يكون :

$$F_0(z) = F_1(z)\,F_2(z) \qquad (8)$$

حيث تفهم هذه المساواة بمفهوم تساوي التوابع التحليلية ، وبشكل مختصر نصطلح على كتابة هذه المساواة على الشكل :

$$\sqrt{f_1(z)\,f_2(z)} = \sqrt{f_1(z)}\ \sqrt{f_2(z)}$$

حيث أن المعنى الدقيق لهذه العلاقة هو ماذكرناه أعلاه . وبالمثل تماماً تفسر العلاقات الأخرى من (3) و (4) .

٣ ــ نأتي الآن إلى الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية في ساحات متعددة الاتصال . إن نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي لاتمكننا من حل مسألة فصل فرع وحيد التعيين وتحليلي لتابع تحليلي $F(z)$ في ساحة متعددة الاتصال . إن هذه المسألة تحل على النحو الآتي . ليكن $f(z)$ عنصراً للتابع $F(z)$ في النقطة $z_0 \ni D$ وليكن γ طريقاً مغلقاً بدايته النقطة z_0

وواقعاً في الساحة D . وبنتيجة التمديد التحليلي للعنصر f (z) على طول الطريق γ نحصل على عنصر g(z) في النقطة z_0 . لنكتب ذلك على الشكل : $g(z) \leftarrow f(z)$ بالتمديد (بالدوران) على طول γ . فإذا كان $f(z) \leftarrow f(z)$ بالتمديد على طول أي طريق γ فإن f(z) يولد فرعاً وحيد التعيين وتحليلياً ، في الساحة D ، لتابع F (z) . بكلام آخر يوجد في الساحة D تابع وحيد التعيين وتحليلي $F_0(z)$ بحيث أن $F_0(z) \equiv f(z)$ في جوار للنقطة z_0 . وأما إذا كان $g(z) \leftarrow f(z)$ و $g(z) \not\equiv f(z)$ فإنه لايمكن فصل فرع للتابع F (z) وحيد التعيين وتحليلي في D .

مثال (٦) . ليكن $F(z) = \sqrt{z^2-1}$ و D_0 هي المستوي العقدي باستثناء القطعين $[1, +\infty)$ ، $(-\infty, -1]$. وانبرهن على أن هذا التابع يتجزأ في الساحة D_0 إلى فرعين وحيدي التعيين وتحليليين . بما أن $z^2 - 1 \neq 0$ في الساحة D_0 فإنه استناداً إلى النظرية (٢) يكون F (z) تحليلياً في D_0 ، وبما أن هذه الساحة وحيدة الاتصال فإن هذا التابع يتجزأ إلى فروع وحيدة التعيين تحليلية في D_0 ويتعرف كل منها بقيمته في نقطة ما مثل $D_0 \ni z_0$:

$$F_0(z) = \sqrt{z^2-1} \quad ; \quad F_0(z_0) = w_0$$

حيث $w_0^2 = z_0^2 - 1$ (أي أن w_0 إحدى قيمتي $\sqrt{z_0^2-1}$) . وبالتالي فإن عدد الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية في D_0 هو تماماً (٢) ويكونان مرتبطين مع بعضهما بالعلاقة

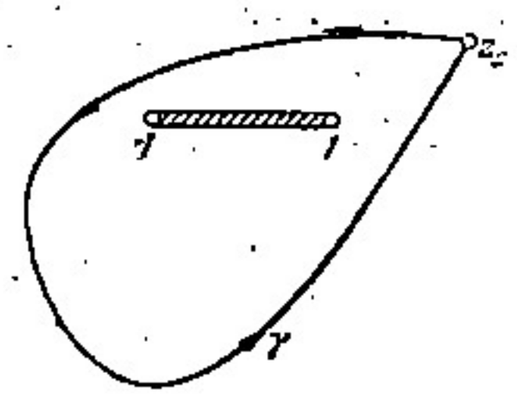
$$F_1(z) \equiv -F_0(z) \quad ; \quad z \in D_0$$

وبالمثل تماماً يبرهن على أنه للتابع $G(z) = \operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1}$ عدد لانهائي من الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية في الساحة D_0 وأن كل فرع منها يتعرف بقيمته في نقطة ما $D \ni z_0$. فعلى سبيل المثال يمكن كتابة هذه الفروع على الشكل :

$$G_0(z) = \operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1} \quad , \quad G_0(0) = \pi i$$

$$G_k(z) \equiv G_0(z) + 2k\pi i \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

مثال (٧) . لتكن D هي المستوي العقدي C باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$ الشكل (٢٠) . ولنبرهن على أنه للتابع $F(z) = \sqrt{z^2-1}$ يوجد فرعان وحيد التعيين وتحليليان في الساحة D الثنائية الاتصال .



الشكل (٢٠)

البرهان . ١) ليكن العنصر المنطلق للتابع F (z) هو $F_0(z)$ والمعرف في النقطة $D \ni z_0$ ، وليكن γ طريقاً بسيطاً مغلقاً بدايته النقطة z_0 وواقعاً في الساحة D . إن القيمة الناتجة لـ $F(z_0)$ بنتيجة الدوران على الطريق γ هي $F(z_0) = F_0(z_0)\, e^{i\varphi/2}$ حيث $(z^2-1) = (z-1)(z+1)$ ، وبما أن $\varphi = \Delta_\gamma \arg(z^2-1)$ فإن

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \, , \, \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-1) \quad , \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z+1)$$

١) إذا كان المجال $[-1, 1]$ غير واقع داخل الطريق γ فإن $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن $F(z_0) = F_0(z_0)$.

٢) إذا كان المجال $[-1, 1]$ واقعاً داخل الطريق γ ، الشكل (٢٠) ، وموجهاً بالاتجاه الموجب فإن $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$ وبالتالي $\varphi = 4\pi$ ومجدداً نجد $F(z_0) = F_0(z_0)$ وأما إذا كان γ موجهاً بالاتجاه السالب فإن $\varphi = -4\pi$. وفقاً لما برهنا يكون التابع :

$$f_0(z) = \sqrt{z^2-1} \quad , \quad z \in D \quad ; \quad f_0(z_0) = w_0$$

وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D (w_0 إحدى قيمتي الجذر $\sqrt{z_0^2-1}$) وبالمثل نجد أن التابع :

$$f_1(z) = \sqrt{z^2-1} \quad , \quad z \in D \quad , \quad f_1(z_0) = -w_0$$

وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D ، وأن :

$$f_1(z) = -f_0(z) \quad , \quad z \in D$$

أي أن للتابع $\sqrt{z^2-1}$ فرعان وحيدا التعيين وتحليليان في الساحة D .

٢) لنبرهن على أن التابع $F(z)$ تحليلي في D . لنكتب هذا التابع على الشكل :

$$F(z) = z\,G(z) \quad , \quad G(z) = \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

إن التابع $G(z)$ معرف بالشرط $G_0(z_0) = \dfrac{F_0(z_0)}{z_0}$ حيث $G_0(z), F_0(z)$ العنصران المنطلقان للتابعين $G(z), F(z)$ في النقطة z_0 . بما أن التابع z وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D والتابع $G(z)$ تحليلي في الساحة الوحيدة الاتصال $\widetilde{D} = D \cup \{z = \infty\}$ فإنه استناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يكون $G(z)$ تحليلياً في $\widetilde{D}$ وهذا بدوره يعني تحليليته في D واستناداً إلى ماذكرنا في الفقرة الثانية يكون التركيب :

$$F(z) = z\,G(z) \quad , \quad z \in D \quad , \quad F(z_0) = F_0(z_0)$$

تحليلياً في الساحة D .

مثال (٨) . لتكن D المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$ وليكن $f(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي في الساحة D للتابع $\sqrt{z^2-1}$ والذي من أجله $f(z) = \sqrt{3}$ لنحسب قيم هذا التابع في نقاط المحور الحقيقي $z = x$.

إذا كانت النقطة $z \ni D$ فإن :

$$f(z) = |\sqrt{z^2-1}|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2}$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-1) \quad , \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z+1)$$

حيث γ طريق يصل النقطة 2 بالنقطة z من الساحة D .

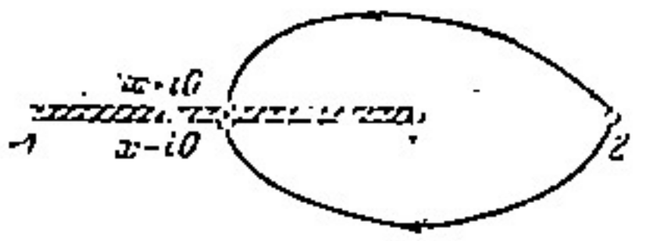
١) لتكن $x > 1$ ، وعندئذٍ وبمثابة الطريق γ يمكننا أخذ المجال $[z, x]$ وبالتالي فإن $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ، $f(x) = +\sqrt{x^2-1}$ (الجذر هنا هو الجذر الحسابي) .

٢) لتكن $x \ni (-1, 1)$ واقعة على الضفة العليا للقطع . بمثابة الطريق γ نأخذ الطريق الواقع في نصف المستوي العلوي الشكل (٢١) . عندئذٍ يكون $\varphi_1 = \pi$. $\varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن $f(x + i0) = i\sqrt{1-x^2}$.

٣) لتكن $x < -1$ بمثابة الطريق γ يمكننا أخذ الطريق الواقع في نصف المستوي

العلوي . وعندئذٍ يكون :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi \quad \text{وبالتالي فان} \quad f(x) = -\sqrt{x^2-1}$$



الشكل (٢١)

٤) إذا كانت النقطة x واقعة على ضفة القطع السفلى، فإنه بمثابة الطريق γ يمكننا أخذ الطريق الواقع في نصف المستوي السفلي ، الشكل (٢١) وعندئذٍ يكون $\varphi_1 = -\pi$ $\varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن $f(x - i0) = -i\sqrt{1-x^2}$

لتكن $z = iy$ و $y > 0$. وبمثابة الطريق γ لنأخذ المجال $[2, iy]$ وعندئذٍ يكون $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ وبالتالي فإن : $f(iy) = i\sqrt{y^2+1}$, $(y > 0)$ وبالمثل نجد :

$$f(-iy) = -i\sqrt{y^2+1} \quad , \quad (y > 0)$$

كما نجد أن المشتق $f'(z)$ يعطى بالعلاقة :

$$f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{z}{f(z)}$$

مثال (٩) . لتكن D هي الساحة ذاتها في المثال السابق وكذلك $f(z)$. للنشر التابع $f(z)$ في سلسلة لوران في جوار النقطة $z = \infty$:

من المطابقة $\sqrt{z^2-1} = z\sqrt{1-1/z^2}$ ينتج أن $f(z) = z\,g(z)$ حيث $g(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\sqrt{1-1/z^2}$. وبما أن $0 < f(x)$ من أجل $1 < x$ (المثال ٨) فإن $0 < g(x)$ من أجل $1 < x$ وبالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ أي أن $g(\infty) = 1$ وبالتالي يكون للنشر الشكل

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^{n} (-1)^n z^{-2n}$$

مثال (١٠) . لنبرهن على أن للتابع التحليلي $F(z) = \mathrm{Ln}\frac{1-z}{1+z}$ في الساحة D المذكورة في المثال (٨) فروع وحيدة التعيين وتحليلية .

١) ليكن $F_0(z)$ العنصر المنطلق للتابع $F(z)$ في النقطة z_0 وليكن γ طريقاً بسيطاً مغلقاً في الساحة D بدايته النقطة z_0 . إن قيمة $F(z_0)$ الناتجة عن الدوران على الطريق تعطى بالعلاقة :

$$F(z_0) = F_0(z_0) + i\,\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z}$$

ويكون $\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z} = \varphi_1 - \varphi_2$ حيث

$$\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z) \quad , \quad \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z)$$

فإذا كان المجال $[1, -1]$ غير واقع داخل الطريق γ ، فإن $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. أما إذا كان المجال $[1, -1]$ واقعاً داخل الطريق γ والموجه بالاتجاه الموجب، فإن $\varphi_1 = 2\pi$ و $\varphi_2 = 2\pi$ وبالتالي فإن $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ويكون $F(z_0) = F_0(z_0)$ ويكون التابع

$$f(z) = \ln\frac{1-z}{1+z} \quad , \quad z \in D \quad , \quad f(z_0) = F_0(z_0)$$

وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D .

إن التابع $F(z)$ يتجزأ في الساحة D إلى مجموعة من الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية وهي المجموعة القابلة للعد ، وتعطى هذه الفروع بالعلاقات :

$$f_k(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i\,\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z} + i\,\mathrm{Im} w_0 + 2k\pi i$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث $w_0 = \ln\frac{z_0-1}{z_0+1}$ قيمة ثابتة للوغاريتم و γ طريق يصل النقطة z_0 بالنقطة $z \ni D$.

٢) إن التابع

$$F(z) = \mathrm{Ln}\frac{-1+1/z}{1+1/z} \quad , \quad F(z_0) = F_0(z_0)$$

تحليلي في الساحة $\widetilde{D} = D \cup \{z=\infty\}$: وهذه الساحة وحيدة الاتصال واستناداً إلى نظرية التمديد التحليلي يكون $F(z)$ وحيد التعيين وتحليلياً في $\widetilde{D}$ وبالتالي في D .

مثال (١١) . لتكن D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[1, -1]$ و $f(z)$ الفرع الوحيد التعيين والتحليلي $\ln\frac{1-z}{1+z}$ والذي من أجله $f(0+i0) = 0$ ولنحسب قيم $f(z)$ في نقاط المحورين الحقيقي والتخيلي .

في الساحة D لدينا :

$$f(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z) \quad , \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z)$$

حيث γ طريق واقع في الساحة D ويصل النقطة 0 الواقعة على ضفة القطع العليا بالنقطة z .

١) لتكن النقطة $z : (1, -1) \ni z = x$ واقعة على ضفة القطع العليا، عندئذ يكون $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ وبالتالي :

$$f(x+i0) = \ln\frac{1-x}{1+x}$$

٢) لتكن $z = x < -1$ ، فنجد $\varphi_1 = -\pi$ ، $\varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن :

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi$$

وأما إذا كان $z = x < -1$ فإن $\varphi_1 = 0$ و $\varphi_2 = \pi$ ويكون :

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi$$

٣) إذا كانت النقطة $z = x \ni (1, -1)$ واقعة على ضفة القطع السفلى ، فإننا نجد $\varphi_1 = -2\pi$ و $\varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن :

$$f(x-i0) = \ln\frac{1-x}{1+x} - 2\pi i$$

٤) إذا كانت $z = iy$ و $0 < y$ فإننا نجد $\varphi_1 = -\varphi_2$ و $\varphi_2 = \mathrm{arc\,tg}\, y$ وبالتالي

فإنه من أجل $y>0$ يكون :

$$f(iy) = -2i \operatorname{arc\,tg} y$$

وذلك لأن $|1-iy| = |1+iy|$ وبالمثل نجد أنه من أجل $y>0$ يكون

$$f(iy) = -2i(\pi + \operatorname{arc\,tg} y) .$$

مثال (١٢) . لتكن الساحة D هي الساحة المذكورة في المثال السابق وليكن $f(z)$ هو ذاته الوارد في المثال (١١) . ولننشر هذا التابع في سلسلة لوران في جوار النقطة $z=\infty$.

وجدنا أعلاه أن $f(iy) = -2i \operatorname{arctg} y$ من أجل $y>0$ وبالتالي فإن :

$$f(\infty) = \lim_{y\to+\infty} f(iy) = -\pi i$$

تبعاً لذلك وفي جوار النقطة $z=\infty$ يكون :

$$f(z) = \ln \frac{-1+(1/z)}{1+(1/z)} = -\pi i + \ln\left(1-\frac{1}{z}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

وبنشر هذا التابع في سلسلة لوران نجد :

$$f(z) = -\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n z^n}$$

$$= -\pi i - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^{2n+1}}$$

وهذه السلسلة متقاربة في الحلقة $1<|z|<\infty$.

مثال (١٣) . لتكن D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$ الشكل (٢٠) . ولنبرهن على أنه من أجل القيم الحقيقية لـ α يتجزأ التابع :

$$F(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$$

في D إلى فروعه الوحيدة التعيين والتحليلية في تلك الساحة.

ليكن $F_0(z)$ هو العنصر المنطاق للتابع $F(z)$ والمعرف في النقطة z_0 ، وليكن γ طريقاً بسيطاً مغلقاً في الساحة D بدايته النقطة z_0 . بنتيجة الدوران على الطريق γ تكون القيمة الناتجة لـ $F(z_0)$ هي :

$$F(z_0) = F_0(z_0)\, e^{i\varphi} \quad , \quad \varphi = \Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z}$$

وكما في المثال (١٠) نجد $\varphi = 0$ وبالتالي فإن $F(z_0) = F_0(z_0)$. ووفقاً لما ذكرناه في بداية البند الثالث يكون التابع :

$$f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha} \quad , \quad z \in D, f_0(z_0) = F_0(z_0)$$

وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D . كما أن كل فرعين للتابع $F(z)$ يختلفان عن بعضهما بعامل $e^{i2\pi\alpha k}$ حيث k عدد صحيح .

مثال (١٤) . لتكن D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$. وليكن $f(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$ حيث α عدد حقيقي والذي من أجله $f(0+i0) = 1$ أي أن $f(z_0) = 1$ حيث $z_0 = 0$ وتقع على الضفة العليا للقطع . لنحسب قيم $f(z)$ في نقاط المحور الحقيقي . مهما تكن النقطة z من الساحة D ، لدينا :

$$f(z) = \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^{\alpha} e^{i\alpha\varphi} \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

حيث $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z)$ و $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z)$ و γ طريق يصل النقطة $(0+i0)$ بالنقطة z المنتمية للساحة D . إن العددين φ_1 و φ_2 يحسبان كما في المثال (١١) .

١) إذا كانت $x = z \ni (-1, 1)$ وواقعة على ضفة القطع العليا، فإن $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ وبالتالي نجد :

$$f(x+i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} > 0$$

٢) إذا كانت $1 < x = z$ ، فإن $\varphi_1 = -\pi$ و $\varphi_2 = 0$ ويكون

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}$$

وأما إذا كانت $x = z < -1$ فإن $\varphi_1 = 0$ ، $\varphi_2 = \pi$ ويكون :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}$$

وفي هاتين العلاقتين يكون $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} > 0$.

٣) إذا كانت $x = z \ni (-1, 1)$ وواقعة على ضفة القطع السفلي، فإن $\varphi_1 = -2\pi$ و $\varphi_2 = 0$ وبالتالي يكون :

$$f(x-i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} e^{-i2\alpha\pi}$$

مثال (١٥) . لتكن D و $f(z)$ هما الساحة والتابع المذكوران في المثال (١٤) . لنوجد الحدين الأول والثاني من نشر لوران لهذا التابع في جوار النقطة $z = \infty$. لدينا :

$$f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-i\alpha\pi}$$

ويكون :

$$f(z) = \left(\frac{-1 + \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}}\right)^{\alpha} = e^{-i\alpha\pi} \cdot g(z) \ , \ g(z) = \left(\frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}}\right)^{\alpha}$$

حيث $g(z)$ وحيد التعيين وتحليلي في النقطة $z = \infty$ ، $g(\infty) = 1$. لننشر التابع $g(z)$ في قوى $1/z$ فنجد :

$$f(z) = e^{-i\alpha\pi}\left(1 - \frac{2\alpha}{z} + \ldots\right)$$

مثال (١٦) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[0 , 1]$ بسهولة يمكن البرهان (كما في المثال (١٣)) . على أنه للتابع

$$F(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$$

ثلاثة فروع وحيدة التعيين وتحليلية في الساحة D . ليكن $f(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $F(z)$ والموجب على ضفة القطع العليا . لننشر التابع $f(z)$ في سلسلة لوران في جوار النقطة $z = \infty$. مهما تكن النقطة $z \ni D$ ، لدينا :

$$f(z) = \left|\sqrt{\frac{z}{1-z}}\right| e^{i\varphi/3} \ , \ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

حيث $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$ ، $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1-z)$ و γ طريق في الساحة D يصل النقطة $z_0 = \frac{1}{2} + i0$ (الواقعة على ضفة القطع العليا) بالنقطة $z \ni D$. لتكن $1 < x < x = z$ عندئذ نجد أن $\varphi_1 = 0$ ، $\varphi_2 = -$ ووفقاً لذلك يكون :

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} e^{i\pi/3}$$

وبالتالي فإن :

$$f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{i\pi/3}$$

وفي جوار نقطة اللانهاية ($z = \infty$) لدينا :

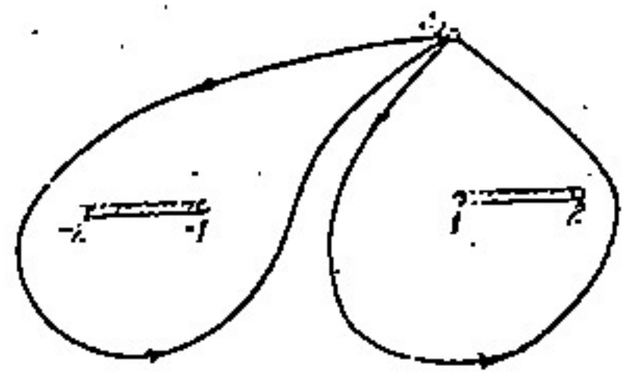
$$f(z) = e^{i\pi/3} \sqrt[3]{\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}} = e^{i\pi/3}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1/3}$$

حيث أن قيمة الجذر في النقطة $z = \infty$ تساوي 1 . وبالتالي يكون للنشر المطلوب الشكل :

$$f(z) = e^{i\pi/3} \sum_{n=0}^{\infty} C^{n}_{-1/3} (-1)^n z^{-n}$$

مثال (١٧) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطعين على طولي المجالين $[-2 , -1]$ ، $[1, 2]$. ولنبرهن على وجود فرعين وحيدي التعيين وتحليليين في الساحة D للتابع $F(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$. ليكن $F_0(z)$ العنصر المطلق للتابع $F(z)$ في النقطة $z_0 \ni D$ وليكن γ طريقاً بسيطاً مغلقاً بدايته النقطة z_0 ويقع في الساحة D . وبنتيجة الدوران على γ نحصل على القيمة :

$$F(z_0) = F_0(z_0) e^{i\varphi/2}$$



الشكل (٢)

حيث

$$\varphi = \Delta_\gamma \arg\left[(z^2-1)(z^2-4)\right]$$

كما أن $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ و $\varphi_j = \Delta_\gamma \arg(z - z_j)$ حيث $z_1 = -2$، $z_2 = -1$، $z_3 = 1$، $z_4 = 2$. إذا لم يقع القطعان داخل الطريق γ فإن جميع $\varphi_j = 0$ وبالتالي يكون $F(z_0) = F_0(z_0)$. وأما إذا وقع داخل الطريق γ القطع $[-2, -1]$ فقط ، فإن $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ و $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$ (γ موجه بالاتجاه الموجب) وبالتالي فإن $\varphi = 4\pi$ وبجدداً يكون $F(z_0) = F_0(z_0)$ وبالمثل نجد إذا وقع القطع $[1, 2]$ فقط داخل γ وفقاً لذلك يكون التابع :

$$f(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)} \quad , z \in D \quad f(z_0) = F_0(z_0)$$

تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D .

مثال (١٨) . لنبرهن على أن التابع

$$F(z) = \operatorname{Ln} \frac{(z-1)(z+4)}{(z-3)(z+2)} \quad , F(0) = w_0$$

حيث w_0 واحدة من قيم $\ln z\big|_{z=2/3}$ تحليلي في الساحة D_0 والتي هي المستوي العقدي الموسع والموخوذ في النقاط $-4, -2, 1, 3$. في الواقع ، إن التابع :

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+4)}{(z-3)(z+2)}$$

وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D_0 كما أنه مغاير للصفر في جميع نقاط هذه الساحة . تبعاً لذلك يكون التابع :

$$w = \operatorname{Ln} f(z) \quad , \quad F(0) = w_0$$

تحليلياً في الساحة D_0 . نستعرض أمثلة عن الساحات التي يمكن فيها فصل فروع وحيدة التعيين وتحليلية للتابع $F(z)$.

١) لننشيء قطوعاً على طول أشعة منبعثة من النقاط $-4, -2, 1, 3$ وغير متقاطعة فيهما بينهما فنحصل على ساحة D_1 وحيد الاتصال يتجزأ فيها التابع $F(z)$ إلى فروع وحيدة التعيين وتحليلية .

٢) لننشيء القطوع $[-4, -\infty)$ ، $[-2, 1]$ و $[3, \infty)$ ولنبرهن على أنه في الساحة D_2 يتجزأ التابع $F(z)$ إلى فروع وحيدة التعيين وتحليلية . في الواقع ، إذا كان γ طريقاً بسيطاً مغلقاً يقع في D_2 ويحتوي في داخله على القطع $[-2, 1]$ فإن :

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \varphi_1 + \varphi_2$$

حيث

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg \frac{z+4}{z-3} \quad , \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg \frac{z-1}{z+2}$$

من الواضح أن $\varphi_1 = 0$ وذلك لأن $z + 4 \neq 0$ و $z - 3 \neq 0$ داخل الطريق γ ، كما أن $\varphi_2 = 0$ وكما في المثال (١٠) نجد $\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$. وهنا كما في المثال (١٠) نستنتج أن $F(z)$ يتجزؤ إلى فروع وحيدة التعيين وتحليلية في الساحة D_2 . في حالة خاصة يكون هذا الأمر محققاً من أجل الحلقة $D_3 = \left\{ \frac{3}{2} < \left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{7}{2} \right\}$.

٣) لتكن الساحة D_4 هي المستوي العقدي باستثناء القطعين $[-4, -2]$ ، $[1, 3]$ وليكن γ طريقاً بسيطاً مغلقاً واقعاً في D_4 ، عندئذٍ يكون :

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg \frac{z+4}{z+2} + \Delta_\gamma \arg \frac{z-1}{z-3} \equiv \varphi_1 + \varphi_2$$

وإذا كان القطع $[-4, -2]$ واقعاً داخل γ وكان القطع $[1, 3]$ واقعاً خارج γ فإنه يكون $\varphi_1 = 0$ ، $\varphi_2 = 0$ (انظر المثال (١٠)) بالمثل عندما يكون القطع $[1, 3]$ واقعاً داخل الطريق γ . وبالتالي فإنه في الساحة D_4 يتجزأ $F(z)$ إلى فروع وحيدة التعيين وتحليلية في هذه الساحة . وفي حالة خاصة يتجزأ التابع $F(z)$ إلى فروع وحيدة التعيين وتحليلية في الدائرة $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2}$ وفي الساحة $\left| z + \frac{1}{2} \right| > \frac{7}{2}$.

مثال (١٩) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال [0 ; 1] وليكن التابع

$$f(z) = \sqrt[4]{z(1-z)^3} \quad , \quad f(x+i0)>0 \quad , \quad x \in (0,1)$$

إن هذا التابع وحيد التعيين وتحليلي في D . ولنحسب $f(-1)$, $f'(-1)$, $f''(-1)$. لدينا :

$$f(z) = \sqrt[4]{g(z)} \quad , \quad g(z) = z(1-z)^3$$

وبما أن $\frac{d}{dw}(w^\alpha) = \frac{\alpha w^\alpha}{w}$ حيث أن قيم w^α في طرفي المساواة هي ذاتها ، فإن

$$f'(z) = \frac{1}{4}\frac{g'(z)\,f(z)}{g(z)}$$

$$f''(z) = \frac{1}{4}\frac{g''(z)\,f(z)}{g(z)} - \frac{3}{16}\frac{[(g'(z)]^2 f(z)}{g^2(z)}$$

ليكن γ طريقاً يصل ما النقطة $x \ni (0,1)$ والواقعة على ضفة القطع العليا بالنقطة (-1) عندئذٍ يكون :

$$\Delta_\gamma \arg g(z) = \Delta_\gamma \arg z + 3\,\Delta_\gamma \arg(1-z) = \pi$$

وبالتالي فإن :

$$f(-1) = e^{i\pi/4}\left|\sqrt[4]{g(-1)}\right| = e^{i\pi/4}\sqrt[4]{8}$$

كما أن

$$g(-1) = -8 \quad , \quad g'(-1) = 20 \quad , \quad g''(-1) = -36$$

وبالتالي يكون :

$$f'(-1) = -\frac{5}{8}f(-1) = -\frac{5}{8^{3/4}}e^{i\pi/4}$$

$$f''(-1) = -\frac{3}{64}f(-1) = -\frac{3}{8^{7/4}}e^{i\pi/4}$$

مثال (٢٠) . لنبين عدم إمكانية فصل فروع وحيدة التعيين وتحليلية للتابع

$$F(z) = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$$

في الساحة D : $D=\{1<|z|<\infty\}$.

إن التابع $G(z) = \sqrt{z^2-1}$ يتجزأ في الساحة D إلى فرعين وحيدي التعيين وتحليليين $g_1(z)$, $g_0(z)$. وبغية التحديد فقط لنفرض أن $g_0(2) > 0$ وأن $g_1(2) > 0$. بذلك يتجزأ التابع $F(z)$ في الساحة D إلى تابعين تحليليين :

$$F_j(z) = \mathrm{Ln}\,h_j(z) \qquad j = 0\,,\,1$$

$$h_j(z) = z + g_j(z)$$

علماً بأن $g_1(z) \equiv -g_0(z)$. واستناداً إلى التمرين (٩) يكون :

$$g_0(z) = z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \qquad (z\to\infty)$$

وبالتالي فإنه عندما تنتهي z إلى اللانهاية يكون :

$$h_0(z) = z\left(2+O\left(\frac{1}{2}\right)\right) \quad , \quad h_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

ليكن γ هو الدائرة $|z| = \rho > 1$ والموجهة بالاتجاه الموجب وبدايتها في النقطة $z = \rho$ فإذا كانت w_j هي القيمة الابتدائية للتابع $F_j(z)$ في النقطة ρ فإنه بعد الدوران على γ نحصل على القيمة :

$$w_j + i\,\varphi_j \quad , \quad \varphi_j = \Delta_\gamma \arg h_j(z)$$

لدينا :

$$\varphi_0 = 2\pi + \psi_0 \quad ; \quad \psi_0 = \Delta_\gamma \arg\left(2 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

وإذا كان ρ كبيراً بقدر كاف فإن $\psi_0 = 0$ وبالتالي فإن $F_0(z)$ تابع ليس وحيد التعيين . وبالمثل نجد :

$$\varphi_1 = -2\pi + \psi_1 \quad , \quad \psi_1 = \Delta_\gamma \arg\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

ويكون $\psi_1 = 0$ إذا كان ρ كبيراً بقدر كاف .

إن العلاقة $f(z) = O(g(z))$ من أجل $z \ni E$ تعني أن النسبة $f(z)/g(z)$ محدودة على المجموعة E . أي أن $|f(z)/g(z)| \leqslant M$ مهما تكن $z \ni E$.

٤ ــ النقاط الشاذة

استعرضنا في الفصل الأول النقاط الشاذة المنعزلة ، للتوابع الوحيدة التعيين والتحليلية والتي يطلق عليها **النقاط الشاذة المنعزلة ذات الطبيعة الواحدة** . من ناحية ثانية ، إن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة بالنسبة للتابع التحليلي $w = \sqrt{z}$ لا تدخل في ذلك التصنيف الوارد سابقاً . ولهذا سنضع هنا مهمة أمام أنفسنا ، وهي تعميم ذلك التصنيف وذلك بتعريف مفهوم النقطة الشاذة لتابع تحليلي . وكما في السابق سنقتصر على الحالات المبسطة للنقاط الشاذة المنعزلة .

تعريف (١) . نقول عن النقطة $a \in \overline{C}$ إنها نقطة شاذة منعزلة لتابع تحليلي ما إذا وجد جوار موخوذ V' لهذه النطقة بحيث يمكن تمديد عنصر ما $F=(U,f)$ متمم لذلك التابع تحليلياً على طول أي طريق $\gamma \subset V'$.

كمثال على ذلك نذكر هنا النقطتين $z = \infty , z = 0$ بالنسبة للتابعين التحليليين $\sqrt[n]{z}$ و $\operatorname{Ln} z$ (بمثابة V' ، في الحالتين ، يمكن أخذ الحلقة $\{0 < |z| < \infty\}$) . وأما بالنسبة للتابع $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ فإن النقطتين $z = \infty , z = 0$ هما نقطتان شاذتان لكونهما شاذتين بالنسبة لـ $\sqrt{z}$ ؛ كما أن النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة لكون إحدى الفرعين يأخذ القيمة 1 ــ وبالتالي هي قطب بسيط .

سنقوم بتصنيف النقاط الشاذة المنعزلة للتوابع التحليلية تبعاً لسلوك عناصرها في التمديد التحليلي على طول طريق $\gamma \subset V'$.

توطئة . لتكن a نقطة شاذة منعزلة لتابع تحليلي f وليكن V' جواراً موخوذاً لهذه النقطة ، كما في التعريف (١) ، فإذا لم يتغير عنصر $F_0 \ni f$ بنتيجة الدوران على منحن ما مغلق $\gamma_0 \subset V'$ فإن أي عنصر F ناتج من F_0 بتمديد تحليلي في V' لا يتغير بنتيجة التمديد التحليلي على طول أي طريق γ هوموتوبي لـ γ_0 في V' .

البرهان . ليكن λ طريقاً في V' ينقل F_0 إلى F وليكن $\tilde{\gamma} = \lambda^{-} \cup \gamma_0 \cup \lambda$ (يرسم في الترتيب $\lambda^{-}, \gamma_0, \lambda$) . من الواضح أنه بتشويه مستمر داخل V' يتلخص في القطع التدريجي لنهاية λ وبداية λ^{-} [الشكل (٢٣) القطعة المقطوعة هي ذات اللون

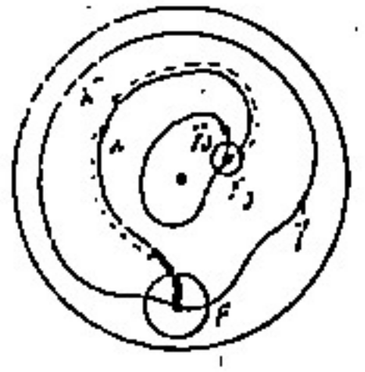
الأسود الغامق] يمكننا تحويل $\tilde{\gamma}$ إلى γ_0 أي أن $\tilde{\gamma} \sim \gamma_0$. وبالتالي فإن $\tilde{\gamma} \sim \gamma$. لكن لـ $\tilde{\gamma}$ و γ نفس نقطتي البداية والنهاية (تتطابقان لكون الطريقان مغلقين) وبما أنه يمكن تمديد العنصر F على طول أي طريق في V' فإن تمديدي التابع على طول γ و $\tilde{\gamma}$ تتطابقان استناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي .

من هذه التوطئة ينتج بأن التمديد التحليلي على طول طرق مغلقة وهوموتوبية للصفر في V' لا يغير العناصر (وذلك لأن تلك الطرق تضيق لتصبح طرقاً واقعة في دائرة عنصر ما من العناصر ، وأما التمديد على الطرق الأخيرة فإنه ، من الواضح ، لا يغير العناصر) . وفي دراستنا سنهتم بالطرق غير الهوموتوبية للصفر في V' .

تعريف (٢) . لتكن a نقطة شاذة منعزلة لتابع تحليلي ما . وليكن V' جواراً موخوذاً كما في التعريف (١) و $\gamma_0 \subset V'$ منحنياً جورداناً مغلقاً يحتوي في داخله على النقطة a . ولنميز الحالتين الآتيتين :

(I) إذا لم يتغير العنصر المنطلق بنتيجة الدوران على γ_0 فإن النقطة a تسمى **نقطة شاذة ذات طبيعة واحدة** .

(II) إذا تغير العنصر المنطلق بنتيجة الدوران على γ_0 فإن النقطة a تسمى **نقطة شاذة ذات طبيعة متعددة أو نقطة تفرع** .



الشكل (٢٣)

إن التمديد التحليلي للعنصر المنطلق في الحالة (I) على طول أي طريق $\lambda \subset V'$ يصل إلى نقطة ثابتة $z \in V'$ يؤدي إلى نفس العنصر . في الحقيقة ، إذا وجد طريقان مثل λ_1 و λ_2 يؤديان إلى عنصرين مختلفين لتغير العنصر بالتمديد على طول الطريق المغلق γ :

$V' \supset \gamma = \lambda_1 \cup \lambda_2$. ولكن الطريق γ إما هوموتوبي للصفر وعندئذ لايمكن أن يتغير العنصر وفقاً لما ذكرنا أعلاه . وإما أن يكون هوموتوبياً لـ γ_0 والمرسوم عدد من المرات (في الاتجاه الموجب أو السالب) . ووفقاً للتوطئة لايتغير العنصر وهكذا نحصل على تناقض . وهكذا ينتج بأن تمديد العنصر المنطلق على طول طرق واقعة في V' يؤدي إلى تابع وحيد التعيين وتحليلي f في V' وهو بحد ذاتـــه فرع للتابـــع التحليلي المستعرض[1] . وتكون النقطة a نقطة شاذة منعزلة للتابع f بمفهوم النقاط الشاذة المنعزلة المذكور في الفصل الأول . وتبعاً لسلوك التابع f ، حين الاقتراب من a ، يمكن أن تكون النقطة a نقطة قابلة للاصلاح أو قطباً أو نقطة شاذة أساسية (إذا كان العنصر المنطلق قانونياً فإن حالة النقطة القابلة للاصلاح تستبعد وذلك لأن دائرة تقارب العنصر تحتوي على النقطة a) .

في الحالة (II) لايمكن فصل فروع في V' للتابع التحليلي الناتج عن تمديد العنصر المنطلق على طول طرق واقعة في V'[2] . لنقسم الحالة (II) إلى حالتين .

(a II) يوجد عدد صحيح $n \geqslant 2$ بحيث يؤدي الدوران على الطريق $n\gamma_0$ مرة في نفس الاتجاه إلى نفس العنصر . في هذه الحالة تسمى النقطة a نقطة تفرع منتهية المرتبة ويسمى أصغر الأعداد n المتصف بالخاصة المذكورة بمرتبة التفرع .

بسهولة نجد أن مرتبة التفرع لاتتغير إذا استبدلنا γ_0 بأي طريق γ هوموتوبي له في V' . في الحقيقة لنرمز بـــ $k\gamma$ للطريق الناتج عن γ بالدوران k مرة (في نفس الاتجاه

---

(1) . يمكن أن يؤدي التمديد للعنصر المنطلق على طول طرق غير واقعة في V' إلى عنصر آخر له نفس المركز . أي يمكن أن يكون التابع التحليلي ليس وحيد القيمة فعلى سبيل المثال تمديد أي عنصر من التابع التحليلي $1/(1+\sqrt{z})$ على طرق واقعة في $V' : \{0 < |z-1| < 1\} = V'$ يؤدي إلى تابع وحيد القيمة (أحد الفرعين $1/(1+\sqrt{z})$) ؛ غير أن التمديد على طول طريق مغلق محيط بالنقطة $z = 0$ ينقل عنصر أحد الفرعين إلى العنصر المنتمي للفرع الآخر .

(2) يمكن أن يوجد في V' عنصر للتابع المستعرض ناتج من العنصر المنطلق بتمديده على طرق تخرج عن حدود V' .

المطابق لاتجاه γ إذا كان $o < k$ ، وفي الاتجاه المعاكس له إذا كان $o > k$) . إذا كان $\gamma \sim \gamma_0$ فإن $k\gamma \sim k\gamma_0$ ووفقاً للتوطئة ؛ المبرهنة أعلاه ، نجد أن الدورانين $k\gamma$ و $k\gamma_0$ إما أن يغير كل منهما العنصر المنطلق أو لايغير أي منهما ذلك العنصر . نترك الطالب البرهان على أنه إذا لم يتغير العنصر المنطلق بنتيجة الدوران على طريق مغلق ما $\gamma \subset V'$ فإن ذلك الطريق هوموتوبي لعدد صحيح (موجب ، أو سالب أو معدوم) من الدوران على γ_0 : $n\gamma_0$ حيث n مرتبة تفرع النقطة a .

(b II) لايوجد مثل ذلك العدد الصحيح n كما في الحالة (a II) . أي أن الدوران على γ_0 في نفس الاتجاه يؤدي إلى عناصر جديدة . في هذه الحالة تسمى a نقطة تفرع لانهائية المرتبة أو نقطة تفرع لوغاريتمية .

مثال (١) . للتابع $\sqrt{z}$ في النقطتين $z = 0$ و $z = \infty$ نقطتا تفرع من المرتبة n وهاتان النقطتان هما نقطتا تفرع لوغاريتميتان بالنسبة للتابع $\mathrm{Ln}\, z$.

مثال (٢) . للتابع $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ في النقطة $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح وأما النقطة $z = \infty$ فهي نقطة شاذة أساسية . كما أن التابع هو تابع صحيح وذلك لأنه في الحلقة $\{0 < |z| < \infty\}$ لدينا .

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^2 - \dots$$

مثال (٣) . التابع $\sqrt{e^{z^2}+1}$. ان جميع جذور المعادلة $e^{z^2}+1=0$ أي النقاط $z_k = \sqrt{\mathrm{Ln}\,(-1)} = \pm\sqrt{\pi i + 2k\pi i}$ هي نقاط تفرع من المرتبة الثانية وأما النقطة $z = \infty$ فهي نقطة شاذة غير منعزلة .

مثال (٤) . للتابع $1/\mathrm{Ln}\, z$ نقطتا تفرع لوغاريتميان هما $z = 0$ و $z = \infty$ ومن أجل $z = 1$ نجد أن هذه النقطة هي قطب بسيط لواحد مفروعه (الفرع الرئيسي) في الحلقة $\{1 < |z-1| < 0\}$ وأما الفروع الأخرى فهي وحيدة التعيين وتحليلية في هذه النقطة .

تمارين غير محلولـة

١ ــ ليكن التابع $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ قابلاً للنشر في سلسلة تاياور في جوار للنقطة $z=a$ حيث $|a|>1$. ماهي قيم a التي من أجلها يمكننا ذلك النشر من تمديد التابع $f(z)$ تحليلياً ؟ .

٢ ــ إن مجموع السلسلة $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ قابل للنشر في جوار للنقطة $z=\frac{1}{2}$

ماهي الساحة التي يمكن عليها تمديد التابع $f(z)$ تحليلياً ؟

٣ ــ برهن أنه يمكن تمديد التابع $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ تحليلياً على ساحة

أشمل بواسطة السلسلة

$$\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\dots$$

٤ ــ لايوجد للسلسلتين :

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \quad , \quad f_2(z)=i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{n}$$

ساحة تقارب مشتركة بالرغم من ذلك برهن على أن كلاً من $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هو تمديد تحليلي للآخر .

٥ ــ ليكن $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً في الدائرة المغلقة $\overline{U}$. برهن أنه يمكن تمديده تحليلياً على دائرة $U(\subset U')$.

٦ ــ برهن على إمكانية فصل فروع وحيدة التعيين وتحليلية لكل من التوابع المتعددة التعيين في الساحات D المبينة بجانب كل تابع :

1) $\mathrm{Ln}(1-z^2)$; $D:\{z\notin[-\infty,-1],\ z\notin[1,+\infty]\}$

2) $\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{Ln}z$; $D:\{z\notin[-\infty,-1],\ z\notin[0,+\infty]\}$

3) $\sqrt[3]{(z^2-1)(z^2-4)}$; $D:\{\mathrm{Im}\,z>0\}$

4) $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{1+z^2}$; $D:\{\mathrm{Re}z>0\}$;

5) $\mathrm{Ln}(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})$; $D:\{z\notin[-\infty,0],\ z\notin[1,+\infty]\}$

٦ ــ لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطعين $[-\infty,-1],[1,+\infty]$ وليكن $\varphi(z)$ الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\mathrm{Ln}(1-z^2)$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(0)=0$ أوجد :

1) $\varphi(i)$, 2) $\varphi(-i)$, 3) $\varphi\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, 4) $\varphi\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)$

٨ ــ لتكن D هي المستوي العقدي الموسع باستثناء القطع على طول المجال $[-1,1]$ وليكن $\varphi_1(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(+i0)=1$ و . $\varphi_2(z)$ الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(-i0)=0$ أوجد القيم :

1) $\varphi_1(-i0)$, 2) $\varphi_1(-i)$, $\varphi_2=(+i0)$, $\varphi_2(i)$

٩ ــ هل توجد فروع وحيدة التعيين وتحليلية للتوابع المتعددة التعيين في الساحة المبينة بجانب كل منها ؟

1) $\sqrt[3]{\frac{z+1}{z+i}}$, $D:\{1<|z|<\infty\}$

2) $\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$, $D:\{\mathrm{Re}\,z>0\quad |z-3|>2,5\}$

١٠ ــ ابحث في النقاط الشاذة لكل من التوابع الآتية :

1) $\frac{1+\sqrt{z}}{z-1}$, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, 3) $\frac{\mathrm{Ln}\,z}{z-1}$

4) $\mathrm{Ln}\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$; 5) $\sqrt[3]{z}+\sqrt{z+1}$

الفصل الثالث

تطبيق نظرية الرواسب

١ ـ حساب التكاملات المحددة

وجدنا، استناداً إلى نظرية الرواسب ، بأن حساب تكاملات التوابع العقدية على طول منحن مغلق يؤول إلى حساب رواسب التابع المستكمل داخل المنحني . وبنفس الطريقة هذه تحسب العديد من التكاملات المحددة لتوابع لمتحول حقيقي . في كثير من الحالات يسهل فيها إيجاد تكاملات محددة (استناداً إلى نظرية الرواسب) تكون فيها طرق التحليل الرياضي الحقيقي غير فعالة . وفي الحالة الخاصة عندما تكون جميع النقاط الشاذة، للتابع المستكمل والواقعة داخل المنحني ، هي أقطاب ، فإن حساب الرواسب في هذه النقاط يؤول إلى حساب المشتقات .

١ ـ التكامل من الشكل $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi , \sin\varphi)\, d\varphi$

إن التكاملات من الشكل

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi , \sin\varphi)\, d\varphi \qquad (1)$$

حيث $R(u , v)$ تابع كسري عادي بالنسبة لـ u و v . لنضع $z = e^{i\varphi}$. فنجد :

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad , \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$d\varphi = -i\,\frac{dz}{z}$$

وعندما تتحول φ بين 0 و 2π فإن z ترسم الدائرة $|z| = 1$ في الاتجاه الموجب ويؤول التكامل (1) إلى التكامل $I = \int_{|z|=1} R_1(z)\,dz$ حيث :

$$R_1 = -\frac{i}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad , \quad \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right]\right.$$

تابع كسري عادي بالنسبة لـ z . واستناداً إلى نظرية الرواسب نجد :

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} R_1(z).$$

حيث $z_1, z_2, \ldots, z_n$ جميعها أقطاب للتابع الكسري $R_1(z)$ واقعة داخل الدائرة $|z| < 1$.

مثال (١) . بإجراء التحويل $z = e^{i\varphi}$ في التكامل :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} \quad , \quad |a| < 1$$

نجد :

$$I = \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

إن جذري المعادلة $az^2 - (a^2+1)z + a = 0$ هما $z_1 = a$, $z_2 = 1/a$ وبما أن $|a| < 1$ ، فإنه في الدائرة $|z| < 1$ تقع فقط النقطة $z_1 = a$ وهي قطب بسيط للتابع المستكمل $f(z)$ وعليه نجد :

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{i}{[2az - (a^2+1)]_{z=a}} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

وبالتالي فإن :

$$I = 2\pi/(1 - a^2)$$

٢ ــ تكامل التوابع الكسرية العادية . ليكن التكامل :

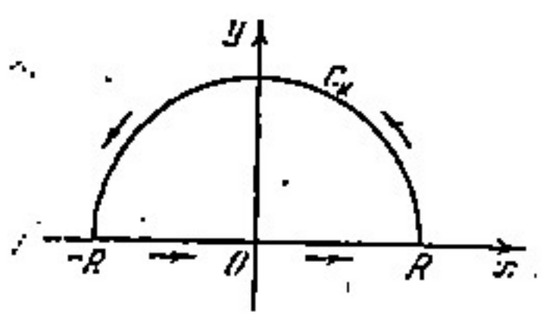
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx \qquad (2)$$

حيث $R(x)$ تابع كسري عادي وبحيث أن التكامل (2) متقارب . في هذا النوع من التكاملات لايمكننا مباشرة تطبيق نظرية الرواسب لكون المنحني غير محدود وغير مغلق . وكي نتمكن من تطبيق نظرية الرواسب نأخذ منحنياً مساعداً Γ_R الشكل (٢٤) ، مؤلف من المجال الحقيقي $[-R\ ,\ R]$ ونصف الدائرة C_R

$$C_R : \{|z| = R \quad ; \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}$$

ونحسب التكامل $\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz$

لنبرهن أولاً التوطئة الآتية .



الشكل (٢٤)

توطئة (١) . ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً في الساحة $D : \{0 < \operatorname{Im} z\}$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة ، ومستمراً على حدودها ∂D . فإذا كان التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (3)$$

متقارباً وكان

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0 \qquad (4)$$

حيث C_R نصف الدائرة $\{|z| = R\ ,\ Imz \geq 0\}$ ، فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Imz_R>0} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) \qquad (5)$$

(تحسب الرواسب في العلاقة (5) في جميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ والواقعة في نصف المستوي العلوي) .

البرهان . نأخذ المنحني المغلق Γ_R (الشكل (٢٤)) ونختار R كبيراً بحيث تقع جميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ والواقعة في نصف المستوي العلوي داخل المنحني Γ_R. واستناداً إلى نظرية الرواسب نجد :

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $R \to \infty$ نجد العلاقة (5) ؛ حيث أن التكامل (3) متقارب والنهاية

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

موجودة وتساوي $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ كما أن $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

لنعد الآن إلى التكامل (2) و نفرض أن $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ حيث $P_n(z)$ و $Q_m(z)$ كثيرا حدود من الدرجة n و m على الترتيب . من تقارب التكامل (3) ينتج بأن $k = m - n \geq 2$ وأن التابع $R(z)$ لا يملك أقطاباً على المحور الحقيقي . وبالتالي فإن

$$R(z) \sim A/z^k \qquad (z\to\infty\ ,\ k \geq 2 \text{ عدد صحيح})$$

كما أن $|R(z)| \leq c\,|z|^{-2}$ من أجل القيم الكبيرة بقدر كاف لـ $|z|$. وعندئذ تتحقق المتراجحة $|R(z)| \leq cR^{-2}$ على نصف الدائرة C_R وبالتالي يكون

$$\left| \int_{C_R} R(z)\,dz \right| \leq cR^{-2}\,\pi R \to 0 \qquad (R\to\infty)$$

وهو مايبرهن على تحقق الشرط (4) ، واستناداً إلى التوطئة (١) يكون :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Imz>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) \qquad (6)$$

حيث أن الرواسب تؤخذ في أقطاب التابع $R(z)$ الواقعة في نصف المستوي العلوي.

وبالمثل تماماً تبرهن العلاقة :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{Im\,z<0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)$$

مثال (٢) . نحسب التكامل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^4}$

بما أنه التابع $R(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^4} = \dfrac{1}{(z-i)^4(z-i)^4}$ في نصف المستوي العلوي قطب وحيد من المرتبة الرابعة في النقطة $z = i$ ، فإن راسب هذا التابع يكون :

$$\operatorname*{res}_{z=i} R(z) = \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]^{(3)}_{z=i} = -\frac{5\,i}{32}$$

واستناداً إلى العلاقة (6) نجد $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} R(z) = \frac{5}{16}$

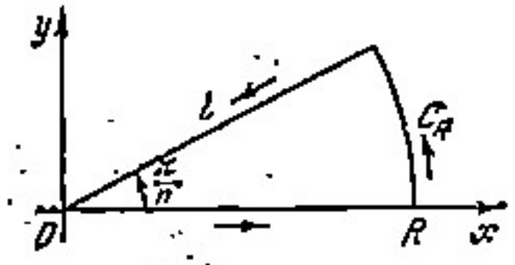
مثال (٣) . أنحسب التكامل $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}}$ حيث n عددطبيعي ؛ $1 \leqslant n$

إن جذور المعادلة $z^{2n} + 1 = 0$ هي $z_k = e^{i\,(2k+1)\pi/2n}$ حيث
$k = 0, 1, \ldots, (2n-1)$ إن التابع المستكمل يتمتع بالخاصة التالية :
$R(e^{i\pi/n} z) \equiv R(z)$. لذلك نأخذ طريق المكاملة المنحني Γ_R (الشكل (٢٥)) المؤلف من قطعة المحور الحقيقي $[0, R]$ وقوس الدائرة C_R :

$$C_R: \left\{ z = Re^{i\varphi} \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n} \right\}$$

والمجال l : $\{ z = re^{i\pi/n} \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant R \}$. واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون :

$$\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz = \int_0^R R(x)\,dx + \int_{C_R} R(z)\,dz + \int_l R(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_o} R(z) \tag{7}$$



الشكل (٢٥)

وذلك لأنه للتابع المستكمل $R(z)$ يوجد داخل المنحني Γ_R قطب وحيد هو $z_o = e^{i\pi/(2n)}$ وأن الراسب في هذه النقطة يكون :

$$\operatorname*{res}_{z=z_o} R(z) = \frac{1}{2n\, z_o^{2n-1}} = -\frac{z_o}{2n}$$

أما التكامل على طول القطعة المستقيمة l فإنه يؤول إلى التكامل على طول القطعة $[R, 0]$:

$$\int_l R(z)\,dz = -\int_0^R R\,(re^{i\pi/n})\, e^{i\pi/n} dr = -e^{i\pi/n} \int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}$$

لنقدر التكامل على طول قوس الدائرة C_R .. بما أن $|R(z)| \sim 1/|z|^{2n}$ عندما $z \to \infty$ ، فإن

$$\int_{C_R} R(z)\,dz \to 0 \quad , (R \to \infty)$$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (7) عندما $R \to \infty$ نجد

$$(1 - e^{i\pi/n})\, I = -\frac{\pi\, i}{n} e^{i\,\pi/(2n)} \quad ; \quad I = \frac{\pi}{2n \sin\frac{\pi}{2n}}$$

٣ ــ التكامل من الشكل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx$ حيث $R(x)$ تابع كسري عادي . إن التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx \tag{8}$$

يمثل تحويل فوريه للتابع $R(x)$. وفي هذا الشكل من التكاملات تستخدم التوطئة الآتية .

توطئة (٢) (جوردان) . إذا كان التابع $g(z)$ مستمراً في الساحة $\{|z| \geqslant R_o > 0 \text{ و } \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ وكان

$$M(R) = \max_{z \in C_R} |g(z)| \to 0 \quad ; \quad R \to \infty \tag{9}$$

لنعد الآن إلى التكامل (8) . إن ذلك التكامل يتقارب فقط وفقط إذا لم يوجد أقطاب للتابع R (z) على المحور الحقيقي وإذا كان $R(x) \sim \frac{c}{x^k}$ عندما $x \to \infty$ وحيث $k \geqslant 1$. وبالتالي فإن الشرط (9) محقق ، واستناداً لتوطئة جوردان يكون

$$\int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz \to 0 \ , \quad (R \to \infty \ , \alpha > 0)$$

واستناداً للعلاقة (5) نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ Imz_k > 0}} \operatorname*{res} \left[e^{i\alpha z} R(z) \right] \qquad (13)$$

ملاحظة (١) . إذا كان $\alpha < 0$ فإننا نستبدل المنحني Γ_R الشكل (٢٤) بنظيره بالنسبة للمحور الحقيقي ، وفي هذه الحالة نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ Im\, z_k < 0}} \operatorname*{res} \left[R(z)\, e^{i\alpha z} \right]$$

ملاحظة (٢) . إذا كان التابع R (x) حقيقياً من أجل القيم الحقيقية لـ x وكان $\alpha > 0$ فإنه بفصل القسمين الحقيقي والتخيلي في طرفي العلاقة (13) نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x\, dx = -2\pi\, Im \left[\sum_{\substack{z=z_k \\ Imz_k > 0}} \operatorname*{res} \left[e^{i\alpha z} R(z) \right] \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \alpha x\, dx = 2\pi\, Re \left[\sum_{\substack{z=z_k \\ Imz_k > 0}} \operatorname*{res} \left[e^{i\alpha z} R(z) \right] \right] \qquad (14)$$

ونصح الطالب بعدم حفظ هاتين العلاقتين وأن عليه التملك من الطريقة التي قادت إلى ذلك .

حيث C_R نصف الدائرة $\{|z| = R \ , \ Imz \geqslant 0\}$ وإذا كان $\alpha > 0$ فإن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0 \qquad (10)$$

البرهان . لتكن $z \ni C_R \ , \ R_0 < R$ عندئذٍ يكون : $z = R e^{i\varphi} \ ; \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ و $dz = i R e^{i\varphi} d\varphi$ ونجد

$$\left| e^{i\alpha z} \right| = \left| e^{i\alpha (R\cos\varphi + i R \sin\varphi)} \right| = e^{-R\sin\varphi} \qquad (11)$$

وبما أن $\alpha > 0$ فإن $\left| e^{i\alpha z} \right| \leqslant 1$ من أجل $z \ni C_R$. وبالرغم من ذلك فإن هذا الأمر غير كاف لبرهان العلاقة (10) وبغية ذلك سنوجد تقديراً آخر لـ $\left| e^{i\alpha z} \right|$ على القوس C_R . باستخدام المتراجحة

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi \ , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (12)$$

والحقيقة بنتيجة تحدب التابع $\sin\varphi$ على المجال $[0 \ , \pi/2]$ (انظر كتاب التحليل (٦) صفحة ١٥١) نجد أن

$$|I_1| = \left| \int_{C_R} e^{iz} g(z)\, dz \right| \leqslant \max_{z \in C_R} |g(z)| \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2R\, M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\varphi}\, d\varphi \leqslant 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi}\, d\varphi =$$

$$= M(R) \left(-\frac{\pi}{\alpha} \right) e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi} \Big|_0^{\pi/2} = M(R) \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{\alpha R}) \leqslant \frac{\pi}{\alpha} M(R)$$

وهذا بدوره يؤدي إلى صحة العلاقة (10) بعد الأخذ بعين الاعتبار العلاقة (9) .

