

مبادئ الجبر المجرد

الدكتور

محمد عبد العظيم سعود

أستاذ الرياضيات البحتة

كلية العلوم بجامعة عين شمس

بسم الله الرحمن الرحيم

توطئة

اللهم اجعل هذا العمل من ذلك الذى لا ينقطع برحيل أصحابه ، مفيداً لقرائه ، وبعد ؛ فأقدم هذا الكتاب من عميق إحساسى بلزوم تكوين مكتبة علمية بلسان عربى ، يكون عوناً لأبناء أمتنا العربية على استيعاب مبادئ علم الجبر ، الذى تمتد جذوره إلى ما أسسه الأجداد فى ماضيها السحيق ، أيام أن كانت لهم الريادة فى شتى العلوم والمعارف .

هو كتاب تعليمى ، بيد أن أفكار المادة العلمية عميقة إلى حد ما ، ولهذا حرصت على أن تكون البراهين واضحة جلية ، فاستطردت كثيراً فى شرحها وتبيانها ، على غير مألوف أغلب الكتب المتقدمة ، فلم أترك لفظة القارئ إلا القليل ، بل ربما أقل القليل . فكنيت أتخير البراهين من مختلف الكتب والمراجع بمقاييس الإبداع والوضوح فى آن ، ثم أزيد الأمر وضوحاً إن لزم ذلك .

وأما عن قضية المصطلح فقد أصبح لازماً على بعد أن آثرت استخدام مفردة "مجموعة" ترجمة لمفردة "set" فى كتاب سابق لى كان بعنوان "أسس الجبر والجبر الخطى" أن استخدم مفردة "زمرة" هنا ترجمة لمفردة "group" وهذا هو الشأن فى كل بلداننا العربية التى شاهدتها ، على النقيض مما آثرناه هنا فى مصر ، وكنت ميالاً إليه . فكان أساتذتنا الأجلاء يستخدمون مفردة "فئة" ترجمة لكلمة "set" ، "مجموعة" ترجمة لكلمة "group" .

واستخدمت مفردة "هومومورفيزم" الاستخدامين المتاحين فصرفتُها مرات وقلت "هومومورفيزماً" ومنعتها من الصرف تارات وقلت "هومومورفيزم" فى موضع النصب ، وكلا الرأيين النحويين صائب عند أصحابه . وقل مثل هذا فى "مونومورفيزم" و "إبيومورفيزم" ، و "أيزومورفيزم" و "إندومورفيزم" و "أوتومورفيزم" كذلك . وقد استخدمت كثيراً مفردة "تشاكل" ترجمة لكلمة "أيزومورفيزم" . واستخدمت الرمز S_n ، γ_n ، للتعبير عن الزمرة المتماثلة من الرتبة n ، فقد جاء كلاهما فى الكتب والكلاسيكيات . وفعلت الشيء ذاته حيث استخدمت $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}$ للتعبير عن نفس الزمرة ، فبينما يكون الرمز الثانى أشيع فى الكتب الإنجليزية والأمريكية ، نرى - جُلّ - أو كل الكتب الألمانية

تستخدم الرمز الأول . وعبرت عن تركيب الراسمين (أو الدالتين) f ، g أحياناً بـ Pog وأحياناً fg إلا إذا التبس الأمر بين التركيب والضرب فلزم التتويه . كما أوضحت بالبرهان الشكلى (formal proof) أن لا فرق بين الكتابة f والكتابة $f(X)$ ، فكلتاها تصلح تعبيراً عن راسم (أو دالة) فاستخدمت كلتيهما .

والكتاب مترع بالأمثلة المحلولة ، وليست كلها مختلفة الفكر ، كما أنها ليست جميعاً بالطبع فى نفس المستوى ذهنى . وأنصح للقارئ هنا ألا يسترسل فى قراءتها ، بل عليه أن يتوقف بعد قليل منها ، ليحاول حل باقيها ، ومقارنة حله بالحل المثبت بالكتاب ، للتعرف على مواطن القصور فى حله ، إن كان ثمة قصور .

والمادة العلمية فى هذا الكتاب تغطى ما يدرس بالفرقتين الثالثة والرابعة بكليات العلوم والتربية فى جامعاتنا العربية - والمصرية بعضها - وأكبر الظن أنها تزيد . هو يعرض للزممر (groups) ، الحلقات (rings) ، الحقول (fields) ، ويختم بنظرية جالوا (Galois Theory)

أود فى النهاية أن أشكر لدار الكتب العلمية للنشر والتوزيع ، وعلى رأسها صاحبها ومديرها الأستاذ محمد محمود الحماسة لإخراج هذا الكتاب .

وعلى بركة الله

محمد عبد العظيم سعود

1 Group Theory نظرية الزمر



المفاهيم الأساسية

١-١ الربط وأشباه الزمر Compositions and Semigroups

١-١-١ تعريف : لتكن M مجموعة غير خالية

(أ) الراسم من $M \times M$ الى M يسمى ربطاً في M (عملية على M أو تركيباً في M)

(ب) الربط $M \times M \rightarrow M$: يقال له

$$(a, b) \mapsto a.b$$

تشاركي (إدماجي أو تجميعي) (associative) إذا كان $(ab)c = a.(b.c)$ لجميع $a, b, c \in M$

إبدالي (commutative) إذا كان : $a.b = b.a$ لجميع $a, b \in M$.

١-١-٢ تعريف : لتكن M مجموعة غير خالية ، وليكن

$$\therefore M \times M \rightarrow M$$

$$(a, b) \mapsto a.b$$

لكل $a \in M$ الراسمان :

$$\ell_a : M \rightarrow M , \quad r_a : M \rightarrow M$$

$$x \mapsto a.x$$

$$x \mapsto x.a$$

يسميان النقل الأيمن والنقل الأيسر (على الترتيب) لـ $(M, .)$ حول a

(right translation, resp. left translation about a)

١-١-٣ ملحوظة : الربط " " في M يكون تشاركياً (إدماجياً ، تجميعياً) إذا كان فقط

$$\forall a, b \in M : \ell_{a.b} = \ell_a \circ \ell_b$$

البرهان :

$$\forall a, b \in M : \ell_{a.b} = \ell_a \circ \ell_b$$

$$\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : \ell_{a.b}(c) = (\ell_a \circ \ell_b)(c)$$

$$\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : (a.b).c = \ell_a(\ell_b(c))$$

$$= \ell_a(b.c)$$

$$= a.(b.c)$$

١-١-٤ تعريف : لتكن H مجموعة غير خالية ، وليكن " " ربطاً تشاركياً (تجميعياً ،

إدماجياً) في H . عندئذ فإن الزوج $(H, .)$ يسمى شبه زمرة (Semigroup) .

٥-١-١ تعريف : لتكن $(H, .)$ شبه زمرة . يقال للعنصر $e \in H$ إنه عنصر محايد أيسر (left neutral element) لـ $(H, .)$ إذا كان فقط إذا كان : لكل $a \in H : ea = a$.
ويقال إنه عنصر محايد أيمن (right neutral element) لـ $(H, .)$ إذا كان فقط إذا كان : لكل $a \in H : ae = a$. ويقال للعنصر $e \in H$ إنه عنصر محايد (neutral element) لـ $(H, .)$ ، إذا كان فقط إذا كان عنصراً محايداً أيمن وعنصراً محايداً أيسر لـ $(H, .)$.

٦-١-١ ملحوظة : شبه الزمرة $(H, .)$ لها على الأكثر عنصر محايد واحد .

البرهان : ليكن e, e' عنصرين محايدين لشبه الزمرة $(H, .)$. عندئذ فإن :

$$e = e . e' = e'$$

عنصر محايد e' عنصر محايد e

٧-١-١ تعريف : لتكن $(H, .)$ شبه زمرة ، ولها العنصر المحايد e . يقال إن b معكوس أيسر (left inverse) (معكوس أيمن) (right inverse) على الترتيب لـ $a \in H$ إذا كان (و فقط إذا كان) $b.a = e$ $(a . b = e)$ على الترتيب .

٨-١-١ أمثلة :

مثال ١ : $\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية . ولتكن

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto m + n$$

عملية الجمع العادية. $(\mathbb{N}, +)$ شبه زمرة ولها العنصر المحايد "0" . هذا واضح لأن :

$$\forall m, n, \ell \in \mathbb{N} : (m + n) + \ell = m + (n + \ell),$$

$$\forall m \in \mathbb{N} : 0 + m = m = m + 0$$

(يقال لشبه الزمرة التي لها عنصر محايد إنها مونويد (monoid) .

مثال ٢ : لتكن M مجموعة غير خالية وليكن $\text{Map}(M)$ مجموعة جميع الرواسم من M إلى M . وليكن :

$$o : \text{Map}(M) \times \text{Map}(M) \rightarrow \text{Map}(M)$$

$$(f, g) \rightarrow fog$$

تركيب الرواسم . عندئذ فإن $(Map(M), o)$ شبه زمرة وعنصرها المحايد id_M راسم الوحدة على M . هذا واضح لأن :

$$\forall f, g, h \in Map(M) : (fog)oh = fo(goh),$$

$$\forall f \in Map(M) : id_M of = f = fo id_M$$

مثال ٣ : ليكن $n > 1$ عدداً طبيعياً وليكن $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ مجموعة جميع المصفوفات من النوع $n \times n$ وعناصرها (مداخلها (entries)) كلها أعداد حقيقية . الراسمان :

$$*: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \mapsto AB + BA$$

$$\widehat{*}: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \mapsto AB - BA$$

(AB يعنى ضرب المصفوفات العادى)

ليسا تشاركيين (إدماجين ، تجميعيين) .

البرهان : ليكن

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A*B)*C - A*(B*C) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

كذلك فإن :

$$(A\widehat{*}B)\widehat{*}C - A\widehat{*}(B\widehat{*}C) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال ٤ : ليكن

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\therefore H \times H \rightarrow H$$

عملية الضرب العادية للمصفوفات. عندئذ فإن $(H, \cdot)$ شبه زمرة (لأن ضرب المصفوفات عملية تشاركية (إدماجية ، تجمعية) .

ولكل $x \in \mathbb{R}$ يكون $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ عنصراً محايداً أيسر لـ $(H, \cdot)$ ، لأن :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بينما $(H, \cdot)$ ليس لها أى عنصر محايد أيمن ، لأنه بافتراض أن

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ عنصر}$$

محايد أيمن لها فإن :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} : ax = a, ay = b$$

وهذا مستحيل .

٢-١ الزمر Groups

١-٢-١ تعريف : لتكن G مجموعة غير خالية ، $\cdot : G \times G \rightarrow G$ عملية . تسمى $(G, \cdot)$

زمرة إذا تحقق :

$$\forall a, b, c \in G : (a.b).c = a.(b.c) \quad (أ)$$

$$\exists e \in G \quad \forall a \in G : e.a = a \quad (ب)$$

$$\forall a \in G \exists b \in G : b.a = e \quad (ج)$$

سنكتب عادة G بدلاً من $(G, \cdot)$ ، وسنكتب ab بدلاً من $a.b$

٢-٢-١ ملحوظات :

لتكن G زمرة ، e معرفة كما فى (١-٢-١)

$$\forall a, b \in G : ab = e \Rightarrow ba = e \quad (أ)$$

(ب) e هو عنصر محايد فى G ومن ثم (١-١-٦) فإنه وحيد .

(ج) $ba = e$: (يوجد واحد بالضبط $b \in G$) $\exists b \in G \quad \forall a \in G$.

يسمى b معكوس a (inverse)، وسنعبّر عن معكوس a بـ a^{-1} .

$$\forall a, b \in G: (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, (a^{-1})^{-1} = a \quad (د)$$

$$\forall a, x, y \in G: ax = ay \Rightarrow x = y \quad (هـ)$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y$$

$$\forall a, b \in G \quad \exists x \in G: ax = b \wedge \exists y \in G: ya = b \quad (و)$$

$$\forall a \in G: \ell_a, r_a \text{ تناظران أحاديان}$$

البرهان : (أ)، (ب) متروكان كتمرين للقارئ.

$$ba = e \wedge ca = e \Rightarrow b = eb = (ca)b = c(ab) = c(ba) = ce = c \quad (جـ)$$

$$(أ) \quad (ب)$$

$$(د) \quad (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = e \quad \text{ولأن المعكوس وحيد (من جـ)}$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad \text{ينتج أن}$$

كذلك فإن :

$$a^{-1}a = e \wedge aa^{-1} = e \Rightarrow aa^{-1} = e \wedge a^{-1}a = e$$

ولأن المعكوس وحيد (من جـ) ينتج أن $(a^{-1})^{-1} = a$

$$ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y \quad (هـ)$$

وبالمثل $xa = ya$.

$$(و) \quad x := a^{-1}b \text{ تحقق المعادلة } ax = b. \text{ إذا كان هناك حل آخر } z \text{ فإن :}$$

$$az = b \Rightarrow a^{-1}(az) = a^{-1}b \Rightarrow (a^{-1}a)z = a^{-1}b \Rightarrow z = a^{-1}b$$

أى أن الحل $x = a^{-1}b$ وحيد.

وبالمثل $y := ba^{-1}$ حل وحيد للمعادلة $ya = b$.

(ز) إعادة صياغة لـ (و).

٣-٢-١ تعريف : G زمرة (أو شبه زمرة) . G إبدالية (commutative)

$$\forall a, b \in G: ab = ba \quad \text{إذا كان (abelian)}$$

٤-٢-١ ملحوظة : فى حالة الزمر (أشبه الزمر) الإبدالية عادة يكتب $a + b$ بدلاً من

$a \cdot b$ ، $-a$ بدلاً من a^{-1} على أساس أن العملية هى "+" من حيث الشكل .

١-٢-٥ أمثلة :

مثال ١ : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، مع عملية الجمع العادية +

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

تكون زمرة إبدالية . وهذا واضح لأن :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\exists 0 \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{Z}: 0 + a = a (= a + 0)$$

0 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z}, +)$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists (-a) \in \mathbb{Z}: -a + a = 0 = a + (-a)$$

$-a$ هو معكوس a في $(\mathbb{Z}, +)$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a + b = b + a$$

وبالمثل فإن $(\mathbb{Q}, +)$ مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية) مع عملية الجمع العادية ، $(\mathbb{R}, +)$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع عملية الجمع العادية ، $(\mathbb{C}, +)$ مجموعة الأعداد المركبة مع عملية الجمع للأعداد المركبة كلها تكون زمراً إبدالية .

مثال ٢ : لتكن $\mathbb{R}_+^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (أكبر من الصفر) ،

$$\therefore \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$(a, b) \mapsto a.b$$

عملية الضرب العادية . $(\mathbb{R}_+^*, .)$ تكون زمرة إبدالية لأن :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*: (a.b).c = a.(b.c)$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*: 1.a = a (= a.1)$$

1 هو العنصر المحايد

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R}_+^*: a^{-1}.a = 1 (= a.a^{-1})$$

a^{-1} هو معكوس a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*: a.b = b.a$$

وبالمثل فإن $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, .)$ ، $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ ، $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ تكون زمراً إبدالية .

مثال ٣ : لنكن X مجموعة غير خالية، $\gamma(X)$ مجموعة جميع التناظرات الأحادية من X على نفسها . وليكن

$$\begin{aligned} o: \gamma(X) \times \gamma(X) &\rightarrow \gamma(X) \\ (f, g) &\mapsto fog \end{aligned}$$

هو تركيب الرواسم .

عندئذ فإن $(\gamma(X), o)$ زمرة . (انظر مثال ٢ في (١-١-٨)) .

$$\begin{aligned} id_X: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

تناظر أحادي ، أى أن $id_X \in \gamma(X)$ ، لكل $f \in \gamma(X)$:

$$id_X \circ f = f (= f \circ id_X)$$

أى أن id_X هو العنصر المحايد فى $\gamma(X)$.

لأن $\gamma(X)$ هى مجموعة جميع التناظرات الأحادية من X على نفسها ، عندئذ فإنه لكل $f \in \gamma(X)$ يوجد $f^{-1} \in \gamma(X)$ (معكوس الراسم f) بحيث إن :

$$f^{-1} \circ f = id_X (= f \circ f^{-1})$$

والآن لنكن $X = \{1, 2, \dots, n\}$. سنكتب γ_n للتعبير عن $\gamma(X)$. تسمى γ_n الزمرة المتماثلة من الرتبة n (Symmetric Group of Order n) (فى كثير من الكتب يستخدم الرمز S_n بدلاً من γ_n) .

عناصر γ_n تسمى تبديلات (Permutations) على الأعداد $1, 2, \dots, n$.

اصطلاح : إذا كانت $i_1, i_2, \dots, i_n$ عناصر المجموعة $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow X \\ k &\mapsto i_k \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} \right)$$

فإننا سنكتب للتعبير عن الراسم

لاحظ أن γ_n ليست إبدالية لـ $n \geq 3$ ، لأن :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

بينما

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

ولتوضيح طريقة "الضرب" : في الحالة الثانية $1 \rightarrow 2$ ثم $2 \rightarrow 2$. إذن $1 \rightarrow 2$. $1 \rightarrow 1$. $2 \rightarrow 1$ ثم $1 \rightarrow 3$. إذن $2 \rightarrow 3$. وأخيراً $3 \rightarrow 3$ ثم $3 \rightarrow 1$. إذن $3 \rightarrow 1$. في الحالة الأولى $1 \rightarrow 3$ ثم $3 \rightarrow 3$. إذن $1 \rightarrow 3$. $1 \rightarrow 1$. $2 \rightarrow 1$ ثم $2 \rightarrow 2$. إذن $2 \rightarrow 1$. وأخيراً $3 \rightarrow 1$. إذن $3 \rightarrow 2$.

كثير من الكتب يتبع تعريفاً آخر "للضرب" فيضرب بالكيفية الآتية :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

أى أن $1 \rightarrow 2$ ثم $2 \rightarrow 2$ فيكون $1 \rightarrow 2$ ؛ $1 \rightarrow 1$ ثم $2 \rightarrow 1$ ؛ $1 \rightarrow 3$ فيكون $2 \rightarrow 3$ ؛ $3 \rightarrow 3$ ثم $3 \rightarrow 1$ فيكون $3 \rightarrow 1$. لكننا آثرنا الطريقة الموضحة لأن عملية الضرب هنا تركيب راسمين .

طريقة مختصرة للكتابة : سنوضح هذه الطريقة بالأمثلة الآتية :

$$(1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 4) \quad \text{التبديلة} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ تكتب كذلك}$$

أى أن "صورة" 1 هي 3 ، "صورة" 3 هي 5 ، وهكذا ...

$$(1 \ 2 \ 4) \quad \text{التبديلة} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ تكتب :}$$

(3 لم تظهر لأن "صورة" 3 هي نفسها)

$$(1 \ 2) (3 \ 5) \quad \text{التبديلة} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ تكتب}$$

(4 لم تظهر لان "صورة" 4 هي 4)

مثال 4 : لتكن X مجموعة غير خالية ، G زمرة ، $Map(X, G)$ مجموعة جميع الرواسم من X إلى G . لكل $f, g \in Map(X, G)$ سنعرف $fg \in Map(X, G)$ بالطريقة الآتية :

$$\forall x \in X : (fg)(x) := f(x)g(x)$$

والآن سنعرف " . " العملية في $Map(X, G)$ كالآتى :

$$\therefore Map(X, G) \times Map(X, G) \rightarrow Map(X, G)$$

$$(f, g) \mapsto fg$$

عندئذ فإن $(Map(X, G), .)$ زمرة . لأن :

$$\forall x \in X \quad \forall f, g, h \in Map(X, G) :$$

$$((fg)h)(x) := (fg)(x)h(x) := (f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$$

إذن زمرة G

$$=: f(x)gh(x) = (f(gh))(x)$$

$$\Rightarrow (fg)h = f(gh)$$

نعرف العنصر المحايد $1_{Map(X, G)}$ في $Map(X, G)$ كالآتي :

$$. \quad \forall x \in X : 1_{Map(X, G)}(x) = e \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G)$$

$$\forall f \in Map(X, G) \quad \forall x \in X : (1_{Map(X, G)}f)(x) = 1_{Map(X, G)}(x)f(x)$$

$$= ef(x) = f(x) \Rightarrow \forall f \in Map(X, G) : 1_{Map(X, G)}f = f$$

أى أن $1_{Map(X, G)}$ هو العنصر المحايد في $Map(X, G)$.

والآن ليكن $f \in Map(X, G)$. نظراً لأن G زمرة إذن كل عنصر له معكوس .

إذن

$$\forall x \in X \quad \exists g \in Map(X, G) : (gf)(x) := g(x)f(x) = e = 1_{Map(X, G)}(x)$$

$$\Rightarrow \forall f \in Map(X, G) \exists g \in Map(X, G) : gf = 1_{Map(X, G)}$$

أى أن لكل $f \in Map(X, G)$ يوجد معكوس $g \in Map(X, G)$.

١-٢-٦ نظرية : لتكن $(G, .)$ شبه زمرة . التقريرات الآتية متكافئة :

(١) $(G, .)$ زمرة .

(٢) تتناظر أحادى $\forall a \in G [G \ni b \xrightarrow{a_l} ab \in G$

$G \ni b \xrightarrow{a_r} ba \in G$ تتناظر أحادى

(٣) راسم غامر (شامل) $\forall a \in G [G \ni b \xrightarrow{a_l} ab \in G$

$G \ni b \xrightarrow{a_r} ba \in G$ راسم غامر (فوقى)

البرهان : "(٢) $\Leftarrow$ (٣)" : تافه (trivial)

"(١) $\Leftarrow$ (٢)" : الراسم العكسى لـ a_l هو a_l^{-1} لأن :

$$G \ni b \xrightarrow{a_l^{-1}} a^{-1}b \in G$$

$$b \xrightarrow{a_\ell} ab \xrightarrow{a_\ell^{-1}} a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = b$$

1_G

(المقصود بـ 1_G الراسم 1_G إلى G الذى يرسم كل عنصر فى نفسه)

$$b \xrightarrow{a_\ell^{-1}} a^{-1}b \xrightarrow{a_\ell} a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$$

1_G

رأينا أن $a_\ell^{-1}a_\ell = 1_G$ ، $a_\ell a_\ell^{-1} = 1_G$ أى أن a_ℓ^{-1} هو بالفعل الراسم العكسى للراسم a_ℓ .

الراسم العكسى لـ a_r هو a_r^{-1} والبرهان مشابه تماماً لهذا البرهان .

"(3) $\Leftarrow$ (1)" : (أ) وجود العنصر المحايد :

ليكن $a \in G$ (هذا ممكن لأن $G \neq \emptyset$) . لأن راسم a_ℓ غامر (شامل) فإنه يوجد $e \in G$ بحيث يكون $ae = a$.

ليكن $b \in G$. لأن راسم a_r غامر (فوقى) فإنه يوجد $c \in G$ بحيث إن $ca = b$

$$\Rightarrow be = cae = ca = b$$

$$\Rightarrow \forall b \in G : be = b$$

وبالتماثل يمكن البرهنة على أنه يوجد $e^* \in G$ بحيث يكون :

$$\forall b \in G : e^*b = b$$

$$\Rightarrow e^* = e^*e = e$$

ويستلزم هذا أن يكون e هو العنصر المحايد

(ب) وجود معكوسات العناصر :

ليكن $a \in G$. الآن يوجد العنصر المحايد $e \in G$.

$$a_\ell \text{ شامل (فوقى)} \Rightarrow \exists a' \in G : aa' = e$$

$$a_r \text{ غامر (فوقى)} \Rightarrow \exists a^* \in G : a^*a = e$$

نثبت أن $a' = a^*$ كالآتى :

$$a^* = a^*e = a^*aa' = ea' = a'$$

وبهذا يكون لكل $a \in G$ معكوس هو $a^* \in G$.

٧-٢-١ نتيجة : (جدول الزمر)

لتكن G مجموعة منتهية لها الربط " $\cdot$ " ($G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$)

.	a_1	a_2		a_n
a_1	$a_1.a_1$	$a_1.a_2$		$a_1.a_n$
a_2	$a_2.a_1$	$a_2.a_2$		$a_2.a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$a_n.a_1$	$a_n.a_2$		$a_n.a_n$

لتكن $(G, \cdot)$ شبه زمرة .

G زمرة إذا ظهرت فقط إذا ظهرت كل عناصر G في كل صف وكل عمود في جدول الزمر .

البرهان : ظهور كل عناصر G في كل صف وكل عمود معناه أن a_i ، a_j راسمان غامران (شاملان). ومن النظرية (٦-٢-١) تكون $(G, \cdot)$ زمرة .

(لاحظ أنه لأن G منتهية فظهور كل عنصر من عناصر G في كل صف وكل عمود يتكافأ مع عدم ظهور أى عنصر فى أى صف أو أى عمود مرتين . لاحظ كذلك أن عدم ظهور أى عنصر مرتين فى أى صف وأى عمود معناه أن a_i ، a_j راسمان واحد لواحد . وهذا صحيح لأن a_i ، a_j تناظران أحاديان) .

٣-١ هومومورفيزمات الزمر Group Homomorphisms

١-٣-١ تعريف : لتكن $(G, \cdot)$ ، $(G', \cdot')$ زمرتين (شبيهتى زمرتين). وليكن $\varphi: G \rightarrow G'$.

يسمى φ هومومورفيزماً من $(G, \cdot)$ إلى $(G', \cdot')$: $\Leftrightarrow$

$$\forall a, b \in G: \varphi(a.b) = \varphi(a) \cdot' \varphi(b)$$

(ملحوظة : سنكتب للسهولة فيما بعد -غالباً- : $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$)

٢-٣-١ ملحوظتان : (أ) لتكن G, G' زمرتين ، وليكن e هو عنصر G المحايد ،

e' عنصر G' المحايد . عندئذ فإن :

$$\varphi(e) = e'$$

$$\forall a \in G: \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$$

(ب) لتكن G, G', G'' زمراً . وليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ ، $\psi: G' \rightarrow G''$ هومومورفيزم
زمر . عندئذ فإن : $\psi \circ \varphi: G \rightarrow G''$ هومومورفيزم زمر .

$$\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e) \quad (\text{أ})$$

$$\Rightarrow e' = \varphi(e)^{-1} \varphi(e) = \varphi(e)^{-1} (\varphi(e)\varphi(e)) = (\varphi(e)^{-1} \varphi(e)) \varphi(e) = e' \varphi(e) = \varphi(e)$$

كذلك فإنه لكل $a \in G$:

$$e' = \varphi(e) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$$

$$\Rightarrow \varphi(a)^{-1} = e' \varphi(a)^{-1} = (\varphi(a^{-1})\varphi(a))\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})(\varphi(a)\varphi(a)^{-1}) = \varphi(a^{-1})e' = \varphi(a^{-1})$$

$$\forall a, b \in G : (\psi \circ \varphi)(ab) := \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) \quad (\text{ب})$$

φ هومومورفيزم

$$= \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) := (\psi \circ \varphi)(a)(\psi \circ \varphi)(b)$$

ψ هومومورفيزم

١-٣-٣ تعريف : لتكن G, G' زمريتين ، $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر . $e' \in G'$
هو العنصر المحايد .

نواة (φ) (Kernel (φ)) تعرف كالآتي

$$\text{Ker}(\varphi) := \{a \in G: \varphi(a) = e'\}$$

صورة (φ) (Image (φ))

$$\text{Im}(\varphi) := \{a' \in G': \exists a \in G, \varphi(a) = a'\}$$

١-٣-٤ تعريف : ليكن G, G' زمريتين $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر . يقال إن φ :

(monomorphism) **مونومورفيزم** إذا كان φ راسماً واحداً لواحد

(epimorphism) **إبيمورفيزم** إذا كان φ فوقياً (شاملاً ، غامراً)

(isomorphism) **أيزومورفيزم** (أو تشاكل) إذا كان φ تناظراً أحادياً

وإذا كان $G' = G$ فإن φ يسمى : **إندومورفيزم** (endomorphism)

وإذا كان $G' = G$ ، φ أيزومورفيزم فيقال إن φ **أوتومورفيزم** (automorphism)

ويقال إن زميرتين G, G' متشاكلتان (isomorphic) (أيزومورفيزميتان) إذا وجد $\varphi: G \rightarrow G'$ أيزومورفيزم (أو تشاكل) وسنكتب في هذه الحالة $G \cong G'$.

١-٣-٥ ملحوظتان : ليكن G, G' زميرتين ، $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمير ، $e \in G$ العنصر المحايد . عندئذ فإن :

$$Ker(\varphi) = \{e\} \Leftrightarrow \varphi \text{ مونومورفيزم}$$

$$(ب) \varphi \text{ أيزومورفيزم} \Leftrightarrow \varphi^{-1} \text{ أيزومورفيزم} .$$

البرهان : (أ) $\Rightarrow$ " :

$$\forall a, b \in G: \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(b)\varphi(b)^{-1} = e'$$

$$١-٣-٢$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in Ker(\varphi) = \{e\} \Rightarrow ab^{-1} = e$$

$$١-٣-٣$$

$$\Rightarrow a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b = eb = b \Rightarrow$$

φ واحد لواحد

$\Rightarrow \varphi$ مونومورفيزم

$$١-٣-٤$$

$\Leftarrow$ " : من (١-٣-٢) نعلم أن $\varphi(e) = e'$ وهذا يستلزم أن $e \in Ker(\varphi)$ أي أن

$\{e\} \subset Ker(\varphi)$ (1) . والآن ليكن $a \in Ker(\varphi)$ هذا يستلزم أن $\varphi(a) = e'$. لكن

$\varphi(e) = e'$ (من (١-٣-٢)). وبالتالي فإن $\varphi(a) = \varphi(e)$. ولكن φ مونومورفيزم

يعنى أن φ هومومورفيزم واحد لواحد وبالتالي فإن $a = e$ وبالتالي فإن

$Ker(\varphi) \subset \{e\}$ (2) . من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

(ب) نعلم أن φ تناظر أحادى $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$ معرف وتناظر أحادى

يتبقى أن نبرهن على أن φ^{-1} هومومورفيزم زمير .

ليكن $a', b' \in G'$. لأن φ تناظر أحادى فإنه يوجد واحد بالضبط $a \in G$ بحيث يكون

$\varphi(a) = a'$ ، ويوجد واحد بالضبط $b \in G$ بحيث يكون $\varphi(b) = b'$.

والآن :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(a'b') &= \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(ab)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(ab) \\ &= 1_G(ab) = ab = \varphi^{-1}(a')\varphi^{-1}(b')\end{aligned}$$

أى أن φ^{-1} هو مومورفيزم .

$$\begin{aligned}1_G : G \rightarrow G \quad (\text{المقصود بـ } 1_G \text{ هو الراسم}) \\ a \mapsto a \quad (\text{يسمى راسم الوحدة على } G)\end{aligned}$$

١-٣-٦ ملحوظة : لتكن $G_i (i=1,2,3,4)$ زمراً وليكن كل من :

$$h : G_3 \rightarrow G_4, \quad g : G_2 \rightarrow G_3, \quad f : G_1 \rightarrow G_2$$

$$\begin{aligned}1_{G_i} : G_i \rightarrow G_i \quad (\text{أ } 1_{G_i} \text{ أيزومورفيزم}) \\ a \mapsto a\end{aligned}$$

$$(hog)of = ho(gof) \quad (\text{ب})$$

$$go1_{G_2} = g, \quad 1_{G_2}of = f \quad (\text{ج})$$

البرهان : (أ) نعلم أن 1_{G_i} تناظر أحادى . والآن :

$$\forall a, b \in G_i : 1_{G_i}(ab) = ab = 1_{G_i}(a)1_{G_i}(b)$$

(ب) هذا صحيح لجميع الرواسم ومن ثم فإنه صحيح لجميع الهومومورفيزمات (لاحظ أن $(hog)of$ هومومورفيزم من $(1-3-2)$.

$$\forall a \in G_1 : (1_{G_2}of)(a) = 1_{G_2}(f(a)) = f(a) \Rightarrow 1_{G_2}of = f \quad (\text{ج})$$

$$\forall a \in G_2 : (go1_{G_2})(a) = g(1_{G_2}(a)) = g(a) \Rightarrow go1_{G_2} = g$$

(لاحظ تساوى النطاقات والنطاقات المصاحبة)

١-٣-٧ تعريف : لتكن G زمرة . الراسم

$$\forall a \in G : \varphi_a : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto axa^{-1}$$

أوتومورفيزم . هذا واضح لأن له راسماً عكسياً هو

$$\varphi_{a^{-1}} : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto a^{-1}xa$$

$$\begin{aligned}\forall x \in G : (\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a)(x) &= \varphi_{a^{-1}}(\varphi_a(x)) = \varphi_{a^{-1}}(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a \\ &= (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = x,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = 1_G \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}})(x) &= \varphi_a(\varphi_{a^{-1}}(x)) = \varphi_a(a^{-1}xa) = a(a^{-1}xa)a^{-1} \\ &= (aa^{-1})x(aa^{-1}) = x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = 1_G \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن φ تناظر أحادى . والآن

$$\forall x, y \in G : \varphi_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$$

أى أن φ_a هومومورفيزم وهو كذلك تناظر أحادى من G إلى G إذن هو أوتومورفيزم على G .

والآن أى أوتومورفيزم φ على G يسمى أوتومورفيزم داخلى (inner automorphism) لـ G إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $\varphi_a = \varphi$.

١-٣-٨ أمثلة :

مثال ١ : لـ $m \in \mathbb{Z}$ الراسم :

$$\begin{aligned} \varphi_m : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto mn \end{aligned}$$

هومومورفيزم لأن :

$$\forall n, p \in \mathbb{Z} : \varphi_m(n+p) = m(n+p) = mn+mp = \varphi_m(n) + \varphi_m(p)$$

وبالتالى فهو إندومورفيزم

ولـ $m \neq 0$ يكون كذلك مونومورفيزم لأن :

$$\forall p, q \in \mathbb{Z} : \varphi_m(p) = \varphi_m(q) \Rightarrow mp = mq \Rightarrow p = q$$

مثال ٢ : الراسم الأسى :

$$\begin{aligned} e^- : (\mathbb{R}, +) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

أيزومورفيزم لأن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : e^-(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = e^-(x) e^-(y)$$

ولإثبات أنه تناظر أحادى (وبالتالى يكون أيزومورفيزم) يكفى أن نعطي الراسم العكسى وهو :

$$\text{Log}_e^- : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$x \mapsto \text{Log}_e x$$

والآن

$$e^{\text{Log}_e^-} : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$$

$$x \mapsto e^{\text{Log}_e x} = x$$

أى أن

$$e^{\text{Log}_e^-} = 1_{\mathbb{R}_+^*} \quad (1)$$

كذلك فإن :

$$\text{Log}_e e^- : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$x \mapsto \text{Log}_e e^x = x \text{Log}_e e = x$$

أى أن

$$\text{Log}_e e^- = 1_{\mathbb{R}} \quad (2)$$

من (1) ، (2) يتضح أن الراسم $\text{Log}_e^- : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ هو الراسم العكسى للرسم $e^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ، وبالتالي فإن كلا منهما يكون تناظراً أحادياً ، ومن ثم البرهان .

مثال ٣ : لتكن G زمرة ، e عنصرها المحايد .

$$(أ) \text{ النقل الأيسر } \ell_a \text{ هومومورفيزم } \Leftrightarrow a = e$$

$$\text{النقل الأيمن } r_a \text{ هومومورفيزم } \Leftrightarrow a = e$$

$$(ب) \text{ الراسم } : \varphi : G \rightarrow \gamma(G) \text{ هومومورفيزم } \\ a \mapsto \ell_a$$

$$(جـ) : \psi : G \rightarrow \gamma(G) \text{ هومومورفيزم } \\ a \mapsto r_a$$

إذا كانت فقط إذا كانت G إبدالية

$$\text{البرهان : (أ) ليكن } \ell_a : G \rightarrow G \text{ هومومورفيزم } \Leftrightarrow \\ x \mapsto ax$$

$$\forall x, y \in G : axy = \ell_a(xy) = \ell_a(x)\ell_a(y) = axay$$

$$\Rightarrow a = e$$

وبالعكس

$$a = e \Rightarrow \ell_a(xy) = \ell_e(xy) = exy = exey = \ell_e(x)\ell_e(y) = \ell_a(x)\ell_a(y)$$

أى أن $\ell_a = \ell_e$ هومومورفيزم

(ب) ليكن $a, b \in G$ المطلوب إثبات أن $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ، أى المطلوب إثبات أن

$$\ell_{ab} = \ell_a \ell_b \text{ والآن}$$

$$\forall x \in G : \ell_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \ell_a(\ell_b(x)) = (\ell_a \ell_b)(x)$$

$$\Rightarrow \ell_{ab} = \ell_a \ell_b$$

(جـ) " $\Rightarrow$ " :

$$\psi \text{ هومومورفيزم} \Rightarrow \forall a, b \in G : \psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

أى أن

$$\forall a, b \in G : r_{ab} = r_a r_b$$

$$\Rightarrow \forall a, b, x \in G : r_{ab}(x) = (r_a r_b)(x) = r_a(r_b(x)) = r_a(xb) = (xb)a = x(ba)$$

أيضا $r_{ab}(x) = x(ab)$. بأخذ $x=e$ (العنصر المحايد فى G) ينتج أن $\forall a, b \in G : ab=ba$.
أى أن G إبدالية .

" $\Leftarrow$ " : لتكن G إبدالية هذا يقتضى أن :

$$\forall a, b \in G : ab = ba \Rightarrow \forall a, b, x \in G : xab = xba$$

$$\Rightarrow \forall a, b, x \in G : r_{ab}(x) = x(ab) = x(ba) = (xb)a = r_a(xb) = r_a(r_b(x)) = (r_a r_b)(x)$$

$$\Rightarrow r_{ab} = r_a r_b \Rightarrow \psi(ab) = \psi(a)\psi(b) \Rightarrow \psi \text{ هومومورفيزم}$$

المقصود بـ $\ell_a \ell_b$ هو $\ell_a \circ \ell_b$ ، وكذلك $r_a r_b$ تعنى $r_a \circ r_b$ حيث " $\circ$ " هى العملية فى الزمرة $\gamma(G)$.

مثال ٤ : برهن على أن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x + iy \mapsto x$$

هومومورفيزم من $(\mathbb{C}, +)$ إلى $(\mathbb{R}, +)$. اوجد نواة (f) هل f شامل (غامر) ؟

الحل :

$$\begin{aligned} \forall x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C} : f(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) &= f(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) = x_1 + x_2 \\ &= f(x_1 + iy_1) + f(x_2 + iy_2) \end{aligned}$$

هو مومورفيزم $f \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{x + iy \in \mathbb{C} : f(x + iy) = x = 0\} \\ &= \{iy \mid y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

واضح أن f شامل (غامر)

مثال ٥ : برهن على أن $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$z \mapsto |z|$$

هو مومورفيزم من $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ إلى $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ واوجد نواته

الحل :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = f(z_1) f(z_2)$$

هو مومورفيزم $f \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f(z) = 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| = 1\} \end{aligned}$$

دائرة في مستوى z مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 .

مثال ٦ : برهن على أن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z \mapsto e^z$$

هو ابيمورفيزم من $(\mathbb{C}, +)$ إلى $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ واوجد نواته .

الحل :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : f(z_1 + z_2) = e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} = f(z_1) f(z_2) \Rightarrow f$$

$$\text{Ker}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = e^z = 1\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid e^x (\cos y + i \sin y) = 1\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0\}$$

$$e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$e^x \cos y = 1 \Rightarrow \cos y \geq 0 \Rightarrow \underset{y=n\pi}{y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow z = 2ik\pi$$

أى أن

$$\text{Ker}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

لأى $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ يوجد $\text{Log}_e w \in \mathbb{C}$ بحيث إن $f(\text{Log}_e w) = e^{\text{Log}_e w} = w$ وبالتالي يكون f راسماً غامراً (فوقياً)

مثال ٧ : برهن على أن الراسم $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ هو مورفيزم . اوجد نواته $x \mapsto x^4$

الحل :

$\forall x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \varphi(xy) = (xy)^4 = x^4 y^4 = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \varphi$ هو مورفيزم

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{x \mid x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \varphi(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, x^4 = 1\} \end{aligned}$$

$$x^4 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 \Rightarrow x = \cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3$$

(نظرية دي موافر)

$$k = 0 \Rightarrow x = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{1, i, -1, -i\} \quad \text{أى أن}$$

مثال ٨ : برهن أن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ هو مورفيزم من $(\mathbb{R}, +)$ إلى $(\mathbb{Z}, +)$ $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

($\lfloor x \rfloor$: أكبر عدد صحيح $x \geq$ يسمى floor x)

الحل : f ليس هو مورفيزماً . مثال مضاد :

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(1) = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

بينما

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 = 0$$

مثال ٩ : برهن أن f لا يمكن أن يوجد أيزومورفيزم (تشاكل) بين زميرتين إحداها إبدالية والأخرى غير إبدالية .

البرهان : ليكن لدينا زميرتان G إبدالية ، H غير إبدالية ، وليكن $\varphi: G \rightarrow H$ أيزومورفيزم. لأن H غير إبدالية فإنه يوجد $a', b' \in H$ بحيث إن $a'b' \neq b'a'$. ولأن φ أيزومورفيزم إذن يوجد واحد بالضبط a ، وواحد بالضبط b بحيث يكون $\varphi(b) = b', \varphi(a) = a'$.

والآن

$$a'b' = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$$

φ هومومورفيزم G إبدالية φ هومومورفيزم

$$= b'a' \quad \text{تناقض}$$

طريقة أخرى : نفترض هذه المرة أن G غير إبدالية ، H إبدالية . G غير إبدالية
إذن يوجد $a, b \in G$ بحيث يكون $ab \neq ba$. ولأن φ أيزومورفيزم فإن $\varphi(ab) \neq \varphi(ba)$
ولكن :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$$

φ هومومورفيزم H إبدالية φ هومومورفيزم

مثال ١٠ : برهن على أنه لا يمكن أن يوجد إيزومورفيزم من $(\mathbb{Q}, +)$ على $(\mathbb{Z}, +)$

البرهان : ليكن $\varphi: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ إيزومورفيزم . إذن يوجد $x \in \mathbb{Q}$ بحيث يكون $\varphi(x) = 1$. والآن

$$1 = \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

φ هومومورفيزم

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \notin (\mathbb{Z}, +) \quad \text{تناقض}$$

مثال ١١ : برهن على أنه لا يمكن أن يوجد إيزومورفيزم من $(\mathbb{Q}, +)$ على $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

البرهان : ليكن $\varphi: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ إيزومورفيزم .

لأن φ شامل (غامر) فإنه يوجد $x \in \mathbb{Q}$ بحيث إن $\varphi(x) = 3$. والآن

$$3 = \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \text{تناقض}$$

φ هومومورفيزم

٤-١ الزمر الجزئية Subgroups

١-٤-١ تعريف : لنكن G زمرة . ولنكن H مجموعة جزئية (غير خالية) من G .

يقال إن H زمرة جزئية (Subgroup) من G إذا تحقق :

$$(أ) \quad ab \in H : a, b \in H$$

$$(ب) \quad \begin{array}{l} H \times H \rightarrow H \\ (a, b) \mapsto ab \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{المجموعة } H \text{ مع الربط المستحدث} \\ \text{تكون زمرة} \end{array}$$

يلاحظ أن كل زمرة G تحتوى على زمرتين جزئيتين (تافهيتين) هما G نفسها ، $\{e\}$ حيث e عنصرها المحايد.

١-٤-٢ تمهيدية : لنكن G زمرة . H مجموعة جزئية (غير خالية) من G .

H زمرة جزئية من G إذا كان فقط إذا كان لكل عنصرين $a, b \in H : ab^{-1} \in H$.

البرهان : " H زمرة جزئية" $\Leftrightarrow ab^{-1} \in H : a, b \in H$ ،

$$H \Rightarrow " : H \text{ غير خالية} \Leftrightarrow \text{يوجد عنصر } e = bb^{-1} \in H \Leftrightarrow b \in H$$

$$\text{والآن لكل } b \in H : b^{-1} = eb^{-1} \in H \quad (\text{لأن } e \in H)$$

$$\text{ولكل } ab = a(b^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow a, b^{-1} \in H : a, b \in H$$

١-٤-٣ ملحوظة : ليكن $\varphi : G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر . عندئذ فإن

(أ) H زمرة جزئية من G $\Leftrightarrow \varphi(H)$ زمرة جزئية من G' . وعلى وجه

الخصوص فإن صورة (φ) $(\text{Im}(\varphi))$ زمرة جزئية من G' .

(ب) H' زمرة جزئية من G' $\Leftrightarrow \varphi^{-1}(H') := \{a \in G : \varphi(a) \in H'\}$

زمرة جزئية من G . وعلى وجه الخصوص فإن نواة (φ) $(\text{Ker}(\varphi))$ زمرة جزئية من G .

البرهان : (أ) $e \in H \Rightarrow \varphi(e) \in \varphi(H)$

أى أن $\varphi(H)$ غير خالية .

والآن : $a', b' \in \varphi(H) \Rightarrow \exists a, b \in H : a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$

$$\Rightarrow a'(b')^{-1} = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H)$$

(أ) ٢-٣-١

$$\Rightarrow \varphi(H) \text{ زمرة جزئية من } G'$$

٢-٤-١

والآن : زمرة جزئية $\Rightarrow \text{Im}(\varphi) = \varphi(G) \subset G'$ زمرة $G \subset G'$
(ب) ليكن e' هو عنصر G' المحايد ، e هو عنصر G المحايد . e' عنصر في H'
لأن H' زمرة جزئية من G' .

$$\varphi(e) = e' \in H' \Rightarrow e \in \varphi^{-1}(H')$$

(أ) ٢-٣-١

أى أن $\varphi^{-1}(H')$ مجموعة غير خالية
والآن :

$$\begin{aligned} a, b \in \varphi^{-1}(H') &\Rightarrow \varphi(a), \varphi(b) \in H' \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) \\ &= \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in H' \Rightarrow ab^{-1} \in \varphi^{-1}(H') \Rightarrow \varphi^{-1}(H') \text{ زمرة جزئية من } G \end{aligned}$$

(أ) ٢-٣-١ ٢-٤-١

ولأن $\{e'\}$ زمرة جزئية (تافهة) من G' فإن : $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e'\})$ زمرة جزئية من G .
٢-٤-١ أمثلة :

مثال ١ : (أ) المجموعة $\text{Aut}(G)$ مجموعة الأوتومورفيزمات على G حيث G زمرة
تكون زمرة جزئية من الزمرة $(\gamma(G), o)$ (انظر مثال (١-٢-٥)) .

$$\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

$$a \mapsto \varphi_a$$

(ب) الراسم

هومومورفيزم زمر .

(جـ) المجموعة $\text{Int}(G)$ مجموعة جميع الأوتومورفيزمات الداخلية زمرة جزئية من
الزمرة $\text{Aut}(G)$ وبالتالي فهي زمرة جزئية من $\gamma(G)$.

البرهان : (أ) واضح أن $1_G: G \rightarrow G$ أوتومورفيزم وبالتالي فإن $\text{Aut}(G)$
 $a \mapsto a$

مجموعة ليست خالية.

$$\varphi, \psi \in \text{Aut}(G) \Rightarrow \varphi, \psi^{-1} \in \text{Aut}(G) \Rightarrow \varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Aut}(G) \Rightarrow \text{Aut}(G)$$

٥-٣-١

(ب) ٢-٣-١

٢-٤-١

زمرة جزئية من $(\gamma(G), o)$.

$$\forall a, b, x \in G : \varphi(ab)(x) = \varphi_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} \quad (\text{ب})$$

$$= \varphi_a(bxb^{-1}) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = (\varphi(a) \circ \varphi(b))(x)$$

$$\Rightarrow \forall a, b \in G \quad \varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

$\Rightarrow \varphi$ هومومورفيزم

$$1_G : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x = exe^{-1}$$

$$\Rightarrow 1_G \in \text{Int}(G)$$

نعرف $\varphi_a^{-1} \in \text{Int}(G)$ كالآتي :

$$\forall x \in G : \varphi_a^{-1}(x) := a^{-1}xa. \quad (\varphi_a^{-1} \circ \varphi_a)(a) = a^{-1}axa^{-1}a = x \Rightarrow \varphi_a^{-1} \circ \varphi_a = 1_G$$

$$(\varphi_a \circ \varphi_a^{-1})(x) = aa^{-1}xaa^{-1} = x \Rightarrow \varphi_a \circ \varphi_a^{-1} = 1_G$$

أى أن φ_a^{-1} هو معكوس φ_a . والآن :

$$\forall \varphi_a, \varphi_b \in \text{Int}(G) \quad \forall x \in G : (\varphi_a \circ \varphi_b^{-1})(x) = ab^{-1}xba^{-1} = ab^{-1}x(ab^{-1})^{-1}$$

$$= \varphi_{ab^{-1}}(x) \Rightarrow \varphi_a \circ \varphi_b^{-1} \in \text{Int}(G) \Rightarrow \text{Aut}(G) \text{ زمرة جزئية من } \text{Int}(G)$$

مثال ٢ :

$$\text{ليكن } \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ عنصرين في } \gamma_4 \text{ عندئذ فإن :}$$

$$H := \{1_{\gamma_4}, \pi, \sigma, \pi \circ \sigma\} \text{ زمرة جزئية (ذات أربعة عناصر) من } \gamma_4 \text{ وهى إبدالية ,}$$

ويتحقق لها :

$$\pi \circ \pi = \sigma \circ \sigma = (\pi \circ \sigma) \circ (\pi \circ \sigma) = 1_{\gamma_4} \quad (1_{\gamma_4} = \gamma_4 \text{ العنصر المحايد في } \gamma_4)$$

البرهان :

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi \circ \sigma$$

$$\pi \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1_{\gamma_4}$$

$$\sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1_{\gamma_4}$$

$$(\pi \circ \sigma) \circ (\pi \circ \sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1_{\gamma_4}$$

$$(\pi \circ \sigma) \circ \sigma = \pi, \quad (\pi \circ \sigma) \circ \pi = (\sigma \circ \pi) \circ \pi = \sigma$$

$$\sigma \circ (\pi \circ \sigma) = \sigma \circ (\sigma \circ \pi) = \pi, \quad \pi \circ (\pi \circ \sigma) = \sigma$$

(كل زمرة ذات أربعة عناصر $H = \{a, b, c, e\}$ ، يتحقق لها: $a^2 = b^2 = c^2 = e$)

تسمى زمرة كلاين الرباعية (Klein 4-group)

مثال ٣: H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ إذا كان فقط إذا كان يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث

أن $H = m\mathbb{Z} := \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$.

البرهان: " $\Rightarrow$ " : لأي $m \in \mathbb{Z}$ الراسم

$$\mu_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$k \mapsto mk$$

إندومورفيزم لـ $(\mathbb{Z}, +)$ (انظر (١-٣-٨) مثال ١). ومن ثم فإن $m\mathbb{Z} = \mu_m(\mathbb{Z})$

زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ (انظر (١-٤-٣) (أ))

طريقة أخرى : $0 = m \cdot 0 \in m\mathbb{Z} \Rightarrow m\mathbb{Z} \neq \emptyset$

$\forall mk, ml \in m\mathbb{Z} : mk - ml = m(k - l) \in m\mathbb{Z} \Rightarrow m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$

$$٢-٤-١$$

" $\Leftarrow$ " : لتكن H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$. إذا كانت $H = \{0\}$ ، خذ $m = 0$. إذا

كانت $H \neq \{0\}$ ، فلاحظ أن $-k \in H \Leftarrow k \in H$ وبهذا تحتوى H أيضاً على أعداد

صحيحة موجبة. وليكن m هو أصغر عدد صحيح موجب فى H . نثبت أن $H = m\mathbb{Z}$.

" $\supset$ " : $H \subset \mathbb{Z}$ زمرة جزئية، $m \in H$ ، (1) $m\mathbb{Z} \subset H$

" $\subset$ " : ليكن $x \in H$. عندئذ فإنه يوجد $k, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = km + r$ ، $0 \leq r < m$

ولأن H زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ فإنه ينتج أن $r = x - km \in H$

ولأن m هو أصغر عدد صحيح موجب في H ، r عنصر في H يحقق $0 \leq r < m$ فإنه ينتج أن $r = 0$. وبالتالي فإن $x = km \in m\mathbb{Z}$ ، أى أن $H \subset m\mathbb{Z}$ (2)
من (1)، (2) ينتج أن $H = m\mathbb{Z}$.

مثال ٤ : ليكن $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ، وليكن

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

المجموعة $Q := \{E, -E, I, -I, J, -J, K, -K\}$ زمرة جزئية غير إبدالية من الزمرة $GL(2, \mathbb{C})$ زمرة جميع المصفوفات من النوع 2×2 القابلة للعكس وعناصرها (مداخلها) أعداد مركبة تسمى هذه الزمرة الزمرة الرباعية (The quaternion group)

يستطيع القارئ أن يتحقق بسهولة من جدول "الضرب" الآتى :

.	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

مثال ٥ : برهن أو انف :

- (أ) $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$
- (ب) $(\mathbb{N}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$
- (جـ) $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}, +)$
- (د) $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
- (هـ) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- (و) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد الحقيقية التى لها الشكل $a+b\sqrt{2}$ حيث $a+b\sqrt{2} \neq 0$ ، $a, b \in \mathbb{Q}$

- الحل :** (أ) $0 \in \mathbb{Z}$ أى أن $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ ، $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (مجموعة جزئية من $\mathbb{Q}$)
 $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$
- (ب) $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ومعكوس 1 بالنسبة للعملية + هو -1 . لكن $-1 \notin \mathbb{N}$ وبالتالي فإن $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$.
- (جـ) $0 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ، أى أن $\mathbb{Q} \neq \emptyset$ ، وهى مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ ، (أى عنصر $p \in \mathbb{Q}$ يمكن أن يكتب على الصورة $p + 0i$ وبالتالي يكون عنصراً فى $\mathbb{C}$.
 $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}, +)$ $\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{Q} : a - b \in \mathbb{Q}$.
- (د) $(\mathbb{Z}, +)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ لأن العملية "+" على $\mathbb{Z}$ "تختلف" عن العملية "." على $\mathbb{Q}$.
- لاحظ كذلك أن $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ليست زمرة على الإطلاق لأن معكوس 2 بالنسبة للعملية "." هو $\frac{1}{2}$. $2 \in \mathbb{Z}$ لكن $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ لا يمكن كذلك أن تكون زمرة جزئية من $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ لأنها ليست زمرة من البداية .
- (هـ) $1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، أى أن $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ليست خالية وهى مجموعة جزئية - كما سبق - من $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : ab^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- وبالتالى فهى زمرة جزئية من $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (و) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ كذلك فإن :
 $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : a = a + 0\sqrt{2}$
 $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} \neq 0\}$ أى أن
 $\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : ab^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- وبالتالى تكون $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} \neq 0\}, \cdot)$.
(على القارئ ان يتحقق من أن مجموعة الأعداد التى على الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث $a, b \in \mathbb{Q}$ وبحيث $a + b\sqrt{2} \neq 0$ تكون زمرة تحت عملية الضرب العادية للأعداد الحقيقية)
- مثال ٦ :** برهن أو انف :

- (أ) تقاطع أى زمريتين جزئيتين من زمرة G هو زمرة جزئية من G .
- (ب) اتحاد أى زمريتين جزئيتين من زمرة G هو زمرة جزئية من G .

الحل : (أ) تقرير صحيح . البرهان :

ليكن H, K زميرتين جزئيتين من G وليكن $e \in G$ عنصرها المحايد . ينتج أن $e \in H, e \in K$ ، وبالتالي فإن $e \in H \cap K$ ويكون $H \cap K \neq \emptyset$. والآن ليكن $ab^{-1} \in H \cap K \Leftrightarrow ab^{-1} \in K, a, b^{-1} \in H \Leftrightarrow a, b \in K, a, b \in H \Leftrightarrow a, b \in H \cap K$.

(ب) تقرير خاطئ . مثال مضاد :

$2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}$ زميرتان جزئيتان من $\mathbb{Z}$ (بصفة عامة كما رأينا في مثال ٣ $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$) .

والآن $2 \in 2\mathbb{Z}, 3 \in 3\mathbb{Z}$ لكن $1 = 3 - 2 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

مثال ٧ : لنكن H, K زميرتين جزئيتين من زمرة G . برهن على أن اتحاد H, K زمرة جزئية من G إذا كانت فقط إذا كانت إحدى الزميرتين زمرة جزئية من الأخرى .

البرهان : برموز واضحة نكتب

$$H \cup K \xrightarrow{\quad} G \Leftrightarrow H \xrightarrow{\quad} K \vee K \xrightarrow{\quad} H$$

$$(H \xrightarrow{\quad} G) \text{ تعني } H \text{ زمرة جزئية من الزمرة } (G)$$

" $\Leftarrow$ " : واضح

" $\Rightarrow$ " : ليكن $a, b \in H \cup K$ بحيث إن $a \in H, a \notin K, b \in K, b \notin H$. ينتج أن $ab^{-1} \in H \cup K$ (لأن $H \cup K \xrightarrow{\quad} G$) . ومن ثم فإن $ab^{-1} \in H$ أو $ab^{-1} \in K$

$$ab^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow_{a \in H} b = ba^{-1}a \in H$$

تناقض

$$ab^{-1} \in K \Rightarrow_{b \in K} a = ab^{-1}b \in K$$

نهاية البرهان . تناقض

مثال ٨ : لنكن G زمرة ولنكن $Z := \{g \in G : gx = xg \forall x \in G\}$

برهن على أن Z زمرة جزئية إبدالية من G .

(تسمى مركز Z (Centre or Central of G))

البرهان : $e \in Z$ لأن

$$\forall x \in G : ex = x = xe \quad (1)$$

$$g \in Z \Rightarrow \forall x \in G : gx = xg \Rightarrow \forall x \in G : x^{-1}g^{-1} = (gx)^{-1} = (xg)^{-1} = g^{-1}x^{-1}$$

$$\Rightarrow \forall y \in G : yg^{-1} = g^{-1}y \Rightarrow g^{-1} \in Z \quad (2)$$

$$g, h \in Z \Rightarrow \forall x \in G : hgx = hxg = xhg \Rightarrow hg \in Z \quad (3)$$

من (1) ، (2) ، (3) زمرة جزئية من G . ومن التعريف يتضح مباشرة أن Z إبدالية .

مثال ٩ : لتكن G زمرة إبدالية لها العنصر المحايد e . وليكن $n \in \mathbb{N}$. برهن على أن

H مجموعة كل العناصر في G التي تحقق $x^n = e$ تكون زمرة جزئية من G .

البرهان : $e \in H$ لأن $e^n = e$. ليكن $y \in H$ $y^n = e$

و كذلك فإن : $(y^{-1})^n = (y^n)^{-1} = e^{-1} = e$ أي أن $y^{-1} \in H$

$$x, y \in H \Rightarrow x^n = e, y^n = e \Rightarrow (xy)^n = \underbrace{(xy) \cdot (xy) \cdot \dots \cdot (xy)}_{n \text{ من المرات}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ من المرات}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{n \text{ من المرات}}$$

n من المرات n من المرات n من المرات G إبدالية

$$= x^n y^n = e \cdot e = e \Rightarrow xy \in H$$

$$((y^n)^{-1} = \underbrace{(y \cdot \dots \cdot y)^{-1}}_{n \text{ من المرات}} = \underbrace{y^{-1} \cdot \dots \cdot y^{-1}}_{n \text{ من المرات}} = (y^{-1})^n \quad \text{لاحظ أن :}$$

n من المرات n من المرات

مثال ١٠ : برهن أو انف :

$$(H, \cdot) \quad (H := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x = 1 \vee x \text{ (غير نسبي) (عدد غير كسري)}\}) \hookrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \quad (أ)$$

$$(K, \cdot) \quad (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \hookrightarrow (K := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x \geq 1\}) \quad (ب)$$

الحل : (أ) تقرير خاطئ . $\sqrt{2} \in H$ ، لكن $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \notin H$

$$(ب) \text{ تقرير خاطئ . } 2 \in K \text{ لكن } 2^{-1} = \frac{1}{2} \notin K$$

مثال ١١ : لتكن G زمرة إبدالية ، e عنصرها المحايد وعليها العملية " . " "الضرب" .

ولتكن $H := \{x^2 \mid x \in G\}$. برهن على أن H زمرة جزئية في G .

البرهان :

$$e \in G \Rightarrow e = e^2 \in H$$

$$x^2 \in H \Rightarrow x \in G \Rightarrow x^{-1} \in G \Rightarrow (x^2)^{-1} = (x^{-1})^2 \in H$$

$$x^2, y^2 \in H \Rightarrow x \in G, y \in G \Rightarrow xy \in G \Rightarrow x^2 y^2 = (xy)^2 \in H$$

G زمرة

G إبدالية

$$\Rightarrow H \hookrightarrow G$$

مثال ١٢ : برهن على أن أية زمرة ذات ستة عناصر لا يمكن أن تحتوى على زمرة جزئية ذات أربعة عناصر .

البرهان : لتكن G زمرة ذات ستة عناصر ، H زمرة جزئية من G ذات أربعة عناصر . لتكن $x \in G$ ، $x \notin H$. نكون $xH = \{xh | h \in H\}$. واضح أن $xH \cap H = \emptyset$. وهذا إذا كان $xH \cap H \neq \emptyset$ إذن يوجد g و z بحيث إن $z = xg \in xH$ ، $z, g \in H$. يقتضى أن : $x = zg^{-1} \in H$. تناقض . ولكن $H \subset G$ ، $xH \subset G$ وعدد عناصر xH يساوى عدد عناصر H (إذا كان عدد عناصر xH أقل من عدد عناصر H فمعنى هذا أنه يوجد $g_1 \neq g_2$ ، $g_1, g_2 \in H$ بحيث إن $xg_1 = xg_2$ ولكن هذا يستلزم أن : $g_1 = g_2$) . إذن عدد عناصر $H +$ عدد عناصر $xH = 8$ تناقض (عدد عناصر $G = 6$) .
(بصفة عامة عدد عناصر أى زمرة جزئية يكون قاسماً لعدد عناصر الزمرة . سنرى هذا فى نظرية لاجرانج) .

مثال ١٣ : لتكن $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ وعليها عملية جمع المصفوفات .
برهن على أن $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0 \right\}$ مع عملية جمع المصفوفات تكون زمرة جزئية من G . ماذا يحدث إذا استبدلنا 1 بـ 0 ؟ .

الحل :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$. إذن H ليست خالية . ليكن $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ ينتج أن

$$e+f+g+h=0 \text{ , } a+b+c+d=0 \text{ والآن :}$$

$$\text{لأن : } \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in H$$

$$a-e+b-f+c-g+d-h = a+b+c+d - (e+f+g+h) = 0$$

ينتج أن $(H, +)$ زمرة جزئية من $(G, +)$. إذا استبدلنا 1 بـ 0 . لن يوجد العنصر

فى H وهو شرط ضرورى حتى تكون H زمرة جزئية من G . $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

مثال ١٤ : لتكن $G := GL(2, \mathbb{R})$ (مجموعة المصفوفات من النوع 2×2 ومحددها لا يساوى الصفر، عناصرها (مداخلها) من $\mathbb{R}$ ، تسمى الزمرة الخطية العامة (The general linear group). ولتكن $H := \{A \in G \mid \det(A) = 2^n, n \in \mathbb{Z}\}$. برهن على أن زمرة جزئية من G .

البرهان :

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \in H \quad \text{لأن} \quad \det \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) = 1 = 2^0 \quad \text{ليكن}$$

$$\det(A) = 2^n, \det(B) = 2^m, n, m \in \mathbb{Z} \iff A, B \in H$$

$$\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1}) = \det(A) (\det(B))^{-1} = 2^n \cdot 2^{-m} = 2^{n-m}, n-m \in \mathbb{Z}$$

أى أن $AB^{-1} \in H$.

مثال ١٥ : لتكن H زمرة جزئية من $\mathbb{R}$ مع عملية الجمع ، $K := \{2^a \mid a \in H\}$. برهن على أن K زمرة جزئية من $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ مع عملية الضرب .

البرهان : $0 \in H$ ، $1 = 2^0 \in K$. كذلك فإن : $2^a, 2^b \in K$ حيث $a, b \in H$.
 يقتضى أن : $2^a (2^b)^{-1} = 2^{a-b} \in K$ (لأن $a-b \in H$) أى أن K زمرة جزئية من $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ مع عملية الضرب .

مثال ١٦ :

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} , \quad G := GL(2, \mathbb{R}) \quad \text{لتكن}$$

زمرة جزئية من G .

الحل : العنصر المحايد فى G هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإذا كانت H زمرة جزئية من G فإن

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ يقع فيها كعنصر. لكن } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in H , \text{ بينما معكوسه } \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} \notin H . \text{ إذن}$$

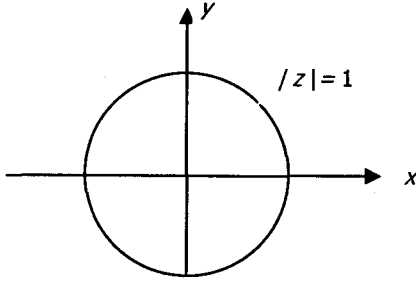
H ليست زمرة جزئية من G .

مثال ١٧ : لتكن $H := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, ab \geq 0\}$. برهن أو انف : H زمرة جزئية من $\mathbb{C}$ تحت عملية الجمع .

الحل : $-3-i, 2+5i \in H$ ، بينما $-1+4i = (-3-i) + (2+5i) \notin H$ إذن H ليست زمرة جزئية من $\mathbb{C}$ تحت عملية الجمع .

مثال ١٨ : لتكن $H := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$. برهن أو انف : H زمرة جزئية من $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ مع عملية الضرب . صف عناصر H هندسياً .

الحل : $1+0i \in H$ لأن $1^2 + 0^2 = 1$ ، وهو العنصر المحايد في $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. كذلك ليكن $a+bi = \cos \theta + i \sin \theta$ (لأن $a^2 + b^2 = 1$) ، $c+di = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ،
عصرين في H ينتج ان $(a+bi)(c+di) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \in H$
وإذا كان $a+bi = \cos \theta + i \sin \theta$ عنصراً في H فإن معكوسه هو $\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$
وهو كذلك عنصر في H .



عناصر H هي جميع نقاط الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ أي الدائرة $|z|=1$.

طريقة أخرى : واضح أن: $1+0i \in H$ ليكن $a+bi \in H$. معكوس $a+bi$ هو $(a+bi)^{-1}$

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right) + \left(\frac{-b}{a^2+b^2} \right)i = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}i$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow (a+bi)^{-1} \in H$$

والآن ليكن $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1 \Leftrightarrow a+bi, c+di \in H$

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(ad + bc),$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

$$= (a^2 + b^2)c^2 + (b^2 + a^2)d^2 = c^2 + d^2 = 1$$

$\Rightarrow (a+bi)(c+di) \in H \Rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ زمرة جزئية من H

٥-١ المجموعات المشاركة Cosets

١-٥-١ تعريف : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G ، $a \in G$. تعرف المجموعة

$$aH := \{ah \mid h \in H\}$$

بأنها المجموعة المشاركة اليسرى من a بالنسبة إلى H (The left coset of a w.r.t. H) . كذلك المجموعة $Ha := \{ha \mid h \in H\}$ هي

المجموعة المشاركة اليمنى من a بالنسبة إلى H (The right coset of a w.r.t. H) .

٢-٥-١ تمهيدية : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G . وليكن $a, b \in G$.

التقريرات الآتية متكافئة :

$$aH = bH \quad (أ)$$

$$b \in aH \quad (ب)$$

$$a^{-1}b \in H \quad (ج)$$

وتوجد تقريرات مكافئة مناظرة للمجموعات المشاركة اليمنى من a بالنسبة إلى H .

البرهان : "(أ) $\Leftrightarrow$ (ب)" :

$$b = be \in bH = aH$$

"(ب) $\Leftrightarrow$ (ج)" :

$$b \in aH \Rightarrow \exists h \in H : b = ah$$

$$\Rightarrow \exists h \in H : a^{-1}b = a^{-1}(ah) = (a^{-1}a)h = eh = h \in H$$

"(ج) $\Leftrightarrow$ (أ)" : " $\supset$ " :

$$a^{-1}b \in H \Rightarrow \exists h \in H : a^{-1}b = h \in H \Rightarrow \exists h \in H : b = ah \quad (1)$$

$$x \in bH \Rightarrow \exists k \in H : x = bk = ahk \in aH \Rightarrow bH \subset aH \quad (2)$$

$$x \in aH \Rightarrow \exists \ell \in H : x = a\ell.$$

" $\subset$ "

ومن (1) لدينا $a = bh^{-1}, h^{-1} \in H \Leftrightarrow h \in H$ لأن H زمرة جزئية من G .

وبالتالى فإن : $x = bh^{-1}\ell \in bH$ وينتج مباشرة أن

$$aH \subset bH \quad (3)$$

من (2) ، (3) ينتج المطلوب مباشرة .

٣-٥-١ تعريف : لتكن G زمرة . ولتكن H زمرة جزئية من G . وليكن $a, b \in G$.

يقال إن

a مطابق لـ b مقياس H (a congruent to b modulo H): بالر موز $a \equiv b \pmod{H}$ عندما يتحقق شرط (وبالتالى كل الشروط) فى (٢-٥-١) .

١-٥-٤ ملحوظة : لتكن G زمرة ، ولتكن H زمرة جزئية من G . عندئذ فإن العلاقة "مطابق مقياس H " هى علاقة تكافؤ على G . ولكل $a \in G$ فإن aH هو فصل تكافؤ a .
البرهان: لكل $aH = aH : a \in G \Leftrightarrow a \equiv a \pmod{H}$ أى أن العلاقة انعكاسية (reflexive).

$\forall a, b \in G : a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow aH = bH \Rightarrow bH = aH \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$
أى أن العلاقة متماثلة (symmetric) .

$\forall a, b, c \in G : a \equiv b \pmod{H}, b \equiv c \pmod{H} \Rightarrow aH = bH, bH = cH$
 $\Rightarrow aH = cH \Rightarrow a \equiv c \pmod{H}$

أى أن العلاقة انتقالية (transitive) ومن ثم فهى علاقة تكافؤ (equivalence relation) .
١-٥-٥ مثال : لكل $m \in \mathbb{Z}$ تكون $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ (بالنسبة للعملية +) . فى حالة $m \neq 0$ لكل $k, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$k \equiv \ell \pmod{m\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \ell - k \in m\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow m$ يقبل القسمة بدون باق على $\ell - k$

k, ℓ لهما نفس باقى القسمة الموجب من خلال القسمة على $m \Leftrightarrow$

وإذا كان $k \in \mathbb{Z}$ ، باقى القسمة الموجب من قسمة k على m فإن :

$$k + m\mathbb{Z} = r + m\mathbb{Z}$$

وتكون $\{r + m\mathbb{Z} : r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < |m|\}$ هى مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى لعناصر $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى $m\mathbb{Z}$.

١-٥-٦ تمهيدية : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G . لتكن G/H مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى ، $G \setminus H$ مجموعة المجموعات المشاركة اليمنى بالنسبة إلى H . يوجد تناظر أحادى :

$$f : G/H \rightarrow G \setminus H$$

$$aH \mapsto Ha^{-1}$$

البرهان : سنثبت أولاً أن الرسم معرف جيداً (well-defined) . رأينا فى (٢-٥-١) أنه قد يوجد $a, b \in G$ ، $a \neq b$ بينما $aH = bH$ حيث H زمرة جزئية فى G .

وحتى يكون الراسم معرفاً جيداً ينبغي أن نثبت أنه إذا كان $aH = bH$ فإن $aH^{-1} = bH^{-1}$ ، وذلك كالآتي : $bH = aH$ يقتضى أنه يوجد $x \in H$ بحيث يكون $b = ax$. ومن ثم فإن $b^{-1} = x^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$ وبالتالي فإن $Hb^{-1} = Ha^{-1}$ (التقريرات المناظرة للتقريرات فى (١-٥-٢)).

واضح أن الراسم غامر (شامل). لإثبات أن الراسم واحد لواحد: ليكن $Ha^{-1} = Hb^{-1}$ ينتج أن $a^{-1} = hb^{-1}$ حيث $h \in H$ ، ومن ثم فإن $a^{-1}b \in H$ ومن (١-٥-٢) ينتج أن $aH = bH$. أى أن الراسم واحد لواحد.

٦-١ الزمر الجزئية الطبيعية Normal subgroups

٦-١-١ تمهيدية : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G . التقريرات الآتية متكافئة :

$$a \in G \text{ لجميع } aH = Ha \quad (١)$$

$$a \in G \text{ لجميع } aHa^{-1} \subset H \quad (٢)$$

$$\varphi(H) \subset H \text{ لجميع الأوتومورفيزمات الداخلية } \varphi \text{ من } G \quad (٣)$$

$$a \in G \text{ لجميع } aHa^{-1} = H \quad (٤)$$

$$\varphi(H) = H \text{ لجميع الأوتومورفيزمات الداخلية } \varphi \text{ من } G \quad (٥)$$

البرهان : "(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" :

$$x \in aHa^{-1} \Rightarrow \exists h \in H : x = aha^{-1} . aH = Ha \Rightarrow \exists \ell \in H : ah = \ell a$$

$$\Rightarrow x = aha^{-1} = \ell aa^{-1} = \ell \in H \Rightarrow aHa^{-1} \subset H$$

"(٢) $\Leftrightarrow$ (٣)" : ينتج مباشرة من تعريف الأوتومورفيزم الداخلى.

$$\forall a \in G : aHa^{-1} \subset H \Leftrightarrow \varphi(H) \subset H \text{ لجميع الأوتومورفيزمات الداخلية } \varphi \quad (٣) \Leftrightarrow (٤)"$$

$$\forall a \in G : aHa^{-1} = H \Leftrightarrow \forall a \in G : H \subset aHa^{-1} \Leftrightarrow \forall a \in G : a^{-1}Ha \subset H \Leftrightarrow \forall a \in G : a^{-1}Ha \subset H \quad (٤) \Leftrightarrow (٥)"$$

طريقة أخرى : φ أوتومورفيزم داخلى من G ينتج عنه أن φ^{-1} أيضاً أوتومورفيزم

داخلى من G بحيث يكون $\varphi(H) \subset H$ ، $\varphi^{-1}(H) \subset H$ ، وبالتالي فإن : $\varphi(H) \subset H$ ،

$$. a \in G \text{ لكل } aHa^{-1} = \varphi(H) = H \text{ ينتج أن } H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \subset \varphi(H)$$

"(٤) $\Leftrightarrow$ (٥)" : واضح

$$. x = ah \text{ يوجد } h \in H \text{ بحيث إن } x \in aH \text{ (1) : } (٤) \Leftrightarrow (١)"$$

$aHa^{-1} = H \Leftrightarrow$ يوجد $\ell \in H$ بحيث إن $\ell = aha^{-1} \Leftrightarrow$ يوجد $\ell \in H$ بحيث إن

$$(*) \quad aH \subset Ha \Leftrightarrow x = \ell a \in Ha \Leftrightarrow xa^{-1} = \ell \in H$$

$x \in Ha \Leftrightarrow$ يوجد $h \in H$ بحيث يكون $x = ha$ $aHa^{-1} = H \Leftrightarrow$ يوجد $\ell \in H$ بحيث إن

$\ell = h$ $ala^{-1} = h$ ومن ثم فإنه يوجد $\ell \in H$ بحيث إن

$$(**) \quad Ha \subset aH \Leftrightarrow x = ha = a\ell \in aH$$

من (*), (**), ينتج أن $aH = Ha$.

١-٦-٢ تعريف : الزمرة الجزئية H من الزمرة G تسمى زمرة جزئية طبيعية

(normal subgroup) إذا حققت شرطاً (ومن ثم كل الشروط) في (١-٦-١).

١-٦-٣ أمثلة : (١) كل زمرة G تحتوى على زمرتين جزئيتين طبيعيتين تافهتين

هما G نفسها ، $\{e\}$ ، (حيث e هو عنصر G المحايد).

(٢) كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية G تكون زمرة جزئية طبيعية من G .

١-٦-٤ ملحوظة : ليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر من الزمرة G إلى الزمرة G' .

(أ) لكل زمرة جزئية طبيعية من G' يكون $\varphi^{-1}(N')$ زمرة جزئية طبيعية من

G . وعلى وجه الخصوص $Ker(\varphi)$ زمرة جزئية طبيعية من G .

(ب) إذا كان φ راسماً غامراً (فوقياً)، N زمرة جزئية طبيعية من G ، فإن $\varphi(N)$

يكون زمرة جزئية طبيعية من G' .

البرهان : (أ) من (١-٤-٣) $\varphi^{-1}(N')$ زمرة جزئية من G . والآن لكل $a \in G$

ولكل $x \in \varphi^{-1}(N')$

$$\varphi(axa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a)^{-1} \in \varphi(a)N'\varphi(a)^{-1} \subset N'$$

N' زمرة جزئية طبيعية في G' φ هومومورفيزم

$$\Rightarrow axa^{-1} \in \varphi^{-1}(N') \Rightarrow G \text{ زمرة جزئية طبيعية في } G$$

(ب) ليكن $x' \in \varphi(N)$ ، $a' \in G'$. يوجد $x \in N$ بحيث إن $\varphi(x) = x'$. ولأن

φ راسم فوقى (شامل) فإنه يوجد $a \in G$ بحيث إن $\varphi(a) = a'$. والآن :

$$a'x'a'^{-1} = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a)^{-1} = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a^{-1}) = \varphi(axa^{-1}) \in \varphi(N)$$

١-٣-٢

φ هومومورفيزم

N زمرة جزئية طبيعية من G

١-٦-٥ مثال : ليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ هو مورفيزم زمر φ ليس راسماً شاملاً (غامراً).
 N زمرة جزئية طبيعية في G . $\varphi(N)$ ليست بالضرورة زمرة جزئية طبيعية في G' .
 سنأخذ H زمرة جزئية في G لكنها ليست زمرة جزئية طبيعية فيها.
 راسم التضمين $\iota: H \hookrightarrow G$ هو مورفيزم لأن :

$$a \mapsto a$$

$$\forall a, b \in H : \iota(ab) = ab = \iota(a)\iota(b)$$

H زمرة جزئية طبيعية في نفسها (زمرة جزئية طبيعية تافهة) لكن $\iota(H) = H$ ليست زمرة جزئية طبيعية في G .

ويمكن تكوين أمثلة عديدة لهذا: خذ مثلاً $G = \gamma_3$ ، $H = \{e, (12)\}$ ، e هو العنصر المحايد في G . H زمرة جزئية من γ_3 ، لكنها ليست زمرة جزئية طبيعية فيها :

$$(13)(12)(13) = (23) \notin \{e, (12)\}$$

١-٦-٦ تعريف : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G . تسمى المجموعة

$$Nor(H) := \{a \in G : aHa^{-1} = H\}$$

مطبع H (Normalizer) في G .

١-٦-٧ ملحوظة : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G ، $Nor(H)$ مطبع H

في G . عندئذ فإن :

(١) $Nor(H)$ زمرة جزئية من G .

(٢) H زمرة جزئية طبيعية من $Nor(H)$

(٣) إذا كانت K زمرة جزئية من G ، H زمرة جزئية طبيعية من K فإن $K \subset Nor(H)$.

أي أن $Nor(H)$ هي أكبر زمرة جزئية في G يكون فيها H زمرة جزئية طبيعية .

البرهان : (١) لكل $a \in G$ ليكن $\varphi_a: G \rightarrow G$ هو الأوتومورفيزم الداخلي من G .
 $x \mapsto axa^{-1}$

$$\Rightarrow \forall a \in G : a \in Nor(H) \Leftrightarrow \varphi_a(H) = H \quad (*)$$

والآن نبرهن على أن $Nor(H)$ زمرة جزئية من G . أولاً من الواضح أن e

العنصر المحايد في G يقع في $Nor(H)$. ثانياً :

$$a, b \in \text{Nor}(H) \Rightarrow \varphi_a(H) = H, \varphi_b(H) = H \Rightarrow \varphi_{ab}(H) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(H) = \varphi_a(\varphi_b(H)) = \varphi_a(H) = H \Rightarrow ab \in \text{Nor}(H)$$

$$a \in \text{Nor}(H) \Rightarrow \varphi_a(H) = H \Rightarrow \varphi_{a^{-1}}(H) = H \Rightarrow a^{-1} \in \text{Nor}(H) \quad \text{ثالثاً :}$$

(٢) واضح من التعريف .

$$(٣) \quad H \text{ زمرة جزئية طبيعية من } K \Leftarrow \text{ لكل } a \in K \quad aHa^{-1} = H \Leftarrow \text{ لكل } a \in K :$$

$$K \subset \text{Nor}(H) \Leftarrow a \in \text{Nor}(H)$$

٧-١ الزمر العاملة Factor groups

١-٧-١ نظرية : لتكن G زمرة ، N زمرة جزئية طبيعية في G ، G/N مجموعة

$$\rho: G \rightarrow G/N \quad \text{كل المجموعات المشاركة اليسرى من } G \text{ بالنسبة إلى } N$$

$$a \mapsto aN$$

عندئذ فإنه يوجد بالضبط ربط واحد " . " في G/N بحيث يكون :

$$(أ) \quad (G/N, \cdot) \text{ زمرة .}$$

$$(ب) \quad \text{الراسم } \rho \text{ هومومورفيزم من } G \text{ إلى } (G/N, \cdot) .$$

ρ عندئذ يكون إبيومورفيزم ، $\text{Ker}(\rho) = N$ ، N هو العنصر المحايد في $(G/N, \cdot)$ ، $a^{-1}N$ هو معكوس aN .

البرهان : (١) وحدانية الربط (uniqueness) : إذا كانت $(G/N, \cdot)$ زمرة ، ρ

هومومورفيزم من G إلى $(G/N, \cdot)$ فإنه لجميع $a, b \in G$:

$$aN \cdot bN = \rho(a) \cdot \rho(b) = \rho(ab) = (ab)N$$

(٢) سنثبت أن الربط المعطى في (١) معرف جيداً أى أنه موجود (exists) ونحن

نعلم من (١-٥-٢) أنه قد يوجد عنصران $a, b \in G$ مختلفان وعلى الرغم من هذا

يكون $aH = bH$ حيث H زمرة جزئية في الزمرة G .

ولهذا فإنه حتى نثبت أن الربط معرف جيداً فإننا نثبت أنه إذا كان $aN = a'N$ ،

$bN = b'N$ حيث $a, a', b, b' \in G$ فإن $abN = a'b'N$ (ويقال إن الربط لايعتمد

على الممثل (The representative) . سنكتب $N \triangleleft G$ إذا كانت N زمرة جزئية طبيعية

في الزمرة G .

نلاحظ أولاً أنه إذا كان $n \in N \triangleleft G$ ، $b' \in G$ فإن $nb' = b'\ell$ حيث $\ell \in G$

$$(1') \quad (aN = Na : a \in G \text{ لكل})$$

ونلاحظ ثانياً أنه إذا كان $a \in H$ حيث H زمرة جزئية من G فإن $aH = H$ حيث $a \in G$.

$$(2') \quad (a \in H \Leftrightarrow e^{-1}a \in H \Leftrightarrow eH = aH \Leftrightarrow H = aH \text{ : لأن})$$

٢-٥-١

باستخدام هاتين الملاحظتين سنثبت أن الربط المعطى فى (١) معرف جيداً كالاتى :
ليكن :

$$aN = a'N, bN = b'N, a, a', b, b' \in G$$

$$\Rightarrow \exists n, m \in N : a = a'n, b = b'm$$

$$\Rightarrow abN = a'nb'mN \underset{(1')}{=} a'b'\ell mN \underset{(2')}{=} a'b'N, \ell \in N$$

والآن

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in G : (aN.bN).cN &= (abN).cN = (ab)cN \\ &= a(bc)N = aN.bcN = aN.(bN.cN) \end{aligned}$$

كذلك

$$\forall a \in G : N.aN = eN.aN = eaN = aN$$

أى أن N هو العنصر المحايد فى $(G/N, \cdot)$

$$\forall a \in G : a^{-1}N.aN = a^{-1}aN = eN = N$$

أى أن $a^{-1}N$ هو معكوس aN .

واضح أن ρ راسم فوقى (شامل) وبالتالي فإنه إبيمورفيزم

$$Ker(\rho) = \{a \in G : \rho(a) = N\} = \{a \in G : aN = N\}$$

$$= \{a \in G : a \in N\} = N$$

٢-٧-١ تعريف زمرة G ، زمرة جزئية طبيعية فى G . تسمى الزمرة المنشأة فى

(١-٧-١) الزمرة العاملة (أو زمرة القسمة) لـ G مقياس N . يسمى الإبيمورفيزم

$\rho: G \rightarrow G/N$ الإبيمورفيزم الطبيعى (The canonical epimorphism) لـ G على G/N .

$$a \mapsto a/N$$

١-٧-٣ ملحوظة : لتكن زمرة G ، مجموعة جزئية من G .

N زمرة جزئية طبيعية من G إذا وفقط إذا وجدت زمرة G' ، ووجد هومومورفيزم

$\varphi: G \rightarrow G'$ بحيث يكون $\text{Ker}(\varphi) = N$.

البرهان : " $\Leftarrow$ " : ينتج من النظرية (١-٧-١)

" $\Rightarrow$ " : ينتج كذلك مباشرة من (١-٦-٤) (أ)

١-٧-٤ مثال : الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ ، إبدالية، ومن ثم فإن أية زمرة جزئية منها تكون زمرة

جزئية طبيعية. ولهذا فإنه لأي $m \in \mathbb{Z}$ يكون لدينا الزمرة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ويكون الحساب في $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ كالآتي :

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z} : (k + m\mathbb{Z}) + (\ell + m\mathbb{Z}) = (k + \ell) + m\mathbb{Z}$$

في حالة $m = 0$ يكون $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\{k\} : k \in \mathbb{Z}\}$

(ويكتب أحياناً $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{k} : k \in \mathbb{Z}\}$)

$$= \{k + m\mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

ويكون الراسم :

$$k \mapsto \{k\} = k + m\mathbb{Z}$$

أيزومورفيزم زمر .

في حالة $m \neq 0$ تكون $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ زمرة عدد عناصرها $|m|$ وهى :

$$\{k + m\mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, |m| - 1\}\} \text{ (انظر مثال (١-٥-٥))}$$

وسنكتب أحياناً $\mathbb{Z}_m$ لنعنى $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

٨-١ نظريات الأيزومورفيزم The Isomorphism Theorems

١-٨-١ نظرية الهومومورفيزم The Homomorphism Theorem

ليكن $f: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر من الزمرة G إلى الزمرة G'

$$\Rightarrow G/\text{Ker}(f) \cong f(G)$$

أى أن كل هومومورفيزم ينتج عنه أيزومورفيزم

البرهان : سنضع الراسم من $G/Ker(f)$ إلى $f(G)$ ونثبت أنه أيزومورفيزم كالاتى :

$$\varphi: G/Ker(f) \rightarrow f(G)$$

$$aKer(f) \mapsto f(a)$$

$$\forall a \in G: \varphi(aKer(f)) = f(a)$$

(١) الراسم φ معرف جيداً: لكل $a, b \in G$ ليكن $aKer(f) = bKer(f)$ ينتج من (١-٥-٢) أن :

$$a^{-1}b \in Ker(f) \Rightarrow f(a)^{-1}f(b) = f(a^{-1})f(b) = f(a^{-1}b) = e' \quad (e' \text{ العنصر المحايد في } G')$$

$$2-3-1$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b)$$

أى أن : $\varphi(aKer(f)) = \varphi(bKer(f))$ وبهذا يكون الراسم معرفاً جيداً لأنه لايعتمد على الممثل (The representative) .

(٢) راسم فوقى (شامل) : واضح (لأن كل عنصر فى $f(G)$ سيكون على الشكل $f(a)$ وبالتالي فإنه يوجد $aKer(f) \in G/Ker(f)$ بحيث يكون $\varphi(aKer(f)) = f(a)$.

(٣) واحد لواحد : ليكن $\forall a, b \in G: \varphi(aKer(f)) = \varphi(bKer(f))$ ، أى أن $f(a) = f(b)$.

ينتج أن :

$$f(a^{-1}b) = f(a^{-1})f(b) = f(a)^{-1}f(b) = e' \Rightarrow a^{-1}b \in Ker(f)$$

$$2-3-1$$

$$\Rightarrow aKer(f) = bKer(f)$$

$$2-5-1$$

(٤) φ هو مومورفيزم :

$$\forall a, b \in G: \varphi(aKer(f).bKer(f)) = \varphi(abKer(f))$$

$$1-7-1$$

(تذكر أن $Ker(f)$ زمرة جزئية طبيعية من G (٤-٦-١))

$$= f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(aKer(f))\varphi(bKer(f))$$

The First Isomorphism Theorem

٢-٨-١ النظرية الأولى للأيزومورفيزم

ليكن $f: G \rightarrow G'$ هو مومورفيزم زمر من الزمرة G إلى الزمرة G' .

لتكن $U \xrightarrow{\quad} G$ (زمرة جزئية من G) ، $N \triangleleft G$ (زمرة جزئية طبيعية من G) .

$$\Rightarrow U/U \cap N \cong UN/N$$

حيث $UN := \{un/u \in U, n \in N\}$

البرهان :

سنثبت أولاً أن UN زمرة جزئية من G حتى يكون للادعاء معنى .

e العنصر المحايد في G موجود في U ، وبالتالي فإن $e = e.e \in UN$ ، وبالتالي

فإن $UN \neq \emptyset$. والآن ليكن $u_1 n_1, u_2 n_2 \in UN$

$$u_1 n_1 . u_2 n_2 = u_1 u_2 n_3 n_2 \in UN, n_3 \in N$$

(راجع (١-٦-١) .

كذلك فإن :

$$\forall un \in UN : (un)^{-1} = n^{-1}u^{-1} = u^{-1}n' \in UN, n' \in N$$

أى أن UN زمرة جزئية في G .

والآن $\forall n \in N : n = en \in UN$ أى أن $N \subset UN$ ، زمرة N جزئية طبيعية في G

ومن ثم فهي زمرة جزئية طبيعية من UN ، ويكون للكتابة UN/N معنى : فهي زمرة .

والآن إذا كان الادعاء صحيحاً فإن $U/U \cap N$ يجب أن تكون زمرة وهذا يقتضى

أن يكون $U \triangleleft (U \cap N)$. ويمكن بسهولة البرهنة على هذا ثم إثبات الأيزومورفيزم لكننا

نفضل أن نجرى الآتى :

نعرف الراسم φ كما يلي :

$$\varphi: U \rightarrow UN/N$$

$$a \mapsto aN$$

واضح أن φ معرف جيداً ، وواضح أنه راسم فوقى (شامل) . والآن :

$$\forall a, b \in U : \varphi(ab) = abN = aN.bN = \varphi(a)\varphi(b)$$

أى أن φ هو مومورفيزم . ونحسب نواة (φ) :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in U : \varphi(a) = N\}$$

$$= \{a \in U : aN = N\} = \{a \in U : a \in N\} = U \cap N$$

أى أن $U \cap N$ زمرة جزئية طبيعية فى U (١-٦-٤) (أ)

والآن نطبق نظرية الهومومورفيزم (١-٨-١) :

$$U / U \cap N = U / \text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(U) = UN / N$$

φ شامل .

نهاية البرهان .

٣-٨-١ النظرية الثانية للأيزومورفيزم The Second Isomorphism Theorem

لتكن G زمرة ، M, N زمريتين جزئيتين طبيعيتين فى G ، $N \subset M$. ينتج أن :

$$G / N / M / N \cong G / M$$

البرهان : حتى يكون للدعاء معنى يجب أن يكون M / N زمرة جزئية طبيعية فى

G / N لكننا لن نفعل هذا بصورة منفردة ، بل سنتبع الآتى :

نعرف الراسم φ :

$$\varphi : G / N \rightarrow G / M$$

$$aN \mapsto aM$$

$$\forall a, b \in G : aN = bN \Rightarrow a^{-1}b \in N \Rightarrow a^{-1}b \in M \quad (١) \quad \varphi \text{ معرف جيداً} :$$

$$1-6-1$$

$$\Rightarrow aM = bM$$

$$1-6-1$$

(٢) φ راسم غامر (شامل) : واضح

(٣) φ هومومورفيزم :

$$\forall a, b \in G : \varphi(aN.bN) = \varphi(abN) = abM = aM.bM$$

$$1-7-1$$

$$1-7-1$$

$$= \varphi(aN)\varphi(bN)$$

(٤) نواة (φ) :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{aN \in G/N : \varphi(aN) = M\}$$

$$= \{aN \in G/N : aM = M\} = \{aN \in G/N : a \in M\} = M/N$$

أى أن M/N زمرة جزئية طبيعية فى G/N (٤-٦-١)

والآن نطبق نظرية الهومومورفيزم (١-٨-١) :

$$G/N / M/N = G/N / \text{Ker}(\varphi) = \varphi(G/N) = G/M$$

φ شامل

نهاية البرهان .

٩-١ النوايا المرتبيه والنوايا المشاركة المرتبية

Categorical Kernels & Categorical Cokernels

١-٩-١ تعريف : ليكن $f: G \rightarrow H$ هومومورفيزم زمر من الزمرة G إلى الزمرة H .

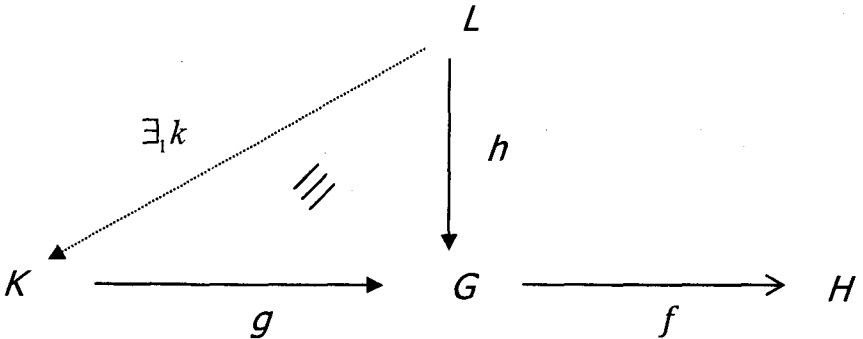
تسمى زمرة K مع هومومورفيزم $g: K \rightarrow G$ نواة مرتبية (Cotegorical kernel) .
 f إذا تحقق :

$$(1) \quad fg = 1 \quad (\text{أى أن } \forall a \in K : fg(a) = e_H)$$

(e_H هو العنصر المحايد فى H ، fg تعنى fog وهكذا فى باقى التركيبات) .

(٢) لكل زمرة L ، لكل $h: L \rightarrow G$ هومومورفيزم زمر :

$$[fh = 1 \Rightarrow \exists k: L \rightarrow K \text{ هومومورفيزم } h = gk]$$



($\exists_! k$ تعنى يوجد واحد بالضبط k . "///" داخل الرسم تعنى ان الرسم إبدالى

(commutative) . فى الشكل المعطى معناه $gk = h$) .

١-٩-٢ نظرية : النوايا المرتبة موجودة ، وهي وحيدة بدون حساب النوايا المتشاكلية
(unique up to isomorphism)

البرهان : الوجود : (Existence)

سنعرف K ، g كالاتى : $K := Ker(f)$ ، $g : Ker(f) \rightarrow G$
 $x \mapsto x$

أى أن $g = \iota$ (راسم التضمين) (The inclusion mapping)
والآن

$$\forall x \in Ker(f) : (fg)(x) = f(g(x)) = f(x) = e_H$$

$fh = 1$ معناه : $\forall x \in L : (fh)(x) = e_H$ ، أى أن $\forall x \in L : f(h(x)) = e_H$. أى أن

$h(x) \in Ker(f)$. ولهذا نعرف k كالاتى : $\forall x \in L : k(x) := h(x)$ ويكون بهذا k

معرفاً جيداً لأن $k(x) \in K = Ker(f)$

$$\forall x \in L : (gk)(x) = g(k(x)) = \iota(h(x)) = h(x) \Rightarrow gk = h$$

k هو مورفيزم لأن h هو مورفيزم .

k وحيد لأنه بفرض وجود مورفيزم ℓ بحيث يكون $gk = g\ell$ فإن هذا معناه

أن $\iota k = \iota \ell$ أى أن

$$\forall x \in L : \iota(k(x)) = (\iota k)(x) = (\iota \ell)(x) = \iota(\ell(x))$$

$$\Rightarrow \forall x \in L : k(x) = \ell(x) \Rightarrow k = \ell$$

ι مونومورفيزم

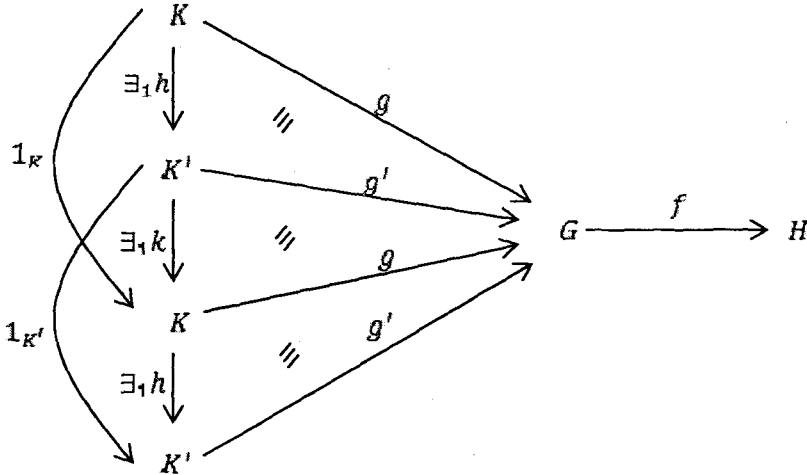
الوحدانية (Uniqueness)

ليكن K, g وكذلك K', g' نواة مرتبة . من حيث إن K, g نواة مرتبة لـ f إذن

$fg = 1$. ومن حيث إن K', g' نواة مرتبة لـ f ، K زمرة بحيث إن $fg = 1$. إذن

يوجد مورفيزم وحيد $h : K \rightarrow K'$ بحيث إن $g'h = g$. والآن K', g' نواة

مرتبة لـ f إذن $fg' = 1$



ومن حيث إن K, g نواة مرتببة لـ f, K' زمرة بحيث إن $fg' = 1$. إذن يوجد هومومورفيزم وحيد $k: K' \rightarrow K$ بحيث إن $gk = g'$. مرة ثالثة : من حيث إن K, g نواة مرتببة لـ f . إذن $fg = 1$. ومن حيث إن K', g' نواة مرتببة لـ f, K زمرة بحيث إن $fg = 1$. إذن يوجد هومومورفيزم وحيد $h: K \rightarrow K'$ بحيث إن $g'h = g$. محصلة هذا أنه يوجد هومومورفيزم وحيد $koh: K \rightarrow K$ بحيث إن الشكل $KK'KG$ يكون إبدالياً. ولكن الهومومورفيزم $1_K: K \rightarrow K$ يجعل نفس الشكل إبدالياً. ومن ثم $a \mapsto a$

$$(1) \quad koh = 1_K \quad \text{فإن:}$$

كذلك من المحصلة يوجد هومومورفيزم وحيد $hok: K' \rightarrow K'$ يجعل الشكل $K'KK'G$ إبدالياً. لكن الهومومورفيزم $1_{K'}: K' \rightarrow K'$ يجعل نفس الشكل إبدالياً. ومن ثم فإن : $hok = 1_{K'}$ (2).

من (١) ينتج أن h مونومورفيزم ، k إيمورفيزم . ومن (٢) ينتج أن k مونومورفيزم ، h إيمورفيزم. وبالتالي فإن h (وكذلك k) أيزومورفيزم (تشاكل) وتكون النواة المرتببة وحيدة (بدون حساب النوايا المتشاكلة) .

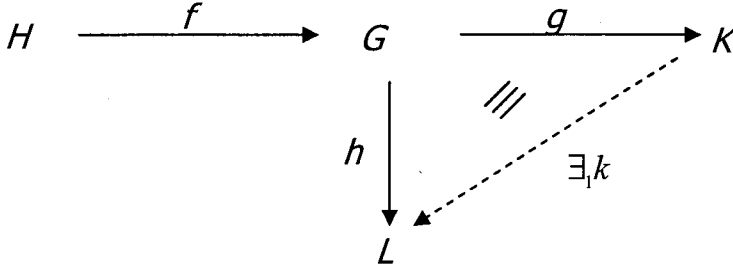
٣-٩-١ تعريف : ليكن $f: H \rightarrow G$ هومومورفيزم زمر من الزمرة H إلى الزمرة G . تسمى الزمرة K مع الهومومورفيزم $g: G \rightarrow K$ نواة مشاركة مرتببة

(Categorical Cokernel) $f \dashv$ إذا تحقق :

$$(1) \quad gf = 1 \quad (\text{أى أن}) \quad (\forall a \in H : (gf)(a) = e_K)$$

(2) لكل زمرة L ولكل $h: G \rightarrow L$ هومومورفيزم زمرة :

$$[hf = 1 \Rightarrow \exists k: K \rightarrow L \text{ هومومورفيزم } kg = h]$$



٩-٤-١ نظرية : النوايا المشاركة المرتبة موجودة ، وهى وحيدة بدون حساب النوايا المشاركة المتشاكلية (unique up to isomorphism) .

البرهان : من (٣-٤-١) : صورة (f) زمرة جزئية من G : $\text{Im}(f) \hookrightarrow G$
والآن نكون B حيث $B := \cap \{N \mid N \triangleleft G, \text{Im}(f) \subset N\}$

ومن مثال ٦ فى (٤-٤-١) تقاطع زمرتين جزئيتين من زمرة A هو زمرة جزئية من A ،
ومن ثم فإن B زمرة جزئية من G . كذلك فإنه لكل $a \in G$ ، $b \in B$ ، $aba^{-1} \in N$.
لجميع N (الزمر الجزئية الطبيعية فى G) ومن ثم فإن $aba^{-1} \in B$ أى أن B زمرة جزئية

طبيعية فى G . والآن ننشئ $K := G/B$ ، نعرف $g: G \rightarrow G/B$ الإبيمورفيزم الطبيعى .
 $a \mapsto aB$

والآن : لكل $x \in H$ $(gf)(x) = g(b) = B : x \in H$ (B هو العنصر المحايد فى G/B) ،
($b \in B$) لأن $b = f(x) \in \text{Im}(f)$ وبالتالي فإن $g(b) = bB = B$ كما ذكر هذا فى
نظرية الزمر العاملة (أى أن $gf = 1$) .

والآن ليكن لدينا L ، $h: G \rightarrow L$ هومومورفيزم بحيث إن $hf = 1$. هذا يقتضى أن :
 $h(\text{Im}(f)) = \{e_L\}$ حيث e_L العنصر المحايد فى L

. $B \subset \text{Ker}(h)$ وبالتالى فإن $\text{Ker}(h)$ زمرة جزئية طبيعية من H . , $\text{Ker}(h) \supset \text{Im}(f)$
 نعرف $k(cB) := h(c)$ لجميع $c \in G$. نستطيع أن نثبت الآن أن k معرف جيداً كالاتى :
 ليكن $cB = c'B$ لجميع $c, c' \in G$. هذا يستلزم أن

$$h(c) = h(c') \Leftrightarrow h(c^{-1}c') = e_L \Leftrightarrow c^{-1}c' \in B \subset \text{Ker}(h)$$

 كذلك فإن k هومومورفيزم لأن :

$$\forall c, c' \in G : k(cB.c'B) = k(cc'B) = h(cc') = h(c)h(c')$$

h هومومورفيزم التعريف

$$= k(cB)k(c'B)$$

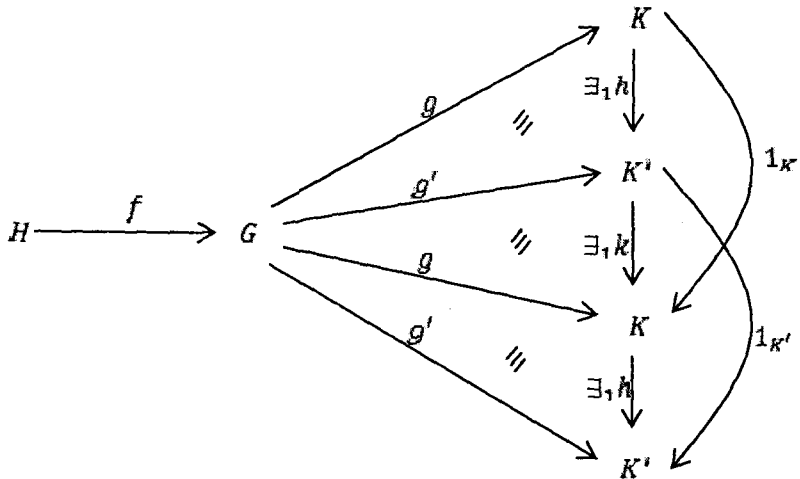
التعريف

نثبت كذلك أن $kg = h$ كالاتى :

$$\forall c \in G : (kg)(c) = k(g(c)) = k(cB) = h(c)$$

ونثبت وحدانية k : ليكن k', k بحيث إن $k'g = kg = h$. هذا معناه أن لكل
 $x \in G : (k'g)(x) = (kg)(x)$ أى أن $k'(g(x)) = k(g(x))$ ولكن g إبيمورفيزم فينتج
 أن $k' = k$.

وحدانية الحل :



طريقة البرهان تشبه تماماً الطريقة المتبعة فى حالة النوايا المرتبية .

من حيث إن K', g' حل أى نواة مشاركة مرتببة لـ f إذن $gf = 1$. ومن حيث إن K, g نواة مشاركة مرتببة لـ f ، زمرة بحيث إن $gf = 1$. إذن يوجد هومومورفيزم وحيد $h: K \rightarrow K'$ بحيث إن $hg = g'$.

والآن K, g نواة مشاركة مرتببة لـ f . إذن $gf = 1$. ومن حيث إن K', g' نواة مشاركة مرتببة لـ f ، زمرة بحيث إن $gf = 1$. إذن يوجد هومومورفيزم وحيد $k: K' \rightarrow K$ بحيث إن $kg' = g$. ومرة ثالثة : من حيث إن K', g' نواة مشاركة مرتببة لـ f إذن $g'f = 1$. ومن حيث إن K, g نواة مشاركة مرتببة لـ f ، زمرة بحيث إن $g'f = 1$: إذن يوجد هومومورفيزم وحيد $h: K \rightarrow K'$ بحيث إن $hg = g'$. ومحصلة هذا أنه يوجد هومومورفيزم وحيد $koh: K \rightarrow K$ بحيث يكون الشكل $GKK'K$ إبدالياً . ولكن الهومومورفيزم $1_K: K \rightarrow K$ يجعل الشكل إبدالياً $a \mapsto a$

كذلك: إذن (1) $koh = 1_K$. كذلك من محصلة النتائج السابقة أنه يوجد هومومورفيزم وحيد $hok: K' \rightarrow K'$ يجعل الشكل $GK'KK'$ إبدالياً . لكن الهومومورفيزم $1_{K'}: K' \rightarrow K'$ يجعل الشكل نفسه كذلك إبدالياً . إذن (2) $hok = 1_{K'}$. $b \mapsto b$

من (1) ينتج أن h مونومورفيزم ، k إيمورفيزم . ومن (2) ينتج أن k مونومورفيزم ، h إيمورفيزم . وبالتالي فإن h, k أيزومورفيزمان وتكون النواة المشاركة المرتببة لـ f وحيدة (بدون حساب النوايا المشاركة المتشاكلية) .

١٠-١ الرتبة والدليل Order and Index

١-١٠-١ تعريف : (أ) لتكن X مجموعة . نعرف رتبة (X) كالآتي :

$$\text{رتبة } (X) \text{ (Ord } (X)) = \begin{cases} \text{عدد عناصر } X \text{ إذا كانت } X \text{ منتهية} \\ \infty , \text{ إذا كانت } X \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

(ب) لتكن G زمرة ، ولتكن H زمرة جزئية من G ولتكن G/H مجموعة المجموعات

المشاركة اليسرى من G بالنسبة إلى H . يسمى

$$[G:H] := \text{Ord}(G/H)$$

دليل H في G . (The index of H in G)

١-١٠-٢ ملحوظة : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G . لكل $a \in G$ الراسم

$$\begin{aligned} \varphi: H &\rightarrow aH \\ h &\mapsto ah \\ \varphi^{-1}: aH &\rightarrow H \\ ah &\mapsto a^{-1}(ah) = h \end{aligned}$$

تتاظر أحادي (لأن له الراسم العكسي

$$\forall a \in G: \quad \text{Ord}(ah) = \text{Ord}(H) \quad \text{ومن ثم فإن :}$$

١-١٠-٣ نظرية لاجرانج Lagrange's Theorem

لتكن G زمرة منتهية ، H زمرة جزئية من G . عندئذ فإن :

$$\text{Ord}(G) = [G:H].\text{Ord}(H)$$

البرهان : سنثبت أولاً أن مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى بالنسبة إلى H تكون

تجزئة (partition) في G .

واضح- أولاً- أن كل عنصر في G ينتمي- على الأقل- إلى مجموعة مشاركة يسرى لأن:

$$\forall g \in G: \quad g = ge \in gH \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G)$$

ثانياً : ليكن $gH \cap g'H \ni gh = g'h'$. ينتج أن $g = g'h'h^{-1} \in g'H$ وهذا يقتضى

أنه لكل $gh'' = g'h'h^{-1}h'' \in g'H: h'' \in H$ ، وهذا يستلزم أن $gH \subset g'H$. وبالمثل

يثبت أن $g'H \subset gH$. ومن ثم فإن $gH = g'H$. أى أن المجموعات المشاركة

اليسرى بالنسبة إلى H إما أن يكون تقاطعها خالياً (empty) أو تتطابق ، ومن أولاً ينتج

أنها تكون تجزئة لـ G .

ومن حيث إنه لكل $g \in G$ يكون $Ord(gH) = Ord(H)$ (ملحوظة (١-١٠-٢)) ينتج منطق النظرية مباشرة .

١-١٠-٤ نتيجة : إذا كان رتبة (Order) الزمرة G عدداً أولياً فإن G لا تحتوي من الزمر الجزئية إلا التافهتين .

البرهان : ليكن رتبة (G) هو العدد الأولي p . من نظرية لاجرانج ينتج أن :

$Ord(H) = 1$ أو $Ord(H) = p$. $Ord(H) = 1$ يقتضى أن $H = \{e\}$. $Ord(H) = p$. $H = G$.

١١-١ الزمر الدائرية Cyclic Groups

١-١١-١ تعريف : لتكن G زمرة ، $X \subset G$ (مجموعة جزئية) . تسمى المجموعة

$$[X] := \cap \{H : H \xrightarrow{L} G \text{ (زمرة جزئية)}\}$$

الزمرة الجزئية في G المتولدة من X (The subgroup of G generated from X)

لأي $a \in G$ سنكتب $[a]$ بدلاً من $\{a\}$.

ونعرف رتبة العنصر $a \in G$ كالآتي :

$$Ord(a) := Ord([a]) \text{ رتبة } (a)$$

١-١١-٢ تمهيدية : لتكن G زمرة ، $X \subset G$ (مجموعة جزئية) . عندئذ فإن :

$$(١) [X] \text{ هي أصغر زمرة جزئية من } G \text{ تحتوي على } X$$

$$(٢) [X] = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} : a = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}\}$$

أي أن $[X]$ هي مجموعة كل حواصل الضرب المنتهية من عناصر $X \cup \{x^{-1} \mid x \in X\}$.

البرهان : (١) ينتج مباشرة من أن تقاطع مجموعة من الزمر الجزئية من زمرة هو زمرة

جزئية من نفس الزمرة (انظر (١-٤-٤) مثال ٦) .

(٢) سنسمى المجموعة التي في الطرف الأيمن من (٢) H

" $\supset$ " : من حيث إن $[X]$ زمرة جزئية من G تحتوي على كل عناصر X ، فهي تحتوي

على كل حواصل الضرب الممكنة من هذه العناصر ومعكوساتها ، أي أن $[X] \supset H$.

" $\subset$ " : H زمرة جزئية من G لأنها تحتوي على كل العناصر $x_1, \dots, x_n$

(بأخذ $a = x_1^{\varepsilon_1}, \dots, a = x_2^{\varepsilon_2}$ ، ...) . كذلك لكل $a, b \in H$

$$ab^{-1} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m})^{-1}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}$$

$$= x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_m^{-\delta_m} \dots y_1^{-\delta_1} \in X$$

إذن هي زمرة جزئية من G وتحتوى على X . ولكن $[X]$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحتوى على X . أى أن $[X] \subset H$.

١-١١-٣ تعريف : لتكن G زمرة لها العنصر المحايد e ، $a \in G$. سنعرف العنصر $a^n \in G$ ، $n \in \mathbb{N}$ استقرائياً (inductively) كالآتى :

$$\left. \begin{aligned} a^0 &:= e \\ a^k &:= aa^{k-1} \\ a^{-k} &:= (a^k)^{-1} \end{aligned} \right\}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

وإذا أشرنا إلى الربط بـ "+" سنكتب na بدلا من a^n ونكتب التعريف كالآتى :

$$\left. \begin{aligned} 0a &:= 0 \\ ka &:= a + (k-1)a \\ (-k)a &:= -(ka) \end{aligned} \right\}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

١-١١-٤ قواعد الحساب : باستخدام الاستقراء الرياضى يمكن البرهنة بسهولة على أن :

(١) لجميع $a \in G$ (زمرة G) ولجميع $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

(٢) فى زمرة G ، $a, b \in G$ إذا كان $ab = ba$ فإنه لجميع $n \in \mathbb{Z}$:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

١-١١-٥ ملحوظة : ليكن زمرة $a \in G$. ينتج مباشرة من (١-١١-٢) أن :

$$[a] = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

١-١١-٦ تعريف : يقال لزمرة G إنها دائرية (Cyclic) إذا وجد عنصر $a \in G$

بحيث يكون $G = [a]$. ويسمى a فى هذه الحالة مولداً (Generator) لـ G .

١-١١-٧ نظرية : (١) كل زمرة دائرية تكون إبدالية .

(٢) إذا كان رتبة زمرة ما عدداً أولياً كانت الزمرة دائرية .

(٣) إذا كانت G زمرة دائرية ، وكان a مولداً لها فإن الراسم

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$$

$$n \mapsto a^n$$

إبيمورفيزم

(٤) كل زمرة جزئية من زمرة دائرية تكون دائرية .

البرهان : (١) لتكن G زمرة دائرية وليكن $a, b \in G$. إذن يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث

يكون $a = x^m$ ، $b = x^n$ حيث x مولد للزمرة G .

وهذا يقتضى أن :

$$ab = x^m x^n = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n x^m = ba$$

٤-١١-١

أى أن G إبدالية .

(٢) ليكن $e \in G$ العنصر المحايد فى الزمرة G . رتبة (G) عدد أولى (1 ليس عدداً أولياً)

يستلزم أنه يوجد عنصر $e \neq a \in G$ ومن ثم فإن $[a] \neq \{e\}$ زمرة جزئية فى G . ومن

(٤-١٠-١) ينتج أن $[a] = G$ ، أى أن G دائرية .

(٣) واضح أن φ راسم فوقى (شامل) . φ هو مومورفيزم لأن :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}: \varphi(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = \varphi(m)\varphi(n)$$

٤-١١-١

أى أن φ إبيمورفيزم .

(٤) لتكن G زمرة دائرية ، H زمرة جزئية من G ، a مولد لـ G . من (٣)

$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ إبيمورفيزم وبالتالي فإن $\varphi^{-1}(H)$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ (راجع ٣-٤-١)

$$n \mapsto a^n$$

((ب)) ومن مثال ٣ فى (٤-٤-١) يكون $\varphi^{-1}(H) = m\mathbb{Z}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$ ومن حيث إن

φ راسم فوقى (شامل) يكون :

$$H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) = \varphi(m\mathbb{Z})$$

$$= \{(a^m)^n (= a^{mn}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad (a^m \text{ مولد } H)$$

٨-١١-١ نظرية تفصيل الزمر الدائرية Classification of cyclic groups

لتكن G زمرة دائرية ، a مولد لـ G ، $m := \text{Ord}(G)$. عندئذ فإن :

(١) إذا كانت $m = \infty$ فإن الراسم $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ أيزومورفيزم .
 $n \mapsto a^n$

(٢) إذا كانت $m < \infty$ فإن الراسم $\varphi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow G$ لجميع $n \in \mathbb{Z}$ أيزومورفيزم .
 $n + m\mathbb{Z} \mapsto a^n$

البرهان : $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ إبيومورفيزم من (١-١١-٧) (٣) .
 $n \mapsto a^n$

والآن نطبق نظرية الهومومورفيزم (١-٨-١)

$$\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi)$$

ولأن φ راسم فوقى يكون $\varphi(\mathbb{Z}) = G$ ومن ثم فإن $G \cong \mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi)$.

إذا كان $\text{Ord}(G) = m < \infty$ فإن $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ وإلا كان $G \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$ وتكون $\mathbb{Z}$ منتهية وهذا تناقض وبالتالي فإن $\text{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ ويكون $m = \text{Ord}(G) = \text{Ord}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$

$\Leftarrow G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ويكون $\psi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow G$ هو الأيزومورفيزم الموجود .
 $n + m\mathbb{Z} \mapsto a^n$

أما إذا كان $\text{Ord}(G) = \infty$ فإن φ يكون راسماً واحداً لواحد (injective) لأنه بفرض أن

$$\varphi(m) = a^m = a^n = \varphi(n) , \quad m, n \in \mathbb{Z}, m > n$$

فإنه ينتج أن e (العنصر المحايد في G) $a^{m-n} = e$ ، $m-n > 0$. وليكن k هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث إن $a^k = e$. نحن ندعى أن G تتكون بالضبط من العناصر $e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$. ليكن $d^r \in G$ ، عندئذ فإنه يوجد عدنان صحيحان r, q بحيث إن :

$$\ell = kq + r , \quad 0 \leq r < k$$

ويكون

$$a^\ell = a^{kq+r} = (a^k)^q a^r = e^q a^r = a^r, 0 \leq r < k$$

وهذا يعنى أن G منتهية : تناقض .

والآن φ راسم واحد لواحد $\Leftarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\} \Leftarrow$

١-٣-٥

$$G = \varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$$

ويكون

$$n \mapsto a^n$$

هو الأيزومورفيزم الموجود .

٩-١١-١ نتيجة : لتكن G زمرة ، e عنصرها المحايد

(١) لكل $a \in G$ لكل $k \in \mathbb{Z}$: $a^k = e \Leftrightarrow$ رتبة (a) $(Ord(a))$ تقسم k .

(٢) لكل $a \in G$: $a^{Ord(G)} = e$ (نظرية كلاين - فرمات) .

البرهان : (١) ليكن $Ord(a) = m$ ، $\psi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow [a]$ الأيزومورفيزم الذي حصلنا عليه
 $k+m\mathbb{Z} \mapsto a^k$

في (٨-١١-١) . عندئذ فإن : $a^k = e \Leftrightarrow k+m\mathbb{Z} \in Ker(\psi) = m\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow k \in m\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z} : k = m\ell$$

أي أن m تقسم k .

(٢) ليكن $a \in G$. من (١) : $a^{Ord(a)} = e$. من نظرية لاجرانج (٣-١٠-١) رتبة

(a) $(Ord(a))$ تقسم $Ord(G)$ أي أنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون : $Ord(G) = k \cdot Ord(a)$.

وبالتالي فإن :

$$a^{Ord(G)} = a^{k \cdot Ord(a)} = (a^{Ord(a)})^k = e^k = e$$

١٠-١١-١ نتيجة : لتكن G زمرة ، $a \in G$ ، $Ord(a) = m < \infty$. عندئذ فإن

$$[a] = \{a^k : k \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

البرهان : من (٨-١١-١) يوجد أيزومورفيزم

$$\psi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow [a] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$k+m\mathbb{Z} \mapsto a^k$$

ومن ثم فإن :

$$[a] = \psi(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{\psi(k+m\mathbb{Z}) : k \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

١١-١١-١ استنتاج : لتكن G زمرة دائرية منتهية لها الرتبة $m \geq 2$ ، مولد a لـ G ،

$b \in G$. عندئذ فإن b يكون مولداً لـ G إذا وجد فقط إذا وجد عدد طبيعي r ليس بينه

وبين m قواسم مشتركة (عدا ± 1 بالطبع) بحيث يكون $b = a^r$.

البرهان : " $\Rightarrow$ " : ليكن r عدداً طبيعياً ليس بينه وبين m قواسم مشتركة ، بحيث إن $b = a^r$. لأن m, r ليس بينهما قواسم مشتركة فإنه من نظرية الأعداد الابتدائية (Elementary Number Theory) يوجد $k, \ell \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون: $km + \ell r = 1$ وينتج أن:

$$a = a^{km + \ell r} = (a^m)^k (a^r)^\ell = e^k (a^r)^\ell = e (a^r)^\ell = (a^r)^\ell = b^\ell$$

ومن ثم فإن : $G = [a] \subset [b] \subset G$

$$\Rightarrow G = [b]$$

" $\Leftarrow$ " : لأن a مولد لـ G فمن (١٠-١١-١) يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $b = a^r$. ليكن $t \in \mathbb{Z}$ قاسماً مشتركاً بين m, r . عندئذ فإنه يوجد $k, \ell \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $m = kt$, $r = \ell t$. إذا كان b مولداً لـ G فإنه ينتج أن :

(e العنصر المحايد في G)

$$b^k = a^{rk} = a^{t\ell k} = (a^m)^\ell = e^\ell = e, |k| \geq m$$

(من (٩-١١-١) ولأن b مولد لـ G فرتبته = رتبة (G) (m) . ومع $m = kt$ ينتج أن $|t| = 1$.

١٢-١١-١ استنتاج : لتكن G زمرة دائرية منتهية لها الرتبة m . عندئذ فإنه لكل t قاسم موجب لـ m يوجد بالضبط زمرة جزئية واحدة من G لها الرتبة t .

البرهان : ليكن e عنصر G المحايد ، وليكن a مولداً لـ G و $k \in \mathbb{N}$ بحيث إن $m = tk$. نبرهن أولاً على أن الزمرة الجزئية $[a^k] = H$ من G لها الرتبة t ، وذلك كالآتي : لأن $(a^k)^t = a^{kt} = a^m = e$ فإن (١) $Ord(H) \leq t$. ومن $(a^k)^{Ord(H)} = (a^k)^{Ord(H)} = e$ ينتج أن :

$$k \cdot Ord(H) \geq Ord(a) = Ord(G) = m = kt$$

وبالتالي فإن (٢) $Ord(H) \geq t$. من (١) ، (٢) ينتج المطلوب

ثانياً : لتكن H' زمرة جزئية من G لها الرتبة t ، فمن (٧-١١-١) (٤) يوجد $\ell \in \mathbb{N}$ بحيث إن $H' = [a^\ell]$. ومما سبق ينتج أن :

$$\frac{m}{k} = t = Ord(H') = \frac{m}{\ell}$$

وبالتالي فإن $\ell = k$ ويكون $H = H'$.

١١-١٣ نتيجة : لتكن G زمرة ، e عنصرها المحايد. وليكن $\{e\} \neq G$ ،
 الزمرتين الجزئيتين الوحيدتين في G . عندئذ فإنه يوجد عدد أولي p بحيث إن $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
 (من نظرية لاجرانج لأي عدد أولي p تحتوى الزمرة $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ الزمرتين الجزئيتين
 التافهتين فقط)

البرهان : لأن G لا تحتوى من الزمر الجزئية إلا التافهة فقط فإنه لأي : $e \neq a \in G$
 يكون $[a] = G$. وبالتالي فإن G تكون دائرية . ومن (١-١١-٨) فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$
 بحيث إن : $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. إذا كان n عدداً ليس أولياً فإنه من (١-١١-١٢) توجد زمر
 جزئية غير تافهة من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ أى من G وهذا تناقض مع كونها لا تحتوى من الزمر
 الجزئية إلا على التافهة .

أمثلة متنوعة

مثال ١: لتكن G زمرة بحيث إنه لكل $a \in G$: $a^2 = e$ (العنصر المحايد في G) .
برهن على أن G إبدالية .

$$\forall a, b \in G$$

البرهان :

$$ba = ebae = (aa)ba(bb) = a(ab)(ab)b = aeb = ab$$

طريقة أخرى :

$$a^2 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}, b = b^{-1}, ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$$

طريقة ثالثة :

$$e = (ab)(ab) = a^2b^2 = aabb \Rightarrow ba = a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabb^{-1} = ab$$

مثال ٢: برهن على أن أية زمرة مكونة من أربعة عناصر مختلفة تكون إبدالية .

البرهان: لتكن G زمرة مكونة من الأربعة عناصر المختلفة x, y, z, e حيث e عنصرها المحايد. ولتكن G غير إبدالية. عندئذ فإنه يوجد من عناصرها عنصران x, y ، بدون فقد للعمومية ، بحيث يكون $e = xy \neq yx = z$ ،

(الإمكانية $x = yx$ مستبعدة وإلا : $e = yx = xy = y(xy) = yx$ وكذلك الإمكانيات $y = yx$ مستبعدة وإلا : $e = yx = xy = y(xy) = yx$)
كلها مستبعدة) .

$$xy = e \Rightarrow x = y^{-1} \Rightarrow z = yx = yy^{-1} = e$$

والآن :
تتناقض مع $z \neq e$.

طريقة أخرى: إذا كانت G دائرية فإنها تكون إبدالية حسب (١-٧-١١) (١). لتكن G غير دائرية . فمن نظرية لاجرانج رتبة أى عنصر فى زمرة يكون قاسماً لرتبة الزمرة . وبالتالي فإن العناصر x, y, z لها فقط الرتبة ٢. (الرتبة ٤ مستبعدة لأى منها وإلا أصبحت الزمرة دائرية. الرتبة ١ تعنى أن العنصر هو e) ، أى أن $x^2 = y^2 = z^2 = e$.
من مثال ١ ينتج المطلوب مباشرة .

طريقة ثالثة: إما أن الزمرة تحتوى على زمر جزئية غير تافهة وإما أنها تحتوى من الزمر الجزئية على التافهة فقط. فى الحالة الأخيرة وفقاً للبرهان فى (١-١١-١٣) تكون الزمرة دائرية ومن ثم تكون إبدالية .

في الحالة الأولى : تكون الزمر الجزئية لها رتبة تقسم رتبة الزمرة ٤ . أى لها الرتبة ٢ .
لدينا الآن الإمكانيات الآتية :

$$(أ) \text{ توجد ثلاث زمر جزئية ، أى أن : } x^2 = y^2 = z^2 = e$$

وكما سبق تكون الزمرة إبدالية .

(ب) توجد زمريتان جزئيتان ، وبدون فقد للعمومية يكون : $x^2 = y^2 = e$ ، $z^2 \neq e$.
وبالتالى لا يكون هناك معكوس لـ z : تناقض مع كون G زمرة .

(جـ) توجد زمرة جزئية واحدة ، وبدون فقد للعمومية يكون : $x^2 = e$ ، $y^2 \neq e \neq z^2$.
يكون لدينا بالضرورة "الضرب" الآتى :

$$yz = e = zy$$

$$xy = z = yx$$

$$xz = y = zx$$

أى أن الزمرة إبدالية .

مثال ٣ : لتكن $(G, \cdot_G)$ زمرة (ربطها هو $\cdot_G$) ، ولتكن $H \subset G$ (مجموعة جزئية) .
وليكن $\iota := (H, G, \{(a, a) | a \in H\})$ هو راسم التضمين (The inclusion mapping) .
إذا وجد ربط $\cdot_H$ على H بحيث يكون $(H, \cdot_H)$ زمرة ، ι هو مورفيزم تسمى عندئذ H **زمرة جزئية من G** . ونكتب $H \xrightarrow{\iota} G$. (سنبرهن فى مثال ٤ على أن هذا التعريف متسق مع التعريف المعروف الموجود فى (١-٤-١)) .

برهن على أن الربط $\cdot_H$ وحيد وأن $\forall a, b \in H : a \cdot_H b = a \cdot_G b$.
البرهان :

$$\forall a, b \in H : a \cdot_H b = \iota(a \cdot_H b) = \iota(a) \cdot_G \iota(b) = a \cdot_G b$$

ι هو مورفيزم

مثال ٤ : لتكن $\emptyset \neq U \subset G$ مجموعة جزئية غير خالية . التقريرات الآتية متكافئة :

$$(1) \quad U \xrightarrow{\iota} G \text{ (زمرة جزئية من } G \text{) بالمفهوم فى مثال ٣ السابق .}$$

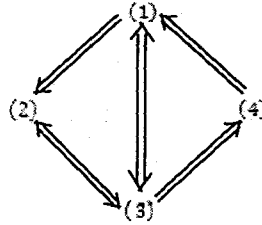
$$(2) \quad \text{لكل } x, y \in U : xy^{-1} \in U \text{ (زمرة جزئية بالمفهوم (١-٤-١) من التمهيدية)}$$

$$((1-٤-٢))$$

(3) لكل $x \in U$: $x^{-1} \in U$ ، ولكل $x, y \in U$: $xy \in U$
 وإذا كانت U منتهية (finite) يكون أى تقرير من التقارير السابقة مكافئاً لـ :

(4) لكل $x, y \in U$: $xy \in U$

البرهان : سنجرى البرهان بإظهار الاقتضاءات (الاستلزامات) الآتية :



"(1) $\Rightarrow$ (2)" ، "(1) $\Rightarrow$ (3)" : واضحان من مثال ٣ .

"(3) $\Rightarrow$ (2)" ، "(3) $\Rightarrow$ (4)" : تافهان ! (trivial) .

"(4) $\Rightarrow$ (1)" : الراسم
 $\varphi: U \rightarrow U$
 $\forall x \in U$ $y \mapsto xy$

راسم واحد لواحد ، ولأن U منتهية إذن هو تناظر أحادى . وبالمثل فإن

$\psi: U \rightarrow U$
 $\forall y \in U$ $x \mapsto xy$

هو تناظر أحادى كذلك . ولأن الربط : $U \times U \ni (x, y) \mapsto xy \in U$ إدماجى

(تشاركى ، تجميعى) فينتج مباشرة من (١-٢-٦) أن U زمرة .

والآن $l(xy) = xy = l(x)l(y)$

(تذكر أن $\cdot_U = \cdot_G$)

فينتج أن $U \hookrightarrow G$ (بالمفهوم فى مثال ٣) .

"(3) $\Rightarrow$ (1)" : لأن $U \neq \emptyset$ فإنه يوجد $x \in U$ ومن (3) يوجد $x^{-1} \in U$ ومن

(3) كذلك $xx^{-1} = e \in U$. الربط : $U \times U \ni (x, y) \mapsto xy \in U$ تشاركى (إدماجى)

فينتج أن U زمرة . كذلك كما سبق $l(xy) = xy = l(x)l(y)$.

ينتج أن $U \hookrightarrow G$ (بالمفهوم فى مثال ٣) .

"(2) $\Rightarrow$ (3)" : $x \in U \Rightarrow x, x \in U \Rightarrow e = xx^{-1} \in U$
 (2)

$$e, x \in U \Rightarrow ex^{-1} = x^{-1} \in U \quad (*)$$

$$x, y \in U \Rightarrow x, y^{-1} \in U \Rightarrow x(y^{-1})^{-1} = xy \in U.$$

مثال ٥ : برهن على أن الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دائرية .

البرهان : لتكن $(\mathbb{Q}, +)$ دائرية. إذن يوجد مولد $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $n \neq 0$ ،

بحيث إنه لأي $q \in \mathbb{Q}$ يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث إن $q = k \cdot \frac{m}{n}$. والآن :

$$\mathbb{Q} \ni \frac{1}{2n} = l \cdot \frac{m}{n}, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 = 2ml, m, l \in \mathbb{Z} \quad \text{تناقض}$$

إذن $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دائرية .

مثال ٦ : لتكن $H \subset G$ زمرة جزئية طبيعية (من G) ، $K \subset G$ زمرة جزئية بحيث إن :

$$H \subset K \subset G$$

برهن على أن $H \subset K$ زمرة جزئية طبيعية .

البرهان : واضح أن H زمرة جزئية من K . والآن :

$$\forall k \in K \quad \forall h \in H : khk^{-1} \in H$$

(لأن $k \in K \Rightarrow k \in G$ ، H زمرة جزئية طبيعية في G) .

H زمرة جزئية طبيعية في $K \Rightarrow$.

مثال ٧ : لتكن G زمرة ، $H \subset G$ زمرة جزئية طبيعية ، $L \subset G$ زمرة جزئية .

برهن على أن : $H \cap L \subset L$ زمرة جزئية طبيعية (من L) .

البرهان : نلاحظ أولاً أن $H \cap L \subset L$ زمرة جزئية (من L) لأن :

$$e \in L, e \in H \Rightarrow H \cap L \neq \emptyset \quad (e \text{ هو العنصر المحايد في } G)$$

$$\forall a, b \in H \cap L : ab^{-1} \in H, ab^{-1} \in L \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap L$$

أي أن $H \cap L$ زمرة جزئية من L .

والآن :

$$\forall x \in H \cap L \quad \forall l \in L : lx l^{-1} \in L, lx l^{-1} \in H$$

(لأن $H \subset G$ ، $l \in L \Rightarrow l \in G$ زمرة جزئية طبيعية) .

$$\Rightarrow \forall \ell \in L \quad \forall x \in H \cap L : \ell x \ell^{-1} \in H \cap L$$

أى أن $H \cap L$ زمرة جزئية طبيعية فى L .

مثال ٨ : اختبر إذا ما كان هناك أيزومورفيزم بين الزمر الآتية :

$$(1) (\gamma_4, 0) \text{ (الزمرة المتماثلة على أربعة عناصر) , } (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$$

$$(2) (\mathbb{Z}, +) , (5\mathbb{Z}, +)$$

$$(3) (\mathbb{Q}, +) , (\mathbb{Z}, +)$$

$$(4) (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) , (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$$

(٥) زمرتان منتهيتان لهما نفس الرتبة إحداهما دائرية والأخرى ليست دائرية .

الحل : (١) لا يوجد أيزومورفيزم لأن رتبة $(\gamma_4, 0)$ هى : $24=4!$ بينما رتبة $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$:

ولا يمكن أن يوجد تناظر أحادى بين مجموعتين منتهيتين تختلفان فى الرتبة .

لاحظ كذلك أن $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ إبدالية بينما $(\gamma_4, 0)$ ليست إبدالية (انظر مثال ٣ بند (١-٢-٥))

ولا يمكن أن يوجد أيزومورفيزم بين زمرتين إحداهما إبدالية والأخرى ليست إبدالية (انظر مثال ٩ بند (١-٣-٨)) .

(٢) يوجد أيزومورفيزم بين $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(5\mathbb{Z}, +)$

يعطى كالآتى :

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow 5\mathbb{Z}$$

$$z \mapsto 5z$$

φ تناظر أحادى لأنه يوجد الراسم العكسى

$$\psi: 5\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$5z \mapsto z$$

$$\varphi \circ \psi: 5\mathbb{Z} \rightarrow 5\mathbb{Z} , \quad \psi \circ \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

حيث

$$5z \mapsto 5z , \quad z \mapsto z$$

أى أن $\varphi \circ \psi = 1_{5\mathbb{Z}}$ ، $\psi \circ \varphi = 1_{\mathbb{Z}}$

كذلك φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : \varphi(z_1 + z_2) = 5(z_1 + z_2) = 5z_1 + 5z_2 = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

إذن φ أيزومورفيزم .

(٣) لا يوجد أيزومورفيزم بين $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ لأن $(\mathbb{Z}, +)$ دائرية لها مولد "1" ، بينما $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دائرية (مثال ٥) ، ونثبت في الجزء (٥) من هذا المثال أنه لا يمكن أن يوجد أيزومورفيزم بين أي زميرتين إحداهما دائرية والأخرى ليست دائرية .

لاحظ كذلك أنه في مثال ١٠ بند (١-٣-٨) برهنا على أنه لا يمكن أن يوجد إيزومورفيزم من $(\mathbb{Q}, +)$ على $(\mathbb{Z}, +)$ وبالتالي فلا يمكن أن يوجد أيزومورفيزم بينهما .

(٤) لا يوجد أيزومورفيزم بين $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ، $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

كل عنصر في $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ يولد زمرة جزئية دائرية غير منتهية فيما عدا 1 ، -1 .
يولد الزمرة الجزئية $\{1\}$ لها الرتبة 1 ، بينما -1 يولد الزمرة $\{1, -1\}$ لها الرتبة 2 . أما في $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ فإن العنصر i يولد الزمرة الجزئية الدائرية $\{i, 1, -i, -1\}$ لها الرتبة 4 .

(٥) لا يوجد أيزومورفيزم . البرهان بالتناقض .

لتكن G زمرة دائرية لها المولد a ، G' زمرة غير دائرية وليكن

$$\varphi: G \rightarrow G'$$

$$a \mapsto a'$$

أيزومورفيزم .

ليكن $x' \in G'$. لأن φ تناظر أحادي فإنه يوجد واحد بالضبط $x \in G$ بحيث إن $x' = \varphi(x)$.

$$x \in G \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = a^m$$

G دائرية

$$x' = \varphi(a^m) = \varphi(a)^m = (a')^m$$

φ هو مومورفيزم

أي أن $a' := \varphi(a)$ مولد لـ G' وتكون G' دائرية : تناقض .

مثال ٩ : في γ_3 (الزمرة المتمثلة على ثلاثة عناصر) اوجد :

(١) جميع الزمر الجزئية .

(٢) كل المجموعات المشاركة اليسرى بالنسبة إلى $\{e, (23)\}$ حيث e هو العنصر

المحايد في γ_3 .

(٣) كل الزمر الجزئية الطبيعية غير التافهة .

(٤) كل زمرة القسمات الناشئة من (٣)

(٥) المطبيع (The normalizer) لـ $\{e, (12)\}$

الحل : جدول الضرب في γ_3 موضح كالاتي

	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	σ_2	e	σ_5	σ_3	σ_4
σ_2	σ_2	e	σ_1	σ_4	σ_5	σ_3
σ_3	σ_3	σ_4	σ_5	e	σ_1	σ_2
σ_4	σ_4	σ_5	σ_3	σ_2	e	σ_1
σ_5	σ_5	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	e

حيث e هو العنصر المحايد ، $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$ ، $\sigma_2 = (1\ 3\ 2)$ ، $\sigma_3 = (2\ 3)$ ، $\sigma_4 = (1\ 3)$ ، $\sigma_5 = (1\ 2)$.

(1 2 3) تعني $1 \rightarrow 2$ ، $2 \rightarrow 3$ ، $3 \rightarrow 1$

طريقة حساب الجدول : على سبيل المثال لإيجاد $\sigma_3 \sigma_2$ نأخذ σ_2 من العمود الثالث

و σ_3 من الصف الرابع ونجرى حاصل الضرب بهذا الترتيب فنحصل على σ_5 . ولاحظ

أننا هنا استخدمنا التعريف الذى فضلناه كما أشرنا فى نهاية مثال ٣ من بند (١-٢-٥) .

(١) من نظرية لاجرانج رتبة الزمرة الجزئية من زمرة تقسم رتبة الزمرة . ولأن رتبة

(γ_3) هي $6 = 3!$ فإن الزمرة الجزئية فى γ_3 لها الرتب :

1 وتكون الزمرة الجزئية هي $\{e\}$

2 وتكون هناك ثلاث زمرة جزئية هي $\{e, (1\ 2)\}$ ، $\{e, (1\ 3)\}$ ، $\{e, (2\ 3)\}$

3 وتكون الزمرة الجزئية الوحيدة هي $\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

6 وتكون هي γ_3

$$e\{e, (2\ 3)\} = \{e, (2\ 3)\} \quad (٢)$$

$$(1\ 2)\{e, (2\ 3)\} = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$$

$$(1\ 3)\{e, (2\ 3)\} = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$(2\ 3)\{e, (2\ 3)\} = \{e, (2\ 3)\}$$

$$(1\ 2\ 3)\{e, (2\ 3)\} = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$$

$$(1\ 3\ 2)\{e, (2\ 3)\} = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$\forall a \in G: aNa^{-1} = N \quad (G = \gamma_3) \quad : \text{اختبر (٣)}$$

الزمرة الجزئية الطبيعية الوحيدة غير التافهة هي $\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} (= N)$

(بالإضافة إلى الزمرتين الجزئيتين التافهتين $\{e, \gamma_3\}$)

(٤) توجد زمرة جزئية طبيعية وحيدة (غير تافهة) N هي $N = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

وتكون لدينا زمرة القسمة γ_3/N التي عناصرها هي :

$$eN, (1\ 2\ 3)N, (1\ 3\ 2)N, (1\ 2)N, (1\ 3)N, (2\ 3)N$$

$$eN = (1\ 2\ 3)N = (1\ 3\ 2)N = N \quad \text{ولكن}$$

$$e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \in N \quad \text{لأن}$$

$$(1\ 2)N = (1\ 3)N = (2\ 3)N = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} \quad \text{أما}$$

وبالتالي تتكون γ_3/N من عنصرين فقط هما: $N, \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ ولاحظ أن هذا

يتفق مع نظرية لاجرانج حيث إن عدد عناصر γ_3 هو 6 ، عدد عناصر N هو 3 وبالتالي

يكون عدد عناصر γ_3/N هو 2 . ولاحظ أن $N \cap \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} = \emptyset$

كما نعلم ذلك من برهان نظرية لاجرانج .

(٥) لإيجاد مطبع $\{e, (1\ 2)\}$ نبحث عن $a \in \gamma_3$ بحيث يكون

$$a\{e, (1\ 2)\} = \{e, (1\ 2)\}a$$

$$a = e, a = (1\ 2) \quad \text{والحلول هي}$$

$$Nor(\{e, (1\ 2)\}) = \{e, (1\ 2)\} \quad \text{أى أن}$$

مثال ١٠ : لتكن θ هومومورفيزماً من $(\mathbb{Z}, +)$ إلى $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ معرفاً كالاتي :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ عدد زوجي} \\ -1, & x \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

أوجد نواة (θ) $(Ker(\theta))$ وحقق نظرية الهومومورفيزم

الحل : $Ker(\theta) = \{x \in \mathbb{Z} : \theta(x) = 1\}$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ عدد زوجي}\} = 2\mathbb{Z}$$

ويكون $\mathbb{Z}/Ker(\theta) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، بينما $\theta(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$

وواضح أن $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \cong (\{1, -1\}, \cdot)$

حيث -1 هو مولد $(\{1, -1\}, \cdot)$ بينما $\bar{1} = 1 + 2\mathbb{Z}$ هو مولد $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. وهو ما يحقق نظرية الهومومورفيزم .

توضيح : $(-1) \cdot (-1) = 1$ ، بينما

$$\bar{1} + \bar{1} = 1 + 2\mathbb{Z} + 1 + 2\mathbb{Z}$$

$$= 2 + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} = \bar{0}$$

$$\bar{0} \leftrightarrow 1$$

$$\bar{1} \leftrightarrow -1$$

والأيزومورفيزم يتم هكذا :

مثال ١١ : حقق أن θ في المثال السابق مباشرة هومومورفيزم .

الحل :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : \theta(2z_1 + 2z_2) = \theta(2(z_1 + z_2)) = 1$$

$$= 1 \cdot 1 = \theta(2z_1) \cdot \theta(2z_2)$$

$$\theta(2z_1 + (2z_2 + 1)) = \theta(2(z_1 + z_2) + 1) = -1$$

$$= 1 \cdot (-1) = \theta(2z_1) \cdot \theta(2z_2 + 1)$$

$$\theta(2z_1 + 1 + 2z_2 + 1) = \theta(2(z_1 + z_2) + 1) = 1$$

$$= (-1) \cdot (-1) = \theta(2z_1 + 1) \cdot \theta(2z_2 + 1)$$

مثال ١٢ : ليكن

$$\theta : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$$

$$x \mapsto |x|$$

حقق أن θ هومومورفيزم وحقق نظرية الهومومورفيزم .

الحل : $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : \theta(xy) = |xy| = |x| |y| = \theta(x) \cdot \theta(y)$

أى أن θ هومومورفيزم

$$Ker(\theta) = \{x : x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \theta(x) = 1\}$$

$$= \{1, -1\}$$

$$\theta(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) = \{x : x \in \mathbb{Q}, x > 0\} = \mathbb{Q}^*$$

سنبرهن على أن $(\mathbb{Q}/\{0\})/\{1,-1\} \cong (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ مباشرة ، دون الاستعانة بنظرية الهومومورفيزم :

$$\varphi: (\mathbb{Q}/\{0\})/\{1,-1\} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \quad \text{سنعرف :}$$

$$q\{1,-1\} \mapsto |q|$$

واضح أن φ معرف جيداً (well-defined) .

φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}/\{0\} : \varphi((q_1\{1,-1\}) \cdot (q_2\{1,-1\})) = \varphi(q_1 q_2 \{1,-1\})$$

$$= |q_1 q_2| = |q_1| |q_2| = \varphi(q_1\{1,-1\}) \cdot \varphi(q_2\{1,-1\})$$

φ غامر (شامل) : واضح

φ واحد لواحد .

$$|q_1| = \varphi(q_1\{1,-1\}) = \varphi(q_2\{1,-1\}) = |q_2| \Rightarrow q_1 = \pm q_2$$

$$\Rightarrow q_1\{1,-1\} = q_2\{1,-1\}$$

أى أن φ أيزومورفيزم . وهذا يتسق مع نظرية الهومومورفيزم للزمر .

مثال ١٣ : لتكن G "زمرة" الرواسم من $\mathbb{R}$ على $\mathbb{R}$ (onto) التى على الشكل :

$$\alpha_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b, \quad a \neq 0, a, b, x \in \mathbb{R}$$

$$\theta : G \rightarrow G$$

برهن على ان الراسم : $\alpha_{a,b} \mapsto \alpha_{a,0}$ هومومورفيزم من G إلى G . اوجد نواة

(θ) وصورتها ، اعرض نظرية الهومومورفيزم للزمر .

الحل: سنتحقق أولاً من أن هذه المجموعة من الرواسم G تكون زمرة. ليكن لدينا الرواسم.

$$e \neq 0, c \neq 0, a \neq 0, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ لجميع } \alpha_{e,f}, \alpha_{c,d}, \alpha_{a,b}$$

$$\alpha_{c,d} \circ \alpha_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(1)

$$x \mapsto c(ax + b) + d = acx + bc + d$$

وبالتالى فإن :

$$\alpha_{e,f} \circ (\alpha_{c,d} \circ \alpha_{a,b}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto eacx + ebc + ed + f$$

من (1) ينتج أن

$$\alpha_{cd} \circ \alpha_{a,b} = \alpha_{ac,bc+d} \quad (2)$$

أى أن

$$\alpha_{ef} \circ \alpha_{c,d} = \alpha_{ce,de+f}$$

وبالتالى فإن :

$$(\alpha_{ef} \circ \alpha_{c,d}) \circ \alpha_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b \mapsto acex + bce + de + f$$

أى أن

$$\alpha_{ef} \circ (\alpha_{c,d} \circ \alpha_{a,b}) = (\alpha_{ef} \circ \alpha_{c,d}) \circ \alpha_{a,b}$$

العنصر المحايد فى G هو

$$\alpha_{1,0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

لأنه من (2) :

$$\forall \alpha_{a,b} \in G : \alpha_{1,0} \circ \alpha_{a,b} = \alpha_{1.a,1.b+0} = \alpha_{a,b}$$

معكوس $\alpha_{a,b}$ هو $\alpha_{\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}}$ لأن :

$$\forall \alpha_{a,b} \in G, a \neq 0 : \alpha_{\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}} \circ \alpha_{a,b} = \alpha_{\frac{1}{a} \cdot a, \frac{-b}{a} \cdot b} = \alpha_{1,0}$$

أى أن G بالفعل زمرة .

سنثبت الآن أن θ هومومورفيزم

$$\forall a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \forall b, d \in \mathbb{R} : \theta(\alpha_{a,b} \circ \alpha_{c,d}) = \theta(\alpha_{ac,ad+b})$$

$$= \alpha_{ac,0} = \alpha_{a,0} \circ \alpha_{c,0} = \theta(\alpha_{a,b}) \circ \theta(\alpha_{c,d})$$

ونوجد نواة (θ) :

$$Ker(\theta) = \{\alpha_{a,b} \mid \alpha_{a,b} \in G, \theta(\alpha_{a,b}) = \alpha_{1,0}\}$$

$$= \{\alpha_{a,b} \mid \alpha_{a,b} \in G, \alpha_{a,0} = \alpha_{1,0}\}$$

$$= \{\alpha_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

ونوجد صورة (θ) :

$$Im(\theta) = \{\alpha_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

وتتص نظرية الهومومورفيزم هنا على أن :

$$\theta(G) \cong G / \{\alpha_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha_{a,0} \leftrightarrow \alpha_{a,c} \{\alpha_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}, a \neq 0$$

أى أن

$$\alpha_{a,0} \leftrightarrow \{\alpha_{a,ab+c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

أى أن

$$\alpha_{a,0} \leftrightarrow \{\alpha_{a,r} \mid a, r \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

مثال ١٤: برهن على أن $\theta: (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ حيث $\mathbb{R}_+^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (أكبر من الصفر) المعرف بـ $\theta(x) = \log_{10} x$ هومومورفيزم .
 اوجد نواته ، صورته ، استخدم نظرية الهومومورفيزم لإثبات أن : $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.
الحل:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \theta(x \cdot y) = \log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y = \theta(x) + \theta(y)$$

أى أن θ هومومورفيزم .

$$\text{Ker}(\theta) = \{x \in \mathbb{R}_+^* : \theta(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}_+^* : \log_{10} x = 0\} = \{1\}$$

نبرهن الآن على أن $\theta(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ كالآتى :

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists 10^y \in \mathbb{R}_+^* : \log_{10} 10^y = y$$

$$\theta(10^y) = y$$

أى أن

نطبق الآن نظرية الهومومورفيزم .

$$(\mathbb{R}_+^*, \cdot) / \{1\} = (\mathbb{R}_+^*, \cdot) / \text{Ker}(\theta) \cong \theta(\mathbb{R}_+^*) = (\mathbb{R}, +) \quad (1)$$

والآن $\psi: (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot) / \{1\}$ أيزومورفيزم لأن : ψ راسم شامل (غامر) : واضح .

$$x \mapsto x\{1\} = \{x\}$$

ψ راسم واحد لواحد لأن :

$$\psi(x) = \psi(y) \Rightarrow \{x\} = \{y\}$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

ψ هو مورفيزم لأن :

$$\psi(x.y) = \{x.y\} = \{x\}.\{y\} = \psi(x).\psi(y)$$

وبالتعويض في (1) ينتج أن :

$$(\mathbb{R}_+^*, .) \cong (\mathbb{R}, +)$$

(انظر مثال ٢ في بند (١-٣-٨))

مثال ١٥ : إذا كان $\varphi: G \rightarrow K$ هو مورفيزم زمرة ، $|G| < \infty$ أى أن G منتهية

فبرهن على أن $|\varphi(G)|$ (أى عدد عناصر $\varphi(G)$) يقسم $|G|$.

البرهان : من نظرية الهومومورفيزم : $G/Ker(\varphi) \cong \varphi(G)$ وبالتالي فإن :

$$|G/Ker(\varphi)| = |\varphi(G)| \quad (1)$$

$$|G| = |Ker(\varphi)| \cdot |G/Ker(\varphi)|$$

$$= |Ker(\varphi)| \cdot |G/Ker(\varphi)| \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ١٦ : برهن على أن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Q}$ أى أن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ غير متشاكلتين .

البرهان : واضح أن العمليتين هما الجمع . لاحظ كذلك أن $\mathbb{Z}$ زمرة جزئية طبيعية في

$\mathbb{Q}$ لأنه لأى $q \in \mathbb{Q}$ ، ولأى $z \in \mathbb{Z}$:

$$-q + z + q = z \in \mathbb{Z}$$

لاحظ كذلك أن أى عنصر فى $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ له رتبة منتهية لأن لكل $x \in \mathbb{Q}$:

$$x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1 \quad (\pm 1 \text{ أى ليس لهما قواسم مشتركة سوى } \pm 1)$$

$$x + \mathbb{Z} = \frac{p}{q} + \mathbb{Z} \quad \text{بحيث إن :}$$

والآن رتبة $x + \mathbb{Z}$ هى q لأن :

$$\underbrace{\left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) + \dots + \left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right)}_{q \text{ من المرات}} = p + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ (العنصر المحايد فى)}$$

q من المرات

بينما لا يوجد أى عنصر فى $\mathbb{Q}$ له رتبة منتهية سوى الصفر .

طريقة اخرى : ليكن $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ، وليكن $\varphi: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ هو الأيزومورفيزم الموجود .

عندئذ فإنه يوجد $s + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ بحيث إن

$$\varphi(s + \mathbb{Z}) = r, \quad s \notin \mathbb{Z}$$

(لاحظ أنه إذا كان $s \in \mathbb{Z}$ فمعنى هذا أن $s + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ وهو العنصر المحايد فى $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)

صورته هي $r \neq 0$ ، فلا يكون φ أيزومورفيزم

$s \in \mathbb{Z}$ ، كما سبق له رتبة منتهية ولتكن $t > 0$ أى أن :

$$t(s + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

والآن لأن φ أيزومورفيزم فإن : ($\mathbb{Z}$ هو العنصر المحايد فى $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) $0 = \varphi(\mathbb{Z})$

$$= \varphi(t(s + \mathbb{Z})) = t\varphi(s + \mathbb{Z}) = tr \neq 0$$

φ هو مومورفيزم

وهذا تناقض .

مثال ١٧ : لتكن $(G, +)$ زمرة . برهن على أن :

$$\forall a \in G \quad \forall n \in \mathbb{N} : -(na) = n(-a)$$

البرهان : باستخدام الاستقراء الرياضى :

$$\text{عند } n = 0 : 0 = 0$$

$$\text{عند } n = 1 :$$

الطرف الأيمن $(R.H.S.) = -a = (L.H.S.)$ الطرف الأيسر

نفترض صحة الادعاء لكل $n \leq m$ (*)

نبرهن الآن على صحة الادعاء عند $n = m + 1$:

$$L.H.S. = -[(m+1)a] = -[\underbrace{a + \dots + a}_{m \text{ times}}] = -(a + ma)$$

$m+1$ من المرات

(لم نضع أقواساً لأن G زمرة أى يتحقق لها قانون المشاركة (أو الدمج))

$$\stackrel{1}{=} -ma - a \stackrel{(*)}{=} m(-a) - a = (m+1)(-a)$$

يتبقى أن نثبت (!) : لدينا :

$$-(a+ma) + (a+ma) = 0 \quad (1)$$

أيضاً لدينا :

$$-ma - a + a + ma = -ma + 0 + ma = 0 \quad (2)$$

من (1) $-(a+ma)$ معكوس $a+ma$ ، ومن (2) $-ma-a$ معكوس $a+ma$ ، ولكن المعكوس وحيد ، فينتج المطلوب مباشرة .

ملحوظة : في الواقع ليست هناك ضرورة لإثبات (!) لأن $a, ma \in G$ وفي أية زمرة $(G, \cdot)$: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

مثال ١٨ : اضرب مثلاً لزمرة قسمة G/N بحيث يكون $aN = bN$ حيث $a, b \in G$ ولكن رتبة $(a) \neq$ رتبة (b) .

الحل : في الزمرة $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ لدينا : $1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$ لكن رتبة (0) هي الواحد بينما رتبة $(1) = \infty$.

مثال ١٩ : لنكن $G := \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ، ولنكن $H := [\bar{6}] = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$. اسرد عناصر G/H ، واوجد رتبة $(\bar{5} + [\bar{6}])$ في $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}/[\bar{6}]$.

الحل : عناصر $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}/[\bar{6}]$ هي : $\bar{5} + [\bar{6}], \bar{4} + [\bar{6}], \bar{3} + [\bar{6}], \bar{2} + [\bar{6}], \bar{1} + [\bar{6}], [\bar{6}]$: $Ord(\bar{5} + [\bar{6}]) \leq 6$ أي أن $\underbrace{(\bar{5} + [\bar{6}]) + \dots + (\bar{5} + [\bar{6}])}_{6 \text{ مرات}} = \bar{30} + [\bar{6}] = [\bar{6}]$

6 مرات

لكن $\underbrace{(\bar{5} + [\bar{6}]) + \dots + (\bar{5} + [\bar{6}])}_{x \text{ مرات}} \neq [\bar{6}]$ لأي $x < 6$ وبالتالي فإن $Ord(\bar{5} + [\bar{6}]) = 6$

x مرات

انظر مثال (١-٧-٤) .

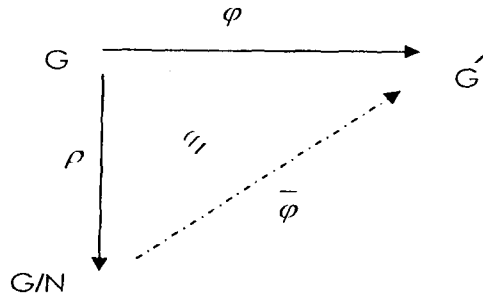
مثال ٢٠ : لنكن H زمرة جزئية من الزمرة G بحيث إنه توجد بالضبط مجموعتان مشاركتان يسرايان مختلفتان من G بالنسبة إلى H . برهن على أن H زمرة جزئية طبيعية في G .

البرهان : لتكن $x \in G$. إذا كانت $x \in H$ فإن $xH = Hx$ (لأن كلتا المجموعتين المشاركتين H) . إذا كانت $x \notin H$ فإن xH هي مجموعة جميع العناصر التي تقع في G لكنها لا تقع في H لأن :

$$z \in xH, x \notin H \Rightarrow z = xh, x \notin H, h \in H \Rightarrow x = zh^{-1}, h \in H$$

إذا كان $z \in H$ فإن $x \in H$ وهذا تناقض . إذن جميع عناصر xH لا تقع في H . ومن حيث إنه لا توجد سوى مجموعتين مشاركتين يسرايين من G بالنسبة إلى H إحداهما H ومن حيث إن $xH \cap H$ هو المجموعة الخالية (نظرية المجموعات) ، فإن xH هي مجموعة **جميع** العناصر التي تنتمي إلى G ولا تنتمي إلى H . وبالمثل تكون Hx مجموعة **جميع** العناصر التي تقع في G ولا تقع في H وبالتالى يكون $xH = Hx$. إذن في كلتا الحالتين $x \in H$ ، $x \notin H$ فإن $xH = Hx$ لجميع $x \in G$ وتكون H مجموعة جزئية طبيعية من G .

مثال ٢١ : لتكن $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر . N زمرة جزئية طبيعية من G ، $\rho: G \rightarrow G/N$ الإبيمورفيزم الطبيعى . اوجد الشرط الضروري حتى يوجد هومومورفيزم زمر $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow G'$ بحيث يكون الشكل الآتى إبدالياً



أى حتى يكون $\varphi = \bar{\varphi} \rho$.

الحل : من $\varphi = \bar{\varphi} \rho$ ينتج أن :

$$\forall n \in N : \varphi(n) = (\bar{\varphi} \rho)(n) = \bar{\varphi}(\rho(n)) = \bar{\varphi}(N) = e' \quad (\text{العنصر المحايد في } G')$$

(لأن $\bar{\varphi}$ هومومورفيزم ، N هو العنصر المحايد في G/N ، $(1) \dots (1)$.

$$\Rightarrow N \subset \text{Ker}(\varphi)$$

مثال ٢٢ : ليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر N زمرة جزئية طبيعية في G ،
 $\rho: G \rightarrow G/N$ ، $N \subset \text{Ker}(\varphi)$ الإبيمورفيزم الطبيعي . عندئذ فإنه يوجد بالضبط

هومومورفيزم وحيد

$$\bar{\varphi}: G/N \rightarrow G' , \varphi = \bar{\varphi} \rho$$

وإذا كان φ إبيمورفيزماً فإن $\bar{\varphi}$ إبيمورفيزم كذلك ، $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \text{Ker}(\varphi)/N$.

ملحوظة : هذا المثال يظهر أن الشرط الضروري الذي حصلنا عليه في المثال ٢١ هو شرط كاف كذلك.

البرهان : (١) يوجد على الأكثر هومومورفيزم واحد $\bar{\varphi}$ يحقق الشرط المعطى لأن :

$$\bar{\varphi} \rho = \varphi \Rightarrow \forall a \in G : \bar{\varphi}(aN) = \bar{\varphi}(\rho(a)) = (\bar{\varphi} \rho)(a) = \varphi(a)$$

(٢) نبرهن على أنه يوجد بالفعل مثل هذا الهومومورفيزم

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: G/N &\rightarrow G' \\ \forall a \in G \\ aN &\mapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

لأن :

$$\forall a, b \in G : aN = bN \Rightarrow b^{-1}a \in N \xRightarrow{N \subset \text{Ker}(\varphi)} e' = \varphi(b^{-1}a) = \varphi(b^{-1})\varphi(a) = \varphi(b)^{-1}\varphi(a)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \bar{\varphi}(aN) = \bar{\varphi}(bN) \quad (e' \text{ هو العنصر المحايد في } G')$$

أى أن الراسم $\bar{\varphi}$ معرف جيداً .

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: G/N &\rightarrow G' \\ aN &\mapsto \varphi(a) \end{aligned} \quad \text{(٣) الراسم لجميع } a \in G \text{ هومومورفيزم لأن :}$$

$$\forall a, b \in G : \bar{\varphi}((aN)(bN)) = \bar{\varphi}(abN) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \bar{\varphi}(aN)\bar{\varphi}(bN).$$

(٤) ليكن φ راسماً غامراً (شاملاً) . إذن لكل $a' \in G'$ يوجد $a \in G$ بحيث يكون
 $a' = \varphi(a) = \bar{\varphi}(\rho(a))$. إذن $\bar{\varphi}$ راسم شامل (غامر) .

$$\forall a \in G : aN \in \text{Ker}(\bar{\varphi}) \Leftrightarrow \bar{\varphi}(aN) = e' = \varphi(a) \Leftrightarrow a \in \text{Ker}(\varphi) \quad (٥)$$

$$\Leftrightarrow aN \in \text{Ker}(\varphi)/N$$

$$\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \text{Ker}(\varphi)/N \quad \text{أى أن}$$

توضيح (*): $aN \in Ker(\varphi)/N \Leftrightarrow a \in Ker(\varphi)$: مباشر . والآن :

$$aN \in Ker(\varphi)/N \Rightarrow \exists b \in Ker(\varphi) : aN = bN \Rightarrow b^{-1}a \in N \subset Ker(\varphi) \\ \Rightarrow a \in Ker(\varphi) \\ \forall a \in Ker(\varphi)$$

مثال ٢٣ : باستخدام مثال ٢٢ برهن على أنه إذا كان $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم زمر فإن

$$\bar{\varphi}: G/Ker(\varphi) \rightarrow G' \\ \forall a \in G \\ aKer(\varphi) \mapsto \varphi(a)$$

مونومورفيزم . كذلك فإن $G/Ker(\varphi) \cong \varphi(G)$.

البرهان : بوضع $N = Ker(\varphi)$ في مثال ٢٢ ينتج أنه يوجد هومومورفيزم وحيد $\bar{\varphi}$ يحقق الخاصية المعطاة . كذلك من المثال ٢٢ ينتج أن :

$$Ker(\bar{\varphi}) = Ker(\varphi)/Ker(\varphi) = \{aKer(\varphi) \mid a \in Ker(\varphi)\} = \{Ker(\varphi)\}$$

أى أن $Ker(\bar{\varphi})$ يحتوى على عنصر واحد هو $Ker(\varphi)$ وهو العنصر المحايد فى الزمرة $G/Ker(\varphi)$ وبالتالي فإن $\bar{\varphi}$ يكون راسماً واحداً لواحد (١-٣-٥ أ) . ومن ثم

فهو مونومورفيزم . وبالتالي فإن $G/Ker(\varphi) \cong \varphi(G)$ وهذه هى نظرية الهومومورفيزم مرة أخرى .

مثال ٢٤ : استخدم مثال ٢٢ للبرهنة على أنه إذا كانت M, N زمريتين جزئيتين طبيعيتين من G ، $M \subset N$ فإن :

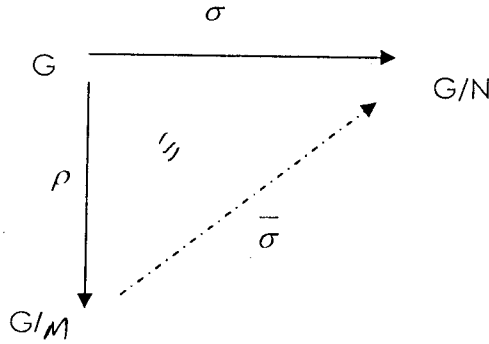
$$(١) \quad N/M \text{ زمرة جزئية طبيعية من } G/M$$

$$(٢) \quad \varphi: (G/M)/(N/M) \rightarrow G/N \\ \forall a \in G$$

$$(aM)(N/M) \mapsto aN$$

أيزومورفيزم .

البرهان : ليكن $\rho: G \rightarrow G/M$ ، $\sigma: G \rightarrow G/N$ الإبيمورفيزمين الطبيعيين .



لأن σ فوقى (شامل)، $M \subset N = \text{Ker}(\sigma)$ فمن مثال ٢٢ يوجد بالضبط إيمورفيزم وحيد

١-٧-١

$\bar{\sigma}: G/M \rightarrow G/N$ بحيث إن الشكل (*) يكون إبدالياً. ولأن :

$$\text{Ker}(\bar{\sigma}) = \text{Ker}(\sigma)/M = N/M$$

ينتج أن N/M زمرة جزئية طبيعية من G/M .

ومن نظرية الهومومورفيزم ينتج أن :

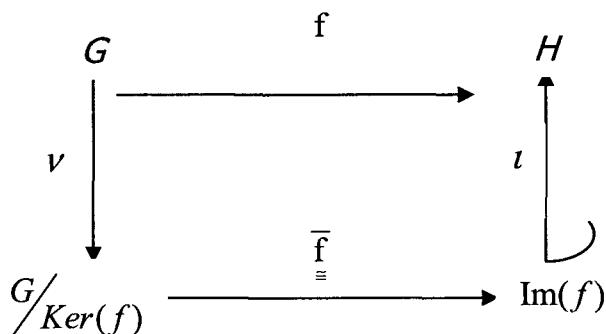
$$G/M / N/M = G/M / \text{Ker}(\bar{\sigma}) \cong \bar{\sigma}(G/M) = G/N$$

شامل $\bar{\sigma}$

$$(aM)/N/M \mapsto aN$$

مثال ٢٥ : باستخدام النواة المشاركة المرتبطة برهن أنه إذا كان $f: G \rightarrow H$

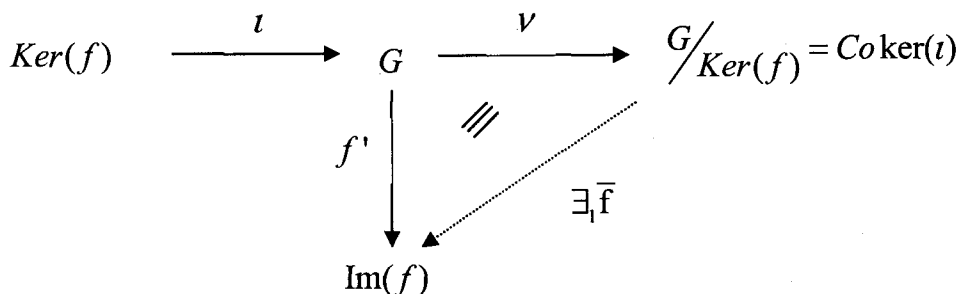
هومومورفيزماً فإن التحليل الآتى يكون موجوداً



حيث $\nu(a) = a\text{Ker}(f)$ لجميع $a \in G$ ، $\iota(x) = x$ لجميع $x \in \text{Im}(f)$ ،

$$\bar{f}(a\text{Ker}(f)) = f(a)$$

البرهان : سنكون الشكل الآتي :



حيث $f'(a) = f(a) \quad \forall a \in G$

واضح أن f' راسم فوقى (شامل) (إيمورفيزم) .