مثال (٤) . لنحسب التكامل :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}\,dx$$

استناداً للعلاقة (14) نجد

$$I = -2\pi\,\mathrm{Im}\left[\operatorname*{res}_{z=1+2i}\left(e^{i5z}\,\frac{z-1}{z^2-2z+5}\right)\right]$$

وذلك نتيجة وجود قطب وحيد بسيط للتابع المستكمل $f(z)$ في نصف المستوي العلوي ، وبحساب الراسب نجد

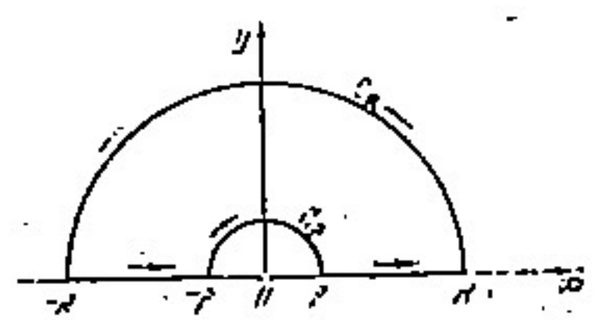
$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \left[\frac{e^{i5z}(z-1)}{z^2-2z+5}\right]_{z=1+2i} = \frac{e^{-10}}{2}(\cos 5 + i\sin 5)$$

وبالتالي فإن $I = -\pi e^{-10}\sin 5$

مثال (٥) . ليكن المطلوب حساب التكامل . $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ لنأخذ المنحني

$\Gamma_{\rho,R}$ المبين في الشكل (٢٦) . وانادرس التكامل $I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$. إن قيمة

هذا التكامل هي الصفر وذلك لأن التابع المستكمل e^{iz}/z تحليلي داخل المنحني $\Gamma_{\rho,R}$.



الشكل (٢٦)

ومن ناحية ثانية إن التكامل على طول المنحني $\Gamma_{\rho,R}$ يساوي مجموع التكاملات على طول

C_R, C_ρ والمجالين $[-R, -\rho]$. $[\rho, R]$. لدينا

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$$

حيث $h(z)$ تابع تحليلي في النقطة $z=0$. ومن أجل $z \ni C_\rho$ يكون $z = \rho e^{i\varphi}$ حيث ؛ $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ و $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ وبالتالي فإن

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z}\,dz = i\int_{\pi}^{0} d\varphi = -i\pi$$

وبما أن $h(z)$ محدود في جوار النقطة $z=0$ [$(0 \leftarrow h(z))$] فإن $\int_{C_\rho} h(z)\,dz \leftarrow 0$ عندما

$\rho \leftarrow 0$ وهذا يؤدي إلى أن

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}dz}{z} \to -i\pi \quad ; \quad \rho \to 0$$

وأما التكامل على القوس C_R فإنه ينتهي إلى الصفر عندما $R \leftarrow \infty$ استناداً إلى رتابة جوردان . وأما على المجالين $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ فإننا نجد

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

بالتالي فإن

$$0 = I_{\rho,R} = 2i\int_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R) \qquad (15)$$

حيث $\varepsilon_1(\rho) \leftarrow 0$ عندما $\rho \leftarrow 0$ و $\varepsilon_2(R) \leftarrow 0$ عندما $R \leftarrow \infty$. وبما أن I متقارب فإن النهاية

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

موجودة وتساوي I ، وبالانتقال إلى النهاية عندما $\rho\to 0$ و $R\to\infty$ في طرفي العلاقة (15) نجد $2i\,I - i\,\pi = 0$ ومنه $I = \frac{\pi}{2}$.

مثال (٦) . ليكن المطلوب حساب التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha\,x - \cos\beta\,x}{x^2}\,dx \quad ; \quad (\alpha \geqslant 0\,,\ \beta \geqslant 0)$$

لنستعرض التكامل $I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2}\,dz$ حيث $\Gamma_{\rho,R}$ المحيط المبين في

الشكل (٢٦) إن هذا التكامل يساوي الصفر ؛ استناداً إلى نظرية كوشي التكاملية ، ومن ناحية ثانية يساوي إلى مجموع التكاملات على C_R, C_ρ والمجالين $[-R, -\rho]$, $[\rho\,,R]$. كما أن النقطة $z=0$ بالنسبة للتابع المستكمل $f(z) = (e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})/z^2$ هي قطب بسيط و $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = i(\alpha - \beta)$. وكما في المثال السابق (٥) يمكن البرهان على أن التكامل على C_ρ ينتهي إلى $\pi(\alpha - \beta)$ عندما $\rho\to 0$ وأما التكامل على C_R فإنه ينتهي إلى الصفر عندما $R\to\infty$ ، وعلى طول المجالين المذكورين يكون

$$\int_{\rho}^{R} \left(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} - \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{x^2}\right) dx = 2\int_{\rho}^{R} \frac{\cos\alpha\,x - \cos\beta\,x}{x^2}\,dx$$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة

$$2\int_{\rho}^{R} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx + \pi(\alpha - \beta) + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R) = 0$$

($0\leftarrow\varepsilon_1$ عندما $0\leftarrow\rho$ و $0\leftarrow\varepsilon_2$ عندما $\infty\leftarrow R$)

عندما $\rho\to 0$ و $R\to\infty$ نجد $2I + \pi(\alpha - \beta) = 0$ ومنه $I = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha)$

مثال (٧) . لنستعرض تكاملي فرنيل

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx$$

لحساب هذين التكاملين نكامل التابع e^{iz^2} على المنحني المبين Γ_R في الشكل (٢٥) من أجل $(n=4)$ ، ويكون

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2} = \int_0^{R} e^{ix^2}dx + \int_{C_R} e^{iz^2}dz + \int_{l} e^{iz^2}dz = 0 \qquad (16)$$

فمن أجل $z\in C_R$ يكون $z = R\,e^{i\varphi}$ حيث $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ وبالتالي فإن

$$\left|\,e^{iz^2}\,\right| = e^{-R^2\sin 2\varphi} \leqslant e^{-(4R^2/\pi)\varphi}$$

وذلك استناداً إلى المتراجحة $\frac{4\varphi}{\pi} \leqslant \sin 2\varphi \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$. ووفقاً لذلك نجد

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| \leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{4R}\,(1 - e^{-R^2}) \to 0$$

عندما $R\to\infty$. ومن أجل $z\in l$ لدينا $z = r\,e^{i\pi/4}$ ويكون $e^{iz^2} = e^{-r^2}$ ولهذا نجد

$$\int_{l} e^{tz^2}\,dz = -e^{i\pi/4}\int_0^{R} e^{-r^2}dr$$

من المعلوم في التحليل الحقيقي أن

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $R \to \infty$ في العلاقة (16) ، نجد

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = e^{i\pi/4}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (17)$$

وبفصل القسمين الحقيقي والتخيلي في العلاقة (17) نحصل على التكاملين المطاوبين

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

٤ – التكامل من الشكل $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx$. لنستعرض التكامل من الشكل

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx \qquad (18)$$

حيث α عدد حقيقي وليس صحيحاً ، وأما $R(x)$ فهو تابع كسري عادي . إن التكامل (18) هو تحويل ميلين للتابع $R(x)$ وهذا التحويل يستخدم في الرياضيات الفيزيائية وكذلك في النظرية التحليلية للأعداد . إن التكامل المذكور يتقارب فقط وفقط إذا كان التابع $R(z)$ لايملك أقطاباً على نصف المحور $(0, +\infty)$ وإذا كان

$$\lim_{z=0} |z|^\alpha R(z) = 0 \quad , \quad \lim_{z\to\infty} |z|^\alpha R(z) = 0 \qquad (19)$$

ويمكن اعتبار أن النقطة $z = 0$ ليست صفراً وليست قطباً للتابع $R(z)$. بنتيجة الشروط

المفروضة على $R(z)$ نجد أن الشرط الأول من (19) يتحقق فقط وفقط إذا كان $\alpha > 0$ ولنأتي الآن إلى الشرط الثاني من (19) . لنلاحظ أنه من أجل التابع $R(z)$ تتحقق العلاقة التقريبية الآتية :

$$R(z) \sim A/z^k \quad (z\to\infty\,,\ k \text{ : عدد صحيح}) \qquad (20)$$

وبالتالي فإن الشرط الثاني من (19) يتحقق فقط وفقط إذا كان $\alpha - k < 0$ وبذلك نجد أن التكامل (18) حيث التابع لاتوجد أقطاب على نصف المحور $[0, +\infty)$ و $R(0) \neq 0$ يتقارب فقط وفقط إذا كان $0 < \alpha < k$ حيث k يتعرف من العلاقة التقريبية (20) ومن ذلك ينتج أن $R(z) \to 0$ عندما $z \to \infty$.

كي نتمكن من تطبيق نظرية الرواسب في حساب التكامل (18) نمدد تحليلياً التابع المتكامل على المستوي العقدي . لتكن D الساحة هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي $(0, +\infty)$. لنفصل فرعاً تحليلياً $h(z)$ في الساحة D للتابع $z^{\alpha-1}$ موجباً على ضفة القطع العليا ولنرمز له بـ $z^{\alpha-1}$ أي أن $h(z) = z^{\alpha-1}$ في الساحة D لدينا $z = re^{i\varphi}$ حيث $r = |z|$ و $\varphi = \arg z$ حيث $0 < \varphi < 2\pi$ بالتالي نجد :

$$h(z) = z^{\alpha-1} = (re^{i\varphi})^{\alpha-1} = r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi} \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

وعلى ضفة القطع العليا لدينا $\varphi = 0$ وبالتالي فإن

$$h(x + i0) = h(x) = x^{\alpha-1} > 0 \qquad (x > 0)$$

وأما إذا كانت z على ضفة القطع السفلى ، أي أن $z = \widetilde{x} = x - i0$ و $(0 < x)$ فإن $\varphi = 2\pi$ وإننا نجد

$$h(x - i0) = h(\widetilde{x}) = x^{\alpha-1} e^{i\pi 2(\alpha-1)}$$

أو

$$h(\widetilde{x}) = h(x)\, e^{i2\pi\alpha} \quad , \quad h(x) > 0 \quad , \quad (x > 0)$$

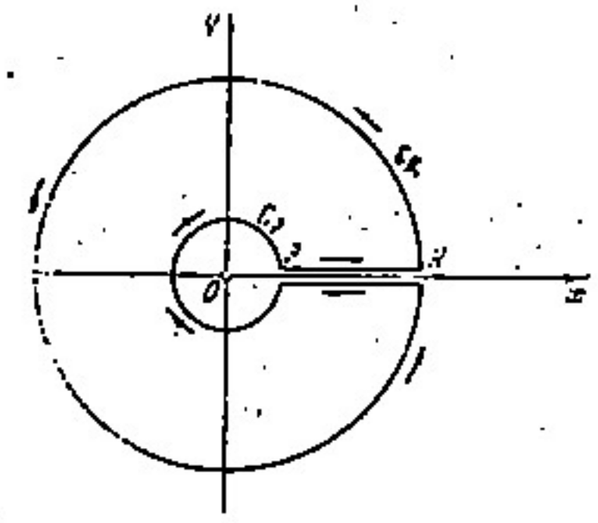
لنضع $f(z) = h(z)\,R(z) = z^{\alpha-1} R(z)$ ، عندئذٍ يكون $f(\widetilde{x}) = h(\widetilde{x})\,R(x)$ و

$$f(\widetilde{x}) = e^{i2\pi\alpha} f(x) \qquad (21)$$

لنبرهن على أنه من أجل التكامل (18) تتحقق العلاقة

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\,2\pi\alpha}} \sum_{z=z_k}^{res} [z^{\alpha-1} R(z)] \qquad (22)$$

حيث أن المجموع ممتد على جميع أقطاب التابع $R(z)$. لنأخذ المحيط $\Gamma_{\rho,R}$ ، الشكل (٢٧) والمؤلف من الدائرتين : $C_\rho : \{|z| = \rho\}$ ، $C_R : |z| = R\}$ والمجالين $[\rho, R]$ ، $[R, \rho]$ الممتدين ، على الترتيب ، على ضفتي القطع العليا والسفلى ونختار العددين $0 < R$ (R كبير بقدر كاف ، صغير بقدر كاف) بحيث تقع جميع أقطاب التابع داخل المحيط $\Gamma_{\rho,R}$. واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون



الشكل (٢٧)

$$I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z=z_k}^{res} [z^{\alpha-1} R(z)] \qquad (23)$$

حيث أن المجموع ممتد على جميع أقطاب التابع $R(z)$. ومن ناحية ثانية إن التكامل $I_{\rho,R}$ هو مجموع أربعة تكاملات :

$$I_{\rho,R} = \int_{\rho}^{R} f(x)\,dx + \int_{R}^{\rho} f(\widetilde{x})dx + \int_{C_\rho} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz \qquad (24)$$

لنبرهن على أن التكاملين على طول C_ρ و C_R يسعيان إلى الصفر عندما $\rho \leftarrow 0$ و $R \leftarrow \infty$. لتحقيق ذلك نبرهن التوطئة التالية .

توطئة (٣) . ليكن $M(\rho) = \max_{z \in C_\rho} |f(z)|$ حيث C_ρ الدائرة $\{|z| = \rho\}$. فإذا كان

$\rho\, M(\rho) \leftarrow 0$ عندما $\rho \leftarrow 0$ و $R\, M(R) \leftarrow 0$ عندما $R \leftarrow \infty$ فإن

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz \to 0\ ;\ (\rho \to 0)\ ,\quad \int_{C_R} f(z)\,dz \to 0\ ;\ (R \to \infty)$$

البرهان . إن هاتين العلاقتين تنتجان من التقدير الآتي للتكامل :

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)\,dz \right| < M(\rho) \cdot 2\pi\rho$$

ومن أجل التكاملين على طول C_ρ و C_R في العلاقة (24) لدينا :

$$M(\rho) = \max_{z \in C_\rho} |z^{\alpha-1} R(z)| = \rho^{\alpha-1} \max_{z \in C_\rho} |R(z)|$$

واستناداً إلى العلاقة (19) نجد أن $\rho^{\alpha} = \max_{z \in C_\rho} |R(z)| \leftarrow 0$ عندما $\rho \leftarrow 0$ وتبعاً لذلك يكون

$\rho M(\rho) \leftarrow 0$ عندما $\rho \leftarrow 0$ وبالمثل نبرهن على أن $R\, M(R) \leftarrow 0$ عندما $R \leftarrow \infty$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (23) عندما $\rho \leftarrow 0$ و $R \leftarrow \infty$ ، وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (21) نجد

$$I - e^{i2\pi\alpha} I = 2\pi i \sum_{z=z_k}^{res} [z^{\alpha-1} R(z)]$$

وهذا بدوره يؤدي إلى العلاقة (22) .

مثال (٨) . نحسب التكامل

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad (25)$$

لدينا في هذا المثال $R(z) = 1/(z+1)$ ، وبما أن $\alpha > 1$ فإن $|z|^{\alpha}|R(z)| \sim 1/|z|^{1-\alpha}$ وينتهي إلى الصفر عندما $z \to \infty$. كما أن $|z|^{\alpha}|R(z)| \sim |z|^{\alpha}$ وينتهي إلى الصفر عندما $z \to 0$ وذلك لكون $\alpha > 0$. ووفقاً لذلك تتحقق الشروط (19) ونجد استناداً للعلاقة (22) :

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$$

حيث $f(z) = z^{\alpha-1}/(z+1)$ وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = z^{\alpha-1}\Big|_{z=-1} = e^{i(\alpha-1)\pi}$ وذلك لأن $\varphi = (\arg z)_{z=-1} = \pi$ وهكذا نجد $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -e^{i\alpha\pi}$ ويكون

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}}(-e^{i\alpha\pi}) = \pi\left(\frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{2i}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \qquad (26)$$

ملاحظة (٣) . لننظر إلى التكامل (25) كتابع للوسيط α : $I = I(\alpha)$. إن هذا التكامل يتقارب بانتظام من أجل $\varepsilon - 1 > \alpha > \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$. وبالتالي فإن التابع $I(\alpha)$ مستمر من أجل $1 > \alpha > 0$ ويحقق العلاقة (26) . وبما أن الطرف الأيمن من (26) تابع تحليلي في المستوي العقدي والموخوذ في النقاط $0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ فإن العلاقة (26) تعطينا تمديداً تحليلياً للتكامل (25) من المجال (0,1) على المستوي العقدي α الموخوذ في النقاط $0, \mp 1, \mp 2, \ldots$.

مثال (٩) . ليكن المطاوب حساب التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\, dx \quad , \quad 0 < \alpha < 4$$

لدينا هنا $R(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ وبما أن $\alpha < 4$ فإن $|z|^{\alpha}|R(z)| \sim 1/|z|^{4-\alpha}$ وينتهي هذا المقدار إلى الصفر عندما $z \to \infty$. كما أن $|z|^{\alpha}|R(z)| \sim |z|^{\alpha}$ وينتهي إلى الصفر عندما $z \to 0$ وبذلك تتحقق الشروط (19) واستناداً إلى العلاقة (22) نجد

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left[\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f(z)\right]$$

حيث $f(z) = z^{\alpha-1}R(z)$. وبما أن النقطتين $i \pm$ قطبان من المرتبة الثانية لـ $f(z)$ فإنه يكون

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left\{z^{\alpha-1}(z-i)^{-2}\left[\frac{\alpha-1}{z} - 2(z+i)^{-1}\right]\right\}_{z=i}$$

حيث أن $(z^{\beta})' = \dfrac{Bz^{\beta}}{z}$ و $(z^{\alpha-1})_{z=i} = e^{i(\alpha-1)\pi/2}$ ، وبالتالي فإن

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{i(\alpha-2)}{4} e^{i(\alpha-1)\pi/2} = \frac{\alpha-2}{4} e^{i\alpha\pi/2}$$

وبالمثل تماماً نجد

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{\alpha-2}{4} e^{i(3/2)\alpha\pi}$$

ويكون

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \cdot \frac{\alpha-2}{4} = (e^{i(\pi/2)\alpha} + e^{i(3/2)\pi\alpha}) =$$

$$= \pi\left(\frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{2i}\right)\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{e^{i(\pi/2)\alpha} + e^{-i(\pi/2)\alpha}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi\ (2-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}{2\sin\alpha\pi}$$

وأخيراً يكون

$$I = \frac{\pi(2-\alpha)}{4\sin(\alpha\pi/2)}$$

٥ ــ التكامل من نمط التابع بيتا . لنستعرض التكامل من نمط التابع بيتا

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} R(x)\, dx \qquad (27)$$

حيث α عدد حقيقي وليس صحيحاً وأما $R(x)$ فهو تابع كسري عادي . كما أننا سنفرض أنه للتابع $R(z)$ لاتوجد أقطاب على المجال $[0,1]$ كما أن $-1 < \alpha < 1$ ، وعندئذ يكون التكامل (27) متقارباً . لنلاحظ أنه بواسطة التحويل $y = x/(1-x)$ يؤول التكامل (27) إلى تكامل من الشكل (18) ، إلا أنه في معظم الحالات يكون من الأفضل تطبيق نظرية الرواسب ، مباشرة ، على التكامل (27) . وبغية ذلك نمدد التابع المستكمل تحليلياً على المستوي العقدي . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء قطع على طول المجال $[0,1]$ الشكل (٢٨) . ولنفصل في هذه الساحة فرعاً تحليلياً $h(z)$ للتابع $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ موجباً على الضفة العليا للقطع . فإذا كانت النقطة z من هذه الضفة $z = x + i0$ ؛ $0 < x < 1$ فإن

$$h(x+i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} > 0 \; ; \; 0 < x < 1$$

لنحسب الآن $\widetilde{h(x)} = h(\widetilde{x} - i0)$ ؛ $0 < x < 1$

حيث $\widetilde{x} = x - i0$ نقطة من الضفة السفلى للقطع . لدينا

الشكل (٢٨)

$$h(z) = \left|\frac{z}{1-z}\right|^{\alpha} e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

حيث أن $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$ و $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg (z-1)$ وأما γ فهو طريق يصل نقطة من الضفة العليا للقطع بالنقطة $z \in D$ الشكل (٢٨).

فإذا كانت $z = \widetilde{x} = x - i0$ $(0 < x < 1)$ فإن $\varphi_1 = 2\pi$ و $\varphi_2 = 0$ ويكون

$$h(\widetilde{x}) = e^{i2\pi\alpha} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} = e^{i2\pi\alpha}\, h(x)$$

لنضع $f(z) = h(z)\, R(z)$ ، وعندئذ يكون $f(x + i0)$ أو $f(\widetilde{x} - i0) = e^{i2\pi\alpha}$

$$f(\widetilde{x}) = e^{i\,2\pi\alpha}\, f(x)$$

حيث أن $f(x)$ يتطابق مع التابع المستكمل في (27) . لنبرهن على أنه من أجل التكامل (27) تتحقق العلاقة

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z = z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right) \qquad (28)$$

حيث أن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ جميع الأقطاب المحدودة للتابع $R(z)$.

لبرهان العلاقة (28) نأخذ المنحني Γ_ρ الشكل (٢٩) . المؤلف من الدائرتين : $C_\rho = \{|z| = \rho\}$ ، $C'_\rho = \{|z-1| = \rho\}$ والمجالين : $l_1 = \{\rho \leqslant x \leqslant 1-\rho\}$ و $l_2 = \{\rho \leqslant x \leqslant 1-\rho\}$ الواقعين ، على الترتيب ، على ضفتي القطع العليا والسفلى . وأما العدد ρ فإننا نختاره صغيراً بقدر كاف ، بحيث تقع جميع أقطاب التابع $R(z)$ خارج Γ_ρ وعندئذ نجد

$$I = \int_{\Gamma_\rho} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z = z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right) \qquad (29)$$

ومن ناحية ثانية لدينا

$$I_\rho = \int_{C_\rho} f(z)\, dz + \int_{\rho}^{1-\rho} f(x)\, dx + \int_{C'_\rho} f(z)\, dz + \int_{1-\rho}^{\rho} f(\widetilde{x})\, dx \qquad (30)$$

ولنحسب الآن التكاملين على الدائرتين C_ρ ، C'_ρ . بما أن التابع $R(z)$ تحايلي في النقطة

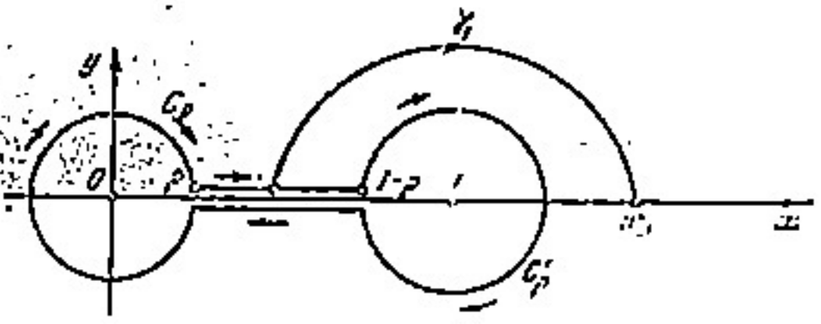
$z = 0$ فإنه يكون $M \geqslant |R(z)|$ من أجل القيم الصغيرة لـ $|z|$ وبالتالي يكون $|h(z)| = |z|^{\alpha} / |1 - z|^{\alpha} \leqslant M_1 |z|^{\alpha}$ من أجل القيم الصغيرة لـ $|z|$ وتبعاً لذلك ومن أجل $z \in C_\rho$ نجد $M(\rho) = \max_{z \in C_\rho} |f(z)| \leqslant M_2 \rho^{\alpha}$ وبالتالي فإن $|f(z)| = |h(z)|\,|R(z)| \leqslant MM_1\rho^{\alpha}$

كما أن $\rho M(\rho) \leqslant M_2 \rho^{1+\alpha}$ وهذا المقدار ينتهي إلى الصفر عندما $\rho \to 0$ وذلك لأن $0 < (1 + \alpha)$. واستناداً إلى التوطئة (٣) يكون $\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)\, dz = 0$.

وبالمثل يبرهن على أن التكامل على C'_ρ ينتهي إلى الصفر عندما $\rho \to 0$. وبالانتقال إلى النهاية عندما $\rho \to 0$ في العلاقة (29) نجد

$$(1 - e^{i\,2\pi\alpha})\, I = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z = z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z = \infty} f(z) \right)$$

وهذا بدوره يؤدي إلى العلاقة (28) .



الشكل (٢٩)

لنحسب الآن الراسب في النقطة $z = \infty$ ؛ بفرض أن التابع $R(z)$ تحليلي في هذه النقطة، أي أن

$$R(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \,, \quad |z| > R$$

لننشر التابع $h(z) = \left(\frac{z}{1 - z}\right)^{\alpha}$ في سلسلة لوران في جوار النقطة $z = \infty$. لدينا

$h(z) = h(\infty)\, g(z)$ حيث

$$g(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{z} + \ldots$$

تابع تحليلي في النقطة $z = \infty$ و $g(\infty) = 1$ وأما $h(\infty) = e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$ حيث $\varphi_1 = \Delta_{\gamma_1} \arg z$ ، $\varphi_2 = \Delta_{\gamma_1} \arg (z - 1)$ و γ_1 طريق يصل نقطة من الضفة العليا للقطع بالنقطة $1 < x_0$ الشكل (٢٩) . وبما أن $\varphi_1 = 0$ و $\varphi_2 = -\pi$ فإن $h(\infty) = e^{i\alpha\pi}$. وبالتالي

$$f(z) = h(z)\, R(z) = h(\infty)\, g(z)\, R(z) =$$

$$= e^{i\alpha\pi}\left(c_0 + \frac{\alpha c_0 + c_{-1}}{z} + \ldots\right), \quad |z| > R$$

ومنه يكون

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi}(\alpha c_0 + c_{-1})$$

في حالة خاصة ، إذا كانت النقطة $z = \infty$ صفراً من المرتبة الثانية للتابع $R(z)$ ، أي أن $c_0 = 0$ و $c_{-1} \neq 0$ فإن

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi} c_{-1} \qquad (31)$$

ملاحظة (٤) . إن الطريقة المستخدمة في حساب التكامل (27) يمكن تطبيقها ، دون أي تعديل ، على التكامل من الشكل

$$I = \int_a^b \left(\frac{x - a}{b - x}\right)^{\alpha} R(x)\, dx$$

حيث $R(x)$ تابع كسري عادي و $-1 < \alpha < 1$ و $\alpha \neq 0$. وفي هذه الحالة يكون لدينا

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi}[\alpha c_0 (b - a) + c_{-1}]$$

وذلك لأن

$$\left(\frac{z - a}{b - z}\right)^{\alpha} = e^{i\alpha\pi}\left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\alpha}\left(1 - \frac{b}{z}\right)^{-\alpha} = e^{i\alpha\pi}\left(1 - \frac{\alpha(b - a)}{z} + \ldots\right)$$

مثال (١٠) . لنحسب التكامل

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \cdot \frac{dx}{x+1} \quad , \quad -1 < \alpha < 1$$

لدينا هنا $R(z) = 1/(z+1)$ ولهذا التابع قطب بسيط في النقطة $z = -1$. وباستخدام العلاقة (28) نجد

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\,2\pi\alpha}} \left[\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right]$$

حيث $f(z) = h(z)\,R(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \frac{1}{z+1}$. ونجد

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = h(-1) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\Big|_{z=-1}$$

حيث $h(-1) = 2\,e^{-\alpha\, i\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$ و $\varphi_1 = \pi$ و $\varphi_2 = 0$ وبالتالي فإن

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2^{-\alpha}\, e^{i\alpha\pi}$$

وبما أن $R(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots$ فإننا نجد استناداً إلى العلاقة (31) أن

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\,\alpha\pi}$$

ويكون لدينا

$$I = \frac{2\pi i\, e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{i2\alpha\pi}} \left(2^{-\alpha} - 1\right) = \frac{\pi\left(1 - 2^{-\alpha}\right)}{\sin \alpha\,\pi}$$

مثال (١١) . لنحسب التكامل

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, \frac{dx}{(x+2)^2}$$

إن النقطة $z = \infty$ من أجل التابع $R(z) = 1/(z+2)^2$ هي صفر من المرتبة الثانية. وأما التابع $h(z) = [z/(1-z)]^{-1/2}$ فهو تحليلي في النقطة $z = \infty$ وبالتالي فإن النقطة $z = \infty$ تكون صفراً من المرتبة الثانية للتابع $f(z) = h(z)\,R(z)$ ، وتبعاً لذلك يكون $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. استناداً للعلاقة (28) نجد $I = \pi i \operatorname*{res}_{z=-2} f(z)$. وبما أن $\alpha = -1/2$ فإنه يكون

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = h'(-2) \quad \text{حيث} \quad h(z) = \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{1/2} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$h'(-2) = \left[\frac{1}{2\,h(z)}\left(\frac{1}{z} - 1\right)'\right]_{z=-2} = -\frac{1}{8\,h(-2)}$$

حيث $h(-2) = \sqrt{3/2}\, e^{i(-1/2)\varphi}$ و $\varphi = \pi$ أي أن $h(-2) = -i\sqrt{3/2}$ ويكون

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = -i/4\sqrt{6} \quad \text{وبالتالي فإن} \quad I = \pi/4\sqrt{6}$$

مثال (١٢) . لنحسب التكامل

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}{1+x^2}\, dx$$

لنفصل في المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$ فرعاً تحليلياً للتابع $[(1-z)(1+z)^3]^{1/4}$ موجباً على ضفة القطع العليا . ونرمز لهذا الفرع بـ $h(z)$ ويكون

$$0 < h(x + i0) = h(x) = \sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3} \quad , \quad (-1 < x < 1)$$

وتكون قيمة الفرع $h(z)$ على ضفة القطع السفلى هي

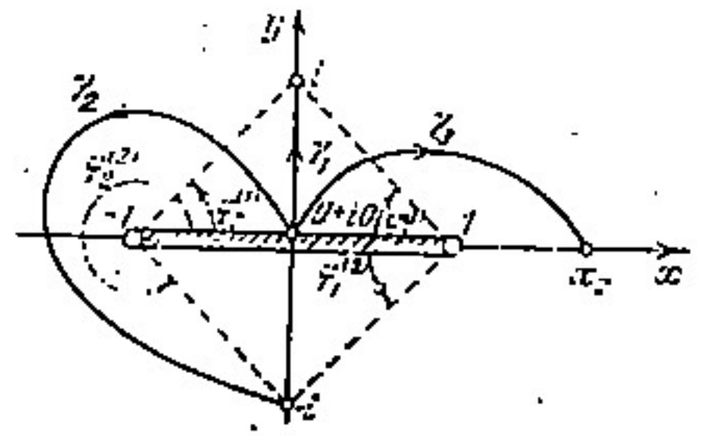
$$h(\widetilde{x}) = h(x - i0) = e^{3/2\,\pi\, i}\, h(x) = -i\,h(x)$$

لنضع

$$f(z) = h(z)\,R(z)\,,\ R(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ونأخذ المحيط Γ الشكل (٣٠) المؤلف من المجالين $[1, 1-]$، $[1-, 1]$ الواقعين على ضفتي القطع العليا والسفلى على الترتيب . واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]$$



الشكل (٣٠)

حيث $\widetilde{f(x)} = -i f(x)$. لنحسب الآن الرواسب . لدينا

$$\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z) = \left(\frac{h(z)}{2z}\right)_{z=\pm i}$$

ولإيجاد قيمتي التابع $h(z)$ في النقطتين $\pm i$ ينبغي حساب $\varphi_1^{(k)} = \Delta_{\gamma_k} \arg(z-1)$ و $\varphi_2^{(k)} = \Delta_{\gamma_k} \arg(z+1)$ حيث γ_k مع $(k=1,2)$ طريقان يصلان النقطة $0+i0$ بالنقطتين i و $-i$ على الترتيب ، الشكل (٣٠) . لدينا

$$h(i) = |h(i)|\, e^{(i/4)(\varphi_1^{(1)} + 3\varphi_2^{(1)})}$$

حيث

$$h(i) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/8} \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \pi/4 \quad , \quad \varphi_1^{(1)} = -\pi/4 \quad , \quad |h(i)| = \sqrt{2}$$

ويكون

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/8}$$

وبالمثل نجد $h(-i) = \sqrt{2}\, e^{(i/4)(\varphi_1^{(2)} + 3\varphi_2^{(2)})} = \sqrt{2}\, e^{i(11/8)\pi}$ ويكون

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{i(3/8)\pi}$$

لنحسب الآن الراسب في النقطة $z=\infty$. لدينا

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{z} = h_1(\infty)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/4}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{3/4} =$$

$$= h_1(\infty)\left(1+\frac{1}{2z}+\dots\right)$$

حيث $\varphi_1^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(z-1)$ و $\varphi_2^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(z-1)$

و

$$h_1(\infty) = e^{i(1/4)(\varphi_1^{(3)} + 3\varphi_2^{(3)})}$$

أما γ_3 فهو طريق يصل النقطة $0+i0$ بالنقطة $x_0 > 1$ ، الشكل (٣٠) . وفي هذا التمرين لدينا $\varphi_1^{(3)} = -\pi$ ، $\varphi_2^{(3)} = 0$ وبالتالي فإن $h_1(\infty) = e^{-i(\pi/4)}$ ويكون

$$h(z) = e^{-i(\pi/4)}\left(z+\frac{1}{2}+\dots\right)$$

كما أن

$$R(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \dots\,, \quad f(z) = h(z)\,R(z) = e^{-i\pi/4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\dots\right)$$

ومنه نجد

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\,e^{-i\pi/4}$$

وبالتالي يكون لدينا أخيراً

$$(1+i)\,I = \sqrt{2}\,\pi\left(e^{i\pi/8} + e^{i3\pi/8} - \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\right)$$

ومنه نجد

$$I = \pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} - 1\right)$$

مثال (١٣) . لنحسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx$

ليكن $h(z)$ هو الفرع التحليلي للتابع $[z(1-z)^3]^{1/4}$ في المستوي العقدي C باستثناء القطع $[0,1]$ والذي يأخذ قيماً موجبة على ضفة القطع العليا ، أي أن

$$h(x+i0)=h(x)=[x(1-x)^3]^{1/4}\ ,\ ;0<x<1 \qquad 0<h(x+i0)=h(x)$$ وعندئذٍ يكون

$$h(x-i0)=h(\widetilde{x})\ ,\ h(\widetilde{x})=i\,h(x)$$ ولنضع $f(z)=h(z)\,R(z)$ حيث $R(z)=1/(1+z)^3$ وفقاً لذلك نجد

$$f(\widetilde{x})=f(x-i0)=i\,f(x)$$

واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^0 f(\widetilde{x})\,dx=(1-i)\,I=2\pi i\ (\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z))$$

لنحسب الآن الرواسب . إن النقطة $z=\infty$ هي صفر من المرتبة الثانية للتابع $f(z)$: [$R(z)\sim 1/z^3$ و $h(z)\sim Az$ عندما $z\to\infty$] وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$

وأما النقطة $z=-1$ فهي قطب من المرتبة الثالثة للتابع $f(z)$ ؛ وعليه يكون

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2}h''(-1) \quad \text{حيث أن} \quad h''(-1)=-3.8^{-7/4}e^{i\pi/4}$$

وبالتالي فإن

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=-\frac{3}{2}8^{-7/4}e^{i\pi/4}$$

ويكون $I=-3\pi 8^{-\pi/4}e^{i\pi/4}$ ومنه نجد $e^{-\pi i/4}$ $I=3\pi\sqrt[4]{2}/64$

٦ – التكامل من الشكل : $I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx$

لنستعرض التكامل من الشكل

$$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx \qquad (32)$$

حيث α عدد حقيقي و m عدد صحيح أكبر من الواحد أو يساويه $m\geq 1$ ، $R(z)$ تابع كسري عادي ، وسنفرض أن التابع $R(z)$ يحقق نفس الشروط المذكورة في النموذج ٤ وعندئذٍ يكون التكامل (32) متقارباً فقط وفقط إذا تحققت الشروط (19) وذلك لأن العامل $\ln^m x$ لايؤثر على التقارب . لنلاحظ بأنه يمكننا الحصول على التكامل (32) من التكامل (18) باشتقاقه بالنسبة للوسيط α . في الواقع

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ln x\,R(x)\,dx$$

وباشتقاق (18) m مرة متتالية نحصل على التكامل (32) . خلافاً لذلك سنحسب التكامل (32) اعتماداً على نظرية الرواسب . لتكن D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[0,+\infty)$. وليكن $h(z)=z^{\alpha-1}$ الفرع التحليلي التابع $z^{\alpha-1}$ في الساحة D والذي يأخذ قيماً موجبة على الضفة العليا للقطع ؛ وانثبت فرعاً تحليلياً من فروع التابع اللوغاريتمي . لنأخذ الفرع الذي يأخذ قيماً حقيقية على ضفة القطع العليا ولنرمز له بـ $\ln z$. عندئذٍ يكون في الساحة D

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\ ,\quad 0<\arg z<2\pi$$

وعلى ضفة القطع العليا يكون $z=x+i0$ حيث $0<x$ ، $\arg z=0$ ويكون

$$\ln(x+i0)=\ln x$$

وأما على ضفة القطع السفلي فيكون $z=x-i0=\widetilde{x}$ حيث $0<x$ و $\arg z=2\pi$ ويكون

$$\ln(x-i0)=\ln\widetilde{x}=\ln x+i2\pi$$

نضع $f(z)=h(z)(\ln z)^m R(z)$ فنجد $f(x+i0)=f(x)=x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)$ وهو التابع المستكمل في (32) : كما نجد أن قيمة التابع $f(z)$ على ضفة القطع السفلي هي :

$$f(x-i0)=f(\widetilde{x})=e^{i2\pi\alpha-1}(\ln x+2\pi i)^m R(x)$$

لنستعرض الآن التكامل

$$I_{\rho,R}=\int_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\,dz \qquad (33)$$

حيث $\Gamma_{\rho,R}$ هو المحيط المبين في الشكل (٢٧) . وبفرض أن الشروط (19) محققة نجد إستناداً إلى التوطئة (٣) أن التكاملين على C_R و C_ρ يسعيان إلى الصفر عندما $R \to \infty$ و $\rho \to 0$ من الشكل الرابع نجد

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\widetilde{x})]\,dx = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname*{res} f(z) \tag{34}$$

حيث أن الرواسب تؤخذ في جميع أقطاب التابع الكسري $R(z)$. لنستعرض الحالتين الآتيتين :

١) α ليس صحيحاً . في هذه الحالة يحتوي الطرف الأيسر من (34) على $I(1 - e^{i2\pi\alpha})$ وكذلك الأمر (من أجل $m < 1$) بالنسبة للتكاملات من الشكل

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^s R(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad 0 \leq s \leq m-1$$. في الحالة الخاصة

$m = 1$ نجد من (34) أن

$$(1 - e^{i2\pi\alpha}) I - 2\pi i\, e^{i2\pi\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (z^{\alpha-1} R(z) \ln z) \tag{35}$$

حيث $z_1, z_2, \dots, z_n$ جميع أقطاب التابع $R(z)$. ومن المساواة (35) يمكننا ايجادالتكامل I وكذلك التكامل

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx$$

٢) α عدد صحيح . في هذه الحالة يكون للتكامل (32) الشكل

$$I = \int_0^\infty (\ln x)^m R(x)\,dx \tag{36}$$

حيث $R(x)$ تابع كسري عادي . في هذه الحالة وبمثابة التابع المستكمل في (33) ينبغي أخذ التابع $(\ln z)^{m+1} R(z)$ وليس $(\ln z)^m R(z)$. في الواقع إذا كان $f(z) = (\ln z)^m R(z)$ فإن $f(x) = (\ln x)^m R(x)$ و $f(\widetilde{x}) = (\ln x + 2\pi i)^m R(x)$ وعندئذ لاتمكننا العلاقة (34) من حساب التكامل المطلوب .

في خلاف ذلك ، إذا كان التابع $R(z)$ زوجياً ، فإنه بمثابة التابع المستكمل في (36) يمكننا أخذ التابع $f(z) = (\ln z)^m R(z)$ وبمثابة طريق المكاملة نأخذ المحيط $\Gamma_{\rho R}$ كما في الشكل (٢٦) . انظر أيضاً المثال (١٥) أدناه .

مثال (١٤) . لنحسب التكامل

$$I = \int_0^\infty x^{-1/2} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2}$$

ان الشروط (19) محققة $(\alpha = 1/2 \text{ و } k = 2)$. واستناداً الى العلاقة (35) نجد

$$2I + 2\pi i \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(x+1)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) \tag{37}$$

وبما أن النقطة $z = -1$ هي قطب من المرتبة الثانية ، فإن

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = (z^{-1/2} \ln z)'_{z=-1} = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{z^{-1/2}}{z} \ln z + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z} z^{-1/2} \right]_{z=-1}$$

حيث $(z^{-1/2})_{z=-1} = e^{-i\pi/2} = -i$ ، $(\ln z)_{z=-1} = i\pi$

وبالتالي فإن $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\pi}{2} + i$

وبمساواة القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي والقسم التخيلي مع القسم التخيلي في (27) نجد

$$I = -\pi \, , \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(x+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

مثال (١٥) . لنحسب التكامل

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\, dx \quad , \quad a > 0$$

ليكن $\Gamma_{\rho,R}$ هو المحيط المبين في الشكل (٢٦) . ولنستعرض التكامل

$$I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} f(z)$$

حيث $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$ هو الفرع التحليلي للتابع اللوغارتيمي الذي يأخذ قيماً حقيقية من أجل $z = x$ حيث $x > o$. وبما أن $|f(z)| < M_1 |\ln \rho|$ من أجل $z \ni c_\rho$ و $|f(z)| < M_2 \frac{\ln R}{R^2}$ من أجل $z \ni C_R$ ، فإن التكاملين على طول C_ρ و C_R يسعيان إلى الصفر عندما $\rho \leftarrow 0$ و $R \leftarrow \infty$. ولدينا هنا

$$\operatorname*{res}_{z=ai} f(z) = \left(\frac{\ln z}{2z}\right)_{z=ai} = \frac{\ln a + i\pi/2}{2ai}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\rho \leftarrow 0$ و $R \leftarrow \infty$ وبالأخذ بعين الاعتبار أن

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + a^2}\, dx = I + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$2I + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)$$

ومنه يكون

$$I = \frac{\pi}{2a} \ln a$$

ان الطريقة المتبعة في حساب التكاملات من الشكل السادس تمكننا من حساب التكاملات من الشكل

$$I = \int_a^b \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^m R(x)\, dx \qquad (38)$$

حيث a, b عددان حقيقيان $b > a$ و m عدد صحيح غير سالب : $m \geqslant 0$. لنضع في (38) $a = 0, m = 0$ $b = \infty$ عندئذ يأخذ التكامل الشكل

$$I = \int_0^\infty R(x)\, dx$$

حيث $R(x)$ تابع كسري عادي يحقق الشروط الواردة في الشكل الرابع . إذا كان $R(x)$ زوجياً فإن

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$$

ولحساب التكامل نستخدم الطريقة المتبعة في الشكل الثاني .

ليكن $R(x)$ تابعاً غير زوجي ، عندئذٍ ينبغي استعراض التكامل

$$I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \ln z\, R(z)\, dz$$

حيث $\Gamma_{\varepsilon,R}$ هو المحيط المرسوم في الشكل (٢٧) . و $\ln z$ فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي

مثال (١٦) . لنحسب التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

لدينا هنا : $f(x) = (\ln x)/(x^3+1)^2$, $f(z) = \ln z\, R(z)$, $R(z) = 1/(z^3+1)^2$

واستناداً إلى العلاقة (34) يكون لدينا $f(\widetilde{x}) = f(x) + 2\pi i/(x^3+1)^2$

$$I = -\sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

حيث $z_k = e^{(2k+1)\pi i/3}$ و $k = 1,2,3$ ، وبما أن النقطة z_1 هي قطب من المرتبة الثانية للتابع $f(z) = \dfrac{\ln z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}$ فإن

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{\ln z}{(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right]'_{z=z_1} =$$

$$= \frac{1}{z_1(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2} - \frac{2[2z_1-(z_2+z_3)]\ln z_1}{(z_1-z_2)^3(z_1-z_3)^3}$$

وباستخدام العلاقات $(z_1-z_2)(z_1-z_3) = (z^3+1)'_{z=z_1} = 3z_1^2$, $\ln z_1 = \pi i$

$z_1^3 = -1$ و $z_1+z_2+z_3 = 0$ نجد

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{z_1}{9}(1-2\pi i)$$

وبالمثل وبالأخذ بعين الاعتبار $\ln z_2 = (5/3)\pi i$, $\ln z_3 = (\pi/3) i$ نجد

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{z_2}{9}\left(1-\frac{10}{3}\pi i\right) \quad , \quad \operatorname*{res}_{z=z_3} f(z) = \frac{z_3}{9}\left(1-\frac{2}{3}\pi i\right)$$

ويكون لدينا

$$I = \frac{\pi i}{9}\left(2z_1 + \frac{10}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$$

بإجراء التحويل $y = (x-a)/(b-x)$ في التكامل (38) نجد أن التكامل يؤول إلى الشكل

$$I = \int_0^{\infty} R(x)\ln^m x\, dx$$

في نهاية هذه الفقرة سنورد بعض الأمثلة لنماذج أخرى من التكاملات التي تحسب استناداً إلى نظرية الرواسب .

مثال (١٧) . لنحسب التكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx \quad , \quad a>0$$

ليكن Γ_R حدود المستطيل ذي الرؤوس

$$z_1 = -R \quad , \quad z_2 = -R + \frac{b}{2a} i \quad , \quad z_3 = R + \frac{b}{2a} i \quad , \quad z_4 = R$$

حيث $R>0$. لنأخذ التابع

$$f(z) = e^{-az^2} \quad , \quad z = x+iy$$

واستناداً إلى نظرية كوشي التكاملية يكون

$$\int_{\Gamma_R} e^{-az^2} dz = 0 \qquad (39)$$

لنقدر التكامل على طول القطعتين المستقيمتين $[z_1, z_2]$, $[z_4, z_3]$. على هاتين القطعتين لدينا

$$|f(z)| = e^{-a(R^2-y^2)} < e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a^2}}$$

ووفقاً لذلك يسعى تكامل التابع $f(z)$ على طول هاتين القطعتين إلى الصفر عندما يسعى R إلى اللانهاية $(R \to \infty)$. أما إذا كان $z \ni [z_2, z_3]$ ، فإن :

$$f(z) = e^{-a\left(x+i\frac{b}{2a}\right)^2} = f(x)\, e^{\frac{b^2}{4a} - ibx}$$

وتبعاً لذلك يمكننا كتابة المساواة (39) على الشكل

$$\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^{R} e^{-a x^2 - ibx}\,dx + \alpha(R) = 0 \qquad (40)$$

حيث $\alpha(R) \to 0$ عندما $R \to \infty$. وبما أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $R \to \infty$ في المساواة (40) نجد

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

مثال (١٨) : لحساب التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} \quad ; \quad (0<a<1)$$

نأخذ التابع $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^{z}}$ ونكامله على حدود المستطيل Γ_R ذي الرؤوس $z_1 = -R$

$z_2 = R$ ، $z_3 = R + 2\pi i$ ، $z_4 = -R + 2\pi i$ حيث $0 < R$. إن التابع $f(z)$ تحليلي في جميع النقاط الواقعة داخل المستطيل باستثناء النقطة $z = \pi i$ والتي هي قطب بسيط له : وان راسبه في هذه النقطة هو

$$\operatorname*{res}_{z=i\pi} f(z) = \frac{e^{az}}{(1+e^{z})'}\Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$$

واستناداً لنظرية الرواسب يكون

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{[z_2\,,\,z_3]} f(z)\,dz + \int_{R}^{-R} f(x+2\pi i)\,dx +$$

$$+ \int_{[z_4\,,\,z_1]} f(z)\,dz = -2\pi i\, e^{a\pi i} \qquad (41)$$

لنقدر التكامل على طول القطعتين $[z_2, z_3]$ ، $[z_4, z_1]$. على القطعة $[z_2, z_3]$ لدينا $z = R + iy$ ، $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ ويكون

$$\left|\frac{e^{az}}{1+e^{z}}\right| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^{R}-1}$$

وبما أن $0 < a < 1$ فإن تكامل التابع $f(z)$ على طول تلك القطعة ينتهي إلى الصفر عندما $R \to \infty$. وبالمثل نجد أن تكامل $f(z)$ على طول القطعة $[z_4, z_1]$ ينتهي أيضاً إلى الصفر عندما $R \to \infty$. ومن ناحية ثانية نجد

$$\int_{R}^{-R} f(x+2\pi i)\,dx = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

وبالتالي فإنه يمكننا كتابة العلاقة (41) على الشكل

$$(1-e^{2a\pi i}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx + \alpha(R) = -2\pi i\, e^{a\pi i} \qquad (42)$$

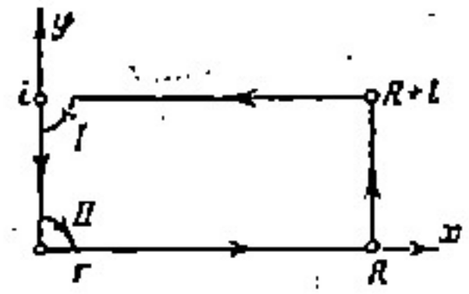
حيث $\alpha(R) \to 0$ عندما $R \to \infty$. وبالانتقال إلى النهاية عندما $R \to \infty$ في العلاقة (42) نجد

$$I = \frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

مثال (١٩) . ليكن المطلوب حساب التكامل

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin a x}{\operatorname{sh} \pi x} dx \quad , \quad (a > 0)$$

لنأخذ التابع $f(z) = \dfrac{e^{i a z}}{e^{2 \pi z} - 1}$ (ضعف قسمه التخيلي على المحور ox هو التابع المستكمل) ونكامله على المنحني $\Gamma_{r,R}$ المبين في الشكل (٣١) .



الشكل (٣١)

بما أن $f(x + i) = e^{-a} f(x)$ فإنه يمكن دمج التكاملين على طول الضلعين الأفقيين في تكامل واحد هو $(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x)\, dx$. كما أن التكامل على طول القطعة المستقيمة $\{x = R \, ; \, 0 \leqslant y \leqslant R\}$ يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ ، انظر المثال (١٨) أعلاه . ومن أجل قطعة المحور التخيلي نضع $x = 0$, $z = iy$ وعندئذٍ واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x)\, dx - i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}\, dy}{e^{2\pi i y} - 1} + \int_I f(z)\, dz +$$

$$\int_{II} f(z)\, dz + \alpha(R) = 0 \qquad (43)$$

حيث أن $\alpha(R) \to 0$ عندما $R \to \infty$ وأن I و II هما قوسا الدائرتين في الشكل (٣١) ، في جوار النقطة $z = i$ لدينا

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)} - 1} = \frac{e^{-a} + c_1(z-i) + \dots}{2\pi(z-i) + c'_2(z-i)^2 + \dots} =$$

$$= \frac{e^{-a}}{2\pi} \frac{1}{z-i} + P(z-i)$$

حيث $P(z-i)$ تابع تحليلي في النقطة $z = i$. وعلى القوس I لدينا $z = i + re^{i\varphi}$ و $dz = rie^{i\varphi} d\varphi$. وبالتالي يكون

$$\int_I f(z)\, dz = \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{-\pi/2} \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi + O_1(r) = -\frac{ie^{-a}}{4} + O_1(r)$$

حيث $O_1(r) \to 0$ عندما $r \to 0$ ؛ وبالمثل نجد

$$\int_{II} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{0} i\, d\varphi + O_2(r) = -\frac{i}{4} + O_2(r)$$

وفقاً لذلك تأخذ المساواة (43) الشكل

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x)\, dx = i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi i y} - 1} dy +$$

$$+ \frac{i}{4}(1 + e^{-a}) + \beta(r) + \alpha(R)$$

حيث $\alpha(R) \to 0$ عندما $R \to \infty$ و $\beta(r) \to 0$ عندما $r \to 0$.

وبفصل القسم التخيلي وبالانتقال إلى النهاية عندما $r \to 0$ و $R \to \infty$ وبالأخذ بعين الاعتبار أن

$$\operatorname{Re}\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi i y}-1}=-\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2a}(e^{-a}-1)+O(r)$$

نجد أن

$$\int_0^{\infty}e^{-\pi x}\,\frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}-\frac{1}{a}\quad,\quad(a>0)$$

مثال (٢٠) . لنحسب **القيمة الرئيسية** للتكامل الشاذ (الشذوذ في النقطة $x=1$) :

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx\qquad 0<a<1 \tag{44}$$

من أجل حساب القيمة الرئيسة للتكامل نأخذ التابع المساعد

$$f(z)=\frac{z^{a-1}}{1-z}=\frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

والمحيط $\Gamma_{r,R}$ المبين في الشكل (٣٢) . وبالأخذ بعين الاعتبار أن $f(xe^{2\pi i})=e^{2a\pi i}f(x)$ على ضفة القطع السفلي وأن التابع $f(z)$ تحليلي داخل المنحني $\Gamma_{r,R}$ نجد

$$\int_{C_r}+(1-e^{2a\pi i})\left\{\int_r^{1-r}f(x)\,dx+\int_{1+r}^{R}f(x)\,dx\right\}+$$

$$+\int_{\gamma_r}f(z)\,dz+\int_{\gamma'_r}f(z)\,dz+\int_{C_R}f(z)\,dz=0 \tag{45}$$

وبسهولة يمكن التأكد من أن التكامل على C_r ينتهي إلى الصفر عندما $r\leftarrow 0$ وأن التكامل على C_R ينتهي إلى الصفر كذلك عندما $R\leftarrow\infty$. وأما على القوسين γ_r و γ'_r فإنه يكون لدينا

على الترتيب $1-z=re^{i\varphi}$ ، $z^{a-1}=e^{2a\pi i}+O_2(r)$ و $z^{a-1}=1+O_1(r)$ $dz=-ire^{i\varphi}d\varphi$ حيث φ تتحول من الصفر حتى $-\pi$ ومن $-\pi$ حتى -2π و $O_1(r)\leftarrow 0$ و $O_2(r)\leftarrow 0$ عندما $r\leftarrow 0$ وبالتالي نجد.

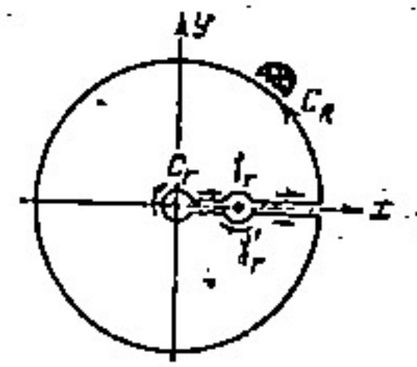
$$\int_{\gamma_r}f(z)\,dz+\int_{\gamma'_r}f(z)\,dz=\pi i(1+e^{2a\pi i})+O(r)$$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (45) عندما $r\leftarrow 0$ و $R\leftarrow\infty$ نجد

$$(1-e^{2a\pi i})I+\pi i(1+e^{2a\pi i})=0$$

ومنه نستنتج أن التكامل الشاذ يساوي

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx=\pi\operatorname{ctg}a\pi$$



الشكل (٣٢)

٢ ــ مبدأ الأرغومينت

١ ــ إحدى التطبيقات الهامة لنظرية الرواسب هي حساب التكامل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz$$

حيث $f(z)$ تابع ميرومورفي في ساحة G و $C\supset D$ ساحة محتواة بتراص في D

(D⊃)G وحدودها ∂D منحن مستمر غير مار بأقطاب التابع f(z) أو بأي موضع A من مواضعه ، وأما φ(z) فهو تابع وحيد التعيين وتحليلي في D . بما أن النقاط الشاذة الشاذة للتابع $F(z)=\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ في الساحة G هي أقطاب فقط وهي المواضع A للتابع f(z) وأقطابه كذلك الواقعة داخل G ، وبما أن D⊃)G فإن عددتلك المواضع منته وكذلك عدد الأقطاب . لتكن $a_m,\dots,a_2,a_1$ هي المواضع A للتابع f(z) في الساحة G و $\alpha_m,\dots,\alpha_2,\alpha_1$ مراتب هذه المواضع على الترتيب ، ولتكن $b_n,\dots,b_2,b_1$ أقطاب f(z) الواقعة في G ومراتبها على الترتيب هي $\beta_m,\dots,\beta_2,\beta_1$. في جوار للنقطة a_j يكون نشرا التابعين φ(z) و f(z) من الشكل

$$\varphi(z)=(a_j)+\dots\ ,\quad f(z)-A=c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}+\dots$$

وبالتالي فإن $f'(z)=c_{\alpha_j}\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}+\dots$ و

$$F(z)=[\varphi(a_j)+\dots]\frac{c_{\alpha_j}\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}+\dots}{c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}+\dots}=$$

$$=\frac{\alpha_j}{z-a_j}[\varphi(a_j)+\dots]\frac{1+\dots}{1+\dots}=\frac{\alpha_j}{z-a_j}[\varphi(a_j)+\dots]=\frac{\alpha_j\varphi(a_j)}{z-a_j}+\dots$$

وبالتالي فإن النقطة $z=a_j$ هي قطب بسيط للتابع F(z) ؛ وراسبه في هذه النقطة يساوي $\alpha_j\varphi(a_j)$. ويمكن لهذا الراسب أن يساوي الصفر إذا كان $\varphi(a_j)=0$ وفي هذه الحالة لاتكون النقطة a_j قطباً للتابع F(z) . لنستعرض الآن التابع F(z) في جوار أحد الأقطاب b_j للتابع f(z) . في جوار هذه النقطة يكون لدينا

$$\varphi(z)=\varphi(b_j)+\dots,\quad f(z)-A=d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j}+\dots$$

$$f'(z)=-\beta_j d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j-1}-\dots$$

ومنه نجد :

$$F(z)=[\varphi(b_j)+\dots]\frac{-\beta_j d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j-1}-\dots}{d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j}+\dots}=$$

$$=\frac{-\beta_j}{z-\beta_j}[\varphi(b_j)+\dots]\quad\frac{1+\dots}{1+\dots}=-\frac{\beta_j}{z-b_j}[\varphi(b_j)+\dots]=-\frac{\beta_j\varphi(b_j)}{z-b_j}$$

وبالتالي فإن النقطة $z=b_j$ هي قطب بسيط للتابع F(z) ، وأن راسبه في هذه النقطة يساوي $-\beta_j\varphi(b_j)$ (يمكن أن يكون معدوماً إذا كان $\varphi(b_j)=0$) . وبتطبيق نظرية الرواسب على التكامل المذكور أعلاه نجد

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi(a_j)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi(b_j)\qquad(1)$$

حيث أن المجموع الأول ، في الطرف الأيمن ، يمثل مجموع قيم التابع φ(z) التي يأخذها في المواضع A للتابع f(z) علماً بأن كل قيمة تكرر عدداً من المرات يساوي مرتبة الموضع A ذاته . وإذا اعتبرنا في تعداد المواضع A الواقعة في G أن كل موضع مكرر بقدر مرتبته ، فإنه يمكننا تسمية المجموع $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi(a_j)$ بمجموع قيم التابع φ(z) في المواضع A للتابع f(z) . وبالمثل بالنسبة للمجموع الثاني في العلاقة (1) يمكننا اعتباره مجموع قيم التابع φ(z) في أقطاب التابع f(z) الواقعة داخل G . لنستعرض الآن بعض الحالات الخاصة .

١) $\varphi(z)=z$ في هذه الحالة يكون لدينا

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}z\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j a_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j\qquad(2)$$

أي أن التكامل يساوي الفرق بين مجموع المواضع A للتابع f(z) الواقعة في G ومجموع

أقطاب ذلك التابع الواقعة أيضاً في G .