غامر (شامل) $\bar{f}(a\text{Ker}(f)) = f'(a) = f(a) \Rightarrow \bar{f}$

$$\bar{f}(a\text{Ker}(f)) = e \Leftrightarrow f'(a) = e \Leftrightarrow a \in \text{Ker}(f)$$

(e هو العنصر المحايد في H)

$$\Rightarrow \bar{f} \text{ واحد لواحد } ((1 \text{ } 0 \text{ } -3 \text{ } 5) \text{ } (1 \text{ } 0 \text{ } -3 \text{ } 5))$$

أى أن $\bar{f}$ تناظر أحادى ومن ثم $\bar{f}$ أيزومورفيزم

مثال ٢٦ : برهن على أن γ_7 لاتحتوى على زمرة جزئية رتبته 11 .

البرهان : عدد عناصر γ_n هو $n!$ وبالتالي فإن عدد عناصر γ_7 هو : 7.6.5.4.3.2.1
(انظر (١-٢-٥) مثال ٣) . ومن نظرية لاجرانج (١-١٠-٣) عدد عناصر (رتبة) أى زمرة جزئية من زمرة منتهية G يكون قاسماً لعدد عناصر (رتبة) G .
ولكن 11 لا تنقسم 7! وإلا قسمت 1 أو ... أو 7 . وينتج المطلوب مباشرة .
مثال ٢٧ : برهن على أنه إذا كانت G زمرة فإن الزمرة الجزئية من G المتولدة من مربعات عناصر G تكون زمرة جزئية طبيعية من G .

البرهان : لتكن S هى الزمرة الجزئية من G المتولدة من مربعات عناصر G .
ولتكن $x \in S$. عندئذ فإن : $x = s_1 s_2 \dots s_k$ حيث $s_1, s_2, \dots, s_k$ مربعات عناصر أو معكوسات مربعات عناصر ، أى أن أياً منها له الشكل a^2 أو $(a^2)^{-1}$ (انظر (١-١١-٢)) . ولكن $(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$ وبالتالي فإنه يمكن القول بأنها جميعاً مربعات عناصر . والآن ليكن $g \in G$ ، عندئذ فإن :

$$g^{-1} x g = g^{-1} s_1 g g^{-1} s_2 g \dots g^{-1} s_k g = t_1 t_2 \dots t_k, t_i = g^{-1} s_i g.$$

ونثبت أنه لجميع $1 \leq i \leq k$ يكون t_i مربع عنصر من عناصر G كالاتى :
لأن $s_i = a_i^2$ حيث $a_i \in G$ فإن :

$$t_i = g^{-1} s_i g = g^{-1} a_i g g^{-1} a_i g = (g^{-1} a_i g)^2$$

أى أن t_i مربع عنصر من عناصر G وبالتالي فإن $g^{-1} x g \in S$ وتكون S زمرة جزئية طبيعية من G .

مثال ٢٨ : يقال لزمرة جزئية H من زمرة جزئية G إنها **مضبوطة** (أو فعلية) (proper) إذا كانت $G \neq H \neq \{e\}$ حيث e هو عنصر G المحايد .

لتكن G زمرة رتبها العدد الأولي p ، برهن على أن G لا تحتوى على زمر جزئية مضبوطة .

البرهان : من (١-١١-٧) (٢) G زمرة دائرية ومن (١-١١-١٢) فإنه لكل t قاسم لـ p توجد بالضبط زمرة جزئية واحدة من G لها الرتبة t . ولكن p له قاسمان فقط هما 1، p . وبالتالي فإن الزمرتين الوحيدتين الموجودتين فى G هما $\{e\}$ ، G . أى أن G ليس لها زمر جزئية مضبوطة .

طريقة أخرى : انظر (١-١٠-٤)

مثال ٢٩ : لتكن G زمرة إبدالية . ليكن $x, y \in G$ بحيث إن $Ord(x)=r$ ، $Ord(y)=s$.
برهن على أنه إذا كان s, r ليس لهما قواسم مشتركة (عدا ± 1) فإن $Ord(xy)=rs$.

البرهان : لأن G إبدالية فإن :

$$(xy)^n = \underbrace{xy \cdot xy \cdots xy}_n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_n \cdot \underbrace{y \cdot y \cdots y}_n = x^n y^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

n من المرات n من المرات n من المرات

وبالتالي فإن :

$$(xy)^{rs} = x^{rs} \cdot y^{rs} = (x^r)^s \cdot (y^s)^r = e \cdot e = e \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G)$$

وبالتالي فإن $Ord(xy)$ يقسم rs . (1)

والآن ليكن m هو رتبة xy وبالتالي فإن : $(xy)^m = e$ أى أن $x^m y^m = e$ (لأن G إبدالية) .
ينتج أن : $x^m = y^{-m}$. ومن ثم فإن $e = (x^r)^m = y^{-mr}$ ومن ثم فإن s (= رتبة y)
تقسم mr ، ولكن s, r ليس بينهما قواسم مشتركة أى أن s لا تقسم r ، إذن s تقسم m .
وبالمثل يمكن إثبات أن r تقسم m . ومن حيث إن s, r ليس لهما قواسم مشتركة . إذن rs
تقسم m (2) . من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٣٠ : لتكن G الزمرة الدائرية ذات الرتبة ٤ المتولدة من المجموعة $\{a\}$. ولتكن
 $H = [a^2]$ (أى الزمرة الجزئية المتولدة من المجموعة $\{a^2\}$) ، (انظر ١-١١-٢) .
أوجد جميع المجموعات المشاركة اليسرى من G بالنسبة إلى H . حقق أن أى مجموعتين
مشاركتين يسريين إما أن تتطبقا وإما لا يكون بينهما عناصر مشتركة ، حقق كذلك أن
اتحاد هذه المجموعات المشاركة هو G .

الحل : الزمرة G هى : $G = \{e, a, a^2, a^3\}$ (هى أيزومورفية مع الزمرة $\{1, i, i^2, i^3\}$
حيث $i = \sqrt{-1}$ وكذلك الزمرة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) (e هو عنصر G المحايد) والزمرة الجزئية H
هى : $H = \{a^2, e\}$.

المجموعات المشاركة اليسرى هى :

$$eH = e\{a^2, e\} = \{a^2, e\} = H,$$

$$aH = a\{a^2, e\} = \{a^3, a\},$$

$$a^2 H = a^2 \{a^2, e\} = \{a^4, a^2\} = \{e, a^2\} = H,$$

$$a^3 H = a^3 \{a^2, e\} = \{a^5, a^3\} = \{a, a^3\} = aH$$

أى أنه توجد فى الواقع مجموعتان مشاركتان يسريان هما :

$$H = \{e, a^2\},$$

$$aH = \{a, a^3\}$$

واضح أن $H \cup aH = G$ ، $H \cap aH = \phi$

مثال ٣١ : لتكن H هى الزمرة الجزئية التافهة من G ، $H \neq G$. عين جميع

المجموعات المشاركة اليمنى من G بالنسبة إلى H .

الحل : إذا كان $a \in G$ فإن $(e \text{ هو العنصر المحايد فى } G)$ $Ha = \{e\}a$

$$= \{ea\} = \{a\}$$

أى أن المجموعات المشاركة اليمنى تتكون كل منها من عنصر واحد من G .

مثال ٣٢ : اوجد الزمرة الجزئية فى $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ المتولدة من المجموعة $\{2\}$.

الحل : معكوس 2 بالنسبة إلى العملية " . " (عملية الضرب) هو 2^{-1} . وبالتالى فإن

عناصر الزمرة الجزئية المتولدة من $\{2\}$ يكون لها أحد الشكلين 2^n أو 2^{-n} حيث $n \in \mathbb{N}$.

مثال ٣٣ : اوجد الزمرة الجزئية فى $(\mathbb{Q}, +)$ المتولدة من $\{1\}$.

الحل : عناصر هذه الزمرة الجزئية تكون على الشكل $1+1+\dots+1$ أو $-1-1-\dots-1$

n من المرات n من المرات

حيث $n \in \mathbb{N}$ أى هى الزمرة $\mathbb{Z}$.

مثال ٣٤ : برهن على أنه يوجد عدد لانهاى من الزمر ، بحيث إنه لا يوجد أيزومورفيزم

(تشاكل) بين أى اثنتين منها .

الحل : زمر التبديلات $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ لا يوجد أيزومورفيزم بين أى اثنتين منها .

كذلك الزمر الدائرية $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \dots$.

مثال ٣٥ : إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ عنصراً فى γ_4 ، فاوجد σ^3

الحل : لاحظ أن $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ ومن ثم فإن $\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)$

$$= (1\ 2)^2(3\ 4)^2 = ee = e$$

حيث e هو العنصر المحايد في $\gamma_4 (= S_4)$.

ومن ثم فإن : $\sigma^3 = \sigma\sigma^2 = \sigma e = \sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.

مثال ٣٦ : إذا كانت G زمرة دائرية ذات الرتبة n ، وكان p قاسماً لـ n . فبرهن على أنه يوجد إيمورفيزم من G على زمرة دائرية ذات الرتبة p . ما نواة هذا الإيمورفيزم ؟
الحل : نعلم من (١-١١-٨) أن أي زمرة دائرية من الرتبة n تكون أيزومورفية مع الزمرة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ومن ثم فالمطلوب إثبات أنه يوجد إيمورفيزم من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

والآن نعرف :

$$f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$x + n\mathbb{Z} \mapsto x + p\mathbb{Z}$$

f معرف جيداً :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + n\mathbb{Z} = y + n\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x - y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = nk$$

$$\Rightarrow x - y = plk, \quad kl \in \mathbb{Z}$$

($p \mid n$ تعني p تقسم n)

$$\Rightarrow x - y \in p\mathbb{Z} \Rightarrow x + p\mathbb{Z} = y + p\mathbb{Z}$$

$$f(x + n\mathbb{Z}) = f(y + n\mathbb{Z}) \quad \text{أي أن}$$

f راسم فوقى (شامل ، غامر) : واضح

f هومومورفيزم

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : f(x + n\mathbb{Z} + y + n\mathbb{Z})$$

$$= f(x + y + n\mathbb{Z}) = x + y + p\mathbb{Z} = x + p\mathbb{Z} + y + p\mathbb{Z}$$

$$= f(x + n\mathbb{Z}) + f(y + n\mathbb{Z})$$

أي أن f إيمورفيزم

مثال ٣٧ : برهن على أنه $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{R}, +)$

البرهان : ليكن $\varphi: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ أيزومورفيزم. وليكن $\varphi(1) = k$

$$k = \varphi(1) = \varphi\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = \varphi\left(\underbrace{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_b\right) = b\varphi\left(\frac{1}{b}\right), \quad b \neq 0$$

b من المرات

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{k}{b}$$

والآن :

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, b \neq 0 : \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi\left(\underbrace{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_a\right) = a\varphi\left(\frac{1}{b}\right) = k \frac{a}{b}$$

a من المرات

إذا كان $k \in \mathbb{Q}$ فإن صورة (φ) ($\text{Im}(\varphi)$) ستحتوى فقط على الأعداد الكسرية (النسبية). أما إن كانت $k \notin \mathbb{Q}$ فإن صورة φ ستحتوى فقط على الأعداد غير الكسرية (غير النسبية (irrationals) بالإضافة إلى الصفر. فى الحالتين لا يمكن أن تكون φ شاملة (غامرة) ، أى أنه لا يوجد أيزومورفيزم .

مثال ٣٨ : برهن على أن $(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

البرهان : ليكن $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ أيزومورفيزم. لأن φ راسم شامل (غامر) فإنه يوجد $y \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\varphi(y) = -1$.

والآن

$$-1 = \varphi(y) = \varphi\left(\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right) = \left[\varphi\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{y}{2}\right) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

تناقض .

إذن لا يوجد مثل هذا الأيزومورفيزم .

مثال ٣٩ : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية من G دليلها فى $G = 2$. برهن على أن H زمرة جزئية طبيعية فى G .

البرهان : لكل $a \in G$ ، $a \notin H$ ، $aH \cap H = \emptyset$ ، $aH \cup H = G$ (لأن دليل H فى $G = 2$. ولأن $Ha \cap aH \ni a$ وكذلك فإن $Ha \neq H$) وهذا يقتضى أن $Ha = aH$. وبديهي أنه إذا كان $a \in H$ فإن $aH = Ha$. وبالتالي فإن H زمرة جزئية طبيعية فى G . (انظر مثال ٢٠ !)

مثال ٤٠ : لتكن M, N زمرتين جزئيتين طبيعيتين في G بحيث إن $M \cap N = \{e\}$ حيث e هو العنصر المحايد في G . برهن على أنه لكل $m \in M$ ولكل $n \in N$ $mn = nm$.
البرهان :

$$\begin{aligned} n^{-1}m^{-1}nm &= n^{-1}(m^{-1}nm) \in N \quad (\text{لأن } N \text{ زمرة جزئية طبيعية في } G) \\ &= (n^{-1}m^{-1}n)m \in M \quad (\text{لأن } M \text{ زمرة جزئية طبيعية في } G) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow_{M \cap N = \{e\}} n^{-1}m^{-1}nm = e \Rightarrow mn = nm$$

مثال ٤١ : برهن على أنه إذا كانت G زمرة دائرية لانهائية فإن لها فقط مولدين.
البرهان : من نظرية تفصيل الزمر الدائرية (١-١١-٨) أى زمرة دائرية لانهائية تكون متشاكل (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}$ لها مولدان ± 1 ، ومن ثم فإن الزمرة G يكون لها مولدان **طريقة أخرى :** ليكن a مولداً لـ G . ومن ثم فإن a يكون ذا رتبة لانهائية. وتكون

$$G = \{..., a^{-r}, ..., a^{-1}, e, a, ..., a^r, ...\}$$

ليكن $a' \in G$ مولداً آخر لـ G ، وعندئذ فإن

$$G = \{..., a'^{-2t}, a'^{-t}, e, a', a'^t, a'^{2t}, ...\}$$

ولأن $a'^{t+1} \in G$ فإن :

$$a'^{t+1} = a'^r, r \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a'^{(1-r)+1} = e \quad (e \text{ عنصر } G \text{ المحايد})$$

ونظراً لأن a ليس ذا رتبة منتهية فإن :

$$t(1-r)+1=0 \Rightarrow (r-1)t=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

أى أنه إذا كان a مولداً فإنه يوجد مولد آخر وحيد هو a^{-1} .

مثال ٤٢ : برهن على أنه إذا كان M, N زمرتين جزئيتين طبيعيتين من G فإن NM زمرة جزئية طبيعية من G .

$$NM := \{nm \mid n \in N, m \in M\}$$

البرهان : نتذكر أن NM زمرة جزئية طبيعية في G إذا كان

$$\forall a \in G : aNM a^{-1} \subset NM$$

أى أن $\forall a \in G \quad \forall nm \in NM : anma^{-1} \in NM$
والآن :

$$\begin{aligned} a(nm)a^{-1} &= (an)ma^{-1} = (ka)ma^{-1}, k \in N \quad (G \text{ لأن } N \text{ زمرة جزئية طبيعية في } G) \\ &= k(am)a^{-1} = k(\ell a)a^{-1}, \ell \in M \quad (G \text{ لأن } M \text{ زمرة جزئية طبيعية في } G) \\ &= (k\ell)aa^{-1} = k\ell e, k\ell \in NM \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G) \\ &= k\ell \in NM \end{aligned}$$

مثال ٤٣ : ينص قانون المشاركة (الدمج) العام على أنه إذا كانت $(G, \cdot)$ زمرة ، وكانت $a_1, \dots, a_r$ عناصر في G فإن كل حواصل الضرب الممكنة لهذه العناصر مأخوذة بنفس الترتيب تكون متساوية. برهن على صحة القانون .

البرهان : سنعرف :

$$\prod_{i=1}^1 a_i := a_1,$$

$$\prod_{i=1}^{r+1} a_i := \left(\prod_{i=1}^r a_i \right) a_{r+1}$$

سنقيم البرهان على صحة القانون بالاستقراء الرياضى .

$$\left(\prod_{i=1}^r a_i \right) \left(\prod_{j=1}^s a_{r+j} \right) = \prod_{k=1}^{r+s} a_k$$

سنبرهن أولاً على أن :

هذا صحيح من التعريف عند $s = 1$.

نفترض الآن أن هذا صحيح عند $s = m$ ، أى أن :

$$\left(\prod_{i=1}^r a_i \right) \left(\prod_{j=1}^m a_{r+j} \right) = \prod_{k=1}^{r+m} a_k$$

$$\left(\prod_{i=1}^r a_i \right) \left(\prod_{j=1}^{m+1} a_{r+j} \right) = \left(\prod_{i=1}^r a_i \right) \left[\left(\prod_{j=1}^m a_{r+j} \right) a_{r+m+1} \right]$$

عندئذ فإن :

التعريف

$$= \left[\left(\prod_{i=1}^r a_i \right) \left(\prod_{j=1}^m a_{r+j} \right) \right] a_{r+m+1}$$

قانون المشاركة (الدمج)

$$= \left(\prod_{k=1}^{r+m} a_k \right) a_{r+m+1} = \prod_{k=1}^{r+m+1} a_k$$

فرض الاستقراء

التعريف

والآن نعتبر حاصل الضرب بأى طريقة وضع للأقواس لـ $a_1, a_2, \dots, a_n$.
سيكون هذا على الشكل bc حيث b, c حاصل ضرب بأى طريقة لوضع الأقواس
لـ $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ على الترتيب .
ونفترض مرة أخرى أن قانون المشاركة (الدمج ، التجميع) العام صحيح لـ عدد أصغر
من n .

$$b = \prod_{i=1}^i a_i, c = \prod_{j=i+1}^n a_j \quad \text{وهكذا فإن :}$$

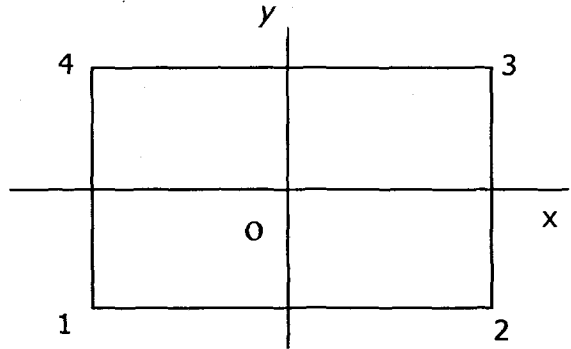
$$\Rightarrow bc = \left(\prod_{i=1}^i a_i \right) \left(\prod_{j=i+1}^n a_j \right) = \prod_{k=1}^n a_k$$

وتكون كل حواصل الضرب للعناصر $a_1, a_2, \dots, a_n$ مأخوذة بنفس الترتيب متساوية
وهي تساوى

$$\prod_{i=1}^n a_i$$

مثال ٤٤ : زمرة كلاين الرباعية (انظر (١-٤-٤) مثال ٢) . تمثل هذه الزمرة هندسياً
تماثلات المستطيل

لتكن 1 ، 2 ، 3 ، 4 رءوس
المستطيل ، o مركزه ، ox ، oy
محورى التماثل للمستطيل.



هناك أربع تماثلات مختلفة ، هي :

(أ) الدوران حول النقطة o فى المستوى (مستوى المستطيل) بزاوية قدرها 0.

(ب) الدوران حول النقطة o فى المستوى بزاوية قدرها π

(ج) الانعكاس حول ox

(د) الانعكاس حول oy

وهذه تناظر التبديلات الآتية على الترتيب :

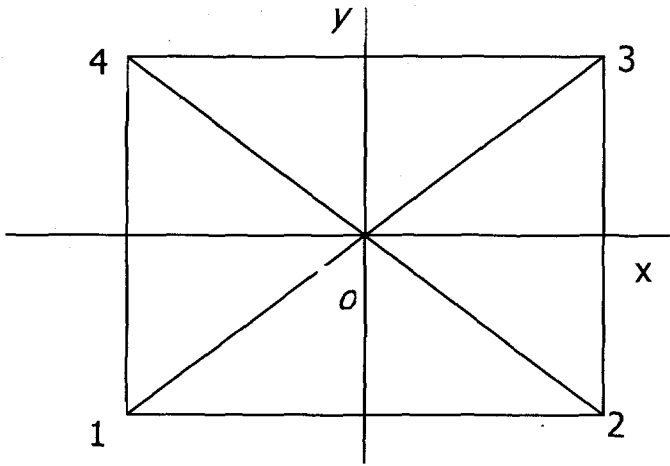
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ج})$$

مثال ٤٥ : الزمرة الثمانية Octic group



تتكون هذه الزمرة من التماثلات بالنسبة للمربع . هناك أربعة دورانات حول 0 في مستوى

المربع بزوايا 0، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ التي تناظر على الترتيب :

$$\alpha^3, \alpha^2, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

هناك أيضا أربعة انعكاسات حول أربعة خطوط تماثل ox ، oy ، 13 ، 24 التي تناظر

على الترتيب :

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

تحقق من أن هذه العناصر الثمانية تكون زمرة . بوضع $\beta_1 = \beta$ يمكن التحقق من أن

$$\beta_4 = \alpha^3 \beta, \beta_3 = \alpha \beta, \beta_2 = \alpha^2 \beta, \beta \alpha = \alpha^{-1} \beta, \beta^2 = e = \alpha^4$$

وتكون الزمرة هي :

$$\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta, \alpha^3\beta\}$$

مثال ٤٦ : إذا كانت G زمرة بحيث إن $(ab)^n = a^n b^n$ لثلاثة أعداد صحيحة متتالية $n, n+1, n+2$ ولكل $a, b \in G$. فبرهن على أن G إبدالية .

البرهان : لدينا :

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1), \quad (ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1} \quad (2), \quad (ab)^{n+2} = a^{n+2} b^{n+2} \quad (3)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$a^{n+1} b^{n+1} = (ab)^{n+1} = (ab)^n (ab) = a^n b^n ab$$

$$\Rightarrow ab^n = b^n a \quad (4) \quad (b^{-1}, a^{-n} \text{ من اليسار واليمين للطرفين في } a^{-n}, b^{-1})$$

ومن (1) ، (3) ينتج أن :

$$a^{n+2} b^{n+2} = (ab)^{n+2} = (ab)^n (ab)^2 = a^n b^n abab$$

$$\Rightarrow a^2 b^{n+1} = b^n aba \quad (5) \quad (b^{-1}, a^{-n} \text{ من اليسار واليمين للطرفين في } a^{-n}, b^{-1})$$

والآن من (4) ، (5) ينتج أن :

$$a^2 b^{n+1} = b^n aba = ab^n ba = ab^{n+1} a$$

$$ab^{n+1} = b^{n+1} a \quad (6) \quad \text{وبضرب الطرفين من اليسار في } a^{-1} \text{ نحصل على}$$

ومن (4) ، (6) نحصل على :

$$ab^{n+1} = b^{n+1} a = bb^n a = bab^n$$

$$ab = ba \quad \text{وبضرب الطرفين من اليمين في } b^{-n} \text{ نحصل على :}$$

أى أن G إبدالية .

مثال ٤٧ : لتكن G زمرة يتحقق لها $(ab)^2 = (ba)^2$ لكل $a, b \in G$ ، ولكل $a \in G$:

$$[a^2 = e \Rightarrow a = e] \text{ . برهن على أن } G \text{ إبدالية . (} e \text{ عنصر } G \text{ المحايد) .}$$

البرهان : ليكن $a, b \in G$ لدينا :

$$a^2 = ((ab^{-1})b)^2 = (b(ab^{-1}))^2 = ba^2 b^{-1} \Rightarrow a^2 b = ba^2$$

$$(a^{-1})^2 b^{-1} = b^{-1} (a^{-1})^2 \quad (*) \quad \text{وهذا معناه أيضاً أن :}$$

كذلك فإن :

$$a^{-1} b^{-1} a = (a(a^{-1})^2) b^{-1} a = a((a^{-1})^2 b^{-1}) a$$

$$\stackrel{(*)}{=} a(b^{-1} (a^{-1})^2) a = ab^{-1} a^{-1} \quad (**)$$

وبالمثل فإن : $b^{-1}a^{-1}b = ba^{-1}b^{-1}$ (***)

ضع $c := aba^{-1}b^{-1}$ نحصل على :

$$c^2 = ab(a^{-1}b^{-1}a)ba^{-1}b^{-1} \stackrel{(**)}{=} ab(ab^{-1}a^{-1})ba^{-1}b^{-1} = aba(b^{-1}a^{-1}b)a^{-1}b^{-1}$$

$$\stackrel{(***)}{=} aba(ba^{-1}b^{-1})a^{-1}b^{-1} = (ab)^2(a^{-1}b^{-1})^2 = (ba)^2(a^{-1}b^{-1})^2$$

$$= (ba)^2(ba)^{-2} = e$$

ومن الفرض ينتج أن

$$aba^{-1}b^{-1} = c = e$$

وبالتالى فإن :

$$ab = ba$$

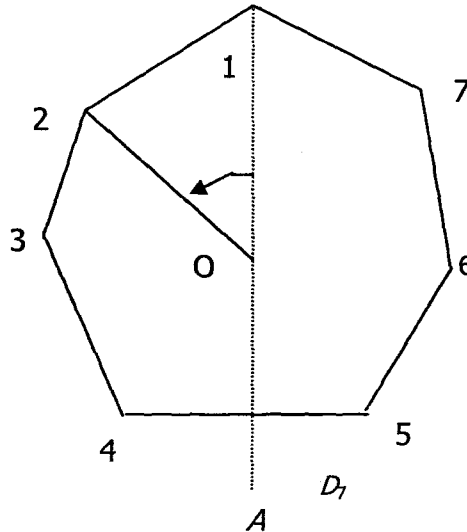
أى أن G إبدالية

مثال ٤٨ : الزمر الزوجية (الثنائية) Dihedral groups

الزمر الزوجية D_n هي زمرة التماثلات لمضلع منتظم له n من الأوجه . $D_n \subset \gamma_n (= S_n)$ ،

تتولد من التبديلتين α, β حيث $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ ، $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

وحيث تمثل α دورانا حول مركز المضلع ، بزاوية قدرها $\frac{2\pi}{n}$.



وتمثل β انعكاساً حول محور التماثل $AO1$. لاحظ أن D_2 هي زمرة كلاين الرباعية ((١-٤-٤) مثال ٢) . واضح أن $\alpha^n = e = \beta^2$ حيث e عنصر الزمرة المحايد ، كذلك

واضح أن $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$. نبرهن الآن على أن D_n تتولد من $\{\alpha, \beta\}$:

إذا كانت x تنتمى إلى الزمرة الجزئية المتولدة من $\{\alpha, \beta\}$ فإن :

$$x = \alpha^{i_1} \beta^{j_1} \alpha^{i_2} \beta^{j_2} \dots \quad (حاصل ضرب منته) , i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots \in \mathbb{Z}$$

لكن العلاقة $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$ تختصر حاصل الضرب السابق إلى : $\alpha^\lambda \beta^\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ الذى يمكن اختصاره كذلك إلى $\alpha^s \beta^t$ حيث $0 \leq s \leq n-1$, $t = 0, 1$ ، وذلك باستخدام العلاقة $\alpha^n = e = \beta^2$. أى أننا انتهينا إلى أن أى عنصر x فى الزمرة المتولدة من المجموعة $\{\alpha, \beta\}$ يمكن التعبير عنه كالتالى :

$$x = \alpha^s \beta^t, 0 \leq s \leq n-1, t = 0 \quad (\text{or}) \quad t = 1$$

ونبرهن الآن على أن هذه $2n$ من العناصر كلها مختلفة ، لأن :

$$\alpha^{s_1} \beta^{t_1} = \alpha^{s_2} \beta^{t_2} \Rightarrow \alpha^{s_1-s_2} = \beta^{t_2-t_1} \Rightarrow \alpha^{s_1-s_2} = \begin{cases} e & , t_2 - t_1 = 0 \\ \beta & , t_2 - t_1 = 1 \end{cases}$$

إذا كان $\alpha^{s_1-s_2} = e$ فإن n يكون قاسماً لـ $s_2 - s_1$ ولكن $|s_1 - s_2| < n$ (لأن $0 \leq s \leq n-1$) ومن ثم فإن $s_1 - s_2 = 0$ وهذا يؤدي إلى $\beta^{t_1} = \beta^{t_2}$ أى أن $t_1 = t_2$. أى أنه فى هذه الحالة يكون $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$. أما إذا كان $\alpha^{s_1-s_2} = \beta$ ، فإنه مع ملاحظة أن $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$ يكون لدينا $\alpha^{s_1-s_2+1} = \alpha^{s_1-s_2-1}$ ، ومن ثم فإن $\alpha^2 = e$ ، وهذا تناقض لأن $n > 2$. أى أنه يكون لدينا فى النهاية

$\alpha^{s_1} \beta^{t_1} = \alpha^{s_2} \beta^{t_2}$ إذا كان فقط إذا كان $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$ وهذا يبرهن على أن الـ $2n$ عنصراً ($2n$ هو عدد عناصر D_n)

$$\alpha^s \beta^t, 0 \leq s \leq n-1, t = 0 \quad \text{أو} \quad t = 1$$

كلها مختلفة ، ومن ثم فإن الزمرة المتولدة من المجموعة $\{\alpha, \beta\}$ هي كل الزمرة الزوجية. مثال ٤٩: لتكن G زمرة. يعرف مركز (G) (centre of G) ويرمز له بالرمز $Z(G)$ بأنه:

$$Z(G) := \{a \in G : ax = xa \quad \forall a \in G\}$$

برهن على أن : (أ) $Z(G)$ زمرة جزئية طبيعية من G

(ب) زمرة الأوتومورفيزمات الداخلية (٧-٣-١) لـ G تكون متشاكلة (أيزومورفية) مع الزمرة $G/Z(G)$ (انظر مثال ٨ في (١-٤-٤))

$$\varphi: G \rightarrow \gamma(G)$$

البرهان : (أ) الراسم

$$a \mapsto \varphi_a$$

هومومورفيزم زمر (١-٤-٤ مثال ١ (ب))

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi_a = 1_G\}$$

$$= \{a \in G : \varphi_a(x) = 1_G(x) \quad \forall x \in G\}$$

$$= \{a \in G : axa^{-1} = x \quad \forall x \in G\}$$

$$= \{a \in G : ax = xa \quad \forall x \in G\} = Z(G)$$

$$(1_G : G \rightarrow G : \text{ إلى } G \text{ أى أن } : 1_G : G \rightarrow G)$$

$$a \mapsto a$$

أى أن مركز G هو نواة هومومورفيزم ، ومن ثم فهو زمرة جزئية طبيعية من G .

(ب) لاحظ أن صورة (φ) $(\text{Im}(\varphi))$ هى زمرة كل الأوتومورفيزمات الداخلية لـ G . ونطبق نظرية الهومومورفيزم (١-٨-١) فنحصل على :

$$\text{Im}(\varphi) \cong G/\text{Ker}(\varphi) = G/Z(G)$$

مثال ٥٠ : لتكن G زمرة . برهن على أن :

$$G \Rightarrow \text{دائرية } G/Z(G)$$

البرهان : لاحظ أولاً أن $G/Z(G)$ زمرة لأن $Z(G)$ زمرة جزئية طبيعية فى G .

$G/Z(G)$ دائرية إذن لها مولد وليكن $xZ(G)$ حيث $x \in G$. هذا يقتضى أنه لكل $a, b \in G$:

يوجد $k, l \in \mathbb{Z}$ بحيث إن $aZ(G) = x^k Z(G)$ ، $bZ(G) = x^l Z(G)$. وهذا يقتضى

أنه يوجد $z, y \in Z(G)$ بحيث إن : $a = x^k z$ ، $b = x^l y$. وبالتالي فإن :

$$ab = x^k z x^l y = x^{k+l} zy = x^l y x^k z = ba \quad \forall a, b \in G$$

أى أن G إبدالية .

مثال ٥١: لتكن G زمرة . لكل $a, b \in G$ يعرف إبدال a, b (The commutator of a, b) ويرمز له بالرمز $[a, b]$ بأنه $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ، وتعرف الزمرة الجزئية المتولدة من المجموعة $\{[a, b] : a, b \in G\}$ بأنها زمرة إبدالات G ويرمز لها بالرمز G' ويقال لها كذلك الزمرة المشتقة من G .

برهن على أن : (أ) $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ إبدالية .

(e كالمعتاد هو العنصر المحايد في G)

(ب) $G' = \{[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in G\}$

البرهان : (أ) G إبدالية $\Leftrightarrow \forall a, b \in G : ab = ba$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G : aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow G' = \{e\}$

(ب) لاحظ أن : $[a, b]^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$

ومن (١-١١-٢) ينتج المطلوب مباشرة

مثال ٥٢ : برهن على أن G' زمرة إبدالات الزمرة G هي زمرة جزئية طبيعية من G .
البرهان : G' بالتعريف هي زمرة جزئية من G . يتبقى أن نثبت أنها "طبيعية" وذلك كالآتي :

$\forall x \in G \quad \forall [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \in G' :$

$x[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]x^{-1} =$

$x[a_1, b_1]x^{-1}x[a_2, b_2]x^{-1} \dots x[a_n, b_n]x^{-1}$

$= xa_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}x^{-1}xa_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}x^{-1} \dots xa_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}x^{-1}$

$= [xa_1x^{-1}, xb_1x^{-1}][xa_2x^{-1}, xb_2x^{-1}] \dots [xa_nx^{-1}, xb_nx^{-1}] \in G'$

مثال ٥٣ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة G . برهن على أن :

G/N إبدالية $\Leftrightarrow G' \subset N$

(وعلى وجه الخصوص : G/G' إبدالية).

البرهان : لتكن $G' \subset N$:

$$\forall a, b \in G : aN.bN = abN \underset{G' \subset N}{=} ab[b^{-1}, a^{-1}]N = abb^{-1}a^{-1}baN$$

$$= baN = bN.aN \Rightarrow G/N \text{ إبدالية}$$

والآن لتكن G/N إبدالية . نعتبر الإيمورفيزم الطبيعي

$$\rho : G \rightarrow G/N$$

$$a \mapsto aN$$

$$\forall a, b \in G : \rho([a, b]) = \rho(aba^{-1}b^{-1}) = \rho(a)\rho(b)\rho(a^{-1})\rho(b^{-1})$$

$$= \rho(a)\rho(b)\rho(a)^{-1}\rho(b)^{-1} = \rho(a)\rho(a)^{-1}\rho(b)\rho(b)^{-1} \underset{\text{إبدالية } G/N}{=} N$$

$$= N \Rightarrow [a, b] \in \text{Ker}(\rho) = N$$

$$\Rightarrow G' \subset N$$

(تذكر أن N عنصر G/N المحايد ، $\text{Ker}(\rho) = N$. انظر (١-٧-١))

مثال ٥٤ : لتكن $A \subset G$ حيث G زمرة ، A مجموعة . يعرف مركز A في G :

$C(A)$ (The centralizer) كالتى :

$$C(A) := \{x : x \in G, \forall a \in A : xa = ax\}$$

برهن على أن : (أ) $C(A)$ زمرة جزئية من G .

(ب) $A \subset G \Rightarrow A \triangleleft C(A)$ (زمرة جزئية إبدالية من G)

(زمرة جزئية طبيعية من $C(A)$)

البرهان : (أ) واضح أن عنصر G المحايد e ينتمى إلى $C(A)$ والآن :

$$x \in C(A) \Rightarrow \forall a \in A : xa = ax \Rightarrow \forall a \in A : ax^{-1} = x^{-1}a$$

$$\Rightarrow x^{-1} \in C(A)$$

كذلك فإن :

$$\forall x, y \in C(A) : \forall a \in A : xa = ax, ya = ay$$

$$\Rightarrow xya \underset{y \in C(A)}{=} xay \underset{x \in C(A)}{=} axy \Rightarrow xy \in C(A)$$

أى أن $C(A)$ زمرة جزئية من G .

(ب) A زمرة جزئية إبدالية من $G \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in C(A)]$

أى أن A زمرة جزئية من $C(A)$. يتبقى أن نثبت أن A "طبيعية" .

(من تعريف $C(A)$) $\forall x \in C(A) \quad \forall a \in A : xax^{-1} = axx^{-1} = a \in A$

زمرة جزئية طبيعية $\Rightarrow A \subset C(A)$

مثال ٥٥ : لنكن G زمرة إبدالية . لنكن H مجموعة جزئية من G تتكون من عنصر G المحايد e ، كل عناصر G التى رتبتهما 2 . برهن على أن H زمرة جزئية من G .

البرهان :

$$\forall a \in H : a^2 = e \Rightarrow \forall a \in H : a^{-1} = a \in H \quad (1)$$

$$\forall a, b \in H : ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = (ab)^{-1} \quad \text{كذلك فإن :}$$

G إبدالية

$$\Rightarrow (ab)^2 = e \Rightarrow ab \in H \quad (2)$$

من (1) ، (2) وكذلك $e \in H$ ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٥٦ : إذا اسقطنا كلمة "إبدالية" من مثال ٥٥ السابق مباشرة فهل تكون العبارة صائبة أيضاً ؟

الحل : العبارة فى هذه الحالة خاطئة . مثال مضاد : اعتبر $G = S_3 (= \gamma_3)$ ،

$$H = \{e, (12), (13), (23)\} . H \text{ ليست زمرة جزئية فى } G \text{ لأن : } (12)(13) = (132) \notin H \quad (13)$$

تعرف $U(n)$ بأنها مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة (< 0) التى هى أصغر من n ، وليس بينها وبين n قواسم مشتركة سوى الواحد . عندئذ فإن $U(n)$ تكون زمرة مع عملية الضرب مقياس n .

مثال ٥٧ : برهن على أن $U(10) \not\cong U(12)$

البرهان :

$$U(12) = \{1, 5, 7, 11\} \quad , \quad U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$1^2 \equiv 1 \pmod{12}, \quad 5^2 \equiv 1 \pmod{12}, \quad 7^2 \equiv 1 \pmod{12}, \quad 11^2 \equiv 1 \pmod{12} \quad (*)$$

والآن ليكن $\varphi : U(10) \rightarrow U(12)$ تشاكلاً . ينتج أن :

$$\varphi(1) = \varphi(1.1) = \varphi(1). \varphi(1) = 1.1 = 1 \pmod{12}$$

$$\text{من } (*) \text{ جميع } x \in U(12) \text{ تحقق } x^2 \equiv 1 \pmod{12} \quad (\varphi(9) = \varphi(3.3) = \varphi(3)^2 \equiv 1 \pmod{12})$$

أى أن $\varphi(1) = \varphi(9)$ تناقض مع φ تشاكل

$$\varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

مثال ٥٨ : اختبر الراسم

$$x \mapsto x^5$$

هل φ تناظر أحادي ؟ هل φ أيزومورفيزم ؟

الحل :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x^5 - y^5 = 0 \Rightarrow x = y \in \mathbb{R}$$

أى أن φ واحد لواحد

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists y^{1/5} \in \mathbb{R} : \varphi(y^{1/5}) = y$$

أى أن φ شامل (غامر)

لكن

$$\varphi(x+y) = (x+y)^5 \neq x^5 + y^5 = \varphi(x) + \varphi(y)$$

(خذ مثلاً $x = 1 = y$)

أى أن φ ليس هومومورفيزم وبالتالي ليس تشاكلاً .

مثال ٥٩ : إذا كان $\varphi: G \rightarrow G'$ هومومورفيزماً فإنه لـ $a \in G$:

$$Ord(a) = n \Rightarrow Ord(\varphi(a)) \mid n \quad (رتبة (\varphi(a)) \text{ تقسم } n)$$

البرهان : (العنصر المحايد فى G) $Ord(a) = n \Rightarrow a^n = e$

$$\Rightarrow \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = \varphi(e) = e' \quad (e' \text{ العنصر المحايد فى } G')$$

مثال ٦٠ : اختبر إذا ما كان $\varphi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ هومومورفيزماً .

$$\bar{x} \mapsto 3\bar{x}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{3}) &= \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} \Rightarrow \varphi(\bar{0}) = \varphi(\bar{12}) = \varphi(\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3}) \\ &= 4\varphi(\bar{3}) = 4\bar{9} = \overline{36} = \bar{6} \neq \bar{0} \end{aligned}$$

φ هومومورفيزم

تتناقض مع $((1-3-2) \text{ أ})$. إذن φ ليس هومومورفيزماً .

مثال ٦١ : ليكن $\varphi: \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ هومومورفيزماً ، وليكن $Ker(\varphi) = \{\bar{0}, \bar{10}, \bar{20}\}$.

إذا كان $\varphi(\bar{23}) = \bar{6}$ فاوجد جميع العناصر التى صورتها $\bar{6}$.

الحل :

$$\bar{6} = \varphi(\bar{23}) = \varphi(\bar{3} + \bar{20}) = \varphi(\bar{3}) + \varphi(\bar{20}) = \varphi(\bar{3}) + \bar{0} = \varphi(\bar{3})$$

وبالتالى فإن

$$\varphi(3) = \varphi(\bar{13}) = \varphi(\bar{23}) = \bar{6}$$

أى أن العناصر التى صورتها $\bar{6}$ هي : $\bar{3}, \bar{13}, \bar{23}$.

مثال ٦٢ : ليكن $\varphi: \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \rightarrow G$ هومومورفيزماً زمرياً لكنه غير واحد لواحد .

عين φ .

الحل : مادام φ ليس واحداً لواحد إذن نواة (φ) ليست هي مجموعة العنصر المحايد فى $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

ولكن $\text{Ker}(\varphi)$ زمرة جزئية (طبيعية) من $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ وبالتالى فلها الشكل $m\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ حيث m قاسم لـ 17 . ومن حيث إن 17 عدد أولى ، نواة (φ) ليست هي مجموعة العنصر المحايد $0+17\mathbb{Z}$ فى $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ فتكون نواة (φ) هي $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ ويكون φ هو الراسم الصفري .

مثال ٦٣ : عين جميع الهومومورفيزمات من $\mathbb{Z}_{20}$ إلى $\mathbb{Z}_{10}$. ماعدد الإيمورفيزمات ؟ .

الحل : الهومومورفيزم يتحدد تماماً إذا عرفنا صورة العنصر $\bar{1} \in \mathbb{Z}_{20}$ لأنه إذا كان $\varphi(\bar{1}) = \bar{a}$ فإن الصور هي : $\varphi(\bar{x}) = \overline{ax} = \overline{a + \dots + a} = \varphi(\bar{1} + \dots + \bar{1}) = \varphi(\bar{x})$

x من المرات x من المرات

والآن من نظرية لاجرانج $(3-10-1)$ يكون $\text{Ord}(\varphi(\bar{1}))$ قاسماً لـ $10 = \text{Ord}(\mathbb{Z}_{10})$.
كذلك من مثال ٥٩ السابق $\text{Ord}(\varphi(\bar{1}))$ يقسم $\text{Ord}(\bar{1})$ وهو 20 . إذن $\text{Ord}(\varphi(\bar{1}))$ يقسم كلاً من 10 ، 20 وبهذا يكون $\text{Ord}(\varphi(\bar{1})) = 1, 2, 5 \text{ or } 10$

فى حالة $\text{Ord}(\varphi(\bar{1})) = 1$ يكون $\varphi(\bar{1}) = \bar{0} = \bar{10}$

فى حالة $\text{Ord}(\varphi(\bar{1})) = 2$ يكون $\varphi(\bar{1}) = \bar{5}$

فى حالة $\text{Ord}(\varphi(\bar{1})) = 5$ يكون $\varphi(\bar{1}) = \bar{2}, \bar{4}, \bar{6} \text{ or } \bar{8}$

فى حالة $\text{Ord}(\varphi(\bar{1})) = 10$ يكون $\varphi(\bar{1}) = \bar{1}, \bar{3}, \bar{7} \text{ or } \bar{9}$

أى أنه توجد 10 هومومورفيزمات

والآن $\bar{1}$ مولد للزمرة $\mathbb{Z}_{10}$ فمن الاستنتاج (١١-١١-١) يكون $\bar{3}$ ، $\bar{7}$ ، $\bar{9}$ كذلك مولدات لـ $\mathbb{Z}_{10}$ ، وبهذا يكون عدد الإيمورفيزمات المطلوبة هو 4 .

مثال ٦٤ : لتكن $G := \mathbb{Z}/[20]$ ، $H := \mathbb{Z}/[4]$. اسرد عناصر G/H ، H

الحل :

$$H = \{0 + [20], 4 + [20], 8 + [20], 12 + [20], 16 + [20]\}$$

$$G/H = \frac{\mathbb{Z}/[20]}{[4]/[20]} \text{ وهذه تتشاكل مع } \mathbb{Z}/[4] = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ، فن توقع أن تكون } G/H$$

متكونة من أربعة عناصر وهى كالاتى :

$$G/H = \{0 + [20] + H, 1 + [20] + H, 2 + [20] + H, 3 + [20] + H\}$$

ولاحظ أن :

$$4 + [20] + H = H \quad (\text{لأن } 4 + [20] \in H)$$

$$5 + [20] + H = 1 + [20] + H + 4 + [20] + H = 1 + [20] + H + H = 1 + [20] + H$$

$$6 + [20] + H = 2 + [20] + H + 4 + [20] + H = 2 + [20] + H + H = 2 + [20] + H$$

$$7 + [20] + H = 3 + [20] + H + 4 + [20] + H = 3 + [20] + H + H = 3 + [20] + H$$

$$8 + [20] + H = H \quad (\text{لأن } 8 + [20] \in H)$$

وهكذا ...

مثال ٦٥ : عين جميع الهومومورفيزمات من $\mathbb{Z}_n$ إلى $\mathbb{Z}_n$

الحل : لجميع $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$ الراسم $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ هومومورفيزم !
 $\bar{1} \mapsto \bar{i}$

مثال ٦٦ : اعط مثلاً لبيان أنه فى زمرة القسمة G/H ، يمكن أن يحدث أن $aH = bH$

بينما رتبة $(a) \neq$ رتبة (b)

الحل : لنأخذ $G = H = S_3 (= \gamma_3)$ ، $a = (12)$ ، $b = (123)$

$$(12)S_3 = S_3 = (123)S_3 .$$

$$\text{Ord}(12) = 2 , \text{Ord}(123) = 3$$

مثال ٦٧ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة G ، ولتكن H زمرة جزئية من G . بحيث إن N زمرة جزئية من H . برهن على أن H/N زمرة جزئية طبيعية من G/N إذا كانت فقط إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية من G .

البرهان : " $\Rightarrow$ " : فى برهان النظرية الثانية للأيزومورفيزم (١-٨-٣) .

" $\Leftarrow$ " : لتكن H/N زمرة جزئية طبيعية من G/N . عندئذ فإن :

$$(xN)^{-1}hNxN = x^{-1}NhNxN = x^{-1}NhxN$$

$$= x^{-1}hxN \in H/N, x \in G, h \in H$$

$$\Rightarrow \exists h' \in H, \exists n \in N : x^{-1}hx = h'n \in H \quad (N \text{ زمرة جزئية من } H)$$

أى أن H زمرة جزئية طبيعية من G .

مثال ٦٨ : ليكن $\varphi: U(30) \rightarrow U(30)$ هومومورفيزماً ، $\text{Ker}(\varphi) = \{1, 11\}$. إذا

كان $\varphi(7) = 7$ فعين كل عناصر $U(30)$ التى صورها بـ φ هى 7 .

الحل :

$$U(30) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$\varphi(17) = \varphi(77) \quad (\text{لأن } 77 \equiv 17 \pmod{30})$$

$$= \varphi(11 \cdot 7) = \varphi(11)\varphi(7) = 1 \cdot 7 = 7$$

بالتجربة لا توجد عناصر أخرى فى $U(30)$ تكون صورتها بـ φ هى 7 باستثناء العنصر 7، أى أن العناصر فى $U(30)$ التى صورتها 7 هى 7، 17 فقط .

مثال ٦٩ : إذا كان $\varphi: U(40) \rightarrow U(40)$ هومومورفيزماً ، وكان $\text{Ker}(\varphi) = \{1, 9, 17, 33\}$ ،

وكان $\varphi(11) = 11$ ، فاوجد جميع عناصر $U(40)$ التى صورتها 11 .

الحل :

$$\varphi^{-1}(\{11\}) = 11 \text{ Ker}(\varphi) = 11\{1, 9, 17, 33\} = \{3, 11, 19, 27\}$$

(الحساب فى (mod 40))

(انظر كذلك مثال ٦٨ السابق مباشرة)

مثال ٧٠ : تعريف : نعرف دالة فاي لأويلر ϕ (Euler's phi function). لتكن $\phi(1)=1$ ، ولكل عدد صحيح $1 < n$ لتكن $\phi(n)$ هي عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من (أصغر من) n وليس بينها وبين n قواسم مشتركة . لاحظ أن $Ord(U(n)) = \phi(n)$.
برهن على أن عدد الهومومورفيزمات من $\mathbb{Z}_n$ إلى $\mathbb{Z}_k$ هو $\sum \phi(d)$ حيث يتم الجمع على جميع d القواسم المشتركة لـ k, n .

البرهان : لكل d قاسم لـ k توجد زمرة جزئية وحيدة في $\mathbb{Z}_k$ لها الرتبة d وهذه الزمرة الجزئية تتولد من $\phi(d)$ من العناصر . وأى هومومورفيزم من $\mathbb{Z}_n$ إلى زمرة جزئية في $\mathbb{Z}_k$ يجب أن "يصور" 1 في مولد لهذه الزمرة الجزئية . وعلاوة على هذا فإن رتبة صورة "1" يجب أن تقسم n ، (مثال ٥٩) ، ومن ثم البرهان .

طريقة أخرى ليست مختلفة تماماً عما سبق: من نظرية الأعداد الابتدائية Elementary Number Theory نعلم أن $\sum_{d|n,k} \phi(d)$ هو $\gcd(n,k)$ القاسم المشترك الأعظم لـ k, n .
ومن حيث إن $f(\bar{1})$ يحدد تماماً الراسم f من $\mathbb{Z}_n$ إلى $\mathbb{Z}_k$ ، $\bar{1} \in \mathbb{Z}_n$ ، ومن نظرية لاجرانج رتبة $(f(\bar{1}))$ قاسم لـ k ، ومن مثال ٥٩ رتبة $(f(\bar{1}))$ قاسم لـ n ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٧١ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة G . استخدم الملحوظة $(1-6-4)$ ((أ)) للبرهنة على أن كل زمرة جزئية من G/N سيكون لها الشكل K/N حيث K زمرة جزئية من G .

البرهان : ليكن $\varphi: G \rightarrow G/N$ الإبيمورفيزم الطبيعي (انظر (١-٧-١) ، (٢-٧-١)).
 $a \mapsto aN$
لتكن $\bar{K}$ زمرة جزئية من G/N ، ولتكن K هي الصورة العكسية لـ $\bar{K}$ بواسطة φ أى أن $K := \varphi^{-1}(\bar{K})$. عندئذ فإن K ستكون زمرة جزئية من G (٣-٤-١) (ب)
 $K/N = \varphi(K) = \varphi(\varphi^{-1}(\bar{K})) = \bar{K}$
 φ شاملة

مثال ٧٢ : لتكن $\mathbb{Z}[X]$ زمرة كثيرات الحدود في X ذات المعاملات الصحيحة مع عملية الجمع . برهن على أن الراسم $\varphi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ هومومورفيزم . صف هندسياً نواة (f) .
 $f \mapsto f(3)$

الحل :

$$\forall f, g \in \mathbb{Z}[X]: \varphi(f + g) = (f + g)(3)$$

$$= f(3) + g(3) = \varphi(f) + \varphi(g) \Rightarrow \varphi \text{ هو مورفيزم}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid \varphi(f) = f(3) = 0\}$$

$$= \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f = (X-3)g, \quad g \in \mathbb{Z}[X], \text{ degree}(g) = \text{degree}(f) - 1\}$$

تمثل هذه المجموعة هندسياً منحنيات في المستوى تمر جميعها بالنقطة $(3, 0)$

مثال ٧٣ : لتكن G زمرة منتهية ولتكن $\mathbb{Z}_{10}$ صورة هومومورفيزمية لـ G . بماذا يمكنك القول عن رتبة (G) ؟

الحل : لدينا $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ هومومورفيزم فوقى. ينتج من نظرية الهومومورفيزم $(1-8-1)$ أن $\mathbb{Z}_{10} = \varphi(G) \cong G / \text{Ker}(\varphi)$ ومن ثم فإنه ينتج من نظرية لاجرانج $(3-10-1)$ أن :

$$10 = \text{Ord}(\varphi(G)) = \frac{\text{Ord}(G)}{\text{Ord}(\text{Ker}(\varphi))} (= [G : \text{Ker}(\varphi)])$$

$$\Rightarrow \text{Ord}(G) = 10 \cdot \text{Ord}(\text{Ker}(\varphi))$$

مثال ٧٤ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة G . برهن على أن رتبة العنصر gN في G/N تقسم رتبة العنصر g في G .

$$\text{البرهان : } \varphi: G \rightarrow G/N \text{ هومومورفيزم}$$

$$g \mapsto gN$$

من مثال ٥٩ رتبة $(\varphi(a))$ تقسم رتبة (a) حيث $\varphi: G \rightarrow G/N$ هومومورفيزم وينتج المطلوب مباشرة.

مثال ٧٥ : لتكن $\mathbb{Z}_{10}$ ، $\mathbb{Z}_{15}$ صورتين هومومورفيزميتين لزمرة منتهية G . بماذا يمكنك القول عن رتبة (G) ؟

الحل : من مثال ٧٣: رتبة (G) مضاعف لرتبة $\mathbb{Z}_{10}$ ، مضاعف لرتبة $\mathbb{Z}_{15}$ ، ومن ثم فإن رتبة (G) تكون مضاعفاً لـ 30 (حيث 30 هي المضاعف المشترك الأصغر لـ 10، 15).

مثال ٧٦ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة منتهية G . إذا كان G/N بها عنصر رتبته n فاثبت أن G بها عنصر رتبته n . اعط مثلاً لبيان أن افتراض أن G منتهية شرط ضروري .

البرهان : ليكن $Ord(gN)=n \in \mathbb{N}$ حيث $g \in G$. ينتج من مثال ٧٤ أن $Ord(g)=mn$ ، حيث $m \in \mathbb{N}$. وبالتالي فإن $Ord(g^m)=n$. إذا كانت G غير منتهية خذ $G = \mathbb{Z}$ ، $N = 2\mathbb{Z}$ ، $\bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، $Ord(\bar{1}) = 2$ بينما لا يوجد أى عنصر فى $\mathbb{Z}$ رتبته 2 .

مثال ٧٧ : إذا كانت N زمرة جزئية طبيعية من G ، وكانت $Ord(G/N) = m$. فبرهن على أن $x^m \in N$ لجميع $x \in G$.

البرهان : من نظرية لاجرانج (أو من النتيجة (١-١١-٩) :

$$Ord(G/N) = m \Rightarrow Ord(xN) \mid m \quad \forall x \in G$$

$$\Rightarrow (xN)^m = N \quad \forall x \in G$$

أى أن $x^m N = N$ لجميع $x \in G$ وهذا يقتضى أن $x^m \in N$ لجميع $x \in G$ (انظر تمهيدية (١-٥-٢) .

مثال ٧٨ : برهن على أنه إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن $Aut(G)$ تكون غير دائرية .

البرهان : من مثال ٥٠ : G غير إبدالية $\Leftrightarrow G/Z(G)$ ليست دائرية . ومن مثال ٤٩

$$Int(G) \cong G/Z(G) \text{ وبالتالي فإن } Int(G) \text{ (زمرة الأوتومورفيزمات الداخلية لـ } G \text{)}$$

ليست دائرية . ومن النظرية (١-١١-٧) حيث إن $Int(G)$ زمرة جزئية من $Aut(G)$ ينتج أن $Aut(G)$ غير دائرية .

مثال ٧٩ : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة منتهية G . إذا كان

$$gcd(Ord(x), Ord(G/N)) = 1 \quad x \in N$$

$$gcd(Ord(x), Ord(G/N)) = 1 \Rightarrow gcd(Ord(xN), Ord(G/N)) = 1$$

ولكن $Ord(xN)$ يقسم $Ord(G/N)$ وبالتالي فإن $Ord(xN) = 1$ ، أى أن $xN = N$

ومن ثم فإن $x \in N$ (تمهيدية (١-٥-٢))

مثال ٨٠ : قرر إذا ما كانت الرواسم الآتية هومومورفيزمات. إذا كانت كذلك فاوجد النواة في كل حالة :

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(n) = n \quad (أ)$$

$$\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (ب)$$

الباقى من x عند القسمة على 2 $x \mapsto \varphi(x) = 2$

بالمفهوم الشائع

$$\varphi: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (جـ)$$

الباقى من x عند القسمة على 2 $x \mapsto \varphi(x) = 2$

بالمفهوم الشائع

الحل : (أ)

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}: \quad \varphi(m+n) = m+n = \varphi(m) + \varphi(n)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \quad \text{هومومورفيزم}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{x \in \mathbb{Z}: \varphi(x) = x = 0\} = \{0\}$$

$$Y = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}, \quad X = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \quad (ب) \text{ اعتبر}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, y \in X: \quad \varphi(x+y) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \forall x, y \in Y: \quad \varphi(x+y) = \bar{0} = \bar{1} + \bar{1} = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \forall x \in X \forall y \in Y: \varphi(x+y) = \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \varphi(x) + \varphi(y) \end{array} \right\} \quad \varphi \text{ هومومورفيزم}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$\bar{0} = \varphi(\bar{10}) = \varphi(\bar{1}) = \bar{1} \quad (جـ) \text{ تناقض}$$

إذن φ ليس هومومورفيزماً .

مثال ٨١ : كم عدد الهومومورفيزمات :

$$(أ) \text{ من } \mathbb{Z} \text{ إلى } \mathbb{Z} \text{ وشامل (غامر - فوقى)}$$

$$(ب) \text{ من } \mathbb{Z} \text{ إلى } \mathbb{Z}_2$$

$$(جـ) \text{ من } \mathbb{Z} \text{ إلى } \mathbb{Z}_2 \text{ وغامر}$$

(د) من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_8$

(هـ) من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_8$ وغامر

(و) من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_5$ وغامر

(ز) من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_6$

(ح) من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_6$ وشامل

(ط) من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_{14}$

(ى) من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_{16}$

الحل : (أ) يتحدد الهومومورفيزم تماماً بصورة المولد 1 ، كما جاء فى مثال ٦٣ . وحتى يكون الهومومورفيزم فوقياً أى غامراً أو شاملاً كل $\mathbb{Z}$ (النطاق المصاحب) فيجب أن يكون $\varphi(1) = 1$ أو $\varphi(1) = -1$. أما فيما عدا ذلك فلن يكون الهومومورفيزم شاملاً . فإذا كان $\varphi(1) = n$ مثلاً فستكون صورة (φ) هى $\{mn \mid m \in \mathbb{Z}\}$ فإذا كانت $n \neq \pm 1$ فلن تكون صورة φ هى $\mathbb{Z}$.

(ب) هومومورفيزمان يعرفان بـ $\varphi(1) = \bar{0}$ ، $\varphi(1) = \bar{1}$

(جـ) هومومورفيزم واحد يعرف بـ $\varphi(1) = \bar{1}$

(د) ثمانية هومومورفيزمات $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{7}\}$ ، $\varphi(1) = \bar{i}, i \in \{0, 1, \dots, 7\}$

(هـ) الهومومورفيزمات أربعة تعطى بـ $\varphi(1) = \bar{1}, \varphi(1) = \bar{3}, \varphi(1) = \bar{5}, \varphi(1) = \bar{7}$

لاحظ أن $\mathbb{Z}_8$ دائرية ورتبتها 8 ، وانظر الاستنتاج (١١-١١-١)

(و) من نظرية الهومومورفيزم (١-٨-١) ينتج أن

$$\mathbb{Z}_5 = \varphi(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_{12} / \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow 12 = \text{Ord}(\mathbb{Z}_{12}) = \text{Ord}(\mathbb{Z}_5) \cdot \text{Ord}(\text{Ker}(\varphi)) \\ = 5 \cdot \text{Ord}(\text{Ker}(\varphi))$$

تناقض لأن 5 لا يقسم 12 . إذن لا يوجد هومومورفيزم غامر من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_5$.

(ز) ستة هومومورفيزمات $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$ ، $\varphi(1) = \bar{i}, i \in \{0, 1, \dots, 5\}$ (انظر كذلك (ط) ، (ى))

(ح) مثل (هـ) هناك هومومورفيزمان فقط $\varphi(1) = \bar{5}$ ، $\varphi(1) = \bar{1}$

انظر الإستنتاج (١١-١١-١) . يجب أن تكون صورة $\bar{1}$ مولدة لـ $\mathbb{Z}_6$ التى رتبتها 6 .

(ط) إذا كان $\varphi(\bar{1}) = \bar{n}$ فإنه يجب أن يتحقق :

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(\overline{12}) = \overline{12}\varphi(\bar{1}) = \overline{12}\bar{n} = \overline{14}k = \bar{0}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \bar{n} = \bar{0}, \bar{n} = \bar{7}$$

أى أنه يوجد هومومورفيزمان

(ى) مثل (ط) إذا كان $\varphi(\bar{1}) = \bar{n}$ فإنه يجب أن يتحقق :

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(\overline{12}) = \overline{12}\varphi(\bar{1}) = \overline{12}\bar{n} = \overline{16}k = \bar{0}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{n} = \bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}$$

أى أنه يوجد أربعة هومومورفيزمات .

مثال ٨٢ : لتكن G زمرة إبدالية عنصرها المحايد e ، n عدداً صحيحاً . برهن على أن المجموعة $H = \{x \in G : x^n = e\}$ زمرة من G . واضرب مثلاً لزمرة G فيها مجموعة كل عناصر G التى تحقق $x^2 = e$ لتكون زمرة جزئية من G .

الحل : $e^n = e$ يقتضى أن $e \in H$ أى أن H مجموعة ليست خالية . والآن ليكن $x, y \in H$ هذا يقتضى أن $x^n = e = y^n$. والآن :

$$(xy^{-1})^n = \underbrace{xy^{-1} \dots xy^{-1}}_n = x^n (y^{-1})^n = x^n (y^n)^{-1} = ee^{-1} = e$$

G إبدالية n من المرات

وبالتالى فإن $xy^{-1} \in H$ وينتج من (١-٤-٢) أن H زمرة جزئية من G .

$$H = \{e, (12), (13), (23)\} \subset S_3 \quad \text{المثال :}$$

$(12)(13) = (132) \notin H$. إذن H ليست زمرة جزئية من S_3 . لاحظ أن S_3 ليست إبدالية .

مثال ٨٣ : لتكن G زمرة تحتوى على زمرتين جزئيتين طبيعيتين M, N . و لتكن H زمرة جزئية من G . برهن على أن :

$$HM/M \cong HN/N$$

إذا كان $H \cap M = H \cap N$

البرهان : من النظرية الأولى للأيزومورفيزم

$$HM/M \cong H/H \cap M = H/H \cap N \cong HN/N$$

(لاحظ أنه من (١-٣-٢) تركيب هومومورفيزمين يكون كذلك هومومورفيزماً ، ومعلوم أن تركيب تناظرين أحاديين هو تناظر أحادى - وبالتالي فإن تركيب أيزومورفيزمين هو كذلك أيزومورفيزم وبالتالي فإن $(HM/M \cong HN/N)$.

مثال ٨٤ : لتكن G زمرة ، $N \triangleleft G$ (زمرة جزئية طبيعية فى G) . لتكن N إبدالية ، G/N كذلك إبدالية ، H زمرة جزئية من G . برهن على أنه توجد زمرة جزئية H_1 من H بحيث إن $H_1 \triangleleft H$ ، H/H_1 ، H_1 إبداليتان .

البرهان : نعرف $H_1 := H \cap N$. عندئذ فمن نظرية الأيزومورفيزم الأولى :

$$H/H_1 = H/H \cap N \cong HN/N, H_1 = H \cap N \triangleleft H$$

لكن $HN/N \subset G/N$ ، G/N إبدالية فينتج أن HN/N إبدالية ، ومن ثم فإن H/H_1 إبدالية . ومن حيث إن N إبدالية ، $H_1 \subset N$ فينتج أن H_1 إبدالية .

تمارين عامة

(١) ليكن $f: G \rightarrow H$ هومومورفيزم زمر . برهن على أن :

$$(أ) \quad f \text{ مونومورفيزم} \Leftrightarrow [\text{هومومورفيزمين } \forall g, h: K \rightarrow G \text{ زمرة } \forall K] \quad fg = fh \Rightarrow g = h$$

$$(ب) \quad f \text{ إبيمورفيزم} \Leftrightarrow [\text{هومومورفيزمين } \forall g, h: H \rightarrow K \text{ زمرة } \forall K] \quad gf = hf \Rightarrow g = h$$

(٢) لتكن G زمرة دائرية رتبها n . اعتبر هومومورفيزم الزمر :
 $\hat{d}: G \rightarrow G$
 $x \mapsto x^d, d \in \mathbb{N}$

لتكن $G^d := \text{Im}(\hat{d}) \subset G$ (لا تخط هذه مع حاصل الضرب الكارتيزي!). برهن على أن :

$$G/G^d \cong \gcd(n, d)\mathbb{Z}$$

(٣) يقال لزمرة G إنها دائرية محلية (local cyclic) إذا كانت كل زمرة جزئية منتهية التولد (finitely generated) (أي عدد مولداتها منته) من G تكون دائرية. برهن على أن :

(أ) كل زمرة دائرية محلية تكون إبدالية .
 (ب) إذا كانت G دائرية محلية ، وكانت U زمرة جزئية من G فإن U ، G/U تكونان دائريتين محليتين .

(ج) كل زمرة دائرية تكون دائرية محلية .

(د) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ، دائريتان محليتان (بالنسبة لعملية الجمع)

(٤) لتكن G دائرية محلية ، وليكن $f, g: G \rightarrow G$ هومومورفيزمي زمر .
 برهن على أن : $fg = gf$.

(٥) ليكن $p > 2$ عدداً أولياً ، $n \geq 1$ عدداً طبيعياً ، ولتكن $G[p^n] := U(\mathbb{Z}/[p^n])$

(انظر مثال ٥٧ من أمثلة متنوعة). برهن على أن :

$$(أ) \quad k \geq 0 \Leftrightarrow (1+p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \pmod{p^{k+2}}$$

(ب) رتبة $(1+p)$ في $G[p^n]$ هي p^{n-1}

(إرشاد : استخدم (أ))

(٦) برهن على أنه لا يوجد تشاكل (أيزومورفيزم) بين $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ (زمرة كل الأعداد الكسرية (النسبية) التي أكبر من الصفر)

(٧) برهن على أن المجموعة xHx^{-1} زمرة جزئية من G لجميع $x \in G$ إذا كانت فقط إذا كانت H زمرة جزئية من G .

(٨) برهن على أنه لأي زمرة جزئية معكوسات عناصر مجموعة مشاركة يسرى تكون مجموعة مشاركة يمنى .

(٩) إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة G بحيث كان دليل H فى G هو 2 . فبرهن على أن كل مجموعة مشاركة يمنى (يسرى على الترتيب) تكون مجموعة مشاركة يسرى (يمنى على الترتيب)

(١٠) برهن على أن أية زمرة لا يمكن كتابتها كاتحاد زمرتين جزئيتين فعليتين

(١١) برهن على التبديلات على $\{1, 2, 3, 4\}$ التى تترك كثيرة الحدود $x_1x_2 + x_3 + x_4$ كما هى تكون زمرة جزئية من S_4 ، ورتبتها 4 .

(١٢) لتكن H زمرة جزئية من G ، وليكن $x, y \in G$. سنعرف العلاقة $x \sim y$ إذا كان $x^{-1}y \in H$. برهن على أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ على G وكذلك صف كل فصل تكافؤ .

(١٣) لتكن $S := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. نعرف $*$ على S كالآتى :

$$\forall a, b \in S : a * b := a + b + ab$$

أ) برهن على أن $(S, *)$ زمرة

ب) حل المعادلة $x * 3 = 7$ فى S

(١٤) ليكن $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. نعرف $*$ على $\mathbb{R}^*$ كالآتى :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^* : a * b := |a|b$$

أ) برهن على أن $*$ هى عملية تشاركية (إدماجية ، جمعية) على $\mathbb{R}^*$

ب) برهن على أنه يوجد عنصر محايد أيسر بالنسبة إلى $*$ (أى أنه يوجد $x \in \mathbb{R}^*$ بحيث $\forall a \in \mathbb{R}^* : x * a = a$) ، كما أنه يوجد معكوس أيمن لكل عنصر فى $\mathbb{R}^*$ (أى أنه

يوجد $b \in \mathbb{R}^*$ بحيث $a * b = x$)

ج) هل $(\mathbb{R}^*, *)$ زمرة ؟

د) علام يدل هذا المثال ؟

(١٥) بواسطة ضرب مثال برهن على أنه يمكن أن يكون للمعادلة $x^2 = e$ أكثر من حلين في زمرة G عنصرها المحايد e .

(١٦) أى هذه الرواسم يكون تبديلاً على $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) := x + 1 \quad , \quad f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (أ)$$

$$f_2(x) := x^2 \quad , \quad f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ب)$$

$$f_3(x) := -x^3 \quad , \quad f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (جـ)$$

$$f_4(x) := e^x \quad , \quad f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (د)$$

$$f_5(x) := x^3 - x^2 - 2x \quad , \quad f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (هـ)$$

(١٧) عين أى العبارات الآتية يكون صحيحاً أو خاطئاً :

(أ) التبديل (permutation) هو راسم واحد لواحد (one - to - one)

(ب) الراسم يكون تبديلاً إذا كان فقط إذا كان واحداً لواحد .

(جـ) أى راسم من مجموعة منتهية على (onto) نفسها يكون واحداً لواحد .

(د) كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية تكون إبدالية .

(هـ) كل عنصر فى زمرة يولد زمرة جزئية دائرية "داخل" الزمرة .

(و) الزمرة المتماثلة $S_{10} (= \gamma_{10})$ تتكون من عشرة عناصر .

(ز) الزمرة المتماثلة S_3 دائرية .

(ح) كل زمرة تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع زمرة تبديلات .

(١٨) اوجد عدد مولدات الزمر الدائرية من الرتب 6 ، 8 ، 12 ، 60 .

(١٩) اوجد عدد العناصر فى كل من الزمر الآتية :

(أ) الزمرة الجزئية الدائرية فى $\mathbb{Z}_{30}$ المتولدة من 25

(ب) الزمرة الجزئية الدائرية فى $\mathbb{Z}_{12}$ المتولدة من 30

(جـ) الزمرة الجزئية الدائرية $[i]$ فى الزمرة $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

(د) الزمرة الجزئية الدائرية فى الزمرة $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ والمتولدة من $(1+i)/\sqrt{2}$

(هـ) الزمرة الجزئية الدائرية فى الزمرة $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ والمتولدة من $1+i$

(٢٠) فى كل من الزمر الآتية اوجد جميع الزمر الجزئية :

$$\mathbb{Z}_{12} \quad (أ) \quad \mathbb{Z}_{36} \quad (ب) \quad \mathbb{Z}_8 \quad (د)$$

- (٢١) عين أى التقريرين الآتيين يكون صحيحاً أو خاطئاً
 (أ) كل زمرة إبدالية تكون دائرية .
 (ب) كل عنصر فى زمرة دائرية يولد الزمرة
 (٢٢) اضرب مثلاً مضاداً للتقرير الآتى : "إذا كانت كل زمرة جزئية فعلية من الزمرة G دائرية ، فإن G تكون دائرية" .
 (٢٣) إذا كان p, q عددين أوليين فاوجد عدد مولدات الزمرة الدائرية $\mathbb{Z}_{pq}$
 (٢٤) ليكن p عدداً أولياً . كم عدد مولدات الزمرة الدائرية $\mathbb{Z}_p$ حيث $r \geq 1$ عدد صحيح
 (٢٥) عين أى العبارات الآتية يكون صحيحاً أو خاطئاً :
 (أ) كل زمرتين من الرتبة 3 تكونان متشاكلتين (أيزومورفيزميتين)
 (ب) بدون حساب الأيزومورفيزمات هناك زمرة دائرية واحدة من رتبة منتهية .
 (جـ) لايمكن أن يوجد أيزومورفيزم (تشاكل) بين زمرة جمعية (أى عملياتها هى الجمع) ، وزمرة ضربية (أى عملياتها هى الضرب)
 (د) $(\mathbb{R}, +)$ أيزومورفية مع زمرة تبديلات
 (٢٦) لتكن $(G, .)$ زمرة . اعتبر العملية $*$ المعرفة على المجموعة G كالاتى :
 $\forall a, b \in G: a * b := b.a$
 برهن على أن $(G, *)$ زمرة وهى متشاكلة (أيزومورفية) مع $(G, .)$
 (ارشاد : اعتبر الراسم :
 $\varphi: G \rightarrow G$
 $a \mapsto a^{-1}$
 (٢٧) لتكن $(S, *)$ زمرة الأعداد الحقيقية فيما عدا -1 مع العملية $*$ ، معرفة كالاتى :
 $a * b = a + b + ab$. برهن على أن $(S, *)$ متشاكلة مع $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ (عرف أيزومورفيزماً
 (تشاكلاً) $\psi: \mathbb{R}^* \rightarrow S$ ($\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
 (٢٨) بدون حساب الأيزومورفيزمات ، كم عدد الزمر ذات الرتبة 17 ؟
 (٢٩) برهن على أن أى زمرة تحتوى على عنصرين على الأقل وليس لها زمر جزئية فعلية تكون منتهية ، ورتبتها عدد أولى
 (٣٠) حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صائبة أو خاطئة :
 (أ) كل زمرة جزئية من أية زمرة لها مجموعة مشاركة يسرى

(ب) عدد المجموعات المشاركة اليسرى بالنسبة لزمرة جزئية من زمرة منتهية يقسم رتبة الزمرة

(ج) كل زمرة ذات رتبة هي عدد أولى تكون إبدالية

(د) لا يمكن الحصول على مجموعات مشاركة يسرى بالنسبة إلى زمرة جزئية منتهية في زمرة غير منتهية

(هـ) فقط الزمر الجزئية في الزمر المنتهية يكون لها مجموعات مشاركة يسرى

(و) الزمرة الجزئية في زمرة هي مجموعة مشاركة يسرى بالنسبة إلى نفسها .

(ز) كل زمرة منتهية تحتوى على عنصر من كل رتبة تقسم رتبة الزمرة

(ح) كل زمرة دائرية منتهية تحتوى على عنصر من كل رتبة تقسم رتبة الزمرة

(٣١) إذا كانت G زمرة ذات رتبة منتهية ، وكانت K, H زمريتين جزئيتين في G بحيث إن $H \subset K \subset G$ ، فبرهن على أن:

$$[G : H] = [G : K] \cdot [K : H]$$

(٣٢) أكمل الجمل الآتية :

(أ) زمرة القسمة $\mathbb{Z}_6/[3]$ رتبتهما _____

(ب) رتبة المجموعات المشاركة $[4] + 5$ في زمرة القسمة $\mathbb{Z}_{12}/[4]$ هي _____

(ج) رتبة المجموعة المشاركة $[12] + 26$ في زمرة القسمة $\mathbb{Z}_{60}/[12]$ هي _____

(٣٣) حدد أى التقارير الآتية يكون صواباً وأيها يكون خطأ :

(أ) يمكن فقط أن يكون هناك معنى لزمرة القسمة G/N إذا كانت فقط إذا كانت N

زمرة جزئية طبيعية من G

(ب) كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية G تكون زمرة جزئية طبيعية من G

(ج) أى أوتومورفيزم داخلى لزمرة إبدالية يكون هو راسم الوحدة

(د) زمرة القسمة لزمرة منتهية تكون كذلك منتهية

(هـ) يقال لزمرة إنها زمرة التواء (torsion group) إذا كان كل عنصر فيها له رتبة

منتهية . كل زمرة قسمة لزمرة التواء تكون كذلك زمرة التواء

(و) يقال لزمرة إنها خالية من الالتواء (free torsion group) إذا كانت رتب جميع عناصرها خلا العنصر المحايد غير منتهية

كل زمرة خالية من الالتواء تكون أى زمرة من زمر قسمتها خالية من الالتواء كذلك

(ز) كل زمرة قسمة لزمرة إبدالية تكون زمرة إبدالية

(ح) $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ زمرة دائرية رتبته n حيث $n\mathbb{R} = \{nr | r \in \mathbb{R}\}$ ، $\mathbb{R}$ تحت عملية الجمع .

(٣٤) برهن على أن مجموعة جميع $g \in G$ (حيث G زمرة) بحيث إن $\varphi_g : G \rightarrow G$

هو أوتومورفيزم الوحدة الداخلى 1_g تكون زمرة جزئية طبيعية فى الزمرة G

(٣٥) احسب زمرة الإبداليات (الزمرة المشتقة) G' للزمرة D_4 (زمرة التماثلات على

المربع) (انظر أمثلة ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٨ من الأمثلة المتنوعة)

(٣٦) يقال لزمرة إنها بسيطة (simple) إذا لم تحتو من الزمر الجزئية الطبيعية إلا التافهة

برهن على أنه إذا احتوت زمرة منتهية G على زمرة جزئية دليلها 2 فإن G لا يمكن

أن تكون بسيطة

(٣٧) برهن على أنه إذا كانت H ، N زمريتين جزئيتين فى زمرة G ، وكانت N زمرة

جزئية طبيعية فى G فإن $H \cap N$ تكون طبيعية فى H . اعط مثالا لبيان أن $H \cap N$

ليست بالضرورة طبيعية فى G

(٣٨) برهن على أنه إذا كانت N زمرة جزئية طبيعية فى G ، وكانت H زمرة جزئية

فى G فإن $NH = HN$. وإذا كانت H كذلك زمرة جزئية طبيعية فى G فإن HN تكون

زمرة جزئية طبيعية فى G .

(٣٩) هل هناك معنى للحديث عن أصغر زمرة جزئية طبيعية فى زمرة بحيث تحتوى

على مجموعة من الزمرة ؟ ولماذا ؟

(٤٠) برهن على أن زمرة الأوتومورفيزمات الداخلية لزمرة G تكون زمرة جزئية طبيعية

من زمرة الأوتومورفيزمات على G تحت عملية تحصيل الرواسم (انظر (١-٤-٤))

(٤١) برهن على أنه إذا كانت زمرة G منتهية تحتوى بالضبط على زمرة جزئية واحدة

H من رتبة معينة فإن H تكون زمرة جزئية طبيعية فى G .

(٤٢) لتكن G زمرة تحتوى على الأقل على زمرة جزئية ذات رتبة منتهية s . برهن

على أن تقاطع جميع الزمر الجزئية فى G من الرتبة s يكون زمرة جزئية طبيعية من G

(٤٣) برهن على أن الراسم $\varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ هو مومورفيزم و اوجد نواته $x \mapsto \cos x + i \sin x$

(٤٤) حدد أى التقارير الآتية يكون صحيحاً أو خاطئاً :

- (أ) صورة زمرة مكونة من 6 عناصر بواسطة هومومورفيزم ربما تتكون من 4 عناصر
(ب) صورة زمرة مكونة من 6 عناصر بواسطة هومومورفيزم ربما تتكون من 12 عنصراً
(ج) يوجد هومومورفيزم من زمرة ذات 6 عناصر إلى زمرة ذات 12 عنصراً
(د) يوجد هومومورفيزم من زمرة ذات 6 عناصر إلى زمرة ذات 10 عناصر
(هـ) ليس من الممكن الحصول على هومومورفيزم من زمرة غير منتهية إلى زمرة منتهية

(و) يكون الهومومورفيزم أيزومورفيزماً (تشاكلاً) إذا اعتبرنا أن النطاق المصاحب هو الصورة ، وكانت النواة تتكون من العنصر المحايد فقط

(٤٥) لتكن G_1, G_2 زمريتين وليكن $\varphi: G_1 \rightarrow G_2, \psi: G_2 \rightarrow G_1$ هومومورفيزمين بحيث إن $\varphi \circ \psi: G_2 \rightarrow G_2, \psi \circ \varphi: G_1 \rightarrow G_1$ راسما الوحدة . برهن على أن كلاً من φ, ψ أيزومورفيزم لـ G_1, G_2 ، وأن $\varphi = (\psi)^{-1}$
(٤٦) لتكن G زمرة إبدالية منتهية لها الرتبة n ، وليكن r عدداً صحيحاً موجباً ، ليس بينه وبين n قواسم مشتركة سوى 1 .

(أ) برهن على أن الراسم $\varphi: G \rightarrow G$ هو أيزومورفيزم لـ G على نفسها $a \mapsto a^r$

(ب) استنتج أن المعادلة $x^r = a$ لها حل وحيد دائماً فى الزمرة الإبدالية المنتهية G إذا لم يكن بين r, n قواسم مشتركة سوى 1 . ماذا يحدث إذا كان هناك قاسم مشترك بين r, n غير 1 ؟

(٤٧) لتكن G, G' زمريتين ، ولتكن H, H' زمريتين جزئيتين طبيعيتين فى G, G' على الترتيب . ليكن φ هومومورفيزماً من G إلى G' . برهن على أن φ يستحدث

الهومومورفيزم الطبيعى $\varphi_*: G/H \rightarrow G'/H'$ إذا كان $\varphi(H) \subset H'$

(٤٨) اعتبر المجموعة $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. لتكن G زمرة لها العملية * المعرفة كالاتى:

$$\forall a, b \in G: \quad a * b \leq a + b \quad (أ)$$

(ب) $\forall a \in G: a * a = 0$

أنشئ جدول الزمرة (انظر ١-٢-٧)

(تسمى هذه الزمرة أحياناً زمرة نيم (Nim)

(٤٩) لتكن F تعنى انعكاساً في D_{10} ، R_α تعنى دوراناً بزاوية α . عبر عن العنصر

$(R_{36}F)^{-1}$ كحاصل ضرب ، بدون استخدام أسس سالبة (انظر مثال ٤٨)

(٥٠) إذا كانت G زمرة منتهية فبرهن على أنه يوجد عدد فردي من العناصر $x \in G$

التي تحقق $x^3 = e$ ، وأنه يوجد عدد زوجي من العناصر $x \in G$ التي تحقق $x^2 \neq e$

(٥١) برهن على أن المجموعة $\{5, 15, 25, 35\}$ تحت عملية الضرب مقياس 40

تكون زمرة . ما عنصر الوحدة فيها ؟ هل هناك علاقة بينها وبين الزمرة $U(8)$ ؟

(٥٢) ليكن الجدول الآتي جدول زمرة . املأ الأماكن الخالية :

	e	a	b	c	d
e	e	-	-	-	-
a	-	b	-	-	e
b	-	c	d	e	-
c	-	d	-	a	b
d	-	-	-	-	-

(٥٣) العددان 5 ، 15 ضمن تجمع من 12 عدداً صحيحاً تكون جميعاً زمرة تحت عملية

الضرب مقياس 56 . اوجد باقي الأعداد

(٥٤) برهن على أن الزمرة G إبدالية إذا كان فقط إذا كان لكل $a, b \in G$:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

(٥٥) برهن على أن مجموعة الأعداد $3^m 6^n$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$ تكون زمرة تحت عملية الضرب

(٥٦) برهن على أن مجموعة المصفوفات من النوع 3×3 ذات العناصر من الأعداد

الحقيقية والتي على الصورة :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تكون زمرة مع عملية الضرب المعرفة كالآتي :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+a' & b'+ac'+b \\ 0 & 1 & c'+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(تسمى هذه الزمرة زمرة هايزنبرج نسبة إلى عالم الفيزياء الألماني فرنر هايزنبرج Werner Heisenberg صاحب جائزة نوبل للعلوم سنة ١٩٣٢، ولها علاقة وثيقة بمبدأ الاحتمية لهايزنبرج في ميكانيكا الكم (Heisenberg Uncertainty Principle of Quantum Physics))

(٥٧) برهن على أن $U(20)$ ليست دائرية

(٥٨) اوجد زمرة يتحقق لعنصرين فيها a ، b الآتي : $Ord(a)=Ord(b)=2$ بينما :

(أ) $Ord(ab)=3$ (ب) $Ord(ab)=4$ (ج) $Ord(ab)=5$

هل توجد علاقة ما بين $Ord(a)$ ، $Ord(b)$ ، $Ord(ab)$ ؟

(٥٩) لتكن G زمرة. برهن على أن : $Z(G)=\bigcap_{a \in G} C(a)$ (انظر مثال ٥٤ من أمثلة متنوعة)

(متنوعة)

(٦٠) اوجد أصغر زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ تحتوى على :

(أ) 8 ، 14 (أى هى $[8, 14]$) (ب) 8 ، 13

(ج) 6 ، 15 (د) n ، m

فى كل حالة اوجد عدد صحيحاً k بحيث تكون الزمرة الجزئية هى $[k]$

(٦١) لتكن $H := \{x \in U(20) \mid x \equiv 1 \pmod{3}\}$. هل H زمرة جزئية من $U(20)$ ؟

(٦٢) لآى عدد صحيح موجب n ولأية زاوية θ برهن على أنه فى زمرة المصفوفات

من النوع 2×2 وعناصرها من $\mathbb{R}$ ومحددها $= 1$ يكون :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

استخدم هذه الصيغة لحساب رتبة :

$$\begin{bmatrix} \cos \sqrt{2}^0 & -\sin \sqrt{2}^0 \\ \sin \sqrt{2}^0 & \cos \sqrt{2}^0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos 60^0 & -\sin 60^0 \\ \sin 60^0 & \cos 60^0 \end{bmatrix}$$

(هندسياً تمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ دوراناً في المستوى بزاوية θ)

(٦٣) $U(15)$ تحتوي على 6 زمر جزئية دائرية . اوجدها

(٦٤) D_4 تحتوي على 7 زمر جزئية دائرية . اوجدها . اوجد كذلك زمرة جزئية من D_4 رتبته 4 تكون غير دائرية

(٦٥) لتكن H زمرة جزئية طبيعية من K ، K زمرة جزئية طبيعية من G . برهن أو انف : H زمرة جزئية طبيعية من G

(٦٦) اضرب مثلاً لزمرة غير إبدالية تكون كل زمرة الجزئية زمراً جزئية طبيعية

(٦٧) برهن بالاستقراء الرياضى على أنه إذا كان $H_i \triangleleft G, i=1,2,\dots,k$ فإن $H_1 H_2 \dots H_k \subset G$ زمرة جزئية . $(H_1 H_2 \dots H_k := \{h_1 h_2 \dots h_k \mid h_i \in H_i\})$ (تنكر أن $N \triangleleft G$ تعنى N زمرة جزئية طبيعية في G)

(٦٨) فى المسألة السابقة مباشرة برهن أو انف : $H_1 H_2 \dots H_k \triangleleft G$ (انظر مثال ٤٢ من أمثلة متنوعة)

(٦٩) احصل على صورة هومومورفية (homomorphic image) رتبته 4 فى الزمرة الثمانية (مثال ٤٥ من أمثلة متنوعة)

(ارشاد : الزمرة الثمانية $H := \{e, a^2\} \triangleleft G$ ، الصورة الهومومورفية هى G/H بواسطة الهومومورفيزم الطبيعى هى الصورة المنشودة)

(٧٠) إذا كان f أوتومورفيزماً للزمرة G بحيث إن $f(x) = x^{-1}$ لجميع $x \in G$ ، فبرهن على أن G إبدالية

(٧١) لتكن G زمرة إبدالية منتهية رتبته n ، وليكن m عدداً صحيحاً موجباً ،

$gcd(m,n) = 1$. برهن على أن الراسم $f: G \rightarrow G$ أوتومورفيزم .
 $x \mapsto x^m$

(٧٢) إذا كانت $G := S_3$ فبرهن على أن G تكون أيزومورفية (متشاكلة) مع زمرة الأوتومورفيزمات الداخلية لـ G

(إرشاد : انظر مثال ٤٩ من أمثلة متنوعة)

(٧٣) إذا كان $Ord(a) = 30$ فكم عدد المجموعات المشاركة اليسرى لـ $[a^4]$ في $[a]$ ؟ اسرد هذه المجموعات .

(٧٤) اوجد زمرة غير منتهية تحتوى على زمرة جزئية منتهية .

(٧٥) برهن على أن الزمر الوحيدة التي لا تحتوى على زمر جزئية فعلية هي الزمر الدائرية التي رتبها أعداد أولية أو الزمرة التي تتكون من العنصر المحايد فقط .

(٧٦) إذا كانت A مجموعة جزئية ليست بالضرورة زمرة جزئية من الزمرة G ، فيمكن كذلك تعريف مطبع A كما سبق أن عرفنا فى حالة A زمرة جزئية من G . برهن على أنه إذا كانت A مجموعة جزئية من G فإن $Nor(A)$ يكون أيضاً زمرة جزئية من G . وبرهن كذلك على أنه إذا كانت A زمرة جزئية من G فإن $A \triangleleft G$ إذا كان فقط إذا كان $N(A) = G$ (٧٧) برهن على أنه إذا كانت G متشاكلة مع $(G \cong H)H$ فإن $G' \cong H'$ ، $Z(G) \cong Z(H)$ (انظر مثالى ٤٩ ، ٥١ من أمثلة متنوعة)

(٧٨) ليكن لدينا $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ، $N = \{-1, 1\}$. ولتكن H هي الزمرة المتولدة من $\{\frac{1}{2}\}$.

اوجد HN/N ، ومن ثم حقق النظرية الأولى للأيزومورفيزم $HN/N \cong H/(H \cap N)$

(٧٩) لتكن H, K زمريتين جزئيتين من G ، N زمرة جزئية طبيعية من G ،

$$HN = KN \quad \text{برهن على أن} \quad H/(H \cap N) \cong K/(K \cap N)$$

(٨٠) لتكن G زمرة ، $N_1 \triangleleft G$ ، $N_2 \triangleleft N_1$ ، ولتكن G/N_1 ، N_1/N_2 ، N_2 إبدالية .

ولتكن H زمرة جزئية من G . برهن على أنه توجد زمر جزئية H_1, H_2 من G بحيث يكون $H_1 \triangleleft H$ ، $H_2 \triangleleft H_1$ ، H/H_1 ، H_1/H_2 ، H_2 كلها إبدالية .

(٨١) فسر بطريقتين مختلفتين لماذا $\mathbb{Z}_4$ ليست متشاكلة مع زمرة كلاين الرباعية

(٨٢) لتكن G زمرة دائرية، ولها المولد a . وليكن $\varphi: G \rightarrow G'$ تشاكلاً (أيزومورفيزماً) .

برهن على أنه لأي $x \in G$ يكون $\varphi(x)$ متحداً تماماً بـ $\varphi(a)$

(٨٣) عين عدد الأوتومورفيزمات لـ $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{17}$

(إرشاد : استخدم التمرين ٨٢ السابق مباشرة)

(٨٤) لتكن G زمرة دائرية تتألف من n من العناصر ، وتتولد من a . ليكن

$b = a^s \in G$. برهن على أن b يولد زمرة جزئية دائرية $H \subset G$ تتكون من $\frac{n}{d}$

عنصراً ، حيث d هو القاسم المشترك الأعظم لـ s, n .

(٨٥) برهن على أن : $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U(n)$ لكل n عدد طبيعي موجب

1 Group Theory نظرية الزمر



زمر التبديلات Permutation Groups

١-٢ المفاهيم الأساسية

١-١-٢ تعريف : يقال لزمرة ما إنها زمرة تبديلات permutation group

إذا كانت زمرة جزئية من زمرة متماثلة

وكما جاء في (١-٢-٥) فإن $\gamma(X)$ هي الزمرة المتماثلة على المجموعة غير الخالية X ، بينما γ_n هي الزمرة المتماثلة على مجموعة مكونة من n من العناصر . وقد ذكرنا من قبل أن كثيراً من المراجع تستخدم الرمز S_n بدلاً من γ_n .

٢-١-٢ نظرية كيلي Cayley's Theorem

كل زمرة تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع زمرة تبديلات

البرهان : لتكن G زمرة

$$\forall a \in G : \ell_a : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto ax$$

الراسم :

هو النقل الأيسر (The left translation) حول a .

$$\ell : G \rightarrow \gamma(G)$$

$$a \mapsto \ell_a$$

الراسم :

هومومورفيزم (انظر (١-٣-٨) مثال ٣)

$$Ker(\ell) = \{a \in G : \ell_a = 1_G \in \gamma(G)\} \quad (1_G \text{ هو راسم الوحدة على } G)$$

$$= \{a \in G : \ell_a(x) = 1_G(x) \quad \forall x \in G\}$$

$$= \{a \in G : ax = x \quad \forall x \in G\}$$

$$= \{e\} \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G)$$

$$\Rightarrow \text{راسم احادى } \ell \text{ inj}$$

$$(1) \quad ٥-٣-١$$

ومن ثم فإن $\ell(G)$ تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع زمرة جزئية من $\gamma(G)$.

٣-١-٢ نظرية : رتبة $(\gamma_n) = n! = (Ord(\gamma_n))$

البرهان : بالاستقراء الرياضى . سنبرهن هنا على أنه إذا كا لدينا مجموعتان A, B كل

منهما تتكون من n من العناصر ، فإن عدد التناظرات الأحادية من A إلى B هو $n!$.

وسيكون الاستقراء على n .

عند $n = 1$: واضح أنه يوجد بالضبط تناظر أحادي واحد من A إلى B . نفترض أن الادعاء صحيح للمجموعتين اللتين تتكون كل منهما من $n - 1$ من العناصر .

والآن لتكن $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ ، $B := \{b_1, \dots, b_n\}$. ولتكن $A_i := A \setminus \{a_i\}$ ، $B_i := B \setminus \{b_i\}$. إذا كان φ تناظراً أحادياً من A إلى B بحيث إن $\varphi(a_n) = b_i$ فإن :

$$\varphi' : A_n \ni a \mapsto \varphi(a) \in B_i$$

سيكون تناظراً أحادياً من A_n إلى B_i . وبالعكس فإن كل تناظر أحادي $\varphi' : A_n \rightarrow B_i$ يمكن أن يمتد كالاتي :

$$\varphi(a) := \varphi'(a) , \quad a \in A_n$$

$$\varphi(a_n) = b_i$$

فيصبح تناظراً أحادياً $\varphi : A \rightarrow B$. ومن فرض الاستقراء الرياضي يكون هناك $(n - 1)!$ تناظراً أحادياً من A_n إلى B_i ، وبالتالي يكون هناك $(n - 1)!$ تناظراً أحادياً من A إلى B بحيث إن $\varphi(a_n) = b_i$. ومن حيث إن هذا يتحقق لكل $i = 1, \dots, n$ ، فإن عدد كل التناظرات الأحادية من A إلى B يكون $n! = n(n - 1)!$

٢-١-٤ تعريف : لتكن X مجموعة غير خالية ، $\gamma(X)$ هي الزمرة المتمثلة على X . يسمى العنصر π في $\gamma(X)$ **دورة** (cycle) (منتهية (finite)) ، عندما توجد عناصر عددها منته $x_1, \dots, x_m$ بحيث إن :

$$\pi(x_i) = x_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\}, \pi(x_m) = x_1,$$

$$\pi(x) = x \quad \forall x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$$

وسنكتب $\pi = (x_1, \dots, x_m)$ ، ونسمى m **طول** (The length) **الدورة** . ويقال للدورة التي طولها

2 إنها **نقطة** أو **تحويل** (transposition) ويقال لدورتين $(x_1, \dots, x_m)$ ، $(y_1, \dots, y_n)$ إنهما **منفصلتان** (disjoint) إذا كانت المجموعتان $\{x_1, \dots, x_m\}$ ، $\{y_1, \dots, y_n\}$ منفصلتين .

٢-١-٥ نظرية : كل تبديلة $\sigma \neq 1$ (1 هو عنصر الوحدة في زمرة التبديلات) على مجموعة X تكون تركيباً $\gamma_1 \dots \gamma_k$ من دورات منفصلة γ_i ، كل منها طولها 2 أو أكثر . وفيما عدا تغيير ترتيب هذه الدورات فإن σ لها تركيب وحيد .

البرهان : يعرف **المسار** (orbit) C لنقطة $x \in X$ تحت تأثير التبديلة σ بأنه المجموعة

$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}$ لجميع صور x تحت تأثير القوى σ^i لـ σ ومثل هذا المسار يكون منتهياً ، ولهذا سنصل حتماً إلى $\sigma^n(x) = \sigma^{n+k}(x)$ لعددتين صحيحين موجبين n, k . ومن ثم فبتطبيق σ^{-n} نحصل على : $\sigma^k(x) = x$ ، وإذا كان m أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون $\sigma^m(x) = x$ ، فإن المسار يتكون بالضبط من m من النقط المختلفة $C = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{m-1}(x)\}$. وكذلك فإن كل نقطة $\sigma^i(x)$ في هذه المجموعة C لها نفس المسار (نفس النقط في ترتيب دورى مختلف) . التبديلة σ محددة على هذه المجموعة الجزئية $C \subset X$ هي تبديلة دورية $\sigma = (x \ \sigma(x) \dots \sigma^{m-1}(x))$ لها الطول m .

كل نقطة $x \in X$ تنتمى إلى مسار واحد بالضبط لـ σ . ليكن هناك k من المسارات $C_1, \dots, C_k$ لـ σ ، و σ محددة على كل C_i هي تبديلة دورية γ_i . علاوة على هذا فإنه إذا كان $i \neq j$ فإن الدوريتين γ_i, γ_j تكونان منفصلتين . التركيب $\gamma_1 \dots \gamma_k$ من هذه الدورات المنفصلة هو تبديلة على X ، لها نفس التأثير على نقطة $x \in X$ مثلما تفعل σ لأن $\sigma(x)$ هي $\gamma_i(x)$ إذا كانت x تنتمى إلى المسار C_i . ومن ثم فإن σ هي التركيب $\gamma_1 \dots \gamma_k$ من الدورات المنفصلة . في هذا التركيب أى دورة لها الطول 1 أى هي نقطة ثابتة يمكن أن تحذف .

وعلى الجانب الآخر فإنه لأى تركيب $\sigma = \beta_1 \dots \beta_t$ لـ σ فى صورة دورات منفصلة β_j تكون "الحروف" المتحركة بدورة β_j أحد المسارات C_i لـ σ ، ومن ثم فإن β_j هي الدورة المناظرة γ_i فى التركيب السابق $\gamma_1 \dots \gamma_k$. ومن ثم فإن أى تركيبين يختلفان فقط فى ترتيب العوامل .

٢-١-٦ استنتاج : رتبة أى تبديلة هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال دوراتها المنفصلة .

البرهان : فى التمثيل الدورى $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$ الـ γ_i تكون منفصلة ، وهكذا فإن $\sigma^m = 1$ ، ومن ثم فإنه لأى عدد صحيح $m : \sigma^m = \gamma_1^m \dots \gamma_k^m$ ومن ثم فإن $\sigma^m = 1$ إذا كان فقط إذا كان أى $(\gamma_i)^m = 1$ ، ومن ثم إذا كان فقط إذا كان m مضاعفاً مشتركاً لأطوال هذه الدورات γ_i . رتبة σ هي أصغر مثل هذه الـ m . وهى النتيجة المطلوبة . (قارن مع (١-١١-١))

٧-١-٢ تعريف : لنكن τ تبديلة في الزمرة المتماثلة S_n . عندئذ فإن الراسم $\varphi: \sigma \mapsto \tau\sigma\tau^{-1}$ لكل $\sigma \in S_n$ يكون أوتومورفيزماً لـ S_n لأن :

$$\varphi(\sigma_1\sigma_2) = \tau\sigma_1\sigma_2\tau^{-1} = \tau\sigma_1\tau^{-1}\tau\sigma_2\tau^{-1} = \varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)$$

أى أن φ هومومورفيزم . كذلك فإن الراسم العكسى لـ φ هو

$$\psi: \sigma \mapsto \tau^{-1}\sigma\tau$$

لأن

$$\psi \circ \varphi(\sigma) = \psi(\varphi(\sigma)) = \psi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \tau^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}\tau = \sigma,$$

$$\varphi \circ \psi(\sigma) = \varphi(\psi(\sigma)) = \varphi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \tau\tau^{-1}\sigma\tau\tau^{-1} = \sigma,$$

يسمى هذا الراسم (الأوتومورفيزم) **ترافق بـ τ** (conjugate by τ) (انظر (٧-٣-١))

٨-١-٢ نظرية :

إذا كانت $\gamma \in S_n$ دورة لها الطول m فإن أى ترافق $\tau\gamma\tau^{-1}$ لـ γ يكون له نفس الطول.
البرهان : إذا كانت γ هى الدورة $\gamma = (x_1, \dots, x_m)$ فإننا سنبرهن على أن $\tau\gamma\tau^{-1}$ هى الدورة :

$$\tau(x_1 x_2 \dots x_m)\tau^{-1} = (\tau(x_1)\tau(x_2)\dots\tau(x_m)) \quad (*)$$

لنكن $\tau\gamma\tau^{-1}$ مؤثرة على أى "حرف" y . كذلك فإن $y = \tau(\tau^{-1}(y))$. إذا كانت $x = \tau^{-1}(y)$ ليست واحدة من الـ x_i 's فإن التأثير $\tau\gamma\tau^{-1}$ على y يكون $\tau(x) \mapsto x \mapsto x \mapsto \tau(x)$ ، بينما إذا كانت $x = x_i$ كانت $x = x_i$ فإن التأثير يكون كالاتى : $\tau(x_i) \mapsto x_i \mapsto x_{i+1} \mapsto \tau(x_{i+1})$. وهذا بالضبط التأثير للدورة المكتوب فى الطرف الأيمن من (*) .

الترافق $\tau\gamma\tau^{-1}$ لأى تبديلة σ يمكن حسابه : اكتب σ كحاصل الضرب $\gamma_1 \dots \gamma_k$ لدورات منفصلة . لأن كل ترافق هو أوتومورفيزم ، $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau\gamma_1\tau^{-1}) \dots (\tau\gamma_k\tau^{-1})$ ، وكل دورة فى الطرف الأيمن يمكن التعبير عنها كما جاء فى (*) ، فهكذا يمكن حساب الترافق . بعبارة أخرى لكى نرافق σ لـ τ ، نطبق الدالة τ على كل حرف فى تمثيل الدورات المنفصلة لـ σ .

٩-١-٢ نظرية : أى تبديلة σ على $\{1, \dots, n\}$ هى تركيبة من النقلات (التحويلات)

البرهان : نظراً لأن σ هى تركيبة $\gamma_1 \dots \gamma_k$ من الدورات γ_i 's ، يكفى أن نثبت المطلوب لدورة ، وذلك كالاتى :

$$(1 \ 2 \ \dots \ m) = (1 \ m) \dots (1 \ 3) (1 \ 2)$$

والآن سنقسم التبديلات على $\{1, \dots, n\}$ إلى قسمين: زوجي ، فردي . نعتبر المجموعة D المكونة من كل الأزواج المرتبة $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ حيث $i < j$ ، ونقول إن التبديلة $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ تعكس الزوج $(i, j) \in D$ إذا كان $\sigma(i) > \sigma(j)$. ولتكن $\text{sgn}(\sigma)$ تشير إلى العدد الكلي لهذه الانعكاسات لـ σ ، ونسمى $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)}$ **صنف** σ ، ويقال إن σ زوجية إذا كان $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = +1$ ويقال إنها فردية إذا كان $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = -1$. بعبارة أخرى فإن σ تكون فردية إذا عكست عدداً فردياً من الأزواج المرتبة . وعلى سبيل المثال فإن صورة $3 \ 4 \ 5 \ 6$ بـ $(3 \ 6)$ هي $6 \ 5 \ 4 \ 3$ ، وهكذا فإن $(3 \ 6)$ عكست الأزواج المرتبة $(3, 4)$ ، $(3, 5)$ ، $(3, 6)$ ، $(4, 6)$ ، $(5, 6)$. وبصفة عامة فإن النقلة (التحويلة) $(h \ k)$ حيث $h < k$ تعكس الأزواج (h, k) وكل الأزواج (h, i) ، (i, k) حيث $h < i < k$ فقط . وبالتالي فإن أى **نقطة (تحويلة) تكون فردية**. لاحظ أن صنف σ هو $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = \pm 1$ عنصر من الزمرة الضربية

(The multiplicative group) $\{+1, -1\}$ (الدائرية ذات الرتبة 2) .

١٠-١-٢ نظرية : الراسم $\sigma \mapsto (-1)^{\text{sgn}(\sigma)}$ الذى يرسم كل تبديلة فى صنفها هو هومومورفيزم زمر $S_n \mapsto \{+1, -1\}$.

البرهان : العدد $\text{sgn}(\sigma)$ يحدد عدد الأزواج (i, j) فى المجموعة D (مجموعة كل الأزواج (i, j) فى $\{1, \dots, n\}$) حيث $i < j$ ، التى تعكسها σ . هذا يتضمن تطبيق σ على المجموعة D للحصول على المجموعة $\sigma(D)$ لكل الأزواج $(\sigma(i), \sigma(j))$ حيث $i < j$. أيضاً لكل $k < \ell$ فى $\{1, \dots, n\}$ المجموعة $\sigma(D)$ يجب أن تحتوى على واحد بالضبط من الزوجين (k, ℓ) ، (ℓ, k) . والآن نطبق مرة أخرى التبديلة τ على $\sigma(D)$ لنحصل على المجموعة $\tau(\sigma(D))$ التى تحتوى إما على $(\tau(k), \tau(\ell))$ وإما على $(\tau(\ell), \tau(k))$. فى كلتا الحالتين هذا الزوج سينعكس بالضبط (من ترتيبه فى $\sigma(D)$) عندما ينعكس الزوج (k, ℓ) بـ τ . وهكذا فإن τ تعكس $\text{sgn}(\sigma)$ من الأزواج فى $\sigma(D)$ ، بحيث إن المسار $D \rightarrow \sigma(D) \rightarrow \tau(\sigma(D))$ يعكس $\text{sgn}(\sigma) + \text{sgn}(\tau)$ من الأزواج . بعض هذه الأزواج ربما انعكس مرتين وهكذا عاد

إلى أصله . وعلى الجانب الآخر فإن المسار المباشر $D \rightarrow (\tau\sigma)(D)$ يعكس $\text{sgn}(\tau\sigma)$ من الأزواج . ومن ثم فإنه بكتابة هذا مقياس 2 (modulo 2) لحساب الأزواج التي انعكست مرتين يكون لدينا :

$$\text{sgn}(\tau\sigma) \equiv (\text{sgn}(\tau) + \text{sgn}(\sigma))(\text{mod } 2)$$

وهذا يؤدي إلى :

$$(-1)^{\text{sgn}(\tau\sigma)} = (-1)^{\text{sgn}(\tau)} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)}$$

ومن ثم فإن $\sigma \mapsto (-1)^{\text{sgn}(\sigma)}$ يكون هومومورفيزماً .

٢-١-١ نتيجة :

حاصل ضرب k من النقلات يكون فردياً أو زوجياً حسب k فردى أو زوجى . ونظراً لأن تبديلة σ يمكن أن تكتب بطرائق متعددة كحاصل ضرب نقلات (تحويلات) فإذا كان احد هذه التحليلات (factorizations) له عدد زوجى من النقلات فإن كل تحليل آخر يكون له عدد زوجى من النقلات .

وبالطبع فإن صنف أى تبديلة يمكن حسابه من تمثيل دوراته المنفصلة ، بمجرد معرفتنا صنف هذه الدورات .

$$(-1)^{\text{sgn}(\gamma)} = (-1)^{m-1} \text{ الدورة } \gamma \text{ التى لها الطول } m \text{ لها الصنف}$$

البرهان : من النظرية (٢-١-٩) الدورة $(1 \ 2 \dots m)$ هى حاصل ضرب $m-1$ من النقلات $(1 \ 2) \dots (1 \ m)$ ، كل منها فردى .

٢-١-٣ نتيجة : المجموعة A_n ($n > 1$) ، مجموعة كل التبديلات الزوجية على

$$\{1, 2, \dots, n\} \text{ هى زمرة جزئية من } S_n \text{ وعدد عناصرها } \frac{n!}{2}$$

(تسمى هذه الزمرة الزمرة المتغيرة (The alternating group) من الدرجة n)

البرهان : نظراً لأن $\sigma \mapsto (-1)^{\text{sgn}(\sigma)}$ هومومورفيزم فإن $\sigma \mapsto 1$ ، $\tau \mapsto 1$ يؤديان إلى $\sigma\tau \mapsto 1$. وهكذا فإن $A_n \subset S_n$ تكون مغلقة (closed) بالنسبة لعملية الضرب ومن ثم فيمثال ٤ من أمثلة متنوعة على الباب الأول تكون A_n زمرة جزئية من S_n . والآن لتكن عناصر A_n هى $\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_j, \dots$ ، اضرب كلاً منها فى تبديلة فردية مناسبة ، ولتكن $(1 \ 2)$ تحصل على $(1 \ 2)\sigma_1, \dots, (1 \ 2)\sigma_i, \dots, (1 \ 2)\sigma_j, \dots$ ، وكلها تبديلات فردية ، وكلها كذلك

مختلفة. ولكن كل تبديلة فردية ρ لها حاصل الضرب $\sigma_i(1\ 2) = \rho$ وهى زوجية ، وهكذا فإن $\rho = \sigma_i(1\ 2)$ وتكون ρ واحدة من المجموعة $\sigma_1(1\ 2)$ ، ... ، $\sigma_i(1\ 2)$. ونستنتج من هذا أن عدد التبديلات الفردية يساوى عدد التبديلات الزوجية يساوى نصف العدد الكلى $n!$ ، عدد التبديلات S_n .

٢-١-١٤ أمثلة محلولة :

مثال ١ : برهن على أنه إذا كانت α تبديلة معبراً عنها بعدد زوجى من النقلات أى كانت زوجية ، فإن كل تركيبة لـ α من حاصل ضرب نقلات ستكون متكونة من عدد زوجى من النقلات
(انظر (٢-١-١١) .

البرهان : لتكن $\alpha = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s$ ، $\alpha = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$ ، حيث β_i 's ، γ_j 's كلها نقلات . والآن $\beta_1\beta_2\ldots\beta_r = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s$ يقتضى أن $1 = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s\beta_r^{-1}\ldots\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}$ حيث 1 هو تبديلة الوحدة وهى زوجية (لماذا؟) . ومن حيث إن $\beta_i^{-1} = \beta_i$ لجميع i فإن $r + s$ يكون عدداً زوجياً ، ومن ثم فإن r ، s زوجيان معاً ، أو فرديان معاً .
مثال ٢ : برهن على الدورات المنفصلة تكون إبدالية .

البرهان : ليكن لدينا الدورتان المنفصلتان $\alpha = (a_1a_2\ldots a_m)$ ، $\beta = (b_1b_2\ldots b_n)$ من المجموعة $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ حيث الـ c 's هى عناصر S التى تبقى ثابتة تحت تأثير α ، β . والآن حتى نبرهن على أن $\alpha\beta = \beta\alpha$ فإنه ينبغى لنا أن نبرهن على أن $(\alpha\beta)(x) = (\beta\alpha)(x)$ لجميع $x \in S$. والآن لتكن $x = a_i$ فإن :

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)(a_i) &= \alpha(\beta(a_i)) = \alpha(a_i) = a_{i+1} \\ (\beta\alpha)(a_i) &= \beta(\alpha(a_i)) = \beta(a_{i+1}) = a_{i+1} \end{aligned} \quad (i = m \text{ إذا كان } a_1)$$

أى أنه

$$\forall a_i : (\alpha\beta)(a_i) = (\beta\alpha)(a_i)$$

وبالمثل فإن

$$\forall b_i : (\alpha\beta)(b_i) = (\beta\alpha)(b_i)$$

والآن لتكن $x = c_i$:

$$(\alpha\beta)(c_i) = \alpha(\beta(c_i)) = \alpha(c_i) = c_i,$$

$$(\beta\alpha)(c_i) = \beta(\alpha(c_i)) = \beta(c_i) = c_i$$

أى أن $\alpha\beta = \beta\alpha$ وهو المطلوب

مثال ٣ : عين إذا ما كانت التبديلات الآتية زوجية أو فردية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (٢)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad (٤)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (٣)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (٥)$$

الحل : (١) عدد الانعكاسات = 1 (2 سبق 1) + 1 (4 سبق 3)

$$2 =$$

التبديلة زوجية

(٢) عدد الانعكاسات = 4 (5 سبق 3 ، 2 ، 4 ، 1) + 2 (3 سبق 2 ، 1)

$$1 + (2 سبق 1) + (4 سبق 1)$$

$$8 =$$

التبديلة زوجية

(٣) عدد الانعكاسات = 2 (3 سبق 2 ، 1) + 3 (5 سبق 4 ، 1 ، 2)

$$1 + (2 سبق 1) + 0 + 1 (6 سبق 4)$$

$$7 =$$

التبديلة فردية

(٤) عدد الانعكاسات = 3 (4 سبق 3 ، 1 ، 2) + 2 (3 سبق 2 ، 1)

$$0 + 0 + 1 (6 سبق 5)$$

$$1 + (7 سبق 5) = 7$$

التبديلة فردية

طريقة أخرى للأجزاء الأربعة الأولى :

(١) التبديلة هي : $\sigma = (12)(34)$ وهذه تبديلة زوجية لأن صنفها $(\text{sgn}(\sigma))$ هو $(-1)^2$ أى 1

(٢) التبديلة هي : $(1\ 5)(2\ 3)$ ، كما فى (1) هى زوجية

(٣) التبديلة هي : $(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4)$ وهذه يمكن كتابتها كالاتى :

$$(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4) = (1\ 4)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 3)$$

وبهذا يكون صنفها $(-1)^5$ أى -1 ، أى هى فردية

كذلك يمكن التعبير عن التبديلة كالاتى

$$(4\ 1\ 3\ 2\ 5\ 6) \text{ وبالتالى هى كذلك}$$

$$(4\ 6)(4\ 5)(4\ 2)(4\ 3)(4\ 1)$$

وبالطبع هى فردية ، كما سبق

(٤) التبديلة هي :

$$(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6\ 7) \text{ . وهذه يمكن كتابتها كالاتى :}$$

$$(3\ 2)(3\ 4)(3\ 1)(5\ 7)(5\ 6) \text{ أو } (1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)(5\ 7)(5\ 6)$$

وهى فردية

(٥) التبديلة هي : $(1\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2)(1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2)$ وهى :

$$(1\ 2)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 3)(1\ 4)$$

أى أن التبديلة زوجية .

مثال ٤: برهن على أن : $A_n = S_n \Rightarrow n = 1$

(A_n, S_n معرفتان كما سبق)

البرهان : إذا كانت $n > 1$ فإن S_n ينبغى لها أن تحتوى على تبديلة تبادل 1 ، 2 وتبقى

كل "الحروف" الأخرى ثابتة . ومن ثم فإن هذه التبديلة تكون فردية ومن ثم فهى لا تنتمى

إلى A_n ، وبالتالى فإن $A_n \neq S_n$. إذن حتى تكون $A_n = S_n$ يجب أن تكون $n = 1$.

مثال ٥ : عين رتبة كل من التبديلات الآتية :

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6) \text{ (٢)}$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5\ 7) \text{ (١)}$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5\ 7\ 8) \text{ (٤)}$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5) \text{ (٣)}$$

الحل : من $(2-1-6)$ ينتج أن الرتب هى الآتية :

$$3 \times 4 = 12 : (4)$$

$$3 \times 2 = 6 : (3)$$

$$3 : (2)$$

$$3 : (1)$$

طريقة أخرى :

$$(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2)$$

في حالة (4)

$$(1\ 2\ 4)^3 = (1\ 2\ 4)(1\ 4\ 2) = 1$$

(1 راسم الوحدة على المجموعة {1, 2, 4, 3})

$$(3\ 5\ 7\ 8)(3\ 5\ 7\ 8) = (3\ 7)(5\ 8)$$

$$(3\ 7)(5\ 8)(3\ 7)(5\ 8) = 1$$

1 راسم الوحدة على المجموعة {3, 5, 7, 8}

وبالتالى فإن رتبة التبديلة هي :

$$3 \times 4 = 12$$

مثال ٦ : برهن على أن A_8 تحتوى على عنصر رتبته 15

البرهان : واضح أن هذا العنصر سيكتب على صورة حاصل ضرب دورتين منفصلتين إحداهما رتبته (طولها) = 5 ، والأخرى رتبته (طولها) = 3 . وينبغى أن تكون الدورتان زوجيتين معاً أو فرديتين معاً حتى يكون العنصر زوجياً فينتمى إلى A_8 . الدورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ أو باختصار } (1\ 2\ 3) \text{ زوجية لأن طولها (رتبتها) } = 3 \text{ (٢-١-١). الدورة}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ أو باختصار } (4\ 5\ 6\ 7\ 8) \text{ زوجية لأن طولها (رتبتها) } = 5$$

وحسب (٢-١-٦) تكون رتبة العنصر (4 5 6 7 8) (1 2 3) هي 15 .

مثال ٧ : هل تكون التبديلات الفردية زمرة جزئية من S_n ؟ ولماذا ؟

الحل : العنصر المحايد $1 \in S_n$ زوجى لأن عدد انعكاساته = الصفر . ومن ثم فإن العنصر المحايد 1 لاينتمى إلى مجموعة التبديلات الفردية فى S_n ، وبهذا لاتكون التبديلات الفردية زمرة جزئية من S_n .

مثال ٨ : ليكن n عدداً صحيحاً موجباً . هل الدورة التى طولها n حيث n عدد فردى تكون زوجية أم فردية؟ وهل الدورة التى طولها n حيث n عدد زوجى تكون زوجية أم فردية ؟

الحل : n فردية : الدورة التى طولها n زوجية

n زوجية : الدورة التى طولها n فردية

(انظر (٢-١-١٢) .

مثال ٩ : إذا كانت α تبديلة زوجية فبرهن على أن α^{-1} أيضاً تبديلة زوجية. وإذا كانت α تبديلة فردية فإن α^{-1} أيضاً تبديلة فردية .

البرهان : $1 = \alpha^{-1}\alpha$ (تبديلة الوحدة) . من حيث إن عدد الانعكاسات في 1 هو الصفر $\equiv$ (عدد الانعكاسات في α + عدد الانعكاسات في α^{-1}) (مقياس 2) (برهان (٢-١-١٠)) فإذا كان عدد الانعكاسات في α زوجياً فكذا يكون في α^{-1} ، وإذا كان عدد الانعكاسات في α فردياً فكذا يكون عدد الانعكاسات في α^{-1} .

مثال ١٠ : أوجد عنصرى زمرة α ، β بحيث يكون $Ord(\alpha)=3$ ، $Ord(\beta)=3$ ، $Ord(\alpha\beta)=5$.

الحل : $\alpha := (1\ 2\ 3)$ ، $\beta := (3\ 4\ 5)$.

$$(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5) = (3\ 4\ 5\ 1\ 2)$$

أى (1 2 3 4 5) (انظر (١-٢-٥) مثال ٣)

مثال ١١ : لتكن H زمرة جزئية من S_n . برهن على أنه إما أن تكون كل عناصر H تبديلات زوجية أو أن نصف عناصر H بالضبط هى تبديلات زوجية .

البرهان : لتكن H تحتوى على تبديلة فردية σ ، ولتكن A هى مجموعة التبديلات الزوجية فى H ، B هى مجموعة التبديلات الفردية فى H . واضح أن $\sigma A \subset B$. كذلك فإن عدد عناصر σA = عدد عناصر A ، ومن ثم فإن عدد عناصر A أقل من أو يساوى عدد عناصر B (*) . وبالمثل فإن $\sigma B \subset A$ وعدد عناصر σB = عدد عناصر B ، ومن ثم فإن عدد عناصر B أقل من أو يساوى عدد عناصر A (**) . من (*) ، (**) ينتج أن عدد عناصر A = عدد عناصر B بافتراض وجود عنصر σ فردى .

مثال ١٢ : عبر عن التبديلة الآتية كحاصل ضرب دورات منفصلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال ١٣ : عبر عن التركيب الآتية كحاصل ضرب دورات منفصلة

$$(1 \ 2 \ 3)(3 \ 4 \ 5)(1 \ 3 \ 5)$$

الحل :

$$(1 \ 2 \ 3)(3 \ 4 \ 5)(1 \ 3 \ 5) = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 4 \ 5) = (1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3)$$

أو

$$(1 \ 2 \ 3)(3 \ 4 \ 5)(1 \ 3 \ 5) = (3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2)(1 \ 3 \ 5) = (1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3)$$

حصلنا على دورة واحدة وهي تحقق المطلوب .

مثال ١٤ : برهن على أن التبديلتين σ ، $\tau\sigma\tau^{-1}$ لهما نفس الصنف ، ولكن ليس بالضرورة نفس العدد من الانعكاسات .

البرهان : من برهان (٢-١-١٠)

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\tau\sigma\tau^{-1}) &\equiv (\text{sgn}(\tau) + \text{sgn}(\sigma) + \text{sgn}(\tau^{-1})) \pmod{2} \\ &= (2 \text{sgn}(\tau) + \text{sgn}(\sigma)) \pmod{2} \\ &\equiv \text{sgn}(\sigma) \pmod{2} \end{aligned}$$

أى لهما نفس الصنف .

والآن خذ $\tau := (1 \ 3 \ 2)$ فيكون $\tau^{-1} := (1 \ 2 \ 3)$ ، $\sigma := (4 \ 3 \ 5)$. لإيجاد عدد الانعكاسات في $\tau\sigma\tau^{-1}$:

$$\begin{aligned} \tau\sigma\tau^{-1} &= (1 \ 3 \ 2)(4 \ 3 \ 5)(1 \ 2 \ 3) = (1)(3)(2 \ 5 \ 4) = (2 \ 5 \ 4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ويكون عدد الانعكاسات هو :

$$3 + 1 = 4$$

$$\text{بينما } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ويكون عدد الانعكاسات هو } 2$$

مثال ١٥ : اوجد زمرة بها زمرتان جزئيتان مختلفتان لهما نفس الرتبة

الحل : فى

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} (= (1 \ 2)), \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (= (1 \ 3)) : S_3 (= \gamma_3)$$

$$\text{Ord}([\tau_1]) = 2 = \text{Ord}([\tau_2])$$

مثال ١٦ : برهن على أن أى تبديلة رتبته 14 على عشرة "حروف" تكون فردية .

البرهان : رتبة التبديلة = طولها . ومن حيث إن عدد حروف التبديلة $10 < 14$ إذن لا يمكن كتابة التبديلة كدورة واحدة. كذلك فمن (٢-١-٦) نستنتج أن التبديلة هي حاصل ضرب دورتين طول إحداهما 7 وطول الأخرى 2 فيكون من مثال 8 الدورة ذات الطول 7 زوجية ، والدورة (النقطة) ذات الطول 2 فردية، وتكون التبديلة فردية .

مثال ١٧ : اختبر إذا ما كانت التبديلة الآتية زوجية أو فردية

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل : يمكن التعبير عن σ كالآتي :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1 \ 4 \ 5)(2 \ 3 \ 6 \ 7) \\ &= (1 \ 5)(1 \ 4)(2 \ 7)(2 \ 6)(2 \ 3) \end{aligned}$$

وبهذا تكون σ حاصل ضرب 5 نقلات ومن ثم فهي فردية .

مثال ١٨ : برهن على أن أى عنصر فى A_n ، حيث $n > 3$ هو حاصل ضرب دورات طول كل منها 3 (A_n هو فى الواقع مجموعة كل حواصل ضرب الدورات التى طولها 3 من γ_n)

البرهان : لتكن $\sigma \in A_n$ ، حينئذ فإن σ تكون حاصل ضرب عدد زوجى من النقلات (التحويلات) التى يمكن "تجميعها" فى أزواج . ليكن (ab) ، زوجين مختلفين من النقلات . إذا كان (ab) ، (xy) منفصلتين فإن :

$$(ab)(xy) = (ab)((ax)(xa))(xy) = ((ab)(ax))((xa)(xy)) = (axb)(xya)$$

أما إذا كان (ab) ، (xy) غير منفصلتين، أى أن $\{a,b\} \cap \{x,y\} \neq \emptyset$ ، فليكن بدون أى فقدان للعمومية (without any loss of generality) $b=x$ ، وعندئذ فإن $(ab)(bx) = (bxa) = (bxy)$ نهاية البرهان .

مثال ١٩ : برهن على أن الزمرة المشتقة (زمرة الإبداليات) للزمرة $(= S_n)$ γ_n هي A_n إذا كانت $n \geq 2$.

البرهان : من نظرية لاجرانج نعلم أن $Ord(\gamma_n) = Ord(A_n)$.

$$\text{Ord}(\gamma_n / A_n) = [\gamma_n : A_n] = \frac{\text{Ord}(\gamma_n)}{\text{Ord}(A_n)} = 2, \quad n \geq 2$$

١٣-١-٢

وبالتالى فإن الزمرة γ_n / A_n دائرية لجميع $n \geq 2$ (١١-٧). وهى كذلك إبدالية

(١١-٧). ومن مثال ٥٣ من أمثلة متنوعة على الباب الأول ينتج أن $(1) \gamma_n \subset A_n$ (= الزمرة المشتقة لـ γ_n).

وواضح أن (2) $A_2 \subset \gamma_2$. والآن إذا كانت $n \geq 3$ فمن مثال ١٨ كل عنصر فى A_n يمكن كتابته على صورة حاصل ضرب دورات طول كل منها 3. وبالإضافة إلى هذا فإنه لكل $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ المختلفة

$$(ijk) = (i k)(jk)(ik)^{-1}(jk)^{-1} \in \gamma_n, \quad n \geq 3$$

أى أن (3) $A_n \subset \gamma_n$. من (1)، (2)، (3) ينتج أن $\gamma_n = A_n$ ، $n \geq 2$.

مثال ٢٠: برهن على أن الزمرة المشتقة لـ A_n هى A_n إذا كانت $n \geq 5$

البرهان: واضح أن $A_n \subset A_n'$. يتبقى أن نثبت أنه لكل $n \geq 5$ $A_n \subset A_n'$ ومن مثال ١٨ أعلاه يكفى أن نثبت أنه لكل $n \geq 5$ ، كل دورة طولها 3 من γ_n ستكون إبدالياً من دورات طولها 3 من γ_n . ليكن $\alpha = (ijk)$ عنصراً فى γ_n ، وليكن $\ell, m \in \{1, \dots, n\}$ بحيث إن i, j, k, ℓ, m كلها مختلفة ($n \geq 5$) ضع $\pi := (ij \ell)$ ، $\sigma := (i k m)$ ، ينتج أن: $\pi \sigma \pi^{-1} \sigma^{-1} = \alpha$.

نهاية البرهان.

مثال ٢١: ما أقل عدد من العناصر يكفى لتوليد S_3 ؟

الحل: يكفى العنصران (1 2)، (1 3) لتوليد S_3 :

$$(1 3)(1 2) = (1 2 3), \quad (1 2)(1 3) = (1 3 2), \\ (1 2 3)(1 2 3)(1 2) = (2 3)$$

وبالطبع $e = (1 2)$ (العنصر المحايد)

مثال ٢٢: برهن على أن S_n يمكن أن تتولد من المجموعة $\{(1 2), (1 2 3 \dots n)\}$

البرهان: سنبرهن أولاً على أن $(1 2)(1 2 3 \dots n)^{n-r} \dots (1 2 3 \dots n)^r$ يعطى جميع النقلات الآتية بتغيير r : (1 2)، (2 3)، (3 4)، ...، (n-1, n). ثم نبرهن على أن هذه

النقلات تولد جميع نقلات S_n . ومن النظرية (٢-١-٩) التى تنص على أن أى تبديلة هى تركيبة من النقلات يتم البرهان . والآن :

عند $r = 0$:

$$(1\ 2)\underbrace{(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2\ 3\ \dots\ n)\ \dots\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)}_{n \text{ من المرات}} = (1\ 2)$$

n من المرات

عند $r = 1$:

$$(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2)\underbrace{(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2\ 3\ \dots\ n)\ \dots\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)}_{n-1 \text{ من المرات}} = (2\ 3)$$

$n-1$ من المرات

عند $r = n-2$:

$$\underbrace{(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2\ 3\ \dots\ n)\ \dots\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)}_{n-2 \text{ من المرات}}(1\ 2)(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2\ 3\ \dots\ n) = (n-1, n)$$

$n-2$ من المرات

عند $r = n-1$:

$$\underbrace{(1\ 2\ 3\ \dots\ n)(1\ 2\ 3\ \dots\ n)\ \dots\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)}_{n-1 \text{ من المرات}}(1\ 2)(1\ 2\ 3\ \dots\ n) = (1\ n)$$

$n-1$ من المرات

والآن نلاحظ أن : $(m\ k)(k\ n)(m\ k) = (m\ n)$

فإذا أردنا تكوين $(3\ 7)$ - مثلاً - من النقلات السابقة سنجرى الآتى :

$$(3\ 5) = (3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)$$

$$(3\ 6) = (3\ 5)(5\ 6)(3\ 5)$$

$$(3\ 7) = (3\ 6)(6\ 7)(3\ 6)$$

وبهذا يكون

$$\begin{aligned} (3\ 7) &= (3\ 5)(5\ 6)(3\ 5)(6\ 7)(3\ 5)(5\ 6)(3\ 5) \\ &= (3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(5\ 6)(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(6\ 7)(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(5\ 6) \\ &\quad (3\ 4)(4\ 5)(3\ 4) \end{aligned}$$

وعلى هذا المنوال يتم البرهان.

مثال ٢٣ : من مثال ٢٢ يتضح أن S_n يمكن أن تتولد من عنصرين ، ومن نظرية كيلى (٢-١-٢) كل زمرة منتهية تكون متشاكلة (أيزومورفية) مع زمرة تبديلات . إذن كل زمرة منتهية يمكن أن تتولد من عنصرين .

ما وجه الخطأ فى الاستنتاج السابق ؟

الحل : وجه الخطأ أنه ليس كل زمرة جزئية من S_n يمكن أن تتولد من عنصرين وإنما S_n جميعها التى تتولد من عنصرين !

وكمثال على خطأ المقولة انظر مثال ١٨ فى ٤-١-١٢ (أمثلة متنوعة)

تمارين

(١) عبر عن التبديلتين الآتيتين كحاصل ضرب دورات منفصلة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(٢) عبر عن التبديلات الآتية كحاصل ضرب دورات منفصلة :

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) (1 \ 5 \ 6) (2 \ 4 \ 6), \\ (1 \ 2 \ 3 \ 4) (2 \ 3 \ 4 \ 5) (3 \ 4 \ 5 \ 1), \\ (1 \ 2) (2 \ 3) (3 \ 4) (4 \ 5) (5 \ 1)$$

(٣) اوجد أربع زمر جزئية مختلفة من S_4 تكون أيزومورفية (متشاكلة) مع S_3 ، تسعاً متشاكلة مع S_2 .

(٤) برهن على أنه يوجد على الأقل 30 زمرة جزئية مختلفة من S_6 متشاكلة مع S_3 .

(٥) برهن على أن S_n تتولد من النقلات : $(1 \ 2)$ ، $(2 \ 3)$ ، ... ، $(n-1, n)$.

(٦) عين رتبة كل من التبديلات الآتية :

$$(a_1 a_2 \dots a_k), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7), (1 \ 5 \ 7) (4 \ 3 \ 8) (2 \ 4 \ 6) (1 \ 2 \ 4 \ 8) (3 \ 5 \ 7) (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11)$$

(٧) عين رتبة التبديلتين الآتيتين :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(٨) ما الرتب المحتملة لعناصر : $S_6 (= \gamma_6)$ ، S_7 ، A_6 ، A_7 ؟

(٩) عين أكبر رتبة لعناصر A_{10}

(١٠) عين صنف التبديلات الآتية :

$$(1 \ 2 \ 4) , (1 \ 4 \ 6 \ 8) , (1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 7) , (2 \ 5 \ 7) (1 \ 4 \ 5) (3 \ 1) , (2 \ 3 \ 5 \ 8) (1 \ 2 \ 4 \ 7)$$

(١١) برهن على أن حاصل ضرب تبدلتي إحداهما زوجية والأخرى فردية هي تبديلة فردية .

$$(١٢) \text{ إذا كان } \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} , \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

فاحسب : $\alpha^{-1} , \beta^{-1} , \alpha\beta , \beta\alpha$

(١٣) لتكن $\alpha, \beta \in S_n$. برهن على أن $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ تكون تبديلة زوجية (المقصود بـ $\alpha\beta$ هو $\alpha\beta$ كما سبق) .

$$(١٤) \text{ برهن على أن : } (1 \ 2 \ 3)^{-1} = (3 \ 2 \ 1) , (1 \ 4 \ 7 \ 8)^{-1} = (8 \ 7 \ 4 \ 1) ,$$

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)^{-1} = (a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)$$

(١٥) في S_3 أوجد عنصرين α , β بحيث يكون $Ord(\alpha) = 2 , Ord(\beta) = 2$ ، $Ord(\alpha\beta) = 3$.

(١٦) برهن على أنه إذا كانت G هي مجموعة التبديلات على الأعداد الصحيحة الموجبة، وكانت H هي المجموعة الجزئية من G التي يمكن التعبير عن عناصرها في صورة حاصل ضرب أعداد منتهية من الدورات فإن H تكون زمرة جزئية من G .

(١٧) برهن على أن $Ord(A'_n) = 1$ إذا كانت $n \in \{2, 3\}$.

(١٨) برهن على أن A'_4 هي زمرة كلاين الرباعية .

1 Group Theory نظرية الزمر



خواص الضرب الخارجية والداخلية المباشرة External and Internal Direct Products

١-٣ حواصل الضرب الخارجية المباشرة

١-١-٣ تعريف : لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ زمراً . يعرف حاصل الضرب الخارجي

المباشر لـ $G_1, G_2, \dots, G_n$ (The external direct product) ونشير إليه بالرمز

$$G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_n$$

$$G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_n := \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i\}$$

حيث يعرف "الضرب" في جاصل الضرب المباشر كالتالي:

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) := (g_1 g'_1, g_2 g'_2, \dots, g_n g'_n)$$

حيث يتم $g_i g'_i$ حسب قانون الضرب في الزمرة G_i .

ويمكن بسهولة البرهنة على أن حاصل الضرب الخارجي المباشر لمجموعة من الزمر هو

زمرة . فحسب الرموز السابقة يكون العنصر المحايد فيه هو $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ حيث

$e_i \in G_i$ هو عنصرها المحايد ، وحيث يكون معكوس $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ هو

$$(g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}) \text{ حيث } g_i^{-1} \text{ هو معكوس } g_i .$$

١-٣-٢ تعريف : لتكن G_1, G_2 زمرتين $\varphi: G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ هو مومورفيزم زمر .

نعرف : لجميع $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) := (x_1 \varphi(x_2)(y_1), x_2 y_2)$$

١-٣-٣ ملحوظة : $G_1 \times G_2$ حيث G_1, G_2 زمرتان ، والعملية المعرفة في (١-٣-٢)

تكون زمرة .

البرهان :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in G_1 \times G_2 :$$

$$((x_1, x_2)(y_1, y_2))(z_1, z_2) = (x_1 \varphi(x_2)(y_1), x_2 y_2)(z_1, z_2)$$

$$= (x_1 \varphi(x_2)(y_1) \varphi(x_2 y_2)(z_1), x_2 y_2 z_2) \quad (1)$$

$$(x_1, x_2)((y_1, y_2)(z_1, z_2)) = (x_1, x_2)(y_1 \varphi(y_2)(z_1), y_2 z_2)$$

$$= (x_1 \varphi(x_2)(y_1 \varphi(y_2)(z_1)), x_2 y_2 z_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 \varphi(x_2)(y_1) \varphi(x_2)(\varphi(y_2)(z_1)), x_2 y_2 z_2) \\
 &= (x_1 \varphi(x_2)(y_1) (\varphi(x_2) \circ \varphi(y_2))(z_1), x_2 y_2 z_2) \\
 &= (x_1 \varphi(x_2)(y_1) \varphi(x_2 y_2)(z_1), x_2 y_2 z_2) \quad (2)
 \end{aligned}$$

من (1) ، (2) ينتج أن

$$((x_1, x_2)(y_1, y_2))(z_1, z_2) = (x_1, x_2)((y_1, y_2)(z_1, z_2))$$

(e_1, e_2) هو العنصر المحايد للزمرة حيث $e_1 \in G_1$ ، $e_2 \in G_2$ العنصران المحايدان للزمريتين G_1 ، G_2 ، لأن :

$$\begin{aligned}
 \forall (x_1, x_2) \in (G_1 \times G_2 : (e_1, e_2)(x_1, x_2) &= (e_1 \varphi(e_2)(x_1), e_2 x_2) \\
 &= (e_1 1_{G_1}(x_1), e_2 x_2) = (e_1 x_1, e_2 x_2) = (x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

1_{G_1} هو راسم الوحدة على G_1 وهو عنصر الوحدة في $(Aut(G_1))$

معكوس العنصر $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ هو العنصر $(\varphi(x_2^{-1})(x_1^{-1}), x_2^{-1})$ لأن :

$$\begin{aligned}
 (\varphi(x_2^{-1})(x_1^{-1}), x_2^{-1})(x_1, x_2) &= (\varphi(x_2^{-1})(x_1^{-1}) \varphi(x_2^{-1})(x_1), x_2^{-1} x_2) \\
 &= (\varphi(x_2^{-1})(x_1^{-1} x_1), x_2^{-1} x_2) = (\varphi(x_2^{-1})(e_1), e_2) = (e_1, e_2)
 \end{aligned}$$

تسمى هذه الزمرة شبه حاصل الضرب الخارجي المباشر لـ G_1 ، G_2 بالنسبة إلى φ

(The semi-external direct product of G_1 , G_2 , w.r.t. φ)

ويرمز لها بالرمز $G_1 \times_{\varphi} G_2$

٣-١-٤ ملحوظة : واضح أن حاصل الضرب المباشر للزمريتين G_1 ، G_2 سيكون

مساوياً لشبه حاصل الضرب المباشر لهما إذا كان الهومومورفيزم $\varphi: G_2 \rightarrow Aut(G_1)$

يحقق $\varphi(x_2) = 1_{G_1}$ لجميع $x_2 \in G_2$.

٣-١-٥ ملحوظة : G_1 ، G_2 زمريتان ، $e_1 \in G_1$ ، $e_2 \in G_2$ العنصران المحايدان .

$\{e_1\} \times G_2$ ، $G_1 \times \{e_2\}$ زمريتان جزئيتان من $G_1 \times_{\varphi} G_2$.

البرهان : بالنسبة إلى $\{e_1\} \times G_2$:

$$\forall a, b \in G_2 : (e_1, a)(e_1, b) = (e_1 \varphi(a)(e_1), ab) = (e_1 e_1, ab) = (e_1, ab) \in \{e_1\} \times G_2$$

كذلك فإن $(e_1, e_2) \in \{e_1\} \times G_2$. ولكل $a \in G_2$: معكوس العنصر $(e_1, a) \in \{e_1\} \times G_2$

هو : $(\varphi(a^{-1})(e_1^{-1}), a^{-1})$ وهو يساوى $(\varphi(a^{-1})(e_1), a^{-1})$ أى هو (e_1, a^{-1}) وهو

عنصر فى $\{e_1\} \times G_2$ وبالنسبة إلى $G_1 \times \{e_2\}$:

$$\forall a, b \in G_1 : (a, e_2)(b, e_2) = (a\varphi(e_2)b, e_2 e_2) = (a1_{G_1}(b), e_2 e_2)$$

$$= (ab, e_2) \in G_1 \times \{e_2\}$$

كذلك فإن $(e_1, e_2) \in G_1 \times \{e_2\}$. ولكل $a \in G_1$ معكوس العنصر $(a, e_2) \in G_1 \times \{e_2\}$

هو $(\varphi(e_2^{-1})(a^{-1}), e_2^{-1})$ أى هو $(\varphi(e_2)(a^{-1}), e_2)$ أى هو $(1_{G_1}(a^{-1}), e_2)$ أى هو

(a^{-1}, e_2) وهو عنصر فى $G_1 \times \{e_2\}$.

٣-١-٦ مثال : ليكن $G_1 = G_2 = (\mathbb{R}, +)$ ، وليكن $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R})$ معرفة كالآتى :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varphi(x)(y) = e^x y$$

φ هو مومورفيزم لأن :

$$\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R} : \varphi(x_1 + x_2)(y) = e^{x_1 + x_2} y = e^{x_1} e^{x_2} y$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)(y)$$

لكل $(a, 0) \in \mathbb{R} \times_{\varphi} \mathbb{R}$ ولكل $(0, x) \in \{0\} \times \mathbb{R} = H$

$$(a, 0) + (0, x) = (a + \varphi(0)(0), 0 + x) = (a, x)$$

أى أن $\{a\} \times \mathbb{R}$ مجموعة مشاركة يسرى من $(a, 0)$ بالنسبة إلى H . كذلك فإن :

$$(0, x) + (a, 0) = (0 + \varphi(x)(a), x + 0)$$

$$= (ae^x, x)$$

أى أن $\{(ae^x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ مجموعة مشاركة يمنى من $(a, 0)$ بالنسبة إلى H .

٣-١-٧ نظرية : رتبة عنصر في حاصل الضرب المباشر لزمر منتهية هي المضاعف المشترك الأصغر (The least common multiple) لرتب "مركبات" العنصر . بالرموز :

$$Ord(g_1, g_2, \dots, g_n) = lcm\{Ord(g_1), Ord(g_2), \dots, Ord(g_n)\}$$

البرهان : ليكن $t = Ord(g_1, \dots, g_n)$ ، $s = lcm\{Ord(g_1), \dots, Ord(g_n)\}$ واضح أن :

$$(g_1, \dots, g_n)^s = (g_1^s, \dots, g_n^s) = (e, \dots, e),$$

ومن (١-١١-٩) فإن t يقسم s ، وعلى درجة الخصوص فإن : $t \leq s$. كذلك فإن :

$$(g_1', \dots, g_n') = (g_1, \dots, g_n)' = (e, \dots, e)$$

ومن ثم فمن (١-١١-٩) كذلك فإن $Ord(g_1)$ ، ... ، $Ord(g_n)$ كلها تقسم t . وهكذا فإن t هو مضاعف مشترك (common multiple) لرتبة g_1 ، ... ، ورتبة g_n ، وبالتالي فإن $s \leq t$ لأن s هو المضاعف المشترك الأصغر لرتبة g_1 ، ... ، g_n . ومن (*) يكون $s = t$.

٣-١-٨ تمهيدية : إذا كان a ، b عددين صحيحين موجبين فإن :

$$ab = lcm\{a, b\}gcd\{a, b\}$$

البرهان : ليكن $a := p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ ، $b := p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ (يمكن استخدام 0 كأس عند الضرورة) ، حيث p_1 ، ... ، p_k أعداد أولية مختلفة ، m_1 ، ... ، m_k ، n_1 ، ... ، n_k أعداد صحيحة ليست سالبة . عندئذ فإن

$$\left. \begin{aligned} lcm\{a, b\} &= p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}, s_i := \max(m_i, n_i); \\ gcd\{a, b\} &= p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}, t_i := \min(m_i, n_i) \end{aligned} \right\}$$

$$lcm\{a, b\}gcd\{a, b\} = p_1^{m_1+n_1} \dots p_k^{m_k+n_k} = ab$$

٣-١-٩ نظرية : ليكن G ، H زمريتين دائريتين منتهيتين . عندئذ فإن $G \otimes H$ زمرة دائرية إذا كان فقط إذا كان $Ord(G)$ ، $Ord(H)$ ليس لهما قواسم مشتركة (ماعدا $1 \pm$)

البرهان : ليكن $Ord(G) = m$ ، $Ord(H) = n$ بحيث إن $Ord(G \otimes H) = mn$ $\Rightarrow$ " : ليكن $G = [g]$ ، $H = [h]$. وليكن $gcd(m, n) = 1$ (القاسم المشترك الأعظم) أى أن m ، n ليس لهما قواسم مشتركة . عندئذ فإن :

$$Ord(g, h) = lcm\{m, n\} = mn = Ord(G \otimes H)$$

أى أن (g, h) مولد لـ $G \otimes H$ ، أى أن $G \otimes H$ دائرية .
 $\Leftarrow$ " : لتكن $G \otimes H$ دائرية والمطلوب إثبات أن m ، n ليس لهما قواسم مشتركة .
 لأن $G \otimes H$ دائرية فإنه يوجد عنصر (g, h) فى $G \otimes H$ رتبته mn . ومن النظرية (٧-١-٣) نحصل على :

$$mn = Ord(g, h) = lcm\{Ord(g), Ord(h)\}.$$

ومن جهة أخرى فلأن $Ord(g)$ تقسم m ، وكذلك $Ord(h)$ تقسم n (٣-١٠-١) ، ينتج أن $lcm\{Ord(g), Ord(h)\}$ يقسم $lcm\{m, n\}$. ولكن $lcm\{m, n\} \leq mn$ ، فينتج أن $lcm\{m, n\} = mn$ ، ومن ثم فإن $gcd\{m, n\} = 1$ أى أن m ، n ليس لهما قواسم مشتركة (٨-١-٣) .

١٠-١-٣ نتيجة : حاصل الضرب الخارجى المباشر $G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_n$ للزمر الدائرية المنتهية G_1 ، G_2 ، ... ، G_n يكون زمرة دائرية إذا كان فقط إذا كان $gcd\{Ord(G_i), Ord(G_j)\} = 1, \quad i \neq j$

البرهان : (٩-١-٣) مع الاستقراء الرياضى .

١١-١-٣ نتيجة : لتكن $m = n_1 n_2 \dots n_k$ حيث n_1 ، n_2 ، ... ، n_k أعداد صحيحة موجبة .

$\mathbb{Z}_m (= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ تكون متشاكل (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}_{n_1} \otimes \mathbb{Z}_{n_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{n_k}$ إذا كان فقط

إذا كان $gcd\{n_i, n_j\} = 1, \quad i \neq j$.

البرهان : (٩-١-٣) مع الاستقراء الرياضى .

١٢-١-٣ نتيجة : يمكن التعبير عن نفس الزمرة بطرائق مختلفة : فمثلا :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{10}$$

ومن ثم فإن : $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{10}$ لكن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{30} \not\cong \mathbb{Z}_{60}$

٣-١-١٣ أمثلة محلولة :

مثال ١ : لتكن $U(n)$ هي زمرة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من n ،
والقاسم المشترك الأعلى (الأعظم) لها مع n هو 1 حيث يكون "الضرب" مقياس n
احسب $U(6) \otimes U(8)$.

الحل : $U(6) = \{1, 5\}$ ، $U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$ ومن ثم فإن :

$$U(6) \otimes U(8) = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7)\}$$

لاحظ أن $(5, 3)(5, 5) = (1, 7)$ لأن $5.5 = 1 \pmod{6}$ ، $3.5 = 7 \pmod{8}$.

مثال ٢ : برهن على أن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$

البرهان : (انظر النظرية (٣-١-٩)) : من حيث أن $\mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_3$ دائريتان ،
 $\gcd\{2,3\} = 1$ تكون $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$.

وللتحقق من هذا حسابياً :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}$$

نجرّب $(\bar{1}, \bar{1})$ كمولد :

$$2(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}), 3(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{0}), 4(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{1}),$$

$$5(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{2}), 6(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

إن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ دائرية يولدها $(\bar{1}, \bar{1})$. عدد عناصرها 6 وتكون متشاكلية (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}_6$

طريقة أخرى مباشرة : باستخدام النتيجة (٣-١-١١)

مثال ٣ : برهن على $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ لها 7 زمر جزئية من الرتبة 2 .

البرهان :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})\}$$

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ تتكون من 8 عناصر ، أى مجموعة مكونة من $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$ مع عنصر آخر من العناصر السبعة الباقية تكون زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

مثال ٤ : برهن أو انف $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ زمرة دائرية .

الحل : $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ليس زمرة دائرية . لتكن $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ دائرية ومولدها (m, n) عندئذ فإنه يوجد عدنان صحيحان k, ℓ بحيث إن :

$$(km, \ell n) = (1, 1) . \text{ وهذا يقتضى أن } m, n = \pm 1 . \text{ ولكن } (m, n) \text{ لا يمكن أن يولد}$$

$$(-1, 2) . \text{ إذن } \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \text{ ليست دائرية .}$$

مثال ٥ : هل $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_{16}$ ؟ ولماذا ؟

الحل : (انظر النظرية (٣-١-٩)) $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_8$ لا يمكن أن تكون دائرية لأن

$$\gcd\{2, 8\} = 2 \text{ أما } \mathbb{Z}_{16} \text{ فهي دائرية (يولدها مثلاً } \bar{1} \text{ أى } 1+16\mathbb{Z} \text{ ولا يمكن أن يوجد}$$

أيزومورفيزم بينهما على الرغم من تساويهما فى الرتبة .

(انظر مثال ٨ من أمثلة متنوعة على الباب الأول)

طريقة أخرى : مباشرة من النتيجة (٣-١-١١) ينتج المطلوب .

مثال ٦ : كم عدد العناصر فى $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ التى من الرتبة 9 ؟

الحل : (انظر النظرية (٣-١-٧)) .

سنحسب عدد العناصر (a, b) فى $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ التى تحقق

$$9 = \text{Ord}(a, b) = \text{lcm}\{\text{Ord}(a), \text{Ord}(b)\}$$

وهذا يقتضى أن :

$$(i) \text{Ord}(a) = 1, \quad \text{Ord}(b) = 9$$

أو

$$(ii) \text{Ord}(a) = 3, \quad \text{Ord}(b) = 9$$

في الحالة (i) يكون لـ a إمكانية واحدة ولـ b ست إمكانيات فتكون b هي : $\bar{1}$ أو $\bar{2}$ أو $\bar{4}$ أو $\bar{5}$ أو $\bar{7}$ أو $\bar{8}$ وانظر الاستنتاج $((1-11-1))$ وبهذا تكون هناك 6 إمكانيات للعنصر (a, b) .

في الحالة (ii) يكون لـ a إكثنتان ويكون لـ b ست إمكانيات ، وبهذا تكون هناك 12 من الإمكانيات .

ويكون عدد العناصر في $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ التي لها الرتبة 9 هو 18 .

مثال ٧ : أوجد عدد العناصر التي لها الرتبة 4 في $\mathbb{Z}_{8000000} \otimes \mathbb{Z}_{4000000}$

الحل : كما في مثال ٦ السابق مباشرة سنحسب عدد العناصر (a, b) في $\mathbb{Z}_{8000000} \otimes \mathbb{Z}_{4000000}$ التي تحقق

$$4 = \text{Ord}(a, b) = \text{lcm}\{\text{Ord}(a), \text{Ord}(b)\}$$

الإمكانيات هي :

$$(i) \text{Ord}(a) = 4, \text{Ord}(b) = 1$$

وهنا يكون لـ b إمكانية واحدة ، ولـ a إكثنتان

$$\text{فيكون } b = \bar{0}, a = \overline{2000000} \text{ أو } a = \overline{6000000}$$

$$(ii) \text{Ord}(a) = 4, \text{Ord}(b) = 2$$

وهنا يكون لـ b إمكانية واحدة ، a إكثنتان

$$\text{فيكون } b = \overline{2000000}, a = \overline{2000000} \text{ أو } a = \overline{6000000}$$

$$(iii) \text{Ord}(a) = 4, \text{Ord}(b) = 4$$

فيكون لكل من a, b إكثنتان

$$\text{فيكون } b = \overline{1000000} \text{ أو } b = \overline{3000000} \text{ ويكون } a = \overline{2000000} \text{ أو } a = \overline{6000000}$$

$$(iv) \text{Ord}(a) = 2, \text{Ord}(b) = 4$$

فيكون لـ a إمكانية واحدة ، لـ b إكثنتان

$$\text{فيكون } b = \overline{1000000} \text{ أو } b = \overline{3000000} \text{ ويكون } a = \overline{4000000}$$

$$(v) \text{Ord}(a) = 1, \text{Ord}(b) = 4$$

فيكون لـ a إمكانية واحدة ، لـ b إكانتان

$$a = \bar{0} \quad \text{ويكون} \quad b = \overline{1000000} \quad \text{أو} \quad b = \overline{3000000}$$

وبهذا يكون عدد العناصر التي لها الرتبة 4 هو :

$$2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12$$

مثال ٨ : لتكن G زمرة ولتكن $H := \{(g, g) \mid g \in G\}$. برهن على أن H زمرة

جزئية من $G \otimes G$ (تسمى هذه الزمرة قطر $(G \otimes G)$ (The diagonal)). وإذا كانت

$$G = (\mathbb{R}, +) \quad \text{فصف هندسياً} \quad G \otimes G, H.$$

الحل : $(e, e) \in H$ أى أن $H \neq \emptyset$

كذلك فكل $(g, g), (h, h) \in H$

$$(g, g)(h, h)^{-1} = (g, g)(h^{-1}, h^{-1}) = (gh^{-1}, gh^{-1}) \in H$$

أى أن H زمرة جزئية من $G \otimes G$.

والآن إذا كانت $G = \mathbb{R}$ فواضح أن $G \otimes G$ هى كل المستوى ، أما H فهى الخط

المستقيم الذى معادلته $y = x$

مثال ٩ : برهن على أنه لأى زميرتين G_1, G_2 :

$$G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$$

البرهان : نعرف $\varphi: G_1 \otimes G_2 \rightarrow G_2 \otimes G_1$

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

واضح أن φ تناظر أحادى .

φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall (x, y), (x', y') \in G_1 \otimes G_2 : \varphi((x, y)(x', y')) = \varphi(xx', yy') = (yy', xx')$$

$$= (y, x)(y', x') = \varphi(x, y)\varphi(x', y')$$

أى أن φ أيزومورفيزم .

مثال ١٠ : ليكن G ، H زمريتين . برهن على أن G تشاكل (أيزومورفية مع) زمرة جزئية من $G \otimes H$

البرهان : ليكن e هو العنصر المحايد في H . سنبرهن أولاً على أن $G \otimes \{e\}$ زمرة جزئية من $G \otimes H$ كالآتي : واضح أن $G \otimes \{e\}$ ليس مجموعة خالية فهو يحتوى على الأقل (e', e) حيث e' هو عنصر G المحايد . ولكل $(g, e), (h, e) \in G \otimes \{e\}$:

$$(g, e)(h, e)^{-1} = (g, e)(h^{-1}, e) = (gh^{-1}, e) \in G \otimes \{e\}$$

والآن نبرهن على أن : $G \cong G \otimes \{e\}$ كالآتي :

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow G \otimes \{e\} \\ g &\mapsto (g, e) \end{aligned}$$

نعرف

واضح أن φ تناظر أحادى . كذلك φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall g, h \in G : \varphi(gh) = (gh, e) = (g, e)(h, e) = \varphi(g)\varphi(h)$$

أى أن φ أيزومورفيزم . نهاية البرهان .

مثال ١١ : لتكن G زمرة إبدالية ، n عدداً صحيحاً موجباً . لتكن $G^n := \{g^n \mid g \in G\}$. برهن على أن G^n زمرة جزئية من G . والآن إذا كانت K ، H زمريتين إبداليتين

$$(H \otimes K)^n = H^n \otimes K^n$$

فبرهن على أن

البرهان : $e \in G^n$ العنصر المحايد أى أن G^n ليست مجموعة خالية . والآن

$$\forall g^n, h^n \in G^n : g^n(h^n)^{-1} = g^n(h^{-1})^n = (gh^{-1})^n \in G^n \Rightarrow G^n \text{ زمرة جزئية من } G$$

إبدالية G

والآن من حيث إن H ، K زمريتان إبداليتان فإن H^n ، K^n زمريتان جزئيتان من H ، K على الترتيب ، أى هما زمريتان . كذلك $H \otimes K$ إبدالية لأن H ، K إبداليتان (برهن على صحة ذلك) ومن ثم فإن $(H \otimes K)^n$ زمرة . والآن نبرهن على أن $(H \otimes K)^n = H^n \otimes K^n$ كالآتي :

$$(H \otimes K)^n \ni (h, k)^n = \underbrace{(h, k) \dots (h, k)}_{n \text{ من المرات}} = (h^n, k^n) \in H^n \otimes K^n$$

n من المرات

مثال ١٢ : برهن على أن $G \otimes H$ زمرة إبدالية إذا كان فقط إذا كان G ، H زمريتين إبداليتين

البرهان : ليكن G ، H زمريتين إبداليتين . لكل $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \otimes H$:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) = (g_2 g_1, h_2 h_1) = (g_2, h_2)(g_1, h_1)$$

G ، H إبداليتان

أى أن $G \otimes H$ إبدالية .

والآن وبدون فقد للعمومية (without any loss of generality) لنكن G ليست إبدالية ، أى أنه يوجد $g_1, g_2 \in G$ بحيث يكون $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$. والآن ليكن $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \otimes H$. لدينا :

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) \neq (g_2 g_1, h_2 h_1) = (g_2, h_2)(g_1, h_1)$$

أى أن $G \otimes H$ ليست إبدالية .

(هذا المثال يجيب عن التساؤل فى مثال ١١ السابق مباشرة)

مثال ١٣ : لنكن $G := \{3^m 6^n / m, n \in \mathbb{Z}\}$ مع عملية الضرب العادية . برهن على أن G

تتشاكل (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$

البرهان : سنعرف φ كالآتى :

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$$

$$3^m 6^n \mapsto (m, n)$$

واضح أن φ تناظر أحادى . φ هومورفيزم لأن :

$$\forall 3^{m_1} 6^{n_1} \in G, 3^{m_2} 6^{n_2} \in G :$$

$$\varphi(3^{m_1} 6^{n_1} \cdot 3^{m_2} 6^{n_2}) = \varphi(3^{m_1+m_2} 6^{n_1+n_2}) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$

$$= (m_1, n_1) + (m_2, n_2) = \varphi(3^{m_1} 6^{n_1}) + \varphi(3^{m_2} 6^{n_2}) \Rightarrow \varphi \text{ أيزومورفيزم}$$

(تذكر أن العملية فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ هى الجمع)

مثال ١٤ : لتكن G زمرة من الرتبة 4 ، لجميع $x \in G$: $x^2 = e$ حيث e عنصر G

المحايد . برهن على أن $G \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

(تذكر أن $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

البرهان :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 := \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}, G := \{e, x, y, z\}$$

سنضع جدولاً "الضرب" لكل من G ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ومنه يتضح التشاكل :

+	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$

.	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

واضح أن $\varphi: \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow G$ المعرفة كالآتي :

$$\varphi(\bar{0}, \bar{0}) := e \quad (\text{العنصر المحايد في } G), \quad \varphi(\bar{0}, \bar{1}) := x,$$

$$\varphi(\bar{1}, \bar{0}) := y, \quad \varphi(\bar{1}, \bar{1}) := z$$

أيزومورفيزم

مثال ١٥ : احسب الزمرة العاملة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{0}, \bar{1})]$ (تذكر أن $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

الحل : $[(\bar{0}, \bar{1})]$ هي زمرة جزئية دائرية من الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ ، وهكذا فإن :

$$[(\bar{0}, \bar{1})] = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})\}$$

$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ بها 24 عنصراً ، $[(\bar{0}, \bar{1})]$ تتكون من 6 عناصر ، ومن ثم فإنه من نظرية

لاجرانج ينتج أن : $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{0}, \bar{1})]$ تتكون من 4 عناصر ، وهي على وجه التحديد :

$$(\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{0}, \bar{1})]; (\bar{1}, \bar{0}) + [(\bar{0}, \bar{1})]; (\bar{2}, \bar{0}) + [(\bar{0}, \bar{1})]; (\bar{3}, \bar{0}) + [(\bar{0}, \bar{1})]$$

مثال ١٦ : برهن على أن : $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{0}, \bar{2})] \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2$

البرهان : $[(\bar{0}, \bar{2})]$ هي زمرة جزئية دائرية من الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ ، وهي :

$$[(\bar{0}, \bar{2})] = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})\}$$

لاحظ أن $\bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$ ، وهكذا فإن العامل الثانى $\mathbb{Z}_6$ "يطوى" بزمرة جزئية من الرتبة 3 ، ونحصل على زمرة عاملة من الرتبة 2 تكون متشاكله مع $\mathbb{Z}_2$. العامل الأول يبقى كما هو $\mathbb{Z}_4$ وبهذا نصل إلى المطلوب .

مثال ١٧ : برهن على أن : $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{2}, \bar{3})] \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3$

البرهان : لاحظ أن $[(\bar{2}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{3})\}$

(لأن $[(\bar{2}, \bar{3})]$ زمرة جزئية دائرية من $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$)

ورتبة $[(\bar{2}, \bar{3})]$ هي 2 ، بينما رتبة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ هي 24 ، وبالتالي فإن $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{2}, \bar{3})]$ لها الرتبة 12 .

الزمر الإبدالية الممكنة من الرتبة 12 هي $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3$ لها عنصر من الرتبة 4 بينما $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ ليس لها مثل هذا العنصر . وواضح أن المجموعة المشاركة $[(\bar{2}, \bar{3})] + [(\bar{1}, \bar{0})]$ لها الرتبة 4 فى زمرة القسمة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{2}, \bar{3})]$:

$$[(\bar{1}, \bar{0})] + [(\bar{2}, \bar{3})] + [(\bar{1}, \bar{0})] + [(\bar{2}, \bar{3})] + [(\bar{1}, \bar{0})] + [(\bar{2}, \bar{3})] + [(\bar{1}, \bar{0})] + [(\bar{2}, \bar{3})] \\ = [(\bar{0}, \bar{0})] + [(\bar{2}, \bar{3})] = [(\bar{2}, \bar{3})]$$

وواضح أن لايمكن إضافة $[(\bar{2}, \bar{3})] + [(\bar{1}, \bar{0})]$ إلى نفسه عدداً أقل من المرات للحصول على $[(\bar{2}, \bar{3})]$. ومعنى هذا أن $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 / [(\bar{2}, \bar{3})]$ يحتوى على عنصر من الرتبة 4 ، وبهذا ينتج المطلوب

مثال ١٨ : اوجد أكبر رتبة لعنصر فى : (أ) $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_{15}$ (ب) $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$

الحل : (أ) أكبر رتبة : $\ell cm\{12,15\} = 60$ المضاعف المشترك الأصغر

(ب) أكبر رتبة : $\ell cm\{6,8\} = 24$

(انظر نظرية $((7-1-3))$)

مثال ١٩ : إذا كان كل عنصر لا يساوى e العنصر المحايد فى زمرة منتهية G له الرتبة 2 ، فبرهن على أن رتبة G هى 2^n وأن $G = C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n$ حيث $Ord(C_i) = 2$ ، $(C_i$ دائرية)

البرهان : من مثال ١ فى أمثلة متنوعة على الباب الأول هذه الزمرة إبدالية .

والآن: ليكن $a \in G, a \neq e$. إما أن $G = [a]$ أى أن G دائرية ومولدها هو a_1 أو أن $[a] \subsetneq G$.

إذا كانت $G = [a_1]$ تكون هذه هى النهاية ! وإذا كانت $[a_1] \subsetneq G$ فإنه يوجد : $a_2 \in G$

بحيث إن $a_2 \notin [a_1]$. نكون حاصل الضرب الخارجى المباشر $[a_1] \otimes [a_2]$.

إما أن يكون $G = [a_1] \otimes [a_2]$ أو أن يكون $[a_1] \otimes [a_2] \subsetneq G$. فى الحالة الأولى نكون

قد انتهينا . فى الحالة الثانية يوجد $a_3 \in G, a_3 \notin [a_1] \otimes [a_2]$ ، ... وهكذا ... ولأن G

منتهية فإننا نصل إلى $[a_1] \otimes [a_2] \otimes \dots \otimes [a_n] = G$ ، وكل $[a_i]$ زمرة دائرية لها الرتبة 2 .

مثال ٢٠ : برهن على أن أى زمرة G من الرتبة 4 إما أن تكون متشاكلة مع $\mathbb{Z}_4$ أو

متشاكلة مع $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

البرهان : الزمرة G إما أن تكون دائرية فهى متشاكلة مع $\mathbb{Z}_4$ ، أو ليست دائرية . إذا لم

تكن دائرية فهى تحتوى على زمر جزئية فعلية ، ومن نظرية لاجرانج رتبة الزمرة

الجزئية تقسم رتبة الزمرة . إذن الزمرة الجزئية من G رتبته 2 وتكون متشاكلة مع $\mathbb{Z}_2$

ويقضى هذا أن تكون $G \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ (لأن رتبة G هى 4).

مثال ٢١ : برهن على أنه لا يوجد إبيمورفيزم من $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2$ على $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$.

البرهان : ليكن $\varphi: \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ إيمورفيزم . نطبق نظرية الهومومورفيزم

$$(1-8-1) \text{ فينتج أن : } \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 / \text{Ker}(\varphi) . \text{ ومن ثم فإن}$$

$$\text{Ord}(\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4) = \text{Ord}(\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 / \text{Ker}(\varphi)) = 16 \text{ ومن نظرية لاجرانج (1-10-3) ينتج أن}$$

$$\text{Ord}(\text{Ker}(\varphi)) = 1 \text{ ومنها } \text{Ord}(\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2) = \text{Ord}(\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 / \text{Ker}(\varphi)) \cdot \text{Ord}(\text{Ker}(\varphi))$$

أى أن $\text{Ker}(\varphi) = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$ ، ويكون φ مونومورفيزم .

إذن φ أيزومورفيزم . لكن $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2$ بها عنصر رتبته 8 .

بينما $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ ليس بها عنصر رتبته 8 ، وهذا تناقض . إذن لا يوجد الإيمورفيزم المفترض .

مثال ٢٢ : برهن على أن الراسم $\varphi: G \otimes H \rightarrow G$ حيث G, H زميرتان ، هومومورفيزم .
 $(g, h) \mapsto g$

ما نواة (φ) ؟ يسمى هذا الراسم إسقاط (projection) $G \otimes H$ على G .

الحل :

$$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \otimes H :$$

$$\varphi(g_1, h_1)(g_2, h_2) = \varphi(g_1 g_2, h_1 h_2) = g_1 g_2 = \varphi(g_1, h_1) \varphi(g_2, h_2) \Rightarrow \varphi \text{ هومومورفيزم}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(g, h) \in G \otimes H : g = e_G \text{ (عنصر } G \text{ المحايد)}\}$$

$$= \{(e_G, h) \in G \otimes H\} = \{e_G\} \otimes H$$

مثال ٢٣ : برهن على أن الراسم $\varphi: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ هومومورفيزم . مانواة (φ) ؟
 $(a, b) \mapsto a - b$

صف $\varphi^{-1}(3)$.

الحل :

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} :$$

$$\varphi((a, b) + (c, d)) = \varphi(a + c, b + d) = a + c - b - d = a - b + c - d$$

$$\varphi = \varphi(a, b) + \varphi(c, d) \Rightarrow \varphi \text{ هو مومورفيزم}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} : \varphi(a, b) = a - b = 0\}$$

$$= \{(a, b) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} : a = b\} = \{(a, a) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}\}$$

$$\varphi^{-1}(3) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} : \varphi(a, b) = a - b = 3\}$$

$$= \{(a, a-3) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

٢-٣ خواص الضرب الداخلية المباشرة Internal Direct Products

٢-٣-١ تعريف : لتكن H, K زمريتين جزئيتين من زمرة G . يقال أن G حاصل

الضرب الداخلي المباشر لـ H, K ونكتب $G = H \times K$ إذا تحقق الآتي :

$$(أ) \quad G = HK \quad \text{حيث} \quad HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

$$(ب) \quad hk = kh \quad \text{لجميع} \quad h \in H, k \in K$$

$$(جـ) \quad H \cap K = \{e\} \quad (e \text{ العنصر المحايد في } G)$$

ويعمم هذا التعريف كالاتي :

لتكن $H_1, H_2, \dots, H_n$ زمراً جزئية من زمرة G . يقال إن G هي حاصل الضرب

الداخلي المباشر لـ $H_1, H_2, \dots, H_n$ ونكتب: $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ إذا تحقق الآتي:

$$(أ') \quad G = H_1 H_2 \dots H_n := \{h_1 h_2 \dots h_n \mid h_i \in H_i\}$$

$$(ب') \quad h_i h_j = h_j h_i \quad \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j, i \neq j$$

$$(جـ') \quad (H_1 H_2 \dots H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

٢-٣-٢ نظرية : إذا كانت الزمرة G هي حاصل الضرب الداخلي المباشر للزمر

الجزئية $H_1, H_2, \dots, H_n$ فإن G تكون متشاكله مع حاصل الضرب الخارجي

المباشر للزمر الجزئية نفسها .

البرهان : ينتج من تعريف حاصل الضرب الداخلي المباشر أن كل عنصر في G يمكن

التعبير عنه بالشكل $h_1 h_2 \dots h_n$ حيث $h_i \in H_i$. سنبرهن الآن على أن هذا التمثيل وحيد .

ليكن لدينا التمثيلان

$$g = h_1 h_2 \dots h_n, g = k_1 k_2 \dots k_n; h_i, k_i \in H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

أى أن :

$$h_1 h_2 \dots h_n = k_1 k_2 \dots k_n, h_i, k_i \in H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

$$\Rightarrow k_n h_n^{-1} = k_1^{-1} h_1 k_2^{-1} h_2 \dots k_{n-1}^{-1} h_{n-1} \quad (\text{الشرط (ب) في التعريف})$$

$$\Rightarrow k_n h_n^{-1} \in H_1 H_2 \dots H_{n-1}, k_n h_n^{-1} \in H_n$$

$$\Rightarrow k_n h_n^{-1} \in H_1 H_2 \dots H_{n-1} \cap H_n = \{e\} \quad (\text{الشرط (ج) من التعريف})$$

$$\Rightarrow h_n = k_n$$

$$\Rightarrow h_1 h_2 \dots h_{n-1} = k_1 k_2 \dots k_{n-1} \quad (\text{بحذف } h_n, k_n \text{ من } *)$$

ونكرر ما سبق فنحصل على $h_{n-1} = k_{n-1}$ وبالتكرير نصل إلى أن $h_i = k_i$ لجميع

$i = 1, \dots, n$. أى أن التمثيل وحيد .

والآن نعرف :

$$\varphi: G \rightarrow H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$$

$$(h_1 h_2 \dots h_n) \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

واضح أن φ راسم غامر (شامل)

$$\varphi(h_1 h_2 \dots h_n) = \varphi(k_1 k_2 \dots k_n)$$

ليكن

أى أن

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

$$\Rightarrow h_1 = k_1, h_2 = k_2, \dots, h_n = k_n$$

أى أن φ راسم واحد لواحد .

$$\forall (h_1 h_2 \dots h_n), (k_1 k_2 \dots k_n) \in G :$$

$$\varphi((h_1 h_2 \dots h_n)(k_1 k_2 \dots k_n)) = \varphi(h_1 h_2 \dots h_n k_1 k_2 \dots k_n)$$

$$= \varphi(h_1 k_1 h_2 k_2 \dots h_n k_n) = (h_1 k_1, h_2 k_2, \dots, h_n k_n)$$

الشرط (ب)

(من تعريف حاصل الضرب الخارجى)

$$= (h_1, h_2, \dots, h_n)(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

$$= \varphi(h_1, h_2, \dots, h_n) \varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) \Rightarrow \text{هو مورفيزم } \varphi$$

إذن φ أيزومورفيزم (تساكل) . نهاية البرهان .

٣-٢-٣ ملحوظة : لاحظ الفرق بين حاصلى الضرب الداخلى والخارجى المباشرين .

فى الداخلى يتم الضرب داخل الزمرة مستخدمين زمراً جزئية منها ، بينما حاصل الضرب الخارجى يمكن ان يتم لأية زمر ليس بينها أدنى علاقة ، وتتكون زمرة جديدة بعملية (= بضرب) جديدة (جديد)

٣-٢-٤ تعريف : إذا كان k قاسماً لـ n فإننا نعرف

$$U_k(n) := \{x \in U(n) \mid x \equiv 1 \pmod{k}\}$$

٣-٢-٥ أمثلة :

مثال ١ : اختبر إذا ما كانت HK زمراً جزئية من $U(24)$ ، $K = \{1, 13\}$ ، $H = \{1, 17\}$

الحل : $(17)(17) = 289 \equiv 1 \pmod{24}$ إذن H زمرة جزئية من

$$U(24) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

$$U(24) \text{ من } K \text{ زمرة جزئية من } (13)(13) = 169 \equiv 1 \pmod{24} . \text{ إذن } K$$

$$HK = \{1, 13, 17, 5\}$$

$$(13)(17) = 221 \equiv 5 \pmod{24}$$

$$(13)(5) = 65 \equiv 17 \pmod{24}$$

$$(17)(5) = 85 \equiv 13 \pmod{24}$$

$$(5)(5) = 25 \equiv 1 \pmod{24}$$

إذن HK زمرة جزئية من $U(24)$

مثال ٢ : فى S_3 واضح أن $H = \{e, (12)\}$ ، $K = \{e, (13)\}$ ، حيث e العنصر المحايد

فى S_3 زمرتان جزئيتان فى S_3 . هل HK زمرة جزئية من S_3 ؟

الحل :

$$HK = \{e, (12), (13), (12)(13)\} = \{e, (12), (13), (132)\}$$

$$(13)(12) = (123) \notin HK$$

إن HK ليس زمرة جزئية من S_3 .

مثال ٣ : في S_3 ليكن $H = [(123)]$ ، $K = [(12)]$. برهن على أن $HK = S_3$.

هل $H \otimes K \cong S_3$ ؟ لماذا ؟

الحل : $H = \{e, (123), (132)\}$ ، $K = \{e, (12)\}$.

$$HK = \{e, (12), (123), (132), (123)(12), (132)(12)\}$$

$$= \{e, (12), (123), (132), (13), (23)\} = S_3$$

حسب النظرية (٣-١-٩) تكون $H \otimes K$ زمرة إبدالية ، بينما S_3 ليست زمرة إبدالية ،

ولهذا $H \otimes K \neq S_3$ وسبب هذا هو عدم تحقق الشرط (ب) في التعريف (٣-٢-١)

وبهذا لا يتم هذا التشاكل (انظر نظرية (٣-٢-٢)).

مثال ٤ : إذا كانت $(\mathbb{R}_+^*, .)$ هي زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة (أكبر من الصفر) مع

عملية الضرب فبرهن على أن $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ هي حاصل الضرب المباشر لـ $(\mathbb{R}_+^*, .)$

مع الزمرة $\{1, -1\}$

البرهان : واضح أن : $\mathbb{R}_+^* \cdot \{1, -1\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

حيث إن $(\mathbb{R}_+^*, .)$ ، $(\{1, -1\}, .)$ زمرتان جزئيتان من $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$

كذلك فإن : $\mathbb{R}_+^* \cap \{1, -1\} = \{1\}$

حيث 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$

وكذلك فإن الشرط (ب) في التعريف (٣-٢-١) متحقق لأن الضرب إبدالي في

$\mathbb{R}$ فينتج المطلوب

٣-٢-٦ نظرية : (بدون برهان)

ليكن s, t ليس بينهما قواسم مشتركة . عندئذ فإن $U(st)$ هي حاصل الضرب

الداخلي المباشر لـ $U_s(st)$ ، $U_t(st)$. كذلك فإن $U(st)$ تكون متشاكله مع حاصل

الضرب الخارجى المباشر لـ $U(s)$ ، $U(t)$. علاوة على هذا فإن $U_s(st)$ تكون متشاكلة مع $U(t)$ ، $U(st)$ تكون متشاكلة مع $U(s)$. وباختصار فإن :

$$U(st) = U_s(st) \times U_t(st) \cong U(t) \otimes U(s)$$

٧-٢-٣ نتيجة : ليكن $m = n_1 n_2 \dots n_k$ حيث $\gcd(n_i, n_j) = 1, i \neq j$ (القاسم المشترك الأعظم). عندئذ فإن :

$$\begin{aligned} U(m) &= U_{m/n_1}(m) \times U_{m/n_2}(m) \times \dots \times U_{m/n_k}(m) \\ &\cong U(n_1) \otimes U(n_2) \otimes \dots \otimes U(n_k) \end{aligned}$$

٨-٢-٣ مثال :

$$\begin{aligned} U(105) &= U(15.7) = U_{15}(105) \times U_7(105) \\ &= \{1, 16, 31, 46, 61, 76\} \times \{1, 8, 22, 29, 43, 64, 71, 92\} \\ &\cong U(7) \otimes U(15), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(105) &= U(5.21) = U_5(105) \times U_{21}(105) \\ &= \{1, 11, 16, 26, 31, 41, 46, 61, 71, 76, 86, 101\} \times \{1, 22, 43, 64\} \\ &\cong U(21) \otimes U(5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(105) &= U(3.5.7) = U_{35}(105) \times U_{21}(105) \times U_{15}(105) \\ &= \{1, 71\} \times \{1, 22, 43, 64\} \times \{1, 16, 31, 46, 61, 76\} \\ &\cong U(3) \otimes U(5) \otimes U(7) \end{aligned}$$

٩-٢-٣ حسابات هامة لجاوس : النتائج التالية كان كارل جاوس أول من برهنها فى سنة ١٨٠١ :

$$U(2) \cong \{1\}, U(4) \cong \mathbb{Z}_2, U(2^n) \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{2^{n-2}}, n \geq 3,$$

$$U(p^n) \cong \mathbb{Z}_{p^n - p^{n-1}}, \quad p \in \mathbb{P} \setminus \{2\} \text{ (عدد فردى أولى)}$$

٣-٢-١٠ أمثلة متنوعة :

مثال ١ :

$$\begin{aligned} U(105) = U(3.5.7) &\cong U(3) \otimes U(5) \otimes U(7) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(720) = U(16.9.5) &\cong U(16) \otimes U(9) \otimes U(5) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_4 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

مثال ٢ : اوجد عدد العناصر التي رتبته 12 في $U(720)$

$$U(720) \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_4 \quad \text{الحل : من مثال ١}$$

ومن النظرية (٣-١-٧) يكون العنصر المطلوب الذى بالشكل (a, b, c, d) يحقق :

$$(أ) \quad Ord(b) = 4 \quad \text{و} \quad Ord(c) = 6 \quad \text{أو} \quad Ord(c) = 3$$

$$\text{أو} \quad (ب) \quad Ord(d) = 4 \quad \text{و} \quad Ord(c) = 6 \quad \text{أو} \quad Ord(c) = 3$$

$$\text{فى الحالة (أ) : } c = \bar{1} \quad \text{أو} \quad c = \bar{2} \quad \text{أو} \quad c = \bar{4} \quad \text{أو} \quad c = \bar{5}$$

$$b = \bar{1} \quad \text{أو} \quad b = \bar{3}$$

بينما يمكن اختيار a ، d بدون قيود . $(d \in \mathbb{Z}_4 , a \in \mathbb{Z}_2)$ وبهذا يكون لدينا فى

$$\text{الحالة (أ) } 64 \text{ عنصراً لهم الرتبة } 12 \text{ (لأن : } 2.2.4.4 = 64 \text{)}$$

فى الحالة (ب) : لدينا من العناصر التى رتبته 12 ولم ترد فى الحالة (أ) :

$$\text{عنصراً } 2.2.4.2 = 32$$

$$\text{هنا } Ord(b) = 1 \quad \text{أو} \quad Ord(b) = 2 , a \in \mathbb{Z}_2 \text{ بدون قيود ، أى أن}$$

$$b = \bar{2} \quad \text{أو} \quad b = \bar{4} = \bar{0} , c = \bar{1} \quad \text{أو} \quad c = \bar{2} \quad \text{أو} \quad c = \bar{4} \quad \text{أو} \quad c = \bar{5} , d = \bar{1} \quad \text{أو} \quad d = \bar{3}$$

$$(a = \bar{2} \quad \text{أو} \quad a = \bar{1})$$

ومن ثم يكون العدد الكلى للعناصر المطلوبة هو 96

مثال ٣ : اوجد اول رقمين من جهة اليمين فى العدد 49^{111}

الحل : المطلوب هو إيجاد $49^{111} \pmod{100}$. لاحظ أن $49 \in U(100)$. والآن :

$$U(100) = U(4) \otimes U(25) \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{20}$$

٩-٢-٣

وهذا يقتضى أن أى عنصر $x \in U(100)$ يحقق : $x^{20} \equiv 1 \pmod{100}$

$$\Rightarrow 49^{111} = (49)^{100} (49)^{11} = (49^{20})^5 (49)^{11} = (1)^5 (49)^{11}$$

$$= 1 \cdot (7^2)^{11} = 7^{22} = 7^{20} \cdot 7^2 = 1 \cdot 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$$

مثال ٤ : احسب $U_8(40)$ ، $U_5(40)$ ، $U(40)$. هل $U(40) = U_5(40) \times U_8(40)$ ؟ لماذا ؟

الحل :

$$U_8(40) = \{1, 9, 17, 33\}$$

$$U_5(40) = \{1, 11, 21, 31\}$$

$$U_8(40) \times U_5(40) = \{1, 11, 21, 31, 9, 19, 29, 39, 17, 27, 37, 7, 33, 3, 13, 23\}$$

$$= U(40)$$

من النظرية (٦-٢-٣) يجب أن يكون : $U_8(40) \times U_5(40) = U(40)$

مثال ٥ : احسب $U(20)$ ، $U_4(20)$ ، $U_{10}(20)$. هل $U(20)$ هى حاصل الضرب

الداخلى المباشر لـ $U_4(20)$ ، $U_{10}(20)$ ؟ هل يتناقض هذا مع النظرية (٦-٢-٣) ؟

الحل :

$$U(20) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$U_4(20) = \{1, 9, 13, 17\}$$

$$U_{10}(20) = \{1, 11\}$$

$$U_4(20) \times U_{10}(20) = \{1, 11, 9, 19, 13, 3, 17, 7\} = U(20)$$

نعم $U(20)$ هى حاصل الضرب الداخلى المباشر لـ $U_4(20)$ ، $U_{10}(20)$. ولا يتناقض

هذا مع النظرية (٦-٢-٣) ، فالنظرية (٦-٢-٣) تعطى شرطاً كافياً لأن يكون $U(st)$

هو حاصل الضرب الداخلى المباشر لـ $U_s(st)$ ، $U_t(st)$ وهو ألا يكون s ، t لهما قواسم مشتركة (ماعداد الواحد). وهذا الشرط ليس ضروريا ولم يتحقق فى المثال المعطى .

مثال ٦ : برهن على أن D_4 (الزمرة الزوجية الثنائية . انظر مثال ٤٨ من أمثلة متنوعة على الباب الأول) لايمكن التعبير عنها كحاصل ضرب داخلى مباشر من زمريتين جزئيتين فعليتين

البرهان : لنفترض أنه أمكن كتابة D_4 كحاصل ضرب داخلى مباشر لزمريتين جزئيتين

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \in K , \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in H$$
 حيث K ، H هما D_4 من فعليتين

من النظرية (٣-٢-٢) ينتج أن D أيزومورفية (متشاكله) مع حاصل الضرب الخارجى

$$D_4 \cong H \otimes K$$

لـ H ، K أى أن:

جميع الزمر الجزئية الفعلية من D_4 تكون إبدالية ، بينما أن D_4 ليست إبدالية ، لأن :

$$\begin{aligned} \beta\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 8)(2 \ 7)(3 \ 6)(4 \ 5) \end{aligned}$$

بينما

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3 \ 8)(4 \ 7)(5 \ 6) \end{aligned}$$

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha$$

أى أن

وهنا يتناقض مع أن D_4 إبدالية إذا كان فقط إذا كان H ، K إبداليتين (انظر مثال ١٢

فى (٣-١-١٣))

مثال ٧ : برهن على أن S_3 ليست حاصل ضرب داخلي مباشر للزمرتين الجزئيتين :

$$K = \{e, (2\ 3)\}, H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad (e \text{ عنصر } S_3 \text{ المحايد})$$

البرهان : الحل مشابه لحل المثال ٦ السابق مباشرة : H, K زمرتان جزئيتان فعليتان إبداليتان من S_3 بينما $S_3 -$ كما تعلم - ليست إبدالية . فلو كانت S_3 حاصل ضرب داخلي مباشر لـ H, K كانت S أيضاً متشاكله مع حاصل الضرب الخارجى لهما . وكانت بالتالى إبدالية (مثال ١٢ فى (٣-١-١٣)) هذا يتناقض مع كونها ليست إبدالية .

مثال ٨ : فى S_3 لتكن $H = \{e, (2\ 3)\}, K = \{e, (1\ 3)\}$. أوجد $[HK]$ ، HK (تقاطع جميع الزمر الجزئية التى تحتوى على HK ، أى أصغر زمرة جزئية تحتوى على HK . انظر (٢-١١-١))
(e عنصر S_3 المحايد)

الحل :

$$\begin{aligned} HK &= \{e, (2\ 3)\} \{e, (1\ 3)\} = \{e, (1\ 3), (2\ 3), (2\ 3)(1\ 3)\} \\ &= \{e, (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3)\} \end{aligned}$$

أى زمرة جزئية تحتوى على HK تحتوى على جميع معكوسات عناصر HK ومن ثم فهى تحتوى على $(1\ 3\ 2)$ الذى هو معكوس $(1\ 2\ 3)$. كذلك هى تحتوى على جميع "حواصل ضرب" عناصرها ، فهى تحتوى على

$$(1\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2) \quad \text{أى أنها تحتوى كذلك على}$$

ومن ثم فإن : $[HK] = S_3$

مثال ٩ : اعتبر الزمرتين $H = [2]$ ، $K = [6]$ من $\mathbb{Z}_{12}$. احسب HK ، $[HK]$

الحل : لاحظ أن العملية فى $\mathbb{Z}_{12}$ هى الجمع مقياس 12 ، وبهذا يكون :

$$HK = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} + \{\bar{0}, \bar{6}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} = [2]$$

كذلك فإن $[HK]$ وهى أصغر زمرة جزئية تحتوى على HK ، هى نفسها $[2]$

مثال ١٠ : ليكن $n = rs$ حيث r, s عددان صحيحان ليس لهما قواسم مشتركة أى

أن $\gcd(r, s) = 1$. برهن على أن $\mathbb{Z}_n$ هى حاصل الضرب الداخلى المباشر لزمريتها

الجزئيتين الدائريتين $[r]$ ، $[s]$.

البرهان : الحساب مقياس n .

$$[r] + [s] = [1] \quad : \text{لأن } \gcd(r, s) = 1 \text{ فإن}$$

$$\Rightarrow [r] + [s] = \mathbb{Z}_n \quad (1)$$

ليكن $0 \neq z \in [r] \cap [s]$. هذا يقتضى أنه يوجد $x, y \in \mathbb{Z}_n$ أى أن $0 < x, y < n$ بحيث

إن : $z = xr = ys < n$. هذا يقتضى أن $rsxy < n^2$ أى أن $xy < n$ (لأن $rs = n$) (*)

من حيث إن $\gcd(r, s) = 1$ ينتج أن r قاسم لـ y . كذلك فإنه ينتج أن s قاسم لـ x

أى أن rs قاسم لـ xy أى أن n قاسم لـ xy . وهذا تناقض مع (*). إذن $[r] \cap [s] = \{0\}$ (2)

والجمع إيدالى فى $\mathbb{Z}_n$ (3) . من (1) ، (2) ، (3) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ١١ : اعتبر الزمرتين الجزئيتين $H := \{e, (13)\}$ ، $K := \{e, (24)\}$ من الزمرة

D_4 (زمرة تناظرات المربع) (انظر مثالى ٤٥ ، ٤٨ من أمثلة متنوعة على الباب الأول).

أوجد $[HK]$ ، HK

الحل :

$$HK = \{e, (13)\} \{e, (24)\} = \{e, (13), (24), (13)(24)\}$$

واضح أن HK زمرة جزئية من D_4 ، وبالتالي فإن اصغر زمرة جزئية من D_4 تحتوى

عليها (على HK) هى HK نفسها ، أى أن $[HK] = HK$

مثال ١٢ : أوجد أكبر رتبة للعناصر فى $U(900)$

الحل :

$$U(900) = U(4 \cdot 9 \cdot 25) = U(4 \cdot 3^2 \cdot 5^2)$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{3^2-3} \otimes \mathbb{Z}_{5^2-5} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{20}$$

$$6-2-3$$

$$9-2-3$$

$$\ell cm\{2, 6, 20\}$$

وتكون أكبر رتبة للعناصر فى $U(900)$ هى

$$= 60$$

(انظر النظرية (٣-١-٧))

مثال ١٣ : لتكن H, K زمريتين جزئيتين من الزمرة G . إذا كانت $G = HK$ ،
 $g = hk$ حيث $h \in H, k \in K$ ، فهل توجد أية علاقة بين رتبة (g) ، رتبة (h) ، رتبة (k) ؟

وإذا كانت $G = HK$ ، أى حاصل الضرب الداخلى المباشر لـ H, K ، فهل توجد علاقة ؟
الحل : فى الحالة الأولى لا توجد أية علاقة . فى الحالة الثانية التى فيها $G = H \times K$ فإننا نعلم من النظرية (٣-١-٧) أن

$$Ord(g) = lcm\{Ord(h), Ord(k)\}$$

مثال ١٤ : ليكن p, q عددين أوليين فرديين ، m, n عددين صحيحين موجبين .
 وضع لماذا $U(p^m) \otimes U(q^n)$ ليست زمرة دائرية .
الحل :

$$U(p^m) \cong \mathbb{Z}_{p^m - p^{m-1}} = \mathbb{Z}_{2r} \quad (\text{لأن } p \text{ فردى أولى})$$

$$U(q^n) \cong \mathbb{Z}_{q^n - q^{n-1}} = \mathbb{Z}_{2s} \quad (q \text{ عدد فردى أولى})$$

من النظرية (٣-١-٩) ستكون $U(p^m) \otimes U(q^n)$ دائرية إذا كان $Ord(U(p^m))$ ،
 $Ord(U(q^n))$ ليس بينهما قواسم مشتركة (عدا $1 \pm$) وهذا غير متحقق لأن 2 قاسم
 مشترك لكلا الرتبتيين.

مثال ١٥ : برهن على أن $U(144) \cong U(140)$

البرهان :

$$U(144) = U(2^4 \cdot 3^2)$$

$$\cong U(2^4) \otimes U(3^2) \quad (\text{لأن } gcd(2, 3) = 1)$$

$$6-2-3$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{2^{4-2}} \otimes \mathbb{Z}_{3^{2-3}} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \quad (1)$$

$$9-2-3$$

$$U(140) = U(4 \cdot 5 \cdot 7) \cong U(4) \otimes U(5) \otimes U(7)$$

$$6-2-3$$

$$(gcd(4, 5) = 1 \quad , \quad gcd(4, 7) = 1 \quad , \quad gcd(5, 7) = 1 \quad \text{لأن})$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{5-5^0} \oplus \mathbb{Z}_{7-7^0} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \quad (2)$$

٩-٢-٣

من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ١٦ : في $\mathbb{Z}$ ليكن $H := [4]$ ، $K := [10]$. عبر عن HK على الشكل $[g]$.

عم هذه الحالة حيث $H = [a]$ ، $K = [b]$

الحل : (العملية هنا الجمع)

$$[4] + [10] = [gcd\{4, 10\}]$$

$$= [2]$$

$$[a] + [b] = [gcd\{a, b\}]$$

مثال ١٧ : في $\mathbb{Z}$ ليكن $H := [5]$ ، $K := [7]$. برهن على أن $\mathbb{Z} = HK$. هل

$\mathbb{Z} = H \times K$ أى حاصل الضرب الداخلى المباشر لـ H ، K ؟

الحل : (العملية هي الجمع)

$$[5] + [7] = [gcd\{5, 7\}] = [1]$$

$$= \mathbb{Z}$$

$$0 \neq 35 \in [5] \cap [7] \Rightarrow \mathbb{Z} \neq H \times K$$

مثال ١٨ : لتكن

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_3 \right\} \quad , \quad G := \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & a & b \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{Z}_3 \right\} \quad , \quad K := \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & b \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

برهن على أن $G = HKL$ ، هل $G = H \times K \times L$ ؟

الحل : واضح أن $HKL \subset G$. نبرهن على أن $G \subset HKL$ كالآتي :

$$\text{ليكن } \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & y \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in K, \begin{pmatrix} \bar{1} & x & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in H, \begin{pmatrix} \bar{1} & a & b \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in G$$

$$\text{حيث } a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}_3 \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & z \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in L$$

والآن

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & x & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & y \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & z \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & a & b \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & x & xz+y \\ \bar{0} & \bar{1} & z \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & a & b \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \Rightarrow x=a, z=c,$$

$$y=b-ac,$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z}_3$$

$$G \subset HKL \quad \text{أى أن}$$

$$G = HKL \quad \text{أى أن}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & a & ac \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

والآن

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

بينما

إذن الشرط (ب) فى (٣-٢-١) ليس متحققاً، وبهذا $G \neq H \times K \times L$

ملحوظة : لاحظ أن

$$, k \in K , h \in H , g \in G \text{ لجميع } \det(g) = \det(h) = \det(k) = \det(\ell) = 1 \neq 0$$

$\ell \in L$ ، والعملية هي ضرب المصفوفات

مثال ١٩ : برهن على أنه لكل $n > 2$:

$$U(n)^2 := \{x^2 \mid x \in U(n)\}$$

زمرة جزئية فعلية (مضبوطة) من $U(n)$.

البرهان :

$$(i) \quad 1 \in U(n) \Rightarrow 1 = 1^2 \in U(n)^2$$

$$(ii) \quad x^2, y^2 \in U(n)^2 \Rightarrow x, y \in U(n) \Rightarrow xy \in U(n) \Rightarrow x^2 y^2 = (xy)^2 \in U(n)^2$$

$$(iii) \quad x^2 \in U(n)^2 \Rightarrow x \in U(n) \Rightarrow x^{-1} \in U(n) \Rightarrow (x^2)^{-1} = (x^{-1})^2 \in U(n)^2$$

$$\Rightarrow U(n)^2 \hookrightarrow U(n) \quad (U(n) \text{ زمرة جزئية من } U(n)^2)$$

لأثبت أن $U(n)^2$ زمرة جزئية فعلية من $U(n)$. خذ $x < n$ عدداً طبيعياً ،

$$\sqrt{x} \notin \mathbb{N} , \gcd(x, n) = 1 . \text{ ينتج أن } x \in U(n) , x \notin U(n)^2 . \text{ إذا كانت } n$$

فرديّة خذ $x = 2$.

مثال ٢٠ : عبر عن $Aut(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5)$ كحاصل ضرب خارجي مباشر لزمير على

الشكل $\mathbb{Z}_n$

الحل : من النتيجة (١١-١-٣) نعلم أن

$$Aut(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5) \cong Aut(\mathbb{Z}_{2 \times 3 \times 5})$$

كذلك نعلم أن $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U(n)$ (تمرين ٨٥ من تمارين عامة على الباب الأول) ،

ومن ثم فإن :

$$Aut(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5) \cong U(2 \times 3 \times 5) \cong U(2) \otimes U(3) \otimes U(5) \quad (\text{من } ٦-٢-٣)$$

$$\cong \{1\} \otimes \mathbb{Z}_{3-1} \otimes \mathbb{Z}_{5-1} \quad (\text{من } ٩-٢-٣)$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$$

مثال ٢١ : بدون إجراء حسابات فى $Aut(\mathbb{Z}_{50})$ برهن على أن $Aut(\mathbb{Z}_{50})$ دائرية .

البرهان : $Aut(\mathbb{Z}_{50}) \cong U(50) \cong U(2) \otimes U(25) = U(2) \times U(5^2)$

$$\cong \{1\} \otimes \mathbb{Z}_{5^2-5} \cong \mathbb{Z}_{20}$$

وهى دائرية .

مثال ٢٢ : بدون إجراء حسابات فى $U(27)$ اوجد عدد الزمر الجزئية الفعلية فى $U(27)$

$$U(27) = U(3^3) \cong \mathbb{Z}_{3^3-3^2} = \mathbb{Z}_{18} \quad \text{الحل :}$$

ومن الإستنتاج (١-١١-١٢) يكون لدينا أربع زمر جزئية فعلية من $U(27)$ رتبها 2 ، 3 ، 6 ، 9 (قواسم 18)

مثال ٢٣ : برهن على أنه توجد زمرة U (U -group) تحتوى على زمرة جزئية تكون

متشاكلة (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$

البرهان :

$$U(63) = U(3^2.7) \cong U(3^2) \otimes U(7)$$

$$\cong \mathbb{Z}_{3^2-3} \otimes \mathbb{Z}_6 \cong (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3) \otimes (\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2)$$

$$= \mathbb{Z}_2 \otimes (\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3) \otimes \mathbb{Z}_2$$

مثال ٢٤ : لتكن $G := \{3^a 6^b 10^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ والعملية هى الضرب العادى ، ولتكن

$H := \{3^a 6^b 12^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ والعملية هى الضرب العادى كذلك . برهن على أن :

$$G = [3] \times [6] \times [10] \quad \text{بينما} \quad H \neq [3] \times [6] \times [12]$$

البرهان : واضح أن $[3] = \{3^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ لأن $[3]$ ، $[6]$ ، $[10]$ يجب أن تكون زمراً

جزئية من G حتى يتحقق $G = [3] \times [6] \times [10]$ وواضح بالفعل أن $G = [3][6][10]$.

كذلك ضرب الأعداد إبدالى ، وكذلك

فإن : $[3] \cap [6] = \{1\}$ ، $[3] \cap [10] = \{1\}$ وهذا يكفى حتى يتحقق الشرط (جـ) .

إن G هى حاصل الضرب الداخلى لـ $[3]$ ، $[6]$ ، $[10]$.

بينما $12 \in [12] = 6^2 \cdot 3^{-1}$ ، أى أن $\{1\} \neq [12] \cap [6][3]$ أى أن الشرط (جـ) فى التعريف (٣-٢-١) غير متحقق . نهاية البرهان .

مثال ٢٥ : هل $U(30)/U_5(30)$ تتشاكل مع $\mathbb{Z}_4$ أم مع $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ؟

الحل :

$$U(30) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$U_5(30) = \{1, 11\} = H$$

$$U(30)/U_5(30) = \{1H, 7H, 11H, 13H, 17H, 19H, 23H, 29H\} : 30 \text{ الضرب مقياس}$$

$$1H, 11H = H \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$17H = 17\{1, 11\} = \{17, 187\} = \{17, 7\} = 7\{11, 1\} = 7H$$

$$23H = 23\{1, 11\} = \{23, 253\} = \{23, 13\} = \{143, 13\} = 13\{11, 1\} = 13H,$$

$$29H = 29\{1, 11\} = \{29, 319\} = \{29, 19\} = \{209, 19\} = 19\{11, 1\} = 19H$$

$$\Rightarrow U(30)/U_5(30) = \{H, 7H, 13H, 19H\}$$

وهى دائرية يصلح كمولد لها $7H$ (كما يصلح H مولداً لها ، أما $19H$ فلا يصلح لأن رتبة $19H$ هى 2)

وبالتالى فهى تتشاكل مع $\mathbb{Z}_4$ وليس مع $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

مثال ٢٦ : ما رتبة الزمرة $U(10)/[(2,9)]$ ؟ $\mathbb{Z}_{10} \otimes U(10)$

$$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$[(2,9)] = \{(2,9), (4,1), (6,9), (8,1), (0,9), (2,1), (4,9), (6,1), (8,9), (0,1)\}$$

$$Ord([(2,9)]) = 10, \quad Ord(\mathbb{Z}_{10} \otimes U(10)) = 10 \times 4 = 40$$

$$Ord(\mathbb{Z}_{10} \otimes U(10)/[(2,9)]) = \frac{40}{10} = 4$$

مثال ٢٧ : إذا كانت $G = HK$ حيث G زمرة ، H ، K زمرتان جزئيتان طبيعيتان في G ، $H \cap K = \{e\}$ ، حيث e العنصر المحايد في G . برهن على أن G هي حاصل الضرب الداخلي المباشر لـ H ، K .

البرهان : من مثال ٤٠ في أمثلة متنوعة على الباب الأول ينتج أن $hk = kh$ لجميع $k \in K$ ، $h \in H$. وينتج المطلوب مباشرة .

تمارين

- (١) اوجد رتبة كل عنصر في $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_6$
- (٢) هل $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ متشاكلة مع $\mathbb{Z}_{27}$ ؟ لماذا ؟
- (٣) هل $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ متشاكلة مع $\mathbb{Z}_{15}$ ؟ لماذا ؟
- (٤) الزمرة الثنائية (المزدوجة) D_n لها الرتبة $2n$ ، ولها زمرتان جزئيتان واحدة تتكون من n دورانا ، والأخرى (الانعكاس) من الرتبة 2 . وضح لماذا لاتعتبر D_n متشاكلة مع حاصل الضرب الخارجى المباشر لهاتين الزمرتين الجزئيتين .
- (٥) برهن على أن زمرة الأعداد المركبة مع عملية الجمع تكون متشاكلة مع الزمرة $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$
- (٦) اوجد رتبة أى عنصر لايساوى الوحدة في $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$
- (٧) اوجد جميع الزمر الجزئية من الرتبة الثالثة في $\mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_3$
- (٨) لتكن M زمرة المصفوفات من النوع 2×2 ، ومداخلها (عناصرها) أعداد حقيقية مع عملية جمع المصفوفات ، ولتكن $N = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ مع عملية جمع المركبات (componentwise addition) . برهن على أن M ، N متشاكلتان (أيزومورفيتان) . ما الذى يقابل العبارة السابقة إذا كانت المصفوفات من النوع $n \times n$ ؟
- (٩) برهن على أن $D_3 \otimes D_4 \not\cong D_{24}$
- (١٠) اوجد عدد الزمر الجزئية الدائرية من الرتبة 15 في $\mathbb{Z}_{90} \otimes \mathbb{Z}_{36}$

(١١) أكمل الجمل الآتية :

(أ) الزمرة الجزئية الدائرية من $\mathbb{Z}_{24}$ التي تتولد من العنصر 18 لها الرتبة ---

(ب) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4$ من الرتبة ----

(جـ) العنصر (2 , 4) من الزمرة $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_{12}$ له الرتبة -----

(د) زمرة كلاين الرباعية متشاكلة مع $\mathbb{Z}_- \otimes \mathbb{Z}_-$.

(هـ) $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4$ لها عدد - من العناصر التي رتبته منتهية

(١٢) مهما ترتيب العوامل اكتب حاصل ضرب خارجي مباشر لاثنتين أو لأكثر من الزمر التي على الشكل $\mathbb{Z}_n$ بحيث يكون الناتج متشاكلا مع $\mathbb{Z}_{60}$ بكل الطرائق الممكنة .

(١٣) اوجد جميع الزمر الجزئية الفعلية في $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

(١٤) اوجد جميع الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ التي تكون متشاكلة مع زمرة كلاين الرباعية.

(١٥) اضرب مثالا لبيان أن ليست كل زمرة إبدالية هي حاصل ضرب داخلي مباشر لزمريتين جزئيتين فعليتين

(١٦) تذكر أنه إذا كانت H, K زمريتين جزئيتين من زمرة G فإن $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ في $U(24)$ عين المجموعتين $U_4(24)$ ، $U_6(24)$. هل $U_4(24) U_6(24) = U(24)$ ؟ هل حاصل الضرب داخلي ؟ لماذا ؟

(١٧) عبر عن $U(165)$ كحاصل ضرب خارجي مباشر لزمر U بثلاث طرائق مختلفة .
(١٨) عبر عن $U(165)$ كحاصل ضرب داخلي مباشر لزمر جزئية فعلية بثلاث طرائق مختلفة .

(١٩) عبر عن $U(165)$ كحاصل ضرب خارجي مباشر لزمر دائرية (عمليات جمع !)
على الشكل $\mathbb{Z}_n$.

(٢٠) بدون إجراء حسابات في $U(81)$ قرر عدد الزمر الجزئية في $U(81)$

(٢١) اوجد عدد العناصر فى $Aut(\mathbb{Z}_{720})$ التى رتبته 6 بدون إجراء حسابات فى $Aut(\mathbb{Z}_{720})$

(٢٢) بدون إجراء حسابات فى $Aut(\mathbb{Z}_{20})$ اوجد عدد العناصر التى رتبته 2 والتى رتبته 4 .

(٢٣) برهن على أن : $U(55) \cong U(75)$

(٢٤) برهن على أنه توجد زمرة U تحتوى على زمرة جزئية متشاكلة مع $\mathbb{Z}_{14}$

(٢٥) برهن على أنه لا توجد زمرة U تحتوى على زمرة جزئية متشاكلة مع $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$

(٢٦) برهن على أنه لا يمكن كتابة الزمرة $\mathbb{Z}_4$ كحاصل ضرب خارجى مباشر لزمريتين جزئيتين منها رتبة كل منهما 2 (العملية جمع)

(٢٧) برهن على أنه لا يمكن كتابة الزمرة $\mathbb{Z}_8$ كحاصل ضرب خارجى مباشر لزمريتين جزئيتين غير تافهيتين منها .

(٢٨) قرر إذا ما كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) لأى زمريتين G_1 ، G_2 يكون $G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$

(ب) أى زمرة ذات رتبة هى عدد أولى لا يمكن أن تكون حاصل ضرب داخلى مباشر لزمريتين جزئيتين فعليتين منها .

(جـ) $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_8$

(د) $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4 \cong S_8$

(هـ) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_8 \cong S_4$

(و) $Ord(\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_{15}) = 60$

(٢٩) ما أصغر زمرة غير إبدالية رتبته عدد فردى ؟

(٣٠) ما أصغر عدد غير أولى لايساوى الواحد بحيث توجد زمرة وحيدة يكون رتبته ؟

(٣١) اكمل :

(أ) الزمرة العاملة $(\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{12}) / ([2] \times [2])$ رتبتهما ----

(ب) الزمرة العاملة $(\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{12}) / [(2,2)]$ رتبتهما ----

(٣٢) اوجد عدد المجموعات المشاركة للزمر الجزئية الآتية.:

(أ) $[18]$ في $\mathbb{Z}_{36}$

(ب) $[1] \otimes [0] \otimes [0]$ في $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$

(جـ) $[0] \otimes [1] \otimes [2]$ في $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$

1 Group Theory نظرية الزمر



النظرية الأساسية للزمر الإبالية المنتهية Fundamental Theorem of Finite Abelian Groups

١-٤ النظرية الأساسية

١-٤-١ نظرية : كل زمرة إبدالية منتهية تكون حاصل ضرب (خارجي) مباشر لزمرة دائرية رتبها هي قوة (أس power) لعدد أولي. وعلاوة على هذا فإن هذا التحليل (factorization) وحيد فيما عدا ترتيب العوامل .

ولأن أى زمرة دائرية منتهية G من الرتبة n تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}_n$ (١-٨) فإن النظرية تعنى أن كل زمرة إبدالية منتهية تكون متشاكلية مع زمرة لها الشكل :

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{p_m^{n_m}} \quad (*)$$

حيث الـ p_i 's أعداد أولية ليست بالضرورة مختلفة ، $p_1^{n_1}$ ، $p_2^{n_2}$ ، ... ، $p_m^{n_m}$ تتحدد وحدانيتها (uniquely determined) بـ G .

١-٤-٢ تعريف : تسمى كتابة أى زمرة بالشكل (*) السابق **تحديد فصل التشاكل لـ G**

(Determining the isomorphism class of G)

١-٤-٣ تمهيدية : لتكن G زمرة إبدالية منتهية من الرتبة mn حيث m ، n ليس لهما

قواسم مشتركة . إذا كانت $H := \{x \in G \mid x^m = e\}$ وكانت $K := \{x \in G \mid x^n = e\}$ ،

حيث e عنصر G المحايد فإن $G = H \times K$ (حاصل الضرب الداخلى المباشر لـ H ، K)

البرهان : لأن G إبدالية فإننا بحاجة فقط إلى إثبات أن $G = HK$ ، وأن $H \cap K = \{e\}$.

من حيث إن $\gcd(m, n) = 1$ فإنه يوجد عدنان صحيحان s ، t بحيث إن $1 = sm + tn$.

والآن لـ $x \in G$ لدينا : $x = x^1 = x^{sm+tn} = x^{sm} x^{tn}$ ولكن : $(x^{sm})^n = (x^s)^{mn} = e$ من

النتيجة (١-١١-٩) (٢) وبالتالي فإن $x^{sm} \in K$ وكذلك فإن $(x^{tn})^m = (x^t)^{mn} = e$ ،

أى أن $x^{tn} \in H$. وهكذا فإن $G = HK$.

والآن ليكن $x \in H \cap K$. عندئذ فإن : $x^m = e = x^n$ فمن النتيجة (١-١١-٩) (١)

ينتج أن رتبة (x) تقسم كلا من m ، n . ومن حيث إن $\gcd(m, n) = 1$ فإن $\text{Ord}(x) = 1$ ،

وبالتالى فإن $x = e$. نهاية البرهان .

٤-١-٤ نتيجة : لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $Ord(G) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$ حيث الـ

p_i 's كلها أعداد أولية مختلفة. ولتكن $G(p_i) = \{x \in G \mid x^{p_i} = e\}$ عندئذ فإنه من التمهيدية

(٤-١-٣) وبلاستقراء الرياضى يكون

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_m)$$

ومن ثم فإنه يكفى أن نعتبر الزمر ذات الرتبة من قوى عدد أولى .

٤-١-٥ تمهيدية : لتكن G زمرة إبدالية رتبته قوة لعدد أولى وعنصرها المحايد e ،

وليكن a عنصراً فى G له أكبر رتبة فيها . عندئذ فإنه يمكن كتابة G على الشكل :

$$G = [a] \times K \quad (\text{أى حاصل الضرب الداخلى (المباشر) لـ } [a], K)$$

البرهان : لتكن $Ord(G) = p^n$ ، وسنجرى الاستقراء الرياضى على n . إذا كانت $n = 1$

فإن $G = [a] \times [e]$. (تذكر أنه إذا كانت رتبة زمرة ما عدداً أولياً كانت الزمرة دائرية .

نظرية (١-١١-٧) (٢) .) لنفترض أن المقولة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية التى من

الرتبة p^k حيث $k < n$.

والآن خذ العنصر a الذى له أكبر رتبة p^m من بين جميع عناصر G . (تذكر أن رتبة أى

عنصر تقسم رتبة الزمرة المنتهية التى ينتمى إليها.) عندئذ فإن $x^{p^m} = e$ لجميع $x \in G$.

وليكن $G \neq [a]$ ، وإلا يكون البرهان قد اكتمل . اختر العنصر b من بين عناصر G الذى

يكون له أصغر رتبة بحيث إن $b \notin [a]$. سنبرهن على أن $[a] \cap [b] = \{e\}$: وذلك بالبرهنة

على أن : $Ord(b) = p$. لأن $Ord(b^p) = \frac{Ord(b)}{p}$ نستنتج أن $b^p \in [a]$ بالطريقة التى

اخترنا بها b . ليكن $b^p = a^i$. لاحظ أن : $b^p = (b^p)^{p^{m-1}} = (a^i)^{p^{m-1}}$ ، وهكذا فإن :

$Ord(a^i) \leq p^{m-1}$. وهكذا فإن a^i ليس مولداً لـ $[a]$ ، ومن ثم فإنه من الاستنتاج (١-١)

(١١-١١) يكون $\gcd(p^m, i) \neq 1$. وهذا يبرهن على أن p يقسم i ، وبالتالي فإنه يمكننا

أن نكتب : $i = pj$. وعندئذ فإن : $b^p = a^i = a^{pj}$. والآن اعتبر العنصر $c = a^{-j}b$.
 c لا يقع في $[a]$ وإلا وقعت b كذلك في $[a]$. كذلك فإن :

$c^p = a^{-jp}b^p = a^{-i}b^p = b^{-p}b^p = e$. وهكذا فإننا وجدنا عنصراً c ، له الرتبة p بحيث إن $c \notin [a]$. ولأننا اخترنا b بحيث كان b له أصغر رتبة ، وكان $b \notin [a]$ ، فإننا نستنتج أن b له أيضاً الرتبة p ، ويكون ادعاؤنا قد تحقق .

والآن اعتبر زمرة القسمة $\bar{G} := G/[b]$. وليكن $\bar{x} := x[b]$ عنصراً في $\bar{G}$. إذا

كان $Ord(\bar{a}) < Ord(a) = p^m$ فإن $(\bar{a})^{p^{m-1}} = \bar{e}$ وهذا يعنى أن $(a[b])^{p^{m-1}} = a^{p^{m-1}}[b] = [b]$ ،
 بحيث إن : $a^{p^{m-1}} \in [a] \cap [b] = \{e\}$ وهذا يتناقض مع أن $Ord(a) = p^m$. وهكذا
 فإن $Ord(\bar{a}) = Ord(a) = p^m$ ومن ثم فإن $\bar{a}$ عنصر له أكبر رتبة في $\bar{G}$. وبلاستقراء
 الرياضى نستطيع أن نكتب $\bar{G}$ بالشكل $[\bar{a}] \times \bar{K}$ لزمرة جزئية $\bar{K}$ من $\bar{G}$. والآن ليكن

حيث $K := \{x \in G \mid \bar{x} \in \bar{K}\}$ $\rho : G \rightarrow \bar{G}$ هو الهومومورفيزم الطبيعى . نحن ندعى
 $x \mapsto \bar{x}$

أن : $[a] \cap K = \{e\}$. وذلك لأنه إذا كان $x \in [a] \cap K$ فإن $\bar{x} \in [\bar{a}] \cap \bar{K} = \{\bar{e}\} = \{[b]\}$ ، وهذا
 معناه $x[b] = [b]$ وبالتالي فإن $x \in [b]$ ومن ثم فإن $x \in [a] \cap [b] = \{e\}$. وينتج من مناقشة
 الرتب أن $G = [a]K$ (*) وبالتالي فإن $G = [a] \times K$ (حاصل الضرب الداخلى المباشر).

والآن من (٤-١-٥) وبلاستقراء الرياضى ينتج أن :

٤-١-٦ تمهيدية :

أى زمرة إبدالية منتهية لها رتبة هي قوة (أس) عدد أولى تكون حاصل ضرب داخلى
 (مباشر) من زمر دائرية .

والآن ماذا يتبقى لنا حتى يكتمل برهان النظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية ؟ إن
 النتيجة (٤-١-٤) تبرهن على أن الزمرة الإبدالية المنتهية G يمكن كتابتها على الصورة
 $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_n)$ حيث $G(p_i)$ هي زمرة لها رتبة هي قوة (أس)

عدد أولى. بينما التمهيدية (٤-١-٦) تعطينا المقولة أن كلا من هذه العوامل هو حاصل ضرب داخلي مباشر لزمر دائرية رتبها قوى (أسس) أعداد أولية . وهذا يعنى أنه يتبقى فقط البرهنة على وحدانية هذه العوامل . الزمر $G(p_i)$ تتحدد وحدانيتها من G لأنها تشكل عناصر G التى رتبها قوى لـ p_i . وبالتالي فإنه يتبقى فقط البرهنة على أنه توجد طريقة وحيدة (بدون حساب الأيزومورفيزمات وترتيب العوامل (up to isomorphism and rearrangement of factors) لكتابة $G(p_i)$ كحاصل ضرب داخلي مباشر لزمر دائرية .

٤-١-٧ تمهيدية :

لتكن G زمرة إبدالية منتهية رتبها قوة (أس) عدد أولى . إذا كانت

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$$

حيث H_i 's ، K_j 's زمر جزئية دائرية غير تافهة بحيث إن

$$Ord(K_1) \geq Ord(K_2) \geq \dots \geq Ord(K_n) , Ord(H_1) \geq Ord(H_2) \geq \dots \geq Ord(H_m)$$

فإن $Ord(H_i) = Ord(K_i)$ لجميع i ، $m = n$.

البرهان: بالاستقراء الرياضى على $Ord(G)$. التقرير واضح فى حالة (عدد أولى) $Ord(G) = p$. لنفترض أن التقرير صحيح لجميع الزمر الإبدالية التى رتبها أقل من $Ord(G)$. والآن لآى زمرة إبدالية L الزمرة : $L^p := \{x^p \mid x \in L\}$ هى زمرة جزئية من الزمرة L : لأن $e = e^p \in L^p$ أى أن $L^p \neq \emptyset$ ، وكذلك لآى $x^p, y^p \in L^p$:

(لأن L إبدالية ، $x, y \in L$) $x^p(y^p)^{-1} = x^p(y^{-1})^p = (xy^{-1})^p \in L^p$ ، والآن ينتج أن :

$$G^p = H_1^p \times H_2^p \times \dots \times H_m^p = K_1^p \times K_2^p \times \dots \times K_n^p$$

حيث m' أكبر عدد صحيح i بحيث إن $Ord(H_i) > p$ ، n' أكبر عدد صحيح j بحيث إن $Ord(K_j) > p$. (هذا يؤكد أن حاصل الضربين المباشرين الداخليين لـ G^p لا يحتويان على عوامل تافهة). ونظراً لأن $Ord(G^p) < Ord(G)$ فمن الاستقراء الرياضى يكون لدينا

$Ord(H_i^p) = Ord(K_i^p)$ ، $m' = n'$ لجميع $i = 1, 2, \dots, m'$. ونظراً لأن

$Ord(H_i) = p Ord(H_i^p)$ فإن $Ord(H_i) = Ord(K_i)$ لجميع $i = 1, 2, \dots, m'$.

يتبقى فقط البرهنة على أن عدد الـ H_i ذات الرتبة p يساوى عدد الـ K_i ذات الرتبة p . أى أن $m - m' = n - n'$ وهذا ينتج مباشرة من أن

$$Ord(H_1).Ord(H_2)...Ord(H_{m'})p^{m-m'} = Ord(G)$$

$$= Ord(K_1).Ord(K_2)...Ord(K_{n'})p^{n-n'}, Ord(H_i) = Ord(K_i)$$

أى أن $m - m' = n - n'$.

ومن حيث إن $m' = n'$ ينتج أن $m = n$.

٨-١-٤ : نظرية (بدون برهان)

إذا كانت A ، B ، C زمراً إبدالية وكانت A منتهية فإن :

$$A \otimes B \cong A \otimes C \text{ (متشاكلتان) إذا كان فقط إذا كان } B \cong C .$$

٩-١-٤ : امثلة :

مثال ١ : اكتب حواصل الضرب المباشرة الممكنة فى حالة إذا كانت رتبة الزمرة الإبدالية المنتهية هى :

$$4 \text{ (أ) } \quad 8 \text{ (ب) } \quad 16 \text{ (ج) }$$

الحل :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \text{ أو } \mathbb{Z}_4 \text{ (أ) }$$

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \text{ أو } \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \text{ أو } \mathbb{Z}_8 \text{ (ب) }$$

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \text{ أو } \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4 \text{ أو } \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_8 \text{ أو } \mathbb{Z}_{16} \text{ (ج) }$$

$$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$$

مثال ٢ : لتكن $G = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$

مع عملية الضرب مقياس 65 . عبر عن G بدلالة حاصل الضرب الداخلى والخارجى المباشرين لزمرة إبدالية منتهية .

الحل : سنكتب أولاً رتب عناصر G :

العنصر	1	8	12	14	18	21	27	31	34	38	44	47	51	53	57	64
الرتبة	1	4	4	2	4	4	4	4	4	4	4	4	2	4	4	2

(أ) كحاصل ضرب داخلي مباشر : سنختار عنصراً يكون ذا رتبة عظمى ، وليكن 8 . وبهذا يكون [8] عاملاً في حاصل الضرب الداخلي . ثم نختار عنصراً آخر a بحيث تكون رتبة (a) هي 4 (لأن رتبة (G) هي 16 ، رتبة $([8])$ هي 4) وبحيث يكون $a, a^2, a^3 \notin [8]$

$G = [8] \times [12]$: وبهذا يكون : $\{1, 8, 64, 57\} = [18]$. 12 يحقق هذه الشروط ، وبهذا يكون :

(ب) كحاصل ضرب خارجي مباشر : الزمر الإبدالية التي رتبته 16 هي :

$$\mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$$

$\mathbb{Z}_{16}$ مستبعدة لأن $1 \in \mathbb{Z}_{16}$ رتبته 16 ، G ليس بها عنصر رتبته 16 .

$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2$ مستبعدة أيضاً لأن $(1,1) \in \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2$ رتبته 8 و G ليس بها عنصر رتبته 8

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ مستبعدة لأنه لا يوجد بها عنصر رتبته 4 ، بينما G بها 12 عنصراً من الرتبة 4 .

$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ بها العناصر الآتية من الرتبة 4 :

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (3, 0, 0), (3, 1, 0), (3, 0, 1), (3, 1, 1)$$

وهي ثمانية عناصر ، بينما G بها 12 عنصراً من الرتبة 4 . إذن هذه الحالة مستبعدة

$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$: جميع عناصرها من الرتبة 4 فيما عدا العناصر :

$$(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$$

إذن بها 12 عنصراً من الرتبة 4 ، وبها 3 عناصر من الرتبة 2 هي $(0, 2)$ ، $(2, 0)$ ،

$(2, 2)$ ، وعنصر واحد من الرتبة 1 هو $(0, 0)$. وتكون متشاكله مع G .

مثال ٣ : لتكن

$$G = \{1, 8, 17, 19, 26, 28, 37, 44, 46, 63, 62, 64, 71, 73, 82, 89, 91, 98, 107, 109, 116, 118, 127, 134\}$$

والعملية هي الضرب مقياس 135 (modulo) . عبر عن G كحاصل ضرب داخلي وخارجي مباشرين

الحل : $8^3 = 512 \equiv 107 \pmod{135}$ ومن ثم فإن :

$8^6 \equiv (107)^2 \pmod{135} \equiv 109 \pmod{135}$, $8^{12} \equiv (109)^2 \pmod{135} \equiv 1 \pmod{135}$
كذلك فإن : $134 \equiv -1 \pmod{135}$ ومن ثم فإن $(134)^2 \equiv 1 \pmod{135}$ ،

$$\text{Ord}(134) = \text{Ord}(109) = 2 \text{ أى أن } (109)^2 \equiv 1 \pmod{135}$$

والآن G تكون متشاكلة مع إحدى الزمر :

$$\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \text{ or } \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2 \text{ or}$$

$$\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$$

(راجع النتيجة (٣-١-١١))

رتبة (8) هي 12 تستبعد الزمرة الأخيرة لأنه لا يوجد بها عنصر رتبة 12 . كذلك هناك عنصران في G رتبتهما 2 بينما $\mathbb{Z}_{24}$ بها عنصر واحد رتبته 2 هو 12 . إذن G تكون متشاكلة مع $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_2$.

أما بالنسبة لحاصل الضرب الداخلي المباشر فرتبة ([134]) هي 2 ، رتبة ([8]) هي 12 ملحوظة : لم نضع "-" فوق كل رقم في المثالين السابقين للسهولة في الكتابة .

كما أن $134 \notin [8]$ ، ورتبة (G) هي 24 ، ومن ثم فإن $G = [8] \times [134]$

مثال ٤ : اكتب $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ على الشكل $\mathbb{Z}_{n_1} \otimes \mathbb{Z}_{n_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{n_k}$

بحيث يكون n_i قاسما لـ n_{i-1}

الحل :

$$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2$$

$$\cong \mathbb{Z}_{180} \otimes \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_2$$

٤-١-١٠ نتيجة :

يستنتج من النظرية الأساسية للزمر الإبدالية أنه إذا كانت m تقسم رتبة زمرة إبدالية منتهية G ، فإن G لها زمرة جزئية رتبته m .

٤-١-١١ مثال : G من الرتبة 72 وهى زمرة إبدالية . المطلوب الحصول على زمرة جزئية منها لها الرتبة 12 .

الحل : وفقا للنظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية تكون G متشاكله مع إحدى الزمر :

$$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_9 \text{ or } \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \text{ or } \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \text{ or } \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \\ \text{or } \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \text{ or } \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$$

$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{72}$ (راجع (٣-١-١١)) ومن النتيجة السابقة تحتوى على زمرة جزئية رتبته 12. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_6$ (راجع (٣-١-١١)) وهى تحتوى كذلك على زمرة جزئية رتبته 12 هى : $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), \dots, (\bar{11}, \bar{0})\}$

وللحصول على زمرة جزئية رتبته 12 من الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ نأخذ الزمرة :

$$\{(\bar{m}, \bar{0}, \bar{n}) \mid \bar{m} \in \mathbb{Z}_4, \bar{n} \in \{0, 3, 6\}\}$$

وللحصول على زمرة جزئية رتبته 12 من الزمرة $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ نأخذ الزمرة :

$$\{(\bar{m}, \bar{n}, \bar{0}) \mid \bar{m} \in \{0, 2, 4, 6\}, \bar{n} \in \mathbb{Z}_3\}$$

ومن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ نأخذ الزمرة :

$$\{(\bar{k}, \bar{\ell}, \bar{0}, \bar{n}) \mid \bar{k}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_2, \bar{n} \in \{0, 3, 6\}\}$$

ومن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ نأخذ الزمرة :

$$\{(\bar{k}, \bar{\ell}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{p}) \mid \bar{k}, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}_2, \bar{p} \in \mathbb{Z}_3\}$$

٤-١-١٢ أمثلة متنوعة :

مثال ١ : ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث إنه يوجد بالضبط أربع زمر إبدالية غير متشاكله من الرتبة n ؟

الحل : $n = 36$ والزمير الأربع هي : $\mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

مثال ٢ : برهن على أنه في أية زمرة إبدالية من الرتبة 45 يوجد عنصر رتبته 15 . هل تحتوى أية زمرة من الرتبة 45 عنصراً رتبته 9 ؟

الحل : الزمر الإبدالية من الرتبة 45 هي : $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_9$ ، $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$. أى أنه بدون حساب التشاكلات (الأيزومورفزمات) توجد فقط زميرتان إبداليتان لهما الرتبة 45 . واضح أنه في الزمرة $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ العنصر $(1, 1, 1)$ رتبته 15 ، وفي الزمرة $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ العنصر $(1, 1, 1)$ رتبته 15 (راجع (٣-١-٧)). الزمرة $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ ليس بها عنصر رتبته 9 .

مثال ٣ : برهن على أنه توجد زميرتان إبداليتان من الرتبة 108 لكل منهما زمرة جزئية واحدة بالضبط من الرتبة 3

البرهان : الزمر الإبدالية من الرتبة 108 هي : $\mathbb{Z}_{108} \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{27}$ ، $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{27}$ ، $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$. الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{27}$ بها زمرة جزئية واحدة من الرتبة 3 هي الزمرة المتولدة من العنصر $(\bar{0}, \bar{9})$ أى هي :

$$[(\bar{0}, \bar{9})] = \{(\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{18}), (\bar{0}, \bar{0})\}$$

الزمرة $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{27}$ بها زمرة جزئية واحدة من الرتبة 3 هي الزمرة المتولدة من العنصر $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{9})$ أى هي :

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{9})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{18}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

مثال ٤ : برهن على أنه توجد زميرتان إبداليتان من الرتبة 108 لكل منهما أربع زمر جزئية بالضبط من الرتبة 3 .

البرهان : بالنظر إلى المثال السابق مباشرة : الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ لها الزمر الجزئية الآتية :

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\},$$

$$[(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})] = \{(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\},$$

$$[(\bar{0}, \bar{1}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\},$$

$$[(\bar{0}, \bar{2}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

والزمرة : $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9$ لها الزمر الجزئية الآتية :

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{3})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

$$[(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{6})] = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$$

مثال ٥ : لتكن G زمرة إبدالية من الرتبة 120 ، لها بالضبط 3 عناصر من الرتبة 2 .

عين فصل أو فصول التشاكل لـ G

الحل : إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 120 فإن فصول التشاكل لها هي :

$$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{15}$$

واضح أن الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{15}$ هي الزمرة المعنية فعناصرها ذوات الرتبة الثانية

هي :

$$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$$

مثال ٦ : بدون حساب التشاكلات (الأيزومورفيزمات) (up to isomorphism) اوجد

جميع الزمر الإبدالية من الرتبة 360 .

الحل : $360 = 5 \times 8 \times 9$ وبهذا تكون الزمر الإبدالية هي :

$$\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9,$$

$$\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$$

مثال ٧ : برهن بضرب مثال على أنه إذا كانت رتبة زمرة إبدالية تقبل القسمة على 4 ، فليس بالضرورة أن تحتوى الزمرة على زمرة جزئية دائرية من الرتبة 4 .

البرهان : الزمرة $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ليست دائرية ولا تحتوى على زمرة جزئية دائرية من الرتبة 4 .

مثال ٨ : كم عدد الزمر الإبدالية التى لها الرتب الآتية (بدون حساب الأيزومورفيزمات) :

(أ) 6 (ب) 15 (جـ) 42 (د) pq حيث p, q عدنان أوليان مختلفان

(هـ) pqr حيث p, q, r أعداد أولية مختلفة (و) عمم النتائج السابقة

الحل : (أ) لدينا $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ وهى الوحيدة

(ب) $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$ وهى كذلك الوحيدة

(جـ) $\mathbb{Z}_{42} \cong \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_7$ وهى كذلك الوحيدة

(د) $\mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$ وهى الوحيدة

(هـ) $\mathbb{Z}_{pqr} \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \otimes \mathbb{Z}_r$ وهى الوحيدة

(و) يكون لدينا زمرة إبدالية وحيدة من الرتبة n إذا كان فقط إذا كان ليس من عوامل n أى مربع لعدد أولى .

مثال ٩ : حقق النتيجة (٤-١-١٠) فى حالة إذا ما كانت رتبة الزمرة هى 1080 ، وكان القاسم هو 180

الحل : $1080 = 8 \times 27 \times 5$ وبالتالي فإن الزمر الإبدالية من الرتبة 1080 (بدون حساب الأيزومورفيزمات) هى :

$$\mathbb{Z}_{1080} \cong \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_{27} \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{27} \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{27} \otimes \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5.$$

لإيجاد زمر جزئية رتبها 60 ، 30 ، 540 ، 216 :

$\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_{27} \otimes \mathbb{Z}_5$ تحتوى على الزمرة الجزئية $[(2, \bar{9}, \bar{1})]$ التى رتبته $4 \times 3 \times 5$
 $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{27} \otimes \mathbb{Z}_5$ تحتوى على الزمرة الجزئية $[(0, \bar{1}, \bar{9}, \bar{1})]$ التى رتبته $1 \times 2 \times 3 \times 5$
 $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5$ تحتوى على الزمرة الجزئية $[(2, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})]$ التى رتبته $4 \times 3 \times 9 \times 5$
 $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_5$ تحتوى على الزمرة الجزئية $[(1, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0})]$ التى رتبته $4 \times 2 \times 3 \times 9 \times 1$.

وبالمثل لأى رتب أخرى .

مثال ١٠ : فى مثال ٢ من (٩-١-٤) وضح لماذا يمكن الاستغناء عن حساب رتب الخمسة عناصر الأخيرة حتى نعبر عن G كحاصل ضرب خارجى مباشر .

الحل : رتب العناصر الخمسة الأخيرة لن تضيف شيئاً ، لأن عدد العناصر التى رتبته 4 فى الأحد عشر عنصراً الأولى هو 9 وأكبر عدد من العناصر التى رتبته 4 فى الزمر الإبدالية من الرتبة 16 هو 8 باستثناء الزمرة $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ التى تكون بالضرورة متشاكلة مع الزمرة المعطاة G .

مثال ١١ : برهن على أن أى زمرة إبدالية ذات رتبة فردية لا يمكن أن تحتوى على عنصر ذى رتبة زوجية .

الحل : سواء كانت الزمرة إبدالية أم كانت غير إبدالية فإنه من النتيجة (٩-١١-١) بشقيها (١) ، (٢) ينتج أن رتبة أى عنصر فى زمرة تقسم رتبة الزمرة وبالتالي فلا يمكن أن ينتمى عنصر ذو رتبة زوجية إلى زمرة ذات رتبة فردية .

طريقة أخرى: استخدم النظريات: (٣-١٠-١) لاجرانج ، (٧-١١-١) ، (٧-١-٣) ، (٩-١-٤) (النظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية) .

مثال ١٢ : لتكن G زمرة إبدالية من الرتبة 9 . ما أكبر عدد من العناصر (فيما عدا عنصر الوحدة) التى يجب أن نحسب رتبته حتى نعين فصل التشاكل لـ G ؟ ماذا لو كانت رتبة G هي ١٨ ؟

الحل : فصول التشاكل فى حالة الرتبة 9 فصلان : (أ) $\mathbb{Z}_9$ (ب) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$

نحتاج فى الواقع إلى معرفة رتب أربعة عناصر بما فيها عنصر الوحدة (أى رتب ثلاثة عناصر باستبعاد عنصر الوحدة). وليبان ذلك نحسب الرتب فى الحالتين (أ)، (ب) للعناصر:

(أ) العنصران $\bar{3}, \bar{6}$ لهما الرتبة 3 . العنصر $\bar{0}$ له الرتبة 1 . باقى العناصر لها الرتبة 9 .

(ب) جميع العناصر لها الرتبة 3 ، فيما عدا عنصر الوحدة $(\bar{0}, \bar{0})$ له الرتبة 1 .

بمعرفة رتب أربعة عناصر بما فيها عنصر الوحدة لدينا الحالات الآتية :

(١) لا يوجد رتبة 3 على الإطلاق : إذن G من الفصل (أ)

(٢) يوجد ثلاثة عناصر من غير الرتبة 3 ، عنصر من الرتبة 3 : G من الفصل (أ)

(٣) يوجد عنصران من غير الرتبة 3 ، عنصران من الرتبة 3 : G من الفصل (أ)

(٤) يوجد عنصر واحد من غير الرتبة 3 ، ثلاثة عناصر من الرتبة 3 : G من الفصل (ب)

(٥) جميع العناصر من الرتبة 3 : G من الفصل (ب)

قد يحدث أن نكتشف فصل التشاكل بمعرفة عدد من الرتب أقل من 4 (بما فيها رتبة عنصر الوحدة) فإذا كان - مثلا- لدينا رتبتان فقط لاتساويان 3 فإن G تكون من الفصل (أ) ولانحتاج لمعرفة رتبتين آخرين .

فى حالة الرتبة 18 سنكتب فصول التشاكل لـ G : فصلان :

(أ) $\mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ وعناصر $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ هى :

$(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), \dots, (\bar{1}, \bar{8})$

عناصر $\mathbb{Z}_{18}$ التى لها الرتبة 18 ستة عناصر هى : $\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}$ ؛

والتي لها الرتبة 9 ستة عناصر هى : $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{14}, \bar{16}$ ؛

واللذان لهما الرتبة 6 هما : $\bar{3}, \bar{15}$ ؛ واللذان لهما الرتبة 3 هما : $\bar{6}, \bar{12}$ ؛

والذى له الرتبة 2 هو $\bar{9}$ والذى له الرتبة 1 هو $\bar{0}$.

(ب) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2$ وعناصر $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_6$ ورتبتها هى :

العنصر	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{3})$	$(\bar{0}, \bar{4})$	$(\bar{0}, \bar{5})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$
الرتبة	1	6	3	2	3	6	3	6	3

العنصر	$(\bar{1}, \bar{3})$	$(\bar{1}, \bar{4})$	$(\bar{1}, \bar{5})$	$(\bar{2}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{1})$	$(\bar{2}, \bar{2})$	$(\bar{2}, \bar{3})$	$(\bar{2}, \bar{4})$	$(\bar{2}, \bar{5})$
الرتبة	6	3	6	3	6	3	6	3	6

أى أن عدد العناصر التى رتبته 6 هى ثمانية ، وعدد العناصر التى رتبته 3 هى ثمانية وعنصر واحد رتبته اثنان وعنصر واحد رتبته واحد .

إذا علمنا رتب سبعة عناصر ولم يكن من بينها الرتبة 18 أو الرتبة 9 كانت G لها فصل التشاكل $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_6$. أما إذا ظهرت الرتبة 18 أو الرتبة 9 فمعنى هذا أن G لها فصل التشاكل $\mathbb{Z}_{18}$ ، أى أننا احتجنا إلى معرفة رتبة ستة عناصر بخلاف رتبة عنصر الوحدة $(\bar{0}, \bar{0})$. وقد يحدث أن نكتشف فصل التشاكل قبل أن نعرف رتبة كل هذه العناصر إذا ظهرت الرتبة 18 أو الرتبة 9 قبل ذلك .

مثال ١٣ : لتكن G زمرة إبدالية من الرتبة 16 ، بها عنصران a ، b بحيث تكون $a^2 \neq b^2$ ، $Ord(a) = 4 = Ord(b)$. عين فصل تشاكل G .

الحل : G لها فصول التشاكل الآتية : $\mathbb{Z}_{16}$ ، $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$

بينما $(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{0})$ ، $Ord(\bar{1}, \bar{0}) = 4 = Ord(\bar{1}, \bar{1})$ ، $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ ، $(\bar{1}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2})$ (لاحظ أن العملية هى الجمع مقياس 4) وبالتالي يكون فصل التشاكل للزمرة G هو $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$

مثال ١٤ : كم عدد الزمر الإبدالية (بدون حساب الأيزومورفيزمات up to isomorphism) التى من الرتبة 24 ؟ من الرتبة 25 ؟ ومن الرتبة (24)(25) ؟

الحل : فصول التشاكل لزمرة إبدالية من الرتبة 24 هى : $\mathbb{Z}_{24}$ ، $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_6$. لاحظ أن $\gcd(2, 3) = 1$ ، كذلك لاحظ أن $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$. لأن كلتا الزمرتين تتشاكل مع الزمرة $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4$. إذن هناك 3 زمر إبدالية من الرتبة 24 .

فصلا التشاكل لزمرة إبدالية من الرتبة 25 هما : $\mathbb{Z}_{25}$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$ ، أى هناك زميرتان إبداليتان من الرتبة 25 .

وبالتالى يكون هناك 6 زمر إبدالية من الرتبة (25)(24) . [لاحظ أن $\gcd(24, 25) = 1$]

مثال ١٥ : كم عدد (بدون حساب الأيزومورفيزمات) الزمر الإبدالية من الرتبة 10^5 ؟

الحل : $(5^5)(2^5) = 10^5$. فصول التشاكل للزمرة الإبدالية من الرتبة 2^5 هي :

$\mathbb{Z}_{2^5}$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_{2^2} \otimes \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{2^2}$ ، $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، أى سبعة فصول تشاكل وبالمثل فإن فصول التشاكل للزمرة الإبدالية من الرتبة 5^5 هي :

$\mathbb{Z}_{5^5}$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_{5^2}$ ، $\mathbb{Z}_{5^2} \otimes \mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$ ،

أى سبعة فصول تشاكل ويكون - كما سبق

فى مثال ١٤ - هناك $7^2 = 49$ زمرة إبدالية من الرتبة 10^5 (بدون حساب الأيزومورفيزمات)

ملحوظة : لاحظ أن $\gcd(2^5, 5^5) = 1$ كما كانت الحال فى مثال ١٤ $\gcd(24, 25) = 1$.

ماذا يحدث لو لم يكن القاسم المشترك الأعظم للرتبتين = 1 ؟

مثال ١٦ : أوجد الزمر الجزئية فى $\mathbb{Z}_{12}$ التى تتولد من $\{2, 3\}$ ، من $\{4, 6\}$ ، من $\{8, 6, 10\}$.

الحل : $\bar{1} = \bar{3} - \bar{2}$. إذن الزمرة الجزئية التى تتولد من $\{2, 3\}$ فى $\mathbb{Z}_{12}$ هى $\mathbb{Z}_{12}$ نفسها .

$\bar{4} = \bar{2} - \bar{6}$. واضح أن الزمرة الجزئية المتولدة فى هذه الحالة هى $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ أى هى $[2]$

كذلك الزمرة الجزئية المتولدة من $\{8, 6, 10\}$ هى $[2]$

مثال ١٧ : لتكن G زمرة إبدالية لها الرتبة 72 .

(أ) هل تستطيع القول بعدد الزمر الجزئية من G التى لها الرتبة 8 ؟ ولماذا ؟

(ب) هل تستطيع القول بعدد الزمر الجزئية من G التى لها الرتبة 4 ؟ ولماذا ؟

الحل : فصول التشاكل لـ G هى : $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_{16}$ ،

$$, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \quad \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$$

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9 \quad \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$$

(أ) نعم نستطيع القول بأن عدد الزمر الجزئية من G التي لها الرتبة 8 هو الواحد ، أى زمرة جزئية واحدة تتميزها بأن رتبة عناصرها تقسم رتبة الزمرة الجزئية أى تقسم 8 .

فإذا اعتبرنا $G = \mathbb{Z}_{72} = \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_9$ فإن الزمرة الجزئية المعنية تكون هى $\mathbb{Z}_8 \otimes \{\bar{0}\}$ أما إن كانت $G = \mathbb{Z}_{72} = \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ فإن الزمرة الجزئية المعنية تكون هى $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \{\bar{0}\}$

أما إن كانت $G = \mathbb{Z}_{72} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ فإن الزمرة الجزئية المعنية تكون هى $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \{\bar{0}\}$

أما إن كانت $G = \mathbb{Z}_{72} = \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ فإن الزمرة الجزئية المعنية تكون هى $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \{\bar{0}\} \otimes \{\bar{0}\}$

أما إن كانت $G = \mathbb{Z}_{72} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ فإن الزمرة الجزئية المعنية تكون هى $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \{\bar{0}\} \otimes \{\bar{0}\}$

وفى كل الحالات تكون هناك زمرة جزئية واحدة لها الرتبة 8 ، كما سبق

(ب) لانستطيع . فإذا اعتبرنا G هى $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_9$ فإنه توجد زمرة جزئية واحدة رتبته 4 هى :

$\{(\bar{a}, \bar{0}) \mid \bar{a} \in \{0, 2, 4, 6\}\}$. أما إذا اعتبرنا G هى $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9$ ففى هذه

الحالة توجد سبع زمر جزئية رتبته 4 هى :

$$1) \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$2) \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$3) \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$4) \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$5) \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$6) \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\},$$

$$7) \{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\}$$

(ملحوظة : لم نضع "-" فوق كل رقم فيما سبق للسهولة في الكتابة)

مثال ١٨ : ما أقل عدد من العناصر التي تولد $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ؟

الحل :

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}),$$

$$(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})\}$$

المجموعة $\{(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\}$ تولد $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، وأقل عدد من

العناصر تولد الزمرة المعطاة هو 3 .

مثال ١٩ : قرر إذا ما كانت التقريرات الآتية صائبة أم خاطئة :

(أ) كل زمرة إبدالية رتبته عدد أولى تكون دائرية

(ب) كل زمرة إبدالية رتبته قوة (أس) عدد أولى تكون دائرية

(جـ) $\mathbb{Z}_8$ تتولد من $\{\bar{4}, \bar{6}\}$

(د) $\mathbb{Z}_8$ تتولد من $\{\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

(هـ) كل زمرة إبدالية رتبته تقبل القسمة على 5 تحتوى على زمرة جزئية دائرية رتبته 5

(و) كل زمرة إبدالية رتبته تقبل القسمة على 6 تحتوى على زمرة جزئية دائرية رتبته 6

الحل : (أ) صائب سواء علمنا أن كانت الزمرة إبدالية أو لم نعلم ستكون دائرية

وبالتالى تكون إبدالية (نظرية (١-١١-٧) (٢))

(ب) خاطئ مثال مضاد $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ رتبته 4 وهى إبدالية ، لكنها ليست دائرية .

(جـ) خاطئ $[\{\bar{4}, \bar{6}\}] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \neq \mathbb{Z}_8$

(د) صائب : $\bar{1} = \bar{5} - \bar{4}$ وهو مولد لـ $\mathbb{Z}_8$

(هـ) ، (و) صائبان

تمارين

(١) يقال لزمرة G إنها زمرة الالتواء (torsion group) إذا كان كل عنصر من عناصرها له رتبة منتهية (finite order). ويقال إنها خالية من الالتواء (torsion free) إذا كان عنصرها المحايد هو الوحيد الذي له رتبة منتهية.

برهن على أنه في زمرة إبدالية G مجموعة العناصر التي لها رتب منتهية تكون زمرة جزئية من G (تسمى هذه الزمرة الجزئية زمرة الالتواء الجزئية في G The torsion subgroup).

(٢) برهن على أن $\{(1, \bar{0}), (0, \bar{1})\}$ مجموعة مولدة لـ $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$

(٣) برهن على أن كل زمرة منتهية تكون زمرة التواء، بينما $(\mathbb{Z}, +)$ خالية من الالتواء

(٤) اوجد زمرة الالتواء الجزئية من الزمرة $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$

(٥) بدون حساب الأيزومورفزمات اوجد جميع الزمر الإبدالية من الرتبة 720

(٦) اوجد رتب زمر الالتواء الجزئية في $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$

(٧) اوجد زمرة الالتواء الجزئية في الزمرة $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

(٨) ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث توجد زمرتان إبداليتان غير متشاكلتين من الرتبة n ؟

(٩) ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث توجد ثلاث زمر إبدالية غير متشاكلة من الرتبة n ؟

(١٠) برهن على أنه توجد زمرتان إبداليتان من الرتبة 108 لكل منهما 13 زمرة جزئية بالضبط من الرتبة 3

(١١) بدون حساب الأيزومورفزمات قارن بين عدد الزمر الإبدالية من الرتبة m بتلك التي من الرتبة n إذا كان :

$$(أ) \quad m = 5^2, \quad n = 3^2$$

$$(ب) \quad m = 5^4, \quad n = 2^4$$

(جـ) $n = p^r$ ، $m = q^r$ حيث p ، q عددان أوليان مختلفان

(د) $n = p^r$ ، $m = p^r q$ حيث p ، q عددان أوليان مختلفان

(هـ) $n = p^r$ ، $m = p^r q^2$ حيث p ، q عددان أوليان مختلفان

(١٢) هل تشكل زمرة تماثلات المستطيل (زمرة كلاين الرباعية) $\mathbb{Z}_4$ أم $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ؟

(١٣) المجموعة $\{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$ تكون زمرة مع الضرب مقياس 91 .

عين فصل التشاكل لها

(١٤) عين الأعداد الصحيحة n بحيث تكون الزمر الإبدالية من الرتبة n دائرية

(١٥) عين الأعداد الصحيحة n بحيث تكون الزمر الإبدالية من الرتبة n لها أربعة فصول

تشاكل بالضبط

(١٦) لتكن $G := \{1, 7, 17, 23, 49, 55, 65, 71\}$ مع عملية الضرب مقياس 96 . عبر

عن G كحاصل ضرب مباشرين خارجي وداخلي من زمر دائرية

(١٧) لتكن $G := \{1, 7, 43, 49, 51, 57, 93, 99, 101, 107, 143, 149, 151, 157, 193, 199\}$ مع عملية

الضرب مقياس 200 . عبر عن G كحاصل ضرب مباشرين خارجي وداخلي من زمر

دائرية

(١٨) المجموعة $G := \{1, 4, 11, 14, 16, 19, 26, 29, 31, 34, 41, 44\}$

تكون زمرة مع عملية الضرب مقياس 45 . عبر عن G كحاصل ضرب مباشرين

خارجي وداخلي من زمر دائرية ذات رتب قوى (أسس) أعداد أولية .

(١٩) لتكن G زمرة إبدالية من الرتبة 16 . ما أكبر عدد من العناصر (فيما عدا عنصر

الوحدة) التي تحتاج إلى حساب رتبها حتى نعين فصل التشاكل لـ G .

(٢٠) في التمهيدية (٤-١-٥) برهن على صحة العبارة (*): " وينتج من مناقشة الرتب

أن $G = [a]K$ "

1 Group Theory نظرية الزمر



The Sylow Theorems نظريات سيلو

١-٥ عمل زمرة على مجموعة

The action of a group on a set

١-٥-١ تعريف : يقال لزمرة G إنها تعمل على مجموعة S (act on a set S) إذا كان هناك راسم من $G \times S$ إلى S (يعبر عنه عادة بـ $(g, x) \mapsto gx$) بحيث إنه لكل $x \in S$ ولكل $g_1, g_2 \in G$:

$$ex = x, \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

(حيث e العنصر المحايد في G)

١-٥-٢ أمثلة : (يمكن التحقق منها مباشرة)

مثال ١ : الزمرة المتماثلة $\gamma_n (= S_n)$ تعمل على المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ كالآتي :

$$(\sigma, x) \mapsto \sigma(x), \quad \sigma \in \gamma_n, \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}$$

مثال ٢ : لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية منها . كزمرة تعمل على G كمجموعة

كالآتي : $(h, x) \mapsto hx$ حيث hx هو "الضرب" في G . يسمى عمل $h \in H$ على G

نقلا (أيسر) ((left translation) . وإذا كانت K زمرة جزئية أخرى من G ، وكانت S

هى مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى من G بالنسبة إلى K فإن H تعمل على

S بالنقل : $(h, xK) \mapsto hxK$.

مثال ٣ : لتكن H زمرة جزئية من زمرة G . H تعمل كزمرة على مجموعة كالآتي :

$$(h, x) \mapsto hxh^{-1} \text{ . التحقق :}$$

$$(e, x) \mapsto exe^{-1} = x,$$

$$(h_1 h_2, x) \mapsto h_1 h_2 x h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 (h_2 x h_2^{-1}) h_1^{-1} \leftarrow h_1 (h_2, x)$$

يسمى هذا العمل ترافقا بـ h (conjugation by h) ، ويسمى العنصر

$$hxh^{-1} \text{ ترافقا لـ } x \text{ (conjugation of } x \text{) (انظر (٧-١-٢))}$$

وإذا كانت K زمرة جزئية من G وكانت $h \in H$ فإنه من السهل التحقق من أن hKh^{-1}

تكون زمرة جزئية من G ومتشاكله (أيزومورفية) مع K . ومن ثم فإن H تعمل على S

مجموعة كل الزمر الجزئية لـ G بالترافق $(h, K) \mapsto hKh^{-1}$. ويقال إن الزمرة hKh^{-1} ترافق K (to be conjugate to K)

٣-١-٥ نظرية : إذا كانت G زمرة تعمل على مجموعة S فإن :

(أ) العلاقة على S المعرفة كالآتي :

$$x \sim x' \Leftrightarrow gx = x'$$

لبعض $g \in G$ (for some $g \in G$) تكون علاقة تكافؤ .
(ب) لكل $x \in S$:

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

زمرة جزئية من G .

البرهان : (أ) انعكاسية (reflexive) $\sim$ $\forall x \in S: ex = x \Rightarrow x \sim x \Rightarrow \sim$

$$x \sim x' \Rightarrow \exists g \in G: gx = x' \Rightarrow x = ex = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x', g^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow \sim \text{ (symmetric متماثلة) }$$

$$x \sim x', x' \sim x'' \Rightarrow \exists g_1, g_2 \in G: g_1x = x', g_2x' = x'' \Rightarrow (g_2g_1)x$$

$$= g_2(g_1x) = x'', g_2g_1 \in G \Rightarrow \sim \text{ (transitive) انتقالية}$$

$$\Rightarrow \sim \text{ (equivalence relation) علاقة تكافؤ}$$

(ب) $e \in G_x$ (العنصر المحايد في G) لأن $ex = x$ أى أن $G_x \neq \emptyset$. ليكن $g_1, g_2 \in G_x$

$$\text{ينتج أن : } g_1x = x, g_2x = x \text{ . وبالتالي فإن : } g_2x = g_1x$$

ومن ثم فإن : $(g_2^{-1}g_1)x = g_2^{-1}(g_1x) = x$ ، $g_2^{-1}g_1 \in G$ وبالتالي فإن $g_2^{-1}g_1 \in G_x$.
وينتج المطلوب مباشرة .

٤-١-٥ تعريف : فصول التكافؤ (The equivalence classes) لعلاقة التكافؤ المعرفة

في (٣-١-٥ أ) تسمى **مسارات** G (orbits) على S ، ويشار إلى مسار $S \ni x$

بالرمز $\bar{x}$. وتسمى الزمرة الجزئية G_x في (٣-١-٥ ب) في مواطن كثيرة **الزمرة**

الجزئية المثبتة x (The subgroup fixing x) أو **زمرة توحيد الخواص** لـ x

(The isotropy group of x) أو **موازن** x (stabilizer of x) .

وإذا كانت الزمرة G تعمل على نفسها بالترافق (by conjugation) عندئذ يسمى المسار

لـ x : $\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ بفصل الترافق لـ x (conjugacy class of x)

٥-١-٥ أمثلة : إذا كانت الزمرة الجزئية H تعمل على الزمرة G بالترافق فإن زمرة

توحيد الخواص

$H_x = \{h \in H \mid h x h^{-1} = x\} = \{h \in H \mid h x = x h\}$ هي مركز x في H (centralizer of x in H)

(راجع مثال ٥٤ في أمثلة متنوعة على الباب الأول) وسنشير إليه بالرمز $C_H(x)$. وإذا

كانت $H = G$ فإننا سنسميه ببساطة مركز x (centralizer of x) وسنشير إليه بالرمز

$C(x)$. وإذا كانت H تعمل بالترافق على S مجموعة كل الزمر الجزئية لـ G ، عندئذ

فإن الزمرة الجزئية في H المثبتة $K \in S$ وهي بالدقة $\{h \in H \mid h K h^{-1} = K\}$ هي

مطبوع K في H (normolizer of K in H) ونشير إليها بالرمز $Nor_H(K)$. وإذا كانت

$H = G$ سنكتب ببساطة $Nor(K)$ (راجع مثال (١-٦-٦)). وواضح أن كل زمرة جزئية

K تكون زمرة جزئية طبيعية في $Nor(K)$ ، K زمرة جزئية طبيعية في G إذا كان فقط

إذا كان $Nor(K) = G$.

٥-١-٦ نظرية : إذا كانت الزمرة G تعمل على المجموعة S ، عندئذ فإن العدد الرئيس

(The cardinal number) لمسار $x \in S$ هو الدليل $[G : G_x]$.

البرهان : ليكن $g, h \in G$. لأن :

$$gx = hx \Leftrightarrow g^{-1}hx = x \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \Leftrightarrow hG_x = gG_x,$$

وينتج أن الراسم المعطى بـ $gG_x \mapsto gx$ يكون معرفاً جيداً وهو تناظر أحادي من

مجموعة المجموعات المشاركة لـ G_x في G على المسار $\bar{x} = \{gx \mid g \in G\}$. ومن

ثم فإن $[G : G_x]$ يساوى العدد الرئيس $\bar{x}$.

٥-١-٧ نتيجة : لتكن G زمرة منتهية ، K زمرة جزئية من G .

(أ) عدد عناصر فصل الترافق لـ $x \in G$ هو $[G : C(x)]$ ، الذى يقسم رتبة (G)

(ب) إذا كانت $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n (x_i \in G)$ فصول تكافؤ مختلفة لـ G ، فإننا نحصل على المعادلة الآتية التي تسمى معادلة الفصل للزمرة المنتهية (The class equation of G the finite group G)

$$Ord(G) = \sum_{i=1}^n [G : C(x_i)]$$

(ج) عدد الزمر الجزئية من G التي تترافق مع K هو $[G : Nor(K)]$ وهو قاسم لرتبة (G) **البرهان :** (أ) ، (ج) تنتجان مباشرة من النظرية (٥-١-٦) ونظرية لاجرانج (١-٣-١٠). ونظراً لأن الترافق هو علاقة تكافؤ على G (نظرية (٥-١-٣)) فإن G تكون الاتحاد المنفصل (The disjoint union) لفصول الترافق $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ، وباستخدام (أ) ينتج (ب)

٢-٥ نظريات سيلو The Sylow Theorems

١-٢-٥ نظرية كوشي Cauchy Theorem

لتكن G زمرة إبدالية منتهية ، وليكن p عدداً أولياً قاسماً لرتبة (G) . عندئذ فإن G تحتوي على عنصر رتبته p .

البرهان : بالاستقراء الرياضي على رتبة (G) . إذا كانت رتبة (G) هي p فإن النتيجة تنتج مباشرة. إذا لم تكن رتبة (G) هي p فليكن $y \in G$ أى عنصر. والآن نعتبر الحالتين :

الحالة الأولى : يوجد عنصر $y \in G$ بحيث إن p يقسم رتبة (y) ، أى أن $Ord(y) = pl, l \in \mathbb{N}$. عندئذ فإن $(y^l)^p = y^{pl} = e$ (العنصر المحايد فى G) أى أنه يوجد عنصر $x = y^l$ ورتبته هي p .

الحالة الثانية : p ليس قاسماً لرتبة (y) حيث y هو أى عنصر ينتمى إلى G . نكون $\bar{G} = G/[y]$. والآن p قاسم لرتبة (G) ، وليس قاسماً لرتبة (y) ونعلم أن رتبة (y) تقسم رتبة (G) . وهذا يستلزم أن :

$$p \mid \frac{Ord(G)}{Ord(y)} = Ord(G/[y]) < Ord(G) \quad (x \text{ أى } p \mid x)$$

ومن فرض الاستقراء الرياضى ينتج أنه يوجد $\bar{z}$ ينتمى إلى $\bar{G}$ بحيث إن $Ord(\bar{z}) = p$ أى أن : $(\bar{z})^p = \bar{e} = e[y]$.

والآن ليكن $Ord(z) = m$ ، أى أن $z^m = e$ وهذا يقتضى أن $(z^m) = \bar{e}$ أى أن $(\bar{z})^m = \bar{e}$ ، ولكن $Ord(\bar{z}) = p$ فهذا يستلزم أن $p \mid m = Ord(z)$. وهذا تناقض لأنه من الفرض أن $\forall y \in G \quad p \nmid Ord(y)$ (تعى p لا يقسم x)
أى أن الحالة (2) مستحيلة وبهذا ينتهى البرهان .

ملحوظة : الزمرة الجزئية المتولدة بعنصر رتبته p أيضاً لها الرتبة p ، أى أن G لها زمرة جزئية رتبته p .

٥-٢-٢ ملحوظة : إذا كان $g \in Z(G)$ (أى أن g عنصر من عناصر مركز الزمرة G) فإن فصل الترافق لـ g يتكون من g فقط لأن $gxg^{-1} = g \quad \forall x \in G$. وبالتالي فإنه إذا كانت G منتهية وكان $x \in Z(G)$ فإنه من (٥-٢-١) يكون $[G:C(x)] = 1$ ، ومن ثم فإنه يمكن كتابة معادلة الفصل فى (٥-١-٧) كالآتى :

$$Ord(G) = Ord(Z(G)) + \sum_{i=1}^m [G:C(x_i)]$$

حيث $(x_i \in G \setminus Z(G)) \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ فصول ترافق مختلفة لـ G وكل منها يحقق $[G:C(x_i)] > 1$

٥-٢-٣ نظرية سيلو الأولى Sylow's First Theorem

لتكن G زمرة منتهية بحيث إن $p^m \mid Ord(G)$ ، $p^{m+1} \nmid Ord(G)$ حيث p عدد أولى ، m عدد صحيح موجب . عندئذ فإن G تحتوى على زمر جزئية من الرتب p ، p^2 ، ... ، p^m **البرهان :** النظرية تنتج مباشرة إذا كانت رتبة (G) هى p (أى هى زمرة دائرية لها الرتبة p) . سنجرى الاستقراء الرياضى على $Ord(G)$ ، ولنفترض أن النظرية متحققة لجميع الزمر K التى لها رتبة أصغر من $Ord(G)$.

والآن نعتبر $Z(G)$: مركز (G) . توجد لدينا حالتان : $p \nmid \text{Ord}(Z(G))$ أو $p \mid \text{Ord}(Z(G))$.

في الحالة $p \mid \text{Ord}(Z(G))$: من نظرية كوشي (١-٢-٥) للزمر الإبدالية يوجد $a \in Z(G)$ ، $a \neq e$ ، بحيث إن $a^p = e$. عندئذ فإن $H = [a]$ يكون زمرة جزئية طبيعية من G (لأن $a \in Z(G)$) لها الرتبة p ، ويكون

$$\text{Ord}(G/H) = \text{Ord}(G) / \text{Ord}(H) = \text{Ord}(G) / p$$

أى أن $p^{m-1} \mid \text{Ord}(G/H)$ ، $p^m \nmid \text{Ord}(G/H)$. وبتطبيق فرض الاستقراء ينتج أن G/H لها الزمر الجزئية $\bar{K}_i = K_i/H$ من الرتب p ، p^2 ، ... ، p^{m-1} ، ومن ثم فإن H ، K_1 ، ... ، K_{m-1} تكون زمراً جزئية من G لها الرتب p ، p^2 ، ... ، p^m على الترتيب .
في الحالة $p \nmid \text{Ord}(Z(G))$: سنكتب معادلة الفصل (٢-٢-٥) :

$$\text{Ord}(G) = \text{Ord}(Z(G)) + \sum_a \text{Ord}(G) / \text{Ord}(C(a))$$

حيث يجرى الجمع على العناصر a ، بأخذ عنصر واحد من كل فصل ترافق لـ G يتكون من أكثر من عنصر واحد .

ولأن $p \mid \text{Ord}(G)$ ، $p \nmid \text{Ord}(Z(G))$ ، فإنه يوجد عنصر $a \in G$ بحيث إن $C(a) \neq G$ ،

$$P \nmid \frac{\text{Ord}(G)}{\text{Ord}(C(a))} \text{ وهذا يقتضى أن } p^m \mid \text{Ord}(C(a)) \text{ . ولأن } C(a) \neq G \text{ فإنه بتطبيق فرض}$$

الاستقراء على $C(a)$ ينتج أن الزمر الجزئية من $C(a)$ ذات الرتب p ، p^2 ، ... ، p^m هي الزمر المنشودة من G .

٢-٥-٤ نتيجة : إذا كان $p \mid \text{Ord}(G)$ حيث G زمرة منتهية ، p عدد أولي ، فإن G تحتوى على عنصر رتبته p .

وتكون هذه النتيجة تعميماً لنظرية كوشي لزمرة منتهية ليست بالضرورة إبدالية .

٥-٢-٥ تعريف : زمر سيلو Sylow groups : لتكن G زمرة منتهية بحيث إن

$p^m \mid \text{Ord}(G)$ ، $p^{m+1} \nmid \text{Ord}(G)$ ، حيث p عدد أولي ، m عدد صحيح موجب .

عندئذ فإن كل زمرة جزئية من G لها الرتبة p^m تسمى زمرة سيلو p -الجزئية من G .

(Sylow p - subgroup of G)

٥-٢-٦ مثال : في $S_3 (= \gamma_3)$ الزمرة الإبدالية على عناصر ثلاثة : تحتوي S_3 على

واحدة فقط كزمرة سيلو 3 - الجزئية هي $\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ ، كما تحتوي على

ثلاث زمر سيلو 2 - الجزئية هي: $\{e, (1\ 2)\}$ ، $\{e, (1\ 3)\}$ ، $\{e, (2\ 3)\}$ e هو

العنصر المحايد أى الراسم (1_{S_3}) .

٥-٢-٧ تمهيدية : إذا كانت زمرة من الرتبة p^n وتعمل على مجموعة منتهية S ،

وإذا كانت $S_0 := \{x \in S \mid hx = x \ \forall h \in H\}$ ، عندئذ فإن $\text{Card}(S) \equiv \text{Card}(S_0) \pmod{p}$

($\text{Card}(X) := \text{cardinal number of } X$)

البرهان : المسار $\bar{x}$ يتكون بالضبط من عنصر واحد إذا كان فقط إذا كان $x \in S_0$.

ومن ثم فإن S يمكن أن تكتب في صورة اتحاد منفصل (disjoint union)

$S = S_0 \cup \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \dots \cup \bar{x}_n$ ، حيث $\text{Card}(x_i) > 1$ لجميع i . وبالتالي فإن :

$\text{Card}(S) = \text{Card}(S_0) + \text{Card}(\bar{x}_1) + \text{Card}(\bar{x}_2) + \dots + \text{Card}(\bar{x}_n)$. والآن $p \mid \text{Card}(\bar{x}_i)$

لجميع i لأن $\text{Card}(\bar{x}_i) = [H : H_{x_i}] \mid \text{Ord}(H) = p^n$ ، $\text{Card}(\bar{x}_i) > 1$. ومن ثم فإن

$\text{Card}(S) \equiv \text{Card}(S_0) \pmod{p}$.

(تذكر : " $x|y$ " تعنى x يقسم y)

٥-٢-٨ تعريف : يقال لزمرة رتبة كل عنصر فيها قوة (= أس) أكبر من أو تساوى

الصفر لعدد أولى p إنها زمرة p - (p -group) . وإذا كانت H زمرة جزئية من

زمرة G ، وكانت H زمرة p - فإنه يقال إن H هي زمرة جزئية p - من G . (p -

subgroup of G) . وعلى وجه الخصوص فإن $[e]$ هي زمرة جزئية p - من G لجميع

الأعداد الأولية p ، لأن $\text{Ord}([e]) = 1 = p^0$. (لاحظ أن زمرة سيلو p -الجزئية من

G هي زمرة جزئية p - عظمى من G (أى أن $G \xrightarrow{P} H \xrightarrow{P} H$ ، زمرة H -

$(P = H \Leftarrow p$

٩-٢-٥ نتيجة : الزمرة المنتهية G تكون زمرة p - إذا كان فقط إذا كان $Ord(G)$ هو قوة $(= أس) لـ p$.

البرهان : إذا كانت G زمرة p - ، وكان q عدداً أولياً قاسماً لرتبة G ، فإن G يحتوى عنصراً له الرتبة q (نظرية كوشي) . نظراً لأن كل عنصر في G رتبته قوة لـ p فإن $q = p$. وبالتالي فإن رتبة G تكون قوة من قوى p . العكس هو نتيجة مباشرة من نظرية لاجرانج (١-١٠-٣) .

١٠-٢-٥ نظرية : إذا كانت G زمرة لها الرتبة $p^n m$ ، حيث p عدد أولي ، $n \geq 1$ ، $\gcd(m, p) = 1$ ، وكانت H زمرة جزئية p - من G فإن :

(أ) $Ord(H) = p^n$ إذا كان فقط إذا كان $Ord(H) = p^n$

(ب) كل ترافق لزمرة سيلو p - الجزئية هو زمرة سيلو p - الجزئية

(ج) إذا كانت P زمرة سيلو p - الجزئية وحيدة فإن P تكون زمرة جزئية طبيعية من G

البرهان : (أ) تنتج من نظرية لاجرانج (١-١٠-٣) ، النتيجة (٩-٢-٥) ، نظرية سيلو الأولى (٣-٢-٥)

(ب) تنتج من التقرير : $[H]$ زمرة جزئية من $G \iff aHa^{-1} \subseteq H$ زمرة جزئية من G لجميع

$a \in G$ وتكون متشاكلات مع H ، من (أ)

(ج) تنتج من (ب) .

ولدينا عكس الجزء (ب) من النظرية السابقة مباشرة (١٠-٢-٥) :

١١-٢-٥ نظرية سيلو الثانية Second Sylow Theorem

إذا كانت H زمرة جزئية p - من زمرة منتهية G ، ولتكن P أية زمرة سيلو p - الجزئية

من G ، عندئذ فإنه يوجد $x \in G$ بحيث إن $xPx^{-1} = H$ (زمرة جزئية من xPx^{-1})

وعلى وجه الخصوص فإن أى زميرتين سيلو p - جزئيتين من G تكونان مترافقتين .

البرهان : لتكن S مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى من G بالنسبة إلى P ، ولتكن

H تعمل على S بالنقل (الأيسر) ((left translation)). عندئذ فإنه من التمهيدية (٧-٢-٥)

$$Card(S_0) \equiv Card(S) = [G : P] \pmod{p}$$

ولكن $p \nmid [G:P]$ (لأن P زمرة جزئية p - عظمى من G ومن نظرية لاجرانج (١-)
١٠-٣)) ، وبالتالي فإن $Card(S_0) \neq 0$ ، ويوجد $xP \in S_0$.

$$xP \in S_0 \Leftrightarrow hxP = xP \quad \forall h \in H$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}hxP = P \quad \forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}Hx \xrightarrow{L} P \Leftrightarrow H \xrightarrow{L} xPx^{-1}$$

وإذا كانت H زمرة سيلو p - الجزئية فإن : $Ord(H) = Ord(P) = Ord(xPx^{-1})$

ومن ثم فإن : $H = xPx^{-1}$

١٢-٢-٥ نظرية سيلو الثالثة Third Sylow Theorem

إذا كانت G زمرة منتهية ، وكان p عدداً أولياً ، عندئذ فإن عدد زمر سيلو p - الجزئية

من G يقسم رتبة (G) ، ويكون على الصورة $kp + 1$ حيث $k \geq 0$

البرهان : من نظرية سيلو الثانية يكون عدد زمر سيلو p - الجزئية هو عدد الترافقات

(conjugates) لأية واحدة منها ، ولتكن P . ولكن هذا العدد هو $[G: Nor(P)]$ وهو قاسم

لرتبة (G) من (٥-١-٧) . لتكن S مجموعة كل زمر سيلو p - الجزئية من G ، ولتكن

P نعمل على S بالتوافق . عندئذ فإن $Q \in S_0$ إذا كان فقط إذا كان $xQx^{-1} = Q$ لجميع

$x \in P$. الشرط الأخير يتحقق إذا كان فقط إذا كان $P \xrightarrow{L} Nor(Q)$. كلتا P ، Q

زمرتا سيلو p - الجزئيتان من G ومن ثم من $Nor(Q)$ ومن ثم فهما تتوافقان في

$Nor(Q)$. لكن لأن Q زمرة جزئية طبيعية في $Nor(Q)$ ، يحدث هذا فقط إذا كان

$Q = P$. وبالتالي فإن $S_0 = \{P\}$ ومن التمهيدية (٥-٢-٧) يكون

$Card(S) \equiv Card(S_0) = 1 \pmod{p}$. ومن ثم فإن $Card(S) = kp + 1$.

١٣-٢-٥ أمثلة محلولة :

مثال ١ : برهن على أن $Z(G)$ مركز زمرة p - المنتهية غير التافهة يحتوى على أكثر

من عنصر واحد .

البرهان : نعتبر معادلة الفصل لـ G في (٥-٢-٢) :

$$Ord(G) = Ord(Z(G)) + \sum_{i=1}^m [G: C(x_i)]$$

ونظراً لأن كل $[G:C(x_i)] > 1$ ، ويقسم $Ord(G) = p^n$ ($n \geq 1$) فإن p تقسم كل $[G:C(x_i)]$ ،
وتقسم $Ord(G)$ ومن ثم فإن p تقسم $Ord(Z(G))$. ونظراً لأن $Ord(Z(G)) \geq 1$ فإن
 $Z(G)$ يحتوي على أزيد من عنصر.

مثال ٢ : إذا كانت H زمرة جزئية - p من زمرة منتهية G ، عندئذ فإن

$$[Nor(H):H] \equiv [G:H] \pmod{p}$$

البرهان : لتكن S هي مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى من G بالنسبة إلى H ،
ولتكن H تعمل على S بالنقل (الأيسر). عندئذ فإن $Card(S) = [G:H]$. كذلك فإن :

$$xH \in S_0 \Leftrightarrow hxH = xH \quad \forall h \in H$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}hxH = H \quad \forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}hx \in H \quad \forall h \in H$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}Hx = H \Leftrightarrow xHx^{-1} = H$$

$$\Leftrightarrow x \in Nor(H)$$

ومن ثم فإن $Card(S_0)$ هو عدد المجموعات المشاركة xH حيث $x \in Nor(H)$ ، أى
أن $Card(S_0) = [Nor(H):H]$. ومن التمهيدية (٥-٢-٧) ينتج أن :

$$[Nor(H):H] = Card(S_0) \equiv Card(S) \pmod{p} = [G:H] \pmod{p}$$

مثال ٣ : إذا كانت H زمرة جزئية - p من زمرة منتهية G بحيث إن p تقسم $[G:H]$ ،
فإن $Nor(H) \neq H$

البرهان : لدينا $0 \equiv [G:H] \equiv [Nor(H):H] \pmod{p}$. من حيث إن p تقسم $[G:H]$ ،
ولأن $[Nor(H):H] \geq 1$ فإن $[Nor(H):H] > 1$. وبالتالي فإن : $Nor(H) \neq H$

مثال ٤ : حدد إذا ما كانت التقريرات الآتية صحيحة أو خاطئة :

(أ) كل زمرة سيلو - p الجزئيتين من زمرة منتهية تكونان مترافقتين (conjugate)

(ب) كل زمرة ذات الرتبة 15 تحتوي على زمرة سيلو - 5 الجزئية الوحيدة

(ج) كل زمرة سيلو - p الجزئية من زمرة منتهية تكون رتبها قوة (أس) لـ p

(د) كل زمرة إبدالية منتهية G تحتوى على زمرة سيلو p - الجزئية الوحيدة لكل عدد أولى p يقسم رتبة الزمرة G

(هـ) كل زمرة جزئية p - من زمرة منتهية تكون زمرة سيلو p - الجزئية

(و) فصل الترافق لكل عنصر فى كل زمرة يكون زمرة جزئية من الزمرة .

(ز) عناصر المركز فى زمرة منتهية تكون مترافقة (conjugate)

(ح) مبدأ فصل الترافق معرف فقط على الزمر المنتهية .

الحل : (أ) صحيح (ب) صحيح (ج) صحيح (د) صحيح

(هـ) خطأ (و) خطأ (ز) خطأ (ح) خطأ

مثال ٥ : اوجد فصل الترافق لأى عنصر فى زمرة إبدالية G .

الحل : فى أية زمرة إبدالية :

$$xax^{-1} = xx^{-1}a = ea = a$$

إن فصل الترافق لعنصر هو المجموعة المكونة من العنصر فقط :

$$\{xax^{-1} \mid x \in G\} = \{a\}$$

مثال ٦ : حقق نظرية سيلو الثالثة حيث $p = 2$ ، بالنسبة إلى S_3 .

الحل : رتبة S_3 هى 6 . زمر سيلو - 2 الجزئية من S_3 هى :

$\{e, (1 2)\}$ ، $\{e, (1 3)\}$ ، $\{e, (2 3)\}$ حيث e هو العنصر المحايد .

عدد هذه الزمر 3 ، ويكون على الصورة $2 + 1$ ، أى $2 + 1$ حيث $k = 1$ ، وكذلك 3

يقسم 6 (هى رتبة S_3) .

مثال ٧ : اوجد رتبة زمرة سيلو - 3 الجزئية من زمرة رتبته 12 .

الحل : $12 = 4 \cdot 3$. وبالتالي تكون رتبة زمرة سيلو - 3 الجزئية هى 3 .

مثال ٨ : اوجد رتبة زمرة سيلو - 3 الجزئية من زمرة رتبته 54

الحل : $54 = 2 \cdot 3^3$ وبالتالي تكون رتبة زمرة سيلو - 3 الجزئية هى 3^3 أى 27 .

مثال ٩ : اوجد العدد المحتمل لزمر سيلو - 2 الجزئية من زمرة رتبته 24

الحل : عدد الزمر قاسم لرتبة الزمرة 24 ، وكذلك يكون على الصورة $1 + 2k$ ، $k \in \mathbb{N}$ وبهذا يكون العدد إما 1 بأخذ $k = 0$ أو 3 بأخذ $k = 1$.

مثال ١٠ : اوجد العدد المحتمل لزمر سيلو - 3 الجزئية ولزمر سيلو - 5 الجزئية من زمرة رتبته 255 .

الحل: (17) (5) (3) = 255 . العدد المحتمل لزمر سيلو - 3 الجزئية يكون قاسماً لـ 255 وكذلك يكون على الصورة $1 + 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$. ومن ثم فإن العدد يكون 1 بأخذ $k = 0$ أو 85 بأخذ $k = 28$.

العدد المحتمل لزمر سيلو - 5 الجزئية يكون كذلك قاسماً لـ 255 ويكون على الصورة $1 + 5k$ حيث $k \in \mathbb{N}$. وبالتالي فإن العدد يكون 1 بأخذ $k = 0$ أو 51 بأخذ $k = 10$.

مثال ١١ : ما أكبر عدد محتمل من فصول الترافق في زمرة رتبته 215 ؟

الحل : أكبر عدد محتمل هو 215 لأن الزمرة ربما تكون إبدالية !

من مثال ٥ يكون كل فصل ترافق لعنصر يتكون من العنصر نفسه فقط .

مثال ١٢ : إذا كان $Ord(G) = p^r m$ حيث G زمرة ، $r \geq 1$ ، $p \nmid m$ ، وكانت P زمرة سيلو - p الجزئية من G ، وكانت H زمرة - p بحيث $P \subset H \subset G$ فبرهن على أن $H = P$

البرهان : من حيث إن H زمرة - p فإن $Ord(H) = p^t, t \geq 0$ ، ومن نظرية لاجرانج (١-١٠-٣) ينتج أن $p^r \mid p^t m$. ومن حيث إن $p \nmid m$ ينتج أن $p^r \mid p^t$ وبالتالي يكون $t \leq r$. ولكن $P \subset H$ ، $Ord(P) = p^r$ (لأن P زمرة سيلو - p الجزئية من G) فينتج أن $p^r \mid p^t$ أي أن $r \leq t$. ومن ثم فإن $r = t$ ويكون $Ord(P) = Ord(H)$ ومن ثم فإن $P = H$.

مثال ١٣ : إذا كانت G زمرة رتبته p^2 ، حيث p عدد أولي ، فبرهن على أن G إبدالية.

البرهان : ليكن $Z(G)$ هو مركز G . واضح أن G زمرة - p المنتهية غير التافهة (رتبة أي عنصر في زمرة يكون قاسماً لرتبة الزمرة من نظرية لاجرانج (١-١٠-٣)) . ومن

مثال ١ فى (٥-٢-١٣) يكون $Z(G)$ محتوياً على أكثر من عنصر واحد . والآن إذا كان $Z(G) = G$ تكون G زمرة إبدالية . أما إذا كان $Z(G) \neq G$ فإن $\text{Ord}(Z(G)) = p$ لأن $Z(G)$ زمرة جزئية (طبيعية) من G وحسب نظرية لاجرانج وبالتالي يكون $\text{Ord}(G/Z(G)) = p$ ، ومن ثم تكون $G/Z(G)$ زمرة دائرية (١-١١-٧) (٢) ومن مثال ٥٠ من أمثلة متنوعة على الباب الأول ينتج أن G إبدالية .

مثال ١٤ : إذا كانت G زمرة غير إبدالية ورتبتها p^3 ، حيث p عدد أولى ، فبرهن على أن $\text{Ord}(Z(G)) = p$.

البرهان : G : كما سبق فى مثال ١٣ السابق مباشرة زمرة p - المنتهية غير التافهة فمن مثال ١ فى (٥-٢-١٣) يكون $Z(G)$ محتوياً على أزيد من عنصر واحد. كذلك فإن $Z(G) \neq G$ لأن G غير إبدالية . والآن إذا كان $\text{Ord}(Z(G)) = p^2$ فإنه ينتج من نظرية لاجرانج (١-١٠-٣) أن $\text{Ord}(G/Z(G)) = p$ ومن (١-١١-٧) (٢) ينتج أن G دائرية وبالتالي تكون إبدالية . وهذا تناقض. إذن $\text{Ord}(Z(G)) = p$

مثال ١٥ : برهن على أن أية زمرة رتبتها ١٥ لا يمكن أن تكون بسيطة (simple) (بسيطة أى لاتحتوى على زمرة جزئية طبيعية غير تافهة أى فعلية)

البرهان : لتكن G زمرة رتبتها ١٥ . نحن ندعى أن G تحتوى على زمرة جزئية طبيعية من الرتبة ٥ (رتبة الزمرة الجزئية قاسم لرتبة الزمرة من نظرية لاجرانج). من نظرية سيلو الأولى (٥-٢-٣) G تحتوى على الأقل على زمرة جزئية من رتبة ٥ وعدد هذه الزمر الجزئية يطابق ١ مقياس ٥

(5 congruent to 1 modulo) (نظرية سيلو الثالثة) .

ونظراً لأن ١ ، ٦ ، ١١ هى فقط الأعداد التى تقبل عن ١٥ وتكون مطابقة لـ ١ مقياس ٥ ، ونظراً لأن ١ فقط من بين هذه الأعداد الثلاثة الذى يكون قاسماً لرتبة G وهى ١٥ ، فإننا نجزم بأن G لها بالضبط زمرة جزئية واحدة من الرتبة ٥ . ولكن لكل $a \in G$ يرسم

الأوتومورفيزم الداخلي φ_a (انظر (٧-٣-١)) عناصر G كالآتي : $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ، $\forall x \in G$ ، وعلى وجه الخصوص يرسم H على (onto) الزمرة الجزئية aHa^{-1} وتكون رتبته 5. ولأن G تحتوى على زمرة جزئية وحيدة ذات الرتبة 5 فإن $aHa^{-1} = H$ لجميع $a \in G$. أى أن H زمرة جزئية طبيعية غير تافهة فى G . ومن ثم فإن G ليست بسيطة .
مثال ١٦ : برهن على أن أية زمرة غير دائرية G من الرتبة 21 تحتوى على 14 عنصراً من الرتبة 3 .

البرهان : $21 = 7 \times 3$. من نظرية سيلو الأولى تحتوى G على زمرة جزئية واحدة على الأقل من الرتبة 3 ، زمرة جزئية واحدة على الأقل من الرتبة 7 . وعدد الزمر الجزئية من الرتبة 3 يحقق $3k + 1$ وهو قاسم لرتبة G (نظرية سيلو الثالثة) . وبالتالي فإن عدد الزمر الجزئية من الرتبة 3 يكون 7. ووضح أن الزمر الجزئية دائرية (١-١١-٧) كذلك من (١١-١١-١) كل زمرة تحتوى على مولدين أى أن G تحتوى على 14 عنصراً من الرتبة 3 .

مثال ١٧ : لتكن G زمرة رتبته 60 . إذا كانت زمرة سيلو - 3 الجزئية طبيعية فبرهن على أن زمرة سيلو - 5 الجزئية طبيعية كذلك .

البرهان : لتكن M زمرة سيلو - 3 الجزئية ، ولتكن G محتوية على زمر سيلو - 5 الجزئية غير الطبيعية وهى N_1 ، ... (لماذا أكثر من واحدة ؟) . عدد هذه الزمر يقسم 60 (رتبة G) وكذلك يحقق $1 + 5k$ ، ولأنه توجد أكثر من زمرة سيلو - 5 الجزئية غير الطبيعية فيكون $k = 1$ وعدد هذه الزمر 6. أى لدينا N_1 ، N_2 ، ... ، N_6 . هذه الزمر الجزئية تحتوى على 4×6 أى 24 عنصراً من الرتبة 5 (١١-١١-١) . لاحظ كذلك أن MN_1 ، MN_2 ، ... ، MN_6 كلها زمر جزئية من G ((٢-٨-١)) النظرية الأولى للأيزومورفيزم) ورتبتها جميعا 15 وبهذا تكون دائرية (لماذا ؟) ومن ثم فإن كل واحدة منها لها 8 مولدات (١١-١١-١) أى أنه يوجد كذلك $8 \times 6 = 48$ عنصراً من الرتبة 15. أى لدينا 72 عنصراً من الرتبة 5 ، الرتبة 15 بينما الزمرة من الرتبة 60 . تناقض .

مثال ١٨ : إذا كان p عدداً أولياً فإن أية زمرة من الرتبة $2p$ تحتوى على زمرة جزئية طبيعية من الرتبة p .

البرهان : وجود هذه الزمرة الجزئية مضمون من نظرية سيلو الأولى . ودليل هذه الزمرة الجزئية $= 2$ فينتج من مثال ٣٩ من أمثلة على الباب الأول المطلوب مباشرة .

مثال ١٩ : برهن على أنه إذا كانت G زمرة لها الرتبة pq حيث p, q عددان أوليان ، $p < q$ ، p لا تقسم $q - 1$ ، فإن G تكون دائرية . وعلى وجه الخصوص تكون G متشاكلة مع $\mathbb{Z}_{pq}$.

البرهان : لتكن H زمرة سيلو p - الجزئية من G ، K زمرة سيلو q - الجزئية من G . من نظرية سيلو الثالثة يكون عدد زمر سيلو p - الجزئية من G ، وليكن n_p على الشكل $1 + kp$ ، ويقسم pq . ومن ثم فإن $1 + kp = 1$ أو $1 + kp = p$ أو $1 + kp = q$ أو $1 + kp = pq$. من هذا ولأن $q - 1 \nmid p$ ينتج أن $k = 0$ ، وبالتالي فإن H هي زمرة سيلو p - الجزئية الوحيدة فى G .

وبالمثل فإن K هي زمرة سيلو q - الوحيدة فى G . ومن ثم فإن H, K تكونان زمريتين جزئيتين طبيعيتين من G (انظر مثال ٢٣) والآن ليكن $H = [x]$ ، $K = [y]$ (لاحظ أن H, K دائريتان) وسنبرهن على أن G دائرية . وكفى لهذا أن نبرهن على أن x, y يتبادلان (commute)، وعندئذ فإن $Ord(xy) = Ord(x)Ord(y) = pq$ أى أن xy يولد G أى أن G دائرية . والآن لاحظ أنه لأن H, K طبيعيتان فإن :

$$x^{-1}y^{-1}xy = (x^{-1}y^{-1}x)y \in Ky = K$$

$$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}(y^{-1}xy) \in x^{-1}H = H$$

وهكذا فإن $x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap H = \{e\}$ ، ومن ثم فإن $xy = yx$.

نهاية البرهان .

مثال ٢٠ : إذا كانت هناك زمرة رتبته p^n ، حيث p عدد أولى ، وكانت تحتوى على زمرة جزئية وحيدة لكل رتبة $p, p^2, \dots, p^{n-1}$ فبرهن على أن الزمرة دائرية .

البرهان : لتكن G الزمرة التى رتبتهـا p^n ، H زمرة جزئية منها رتبتهـا p^{n-1} . من نظرية سيلو الأولى تحتوى H على زمر جزئية من الرتبـ p ، p^2 ، ... ، p^{n-2} . ونظراً لأن كل هذه الزمر الجزئية هى زمر جزئية فى G كذلك ، فإنه ينتج أن جميع الزمر الجزئية الفعلية (أى غير التافهة) فى G تكون محتواة فى H . والآن إذا كان $a \in G$ ، $a \notin H$ ، فإن رتبة a يجب أن تكون p^n ، وإلا ولد a زمرة جزئية K رتبتهـا أقل من p^n . وهذا يعنى أن $a \in H$ ، نظراً لأن $a \in K \subset H$. وهكذا فإن رتبة a هى p^n ومن ثم فإن G تكون زمرة دائرية متولدة بـ a .

مثال ٢١ : إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية من زمرة منتهية G رتبتهـا $p^m q$ ، p عدد أولى ، $(p, q) = 1$ ، وكان دليل H فى G ليس بينه وبين p قواسم مشتركة عدا الواحد ، عندئذ فإن H تحتوى على كل زمرة سيلو p - الجزئية من G .

البرهان : لدينا $Ord(G) = p^m q$ حيث $(p, q) = 1$ (= القاسم المشترك الأعظم بين p ، q

هو الواحد). ونظراً لأن $[G : H] = \frac{Ord(G)}{Ord(H)}$ ، وليس بينه وبين p قواسم مشتركة فإن

$Ord(H) = p^m q_1$ حيث $(p, q_1) = 1$. من نظرية سيلو الأولى تحتوى H على زمرة سيلو - p الجزئية K حيث $Ord(K) = p^m$ ، K تكون أيضاً زمرة سيلو - p الجزئية من G . ولتكن K_1 زمرة سيلو - p الجزئية الأخرى من G . عندئذ فإنه من نظرية سيلو الثانية يكون هناك $x \in G$ بحيث إن :

$$K_1 = xKx^{-1} \subset xH^{-1}x \subset H \quad (\text{لأن } H \triangleleft G)$$

ومن ثم فإن جميع زمر سيلو - p الجزئية من G تكون محتواة فى H .

مثال ٢٢ : ليكن d قاسماً لرتبة زمرة إبدالية منتهية G هى n . عندئذ فإن G تحتوى على زمرة جزئية لها الرتبة d .

البرهان : إذا كان $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ ، فإن

$$G = \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p_2^{e_2}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{p_r^{e_r}} \quad (١-١-٤)$$

ولیکن $d = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_r^{f_r}$. من نظرية سيلو الأولى تحتوى $\mathbb{Z}_{p_i^{f_i}}$ على زمرة جزئية

$\mathbb{Z}_{p_i^{f_i}}$ ، وعندئذ فإن :

$$H = \mathbb{Z}_{p_1^{f_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p_2^{f_2}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{p_r^{f_r}}$$

وهى زمرة جزئية رتبته d . (قارن مع نظرية كوشى (١-٢-٥))

مثال ٢٣ : برهن على أن زمرة سيلو p - الجزئية من زمرة منتهية G تكون وحيدة إذا كانت فقط إذا كانت طبيعية .

البرهان : لتكن H زمرة سيلو p - الجزئية طبيعية فى الزمرة المنتهية G . ولتكن K زمرة سيلو p - الجزئية الأخرى فى G . من نظرية سيلو الثانية يكون H ، K مترافقتين، أى أنه يوجد $x \in G$ بحيث إن : $K = xHx^{-1}$. ولكن H طبيعية فى G يستلزم أنه لكل $x \in G$: $H = xHx^{-1}$. وينتج مباشرة أن $H = K$.

والآن لتكن H وحيدة والمطلوب إثبات أنها طبيعية . من حيث إن لكل $x \in G$:

$Ord(xHx^{-1}) = Ord(H)$ ، ينتج أن xHx^{-1} زمرة سيلو p - الجزئية من G ، ولأن H

زمرة سيلو p - الجزئية الوحيدة فينتج أن $xHx^{-1} = H$: $\forall x \in G$ أى أن H طبيعية .

(انظر مثالى ١٧ ، ١٩ السابقين)

مثال ٢٤ : برهن على أن أى زمرة من الرتبة 105 تحتوى على زمرة جزئية من الرتبة 35 .

البرهان : من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 7 - الجزئية من G يقسم 105 ، ويكون على الصورة $1+7k, k \geq 0$ ، وبالتالي فهو إما أن يكون 1 أو يكون 15 . كذلك يكون عدد زمر سيلو 5 - الجزئية من G يقسم 105 ويكون على الصورة $1+5k, k \geq 0$ ، وبالتالي فإنه يكون 1 أو 21 . وبحساب عدد العناصر يتضح أنه لابد أن يكون أحد عددي زمرتي سيلو 5 ، 7 السابقين هو 1 ، أو أن يكون كلا العددين هو 1 . ومن مثال ٢٣ السابق مباشرة نعلم أن زمرة سيلو p - الجزئية الوحيدة من زمرة منتهية تكون طبيعية . أى أن احدى الزمرتين على الأقل طبيعية . ومن برهان النظرية الأولى للأيزومورفيزم

(٢-٨-١) نعلم أنه إذا كانت U زمرة جزئية من زمرة G ، وكانت N زمرة جزئية طبيعية من G فإن $UN := \{un \mid u \in U, n \in N\}$ تكون زمرة جزئية من G . وبالتالي فإنه يكون لدينا زمرة جزئية من الزمرة التي رتبناها 105 ، وتكون رتبة هذه الزمرة الجزئية هي $35 = (7)(5)$.

مثال ٢٥ : لتكن H زمرة p - الجزئية من G . عندئذ فإن $g^{-1}Hg, g \in G$ تكون كذلك زمرة p - الجزئية من G .

البرهان : ليكن $Ord(G) = p^r m, r \geq 0, p \nmid m$ أى أن p ليس قاسماً لـ m . عندئذ فإن $Ord(H) = p^r$. لكن $Ord(g^{-1}Hg) = Ord(H)$ (لماذا ؟) ومن ثم فإنه إذا كانت $g^{-1}Hg$ زمرة جزئية من G فإنها تكون كذلك زمرة p - الجزئية من G .
 $g^{-1}Hg$ زمرة جزئية من G لأنها أولاً غير خالية إذ تحتوى على الأقل على e (العنصر المحايد فى G) ،

ثانياً : إذا كان $g^{-1}h_1g, g^{-1}h_2g \in g^{-1}Hg$ فإن :

$g^{-1}h_1g(g^{-1}h_2g)^{-1} = g^{-1}h_1gg^{-1}h_2^{-1}g = g^{-1}h_1h_2^{-1}g \in g^{-1}Hg$ ومن (٢-٤-١) ينتج المطلوب مباشرة .

تمارين

(١) اوجد جميع زمر سيلو - 3 الجزئية من S_4 واثبت أنها جميعاً مترافقة (conjugate) (لاحظ أنها جميعاً في A_4 ، وعددها يحقق 1 مقياس 3)

(٢) اعتبر الزمرة الثمانية (مثال ٤٥ من أمثلة متنوعة على الباب الأول) (هذه في الواقع هي D_4 . انظر مثال ٤٨ من أمثلة متنوعة على الباب الأول).

(أ) اوجد "تحليل" D_4 إلى فصول ترافق .

(ب) اكتب معادلة الفصل لـ D_4 .

(٣) اوجد زمري سيلو - 2 الجزئيتين من S_4 وبرهن على أنهما مترافقتان

(٤) إذا كانت H مجموعة جزئية من زمرة منتهية G ، وكانت $g \in G$ فبرهن على أن

$$\text{عدد عناصر } H = \text{عدد عناصر } g^{-1}Hg \text{ حيث } g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$$

(٥) اوجد فصول الترافق في S_3 ، ومن ثم اكتب معادلة الفصل

(٦) في S_3 هناك ثلاث زمر سيلو - 2 الجزئية . حقق أن أى اثنتين منها يمكن الحصول عليهما من الثالثة بالتوافق

(٧) لتكن G زمرة ، X مجموعة غير خالية

(أ) إذا كانت τ عملية من G على X (أى أن G تعمل على X - انظر التعريف

(٥-١-١)) فإنه لكل $a \in G$ يكون الراسم

$$\tau_a : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto \tau(a, x)$$

تتأظراً أحادياً ، ويكون الراسم :

$$G \rightarrow \gamma(G)$$

(انظر مثال ٣ من أمثلة (١-٢-٥))

$$a \mapsto \tau_a$$

هومومورفيزم زمر .

(ب) إذا كان $\varphi : G \rightarrow \gamma(X)$ هومومورفيزم زمر فإن الراسم :

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(a, x) \mapsto \varphi(a)(x)$$

يكون عملية من G على X .

(٨) اعرض زمرة سيلو - 2 جزئية من S_4 وصف تشاكلا (أيزومورفيزما) منها مع D_4

(٩) برهن على أن الترافق علاقة تكافؤ على مجموعة

(١٠) لتكن G زمرة رتبته 168. إذا كانت G تحتوى على أكثر من زمرة سيلو - 7

الجزئية فكم بالضبط تحتوى من تلك الزمر ؟

(١١) برهن على أن أية زمرة رتبته 56 تحتوى على زمرة جزئية طبيعية غير تافهة

(١٢) كم عدد زمر سيلو - 5 الجزئية من S_5 ؟ اذكر اثنتين منها

(١٣) إذا كانت G زمرة غير دائرية رتبته 21 فكم عدد زمر سيلو - 3 الجزئية من G ؟

(١٤) برهن على أن جميع زمر سيلو - p الجزئية من زمرة منتهية تكون متشاكلة

(أيزومورفية)

(١٥) برهن على أنه إذا كان p عدداً أولياً ، وكان كل عنصر فى زمرة منتهية ذا رتبة

هى قوة (أس) من قوى p فإن رتبة G تكون كذلك قوة من قوى p

(١٦) لتكن H زمرة جزئية طبيعية من زمرة G . برهن على أن H هى اتحاد فصول

الترافق لعناصر H . هل يتحقق هذا كذلك إذا لم تكن H طبيعية فى G ؟

(١٧) كم عدد زمر سيلو - 3 الجزئية من S_5 ؟ اذكر خمساً منها

(١٨) اوجد جميع زمر سيلو - 3 الجزئية من S_4 وبرهن على أنها جميعاً مترافقة

(١٩) لتكن G زمرة على مجموعة X . وليكن $a \in X$. تذكر أن مثبت (a) (stabilizer) هو

$$stab(a) := \{\alpha \in G \mid \alpha(a) = a\}.$$

1 Group Theory نظرية الزمر



امتسلسلات الطبيعية

ومتسلسلات التركيب والزمر القابلة للحل

Normal Series, Composition Series and Solvable Groups

١-٦ المتسلسلات الطبيعية ومتسلسلات التركيب

١-٦-١ تعريف : المتسلسلة الطبيعية لزمرة G هي متوالية منتهية $(G_0, G_1, \dots, G_r)$

من الزمر بحيث يكون $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$ ، حيث e هو عنصر G المحايد ، $H \triangleleft G$ تعنى H زمرة جزئية طبيعية من G . وواضح أن كل زمرة لها متسلسلة طبيعية $(\{e\}, G)$

وواضح كذلك أنه إذا كانت $(G_0, G_1, \dots, G_r)$ متسلسلة طبيعية فإن هذا يعنى وجود سلسلة (chain) متصاعدة (ascending) من الزمر الجزئية :

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_r = G$$

١-٦-٢ تعريف : يقال إن متسلسلتين طبيعيتين لزمرة G $(G_0, G_1, \dots, G_r)$ ،

$(G'_0, G'_1, \dots, G'_s)$ متكافئتان (equivalent) وسنكتب $(G_0, G_1, \dots, G_r) \sim (G'_0, G'_1, \dots, G'_s)$

إذا كان $s = r$ ، يوجد $\sigma_i \in S_r$ (تبديلة من الزمرة المتماثلة من الرتبة r) بحيث يكون :

$$G_i / G_{i-1} \cong G'_{\sigma(i)} / G'_{\sigma(i)-1} , 1 \leq i \leq r$$

١-٦-٣ ملحوظة : " ~ " هي علاقة تكافؤ على مجموعة المتسلسلات الطبيعية لزمرة G .

١-٦-٤ تعريف : يقال لزمرة جزئية طبيعية H فى زمرة G إنها عظمى (maximal) إذا

كانت $H \neq G$ ، ولا يوجد زمرة جزئية طبيعية K بحيث يكون

$$H \subsetneq K \subsetneq G$$

١-٦-٥ أمثلة : (١) فى الزمرة $\mathbb{Z}$: لكل عدد أولى $p \in \mathbb{P}$: $p\mathbb{Z}$ زمرة جزئية

طبيعية عظمى ، ولا توجد فى $\mathbb{Z}$ زمر جزئية طبيعية عظمى أخرى .

(٢) فى $S_3 (= \mathcal{V}_3)$: الزمرة الجزئية الطبيعية غير التافهة الوحيدة هي $\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

(حيث e العنصر المحايد) ، وهي عظمى (انظر مثال ٩ من أمثلة متنوعة على المفاهيم

الأساسية)

(٣) الزمرة A_n ، زمرة التبديلات الزوجية زمرة جزئية طبيعية وهى عظمى .

٦-١-٦ تعريف : يقال لزمرة إنها بسيطة (simple) إذا لم تحتو من الزمر الطبيعية إلا التافهة .

٦-١-٧ تمهيدية : إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية فعلية (مضبوطة) من G (أى H زمرة جزئية من G ولا تساوى G) فإن G/H تكون بسيطة إذا كانت فقط إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية عظمى من G .

البرهان : هذا ينتج مباشرة من تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية العظمى ومن ملاحظة أنه إذا كانت G/K الزمرة العاملة لـ G فإن أية زمرة جزئية من G/K سيكون لها الشكل H/K ، حيث H زمرة جزئية من G تحتوى على K ؛ و H/K زمرة جزئية طبيعية من G/K إذا كانت فقط إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية من G .

٦-١-٨ تمهيدية : إذا كانت H ، K زمريتين جزئيتين طبيعيتين عظميين مختلفتين من زمرة G ، فإن $H \cap K$ زمرة جزئية طبيعية عظمى من H ومن K .

البرهان : من (٢-٨-١) النظرية الأولى للأيزومورفيزم $H/H \cap K \cong HK/K$ والآن من مثال ٤٢ (أمثلة متنوعة على الباب الأول) HK زمرة جزئية طبيعية من G . والآن $K \subset HK$ ، زمرة جزئية عظمى من G فينتج أن $HK = K$ أو $HK = G$. ليكن $HK = K$. هذا يستلزم أن $H \subset K$. ولكن H زمرة جزئية عظمى من G فينتج أن $H = K$ أو أن $K = G$. كلاهما مرفوض لأنه يتناقض مع الفرض . ومن ثم فإن $HK = G$. وبالتالي فإن :

$$H/H \cap K \cong G/K$$

ومن حيث إن K زمرة جزئية طبيعية عظمى من G فإن $H \cap K$ زمرة جزئية طبيعية عظمى من H . وبالمثل فإن $H \cap K$ زمرة جزئية طبيعية عظمى من K .

٦-١-٩ تعريف : متسلسلة التركيب (composition series) هي متسلسلة طبيعية

من G_{i+1} ، أى أن G_{i+1}/G_i زمرة بسيطة .
 وتسمى زمر القسمة G_{i+1}/G_i عوامل التركيب (composition factors) .

٦-١-١٠ أمثلة : (١) $\{e\} \subset \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \subset S_3$ متسلسلة تركيب لـ S_3 .

متسلسلة تركيب لـ S_4 : $\{e\} \subset \{e, (1\ 2)(3\ 4)\} \subset \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset A_4 \subset S_4$.

$$(٢) \quad \{e\} \subset \{e, \alpha^2\} \subset \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\} \subset G$$

متسلسلة تركيب للزمرة الثمانية (انظر مثال ٤٥ من أمثلة متنوعة على الباب الأول)

$$(٣) \quad \{\bar{0}\} \subset \{\bar{0}, \bar{9}\} \subset \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\} \subset \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{17}\} = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$$

متسلسلة تركيب لـ $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

٦-١-١١ نظرية : أى زمرة منتهية G لها متسلسلة تركيب

البيرهان : إذا كانت $G = \{e\}$ فالادعاء تافه .

نفترض أن الادعاء صحيح للزمر ذات الرتبة الأقل من $Ord(G)$. إذا كانت G بسيطة فالادعاء تافه . لتكن H زمرة جزئية طبيعية غير تافهة فى G . من فرض الاستقراء الرياضى سيكون لـ H ، G/H متسلسلتا تركيب ، هما :

$$\{e\} \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n = H,$$

$$H/H = G_0/H \subset G_1/H \subset G_2/H \subset \dots \subset G_m/H = G/H$$

ونحصل منهما على

$$\{e\} \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_m = G$$

وهذه متسلسلة تركيب لأن :

$$G_{i+1}/G_i \cong \frac{G_{i+1}/H}{G_i/H}, 0 \leq i \leq m-1$$

١٢-١-٦ نظرية جوردان - هولدر Jordan - Holder Theorem

إذا كانت G زمرة منتهية ، فإن أى متسلسلتى تركيب تكونان متكافئتين .

البرهان : بالاستقراء الرياضى على رتبة G . ليكن

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{r-1} \subset A_r = G,$$

$$\{e\} = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{s-1} \subset B_s = G$$

متسلسلتى تركيب لـ G . إذا كان $A_{r-1} = B_{s-1}$ فإن الادعاء ينتج مباشرة من فرض

الاستقراء الرياضى. ليكن $A_{r-1} \neq B_{s-1}$. وليكن

$$\{e\} = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset A_{r-1} \cap B_{s-1}$$

متسلسلة تركيب لـ $A_{r-1} \cap B_{s-1}$

لدينا من (٦-١-٨) $A_{r-1} \cap B_{s-1}$ زمرة جزئية طبيعية عظمى من A_{r-1} ، أيضاً من

B_{s-1} ، ومن ثم فإن السلاسل (chains) الآتية تكون متسلسلات تركيب لـ G :

$$S_1 : \{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{r-1} \subset A_r = G$$

$$S_2 : \{e\} = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset A_{r-1} \cap B_{s-1} \subset A_{r-1} \subset A_r = G$$

$$S_3 : \{e\} = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset A_{r-1} \cap B_{s-1} \subset B_{s-1} \subset B_s = G$$

$$S_4 : \{e\} = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{s-1} \subset B_s = G$$

من فرض الاستقراء الرياضى A_{r-1} ، B_{s-1} لهما متسلسلتا تركيب متكافئتان . وإذا حذفنا

الحدين الأخيرين فى S_1 ، S_2 فإن السلسلتين الناتجتين تكونان متسلسلتى تركيب لـ A_{r-1}

، ومن ثم فمن فرض الاستقراء الرياضى تكون السلسلتان متكافئتين . ومن تعريف التكافؤ

تكون S_1 مكافئة لـ S_2 ، بالرموز $S_1 \sim S_2$. وبالمثل فإن $S_3 \sim S_4$ ونبرهن على أن

$S_2 \sim S_3$ كالاتى :

$$A_{r-1} / A_{r-1} \cap B_{s-1} \cong A_{r-1} B_{s-1} / B_{s-1} = G / B_{s-1}$$

وبالمثل فإن :

$$B_{s-1}/A_{r-1} \cap B_{s-1} \cong G/A_{r-1}$$

ومن ثم فإن $S_2 \sim S_3$. ولأن $\sim$ علاقة تكافؤ فإن $S_1 \sim S_4$.
نهاية البرهان .

٦-١-١٣ أمثلة محلولة :

مثال ١ : اضرب مثلاً لبيان أن متسلسلة التركيب لزمرة ما ليست بالضرورة وحيدة .

الحل : في الزمرة الثمانية : $\{e\} \subset \{e, \alpha^2\} \subset \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\} \subset G$ ،

$$\{e\} \subset \{e, \beta\} \subset \{e, \alpha^2, \beta, \alpha^2 \beta\}$$

متسلسلتا تركيب .

مثال ٢ : طبق نظرية جوردان - هولدر على الزمر الدائرية المنتهية لتحقيق وحدانية التحليل لعدد صحيح موجب إلى أعداد أولية موجبة .

الحل : ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ، C زمرة دائرية منتهية رتبته n . ولتكن

$$\{e\} \subset C_1 \subset \dots \subset C_i = C \quad (e \text{ العنصر المحايد في } C)$$

متسلسلة تركيب لـ C . باستخدام نظرية جوردان - هولدر تكون الأعداد الأولية

$$p_1 = \text{Ord}(C_1), p_2 = \text{Ord}(C_2 / C_1), \dots, p_i = \text{Ord}(C_i / C_{i-1})$$

وحيدة . ولكن

$$(\text{Ord}(C) = \text{Ord}(C_i) = \frac{\text{Ord}(C_i)}{\text{Ord}(C_{i-1})} \cdot \frac{\text{Ord}(C_{i-1})}{\text{Ord}(C_{i-2})} \dots \frac{\text{Ord}(C_2)}{\text{Ord}(C_1)} \cdot \frac{\text{Ord}(C_1)}{1})$$

$$= p_i p_{i-1} \dots p_2 p_1 .$$

نهاية البرهان .

تذكر أن الزمرة G يقال إنها زمرة p - إذا كانت رتبة كل عنصر من عناصرها قوة من p .

مثال ٣ : إذا كانت C زمرة دائرية لها متسلسلة تركيب وحيدة فإنها تكون زمرة p -
البرهان : لتكن

$$\{e\} \subset C_1 \subset C_2 \dots \subset C_{i-1} \subset C_i \subset C_{i+1} \subset \dots \subset C_n = C \quad (*)$$

متسلسلة تركيب لـ G ، وليكن

$$\text{Ord}(C_1) = p_1, \text{Ord}(C_{i+1}/C_i) = p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{أعداد أولية})$$

ليكن $p_{i+1} \neq p_i$ ، $p_1 = \dots = p_i$ لأن $\text{Ord}(C_{i+1}) = p_{i+1}p_i \dots p_1$ ، فإن C_{i+1} لها C_i' زمرة جزئية طبيعية عظمى من الرتبة $p_{i+1}p_{i-1}p_{i-2} \dots p_1$. عندئذ فإن :

$$\text{Ord}(C_{i+1}/C_i') = p_i, \text{Ord}(C_i'/C_{i-1}) = p_{i+1}$$

ومن ثم فإن :

$$\{e\} \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{i-1} \subset C_i' \subset C_{i+1} \subset \dots \subset C_n = C$$

تكون متسلسلة تركيب مختلفة عن متسلسلة التركيب (*). وهذا تناقض مع فرض وحدانية متسلسلات التركيب ، ومن ثم فإن $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ ، وتكون رتبة الزمرة C هي p^n ، وتكون رتبة كل عنصر من عناصرها قوة من قوى p .

مثال ٤ : برهن على أن أى زمرة إبدالية غير منتهية لا يكون لها متسلسلة تركيب $(\mathbb{Z})$ على وجه الخصوص ليس لها متسلسلة تركيب).

البرهان : نلاحظ أولاً أن الزمرة الإبدالية البسيطة غير التافهة تكون دائرية وتتولد من أى عنصر فيما عدا العنصر المحايد (انظر (١٠-١-٤) ، (٧-١١-١) ، (١١-١١-١)) . ومن ثم فإنه إذا كانت G زمرة إبدالية لها متسلسلة التركيب :

$$\{e\} \subset G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G$$

فإن عوامل التركيب G_i/G_{i-1} تكون دائرية ولها الرتب الأولية p_i ، $i = 1, \dots, n$ ، وعندئذ فإن $\text{Ord}(G) = p_1 p_2 \dots p_n$ ، أى أن G ينبغي لها أن تكون منتهية .

مثال ٥ : برهن على أن المتسلسلتين الطبيعيين لـ $\mathbb{Z}_{15}$:

$$\{\bar{0}\} \subset [\bar{5}] \subset \mathbb{Z}_{15} ,$$

$$\{\bar{0}\} \subset [\bar{3}] \subset \mathbb{Z}_{15}$$

متكافئتان .

البرهان : (انظر مثال ١٦ من أمثلة محلولة (٣-١-١٣))

$$\mathbb{Z}_{15}/[\bar{5}] , \mathbb{Z}_{15}/[\bar{3}] \text{ متساكلتان مع } \mathbb{Z}_3 , \text{ بينما } \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_{15}/[\bar{5}] , \mathbb{Z}_{15}/[\bar{3}] \text{ متساكلتان مع } \mathbb{Z}_3$$

مثال ٦ : برهن على أن $\mathbb{Z}$ ليس لها متسلسلة تركيب (انظر مثال ٤ أعلاه)

البرهان : لنفترض أن $\mathbb{Z}$ لها المتسلسلة الطبيعية :

$$\{0\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = \mathbb{Z}$$

عندئذ فإن $H_1 = m\mathbb{Z}$ حيث $m \in \mathbb{N}$. وبالتالي فإن $H_1/H_0 \cong m\mathbb{Z}/H_0$ وهي زمرة دائرية

غير منتهية، بها زمر جزئية طبيعية متعددة ، على سبيل المثال $2m\mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $\mathbb{Z}$ لا يكون لها متسلسلة تركيب.

مثال ٧ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) $\{0\} \subset 8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ متسلسلة طبيعية للزمرة $\mathbb{Z}$ (تحت عملية الجمع)

(ب) $\{0\} \subset 9\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ متسلسلة طبيعية للزمرة $\mathbb{Z}$

(جـ) $\{(\bar{0}, \bar{0})\} \subset [(\bar{0}, \bar{3})] \subset [(\bar{0}, \bar{1})] \subset [\bar{2}] \otimes [\bar{1}] \subset [\bar{1}] \otimes [\bar{1}] = \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9$

(د) كل زمرة إبدالية لها بالضبط متسلسلة تركيب وحيدة

(هـ) نظرية جوردان - هولدر لها نوع من التشابه مع النظرية الأساسية في الحساب ، التي تقرر أن كل عدد صحيح موجب أكبر من 1 يمكن تحليله بطريقة وحيدة إلى حاصل ضرب أعداد أولية .

الحل : التقرير (د) خاطئ (انظر مثال ١). باقي التقارير صحيحة .

٢-٦ الزمر القابلة للحل

٢-٦-١ تعريف : يقال لزمرة G إنها قابلة للحل (solvable) إذا كان لها متسلسلة طبيعية

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_r = G$$

بحيث إن G_i/G_{i-1} تكون إبدالية لجمع $i = 1, 2, \dots, r$

٢-٦-٢ أمثلة :

(١) كل زمرة إبدالية تكون قابلة للحل . فإذا كانت G زمرة إبدالية وكان e عنصرها المحايد فإنه يمكن على الأقل كتابة المتسلسلة الطبيعية "التافهة" :

$$\{e\} = G_0 \subset G$$

حيث $G/\{e\}$ إبدالية (تذكر أن G ، $\{e\}$ زمريتان جزئيتان طبيعيتان تافهتان من G).

(٢) الزمرة $S_3 (= \gamma_3)$ قابلة للحل لأن

$$\{e\} \subset \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \subset S_3$$

متسلسلة طبيعية (تذكر أن $N = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ هي الزمرة الجزئية الطبيعية غير التافهة الوحيدة من S_3) ، $S_3/N \cong \mathbb{Z}_2$ زمرة إبدالية (انظر مثال ٩ من أمثلة متنوعة

على الباب الأول) ، $N/\{e\} \cong \mathbb{Z}_3$ أى زمرة إبدالية

(٣) S_4 قابلة للحل لأن :

$$\{e\} \subset \{e, (1\ 2)(3\ 4)\} (= N_1), \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} (= N_2) \subset A_4 \subset S_4$$

متسلسلة طبيعية ، N_2/N_1 ، A_4/N_2 ، S_4/A_4 زمرة إبدالية ($N_1/\{e\}$ واضح أنها زمرة إبدالية).

والآن تذكر أن "الزمرة المشتقة" G' من الزمرة G هي زمرة جزئية طبيعية من الزمرة G ، تتولد من الإبداليات $a^{-1}b^{-1}ab$ حيث $a, b \in G$. و G' لها الخاصة G/G' زمرة

إبدالية ، وإذا كانت H زمرة جزئية طبيعية من G ، بحيث إن G/H إبدالية فإن

$H \supset G'$. تسمى كذلك G' زمرة الإبداليات (commutator group) G .

سنعرف $G^{(0)} := G$ ، $G^{(1)} := G'$ ، $G^{(2)} := (G')'$ ، ... ، $G^{(m)} := (G^{(m-1)})'$

وبالتالى فإن كل $G^{(n)}$ تكون زمرة جزئية طبيعية من $G^{(n-1)}$ ، $G^{(n-1)}/G^{(n)}$ تكون زمرة إبدالية.

٦-٢-٣ نظرية : الزمرة G قابلة للحل إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعى $k : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

بحيث إن $G^{(k)} = \{e\}$ (e عنصر G المحايد)

البرهان : لتكن G زمرة قابلة للحل . عندئذ فإنه توجد متسلسلة طبيعية

$$\{e\} = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{k-1} \subset N_k = G$$

بحيث إن N_i/N_{i-1} تكون إبدالية $i = 1, 2, \dots, k$.

والآن N_k/N_{k-1} إبدالية تقتضى أن $N_{k-1} \supset N'_k = G'$. كذلك فإن N_{k-1}/N_{k-2} إبدالية

تقتضى أن $N_{k-2} \supset N'_{k-1} \supset (G')' = G^{(2)}$. وبلااستمرار على هذه الشاكلة نصل إلى

$$\{e\} = N_0 \supset G^{(k)} \Rightarrow G^{(k)} = \{e\}$$

وبالعكس : ليكن $G^{(k)} = \{e\}$. لنعتبر السلسلة :

$$\{e\} = G^{(k)} \subset G^{(k-1)} \subset G^{(k-2)} \subset \dots \subset G^{(1)} \subset G^{(0)} = G$$

هذه متسلسلة طبيعية بحيث إن $G^{(m)}/G^{(m+1)}$ كلها إبدالية ، حيث $m = 0, 1, \dots, k-1$ ،

ومن ثم فإن G تكون قابلة للحل .

٦-٢-٤ ملحوظات :

(أ) أى زمرة جزئية من زمرة قابلة للحل تكون قابلة للحل

(ب) لتكن G زمرة قابلة للحل ، ولتكن H زمرة جزئية طبيعية من G . عندئذ فإن G/H

تكون قابلة للحل كذلك

(جـ) إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية من G بحيث إن H ، G/H قابلتان للحل ، فإن

G تكون قابلة للحل

البرهان : (أ) لتكن H زمرة جزئية من زمرة قابلة للحل G . واضح أن :

$$H \subset G \Rightarrow H^{(1)} \subset G^{(1)} \Rightarrow H^{(2)} \subset G^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow H^{(k)} \subset G^{(k)} \Rightarrow \dots$$

ولأن G قابلة للحل فإنه لعدد صحيح موجب k سيحدث أن $G^{(k)} = \{e\}$ وهكذا فإن $H^{(k)} = \{e\}$ ، أى أن H قابلة للحل .

(ب) ليكن $\bar{G} := G/H$. لكل $a, b \in G$:

$$(a^{-1}b^{-1}ab)H = (a^{-1}H)(b^{-1}H)(aH)(bH) = (aH)^{-1}(bH)^{-1}(aH)(bH)$$

ومن ثم فإن : $\bar{G}' = (\bar{G})'$ ، أى أن : $\overline{G^{(1)}} = (\bar{G})^{(1)}$. وبالاستقراء الرياضى ينتج أن :

$$\overline{G^{(k)}} = (\bar{G})^{(k)}$$

ولأن G قابلة للحل فإنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث إن $G^{(n)} = \{e\}$ حيث e

عنصر G المحايد. ومن هذا ينتج أن $(\bar{G})^n = \{e\}$ ، أى أن $\bar{G}$ قابلة للحل

(جـ) لتكن

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = H$$

متسلسلة طبيعية لـ H بحيث إن H_i/H_{i-1} تكون إبدالية ، $i = 1, \dots, n$. ولتكن

$$H/H = G_0/H \subset G_1/H \subset G_2/H \subset \dots \subset G_{m-1}/H \subset G_m/H = G/H$$

متسلسلة طبيعية لـ G/H بحيث إن :

$$G_i/H \big/ G_{i-1}/H \cong G_i/G_{i-1}$$

تكون إبدالية ، $i = 1, \dots, m$. عندئذ يكون لدينا :

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$$

وهى متسلسلة طبيعية ، ونظراً لأن H_i/H_{i-1} ، G_j/G_{j-1} إبدالية ، $i = 1, \dots, n$ ، $j = 1, \dots, m$ ،

تكون G قابلة للحل .

٦-٢-٥ نظرية : أى زمرة منتهية قابلة للحل G لها متسلسلة تركيب

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

بحيث إن عوامل التركيب G_i/G_{i-1} تكون زمراً دائرية لها رتب هي أعداد أولية
 $i = 1, \dots, n$.

البرهان : بالاستقراء الرياضى على رتبة (G) . إذا كان $Ord(G) = 1$ أو كانت G بسيطة يكون الادعاء صحيحاً . لنفترض أن الادعاء صحيح لجميع الزمر التى لها رتبة أقل من $Ord(G)$ ، G ليست بسيطة . إذا كانت H زمرة جزئية طبيعية غير تافهة من G ، فإنه من فرض الاستقراء يكون H متسلسلتاً تركيب مع عوامل تركيب هي زمر دائرية رتبها أعداد أولية . ونصل إلى المطلوب مثلاً فى (٦-٢-٤) (جـ) .

٦-٢-٦ أمثلة محلولة :

مثال ١ : برهن على أن $S_n (= \gamma_n), n \geq 5$ ليست قابلة للحل .

البرهان : لتكن N زمرة جزئية طبيعية من $G = S_n$ ، $n \geq 5$ ولتكن N تحتوى على كل الدورات ذات الطول 3 فى S_n . سنبرهن على أن N' زمرة الإبدال N (= الزمرة المشتقة من N) تحتوى على جميع الدورات ذات الطول 3 كالاتى :
 ليكن $a = (1 3 2)$ ، $b = (3 5 4)$ عنصرين فى N . عندئذ فإن :

$$a^{-1}b^{-1}ab = (1 2 3)(3 4 5)(1 3 2)(3 5 4) = (3 1 4) = (1 4 3) \in N'$$

ولدينا N' زمرة جزئية طبيعية من S_n

وهكذا فإنه لأى $\sigma \in S_n$ يكون : $\sigma^{-1}(1 4 3)\sigma \in N'$

نختار $\sigma \in S_n$ بحيث يكون : $\sigma(1) = i_1$ ، $\sigma(4) = i_2$ ، $\sigma(3) = i_3$ حيث $(i_1 i_2 i_3)$ دورة اختيارية فى S_n طولها 3 . وبالتالي يكون بحساب بسيط :

$$\sigma^{-1}(1 4 3)\sigma = (i_1 i_2 i_3)$$

أى أن $(i_1 i_2 i_3)$ عنصر فى N' . والآن ضع $N = G$ عندئذ فإن G' تحتوى على كل الدورات ذات الطول 3 . ونظراً لأنه لجميع $k \in \mathbb{N}$ تكون $G^{(k)}$ زمرة جزئية طبيعية من G ، فإنه بتكرار تطبيق ماسبق تكون $G^{(k)}$ محتوية على جميع الدورات ذات الطول 3 ، وبهذا تكون $G^{(k)} \neq \{e\}$ ، لأى عدد صحيح موجب k ، أى أن G ليست قابلة للحل .

مثال ٢ : برهن على أن الزمرة المتغيرة $A_n, n \geq 5$ بسيطة .

البرهان : لتكن H زمرة جزئية طبيعية من A_n . سنبرهن أولاً على أنه إذا كانت $H \neq \{e\}$ فإن H تحتوى على دورة طولها 3 . لتكن α تبديلة فى H ولا تساوى $\{e\}$ بحيث إنها تترك أكبر عدد من العناصر فى $\{1, 2, \dots, n\}$ ثابتاً . إذا لم تكن α دورة طولها 3 ، فإنها إما أن تحتوى على دورة طولها أكبر من أو يساوى 3 ، وإما أن α هى حاصل ضرب نقلتين (تحويليتين) منفصلتين على الأقل ، أى أن α إما :

$$(1) \alpha = (1\ 2\ 3\ \dots)(\dots)(\dots),$$

وإما

$$(2) \alpha = (1\ 2)(3\ 4)\dots$$

فى الحالة الأولى "ستحرك" على الأقل رقمين آخرين وليكونا 4 ، 5 ، لأن α ليست واحدة من التبديلات الفردية التى لها الشكل $(1\ 2\ 3\ k)$. والآن لتكن $\beta = (3\ 5\ 4)$ ، ولتكن $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$. فإذا كانت α كما فى (1) فإن $\gamma = (1\ 2\ 4\ \dots)\dots$ ؛ أما إذا كانت α كما فى (2) فإن $\gamma = (1\ 2)(4\ 5)\dots$.

علاوة على هذا فإنه إذا كان رقم $i > 5$ ترك ثابتاً بـ α فإنه سيترك ثابتاً أيضاً بـ γ وبالتالي يترك ثابتاً كذلك بـ $\alpha^{-1}\gamma$. وأكثر من هذا فإن $\alpha^{-1}\gamma(1) = 1$ إذا كانت α كما هى فى (1) ، كذلك $\alpha^{-1}\gamma(1) = 1$ ، $\alpha^{-1}\gamma(2) = 2$ إذا كانت α مثلما هى فى (2) . وهكذا فإن $\alpha^{-1}\gamma$ تترك عدداً ثابتاً من العناصر أكبر من الذى تتركه α ، وهذا يناقض اختيار α . ومن ثم فإن α دورة ذات الطول 3 . ويكمل البرهان باستخدام نفس النقاش

فى مثال ١ مع مراعاة مثال ١٨ فى الباب الثانى فىكون $H = A_n$ ، ومن ثم فإن A_n تكون زمرة بسيطة .

حل آخر : للبرهنة على أن A_5 بسيطة سنبرهن أولاً على التمهيدية الآتية :
لتكن N زمرة جزئية طبيعية من زمرة منتهية G . إذا كان

$$x \in H \text{ فإن } \gcd(\text{Ord}(x), \text{Ord}(G/H)) = 1$$

البرهان: $\gcd(\text{Ord}(x), \text{Ord}(G/H)) = 1$ يقتضى أن $\gcd(\text{Ord}(xH), \text{Ord}(G/H)) = 1$.
ولكن $\text{Ord}(xH)$ يقسم $\text{Ord}(G/H)$ (١-١١-٩) (٢) . ومن ثم فإن $\text{Ord}(xH) = 1$ أى أن $\text{Ord}(xH) = H$ وبالتالي فإن $x \in H$.

والآن : لتكن A_5 تحتوى على زمرة جزئية طبيعية غير تافهة H . عندئذ فإن 30 أو 24 أو 20 أو 15 أو 12 أو 10 أو 6 أو 5 أو 3 . ويمكن التأكد من أن A_5 تحتوى على 24 عنصراً من الرتبة 5 ، 20 عنصراً من الرتبة 3 ، ولا تحتوى على أية عناصر من الرتبة 15 . إذا كانت رتبة (H) هى 3 أو 6 أو 12 أو 15 فإن $\gcd(\text{Ord}(A_5/H), 3) = 1$ ومن التمهيدية السابقة ستحتوى H على كل العناصر العشرين ذوى الرتبة 3 . أما إذا كانت رتبة (H) هى 5 أو 10 أو 20 فإن $\gcd(\text{Ord}(A_5/H), 5) = 1$ وبهذا ستحتوى H على جميع العناصر الأربعة وعشرين من الرتبة 5 . أما إذا كانت رتبة (H) هى 30 فإن $\gcd(\text{Ord}(A_5/H), 3) = 1$ ،

$\gcd(\text{Ord}(A_5/H), 5) = 1$ ، وبهذا تحتوى H على كل العناصر من الرتبة 3 ، الرتبة 5 . وأخيراً إذا كانت رتبة (H) هى 2 أو 4 فإن رتبة (A_5/H) هى 30 أو 15 . توجد زمرة وحيدة من الرتبة 15 هى $\mathbb{Z}_{15}$ فيها $\bar{1}$ من الرتبة 15 ، كذلك أى زمرة من الرتبة 30 تحتوى على عنصر من الرتبة 15 . لكن A_5 لا تحتوى على عنصر من الرتبة 15 ، وبالتالي فإن A_5/H لا تحتوى على مثل هذا العنصر .

ومن ثم البرهان .

مثال ٣: برهن على أن G أى زمرة بسيطة وغير إبدالية تكون غير قابلة للحل .

البرهان : فى هذه الحالة يكون لدينا المتسلسلة الطبيعية التافهة الآتية فقط :

$$\{e\} \subset G$$

لكن $G/\{e\}$ ليست إبدالية وبهذا تكون G غير قابلة للحل .

طريقة أخرى : نعلم أن G' زمرة جزئية طبيعية في G . ومن حيث إن G بسيطة فهناك بالضبط إمكانيتان :

$$1) G' = \{e\} \Rightarrow \forall a, b \in G : a^{-1}b^{-1}ab = e \Rightarrow \forall a, b \in G : ab = ba$$

$\Rightarrow G$ إبدالية : وهذا تناقض

$$2) G' = G \Rightarrow G = G^{(n)} \neq \{e\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

الاستقراء الرياضى

أى أن G ليست قابلة للحل (٦-٢-٣)

مثال ٤ : باستخدام مثالى (٢) ، (٣) السابقين برهن على أن S_n ليست قابلة للحل إذا كان $n \geq 5$ (قارن مع مثال ١)

البرهان : من مثال ٢ نعلم أن A_n بسيطة إذا كان $n \geq 5$ ، A_n عندما $n \geq 5$ تكون غير إبدالية فمن مثال ٣ تكون A_n غير قابلة للحل، ومن (٦-٢-٤) تكون S_n غير قابلة للحل .
مثال ٥ : برهن على أن $\{e\} \subset A_n \subset S_n (= \gamma_n)$ حيث $n \geq 5$ متسلسلة تركيب لـ S_n .
(e هو العنصر المحايد فى S_n)

البرهان : $A_n/\{e\}$ متشاكل مع A_n ، A_n بسيطة ، حيث $n \geq 5$ (مثال ٢ أعلاه) . كذلك فإن S_n/A_n متشاكل مع $\mathbb{Z}_2$ ، أى هى بسيطة .

تمارين

- (١) باستخدام (١-٢-١٤) برهن على الآتى :
الزمرتان A_n ، γ_n حيث $n \geq 5$ ليستا قابلتين للحل .
- (٢) باستخدام تمارين الباب الثانى برهن على أن A_2 ، A_3 ، γ_2 ، γ_3 قابلة للحل
- (٣) مستخدماً نظرية لاجرانج برهن على أن γ_3 قابلة للحل
- (٤) برهن حسابياً على أن A_4 ، γ_4 قابلتان للحل
- (٥) برهن على أنه إذا كانت الزمرة المنتهية G تحتوى على زمرة جزئية دليلها فى G يساوى 2 ، فإن G ليست بسيطة
- (٦) برهن أو انف
(أ) كل زمرة منتهية لها متسلسلة تركيب .
(ب) S_7 قابلة للحل
(جـ) كل زمرة منتهية ، رتبها عدد أولى تكون قابلة للحل
- (٧) اوجد متسلسلة تركيب لـ $S_3 \times S_3$. هل $S_3 \times S_3$ قابلة للحل ؟
- (٨) اوجد جميع متسلسلات التركيب لـ $\mathbb{Z}_{60}$ ، وبرهن على أنها جميعاً متشاكله .
- (٩) اوجد جميع متسلسلات التركيب لـ $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5$
- (١٠) اوجد جميع متسلسلات التركيب لـ $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2$

2 نظرية الحلقات Ring Theory



المفاهيم الأساسية

1-1 الحلقات

1-1-1 تعريف : يسمى الثلاثي $(R, +, \cdot)$ المكون من مجموعة غير خالية R .

عمليتين $+$ ، $\cdot$ ، حلقة (ring) إذا كان (و فقط إذا كان) :

(أ) $(R, +)$ زمرة إبدالية (commutative group)

(ب) العملية " . " تشاركية (أو إدماجية أو تجميعية) (associative) أى أنه لكل $a, b, c \in R$:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(ج) قانونا التوزيع متحققين أى أنه لكل $a, b, c \in R$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1-1-2 ملحوظة : سنكتب عادة R بدلاً من $(R, +, \cdot)$. سنكتب غالباً ab بدلاً من $a \cdot b$

. تسمى الزمرة $(R, +)$ الزمرة الجمعية (additive group) للحلقة R . وسنشير إلى

عنصرها المحايد بالرمز "0" ويسمى صفر الحلقة (The zero element of the ring)

أو العنصر الصفري للحلقة (لاحظ أنه وحيد كما سبق في نظرية الزمر). وفيما يلي

سنعنى بـ R دائماً حلقة إذا لم ينص على غير ذلك .

1-1-3 تعريف : (أ) يقال للحلقة R إنها إبدالية (commutative) إذا كان لكل $a, b \in R$:

$$ab = ba$$

(ب) يقال لعنصر $1 \in R$ إنه عنصر الوحدة (unity) إذا كان لكل $a \in R$:

$$1a = a = a1$$

(لاحظ أنه وحيد لأنه إذا كان هناك $1, 1'$ وكلاهما عنصر وحده فإن : $1 = 1 \cdot 1' = 1'$)

(ج) سنعرف قوى عنصر $a \in R$ استقرائياً كالآتى :

$$a^1 := a, \quad a^n := aa^{n-1}$$

لجمع $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{N}$

وإذا كان $1 \in R$ فإننا نعرف $a^0 := 1$.

١-١-٤ قواعد الحساب : لكل $a, b \in R$:

$$a0 = (0+0)a = 0a + 0a \quad (أ)$$

$$\Rightarrow 0 = -0a + 0a = -0a + (0a + 0a) = (-0a + 0a) + 0a = 0 + 0a = 0a$$

$$a0 = 0 \quad \text{وبالمثل}$$

$$0 = 0b = (-a + a)b = (-a)b + ab \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -(ab) &= 0 + (-(ab)) = (-a)b + ab + (-(ab)) = (-a)b + (ab + (-(ab))) \\ &= (-a)b + 0 = (-a)b \end{aligned}$$

$$-(ab) = a(-b) \quad \text{وبالمثل}$$

$$(-a)(-b) = ab \quad \text{وينتج مباشرة أن :}$$

(جـ) بالاستقراء الرياضى يمكن البرهنة بسهولة على أنه لجميع $a \in R$ ، ولجميع $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} , \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

١-١-٥ ملحوظة : ليكن $1 \in R$ عنصر الوحدة ، ولتكن $R \neq \{0\}$. عندئذ فإن $1 \neq 0$ وإلا :

$$1 = 0 \Rightarrow a = 1a = 0a = 0 \Rightarrow R = \{0\} \quad \text{تناقض}$$

١-١-٦ تعريف : (أ) يقال لعنصر $a \in R$ إنه قاسم صفري أيمن (right zero divisor) :

$$(ax = 0) \quad xa = 0 \quad \text{بحيث } x \in R \setminus \{0\} \quad \text{إذا وجد}$$

(ب) يقال للحلقة R إنها خالية من القواسم الصفرية (has no zero divisors) إذا كانت

لاحتوى على قواسم صفرية يمنى أو يسرى .

١-١-٧ تعريف : لتكن R حلقة بها $1 \neq 0$. يقال إن R نطاق متكامل (integral domain) :

إذا كانت R إبدالية وخالية من القواسم الصفرية . (رأينا فى (١-١-٥) أن

$$(R = \{0\}) \Leftrightarrow 0 = 1 \in R$$

١-١-٨ تعريف : لتكن R حلقة وليكن $1 \neq 0$. يقال لعنصر $a \in R$ إنه وحدة

(unit) إذا وجد عنصران $a, c \in R$ بحيث إن :

$$ab = 1 = ca$$

سنرمز لمجموعة الوحدات في R بالرمز R^* .

لاحظ الفرق بين التعريفين : "عنصر الوحدة" ، "وحدة" .

٩-١-١ ملحوظة : لتكن R حلقة ، $R \ni 1 \neq 0$.

(أ) R^* لا تحتوي على قواسم صفرية يمنى أو يسرى .