٢) $\varphi(z) \equiv 1$. في هذه الحالة نجد

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j \qquad (3)$$

أي أن التكامل يساوي الفرق بين عدد المواضع A للتابع $f(z)$ وعدد أقطابه الواقعة في الساحة G . وإذا كان $A=0$ فإن المواضع A تكون أصفار التابع $f(z)$ لنرمز بـ N لعدد أصفار $f(z)$ الواقعة داخل G وبـ P لعدد أقطابه هناك ونجد أن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P \qquad (4)$$

يسمى التكامل في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة **بالراسب اللوغاريتمي** للتابع $f(z)$ بالنسبة للمنحني ∂G (لنلاحظ بأن التابع المستكمل هو مشتق لوغاريتم $f(z)$. وهكذا نكون قد برهنا النظرية الآتية

نظرية (١) - ليكن $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً في ساحة D ولتكن الساحة G محتواة بتزاص في D ($G \subset D$) وحدودها ∂G منحن مستمر غير مار بأي صفر أو قطب للتابع $f(z)$ عندئذٍ يكون

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P$$

حيث N عدد أصفار التابع $f(z)$ الواقعة في G و P عدد أقطابه هناك و ∂G الحدود الموجهة للساحة G .

نأتي الآن إلى التفسير الهندسي للنظرية المبرهنة أعلاه . لنمثل ∂D بالطريق

$z=z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ ونرمز بـ $\Phi(t)$ للتابع الأصلي للتابع $f'(z)/f(z)$ على طول هذا

الطريق . استناداً إلى علاقة نيوتن – ليبنتز يكون لدينا

$$\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha) \qquad (5)$$

ومن الواضح أن $\Phi(t)=\ln f[z(t)]$ حيث ln تعني أي فرع من فروع اللوغاريتم والذي يتحول بشكل مستمر على طول الطريق ∂G . وبما أن $\operatorname{Ln} f=\ln|f|+i\operatorname{Arg} f$ وأن التابع $\ln|f(z)|$ وحيد القيمة ، فإنه لفصل ذلك الفرع يكفي فصل فرع مستمر على طول ∂G من $\operatorname{Arg} f$. وليكن هذا الفرع هو $\arg f$. وبما أن تغير $\ln|f|$ على طول الطريق المغلق ∂G يساوي الصفر فإنه يكون

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=i\{\arg f[z(\beta)]-\arg f[z(\alpha)]\}$$

لنرمز لأمثال العدد i في الطرف الأيمن (تغير فرع العمدة) بـ $\Delta_{\partial G}\arg f$ فنجد أن العلاقة (5) تأخذ الشكل

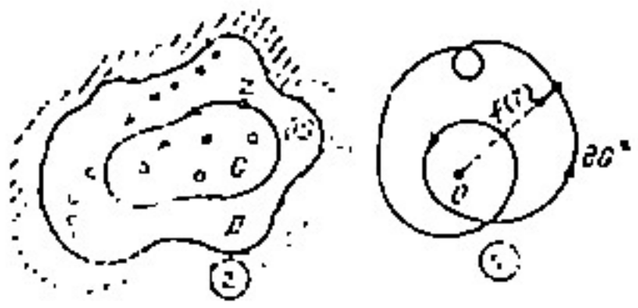
$$\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=i\,\Delta_{\partial G}\arg f$$

ووفقاً لذلك تأخذ النظرية (١) الشكل

نظرية (٢) (مبدأ الأرغومينت) . في شروط النظرية (١) يكون الفرق بين عدد أصفار التابع $f(z)$ وعدد أقطابه الواقعة في الساحة G مساوياً لتغير عمدة ذلك التابع مقسوماً على 2π بنتيجة الدوران على الحدود الموجهة للساحة

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f \qquad (6)$$

من الواضح أن الطرف الأيمن من العلاقة (6) يمثل هندسياً عدد الدورات الكاملة حول النقطة $w=0$ والتي يصنعها الشعاع $w=f(z)$ عندما ترسم النقطة z الطريق ∂G . لنرمز بـ ∂G^* لصورة الطريق ∂G بواسطة التطبيق f أي للطريق $w=f[z(t)]$ ، $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. وعندئذٍ يكون ذلك العدد مساوياً لعدد دورات الشعاع w بنتيجة رسم الطريق ∂G^* ، الشكل(٣٣). كتطبيق على مبدأ الأرغومينت نذكر النظرية الآتية



الشكل (٣٣)

٢ – نظرية (٣) (روشيه) . ليكن التابعان $f(z)$ و $g(z)$ وحيدي التعيين وتحليليين في الساحة المغلقة $\bar{G}$ ذات الحدود المستمرة ∂G وليكن

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad \forall\ z \in \partial G \tag{7}$$

عندئذٍ يكون للتابعين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ في الساحة G نفس عدد الأصفار .

البرهان . بما أن $|f(z)| > |g(z)|$ على ∂G ، فإن $f(z)$ و $[f(z)+g(z)]$ لاينعدمان على ∂G[1] وبالتالي يمكننا تطبيق مبدأ الأرغومينت . وبما أن $f \neq 0$ على ∂G فإن

$$f(z)+g(z) = f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$ وبالتالي يكون لدينا

$$\Delta_{\partial G} \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_{\partial G} \arg f(z) + \Delta_{\partial G} \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) \tag{8}$$

وبما أن $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ على ∂G ، فإنه من أجل أية نقطة $z \in \partial G$ لاتخرج النقطة $w = \frac{g(z)}{f(z)}$ من الدائرة $\{|\omega|<1\}$ وبذلك لايمكن للشعاع $w = 1+\omega$ الالتفاف حول النقطة $w=0$ ؛ وفقاً لذلك يكون الحد الثاني في الطرف الأيمن من (8) معدوماً . أي أن $\Delta_{\partial G} \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_{\partial G} \arg f(z)$ واستناداً إلى مبدأ الأرغومينت يكون للتابعين $f(z)+g(z)$ ، $f(z)$ نفس عدد الأصفار .

---

(١) بما أن $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ فإن $|g(z)+f(z)| > |f(z)| - |g(z)| > 0$ على ∂G .

يستفاد من نظرية روشيه في حساب عدد أصفار تابع وحيد التعيين وتحليلي ؛ كما يمكن برهان النظرية الأساسية في الجبر اعتماداً على هذه النظرية .

مثال (١) . أوجد عدد أصفار التابع $F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ الواقعة داخل دائرة الوحدة $\{|z|<1\}$.

نضع التابع $F(z)$ في شكل مجموع تابعين $f(z)$ و $g(z)$ واللذين سنختارهما على الشكل $f(z) = -4z^5$ ، $g(z) = z^8 + z^2 - 1$. عندئذٍ في نقاط المحيط $z=1$ يكون لدينا

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4$$

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

وهكذا تتحقق في جميع نقاط المحيط $|z|=1$ المتراجحة $|f(z)| > |g(z)|$. وبما أنه التابع $f(z) = -4z^5$ جذر مكرر خمس مرات في مبدأ الاحداثيات ، فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z)+g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ حسب نظرية روشيه داخل الدائرة $\{|z|<1\}$ هو خمسة أصفار . لنلاحظ أنه يمكن اختيار التابعين $f(z)$ و $g(z)$ بشكل آخر على سبيل المثال $f(z) = z^8 - 4z^5$ ، $g(z) = z^2 - 1$.

مثال (٢) . ماهو عدد جذور المعادلة

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

الواقعة في الحلقة $\{2>|z|>1\}$ ؟ .

لنفرض أن N_1 هو عدد جذور المعادلة الواقعة في الدائرة $\{|z|<1\}$ ، وأن N_2 عدد الجذور الواقعة في الدائرة $\{|z|<2\}$. عندئذٍ يكون عدد جذور المعادلة الواقعة في الحلقة N مساوياً لـ $N = N_2 - N_1$.

لحساب N_1 نأخذ $f(z) = -5z$ و $g(z) = z^4 + 1$. ويكون لدينا على المحيط $|z|=1$: $|g(z)| < |f(z)|$ وذلك لأن $|f(z)| = |-5z| = 5$ و $|g(z)| = |z^4+1| \leq 2$. وبما أن التابع $f(z)$ ينعدم مرة واحدة في النقطة $z=0$ فإن $N_1 = 1$. ولإيجاد N_2 نختار $f(z) = z^4$ ، $g(z) = 1-5z$ ويكون لدينا

على المحيط $|z| = 2$. وذلك لأن $|f(z)| = |z^4| = 2^4 = 16$

و $|g(z)| = |1 - 5z| \leqslant 1 + 5|z| = 11$ وبما أنه للتابع $f(z) = z^4$ أربعة أصفار في داخل الدائرة $|z| < 2$ ، فإن $N_2 = 4$. وفقاً لذلك يكون عدد جذور المعادلة في الحلقة $\{2 > |z| > 1\}$ هو $N = 4 - 1 = 3$.

مثال (٣) . أوجد عدد جذور المعادلة :

$$z^2 - ae^z = 0 \quad , \quad 0 < a < e^{-1}$$

الواقعة داخل دائرة الوحدة $\{|z| < 1\}$.

لنضع $f(z) = z^2$ ، $g(z) = -ae^z$ ؛ على محيط دائرة الوحدة $|z| = 1$ يكون لدينا

$$|f(z)| = |z|^2 = 1$$

$$|g(z)| = |-ae^z| = a|e^z| = a|e^{x+iy}| = ae^x \leqslant ae < 1$$

وذلك لكون $x \leqslant 1-$ وكون $0 < a < e^{-1}$. وهكذا يكون لدينا $|g(z)| < |f(z)|$ من أجل $|z| = 1$ وبما أنه للتابع $f(z)$ جذر مضاعف مرتين داخل الدائرة $\{|z| < 1\}$ فإن عدد جذور المعادلة هناك يكون 2 .

ملاحظة . لنستعرض التابع الحقيقي $F(x) = x^2 - ae^x$. هذ االتابع مستمر على المجال $1 \leqslant x \leqslant 1-$ ، وإضافة إلى ذلك

$$F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0 \quad , \quad 0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1$$

$$F(0) = -a < 0$$

$$F(1) = 1 - ae > 0 \quad ; \quad a < e^{-1}$$

أي أن التابع يأخذ على طرفي كل من المجالين $0 \leqslant x \leqslant 1-$ ، $1 \geqslant x \geqslant 0$ قيماً مختلفة الإشارة ومن ذلك نستنتج بأن جذري المعادلة حقيقيان ومختلفان بالإشارة .

مثال (٤) . أوجد عدد أصفار كثير الحدود

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$$

١) الواقعة في نصف المستوي الأيمن . ٢) الواقعة في الربع الأول من المستوي

المثلثي . بما أنه لـ $P(z)$ لايوجد أقطاب فإن $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} P(z)$ يساوي لعدد أصفار $P(z)$ الواقعة داخل المنحني C . لنأخذ بمثابة المنحني C نأخذ حدود نصف الدائرة التي مركزها في النقطة $z = 0$ وقطرها على المحور التخيلي وأما نصف قطرها R فكبير بقدر كاف بحيث تكون أصفار $P(z)$ الواقعة في نصف المستوي الأيمن واقعة داخل نصف الدائرة الشكل (٣٤) . لنطبق مبدأ الأرغومينت بالنسبة للمنحني C ؛ ومن ثم ننتقل إلى النهاية عندما $R \to \infty$ بما أن

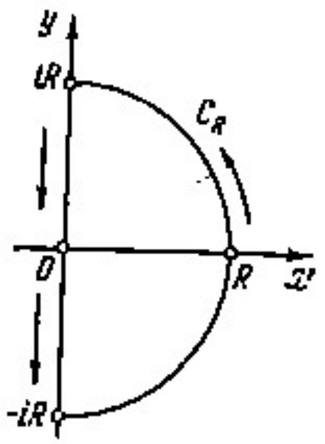
$$P(z) = z^4\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4}\right)$$

فإن تغير عمدة المضروب الثاني في الطرف الأيمن ، عندما ترسم النقطة z نصف الدائرة C_R يكون قريباً جداً من الصفر ولا سيما عندما R يكون كبيراً بقدر كاف . وهكذا نجد

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^4 = 4\,\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = 4\pi$$

و

$$[\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} P(z)] \to 4\pi \quad \text{عندما} \quad R \to \infty$$



الشكل (٣٤)

لنفرض الآن أن النقطة z ترسم قطعة المحور التخيلي من النقطة $z = iR$. إلى النقطة $z = -iR$ ولنضع $z = it$ فنجد

$$P(it) = u + iv = t^4 - 3t^2 + 2 + i(-2t^3 + t)$$

ومنه يكون

$$u = t^4 - 3t^2 + 2 \quad , \quad v = -2t^3 + t$$

وكي نتمثل المنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(z)$ نحسب نقاط تقاطع ذلك المنحني مع المحورين الاحداثيين في المستوي w . وبغية ذلك نحل المعادلتين

$$t^4 - 3t^2 + 2 = 0 \quad , \quad -2t^3 + t = 0$$

إن جذور المعادلة الأولى هي : $t = \pm \sqrt{2}$ و $t = \pm 1$ وأما جذور المعادلة الثانية فهي $t = 0$ ، $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (بما أنه لاتوجد جذور مشتركة للمعادلتين ، فإن $P(z)$ لاينعدم في نقاط المحور التخيلي وهذا مايمكننا من تطبيق مبدأ الأرغومينت) . لنرتب الجذور التي وجدناه تناقصياً (أي موافقاً لرسم المنحني) :

$$\sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\sqrt{2}$$

ومن ثم نجد القيم الموافقة لـ u , v . فنجد

$u = 0$, $v = -3/\sqrt{2}$; $t = \sqrt{2}$

$u = 0$, $v = -1$; $t = 1$

$u = 3/4$, $v = 0$; $t = 1/\sqrt{2}$

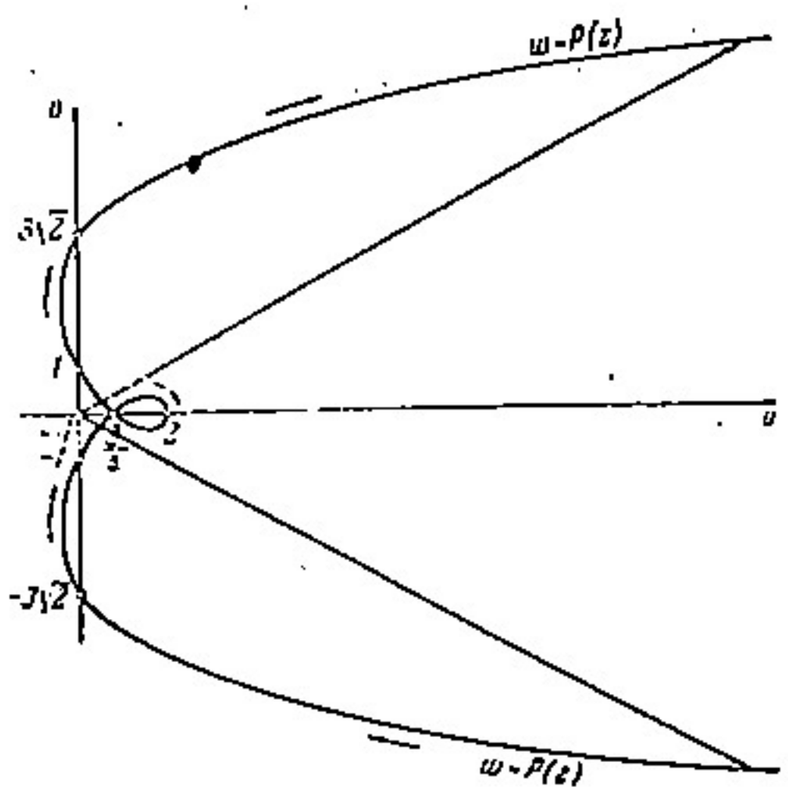
$u = 2$, $v = 0$; $t = 0$

$u = 3/4$, $v = 0$; $t = -1/\sqrt{2}$

$u = 0$, $v = 1$; $t = -1$

$u = 0$, $v = 3\sqrt{2}$; $t = -\sqrt{2}$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنه عندما $R \to \infty = t$ يكون $u \to +\infty$, $v \to -\infty$ و $(v/u) \to 0$ وأنه عندما $t = (-R) \to -\infty$ فإن $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ و $(v/u) \to 0$ ، فإنه يمكننا التأكيد على أن شكل المنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(z)$ عندما ترسم النقطة z المحور التخيلي من الأعلى إلى الأسفل يكون كما في الشكل (٣٥) وأن تغير عمدة $P(z)$ يساوي الصفر .



الشكل (٣٥)

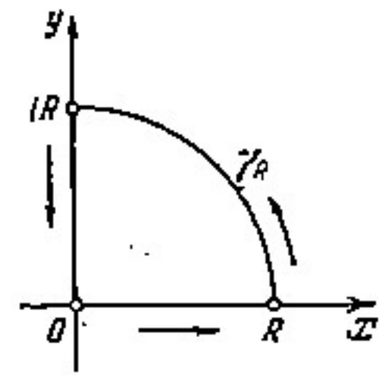
وبالتالي يكون لدينا من أجل R كبير بقدر كاف :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \mathrm{Arg}\, P(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 2$$

أي أن لـ $P(z)$ صفران في نصف المستوي الأيمن .

٢) لتحديد عدد أصفار كثير الحدود $P(z)$ الواقعة في الربع الأول نأخذ المنحني المغلق γ الشكل (٣٦) وليكن γ_R قوس الدائرة التي مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها R . وبالمثل ، كما في الحالة السابقة ، يكون تغير عمدة $P(z)$ على القوس γ_R ومن أجل R كبير بقدر كاف مساوياً لـ 2π . وعندما $R \to \infty$ فإن القطعتين المستقيمتين في المنحني γ_R تؤولان إلى النصفين الموجبين من المحور التخيلي والمحور الحقيقي . وعندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور التخيلي ، من الأعلى إلى الأسفل ، فإن النقطة $w = P(z)$ ترسم نصف المنحني الممثل في الشكل (٣٥) أعلاه والواقع في نصف المستوي السفلي . وعندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور الحقيقي ؛ أي عندما $0 < x = z$, $+\infty \leftarrow x$ فإن $0 < w = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2$

و $w \to +\infty \leftarrow w$. ويكون للمنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(z)$ عندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور التخيلي من الأعلى إلى الأسفل ومن ثم القسم الموجب من المحور

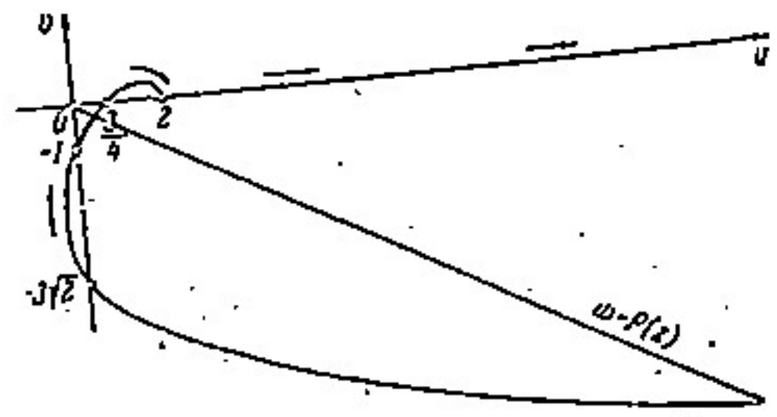


الشكل (٣٦)

الحقيقي الشكل المبين في الشكل (٣٧) ويكون تغير عمده $P(z)$ على هذا المنحني مساوياً للصفر ؛ وهكذا ومن أجل R كبير بقدر كاف يكون

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

وبالتالي فإنه لـ $P(z)$ صفر واحد في الربع الأول .



الشكل (٣٧)

٣ – نشر التوابع الميرومورفية في كسور بسيطة .

١ – نظرية نشر التوابع الميرومورفية . بمثابة تطبيق آخر على نظرية الرواسب نستعرض نشر التوابع الميرومورفية في سلسلة من الكسور البسيطة .

تعريف (١) . لتكن $\{\Gamma_n\}$ متتالية من المنحنيات المغلقة والتي كل واحد فيها واقع داخل المنحني الذي يليه Γ_n يقع داخل Γ_{n+1} ، مع $(n = 1,2,\dots)$ ؛ والحاوية في داخلها النقطة $z = 0$ وبحيث أن

$$\frac{S_n}{d_n} \leqslant C \qquad (n = 1,2,\dots) \tag{1}$$

حيث S_n هو طول المنحني Γ_n و d_n بعد هذا المنحني عن مبدأ الإحداثيات $(d_n = \inf_{z\in\Gamma_n} |z|)$

كما أن

$$d_n \to \infty \quad (n\to\infty) \tag{2}$$

مثل هذه الجملة من المنحنيات تسمى **جملة عادية** .

نظرية (١) . إذ أن $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً وتحليلياً في النقطة $z = 0$ وكانت z_k $(k = 1,2,\dots)$ أقطاباً بسيطة لـ $f(z)$ مرتبة وفق تناقص طويلاتها : $\dots \leqslant |z_2| \leqslant |z_1|$ ، وكان $f(z)$ محدوداً على جملة عادية ما من المنحنيات $\{\Gamma_n\}$. أي أن

$$|f(z)| \leqslant M \quad , \quad z \in \Gamma_n \quad (n = 1,2,3,\dots) \tag{3}$$

فإن

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) \tag{4}$$

حيث $A_k = \operatorname*{res}_{z = z_k} f(z)$ وتكون السلسلة (4) متقاربة بانتظام في أية ساحة محدودة وموخوذة في أقطاب التابع $f(z)$.

البرهان . لنستعرض التكامل

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{z f(\xi)}{\xi(\xi - z)}\, d\xi \tag{5}$$

حيث $z \in G_n$ (G_n داخل المنحني Γ_n) $z_k \neq z$ $(k = 1,2,\dots)$. لنضع

عندئذ $F(\xi)=\frac{z f(\xi)}{\xi(\xi-z)}$ ، في الساحة G_n ؛ يكون لهذا التابع أقطاب بسيطة في النقاط $\xi=z$ و $G_n \ni z_k=\xi$. وأما النقطة $\xi=0$ فإنها قد تكون قطباً بسيطاً وقد تكون نقطة عادية (إذا كان $f(0)=0$) . واستناداً إلى نظرية الرواسب يكون

$$I_n=\operatorname*{res}_{\xi=0} F(\xi)+\operatorname*{res}_{\xi=z} F(\xi)+\sum_{z_k\in G_n}\operatorname*{res}_{\xi=z_k} F(\xi) \qquad (6)$$

وبما أن

$$\operatorname*{res}_{\xi=0} F(\xi)=\left[\frac{z f(\xi)}{\xi-z}\right]_{\xi=0}=-f(0) \qquad (7)$$

$$\operatorname*{res}_{\xi=z} F(\xi)=\left[\frac{z f(\xi)}{\xi}\right]_{\xi=z}=f(z) \qquad (8$$

$$\operatorname*{res}_{\xi=z_k} F(\xi)=\left[\frac{z}{\xi(\xi-z)}\right]_{\xi=z_k},\ \operatorname*{res}_{\xi=z_k} f(\xi)=\frac{A_k z}{z_k(z_k-z)} \qquad (9)$$

فإننا نجد

$$I_n(z)=-f(0)+f(z)+\sum_{z_k\in G_n}\frac{A_k z}{z_k(z_k-z)}$$

واستناداً إلى المساواة $\frac{z}{z_k(z_k-z)}=-\left(\frac{1}{z-z_k}+\frac{1}{z_k}\right)$

نجد

$$f(z)=f(0)+\sum_{z_k\in G_n} A_k\left(\frac{1}{z-z_k}+\frac{1}{z_k}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{z f(\xi)}{\xi(\xi-z)}\,d\xi \qquad (10)$$

لنقدر الآن التكامل $I_n(z)$. لتكن D ساحة محدودة ؛ عندئذ توجد دائرة K $K=\{|z|<R\}$ بحيث أن $K\supset D$. ويكون

$$|I_n(z)|<\frac{|z|}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\frac{|f(\xi)|}{|\xi|\,|\xi-z|}\,|d\xi|$$

وبما أن $|z|<R$ وذلك لأن $z\in D\subset K$ و $|\xi|\geqslant d_n$ (d_n بعد مبدأ الاحداثيات عن Γ_n) و $|z-\xi|\geqslant|\xi|-|z|>d_n-R$ و $|f(\xi)|\leqslant M$ فإنه يكون

$$|I_n(z)|\leqslant\frac{M R}{2\pi}\frac{1}{d_n(d_n-R)}S_n\leqslant\frac{CMR}{2\pi(d_n-R)}$$

وذلك لأن $S_n\leqslant C d_n$. واستناداً إلى الشرط (2) نجد أن $I_n(z)\to 0$ عندما $n\to\infty$ بانتظام بالنسبة لـ $z\in D$ و $z_k\neq z$ $(k=1,2,\ldots)$. وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (10) عندما $n\to\infty$ نجد

$$f(z)=f(o)+\lim_{n\to\infty}\sum_{z_k\in G_n} A_k\left(\frac{1}{z-z_k}+\frac{1}{z_k}\right) \qquad (11)$$

وسنكتب العلاقة (11) بالشكل المختصر (4) مع اعتبار أن عملية الجمع تتم وفق مايلي : أولاً نأخذ الحدود الموافقة للأقطاب الواقعة داخل Γ_1 ومن ثم نضيف مجموعة الحدود الموافقة للأقطاب الواقعة بين Γ_1 و Γ_2 ومن ثم بين Γ_2 و Γ_3 وهكذا ...

ملاحظة (١) .يمكن تعميم النظرية (١) باستبدال المتراجحة (3) بالمتراجحة

$$|f(z)|\leqslant M|z|^p\quad,\quad z\in\Gamma_n\ (n=1,2,\ldots) \qquad (12)$$

حيث $p\geqslant 0$ وعدد طبيعي وبالاحتفاظ بالشروط الأخرى الواردة في النظرية (١) . وفي هذه الحالة نحصل على العلاقة الآتية :

$$f(z)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\frac{1}{z+z_k}+\frac{1}{z_k}+\frac{z}{z^2_k}+\ldots+\frac{z^{p-1}}{z^p_k}\right) \qquad (13)$$

لبرهان العلاقة (13) يكفي تطبيق نظرية الرواسب على التكامل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{z^p f(\xi)}{\xi^p(\xi-z)}\,d\xi$$

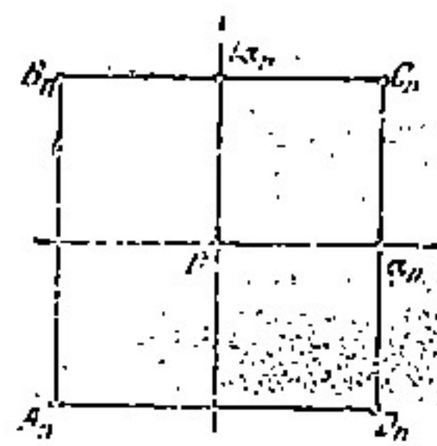
٢ ــ نشر التابع ctgz في كسور بسيطة . لنستعرض التابع $f(z)=\operatorname{ctg} z-(1/z)$.

إن هذا التابع ميروموروفي ؛ وان النقاط $z_k = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ أقطاب بسيطة له. كما أنه لاتوجد نقاط شاذة محدودة أخرى لهذا التابع . إن راسب التابع $f(z)$ في النقاط $k\pi$ يساوي $\operatorname{res}_{z=k\pi} f(z) = 1$. لنبرهن أن على $f(z)$ محدود على جملة المنحنيات العادية (Γ_n) حيث Γ_n هو المربع $A_n B_n C_n D_n$ الشكل (٣٨) ، والذي مركزه مبدأ الاحداثيات وأضلاعه موازية للمحورين الاحداثيين وطولها $2\alpha_n$ حيث $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ و $(n = 0,1,2,\ldots)$. لتكن $z \ni C_n D_n$ عندئذٍ يكون $z = \alpha_n + iy$ حيث $-\alpha_n \leqslant y \leqslant \alpha_n$ وبالتالي فإن

$$|\operatorname{ctg} z| = |\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \pi n + iy)| = |\operatorname{tg} i y| = \left|\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\right|$$

ومنه نجد أن

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant 1 \quad , \quad z \in C_n D_n \, , \, (n = 0,1,2,\ldots) \tag{14}$$



الشكل (٣٨)

نتكن $z \ni B_n C_n$. عندئذٍ يكون $z = x + i\alpha_n$ حيث $-\alpha_n \leqslant x \leqslant \alpha_n$ ويكون

$$|\operatorname{ctg} z| = \left|\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}\right| = \left|\frac{1 + e^{-2\alpha_n} e^{2ix}}{1 - e^{-2\alpha_n} e^{2ix}}\right| \leqslant \frac{1 + e^{-2\alpha_n}}{1 - e^{-2\alpha_n}}$$

ومنه نجد أن

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{1 + e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} \quad , \quad z \in B_n C_n \quad , \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{15}$$

وبما أن $|\operatorname{ctg}(-z)| = |\operatorname{ctg} z|$ ، فإن المتراجحتين (14) , (15) تتحققان ؛ على الترتيب ؛ على الضلعين $D_n A_n$, $A_n B_n$ من المربع Γ_n . وبالتالي فإن

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant M \quad z \in \Gamma_n \, , \, n = 0,1,2,\ldots$$

ومنه ينتج أن التابع $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ محدود على جملة المربعات Γ_n . وبما أن $f(z)$ فردي و $f(z)$ تحليلي في جوار النقطة $z = 0$ $(z = 0$ نقطة شاذة قابلة الاصلاح) فإن $f(0) = 0$. واستناداً إلى العلاقة (4) يكون

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right) \tag{16}$$

حيث أن الفتحة فوق إشارة الجمع تعني أن $k \neq 0$

وبملاحظة وجود قطبين فقط بين المنحنيين Γ_{k-1} , Γ_k للتابع $f(z)$ هما $z = k\pi$ و $z = -k\pi$ وبدمج الحدين الموافقين لهذين القطبين في المجموع (16) نجد

$$\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

وبذلك يكون

$$\operatorname{ctg} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \tag{17}$$

مثال (1) . ننشر في كسور بسيطة التوابع الآتية

1) $\operatorname{tg} z$, 2) $\frac{1}{\sin^2 z}$, 3) $\frac{1}{e^z - 1}$

١) بما أن $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ ، فإن العلاقة (16) تأخذ الشكل

$$\operatorname{tg} z = -\frac{1}{z-(\pi/2)} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(\pi/2)-k\pi} + \frac{1}{z-(\pi/2)+k\pi}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\frac{2k-1}{2}\pi} + \frac{1}{z+\frac{2k-1}{2}\pi}\right)$$

ومنه نجد

$$\operatorname{tg} z = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-(2k-1)^2\pi^2/4} \tag{18}$$

٢) بما أن $1/\sin^2 z = -(\operatorname{ctg} z)'$ ، فإنه باشتقاق السلسلة المتقاربة بانتظام (16) نجد

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(z-k\pi)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k\pi)^2}$$

٣) بما أن

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{1}{z}\,\frac{e^{-z/2}-e^{z/2}+e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \operatorname{cth}\frac{z}{2}$$

وباستخدام العلاقة $\operatorname{cth}\xi = i\operatorname{ctg}(i\xi)$ والعلاقة (17) نجد

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}$$

تمارين غير محلولة

١ ـ احسب التكاملات الآتية

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$; $C: \{|z| = r \neq 1\}$

2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$; $(\sqrt{1}=1)$ ، $C: \{y = x^2\}$, y مرسوم باتجاه تزايد

3) $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz$; $C: \{|z-1| = \frac{1}{2}\}$

4) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$ ، $C: \{|z| = 2\}$

٢ ـ احسب التكاملات الآتية

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}$; $(a > 1)$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$; $(a > b > 0)$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos^2)^2}$; $(a > 0, b > 0)$

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}(\cos n\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi$ (n عدد صحيح)

5) $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a)\,dx \qquad (\operatorname{Im} a \neq 0)$

٣ — احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$ ، 2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$

3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ، 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0, b>0)$

٤ — احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$ ، 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$

3) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$ (a و b عددان حقيقيان)

4) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx$ (a و b عددان حقيقيان)

٥ — احسب القيمة الرئيسية لكل من التكاملات الآتية

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x}\,dx$ (t عدد حقيقي)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\,dx$ ، 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^3}\,dx \qquad (a \geq 0)$

٦ — بفرض أن a و b عددان حقيقيان احسب قيم التكاملات الآتية

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^4+b^4}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$ ، 2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}\,dx$

3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ، 4) $\int_C \frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz$

حيث C هو المحيط في الشكل (٢٦)

٧ — احسب التكاملات الآتية

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^P(x+1)} \quad (0<P<1)$

2) $\int_0^{\infty} \frac{x^P\,dx}{(1+x^2)} \quad (-1<P<1)$

3) $\int_0^{\infty} \frac{x^P\,dx}{(1+x^3)^2} \quad (-1<P<3)$

٨ — احسب القيمة الرئيسية لكل من التكاملين الآتيين

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^{P-1}}{1-x}\,dx\,,\ (0<P<1)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{Px}}{1-e^{x}}\,dx \qquad (0<P<1)$

٩ — احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_0^{1} \frac{x^{1-P}(1-x)^{P}}{(1+x)^{3}}\,dx \quad (-1<P<2)$

2) $\int_0^{1} \frac{x^{1-P}(1-x)^{P}}{1+x^{2}}\,dx \quad (-1<P<2)$

3) $\int_0^{I} \frac{x^{1-P}(1-x)^{P}\,dx}{(1+x)^{2}} \qquad (-1<P<2)$

4) $\int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{1-P}(1-x)^{P}}{1+x^{2}} \qquad (-1<P<2)$

5) $\int_0^{1} \frac{dx}{(x+1)^{3}\sqrt{x^{2}(1-x)}}$

١٠ — احسب التكاملات الآتية علماً بأن a عدد حقيقي مغاير للصفر :

1) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^{2}+a^{2}}$ 2) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^{2} x\,dx}{x^{2}+a^{2}}$

3) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x^{2}+a^{2})^{2}}$ 4) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x \quad dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^{2}}$

١١ — أوجد عدد جذور كل معادلة من المعادلات التالية في الساحة D المبينة بجانب كل منها :

1) $z^{6}-7z^{5}-3z^{4}+1\,,\ D:\{|z|<1\}$

2) $z^{4}-3z^{2}-1=0 \qquad D:\{1<|z|<2\}$

3) $e^{z}-2z-1=0\ ,\ D:\{|z|<1\}$

4) $0{,}9\,e^{-z}+1=2z \quad D:\{|z|<1 \quad x>0\}$

5) $1+2z-z^{5}=0 \quad D:\{|z|<1\ ,\ x>0\}$

١٢ — برهن اعتماداً على نظرية روشيه نظرية هورفيتس : لتكن متتالية التوابع التحليلية $\{F_n(z)\}$ في الساحة G متقاربة بانتظام داخل G إلى التابع $F(z)$. وليكن Γ منحنياً جوردانياً مغلقاً وداخل الساحة G وليكن $F(z)\neq 0$ من أجل جميع النقاط $z\in\Gamma$، عندئذٍ يوجد عدد مثل $\nu(\Gamma)$ بحيث أنه من أجل جميع قيم $n\geq\nu(\Gamma)$ يكون عدد أصفار التوابع $F_n(z)$ والواقعة داخل Γ هو نفس عدد أصفار التابع $F(z)$ الواقعة داخل Γ .

١٣ — برهن على أنه من أجل $\rho<(\pi/2)$ ومن أجل القيم الكبيرة بقدر كاف لـ n لاتنعدم كثيرات الحدود $F_n(z)=1-\frac{z^{2}}{2!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

في الدائرة $|z|\leq\rho$.

١٤ — برهن على أنه من أجل أي عدد R ومن أجل القيم الكبيرة بقدر كاف لـ $n(R)$ لاتنعدم كثيرات الحدود $P_n(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\ldots+\frac{z^{n}}{n!}$

في الدائرة $|z|\leq R$.

١٥ — أوجد عدد جذور كثير الحدود $z^{6}+z^{5}+6z^{4}+5z^{3}+8z^{2}+4z+1$ الواقعة في نصف المستوي الأيمن .

١٦ — أوجدعددجذورالمعادلة $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ الواقعة في نصف المستوي الأيمن ومن ثم في الربع الأول .

١٧ — ماهو عدد جذور المعادلة $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$ الواقعة في كل ربع من المستوي .

١٨ — برهن صحة النشور الآتية

1) $$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

2) $$\frac{1}{\cos z} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{z^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$$

3) $$\operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$$

4) $$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$$

الفصل الرابع

الجداءات اللانهائية - التوابع الاولرية

١ — الجداء اللانهائي

سنستعرض في هذا الفصل نشر التوابع الصحيحة في مضاريب خطية موافقة لأصفارها . وهذا النشر مماثل لنشر كثيرات الحدود .

$$P(z) = a z^m \prod_{n=1}^{l} (z - a_n) = A z^m \prod_{n=1}^{l} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (1)$$

حيث a_n جذور كثير الحدود $P(z)$ المختلفة عن الصفر والتي كل منها يتكرر بمقدار مرتبته ، وأما m فهي مرتبة الجذور $z = 0$. إن أصفار تابع صحيح ، في الحالة العامة ، هو مجموعة لانهائية (المجموعة القابلة للعد) وهكذا نأتي إلى ضرورة استعراض جداء لانهائي بدلاً من الجداء المنتهي (1) . سنتعرض هنا إلى تعريف الجداء اللانهائي وخواصه المبسطة . لتكن (u_n) متتالية من الأعداد المركبة المختلفة عن الصفر . فإذا وجدت النهاية

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} u_k$$

وكانت هذه النهاية هي u مختلفة من الصفر فإننا نقول أن الجداء

اللانهائي $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ متقارب ونسمي العدد u بقيمة هذا الجداء ونكتب ذلك على الشكل $u = \prod_{k=1}^{\infty} u_k$. وفي الحالة عندما لاتكون النهاية موجودة أو موجودة وتساوي الصفر (المضاريب مغايرة للصفر) فإننا نقول إن الجداء اللانهائي متباعد .

من الواضح بأنه من أجل الجداء اللانهائي المتقارب ينبغي تحقق الشرط (اللازم) .

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1$$

في الحقيقة إذا كان $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k = u \neq 0$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{\prod_{k=1}^{n-1} u_k}$$

ونتيجة ذلك يكون من المناسب كتابة الحد العام في الجداء اللانهائي على الشكل $u_k = 1 + v_k$ حيث أنه في حالة التقارب ينبغي تحقق الشرط اللازم) :

$$\lim_{k \to \infty} v_k = 0$$

ونشير هنا بأن هذا الشرط غير كاف وكمثال على ذلك نورد المثال الآتي :

$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ولنبرهن على أن الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء اللانهائي

هو تقارب السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln(1 + v_k)$ من أجل اختيار مناسب لقيم اللوغاريتمات .

في الحقيقة ، لتكن السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln(1 + v_k)$ متقاربة . أي أن متتالية المجاميع الجزئية $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + v_k)$ متقاربة إلى نهاية محدودة S . وعندئذٍ تنتهي الجداءات الجزئية $\prod_{k=1}^{n} u_k = e^{S_n}$ إلى النهاية $u = e^S \neq 0$ أي أن الجداء اللانهائي متقارب . لنفرض الآن أن الجداء اللانهائي متقارب ، أي أن

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k) \quad u \neq 0$$

لنختر قيم اللوغاريتمات $\ln \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$ بحيث ينتهي $\prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$ إلى $\ln u$ وبعد ذلك نضع $\ln(1 + v_1) = \ln \prod_{k=1}^{1} (1 + v_k)$ وأما قيمة $\ln(1 + v_2)$ فنختارها بحيث $\ln(1 + v_1) + \ln(1 + v_2) = \ln \prod_{k=1}^{2} (1 + v_k)$ وهكذا ... وبفرض أننا اخترنا قيم

$\ln(1+v_k)$ من أجل $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ فإننا نختار $\ln(1+v_n)$ بحيث يكون

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+v_k) = \ln \prod_{k=1}^{n} (1+v_k)$$

. من أجل مثل هذا الاختبار لتقيم

اللوغاريتمات نجد $S_n = \ln \prod_{k=1}^{n} (1+v_k) \to \ln u$. أي أن السلسلة

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+v_k)$ متقاربة . ونجد :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1v+k) = e^{\sum_{1}^{\infty} \ln(i+v_k)} \qquad (2)$$

نقول عن الجداء اللانهائي $\prod_{k=1}^{\infty} (1+v_k)$ أنه متقارب إطلاقاً ، إذا كانت

السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln(1+v_k)$ متقاربة إطلاقاً . وبما أن تغيير ترتيب الحدود في

السلاسل المتقاربة إطلاقاً لايغير طبيعة التقارب وكما أن مجموع السلسلة لايتغير ، فإننا نجد إستناداً إلى العلاقة (2) أنه في الجداء اللانهائي المتقارب اطلاقاً يمكن تغيير ترتيب المضاريب دون أن يتأثر التقارب بذلك و دون أن تتغير قيمة الجداء .

بملاحظة أن :

$$\ln(1+v_k) = v_k - \frac{v_k^2}{2} + \frac{v_k^3}{3} - \dots = v_k \left(1 - \frac{v_k}{2} + \frac{v_k^3}{3} - \dots\right)$$

بالتالي من أجل $|v_k| < \frac{1}{z}$ تتحقق المتراجحات

$$\frac{1}{2}|v_k| = |v_k|\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \dots\right) < |\ln(1+v_k)| <$$

$$< |v_k|\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) = \frac{3}{2}|v_k| \quad (3)$$

من ذلك نستنتج بأن السلسلة $\sum_{1}^{\infty} |\ln(1+v_k)|$ تتقارب فقط وفقط إذا تقاربت

السلسلة $\sum_{1}^{\infty} |v_k|$ وهكذا نجد أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء

اللانهائي $\prod_{k=1}^{\infty} (1 \quad v_k)$ متقارباً إطلاقاً هو أن تكون السلسلة $\sum_{1}^{\infty} v_k$

متقاربة اطلاقاً .

لتكن $\{v_k(z)\}$ متتالية من التوابع الوحيدة التعيين والتحليلية في الساحة G ولا تأخذ فيها القيمة (1 —) . إذا كانت السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln[(1+v_k(z)]$ متقاربة بانتظام في داخل الساحة G فإن الجداء اللانهائي $\prod_{k=1}^{\infty} [1+v_k(z)]$ يتقارب أيضاً في هذه الساحة وبالتالي يمثل تابعاً تحليلياً $f(z)$ لايؤول إلى الصفر . ويمكن تمثيل هذا التابع ، استناداً للعلاقة (2) على الشكل

$$f(z) = e^{\sum_{1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)]} \tag{4}$$

وبالتالي هو تابع تحليلي (لأن مجموع السلسلة المتقاربة بانتظام داخل G

$\sum_{1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)]$ هو تابع تحليلي) .

لنبرهن على أن الجداء $\prod_{k=1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$ يتقارب بانتظام داخل G ؛ أي أن المتتالية

$\left\{ \prod_{k=1}^{n} [1 + v_k(z)] \right\}$ متقاربة بانتظام . في الحقيقة لتكن F مجموعة مغلقة

ومحدودة من نقاط الساحة G ؛ وليكن $M = \max |v(z)|$ و ε عدد موجب ما

أصغر من M استناداً للتقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)]$ يكون

لدينا :

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)] \right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2} \quad , \quad n > N(\varepsilon), z \in F$$

وبالتالي فإن

$$\left| f(z) - \prod_{k=1}^{n} [1 + v_k(z)] \right| = e^{\left(\sum_{1}^{\infty}\right)} - e^{\left(\sum_{1}^{n}\right)} =$$

$$= e^{\left(\sum_{1}^{\infty}\right)} \left| 1 - e^{-\left(\sum_{1}^{\infty}\right)} \right| \leq M \left[\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + \frac{1}{2!} \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 + \dots \right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \varepsilon$$

من أجل $n > N(\varepsilon)$ وفي جميع نقاط المجموعة F وهو مايبرهن على التقارب المنتظم للجداء اللانهائي ، واستناداً إلى المتراجحة

$$\left| \ln [1 + v_k(z)] \right| < \frac{3}{2} |v_k(z)|$$

والتي تحقق من أجل $|v_k(z)| < 1/2$ تكون السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \ln [1 + v_k(z)]$

متقاربة إطلاقاً وبانتظام داخل الساحة G إذا وجدت سلسلة ذات حدود موجبة ومتقاربة

$\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k$ والتي من أجلها يكون $|v_k(z)| < \varepsilon_k$ بدءاً من عدد ما كبير بقدر كاف

$K < k$ ؛ في جميع نقاط الساحة G ومن ذلك ينتج أنه لكي يكون الجداء اللانهائي

$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$ متقارباً اطلاقاً وبانتظام داخل الساحة G وبالتالي ليمثل فيها تابعاً

تحليلياً $f(z)$ لايؤول إلى الصفر ، يكفي أن تتحقق المتراجحة $|v_k(z)| < \varepsilon_k$ بدءاً من رقم ما $k \geq K$ في الساحة G حيث ε_k حدود سلسلة متقاربة .

إن حالة الجداء اللانهائي من الشكل $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ؛ حيث $f_k(z)$ توابع تحليلية

يمكن أن تؤول إلى الصفر في نقاط منفصلة من الساحة G ، هي الحالة الأكثر أهمية وسنستعرض مثل هذه الحالة من أجل الشروط الآتية

١) كل مجموعة مغلقة ومحدودة $G \supset F$ يمكن أن تحتوي فقط على عدد منته من النقاط التي تنعدم فيها توابع المتتالية $\{f_k(z)\}$.

٢) من أجل كل مجموعة مغلقة ومحدودة $G \supset F$ يوجد عدد طبيعي مثل $n(F) > 1$ بحيث أنه من أجل $k > n(F)$ لاينعدم أي تابع من التوابع $f_k(z)$ في نقاط المجموعة F .

٣) السلسلة $\sum_{n(F)+1}^{\infty} \ln f_k(z)$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة مغلقة ومحدودة F . وفقاً لذلك يكون الجداء $\prod_{n(F)+1}^{\infty} f_k(z)$ متقارباً بانتظام على F . أي أن المتتالية $\left\{ \prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z) \right\}_{n \geqslant [n(F)+1]}$ تتقارب بانتظام .

وبما أن التابع $\prod_{1}^{n(F)} f_k(z)$ مستمر على F ، فإنه يكون محدوداً ، وبالتالي فإن متتالية التوابع

$$\prod_{1}^{n} f_k(z) = \prod_{1}^{n(F)} f_k(z) \prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z)$$

تكون أيضاً متقاربة بانتظام على F . وهكذا نجد أنه من أجل الشروط المفروضة على التوابع $f_k(z)$ يكون الجداء اللانهائي $\prod_{1}^{\infty} f_k(z)$ متقارباً بانتظام داخل الساحة G ، وبالتالي فإنه يمثل تابعاً تحليلياً في هذه الساحة $f(z)$

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} f_k(z)$$

ينعدم فقط وفقط في تلك النقاط من الساحة G التي ينعدم فيها واحد على الأقل من التوابع $f_k(z)$.

٢ – نشر تابع صحيح في جداء لانهائي

من النظرية (١) من الفقرة الثالثة في الفصل السابق ، والمتعلقة بنشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة ، تنتج النظرية التالية والمتعلقة بتمثيل تابع صحيح في شكل جداء لانهائي .

نظرية (١) . إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً بحيث أن التابع الميرومورفي $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ يحقق الشروط المذكورة في النظرية المشار إليها ، فإن

$$f(z) = f(0)\, e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k} \quad , \quad B = \frac{f'(0)}{f(0)} \qquad (1)$$

ويتقارب الجداء اللانهائي (1) بانتظام في كل ساحة محدودة من المستوي العقدي . كما أن كل مضروب $\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$ في العلاقة (1) يتكرر عدداً من المرات مساوياً لمرتبة الصفر z_k .

البرهان ..إن النقاط z_k أصفار التابع $f(z)$ هي أقطاب بسيطة للتابع $F(z)$. كما أنه لهذا التابع لاتوجد أقطاب أخرى . وعندئذ يكون $F(z) = n_k$ حيث $A_k = \operatorname*{res}_{z = z_k} F(z) = n_k$ هي مرتبة الصفر z_k للتابع $f(z)$. ويكون لدينا

$$F(z) = F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) \qquad (2)$$

وبما أن

$$F(z) = \frac{d}{dz} [\ln f(z)]$$

حيث $\ln f(z)$ هو أحد الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية للتابع اللوغاريتمي ، فإنه

بمكاملة العلاقة (2) على طول طريق ما يصل النقطة 0 بالنقطة z وغير مار بأي صفر من أصفار التابع f(z) نجد

$$\ln f(z) - \ln f(0) = F(0)\,z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + \frac{z}{z_k} \right] \qquad (3)$$

ومنه يكون

$$f(z) = f(0)\, e^{F(0)\,z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

حيث $F(0) = f'(0) / f(0)$ وهو مايبرهن صحة العلاقة (1) .

ملاحظة (1) . بالأخذ بعين الاعتبار الملاحظة (1) المذكورة في نهاية الفقرة الثالثة من الفصل السابق نجد أن العلاقة (1) تأخذ ، في هذه الحالة ، الشكل :

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{h_k(z)} \qquad (4)$$

حيث $h_k(z) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{P}\left(\frac{z}{z_k}\right)^P$ و $g(z)$

كثير حدود من الدرجة p على الأكثر .

ملاحظة (2) . إن النظرية (1) تعمم من أجل أي تابع صحيح ويمثل ذلك التعميم نظرية وجود تابع صحيح علمت أصفاره .

نظرية (2) (وايرشتراس) . مهما تكن متتالية الأعداد المركبة[1] $a_n \ni C$ ؛ والتي تسعى إلى اللانهاية : $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ ؛ يوجد تابع صحيح f(z) ينعدم فقط في النقاط a_n وتكون مرتبة الصفر a_n مساوية لعدد الحدود في المتتالية المساوية لـ a_n .

(1) يمكن أن توجد في المتتالية حدود ، منتهية العدد ، ومتساوية فيما بينها .

البرهان . دون أن نحد من عمومية المسألة ، يمكننا اعتبار $a_n \neq 0$ (لأنه بدلاً من التابع f(z) يمكن أخذ التابع الصحيح $f(z)/z^m$ حيث m مرتبة صفر التابع f(z) في النقطة z=0) وأن a_n مرتبة تبعاً لتزايد طويلاتها . لقد وجدنا أن تقارب الجداء اللانهائي ذي العوامل $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ مكافيء لتقارب سلسلة لوغاريتمات تلك العوامل :

$$\ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \ldots - \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k - \ldots$$

إلا أن هذه السلسلة ، في الحالة العامة ، يمكن أن تتباعد بنتيجة تناهي a_n إلى اللانهاية بسرعة ليست كافية . من الطبيعي ، وبغية تحقيق التقارب في السلسلة المذكورة ، ان نقوم بحذف الحدود الأولى منها وذات القوى الصغيرة لـ $(1/a_n)$ وبكلام آخر سنأخذ بدلا من $\ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ التابع

$$\ln g_n(z) = \ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n} =$$

$$= -\sum_{k=P_n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k \qquad (5)$$

حيث P_n أعداد طبيعية مختارة بحيث يتحقق التقارب المذكور . ولنتابع هذه الفكرة في شكلها العام . بغية ذلك نثبت عدداً q (0 < q < 1) ونرمز بـ K_n لـ $\{|z| \leqslant q\,|a_n|\}$. وليكن الفرع المختار لـ $\ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ من أجل $z \ni K_n$ هو الفرع الرئيسي (الذي من أجله $\ln 1 = 0$) وبالتالي يكون التابع $\ln g_n(z)$ في العلاقة (5) معرفاً ومن أجل تلك النقاط z يكون لدينا

$$|\ln g_n(z)| < \left|\frac{z}{a_n}\right|^{P_n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{P_k + k + 1} \leqslant \frac{1}{1-q}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{P_n+1} \qquad (6)$$

(استخدمنا المتراجحة : $1 \leqslant P_k + k + 1$ وجمعنا السلسلة الهندسية) . لنختر الآن

الأعداد P_n بحيث تتقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n+1} \tag{7}$$

اطلاقاً وبانتظام في أية دائرة $\{|z| \leqslant R\}$. بغية ذلك يكفي أن نضع ، على سبيل المثال ، $P_n + 1 = n$ (انظر معيار كوشي مع اعتبار أن $a_n \leftarrow \infty$) . ومن أجل أية مجموعة متراصة K يمكن إيجاد عدد N بحيث تكون $K_n \supset K$ من أجل جميع الأعداد $N \leqslant n$. عندئذ وكما هو واضح من (6) تتقارب السلسلة

$$\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_n(z)$$

اطلاقاً وبانتظام على K وهذا بدوره يعني تقارب الجداء

$$\prod_{n=N}^{\infty} g_n(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{P_n}\right)^{P_n}} =$$

$$= f_N(z)$$

من الواضح أن التابع

$$f_N(z) = e^{\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_n(z)}$$

وحيد التعيين وتحليلي في K كما أنه لايؤول إلى الصفر . تبعاً لذلك يكون الجداء اللانهائي .

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}} \tag{8}$$

والمختلف عن $f_N(z)$ بعدد منته من العوامل متقارباً على K كما يكون التابع $f(z)$ هناك وحيد التعيين وتحليلياً وينعدم فقط في تلك النقاط a_n المنتمية إلى K . وبما أن K مجموعة متراصة ما فإن $f(z)$ يكون تابعاً صحيحاً أصفاره هي a_n .

نتيجة . يمكن نشر أي تابع صحيح $f(z)$ في جداء لانهائي بدلالة أصفاره :

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\left(\frac{z}{a_n}\right)+\cdots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}} \tag{9}$$

حيث m مرتبة صفر التابع f في النقطة $z = 0$ ، $g(z)$ تابع صحيح ما وأما الأعداد P_n فمختارة بحيث تكون السلسلة (7) متقاربة إطلاقاً وبانتظام على أية مجموعة متراصة K .

البرهان . سنعتبر أن $m = 0$ (من أجل ذلك يكفي أخذ التابع $f(z) / z^m$ بدلاً من $f(z)$) ونرتب أصفار التابع $f(z)$ وفق تزايد طويلاتها مع تكرار كل صفر بقدر مرتبته وبدلالة هذه الأصفار ووفقاً للنظرية (٢) نشكل التابع

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}}$$

من الواضح أن النسبة $f(z) / f_0(z)$ تشكل تابعاً صحيحاً وأن هذا التابع لايساوي الصفر وبالتالي فإن التابع $g(z) = \ln \frac{f(z)}{f_0(z)}$ قابل للتمديد في C واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يكون تابعاً صحيحاً ونجد أن $f(z) = e^{g(z)} f_0(z)$

مثال (١) . التابع $\sin z/z$. لهذا التابع أصفار في النقاط $a_n = n\pi$ $(n = \pm 1 \pm 2, \ldots)$ وبما أن السلسلة $\sum (z/n)^2$ متقاربة بانتظام على أية مجموعة متراصة فيمكننا أن نضع $P_n = 1$ ويكون نشر وايرشتراس من من الشكل

$$\frac{\sin z}{z} = e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)}$$

حيث $g(z)$ تابع صحيح ما وأما الفتحة فوق إشارة الجداء فإنها تعني ترك الحدالموافق

لـ $n = 0$. وأبسط الطرق في إيجاد التابع $g(z)$ تتلخص في مكاملة نشر التابع $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ المعروف لدينا سابقاً وبذلك نجد أن $g(z) = 0$ وتبعاً لذلك يكون

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad (10)$$

مثال (٢) . التابع الصحيح $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ له أصفار في النقاط $a_n = a^2\pi^2$ $(n = 1,2,\ldots)$. ومن الواضح انه يمكننا أن نضع $P_n = 0$ وتبعاً لذلك يكون نشر وايرشتراس من الشكل :

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right)$$

وأما $g(z) \equiv 0$. ومن الأسهل استبدال z بـ $\sqrt{z}$ في الطرف الأيمن من (10) ويكون

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right) \qquad (11)$$

٣ – التوابع الأولريـــة

١ – التابع غاما $F(z)$. يعتبر التابع $\Gamma(z)$ أبسط التوابع الميرومورفية وأكثرها أهمية والتي بواسطتها يعمم مفهوم العاملي $n!$ على الأعداد المركبة z . ولأسباب تاريخية عرف هذا التابع من قبل العالم أولر بحيث تنتج القيمة $n!$ من أجل $z = n + 1$ أي أن $\Gamma(n+1) = n!$ وبالتالي فإن العلاقة المميزة $n.(n-1)! = n!$ تكتب من أجل التابع غاما على الشكل

$$n\,\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

وبالإضافة إلى ذلك ينبغي أن يكون لدينا $\Gamma(1) = 0! = 1$. لندرس بناء هذا التابع

لنشترط قبل كل شيء بأن يحقق العلاقة $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ من أجل جميع القيم المركبة لـ z . سنتطلق في تعريف التابع غاما من المعادلة التابعية

$$z\,f(z) = f(z+1) \quad , \quad f(1) = 1 \qquad (1)$$

إلا أنه من ناحية ثانية لا يكفي هذا الشرط لتعريف التابع بشكل كامل . ففي الحقيقة إذا كان $f_0(z)$ تابعاً ميرومورفياً ما ومن أجله

$$z\,f_0(z) = f_0(z+1)\,,\ f_0(1) = 1$$

فإنه من أجل النسبة $\varphi(z) = \frac{f(z)}{f_0(z)}$ نجد

$$\varphi(z) = \varphi(z+1) \quad , \quad \varphi(1) = 1$$

أي أن $\varphi(z)$ تابع ميرومورفي ودوره 1 ويأخذ القيمة 1 في النقطة $z = 1$. وبأخذ أي تابع من هذا الشكل يمكننا تمثيل أي تابع $f(z)$ من التوابع المحققة للعلاقة (1) على الشكل

$$f(z) = \varphi(z)\,f_0(z)$$

وبتطبيق العلاقة (1) من أجل $z, z+1, \ldots, z+n-1$ حيث n عدد طبيعي وبضرب العلاقات الناتجة نجد

$$z(z+1)\ldots(z+n-1)\,f(z) = f(z+n) \qquad (2)$$

ومنه ، ومن أجل $z = 1$ نجد

$$f(n+1) = n! \qquad (3)$$

أي أنه في النقاط $z = 2, 3, \ldots, n+1, \ldots$ تتطابق قيم $f(z)$ مع القيم $1!, 2!, \ldots, n!$ (وهذا الأمر محقق من أجل $z = 1$ وذلك لأن $f(1) = 1 = 0!$) . بجعل z في العلاقة (2) تنتهي إلى $-m = -(n-1)$ و $(m = 0,1,2,\ldots)$ نجد

$$\lim_{z \to -m} (z+m)\,f(z) = \frac{f(1)}{(-1)^m\,m!} = \frac{(-1)^m}{m!} \qquad (4)$$

وبالتالي يكون للتابع $f(z)$ أقطاب بسيطة في جميع النقاط $z = -m$ مع $(m = 0,1,2,\ldots)$ ورواسبه في تلك النقاط هي $(-1)^m/m!$. لنخضع التابع $f(z)$ إلى شرط

إضافي :

(5) للتابع $f(z)$ لاتوجد أقطاب مغايرة لـ $z = -m$ $m = 0,1,2,\ldots$ كما أنه لاتوجد له أصفار .