(ب) لتكن $a, b, c \in R$ ، $a \in R^*$ ، $ab = 1 = ca$. ينتج أن $b = c$

البرهان : (أ) ليكن $a \in R^*$ قاسماً صفرياً أيسر . عندئذ فإنه يوجد $b, c \in R$ ،

$b \neq 0$ بحيث إن

$ab = 0$ ، $ca = 1$. عندئذ فإن :

$$0 = c(ab) = (ca)b = 1b = b \quad \text{تناقض}$$

وبالمثل يثبت أنه لا يوجد في R^* قاسم صفرى أيمن .

$$b = 1b = (ca)b = c(ab) = c1 = c \quad (ب)$$

١٠-١-١ ملحوظة : لتكن R حلقة ، $R \ni 1 \neq 0$.

$$ab \in R^* \iff a, b \in R^* \quad (أ)$$

(ب) المجموعة R^* مع العملية المستحدثة (The induced operation) $R^* \times R^* \rightarrow R^*$ ،

$(a, b) \mapsto ab$ تكون زمرة .

البرهان : (أ) $a, b \in R^* \Rightarrow \exists c, d \in R : ca = ac = 1, db = bd = 1$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (ab)(dc) &= a(bd)c = a1c = ac = 1, \\ (dc)(ab) &= d(ca)b = d1b = db = 1 \end{aligned} \right\} ab \in R^*$$

(ب) واضح أن العملية المستحدثة تشاركية (إدماجية ، تجميعية) لأن العملية الأصلية

كذلك . كذلك فإنه من الواضح أن $1 \in R^*$. يتبقى أن نثبت أنه لكل $a \in R^*$ يوجد

$b \in R^*$ بحيث إن $ba = 1 (= ab)$ ولكن هذا أيضاً واضح من تعريف R^*

(بدهى أنه إذا كان $a \in R^*$ فإنه يوجد $b \in R^*$ بحيث إن $ba = ab = 1$.

١-١-١١ تعريف : تسمى الحلقة $(R, +, \cdot)$ شبه حقل (skew field) إذا حققت :

(أ) R خالية من القواسم الصفرية ، أى أن $ab \in R \setminus \{0\} \Leftrightarrow a, b \in R \setminus \{0\}$ أى أن الضرب المستحدث من الضرب "." فى R سيكون عملية فى R^*

(ب) المجموعة $R \setminus \{0\}$ مع الضرب المستحدث (أى الضرب ".") محددًا على $R \setminus \{0\}$ تكون زمرة . (لاحظ أن هذا يتضمن أن $R \ni 1 \neq 0$) إذا تحقق فى شبه الحقل R أنه إبدالى أى أنه لكل $a, b \in R$ يكون $ab = ba$ فإن شبه الحقل يكون حقلًا (field) .

١-١-١٢ ملحوظة : R حلقة ، $R \ni 1 \neq 0$. R شبه حقل إذا كان فقط إذا كان $R^* = R \setminus \{0\}$

١-١-١٣ نظرية : كل نطاق متكامل منته (finite) يكون حقلًا .

البرهان : ليكن R نطاقًا متكاملًا منتهيًا . المطلوب البرهنة على أن $R \setminus \{0\} \subset R^*$ (بدهى أن $R^* \subset R \setminus \{0\}$) . ليكن $a \in R \setminus \{0\}$. الراسم

$$\ell_a : R \rightarrow R,$$

$$x \mapsto ax$$

راسم أحادى (واحد لواحد) لأن :

$$\forall x, y \in R : \ell_a(x) = \ell_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$a \neq 0,$$

R خالية من القواسم الصفرية لأنها نطاق متكامل

ولكن R منته ، إذن ℓ_a راسم غامر (شامل ، فوقى) وهذا يقتضى أنه يوجد $z \in R$ بحيث إن $az = \ell_a(z) = 1$ أى أن $a \in R^*$ وبالتالي R يكون حقلًا .

(لاحظ أن $1 \in R$ لأن R نطاق متكامل ، $a \in R^*$ معناه أن a له معكوس ضربى ، أى معكوس بالنسبة لعملية الضرب ".")

١-١-١٤ أمثلة للحلقات :

مثال ١ : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين تكون حلقة لها عنصر الوحدة 1، وهى حلقة إبدالية ولها وحدتان 1 ، - 1 . (هى نطاق متكامل).

مثال ٢ : المجموعة $\mathbb{Z}[X]$: مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة في المتغير X مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين تكون حلقة إبدالية ولها عنصر الوحدة 1 . (هى نطاق متكامل)

مثال ٣ : المجموعة $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$: مجموعة المصفوفات المربعة من النوع 2×2 وعناصرها (عناصر أى مصفوفة منها) أعداد صحيحة تكون حلقة لها عنصر الوحدة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهى غير إبدالية .

مثال ٤ : المجموعة $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$: مجموعة الأعداد الزوجية مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين تكون حلقة إبدالية وليس لها عنصر الوحدة .

مثال ٥ : $\mathbb{Q}$: مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية) ، $\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية ، $\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد المركبة مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين تكون حلقات إبدالية ولها عنصر الوحدة 1 . (هى كلها حقول).

مثال ٦ : لتكن X مجموعة غير خالية ، R حلقة . لتكن $Map(X, R)$ هى مجموعة جميع الرواسم من X إلى R مع العمليتين "+", "." . المعرفتين كالاتى :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

هذه المجموعة مع العمليتين المذكورتين تكون حلقة إبدالية إذا كانت R إبدالية . وإذا كانت

R لها عنصر الوحدة "1" فإن الراسم $f: X \rightarrow R$ يكون هو عنصر الوحدة فى $Map(X, R)$.

مثال ٧ : لتكن X فراغاً توبولوجياً : $C(X, \mathbb{R})$: مجموعة جميع الدوال المتصلة من X إلى $\mathbb{R}$. ولتكن العمليتان معرفتين كما هما فى مثال ٦ ، عندئذ فإن $C(X, \mathbb{R})$ مع العمليتين تكون حلقة إبدالية ذات عنصر وحدة .

مثال ٨ : لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{C}$ ، ولتكن $\theta(X)$ مجموعة جميع الدوال الهولومورفية (التحليلية ، القابلة للتفاضل) المعرفة على X . ولتكن العمليتان "+" ، "·" معرفتين مثلما في مثال ٦ . عندئذ فإن $\theta(X)$ مع العمليتين تكون حلقة إبدالية ذات عنصر وحدة .

مثال ٩ : لتكن $(G, +)$ زمرة إبدالية ، وليكن 0 هو عنصرها المحايد . سنعرف العملية "·" على G كالآتي :

$$\forall a, b \in G: a \cdot b = 0$$

عندئذ فإن $(G, +, \cdot)$ تكون حلقة إبدالية .
وإذا كانت $G = \{0\}$ تسمى هذه الحلقة الحلقة الصفرية . أما إذا كانت $G \neq \{0\}$ فواضح أن G ليس لها عنصر الوحدة .

مثال ١٠ : المجموعة $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ مع عمليتي الجمع والضرب مقياس n (modulo n) تكون حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة 1 . ووحداتها هي المجموعة $U(n)$.
١-١-١٥ أمثلة محلولة :

مثال ١ : برهن على أن الراسمين

$$\ell_a : R \rightarrow R , \quad r_a : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto ax \quad x \mapsto xa$$

أندومورفيزمان للزمرة $(R, +)$ ، حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة

البرهان :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in R: \ell_a(x+y) &:= a(x+y) \\ &= ax + ay = \ell_a(x) + \ell_a(y) \end{aligned}$$

قانون التوزيع

وبالمثل :

$$\forall x, y \in R: r_a(x+y) = (x+y)a = xa + ya = r_a(x) + r_a(y)$$

قانون التوزيع

مثال ٢ : لتكن X مجموعة بها على الأقل عنصران . برهن على أن الحلقة $Map(X, \mathbb{R})$ ليست خالية من القواسم الصفريّة

الحل : ليكن $a, b \in X$ ، $a \neq b$. سنعرف $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ بالكيفية الآتية :

$$f(a) = g(b) = 0,$$

$$f(b) = g(a) = 1,$$

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus \{a, b\}$$

عندئذ فإن : $f \neq \bar{0} \neq g$ ($\bar{0}$ هو الراسم الصفري) لكن $fg = \bar{0}$.

مثال ٣ : برهن على أن لجميع $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ تكون الحلقة $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ليست خالية من القواسم الصفريّة .

البرهان :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

مثال ٤ : لتكن $\emptyset \neq X \subset \mathbb{C}$ مجموعة جزئية مفتوحة (open) . برهن على أن الحلقة $\theta(X)$ (انظر مثال ٨ (١٤-١-١)) تكون خالية من القواسم الصفريّة إذا كانت فقط إذا كانت X مترابطة (connected) .

البرهان : لتكن X ليست مترابطة . عندئذ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين U ، V من X بحيث يكون : $U \cap V = \emptyset$ ، $U \cup V = X$. نعرف :

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in U \\ 1, & x \in V \end{cases} , \quad g(x) := \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \in V \end{cases}$$

وهما دالتان تحليليتان (قابلتان للتفاضل) $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ بحيث إن $f \neq \bar{0} \neq g$ (0) الدالة الصفرية) بينما $fg = \bar{0}$. إذن $\theta(X)$ ليست خالية من القواسم الصفرية .
والآن لنفترض أن $f, g \in \theta(X)$ مع $g \neq \bar{0}$ ، $fg = \bar{0}$. ومن ثم فلأن $g \neq \bar{0}$ فإنه يوجد $x \in X$ بحيث $g(x) \neq 0$. ولأن g متصلة فإنه يوجد جوار مفتوح (open neighborhood) U حول x بحيث إن $g(U) \neq 0$ لجميع $u \in U$ ولأن $fg = \bar{0}$ فإنه ينتج أن $f|_U = \bar{0}$ (f محددة على $U = 0$) . ولأن f تحليلية ، X مترابطة ينتج من نظرية الدوال التحليلية أن $f = \bar{0}$.

مثال 5 : برهن على أن مجموعة الإندومورفيزمات لزمرة إبدالية تكون حلقة .

البرهان : لتكن G زمرة إبدالية . سنشير إلى العملية في G بالرمز "+" ، وسنشير إلى مجموعة كل الإندومورفيزمات لـ G بالرمز Σ .
والآن ليكن $f: G \rightarrow G$ إندومورفيزما ، فيكون

$$\forall a, b \in G: f(a+b) = f(a) + f(b)$$

والآن نعرف عمليتين على Σ بحيث تكون Σ حلقة. سنعرف العملية الأولى "الجمع" كالآتي:

$$+: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$(f, g) \mapsto f + g$$

حيث

$$\forall a \in G: (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

سنبرهن الآن على أن $f + g$ إندومورفيزم لـ G (f, g إندومورفيزمان لـ G) كالآتي :

$$\forall a, b \in G: (f + g)(a+b) := f(a+b) + g(a+b) \underset{f, g \in \Sigma}{=} f(a) + f(b) + g(a) + g(b)$$

$$= f(a) + g(a) + f(b) + g(b) =: (f + g)(a) + (f + g)(b)$$

G إبدالية

والآن نعرف العملية الثانية "التركيب" كالآتي :

$$o : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$(f, g) \mapsto fog$$

حيث

$$\forall a \in G : (fog)(a) := f(g(a))$$

ونبرهن الآن على أن العملية "o" معرفة جيداً : أى أننا نبرهن على أن $f \circ g$ إندومورفيزم لـ G (حيث f, g إندومورفيزمان لـ G) كالآتي :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G : (fog)(a+b) &:= f(g(a+b)) = f(g(a) + g(b)) \\ &\underset{f \in \Sigma}{=} f(g(a)) + f(g(b)) = (fog)(a) + (fog)(b) \end{aligned}$$

والآن :

(١)

$$\forall a \in G \quad \forall f, g, h \in \Sigma :$$

$$((f+g)+h)(a) := (f+g)(a) + h(a) := (f(a) + g(a)) + h(a) = f(a) + (g(a) + h(a))$$

زمرة G

$$= f(a) + (g+h)(a) := (f+(g+h))(a) \Rightarrow \forall f, g, h \in \Sigma : (f+g)+h = f+(g+h)$$

(٢) نعرف صفر الحلقة ونشير إليه بالرمز "0" كالآتي :

$$0 : G \rightarrow G$$

$$a \mapsto o$$

حيث "0" هو العنصر المحايد في G . سنبرهن على أن 0 معرف جيداً ، أى نبرهن على أنه إندومورفيزم وأنه لجميع $f \in \Sigma$ يكون $0+f=f$ كالآتي :

$$\forall a, b \in G : 0(a+b) := 0 = 0+0 =: 0(a) + 0(b)$$

أى أن 0 إندومورفيزم والآن :

$$\forall f \in \Sigma \quad \forall a \in G : (0+f)(a) := 0(a) + f(a) = 0 + f(a)$$

$$= f(a) \Rightarrow 0+f=f$$

(٣) لكل $f \in \Sigma$ نعرف معكوس f بالنسبة للعملية "+" ونشير إليه بالرمز $-f$ كالآتي :

$$\begin{aligned} -f : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto -f(a) \end{aligned}$$

سنبرهن على أن $-f$ معرف جيداً أي أنه إندومورفيزم وأن $-f + f = 0$ كالآتي :

$$\forall a, b \in G : (-f)(a+b) := -f(a+b) \underset{f \in \Sigma}{=} -(f(a) + f(b))$$

$$= -f(b) - f(a) = -f(a) - f(b) = (-f)(a) + (-f)(b)$$

G إبدالية

أي أن $-f$ إندومورفيزم ، والآن :

$$\forall a \in G : (-f + f)(a) := (-f)(a) + f(a) = -f(a) + f(a) = 0 = 0(a)$$

$$\Rightarrow -f + f = 0$$

أي أن $-f$ هو معكوس f (بالنسبة للعملية +)

(٤)

$$\forall f, g \in \Sigma \quad \forall a \in G : (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

$$= g(a) + f(a) = (g + f)(a) \Rightarrow \forall f, g \in \Sigma : f + g = g + f$$

G إبدالية

(٥)

$$\forall f, g, h \in \Sigma : (fog)oh = fo(goh)$$

هذا صحيح لجميع الرواسم f, g, h مادام التركيب "o" معرفة .

(٦)

$$\forall f, g, h \in \Sigma \quad \forall a \in G :$$

$$((f + g)oh)(a) := (f + g)(h(a)) := f(h(a)) + g(h(a))$$

$$= (foh)(a) + (goh)(a) = (foh + goh)(a) \Rightarrow \forall f, g, h \in \Sigma : (f + g)oh = foh + goh,$$

$$(fo(g + h))(a) := f((g + h)(a)) := f(g(a) + h(a)) \underset{f \in \Sigma}{=} f(g(a)) + f(h(a))$$

$$=:(f \circ g)(a) + (f \circ h)(a) =:(f \circ g + f \circ h)(a)$$

$$\Rightarrow \forall f, g, h \in \Sigma : f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

(٧) $\hat{1}$ هو عنصر الوحدة في الحلقة Σ المعروف كالاتى :

$$\forall a \in G : \hat{1}(a) := a$$

نبرهن على $\hat{1}$ معرف جيداً ، أى أنه بالفعل إندومورفيزم ، كما أنه

$$\forall f \in \Sigma \quad \hat{1} \circ f = f, \quad f \circ \hat{1} = f$$

كالاتى :

$$\forall a, b \in G : \hat{1}(a + b) := a + b =: \hat{1}(a) + \hat{1}(b)$$

أى أن $\hat{1}$ إندومورفيزم . والآن :

$$\forall f \in \Sigma \quad \forall a \in G : (\hat{1} \circ f)(a) := \hat{1}(f(a)) := f(a) \Rightarrow \hat{1} \circ f = f,$$

$$(f \circ \hat{1})(a) := f(\hat{1}(a)) = f(a) \Rightarrow f \circ \hat{1} = f$$

$$\Rightarrow \forall f \in \Sigma : \hat{1} \circ f = f = f \circ \hat{1}$$

أى أن Σ مع العمليتين أعلاه هى حلقة

لاحظ أن Σ ليس بالضرورة أن تكون إبدالية ، كما أنها قد تحتوى على قواسم صفيرية.

مثال ٦ : لتكن R حلقة ، $a, b, c \in R$. يقال أن قانونى الحذف (cancellation

laws) متحققان فى R إذا كان

$$a \neq 0, ab = ac \Rightarrow b = c \quad \text{قانون الحذف من جهة اليسار :}$$

$$a \neq 0, ba = ca \Rightarrow b = c \quad \text{قانون الحذف من جهة اليمين :}$$

برهن على أن الحلقة R خالية من القواسم الصفيرية إذا كان فقط إذا كان قانونا الحذف

متحققين فى R

البرهان : لتكن R خالية من القواسم الصفيرية ولتكن $a, b, c \in R$ وليكن

$$ab = ac, \quad a \neq 0$$

هذا يقتضى أن $a(b-c)=0$, $a \neq 0$. ولأن R خالية من القواسم الصفرية ،
 $a \neq 0$ فإن $b-c=0$ وهذا يؤدى إلى $b=c$. وبالمثل يثبت أن $ba=ca$, $a \neq 0$
 يقتضى أن $b=c$. أى أن قانونى الحذف متحققان .

والآن لنفترض أن قانونى الحذف متحققان فى R والمطلوب إثبات أن R خالية من
 القواسم الصفرية ليكن $ab=0$, $a \neq 0 \neq b$. ينتج أن $a \cdot 0 = a \cdot b$. ولأن قانون
 الحذف من جهة اليسار متحقق ينتج أن $b=0$ وهذا تناقض . أى أن R لا يمكن أن
 تحتوى على قواسم صفرية .

مثال ٧ : ليكن R نظاماً يحقق كل مسلمات (postulates) (أو فروض axioms) الحلقة
 فيما عدا

$$\forall a, b \in R : a+b = b+a$$

إذا وجد عنصر $c \in R$ بحيث يكون :

$$[\forall a, b \in R : ac = bc \Rightarrow a = b]$$

برهن على أن R حلقة

البرهان :

$$\begin{aligned} (a+b)(c+c) &= a(c+c) + b(c+c) \\ &= ac + (ac+bc) + bc \end{aligned} \quad (1)$$

ولدينا أيضاً

$$\begin{aligned} (a+b)(c+c) &= (a+b)c + (a+b)c \\ &= ac + (bc+ac) + bc \end{aligned} \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$\begin{aligned} ac + bc &= bc + ac \\ \Rightarrow (a+b)c &= (b+a)c \end{aligned}$$

وباستخدام خاصية العنصر c ينتج أن

$$a+b = b+a$$

وبالتالى فإن R تكون حلقة .

مثال ٨ : لتكن R حلقة ذات عنصر الوحدة ويحقق لها

$$\forall x, y \in R : (xy)^2 = x^2 y^2$$

برهن على أن R إبدالية .

البرهان :

$$\forall x, y \in R : [x(y+1)]^2 = x^2 (y+1)^2$$

$$\Rightarrow (xy + x)^2 = x^2 (y^2 + 2y + 1)$$

$$\Rightarrow (xy)^2 + xyx + x^2 y + x^2 = x^2 y^2 + 2x^2 y + x^2$$

$$\Rightarrow xyx = x^2 y \quad (1)$$

وبالتعويض بـ $x+1$ بدلاً من x نحصل على :

$$(x+1)y(x+1) = (x+1)^2 y$$

$$\Rightarrow (xy + y)(x+1) = (x^2 + 2x + 1)y$$

$$\Rightarrow xyx + xy + yx + y = x^2 y + 2xy + y$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} xy = yx$$

أى أن R إبدالية .

مثال ٩ : لتكن R حلقة يتحقق لها

$$\forall x \in R : x^3 = x$$

برهن على أن R إبدالية .

البرهان :

$$\forall x, y \in R :$$

$$(x^2 y - x^2 y x^2)^2 = x^2 y x^2 y - x^2 y x^2 y x^2 - x^2 y x^4 y + x^2 y x^4 y x^2 \quad (1)$$

ولكن

$$\forall x \in R : x^3 = x \Rightarrow \forall x \in R : x^4 = x^2$$

وبالتعويض في (1) نحصل على

$$(x^2y - x^2yx^2)^2 = x^2yx^2y - x^2yx^2yx^2 - x^2yx^2y + x^2yx^2yx^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2y - x^2yx^2 = (x^2y - x^2yx^2)^3 = 0 \Rightarrow x^2y = x^2yx^2 \quad (2)$$

وبالمثل فلدينا :

$$(yx^2 - x^2yx^2)^2 = yx^2yx^2 - yx^4yx^2 - x^2yx^2yx^2 + x^2yx^4yx^2$$

$$\quad (3)$$

أيضاً :

$$\forall x \in R : x^4 = x^2 \Rightarrow (yx^2 - x^2yx^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow yx^2 - x^2yx^2 = (yx^2 - x^2yx^2)^3 = 0 \Rightarrow yx^2 = x^2yx^2 \quad (4)$$

من (2) ، (4) نحصل على :

$$x^2y = yx^2 \quad (5)$$

أيضاً لدينا :

$$(x^2 - x)^3 = x^2 - x \Rightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = (x^2)^3 - 3x^2x^3 + 3x^2 - x$$

$$= x^2 - 3x^2x + 3x^2 - x = x^2 - 3x + 3x^2 - x = x^2 - x$$

$$\Rightarrow -3x + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 = 3x - x^2 \quad (6)$$

وأيضاً لدينا :

$$(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 = 2x^2 - 2x^3 \stackrel{(6)}{=} 3x - x^2 - 2x^3 = 3x - x^2 - 2x = x - x^2 \quad (7)$$

ومن (5) لدينا :

$$(x^2 - x)^2 y = y(x^2 - x)^2 \stackrel{(7)}{\Rightarrow} (x - x^2)y = y(x - x^2) \Rightarrow$$

$$xy - x^2y = yx - yx^2 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} xy = yx$$

أى أن الحلقة إبدالية .

مثال ١٠ : إذا كان كل عنصر في حلقة R متماثل القوة (idempotent) ، أى أن :

لكل $x \in R : x^2 = x$ ، فبرهن على أن R إبدالية . هل العكس صحيح ؟

البرهان : سنبرهن أولاً على أن :

$$\forall x \in R : x + x = 0$$

كالآتي :

$$x \in R \Rightarrow x + x \in R \Rightarrow (x + x)^2 = x + x$$

$$\Rightarrow (x + x)(x + x) = x + x \Rightarrow (x + x)x + (x + x)x = x + x$$

قانون التوزيع

$$\Rightarrow (x^2 + x^2) + (x^2 + x^2) = x + x \xRightarrow{x^2=x} (x + x) + (x + x) = x + x$$

قانون التوزيع

$$\Rightarrow (x + x) + (x + x) = (x + x) + 0 \Rightarrow x + x = 0 \quad \forall x \in R$$

والآن :

$$a, b \in R \Rightarrow a + b \in R \Rightarrow (a + b)^2 = a + b$$

$$\Rightarrow (a + b)(a + b) = a + b \Rightarrow (a + b)a + (a + b)b = a + b$$

قانون التوزيع

$$\Rightarrow a^2 + ba + ab + b^2 = a + b \xRightarrow{a^2=a, b^2=b} a + ba + ab + b = a + b$$

قانون التوزيع

$$\Rightarrow ba + ab = 0 \Rightarrow ba + ab = ba + ba (\forall x \in R : x + x = 0, ba \in R) \Rightarrow ab = ba$$

أي أن R إبدالية .

عكس المقولة ليس صحيحاً بالطبع . مثال مضاد : $\mathbb{R}$ إبدالية ولكن $2^2 \neq 2$ (تسمى

هذه الحلقة حلقة بولية (Boolean Ring) نسبة إلى الرياضى جورج بول (George

(Boole) (١٨١٣-١٨٦٤))

مثال ١١ : برهن على أنه إذا كان $e \neq 0$ عنصراً متماثلاً القوة فى نطاق متكامل R

فإن e يكون عنصر الوحدة فى R .

$$e^2 = e \Rightarrow 0 = ee - e = e(e - 1) \quad (\text{حيث } 1 \text{ هو عنصر الوحدة فى } R)$$

$$\Rightarrow e - 1 = 0 \Rightarrow e = 1$$

$e \neq 0$ و R خال من القواسم الصفرية

مثال ١٢ : يقال لعنصر a في حلقة أنه منعدم القوة (nilpotent) إذا وجد عدد صحيح n أكبر من الصفر بحيث يكون $a^n = 0$. برهن على أن 0 هو العنصر الوحيد منعدم القوة في أى نطاق متكامل D .

البرهان : ليكن $a \in D$ منعدم القوة . عندئذ فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$: $a^n = 0$ أى أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$: $a \cdot a^{n-1} = 0$. ولأن D ليس له قواسم صفرية فإن $a = 0$ أو $a^{n-1} = 0$. إذا كان $a = 0$ نكون قد حصلنا على النتيجة . إذا كان $a^{n-1} = 0$ فبالاستقراء الرياضى يثبت أن $a = 0$.

مثال ١٣ : لتكن R حلقة إبدالية ، وليكن $a, b \in R$ بحيث إن a وحدة ، $b^2 = 0$. برهن على أن $a + b$ وحدة فى R .

البرهان : من حيث إن $a \in R$ وحدة إذن يوجد $a^{-1} \in R$ بحيث إن $a^{-1}a = 1$ ، 1 هو عنصر الوحدة فى R . والآن :

$$\begin{aligned} [a^{-1} - (a^{-1})^2 b][a + b] &= (a^{-1} - a^{-2}b)(a + b) = a^{-1}a + a^{-1}b - a^{-2}ba - a^{-2}b^2 \\ &= 1 + a^{-1}b - a^{-2}ab - a^{-2}b^2 \quad (R \text{ إبدالية}) \\ &= 1 + a^{-1}b - a^{-1}b - 0 = 1 \\ &= [a + b][a^{-1} - (a^{-1})^2 b] \quad (R \text{ إبدالية}) \end{aligned}$$

أى أن $a + b$ وحدة فى R .

مثال ١٤ : حدد إذا ما كانت المجموعات الآتية مع عمليات الجمع والضرب الموضحة تعين حلقات :

- (أ) $n\mathbb{Z}$ مع عمليتي الجمع والضرب المعتادتين
- (ب) $\mathbb{Z}^+$ (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة)
- (ج) $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ (الجمع يتم بجمع المركبات ، وكذلك الضرب)
- (د) $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ (الجمع والضرب كما فى (ج))

(هـ) $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب المعتادتين

(و) $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب المعتادتين

(ز) مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة ri حيث $r \in \mathbb{R}$ مع عمليتي الجمع والضرب المعتادتين

الحل : كل ما سبق يكون حلقاً فيما عدا : المجموعة المعرفة في (ب) لأن $\mathbb{Z}^+$ لا تحتوى على الصفر وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع (كما أنه لن يكون هناك بالتالي معكوس بالنسبة إلى عملية الجمع) ، المجموعة المعرفة في (ز) حيث إن حاصل الضرب $ri.si = -rs$ وهذا عدد حقيقي ليس تخيلياً .

مثال ١٥ : في المثال السابق مباشرة أى الحلقات الواردة تكون إبدالية ؟ لها عنصر الوحدة ؟ حقولاً ؟

الحل :

(أ) إبدالية ، لها عنصر الوحدة إذا كان فقط إذا كان $n = 1$ ، وليست حقلاً لأنه

لا يوجد معكوس بالنسبة لعملية الضرب لأى عنصر فيما عدا 1 ، -1 (إذا كان $n=1$)

(جـ) إبدالية : عنصر الوحدة هو $(1, 1)$ ، ليست حقلاً لأنه لا يوجد معكوس ضربى أى

معكوس بالنسبة لعملية الضرب فيما عدا $(1, 1)$

(د) إبدالية ، ليس لها عنصر الوحدة ، ليست حقلاً

(هـ) إبدالية ، عنصر الوحدة هو $1+0\sqrt{2}$ ، ليست حقلاً لأنه لا يوجد معكوس

ضربى للعنصر $2+2\sqrt{2}$ مثلاً

(و) إبدالية ، عنصر الوحدة هو $1+0\sqrt{2}$ ، حقل

مثال ١٦ : لتكن $\wp(S)$ تجمع (collection) كل المجموعات الجزئية من S (أو

مجموعة القوة لـ S) . سنعرف العمليتين "+" ، "." على $\wp(S)$ كالآتى :-

$$A+B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \text{ or } x \in B \text{ but } x \notin A \cap B\}$$

$$A.B = A \cap B$$

لجمع $A, B \in \mathcal{P}(S)$

اكتب جدولين لـ "+" ، "·". لـ $\mathcal{P}(S)$ حيث $S = \{a, b\}$. وبرهن على أن $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ حلقة بولية.

الحل :

+	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	S
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	S
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	S	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	S	ϕ	$\{a\}$
S	S	$\{b\}$	$\{a\}$	ϕ

·	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	S
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$
$\{b\}$	ϕ	ϕ	$\{b\}$	$\{b\}$
S	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	S

يترك للقارئ البرهنة على أن $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ حلقة ومن مثال ١٠ السابق نرى أنها بولية .

مثال ١٧ : حدد إذا ما كانت التقريرات الآتية صحيحة أو خاطئة :

(أ) كل حقل يكون حلقة

(ب) كل حلقة لها عنصر الوحدة

(جـ) كل حلقة لها عنصر الوحدة يكون بها وحدتان على الأقل

(د) كل حلقة لها عنصر الوحدة يكون بها وحدتان على الأكثر

(هـ) من الممكن أن تكون هناك مجموعة جزئية من حقل تكون حلقة ، لكنها ليست حقلاً جزئياً .

(و) عملية الضرب في الحقل إبدالية

(ز) عناصر الحقل غير الصفري تكون زمرة تحت عملية الضرب في الحقل

(ح) عملية الجمع في أية حلقة تكون إبدالية

(ط) كل عنصر في أية حلقة له معكوس جمعي

الحل : (أ) ، (هـ) ، (و) ، (ز) ، (ح) ، (ط) صحيحة

(ب) ، (جـ) ، (د) خاطئة

أمثلة مضادة : (ب) $2\mathbb{Z}$ حلقة ، ليس لها عنصر الوحدة

(ج) $\mathbb{Z}_2$ بها وحدة وحيدة وهي عنصر الوحدة $\bar{1}$.

(د) $\mathbb{R}$ لها عنصر الوحدة 1 ، كل عناصرها فيما عدا "0" وحدات

سنرى فيما بعد أن $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$ حلقة وستكون حقلاً إذا كانت n عدداً أولياً .

مثال ١٨ : برهن على أن المعكوس الضربى لأى عنصر فى حلقة ذات عنصر الوحدة يكون وحيداً

البرهان : لتكن R حلقة ذات عنصر الوحدة 1 ، وليكن $a \in R$ بحيث إن a^* ، a^{**} معكوسان لـ a . والآن :

$$a^* = 1.a^* = (a^{**}.a).a^* = a^{**}.(a.a^*) = a^{**}.1 = a^{**}$$

مثال ١٩ : اضرب مثلاً لعنصرين a, b فى حلقة بحيث إن $ab = 0$ بينما $ba \neq 0$

الحل : فى حلقة المصفوفات $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ ليكن $a := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $b := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

والآن :

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ba = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال ٢٠ : اضرب مثلاً لحلقة غير إبدالية ، وليس لها عنصر الوحدة

الحل : اعتبر $R := \{0, a, b, c\}$ سنعرف الجمع والضرب بالجدولين الآتيين :

.	0	a	b	c	+	0	a	b	c
0	0	0	0	0	0	0	a	b	c
a	0	a	b	c	a	a	0	c	b
b	0	a	b	c	b	b	c	0	a
c	0	0	0	0	c	c	b	a	0

تسمى هذه الجداول جداول كيلي (Cayley's tables)

لاحظ في هذا المثال أن R لها عنصراً وحدة (ايسران) (أى أنه يوجد r بحيث إن $rx = x$ لجميع $x \in R$) هما a, b . لكن ليس لها عنصر الوحدة . (الأسهم توضح "اتجاه" الضرب)

مثال ٢١ : برهن على أن $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ حقل

البرهان : البرهان مباشر تماماً . نود فقط ملاحظة أنه لكل عنصر

$$a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \text{ معكوسه الضربى سيكون :}$$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

و $a^2 - 2b^2 \neq 0$ وإلا كان $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ وهذا تناقض لأن $\sqrt{2}$ ليس عدداً كسرياً

(ليس عدداً نسبياً)

مثال ٢٢ : أوجد عددين a, b فى حلقة ، بحيث يكون كل منهما قاسماً صفرياً ، لكن $a + b$ ليس كذلك

الحل : فى $\mathbb{Z}_6$: $\bar{2}, \bar{3}$ قاسمان صفريان لأن $\bar{3} \neq 0 \neq \bar{2}$ ، $\bar{2}\bar{3} = \bar{0}$ ، بينما $\bar{5} = \bar{2} + \bar{3}$ ليس قاسماً صفرياً فى $\mathbb{Z}_6$:

$$\bar{5}\bar{1} = \bar{5} , \bar{5}\bar{2} = \bar{4} , \bar{5}\bar{3} = \bar{3} , \bar{5}\bar{4} = \bar{2} , \bar{5}\bar{5} = \bar{1}$$

مثال ٢٣ : أوجد جميع العناصر فى حلقة R بحيث تكون وحدات ومتماثلة القوة

الحل : ليكن u وحدة فى R أى يوجد $v \in R$ بحيث يكون $uv = 1$ والآن u متماثلة القوة أى أن $u^2 = u$. ينتج أن $u(uv) = u^2v = uv = 1$ أى أن $u1 = 1$ أى $u = 1$

مثال ٢٤ : لتكن R حلقة ذات عنصر الوحدة 1 . إذا كان حاصل ضرب أى عنصرين غير صفريين فيها عنصراً غير صفري (أى لا يساوى الصفر) ، فبرهن على أن :

$$ab = 1 \Rightarrow ba = 1$$

البرهان :

$\forall a, b \in R \setminus \{0\} :$

$$ab = 1 \Rightarrow aba = a \Rightarrow a(ba - 1) = aba - a = 0 \Rightarrow ba = 1 \quad a \neq 0$$

مثال ٢٥ : ليكن a, b عنصرين فى نطاق متكامل R . برهن على أن :

$$a = b \iff a^3 = b^3, \quad a^5 = b^5 \quad (أ)$$

(ب) $a^m = b^m, \quad a^n = b^n$ حيث a, b ليس بينهما قواسم مشتركة (سوى 1

عنصر الوحدة فى R) $\iff a = b$

البرهان : (أ) $a^3 = b^3 \iff a^6 = b^6$. والآن :

$$a^6 b^5 = b^6 a^5 \quad \text{بقانون الحذف فى النطاق المتكامل} \Rightarrow a^5 b^6 = a^5 b^5 \Rightarrow a = b \quad \text{إبدالى } R$$

(الحالة $b = 0 \iff a = 0$ تافهة)

(ب) m, n ليس بينهما قواسم مشتركة (سوى $1 \in R$) وموجب ، هذا يقتضى وجود

عددين صحيحين r, s أحدهما موجب وليكن r والآخر s سالب بحيث يكون $rm + sn = 1$

والآن $a^m = b^m, \quad a^n = b^n$ يستلزم أن :

$$a^{rm} b^{-sn} = b^{rm} a^{-sn} \Rightarrow a^{rm} b^{-sn} = a^{-sn} b^{rm} \Rightarrow a^{rm+sn} = b^{rm+sn} \\ \text{إبدالى } R \\ \Rightarrow a = b \quad rm+sn=1$$

مثال ٢٦ : برهن على أن الحلقة الإبدالية المنتهية R التى ليس لها قواسم صفرية يكون

لها عنصر الوحدة

البرهان : لتكن $R := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، حيث $a_i \neq 0$. نكون الحلقة $\{a_1 a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_n\}$

هذه الحلقة تساوى R لأن كل عناصرها موجودة فى R ، وكذلك إذا كان $a_1 a_r = a_1 a_s$ ،

$r \neq s$ فإن $a_1(a_r - a_s) = 0$ ولكن R خالية من القواسم الصفرية ، $a_1 \neq 0$ ، وبالتالي

فإن $a_r = a_s$ وهذا تناقض . ومن ثم فإن $a_i = a_1 a_i$ لبعض i . نبرهن الآن على أن

a_i هو عنصر الوحدة فى R كالآتى: إذا كان $a_k \in R$ فإن: $a_1 a_k = a_1 a_i a_k$ ، ومن ثم فإن $a_1(a_k - a_i a_k) = 0$. مرة أخرى الحلقة ليس لها قواسم صفرية ، $a_1 \neq 0$ ، وبالتالي فإن $a_i a_k = a_k$. أى أن a_i هو عنصر الوحدة فى R .

مثال ٢٧ : تعرف رتبة العنصر الجمعية فى الحلقة R برتبته فى الزمرة الجمعية $(R, +)$. لتكن R حلقة إبدالية ليس لها قواسم صفرية . برهن على أن جميع عناصر R غير الصفرية لها نفس الرتبة الجمعية .

البرهان : لتكن $a, b \in R \setminus \{0\}$. رتبة a هى m ، رتبة b هى n ، وليكن $m < n$.
والآن : $0 = (ma)b = m(ab) = a(mb) \neq 0$ وهذا تناقض .

(لاحظ أن $a \neq 0$ ، $mb \neq 0$ و R خالية من القواسم الصفرية، وبالتالي فإن $a(mb) \neq 0$) .

مثال ٢٨ : ليكن D نطاقاً متكاملًا ، ولتكن φ دالة غير ثابتة من D إلى $\mathbb{N}$ بحيث يكون

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) .$$

البرهان : $\varphi(x) = \varphi(1.x) = \varphi(1)\varphi(x)$ ، وبالتالي فإن $\varphi(1) = 1$ (قانون الحذف فى النطاق المتكامل) .

$$\text{والآن : } 1 = \varphi(1) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(x^{-1})\varphi(x) \quad \text{وبالتالى فإن } \varphi(x) \neq 0$$

x وحدة

ولأن "صور" φ دائماً أعداد صحيحة موجبة فإن $\varphi(x) = 1$

تمارين

(١) برهن على أن مجموعة الدوال الحقيقية المتصلة التي يمر رسمها بالنقطة $(1, 0)$ تكون حلقة إبدالية ، ليس لها عنصر الوحدة مع العمليتين :

$$\forall a \in \mathbb{R} : (f + g)(a) := f(a) + g(a), (f \cdot g)(a) := f(a) \cdot g(a)$$

(٢) لتكن $R_1, \dots, R_n$ حلقات . سنكون :

$$R := R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R_i\}$$

ونعرف الجمع والضرب كالتى :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) := (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

برهن على أن هذا التكوين مع هاتين العمليتين يمثل حلقة (تسمى حاصل الضرب المباشر للحلقات $R_1, R_2, \dots, R_n$ ، سندرسها فيما بعد) .

(٣) فى التمرين السابق مباشرة لتكن $R_1, R_2, \dots, R_n$ تحتوى على عناصر غير صفرية . برهن على أن R لها عنصر وحدة إذا كان فقط إذا كان كل R_i تحتوى على عنصر وحدة .

(٤) اعط مثالا لحلقة غير منتهية ، غير إبدالية ، ليس لها عنصر وحدة

(٥) برهن على أن $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ حلقة مع عمليتي الجمع والضرب المعتادتين للأعداد الحقيقية .

(٦) برهن على أن الحلقة التى تكون دائرية تحت عملية الجمع تكون إبدالية

(٧) عين $U(\mathbb{Z}[X])$ ، $U(\mathbb{R}[X])$ $U(R)$ هى مجموعة كل الوحدات فى R

(٨) فى $\mathbb{Z}_6$ برهن على أن $2 \mid 4$ ؛ فى $\mathbb{Z}_8$ $3 \mid 7$ ؛ وفى $\mathbb{Z}_{15}$ $9 \mid 12$

(٩) اوجد عددا صحيحا n يظهر أن الحلقة $\mathbb{Z}_n$ لا تحقق بالضرورة الخصائص الآتية للحلقة $\mathbb{Z}$:

(أ) $a^2 = a$ يستلزم أن $a = 0$ أو $a = 1$

(ب) $ab = 0$ يستلزم أن $a = 0$ أو $b = 0$

(جـ) $ab = ac$ يستلزم $b = c$

هل n التي حصلت عليها عدد أولى ؟

(١٠) برهن على أن أى وحدة فى حلقة تقسم كل عنصر فى الحلقة

(١١) فى مثال ٢٠ السابق برهن على أنه يوجد عنصرا وحدة أيسران ، (أى أنه يوجد

r بحيث يكون $rx = x$ لجميع x فى الحلقة) بينما لا يوجد عنصر وحدة أيمن

(١٢) المجموعة $\{0, 2, 4\}$ تحت عمليتي الجمع والضرب مقياس 6 تكون حلقة إبدالية

ذات عنصر وحدة . برهن على ذلك

(١٣) فى حلقة ما يتحقق $x^3 = x$ لجميع x . برهن على أن $ab = 0$ يستلزم $ba = 0$

(١٤) برهن على أن أية وحدة فى حلقة ذات عنصر وحدة يكون معكوسها الضربى وحيداً

(١٥) اعتبر $(S, +, \cdot)$ ، حيث S مجموعة ، "+" ، "." عمليتان على S بحيث إن :

(أ) $(S, +)$ زمرة

(ب) $(S^*, \cdot)$ زمرة حيث S^* تتكون من جميع عناصر S ماعدا عنصرها المحايد

بالنسبة إلى "الجمع" أى الصفر

(جـ) $a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)c = ac + bc$

جميع $a, b, c \in S$

برهن على أن $(S, +, \cdot)$ شبه حقل .

(إرشاد : استخدم قوانين التوزيع على $(1 + 1)(a + b)$ لكى تبرهن على أن عملية

"الجمع" إبدالية).

(١٦) لتكن R حلقة ، $a, b, c \in R$ برهن على أن :

$$a(b - c) = ab - ac, (b - c)a = ba - ca$$

وإذا كان $1 \in R$ (عنصر الوحدة) فإن

$$(-1)a = -a, (-1)(-1) = 1$$

(١٧) إذا كان $m, n \in \mathbb{Z}$ ، R حلقة ، $a, b \in R$ فبرهن على أن : $(ma)(nb) = (mn)(ab)$

- (١٨) إذا كان $n \in \mathbb{Z}$ ، R حلقة ، $a \in R$ فبرهن على أن : $n(-a) = -(n a)$
- (١٩) لتكن R حلقة ، $a, b \in R$ ، $m \in \mathbb{Z}$. فبرهن على أن : $m(a b) = (m a) b = a(m b)$
- (٢٠) لتكن R حلقة . برهن على أن R إبدالية إذا كان فقط إذا كان :

$$\forall a, b \in R : a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

- (٢١) لتكن R حلقة ويوجد عدد زوجي موجب n لكل $a \in R$ بحيث يكون $a^n = a$. برهن على أنه لكل $a \in R$ يكون : $-a = a$.

- (٢٢) ما وجه (أو أوجه) الخطأ في البرهان الآتي على أن $(-a)(-b) = a b$:

$$(-a)(-b) = (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = 1ab = ab$$

- (٢٣) اوجد حلول المعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ في $\mathbb{Z}_{12}$

- (٢٤) حل المعادلة $3x = 2$ في $\mathbb{Z}_7$ ، $\mathbb{Z}_{23}$

- (٢٥) حل المعادلة $x^2 + 2x + 2 = 0$ في $\mathbb{Z}_6$

- (٢٦) حل المعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ في $\mathbb{Z}_6$

- (٢٧) حدد إذا ما كانت التقريرات الآتية صحيحة أم خاطئة :

- (أ) $n\mathbb{Z}$ لها قواسم صفرية إذا كانت n ليست عدداً أولياً .
- (ب) كل حقل يكون نطاقاً متكاملًا .

- (ج) أى قاسم صفرى فى حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة لا يكون له معكوس ضربى

- (د) $M_{n \times n}(F)$ حيث F هو $\mathbb{Q}$ أو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ، ليس لها قواسم صفرية لأى n

- (هـ) كل عنصر غير صفرى من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_2)$ يكون وحدة

- (و) الحلقة $\mathbb{Z}_n$ (حلقة الأعداد الصحيحة مقياس n) نطاق متكامل

- (ز) الحلقة $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ (حلقة المصفوفات المربعة من النوع 2×2 ومداخلها

- عناصرها) أعداد صحيحة) نطاق متكامل

- (ح) $\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ حقل مكون من تسعة عناصر

(٢٨) أى المجموعات الآتية تكون حقلاً ؟

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{ب}) \quad \mathbb{Z} \quad (أ)$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{د}) \quad \mathbb{Z}[X] \quad (\text{ج})$$

$$\mathbb{Z}_p \quad (\text{هـ}) \quad (\text{حلقة الأعداد الصحيحة مقياس العدد الأولى } p)$$

(٢٩) برهن على أن أية حلقة إبدالية يتحقق لها قانونا الحذف (انظر مثال ٦ فى (١-١-١٥)

(١٥) تكون خالية من القواسم الصفرية

(٣٠) اضرب مثالا لحلقة إبدالية تكون خالية من القواسم الصفرية ، لكنها ليست نطاقا

متكاملا

(٣١) ليكن a عنصراً فى حلقة R لها عنصر الوحدة 1 ، وليكن $a^n = 0$ ، حيث n عدد

صحيح موجب (يسمى a عنصراً منعدم القوة ، كما ورد فى مثال ١٢ من (١-١-١٥))

برهن على أن $1 - a$ له معكوس ضربى .

$$(\text{إرشاد : اعتبر } (1-a)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}))$$

(٣٢) برهن على أن 0 ، 1 هما العنصران الوحيدان متماثلا القوة فى أى نطاق متكامل

(انظر مثال ١٠ فى (١-١-١٥))

(٣٣) برهن على أن حاصل ضرب عنصرين متماثلى القوة فى حلقة ما هو عنصر

متماثل القوة فى الحلقة

(٣٤) ليكن d عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً . برهن على أن :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{حقْل}$$

(٣٥) ليكن $R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ تحت عمليتى الجمع والضرب مقياس 10 . برهن

على أن R حقْل

(٣٦) كيف تعرف النطاق المتكامل الجزئى ؟

ليكن D نطاقاً متكاملاً له عنصر الوحدة 1 . برهن على أن $P := \{n1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ يكون نطاقاً

متكاملاً جزئياً من D . برهن كذلك على أن P يكون محتوى فى كل نطاق متكامل جزئى

من D .

(إرشاد : النطاق المتكامل الجزئي S من النطاق المتكامل D هو مجموعة جزئية من D بحيث إن عمليتي الجمع والضرب على D محددين على S تجعلان S نطاقاً متكاملًا .
 للبرهنة على أن P نطاق جزئي من D نبرهن على أنه لكل $a, b \in P : a - b \in P$ ،
 $a, b \in P : 1 \in P$. كل نطاق جزئي من D يحتوي على 1 ، ويحتوي على $n1$ حيث
 $n \in \mathbb{Z}$ ، وبهذا يحتوي على P) .

(٣٧) برهن على أنه لا يوجد نطاق متكامل يتكون من ستة عناصر . ماذا عما إذا كان
 يتكون من أربعة عناصر ، خمسة عشر عنصراً ؟

(إرشاد : تذكر أن كل نطاق متكامل منتهٍ يكون حقلاً !)

(٣٨) عين كل عناصر النطاق المتكامل التي تكون هي معكوسات نفسها

(٣٩) عين حقلاً منتهياً يكون فيه عنصراً غير صفريين a, b بحيث إن $a^2 + b^2 = 0$

(٤٠) أنشئ جدول الضرب لـ $\mathbb{Z}_2[i]$. $\mathbb{Z}_2[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$

هل هذه الحلقة حقلاً ؟ هل هي نطاق متكامل ؟

(٤١) لتكن R حلقة إبدالية ، $a, b \in R$ بحيث إن ab قاسم صفري في R . برهن

على أن a قاسم صفري في R أو b قاسم صفري في R .

(٤٢) حل المعادلة $x^2 - x + 2 = 0$ في $\mathbb{Z}_3[i]$

(٤٣) اعتبر المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$

(أ) كم عدد حلول المعادلة في $\mathbb{Z}_7$ ؟

(ب) اوجد جميع الحلول في $\mathbb{Z}_8$

(جـ) اوجد جميع الحلول في $\mathbb{Z}_{12}$

(د) اوجد جميع الحلول في $\mathbb{Z}_{14}$

(٤٤) ليكن F حقلاً منتهياً ، ذا n من العناصر . برهن على أن $x^{n-1} = 1$ لجميع

العناصر غير الصفرية في F .

(٤٥) وضح لماذا لا يمكن لحلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة لكنها ليست نطاقاً متكاملًا أن

تكون محتواة في حقلاً

(٤٦) اضرب مثلاً لحلقة ليس لها عنصر الوحدة تكون محتواة في حقلاً

٢-١ هومومورفيزم الحلق ، الحلقة الجزئية والمثالي

Ring homomorphisms, Subrings and Ideals

١-٢-١ تعريف : لنكن $(R, +, \cdot)$ ، $(R', +', \cdot')$ حلقتين . يسمى الراسم $\varphi: R \rightarrow R'$

هومومورفيزم حلق (ring homomorphism) إذا تحقق : لكل $a, b \in R$:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b) \quad (أ)$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot' \varphi(b) \quad (ب)$$

بعض المراجع يضع شرطاً ثالثاً وهو :

(جـ) إذا كان $1 \in R$ ، $1' \in R'$ عنصرى الوحدة فإن $\varphi(1) = 1'$

المفاهيم : مونومورفيزم (monomorphism) ، إيمورفيزم (epimorphism) ، أيزومورفيزم

(isomorphism) ، إندومورفيزم (endomorphism) ، أوتومورفيزم (automorphism) .

تعرف مناظرة لنفسها فى نظرية الزمر . وللسهولة فى الكتابة لن نضع غالباً " . " ، " . " .

وسنكتب "+" وليس " + " .

ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ هومومورفيزم حلقياً . نعرف المجموعة $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0'\}$

(0' صفر الحلقة R') بأنها نواة (φ) (Kernel (φ))

٢-٢-١ ملحوظات : ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ هومومورفيزم حلق

(أ) φ راسم أحادى $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (0 هو صفر الحلقة R)

(ب) φ أيزومورفيزم حلقى $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$ أيزومورفيزم حلقى

(جـ) $\psi: R' \rightarrow R''$ هومومورفيزم حلق $\Leftrightarrow \psi \circ \varphi: R \rightarrow R''$ هومومورفيزم حلق

البرهان : مشابه لما جاء فى نظرية الزمر

٣-٢-١ تعريف : لنكن $\phi \neq S \subset R$ حيث R حلقة . تسمى S حلقة جزئية (subring)

من R إذا تحقق :

$$\forall a, b: a, b \in S \Rightarrow [a + b \in S, ab \in S] \quad (أ)$$

(ب) مع العملياتتين المستحدثتين $S \times S \rightarrow S, (a,b) \mapsto ab$ ، $S \times S \rightarrow S, (a,b) \mapsto a+b$ تكون حلقة .

١-٢-٤ ملحوظة : لتكن R حلقة ، $\phi \neq S \subset R$. التقريرات الآتية متكافئة .

(أ) S حلقة جزئية من R

(ب) S زمرة جزئية من الزمرة الجمعية لـ R ، $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$ ،

(جـ) $a, b \in S \Rightarrow a-b \in S$ ، $ab \in S$ ،

البرهان : مباشر وراجع (١-٤-١) ، (٢-٤-١) فى نظرية الزمر .

١-٢-٥ تعريف : ليكن حلقة $\phi \neq A \subset R$. مثالى (ideal) إذا تحقق :

(أ) A زمرة جزئية من الزمرة الجمعية لـ R

(ب) $\forall a \in A \quad \forall b \in R \Rightarrow ba \in A, ab \in A$

١-٢-٦ ملحوظة : R حلقة ، $\phi \neq A \subset R$. التقريران الآتيان متكافئان

(أ) A مثالى فى R

(ب) $\forall a, b \in A: a-b \in A$ ،

$\forall r \in R \quad \forall a \in A: ra \in A, ar \in A$

١-٢-٧ أمثلة :

(١) كل حلقة R تحتوى على حقتين جزئيتين تافهتين هما $\{0\}$ ، R (حيث 0 هو العنصر

الصفرى فى R أى صفر الحلقة R) . هما كذلك المثاليان التافهان لأى حلقة R . أى مثالى

غير تافه يقال له مثالى فعلى (proper ideal) ، وأى حلقة جزئية غير تافهة يقال إنها

حلقة جزئية فعلية (proper subring)

(٢) لتكن R حلقة إبدالية . عندئذ فإنه لأى $a \in R$ تكون المجموعة

$$Ra := \{ra \mid r \in R\}$$

مثالياً فى R

البرهان : $Ra \neq \phi$: لأن : (١) $0 = 0a \in Ra$

كذلك : (٢) لجميع $ra, sa \in Ra$

$$ra - sa = (r - s)a \in Ra$$

و (٣) لجميع $s \in R$ ، $ra \in Ra$

$$s(ra) = (sr)a \in Ra,$$

$$(ra)s = s(ra) = (sr)a \in Ra$$

R إبدالية

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج الادعاء مباشرة .

$$\exists m \in \mathbb{N} : A = m\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathbb{Z} \text{ مثالي في } A \neq \emptyset \quad (٣)$$

البرهان : من مثال ٣ في (١-٤-٤) من نظرية الزمر ، ومن (١-٢-٦) أعلاه يكفي أن نبرهن على أن :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in A : na \in A, an \in A \quad (*)$$

والآن فإنه لكل $a \in A$ يوجد $z \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = mz$.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall mz \in A : n(mz) = m(nz) \in m\mathbb{Z} = A,$$

$$(mz)n = m(zn) \in m\mathbb{Z} = A.$$

وبدهى أنه إذا لم يتحقق (*) فإن A لن يكون مثالياً .

$$(٤) \quad \{0, \bar{2}, \bar{4}\} \text{ حلقة جزئية من } (\mathbb{Z}_6 := \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\})$$

$$(٥) \quad \mathbb{Z}[i] := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ حلقة جزئية من الحلقة (الحقل) } \mathbb{C} \text{ لكنها ليست مثالياً في } \mathbb{C}.$$

(٦) كل مثالي هو حلقة جزئية ، لكن ليست كل حلقة جزئية مثالياً (مثال مضاد : مثال

(٥) السابق مباشرة)

١-٢-٨ أمثلة متنوعة :

مثال ١ : لتكن R حلقة ، وليكن $a \in R$. برهن على أن $S := \{x \in R \mid ax = 0\}$ حلقة

جزئية من R

البرهان : $0 \in R$ ، $a0 = 0$ يقتضى أن $0 \in S$ ، أى أن $S \neq \emptyset$.

كذلك فليكن $x, y \in S$ هذا يقتضى أن : $ax = 0$ ، $ay = 0$. والآن :

$$a(x - y) = ax - ay = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x - y \in S$$

كذلك فإن :

$$a(xy) = (ax)y = 0y = 0$$

أى أن $xy \in S$. ومن ثم البرهان .

مثال ٢ : لتكن R حلقة . يعرف مركز R (The centre of R) بأنه المجموعة

$$S := \{x \in R \mid ax = xa \forall a \in R\}$$

البرهان : من مثال ٤٩ من أمثلة متنوعة على نظرية الزمر ، ومن (١-٢-٤) أعلاه يكفى أن نبرهن على أن

$$\forall x, y: x, y \in S \Rightarrow xy \in S$$

$$x, y \in S \Rightarrow ax = xa \quad \forall a \in R \quad (1),$$

$$ay = ya \quad \forall a \in R \quad (2)$$

والآن :

$$\forall a \in R: \quad a(xy) = (ax)y \underset{(1)}{=} (xa)y = x(ay) \underset{(2)}{=} x(ya) = (xy)a$$

$$\forall x, y \in S: xy \in S \quad \text{أى أن :}$$

مثال ٣ : لتكن $1 \in R$ حلقة (أى لها عنصر الوحدة) ، $a \in R$ بحيث إن $a^2 = 1$.

برهن على أن $S := \{ara \mid r \in R\}$ حلقة جزئية من R . هل $1 \in S$ ؟

البرهان : $1 = a^2 = aa = a1a \underset{1 \in R}{\in S}$ ، أى أن $S \neq \emptyset$.

$$ara, asa \in S \Rightarrow ara - asa = a(r - s)a \underset{r-s \in R}{\in S},$$

$$araasa = ara^2sa = ar1sa = arsa \underset{rs \in R}{\in S}$$

ومن ثم فإن S حلقة جزئية من R وتحتوى على عنصر الوحدة 1 .

مثال ٤ : لتكن $R := \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. برهن أو انف : R حلقة جزئية

من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$.

الحل :

$$R \neq \emptyset \text{ أى أن } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

والآن ليكن $\begin{pmatrix} c & c-d \\ c-d & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \in R$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ c-d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-c-(b-d) \\ a-c-(b-d) & b-d \end{pmatrix} \in R$$

$$\begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c-d \\ c-d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac-ad-bc+bd & ac-bd \\ ac-bd & ac-ad-bc+2bd \end{pmatrix} \in R$$

أى أن R حلقة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$.

مثال ٥ : برهن على أن $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ليست حلقة جزئية من $\mathbb{Z}$

البرهان : $3 \in 3\mathbb{Z}$ ، $2 \in 2\mathbb{Z}$ ، لكن $3-2=1 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

مثال ٦ : لتكن $R := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ كما فى (٢) من التمارين على (١-١) ،

$$S := \{(a, b, c) \in R \mid a+b=c^2\}$$

برهن أو انف : S حلقة جزئية من R . (تحقق من أن R حلقة !)

الحل : $(0, 1, 1), (2, 2, 2) \in S$ بينما $(2, 1, 1) \notin S$ ، $(2, 2, 2) - (0, 1, 1) = (2, 1, 1)$

وبالتالى فإن S ليس حلقة جزئية من R .

مثال ٧ : أوجد أصغر حلقة جزئية من $\mathbb{Q}$ تحتوى على $\frac{1}{2}$

الحل : نبرهن على أن $S = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ هى الحلقة الجزئية المطلوبة

واضح أن S حلقة جزئية من $\mathbb{Q}$

لأن $0 = \frac{0}{2^n} \in S$ أى أن S غير خالية

$$\Leftrightarrow \frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}} \in S$$

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} - \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_3}{2^{n_3}}, m_3 \in \mathbb{Z}, n_3 \in \mathbb{N} .$$

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 m_2}{2^{n_1+n_2}} \in S$$

والآن أية حلقة جزئية من $\mathbb{Q}$ تحتوى على $\frac{1}{2}$ لابد أن تحتوى على $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ،

وكذلك تحتوى على $\pm \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{r}{2}$ وبالتالى فهي تحتوى على كل العناصر $\frac{m}{2^n}$

حيث $m \in \mathbb{Z}$ ، $n \in \mathbb{N}$. ومن ثم البرهان .

مثال ٨ : لتكن R حلقة . برهن على أنه لجميع $a, b \in R$ يكون $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

إذا كانت فقط إذا كانت R حلقة إبدالية .

البرهان : $\forall a, b \in R : (a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2$

إذا كانت R إبدالية فإن $ab = ba$ وبالتالى فإن :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

وبالعكس إذا كان $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ فإن $ab - ba = 0$ ويكون $ab = ba$ أى أن

R إبدالية . (انظر (٢٠) فى تمارين (١-١) (!) .

مثال ٩ : ليكن $\varphi : R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . برهن على أن :

$$\forall r \in R \quad \forall n \in \mathbb{N} : \varphi(nr) = n\varphi(r)$$

$$\varphi(r^n) = \varphi(r)^n$$

البرهان : بالاستقراء الرياضى : عند $n = 1$ واضح أن التقريرين صحيحان :

عند $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\varphi((m+1)r) &= \varphi(mr + r) = \varphi(mr) + \varphi(r) \\ &= m\varphi(r) + \varphi(r) = (m+1)\varphi(r),\end{aligned}$$

فرض الاستقراء

$$\varphi(r^{m+1}) = \varphi(rr^m) = \varphi(r)\varphi(r^m) = \varphi(r)\varphi(r)^m = \varphi(r)^{m+1}$$

فرض الاستقراء

مثال ١٠ : ليكن $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . وليكن 1 عنصر الوحدة في R ، $S \neq \{0\}$ ، وكان φ راسما غامرا (شاملا ، فوقيا) ، عندئذ فإن $\varphi(1)$ يكون عنصر الوحدة في S .

البرهان : φ غامر يقتضى أنه لكل $y \in S$ يوجد $x \in R$ بحيث إن $\varphi(x) = y$. والآن :

$$\varphi(1)y = \varphi(1)\varphi(x) = \varphi(1x) = \varphi(x) = y,$$

$$y\varphi(1) = \varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x1) = \varphi(x) = y$$

وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ١١ : ليكن $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . وليكن $A \subset R$ مثاليا ، $B \subset R$ حلقة جزئية ، $A' \subset S$ مثاليا ، $B' \subset S$ حلقة جزئية .

برهن على أن :

$$(أ) \quad \varphi \text{ غامر (شامل)} \iff \varphi(A) \subset S' \text{ مثالي}$$

$$(ب) \quad \varphi^{-1}(A') \subset R \text{ مثالي}$$

$$(جـ) \quad \varphi(B) \subset S \text{ حلقة جزئية}$$

$$(د) \quad \varphi^{-1}(B') \subset R \text{ حلقة جزئية}$$

البرهان : (أ) من ملحوظة (١-٤-٣) ((في نظرية الزمر ، ومن (١-٢-٥) أعلاه يكفي أن نبرهن على أنه :

$$\forall \varphi(a) \in \varphi(A) \quad \forall s \in S : s\varphi(a) \in \varphi(A), \varphi(a)s \in \varphi(A)$$

ومن حيث إن φ غامر فإنه لكل $s \in S$ يوجد $r \in R$ بحيث يكون $\varphi(r) = s$ ولدنا :

$$s\varphi(a) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(ra) \in \varphi(A), \varphi(a)s = \varphi(a)\varphi(r) = \varphi(ar) \in \varphi(A)$$

$A \subset R$ مثالي $A \subset R$ مثالي

(ب) من ملحوظة (١-٤-٣ (ب)) في نظرية الزمر ومن (١-٢-٥) أعلاه يكفي أن نبرهن على أنه :

$$\forall a \in \varphi^{-1}(A') \quad \forall r \in R : ra \in \varphi^{-1}(A'), ar \in \varphi^{-1}(A')$$

والآن :

$$a \in \varphi^{-1}(A') \Rightarrow \varphi(a) \in A' \Rightarrow \varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) \in A'$$

$A' \subset S$ مثالي

$$\Rightarrow ra \in \varphi^{-1}(A')$$

$$\text{وبالمثل } ar \in \varphi^{-1}(A')$$

(جـ) من ملحوظة (١-٤-٣ (أ)) في نظرية الزمر ومن (١-٢-٤) أعلاه يكفي أن نبرهن على أنه :

$$\forall x', y' \in \varphi(B) : x'y' \in \varphi(B)$$

والآن :

$$x', y' \in \varphi(B) \Rightarrow \exists x, y \in B : x' = \varphi(x), y' = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = x'y'.$$

ومن حيث إن B حلقة جزئية في R فإن $xy \in B$ وبالتالي فإن $\varphi(xy) \in \varphi(B)$ أى أن $x'y' \in \varphi(B)$

(د) من ملحوظة (١-٤-٣ (ب)) في نظرية الزمر ، ومن (١-٢-٤) أعلاه يكفي أن نبرهن على أن :

$$\forall x, y \in \varphi^{-1}(B') : xy \in \varphi^{-1}(B')$$

والآن :

$$x, y \in \varphi^{-1}(B') \Rightarrow \varphi(x), \varphi(y) \in B' \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in B'$$

B' حلقة جزئية في S

$$\Rightarrow xy \in \varphi^{-1}(B'),$$

مثال ١٢ : ليكن $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . برهن على أنه إذا كانت R حلقة إبدالية فإن $\varphi(R)$ تكون حلقة جزئية إبدالية في S .

البرهان : من حيث إن R حلقة جزئية من نفسها فإنه من مثال ١١ (جـ) السابق مباشرة تكون $\varphi(R)$ حلقة جزئية من S . والآن

$$\forall x', y' \in \varphi(R) \exists x, y \in R : x' = \varphi(x), y' = \varphi(y).$$

$$x' y' = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) = y' x'$$

R إبدالية

وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ١٣ : برهن أو انف : (أ) الحلقة $2\mathbb{Z}$ تتشاكل (أيزومورفية) مع الحلقة $3\mathbb{Z}$

(ب) الحلقة $2\mathbb{Z}$ تتشاكل مع الحلقة $4\mathbb{Z}$

الحل : ليكن $\varphi: 2\mathbb{Z} \rightarrow 3\mathbb{Z}$
 $2x \mapsto 3x$
 أيزومورفيزم حلق .

والآن :

$$\varphi(2.2) = 3.2 = 6 \neq 9 = 3.3 = \varphi(2)\varphi(2)$$

التقرير خاطئ . (لاحظ أن 2 مولد لـ $2\mathbb{Z}$ ، 3 مولد لـ $3\mathbb{Z}$)

(ب) بالمثل وأكمل ...

مثال ١٤ : برهن أو انف : الحقلان $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ متشاكلان ($\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$)

الحل : التقرير خاطئ . المعادلة $x^2 = -1$ لها حلان في $\mathbb{C}$ هما i ، $-i$ بينما ليس لها

حل في الحقل $\mathbb{R}$

مناقشة أخرى : إذا كان $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ متشاكلين فإن $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ، $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ يكونان متشاكلين

كذلك . لكن كل عنصر في $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ يولد زمرة دائرية غير منتهية فيما عدا العنصرين

1، 1- فإنهما يولدان زميرتين دائريتين لهما الرتبة 1 ، 2 على الترتيب . أما في $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ فإن العنصر i يولد الزمرة الدائرية $\{i, -1, -i, 1\}$ ذات الرتبة 4 . (العملية في الحالتين هي الضرب المعتاد)

$$\varphi: M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

مثال ١٥ : ليكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$ برهن أو انف : φ هو مورفيزم حلق

الحل :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = 1.1 = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أى أن φ ليس هو مورفيزم حلق .

مثال ١٦ : لتكن $R := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. برهن أو انف :

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto a$$

هو مورفيزم حلق .

الحل :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in R:$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{pmatrix} = a+x = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} = ax = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \varphi\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

أى أن φ هو مورفيزم حلق .

(يترك للقارئ التحقق من R حلقة ، وهي حلقة جزئية من $(M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}))$.

مثال ١٧ : لتكن $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (تحقق من أن $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ حلقة) .

لتكن

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

تحقق كذلك من أن H حلقة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. برهن على أن $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ، H

متشاكلتان

البرهان : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ أى أن H غير خالية . والآن ليكن $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} \in H$:

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & 2(b-d) \\ b-d & a-c \end{bmatrix} \in H$$

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & 2(ad+bc) \\ ad+bc & ac+2bd \end{bmatrix} \in H$$

ينتج من $(-1-2-4)$ أن H حلقة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. والآن نعرف

$$\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow H$$

$$a + b\sqrt{2} \mapsto \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$$

واضح أن φ راسم غامر (شامل ، فوقى) ، وكذلك راسم واحد لواحد .

$$\forall a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]:$$

$$\begin{aligned} \varphi((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) &= \varphi(a + c + (b + d)\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a+c & 2(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} = \varphi(a + b\sqrt{2}) + \varphi(c + d\sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$\varphi((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})) = \varphi(ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2})$$

$$= \begin{bmatrix} ac+2bd & 2(ad+bc) \\ (ad+bc) & ac+2bd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} = \varphi(a+b\sqrt{2})\varphi(c+d\sqrt{2})$$

أى أن φ هومومورفيزم حلق وبالتالي أيزومورفيزم حلق .

مثال ١٨ : ليكن $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . برهن على أن نواة (φ)

$(Ker(\varphi))$ مثالي في R .

البرهان : $Ker(\varphi) := \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}$

$$= \varphi^{-1}(\{0\})$$

لكن $\{0\}$ مثالي في الحلقة S ، ومن مثال ١١ (ب) يكون $Ker(\varphi)$ مثالي في الحلقة R .

مثال ١٩ : هل يمكن أن تكون نواة هومومورفيزم حلق من $\mathbb{R}$ إلى حلقة K هي $\mathbb{Z}$ ؟

الحل : لايمكن أن يحدث هذا، لأنه من مثال ١٨ السابق مباشرة تكون نواة الهومومورفيزم

$$\text{مثالياً في } \mathbb{R}, \mathbb{Z} \text{ ليست مثالياً في } \mathbb{R} \text{ ، فمثلاً } 1 \in \mathbb{Z} \text{ ، } \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ ، لكن } \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ .}$$

مثال ٢٠ : برهن أو انف :

$\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق ، $A \subset R$ مثالي $\Leftrightarrow \varphi(A) \subset S$ مثالي .

الحل : التقرير خاطئ مثال مضاد : $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ راسم التضمين (inclusion mapping) $z \mapsto z$

وهو هومومورفيزم . $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ مثالي ، $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ حلقة جزئية ، لكنها ليست مثالياً في $\mathbb{Q}$ ،

$$\iota(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

لاحظ أن ι ليس راسماً غامراً . انظر مثال ١١ (أ) السابق

مثال ٢١ : اضرب مثلاً لحلقة ليس لها عنصر الوحدة وهي محتواه في حقل .

الحل : الحلقة $2\mathbb{Z}$ داخل $\mathbb{Q}$ أو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

مثال ٢٢ : هل يمكن أن توجد حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة المختلف عن الصفر ، لكنها

ليست نطاقاً متكاملاً وتكون محتواة في حقل ؟

الحل : لا يمكن أن توجد مثل هذه الحلقة ، لأنها ستكون ليست خالية من القواسم الصفرية وإلا كانت نطاقا متكاملًا ، أى أنه يوجد بها a ، بحيث إن $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ ، $ab = 0$. لكن a ، b ينتميان إلى حقل ، وبالتالي فإنه يوجد a^{-1} (معكوس a الضربى) ، ومن ثم فإن :

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1b = b$$

وهذا تناقض

مثال ٢٣ : إذا كانت R حلقة لها عنصر الوحدة 1 ، f هومومورفيزم حلقى من R إلى نطاق متكامل R' ، وإذا كانت نواة (f) لاتساوى R ، فبرهن على أن $f(1)$ سيكون عنصر الوحدة فى R' .

البرهان : نلاحظ أولاً أن $f(1) \neq 0'$ ، وإلا فإنه لجميع $x \in R$ يكون :

$$f(x) = f(1x) = f(1)f(x) = 0'f(x) = 0' \Rightarrow \text{Ker}(f) = R .$$

وهذا تناقض مع الفرض أن نواة (f) لاتساوى R . كذلك فإن :

$$[f(1)]^2 = f(1)f(1) = f(1.1) = f(1) \quad (1)$$

والآن ليكن $r' \in R'$ عندئذ فإن :

$$[r'f(1) - r']f(1) = r'[f(1)]^2 - r'f(1) = 0' \Rightarrow r'f(1) \underset{f(1) \neq 0'}{=} r' ,$$

R' نطاق متكامل

ومن حيث إن R' حلقة إبدالية فإنه ينتج كذلك أن

$$\forall r' \in R' : f(1)r' = r'$$

ينتج أن $f(1)$ هو عنصر الوحدة R' .

مثال ٢٤ : ليكن A ، B مثالين فى حلقة R . إذا كان $A \cap B = \{0\}$ ، فبرهن على أن

$$ab = 0 \text{ عندما يكون } a \in A , b \in B$$

البرهان : $a \in A$ ، $b \in B$ يقتضى أن $ab \in A$ لأن A مثالى ، $b \in B$ يعنى أن

$b \in R$. كذلك $ab \in B$ لأن B مثالى ، $a \in A$ يعنى أن $a \in R$ أى أن

$$ab \in A \cap B = \{0\} . \text{ وينتج المطلوب .}$$

مثال ٢٥ : برهن على أن أى حقل لا يمكن أن يحتوى مثالياً فعلياً (proper ideal)

البرهان : ليكن F حقلاً ، $I \subset F$ مثالياً . سنبرهن على أن $I = \{0\}$ أو $I = F$.

ليكن $I \neq \{0\}$ ، عندئذ فإنه يوجد $a \in I$ ، $a \neq 0$. ولأن F حقل فإنه يوجد $a^{-1} \in F$ ،
والآن $1 = a^{-1}a \in I$. والآن لجميع $b \in F$: $b = 1.b \in I$ مثالى I

أى أن $F \subset I$ ، ومن التعريف $I \subset F$ ، ومن ثم فإن $I = F$.

مثال ٢٦ : برهن على أن أية حلقة غير صفرية لها عنصر الوحدة ، إبدالية ، لا تحتوى على مثاليات فعلية تكون حقلاً .

البرهان : لتكن K حلقة غير صفرية ، إبدالية ، لها عنصر الوحدة ولا تحتوى على مثاليات فعلية . من حيث إن K غير صفرية فإنه يوجد $a \in K$ ، $a \neq 0$. والآن من مثال ٢ فى (٧-٢-١) ينتج أن

$$aK := \{ax \mid x \in K\}$$

مثالى . ومن حيث أن $a \neq 0$ ، K لا تحتوى على مثاليات فعلية فإن $aK = K$. ومن حيث أن $1 \in K$ فإنه يوجد $b \in K$ بحيث أن $ab = 1$. ومن حيث أن K إبدالية فإن $ab = 1 = ba$ ، أى أنه يوجد معكوس ضربى لـ $a \in K$ ، تكون K حقلاً .

مثال ٢٧ : فى التعريف (٥-٢-١) فى الجزء (ب) إذا تحقق فقط

$$\forall a \in A \quad \forall b \in R : ba \in A$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in R : ab \in A$$

ليكن F حقلاً برهن على أن مجموعة المصفوفات التى على الشكل $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ حيث

$a, b \in F$ تكون مثالياً أيمن ، لكنها ليست مثالياً أيسر من حلقة المصفوفات من النوع 2×2 التى عناصرها (مداخلها entries) من F .

البرهان : اعتبر الحلقة S :

$$S := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

واعتبر المجموعة

$$I := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in F \right\}$$

واضح أن $I \neq \emptyset$. والآن ليكن $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$. ينتج أن :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

أي أن I زمرة جزئية (بالنسبة للجمع) من S .

والآن ليكن $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in S$. ينتج أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

أي أن I ليس مثالياً أيسر في S .

والآن ليكن $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S$ ، $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$. ينتج أن :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

(لاحظ أن $ax + cy, bx + dy \in F$)

أي أن I مثالي أيمن في S .

مثال ٢٨ : لتكن R حلقة إبدالية ، $a \in R$. برهن على أن المجموعة

$$S := \{x \in R \mid ax = 0\}$$

مثالي في R .

البرهان : إذا كان $a = 0$ فإن $S = R$ ، لأن كل عنصر $x \in R$ يحقق $x = 0$ ، وبالتالي تكون S المثالي التافه R . والآن ليكن $a \neq 0$. لاحظ أن $0 = 0$ أى أن $0 \in S$ ، وتكون S غير خالية .

ليكن $x, y \in S$. ينتج أنه $ax = 0$ ، $ay = 0$ ومن ثم فإن $a(x - y) = ax - ay = 0$ وينتج أن $x - y \in S$ ، وتكون S زمرة جزئية (بالنسبة للجمع) من R (1) . والآن ليكن $x \in S$ ، $r \in R$. ينتج أن $ax = 0$. وبالتالي :

$$\left. \begin{aligned} a(xr) &= (ax)r = 0r = 0, \\ a(rx) &= a(ax) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &xr \in S, rx \in S \end{aligned} \quad (2)$$

R إيدالية

من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة . (قارن مع مثال ١ فى (١-٢-٨))

مثال ٢٩ : برهن على أنه يوجد أيزومورفيزم بين حلقة الأعداد المركبة ، وحلقة جزئية من حلقة المصفوفات من النوع 2×2 ، التى مداخلها (عناصرها) أعداد حقيقية
البرهان : نعتبر مجموعة المصفوفات :

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

واضح أن $M \neq \emptyset$. سنبرهن أولاً على أن M حلقة جزئية من حلقة المصفوفات من النوع 2×2 ، ومداخلها (عناصرها) من $\mathbb{R}$.

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in M : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{pmatrix} \in M,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \in M$$

أى أن M حلقة جزئية من الحلقة $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. نعرف :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow M$$

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

سنبرهن على أن f تشاكل (أيزومورفيزم) :

$\forall a, b, c, d \in R :$

$$\begin{aligned} f(a + ib + c + id) &= f(a + c + i(b + d)) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(a + ib) + f(c + id), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((a + ib)(c + id)) &= f(ac - bd + i(ad + bc)) = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(a + ib)f(c + id) \end{aligned}$$

أى أن f هومومورفيزم حلق (1). واضح أن f راسم غامر (شامل ، فوقى) (2) .
كذلك f راسم واحد لواحد ، لأن :

$$\begin{aligned} f(a + ib) = f(c + id) &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow a = c, b = d \\ &\Rightarrow a + ib = c + id \Rightarrow \end{aligned}$$

f أيزومورفيزم $\Rightarrow f$ راسم واحد لواحد $\Rightarrow$ (1),(2)

ملحوظة : لأن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حقل فإن M حقل كذلك .

مثال ٣٠ : لنكن $M := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. عرف :

$$f : M \rightarrow M$$

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

برهن على أن f أوتومورفيزم حلقى .

البرهان : يترك للقارئ التحقق من أن M حلقة . والآن

$$\forall a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in M :$$

$$f(a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}) = f(a+c+(b+d)\sqrt{2}) = a+c-(b+d)\sqrt{2}$$

$$= a-b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2} = f(a+b\sqrt{2}) + f(c+d\sqrt{2}),$$

$$f((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = f(ac+2bd+\sqrt{2}(ad+bc)) = ac+2bd-\sqrt{2}(ad+bc)$$

$$= (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = f(a+b\sqrt{2})f(c+d\sqrt{2}) \Rightarrow (1) f \text{ هو مومورفيزم}$$

$$\forall a+b\sqrt{2} \in M \exists a-b\sqrt{2} \in M : f(a-b)\sqrt{2} = a+b\sqrt{2} \Rightarrow (2) f \text{ غامر (شامل)}$$

أيضا

$$f(a+b\sqrt{2}) = f(c+d\sqrt{2}) \Rightarrow a-b\sqrt{2} = c-d\sqrt{2} \Rightarrow a-c = (b-d)\sqrt{2}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a-c = 0 = b-d \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f \text{ أوتومورفيزم } \Rightarrow f \text{ واحد لواحد } (1),(2)$$

مثال ٣١ : برهن على أن الهومومورفيزمات الوحيدة من $\mathbb{Q}$ إلى $\mathbb{Q}$ هي راسم الوحدة

(The identity mapping) ، الراسم الصفري (يرسم كل العناصر في 0)

البرهان : ليكن $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ هومومورفيزم حلق .

$$f(1) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = f(1x) = f(1)f(x) = 0f(x)$$

$$= 0 \Rightarrow f \text{ الراسم الصفري}$$

والآن ليكن $f(1) \neq 0$: من مثال ٢٣ نرى أن $f(1)$ هو عنصر الوحدة في $\mathbb{Q}$ ، أى أن

$$f(1) = 1 \text{ . والآن ليكن } n \text{ عدداً صحيحاً موجباً :}$$

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\dots+f(1)} = nf(1) = n \quad (1)$$

f هومومورفيزم n من الحدود من الوحدات

إذا كان $n = 0$ ، فإن $f(0) = 0$ ، وإلا f ليس هومومورفيزم حلق .

إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً ، ضع $n = -m$ ، حيث m عدد صحيح موجب :

$$f(-m) = -f(m) = -m \quad (1)$$

أى أن : $f(n) = n$

يتبقى إذا كان n عدداً كسرياً . ليكن $n = \frac{p}{q}$ ، حيث $q \neq 0$ ، $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$p = q \frac{p}{q} \Rightarrow f(p) = f(q) f\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p}{q}$$

لاحظ أن : $(q \neq 0 \Rightarrow f(q) = q \neq 0)$

ومن ثم فإن :

$$\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = x$$

أى أن f هو راسم الوحدة على $\mathbb{Q}$.

مثال ٣٢ : لتكن X مجموعة ، f راسم واحد لواحد ، غامر (شامل ، فوقى) من X على حلقة R . سنعرف العمليتين "+" ، "." على X كالآتى :

$$\forall x, y \in X : x + y = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

$$x \cdot y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$$

برهن على أن $(X, +, \cdot)$ حلقة متشاكلية (إيزومورفية) مع R .

البرهان : لأن $f(x), f(y) \in R$ فإن $f^{-1}(f(x) + f(y)), f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \in X$.

f واحد لواحد ، غامر (شامل ، فوقى) يقتضى أن $f^{-1}(f(x) + f(y))$ ، $f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$ يعرفان بطريقة وحيدة (uniquely defined) لكل $x, y \in X$.

لاحظ أن تعريفى "+" ، "." يستلزمان أن :

$$\forall x, y \in X : f(x + y) = f(x) + f(y), f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

والآن :

$$\forall x, y, z \in X : f((x + y) + z) = f(x + y) + f(z) = (f(x) + f(y)) + f(z)$$

$$= f(x) + (f(y) + f(z)) = f(x) + f(y + z) = f(x + (y + z))$$

حلقة R

$$\Rightarrow (x + y) + z = f^{-1}(f((x + y) + z)) = f^{-1}(f(x + (y + z))) = x + (y + z)$$

f تناظر أحادى

وبطريقة مشابهة يمكن البرهنة على أن :

$$\forall x, y, z \in X : x + y = y + x, (x.y).z = x.(y.z), \\ x.(y + z) = x.y + x.z, (x + y).z = x.z + y.z$$

$f^{-1}(0)$ هو صفر "الحلقة" X لأن :

$$\forall x \in X : x + f^{-1}(0) = f^{-1}(f(x + f^{-1}(0))) = f^{-1}(f(x) + ff^{-1}(0)) = f^{-1}(f(x) + 0) \\ = f^{-1}f(x) = x$$

معكوس x هو $f^{-1}(-f(x))$ لأن :

$$x + f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(x) + ff^{-1}(-f(x))) = f^{-1}(f(x) - f(x)) = f^{-1}(0).$$

ومن ثم فإن $(X, +, .)$ حلقة .

ومن حيث إن f بالضرورة هومومورفيزم ، تتناظر أحادى فإن $X \cong R$.

مثال ٣٣ : ليكن $\varphi: K \rightarrow R$ هومومورفيزم حلقي ، حيث K شبه حقل ، R حلقة . برهن

على أن φ إما أن يكون راسماً أحادياً (واحداً لواحد) أو أن يكون هو الراسم الصفري .

البرهان : من مثال ١٨ نعلم أن نواة (φ) هي مثالي فى K ، ومن مثال ٢٥ نعلم أن

الحقول (وكذلك بالطبع أشباه الحقول) لا تحتوى من المثاليات إلا التافهة وبهذا يكون :

$\{0\} = Ker(\varphi)$ أو $Ker(\varphi) = K$. إذا كان $Ker(\varphi) = \{0\}$ فمعنى هذا أن φ راسم

واحد لواحد (أحادى) . أما إذا كان $Ker(\varphi) = K$ فمعنى هذا أن φ الراسم الصفري .

مثال ٣٤ : ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ إبيمورفيزم حلق (ring epimorphism) ، I مجموعة

المثاليات $A \subset R$ بحيث إن $Ker(\varphi) \subset A$ ، I' مجموعة جميع المثاليات فى R' .

برهن على أن الراسمين :

$$G: I' \rightarrow I \quad F: I \rightarrow I' \\ A' \mapsto \varphi^{-1}(A') \quad A \mapsto \varphi(A)$$

تتناظران أحاديان ، وكلاهما معكوس الآخر .

البرهان : المطلوب هو اثبات أن $F \circ G = 1_{I'}$ أى أن $F \circ G$ هو راسم الوحدة على I' ،

(2) $GoF = 1_I$ ، أى أن GoF هو راسم الوحدة على I .

والآن :

$$FoG : I' \rightarrow I'$$

$$A' \mapsto (\varphi \circ \varphi^{-1})A'$$

ومن حيث إن φ راسم فوقى (غامر ، شامل) فإن $(\varphi \circ \varphi^{-1})A' = A'$ أى أن $FoG = 1_{I'}$.

أما

$$GoF : I \rightarrow I$$

$$A \mapsto (\varphi^{-1} \circ \varphi)(A)$$

فنحن نعلم أن $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(A) \supset A$. إذن يتبقى فقط أن نبرهن على أن $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(A) \subset A$.

ليكن $x \in (\varphi^{-1} \circ \varphi)(A) = \varphi^{-1}(\varphi(A))$. هذا يستلزم أن $\varphi(x) \in \varphi(A)$. وهذا يقتضى

أنه يوجد $y \in A$ بحيث يكون : $\varphi(x) = \varphi(y) \in \varphi(A)$ وهذا يستلزم أنه يوجد $y \in A$

بحيث يكون : $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$ أى أن $x - y \in \text{Ker}(\varphi) \subset A$ ومن حيث

إن $y \in A$ ، $x \in A$ مثالى فإن $x \in A$ ، أى أن $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(A) \subset A$. نهاية البرهان .

مثال ٣٥ : لتكن R, R', S, S' حلقات (حلقات) ، وليكن $\rho : R \rightarrow S$ ، $\rho' : R' \rightarrow S'$

هومومورفيزمين حلقيين . إذا كان ρ غامراً (شاملاً) فإنه لكل هومومورفيزم حلق

$\varphi : R \rightarrow R'$ بحيث إن $\varphi(\text{Ker}(\rho)) \subset \text{Ker}(\rho')$ يوجد بالضبط $\bar{\varphi} : S \rightarrow S'$ وحيد

بحيث يكون الشكل الآتى إبدالياً (commutative) :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad m \quad} & R' \\ \rho \downarrow & \text{///} & \downarrow \rho' \\ S & \xrightarrow{\quad \exists, \bar{\varphi} \quad} & S' \end{array}$$

البرهان : التعريف الآتى لـ $\bar{\rho}$ سيجعل الشكل إبدالياً :

$$\bar{\rho}(y) := (\rho' \circ \rho)(x), \quad y = \rho(x)$$

$\bar{\rho}$ معرف جيداً (well defined) : ليكن x_1, x_2 بحيث إن $\rho(x_1) = \rho(x_2)$. هذا

يقضى أن $\rho(x_1 - x_2) = \rho(x_1) - \rho(x_2) = 0_S$ ، أى أن $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(\rho)$.

ومن حيث إن $\varphi(\text{Ker} \rho) \subset \text{Ker}(\rho')$ ينتج أن $\varphi(x_1 - x_2) \in \text{Ker}(\rho')$ وبالتالي فإن

$$(\rho' \circ \varphi)(x_1 - x_2) = 0_{S'}. \quad (\rho' \circ \varphi)(x_1) = (\rho' \circ \varphi)(x_2)$$

$\bar{\rho}$ وحيد (unique) : ليكن $\bar{\varphi}, \psi : S \rightarrow S'$ بحيث يتحقق المطلوب .

$$\bar{\varphi} \circ \rho = \psi \circ \rho \Rightarrow \bar{\varphi} = \psi$$

ρ غامر (شامل)

$\bar{\rho}$ هومومورفيزم : لأن ρ راسم غامر (شامل) فإنه لكل $y_1, y_2 \in S$ يوجد $x_1, x_2 \in R$

بحيث إن $y_1 = \rho(x_1), y_2 = \rho(x_2)$. والآن :

$$\bar{\rho}(y_1 + y_2) = \bar{\rho}(\rho(x_1) + \rho(x_2)) = \bar{\rho}(\rho(x_1 + x_2)) = (\bar{\rho} \circ \rho)(x_1 + x_2)$$

$$= (\rho' \circ \varphi)(x_1 + x_2) = \rho'(\varphi(x_1 + x_2)) = \rho'(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)) = \rho'(\varphi(x_1)) + \rho'(\varphi(x_2))$$

$$= (\rho' \circ \varphi)(x_1) + (\rho' \circ \varphi)(x_2) = (\bar{\rho} \circ \rho)(x_1) + (\bar{\rho} \circ \rho)(x_2) = \bar{\rho}(\rho(x_1)) + \bar{\rho}(\rho(x_2))$$

$$= \bar{\rho}(y_1) + \bar{\rho}(y_2)$$

بالمثل لـ

$$\bar{\rho}(y_1 \cdot y_2) = \bar{\rho}(y_1) \cdot \bar{\rho}(y_2)$$

مثال ٣٦: لنكن R حلقة إبدالية لها على الأقل عنصران ولا تحتوى من المثاليات إلا التافهين .

برهن على أن R إما أن تكون حقلاً وإما أنه يوجد عدد أولى p بحيث يكون :

(أ) الزمرة الجمعية فى R (أى $(R, +)$) تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع الزمرة $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(ب) لكل $a, b \in R$: $ab = 0$

البرهان : أولاً ليكن $ab = 0$ لجميع $a, b \in R$. ينتج أن كل زمرة جزئية من $(R, +)$

تكون مثالياً فى R . فينتج من الفرض أن R تحتوى فقط على زمرتين جزئيتين تافهيتين

(أى لا تحتوى على زمر جزئية فعلية) . وبالتالي فإنه ينتج من نظرية لاجرانج (١-١٠-٣)

فى نظرية الزمر أن رتبة الزمرة $(R, +)$ عدد أولى p وتكون $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong (R, +)$.

ثانيا : ليكن $a, b \in R$ بحيث إن $a, b \neq 0$. ينتج أن Rb مثالي في R (انظر مثال ٢ في (٧-٢-١)) بحيث إن $a, b \neq 0$. وهذا يقتضى أن $Rb \neq \{0\}$ ، فينتج من الفرض أن $Rb = R$. وهذا يستلزم أنه يوجد $1 \in R$ بحيث إن $1b = b$. هذا الـ "١" هو عنصر الوحدة في R لأن :

$$Rb = R \Rightarrow \forall x \in R \exists y \in R : x = yb, 1x = 1yb = y(1b) = yb = x.$$

ومن حيث إن R تحتوى عنصرين على الأقل فإن $1 \neq 0$.
يتبقى فقط إن نبرهن على أنه لكل $u \in R \setminus \{0\}$ فإنه يوجد $v \in R$ بحيث إن $uv = 1$.
والآن لكل $u \in R \setminus \{0\}$ يكون $Ru \neq \{0\}$ (لأن $u = 1u \in Ru$) . Ru مثالي في R فينتج من الفرض أن

$Ru = R$ ، أى أنه يوجد $v \in R$: $vu = 1 = uv$ (لأن $1 \in Ru$ ، إبدالية) . نهاية البرهان .
مثال ٣٧ : برهن على أنه إذا كانت R حلقة ذات عنصر الوحدة ١ ، $\varphi(1) \neq 0'$ (صفر الحلقة R') حيث $\varphi: R \rightarrow R'$ هومومورفيزم حلق فإن $\varphi(1) = 1'$ ، حيث $1'$ هو عنصر الوحدة في $\varphi(R)$.

البرهان : لأن R حلقة جزئية (تافهة) من نفسها ، فإن $\varphi(R)$ حلقة جزئية من R' (مثال ١١ في (٨-٢-١)) . والآن

$$\varphi(1)\varphi(r) = \varphi(1r) = \varphi(r) = \varphi(r1) = \varphi(r)\varphi(1)$$

(قارن مع مثال ١٠) .

مثال ٣٨ : ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ إبيمورفيزم حلق ، حيث R حلقة لها عنصر الوحدة ١ .
ولتكن u وحدة في R . برهن على أن $\varphi(u)$ وحدة في R' إذا كانت فقط إذا كانت u ليست عنصرا في نواة (φ)

البرهان : $\varphi: R \rightarrow R'$ هومومورفيزم حلق ، وهو راسم شامل (غامر) فمن مثال ٣٧ السابق مباشرة يكون $\varphi(1) = 1'$ ، حيث $1'$ ، 1 عنصرا الوحدة في R ، R' على الترتيب .
والآن $u \in R$ يقتضى أنه يوجد $v \in R$ بحيث يكون $uv = 1$. ومن ثم فإن

$$1' = \varphi(1) = \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v) \Rightarrow [\varphi(u) \neq 0 \Leftrightarrow R' \text{ وحدة في } \varphi(u)]$$

أى أن $\varphi(u)$ وحدة في R' إذا كانت فقط إذا كانت $u \notin \text{Ker}(\varphi)$.

مثال ٣٩ : برهن على أن كل حلقة لها عنصر وحدة تكون إيزومورفية مع حلقة إندومورفيزمات للزمرة إبدالية .

البرهان : لتكن R حلقة ، لها عنصر الوحدة "1". سنأخذ $(R, +)$ زمرة الإبدالية . لكل $a \in R$ نعرف :

$$f_a : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto ax$$

f_a إندومورفيزم للزمرة " الجمعية " الإبدالية $(R, +)$ لأن :

$$\forall x, y \in R : f_a(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$$

والآن نعرف المجموعة : $E := \{f_a \mid a \in R\}$ وهى حلقة والعمليتان موضحتان فى (1) ،
(2) .

سنثبت أولاً أن لجميع $a, b \in R$

$$f_{a+b} = f_a + f_b \quad (1)$$

$$f_{ab} = f_a \circ f_b \quad (2)$$

لإثبات (1) الذى يعنى أن العملية فى (1) معرفة جيداً :

$$\forall x \in R : f_{a+b}(x) = (a+b)x = ax + bx = f_a(x) + f_b(x) = (f_a + f_b)(x)$$

$$\Rightarrow f_{a+b} = f_a + f_b$$

لإثبات (2) الذى يعنى ان العملية فى (2) معرفة جيداً :

$$f_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = f_a(f_b(x)) = (f_a \circ f_b)(x) \Rightarrow f_{ab} = f_a \circ f_b$$

سنثبت الآن أن E حلقة .

$$\forall f_a, f_b, f_c \in E : (f_a + f_b) + f_c \stackrel{(1)}{=} f_{a+b} + f_c \stackrel{(1)}{=} f_{(a+b)+c} = f_{a+(b+c)}$$

$$\stackrel{(1)}{=} f_a + f_{b+c} \stackrel{(1)}{=} f_a + (f_b + f_c)$$

نعرف العنصر الصفري $\hat{0}$ فى E كالآتى $\hat{0} : R \rightarrow R$. واضح أن $\hat{0}$ إندومورفيزم .
 $x \mapsto 0$

كذلك فإنه لكل $f \in E$ ولكل $x \in R$ يكون

$$(\widehat{0} + f)(x) = \widehat{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \Rightarrow \widehat{0} + f = f$$

نعرف معكوس f_a في E كالآتي :

$$\forall x \in R : (-f_a)(x) := -f_a(x)$$

والآن :

$$\forall x, y \in R : (-f_a)(x+y) := -f_a(x+y) = -[f_a(x) + f_a(y)]$$

$$= -f_a(y) - f_a(x) = -f_a(x) - f_a(y) = (-f_a)(x) + (-f_a)(y)$$

أي أن $-f_a$ إندومورفيزم . ونثبت أن $(-f_a)$ هو معكوس f_a كالآتي :

$$\forall x \in R : ((-f_a) + f_a)(x) = (-f_a)(x) + f_a(x) = -f_a(x) + f_a(x) = 0 = \widehat{0}(x)$$

$$\Rightarrow (-f_a) + f_a = \widehat{0}$$

ولأي $f_a, f_b \in E$

$$f_a + f_b = f_{a+b} = f_{b+a} = f_b + f_a$$

ولأي $f_a, f_b, f_c \in E$

$$(f_a \circ f_b) \circ f_c \stackrel{(2)}{=} f_{ab} \circ f_c \stackrel{(2)}{=} f_{(ab)c} = f_{a(bc)} \stackrel{(2)}{=} f_a \circ f_{bc} \stackrel{(2)}{=} f_a \circ (f_b \circ f_c),$$

$$f_a \circ (f_b + f_c) \stackrel{(1)}{=} f_a \circ f_{b+c} \stackrel{(2)}{=} f_{a(b+c)} = f_{ab+ac} \stackrel{(1)}{=} f_{ab} + f_{ac} = f_a \circ f_b + f_a \circ f_c$$

وبالمثل

$$(f_a + f_b) \circ f_c = f_a \circ f_c + f_b \circ f_c$$

أي أن E حلقة .

والآن نعرف الراسم :

$$\varphi : R \rightarrow E$$

$$a \mapsto f_a$$

φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall a, b \in R : \varphi(a+b) = f_{a+b} \stackrel{(1)}{=} f_a + f_b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = f_{ab} \stackrel{(2)}{=} f_a \circ f_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

واضح أن φ راسم شامل (غامر ، فوقى) .

كذلك φ راسم أحادى (واحد لواحد) ، لأن :

$$\forall a, b \in R : \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in R : f_a(x) = f_a(y)$$

ولكن R لها عنصر الوحدة "1" ، ومن ثم فإن :

$$\varphi \text{ واحد لواحد } f_a(1) = f_b(1) \Rightarrow a = a1 = b1 = b \Rightarrow$$

وبالتالى فإن φ أيزومورفيزم . نهاية البرهان .

مثال ٤٠ : وضع كيف تغمر حلقة بلا عنصر وحدة فى حلقة ذات عنصر وحدة (الغمر

(embedding) يعنى إدخال الحلقة فى الحلقة ذات عنصر الوحدة بواسطة مونومورفيزم)

الحل : لتكن R حلقة بلا عنصر وحدة . سنكون الآن حلقة ذات عنصر وحدة :

اعتبر $S := \mathbb{Z} \times R$. نعرف العمليتين "+" ، "." كالتالى :

$$\forall (n, r), (m, s) \in S : (n, r) + (m, s) := (n + m, r + s)$$

$$(n, r) \cdot (m, s) := (nm, ns + mr + rs),$$

$$mr \text{ بالمثل } , ns := \underbrace{s + \dots + s}_n$$

$|n|$ من المرات

ويترك للقارئ التحقق من أن $(S, +, \cdot)$ حلقة . و $(1, 0)$ هو عنصر الوحدة فيها لأن :

$$\forall (n, r) \in S : (1, 0) \cdot (n, r) = (1n, 1r + n0 + 0r) = (n, r),$$

$$(n, r) \cdot (1, 0) = (n1, n0 + 1r + r0) = (n, r)$$

والآن نعرف $f : R \rightarrow S$. f هو مونومورفيزم لأن :

$$r \mapsto (0, r)$$

$$\forall (r, s) \in R : f(r + s) = (0, r + s) = (0, r) + (0, s) = f(r) + f(s)$$

$$f(rs) = (0, rs) = (0, r) \cdot (0, s) = f(r) \cdot f(s)$$

واضح أن f راسم أحادى (واحد لواحد) ،

$$R' := \{(0, r) \mid r \in R\} \subset S$$

$$f(R) = R' \cong R$$

١-٢-٩ : جبر المثاليات

يمكن ببساطة شديدة البرهنة على أن تقاطع عائلة غير خالية من المثاليات (أو المثاليات اليسرى أو المثاليات اليمنى) هو مثالي (أو مثالي أيسر أو مثالي أيمن على الترتيب). وبدهى أن هذا التقاطع هو أكبر مثالي (أو مثالي أيسر أو مثالي أيمن على الترتيب) موجود في كل هذه المثاليات (أو المثاليات اليسرى أو المثاليات اليمنى على الترتيب). وعلى الجانب الآخر فإن تقاطع عائلة غير خالية من المثاليات (أو اليسرى أو اليمنى) التي تحتوى على مجموعة جزئية A من الحلقة هي أصغر مثالي (أو أيسر أو أيمن على الترتيب) يحتوى على المجموعة الجزئية A . ويقال في هذه الحالة إن هذا المثالي (أو الأيسر أو الأيمن على الترتيب) متولد من A ، ويرمز له بالرمز $[A]$.

نظرية: المثالي الأيسر المتولد من اتحاد المثاليين الأيسرين I_1 ، I_2 في الحلقة R هو مجموعة العناصر $I_1 + I_2 := \{i_1 + i_2 \mid i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$.

البرهان:

سنبرهن أولاً على أن $I_1 + I_2$ مثالي أيسر. واضح أن $I_1 + I_2 \neq \emptyset$. ليكن $a_1 + a_2 \in I_1 + I_2$ ، حيث $a_1 \in I_1$ ، $a_2 \in I_2$ ، $b_1 + b_2 \in I_1 + I_2$ حيث $b_1 \in I_1$ ، $b_2 \in I_2$. من حيث إن I_1 ، I_2 مثاليان أيسران ينتج أن $a_1 - b_1 \in I_1$ ، $a_2 - b_2 \in I_2$ ، وينتج أن:

$$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 \in I_1 + I_2$$

أي أن $I_1 + I_2$ زمرة جزئية من الزمرة الجمعية $(R, +)$.

والآن ليكن $a_1 + a_2 \in I_1 + I_2$ ، حيث $a_1 \in I_1$ ، $a_2 \in I_2$ ، $r \in R$.

$$r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2 \in I_1 + I_2 \quad (\text{لأن } I_1, I_2 \text{ مثاليان أيسران في } R)$$

فينتج أن $I_1 + I_2$ مثالي أيسر في R .

من حيث إنه لكل $a_1 \in I_1$ يمكن أن نكتب $a_1 = a_1 + 0 \in I_1 + I_2$ يكون $I_1 \subset I_1 + I_2$.

وكذلك $I_2 \subset I_1 + I_2$ فيكون $I_1 \cup I_2 \subset I_1 + I_2$ ويكون المثالي الأيسر المتولد من $I_1 \cup I_2$ ،

والذى تشير إليه بالرمز $[I_1 \cup I_2]$ محتوى في $I_1 + I_2$ ، أى أن (1) $[I_1 \cup I_2] \subset I_1 + I_2$

لكن أى مثالى أيسر يتولد من $I_1 \cup I_2$ لابد أن يحتوى على جميع العناصر $a_1 + a_2$ حيث $a_1 \in I_1, a_2 \in I_2$ وبالتالى يحتوى على المثالى الأيسر $I_1 + I_2$ ، أى أن: $[I_1 \cup I_2] \supset I_1 + I_2$ (2) من (1) ، (2) ينتج أن : $I_1 + I_2 = [I_1 \cup I_2]$

ملحوظة (1) : بوضوح تام يمكن استبدال كلمة "أيسر" بكلمة "أيسر"، أو بحذف أيسر من كل ما سبق فى النظرية .

ملحوظة (2) : ليكن $a \in R$ حلقة ، عندئذ فإن المجموعة

$$\{ra + na \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$$

تمثل المثالى الأيسر المتولد من العنصر a ، ونشير إليها بالرمز $[a]$. وإذا كانت R تحتوى على عنصر الوحدة 1 فيكون لدينا :

$$a = 1a ,$$

$$ra + na = ra + n1a = (r + n1)a = sa, s \in R$$

ويكون المثالى الأيسر المتولد من العنصر a فى هذه الحالة هو

$$[a] = \{sa \mid s \in R\}$$

ملحوظة (3) : لتكن A مجموعة جزئية من حلقة R . عندئذ فإن مجموعة جميع العناصر التى على الشكل

$$r_1a_1 + \dots + r_ia_i + n_1b_1 + \dots + n_jb_j ,$$

حيث

$$a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j \in A , \quad n_1, \dots, n_j \in \mathbb{Z} , \quad r_1, \dots, r_i \in R$$

تكون المثالى الأيسر المتولد من A أى $[A]$.

وإذا كانت R تحتوى على عنصر الوحدة R فإن المثالى $[A]$ يتكون من العناصر التى على الشكل :

$$r_1a_1 + \dots + r_ia_i$$

كما سبق فى ملحوظة (2)

ملحوظة (٤) : المثالي الأيمن المتولد من العنصر a في الحلقة R هو

$$\{ar + na \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$$

أما المثالي المتولد من العنصر a في الحلقة R فهو

$$\{sar + na \mid r, s \in R, n \in \mathbb{Z}\}$$

تعريف : يعرف حاصل ضرب المثاليين A ، B في الحلقة R بأنه :

$$\begin{aligned} AB &:= [\{ab \mid a \in A, b \in B\}] \\ &= \left\{ \sum_{finite} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B \right\} \end{aligned}$$

ويمكن البرهنة بسهولة على أن AB مثالي في R .

مثال ١ : يقال لمثاليين A ، B في حلقة R إنها **متعاضمان معا** (comaximal) إذا كان

$$A + B = R$$

برهن على أنه إذا كان A ، B مثاليين متعاضمين معا في حلقة إبدالية R ذات عنصر

الوحدة 1 فإن

$$AB = A \cap B.$$

البرهان :

$$" \subset ": x \in AB \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i b_i, a_i \in A, b_i \in B$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i b_i, a_i b_i \in A, a_i b_i \in B \quad (\text{لأن } A, B \text{ مثاليان})$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i b_i, a_i b_i \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow AB \subset A \cap B \quad (1)$$

$$" \supset ": A + B = R \Rightarrow 1 \in A + B \Rightarrow \exists a \in A \exists b \in B : a + b = 1 \quad (\text{عنصر الوحدة في } R)$$

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B.$$

$$x = 1x = (a + b)x = a^{\epsilon^A} x^{\epsilon^B} + b^{\epsilon^B} x^{\epsilon^A} \in AB \quad (\text{لأن } R \text{ حلقة إبدالية})$$

$$\Rightarrow A \cap B \subset AB \quad (2)$$

(1) ، (2) تعطيان النتيجة مباشرة .

١-٢-١٠ تعريف :

يقال لمثالي A في حلقة R إنه مثالي أساسي (principal ideal) إذا وجد $a \in R$ بحيث يكون $A = [a]$ (انظر (١-٢-٩)). ويقال إنه منتهى التولد (finitely generated) إذا وجد $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ بحيث يكون : $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

ويقال لحلقة R إنها نطاق مثاليات أساسية (principal ideal domain) إذا كانت R نطاقاً متكاملاً ، وكان كل مثالي فيها مثالياً أساسياً .

ويقال لحلقة إنها حلقة نويتريية (Noetherian ring) إذا كان كل مثالي فيها منتهى التولد .

ويقال لحلقة إنها حلقة أرتينينية (Artinian ring) إذا كانت كل سلسلة متتازلة $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ من المثاليات في R متوقفة ، أى أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون

$$A_{k+n} = A_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

١-٢-١١ نظرية : لتكن R حلقة . التقريرات الآتية متكافئة :

(١) R نويتريية

(٢) كل سلسلة متصاعدة $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ من المثاليات في R تكون متوقفة ، أى

$$A_{n+k} = A_n \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N} \text{ بحيث يكون :}$$

(٣) كل مجموعة غير خالية I من المثاليات في R تحتوى على عنصر أعظم ، أى أنه

$$\text{يوجد } B \in I \text{ بحيث إنه لا يوجد } A \in I : B \subsetneq A \subsetneq R$$

البرهان : "(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" : لأى سلسلة متصاعدة $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ من المثاليات

في R المجموعة $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ تكون مثالياً في R (لاحظ أنه إذا كان A_1, A_2 مثاليين في

حلقة R فإن : $A_2 \subset A_1$ أو $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow$ مثالي $A_1 \cup A_2 \subset R$. والآن لأن R

نويتريية فإنه يوجد $a_1, a_2, \dots, a_\ell \in R$ بحيث إن : $A = [a_1, a_2, \dots, a_\ell]$. ومن تعريف

A فإنه لكل $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ يوجد $n_i \in \mathbb{N}$ بحيث إن $a_i \in A_{n_i}$. وإذا كان n هو أكبر

هذه الأعداد الطبيعية $n_1, n_2, \dots, n_\ell$ فإنه لكل $i \in \{1, 2, \dots, \ell\} : a_i \in A_n$. وبالتالي فإن $A = [a_1, a_2, \dots, a_\ell] \subset A_n$ ولكن $A_{n+k} \subset A$ فيكون لدينا : $A_{n+k} \subset A \subset A_n$ لكل $k \in \mathbb{N}$. ومن ثم فإن $A_{n+k} = A_n$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)": إذا لم يوجد عنصر أعظم في مجموعة غير خالية من المثاليات في R ، فإننا نستطيع أن ننشئ سلسلة متصاعدة من المثاليات $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$ من عناصر I ، وهي غير متوقفة

"(٣) $\Leftarrow$ (١)": ليكن $A \subset R$ مثاليا ، ولتكن I هي مجموعة جميع المثاليات منتهية التولد والتي تكون محتواة في A . لاحظ أن $\{0\} \in I$ ، أى أن I غير خالية .

(٣) تستلزم وجود عنصر أعظم ، وليكن هو τ . ولأن $\tau \in I$ فإنه يوجد $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ بحيث إن : $\tau = [c_1, c_2, \dots, c_n]$. سيكون المثالي A منتهى التولد إذا برهنا على أن $A = \tau$. لاحظ أولاً أن $\tau \subset A$ لأن $\tau \in I$. وثانياً فليكن $a \in A$ عنصراً اختيارياً . المثالي $\tau' = [c_1, \dots, c_n, a]$ منتهى التولد ويكون أيضاً محتوياً في A ، أى أنه عنصر في I . ولكن τ هو عنصر أعظم في I ، $\tau \subset \tau'$ ، وبالتالي فإن $\tau = \tau'$ ، ومن ثم فإن $a \in \tau$ أى أن $A = \tau$.

١-٢-١ نتيجة : ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ إبيمورفيزم حلق .

R حلقة نويتيرية $\Leftarrow R'$ حلقة نوتيرية .

البرهان : لتكن $A'_1 \subset A'_2 \subset A'_3 \subset \dots$ سلسلة متصاعدة من المثاليات في R' . لكل $i \in \mathbb{N}$ نعرف $A_i := \varphi^{-1}(A'_i)$ (مثالى من مثال ١١ فى (١-٢-٨)) مثالى فى R ، ويكون $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. والآن R حلقة نويتيرية يستلزم أن السلسلة $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ تكون متوقفة . ولكن φ إبيمورفيزم يستلزم أن $A'_1 \subset A'_2 \subset A'_3 \subset \dots$ تكون سلسلة من المثاليات حيث $(\varphi \circ \varphi^{-1})(A'_i) = \varphi(\varphi^{-1}(A'_i)) = \varphi(A_i) = A'_i$ لكل $i \in \mathbb{N}$ التى تكون متوقفة كذلك .

١-٢-١٣ أمثلة :

(١) $\mathbb{Z}$ نطاق مثاليات أساسية. $\mathbb{Z}$ نطاق متكامل ، كل مثالي في $\mathbb{Z}$ هو مثالي أساسي فيها:

$$A \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : A = m\mathbb{Z}$$

وبالتالى فإن $\mathbb{Z}$ تكون حلقة نوبترية .

(٢) أى شبه حقل يكون حلقة نوبترية وأرتينية ، لأنه لا يوجد فى شبه الحقل مثاليات إلا

المثاليات التافهان : شبه الحقل نفسه ، $\{0\}$

(٣) $\mathbb{Z}$ ليست حلقة أرتينية : السلسلة

$$\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 2^2\mathbb{Z} \supsetneq 2^3\mathbb{Z} \supsetneq \dots$$

ليست متوقفة

١-٢-١٤ ملحوظة :

رأينا فى الأمثلة السابقة مباشرة حلقة نوبترية لكنها ليست أرتينية . فى الحلقات (ذات عنصر الوحدة !) العكس ليس موجودا ، أى أنه لا يوجد فيها حلقة أرتينية لكنها ليست نوبترية .

١-٢-١٥ أمثلة محلولة :

مثال ١ : اضرب مثالا لبيان أن الحلقات الجزئية من الحلقات النوبترية ليست بالضرورة نوبترية

الحل : المجموعة $M(\mathbb{C})$: مجموعة كل الدوال الميرومورفية (meromorphic) على $\mathbb{C}$ تكون حقلا ، وبالتالي فهى حلقة نوبترية .

لكن المجموعة $H(\mathbb{C})$ مجموعة الدوال الهولومورفية (holomorphic) (التحليلية (analytic) ، القابلة للتفاضل (differentiable)) ليست نوبترية . وليبيان ذلك : لكل $n \in \mathbb{N}$ نعرف :

$$A_n := \{f \in H(\mathbb{C}) \mid f(n+k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$$

$A_n \subset H(\mathbb{C})$ مثالى لأن: الدالة الصفرية $\hat{0}$ تحقق بالطبع $\hat{0}(n+k)=0$ لجميع $k \in \mathbb{N}$ وهى دالة هولومورفية .

كذلك فإنه لجميع f, h دالتين هولومورفيتين ، $f, h \in A_n$:

$$(f-h)(n+k) = f(n+k) - h(n+k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f-h \in A_n$$

ولجميع $g \in H(\mathbb{C})$ ، $f \in A_n$ يتحقق :

$$(gf)(n+k) = g(n+k)f(n+k) = g(n+k)0 = 0 \Rightarrow gf \in A_n$$

وبالمثل $fg \in A_n$ والآن لدينا

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

وينتج من نظرية فايرشتراس لحاصل الضرب (Weierstrass product theorem) أنه

$$f(n+k)=0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} , \quad f(n)=1 \quad \text{إن } f \in H(\mathbb{C}) \text{ يوجد } n \in \mathbb{N}$$

وهكذا نحصل على

$$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$$

وهى غير متوقفة .

مثال ٢ : برهن على أن الحلقة $C(\mathbb{R})$ (حلقة كل الدوال المتصلة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ليست

نوبترية .

البرهان : لكل $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ نعرف

$$A_n := \{f \in C(\mathbb{R}) : f|_{[0, \frac{1}{n}]} = 0\}$$

A_n مثالى فى $C(\mathbb{R})$ لأن الدالة الصفرية $\hat{0}$ تحقق الشرط $\hat{0}|_{[0, \frac{1}{n}]} = 0$ ، وهى دالة

متصلة بالطبع كذلك فإنه لجميع $f, g \in A_n$ يكون $f-g \in A_n$. كذلك فإنه لجميع

$$\left. \begin{aligned} (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (g(x)f(x) &:= (gf)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} fg, gf \in A_n \text{ يكون } g \in C(\mathbb{R}), f \in A_n$$

والآن من الواضح أن السلسلة

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots$$

غير متوقفة (واضح أن $A_n \subsetneq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$)

مثال ٣ : في النظرية (١-٢-١١) برهن على أن التقرير (٢) يستلزم التقرير (١) مباشرة
أي دون المرور على (٣)

البرهان : ليكن التقرير (٢) متحققا . وليكن هناك مثاليا I ليس منتهى التولد . وليكن $a_1 \in I$. نظرا لأن I غير منتهى التولد ، فإن $[a_1]$ مجموعة جزئية فعلية من I ،
فنستطيع أن نختار $a_2 \in I$ بحيث يكون $a_2 \notin [a_1]$. وكما سبق فإن $[a_1, a_2]$ يكون
مجموعة جزئية فعلية من I ، ونختار $a_3 \in I$ بحيث يكون $a_3 \notin [a_1, a_2]$. وبالاتسار
نستطيع أن نكون السلسلة غير المتوقفة

$$[a_1] \subsetneq [a_1, a_2] \subsetneq [a_1, a_2, a_3] \dots$$

تمارين

- (١) برهن على أن تقاطع حلقات جزئية في حلقة R يكون حلقة جزئية في R
- (٢) برهن أو انف : اتحاد حلقتين جزئيتين من حلقة R يكون حلقة جزئية في R
- (٣) برهن على أن تقاطع مثاليات في حلقة R يكون مثاليا في R
- (٤) برهن أو انف : اتحاد مثاليين في حلقة R يكون مثاليا في R
- (٥) اوجد جميع الهومومورفيزمات $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- (إرشاد : يتعين الهومومورفيزم من صورة المولد في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ ، أى يتعين من $\varphi(1) = n$. واضح أن $\varphi(1) = 0$ ، $\varphi(1) = 1$ يعطيان هومومورفيزمين هل توجد n أخرى ؟)

(٦) ليكن $m, n \in \mathbb{N}$ ، ليكن k هو المضاعف المشترك الأصغر لـ m, n . برهن على

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = k\mathbb{Z} \quad (\text{تذكر أن } n\mathbb{Z} \text{ حلقة جزئية من } \mathbb{Z})$$

(٧) لتكن $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ حلقة جميع المصفوفات من النوع 2×2 على الأعداد الصحيحة ، ولتكن

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

برهن أو انف : R حلقة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$

(٨) لتكن $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ مثلما هي في تمرين (٧) السابق مباشرة . ولتكن

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

برهن أو انف : R حلقة جزئية من $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$

(٩) لتكن R حلقة ذات عنصر الوحدة e . برهن على أن

$$S = \{ne \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

حلقة جزئية من R

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$$

$$x \mapsto 2x$$

(١٠) هل الراسم

هومومورفيزم زمر من $(\mathbb{Z}, +)$ إلى $(2\mathbb{Z}, +)$ ؟ هل هو هومومورفيزم حلق من

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ إلى $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ؟

(١١) في الحلقة $\mathbb{Z}$ اوجد عدداً صحيحاً موجباً a بحيث يكون :

$$[a] = [2] + [3] \quad (أ)$$

$$[a] = [3] + [6] \quad (ب)$$

$$[a] = [m] + [n] \quad (جـ)$$

(١٢) ليكن A ، B مثاليين في حلقة R . برهن على أن حاصل الضرب AB المعرف

كالآتي:

$$AB := \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B, n \text{ عدد صحيح موجب}\}$$

يكون مثالياً في R

(١٣) أوجد عدداً صحيحاً موجباً a بحيث يكون

$$[a] = [3] [4] \quad (أ)$$

$$[a] = [6] [8] \quad (ب)$$

$$[a] = [m] [n] \quad (جـ)$$

(١٤) لتكن R حلقة لها عنصر الوحدة 1 . وليكن A مثالياً في R يحتوى على "1" .

برهن على أن $A = R$

(١٥) برهن على أن العناصر منعقدة القوة (انظر مثال ١٢ فى (١-١-١٥)) فى حلقة

إبدالية R تكون حلقة جزئية من R

(١٦) ليكن R نطاقاً متكاملاً ، $a, b \in R$ ، $b \neq 0$ ، a ليس وحدة . برهن على أن

$$[ab] \subseteq [b]$$

(١٧) هل $\mathbb{Z}_6$ حلقة جزئية من $\mathbb{Z}_{12}$ ؟

(١٨) لتكن R حلقة ، p عدداً أولياً ثابتاً . برهن على أن

$$I_p := \left\{ r \in R \mid \begin{array}{l} \text{الرتبة الجمعية لـ } r \text{ هى قوة من قوى } p \\ \text{(أى هى } p^n \text{ لبعض } n \text{ عدد صحيح موجب)} \end{array} \right\}$$

برهن على أن I_p مثالى فى R

(١٩) لتكن R حلقة إبدالية ، $a, b \in R$. برهن على أن :

$$\{x \in R \mid ax \in bR\}$$

مثالى فى R

لتكن $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ حلقة جميع المصفوفات من النوع 2×2 وعناصرها أعداد حقيقية .

(٢٠) ليكن $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ معرفاً كالاتى :

$$\varphi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$. برهن على أن φ أيزومورفيزم

$$(21) \text{ برهن على أن الراسم } \varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ أيزومورفيزم}$$

$$a + ib \mapsto a - ib$$

(22) برهن على أن $2\mathbb{Z}$ تتشاكل مع $\mathbb{Z}$ كزمرتين ، ولكنهما لا تتشاكلان كحلقتين .

$$(23) \text{ برهن على أن الراسم } \varphi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P[X] \mapsto P(1)$$

(23) برهن على أن الراسم $\mathbb{R}[X]$ هي حلقة كثيرات الحدود

ذات المعاملات الحقيقية) إبيمورفيزم . ما نواته ؟

(24) برهن على أنه إذا كان m, n عددين صحيحين موجبيين مختلفين ، فإن الحلقتين $n\mathbb{Z}$ ، $m\mathbb{Z}$ لا يمكن أن تكونا متشاكلتين .

(25) ليكن $f: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . برهن على أن :

$$(أ) f \text{ مونومورفيزم} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall T \text{ حلقة } \forall g, h: T \rightarrow R \text{ هومومورفيزمين} \\ fg = fh \Rightarrow g = h \end{array} \right]$$

$$(ب) f \text{ إبيمورفيزم} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall T \text{ حلقة } \forall g, h: S \rightarrow T \text{ هومومورفيزمين} \\ gf = hf \Rightarrow g = h \end{array} \right]$$

٣-١ الحلقات العاملة Factor rings

من حيث إن الزمرة الجمعية $(R, +)$ في الحلقة R إبدالية ، فإن كل مثالي A في الحلقة R يكون زمرة جزئية طبيعية . وبالتالي فإننا نستطيع أن نكون الزمرة العاملة

$$R/A := \{x + A \mid x \in R\}, \quad A \text{ مثالي}$$

حيث

$$\forall x, y \in R : (x + A) + (y + A) = x + y + A$$

(انظر الزمر العاملة (٧-١) في نظرية الزمر)

١-٣-١ نظرية :

لتكن R حلقة ، A مثالي في R ، $\rho : R \rightarrow R/A$ إيمورفيزم الزمر الطبيعي
 $x \mapsto x + A$

(canonical group epimorphism) . عندئذ فإنه توجد بالضبط عملية وحيدة " . " على

R/A بحيث تكون $(R/A, +, \cdot)$ حلقة ، ويكون ρ إيمورفيزم حلق .

البرهان : إذا كانت $(R/A, +, \cdot)$ حلقة ، ρ هومومورفيزم حلق ، فإنه لجميع $x, y \in R$ يتحقق :

$$(x + A) \cdot (y + A) = \rho(x) \cdot \rho(y) = \rho(xy) = xy + A$$

ρ هومومورفيزم

أى أنه توجد على الأكثر عملية واحدة في R/A تحقق الخصائص المنشودة .

وسنثبت الآن أنه توجد بالفعل هذه العملية .

ولإثبات وجود هذه العملية في R/A :

$$\forall x, y \in R : (x + A) \cdot (y + A) = xy + A$$

يجب أن نبرهن على أن هذه العملية "معرفة جيداً" (well-defined) كالآتي :

ليكن $x' + A = x + A$ ، $y' + A = y + A$. المطلوب هو البرهنة على أن $x'y' + A = xy + A$ (يقال إن العملية لاتعتمد على الممثلين)

(The operation does not depend on the representatives)

والآن :

$$\begin{aligned} x' + A = x + A, y' + A = y + A &\Rightarrow \exists r, s \in A : x' = x + r, y' = y + s \quad (0 \in A) \\ \Rightarrow x'y' + A &= (x + r)(y + s) + A = xy + xs + ry + rs + A = xy + A \end{aligned}$$

(A مثالي)

أى أن العملية معرفة جيداً . ونثبت قانون المشاركة (التجميع) فى عملية الضرب كالاتى :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in R : ((x + A).(y + A)).(z + A) &= (xy + A).(z + A) = (xy)z + A \\ &= x(yz) + A = (x + A).(yz + A) = (x + A).((y + A).(z + A)) \end{aligned}$$

حلقة R

ولإثبات قانونى التوزيع :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in R : (x + A).[(y + A) + (z + A)] &= (x + A).(y + z + A) \\ &= x(y + z) + A = xy + xz + A = xy + A + xz + A = \end{aligned}$$

حلقة R

$$= (x + A).(y + A) + (x + A).(z + A)$$

وبالمثل يثبت أن :

$$[(x + A) + (y + A)].(z + A) = (x + A).(z + A) + (y + A).(z + A)$$

والآن إذا كانت R إبدالية فإن R/A تكون إبدالية لأن :

$$\forall x, y \in R : (x + A).(y + A) = xy + A = yx + A = (y + A).(x + A)$$

إبدالية R

وإذا كانت R لها عنصر الوحدة "1" ، فإن R/A لها عنصر الوحدة $1 + A$ لأن :

$$\begin{aligned} \forall x \in R : (1 + A).(x + A) &= 1x + A = x + A, \\ (x + A).(1 + A) &= x1 + A = x + A \end{aligned}$$

نهاية البرهان .

تسمى الحلقة $(R/A, +, \cdot)$ الحلقة العاملة من R بالنسبة إلى A

(The factor ring of R w.r.t. A) أو حلقة فصول البواقي لـ R مقياس A

(The residue class ring of R modulo A)

١-٣-٢ ملحوظة : هومومورفيزم حلق $\exists \varphi: R \rightarrow R'$ حلقة R' $\Leftrightarrow$ مثالي $R \supset A$

بحيث يكون $[Ker(\varphi) = A$

البرهان : " $\Rightarrow$ " : ليكن $A \subset R$ مثالياً . نعرف الحلقة $R' := R/A$ ، $\varphi: R \rightarrow R/A$
 $x \mapsto x + A$

" $\Leftarrow$ " : نعلم أن نواة (φ) $(Ker(\varphi))$ زمرة جزئية طبيعية في $(R, +)$ (انظر (١-٦-٤)
 في نظرية الزمر) . وسنبهرن الآن على أنها مثالي في R :

$$\forall r \in R \quad \forall x \in Ker(\varphi) : \varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) = \varphi(r)0 = 0 \Rightarrow rx \in Ker(\varphi).$$

وبالمثل $xr \in Ker(\varphi)$. (انظر مثالي ١١ ، ١٨ في (١-٢-٨))

١-٣-٣ نظرية الهومومورفيزم : The homomorphism theorem

$$\varphi: R \rightarrow R' \text{ هومومورفيزم حلق} \Rightarrow \varphi(R) \cong R/Ker(\varphi)$$

البرهان :

$$\psi: R/Ker(\varphi) \rightarrow \varphi(R) \text{ اعتبر}$$

$$x + Ker(\varphi) \mapsto \varphi(x)$$

نلاحظ أن $Ker(\varphi)$ مثالي في R وبالتالي وحسب ماسبق تكون $R/Ker(\varphi)$ حلقة كما أن

$R \subset R$ حلقة جزئية ، وتكون $\varphi(R)$ حسب مثال ١١ في (١-٢-٨) أيضاً حلقة .

والآن نبهرن على أن ψ أيزومورفيزم حلق كالاتي :

$$\forall x, y \in R : x + Ker(\varphi) = y + Ker(\varphi) \quad \psi \text{ معرف جيداً :}$$

$$\Rightarrow x - y \in Ker(\varphi) \quad (\text{لأن } 0 \in Ker(\varphi))$$

$$\Rightarrow 0 = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

أى أن "الصور" (images) لا تعتمد على "الممثلين" (representatives)
 ψ هو مورفيزم حلقى :

$$\forall x, y \in R: \psi((x + \text{Ker}(\phi)) + (y + \text{Ker}(\phi))) = \psi(x + y + \text{Ker}(\phi))$$

(١-٧-١) نظرية الزمر

$$= \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = \psi(x + \text{Ker}(\phi)) + \psi(y + \text{Ker}(\phi)).$$

$$\psi((x + \text{Ker}(\phi)) \cdot (y + \text{Ker}(\phi))) = \psi(xy + \text{Ker}(\phi)) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

(١-٣-١)

$$= \psi(x + \text{Ker}(\phi))\psi(y + \text{Ker}(\phi))$$

ψ غامر (شامل ، فوقى) : واضح !

ψ واحد لواحد (أحادى) :

$$\forall x, y \in R: \psi(x + \text{Ker}(\phi)) = \psi(y + \text{Ker}(\phi)) \Rightarrow \phi(x) = \phi(y) \Rightarrow$$

$$\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) = 0' \Rightarrow x - y \in \text{Ker}(\phi) \Rightarrow x + \text{Ker}(\phi) = y + \text{Ker}(\phi).$$

(0' العنصر الصفري فى $\phi(R)$)

١-٣-٤ النظرية الأولى للأيزومورفيزم The first isomorphism theorem

ليكن $A \subset R$ مثالياً فى الحلقة R ، $B \subset R$ حلقة جزئية داخلها . ينتج أن :

$$(A + B) / A \cong B / A \cap B$$

البرهان : نبرهن أولاً على أن $A + B \subset R$ حلقة جزئية كالاتى :

$$\phi \neq A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad (0 = 0 + 0 \in A + B)$$

والآن لجميع $a_1, a_2 \in A$ ، $b_1, b_2 \in B$:

$$a_1 + b_1 - (a_2 + b_2) = a_1 - a_2 + b_1 - b_2 \in A + B \quad (A \text{ مثالى ، } B \text{ حلقة جزئية فى } R)$$

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2 \in A + B$$

(لأن $a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2 \in A$ ، $b_1b_2 \in B$)

كذلك لأن A مثالي في R ، $A \subset A+B \subset R$ ، $A+B$ حلقة جزئية من R فإن A يكون مثالياً في $A+B$

وبالتالي فإن التكوين $(A+B)/A$ يعرف حلقة (١-٣-١)

$$\begin{aligned} \varphi: B &\rightarrow (A+B)/A \\ b &\mapsto b+A \end{aligned}$$

والآن نعرف

φ معرف جيداً : واضح

φ غامر (شامل) : واضح أيضاً ، لأن أى عنصر في $A+B/A$ سيكون على الشكل

$a+b+A$ حيث $a \in A$ ، $b \in B$ ، وهذا العنصر يكون هو نفسه $b+A$. ومن ثم فإنه يوجد $b \in A$ بحيث إن $\varphi(b) = b+A$

φ هو مومورفيزم خلق :

$$\begin{aligned} \forall b_1, b_2 \in B: \quad \varphi(b_1 + b_2) &= b_1 + b_2 + A = b_1 + A + b_2 + A \\ &= \varphi(b_1) + \varphi(b_2). \end{aligned}$$

$$\varphi(b_1 b_2) = b_1 b_2 + A = (b_1 + A) \cdot (b_2 + A) = \varphi(b_1) \cdot \varphi(b_2)$$

١-٣-١

والآن نحسب نواة (φ) :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{b \in B \mid \varphi(b) = b+A = A\}$$

(A هو العنصر الصفري في $A+B/A$ حسب (١-٣-١) أو (٧-١) في نظرية الزمر)

$$= \{b \in B \mid b \in A\} = A \cap B$$

والآن بتطبيق نظرية الهومومورفيزم (٣-٣-١) نحصل على

$$B/A \cap B = B/\text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(B) = (A+B)/A$$

φ غامر

نهاية البرهان .

١-٣-٥ النظرية الثانية للأيزومورفيزم The second isomorphism theorem

ليكن $A, B \subset R$ مثاليين في الحلقة R ، $A \subset B$. عندئذ فإن :

$$\frac{R/A}{B/A} \cong \frac{R/B}{A/B}$$

البرهان : نلاحظ أن التكوينين R/A ، R/B ممكنان ويعطيان حلقتين . أما التكوين $\frac{R/A}{B/A}$

فلكي يكون ممكناً يجب أن يكون B/A مثالياً في R/A ، وسنثبت هذا كجزء في البرهان .

نعرف الراسم :

$$\begin{aligned} \varphi: R/A &\rightarrow R/B \\ x+A &\mapsto x+B \end{aligned}$$

φ معرف جيداً :

$$\forall x, y \in R : x+A = y+A \Rightarrow x-y \in A \subset B \Rightarrow x+B = y+B$$

أى أن

$$x+A = y+A \Rightarrow \varphi(x+A) = \varphi(y+A)$$

φ هومومورفيزم حلق :

$$\forall x, y \in R : \varphi((x+A) + (y+A)) = \varphi(x+y+A) = x+y+B$$

$$= x+B + y+B = \varphi(x+A) + \varphi(y+A)$$

$$\varphi((x+A).(y+A)) = \varphi(xy+A) = xy+B = (x+B).(y+B) = \varphi(x+A)\varphi(y+A)$$

φ شامل (غامر ، فوقى) : واضح

والآن نحسب نواة (φ) :

$$Ker(\varphi) = \{x+A \mid \varphi(x+A) = x+B = B\}$$

$$= \{x+A \mid x \in B\} = B/A$$

ومن ثم فإن B/A مثالى فى R/A .

وبتطبيق نظرية الهومومورفيزم (٣-٣-١) نحصل على :

$$\frac{R/A}{B/A} = \frac{R/A}{\text{Ker}(\varphi)} = \varphi(R/A) = R/B$$

φ غامر

نهاية البرهان .

٦-٣-١ أمثلة محلولة :

مثال ١ : اكتب عناصر $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

الحل :

$$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} := \{0+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}\}$$

لاحظ أن $6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ ، $6+6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ ، $8+6\mathbb{Z} = 2+6\mathbb{Z}$ ، وهكذا ...
كما أن $6\mathbb{Z}$ مثالي في $2\mathbb{Z}$.

كما أن $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. لاحظ أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تتشاكل مع $\mathbb{Z}_n$ التي وردت في مثال ١٠ في (١-١-١٤) .

$$\text{مثال ٢ : لتكن } R := \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

ولتكن I مجموعة جزئية من R تتكون من المصفوفات ذات المداخل (العناصر) التي هي أعداد زوجية. يترك للقارئ البرهنة على أن I مثالي في R .
المطلوب حساب عدد عناصر الحلقة

$$R/I := \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + I \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

الحل : سنكتب

$$a_i = \begin{cases} 1 + (a_i - 1) & , \quad a_i \text{ فردى} \\ 0 + a_i & , \quad a_i \text{ زوجى} \end{cases} , i = 1, \dots, 4$$

وبالتالى يكون أى عنصر فى R/I على الشكل :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 1 \text{ or } 0 & 1 \text{ or } 0 \\ 1 \text{ or } 0 & 1 \text{ or } 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{bmatrix} + I; x, y, z, w \in \mathbb{Z}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \text{ or } 0 & 1 \text{ or } 0 \\ 1 \text{ or } 0 & 1 \text{ or } 0 \end{bmatrix} + I$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{bmatrix} \in I \text{ لأن}$$

ومن ثم يكون عدد عناصر الحلقة R/I هو 2^4 أى 16 .

مثال ٣ : فى النظرية (١-٣-١) رأينا أن الشرط $A \subset R$ مثالى كاف حتى يمكن تكوين

الحلقة R/A . برهن على أنه ضرورى كذلك .

البرهان : ليكن A ليس مثالياً فى R (ليكن حلقة جزئية فى R) . إذن يوجد $r \in R$ ،

$a \in A$ بحيث يكون $ra \notin A$ أو $ar \notin A$. ليكن $ra \notin A$ مثلاً . والآن :

$$0 + A = A = a + A \quad (a \in A)$$

ولكن

$$(r + A)(a + A) = ra + A \neq A \quad (ra \notin A)$$

$$(r + A)(0 + A) = r0 + A = A \quad \text{بينما}$$

إذن عملية الضرب فى "الحلقة" R/A ليست معرفة وبالتالي فإن R/A ليست حلقة .

(قارن مع ملحوظة (١-٣-٢))

مثال ٤ : برهن على أن الحلقة R/N حيث N مثالى فى R تكون إبدالية إذا كان فقط إذا كان :

$$\forall r, s \in R : (rs - sr) \in N$$

البرهان :

$$R/N \text{ إبدالية} \Leftrightarrow \forall r, s \in R : (r + N)(s + N) = (s + N)(r + N)$$

$$\Leftrightarrow \forall r, s \in R : rs + N = sr + N \Leftrightarrow rs - sr \in N$$

مثال ٥ : برهن على أنه إذا كانت R حلقة بها عنصر الوحدة ، وكان N مثالياً في R ، بحيث إن $N \neq R$ ، فإن R/N حلقة لها عنصر الوحدة $\neq$ الصفر .

البرهان : نعلم أن R/N حلقة ، وكذلك إذا كان $1 \in R$ هو عنصر الوحدة ، فإن $1 + N$ هو عنصر الوحدة في R/N . صفر الحلقة R/N هو N . المطلوب إثبات أن $1 + N \neq N$. ولكن $1 + N = N$ يعنى أن $1 \in N$ وإذا كان $1 \in N$ فإن $N = R$ (انظر مثال ٢٥ فى (١-٢-٨)) ، وهذا تناقض . أى أن $1 + N \neq N$

مثال ٦ : برهن على أن الحلقة العاملة لحقل إما أن تكون الحلقة التافهة ذات العنصر الواحد أو أن تكون متشاكله مع الحقل نفسه .

البرهان : ليكن F حقلاً وليكن A مثالياً فى الحقل F . نعلم من مثال ٢٥ (١-٢-٨) أن A إما أن يساوى الحقل نفسه ، أى أن $A = F$ أو أن $A = \{0\}$. وبهذا تكون الحلقة العاملة F/F إما F/F وتكون فى هذه الحالة

$$F/F = \{x + F \mid x \in F\} = \{F\}$$

أى حلقة ذات عنصر واحد هو F أو

$$F/\{0\} = \{x + \{0\} \mid x \in F\} \cong F$$

$$x + \{0\} \leftrightarrow x$$

مثال ٧ : برهن على مجموعة العناصر منعدمة القوة (nilpotent) فى حلقة إبدالية تكون مثالياً (انظر مثال ١٢ فى (١-١-١٥))

البرهان : بدهى أن 0 عنصر منعدم القوة فى الحلقة ، إذن مجموعة العناصر منعدمة القوة ليست خالية .

ليكن a ، b عنصرين منعدمى القوة ، أى أنه يوجد m ، n عددين صحيحين موجبيين بحيث إن $a^m = 0$ ، $b^n = 0$. والآن نعرف $k := m + n$

$$(a-b)^k = (a-b)^{m+n} = a^{m+n} + \binom{m+n}{1} a^{m+n-1}(-b) + \dots + \binom{m+n}{r} a^{m+n-r}(-b)^r + \dots \\ + \binom{m+n}{m+n-1} a(-b)^{m+n-1} + (-b)^{m+n}$$

الحد العام فى المفكوك هو $\binom{m+n}{r} a^{m+n-r} b^r$ وهو يساوى الصفر ، لأنه إذا كان $r \leq n$ فإن $a^{m+n-r} = 0$ ، وإذا كان $r \geq n$ فإن $(-b)^r = 0$

وبالتالى فإنه يوجد عدد صحيح موجب $k = m + n$ بحيث إن $(a-b)^k = 0$ ، أى أن $a - b$ عنصر منعدم القوة .

كذلك إذا كان a كما سبق عنصراً منعدم القوة أى أنه يوجد m عدد صحيح موجب بحيث $a^m = 0$ ، فإنه لأى $r \in R$ يكون $r^m a^m = r^m 0 = 0$. أى أن ra عنصر منعدم القوة . والآن

R إبدالية يستلزم أن ar عنصر منعدم القوة كذلك . ومن ثم البرهان .
تسمى مجموعة العناصر منعدمة القوة فى حلقة إبدالية R " جذر R " (The radical of R) .

مثال ٨ : اوجد جميع المثاليات N فى الحلقة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ، واحسب فى كل مرة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/N$.

الحل : المثاليات فى $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ هى : المثالى التافه أولاً $\{0\}$ ويكون

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} , \text{ ثانياً : } 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} , \text{ ويكون } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

٥-٣-١

$$x + \{0\} \leftrightarrow x$$

$$\text{وثالثاً : } 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} , \text{ ويكون } \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} , \text{ رابعاً : } 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

٥-٣-١

$$\text{ويكون } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} , \text{ خامساً : } 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \text{ ويكون } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

وسادساً: المثالي التافه $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ، ويكون $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\}$ ($\bar{0}$ هو صفر الحلقة

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \text{ أى هو } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} / \mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$$

مثال ٩ : بالإشارة إلى مثال ٧ السابق اوجد جذر الحلقة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ، الحلقة $\mathbb{Z}$

الحل : $z + 12\mathbb{Z}$ يقع فى جذر $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون

$$(z + 12\mathbb{Z})^n = 12\mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \text{ هو صفر الحلقة } 12\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow z^n + 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} \Rightarrow z^n \in 12\mathbb{Z} = \{0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \dots\}$$

$$\Rightarrow z \in \{0, \pm 6, \pm 12, \dots\}$$

ويكون جذر $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ هو $\{0 + 12\mathbb{Z}, 6 + 12\mathbb{Z}\}$ أى هو $\{\bar{0}, \bar{6}\}$.

لاحظ أن هذا الجزء هو المثالي $6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ كذلك لاحظ أن $\pm 12 + 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ ،
 $-6 + 12\mathbb{Z} = 6 + 12\mathbb{Z}$.

z يقع فى جذر $\mathbb{Z}$ إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $z^n = 0$ وهذا يحدث إذا كان فقط إذا كان $z = 0$ أى أن جذر $\mathbb{Z}$ هو $\{0\}$.

مثال ١٠ : يترك للقارئ التحقق من أن $N = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ مثالي فى $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. اوجد $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} / N$

الحل :

$$N = \{0 + 6\mathbb{Z}, 3 + 6\mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

وبالتالى فإن :

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} / 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

مثال ١١ : إذا كانت N هي جذر حلقة إبدالية R فبرهن على أن المثالي التافه $\{N\}$ هو

جذر R/N

البرهان : سنشير إلى جذر R بأنه $Rad(R)$. والآن :

$$Rad(R/N) = \{x + N \mid (x + N)^n = N, x \in R, \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \}$$

$$= \{x + N \mid x^n + N = N, x \in R, \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \}$$

$$= \{x + N \mid x^n \in N, x \in R, \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \}$$

$$= \{x + N \mid x^{nm} = (x^n)^m = 0, x \in R, \quad n, m \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \}$$

$$N = Rad(R)$$

$$= \{x + N \mid x \in Rad(R) = N\} = \{N\}$$

مثال ١٢ : لتكن R حلقة إبدالية ، N مثالي في R ، برهن على أن المجموعة $\sqrt{N}$

المعرفة كالآتي :

$$\sqrt{N} := \{a \in R \mid a^n \in N \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \}$$

مثالي في R . تسمى هذه المجموعة "جذر N " $(Rad(N))$

البرهان : واضح أن $0 \in \sqrt{N}$ أى أن $\sqrt{N}$ ليس مجموعة خالية . والآن :

$$\forall a \in \sqrt{N} \quad \forall r \in R \Rightarrow a^n \in N, r^n \in R \Rightarrow (ra)^n = r^n a^n \in N$$

R إبدالية

$$\Rightarrow ra \in \sqrt{N} \Rightarrow ar \in \sqrt{N}$$

R إبدالية

$$a, b \in \sqrt{N} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : a^m \in N, b^n \in N \Rightarrow$$

$$(a-b)^{m+n} = a^{m+n} + \binom{m+n}{1} a^{m+n-1}(-b) + \dots + \binom{m+n}{r} a^{m+n-r}(-b)^r + \dots$$

$$+ \binom{m+n}{1} a(-b)^{m+n-1} + (-b)^{m+n}$$

الحد العام هو : $T_r = \binom{m+n}{r} a^{m+n-r} (-b)^r$. كما في مثال ٦ إذا كان $r \leq n$ فإن $a^{m+n-r} \in N$

ويكون $T_r \in \sqrt{N}$ (مثالى) . وإذا كان $n \leq r$ يكون $T_r \in \sqrt{N}$ (مثالى) . ومن ثم فإن $(a-b)^{m+n} \in N$ ويكون $a-b \in \sqrt{N}$.
نهاية البرهان .

مثال ١٣ : هل تعريفا "الجزر" الواردان في مثالى ٧ ، ١٢ متسقان consistent ؟

الحل : من مثال ١٢ يتضح أن :

$$a \in R \Rightarrow a^n \in R \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \Rightarrow a \in \sqrt{R} \Rightarrow R \subset \sqrt{R}$$

لكن $\sqrt{R} \subset R$ ومن ثم فإن $\sqrt{R} = R$ (جزر R)

أما في مثال ٧ فإن $\sqrt{R}$ ليس دائماً مساوياً لـ R
إذن التعريفان غير متسقين (inconsistent) .

مثال ١٤ : ما العلاقة بين المثالى $\sqrt{N}$ في مثال ١٢ ، والجزر $Rad(R/N)$ في مثال ٧ ؟

$$\text{الحل : سنبرهن على أن } Rad(R/N) = \sqrt{N}/N$$

$$\Leftrightarrow \text{لـ بعض } n \in \mathbb{N} \text{ (العنصر الصفري في } R/N) \quad (\bar{x})^n = N \quad \Leftrightarrow \bar{x} (= x+N) \in Rad(R/N)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} (= x+N) \in Rad(R/N) \Leftrightarrow (\bar{x})^n = N, n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \Leftrightarrow x^n \in N, n \in \mathbb{N} \text{ لبعض} \Leftrightarrow x \in \sqrt{N} \Leftrightarrow \bar{x} \in \sqrt{N}/N$$

مثال ١٥ : ليكن A ، B مثاليين في الحلقة الإبدالية R . تعرف القسمة A على B (A:B)

(The quotient of A by B)

$$A:B := \{r \in R \mid rb \in A \quad \forall b \in B\} \quad \text{بأنها}$$

برهن على أن $A:B$ مثالى في الحلقة R .

البرهان : واضح أن $0 \in A:B$ ، أى أن $A:B \neq \emptyset$

$$r, s \in A:B \Rightarrow \forall b \in B \quad rb, sb \in A \Rightarrow \forall b \in B \quad (r-s)b = rb - sb \in A$$

A مثالى

$$\Rightarrow r - s \in A : B$$

$$r \in A : B, \lambda \in R \Rightarrow \forall b \in B \quad rb \in A, \lambda \in R \Rightarrow \forall b \in B : (\lambda r)b = \lambda(rb) \in A$$

مثالي A

$$\Rightarrow \lambda r \in A : B \Rightarrow \text{البرهان}$$

٧-٣-١ تعريف : لتكن R حلقة . يقال لمثالي $P \subset R$ إنه مثالي أولي (prime ideal)

إذا كان :

$$(1) P \neq R$$

$$(2) \forall a, b \in R : ab \in P \Rightarrow a \in P \quad \text{أو} \quad b \in P$$

بعبارة أخرى تكافىء العبارة (2) :

$$a \in R \setminus P \text{ و } b \in R \setminus P \Rightarrow ab \in R \setminus P$$

٨-٣-١ أمثلة :

(١) $m \in \mathbb{N} \quad (m \neq 0)$ يقتضى أن $m\mathbb{Z}$ مثالي أولي في $\mathbb{Z}$ إذا كان فقط إذا كان m

عددا أوليا. (راجع (١-٢-٧) (٣))

البرهان : " $\Rightarrow$ " : ليكن m عددا أوليا وليكن $kl \in m\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. هذا يستلزم أنه يوجد

$z \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $kl = mz$. أى أن m قاسم لـ kl . ولأن m عدد أولي إذن m

يقسم k أو يقسم l . أى أنه يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $k = xm$ أو $l = ym$ وهذا

يقتضى أن $k \in m\mathbb{Z}$ أو $l \in m\mathbb{Z}$.

" $\Leftarrow$ " : إذا كان m ليس عددا أوليا ، فإنه يوجد عدداً l, k بحيث يكون $m = kl$ ،

$$k, l \notin m\mathbb{Z} \text{ بينما } kl = m \in m\mathbb{Z} \text{ ولكن } 1 < k, l < m$$

(٢) المثالي $\{0\} \subset \mathbb{Z}$ أولي

٩-٣-١ نظرية :

لتكن R حلقة إبدالية ، لها عنصر الوحدة "١" ، وليكن P مثالياً في R . التقريرات الآتية

متكافئة :

(١) P مثالي أولي

(٢) الحلقة R/P نطاق متكامل

(٣) يوجد نطاق متكامل R' ، ويوجد هومومورفيزم حلق $\phi: R \rightarrow R'$ بحيث يكون $\text{Ker}(\phi) = P$

البرهان : (١) $\Leftarrow$ (٢) : لأن R حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة 1 ، فإن R/P يكون حلقة

إبدالية لها عنصر الوحدة $1 + P$. $1 + P \neq P$ حيث P هو صفر الحلقة R/P ، وإلا فإن

$1 \in P$ وبالتالي يكون $P = R$ وهذا تناقض مع كون P مثالياً أولياً . يتبقى أن نثبت أن R/P

خالية من القواسم الصفرية أى أنه إذا كان $(a+P)(b+P) = P$ فإن $a+P = P$ أو $b+P = P$.

$(a+P)(b+P) = P$ يعنى أن $ab + P = P$ أى أن $ab \in P$. ومن حيث أن P مثالي

أولى فإن $a \in P$ أو $b \in P$ وبالتالي يكون $a+P = P$ أو $b+P = P$.

(٢) $\Leftarrow$ (٣) : نعرف $R' = R/P$ ، الإيمورفيزم الطبيعي، ويكون $\text{Ker}(\phi) = P$

(٣) $\Leftarrow$ (١) : $R' = R/P$ نطاق متكامل يستلزم أن $1 + P \neq P$ أى أن $1 \notin P$ وبالتالي

فإن $P \neq R$

ليكن $a, b \in R$ بحيث إن $ab \in P = \text{Ker}(\phi)$. هذا يقتضى أن $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 0$.

من حيث أن R' نطاق متكامل ينتج أن $\phi(a) = 0$ أو $\phi(b) = 0$ وبالتالي فإن

$a \in \text{Ker}(\phi) = P$ أو $b \in \text{Ker}(\phi) = P$.

نهاية البرهان .

١٠-٣-١ تعريف :

لتكن R حلقة . يقال لمثالي $M \subset R$ إنه مثالي أعظم (maximal ideal) إذا كان :

(١) $M \neq R$

(٢) لا يوجد مثالي $A \subset R$ بحيث يكون $M \subsetneq A \subsetneq R$

(هذا لايعنى أنه لجميع المثاليات $A \subsetneq R$ يكون : $A \subset M$)

١-٣-١١ نظرية :

لتكن R حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة "1". وليكن $A \subset R$ مثالي .

$$\text{حل } R/A \Leftrightarrow \text{مثالي اعظم } A$$

البرهان : " $\Leftarrow$ " : R/A حل يستلزم أن $A \neq 1+A$ أى أن $1 \notin A$ وبالتالي فإن $A \neq R$ والآن ليكن $B \subset R$ مثالياً يحتوى على A فعلياً ، أى أن $A \subsetneq B$. إذن يوجد b بحيث $b \in B$ ، $b \notin A$. عندئذ فإن $b + A$ يكون عنصراً غير صفري (أى ليس مساوياً للصفر) فى R/A (صفر R/A هو A كما نعلم) ، وبالتالي فإنه يوجد $c + A$ بحيث يكون $(b + A)(c + A) = 1 + A$ هو عنصر الوحدة فى R/A (كما سبق) . أى أن :

$$1 + A = (b + A)(c + A) = bc + A$$

وهذا يقتضى أن $1 - bc \in A \subset B$. ولكن $b \in B$ يستلزم أن $bc \in B$ ومن ثم فإن :

$$1 = 1 - bc + bc \in B \quad (\text{لأن } B \text{ مثالي})$$

وهذا يستلزم أن $B = R$. أى أن A مثالي أعظم .

" $\Rightarrow$ " : $A \subsetneq R$ مثالي أعظم يستلزم أن $1 \notin A$ أى أن $1 + A \neq A$ (أى أن صفر R/A لا يساوى عنصر الوحدة $1 + A$ فيه) .

R حلقة إبدالية يستلزم أن R/A حلقة إبدالية .

والآن ليكن $b \in R$ ، $b \notin A$. يتبقى أن نثبت أن $b + A$ لها معكوس ضربى .
نعرف :

$$B := \{br + a \mid r \in R, a \in A\}$$

يسهل التحقق من أن B مثالي يحتوى على A فعلياً (بأخذ $r = 0$) .

ولأن A مثالي أعظم فإن $B = R$. وبالتالي فإن $1 \in B$ وبهذا فإنه يوجد $c \in R$ ، $a' \in A$ بحيث يكون $1 = bc + a'$. والآن :

$$1 + A = bc + a' + A = bc + A = (b + A)(c + A)$$

$$a' \in A \text{ مثالي}$$

أى أن $b + A$ له معكوس ضربى . نهاية البرهان .

(١) فى الحقل K يكون المثالى $\{0\}$ مثالياً أعظم لأنه لا يوجد فى أى حقل سوى مثالين الحقل نفسه أو المثالى $\{0\}$. (مثال ٢٥ فى (١-٢-٨)). المثالى K ليس مثالياً أعظم بالتعريف .

(٢) فى الحلقة $\mathbb{Z}$ جميع المثاليات الأولية فيما عدا $\{0\}$ مثاليات عظمى . من (١-٢-٧) نعلم أن جميع المثاليات فى $\mathbb{Z}$ تكون على الصورة $m\mathbb{Z}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$ ومن (١-٣-٨) نعلم أن $m\mathbb{Z}$ مثالى أولى إذا كان فقط إذا كان m عدداً أولياً أو $m = 0$. أى أن P مثالى أولى فى $\mathbb{Z}$ إذا كان فقط إذا كان p عدداً أولياً بحيث يكون $P = p\mathbb{Z}$ أو $P = \{0\}$. والآن من (١-٣-٩) P مثالى أولى إذا كان فقط إذا كان $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ نطاقاً متكاملاً أو $\mathbb{Z}/\{0\}$ نطاقاً متكاملاً . ولكن $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ نطاق متكامل منته ، ومن (١-١-١٣)

يكون $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقلاً ، ومن (١-٣-١١) يكون $p\mathbb{Z}$ مثالياً أعظم فى $\mathbb{Z}$.

(٣) كل مثالى A فى $\mathbb{Z}$ ، $A \neq \mathbb{Z}$ يكون محتوياً فى مثالى أعظم فى $\mathbb{Z}$. مرة أخرى نعلم أن A مثالى فى $\mathbb{Z}$ إذا كان $A = m\mathbb{Z}$ حيث m عدد طبيعى (أو $m = 0$). فى حالة $m = 0$ واضح أن A يكون محتوياً فى مثالى أعظم (لأن أى مثالى فى $\mathbb{Z}$ يحتوى على العنصر ٠). إذا كان $m \geq 2$ (الحالة $m = 1$ مستبعدة لأن $A \neq \mathbb{Z}$) فإنه يوجد قاسم لـ m هو p حيث p عدد أولى ونحصل على $A = m\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z}$. ومن مثال ٢ السابق مباشرة $p\mathbb{Z}$ هو مثالى أعظم .

١-٣-١٣ تعريف :

لتكن M مجموعة . ولتكن $H \subset M \times M$. يقال إن H ترتيب جزئى (partial order) فى M إذا تحقق :

$$(أ) \text{ لكل } a \in M : (a, a) \in H$$

$$(ب) (a, b) \in H , (b, a) \in H \text{ يستلزم أن } a = b$$

(جـ) $(a,b) \in H$ ، $(b,c) \in H$ ، يستلزم أن $(a,c) \in H$

غالباً ما نكتب $a \leq b$ للتعبير عن $(a,b) \in H$ ، ونستخدم "≤" للتعبير عن الترتيب الجزئي .

١-٣-١٤ تعريف :

(أ) لتكن M مجموعة ، وليكن "≤" ترتيباً جزئياً في M . يقال أن "≤" ترتيب كلي

في M (total order) إذا كان لكل عنصرين $a, b \in M$ يكون $a \leq b$ أو $b \leq a$

(ب) إذا كان "≤" ترتيباً جزئياً في مجموعة M . تسمى المجموعة الجزئية غير الخالية

K من M سلسلة (chain) في M (بالنسبة إلى "≤") إذا كان لكل عنصرين $a, b \in K$

يكون : $a \leq b$ أو $b \leq a$.

١-٣-١٥ أمثلة :

(١) العلاقة المعتادة "أقل من أو يساوي" على $\mathbb{R}$ هي ترتيب كلي في $\mathbb{R}$.

(٢) إذا كانت M مجموعة فيكون $A \leq B : \Leftrightarrow A \subset B$ ترتيباً جزئياً لمجموعة القوة

$$M \rightarrow \mathbb{P}(M)$$

وإذا كان $M := \{a, b\}$ ، فإن الترتيب الجزئي ليس ترتيباً كلياً ، لأنه لا يحدث

$$\{a\} \leq \{b\} \text{ ولا يحدث } \{b\} \leq \{a\} .$$

١-٣-١٦ تعريف :

لتكن M زمرة ، "≤" ترتيباً جزئياً ، A مجموعة جزئية من M .

(أ) يقال لعنصر $s \in M$ إنه حد أعلى (upper bound) أو حد أدنى (lower bound)

في A إذا كان $a \leq s$ أو $s \leq a$ على الترتيب لجميع $a \in A$.

(ب) يقال لعنصر $a \in A$ إنه عنصر أخير (last element) إذا كان a حداً أعلى في A .

ويقال إنه عنصر أول (first element) إذا كان a حداً أدنى في A .

(جـ) يقال لعنصر $m \in A$ إنه عنصر أعظم (maximal element) في A أو عنصر أصغر

(minimal element) في A إذا كان لكل a عنصر في A : $m \leq a$ أو $a \leq m$ على

الترتيب ينتج أن $m = a$.

١-٣-١٧ ملحوظة :

لتكن M مجموعة ، وليكن " $\leq$ " ترتيباً جزئياً ، A مجموعة جزئية من M .
 (أ) A لها على الأكثر عنصر أخير واحد وعلى الأكثر عنصر أول واحد .
 (ب) إذا كان A — عنصر أخير a (أو عنصر أول a) فإن A — عنصر أعظم واحد بالضبط هو a (أو عنصر أصغر واحد بالضبط) هو a .
 (ج) ليكن V فراغاً خطياً (vector space) ذا بعد $(\dim V > 1)$ و $1 < \dim V$ و A مجموعة جميع الفراغات الخطية الجزئية U (vector subspaces) في V ، حيث بعد $1 \leq \dim U$. عندئذ فإنه من خلال التعريف $U \subset W \Leftrightarrow U \leq W$ يوضح ترتيب جزئي " $\leq$ " في A . ولأن $\dim V > 1$ لا يكون هناك عنصر أول لـ A . بينما كل فراغ جزئي من V ذي بعد 1 سيكون عنصراً أصغر في A .

١-٣-١٨ تعريف :

لتكن M مجموعة غير خالية . وليكن " $\leq$ " ترتيباً جزئياً في M . يقال إن M مرتبة استقرائياً (inductively ordered) لـ " $\leq$ " إذا كانت كل سلسلة في M لها حد أعلى .

١-٣-١٩ بديهية زورن Zorn's Lemma

كل مجموعة مرتبة استقرائياً لها على الأقل عنصر أعظم من المعلوم أن بديهية زورن تكافئ بديهية الاختيار (Axiom of choice) التي تنص على أن "حاصل الضرب الكارتيزي لعائلة غير خالية من المجموعات غير الخالية ليس خالياً" "The Cartesian product of a non-empty family of non-empty sets is non-empty"
 وفي حلقة نويترية (سنعرفها فيما بعد) R لاتساوى $\{0\}$ لكل مثالي A يوجد مثالي أعظم M بحيث إن $A \subset M$. ومجموعة كل المثاليات في R والتي لاتساوى R والتي تحتوى على A لها مثالي أعظم . وهذا المثالي الأعظم مثالي أعظم في R . وباستخدام بديهية زورن سنبرهن على أن هناك موقفاً مشابهاً لكل حلقة إبدالية لها عنصر وحدة يختلف عن صفرها .

١-٣-٢٠ نظرية :

لتكن R حلقة إبدالية ، لها عنصر الوحدة غير مساو لصفرها . عندئذ فإنه لكل مثالى $A \subset R$ يوجد مثالى أعظم M فى R بحيث إن $A \subset M$.

البرهان : لتكن I مجموعة كل المثاليات B فى R بحيث إن $A \subset B \subset R$. سنعرف ترتيباً جزئياً " $\leq$ " فى I كالآتى : $B \leq C \Leftrightarrow B \subset C$. وبهذا تكون I مرتبة استقرائياً من

خلال " $\leq$ " لأن : $A \in I$ يجعل I غير خالية ، وإذا كانت K سلسلة فى I فإن $\bigcup_{B \in K} B$

يكون عنصراً فى I لأن : $\bigcup_{B \in K} B$ مثالى فى R ، لأن $K \neq \emptyset$ يستلزم أن $B \neq \emptyset$.

وكذلك $b, c \in \bigcup_{B \in K} B$ يقتضى أنه يوجد $C, D \in K$ بحيث إن $b \in C$ ، $c \in D$.

ولأن K سلسلة فإن $C \subset D$ أو $D \subset C$ ، وبالتالي يكون $b - c \in C$ أو $b - c \in D$ أى أن $b - c \in \bigcup_{B \in K} B$. وأيضاً $b \in \bigcup_{B \in K} B$ يقتضى أن $rb \in \bigcup_{B \in K} B$ لجميع $r \in R$

والآن $A \subset \bigcup_{B \in K} B \subset R$ ، لأنه إذا كان $\bigcup_{B \in K} B = R$ فإن عنصر الوحدة 1 فى R يجب أن ينتمى إلى C - مثلاً - أحد عناصر K . وبهذا يكون $C = R$. وهذا تناقض . والآن

من بديهية زورن يجب أن تحتوى I على عنصر أعظم M ، الذى هو - كما هو واضح - مثالى أعظم فى R بحيث إن $A \subset M$.

١-٣-٢٠ أمثلة محلولة :

مثال ١ : ليكن $\varphi: R \rightarrow R'$ هومومورفيزم حلق بحيث إن $\varphi(1) = 1'$ (عنصر الوحدة فى R' ، R على الترتيب) . وليكن A' مثالياً أولياً فى R' .

برهن على أن $\varphi^{-1}(A')$ مثالى أولى فى R .

البرهان : نعلم أن $\varphi^{-1}(A')$ مثالى من مثال ١١ فى (١-٢-٨) . يتبقى أن نثبت أنه أولى .

، $\varphi^{-1}(A') \neq R$ ، لأنه إذا كان $\varphi^{-1}(A') = R$ فإن $1 \in \varphi^{-1}(A')$ وبالتالي فإن

$1' = \varphi(1) \in A'$ وهذا يقتضى $A' = R$: تناقض لأن A' مثالى أولى فى R' .

ليكن $xy \in \varphi^{-1}(A')$. هذا يستلزم أن $\varphi(xy) \in A'$. لأن A' مثالي
أولى فإن $\varphi(x) \in A'$ أو $\varphi(y) \in A'$ وبالتالي فإن $x \in \varphi^{-1}(A')$ أو $y \in \varphi^{-1}(A')$.
مثال ٢ : أوجد جميع المثاليات الأولية والعظمى في $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

الحل : انظر مثال ٨ في (١-٣-٦) . المثالي $\{0\}/12\mathbb{Z}$ مثالي أولى ، لكنه ليس مثالياً أعظم .

اعتبر المثالي $2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ حلقة تشاكل الحلقة $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ من (١-٣-٥)

وهذه نطاق متكامل من (١-٣-٨) ، (١-٣-٩) . ومن (١-٣-١١) هي حقل . ومن
(١-٣-١١) يكون $2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ مثالياً أعظم وبالتالي فهو أولى (لماذا) ؟ كذلك اعتبر المثالي

$3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. الحلقة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} / 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ تشاكل الحلقة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ويتسلسل مشابه تماماً لما

سبق يكون $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ مثالياً أعظم ومثالياً أولياً في $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. لماذا لا توجد مثاليات أولية
أو عظمى أخرى ؟

مثال ٣ : ليكن K حقلاً . وليكن $\varphi: K \rightarrow K$ هومومورفيزم حلق . برهن على أن φ
إما أن يكون الراسم الصفري (أي أن $\varphi(K) = \{0\}$) أو أن φ أيزومورفيزم .

البرهان : في مثال ٣٣ من (١-٢-٨) رأينا أن $Ker(\varphi) = \{0\}$ أو $Ker(\varphi) = K$.
ومن (١-٣-٣) ينتج أن :

$$Ker(\varphi) = \{0\} \Rightarrow K/\{0\} \cong \varphi(K)$$

أي أن $K \cong \varphi(K)$ أي أن φ أيزومورفيزم

$$(\text{لاحظ أن } K/\{0\} \cong K)$$

$$x \leftrightarrow x + \{0\}$$

$$\text{Ker}(\varphi) = K \Rightarrow K/K \cong \varphi(K)$$

أى أن $\varphi(K) \cong \{0\}$ ، أى أن φ هو الراسم الصفري .

وبالطبع ينتج مباشرة من $\text{Ker}(\varphi) = K$ أن φ هو الراسم الصفري

مثال ٤ : ليكن $S := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ عدد زوجي}\}$. برهن على أن S حلقة جزئية من $\mathbb{Z}[i]$ ، لكن S ليست مثالياً فى $\mathbb{Z}[i]$.

البرهان : $0+0i \in S$. أى أن $S \neq \emptyset$.

حيث $a+2bi, c+2di \in S$ ينتج أن :

$$a+2bi - (c+2di) = a-c + 2(b-d)i \in S,$$

وينتج أن S حلقة جزئية من $\mathbb{Z}[i]$. $(a+2bi)(c+2di) = ac - 4bd + 2(ad+bc)i \in S$

ليكن $1-i \in \mathbb{Z}[i]$ ، $1+2i \in S$:

$$(1-i)(1+2i) = 3+i \notin S \Rightarrow S \text{ ليست مثالياً فى } \mathbb{Z}[i]$$

مثال ٥ : برهن على أن المثالى $[X^2+1]$ (أى المثالى المتولد من العنصر X^2+1)

فى $\mathbb{R}[X]$ (حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية) مثالى أعظم

البرهان : نعتبر الراسم :

$$\varphi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f(i)$$

(أى أن $\varphi(f) = f(i)$) . هذا الراسم شامل (غامر ، فوقى) وهذا واضح . وكذلك هو

هومومورفيزم حلقى لأن :

$$\forall f, g \in \mathbb{R}[X]: \varphi(f+g) = (f+g)(i) = f(i) + g(i) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

$$\varphi(f.g) = (f.g)(i) = f(i).g(i) = \varphi(f).\varphi(g)$$

ونبرهن على أن نواة (φ) هى :

$$\text{Ker}(\varphi) = [X^2+1]$$

واضح أن $[X^2+1] \subset \text{Ker}(\phi)$ (لأن $i^2+1=0$) . والآن نبرهن على أن $\text{Ker}(\phi) \subset [X^2+1]$:
 ليكن $f \in \text{Ker}(\phi)$. هذا يستلزم أنه يوجد $q, r \in \mathbb{R}[X]$ بحيث إن $f = q(X^2+1) + r$ ،
 من الدرجة الأولى (سندرس هذا بالتفصيل فيما بعد) . أى أنه يوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث
 أن $r = aX + b$. والآن :

$$0 =_{f \in \text{Ker}(\phi)} f(i) = ai + b \Rightarrow a = 0, b = 0$$

أى أن $f = q(X^2+1) \in [X^2+1]$ أى أن $\text{Ker}(\phi) \subset [X^2+1]$ ، ومن ثم فإن
 $\text{Ker}(\phi) = [X^2+1]$

والآن نطبق النظرية (٣-٣-١) (نظرية الهومومورفيزم) فنحصل على :

$$\mathbb{R}[X] / [X^2+1] = \mathbb{R}[X] / \text{Ker}(\phi) \cong \phi(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{C}$$

ϕ غامر

ومن حيث إن $\mathbb{R}[X]$ حلقة إبدالية ، لها عنصر الوحدة ، $\mathbb{C}$ حقل فإنه ينتج من النظرية

(١١-٣-١) أن $[X^2+1]$ مثالي أعظم فى $\mathbb{R}[X]$

مثال ٦ : برهن على أن : المثالي $[X^2 + \bar{1}]$ ليس مثاليا أوليا فى الحلقة $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$

(حلقة كثيرات الحدود التى معاملاتها $\bar{0}$ ، $\bar{1}$)

البرهان :

$$(X + \bar{1})^2 = X^2 + 2X + \bar{1} = X^2 + \bar{1} \in [X^2 + \bar{1}] \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

لكن $X + \bar{1}$ ليس عنصرا فى $[X^2 + \bar{1}]$

مثال ٧ : لتكن R حلقة جميع الدوال (الرواسم) المتصلة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. برهن على أن

$$A := \{f \in R \mid f(0) = 0\}$$

مثالي أعظم فى R .

البرهان : نبرهن أولا على أن A مثالي فى R .

$$\bar{0} \in A \quad (\text{الرأسم الصفرى}) \quad \text{لأن} \quad \bar{0}(0) = 0 \quad \text{أى أن} \quad A \neq \emptyset$$

$$f - g \in A \iff (f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0 \iff f, g \in A$$

$$\left. \begin{aligned} gf \in A &\iff (gf)(0) = g(0)f(0) = g(0)0 = 0, \\ fg \in A &\iff (fg)(0) = f(0)g(0) = 0g(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad g \in R, f \in A$$

أى أن A مثالي في R . والآن نعرف الراسم

$$\varphi: R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto f(0)$$

φ هومومورفيزم، φ شامل (غامر، فوقى)، $\text{Ker}(\varphi) = A$ ، ثم طبق النظرية (٣-٣-١).
ومن حيث إن $\mathbb{R}$ حقل، R إبدالية، ذات عنصر وحدة، ينتج المطلوب من النظرية (١-٣-١١)، كما سبق في مثال ٥ السابق.

مثال ٨: اعتبر $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$ (حلقة كثيرات الحدود في X التى معاملاتها $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{4}$).

أوجد المعكوس الضربى لـ $\bar{2}X + \bar{3} + I$ حيث $I = [X^2 + X + \bar{2}]$ فى الحلقة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]/I$

الحل: ليكن المعكوس الضربى للعنصر $\bar{2}X + \bar{3} + I$ هو $aX + b + I$ حيث $a, b \in \{\bar{0}, \dots, \bar{4}\}$ والآن لدينا

$$(\bar{2}X + \bar{3} + I)(aX + b + I) = \bar{1} + I$$

أى أن

$$\bar{2}aX^2 + (\bar{3}a + \bar{2}b)X + \bar{3}b - \bar{1} \in I$$

$$\Rightarrow \bar{2}aX^2 + (\bar{3}a + \bar{2}b)X + \bar{3}b - \bar{1} = \lambda(X^2 + X + \bar{2})$$

$$\Rightarrow \bar{2}a = \lambda \quad (1),$$

$$\bar{3}a + \bar{2}b = \lambda \quad (2),$$

$$\bar{3}b - \bar{1} = \bar{2}\lambda \quad (3)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\bar{5}a + \bar{2}b = \bar{2}\lambda$ أى أن (4) $\bar{2}b = \bar{2}\lambda$. ومن (3)، (4) ينتج أن

$\bar{3}b - \bar{1} = \bar{2}b$ أى أن $b = \bar{1}$. ومن (4) ينتج أن $\lambda = \bar{1}$. ومن (1) ينتج أن $a = \bar{3}$. أى

أن المعكوس هو $\bar{3}x + \bar{1} + I$

مثال ٩ : اوجد جميع عناصر $\mathbb{Z}[i]/[3+i]$

الحل : لاحظ أن $(3-i)(3+i)=10$. وبالتالي فإن $10+[3+i]=0+[3+i]$ (لأن

$$i+[3+i]=-3+[3+i]=7+[3+i] \text{ وكذلك فإن } (3+i)(3-i) \in [3+i]$$

ومن ثم فإن $\mathbb{Z}[i]/[3+i] = \{0+[3+i], 1+[3+i], \dots, 9+[3+i]\}$

مثال ١٠ : برهن على أن $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/[X^2+X+1]$ ليس نطاقا متكاملا .

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات $0, 1, 2$

$$\text{البرهان : } X^2+X+1 = X^2-2X+1 = (X-1)^2 \in [X^2+X+1]$$

ولكن $X-1 \notin [X^2+X+1]$ وبالتالي فإن $[X^2+X+1]$ ليس مثاليا أوليا في

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ، وبالتالي فإن $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/[X^2+X+1]$ ليس نطاقا متكاملا (١-٣-٩) .

مثال ١١ : برهن على أن $[X^2+X+1]$ مثالي أعظم في الحلقة $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$

البرهان : سنبرهن على أن $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/[X^2+X+1]$ حقل ، وبالتالي ينتج المطلوب

مباشرة (١-٣-١١) .

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ حلقة إيدالية لها عنصر الوحدة 1 يختلف عن 0 (صفرها) وبالتالي فإن

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/[X^2+X+1]$ حلقة إيدالية عنصر الوحدة فيها هو $1+[X^2+X+1]$

وعنصرها الصفرى هو $[X^2+X+1]$. وهى تتكون بالضبط من أربعة عناصر:

عنصرها الصفرى ، عنصر الوحدة ،

$$\bar{1} + X + [X^2 + X + \bar{1}] , X + [X^2 + X + \bar{1}]$$

$$X^2 + [X^2 + X + \bar{1}] = -\bar{1} - X + [X^2 + X + \bar{1}] = \bar{1} + X + [X^2 + X + \bar{1}],$$

$$\bar{1} + X^2 + [X^2 + X + \bar{1}] = -X + [X^2 + X + \bar{1}] = X + [X^2 + X + \bar{1}],$$

$$X + X^2 = -\bar{1} + [X^2 + X + \bar{1}] = \bar{1} + [X^2 + X + \bar{1}]$$

$$\bar{1} + X + X^2 + [X^2 + X + \bar{1}] = [X^2 + X + \bar{1}],$$

والمعكوس الضربى لـ $X + [X^2 + X + \bar{1}]$ هو $\bar{1} + X + [X^2 + X + \bar{1}]$ لأن

$$(X + [X^2 + X + \bar{1}])(\bar{1} + X + [X^2 + X + \bar{1}]) = X + X^2 + [X^2 + X + \bar{1}]$$

عنصر الوحدة في الحلقة $\bar{1} + [X^2 + X + \bar{1}]$

$$\text{أى أن } \frac{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]}{[X^2 + X + \bar{1}]} \text{ حقل . نهاية البرهان .}$$

مثال ١٢ : لتكن R حلقة جميع الدوال المتصلة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. ولتكن

$$A := \{f \in R \mid f(0) = 2n, n \in \mathbb{Z}\} . \text{ برهن على أن } A \text{ حلقة جزئية من } R , \text{ لكنه ليس}$$

مثالياً في R .

البرهان : $0 \in A$ (الرأس الصفرى) ، أى أن $A \neq \emptyset$. (الرأس الصفرى دالة متصلة)

$$\text{ليكن } f, g \in A \text{ ينتج أن : } (f-g)(0) = f(0) - g(0) = 2n - 2k \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$= 2(n-k) \in 2\mathbb{Z}$$

(بدهى أن $f-g$ دالة متصلة)

$$(fg)(0) = f(0)g(0) = 2n \cdot 2k = 2 \cdot 2nk \in 2\mathbb{Z}$$

أى أن A حلقة جزئية من R . (fg دالة متصلة)

والآن لتكن $f = 2$ ، $g = \sqrt{3}$ دالتين متصلتين ، $f \in A$ ، $g \in R$. لكن

$$(fg)(0) = 2\sqrt{3} \notin A . \text{ أى أن } A \text{ ليس مثالياً في } R .$$

مثال ١٣ : بالرجوع إلى مثال ١١ فى (١-٣-٦) برهن على أن :

$$(أ) \quad N \subset \sqrt{N}$$

$$(ب) \quad \sqrt{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

(جـ) إذا كان N مثالياً أولاً فإن $\sqrt{N} = N$

البرهان : (أ) لبعض $n \in \mathbb{N}$ $x^n \in N \Rightarrow x \in N$ مثالى

$$\Rightarrow x \in \sqrt{N} \Rightarrow N \subset \sqrt{N}$$

(ب) من (أ) لدينا : $\sqrt{N} \subset \sqrt{\sqrt{N}}$. والآن :

$$x \in \sqrt{\sqrt{N}} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \sqrt{N} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x^{mn} = (x^n)^m \in N$$

$$\Rightarrow x \in \sqrt{N} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{N}} \subset \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

(جـ) من (أ) لدينا : $N \subset \sqrt{N}$. والآن :

$$x \in \sqrt{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in N \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in N \quad \text{أو} \quad x^{n-1} \in N$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x \in N \Rightarrow \sqrt{N} \subset N \Rightarrow \sqrt{N} = N.$$

مثال ١٤ : لتكن $R = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$. اوجد :

$$(أ) \quad \sqrt{[0]} \quad (ب) \quad \sqrt{[3]} \quad (جـ) \quad \sqrt{[9]}$$

الحل : من مثال ١١ : { لبعض $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in N$ } $\sqrt{N} := \{a \in R \mid a^n \in N, n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$

$$\sqrt{[0]} := \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid \bar{a}^n \in [0], n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid \bar{a}^n \in [0] + 27\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a^n \in 27\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a = 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots, \pm 24, \pm 27, \dots\} \quad (\bar{0} = \overline{27})$$

$$= [\bar{3}]$$

(لاحظ أن $[\bar{a}] = \overline{[a]}$)

$$\sqrt{[\bar{3}]} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid \bar{a}^n \in [3] + 27\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\} \quad (\text{ب})$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a^n - 3m \in 27\mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ لبعض و } n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a = 0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$$

$$= [\bar{3}]$$

$$\sqrt{[\bar{9}]} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid \bar{a}^n \in [9] + 27\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\} \quad (\text{ج})$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a^n - 9m \in 27\mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ لبعض و } n \in \mathbb{N} \text{ لبعض}\}$$

$$= \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \mid a = 0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$$

$$= [\bar{3}]$$

مثال ١٥ : لتكن R حلقة إبدالية . برهن على أن $R/\sqrt{[0]}$ ليس بها عناصر منعومة

القوة (nilpotent) غير الصفر . (انظر مثال ١٢ في (١-١٥))

البرهان : ليكن $(x + \sqrt{[0]})^n = 0 + \sqrt{[0]}$ لبعض $n \in \mathbb{N}$ ، أى أن $x + \sqrt{[0]}$ منعوم

القوة (وهو عنصر فى $R/\sqrt{[0]}$) . هذا يقتضى أن $x^n + \sqrt{[0]} = 0 + \sqrt{[0]}$ وهذا

يستلزم أن $x^n \in \sqrt{[0]}$. وبالتالي فإنه يوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث إن $(x^n)^m \in [0]$ أى أنه

يوجد $k (= mn) \in \mathbb{N}$ بحيث إن $x^k \in [0]$ وبالتالي فإن $x \in \sqrt{[0]}$ أى أن العنصر

الوحيد منعوم القوة فى $R/\sqrt{[0]}$ هو $0 + \sqrt{[0]}$.

مثال ١٦ : برهن على أنه في $C(\mathbb{R})$ (حلقة الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R} . m_x := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$$

مثالى أعظم .

البرهان : $\hat{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة وتحقق الشرط $\hat{0}(x) = 0$ ،
 $x \mapsto 0$

فهى عنصر فى m_x ، أى أن $m_x \neq \emptyset$. وإذا كان $f, g \in m_x$ فواضح أن $f - g \in m_x$.
 كذلك إذا كان $f \in m_x$ ، $g \in C(\mathbb{R})$ فإن :

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = g(x)0 = 0$$

أى أن : $gf \in m_x$ ، وكذلك $fg \in m_x$. وبالتالي فإن m_x مثالى فى $C(\mathbb{R})$.

$$\varphi : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto f(x)$$

والآن نعرف الراسم :

φ راسم غامر (شامل ، فوقى) : واضح لأنه بأخذ قيمة $r \in \mathbb{R}$ نأخذ الدالة الثابتة

$f = r$ $\exists f \in C(\mathbb{R})$ (وهى متصلة بالطبع) فيكون $\varphi(r) = r$. كذلك φ هومومورفيزم :

$$\forall f, g \in C(\mathbb{R}) : \varphi(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

$$\varphi(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = \varphi(f)\varphi(g)$$

والآن نحسب نواة (φ) :

$$Ker(\varphi) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \varphi(f) = 0\}$$

$$= \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = 0\}$$

$$= m_x$$

وبتطبيق نظرية الهومومورفيزم (١-٣-٣) نحصل على :

$$C(\mathbb{R}) / m_x = C(\mathbb{R}) / Ker(\varphi) = \varphi(C(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$$

φ غامر

ولأن $\mathbb{R}$ حقل ، $C(\mathbb{R})$ حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة "1" فينتج من (١-٣-١١) أن

m_x مثالى أعظم فى $C(\mathbb{R})$

مثال ١٧ : هل الراسم $\varphi: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ هو مومورفيزم حلقى ؟
 $\bar{x} \mapsto \overline{6x}$

الحل : لدينا

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \varphi(x + 6\mathbb{Z}) = 6x + 30\mathbb{Z}$$

والآن

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z} : \varphi(x + 6\mathbb{Z} + y + 6\mathbb{Z}) &= \varphi(x + y + 6\mathbb{Z}) \\ &= 6(x + y) + 30\mathbb{Z} = 6x + 6y + 30\mathbb{Z} \\ &= 6x + 30\mathbb{Z} + 6y + 30\mathbb{Z} = \varphi(x + 6\mathbb{Z}) + \varphi(y + 6\mathbb{Z}) \\ \varphi((x + 6\mathbb{Z})(y + 6\mathbb{Z})) &= \varphi(xy + 6\mathbb{Z}) = 6xy + 30\mathbb{Z} \\ &= 36xy + 30\mathbb{Z} = (6x + 30\mathbb{Z})(6y + 30\mathbb{Z}) = \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

بعض المراجع تعتبر أن φ هو مومورفيزم ، وهذا هو الذى سرنا عليه من قبل . مراجع أخرى تنص على أنه إذا كان $\varphi: R \rightarrow S$ حيث R, S حلقتان ، لهما عنصرا وحدة $1_R, 1_S$ فحتى يكون φ هو مومورفيزما يجب أن يحقق شرطا إضافيا وهو $\varphi(1_R) = 1_S$.

وإذا اعتمدنا هذا التعريف ففي حالة مثالنا الراهن $\varphi(\bar{1}) = \bar{6}$

$\bar{6}$ ليس هو عنصر الوحدة في $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ بل عنصر الوحدة في $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ هو كذلك $\bar{1}$ أى $1 + 30\mathbb{Z}$ ، فلا يكون φ هو مومورفيزما .

ملحوظة : تركنا للقارئ التحقق من أن φ معرف جيدا !

مثال ١٨ : اختبر إذا ما كان الراسم $\varphi: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ هو مومورفيزما .
 $x + 4\mathbb{Z} \mapsto 5x + 10\mathbb{Z}$

الحل : نبرهن أولا على أن φ معرف جيدا كالاتى :

ليكن $x + 4\mathbb{Z} = y + 4\mathbb{Z}$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ينتج أن : يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث إن $x = y + 4k$ وهذا يقتضى أن :

$$\begin{aligned}\varphi(x+4\mathbb{Z}) &= 5x+10\mathbb{Z} = 5(y+4k)+10\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \\ &= 5y+20k+10\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \\ &= 5y+10\mathbb{Z} = \varphi(y+4\mathbb{Z})\end{aligned}$$

أى أن φ معرف جيداً .

والآن لجميع $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x+4\mathbb{Z}+y+4\mathbb{Z}) &= \varphi(x+y+4\mathbb{Z}) = 5(x+y)+10\mathbb{Z} \\ &= 5x+5y+10\mathbb{Z} = 5x+10\mathbb{Z}+5y+10\mathbb{Z} = \varphi(x+4\mathbb{Z})+\varphi(y+4\mathbb{Z}) \\ \varphi((x+4\mathbb{Z})(y+4\mathbb{Z})) &= \varphi(xy+4\mathbb{Z}) = 5xy+10\mathbb{Z} = 25xy+10\mathbb{Z} \\ &= (5x+10\mathbb{Z})(5y+10\mathbb{Z}) = \varphi(x+4\mathbb{Z})\varphi(y+4\mathbb{Z})\end{aligned}$$

(لاحظ أن $(25+10\mathbb{Z} = 5+10\mathbb{Z})$)

لكننا نلاحظ أن $\varphi(1+4\mathbb{Z}) = 5+10\mathbb{Z}$ ، عنصر الوحدة في $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ هو $1+10\mathbb{Z}$.
المسألة الآن تتوقف على التعريف هل يكون شرطاً ضرورياً أن يتحقق: صورة عنصر الوحدة في الحلقة R هي عنصر الوحدة في الحلقة S حتى يكون $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزماً أم لا . ونحن لم نشترط هذا الشرط. كما ذكرنا في المثال السابق مباشرة .

مثال ١٩ : المطلوب تعيين جميع هومومورفيزمات الحلق من $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$

الحل : سنوجد أولاً جميع هومومورفيزمات الزمر من $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

نحن نعلم أن الهومومورفيزم سيتحدد تماماً إذا عرفنا صورة $\bar{1}$ (مولد الزمرة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$) .

فإذا كان الهومومورفيزم هو φ ، وكان $\varphi(\bar{1}) = \bar{a}$ فإن $\varphi(\bar{x}) = \bar{ax}$ ومن نظرية

لاجرانج (نظرية الزمر - (١-١٠-٣)) $Ord(\varphi(\bar{1})) = Ord(\bar{a})$ يقسم $Ord(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})$

أى يقسم 30 . ومن مثال ٥٩ من أمثلة متنوعة في الباب الأول من نظرية الزمر

$Ord(\varphi(\bar{1})) = Ord(\bar{a})$ يقسم $Ord(\bar{1})$ أى يقسم 12. أى أن $Ord(\varphi(\bar{1})) = Ord(\bar{a})$

يقسم 12 ، 30 وبالتالي يكون $Ord(\bar{a}) \in \{1, 2, 3, 6\}$ ، وبالتالي يكون $\bar{a}$ هو : 0 أو 15 أو 10 أو 20 أو 5 أو 25 . ونترك للقارئ التحقق من أنها جميعاً تعطى هومومورفيزمات زمرة .

والآن نختبر أياً من هذه هومومورفيزمات الزمرة سيكون هومومورفيزم حلق : فنلاحظ أنه في $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ يكون $1.\bar{1} = \bar{1}$ وبالتالي فإن :

$$\bar{a} = \varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{1}.\bar{1}) = \varphi(\bar{1}).\varphi(\bar{1}) = \bar{a}.\bar{a}$$

في $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ لكن $5 \neq 5.5 = 25$ في $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ أى أن $\bar{a} = 5$ لا يصلح .

كذلك فإن : $\bar{20} \neq \bar{20}.\bar{20} = \overline{400} = \bar{10}$ أى أن $\bar{a} = \bar{20}$ كذلك لا يصلح .
 $\bar{a} = \bar{0}, \bar{15}, \bar{10}, \bar{25}$ جميعاً تحقق $\bar{a} = \bar{a}.\bar{a}$ ، ويترك للقارئ التحقق من أنها جميعاً تعرف هومومورفيزمات حلق .

مثال ٢٠ : اعتبر المتوالية 3 ، 7 ، 11 ، 15 ، ... هل من الممكن أن يكون أحد حدود هذه المتوالية يساوى مجموع مربعين لعددين صحيحين ؟

الحل : الحد العام فى هذه المتوالية هو $3 + 4n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ أى عدد طبيعى أكبر من أو يساوى الصفر . فإذا كان أحد الحدود مجموع مربعين لعددين صحيحين x, y مثلاً فإن :

$$3 + 4n = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{Z}$$

وبالحساب فى $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ يكون

$$\bar{3} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

وبالحساب المباشر نجد أنه لا يوجد $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ اللتان تحققان المعادلة . إذن لا يمكن أن

يكون أحد حدود المتوالية يساوى مجموع مربعى عددين صحيحين .

مثال ٢١ : برهن على أن المتوالية 2 ، 10 ، 18 ، 26 ، ... لا تحتوى على أى مكعب

البرهان : الحد العام في المتوالية هو $2+8k, k \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوى الصفر). بالحساب في $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ، أى بالحساب مقياس 8 ، إذا كان هناك حد في المتوالية مكعب :

$$x^3 \equiv 2 \pmod{8} \quad (1)$$

واضح أن x لا يمكن أن تكون فردية أى أن x لا تساوى 1 أو 3 أو 5 أو 7 . وتجربة $x = 2, 4, 6$ ، $x = 6$ يتضح أن أياً منها لا يحقق (1) . وهو المطلوب .

مثال ٢٢ : في $\mathbb{Z}$: ليكن $A = [2]$ (المثالي المتولد من 2) ، $B = [8]$. برهن على أن الزمرة A/B تكون متشاكلية (أيزومورفية) مع $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ، لكن الحلقة A/B لا تكون أيزومورفية مع $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

البرهان : الزمرة $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ هي $\{8\mathbb{Z}, 2+8\mathbb{Z}, 4+8\mathbb{Z}, 6+8\mathbb{Z}\}$ ، وهى دائرية ومولدها $2+8\mathbb{Z}$ (كذلك يصلح $6+8\mathbb{Z}$ مولداً لها) وبالتالي فهى تتشاكل مع الزمرة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (انظر نظرية تفصيل الزمر الدائرية (١-١١-٨) فى نظرية الزمر).

الحلقة $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ تتكون بالطبع كما سبق ، لكن ليس بها عنصر وحدة ، بينما الحلقة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ لها عنصر الوحدة $1+4\mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ كحلقتين تكونان غير متشاكلتين .

مثال ٢٣ : برهن على أن مجموع مربعات ثلاثة أعداد صحيحة متتالية لا يمكن أن يساوى مربعاً .

البرهان : لنفترض أن الأعداد الثلاثة المتتالية هى : $x-1, x, x+1$ حيث $x \in \mathbb{Z}$. إذا كان الادعاء صحيحاً فإنه يوجد $y \in \mathbb{N}$ بحيث يكون :

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2 = y^2$$

وبالحساب مقياس 3 نحصل على : $y^2 \equiv 2 \pmod{3}$. وواضح أنه لا يوجد حل لهذه المعادلة ويكون الادعاء خاطئاً .

مثال ٢٤ : قابلية القسمة على 9 :

برهن على أن العدد n ذا التمثيل العشري $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ يكون قابلاً للقسمة على 9 إذا كان فقط إذا كان $a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$ قابلاً للقسمة على 9 .

البرهان :

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^{k-1}a_{k-1} + 10^k a_k$$

$$= a_0 + 10a_1 + \dots + \underbrace{10 \dots 10}_{k-1 \text{ من المرات}} a_{k-1} + \underbrace{10 \dots 10}_k a_k$$

$k-1$ من المرات k من المرات

بالحساب في مقياس 9 نحصل على :

$$n \equiv a_0 + a_1 + \dots + \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} a_{k-1} + \underbrace{1 \dots 1}_k a_k \pmod{9}$$

$k-1$ من المرات K من المرات

$$\Rightarrow [n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k)] \text{ يقسم } 9$$

أى أن n يقبل القسمة على 9 إذا كان فقط إذا كان $a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ يقبل القسمة على 9 .

ملحوظة : لاحظ أننا عند الحساب في المقياس 9 (وكذلك عند الحساب في أى مقياس) استخدمنا :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \quad \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} \quad \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

وهذا متفق تماماً مع تعريف عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ حيث $m \in \mathbb{N}$ ، حيث يعرف الجمع والضرب كالآتي :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \quad (x + m\mathbb{Z}) + (y + m\mathbb{Z}) := x + y + m\mathbb{Z},$$

$$(x + m\mathbb{Z}) \cdot (y + m\mathbb{Z}) := xy + m\mathbb{Z}$$

$$\overline{x+y} := \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{xy} := \overline{x} \cdot \overline{y}$$

مثال ٢٥ : قابلية القسمة على 11 :

برهن على أن العدد n ذا التمثيل العشري $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ يكون قابلاً للقسمة على 11 إذا كان فقط إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$ يقبل القسمة على 11 .
البرهان : كما جاء في مثال ٢٤ السابق مباشرة

$$\begin{aligned} n &= a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^k a_k \\ &= a_0 + 10a_1 + (10)(10)a_2 + \dots + \underbrace{10 \dots 10}_{k \text{ من المرات}} a_k \end{aligned}$$

k من المرات

بالحساب في مقياس 11 نحصل على :

$$\begin{aligned} n &\equiv a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + \dots + (-1)^k a_k \pmod{11} \\ &= a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^k a_k \pmod{11} \end{aligned}$$

أي أن 11 يقسم $[n - (a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^k a_k)]$

أي أن n يقبل القسمة على 11 إذا كان فقط إذا كان

$a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^k a_k$ يقبل القسمة على 11 .

مثال ٢٦ : قابلية القسمة على 4 :

ليكن n عدداً صحيحاً له التمثيل العشري : $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$

برهن على أن n يقبل القسمة على 4 إذا كان فقط إذا كان $a_1 a_0$ يقبل القسمة على 4

البرهان : يمكن التعبير عن n بالكيفية الآتية :

$$n = a_1 a_0 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \dots + 10^k a_k$$

وبلاحظ أن 10^m يقبل القسمة على 4 لجميع $m \geq 2$. وبالتالي فإننا بالحساب مقياس 4

نحصل على :

$$n \equiv a_1 a_0 \pmod{4}$$

أى أن 4 يقسم $(n - a_1 a_0)$ ، بعبارة أخرى n يقبل القسمة على 4 إذا كان فقط إذا كان $a_1 a_0$ يقبل القسمة على 4.

مثال ٢٧ : ليكن m عدداً صحيحاً موجباً ، وليكن n عدداً صحيحاً موجباً ينتج من m بإعادة ترتيب "مكونات" m ، فمثلاً الرقم 72345 يعاد ترتيبه ليصبح 27453 . برهن على أن $m - n$ يقبل القسمة على 9 .

البرهان : ليكن العدد m هو $a_0 a_{k-1} \dots a_1 a_0$. من مثال ٢٤ m يقبل القسمة على 9 إذا كان فقط إذا كان $a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ يقبل القسمة على 9 . ولكن إعادة ترتيب العدد m بأى شكل لا يغير المجموع $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ ، ويكون مجموع "مكونات" العدد n هو $b_0 + b_1 + \dots + b_{k-1} + b_k = S$ وبالتالي فإن مجموع "مكونات" العدد $m - n$ سيكون مساوياً للصفر ، وهو يقبل القسمة على 9 . وبالتالي فإن العدد $m - n$ يقبل القسمة على 9 .

مثال ٢٨ : برهن على أنه فى أية حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة يكون كل مثالى أعظم فيها مثالياً أولياً

البرهان : لتكن R حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة ، ليكن $m \subset R$ مثالياً أعظم . هذا يستلزم أن R/m حقل $(1-3-1) \Leftrightarrow R/m$ نطاق متكامل $\Leftrightarrow m$ مثالى أولى فى R $(1-3-1)$

مثال ٢٩ : لتكن R حلقة إبدالية . وليكن A ، B مثاليين أعظمين ، $A \neq B$. عندئذ فإن A ، B متعاظمان معاً . (انظر مثال ١ فى $(1-2-1)$)

البرهان : ليكن $A + B \neq R$ ، هذا يقتضى أن $A + B = A$ (لأن A مثالى أعظم) وهذا يقتضى أن $B \subset A$. ولكن B مثالى أعظم ، $A \neq R$ فينتج أن $B = A$: تناقض . (تذكر أن مجموع مثاليين = مثالياً) .

مثال ٣٠ : لتكن $A, B_1, B_2, \dots, B_n \subset R$ مثاليات فى حلقة إبدالية R . برهن على أنه إذا كان لكل i ،

A, B_i متعاظمان معاً ، فإن $A, B_1 B_2 \dots B_n$ متعاظمان معاً .

البرهان : سنبرهن أولاً على أن : A ، B متعاضمان معا $\Leftrightarrow \rho(B) = R/A$ حيث

$\rho : R \rightarrow R/A$ الإيمورفيزم الطبيعي

$$\rho(B) = B/A = (B+A)/A = R/A \Leftrightarrow A, B \text{ متعاضمان معا}$$

$$(B+A)/A = \{b+a+A \mid b \in B, a \in A\} = \{b+A \mid b \in B\} = B/A$$

والآن :

$$\rho(B_1 B_2 \dots B_n) = \rho(B_1) \rho(B_2) \dots \rho(B_n)$$

ρ هو مومورفيزم

$$= (R/A)(R/A) \dots (R/A) = R/A$$

$\Rightarrow A, B_1 B_2 \dots B_n$ متعاضمان معا

مثال ٣١ : إذا كانت $A_1, \dots, A_2$ مثاليات متعاضمة معا مثلى مثلى فى حلقة إبدالية R فإن

$$A_1 \dots A_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

البرهان : بالاستقراء الرياضى على n

$n=2$: انظر مثال ١ فى جبر المثاليات (١-٢-٩) (*)

$n \rightarrow n+1$: لنكن $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ مثاليات متعاضمة معا مثلى مثلى ، ينتج من

مثال ٣٠ السابق مباشرة أن $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$ متعاضمان معا . ومن ثم فإن

$$(A_1 A_2 \dots A_n) A_{n+1} \stackrel{(*)}{=} (A_1 \dots A_n) \cap A_{n+1}$$

$$= (A_1 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1} = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}$$

فرض الاستقراء

مثال ٣٢ : ليكن R, S حلقتين إبداليتان لهما عنصر الوحدة $1_R, 1_S$ ، φ

هو مومورفيزم غامراً (إيمورفيزم) من R على S ، A مثالياً فى S .

إذا كان A مثالياً أعظم في S فبرهن على أن $\varphi^{-1}(A)$ مثالي أعظم في R وذلك بفرض أن $\varphi^{-1}(A) \neq R$.

البرهان : نعتبر الهومومورفيزم

$$\rho: R \rightarrow S/A$$

$$x \mapsto \varphi(x) + A$$

$$\forall x, y \in R: \rho(x+y) = \varphi(x+y) + A = \varphi(x) + \varphi(y) + A$$

$$= \varphi(x) + A + \varphi(y) + A = \rho(x) + \rho(y)$$

$$\rho(xy) = \varphi(xy) + A = \varphi(x)\varphi(y) + A = (\varphi(x) + A)(\varphi(y) + A)$$

$$= \rho(x)\rho(y)$$

إن ρ هومومورفيزم

كذلك ρ شامل (غامر ، فوقى) لأن φ شامل

نحسب نواة (ρ)

$$\text{Ker}(\rho) = \{x \in R \mid \varphi(x) + A = A\}$$

(تذكر أن A هو الصفر في الحلقة S/A)

$$= \{x \in R \mid \varphi(x) \in A\} = \varphi^{-1}(A)$$

والآن نطبق نظرية الهومومورفيزم (١-٣-٣) :

$$R/\varphi^{-1}(A) = R/\text{Ker}(\rho) \cong \rho(R) = S/A$$

A مثالي أعظم في S وإن S/A حقل (١-٣-١١) ، أى أن $R/\varphi^{-1}(A)$ حقل ، وبالتالي

فإن $\varphi^{-1}(A)$ مثالي أعظم في R .

مثال ٣٣ : ليكن n قاسماً لـ m ، a عنصراً متماثلاً القوة في $\mathbb{Z}_n$ (أى أن $a^2 = a$) كما

جاء في مثال ١٠ (١-١-١٥) . برهن على أن الراسم $\bar{x} \mapsto a\bar{x}$ هومومورفيزم من

$\mathbb{Z}_m$ إلى $\mathbb{Z}_n$. برهن كذلك على أن نفس التناظر ليس بالضرورة راسماً معرفاً جيداً إذا لم يكن n قاسماً لـ m .

البرهان : ليكن $kn = m$ حيث $k \in \mathbb{N}$ ، $k \neq 0$. نعتبر :

$$\varphi: \mathbb{Z}_{kn} \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$x + kn\mathbb{Z} \mapsto ax + n\mathbb{Z}$$

φ معرف جيداً : ليكن

$$x + kn\mathbb{Z} = y + kn\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : x + knz = y$$

$$\Rightarrow \varphi(y + kn\mathbb{Z}) = ay + n\mathbb{Z} = a(x + knz) + n\mathbb{Z}$$

$$= ax + aknz + n\mathbb{Z} = ax + n\mathbb{Z} = \varphi(x + kn\mathbb{Z})$$

والآن ندرس الحالة إذا كان n ليس قاسماً لـ m :

ليكن $a = 1$ ، $m = 4$ ، $n = 3$ ، $x = 7$ ، $y = 3$:

$$\bar{x} = 7 + 4\mathbb{Z} = 3 + 4\mathbb{Z} = \bar{y}$$

$$\Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \varphi(7 + 4\mathbb{Z}) = 7 + 3\mathbb{Z} = 4 + 3\mathbb{Z} \neq 0 + 3\mathbb{Z}$$

$$= 3 + 3\mathbb{Z} = \varphi(3 + 4\mathbb{Z}) = \varphi(\bar{y})$$

والآن φ هومومورفيزم (إذا كان φ معرفاً جيداً) :

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{kn} : \varphi(x + kn\mathbb{Z} + y + kn\mathbb{Z}) = \varphi(x + y + kn\mathbb{Z})$$

$$= a(x + y) + n\mathbb{Z} = ax + ay + n\mathbb{Z}$$

$$= ax + n\mathbb{Z} + ay + n\mathbb{Z} = \varphi(x + kn\mathbb{Z}) + \varphi(y + kn\mathbb{Z})$$

$$\varphi((x + kn\mathbb{Z})(y + kn\mathbb{Z})) = \varphi(xy + kn\mathbb{Z}) = axy + n\mathbb{Z} \stackrel{a^2=a}{=} a^2xy + n\mathbb{Z}$$

$$= axay + n\mathbb{Z} = (ax + n\mathbb{Z})(ay + n\mathbb{Z}) = \varphi(x + kn\mathbb{Z})\varphi(y + kn\mathbb{Z})$$

$\mathbb{Z}_n$ إبدالية

تمارين

(١) اكتب جدولى الجمع والضرب لـ $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. هل الحلقتان $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}_4$ تتشاكلان ؟

(إرشاد : $\mathbb{Z}_4$ تتشاكل مع $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ، ولكنها لا تتشاكل مع $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ لأن $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ليس لها عنصر وحدة . اكتب التفاصيل وانظر مثال ٢٢ فى (١-٣-٢٠))

(٢) برهن على أن N مثالى أعظم فى حلقة R إذا كان فقط إذا كان R/N حلقة بسيطة ، أى أن R/N لا تحتوى على مثالى فعلى .

(٣) لتكن $R = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ ، وليكن I مجموعة جزئية من R يتكون من جميع المصفوفات ذات المداخل (entries) (أو العناصر) الزوجية . برهن على أن I مثالى فى R ، واوجد عدد عناصر R/I .

(٤) اوجد جميع المثاليات العظمى فى $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$

(٥) برهن على أن المثالى $[X^2 + 1]$ مثالى أولى فى $\mathbb{Z}[X]$ ، لكنه ليس أعظم فى $\mathbb{Z}[X]$ (لاحظ أن المثالى نفسه أعظم فى $\mathbb{R}[X]$. مثال ٥ فى (١-٣-٢٠))

(٦) أنشئ جدول الضرب للحلقة $3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

(٧) برهن على أن $\mathbb{R}[X]/[X^2 + 1]$ حقل

(٨) برهن على أنه فى $\mathbb{Z}[X]$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة يكون $I = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) = 0\}$ ليس مثالياً أعظم .

(٩) لتكن $\mathbb{R} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. احسب :

$$\sqrt{[6]} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{[4]} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{[0]} \quad (\text{ا})$$

(١٠) برهن على أن $I = [2 + 2i]$ ليس مثالياً أولياً في $\mathbb{Z}[i]$. كم عدد عناصر $\mathbb{Z}[i]/I$ ؟

(١١) في $\mathbb{Z}[X]$ ليكن $I = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$. برهن على أن I مثالي أولي في $\mathbb{Z}[X]$.

(١٢) لتكن R حلقة إبدالية ، ولتكن A أية مجموعة جزئية من R . برهن على أن مبيد A (annihilator of A)

$$\text{Ann}(A) := \{r \in R \mid ra = 0 \quad \forall a \in A\}$$

يكون مثالياً في R .

(١٣) اكتب جميع العناصر في الحقل $\mathbb{Z}_2[X]/[X^2 + X + 1]$ وانشئ جدولاً الجمع والضرب

(١٤) لتكن R حلقة إبدالية ، ليس لها عنصر الوحدة . صف أصغر مثالي في R بحيث يحتوي على العنصر a .

(١٥) إذا كان R نطاق مثاليات أساسية ، وكان I مثالياً في R فبرهن على أن كل مثالي في R/I سيكون مثالياً أساسياً .

(١٦) برهن على أن $\mathbb{Z}[i]/[1-i]$ حقل . كم عدد عناصره ؟

(١٧) هل الراسم $\varphi: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ هو مورفيزم حلقى ؟
 $x \mapsto 6x$

(١٨) برهن على أن التناظر $\varphi: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ يحفظ عمليتي الجمع والضرب ولكنه ليس معرفاً جيداً ، وبالتالي فهو ليس راسماً وليس هو مورفيزماً .
 $x \mapsto 5x$

(١٩) برهن على أن التناظر $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ معرف جيداً ، ويحفظ عملية الجمع ، لكنه لا يحفظ عملية الضرب
 $x \mapsto 3x$

(٢٠) طبق نظرية الهومومورفيزم على التمرين (٢٣) من تمارين الجزء (١-٢)

(٢١) هل الراسم $\varphi: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ هو مورفيزم حلق ؟
 $x \mapsto 2x$

(٢٢) عين جميع الهومومورفيزمات من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_6$.

(٢٣) عين جميع الهومومورفيزمات من $\mathbb{Z}_{20}$ إلى $\mathbb{Z}_{30}$.

(٢٤) هل الراسم $\varphi: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ هو مورفيزم حلق ؟
 $x \mapsto 6x$

(٢٥) برهن على أن الرقم 7, 176, 825, 942, 116, 027, 211 يقبل القسمة على 9 ،
 لكنه لا يقبل القسمة على 11 .

(٢٦) برهن على أن الرقم 9, 897, 654, 527, 609, 877 يقبل القسمة على 99 .

(٢٧) بدون استخدام الورقة والقلم احسب :

$$(10^{100} + 1)^{99} \pmod{3} , (2 \cdot 10^{75} + 2)^{100} \pmod{3}$$

(٢٨) في مثال ٢٣ من (٨-٢-١) كانت R' نطاقاً متكاملًا . اضرب مثلاً لبيان أنه إذا
 كانت R' ليست نطاقاً متكاملًا فإن التقرير $f(1)$ يكون عنصر الوحدة في R' ليس
 صحيحاً بالضرورة .

(إرشاد : اعتبر الهومومورفيزم $\varphi: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$. تذكر أن $\mathbb{Z}_{30}$ ليس نطاقاً متكاملًا لأنه
 $x \mapsto 6x$

ليس خالياً من القواسم الصفرية)

(٢٩) برهن على أن أى هومومورفيزم من حقل على حلقة تتكون من أكثر من عنصر
 واحد يكون تشاكلاً (أى أن الإبيمورفيزم يكون أيزومورفيزماً) .

٢١-٣-١ تعريف : لتكن R_1, R_2 حلقتين . يعرف حاصل الضرب المباشر للحلقتين R_1
 R_2 ، ويرمز له بالرمز $R_1 \otimes R_2$ كالآتي :

$$R_1 \otimes R_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in R_1, a_2 \in R_2\}$$

وتعرف العمليتان "+" ، "." كما - هو متوقع - كما يلي :

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

ويترك للقارئ التحقق من أن حاصل الضرب المباشر للحقتين

R_2, R_1 (The direct product of the two rings) هو حلقة.

لاحظ أن العنصر الصفري سيكون $(0,0)$ ، ومعكوس العنصر (a_1, a_2) بالنسبة لعملية

الجمع هو العنصر $(-a_1, -a_2)$

١-٣-٢٢ ملحوظة : نعرف $R'_1 := \{(a_1, 0) \in R_1 \otimes R_2\}$ ، $R'_2 := \{(0, a_2) \in R_1 \otimes R_2\}$

نعرف كذلك الإسقاط (projection) $p_1 : R_1 \otimes R_2 \rightarrow R'_1$ p_1 هو مومورفيزم لأن :

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R_1 \otimes R_2 : p_1((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = p_1(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$= (a_1 + b_1, 0) = (a_1, 0) + (b_1, 0) = p_1(a_1, a_2) + p_1(b_1, b_2),$$

$$p_1((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) = p_1(a_1 b_1, a_2 b_2) = (a_1 b_1, 0) = (a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = p_1(a_1, a_2) \cdot p_1(b_1, b_2)$$

p_1 راسم غامر (شامل ، فوقى) : واضح . نحسب نواة (p_1) :

$$Ker(p_1) = \{(a_1, a_2) \in R_1 \otimes R_2 \mid p_1(a_1, a_2) = (0, 0)\}$$

$$= \{(a_1, a_2) \in R_1 \otimes R_2 \mid (a_1, 0) = (0, 0)\}$$

$$= \{(0, a_2) \in R_1 \otimes R_2\} = R'_2$$

ونطبق نظرية الهومومورفيزم $(1-3-3)$ فنحصل على :

$$R_1 \otimes R_2 / R'_2 = R_1 \otimes R_2 / Ker(p_1) \cong p_1(R_1 \otimes R_2) = R'_1$$

p_1 غامر

نستنتج كذلك أن R'_2 مثالى فى $R_1 \otimes R_2$ (مثال ١٨ فى (١-٢-٨))

وبالمثل نعرف الإسقاط :

$$p_2 : R_1 \otimes R_2 \rightarrow R'_2$$

$$(a_1, a_2) \mapsto (0, a_2)$$

p_2 هو مومورفيزم (كما سبق فى p_1) ، غامر ، $Ker(p_2) = R'_1$

وبتطبيق نظرية الهومومورفيزم (كما سبق) ينتج أن :

$$R_1 \otimes R_2 / R'_1 = R_1 \otimes R_2 / \text{Ker}(p_2) \cong p_2(R_1 \otimes R_2) = R'_2$$

غامر p_2

كذلك فإن R'_1 مثالي في $R_1 \otimes R_2$

نلاحظ كذلك أن $R'_1 \cong R_1$ ، $R'_2 \cong R_2$. ويمكن رؤية ذلك ببساطة كالآتي: نعرف :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : R'_1 &\rightarrow R_1 \\ (a_1, 0) &\mapsto a_1 \end{aligned}$$

φ_1 غامر (شامل) : واضح

φ_1 واحد لواحد :

$$\varphi_1(a_1, 0) = \varphi_1(b_1, 0) \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow (a_1, 0) = (b_1, 0)$$

φ_1 هومومورفيزم

$$\forall (a_1, 0), (b_1, 0) \in R'_1 : \varphi_1((a_1, 0) + (b_1, 0)) = \varphi_1(a_1 + b_1, 0) = a_1 + b_1 = \varphi_1(a_1, 0) + \varphi_1(b_1, 0)$$

$$\varphi_1((a_1, 0) \cdot (b_1, 0)) = \varphi_1(a_1 b_1, 0) = a_1 b_1 = \varphi_1(a_1, 0) \cdot \varphi_1(b_1, 0)$$

$\Rightarrow \varphi$ أيزومورفيزم

$$\begin{aligned} \varphi_2 : R'_2 &\rightarrow R_2 \\ (0, a_2) &\mapsto a_2 \end{aligned}$$

بالمثل نعرف φ_2 وينتج أن φ_2 أيزومورفيزم ويكون $R'_2 \cong R_2$

١-٣-٢٣ ملحوظة :

(أ) كل عنصر $(a_1, a_2) \in R_1 \otimes R_2$ يمكن التعبير عنه في صورة مجموع عنصرين

أحدهما في R'_1 والآخر في R'_2 وبطريقة وحيدة :

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$$

(ب) حاصل ضرب عنصرين أحدهما في R'_1 والآخر في R'_2 هو $(0, 0) \in R_1 \otimes R_2$:

$$\forall a_1 \in R_1 \quad \forall a_2 \in R_2 : (a_1, 0) \cdot (0, a_2) = (a_1 0, 0 a_2) = (0, 0)$$

(جـ) بصفة عامة فإننا يمكننا أن نعبر عن حاصل الضرب المباشر للحلقات R_1 ، R_2 ،
 $\dots$ ، R_n ونرمز لذلك بالرمز $R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_n$. ونعرف كذلك المثاليات R'_1 ، R'_2 ،
 $\dots$ ، R'_n في حاصل الضرب $R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_n$. ونحصل على التشاكلات
 $R'_n \cong R_n$ ، $\dots$ ، $R'_2 \cong R_2$ ، $R'_1 \cong R_1$: (الأيزومورفيزمات)

١-٣-٢٤ تعريف :

يقال لحلقة R إنها حاصل الجمع المباشر لحلقتين جزئيتين

(The direct sum of two subrings)

R_2 ، R_1 إذا كان :

(١) كل عنصر في R يعبر عنه بطريقة وحيدة كحاصل جمع عنصرين أحدهما في R_1
 والآخر في R_2

(٢) إذا كان $x, y \in R$ بحيث إن : $x = x_1 + x_2$ ، $y = y_1 + y_2$ حيث $x_1, y_1 \in R_1$ ،
 $x_2, y_2 \in R_2$ فإن :

$$xy = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$$

وسنكتب للتعبير عن أن R هي حاصل الجمع المباشر للحلقتين الجزئيتين R_1 ، R_2 :

$$R = R_1 \oplus R_2$$

١-٣-٢٥ ملحوظة :

إذا كان $R = R_1 \oplus R_2$ فإن $R/R_1 \cong R_2$ ، $R/R_2 \cong R_1$

البرهان : نعرف الراسم
 $x_1 + x_2 \mapsto x_2$

الراسم φ معرف جيداً لأن كل عنصر في $R_1 \oplus R_2$ يعبر عنه بطريقة وحيدة على

الشكل $x_2 \in R_2$ ، $x_1 \in R_1$ حيث $x = x_1 + x_2$

φ راسم غامر (شامل) : واضح

φ هومومورفيزم لأن :

$$\forall x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in R_1 \oplus R_2 :$$

$$\varphi((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) = \varphi(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) = x_2 + y_2 = \varphi(x_1 + x_2) + \varphi(y_1 + y_2),$$

$$\varphi((x_1 + x_2)(y_1 + y_2)) = \varphi(x_1 y_1 + x_2 y_2) = x_2 y_2 = \varphi(x_1 + x_2) \varphi(y_1 + y_2)$$

وبتطبيق نظرية الهومومورفيزم (٣-٣-١) نحصل على :

$$R_1 \oplus R_2 / \text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(R_1 \oplus R_2) = R_2$$

حيث

$$\text{Ker}(\varphi) = \{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \in R_1 \oplus R_2, \varphi(x_1 + x_2) = x_2 = 0\}$$

$$= \{x_1 + 0 \in R_1 \oplus R_2\}$$

$$\cong \{x_1 \mid x_1 \in R_1\} = R_1$$

أى أن R_1 مثالى فى $R_1 \oplus R_2$ ،

$$R_1 \oplus R_2 / R_1 \cong R_2$$

وبالمثل نعرف الراسم

$$\psi : R_1 \oplus R_2 \rightarrow R_1$$

$$x_1 + x_2 \mapsto x_1$$

ψ معرف جيداً (كما سبق φ) ، ψ غامر ، هومومورفيزم ، ونصل إلى :

$$R_1 \oplus R_2 / R_2 \cong R_1$$

حيث R_2 مثالى فى $R_1 \oplus R_2$.

٣-٣-١ نظرية :

الشروط الآتية ضرورية وكافية حتى تكون الحلقة R حاصل جمع مباشر لحلقتين جزئيتين

R_1 ، R_2 فيها:

(١) R_1, R_2 مثالان في R

(٢) العنصر 0 هو العنصر الوحيد المشترك بين R_1, R_2

$$R = R_1 + R_2 \quad (٣)$$

$$(R_1 R_2 := \{x_1 x_2 \mid x_1 \in R_1, x_2 \in R_2\}) \quad R_1 R_2 = \{0\} \quad (٤)$$

البرهان : الشروط ضرورية : من المناقشة السابقة يتضح (١) .

إذا كان $a \in R_1 \cap R_2$ فإننا يمكننا أن نكتب $a + 0 = a = 0 + a$ ومن وحدانية التمثيل

يتضح أن $a = 0$ ، ونحصل على (٢) . الشرط (٣) واضح . بالنسبة للشرط (٤) : ليكن

$$x_1 \in R_1, x_2 \in R_2 \text{ لدينا :}$$

$$x_1 x_2 = (x_1 + 0)(0 + x_2) = x_1 0 + 0 x_2 = 0 + 0 = 0$$

الشروط كافية : (٣) تعنى أن كل عنصر في R يمكن أن يكتب على صورة حاصل جمع

عنصرين أحدهما في R_1 ، والآخر في R_2 . نحن نبرهن على أن هذا التمثيل وحيد

كالآتي :

ليكن $x \in R$ ، $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ حيث $x_1, y_1 \in R_1$ ، $x_2, y_2 \in R_2$ هذا يستلزم أن :

$x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. لكن $x_1 - y_1 \in R_1$ ، $y_2 - x_2 \in R_2$ (لأن R_1, R_2 حلقتان جزئيتان

في R) . ولكن من (٢) العنصر 0 هو العنصر الوحيد المشترك بين R_1, R_2 ، وبالتالي

يكون : $y_2 - x_2 = 0 = x_1 - y_1$ أي أن $x_1 = y_1$ ، $x_2 = y_2$ ، ويكون التمثيل وحيداً .

والآن ليكن $x, y \in R$ بحيث إن $x = x_1 + x_2$ ، $y = y_1 + y_2$ ، حيث $x_1, y_1 \in R_1$ ،

$$x_2, y_2 \in R_2 \text{ لدينا :}$$

$$xy = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

$$= x_1 y_1 + 0 + 0 + x_2 y_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

(٤)

نهاية البرهان .

١-٣-٢٧ أمثلة محلولة :

مثال ١ : لتكن $R := \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ، $S := \{(a, b, c) \in R \mid a + b = c\}$

برهن أو انف : S حلقة جزئية من R

الحل : $(0,1,1), (1,1,2) \in S$ بينما $(0,1,2) \notin S$ وبالتالي فإن S ليس حلقة جزئية من R .

مثال ٢ : برهن أو انف : عنصر الوحدة في حلقة جزئية يجب أن يكون هو عنصر الوحدة في الحلقة

الحل : عنصر الوحدة في الحلقة $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ هو $(1, 1)$ ، بينما عنصر الوحدة في $\mathbb{Z} \otimes \{0\}$ ، وهي حلقة جزئية من $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ هو $(1, 0)$ لا يساوي $(1, 1)$. إذن التقرير خاطئ .

مثال ٣ : عين الوحدات في كل من :

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \quad (\text{أ})$$

$$\mathbb{Q} \quad (\text{د})$$

$$\mathbb{Z}_4 \quad (\text{و})$$

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z} \quad (\text{هـ})$$

الحل :

$$(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) \quad (\text{ب})$$

$$1, -1 \quad (\text{أ})$$

$$\forall q: 0 \neq q \in \mathbb{Q} \quad (\text{د})$$

$$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \quad (\text{جـ})$$

$$(1, q, 1), (1, q, -1), (-1, q, 1), (-1, q, -1) \quad \forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad (\text{هـ})$$

$$\bar{1}, \bar{3} \quad (\text{د})$$

مثال ٤ : لتكن R, S حلقتين . برهن على أن :

$$\varphi: R \otimes S \rightarrow R \quad (\text{أ}) \text{ الراسم}$$

هو مورفيزم حلق

$$(a, b) \mapsto a$$

$$\varphi: R \rightarrow R \otimes S \quad (\text{ب}) \text{ الراسم}$$

هو مورفيزم حلق

$$a \mapsto (a, 0)$$

$$R \otimes S \cong S \otimes R \quad (\text{جـ})$$

البرهان : (أ) لجميع $(a, b), (c, d) \in R \otimes S$

$$\varphi((a,b) + (c,d)) = \varphi(a+c, b+d) = a+c = \varphi(a,b) + \varphi(c,d)$$

$$\varphi((a,b).(c,d)) = \varphi(ac, bd) = ac = \varphi(a,b)\varphi(c,d)$$

(ب) لجميع $a, b \in R$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(a+b) &= (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= (ab, 0) = (a, 0).(b, 0) = \varphi(a).\varphi(b) \end{aligned} \right\} \varphi \text{ هومومورفيزم}$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (a, 0) = (b, 0) \Rightarrow a = b \Rightarrow \varphi \text{ واحد لواحد}$$

(ج) نعرف الراسم

$$\varphi: R \otimes S \rightarrow S \otimes R$$

$$(r, s) \mapsto (s, r)$$

لجميع $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \otimes S$

$$\varphi((r_1, s_1) + (r_2, s_2)) = \varphi(r_1 + r_2, s_1 + s_2) = (s_1 + s_2, r_1 + r_2)$$

$$= (s_1, r_1) + (s_2, r_2) = \varphi(r_1, s_1) + \varphi(r_2, s_2)$$

$$\varphi((r_1, s_1).(r_2, s_2)) = \varphi(r_1 r_2, s_1 s_2) = (s_1 s_2, r_1 r_2) = (s_1, r_1).(s_2, r_2)$$

$$= \varphi(r_1, s_1).\varphi(r_2, s_2)$$

أى أن φ هومومورفيزم

والآن نعرف الراسم العكسى

$$\psi: S \otimes R \rightarrow R \otimes S$$

$$(s, r) \mapsto (r, s)$$

$$\psi \circ \varphi: R \otimes S \rightarrow R \otimes S$$

$$(r, s) \mapsto (r, s) \quad (1)$$

$$\varphi \circ \psi: S \otimes R \rightarrow S \otimes R$$

$$(s, r) \mapsto (s, r) \quad (2)$$

(1) تعنى أن $\psi \circ \varphi = 1_{R \otimes S}$ أى راسم الوحدة على $R \otimes S$

- (2) تعنى أن $\varphi \circ \psi = 1_{S \otimes R}$ أى راسم الوحدة على $S \otimes R$
 من (1) φ راسم واحد لواحد ، ψ راسم شامل (غامر ، فوقى)
 من (7) ψ راسم واحد لواحد ، φ راسم شامل (غامر ، فوقى)
 إذن φ (وكذلك ψ) تناظر أحادى وبالتالي φ أيزومورفيزم .

تمارين

- (١) اوجد جميع الهومومورفيزمات $\varphi: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 (إرشاد : يتعين الهومومورفيزم - كما نعلم - من معرفة قيمته عند المولدات ، هنا عند $(1, 0)$ ، $(0, 1)$. لاحظ أن φ المعرف كالاتى :
- $$\varphi(1, 0) = 1 \quad , \quad \varphi(0, 1) = 1$$
- لن يكون هومومورفيزما ، لأنه بفرض أن φ هومومورفيزم :
- $$\varphi(1, 1) = \varphi((1, 0) + (0, 1)) = \varphi(1, 0) + \varphi(0, 1) = 1 + 1 = 2,$$
- $$\varphi(1, 1) = \varphi((1, 1) \cdot (1, 1)) = \varphi(1, 1) \varphi(1, 1) = (1)(1) = 1$$
- وأكمل ...)

- (٢) عين جميع الهومومورفيزمات $\varphi: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$
 (إرشاد : كما سبق يتعين الهومومورفيزم هنا بمعرفة قيمته عند $(1, 0)$ ، $(0, 1)$.
 هناك تسعة هومومورفيزمات !)
- (٣) عين حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ بحيث لا تكون هذه الحلقة الجزئية مثاليا فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$

- (٤) عين جميع المثاليات فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$
- (٥) ليكن D_1 ، D_2 نطاقين متكاملين . برهن أو انف :
- $$D_1 \otimes D_2 \text{ نطاق متكامل .}$$
- (٦) اوجد مثاليا أعظم فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ، مثاليا أوليا فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ، لكنه ليس أعظم ، مثاليا فعليا غير أولى فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

(إرشاد : فى الحلقة المعطاة أى مثالى على الشكل $p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ حيث p عدد أولى سيكون أعظم . بالمثل $p\mathbb{Z} \otimes q\mathbb{Z}$ حيث p, q عددان أوليان . أى مثالى على الشكل $p\mathbb{Z} \otimes \{0\}$ حيث p عدد أولى سيكون مثالياً أولياً ، لكنه ليس أعظم . كذلك المثالى $\mathbb{Z} \otimes \{0\}$ أولى لكنه ليس أعظم . أى مثالى على الشكل $n\mathbb{Z} \otimes \{0\}$ حيث n ليس عدداً أولياً هو مثالى فعلى غير أولى . اكتب التفاصيل)

(٧) لتكن $R = \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_{30}$. اوجد جميع المثاليات العظمى فى R . ومع كل مثالى أعظم I اوجد عدد عناصر الحقل R/I

(٨) عين القواسم الصفرية فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}$

(٩) اوجد جميع الوحدات ، القواسم الصفرية ، العناصر المتمثلة القوة ، والعناصر منعومة القوة فى $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_6$.

(١٠) برهن على أن العناصر غير الصفرية فى $\mathbb{Z}_3[i]$ تكون زمرة إبدالية ذات ثمانية عناصر . هل هذه الزمرة تتشاكل مع $\mathbb{Z}_8$ ؟ $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2$ ؟ $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ؟

(١١) فى $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ليكن $I = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. برهن على أن I مثالى أولى لكنه ليس مثالياً أعظم .

(١٢) هل يمكن لحلقة ذات عنصر الوحدة أن تحتوى فى نفس الوقت على حلقين جزئيتين تتشاكلان مع $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$ حيث $m \neq n$ ؟ وهل يمكن لحلقة ذات عنصر الوحدة أن تحتوى فى نفس الوقت على حلقين جزئيتين تتشاكلان مع الحلقين $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q$ حيث p, q عددان أوليان مختلفان .

(إرشاد : تذكر $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$)

2 Ring Theory نظرية الحلقات



حلقات كثيرات الحدود Polynomial Rings

٢ حلقات كثيرات الحدود Polynomial Rings

فى هذا الباب سنجعل كل حلقتنا لها عنصر الوحدة ، وهى إبدالية ، وسيرسم أى هومومورفيزم حلق عنصر الوحدة فى الحلقة النطاق إلى عنصر الوحدة فى الحلقة النطاق المصاحب (الحلقة الهدف)

لتكن $a_0, a_1, \dots, a_n$ عناصر حلقة R ، نسمى التعبير الشكلى :

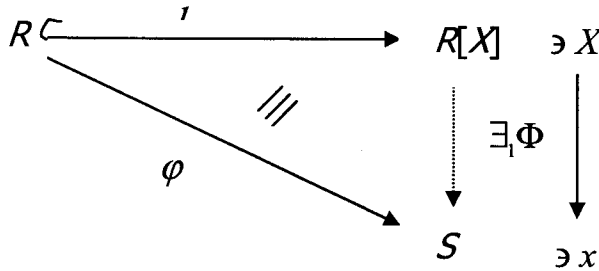
$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

كثيرة حدود. تسمى العناصر $a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملات f ، X "غير محدد" حيث يمكن التعويض عن X بأى شىء له معنى .

١-٢ إنشاء حلقات كثيرات الحدود

١-١-٢ تعريف :

لتكن R حلقة . الثلاثى $(R[X], X, \iota)$ المكون من حلقة $R[X]$ ، عنصر "متميز" $X \in R[X]$ ، هومومورفيزم $\iota: R \rightarrow R[X]$ يسمى حلقة كثيرة حدود على R فى غير المحدد X عندما تتحقق الخاصة الكونية (العالمية) (universal) : لكل حلقة S ، ولكل $x \in S$ ، ولكل هومومورفيزم $\varphi: R \rightarrow S$ ، يوجد بالضبط هومومورفيزم واحد $\Phi: R[X] \rightarrow S$ بحيث يكون $\Phi(X) = x$ ، ويكون الشكل الآتى إبدالياً (commutative)



٢-١-٢ نظرية :

المسألة الكونية (العالمية) فى (١-١-٢) لها حل : $(R[X], X, \iota)$.

ι راسم أحادي (واحد لواحد) بحيث يمكن اعتبار R حلقة جزئية من $R[X]$ ، ولكل $f \in R[X] \setminus \{0\}$ توجد عناصر محددة تماماً $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ ، بحيث إن $a_n \neq 0$ ،
 $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ ، $n \in \mathbb{N}$.

البرهان : لتكن $R[X]$ حلقة جميع المتواليات $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ من عناصر في R حيث $a_k = 0$ لمعظم $k \in \mathbb{N}$. الجمع والضرب في $R[X]$ يتمان بالطريقة الآتية :

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots),$$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) := (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

$$\text{حيث } c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

ويمكن التحقق أنه بهذا تكون $R[X]$ حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة $(1, 0, 0, \dots)$.

$$\begin{array}{l} \iota : R \rightarrow R[X] \\ \text{الراسم} \quad a \mapsto (a, 0, 0, \dots) \end{array}$$

$$\forall a, b \in R : \iota(a+b) = (a+b, 0, 0, \dots, 0) = (a, 0, 0, \dots, 0) + (b, 0, 0, \dots, 0) = \iota(a) + \iota(b)$$

$$\iota(ab) = (ab, 0, 0, \dots, 0) = (a, 0, 0, \dots, 0) \cdot (b, 0, 0, \dots, 0) = \iota(a) \cdot \iota(b)$$

$$\iota(a) = \iota(b) \Rightarrow (a, 0, 0, \dots, 0) = (b, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow a = b$$

ولأن ι مونومورفيزم فيمكن أن نوحّد (identify) بين R ، صورتها في $R[X]$.

وليكن العنصر غير المحدد X (ideterminate) هو $X := (0, 1, 0, 0, \dots)$ ومن تعريف الضرب في $R[X]$ نحصل على :

$$X^k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

↑

الموقع رقم k (البداية في الموقع رقم 0)

وبهذا يكون :

$$\forall f \in R[X] : f := (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

وواضح أن هذا التمثيل وحيد عندما $f \neq 0$ ، $a_n \neq 0$.

وبمساعدة هذا التمثيل نستطيع أن نبرهن على صحة الخاصة الكونية (العالمية) :

$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, \quad x \in S, \quad \varphi: R \rightarrow S$$

ليكن لأن الشكل إبدالي فيجب أن يكون $\Phi(a) = \varphi(a)$ لكل $a \in R$ ، كما أنه بالفرض يجب أن يكون $\Phi(X) = x$. كما أن Φ يجب أن تكون هومومورفيزماً وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \Phi(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) \\ &= \Phi(a_0) + \Phi(a_1)\Phi(X) + \dots + \Phi(a_n)\Phi(X^n) \\ &= \Phi(a_0) + \Phi(a_1)\Phi(X) + \dots + \Phi(a_n)\Phi(X)^n \\ &= \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \dots + \varphi(a_n)x^n \end{aligned} \quad (*)$$

وهذا يعنى أنه يوجد على الأكثر مثل هذا الهومومورفيزم Φ .

ونثبت الآن أنه يوجد بالفعل مثل هذا الهومومورفيزم ، بأن نعرف Φ كما فى (*) ونثبت أنها بالفعل هومومورفيزم كالاتى :

$$\forall f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, g = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m \in R[X]:$$

$$\Phi(f + g) = \Phi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n + \dots + b_mX^m)$$

(بدون فقد للعمومية (without any loss of generality) افترضنا أن $m > n$)

$$\stackrel{(*)}{=} \varphi(a_0 + b_0) + \varphi(a_1 + b_1)x + \dots + \varphi(a_n + b_n)x^n + \dots + \varphi(b_m)x^m$$

$$= \varphi(a_0) + \varphi(b_0) + (\varphi(a_1) + \varphi(b_1))x + \dots + (\varphi(a_n) + \varphi(b_n))x^n + \dots + \varphi(b_m)x^m$$

φ هومومورفيزم

$$= \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \dots + \varphi(a_n)x^n + \varphi(b_0) + \varphi(b_1)x + \dots + \varphi(b_n)x^n + \dots + \varphi(b_m)x^m$$

$$\stackrel{(*)}{=} \Phi(f) + \Phi(g)$$

$$\Phi(fg) = \Phi((a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n)(b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n + \dots b_mX^m))$$

$$= \Phi(a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \dots + a_nb_mX^{n+m})$$

$$\stackrel{(*)}{=} \varphi(a_0b_0) + \varphi(a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \varphi(a_nb_m)x^{n+m}$$

$$= \varphi(a_0)\varphi(b_0) + \varphi(a_0)\varphi(b_1)x + \varphi(a_1)\varphi(b_0)x + \dots + \varphi(a_n)x^n\varphi(b_m)x^m$$

φ هو مورفيزم

$$= (\varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \dots + \varphi(a_n)x^n)(\varphi(b_0) + \varphi(b_1)x + \dots + \varphi(b_m)x^m)$$

$$= \Phi(f)\Phi(g)$$

كذلك بالتعريف $\Phi(1) = \varphi(1)$. وبالتالي فإن Φ هو مورفيزم .

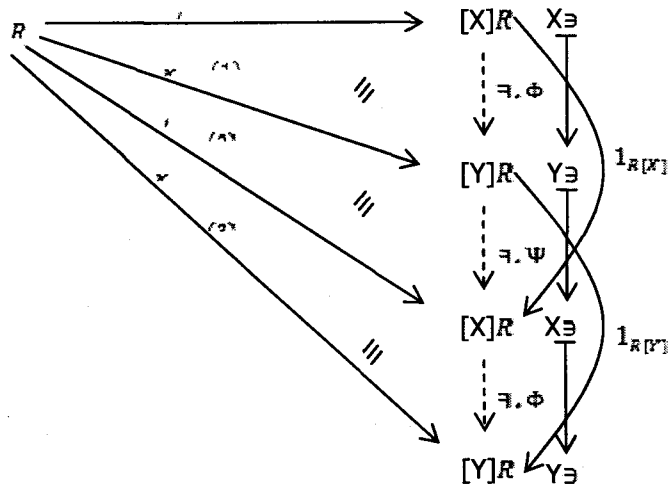
٢-١-٣ نظرية :

الحل المعطى فى النظرية (٢-١-٢) وحيد بدون حساب الأيزومورفيزمات

(a part from isomorphism)

البرهان :

ليكن لدينا الحلان $(R[Y], Y, \kappa)$ ، $(R[X], X, \iota)$



فى "شبه المثلث" (1) : $R[Y]$ هى الحلقة S ، Y هى العنصر x ، κ هى φ ، $R[X]$ هو

حل المسألة . إذن يوجد بالضبط هو مورفيزم وحيد Φ بحيث يجعل "شبه المثلث" (1)

إبدالياً ، ويرسم X فى Y ، وينتج أن :

$$\Phi \circ \iota = \kappa \quad (1)$$

وفى "شبه المثلث" (2) : $R[X]$ هى الحلقة S ، X هى العنصر x ، ι هى φ ، $R[Y]$ هى حل المسألة ، فيوجد بالضبط هومومورفيزم وحيد ψ يجعل "شبه المثلث" (2) إبدالياً ، ويرسم Y فى X وينتج أن

$$\psi \circ \kappa = \iota \quad (2)$$

وفى "شبه المثلث" (3) : مرة أخرى $R[Y]$ هى الحلقة S ، X هى العنصر x ، κ هى φ ، $R[X]$ هو حل المسألة ، فيوجد بالضبط هومومورفيزم وحيد ، هو نفس Φ السابق بالضرورة ، يجعل "شبه المثلث" (3) إبدالياً ، ويرسم X فى Y ، وينتج أن

$$\Phi \circ \iota = \kappa \quad (3)$$

من (1) ، (2) ، (3) ينتج أن

$$\iota = \psi \circ \Phi \circ \iota \quad (4)$$

$$\kappa = \Phi \circ \psi \circ \kappa \quad (5)$$

(4) تعنى أن "شبه المثلث" المكون من شبهى المثلثين (1) ، (2) إبدالى . ولكن راسم الوحدة $1_{R[X]}$ وهو هومومورفيزم حلق يجعل نفس شبه المثلث إبدالياً، (ويرسم X فى X) ، ومن حيث إن Φ ، ψ وحيدان فلا بد أن يكون $\psi \circ \Phi$ وحيداً ، وبالتالي يكون

$$\psi \circ \Phi = 1_{R[X]} \quad (6)$$

وبالمثل يثبت أن :

$$\Phi \circ \psi = 1_{R[Y]} \quad (7)$$

من (6) : Φ راسم واحد لواحد (أحادى) ، ψ راسم غامر (شامل ، فوقى)

من (7) : Φ راسم غامر (شامل ، فوقى) ، ψ راسم واحد لواحد (أحادى)

وكل من Φ ، ψ هومومورفيزم . إذن كلاهما أيزومورفيزم (تشاكل) ، وكل منهما معكوس الآخر . ويكون الحل وحيداً بدون حساب الأيزومورفيزمات (التشاكلات)

ملحوظة : للاختصار كتبنا $R[X]$ هى حل المسألة ولم نكتب $(R[X], X, \iota)$ ، وهكذا ...

٢-١-٤ تعريف :

لتكن R حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة ،

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in R[X]$$

تعرف درجة (f) $(\deg(f))$ بأنها :

$$\deg(f) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}, & f \neq 0 \\ -\infty, & f = 0 \end{cases}$$

في حالة $f \neq 0$ يسمى a_n المعامل المرشد **(The leading coefficient)**

وإذا كانت $f \neq 0$ فإنها تسمى "مطبوعة" (normalized) إذا كان معاملها المرشد هو "1" عنصر الوحدة في الحلقة .

٢-١-٥ ملحوظة :

لتكن R حلقة إبدالية ، ذات عنصر الوحدة 1 :

$$\forall f, g \in R[X] : \deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g) \quad (1)$$

(٢) ليكن $f, g \in R[X]$ ، $0 \neq f, g$. المعاملان المرشدان لـ f ، g كلاهما ليس قاسماً

صفرياً لـ R . عندئذ فإن : $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

(٣) نطاق متكامل $R \Leftrightarrow$ نطاق متكامل $R[X]$

$$(R[X])^* = R^* \Rightarrow R \text{ نطاق متكامل} \quad (4)$$

البرهان : (١) ، (٢) : ليكن $f, g \in R[X]$. إذا كانت $f=0$ أو $g=0$ فإن $fg=0$ ، وتتحقق المتباينة (١) .

وإذا كانت $f \neq 0$ ، $g \neq 0$ فإنه يوجد $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in R$ بحيث إن

$$fg = \sum_{i=1}^{m+n} c_i X^i \quad \text{ونحصل على} \quad g = \sum_{i=1}^n b_i X^i, \quad f = \sum_{i=1}^m a_i X^i, \quad a_m \neq 0 \neq b_n$$

حيث $c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$. وينتج مباشرة أن $\deg(fg) \leq m+n$ ، وإذا كان

$$\deg(fg) = m+n \text{ فإن } c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$$

(٣) R ، $R[X]$ كلتا حلقات إبدالية ، لهما عنصر الوحدة $1 \neq 0$. فينتج من (١) ، (٢) مباشرة أنه إذا كانت إحداها نطاقاً متكاملًا كانت الأخرى كذلك .

(٤) واضح أن كل عنصر وحدة في R سيكون كذلك عنصر وحدة في $R[X]$ ، أى أن $(R[X])^* \subset R^*$. للبرهنة على أن $(R[X])^* \subset R^*$:

لتكن $f \in (R[X])^*$. عندئذ فإنه توجد $g \in R[X]$ بحيث يكون $fg = 1$ ، وبحيث إن $\deg(f) + \deg(g) = \deg(fg) = \deg(1) = 0$.

ومن ثم فإن $\deg(f) = \deg(g) = 0$. وبالتالي فإن $f, g \in R$. ولأن $fg = 1$ فإن $f \in R^*$

٢-١-٦ نظرية : خوارزمية القسمة (القسمة مع الباقي)

(Division Algorithm - Division with Remainder)

لتكن R حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة "1" ، ولتكن $f, g \neq 0$ كثيرتي حدود في $R[X]$. لتكن $m := \deg(f)$ ، $n := \deg(g)$ ، $k := \max\{0, m-n+1\}$.

إذا كان b هو المعامل المرشد لـ g ، فإنه توجد كثيرتا حدود $q, r \in R[X]$ بحيث يكون :

$$b^k f = qg + r, \deg(r) < \deg(g)$$

إذا لم تكن b قاسماً صفرياً لـ R فإن q, r كليتهما تكون وحيدة .

وإذا كانت b وحدة في R فإنه يوجد بالضبط q وحيدة ، r وحيدة كلتا حلقاتهما في $R[X]$ بحيث يكون :

$$f = qg + r, \deg(r) < \deg(q)$$

البرهان : (١) نبرهن بالاستقراء الرياضى على m على أنه يوجد q, r عنصران في

$$R[X] \text{ بحيث إن } b^k f = qg + r, \deg(r) < \deg(g)$$

إذا كانت $m < n$ فإن $f = 0g + f$ ، ونصل إلى المطلوب مباشرة !

ليكن $m \geq n$ ولنفترض أن الادعاء صحيح لجميع كثيرات الحدود $f \in R[X]$ بحيث $\deg(f) \leq m-1$.

لتكن g كثيرة حدود من درجة n ، b هو المعامل المرشد في g ، a هو المعامل المرشد في f . عندئذ فإن $\deg(bf - aX^{m-n}g) \leq m-1$ ، ومن فرض الاستقراء توجد كثيرات حدود $q', r' \in R[X]$ بحيث يكون $\deg(f') \leq m-1$ ،

$$f' = b^{m-1-n+1}(bf - aX^{m-n}g) = q'g + r' \Rightarrow$$

$$(ab^{m-n}X^{m-n} + q')g + r' = b^k f, k = m - n + 1$$

(٢) إذا لم تكن b قاسماً صفرياً لـ R ، وكانت q, q', r, r' كثيرات حدود في

$$R[X] \text{ بحيث إن : } \deg(r') < \deg(g), \deg(r) < \deg(g), qg + r = b^k f = q'g + r',$$

$$\text{فإن } (q - q')g = r' - r, \deg(r' - r) < \deg(g)$$

ولأن المعامل المرشد لـ g ليس قاسماً صفرياً لـ R نحصل على :

$$\deg(r' - r) = \deg(q - q') + \deg(g)$$

$$\Rightarrow q = q', r = r'$$

(٣) إذا كان b وحدة في R فإنه يوجد $c \in R$ بحيث إن $cb = 1$. وبضرب المتساوية

$$b^k f = qg + r \text{ في } c^k \text{ نحصل على :}$$

$$f = (c^k q)g + (c^k r)$$

تسمى الحلقات التي يمكن فيها القسمة مع الباقي حلقات إقليدية .

٧-١-٢ تعريف :

يقال للزوج (R, d) المكون من نطاق متكامل R ، ورسم $d : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ إنه نطاق

إقليدي (Euclidean domain) إذا كان لكل عنصرين $a, b \in R \setminus \{0\}$ يوجد عنصران

$q, r \in R$ بحيث يكون :

$$a = bq + r \quad (أ)$$

$$(ب) \quad d(r) < d(b) \text{ أو } r = 0$$

(١) $(\mathbb{Z}, d)$ حيث $d: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto |n|$ نطاق إقليدي لأن : $\mathbb{Z}$ نطاق متكامل ، الشرطان

(أ) ، (ب) في (٢-١-٧) متحققان . ولكن العنصرين q, r ليسا وحيدين ، فمثلا

$$5 = 2 \cdot 2 + 1, 5 = 3 \cdot 2 + (-1)$$

(٢) ليكن K حقلا ، وليكن $d: K[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$
 $f \mapsto \deg(f)$ عندئذ فإن الزوج $(K[X], d)$ يكون

نطاقا إقليديا (من (٢-١-٥) $K[X]$ نطاق متكامل، من (٢-١-٦) ، لأن $K^* = K \setminus \{0\}$

(٣) $\mathbb{Z}[i] := \{m + in \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ نطاق متكامل . واضح أن $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$ ،

$$\forall a + ib, c + id \in \mathbb{Z}[i] : a - c + i(b - d) \in \mathbb{Z}[i],$$

$$ac - bd + i(ad + bc) \in \mathbb{Z}[i]$$

أى أن $\mathbb{Z}[i]$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$. كذلك $\mathbb{Z}[i]$ إبدالية ، ولها عنصر الوحدة $1 + i0$ وهو لايساوى $0 + i0$. كذلك $\mathbb{Z}[i]$ خالية من القواسم الصفرية لأن $\mathbb{C}$ خالية من القواسم الصفرية ($\mathbb{C}$ حقل !)

يتبقى لكى نثبت أن $\mathbb{Z}[i]$ نطاق إقليدي أن نوجد الراسم d بحيث يحقق الشرطين (أ) ، (ب) في (٢-١-٧) . لهذا نعرف d كالآتى :

$$d: \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$m + in \mapsto m^2 + n^2$$

وإذا كان $d': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$ هو امتداد d (extension) فإننا نلاحظ أن :
 $a + ib \mapsto a^2 + b^2$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : d'(zw) = d'(z)d'(w)$$

لأن : ليكن $w = c + id$ ، $z = a + ib$

$$d'(zw) = d'((a + ib)(c + id)) = d'(ac - bd + i(ad + bd))$$

$$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = d'(z)d'(w)$$

والآن إذا كان $z, w \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ فإنه يوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $\frac{z}{w} = a + ib$. والآن

نختار $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $|a - m| \leq \frac{1}{2}$ ، $|b - n| \leq \frac{1}{2}$ ، فنحصل على :

$$d'(\frac{z}{w} - (m + in)) = (a - m)^2 + (b - n)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ومن ثم فإن :

$$d(z - (m + in)w) = d(w)d'(\frac{z}{w} - (m + in)) < d(w)$$

ومن حيث إن :

$$z = w(m + in) + (z - (m + in)w)$$

$$= wq + r$$

يكون الراسم d حقق الشرطين (أ) ، (ب) . نهاية البرهان .

٩-١-٢ نظرية :

إذا كان (R, d) نطاقاً أقليدياً ، فإن R نطاق مثاليات أساسية .

البرهان : واضح أن المثالي $\{0\}$ مثالي أساسي في R . والآن ليكن $A \subset R$ مثالياً بحيث

إن $A \neq \{0\}$. مجموعة جميع العناصر $n \in \mathbb{N}$ بحيث إنه يوجد $a \in A \setminus \{0\}$ ،

$d(a) = n$ ليست خالية . ليكن k أصغر عنصر في هذه المجموعة ، وليكن

$a \in A \setminus \{0\}$ بحيث إن $d(a) = k$. واضح أن $[a] \subset A$ (المثالي المتولد من a) .

كذلك فإن $A \subset [a]$ ، لأن : لكل $b \in A$ ، $b \notin [a]$ يوجد $q, r \in R$ بحيث إن :

$r = b - qa \in A$ ، $d(r) < d(a) = k$ ، وهذا يستلزم أن $r = 0$ ، $b = qa + r$

وهذا يتناقض مع تعريف k ومن ثم فإن $r = 0$ ، أي أن $b = qa$ وينتج $A \subset [a]$.

وبالتالي فإن $A = [a]$.

نهاية البرهان .

١٠-١-٢ نظرية :

لتكن R حلقة التقريرات الآتية متكافئة :

(١) R حقل

(٢) حلقة كثيرات الحدود $R[X]$ مع الراسم :

$$d : R[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \mapsto \deg(f)$$

هي نطاق إقليدى

(٣) $R[X]$ نطاق مثاليات أساسية .

البرهان : "(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" : مثال ٢ فى (٢-١-٨)

"(٢) $\Leftrightarrow$ (٣)" : النظرية (٢-١-٩)

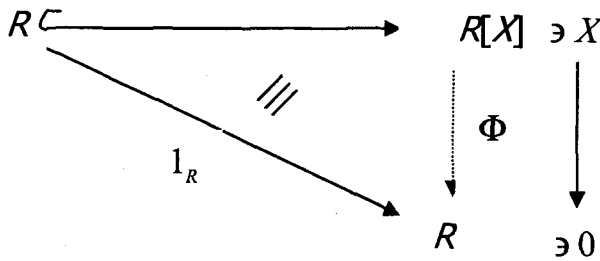
"(١) $\Leftrightarrow$ (٣)" :

$$\Phi : R[X] \rightarrow R$$

$$X \mapsto 0$$

نعتبر الهومومورفيزم :

الذى يجعل الشكل الآتى إبدالياً :



الشكل إبدالى $\Leftrightarrow \Phi$ راسم غامر (شامل)

ومن مثال ٣٦ فى (١-٢-٨) ، ولأن R نطاق متكامل أى لا يحتوى على قواسم صفرية فإن R يكون حقلاً إذا كان R يحتوى فقط مثاليات تافهة . ومن مثال ٣٤ فى (١-٢-٨) يكفى أن نبرهن على أنه لا يوجد مثالى $A \subset R[X]$ بحيث يكون : $\text{Ker}(\Phi) \subsetneq A \subsetneq R[X]$.

ليكن $A \subset R[X]$ مثالياً بحيث إن $\text{Ker}(\Phi) \subsetneq A$.

$R[X]$ نطاق مثاليات أساسية $\Leftarrow$ يوجد $f, g \in R[X]$ ، $Ker(\Phi)=[f]$ ، $A=[g]$ ،
 $[f] \subset [g]$. $g \notin [f]$ $\Leftarrow$ يوجد $f=gh : h \in R[X]$. $f(0)=0 \Leftarrow f \in Ker(\Phi)$.
 لأنه إذا كان $f(0) \neq 0$ فإن :

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \Rightarrow \Phi(f) = \Phi(a_0) + \Phi(a_1).\Phi(X) + \dots + \Phi(a_n).\Phi(X)^n \\ &= \Phi(a_0) + \Phi(a_1).0 + \dots + \Phi(a_n).0 \\ &= \Phi(a_0), \end{aligned}$$

ولأن الشكل إبدالي فإن $\Phi(a_0) = 1_R(a_0) = a_0 \neq 0$.

أى أن $\Phi(f) \neq 0$ وهذا يتناقض مع $f \in Ker(\Phi)$. وبالتالي فإن $f(0) = 0$.
 والآن : $0 = f(0) = g(0)h(0)$. $g(0) \neq 0$ وإلا كانت $g \in Ker(\Phi)$ (هذا تناقض مع $g \notin Ker(\Phi)$) . ولأن R نطاق متكامل ، $g(0) \neq 0$ ، فإن $h(0) = 0$ ، وهذا يستلزم أن $h \in Ker(\Phi) = [f]$ ومن ثم فإنه يوجد $q \in R[X]$ بحيث إن $h = qf$ ،
 أى أنه يوجد $q \in R[X]$ بحيث إن : $f = gh = gqf$ ، وهذا يقتضى أنه يوجد $q \in R[X]$ بحيث إن $f(1-gq) = 0$. لكن $X \in Ker(\Phi) = [f]$ ،
 ولأن R نطاق متكامل ، فإن $1-gq = 0$ ، أى أن $gq = 1$ ، ومعنى هذا أن g وحدة فى $R[X]$. وبالتالي فإن $A=[g]=R[X]$ (تذكر أنه إذا احتوى المثالى فى حلقة على وحدة، كان المثالى هو الحلقة نفسها) . أى أنه لا يوجد مثالى فعلى فى R . نهاية البرهان .

١١-١-٢ نتيجة :

ليكن K حقلا ، $A \subset R[X]$ مثاليا ، $A \neq \{0\}$. عندئذ فإنه توجد كثيرة حدود مطبوعة
 (normalized polynomial) وحيدة $A = [f] : f \in K[X]$.

البرهان :

من (١٠-١-٢) $K[X]$ نطاق مثاليات أساسية ، ومن ثم فإنه يوجد $f \in K[X] \setminus \{0\}$ بحيث إن : $A = [f]$. ولأنه لأى $a \in K^*$: $[af] = [f]$ (واضح !) ، فإنه يمكن اختيار
 كثيرة الحدود f مطبوعة .

والآن إذا كان $f, g \in K[X]$ بحيث $[f] = A = [g]$ ، فإنه يوجد $u, v \in K[X]$ بحيث $f = ug$ ، $g = vf$ ومن ثم فإنه يوجد $u, v \in K[X]$ بحيث يكون $f(1-uv) = 0$. $K[X]$ نطاق متكامل أى أنه خال من القواسم الصفريّة ، ولأن $f \neq 0$ فإن $1-uv=0$ ، وينتج أن $u \in K$ ومن ثم فإن $u = 1$ ، $f = g$ عندما تكون f, g مطبعتين.

٢-٢ أصفار كثيرات الحدود : Zeros of polynomials

٢-٢-٢ تعريف :

لتكن R حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة . وليكن $f = \sum_{i=1}^n a_i X^i$ كثيرة حدود فى $R[X]$.

يقال لعنصر x فى حلقة تشمل R (superset of R) إنه صفر (zero) لـ f إذا كان

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i = 0$$

٢-٢-٢ تمهيدية :

ليكن R نطاقاً متكاملاً ، $f \in R[X]$ ، $a \in R$ صفر لـ f . عندئذ فإنه توجد كثيرة

حدود $g \in R[X]$ بحيث إن $f = (X-a)g$.

البرهان : من (٢-١-٢) توجد كثيرتا حدود $g, r \in R[X]$ بحيث يكون

$f = (X-a)g + r$ ، $\deg(r) < \deg(X-a) = 1$. ومن ثم فإن r تقع فى R ،

بحيث يكون $0 = f(a) = r$ ، ينتج أن : $f = (X-a)g$.

٢-٢-٣ نظرية :

ليكن R نطاقاً متكاملاً عندئذ فإن كل كثيرة حدود غير صفريّة (أى لاتساوى الصفر) f فى

$R[X]$ لها على الأكثر $\deg(f)$ من الأصفار .

البرهان : بالاستقراء الرياضى مع الاستعانة بالتمهيدية (٢-٢-٢) .

إذا كانت $f \in R[X]$ لها الدرجة ٠ ، فإن $f \in R \setminus \{0\}$ ، ومن ثم فإن f ليس لها أية أصفار.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، ولتكن كل كثيرة حدود $g \in R[X] \setminus \{0\}$ ، لها الدرجة $\deg(g) \leq n$ ،
لها على الأكثر $\deg(g)$ من الأصفار . إذا كانت f من الدرجة $n+1$ ، ولم يكن لها أية
أصفار نكون قد انتهينا ! أما إذا كانت f لها الصفر $a \in R$ ، فإنه توجد $g \in R[X]$
بحيث تكون $f = (X-a)g$. ولأن R نطاق متكامل فإن $\deg(f) = \deg(X-a) + \deg(g)$ ،
أي أن $\deg(g) = n$ ، وكل صفر لـ f يختلف عن a هو صفر لـ g ، وكل صفر لـ g
هو صفر لـ f . لكن من فرض الاستقراء g لها n من الأصفار على الأكثر ، ومن ثم
فإن f لها $n+1$ من الأصفار على الأكثر .
٢-٢-٤ نتيجة :

ليكن R حقلاً ، $a_1, \dots, a_n \in K$ كلها مختلفة ، $b_1, \dots, b_n \in K$ ، فإنه توجد بالضبط
واحدة $f \in K[X]$ بحيث يكون $\deg(f) \leq n-1$ ، $f(a_i) = b_i$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$.
البرهان : الوجودية (uniqueness)

ليكن $f, g \in K[X]$ لهما الخصائص المنشودة ، فينتج أن $a_1, \dots, a_n$ تكون أصفاراً لـ
 $f-g$ ، وكذلك فإن $\deg(f-g) \leq n-1$ ، ومن النظرية (٢-٢-٣) ينتج مباشرة أن
 $f-g=0$ أي أن $f=g$

الوجود (Existence)

كثيرة الحدود :

$$f = \sum_{i=1}^n b_i \frac{(X-a_1) \dots (X-a_{i-1})(X-a_{i+1}) \dots (X-a_n)}{(a_i-a_1) \dots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \dots (a_i-a_n)}$$

تحقق الخصائص المطلوبة . تسمى كثيرة الحدود هذه : "كثيرة حدود الاستكمال للجرائح"

(Lagrange's interpolation polynomial)

٢-٢-٥ أمثلة :

(١) كثيرة الحدود $f := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ليس لها أصفار في $\mathbb{R}$ ، لأن $a^2 + 1 \geq 1$
لجميع $a \in \mathbb{R}$. لكن العددين المركبين i ، $-i$ صفران لها .

(٢) كثيرات الحدود متعددة غير المحددات (Polynomials of several undeterminates) لها بصفة عامة عدد لانهاى من الأصفار . على سبيل المثال $f := XY \in \mathbb{R}[X, Y]$:
 $f(a, 0) = 0$ لجميع $a \in \mathbb{R}$.

(٣) النظرية (٢-٢-٣) خاطئة إذا كانت R لها قواسم صفرية .
 ليكن $a \neq 0$ قاسماً صفرياً فى R . عندئذ فإنه يوجد $b \in R \setminus \{0\}$ بحيث يكون $ab = 0$.
 كثيرة الحدود $f := aX \in R[X]$ من الدرجة الأولى ، لكن لها الصفرين 0 ، b .

٢-٢-٦ تعريف :

لتكن R حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة ، ولتكن $f := \sum_{i=1}^n a_i X^i \in R[X]$.

$$\tilde{f} : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{يسمى الراسم}$$

راسم كثيرة الحدود الخاص بـ f .

٢-٢-٧ ملحوظة :

لتكن R حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة ، ولتكن R مكونة من عدد محدود من العناصر

$a_1, \dots, a_n$. عندئذ فإن كثيرة الحدود $f = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ فى $R[X]$ ليست كثيرة حدود

صفرية أى ليست مساوية للصفر ، لكن $\tilde{f}(x) = 0$ لجميع $x \in R$ ، أى أن $\tilde{f} = 0$.
 وكما نرى فكثيرات الحدود لا يمكن اعتبارها دوالاً على الإطلاق كما هى الحال فى التحليل (Analysis) . لكن إذا كانت R نطاقاً متكاملًا يتكون من عدد لانهاى من العناصر ،
 فإن كثيرتى حدود f ، g تكونان متساويتين إذا كان راسماً كثيرتى الحدود $\tilde{f}$ ، $\tilde{g}$ متساويين .

٢-٢-٨ أمثلة محلولة :

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{R}$$

مثال ١ : ليكن $f \mapsto f(\pi)$

طبق نظرية الهومومورفيزم (٣-٣-١)

الحل : ليكن $f := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ وبالتالي فإن :

$$\varphi(f) = a_0 + a_1\pi + \dots + a_n\pi^n$$

$$a_0 + a_1\pi + \dots + a_n\pi^n = 0 \text{ إذا كان } a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

وبالتالي فإن $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ، φ راسم أحادي (واحد لواحد)

$$\Rightarrow \mathbb{Q}[X] / \{0\} \cong \varphi(\mathbb{Q}[X])$$

٣-٣-١

ومن حيث إن $\mathbb{Q}[X] / \{0\} \cong \mathbb{Q}[X]$ ينتج أن

$$\mathbb{Q}[X] \cong \varphi(\mathbb{Q}[X])$$

$$X \leftrightarrow \pi$$

حيث $\varphi(\mathbb{Q}[X])$ هي حلقة جميع كثيرات الحدود في π ذات المعاملات الكسرية (النسبية)

مثال ٢ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أو خاطئة :

(أ) كثيرة الحدود $a_nX^n + \dots + a_1X + a_0 \in R[X]$ تساوى الصفر إذا كان فقط إذا

كان $a_i = 0$ ، $i = 0, 1, \dots, n$

(ب) إذا احتوت الحلقة R على قواسم صفرية ، فإن الحلقة $R[X]$ تحتوى على قواسم صفرية.

(جـ) فى الحلقة R إذا كانت $f(X), g(X) \in R[X]$ من الدرجتين 3 ، 4 فإن كثيرة

الحدود $f(X)g(X)$ يمكن أن يكون لها الدرجة 8 .

(د) فى الحلقة R إذا كانت $f(X), g(X) \in R[X]$ من الدرجتين 3 ، 4 فإن كثيرة

الحدود $f(X)g(X)$ تكون دائماً من الدرجة 7 .

الحل : (أ) ، (ب) صحيحتان ، (جـ) ، (د) خاطئتان

لاحظ أن هناك فرقاً بين القولين : كثيرة الحدود تساوى الصفر وهو ما جاء فى (أ)

وكون كثيرة الحدود لها صفر مثل $f = X - 2$ لها الصفر 2 .

مثال ٣ : اوجد مجموع وحاصل ضرب $f(X) := \bar{3}X^4 + \bar{2}X + \bar{4}$ ،

$f(X), g(X) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ إذا علم أن $g(X) := \bar{2}X^3 + \bar{4}X^2 + \bar{3}X + \bar{2}$

الحل :

$$f(X) + g(X) = \bar{3}X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{4}X^2 + \bar{5}X + \bar{6}$$

$$= \bar{3}X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{4}X^2 + \bar{1} \quad (\bar{0} = \bar{5})$$

$$f(X).g(X) = \bar{6}X^7 + \bar{12}X^6 + \bar{9}X^5 + \bar{6}X^4 + \bar{4}X^4 + \bar{8}X^3 + \bar{6}X^2 + \bar{4}X + \bar{8}X^3 \\ + \bar{16}X^2 + \bar{12}X + \bar{8} = X^7 + \bar{2}X^6 + \bar{4}X^5 + X^3 + \bar{2}X^2 + X + \bar{3}$$

مثال ٤ : إذا كان φ الهومومورفيزم

$$\varphi: (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad (أ) \\ \varphi(X^2 + \bar{3}) \text{ فاحسب} \\ X \mapsto \bar{2}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$$

$$\varphi((X^4 + \bar{2}X)(X^3 - \bar{3}X^2 + \bar{3})) \text{ فاحسب} \quad \varphi: (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad (ب) \\ X \mapsto \bar{3}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$$

$$\varphi(X^2 + \bar{3}) = \bar{2}^2 + \bar{3} = \bar{4} + \bar{3} = \bar{7} = \bar{0} \quad (أ) \quad \text{الحل :}$$

$$\varphi((X^4 + \bar{2}X).(X^3 - \bar{3}X^2 + \bar{3})) = \varphi(X^4 + \bar{2}X). \varphi(X^3 - \bar{3}X^2 + \bar{3}) \quad (ب)$$

$$= (\bar{81} + \bar{6}).(\bar{27} - \bar{27} + \bar{3}) = (\bar{87}).(\bar{3}) = (\bar{3}).(\bar{3}) = \bar{9} = \bar{2}$$

$$\varphi: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{R}$$

مثال ٥ : ليكن لدينا الهومومورفيزم $X \mapsto 5$. اوجد 6 عناصر في نواة (φ)

$$a \mapsto a$$

الحل : نذكر أن (φ) هومومورفيزم يقتضى أن $\varphi(0) = 0$ أى أنه دائماً $(0 \in \text{Ker}(\varphi))$

$$X - 5 \in \text{Ker}(\varphi) \text{ . أى أن } \varphi(X - 5) = 5 - 5 = 0$$

$$X^2 - 25 \in \text{Ker}(\varphi) \text{ . أى أن } \varphi(X^2 - 25) = 5^2 - 5^2 = 0$$

وبالمثل $X^3 - 125 = (X - 5)(X^2 + 5X + 25)$ ، $X^4 - 625 = (X - 5)(X^3 + 5X^2 + 25X + 125)$ ،

. (φ) . $X^2 - 9X + 20 = (X - 5)(X - 4)$ ، ... ، كلها تقع في نواة (φ) .

مثال ٦ : تنص نظرية فرمات الصغيرة (Fermat's Little Theorem) على الآتي :

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ ، p عدداً أولياً لا يقسم a عندئذ فإن p يقسم $a^{p-1} - 1$

أى أن : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ، $a \not\equiv 0 \pmod{p}$

استخدم نظرية فرمات الصغيرة لحساب $\varphi(X^{231} + \bar{3}X^{117} - \bar{2}X^{53} + \bar{1})$ حيث

$$\varphi: (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

(هومومورفيزم)

$$X \mapsto 3, \bar{a} \mapsto \bar{a}$$

الحل :

$$\varphi(X^{231} + \bar{3}X^{117} - \bar{2}X^{57} + \bar{1}) = (\bar{3})^{231} + \bar{3}(\bar{3})^{117} - \bar{2}(\bar{3})^{53} + \bar{1}$$

$$= (\bar{3}^4)^{57} (\bar{3})^3 + \bar{3}(\bar{3}^4)^{29} (\bar{3}) - 2(\bar{3}^4)^{13} (\bar{3}) + \bar{1}$$

$$\equiv (\bar{1})(\bar{27}) + \bar{3}(\bar{1})(\bar{3}) - (\bar{2})(\bar{1})(\bar{3}) + \bar{1}$$

باعتبار $p = 5$ في نظرية فرمات الصغيرة

$$= \bar{2} + \bar{4} - \bar{6} + \bar{1} \equiv \bar{1} \pmod{5}$$

مثال ٧ : باستخدام نظرية فرمات الصغيرة اوجد جميع أصفار كثيرة الحدود الآتية في

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$f := \bar{2}X^{219} + \bar{3}X^{74} + \bar{2}X^{57} + \bar{3}X^{44}$$

الحل : سنأخذ $p = 5$. واضح أن $X = \bar{0}$ صفر لكثيرة الحدود . والآن بفرض أن

$X \not\equiv 0 \pmod{p}$ وبتطبيق نظرية فرمات نحصل على

$$f = \bar{2}(X^4)^{54} X^3 + \bar{3}(X^4)^{18} X^2 + \bar{2}(X^4)^{19} X + \bar{3}(X^4)^{11}$$

$$\equiv (\bar{2})(\bar{1})X^3 + (\bar{3})(\bar{1})X^2 + (\bar{2})(\bar{1})X + (\bar{3})(\bar{1})$$

$$\equiv \bar{2}X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{2}X + \bar{3} \equiv \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{2}X(X^2 + \bar{1}) + \bar{3}(X^2 + \bar{1}) \equiv \bar{0} \Rightarrow (X^2 + \bar{1})(\bar{2}X + \bar{3}) \equiv \bar{0}$$

$$\Rightarrow X^2 \equiv -\bar{1} \equiv \bar{4} \pmod{5} \quad \text{أو} \quad \bar{2}X \equiv -\bar{3} \equiv \bar{2} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow X \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{أو} \quad X \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{أو} \quad X \equiv 1 \pmod{5}$$

إذن الجذور المطلوبة هي $\bar{0}$ ، $\bar{1}$ ، $\bar{2}$ ، $\bar{3}$

مثال ٨ : أوجد جميع الوحدات في $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

الحل : من الملاحظة (٢-١-٥) (٤) الوحدات في $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ هي نفس وحدات

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. لأن : $7\mathbb{Z}$ مثالي أولى في $\mathbb{Z}$ لأن 7 عدد أولى (مثال (١-٣-٨)) (١) . ومن

(١-٣-١٢) ((٢) يكون $7\mathbb{Z}$ مثالياً أعظم في $\mathbb{Z}$. وبالتالي وحسب النظرية (١-٣-١١)

يكون $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ حقلاً وتكون وحداته أى وحدات $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ هي جميع عناصر $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

ما عدا $\bar{0}$ أى هي : $\bar{1}$ ، $\bar{2}$ ، ... ، $\bar{6}$. ويمكن رؤية $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ حقلاً بطريقة أخرى :

رأينا أن $7\mathbb{Z}$ مثالي أولى في $\mathbb{Z}$ وحسب (١-٣-٩) يكون $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ نطاقاً متكاملاً . ولكنه

منته (عدد عناصره = 7) فمن (١-٣-١١) يكون $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ حقلاً .

مثال ٩ : برهن على أن كثيرة الحدود $X^2 + \bar{3}X + \bar{2}$ لها أربعة أصفار في $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$.

كيف تفسر هذا على الرغم من أن درجة كثيرة الحدود المعطاة هي 2 ؟

الحل : بالتعويض المباشر نستنتج أن $\bar{1}$ ، $\bar{2}$ ، $\bar{4}$ ، $\bar{5}$ كلها أصفار لكثيرة الحدود المعطاة.

ونحن نعلم أن $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ليس نطاقاً متكاملاً لأن $\bar{6}$ ليس عدداً أولياً (مثال (١) في (١-٣-٨)) ،

(١-٣-٩) أو من ملاحظة أن :

$$\bar{0} = \bar{2}\bar{3}, \quad \bar{2} \neq \bar{0} \neq \bar{3}$$

أى أن $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ليس خالياً من القواسم الصفرية ، وبالتالي ليس نطاقاً متكاملًا ، ومن (٢-)

١-٥ ((٣) يكون $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ ليس نطاقاً متكاملًا . النظرية (٢-٢-٣) تكون خاطئة حال كون الحلقة المعنية لها قواسم صفرية .

مثال ١٠ : ليكن $f(X) := X^3 + \bar{2}X + \bar{4}$ ، $g(X) := \bar{3}X + \bar{2}$ عنصرين في $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.
عين خارج قسمة $f(X)$ على $g(X)$ ، وباقي القسمة .

الحل : نجري القسمة كالآتي :

$$\begin{array}{r}
 \bar{2}X^2 + \bar{2}X + \bar{1} \\
 \overline{X^3 + \bar{2}X + \bar{4}} \\
 \hline
 X^3 + \bar{4}X^2 \\
 \hline
 \bar{6}X^2 + \bar{2}X + \bar{4} \\
 \hline
 \bar{6}X^2 + \bar{4}X \\
 \hline
 \bar{3}X + \bar{4} \\
 \hline
 \bar{3}X + \bar{2} \\
 \hline
 \bar{2}
 \end{array}$$

$(\bar{2}\bar{3} = \bar{6} = \bar{1})$
 $(-\bar{4} = \bar{6})$
 $(-\bar{2} = \bar{3})$

أى أن خارج القسمة هو $\bar{2}X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$ ، باقى القسمة $\bar{2}$.

مثال ١١ : برهن على أن كثيرة الحدود $\bar{2}X + \bar{1} \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ لها معكوس ضربى فى $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

البرهان : لاحظ أن : $(\bar{2}X + \bar{1})^2 = \bar{4}X^2 + \bar{4}X + \bar{1} = \bar{1}$

أى أن $\bar{2}X + \bar{1}$ هى معكوس نفسها الضربى فى $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

مثال ١٢ : ليكن F حقلاً غير منته ، $f(X) \in F[X]$ ، إذا كان $f(a) = 0$ لعدد لانهاى من العناصر $a \in F$. برهن على أن $f(X) = 0$.

البرهان : تعلم من النظرية (٢-٢-٣) أنه إذا كان R نطاقاً متكاملًا ، فإن أية كثيرة حدود في $R[X]$ وغير صفرية يكون عدد أصفافها لايزيد على درجتها . وبالتالي إذا كان R حقلاً تكون النظرية صحيحة . ومن حيث إن عدد أصفار الدالة $f(X)$ لانهاى ودرجتها نهائية (finite) ، فلا بد أن تكون الدالة صفرية، أى يكون $f(X) = 0$.

مثال ١٣ : اوجد كثيرة حدود لها معاملات صحيحة بحيث يكون $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{3}$ صفرين لها.

الحل : $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{3}$ صفرين لكثيرة الحدود يعنى أن $(X - \frac{1}{2})$ ، $(X + \frac{1}{3})$ عاملان من عواملها . وحتى تكون كل معاملاتها صحيحة تكون كثيرة الحدود المطلوبة هي :

$$f(X) = 6(X + \frac{1}{3})(X - \frac{1}{2}) = 6X^2 - X - 1$$

مثال ١٤ : ليكن F حقلاً ، ولتكن $f := a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in F[X]$ وبرهن على أن $X - 1$ عامل من عوامل f إذا كان فقط إذا كان

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

البرهان : كما رأينا فى التمهيدية (٢-٢-٢) إذا كان $X - 1$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود f ، فإنه توجد كثيرة حدود g بحيث يكون $f = (X - 1)g$.

(بدهى أن $X - a$ عامل من عوامل f بمعنى a صفر لكثيرة الحدود f) وينتج أن $f(1) = 0$. ومن ثم فإن :

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

وبالعكس إذا كان $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$ فإن $f(1) = 0$ وبالتالي فإن $X - 1$ عامل من عوامل f .

مثال ١٥ : إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً، ولأى عدد صحيح a ، ليكن $\bar{a} := a \pmod{m}$ برهن على أن الراسم

$$\varphi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[X]$$

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \mapsto \bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$$

هو مومورفيزم حلق

البرهان : واضح أن φ معرف جيداً ، كما أن $\varphi(1) = \bar{1}$

$$\forall a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0, b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{Z}[X], m \geq n :$$

$$\begin{aligned} & \varphi(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 + b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0) \\ &= \varphi(b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + a_0 + b_0) \\ &= \overline{b_m} X^m + \overline{b_{m-1}} X^{m-1} + \dots + \overline{(a_n + b_n)} X^n + \overline{(a_{n-1} + b_{n-1})} X^{n-1} + \dots + \overline{a_0} + \overline{b_0} \\ &= \overline{b_m} X^m + \overline{b_{m-1}} X^{m-1} + \dots + \overline{b_0} + \overline{a_n} X^n + \overline{a_{n-1}} X^{n-1} + \dots + \overline{a_0} \\ &= \varphi(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0) + \varphi(b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0) . \\ & \varphi((a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0)(b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0)) \\ &= \varphi(a_n b_m X^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) X^{n+m-1} + \dots + a_0 b_0) \\ &= \overline{a_n b_m} X^{n+m} + \overline{(a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)} X^{n+m-1} + \dots + \overline{a_0 b_0} \\ &= (\overline{a_n} X^n + \overline{a_{n-1}} X^{n-1} + \dots + \overline{a_0})(\overline{b_m} X^m + \overline{b_{m-1}} X^{m-1} + \dots + \overline{b_0}) \\ &= \varphi(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0) \varphi(b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0) \\ & \varphi(1) = \bar{1} \end{aligned}$$

أى أن φ هومومورفيزم

مثال ١٦ : لكل عدد صحيح $p > 1$ ، برهن على أن : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

إذا كان فقط إذا كان p عدداً أولياً (نظرية ويلسون Wilson's Theorem)

البرهان : ليكن K حقلاً منتهياً . عندئذ فإن : $\prod_{a \in K^*} a = -1$ ، لأن :

نعتبر المجموعة M المعرفة كالاتى :

$$\begin{aligned} M &:= \{a \in K^* \mid a = a^{-1}\} \\ &= \{a \in K^* \mid a^2 = 1\} \end{aligned}$$

$$\prod_{a \in K^*} a = \prod_{a \in M} a : \text{واضح أن}$$

العنصر $a \in K$ يقع في M إذا كان فقط إذا كان a صفراً لكثيرة الحدود $X^2 - 1 \in K[X]$. وكثيرة الحدود $X^2 - 1 \in K[X]$ لها صفران فقط هما $+1$ ، -1 .

$$\prod_{a \in K^*} a = -1 \text{ ومن ثم ينتج أن}$$

والآن بتطبيق هذا على الحقل $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ نحصل على :

$$\overline{1.2...p-1} = \overline{-1} \Rightarrow \overline{1.2....(p-1)} = \overline{-1}$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{أى أن}$$

مثال ١٧ : برهن على أنه لأى عدد أولى p :

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

البرهان : من مثال ١٦ السابق مباشرة (نظرية ويلسون) لدينا :

$$(p-1).(p-2)! \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : [(p-1).(p-2)! + 1] = pk$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p.(p-2)! - (p-2)! = -1 + pk$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (p-2)! = p[-k + (p-2)!] + 1$$

$$\Rightarrow (p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(50!)^2 \equiv -1 \pmod{101} \quad \text{مثال ١٨ : برهن على أن}$$

البرهان :

$$(50!)^2 = (50!)(-1)(-2)...(-50)$$

$$\equiv (50!)(100)(99)...(51) \pmod{101}$$

$$\equiv (100)! \pmod{101} \equiv -1 \pmod{101}$$

مثال ١٩ : لتكن $\mathbb{R}\{X\}$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية . وليكن

$$[X^2 + 1] \text{ هو المثالي (الرئيسي) المتولد من كثيرة الحدود } X^2 + 1, \text{ أى أن :}$$

$$[X^2 + 1] = \{f : (X^2 + 1) \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$$

عندئذ فإن :

$$\mathbb{R}[X] / [X^2 + 1] = \{g + [X^2 + 1]\} = \{aX + b + [X^2 + 1] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

لأنه إذا كانت g أية كثيرة حدود في $\mathbb{R}[X]$ فإننا نستطيع أن نكتب $g = q(X^2 + 1) + r$ حيث q هي خارج القسمة ، r باقى القسمة عندما نقسم كثيرة الحدود g على $X^2 + 1$. وعلى وجه الخصوص $r = 0$ أو $\deg(r) < 2$ أى أن $r = aX + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ وهكذا فإن :

$$g + [X^2 + 1] = q(X^2 + 1) + r + [X^2 + 1] = r + [X^2 + 1]$$

لأن المثالى $[X^2 + 1]$ "يمتص" الحد $q(X^2 + 1)$.
ونلاحظ أن

$$X^2 + 1 + [X^2 + 1] = 0 + [X^2 + 1]$$

وعلى سبيل المثال فإن :

$$\begin{aligned} & (X + 3 + [X^2 + 1]).(2X + 5 + [X^2 + 1]) \\ &= 2X^2 + 11X + 15 + [X^2 + 1] \\ &= 2(X^2 + 1) + 11X + 13 + [X^2 + 1] \\ &= 11X + 13 + [X^2 + 1] \end{aligned}$$

مثال ٢٠ : برهن على أن :

$$\mathbb{Q}[X] / [X^2 - 2] \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

البرهان : نعرف الراسم

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}[X] &\rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ p &\mapsto p(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

φ هومومورفيزم :

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}[X]: \varphi(p+q) = (p+q)(\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}) + q(\sqrt{2}) = \varphi(p) + \varphi(q)$$

$$\varphi(p.q) = (p.q)(\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}).q(\sqrt{2}) = \varphi(p).\varphi(q)$$

$$\varphi(1) = 1$$

φ غامر (شامل) : لكل $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ يوجد $a+bX \in \mathbb{Q}[X]$

$$\varphi(a+bX) = a+b\sqrt{2}$$

نحسب نواة (φ)

$$\text{Ker}(\varphi) := \{p \in \mathbb{Q}[X] \mid p(\sqrt{2}) = 0\}$$

نبرهن على أن

$$\text{Ker}(\varphi) = [X^2 - 2]$$

واضح أن $[X^2 - 2] \subset \text{Ker}(\varphi)$ لأن $\varphi(X^2 - 2) = 2 - 2 = 0$

نبرهن على أن $\text{Ker}(\varphi) \subset [X^2 - 2]$: ليكن $p \in \text{Ker}(\varphi)$ بالقسمة الإقليدية نحصل على :

$$p = q(X^2 - 2) + rX + s$$

حيث $r, s \in \mathbb{Q}$ ، $q \in \mathbb{Q}[X]$

$rX + s$ هو باقى قسمة p على $X^2 - 2$ ويجب أن تكون درجته هي الأولى)

$$\Rightarrow p(\sqrt{2}) = q.0 + r\sqrt{2} + s = 0 \quad (\text{لأن } p \in \text{Ker}(\varphi))$$

$$\Rightarrow r = 0, s = 0$$

$$\Rightarrow p = q(X^2 - 2), q \in \mathbb{Q}[X]$$

أى أن $\text{Ker}(\varphi) \subset [X^2 - 2]$

نطبق نظرية الهومومورفيزم فنحصل على

$$\mathbb{Q}[X] / [X^2 - 2] = \mathbb{Q}[X] / \text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(\mathbb{Q}[X]) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

φ غامر

نهاية البرهان

مثال ٢١ : اضرب مثالا لحلقة إبدالية ذات عنصر وحدة R ، I مثالي أعظم فيها ، بحيث إن $I[X]$ ليس مثاليا أعظم في $R[X]$.

الحل : خذ الحلقة $\mathbb{Z}$ ، المثالي $I = [2]$ أي $2\mathbb{Z}$ مثالي أعظم في $\mathbb{Z}$ (من ١-٣-٨) $2\mathbb{Z}$ مثالي أولى في $\mathbb{Z}$ ، من (١-٣-١٢) $2\mathbb{Z}$ مثالي أعظم في $\mathbb{Z}$ المثالي $I[X]$ يعرف كالآتي :

$I[X] := \{f : f := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, n \in \mathbb{N}, 2^m \mid a_0, \dots, a_n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
واضح أن $X \notin I[X]$ ، بينما أن $X \in [2, X]$

يمكن البرهنة كذلك على أن $[2, X] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$. وبالتالي يكون

$$I[X] \subsetneq [2, X] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$$

مثال ٢٢ : برهن على أن المثالي $[2X]$ ليس مثاليا أعظم في $\mathbb{Z}[X]$.
البرهان :

$[2X]$ ليس مثاليا أعظم في $\mathbb{Z}[X]$ ، لأن : $[2X] \subsetneq [2, X]$ ، فمثلا $2 \in [2, X]$ ، $2 \notin [2X]$ ، لجميع $z \in [2X] : z \in [2, X]$. كذلك فإن $[2, X] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ ، فمثلا $1 \in \mathbb{Z}[X]$ ، بينما $1 \notin [2X]$. إذا كان $1 \in [2X]$ فإنه يوجد $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ بحيث أن $1 = 2f + Xg$.
ليكن $f := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ ، $g := b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$ ، والآن :

$$1 = 2(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) + X(b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m)$$

$$\Rightarrow 1 = 2a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$$

وهذا تناقض لأن $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ (كذلك $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$)
وبالتالي فإن :

$$[2X] \subsetneq [2, X] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$$

نهاية البرهان .

مثال ٢٣ : ليكن $f(X)$ عنصراً في $\mathbb{R}[X]$. إذا كان $f(a)=0$ ، $f'(a)=0$ ،
 $(f'(a))$ هو مشتقة الدالة $f(X)$ عند $X=a$ ، فبرهن على أن $(X-a)^2$ قاسم لـ $f(X)$.
البرهان : من التمهيدية (٢-٢-٢) : $f(a)=0$ يقتضى أنه توجد كثيرة حدود $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ بحيث إن : $f=(X-a)g$. والآن باجراء التفاضل للطرفين بالنسبة إلى X نحصل على :

$$f'=(X-a)g'+g$$

$$\Rightarrow 0=f'(a)=(a-a)g'+g(a) \Rightarrow g(a)=0$$

مرة أخرى من التمهيدية (٢-٢-٢) توجد كثيرة حدود $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ بحيث إن :
 $g=(X-a)h$. ومن ثم فإن : $f=(X-a)^2h$.
 نهاية البرهان .

مثال ٢٤ : برهن على أن المثالي $[X]$ في $\mathbb{Z}[X]$ أولى ، لكنه ليس أعظم .
البرهان : نعتبر الراسم :

$$\varphi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \mapsto a_0$$

واضح أن الراسم معرف جيداً .

φ هومومورفيزم : ليكن $f, g \in \mathbb{Z}[X]$:

$$f := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, g := b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(f+g) = \varphi(a_0+b_0 + (a_1+b_1)X + \dots + (a_n+b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + \dots + b_mX^m)$$

(بدون فقد للعمومية (without any loss of generality) أخذنا $n < m$)

$$= a_0 + b_0 = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(f.g) = \varphi((a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n).(b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m))$$

$$= \varphi(c_0 + c_1X + \dots + c_{n+m}X^{n+m}), c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$$

$$= c_0 = a_0 b_0 = \varphi(f).\varphi(g)$$

كذلك واضح أن $\varphi(1)=1$ (عنصر الوحدة في $\mathbb{Z}[X]$ هو "1" ، وهو كذلك عنصر الوحدة في $\mathbb{Z}$).

أى أن φ هو مومورفيزم

واضح أن φ راسم غامر (شامل ، فوقى)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(f) = a_0 = 0\} \\ &= \{a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\} \\ &= [X] \end{aligned}$$

وبتطبيق نظرية الهومومورفيزم (١-٣-٣) فينتج أن :

$$\mathbb{Z}[X] / [X] = \mathbb{Z}[X] / \text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Z}$$

φ غامر

ولأن $\mathbb{Z}$ نطاق متكامل وليس حقلاً فإنه ينتج من (١-٣-٩) ، (١-٣-١١) أن $[X]$ مثالي أولى في

$\mathbb{Z}[X]$ وليس مثالياً أعظم في $\mathbb{Z}[X]$.

مثال ٢٥ : برهن على أن أى حقل هو نطاق إقليدى .

البرهان : كل حقل هو نطاق متكامل ، إذن يتبقى البرهنة على أنه يوجد راسم $d: K \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (هو الحقل) بالخصائص المعطاة في (٢-١-٧) . سنعرف d كالآتى :

$$d: K \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$a \mapsto 0$$

ولأى $a, b \in K \setminus \{0\}$ نستطيع أن نكتب :

$$a = ab^{-1}b$$

وبالمقارنة مع $a = qb + r$ يكون $r = 0, q = ab^{-1}$.

نهاية البرهان .

مثال ٢٦ : برهن على أن أى حقل K هو نطاق مثاليات أساسية .

البرهان : من المثال السابق مباشرة نعلم أن أى حقل هو نطاق إقليدى ، ومن النظرية (٢-١-٩) كل نطاق إقليدى هو نطاق مثاليات أساسية ، فينتج المطلوب مباشرة .

طريقة أخرى : نعلم من مثال ٥٢ فى (١-٢-٨) أن الحقل K لا يحتوى من المثاليات إلا المثاليين التافهين : $\{0\}$ ، K نفسه . المثالى $\{0\}$ يتولد من 0 ، إذن هو مثالى أساسى . المثالى K يتولد من العنصر "1" لأن :

$$\forall x \in K : x = 1.x \in [1]$$

مثال ٢٧ : اضرب مثالا لبيان أن مثاليا أوليا فى حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة ليس بالضرورة مثاليا أعظم .

الحل : سنأخذ المثالى $[X]$ فى الحلقة $\mathbb{Z}[X]$ ، وسنشير إليه بالرمز I . لتكن $f(X)$ ، $g(X)$ كثيرتى حدود فى الحلقة $\mathbb{Z}[X]$ ، بحيث إن $f(X)g(X) \in I$. من الواضح أن $f(X)g(X) = Xh(X)$ لبعض $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ والآن ليكن :

$$f(X) := a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, a_n \neq 0,$$

$$g(X) := b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m, b_m \neq 0,$$

$$h(X) := c_0 + c_1X + \dots + c_pX^p, c_p \neq 0 .$$

عندئذ فإن :

$$f(X)g(X) = Xh(X) \Rightarrow$$

$$(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n)(b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m) = X(c_0 + c_1X + \dots + c_pX^p)$$

$$\Rightarrow a_0b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \text{ أو } b_0 = 0$$

$$a_0 = 0 \Rightarrow f(X) = a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = X(a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1}) \in I$$

$$b_0 = 0 \Rightarrow g(X) = b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m = X(b_1 + b_2X + \dots + b_mX^{m-1}) \in I \text{ وبالمثل}$$

$$f(X)g(X) \in I \Rightarrow f(X) \in I \text{ أو } g(X) \in I \quad (1) \text{ وهكذا فإن :}$$

وواضح أن $I = [X] \neq \mathbb{Z}[X]$ ، فعلى سبيل المثال $2 \in \mathbb{Z}[X]$ ، لكن $2 \notin [X]$.
إذا كان $2 \in [X]$ فإنه يوجد $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ بحيث أن : $2 = h(X)X$ ولأن
 $\mathbb{Z}[X]$ نطاق متكامل ($\mathbb{Z}$ نطاق متكامل ، $(-2, -1, 0, 1, 2)$ فإن :

$$\deg(2) = \deg h(X) + \deg(X)$$

$$\Rightarrow 0 > 1$$

وهذا تناقض

أى أن

$$2 \notin [X], 2 \in \mathbb{Z}[X] \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن $[X]$ مثالي أولى فى $\mathbb{Z}[X]$.
والآن نبرهن على أن $[X]$ ليس مثاليا أعظم فى $\mathbb{Z}[X]$:
المثالي $[X, 2]$ المتولد من X ، 2 يحقق :

$$[X] \subsetneq [X, 2] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$$

$$\text{لأن } 2 \in [X, 2] , 2 \notin [X]$$

كذلك فإن $1 \in \mathbb{Z}[X]$ ، $1 \notin [X, 2]$ (انظر مثال ٢٢ السابق) وبالتالي فإنه $[X]$ ليس
مثاليا أعظم فى $\mathbb{Z}[X]$. نهاية البرهان
(قارن مع مثال ٢٤)

مثال ٢٨ : برهن على أنه لاى مثالي غير تافه I فى $\mathbb{Z}[i]$ يكون $\mathbb{Z}[i]/I$ منتهيا .
البرهان : نعلم من مثال ٣ فى (٢-١-٨) أن $\mathbb{Z}[i]$ نطاق إقليدى ، ومن ثم فإن من (٢-١-٩)
يكون نطاق مثاليات أساسية . وبالتالي فإنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون
 $I = [a + bi]$. والآن :

$$a^2 + b^2 + I = (a + bi)(a - bi) + I = I \Rightarrow a^2 + b^2 \in I$$

والآن لآى $c, d \in \mathbb{Z}$

$$c = q_1(a^2 + b^2) + r_1, 0 \leq r_1 < a^2 + b^2$$

$$d = q_2(a^2 + b^2) + r_2, 0 \leq r_2 < a^2 + b^2$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned} c + di + I &= q_1(a^2 + b^2) + r_1 + iq_2(a^2 + b^2) + ir_2 + I \\ &= r_1 + ir_2 + I \end{aligned}$$

أى أن $\mathbb{Z}[i]/I$ منته .

مثال ٢٩ : إذا كان $\varphi: R \rightarrow S$ هومومورفيزم حلق . عرف $\bar{\varphi}: R[X] \rightarrow S[X]$ كالآتي :

$$\bar{\varphi}(a_n X^n + \dots + a_0) = \varphi(a_n) X^n + \dots + \varphi(a_0)$$

برهن على أن $\bar{\varphi}$ هومومورفيزم حلق . (R, S) حلقتان إبداليتان

البرهان :

$$\forall a_n X^n + \dots + a_0, b_m X^m + \dots + b_0 \in R[X]$$

و بدون فقد للعمومية ليكن $n < m$

$$\bar{\varphi}(a_n X^n + \dots + a_0 + b_m X^m + \dots + b_0)$$

$$= \bar{\varphi}(b_m X^m + \dots + (a_n + b_n) X^n + \dots + b_0 + a_0)$$

إبدالية $R[X]$

$$= \varphi(b_m) X^m + \dots + \varphi(a_n + b_n) X^n + \dots + \varphi(b_0 + a_0)$$

تعريف $\bar{\varphi}$

$$= \varphi(b_m) X^m + \dots + \varphi(a_n) X^n + \varphi(b_n) X^n + \dots + \varphi(b_0) + \varphi(a_0)$$

φ هومومورفيزم

$$= \varphi(a_n) X^n + \dots + \varphi(a_0) + \varphi(b_m) X^m + \dots + \varphi(b_0)$$

إبدالية $R[X]$

$$= \bar{\varphi}(a_n X^n + \dots + a_0) + \bar{\varphi}(b_m X^m + \dots + b_0) \quad (1)$$

تعريف $\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi}((a_n X^n + \dots + a_0)(b_m X^m + \dots + b_0))$$

$$= \bar{\varphi}(a_n b_m X^{n+m} + \dots + a_0 b_0)$$

إبدالية $R[X]$

$$= \varphi(a_n b_m)(X^{n+m}) + \dots + \varphi(a_0 b_0)$$

تعريف $\bar{\varphi}$

$$= \varphi(a_n)\varphi(b_m)X^{n+m} + \dots + \varphi(a_0)\varphi(b_0)$$

هو مومورفيزم φ

$$= (\varphi(a_n)X^n + \dots + \varphi(a_0))(\varphi(b_m)X^m + \dots + \varphi(b_0))$$

إبدالية $R[X]$

$$= \bar{\varphi}(a_n X^n + \dots + a_0) \bar{\varphi}(b_m X^m + \dots + b_0) \quad (2)$$

تعريف $\bar{\varphi}$

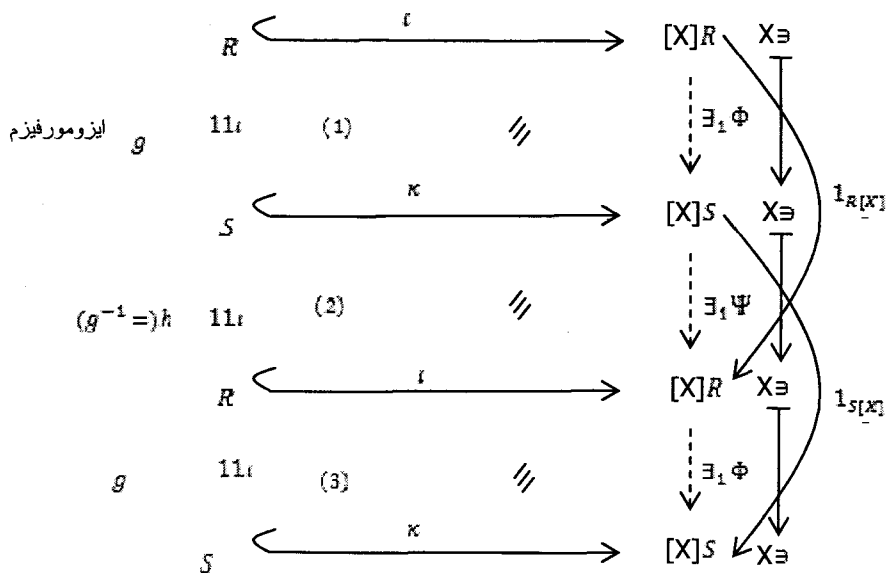
$$(1_{S[X]} = 1_S, 1_{R[X]} = 1_R \text{ لأن } \bar{\varphi}(1_{R[X]}) = 1_{S[X]}) \quad (3) \quad \bar{\varphi}(1_R) = 1_S \text{ يكون}$$

من (1)، (2)، (3) $\bar{\varphi}$ هو مومورفيزم .

مثال ٣٠:

برهن على أنه إذا كانت R ، S حلقتين متشاكلتين، فإن $R[X]$ ، $S[X]$ متشاكلتان .

البرهان: سنستخدم المسألة الكونية (العالمية) لكثيرات الحدود



فى الشكل (١) $R[X]$ هو حل المسألة الكونية ، ويوجد هومومورفيزم وحيد Φ يجعل الشكل إبدالياً . ويرسم X فى X .

فى الشكل (2) $S[X]$ هو حل المسألة الكونية ، ويوجد هومومورفيزم وحيد Ψ يجعل الشكل إبدالياً . ويرسم X فى X .

فى الشكل (3) $R[X]$ هو حل المسألة الكونية ، ويوجد هومومورفيزم وحيد لابد أن يكون هو Φ بحيث يجعل الشكل إبدالياً . ويرسم X فى X .

ولكن الهومومورفيزمين $1_{R[X]}$ ، $1_{S[X]}$ يجعلان الشكل المكون من (1) ، (2) والشكل المكون من (2) ، (3) على الترتيب إبداليين . ومن حيث أن Φ ، Ψ تفعلان نفس

الشيء وهما وحيدتان فينتج أن : $(3) \psi\Phi = 1_{R[X]}$ ، $(4) \Phi\psi = 1_{S[X]}$

من (3) يكون Φ راسماً واحداً لواحد ، و ψ راسماً شاملاً (غامراً)

ومن (4) يكون ψ راسماً واحداً لواحد ، Φ راسماً شاملاً (غامراً)

Φ هومومورفيزم (كذلك ψ) فيكون Φ (كذلك ψ) أيزومورفيزم .

نهاية البرهان .

مثال ٣١ : بإضافة الفرض الآتى فى تعريف النطاق الإقليدى (R, d) :

$$\forall a, b \in R \setminus \{0\} : d(a) \leq d(ab)$$

برهن على أن $d(1)$ هو الأصغر لجميع $a \in R \setminus \{0\}$. برهن كذلك على أن $u \in R$

وحدة إذا كان فقط إذا كان $d(u) = 1$.

البرهان : لجميع $a \in R \setminus \{0\}$ لدينا :

$$d(1) \leq d(1a) = d(a) \quad (1)$$

والآن بفرض أن لدينا $u \in R$ وحدة :

$$d(u) \leq d(uu^{-1}) = d(1) \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن $d(u) = 1$

وبالعكس إذا كان $u \in R$ بحيث $d(u) = d(1)$. فبخوارزمية القسمة يوجد $g, r \in R$ بحيث إن :

$$1 = qu + r, \quad r = 0 \quad \text{أو} \quad d(r) < d(u)$$

ولكن $d(u) = d(1)$ هو الأصغر بين $d(x)$ لجميع $x \in R \setminus \{0\}$ ، فإن $d(r) < d(u)$ يكون مستحيلا ويلزم أن يكون $r = 0$. أى أن : $1 = qu$ وتكون u وحدة .

مثال ٣٢ : مع اعتماد الفرض المضاف فى مثال ٣١ السابق مباشرة حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة حيث (R, d) نطاق إقليدى :

$$\forall a \in R \setminus \{0\} : d(1) \leq d(a) \quad (أ)$$

$$\forall a \in R \setminus \{0, 1\} : d(1) < d(a) \quad (ب)$$

$$\forall a \in R \setminus \{0\}, a \notin R^* : d(1) < d(a) \quad (ج)$$

الحل :

(أ) صحيحة

(ب) خاطئة لأن فى حالة كون $a \in R^*$ أى وحدة فإن $d(1) = d(a)$

(ج) صحيحة

مثال ٣٣ : حقق نتائج مثال ٣١ فى حالة كون النطاق الإقليدى هو $(\mathbb{Z}[i], d)$ حيث

$$d : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$m + in \mapsto m^2 + n^2$$

(مثال ٣ فى (٨-١-٢))

الحل : سنبرهن فى مثال ٣ من (٣-٢-١١) على أن وحدات $\mathbb{Z}[i]$ هى فقط ± 1 ، $\pm i$.

$$d(1) = d(i) = 1^2 = 1, d(-1) = d(-i) = (-1)^2 = 1$$

وواضح أن $d(1)$ هو الأصغر بين جميع $d(m + in)$ حيث $0 \neq m + in \in \mathbb{Z}[i]$

مثال ٣٤ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) إذا كان F حقلاً جزئياً من حقل E ، وكان $a \in E$ صفراً لكثيرة الحدود $f(X) \in F[X]$ ، فإن a سيكون صفراً لكثيرة الحدود $h(X) := f(X)g(X)$ لجميع $g(X) \in F[X]$

(ب) إذا كان F حقلاً جزئياً من حقل E ، وكان $f(X) \in F[X]$ ، عندئذ فإن مجموعة أصفار $f(X)$ في E تكون مثالياً في E .

(جـ) إذا كان F حقلاً جزئياً من حقل E ، وكان $\alpha \in E$ ، عندئذ فإن مجموعة جميع $f(X) \in F[X]$ بحيث إن $f(\alpha) = 0$ تكون مثالياً في $F[X]$

تعريف الحقل الجزئي : ليكن K حقلاً . يقال إن $k \subset K$ حقل جزئي (subfield) من K إذا كان وفقاً إذا كان :

$$\forall a, b \in k : a + b \in k, ab \in k \quad (أ)$$

(ب) k مع العمليتين المستحدثتين

$$+ : k \times k \rightarrow k \quad \therefore k \times k \rightarrow k$$

$$(a, b) \mapsto a.b \quad (a, b) \mapsto a + b$$

يكون حقلاً .

الحل : (أ) $h(a) = f(a)g(a) = 0g(a) = 0$ ، أى صحيحة

(ب) ليكن $f := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. لها جذران في $\mathbb{C}[X]$ هما $\pm i$ لكن

$$i - (-i) = 2i \text{ ليس جذراً لـ } f. \text{ إذن التقرير خاطئ .}$$

(جـ) صحيحة لأنه أولاً هذه المجموعة غير خالية، فهي تحتوي على الأقل كثيرة الحدود "0" .

وإذا كان هناك $f, g \in F[X]$ بحيث إن $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ فإن :

$$(f - g)(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0 . \text{ وإذا كان } f \in F[X] \text{ بحيث إن } f(\alpha) = 0 ,$$

وكان $h \in F[X]$ فإن $fh(\alpha) := f(\alpha)h(\alpha) = 0h(\alpha) = 0$. إذن التقرير صحيح

(تذكر أن $F[X]$ حلقة إبدالية) .

مثال ٣٥ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية ، صائبة أم خاطئة :

(أ) كثيرة الحدود f من درجة n ذات معاملات من حقل F يكون لها على الأكثر n من الأصفار في F .

(ب) كثيرة الحدود f من درجة n ذات معاملات من حقل F يكون لها على الأكثر n من الأصفار في أى حقل E بحيث يكون $F \subset E$.

(جـ) كل مثالي في $F[X]$ حيث F حقل يكون مثالياً أساسياً .

(د) كل مثالي أساسى في $F[X]$ حيث F حقل يكون مثالياً أعظم .

الحل : (أ) ، (ب) ، (جـ) صائبة . (د) خاطئ .

مثال ٣٦ : بدون استخدام النظرية (٢-١-١٠) برهن على أن $\mathbb{Z}[X]$ ليس نطاق مثاليات أساسية .

البرهان : لנأخذ مثالياً اختيارياً I في $\mathbb{Z}[X]$ معرفاً كآلاتى :

$$I := \{aX + 2b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ونفترض أن I يمكن كتابته على الصورة $I = [h(X)]$ ، أى هو مثالي أساسى . عندئذ فإنه توجد كثيرات حدود $f(X)$ ، $g(X)$ في $\mathbb{Z}[X]$ بحيث إن : $2 = h(X)f(X)$ ، $X = h(X)g(X)$ ، لأن $X \in I$ ، ومن (٢-١-٥) يكون $1 = \deg(h(X)) + \deg(g(X))$ ، $0 = \deg(h(X)) + \deg(f(X))$ (تذكر أن $\mathbb{Z}[X]$ نطاق متكامل) وينتج مباشرة أن $h(X)$ ، $f(X)$ ثابتان .

كذلك فإن $h(X) = \pm 1$ ، $f(X) = \pm 2$ أو $h(X) = \pm 2$ ، $f(X) = \pm 1$. ولكن $h(X) \neq \pm 1$ وإلا كان $[h(X)] = \mathbb{Z}[X]$. ومن ثم فإن $h(X) = \pm 2$ وبالتالي فإن

$g(X) = \pm \frac{1}{2}X$ وهذا تناقض لأن $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. أى أن I لا يمكن أن يكون مثالياً

أساسياً . وبالتالي فإن $\mathbb{Z}[X]$ ليس نطاق مثاليات .

تمارين

(١) اقسام في $\mathbb{Z}_5[X]$ كثيرة الحدود $f := X^4 - \bar{3}X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{4}X - \bar{1}$ على كثيرة

$$g := X^2 - \bar{2}X + \bar{3}$$

(٢) اقسام في $\mathbb{Z}_5[X]$ كثيرة الحدود $X^4 + \bar{3}X^3 + \bar{2}X + \bar{4}$ على كثيرة الحدود $X - \bar{1}$.

(٣) ليكن $f := X^6 + \bar{3}X^5 + \bar{4}X^2 - \bar{3}X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$ ، $g := X^2 + \bar{2}X - \bar{3}$ ،

اوجد $q, r \in \mathbb{Z}_7[X]$ بحيث يكون $f = qg + r$ ، $\deg(r) < 2$

(٤) ليكن $f := X^6 + \bar{3}X^5 + \bar{4}X^2 - \bar{3}X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$ ، $g := \bar{3}X^2 + \bar{2}X - \bar{3}$ ،

اوجد $q, r \in \mathbb{Z}_7[X]$ بحيث يكون $f = qg + r$ ، $\deg(r) < 2$

(٥) برهن على أن $X^4 + X \in \mathbb{Z}_3[X]$ ، $X^2 + X$ تعينان نفس الدالة من $\mathbb{Z}_3$ إلى $\mathbb{Z}_3$

(٦) هل هناك أى كثيرات حدود غير ثابتة في $\mathbb{Z}[X]$ يكون لها معكوس ضربى ؟ فسر

إجابتك

(٧) ليكن p عدداً أولياً . هل هناك أية كثيرات حدود غير ثابتة في $\mathbb{Z}_p[X]$ لها معكوس

ضربى .

(إرشاد : انظر (٢-١-٥) ((٢))

(٨) برهن على أن المثالي $[X]$ يكون مثالياً أعظم في $\mathbb{Q}[X]$

(٩) ليكن F حقلاً غير منته ، $f(X), g(X) \in F[X]$. إذا كان $f(a) = g(a)$

لعدد غير منته من العناصر a في F . برهن على أن $f(X) = g(X)$

(١٠) ليكن F حقلاً ، ولتكن $p(X) \in F[X]$. إذا كانت $f(X), g(X) \in F[X]$ ،

وكانت $\deg(f(X)), \deg(g(X)) < \deg(p(X))$ ، فبرهن على أن :

$$f(X) = g(X) \text{ أن } f(X) + [p(X)] = g(X) + [p(X)]$$

(١١) لتكن $f(X) \in \mathbb{R}[X]$. ليكن $f(a) = 0$ ، لكن $f'(a) \neq 0$ ، حيث $f'(X)$

مشتقة الدالة $f(X)$. برهن على أن a صفر غير مكرر لكثيرة الحدود $f(X)$

(١٢) اضرب مثالا لبيان أن التمهيدية (٢-٢-٢) تكون خاطئة إذا استبدلنا $\mathbb{Z}_m$ حيث m

ليس عددا أوليا ، $m > 1$ بـ R النطاق المتكامل .

(١٣) ليكن F حقلا ، وليكن

$$I := \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in F, a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0\}$$

برهن على أن I مثالي في $F[X]$ ، واوجد مولدا (generator) لـ I .

(١٤) اوجد عددا غير منته من كثيرات الحدود $f(X)$ في $\mathbb{Z}_3[X]$ بحيث يكون

$$f(a) = \bar{0} \text{ لجميع } a \in \mathbb{Z}_3 .$$

(١٥) برهن أو انف : D نطاق مثاليات أساسية $\Leftarrow D[X]$ نطاق مثاليات أساسية .

(١٦) برهن أو انف : أى نطاق جزئى من نطاق إقليدى يكون نطاقا إقليديا .

2 Ring Theory نظرية الحلقات



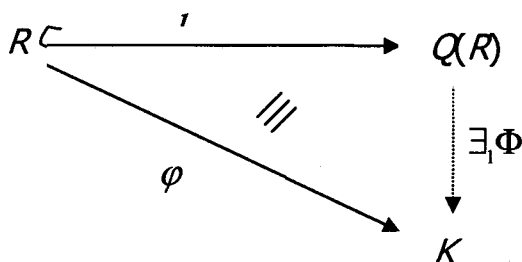
القسمة في النطاق المتكامل Division in Integral Domains

١-٣ حقل القسمة لنطاق متكامل Quotient field of an integral domain

١-١-٣ تعريف :

ليكن R نطاقاً متكاملًا . يقال للزوج $(Q(R), \iota)$ المكون من حقل $Q(R)$ ، ومونومورفيزم حلق $\iota: R \rightarrow Q(R)$ إنه حقل القسمة (Quotient field) لـ R إذا تحققت الخاصية الكونية (العالمية) :

لكل حقل K ، ولكل مونومورفيزم حلق $\varphi: R \rightarrow K$ ، يوجد بالضبط مونومورفيزم حلق وحيد $\Phi: Q(R) \rightarrow K$ بحيث إن الشكل الآتى يكون إبدالياً :



٢-١-٣ نظرية :

ليكن R نطاقاً متكاملًا . (١) بواسطة :

$$(a, b) \sim (c, d) : \Leftrightarrow ad = bc$$

ستعرف علاقة تكافؤ على $R \times (R \setminus \{0\})$

(٢) سنشير بـ $\frac{a}{b}$ إلى فصل التكافؤ لـ $(a, b) \in R \times (R \setminus \{0\})$ ، بـ $Q(R)$ إلى

مجموعة كل فصول التكافؤ هذه ، وهكذا يوجد رابطان “+” ، “.” على $Q(R)$ بحيث إن :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \forall a, c \in R \quad \forall b, d \in R \setminus \{0\}$$

(٣) الثلاثى $(Q(R), +, \cdot)$ حقل

$$\iota: R \rightarrow Q(R)$$

(٤) الراسم : $a \mapsto \frac{a}{1}$ هو مونومورفيزم حلق

(٥) الزوج $(Q(R), \iota)$ هو حقل القسمة لـ R

البرهان :

(١)

$$\forall a, b \in R \times (R \setminus \{0\}) : ab = ba \Rightarrow \forall (a, b) \in R \times (R \setminus \{0\}) : (a, b) \sim (a, b)$$

أى أن " ~ " انعكاسية (reflexive)

$$\forall (a, b), (c, d) \in R \times R \setminus \{0\} : (a, c) \sim (c, d) \Rightarrow$$

$$ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

أى أن " ~ " متماثلة

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in R \times (R \setminus \{0\}) : (a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow$$

$$ad = bc, cf = de \Rightarrow (ad)f = (bc)f, b(cf) = b(de) \Rightarrow (ad)f = b(de)$$

$$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

R ، نطاق متكامل

$$d \neq 0$$

أى أن " ~ " انتقالية (transitive) ، ومن ثم فإنها علاقة تكافؤ .

(٢) نبرهن على أن الرابطين " + " ، " . " معرفان جيداً ، أى أنه من $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ،

$$\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d} \text{ ينتج أن :}$$

$$\frac{a'd' + b'c'}{b'd'} = \frac{ad + bc}{bd}, \frac{a'c'}{b'd'} = \frac{ac}{bd} :$$

لدينا :

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}, \frac{c'}{d'} = \frac{c}{d} \Rightarrow a'b = ab', c'd = cd' \Rightarrow a'bdd' = ab'dd',$$

$$c'dbb' = cd'bb' \Rightarrow (a'd' + b'c')bd = (ad + bc)b'd' \Rightarrow \frac{a'd' + b'c'}{b'd'} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\cdot \frac{a'c'}{b'd'} = \frac{ac}{bd} \quad \text{كذلك لدينا } a'bc'd = ab'cd' \text{ ومنها ينتج مباشرة أن :}$$

(٣) يمكن للقارئ أن يتحقق بسهولة من أن $(Q(R), +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، عنصر الوحدة

فيها هو $\frac{1}{1}$ لأن :

$$\forall \frac{a}{b} \in Q(R) : \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} \quad (1 \text{ هو عنصر الوحدة في } R)$$

كذلك فإن $\frac{0}{1}$ هو عنصر الصفر في $Q(R)$ لأن :

$$\forall \frac{a}{b} \in Q(R) : \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0b + 1a}{1b} = \frac{1a}{1b} = \frac{a}{b}$$

كذلك فإن معكوس $\frac{a}{b}$ بالنسبة للعملية “+” هو $\frac{-a}{b}$ لأن :

$$\frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-ab + ba}{bb} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1} \quad (0 \text{ هو العنصر الصفري في } R)$$

$$\left(\frac{0}{b^2} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow 01 = b^2 0 \right) \text{ لأن}$$

كذلك فإن $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ وإلا :

$$(1)(1) = (1)(0) \Rightarrow 1 = 0$$

وهذا تناقض لأن R نطاق متكامل وبالتالي $1 \neq 0$

لكل $\frac{a}{b} \in Q(R) \setminus \{0\}$ (أى أن $a \neq 0$) يوجد $\frac{b}{a} \in Q(R) \setminus \{0\}$ وينتج أن :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}$$

(لأن $ab1 = ba1$)

أى أن لكل عنصر فى $Q(R) \setminus \{0\}$ يوجد معكوس بالنسبة للعملية (لرابط) “.”.

أى أن $(Q(R), +, \cdot)$ حقل .

$$\iota: R \rightarrow Q(R)$$

(٤) الراسم $a \mapsto \frac{a}{1}$ مونومورفيزم لأن :

$$\forall a, b \in R: \iota(a) = \iota(b) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Rightarrow a1 = 1b \Rightarrow a = b$$

أى أن ι راسم واحد لواحد (أحادى)

$$\iota(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a1+1b}{(1)(1)} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \iota(a) + \iota(b)$$

$$\iota(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{ab}{(1)(1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \iota(a)\iota(b)$$

$$\iota(1) = \frac{1}{1}$$

أى أن ι هومومورفيزم وبالتالي هو مونومورفيزم

يتبقى أن نثبت أن الخاصة العالمية (الكونية) متحققة :

(٥) ليكن K حقلا ، $\varphi: R \rightarrow K$ مونومورفيزما حلقيا . إذا كان $\Phi: Q(R) \rightarrow K$

مونومورفيزما حلقيا بحيث إن $\Phi \circ \iota = \varphi$ فإن :

$$\forall \frac{a}{b} \in Q(R): \Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \Phi\left(\frac{a1}{1b}\right) = \Phi\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b}\right) = \Phi(\iota(a)\iota(b)^{-1})$$

$$= \Phi(\iota(a))\Phi(\iota(b))^{-1} = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$$

أى أنه يوجد على الأكثر Φ واحدة تحقق المطلوب .

ونثبت الآن أنه يوجد بالفعل هذه لـ Φ كالتأتى :

$$\text{ليكن } \Phi : Q(R) \rightarrow K \text{ بحيث إن } \Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \text{ لجميع } \frac{a}{b} \in Q(R)$$

وليكن $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. عندئذ فإنه ينتج أن : $a'b = ab'$ وبالتالي فإن :

$$a'b = ab' \Rightarrow \varphi(a')\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(b') \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a')\varphi(b')^{-1}$$

$$\text{أى أن } \Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \Phi\left(\frac{a'}{b'}\right) \text{ أى أن } \Phi \text{ معرفة جيداً (موجودة)}$$

ونبرهن أخيراً على أن الراسم ϕ هومومورفيزم بالفعل كالتأتى :

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q(R) : \Phi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \Phi\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = \varphi(ad + bc)\varphi(bd)^{-1}$$

$$= \varphi(ad + bc)(\varphi(b)\varphi(d))^{-1} = (\varphi(a)\varphi(d) + \varphi(b)\varphi(c))\varphi(d)^{-1}\varphi(b)^{-1}$$

$$= \varphi(a)\varphi(b)^{-1} + \varphi(c)\varphi(d)^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right) + \Phi\left(\frac{c}{d}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \Phi\left(\frac{ac}{bd}\right) = \varphi(ac)\varphi(bd)^{-1} = \varphi(a)\varphi(c)(\varphi(b)\varphi(d))^{-1}$$

$$= \varphi(a)\varphi(c)\varphi(b)^{-1}\varphi(d)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(c)\varphi(d)^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\Phi\left(\frac{c}{d}\right),$$

K إبدالى

K إبدالى

$$\Phi\left(\frac{1}{1}\right) = \varphi(1)\varphi(1)^{-1} = 1$$

أى أن Φ هومومورفيزم .

نهاية البرهان .

٣-١-٣ ملحوظة :

لاحظ أن حقل القسمة لنطاق متكامل هو أصغر حقل يحتوى على النطاق المتكامل . ويقال فى هذه الحالة إن النطاق المتكامل قد غمر (embedded) فى الحقل . (انظر مثال ٤٠ فى (١-٢-٨)) . فإذا كان K هو حقل القسمة لـ R النطاق المتكامل ، وكان $\bar{K}$ حقلاً آخر يحتوى على R فإن : $R \subset K \subset \bar{K}$

٣-١-٤ أمثلة :

(١) $\mathbb{Z}$ نطاق متكامل ، حقل القسمة لـ $\mathbb{Z}$ هو $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(٢) حقل القسمة لنطاق متكامل منته (finite integral domain) هو نفسه ، لأن النطاق المتكامل المنتهى يكون حقلاً ، وهو بالطبع أصغر حقل يحتوى على نفسه .

(٣) ليكن K حقلاً . ينتج أن $K[X]$ نطاق متكامل . يشار إلى حقل القسمة لـ $K[X]$ بالرمز $K(X)$ غالباً ، ويسمى حقل الدوال الكسرية أو حقل الدوال النسبية (The field of relational functions) فى غير المحدد X ، والمعاملات من K .

(٤) الحقل $M(\mathbb{C})$ حقل الدوال الميرومورفية (The field of meromorphic functions) على $\mathbb{C}$ هو حقل القسمة لـ $H(\mathbb{C})$ النطاق المتكامل للدوال الهولومورفية (التحليلية ، القابلة للتفاضل) على $\mathbb{C}$.

٣-١-٥ أمثلة محلولة :

مثال ١ : صف حقل القسمة للنطاق المتكامل الجزئى (The integral subdomain) الآتى :

$$D := \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

الحل : حقل القسمة لـ D هو أصغر حقل يحتوى D ، الذى يكون فيه المعكوس الضربى لكل عنصر فى $D \setminus \{0\}$ ، أى يكون هو :

$$\left\{ \frac{m - n\sqrt{2}}{m^2 + 2n^2} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m^2 + 2n^2 \neq 0 \right\} = \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$$

مثال ٢ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) $\mathbb{R}$ هو حقل القسمة لـ $\mathbb{R}$

(ب) $\mathbb{C}$ هو حقل القسمة لـ $\mathbb{R}$

(جـ) إذا كان D حقلاً فإن حقل قسمة لـ D يكون متشاكلاً (أيزومورفيزماً) مع D .

(د) حقيقة أن النطاق المتكامل R ليس له قواسم صفرية قد استخدمت بقوة عدة مرات

فى إنشاء حقل القسمة $\mathbb{Q}(R)$

(هـ) كل عنصر فى النطاق المتكامل R ، يكون وحدة فى حقل القسمة $\mathbb{Q}(R)$

(و) كل عنصر غير صفري فى النطاق المتكامل R ، يكون وحدة فى حقل القسمة $\mathbb{Q}(R)$

(ز) حقل القسمة F' لنطاق متكامل جزئى D' من نطاق متكامل D يمكن اعتباره حقلاً

جزئياً من حقل قسمة لـ D .

الحل : (أ) ، (جـ) ، (د) ، (و) ، (ز) صحيحة ، (ب) ، (هـ) خاطئان .

مثال ٣ : برهن على أن حقل القسمة للنطاق المتكامل

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

يكون

$$\mathbb{Q}[i] := \{r + si \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$$

البرهان : أى حقل يحتوى على $\mathbb{Z}$ ، يجب أن يحتوى على $\mathbb{Q}[i]$. (*)

والآن ليكن $c + di \neq 0$ ، $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \in \mathbb{Q}[i]$$

أى أن حقل القسمة لـ $\mathbb{Z}[i]$ هو حقل محتوى فى $\mathbb{Q}[i]$. ومع (*) ينتج المطلوب مباشرة .

تمارين

(١) لتكن R حلقة إيدالية ، ولتكن $T \neq \{0\}$ مجموعة غير خالية من R ، مغلقة بالنسبة

إلى الضرب (closed under multiplication) ولا تحتوى قواسم صفرية .

مبتدئاً بـ $R \times T$ يمكنك أن تكبر R إلى حلقة قسمة جزئية $Q(R, T)$ متبعاً نفس الأسلوب تقريباً في إنشاء حقل القسمة لنطاق متكامل . برهن على وجه الخصوص أن :

(أ) $Q(R, T)$ لها عنصر وحدة حتى إذا لم يكن لـ R عنصر وحدة .

(ب) في $Q(R, T)$ كل عنصر غير صفري من T يكون وحدة

(٢) بالإشارة إلى التمرين (١) ، كم عدد عناصر الحلقة $Q(\mathbb{Z}_4, \{1, \bar{3}\})$ ؟

(إرشاد : $\bar{1}$ ، $\bar{3}$ وحدتان في $\mathbb{Z}_4$. عدد العناصر المطلوب 4) .

(٣) بالإشارة إلى التمرين (١) صف الحلقة $Q(\mathbb{Z}, \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\})$ ، وذلك بوصف حلقة جزئية من $\mathbb{R}$ تكون متشاكله معها .

(الحلقة الجزئية المطلوبة هي $\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$)

(٤) بالإشارة كذلك إلى التمرين (١) صف الحلقة $Q(3\mathbb{Z}, \{6^n \mid n \in \mathbb{N}\})$ بوصف حلقة جزئية من $\mathbb{R}$ تكون متشاكله معها .

(٥) حدد إذا ما كان التقريران الآتيان صحيحين أم خاطئين .

(أ) إذا كان F حقلاً فإن وحدات $F[X]$ هي بالضبط العناصر غير الصفريّة في F .

(ب) إذا كان F حقلاً ، فإن وحدات $F(X)$ (= حقل القسمة لـ $F[X]$) هي بالضبط العناصر غير الصفريّة في F .

(٦) برهن على أن حقل القسمة لحقل F يكون متشاكلاً مع F .

(٧) وضح لماذا لا يمكن أن ننشئ حقل القسمة لحلقة إبدالية ذات عنصر وحدة ، لكنها ليست نطاقاً متكاملًا .

(٨) ليكن D نطاقاً متكاملًا ، وليكن F حقل القسمة لـ D . برهن على أنه إذا كان E أي حقل يحتوي D ، فإن E يحتوي حقلاً يتشاكل مع F . (أي أن حقل القسمة لنطاق متكامل D يكون أصغر حقل يحتوي على D) .

٢-٣ العناصر الأولية والعناصر غير القابلة للتبسيط

Prime elements and irreducible elements

٢-٣-١ تعريف :

ليكن a, b عنصرين فى نطاق متكامل R . يسمى b قاسما (divisor) لـ a ، إذا وجد $c \in R$ بحيث إن: $a = bc$. ونكتب (كما سبق) $b|a$ ، بينما نكتب $b \nmid a$ إذا لم يكن الأمر كذلك. ونستطيع بسهولة شديدة البرهنة على الملحوظة الآتية :

٢-٣-٢ ملحوظة :

ليكن R نطاقا متكاملا، $1 \in R$ عنصر الوحدة فيه. عندئذ فإن :

$$(أ) \text{ لجميع } a \in R : 1|a, a|a$$

$$(ب) \text{ } c|a \Leftrightarrow b|a, c|b$$

$$(ج) \text{ لجميع } x_1, x_2, \dots, x_n \in R : b|(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) \Leftrightarrow b|a_1, \dots, b|a_2, b|a_n$$

$$(د) \text{ } b \in R^* \Leftrightarrow b|1 \text{ (كما سبق) } R^* = R \setminus \{0\}$$

$$(هـ) \text{ لجميع } u \in R^* : b|a \Leftrightarrow (bu)|a$$

$$(و) \text{ } b|a \Leftrightarrow [a] \subset [b] \text{ (المثال المتولد من } a \text{، كما سبق)}$$

٢-٣-٣ تعريف :

ليكن R نطاقا متكاملا. يقال لعنصرين $a, b \in R$ إنهما يتشاركان أو متشاركان (associate) إذا وجد $u \in R^*$ بحيث إن $a = bu$. ونكتب فى هذه الحالة $a \sim b$ ، وإذا لم يكن الأمر كذلك نكتب $a \not\sim b$.

٢-٣-٤ ملحوظة :

ليكن R نطاقا متكاملا.

$$(أ) \text{ لجميع } a, b \in R : a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$(ب) \text{ } a \sim b : a, b \in R^* \Leftrightarrow [b|a, a|b]$$

$$(ج) \text{ } \sim \text{ علاقة تكافؤ على } R.$$

البرهان :

(أ) " $\Leftarrow$ " : $[a]=[b] \Leftarrow$ يوجد $u, v \in R$: $a = bu$ ، $b = av \Leftarrow$ يوجد

$$uv = 1 \Leftarrow a = avu : u, v \in R$$

R نطاق متكامل

أى أن $a \sim b \Leftarrow u, v \in R^*$

" $\Rightarrow$ " : $a \sim b \Leftarrow$ يوجد $u \in R^*$: $a = bu$: $a \in [b]$

$\Leftarrow [a] \subset [b]$. بالمثل $[b] \subset [a]$ ، وينتج أن : $[a] = [b]$

(ب) " $\Leftarrow$ " : $a \sim b \Leftarrow$ يوجد $c \in R^*$: $a = bc$. $b | a$

$\Leftarrow c \in R^*$ يوجد $d \in R^*$: $cd = 1$: $ad = bcd = b \Leftarrow a | b$

" $\Rightarrow$ " : $a | b$ ، $b | a \Leftarrow$ يوجد $c, d \in R$: $ac = b$ ، $bd = a$ يوجد

$a \sim b \Leftarrow c, d \in R^*$ أى أن $dc = 1 \Leftarrow bdc = b : c, d \in R$

R نطاق متكامل

(ج) لجميع $a \in R$: $a = 1a$ أى أن لجميع $a \in R$: $a \sim a$. أى أن $\sim$ انعكاسية .

جميع $a, b \in R$: $a \sim b \Leftarrow$ يوجد $c \in R^*$: $a = bc$ ، يوجد $d \in R^*$: $cd = 1$

$\Leftarrow$ يوجد $c, d \in R^*$: $ad = bcd = b$ أى أن $b \sim a$.

أى أن $\sim$ متماثلة .

جميع $a, b, c \in R$: $a \sim b$ ، $b \sim c \Leftarrow$ يوجد $u, v \in R^*$: $a = bu$ ، $b = cv$

$\Leftarrow$ يوجد $u, v \in R^*$: $a = cvu$. R^* زمرة بالنسبة للضرب يقتضى أن

$vu = w \in R^*$ ، $a = cw$ ، وبالتالى فإن $a \sim c$.

إذن $\sim$ انتقالية ومن ثم فهي علاقة تكافؤ .

٣-٢-٥ تعريف :

ليكن R نطاقاً متكاملًا .

(أ) يقال لعنصر $p \in R$ إنه عنصر أولى (prime element) إذا كان :

$$p \notin R^* , p \neq 0 \quad (١)$$

$$p \mid b \text{ أو } p \mid a \Leftrightarrow p \mid ab : a, b \in R \quad (٢)$$

(ب) يقال لعنصر $q \in R$ إنه عنصر غير قابل للتبسيط (irreducible element) إذا كان :

$$q \notin R^* , q \neq 0 \quad (١)$$

$$b \in R^* \text{ أو } a \in R^* \Leftrightarrow q = ab : a, b \in R \quad (٢)$$

(ج) يقال لعنصر فى R إنه قابل للتبسيط (reducible) إذا لم يكن غير قابل للتبسيط .

٣-٢-٦ أمثلة :

(١) لى K حقل $K : K^* = K \setminus \{0\}$ ، وبالتالى فإن K لا يحتوى على أية عناصر أولية أو

عناصر قابلة للتبسيط .

(٢) لجميع $m \in \mathbb{N}, m > 1$

m عنصر أولى فى $\mathbb{Z} \Leftrightarrow m$ عدد أولى فى $\mathbb{Z} \Leftrightarrow m$ غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Z}$.

(٣) ليكن K حقلا ، $a \in K \setminus \{0\}$ ، $b \in K$. كثيرة الحدود $aX + b$ عنصر غير قابل

للتبسيط فى حلقة كثيرات الحدود $K[X]$ لأن :

$$aX + b = fg \text{ حيث } f, g \in K[X] \Leftrightarrow \deg(f) = 0 \text{ أو } \deg(g) = 0$$

$$f \in K^* \text{ أو } g \in K^* \text{ (انظر (٢-١-٥) ، (٢) ، (٤))}$$

(٤) تطبيقا على (٣) : كثيرة الحدود $2(X+1)$ غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{R}[X]$ (لأن

$$2 \in \mathbb{R}^* \text{ بينما هى قابلة للتبسيط فى } \mathbb{Z}[X] \text{ (لأن } \mathbb{Z}^* = \{-1, 1\} , 2 \notin \mathbb{Z}^* , X+1 \notin \mathbb{Z}^*$$

٣-٢-٧ نظرية :

ليكن R نطاقا متكاملا ، $p \in R$

(١) p غير قابل للتبسيط $\Rightarrow p$ عنصر أولى

(٢) مثالى أولى $[p] \neq \{0\}$ ، $p \Leftrightarrow [p]$ عنصر أولى

(٣) $p \Leftrightarrow \nexists a \in R : [p] \subsetneq [a] \subsetneq R$ عنصر غير قابل للتبسيط .

البرهان :

(١) ليكن $p = ab : a, b \in R$. عنصر أولى يستلزم أن $p \mid a$ أو $p \mid b$. $p \mid a$.
 يقتضى أنه يوجد $c \in R : a = pc$ ومن ثم فإن $p \mid b$ فإن $p \mid a$. $p \mid b$.
 يقتضى أن $1 = cb$ أى أن $b \in R^*$. الحالة $p \mid b$ مشابهة تماماً وينتج أن $a \in R^*$.
 أى أنه ينتج على أية حال أن p غير قابل للتبسيط .

(٢) " $\Rightarrow$ " : p عنصر أولى $\Leftrightarrow p \neq 0 \Leftrightarrow [p] \neq \{0\}$. كذلك p عنصر أولى
 $\Leftrightarrow p \notin R^* \Leftrightarrow [p] \neq R$ (لماذا ؟)

لجميع $a, b \in R : ab \in [p] \Leftrightarrow$ يوجد $c \in R : ab = cp$ أى أن
 $p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a$ أو $p \mid b \Leftrightarrow$ يوجد $d \in R : p \mid a$ أو يوجد $e \in R :$
 p عنصر أولى

$pe = b$ أى أنه $a \in [p]$ أو $b \in [p]$.

" $\Leftarrow$ " : $[p] \neq \{0\} \Leftrightarrow p \neq 0$. $[p]$ مثالي أولى $\Leftrightarrow [p] \neq R \Leftrightarrow 1 \notin [p] \Leftrightarrow p \notin R^*$.
 $p \mid ab \Leftrightarrow$ يوجد $c \in R : pc = ab \Leftrightarrow ab \in [p] \Leftrightarrow a \in [p]$
 $[p]$ مثالي أولى

أو $b \in [p] \Leftrightarrow$ يوجد $d \in R : a = pd$ أو يوجد $e \in R : b = pe$

$\Leftrightarrow p \mid a$ أو $p \mid b$.

(٣) " $\Rightarrow$ " : ليكن هناك عنصر $a \in R$ بحيث إن $[p] \subsetneq [a] \subsetneq R$. هذا يقتضى أنه

يوجد عنصر $c \in R : p = ca$ $\Leftrightarrow c \in R^*$ أو $a \in R^*$

p عنصر غير قابل للتبسيط

$\Leftrightarrow [p] = [a]$ أو $[a] = R$ (لماذا ؟) : تناقض .

" $\Leftarrow$ " : ليكن $p = ab$ ، حيث $a, b \in R$. هذا يستلزم أن $p \in [a]$

أى أن $[p] \subset [a]$ وهذا يستلزم $[p] = [a]$ أو $[a] = R$. $[a] = R$ يستلزم أن $1 \in [a]$ أى أنه يوجد $c \in R$: $1 = ac$ أى أن $a \in R^*$. $[p] = [a]$ يستلزم أنه

يوجد $d \in R$ بحيث إن $a = pd$. وهذا يستلزم أن : $p = pdb$ $\Leftarrow$

R نطاق متكامل

$db = 1$ أى أن $b \in R^*$.

٣-٢-٨ نتيجة :

ليكن R نطاق مثاليات أساسية . عندئذ فإن :

(١) $a \in R$ عنصر غير قابل للتبسيط $\Leftrightarrow a \in R$ عنصر أولى

(٢) $\{0\} \neq A \subset R$ مثالى أعظم $\Leftrightarrow \{0\} \neq A \subset R$ مثالى أولى .

البرهان : (١) بالرجوع إلى (٣-٢-٧) يكون المطلوب هو إثبات أن $a \in R$ عنصر

غير قابل للتبسيط $\Leftarrow a \in R$ عنصر أولى .

من (٣-٢-٧) $a \in R$ عنصر غير قابل للتبسيط $\Leftarrow \nexists a \in R : [p] \subsetneq [a] \subsetneq R$.

ومن حيث إن R نطاق مثاليات أساسية ، أى أن كل مثالى فيه يكون على الشكل $[x]$ حيث

$x \in R$ فإنه ينتج أن $[p]$ مثالى أعظم فى R . ومن مثال ٢٨ فى (١-٣-٢٠) ينتج أن

$[p]$ مثالى أولى ، $[p] \neq \{0\}$ (لا يكون مثالياً أعظم فى أية حلقة) ومن (٣-٢-٧)

(٢) ينتج أن p عنصر أولى فى R .

(٢) كذلك من مثال ٢٨ فى (١-٣-٢٠) يتضح أن المطلوب هو إثبات أن :

$\{0\} \neq A \subset R$ مثالى أولى $\Leftarrow \{0\} \neq A \neq R$ مثالى أعظم .

والآن من حيث إن R نطاق مثاليات أساسية ، فكل مثالى $\{0\} \neq A$ يمكن أن يكتب على

الصورة $a \in R$ ، $\{0\} \neq A = [a]$. ومن (٣-٢-٧) ينتج أن a عنصر أولى ،

ومن (٣-٢-٧) ينتج أن $a \in R$ عنصر غير قابل للتبسيط . ومن (٣-٢-٧) ينتج أنه لا يوجد عنصر $b \in R$ بحيث إن :

$A = [a] \subsetneq [b] \subsetneq R$

ومن حيث إن R نطاق مثاليات أساسية فإن $A = [a]$ يكون مثالياً أعظم فى R .

٣-٢-٩ نتيجة :

ليكن K حقلاً . عندئذ فإن لكل مثالى A فى حلقة كثيرات الحدود $K[X]$ بحيث إن $\{0\} \neq A \subsetneq K[X]$ تكون التقريرات الآتية متكافئة :

(١) A مثالى أولى

(٢) A مثالى أعظم

(٣) توجد كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط f بحيث إن : $f \in K[X], A = [f]$.

البرهان : من (٢-١-١٠) ينتج أن $K[X]$ نطاق مثاليات أساسية ، ومن (٣-٢-٨) ينتج أن التقريرين (١) ، (٢) متكافئان .

مرة أخرى $K[X]$ نطاق مثاليات أساسية ، فكل مثالى يمكن أن يكتب على الصورة $[g]$ حيث $g \in K[X]$. ومن (٣-٢-٧) :

$f \Leftrightarrow \nexists g \in K[X] : [f] \subsetneq [g] \subsetneq K[X]$ غير قابلة للتبسيط . ولأن $K[X]$ نطاق مثاليات

أساسية فإن $[f]$ يكون مثالياً أعظم فى $K[X]$. أى أن التقريرين (٢) ، (٣) متكافئان .

٣-٢-١٠ مثال :

نعتبر الحلقة الجزئية من $\mathbb{C}$ الآتية :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{m + in\sqrt{5} \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

(تحقق من كونها حلقة جزئية من $\mathbb{C}$). هى على وجه الخصوص نطاق متكامل (تحقق

كذلك من ذلك!) . الراسم $\mu : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{N}$ يحقق الخاصة :

$$m + in\sqrt{5} \mapsto m^2 + 5n^2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : \mu(xy) = \mu((m_1 + in_1\sqrt{5})(m_2 + in_2\sqrt{5}))$$

$$= \mu(m_1m_2 - 5n_1n_2 + i(n_1m_2 + m_1n_2)\sqrt{5})$$

$$= (m_1m_2 - 5n_1n_2)^2 + 5(n_1m_2 + m_1n_2)^2$$

$$= m_1^2m_2^2 + 25n_1^2n_2^2 + 5n_1^2m_2^2 + 5m_1^2n_2^2 = (m_1^2 + 5n_1^2)(m_2^2 + 5n_2^2) = \mu(x)\mu(y)$$

واضح أن $+1$ ، -1 وحدتان فى $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. نبرهن كذلك على أنه لا توجد وحدات أخرى فى $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ كالآتى :

لتكن $u = m + in\sqrt{5}$ وحدة فى $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. هذا يستلزم وجود $v \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ بحيث $uv = 1$.

$$\mu(u)\mu(v) = \mu(uv) = \mu(1) = 1$$

والآن :

أى أن $\mu(u) \mid 1$ وبالتالي فإن $(m^2 + 5n^2) \mid 1$ ومن ثم فإن $n = 0$ ، $m^2 = 1$ أى أن $u \in \{-1, 1\}$.