إذا حقق تابع ما $f_0(z)$ الشرطين (1) و (5) فإن التابع $tg(i + 2\pi z)/tg\, i$ ، على سبيل المثال ، يحقق الشرط (1) إلا أنه لايحقق الشرط (5) نتيجة لوجود مجموعة لانهائية من الأصفار والأقطاب التخيلية . إلا أنه إلى جانب التابع $f_0(z)$ والشرطين (1) و (5) تحقق جميع التوابع من الشكل $\varphi(z) f_0(z)$ هذين الشرطين حيث $\varphi(z)$ تابع صحيح دوري ودوره 1 ويأخذ القيمة 1 في النقطة $z = 0$ ولا ينعدم في أي مكان .

وهكذا وبالرغم من إضافة الشرط (5) في بناء التابع غاما يبقى هناك (نقص) معلوم إلا أنه باستخدام الشرط (1) يمكننا التأكيد على أن التابع

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \tag{6}$$

هو تابع صحيح له أصفار بسيطة في النقاط $z = -m$ و $(m = 0,1,\ldots)$ كما أنه لاتوجد أصفار أخرى له وبالتالي يمكن تمثيله على الشكل

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \tag{7}$$

حيث $g(z)$ تابع صحيح ما (اخترنا هنا $P_n = 1$ لأن السلسلة $\sum_1^{\infty} \frac{z}{m^2}$ متقاربة بانتظام على أية مجموعة متراصة) . بالتالي إن كل تابع ميروموروفي ومحقق للشرطين (1) و (5) يكون من الشكل

$$f(z) = e^{-g(z)} \frac{1}{z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-z/m}} \tag{8}$$

من الواضح أن هذا التابع يحقق الشرط (5) من أجل أي اختيار للتابع الصحيح $g(z)$ لتحقيق الشرط (1) نضع العلاقة (8) على الشكل

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-g(z)}}{z \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-z/m}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-g(z) + \sum_1^n \frac{z}{m}}{\frac{n!\, e}{z(z+1)\ldots(z+n)}} \tag{9}$$

وبغية الاختصار نضع

$$\frac{-g(z) + \sum_1^n \frac{z}{m}}{\frac{n!\, e}{z(z+1)\ldots(z+n)}} = f_n(z)$$

ونجد

$$\frac{z f(z)}{f(z+1)} = \lim_{z\to\infty} \frac{z f_n(z)}{f_n(z+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (z+n+1)\, e^{\left[-g(z) + g(z+1) - \sum_1^n \frac{1}{m}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z+1}{n}\right) e^{\left[-g(z) + g(z+1) - \left(\sum_1^n \frac{1}{m} - \ln n\right)\right]} =$$

$$= e^{[-g(z) + g(z+1) - C]}$$

حيث

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_1^n \frac{1}{m} - \ln n \right) = 0,5772\ldots$$

ثابت أوار . تبعاً لذلك نجد أن الشرط (1) يتحقق إذا اخترنا التابع الصحيح g (z) بحيث يكون

$$g(z+1) - g(z) = C + 2k\pi i \quad , \quad (k \text{ عدد صحيح})$$

وبالإضافة إلى ذلك ، إن الشرط $f(1) = 1$ يعطينا

$$1 = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\left[-g(1) + \sum_1^n \frac{z}{m} - \ln n\right]}}{1 + \frac{1}{n}} =$$

$$= e^{-g(1)+C}$$

وبالتالي فإن

$$g(1) = C + 2l\pi i \quad , \quad (l \text{ عدد صحيح})$$

إن أبسط التوابع الصحيحة المحققة للشرط الناتج هو التابع الخطي

$$g_0(z) = Cz$$

وبهذا الاختيار للتابع g (z) نكون قد عرفنا التابع غاما تماماً . لنرمز لهذا التابع بـ $\Gamma(z)$ ونجد أن العلاقة (8) تأخذ الشكل

$$\Gamma(z) = e^{-Cz} \frac{1}{z\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}} \qquad (9')$$

ومن أجل التابع الصحيح $1/\Gamma(z)$ نجد

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \qquad (10)$$

إن الشكلين (٣٩) و (٤٠) يعطيان تصوراً جلياً لسلوك التابعين $\Gamma(z)$ و $1/\Gamma(z)$.
من العلاقة (10) تنتج العلاقة الهامة التي تربط التابعين $\Gamma(z)$ و $\sin \pi z$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi} \cdot \left[\pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{m^2 \pi^2}\right)\right] = -\frac{z \sin \pi z}{\pi} \qquad (11)$$

أو :

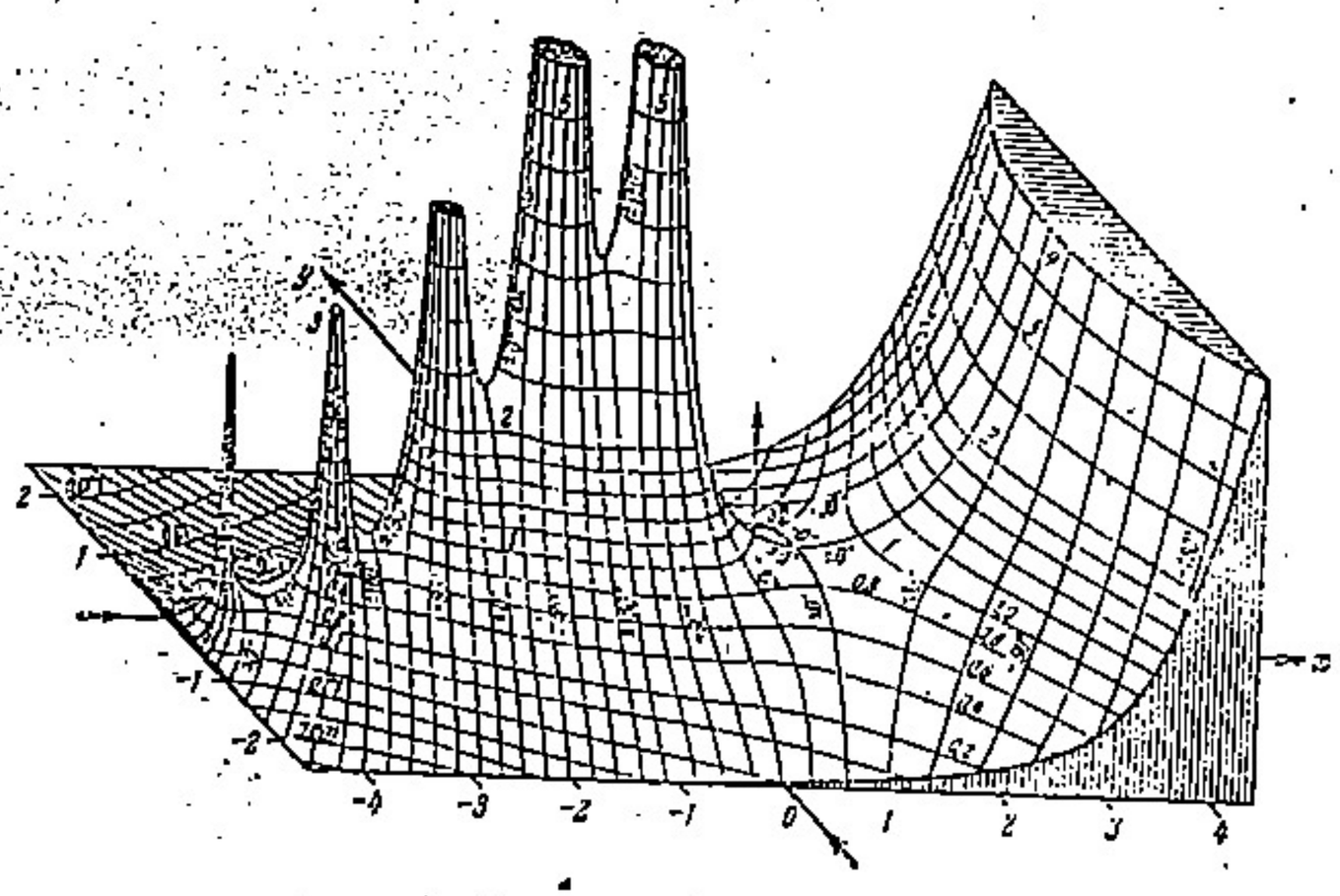
$$\frac{1}{\Gamma(z)\,[-z\,\Gamma(-z)]} = \frac{\sin z}{\pi}$$

وبما أن

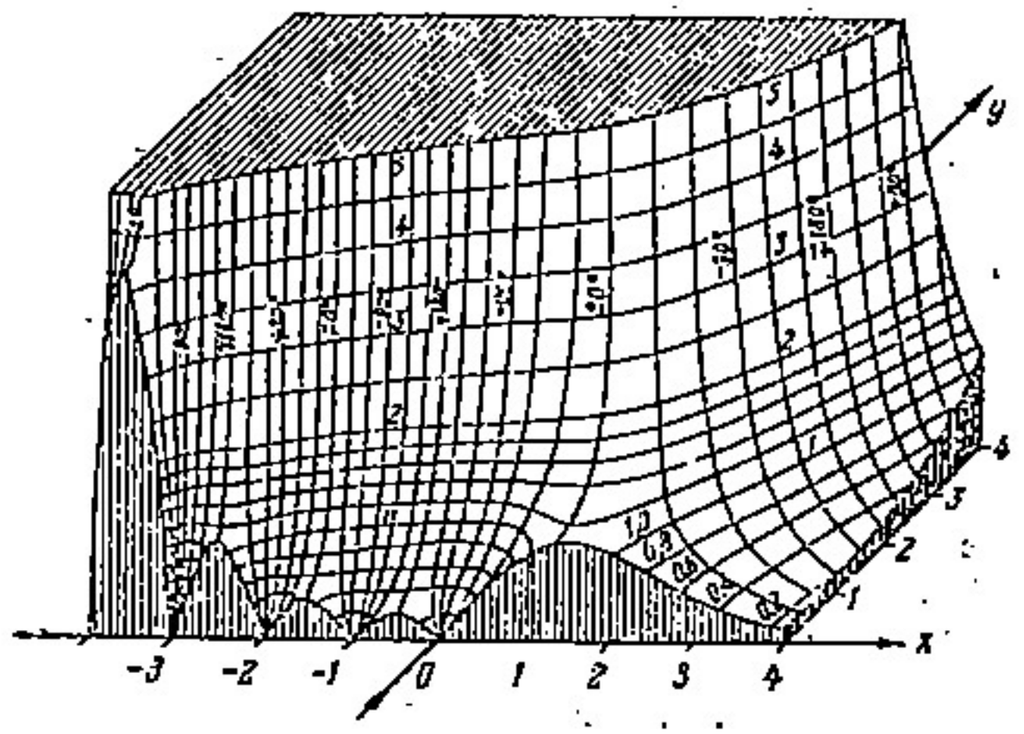
$$-z\,\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$$

فإنه يكون

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$



الشكل (٣٩)



الشكل (٤٠)

أو

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (11')$$

ومنه نجد $[\Gamma(1/2)]^2=\pi$ وبما أن $0<\Gamma(1/2)$ (استناداً إلى (9'))

فإنه يكون

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \qquad (12)$$

إن العلاقة (9) ومن أجل $g(z)=Cz$ تعطينا التمثيل الآتي للتابع غاما

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\left[\sum_1^n \frac{1}{m}-C\right]z}}{\frac{n!\,e}{z(z+1)\dots(z+n)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\left[\left(\sum_1^n \frac{1}{m}-\ln n-C\right)+\ln n\right]z}}{\frac{n!\,e}{z(z+1)\dots(z+n)}}$$

وبما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{1}{m}-\ln n-C\right)=0$$

فإن

$$e^{z\ln n}=n^z$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \qquad (13)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة غوص

نأتي الآن إلى التمثيل التكاملي للتابع غاما . سنبرهن أولاً على أنه من أجل $0<\mathrm{Re}z$ تتحقق العلاقة

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \qquad (14)$$

حيث أن التكامل يمتد على طول القسم الموجب من المحور الحقيقي . إن التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (14) يعرف باسم تكامل أولر من النوع الثاني . لنستعرض التكامل

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \qquad (15)$$

حيث أن t^{z-1} تعني $e^{(z-1)\ln t}$. وبما أن $|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}$

فإن التكامل يتقارب اطلاقاً من أجل جميع النقاط z المنتمية للساحة D :

$D=\{x=\mathrm{Re}z>0\}$. ولنبرهن الآن العلاقة المساعدة التالية

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \qquad (16)$$

بإجراء التحويل $t=n\tau$ في التكامل

$$F_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

نجد

$$F_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n t^{z-1} d\tau$$

وبالمكاملة بالتجزئة n مرة على التتالي نجد

$$F_n(z) = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = $$

$$= \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ومن هذه العلاقة نستنتج بأن العلاقة (16) تتطابق مع العلاقة (13) (من أجل $Re z > 0$)
وهو مايبرهن صحتها . وبذلك يبقى علينا أن نبرهن على أن

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) \quad , \quad z \in D$$

أو أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt = 0 \quad , \quad z \in D \qquad (17)$$

[وذلك لأن $F(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}\, t^{z-1} dt$] وبملاحظة أنه من أجل $n > |t|$

يكون

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant e^{t/n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{t}{n}}$$

ونجد أن $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$ و $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n < e^{-t}$

وبالتالي

$$0 < e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \leqslant$$

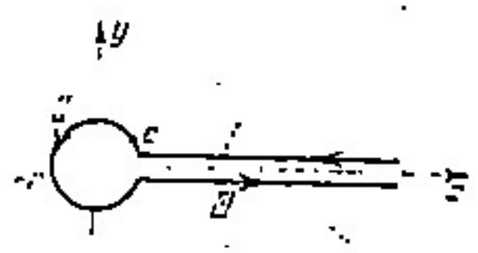
$$\leqslant e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] = e^{-t}\,\frac{t^2}{n^2}\left[1+\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \leqslant \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

ولهذا فإن :

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt\right| < \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}\, t^{x-1} dt <$$

$$< \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt$$

ومنه تنتج العلاقة (17) وهذا بدوره يبرهن على صحة العلاقة (14) .



الشكل (٤١)

نستعرض أيضاً التكامل

$$F(z) = \int_C e^{-\xi}\xi^{z-1} d\xi$$

المأخوذ على المحيط المشكل من ضفتي القطع الممتد على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي وقوس الدائرة $\{|\xi| = r\}$ الشكل (٤١) . حيث أن ξ^{z-1} تعني $e^{(z-1)\ln\xi}$ و $\ln\xi$ هو فرع اللوغاريتم الذي من أجله $0 \leqslant \arg\xi \leqslant 2\pi$. على الضفة الأولى I

للقطع لدينا

$$\xi^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = t^{z-1} \quad , \quad \xi = t$$

وأما على الضفة III حيث $\xi = te^{2\pi i}$ يكون

$$\xi^{z-1} = e^{(z-1)(\ln t + 2\pi i)} = e^{2\pi i z} \; t^{z-1}$$

وبالتالي فإن

$$F(z) = \int_I + \int_{II} + \int_{III} = \int_{\infty}^{r} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{II}^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi +$$

$$+ e^{2\pi i z} \int_{r}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi i z} - 1) \int_{r}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{II}$$

لنفرض الآن أن $0 < \mathrm{Re}\, z$. عندئذٍ يكون على قوس الدائرة II : $\xi = re^{i\varphi}$

$$\left| e^{-\xi} \xi^{z-1} \right| = e^{-r\cos\varphi} e^{(x-1)\ln r - \varphi y} < Ar^{x-1}$$

حيث A ثابت ما وبالتالي فإن

$$\left| \int_{II} \right| < Ar^{x-1} 2\pi r = A_1 r^x \to 0 \quad ; \quad r \to 0$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $r \leftarrow 0$ وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (14) نجد

$$F(z) = (e^{2\pi i z} - 1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z)$$

وبالتالي فإن

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi \qquad (18)$$

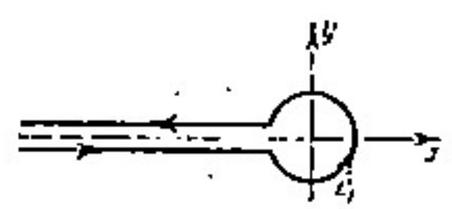
حيث أن z تنتمي إلى نصف المستوي الأيمن ، إلا أنه يمكن البرهان على أن الصورة في العلاقة (18) أي $\int_C e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi$ هي تابع تحليلي بالنسبة لـ z في جميع النقاط $z \ni C$ وبالتالي فإنها تابع صحيح في z . وأما المخرج فهو أيضاً تابع صحيح أصفاره هي النقاط $z = k$ مع $k = 0, \pm 1, \ldots$ وبالتالي فإن الطرف الأيمن من (18) تابع تحليلي في جميع النقاط $z \ni C$ و $k \neq z$. وأما الطرف الأيسر من (18) فهو كما وجدنا تابع تحليلي في جميع النقاط z من المستوي العقدي C باستثناء النقاط $z = k$ و $k = 0, -1, \ldots$ ومن ناحية ثانية إن هذين التابعين يتطابقان في نصف المستوى الأيمن واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التوابع التحليلية يتطابق هذان التابعان في جميع نقاط ساحة تحليليتهما . وهكذا نجد أن العلاقة (18) تعطينا تمثيلاً تكاملياً للتابع $\Gamma(z)$ في المستوي العقدي C .

إن العلاقة (18) تمثل التابع الميرومورفي $\Gamma(z)$ في شكل نسبة بين تابعين صحيحين . باستبدال z بـ $z - 1$ في العلاقة (18) نجد

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\xi} \xi^{-z} d\xi =$$

$$= \frac{e^{-\pi i z}}{e^{-2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\xi} (-\xi)^{-z} d\xi = \frac{i}{2\sin \pi z} \int_C e^{-\xi} (-\xi)^{-z} d\xi$$

وباستبدال ξ بـ $(-\xi)$ [يصبح التكامل ممتداً على المحيط C_1 المبين في الشكل(٤٢)] نجد التمثيل التكاملي للتابع $\frac{1}{\Gamma(z)}$.



الشكل (٤٢)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\xi}\xi^{-z}d\xi \qquad (19)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة هانكل .

٢ – التابع بيتا . لنشكل جداء التابعين $\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q)$ ولنفرض أولاً أن $p \geqslant 1$ و $q \geqslant 1$:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\left\{\left(\int_0^R e^{-y}y^{p-1}dy\right)\left(\int_0^R e^{-x}x^{q-1}dx\right)\right\} =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int\int_{S_R} e^{-x-y}x^{q-1}y^{p-1}dx\,dy$$

حيث أن S_R هو المربع $\{x,y \in [0,R]\}$. وبما أن عبارة التكامل المستمر هي تابع مستمر بالنسبة للمتحولين فإن التكامل المكرر يساوي التكامل الثنائي . ليكن T_R المثلث المحدود بالمحورين الاحداثيين والمستقيم $x + y = R$. من الواضح أن

$$\int\int_{S_R/2} < \int\int_{T_R} < \int\int_{S_R}$$

وبما أن للتكاملين على $S_R/2$ و S_R نفس النهاية فإن

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\int\int_{T_R} e^{-x-y}x^{q-1}y^{p-1}dx\,dy$$

لنجر الآن التحويل :

$$x + y = u \quad , \quad y = uv$$

فنجد أن $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = u$ وبالتالي فإن

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\left\{\left(\int_0^R e^{-u}u^{p+q-1}du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)\right\}$$

أي أن :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \qquad (20)$$

إن التحديد الذي فرضناه على كل من p $(p \geqslant 1)$ و q $(q \geqslant 1)$ يمكن تخفيفه على النحو الآتي : إن الطرف الأيسر من العلاقة (20) تابع تحليلي بالنسبة لـ p عندما يكون $\operatorname{Re} p > 0$ وكذلك تحليلي بالنسبة لـ q عندما يكون $\operatorname{Re} q > 0$ وهذا ما يجب أن يحققه الطرف الأيمن من (20) . ولهذا فإنه بواسطة التمديد التحليلي أولاً بالنسبة لـ p ومن ثم بالنسبة لـ q يمكننا توسيع الساحة التي من أجلها تتحقق المساواة (20) إلى الساحة $\operatorname{Re} p > 0$ ، $\operatorname{Re} q > 0$.

يسمى التكامل

$$B(p,q) = \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \quad (\operatorname{Re} p > 0\,,\ \operatorname{Re} q > 0) \qquad (21)$$

بالتابع بيتا (تكامل أولر من النوع الأول) . وتبعاً لذلك يمكننا كتابة العلاقة (20) على الشكل

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (22)$$

تمارين غير محلولـــة

١ – ابحث في تقارب الجداءين

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right) \quad , \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$$

٢ – ابحث في التقارب المطلق للجداء

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{n}\right\}$$

٣ – برهن أن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{c+n}\right)e^{z/n}$ متقارب اطلاقاً

من أجل جميع النقاط z شريطة أن لايكون c عدداً صحيحاً سالباً .

٤ – إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^3$ متقاربة فبرهن على تقارب الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)e^{u_n+\frac{1}{2}u_n^2}$

٥ – برهن أن

1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$

2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n(n+1)}\right)=1/3$

3) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}$

وادرس التقارب المطلق لكل منها .

٦ – عين ساحة التقارب المطلق لكل من الجداءين :

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$ 2) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2n})$

٧ – برهن صحة مايلي :

1) $\cos z=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]$

2) $\sin(a-z)=\sin a\cdot e^{-z\,\mathrm{ctg}\,a}\prod_{n=\infty}^{\infty}\left(1-\right.$

$\left.-\frac{z}{a+n\pi}\right)e^{z/(a+n\pi)}$ $a\neq k\pi\ ,\ k=0\mp1\mp2,\ldots$

3) $e^{z}-1=z\,e^{z/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$

4) $\mathrm{sh}\,z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2z^2}\right)$

5) $\mathrm{ch}z=\prod_{n=0}^{\infty}\left\{1+\left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$

٨ — بفرض أن y حقيقي ومغاير للصفر برهن أن

$$|\Gamma(iy)| = [(\pi/(y \operatorname{sh} \pi y)]^{1/2}$$

٩ — إذا كان $0 < \operatorname{Re} p$ و $0 < \operatorname{Re} q$ فبرهن أن

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$$

١٠ — بفرض $z = x + iy$ برهن أن

$$\left| \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)} \right|^2 = \prod_{s=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{y^2}{(x+s)^2} \right\} ; \quad (x \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

وبالتالي فإن

$$|\Gamma(x+iy)| \leq |\Gamma(x)|$$

١١ — برهن صحة المساواة

$$\prod_{s=1}^{\infty} \frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

١٢ — برهن أن

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

١٣ — بفرض أن $0 < \operatorname{Re} z < 1$ برهن أن

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-it}\, dt = \Gamma(z)\, e^{-\pi i z/2}$$

١٤ — احسب التكامل

$$\int_0^1 \ln \Gamma(t)\, dt$$

١٥ — برهن أن

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right)$$

واستنتج أن

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(2n)$$

١٦ — احسب الجداء

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

حيث n عدد طبيعي ما .

الفصل الخامس

التطبيق المتماثل

١ – المعنى الهندسي للمشتق

وجدنا أن لتفاضل تابع f , R — قابل للمفاضلة وبالمقابل C — قابل للمفاضلة في نقطة $z \in C$ الشكل

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad , \quad df = f'(z)\, dz \qquad (1)$$

(انظر التحليل (٦) الفقرة الثانية من الفصل الثاني وقد وضعنا هنا $h = dz$) وبما أن يعقوبي التحويل يعرف بتفاضل التحويل فإننا نجد أن يعقوبي تحويل R — قابل للمفاضلة وبالمقابل C — قابل للمفاضلة في نقطة z يساوي على الترتيب

$$J_f(z) = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \quad , \quad J_f(z) = |f'(z)|^2 \qquad (2)$$

لنفرض أن التابع f هو R — قابل للمفاضلة في جوار النقطة z وأن هذه النقطة ليست نقطة حرجة . أي أن $J_f(z) \neq 0$. واستناداً إلى نظرية التوابع الضمنية في التحليل الحقيقي تنتج التحليلية الموضعية للتابع f . أي أنه يوجد جوار U للنقطة z بحيث أن التابع f ينقله بشكل متباين ومستمر إلى جوار للنقطة $f(z)$. من العلاقة (2) واضح بأن اليعقوبي J_f في الحالة العامة لـ R — قابلية المفاضلة ؛ يمكن أن تختلف إشارته . أي أن التابع f يمكن أن يحافظ على الاتجاه أو يعكسه . وأما بالنسبة للتوابع الـ C قابلة للمفاضلة فإن نقاطها الحرجة تتطابق مع النقاط التي تعدم المشتق . وفي النقاط غير الحرجة فإنها

تحافظ بشكل دائم على الاتجاه : $J_f(z) = |f'(z)|^2 > 0$.

نقول عن تابع R — قابل للمفاضلة في النقطة $z \in C$ أنه تطبيق متماثل في النقطة z إذا لم تكن z نقطة حرجة للتابع f وإذا اقتصر تفاضله df في هذه النقطة على تمديد مع دوران . بالتالي إن تفاضل التطبيق المتماثل يحافظ على الاتجاه وينقل الأشكال إلى أخرى محاكية لها (في حالة خاصة يحافظ على الزوايا) إذا كان التطبيق $f : D \to C$ متماثلاً في كل نقطة من الساحة $(C \supset D)$ D فإننا نقول أنه تطبيق متماثل للساحة D .

نظرية (١) . الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع f الـ R — قابل للمفاضلة في النقطة غير الحرجة z متماثلاً هو أن يكون C — قابلاً للمفاضلة في هذه النقطة .

الكفاية . من الواضح أنه إذا كان C f — قابلاً للمفاضلة في النقطة غير الحرجة z ، فإن التفاضل $df = f'(z)\,h$ يقتصر على تمديد بـ $|f'(z)|$ مرة ودوران بزاوية مقدارها $\arg f'(z)$.

اللزوم . لبرهان اللزوم نأخذ شعاعين $h = 1$ و $h = i$ حيث أن الثاني ينتج من الأول بدوران مخالف لدوران عقارب الساعة مقداره زاوية قائمة . إن التفاضل $df(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$ ينتقل هذين الشعاعين على الترتيب إلى

$$df(1) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \text{و} \quad df(i) = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$$

وتبعاً للتماثل يجب أن يكون $df(i)$ ناتجاً عن $df(1)$ بدوران مخالف لدوران عقارب الساعة ومقداره زاوية قائمة . وبالتالي فإن $df(i) = i\,df(1)$ واستناداً إلى النظرية (٣) من الفقرة الثانية في الفصل الثاني من التحليل (٦) ينتج أن df هو C — خطي .

وهكذا فإن المفاضلة العقدية لتطبيق (لتابع) في نقطة غير حرجة تعني هندسياً أن التطبيق متماثل في تلك النقطة ، وأنه الشرط اللازم والكافي لكي يكون f متماثلاً في ساحة D هو تماثل التابع f في D وغياب النقاط الحرجة في D لهذا التابع .

ملاحظة . إذا نقل تفاضل تطبيق R , f — قابل للمفاضلة في نقطة z غير حرجة شكلاً إلى آخر محاك له وعكس الاتجاه فإن f يسمى تطبيقاً متماثلاً عكسياً من النوع الثاني أو متماثلاً عكسياً في النقطة z . وشرط التماثل العكسي لـ f في نقطة غير حرجة هو

$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. نقول عن تابع f أنه تحايلي عكسياً في نقطة z ، إذا كان R — قابلاً للمفاضلة في جوار للنقطة z وكان في جميع نقاط ذلك الجوار $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. من الواضح أن التابع $f = u + iv$ يكون تحايلياً عكسياً في نقطة z فقط وفقط إذا كان التابع $\bar{f} = u - iv$ تحايلياً في تلك النقطة .

تناولنا إلى الآن دراسة تفاضلات التوابع فقط ونعود هنا لدراسة تأثير التماثل على خواص التطبيق ذاته . لنفرض أن f متماثل في جوار ما U للنقطة z . وليكن $\gamma : I = [0,1] \to U$ طريقاً أملساً بدايته النقطة z (أي أن $\gamma'(t) \neq 0$ مستمر من أجل جميع $t \in I$ و $\gamma(0) = z$) . إن صورة هذا الطريق γ_* : $\gamma_* = f \circ \gamma : I \to f(U)$ هو طريق أملس أيضاً وذلك لأنه وفق قاعدة اشتقاق تابع التابع لدينا

$$\gamma'_*(t) = f'[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) \qquad t \in I \qquad (3)$$

إضافة إلى أن f' مستمر ومغاير للصفر في كل نقاط U .

إن $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ يمثل هندسياً شعاع المماس لـ γ في النقطة $\gamma(t)$ كما أن $|\gamma'(t)|\,dt = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = ds$ هو تفاضل طول القوس على γ في تلك النقطة . وبالمثل $|\gamma'_*(t)|\,dt = dt = ds_*$ هو تفاضل طول القوس γ_* في النقطة $\gamma_*(t)$ وفقاً لذلك واستناداً إلى العلاقة (3) ، ومن أجل $t = 0$ نستنتج أن

$$|f'(z)| = \frac{|\gamma'_*(0)|}{|\gamma'(0)|} = \frac{ds_*}{ds} \quad (1) \qquad (4)$$

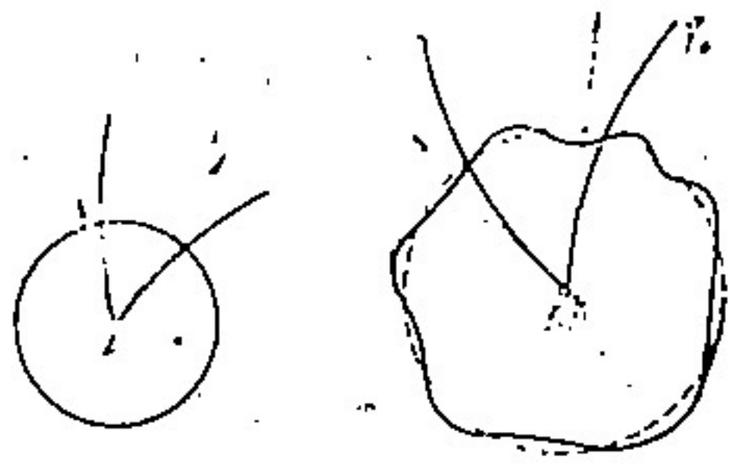
أي أن طويلة المشتق $f'(z)$ تعني هندسياً مقدار تمدد طول الأقواس في النقطة z بنتيجة التطبيق f . إن الطرف الأيسر من (4) غير متعلق باختيار γ ، إذا كان $\gamma(0) = z$ فإن جميع الأقواس في النقطة z تتمدد بنفس المقدار . ولهذا فإن التطبيق المتماثل f

(١) من المعلوم أنه من أجل الأقواس الملساء يكون : $\frac{ds_*}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s_*}{\Delta s}$

حيث Δs طول القوس γ و Δs_* طول القوس المقابل له γ_* .

يتمتع المماثلة بالخاصة الدائرية : هذا التطبيق ينقل الدوائر الصغيرة والتي مركزها في النقطة z إلى منحنيات مختلفة عن الدوائر التي مركزها f(z) بلامتناهيات في الصغر من مراتب عليا . الشكل (٤٣) . كما أنه من العلاقة (3) ، ومن أجل $t = 0$ ينتج أن

$$\arg f'(z) = \arg \gamma'_*(0) - \arg \gamma'(0) \qquad (5)$$



الشكل (٤٣)

أي أن عمدة المشتق $f'(z)$ تعني هندسياً مقدار ودوران مماسات الأقواس في النقطة بنتيجة التطبيق f . وبما أن الطرف الأيسر من (5) لايتعلق باختيار γ ، إذا كان $\gamma(0) = z$ فإن جميع الأقواس تدور بنفس الزاوية . ولهذا فإن التطبيق المتماثل f يتمتع بخاصة الحفاظ على الزوايا : الزاوية بين أي قوسين (١) في النقطة z تساوي الزاوية بين صورتيهما في النقطة $f(z)$. انظر الشكل (٤٣) .

ملاحظة . إذا كان التطبيق f تحليلياً في النقطة z وكانت هذه النقطة نقطة حرجة : أي أن $f'(z) = 0$ فإن الخاصة الدائرية تبقى محققة في الصيغة المنحلة : عامل التمديد لجميع الأقواس في النقطة z يساوي الصفر . وأما خاصة الحفاظ على الزوايا فانها لاتتحقق البتة : على سبيل المثال ، الزاوية بين الشعاعين $\arg z = \alpha_1$ و $\arg z = \alpha_2$ بنتيجة التطبيق $z \to z^2$ تتضاعف . وإضافة إلى ذلك يمكن أن لاتتحقق أملسية الأقواس في النقاط الحرجة : على سبيل المثال إن صورة المنحني الأملس $\gamma(t) = t + it^2$ حيث $t \ni [-1, 1]$ بواسطة التطبيق $z \to z^2$ هو المنحني $\gamma_*(t) = t^2(1 - t^2) + 2it^3$ وهو غير أملس في النقطة $\gamma_*(0) = 0$.

(١) الزاوية بين قوسين املسين متقاطعين في النقطة z هي الزاوية بين مماسيهما في تلك النقطة .

٢ — مبدأ الحفاظ على الساحة — الخواص الموضعية للتطبيقات بالتوابع التحليلية .

إن مبدأ الحفاظ على الساحة يطلق على النظرية الهامة التالية :

نظرية (١) . إذا كان f تحليلياً في ساحة D ولا يطابق ثابتاً ، فإن الصورة $D^* = f(D)$ تكون أيضاً ساحة .

البرهان . ينبغي البرهان على أن المجموعة D^* متصلة ومفتوحة . لتكن w_2, w_1 نقطتان ما من الساحة D^* ولنرمز بـ z_1 لإحدى الصور العكسية لـ w_1 في D وبالمقابل بـ z_2 لإحدى الصور العكسية لـ w_2 . بما أن المجموعة D متصلة (خطياً) ، فإنه يوجد طريق $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ يصل النقطتين z_2, z_1 وبما أن التابع f مستمر فإن الصورة $\gamma^* = f \circ \gamma$ تكون طريقاً يصل النقطتين w_2, w_1 ، ومن الواضح أن هذا الطريق مشكل من نقاط D^* وهذا يعني أن المجموعة D^* متصلة .

لتكن w_0 نقطة ما من D^* و $z_0 \ni D$ إحدى الصور العكسية لها . بما أن D مفتوحة ، فإنه توجد دائرة $\{|z - z_0| < r\}$ محتواة بتراص في D . $D \supset \{|z - z_0| < r\}$ وبتصغير r عند اللزوم ، يمكننا اعتبار الدائرة $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ لاتحتوي على أي موضع آخر غير z_0 (بما أن $f \not\equiv \text{const}$ فإن المواضع w_0 في الساحة D تكون نقاطاً منعزلة ، استناداً إلى نظرية الوحدانية في التوابع التحليلية) . لنرمز بـ γ لحدود تلك الدائرة $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ وليكن أيضاً

$$\mu = \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0| \qquad (1)$$

من الواضح أن $\mu > 0$ وذلك لأن التابع $f(z) - w_0$ مستمر وتبلغ طويلته القيمة الأصغرية على γ . فإذا كان $\mu = 0$ فإن ذلك يعني وجود موضع w_0 للتابع f على γ وهذا يخالف طريقة بناء الدائرة المذكورة . لنبرهن الآن على أن $D^* \supset \{|w - w_0| < \mu\}$. في الحقيقة لتكن w_1 نقطة ما من هذه الدائرة . أي أن $|w_1 - w_0| < \mu$. ويكون لدينا

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1) \qquad (2)$$

وبما أن $|f(z) - w_0| \geqslant \mu$ و $|w_0 - w_1| < \mu$ فإنه ، استناداً إلى نظرية روشيه

يكون عدد أصفار التابع $f(z) - w_1$ الواقعة داخل γ هو نفس عدد أصفار التابع $f(z) - w_0$ هناك ، أي على الأقل صفر واحد (من الممكن أن تكون النقطة z_0 صفر مكرر للتابع $f(z) - w_0$) وهكذا نجد أن التابع f يأخذ داخل γ القيمة w_1 . أي أن $w_1 \in D^*$. وبما أن w_1 نقطة كيفية من الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$ فإن هذه الدائرة كلياً محتواة في D^* وهو مايبرهن على أن D^* مفتوحة .

ملاحظة . في البرهان على أن D^* متصلة تطلب الأمر استمرارية التابع f فقط وأما البرهان على أن D^* مفتوحة فقد تطلب الاعتماد على نظرية الوحدانية ونظرية روشيه . والواقع أن الاستمرار فقط لايكفي للبرهان على أن D^* مفتوحة ، فعلى سبيل المثال ليكن $f = x^2 + iy$ و $D = \{|z| < 1\}$ عندئذٍ $D^* = f(D)$ لاتكون مجموعة مفتوحة وذلك لأن صوره نقاط القطر الشاقولي في الدائرة (النقاط الداخلية في الدائرة) . تكون نقاطاً حدية في D^* .

بالمثل ، وبعرض أكثر دقة نأتي لحل مسألة **التحويل العكسي** للتوابع الوحيدة التعيين والتحليلية . إن هذه المسألة تصاغ على الشكل الآتي : ليكن $w = f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليليا وليكن $w_0 = f(z_0)$. يطلب إيجاد تابع تحليلي $z = g(w)$ بحيث يكون $g(w_0) = z_0$ و $f \circ g(w) \equiv w$ في جوار للنقطة w_0 .

في حل هذه المسألة نميز حالتين

I. النقطة ليست نقطة حرجة : $f'(z_0) \neq 0$. كما في برهان مبدأ الحفاظ على الساحة، نختار دائرة $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ لاتحتوي على أي موضع w_0 غير مركزها ونعرف $\mu > 0$ بالعلاقة (1) . لتكن w_1 نقطة ما من الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$. بإعادة نفس الخطوات (بتطبيق العلاقة (2) ونظرية روشيه) نجد أن التابع f يأخذ في الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$ القيمة w_1 عدداً من المرات مساوياً لعدد المرات التي يأخذ بها w_0 . ولكن القيمة w_1 تؤخذ في النقطة z_0 مرة واحدة نتيجة لكون $f'(z_0) \neq 0$ وهكذا فإن التابع f يأخذ في الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$ أية قيمة من الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$ ومرة واحدة فقط ، بكلام آخر إن التابع f وحيد الصفحة موضعياً في النقطة z_0 . بذلك يتعرف في الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$ تابع $z = g(w)$ من أجله $g(w_0) = z_0$ و $f \circ g(w) \equiv w$. من وحدانية الصفحة للتابع f ينتج أن $\Delta w \neq 0$ من أجل $\Delta z \neq 0$ ومن هذا ينتج وجود المشتق $g'(w)$ في أية نقطة من نقاط الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

وهذا يعني تحليلية التابع g في هذه الدائرة[1] .

II. النقطة z_0 نقطة حرجة : $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, $f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) \neq 0$ و $(2 \leqslant p)$ نعيد نفس الخطوات السابقة ونختار الآن دائرة $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ بحيث لايوجد فيها مواضع w_0 للتابع f ولأصفار للمشتق f' باستثناء المركز (من جديد نستخدم نظرية الوحدانية) . وكما في السابق نختار $\mu > 0$ ونأخذ نقطة ما w_1 من الدائرة $\{|w - w_0| < \mu\}$ ونتأكد من أن التابع f يأخذ في الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$ القيمة w_1 عدداً من المرات يساوي نفس عدد القيم التي يأخذها من أجل w_0 ، ونتيجة للفرض w_0 هو موضع من المرتبة P من أجل z_0 . وبما أن $f'(z) \neq 0$ من أجل $\{0 < |z - z_0| < r\}$ فإن أية قيمة $w_1 \{0 < |w_1 - w_0| < \mu\}$ يأخذها التابع f في p من النقاط المختلفة من الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$. وبالتالي فإن التابع f في الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$ الصفحة P .

لنوضح الطبيعة التحليلية لحل مسألة التحويل العكسي في هذه الحالة . في جوار ما للنقطة z_0 ، لدينا

$$w = f(z) = w_0 + (z - z_0)^p \varphi(z) \qquad (4)$$

حيث φ تابع وحيد التعيين وتحليلي ومغاير للصفر . ومنه ينتج أن

$$\sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z - z_0) = (w - w_0)^{1/p} \qquad (5)$$

حيث $\sqrt[p]{\varphi}$ يعني أحد الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية لتابع الجذر في الجوار المذكور . إن الفرع المذكور ينشر في سلسلة تايلور في قوى $(z - z_0)$ ويكون الحد الثابت في السلسلة مغايراً للصفر . وبالتالي من أجل $\psi(z) = \sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z - z_0)$ يكون $\psi'(z_0) \neq 0$. لنضع $\omega = (w - w_0)^{1/p}$ فنجد أن العلاقة (5) تكتب على الشكل $\omega = \psi(z)$ وباستخدام

(١) من العلاقة (3) واضح أنه لوجود المشتق g' يلزم أن يكون أيضاً $f' \neq 0$. واستناداً لاستمرارية f' ولكون $f'(z_0) \neq 0$ يمكننا أن نؤكد عدم وجود نقاط حرجة في الدائرة $\{|z - z_0| < r\}$ وذلك بتصغير r عند الحاجة .

الحالة I نجد z كتابع تحليلي ووحيد التعيين لـ ω :

$$z = \sum_{0}^{\infty} d_n \omega^n$$

وبالاستعاضة عن ω بـ $(w - w_0)^{1/P}$ نجد نشر التحويل العكسي لـ f في سلسلة قوى معممة :

$$z = g(w) = \sum_{0}^{\infty} d_n (w - w_0)^{n/P} \qquad (6)$$

من هذه العلاقة واضح بأن g تابع تحليلي في الدائرة $\{|z - z_0| < \mu\}$ وأن w_0 هي نقطة تفرع من المرتبة P .

مما ذكرنا أعلاه ، وفي حالة خاصة ، تنتج النظرية الآتية

نظرية (٢) . إن الشرط $f'(z_0) \neq 0$ هو شرط لازم وكاف لوحدانية الصفحة موضعياً في النقطة z_0 للتابع الوحيد التعيين والتحليلي f .

ملاحظة (١) . إن كفاية هذا الشرط تنتج أيضاً من النظرية العامة لوجود تابع ضمني في التحليل الحقيقي (اليعقوبي $J_f(z) = |f'(z)|^2$ للتطبيق $(x,y) \to (u,v)$ مختلف عن الصفر في النقطة) . إلا أن الشرط $J_f \neq 0$ ليس لازماً لوحدانية الصفحة من أجل أي تطبيق قابل للمفاضلة بمفهوم التحليل الحقيقي ، وهذا الأمر يتضح من المثال الآتي : $f = x^3 + iy$ إن اليعقوبي يساوي الصفر في النقطة $z = 0$ وهو تابع وحيد الصفحة .

ملاحظة (٢) . إن شرط وحدانية الصفحة موضعياً $f'(z) \neq 0$ من أجل جميع النقاط $z \ni D$ غير كاف لوحدانية الصفحة الشامل للتابع في جميع نقاط الساحة D . وهذا الأمر يتضح من المثال $f(z) = e^z$. فهذا التابع وحيد الصفحة في كل نقطة $z \ni C$ إلا أنه ليس وحيد الصفحة في أية ساحة تحتوي على زوج من النقاط z_1 و z_2 ومن أجله $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ حيث $k \neq 0$ وعدد صحيح .

٣ ــ الخواص العامة للتطبيقات المتماثلة .

١ ــ تعريف التطبيق المتماثل . ذكرنا سابقاً تعريف التطبيق المتماثل لساحات لاتحتوي على نقطة اللانهاية ، وأشرنا إلى أن تلك التطبيقات تحقق بواسطة توابع تحليلية وحيدة التعيين ووحيدة الصفحة . ومن أجل ساحات من المستوي العقدي الموسع نعطي التعريف الآتي :

تعريف (١) . نقول عن التطبيق $w = f(z)$ الذي ينقل الساحة $D \subset \overline{C}$ إلى الساحة $G \subset \overline{C}$ أنه تطبيق متماثل إذا كان

١) التابع f(z) وحيد الصفحة في D .

٢) التابع f(z) تحليلياً في الساحة D ومن الممكن استثناء نقطة واحدة يكون فيها للتابع قطب بسيط .

نستعرض الخواص الموضعية للتطبيق المتماثل $w = f(z)$ في جوار نقطة محدودة z_0 حيث أن f(z) تحليلي في هذه النقطة . بما أن التابع f(z) وحيد الصفحة فإن $f'(z_0) \neq 0$ ومن المعنى الهندسي للمشتق ينتج :

١°) **ثبات التمدد** . إن التمديد الخطي في النقطة z_0 واحد من أجل جميع الطرق المارة بهذه النقطة ويساوي $|f'(z_0)|$.

٢°) **الحفاظ على الزوايا** جميع الطرق المارة بالنقطة z_0 تخضع لدوران مقداره $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ ونشير هنا إلى الخاصتين التاليتين للتطبيق المتماثل واللتان تنتجان من التعريف (١) وخواص التوابع الوحيدة الصفحة والتوابع العكسية .

٣°) التطبيق المعاكس لتطبيق متماثل هو أيضاً متماثل .

٤°) تركيب تطبيقين متماثلين هو أيضاً تطبيق متماثل .

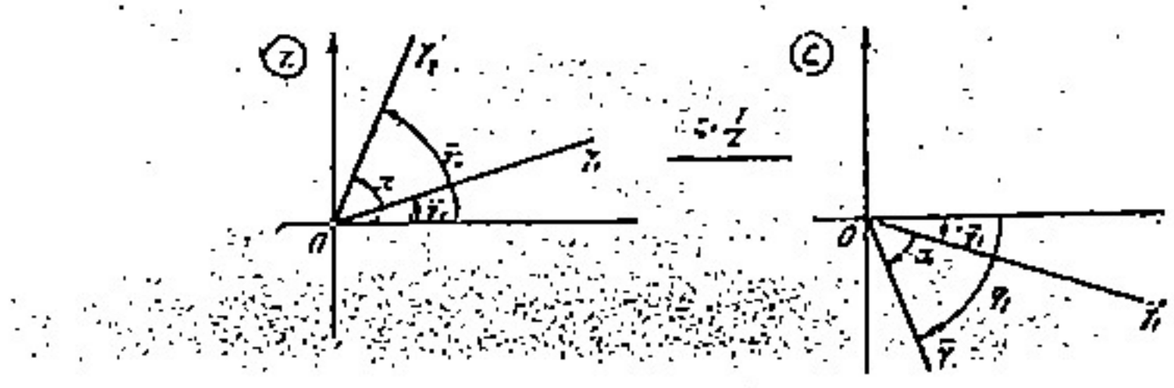
٢ ــ التماثل في نقطة اللانهاية . نعرف الزاوية بين طريقين في نقطة اللانهاية .

تعريف (٢) . الزاوية بين طريقين γ_1 و γ_2 مارين من النقطة $z = \infty$ هي الزاوية

بين صورتي هذين الطريقين بواسطة التطبيق $\zeta = (1/z)$ في النقطة $\zeta = 0$. من هذا التعريف ومن الخاصة ٢°) ينتج أن التطبيق $\zeta = (1/z)$ يحافظ على الزوايا بين الطرق في جميع نقاط المستوي العقدي الموسع .

مثال (١) . ليكن γ_1 و γ_2 شعاعين مارين من النقطة z_0 عندئذٍ تكون الزاوية بين الشعاعين γ_1 و γ_2 في النقطة $z=\infty$ مساوية للزاوية بين هذين الشعاعين في النقطة z_0 مأخوذة بالاتجاه المعاكس .

للسهولة سنعتبر أن $z_0 = 0$. ولنفرض أن الشعاع γ_j هو $(j = 1,2)\ ,\ \arg z = \varphi_j$ عندئذٍ تكون الزاوية بين γ_1 و γ_2 (الاتجاه من γ_1 إلى γ_2) في النقطة $z = 0$ مساوية لـ $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ الشكل (٤٤) . إن صورة γ_j بواسطة التطبيق $\zeta = 1/z$ هو الشعاع $\tilde{\gamma}_j$: $(j = 1,2)\ ;\ \arg\zeta = -\varphi_j$ ، ولهذا فإن الزاوية بين $\tilde{\gamma}_1$ و $\tilde{\gamma}_2$ في النقطة $\zeta = 0$ تساوي $\alpha = -(-\varphi_1) - (-\varphi_2)$ وهي الزاوية بين γ_1 و γ_2 في النقطة $z=\infty$.



الشكل (٤٤)

من التعريف (٢) والخاصة ٢°) تنتج الخاصة الآتية للتطبيق المتماثل :

٥°) في التطبيق المتماثل لساحة D من المستوي العقدي الواسع تبقى الزوايا بين المنحنيات ثابتة في كل نقطة من نقاط الساحة .

البرهان . استناداً إلى التعريف (١) والخاصة ٢°) ينبغي البرهان على صحة مايلي :

١) إذا كان التابع

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad , \quad |z| > R$$

تحليلياً في النقطة $z = \infty$ و $c_{-1} \neq 0$ فإن التطبيق $w = f(z)$ يحافظ على الزوايا بين الطرق في النقطة $z=\infty$.

٢) إذا كان للتابع $f(z)$ قطب بسيط في النقطة z_0 (محدودة أو لانهاية) ، فإن التطبيق $w = f(z)$ يحافظ على الزوايا بين الطرق في النقطة z_0 .

لنبرهن ١) لنضع التابع $w = f(z)$ كتركيب لتابعين $\zeta = 1/z$ و $w = g(\zeta)$.

$$w = g(\zeta) = f(1/\zeta) = c_0 + c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \dots$$

وحسب التعريف (٢) يحافظ التطبيق $\zeta = 1/z$ على الزوايا بين الطرق في النقطة $z = 0$ ويحافظ التطبيق $w = g(\zeta)$ على الزوايا بين الطرق في النقطة $\zeta = 0$ لأن $g'(0) = c_{-1} \neq 0$ (الخاصة ٢) . وبالتالي فإن التطبيق $w = f(z)$ يحافظ على الزوايا بين الطرق في النقطة $z=\infty$. بالمثل نبرهن ٢) .

ملاحظة (١) . يمكن البرهان على أن التطبيق $\zeta = 1/z$ يمثل دوراناً لكرة ريمان مقداره $180°$ حول القطر ذي النهايتين $z = \pm 1$. وبالتالي فإن هذا التطبيق يحافظ على الزوايا في كل نقطة من نقاط كرة ريمان . ويعتبر نتيجة لذلك التعريف (٢) طبيعياً . كما يمكن البرهان على أن كل تطبيق متماثل يحافظ على الزوايا بين الطرق على كرة ريمان .

٣ ــ مبدأ تقابل الحدود . لتكن D و G ساحتين وحيدتي الاتصال ومحدودتين وحدودها ∂D و ∂G منحنيان جوردانيان مغلقان Γ و $\tilde{\Gamma}$ على الترتيب . عندئذٍ يكون :

نظرية (١) (مبدأ تقابل الحدود) . إذا كان التابع $w = f(z)$ تطبيقاً متماثلاً للساحة D على الساحة G فإن: ١) يمكن تمديد التابع $f(z)$ بالاستمرار على حدود الساحة D أي يمكن تعريف التابع $f(z)$ على Γ بحيث نحصل على تابع مستمر في $\bar{D}$. ٢) هذا التابع $w = f(z)$ تطبيق متباين لـ Γ على $\tilde{\Gamma}$ ويحافظ على الاتجاه .

لن نتعرض هنا لبرهان هذه النظرية وللتعرف على برهان النظرية يمكن الرجوع إلى [1] أو [6] . ونأتي الآن إلى النظرية المعاكسة للنظرية (١) .

(١) انظر المراجع الأجنبية في نهاية الكتاب .

نظرية (٢) (**معيار وحدانية الصفحة في ساحة**) . لتكن D و G ساحتين وحيدتي الاتصال ومحدودتين وحدودهما المنحنيان الجوردانيان المغلقان Γ و $\tilde{\Gamma}$ على الترتيب . وليكن $w = f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً في الساحة D ومستمراً على Γ ، وتطبيقاً متبايناً للمنحني Γ على $\tilde{\Gamma}$ ومحافظاً على الاتجاه . عندئذٍ يكون هذا التابع وحيد الصفحة في وهو تطبيق متماثل لـ D على G .

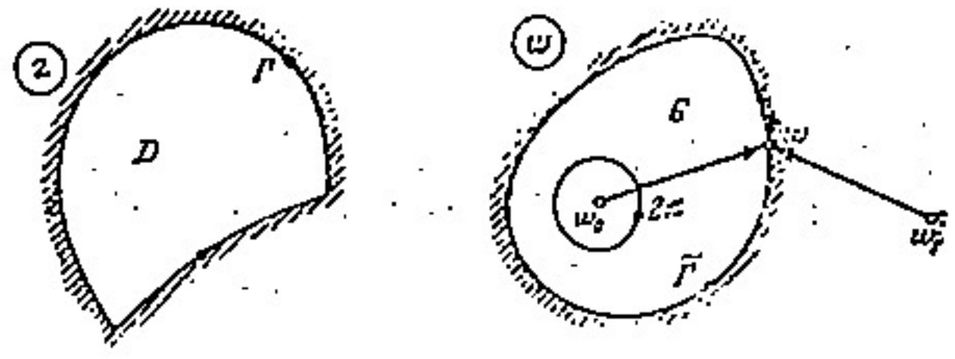
البرهان . يجب البرهان ١) على أنه من أجل أية نقطة $w_0 \in G$ يوجد نقطةواحدة فقط $z_0 \in D$ بحيث أن $w_0 = f(z_0)$. أي أن للتابع $f(z) - w_0$ صفر واحد في الساحة D . ٢) من أجل أية نقطة w_1 لاتنتمي إلى G لايأخذ التابع $f(z)$ القيمة w_1 من أجل $z \in D$.

لنبرهن ١) . في شروط النظرية لاينعدم التابع $f(z) - w_0$ على Γ وذلك لأنه من أجل $z \in \Gamma$ فإن $w = f(z)$ تنتمي إلى $\tilde{\Gamma}$ بينما $w_0 \in G$. واستناداً لمبدأ الأرغومينت يكون عدد أصفار التابع $f(z) - w_0$ الواقعة في الساحة D مساوياً لـ

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg [f(z) - w_0] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg (w - w_0)$$

وبما أن النقطة w_0 واقعة داخل المنحني المغلق $\tilde{\Gamma}$ ، الشكل (٤٥)فإن $\Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg (w - w_0)$ يساوي 2π وبالتالي فإن $N = 1$.

بالمثل ، إذا كانت النقطة w_1 واقعة خارج $\tilde{\Gamma}$ فإن $\Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg (w - w_1) = 0$ وللمعادلة $f(z) = w_1$ لاتوجد حلول في الساحة D .



الشكل (٤٥)

ملاحظة **(٢)** . إن النظريتين (١) و (٢) تبقيان صحيتين من أجل ساحات من المستوي العقدي الموسع $\bar{C}$ وحدودهما منحنيات ملساء – جزئياً انظر [2,6] .

٤ – نظرية ريمان . تعتبر نظرية ريمان أساس النظرية العامة للتطبيق المتماثل وهي

نظرية (٣) (**ريمان**) . لتكن D ساحة وحيدة الاتصال من المستوي العقدي الموسع $\bar{C}$ ، وحدودها مؤلفة من أكثر من نقطة عندئذٍ ١) يوجد تابع $w = f(z)$ هو تطبيق متماثل لهذه الساحة على الدائرة $\{|w| < 1\}$. ٢)هذا التابع وحيدإذا فرضناتحققالشروط : $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$ حيث w_0, z_0 نقطتان معلومتان $z_0 \in D$, $|w_0| < 1$ و α عدد حقيقي معلوم .

تستثنى الحالتان الآتيتان : ١) المستوي العقدي الموسع $\bar{C}$ بأكمله . ٢) المستوي العقدي الموسع المأخوذ في نقطة منه . إن هاتين الساحتين لايمكن تطبيقهما بشكل متماثل على الدائرة $\{|w| < 1\}$. في الواقع إذا كان $w = f(z)$ تطبيق متماثل للمستوي العقدي $\bar{C}$ بأكمله على الدائرة $\{|w| < 1\}$ فإن $f(z)$ وحيد التعيين وتحليلي في المستوي العقدي الموسع ومحدود وبالتالي فإنه يطابق ثابتاً ، $f(z) \equiv \text{const}$ استناداً إلىنظرية ليوفيل . وبالمثل ، إذا كان $w = f(z)$ تطبيقاً متماثلاً للمستوي العقدي الموسع $\bar{C}$ والمأخوذ في النقطة z_0 على الدائرة $\{|w| < 1\}$ فإن هذا التابع وحيد التعيين وتحليلي من أجل $z \neq z_0$ وبالتالي فإن z_0 هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح . أي أن $f(z)$ وحيد التعيين وتحليلي ومحدود في $\bar{C}$ وبالتالي فإن $f(z) \equiv \text{const}$ استناداً إلى نظرية ليوفيل .

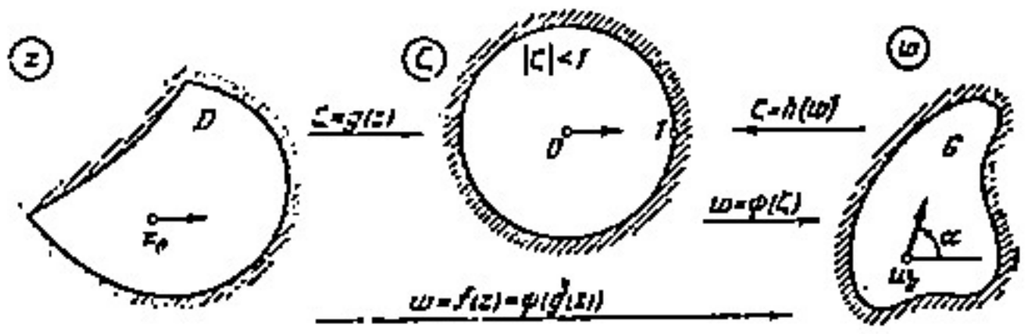
لنلاحظ بأنه إذا احتوت حدود الساحة الوحيدة الاتصال D على نقطتين فإن حدود تلك الساحة تكون منحنياً ماراً بالنقطتين ومثل هذه الساحة حسب النظرية (٣) يمكن تطبيقه بشكل متماثل على دائرة الوحدة . للتعرف على برهان العلاقةالنظرية (٣) انظر [6] .

نتيجة . إذا كانت G , D ساحتين وحيدتي الاتصال وحدود كل منهما تحتوي على أكثر من نقطة ، فإنه يوجد تطبيق متماثل وحيد $w = f(z)$ للساحة D على G بحيث أن

$$f(z_0) = w_0 \quad , \quad \arg f'(z_0) = \alpha$$

حيث $z_0 \in D$, $w_0 \in G$ و α عدد حقيقي .