سنبرهن كذلك على علاقات القسمة الموضوعة فى الجدول الآتى :

x	3	9	$2+i\sqrt{5}$	$2-i\sqrt{5}$	$3(2+i\sqrt{5})$
قواسم x	1	1	1	1	1
(غير	3	3	$2+i\sqrt{5}$	$2-i\sqrt{5}$	3
متشاركين		$2 \pm i\sqrt{5}$			$2+i\sqrt{5}$
متشى متشى)		9			$3(2+i\sqrt{5})$

والآن إذا كان z هو أحد العناصر 3 أو $2+i\sqrt{5}$ أو $2-i\sqrt{5}$ ، وكان $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ قاسماً لـ z فإنه يوجد $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ بحيث إن $xy = z$. ومنها ينتج أن : $\mu(x)\mu(y) = \mu(z) = 9$. ولأن $\mu(x) = 3$ غير ممكن (لأنه لا يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $m^2 + 5n^2 = 3$) فإنه ينتج أن $\mu(x) = 1$ أو $\mu(y) = 1$ ومن ثم فإن $x \in \{1, -1\}$ أو $x \in \{z, -z\}$

وإذا كان $x = m + in\sqrt{5}$ قاسماً لـ 9 أو لـ $3(2+i\sqrt{5})$ فمن الخاصة $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ يتضح أن $\mu(x) = m^2 + 5n^2$ يكون قاسماً لـ 81 ، ومن ثم

فإن $\mu(x) \in \{1, 3, 9, 27, 81\}$. وكما سبق فإن $\mu(y) \neq 3$ ، وكذلك بالمثل $\mu(y) \neq 27$ لجميع $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. علاوة على ذلك فإن :

$$\mu(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{1, -1\}$$

$$\mu(x) = 9 \Leftrightarrow [(n = 0, m^2 = 9) \text{ أو } (n^2 = 1, m^2 = 4)]$$

$$\Leftrightarrow [x \in \{3, -3\} \text{ أو } x \in \{2+i\sqrt{5}, -(2+i\sqrt{5}), 2-i\sqrt{5}, -(2-i\sqrt{5})\}]$$

$$\mu(x) = 81 \Leftrightarrow [(n = 0, m^2 = 81) \text{ أو } (n^2 = 9, m^2 = 36)]$$

$$\Leftrightarrow [x \in \{9, -9\} \text{ أو } x \in \{3(2+i\sqrt{5}), -3(2+i\sqrt{5}), 3(2-i\sqrt{5}), -3(2-i\sqrt{5})\}]$$

وبلاحظ أن $2-i\sqrt{5}$ ليس قاسماً لـ $3(2+i\sqrt{5})$. وإلا فإنه يوجد

$$3(2+i\sqrt{5}) = (2-i\sqrt{5})(k+il\sqrt{5}) : k, l \in \mathbb{Z}$$

$$-k+2l=3, 2k+5l=6 \text{ وبالتالي فإن : } 9l=12 \text{ وهذا تناقض (} l \in \mathbb{Z} \text{).}$$

وواضح أن $3, 2+i\sqrt{5}, 2-i\sqrt{5}$ غير متشاركين مثنى مثنى وجميعها أعداد غير قابلة للتبسيط

في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

وبلاحظ كذلك أن $9=3.3=(2+i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})$ ، أى أن 9 كتب على هيئة صورتين

مختلفتين من عددين غير قابلين للتبسيط ، وهذا غير ممكن فى حالة كون الحلقة $\mathbb{Z}$ بدلا

من $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

وأخيراً فإن العنصر 3 غير القابل للتبسيط ليس عنصراً أولياً فى $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ لأن

$$(2+i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5}) = 3 \nmid (2 \pm i\sqrt{5})$$

٣-٢-١١ أمثلة محلولة

مثال ١ : قرر أى العناصر الآتية يكون غير قابل للتبسيط فى الحقل المتكامل الموضح :

$$(أ) \quad 5 \in \mathbb{Z} \quad (ب) \quad -17 \in \mathbb{Z}$$

$$(جـ) \quad 2X-3 \in \mathbb{Z}[X] \quad (د) \quad 14 \in \mathbb{Z}$$

$$(هـ) \quad 2X-3 \in \mathbb{Q}[X] \quad (و) \quad 2X-10 \in \mathbb{Z}[X]$$

$$(ز) \quad \bar{2}X - \bar{10} \in \mathbb{Z}_{11}[X] \quad (ح) \quad 2X-10 \in \mathbb{Q}[X]$$

الحل : واضح أن $5 \in \mathbb{Z}$ ، $-17 \in \mathbb{Z}$ غير قابلين للتبسيط (1- وحدة فى $\mathbb{Z}$) ،
 $14 = 7 \cdot 2 \in \mathbb{Z}$ قابل للتبسيط ، $2X-3 \in \mathbb{Z}[X]$ غير قابل للتبسيط ، بينما
 $2X-10 = 2(X-5) \in \mathbb{Z}[X]$ قابل للتبسيط .

$2X-10 = 2(X-5) \in \mathbb{Q}[X]$: أخذنا 2 عاملا مشتركا على سبيل المثال لكن جميع
 العناصر فى $\mathbb{Q}^*$ وحدات إذن $2X-10$ غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Q}[X]$. كذلك
 $2X-3 \in \mathbb{Q}[X]$ غير قابلة للتبسيط .

فى (ز) : $\bar{2}X - \bar{10} = \bar{2}(X-5) \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ ، $\bar{2}$ لها معكوس هو $\bar{6}$ فى $\mathbb{Z}_{11}$. أى أن
 $\bar{2} \in \mathbb{Z}_{11}^*$. وبالتالي فإن $\bar{2}X - \bar{10} \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ غير قابلة للتبسيط .

مثال ٢ : هل يمكنك أن توجد عناصر تشارك كثيرة الحدود $2X-7$ فى $\mathbb{Z}[X]$ ،
 $\mathbb{Q}[X]$ ، $\mathbb{Z}_{11}[X]$ ؟

الحل : فى $\mathbb{Z}[X]$ توجد وحدتان فقط هما $+1$ ، -1 . وبالتالي فإنه فى $\mathbb{Z}[X]$
 $2X-7$ يشارك فقط فى $-2X+7$

فى $\mathbb{Q}[X]$ جميع عناصر $\mathbb{Q}^*$ وحدات وبالتالي فإنه $q(2X-7) = 2qX-7q$ ، $q \in \mathbb{Q}^*$
 كلها تشارك $2X-7$

كذلك فى $\mathbb{Z}_{11}[X]$: $\mathbb{Z}_{11}$ حقل وبالتالي كل عنصر فى $\mathbb{Z}_{11}^*$ يكون وحدة ومن ثم فإن :

على سبيل $\bar{k}(2X - \bar{7}) = 2\bar{k}X - \bar{7}\bar{k} \in \mathbb{Z}_{11}[X]$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_{11}^*$ كلها تشارك $2X - \bar{7}$. على سبيل

المثال $2(2X - \bar{7}) = 4X - \bar{3}$ يشارك $2X - \bar{7}$ في $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

مثال ٣ : اوجد جميع وحدات $\mathbb{Z}[i]$

الحل : كما نعلم $\mathbb{Z}[i] := \{m + ni \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\mu: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$$

$$m + ni \mapsto m^2 + n^2$$

نعتبر

(سنستخدم هذا الراسم في أمثلة تالية)

كما جاء في (٣-٢-١٠) سيكون

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}[i]: \mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$$

إذا كانت $m_1 + n_1i \in \mathbb{Z}[i]$ وحدة فإنه توجد $m_2 + n_2i \in \mathbb{Z}[i]$ وحدة بحيث يكون

$$(m_1 + n_1i)(m_2 + n_2i) = 1$$

وهذا يستلزم أن

$$\mu(m_1 + n_1i)\mu(m_2 + n_2i) = \mu((m_1 + n_1i)(m_2 + n_2i)) = \mu(1)$$

أى أن

$$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = 1 \Rightarrow m_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow m_1 = \pm 1, n_1 = 0 \text{ أو } m_1 = 0, n_1 = \pm 1,$$

أى أن وحدات $\mathbb{Z}[i]$ هي : ± 1 , $\pm i$.

مثال ٤ : برهن أو انف :

كل عنصر قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}$ يكون قابلاً للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$

الحل : التقرير خاطئ . $5 \in \mathbb{Z}$ غير قابل للتبسيط بينما $5 = (1+2i)(1-2i) \in \mathbb{Z}[i]$, من

مثال ٣ السابق مباشرة $1 \pm 2i \in \mathbb{Z}[i]$ ليس وحدة ، وبالتالي فإن $5 \in \mathbb{Z}[i]$ قابل للتبسيط .

مثال ٥ : برهن على أن 6 لا يمكن أن تكتب بطريقة وحيدة (بدون حساب التشاركات

(up to associates) كحاصل ضرب عناصر غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$$\text{الحل : } 6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

سنثبت أن $1 + \sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ غير قابل للتبسيط .

إذا كان $1 + \sqrt{-5} = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ فإن :

$$\mu(x)\mu(y) = \mu(xy) = \mu(1 + \sqrt{-5}) = 26 \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 2, 13, 26\}$$

$\mu(x) = 1 \Leftrightarrow x$ وحدة (رأينا فى (٣-٢-١) أنه توجد وحدتان فقط فى $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ هما ± 1).

$$\mu(x) = 26 \Leftrightarrow \mu(y) = 1 \Leftrightarrow y \text{ وحدة .}$$

$$\mu(x) = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 5\beta^2 = 2 \text{ لبعض } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ ، وهذا غير ممكن .}$$

$$\mu(x) = 13 \Leftrightarrow \alpha^2 + 5\beta^2 = 13 \text{ لبعض } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ : أيضاً غير ممكن}$$

إن $1 + \sqrt{-5}$ غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Z}\sqrt{-5}$

سنثبت كذلك أن $2 \in \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ غير قابل للتبسيط .

إذا كان $2 = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ فإن :

$$\mu(x)\mu(y) = \mu(xy) = \mu(2) = 4 \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 2, 4\}$$

$$\mu(x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ وحدة فى } \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$

$$\mu(x) = 4 \Leftrightarrow y \text{ وحدة فى } \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$

$$\mu(x) = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 5\beta^2 = 2 \text{ لبعض } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ ، وهذا غير ممكن . إذن } 2 \in \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$

غير قابل للتبسيط .

بالمثل $3, 1 - \sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ غير قابلين للتبسيط .

نهاية البرهان .

مثال ٦ : اختبر إذا ما كانت العناصر الآتية غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}[i]$

$$(أ) 5 \quad (ب) 7 \quad (ج) 4 + 3i \quad (د) 6 - 7i$$

الحل : (أ) ليكن $5 = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$ ، $x = a + bi$ ، $y = c + di$ ،

$$\Rightarrow 25 = \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 5, 25\}$$

$$\mu(x) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة في } x$$

$$\mu(x) = 25 \Rightarrow \mu(y) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة في } y$$

$$\mu(x) = 5 \Leftrightarrow \mu(y) = 5 \Rightarrow |x|^2 = a^2 + b^2 = 5, |y|^2 = c^2 + d^2 = 5$$

$$\Rightarrow a = \pm 2, b = \pm 1 \text{ أو } a = \pm 1, b = \pm 2, c = \pm 2, d = \pm 1 \text{ أو } c = \pm 1, d = \pm 2$$

وبسهولة يمكن الاستدلال على أن :

$$5 = (2+i)(2-i)$$

أو أن

$$5 = (1+2i)(1-2i)$$

ولا يعنى هذا أن هناك تحليلين مختلفين لـ 5 في $\mathbb{Z}[i]$ (وسنعلم في (٣-٣) أن هذا

لا يمكن أن يحدث في $\mathbb{Z}[i]$ لأن

$$(2+i)(2-i) = i(-2i+1)i(-2i-1) = (1-2i)(1+2i)$$

حيث i وحدة في $\mathbb{Z}[i]$

ومن حيث إن $1+2i, 1-2i \notin (\mathbb{Z}[i])^*$ ، أى ليسا وحدتين في $(\mathbb{Z}[i])^*$ (مثال ٣ السابق)

، فيكون 5 قابلاً للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$

(ب) ليكن $7 = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ ، $x = a+bi$ ، $y = c+di$ ،

$$49 = \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 7, 49\}$$

$$\mu(x) = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 49 \Rightarrow \mu(y) = 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 7 \Rightarrow |x|^2 = a^2 + b^2 = 7, a, b \in \mathbb{Z}$$

لا يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $a^2 + b^2 = 7$

إذن 7 غير قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$.

(جـ) ليكن $4 + 3i = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ ، $x = a + bi$ ، $y = c + di$

$$\Rightarrow 25 = \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 5, 25\}$$

$$\mu(x) = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 25 \Rightarrow \mu(y) = 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 5 \Leftrightarrow \mu(y) = 5 \Rightarrow 5 = |x|^2 = a^2 + b^2, 5 = |y|^2 = c^2 + d^2$$

$$\text{حيث } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a = \pm 2, b = \pm 1 \text{ أو } a = \pm 1, b = \pm 2, c = \pm 2, d = \pm 1 \text{ أو } c = \pm 1, d = \pm 2$$

ويمكن هنا كذلك الاستدلال بسهولة على أن :

$$4 + 3i = (1 + 2i)(2 - i)$$

ومن حيث إن $1 + 2i, 2 - i$ ليسا وحدتين في $\mathbb{Z}[i]$ ، فيكون $4 + 3i$ قابلاً للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$.

$$(د) \text{ ليكن } 6 - 7i = xy \text{ حيث } x, y \in \mathbb{Z}[i]$$

$$\Rightarrow 85 = \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \Rightarrow \mu(x) \in \{1, 5, 17, 85\}$$

$$\mu(x) = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 85 \Rightarrow \mu(y) = 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}[i] \text{ وحدة}$$

$$\mu(x) = 5 \Leftrightarrow \mu(y) = 17 \Rightarrow 5 = |x|^2 = a^2 + b^2, 17 = |y|^2 = c^2 + d^2$$

$$\text{حيث } (y = c + di, x = a + bi), a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a = \pm 2, b = \pm 1 \text{ أو } a = \pm 1, b = \pm 2, c = \pm 4, d = \pm 1 \text{ أو } c = \pm 1, d = \pm 4$$

وكذلك نستدل هنا بسهولة على أن :

$$6 - 7i = (4 + i)(1 - 2i)$$

ومن حيث إن $4 + i, 1 - 2i$ ليسا وحدتين في $\mathbb{Z}[i]$ ، فيكون $6 - 7i$ قابلاً للتبسيط

في $\mathbb{Z}[i]$.

مثال ٧ : ليكن D نطاقاً متكاملاً . يقال للرسم $N : D \rightarrow \mathbb{Z}$ إنه معيار ضربى على D

(multiplicative norm on D) إذا حقق الشروط :

(أ) لجميع $\alpha \in D$: $N(\alpha) \geq 0$ ، $N(\alpha) = 0$ إذا كان فقط إذا كان $\alpha = 0$

(ب) لجميع $\alpha, \beta \in D$: $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$

برهن على أنه إذا كان D نطاقاً متكاملًا مع معيار ضربى N فإن $N(1) = 1$ ، لجميع الوحدات $u \in D$ يكون $N(u) = 1$. وإذا كان لجميع $\alpha \in D$: $N(\alpha) = 1$ فإن α تكون وحدة فى D ، عندئذ فإن لكل $\pi \in D$ بحيث إن $N(\pi) = p$ ، $p \in \mathbb{Z}$ عدد أولى يكون π غير قابل للتبسيط فى D .

البرهان :

$$N(1) = N(1.1) = N(1)N(1) \Rightarrow N(1) = 1$$

D نطاق متكامل

وإذا كان $u \in D$ وحدة فإنه يوجد $u^{-1} \in D$ بحيث إن $1 = u^{-1}u$. والآن :

$$1 = N(1) = N(u^{-1}u) = N(u^{-1})N(u)$$

ولأن $N(u)$ عدد صحيح موجب فإن $N(u) = 1$

والآن ليكن $\pi \in D$ بحيث إن $N(\pi) = p$ ، $p \in \mathbb{Z}$ عدد أولى .

ليكن $\pi = \alpha\beta$ حيث $\alpha, \beta \in D$. لدينا

$$p = N(\pi) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

هذا يقتضى إما أن يكون $N(\alpha) = 1$ وإما أن يكون $N(\beta) = 1$. ومن الفرض هذا يعنى أنه إما أن يكون α وحدة فى D وإما أن يكون β وحدة فى D . أى أن π غير قابل للتبسيط فى D .

مثال ٨ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) إذا كان F حقلاً ، فإن N المعرف كالآتى :

$$N(f(X)) = \deg(f(X))$$

يكون معياراً ضربياً على $F[X]$

(ب) ليكن F حقلاً ، وليكن N معرفاً كالآتى :

$$N(f(X)) = 2^{\deg(f(X))}$$

لجميع $f(X) \neq 0$ ، $N(0) = 0$ ، N معيار ضربى على $F[X]$.

الحل : (أ) خاطئ (ب) صحيح .

مثال ٩ : ليكن D نطاقاً متكاملًا مع معيار ضربى N ، بحيث إن $N(\alpha) = 1$ إذا كان

و فقط إذا كان α وحدة فى D . لتكن π بحيث إن : $N(\pi) = \min\{N(\beta) \mid N(\beta) > 1, \beta \in D\}$.

برهن على أن π غير قابلة للتبسيط فى D .

البرهان : لتكن π قابلة للتبسيط فى D . إذن يوجد $\alpha, \beta \in D$ ، $\alpha, \beta \notin D^*$ ، $\alpha \neq 0 \neq \beta$:

$$\pi = \alpha\beta . \text{ هذا يستلزم أن : } N(\pi) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

$0 \neq \alpha, \beta \notin D^*$ هذا يستلزم أن $N(\alpha) > 1$ ، $N(\beta) > 1$ ، $N(x) \geq 0$ لجميع $x \in D$ ،

$N : D \rightarrow \mathbb{Z}$ ، $\alpha \in D^* \Leftrightarrow N(\alpha) = 1$ ، وبالتالي فإن $N(\pi) > N(\alpha) > 1$: تناقض .

مثال ١٠ : برهن على أن $1+i \in \mathbb{Z}[i]$ غير قابل للتبسيط .

البرهان : ليكن $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}$ معيار ضربى ، $u \in \{\pm 1, \pm i\} \Leftrightarrow N(u) = 1$.
 $a+bi \mapsto a^2+b^2$

وهى بالضبط وحدات $\mathbb{Z}[i]$ ، $N(1+i) = 2$ ، 2 عدد أولى فى $\mathbb{Z}$.

من مثال ٧ السابق ينتج أن $1+i$ غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Z}[i]$.

طريقة أخرى : استخدم الطريقة السابقة $1+i = xy$ ، حيث $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ ،

$$2 = \mu(1+i) = \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \dots \text{ وأكمل ...}$$

مثال ١١ : ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، لا يقبل القسمة على مربع أى عدد أولى . لتكن

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a+ib\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(أ) برهن على أن N المعروف $N(\alpha) = a^2 + nb^2$ حيث $\alpha = a+ib\sqrt{-n}$ هو معيار طبيعى .

(ب) برهن على أن $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}] \Leftrightarrow N(\alpha) = 1$ وحدة .

البرهان : (أ) واضح أن $N(\alpha) \geq 0$ ، $N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

ليكن $\alpha = a+ib\sqrt{-n}$ ، $\beta = c+id\sqrt{-n}$ ينتج أن :

$$\alpha\beta = ac - nbd + i(ad + bc)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow N(\alpha\beta) = (ac - nbd)^2 + (ad + bc)^2 n$$

$$= a^2 c^2 + n^2 b^2 d^2 + a^2 d^2 n + b^2 c^2 n = (a^2 + b^2 n)(c^2 + d^2 n)$$

$$= N(\alpha)N(\beta)$$

$$N(\alpha)=1 \Leftrightarrow a^2 + nb^2 = 1 \Leftrightarrow (a + ib\sqrt{n})(a - ib\sqrt{n}) = 1 : \alpha = a + ib\sqrt{n} \text{ لتكن (ب)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = a + ib\sqrt{n} \in (\mathbb{Z}[\sqrt{-n}])^*$$

مثال ١٢ : أجز ماسبق أن أجزريته فى مثال ١١ إذا كانت الحلقة هى :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \ni \alpha = a + b\sqrt{n} \text{ حيث } N(\alpha) = |a^2 - nb^2| \text{ وكان}$$

$$\Leftarrow \beta = c + d\sqrt{n}, \alpha = a + b\sqrt{n} \text{ ليكن (أ) البرهان}$$

$$\alpha\beta = (a + b\sqrt{n})(c + d\sqrt{n}) = ac + nbd + (ad + bc)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow N(\alpha\beta) = |(ac + nbd)^2 - n(ad + bc)^2|$$

$$= |a^2 c^2 + n^2 b^2 d^2 - na^2 d^2 - nb^2 c^2|$$

$$= |a^2 - nb^2| |c^2 - nd^2| = N(\alpha)N(\beta)$$

واضح أن $N(\alpha) = |a^2 - nb^2| \geq 0$ ، $a^2 - nb^2 = 0$ إذا كان فقط إذا كان

$$a + b\sqrt{n} = 0 \text{ أو } a - b\sqrt{n} = 0 \Leftrightarrow (a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{n}) = 0$$

$$\alpha = a + b\sqrt{n} = 0 \Leftrightarrow b = 0, a = 0 \Leftrightarrow$$

(ب)

$$N(\alpha) = 1 \Leftrightarrow |a^2 - nb^2| = 1 \Leftrightarrow a^2 - nb^2 = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow (a + \sqrt{nb})(a - \sqrt{nb}) = \pm 1$$

إذا كان $(a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{nb}) = 1$ فإن $a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ يكون وحدة

وإذا كان $(a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{n}) = -1$ فإن $(a + b\sqrt{n})(-a + b\sqrt{n}) = 1$ ويكون $a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ كذلك وحدة .

مثال ١٣ : برهن على أن العنصر $\sqrt{-5}$ هو عنصر أولى فى النطاق المتكامل $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

البرهان : إذا كان $\sqrt{-5} \mid (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

فإنه يوجد $x + y\sqrt{-5}$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$(a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) = \sqrt{-5}(x + y\sqrt{-5}) \quad (1)$$

وبوضع $-\sqrt{-5}$ بدلا من $\sqrt{-5}$ فى (1) (لماذا يكون هذا جائزا ؟) نحصل على :

$$(a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = -\sqrt{-5}(x - y\sqrt{-5}) \quad (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$(a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = 5(x^2 + 5y^2)$$

أى أن :

$$5 \mid (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$$

أى أن :

$$5 \mid a^2c^2 + 5a^2d^2 + 5b^2c^2 + 25b^2d^2$$

ولكن

$$5 \mid 5a^2d^2 + 5b^2c^2 + 25b^2d^2$$

وهكذا فإن :

$$5 \mid a^2c^2$$

5 عدد أولى فى $\mathbb{Z}$ فينتج أن $5 \mid a^2$ أو $5 \mid c^2$

$5 \mid a^2$ يستلزم أن $5 \mid a$ لأن 5 عدد أولى فى $\mathbb{Z}$.

$5 | c^2$ يستلزم أن $5 | c$ (كان يمكن الحصول على هذا مباشرة من $5 | aacc$ ، 5 عدد أولي في $\mathbb{Z}$)

$5 | a$ يستلزم أن $\sqrt{-5} | a$ في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ لأن $5 = (\sqrt{-5})(-\sqrt{-5})$ وفي هذه الحالة يكون $\sqrt{-5} | (a + \sqrt{-5}b)$

$5 | c$ يستلزم كذلك أن $\sqrt{-5} | c$

وفي هذه الحالة يكون $\sqrt{-5} | (c + \sqrt{-5}d)$

أي أن $\sqrt{-5}$ عنصر أولي في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

طريقة أخرى : ليكن $\sqrt{-5} | (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. ينتج أن :

$$\sqrt{-5} | [ac - 5bd + \sqrt{-5}(ad + bc)]$$

$$\Rightarrow \sqrt{-5} | ac - 5bd \Rightarrow \sqrt{-5} | ac \Rightarrow 5 | a^2 c^2$$

وأكمل كما سبق .

مثال ١٤ : برهن على أن $21 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ يمكن أن يكتب على صورة حاصل ضرب عناصر غير قابلة للتبسيط بأكثر من طريقة (بدون حساب التشاركات)

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 - 2\sqrt{-5})(1 + 2\sqrt{-5})$$

يترك للقارئ البرهنة على أن 3 ، 7 ، $1 \pm 2\sqrt{-5}$ غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (انظر مثال ه السابق)

مثال ١٥ : برهن على أن $1 + 3\sqrt{-5}$ غير قابل للتبسيط ، لكنه غير أولي في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

البرهان : سنبرهن أولاً على أن $1 + 3\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ غير قابل للتبسيط . ليكن $1 + 3\sqrt{-5} = xy$ ، $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. ينتج أن :

$$\mu(xy) = \mu(x)\mu(y) = 1 + (9)(5) = 46 = (2)(23)$$

(تعريف μ كما جاء في (٣-٢-١٠))

$$\Rightarrow \mu(x) \in \{1, 2, 23, 46\}$$

ليكن $x = a + b\sqrt{-5}$ فإنه إذا كان $\mu(x) = 2$ فإن $a^2 + 5b^2 = 2$ ولا توجد أعداد a, b في $\mathbb{N}$ تحقق هذه المعادلة .

كذلك إذا كان $\mu(x) = 23$ فإنه لا يوجد كذلك $a, b \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $a^2 + 5b^2 = 23$

إذا كان $\mu(x) = 1$ فمعنى هذا أن x وحدة . أما إذا كان $\mu(x) = 46$ فإن $\mu(y) = 1$ وهذا معناه أن y وحدة .

إذن $1 + 3\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ غير قابل للتبسيط

نبرهن الآن على أن العنصر المعنى ليس أولياً .

$$(1 + 3\sqrt{-5})(1 - 3\sqrt{-5}) = 46 = (2)(23)$$

سنبرهن الآن على أن $1 + 3\sqrt{-5}$ ليس قاسماً لـ 2 ، وليس قاسماً لـ 23 على الرغم من أنه قاسم لحاصل ضربيهما وبهذا يكون غير أولى .

ليكن $(1 + 3\sqrt{-5})(x + y\sqrt{-5}) = 2$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ينتج أن :

$$x - 15y + (3x + y)\sqrt{-5} = 2$$

$$\Rightarrow x - 15y = 2, 3x + y = 0 \Rightarrow 45y + 6 + y = 0 \Rightarrow y = \frac{-3}{23}$$

وهذا مستحيل (لأن $y \in \mathbb{Z}$)

ليكن $(1 + 3\sqrt{-5})(x + y\sqrt{-5}) = 23$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ينتج أن :

$$x - 15y = 23, 3x + y = 0 \Rightarrow 45y + 69 + y = 0 \Rightarrow y = \frac{-3}{2}$$

وهذا أيضاً مستحيل .

نهاية البرهان .

مثال ١٦ : ليكن F حقلا ، وليكن $p(X), a(X), b(X) \in F[X]$. إذا كان $p(X)$ غير قابل للتبسيط على $F[X]$ ، وكان $p(X) | a(X)b(X)$ ، عندئذ فإن $p(X) | a(X)$ أو $p(X) | b(X)$ **البرهان :** لأن $p(X)$ غير قابل للتبسيط في $F[X]$ (على) فإن $[p(X)]$ يكون مثاليا أعظم في $F[X]$ (نتيجة (٣-٢-٩)) ، ومن النظرية (١-٣-١١) يكون $F[X] / [p(X)]$ حقلا . ومن ثم فهو نطاق متكامل . والآن لدينا الإيمورفيزم الطبيعي :

$$\begin{aligned} \varphi: F[X] &\rightarrow F[X] / [p(X)] \\ f(X) &\mapsto f(X) + [p(X)] \end{aligned}$$

ليكن $\overline{\varphi(b(X))} = b(X) + [p(X)] = \overline{b(X)}$ ، $\overline{\varphi(a(X))} = a(X) + [p(X)] = \overline{a(X)}$ ولأن $p(X) | a(X)b(X)$ فإنه يوجد $q(X)$ بحيث يكون $a(X)b(X) = p(X)q(X)$ وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} \overline{a(X)} \overline{b(X)} &= \overline{a(X)b(X)} = \overline{a(X)b(X) + [p(X)]} \\ &= \overline{[p(X)]} = \overline{0} \end{aligned}$$

ولأن $F[X] / [p(X)]$ نطاق متكامل فإن $\overline{a(X)} = \overline{0}$ أو $\overline{b(X)} = \overline{0}$

أي أن $a(X) + [p(X)] = [p(X)]$ أو $b(X) + [p(X)] = [p(X)]$ وبالتالي فإن $a(X) \in [p(X)]$ أو $b(X) \in [p(X)]$ ومن ثم فإن $p(X) | a(X)$ أو $p(X) | b(X)$. **مثال ١٧ :** ليكن F حقلا ، $p(X)$ عنصرا غير قابل للتبسيط (للتحليل) في $F(X)$. إذا كان E حقلا يحتوي F ، وكان هناك عنصر $a \in E$ بحيث إن $p(a) = 0$ ، فبرهن على أن

$$\begin{aligned} \varphi: F[X] &\rightarrow E \\ f(X) &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

هو مومورفيزم حلق ، وأن نواته هي $[p(X)]$ **الرسم**

البرهان :

$$\forall f(X), g(X) \in F[X]:$$

$$\begin{aligned}\varphi(f(X) + g(X)) &= \varphi((f + g)(X)) = (f + g)(a) = f(a) + g(a) \\ &= \varphi(f(X)) + \varphi(g(X))\end{aligned}$$

$$\varphi(f(X)g(X)) = \varphi((fg)(X)) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f(X))\varphi(g(X))$$

$$\varphi(1) = 1(a) = 1$$

كثيرة الحدود 1

أى أن φ هو مومورفيزم حلق .

$$\text{Ker}(\varphi) = \{f(X) \in F[X] \mid f(a) = 0\}$$

وهو مثالى . واضح أن $p(X) \in \text{Ker}(\varphi)$ ومن ثم فإن $[p(X)] \subset \text{Ker}(\varphi)$.

لكن $p(X)$ غير قابل للتبسيط فى $F[X]$ وبالتالي فإن $[p(X)]$ مثالى أعظم فى $F[X]$ (النتيجة (٣-٢-٩)) ،

ومن ثم فإن $[p(X)] = \text{Ker}(\varphi)$.

مثال ١٨ : برهن على أنه إذا كان p عدداً أولياً فى $\mathbb{Z}$ بحيث يمكن كتابته على الصورة $a^2 + b^2$ ، عندئذ فإن $a + bi$ يكون غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Z}[i]$. اوجد ثلاثة أعداد أولية يكون لها هذه الخاصية، واوجد العناصر غير القابلة للتبسيط المناظرة .

$$\mu: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$$

الحل : ليكن

$$a + bi \mapsto a^2 + b^2 = p$$

ليكن $a + bi = xy$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}[i]$. لدينا

$$a + bi = xy \Rightarrow \mu(x)\mu(y) = \mu(xy) = \mu(a + ib) = a^2 + b^2 = p$$

$$\Rightarrow \mu(x) = 1 \quad \text{أو} \quad \mu(y) = 1$$

p عدد أولى

أى أن x أو y وحدة فى $\mathbb{Z}[i]$. وبالتالي فإن $a + bi$ يكون غير قابل للتبسيط فى $\mathbb{Z}[i]$.

2 عدد أولى له هذه الخاصة وعنصر غير قابل للتبسيط مناظر هو $1 + i$. (يصلح كذلك $1 - i$) كذلك 5 عدد أولى به نفس الخاصة ، $1 + 2i$ عنصر غير قابل للتبسيط مناظر ، 13 عدد أولى له نفس الخاصة ، $3 + 2i$ عنصر غير قابل للتبسيط مناظر .

مثال ١٩ : ليكن D نطاقاً إقليدياً ، d هو الراسم المصاحب . برهن على أنه إذا كان $a, b \in D$ متشاركين (associate) فإن $d(a) = d(b)$ بفرض أن d يحقق : لكل عنصرين غير صفرين

$$d(a) \leq d(ab) : a, b \in D$$

البرهان : $a, b \in D$ يتشاركان يقتضى وجود وحدتين $u, v \in D$ بحيث إن : $a = bu$ (1) ،

$$d(a) = d(bu) \geq d(b) \quad (3) \quad \text{لدينا (١) : } b = av \quad (2) ، \quad uv = 1 . \quad \text{والآن من (١) لدينا : } d(a) = d(bu) \geq d(b) \quad (3)$$

ومن (2) لدينا : (4) $d(b) = d(av) \geq d(a)$. من (3) ، (4) ينتج المطلوب مباشرة .

ملحوظة : بعض المراجع تضع هذا الفرض الذى ذكرناه ضمن تعريف النطاق الإقليدى . انظر مثال ٣١ فى (٢-٢-٨) .

مثال ٢٠ : ليكن D نطاقاً متكاملًا ، وليكن $p, q \in D$ عنصرين غير قابلين للتبسيط

وليكن (p) مجموعة جميع العناصر المتشاركة مع p وبالمثل (q) : برهن على أن

$$(p) \cap (q) \neq \emptyset \Rightarrow (p) = (q)$$

البرهان :

$$(p) \cap (q) \neq \emptyset \Rightarrow \exists s \in D : s = pu = qv ; u, v \in D^* \quad (\text{وحدتان})$$

$$x \in (p) \Rightarrow \exists w \in D^* : x = pw = qvu^{-1}w \in (q) \Rightarrow (p) \subset (q)$$

(حاصل ضرب وحدتين = وحدة)

بالمثل $(q) \subset (p)$ وينتج المطلوب مباشرة .

تمارين

- (١) صف العناصر غير القابلة للتبسيط في $R[X]$ حيث R نطاق تحليل وحيد بدلالة العناصر غير القابلة للتبسيط في R ، العناصر غير القابلة للتبسيط في $Q[X]$ حيث Q هو حقل القسمة لـ R . هل هناك صفة أخرى لهذه العناصر ؟ (انظر (٢-٣-٣))
- (٢) حلل $X^3 - Y^3$ إلى عناصر غير قابلة للتبسيط في $Q[X, Y]$ ، وبرهن على أن كل عامل يكون غير قابل للتبسيط .

(٣) كرر المطلوب في (٢) بالنسبة لكثيرة الحدود $X^3 + Y^3$

(٤) كرر المطلوب في (٢) بالنسبة لكثيرة الحدود $X^2 + Y^2$

(إرشاد: تستطيع الاستعانة بنتيجة (٣-٥-٧) التي ستأتي فيما بعد ، ومعرفة أن $\mathbb{Z}$ "نطاق تحليل وحيد" كما سيأتي ، والنتيجة (٣-٥-١٠) التي ستأتي كذلك) .

(٥) ليكن F حقلا ، ولتكن $p(X), a_1(X), a_2(X), \dots, a_k(X) \in F[X]$ حيث $p(X)$ عنصر غير قابل للتبسيط . إذا كان $p(X) \mid a_1(X) a_2(X) \dots a_k(X)$ ، فبرهن على أن $p(X)$ يقسم $a_i(X)$ لبعض i .

(هذا التمرين تعميم لمثال ١٦ في (٣-٢-١١) . ولكن المطلوب حله بطريقة مختلفة عن حل المثال !)

(٦) ليكن F حقلا . برهن على أن كل مثالي أولى في $F[X]$ يكون مثالياً أعظم

(٧) برهن على أن $\mathbb{Z}[i]/[3]$ ليس متشاكلا حلقيا مع $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$

(إرشاد: $\mathbb{Z}[i]$ نطاق متكامل ذو عنصر وحدة ، $3 \in \mathbb{Z}[i]$ عنصر أولى ، وبالتالي فإن $[3]$ مثالي أولى في $\mathbb{Z}[i]$. $\mathbb{Z}[i]$ نطاق إقليدي وبالتالي فإنه نطاق مثاليات أساسية ويكون $[3]$ مثالياً أعظم فيه . ومن ثم فإن $\mathbb{Z}[i]/[3]$ حقل . $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ ليس حقلا . لماذا ؟ واملأ التفصيلات)

(٨) برهن على أنه في $\mathbb{Z}[i]$: 3 غير قابل للتبسيط ، 2 قابل للتبسيط

(٩) في أى نطاق متكامل برهن على أن حاصل ضرب عنصر غير قابل للتبسيط في وحدة يكون عنصراً غير قابل للتبسيط .

(١٠) برهن على أن $1 - i$ غير قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$

(١١) برهن على أنه في مثال ١٢ من (٣-٢-١١) إذا كان $N(\alpha) = |a^2 - nb^2|$ حيث

$\alpha = a + b\sqrt{n}$ ، عدداً أولياً فإن α يكون عنصراً غير قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

(١٢) برهن على أنه في النطاق المتكامل R إذا كان $a, b \in R$ يتشاركان فإن $[a] = [b]$

(١٣) برهن على أن 7 غير قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ ، على الرغم من أن $N(7)$ ليس أولياً. (وهكذا فإن عكس التقرير في تمرين (١١) السابق ليس صحيحاً)

(١٤) برهن على أن 2 ، $1 + \sqrt{5}$ غير قابلين للتبسيط في $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

(١٥) ليكن α عدداً صحيحاً أصغر من 1 - ، ولا يقبل القسمة على مربع أى عدد أولى . برهن على أن الوحدات الوحيدة في $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ هي 1 ، -1 .

(١٦) ليكن $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ ، حيث α عدد صحيح لا يقبل القسمة على مربع أى عدد أولى ، وكان ab وحدة في $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$. برهن على أن كلا من a ، b وحدة .

٣-٣ نطاقات التحليل الوحيد Unique factorization domains

ليكن R نطاقاً متكاملًا . نعتبر التقريرات الآتية :

(ت١) لكل $a \in R$ ، $a \neq 0$ ، $a \notin R^*$ توجد عناصر غير قابلة للتبسيط

$a = q_1 \dots q_r$ بحيث إن $q_1, \dots, q_r \in R$.

(ت١*) لكل $a \in R$ ، $a \neq 0$ ، $a \notin R^*$ توجد عناصر أولية $p_1, \dots, p_r \in R$ بحيث

إن $a = p_1 \dots p_r$.

(ت٢) إذا كانت $q_1, \dots, q_r, q'_1, \dots, q'_s$ عناصر غير قابلة للتبسيط فى R

بحيث إن :

$q_1 \dots q_r = q'_1 \dots q'_s$ فإن $r = s$ ، توجد تبديلة $\pi \in \gamma_r (= S_r)$ بحيث إنه لكل

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$ العناصر q_i ، $q'_{\pi(i)}$ تتشارك .

(ت٣) كل عنصر غير قابل للتبسيط فى R يكون أولياً .

٣-٣-١ نظرية :

ليكن R نطاقاً متكاملًا . التقريرات الآتية متكافئة :

(١) ، (ت١) ، (ت٢)

(٢) ، (ت١) ، (ت٣)

(٣) ، (ت١*)

البرهان : (١) $\Leftarrow$ (٢) : للبرهنة على (ت٣) ليكن q عنصراً غير قابل للتبسيط فى R ،

وليكن $q | ab$ حيث $a, b \in R$. عندئذ فإنه يوجد $c \in R$ بحيث إن $ab = qc$. ومن

(ت١) توجد عناصر غير قابلة للتبسيط $q_1, \dots, q_r, q'_1, \dots, q'_s, q''_1, \dots, q''_t$ ،

بحيث إن :

$$a = q_1 \dots q_r , b = q'_1 \dots q'_s , c = q''_1 \dots q''_t .$$

بحيث يكون : $q_1 \dots q_r . q'_1 \dots q'_s = q q''_1 \dots q''_t$

ومن (٢) يوجد $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ بحيث إن $q \sim q_i$ أو يوجد $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ بحيث إن $q \sim q'_j$ وبالتالى فإنه ينتج أن $q | a$ أو $q | b$ ، أى أن q عنصر أولى .

(٢) $\Leftarrow$ (٣) : واضح .

(٣) $\Leftarrow$ (١) : من (ت ١) ينتج أن كل عنصر غير قابل للتبسيط يكون أولياً .

لأن : إذا كان $q \in R$ عنصراً غير قابل للتبسيط ، فإنه من (ت ١) توجد عناصر أولية

$p_1, \dots, p_r \in R$ بحيث يكون : $q = p_1 \dots p_r$. ولأن q عنصر غير قابل للتبسيط فإن

$r = 1$ ، وبالتالى يكون $q = p_1$.

والآن يمكن أن نبرهن على صحة التقرير (ت ٢) كالآتى : ليكن $q_1, \dots, q_r, \dots, q'_1, \dots, q'_s$ ،

q'_s عناصر غير قابلة للتبسيط (وبالتالى فهي أولية) فى R بحيث إن :

$q_1 \dots q_r = q'_1 \dots q'_s$. لأن q'_1 عنصر أولى فإنه يقسم أحد هذه q'_i . وبدون أى فقد

للعومية (without any loss of generality) ليكن $q'_1 | q_1$ ، وبالتالى فإننا نحصل على

$q \sim q'_1$ (لأن كليهما q_1, q'_1 غير قابل للتبسيط) ، أى أنه يوجد u وحدة فى R بحيث يكون :

$q'_2 \dots q'_s = u q_2 \dots q_r$. وبالاتمرار فى هذا الاجراء نحصل على المطلوب .

٣-٣-٢ تعريف :

يقال لنطاق متكامل R إنه نطاق تحليل وحيد (Unique Factorization Domain)

(باختصار UFD إذا تحقق أحد (وبالتالى جميع) التقريرات فى النظرية (٣-٣-١) .

٣-٣-٣ ملاحظة :

من المثال (٣-٢-١٠) تكون الحلقة (النطاق المتكامل) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ليست نطاق تحليل وحيد .

٣-٣-٤ نظرية :

كل نطاق مثاليات أساسية يكون نطاق تحليل وحيد .

البرهان : ليكن R نطاق مثاليات أساسية . نعرف :

$M := \{[a] | a \in R, a \neq 0, a \notin R^*, R \text{ أولية فى } R^*, \}$ ليس حاصل ضرب عناصر أولية فى R ،

سنبرهن أولاً على أن $M = \phi$.

إذا كانت $M \neq \phi$ فإنه يوجد عنصر أعظم في M بالنسبة للاحتواء (لاحظ أن R نطاق مثاليات أساسية $R \Leftarrow R$ نويثرية) . ليكن $[d]$ عنصراً أعظم في M . ينتج من تعريف M ومن $(3-2-7) (2)$ أن $[d]$ ليس مثالياً أولياً وهذا يستلزم (من مثال 28 في (1-3-20)) أن $[d]$ ليس مثالياً أعظم في R . ولأن R نطاق مثاليات أساسية فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $[d] \subsetneq [b] \subsetneq R$. وهذا يستلزم أنه يوجد $c \in R$ بحيث يكون $d = bc$ وهذا يقتضى أن $[d] = [bc] \subsetneq [c]$ (لأن : $[b] \neq R$ ومن ثم فإن $b \notin R^*$ وبالتالي فإن $[bc] \neq [c]$) وهذا يستلزم أن $[b] \notin M$ ، $[c] \notin M$. والآن $b, c \neq 0$ ، وكذلك $b, c \notin R^*$ (لأن $[d] \neq [b]$ ينتج أن $c \notin R^*$) فينتج من تعريف M أن $b = p_1 \dots p_n$ ، $c = p'_1 \dots p'_m$ ، حيث p_i ، p'_j عناصر أولية . ولكن هذا يستلزم أن $d = p_1 \dots p_n p'_1 \dots p'_m$ وهذا تناقض مع فرض أن $[d] \in M$. أى أن $M = \phi$. وينتج المطلوب مباشرة .

٣-٣-٥ نتيجة :

من النظرية (2-1-9) كل نطاق إقليدى يكون نطاق مثاليات أساسية ومن النظرية (3-3-4) السابقة مباشرة كل نطاق مثاليات أساسية يكون نطاق تحليل وحيد . أى أن :

R نطاق إقليدى $\Leftarrow R$ نطاق مثاليات أساسية $\Leftarrow R$ نطاق تحليل وحيد

٣-٣-٦ أمثلة محلولة :

مثال ١ : فى المثال (1) من (2-1-8) رأينا أن $\mathbb{Z}$ نطاق إقليدى ، ورأينا قبل ذلك فى المثال (1) من (1-2-13) أن $\mathbb{Z}$ نطاق مثاليات أساسية، وبالتالي فإن $\mathbb{Z}$ نطاق تحليل وحيد .

$$24 = (2)(2)(3)(2) = (-2)(-3)(2)(2) \quad \text{الكتابة}$$

لاتناقض حقيقة أن $\mathbb{Z}$ نطاق تحليل وحيد فالعنصران 2 ، -2 متشركان ، وكذلك 3 ، -3 . وتغيير ترتيب العناصر لا ينقض شيئاً .

ولاحظ أن كل هذا متضمن فى التقرير (ت 2) السابق .

مثال ٢ : عبر عن كثيرة الحدود $f -$ إن أمكن - في صورة حاصل ضرب عناصر غير قابلة للتبسيط في النطاقات المتكاملة الآتية : $\mathbb{Z}_{11}[X]$ ، $\mathbb{Q}[X]$ ، $\mathbb{Z}[X]$:

$$f := 4X^2 - 4X + 8$$

الحل : في $\mathbb{Z}[X]$: $4X^2 - 4X + 8 = (2)(2)(X^2 - X + 2)$

، 2 ، $X^2 - X + 2$ غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}[X]$

في $\mathbb{Q}[X]$: $4X^2 - 4X + 8$ هي نفسها غير قابلة للتبسيط

وبلاحظ أن $2 \in \mathbb{Q}^*[X]$: إذن 2 ليس غير قابل للتبسيط وبالتالي فإن التعبير

$4X^2 - 4X + 8 = (2)(2)(X^2 - X + 2) \in \mathbb{Q}[X]$ لايعنى أن f كتبت على صورة حاصل ضرب عناصر غير قابلة للتبسيط .

في $\mathbb{Z}_{11}[X]$: $\bar{4}X^2 - \bar{4}X + \bar{8} = \bar{4}X^2 - \bar{4}X - \bar{3}$

$$= (\bar{2}X - \bar{3})(\bar{2}X + \bar{1}) \quad (1)$$

كذلك

$$\bar{4}X^2 - \bar{4}X + \bar{8} = \bar{4}X^2 + \bar{18}X + \bar{8}$$

$$= (\bar{4}X + \bar{2})(X + \bar{4}) \quad (2)$$

هل التعبيران (1) ، (2) مختلفان ؟

$\mathbb{Z}_{11}$ حقل ، ومن ثم فإن $\mathbb{Z}_{11}[X]$ نطاق إقليدي (وكذلك نطاق مثاليات أساسية) ومن ثم

فهو نطاق تحليل وحيد، وبالتالي فإن التعبيرين لايمكن أن يكونا مختلفين ونرى ذلك لأن :

$$\left. \begin{aligned} \bar{4}X + \bar{2} &= \bar{2}(\bar{2}X + \bar{1}) \\ (\bar{2}X - \bar{3}) &= \bar{2}(X + \bar{4}) \end{aligned} \right\} \bar{2} \in \mathbb{Z}_{11}^*$$

ولأن $\mathbb{Z}_{11}[X]$ نطاق تحليل وحيد فهو يحقق (ت ٢)

مثال ٣ : حدد إذا ما كانت التقريرات الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) كل حقل هو نطاق تحليل وحيد

(ب) كل نطاق تحليل وحيد يكون نطاق مثاليات أساسية .

(جـ) $\mathbb{Z}[X]$ نطاق تحليل وحيد

(د) إذا كان D نطاق مثاليات أساسية فإن $D[X]$ يكون نطاق مثاليات أساسية

(هـ) إذا كان D نطاق تحليل وحيد فإن $D[X]$ يكون كذلك نطاق تحليل وحيد

(و) أى نطاق تحليل وحيد لايحتوى على قواسم صفرية .

(ز) فى أى نطاق تحليل وحيد إذا كان $a \mid p$ حيث p غير قابل للتبسيط ، فإن p نفسها

تظهر فى كل تحليل لـ a .

(ح) كل عنصرين غير قابلين للتبسيط فى نطاق تحليل وحيد يكونان مشاركين .

الحل :

(أ) صحيح كما سبق فى مثال ٢٦ من (٢-٢-٨) ، (٣-٣-٤)

(ب) خطأ : $\mathbb{Z}[X]$ نطاق تحليل وحيد لكنه ليس نطاق مثاليات أساسية . (كذلك (جـ)

صحيح)

(د) خطأ : $\mathbb{Z}$ نطاق مثاليات أساسية ، لكن $\mathbb{Z}[X]$ ليس نطاق مثاليات أساسية .

(هـ) صحيح

(و) أى نطاق تحليل وحيد هو نطاق متكامل ، وبالتالي لايحتوى على أية قواسم صفرية.

(ز) خطأ : مثال مضاد : $\mathbb{Z}[X] \ni 2X + 4 = 2(X + 2) = (-2)(-X - 2)$

1- وحدة فى $\mathbb{Z}[X]$

(ح) خطأ $2, 3 \in \mathbb{Z}$ بينما $2 \neq \pm 2, 3 \neq \pm 1$ حيث ± 1 هما الوحدتان الوحيدتان فى $\mathbb{Z}$.

مثال ٤ : اضرب مثالا لبيان أن كثيرة حدود $g[X]$ فى $D[X]$ حيث D نطاق تحليل وحيد

(وبالتالى $D[X]$ نطاق تحليل وحيد) قد تكون قابلة للتبسيط ، بينما هى فى $F[X]$ ، حيث F

هو حقل القسمة لـ D ، غير قابلة للتبسيط .

الحل : $\mathbb{Q}[X] \ni g(X) = 2X + 4 = 2(X + 2)$ غير قابلة للتبسيط لأن $2 \in \mathbb{Q}^*$

بينما $\mathbb{Z}[X] \ni g(X)$ قابلة للتبسيط لأن $2, X + 2 \notin (\mathbb{Z}[X])^*$.

مثال ٥ : ليكن D نطاق تحليل وحيد . هل $D \setminus D^*$ هي مجموعة الوحدات في D ،
كما هو متوقع ! تمثل زمرة بالنسبة للضرب في D ؟

الحل : على الرغم من أن $D \setminus D^*$ مغلقة (closed) بالنسبة للضرب في D ، أى أن :

$$\forall x, y \in D \setminus D^* : xy \in D \setminus D^*$$

إلا أن عنصر الوحدة "1" لا ينتمى إلى $D \setminus D^*$ ، لأنه عنصر في D ، D^* . وبالتالي
فإن $D \setminus D^*$ لا تمثل زمرة بالنسبة للضرب في D .

مثال ٦ : ادرس التحليل إلى عناصر غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$. وعلى سبيل
الخصوص اعتبر العنصر $(1, 0)$

الحل : ليس كل عنصر غير وحدة (nonunit) ولا يساوى الصفر في $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ يمكن
تحليله إلى عناصر غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$

العنصر $(1, 0)$ ليس وحدة في $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ ، وكل تحليل لهذا العنصر يحتوى على العامل
 $(\pm 1, 0)$ ، وهو قابل للتبسيط ، لأن $(\pm 1, 0) = (\pm 1, 0)(1, 30)$ مثلاً . العناصر غير
القابلة للتبسيط في $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ هي فقط $(\pm 1, p)$ ، $(q, \pm 1)$ حيث p, q عنصران غير
قابلين للتبسيط في $\mathbb{Z}$.

مثال ٧ : برهن على أنه يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الأولية .

البرهان : (إقليدس) : لتكن $p_1, p_2, \dots, p_n$ جميع الأعداد الأولية في $\mathbb{Z}$. هذا
يقضى أن $0, \pm 1 \neq p_1 p_2 \dots p_n + 1 \in \mathbb{Z}$. هذا يقتضى أن $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ له على الأقل
قاسم وهو عدد أولى . أى أنه يوجد $1 \leq i \leq n$ بحيث يكون $p_i | (p_1 p_2 \dots p_n + 1)$.
ومن $p_i | p_1 p_2 \dots p_n$ ينتج أن $p_i | 1$. تناقض

مثال ٨ : برهن على أن : p عدد أولى في $\mathbb{Z}$ $\Leftarrow p$ عنصر أولى في $\mathbb{Z}[i]$ أو يوجد
عنصر أولى $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ بحيث يكون $p = \pi \bar{\pi}$

البرهان : ليكن p عدداً أولياً في $\mathbb{Z}$ نعلم من مثال ٣ (١١-٢-٣) أن p ليس وحدة في
 $\mathbb{Z}[i]$. ولأن $\mathbb{Z}[i]$ نطاق تحليل وحيد (لماذا ؟) فإنه توجد عناصر أولية $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathbb{Z}[i]$

بحيث يكون $p = \pi_1 \dots \pi_n$. وهذا يقتضى أن $p^2 = p\bar{p} = (\pi_1 \bar{\pi}_1) \dots (\pi_n \bar{\pi}_n)$. على اليمين في المتساوية السابقة تحليل لـ p^2 في عوامل صحيحة كلها < 1 . ولكن $\mathbb{Z}[i]$ نطاق تحليل وحيد فإما أن يكون $n = 1$ ، وفي هذه الحالة يكون $p = \pi_1$ وإما أن يكون $n = 2$ ،

$$p = \pi_1 \bar{\pi}_1 = \pi_2 \bar{\pi}_2 .$$

مثال ٩ : برهن على أن : π عنصر أولى في $\mathbb{Z}[i] \iff$ يوجد عدد أولى $p \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $p = \pi \bar{\pi}$ أو $[\pi] = [p]$.

البرهان : إذا كان π عنصراً أولياً في $\mathbb{Z}[i]$ فإن : $\pi \bar{\pi} \in \mathbb{N}$ ، $\pi \bar{\pi} > 1$ ، $\pi \bar{\pi} = 1$.
معناه π وحدة في $\mathbb{Z}[i]$ (تناقض) . ومن ثم ولأن $\mathbb{Z}$ نطاق تحليل وحيد فإنه توجد أعداد أولية

$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\pi \bar{\pi} = p_1 \dots p_n$. ولأن π عنصر أولى في $\mathbb{Z}[i]$ فإن π يقسم عاملاً ما p_j ، أى أن $p_j = \pi \alpha$ ، $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$.

وهذا يقتضى أن $p_j^2 = p_j \bar{p}_j = (\pi \bar{\pi})(\alpha \bar{\alpha})$. مثلما في برهان المثال ٨ السابق مباشرة :
إما أن يكون $\alpha \bar{\alpha} = 1$ ، أى أن α وحدة في $\mathbb{Z}[i]$ ، ويكون المثالان $[p_j]$ ، $[\pi]$ متساويين أى $[p_j] = [\pi]$ ، وإما أن يكون $\alpha \bar{\alpha} = \pi \bar{\pi} = p_j$.

مثال ١٠ : ليكن p عدداً أولياً . برهن على أن :

$$p \equiv 1 \pmod{4} \text{ أو } p = 2 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

البرهان : إذا كان $p = 2$ خذ $x = -1$.

إذا كان $p \equiv 1 \pmod{4}$ فإن :

$$\begin{aligned} (\overline{p-1})! &= \overline{1} \dots \overline{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \overline{\left(p - \frac{p-1}{2}\right)} \dots \overline{(p-1)} \\ &= \overline{(-1)}^{\frac{p-1}{2}} \left(\overline{1} \dots \overline{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \overline{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \dots \overline{1} \right) \end{aligned}$$

ضع $x := \overline{1 \dots \frac{p-1}{2}}$. ولأن $\frac{p-1}{2}$ عدد زوجي ينتج مباشرة أن :

$$x^2 \equiv (\overline{p-1})! \equiv -1 \pmod{p}$$

مثال ١٦ (٨-٢-٢)

مثال ١١ : إذا كان n مجموع مربعين فإن :

$$n^2 = a^2 + b^2 : a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \alpha \bar{\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}[i]$$

هذا واضح حيث $\alpha = a + ib$ (١)

والآن برهن على أنه إذا كان $n = n_1 \dots n_r$ ، حيث n_i مجموع مربعين ، $i = 1, \dots, r$ فإن n يكون مجموع مربعين .

البرهان : من (١) $n_i = \alpha_i \bar{\alpha}_i$ حيث $\alpha_i \in \mathbb{Z}[i]$ يقتضى أن :

$$n = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 \dots \alpha_r \bar{\alpha}_r = (\alpha_1 \dots \alpha_r) (\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_r) = c^2 + d^2$$

مثال ١٢ : ليكن $n > 1$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $n = \prod_p p^{k_p(n)}$ (العدد معبراً عنه بتحليله التحليل

الطبيعي إلى عوامله الأولية) .

برهن على أنه إذا كان لجميع الأعداد الأولية $p \equiv 3 \pmod{4}$ يتحقق $k_p(n) = 0$ عدداً

زوجياً فإن n يكون مجموع مربعين أى $n = a^2 + b^2$ ، $a, b \in \mathbb{Z}$

البرهان : من المثال السابق مباشرة يكفي أن نبرهن على :

(أ) 2 مجموع مربعين

(ب) p عدد أولي ، $p \equiv 1 \pmod{4}$ مجموع مربعين

لاحظ أن : $p \equiv 3 \pmod{4}$ عدد أولي $\Leftrightarrow k_p(n)$ عدد زوجي $\Leftrightarrow p^{k_p(n)}$ مربع

$$2 = 1^2 + 1^2 = (1+i)(1-i) \quad (أ)$$

(ب) ليكن $p \equiv 1 \pmod{4}$ عدداً أولياً . من مثال ١٠ السابق يوجد $x \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ وهذا يقتضى أن $p \mid (x^2 + 1)$ أى أن $p \mid (x+i)(x-i)$. ولكن

من الواضح أن p لا يقسم $x + i$ ولا يقسم $x - i$ ($\frac{x}{p} \pm \frac{i}{p} \notin \mathbb{Z}[i]$) ، وبالتالي فإن p لا يمكن أن يكون عنصراً أولياً في $\mathbb{Z}[i]$. فمن مثال ٨ السابق يوجد $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ بحيث يكون $p = \pi \bar{\pi}$.

نهاية البرهان .

مثال ١٣ : ليكن $p \neq 2$ عدداً أولياً . برهن على أن :

$$p \in \mathbb{Z}[i] \text{ عنصر أولى } \Leftrightarrow p \equiv 3 \pmod{4}$$

البرهان : " $\Leftarrow$ " : في مثال ١٢ السابق برهنا عملياً على أن :

$$p \Leftarrow p \equiv 1 \pmod{4} \text{ ليس عنصراً أولياً في } \mathbb{Z}[i]$$

$$2 = (1+i)(1-i) \text{ ليس عنصراً أولياً في } \mathbb{Z}[i]$$

" $\Rightarrow$ " : ليكن p ليس عنصراً أولياً في $\mathbb{Z}[i]$ هذا يقتضى أنه يوجد عنصر أولى

$$\pi \in \mathbb{Z}[i] \text{ بحيث يكون } p = \pi \bar{\pi} \text{ (مثال ٨ السابق) وهذا يقتضى أن } p = a^2 + b^2$$

(حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a + bi = \pi$) وهذا يقتضى أن $a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod{4}$ غير ممكن

$$(\text{الجميع } x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ أو } x^2 \equiv 1 \pmod{4}) .$$

مثال ١٤ : بالرجوع إلى مثال ١٢ السابق برهن على العكس :

n مجموع مربعين أى أن $n = a^2 + b^2$ ، $a, b \in \mathbb{Z}$ يقتضى أنه لجميع الأعداد الأولية

$$p \equiv 3 \pmod{4} \text{ تحقق } k_p(n) = 2k, k \in \mathbb{N}$$

البرهان : ليكن n مجموع مربعين . هذا يستلزم أنه يوجد $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ بحيث يكون

$$n = \alpha \bar{\alpha} . \text{ ومن حيث إن } \mathbb{Z}[i] \text{ نطاق تحليل وحيد فإنه يوجد } \pi_1, \dots, \pi_r \in \mathbb{Z}[i]$$

عناصر أولية بحيث يكون :

$$\alpha = \pi_1 \dots \pi_r, n = (\pi_1 \bar{\pi}_1) \dots (\pi_r \bar{\pi}_r) .$$

ولكل i ، حيث $1 \leq i \leq r$ فإنه من مثال ٩ السابق يكون لدينا حالتان :

الحالة الأولى : توجد وحدة $\gamma_i \in \mathbb{Z}[i]$ بحيث إن $\pi_i = \gamma_i p_i$ حيث p_i عدد أولى فى $\mathbb{Z}$ ، وهذا يستلزم أن :

$$\pi_i \bar{\pi}_i = \gamma_i \bar{\gamma}_i \cdot p_i^2 = p_i^2$$

الحالة الثانية : $\pi_i \bar{\pi}_i$ عدد أولى . وهذا يقتضى من مثال ١٣ السابق أن

$$p_i := \pi_i \bar{\pi}_i \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{أو} \quad p_i = 2$$

وهكذا فإننا نحصل فى التحليل الأولى لـ n على العامل الأولى $p \equiv 3 \pmod{4}$ فقط على هيئة مربعات .

نهاية البرهان .

مثال ١٥ : برهن على عكس المثال ١٠ .

البرهان : كما فعلنا فى مثال ١٢ نبرهن على أن p ليس عنصراً أولياً فى $\mathbb{Z}[i]$ والآن ينتج البرهان مباشرة من مثال ١٣ .

مثال ١٦ : برهن على أن $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ ليس نطاقاً إقليدياً

البرهان : لاحظ أن

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$= (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6})$$

يتترك للقارئ البرهنة على أن 2 ، 5 ، $2 \pm \sqrt{-6}$ عناصر غير قابلة للتبسيط فى

$\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. ومن ثم يكون $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ ليس نطاق تحليل وحيد ومن $(3-3-5)$ ينتج أن

$\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ ليس نطاقاً إقليدياً .

تمارين

(١) برهن على أن $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ليس نطاق تحليل وحيد

(إرشاد : فى $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$: $2.2 : (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4 = 2.2$. وبرهن على أن $\sqrt{5}-1$ ،

$\sqrt{5}+1$ ، 2 غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

(٢) برهن على أن $3X^2 + 4X + 3 \in \mathbb{Z}_5[X]$ تتحلل إلى $(3X+2)(X+4)$ وكذلك

إلى $(4X+1)(2X+3)$.

$\mathbb{Z}_5$ حقل وبالتالي يكون $\mathbb{Z}_5[X]$ نطاق مثاليات أساسية (٢-١-١٠) ومن ثم هو نطاق

تحليل وحيد (٣-٣-٤) ، فكيف تفسر وجود هذين التحليلين ؟

(٣) برهن على أن $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ، $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ نطاقاً تحليل وحيد .

٤-٣ القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر

Greatest Common Divisor and Least Common Multiple

٣-٤-١ تعريف :

ليكن R نطاقاً متكاملًا . وليكن $a_1, \dots, a_n \in R$

(أ) يسمى العنصر $d \in R$ قاسماً مشتركاً (common divisor) للعناصر $a_1, \dots, a_n$

إذا كان $d \mid a_i$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$

ويشار لمجموعة القواسم المشتركة للعناصر $a_1, \dots, a_n$ بالرمز $cd(a_1, \dots, a_n)$.

(ب) يسمى العنصر $m \in R$ مضاعفاً مشتركاً (common multiple) للعناصر $a_1, \dots, a_n$

إذا كان $a_i \mid m$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$

ويشار لمجموعة المضاعفات المشتركة للعناصر $a_1, \dots, a_n$ بالرمز $cm(a_1, \dots, a_n)$.

٣-٤-٢ ملحوظة :

ليكن R نطاقاً متكاملًا / وليكن $a_1, \dots, a_n \in R$ ، $e \in R^*$. عندئذ فإن :

$$d \in cd(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow [d] \supset [a_1] + \dots + [a_n] \quad (أ)$$

$$([a_i] \text{ المثالي المتولد من } a_i, \dots)$$

$$m \in cm(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow [m] \subset [a_1] \cap \dots \cap [a_n] \quad (ب)$$

$$R^* \subset cd(a_1, \dots, a_n), 0 \in cm(a_1, \dots, a_n) \quad (ج)$$

$$cd(e, a_1, \dots, a_n) = R^* \quad (د)$$

$$cm(0, a_1, \dots, a_n) = \{0\} \quad (هـ)$$

$$cd(0, a_1, \dots, a_n) = cd(a_1, \dots, a_n) \quad (و)$$

$$cm(e, a_1, \dots, a_n) = cm(a_1, \dots, a_n) \quad (ز)$$

$$0 \in cd(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \quad (ح)$$

$$e \in cm(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \in R^* \quad (\text{ط})$$

البرهان :

$$[d] \ni a_i \Leftrightarrow db = a_i : b \in R \quad (\text{أ})$$

$$[d] \supset [a_1] + \dots + [a_n] \Leftarrow$$

$$m \in [a_i] \Leftrightarrow a_i b = m : b \in R \quad (\text{ب})$$

$$[m] \subset [a_1] + \dots + [a_n] \Leftarrow$$

يترك باقى الملحوظة كتمرين بسيط للقارئ .

٣-٤-٣ تعريف :

يقال لعناصر $a_1, \dots, a_n \in R$ (نطاق متكامل) إنه ليس لها قواسم مشتركة إذا كان

$$cd(a_1, \dots, a_n) \subset R^* \quad (\text{من (ج-) فى (٣-٤-٢) ينتج أن } cd(a_1, \dots, a_n) = R^*)$$

٣-٤-٤ ملحوظة :

ليكن R نطاقاً متكاملاً ، وليكن p عنصراً غير قابل للتبسيط فى R . عندئذ فإنه لكل $a \in R$ إما أن يكون p قاسماً لـ a (برموز واضحة $p|a$ كما سبق) وإما لا يكون لهما قواسم مشتركة .

البرهان : ليكن p, a لهما قواسم مشتركة . عندئذ فإنه يوجد $d \in R \setminus R^*$ بحيث يكون $a = da', p = dp'$ ، أى أنه يوجد $a', p' \in R$ ، $a = da'$ ، $p = dp'$. ولأن p غير قابل للتبسيط فإن p' يكون وحدة، وبهذا يكون p, d متشاركين (associate). ومن ثم فإن p يكون قاسماً لـ a .

٣-٤-٥ تعريف :

ليكن R نطاقاً متكاملاً . وليكن $a_1, \dots, a_n \in R$.

(أ) يقال لعنصر $g \in R$ إنه قاسم مشترك أعظم (greatest common divisor)

لـ $a_1, \dots, a_n$ إذا كان $g \in cd(a_1, \dots, a_n)$ ، لجميع $d \in cd(a_1, \dots, a_n)$ فإن $d|g$

ويشار إلى مجموعة القواسم المشتركة العظمى للعناصر $a_1, \dots, a_n$ بالرمز $gcd(a_1, \dots, a_n)$ (ب) يقال لعنصر $\ell \in R$ إنه مضاعف مشترك أصغر (least common multiple) عندما يكون $\ell \in cm(a_1, \dots, a_n)$ ، لجميع $m \in cm(a_1, \dots, a_n)$ فإن $\ell \mid m$

ويشار لمجموعة المضاعفات المشتركة الصغرى للعناصر $a_1, \dots, a_n$ بالرمز $\ell cm(a_1, \dots, a_n)$

٣-٤-٦ مثال :

بمساعدة المثال (٣-٢-١٠) يمكن للقارئ أن يتأكد أنه لا يوجد قاسم مشترك أعظم للعنصرين ٩ ، $3(2+i\sqrt{5})$ في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

٣-٤-٧ ملحوظة :

ليكن R نطاقاً متكاملًا ، وليكن $a_1, \dots, a_n \in R$ عندئذ فإن :

$$g \in gcd(a_1, \dots, a_n), g \sim g' \Rightarrow g' \in gcd(a_1, \dots, a_n) \quad (أ)$$

$$g, g' \in gcd(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow g \sim g' \quad (ب)$$

$$\ell \in lcm(a_1, \dots, a_n), \ell \sim \ell' \Rightarrow \ell' \in lcm(a_1, \dots, a_n) \quad (جـ)$$

$$\ell, \ell' \in lcm(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \ell \sim \ell' \quad (د)$$

البرهان : مباشر تماماً من التعريف (٣-٤-٥)

والملاحظة تعني أن القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر وحيدان بدون

حساب الوحدات (up to units)

٣-٤-٨ ملحوظة :

ليكن R نطاقاً متكاملًا . ولتكن $a_1, \dots, a_n \in R$ ليست جميعاً أصفاراً . عندئذ فإن :

$$g \in gcd(a_1, \dots, a_n), a_i = ga'_i \quad \text{جميع } i \in \{1, \dots, n\}$$

ينتج أن : $a'_1, \dots, a'_n$ ليس بينها قواسم مشتركة .

البرهان : المطلوب البرهنة على أن :

$$cd(a'_1, \dots, a'_n) \subset R^*$$

ليكن $t \in cd(a'_1, \dots, a'_n) \subset R^*$. عندئذ فإنه لكل $i \in \{1, \dots, n\}$ يوجد $t_i \in R$ بحيث إن :
 $a'_i = tt_i$. ينتج أن : $a_i = (gt)t_i$ لكل $i \in \{1, \dots, n\}$. ومن ثم فإن :
 $gt \in cd(a_1, \dots, a_n)$ بحيث يكون $gt | g$. ومن ثم فإنه يوجد $s \in R$ بحيث يكون
 $g = gts$ ، أى بحيث يكون $ts = 1$ ، بعبارة أخرى t تكون وحدة فى R .

٣-٤-٩ نظرية :

فى أى نطاق تحليل وحيد R يوجد لكل $a_1, \dots, a_n \in R$ قاسم مشترك أعظم ، مضاعف مشترك أصغر .

البرهان : بسبب (٣-٤-٢) نستطيع بدون أى فقد للعمومية أن نفترض أن

$a_1, \dots, a_n \in R \setminus \{0\}$ ، أن $a_1, \dots, a_n \notin R^*$ ولأن R نطاق تحليل وحيد فإنه توجد

عناصر غير قابلة للتبسيط $p_1, \dots, p_r \in R$ ولكل $i \in \{1, \dots, n\}$ توجد أعداد طبيعية :

$k_1(a_i), \dots, k_r(a_i)$ بحيث يكون $a_i = p_1^{k_1(a_i)} \dots p_r^{k_r(a_i)}$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$. لكل

$$m_j := \min\{k_j(a_i) : i \in \{1, \dots, n\}\} \text{ ليكن } j \in \{1, \dots, r\}$$

وليكن $M_j := \max\{k_j(a_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$. عندئذ فإن : $g = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ قاسم

مشترك أعظم ، $\ell = p_1^{M_1} \dots p_r^{M_r}$ مضاعف مشترك أصغر .

٣-٤-١٠ نتيجة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، وليكن $Q(R)$ حقل القسمة لـ R . عندئذ فإنه لكل

$x \in Q(R)$ يوجد عنصران a, b ليس بينهما قواسم مشتركة بحيث يكون $x = \frac{a}{b}$.

البرهان : ليكن $x = \frac{a'}{b'}$. من (٣-٤-٩) يوجد قاسم مشترك أعظم g لـ a' ، b' .

نختار $a, b \in R$ بحيث يكون $a' = ga$ ، $b' = gb$ ، فمن (٣-٤-٨) يكون a ، b ليس

بينهما قواسم مشتركة ونحصل على : $x = \frac{a'}{b'} = \frac{ga}{gb} = \frac{a}{b}$.

٣-٤-١١ ملحوظة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، ولكن $a_1, \dots, a_n, b \in R$. وليكن g قاسماً مشتركاً أعظم للعناصر a_1 ، ... ، a_n . عندئذ فإن b يكون قاسماً مشتركاً أعظم للعناصر ba_1 ، ... ، ba_n .

البرهان : واضح أن g قاسم مشترك للعناصر ba_1 ، ... ، ba_n .

ليكن t قاسماً مشتركاً لـ ba_1 ، ... ، ba_n . المطلوب أن نبرهن على أن $t | bg$. في الحالات $a_1 = \dots = a_n = 0$ ، $t = 0$ ، $t \in R^*$: الإدعاء واضح. إذا لم تحدث حالة من هذه الحالات الثلاث نختار $a'_1, \dots, a'_n \in R$ بحيث يكون $a_i = ga'_i$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$. لاحظ أن a'_1 ، ... ، a'_n ليس لها قواسم مشتركة وكلها غير قابلة للتبسيط وباستخدام تحليل العناصر إلى عناصر أولية ينتج أن $t | bg$.

٣-٤-١٢ نظرية :

ليكن R نطاق مثاليات أساسية، ولتكن $a_1, \dots, a_n \in R$. عندئذ فإنه لكل $g \in \gcd(a_1, \dots, a_n)$ توجد عناصر $x_1, \dots, x_n \in R$ بحيث إن :

$$g = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

البرهان : لأن R نطاق مثاليات أساسية فإنه يوجد $g' \in R$ بحيث يكون : $[g'] = [a_1, \dots, a_n]$. ينتج أن $g' | a_1$ ، ... ، $g' | a_n$. والآن ليكن $g'' | a_1$ ، ... ، $g'' | a_n$. ينتج أنه يوجد $z_1, \dots, z_n \in R$ بحيث يكون $g'' z_1 = a_1$ ، ... ، $g'' z_n = a_n$. والآن $[g'] = [a_1, \dots, a_n]$ يستلزم أنه يوجد $w_1, \dots, w_n \in R$ بحيث إن $g' = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ ،

ومن ثم فإنه يوجد $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in R$ بحيث إن : $g''z_1w_1 + \dots + g''z_nw_n = g'$ وهذا يقتضى أن $g' | g''$. أى أن g' قاسم مشترك أعظم لـ $a_1, \dots, a_n$. ومن (٣-٤-٧) نحصل على $g \sim g'$ ، وهكذا فإن : $[g] = [g'] = [a_1, \dots, a_n]$. ومن ثم فإنه يوجد $x_1, \dots, x_n \in R$ بحيث إن : $g = x_1a_1 + \dots + x_na_n$.
نهاية البرهان .

ملحوظة : بصياغة أخرى نكتب

$$[g] = [a_1] + [a_2] + \dots + [a_n]$$

إذا كان فقط إذا كان

$$g \in \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

٣-٤-١٣ نتيجة :

ليكن R نطاق مثاليات أساسية ، ولتكن $a_1, \dots, a_n \in R$.

التقريرات الآتية متكافئة :

(١) $a_1, \dots, a_n$ ليس لها قواسم مشتركة

(٢) $\gcd(a_1, \dots, a_n) = R^*$

(٣) يوجد $x_1, \dots, x_n \in R$ بحيث يكون : $x_1a_1 + \dots + x_na_n = 1$

(٤) $[a_1, \dots, a_n] = R$

البرهان :

" (١) $\Leftrightarrow$ (٢) " $a_1, \dots, a_n$ ليس لها قواسم مشتركة $\Leftrightarrow \gcd(a_1, \dots, a_n) = R^*$

(1) $\gcd(a_1, \dots, a_n) \subset R^*$. والآن لتكن $u \in R^*$ فينتج أن $u \in \gcd(a_1, \dots, a_n)$ ،

ولكل $g \in \gcd(a_1, \dots, a_n) = R^*$. يحدث أن : $[g] = R = [u]$ ومن ثم فإن $g | u$

وبالتالى فإن : $u \in \gcd(a_1, \dots, a_n)$ أى أن (2) $R^* \subset \gcd(a_1, \dots, a_n)$. من (1) ،

(2) ينتج أن $\gcd(a_1, \dots, a_n) = R^*$

" (٢) $\Leftarrow$ (٣) : نظرية (٣-٤-١٢)

" (٣) $\Leftarrow$ (٤) : واضح

" (١) $\Leftarrow$ (٤) : $1 \in [a_1, \dots, a_n] \Leftarrow [a_1, \dots, a_n] = R$ يوجد $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$

بحيث إن $1 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. والآن ليكن $x | a_1, \dots, x | a_n$ فينتج أنه يوجد

$y_1, \dots, y_n \in R$ بحيث إن : $xy_1 = a_1, \dots, xy_n = a_n$ وبالتالي فإنه يوجد $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$

$y_1, \dots, y_n \in R$ بحيث إن :

$$1 = \lambda_1 xy_1 + \dots + \lambda_n xy_n = (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n)x \Rightarrow x \in R^*$$

أى أن $a_1, \dots, a_n$ ليس لها قواسم مشتركة .

٣-٤-١٤ نتيجة : (تمهيدية إقليدس) Euclid's Lemma

ليكن R نطاق مثاليات أساسية . وليكن $a, b, c \in R$. إذا كان b, a ليس لهما قواسم

مشتركة فإن : $b | ac \Rightarrow b | c$

البرهان : a, b ليس لهما قواسم مشتركة $\Leftarrow$ يوجد $x, y \in R$ بحيث إن :

$$b | c \Leftarrow cxa + cyb = c \Leftarrow xa + yb = 1$$

٣-٤-١٥ ملحوظة :

فى نطاق إقليدى (R, d) يمكن أن نحسب القاسم المشترك الأعظم t لعنصرين

$a, b \in R \setminus \{0\}$ فنوجد $x, y \in R$ بحيث يكون $xa + yb = t$ وذلك باستخدام

الخوارزمية الإقليدية (The Euclidean algorithm) كالآتى :

إذا كان b قاسماً لـ a ، فكل شيء واضح ! وإلا فإنه يوجد $q_1 \in R, r_1 \in R \setminus \{0\}$

بحيث يكون : $a = q_1 b + r_1, d(r_1) \leq d(b)$. إذا كان r_1 قاسماً لـ b فإنه من

الواضح أن يكون r_1 قاسماً مشتركاً أعظم لـ a, b . إذا لم يكن الأمر كذلك فإنه يوجد

$q_2 \in R, r_2 \in R \setminus \{0\}$ بحيث يكون $b = q_2 r_1 + r_2$. نستمر فى الإجراء بقسمة

على r_2 وهكذا ... يوجد فى النهاية $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $r_n \neq 0, r_{n+1} = 0$ ، ويكون

لدينا متوالية $(d(r_n))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون
 $d(b) > d(r_1) > d(r_2) > \dots$ وبهذا نحصل على النظام :

$$a = q_1 b + r_1, \quad r_1 \neq 0, d(r_1) < d(b)$$

$$b = q_2 r_1 + r_2, \quad r_2 \neq 0, d(r_2) < d(r_1)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad r_3 \neq 0, d(r_3) < d(r_2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, \quad r_n \neq 0, d(r_n) < d(r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

العنصر r_n هو قاسم مشترك أعظم لـ a, b .

وعندما نقرأ هذا النظام من أسفل إلى أعلى نحصل على المتتابعة $r_n | r_{n-1}, r_n | r_{n-2}, \dots, r_n | r_1, r_n | a, b$ وبهذا يكون r_n قاسماً مشتركاً لـ a, b .

وإذا كان t قاسماً مشتركاً لـ a, b فإننا بقراءتنا النظام السابق من أعلى إلى أسفل نحصل على المتتابعة $t | r_1, t | r_2, \dots, t | r_n$. أى أن r_n هو قاسم مشترك أعظم لـ a, b . وللحصول على x, y عنصرين فى R بحيث يكون $xa + yb = r_n$ نقرأ النظام السابق مرة أخرى من أعلى إلى أسفل ، فنحصل من المعادلة الأولى على r_1 كتركيبية خطية من a, b ، وهكذا ...

وفى النهاية نحصل على r_n كتركيبية خطية فى a, b .

٣-٤-١٦ أمثلة محلولة :

مثال ١ : فى حلقة كثيرات الحدود $\mathbb{Z}[X]$ برهن على أن $X+2$ هو قاسم مشترك أعظم لـ $2X+4, X^2+2X$.

البرهان : واضح أن $(X+2) | (2X+4), (X+2) | (X^2+2X)$ ، أى أن $X+2$ قاسم مشترك لكلا كثيرتى الحدود . يتبقى أن نثبت أنه (قاسم مشترك) أعظم .

إذا كان $f \in \mathbb{Z}[X]$ ، $f \neq 0$ ، بحيث إن $f \mid (X^2 + 2X)$ ، $f \mid (2X + 4)$ ، فإنه يوجد $g \in \mathbb{Z}[X]$ بحيث إن $fg = 2X + 4$. ولأن $\mathbb{Z}$ نطاق متكامل وبالتالي $\mathbb{Z}[X]$ نطاق متكامل (ملحوظة (٢-١-٥) (٣)) فإن :

$$\deg(f) + \deg(g) = \deg(fg) = \deg(2X + 4) = 1$$

ومن ثم فإنه إما أن يكون $\deg(f) = 0$ وأما أن يكون $\deg(g) = 0$. إذا كان $\deg(f) = 0$ فإن $f = a_0 \neq 0$ ، ومن ثم فإن $f \mid (X^2 + 2X)$ يقتضى أنه يوجد $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$X^2 + 2X = a_0(b_0 + b_1X + b_2X^2), b_2 \neq 0$$

لأن $\deg(X^2 + 2X) = 2$. وهذا يقتضى أن $a_0b_2 = 1$. وهذا يستلزم أن $a_0 \in \mathbb{Z}$ وحدة أى أن $a_0 = 1$ أو $a_0 = -1$. وفى الحالتين فإن $a_0 \mid (X+2)$. أى أن $f \mid (X+2)$ فى حالة $\deg(f) = 1$ ، ليكن $f = a_0 + a_1X$ ، $a_1 \neq 0$.

مرة أخرى $f \mid (2X+4)$ يقتضى أنه يوجد $0 \neq c_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $2X+4 = c_0(a_0 + a_1X)$. وهذا يستلزم أن $a_0c_0 = 4$ وهذا يستلزم أن $a_0 \neq 0$. ولأن $f \mid (X^2 + 2X)$ يقتضى أنه يوجد $d_0, d_1 \in \mathbb{Z}$ ، $d_1 \neq 0$ بحيث يكون : $X^2 + 2X = (a_0 + a_1X)(d_0 + d_1X)$. (لأن $\deg(X^2 + 2X) = 2$) . ومن ثم فإن : $a_0d_0 = 0 \Rightarrow d_0 = 0$ _{$a_0 \neq 0$}

$\mathbb{Z}$ نطاق متكامل

وعلاوة على هذا فإن $a_1d_1 = 1$ وهذا يقتضى أن $a_1 \in \mathbb{Z}$ وحدة أى أن $a_1 = \pm 1$. وهذا يستلزم أن $d_1 = \pm 1$. وأخيراً فإن $a_0d_1 = 2$ يستلزم أن $a_0 = 2$ إذا كان $d_1 = 1$ ، $a_0 = -2$ إذا كان $d_1 = -1$. وبالتالي فإن $f = X+2$ أو $f = -X-2$ وفى الحالتين يكون f قاسماً لـ $X+2$. أى أن $X+2$ قاسم مشترك أعظم لـ $X^2 + 2X$ ، $2X + 4$.
مثال ٢ : فى $\mathbb{Z}$ يوجد قاسمان مشتركان أعظمان لـ 36 ، 48 هما ± 12 لأنه توجد وحدتان فقط فى $\mathbb{Z}$ هما ± 1 .

في $\mathbb{Q}[X]$ يوجد قاسم مشترك أعظم لكثيرتي الحدود $X^3 - 1$ ، $X^2 - 2X + 1$ هو

$X - 1$. ولكل $\frac{P}{q} \in \mathbb{Q}$ $0 \neq \frac{P}{q}$ يكون $\frac{P}{q}(X - 1)$ قاسماً مشتركاً أعظم لكثيرتي الحدود

$X^3 - 1$ ، $X^2 - 2X + 1$ لأن $\frac{P}{q} \in \mathbb{Q}$ $0 \neq \frac{P}{q}$ وحدة .

أما في $\mathbb{Z}[X]$ فإن كثيرتي الحدود $X^3 - 1$ ، $X^2 - 2X + 1$ لهما قاسمان مشتركان

أعظمان فقط هما $\pm(X - 1)$ لأنه لا توجد إلا وحدتان في $\mathbb{Z}[X]$ هما ± 1 .

مثال ٣ : استخدم الخوارزمية الإقليدية لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لـ 49349 ،

15,555 في $\mathbb{Z}$

الحل :

$$49349 = 3 \times 15555 + 2684$$

$$15555 = 5 \times 2684 + 2135$$

$$2684 = 1 \times 2135 + 549$$

$$2135 = 3 \times 549 + 488$$

$$549 = 1 \times 488 + 61$$

$$488 = 8 \times 61 + 0$$

إذن القاسم المشترك الأعظم هو ± 61

مثال ٤ : أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود

$$P_2 := 2X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 1 , P_1 := 2X^5 + 7X^4 + 9X^3 + 9X^2 + 7X + 2$$

في $\mathbb{Q}[X]$.

الحل :

$$2X^5 + 7X^4 + 9X^3 + 9X^2 + 7X + 2 = (X + 2)(2X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$$

وبالتالى فإن $X + 2$ يكون قاسماً مشتركاً أعظم . ولجميع $\frac{P}{q} \in \mathbb{Q}$ يكون

$$\frac{P}{q}(X+2) \text{ كذلك قاسماً مشتركاً أعظم فى } \mathbb{Q}[X] .$$

مثال ٥ : اوجد قاسماً مشتركاً أعظم لكثيرتى الحدود :

$$P_1 = X^{10} - 3X^9 + 3X^8 - 11X^7 + 11X^6 - 11X^5 + 19X^4 - 13X^3 + 8X^2 - 9X + 3,$$

$$P_2 = X^6 - 3X^5 + 3X^4 - 9X^3 + 5X^2 - 5X + 2$$

فى $\mathbb{Q}[X]$

الحل : سنستخدم الخوارزمية الإقليدية كالآتى :

$$P_1 = (X^4 - 2X)P_2 + (-X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 5X + 3)$$

$$P_2 = (-X^2 + 6X - 19)(-X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 5X + 3) + (-59X^3 - 118X + 59)$$

$$-X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 5X + 3 = \frac{1}{59}(X + 3)(-59X^3 - 118X + 59) + 0$$

أى أن $-59X^3 - 118X + 59$ هو قاسم مشترك أعظم لكثيرتى الحدود فى $\mathbb{Q}[X]$

وكذلك $X^3 + 2X - 1$ هو قاسم مشترك أعظم لكثيرتى الحدود فى $\mathbb{Q}[X]$.

مثال ٦ : مستخدماً الخوارزمية الإقليدية اوجد قاسماً مشتركاً أعظم للأعداد 630 ، 231 ،

495 فى $\mathbb{Z}$

الحل :

$$630 = 2 \times 231 + 168$$

$$231 = 1 \times 168 + 63$$

$$168 = 2 \times 63 + 42$$

$$63 = 1 \times 42 + 21$$

$$42 = 2 \times 21 + 0$$

أى أن 21 هو قاسم مشترك أعظم لـ 630 ، 231 فى $\mathbb{Z}$ (1)

$$630 = 1 \times 495 + 135$$

$$495 = 3 \times 135 + 90$$

$$135 = 1 \times 90 + 45$$

$$90 = 2 \times 45 + 0$$

أى أن 45 قاسم مشترك أعظم لـ 495 ، 630 فى $\mathbb{Z}$ (2)

$$495 = 2 \times 231 + 33$$

$$231 = 7 \times 33$$

أى أن 33 قاسم مشترك أعظم لـ 495 ، 231 فى $\mathbb{Z}$ (3)

أى نتيجتين من النتائج الثلاث السابقة (1) ، (2) ، (3) تعطينا قاسماً مشتركاً أعظم للأعداد الثلاثة فى $\mathbb{Z}$. أى أننا نأخذ قاسماً مشتركاً أعظم لاثنتين من القواسم المشتركة العظمى الثلاثة السابقة فيكون قاسماً مشتركاً أعظم للأعداد الثلاثة المعطاة فى $\mathbb{Z}$. ويكون هذا القاسم المشترك الأعظم هو 3 .

مثال ذلك قاسم مشترك أعظم لـ 45 ، 21 هو 3 .

وكان يمكننا كذلك أن نأخذ قاسماً مشتركاً أعظم لأى عددين مع الأعداد الثلاثة ثم نأخذ قاسماً مشتركاً أعظم لهذا القاسم المشترك الأعظم مع العدد الثالث فيكون قاسماً مشتركاً أعظم للأعداد الثلاثة .

مثال ذلك قاسم مشترك أعظم لـ 495 ، 21 هو 3 .

مثال ٧ : من $(\mathbb{Z}, d)$ ، $(\mathbb{Z}, d)$ نعلم أن نطق إقليدى ، حيث

$$d : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto |n|$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \exists q, r \in \mathbb{Z} : a = bq + r \quad (1)$$

$$r = 0 \quad \text{or} \quad d(r) < d(b)$$

وليس هناك قيد على "إشارة" r . ولهذا سنجرى المثال ٦ السابق بطريقة مختلفة قليلاً :

$$630 = 3 \times 231 - 63$$

$$231 = 4 \times 63 - 21$$

$$63 = 3 \times 21$$

إذن يوجد القاسم المشترك الأعظم بين 630 ، 231 هو 21 (كما سبق يوجد قاسم مشترك أعظم آخر هو 21-)

$$630 = 2 \times 495 - 360$$

$$495 = 2 \times 360 - 225$$

$$360 = 2 \times 225 - 90$$

$$225 = 3 \times 90 - 45$$

$$90 = 2 \times 45$$

أى أن 45 قاسم مشترك أعظم بين 630 ، 495

$$495 = 3 \times 231 - 198$$

$$231 = 1 \times 198 + 33$$

$$198 = 6 \times 33$$

أى أن 33 قاسم مشترك أعظم بين 495 ، 231 كما سبق .

مثال ٨ : عبر عن القواسم المشتركة العظمى الموجبة فى مثال ٦ بدلالة الأعداد المناظرة فى صورة خطية .

الحل : لدينا

$$21 = 63 - 42$$

$$= 63 - (168 - 2 \times 63) = 3 \times 63 - 168$$

$$= 3(231 - 168) - 168 = 3 \times 231 - 4 \times 168$$

$$= 3 \times 231 - 4(630 - 2 \times 231) = \underline{11 \times 231 - 4 \times 630}$$

$$45 = 135 - 90$$

$$= 135 - (495 - 3 \times 135) = 4 \times 135 - 495$$

$$= 4(630 - 495) - 495 = 4 \times 630 - 5 \times 495$$

$$33 = 495 - 2 \times 231$$

مثال ٩ : برهن على أنه فى نطاق المثاليات الأساسية يكون لكل عنصرين مضاعف مشترك أصغر .

البرهان : ليكن D نطاق مثاليات أساسية ، وليكن $a, b \in D$.

نحن نعلم أن تقاطع مثاليين يكون مثالياً . ومن حيث إن D نطاق مثاليات أساسية فإنه يوجد $\ell \in D$ بحيث إن :

$$[a] \cap [b] = [\ell] \quad (x \text{ هو المثالى المتولد من } x)$$

سنبرهن على أن ℓ يكون مضاعفاً مشتركاً أصغر لـ a ، b كالاتى :

$$[a] \cap [b] = [\ell] \Rightarrow [\ell] \subset [a], [\ell] \subset [b] \Rightarrow a | \ell, b | \ell \quad (1)$$

أى أن ℓ مضاعف مشترك لـ a ، b .

والآن ليكن m مضاعفاً مشتركاً لـ a ، b كذلك ، أى أن : $a | m$ ، $b | m$. هذا

يقضى أن $[m] \subset [a]$ ، $[m] \subset [b]$ وهذا يستلزم أن $[m] \subset [a] \cap [b] = [\ell]$ أى

أن $m | \ell$ (2) من (1) ، (2) ينتج أن ℓ مضاعف مشترك أصغر لـ a ، b .

ملحوظة : يمكن بسهولة تعميم النتيجة السابقة ، فإذا كانت $a_1, \dots, a_n \in D$ حيث D نطاق مثاليات أساسية ، فيوجد مضاعف مشترك أصغر ℓ للعناصر $a_1, \dots, a_n$ يعطى بـ

$$[\ell] = \bigcap_{i=1}^n [a_i]$$

مثال ١٠ : برهن على أنه فى نطاق المثاليات الأساسية يكون لكل عنصرين قاسم مشترك أعظم

البرهان : ليكن D نطاق المثاليات الأساسية ، وليكن $a, b \in D$. سنكون مجموع

المثاليين $[a]$ ، $[b]$ الذى هو مثالى من $(1-2-9)$. ومن حيث إن D نطاق مثاليات

أساسية فإنه يوجد $g \in D$ بحيث يكون

$$[a] + [b] = [g]$$

سنبرهن على أن g قاسم مشترك أعظم لـ a ، b كالاتى :

$$[a] + [b] = [g] \Rightarrow [a] \subset [g] \Rightarrow \exists x \in D : a = xg \Rightarrow g | a \quad (g \text{ يقسم } a)$$

وبالمثل فإن $g \mid b$.

والآن ليكن $c \mid a$ ، $c \mid b$ ، $\exists y, z \in D$ بحيث إن $cy = a$ ، $cz = b$ ،

$$\Leftrightarrow [b] \subset [c] ، [a] \subset [c] \Leftrightarrow$$

$$[g] = [a] + [b] \subset [c]$$

أى أنه يوجد $w \in D$ بحيث يكون $g = wc$ أى أن $c \mid g$ ويكون g قاسماً مشتركاً أعظم لـ a ، b .

راجع كذلك الملحوظة فى (٣-٤-١٢) .

مثال ١١ : برهن على أن كثرة الحدود $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ $\bar{2}X + \bar{1} \in$ لها معكوس ضربى فى $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

البرهان : لاحظ أن : $(\bar{2}X + 1)^2 = \bar{4}X^2 + \bar{4}X + \bar{1} = \bar{1}$

أى أن $\bar{2}X + \bar{1}$ هى معكوس نفسها الضربى فى $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

مثال ١٢ : ليكن R نطاق مثاليات أساسية ، $a, b \in R$ ، $0 \neq a, b$. برهن على أن :

$$1 \in \gcd(a, b) \Leftrightarrow \text{مثاليين متعاضمين معاً } [a], [b]$$

(راجع تعريف المثاليين المتعاضمين معاً فى جبر المثاليات)

البرهان : ليكن d قاسماً مشتركاً أعظم لـ a ، b . وبالتالى فإنه من الملحوظة فى (٣-٤-١٢) أو من مثال ١٠ السابق يكون

$$[a] + [b] = [d]$$

ولكن $[a]$ ، $[b]$ متعاضمان معاً ، فيكون $[d] = R = [1]$

(وهذا يكون إذا كان فقط إذا كان $d \in R$ وحدة)

وهذا يكون إذا كان فقط إذا كان $1 \in \gcd(a, b)$

مثال ١٣ : برهن أو انف :

(أ) 4 - هو قاسم مشترك أعظم لـ 12 ، 16 فى $\mathbb{Z}$

(ب) $\frac{1}{5}$ هو قاسم مشترك أعظم لـ 3 ، 4 فى $\mathbb{Q}$

الحل : (أ) صحيحة $12 \mid -4$ ، $16 \mid -4$. ولجميع $x \mid 12$ ، $x \mid 16$ يكون

$$x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

وواضح أن $x \mid -4$

$$(ب) \text{ في } \mathbb{Q} : \text{ صحيحة } \frac{3}{1} = 15 \in \mathbb{Q} , \frac{4}{1} = 20 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{إذا كان } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ قاسما لـ } 3 , 4 \text{ فإن : } \frac{1}{5} = \frac{b}{5a} \in \mathbb{Q} .$$

مثال ١٤ : برهن على أنه لكل $a, b, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ يكون للمعادلة $ax \equiv b \pmod{n}$

حل في $\mathbb{Z}$ إذا لم يكن هناك قواسم مشتركة بين a ، n (عدا ± 1)

البرهان : إذا لم يكن هناك قواسم مشتركة بين a ، n (فيما عدا ± 1 بالطبع)

كان القاسم المشترك الأعظم الموجب بينهما على الصورة

$$\lambda a + \mu n = 1 , \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

$$((13-4-3) , (12-4-3))$$

وبالتالي فإن :

$$\lambda ab + \mu nb = b \Rightarrow a(\lambda b) - b = (-\mu b)n$$

وهذا يقتضى أن المعادلة $ax \equiv b \pmod{n}$ لها الحل $x = \lambda b \in \mathbb{Z}$.

مثال ١٥ : عمم مثال ١٤ : برهن على أنه لكل $a, b, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ يكون للمعادلة

$ax \equiv b \pmod{n}$ حل في $\mathbb{Z}$ إذا كان فقط إذا كان القاسم المشترك الأعظم الموجب لـ

a ، n يقسم b .

البرهان : إذا كان القاسم المشترك الأعظم الموجب لـ a ، n يقسم b فإننا نكتب

$$\lambda a + \mu n \mid b , \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

وهذا يقتضى أن $b = \lambda ay + \mu ny$ ، حيث $y \in \mathbb{Z}$

وبوضع $x = \lambda y$ نحصل على : $b = ax + (\mu y)n$ ، أى أن $ax \equiv b \pmod{n}$

والآن إذا كان القاسم المشترك الأعظم الموجب لـ a ، n لا يقسم b فإنه يكون :

$$\gamma(\lambda a + \mu n) \neq b \quad : \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{Z} \text{ لجميع}$$

وبالتالى فإنه يكون لجميع $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$: $\lambda a + \mu n \neq b$

ومن ثم فإن المعادلة $ax \equiv b \pmod{n}$

لا يكون لها حل فى $\mathbb{Z}$.

مثال ١٦ : بالنظر إلى مثال ١٥ السابق مباشرة وضح بنائية (استدلالية) لتوجد حلا فى

$$\mathbb{Z} \text{ للمعادلة } ax \equiv b \pmod{n} \text{ حيث } a, b, n \in \mathbb{Z}$$

إذا كان للمعادلة حل . استخدم هذه الطريقة لتعيين حل للمعادلة $12x \equiv 18 \pmod{42}$

الحل : سنوجد " d " القاسم المشترك الأعظم الموجب لـ a ، n كما جاء فى (٣-٤-١٥)

$$\text{على الصورة} \quad d = \lambda a + \mu n, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

إذا لم يكن d قاسماً لـ b فمن مثال ١٥ السابق مباشرة لا يكون للمعادلة

$$ax \equiv b \pmod{n} \text{ حل.}$$

إذا كان d قاسماً لـ b فلاحظ أن :

$$a \frac{\lambda b}{d} - b = b \left(\frac{a\lambda - d}{d} \right) = \frac{-b\mu}{d} n$$

ولأن d يقسم b فيكون $\frac{-b\mu}{d} \in \mathbb{Z}$ ويكون للمعادلة

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

حل حيث يعطى " أحد " الحلول $x = \frac{\lambda b}{d}$ بـ

والآن فى المعادلة $12x \equiv 18 \pmod{42}$

$$42 = (3)(12) + 6$$

$$12 = (2)(6)$$

أى أن $6 = (1)(42) - (3)(12)$ هو القاسم المشترك الأعظم الموجب لـ 12 ، 42 .

$$x = \frac{\lambda b}{d} = \frac{(-3)(18)}{6} = -9 \text{ . سنأخذ الحل } -9 \text{ . إذن يوجد حل .}$$

مرة أخرى لدينا

$$12x = 42k + 18, \quad k \in \mathbb{Z}$$

أى أن

$$2x = 7k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$k = -3 \Rightarrow x = -9$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$k = 3 \Rightarrow x = 12$$

وواضح أنه لكل عدد فردى k يوجد حل . وجميع الحلول توضع على الصورة :

$$-9 + 7\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

مثال ١٧ : برهن على أن خوارزمية القسمة تسرى في $\mathbb{Z}[i]$ ، حيث $d(\alpha) = N(\alpha)$

$$\text{حيث } N(a+ib) = a^2 + b^2 \text{ (قارن مع مثال ٧ في (١١-٢-٣))}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = r + si, \quad r, s \in \mathbb{Q} \text{ . نكتب } \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \text{ ليكن}$$

نأخذ $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ أقرب ما يمكن إلى العددين الكسريين r, s على الترتيب

$$\text{ليكن } \sigma = q_1 + q_2 i, \quad \rho = \alpha - \sigma \beta \text{ . والآن :}$$

$$\frac{N(\rho)}{N(\beta)} = \frac{N(\alpha - \sigma \beta)}{N(\beta)} = \frac{|\alpha - \sigma \beta|^2}{|\beta|^2} = \left| \frac{\alpha}{\beta} - \sigma \right|^2$$

$$= |r + si - q_1 - q_2 i|^2 = (r - q_1)^2 + (s - q_2)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} < 1$$

مثال ١٨ : ليكن $\alpha = 7 + 2i$ ، $\beta = 3 - 4i$. اوجد ρ ، σ في $\mathbb{Z}[i]$ بحيث يكون :

$$\alpha = \sigma \beta + \rho, \quad N(\rho) < N(\beta)$$

الحل : مسترشدين بمثال ١٧ السابق مباشرة سنكتب :

$$7 + 2i = \sigma(3 - 4i) + \rho, \quad (N(\rho) < 3^2 + (-4)^2 = 25 \text{ بحيث})$$

$$\frac{7 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(7 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{13}{25} + \frac{34}{25}i$$

$$\sigma = q_1 + q_2i = 1 + i \quad \text{نختار}$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned} \frac{N(\rho)}{N(\beta)} &= \left| \frac{7 + 2i}{3 - 4i} - 1 - i \right|^2 = \left| \frac{13}{25} + \frac{34}{25}i - 1 - i \right|^2 \\ &= \left(\frac{-12}{25} \right)^2 + \left(\frac{9}{25} \right)^2 = \frac{9}{25} < 1 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$7 + 2i = (1 + i)(3 - 4i) + 3i (= \rho)$$

مثال ١٩ : اوجد قاسماً مشتركاً أعظم لـ $8 + 6i$ ، $5 - 15i$ في $\mathbb{Z}[i]$

الحل : سننتبع نفس الأسلوب كما في مثال ١٨ المستقى من مثال ١٧ السابق . ولهذا سنكتب

$$8 + 6i = (5 - 15i)\sigma + \rho,$$

$$N(\rho) < 5^2 + (-15)^2 = 250 \text{ بحيث يكون}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8 + 6i}{5 - 15i} = \frac{(8 + 6i)(5 + 15i)}{(5 - 15i)(5 + 15i)} = \frac{-1 + 3i}{5}$$

$$\sigma = q_1 + q_2i = 0 + i \quad \text{إذن نختار}$$

وتحقق من أن :

$$\frac{N(\rho)}{N(\beta)} = \left| -\frac{1}{5} + \frac{3i}{5} - i \right|^2 = \left(-\frac{1}{5} \right)^2 + \left(-\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{1}{5} < 1$$

وبالتالي فإن :

$$8 + 6i = i(5 - 15i) + i - 7 (= \rho)$$

والآن

$$5-15i = (i-7)\sigma' + \rho'$$

$$\frac{5-15i}{i-7} = \frac{(5-15i)}{(i-7)} \cdot \frac{(-i-7)}{(-i-7)} = -1+2i$$

أى أن

$$5-15i = (-1+2i)(i-7)$$

ومن (٣-٤-١٥) يكون القاسم المشترك الأعظم المطلوب هو $i-7$.

تمارين

(١) استخدم الخوارزمية الإقليدية في $\mathbb{Z}[i]$ لحساب القاسم المشترك الأعظم لـ $16+7i$ ، $10-5i$

(٢) ليكن $[\alpha]$ مثالياً أساسياً في $\mathbb{Z}[i]$

(١) برهن على أن $\mathbb{Z}[i]/[\alpha]$ حلقة منتهية

(ب) برهن على أنه إذا كان π عنصراً غير قابل للتبسيط في $\mathbb{Z}[i]$ فإن $\mathbb{Z}[i]/[\pi]$ يكون حقلاً

(جـ) اوجد عدد عناصر كل من الحقول الآتية :

$$\mathbb{Z}[i]/[3] \quad (أ) \quad \mathbb{Z}[i]/[1+i] \quad (ب) \quad \mathbb{Z}[i]/[1+2i] \quad (جـ)$$

(إرشاد : انظر مثال ٩ في (١-٣-٢٠))

(٣) برهن على أن خوارزمية القسمة تسرى في النطاقات المتكاملة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ،

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ، $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ، حيث $d(\alpha) = N(\alpha)$ حيث α عنصر غير صفري في أحد هذه النطاقات (وبالتالي فإن هذه النطاقات تكون إقليدية)

٥-٣ حلقات كثيرات الحدود على نطاقات التحليل الوحيد

Polynomial Rings over Unique Factorization Domains

٣-٥-١ تعريف :

ليكن R نطاقاً متكاملاً ، ولتكن $f = \sum_{i=1}^n a_i X^i \in R[X] \setminus \{0\}$

(أ) كل قاسم مشترك أعظم لـ $a_0, \dots, a_n$ يسمى محتوى (content) من f

(ب) يقال إن f بدائية (primitive) إذا كان $a_0, \dots, a_n$ ليس لها قواسم مشتركة (باستثناء الوحدات)

٣-٥-٢ أمثلة :

(١) $\{-2, 2\}$ هي مجموعة محتويات كثيرة الحدود $2X^2 + 4X + 8 \in \mathbb{Z}[X]$

(٢) كثيرة الحدود $2X^2 + 4X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ بدائية

٣-٥-٣ ملحوظة :

(١) ليكن R نطاقاً متكاملاً . لكل $f \in R[X] \setminus \{0\}$ ولكل محتوى $I(f)$ من f توجد

كثيرة حدود بدائية $f^* \in R[X]$ بحيث إن $f = I(f)f^*$

(٢) إذا كان K حقلاً فإن كل كثيرة حدود $f \in K[X] \setminus \{0\}$ تكون بدائية .

(٣) إذا كان R نطاقاً متكاملاً فإن كل كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط (أو غير قابلة

للتحليل) $f \in R[X]$ بحيث إن $\deg(f) > 0$ تكون بدائية .

(لاحظ أن كثيرة الحدود $2 \in \mathbb{Z}[X]$ غير قابلة للتبسيط ، لكنها ليست بدائية . ولهذا

لا يمكن إسقاط الشرط " $\deg(f) > 0$ ".)

(٤) ليكن R نطاق تحليل وحيد ، $Q(R)$ حقل القسمة لـ R . ولتكن $f \in R[X]$ بدائية .

عندئذ فإن f غير قابلة للتبسيط في $Q(R)[X]$ تستلزم أن f غير قابلة للتبسيط في $R[X]$.

(لاحظ أن كثيرة الحدود $2X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Q}[X]$ ، لكنها قابلة

للتبسيط في $\mathbb{Z}[X]$ ، ولهذا لا يمكن التنازل عن الشرط " f بدائية".)

البرهان : (١) ينتج مباشرة من (٣-٤-٨)

(٢) واضح لأن $K^* = K \setminus \{0\}$

(٣) لتكن f ليست بدائية . عندئذ فإنه يوجد $d \in R \setminus \{0\}$ بحيث إن $d \notin R^*$ ، ويوجد $f' \in R[X]$ بحيث يكون $f = df'$. ولأن $\deg(f') = \deg(f) > 0$ فإن $\deg(f') \in (R[X])^* = R^*$ ، وهذا يقتضى أن f قابلة للتبسيط .

(٤) من $f = gh$ حيث $g, h \in R[X] \subset Q(R)[X]$ ينتج أن $g \in (Q(R))^*$ أو $h \in (Q(R))^*$ وهكذا يكون $g \in R \setminus \{0\}$ أو $h \in R \setminus \{0\}$. وإذا كان $I(f)$ ، $I(h)$ محتوى f ، محتوى h على الترتيب ، فإننا نحصل على $gI(h) \sim I(f) \in R^*$ فى حالة $g \in R \setminus \{0\}$ ، ومن ثم فإن $g \in R^*$. وفى حالة $h \in R \setminus \{0\}$ نحصل بالمثل على $h \in R^*$.

٣-٥-٤ تمهيدية لجاوس Gauss's Lemma

حاصل ضرب كثيرتى حدود بدائيتين هو كثيرة حدود بدائية .

البرهان : لتكن f, g كثيرتى حدود بدائيتين ، ولتكن fg ليست بدائية . ليكن p قاسم اولى (أى عدد اولى يقسم) محتوى fg ، ولتكن $\bar{f}, \bar{g}$ ، $\overline{fg}$ كثيرات الحدود التى نحصل عليها من f, g, h على الترتيب بعد تخفيض معاملاتهما مقياس p . عندئذ فإن $\bar{f}, \bar{g}$ تنتميان إلى النطاق المتكامل $\mathbb{Z}_p[X]$ ، ويكون $\bar{f}\bar{g} = \overline{fg} = \bar{0}$ حيث $\bar{0}$ هو العنصر الصفرى فى $\mathbb{Z}_p[X]$ (انظر مثال ١٥ فى (٢-٢-٨)) . ولأن $\mathbb{Z}_p[X]$ نطاق متكامل فإنه ينتج أن $\bar{f} = 0$ أو $\bar{g} = 0$. وهذا يعنى أن p يقسم كل معامل فى f أو أن p يقسم كل معامل فى g . أى أن f ليست بدائية أو أن g ليست بدائية . هذا التناقض نهاية البرهان .

ملحوظة : يمكن تعميم التمهيديّة ببساطة على أى نطاق تحليل وحيد .

٣-٥-٥ نتيجة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، وليكن $f, g \in R[X]$. إذا كان $I(f)$ ، $I(g)$ ، $I(fg)$ هى محتويات f, g, fg على الترتيب فإن :

$$I(fg) \sim I(f)I(g)$$

البرهان : من (٣-٥-٣) توجد كثيرتا حدود بدائيتان $f^*, g^* \in R[X]$ بحيث يكون $f = I(f)f^*$ ، $g = I(g)g^*$. ومن تمهيدية جاوس يتضح أن المحتوى $I(f^*g^*)$ هو وحدة في R (١) . كذلك لدينا : $fg = I(f)f^*I(g)g^*$ ومنها : $I(fg) \sim I(f)I(g)I(f^*g^*)$ (٢) . من (١) ، (٢) ينتج المطلوب مباشرة .

٣-٥-٦ نظرية :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، $f \in R[X] \setminus \{0\}$ ، K هو حقل القسمة لـ R . إذا كان $f = gh$ ، حيث $g, h \in K[X]$ ، فإنه يوجد $a, b \in K^*$ بحيث إن :

(١) $h^* := bh$ ، $g^* := ag$ كثيرتا حدود بدائيتان في $R[X]$

$$r := \frac{1}{ab} \in R \quad (٢)$$

أى أنه توجد كثيرتا حدود بدائيتان $f^*, g^* \in R[X]$ ، يوجد $r \in R$ بحيث يكون $f = rg^*h^*$

البرهان : (١) سنبرهن أولاً على أنه لكل كثيرة حدود $0 \neq g = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ يوجد

$a \in K^*$ بحيث يكون $g^* := ag \in R[X]$ بدائية : ليكن $r_i, s_i \in R$ اختيراً بحيث يكون $a_i = \frac{r_i}{s_i}$ ، وليكن m هو مضاعف مشترك لـ $s_0, \dots, s_n$. عندئذ فإن $g' := mg$ تقع

في $R[X]$ ، ويوجد محتوى من g' هو $I(g')$ ، وكثيرة حدود بدائية $g^* \in R[X]$ بحيث إن : $g' = I(g')g^*$. ولأن $g \neq 0$ ، $m \neq 0$ فإن $I(g') \neq 0$ ، بحيث نحصل على $g^* = \frac{m}{I(g')} g$. ولأن $m \neq 0$ يكون $\frac{m}{I(g')} \in K^*$

(٢) من (١) يوجد $a, b \in K^*$ ، توجد كثيرتا حدود بدائيتان $g^*, h^* \in R[X]$ بحيث إن

$$f = \frac{1}{ab} g^* h^* . \text{ ومن ثم فإنه يوجد } x, y \in R \setminus \{0\} \text{ بحيث يكون } f = \frac{x}{y} g^* h^*$$

ونحصل على $yf = xg^*h^*$. وإذا كان $I(f)$ هو محتوى f فإنه من تمهيدية جاوس يوجد

$u \in R^*$ بحيث إن : $yI(f) = xu$ وينتج أن : $\frac{x}{y} = \frac{I(f)}{u} \in R$ أى أننا نحصل فى

النهاية على

$$f = \frac{x}{y} g^* h^* = r g^* h^*, r \in R$$

٧-٥-٣ نتيجة هامة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، $f \in R[X]$ ، K حقل القسمة لـ R .
 f غير قابلة للتبسيط (للتحليل) فى $R[X]$ $\Leftarrow f$ غير قابلة للتبسيط (للتحليل) فى $K[X]$
البرهان : إذا كانت f قابلة للتبسيط فى $K[X]$ فإنه يوجد $g, h \in K[X]$ بحيث إن :
 $f = gh$ ، $\deg(h) > 0$ ، $\deg(g) > 0$ من (٦-٥-٣) يوجد عندئذ $g^*, h^* \in R[X]$ ،
 $r \in R$ بحيث إن $f = r g^* h^*$ ، $\deg(h^*) = \deg(h) > 0$ ، $\deg(g^*) = \deg(g) > 0$.
 وبالتالي فإن f تكون قابلة للتبسيط فى $R[X]$: تناقض .

٨-٥-٣ نتيجة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، K حقل القسمة لـ R ، $f \in R[X]$ بدائية ، $g \in R[X] \setminus \{0\}$.
 $R[X]$ فى $f | g \Leftarrow K[X]$ فى $f | g$
البرهان : $f | g$ فى $K[X] \Leftarrow$ يوجد $h \in K[X]$ بحيث إن : $g = fh$ $\Leftarrow$ يوجد
 $f^*, h^* \in R[X]$ ، ويوجد $r \in R$ بحيث إن : $g = r f^* h^*$. ومن برهان (٦-٥-٣)
 يمكن أن نختار $f^* = \frac{1}{I(f)} f$. ولأن f بدائية يمكن أن نعوض عن f^* بـ f ونحصل

على $g = r f h^*$ ، أى أن $f | g$ فى $R[X]$.

٩-٥-٣ نظرية جاوس :

R نطاق تحليل وحيد $\Leftarrow R[X]$ نطاق تحليل وحيد

البرهان : (١) سنبرهن بالاستقراء الرياضى على درجة كثيرة الحدود أن كل $f \in R[X]$ ، $f \neq 0$ ، $f^* = R^* (R[X]) \notin f$ يمكن أن تكتب على صورة حاصل ضرب منته من عناصر غير قابلة للتبسيط كالآتى :

كل $f \in R[X]$ ، $f \notin R^*$ ، $\deg(f) = 0$ تقع فى R ، ومن ثم فإنها تكتب على صورة حاصل ضرب منته من عناصر غير قابلة للتبسيط (لأن R نطاق تحليل وحيد) ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ، وليكن الادعاء صحيحاً لجميع كثيرات الحدود $h \in R[X]$ ، $\deg(h) < n$ ، $h \notin R^*$ ، $h \neq 0$.

إذا كانت $f \in R[X]$ ، $f \neq 0$ ، $f \notin R^*$ ، $\deg(f) = n$ فإنه يوجد محتوى من f هو $I(f)$ ، كثيرة حدود بدائية $f^* \in R[X]$ بحيث إن : $f = I(f)f^*$. ولأن R نطاق تحليل وحيد ، $I(f) \in R$ ، فإن $I(f)$ إما أن تكون وحدة أو حاصل ضرب منته من عناصر غير قابلة للتبسيط . وتكون هذه نهاية البرهان إذا كانت f^* غير قابلة للتبسيط . أما إن كانت f^* قابلة للتبسيط فإنه يوجد $g, h \in R[X]$ بحيث إن $f^* = gh$ ، $\deg(g) < \deg(f)^* = n$ ، $\deg(h) < \deg(f)^* = n$. ومن فرض الاستقراء سنكتب كلا من g ، h على صورة حاصل ضرب منته من عناصر غير قابلة للتبسيط ، وهكذا تكتب f^* .

(٢) للبرهنة على وحدانية التحليل لتكن $c_1, \dots, c_m, p_1, \dots, p_n, d_1, \dots, d_k$ ، $q_1, \dots, q_\ell$ عناصر غير قابلة للتبسيط فى $R[X]$ بحيث إن

$$c_1 \dots c_m p_1 \dots p_n = d_1 \dots d_k q_1 \dots q_\ell$$

ولتكن درجات (degrees) $c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_k$ كلها صفراً ، بينما درجات $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_\ell$ كلها أكبر من الصفر . من (٣-٥-٣) كل كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر تكون بدائية إذا كانت غير قابلة للتبسيط ومن ثم فإن $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_\ell$ كلها بدائية . ومن ثم فإن حاصل الضرب $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_\ell$ ،

بدائيان (تمهيدية جاوس) . ومن ثم فإن : $c_1 \dots c_m \sim d_1 \dots d_k$. ولأن R نطاق تحليل وحيد فإن $m = k$ ، وبترقيم مناسب نستطيع أن نكتب $c_i \sim d_i$ في R لجميع $i \in \{1, \dots, m\}$ ومن ثم فإن $p_1 \dots p_n \sim q_1 \dots q_\ell$ في $K[X]$ (K هو حقل القسمة لـ R) . ومن (٣-٥-٧) تكون العناصر $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_\ell$ غير قابلة للتبسيط في $K[X]$. ولأن K حقل فإن حلقة كثيرة الحدود $K[X]$ تكون نطاق تحليل وحيد ، ومن ثم فإن $n = \ell$ وبترقيم مناسب نستطيع أن نكتب $p_i \sim q_i$ في $K[X]$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$. وهكذا فإنه ينتج أن : $p_i | q_i$ ، $q_i | p_i$ في $K[X]$. ومن (٣-٥-٨) نحصل على $p_i | q_i$ ، $q_i | p_i$ في $R[X]$. بحيث إن p_i, q_i تتشاركان أيضاً في $R[X]$.

٣-٥-١٠ نتيجة :

R نطاق تحليل وحيد $\iff$ كل حلقة كثيرات حدود على R في عدد منته من " العناصر غير المحددة " تكون نطاق تحليل وحيد . وعلى وجه الخصوص إذا كان R حقلاً فإن كل حلقة كثيرات حدود على R في عدد منته من " العناصر غير المحددة " تكون نطاق تحليل وحيد .

٣-٥-١١ أمثلة محلولة :

مثال ١ : لتكن $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ، $a_n \neq 0$. برهن على أنه إذا كان s, r ليس لهما قواسم مشتركة (غير ± 1) ، وكان $f(\frac{r}{s}) = 0$ ، فإن $r | a_0$ ،

$$s | a_n$$

البرهان : لدينا

$$\begin{aligned} a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + a_0 &= 0 \\ \Rightarrow a_n r^n + a_{n-1} s r^{n-1} + \dots + a_0 s^n &= 0 \\ \Rightarrow r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} s r^{n-2} + \dots + a_1 s^{n-1}) &= -a_0 s^n \end{aligned}$$

r, s ليس لهما قواسم مشتركة (سوى ± 1) فينتج من تمهيدية إقليدس $(-3-4-1)$ أن $r \mid a_0$

$$-a_n r^n = s(a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} s r^{n-2} + \dots + a_0 s^{n-1})$$
 وبالمثل

ولأن r, s ليس لهما قواسم مشتركة فينتج كما سبق أن $s \mid a_n$.

مثال ٢ : أوجد جميع كثيرات الحدود غير القابلة للتبسيط من الدرجة الثانية المطبوعة (أي

معامل أكبر قوة فيها هو "1") في $\mathbb{Z}_3[X]$

الحل : ليس هناك سوى $X^2 + \bar{1}$ ، $X^2 + X + \bar{2}$ ، $X^2 + 2X + \bar{2}$

لاحظ أن $\bar{1} = -\bar{2}$ ، فمثلا $X^2 + X + \bar{1} = X^2 + X - \bar{2} = (X + \bar{2})(X - \bar{1})$

وتكون قابلة للتحليل .

مثال ٣ : لتكن $f(X) := X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$. اكتب $f(X)$ كحاصل

ضرب كثيرات حدود غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}_2[X]$

الحل :

$$X^3 + X^2 + X + \bar{1} = (X^2 + \bar{1})(X + \bar{1})$$

$$= (X^2 - \bar{1})(X + \bar{1})$$

$$= (X - \bar{1})(X + \bar{1})(X + \bar{1}) = (X + \bar{1})(X + \bar{1})(X + \bar{1})$$

مثال ٤ : لتكن $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ ، غير قابلة للتحليل ومن درجة n ، p عدد أولي .

برهن على أن $\mathbb{Z}_p[X] / [f(X)]$ حقل ذو p^n من العناصر

البرهان : $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ غير قابلة للتحليل يستلزم أن المثالي $[f(X)]$ مثالي أعظم

في $\mathbb{Z}_p[X]$ (٣-٢-٩) ومن ثم فإن $\mathbb{Z}_p[X] / [f(X)]$ يكون حقلا (١-٣-١١)

والآن :

$$\mathbb{Z}_p[X] / [f(X)] = \{a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + [f(X)] \mid a_i \in \mathbb{Z}_p, i=0,1,\dots,n-1\}$$

ويكون عدد العناصر فى هذا الحقل p^n .

مثال ٥ : لنعتبر $\mathbb{Z}[X]$.

(أ) هل $\mathbb{Z}[X]$ نطاق تحليل وحيد ؟ ولماذا ؟

(ب) برهن على أن $I := \{a + Xf(X) \mid a \in 2\mathbb{Z}, f(X) \in \mathbb{Z}[X]\}$

مثالى فى $\mathbb{Z}[X]$

(جـ) هل $\mathbb{Z}[X]$ نطاق مثاليات أساسية ؟

(د) هل $\mathbb{Z}[X]$ نطاق إقليدى ؟ ولماذا ؟

الحل :

(أ) نعلم من (٣-٣-٦) مثال ١ أن $\mathbb{Z}$ نطاق تحليل وحيد ، وبالتالي فإنه من نظرية

جاوس (٣-٥-٩) يكون $\mathbb{Z}[X]$ نطاق تحليل وحيد

(ب) واضح أن $0 \in I$ أى أن $I \neq \emptyset$

ليكن $a + Xf(X), b + Xg(X) \in I$. هذا يقتضى أن :

$$a + Xf(X) - (b + Xg(X)) = a - b + X(f(X) - g(X)) \in I$$

$$(\text{لأن } a, b \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in 2\mathbb{Z})$$

والآن ليكن $a + Xf(X) \in I$ ، $g(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$

هذا يقتضى أن :

$$g(X)(a + Xf(X)) = (b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n)(a + Xf(X))$$

$$= b_0a + b_1aX + \dots + b_naX^n + Xg(X)f(X)$$

$$= b_0a + X(b_1a + \dots + b_naX^{n-1} + g(X)f(X)) \in I$$

$$(\text{لأن } b_0a \in 2\mathbb{Z})$$

ومن ثم فإن I مثالى فى $\mathbb{Z}[X]$

(جـ) $\mathbb{Z}[X]$ ليس نطاق مثاليات أساسية . المثالى المعطى فى (ب) ليس مثاليا أساسيا

فلا يوجد عنصر وحيد $c + Xh(X) \in I$.

تعليل آخر : من (٢-١-١٠) لا يمكن أن يكون $\mathbb{Z}[X]$ نطاق مثاليات أساسياً ، وإلا كان $\mathbb{Z}$ حقلاً !

(د) $\mathbb{Z}[X]$ لا يمكن أن يكون نطاقاً إقليدياً من النتيجة (٣-٣-٥) وإلا كان $\mathbb{Z}[X]$ نطاق مثاليات أساسية .

مثال ٦ : اوجد أصفار $f := X^5 + 3X^3 + X^2 + 2X \in \mathbb{Z}_5[X]$ في $\mathbb{Z}_5$

الحل : واضح أن $X = \bar{0}$ صفر لـ f . وبالتجربة نجد أن الصفر الثاني الوحيد هو $X = \bar{4}$ وهو غير مكرر .

أي أن كثيرة الحدود f وهى من الدرجة الخامسة لها صفران فقط في $\mathbb{Z}_5$ هما $\bar{0}$ ، $\bar{4}$.
مثال ٧ : اعتبر

$$f(x, y) := (3x^3 + 2x)y^3 + (x^2 - 6x + 1)y^2 + (x^4 - 2x)y + (x^4 - 3x^2 + 2)$$

كعنصر في $(\mathbb{Q}[x])[y]$. اكتب $f(x, y)$ كعنصر في $(\mathbb{Q}[y])[x]$
الحل :

$$f(x, y) = (y+1)x^4 + (3y^3)x^3 + (y^2-3)x^2 + (3y^3-6y^2-2y)x + y^2+2 \in (\mathbb{Q}[x])[y]$$

تمارين

(١) ليكن R نطاق تحليل وحيد . برهن على أن قاسماً غير ثابت (nonconstant divisor) لكثيرة حدود بدائية في $R[X]$ يكون كذلك كثيرة حدود بدائية .

(٢) اعتبر كثيرة الحدود $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. هل هى قابلة للتحليل ؟ وإذا اعتبرناها في $\mathbb{R}[X]$ هل تكون قابلة للتحليل ؟ هل يتناقض هذا مع النتيجة (٣-٥-٧) ؟ ولماذا ؟

(٣) برهن على أن $\mathbb{Z}_5[X]$ نطاق تحليل وحيد . والآن اعتبر كثيرة الحدود $X^4 + 3X^2 + 2X + 4 \in \mathbb{Z}_5[X]$ ، وبرهن على أنها يمكن كتابتها على صورتين
الآتيتين :

$(X-1)^3(X+1)$ ، $(X-1)^2(2X-2)(3X+3)$. هل يتناقض هذا مع كون $\mathbb{Z}_5[X]$ نطاق تحليل وحيد ؟ ولماذا ؟

(٤) ليكن R نطاقاً متكاملًا . صف جميع الوحدات فى :

(أ) $R[X]$ (ب) $\mathbb{Z}_{11}[X]$ (جـ) $\mathbb{Z}_6[X]$

(٥) ليكن F حقلاً . برهن على أن جميع كثيرات الحدود ذات الحد الثابت $a_0 = 0$ تكون مثالياً $[X] \in F[X]$

(٦) ليكن F حقلاً ، وليكن $[X]$ المثالى فى $F[X]$ المعرف فى تمرين (٥) السابق مباشرة . برهن على أن $F[X]/[X]$ حقل يتشاكل مع F بالطريقتين الآتيتين :

(أ) كل فصل بواقى (Residue class) فى $F[X]/[X]$ يتكون بالضبط من عنصر

واحد فى F ، يمكن اختياره كممثل للحساب فى $F[X]/[X]$

(ب) بعمل هومومورفيزم $\varphi: F[X] \rightarrow F$ يكون نواته $[X]$ ، مع تطبيق نظرية الهومومورفيزم (٣-٣-١)

(٧) برهن على أن كثيرة الحدود $f \in \mathbb{Z}[X]$ غير القابلة للتبسيط تكون بدائية .

(٨) لتكن $f := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. إذا كان r عدداً كسرياً (نسبياً)

وكان $X-r$ يقسم f فبرهن على أن r عدد صحيح .

(٩) أوجد جميع كثيرات الحدود غير القابلة للتبسيط من الدرجة الثانية أو الثالثة فى $\mathbb{Z}_2[X]$ ، $\mathbb{Z}_3[X]$

٦-٣ تبسيط (تحليل) كثيرات الحدود Factorization of Polynomials

بصفة عامة فإنه ليس من السهل تماماً تحليل أية كثيرة حدود إلى عوامل أو البرهنة على عدم قابليتها للتحليل إلى عوامل درجتها أصغر من درجة كثيرة الحدود . وسنعطى هنا بعض الأدوات المساعدة .

٦-٣-١ شرط عدم القابلية للتحليل لأيزنشتاين (١٨٥٠)

Eisenstein Criterion (1850)

ليكن $f := a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$

إذا كان هناك عدد أولى p بحيث $p \nmid a_n$ ، $p \mid a_{n-1}$ ، $\dots$ ، $p \mid a_0$ ، $p^2 \nmid a_0$ فإن f تكون غير قابلة للتحليل (للتبسيط) فى $\mathbb{Z}[X]$

البرهان : إذا كانت f قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}[X]$ فإنه يوجد $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ بحيث إن $f = gh$ ، $1 \leq \deg(g), \deg(h) < n$. ليكن $g = b_r X^r + \dots + b_0$ ، $h = c_s X^s + \dots + c_0$. عندئذ فإنه لأن $p \mid a_0$ ، $p^2 \nmid a_0$ ، $a_0 = bc$ ، ينتج أن p يقسم واحداً فقط : إما b_0 ، وإما c_0 . لنفترض أن $p \mid b_0$ ، $p \nmid c_0$. أيضاً لأن $p \mid a_n = b_r c_s$ فإن $p \nmid b_r$. وبالتالى فإنه يوجد عدد صحيح أصغر t بحيث إن $p \nmid b_t$. والآن اعتبر

$$a_t = b_t c_0 + b_{t-1} c_1 + \dots + b_0 c_t$$

بالفرض $p \mid a_t$ ، وباختيار t فإن كل حد على اليمين بعد الحد الأول فى المجموع السابق يقبل القسمة على p . وهذا يستلزم أن p يقسم $b_t c_0$. وهذا مستحيل لأن p عدد أولى ، p لا يقسم b_t ولا يقسم c_0 .

ملحوظة : يعمم هذا البرهان مباشرة على $f \in R[X]$ حيث R نطاق متكامل .

٦-٣-٢ نتيجة :

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، وليكن K حقل القسمة لـ R . f المعرفة بالشروط فى (٣-١-٦) تكون غير قابلة للتحليل (للتبسيط) فى $K[X]$ (انظر (٣-٥-٧))

٣-٦-٣ مثال : ليكن p عدداً أولياً . عندئذ فإنه لكل $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ تكون كثيرة الحدود

$$X^n - p \in \mathbb{Q}[X] \text{ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) } (p^2 \nmid p, p \mid p, p \nmid 1)$$

والآن لجميع $n > 1$ يكون $\sqrt[n]{p}$ عدداً غير نسبي (غير كسرى) لأنه لو كان $\sqrt[n]{p}$ عدداً نسبياً أى أن $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ فإن $X - \sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}[X]$. ولكننا نعلم أنه لو كان $X - \sqrt[n]{p}$ موجوداً فى $\mathbb{Q}[X]$ فإنه يكون أحد عوامل $X^n - p$ أى أن $X^n - p$ تكون قابلة للتبسيط (للتحليل) وهذا غير ممكن .

٣-٦-٤ تعريف :

لتكن R حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة . بسبب الخاصة الكونية (العالمية) لحلقات كثيرات الحدود (٢-١-١) : لكل $g \in R[X]$ يوجد بالضبط هومومورفيزم وحيد $\sigma_g: R[X] \rightarrow R[X]$ بحيث يكون $\sigma_g(X) = g$ ، $\sigma_g(a) = a$ لجميع $a \in R$. يسمى σ_g

هومومورفيزم التعويض (substitution homomorphism) المتعلق بـ g .

لكل $f \in R[X]$ نحصل على العنصر $f(g) := \sigma_g(f)$ فى $R[X]$ ، بالتعويض عن X بكثيرة الحدود g فى f . هذا التعريف له ما يبرره : ليكن

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in R, \quad f := a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

$$\sigma_g(f) = \sigma_g(a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n) = \sigma_g(a_0) + \sigma_g(a_1) \sigma_g(X) + \dots + \sigma_g(a_n) (\sigma_g(X))^n$$

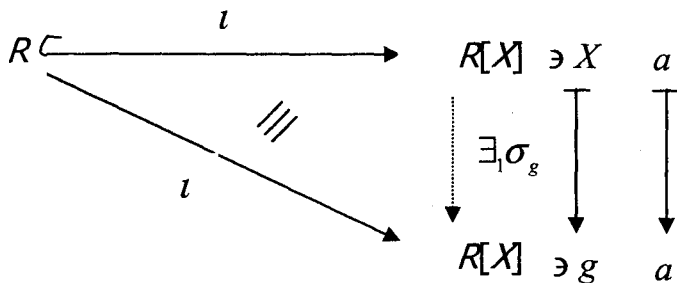
هومومورفيزم σ_g

$$= a_0 + a_1 g + \dots + a_n g^n = f(g)$$

وعلى وجه الخصوص إذا كان $g = X$ فإننا نحصل على :

$$f = f(X) \quad \forall f \in R[X]$$

أى أن الكتابتين f ، $f(X)$ متكافئتان .



٣-٦-٥ تمهيدية :

ليكن \$R\$ نطاقاً متكاملًا ، \$g \in R[X]\$

هو مومورفيزم التعويض \$\sigma_g\$ المتعلق بـ \$g\$ أيزومورفيزم إذا كان فقط إذا كان يوجد

\$g = aX + b\$ بحيث إن : \$a \in R^*\$ ، \$b \in R\$

البرهان : "\$\Rightarrow\$" : ليكن \$g = aX + b\$ ، \$a \in R^*\$ ، \$b \in R\$. لأن \$a \in R^*\$ فإنه يوجد

\$a' \in R\$ بحيث إن \$aa' = 1\$. نعرف \$h := a'(X - b)\$. والآن :

$$(\sigma_g \circ \sigma_h)(X) = \sigma_g(\sigma_h(X)) = \sigma_g(a'(X - b)) = aa'(X - b) + b = X \Rightarrow \sigma_g \circ \sigma_h = 1_{R[X]}$$

(راسم الوحدة على \$R[X]\$)

$$(\sigma_h \circ \sigma_g)(X) = \sigma_h(\sigma_g(X)) = \sigma_h(aX + b) = a'(aX + b - b) = X \Rightarrow \sigma_h \circ \sigma_g = 1_{R[X]}$$

أي أن \$\sigma_g\$ تناظر أحادي ، وبالتالي أيزومورفيزم .

"\$\Leftarrow\$" : لأن \$\sigma_g\$ راسم غامر (شامل ، فوقى) فإنه يوجد \$f \in R[X]\$ بحيث إن \$\sigma_g(f) = X\$.

ومن ثم فإن :

$$\deg(g) \deg(f) = \deg(\sigma_g(f)) = \deg(X) = 1$$

ومن ثم فإن \$\deg(g) = 1 = \deg(f)\$. وبالتالي فإنه يوجد \$a, b, a', b' \in R\$

بحيث إن \$g = aX + b\$ ، \$f = a'X + b'\$ ، بحيث إن :

$$X = \sigma_g(f) = \sigma_g(a'X + b') = a'(aX + b) + b' = a'aX + a'b + b'$$

$$\Rightarrow aa' = 1$$

أى أن $a \in R^*$.

٣-٦-٦ نتيجة :

ليكن R نطاقاً متكاملًا ، $a \in R^*$ ، $b \in R$ ، $g := aX + b$. عندئذ فإنه لكل $f \in R[X]$:
 f غير قابلة للتحليل (للتبسيط) في $R[X] \Leftrightarrow \sigma_g(f)$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) في $R[X]$

البرهان : مباشر تماماً من التمهيدية السابقة مباشرة (٣-٦-٥)

٣-٦-٧ نتيجة :

لكل p عدد أولي تكون كثيرة الحدود

$$f := X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

غير قابلة للتحليل (للتبسيط) (في $\mathbb{Q}[X]$)

البرهان : ليكن σ_g هو هومومورفيزم التعويض المتعلق بـ $g := X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

لاحظ أن : $(X-1)f = X^p - 1$ ، ومن ثم فإن

$$\sigma_g((X-1)f) = \sigma_g(X^p - 1)$$

$$\Rightarrow \sigma_g(X-1)\sigma_g(f) = \sigma_g(X^p) - \sigma_g(1)$$

σ_g هومومورفيزم

$$\Rightarrow X\sigma_g(f) = (X+1)^p - 1$$

$$\Rightarrow \sigma_g(f) = X^{p-1} + \binom{p}{1}X^{p-2} + \dots + \binom{p}{r}X^{p-r-1} + \dots + \binom{p}{p-1}$$

لكل $r \in \{1, \dots, p-1\}$ يقع $\binom{p}{r}$ في $\mathbb{Z}$ ويساوى $\frac{p!}{r!(p-r)!}$

ونلاحظ أن $p! \mid p$ ، $p \nmid r!(p-r)!$ ، وإذا كان قاسماً لـ $r!(p-r)!$

فلا بد أن يقسم أحد العوامل وكلها أصغر من p ومن ثم فإن :

$$p^2 \nmid \binom{p}{p-1}, \quad p \mid \binom{p}{p-1} = p, \quad p \nmid 1, \quad r \in \{1, \dots, p-1\} \text{ لجميع } p \mid \binom{p}{r}$$

ومن (١-٦-٣) تكون $\sigma_g(f)$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن (٦-٦-٣) تكون f غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن (٢-٦-٣) تكون f غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.
٨-٦-٣ نظرية (الاختصار بالمقياس)

ليكن R نطاق تحليل وحيد ، $f = \sum_{i=1}^n a_i X^i \in R[X]$ ، كثيرة حدود بدائية ، P مثالي

أولى في R ، $a_n \notin P$. وليكن $\bar{R} := R/P$ ، $\rho: R[X] \rightarrow \bar{R}[X]$ امتداداً

(extension) للإيمورفيزم الطبيعي الحلقى $\bar{R} \rightarrow R$ ، وليكن K حقل القسمة لـ R .

عندئذ فإن : $\rho(f) \in \bar{R}[X]$ غير قابل للتحليل $\Leftrightarrow f \in K[X]$ غير قابل للتحليل

البرهان : من (٧-٥-٣) يكفي أن نبرهن على أن $f \in R[X]$ غير قابلة للتحليل (في $R[X]$) . إذا كانت f قابلة للتحليل في $R[X]$ فإنه توجد كثيرتا حدود كلتاهما لاتساوى ثابتاً هما g ، h في $R[X]$ بحيث إن $f = gh$ (لأن f بدائية)

ومن ثم فإن $\rho(f) = \rho(g)\rho(h)$. ولأن $\bar{R}$ نطاق متكامل ، $a_n \notin P$ نحصل على :

$$\deg(g) + \deg(h) = \deg(f) = \deg(\rho(f)) = \deg(\rho(g)) + \deg(\rho(h))$$

ولأن $\deg(\rho(h)) \leq \deg(h)$ ، $\deg(\rho(g)) \leq \deg(g)$ فإننا نحصل على

$\deg(\rho(h)) = \deg(h)$ ، $\deg(\rho(g)) = \deg(g)$ ، أى أن $\rho(f)$ تكون قابلة

للتحليل في $\bar{R}[X]$: تناقض

في حالة $R = \mathbb{Z}$ ، p عدد أولي ، $\bar{R} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. اختيار p يعتمد على شيء من الحظ !

لأنه إذا اتضح أن $\rho(f)$ قابلة للتحليل ، فإن هذا لايعنى شيئاً على الإطلاق ، فقابلية

التحليل في $\bar{R}[X]$ لاتستلزم قابلية التحليل في $K[X]$.

٣-٦-٩ أمثلة محلولة :

مثال ١ :

لتكن $f := X^5 - X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. نختار $P = 2\mathbb{Z}$ ، وبهذا يكون :

$$\rho(f) = X^5 + X^2 + \bar{1} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

إذا كانت $\rho(f)$ قابلة للتحويل فى $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ فإن $\rho(f)$ يكون لها عامل من الدرجة الأولى أو الدرجة الثانية . كثيرات الحدود من الدرجة الأولى هى X ، $X + \bar{1}$ فقط (فى $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$)

$$\rho(f)(\bar{0}) = \bar{0} + \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0} \Rightarrow \rho(f) \text{ ليس عاملا لـ } X$$

$$\rho(f)(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0} \Rightarrow \rho(f) \text{ ليس عاملا لـ } X + \bar{1}$$

كثيرات الحدود من الدرجة الثانية فى $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ هى :

$$X^2 + X + \bar{1} , X^2 + X , X^2 + \bar{1} , X^2$$

إذا كان X^2 عاملا من عوامل $\rho(f)$ فإن $\rho(f)(\bar{0}) = \bar{0}$ (لأن ρ هومومورفيزم ، X^2 عامل من عوامل $(\rho(f))$ ولكن

$$X^2 \text{ ليس عاملا من عوامل } \rho(f) \Rightarrow \rho(f)(\bar{0}) = \bar{0} + \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

وإذا كان $X^2 + \bar{1}$ عاملا من عوامل $\rho(f)$ فإن $\rho(f)(\bar{1}) = \bar{0}$ ، لكن

$$\rho(f)(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

أى أن $X^2 + \bar{1}$ ليس عاملا من عوامل $\rho(f)$

وكذلك إذا كان $X^2 + X$ عاملا من عوامل $\rho(f)$ فإن $\rho(f)(\bar{0}) = \rho(f)(\bar{1}) = \bar{0}$ وهذا لا يحدث .

يتبقى $X^2 + X + \bar{1}$ وبالقسمة الإقليدية نحصل على :

$$\rho(f) = X^5 + X^2 + \bar{1} = (X^3 + X^2)(X^2 + X + \bar{1}) + \bar{1}$$

أي أن $X^2 + X + 1$ ليس عاملاً من عوامل $\rho(f)$.

وبالتالي فإن $\rho(f)$ ليس لها عوامل من الدرجة الثانية ومن ثم فهي لا تقبل التحليل على

الإطلاق في $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ومن ثم فهي أي f لا تقبل التحليل في $\mathbb{Q}[X]$

مثال ٢ : برهن على أن شرط عدم القابلية للتحليل لأيزنشتاين ليس ضرورياً (not necessary) . أي أنه شرط كاف (sufficient condition) فقط .

البرهان : لنعتبر $f(X) := X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ عندئذ فإن

$$f(X+1) = (X+1)^2 + 1 = X^2 + 2X + 2$$

خذ $p = 2$ ، وطبق شرط أيزنشتاين :

$$2^2 \nmid 2, 2 \mid 2, 2 \mid 2, 2 \nmid 1$$

ومن ثم فإن $f(X+1)$ ليست قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن ثم فهي ليست قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.

ومن $(3-6-6)$ تكون $f(X)$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$. (هنا $g = X+1$) . ولكنه لا يوجد عدد أولي p يقسم 1 (معامل X^2) . وهذا يبرهن على أن شرط أيزنشتاين ليس ضرورياً .

ملحوظة : يمكن الاستغناء عن النتيجة $(3-6-6)$ هنا بملاحظة أن : $f(X) = g(X)h(X)$ إذا كان فقط إذا كان $f(X+a) = g(X+a)h(X+a)$ لجميع $a \in \mathbb{Z}$.

وبصفة عامة فإنه إذا كان R نطاق تحليل وحيد ، وكانت $f \in R[X]$ عندئذ فإنه لكل $a \in R$ تكون $f(X)$ غير قابلة للتحليل في $R[X]$ إذا كان فقط إذا كان $f(X+a)$ غير قابلة للتحليل في $R[X]$ ، لأن :

$$f(X) = g(X)h(X) \Leftrightarrow f(X+a) = g(X+a)h(X+a),$$

$$\deg(g(X)) = \deg(g(X+a)), \deg(h(X)) = \deg(h(X+a))$$

ولهذا فإننا يمكننا أحيانا أن نطبق شرط أيزنشتاين بنجاح عندما نستعويض عن X بـ

$X+n$ في كثيرة الحدود المعنية على $\mathbb{Z}[X]$ ، حيث تكون عادة $n = \pm 1, \pm 2$.

مثال ٣ : اضرب مثالا لكثيرة حدود f تكون غير قابلة للتحليل في $R[X]$ لكنها قابلة

للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$ حيث $\mathbb{Q}$ حقل يحتوى على R .

الحل : في مثال ٢ السابق مباشرة رأينا أن $X^2+1 \in \mathbb{Z}[X]$ غير قابلة للتحليل . ولكن

$$X^2+1 = (X+i)(X-i) \text{ في } \mathbb{C}[X] .$$

هذا لا يتناقض مع معلوماتنا السابقة في (٣-٥-٧) ، ذلك أن $\mathbb{C}$ ليست هي حقل القسمة

لـ $\mathbb{Z}$. ولكن $\mathbb{Q}$ هو حقل القسمة لـ $\mathbb{Z}$.

مثال ٤ : برهن على أن كثيرات الحدود الآتية غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$:

$$7X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 10X + 18 , X^3 - 9X + 15 , X^4 - 4X + 2$$

البرهان : بالنسبة إلى $X^4 - 4X + 2$ خذ $p=2$ وطبق شرط أيزنشتاين :

$$2 \nmid 2 , 2 \mid 2 , 2 \mid (-4) , 2 \nmid 1$$

ومن ثم في $\mathbb{Q}[X]$.

بالنسبة إلى $X^3 - 9X + 15$ ، خذ $p=3$ ، وكما سبق :

$$3 \nmid 15 , 3 \mid 15 , 3 \mid (-9) , 3 \nmid 1$$

بالنسبة إلى $7X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 10X + 18$ خذ $p=2$ ، وكما سبق

$$2 \nmid 18 , 2 \mid 18 , 2 \mid (-10) , 2 \mid 6 , 2 \mid (-2) , 2 \nmid 7$$

إذن كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.

مثال ٥ :

برهن على أن المثالي $[X+2]$ يكون مثاليا أعظم في $\mathbb{Q}[X]$

البرهان : لأن $\mathbb{Q}$ حقل فمن (٣-٢-٩) إذا كانت $X+2 \in \mathbb{Q}[X]$ كثيرة حدود غير

قابلة للتحليل (للتبسيط) فإن $[X+2]$ يكون مثاليا أعظم في $\mathbb{Q}[X]$.

والآن ليكن $X+2=f g$ مرة أخرى لأن $\mathbb{Q}$ حقل فإن $\deg(f) + \deg(g) = 1$ (يكفى أن يكون $\mathbb{Q}$ نطاقاً متكاملًا!) . ومن ثم فإنه إما أن تكون $\deg(f) = 0$ وإما أن تكون $\deg(g) = 0$. إذا كانت $\deg(f) = 0$ ، فإن $\deg(g) = 1$. ليكن $f = a_0$ ، حيث $0 \neq a_0 \in \mathbb{Q}$ ، وليكن $g = b_0 + b_1 X$ حيث $b_0, b_1 \in \mathbb{Q}$ ، $b_1 \neq 0$. عندئذ فإن : $X+2 = a_0(b_0 + b_1 X)$ ، وهذا يقتضى أن $a_0 b_0 = 2$ ، $a_0 b_1 = 1$. وهكذا فإن a_0 يكون وحدة ، أى أن f وحدة . وبالمثل فإن $\deg(g) = 0$ يقتضى أن g وحدة . ومن ثم فإن $X+2$ تكون غير قابلة للتحليل (للتبسيط) فى $\mathbb{Q}[X]$. نهاية البرهان .

ملحوظة : كان من الممكن أن نبرهن على عدم قابلية كثيرة الحدود $X+2 \in \mathbb{Q}[X]$ للتحليل مباشرة باستخدام شرط أيزنشتاين ، حيث $p = 2$

$$2^2 \nmid 2 , 2 \mid 2 , 2 \nmid 1$$

مثال ٦ : ليكن F حقلاً . لنكن $f(X) \in F[X]$ ، درجة $f(X) = 2$ أو 3 .

عندئذ فإن $f(X)$ قابلة للتحليل على (فى) $F[X]$ إذا كان فقط إذا كان $f(X)$ لها صفر فى F **البرهان :** لنكن $f(X) = g(X)h(X)$ حيث $g(X), h(X) \in F[X]$ ، درجة $(g(X))$ ، درجة $(h(X))$ أقل من درجة $(f(X))$. لأن $F[X]$ نطاق متكامل

فإن درجة $(f(X))$ تساوى مجموع درجتى كثيرتى الحدود $g(X)$ ، $h(X)$ ، وهى تساوى 2 أو 3 . ومن ثم فإن واحدة منهما (أى من $g(X)$ ، $h(X)$) على الأقل ستكون درجتها = 1 ، وليكن $g(X) = aX + b$. واضح أن $-a^{-1}b$ صفر لـ $g[X]$ ، وبالتالي هو صفر لـ $f[X]$. وبالعكس ليكن a صفراً لـ $f(X)$ ، أى أن $f(a) = 0$ حيث $a \in F$. عندئذ فمن التمهيدية (٢-٢-٢) يكون $X-a$ عاملاً من عوامل $f(X)$ ، أى أن $f(X)$ قابلة للتحليل فى (على) $F[X]$.

مثال ٧ : لأية قيمة لـ $b \in \mathbb{Z}$ تكون كثيرة الحدود $3X^2 + bX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$ ؟

الحل : سنوجد $b \in \mathbb{Z}$ التى تجعل كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن ثم فإنها تكون غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$.

إذا كانت كثيرة الحدود وهى من الدرجة الثانية قابلة للتحليل ، 3 ، 5 ليس بينهما قاسم مشترك غير $1 \pm$ فإنه يكون لها عامل من الدرجة الأولى وبهذا يكون لها صفر فى $\mathbb{Z}$ ،

وهذا الصفر يكون على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p أحد عوامل 5 ، q أحد عوامل 3 وبالتجربة

نجد أن :

$$\frac{p}{q} = 1 \Rightarrow (3)(1)^2 + b(1) + 5 = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$\frac{p}{q} = -1 \Rightarrow (3)(-1)^2 + b(-1) + 5 = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{p}{q} = 5 \Rightarrow (3)(5)^2 + b(5) + 5 = 0 \Rightarrow b = -16$$

$$\frac{p}{q} = -5 \Rightarrow (3)(-5)^2 + b(-5) + 5 = 0 \Rightarrow b = 16$$

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 + b\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{25}{3} + b\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$\frac{p}{q} = \frac{-5}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{-5}{3}\right)^2 + b\left(\frac{-5}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{25}{3} - b\left(\frac{5}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + b\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + b\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow b = -16$$

$$\frac{p}{q} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + b\left(\frac{-1}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - b\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 0 \Rightarrow b = 16$$

إذن لجميع $b \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 8, \pm 16\}$ تكون كثيرة الحدود المعطاة غير قابلة للتحليل فى

$\mathbb{Z}[X]$ ، وبالتالي غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$

طريقة أخرى : مميز المعادلة هو :

$$b^2 - 4(3)(5) = b^2 - 60$$

$$\Rightarrow X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 60}}{(2)(3)}$$

وحتى يكون هناك حل في $\mathbb{Z}$ يجب أن يكون $b^2 = 60$ مربعاً وهذا لا يتأتى إلا إذا كان $b = \pm 8$ أو $b = \pm 16$ ، كما سبق .

مثال ٨ : برهن على أن $f := X^3 + X^2 - 2X + 8 \in \mathbb{Q}[X]$ غير قابلة للتبسيط (أي غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Q}[X]$)

البرهان : سنبرهن على أن كثيرة الحدود المعطاة غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}[X]$ ومن ثم فإنها تكون غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Q}[X]$ ($\mathbb{Q}$ هو حقل القسمة لـ $\mathbb{Z}$ ، نتيجة (٣-٥-٧)) وكثيرة الحدود المعطاة قواسم معاملاتها المشتركة هي ± 1 فقط فإذا كانت قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ فإنه يكون لها عامل من الدرجة الأولى وبهذا يكون لها صفر في $\mathbb{Z}$. وهذا الصفر هو أحد عوامل 8 ، أي هو أحد ± 1 ، ± 2 ، ± 4 ، ± 8 ، $(X - a)$ عامل من عوامل $f(a) = 0 \Leftrightarrow f$

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 2(1) + 8 = 8 \neq 0$$

$$f(-1) = 10 \neq 0, f(2) = 16 \neq 0, f(-2) = 8 \neq 0.$$

$$f(4) = 80 \neq 0, f(-4) = -32 \neq 0, f(8) = 408 \neq 0, f(-8) = -264 \neq 0$$

وبهذا لا يكون لكثيرة الحدود أي صفر في $\mathbb{Z}[X]$ وبالتالي فهي غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن ثم في $\mathbb{Q}[X]$.

مثال ٩ : برهن على أن كثيرة الحدود $f := X^5 - 5X^4 - 6X - 1$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.

البرهان : سنثبت - كالمعتاد - أن f غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ فنكون غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.

إذا كان لـ f عوامل من الدرجة الأولى فسيكون $f(1) = 0$ أو $f(-1) = 0$ (لأنه لا توجد عوامل للحد المطلق في f وهو "-1" سوى ± 1)

$$f(1) = 1 - 5 - 6 - 1 = -11 \neq 0$$

$$f(-1) = -1 - 5 + 6 - 1 = -1 \neq 0$$

إذن ليس لها عوامل من الدرجة الأولى .

بالرجوع إلى النظرية (٣-٦-٨)

نحرب $P = 3\mathbb{Z}$ ، ويكون

$$\rho(f) = X^5 + X^4 + \bar{2}$$

$$\rho(\bar{0}) = \bar{2} \neq \bar{0}, \rho(\bar{1}) = \bar{1} \neq \bar{0}, \rho(\bar{2}) = \bar{2} \neq \bar{0}$$

وليس لـ $\rho(f)$ عوامل من الدرجة الأولى كما هو متوقع

لأن معامل X^5 هو $\bar{1}$ فإننا نعتبر كثيرات الحدود من الدرجة الثانية التى معامل X^2 فيها هو $\bar{1}$

والآن كثيرات الحدود من الدرجة الثانية فى $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ التى معامل X^2 فيها هو $\bar{1}$ هى :

$$X^2, X^2 + \bar{1}, X^2 + \bar{2}, X^2 + X, X^2 + \bar{2}X, X^2 + X + \bar{1}, X^2 + \bar{2}X + \bar{2}, X^2 + X + \bar{2}, X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$$

كثيرة الحدود $X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$ هى $(X + \bar{1})^2$ ، فإذا كان لها صفر هو $\bar{2}$ كان لـ $\rho(f)$ عامل من الدرجة الأولى ، وهو غير صحيح مما سبق .

إذا كان X^2 أو $X^2 + X$ أو $X^2 + \bar{2}X$ عاملا من عوامل $\rho(f)$ كان

$$\rho(f(\bar{0})) = \bar{0}, \text{ ولكن } \rho(f(\bar{0})) = \bar{2} \neq \bar{0} . \text{ إذن } X^2, X^2 + X, X^2 + \bar{2}X$$

لا يمكن أن تكون عوامل لـ $\rho(f(X))$.

إذا كان $X^2 + \bar{2}$ أو $X^2 + X + \bar{1}$ عاملا من عوامل $\rho(f)$ كان $\rho(f(\bar{1})) = \bar{0}$ ، ولكن

$$\rho(f(\bar{1})) = \bar{1} \neq \bar{0} . \text{ إذن } X^2 + \bar{2}, X^2 + X + \bar{1} \text{ لا يمكن أن يكونا من عوامل } \rho(f(X)) .$$

والآن :

$$\rho(f) = (X^3 + X^2 - X - \bar{1})(X^2 + \bar{1}) + X + \bar{3}$$

إذن $X^2 + \bar{1}$ ليس عاملا من عوامل $\rho(f)$

$$\rho(f) = (X^3 - \bar{2}X + \bar{2})(X^2 + X + \bar{2}) + \bar{2}X + \bar{1}$$

إذن $X^2 + X + \bar{2}$ ليس عاملاً من عوامل $\rho(f)$

$$\rho(f) = (X^3 - X^2 + \bar{2})(X^2 + \bar{2}X + \bar{2}) + \bar{2}X + \bar{1}$$

إذن $X^2 + \bar{2}X + \bar{2}$ ليس عاملاً من عوامل $\rho(f)$

أى أن $\rho(f)$ ليس لها عوامل على الإطلاق من الدرجة الثانية وسبق أن ليس لها عوامل من الدرجة الأولى ، أى أن $\rho(f)$ غير قابلة للتحليل فى $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ، وبالتالي تكون f غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}[X]$ ، ومن ثم فى $\mathbb{Q}[X]$.

ملحوظة : كان من الممكن أن نأخذ $P = 2\mathbb{Z}$. ونترك هذا للقارئ كتجربة .

مثال ١٠ : المطلوب إنشاء حقل ذى 25 عنصراً

الحل : سنستخدم كثيرة حدود من الدرجة الثالثة f غير قابلة للتحليل فى حقل "مناسب" F

فيكون المثالى $[f]$ المتولد منها مثالياً أعظم ، وبالتالي يكون $F[X]/[f]$ حقلاً (نظرية

$((11-3-1))$. سنأخذ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} (= \mathbb{Z}_5)$ حقلاً ونأخذ كثيرة الحدود $X^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$ ،

وهى غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}_5[X]$ ،

إذ أن :

$$(\bar{0})^2 + \bar{2} \neq \bar{0}, (\bar{1})^2 + \bar{2} = \bar{3} \neq \bar{0}, (\bar{2})^2 + \bar{2} = \bar{1} \neq \bar{0}, (\bar{3})^2 + \bar{2} = \bar{1} \neq \bar{0}, (\bar{4})^2 + \bar{2} = \bar{3} \neq \bar{0}$$

فليس لها أصفار فى $\mathbb{Z}_5$ ، وبالتالي ليس لها عوامل من الدرجة الأولى ، وهى من

الدرجة الثانية ، فتكون غير قابلة للتحليل (انظر مثال ٦ السابق)

والآن

$$\mathbb{Z}_5[X]/[X^2 + \bar{2}] = \{aX + b + [X^2 + \bar{2}] \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\}.$$

(انظر مثال ١٩ فى $((8-2-2))$)

حقل يتكون من 25 عنصراً لأن كلا من a ، b يأخذ خمس قيم $\bar{0}$ ، ... ، $\bar{4}$ ، وهما " مستقلان " . (راجع مثال ٤ في (٣-٥-١١))

مثال ١١ : المطلوب إنشاء حقل ذي 27 عنصراً .

الحل : سنأخذ هذه المرة الحقل $(\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3)$ ، وسنأخذ كثيرة الحدود $X^3 + \bar{2}X + \bar{1}$ ، وهي كذلك غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Z}_3[X]$ ، لأن :

$$(\bar{0})^3 + \bar{2}\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}, (\bar{1})^3 + \bar{2}\bar{1} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}, (\bar{2})^3 + \bar{2}\bar{2} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

إذن ليس لها أصفار في $\mathbb{Z}_3[X]$ ، وبهذا لا يمكن أن يكون لها عامل من الدرجة الأولى ، وهي من الدرجة الثالثة أى هي غير قابلة للتحويل (انظر مثال ٦) . والآن

$$\mathbb{Z}_3[X] / [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] = \{aX^2 + bX + c + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}$$

هو حقل يتكون من 3^3 أى من 27 عنصراً .

ملحوظة : كتدريب حسابي دعنا نحسب :

$$\begin{aligned} & ((X^2 + \bar{1}) + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}]) \cdot (X^2 + X + \bar{1} + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}]) \\ &= (X^2 + \bar{1})(X^2 + X + \bar{1}) + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] = X^4 + X^3 + \bar{2}X^2 + X + \bar{1} + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] \\ &= X(X^3 + \bar{2}X + \bar{1}) + X^3 + \bar{1} + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] \\ &= X^3 + \bar{1} + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] \quad (\text{لأن } X^3 + \bar{2}X + \bar{1} \in [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}]) \\ &= -\bar{2}X + [X^3 + \bar{2}X + \bar{1}] = X + [X^2 + \bar{2}X + \bar{1}] \end{aligned}$$

يمكن كذلك التخلص من X^4 بقسمة X^4 على $X^3 + \bar{2}X + \bar{1}$

مثال ١٢ : برهن على أن كثيرة الحدود $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ تكون قابلة للتحويل (للتبسيط). هل يتناقض هذا مع المثال (٣-٦-٧) ؟

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1) \quad \text{الحل :}$$

أى هى قابلة للتحليل . ولا يتناقض هذا مع المثال (٣-٦-٧) لأن هنا $p-1=3$ ، أى $p=4$ ، 4 ليس عدداً أولياً .

مثال ١٣ : ليكن D نطاقاً متكاملًا ، F حقلاً يحتوى D . إذا كانت $f \in D[X]$ وهى قابلة للتحليل على $D[X]$ ، ولكنها غير قابلة للتحليل على $F[X]$. فماذا يمكنك القول عن تحليل f على $D[X]$ ؟

الحل : يكون تحليل f فى $(\text{على}) D[X]$ على الشكل $f = a g$ حيث $a \in D$ ، لكنه ليس وحدة فى D ، $g \in D[X]$.

مثال ١٤ : برهن على أنه لكل عدد صحيح موجب n يوجد عدد لانهاى من كثيرات الحدود فى $\mathbb{Z}[X]$ من الدرجة n ، غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$.

البرهان : لأى عدد أولى p ستكون كثيرة الحدود $f := X^n + p \in \mathbb{Z}[X]$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}[X]$ (شروط أيزنشتاين متحققة) وبالتالي هى غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$ (نتيجة (٣-٦-٢))

مثال ١٥ : إذا كان p عدداً أولياً فبرهن على أن كثيرة الحدود :

$$f := X^{p-1} - X^{p-2} + X^{p-3} - \dots - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

تكون غير قابلة للتحليل .

البرهان :

انظر مثال (٣-٦-٧) . نأخذ $p \geq 3$. ($p=2$ الادعاء تافه) .

سنستخدم هومومورفيزم التعويض σ_g المتعلق بـ $g := X-1 \in \mathbb{Z}[X]$ لاحظ أن :

$$(X+1)f = X^p + 1$$

$$\Rightarrow \sigma_g((X+1)f) = \sigma_g(X^p + 1)$$

$$\Rightarrow \sigma_g(X+1)\sigma_g(f) = \sigma_g(X^p) + \sigma_g(1)$$

σ_g هومومورفيزم

$$\Rightarrow X\sigma_g(f) = (X-1)^p + 1 = X^p - \binom{p}{1}X^{p-1} + \dots + (-1)^r \binom{p}{r}X^{p-r} + \dots + \binom{p}{p-1}X - 1 + 1$$

$$\Rightarrow \sigma_g(f) = X^{p-1} - \binom{p}{1}X^{p-2} + \dots + (-1)^r \binom{p}{r}X^{p-r-1} + \dots + p$$

وأكمل ...

مثال ١٦ : برهن على أن كثيرة الحدود $f := X^4 - 2X^2 + 8X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ قابلة للتحويل في $\mathbb{Q}[X]$

البرهان : سنبرهن على أن f غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Z}[X]$ ومن ثم تكون غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Q}[X]$ (نتيجة (٣-٥-٧))

لأن " الحد المطلق " هو 1 فلا يوجد سوى ± 1 كصفر لكثيرة الحدود إذا أمكن تحليلها وكان أحد عوامل التحليل من الدرجة الأولى . (تذكر أن التحليل في $\mathbb{Z}[X]$! ، انظر مثال ١ في (٣-٥-١١) ، تمهيدية (٢-٢-٢) . ولكن

$$f(1) = 1 - 2 + 8 + 1 = 8 \neq 0$$

$$f(-1) = 1 - 2 - 8 + 1 = -8 \neq 0$$

إذن لا يمكن أن تتحلل f بحيث يكون أحد عواملها من الدرجة الأولى . أما إن أمكن تحليلها إلى عاملين كل منهما من الدرجة الثانية ($\mathbb{Z}[X]$ نطاق متكامل فيكون مجموع درجتي العاملين $= 4 =$ درجة (f)) فهناك إحدى إمكانيتين للتحليل فقط :

$$f = (X^2 + \alpha X + 1)(X^2 + \beta X + 1) \quad (1)$$

أو

$$f = (X^2 + \alpha X - 1)(X^2 + \beta X - 1) \quad (2)$$

في (1) لدينا بتسوية المعاملات المتناظرة في الطرفين :

$$0 = \alpha + \beta \quad (\text{معامل } X^3 \text{ في الطرفين})$$

$$8 = \alpha + \beta \quad (\text{معامل } X \text{ في الطرفين})$$

أى أن $0 = 8$ وهذا تناقض

فى (2) لدينا بالمثل بعد تسوية معاملى X^3 ، معاملى X فى الطرفين :

$$0 = \alpha + \beta ,$$

$$8 = -\alpha - \beta$$

كذلك $0 = 8$ نفس التناقض السابق

إذن لا يمكن تحليل f فى $\mathbb{Z}[X]$ وبالتالي لا يمكن تحليلها فى $\mathbb{Q}[X]$.

مثال ١٧ :

هل كثيرة الحدود $f = \bar{2}X^3 + X^2 + \bar{2}X + \bar{2}$ غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}_5[X]$ ؟ ولماذا ؟

عبر عن f فى صورة حاصل ضرب كثيرات حدود غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}_5[X]$

الحل : من مثال ٦ السابق لأن f من الدرجة الثالثة فإذا كانت قابلة للتبسيط (للتحليل) فإن

أحد عواملها سيكون من الدرجة الأولى. وإذا كان $X - a$ عاملاً من عواملها فإن $f(a) = 0$

والعكس (تمهيدية (٢-٢-٢)) وسيكون $\frac{p}{q}$ حيث p, q أحد عوامل "2" فى f (مثال ١ من

(١١-٥-٣)). والآن عوامل 2 فى f هى $\pm 1, \pm 2$ أو بعبارة أخرى $\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{3}$

ولكن الأسهل الحساب عند $\pm 1, \pm 2$ كالآتى :

$$f(\bar{1}) = \bar{2} + \bar{1} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{2} \neq \bar{0}$$

$$f(\bar{-1}) = \bar{-2} + \bar{1} - \bar{2} + \bar{2} = \bar{-1} = \bar{4} \neq \bar{0}$$

$$f(\bar{2}) = \bar{1} + \bar{4} + \bar{4} + \bar{2} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

$$f(\bar{-2}) = \bar{-1} + \bar{4} - \bar{4} + \bar{2} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

إذن كثيرة الحدود f غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}_5[X]$ (وبالتالى ليست قابلة للتحليل فى

$\mathbb{Z}[X]$ وكذلك فى $\mathbb{Q}[X]$ كما سبق) . وبالتالي يكون لدينا حاصل الضرب التافه :

$$f = \bar{2}X^3 + X^2 + \bar{2}X + \bar{2}$$

مثال ١٨ : ادرس قابلية التحليل لكثيرة الحدود $f := X^3 + \bar{2}X + \bar{2}$ في $\mathbb{Z}_5[X]$

الحل : تماماً كما في مثال ١٧ السابق إذا كان هناك تحليل لكثيرة الحدود فسيكون هناك

عامل من الدرجة الأولى $X - a$ ، حيث a قاسم لـ $\bar{2}$ أى أن a هو ± 1 أو ± 2 .
ونحسب $f(a)$ في كل حالة :

$$f(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{5} = \bar{0}$$

أى أن $X - \bar{1}$ أحد العوامل

$$f(-\bar{1}) = -\bar{1} - \bar{2} + \bar{2} = -\bar{1} = \bar{4} \neq \bar{0}$$

أى أن $X + \bar{1}$ ليس عاملاً من عوامل f

$$f(\bar{2}) = \bar{3} + \bar{4} + \bar{2} = \bar{4} \neq \bar{0}$$

أى أن $X - \bar{2}$ ليس عاملاً من عوامل f

$$f(-\bar{2}) = -\bar{3} - \bar{4} + \bar{2} = -\bar{5} = \bar{0}$$

أى أن $X + \bar{2}$ عامل من عوامل f

إذن لدينا عاملان من عوامل f وتكون

$$f = h(X - \bar{1})(X + \bar{2})$$

ولأن $\mathbb{Z}_5[X]$ نطاق متكامل فإن

$$\deg(f) = \deg(h) + \deg(X - \bar{1}) + \deg(X + \bar{2}) = \deg(h) + 2 \quad ((\bar{0} - \bar{1} - \bar{2}) \text{ انظر})$$

فيكون h من الدرجة الأولى . ولأن المعامل المرشد لـ $f = 1$ وكذا المعاملان المرشدان

في العاملين $X + \bar{2}$ ، $X - \bar{1}$ فيكون f على الصورة

$$(X + a)(X - \bar{1})(X + \bar{2}) = X^2 + \bar{2}X + \bar{2} (= f)$$

وبتسوية الحدين المطلقين في الطرفين نحصل على

$$a = -\bar{1}$$

وتكون

$$\begin{aligned} f &= (X - \bar{1})^2 (X + \bar{2}) \\ &= (X - \bar{1})^2 (X - \bar{3}) \end{aligned}$$

مثال ١٩ : برهن على أن $f = X^2 + 8X - 2$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$ ، لكنها قابلة للتحليل في $\mathbb{R}[X]$ ، $\mathbb{C}[X]$.

البرهان : إذا كانت f قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}[X]$ فستكون قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$ ، $\mathbb{R}[X]$ ، $\mathbb{C}[X]$. ونوجد جذور المعادلة $f=0$ التي هي أصفار كثيرة الحدود f .

$$X^2 + 8X - 2 = 0 \Rightarrow X = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 8}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{2}$$

وبالتالى لا تكون كثيرة الحدود f قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}[X]$ أو $\mathbb{Q}[X]$ ، بينما هي قابلة للتحليل على $\mathbb{R}[X]$ ، $\mathbb{C}[X]$.

وليس فى هذا أى تناقض مع النتيجة (٣-٥-٧) لأن حقل القسمة لـ $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}$ نفسه وليس $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

مثال ٢٠ : لتكن $f = 21X^3 - 3X^2 + 2X + 9$. ادرس قابلية f للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$ مستخدماً نظرية الاختصار بالمقياس (٣-٦-٨) .
الحل : سنأخذ $P = 2\mathbb{Z}$ وبهذا يكون لدينا :

$$\bar{f} = X^3 + X^2 + \bar{1}$$

ونعلم أنه إذا كانت f قابلة للتحليل فسيكون لها صفر . ومن حيث إن الحد المطلق $\alpha_0 = \bar{1}$ فإن الصفر المحتمل $\bar{1}$ (انظر مثال ١ فى (٣-٥-١١)) . والآن :

$$(f(\bar{0}) = \bar{1} \neq \bar{0}) \quad (f(\bar{1}) = \bar{1} \neq \bar{0})$$

إذن كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ وبالتالي فهي غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$.

ملحوظة هامة : إذا اتخذنا $P = 3\mathbb{Z}$ فسيكون لدينا $\bar{f} = \bar{2}X$

وهى غير قابلة للتحويل فى $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ لأن $\bar{2}$ وحدة فى $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

لكننا لا يمكننا أن نطبق نظرية الاختصار بالمقياس $(3-6-1)$ لأن $a_n = a_3 = \bar{3} \in \mathbb{Z}_3$.

تمارين

(١) ادرس قابلية كثيرة الحدود $f := X^3 + 3X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ للتحويل.

(٢) برهن أو انف :

$$\mathbb{Z}_5[X] / [X^2 + 3X + 2] \text{ حقل} \quad (أ)$$

$$\mathbb{Q}[X] / [X^2 - 2] \text{ حقل} \quad (ب)$$

(٣) أنشئ حقلاً يتكون من تسعة عناصر .

(٤) أنشئ حقلاً يتكون من ثمانية عناصر .

(٥) برهن على أن $X^4 + 1$ غير قابلة للتحويل فى $\mathbb{Q}[X]$ ، لكنها قابلة للتحويل فى

$$\mathbb{R}[X]$$

(٦) برهن على أن $X^4 + X + \bar{4}$ غير قابلة للتحويل فى $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})[X]$.

(٧) لتكن $f := X^3 + 6$ عنصراً فى $\mathbb{Z}_7[X]$. اكتب f فى صورة حاصل ضرب

كثيرات حدود غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}_7[X]$.

(٨) برهن على أن كلا من $\mathbb{Z}_3[i]$ ، $\mathbb{Z}_3[X] / [X^2 + 1]$ حقل . اسرد عناصر كلا منهما

وبرهن على أنهما متشاكلان (انظر مثال ٥ فى (١-٣-٢٠))

(٩) اوجد جميع أصفار كثيرة الحدود $f := X^5 + 4X^4 + 4X^3 - X^2 - 4X + 1$

(١٠) ليكن F حقلاً ، $f \in F[X]$. برهن على أنه لا اختبار قابلية التحليل لـ f يمكننا دائماً أن نتصور أن f مطبوعة .

(١١) ليكن F حقلاً ، وليكن $p(X) \in F[X]$ غير قابل للتبسيط . برهن على أن

$\{a + [p(X)] \mid a \in F\}$ حقل جزئى من $F[X]/[p(X)]$ ، ويكون متشاكلاً مع F (انظر مثال ٣٤ فى (٢-٢-٨))

(١٢) برهن على أن $f := X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X \in \mathbb{Z}[X]$ تتحلل إلى

عوامل غير قابلة للتبسيط كالاتى : $X(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$

(١٣) ليكن F حقلاً ، $a \in F \setminus \{0\}$. برهن على أن :

$af(X) \in F[X]$ غير قابلة للتحليل $\Leftrightarrow f(X) \in F[X]$ غير قابلة للتحليل هل

يختلف هذا التمرين عن التمرين (١٠) ؟

(١٤) برهن على أن $f := \frac{3}{7}X^4 - \frac{2}{7}X^2 + \frac{9}{35}X + \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}[X]$ غير قابلة للتحليل

(إرشاد : عرف $h := 35f$. f غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$ إذا كان فقط إذا كان h

غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}[X]$ ، وأكمل ...)

(١٥) برهن على أن $X^5 + 2X + 4$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$

(١٦) حل $X^4 + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$ إلى عوامل خطية

(١٧) ادرس قابلية تحليل كثيرة الحدود $f := X^3 + \bar{2}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ إلى عوامل غير

قابلة للتبسيط. اكتب f كحاصل ضرب كثيرات حدود غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Z}_5[X]$

(١٨) برهن على أن $f := X^2 + 6X + 12$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$. هل هي

قابلة للتحليل فى $\mathbb{R}[X]$ ؟ فى $\mathbb{C}[X]$ ؟

(١٩) برهن على أن $X^3 + 3X^2 - 8$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$

(٢٠) برهن على أن $X^4 - 22X^2 + 1$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$

(٢١) حدد إذا ما كانت التقريرات الآتية صحيحة أم خاطئة :

(أ) $X-2$ غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Q}[X]$

(ب) $3X-6$ غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Q}[X]$

(جـ) X^2-3 غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Q}[X]$

(د) X^2+3 غير قابلة للتحويل في $\mathbb{Z}_7[X]$

(٢٢) عين أياً من كثيرات الحدود الآتية ، يحقق شرط أيزنشتاين لقابلية التحليل في $\mathbb{Q}[X]$:

(أ) X^2-12 (ب) $8X^3+6X^2-9X+24$

(جـ) $4X^{10}-9X^3+24X-18$ (د) $2X^{10}-25X^3+10X^2-30$

(٢٣) هل $\mathbb{Q}[X]/[X^2-5X+6]$ حقل ؟ ولماذا ؟ وماذا عن $\mathbb{Q}[X]/[X^2-6X+6]$ ؟

(٢٤) ليكن F حقلاً ، S مجموعة جزئية من $n: F \times F \times \dots \times F$ من العوامل . برهن على أن مجموعة جميع $f(X_1, \dots, X_n) \in F[X_1, \dots, X_n]$ التي تساوى الصفر عند جميع $(a_1, \dots, a_n) \in S$ تكون مثالياً في $F[X_1, \dots, X_n]$.

3 Field Theory نظرية الحقل



المفاهيم الأساسية

The characteristic of a field

١-١ مميز الحقل

١-١-١ تعريف : ليكن K حقلاً ، "1" عنصر الوحدة فيه . الراسم :

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow K$$

$$n \mapsto n.1$$

هو مومورفيزم حلق لأن :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}: \varphi(n+m) = (n+m).1 = \underbrace{1+\dots+1}_{n+m} = \underbrace{1+\dots+1}_n + \underbrace{1+\dots+1}_m$$

m من المرات n من المرات $n+m$ من المرات

$$= n.1 + m.1 = \varphi(n) + \varphi(m)$$

بالمثل

$$\varphi(nm) = (nm).1 = \underbrace{(1+\dots+1)}_n \underbrace{(1+\dots+1)}_m = (n.1)(m.1)$$

m من المرات n من المرات

$$= \varphi(n)\varphi(m)$$

(وإذا اعتمدنا الشرط (جـ) في (١-٢-١) : $\varphi(1) = 1.1 = 1$ $\frac{1}{\mathbb{Z}} \frac{1}{K}$)

من نظرية الحلقات في مثال ١٨ من (١-٢-١) نعلم أن نواة هومومورفيزم الحلق يكون

مثالياً ، ومن مثال ٣ في (١-٢-١) نعلم أن A مثالي في $\mathbb{Z}$ إذا كان فقط إذا كان

يوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $A = m\mathbb{Z}$.

إن يوجد $q \in \mathbb{N}$ بحيث إن $\text{Ker}(\varphi) = q\mathbb{Z}$

يقال إن مميز الحقل K هو q ، ونكتب $\text{Char}(K) := q$

١-١-٢ ملحوظة :

$$\text{Char}(K)=0 \Leftrightarrow \varphi(n) \neq 0 \quad \forall n \neq 0 \quad \varphi \text{ راسم واحد لواحد}$$

$$\Leftrightarrow n.1 \neq 0 \quad \forall n \neq 0$$

كذلك فإن

$$\text{Char}(K) \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n.1 = 0$$

واضح أن هذه الـ "n" هي أصغر m في $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ بحيث يكون $m.1 = 0$ أى أن المميز في هذه الحالة هو أصغر m في $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ بحيث يكون $m.1 = 0$.

١-٣ أمثلة :

(١) الحقول $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ لها المميز 0

(٢) لكل p عدد أولى نعلم أن $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل (انظر (١-٣-١٢) فى نظرية الحلقات)

ومميزه هو p .

(٣) حقل القسمة لحلقة كثيرات الحدود $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ له المميز "2" ، لكنه يحتوى

بالطبع على عدد غير منته من العناصر .

١-١-٤ تعريف :

ذكرنا فى مثال ٣٤ من (١-٢-٨) تعريف الحقل الجزئى (The subfield) k من

الحقل K . يسمى K فى هذه الحالة حقلًا فوقيًا (superfield) للحقل k .

١-١-٥ ملحوظة :

لتكن k مجموعة جزئية من الحقل K . حقل جزئى من K إذا كان فقط إذا كان :

(١) k يحتوى عنصرين على الأقل .

(٢) لكل $a, b \in k$: $a - b \in k$

(٣) لكل $a, b \in k$ ، $b \neq 0$: $ab^{-1} \in k$

العنصران فى (١) هما "0" صفر زمرة الجمع $(k, +)$ ، "1" عنصر الوحدة فى

زمرة الضرب $(k \setminus \{0\}, \cdot)$. (٢) تضمن أن $(k, +)$ زمرة ، (٣) تضمن أن

زمرة $(k \setminus \{0\}, \cdot)$

٦-١-١ ملحوظة :

ليكن k حقلاً جزئياً من الحقل K . لأن عنصر الوحدة في K هو كذلك عنصر الوحدة في k فإن $Char(k) = Char(K)$

٧-١-١ ملحوظة :

مميز الحقل يساوى الصفر أو هو عدد أولى

البرهان : ليكن K حقلاً ، $Char(K) \neq 0$ ، كذلك المميز ليس عدداً أولياً ، وهكذا فإنه يوجد $m, n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $Char(K) = mn$. وبالتالي فإن

$$0 = (Char(K)).1 = (mn).1 = (m.1)(n.1)$$

ولأن K حقل إذن $m.1 = 0$ أو $n.1 = 0$. ومن ثم فإن $Char(K) \leq m$ أو $Char(K) \leq n$ ، ولأن $Char(K) = mn$ فإنه ينتج أن $m = 1$ أو $n = 1$ ، أى أن $Char(K)$ عدد أولى .

ملحوظة : مميز النطاق المتكامل كذلك يساوى الصفر أو هو عدد أولى

٨-١-١ تعريف :

يقال لحقل P إنه حقل أولى (prime field) عندما لا يوجد حقل جزئى Q داخله بحيث إن $P \neq Q$.

لكل حقل K يوجد

$$P := \cap \{k \mid k \subset K \text{ حقل جزئى} \}$$

وهو حقل أولى بداهة ، ويسمى الحقل الأولى لـ K (The prime field of K)

٩-١-١ نظرية :

ليكن K حقلاً ، P حقله الأولى . عندئذ فإن :

$$Char(K) = 0 \Leftrightarrow P \cong \mathbb{Q} \quad (١)$$

$$Char(K) = p \neq 0 \Leftrightarrow P \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (٢)$$

وهكذا فإنه بدون حساب الأيزومورفيزمات (up to isomorphism) يكون $\mathbb{Q}$ ،

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حيث p عدد أولي الحقلين الأوليين الوحيدين .

البرهان : " $\Leftarrow$ " في الحالتين واضح من (١-١-٦)

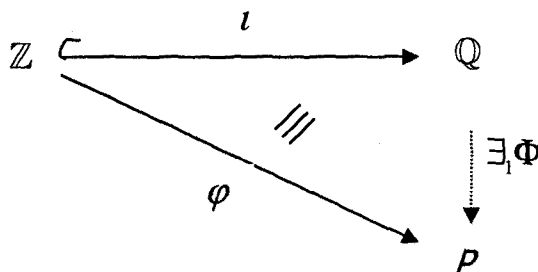
" $\Rightarrow$ " : في حالة $Char(K) = 0$ يكون الراسم $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow P$
 $n \mapsto n.1$

مونومورفيزم . وبسبب الخاصة الكونية (العالمية) لحقول القسمة يوجد مونومورفيزم

$\Phi: \mathbb{Q} \rightarrow P$ بحيث يكون $\Phi|_{\mathbb{Z}} = \varphi$. ولأن $\Phi(\mathbb{Q})$ حقل جزئى من الحقل

الأولى P ينتج أن $\Phi(\mathbb{Q}) = P$ ، ويكون P ، $\mathbb{Q}$ متشاكلين (لأن Φ

مونومورفيزم)



في حالة $Char(K) = p \neq 0$ لدينا $Ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$ وتطبيق نظرية

الهومومورفيزم للحلقات (١-٣-٣) ينتج أن

$$\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/Ker(\varphi) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

ولأن p عدد أولي فإن $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل ، وهو حقل جزئى من P ، الذى هو حقل أولى

فينتج أن

$$P \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

١-١-١٠ أمثلة محلولة :

مثال ١: قرر إذا ما كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة

(أ) مميز $n\mathbb{Z}$ هو n

(ب) كل نطاق متكامل مميزه هو الصفر يكون غير منته

(جـ) $\mathbb{Z}$ حقل جزئى من $\mathbb{Q}$

الحل :

(أ) خاطئة ، مميز $n\mathbb{Z}$ هو مميز $\mathbb{Z}$ أى هو الصفر

(ب) صحيحة

(جـ) خاطئة ، $\mathbb{Z}$ ليس حقلا فلا يوجد معكوس ضربى لـ 2 مثلا

مثال ٢: اوجد مميز كل من الحلقات الآتية :

(أ) $2\mathbb{Z}$ (ب) $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$

(جـ) $\mathbb{Z}_3 \otimes 3\mathbb{Z}$ (د) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3$

(هـ) $\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4$ (و) $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$

(ز) $\mathbb{Z}_4 \otimes 4\mathbb{Z}$

الحل :

(أ) صفر (ب) صفر

(جـ) صفر (د) 3

(هـ) 12 (و) 30

(ز) صفر

سؤال : 12 ، 30 ليسا عددين أوليين هل يتناقض هذا مع (١-١-٧) ؟

مثال ٣ : ليكن R نطاقا متكاملا فيه $20.1 = 0$ ، $12.1 = 0$ (تذكر أن $n.1$ معناها

المجموع $1+1+\dots+1$ لـ n من الحدود) . ما مميز R ؟

الحل : من (١-١-٢) نعلم أن المميز إذا كان يساوى الصفر فمعنى هذا أن $n.1 \neq 0$ لجميع $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. وهذه ليست الحال هنا

أما إذا كان المميز لا يساوى الصفر فهو أصغر $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ بحيث يكون $m.1 = 0$ ، وهو عدد أولى . وبالتالي يكون المميز هنا هو 2 .

مثال ٤ : فى حلقة إبدالية R مميزها هو 2 . برهن على أن العناصر متماثلة القوة تكون حلقة جزئية منها . (راجع مثال ١٠ فى (١-١-١٤) فى نظرية الحلقات) .

البرهان : $0^2 = 0$ وبالتالي 0 عنصر متماثل القوة (١)

ليكن a, b عنصرين متماثلين القوة ، أى أن : $a^2 = a$ ، $b^2 = b$ ينتج أن :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - b^2 = a - b$$

المميز = 2 إبدالية R

أى أن $a - b$ متماثل القوة (٢)

$$(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2 = ab$$

إبدالية R

إن ab متماثل القوة (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٥ : أوجد أصغر حقل جزئى من حقل الأعداد الحقيقية يحتوى على $\sqrt{2}$

الحل : الحقل الجزئى المطلوب هو

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

انظر مثال ٢١ فى (١-١-١٥) من نظرية الحلقات

وواضح أنه أصغر حقل جزئى من $\mathbb{R}$ يحتوى على $\sqrt{2}$ ، لأن أى حقل جزئى من $\mathbb{R}$

يحتوى على $\sqrt{2}$ لابد أن يحتوى على $a + b\sqrt{2}$ حيث $a, b \in \mathbb{Q}$

مثال ٦ : لتكن R حلقة إيدالية لها المميز p ، عدد أولى . برهن على أن راسم فوربينيس (Forbenius map) $x \rightarrow x^p$ هو مورفيزم حلقى من R إلى R .
البرهان : لجميع $x, y \in R$

$$\varphi(xy) = (xy)^p = x^p y^p = \varphi(x)\varphi(y) \quad (1)$$

إيدالية R

$$\varphi(x+y) = (x+y)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}y + \dots + \binom{p}{r}x^{p-r}y^r + \dots + \binom{p}{p-1}xy^{p-1} + y^p$$

معامل الحد العام في المفكوك السابق هو :

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!}$$

p يقسم $p!$ ، $p-r < p$ لجميع $1 \leq r < p$ ، كما أن p عدد أولى فإذا قسم $r!(p-r)!$ فلا بد أن يقسم أحد هذه العوامل وهذا مستحيل مما سبق . إذن p يقسم البسط ولا يقسم المقام في $\frac{p!}{r!(p-r)!}$ وبهذا يصبح المفكوك

$$\varphi(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p = \varphi(x) + \varphi(y) \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٧ : ليكن F حقلاً له المميز p ، عدد أولى . برهن على أن $K = \{x \in F | x^p = x\}$ حقل جزئى من F .

البرهان : $0^p = 0$ أى أن $0 \in K$ ، أى أن (1) $K \neq \emptyset$

$$1^p = 1 \text{ أى أن } 1 \in K$$

ليكن $x, y \in K$ هذا يقتضى أن $x^p = x$ ، $y^p = y$. وبالتالي فإن :

$$(xy^{-1})^p = x^p y^{-p} = xy^{-1} \Rightarrow xy^{-1} \in K \quad (2)$$

حقل F

كذلك فإن :

$$(x-y)^p = x^p - \binom{p}{1}x^{p-1}y + \dots + (-1)^r \binom{p}{r}x^{p-r}y^r + \dots + (-1)^{p-1}xy^{p-1} + (-1)^p y^p$$

مثلاً هي الحال في المثال ٦ السابق مباشرة تختفى جميع الحدود ما عدا الحدين : الأول والأخير ويكون لدينا

$$(x - y)^p = x^p + (-1)^p y^p$$

لدينا حالتان : (أ) $p = 2$

$$(x - y)^2 = x^2 + (-1)^2 y^2 = x^2 + y^2 = x^2 - y^2$$

(ب) $p \neq 2$ أى أن p عدد أولى فردى ، ويكون

$$(x - y)^p = x^p - y^p$$

فى الحالتين $(x - y)^p = x^p - y^p$

أى أن : (3) $x - y \in K$

من (1) ، (2) ، (3) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٨ : ليكن x ، y ينتميان إلى نطاق متكامل له المميز p ، عدد أولى .

برهن على أن :

$$(x + y)^p = x^p + y^p \quad (أ)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x + y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n} \quad (ب)$$

واوجد عنصرين x ، y فى حلقة مميزها 4 بحيث يكون $(x + y)^4 \neq x^4 + y^4$

الحل :

(أ) تماماً كما فى المثالين السابقين مباشرة

(ب) بالاستقراء الرياضى على n

$n = 1$: صحيحة من (أ)

$n \rightarrow n + 1$:

$$(x + y)^{p^{n+1}} = \left((x + y)^{p^n} \right)^p$$

$$= (x^{p^n} + y^{p^n})^p = (x^{p^n})^p + \binom{p}{1} (x^{p^n})^{p-1} y^{p^n} + \dots$$

فرض الاستقراء

$$+ \binom{p}{r} (x^{p^n})^{p-r} (y^{p^n})^r + \dots + \binom{p}{p-1} x^{p^n} (y^{p^n})^{p-1} + (y^{p^n})^p$$

وكما سبق فى المثالين السابقين مباشرة تختفى جميع الحدود من الفكوك السابق فيما عدا الحد الأول والحد الأخير ، ويكون لدينا :

$$(x+y)^{p^{n+1}} = (x^{p^n})^p + (y^{p^n})^p = x^{p^{n+1}} + y^{p^{n+1}}$$

والآن لنأخذ $x=y=1$ فى الحلقة ذات المميز 4 فنحصل على :

$$(1+1)^4 = 2^4 = 0 \neq 2 = 1^4 + 1^4$$

Field extensions

٢-١ امتداد (اتساع) الحقول

١-٢-١ تعريف : الزوج (K, k) المكون من حقل K ، وحقل جزئى k من K

يسمى امتداد (اتساع) حقل (field extension) وسنكتب عادة $K \supset k$ بدلا من

(K, k) . ويقال أحيانا إن الحقل K امتداد للحقل k .

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، وبهذا يكون K مع الراسمين :

$$\begin{array}{ccc} k \times K \rightarrow K & , & K \times K \rightarrow K \\ (a, k) \mapsto ak & & (x, y) \mapsto (x + y) \end{array}$$

k - فراغا خطيا (أى فراغا خطيا على الحقل k)

يسمى $\dim_k(K) := [K : k]$ درجة (degree) (ونكتب deg) امتداد الحقل $K \supset k$.

$\dim_k(K)$ هو بعد الفراغ الخطى K على الحقل k)

يقال إن امتداد الحقل $K \supset k$ منته (finite) إذا كان $[K : k] < \infty$

ويقال لحقل L إنه حقل بينى (intermediate field) فى امتداد حقل $K \supset k$

عندما يكون L حقلا جزئيا من K و k حقلا جزئيا من L .

١-٢-٣ ملحوظة : ليكن $K \supset k$ اتساع حقل . عندئذ فإن :

$$[K : k] = 1 \Leftrightarrow K = k$$

البرهان : $[K : k] = 1 \Leftrightarrow 1$ عنصر الوحدة في K يكون أساساً للفراغ الخطي K على k

$$K = 1.k = k \Leftrightarrow$$

١-٢-٤ نظرية الدرجة Degree Theorem

إذا كان L حقلاً بينياً في امتداد حقل $K \supset k$ فإن :

$$[K : k] = [K : L][L : k]$$

وعلى وجه الخصوص فإن امتداد الحقل $K \supset k$ يكون منتهياً إذا كان فقط إذا كان كلا الامتدادين $K \supset L$ ، $L \supset k$ منتهياً . وإذا كان $\{x_1, \dots, x_m\}$ أساساً للفراغ الخطي L على k ، وكان $\{y_1, \dots, y_n\}$ أساساً للفراغ الخطي K على L فإن العناصر x_i, y_j حيث $i \in \{1, \dots, m\}$ ، $j \in \{1, \dots, n\}$ تبني أساساً للفراغ الخطي K على k

البرهان :

$$[K : k] = \dim_k(K) \geq \dim_k(L) = [L : k] = \infty \Leftrightarrow [L : k] = \infty \quad (1)$$

$$[K : k] = \dim_k(K) \geq \dim_L(K) = [K : L] = \infty \Leftrightarrow [K : L] = \infty \quad (2)$$

(٣) ليكن $K \supset L$ ، $L \supset k$ اتساع (امتدادى) حقلين منتهيين ، $\{x_1, \dots, x_m\}$ أساساً للفراغ الخطي L على k ، $\{y_1, \dots, y_n\}$ أساساً للفراغ الخطي K على L . المطلوب البرهنة على أن العناصر x_i, y_j ، $i \in \{1, \dots, m\}$ ، $j \in \{1, \dots, n\}$ تبني أساساً للفراغ الخطي K على k .

العناصر المذكورة تبني نظاماً منشئاً (مولداً) (generating system) لأنه لكل

$y \in K$ يوجد $b_1, \dots, b_n \in L$ بحيث يكون $y = \sum_{j=1}^n b_j y_j$ ولكل $j \in \{1, \dots, n\}$

يوجد $a_1, \dots, a_m \in k$ بحيث يكون $b_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i$ ، وهكذا يكون

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j , \quad a_{ij} \in k$$

وهذه العناصر أيضاً مستقلة خطياً (linearly independent) على k ، لأنه من

$$j \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = 0 \quad \text{ينتج أن} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = 0 , \quad a_{ij} \in k$$

(لأن $\{y_1, \dots, y_n\}$ أساس للفراغ الخطي K على L) ، ومن ثم فإن $a_{ij} = 0$ لكل

$i \in \{1, \dots, m\}$ ، ولكل $j \in \{1, \dots, n\}$ (لأن $\{x_1, \dots, x_m\}$ أساس للفراغ الخطي L

على k) نهاية البرهان .

والآن : ليكن $E \supset F$ امتداد حقل . بعبارة مكافئة نقول E امتداد حقل لـ F . يقال

إن E له درجة n على F ونكتب $[E : F] = n$ إذا كان E له البعد n كفراغ خطي

على F .

١-٢-٥ نتيجة :

ليكن $K \supset L$ اتساع حقل منتهياً .

(١) لكل حقل بيني L في امتداد حقل $K \supset k$ بحيث يكون $[K : L] = [K : k]$

فإن $L = k$

البرهان :

$$[K : k] = [K : L][L : k] = [K : L] \Rightarrow [L : k] = 1$$

ومن (١-٢-٣) يكون $L = k$

(٢) إذا كان $[K : k]$ عدداً أولياً فإن امتداد الحقل $K \supset k$ لا يوجد فيه أى حقل بيني

فعلى . وعلى سبيل المثال فلا يوجد أى حقل بيني "فعلى" في اتساع الحقل $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ لأن

درجة هذا الاتساع "2" ، i يكونان أساساً للفراغ الخطي $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$

٣-١ الضم (الإلحاق) للحلقة وللحقل

٣-١-١ تعريف :

ليكن $K \supset k$ اتساع حقل ، A مجموعة جزئية من K . يسمى :

$$k[A] := \cap \{R : R \text{ حلقة جزئية من } K, k \cup A \subset R\}$$

$$k(A) := \cap \{L : L \text{ حقل جزئي من } K, k \cup A \subset L\}$$

الحلقة الجزئية والحقل الجزئي على الترتيب من K المنشأين من A على k .

في حالة $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ نكتب غالباً $k[a_1, \dots, a_n]$ بدلاً من $k[A]$ ،
 $k(a_1, \dots, a_n)$ بدلاً من $k(A)$.

٣-١-٢ ملحوظة :

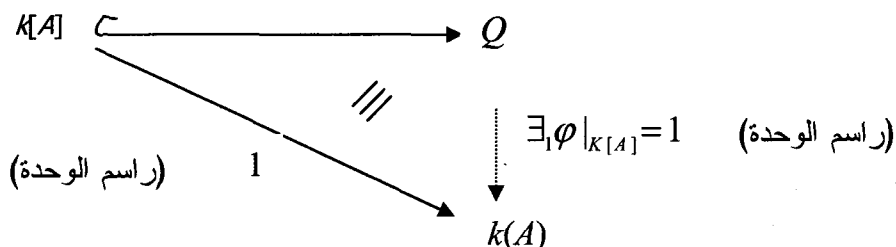
ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . عندئذ فإن :

(١) لكل مجموعة جزئية A من K يكون $k(A)$ حقل القسمة لـ $k[A]$

(٢) لكل $a \in K$ يكون $k[a] = \{f(a) \mid f \in k[X]\}$

(٣) لكل مجموعتين جزئيتين A, B من K : $k(A \cup B) = (k(A))(B)$

البرهان : (١)



نعتبر الحلقة $k[A]$ كحلقة جزئية من حقل قسمتها Q . وهكذا يوجد بسبب الخاصة الكونية (العالمية) - مونومورفزم واحد بالضبط $\varphi: Q \rightarrow k(A)$ بحيث يكون $\varphi|_{k[A]} = 1$. φ راسم غامر (شامل ، فوقى) كذلك ، لأن $\varphi(Q)$ حقل جزئي من $k(A)$ (أيضاً من K) ويتحقق :

$k \cup A = \varphi(k \cup A) \subset \varphi(Q)$ ومن حيث إن $k(A)$ تقاطع جميع الحقول الجزئية من K التى تحتوى على $k \cup A$ ، أى هو أصغر هذه الحقول الجزئية فينتج أن $k(A) \subset \varphi(Q)$. وبالتالي فإن $\varphi(Q) = k(A)$ أى أن φ شامل (غامر) . وبهذا يكون الحقل $k(A)$ متشاكلاً مع حقل القسمة Q ويكون هو نفسه حقل القسمة لـ $k[A]$.

$$(٢) \text{ المجموعة } R := \{f(a) \mid f \in k[X]\}$$

حلقة جزئية من K لأن $a \in R$ (لأن $f = X \in k[X]$) أى أن $R \neq \emptyset$.

$$f(a)g(a) = (f \cdot g)(a) \in R \iff f - g, f \cdot g \in k[X] \iff f, g \in k[X] \iff f(a), g(a) \in R$$

حلقة $k[X]$

$$\text{وكذلك } f(a) - g(a) = (f - g)(a) \in R$$

كذلك فإن $k \cup \{a\} \subset R$. ومن حيث إن $k[a]$ أصغر حلقة جزئية من K تحتوى على $k \cup \{a\}$ فيكون $k[a] \subset R$ (1) .

ولكن لكل حلقة جزئية S من K بحيث إن $k \cup \{a\} \subset S$ فإنه من الواضح أن $R \subset S$ فيكون $R \subset k[a]$ (2) . من (1) ، (2) ينتج أن $R = k[a]$.

$$(٣) \quad k(A \cup B) = \cap \{L \mid L \text{ حقل جزئى من } K, k \cup (A \cup B) \subset L\}$$

$$= \cap \{L \mid L \text{ حقل جزئى من } K, k(A) \cup B \subset L\}$$

$$= (k(A))(B)$$

١-٣-٣ تعريف :

يقال لاتساع (امتداد) الحقل $K \supset k$ بسيط (simple) إذا وجد $a \in K$ بحيث يكون $K = k(a)$. ويسمى a فى هذه الحالة عنصراً بدائياً (primitive element) لاتساع الحقل $K \supset k$.

١-٣-٤ مثال :

واضح أن $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}[i]$. كذلك فإن أية حلقة جزئية من $\mathbb{C}$ تحتوى على $\mathbb{R}$ ، i تحتوى $\mathbb{C}$. وبهذا يكون تقاطع هذه الحلقات الجزئية يحتوى على $\mathbb{C}$. ومن ثم فإن

$\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$. وبهذا يكون $\mathbb{R}[i]$ حقلاً ويكون $\mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$. ومن ثم يكون العدد المركب i عنصراً بدائياً لاتساع الحقل $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

٤-١ العناصر الجبرية والمتسامية

Algebraic and Transcendental Elements

١-٤-١ تعريف :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل .
يقال لعنصر $a \in K$ إنه **جبرى** (algebraic) **على** k ، إذا وجدت كثيرة حدود $f \in k[X] \setminus \{0\}$ بحيث يكون $f(a) = 0$. فإذا كانت f الوحيدة المطبوعة غير القابلة للتبسيط (للتحليل) ذات الدرجة (الصغرى) n قيل إن a جبرى على k من درجة n .
وإذا لم توجد مثل هذه كثيرة الحدود فيقال إن العنصر **متسام** (transcendental) **على** k .
وتسمى عناصر $\mathbb{C}$ الجبرية على $\mathbb{Q}$ **الأعداد الجبرية** (algebraic numbers) .
وسنرى أن هذه الأعداد تكون حقلاً بينياً فى $\mathbb{C} \subset \mathbb{Q}$

١-٤-٢ ملحوظة :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، $a \in K$ ،
 $\varphi_a : k[X] \rightarrow K$ ،
 $f \mapsto f(a)$

واضح تماماً أن φ_a هومومورفيزم حلق .

a جبرى على $k \Leftrightarrow \exists f \neq 0, f \in k[X] : f(a) = 0 \Leftrightarrow$ ليس واحداً لواحد φ_a

a متسام على $k \Leftrightarrow \nexists f \neq 0, f \in k[X] : f(a) = 0 \Leftrightarrow$ واحد لواحد φ_a

١-٤-٣ ملحوظة :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، وليكن $a \in K$ متسامياً على k . عندئذ فإن :

(١) الحلقة $k[a]$ تتشاكل مع حلقة كثيرات الحدود $k[X]$

(٢) الحقل $k(a)$ يتشاكل مع $k(X)$ حقل الدوال الكسرية (النسبية)

(٣) $[k(a) : k] = \infty$

البرهان :

(١) الراسم $k[X] \rightarrow k[a]$
 $f \mapsto f(a)$ هو مورفيزم غامر (شامل ، فوقى) ولأن a متسام

على k يكون كذلك واحداً لواحد . أى هو أيزومورفيزم .

(٢) من (١) $k[a]$ تتشاكل مع $k[X]$ ، ومن (١-٣-٢) $k(a)$ هو حقل القسمة لـ $k[a]$ ، ومن تعريف $k(X)$ ينتج المطلوب مباشرة

(٣) من (١) $k[a]$ يتشاكل مع $k[X]$ ، ولأنه لجميع $n \in \mathbb{N}$ تكون كثيرات الحدود $X, X^2, \dots, X^n$ مستقلة خطياً فيكون $\dim_k(k[X]) = \infty$ أى $\dim_k(k(a)) = \dim_k(k(X)) = \infty$

١-٤-٤ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، وليكن $a \in K$ عنصراً متسامياً على k .
 عندئذ فإن :

(١) a^2 عنصر متسام على k

(٢) $k(a^2) \subsetneq k(a)$

(٣) امتداد الحقل $k(a) \supset k$ يحتوى عدداً غير منته من الحقول البينية .

البرهان :

(١) إذا كان a^2 جبرياً على k فإنه توجد كثيرة حدود $f \in k[X] \setminus \{0\}$ بحيث يكون

$f(a^2) = 0$. وعندئذ فإن a تكون صفراً لكثيرة الحدود $f(X^2) := f(X^2) \neq 0$ أى أن

جبرى على k : تناقض .

(٢) من (١-٣-٢) إذا كان $a \in k(a^2)$ فإنه ينتج أنه يوجد $f, g \in k[X]$ بحيث

يكون : $a = \frac{f(a^2)}{g(a^2)}$. وبالتالي يكون a صفراً لكثيرة الحدود : $h := Xg(X^2) - f(X^2)$

و h لا يمكن أن تساوى الصفر لأن $\deg(Xg(X^2)) \neq \deg(f(X^2))$ وبهذا يكون a

جبرياً على k . وهذا تناقض .

(٣) من (١) واضح أنه بالاستقراء الرياضى يكون a^n , $n = 3, 4, \dots$ عنصراً متسامياً على k ومن (٢) ينتج أن $k \subsetneq \dots \subsetneq k(a^3) \subsetneq k(a^2) \subsetneq k(a)$

٥-١ كثيرة الحدود الصغرى The minimal polynomial

١-٥-١ ملحوظة :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقلى ، $a \in K$ ، $\varphi_a : k[X] \rightarrow K$ هو مورفيزم بحيث $\varphi_a(f) = f(a)$ لجميع $f \in k[X]$. إذا كان a جبرياً على k فإنه يوجد بالضبط كثيرة حدود مطبوعة وحيدة $f_a \in k[X]$ بحيث يكون $\text{Ker}(\varphi_a) = [f_a]$

البرهان : φ_a هو مورفيزم لأن :

$$\forall f, g \in k[X] : \varphi_a(f + g) = (f + g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi_a(f) + \varphi_a(g)$$

$$\varphi_a(f \cdot g) = (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) = \varphi_a(f) \cdot \varphi_a(g)$$

والآن لأن a جبرى على k فينتج من (١-٤-٢) أن $\text{Ker}(\varphi_a) \neq \{0\}$ ، ينتج من (١-١-٢) فى نظرية الحلقات المطلوب مباشرة (تذكر أن نواة الهومورفيزم الحلقى تكون مثالياً) .

١-٥-٢ تعريف :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقلى ، $a \in K$ جبرياً على k . ينتج من (١-٥-١) أنه توجد كثيرة حدود مطبوعة وحيدة $f_a \in k[X]$ حيث $[f_a] = \{f \in k[X] \mid f(a) = 0\}$ تسمى **كثيرة الحدود الصغرى** من a على k . (The minimal polynomial for a over k) .

١-٥-٣ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقلى ، $a \in K$ جبرياً على k ،

$$A := \{f \in k[X] : f(a) = 0\}$$

عندئذ فإنه لكل كثيرة حدود مطبوعة $g \in A$ تكون التقارير الآتية متكافئة :

(١) g هى كثيرة الحدود الصغرى من a على k

(٢) لجميع $f \in A \setminus \{0\}$: $\deg(g) \leq \deg(f)$

(٣) g غير قابلة للتبسيط في $k[X]$

وهكذا فإن كثيرة الحدود $g \in k[X]$ تكون كثيرة الحدود الصغرى من a على k إذا

كانت فقط إذا كانت g مطبوعة ، غير قابلة للتبسيط في $k[X]$ ، $g(a) = 0$

البرهان : "(١) $\Leftarrow$ (٢)" : إذا كانت g هي كثيرة الحدود الصغرى من a على k فإن

$[g] = A$ ومن ثم فإن $\deg(g) \leq \deg(f)$ لجميع $f \in A \setminus \{0\}$

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)" : ليكن $g = fh$ حيث $f, h \in k[X]$. ينتج أن : $0 = g(a) = f(a)h(a)$

ولأن k حقل فإن $f \in A$ أو $h \in A$. ومن (٢) $\deg(g) \leq \deg(f)$ ومن ثم فإن

$(h \in k^* (= k \setminus \{0\})$ أو $\deg(g) \leq \deg(h)$ ، ومن ثم فإن $f \in k^*$.

"(٣) $\Leftarrow$ (١)" : لنكن f_a هي كثيرة الحدود الصغرى من a على k . عندئذ فإن

$g \in [f_a]$ ، بحيث إنه يوجد $h \in k[X]$ ، $g = hf_a$. ولأن g غير قابلة للتبسيط

(= غير قابلة للتحليل) في $k[X]$ ينتج أن $h \in k^*$. ولأن g من f_a مطبوعة

فإن $h = 1$ ويكون $g = f_a$

١-٥-٤ مثال :

برهن على أنه لكل عدد أولى p تكون كثيرة الحدود $X^2 - p$ هي كثيرة الحدود

الصغرى من $\sqrt{p}$ على $\mathbb{Q}$.

البرهان : نعلم من (٣-٦-٣) في نظرية الحلقات أن كثيرة الحدود $X^2 - p$ حيث p

عدد أولى غير قابلة للتبسيط (للتحليل) في $\mathbb{Q}[X]$.

كذلك فإن $(\sqrt{p})^2 - p = 0$ ، أى أن $\sqrt{p}$ صفر لكثيرة الحدود $X^2 - p$

و $X^2 - p$ مطبوعة ، فمن (٣-٥-١) ينتج المطلوب مباشرة .

١-٥-٥ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، $a \in K$ جبرياً على k . f هي كثيرة الحدود الصغرى

من a على k . عندئذ فإن :

$$k[a] = k(a) \cong k[X]/[f] \quad (1)$$

$$[k(a) : k] = \deg(f) \quad (2)$$

(٣) إذا كان $m = \deg(f)$ فإن $\{1, a, \dots, a^{m-1}\}$ تكون أساساً للفراغ الخطي $k(a)$ على k .

البرهان : اعتبر

$$\varphi : k[X] \rightarrow k[a]$$

$$g \mapsto g(a)$$

واضح أن φ هومومورفيزم ، غامر (شامل ، فوقى) ،

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in k[X] : \varphi(g) = 0\}$$

$$= \{g \in k[X] : g(a) = 0\}$$

تذكر أن k حقل يقتضى أن $k[X]$ نطاق مثاليات أساسية ، $\text{Ker}(\varphi)$ مثالي فى

$k[X]$ ، أى أن $\text{Ker}(\varphi)$ مثالي أساسى فى $k[X]$ ، وهو يساوى المثالي المتولد من

كثيرة الحدود الصغرى من a على k ، أى أن $\text{Ker}(\varphi) = [f]$. وبتطبيق نظرية

الهومومورفيزم ينتج أن : $k[a] \cong k[X]/[f]$. ولأن f كثيرة حدود صغرى ، فهى غير

قابلة للتبسيط وينتج من (٣-٢-٩) فى نظرية الحلقات أن المثالي $[f]$ مثالي أعظم ،

ولأن $k[X]$ حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة فينتج من (١-٣-١١) أن $k[a]$ حقل أى

$$\text{أن } k[a] = k(a) \cong k[X]/[f]$$

(٢) ، (٣) : من (١) لدينا : $k[a] = \{g(a) : g \in k[X], \deg(g) < \deg(f)\}$

(انظر مثال ١٩ فى (٢-٢-٨) من نظرية الحلقات). ولأن φ راسم غامر (شامل ، فوقى)

فإنه لكل $b \in k[a]$ يوجد $g \in k[X]$ بحيث يكون $b = g(a)$. وباختيار $q, r \in k[X]$

بحيث يكون $g = qf + r, \deg(r) < \deg(f)$ نحصل على $b = g(a) = r(a)$. والآن

لكل $b \in k[a]$ يوجد $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in k$ بحيث يكون $b = \beta_0 1 + \beta_1 a + \dots + \beta_{m-1} a^{m-1}$

(لأن $\deg(r) < \deg(f) = m$ ، أى أن العناصر $1, a, \dots, a^{m-1}$ تنشئ الفراغ الخطي $k[a]$ على k . وإذا كانت العناصر $1, a, \dots, a^{m-1}$ مرتبطة خطياً (= معتمدة خطياً = غير مستقلة خطياً) فيكون لدينا كثيرة حدود $g \in k[X] \setminus \{0\}$ ، $\deg(g) < \deg(f)$ ، a صفر لكثيرة الحدود هذه . وهذا تناقض لأن f كثيرة الحدود الصغرى من a على k (انظر (١-٥-٣))

١-٦ الامتدادات الجبرية للحقول Algebraic field extensions

١-٦-١ تعريف :

يسمى امتداد الحقل $K \supset k$ امتداد حقل جبرياً (algebraic field extension) إذا كان كل عنصر فى K جبرياً على k . ويسمى امتداد حقل متسامياً (transcendental field extension) إذا لم يكن جبرياً ، أى عندما يكون هناك عنصر $a \in K$ متسامياً على k .

١-٦-٢ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . عندئذ فإن :

(١) إذا كان امتداد الحقل $K \supset k$ منتهياً ، فإنه يكون جبرياً ، ويوجد $a_1, \dots, a_n$ عناصر فى K بحيث يكون $K = k(a_1, \dots, a_n)$

(٢) إذا وجدت عناصر $a_1, \dots, a_n \in K$ جبرية على k بحيث يكون $K = k(a_1, \dots, a_n)$ فإن امتداد الحقل يكون منتهياً وبالتالي جبرياً .

البرهان : (١) إذا كان m هو بعد الفراغ الخطي K على k ، فإنه لأى عنصر $a \in K$ تكون العناصر $1, a, a^2, \dots, a^{m-1}$ مرتبطة (= معتمدة = غير مستقلة) خطياً على k . ومن ثم فإنه لكل $a \in K$ توجد كثيرة حدود $f \in k[X] \setminus \{0\}$ بحيث يكون $f(a) = 0$.

وعلاوة على ذلك فإن $K = k(a_1, \dots, a_n)$ لكل أساس $(a_1, \dots, a_n)$ للفراغ الخطي K على k .

(٢) البرهان بالاستقراء الرياضى : إذا كان $a \in K$ جبرياً على k وكان $K = k(a)$ ،

فإنه ينتج من (١-٥-٥) أن $[K : k] < \infty$.

ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ، وليكن الادعاء صحيحاً لجميع الحقول البينية $L \supset k$ ، $L = k(a_1, \dots, a_n)$ ، حيث $a_1, \dots, a_n$ جبرية على k . عندئذ فإنه إذا كان $K = k(a_1, \dots, a_{n+1})$ حيث $a_1, \dots, a_{n+1} \in K$ جبرية على k . فينتج أن :

$$[K : k] = [k(a_1, \dots, a_n)(a_{n+1}) : k(a_1, \dots, a_n)][k(a_1, \dots, a_n) : k] < \infty$$

(لأن a_{n+1} جبرى على $k(a_1, \dots, a_n)$ ومن $(4-2-1)$ و $(5-5-1)$ أى أن امتداد الحقل المعنى منته ، وبالتالي من (١) فهو جبرى .

٣-٦-١ استنتاج :

ليكن L حقلاً بينياً فى امتداد حقل $K \supset k$. عندئذ فإن امتداد الحقل $K \supset k$ يكون جبرياً إذا كان فقط إذا كان الامتدادان : $K \supset L$ ، $L \supset k$ جبريين .

البرهان : من الواضح أنه إذا كان $K \supset k$ جبرياً فإن $L \supset k$ ، $K \supset L$ جبريين .
والآن ليكن الامتدادان $L \supset k$ ، $K \supset L$ جبريين ، وليكن $a \in K$. عندئذ فإنه يوجد $b_0, \dots, b_n \in L$ بحيث إن $a^{n+1} + b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0 = 0$ ، ويكون a جبرياً على $k(b_0, \dots, b_n)$.

ولأن $L \supset k$ جبرى فتكون $b_0, \dots, b_n$ جبرية على k ونحصل من (٢-٦-١) على

$$[k(a) : k] \leq [k(b_0, \dots, b_n)(a) : k] = [k(b_0, \dots, b_n)(a) : k(b_0, \dots, b_n)][k(b_0, \dots, b_n) : k] < \infty$$
 ٤-٢-١

أى أن $[k(a) : k]$ منته ، ومن ثم فهو جبرى ، وبالتالي يكون $a \in K$ جبرياً على k ، ويكون $K \supset k$ جبرياً .

٤-٦-١ استنتاج :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، L مجموعة كل العناصر فى K الجبرية على k . عندئذ فإن :

$$(١) \quad L \text{ حقل بينى فى الامتداد } K \supset k$$

$$(٢) \quad \text{الامتداد } L \supset k \text{ جبرى}$$

$$(٣) \quad \text{إذا كان } a \in K \text{ جبرياً على } L \text{ ، فإن } a \in L$$

- البرهان : (١)** واضح أن $k \subset L$. ليكن $a, b \in L$. من (١-٦-٢) ينتج أن :
- امتداد الحقل $k(a, b) \supset k$ جبري . لأن $a - b$ وكذلك ab^{-1} (إذا كان $b \neq 0$) عنصران في $k(a, b)$ فإن $a - b$ ، ab^{-1} (إذا كان $b \neq 0$) يقعان في L إذا كان $a, b \in L$
- (٢) واضح من تعريف L
- (٣) إذا كان $a \in K$ جبرياً على L فمن (١-٦-٢) يكون الامتداد $L(a) \supset L$ جبرياً .
- ومن (٢) السابقة مباشرة ومن (١-٦-٣) يكون $L(a) \supset k$ جبرياً ، أى أن a جبري على k ، وبالتالي $a \in L$.
- ١-٦-٥ ملحوظة :**

المجموعة $\overline{\mathbb{Q}}$ (مجموعة كل الأعداد الجبرية) هي حقل بيني في الامتداد $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$ ، والامتداد $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}$ جبري ، ولا يوجد عدد في $\mathbb{C}$ يكون جبرياً على $\overline{\mathbb{Q}}$ ولا يقع في $\overline{\mathbb{Q}}$.

٧-١ إنشاء امتدادات الحقول Construction of field extensions

١-٧-١ نظرية :

إذا كان k حقلاً ، f كثيرة حدود ليست ثابتاً معرفة على $k[X]$ ، فإنه يوجد K حقل فوق k ، $a \in K$ بحيث يكون $f(a) = 0$

البرهان : إذا كان p عاملاً لـ f غير قابل للتبسيط ، فإن المثالي $[p]$ في $k[X]$ يكون مثالياً أعظم (انظر (٣-٢-٩)) ، ومن (١-٣-١١) يكون $K := k[X]/[p]$ حقلًا .

نعتبر الآن الإيمورفيزم الطبيعي

$$\rho: k[X] \rightarrow k[X]/[p]$$

وتحديد ρ على k يكون مونومورفيزم ، لأنه لعنصر $x \in k^*$

$$x + [p] = \rho(x) = [p] \Rightarrow x \in [p]$$

وبالتالى فإن : $1 = x^{-1}x \in [p]$ ، ومن ثم فإن $[p] = k[X]$ وهذا يناقض أن $[p]$ مثالى أعظم فى $k[X]$ وبالتالى يكون p ليس غير قابل للتبسيط أى قابلاً للتبسيط وهذا تناقض . إذن نواة ρ محدداً على k هى $\{0\}$ ويكون ρ راسماً أحادياً (وبالتالى مونومورفيزماً). ومن ثم فيمكننا أن نوحّد (identify) $\rho(x)$ مع كل $x \in k$ ويمكن أن نعتبر k حقلاً جزئياً من K . العنصر $a := \rho(X) \in K$ يكون صفراً لـ p ومن ثم لـ f لأنه :

$$p(a) = p(\rho(X)) = \rho(p) = p + [p] = [p] = \bar{0}$$

($[p]$ هو صفر $k[X]/[p]$)

٨-١ حقول التشقيق وتمديد أيزومورفيزمات (تساكلات) الحقول

Splitting fields and extension of field-isomorphisms

نريد أن نبرهن هنا على أنه لكل كثيرة حدود ليست ثابتة $f \in k[X]$ ، حيث k حقلاً ، يوجد حقلاً فوقى أصغر وحيد - بدون حساب الأيزومورفيزمات - فيه تتحلل f إلى عوامل خطية (أى عوامل من الدرجة الأولى

١-٨-١ تعريف :

يقال إن امتداد الحقل $K \supset k$ حقلاً تشقيق (splitting field) لكثيرة حدود ليست ثابتة

$f \in k[X]$ (يقال أيضاً إن K حقلاً تشقيق f على k) إذا تحقق

(١) f تتشقق على K فى عوامل خطية ، أى أنه يوجد $a_1, \dots, a_n, b \in K$ بحيث يكون :

$$f = b(X - a_1) \dots (X - a_n)$$

(٢) K هو الأصغر بالنسبة إلى (١) أى أن f لا تشقق فى حقلاً بينى فعلى فى امتداد الحقل $K \supset k$ فى عوامل خطية .

٢-٨-١ مثال :

$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ هو حقلاً تشقيق لكثيرة الحدود $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. بينما $\mathbb{Q}(i) \supset \mathbb{Q}$ هو

حقلاً تشقيق لكثيرة الحدود $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

١-٨-٣ نظرية :

ليكن k, k' حقلين ، وليكن $\varphi: k \rightarrow k'$ تشاكلا (أيزومورفيزماً) ، $\Phi: k[X] \rightarrow k'[X]$ التشاكل المناظر لحلقات كثيرات الحدود .

ولتكن $f \in k[X]$ غير قابلة للتبسيط (للتحليل) ، وليكن a صفراً لـ f فى حقل فوقى لـ k ، $a' = \Phi(f)$ صفراً لـ f' فى حقل فوقى لـ k' . عندئذ يوجد بالضبط أيزومورفيزم وحيد

$$\hat{\varphi}: k(a) \rightarrow k'(a'), \quad \hat{\varphi}|_k = \varphi, \quad \hat{\varphi}(a) = a'$$

البرهان :

إذا حقق $\hat{\varphi}$ الخصائص السابقة ، فسيحقق :

$$\forall g \in k[X]: \quad \hat{\varphi}(g(a)) = \Phi(g)(a') \quad (*)$$

لأنه إذا كان $g = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ فإن

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(g(a)) &= \hat{\varphi}(\lambda_0 + \lambda_1 a + \dots + \lambda_n a^n) \\ &= \hat{\varphi}(\lambda_0) + \hat{\varphi}(\lambda_1) \hat{\varphi}(a) + \dots + \hat{\varphi}(\lambda_n) \hat{\varphi}(a^n) \\ &= \varphi(\lambda_0) + \varphi(\lambda_1) a' + \dots + \varphi(\lambda_n) (a')^n \\ &= \Phi(g)(a') \end{aligned}$$

(commutative)

أى أن الشكل الآتى يكون إبدالياً

$$\begin{array}{ccccc} g \in k[X] & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & k'[X] & \ni h \\ \downarrow \rho & \swarrow \parallel & \downarrow \rho' & \downarrow \\ g(a) \in k(a) & \xrightarrow{\quad \hat{\varphi} \quad} & k'(a') & \ni h(a') \end{array}$$

وإذا وجد أيزومورفيزم آخر ψ يجعل الشكل إبدالياً يكون لدينا :

$$\hat{\varphi} \circ \rho = \psi \circ \rho \Rightarrow \hat{\varphi} = \psi$$

ρ غامر (شامل)

أى أن $\hat{\varphi}$ وحيد (إن وجد)

والآن نثبت أنه يوجد بالفعل هذا الـ $\hat{\varphi}$:

واضح أن $f \in \text{Ker}(\rho)$ (لأن $\{f \in k[X] : f(a) = 0\} = \text{Ker}(\rho)$)

أى أن $[f] \subset \text{Ker}(\rho)$ ولكن f غير قابلة للتبسيط فيكون $[f]$ مثالياً أعظم وبالتالي يكون $[f] = \text{Ker}(\rho)$.

والآن

$$\rho'(\Phi(f)) = (\Phi(f))(a') = 0 \Rightarrow \Phi(f) \in \text{Ker}(\rho')$$

وينتج من مثال ٣٥ فى (١-٢-٨) فى نظرية الحلقات أنه يوجد هومومورفيزم غامر

(شامل ، فوقى) $\hat{\varphi}: k(a) \rightarrow k'(a')$ يجعل الشكل السابق إبدالياً . ولأن $\hat{\varphi}$

هومومورفيزم غامر من حقل على حقل فلا بد أن يكون $\hat{\varphi}$ أيزومورفيزماً .

(تذكر أنه إذا كان هناك هومومورفيزم بين حقلين فنواة الهومومورفيزم إما أن تكون

الحقل النطاق أو $\{0\}$ حيث $\{0\}$ هو صفر حقل النطاق) .

والآن إذا كان $b \in k$ فإن $b = \rho(b)$ ، ونحصل على :

$$\hat{\varphi}(b) = \hat{\varphi}(\rho(b)) = (\hat{\varphi} \circ \rho)(b) = (\rho' \circ \Phi)(b) = \rho'(\Phi(b)) = \rho'(\varphi(b)) = \varphi(b),$$

$$\hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(\rho(X)) = (\hat{\varphi} \circ \rho)(X) = (\rho' \circ \Phi)(X) = \rho'(\Phi(X)) = \rho'(X) = a'$$

أى أن $\hat{\varphi}$ تحقق الخصائص المطلوبة

١-٨-٤ استنتاج :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، $a, a' \in K$ جبريين على k . إذا تطابقت كثيرتا الحدود

الصغريان من a ، a' على k ، فإنه يوجد بالضبط أيزومورفيزم وحيد $\varphi: k(a) \rightarrow k(a')$

بحيث يكون $\varphi|_k = 1_k$ ، $\varphi(a) = a'$ ، $(1_k \text{ هو راسم الوحدة على } k)$

١-٨-٥ مثال :

كثيرة الحدود المطبوعة $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ غير قابلة للتبسيط (للتحليل) في $\mathbb{Q}[X]$ و $\pm\sqrt{2}$ صفران لها ، فهي كثيرة الحدود الصغرى من $\pm\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$. ومن $(-1, -8, 4)$ يوجد بالضبط أوتومورفيزم وحيد $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ بحيث يكون $\varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ، $\varphi|_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$. بالطبع فإن هناك أوتومورفيزم الوحدة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ الذى يرسم $\sqrt{2}$ فى $\sqrt{2}$. ولأن كل أوتومورفيزم ψ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ له الخاصة :

$$2 = 1 + 1 = \psi(1) + \psi(1) = \psi(1 + 1) = \psi(2) = \psi(\sqrt{2}^2) = \psi(\sqrt{2})^2$$

$$\psi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \text{ أو } \psi(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

وبالتالى فإنه لا يوجد أوتومورفيزمات أخرى على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، يوجد فقط اثنان أوتومورفيزم الوحدة ، φ السابق .

٦-٨-١ نظرية :

ليكن k ، k' حقليين ، $\varphi: k \rightarrow k'$ تشاكلا (أيزومورفيزما) ، $\Phi: k[X] \rightarrow k'[X]$ الأيزومورفيزم المناظر لحقات كثيرات الحدود. ولتكن $f \in k[X]$ كثيرة حدود غير ثابتة. إذا كان $K \supset k$ حقل تشقيق لـ f ، $K' \supset k'$ حقل تشقيق لـ $\Phi(f)$ ، فإنه يوجد أيزومورفيزم $\psi: k \rightarrow k'$ له الخصائص الآتية :

$$\psi|_k = \varphi \quad (١)$$

(٢) ψ يرسم مجموعة أصفار f فى K على مجموعة أصفار f' فى K' . وعلى النقيض من التمديد فى (١-٨-٣) فإن ψ ليست وحيدة . وهذه هى نقطة البداية لنظرية جالوا .

البرهان : بالاستقراء الرياضى على r عدد أصفار f الموجودة فى $K \setminus k$ إذا كان $r = 0$ فإن $K = k$ ، وبالتالى فإنه يوجد $a_1, \dots, a_n, c \in k$ بحيث يكون : $f' = \Phi(f) = \varphi(c)(X - \varphi(a_1)) \dots (X - \varphi(a_n))$ وينتج أن : $f = c(X - a_1) \dots (X - a_n)$

وبهذا يحقق الأيزومورفيزم $\varphi: k \rightarrow k'$ الخصائص المطلوبة .
 ليكن الآن $r \geq 1$ وليكن الادعاء صحيحاً لجميع k, k', φ, f, K, K' التي تحقق فروض النظرية ، وبالإضافة إلى هذا تقع $r-1$ على الأكثر من أصفار f في $K \setminus k$.
 والآن إذا حققت k, k', φ, f, K, K' فروض النظرية وكانت r من الأصفار لـ $f: a_1, \dots, a_r$ تقع في $K \setminus k$. فنعتبر كثيرة الحدود الصغرى p من a_1 على k .

هذه قاسم لـ f وبحيث يكون $p' := \Phi(p)$ قاسماً لـ $f' := \Phi(f)$. ولأن f' تشقق في عوامل خطية في K' ، يكون لـ p' صفر هو a'_1 في K' . ومن (١-٨-٣) يوجد أيزومورفيزم $\bar{\varphi}: k(a_1) \rightarrow k'(a'_1)$ بحيث يكون $\bar{\varphi}|_k = \varphi$ ، $\bar{\varphi}(a_1) = a'_1$.
 والآن بتطبيق فرض الاستقراء الرياضي على $k(a_1), k'(a'_1), \bar{\varphi}, f, K, K'$ ينتج المطلوب مباشرة .

١-٨-٧ نظرية :

ليكن k, k' حقلين ، $\varphi: k \rightarrow k'$ تشاكلاً (أيزومورفيزماً) ، وليكن $\Phi: k[X] \rightarrow k'[X]$ التشاكل (الأيزومورفيزم) المناظر لحقات كثيرات الحدود . ولتكن f كثيرة حدود ليست ثابتة في $k[X]$.

إذا كان $K \supset k$ هو حقل تشقيق لـ f ، $K' \supset k'$ حقل تشقيق لـ $f' := \Phi(f)$ ، فإنه لكل صفر a يوجد عامل غير قابل للتبسيط لـ f في K ، ليكن هو g ، ولكل صفر $a' \in K'$ لـ $a' := \Phi(g)$ يوجد تشاكل (أيزومورفيزم) $\psi: K \rightarrow K'$ له الخصائص الآتية :

(١) ψ ترسم مجموعة أصفار f في K على مجموعة أصفار f' في K' .

(٢) $\psi(a) = a'$

(٣) لجميع $x \in k$: $\psi(x) = \varphi(x)$

البرهان : لأن g غير قابل للتبسيط فإنه يوجد أيزومورفيزم $\hat{\varphi}: k(a) \rightarrow k'(a')$ بحيث يكون $\hat{\varphi}(x) = x$ لجميع $x \in k$ ، $\hat{\varphi}(a) = a'$ (انظر (٣-٨-١)) . ولأن $K \supset k(a)$ حقل تشقيق لـ f ، $K' \supset k(a')$ حقل تشقيق لـ f' فإنه من (٦-٨-١) يوجد أيزومورفيزم $\psi: K \rightarrow K'$ بحيث يكون $\psi(x) = \hat{\varphi}(x)$ لجميع $x \in k(a)$ ، يرسم مجموعة أصفار f في K على مجموعة أصفار f' في K' .
والآن نستطيع أن نبرهن نظرية وجود ووحدانية حقول التشقيق .

٨-٨-١ نظرية :

ليكن k حقلاً ، f كثيرة حدود غير ثابتة في $k[X]$. عندئذ فإن :

- (١) يوجد حقل تشقيق لـ f . إذا كان $K \supset k$ امتداد حقل ، f تتشقق على K في عوامل خطية $X - a_1, \dots, X - a_n$ ، فإن $k(a_1, \dots, a_n) \supset k$ هو حقل تشقيق لـ f .
- (٢) إذا كان $K \supset k$ ، $K' \supset k$ حقل تشقيق لـ f ، فإنه يوجد أيزومورفيزم $\psi: K \rightarrow K'$ بحيث يكون $\psi|_k = 1$ ، يرسم مجموعة أصفار f في K على مجموعة أصفار f' في K' . (نستطيع الآن أن نتكلم عن حقل التشقيق لكثيرة حدود غير ثابتة) .
- (٣) كل حق تشقيق $K \supset k$ لـ f يكون امتداد حقل منتهياً .

البرهان :

- (١) باستخدام (١-٧-١) عدداً منتهياً من المرات نحصل على امتداد حقل $K \supset k$

، $a_1, \dots, a_n \in K$ ، $b \in k$ بحيث يكون :

$f = b(X - a_1) \dots (X - a_n)$. وهكذا تشقق f على $k(a_1, \dots, a_n)$ في عوامل خطية .
امتداد الحقل $k(a_1, \dots, a_n) \supset k$ هو حقل تشقيق لـ f ، لأنه إذا تشققت f على حقل L بينى L في الامتداد $k(a_1, \dots, a_n) \supset k$ في عوامل خطية ، فإنه يوجد $c \in k$ ، $b_1, \dots, b_m \in L$ بحيث يكون $f = c(X - b_1) \dots (X - b_m)$. ولأن

$k(a_1, \dots, a_n)[X]$ نطاق تحليل وحيد ينتج أن $n = m$ ، $\{b_1, \dots, b_m\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ ،

ولأن $L = k(a_1, \dots, a_n)$ فإن $k(b_1, \dots, b_m) \subset L \subset k(a_1, \dots, a_n)$

(٢) في (٦-٨-١) ضع $k = k'$ ، $\varphi = 1_k$ ينتج المطلوب مباشرة .

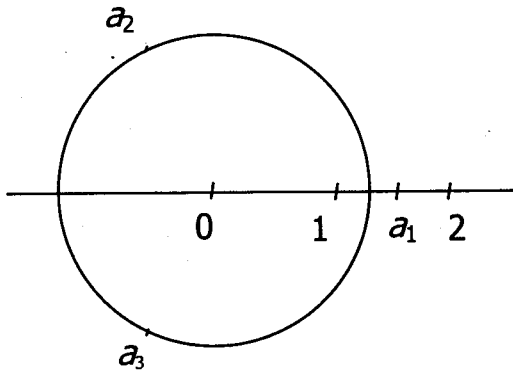
(٣) حقل التشقيق لـ f المنشأ في (١) من (٢-٦-١) يكون منتهياً . ومن (٢) فإن كل حقل تشقيق يكون منتهياً .

٩-٨-١ مثال :

الأعداد المركبة $a_1 = \sqrt[3]{2}$ ،

$$a_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$a_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$



هي أصفار كثيرة الحدود $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ في $\mathbb{C}$

ومن ثم فإن $\mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$ هو حقل التشقيق لـ f ومن (٥-٥-١) يكون

$\{1, a_i, a_i^2\}$ أساساً للفراغ الخطي $\mathbb{Q}(a_i)$ على $\mathbb{Q}$ ومن (٣-٨-١) يكون الراسمان

$$\mathbb{Q}(a_1) \rightarrow \mathbb{Q}(a_j), b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_1^2 \mapsto b_0 + b_1 a_j + b_2 a_j^2, j \in \{2, 3\}$$

أيزومورفيزمين

ولكل $j \neq \ell$ يكون $\mathbb{Q}(a_j) \cap \mathbb{Q}(a_\ell) = \mathbb{Q}$. لأنه لكل $x \in \mathbb{Q}(a_j) \cap \mathbb{Q}(a_\ell)$

يوجد $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$ بحيث إن : $a + b a_j + c a_j^2 = x = a' + b' a_\ell + c' a_\ell^2$

إذا أخذنا $j = 2$ ، $\ell = 3$ فإننا نحصل على :

$$a + b\sqrt[3]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}) + c\sqrt[3]{4}(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3})$$

$$= a' + b'\sqrt[3]{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}) + c'\sqrt[3]{4}(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})$$

ومساواة الجزئين الحقيقيين فى الطرفين نحصل على :

$$a + b\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}) + c\sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2}) = a' + b'\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}) + c'\sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \quad (1)$$

وبمساواة الجزئين التخيليين نحصل على :

$$b\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + c\sqrt[3]{4}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = b'\sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + c'\sqrt[3]{4}(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow b = -b', c = -c' \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن $b = c = 0$ ، أى أن $x \in \mathbb{Q}$

وبالمثل إذا أخذنا $j = 1$ ، $\ell = 2$ ، وكذا $j = 1$ ، $\ell = 3$ ، فيكون $x \in \mathbb{Q}$.

أمثلة متنوعة

مثال ١ : حدد : أى التقارير الآتية صحيح وأيها خاطئ :

(أ) العدد π متسام على $\mathbb{Q}$

(ب) امتداد بسيط لـ $\mathbb{R}$

(جـ) كل عنصر فى حقل F يكون جبرياً على F

(د) امتداد حقل لـ $\mathbb{Q}$

(هـ) امتداد حقل لـ $\mathbb{Z}_2$

(و) ليكن $\alpha \in \mathbb{C}$ جبرياً على $\mathbb{Q}$ من درجة n . إذا كان $f(\alpha) = 0$ لكثيرة الحدود

$\deg(f(X)) \geq n$ ، عندئذ فإن $0 \neq f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

(ز) ليكن $\alpha \in \mathbb{C}$ جبرياً على $\mathbb{Q}$ من درجة n . إذا كان $f(\alpha) = 0$ لكثيرة الحدود

$\deg(f(X)) \geq n$ ، عندئذ فإن $0 \neq f(X) \in \mathbb{R}[X]$

(ح) كل كثيرة حدود غير ثابتة فى $F[X]$ لها صفر فى امتداد ما للحقل F

(ط) كل كثيرة حدود غير ثابتة فى $F[X]$ لها صفر فى كل امتداد للحقل F

(ى) إذا كان X غير محدد ، فإن $\mathbb{Q}(\pi) \cong \mathbb{Q}[X]$

(ك) i جبرى على $\mathbb{Q}$

الحل :

(أ) ، (ب) صحيحان

(جـ) صحيح : إذا كان $a \in F$ فإن a صفر لكثيرة الحدود $X - a$

(د) صحيح

(هـ) خاطئ: العناصر فى $\mathbb{Z}_2$ ليست هى عناصر فى $\mathbb{Q}$ والعمليات مختلفة كذلك فى الحقلين

(و) صحيح

(ز) خاطئ : $\sqrt{2}$ جبرى على $\mathbb{Q}$ من درجة 2 بتعريف f :

(ح) صحيح $f := X^2 - 2$ ، بينما $\sqrt{2}$ جبرى على $\mathbb{R}$ من درجة 1 بتعريف $f := X - \sqrt{2}$

(ط) خاطئ : $f := X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ليس لها أصفار فى $\mathbb{R}$

(ى) صحيح

(ك) صحيح : نعرف $f := X^2 + 1$ (درجة i هى 2)

مثال ٢ : برهن على أن العدد الحقيقى $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ جبرى على $\mathbb{Q}$

البرهان : ضع $c := \sqrt{1+\sqrt{5}}$ هذا يقتضى أن $c^2 = 1 + \sqrt{5}$ أى أن $(c^2 - 1)^2 = 5$ ،

ومن ثم فإن $c^4 - 2c^2 - 4 = 0$. إذن نعرف كثيرة الحدود $f := X^4 - 2X^2 - 4$ فيكون

$\sqrt{1+\sqrt{5}}$ صفراً لها ، وينتج المطلوب . (العدد جبرى على $\mathbb{Q}$ من الدرجة الرابعة)

مثال ٣ : اوجد كثيرة الحدود الصغرى من العنصر $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ على $\mathbb{Q}$

الحل : مما سبق وجدنا أن $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ صفر لكثيرة الحدود $f := X^4 - 2X^2 - 4$

وهى كثيرة حدود مطبوعة (معامل X^4 هو الواحد) . كذلك هى غير قابلة للتحليل أو

التبسيط فى $\mathbb{Q}[X]$ (اختبر ذلك) . إذن فهى كثيرة الحدود الصغرى المطلوبة .

مثال ٤ : صنف كلا من $\alpha \in \mathbb{C}$ الآتية إذا كانت جبرية أو متسامية على الحقل F

المعطى . إذا كانت جبرية فاوجد الدرجة .

(أ) $\alpha := 1+i$, $F := \mathbb{R}$ (ب) $\alpha := \sqrt{\pi}$, $F := \mathbb{R}$

(جـ) $\alpha := \sqrt{\pi}$, $F := \mathbb{Q}$ (د) $\alpha := \sqrt{\pi}$, $F := \mathbb{Q}(\pi)$

(هـ) $\alpha := \sqrt{\pi} + 1$, $F := \mathbb{Q}(\pi^2)$ (و) $\alpha := \pi^2$, $F := \mathbb{Q}$

(ز) $\alpha := \pi^2$, $F := \mathbb{Q}(\pi)$ (ح) $\alpha := \pi^2$, $F := \mathbb{Q}(\pi^3)$

(ط) $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt[3]{\pi}$, $F := \mathbb{Q}(\pi)$

الحل :

(أ) $\alpha = 1+i$ يقتضى أن $\alpha - 1 = i$ ومن ثم فإن : $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = -1$ أى أن $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$ وبالتالي فإن $\alpha = 1+i$ جبرية على $\mathbb{R}$ ودرجتها 2 .

(ب) $\alpha = \sqrt{\pi}$ نعرف كثيرة الحدود $f := X - \sqrt{\pi} \in \mathbb{R}$ جبرية ودرجتها 1 (جـ) α متسامية

(د) $\alpha = \sqrt{\pi}$ يقتضى أن $\alpha^2 = \pi$ ، ونعرف $f := X^2 - \pi \in \mathbb{Q}(\pi)$ جبرية ودرجتها 2

(هـ) $\alpha = \sqrt{\pi} + 1$ يقتضى أن $(\alpha - 1)^2 = \pi$ ومن ثم فإن : $(\alpha - 1)^4 = \pi^2$. نعرف كثيرة الحدود $f := (X - 1)^4 - \pi^2 \in \mathbb{Q}(\pi^2)$ جبرية ودرجتها 4 (و) α متسامية

(ز) $\alpha = \pi^2$ يقتضى أن $\alpha - \pi^2 = 0$. نعرف كثيرة الحدود $f := X - \pi^2 \in \mathbb{Q}(\pi)$ جبرية ودرجتها 1

(ح) $\alpha = \pi^2$ يقتضى أن $\alpha^3 = \pi^6$. نعرف $f := X^3 - \pi^6 \in \mathbb{Q}(\pi^3)$ جبرية ومن الدرجة الثالثة .

(ط) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\pi}$ يقتضى أن $(\alpha - \sqrt{2})^3 = \pi$ أى أن : $(\alpha^3 + 6\alpha - \pi)^2 = 2(3\alpha^2 + 2)^2$ ومن ثم فإن : $\alpha^3 - 3\alpha^2\sqrt{2} + 3\alpha - 2\sqrt{2} = \pi$ نعرف كثيرة الحدود :

$$f := (X^3 + 6X - \pi)^2 - 2(3X^2 + 2)^2 \in \mathbb{Q}(\pi)$$

فيكون α جبرية ومن الدرجة 6

ملحوظة :

لاحظ أن α ليست جبرية على الإطلاق ، ولكنها جبرية على الحقل الموضح فى كل ماسبق . وكذلك f فى كل الحالات السابقة غير قابلة للتبسيط (للتحليل) ومطبوعة (و ذات درجة صغرى) ووحيدة .

مثال ٥ : لكل من الأعداد الجبرية $\alpha \in \mathbb{C}$ ، اوجد كثيرة الحدود الصغرى لـ α على $\mathbb{Q}$

(جـ) $\sqrt{2}+i$

(ب) $\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{7}}$

(أ) $\sqrt{3-\sqrt{6}}$

الحل : $\alpha = \sqrt{3-\sqrt{6}}$ يقتضى أن $\alpha^2 = 3-\sqrt{6}$ ومن ثم فإن : $\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3 = 0$.

كثيرة الحدود $f := X^4 - 6X^2 + 3$ غير قابلة للتبسيط على $\mathbb{Q}$ (مثلاً باستخدام شرط

أيزينشتاين) ، وهى مطبوعة ، $\sqrt{3-\sqrt{6}}$ صفر لها فهى كثيرة الحدود الصغرى المطلوبة .

(ب) $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{7}}$ يقتضى أن $\alpha^2 = \frac{1}{3}+\sqrt{7}$ ، ومن ثم فإن : $\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{9} = 7$ ،

أى أن $\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{62}{9} = 0$. نعرف f كالتأتى : $f := X^4 - \frac{2}{3}X^2 - \frac{62}{9}$ ، وهى

مطبوعة وغير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Q}[X]$ (اختبر ذلك) ، α صفر لها . إذن هى كثيرة الحدود الصغرى المطلوبة .

(جـ) $\alpha = \sqrt{2}+i$ يقتضى أن $\alpha - \sqrt{2} = i$ وبالتالى فإن : $\alpha^2 + 3 = 2\sqrt{2}\alpha$

ومن ثم فإن : $(\alpha^2 + 3)^2 = 8\alpha$ أى أن $\alpha^4 - 2\alpha^2 + 9 = 0$. كثيرة الحدود

$f := X^4 - 2X^2 + 9$ مطبوعة وغير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{Q}[X]$ (اختبر ذلك) ، α

صفر لها . إذن هى كثيرة الحدود المطلوبة .

مثال ٦ : ليكن E امتداداً لحقل منته F ، حيث يتألف F من q عنصراً . وليكن

$\alpha \in E$ جبرياً على F من الدرجة n . برهن على أن $F(\alpha)$ يتألف من q^n عنصراً .

البرهان : α جبرى على F وله الدرجة n معناه أن f كثيرة الحدود الصغرى من

α على F لها الدرجة n . ومن النظرية (١-٥-٥) نعلم أن $[F(\alpha):F] = \deg(f)$

وبهذا يكون $[F(\alpha):F] = n$. ولكن $F(\alpha)$ فراغ خطى على الحقل F وله البعد n ،

وهو يتشاكل مع F^n وبهذا يكون عدد عناصره هو q^n .

مثال ٧ : ليكن E امتداداً بسيطاً $F(\alpha)$ للحقل F ، وليكن α جبرياً على F . لتكن درجة كثيرة الحدود الصغرى من α على F هي $n \geq 1$. برهن على أن أى عنصر $\beta \in E = F(\alpha)$ يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة كالتى :

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث جميع b_i عناصر فى F .

البرهان : نريد أن نعبر أولاً عن أى عنصر فى $F(\alpha)$.
نلاحظ أولاً أنه بالنسبة للهومومورفيزم الأساسى العادى

(The usual basic homomorphism)

φ_α ، فإن كل عنصر فى

$$F(\alpha) = \varphi_\alpha(F[X])$$

يكون على الشكل

$$\varphi_\alpha(f(X)) = f(\alpha) \quad (*)$$

كثيرة حدود شكلية (formal polynomial) فى α ، معاملاتها فى F .

لتكن كثيرة الحدود الصغرى من α على F هي :

$$p(X) = X^n + \lambda_{n-1}X^{n-1} + \dots + \lambda_0$$

ومن حيث إن $p(\alpha) = 0$ ، فإننا نحصل على :

$$\alpha^n = -\lambda_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - \lambda_0$$

وباستخدام هذه المعادلة يمكن التعبير عن كل α^m حيث $m \geq n$ بدلالة قوى α التى

هى أصغر من n . وعلى سبيل المثال :

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n = -\lambda_{n-1}\alpha^n - \lambda_{n-2}\alpha^{n-1} - \dots - \lambda_0\alpha \\ &= -\lambda_{n-1}(-\lambda_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - \lambda_0) - \lambda_{n-2}\alpha^{n-1} - \dots - \lambda_0\alpha \end{aligned}$$

والآن باستخدام هذه الملحوظة فإنه إذا كانت $\beta \in F(\alpha)$ ، فإن β يمكن التعبير عنها في الصيغة المطلوبة :

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

وليس فقط الصيغة العامة (*)

وللبرهنة على وحدانية هذه الصيغة : ليكن هناك صيغتان لـ β كالآتي :

$$b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = \beta = b'_0 + b'_1\alpha + \dots + b'_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث $b_i, b'_i \in F$. عندئذ فإن :

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)\alpha + \dots + (b_{n-1} - b'_{n-1})\alpha^{n-1} = g(\alpha) \in F[\alpha], g(\alpha) = 0$$

وهكذا فإن درجة $g(\alpha)$ أقل من درجة كثيرة الحدود الصغرى من α على F ،
 $g(\alpha) = 0$ كما ذكرنا ، و $g(\alpha)$ مطبوعة ، فلا بد أن يكون $g(\alpha) = 0$. ومن ثم فإن
 $b_i = b'_i$ ، وتكون الصيغة وحيدة .

هل يمكنك حل المثال بطريقة أخرى ؟ راجع نظرية (١-٥-٥) !

مثال ٨: كثيرة الحدود $p(X) = X^2 + X + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$ غير قابلة للتبسيط في $\mathbb{Z}_2[X]$ لأنه إذا كانت قابلة للتبسيط فيكون لها عامل من الدرجة الأولى فيكون لها العامل X أو العامل $X + \bar{1}$ ، ولكن $p(\bar{0}) = \bar{1} \neq \bar{0}$ ، $p(\bar{1}) = \bar{1} \neq \bar{0}$ فكلهما لا يصلح عاملا .
 (انظر (٢-٢-٢) في نظرية الحلقات) .

ونحن نعلم من النظرية (١-٧-١) أنه يوجد امتداد حقل E لـ $\mathbb{Z}_2$ يحتوى على صفر α لـ $X^2 + X + \bar{1}$. من مثال ٧ السابق مباشرة $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ يتكون من العناصر $\bar{0} + \bar{0}\alpha$ ، $\bar{1} + \bar{0}\alpha$ ، $\bar{0} + \bar{1}\alpha$ ، $\bar{1} + \bar{1}\alpha$ ، أى يتكون من العناصر $\bar{0}$ ، $\bar{1}$ ، α ، $\bar{1} + \alpha$.
 يترك للقارئ حساب جدولى الجمع والضرب . وعلى سبيل المثال فإن :

$$\alpha(\bar{1} + \alpha) = \alpha + \alpha^2$$

ولكن $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + \bar{1} = \bar{0}$ ، أى أن $\alpha^2 + \alpha = -\bar{1} = \bar{1}$ أى أن $\alpha(\bar{1} + \alpha) = \bar{1}$ كذلك فإن :

$$\begin{aligned} (\bar{1} + \alpha)(\bar{1} + \alpha) &= \bar{1} + \alpha + \alpha + \alpha^2 \\ &= \bar{1} + 2\alpha + \alpha^2 = \bar{1} + \alpha^2 = -\bar{1}\alpha = \alpha \end{aligned}$$

ملحوظة : لم نستخدم هنا $\mathbb{C}$.

مثال ٩ : انظر نظرية (١-٧-١)

ليكن $k = \mathbb{R}$ ، وليكن لدينا $f = X^2 + 1$ ونعلم أنه ليس لها أصفار فى $\mathbb{R}$ ، وبهذا تكون غير قابلة للتبسيط فى $\mathbb{R}[X]$. وبالتالي فإن $[X^2 + 1]$ يكون مثاليا أعظم فى $\mathbb{R}[X]$ ، ويكون $\mathbb{R}[X]/[X^2 + 1]$ حقلا . سنوحد (identify) $r \in \mathbb{R}$ مع $r + [X^2 + 1]$ فى

$$K := \mathbb{R}[X]/[X^2 + 1] \text{ ، وبهذا يمكن رؤية } \mathbb{R} \text{ كحقول جزئى من } \mathbb{R}[X]/[X^2 + 1]$$

لتكن $\alpha := X + [X^2 + 1] =: \bar{X}$. بالحساب فى $\mathbb{R}[X]/[X^2 + 1]$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 1 &= (X + [X^2 + 1])(X + [X^2 + 1]) + 1 \\ &= X^2 + 1 + [X^2 + 1] = [X^2 + 1] = \bar{0} \end{aligned} \quad (\text{العنصر المحايد فى } K)$$

أى أن α صفر لكثيرة الحدود $X^2 + 1$.

بالطبع فإن كثيرة الحدود $X^2 + 1$ لها الصفر " i " ، لكننا هنا ننشئ حقلا يحتوى على الأعداد الحقيقية وصفر لكثيرة الحدود $X^2 + 1$ ينشأ من استخدام الأعداد الحقيقية فقط .

مثال ١٠ : بالاشارة إلى مثال ٨ السابق : كثيرة الحدود $X^2 + X + \bar{1}$ لها α كصفر فى $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ ، وبهذا يجب أن تتحلل إلى عوامل خطية فى $\mathbb{Z}_2(\alpha)[X]$. اوجد هذا التحليل .

الحل : سنستخدم القسمة المطولة مع مراعاة أن $\bar{0} = \alpha^2 + \alpha + \bar{1}$ كالاتى :

$$\begin{array}{r}
 X + \alpha + \bar{1} \\
 X - \alpha \quad \overline{\begin{array}{r} X^2 + X + \bar{1} \\ X^2 - \alpha X \end{array}} \\
 \hline
 \alpha X + X + \bar{1} = (\alpha + \bar{1})X + \bar{1} \\
 \hline
 \alpha X - \alpha^2 + X - \alpha \\
 \hline
 \bar{1} + \alpha^2 + \alpha = \bar{0}
 \end{array}$$

أى أن : $(X^2 + X + \bar{1}) = (X - \alpha)(X + \alpha + \bar{1})$

مثال ١١ : لتكن $f := \bar{2}X + \bar{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$. برهن على أن f ليس لها أية أصفار في أية حلقة تحتوي $\mathbb{Z}_4$.

البرهان : إذا كانت α صفراً لـ f فإن : $(1) \quad \bar{2}\alpha + \bar{1} = \bar{0}$. كذلك ولأنه في أية حلقة تحتوي على $\mathbb{Z}_4$ يكون $\bar{4}\alpha = \bar{0}$ ، فإن لدينا أيضاً : $\bar{0} = \bar{2}(\bar{2}\alpha + \bar{1}) = \bar{4}\alpha + \bar{2} = \bar{2}$ ₍₁₎ وهذا تناقض .

مثال ١٢ : بالرجوع إلى مثال ٩ السابق α جذر لـ $X^2 + 1$.

برهن على أن $X^2 + 1$ يمكن أن تكتب على صورة حاصل ضرب عوامل خطية .
البرهان : لدينا $\alpha = X + [X^2 + 1]$. وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}
 (X - \alpha)(X + \alpha) &= X^2 - \alpha^2 = X^2 - (X + [X^2 + 1])^2 \\
 &= X^2 - (X^2 + [X^2 + 1])
 \end{aligned}$$

وفى نفس الوقت لدينا $X^2 + [X^2 + 1] = -1 + [X^2 + 1]$

ولقد اتفقنا عل أن نوحّد بين -1 ، $-1 + [X^2 + 1]$ ، وبهذا يكون

$$(X - \alpha)(X + \alpha) = -(-1) = X^2 + 1$$

مثال ١٣ : اعتبر كثيرة الحدود $f := X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. لاحظ أن :

$X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, ($i = \sqrt{-1}$) لكن $\mathbb{C}$ ليس هو حقل تشقيق كثيرة

الحدود f ، ولكن حقل تشقيقها هو $\mathbb{Q}(i) := \{r + si \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$

بينما كما سبق في (١-٨-٢) فإن $\mathbb{C}$ هو حقل تشقيق f على $\mathbb{R}$. كذلك فإن

$X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ يمكن كتابتها على الصورة $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ أى يمكن

تحليلها على $\mathbb{R}$ لكن حقل تشقيقها هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$

مثال ١٤ : اوجد حقل التشقيق لكثيرة الحدود $f := X^4 - X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

الحل :

$$f := X^4 - X^2 - 2 = (X^2 - 2)(X^2 + 1) \in \mathbb{Q}[X]$$

وبإيجاد أصفار كثيرة الحدود : $(X^2 - 2)(X^2 + 1)$ فإن الأصفار هي $\pm\sqrt{2}, \pm i$ وبهذا

يكون حقل تشقيق f على $\mathbb{Q}$ هو

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) := \mathbb{Q}(\sqrt{2})(i) := \{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$$

$$= \{(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

مثال ١٥ : اوجد حقل تشقيق لكثيرة الحدود $f := X^2 + X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$

الحل :

$$f = (X - (1 + i))(X - (1 - i))$$

وبهذا يكون أحد حقلى التشقيق لـ f على $\mathbb{Z}_3$ هو :

$$\mathbb{Z}_3(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$

ولإيجاد الحقل الآخر : نعلم من النظرية (١-٧-١) أن العنصر

$$\beta := X + [X^2 + X + \bar{2}] \in F = \mathbb{Z}_3[X] / [X^2 + X + \bar{2}]$$

هو أيضاً صفر لـ f . ونحن نعلم أنه لا بد أن يوجد صفر آخر لـ f موجود في F (لأن f من درجة 2) ، ويكون F كذلك حقل تشقيق لـ f على $\mathbb{Z}_3$. ولايجاد الصفر الآخر نجرى القسمة المطولة الآتية حيث يكون $X - \beta$ أحد عاملي f (انظر مثال ١٠ السابق) :

$$\begin{array}{r} X - \beta \quad \overline{\begin{array}{r} X + (\beta + 1) \\ X^2 + X + \bar{2} \\ X^2 - \beta X \\ \hline (\beta + 1)X + \bar{2} \\ (\beta + 1)X - \beta^2 - \beta \\ \hline \beta^2 + \beta + \bar{2} \end{array}} \end{array}$$

ومن حيث إن β أحد صفري كثيرة الحدود f فيكون

$$\beta^2 + \beta + \bar{2} = \bar{0}$$

ويكون

$$\begin{aligned} f &= (X - \beta)(X + \beta + 1) \\ &= (X - \beta)(X - \bar{2}\beta - \bar{2}), \beta = X + [X^2 + X + \bar{2}] \end{aligned}$$

وفى الواقع فإنه إذا كانت $p[X]$ كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط (للتحليل) فى $F[X]$ (أى على الحقل F) ، وكان a صفراً لـ $p(X)$ فى امتداد ما لـ F فإن

$$F(a) \equiv \frac{F[X]}{p(X)}$$

وهو ما يتفق مع ما ذكرناه فى (١-٨-٨) عن وحدانية حقول التشقيق .

مثال ١٦ : اعتبر كثيرة الحدود $f := X^6 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. واضح (باستخدام شرط

أيزنشتاين) أنها غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[X]$. كذلك هي مطبوعة ، $\sqrt[6]{2}$ صفر لها

فهى كثيرة الحدود الصغرى لـ $\sqrt[6]{2}$ على $\mathbb{Q}$. بتطبيق (١-٥-٥) يتضح أن :

$$\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) \cong \mathbb{Q}[X] / [X^6 - 2]$$

حيث

$$\{1, 2^{1/6}, 2^{2/6}, 2^{3/6}, 2^{4/6}, 2^{5/6}\}$$

أساس للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ على الحقل $\mathbb{Q}$ ، أى أن :

$$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) = \{a_0 + a_1 2^{1/6} + a_2 2^{2/6} + a_3 2^{3/6} + a_4 2^{4/6} + a_5 2^{5/6} \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$$

مثال ١٧ : صف عناصر $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$

الحل : $\sqrt[3]{5}$ جبرى على $\mathbb{Q}$ لأنه صفر لكثيرة الحدود $X^3 - 5$

ومن (١-٥-٥) يكون $\{1, 5^{1/3}, 5^{2/3}\}$ أساس للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ على $\mathbb{Q}$ ويكون :

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) = \{a_0 + a_1 5^{1/3} + a_2 5^{2/3} \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$$

مثال ١٨ : برهن على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

البرهان : " $\supset$ " واضح لأن $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ يقتضى $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

" $\subset$ " : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ يقتضى أن

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

أى أن $\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ وينتج مباشرة أن

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}), \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

مثال ١٩ : اوجد حقل التشقيق لكثيرة الحدود $X^3 - 1$ على $\mathbb{Q}$. عبر عن إجابتك فى الشكل $\mathbb{Q}(a)$.

الحل :

$$\begin{aligned} X^3 - 1 &= (X - 1)(X^2 + X + 1) \\ &= (X - 1)\left(X - \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

وبهذا يكون حقل التشقيق المطلوب هو $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

مثال ٢٠ : صف عناصر $\mathbb{Q}(\pi)$

الحل : π ليس عددا جبريا على $\mathbb{Q}$ حتى تنطبق عليه النظرية (١-٥-٥) . وواضح أن

$$\mathbb{Q}(\pi) = \left\{ \frac{a_n \pi^n + \dots + a_1 \pi + a_0}{b_m \pi^m + \dots + b_1 \pi + b_0} \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}, b_m \neq 0 \right\}$$

مثال ٢١ : اوجد كثيرة حدود $p(X)$ فى $\mathbb{Q}[X]$ بحيث يكون

$$\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{5}}) \cong \mathbb{Q}[X] / [p(X)]$$

الحل : سنحصل على كثيرة الحدود الصغرى للعنصر $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ على $\mathbb{Q}$ ثم نطبق النظرية (١-٥-٥) كالاتى :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{1+\sqrt{5}} \Rightarrow X^2 = 1+\sqrt{5} \Rightarrow (X^2 - 1)^2 = 5 \\ &\Rightarrow X^4 - 2X^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

تكون كثيرة الحدود الصغرى المطلوبة هي $p(X) = X^4 - 2X^2 - 4$

مثال ٢٢ : اوجد $a, b, c \in \mathbb{Q}$ بحيث يكون :

$$\frac{(1+\sqrt[3]{4})}{(2-\sqrt[3]{2})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

(لاحظ أن a, b, c موجودة لأن :

$$\frac{(1+\sqrt[3]{4})}{(2-\sqrt[3]{2})} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$$

الحل : لاحظ أن $\sqrt[3]{2}$ جبرى على $\mathbb{Q}$ لأنه صفر لكثيرة الحدود الصغرى $X^3-2 \in \mathbb{Q}[X]$ وبهذا تكون $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ أساساً للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ على $\mathbb{Q}$.
والآن :

$$\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{2}} = a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt[3]{4} = 2a+2b\sqrt[3]{2}+2c\sqrt[3]{4}-a\sqrt[3]{2}-b\sqrt[3]{4}-2c$$

ولأن $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ على $\mathbb{Q}$:

$$\Rightarrow 2a-2c=1 \quad (1)$$

$$2b-a=0 \quad (2)$$

$$2c-b=1 \quad (3)$$

من (1) ، (3) ينتج أن :

$$2a-b=2 \quad (4)$$

من (2) ، (4) ينتج أن : $a=\frac{4}{3}$ ، $b=\frac{2}{3}$. وبالتعويض فى (3) نحصل على $c=\frac{5}{6}$

مثال ٢٣ : برهن على أن $\mathbb{Q}(4-i)=\mathbb{Q}(1+i)$ ($i=\sqrt{-1}$)

البرهان : سنثبت أن $4-i \in \mathbb{Q}(1+i)$ كالاتى :

$1+i, -2 \in \mathbb{Q}(1+i)$ فينتج أن $-1+i \in \mathbb{Q}(1+i)$ ، فينتج أن $1-i \in \mathbb{Q}(1+i)$.

$3 \in \mathbb{Q}(1+i)$ فينتج أن $4-i \in \mathbb{Q}(1+i)$. ونثبت بالمثل أن $1+i \in \mathbb{Q}(4-i)$ كالاتى :

$4-i, 3 \in \mathbb{Q}(4-i)$ فينتج أن $1-i \in \mathbb{Q}(4-i)$. كذلك $1 \in \mathbb{Q}(4-i)$ فينتج أن $i \in \mathbb{Q}(4-i)$ فينتج أن $1+i \in \mathbb{Q}(4-i)$.

مثال ٢٤ : عبر عن $(3+4\sqrt{2})^{-1}$ في الصورة $a+b\sqrt{2}$ حيث $a, b \in \mathbb{Q}$
الحل :

$$(3+4\sqrt{2})^{-1} = \frac{3-4\sqrt{2}}{(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2})} = \frac{3-4\sqrt{2}}{-23} = -\frac{3}{23} + \frac{4}{23}\sqrt{2}$$

مثال ٢٥ : برهن على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ لا يتشاكل مع $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

البرهان : ليكن $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ متشاكلاً مع $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ أى أنه يوجد تشاكل (أيزومورفيزم) φ :

$$\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

واضح أن $\varphi|_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$. كذلك فإن $\varphi(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$. ومن ثم فإن :

$$2 = \varphi(2) = \varphi(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2}) \cdot \varphi(\sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

وهذا تناقض .

مثال ٢٦ : اوجد جميع الحقول الجزئية في $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

الحل : $\mathbb{Q}$ حقل جزئى في $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ولا يوجد حقل فعلى في $\mathbb{Q}$. إذن نبحث عن

حقول بينية في امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$. ليكن هناك الحقل البينى L . نعلم من

نظرية الدرجة (١-٢-٤) أن

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):L][L:\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$$

ومن (١-٥-٥) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2$ لأن $f = X^2 - 2$ هي كثيرة الحدود الصغرى

من $\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$. أى أن

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):L][L:\mathbb{Q}] = 2$$

هذا معناه أن $[L:\mathbb{Q}]=1$ أو $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):L]=1$ أى أن $L=\mathbb{Q}$ أو $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

مثال ٢٧: اوجد حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^n - a$ على $\mathbb{Q}$ حيث a عدد كسرى (نسبى) موجب

الحل : أصفار كثيرة الحدود المعطاة فى $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{a}, \omega)$ حيث $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ الجذور النونية للواحد هى :

$$a^{1/n}, \omega a^{1/n}, \omega^2 a^{1/n}, \dots, \omega^{n-1} a^{1/n}$$

ويكون $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{a}, \omega)$ هو حقل التشقيق المطلوب .

مثال ٢٨ : لقد ذكرنا بدون برهان أن π ، e متساميان على $\mathbb{Q}$

(أ) اوجد حقلاً جزئياً $F \subset \mathbb{R}$ بحيث تكون π جبرية من درجة 3 على F

(ب) اوجد حقلاً جزئياً $E \subset \mathbb{R}$ بحيث يكون $e + \pi$ جبرياً من درجة 5 على E

الحل :

(أ) واضح أننا سنبدأ من $\mathbb{Q}$ ثم نجرى عملية ضم (أو إلحاق) ، وحتى تكون π

جبرية من الدرجة 3 على الحقل F فيجب أن تكون صفراً لكثيرة الحدود $X^3 - a$

حيث $a \in F$. نأخذ $a = \pi^3$ فيكون $F = \mathbb{Q}(\pi^3)$. لاحظ أن كثيرة الحدود غير

قابلة للتبسيط على $\mathbb{Q}(\pi^3)$

(ب) مثل (أ) كثيرة الحدود هنا $X^5 - (e + \pi)^5$ ويكون $E = \mathbb{Q}(e, \pi^5)$

مثال ٢٩ :

(أ) برهن على أن $X^3 + X^2 + \bar{1}$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) فى $\mathbb{Z}_2[X]$

(يقال كذلك كما سبق غير قابلة للتحليل (للتبسيط على $\mathbb{Z}_2$)

(ب) ليكن α صفراً لكثيرة الحدود $X^3 + X^2 + \bar{1}$ فى امتداد للحقل $\mathbb{Z}_2$.

برهن على أن $X^3 + X^2 + \bar{1}$ تتحلل إلى عوامل خطية فى $[\mathbb{Z}_2(\alpha)][X]$ بإيجاد هذه

العوامل فعلياً .

الحل : إذا كانت $f := X^3 + X^2 + \bar{1}$ قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}_2[X]$ فيكون لها عامل من الدرجة الأولى أى على الشكل $X - \gamma$. ومن حيث إن $\mathbb{Z}_2$ يتكون من عنصرين فقط هما $\bar{0}$ ، $\bar{1}$ فإن γ إذا وجدت تكون $\gamma = \bar{0}$ أو $\gamma = \bar{1}$ ، ويكون $f(\bar{0}) = \bar{0}$ أو $f(\bar{1}) = \bar{0}$. نحسب $f(\bar{1})$ ، $f(\bar{0})$:

$$f(\bar{0}) = \bar{0} + \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0},$$

$$f(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

إذن f غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}_2[X]$ (أى غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}_2$) .

(ب) سنستخدم الآن مثال ٧ السابق . $X^3 + X^2 + \bar{1}$ هي كثيرة الحدود الصغرى للعنصر α الذى يلحق (يضم) لـ $\mathbb{Z}_2$ لتكوين $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ حتى يمكن أن تتحلل f عليه . وبالتالي فإن أى عنصر فى $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ يكون على الشكل :

$$\lambda_0 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \alpha^2, \quad \lambda_i = \bar{0}, \bar{1} \quad (*)$$

سنقسم $X^3 + X^2 + \bar{1}$ قسمة مطولة على $X - \alpha$ كالآتى :

$$\begin{array}{r} X^2 + (\alpha + \bar{1})X + (\alpha^2 + \alpha) \\ X - \alpha \overline{) \begin{array}{l} X^3 + X^2 + \bar{1} \\ \underline{X^3 - \alpha X^2} \\ (\alpha + 1)X^2 + \bar{1} \\ \underline{(\alpha + 1)X^2 - (\alpha^2 + \alpha)X} \\ (\alpha^2 + \alpha)X + \bar{1} \\ \underline{(\alpha^2 + \alpha)X - \alpha^3 - \alpha^2} \\ \alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1} = \bar{0} \end{array}} \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2(\alpha)$ فى $f = x^3 + x^2 + 1$ صفر لـ α لأن $\alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1} = \bar{0}$

والآن نحصل على العامل الخطى الأول فى خارج القسمة $g := X^2 + (\alpha + \bar{1})X + (\alpha^2 + \alpha)$

وسنستخدم هذه المرة تجربة العناصر الثمانية فى $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ (انظر *) وهى :

$\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha^2, \bar{1} + \alpha, \bar{1} + \alpha^2, \alpha + \alpha^2, \bar{1} + \alpha + \alpha^2$. وبتجربة α^2 نحصل على :

$$\begin{aligned} \alpha^4 + (\alpha + \bar{1})\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha &= \alpha^4 + \alpha^3 + \bar{2}\alpha^2 + \alpha \\ &\stackrel{(\bar{2}=\bar{0})}{=} \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \bar{0} \end{aligned}$$

أى أن $X - \alpha^2$ عامل خطى لـ $X^3 + X^2 + \bar{1}$.

ومن حيث إن $X^3 + X^2 + \bar{1}$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، يتبقى عامل أخير .
نفضل أن نحصل عليه بالقسمة المطولة مرة أخرى لخارج القسمة

$X^2 + (\alpha + \bar{1})X + (\alpha^2 + \alpha)$ على $X - \alpha^2$ كالآتى :

$$\begin{array}{r} X + \alpha^2 + \alpha + \bar{1} \\ X - \alpha^2 \overline{) \begin{array}{l} X^2 + (\alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha \\ X^2 - \alpha^2 X \end{array} } \\ \hline (\alpha^2 + \alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha \\ \hline (\alpha^2 + \alpha + \bar{1})X - \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 \\ \hline \alpha^4 + \alpha^3 + \bar{2}\alpha^2 + \alpha = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha \end{array}$$

(لاحظ أن $\bar{2} = \bar{0}$ فى $\mathbb{Z}_2$)

باقى القسمة هو $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha$ وهو يساوى $\alpha(\alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1}) = \bar{0}$ كما سبق .

إن تتحلل $X^3 + X^2 + \bar{1}$ على $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ كالآتى :

$$X^3 + X^2 + \bar{1} = (X - \alpha)(X - \alpha^2)(X - (\alpha^2 + \alpha + \bar{1}))$$

(لاحظ أن $\alpha^2 + \alpha + 1 = -(\alpha^2 + \alpha + 1)$ فى $\mathbb{Z}_2(\alpha)$)

مثال ٣٠ : ما درجة الامتدادين : $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$ ، $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$

الحل : $[C:\mathbb{R}] = 2$ أى أن درجة الامتداد $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ هى 2 ، لأن $\{1, i\}$ يصلح

أساساً للفراغ الخطى $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$. بينما $[C:\mathbb{Q}] = \infty$.

مثال ٣١ : اوجد $[Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q]$

الحل :

$$Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = (Q(\sqrt{2}))(\sqrt[3]{2})$$

وبالتالى فإن

$$[Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q] = [(Q(\sqrt{2}))(\sqrt[3]{2}) : Q(\sqrt{2})][Q(\sqrt{2}) : Q]$$

$$= \deg(X^3 - 2) \deg(X^2 - 2) \quad (\text{انظر (١-٥-٥)})$$

$$= 3.2 = 6$$

$$[Q(\sqrt[3]{2}) : Q] = 6 \quad \text{ومن مثال ٦}$$

(أى أن $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \cong Q(\sqrt[3]{2})$ بل $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt[3]{2})$ لأن $Q(\sqrt[3]{2})$ ،

$Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ لهما نفس الأساس كفراغين خطيين على الحقل Q . وفى الواقع فإنه من

الواضح تماماً أن $(Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \supset Q(\sqrt[3]{2}))$

ملحوظة : يمكن أن نبرهن على أن $Q(\sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ كذلك بملاحظة أن :

$$Q \subset Q(\sqrt[3]{2}) \subset Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$$

$$\Rightarrow 6 = [Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q] = [Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q(\sqrt[3]{2})] \cdot [Q(\sqrt[3]{2}) : Q]$$

$$= [Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q(\sqrt[3]{2})] \cdot 6$$

$$\Rightarrow [Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : Q(\sqrt[3]{2})] = 1$$

وبصفة عامة إذا كان E امتداداً لـ F (كحقلين) وكان $[E:F] = 1$ فإن $E = F$

مثال ٣٢ : اوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$

الحل : كما سبق فى مثال ٣١ $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{3}))(\sqrt{5})$

ومن ثم فإن :

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$$

$$= \deg(X^2 - 5) \cdot \deg(X^2 - 3)$$

₅₋₅₋₁

$$= 2 \cdot 2 = 4$$

طريقة أخرى : $\{1, \sqrt{3}\}$ أساس للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ على الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ،

$\{1, \sqrt{5}\}$ أساس للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ على الحقل $\mathbb{Q}$

ومن برهان نظرية الدرجة يكون $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3}\sqrt{5}\}$ أى $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}\}$ أساساً

للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ على الحقل $\mathbb{Q}$.

مثال ٣٣ : اوجد كثيرة الحدود الصغرى للعنصر $\sqrt{-3} + \sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$

الحل : ضع $X = \sqrt{-3} + \sqrt{2}$. هذا يقتضى أن

$$X^2 = -3 + 2 + 2\sqrt{-6} = -1 + 2\sqrt{-6}$$

أى أن $X^2 + 1 = 2\sqrt{-6}$. وبالتالي فإن :

$$X^4 + 2X^2 + 1 = -24$$

ومن ثم فإن : $X^4 + 2X^2 + 25$ هى كثيرة الحدود الصغرى المطلوبة .

لاحظ أن $\sqrt{-3} + \sqrt{2}$ صفر لها ، وهى مطبوعة ، وهى غير قابلة للتبسيط على $\mathbb{Q}$.

مثال ٣٤ : ليكن E امتداداً منتهياً للحقل $\mathbb{R}$. برهن على أن $E = \mathbb{R}$ أو $E = \mathbb{C}$

البرهان : الحقل E امتداد منته للحقل $\mathbb{R}$ فينتج أن E امتداد جبرى للحقل $\mathbb{R}$

(انظر (٢-٦-١)). وبالتالي فإن $E \subset \mathbb{C}$. ولكن :

$$2 = [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = [\mathbb{C} : E][E : \mathbb{R}] \quad (\text{من نظرية الدرجة})$$

أى أن $[C:E]=2$ أو $[C:E]=1$

$[C:E]=2$ يقتضى أن $E = \mathbb{R}$ ، $[C:E]=1$ يقتضى أن $E = \mathbb{C}$.

مثال ٣٥ : ليكن $a, b \in \mathbb{Q}$ ، $b \neq 0$. برهن على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ يستلزم أنه

يوجد $c \in \mathbb{Q}$ بحيث يكون $a = bc^2$.

البرهان : لدينا حالتان : الحالة الأولى : $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. وبالتالي فإن $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. نعرف

$$c := \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \in \mathbb{Q} \text{ أى أن } a = c^2 b$$

الحالة الثانية : $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$: وبالتالي فإن $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. ضع $\sqrt{a} = x + y\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{b})$.

فينتج أن $x = 0$ ومن ثم فإن $a = by^2$.

مثال ٣٦ : لتكن $f := aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$. اوجد عنصراً بدائياً (انظر (١-٣-٣))

لحقل التشقيق لـ f على $\mathbb{Q}$

$$\text{الحل : إذا كان } \alpha \text{ صفراً لـ } f \text{ فإن : } a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبالتالى فإن العنصر البدائى $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يجعل $\mathbb{Q}(\sqrt{b^2 - 4ac})$ حقل تشقيق لـ f على $\mathbb{Q}$.

مثال ٣٧ : ليكن E امتداداً للحقل F ، $\alpha \in E$ جبرياً على F ، $\beta \in F(\alpha)$.

برهن على أن درجة β تقسم درجة α .

الحل : درجة α هى درجة كثيرة الحدود الصغرى من العنصر α على الحقل F

(راجع (١-٤-١)، (١-٣-٥)) ، وبالطبع كذلك بالنسبة إلى β . كذلك لدينا من (١-٥-٥) :

درجة كثيرة الحدود الصغرى من α بالنسبة إلى الحقل F هى : $[F(\alpha):F]$ (وبالمثل

بالنسبة إلى β) . والآن

$$F \subset F(\beta) \subset F(\alpha) \quad (\text{لأن } \beta \in F(\alpha))$$

$$\Rightarrow [F(\alpha):F] = [F(\alpha):F(\beta)] \cdot [F(\beta):F] \quad (\text{نظرية الدرجة})$$

أى أن درجة β تقسم درجة α .

مثال ٣٨ : برهن على أنه لا يوجد عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ يكون صفراً لكثيرة الحدود $X^3 - 2$

البرهان : أى صفر لكثيرة الحدود $X^3 - 2$ ستكون كثيرة الحدود هذه بالنسبة له هى كثيرة الحدود الصغرى على $\mathbb{Q}$ ، ودرجته هى درجتها 3 . بينما لا يوجد أى عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ درجته 3 ، لأنه لا يوجد أى عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ تكون كثيرة الحدود الصغرى له على $\mathbb{Q}$ درجتها 3 .

مثال ٣٩ : برهن على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$

البرهان : $\sqrt{3}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ يقتضى أن $\sqrt{3} + \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ أى أن $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$. (1)
والآن $\sqrt{3} + \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ يقتضى أن

$$(\sqrt{3} + \sqrt{7})^{-1} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$$

أى أن $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ ومن ثم فإن : $\sqrt{7} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

ولكن $\sqrt{3} + \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ ، وبالتالي فإن $\sqrt{3}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ أى أن $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$. من (1) ، (2) ينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٤٠ : اوجد درجة كل من الامتدادين الآتيين وأساسا لكل منهما :

(أ) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$

(ب) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ على $\mathbb{Q}$

الحل :

(أ) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))(\sqrt{3})$

وبالتالى فمن نظرية الدرجة :

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [(\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3}))]. [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$$

$$= \deg(X^3 - 2). \deg(X^2 - 2) = 3.2 = 6$$

سنأخذ أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ، $\{1, \sqrt{3}\}$ أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$ (انظر (١-٥-٥)) ، ومن ثم سنأخذ

$$\{1, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}\sqrt{3}\}$$

أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$ (انظر برهان نظرية الدرجة)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) = ((\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3}))(\sqrt{5}) \quad (\text{ب})$$

وبالتالى فمن نظرية الدرجة

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})]. [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})].$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$$

نظرية الدرجة

$$= \deg(X^2 - 5). \deg(X^2 - 3). \deg(X^2 - 2) = 2.2.2 = 8$$

سنأخذ أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ، $\{1, \sqrt{5}\}$ أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\{1, \sqrt{2}\}$ أساساً للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$. ومن ثم (كما سبق) نأخذ

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{5}, \sqrt{3}\sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}$$

أساساً للامتداد

مثال ٤١ : أوجد درجة كل من امتدادات الحقول الآتية ، وأوجد أساساً فى كل حالة :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \quad (\text{أ})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{10}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \quad (\text{د})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad (\text{ج})$$

الحل : (أ)

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$$

$$= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = \deg(X^2 - 2) = 2$$

سنأخذ الأساس $\{1, \sqrt{2}\}$

(ب)

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = [(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$$

مثال ١٨

$$= \deg(X^2 - 2) = 2$$

سنأخذ الأساس $\{1, \sqrt{2}\}$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})] = 1 \quad (\text{جـ})$$

مثال ١٨

وسنأخذ الأساس $\{1\}$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{10}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})] \quad (\text{د})$$

$$= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})) : \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})]$$

$$= [(\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}))(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})]$$

$$= \deg(X^2 - 2) = 2$$

سنأخذ الأساس $\{1, \sqrt{2}\}$

مثال ٤٢ : حدد : أى التقارير الآتية صحيح وأيها خاطئ

(١) كل امتداد حقل منته يكون امتداداً جبرياً

(٢) كل امتداد جبرى لحقل يكون امتداداً منتهياً

(٣) الحقل "القمة" "لبرج" منته من امتدادات منتهية لحقول يكون امتداداً منتهياً للحقل "القاع"

(إذا كان لدينا "عمود" من الحقول كل حقل يحتوى على الحقل الذى يسبقه مباشرة فإنه

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

يقال إن لدينا "برجاً" (tower) من الحقول . مثال ذلك

(٤) $\mathbb{R}$ مغلقه جبرياً

(يقال لحقل F إنه مغلق جبرياً (algebraically closed) إذا كانت كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[X]$ لها صفر في F)

(٥) $\mathbb{Q}$ مغلقه جبرياً داخل $\mathbb{R}$

(٦) $\mathbb{C}$ مغلقه جبرياً داخل $\mathbb{C}(X)$ ، حيث X غير محددة

(٧) $\mathbb{C}(X)$ مغلقه جبرياً ، حيث X غير محددة

(٨) الحقل $\mathbb{C}(X)$ ليس له إغلاق جبرى (algebraic closure) ، لأن $\mathbb{C}$

تحتوى جميع الأعداد الجبرية

(ليكن E امتداداً للحقل F . عندئذ فإن :

$$\overline{F}_E := \{ \alpha \in E \mid \alpha \text{ جبرى على } F \}$$

هو حقل جزئى من E ، يسمى الإغلاق الجبرى لـ F فى E)

(٩) مميز أى حقل مغلق جبرياً يساوى الصفر

(١٠) إذا كان E امتداداً مغلقاً جبرياً للحقل F ، فإن E يكون امتداداً جبرياً لـ F

الحل : (١) ، (٣) ، (٦) صحيحة . والباقى خاطئ .

مثال ٤٣ : الحقل $\overline{\mathbb{Q}}$: حقل جميع الأعداد المركبة الجبرية على $\mathbb{Q}$ (تسمى باختصار

الأعداد الجبرية) مغلق جبرياً

$\mathbb{C}$ إغلاق جبرى على $\mathbb{R}$ ، لكن $\mathbb{C}$ ليست إغلاقاً جبرياً على $\mathbb{Q}$ ، لأنه توجد أعداد متسامية

الحقل $\overline{\mathbb{Q}}$ إغلاق جبرى لـ $\mathbb{Q}$

مثال ٤٤ : برهن على أن الحقل F يكون مغلقاً جبرياً إذا كانت فقط إذا كانت كل كثيرة

حدود غير ثابتة فى $F[X]$ تتحلل إلى عوامل خطية .

البرهان : ليكن الحقل F مغلقاً جبرياً . ولتكن f كثيرة حدود غير ثابتة فى $F[X]$.

عندئذ فإن f لها صفر $a \in F$. ومن (٢-٢-٢) فى نظرية الحلقات يكون $X - a$

عاملاً لـ f ، بحيث يكون $f = (X - a)g$. عندئذ إذا كانت g ليست ثابتة فيكون لها

صفر $b \in F$ ، ويكون $f = (X - a)(X - b)h$. وبالاستمرار بهذه الطريقة

نحصل على تحليل لـ f فى صورة عوامل خطية .

وبالعكس ، لتكن كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[X]$ لها تحليل في صورة عوامل خطية .
إذا كان $aX - b$ عاملاً خطياً لـ f ، فإن b/a يكون صفراً لـ f . وهكذا يكون F مغلقاً جبرياً .

مثال ٤٥ : برهن على أن أى حقل مغلق جبرياً لا يكون له امتدادات جبرية فعلية ، أى أنه لا توجد امتدادات جبرية E بحيث يكون $F \subsetneq E$

البرهان : ليكن E امتداداً جبرياً لـ F ، بحيث يكون $F \subsetneq E$. عندئذ إذا كان $\alpha \in E$ ، فلدينا من مثال ٤٤ السابق مباشرة ، كثيرة الحدود الصغرى لـ α على F : $f = X - \alpha$ (لأن F مغلق جبرياً) ، وهكذا فإن $\alpha \in F$ ، وبالتالي فإن $E = F$.
مثال ٤٦ : لتكن $f \in F[X]$. إذا كانت a تنتمي إلى امتداد ما لـ F ، $f(a)$ جبرية على F . برهن على أن a جبرية على F .

البرهان : $f(a)$ جبرية على F تقتضى وجود $g \in F[X]$ بحيث إن $g(f(a)) = 0$ وهذا معناه أنه $(g \circ f)(a) = 0$ حيث $g \circ f \in F[X]$ أى أن a جبرية على F .

مثال ٤٧ : برهن على أن $X^2 - 3$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

البرهان : أى عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ يكون على الصورة $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ حيث $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (انظر مثال ٧ ونظرية (١-٥-٥) حيث $X^3 - 2$ هى كثيرة الحدود الصغرى للعنصر $\sqrt[3]{2}$ على $\mathbb{Q}$) . وإذا كانت $X^2 - 3$ قابلة للتبسيط (للتحليل) على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ فإنه يكون لها صفر فى الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ أى أنه يوجد $a, b, c \in \mathbb{Q}$ بحيث يكون :

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^2 - 3 = 0$$

أى أن :

$$a^2 + 4bc + (2c^2 + 2ab)2^{2/3} + (b^2 + 2ac)2^{4/3} = 3$$

ومن حيث إن $\{1, 2^{1/3}, 2^{2/3}\}$ أساس للفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ على $\mathbb{Q}$ ، فإن :

$$a^2 + 4bc = 3, \quad (1)$$

$$c^2 + ab = 0, \quad (2)$$

$$b^2 + 2ac = 0 \quad (3)$$

من (2) نحصل على (4) $a = -\frac{c^2}{b}$ حيث $b \neq 0$. $b = 0$ يقتضى أن $a = \pm\sqrt{3}$

وهذا تناقض لأن $a \in \mathbb{Q}$. ومن (3) نحصل على (5) $a = -\frac{b^2}{2c}$ ، $c \neq 0$.

($c = 0$) تؤدي إلى نفس التناقض السابق) . من (4) ، (5) نحصل على (6)

$a^2 = \frac{bc}{2}$ ، وبالتعويض من (6) فى (1) نحصل على : $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ وهذا تناقض

كما سبق . وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٤٨ : برهن على أن امتداد الحقل $\mathbb{Q}(i, -i, \sqrt{5}, -\sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}$ بسيط

البرهان : سنبرهن على أن $\mathbb{Q}(i, -i, \sqrt{5}, -\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$.

" $\supset$ " : واضح . سنبرهن الآن على الاحتواء الآخر " $\subset$ " : كالآتى :

$$i + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5}) \Rightarrow 4 + 2i\sqrt{5} = -1 + 2i\sqrt{5} + 5 = (i + \sqrt{5})^2 \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow 14i + 2\sqrt{5} = (i + \sqrt{5})(4 + 2i\sqrt{5}) \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow -12i = 2(i + \sqrt{5}) - 14i - 2\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5}) \Rightarrow i \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = i + \sqrt{5} - i \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5}) \Rightarrow i, -i, \sqrt{5}, -\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$$

مثال ٤٩ : أوجد الحقول الجزئية من $\mathbb{C}$ المتولدة بـ :

$$\{0\} \quad (٢) \quad \{0, 1\} \quad (١)$$

$$\{i, \sqrt{2}\} \quad (٤) \quad \{0, 1, i\} \quad (٣)$$

$$\mathbb{R} \quad (٦) \quad \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \quad (٥)$$

$$\mathbb{R} \cup \{i\} \quad (٧)$$

الحل : (١) $\mathbb{Q}$

(٢) لا يوجد (الحقل يحتوى على عنصرين على الأقل ! فلا يمكن أن يكون الحقل الجزئى $\{0\}$)

$$\{p + iq \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \quad (٣)$$

$$\{a + ib + \sqrt{2}c + i\sqrt{2}d \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \quad (٤)$$

$$\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \quad (٥)$$

$$\mathbb{R} \quad (٦)$$

$$\mathbb{C} \quad (٧)$$

مثال ٥٠ : صف الحقول الجزئية من $\mathbb{C}$ التى على الشكل :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \quad (١) \quad \mathbb{Q}(i) \quad (٢)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha) \quad (٣) \quad \text{حيث } \alpha \text{ هو الجذر التكعيبي الحقيقى لـ } 2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) \quad (٤) \quad \mathbb{Q}(i, \sqrt{11}) \quad (٥)$$

الحل :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad (١)$$

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad (٢)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \quad (٣)$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{5} + c\sqrt{7} + d\sqrt{35} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \quad (٤)$$

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt{11}) = \{a + bi + c\sqrt{11} + d\sqrt{11}i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \quad (٥)$$

مثال ٥١ : ليكن $K = \mathbb{Z}_2$. صف الحقول الجزئية من $K(t)$ التى على الشكل :

$$K(t^2) \quad (١) \quad K(t+1) \quad (٢)$$

$$K(t^5) \quad (٣) \quad K(t^2+1) \quad (٤)$$

الحل :

(١) عناصر الحقل الجزئى هى كل التعبيرات الخالية من القوى الفردية لـ t

(٢) $K(t)$

(٣) عناصر الحقل الجزئى هى كل التعبيرات التى قوى t فيها مضاعفات 5

(٤) تماماً مثل (١)

مثال ٥٢ : عين أى امتدادات الحقول فى مثالى ٥٠ ، ٥١ يكون امتداداً جبرياً بسيطاً ، أو متسامياً بسيطاً .

الحل : الامتدادات فى مثال ٥١ كلها متسامية بسيطة . فى مثال ٥٠ الامتدادات الأربعة الأولى جبرية بسيطة. الامتداد الأخير (٥) جبرى لكنه ليس بسيطاً. لبيان أن الامتداد (٤) فى مثال ٥٠ بسيط ، نثبت أن

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

">" : واضح . لبيان "<" :

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

$$\Rightarrow \sqrt{7} - \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \Rightarrow \sqrt{5}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

(انظر مثال ٣٩) .

مثال ٥٣ : حدد : أى التقارير الآتية صحيح وأيها خاطئ :

(١) كل حقل له امتداد غير تافه

(٢) كل حقل له امتداد جبرى غير تافه

(٣) كل امتداد بسيط يكون جبرياً

(٤) كل امتداد يكون بسيطاً

(٥) كل الامتداد الجبرية البسيطة تكون متشاكلية (أيزومورفية)

(٦) كل الامتدادات المتسامية البسيطة لحقل ما تكون متشاكلية

(٧) كل كثيرة حدود صغرى تكون مطبوعة

(٨) كثيرات الحدود المطبوعة تكون دائماً غير قابلة للتبسيط (للتحليل)

(٩) كل كثيرة حدود هي حاصل ضرب ثابت في كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط .

الحل : (١) ، (٦) ، (٧) صحيحة والباقي خاطئ

مثال ٥٤ : ليكن K امتداداً للحقل F . وليكن K_1 ، K_2 امتدادين للحقل F

يحتويهما الحقل K . إذا كان $[E_1:F]$ ، $[E_2:F]$ عددين أوليين ، فبرهن على أن

$$E_1 \cap E_2 = F \text{ أو } E_1 = E_2$$

البرهان : ليكن $E_1 \cap E_2 \neq F$. عندئذ فإنه من نظرية الدرجة يكون :

$$[E_1 : E_1 \cap E_2][E_1 \cap E_2 : F] = [E_1 : F]$$

ولأن $E_1 \cap E_2 \neq F$ فإن $[E_1 \cap E_2 : F] \neq 1$ ، ولأن $[E_1 : F]$ عدد أولي فينتج

أن $[E_1 : E_1 \cap E_2] = 1$ ، أى أن $E_1 = E_1 \cap E_2$ ، وبالمثل نثبت أن $E_2 = E_1 \cap E_2$

وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٥٥ : ليكن $p(X) \in F[X]$ ، E امتداداً منتهياً للحقل F . إذا كانت $p(X)$

غير قابلة للتحليل (للتبسيط) على F (بعبارة مكافئة في $F[X]$) ، وكان

$$1 = ([E : F], \deg(p(X))) \text{ (أى ليس بينهما قواسم مشتركة غير الواحد) فبرهن}$$

على أن $p(X)$ غير قابلة للتحليل على E .

البرهان : ليكن a صفراً لـ $p(X)$ فى امتداد ما لـ F . لاحظ أولاً أن :

$$[E(a) : E] \leq [F(a) : F] = \deg(p(X))$$

$$[E(a) : F(a)][F(a) : F] = [E(a) : E][E : F]$$

وهذا يستلزم أن $\deg(p(X))$ يقسم $[E(a) : E]$ ، (لأن $1 = ([E : F], \deg(p(X)))$ ،

وبالتالى فإن

$$\deg(p(X)) = [E(a) : E]$$

وينتج المطلوب .

مثال ٥٦ : برهن على أن الجدولين الآتيين يعرفان حقلاً

+	0	1	α	β	.	0	1	α	β
0	0	1	α	β	0	0	0	0	0
1	1	0	β	α	1	0	1	α	β
α	α	β	0	1	α	0	α	β	1
β	β	α	1	0	β	0	β	1	α

اوجد حقله الأولى ومميزه . هل هذا الحقل يشاكل $\mathbb{Z}_4$ ؟ كم عدد الحقول - بدون حساب

الأيزومورفيزمات (التشاكلات) - التى تتكون بالضبط من أربعة عناصر ؟

الحل : يترك للقارئ التحقق من أن الجدولين يعرفان حقلاً .

واضح أن الحقل الأولى هو $\mathbb{Z}_2$. ومميز الحقل - بالطبع - هو 2 . الحقل المعروف لا

يشاكل $\mathbb{Z}_4$ لأن $\mathbb{Z}_4$ ليس حقلاً (بل هو حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة) . يوجد حقل

واحد يتكون بالضبط من أربعة عناصر ، كما سنرى عندما ندرس الحقول المنتهية .

مثال ٥٧ : اوجد كثيرات الحدود الصغرى على الحقول "الصغيرة" للعناصر الآتية فى

الامتدادات الآتية:

(أ) $i \in \mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$

(ب) $i \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$

(ج) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$

(د) $(\sqrt{5}+1)/2 \in \mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$

(هـ) $(i\sqrt{3}-1)/2 \in \mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$

(و) $\alpha \in K \supset P$ حيث K الحقل فى مثال ٥٦ السابق مباشرة ، P حقله الأولى

(ز) $\alpha \in \mathbb{Z}_3(t)(\alpha) \supset \mathbb{Z}_3(t)$ حيث t غير محدد ، $\alpha^2 = t+1$

الحل :

(أ) لدينا $t = i$ ومن ثم فإن $t^2 + 1 = 0$ فنعرف كثيرة الحدود الصغرى ، هي $f := t^2 + 1$
(ب) تماماً مثل (أ)

(ج) ضع $t = \sqrt{2}$ ومن ثم فإن $t^2 - 2 = 0$ ، فتكون كثيرة الحدود الصغرى هي : $f := t^2 - 2$

(د) ضع $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ وبالتالي فإن : $2t - 1 = \sqrt{5}$ ومن ثم فإن : $4t^2 - 4t + 1 = 5$ ،

أى أن $t^2 - t - 1 = 0$ فتكون كثيرة الحدود الصغرى هي : $f := t^2 - t - 1$

(هـ) ضع $t = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ هذا يقتضى أن $2t + 1 = i\sqrt{3}$ ومن ثم فإن : $4t^2 + 4t + 1 = -3$

أى أن $t^2 + t + 1 = 0$ ، فتكون كثيرة الحدود الصغرى هي : $f := t^2 + t + 1$
(و) من جدول الضرب " . لدينا $\alpha^2 = \beta$ ، ومن جدول الجمع لدينا $\beta = \alpha + 1$ فواضح

أن كثيرة الحدود الصغرى ستكون : $t^2 - t - 1$ أى هي $f := t^2 + t + 1$ (مميز الحقل = 2).
(لاحظ أن هناك تماثلاً في الجدول ، فكذلك $\beta^2 = \alpha$ ، $\beta = \alpha + 1$)

(ز) كثيرة الحدود الصغرى هي : $f := X^2 - t - 1$

(معتبرة ككثيرة حدود فى X) لأنها مطبوعة : معامل X^2 هو الواحد ، وهى غير

قابلة للتحويل فى $\mathbb{Z}_3(t)$ ، $f(\alpha) = t + 1 - t - 1 = 0$ ،

مثال ٥٨ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صائبة أم خاطئة :

- (١) الامتدادات ذات الدرجة نفسها تكون متشاكله
- (٢) الامتدادات المتشاكله يكون لها نفس الدرجة
- (٣) كل امتداد متسام يكون غير منته
- (٤) كل عنصر فى $\mathbb{C}$ يكون جبرياً على $\mathbb{R}$
- (٥) كل امتداد لـ $\mathbb{R}$ يكون منتهياً
- (٦) كل امتداد جبرى لـ $\mathbb{Q}$ يكون منتهياً
- (٧) حقل الأعداد الجبرية هو أكبر حقل حقل جزئى فى $\mathbb{C}$ يكون جبرياً على $\mathbb{Q}$

(٨) كل فراغ خطى يكون متشاكلاً مع الفراغ الخطى المناظر لامتداد حقل ما

(٩) كل امتداد لحقل منته يكون منتهياً

الحل : (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٧) ، (٨) صحيحة . الباقي خاطئ

مثال ٥٩ : كثيرة الحدود $X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ تتشقق على $\mathbb{C}$ لأننا يمكننا أن نكتب :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - \omega)(X - \omega^2)$$

حيث $1, \omega, \omega^2$ الجذور التكعيبية للواحد ، أى أن $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ لكننا فى مثال ١٩

أوجدنا حقل التشقيق لكثيرة الحدود وهو $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

مثال ٦٠ : أوجد حقل التشقيق لكثيرة الحدود $X^4 - 4X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$

الحل :

$$X^4 - 4X^2 - 5 = (X^2 - 5)(X^2 + 1)$$

$$= (X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})(X - i)(X + i)$$

ومن ثم فإن حقل تشقيق كثيرة الحدود المعاطاة هو : $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$

مثال ٦١ : أوجد حقل تشقيق كثيرة الحدود $f := t^5 - 3t^3 + t^2 - 3 \in \mathbb{Q}[t]$

الحل :

$$f := t^5 - 3t^3 + t^2 - 3 = (t^2 - 3)(t^3 + 1)$$

$$= (t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3})(t + 1)(t^2 - t + 1)$$

$$= (t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3})(t + 1)\left(t - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$$

واضح أن حقل التشقيق هو

وهو نفس الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ (لماذا ؟)

وهو نفس الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ (لماذا ؟)

لكن ليس هو الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$. واضح أن $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$

مثال ٦٢ : اوجد حقل تشقيق $f := (X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1) \in \mathbb{Q}[X]$

الحل : أصفار f في $\mathbb{C}$ هي $\pm i, 1 \pm \sqrt{3}$. وبهذا يكون

حقل تشقيق f هو $\mathbb{Q}(i, -i, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

وهو نفس الحقل $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$ (لماذا ؟)

أى هو نفس حقل كثيرة الحدود في مثال ٦١ على الرغم من أن كثيرتى الحدود مختلفتان .

مثال ٦٣ : مدخل آخر مختلف قليلا عن المدخل في مثال ٨ السابق . كما ذكرنا في

الملحوظة عقب مثال ٨ فإننا لانستخدم $\mathbb{C}$. ولهذا فإننا يجب أن نعتمد على التكوين

الأساسى لحقل تشقيق كثيرة الحدود $f := X^2 + X + \bar{1}$ على $\mathbb{Z}_2$.

الحقل $\mathbb{Z}_2$ يتكون من عنصرين $\bar{0}$ ، $\bar{1}$. نلاحظ أن f غير قابلة للتبسيط (للتحليل)

على $\mathbb{Z}_2$ ، ولهذا سنضم (سنلحق) عنصرا η بحيث يكون η لها كثيرة الحدود

الصغرى f على $\mathbb{Z}_2$. عندئذ فإن : $\eta^2 + \eta + \bar{1} = \bar{0}$ ، أى أن $\eta^2 = \eta + \bar{1}$

(مميز الحقل = 2) . نحن ندعى أن الأربعة عناصر الآتية تكون حقلًا

$$\bar{0}, \bar{1}, \eta, \bar{1} + \eta$$

وللبرهنة على ذلك سننشئ جدولى الجمع والضرب

+	0	$\bar{1}$	η	$\bar{1} + \eta$	.	0	$\bar{1}$	η	$\bar{1} + \eta$
0	0	$\bar{1}$	η	$\bar{1} + \eta$	0	0	0	0	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	$\bar{1} + \eta$	η	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	η	$\bar{1} + \eta$
η	η	$\bar{1} + \eta$	0	$\bar{1}$	η	0	η	$\bar{1} + \eta$	$\bar{1}$
$\bar{1} + \eta$	$\bar{1} + \eta$	η	$\bar{1}$	0	$\bar{1} + \eta$	0	$\bar{1} + \eta$	$\bar{1}$	η

مثال للحساب :

$$\eta(\bar{1} + \eta) = \eta + \eta^2 = \eta + \bar{1} + \eta = \bar{2}\eta + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$$

أى أن $\mathbb{Z}_2(\eta)$ حقل ذو أربعة عناصر . والآن f تتشقق على $\mathbb{Z}_2(\eta)$. وليبان ذلك نجرى القسمة المطولة

$$\begin{array}{r} X + \bar{1} + \eta \\ X - \eta \overline{) \begin{array}{l} X^2 + X + \bar{1} \\ X^2 - \eta X \\ \hline (\bar{1} + \eta)X + \bar{1} \\ (\bar{1} + \eta)X - \eta - \eta^2 \\ \hline \bar{1} + \eta + \eta^2 = \bar{0} \end{array}} \end{array}$$

$$X^2 + X + \bar{1} = (X - \eta)(X + \bar{1} + \eta) \quad \text{أى أن}$$

$$= (X - \eta)(X - \bar{1} - \eta)$$

(المميز = 2)

f تتشقق على $\mathbb{Z}_2(\eta)$ ، لكنها لا تتشقق على حقل أصغر منه .

أى أن $\mathbb{Z}_2(\eta)$ هو حقل تشقيق f .

مثال ٦٤ : حدد : أى التقريرين الآتيين صحيح ، وأيهما خاطئ :

(١) كل كثيرة حدود تتشقق على حقل ما

(٢) حقول التشقيق وحيدة ، بدون حساب الأيزومورفيزمات

الحل : التقريران صحيحان

مثال ٦٥ : حدد : أى التقارير الآتية صائب وأيهما خاطئ :

(١) إذا كان $\alpha, \beta \in E$ ، حيث $E \subset \bar{F}$ حقل تشقيق على F فإنه يوجد

أوتومورفيزم σ لـ E (أى أيزومورفيزم من E إلى E) يترك F ثابتاً ، ويرسم α على

β إذا كانت فقط إذا كانت كثيرة الحدود الصغرى من α على F هي نفس كثيرة الحدود الصغرى من β على F .

(٢) $\mathbb{R}$ حقل تشقيق على $\mathbb{Q}$

يقال إن E حقل تشقيق على الحقل F إذا كان E حقل تشقيق لبعض كثيرات الحدود في $F[X]$

(٣) $\mathbb{R}$ حقل تشقيق على $\mathbb{R}$

(٤) $\mathbb{C}$ حقل تشقيق على $\mathbb{R}$

(٥) $\mathbb{Q}(i)$ حقل تشقيق على $\mathbb{Q}$

(٦) $\mathbb{Q}(\pi)$ حقل تشقيق على $\mathbb{Q}(\pi^2)$

(٧) لكل حقل تشقيق E على F ، حيث $E \subset \bar{F}$ كل راسم أيزومورفي (isomorphic mapping) E إلى $\bar{F}$ يكون أوتومورفيزمًا لـ E

(٨) لكل حقل تشقيق E على F ، حيث $E \subset \bar{F}$ (انظر مثال ٤٢)، كل أيزومورفيزم يرسم E في $\bar{F}$ هو أوتومورفيزم لـ E

(٩) لكل حقل تشقيق E على F ، حيث $E \subset \bar{F}$ ، كل أيزومورفيزم يرسم E في $\bar{F}$ ، تاركًا F ثابتًا، هو أوتومورفيزم لـ E

(١٠) كل إغلاق جبري $\bar{F}$ لـ F هو حقل تشقيق على F

الحل: (٢)، (٧)، (٨) خاطئة. باقي التقارير صحيحة.

مثال ٦٦: أوجد حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$. ما درجة امتداد حقل التشقيق على $\mathbb{Q}$ ؟

الحل:

$$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4})$$

$$\begin{aligned} X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4} = 0 &\Rightarrow X = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}[-1 \pm \sqrt{-3}]}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}[-1 \pm \sqrt{3}i]}{2} \end{aligned}$$

وبالتالى فإن حقل التشقيق المطلوب هو : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ (لماذا ؟)

(لاحظ أن $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$)

والآن : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(i\sqrt{3})] = 3$

لأن $\deg(X^3 - 2) = 3$ ، حيث $X^3 - 2$ هي كثيرة الحدود الصغرى من $\sqrt[3]{2}$ على $\mathbb{Q}$

كذلك فإن : $[\mathbb{Q}(i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$

لأنه بوضع $X = i\sqrt{3}$ ينتج أن : $X^2 + 3 = 0$

وتكون $X^2 + 3$ هي كثيرة الحدود الصغرى من $i\sqrt{3}$ على $\mathbb{Q}$ ودرجتها 2

وبالتالى فإنه من نظرية الدرجة يكون

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(i\sqrt{3})][\mathbb{Q}(i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$$

$$= 3 \cdot 2 = 6$$

مثال ٦٧ : اوجد حقل تشقيق $\{X^2 - 2, X^2 - 3\}$ على $\mathbb{Q}$

الحل : حقل التشقيق المطلوب هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

مثال ٦٨ : اوجد حقل تشقيق $f := (X^2 - 2)(X^3 - 2) \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$.

واوجد درجته : (أى درجة الامتداد لحقل التشقيق على الحقل $\mathbb{Q}$)

الحل : $(X^2 - 2)(X^3 - 2) = 0 \Rightarrow X = \pm\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \alpha, \beta$

حيث α, β جذرا المعادلة $X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4} = 0$

$$\frac{\sqrt[3]{2}[-1 \pm \sqrt{3}i]}{2} \quad \text{أى هما}$$

(انظر مثال ٦٦ السابق)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i)$$

وبهذا يكون حقل التشقيق هو

لإيجاد الدرجة :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i) = (\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i))(\sqrt{2})$$

$$[(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i))(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i)] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 6 \quad (\text{من مثال ٦٦})$$

ومن ثم فإن :

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i) : \mathbb{Q}] = 6.2 = 12$$

مثال ٦٩ : ليكن α صفراً لـ $X^3 + X^2 + \bar{1}$ على $\mathbb{Z}_2$. برهن على أن $X^3 + X^2 + \bar{1}$

تتشقق على $\mathbb{Z}_2(\alpha)$. اوجد صفرين آخرين بالإضافة إلى α لـ $X^3 + X^2 + \bar{1}$

الحل : إذا كانت α صفراً لـ $X^3 + X^2 + \bar{1}$ على $\mathbb{Z}_2$ فإن :

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1} = 0 \quad \text{والآن } X - \alpha \text{ عامل من عوامل } X^3 + X^2 + \bar{1} \text{ فنستخدم}$$

القسمة المطولة كالاتى :

$$\begin{array}{r} X^2 + (\alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha \\ X - \alpha \overline{) \begin{array}{l} X^3 + X^2 + \bar{1} \\ X^3 - \alpha X^2 \\ \hline (\alpha + \bar{1})X^2 + \bar{1} \\ (\alpha + 1)X^2 - \alpha^2 X - \alpha X \\ \hline (\alpha^2 + \alpha)X + \bar{1} \\ (\alpha^2 + \alpha)X - \alpha^3 - \alpha^2 \\ \hline \alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1} = 0 \end{array}} \end{array}$$

$$X^3 + X^2 + \bar{1} = (X - \alpha)[X^2 + (\alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha] \quad \text{أى أن}$$

واضح أن α^2 صفر آخر لكثيرة الحدود $X^3 + X^2 + \bar{1}$ ، لأنه صفر لكثيرة الحدود $X^2 + (\alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha$ ، كما يتضح مما يأتى بالتعويض عن X بـ α^2 :

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^4 + \alpha^3 + \bar{2}\alpha^2 + \alpha = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha(\alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1})$$

$$= \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

كذلك فإن $\bar{1} + \alpha + \alpha^2$ صفر لكثيرة الحدود $X^3 + X^2 + \bar{1}$ ، لأنه بالتعويض عن X فى $X^2 + (\alpha + \bar{1})X + \alpha^2 + \alpha$ بـ $\bar{1} + \alpha + \alpha^2$ نحصل على :

$$(\alpha^2 + \alpha + \bar{1})^2 + (\alpha + \bar{1})(\alpha^2 + \alpha + \bar{1}) + \alpha^2 + \alpha$$

$$= \alpha^4 + \alpha^2 + \bar{1} + \bar{2}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^2 + \bar{2}\alpha + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha + \bar{1} + \alpha^2 + \alpha$$

$$= \alpha^4 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{6}\alpha^2 + \bar{5}\alpha + \bar{2} = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha(\alpha^3 + \alpha^2 + \bar{1}) = \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

(الحساب فى $\mathbb{Z}_2$) . ومن حيث إن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ، ولدينا أصفار ثلاثة ، فيكون $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ حقل التشقيق لها .

ملحوظة : لاحظ أن $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ يتكون من ثمانية عناصر هى :

$$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2, \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2 \quad \text{راجع مثال ٧ .}$$

تمارين عامة (١)

(١) لكل من الأعداد $\alpha \in \mathbb{C}$ الآتية ، برهن على أن α جبرى على $\mathbb{Q}$ بإيجاد $f \in \mathbb{Q}[X]$ بحيث يكون $f(\alpha) = 0$.

(أ) $1 + \sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(جـ) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ (د) $1 + i$

(هـ) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - i}$

(٢) (أ) برهن على أن كثيرة الحدود $X^2 + 1$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) في $\mathbb{Z}_3[X]$

(ب) ليكن α صفراً لكثيرة الحدود $X^2 + 1$ في امتداد للحقل $\mathbb{Z}_3$. اكتب جدولاً

الجمع والضرب للعناصر التسعة في $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ مكتوبة في الترتيب :

$$0, \bar{1}, \bar{2}, \alpha, \bar{2}\alpha, \bar{1} + \alpha, \bar{1} + \bar{2}\alpha, \bar{2} + \alpha, \bar{2} + \bar{2}\alpha.$$

(٣) برهن على أنه يوجد حقل مكون من 49 عنصراً

(٤) برهن على أنه يوجد حقل مكون من 125 عنصراً

(٥) اوجد درجة كل من امتدادات الحقول الآتية :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q} \quad (\text{ب}) \quad \mathbb{Q}(7) \supset \mathbb{Q} \quad (\text{أ})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{24}) \supset \mathbb{Q} \quad (\text{د}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) \supset \mathbb{Q} \quad (\text{جـ})$$

(٦) ما درجة امتداد الحقول التي يمكننا أن نحصل عليها بإلحاق بالتتابع جذر تربيعي

لعنصر بحقل F ، وهذا العنصر ليس مربعاً في F ، ثم إلحاق جذر تربيعي لعنصر

وهذا العنصر ليس مربعاً في الحقل الجديد ، وهكذا ... ؟

$$(٧) \text{ عين عناصر } \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$$

(٨) اوجد حقل التشقيق لكثيرة الحدود

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$

على $\mathbb{Q}$. عبر عن الإجابة في شكل $\mathbb{Q}(a)$

(٩) طبق ما أديناه في مثال ٩ على الآتي :

لتكن $f = (X^2 + 1)(X^3 + 2X + 2) \in \mathbb{Z}_3[X]$. (لاحظ أن $f = X^5 + 2X^2 + 2X + 2$) .

(١٠) لتكن α جبرية على $\mathbb{Q}$. برهن على أن $\sqrt{\alpha}$ جبرى على $\mathbb{Q}$.

(١١) اوجد درجة الامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ وأساساً له

(١٢) اوجد درجة الامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}) \supset \mathbb{Q}$ وأساساً له

(١٣) اوجد كثيرة الحدود الصغرى لـ $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ على $\mathbb{Q}$.

(١٤) اوجد حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^4 - X^2 - 2$ على $\mathbb{Z}_3$

(١٥) برهن على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots)$ هو امتداد جبرى لـ $\mathbb{Q}$ لكنه ليس منتهيا

(١٦) إذا كان E إغلاقا جبريا لـ F ، فبرهن على أن كل كثيرة حدود غير ثابتة في

$$F[X] \text{ تتشقق على } E$$

(١٧) ليكن E امتدادا جبريا لـ F . إذا كانت كل كثيرة حدود في $F[X]$ تتشقق على E ،

فبرهن على أن E مغلق جبريا .

(١٨) ليكن F حقلًا وكل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $F[X]$ خطية . برهن

على أن F مغلق جبريا

(١٩) ليكن E امتدادا للحقل F ودرجة الامتداد عدد أولي. برهن على أنه لكل $a \in E$

$$F(a) = E \text{ أو } F(a) = F$$

(٢٠) اوجد كثيرتى الحدود الصغريين من $\sqrt{2}$ على $\mathbb{R}$ ، على $\mathbb{Q}$

(٢١) برهن على أن $\mathbb{R}$ ليست امتدادا بسيطا لـ $\mathbb{Q}$ كالآتي :

(١) $\mathbb{Q}$ قابلة للعد (countable)

(٢) أى امتداد بسيط لحقل قابل للعد يكون قابلا للعد

(٣) $\mathbb{R}$ ليست قابلة للعد

(٢٢) ليكن K امتدادا للحقل F ، وليكن $a \in K$. برهن على أن : $[F(a):F(a^3)]=1$

$$\text{أو } [F(a):F(a^3)]=3$$

(٢٣) اضرب مثالا لامتداد جبرى يحتوى على عناصر من كل درجة على $\mathbb{Q}$

(٢٤) لتكن $m(t)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على K ، α لها كثيرة الحدود

الصغرى $m(t)$ على K . هل تتحلل $m(t)$ بالضرورة على $K(\alpha)$ إلى كثيرات حدود

خطية (أى لها الدرجة 1) ؟

(٢٥) لأي من القيم الآتية لـ $m(t)$ توجد امتدادات $K(\alpha) \mid K$ بحيث تكون α

لها كثيرة الحدود الصغرى $m(t)$ ؟

$$m(t) = t^2 - 4, K = \mathbb{R} \quad (أ)$$

$$m(t) = t^2 + 1, K = \mathbb{Z}_3 \quad (ب)$$

$$m(t) = t^2 + 1, K = \mathbb{Z}_5 \quad (جـ)$$

$$m(t) = t^7 - 3t^6 + 4t^3 - t - 1, K = \mathbb{R} \quad (د)$$

(٢٦) اوجد درجات الامتدادات الآتية :

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{Q} \quad (١) \quad \mathbb{Z}_5(t) \supset \mathbb{Z}_5 \quad (٢)$$

$$\mathbb{R}(\sqrt{5}) \supset \mathbb{R} \quad (٣) \quad \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q} \quad (٤) \quad \text{حيث } \alpha \text{ هو الجذر التكعيبي الحقيقي لـ } 2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{11}) \supset \mathbb{Q} \quad (٥) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \supset \mathbb{Q} \quad (٦)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q} \quad (٧) \quad \text{حيث } \alpha^7 = 3$$

$$\text{(الإجابة : (١) } \infty \text{ (٢) } \infty \text{ (٣) } 1 \text{ (٤) } 3$$

$$(٥) 8 \text{ (٦) } 2 \text{ (٧) } 7$$

(٢٧) برهن على أن أى عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ يمكن أن يعبر عنه بطريقة وحيدة كالاتى:

$$p + q\sqrt{5} + r\sqrt{7} + s\sqrt{35}$$

حيث p, q, r, s عناصر فى $\mathbb{Q}$.

(٢٨) إذا كانت $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = L$ حقولا ، فبرهن على أن :

$$[L : K] = [K_r : K_{r-1}] \dots [K_2 : K_1][K_1 : K_0]$$

(٢٩) اعتبر امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}}) \supset \mathbb{Q}$. عين درجة امتداد الحقل واوجد

أساساً له .

(٣٠) ليكن $L \supset k$ امتداد حقلي . برهن على أن الضرب بعنصر ثابت من L هو تحويل خطي (linear transformation) من L إلى L باعتبار L فراغا خطيا على K . متى يكون هذا التحويل الخطي لـ L غير استثنائي ؟

(٣١) برهن على أن كثيرتي الحدود $X^2 - 3, X^2 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ لهما نفس حقل التشقيق

(٣٢) اوجد حقول تشقيق على $\mathbb{Q}$ (تكون حقولا جزئية من $\mathbb{C}$) لكثيرات الحدود الآتية :

$$t^6 - 8, \quad t^4 + 5t^2 + 6, \quad t^3 - 27$$

(٣٣) اوجد درجات الحقول كامتدادات لـ $\mathbb{Q}$ في مثال ٣٢ السابق مباشرة

(٣٤) أنشئ حقل تشقيق لكثيرة الحدود $X^3 + 2X + 1$ على $\mathbb{Z}_3$

(٣٥) أنشئ حقل تشقيق لكثيرة الحدود $X^3 + X^2 + X + 2$ على $\mathbb{Z}_3$. هل هو يشاكل ذلك المنشأ في تمرين (٣٤) السابق مباشرة ؟

(٣٦) اسرد كل كثيرات الحدود المطبوعة من الدرجة الثانية على $\mathbb{Z}_5$. أيها يكون غير قابل للتحليل (للتبسيط) ؟ أنشئ حقول تشقيق لبعض هذه غير القابلة للتحليل . هل هذه الحقول متشاكلة ؟ كم عدد عناصر هذه الحقول ؟

(٣٧) إذا كانت f كثيرة حدود من الدرجة n على K ، وكان L حقل تشقيق لـ f على K ، فبرهن على أن $[L : K]$ يقسم $n!$

(٣٨) اوجد حقول التشقيق ودرجتها على $\mathbb{Q}$ لكثيرات الحدود الآتية في $\mathbb{Q}[X]$:

$$(أ) \quad X^2 + 3 \quad (ب) \quad X^4 - 1$$

$$(جـ) \quad (X^2 - 2)(X^2 - 3) \quad (د) \quad X^3 - 3$$

(٣٩) لتكن $f \in F[X]$. إذا كان $\deg(f) = 2$ ، a صفرا لـ f في امتداد ما لـ F . برهن على أن $F(a)$ حقل تشقيق لـ f على F .

(٤٠) لتكن f كثيرة حدود في $F[X]$ ، درجتها n . ليكن $E \subset \bar{F}$ هو حقل

تشقيق f على F في $\bar{F}$. ما حدود $[E : F]$ ؟

3 Field Theory نظرية الحقول



Galois Theory نظرية جالوا

١-٢ زمرة جالوا Galois groups

١-١-٢ ملحوظة :

لكل حقل K : من الواضح أن مجموعة أوتومورفيزمات K مع تركيبها تكون زمرة (التركيب هو عملية الزمرة) ، يشار إليها بالرمز $Aut(K)$ وتسمى زمرة أوتومورفيزمات K (Automorphisms group of K)

٢-١-٢ تعريف :

(١) ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . المجموعة الآتية

$$Aut(K; k) := \{\varphi \in Aut(K) \mid \varphi(a) = a \quad \forall a \in k\}$$

تكون زمرة جزئية من $Aut(K)$ (البرهان مباشر تماماً !) وتسمى هذه الزمرة الجزئية زمرة الأوتومورفيزمات النسبية لـ $K \supset k$

(The relative automorphisms of group) $K \supset k$ (أو زمرة جالوا لـ

$G(K/k)$ (Galois group of $K \supset k$) ، ويشار إليها أحيانا بالرمز $G(K/k)$

(ب) إذا كان k حقلا ، f كثيرة حدود ليست ثابتة في $k[X]$ ، $K \supset k$ حقل

التشقيق لـ f ، يسمى $Gal(f; k) := Aut(K; k)$ زمرة جالوا لـ f على k

(Galois group of f over k)

٢-١-٣ ملحوظة :

إذا كان P هو الحقل الأولي لحقل K ، فإن $Aut(K; P) = Aut K$

البرهان : " $\subset$ " : واضح . نبرهن على أن $Aut(K) \subset Aut(K; P)$ ، أى نبرهن

$$\text{على أن } \forall x \in P \quad \forall \varphi \in Aut(K) : \varphi(x) = x$$

ليكن 1 هو عنصر الوحدة في K ، وبهذا يكون $\varphi(1) = 1$ لكل $\varphi \in Aut(K)$ ،

وبالتالى يكون $\varphi(n.1) = \varphi(1 + \dots + 1) = n\varphi(1) = n.1$ لكل $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ،

ومن ثم فإن $\varphi(n.1) = n.1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. والآن لكل $x \in P$ يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$

بحيث $n.1 \neq 0$ ، $x = \frac{m.1}{n.1}$ (انظر (١-١-٩)) . ومن ثم فإن :

$$\forall \varphi \in \text{Aut}(K) : \varphi(x) = \varphi\left(\frac{m.1}{n.1}\right) = \frac{\varphi(m.1)}{\varphi(n.1)} = \frac{m.1}{n.1} = x$$

٢-١-٤ ملحوظة :

(١) ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$ ، $f \in k[X]$. إذا كان

$a \in k$ صفراً لـ f ، فإن $\varphi(a)$ أيضاً صفراً لـ f

(٢) ليكن k حقلاً ، $f \in k[X]$ ليست ثابتة ، $K \supset k$ حقل التشقيق لـ f ، N

مجموعة أصفار f المختلفة في K ، $n := \text{Ord}(N)$ (n هي رتبة N) . فإن :

(أ) الراسم

$$\text{Gal}(f; k) \rightarrow \gamma_n$$

$$\varphi \mapsto \varphi|N$$

مونومورفيزم .

باختصار : زمرة جالوا لـ f هي زمرة جزئية من γ_n ، حيث n عدد الأصفار

المختلفة لـ f في حقل تشقيقها

(ب) إذا كانت f غير قابلة للتحليل (للتبسيط) ، فإن الراسم :

$$\text{Gal}(f; k) \times N \rightarrow N$$

$$(\varphi, a) \mapsto \varphi(a)$$

يكون عملية من $\text{Gal}(f; k)$ على N ، وهي عملية انتقالية

البرهان : (١) لأن $k = 1_k$ ينتج أن : $\forall a \in k : f(\varphi(a)) = f(a) = \varphi(f(a)) = \varphi(0) = 0$

أي أن $\varphi(a)$ صفراً لـ f

(٢) راجع تعريف عملية G على X في البند (٥-١-١) من نظريات سيلو . يقال

للعلمية τ من G على X إنها انتقالية (transitive) إذا كان لكل $(x, y) \in X \times X$

يوجد على الأقل $a \in G$ بحيث يكون $(\tau(a, x) = a(x) = y$

والآن الراسم فى (أ) واضح أنه هومومورفيزم . وهو أيضاً راسم واحد لواحد لأن $k(N) = K$ ، ومن $\varphi|N = 1_N$ ينتج أنه لجميع $x \in K$: $\varphi(x) = x$ ، أى أن $\varphi = 1_K$. أى أن نواة الراسم تتكون من العنصر الصفرى فى $Gal(f; k)$ ، أى أن الراسم واحد لواحد (أحادى)
واضح أن الراسم فى (ب) عملية لأن :

$$\forall a, b \in N : \exists \varphi \in Gal(f; k) : \varphi(a) = b$$

$$\forall a \in N : 1_{Gal(f; k)}(a) := 1_{Aut(K; k)}(a) = a$$

وهى عملية انتقالية وينتج ذلك مباشرة من (٧-٨-١) بوضع $k' = k$ ، $\varphi = 1_k$

٢-١-٥ مثال :

المطلوب البرهنة على أن زمرة جالوا لكثيرة الحدود $f := (X^2 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$ هى زمرة كلاين الرباعية . (انظر (٤-٤-١) ، مثال ٤٤ من أمثلة متنوعة فى الباب الأول من نظرية الزمر)

البرهان : واضح أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$ هو حقل التشقيق لـ f . من (٢-١-٢) ، (٣-١-٢) يكون المطلوب هو تعيين زمرة الأوتومورفيزمات لـ $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. لكل من هذه الأوتومورفيزمات يتحقق :

$$2 = \varphi(2) = \varphi(\sqrt{2})^2 = (\varphi(\sqrt{2}))^2 \Rightarrow \varphi(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

وبالمثل $\varphi(\sqrt{3}) \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. أى أنه يوجد على الأكثر أربعة أوتومورفيزمات لـ K . كثيرة الحدود $X^2 - 3$ غير قابلة للتبسيط (للتحليل) فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$ ، لأنها ليس لها أصفار فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. ولأن $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(-\sqrt{3})$ فإنه يوجد أوتومورفيزم φ_1 لـ K بحيث يكون لجميع $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $\varphi_1(x) = x$ ، $\varphi_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ (انظر (٣-٨-١)). وبالمثل يوجد أوتومورفيزم φ_2 لـ K بحيث يكون $\varphi_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ،

$\varphi_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. ولأن $B := \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\}$ أساس للفراغ الخطي $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$ ، ولكل $b \in B$: $\varphi_1^2(b) = \varphi_2^2(b) = b$ فإنه ينتج أن $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 1_K$. ومن ثم فإنه ينتج أن $\text{Aut}(K) \neq \{1_K, \varphi_1, \varphi_2\}$ ، وإلا كان زمرة دائرية وبالتالي يجب أن تحتوي على عنصر رتبته 3 . ومن ثم فإنه يجب أن يوجد بالضبط أوتومورفيزم رابع ، ومما سبق فهو يحقق : $\varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ، $\varphi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ ، وبالتالي يحقق كذلك $\varphi_3^2 = 1_K$

وبهذا يكون $\text{Aut}(K) = \{1_K, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ حيث $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = \varphi_3^2 = 1_K$ ، أى أن $\text{Aut}(K)$ هو زمرة كلاين الرباعية .

٢-٢ نظرية جالوا الأساسية

The Fundamental Theorem of Galois Theory

٢-٢-١ تعريف :

ليكن K حقلا ، G زمرة جزئية من $\text{Aut}(K)$. نعرف $\text{Fix}(K; G)$ ويسمى الحقل الثابت بـ G في K كالآتي :

$$\text{Fix}(K; G) := \{a \in K \mid \varphi(a) = a \quad \forall \varphi \in G\}$$

$\forall a, b \in \text{Fix}(K; G), b \neq 0$: $\text{Fix}(K; G)$ حقل جزئي من K لأن :

$$a, b \in K; b \neq 0 : \varphi(a) = a, \varphi(b) = b \Rightarrow$$

$$[\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = a - b \Rightarrow a - b \in \text{Fix}(K; G),$$

$$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = ab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in \text{Fix}(K; G);$$

$$\varphi(1) = 1$$

(1 عنصر الوحدة في K)

$$\text{Fix}(K; G) \neq \emptyset \quad \text{أى أن}$$

٢-٢-٢ تعريف :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . يسمى هذا الامتداد امتداد جالوا (Galois extension) إذا وجدت G زمرة جزئية منتهية من $\text{Aut}(K)$ بحيث يكون $k = \text{Fix}(K; G)$

٢-٢-٣ مثال : امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}$ ليس امتداد جالوا .

سنبرهن على ذلك بالبرهنة على أن $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{1\}$ وبهذا يكون :

$$\begin{aligned} Fix(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \{1\}) &= \{a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : 1(a) = a\} \\ &= \{a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \mathbb{Q} \end{aligned}$$

والآن نبرهن على أن $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{1\}$ كالآتي :

من (٢-١-٣) $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \mathbb{Q}) = Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ (هو الحقل الأولى في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$) ،

$$Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \mathbb{Q}) = \{\varphi \in Aut \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \varphi(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{Q}\}$$

وبالتالي فكل $\varphi \in Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$:

$$2 = \varphi(2) = \varphi((\sqrt[3]{2})^3) = (\varphi(\sqrt[3]{2}))^3 \Rightarrow \varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \varphi((\sqrt[3]{2})^2) = (\sqrt[3]{2})^2$$

(لأن $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$ فينتج أن $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$)

ومن حيث إن $X^3 - 2$ لها في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ الصفر الوحيد $\sqrt[3]{2}$ وهي كثيرة الحدود

الصغرى من $\sqrt[3]{2}$ على $\mathbb{Q}$ فينتج أن $\{1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2\}$ أساس للفراغ الخطي $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

على الحقل $\mathbb{Q}$. (انظر (١-٥-٥)). ومن حيث إن φ ، 1 لهما نفس "القيم" عند عناصر

أساس الفراغ الخطي ، فيكون $\varphi = 1$.

وهو المطلوب .

٢-٢-٤ نظرية جالوا الأساسية The Main Theorem of Galois

ليكن $K \subset k$ امتداد جالوا ، A مجموعة الحقول البينية في $K \subset k$ ، B مجموعة

الزمر الجزئية من $Aut(K; k)$. عندئذ فإن :

$$Aut(K;) : A \rightarrow B, L \mapsto Aut(K; L), \quad (1) \text{ الراسمان :}$$

$$Fix(K;) : B \rightarrow A, G \mapsto Fix(K; G)$$

تناظران أحاديان ، وكلاهما معكوس الآخر ، أى أن :

$$\text{Fix}(K; \text{Aut}(K; L)) = L \quad \forall L \in A,$$

$$\text{Aut}(K; \text{Fix}(K; G)) = G \quad \forall G \in B$$

(٢) لكل حقل بينى L فى $K \subset k$

$$[K : L] = \text{Ord}(\text{Aut}(K; L)) \quad (\text{أ}) \text{ (رتبة الزمرة } \text{Aut}(K; L) \text{)}$$

$$[L : K] = [\text{Aut}(K; k) : \text{Aut}(K; L)] \quad (\text{ب})$$

راجع تعريف الرتبة والدليل فى (١-١٠) من نظرية الزمر

(٣) لكل حقل بينى L فى $K \subset k$

$$(\text{أ}) \quad K \supset L \text{ امتداد جالوا}$$

(ب) $\text{Aut}(K; L)$ زمرة جزئية طبيعية من $\text{Aut}(K; k)$ إذا كان فقط إذا كان

$$L \supset k \text{ امتداد جالوا}$$

(ج) إذا كان $L \supset k$ امتداد جالوا ، فإن :

$$(\text{أ}) \quad \varphi \in \text{Aut}(K; k) \text{ لكل } \varphi(L) = L$$

$$(\text{٢}) \text{ الراسم } \begin{aligned} \text{Aut}(K; k) &\rightarrow \text{Aut}(L; k) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_L \end{aligned}$$

إبيمورفيزم

$$(\text{٣}) \quad \text{Aut}(L; k) \cong \text{Aut}(K; k) / \text{Aut}(K; L)$$

٥-٢-٢ مثال :

يمكن البرهنة على أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$ هو امتداد جالوا بمعلومات ستأتى فيما بعد ،

ولكننا نبرهن الآن على ذلك بمعلوماتنا الحالية ولهذا نعرف $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ، ليكن

$x \in \text{Fix}(K; \text{Aut}(K; \mathbb{Q}))$. عندئذ فإنه توجد $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ بحيث يكون

$$x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \quad (\text{٢-١-٥})$$

فيكون لدينا $c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} = -c\sqrt{3} - d\sqrt{2}\sqrt{3}$ وبالتالي فإنه من $\varphi_1(x) = x$

يكون $c = d = 0$. ومن $\varphi_2(x) = x$ ينتج كذلك أن $b = 0$ ، وبهذا يكون $x \in \mathbb{Q}$.
 أى أننا وجدنا G زمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$ أى من $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))$ بحيث
 يكون $k = \mathbb{Q} = Fix(K, G)$ حيث G هى زمرة كلاين الرباعية ، وبهذا يكون
 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$ امتداد جالوا . G هى بالفعل $Aut(K)$ كما سبق أن رأينا فى (٢-١-٥)
 والآن الزمر الجزئية الفعلية من $Aut(K) = Aut(K, \mathbb{Q})$ هى : $H_1 := \{1, \varphi_1\}$ ،
 $H_2 := \{1, \varphi_2\}$ ، $H_3 := \{1, \varphi_3\}$. وبالتالي يكون لامتداد الحقل $\mathbb{Q} \supset K$ بالضبط ثلاثة
 حقول ببنية فعلية هى $L_i := Fix(K; H_i)$ حيث $i \in \{1, 2, 3\}$ ومن النظرية الأساسية
 لجالوا $Aut(K, L_i) = H_i$ ، $[K : L_i] = Ord(H_i) = 2$ ، ولأن $\sqrt{2} \in L_1$ ،
 $\sqrt{3} \in L_2$ ، $\sqrt{2}\sqrt{3} \in L_3$ ينتج أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = L_1$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = L_2$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = L_3$.
 ولأن الزمرة $Aut(K)$ إبدالية فإن الزمر الجزئية H_i زمر جزئية طبيعية . وينتج
 كذلك من النظرية الأساسية لجالوا أن امتدادات الحقول $\mathbb{Q} \supset L_i$ هى امتدادات جالوا .
 (يستطيع المرء بالطبع أن يثبت ذلك مباشرة)

٢-٢-٦ تعريف :

لتكن G زمرة ، K حقلا ، $K^* := K \setminus \{0\}$ ، يسمى هومومورفيزم الزمر

$$\chi: G \rightarrow K^*$$

رمز أو صفة (character) G فى K

٢-٢-٧ تمهيدية :

الرموز المختلفة متنى متنى $\chi_1, \dots, \chi_n$ لزمرة G فى حقل K تكون عناصر مستقلة

خطياً للفراغ الخطى لكل رواسم G فى K على الحقل K

البرهان : بالاستقراء الرياضى على n :

عند $n = 1$ يكون الادعاء صحيحاً لأنه إذا كان $\chi: G \rightarrow K^*$ رمزاً ، وكان e هو عنصر G المحايد فمن $\lambda\chi = 0$ حيث $\lambda \in K$ ينتج أن :

$$\lambda = \lambda 1 = \lambda(\chi(e)) = (\lambda\chi)(e) = 0(e) = 0_K \quad (\text{صفر الحقل } K)$$

(1 هو عنصر الوحدة في K ، 0 هو صفر الفراغ الخطي)

والآن ليكن الادعاء صحيحاً لكل $n - 1$ من الرموز المختلفة مثلي مثلي G في K . فإذا كانت $\chi_1, \dots, \chi_n$ رموزاً مختلفة مثلي مثلي G في K ، فإنه يوجد $a \in G$ بحيث يكون $\chi_1(a) \neq \chi_n(a)$. ومن :

$$\lambda_1\chi_1 + \dots + \lambda_n\chi_n = 0 \quad (1)$$

حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ عناصر في K نحصل على المتساويتين الآتيتين لكل $g \in G$:

$$\lambda_1\chi_1(a)\chi_1(g) + \dots + \lambda_n\chi_n(a)\chi_n(g) = 0,$$

$$\lambda_1\chi_n(a)\chi_1(g) + \dots + \lambda_n\chi_n(a)\chi_n(g) = 0$$

حيث حصلنا على الأولى بتأثير الصيغة (1) على ag ، وعلى الثانية بالتأثير بالصيغة (1) على g ، والضرب في $\chi_n(a)$. وبالطرح نحصل على :

$$\lambda_1(\chi_1(a) - \chi_n(a))\chi_1(g) + \dots + \lambda_{n-1}(\chi_{n-1}(a) - \chi_n(a))\chi_{n-1}(g) = 0$$

لكل $g \in G$. ومن فرض الاستقرار ، وعلى وجه الخصوص فإن $\lambda_1(\chi_1(a) - \chi_n(a)) = 0$.