البرهان . الوجود . استناداً إلى النظرية (٣) يوجد تطبيق متماثل $\zeta = g(z)$ للساحة D على الدائرة $\{|\zeta| < 1\}$ بحيث أن $g(z_0) = 0$ و $\arg g'(z_0) = 0$ الشكل (٤٦) . وبالمثل يوجد تطبيق متماثل $\zeta = h(w)$ للساحة G على الدائرة $\{|\zeta| < 1\}$ وبحيث أن



الشكل (٤٦)

$h(w_0) = 0$ ، $\arg h'(w_0) = -\alpha$. وعندئذٍ يطبق التابع المعاكس $w = \psi(\zeta)$ للتابع $\zeta = h(w)$ بشكل متماثل الدائرة $\{|\zeta| < 1\}$ على الساحة G وبحيث أن $\psi(0) = w_0$ و $\arg \psi'(0) = \alpha$. وبالتالي فإن $w = f(z) = \psi[g(z)]$ هو تطبيق متماثل للساحة D على الساحة G ويحقق الشروط (١) .

الوحدانية . لنفرض وجود تطبيقين متماثلين للساحة D على الساحة G :

$w = f_j(z)$; $(j = 1,2)$ وبحيث أن

$$f_j(z_0) = w_0 \quad , \quad \arg f'_j(z_0) = \alpha \quad , \quad j = 1,2$$

ولنبرهن أن $f_1(z) \equiv f_2(z)$ من أجل جميع $z \ni D$.

استناداً إلى النظرية (٣) يوجد تطبيق متماثل وحيد $\zeta = h(w)$ للساحة G على الدائرة $\{|\zeta| < 1\}$ وبحيث أن $h(w_0) = 0$ ، $\arg h'(w_0) = 0$. إن التابعين $\zeta = g_j(z) = h[f_j(z)]$ ، $(j = 1,2)$ هما تطبيقان متماثلان للساحة D على الدائرة $\{|\zeta| < 1\}$ ويحققان الشروط .

$$g_j(z_0) = 0 \quad , \quad \arg g'_j(z_0) = \alpha \quad , \quad j = 1,2$$

واستناداً إلى النظرية (٣) فإن $g_1(z) \equiv g_2(z)$ أي أن $h[f_1(z)] \equiv h[f_2(z)]$ ومنه نجد $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

ملاحظة (٣) . يمكن استبدال دائرة الوحدة بأية ساحة «قانونية» ، على سبيل المثال نصف المستوي العلوي ، ومستقبلاً سنستعرض التطبيقات المتماثلة على دائرة الوحدة أو نصف المستوي العلوي .

وهكذا إذا كانت حدود كل ساحة من الساحتين D و G أكثر من نقطة فإنه يوجد تطبيق متماثل وحيد $w = f(z)$ للساحة D على الساحة G بحيث أن :

$$f(z_0) = w_0 \quad , \quad \arg f'(z_0) = \alpha \tag{2}$$

حيث $z_0 \ni D$ ، $w_0 \ni G$ و α عدد حقيقي . إن وحدانية التطبيق المتماثل تقتضي تحقق الشروط (٢) وعادة تسمي هذه الشروط **بشروط تعيين التطبيق المتماثل** . وكما هو واضح تشتمل هذه الشروط على ثلاثة وسطاء حقيقية : $(w_0 = u_0 + iv_0)$ u_0 ، v_0 و α . وبدلاً من الشروط (٢) يمكن أخذ ثلاثة وسطاء حقيقية مستقلة على سبيل المثال :

١) يوجد تطبيق متماثل وحيد $w = f(z)$ للساحة D على الساحة G محقق للشروط

$$f(z_0) = w_0 \quad , \quad f(z_1) = w_1$$

حيث z_0 ، w_0 نقطتان داخليتان وأما z_1 ، w_1 فنقطتان حديتان لـ D و G على الترتيب

٢) يوجد تطبيق متماثل وحيد $w = f(z)$ للساجة D على الساحة G محقق للشروط :

$$f(z_k) = w_k \quad , \quad k = 1,2,3$$

حيث z_1 ، z_2 ، z_3 نقاط ما من حدود الساحة D و w_1 ، w_2 ، w_3 نقاط مختلفة من حدود الساحة G ومرتبة في الاتجاه الموجب لحدود كل من الساحتين D و G .

إن مسألة وجود تطبيق متماثل في حالة ساحات متعددة الاتصال أو معقد للغاية . وحتى في الحالة المبسطة لساحات ثنائية الاتصال : $D = \{\rho < |z| < R\}$ ، $G = \{\rho_1 < |w| < R_1\}$ فإنه لايوجد ، بشكل دائم ، تطبيق متماثل لـ D على G ويمكن الاطلاع على هذه المسألة بشكل مفصل في [6] .

٤ ــ التطبيقات المتماثلة بالتوابع الكسرية ــ الخطية

١ ــ التابع الخطي . $w = \alpha z + \beta$. هذا التابع معرف من أجل جميع النقاط $z \ni C$ ومشتقه $w' = \alpha$ يحافظ على قيمة ثابتة مغايرة للصفر إذا كان $\alpha \neq 0$. وبالتالي فإن هذا التابع يحقق تطبيقاً متماثلاً للمستوي العقدي . وتبعاً لذلك تدور جميع المماسات للمنحنيات في المستوي z بزاوية واحدة مقدارها $\operatorname{Arg}\alpha$ وتخضع المنحنيات لتمديد مقداره $|\alpha|$. إذا كان $\alpha = 1$ فإن $\operatorname{Arg}\alpha = 2\pi k$ و $|\alpha| = 1$ فإنه لاوجود لأي دوران أو تمديد في هذه الحالة ويمثل التطبيق $w = z + \beta$ انسحاباً لجميع نقاط المستوي بمقدار الشعاع β . أما إذا كان $\alpha \neq 1$ (و $\alpha \neq 0$) فإنه يمكننا كتابة التابع على الشكل $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$ حيث تتعين γ من المعادلة $\gamma = \alpha\gamma + \beta$. ويتضح من ذلك أن كل شعاع منبعث من النقطة γ ــ z يخضع للدوران مقداره $\operatorname{Arg}\alpha$ وتمديد مقداره $|\alpha|$ كما أن صورته تكون شعاعاً ماراً من النقطة γ ــ w . ان ذلك يعني أن التطبيق $w = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 1$ (و $\alpha \neq 0$) يؤول إلى دوران للمستوي ككل حول النقطة $\gamma = \beta/(1-\alpha)$ بزاوية مقدارها $\operatorname{Arg}\alpha$ وإلى تمديد في الأطوال مقداره $|\alpha|$. أي أن التطبيق هو تطبيق تحاك مركزه في النقطة $\gamma = \beta/(1-\alpha)$ وعامله $|\alpha|$.

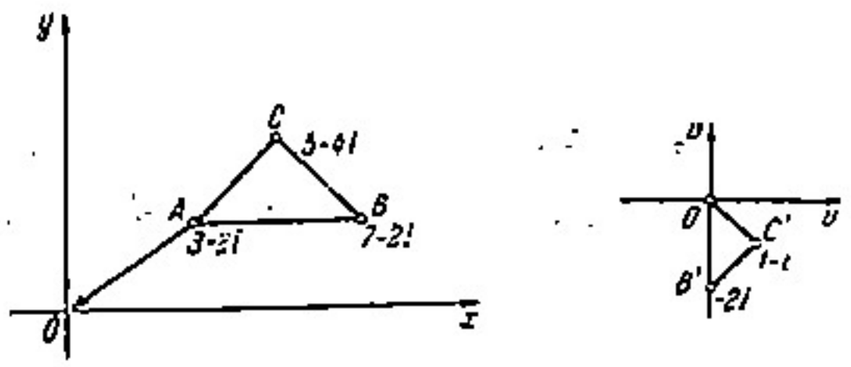
مثال (١) . أوجد التابع الذي يطبق المثلث المتساوي الساقين والذي رؤوسه في النقاط A, B, C الموافقة للأعداد $3 + 2i, 7 + 2i, 5 + 4i$ على الترتيب ، في المستوي z ، على المثلث المتساوي الساقين والذي رؤوسه في النقاط $0, B', C'$ من المستوي w والموافقة للأعداد $0, -2i, 1 - i$.

بما أن المثلثين $ABC, OB'C'$ متحاكيين فإن التطبيق المطلوب يمكن تحقيقه بواسطة تابع خطي على المراحل الآتية

١) انسحاب مواز بحيث تصبح النقطة A في مبدأ الاحداثيات انظر الشكل (٤٧). إن هذا الأمر يمكن تحقيقه بواسطة التطبيق $t = z - (3 + 2i)$.

٢) دوران حول مبدأ الاحداثيات مقداره $(\pi/2)$ ــ وهذا يقابل بالتحويل

$$T = te^{-i(\pi/2)} \quad \text{أو} \quad T = -it$$



الشكل (٤٧)

٣) تحويل تحاك مركزه مبدأ الاحداثيات وعامله $\frac{1}{2}$: $w = \frac{1}{2}T$. وفقاً لذلك يكون

$$w = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2}i - 1$$

٢ ــ التابع الكسري ــ الخطي . وجدنا أن هذا التابع (انظر التحليل (٦) صفحة ٧٢) يعرف بالعلاقة

$$L(z) = w = \frac{az + b}{cz + d} \quad , \quad ad - bc \neq 0 \qquad (1)$$

حيث a, b, c, d أعداد مركبة . ولنفرض أن $c \neq 0$ (إذا كان $c = 0$ فإن w يصبح تابعاً خطياً) . إضافة لما ذكرنا في التحليل (٦) سنستعرض هنا الخواص الأساسية للتوابع الكسرية ــ الخطية .

نظرية (١) . التطبيق الكسري ــ الخطي تطبيق متماثل للمستوي العقدي الموسع $\overline{C}$ على المستوي العقدي الموسع $\overline{C}$: $\overline{C} \to \overline{C}$.

البرهان . من الواضح أن التابع (1) تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي الموسع باستثناء النقطة $z = -d/c$ وهي قطب بسيط له . وبحل المعادلة (1) بالنسبة لـ z نجد التابع

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad , ad - bc \neq 0 \qquad (2)$$

المعاكس للتابع (1) وهو تابع وحيد التعيين في المستوي العقدي الموسع $\overline{C}$ وكذلك تابع

كسري – خطي . وبالتالي فإن التابع الكسري – الخطي تابع وحيد الصفحة في المستوي العقدي الموسع .

ملاحظة (١) . إن النظرية (١) صحيحة في الاتجاه المعاكس ، أي أنه إذا كان التابع $w = f(z)$ تطبيقاً متمائلاً للمستوي العقدي $\overline{C}$ على المستوي العقدي $\overline{C}$ فإن $f(z)$ تابع كسري – خطي .

في الواقع ، استناداً إلى التعريف (١) من الفقرة السابقة يكون $f(z)$ تحليلياً في المستوي العقدي الموسع باستثناء نقطة واحدة هي قطب بسيط له . فإذا كانت هذه النقطة هي $z_0 \neq \infty$ وكان $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = A$ فإن التابع $g(z) = \dfrac{f(z) - A}{z - z_0}$ يكون تحليلياً في جميع نقاط المستوي العقدي الموسع . واستناداً إلى نظرية ليوفيل يكون $g(z) = \text{const}$ أي أن $f(z)$ تابع كسري – خطي ، أما إذا كانت $z_0 = \infty$ فإن $f(z)$ يكون تابعاً خطياً .

٣ – الخواص الهندسية للتوابع الكسرية – الخطية . سنتعرض هنا خاصتين بسيطتين هندسيتين للتوابع الكسرية – الخطية . ومن أجل صياغة الخاصة الأولى نصطلح على تسمية **دائرة في $\overline{C}$** أية دائرة أو مستقيم من المستوي العقدي (صورة أي منها بواسطة الاسقاط الستيريوغرافي هو دائرة على كرة ريمان) . وأما الدائرة بالمعنى الخاص فنقول إنها دائرة في C .

نظرية (٢) . (الخاصة الدائرية للتطبيقات الكسرية – الخطية) . إن صورة أية دائرة في $\overline{C}$ بواسطة تطبيق كسري – خطي هي دائرة في $\overline{C}$.

البرهان . من الواضح صحة هذه النظرية من أجل التطبيق الخطي (الحالة $c = 0$) . أما إذا كان $c \neq 0$ فإن التطبيق الكسري – الخطي (1) يكتب على الشكل .

$$L(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} = A + \frac{B}{z + C} \qquad (3)$$

ويمثل كتركيب لثلاث تحويلات : $L = (L_1 \circ L_2 \circ L_3)$ حيث

$$L_1 : z \to A + Bz \,,\quad L_2 : z \to \frac{1}{z} \,,\quad L_3 : z \to z + C$$

إن التطبيق L_1 يمثل تمديداً مع الدوران وانسحاباً ، كما أن L_3 ممثل انسحاباً فقط وهما بالتالي يحافظان على الدوائر في $\overline{C}$. تبعاً لذلك يكفي أن نبرهن صحة النظرية من أجل التحويل :

$$L_2 : z \to \frac{1}{z}$$

للبرهان على ذلك(١) نلاحظ أن أية دائرة في $\overline{C}$ يمكن كتابتها على الشكل

$$E(x^2 + y^2) + F_1 x + F_2 y + G = 0 \qquad (5)$$

حيث أنه من الممكن أن يكون $E = 0$ • وبالعكس أن أية معادلة من هذا الشكل تمثل دائرة في $\overline{C}$ (تستثنى الحالة $E = F_1 = F_2 = G = 0$ حيث تؤول الدائرة إلى نقطة) . بالانتقال إلى المتحول المركب $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ وبتعويض $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ في المعادلة (5) نجد المعادلة

$$E z \bar{z} + F z + \bar{F} \bar{z} + G = 0 \qquad (6)$$

حيث $\bar{F} = \frac{1}{2}(F_1 + iF_2)$, $F = \frac{1}{2}(F_1 - iF_2)$ ، وللحصول على صورة هذه الدائرة بواسطة التحويل (4) يكفي أن نستبدل $z = (1/w)$ في (6) . ونجد :

$$E + F\bar{w} + \bar{F} w + G w \bar{w} = 0 \qquad (7)$$

ولهذه المعادلة نفس الشكل (6) وتستثنى حالة النقطة وكذلك المجموعة الخالية لكون التطبيق الكسري – الخطي متبايناً . وبالتالي فإن الصورة (7) هي دائرة في $\overline{C}$.

وجدنا أعلاه أن أي تابع وحيد التعيين وتحليلي f ينقل الدوائر الصغيرة جداً والتي مركزها النقطة غير الحرجة z_0 إلى دوائر بتقريب لامتناهٍ في الصغر من مرتبة عليا مراكزها $f(z_0)$. إن النظرية (٢) تؤكد على أن صورة أية دائرة في $\overline{C}$ بواسطة تطبيق كسري – خطي هي دائرة تماماً في $\overline{C}$ وبأمثلة بسيطة يمكن التأكد بسهولة من أن مركز الدائرة لا ينتقل إلى المركز . بغية صياغة الخاصة الهندسية الثانية للتطبيقات الكسرية – الخطية نعطي

(١ يمكن البرهان أيضاً هندسياً وذلك إذا استندنا إلى أن التطبيق $z \to 1/z$ يؤول إلى دوران في كرة ريمان .

التعريف الآتي

تعريف . نقول عن نقطتين z و z^* أنهما متناظرتين بالنسبة للدائرة $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$ في $\mathbf{C}$ إذا كانتا واقعتين على استقامة واحدة مع المركز z_0 وكان جداء بعديهما عن المركز مساوياً لمربع نصف القطر R^2 أي أن

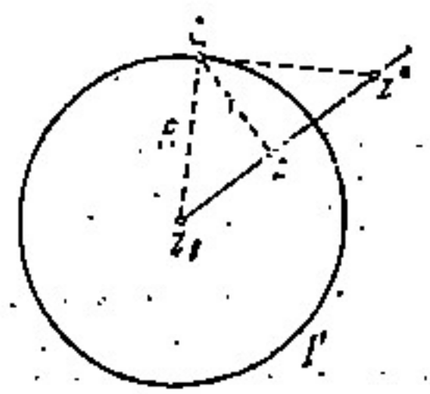
$$\arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0)\,, \quad |z^* - z_0|\,|z - z_0| = R^2$$

وبالتالي فإن النقاط المتناظرة بالنسبة لـ Γ تكون مرتبطة بالعلاقة

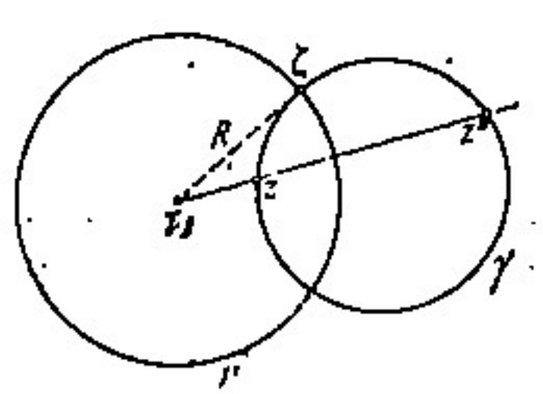
$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}} \tag{8}$$

إن طريقة انشاء النقاط المتناظرة واضحة من الشكل (٤٨، a): فإذا كانت النقطة z واقعة داخل الدائرة Γ ، فإنه يكفي أن ننشىء من النقطة z عموداً على الشعاع $z_0 z$ وأن ننشىء من نقطة تقاطع هذا العمود مع الدائرة مماساً للدائرة ، فيلا في امتداد الشعاع $z_0 z$ في النقطة z^* . وأما إذا كانت النقطة z واقعة خارج الدائرة فإننا نقوم بالعملية ذاتها بترتيب عكسي) إن البرهان على تناظر النقطتين ينتج من تشابه المثلثين القائمي الزاوية $(z_0\zeta\, z^*, z_0\, z\,\zeta)$.

توطئة (١) . الشرط اللازم والكافي لكي تكون النقطتان z و z^* متناظرتين بالنسبة للدائرة $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$ هو أن تكون كل دائرة γ في $\overline{\mathbf{C}}$ ومارة بهاتين النقطتين معامدة للدائرة Γ .



الشكل (٤٨ a)



الشكل (٤٨ b)

البرهان : لتكن النقطتان z و z^* متناظرتين بالنسبة لـ Γ و γ دائرة ما مارة بهاتين

النقطتين . من الشكل (٤٨ b) واضح بأن مربع طول المماس للدائرة γ والمرسوم من النقطة z_0 يساوي جداء القاطع $|z^* - z_0|$ في جزئه الخارجي $|z - z_0|$ أي أنه يساوي R^2 بذلك يكون مماس الدائرة γ والمرسوم من النقطة z_0 نصف قطر للدائرة Γ ، وبالتالي فإن هاتين الدائرتين متعامدتين . (إذا كان γ مستقيماً فإنه يمر بـ z_0 بمركز الدائرة وبالتالي فإنه يعامد Γ) . نأتي الآن لبرهان **كفاية الشرط** . إذا كانت أية دائرة γ مارة بالنقطتين معامدة لـ Γ (في حالة خاصة المستقيم zz^*) ، فإن النقطتين z و z^* تكونا واقعتين على استقامة واحدة مع z_0 ويكون جداء بعديهما عن النقطة z_0 يساوي R^2 . وبالتالي فإن z و z^* متناظرتان بالنسبة لـ Γ .

إن التوطئة المذكورة أعلاه يمكن اعتبارها تعريفاً هندسياً للنقاط المتناظرة ويمكن تعميم هذا التعريف من أجل دائرة Γ في $\overline{\mathbf{C}}$. في الحالة التي تكون فيها Γ مستقيماً فإن التعريف المذكور يؤدي إلى التناظر العادي .

يسمى التطبيق $z \to z^*$ الذي ينقل كل نقطة $z \in \overline{\mathbf{C}}$ إلى نقطة z^* نظيرة z بالنسبة لدائرة Γ بالتطبيق **التناظري** بالنسبة للدائرة Γ أو بالتطبيق التعاكسي . من العلاقة (8) واضح أن التطبيق التعاكسي بالنسبة لدائرة في $\overline{\mathbf{C}}$ يحقق بتابع مرافق لتابع كسري – خطي واستناداً إلى النظرية (١) من البند الثاني يكون التطبيق التعاكسي تطبيقاً متماثلاً عكسياً في المستوي العقدي الموسع $\overline{\mathbf{C}}$ (ان التماثل عكسياً بالتطبيق التعاكسي بالنسبة لمستقيم واضح إذ أنه بانسحاب ودوران يمكن نقل ذلك المستقيم إلى المحور الحقيقي وعندئذٍ يؤول التطبيق التعاكسي إلى التطبيق $z \to \bar{z}$) .

نظرية (٣) (خاصة الحفاظ على النقاط المتناظرة) . إن صورتي كل نقطتين z و z^* متناظرتين بالنسبة لدائرة Γ في $\overline{\mathbf{C}}$ هما نقطتان w و w^* متناظرتان بالنسبة لـ $L(\Gamma)$ صورة الدائرة Γ بواسطة تطبيق كسري – خطي .

البرهان . لتكن $\{\gamma\}$ مجموعة جميع الدوائر في $\overline{\mathbf{C}}$ والمارة من النقطتين z و z^* . إن هذه الدوائر معامدة للدائرة Γ . ووفقاً للنظرية (٢) تكون صور الدوائر (γ) L هي دوائر في $\overline{\mathbf{C}}$. وبما أن L تطبيق متماثل ، فإن جميع الدوائر (γ) L تكون معامدة لـ $L(\Gamma)$ وبالتالي فإن النقطتين w و w^* اللتين تمر بهما جميع الدوائر (γ) L متناظرتان بالنسبة لـ $L(\Gamma)$.

٤ – الايزومورفيزمات والأفتومورفيزمات الكسرية – الخطية . لدينا في علاقة التطبيق الكسري الخطي

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (1)$$

أربعة من الثوابت العددية المركبة هي a, b, c, d . وفي واقع الأمر يتعلق التطبيق الكسري – الخطي بثلاثة وسطاء مركبة ، وذلك لأنه يمكننا قسمة الصورة والمخرج على واحد من الوسطاء والمغاير للصفر . ولهذا ، فإنه من الطبيعي أن نتوقع فيه نقل ثلاث نقاط معلومة إلى ثلاث نقاط معلومة أخرى بشكل وحيد .

نظرية (١) . مهما تكن النقاط المختلفة $z_1, z_2, z_3 \ni C$ والنقاط الثلاث w_1 ، $w_2, w_3 \ni C$ فإنه يوجد تطبيق كسري – خطي وحيد L بحيث أن

$$L(z_k) = w_k \quad , \quad k = 1,2,3$$

البرهان . بسهولة يمكن البرهان على وجود التطبيق L : لنبنِ التطبيقين الكسريين – الخطيين L_1, L_2 اللذين ينقلان النقاط z_1, z_2, z_3 والنقاط w_1, w_2, w_3 على الترتيب إلى النقاط $0, \infty, 1$ من المستوي ζ :

$$L_1 : \zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad , \quad L_2 : \zeta = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \qquad (2)$$

إن التطبيق

$$L = L_2^{-1} \circ L_1$$

والمعرف كتابع $w = w(z)$ من العلاقة

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \qquad (4)$$

هو التطبيق المنشود لكونه كسرياً – خطياً وينقل النقاط z_k إلى النقاط w_k . لنبرهن الآن على وحدانية هذا التطبيق . ليكن λ تطبيقاً كسرياً – خطياً آخر بحيث أن $\lambda(z_k) = w_k, k = 1,2,3$ لنأخذ التطبيق $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$ حيث L_1, L_2 التطبيقان المعرفان بالعلاقة (2) . من الواضح أن μ تطبيق كسري – خطي ومن أجله تكون النقاط

$0, \infty, 1$ نقاطاً ثابتة ، من الشرط $\mu(\infty) = \infty$ نستنتج بأن μ تطبيق خطي $\mu(\zeta) = \alpha\zeta + \beta$ ومن الشرط $\mu(0) = 0$ ينتج أن $\beta = 0$ ومن $\mu(1) = 1$ نجد أن $\alpha = 1$ وبالتالي فإن $\mu(\zeta) \equiv \zeta$ أي أن $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = E$ وحسب خواص الزمرة نجد $\lambda = L_2^{-1} \circ L_1$ وبالمقارنة مع (3) نجد $L \equiv \lambda$.

ملاحظة : إن كل نقطة من النقاط z_k, w_k موجودة في العلاقة (٤) في موضعين، مرة في الصور ومرة في المخرج . ويمكن للطالب أن يتأكد بسهولة من أن هذه العلاقة تبقى قائمة في الحالة التي تكون فيها إحدى النقاط z_k أو w_k (أو واحدة من z_k وواحدة من w_k) مساوية اللانهاية : من أجل ذلك ينبغي استبدال الصورة والمخرج حيث توجد ∞ بـ 1 . على سبيل المثال في الحالة $z_1 = w_3 = \infty$ تأخذ العلاقة (4) الشكل :

$$\frac{1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{1} = \frac{w - w_1}{w - w^2} \cdot \frac{1}{1}$$

وبذلك نجد أن النظرية (١) تكون صحيحة من أجل المستوي العقدي المغلق .

بالاستناد إلى هذه النظرية وإلى الخاصة الدائرية للتطبيق الكسري – الخطي ، يمكننا التأكيد على إمكانية نقل أية دائرة Γ في $\overline{C}$ بواسطة تطبيق كسري– خطي إلى أية دائرة Γ^* (من أجل ذلك يكفي نقل ثلاث نقاط من Γ إلى ثلاث نقاط من Γ^* واستخدام الخاصة الدائرية) ومن الإدراك التوبولوجي واضح بأن الدائرة B المحدودة بـ Γ تنتقل بواسطة التحويل الكسري – الخطي إلى إحدى دائرتين محدودتين بـ Γ^* ولمعرفة صورة الدائرة B يكفي أن نعرف صورة نقطة ما $z_0 \ni B$. من ذلك نستنتج أن بواسطة تطبيق كسري – خطي يمكن نقل أية دائرة $B \subset \overline{C}$ إلى دائرة $B^* \subset \overline{C}$.

نسمي التطبيق الكسري – الخطي لساحة D على D^* **بايزومورفيزم كسري – خطي** ونقول عن ساحتين D و D^* يوجد من أجلهما ايزومورفيزم كسري – خطي أنهما **ساحتان ايزومورفيتان** . وفقاً لما ذكرنا يمكننا صياغة النظرية الآتية :

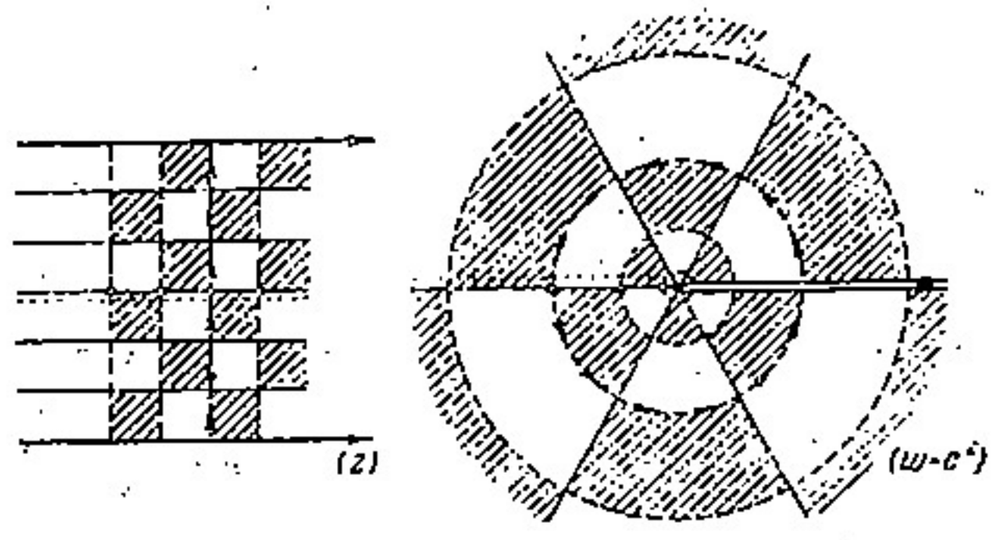
نظرية (٢) . كل دائرتين في المستوي المغلق ايزومورفيزميتين .

بمثابة مثال سنوجد جميع الايزومورفيزمات الكسرية – الخطية لنصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على دائرة الوحدة $\{|w| < 1\}$. إن تطبيق النظرية (١) ، في هذه

الحالة ، يؤدي إلى علاقة غير مختصرة ، لذا سننطلق في حل هذا التمرين من منطلق آخر . لنثبت نقطة ما a , $\operatorname{Im} a > 0$ ولنفرض أن صورتها هي مركز الدائرة $w = 0$. عندئذ تكون صورة النقطة $\bar{a}$ نظيرة a بالنسبة للمحور الحقيقي هي النقطة $w = \infty$ وذلك استناداً إلى النظرية (٣) من البند السابق (النقطة $w = \infty$ هي نظيرة النقطة $w = 0$ بالنسبة للدائرة $\{|w| = 1\}$) . من ناحية ثانية ، إن التطبيق الكسري ــ الخطي ، الذي ينقل إلى النقطتين صفر واللانهاية ، يعرف بغض النظر عن عامل ثابت . أي أن هذا التطبيق من الشكل $w = k \dfrac{z - a}{z - \bar{a}}$. ومن أجل $z = x$ يكون لدينا $|z - a| = |z - \bar{a}|$ لذلك وكي تكون صورة المحور الحقيقي هي محيط دائرة الوحدة فإنه ينبغي أن يكون $|k| = 1$ أي أن $k = e^{i\theta}$. بذلك نجد أن جميع الايزومورفيزمات الكسرية ــ الخطية لنصف المستوي العلوي $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ على دائرة الوحدة $\{|w| < 1\}$ هي

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}} \qquad (5)$$

حيث a نقطة ما من نصف المستوي العلوي $(\operatorname{Im} a > 0)$ و θ عدد حقيقي ما . إن التطبيق (5) يتعلق بثلاثة وسطاء هي θ والاحداثيان الديكارتيان للنقطة a التي تنتقل إلى مركز الدائرة . إن المعنى الهندسي لـــ θ واضح من ملاحظة أن النقطة $z = \infty$ تنتقل إلى النقطة $w = e^{i\theta}$ وأن تغير هذا الوسيط يؤدي إلى دوران في الدائرة . الشكل (٤٩) صورة شبكة من الاحداثيات المتعامدة في المستوي z بواسطة التطبيق (5) .



الشكل (٤٩)

تسمي الايزومورفيزم الكسري ــ الخطي لساحة ما على نفسها بالفتودورفيزم كسري ــ خطي . من الواضح أن مجموعة جميع الأفتومورفيزمات الكسرية ــ الخطية لساحة ما تشكل زمرة هي بحد ذاتها زمرة جزئية من الزمرة Λ زمرة جميع التطبيقات الكسرية ــ الخطية . ومن السهل التأكد بأن مجموعة الأفتومورفيزمات الكسرية ــ الخطية لـــ $\bar{C} \to \bar{C}$ تتطابق مع الزمرة Λ ؛ كما أن مجموعة الأفتومورفيزمات الكسرية ــ الخطية لـــ $C \to C$ تتطابق مع الزمرة الجزئية Λ_0 للتحويلات الخطية $z \to \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ كنهاية لهذه الفقرة سنوجد الافتومورفيزمات لدائرة الوحدة .

لنثبت نقطة a , $|a| < 1$ ولنفرض أن صورتها هي مركز الدائرة $w = 0$ ، إن النقطة $a^* = 1/\bar{a}$ نظيرة النقطة a بالنسبة للدائرة $\{|z| = 1\}$ تنتقل إلى النقطة $w = \infty$ ولذلك يجب أن يكون التطبيق من الشكل

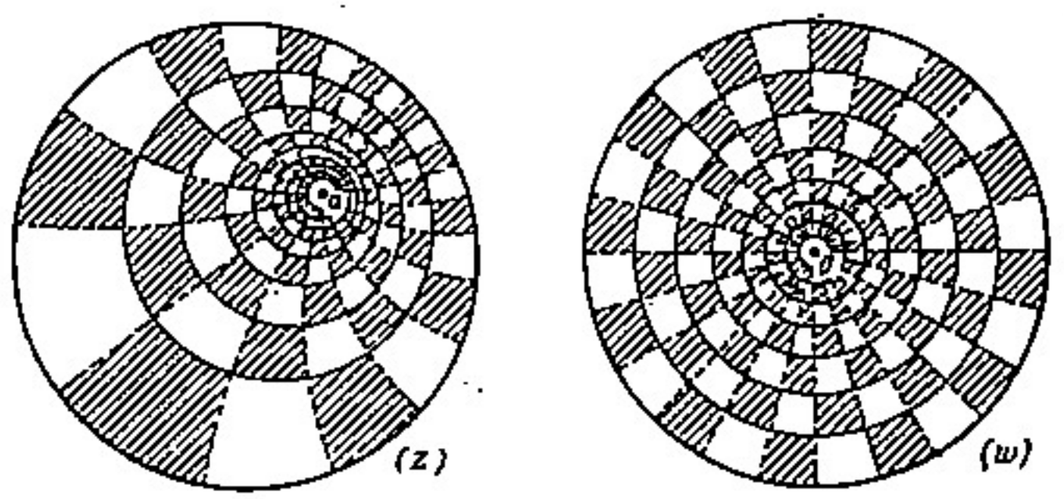
$$w = k \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}} = k_1 \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}$$

حيث k و k_1 ثابتان ما . وبما أن النقطة $z = 1$ تنتقل إلى نقطة ما من دائرة الوحدة فإنه ينبغي أن يكون $|k_1| \left|\dfrac{1 - a}{1 - \bar{a}}\right| = |k_1| = 1$. أي أن $k_1 = e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي . وبالتالي يكون للتطبيق المنشود الشكل

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \qquad (6)$$

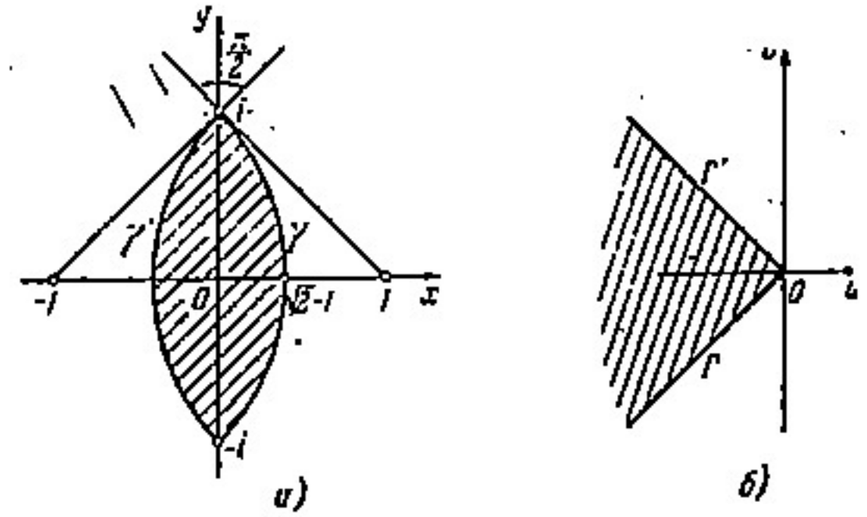
من ناحية ثانية واضح بأن أي تابع من الشكل (6) حيث $|a| < 1$ و θ عدد حقيقي هو تطبيق كسري ــ خطي لدائرة الوحدة $\{|z| < 1\}$ على دائرة الوحدة $\{|w| < 1\}$. الشكل (٥٠) يمثل الصورة العكسية لشبكة من الاحداثيات القطبية في المستوي w . وهو ممثل من مجموعتين : أقواس الدوائر المارة بالنقطتين a و $a^* = 1/\bar{a}$ (الصورة العكسية أشعة) والدوائر التي من أجلها النقطتان المذكورتان متناظرتان (الصورة العكسية دوائر) .

من الواضح أن التطبيق الكسري ــ الخطي لدائرة الوحدة على نفسها يتعلق أيضاً بثلاثة وسطاء هي الاحداثيان الديكارتيان لـــ a والعدد θ .



الشكل (٥٠)

مثال (١) . أوجد الساحة في المستوي w صورة الساحة المخططة في الشكل (٥١ ، a) بواسطة التطبيق $w = \frac{z-i}{z+i}$.



الشكل (٥١)

إن الساحة المطلوب إيجاد صورتها هي الساحة المحددة بتقاطع الدائرتين $\{|z+1|=\sqrt{2}\}$ ، $\{|z-1|=\sqrt{2}\}$ والمتعامدتين في النقطتين i ، $-i$. بما أن صورة النقطة $z=-i$ هي $w=\infty$ وأن صورة النقطة $z=i$ هي النقطة $w=0$ فإن صورتي قوسي الدائرتين المارين بالنقطتين $i,-i$ تكونان نصفا مستقيمين منبعثين من مبدأ الاحداثيات والزاوية بينهما تساوي $\pi/2$ نتيجة لكون التطبيق الكسري ـ الخطي تطبيقاً متماثلاً . ولتعيين وضع هذه الزاوية يكفي إيجاد نقطة من أحد ضلعي الزاوية . من

الواضح أن النقطة $z=\sqrt{2}-1$ تقع على القوس γ وبنتيجة هذا التطبيق تكون صورتها

$$w=\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{(\sqrt{2}-1-i)^2}{(\sqrt{2}-1)^2+1}=$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{2})+2(1-\sqrt{2})i}{4-2\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i}{2-\sqrt{2}}$$

وهذه النقطة واقعة في الربع الثالث على منصف زاوية ذلك الربع . وبما أن التطبيق يحافظ على الزوايا بالقيمة والاتجاه فإن صورة قوس الدائرة γ' تكون منصف زاوية الربع الثاني . وبالتالي فإن صورة الساحة المطلوبة هي الساحة المخططة في الشكل (٥١ ، b) .

مثال (٢) . أوجد مركز ونصف قطر الدائرة صورة المحور الحقيقي بواسطة التطبيق

$$w=\frac{z-z_1}{z-z_2}\ (\operatorname{Im} z_2\neq 0\ ,\ z_1\neq z_2)$$

بما أن $w=\infty$ هي صورة النقطة $z=z_2$ وأن صورة المحور الحقيقي هي دائرة فإن النقطة w_0 مركز الدائرة ونظيرة النقطة $w=\infty$ بالنسبة للدائرة تكون صورة نظيرة النقطة z_2 بالنسبة للمحور الحقيقي أي صورة $z=\bar{z}_2$. وبالتالي فإن

$$w_0=\frac{\bar{z}_2-z_1}{\bar{z}_2-z_2}=\frac{\bar{z}_2-z_1}{2\operatorname{Im} z_2}=\frac{z_1-\bar{z}_2}{2\operatorname{Im} z_2}$$

ولإيجاد نصف قطر الدائرة يكفي إيجاد نقطة من محيطها ومن ثم حساب البعد عن مركزها . لدينا $\lim_{z\to\infty}\frac{z-z_1}{z-z_2}=1$. وبالتالي فإن صورة النقطة $z=\infty$ من المحور الحقيقي هي النقطة $w=1$ من محيط الدائرة . تبعاً لذلك نجد

$$R=|w_0-1|=\left|\frac{\bar{z}_2-z_1}{\bar{z}_2-z_2}-1\right|=\left|\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-z_2}\right|=\frac{|z_2-z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$$

كان من الممكن إيجاد صورة النقطة $z=0$ وهي $w=(z_1/z_2)$ بدلاً من إيجاد صورة النقطة $z=\infty$ ويكون $R=\left|w_0-\frac{z_1}{z_2}\right|$

٥ ـ التطبيقات المتماثلة بالتوابع الابتدائية

١ ـ التابع الأسي . التابع

$$w = z^n \quad , \quad (n \text{ عدد طبيعي}) \qquad (1)$$

وحيد التعيين وتحليلي في جميع نقاط المستوي C ومشتقه $\frac{dw}{dz} = n z^{n-1}$ من أجل $n > 1$ مغاير للصفر في جميع النقاط $z \neq 0$. وبالتالي فإنه متماثل (من أجل $n > 1$) في جمـــع النقاط $z \ni [C \setminus \{0\}]$. بكتابة التابع (1) في الصيغة القطبية ؛ حيث $z = r e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ نجد

$$\rho = r^n \quad , \quad \psi = n\varphi \qquad (2)$$

ومن هذا يتضح بأن الانفراج الزاوي لكل زاوية رأسها في مبدأ الاحداثيات يزداد n مرة وتبعاً لذلك ، ومن أجل $n > 1$ ، لايكون التطبيق متماثلاً في النقطة $z = 0$. ويتضح أيضاً من العلاقات (2) بأن صورة كل نقطتين z_1 , z_2 لهما نفس الطويلة وعمدتاهما مختلفتان بمضاعفات $2\pi/n$ (وفقط مثل تلك النقاط) هي نفس الصورة w :

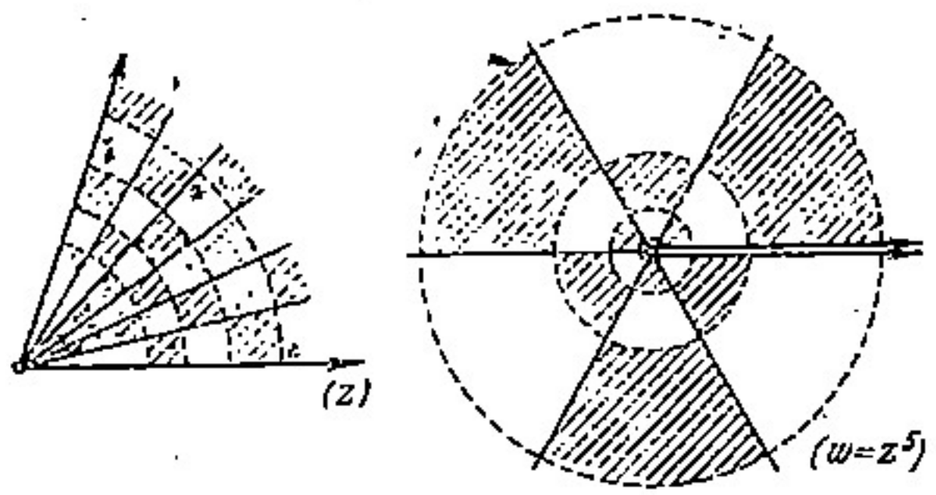
$$|z_1| = |z_2| \quad , \quad \arg z_1 = \arg z_2 + k \frac{2\pi}{n} \qquad (3)$$

وبالتالي ، ومن أجل $n > 1$ ؛ لايكون التطبيق (1) وحيد الصفحة في C .

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع (1) وحيد الصفحة في ساحة ما $C \supset D$ هو عدم احتواء الساحة D[1] على مثل تلك النقاط z_1 , z_2 والمختلفة فيما بينها والمحققة للعلاقات (3) . وكمثال على ساحة D يكون فيها التابع (1) وحيد الصفحة نأخذ القطاع $D = \left\{ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$ وتكون صورة هذا القطاع هي الساحة :

$D^n = \{ 0 < \arg w < 2\pi \}$ أي المستوي w باستثناء القسم الموجب من المحور الحقيقي . في الشكل (٥٢) مبين صور شبكات من الاحداثيات القطبية بواسطة ذلك التطبيق .

(١) من أجل $n > 1$ لايمكن للساحة D ؛ حيث التابع (1) وحيد الصفحة ، أن تحتوي على النقطة $z = 0$ ، وذلك لأنه في أي جوار لهذه النقطة توجد نقاط مختلفة فيما بينها وتحقق العلاقات (3) .

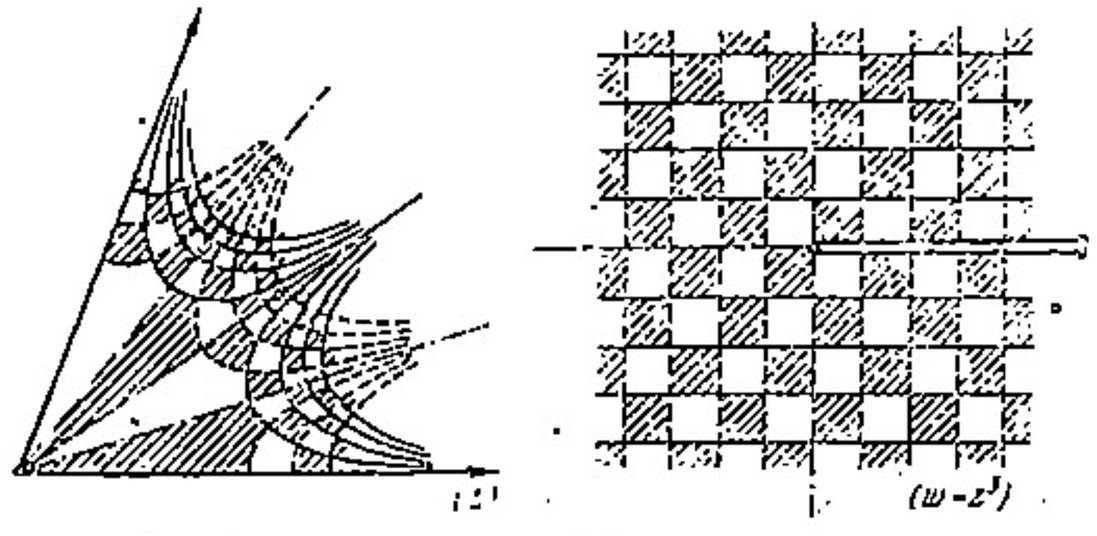


الشكل (٥٢)

إذا أخذنا في المستوي z ، كالسابق، الاحداثيات القطبية $z = r e^{i\varphi}$ وفي المستوي w الاحداثيات الديكارتيه $w = u + iv$ ، فإن التطبيق (١) يكتب في شكل علاقتين من الشكل :

$$u = r^n \cos n\varphi \quad , \quad v = r^n \sin n\varphi \qquad (4)$$

الشكل (٥٣) يبين الصورة العكسية لشبكة من الاحداثيات المتعامدة في المستوي w وهي مؤلفة من المنحنيات والتي معادلتها القطبية : $r = \sqrt[n]{u_0 / \cos n\varphi}$ (الخطوط المنقطة) و $r = \sqrt[n]{v_0 / \sin n\varphi}$ (الخطوط المتصلة) . من أجل $n = 2$ نجد القطوع الزائدة $x^2 - y^2 = u_0$ (الخطوط المنقطة) والقطوع المكافئة $2xy = v_0$ (الخطوط المتصلة) . وبما أن التطبيق متماثل فإن القطوع الأولى تعامد القطوع الثانية .



الشكل (٥٣)

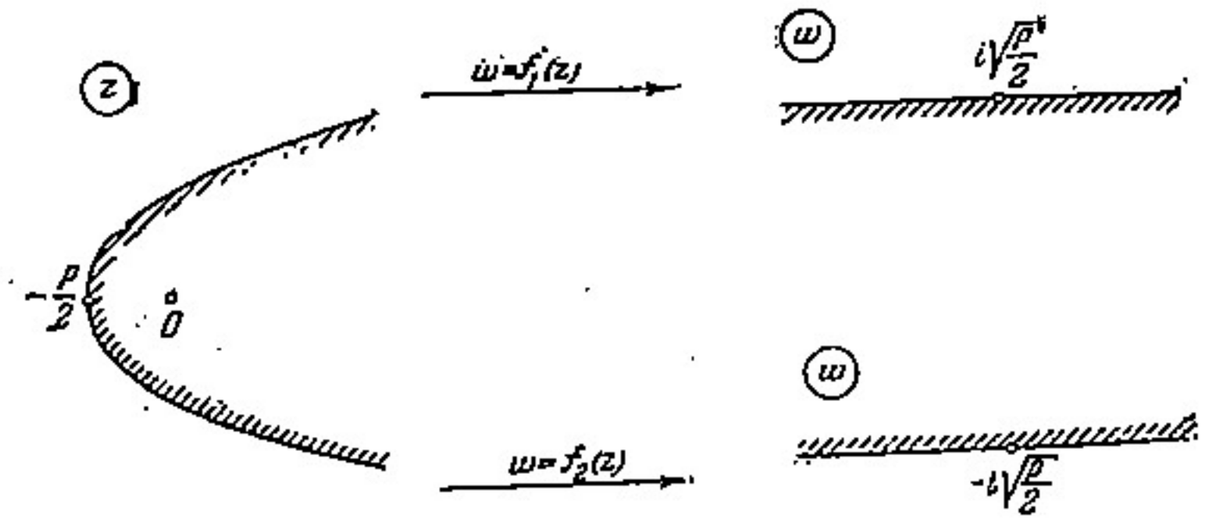
٢ ـ التابع $w = \sqrt{z}$. هذا التابع هو التابع المعاكس لـ $z = w^2$. وقد وجدنا

أن التابع $\sqrt{z}$ تحليلي في المستوي العقدي C الموخرذ في النقطتين $z=0$ و $z=\infty$ وأنه في المستوي C باستثناء قطع يصل النقطتين $z=0$ ، $z=\infty$ يتجزأ إلى فرعين .

مثال (١) . لتكن D هي المستوي العقدي C باستثناء القطع على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي $[0,\infty)$. في هذه الساحة يكون لدينا الفرعين الوحيدي التعيين والتحليليين $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ والمرتبطين بالعلاقة $f_2(z)=-f_1(z)$ حيث $f_1(x+i0)=\sqrt{x}>0$ من أجل $x>0$. أي أن التابع $f_1(z)$ يأخذ قيماً موجبة على ضفة القطع العليا . ويكون التابع $w=f_1(z)$ تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} w>0$. وأما التابع $w=f_2(z)$ فإن تطبيق متماثل لـ D على نصف المستوي السفلي $\operatorname{Im} w<0$.

مثال (٢) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطع الممتد على طول النصف السالب من المحور الحقيقي $[0,-\infty)$. في هذه الساحة يتعرف لدينا فرعان وحيدا التعيين وتحليليان للتابع $\sqrt{z}$: $f_1(z)$ و $f_2(z)$ حيث $f_2(z)=-f_1(z)$ و $f_1(1)=1$. إن التابع $w=f_1(z)$ يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي $\operatorname{Re} w>0$. وأما التابع $w=f_2(z)$ فيحقق تطبيقاً متماثلاً لـ D على نصف المستوي $\operatorname{Re} w<0$.

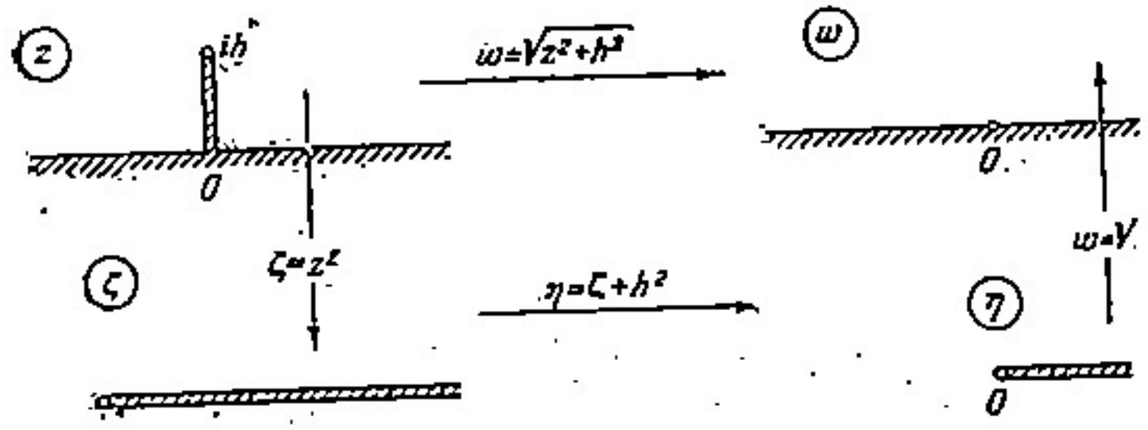
مثال (٣) . لتكن D هي الساحة خارج القطع المكافىء $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ حيث $p>0$ و $z=x+iy$ أي الساحة $y^2>2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ الشكل (٥٤) .



الشكل (٥٤)

في هذه الساحة يكون لدينا الفرعان $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ للتابع $\sqrt{z}$ حيث $f_2(z)=-f_1(z)$ و $f_1\left(-\frac{p}{2}\right)=i\sqrt{p/2}$. إن التابع $w=f_1(z)$ يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي $\operatorname{Im} w>\sqrt{p/2}$. وأما التابع $w=f_2(z)$ فيحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي $\operatorname{Im} w<-\sqrt{p/2}$.

مثال (٤) . لتكن الساحة D هي نصف المستوي $\operatorname{Im} z>0$ باستثناء القطع الممتد على المجال $[0,ih]$ ، $h>0$ الشكل (٥٥) . أوجد التابع الذي يحقق تطبيقاً متماثلاً لهذه الساحة على نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} w>0$.



الشكل (٥٥)

١°) إن التابع $w=z^2$ يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على الساحة D_1 وهي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[-h^2,+\infty)$.

٢°) التابع $\eta=\zeta+h^2$ (انسحاب) يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D_1 على الساحة D_2 وهي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[0,+\infty)$.

٣°) التابع $w=\sqrt{\eta}$ (الفرع الذي يأخذ قيماً موجبة على ضفة القطع العليا) يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D_2 على نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} w>0$. وبتركيب التحويلات نجد $w=\sqrt{z^2+h^2}$.

٣ — التابع $w=z^\alpha$ حيث α عدد حقيقي موجب . ونقصد بذلك التابع

$$z^\alpha=|z|^\alpha e^{i\arg z} \qquad (5)$$

المعرف في القطاع $0 < \arg z < 2\pi$. إن هذا التابع وحيد التعيين وتحليلي وهو تطبيق متماثل للقطاع $0 < \arg z < \beta < 2\pi$ حيث $\beta \leqslant (2\pi/\alpha)$ على القطاع $0 < \arg w < \alpha\beta$.

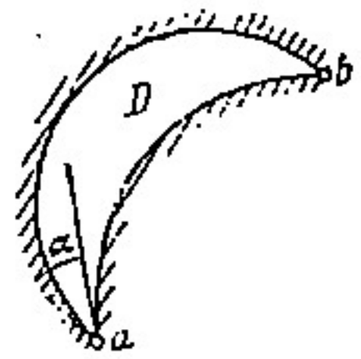
مثال (٥) . لتكن D هي الساحة المحدودة بتقاطع دائرتين في النقطتين a , b والزاوية بينهما α ، الشكل (٥٦) . تسمى هذه الساحة قمير . لنبين أنه بشكل دائم يمكن تطبيق القمير على نصف المستوي العلوي بشكل متماثل . لنأخذ التابع الكسري — الخطي $\zeta = \dfrac{z-a}{z-b}$ والذي من أجله $\zeta(a) = 0$, $\zeta(b) = \infty$. إن هذا التطبيق ينقل قوسي الدائرتين المحددين للساحة D إلى نصفي مستقيمين منبعثين من النقطة $\zeta = 0$ ، والزاوية بينهما تساوي α . بالتالي فإن صورة الساحة D هي الزاوية

$$\beta < \arg \zeta < \beta + \alpha$$

حيث β عدد ما . لنأخذ بعد ذلك التحويل $\eta = e^{-i\beta}\zeta$ (دوران) ونحصل بنتيجة ذلك على الصورة $0 < \arg \eta < \alpha$ والتي يمكن تطبيقها على نصف المستوي العلوي بواسطة التطبيق $w = \eta^{(\pi/\alpha)}$ وبالتالي فإن التابع

$$w = \left(\frac{z-a}{z-b}e^{-i\beta}\right)^{\pi/\alpha}$$

يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي العلوي .



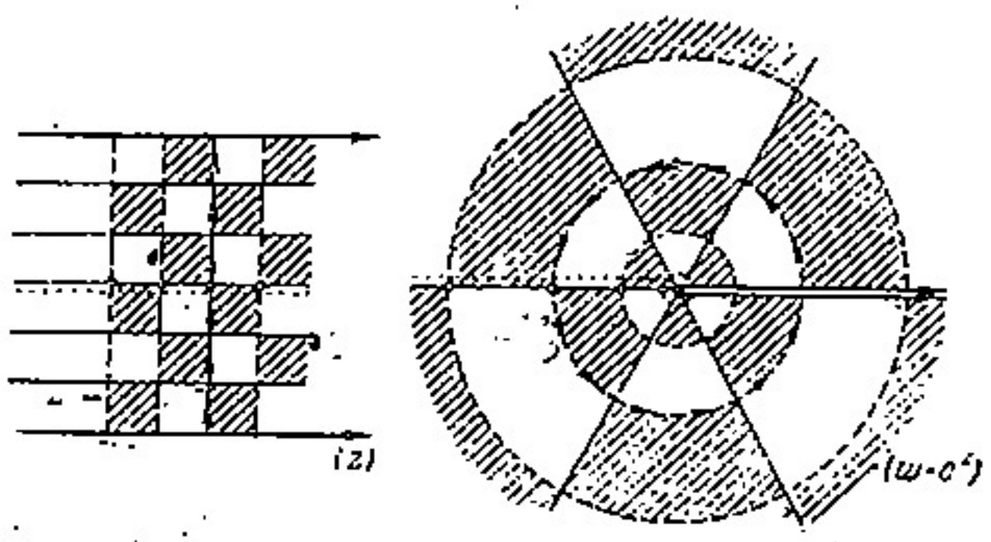
الشكل (٥٦)

٤ — التابع النيبري $w = e^z$. وجدنا أن هذا التابع وحيد التعيين وتحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي ، وأنه وحيد الصفحة فقط وفقط في ساحات لاتحتوي على نقاط z_1 و z_2 من أجلها $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ حيث $k = \mp 1, \mp 2, \ldots$. وكمثال على ساحة من

هذا النوع نأخذ الشريط $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. لنضع $z = x + iy$ و $w = e^{i\psi}$ فنجد

$$\rho = e^x \quad , \quad \psi = y \tag{6}$$

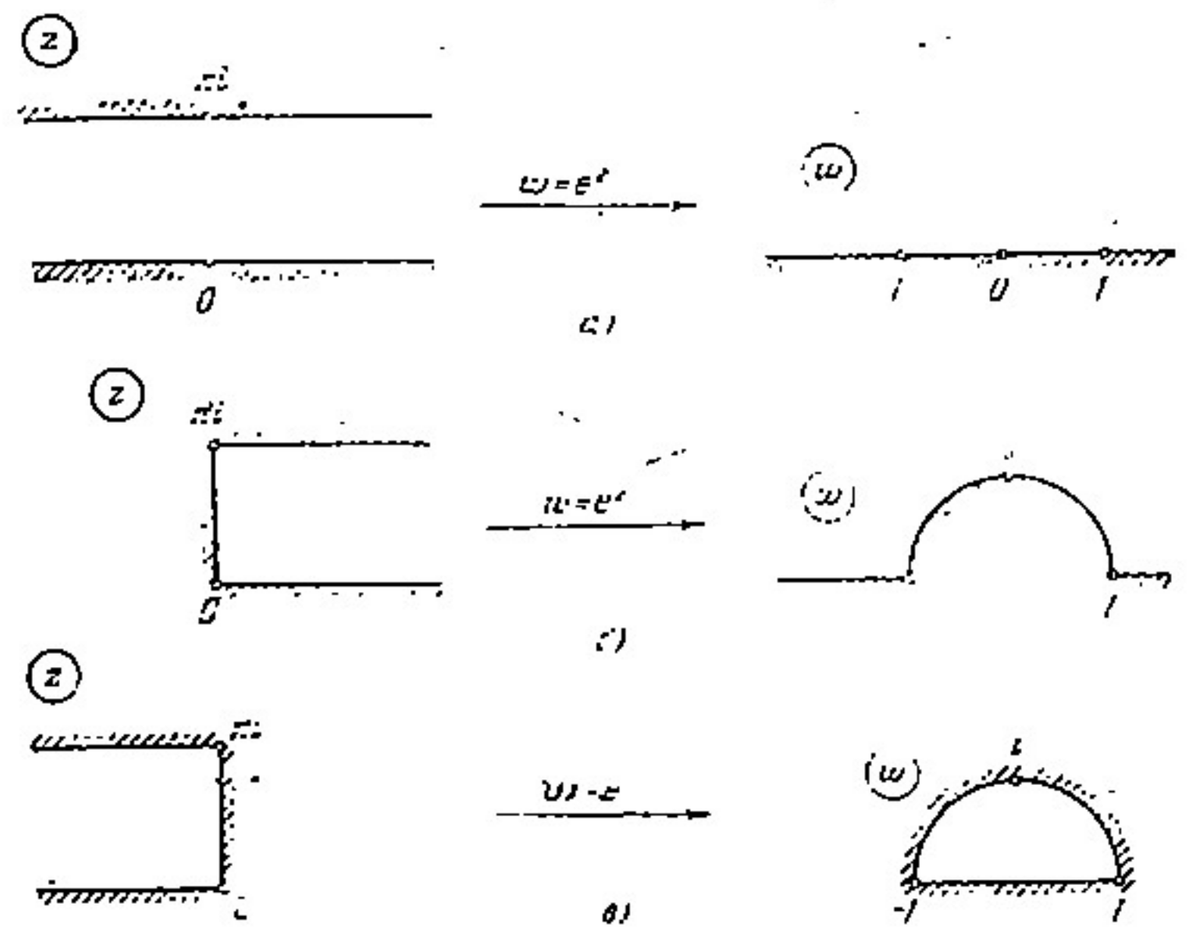
من الواضح أن التطبيق $w = e^z$ ينقل المستقيمات $\{y = y_0\}$ إلى أنصاف المستقيمات المنبعثة من مبدأ الاحداثيات $\{\psi = y_0\}$ كما أنه ينقل المجالات $\{x = x_0 \text{ و } 0 < y < 2\pi\}$ إلى دوائر موخوذة في النقطة $\{\rho = e^x, 0 < \psi < 2\pi\}$. انظر الشكل (٥٧) .



الشكل (٥٧)

وأما صورة الشريط $\{0 < y < 2\pi\}$ فتكون المستوي العقدي w باستثناء قطع على طول القسم الموجب $[0,\infty)$ من المحور الحقيقي . بينما تكون صورة الشريط $\{\pi > y > 0\}$ هي نصف المستوي العلوي $0 < \operatorname{Im} w$

مثال (٦) . من الخواص المذكورة أعلاه ينتج أن التابع $w = e^z$ يطبق بشكل متماثل المستطيل $\{c_1 < \operatorname{Re} z < c_2 \ , \ a < \operatorname{Im} z < b\}$ حيث $-\infty \leqslant c_1 < c_2 \leqslant +\infty$ و $b - a \leqslant 2\pi$ إلى جزء الحلقة $\{e^{c_1} < |w| < e^{c_2}, a < \arg w < b\}$. في الشكل (٥٨) يجد الطالب صور بعض الساحات بواسطة هذا التابع .



الشكل (٥٨)

٥ – التابع اللوغاريتمي $w = \mathrm{Ln}\, z$. إن هذا التابع هو التابع المعاكس للتابع $z = e^w$. وقد وجدنا أن التابع اللوغاريتمي تابع تحليلي في المستوي العقدي C الموخوذ في النقطتين $z = 0, z = \infty$ وأنه في المستوي C باستثناء قطع يصل النقطتين $z = 0, z = \infty$ يمكن فصل عدد لانهائي من الفروع الوحيدة التعيين والتحليلية للتابع اللوغاريتمي . لنستعرض هنا بعض التطبيقات المتماثلة لساحات D بواسطة التابع اللوغاريتمي .

مثال (٧) . لتكن D هي المستوي العقدي C باستثناء القطع على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي $[0, +\infty)$. في هذه الساحة تكون لدينا الفروع الوحيدة التعيين .

$$(\mathrm{Ln} z)_k = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

حيث $0 < \arg z < 2\pi$. إن التابع $w = (\mathrm{Ln} w)_k$ يطبق بشكل متماثل الساحة D على الشريط $\{2k\pi < \mathrm{Im}\, w < (k+1)\pi\}$.

مثال (٨) . التابع $w = \ln z$ حيث $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ و $0 < \arg z < \alpha$ يطبق بشكل متماثل القطاع $\{0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi\}$ على الشريط $\{0 < \mathrm{Im}\, w < \alpha\}$.

٦ – تابع جوكوفسكي . يسمى التابع

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{7}$$

بتابع جوكوفسكي . إن هذا التابع وحيد التعيين وتحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقطتين $z = 0, z = \infty$ ، كما أن مشتقه هو $w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ ، وهو مغاير للصفر في جميع النقاط باستثناء النقطتين $z = \pm 1$; $w'(\pm 1) = 0$. وبالتالي فإن تابع جوكوفسكي وحيد الصفحة في جميع النقاط $z \neq \pm 1$. ولنبرهن الآن الخاصة التالية لهذا التابع .

١°) وحدانيه الصفحة . إن تابع جوكوفسكي وحيد الصفحة في أية ساحة D فقط وفقط اذا لم تحتو D على نقطتين مختلفتين z_1, z_2 ومرتبطتين بالعلاقة $z_1 z_2 = 1$.

في الحقيقة ليكن $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$ ، وعندئذ يكون

$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$ وبالتالي فإما $z_1 = z_2$ أو $z_1 z_2 = 1$. إن العلاقة $z_1 z_2 = 1$ تعني هندسياً أن النقطة $z_2 = 1/z_1$ تنتج من النقطة z_1 بتناظر مضاعف : أولاً بالنسبة للدائرة $\{|z| = 1\}$ ومن ثم بالنسبة للمستقيم $\{\mathrm{Im}\, z = 0\}$. وبالتالي فإن تابع جوكوفسكي وحيد الصفحة في ساحة ما فقط وفقط عندما لاتحتوي تلك الساحة على زوج من النقاط المختلفة والتي تنتج احداها من الأخرى بتناظر مضاعف : بالنسبة لدائرة الوحدة والمحور الحقيقي .

مثال (٩) . إن تابع جوكوفسكي $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ وحيد الصفحة في أي من الساحات الآتية

١) $\{1 < |z|\}$ خارج دائرة الوحدة .

٢) $\{1 > |z|\}$ داخل دائرة الوحدة .

٣) $\{0 < \mathrm{Im}\, z\}$ نصف المستوي العلوي .

٤) $\{0 > \mathrm{Im}\, z\}$ نصف المستوي السفلي .

ملاحظة . لتكن الباحة $\widetilde{D}$ هي الساحة المشكلة من النقاط $1/z$ حيث $z \ni D$ عندئذٍ يكون تابع جوكوفسكي وحيد الصفحة في الساحة D فقط وفقط إذا لم تحتويا D و $\widetilde{D}$ على نقاط مشتركة ؛ إذ أنه بواسطة التطبيق $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ يكون للساحتين D و $\widetilde{D}$ نفس الصورة وذلك لأن $w(z) = w\left(\frac{1}{z}\right)$.

٢°) صور الدوائر والأشعة . لنوجد صور الدوائر $\{|z| = \rho\}$ وصور الأشعة $\{\arg z = \alpha\}$ (شبكة احداثيات قطبية) بواسطة تابع جوكوفسكي . بوضع $z = r\,e^{i\varphi}$ و $w = u + iv$ في العلاقة (7) نجد

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$$

وبفصل القسمين الحقيقي والتخيلي نجد

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \quad , \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \qquad (8)$$

لنأخذ الدائرة

$$z = \rho\,e^{i\varphi} \quad , \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \ ; \ \text{ثابت} \ \rho > 0) \qquad (9)$$

من العلاقة (8) نجد أن صورة الدائرة (9) بواسطة تابع جوكوفسكي هي القطع الناقص

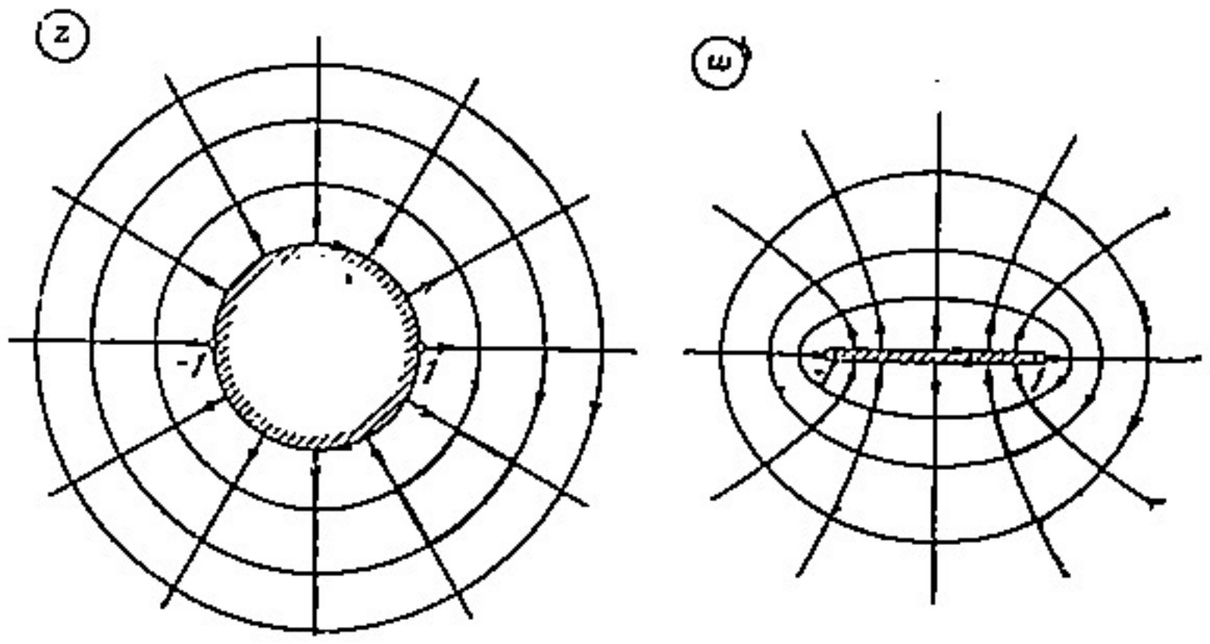
$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi \quad , \quad v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad (10)$$

والذي نصفا قطريه هما $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ و $b_\rho = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|$ ومحرقاه هما $w = \pm 1$ (لأن $a^2_\rho - b^2_\rho = 1$) . وبحذف الوسيط φ في المعادلتين (10) ومن أجل $\rho \neq 1$ نجد المعادلة النظامية للقطع الناقص

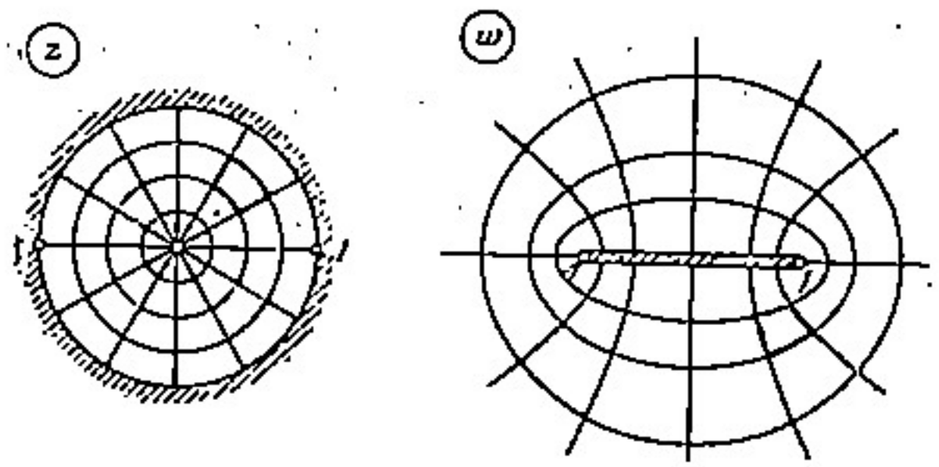
$$\frac{u^2}{a_\rho{}^2} + \frac{v^2}{b_\rho{}^2} = 1 \qquad (11)$$

نلاحظ أنه باستبدال ρ بـ $\frac{1}{\rho}$ $(\rho \neq 1)$ يبقى القطع الناقص على حاله إلا أن الاتجاه عليه ينعكس . الشكل (٥٩) يبين صور الدوائر $\{|z| = \rho\}$ الموجهة وفق دوران عقارب الساعة وهي القطوع الناقصة الموجهة أيضاً، تبعاً لـ (10) و (11) وفق دوران عقارب الساعة . كما أن الشكل (٦٠) يبين أن صور الدوائر $\{|z| = \rho \ , \ 0 < \rho < 1\}$ الموجهة

وفق دوران عقارب الساعة تكون القطوع الناقصة (11) الموجهة بعكس دوران عقارب الساعة . وبالعكس .



الشكل (٥٩)



الشكل (٦٠)

ومن أجل $\rho = 1$ يؤول القطع الناقص (10) إلى المجال $[1 + , 1 -]$ والذي يرسم مرتين. أي أن صورة الدائرة $|z| = 1$ تكون المجال $[1 + , 1 -]$ المرسوم مرتين الشكل (٥٩) الشكل (٦٠) . لنأخذ الآن الأشعة

$$z = r\,e^{i\alpha} \quad , \quad (0 \leqslant r < 1 \ ; \ \alpha \ \text{ثابت})$$

وسنقتصر على دراسة ما داخل دائرة الوحدة $\{|z| < 1\}$ وذلك استناداً للملاحظة المذكورة أعلاه . إن صورة هذا الشعاع بواسطة تابع جوكوفسكي هي المنحني (انظر العلاقة (8)) :

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha \quad , \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha \quad 0 \leqslant r < 1 \quad (13)$$

ومن هذه العلاقة واضح بأن صورتي نصفي قطرين متناظرين بالنسبة للمحور الحقيقي تكون متناظرتين بالنسبة للمحور الحقيقي (إذا كان أحد نصفي القطرين موافقاً للزاوية α فإن الثاني يوافق القيمة $-\alpha$ ، كما أن صورتي نصفي قطرين متناظرين بالنسبة للمحور التخيلي (إذا وافق أحدهما القيمة α فإن الآخر يوافق القيمة $\pi-\alpha$) تكونان متناظرتين بالنسبة للمحور التخيلي . تبعاً لذلك يكفي إيجاد صور أنصاف الأقطار الواقعة في الربع الأول $0 \leqslant \alpha \leqslant (\pi/2)$. لنلاحظ بأنه إذا كانت $\alpha = 0$ فإن :

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad , \quad v = 0 \quad ; \quad (0 \leqslant r < 1)$$

وهو نصف مجال من المحور الحقيقي $1 < u \leqslant \infty$. إن نصف المجال النظير وهو : $-\infty \leqslant u < 1$ يكون صورة نصف القطر الموافق لـ $\alpha = \pi$. وأما إذا كانت $\alpha = \pi/2$ فإنه يكون لدينا

$$u = 0 \quad , \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right) \quad 0 \leqslant r < 1$$

وهو نصف المحور التخيلي : $0 > v \geqslant -\infty$. وأما النصف الثاني من المحور التخيلي $0 < v \leqslant \infty$ فهوة صورة نصف القطر الموافق للقيمة $\alpha = -\pi/2$. وفقاً لذلك تكون صورة قطر دائرة الوحدة الأفقي هي المجال اللانهائي من المحور الحقيقي الواصل النقطة (-1) بالنقطة $(+1)$ من خلال اللانهاية . وأما صورة القطر الشاقولي فهي المحور التخيلي باستثناء مبدأ الاحداثيات .

لنفرض الآن أن $0 < \alpha < (\pi/2)$. عندئذٍ وبحذف الوسيط r في العلاقتين (13) نجد

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1 \quad (14)$$

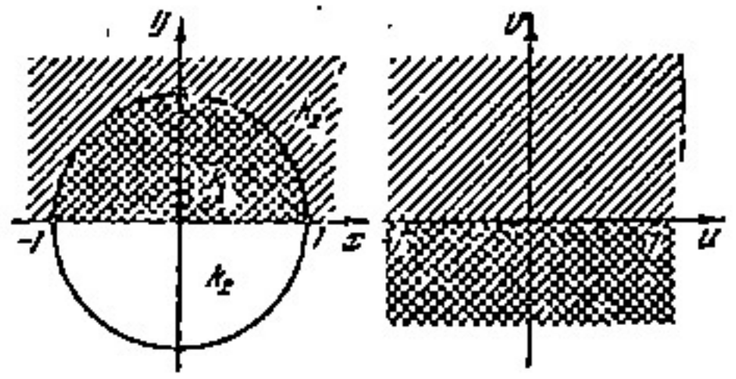
وهو قطع زائد نصفا قطريه هما $a = \cos\alpha \, , \, b = \sin\alpha$ ومحرقاه هما $w = \pm 1$ ومستقيماه المقاربان هما $v = \pm u\,\mathrm{tg}\,\alpha$. إن النقطة w لاترسم هذا القطع بأكمله وذلك

عندما ترسم النقطة z نصف القطر $z = re^{i\alpha}$ حيث $0 \leqslant r < 1$. في الواقع من المعادلتين (13) واضح بأنه عندما يتزايد r من 0 إلى (1) فإن u يتناقص من ∞ حتى $\cos\alpha$ ، بينما يتزايد v من $(-\infty)$ حتى الصفر وبالتالي بإن النقطة w ترسم ولمرة واحدة فقط ربع القطع الزائد الواقع في الربع الرابع . واستناداً لما ذكرنا أعلاه يكون ربع القطع الواقع في الربع الأول ، أي نظير الربع السابق بالنسبة للمحور الحقيقي هو صورة نصف القطر الموافق للقيمة $(-\alpha)$. ولنلاحظ بأنه لايمكننا اعتبار فرع القطع الزائد الأيمن صورة نصفي القطرين المتناظرين بالنسبة للمحور الحقيقي وذلك لأن ذروة القطع $(u=a \, , \, v=0)$ (لاتنتمي إلى تلك الصورة . وإنما هي صورة من محيط الدائرة $|z| = 1$. كما ونجد أن صورتي نصفي القطرين الموافقين للقيمتين $(\pi-\alpha)$ و $(\pi+\alpha)$ و $(\alpha-\pi)$ تكونان ربعي القطع الزائد الواقعين في الربعين الثالث والثاني . وهكذا يكون القطع الزائد باستثناء ذروتيه صورة أنصاف الأقطار الأربعة الموافقة للقيم $\pi \pm \alpha \, , \pm \alpha$. ولنلاحظ أن صورة كل قطر في الدائرة $|z| = 1$ مشكل من نصفي قطرين موافقين من أنصاف الأقطار المذكورة تكون جزء القطع الزائد المشكل من الربعين المتناظرين بالنسبة لمبدأ الاحداثيات والمتصلين ببعضهما عن طريق نقطة اللانهاية .

وفقاً لما ذكرنا أعلاه نستخلص بأن التابع $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ هو تطبيق متماثل لداخل دائرة الوحدة (أو لخارجها) على المستوى العقدي باستثناء القطع الممتد على طول المجال $[-1, +1]$ من المحور الحقيقي $(-1 \leqslant u \leqslant +1)$ وتكون صورة الدائرة $|z| = r$ هي القطع الناقص ذي المحرقين ± 1 ونصفي القطرين $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{r} \pm r\right|$. وتكون صورة القطرين المتناظرين بالنسبة للمحورين الإحداثيين والمشكلين من أنصاف الأقطار $z = re^{i\alpha}$ حيث $0 \leqslant r < 1$ هي القطع الزائد ذي المحرقين ونصفي القطرين $|\cos\alpha|$ ، $|\sin\alpha|$ باستثناء ذروتي القطع . وبما أن التطبيق متماثل فإن القطوع الناقصة والقطوع الزائدة تكون متعامدة .

من المفيد ملاحظة أن تابع جوكوفسكي يطبق نصف الدائرة الواقع في نصف المستوي العلوي $k_1 : \{|z| < 1 \, ; \, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ على نصف المستوي السفلي w كما يطبق نصف الدائرة $k_2 : \{|z| < 1 \, , \, \mathrm{Im}\, z < 0\}$ الواقع في نصف المستوي السفلي على نصف

المستوي العلوي w . وبما أن $w(z) = w\left(\frac{1}{z}\right)$ فإن تابع جوكوفسكي يأخذ في النقاط $z \ni k_2$ نفس القيم التي يأخذها في النقاط المنتمية إلى نصف المستوي العلوي والواقعة خارج k_1 فإذا رمزنا لمجموعة هذه النقاط بـ K_2 فإنه يمكننا التأكيد على أن صورة الساحة K_2 تكون نصف المستوي العلوي الشكل (٦١) .

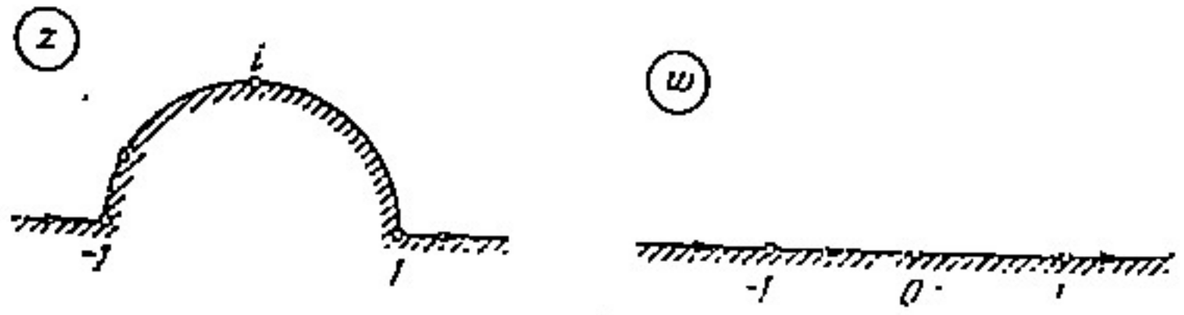


الشكل (٦١)

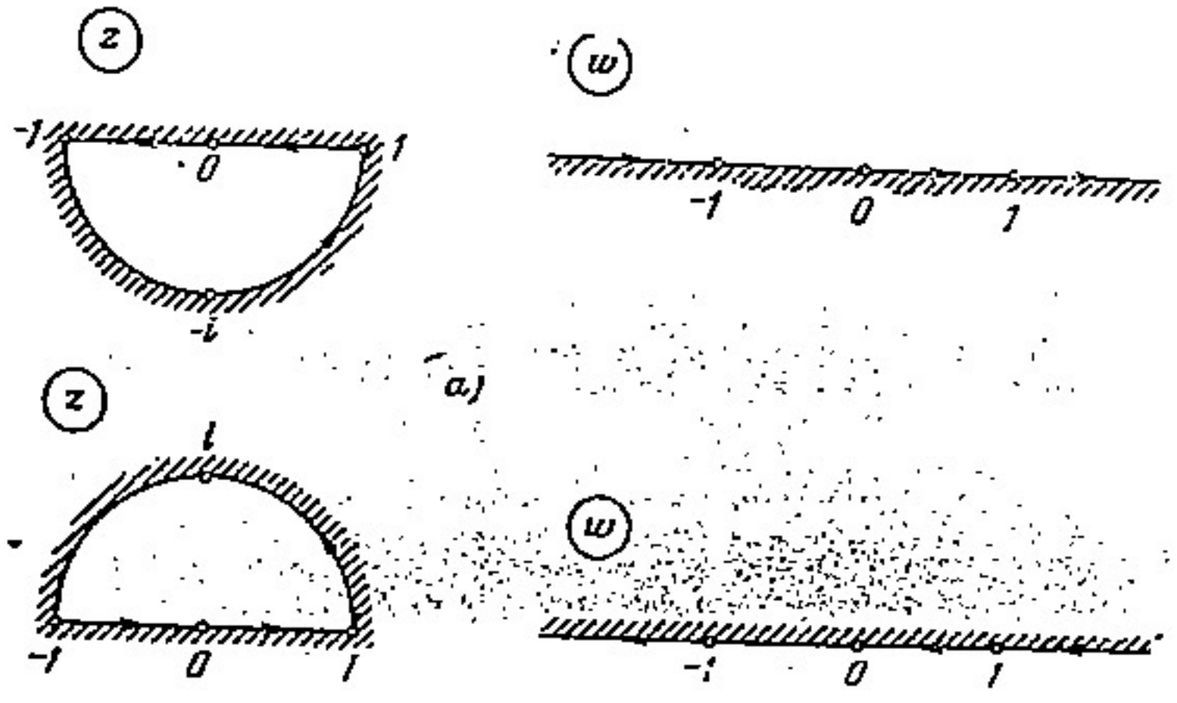
وبالأخذ بعين الاعتبار أن صورة نقاط محيط نصف الدائرة الفاصلة k_1 عن K_2 هي المجال $-1 < u < 1$ والمرسوم مرة واحدة ، نجد أن صورة نصف المستوي العلوي بواسطة تابع جوكوفسكي تتألف من نصف المستوي العلوي والسفلي وقطعة المجال الحقيقي $-1 < u < 1$ أي أنها جميع نقاط المستوي باستثناء القطع على طول المجال اللانهائي من المحور الحقيقي والواصل بين النقطتين -1 و $+1$ من خلال نقطة اللانهاية . وبسهولة يمكن التأكد من أن صورة المجال $[-1, -\infty]$ تكون الضفة العليا من القطع على طول المجال $[-1, -\infty]$ وصورة نصف المجال $[-1, 0]$ تكون الضفة السفلى من القطع على طول المجال $[-1, -\infty]$ وأما صورة المجال $[0, 1]$ فهي الضفة السفلى من القطع على طول المجال $[1, +\infty]$ وأخيراً تكون صورة المجال $[1, +\infty]$ هي الضفة العليا للقطع على طول المجال $[1, +\infty]$. الشكل (٦٢) .

الشكل (٦٢)

مما ذكرنا نستنتج أن تابع جوكوفسكي هو تطبيق متماثل أيضاً لنصف المستوي السفلي $\operatorname{Im} z < 0$ على المستوي w باستثناء القطع اللانهائي $[-1, -\infty]$ و القطع $[1, +\infty]$. غالباً ماتستخدم الحالات الخاصة التالية في التطبيقات العملية للتطبيق المتماثل .



الشكل (٦٣)



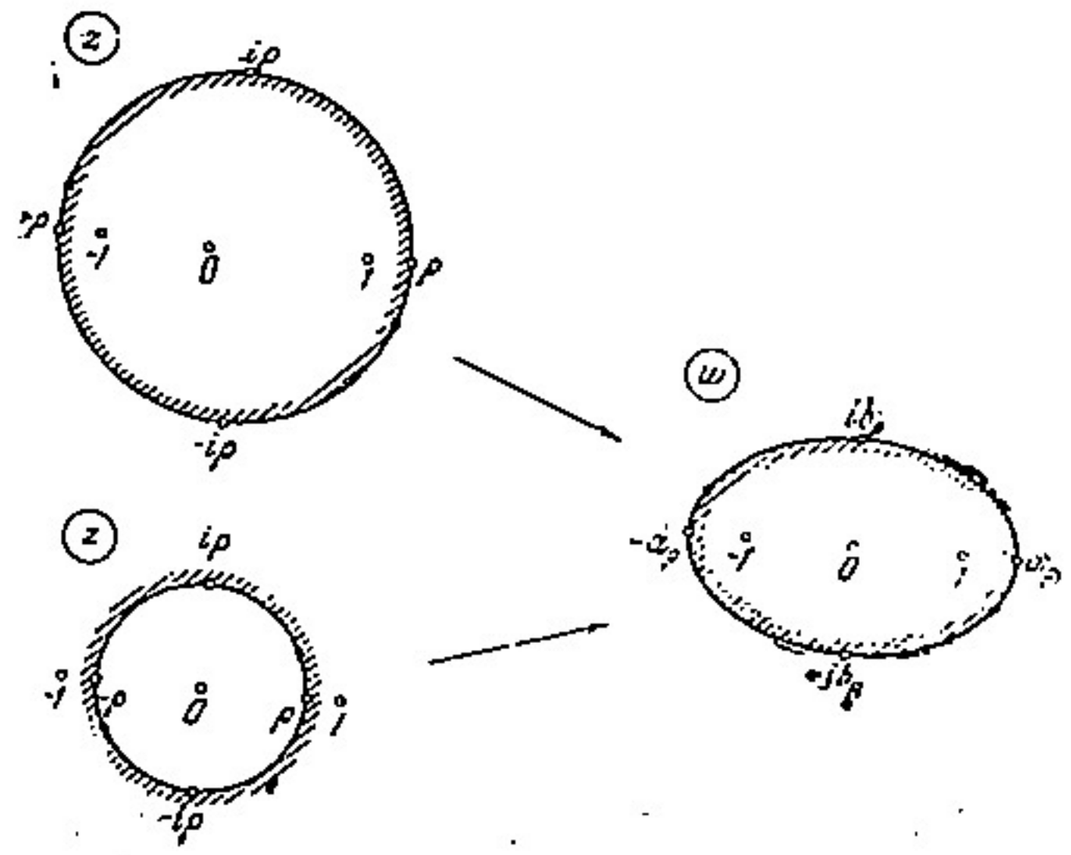
الشكل (٦٤)

مثال (١٠) . تابع جوكوفسكي $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ هو تطبيق متماثل :

١) للساحة $\{|z| > 1 \ , \ \operatorname{Im} z > 0\}$ على نصف المستوي العلوي الشكل (٦٣) .

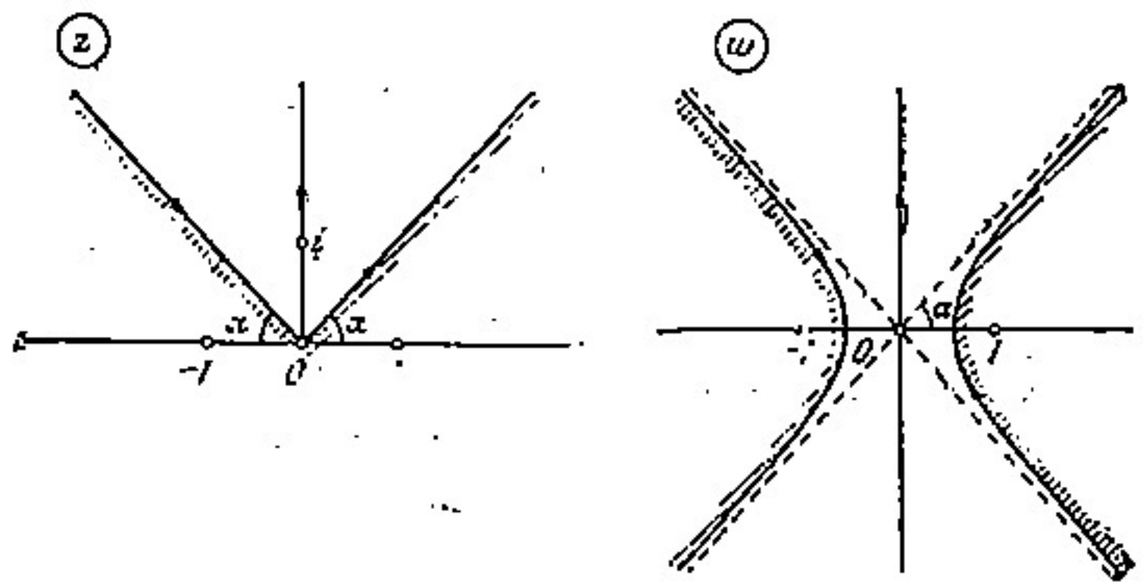
٢) لنصف الدائرة $\{|z| < 1 \ ; \ \operatorname{Im} z > 0\}$ ؛ الشكل (٦٤) على نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} w > 0$ ولنصف الدائرة $\{|z| < 1 \ , \ \operatorname{Im} z > 0\}$ الشكل (٦٤) على نصف المستوي السفلي $\operatorname{Im} w < 0$.

٣) للساحة $\{|z|>\rho>1\}$ على خارج القطع الناقص الشكل (٦٥) وللدائرة $\{|z|<\rho<1\}$ على خارج القطع الناقص الشكل (٦٥) .



الشكل (٦٥)

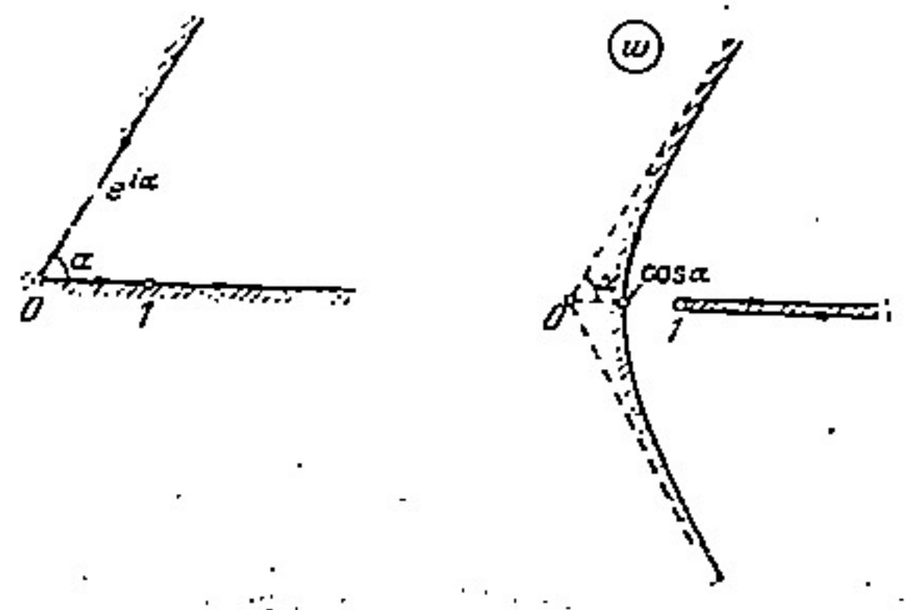
٤) للقطاع $\{\alpha<\arg z<\pi-\alpha \quad , \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$ على خارج القطع الزائد الشكل (٦٦) .



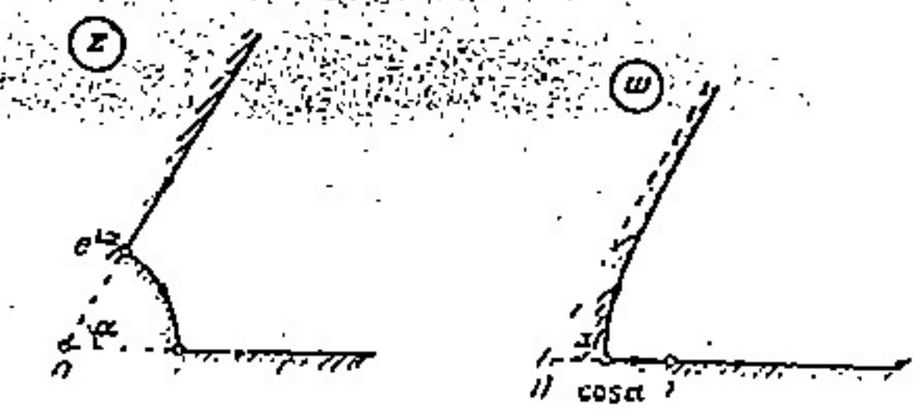
الشكل (٦٦)

٥) القطاع $\{0<\arg z<\alpha \quad ; \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$ على داخل فرع القطع الزائد الأيمن مع قطع على طول الشعاع $[1,+\infty)$ الشكل (٦٧) .

٦) القطاع $\{0<\arg z<\alpha \quad ; \quad 1<|z| \quad ; \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$ الشكل (٦٨) على الساحة $\left\{0<v \ , \ 0<u \ , \ 1<\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}\right\}$



الشكل (٦٧)



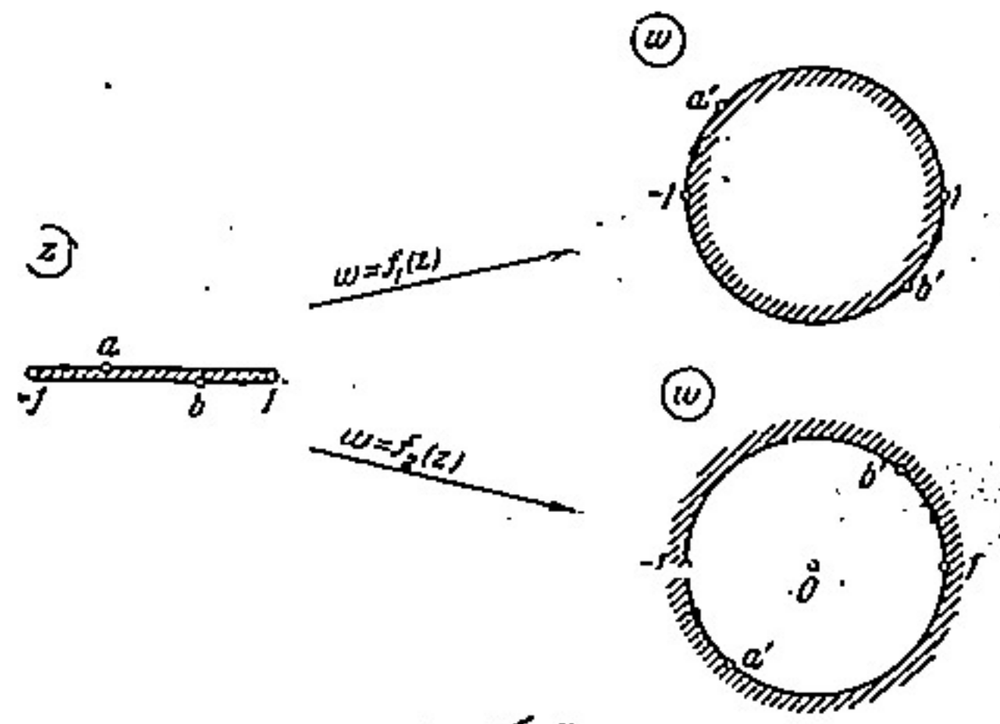
الشكل (٦٨)

٧ ـ التابع $w=z+\sqrt{z^2-1}$ **المعاكس لتابع جوكوفسكي** . بحل المعادلة $w=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ بالنسبة لـ z نجد $z=w+\sqrt{w^2-1}$. أي أن التابع

$$w=z+\sqrt{z^2-1} \tag{15}$$

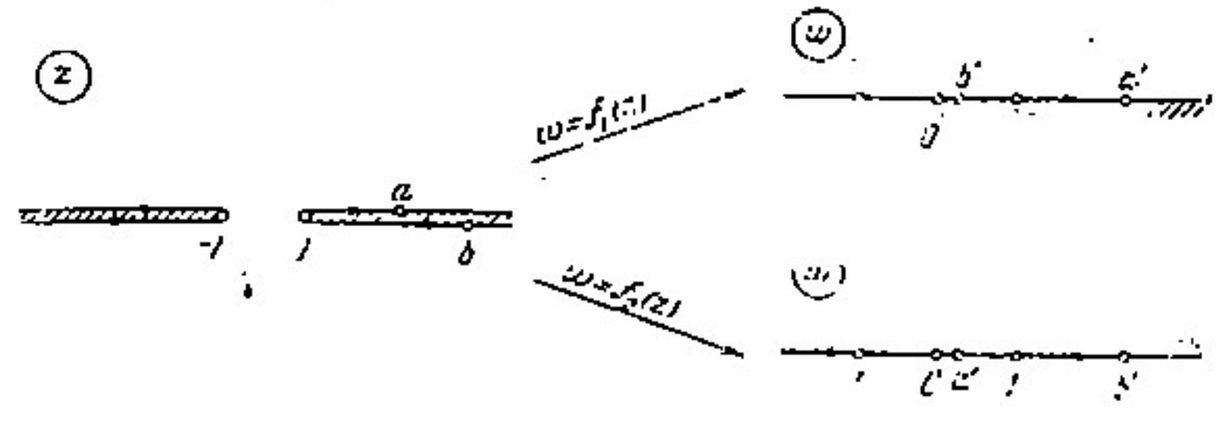
هو التابع المعاكس لتابع جوكوفسكي ، وبالتالي فإن التطبيق بواسطة هذا التابع يعاكس التطبيق بتابع جوكوفسكي . إن التابع (15) تحليلي في المستوي العقدي الموخوذ في النقطتين $z = \mp 1$ وفي الساحة D التي تمثل المستوي العقدي C باستثناء قطع يصل النقطتين $z = \overline{\mp 1}$ يمكن فصل فرعين وحيدي التعيين وتحليليين لهذا التابع .

مثال (١١) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي C باستثناء القطع على طول المجال $[-1, 1]$ الشكل (٦٩) . في هذه الساحة يمكن فصل فرعين وحيدي التعيين وتحليليين $f_1(z), f_2(z)$ للتابع $z + \sqrt{z^2 - 1}$ حيث $f_1(\infty) = \infty$ ، $f_2(\infty) = 0$. بسهولة نجد أن التابع $w = f_1(z)$ هو تطبيق متماثل للساحة D على خارج دائرة الوحدة وأما التابع $w = f_2(z)$ فهو تطبيق متماثل للساحة D على الدائرة $\{|w| < 1\}$.



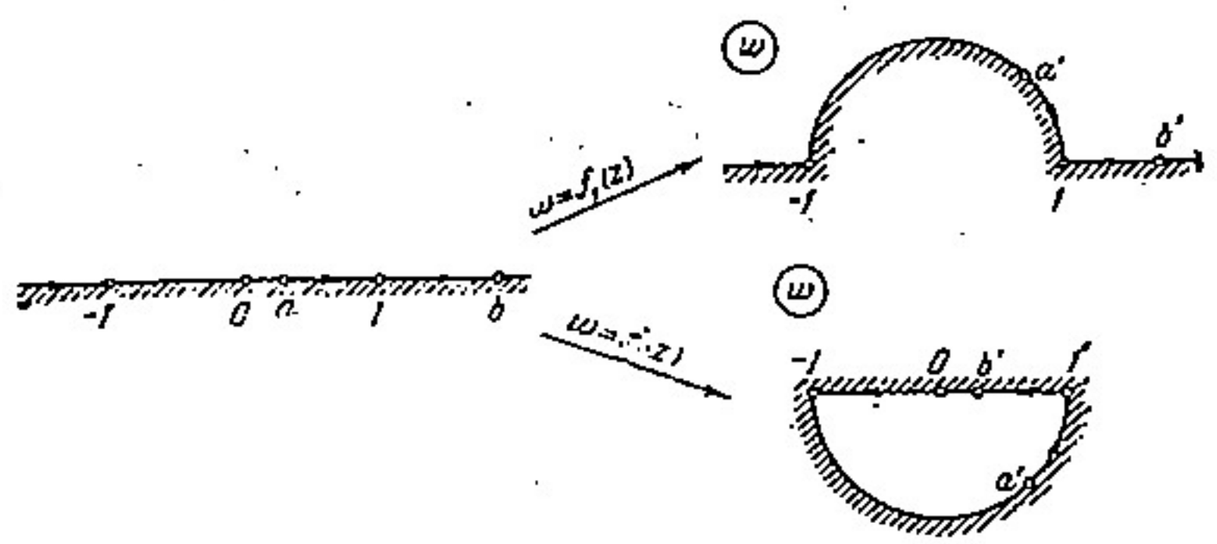
الشكل (٦٩)

مثال (١٢) . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي C باستثناء القطعين $(-\infty, -1]$ ، $[1, +\infty)$ الشكل (٧٠) . في هذه الساحة يمكن فصل فرعين وحيدي التعيين وتحليليين للتابع $z + \sqrt{z^2 - 1}$ هما $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ حيث $f_1(0) = i$ ، $f_2(0) = -i$ وبسهولة يمكن التأكد من أن التابع $w = f_1(z)$ هو تطبيق متماثل للساحة D على نصف المستوي العلوي وأما التابع $w = f_2(z)$ فهو تطبيق متماثل للساحة D على نصف المستوي السفلي $\{0 > \operatorname{Im} w\}$.



الشكل (٧٠)

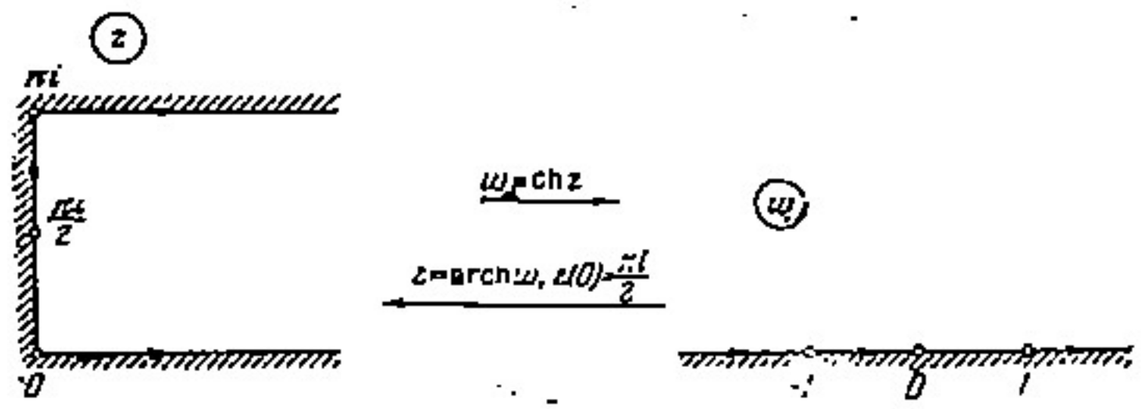
مثال (١٣) . في نصف المستوي العلوي $0 < \operatorname{Im} z$ يمكن فصل فرعين وحيدي التعيين وتحليليين $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ للتابع $z + \sqrt{z^2 - 1}$ حيث $f_1(0) = i$ ، $f_2(0) = -i$ وهما تطبيقان متماثلان لنصف المستوي العلوي على الساحتين المبينتين في الشكل (٧١) .



الشكل رقم (٧١)

٨ – التوابع المثلثية والقطعية . سنستعرض بعض الأمثلة على تطبيقات متماثلة بالتوابع المثلثية والتوابع القطعية .

مثال (١٤) . سنبين أن التابع $w = \operatorname{ch} z$ يطبق شكل متماثل نصف الشريط $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\ ,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} w\}$ الشكل (٧٢) .



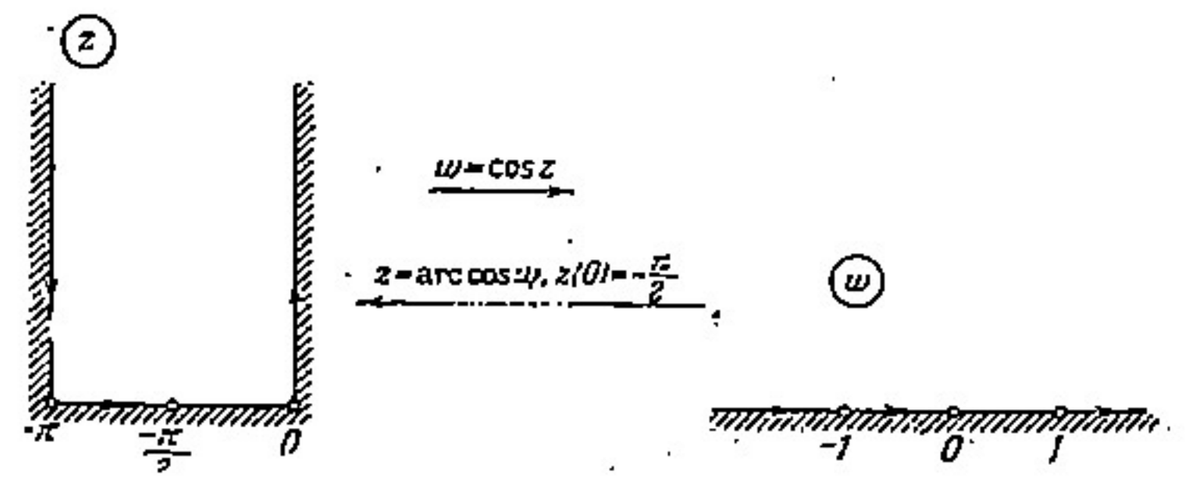
الشكل (٧٢)

في الحقيقة إن التابع $w = \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ هو تركيب التابعين

$$\zeta = e^z \quad , \quad w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

بنتيجة تطبيق التابع $\zeta = e^{-z}$. نحصل على الشكل (٥٨ ، b) ومن ثم وبواسطة التابع $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ نجد الشكل (٧٢) .

مثال (١٥) . سنبين أن التابع $w = \cos z$ يحقق تطبيقاً متماثلاً لنصف الشريط $\{0 < \operatorname{Im} z \ , \ -\pi < \operatorname{Re} z < 0\}$ على نصف المستوي العلوي $0 < \operatorname{Im} w$. الشكل(٧٣) .

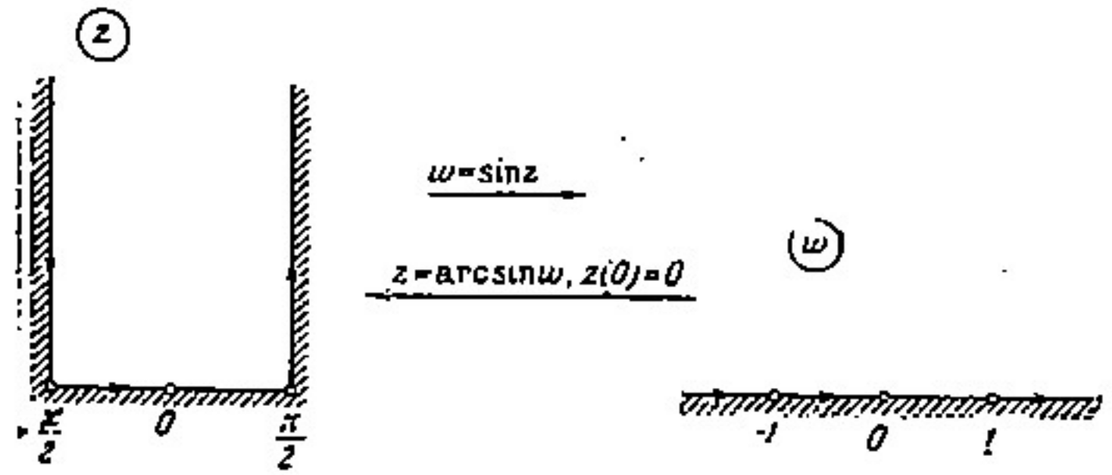


الشكل (٧٣)

في الحقيقة، لدينا $\cos z = \operatorname{ch}(-iz)$. نضع أولاً $\zeta = -iz$ (دوران حول

النقطة $z = 0$ مقداره $\pi/2$ —) ومن ثم نضع $w = \operatorname{ch} \zeta$ [الشكل (٧١)] فنجد الشكل (٧٣) .

مثال (١٦) . التابع $w = \sin z$ يحقق تطبيقاً متماثلاً لنصف الشريط $\left\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \ , \ \operatorname{Im} z > 0\right\}$ على نصف المستوي العلوي $0 < \operatorname{Im} w$ الشكل (٧٤) .



الشكل (٧٤)

بما أن $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ فإننا نجد بواسطة التطبيق $\zeta = z - \frac{\pi}{2}$ (انسحاب) الشكل (٧٣) ومن ثم وبواسطة التطبيق $w = \cos \zeta$ نحصل على الشكل(٧٤).

مثال (١٧) . سنبين أن التابع $w = \operatorname{tg} z$ يحقق تطبيقاً متماثلاً للشريط $\left\{-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$ على دائرة الوحدة $|w| < 1$. الشكل(٧٥) ولنلاحظ أن هذا التابع يحقق الشروط $\arg w'(0) = 0 \ , \ w(0) = 0$

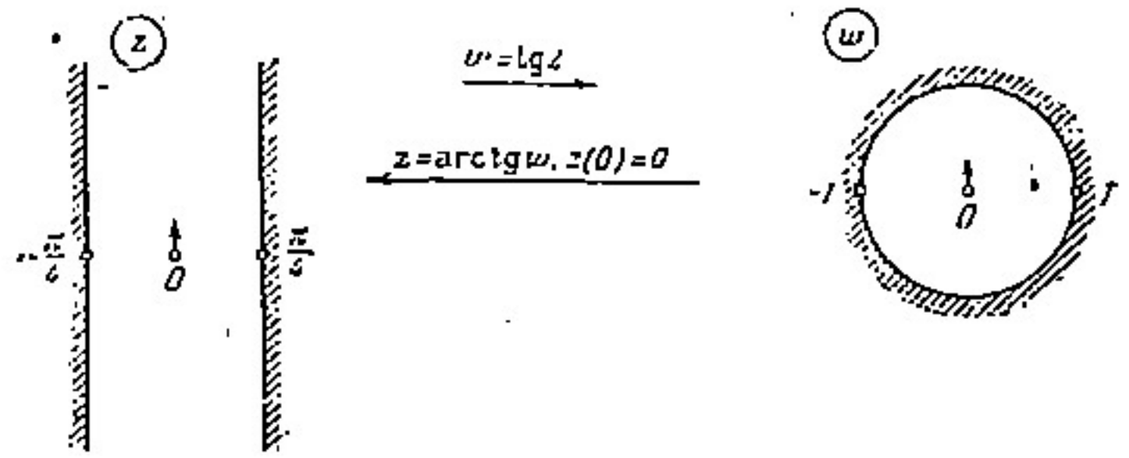
في الواقع ، وبما أن

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i)\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

فإنه يمكننا اعتبار التابع $w = \operatorname{tg} z$ تركيب للتحويلات الآتية

$$\zeta = 2iz \ , \ \eta = e^{\zeta} \qquad w = (-i)\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1}$$

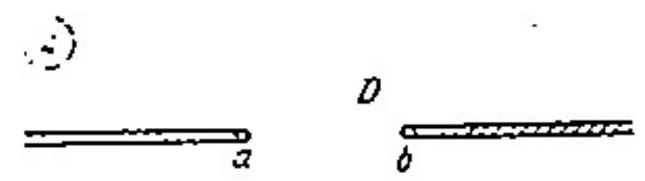
والتي ناتج تطبيقها على التوالي يعطينا الشكل المطلوب .



الشكل (٧٥)

٩ — **أمثلة متنوعة** . إن التطبيقات المتماثلة والمعروضة في الفقرتين السابقتين هي تطبيقات « جدولية » ، وبدلالتها يمكن إيجاد تطبيقات متماثلة أخرى لساحات بسيطة . في الأمثلة أدناه (١ — ٧) سنستعرض تطبيقات متماثلة $w = w(z)$ لساحة معلومة من المستوي z على نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} w > 0$.

مثال (١) . الساحة D هي المستوي العقدي z باستثناء القطعين على طول نصفي المستقيمين : $(-\infty , a]$ و $[b,+\infty)$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ الشكل (٧٦) .



الشكل (٧٦)

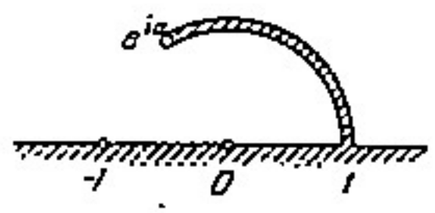
طريقة أولى . نجري أولاً التحويل $\zeta = \dfrac{z-b}{z-a}$ ثم نجري التحول $w = \sqrt{\zeta}$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فنحصل على الشكل المطاوب وبالتالي فإن التطبيق المنشود هو

$$w = \sqrt{\frac{z-b}{z-b}} \quad ; \quad w\left(\frac{a+b}{2}\right) = i$$

طريقة ثانية . بواسطة التطبيق الخطي $\zeta = \left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)\dfrac{2}{b-a}$

(انسحاب وتمديد) تكون صورة الساحة D هي المستوي العقدي ζ باستثناء القطعين $(-\infty , -1]$ ، $[1 , +\infty)$. وبتطبيق التابع المعاكس لتابع جوكوفسكي $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ حيث $w|_{\zeta=0} = i$ نجد المطلوب .

مثال (٢) . الساحة D هي نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} z > 0$ باستثناء القطع على طول القوس $\{|z| = 1 \ ; \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha \ ; \ 0 < \alpha < \pi\}$ الشكل (٧٧) .

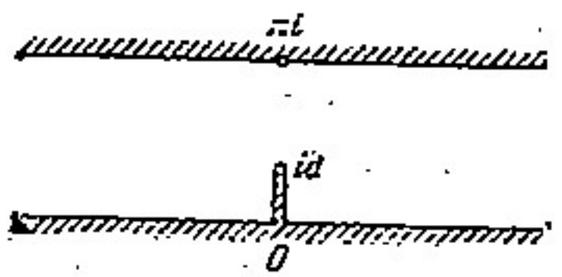


الشكل (٧٧)

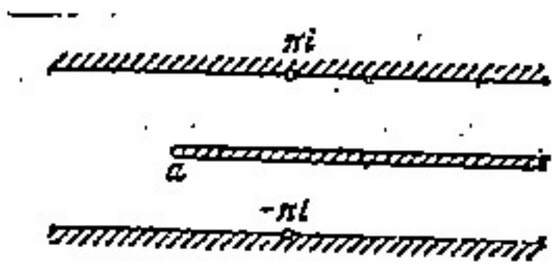
طريقة أولى . بواسطة التطبيق $\zeta = (z-1)/(z+1)$ نجد أن نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} z > 0$ ينتقل إلى نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im} \zeta > 0$ ، وأما القطع فينتقل إلى قطع على طول المجال $[0 , ih]$ حيث $h = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ وذلك لأن صورة النقطة 1 تكون الصفر وصورة النقطة 1 — هي ∞ ، وكما في المثال (٤) من البند السابق ، الشكل (٥٥) نجد $w = \sqrt{\zeta^2 + h^2}$ حيث $0 < w(x + 0i)$ من أجل $1 < x$.

طريقة ثانية . إن تابع جوكوفسكي يطبق الساحة D على المستوي ζ باستثناء القطعين على طول الشعاعين $(-\infty \ -1]$ ، $[\cos\alpha , +\infty)$ ونتابع الحل كما في المثال السابق (١) .

مثال (٣) . الساحة D هي الشريط $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0,id]$ حيث $0 < d < \pi$ الشكل (٧٨)



الشكل (٧٨)



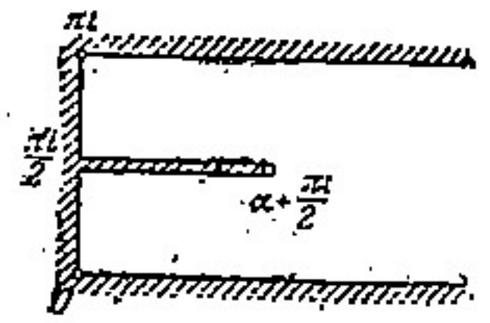
الشكل (٧٩)

إن التابع $\zeta = e^z$ يحقق تطبيقاً متماثلاً للساحة D على الساحةفي الشكل(٧٧) ونتابع الحل كما في المثال (٢) أعلاه .

مثال (٤) . الساحة D هي الشريط $\{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ باستثناء القطع على طول الشعاع $[a , +\infty)$ حيث a عدد حقيقي ، الشكل (٧٩) .

إن التابع $\zeta = e^z$ يعطينا تطبيقاً متماثلاً للساحة D على المستوي ζ باستثناء القطعين على طول المجالين : $[0 , -\infty]$ و $[e^a , +\infty]$ ولمتابعة الحل انظر المثال (١) .

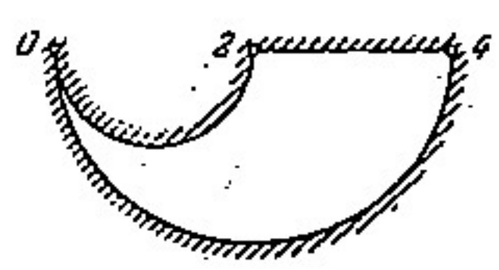
مثال (٥) . الساحة D هي نصف الشريط $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi \; ; \; 0 < \operatorname{Re} z\}$ باستثناء القطع على طول المجال $\left[\frac{\pi i}{2} , \frac{\alpha + \pi i}{2}\right]$ حيث $\alpha > 0$ الشكل (٨٠) .



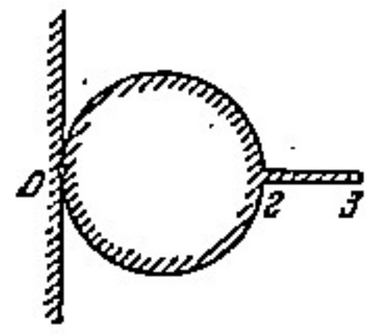
الشكل (٨٠)

إن التابع $\zeta = \operatorname{ch} z$ يعطينا تطبيقاً متماثلاً للساحة D على نصف المستوي $0 < \operatorname{Im} \zeta$ باستثناء القطع على طول المجال $[0 , i \operatorname{sh} \alpha]$ ، انظر المثال (١٤) . ولمتابعة الحل انظر المثال (٤) من البند السابق .

مثال (٦) . الساحة D هي $\{0 < \operatorname{Re} z \; ; \; 1 < |z-1|\}$ باستثناء القطع الممتد على طول المجال [2,3] الشكل (٨١ a) .



الشكل (٨١ b)



الشكل (٨١ a)

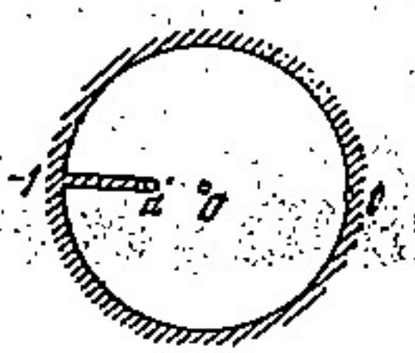
إن التابع $\zeta = 1/z$ يطبق الساحة D على الساحة D_1 وهي الشريط $\left\{0 < \operatorname{Re} \zeta < \frac{1}{2}\right\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[1/3 , 1/2]$. وبواسطة تابع خطي يمكننا نقل هذه الساحة إلى الساحة في الشكل (٧٧) ولمتابعة الحل انظر المثال (٣) أعلاه .

مثال (٧) . الساحة D هي $\{1 < |z-1| \; , \; |z-2| < 2 \; , \; 0 > \operatorname{Im} z\}$ الشكل (٨١ b) .

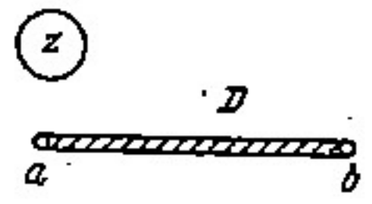
إن التابع $\zeta = 1/z$ يطبق الساحة D على الساحة D_1 وهي نصف الشريط $\{0 < \operatorname{Im} \zeta \; , \; 1/4 < \operatorname{Re} \zeta < 1/2\}$. وبواسطة تابع خطي يمكننا نقل هذه الساحة إلى الساحة في الشكل (٧٢) . ولمتابعة الحل انظر المثال (١٥) من البند السابق .

في الأمثلة التالية (٨ — ١١) سنستعرض تطبيقات متماثلة $w = w(z)$ لساحة معلومة في المستوي z على دائرة الوحدة $\{|w| < 1\}$.

مثال (٨) . الساحة D هي المستوي العقدي z باستثناء القطع $[a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ ، الشكل (٨٢) .



الشكل (٨٣)



الشكل (٨٢)

إن التابع الخطي $\zeta = \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{(b-a)}$ (انسحاب وتمديد يطبق) الساحة D على خارج المجال $[-1,1]$ وباستخدام التابع المعاكس لتابع جوكوفسكي $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ حيث $w(\infty) = 0$ نجد المطلوب .

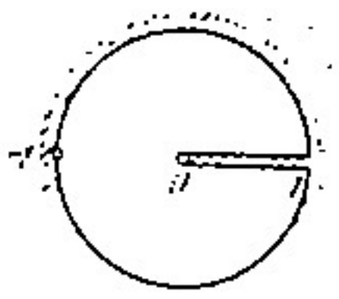
مثال (٩) . الساحة D هي $\{1 < |z|\}$ باستثناء القطع $[-1,a]$ حيث $-1 < a < 0$ الشكل (٨٣) .

باستخدام تابع جوكوفسكي $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ نجد أن صورة الساحة D تكون المستوي العقدي ζ باستثناء القطع $\left[1\ ,\ \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]$. انظر الشكل(٦٠) . ولمتابعة الحل انظر المثال رقم (٨) .

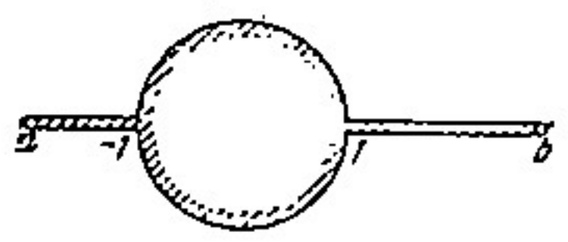
مثال (١٠) . الساحة D هي $\{|z| > 1\}$ باستثناء القطعين $[a\ ,\ -1]$ ، $[1\ ,\ b]$ حيث $1 < b < +\infty\ .\ -\infty < a < -1$ الشكل (٨٤) .

- باستخدام تابع جوكوفسكي $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ نجد أن صورة الساحة D هي خارج المجال $[a', b']$ حيث $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $b' = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$ ولمتابعة الحل انظر المثال (٨) .

مثال (١١) . الساحة D هي الدائرة $\{|z| < 1\}$ باستثناء القطع $[0,1]$ الشكل(٨٥) .



الشكل (٨٥)



الشكل (٨٤)

باستخدام تابع جوكوفسكي $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ نجد أن صورة الساحة D هي D_1 : المستوي العقدي ζ باستثناء القطع على طول المجال $[-1, +\infty)$ وبواسطة التابع $\eta = \sqrt{\zeta + 1}$ حيث $\eta|_{\zeta = -2i} = i$ نجد أن صورة الساحة الناتجة D_1 تكون نصف المستوي العلوي $\operatorname{Im}\eta > 0$ وبواسطة التطبيق الكسري الخطي $w = (\eta - i)/(\eta + i)$ نجد أن صورة نصف المستوي العلوي تكون الدائرة $\{|w| < 1\}$.

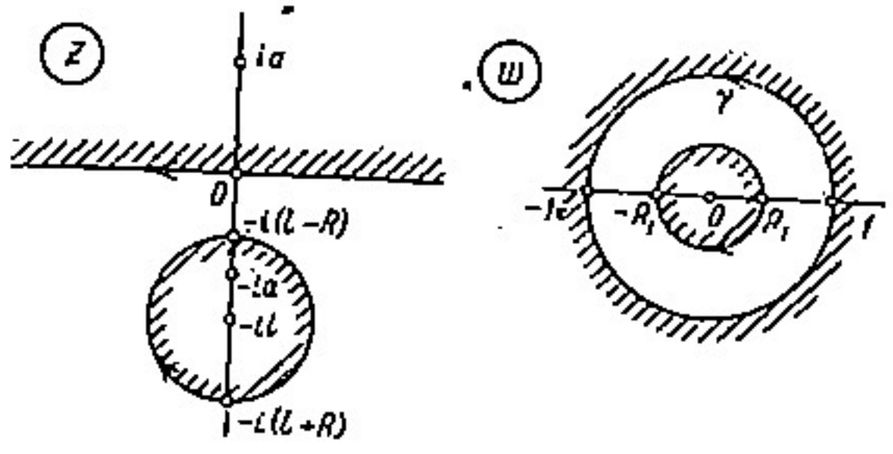
مثال (١٢) . لتكن الساحة D هي $\{|z + i/| > R\ ,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ حيث $0 < R < 1$ هذه الساحة تسمى حلقة لامركزية (المستقيم دائرة نصف قطرها ∞) والمطلوب إيجاد

التطبيق المتماثل لهذه الحلقة على حلقة مركزية . الشكل (٨٦) .

بغية هذا الأمر علينا إيجاد نقطتين متناظرتين في نفس الوقت بالنسبة للمستقيم $\{\operatorname{Im} z = 0\}$ وبالنسبة للدائرة $\{|z + i/| = R\}$. هاتان النقطتان يجب أن تقعا على العمود المشترك للمستقيم وللدائرة ؛ أي على المحور التخيلي . بنتيجة التناظر بالنسبة للمستقيم $(\operatorname{Im} z = 0)$ تكون هاتان النقطتان $\pm ia$ حيث $0 < a$ وبنتيجة التناظر بالنسبة للدائرة $|z + i/| - R$ نجد $(l + a)(l - a) = R^2$ ومنه يكون $a = \sqrt{l^2 - R^2}$. لنبرهن على أن التطبيق المطلوب هو

$$w = \frac{z + ia}{z - ia}$$

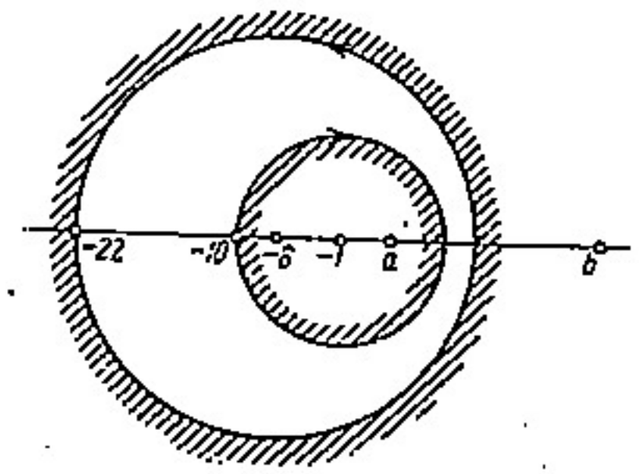
في الحقيقة، بنتيجة هذا التطبيق تكون صورة المستقيم $\{\operatorname{Im} z = 0\}$ هي الدائرة γ واستناداً إلى خاصة الحفاظ على التناظر تكون صورتا النقطتين $z = \pm ia$ هما النقطتان $w = 0, w = \infty$ المتناظرتان بالنسبة لـ γ . وبالتالي فإن النقطة $w = 0$ هي مركز الدائرة γ . وبما أن النقطة $w(0) = -1$ تنتمي إلى الدائرة γ ، فإن صورة γ تكون الدائرة $|w| = 1$ وبالمثل يبرهن على أن صورة الدائرة $|z + i/| = R$ بالتطبيق المذكور تكون الدائرة $|w| = R_1$ حيث $R_1 = \frac{R - l - a}{R + l + a}$. واستناداً لمبدأ تقابل الحدود نجد أن التابع $w = \frac{z + ia}{z - ia}$ يعطينا تطبيقاً متماثلاً للساحة D على الحلقة المركزية $R_1 < |w| < 1$



الشكل (٨٦)

مثال (١٣) . لتكن الساحة D هي الحلقة اللامركزية $\{9 < |z+1|\ ,\ 16 > |z+6|\}$ الشكل (٨٧) . والمطلوب إيجاد التطبيق المتماثل لهذه الحلقة على حلقة مركزية . بغية هذا

الأمر علينا إيجاد نقطتين a و b متناظرتين في نفس الوقت بالنسبة للدائرة $|z+1|=9$ وبالنسبة للدائرة $|z+6|=16$. هاتان النقطتان يجب أن تقعا على العمود المشترك للدائرتين . أي على المحور الحقيقي الشكل (٨٧) . وبالتالي فإن a و b عددان حقيقيان. وبنتيجة التناظر بالنسبة للدائرتين يكون لدينا $(a+1)(b+1)=81, (a+b)(b+6)=256$ وبحل جملة المعادلتين نجد $a=2$ و $b=26$ وبالمثل كما في المثال (١٢) يبرهن على أن التابع الكسري – الخطي $w=(z-2)/(z-26)$ التابع هو تطبيق متماثل للساحة D على الحلقة γ المركزية $1/3<|w|<1/2$



الشكل (٨٧)

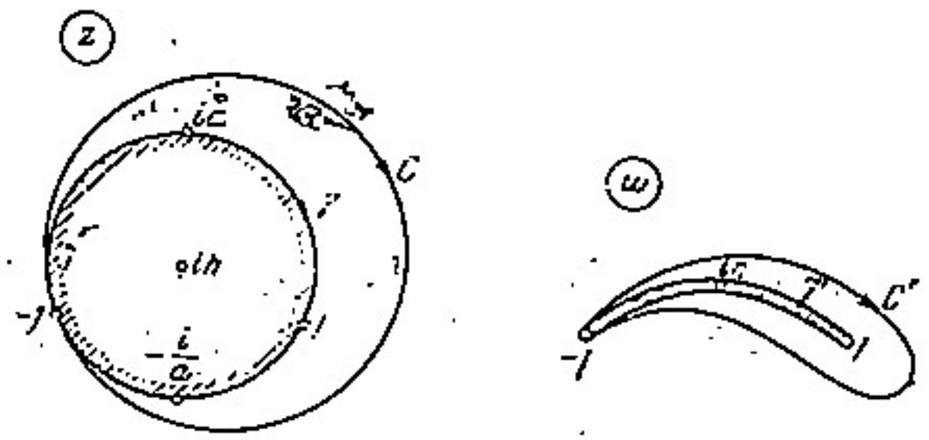
مثال (١٤) . لتكن الساحة D هي $\{|z-ih|>\sqrt{1+h^2}, h \text{ حقيقي}\}$. إن حدود هذه الساحة هي الدائرة γ التي مركزها في النقطة ih والمارة من النقاط $z=\pm 1$ و $z=ia$ حيث $a=h+\sqrt{1+h^2}$ الشكل (٨٨) .

لنبرهن على أن تابع جوكوفسكي وحيد الصفحة في الساحة D . لنأخذ التحويل $\zeta=(1/z)$ وسنعتبر أن المستويين ζ و z منطبقان على بعضهما . إن النقطتين $z=\pm 1$ بنتيجة التحويل $\zeta=1/z$ تبقيان في موضعيهما ، بينما تنتقل النقطة $z=ia$ إلى النقطة $\zeta=-i/a$ وبذلك تكون صورة الدائرة γ هي ذاتها . وبالإضافة إلى ذلك تكون صورة النقطة $z=\infty$ هي النقطة $\zeta=0$ الواقعة داخل γ ، وبالتالي فإن خارج الدائرة ينتقل إلى الساحة $\widetilde{D}$ داخل تلك الدائرة . وبما أنه لاتوجد نقاط مشتركة بين الساحتين D و $\widetilde{D}$ ، فإن تابع جوكوفسكي يكون وحيد الصفحة في D (وفي $\widetilde{D}$) انظر الملاحظة في الصفحة (١٨) .

لنوجد الآن صورة الساحة D بتابع جوكوفسكي . بملاحظة أن العلاقة $\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ تكتب على الشكل $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ فإنه يمكننا النظر إلى تابع جوكوفسكي على أنه تركيب للتابعين .

$$\zeta=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \quad , \quad w=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

بنتيجة التطبيق $\zeta=[(z+1)/(z-1)]^2$ تكون صورة محيط الدائرة γ هي قطع على طول شعاع ما $\widetilde{\gamma}$ يصل النقطتين $\zeta=0$, $\zeta=\infty$. وبنتيجة التطبيق $w=(1+\zeta)/(1-\zeta)$ ينتقل الشعاع $\widetilde{\gamma}$ إلى قوس دائرة γ′ يصل النقطتين $w=\pm 1$.



الشكل (٨٨)

وبما أن النقطة $z=ia$ بناتج التطبيق $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ تنتقل إلى النقطة $w=\frac{1}{2}\left(ia-\frac{i}{a}\right)=ih$ فإن القوس γ′ يمر بالنقطة ih وبالتالي فإن تابع جوكوفسكي يطبق خارج الدائرة γ على خارج قوس الدائرة γ′ الواصل بين النقطتين والمار من النقطة $w=ih$

لنلاحظ أنه بتطبيق تابع جوكوفسكي تنتقل الدائرة C القريبة من γ والماسة لها في النقطة $z=-1$ إلى منحن C′ يذكرنا بمقطع جناح طائرة . لقد استخدم جوكوفسكي المنحنيات من الشكل C′ (مقاطع جوكوفسكي) في حساب قوة رفع جناح الطائرة .انظر [5] .

٦ ــ مبدأ التناظر

١ ــ التناظر بالنسبة للمحور الحقيقي سنستعرض هنا إحدى الحالات الخاصة للتمديد التحليلي والمرتبطة بالتطبيق المتماثل . ونستهل ذلك ببرهان التوطئة التالية .

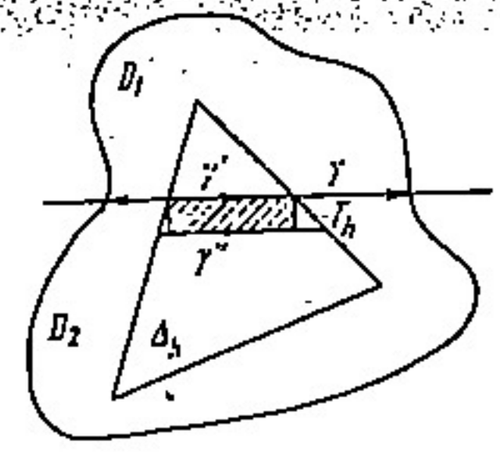
توطئة (حول التمديد المستمر) . لتكن الساحتان D_1 و D_2 غير متقاطعتين وحدودهما تشتركان بقطعة مستقيمة γ[1] . وليكن $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ تابعين وحيدي التعيين وتحليليين على الترتيب في D_1 و D_2 ومستمرين على المجموعتين $D_1 \cup \gamma$ ، $D_2 \cup \gamma$ ــ الشكل (٨٩) . وإذا كان

$$f_1(z) = f_2(z) \quad ; \quad \forall z \in \gamma \tag{1}$$

فإن التابع

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & ; \quad z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z) & ; \quad z \in D_1 \cup \gamma \end{cases} \tag{2}$$

يكون تحليلياً في الساحة $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$. من شروط التوطئة واضح بأن $f(z)$ مستمر في الساحة D . والبرهان على تحليلية هذا التابع في D يكفي أن نبرهن على أن تكامله على طول حدود أي مثلث Δ ($\subset D$) يساوي الصفر استناداً إلى نظرية موريرا . إذا كان Δ محتوى بتراص في D_1 أو D_2 فإن التكامل على طول $\partial\Delta$ يكون معدوماً استناداً إلى نظرية كوشي . بذلك يتبقى علينا دراسة الحالة $\gamma \cap \bar{\Delta} \neq \varnothing$.



الشكل (٨٩)

لنفرض أن γ يقسم Δ إلى قسمين Δ_1 و Δ_2 ، واستناداً إلى خواص التكامل يكون :

(١) γ مجال مفتوح .

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f\,dz \tag{3}$$

ولبرهان التوطئة يكفي أن نبرهن على أن أياً من التكاملين في الطرف الأيمن من العلاقة (3) معدوم . لنأخذ أحد القسمين Δ_1 أو Δ_2 وبغية التبسيط نرمز له مجدداً بـــ Δ . ولنرمز بـــ T_h لشبه المنحرف المقتطع من Δ بمستقيم يوازي γ ويبعد عنه بمسافة قدرها h . ليكن $\Delta_h = \Delta \setminus T_h$. دون أن تحد من عمومية المسألة يمكننا اعتبار γ موازياً للمحور الحقيقي . استناداً إلى نظرية كوشي يكون تكامل التابع f على طول $\partial\Delta_h$ معدوماً، وبالتالي فإن

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial T_h} f\,dz + \int_{\partial\Delta_h} f\,dz = \int_{\partial T_h} f\,dz \tag{4}$$

لتكن γ' و γ'' قاعدتي شبه المنحرف T_h (نفرض أن الاتجاه عليهما واحد) وأن γ' هي القاعدة الصغرى بينهما . وبما أن طول الضلعين المائلين في T_h وكذلك الفرق بين طولي γ'' و γ' ينتهي إلى الصفر عندما $h \to 0$ وأن التابع f محدود في $\bar{\Delta}$ فإن :

$$\int_{\partial T_h} f\,dz = \int_{\gamma'} f(z)\,dz - \int_{\gamma'} f(z - ih)\,dz + O(h) =$$

$$= \int_{\gamma'} \{f(z) - f(z - ih)\}\,dz + O(h) \tag{5}$$

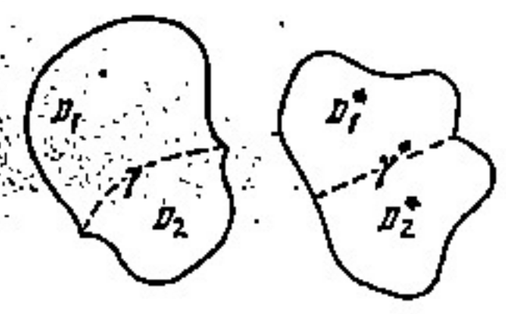
وبما أن التابع مستمر بانتظام في $\bar{\Delta}$ فإن التابع المتكامل في (5) يسعى بانتظام إلى الصفر عندما $h \to 0$ وهذا يعني أن تكامل f على ∂T_h يسعى إلى الصفر عندما $h \to 0$. وهو غير متعلق بـــ h كما هو واضح من العلاقة (4) . أي أن تكامل f على $\partial\Delta$ يساوي الصفر .

إذا تقاطع $\bar{\Delta}$ مع γ بضلع أو رأس فإن البرهان يكون أبسط ويترك ذلك للطالب . يمكننا النظر إلى التابع $f(z)$ المعرف بالعلاقة (2) في الساحة D كتمديد تحليلي لكل

من التابعين f_1 و f_2[1] ، ووفقاً لذلك يمكننا صياغة النوطئة حول التمديد المستمر على الشكل : إذا اشتركت حدود الساحتين D_γ بقطعة مستقيمة γ وكان التابعان f_γ تحليليين في D_γ ومستمرين على γ فإنهما يكونان تمديداً تحليلياً واحداً للآخر . لنلاحظ أن هذه المسألة ليست صحيحة من أجل التوابع الحقيقية والقابلة للمفاضلة . على سبيل المثال لنأخذ D_1 و D_2 المجالين $(-1,0)$ ، $(0,1)$ و $f(x) = |x|$.

نأتي الآن لبرهان مبدأ التناظر .

نظرية (١) . (ريمان — شفارتز) . لتكن الساحتان D_1 , D_1^* ذات حدود جوردانية ∂D_1 و ∂D_1^* إضافة إلى أن ∂D_1 تشتمل على قطعة مستقيمة أو قوس من دائرة γ و ∂D_1^* تشتمل على قطعة مستقيمة مماثلة أو قوس γ^* . ولتكن الساحة D_2 هي نظيرة الساحة D_1 بالنسبة لـ γ و D_2^* نظيرة D_1^* بالنسبة لـ γ^* و $D_1 \cap D_2 = D_1^* \cap D_2^* = \varnothing$. عندئذ إذا كان f_1 تطبيق متماثل للساحة D_1 على D_1^* و $f_1(\gamma) = \gamma^*$ فإن f_1 يكون قابلاً للتمديد على الساحة D_2 ويكون التابع الناتج تطبيقاً متماثلاً للساحة $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ على الساحة $D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$. الشكل (٩٠) .



الشكل (٩٠)

البرهان ١) . لنستعرض أولاً الحالة الخاصة عندما يكون γ و γ^* مجالين من المحورين الحقيقيين . لنعرف في الساحة D_2 ، نظيرة الساحة D_1 بالنسبة لـ γ تابعاً $f_2(z)$ بالعلاقة

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})} \qquad (6)$$

(١) على وجه الدقة يكون العنصر (D_1, f) تمديداً تحليلياً مباشراً لكل من العنصرين (D_1, f_1) , (D_2, f_2) .

فإذا كانت النقطة $z \ni D_2$ فإن النقطة $\bar{z} \ni D_1$ وبما أن f_1 وحيد التعيين وتحليلي في D_1 فإن التابع $\overline{f_1(\bar{z})} = f_2(z)$ يكون تحليلياً عكسياً ، وبالتالي فإن $f_2(z)$ تحليلي في الساحة D_2 . واستناداً إلى مبدأ تقابل الحدود يكون f_1 مستمراً في $\overline{D_1}$ ويأخذ قيماً حقيقية على γ (قيمه تنتمي إلى γ^*) . ولذلك فإنه عندما تنتهي النقطة $z \ni D_2$ إلى النقطة $x \in \gamma$ فإن النقطة $x \leftarrow \bar{z}$ و $f_1(x) = \overline{f_1(x)} \leftarrow f_2(z)$ وبذلك يكون $f_1(x) = f_2(x)$ من أجل جميع النقاط $x \in \gamma$. وبما أنه فرضاً $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ فإن التابعين f_1 , f_2 يحققان شروط النوطئة حول التمديد المستمر ونتيجة لذلك يكون التابع

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & ; \quad z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z) & ; \quad z \in D_2 \end{cases}$$

تحليلياً في الساحة $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ ويطبق هذه الساحة بشكل متماثل على الساحة $D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$. وهكذا تكون النظرية قد برهنت في الحالة الخاصة عندما يكون γ و $\gamma^* \subset R$

٢) سنبين بأن الحالة العامة تؤول إلى الحالة الخاصة المذكورة أعلاه . في الواقع ليكن λ و λ_* التطبيقين الكسريين — الخطيين اللذين ينقلان γ و γ^* على الترتيب إلى مجالين من المحورين الحقيقيين (λ و λ_* وموجودان انظر البند الرابع من الفقرة الرابعة) . لنأخذ التابع $g_1 = \lambda_* \circ f_1 \circ \lambda^{-1}$ ، إن هذا التابع وفقاً لما برهنا في ١) قابل للتمديد التحليلي في الساحة $\lambda(D_2)$ نظيرة الساحة $\lambda(D_1)$ بالنسبة للمجال $\lambda(\gamma)$ ، وبالإضافة إلى ذلك فإن التابع الناتج g_1 يطبق الساحة $\lambda(D_2)$ على الساحة $\lambda_*(D_2^*)$ (استخدمنا خاصة الحفاظ على التناظر في التطبيقات الكسرية — الخطية) . وعندئذ يكون التابع $f_2 = \lambda_*^{-1} \circ g_1 \circ \lambda$ تمديداً تحليلياً للتابع f_1 في الساحة D_2 كما أنه يطبق D_2 على D_2^* .

ملاحظة . يمكن للمجال γ^* في النظرية المبرهنة أعلاه أن يحتوي على نقطة اللانهاية وعندئذ يكون تمديد التابع f تابعاً ميرمورفياً : ليكن f تحليلياً في الساحة D باستثناء النقطة $z_0 \ni \gamma$ والتي تقابل نقطة اللانهاية قطب التابع . إن هذا القطب بسيط وذلك لأن f وحيد الصفحة في D (في جوار القطب المكرر يكون التابع متعدد الصفحات) .

مثال (١) . إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً ويأخذ قيماً حقيقية على المحور الحقيقي،

فإنه من أجل جميع النقاط z تتحقق العلاقة $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$. على سبيل المثال

$$\operatorname{ch}\bar{z}=\overline{\operatorname{ch} z} \quad \sin\bar{z}=\overline{\sin z} \quad , \quad e^{\bar{z}}=\overline{e^{z}}$$

مثال (٢) . $f_1(z)$ وحيد التعيين وتحليلياً في نصف المستوي $\operatorname{Im} z > 0$ باستثناء النقطة z_0 $(0<\operatorname{Im} z_0)$ حيث أنها قطب بسيط له وليكن $f_1(z)$ مستمراً على المحور الحقيقي ويأخذ من أجله قيماً حقيقية . لنبرهن على أنه إذا كان هذا التابع محدوداً عندما $\infty \leftarrow z$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z$ فإن

$$f_1(z)=\frac{A}{z-z_0}+\frac{\bar{A}}{z-\bar{z}_0}+C \qquad (7)$$

حيث $A=\operatorname*{res}_{z=z_0} f_1(z)$ و C ثابت حقيقي .

في الحقيقة . إن التابع

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & ; \quad z\in\{\operatorname{Im} z\geqslant 0\} \\ \overline{f_1(\bar{z})} & ; \quad z\in\{\operatorname{Im} z<0\} \end{cases}$$

تحليلي في جميع نقاط المستوي باستثناء النقطتين z_0 و $\bar{z}_0$ واللتين هما قطبان بسيطان بالإضافة إلى ان $\operatorname*{res}_{z=\bar{z}_0} f(z)=\bar{A}$ وبالتالي فإن التابع

$$g(z)=f(z)-\frac{A}{z-z_0}-\frac{\bar{A}}{z-\bar{z}_0}$$

هو تابع صحيح ومحدود واستناداً إلى نظرية ليوفيل يكون $g(z)\equiv \text{const}$ وهذا بدوره يؤدي إلى العلاقة (7) .

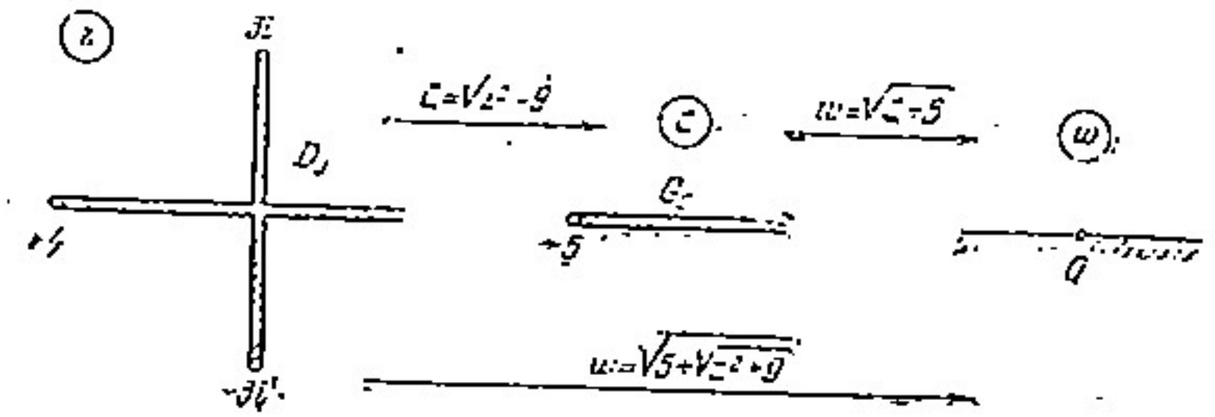
مثال (٣) . ليكن $f(z)$ تحليلياً في نصف المستوي $\{\operatorname{Im} z>0\}$ ومستمراً على لمجالين $\gamma:(b,+\infty)$, $\gamma_1:(-\infty,a)$ حيث $-\infty<a\leqslant b<+\infty$ ويأخذ في نقاط هذين المجالين قيماً حقيقية عندئذٍ يكون التابع $\Gamma(z)$ المعرف بالعلاقة

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & ; \quad z\in\{(\operatorname{Im} z>0)\cup\gamma_1\cup\gamma_2\} \\ \overline{f(\bar{z})} & ; \quad z\in\{\operatorname{Im} z<0\} \end{cases}$$

تحليلياً في جميع نقاط المستوي العقدي z باستثناء القطع على طول المجال $[a,b]$.

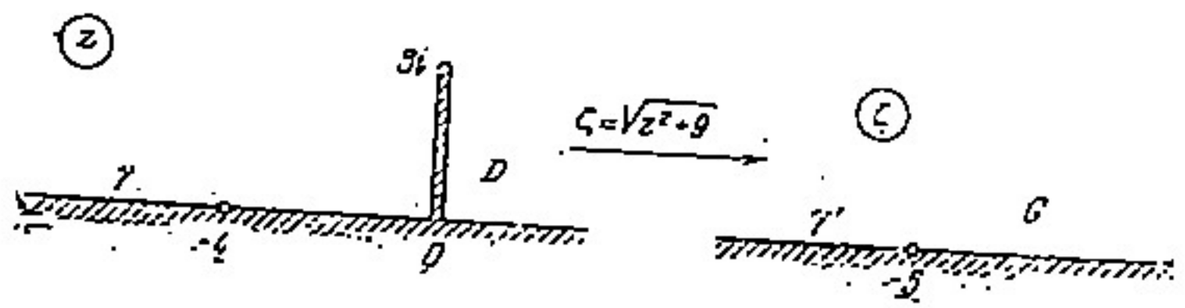
٢ ــ **تطبيقات مبدأ التناظر** . سنستعرض هنا بعض تطبيقات مبدأ التناظر في التطبيقات المماثلة .

مثال (١) . تطبيق خارج صليب على نصف مستو . لتكن D_0 هي المستوي العقدي z باستثناء القطعين على طول المجال $[-3i,3i]$ وعلى امتداد الشعاع $(\infty+,4-]$ الشكل (٩١) ولنوجد التطبيق المتماثل للساحة D_0 على نصف المستوي $\{\operatorname{Im} w>0\}$



الشكل (٩١)

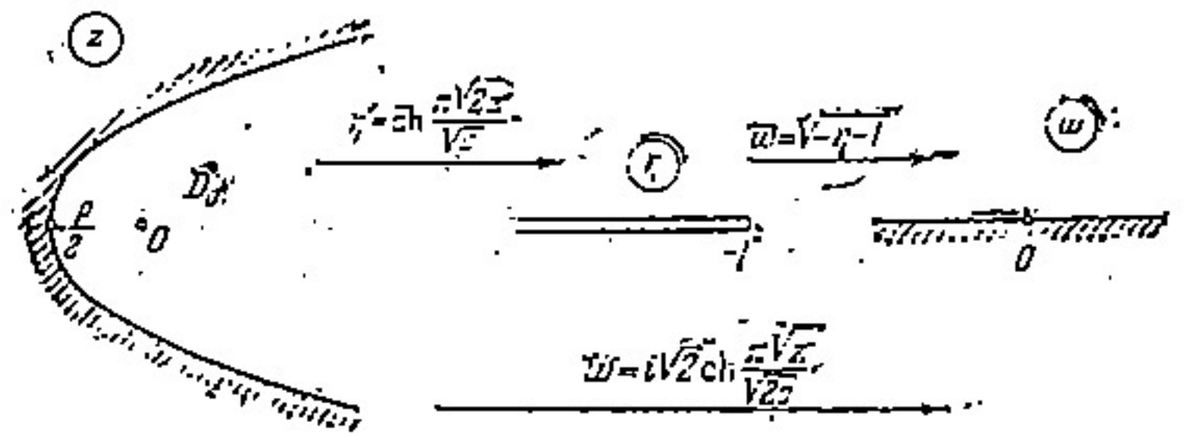
قد يخطر بالبال للوهلة الأولى استخدام التطبيق $\eta=z^2$ ، إلا أنه علينا الانتباه إلى أن هذا التطبيق ليس وحيد الصفحة في D_0 . ولذلك سنأخذ أولاً « نصف » الساحة D_0 لتكن D نصف المستوي العلوي باستثناء القطع على طول المجال $[0,3i]$ الشكل (٩٢) . في هذه الساحة يكون التطبيق $\eta=z^2$ وحيد الصفحة . من المثال (٤) في الفقرة الخامسة ينتج أن التابع $\zeta=f_1(z)=\sqrt{z^2+9}$ هو تطبيق متماثل للساحة D على الساحة G : $\{0<\operatorname{Im}\zeta\}$ حيث أن $f_1(z)$ الفرع الوحيد التعيين والذي من أجله $0<f_1(x+0i)$ من أجل $0<x$. وتكون صورة المجال γ : $(-4,-\infty)$ هي المجال γ' : $(-5,-\infty)$ الشكل (٩٢) . واستناداً إلى الحالة ١) في النظرية المبرهنة أعلاه نجد أن التابع



الشكل (٩٢)

$\zeta = f(z) = \sqrt{z^2+9}$ هو تطبيق متماثل للساحة $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ على الساحة $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$ (D^* نظيرة D بالنسبة لـ γ و G^* نظيرة G بالنسبة لـ γ') حيث أن G_0 هي المستوي العقدي ζ باستثناء القطع على امتداد الشعاع $[-5, +\infty-]$ الشكل (٩١) . وأن التابع $f(z)$ هو فرع التابع $\sqrt{z^2+9}$ في الساحة D_0 والذي من أجله $f(x+0i) > 0$ من أجل $x > 0$. وبنقل الساحة G_0 بواسطة التابع $w = \sqrt{\zeta+5}$ إلى نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} w\}$ نجد التطبيق المطلوب هو $w = \sqrt{5+\sqrt{z^2+9}}$ الشكل (٩١) .

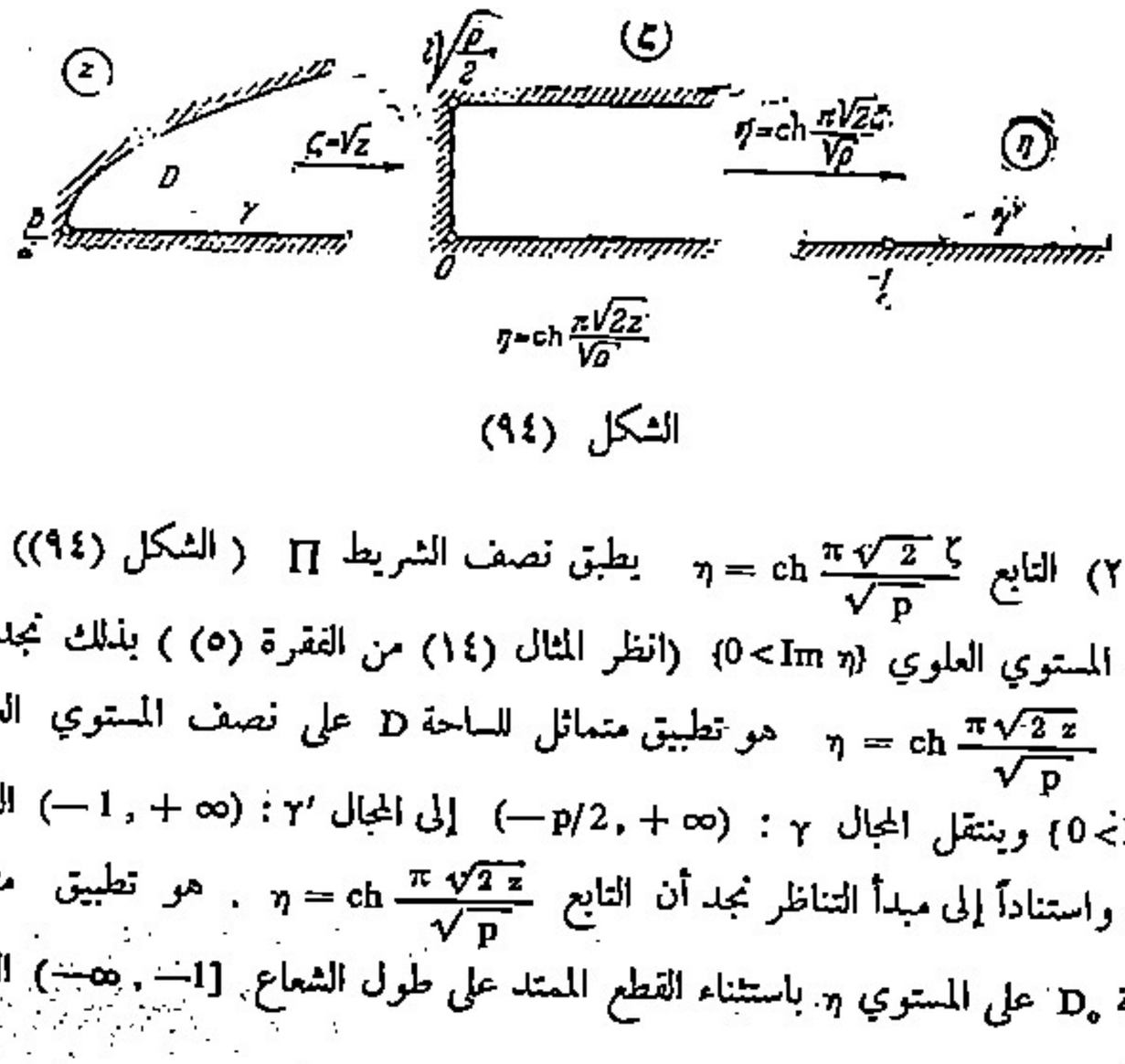
مثال (٢) . تطبيق داخل قطع مكافيء على نصف مستو . لتكن D_0 هي الساحة: $\{y^2 < 2p(x+p/2)\}$ حيث $z = x+iy$ و $0 < p$. الشكل (٩٣) . لنوجد التطبيق المتماثل لهذه الساحة على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} w\}$.



الشكل (٩٣)

إن القطع المكافيء $y^2 = 2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ ينتقل بواسطة التابع $\zeta = \sqrt{z}$ إلى مستقيم إلا أن الساحة D_0 تحتوي على النقطة $z = 0$ والتي هي نقطة تفرع للتابع $\sqrt{z}$. ولذلك سنأخذ نصف الساحة D_0 . لتكن D هي الساحة $\left\{ y^2 < 2p\left(x+\frac{p}{2}\right),\ 0 < y \right\}$. الشكل (٩٤) . ولنوجد التطبيق المتماثل لهذه الساحة على نصف المستوي العلوي .

١) التابع $\zeta = \sqrt{z}$ يطبق الساحة D على نصف الشريط Π : $\{0 < \operatorname{Im}\zeta < \sqrt{p/2},\ \operatorname{Re}\zeta > 0\}$. يترك التأكد من ذلك للطالب .



الشكل (٩٤)

٢) التابع $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2}\,\zeta}{\sqrt{p}}$ يطبق نصف الشريط Π (الشكل (٩٤)) على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im}\eta\}$ (انظر المثال (١٤) من الفقرة (٥)) بذلك نجد أن التابع $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2}\,z}{\sqrt{p}}$ هو تطبيق متماثل للساحة D على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im}\eta\}$ وينتقل المجال γ : $(-p/2, +\infty)$ إلى المجال γ' : $(-1, +\infty)$ الشكل (٩٤) . واستناداً إلى مبدأ التناظر نجد أن التابع $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2}\,z}{\sqrt{p}}$. هو تطبيق متماثل للساحة D_0 على المستوي η باستثناء القطع الممتد على طول الشعاع $[-1, -\infty-]$ الشكل (٩٣) .

٣) التابع $w = \sqrt{\eta-1}$ يطبق المستوي η باستثناء القطع على امتداد الشعاع $[-1, -\infty-]$ على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} w\}$. وبتركيب التطبيقات نجد أن التطبيق المتماثل للساحة D_0 على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} w\}$ يعطى بالتابع $w = i\sqrt{2}\ \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{z}}{\sqrt{2p}}$.

مثال (٣) . إذا كان $w = f(z)$ تطبيقاً متماثلاً للحلقة $K = \{\rho < |z| < R\} : K$ على الحلقة $K' = \{\rho' < |w| < R'\} : K'$ فإن هاتين الحلقتين متحاكيتان أي أن $\rho/\rho' = R/R'$.

البرهان . من الممكن إحدى الحالتين : ١) الدائرة $\{|z| = \rho\}$ تنتقل إلى الدائرة $\{|w| = \rho'\}$ ٢) الدائرة $\{|z| = \rho\}$ تنتقل إلى الدائرة $\{|w| = R'\}$. لنأخذ الحالة الأولى . استناداً إلى مبدأ التناظر يوجد امتداد تحليلي $F_1(z)$ للتابع $f(z)$ في الحلقة K_1 :

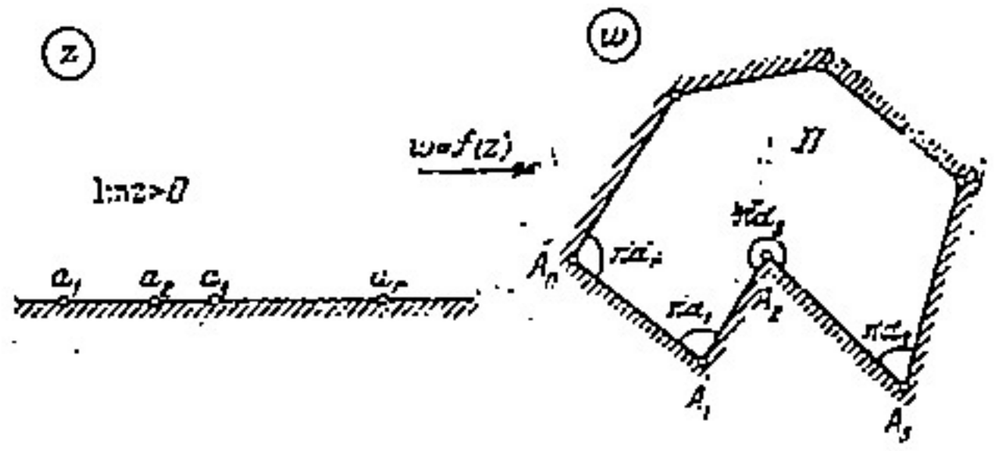
$K_1 = \{\rho_1 < |z| < R\}$ حيث $\rho_1 = (\rho^2/R)$ ويكون التابع $w = F_1(z)$ تطبيقاً متماثلاً للحلقة K_1 على الحلقة $K_1' : \{\rho_1' < |w| < R'\}$ حيث $\rho_1' = (\rho')^2/R$ بحيث أن صورة الدائرة $\{|z| = \rho\}$ تكون الدائرة $\{|w| = \rho_1'\}$. وبالمثل يوجد تمديد تحليلي $F_2(z)$ لـ $F_1(z)$ [و $f(z)$] في الحلقة $K_2 : \{r_2 < |z| < R\}$ حيث $r_2 = \rho^4/R^3$ وهكذا ... بذلك نحصل على تمديد تحليلي $F(z)$ للتابع $f(z)$ في الحلقة $\{0 < |z| < R\}$ إضافة إلى أن $\lim_{z\to 0} F(z) = 0$ وبالتالي فإن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للاصلاح.

أي أن التابع $w = F(z)$ هو تطبيق متماثل للدائرة $\{|z| < R\}$ على الدائرة $\{|w| < R'\}$ إضافة إلى أن $F(0) = 0$. بالتالي فإن $F(z)$ تابع كسري – خطي وبما أن $F(\infty) = \infty$ فإن $f(z) = Az$ ومن ذلك ينتج أن $\rho/\rho' = R/R'$.

٧ – تكامل كريستوفيل – شفارتز

في هذه الفقرة سنستعرض مسألة التطبيق المتماثل $w = f(z)$ لنصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على داخل مضلع Π معرف في المستوي w . وسنستخدم الرموز الآتية

الشكل (٩٥) : A_k : الرؤوس المتتالية للمضلع Π مع $k = 1,2,\ldots,n$ ؛ $\pi\alpha_k$: زاوية المضلع Π في الرأس A_k ، $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ ، a_k الصور العكسية للرؤوس A_k بنتيجة التطبيق $w = f(z)$. أي أن $f(a_k) = A_k$



الشكل (٩٥)

١ – نظرية كريستوفيل – شفارتز .

نظرية (١) . ليكن $w = f(z)$ تطبيقاً متماثلاً لنصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على مضلع محدود Π ، $0 < \alpha_k \leqslant 2$ ، $a_k \neq \infty$ و $(k = 1,2,\ldots,n)$. عندئذ تتحقق علاقة كريستوفيل – شفارتز .

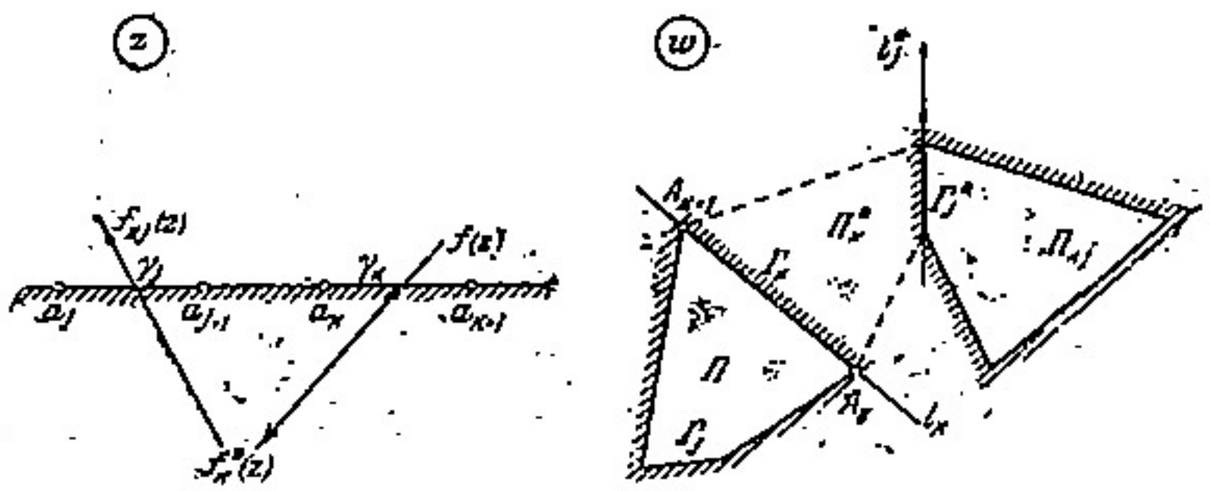
$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + C_1 \qquad (1)$$

حيث أن التكامل يؤخذ على طريق واقع في نصف المستوى $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ و C_1 و C ثابتان .

البرهان . استناداً إلى نظرية ريمان يوجد تابع $w = f(z)$ يحقق تطبيقاً متماثلاً لنصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على المضلع المحدود Π حيث أن $a_k \neq \infty$ و $(k = 1,2,\ldots,n)$ لندرس خواص هذا التابع :

١) ليكن $F(z)$ تابعاً تحليلياً منطلقه العنصر $((f(z), 0 < \operatorname{Im} z)$ ولنبرهن على أن التابع $F(z)$ تحليلي في المستوي العقدي الموسع الموخوذ في النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$. إن التابع $w = f(z)$ ينقل المجال $\gamma_k : (a_k, a_{k+1})$ إلى المجال $\Gamma_k : (A_k, A_{k+1})$

[$a_{n+1} = a_1$ ، $A_{n+1} = A_1$] ، وواحد من المجالات γ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ يحتوي في داخله على النقطة $z = \infty$] . استناداً إلى مبدأ التناظر يوجد تابع $f^*_k(z)$ هو تمديد تحليلي للتابع $f(z)$



الشكل (٩٦)

من خلال المجال γ_k على نصف المستوي $(\mathrm{Im}\, z<0)$. ويحقق التابع $w = f_k^*(z)$ تطبيقاً متماثلاً لنصف المستوي $(\mathrm{Im}\, z<0)$ على المضلع Π_k^* نظير المضلع Π بالنسبة للمستقيم l_k المار بالمجال Γ_k الشكل (٩٦) .

وتكون صورة المجال γ_j بهذا التطبيق هي المجال Γ_j^* نظير المجال Γ_j بالنسبة للمستقيم l_k الشكل (٩٦) . وبالإستناد إلى مبدأ التناظر نجد أن يوجد تمديد تحليلي $f_{kj}(z)$ للتابع $f_k^*(z)$ من خلال المجال γ_j على نصف المستوي $\{0<\mathrm{Im}\, z\}$ ويحقق التابع $w = f_{kj}(z)$ تطبيقاً متماثلاً لنصف المستوي $\{0<\mathrm{Im}\, z\}$ على المضلع Π_{kj} نظير المضلع Π_k^* بالنسبة للمستقيم l_j^* الشكل (٩٦) . وباعادة نفس الخطوات نحصل على تمديد تحليلي للتابع $f_{kj}(z)$ من خلال المجال γ_s على نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\, z<0\}$ ، وهكذا ... إن جميع هذه التمديدات تعرف تابعاً $F(z)$ تحليلياً في المستوي العقدي الموسع والموخوذ في النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$

٢) لنبرهن على أن التابع $F''(z)/F'(z)$ وحيد التعيين وتحليلي في المستوي العقدي الموسع والموخوذ في النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$.

سنستخدم نفس الرموز المشار إليها أعلاه . ولنبرهن على أن

$$f_k^*(z) = e^{i\beta_k}\overline{f(\bar{z})} + B_k \ , \ \mathrm{Im}\, z<0 \qquad (2)$$

حيث β_k عدد حقيقي . في الواقع ، واستناداً إلى مبدأ التناظر تكون النقطتان :
$w = f(\bar{z})$, $w^* = f_k^*(z)$; $(\mathrm{Im}\, z<0)$ متناظرتين بالنسبة للمستقيم l_k . وبما أن التابع الخطي $\zeta = (w - A_k)e^{-i\varphi_k}$ حيث $\varphi_k = \arg(A_{k+1} - A_k)$ ينقل المستقيم l_k إلى المحور الحقيقي $\mathrm{Im}\, \zeta = 0$ وينقل النقاط المتناظرة بالنسبة للمستقيم l_k إلى نقاط متناظرة بالنسبة للمستقيم $\mathrm{Im}\, \zeta = 0$ فإن :

$$(w^* - A_k)e^{-i\varphi_k} = \overline{[(w - A_k)e^{-i\varphi_k}]}$$

ومن ذلك تنتج العلاقة (2) . وبالمثل تبرهن العلاقة :

$$f_{kj}(z) = e^{i\beta_j}\overline{f_k^*(\bar{z})} + B_j \ , \ \mathrm{Im}\, z>0 \qquad (3)$$

ومن العلاقتين (2) و (3) نجد :

$$f_{kj}(z) = e^{i\beta_{kj}}f(z) + B_{kj} \ , \ \mathrm{Im}\, z>0$$

وبالمثل تماماً نجد من أجل أي عنصر $[\mathrm{Im}\, z>0, \tilde{f}(z)]$ من عناصر التابع $F(z)$ أن

$$\tilde{f}(z) = e^{i\beta}f(z) + B \ , \ \mathrm{Im}\, z>0$$

ومنه نجد $\tilde{f}''(z)/\tilde{f}'(z) = f''(z)/f'(z)$ وبالمثل نجد من أجل أي عنصر $(\mathrm{Im}\, z<0, \tilde{f}^*(z))$ من عناصر التابع $F(z)$ أن $(\tilde{f}^*)''/(\tilde{f}^*)' = (f_k^*)''/f_k^*)'$. وبذلك يكون التابع $g(z) = F''(z)/F'(z)$ وحيد التعيين . لنبرهن الآن على تحليلية $g(z)$ في المستوي العقدي الموسع والموخوذ في النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$. في الواقع ان التابع $w = f(z)$ تحليلي في نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ و $f'(z) \neq 0$ وذلك لأن التطبيق متماثل ، وبذلك نجد أن $g(z) = f''(z)/f'(z)$ تحليلي في نصف المستوي العلوي $\{\mathrm{Im} z>0\}$. بالمثل يبرهن على أن $g(z)$ تحليلي في نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\, z<0\}$ واستناداً إلى مبدأ التناظر يكون $f(z)$ تحليلياً ووحيد الصفحة في كل نقطة من نقاط المحور الحقيقي $\mathrm{Im}\, z = 0$ باستثناء النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ ولهذا فإن $f'(z)\neq 0$ من أجل $\mathrm{Im}\, z = 0$, $z\neq\infty$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ $z \neq a_k$. ويكون نشر التابع $f(z)$ في جوار النقطة $z=\infty$ من الشكل

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z|>R$$

حيث $c_{-1} \neq 0$. وبالتالي فإن التابع $f''(z)/f'(z)$ ، وكذلك التابع $g(z) = F''(z)/F'(z)$ تحليلي في المستوي العقدي الموسع والموخوذ في النقاط a_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ ويكون نشره في جوار النقطة $z=\infty$ من الشكل

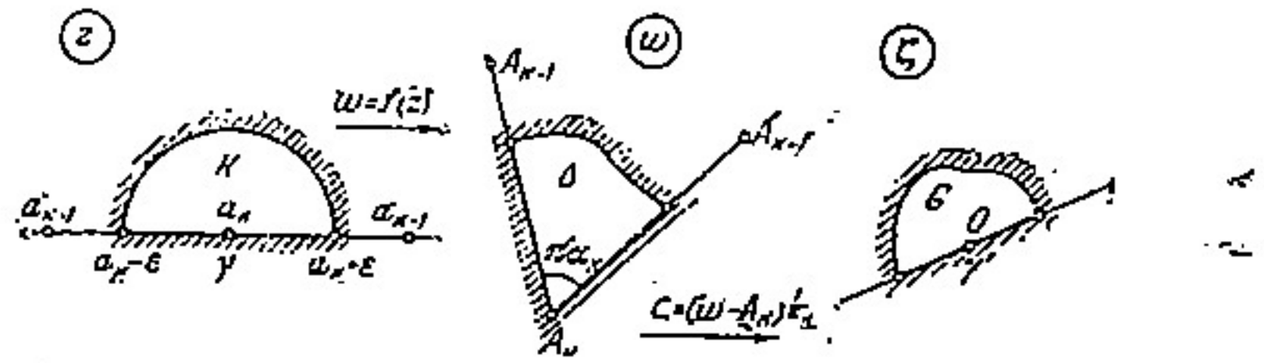
$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{2}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z|>R$$

٣) لنبرهن على أنه في جوار للنقطة a_k يكون التابع $f(z)$ الشكل

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k}h_k(z) \qquad (4)$$

حيث $h_k(z)$ تابع وحيد التعيين وتحليلي في النقطة a_k و $h(a_k) \neq 0$. لنأخذ نصف

الدائرة $K : K = \{|z - a_k| < \varepsilon\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ حيث $0 < \varepsilon$ وصغير بقدر كاف ؛ الشكل (٩٧). ان التابع $w = f(z)$ يطبق بشكل متماثل نصف الدائرة K على ساحة Δ : حيث Δ جزء من المضلع Π واقع في جوار النقطة A_k، كما أن التابع $\zeta = (w - A_k)^{1/\alpha_k}$



الشكل (٩٧)

يطبق بشكل متماثل الساحة Δ على ساحة G ، حيث G جزء من نصف المستوي واقع في جوار النقطة $\zeta = 0$. وبالتالي فإن التابع $\zeta = g_k(z) = [f(z) - A_k]^{1/\alpha_k}$ هو تطبيق متماثل لنصف الدائرة K على الساحة G وبحيث أن $g_k(a_k) = 0$ وصورة المجال γ : $(a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$ تكون المجال γ' الذي يحتوي على النقطة $\zeta = 0$، الشكل (٩٧) . واستناداً لمبدأ التناظر يكون التابع $g_k(z)$ وحيد التعيين وتحليلياً في النقطة $z = a_k$ ويكون $g_k'(a_k) \neq 0$. أي أن $g_k(z) = (z - a_k)\widetilde{g_k}(z)$ حيث $\widetilde{g_k}(z)$ تابع تحليلي في النقطة $z = a_k$ و $\widetilde{g_k}(a_k) \neq 0$. ومن المساواة

$$[f(z) - A_k]^{1/\alpha_k} = (z - a_k)\,\widetilde{g_k}(z)$$

تنتج العلاقة (4) .

٤) لنبرهن على أن للتابع $f^*(z)/f'(z)$ الشكل

$$\frac{f^*(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} \qquad (5)$$

من العلاقة (4) نجد

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + \frac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)}$$

حيث أن التابع $\psi_k(z) = \alpha_k h_k(z) + (z - a_k)h_k'(z)$ تحليلي في النقطة a_k و $\psi_k(a_k) = \alpha_k h_k(a_k) \neq 0$ وبالتالي فإن للتابع $g(z) = F''(z)/F'(z)$ والمساوي لـ $f''(z)/f'(z)$ في جوار للنقطة a_k الخاصة [قطب ٢] من المرتبة الأولى في النقطة a_k وراسبه هو $\operatorname{res}_{z=a_k} g(z) = \alpha_k - 1$. من هذا واستناداً إلى الخاصة . ٢) ينتج أن التابع

$$H(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$$

تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي الموسع ويسعى إلى الصفر عندما $z \to \infty$، واستناداً إلى نظرية ليوفيل يكون $H(z) \equiv 0$. ومنه نجد العلاقة (5) من أجل $0 < \mathrm{Im}\, z$.

٥) لنبرهن صحة العلاقة (1) . بمكاملة المساواة (5) على طول طريق واقع في نصف المستوي $(0 < \mathrm{Im}\, z)$ وبدايته في النقطة الثابتة z_0 ونهايته في النقطة z نجد

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1)\ln(z - a_k) + \widetilde{C}$$

ومنه نجد

$$f'(z) = C(z - a)^{\alpha_1 - 1}\ (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

وبالمكاملة ثانية نحصل على علاقة كريستوفيل ـ شفارتز وهو مايبرهن النظرية (١) .

٢ ـ حساب الوسطاء في تكامل كريستوفيل-شفارتز . إن علاقة كريستوفيل-شفارتز (1) تمكننا من إيجاد التابع $w = f(z)$ التطبيق المتماثل لنصف المستوي $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ على مضلع محدود Π . إذ أنه إذا كان المضلع معلوماً ، أي إذا علمت رؤوسه A_k وزواياه $(k = 1,2,\ldots,n)\ \pi\alpha_k$ ، فإن مسألة إيجاد التابع $f(z)$ تؤول إلى إيجاد النقاط $(k = 1,2,\ldots,n)\ a_k$ والثابتين C و C_1 : إن ثلاثاً من النقاط $(k = 1,2,\ldots,n)\ a_k$ يمكن

تعريفها بشكل كيفي (انظر نهاية الفقرة الثالثة) وعندئذ يجب أن تتعرف النقاط المتبقية a_k والثابتان C وC_1 بشكل وحيد . لنستعرض إحدى الطرائق في إيجاد هذه النقاط والثابتين .

لنكتب العلاقة (1) على الشكل :

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} h(\zeta)\, d\zeta + C_1. \qquad (6)$$

حيث $h(z)$ فرع وحيد التعيين وتحليلي للتابع

$(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n-1}$ في نصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$. بما أن الفروع المختلفة لهذا التابع تختلف عن بعضها البعض بعامل ثابت (يترك التحقق من هذا الأمر للطالب) . فإنه في العلاقة (6) وتبعاً لاختيار الفرع يتغير فقط الثابت C (وبصورة أدق $\arg C$) . بغية التحديد سنعتبر أن النقاط a_3, a_2, a_1 معلومة حيث $a_2 > a_1$ و $z_0 = a_1$ (الثابت C_1 متعلق باختيار النقطة z_0) . بتعويض z في العلاقة (6) بـ a_1 نجد $C_1 = f(a_1) = A_1$. لنحسب $\arg C$. نلاحظ أن $\arg h(x) = \theta = \text{const}$ من أجل $a_1 < x < a_2$. من (6) نجد

$$A_2 - A_1 = f(a_2) - f(a_1) = Ce^{i\theta} \int_{a_1}^{a_2} |h(t)|\, dt$$

وبالتالي فإن $\arg C = \arg (A_2 - A_1) - \theta$ وتأخذ العلاقة (6) الشكل

$$f(z) = A\, e^{i\alpha} \int_{a_1}^{z} h(\zeta)\, d\zeta + A_1 \qquad (7)$$

حيث $A > 0$ و $\alpha = \arg (A_2 - A_1) - \theta$.

في العلاقة (7) يوجد $(n-2)$ وسيطاً مجهولاً هي العدد الموجب A والأعداد الحقيقية $a_4, a_5, \dots, a_n$. من العلاقة (7) نجد

$$A_{k+1} - A_k = Ae^{i\alpha} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h(t)\, dt$$

ومنه وبالأخذ بعين الاعتبار أن $\arg h(x) = \text{const}$ على المجال (a_k, a_{k+1}) نجد

$$|A_{k+1} - A_k| = A \int_{a_k}^{a_{k+1}} |h(t)|\, dt \quad , \quad k = 1,2,\dots,n \qquad (8)$$

حيث $a_{n+1} = a_1$ و $A_{n+1} = A_1$ وحيث أن واحداً من المجالات (a_k, a_{k+1}) $(k = 1,2,\dots,n)$ يحتوي على النقطة $z = \infty$. إن المجاهيل $A, a_3, a_4, \dots, a_n$ يمكن إيجادها من الجملة (8). ومن النظرية (1) ينتج وجود حل وحيد لهذه الجملة ، إلا أنه من النادر جداً تتمكن في المسائل المحددة من إيجاد ذلك الحل للجملة (8) . ومن أجل المضلعات البسيطة يمكن استخدام طرائق أخرى في إيجاد الوسطاء ، في علاقة كريستوفيل ـ شفارتز . انظر المثال (٢) و (٤) أدناه .

٣ ـ تطبيق نصف المستوي على مثلث أو على مستطيل . في النظرية (١) استعرضنا الحالة التي تكون فيها جميع النقاط a_k $(k = 1,2,\dots,n)$ محدودة . من هذه النظرية ينتج :

نتيجة (١) . ليكن $w = f(z)$ هو التطبيق المتمائل لنصف المستوي $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ على المضلع المحدود Π حيث ان $a_k \neq \infty$ $(k = 1,2,\dots,n-1)$ و $a_n = \infty$ ، عندئذٍ يكون

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\zeta + C_1$$

إن هذه العلاقة تنتج من العلاقة (1) بواسطة تحويل كسري ـ خطي لنصف المستوي

$\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ على نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,\zeta>0\}$. بإجراء التحويل $\zeta = -\frac{1}{z} + a_n'$ (1)

نجد أن صور جميع النقاط $a_n, \ldots, a_2, a_1 = \infty$ تكون محدودة . لتكن $a_n', \ldots, a_2', a_1'$ هي صور تلك النقاط على الترتيب . عندئذ يكون للتابع $f(\zeta)$ الذي يطبق نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,\zeta>0\}$ على المضلع Π وبحيث أن $f(a_k') = A_k$ الشكل :

$$f(\zeta) = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\eta - a_1')^{\alpha_1 - 1} (\eta - a_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots (\eta - a_n')^{\alpha_n - 1}\, d\eta + C_1$$

وبإجراء التحويل $\eta = a_n' - (1/z)$ في التابع المستكمل نجد

$$= C' \int_{z_0}^{z} \left(a_n' - a_1' - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(a_n' - a_2' - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} \ldots$$

$$- \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{z^2} + C_1$$

ومنه نجد

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots$$

$$\ldots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} \frac{dz}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - n + 2}} + C_1$$

حيث $a_k = \dfrac{1}{a_n' - a_k'}$ و C ثابت عقدي . وبما أن

(1) إذا كانت إحدى النقاط $a_k = 0$ فإننا نجري التحويل $\zeta = \dfrac{-1}{z - a} + a_n'$

حيث a عدد مختلف عن جميع a_k .

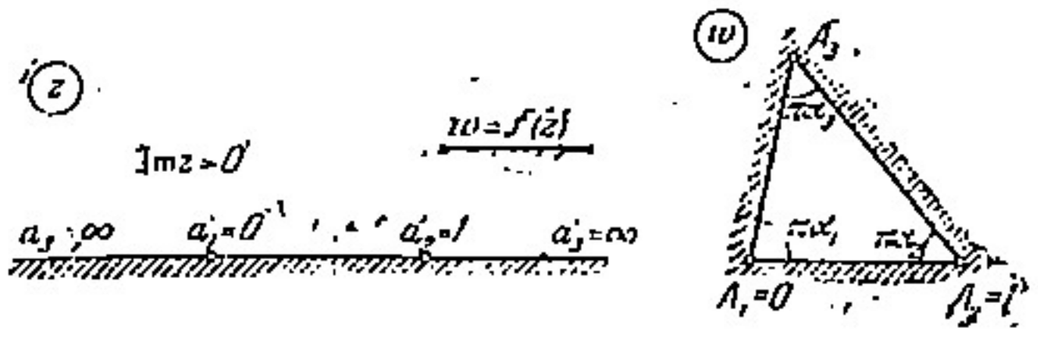
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ فإن العلاقة الأخيرة تأخذ الشكل

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1$$

وهو مايبرهن صحة العلاقة (9) .

نلاحظ أن عدد العوامل في التابع المستكمل في العلاقة (9) أقل بعامل عن عوامل التابع المستكمل في (1) وكقاعدة يكون من الأفضل استخدام هذه العلاقة . وبوضع $z_0 = 1$ نجد $C_1 = A_1$

مثال (١) . (تطبيق نصف مستو على مثلث) . لنوجد التطبيق المتمائل لنصف المستوي $\{0 < \mathrm{Im}\, z\}$ على المثلث Π ذي الرؤوس A_3, A_2, A_1 حيث $A_2 = 1, A_1 = 0$ و $0 < \mathrm{Im}\, A_3$ الشكل (٩٨) . في هذه الحالة لدينا $0 < \alpha_k < 1 \quad (k = 1,2,3)$ لنضع $a_1 = 0 \;,\; a_2 = 1 \;,\; a_3 = \infty$ وباستخدام العلاقة (9) نجد



الشكل (٩٨)

$$f(z) = C \int_{0}^{z} \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta = A \int_{0}^{z} \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta$$

حيث أن $A = Ce^{\pi(\alpha_2 - 1)i}$ وأن التابع المستكمل يأخذ قيماً موجبة على المجال $(0,1)$ من المساواة

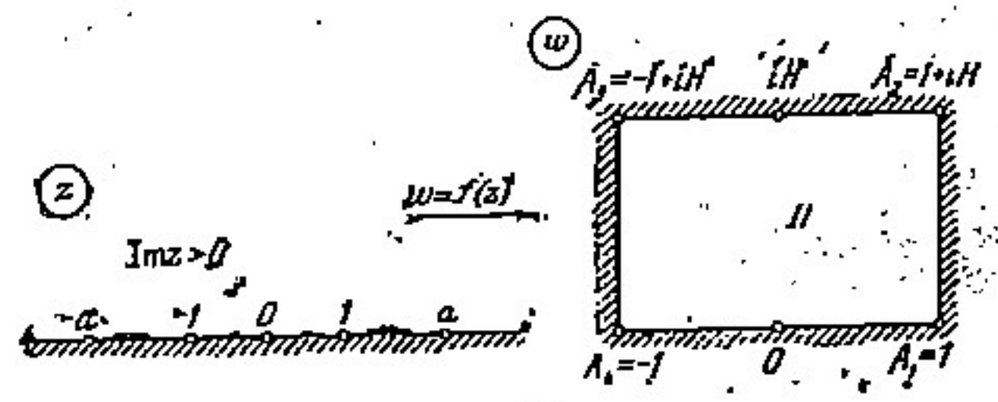
$$A_2 - A_1 = 1 = A \int_0^z t^{\alpha_1 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1} dt = A.\, B(\alpha_1, \alpha_2)$$

نجد أن $A = 1/B(\alpha_1,\alpha_2)$. وبالتالي فإن التابع

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)} \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1}(1-\zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta \qquad (10)$$

هو تطبيق متماثل لنصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على المثلث Π .

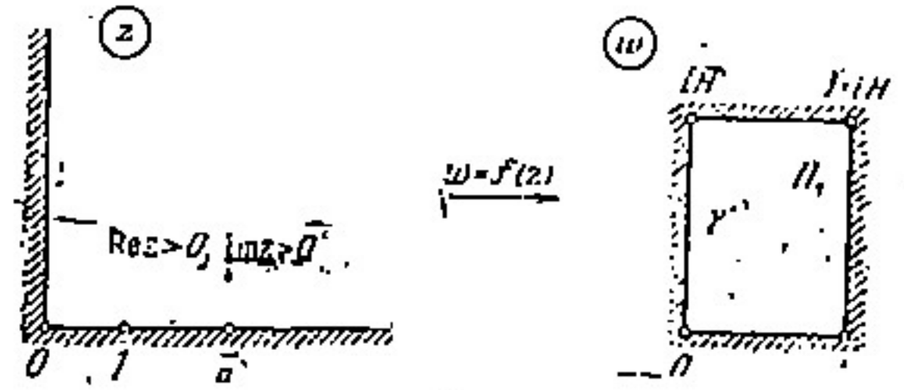
مثال (٢) (تطبيق نصف مستو على مستطيل) . لنوجد التطبيق المتماثل لنصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على المستطيل المحدود ذي الرؤوس $A_k \ (k = 1,2,3,4)$ حيث $A_1 = 1$, $A_2 = 1 + iH$, $A_3 = -1 + iH$, $A_4 = -1$ و $0 < H$ و $\alpha_k = ½ \ (k = 1,2,3,4)$ الشكل (٩٩) .



الشكل (٩٩)

لنأخذ نصف المستطيل الأيمن Π_+ والذي رؤوسه $0 , 1 , 1 + iH , iH$ الشكل(١٠٠) ليكن التابع $w = f(z)$ هو التطبيق المتماثل للربع الأول $\{\operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ على المستطيل Π_+ بحيث أن $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = iH$. بنتيجة هذا التطبيق ينتقل المجال $\gamma : (0, +i\infty)$ إلى المجال $(0, iH)$ والصورة العكسية للنقطة $w = 1 + iH$ هي النقطة $z = a$ حيث $1 < a < +\infty$ الشكل (١٠٠) .

ولنمدد هذا التابع ، استناداً إلى مبدأ التناظر ، إلى نصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ ولنرمز له



الشكل (١٠٠)

مجدداً بـ $f(z)$ وعندئذٍ يكون $w = f(z)$ تطبيقاً متماثلاً لنصف المستوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$ على المضلع Π الشكل (٩٩) وبحيث أن

$f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \pm 1$, $f(\pm a) = \pm 1 + iH$ و $f(\infty) = iH$

واستناداً إلى العلاقة (1) نجد

$$w = f(z) = A \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \qquad (11)$$

حيث

$$k = (1/a) \qquad (0 < k < 1) \qquad \text{و} \qquad 0 < \sqrt{(1-k^2t^2)(1-k^2t^2)}$$

من أجل $0 < t < 1$. إن الوسطاء هنا k , A , H مرتبطة ، استناداً لـ (8) ، بالمعادلتين

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{A} \quad , \quad \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \frac{H}{A}$$

يسمى التكامل (11) ومن أجل $A = 1$ **بتكامل ليجندر الناقصي من النوع الاول** . وأما التابع المعاكس لـ (11) $z = \psi(w)$ فيسمى **بتابع يأكوب الناقصي** . وهو تطبيق متماثل للمضلع الرباعي Π على نصف المستوي العلوي $\{0 < \operatorname{Im} z\}$. ونشير هنا إلى الخواص الرئيسية للتابع $\psi(z)$:

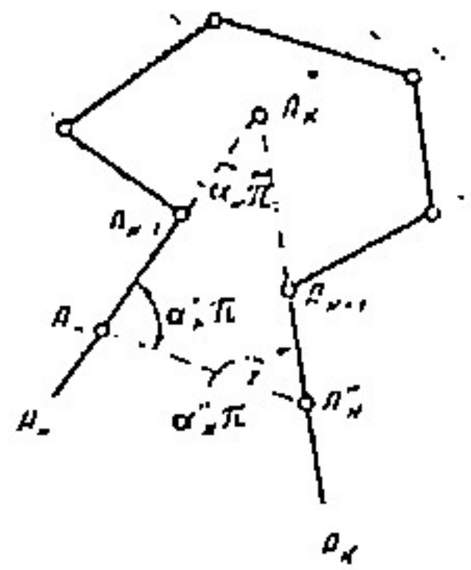
١) إن التابع $\psi(z)$ وحيد التعيين وتحليلي في المستوي العقدي z باستثناء النقاط $z = 2n + iH(2k+1)$ (n , k عددان صحيحان) والتي هي أقطاب بسيطة له .

٢) للتابع $\psi(z)$ دوران $T_1 = 4$ و $T_2 = 2Hi$. أي أن

$$\psi(z + 4n + 2Hki) \equiv \psi(z)$$

حيث k, n عددان صحيحان . إن برهان هاتين الخاصتين مماثل لبرهان النظرية (١) . ونشير هنا أيضاً إلى أنه بدلالة التوابع الناقصية يمكن إيجاد تطبيق متماثل لداخل قطع ناقص على نصف مستوٍ . انظر [5] .

٤ – تطبيق نصف مستو على مضلع غير محدود . لنأخذ مضلعاً غير محدود Π، ولا يحتوي في داخله على النقطة $w=\infty$ وليكن أحد رؤوسه أو أكثر في النقطة $w=\infty$. لنفرض أن رأس المضلع A_k واقع في اللانهاية . في هذه الحالة نأخذ على كل من الشعاعين $A_{k-1}A_k$ و A_kA_{k+1} نقطة كيفية A'_k, A''_k على الترتيب ولنصل هاتين النقطتين بقطعة مستقيمة فنحصل على مضلع Π' عدد أضلاعه $(n+1)$ ضلعاً ، الشكل (١٠١) . إن التابع الذي



الشكل (١٠١)

يطبق نصف المستوي $(0 < \operatorname{Im} z)$ على المضلع Π' هو كما وجدنا سابقاً

$$f(z) = c \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z-a'_k)^{\alpha'_k - 1} (z-a''_k)^{\alpha''_k - 1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n - 1} dz + c_1 \qquad (12)$$

α''_k, α'_k هما الزاويتان في الرأسين A'_k و A''_k مقدرتان بأجزاء الـ π . وأما a''_k, a'_k فهما النقطتان من المحور ox المقابلتان للرأسين المذكورين . لنجعل المجال $A'_kA''_k$ يمتد إلى اللانهاية بشكل يبقى موازياً لنفسه . وبنتيجة ذلك تلتقي النقطتان a''_k, a'_k بنقطة واحدة a_k الموافقة للرأس A_k وينتهي العاملان في العلاقة (12) المتضمنان a'_k إلى $(z-a_k)^{\alpha'_k+\alpha''_k-2}$. نرمز بـ $\alpha_k\pi$ للزاوية المأخوذة مع إشارة ناقص في الشعاعين $A_kA_{k+1}, A_{k-1}A_k$ في النقطة المحدودة A^*_k . وعندئذٍ من المثلث $A'_kA''_kA^*_k$ نجد $\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = 1$ أي أن $\alpha'_k + \alpha''_k - 2 = \alpha_k - 1$ وتأخذ العلاقة (12) الشكل

$$f(z) = c \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z-a_k)^{\alpha_k - 1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n - 1} dz + c$$

هي نفس العلاقة (1) . وبنفس الطريقة نجد هذه العلاقة في الحالة التي يكون أكثر من رؤوس المضلع واقع في اللانهاية .

وهكذا نجد أن علاقة كريستوفيل – شفارتز (1) [(9) . $a_n = \infty$] في حالة المضلع غير المحدود والذي له رأس أو أكثر في نقطة اللانهاية وذلك إذا اعتبرنا الزاوية بين مستقيمي الرأس الذي في اللانهاية تساوي الزاوية بين هذين المستقيمين في نقطة تلاقيهما المحدودة مأخوذة بإشارة سالب .

لنلاحظ بأن تعريفنا للزاوية في رأس المضلع الواقع في نقطة اللانهاية على الشكل المذكور يبقي العلاقة التي تربط مجموع زوايا المضلع بعدد أضلاعه صحيحة . في الواقع من أجل المضلع Π' يكون لدينا $\Sigma' + \alpha'_k + \alpha''_k = n - 1$ حيث Σ' تعني مجموع جميع زوايا المضلع Π' باستثناء زاوية الرأس $A_k = \infty$ وباستبدال $\alpha'_k + \alpha''_k$ بـ $\alpha_k + 1$ نجد مجدداً العلاقة المطلوبة . ووفقاً لما ذكرنا تكون الزاوية في الرأس A_k وهي α_k محققة للعلاقة $-2 < \alpha_k < 0$.

مثال (٣) . ليكن Π مثلثاً رؤوسه في النقاط $A_3 = \infty \quad A_2 = 1, A_1 = 0$

$0 < \alpha_1 < 2$ ، $0 < \alpha_2 \leq 2$ و $-2 < \alpha_3 < 0$ و $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

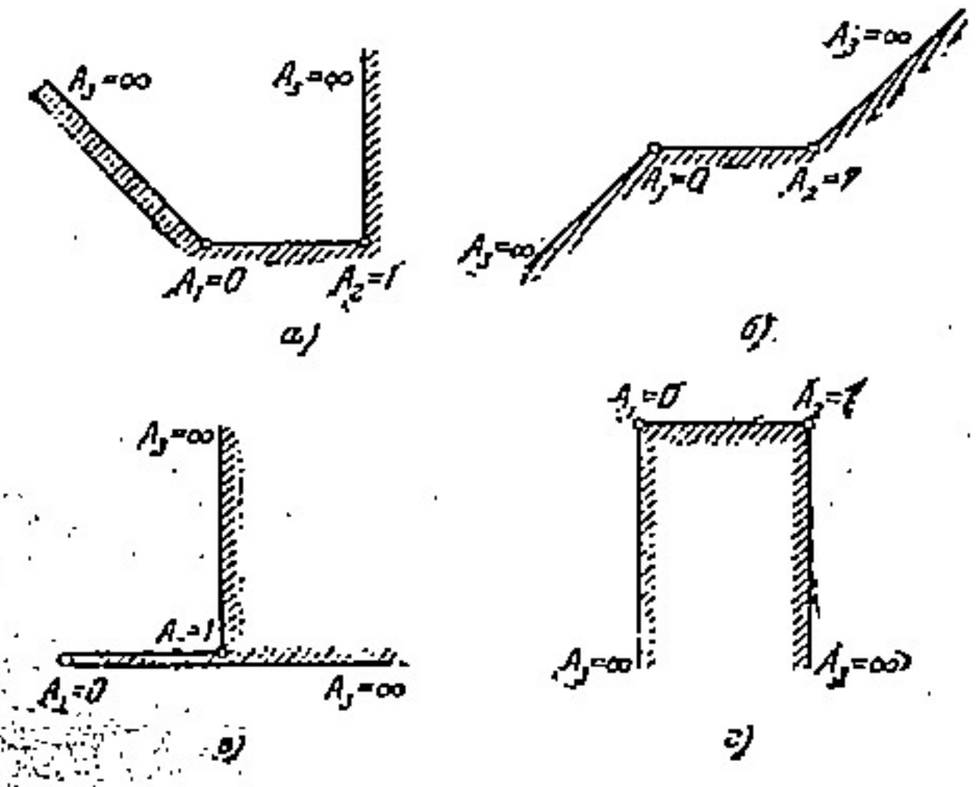
من المثال (١) نجد أن التابع (10) هو تطبيق متماثل لنصف المستوي $\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ المثلث Π . في الشكل (١٠٢) نماذج مختلفة لهذه المثلثات :

(a $\alpha_3 = -(1/4)\ ,\quad \alpha_2 = (1/2)\ ,\quad \alpha_1 = (3/4)$

(b $\alpha_3 = -1\ ,\quad \alpha_2 = (3/4)\ ,\quad \alpha_1 = 5/4$

(c $\alpha_3 = -(3/2)\ ,\quad \alpha_2 = (1/2)\ ,\quad \alpha_1 = 2$

(d $\alpha_3 = -2\ ,\quad \alpha_2 = (3/2)\ ,\quad \alpha_1 = 3/2$



الشكل (١٠٢)

وتأخذ العلاقة (10) ، في الحالات الموافقة بالشكل :

(a $$w = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin \sqrt[4]{z} - \sqrt[4]{z}\,\sqrt{1-\sqrt{z}}\,\right]$$

(b $$w = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\zeta\sqrt{2}}{1-\zeta^2} + \operatorname{arc\,th}\frac{\zeta\sqrt{2}}{1+\zeta^2} - \frac{\zeta^2\sqrt{2}}{1+\zeta^4}\right]$$

$$\zeta = \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}}$$

$$w = 1 - \left(1+\frac{z}{2}\right)\sqrt{1-z}$$

$$w = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\sqrt{z} + (2z-1)\sqrt{z(1-z)}\right]$$

أن الفروع هنا هي الفروع المؤجبة من أجل $z = x$ و $0<x<1$

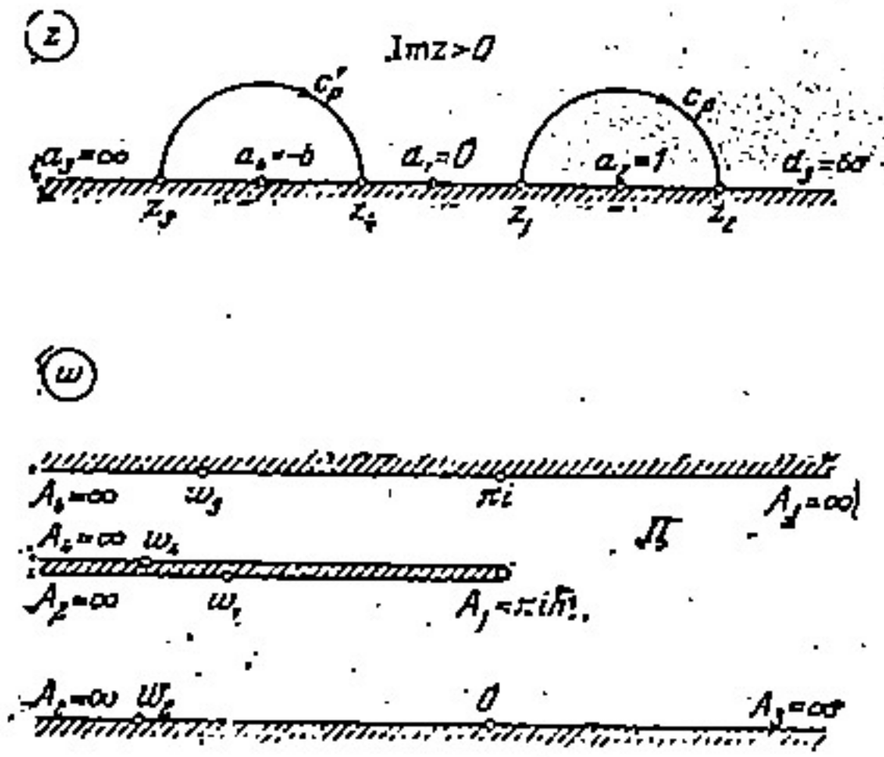
مثال (٤) . ليكن Π رباعي الأضلاع : الشريط $0<\mathrm{Im}\, w<\pi$ باستثناء القطع على الشعاع $(-\infty+\pi\,\mathrm{hi}\,,\ \pi\,\mathrm{hi}]$ حيث $0<h<1$ ، الشكل (١٠٣) لدينا

$\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ و $\alpha_1=2$ ، $A_4=\infty$ ، $A_3=\infty$ ، $A_2=\infty$ ، $A_1=$

$a_4=-b$ ، $a_3=\infty$ ، $a_2=1$ ، $a_1=0$ حيث $0<b<+\infty$.

إلى العلاقة (9) نجد أن التطبيق المتماثل لنصف المستوي $\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ على رباعي لاع Π هو :

$$w = f(z) = c\int_0^z \frac{\zeta\, d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} + \pi\,\mathrm{hi}$$



الشكل (١٠٣)

ب $\arg c$. نأخذ نقطة z_1 من المجال $(0,1)$: $z_1=x$ و $0<x<1$. إن صورة هذه النقطة

هي $f(z_1) = w_1$ واقعة على الضلع $(A_1$ و $A_2)$ من المضلع Π الشكل (١٠٣) أي أن $\operatorname{Re} w_1 < 0$ و $\operatorname{Im} w_1 = \pi h$. ومن العلاقة (13) نجد

$$w_1 - A_1 = c \int_0^{x_1} \frac{t\,dt}{(t-1)(t+b)}$$

وبما أن $w_1 - A_1 = \operatorname{Re} w_1 < 0$ والتابع المستكمل سالب $(0 \leqslant t \leqslant x_1 < 1)$ فإن $c > 0$.
وهكذا يبقى في العلاقة (12) المجهول لان $c > 0$ و $b > 0$.

لنوجد هذين الوسطيين ، ليكن $z_1 = 1 - \rho$ و $z_2 = 1 + \rho$ حيث $\rho > 0$ وصغير بقدر كاف . وبما أن النقطة $w_1 = f(z_1)$ واقعة على الضلع (A_1, A_2) والنقطة $w_2 = f(z_2)$ واقعة على الضلع (A_2, A_3) فإن $\operatorname{Im}(w_2 - w_1) = -\pi h$. ومن العلاقة (13) نجد

$$w_2 - w_1 = f(z_2) - f(z_1) = c \int_{C_\rho} \frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} \qquad (14)$$

حيث C_ρ نصف الدائرة $\{|\zeta| = \rho\,,\ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$ والموجهة باتجاه دوران عقارب الساعة الشكل (١٠٣) .

لنستعرض الآن التكامل (14) . إن النقطة $\zeta = 1$ قطب بسيط للتابع المستكمل و

$$\operatorname*{res}_{\zeta=1} \frac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} = \frac{1}{1+b}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} = \frac{1}{1+b} \cdot \frac{1}{\zeta-1} + g(\zeta)$$

حيث $g(\zeta)$ تابع وحيد التعيين وتحليلي في جوار للنقطة $\zeta = 1$ وهذا بدوره يعني أن $g(\zeta)$ محدود : $|g(\zeta)| \leqslant M$ في جوار لتلك النقطة . ووفقاً لذلك يمكننا كتابة التكامل (14) في شكل مجموع تكاملين ، الاول فيهما يساوي

$$\frac{c}{1+b} \int_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-1} = -\frac{c\pi i}{1+b} \qquad (15)$$

ومن أجل الثاني يكون لدينا

$$\int_{C_\rho} g(\zeta)\,d\zeta = O(\rho) \qquad (\rho \to 0) \qquad (16)$$

وذلك لأن $\left| \int_{C_\rho} g(\zeta)\,d\zeta \right| \leqslant M\pi\rho$. ومن (14) و (16) نجد

$$\operatorname{Im}(w_2 - w_1) = -\pi h = -\frac{\pi c}{1+b} + O(\rho) \qquad (\rho \to 0)$$

وعندما $\rho \to 0$ نجد

$$\frac{c}{1+b} = h \qquad (17)$$

ونشير هنا إلى أن الطريقة المتبعة في إيجاد العلاقة (17) من العلاقة (13) يمكن تطبيقها من أجل أي مضلع وذلك بدراسة w في جوار الرأس A_k ، إذا كان $\alpha_k = 0$ بتطبيق حدده الطريقة من أجل رباعي الأضلاع Π في جوار للنقطة A_4 نجد

$$w_4 - w_3 = f(z_4) - f(z_3) = c \int_{C'_\rho} \frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)}$$

حيث

$$z_3 = -b - \rho\ ,\quad z_4 = -b + \rho\ ,\quad \operatorname{Im}(w_4 - w_3) = \pi(h-1)\ ,\quad C'_\rho$$

نصف الدائرة $\{|\zeta+b| = \rho\,,\ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$ الشكل (١٠٣) . ومنه نجد

$$\operatorname{Im}(w_4 - w_3) = \pi(h-1) = -\frac{\pi bc}{1+b} + O(\rho) \qquad (\rho \to 0)$$

وعندما $\rho \to 0$ نجد

$$\frac{bc}{1+b} = 1 - h \qquad (18)$$

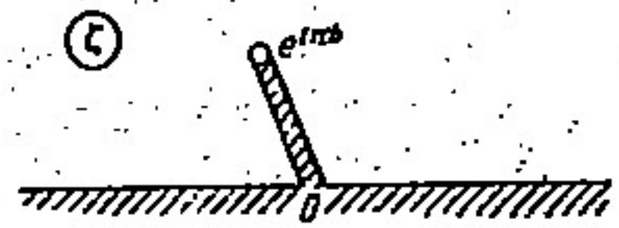
بحل جملة المعادلتين (17) و (18) نجد $c = 1 , b = (1-h)/h$ وبتعويض هاتين القيمتين في (13) وبحساب التكامل نجد

$$w = f(z) = \ln\left[(z-1)^b\left(1+\frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}\right]$$

لنلاحظ بأن التابع $\zeta = e^w$ هو تطبيق متماثل للمضلع الرباعي Π على الساحة G وهي نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,\zeta > 0\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0, e^{i\pi h}]$ الشكل (١٠٤). وبالتالي فإن التابع

$$\zeta = (z-1)^b\left(1+\frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}$$

هو تطبيق متماثل لنصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,z > 0\}$ على الساحة G .



الشكل (١٠٤)

تمارين غير محلولة

١ – ليكن $w = \frac{1}{z-z_0} + h$ أوجد ١) صورة الشبكة المتعامدة $x = C$ ٢) الشبكة القطبية $|z-z_0| = R$, $\arg(z-z_0) = \alpha$.

٢ – ماهي صورة كل من الساحات التالية بواسطة التطبيق المذكور بجانب كل منها :

1) $\{x>0 \ , \ y>0\}$; $w = \frac{z-i}{z+i}$

2) $\{|z|<1 \ , \ \mathrm{Im}\,z>0\}$; $w = \frac{2z-i}{2+iz}$

3) $\{0<\varphi<(\pi/4)\}$; $w = \frac{z}{z-1}$

4) $\{0<x<1\}$; 1) $w = \frac{z-1}{z}$, 2) $w = \frac{z-1}{z-2}$

5) $\{1<|z|<2\}$; $w = \frac{z}{z-1}$

– أوجد التابع الذي يطبق نصف المستوي العلوي على نفسه والذي من أجله

1) $w(0) = 1$, $w(1) = 2$; $w(2) = \infty$

2) $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$

– طبق نفس المستوي $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ على دائرة الوحدة $\{|w|<1\}$ وبحيث يكون

1) $w(i) = 0$; $\arg w'(i) = -(\pi/2)$

2) $w(2i) = 0$; $\arg w'(2i) = 0$

3) $w(a+bi) = 0$; $\arg w'(a+bi) = \theta$; $(b>0)$

– طبق الدائرة $\{|z|<2\}$ على نصف المستوي $\{\mathrm{Re}\,w>0\}$ وبحيث يكون
$\arg w'(0) = \pi/2$, $w(0) = 1$

– أوجد التابع الذي ينقل نصف المستوي العلوي إلى نفسه وبحيث يكون

$w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$. $(\mathrm{Im}\,a>0 \ , \ \mathrm{Im}\,b>0)$

– طبق نصف المستوي العلوي على نصف المستوي السفلي وبحيث يكون

$w(a) = \bar{a}$, $\arg w'(a) = -(\pi/2)$; $(\mathrm{Im}\,a>0)$

– طبق دائرة الوحدة $\{|z|<1\}$ على دائرة الوحدة $\{|w|<1\}$ وبحيث يكون

1) $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$

2) $w(i/2) = 0$; $\arg w'(i/2) = \pi/2$

3) $w(0) = 0$; $\arg w'(0) = -(\pi/2)$

4) $w(a) = a$; $\arg w'(a) = \alpha$

٩ — طبق الزاوية $(0<\arg z<\pi\alpha)$ حيث $0<\alpha\leq 2$ على نصف المستوي العلوي .

١٠ — طبق الساحة $\{(\pi/4)<\arg z<\pi/2\}$ — على نصف المستوي العلوي وبحيث يكون

$$w(0)=0\ ,\quad w(i)=-1\ ,\quad w'(1-i)=2$$

١١ — أوجد التابع الذي يطبق نصف الدائرة $\{|z|<1\ ,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ على نصف المستوي العلوي والذي يحقق الشروط الآتية :

1) $w(-1)=0\ ,\quad w(0)=1\ ,\quad w(1)=\infty$

2) $w(\pm 1)=\mp 1\ ,\quad w(0)=\infty$

3) $w(i/2)=i\ ,\quad \arg w'(i/2)=-(\pi/2)$

١٢ — أوجد التابع الذي يطبق نصف الدائرة $\{|z|<1, \mathrm{Im}\,z>0\}$ على الدائرة $\{|w|<1\}$ والمحقق للشروط الآتية :

1) $w(\pm 1)=\pm 1\ ,\quad w(0)=-i$

2) $w(i/2)=0\ ,\quad \arg w'(i/2)=(\pi/2)$

١٣ — اوجد التابع $w(z)$ الذي يطبق الساحة $\{\mathrm{Im}\,z>0\ ,\ |z|>1\}$ على نصف المستوي العلوي

١٤ — طبق على نصف المستوي العلوي :

1) $\{|z|<R\ ,\ 0<\arg z<\pi\alpha\}\ ;\ (0<\alpha\leq 2)$

2) $\{|z|>R\ ;\ 0<\arg z<\pi\alpha\}\ ,\ (0<\alpha\leq 3)$

١٥ — طبق كل ساحة من الساحة التالية على نصف المستوي العلوي :

1) $\{|z|<1\ ,\ |z-i|<1\}$

2) $\{|z|<1\ ,\ |z-i|>1\}$

3) $\{|z|>1\ ,\ |z-i|<1\}$

4) $\{|z|>1\ ,\ |z-i|>1\}$

5) $\{|z|>2\ ,\ |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}\}$

١٦ — طبق على نصف المستوي العلوي :

١) المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[1\ ,\ -1]$.

٢) المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[i\ ,\ -i]$

٣) المستوي العقدي باستثناء القطعين على طول الشعاعين $[R\ ,\ -\infty)\ ,\ (-\infty\ ,\ -R]$ حيث $0<R$.

٤) نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0,ih]\ ,\ 0<h$.

٥) نصف المستوي $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ باستثناء القطع من ih حتى ∞ على طول النصف الموجب من المحور التخيلي ، $(0<h)$.

٦) الدائرة $\{|z|<1\}$ باستثناء القطع على طول نصف القطر $[0,1]$.

٧) خارج دائرة الوحدة باستثناء القطع على طول الشعاع $[1,\infty)$.

٨) الدائرة $\{|z|<1\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[1\ ,\ 1/2]$.

٩) الدائرة $\{|z|<1\}$ باستثناء القطعين على طول المجالين $[-1,0]$, $[a,1]$ حيث $0<a<1$.

١٠) نصف الدائرة العلوي $\{|z|<1\}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0,\alpha i]$ حيث $0<\alpha<1$,

١٧ — طبق خارج الصليب المشكل من المجال $[a,-b]$ من المحور الحقيقي والمجال $[ci,-ci]$ من المحور التخيلي على نصف المستوي العلوي وعلى خارج دائرة الوحدة علماً بأن $0\leq a$, $0<b$, $0\leq c$ و $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

١٨ — طبق على نصف المستوي العلوي المستوي العقدي باستثناء القطع الممتد على طول الشعاع $(0\leq a),[-a\ ,\ +\infty)$ وباستثناء القطع على طول المجال $[ci\ .\ -ci]$ $(0<c)$.

١٩ — طبق المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $(-\alpha i,0)(1<\alpha)$ وعلى طول نصف الدائرة $\{|z|=1\ ,\ \mathrm{Im}\,z<0\}$ على نصف المستوي العلوي .

— طبق المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[b\ ,\ -1\ ]\ ,\ (b<-1)$ وعلى طول قوس الدائرة ذي النهايتين $e^{\pm i\alpha}$ والمار من النقطة $z=-1$.

— طبق على نصف المستوي العلوي كل من الساحات الآتية :

١) الشريط $\{0<x<1\}$ باستثناء القطع على طول المجال $\{y=0,0<x<h\}$ $(1>h)$

٢) الشريط $\{0<x<\pi\}$, $\{0<y$ باستثناء القطع على طول المجال $\{x=(\pi/2)\ ,0\leqslant y\leqslant h\}$.

٣) نصف الشريط $\{0<x<\pi\}$, $\{0<y$ باستثناء القطع على طول الشعاع .
$\{h\leqslant y<\infty\ ,\ x=\pi/2\}$, $(0<h)$

٤) نصف الشريط $\{0<x<\pi\}$, $\{0<y$ باستثناء القطع على طول المجال $\{0\leqslant y\leqslant h_1\ \ x=(\pi/2)\}$ والقطع على طول الشعاع $\{x=(\pi/2), h_2\leqslant y<\infty\}$ $(h_1<h_2)$.

٥) الساحة المحدودة بالدائرتين $\{|z-1|=1\}$, $\{|z+1|=1\}$ وباستثناء القطع على طول الشعاع $\{y=0\ ,\ 2\leqslant x<\infty\}$.

— طبق نصف المستوي العلوي $(\mathrm{Im}\ z>0)$ على المثلث القائم الزاوية P إذا كانت الزاويتان الحادتان هما $\pi/6\ ,\ \pi/3$ وبحيث يكون النقاط $0\ ,\ \omega$ ، $\omega+(i\omega/\sqrt{3})$ من المستوي w هي صور للنقاط $0\ ,1\ ,\infty$ على الترتيب .

— طبق نصف المستوي العاوي $(0<\mathrm{Im}\ z)$ على الساحة في المستوي w المبينة في الشكل أدناه وفق التقابل في النقاط الآتي :

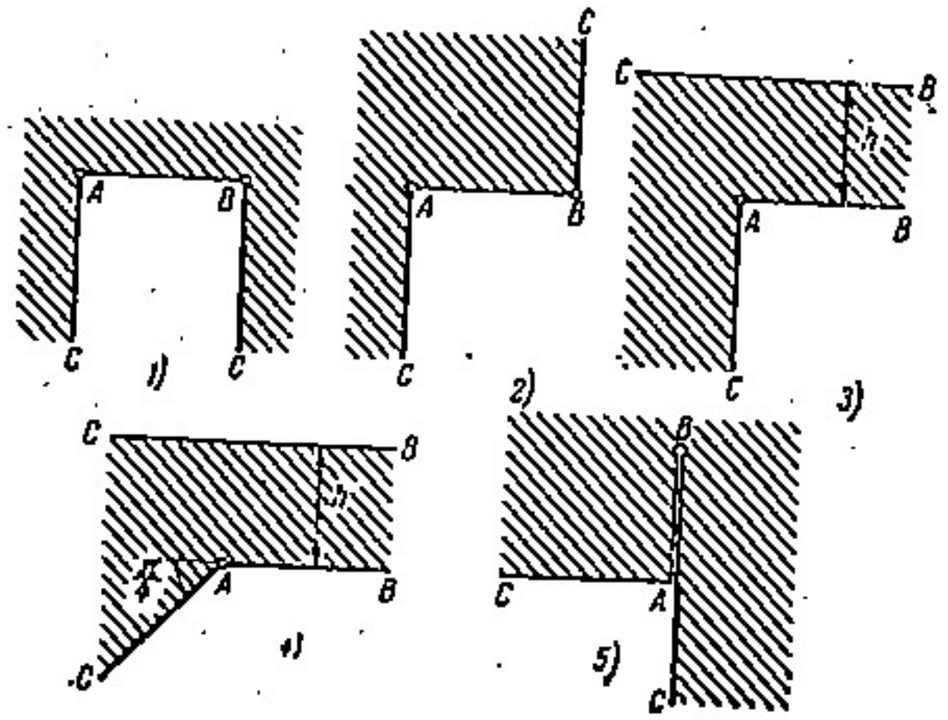
1) $w\,(A=0\ ,B=1\ ,C=\infty)\rightarrow z\,(0,1,\infty)$

2) $w\,(A=0\ ,B=1\ ,C=\infty)\rightarrow z\,(0,1,\infty)$

3) $w\,(A=0\ ,B=\infty\ ,C=\infty)\rightarrow z\,(0,1,\infty)$

4) $w\,(A=0\ ,B=\infty\ ,C=\infty)\rightarrow z\,(0,1,\infty)$

5) $w\,(A=0\ ,B=ia\ ,C=\infty)\rightarrow z\,(0,1,\infty)$



المراجع الاجنبية

1. A.I.MARKUSHEVICH. The thetory of analytic functions: a brif course. Moscow Mir 1983.

2. МАРКУШЕВИЧ А.И. Теория аналитических функций, Т.1, Москва , Наука 1967.

3. СИДОРОВ Ю.В.,ФЕДОРЮК М.В.,ШАБУНИН М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва Наука, 1982.

4. ШАБАТ Б.В. Введение в комплексный анализ.Том I. Москва, Наука, 1985.

5. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А.,ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.Москва,Наука, 1973.

6. ГУРВИЦ А.,КУРАНТ Р. Теория функций. Москва, Наука, 1968.

7. ГРИШЕНКО А.Е.,НАГНИБЕДА Н.И.,НАСТАСИЕВ П.П. Теория функций комплексного переменного.Киев, Высшая школа, 1986.

8. ВОЛКОВЫСКИЙ Л.И.,ЛУНЦ Г.Л.,АРАМАНОВИЧ И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.Москва, Физматиз,1961.

9. ФУКС Б.А.,ШАБАТ Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.Москва,1969.

10. OLVER F. W. J. Introduction to asymptotics and special functions New york Acadimic press, 1974.

دليل المصطلحات العلمية

انكليزي - عربي

— A —

absolute convergence of series	تقارب مطلق لسلسلة
absolutely convergent series	سلسلة متقاربة اطلاقاً
algebraic branch point	نقطة تفرع جبرية
amplitude of complex number	مضمون عدد مركب
analytic contiuation	تمديد تحليلي
along a curve	تمديد تحليلي من خلال منحن
chain of	سلسلة تمديدات تحليلية
direct	تمديد تحليلي مباشر
analytic function	تابع تحليلي
analytic function element	عنصر تابع تحليلي
annulus	حلقة
A-point	موضع A
argument of complex number	عمدة عدد مركب
argument of derivative	عمدة المشتق
argument principle	مبدأ الأرغو مينت (العمدة)

— B —

beta function	التابع بيتا
boundary point of a set	نقطة حدية لمجموعة

boundary of a set	حدود مجموعة
bounded set	مجموعة محدودة
branch(es) of multiple-valued function	الفروع لتابع متعدد القيم
branch point	نقطة تفرع
broken line	خط منكسر

— C —

chain of analytic continuations	سلسلة تمديد تحليلي
circle of convengence	دائرة تقارب
closed curve	منحني مغلق
closed set	مجموعة مغلقة
complex number	عدد مركب
complex plane	المستوي العقدي (المركب)
composite contour	محيط مركب من عدة منحنيات
conformal mapping	تطبيق متماثل
of the first kind	تطبيق متماثل من النوع الأول
of the second kind	تطبيق متماثل من النوع الثاني
conjugate complex number	مرافق عدد مركب
continuity of a function	استمرار تابع
continuous curve	منحني مستمر
convergence of a sequence	تقارب متتالية
convergence of a series	تقارب سلسلة
correspondence between boundaries	التقابل بين الحدود
curve	منحني

— D —

derivative	مشتق
differentiable function	تابع قابل للمفاضلة

distance	مسافة
divergent series	سلسلة متباعدة
domain	ساحة

— E —

element	عنصر
elliptic function	تابع ناقصي
elliptic integral	تكامل ناقصي
of the first kind	تكامل ناقصي من النوع الأول
entire function	تابع صحيح
essential singular point	نقطة شاذة منعزلة
Euler's integral	تكامل أولر
Euler's constant	ثابت أولر

— F —

fixed points of a mapping	النقاط الثابتة لتطبيق
formula	علاقة
function	تابع
fundamental	أساسي

— G —

gamma function	التابع غاما
Gauss formula	علاقة غوص
general	عام
general exponential function	التابع النيبري العام

— H —

Half-plane	نصف المستوي
Hurwitz's theorem	نظرية هورفيتس .

— I —

identity function	التابع الأحادي
identity mapping	التطبيق الأحادي
imaginary axis	محور الأعداد التخيلية
imaginary part of a complex number	القسم التخيلي لعدد مركب
infinte product	جداء لانهائي
integral	تكامل
integration path	طريق المكاملة
inverse function	تابع معاكس
isolated singularity	شذوذ منعزل
isolated singular point	نقطة شاذة منعزلة

— J —

Jacobi's elliptic function	تابع جاكوبي الناقصي
Jordan curve	منحني جورداني
Jordan lemma	توطئة جوردان
Joukowski function	تابع جوكوفسكي

— L —

Laurent series	سلسلة لوران
holomorphic part of	الجزء التحليلي (الهولومورفي) لـ
principal part of	الجزء الرئيسي لـ
Legendre's normal elliptic integral	تكامل ليجندر الناقصي
lemma	توطئة
limit of a function	نهاية تابع
linear fractional function	تابع كسري — خطي
linear function	تابع خطي
Lioville's theoren	نظرية ليوفيل

logarithm	لوغاريتم
logarithmic branch point	نقطة تفرع لوغاريتمية
logarithmic derivative	مشتق لوغاريتمي
logarithmic residue	راسب لوغاريتمي

— M —

many-valued function	تابع متعدد القيم
meromorphic function	تابع ميروموروفي
modulus of a derivative	طويلة المشتق
geometric interpretation of	المعنى الهندسي لطويلة المشتق
monodromy theorem	نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي
multiple - valued function	تابع متعدد القيم
multiply connected domain	ساحة متعددة الاتصال

— N —

nieghborhood of a point	جوار نقطة

— O —

one-to-one mapping	تطبيق واحد — لواحد
open set	مجموعة مفتوحة
order of an A-point	مرتبة موضع A
orientation	توجيه

— P —

parallelogram	متوازي أضلاع
partial-fraction expansion	نشر في كسور بسيطة
partial sums of series	مجاميع جزئية لسلسلة
periodic function	تابع دوري

singular point	نقطة شاذة
stereographic projection	اسقاط ستيريوغرافي
superior limit	نهاية عليـــا
symmetry conservation	الحفاظ على التناظر
symmetry with respect to a circle	التناظر بالنسبة للدائرة

— T —

theorem	نظرية
transcendental entrie function	تابع صحيح متسامي
transform	تحويل
transformation	تحويل
trigonometric form of a complex number	الصيغة المثلثية لعدد مركب

— U —

uniform convergence	تقارب منتظم
uniformly convrgent series	سلسلة متقاربة بانتظام
uniqueness theorem	نظرية الوحدانية

Principle	مبدأ
argument	مبدأ الأرغومينت
Riemann-Schwarz symmetry	مبدأ التناظر — ريمان — شفارتز
problem	مسألة
product	جداء
pole of an analytic function	قطب تابع تحليلي

— R —

radius of convergence	نصف قطر التقارب
real axis	محور حقيقي
real part of a complex number	القسم الحقيقي لعدد مركب
regular point	نقطة نظامية (عادية)
removable singular point	نقطة شاذة قابلة للاصلاح
residue	راسب
at ∞	الراسب في اللانهاية
residue theorem	نظرية الرواسب
Riemann's mapping theovem	نظرية ريمان في التطبيق
Riemann-Schwarz symmetry principle	مبدأ ريمان — شفارتز في التناظر
Riemann surface	سطح ريمان
Rouche's theorem	نظرية — روشيه

— S —

Schwarz-Cristoffel integral	تكامل كريستوفيل — شفارتز
sequence of complex numbers	متتالية أعداد مركبة
series	سلسلة
set	مجموعة
simple A-point	موضع A بسيط
simply connected domain	ساحة وحيدة الاتصال

الفهـــرس

المقدمـــــة ٣

الفصل الاول
نظريــة الرواســب

١ ـ النقاط الشاذة المنعزلة ذات الطبيعة الواحدة ٥
٢ ـ التوابع الميرومورفية ١٥
٣ ـ الرواســـــب ١٧

الفصــل الثــاني
التمديـــد التحليلي

١ ـ مفهوم التمديد التحليلي ٣٤
١ ـ العناصر ـ تمديد العناصر (٣٤) ٠ ٢ ـ نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي (٤٠)

٢ ـ التوابع التحليلية ٤٦
١ ـ مفهوم التابع التحليلي (٤٦) ٠ ٢ ـ التوابع الشهيرة (٥٠) :
١) الجذر النوني (٥٠) ٠ ٢) التابع اللوغاريتمي(٥٢) ٠

٣ ـ الفروع التحليلية ٥٤
١ ـ تزايد العمدة على طول طريق (٥٥) ٢ ـ الفروع التحليلية لتابع تحليلي في ساحة وحيدة الاتصال (٥٩) ٠ ٣ ـ الفروع الوحيدة التعيين في ساحات متعددة الاتصال (٦٥) ٠

٤ ـ النقاط الشاذة ٨٠

الفصل الثالث

تطبيقات نظرية الرواسب

١ ــ حساب التكاملات المحددة ٨٧

٢ ــ مبدأ الارغومينت ١٢٧

٣ ــ نشر التوابع الميرومورفية في كسور بسيطة ١٣٨

١ ــ نظرية نشر التوابع الميرومورفية (١٣٨) ٠ ٢ ــ نشر ctgz (١٤١)

الفصل الرابع

الجداءات اللانهائية ــ التوابع الاولرية

١ ــ الجداء اللانهائي ١٥١

٢ ــ نشر تابع صحيح في جداء لا نهائي ١٥٩

٣ ــ التوابع الاولرية ١٦٤

١ ــ التابع غاما (١٦٤) ٠ ٢ ــ التابع بيتا (١٧٦) ٠

الفصل الخامس

التطبيق المتماثل

١ ــ المعنى الهندسي للمشتق ١٨٣

٢ ــ مبدأ الحفاظ على الساحة ــ الخواص الموضعية للتطبيقات بالتوابع التحليلية ٠ ١٨٧

٣ ــ الخواص العامة للتطبيقات المتماثلة ١٩١

١ ــ تعريف التطبيق المتماثل (١٩١) التماثل في نقطة اللانهاية (١٩١)
٣ ــ مبدأ تقابل الحدود (١٩٣) ٤ ــ نظرية ريمان (١٩٥) ٠

٤ ــ التطبيقات المتماثلة بالتوابع الكسرية ــ الخطية ١٩٨

١ ــ التابع الخطي (١٩٨) ٠ ٢ ــ التابع الكسري ــ الخطي (١٩٩) ٠
٣ ــ الخواص الهندسية للتوابع الكسرية الخطية (٢٠٠) ٠
٤ ــ الايزوموفيزمات والافتومورفيزمات الكسرية ــ الخطية (٢٠٤) ٠

٥ ــ التطبيقات المتماثلة بالتوابع الابتدائية ٢١٠

١ ــ التابع الاسي (٢١٠) ٠ ٢ ــ التابع $w=\sqrt{z}$ (٢١١) ٠ ٣ ــ التابع $w=z^n$ (٢١٣) ٠

٤ ــ التابع النيري $w=e^z$ (٢١٤) ٠ ٥ ــ التابع اللوغاريتمي (٢١٦) ٠ ٦ ــ تابع جوكوفسكي (٢١٧) ٠ ٧ ــ التابع المعاكس لتابع جوكوفسكي (٢٢٥) ٠ ٨ ــ التوابع المثلثية والقطعية (٢٢٧) ٠ ٩ ــ امثلة متنوعة (٢٣٠) ٠

٦ ــ مبدأ التناظر ٢٣٨

١ ــ التناظر بالنسبة للمحور الحقيقي (٢٣٨) ٠ ٢ ــ تطبيقات مبدأ التناظر (٢٤٣) ٠

٧ ــ تكامل كريستوفيل ــ شفارتز ٢٤٦

١ ــ نظرية كريستوفيل شفارتز (٢٤٧) ٠ ٢ ــ حساب الوسطاء في تكامل كريستوفيل شفارتز (٢٥١) ٠ ٣ ــ تطبيق نصف المستوي على مثلث او مستطيل (٢٥٣) ٠ ٤ ــ تطبيق نصف المستوي على مضلع غير محدود (٢٥٨) ٠

المراجع الاجنبية ٢٧١

المصطلحات العلمية ٢٧٣

الفهرس ٢٨٣

جدول الخطا والصواب ٢٨٥

جدول الخطأ والصواب

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٦	١	متحركة	قابلة للاصلاح
٣٣	الأخير	$\sqrt{z}$	$\sqrt{z_2}$
٤٤	٣ من الأسفل	$\|z_{\nu-1}-z^0_{\nu-1}\| \varepsilon/2$	$\|z_{\nu-1}-z^0_{\nu-1}\| < \varepsilon/2$
٤٩	١٢	تنتجز	ننجز
٥١	٦	ولنستفرض	ونستعرض
٥٤	٥	$D = DU_\alpha$	$D = \bigcup D_\alpha$
١٠٤	٥	$f(z) = {}^{\alpha-1}/(z+1)$	$f(z) = z^{\alpha-1}/(z+1)$
١٢٠	٦	$\sum_{k=1}^{3} {}^{\text{res } f(z)}_{\|z=z}$	$\sum_{k=1}^{3} {}^{\text{res } f(z)}_{z=z_k}$
١٧٤	٣ من الأسفل	$(e^{2\pi i z}-1\ \Gamma(z))$	$(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)$
٢٢١	٨	صورة من	صورة نقطة من
٢٣٧	٢	$\frac{w=1}{w+1} =$	$\frac{w-1}{w+1} =$
٢٤٢	٦ من الأسفل	لمجالين	المجالين
٢٤٣	٦ من الأسفل	القطاع	القطع
٢٥١	٥	الخاصة [قطب ٢]	[الخاصة ٢] قطب
٢٥٩	٥	$(z-a_k)^{\alpha'_k+\alpha''_k-2}$	$(z-a_k)^{\alpha'_k+\alpha''_k-2}$
٢٦٦	٧ من الأسفل	$0<\alpha\leqslant 3$	$0<\alpha\leqslant 2$

مدونة ملحوظة