ولأن $\chi_1(a) \neq \chi_n(a)$ فإن $\lambda_1 = 0$. وباستخدام فرض الادعاء مرة أخرى على (1)

$$\text{نحصل على } \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

والآن نحتاج إلى النتيجة الآتية :

٢-٨-٢ نتيجة : إذا كانت $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ مونومورفيزمات حقل K إلى حقل K' ،

مختلفة مثلي مثلي ، فإن $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ تكون مستقلة خطياً في الفراغ الخطي لجميع

الرواسم من K إلى K' على الحقل K' .

لتكن $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ مونومورفيزمات حقل K إلى حقل K' ، مختلفة مثني مثني ،
ولتكن $L := \{x \in K \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x)\}$. فإن :

(١) حقل جزئي من K

(٢) $[K:L] \geq n$

البرهان :

(١) إذا كان 1 عنصر الوحدة في K فإن $\varphi_1(1) = \dots = \varphi_n(1) = 1'$ حيث 1' عنصر الوحدة في K' .

أى أن $1 \in L$ ، أى أن $L \neq \emptyset$ (انظر مثال ٢٣ فى (١-٢-٨) - نظرية الحلقات).
والآن ليكن $a \in L$ ، $b \in L$ فإن :

$$\varphi_1(a-b) = \varphi_1(a) - \varphi_1(b) = \dots = \varphi_n(a) - \varphi_n(b) = \varphi_n(a-b)$$

أى أن $a-b \in L$ ، والآن لجميع $a \in L$ ، $b \in L \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(ab^{-1}) &= \varphi_1(a)\varphi_1(b^{-1}) = \varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} = \dots = \varphi_n(a)\varphi_n(b)^{-1} \\ &= \varphi_n(a)\varphi_n(b^{-1}) = \varphi_n(ab^{-1}) \end{aligned}$$

أى أن $ab^{-1} \in L$

(٢) لنفترض أن $r := [K:L] < n$ ، ولنختار أساساً $a_1, \dots, a_r$ للفراغ الخطي K على L . ولأن $r < n$ فإن المعادلات الخطية المتجانسة على K' :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(a_1)X_1 + \dots + \varphi_n(a_1)X_n &= 0 \\ \vdots & \\ \varphi_1(a_r)X_1 + \dots + \varphi_n(a_r)X_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \#$$

لها حل غير تافه $(x_1, \dots, x_n) \in (K')^n$. لكل $a \in K$ يوجد $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in L$ بحيث

إن $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$ ، ولأن $\varphi_i(\lambda_j) = \varphi_1(\lambda_j)$ لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$ ،

$j \in \{1, \dots, r\}$ (*) ، فإننا نحصل على :

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i(a) = x_1 \varphi_1(a) + \dots + x_n \varphi_n(a)$$

$$= x_1 \varphi_1(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r) + \dots + x_n \varphi_n(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r)$$

$$= x_1 [\varphi_1(\lambda_1) \varphi_1(a_1) + \dots + \varphi_1(\lambda_r) \varphi_1(a_r)] + \dots$$

$$+ x_n [\varphi_n(\lambda_1) \varphi_n(a_1) + \dots + \varphi_n(\lambda_r) \varphi_n(a_r)]$$

$$= \varphi_1(\lambda_1) [x_1 \varphi_1(a_1) + \dots + x_n \varphi_n(a_1)] + \dots$$

$$+ \varphi_1(\lambda_r) [x_1 \varphi_1(a_r) + \dots + x_n \varphi_n(a_r)] = 0$$

لأن $(x_1, \dots, x_n) \in (K')^n$ حقل للنظام (#)

وبالتالي فإن $x_1 \varphi_1 + \dots + x_n \varphi_n = 0$ حيث $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ وهذا تناقض مع (٢-٢-٨).

نهاية البرهان .

وفي حالة أن يكون L الحقل الثابت لزمرة منتهية من أوتومورفيزمات K ، نريد أن

نقدر $[K : L]$ ، ولهذا سنتخذ مفاهيم أخرى مساعدة .

٢-٢-١٠ تعريف :

ليكن K حقلاً ، G زمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$. يسمى الراسم

$$Tr_G : K \rightarrow K, a \mapsto \sum_{\varphi \in G} \varphi(a)$$

أثر G في K (trace)

٢-٢-١١ تمهيدية :

ليكن K حقلاً ، ولتكن G زمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$. عندئذ فإن :

$$\{0\} \neq Tr_G(K) \subset Fix(K; G)$$

البرهان : لكل $\psi \in G$ يكون النقل الأيسر $G \rightarrow G$ تناظراً أحادياً (لأنه يوجد $\varphi \mapsto \psi \circ \varphi$)

الراسم العكسى له $G \rightarrow G$ ، ψ^{-1} معرف لأن ψ أوتومورفيزم) ، وبهذا $\varphi \mapsto \psi^{-1} \circ \varphi$

يكون لكل $a \in K$:

$$\psi\left(\sum_{\varphi \in G} \varphi(a)\right) = \sum_{\varphi \in G} \psi(\varphi(a)) = \sum_{\varphi \in G} \varphi(a)$$

النقل تناظر أحادي ψ هومومورفيزم

وهذا يعنى أن

$$Tr_G(K) \subset Fix(K;G)$$

وبافتراض أن $Tr_G(K) = \{0\}$ ينتج أنه لجميع $a \in K$: $\sum_{\varphi \in G} \varphi(a) = 0$ أى أن

$$\sum_{\varphi \in G} \varphi = \hat{0} \quad \text{حيث } \hat{0} \text{ الراسم الصفري - هذا يعنى أن عناصر } G \text{ مرتبطة خطياً :}$$

تتناقض مع (١-٢-٢)

١٢-٢-٢ تمهيدية :

ليكن K حقلاً ، ولتكن G زمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$. عندئذ فإن :

$$[K : Fix(K;G)] = Ord(G)$$

البرهان : من (٩-٢-٢) يكفى أن نبرهن على أن $[K : Fix(K;G)] \leq Ord(G)$.

إذا كان $Ord(G) = n$ ، $G = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ فيكون المطلوب هو البرهنة على أن

لكل $m > n$ كل m من العناصر : $a_1, \dots, a_m \in K$ تكون مرتبطة خطياً على

$Fix(K;G)$. ولأن $m > n$ يكون لنظام المعادلات المتجانسة

$$\varphi_1^{-1}(a_1)X_1 + \dots + \varphi_1^{-1}(a_m)X_m = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\varphi_n^{-1}(a_1)X_1 + \dots + \varphi_n^{-1}(a_m)X_m = 0$$

حل غير صفري

ونظراً لأن أى مضاعف لأى حل يكون حلاً كذلك ولأن $Tr_G(K) \neq \{0\}$ فإنه يوجد

حل $(x_1, \dots, x_m) \in K^m$ بحيث يكون

$$Tr_G(x_i) = \varphi_1(x_i) + \dots + \varphi_n(x_i) \neq 0$$

لواحدة $\ell \in \{1, \dots, m\}$:

ولأن $(x_1, \dots, x_m)$ حل لنظام المعادلات فإنه ينتج أن :

$$a_1 \varphi_1(x_1) + \dots + a_m \varphi_1(x_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$a_1 \varphi_n(x_1) + \dots + a_m \varphi_n(x_m) = 0$$

وبالجمع نحصل على :

$$a_1(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_1)) + \dots + a_m(\varphi_1(x_m) + \dots + \varphi_n(x_m)) = 0$$

أى أن :

$$\sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_j) = 0$$

بعبارة أخرى ، فإن : $\sum_{j=1}^m Tr_G(x_j) a_j = 0$

ولأن $Tr_G(x_j) \neq 0$ ، فإن العناصر $a_m, \dots, a_1$ تكون مرتبطة خطياً على

$Tr_G(K)$ وبالتالي على $Fix(K; G)$ (٢-٢-١١) نهاية البرهان .

٢-٢-١٣ تمهيدية :

ليكن K حقلاً ، ولتكن G زمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$. عندئذ فإن :

$$Aut(K; Fix(K; G)) = G$$

البرهان :

$$Aut(K; Fix(K; G)) = \{\varphi \in Aut(K) \mid \varphi(a) = a \quad \forall a \in Fix(K; G)\}$$

$$Aut(K; Fix(K; G)) \supset G$$

ومن ثم فإن

نبرهن الآن على " $\subset$ " :

ليكن $\varphi \in Aut(K; Fix(K; G))$ ، ولتكن رتبة G هي n ، وعناصرها $\varphi_1, \dots$ ،

φ_n ، حيث $\varphi_1 = 1_K$ ، والآن :

$$\begin{aligned} \text{Fix}(K;G) &= \{a \in K \mid a = \varphi_2(a) = \dots = \varphi_n(a)\} \\ &= \{a \in K \mid \varphi(a) = a = \varphi_2(a) = \dots = \varphi_n(a)\} \\ &= \{a \in K \mid \varphi(a) = \varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \dots = \varphi_n(a)\} \end{aligned}$$

ومن (٩-٢-٢) ينتج أن $[K : \text{Fix}(K;G)] \geq n+1$: تناقض مع (١٢-٢-٢) .

١٤-٢-٢ استنتاج :

ليكن $K \supset k$ امتداد جالوا ، H زمرة جزئية منتهية من $\text{Aut}(K)$ ، $k = \text{Fix}(K;H)$ ،
عندئذ فإن

$$H = \text{Aut}(K; k) \quad (١)$$

$$\text{Aut}(K; k) = G \quad (٢) \quad \text{لكل زمرة جزئية من } \text{Aut}(K; \text{Fix}(K;G))$$

البرهان : (١) تنتج من (١٣-٢-٢) مباشرة ، ومن ذلك ينتج أن كل زمرة جزئية من

$\text{Aut}(K; k)$ تكون منتهية . (٢) تنتج كذلك من (١٣-٢-٢) .

١٥-٢-٢ تمهيدية :

ليكن $K \supset L$ امتداد حقل . التقريرات الآتية متكافئة :

$$(١) \quad K \supset L \text{ امتداد جالوا}$$

$$(٢) \quad [K : L] = \text{Ord}(\text{Aut}(K; L)) < \infty$$

$$(٣) \quad \text{Ord}(\text{Aut}(K; L)) < \infty, \text{Fix}(K; \text{Aut}(K; L)) = L$$

البرهان : "(١) $\Leftarrow$ (٢)" : ينتج من (١٢-٢-٢) ، (١٤-٢-٢) (ضع $L = \text{Fix}(K;G)$)

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)" : نعرف $G := \text{Aut}(K; L)$ فينتج أن : $L \subset \text{Fix}(K;G) \subset K$

من (٢) ، (١٢-٢-٢) ينتج أن $[K : \text{Fix}(K;G)] = \text{Ord}(G) = [K : L]$ ونحصل

$$\text{على } L = \text{Fix}(K;G)$$

"(٣) $\Leftarrow$ (١)" : واضح

١٦-٢-٢ تمهيدية :

ليكن L حقلاً بينياً في امتداد جالوا $K \supset k$. ينتج أن $K \supset L$ امتداد جالوا

البرهان : نعرف $G := \text{Aut}(K; k)$ ومن ثم فإن $\text{Ord}(G) < \infty$ ، $\text{Fix}(K; G) = k$

(انظر (١٥-٢-٢)). نعرف $H := \text{Aut}(K; L)$ ، ولأن $L' := \text{Fix}(K; H)$ ، ولأن $\text{Aut}(K; L)$

زمرة جزئية منتهية من $\text{Aut}(K)$ فيبقى فقط أن نثبت أن : $L = L'$. من حيث إن

$$\text{Aut}(K; L) := \{\varphi \in \text{Aut}(K) \mid \varphi(a) = a \quad \forall a \in L\} \quad , \quad L' = \text{Fix}(K; \text{Aut}(K; L))$$

فينتج مباشرة أن $L \subset L'$. والآن لجميع $\varphi, \varphi' \in G$ يكون

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} \in \text{Aut}(K; L) = H \Leftrightarrow (\varphi' \circ \varphi^{-1})(a) = a \quad \forall a \in L$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(a) = \varphi(a) \quad \forall a \in L \Leftrightarrow \varphi' \mid L = \varphi \mid L$$

إذا كان $r := [G : H]$ فإنه يوجد $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in G$ بحيث تكون التحديدات :

$$\psi_i := \varphi_i \mid L : L \rightarrow K, i \in \{1, \dots, r\}$$

مونومورفيزمات مختلفة مثلي مثلي

ولأن

$$\{a \in L : \psi_1(a) = \dots = \psi_r(a)\} = L \cap \text{Fix}(K; G) = L \cap k = k$$

فينتج من (٩-٢-٢) أن : $[L : k] \geq r$.

ومن

$$[K : k] = \text{Ord}(G) = [G : H] \text{Ord}(H) = r.[K : L'] \quad (١)$$

$$(L' = \text{Fix}(K; H) \quad \text{لأن})$$

ومن $K \supset L' \supset L \supset k$ ينتج أن

$$[K : k] = [K : L][L : k] \geq [K : L].r \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$[K : L'] \geq [K : L] = [K : L][L' : L]$$

$$\Rightarrow 1 \geq [L' : L] \xRightarrow{L' \supset L} L' = L$$

نهاية البرهان .

٢-٢-١٧ تمهيدية :

ليكن L حقلاً بينياً في امتداد الحقل $K \supset k$. عندئذ فإنه لكل $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$ يكون :

$$\text{Aut}(K; \varphi(L)) = \varphi \circ \text{Aut}(K; L) \circ \varphi^{-1}$$

البرهان :

$$\psi \in \text{Aut}(K; \varphi(L)) \Leftrightarrow \psi(\varphi(a)) = \varphi(a) \quad \forall a \in L$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\psi(\varphi(a))) = a \quad \forall a \in L \Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi \in \text{Aut}(K; L)$$

$$\Leftrightarrow \psi \in \varphi \circ \text{Aut}(K; L) \circ \varphi^{-1}$$

٢-٢-١٨ تمهيدية :

ليكن $K \supset k$ امتداد جالوا . إذا كان L حقلاً بينياً في $K \supset k$ ، وكان $\varphi(L) = L$ ،

لجميع $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$ فإن الراسم

$$\text{Aut}(K; k) \rightarrow \text{Aut}(L; k)$$

$$\varphi \mapsto \varphi|_L$$

إيمورفيزم ، نواته هي $\text{Aut}(K; L)$

البرهان : من الواضح تماماً أن الراسم هو مومورفيزم . كذلك فإن نواته تعطى بـ :

$$\{\varphi \in \text{Aut}(K; k) \mid \varphi|_L = 1_{\text{Aut}(L; k)}\}$$

$$= \text{Aut}(K; L)$$

ونبرهن الآن على أن هذا الراسم غامر (شامل ، فوقى) كالاتى :

ليكن صورة الراسم هي $G \subset \text{Aut}(L; k)$. لأن $K \supset k$ هو امتداد جالوا فإن

$$\text{Fix}(L; G) = k$$

G كصورة زمرة منتهية (٢-٢-١٥) تكون كذلك منتهية . ومن (٢-٢-١٣) ينتج أن

$$G = \text{Aut}(L; k)$$

٢-٢-١٩ تمهيدية :

ليكن $K \supset k$ امتداد جالوا . وليكن L حقلاً بينياً في $K \supset k$. التقريرات الآتية متكافئة :

(١) $L \supset k$ امتداد جالوا

(٢) لكل $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$: $\varphi(L) = L$

(٣) $\text{Aut}(K; L)$ زمرة جزئية طبيعية من $\text{Aut}(K; k)$

البرهان :

"(١) $\Leftarrow$ (٢)" لتكن $H = \text{Aut}(L; k)$ ، M مجموعة جميع المونومورفيزمات $\psi: L \rightarrow K$

بحيث يكون $k = 1_\psi$. وبهذا يمكن اعتبار H مجموعة جزئية من M . لأن $L \supset k$

امتداد جالوا يكون $\text{Fix}(L; H) = k$ ، ومن (٢-٢-٩) يكون $H = M$. ولكل $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$

يقع $\varphi|L : L \rightarrow K$ في M ، وبالتالي في H ، ونحصل على $\varphi(L) = L$

"(١) $\Leftarrow$ (٢)" : من (٢-٢-١٨) الراسم $\text{Aut}(K; k) \rightarrow \text{Aut}(L; k)$ راسم غامر (شامل ، $\varphi \mapsto \varphi|L$

فوقى). ولأن $K \supset k$ امتداد جالوا ، فإن $\text{Ord}(\text{Aut}(K; k))$ يكون منتهياً أى أن

$H = \text{Aut}(L; k)$ تكون زمرة منتهية . ونحتاج فقط إلى البرهنة على أن

$k = \text{Fix}(L; H)$. واضح أن $k \subset \text{Fix}(L; H)$. والآن إذا كان هناك $a \in \text{Fix}(L; H) \setminus k$

فإننا نستطيع أن نجد $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$ بحيث يكون $\varphi(a) \neq a$. ولأن $K \supset k$ امتداد

جالوا يكون من (٢-٢-١٥) : $\text{Fix}(K; \text{Aut}(K; k)) = k$. ولـ $\psi := \varphi|L$ سيكون

$\psi(a) \neq a$: تناقض مع $a \in \text{Fix}(L; H)$.

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)" : واضح من (٢-٢-١٨) لأن $\text{Aut}(K; L)$ نواة هومومورفيزم .

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)" : من (٢-٢-١٧) $\text{Aut}(K; \varphi(L)) = \text{Aut}(K; L)$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$

(تذكر تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية)

ومن (١) في (٢-٢-٤) النظرية الأساسية لجالوا :

$$\text{Aut}(K; -) : A \rightarrow B, L \mapsto \text{Aut}(K; L)$$

حيث A مجموعة الحقول البينية فى امتداد جالوا $K \supset k$ تناظر أحادى فينتج أن $\varphi(L) = L$.

بهذا تتم البرهنة على نظرية جالوا الأساسية .

٣-٢ الامتدادات الطبيعية للحقول Normal Field Extensions

٢-٣-١ تعريف :

يقال لامتداد الحقل $K \supset k$ إنه طبيعي (normal) إذا تحقق :

(١) $K \supset k$ جبري

(٢) كل كثيرة حدود f غير قابلة للتبسيط (للتحليل) في $k[X]$ ، والتي لها صفر

في K تتشقق على K في عوامل خطية

والشرط (٢) يعني أنه لكل $a \in K$: كثيرة الحدود الصغرى لـ a على k تتشقق على

K في عوامل خطية .

٢-٣-٢ نظرية :

لأي امتداد حقل منته $K \supset k$ التقريرات الآتية متكافئة :

(١) $K \supset k$ طبيعي

(٢) $K \supset k$ حقل تشقيق لكثيرة حدود $f \in k[X]$

(٣) إذا كان $K' \supset K$ امتداد حقل ، وكان $\varphi: K \rightarrow K'$ مونومورفيزماً بحيث إن

$$\varphi|_k = 1_k \text{ فإن } \varphi(K) \subset K$$

البرهان :

"(١) $\Leftarrow$ (٢)" : لأن $K \supset k$ امتداد حقل منته فإنه من (١-٦-٢) توجد عناصر

$a_1, \dots, a_n \in K$ جبرية على k بحيث إن $K = k(a_1, \dots, a_n)$. ولكل $i \in \{1, \dots, n\}$

تتشقق كثيرة الحدود الصغرى f_i لـ a_i على k في عوامل خطية على K بحيث يكون

$K \supset k$ بسبب $K = k(a_1, \dots, a_n)$ هو حقل التشقيق لكثيرة الحدود $f = f_1 \dots f_n \in k[X]$.

"(٢) $\Leftarrow$ (٣)" :

من (٢) ، (١-٨-٨) يوجد $f \in k[X]$ ، $a_1, \dots, a_n, b \in K$ بحيث يكون :

$$K = k(a_1, \dots, a_n) \text{ ، } f = b(X - a_1) \dots (X - a_n)$$

وينتج كذلك أنه بوجود K' ،

$\phi: K \rightarrow K'$ المعطى في (٣) بالخصائص المطلوبة ، يكون لدينا :

$$f(\phi(a_i)) = \phi(f(a_i)) = \phi(0) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ونحصل على $\phi(\{a_1, \dots, a_n\}) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$. ولأن $K = k(a_1, \dots, a_n)$ ينتج

مباشرة أن $\phi(K) \subset K$

"(٣) $\Leftarrow$ (١)" : $K \supset k$ منته يستلزم أن $K \supset k$ جبرى .

والآن لتكن $f \in k[X]$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) ، ولها صفر $a \in K$. نختار

$a_1, \dots, a_n \in K$ بحيث يكون $K = k(a, a_1, \dots, a_n)$ ، ولتكن f_i هي كثيرة

الحدود الصغرى لـ a_i على k لجميع i ، وبهذا يكون K حقلاً بينياً لحقل التشقيق

$K' \supset k$ لـ $g := f \cdot f_1 \dots f_n$. f تتشقق على K' فى عوامل خطية . وإذا كان

$b \in K'$ صفراً لـ f ، فإنه يوجد (من ١-٨-٨) أوتومورفيزم ψ لـ K' بحيث

يكون $\psi(a) = b$ ، $\psi(x) = x$ لجميع $x \in k$. وبتطبيق الشرط (٣) على

المونومورفيزم $\psi|_K: K \rightarrow K'$ نحصل على $b = \psi(a) \in K$ ، وهكذا تتشقق

f على K فى عوامل خطية .

٢-٣-٣ مثال :

لأن امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$ هو حقل التشقيق لكثيرة الحدود $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

فهو امتداد طبيعى .

وامتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ هو حقل التشقيق لكثيرة الحدود $X^2 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$

فهو امتداد طبيعى .

أما امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \supset \mathbb{Q}$ ليس امتداداً طبيعياً ، لأن كثيرة الحدود

$$X^4 - 2 = (X^2 - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}) = (X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})(X - i\sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2})$$

هى كثيرة حدود غير قابلة للتحليل (للتبسيط) فى $\mathbb{Q}[X]$ ، لها صفر فى $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ لكنها لا تنشق على $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ فى عوامل خطية

٤-٢ الامتدادات القابلة للانفصال للحقول Seperable Field Extensions

٢-٤-١ تعريف :

ليكن k حقلاً ، وليكن $K \supset k$ حقل التشقيق لكثيرة حدود ليست ثابتة $f \in k[X]$.
وليكن $a \in K$. يسمى العدد الطبيعي

$$\mu(f; a) := \max \{ n \in \mathbb{N} : (X - a)^n \mid f \} \text{ (يقسم) } f \text{ فى } K[X]$$

تعددية f فى a .

ويقال إن a صفر بسيط (simple zero) $f \nmid$ كان $\mu(f; a) = 1$ وإذا كان $\mu(f; a) \geq 2$ فيقال إن a صفر مكرر (repeated zero) $f \nmid$

٢-٤-٢ تعريف :

(أ) ليكن k حقلاً . تسمى كثيرة الحدود غير الثابتة $f \in k[X]$ إنها قابلة للانفصال (separable) إذا كان كل عامل غير قابل للتبسيط من عوامل f له أصفار بسيطة فقط فى حقل تشقيقه .

(ب) ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . وليكن $a \in K$ يقال إن $a \in K$ قابل للانفصال على k إذا كان a صفراً لكثيرة حدود قابلة للانفصال $f \in k[X]$.

(ج) يقال إن امتداد الحقل $K \supset k$ قابل للانفصال إذا كان كل $a \in K$ قابل للانفصال على k .

(د) يقال إن الحقل k تام أو كامل (perfect) إذا كانت كل كثيرة حدود ليست ثابتة فى $k[X]$ قابلة للانفصال .

وإذا كان $K \supset k$ امتداد حقل فإن العنصر $a \in K$ الجبرى على k سيكون قابلاً للانفصال إذا كانت فقط إذا كانت كثيرة الحدود الصغرى لـ a على k قابلة للانفصال . وسنبرهن فيما بعد على أن كل حقل له المميز صفر يكون تاماً . وكذلك كل حقل منته يكون تاماً .

٢-٤-٣ تعريف :

لتكن $R[X]$ حلقة كثيرات الحدود على حلقة إبدالية لها عنصر الوحدة $1 \in R$

$$D : R[X] \rightarrow R[X]$$

$$\sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \quad \text{الراسم :}$$

يسمى التفاضل الشكلى (formal differentiation) فى $R[X]$ وهو المشتقة (derivative)

فى $R[X]$ ، أى أنه يحقق :

$$D(af + bg) = aD(f) + bD(g),$$

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

لكل $a, b \in R$ ولكل $f, g \in R[X]$.

٢-٤-٤ تمهيدية :

ليكن k حقلاً ، وليكن $K \supset k$ حقل التشقيق لكثيرة حدود ليست ثابتة $f \in k[X]$. لكل $a \in K$ يتحقق ما يأتى :

$$\mu(f; a) = 1 \Leftrightarrow f(a) = 0, (Df)(a) \neq 0 \quad (1)$$

$$\mu(f; a) > 1 \Leftrightarrow f(a) = 0, (Df)(a) = 0 \quad (2)$$

البرهان: ليكن $r := \mu(f; a)$. عندئذ فإنه توجد $g \in K[X]$ بحيث يكون $f = (X-a)^r g$ ، ونحصل على :

$$D(f) = (X-a)^{r-1} (rg + (X-a)D(g))$$

وينتج الادعاءان مباشرة .

ويستطيع المرء أن يتحقق إذا ما كانت كثيرة حدود f على حقل k لها أصفار مكررة على K أم ليس لها ، حيث K حقل يحتوى k ، دون حساب الأصفار .
٢-٤-٥ تمهيدية :

ليكن k حقلاً ، ولتكن f كثيرة حدود غير ثابتة فى $k[X]$. التقريران الآتيان متكافئان :
 (١) f لها أصفار مكررة فى K حقل فوقى للحقل k .
 (٢) f ، $D(f)$ لهما فى $k[X]$ قاسم مشترك ليس ثابتاً .
البرهان :

"(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" : ليكن $a \in K$ صفراً مكرراً لـ f ، g هى كثيرة الحدود الصغرى من a على k . لأن $f(a)=0$ ، $(Df)(a)=0$ تكون g قاسماً مشتركاً لـ f ، $D(f)$ "(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" : لتكن $g \in k[X]$ قاسماً مشتركاً لـ f ، $D(f)$ ، $\deg(g) \geq 1$ ، a صفراً لـ g فى حقل فوقى لـ k . عندئذ فإن $f(a)=0$ ، $(Df)(a)=0$ ويكون a صفراً مكرراً لـ f .
٢-٤-٦ نظرية :

ليكن k حقلاً . كثيرة حدود $f \in k[X]$ غير القابلة للتحليل (للتبسيط) تكون قابلة للانفصال إذا كان فقط إذا كان $D(f) \neq 0$
البرهان : إذا كان $D(f) = 0$ فمن (٢-٤-٤) يكون كل صفر لـ f فى حقل فوقى لـ k مكرراً . وبالتالي تكون f قابلة للانفصال .

وإذا كان $D(f) \neq 0$ ، فإن f كون قابلة للانفصال وإلا فمن التعريف (٢-٤-٢) ((أ)) ومن التمهيدية (٢-٤-٥) يكون لـ f ، $D(f)$ فى $k[X]$ قاسم مشترك غير ثابت g . ولأن f غير قابلة للتبسيط (أو التحليل) فإن هذا يؤدي إلى تناقض :
 $\deg(g) = \deg(f) > \deg(D(f))$

٢-٤-٧ تمهيدية :

ليكن k حقلاً ، $f \in k[X]$.

إذا كان $Char(k) = 0$ (مميز k) فإن

$$D(f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ ثابت}$$

إذا كان $Char(k) = p > 0$ فإن :

$$D(f) = 0 \Leftrightarrow \exists g \in k[X] : f(X) = g(X^p)$$

البرهان : في حالة المميز = الصفر ينتج الادعاء مباشرة من تعريف D . والآن إذا

كان $p := Char(k) > 0$ ، $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ، فإن $D(f) = 0$ تعنى أنه

لجميع $i \in \{1, \dots, n\}$ ، $a_i \neq 0$ تكون p قاسماً لـ i ، وتكون f لها الشكل :

$$f = a_0 + a_p X^p + a_{2p} X^{2p} + \dots + a_{mp} X^{mp}$$

نهاية البرهان .

والآن من (٢-٤-٦) ، (٢-٤-٧) ينتج مباشرة :

٢-٤-٨ استنتاج :

كل حقل له المميز صفر يكون تاماً

سنرى فيما بعد أن كل حقل منته يكون كذلك تاماً . وللحصول على امتداد حقل جبرى وليس قابلاً للانفصال ، يجب علينا أن نبدأ بحقل غير منته ، ومميزه مختلف عن الصفر .

وسنختار الحقل $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(X) := k$ على سبيل المثال ، حيث p عدد أولى . وهكذا فإن

k هو حقل الدوال الكسرية فى غير محدد "X" على الحقل $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. والآن حقل التشقيق

$K \supset k$ لكثيرة الحدود $Y^p - X \in k[Y]$ يحقق الخصائص المرجوة ، لأنه من

(٣-٥-١٠) ، (٣-٦-٢) فى نظرية الحلقات تكون كثيرة الحدود $Y^p - X$ غير قابلة

للتبسيط (للتحليل) فى $k[Y]$ ، ولأن $D(Y^p - X) = 0$ فإنها تكون غير قابلة

للانفصال (٢-٤-٦).

٢-٤-٩ ملحوظة :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . وليكن $a \in K$ قابلاً للانفصال على k . ينتج أن a قابل للانفصال على أى حقل بينى L فى $K \supset k$

البرهان : كثيرة الحدود الصغرى لـ a على L تقسم فى $L[X]$ كثيرة الحدود الصغرى لـ a على k ، وهذه الأخيرة قابلة للانفصال ، وبهذا تكون الأولى قابلة للانفصال. (نحن نعلم أن العنصر $a \in K$ الجبرى على k يكون قابلاً للانفصال إذا كانت فقط إذا كانت كثيرة الحدود الصغرى لـ a على k قابلة للانفصال) .

٢-٥ وصف (خصائص) امتدادات جالوا

Characterization of Galois Extensions

فيما سبق عرفنا امتداد جالوا $K \supset k$ من خلال الشرط أن k هو الحقل الثابت لزمرة جزئية منتهية من $Aut(K)$ فى K . وبناءً عليه برهنا نظرية جالوا الأساسية بمساعدة بعض أدوات الجبر الخطى . لكن من الناحية التطبيقية فإنه يكون من الأفضل والأسهل أن نتعرف بعض الشروط لاختبار إذا ما كان هذا الامتداد امتداد جالوا أم لا .

٢-٥-١ تمهيدية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل ، $a_1, \dots, a_n \in K$ مختلفة مثلى مثلى . ولتكن $s_1, \dots, s_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ مختارة بحيث يكون :

$$(X - a_1) \dots (X - a_n) = X^n - s_1(a_1, \dots, a_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n(a_1, \dots, a_n) \quad (1)$$

عندئذ فإن

$$\phi(s_i(a_1, \dots, a_n)) = s_i(a_1, \dots, a_n)$$

لجميع الهومومورفيزمات $\phi: K \rightarrow K$ التى تحقق

$$\phi(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad (2)$$

ولجميع $i \in \{1, \dots, n\}$

البرهان : لأن

$$X^n - s_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \\ =_{(1)} (X - \varphi(a_1)) \dots (X - \varphi(a_n)) =_{(2)} \underline{(X - a_1) \dots (X - a_n)} \quad (3)$$

ونحصل من (1) ، (3) وبمساواة المعاملات للقوى المختلفة لـ X على :

$$s_i(a_1, \dots, a_n) = s_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \quad (4)$$

ومن (2) ينتج أن :

$$s_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(s_i(a_1, \dots, a_n)) \quad (5)$$

من (4) ، (5) ينتج المطلوب مباشرة .

٢-٥-٢ تمهيدية :

ليكن $K \supset k$ امتداد جالوا ، وليكن $a \in K$. لتكن $a_1, \dots, a_n$ العناصر المختلفة في $\{\varphi(a) : \varphi \in \text{Aut}(K; k)\}$ عندئذ فإن : $f := (X - a_1) \dots (X - a_n)$ تكون هي كثيرة الحدود الصغرى لـ a على k .

البرهان : لكل $\psi \in \text{Aut}(K; k)$ إذا "دارت" φ بحيث مثلت جميع عناصر $\text{Aut}(K; k)$

فإن $\psi \circ \varphi$ "تدور" كذلك بحيث تمثل جميع عناصر $\text{Aut}(K; k)$ ، ومن ثم فإن :

$$(\psi \circ \varphi)(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\} \quad (1)$$

ولكن

$$(\psi \circ \varphi)(\{a_1, \dots, a_n\}) = \psi(\varphi(\{a_1, \dots, a_n\})) = \psi(\{a_1, \dots, a_n\}) \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$\psi(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

لجميع $\psi \in \text{Aut}(K; k)$

والآن فمن (٢-٥-١) تقع جميع معاملات f في $\text{Fix}(K; \text{Aut}(K, k)) = k$

(لاحظ أن $K \supset k$ امتداد جالوا) .

ولأن f مطبوعة ، a أحد أصفار f (لاحظ أن $1 \in \text{Aut}(K; k)$ وبهذا يكون $a = 1(a)$ أحد العناصر $a_1, \dots, a_n$ ، فإنه يتبقى فقط أن نثبت أن f غير قابلة للتبسيط (للتحليل) في $k[X]$.

والآن ليكن $g, h \in k[X]$ بحيث يكون (3) $f = gh$ ، $g(a) = 0$. عندئذ فإنه لكل $i \in \{1, \dots, n\}$ يوجد $\varphi \in \text{Aut}(K; k)$ بحيث يكون $a_i = \varphi(a)$ ، ولأن العناصر $a_1, \dots, a_n$ مختلفة $g(a_i) = g(\varphi(a)) = \varphi(g(a)) = \varphi(0) = 0$.
مثلى مثلى ينتج أن $f|g$ (f تقسم g) ، ومع (3) تكون $h \in k^*$ ، أى أن f غير قابلة للتبسيط (للتحليل) .

٢-٥-٣ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . التقريرات الآتية متكافئة :

(١) $K \supset k$ امتداد جالوا

(٢) امتداد الحقل $K \supset k$ منته ، طبيعى ، قابل للانفصال .

(٣) $K \supset k$ هو حقل تشقيق لكثيرة حدود قابلة للانفصال فى $k[X]$

البرهان :

"(١) $\Leftrightarrow$ (٢)" : من (٢-٢-١٥) كل امتدادات جالوا تكون منتهية . ومن (٢-٥-٢) تكون كثيرة الحدود الصغرى لكل عنصر $a \in K$ على k هى حاصل ضرب منته من عوامل خطية مختلفة فى $k[X]$. وبهذا يكون امتداد الحقل $K \supset k$ طبيعياً وقابلاً للانفصال .
"(٢) $\Leftrightarrow$ (٣)" : لأن امتداد الحقل $K \supset k$ منته ، طبيعى ، فإنه من النظرية (٢-٣-٢) يكون هو حقل تشقيق لكثيرة حدود $f \in k[X]$. والمطلوب أن نبرهن على أن f بالضرورة قابلة للانفصال . ليكن g عاملاً من عوامل f ، وغير قابل للتبسيط ، وليكن $a \in K$ صفراً لـ g . وبهذا تكون g مساوية لكثيرة الحدود الصغرى لـ a على k (فيما عدا أنها تساوى كثيرة الحدود الصغرى لـ a مضروبة فى عامل ثابت) . ولأن a قابل للانفصال على k فإن g تكون قابلة للانفصال ، وبالتالي تكون f قابلة للانفصال .

"(٣) $\Leftarrow$ (١)" : ليكن $K \supset k$ حقل التشقيق لكثيرة حدود قابلة للانفصال
 $f \in k[X]$ من $G := \text{Aut}(K; k)$ نحصل على $k \subset \text{Fix}(K; G)$ ، ومن
 (٢-٢-٩) ينتج أن :

$$\text{Ord}(G) \leq [K : \text{Fix}(K; G)] \leq [K : k] < \infty$$

أى أن G منتهية

$$\text{Fix}(K; G) = k \quad \text{والمطلوب البرهنة على أن}$$

سنعتمد فى البرهان على "r" عدد أصفار f فى $K \setminus k$ ، وسنستخدم الاستقراء الرياضى:

$$\text{عند } r=0 \text{ يكون } K=k \text{ ، ومن ثم فإن } \text{Fix}(K; G) = k$$

والآن ليكن $r \geq 1$ ، $a \in K \setminus k$ صفراً لـ f ، كثيرة الحدود الصغرى g لـ a على
 k هى قاسم لـ f فى $k[X]$. ضع $k' := k(a)$ ، وبالتالي فإن $K \supset k'$ هو حقل
 التشقيق لكثيرة الحدود القابلة للانفصال $[X]$ لـ f ، التى لها $r-1$ من الأصفار
 فى $K \setminus k'$. ومن فرض الاستقراء الرياضى فإن $K \supset k'$ هو امتداد جالوا ، بحيث

إنه توجد G' زمرة جزئية منتهية من $\text{Aut}(K)$ بحيث يكون

$$G' = \text{Aut}(K; k') \subset G \quad , \quad k' = \text{Fix}(K; G')$$

$$\text{ليكن الآن } x \in \text{Fix}(K; G) \subset \text{Fix}(K; G') = k(a)$$

إذا كان $n = \deg(g)$ فإنه من (١-٥-٥) توجد عناصر $c_0, \dots, c_{n-1} \in k$ بحيث يكون :

$$x = c_{n-1}a^{n-1} + \dots + c_0$$

إذا كانت $a = a_1$ ، a_2 ، ... ، a_n أصفراً لـ g فى K فمن (١-٨-٨) ينتج أنه لكل

$i \in \{1, \dots, n\}$ توجد $\varphi_i \in G$ بحيث إن $\varphi_i(a) = a_i$ ، ونحصل على :

$$\begin{aligned} x &=_{x \in \text{Fix}(K; G)} \varphi_i(x) = \varphi_i(c_{n-1}a^{n-1} + \dots + c_1a + c_0) \\ &= \varphi_i(c_{n-1})\varphi_i(a^{n-1}) + \dots + \varphi_i(c_1)\varphi_i(a) + \varphi_i(c_0) \\ &=_{\varphi_i \in G = \text{Aut}(K; k)} c_{n-1}a_i^{n-1} + \dots + c_1a_i + c_0 \quad \forall i \end{aligned}$$

والآن كثيرة الحدود

$$h := c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + (c_0 - x) \in K[X]$$

لها من ثم الأصفار $a_1, \dots, a_n$. ولأن $\deg(h) \leq n-1$ فإنه ينتج أن $h=0$ ، ومن ثم فإن $x = c_0 \in k$. وبالتالي فإن

$$\text{Fix}(K;G) = k$$

من (٢-٤-٨) ، (٢-٥-٣) ينتج مباشرة :

٢-٥-٤ استنتاج :

إذا كان K حقلاً له المميز صفر ، فإن امتداد الحقل $K \supset k$ يكون امتداد جالوا إذا كان فقط إذا كان $K \supset k$ حقل تشقيق كثيرة حدود في $k[X]$.

٢-٥-٥ نظرية :

ليكن $K \supset k$ امتداد حقل . لتكن $a_1, \dots, a_n \in K$ عناصر قابلة للانفصال على k بحيث إن $K = k(a_1, \dots, a_n)$. عندئذ فإن :

(١) امتداد الحقل $K \supset k$ منته ، قابل للانفصال .

(٢) يوجد حقل فوقى $L \supset K$ بحيث يكون $L \supset k$ امتداد جالوا

البرهان : كون $K \supset k$ منتهياً ينتج من (١-٦-٢)

لكل $i \in \{1, \dots, n\}$ تكون كثيرة الحدود الصغرى f_i لـ a_i على k قابلة للانفصال بحيث إن كثيرة الحدود $f = f_1 \dots f_n \in k[X]$ تكون قابلة للانفصال . وإذا كان $L \supset K$ حقل تشقيق لـ f ، فإن $L \supset k$ أيضاً سيكون حقل تشقيق لـ f لأن $K = k(a_1, \dots, a_n)$. ومن (٢-٥-٣) يكون $L \supset k$ امتداد جالوا ، ومن ثم فهو أيضاً قابل للانفصال . عندئذ فإن $K \supset k$ أيضاً قابل للانفصال .

٦-٢ تطبيق : الحقول المنتهية Finite Fields

١-٦-٢ ملحوظة :

إذا كان K حقلاً منتهياً ، P حقله الأولي (انظر (١-١-٨)) فإن :

$$\text{Ord}(K) = (\text{Char}(K))^{[K:P]}$$

البرهان : لأن K منته فإني $n := [K : P]$ تكون منتهية .

الفراغ الخطي K على الحقل P ذو البعد n يكون متشاكلاً (إيزومورفياً) مع P^n بحيث إن :

$$\text{Ord}(K) = (\text{Ord}(P))^n = (\text{Char}(K))^n$$

٩-١-١

سنذكر الآن نظرية بدون برهان :

٢-٦-٢ نظرية :

ليكن K حقلاً . كل زمرة جزئية منتهية من K^* تكون دائرية .
من النظرية السابقة مباشرة ، ومن (٩-١-١) في نظرية الزمر لدينا :

٣-٦-٢ استنتاج :

ليكن K حقلاً منتهياً يتكون من q من العناصر . عندئذ فإن :

(١) K^* دائرية

(٢) يوجد $a \in K$ بحيث يكون $K = \{0, 1, a, \dots, a^{q-2}\}$

(٣) كل عنصر في K يكون صفراً لكثيرة الحدود $X^q - X \in K[X]$

البرهان :

(١) من حيث إن K منته ، إذن K^* منته ، K^* تكون زمرة جزئية منتهية من K^* ، وبالتالي فهي دائرية .

(٢) $K = K^* \cup \{0\}$ ، من حيث إن K^* دائرية ، وعدد عناصرها $q - 1$

فيكون لها مولد a ، ويكون $K = \{0, 1, a, \dots, a^{q-2}\}$

(٣) من (٩-١١-١) في نظرية الزمر (نظرية كلاين - فرمات)

$$\forall b \in K^* : b^{q-1} = 1 \in K^*$$

وبالتالى فإن :

$$\forall b \in K^* : b^q - b = b^{q-1}b - b = 1b - b = 0$$

أى أن b صفر لكثيرة الحدود $X^q - X \in K[X]$. وواضح أن 0 صفر لكثيرة

الحدود $X^q - X \in K[X]$. أى أن جميع عناصر K أصفار لكثيرة الحدود المعنية .

٤-٦-٢ ملحوظة :

ليكن K حقلا له المميز $p > 0$ ، عندئذ فإن الراسم :

$$K \rightarrow K$$

$$x \mapsto x^p$$

مونومورفيزم . يسمى هومومورفيزم فوربينس لـ K .

(Forbenius - Homomorphism of K)

البرهان :

$$\forall x, y \in K : (xy)^p = \underbrace{(xy) \dots (xy)}_{p \text{ من المرات}} = \underbrace{(x) \dots (x)}_{p \text{ من المرات}} \underbrace{(y) \dots (y)}_{p \text{ من المرات}} = x^p y^p$$

p من المرات p من المرات p من المرات

والآن

$$(x + y)^p = x^p + \dots + \binom{p}{r} x^{p-r} y^r + \dots + y^p$$

العدد العام فى المفكوك هو

$$\binom{p}{r} x^{p-r} y^r = \frac{p!}{r!(p-r)!} x^{p-r} y^r$$

لاحظ أن $p \mid p!$ (p يقسم $p!$) بينما $p \nmid r!$ ، $p \nmid (p-r)!$ (لأن لجميع $1 \leq r < p$: $p \nmid r$ ، $p \nmid p-r$) ومن حيث إن مميز الحقل هو p فإن

$$(x + y)^p = x^p + y^p$$

(راجع مثال (٣-٦-٧) ، مثال ١٥ فى (٣-٦-٩) فى نظرية الحلقات) (كذلك فإن :

$$1^p = 1. \text{ أى أن الراسم هومومورفيزم}$$

ونثبت كذلك أنه راسم أحادى :

ليكن $x^p = y^p$. هذا يقتضى أن $x^p - y^p = 0$. ولكن

$$(x - y)^p = x^p - \binom{p}{1} x^{p-1} y + \dots + (-1)^r \binom{p}{r} x^{p-r} y^r + \dots + (-1)^p y^p$$

كما سبق يكون لدينا :

$$(x - y)^p = x^p + (-1)^p y^p$$

p عدد أولى : إذن $p=2$ أو p عدد فردى .

إذا كان $p=2$ فإن :

$$(x - y)^p = x^p + y^p = x^p - y^p$$

وإذا كان p عدداً فردياً فكذلك يكون لدينا :

$$(x - y)^p = x^p - y^p$$

أى أن $x^p = y^p$ ينتج عنه دائماً أن $(x - y)^p = 0$ ، وبالتالي فإن $x - y = 0$

(لأن الحقل ليس له قواسم صفرية) ، وبالتالي فإن $x = y$ ، ويكون الراسم أحادياً .

ومن ثم فالراسم المعطى مونومورفيزم .

٢-٦-٥ ملحوظة :

(١) هومومورفيزم فوريينيس لحقل منته هو أوتومورفيزم

(٢) لكل عدد أولى p هومومورفيزم فوريينيس للحقل $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ هو راسم الوحدة

البرهان :

(١) واضح لأن كل راسم أحادي (واحد لواحد) من مجموعة منتهية إلى نفسها يكون راسماً غامراً (شاملاً ، فوقياً) وبهذا يكون تناظراً أحادياً ويكون هومومورفيزم فوربينيس ليس مجرد مونومورفيزم ، بل هو في هذه الحالة أوتومورفيزم .

(٢) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل منته ، عدد عناصره p : فمن (٢-٦-٣) (٣) يكون :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : x^p = x$$

وبالتالي فإن هومومورفيزم - فوربينيس للحقل $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ هو الراسم

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

أى راسم الوحدة .

٢-٦-٦ نظرية :

أى حقل له المميز $p > 0$ يكون تاماً إذا كان فقط إذا كان هومومورفيزم فوربينيس الخاص به غامراً (شاملاً ، فوقياً)

البرهان : ليكن K حقلاً له المميز $p > 0$.

إذا كان K تاماً ، فإنه يكون لكل $a \in K$ كثيرة الحدود $f = X^p - a \in K[X]$ قابلة للانفصال. ليكن $g \in K[X]$ عاملاً لـ f غير قابل للتحليل (للتبسيط) ، $L \supset K$ حقل تشقيقه ، $b \in L$ صفر لـ g . عندئذ فإن b يكون كذلك صفرًا لـ f ، أى أن $b^p = a$ ، وتكون - كما سبق - $b^p = a$ - $b \in K$. ولأن f قابلة للانفصال فإن $g = (X - b)^n$ بحيث يكون $n \in \{1, \dots, p\}$. ومن ثم فإن $n = 1$ ، $b \in K$. أى أنه لكل $a \in K$ يوجد $b \in K$ بحيث يكون $b^p = a$ ، أى أن هومومورفيزم-فوربينيس له يكون غامراً (شاملاً ، فوقياً).

والآن ليكن هومومورفيزم فوريينيس لـ K غامراً (شاملاً ، فوقياً) ، ولتكن $f \in K[X]$ غير قابلة للتحليل (للتبسيط) . إذا كان لـ f أصفار مكررة في حقل تشقيقتها ، فإنه توجد $g \in K[X]$ بحيث يكون $f(X) = g(X^p)$ (انظر (٧-٤-٢)) . وبالتالي فإنه يكون لدينا $a_0, \dots, a_n \in K$ بحيث يكون $f(X) = a_0 + a_1 X^p + \dots + a_n (X^p)^n$. ومن الفرض فإنه لكل $i \in \{0, \dots, n\}$ يوجد $b_i \in K$ بحيث يكون $b_i^p = a_i$. ومن ثم نحصل على :

$$\begin{aligned} f(X) &= b_0^p + b_1^p X^p + \dots + b_n^p (X^p)^n \\ &= (b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n)^p \end{aligned}$$

(مميز الحقل $p > 0$)

أى أن f لن تكون غير قابلة للتبسيط (للتحليل) : وهذا تناقض مع اختيار f . وبالتالي فإن f ليس لها أصفار مكررة في حقل تشقيقتها ، أى أنها قابلة للانفصال ، ويكون الحقل K تاماً .

٧-٦-٢ استنتاج :

كل حقل منته يكون تاماً

البرهان : ينتج مباشرة من (٥-٦-٢) ، (٦-٦-٢)

٨-٦-٢ نظرية :

لكل عدد أولى p ، ولكل $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

(١) إذا كان $K \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^{p^n} - X \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

فإن K يكون حقلاً ذا p^n من العناصر

(٢) إذا كان K حقلاً ذا p^n من العناصر ، P هو حقله الأولى ، فإن $K \supset P$

يكون حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^{p^n} - X \in P[X]$

(٣) كل حقلين يتكونان من p^n من العناصر يكونان متشاكلين .

البرهان :

(١) نبرهن أولا على أن مجموعة أصفار كثيرة الحدود $X^{p^n} - X$ في K

تكون حقلا بينيا في $K \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ، بحيث إن K تنطبق مع هذه المجموعة .

لأن الزمرة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ من الرتبة $p-1$ ، فإن $a^{p-1} = 1$ ، وبالتالي فإن $a^p = a$ ،

وكذلك $a^{p^n} = a$ لجميع $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ، بحيث إن $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ يكون محتوي في

مجموعة أصفار كثيرة الحدود f : $\forall a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* : f(a) = a^{p^n} - a = a - a = 0$.

إذا كان a ، b صفرين لـ f فإننا نحصل على :

$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n} = a \pm b ,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p^n} = \frac{a^{p^n}}{b^{p^n}} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

أى أن $a \pm b$ ، $a \cdot b$ ، $\frac{a}{b}$ إذا كان $b \neq 0$ أصفار لكثيرة الحدود f ، أى أن

أصفار كثيرة الحدود تكون حقلا جزئيا من K .

ومما سبق فإنها تكون حقلا جزئيا بينيا في $K \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ، كذلك فإن كل عنصر في

K يكون صفرا لـ f .

ولأن $D(f) = -1 \neq 0$ فإن f يكون لها أصفار بسيطة فقط في K (انظر (٢-٤-٤)) ، وبالتالي

فإن K تتكون فقط من p^n عنصرا بالضبط هي أصفار كثيرة الحدود $X^{p^n} - X$.

(٢) لأن الزمرة K^* من الرتبة $p^n - 1$ فإن $a^{p^n} = a$ لجميع $a \in K^*$ ، ومن ثم

فإن هذا أيضا لجميع $a \in K$. ولأن كثيرة الحدود $X^{p^n} - X$ لها على الأكثر

" p من الأصفار في حقل فوقى لـ P ، فإن K هى مجموعة أصفار كثيرة الحدود فى حقل التشقيق . ومن ثم فإن $K \supset P$. هو حقل تشقيق كثيرة الحدود هذه .

(٣) ليكن K ، K' حقلين يتكون كل منهما من " p من العناصر . من (٢-٦-١) $Char(K) = p = Char(K')$ ، بحيث إن P الحقل الأولى لـ K يكون متشاكلا مع P' الحقل الأولى لـ K' (انظر (١-١-٩)) . من (٢) ومن (١-٨-٦) يكون K ، K' متشاكلين .

٩-٦-٢ تعريف :

إذا كان $n \neq 0$ عددا طبيعيا ، p عددا أوليا فيقال للحقل الوحيد - بدون حساب الأيزومورفيزمات- الذى يتكون من " p من العناصر إنه حقل جالوا ذو " p من العناصر (Galois field of p^n elements)

ويشار إليه بالرمز $GF(p^n)$.

١٠-٦-٢ نظرية :

ليكن $n \neq 0$ عددا طبيعيا ، p عددا أوليا . لكل حقل K يتكون من " p من العناصر ، وحقله الأولى P :

- (١) امتداد الحقل $K \supset P$ هو امتداد جالوا
 - (٢) هو مومورفيزم فوربينيس لـ K يولد زمرة أوتومورفيزمات K (التي تتطابق مع زمرة جالوا لـ $K \supset P$ حسب (٢-١-٣))
- البرهان :**

$$(١) \quad D(X^{p^n} - X) = -1 \neq 0 \quad \text{يقضى أن كثيرة الحدود } X^{p^n} - X \in P[X]$$

قابلة للانفصال ، فينتج من (٢-٦-٨) ، (٢-٥-٣) الادعاء مباشرة .

(٢) نحصل من النظرية الأساسية لجالوا (٢-٢-٤) ، ومن (٢-١-٣) على :

$$Ord(Aut(K)) = Ord(Aut(K;P)) = [K:P] = n$$

$$٣-١-٢$$

$$٤-٢-٢$$

$$(K \cong P^n \text{ فراغ خطى على } P)$$

ونحتاج فقط للبرهنة على أن قوى هومومورفيزم - فوريينيس σ لـ K هي σ^0 ، σ^1 ، ... ، σ^{n-1} مختلفة متتالية متتالية . ولهذا ليكن a عنصراً مولداً للزمرة K^* . لأن

$\sigma^i(a) = a^{p^i}$ لجميع i ، يكفي أن نبرهن على أن العناصر a ، a^p ، ... ، $a^{p^{n-1}}$ مختلفة متتالية متتالية . من $d^j = a^{p^j}$ حيث $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ ، $j < i$ يكون لدينا $a^{p^j(p^{i-j}-1)} = 1$ ، $0 \leq p^j(p^{i-j}-1) \leq p^j - 1 < p^n - 1$ ، وهذا غير ممكن لأن $\text{Ord}(a) = p^n - 1$.

١١-٦-٢ استنتاج :

ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ، p عدداً أولياً . إذا كان K حقلاً يتكون من p^n من العناصر ، σ هومومورفيزم فوريينيس له ، عندئذ فإن الحقل $\text{Fix}(K; [\sigma^i])$ حيث i قاسم لـ n ، $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ يكون حقلاً جزئياً من K .

وعلى وجه الخصوص لكل قاسم i لـ n يوجد بالضبط حقل جزئي واحد في K يتكون من p^i من العناصر .

البرهان : من (١١-١٢) في نظرية الزمر ، ومن (١٠-٦-٢) السابقة مباشرة فإن الزمر $[\sigma^i]$ ، حيث i قاسم لـ n ، $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ هي الزمر الجزئية الوحيدة من $\text{Aut}(K)$.

وهي مختلفة متتالية متتالية ، $\text{Ord}([\sigma^i]) = \frac{n}{i}$ ، وبالتالي فإن $[\text{Aut}(K) : [\sigma^i]] = i$.

والآن من نظرية جالوا الأساسية (٢-٢-٤) فإنه لأي حقل بيني P في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset K$ يكون

$$[P : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = [\text{Aut}(K; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : \text{Aut}(K; P)]$$

$$= [\text{Aut}(K) : \text{Aut}(K; P)] \quad (\text{من } ٣-١-٢)$$

بأخذ $P = \text{Fix}(K; [\sigma^i])$ ينتج أن

$$[P : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = i$$

ومن (١-٦-٢) ينتج المطلوب مباشرة .

أمثلة متنوعة (٢)

مثال ١ : حدد : أى التقارير الآتية صائب وأيها خاطئ

(١) كثيرة الحدود $X^3 + 5$ قابلة للانفصال على $\mathbb{Z}_7$

(٢) كل امتدادات الحقول المنتهية تكون طبيعية

(٣) كل امتداد قابل للانفصال يكون طبيعياً

(٤) كل امتداد طبيعي منته يكون حقل تشقيق لكثيرة حدود

(٥) $\mathbb{Q}(\sqrt{19}) \supset \mathbb{Q}$ امتداد طبيعي وقابل للانفصال

(٦) $\mathbb{Q}(\sqrt{21}) \supset \mathbb{Q}$ امتداد طبيعي وقابل للانفصال

(٧) أى كثيرة حدود قابلة للتحليل لا يمكن أن تكون قابلة للانفصال

(٨) إذا كان $D(f) = 0$ فإن $f = 0$ لكثيرة حدود f على حقل ما .

الحل : التقارير (١) ، (٤) ، (٥) ، (٦) صحيحة . والباقية خاطئة .

مثال ٢ : حدد أى هذه الامتدادات يكون طبيعياً :

(١) $\mathbb{Q}(t) \supset \mathbb{Q}$

(٢) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \supset \mathbb{Q}$

(٣) $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ حيث α هو الجذر الحقيقي فى الجذور $\{5^{\frac{1}{7}}\}$

(٤) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \alpha) \supset \mathbb{Q}(\alpha)$ حيث α مثلما فى (٣)

(٥) $\mathbb{R}(\sqrt{-7}) \supset \mathbb{R}$

الحل : الامتدادات (٢) ، (٤) ، (٥) طبيعية .

الامتداد (١) ليس جبرياً ، وبالتالي فهو ليس طبيعياً .

بالنسبة إلى التقرير (٣) : كثيرة الحدود $X^7 - 5$ لها صفر هو الجذر الحقيقى فى

الجذور $\{5^{\frac{1}{7}}\}$ أى لها العامل $X - \alpha$ لكنها لا تتشقق على $\mathbb{Q}(\alpha)$ فى عوامل خطية .

إذن الامتداد ليس طبيعياً .

مثال ٣ : اوجد $Aut(\mathbb{C}; \mathbb{R})$

الحل : ليكن $\alpha \in Aut(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ ، أى أن $\alpha \in Aut(\mathbb{C})$ بحيث يكون :

$$\forall r \in \mathbb{R} : \alpha(r) = r$$

والآن ليكن $\alpha(i) = j$ حيث $i = \sqrt{-1}$. عندئذ فإن :

$$j^2 = \alpha(i)^2 = \alpha(i^2) = \alpha(-1) = -1 \quad (r \in \mathbb{R} \text{ لجميع } \alpha(r) = r \text{ لأن})$$

α أوتومورفيزم

ومن ثم فإن $j = i$ أو $j = -i$.

والآن لجميع $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$\alpha(x + iy) = \alpha(x) + \alpha(i)\alpha(y) = x + jy \quad (\text{حسب تعريف } \alpha)$$

والآن لدينا مرشحان :

$$\alpha_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x + iy \mapsto x + iy ,$$

$$\alpha_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x + iy \mapsto x - iy$$

واضح أن α_1 هو راسم الوحدة ، ومن ثم فهو ينتمى إلى $Aut(\mathbb{C}, \mathbb{R})$

سنثبت أن α_2 كذلك ينتمى إلى $Aut(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ كالآتى :

$$\alpha_2((x + iy) + (u + iv)) = \alpha_2(x + u + i(y + v)) = x + u - i(y + v)$$

$$= x - iy + u - iv$$

$$= \alpha_2(x + iy) + \alpha_2(u + iv)$$

$$\alpha_2((x + iy)(u + iv)) = \alpha_2(xu - yv + i(xv + yu))$$

$$= xu - yv - i(xv + yu)$$

$$= (x - iy)(u - iv)$$

$$= \alpha_2(x + iy)\alpha_2(u + iv)$$

أى أن α_2 أوتومورفيزم . كذلك فإن :

$$\alpha_2(x + 0i) = x - 0i = x$$

أى أن $\alpha_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}; \mathbb{R})$

وواضح أن $\alpha_2^2 = \alpha_1$. ومن ثم فإن $\text{Aut}(\mathbb{C}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$

(زمرة دائرية من الرتبة 2)

مثال ٤ :

لتكن $f := X^4 - 4X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ عين $\text{Gal.}(f; \mathbb{Q})$ ، حيث

$\text{Gal.}(f; \mathbb{Q}) := \text{Aut}(K; \mathbb{Q})$ ، K تشقيق f على $\mathbb{Q}$. وعين الحقول الثابتة

المناظرة للزمر الجزئية الفعلية من $\text{Gal.}(f, \mathbb{Q})$

الحل :

$$f := X^4 - 4X^2 - 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 5) = 0$$

أى أن أصفار f هي $\alpha = i$ ، $\beta = -i$ ، $\gamma = \sqrt{5}$ ، $\delta = -\sqrt{5}$ ويكون امتداد

الحقل المصاحب هو : $K \supset \mathbb{Q}$ حيث $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$. ويكون هناك أربعة

عناصر فى $\text{Aut}(K; \mathbb{Q})$ هي I, R, S, T ، حيث I هو راسم الوحدة ،

$R = (\alpha\beta)$ ، $S = (\gamma\delta)$ ، $T = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ، بالاصطلاح الدائرى . وفى الواقع

فإن هذه هي كل عناصر $\text{Aut}(K; \mathbb{Q})$ لأن أى عنصر فى $\text{Aut}(K; \mathbb{Q})$ يجب أن

"يرسل" i إلى $\pm i$ ، $\sqrt{5}$ إلى $\pm\sqrt{5}$. ومن ثم فإن

$$\text{Gal.}(f; \mathbb{Q}) := \text{Aut}(K; \mathbb{Q}) = \{I, R, S, T\}$$

وتكون الزمر الجزئية الفعلية من $\text{Gal.}(f; \mathbb{Q})$ هي :

$$\{I\}, \{I, R\}, \{I, S\}, \{I, T\}$$

وتكون الحقول الثابتة المناظرة هي :

$$K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$$

ويمكن البرهنة على أن هذه مع $\mathbb{Q}$ هي كل الحقول الجزئية من K .

(لاحظ أنه يوجد تناظر أحادى بين الزمر الجزئية الفعلية من زمرة جالوا ، الحقول الثابتة

(المناظرة)

مثال ٥ : حدد : أى التقارير الآتية صائب وأيها خاطئ :

- (١) كل عنصر فى $Aut(K; k)$ هو عنصر فى $Aut(K)$
- (٢) كل عنصر فى $Aut(K; K)$ هو راسم الوحدة
- (٣) زمرة جالوا $Aut(K; k)$ دائرية
- (٤) زمرة جالوا $Aut(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ إبدالية
- (٥) الراسمان $Aut(K;)$ ، $Fix(K;)$ فى $(\mathbb{Q} - \mathbb{Q} - \mathbb{Q})$ كل منهما معكوس الآخر
- (٦) الراسمان السابقان يحفظان الاحتواءات
- (٧) إذا كان $Aut(K; k) = \{1\}$ فإن $K = k$
- (٨) إذا كان $K = k$ فإن $Aut(K; k) = \{1\}$
- (٩) $Ord(K(X); K) = 1$
- (١٠) تعريف زمر جالوا أسهل من حسابها !

الحل : التقارير (١) ، (٢) ، (٤) ، (٥) ، (٨) ، (١٠) صحيحة . الباقي خاطئ

مثال ٦ : اوجد $Aut(K; k)$ للامتدادات $K \supset k$ الآتية :

$$(أ) \quad Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \mathbb{Q})$$

$$(ب) \quad Aut(\mathbb{Q}(\alpha); \mathbb{Q}) \quad \text{حيث } \alpha \text{ هو الجذر الحقيقى فى الجذور } (\sqrt[3]{7})$$

$$(جـ) \quad Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}); \mathbb{Q})$$

الحل : (أ)

$$(\varphi(\sqrt{2}))^2 := \varphi(\sqrt{2})\varphi(\sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2}\sqrt{2}) = \varphi(2) = 2$$

تعريف الامتداد φ أوتومورفيزم

$$\Rightarrow \varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$$

أى أنه يوجد φ_1 ، φ_2 بحيث يكون

$$\varphi_1(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

$$\varphi_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad , \quad \Rightarrow \varphi_1 = 1;$$

$$\varphi_2(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

$$\varphi_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

أى أن $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \mathbb{Q})$ تتكون من عنصرين ، أحدهما 1 (راسم الوحدة) . ولاحظ أن

$$(\varphi_2(\sqrt{2}))^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2,$$

$$\varphi_2(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

أى أن $\varphi_2^2 = 1$. وبالتالي تكون $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \mathbb{Q})$ دائرية لها الرتبة 2 ، أى هى تشاكل $\mathbb{Z}_2$.

(ب)

$$(\varphi(\sqrt[5]{7}))^5 := \varphi(\sqrt[5]{7})^5 = \varphi(7) = 7$$

تعريف الامتداد

$$\Rightarrow \varphi(\sqrt[5]{7}) = 7^{1/5} \quad (\text{لأن } \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \subset \mathbb{R})$$

$$\varphi(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad \text{ولأن}$$

$$\varphi = 1 \quad (\text{راسم الوحدة}) \quad \text{إذن}$$

$$Aut((\mathbb{Q}, \alpha); \mathbb{Q}) = \{1\} \quad \text{وتكون الزمرة}$$

(جـ)

$$(\varphi(\sqrt{2}))^2 := \varphi(\sqrt{2})\varphi(\sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2})^2 = \varphi(2) = 2 \Rightarrow \varphi(2) = \pm\sqrt{2}$$

تعريف الامتداد

$$(\varphi(\sqrt{3}))^2 = \varphi(\sqrt{3})\varphi(\sqrt{3}) = \varphi(\sqrt{3})^2 = \varphi(3) = 3 \Rightarrow \varphi(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$$

تعريف الامتداد

وبذلك يكون لدينا

$$\varphi_1 = 1$$

$$(\varphi_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \varphi_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \varphi_1(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}),$$

$$\varphi_2 : \varphi_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \varphi_2(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

$$\varphi_3 : \varphi_3(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \varphi_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \varphi_3(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

$$\varphi_4 : \varphi_4(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_4(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \varphi_4(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

وكما سبق فإن :

$$\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = \varphi_3^2 = \varphi_4^2 = 1$$

وتكون

$$Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ملحوظة :

لاحظ أن $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\}$ أساس للفراغ الخطي $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على الحقل $\mathbb{Q}$.

مثال ٧ : باعتبار مثال ٦ السابق والراسمين $Aut(K;)$ ، $Fix(K;)$

فى أى الحالات هما تناظران أحاديان ؟

الحل : فى الحالتين (أ) ، (جـ) الامتدادان امتدادا جالوا (انظر (٥-٢-٢))

أما الحالة (ب) فالامتداد ليس امتداد جالوا (انظر (٣-٢-٢))

فى الحالتين (أ) ، (جـ) الراسمان تناظران أحاديان ، وكل منهما معكوس الآخر حسب

نظرية جالوا الأساسية (٤-٢-٢) أما فى الحالة (ب) فالراسمان ليسا كذلك .

مثال ٨ : برهن على أن كثيرة الحدود $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

قابلة للانفصال.

البرهان : لدينا

$$f := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^5 - 1}{X - 1}, X \neq 1$$

وتكون أصفار f هي :

$$e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}} \text{ في حقل تشقيق داخل}$$

$\mathbb{C}$ ، وكلها مختلفة ، أى كلها بسيطة . وبالتالي فهي قابلة للانفصال .

مثال ٩ :

ليكن K حقلاً منتهياً ، مكوناً من 11 عنصراً . برهن على أن K^* دائرية .

البرهان : لاحظ أن $K = GF(11)$ والآن قوى $\bar{2}$ مرتبة هي :

$$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}$$

حيث إنه من الواضح أن مميز الحقل هو 11

أى أن $\bar{2}$ مولد لـ K^* .

مثال ١٠ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صائبة أم خاطئة :

- (١) يوجد حقل منته يتكون من 124 عنصراً
 - (٢) يوجد حقل منته ، زمرة الضربية تتألف من 124 عنصراً
 - (٣) يوجد حقل منته يتألف من 125 عنصراً
 - (٤) الزمرة الضربية للحقل $GF(19)$ بها عنصر رتبته 3
 - (٥) كل الحقول ذات 121 عنصراً تكون متشاكله
 - (٦) $GF(2401)$ يحتوى على حقل جزئى يتشاكل مع $GF(49)$
 - (٧) أى مونومورفيزم من حقل منته إلى نفسه هو أوتومورفيزم
 - (٨) الزمرة الجمعية لحقل منته تكون دائرية
 - (٩) الزمرة الضربية لأى حقل دائرية
 - (١٠) أس الزمرة هو أكبر رتبة لعناصرها
- (يعرف أس الزمرة بأنه المضاعف المشترك الأصغر لرتب عناصرها)

الحل :

(١) خاطئ لأنه لا يوجد عدد أولى p وعدد طبيعى n بحيث يكون $p^n = 124$

(٢) ، (٣) : الحقل هنا يتألف من $5^3 = 125$ عنصراً . إذن التقريران صحيحان

(٤) الزمرة الضربية هنا تتألف من 18 عنصراً ، وهي دائرية . إذن التقرير صحيح

(٥) ، (٦) ، (٧) ك تقارير صحيحة

(٨) ، (٩) ، (١٠) : تقرير خاطئة

مثال ١١ :

اعتبر الحقل $GF(25)$ أى $GF(5^2)$:

نعتبر العنصر $2+\sqrt{2}$ ، وتكون قواه المختلفة المتتالية محسوبة فى $\mathbb{Z}_5$ هى :

$$\begin{aligned} & 2+\sqrt{2} , 1+4\sqrt{2} , 4\sqrt{2} , 3+3\sqrt{2} , 2+4\sqrt{2} , \\ & 2 , 4+2\sqrt{2} , 2+3\sqrt{2} , 3\sqrt{2} , 1+\sqrt{2} , 4+3\sqrt{2} , \\ & 4 , 3+4\sqrt{2} , 4+\sqrt{2} , \sqrt{2} , 2+2\sqrt{2} , 3+\sqrt{2} , \\ & 3 , 1+3\sqrt{2} , 3+2\sqrt{2} , 2\sqrt{2} , 4+4\sqrt{2} , 1+2\sqrt{2} , \\ & 1 . \end{aligned}$$

ومن ثم فإن $2+\sqrt{2}$ يولد الزمرة الضربية لـ $GF(25)$. عناصر $GF(25)$ كلها

أصفار لكثيرة الحدود $X^{25}-X \in (GF(25))[X]$ (انظر (٢-٦-٣) ، (٢-٦-٨))

مثال ١٢ :

لأى من قيم n الآتية يوجد حقل يتألف من n من العناصر :

$$1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 17 , 24 , 312 , 65536 , 65537 , 83521 , \\ 103823 , 2^{216091} - 1$$

الحل :

الحقل يتألف من n من العناصر إذا كان $n=p^m$ حيث p عدد أولى ، m عدد

صحيح موجب . وهذا ينطبق على :

$$2 , 3 , 4 , 5 , 17 , 65536 (= 2^{16}) , 65537 , 83521 (= 17^4) , 103823 , \\ 2^{216091} - 1 .$$

مثال ١٣ : أوجد $[GF(64):GF(8)]$ ، $[GF(729):GF(9)]$

الحل :

$$[GF(729):GF(9)] = [GF(3^6):GF(3^2)]$$

$$[GF(3^6):GF(3)] = [GF(3^6):GF(3^2)][GF(3^2):GF(3)]$$

نظرية الدرجة

$$\Rightarrow 6 = [GF(3^6):GF(3^2)].2$$

١-٦-٢

$$\Rightarrow [GF(729):GF(9)] = [GF(3^6):GF(3^2)] = 3.$$

$$[GF(64):GF(8)] = [GF(2^6):GF(2^3)]$$

$$[GF(2^6):GF(2)] = [GF(2^6):GF(2^3)][GF(2^3):GF(2)]$$

$$\Rightarrow 6 = [GF(2^6):GF(2^3)].3$$

$$\Rightarrow [GF(64):GF(8)] = [GF(2^6):GF(2^3)] = 2$$

مثال ١٤ : برهن على أنه لكل قاسم m لـ n يوجد حقل جزئي وحيد من $GF(p^n)$

ويتكون من p^m من العناصر. علاوة على هذا لا توجد حقول جزئية أخرى من $GF(p^n)$

البرهان : للبرهنة على الوجود نفترض أن m تقسم n . عندئذ ، لأن :

$$p^n - 1 = (p^m - 1)(p^{n-m} + p^{n-2m} + \dots + p^m + 1),$$

فإن $p^m - 1$ تقسم $p^n - 1$. هذا يستلزم أن $X^{p^n-1} - 1$ تقسم $X^{p^m-1} - 1$ في $\mathbb{Z}_p[X]$.

وبالتالي فإن كل صفر لـ $X(X^{p^n-1} - 1)$ هو صفر لـ $X(X^{p^m-1} - 1)$ ومن (٢-١)

(١-٦) فإن مجموعة أصفار $X(X^{p^m-1} - 1)$ هي $GF(p^m)$ ، وكذلك فإن مجموعة

أصفار $X(X^{p^n-1}-1)$ في $GF(p^n)$ هي $GF(p^n)$. ومن ثم فإن $GF(p^m)$ هو حقل جزئي من $GF(p^n)$ ما دامت m تقسم n .

الوحدانية تنتج من ملاحظة أنه إذا كان $GF(p^n)$ له حقلان جزئيان مختلفان من الرتبة p^m فإن كثرة الحدود $X^{p^m}-X$ يكون لهما أكثر من p^m صفراً في $GF(p^n)$. هذا بالطبع يناقض (٢-٢-٣) في نظرية الحلقات

وأخيراً ليكن F حقلاً جزئياً من $GF(p^n)$. عندئذ فإن F يتشاكل مع $GF(p^m)$ لبعض m ، ويكون لدينا :

$$\begin{aligned} n &= [GF(p^n) : GF(p)] \\ &= [GF(p^n) : GF(p^m)][GF(p^m) : GF(p)] \\ &= [GF(p^n) : GF(p^m)]m \end{aligned}$$

أى أن m تقسم n .

مثال ١٥ : إذا كان F حقلاً مكوناً من 729 عنصراً ، وكان α مولداً لـ F^* (الزمرة الضربية لـ F) فاوجد الحقول الجزئية

$$GF(729) , GF(27) , GF(9) , GF(3)$$

الحل :

$$GF(3) = \{0\} \cup [\alpha^{364}] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

$$GF(9) = \{0\} \cup [\alpha^{91}]$$

$$GF(27) = \{0\} \cup [\alpha^{28}]$$

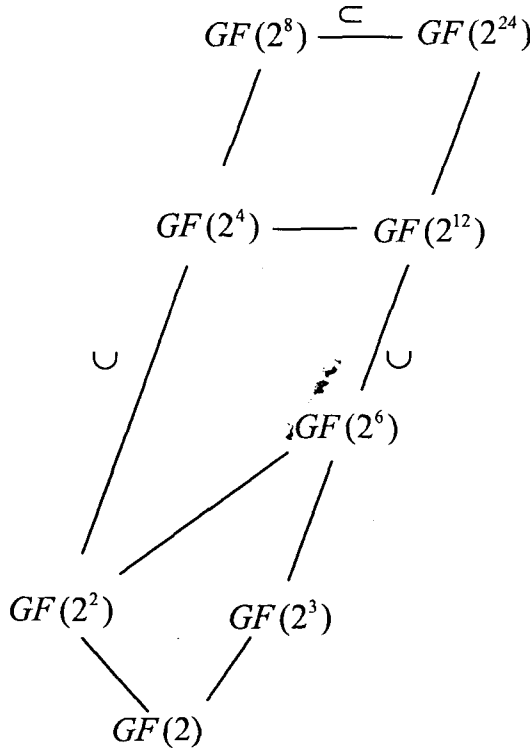
$$GF(729) = \{0\} \cup [\alpha]$$

لاحظ أن هذه هي كل الحقول الجزئية و ذلك من المثال السابق مباشرة.

مثال ١٦ : وضح بالرسم الاحتواءات التي تربط الحقول الجزئية من $GF(2^{24})$

الحل : الحقول الجزئية الفعلية من $GF(2^{24})$ هي :

$GF(2)$ ، $GF(2^2)$ ، $GF(2^3)$ ، $GF(2^4)$ ، $GF(2^6)$ ، $GF(2^8)$ ، $GF(2^{12})$.
(انظر (١١-٦-٢))



مثال ١٧ : اوجد الحقول الجزئية من $GF(16)$

الحل :

$$GF(16) \cong \{aX^3 + bX^2 + cX + d + [X^4 + X + 1] \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}$$

(تمرين (٤) في تمارين عامة (٢))

والآن لاحظ أن

$$\overline{X^4 + X + 1} = \bar{0} \Rightarrow \overline{X^4} = -\overline{X} - 1$$

$$= \overline{X + 1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \overline{X^5} = \overline{X^2 + X} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{X^{10}} &= \overline{(X^2 + X)^2} = \overline{X^4 + 2X^3 + X^2} \\ &= \overline{X^4 + 1 + 0 + X^2} \\ &= \overline{X^2 + X + 1} \quad (3) \end{aligned}$$

ومن حيث إن الحقل يتكون من 16 عنصراً فإن الحقول الجزئية منه تتكون من عنصرين ، أربعة عناصر ، ستة عشر عنصراً .

واضح أن الحقل الجزئي المكون من عنصرين هو $\{0, 1\}$. كذلك الحقل الجزئي المكون من ستة عشر عنصراً هو الحقل نفسه . يتبقى أن نجد الحقل المكون من أربعة عناصر . ونعلم أن العناصر الثلاثة غير الصفرية فيه تكون زمرة جزئية دائرية من الزمرة الضربية الدائرية $(GF(16))^*$. (الزمرة الجزئية من زمرة دائرية تكون دائرية) .

ومن (١-١١-١٢) فى نظرية الزمر فإن $X^3 + [X^4 + X + 1]$ (أو $\overline{X^3}$) ، $X^5 + [X^4 + X + 1]$ (أو $\overline{X^5}$) ، هما المولدان الوحيدان للزمرتين الجزئيتين الفعليتين من $(GF(16))^*$ (لأن 3 ، 5 هما القاسمان الوحيدان "غير التافهين" لـ 15) . $\overline{X^3}$ تنتج زمرة جزئية ذات خمسة عناصر ، من $(GF(16))^*$ ، بينما $\overline{X^5}$ تنتج زمرة جزئية ذات ثلاثة عناصر من $(GF(16))^*$ ، أى تنتج حقلاً جزئياً ذا أربعة عناصر من $GF(16)$ ويكون الحقل الجزئي ذو الأربعة عناصر هو :

$$\{0, 1, \overline{X^5}, \overline{X^{10}}\} = \{0, 1, \overline{X^2 + X}, \overline{X^2 + X + 1}\}$$

التحقيق $\overline{X^5} \neq 1$ لأن $\overline{X^5} = 1$ يقتضى أن $\overline{X^{10}} = 1$.

ومن (3) لدينا $\overline{X^{10}} = \overline{X^2 + X + 1}$ ، ومن ثم فإن $\overline{X^2 + X + 1} = \bar{1}$ ، أى أن $\overline{X^2 + X} = \bar{0}$ ، ومن (2) يكون $\bar{1} = \bar{0}$: تناقض .

$\overline{X^{10}} \neq \bar{1}$ وإلا ، فلدينا مما سبق أن $\overline{X^{10}} = \overline{X^2 + X + 1}$ وبهذا يكون $\overline{X^2 + X} = \bar{0}$ ومن (2) يكون $\overline{X^5} = \bar{0}$ أى أن $\overline{X} = \bar{0}$ أى أن $X \in [X^4 + X + 1]$: تناقض .

مثال ١٨ : برهن على أن $\overline{X}$ مولد للزمرة الدائرية $(\mathbb{Z}_3[X] / [X^3 + 2X + 1])^*$

البرهان :

$$F := \mathbb{Z}_3[X] / [X^3 + 2X + 1] = \{aX^2 + bX + c + [X^3 + 2X + 1] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}$$

ومن ثم فإن عدد عناصر F هو 27 ، ويكون عدد عناصر F^* هو 26 .

وسنثبت أن $\overline{X^2} \neq \bar{1}$ ، $\overline{X^{13}} \neq \bar{1}$. ومن حيث إن 2 ، 13 هما القاسمان الوحيدان غير التافهين لـ 26 ، فإن $\overline{X}$ تكون مولداً لـ F^* .

$\overline{X^2} = \bar{1}$ يقتضى أن $\overline{X^3} = \overline{X}$. لدينا $\overline{X^3 + 2X + 1} = \bar{0}$. ومن ثم فإن : $\overline{3X + 1} = \bar{0}$. وبالتالي فإن $\bar{1} = \bar{0}$: تناقض ($\bar{3} = \bar{0}$ فى $\mathbb{Z}_3$) .

والآن $\overline{X^3 + 2X + 1} = \bar{0}$ يقتضى أن $\overline{X^3} = \overline{X + 2}$. ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned} \overline{X^{12}} &= \overline{(X + 2)^4} = \overline{X^4 + 4X^3 \cdot 2 + 6X^2 \cdot 4 + 4X \cdot 8 + 16} \\ &= \overline{X^4 + 2X^3 + 2X + 1} \end{aligned}$$

$$= \overline{X^4 + X^3} \quad (\text{لأن } \overline{X^3 + 2X + 1} = \bar{0})$$

$$= \overline{X^3(X + 1)}$$

$$= \overline{(X + 2)(X + 1)} = \overline{X^2 + 3X + 2} = \overline{X^2 + 2}$$

ومن ثم فإن :

$$\overline{X^{13}} = \overline{X^3 + 2X} = \overline{-1} = \overline{2} \neq \overline{1}$$

نهاية البرهان .

مثال ١٩ : لتكن f كثيرة حدود من الدرجة الثالثة غير القابلة للتحليل في $\mathbb{Z}_2[X]$.

برهن على أن حقل تشقيق f على $\mathbb{Z}_2$ يتكون من 8 عناصر أو 64 عنصراً .

البرهان : إذا كان a صفراً لـ f . في امتداد ما فيكون $g = (X - a) \mid f$. عندئذ فإن

$$[\mathbb{Z}_2(a) : \mathbb{Z}_2] = 3 . \text{ إذا كانت } f \text{ تتشقق على } \mathbb{Z}_2(a) \text{ نكون قد انتهينا ويكون عدد}$$

عناصر $\mathbb{Z}_2(a)$ هو 2^3 أى 8 . (انظر (١-٦-٢) .

إذا لم يكن الأمر كذلك ، فليكن b صفراً لـ g في امتداد ما لـ $\mathbb{Z}_2(a)$.

عندئذ فإن $[\mathbb{Z}_2(a, b) : \mathbb{Z}_2(a)] = 2$ (g من الدرجة الثانية !) وبهذا يكون

$$[\mathbb{Z}_2(a, b) : \mathbb{Z}_2] = [\mathbb{Z}_2(a, b) : \mathbb{Z}_2(a)][\mathbb{Z}_2(a) : \mathbb{Z}_2] = 2.3 = 6$$

وبالتالى يكون عدد عناصر $\mathbb{Z}_2(a, b)$ هو 2^6 أى 64

مثال ٢٠ : برهن على أن أكبر درجة لعامل غير قابل للتبسيط من عوامل $X^8 - X$

على $\mathbb{Z}_2$ هي 3.

البرهان : لاحظ أولاً أن $GF(8)$ هو حقل تشقيق $X^8 - X$ (انظر (٨-٦-٢) .

كذلك فإن :

$$[GF(8) : GF(2)] (= \mathbb{Z}_2) = 3 \text{ وينتج المطلوب (لماذا ؟)}$$

مثال ٢١ : برهن على أن X ليس مولداً للزمرة الدائرية $(\mathbb{Z}_3[X] / [X^3 + 2X + 2])^*$

الحل :

$$F := \mathbb{Z}_3[X] / [X^3 + 2X + 2] = \{aX^2 + bX + c + [X^3 + 2X + 2] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}$$

ويكون عدد عناصر $F = 3^3$ أى ٢٧ . ومن ثم فإن عدد عناصر F^* هو 26 .

والآن : $X^3 + \bar{2}X + \bar{2} = \bar{0}$ يقتضى أن $X^3 = X + \bar{1}$ (الحساب فى $\mathbb{Z}_3[X]$)

وهذا يقتضى أن : (1) $X^4 = X^2 + X$. كذلك يكون لدينا :

$$X^{12} = (X + \bar{1})^4 = X^4 + \bar{4}X^3 + \bar{6}X^2 + \bar{4}X + \bar{1}$$

$$= X^4 + X^3 + X + \bar{1}$$

$$\stackrel{(1)}{=} X^3 + X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$$

$$= X + \bar{1} + X^2 + \bar{2}X + \bar{1} \quad (\text{لأن } X^3 = X + \bar{1})$$

$$= X^2 + \bar{2}$$

$$\Rightarrow X^{13} = X^3 + \bar{2}X = \bar{1} \quad (\text{لأن } X^3 + \bar{2}X + \bar{2} = \bar{0})$$

أى أن X تولد زمرة جزئية من F^* رتبته 13 ، وبهذا لا تكون مولدة لـ F^* .

مثال ٢٢ :

ليكن E حقل تشقيق لـ $f := X^{p^n} - X$ على $\mathbb{Z}_p$. برهن على أن مجموعة

أصفار f فى E مغلقة تحت الجمع والطرح والضرب والقسمة .

البرهان : ليكن لدينا $x^{p^n} = x$ ، $y^{p^n} = y$ فى E . ينتج أن

$$x^{p^n} + y^{p^n} = x + y \quad (*)$$

ومن مثال ٨ فى (١-١-١٠) : $(x + y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$ $(**)$ ، وبالتالي فإن :

$$(x + y)^{p^n} = x + y$$

أى أنه إذا كان x ، y جذرين للمعادلة $X^{p^n} = X$

فإن $x + y$ جذر للمعادلة $X^{p^n} - X = 0$

بعبارة أخرى إذا كان x ، y صفرين للدالة $X^{p^n} - X$ فإن $x + y$ صفر لها .

وبوضع y - بدلاً من y فى $(*)$ ، $(*)'$ (سواء كانت $p=2$ أو p عدد أولى فردى) فإنه ينتج أن

$$(x - y)^{p^n} = x - y$$

أى أن $x - y$ أيضاً صفر للدالة $X^{p^n} - X$

كذلك فإنه ينتج من أن x ، y صفرين للدالة $X^{p^n} - X$ أن

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{p^n} = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

أى أنه $\frac{x}{y}$ صفر لنفس الدالة .

كذلك فإن :

$$(xy)^{p^n} = x^{p^n} y^{p^n} = xy$$

E إبدالاً

أى أن xy صفر لنفس الدالة .

مثال ٢٣ : حدد إذا ما كانت التقارير الآتية صائبة أم خاطئة :

(١) أصفار $X^{28} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ فى $\mathbb{C}$ تكون زمرة دائرية مع عملية الضرب

(٢) يوجد حقل منته يتألف من 60 عنصراً

(٣) يوجد حقل منته يتألف من 36 عنصراً

(٤) العدد المركب i هو جذر رابع بدائى للوحدة

(تعريف : يقال لعنصر α فى حقل إنه جذر نونى بدائى للوحدة $\text{primitive } n^{\text{th}} \text{ root}$)

(of unity) إذا كان $\alpha^n = 1$ ، $\alpha^m \neq 1$ $(0 < m < n)$

(٥) توجد كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط (للتحليل) من درجة 58 فى $\mathbb{Z}_2[X]$

(٦) العناصر غير الصفريّة فى $\mathbb{Q}$ تكون زمرة دائرية $\mathbb{Q}^*$ مع عملية الضرب

(٧) إذا كان F حقلاً منتهياً ، فإن كل أيزومورفيزم (تشاكل) يرسم F إلى إغلاق جبرى $\bar{F}$ لـ F يكون أوتومورفيزماً لـ F .

الحل : (١) ، (٤) ، (٥) ، (٧) صحيحة . باقى التقارير خاطئ .

مثال ٢٤ :

(أ) اوجد عدد الجذور البدائية الثمانية (primitive 8th roots) للوحدة فى $GF(9)$

(ب) اوجد عدد الجذور البدائية الثمانية عشرية (primitive 18th roots) للوحدة فى $GF(19)$

(جـ) اوجد عدد الجذور البدائية الخمس عشرية (primitive 15th roots) للوحدة فى $GF(31)$

(د) اوجد عدد الجذور البدائية العشرية (primitive 10th roots) للوحدة فى $GF(23)$

الحل :

(أ) عدد العناصر فى $(GF(9))^*$ هو 8 . المطلوب إذن حسب التعريف الوارد فى المثال السابق مباشرة هو إيجاد عدد مولدات $(GF(9))^*$. (لاحظ أن $(GF(9))^*$ دائرية حسب (٢-٦-٣) . ومن (١-١١-١١) فى نظرية الزمر يكون عدد المولدات هو عدد "r" بحيث يكون القاسم المشترك الأعظم لـ n ، r هو الواحد . وبالتالي يكون العدد المطلوب هو 4 .

(ب) عدد العناصر فى $(GF(19))^*$ هو 18 . وتاماً كما فى (أ) يكون العدد المطلوب هو عدد "r" بحيث يكون القاسم المشترك الأعظم لـ n ، r هو "1" . وبالتالي يكون العدد المطلوب هو 6 .

(جـ) هنا يتطلب الموقف الرجوع إلى التمرين (٨٤) فى تمارين عامة على الباب الاول فى نظرية الزمر . المطلوب هو تعيين عدد العناصر a^x الموضحة كالآتى :-

ليكن a مولداً لـ $(GF(31))^*$ الذى يتألف من 30 عنصراً . سيولد a^x زمرة جزئية من $(GF(31))^*$ عدد عناصرها 15 إذا كان : d القاسم المشترك الأعظم لـ x ، 30 وكان $\frac{n}{d}=15$ ، أى أن $d=2$. وبالتالي يكون $x=2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28$ والعدد المطلوب يساوى 8 .

(د) نتخذ نفس الأسلوب المتبع فى (جـ) . ولكن نلاحظ هنا أنه لا يوجد d بحيث يكون $\frac{n}{d}=\frac{22}{d}=10$. وبالتالي لا يوجد a^x بحيث يكون مولداً لزمرة جزئية من $(GF(23))^*$ عدد عناصرها 10 .

مثال ٢٥ : ليكن p عدداً أولياً فردياً .

(أ) برهن على أنه لـ $a \in \mathbb{Z}$ ، حيث $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ، فإن المعادلة $x^2 \equiv a \pmod{p}$ لها حل فى $\mathbb{Z}$ إذا كان فقط إذا كان $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

(ب) استخدم الجزء (أ) لمعرفة إذا ما كانت كثيرة الحدود $X^2 - 6$ غير قابلة للتحليل فى $\mathbb{Z}_{17}[X]$

الحل : (أ)

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : a = x^2 - np$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} &= (x^2 - np)^{\frac{p-1}{2}} \\ &= x^{p-1} + \frac{p-1}{2} (x^2)^{\frac{p-1}{2}-1} \cdot (-np) + \dots \\ &\quad + \binom{\frac{p-1}{2}}{r} (x^2)^{\frac{p-1}{2}-r} \cdot (-np)^r + \dots + (-np)^{\frac{p-1}{2}} \\ &\equiv x^{p-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

إذا كانت $x \in \mathbb{Z}$ فإن $x^{p-1} \in \mathbb{Z}$ ويكون $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ لأننا بالحساب في $\mathbb{Z}_p$ لدينا لجميع $x \in \mathbb{Z}_p^*$ $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (رتبة العنصر في الزمرة تقسم

رتبة الزمرة . هنا رتبة الزمرة الدائرية (الضربية) $\mathbb{Z}_p^*$ هي $p-1$)

(لاحظ أن $x \neq 0$ وإلا كان $a \equiv 0 \pmod{p}$)

وبالعكس إذا كان $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ فإن $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ وينتج أن $x \in \mathbb{Z}$.

(ب) $X^2 - 6$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}_{17}[X]$ أى أن المعادلة $x^2 \equiv 6 \pmod{17}$

ليس لها حل في $\mathbb{Z}$: من (أ) $x^2 \equiv 6 \pmod{17}$ لها حل في $\mathbb{Z}$ إذا كان

و فقط إذا كان $6^{\frac{17-1}{2}} \equiv 1 \pmod{17}$ ، أى إذا كان فقط إذا كان

$$6^8 - 1 = 17k, k \in \mathbb{Z}$$

والآن :

$$\begin{aligned} 6^8 - 1 &= (6^4 + 1)(6^2 + 1)(6^2 - 1) \\ &= (1297)(37)(35) \end{aligned}$$

و واضح أنه لا يوجد $K \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$(1297)(37)(35) = 17K$$

إذن $X^2 - 6$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

مثال ٢٦ : ليكن F حقلا منتهيا له المميز p . عندئذ فإن كثيرة الحدود $X^{p^n} - X$

لها p^n أصفار مختلفة في حقل تشقيقتها $\overline{F} \supset K$ على F .

البرهان : ليكن F حقلا منتهيا له المميز p ، وليكن K فى $\overline{F}$ حقل تشقيق كثيرة

الحدود $X^{p^n} - X$ على F . سنبرهن على أن $X^{p^n} - X$ لها p^n من الأصفار

المختلفة فى K .

واضح أن 0 صفر لكثيرة الحدود $X^{p^n} - X$ ، وتكراره 1 أى هو صفر بسيط .
والآن ليكن $\alpha \neq 0$ صفراً لـ $X^{p^n} - X$ وبالتالي هو صفر لـ
 $f := X^{p^n-1} - 1$. عندئذ فإن $X - \alpha$ هو عامل من عوامل f فى $K[X]$ ،
وبالقسمة المطولة نحصل على :

$$\frac{f}{X - \alpha} = g = X^{p^n-2} + \alpha X^{p^n-3} + \alpha^2 X^{p^n-4} + \dots + \alpha^{p^n-3} X + \alpha^{p^n-2}$$

وبهذا تتكون g من $p^n - 1$ من الحدود ، وفى $g(\alpha)$ يكون كل حد هو :

$$\alpha^{p^n-2} = \frac{\alpha^{p^n-1}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$(f(\alpha) = 0 = \alpha^{p^n-1} - 1 \quad \text{لأن})$$

وهكذا فإن :

$$g(\alpha) = (p^n - 1) \cdot \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

لأننا فى حقل مميزه p . وبالتالي فإن $g(\alpha) \neq 0$ ، α صفر بسيط لـ f أى له
التكرار 1 .

تعريف : ليكن E امتداداً جبرياً لحقل F . يقال لعنصرين $\alpha, \beta \in E$ إنهما مترافقان
على F (conjugate over F) إذا كان α ، β صفرين لنفس كثيرة الحدود غير
القابلة للتبسيط على F .

مثال ٢٧ : هل يتطابق مفهوم الترافق المعرف أعلاه مع فكرة الأعداد المركبة المترافقة
التقليدية ؟

الحل : نعم ، إذا كنا نعنى بعددين مركبين مترافقين أنهما مترافقان على $\mathbb{R}$. فإذا
كان $a, b \in \mathbb{R}$ ،

$b \neq 0$ فالعددان المركبان $a+ib, a-ib$ هما صفران لكثيرة الحدود $X^2-2aX+a^2+b^2$ ،
التي هي غير قابلة للتحليل (للتبسيط) في $\mathbb{R}[X]$. (تحقق من ذلك).

مثال ٢٨ : اعتبر امتداد الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$. أصفار كثيرة الحدود (المطبوعة غير القابلة للتبسيط على $\mathbb{Q}$) X^2-2 هما $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ، وهكذا فإن $\sqrt{2}$ ،
 $-\sqrt{2}$ مترافقان على $\mathbb{Q}$.

لاحظ أن الراسم

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ a+b\sqrt{2} &\mapsto a-b\sqrt{2}\end{aligned}$$

هو أيزومورفيزم من $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على نفسه ، أى هو أوتومورفيزم على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
مثال ٢٩ : أوجد الحقل الثابت في $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ بالأوتومورفيزم المعطى في مثال ٢٨ السابق.
الحل : لجميع $a, b \in \mathbb{Q}$ لدينا :

$$\psi(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$$

وبالتالى يكون لدينا $a+b\sqrt{2} = a-b\sqrt{2}$ ، ومن ثم هذا يحدث إذا كان فقط إذا
كان $b=0$. أى أن الحقل الثابت هو $\mathbb{Q}$.

مثال ٣٠ : حدد أى التقارير الآتية صحيح ، وأيها خاطئ :

- (أ) لجميع $\alpha, \beta \in E$ يوجد دائماً أوتومورفيزم لـ E يرسم α على β .
- (ب) لـ α, β الجبريين على حقل F ، يوجد دائماً أيزومورفيزم من $F(\alpha)$ على $F(\beta)$.
- (جـ) لـ α, β الجبريين المترافقين على حقل F ، يوجد دائماً أيزومورفيزم من $F(\alpha)$ على $F(\beta)$.
- (د) كل أوتومورفيزم لكل حقل يترك كل عنصر فى الحقل الجزئى الأولى من E ثابتاً .
- (هـ) كل أوتومورفيزم لكل حقل E يترك عدداً لا نهائياً من عناصر E ثابتة .

- (و) كل أوتومورفيزم لكل حقل E يترك على الأقل عنصرين من عناصر E ثابتين .
 (ز) كل أوتومورفيزم لكل حقل E مميزه صفر يترك عدداً لا نهائياً من عناصر E ثابتة .
 (ح) كل أوتومورفيزمات الحقل E تكون زمرة مع عملية تركيب الرواسم .
 (ط) مجموعة عناصر حقل E المتروكة ثابتة بأوتومورفيزم ما لـ E تكون حقلاً جزئياً من E .

(ى) للحقول $F \subset E \subset K$ يكون $Aut(K;E) \subset Aut(K;F)$

الحل : (أ) ، (ب) ، (هـ) خاطئة . باقى التقارير صحيحة .

مثال ٣١ : اوجد جميع الأعداد المترافقة مع الأعداد الآتية على الحقول المعطاة :

- (أ) $\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$ (ب) $\sqrt{2}$ على $\mathbb{R}$
 (جـ) $3 + \sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$ (د) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ على $\mathbb{Q}$
 (هـ) $\sqrt{2} + i$ على $\mathbb{Q}$ (و) $\sqrt{2} + i$ على $\mathbb{R}$
 (ز) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}$ (ح) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

الحل : (أ) باستخدام تمرين (٢١) فى تمارين عامة (٢) يكون $\sqrt{2}$ مترافقاً مع نفسه ومع $-\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$. كذلك يمكن أن نستخدم الطريقة الآتية بإيجاد كثيرة الحدود الصغرى لـ $\sqrt{2}$ ، واستنتاج أى العناصر تكون هى كثيرة الحدود الصغرى منها :

$$X = \sqrt{2} \Rightarrow X^2 = 2 \Rightarrow X^2 - 2 = 0$$

وواضح أن كثيرة الحدود هذه هى كثيرة الحدود الصغرى كذلك للعنصر $-\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$.

(ب) $X - \sqrt{2}$ هى كثيرة الحدود الصغرى لـ $\sqrt{2}$ على $\mathbb{R}$. فالعنصر $\sqrt{2}$ يترافق مع نفسه فقط على $\mathbb{R}$.

(جـ) كذلك باستخدام تمرين (٢١) السابق ذكره يكون $3 + \sqrt{2}$ مترافقاً مع نفسه ومع $3 - \sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$.

ويمكن استخدام كثيرة الصغرى لأداء المطلوب ، كما جاء في (أ) كالآتي :

$$X = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow X - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow X^2 - 6X + 7 = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

أى أن $3 + \sqrt{2}$ يترافق مع نفسه ومع $3 - \sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$.

سنستخدم تمرين (٢١) المشار إليه لإيجاد باقى الأعداد المترافقة :

(د) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ يترافق مع نفسه ومع $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ومع $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ومع $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ على $\mathbb{Q}$.

(هـ) $\sqrt{2} + i$ يترافق مع نفسه ومع $-\sqrt{2} + i$ ، $\sqrt{2} - i$ ، $-\sqrt{2} - i$ على $\mathbb{Q}$.

(و) $\sqrt{2} + i$ يترافق مع نفسه ومع $\sqrt{2} - i$ على $\mathbb{R}$.

(ز) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ يترافق مع نفسه ومع $\sqrt{1 - \sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1 - \sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}$.

(ح) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ يترافق مع نفسه ومع $-\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

ملحوظة : لاحظ أن علاقة الترافق علاقة تكافؤ فهي انعكاسية ومتماثلة وانتقالية .

مثال ٣٢ : اعتبر الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ ، واعتبر الأيزومورفيزمات الآتية ، كما

جاءت فى تمرين (٢١) المشار إليه :

$$\psi_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}} : (\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}))(\sqrt{2}) \rightarrow (\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}))(-\sqrt{2})$$

$$\psi_{\sqrt{3}, -\sqrt{3}} : (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}))(\sqrt{3}) \rightarrow (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}))(-\sqrt{3})$$

$$\psi_{\sqrt{5}, -\sqrt{5}} : (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))(\sqrt{5}) \rightarrow (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))(-\sqrt{5})$$

وللاختصار : ليكن $r_5 := \psi_{\sqrt{5}, -\sqrt{5}}$ ، $r_3 := \psi_{\sqrt{3}, -\sqrt{3}}$ ، $r_2 := \psi_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$

احسب :

$$r_2(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \quad (\text{ب})$$

$$r_2(\sqrt{3}) \quad (\text{ا})$$

$$(r_3 o r_5) \left(\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) \quad (\text{د})$$

$$(r_2 o r_3)(\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) \quad (\text{جـ})$$

$$r_3(r_5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (r_5 o r_2)(\sqrt{30})) \quad (\text{و})$$

$$(r_2 o r_3 o r_5^2)(\sqrt{2} + \sqrt{45}) \quad (\text{هـ})$$

الحل :

$$r_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \quad (\text{ا})$$

$$r_2(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -\sqrt{2} + \sqrt{5} \quad (\text{ب})$$

$$(r_2 o r_3)(\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) = r_2(r_3(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})) \quad (\text{جـ})$$

$$= r_2(\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) = -\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

(د)

$$\begin{aligned} (r_3 o r_5) \left(\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) &= r_3 \left(r_5 \left(\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) \right) = r_3 \left(\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{-2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

(هـ)

$$(r_2 o r_3 o r_5^2)(\sqrt{2} + \sqrt{45}) = (r_2 o r_3 o 1)(\sqrt{2} + \sqrt{45})$$

$$= (r_2 o r_3)(1(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})) = (r_2 o r_3)(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})$$

$$= r_2(r_3(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})) = r_2(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})$$

$$= -\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = -\sqrt{2} + \sqrt{45}$$

(و)

$$r_3(r_5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (r_5 o r_2)(\sqrt{30})) =$$

$$= r_3(\sqrt{2} - \sqrt{3} + r_5(r_2(\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5})))$$

$$= r_3(\sqrt{2} - \sqrt{3} + r_5(-\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5})) = r_3(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}(-\sqrt{3})\sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{30}$$

مثال ٣٣ :

في المثال (٢-١-٥) كان لدينا الحقل $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ والأوتومورفيزمات 1_K

، φ_1 ، φ_2 ، φ_3 . حيث $\varphi_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ ، $\varphi_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ، $\varphi_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ،

$\varphi_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ ، $\varphi_1(x) = x$ ، لجميع $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\varphi_2(x) = x$ ، لجميع

$x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ، $\varphi_3(x) = x$ ، لجميع $x \in \mathbb{Q}$

المطلوب حساب الحقول الجزئية الثابتة في K تحت تأثير :

(أ) $\{\varphi_2, \varphi_3\}$ (ب) $\{\varphi_3\}$ (ج) $\{\varphi_1, \varphi_3\}$

الحل : المجموعة $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (فراغ خطي)

على $\mathbb{Q}$ وبالتالي فإن أي عنصر في $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ يمكن أن يكتب على الصورة :

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \quad \text{حيث } a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

(أ) العنصر $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ تحت تأثير $\{\varphi_2, \varphi_3\}$ يصبح $a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$.

لإيجاد الحقل الجزئي الثابت يجب أن يتحقق :

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6} \quad \text{ومن حيث إن } \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$$

أساس لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$ فيكون لدينا :

$$b\sqrt{2} = -b\sqrt{2}, c\sqrt{3} = -c\sqrt{3}, d\sqrt{6} = -d\sqrt{6} \Rightarrow b = c = d = 0$$

ويكون الحقل الثابت هو $\{a \mid a \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$

(ب)

$$\varphi_3(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}) = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$$

وبالتالى يجب أن يكون

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow b = c = 0$$

ويكون الحقل الثابت هو $\{a + d\sqrt{6} \mid a, d \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$

(جـ) العنصر $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ تحت تأثير $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ يصبح :

$$a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$

ويكون مثلما فى (أ) :

$$b = c = d = 0$$

ويصبح الحقل الثابت هو $\mathbb{Q}$

مثال ٣٤ : اوجد الحقل الجزئى فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ تحت تأثير الأوتومورفيزمات أو مجموعات الأوتومورفيزمات الآتية المعرفة كما فى مثال ٣٢ السابق :

$$(أ) \quad r_3 \quad (ب) \quad r_3^2 \quad (جـ) \quad \{r_2, r_3\}$$

$$(د) \quad r_3 \text{ or } r_2 \quad (هـ) \quad r_5 \text{ or } r_2 \quad (و) \quad \{r_2, r_3, r_5\}$$

الحل : الفراغ الخطى $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ له الأساس

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}\}$$

على الحقل $\mathbb{Q}$. وبالتالى فإن أى عنصر فى $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ يمكن أن يكتب على الصورة

$$x := a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} + e\sqrt{6} + f\sqrt{10} + g\sqrt{15} + h\sqrt{30}$$

حيث $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Q}$

(أ)

$$r_3(x) = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{5} - e\sqrt{6} + f\sqrt{10} - g\sqrt{15} - h\sqrt{30}$$

$$= a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} + e\sqrt{6} + f\sqrt{10} + g\sqrt{15} + h\sqrt{30}$$

$$c = e = g = h = 0$$

وهذا يتحقق إذا كان فقط إذا كان :

أى أن الحقل الجزئى الثابت تحت تأثير r_3 يكون هو :

$$\{a+b\sqrt{2}+d\sqrt{5}+f\sqrt{10} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$$

(ب) r_3^2 هو راسم الوحدة ، وبالتالي يكون الحقل الجزئى الثابت تحت تأثير r_3^2 هو

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$$
 الحقل نفسه

(جـ) العنصر x تحت تأثير $\{r_2, r_3\}$ يصبح :

$$a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{5}-e\sqrt{6}-f\sqrt{10}-g\sqrt{15}-h\sqrt{30}$$

وبالتالى فلايجاد الحقل الجزئى الثابت تحت تأثير $\{r_2, r_3\}$ يجب أن يكون

$$b=c=e=f=g=h=0$$

$$\{a+d\sqrt{5} \mid a,d \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$
 ويكون الحقل الجزئى الثابت هنا هو

(د)

$$(r_3 \circ r_2)(x) = r_5(r_2(x))$$

$$= r_5(a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{5}-e\sqrt{6}-f\sqrt{10}+g\sqrt{15}-h\sqrt{30})$$

$$= a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}-d\sqrt{5}-e\sqrt{6}+f\sqrt{10}-g\sqrt{15}+h\sqrt{30}$$

$$= a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{5}+e\sqrt{6}+f\sqrt{10}+g\sqrt{15}+h\sqrt{30}$$

$$b=d=e=g=0$$

وهذا يحدث إذا كان فقط إذا كان

أى أن الحقل الجزئى الثابت هنا هو :

$$\{a+c\sqrt{3}+f\sqrt{10}+h\sqrt{30} \mid a,c,f,h \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{10},\sqrt{30}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{10})$$

(هـ)

$$(r_3 \circ r_3 \circ r_2)(x) = r_5(r_3(r_2(x)))$$

$$= r_5(r_3(a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{5}-e\sqrt{6}-f\sqrt{10}+g\sqrt{15}-h\sqrt{30}))$$

$$= r_5(a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{5}+e\sqrt{6}-f\sqrt{10}-g\sqrt{15}+h\sqrt{30})$$

$$= a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{5}+e\sqrt{6}+f\sqrt{10}+g\sqrt{15}-h\sqrt{30}$$

$$= a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} + e\sqrt{6} + f\sqrt{10} + g\sqrt{15} + h\sqrt{30}$$

وهذا يحدث إذا كان فقط إذا كان : $b = c = d = h = 0$

أى أن الحقل الجزئى الثابت يكون :

$$\{a + e\sqrt{6} + f\sqrt{10} + g\sqrt{15} \mid a, e, f, g \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10})$$

(و) العنصر x تحت تأثير $\{r_2, r_3, r_5\}$ يصبح :

$$a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{5} - e\sqrt{6} - f\sqrt{10} - g\sqrt{15} - h\sqrt{30}$$

فلإيجاد الحقل الجزئى الثابت هنا يجب أن يتحقق

$$b = c = d = e = f = g = h = 0$$

ويكون الحقل الجزئى الثابت هنا هو :

$$\{a \mid a \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$$

مثال ٣٥ : عين قيم أوتومورفيزم فوربينيس σ_2 المعروف كالاتى :

$$\sigma_2 : F \rightarrow F$$

$$a \mapsto a^2$$

على جميع عناصر الحقل فى مثال ٨ من أمثلة متنوعة (١) . اوجد الحقل الثابت لـ σ_2 .

الحل : عناصر الحقل هى $\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \bar{1} + \alpha$

$$\sigma_2(\bar{0}) = \overline{0^2} = \bar{0},$$

$$\sigma_2(\bar{1}) = \overline{1^2} = \bar{1},$$

$$\sigma_2(\alpha) = \alpha^2 = \bar{1} + \alpha,$$

$$\sigma_2(\bar{1} + \alpha) = \alpha$$

واضح أن الحقل الثابت هو $\mathbb{Z}_2$.

مثال ٣٦ : عين قيم أوتومورفيزم فوربينيس σ_3 المعروف كالاتى :

$$\sigma_3 : F \rightarrow F$$

$$a \mapsto a^3$$

على جميع عناصر الحقل المنتهى التسعة المعطى فى تمرين (٢) من تمارين عامة (١) .
واوجد الحقل الثابت لـ σ_3 .

الحل : عناصر الحقل هى :

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \alpha, \bar{2}\alpha, \bar{1} + \alpha, \bar{1} + \bar{2}\alpha, \bar{2} + \alpha, \bar{2} + \bar{2}\alpha$$

ونلاحظ أن $\alpha^2 + \bar{1} = \bar{0}$ ، ومن ثم فإن : $\alpha^3 + \alpha = \bar{0}$ ، أى أن $\alpha^3 = -\alpha = \bar{2}\alpha$.
والآن :

$$\sigma_3(\bar{0}) = \bar{0}, \sigma_3(\bar{1}) = \bar{1}, \sigma_3(\bar{2}) = \bar{8} = \bar{2},$$

$$\sigma_3(\alpha) = \alpha^3 = \bar{2}\alpha,$$

$$\sigma_3(\bar{2}\alpha) = \bar{8}\alpha^3 = \bar{2}.\bar{2}\alpha = \bar{4}\alpha = \alpha$$

$$\sigma_3(\bar{1} + \alpha) = (\bar{1} + \alpha)^3 = \bar{1}^3 + 3.\bar{1}^2.\alpha + 3.\bar{1}.\alpha^2 + \alpha^3 = \bar{1} + \bar{0} + \bar{0} + \alpha^3 = \bar{1} + \bar{2}\alpha.$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(\bar{1} + \bar{2}\alpha) &= (\bar{1} + \bar{2}\alpha)^3 = \bar{1}^3 + 3.\bar{1}^2.\bar{2}\alpha + 3.\bar{1}(\bar{2}\alpha)^2 + (\bar{2}\alpha)^3 \\ &= \bar{1} + \bar{8}\alpha^3 = \bar{1} + \bar{2}.\bar{2}\alpha = \bar{1} + \bar{4}\alpha = \bar{1} + \alpha \end{aligned}$$

$$\sigma_3(\bar{2} + \alpha) = (\bar{2} + \alpha)^3 = \bar{2}^3 + 3.\bar{2}^2.\alpha + 3.\bar{2}.\alpha^2 + \alpha^3 = \bar{8} + \alpha^3 = \bar{2} + \bar{2}\alpha.$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(\bar{2} + \bar{2}\alpha) &= \bar{2}^3 + 3.\bar{2}^2.\bar{2}\alpha + 3.\bar{2}(\bar{2}\alpha)^2 + (\bar{2}\alpha)^3 = \bar{8} + \bar{8}\alpha^3 \\ &= \bar{2} + \bar{2}.\bar{2}\alpha = \bar{2} + \bar{4}\alpha = \bar{2} + \alpha \end{aligned}$$

واضح أن الحقل الثابت هو $\mathbb{Z}_3$

مثال ٣٧ : بالإشارة إلى المثال ٣٢ السابق :

(أ) برهن على أن كل الأوتومورفيزمات r_2, r_3, r_5 من الرتبة 2 فى $Aut(E; \mathbb{Q})$

(ب) اوجد الزمرة الجزئية H فى $Aut(E; \mathbb{Q})$ المتولدة من r_2, r_3, r_5 . اكتب جدول الزمرة.

الحل :

$$(أ) \quad r_2^2 = r_3^2 = r_5^2 = 1 \quad . \quad \text{أى أن رتبة أى أوتومورفيزم منها هو 2} .$$

$$(ب) \quad H = \{1, r_2, r_3, r_5, r_2or_3, r_2or_5, r_3or_5, r_2or_3or_5\}$$

واضح أن الزمرة إبدالية ، وكل عناصرها من الرتبة 2 ، وبالتالي فإن H تكون متشاكلية

(أيزومورفية) مع $(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2, +)$. وهى الزمرة $\{1, r_2\} \otimes \{1, r_3\} \otimes \{1, r_5\}$

مثال ٣٨ : هل $Ord(G(E/F))$ ضربية للأبراج المنتهية ذات الامتدادات المنتهية أى

أنه يكون

$$Ord(G(K/F)) = Ord(G(K/E))Ord(G(E/F))$$

الحل : ليس هذا صحيحاً بالضرورة . مثال مضاد .

$$Ord(G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}; i\sqrt{3})/\mathbb{Q})) = 6 \neq 2 = 2.1 = Ord(G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}; i\sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))).$$

$$3-2-2$$

$$Ord(G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}))$$

(انظر تمرين ٢٠ فى تمارين عامة (٢))

ملحوظة : استخدمنا هنا $G(K/F)$ بدلا من $Aut(K/F)$ ، كما جاء فى (٢-١-٢) .

مثال ٣٩ : برهن على أن

$$G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}(i\sqrt{3})) \cong (\mathbb{Z}_3, +)$$

البرهان : $Ord(G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}(i\sqrt{3}))) = 3$ (تمرين ٢٠ فى تمارين عامة

(٢)) ، وبالتالي فإن $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}(i\sqrt{3}))$ دائرية من الرتبة 3 ، وينتج

المطلوب مباشرة من نظرية تفصيل الزمر الدائرية .

مثال ٤٠ : حدد أى التقارير الآتية يكون صحيحاً وأيها خاطئاً :

(أ) كل امتداد منته لكل حقل F يكون قابلاً للانفصال على F

(ب) كل امتداد منته لكل حقل منته F يكون قابلاً للانفصال (على F)

(جـ) كل حقل مميزه يساوى الصفر يكون تاماً

(د) كل كثيرة حدود من درجة n على أى حقل F يكون لها دائماً n من الأصفار المختلفة فى $\overline{F}$

(هـ) كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل (للتبسيط) من درجة n معرفة على كل حقل تام F يكون لها دائماً n من الأصفار المختلفة فى $\overline{F}$

(و) كل كثيرة حدود من درجة n معرفة على كل حقل تام F يكون لها دائماً n من الأصفار المختلفة فى $\overline{F}$

(ز) كل حقل مغلق جبرياً يكون تاماً

(ح) كل حقل F له امتداد جبرى تام E

(ط) إذا كان E امتداداً منتهياً قابلاً للانفصال حقل تشقيق لـ F فإن :

$$Ord(Aut(E;F)) = [E:F]$$

(ى) إذا كان E امتداداً منتهياً وحقل تشقيق لـ F فإن $Ord(Aut(E;F))$ يقسم $[E:F]$

الحل : التقارير (أ) ، (د) ، (و) خاطئة . باقى التقارير صائبة .

مثال ٤١ : اضرب مثلاً لـ $f \in \mathbb{Q}[X]$ بحيث لا يكون لها أصفار فى $\mathbb{Q}$ ، ولكن أصفارها فى $\mathbb{C}$ كلها لها التكرار 2 . وضع كيف يتسق هذا مع كون $\mathbb{Q}$ تاماً

الحل : $(X^2+1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1 = f$ تحقق المطلوب . كلا عاملى f غير قابل للتحليل فى $\mathbb{Q}[X]$ ، له صفر بسيط فى حقل تشقيقه . وهذا يتفق مع كون $\mathbb{Q}$ تاماً

مثال ٤٢ : برهن على أن كل كثيرة حدود غير ثابتة وغير قابلة للتحليل (للتبسيط) f على حقل F مميزه الصفر تكون قابلة للانفصال

البرهان : من التمهيدية (٢-٤-٧) : إذا كان مميز الحقل = الصفر فإنه يكون : f ليست ثابتة إذا كان فقط إذا كان $D(f) \neq 0$ ومن النظرية (٢-٤-٦) : f غير القابلة للتحليل تكون قابلة للانفصال إذا كان فقط إذا كان $D(f) \neq 0$ ، وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٤٣ : برهن على أن كل كثيرة حدود غير قابلة للتبسيط q معرفة على حقل F له المميز $p \neq 0$ تكون غير قابلة للانفصال إذا كان فقط إذا كان أس كل حد من حدود q يقبل القسمة على p

البرهان : من التمهيدية (٢-٤-٧) : إذا كان مميز الحقل $p \neq 0$ ، فإنه توجد كثيرة حدود $g \in F[X]$ بحيث يكون $(f(X))^p = g(X^p)$ إذا كان فقط إذا كان $Df=0$. ومن النظرية (٢-٤-٦) f غير القابلة للتحليل تكون غير قابلة للانفصال إذا كان فقط إذا كان $Df=0$ ، فينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٤٤ : صف برنامجاً حسابياً ملائماً لتعيين إذا ما كانت $f \in F[X]$ لها صفر مكرر ، بدون إيجاد أصفار f

الحل : احسب القاسم المشترك الأعظم لـ f ، f' باستخدام خوارزمية القسمة (نظرية (٢-١-٦) فى نظرية الحلقات) . f سيكون لها صفر مكرر إذا كانت درجة القاسم المشترك الأعظم لـ f ، f' أكبر من الصفر

مثال ٤٥ : عين $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ بحيث يكون $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$. حقق بالتعويض المباشر أن $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ يمكن أن يعبر عنهما ككثيرات حدود شكلية فى α ، معاملاتها فى $\mathbb{Q}$

الحل : من مثال ١٨ فى أمثلة متنوعة (١) رأينا أن : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ، أى أن $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. يمكن التعبير عن $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ كما هو مطلوب كالاتى :

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{9}{2}\alpha,$$

$$\sqrt{3} = \frac{11}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$$

تحقق من ذلك . (توجد طرائق أخرى للتعبير عن $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$)

مثال ٤٦ : حدد أى التقارير الآتية صائبا وأيها خاطئا :

- (١) ربما يكون لزمريتين جزئيتين من زمرة جالوا الحقل الثابت نفسه
- (٢) إذا كانت الحقول F, E, L, K بحيث $F \subset E \subset L \subset K$ فإن $\lambda(E) \subset \lambda(L)$ حيث $\lambda(E)$ هي الزمرة الجزئية من $Aut(K;F)$ التي تترك E ثابتاً ، $\lambda(L)$ الزمرة الجزئية من $Aut(K;F)$ التي تترك L ثابتاً .
- (٣) إذا كان K امتداداً منتهياً طبيعياً لـ F ، فإن K امتداد منته طبيعي لـ E ، حيث $F \subset E \subset K$.
- (٤) إذا كان امتدادان طبيعيان منتهيان لـ F هما E, L لهما زمرة جالوا متساكلتين ، فإن $[E:F] = [L:F]$.
- (٥) إذا كان E امتداداً طبيعياً منتهياً لـ F ، H زمرة جزئية طبيعية من $Aut(E;F)$ ، فإن الحقل الثابت في E بـ H : E_H يكون امتداداً طبيعياً لـ F .
- (٦) إذا كان E أى امتداد منته طبيعي بسيط لحقل F ، فإن زمرة جالوا $Aut(G;F)$ تكون زمرة بسيطة .

(٧) لا توجد زمرة جالوا بسيطة .

(٨) زمرة جالوا لامنتداد منته لحقل منته تكون إبدالية .

(٩) أى امتداد E له الدرجة 2 على حقل F يكون امتداداً طبيعياً لـ F .

(١٠) أى امتداد E له الدرجة 2 على حقل F يكون امتداداً طبيعياً لـ F إذا كان مميز F لا يساوى 2 .

الحل : التقارير (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٨) ، (١٠) صحيحة . باقى التقارير خاطئ .

مثال ٤٧ : ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. K امتداد طبيعي لـ $\mathbb{Q}$. ولقد رأينا فى

مثال (٢-١-٥) أنه يوجد أربعة أوتومورفيزمات لـ K تترك $\mathbb{Q}$ ثابتاً ، سنعيد ذكرها

بإعطاء قيمها على أساس K على $\mathbb{Q}$ وهو $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$:

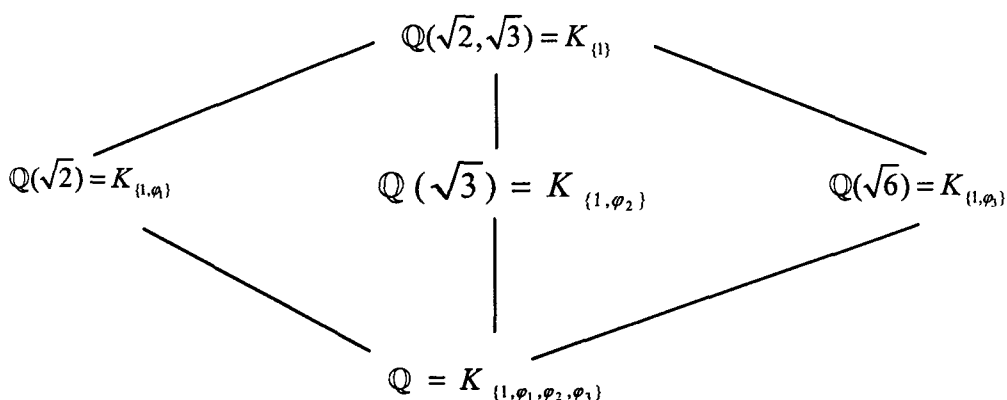
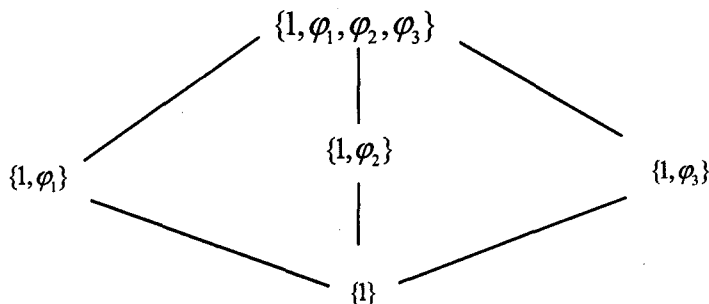
رأسم الوحدة

φ_1 الذى يرسم $\sqrt{3}$ على $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ على $-\sqrt{6}$ ويترك $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ثابتاً
 φ_2 الذى يرسم $\sqrt{2}$ على $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}$ على $-\sqrt{6}$ ويترك $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ثابتاً
 φ_3 الذى يرسم $\sqrt{2}$ على $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ على $-\sqrt{3}$ ويترك $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ ثابتاً
ولقد رأينا أن $\{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ تشكل زمرة كلاين الرباعية ، ونوضح فى الآتى
تناظر الزمر الجزئية مع الحقول البينية الثابتة

$$\begin{aligned} (1 \text{ راسم الوحدة}) \quad \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} &\leftrightarrow \mathbb{Q} \\ \{1, \varphi_1\} &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ \{1, \varphi_2\} &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \\ \{1, \varphi_3\} &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \\ \{1\} &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

جميع الزمر الجزئية من الزمر الإبدالية $\{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ هى بالطبع طبيعية. وواضح
أن جميع الحقول البينية هى امتدادات طبيعية لـ $\mathbb{Q}$.

لاحظ أنه إذا كانت إحدى الزمر الجزئية محتواة فى أخرى ، فإن الزمرة الجزئية الأكبر
منهما تناظر الحقل الأصغر من الحقلين الثابتين المناظرين . والسبب واضح ، فكلما كانت
الزمرة الجزئية أكبر ، كانت الأوتومورفيزمات أكثر ، وبالتالي الحقل الثابت أصغر .
ونوضح فى الشكل أدناه شكل "الشبكات" (lattices) المتناظرة للزمر الجزئية والحقول
البينية . لاحظ مرة أخرى أن الزمر القريبة من القمة تناظر الحقول القريبة من القاع .
أى أنه فى هذا المثال تبدو إحدى "الشبكات" (lattice) "معكوس" الأخرى ، أو أنها
أدبرت من أعلى إلى أسفل .



(K_H يعنى الحقل الثابت فى K بالزمرة الجزئية الطبيعية (H))

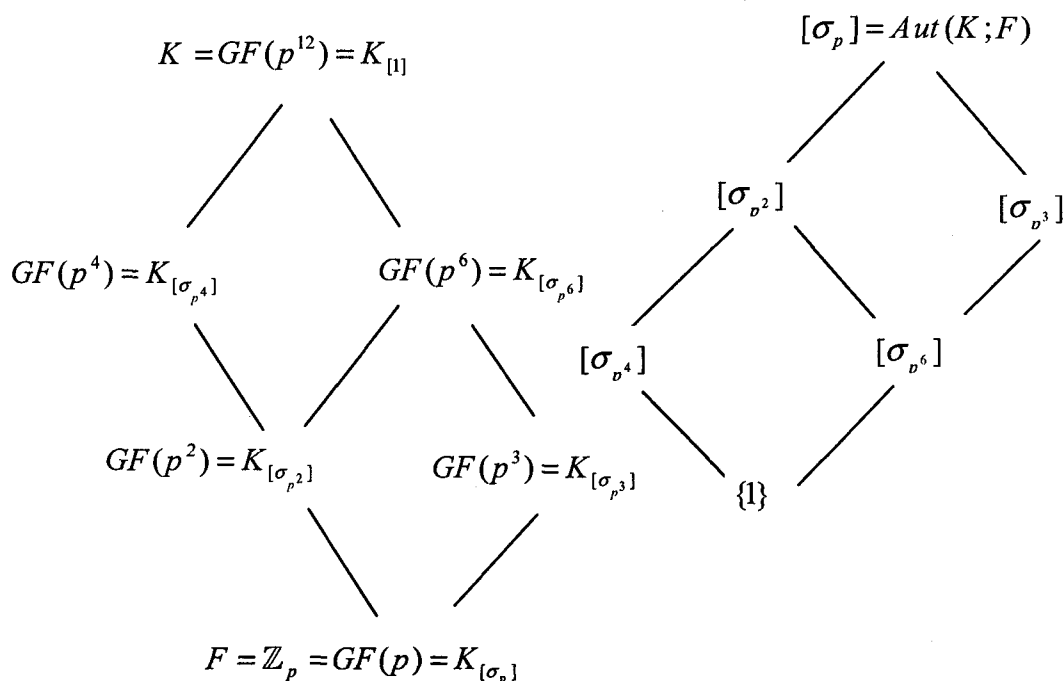
مثال ٤٨ : ليكن K امتداداً منتهياً من الدرجة n لحقل منته F ، عدد عناصره p^r .
برهن على أن $Aut(G; F)$ دائرية من الرتبة n ، وتتولد بـ σ_{p^r} حيث

$$\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r} \text{ لجميع } \alpha \in K$$

البرهان : لأن أى حقل منته يكون تاماً فإن K يكون امتداداً قابلاً للانفصال لـ F . لنكن رتبة F هي p^r ، وليكن $[K : F] = n$ ، وبهذا يكون عدد عناصر K هو $p^{r \cdot n}$.
ويكون K هو حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^{p^{r \cdot n}} - X$ على F . وبالتالي فإن K يكون امتداداً طبيعياً لـ F .

والآن أحد الأوتومورفيزمات لـ K التي تترك F ثابتاً هو σ_{p^r} ، حيث $\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r}$ لجميع $\alpha \in K$. لاحظ أن $(\sigma_{p^r})^i(\alpha) = \alpha^{p^{ri}}$. ونظراً لأن كل كثيرة حدود من الدرجة p^{ri} يكون لها على الأكثر p^{ri} من الأصفار في حقل ، فإن أصغر قوة (أس) لـ σ_{p^r} التي من المحتمل أن تترك p^{rn} عنصراً (جميع عناصر K) ثابتة هي n . وبالتالي فإن رتبة العنصر σ_{p^r} في $Aut(G;F)$ هي على الأقل n . ولأن $Ord(Aut(G;F)) = [K:F] = n$ ، فإن $Aut(G;F)$ يجب أن تكون دائرية ، وتتولد من σ_{p^r} . نهاية البرهان .

مثال ٤٩ : ليكن $F := \mathbb{Z}_p$ ، $K := GF(p^{12})$ ، ومن ثم فإن $[K:F] = 12$ $((-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2))$. عندئذ فإن $Aut(K;F)$ تتشاكل مع الزمرة الدائرية $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. شكلاً الشبكة للزمر الجزئية وللحقول البينية موضحان أدناه . مرة أخرى تبدو كل شبكة ليس فقط معكوس الأخرى ، ولكن كما لو كانت معكوس نفسها . هذه ليست دائماً الحال !



ونصف الزمر الجزئية في $Aut(K;F) = [\sigma_p]$ بإعطاء المولدات ، وعلى سبيل المثال فإن :

$$[\sigma_{p^4}] = \{1, \sigma_{p^4}, \sigma_{p^8}\}$$

مثال ٥٠ : إذا كان لدينا امتدادات الحقول المنتهية الطبيعية كالآتي $F \subset E \subset K$ ، مع زمرة جالوا $Aut(K;F)$ فإننا نعني بـ $\lambda(E)$ الزمرة الجزئية من $Aut(K;F)$ التي تترك E ثابتاً . وليكن $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$. والآن املا الفراغات الآتية :

(ب) $Ord(Aut(K; \mathbb{Q})) = \text{----}$

(أ) $[K : \mathbb{Q}] = \text{----}$

(د) $Ord(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))) = \text{----}$

(ج) $Ord(\lambda(\mathbb{Q})) = \text{----}$

$$\text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{30}))) = \text{---} \quad (\text{و}) \quad \text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))) = \text{---} \quad (\text{هـ})$$

$$\text{Ord}(\lambda(K)) = \text{---} \quad (\text{ح}) \quad \text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6}))) = \text{---} \quad (\text{ز})$$

الحل :

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 8 \quad ((\text{أ}) \text{ مثال ٤٠ فى أمثلة متنوعة (١)})$$

(ب) $K \supset \mathbb{Q}$ امتداد جالوا ، وبالتالي فإن :

$$\text{Ord}(\text{Aut}(K; \mathbb{Q})) = [K : \mathbb{Q}] = 8$$

(جـ) جميع الأوتومورفيزمات فى $\text{Aut}(K; \mathbb{Q})$ تترك $\mathbb{Q}$ ثابتاً . إذن

$$\text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q})) = 8$$

$$(\text{د}) \quad \lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \text{ تتكون من العنصرين } 1, \varphi_3 \text{ حيث } \varphi_3(\sqrt{5}) = -\sqrt{5},$$

$$\varphi_3(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \text{ حقل ثابت. أى أن}$$

$$\text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))) = 2$$

$$(\text{هـ}) \quad \lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{6})) \text{ تتكون من أربعة عناصر هى : } 1, \varphi_3 \text{ (كما سبق تعريفها ,}$$

$$\varphi_4 \text{ المعرفة كالاتى : } \varphi_4(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \varphi_4(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_4(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \text{ حقل}$$

$$\text{ثابت , } \varphi_7 \text{ معرفة كالاتى : } \varphi_7(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \varphi_7(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_7(\sqrt{5}) = -\sqrt{5},$$

$$\varphi_7(\mathbb{Q}) \text{ حقل ثابت , أى أن}$$

$$\text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))) = 4$$

$$(\text{و}) \quad \lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{30})) \text{ تتكون من أربعة عناصر هى : } 1, \varphi_4 \text{ سبق تعريفها , } \varphi_5$$

$$\text{المعرفة كالاتى : } \varphi_5(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \varphi_5(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \varphi_5(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \text{ حقل ثابت ,}$$

$$\varphi_6 \text{ المعرفة كالاتى : } \varphi_6(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_6(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \varphi_6(\mathbb{Q}(\sqrt{3})) \text{ حقل ثابت .}$$

$$\text{أى أن } \text{Ord}(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))) = 4$$

(ز) $\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{6}))$ تتكون من عنصرين هما 1 ، φ_3 ويكون $Ord(\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{6})))=2$

(ح) $\lambda(K)$ تتكون من عنصر واحد هو 1 ، ويكون $Ord(\lambda(K))=1$

مثال ٥١ : صف زمرة جالوا لكثيرة الحدود $X^4-1 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$

الحل : حقل تشقيق $X^4-1 \in \mathbb{Q}[X]$ هو $\mathbb{Q}(i)$ لأن :

$$X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$

ومن حيث إن $[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}]=2$ (لأن كثيرة الحدود الصغرى لـ i على $\mathbb{Q}$ هي X^2+1)

ودرجتها = 2 فمن (١-٥-٥) يكون $[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}]=2$ ويكون $Ord(Aut(\mathbb{Q}(i);\mathbb{Q}))=2$.

1 أحد عنصرى $Aut(\mathbb{Q}(i);\mathbb{Q})$ ، العنصر الآخر يجب أن تكون رتبته 2 (رتبة عنصر فى

زمرة تقسم رتبة الزمرة) وبالتالي فإن العنصر الآخر هو φ حيث $\varphi(i)=-i$ ، $\varphi(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$

مثال ٥٢ : صف مولدا للزمرة $Aut(GF(729);GF(9))$ وعين رتبته .

الحل :

$$Ord(Aut(GF(729);GF(9)))=Ord(Aut(GF(3^6),GF(3^2))) \\ = 3$$

ومن مثال ٤٨ السابق يكون لدينا المولد σ_{3^2} المعروف كالاتى :

$$\sigma_{3^2}(x)=x^{3^2}=x^9 \quad \forall x \in GF(729)$$

مثال ٥٣ : اضرب مثالا لامتدادين طبيعيين منتهيين K_1 ، K_2 على نفس الحقل F ،

بحيث إن K_1 ، K_2 ليسا متساكين ، لكن $Aut(K_1;F) \cong Aut(K_2;F)$

الحل : الامتدادان هما $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$. بينما

$$Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2});\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}_2,+) \cong Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{3});\mathbb{Q})$$

مثال ٥٤ : عين زمرة جالوا للامتداد $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ حيث $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

الحل :

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

المطلوب تعيين الأوتومورفيزمات لـ $K = \mathbb{Q}(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$

تذكر أن $Aut(\mathbb{Q}(\alpha); \mathbb{Q}) = Aut(\mathbb{Q}(\alpha))$ حيث إن $\mathbb{Q}$ الحقل الأولى للحقل

$\mathbb{Q}(\alpha)$. ملحوظة ((٣-١-٢) ، $\alpha = i\sqrt{3}$. إذا كان φ في زمرة جالوا فإن :

$$-3 = \varphi(-3) = \varphi(i\sqrt{3})^2 = (\varphi(i\sqrt{3}))^2 \Rightarrow \varphi(i\sqrt{3}) = \pm i\sqrt{3}$$

إذن يوجد أوتومورفيزمان على الأكثر في زمرة جالوا أحدهما 1 (رسم الوحدة) . نلاحظ

أن $\{1, i\sqrt{3}\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ على $\mathbb{Q}$. بديهى أن $\varphi^2(1) = 1$ ، إذا كان

$$\varphi(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3} \text{ فإن :}$$

$$\varphi^2(i\sqrt{3}) = \varphi(\varphi(i\sqrt{3})) = \varphi(-i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

أى أن $\varphi^2 = 1$. أى أن رتبة الأوتومورفيزم $\varphi(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$ ، $\varphi(x) = x$ ،

لجميع $x \in \mathbb{Q}$ هي 2 . وبالتالي فإن زمرة جالوا هي $(\mathbb{Z}_2, +)$

مثال ٥٥ : عين زمرة جالوا للامتداد $K \supset \mathbb{Q}$ ، إذا كان K هو حقل تشقيق كثيرة

الحدود $X^4 - 3X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$.

الحل : لإيجاد حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^4 - 3X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$:

$$X^4 - 3X^2 + 4 = 0 \Rightarrow X^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

والآن ليكن $X^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$:

$$X = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i} = x + iy \Rightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \frac{3}{2} \quad (1), \\ 2xy = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (2) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \frac{3}{2}, \\ 4x^2y^2 = \frac{7}{4} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = \frac{9}{4} \\ 4x^2y^2 = \frac{7}{4} \end{array} \right\} (x^2 + y^2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i} = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{أو} \quad -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\text{بالمثل إذا كان } X^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \text{ فإن}$$

$$X = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2} \quad \text{أو} \quad -\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{i}{2}$$

إن حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^4 - 3X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$

المطلوب تعيين الأوتومورفيزمات لـ $K := \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$

إذا كان φ في زمرة جالوا فإن :

$$7 = \varphi(7) = \varphi((\sqrt{7})^2) = (\varphi(\sqrt{7}))^2 \Rightarrow \varphi(\sqrt{7}) = \pm\sqrt{7}$$

$$-1 = \varphi(-1) = \varphi(i^2) = \varphi(i)^2 \Rightarrow \varphi(i) = \pm i$$

هناك أربعة أوتومورفيزمات في زمرة جالوا :

$$\varphi_1 : \varphi_1(\sqrt{7}) = \sqrt{7}, \varphi_1(i) = i,$$

$$\varphi_2 : \varphi_2(\sqrt{7}) = \sqrt{7}, \varphi_2(i) = -i,$$

$$\varphi_3 : \varphi_3(\sqrt{7}) = -\sqrt{7}, \varphi_3(i) = i,$$

$$\varphi_4 : \varphi_4(\sqrt{7}) = -\sqrt{7}, \varphi_4(i) = -i,$$

$$\varphi_j(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}, j = 1, \dots, 4$$

ومن حيث إن $\{1, \sqrt{7}, i, \sqrt{7}i\}$ أساس للفراغ الخطي $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$ على $\mathbb{Q}$ ،

$$\varphi_j^2(c) = c \quad \forall c \in \{1, \sqrt{7}, i, \sqrt{7}i\}, j = 1, \dots, 4$$

فإنه لجميع $j = 1, \dots, 4$ فإن $\varphi_j^2 = 1$ ، وينتج أن زمرة جالوا هي زمرة كلاين

الرابعة ، أى تتشاكل مع $(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2, +)$. راجع كذلك مثال (٢-١-٥)

مثال ٥٦ : ليكن K حقل تشقيق $X^3 - 2$ على $\mathbb{Q}$

(أ) صف عناصر $Aut(K; \mathbb{Q})$ الستة وذلك باعطاء قيمها (قيمهم) على $\sqrt[3]{2}$ ،

$i\sqrt{3}$ (حقل التشقيق هو $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}))$)

(ب) مع أية زمرة تتشاكل الزمرة $Aut(K; \mathbb{Q})$ ؟

(ج) ارسم شكل شبكتى الحقول الجزئية من K ، والزمرة الجزئية من $Aut(K; \mathbb{Q})$

موضاً تناظر الحقول البينية والزمرة الجزئية .

الحل :

(أ)

$$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4}) = 0$$

$$\Rightarrow X = \sqrt[3]{2}, X = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}[-1 \pm \sqrt{3}i]}{2}$$

بالرجوع إلى مثال ٦٦ فى امثلة متنوعة (١)

نلاحظ أن $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 6$ ومن حيث إنه امتداد جالوا (انظر (٢-٥-٤)) ،

فإن :

$$Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}); \mathbb{Q}) = 6$$

كما نلاحظ أن

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

والآن :

$$\varphi_1 : \text{the identity mapping} : \varphi_1(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \varphi_1(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

$$\varphi_2 : \varphi_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \varphi_2(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

$$\varphi_3 : \varphi_3(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \varphi_3(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

$$\varphi_4 : \varphi_4(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \varphi_4(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$$

$$\varphi_5 : \varphi_5(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \varphi_5(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$$

$$\varphi_6 : \varphi_6(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \varphi_6(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$$

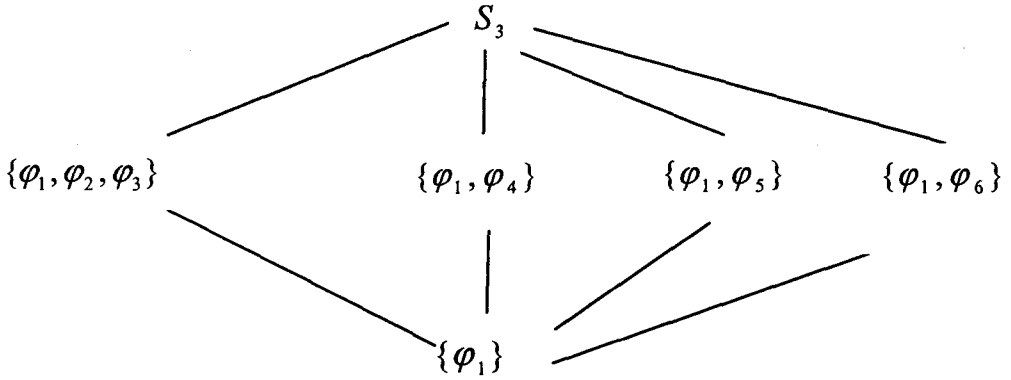
لاحظ أن $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ لا تكون زمرة جزئية من $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}), \mathbb{Q})$

لأن :

$$\begin{aligned} \varphi_2^2(\sqrt[3]{2}) &= \varphi_2(\varphi_2(\sqrt[3]{2})) = \varphi_2\left(\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= \varphi_2(\sqrt[3]{2})\varphi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt[3]{2}\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-\sqrt[3]{2}}{2}(1+i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

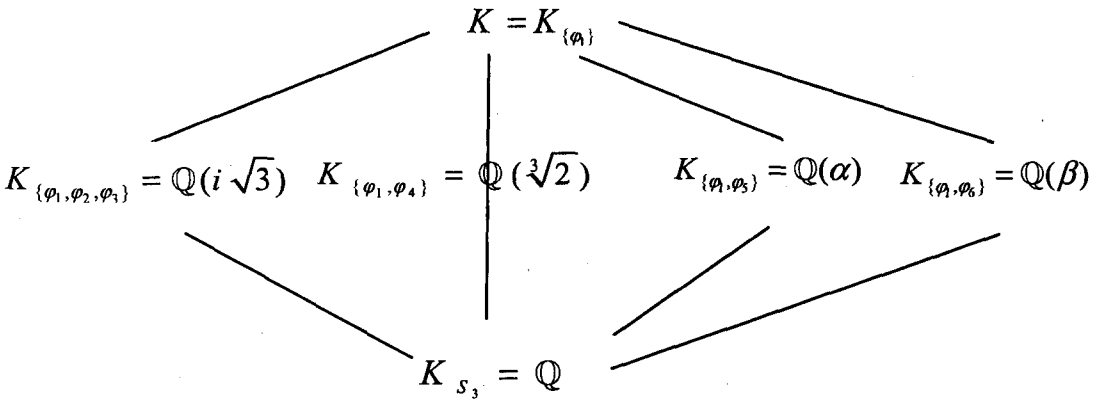
أي أن $\{\varphi_1, \varphi_2\} \neq \varphi_2^2$. بالمثل $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ ليست زمرة جزئية من $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}), \mathbb{Q})$

- (ب) واضح أن رتبة φ_i حيث $i = 1, \dots, 6$ لاتساوى 6 ، وبالتالي فإن $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}), \mathbb{Q})$ لا تشاكل $\mathbb{Z}_6$ ، وبالتالي فهي تشاكل S_3 .
(جـ)



شبكة الزمر الجزئية

(K_H هو الحقل الثابت بـ H)



$$(\alpha = (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{2}, \beta = (\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{2})$$

شبكة الحقول الجزئية

والتناظر المطلوب واضح .

مثال ٥٧ : ليكن E امتداداً للحقل $\mathbb{Q}$. برهن على أن أى أوتومورفيزم لـ E يعمل على $\mathbb{Q}$ كأنه راسم الوحدة .

البرهان : ليكن φ أوتومورفيزماً على E . والآن :

$$\varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

كذلك فإن :

$$1 = \varphi(1) = \varphi(mm^{-1}) = \varphi(m)\varphi(m^{-1}), \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{\varphi(m)} = \varphi(m^{-1})$$

وبالتالى فإن :

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(nm^{-1}) = \varphi(n)\varphi(m^{-1})$$

$$= \frac{n}{m}, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}.$$

(قارن مع مثال ٣١ فى (١-٢-٨) فى نظرية الحلقات)

مثال ٥٨ : اعتبر الامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}$. من مثال ٥٧ السابق مباشرة أى أوتومورفيزم φ على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ يتعين تماماً بمعرفة $\varphi(\sqrt[3]{2})$. والآن :

$$2 = \varphi(2) = \varphi((\sqrt[3]{2})^3) = (\varphi(\sqrt[3]{2}))^3 \Rightarrow \varphi(\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi(\sqrt[3]{2}) - \sqrt[3]{2})((\varphi(\sqrt[3]{2}))^2 + \varphi(\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$$

الحل الوحيد للمعادلة فى $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ هو : $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$

وبالتالى ومن مثال ٥٧ مرة أخرى فإن φ هو راسم الوحدة ، وتكون $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \mathbb{Q})$ من عنصر واحد هو راسم الوحدة، ويكون الحقل الثابت بـ $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
(قارن مع مثال (٢-٢-٣))

مثال ٥٩ : اعتبر الامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \supset \mathbb{Q}(i)$. أى أوتومورفيزم φ على $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ مثنياً $\mathbb{Q}(i)$ يتعين تماماً بـ $\varphi(\sqrt[4]{2})$. والآن :

$$2 = \varphi(2) = \varphi((\sqrt[4]{2})^4) = (\varphi(\sqrt[4]{2}))^4$$

$$\Rightarrow \varphi(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4}), k = 0, 1, 2, 3$$

أى أن هناك أربعة أوتومورفيزمات ممكنة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ تثبت $\mathbb{Q}(i)$.

إذا عرفنا φ بالكيفية الآتية : $\varphi(i) = i$ ، $\varphi(\sqrt[4]{2}) = i \sqrt[4]{2}$ ، عندئذ فإن :

$Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i); \mathbb{Q}(i))$ وبالتالى فإن $Ord(\varphi) = 4$ ، $\varphi \in Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i); \mathbb{Q}(i))$

تكون زمرة دائرية رتبته 4 . الحقل الثابت لـ $\{1, \varphi^2\}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ لأن :

$$\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) = \varphi(i) = i ,$$

$$\begin{aligned} \varphi^2(\sqrt{2}) &= \varphi(\varphi(\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2})) = \varphi(\varphi(\sqrt[4]{2}) \cdot \varphi(\sqrt[4]{2})) \\ &= \varphi(i \sqrt[4]{2} \cdot i \sqrt[4]{2}) = \varphi(i) \varphi(i) \varphi(\sqrt[4]{2}) \varphi(\sqrt[4]{2}) \\ &= i \cdot i \cdot i \sqrt[4]{2} \cdot i \sqrt[4]{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

شبكة الزمر الجزئية من $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i); \mathbb{Q}(i))$ وشبكة الحقول البينية بين

$\mathbb{Q}(i)$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ موضحتان أدناه . الأعداد الصحيحة على الخطوط فى شبكة

الزمر الجزئية توضح دليل الزمرة الجزئية فى الزمرة أعلاها ، والأعداد الصحيحة على

الخطوط فى شبكة الحقول توضح درجة امتداد الحقل فى الحقل أدناه

$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$
$\left \begin{array}{c} 2 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 2 \end{array} \right.$
$\{1, \alpha\}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$
$\left \begin{array}{c} 2 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 2 \end{array} \right.$
$\{1\}$	$\mathbb{Q}(i)$

مثال ٦٠ : ليكن F حقلاً له المميز 0 (صفر) . إذا كان K هو حقل تشقيق $X^n - 1$ على F ، فبرهن على أن $Aut(K; F)$ زمرة إبدالية .
البرهان :

$$X^n - 1 = 0 \Rightarrow X = (\cos 0 + i \sin 0)^{1/n} \\ = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

ليكن $X_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. تعطى عناصر $Aut(K; F)$ حيث $K = \mathbb{Q}(X_1)$ كالآتي :

$$\sigma_j \in Aut(K; F), \sigma_j(X_1) = X_1^j$$

وبالتالى فإن :

$$(\sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2})(X_1) = \sigma_{j_1}(X_1^{j_2}) = X_1^{j_1 j_2} \\ = \sigma_{j_2}(X_1^{j_1}) = (\sigma_{j_2} \circ \sigma_{j_1})(X_1)$$

وبالتالى فإن $\sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} = \sigma_{j_2} \circ \sigma_{j_1}$ وينتج المطلوب مباشرة .

مثال ٦١ : عين فصل التشاكل (isomorphism class) للزمرة $Aut(GF(64); GF(2))$

الحل : المطلوب تعيين $Aut(GF(2^6); GF(2))$

من $(2-6-10)$ $GF(2^6) \supset GF(2)$ امتداد جالوا ومن ثم فإن :

$$Ord(Aut(GF(2^6); GF(2))) = [GF(2^6) : GF(2)] = 6$$

من $(2-1-3)$: $Aut(GF(2^6)) = Aut(GF(2^6), GF(2))$ ، ومن $(2-6-10)$

$Aut(GF(2^6))$ دائرية يولدها هومومورفيزم فوريينيس ، ومن ثم فإن

$$Aut(GF(2^6); GF(2)) \cong \mathbb{Z}_6$$

مثال ٦٢ : عين فصل التشاكل للزمرة $Aut(GF(729); GF(9))$

الحل : المطلوب تعيين فصل التماثل للزمرة : $Aut(GF(3^6); GF(3^2))$

لدينا

$$[GF(3^6):GF(3)] = [GF(3^6):GF(3^2)].[GF(3^2):GF(3)]$$

نظرية الدرجة

$GF(3^6) \supset GF(3)$ ، $GF(3^2) \supset GF(3)$ امتدادا جالوا من $(2-6-10)$ ومن ثم فإن

$$2 = [GF(3^2):GF(3)] = Ord(Aut(GF(3^2); GF(3)))$$

كذلك فإن :

$$6 = [GF(3^6):GF(3)] = Ord(Aut(GF(3^6); GF(3)))$$

ومن ثم فإن

$$Ord(Aut(GF(3^2); GF(3))) = Ord(Aut(GF(3^6); GF(3))) / Ord(Aut(GF(3^6); GF(3^2)))$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{6}{Ord(Aut(GF(3^6); GF(3^2)))}$$

أى أن $Ord(Aut(GF(3^6); GF(3^2))) = 3$

وبالتالى فإن $Aut(GF(3^6); GF(3^2)) \cong \mathbb{Z}_3$

مثال ٦٣ : ليكن E حقل تشقيق كثيرة الحدود $X^4 + 1$ على $\mathbb{Q}$.

أوجد $Aut(E; \mathbb{Q})$. كذلك أوجد الحقول الجزئية من E . واوجد أوتومورفيزمات E

التي تكون الحقول الثابتة لها هي $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ، $\mathbb{Q}(i)$. هل هناك أوتومورفيزم

حقله الثابت $\mathbb{Q}$ ؟

الحل : لاحظ أن :

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

ومن ثم فإن أصفار $X^4 + 1$ هي :

$$X = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2}, \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2},$$

وبالتالى فإن حقل تشقيق $X^4 + 1$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$

وتكون $Aut(E; \mathbb{Q}) = Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i); \mathbb{Q})$

ويكون $Ord(Aut(E; \mathbb{Q})) = [E : \mathbb{Q}] = 4$ $((-2-2), (0-0-1))$ وتكون

عناصر الزمرة $Aut(E; \mathbb{Q})$ هي : 1 راسم الوحدة ، الحقل الثابت له E ،

$$\varphi_1, \varphi_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_1(i) = i$$

أى له الحقل الثابت $\mathbb{Q}(i)$ ،

$$\varphi_2, \varphi_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \varphi_2(i) = -i$$

أى له الحقل الثابت $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ،

$$\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \varphi_3(i) = -i$$

ويكون

$$\varphi_3(\sqrt{-2}) = \varphi_3(i\sqrt{2})$$

$$= \varphi_3(i)\varphi_3(\sqrt{2}) = -i(-\sqrt{2}) = i\sqrt{2} = \sqrt{-2}$$

ويكون الحقل الثابت $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

ولا يوجد أوتومورفيزم حقله الثابت $\mathbb{Q}$

الحقول الجزئية الفعلية هي : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\mathbb{Q}(i)$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ، $\mathbb{Q}$

مثال ٦٤ : لتكن $f \in F[X]$ ، ولتكن أصفار f هي $a_1, a_2, \dots, a_n$. إذا

كان $K = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، فبرهن على أن $Aut(K; F)$ تشكل زمرة

أوتومورفيزمات لـ $a_i's$.

البرهان : يكفى أن نبرهن على أن أى عنصر فى $Aut(K; F)$ يعرف تبديلا على

الـ $a_i's$. ليكن $\sigma \in Aut(K; F)$ ، ونكتب :

$$f = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_0 = c_n (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n),$$

$$c_n, c_{n-1}, \dots, c_0 \in F, a_1, a_2, \dots, a_n \in K$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned} f &= \sigma(f) = \sigma(c_n)\sigma(X - a_1)\sigma(X - a_2)\dots\sigma(X - a_n) \\ &= \sigma(c_n)(X - \sigma(a_1))(X - \sigma(a_2))\dots(X - \sigma(a_n)) \end{aligned}$$

$f(a_i) = 0$ (لأن a_i صفر لـ f) يقتضى أن :

$$0 = f(a_i) = \sigma(c_n)(a_i - \sigma(a_1))(a_i - \sigma(a_2))\dots(a_i - \sigma(a_n))$$

ومن ثم فإن : $a_i = \sigma(a_j)$ لبعض j

أى أن σ تبديل الـ a_i 's .

مثال ٦٥ : ليكن $\omega = \cos\frac{360^\circ}{7} + i \sin\frac{360^\circ}{7}$ بحيث إن $\omega^7 = 1$ ، ولنعبر الحقل $\mathbb{Q}(\omega)$

كم عدد الحقول الجزئية من $\mathbb{Q}(\omega)$ ، وماهى ؟

الحل : أولاً لاحظ أن $\mathbb{Q}(\omega)$ هو حقل تشقيق $X^7 - 1$ على $\mathbb{Q}$ وهى قابلة للانفصال وبالتالي فإن لدينا امتداد جالوا . والآن ليكن φ أوتومورفيزم بحيث إن :

$$\varphi(\omega) = \omega^3 \Rightarrow \varphi^2(\omega) = \varphi(\varphi(\omega)) = \varphi(e^{\frac{2\pi i}{7}})^3 = \varphi(e^{\frac{6\pi i}{7}}) = e^{\frac{18\pi i}{7}} = e^{\frac{4\pi i}{7}}$$

$$\Rightarrow \varphi^3(\omega) = \varphi(\varphi^2(\omega)) = \varphi(e^{\frac{4\pi i}{7}}) = e^{\frac{12\pi i}{7}}$$

$$\Rightarrow \varphi^4(\omega) = \varphi(\varphi^3(\omega)) = \varphi(e^{\frac{12\pi i}{7}}) = e^{\frac{36\pi i}{7}} = e^{\frac{8\pi i}{7}}$$

$$\Rightarrow \varphi^5(\omega) = \varphi(\varphi^4(\omega)) = e^{\frac{24\pi i}{7}} = e^{\frac{10\pi i}{7}}$$

$$\Rightarrow \varphi^6(\omega) = \varphi(\varphi^5(\omega)) = e^{\frac{30\pi i}{7}} = e^{\frac{2\pi i}{7}} = \omega$$

أو بخطوات أسرع :

$$\varphi^6(\omega) = \varphi^5(\varphi(\omega)) = \varphi^5(\omega^3) = \varphi^4(\varphi(\omega^3)) = \varphi^4(\omega^9) = \varphi^4(\omega^2)$$

$$= \varphi^3(\varphi(\omega^2)) = \varphi^3(\omega^6) = \varphi^2(\varphi(\omega^6)) = \varphi^2(\omega^{18}) = \varphi^2(\omega^4)$$

$$= \varphi(\varphi(\omega^4)) = \varphi(\omega^{12}) = \varphi(\omega^5) = \omega^{15} = \omega$$

وهذا يقتضى أن $\varphi^6 = 1$ أى أن رتبة (φ) هى 6

ومن حيث إن رتبة أى عنصر فى زمرة تقسم رتبة الزمرة ((١-١١-٩)) فى نظرية الزمر) ، ومن حيث إن لدينا امتداد جالوا فإنه ينتج أن :

$$[Q(\omega) : \mathbb{Q}] = \text{Ord}(\text{Aut}(Q(\omega); \mathbb{Q})) \geq 6$$

كذلك فإن لدينا :

$$X^7 - 1 = (X - 1)(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

ومن حيث إن ω صفر لكثيرة الحدود $X^7 - 1$ ، $\omega - 1 \neq 0$ فإن

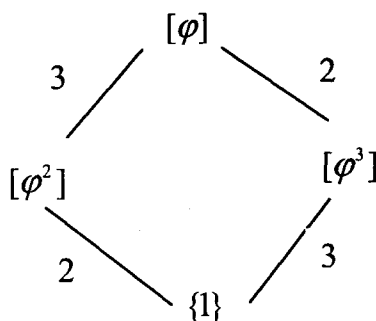
$$\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

أى أن $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ هى كثيرة الحدود الصغرى من ω على $\mathbb{Q}$

فإن هذا يقتضى من ((١-٥-٥)) أن :

$$\text{Ord}(\text{Aut}(\mathbb{Q}(\omega); \mathbb{Q})) = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 6$$

وهكذا فإن $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\omega); \mathbb{Q})$ دائرية ورتبتها 6 . ويمكن رسم شبكة الزمر الجزئية لـ $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\omega); \mathbb{Q})$ ، كما يتضح أدناه :



وهذا يعنى أن $\mathbb{Q}(\omega)$ يحتوى على امتدادين فعليين على $\mathbb{Q}$ أحدهما درجته 3 ، والآخر درجته 2 .

ونلاحظ أن $\omega + \omega^6$ ثابت تحت تأثير ϕ^3 ، لأن :

$$\begin{aligned}\varphi^3(\omega + \omega^6) &= \varphi^2(\varphi(\omega + \omega^6)) = \varphi^2(\varphi(\omega) + \varphi(\omega^6)) \\ &= \varphi^2(\omega^3 + \omega^{18}) = \varphi(\varphi(\omega^3 + \omega^4)) = \varphi(\omega^9 + \omega^{12}) = \varphi(\omega^2 + \omega^5) \\ &= \omega^6 + \omega^{15} = \omega + \omega^6\end{aligned}$$

وبالتالى فإن $\mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^3]} : \mathbb{Q} = 3$ ولأن $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\omega + \omega^6) \subset \mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^3]}$

(لماذا ؟) ولأن $[\mathbb{Q}(\omega + \omega^6) : \mathbb{Q}]$ يقسم $[\mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^3]} : \mathbb{Q}]$ ولأن $\mathbb{Q}(\omega + \omega^6) \neq \mathbb{Q}$ فإن

$$(\mathbb{Q}(\omega + \omega^6) = \mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^3]}) \text{ . (نعنى } \mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^3]} \text{ الحقل الثابت فى } \mathbb{Q}(\omega) \text{ تحت تأثير } [\varphi^3])$$

كذلك فإن $\omega^3 + \omega^5 + \omega^6$ ثابت تحت تأثير φ^2 لأن :

$$\begin{aligned}\varphi^2(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) &= \varphi(\varphi(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6)) = \varphi(\varphi(\omega^3) + \varphi(\omega^5) + \varphi(\omega^6)) \\ &= \varphi(\omega^9 + \omega^{15} + \omega^{18}) = \varphi(\omega^2 + \omega + \omega^4) = \varphi(\omega^2) + \varphi(\omega) + \varphi(\omega^4) \\ &= \omega^6 + \omega^3 + \omega^{12} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6\end{aligned}$$

وبالتالى فإن $\mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^2]} : \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \subset \mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^2]}$ ولأن $[\mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^2]} : \mathbb{Q}] = 2$

(لماذا ؟) ولأن $[\mathbb{Q}(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) : \mathbb{Q}]$ يقسم $[\mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^2]} : \mathbb{Q}]$ ولأن

$$\mathbb{Q}(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \neq \mathbb{Q} \text{ فإن } \mathbb{Q}(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \mathbb{Q}(\omega)_{[\varphi^2]} \text{ . وبهذا نكون}$$

قد أوجدنا جميع الحقول الجزئية من $\mathbb{Q}(\omega)$.

مثال ٦٦ : بالرجوع إلى مثال ٢٤ (جـ) من أمثلة متنوعة (٢) اوجد الجذور البدائية

الخمس عشرية.

الحل : وجدنا من قبل أن عدد الجذور هو 8 . والمطلوب تعيينها . نجرب $\bar{2}$ كمولداً

$(GF(31))^*$ أى $\mathbb{Z}_{31}^*$. من حيث إن رتبة $\mathbb{Z}_{31}^*$ هي 30 ، فرتبة $\bar{2}$ تكون قاسماً لـ

30 أى هي 2 أو 3 أو 5 أو 6 أو 10 أو 15 أو 30 .

$\bar{2}^2 = 4$ ، $\bar{2}^3 = 8$ ، $\bar{2}^5 = 1$ وبالتالى فإن $\bar{2}$ لايمكن أن يكون مولداً لـ $\mathbb{Z}_{31}^*$.

نحرب $\bar{3}^{10} = \bar{25}$ ، $\bar{3}^6 = \bar{16}$ ، $\bar{3}^5 = \bar{26}$ ، $\bar{3}^3 = \bar{27}$ ، $(\bar{3})^2 (= \bar{3}^2) = \bar{9}$: $\bar{3}^{15} = \bar{30}$ أى

أن $\bar{3}^{30} = \bar{1}$ (حسبنا قوى $\bar{3}$ التى تكون قاسماً لرتبة الزمرة $\mathbb{Z}_{31}^*$ كما فعلنا مع 2) .
أى أن $\bar{3}$ مولد لـ $\mathbb{Z}_{31}^*$. وبالتالي تكون الجذور المطلوبة هى : $\bar{3}^2$ ، $\bar{3}^4$ ، $\bar{3}^8$ ، $\bar{3}^{14}$ ، $\bar{3}^{16}$ ، $\bar{3}^{22}$ ، $\bar{3}^{26}$ ، $\bar{3}^{28}$.

تمارين عامة (٢)

(١) عين أى كثيرات الحدود الآتية تعتبر قابلة للانفصال على الحقول الموضحة :

$$t^3 + 1 ، t^2 + 2t - 1 ، t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 ، 7t^5 + t - 1 ؛ \mathbb{Q} ، \mathbb{C} ، \mathbb{Z}_2 ، \mathbb{Z}_3 ، \mathbb{Z}_5 ، \mathbb{Z}_7 ، \mathbb{Z}_{19} .$$

(٢) برهن على أن أى امتداد درجته 2 يكون طبيعياً . هل هذا صحيح بالنسبة لأية درجة < 2 ؟

(٣) ليكن K هو الحقل فى مثال ٥٦ من تمارين متنوعة (١) ، وليكن P هو حقله الأولى . ما زمرة جالوا $Aut(K; P)$ ؟ هل الراسمان $Aut(K;)$ ، $Fix(K;)$ فى (٢-٢-٤) تناظران أحاديان هنا ؟
(٤) أنشئ حقلاً مكوناً من 16 عنصراً .

انظر (٣-٦-٩) مثال ١٠ ، مثال ١١ فى نظرية الحلقات

(٥) هل توجد أية أعداد ليست أولية r تقسم دائماً معاملات ذات الحدين $\binom{r}{s}$ ، حيث $1 \leq s \leq r-1$ ؟

(٦) اوجد مولدات الزمر الضربية لـ $GF(n)$ حيث

$$n = 8, 9, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 \text{ or } 49$$

(٧) اعتبر الحقل $\mathbb{Z}_2(X)$. برهن على أن مونومورفيزم فوريينيس ليس دائماً أوتومورفيزماً .

(٨) ليكن φ هو أوتومورفيزم فوريينيس لـ $GF(p^n)$. اوجد أصغر قيمة لـ m ، $m > 0$ ، بحيث يكون φ هو راسم الوحدة .

(٩) إذا كانت n تقسم m ، فبرهن على أن $[GF(p^m):GF(p^n)] = \frac{m}{n}$.

(١٠) برهن على أن الحلقتين $\mathbb{Z}_3(X)/[X^2+2X+2]$ ، $\mathbb{Z}_3(X)/[X^2+X+2]$ متشاكلتان (أيزومورفيتان)

(١١) بدون حساب رتبة العنصر X وضح لماذا X مولد للزمرة الدائرية $(\mathbb{Z}_2(X)/[X^5+X^3+1])^*$

(١٢) ليكن m ، n عددين صحيحين موجبين ، m يقسم n . برهن على أنه لاى حقل F فإن $X^m - 1$ تقسم $X^n - 1$ فى $F[X]$.

(١٣) وضح بالرسم الاحتواءات التى تربط الحقول الجزئية من $GF(2^{30})$ ، $GF(3^{18})$.

(١٤) هل يمكنك أن تقارن رسم الاحتواءات التى تربط الحقول الجزئية من $GF(2^{30})$ بذلك الذى يوضح الاحتواءات التى تربط الحقول الجزئية من $GF(3^{30})$ ؟

(١٥) برهن على أن راسم فوريينيس $\varphi: GF(p^n) \rightarrow GF(p^n)$
 $a \mapsto a^p$

أوتومورفيزم من الرتبة n (أى أن φ^n هو راسم الوحدة)

(١٦) ليكن F حقلاً يتكون من 125 عنصراً ، $F^* = [a]$. برهن على أن $a^{62} = -1$

(١٧) ليكن L ، K حقلين جزئيين من $GF(p^n)$. إذا كان K يتألف من p^r عنصراً ، L يتألف من p^s عنصراً ، فكم عدد عناصر $K \cap L$ ؟

(١٨) إذا كان F حقلاً يتألف من 1024 عنصراً ، وكان $F^* = [a]$ ، فاسرد عناصر كل حقل جزئي من F .

(١٩) ليكن $\alpha, \beta \in (GF(81))^*$ ، بحيث إن رتبة $(\alpha) = 5$ ، رتبة $(\beta) = 16$. برهن على أن $\alpha\beta$ مولد لـ $(GF(81))^*$.

(٢٠) أوجد رتبة كل من الزمر الآتية :

$$(أ) \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \mathbb{Q})$$

$$(ب) \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}); \mathbb{Q})$$

$$(ج) \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}); \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$$

(٢١) ليكن F حقلاً ، وليكن α ، β جبريين على F ، درجة كثيرة الحدود الصغرى من α على F هي n . برهن على أن الراسم $\psi_{\alpha, \beta}: F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ المعروف كالاتي :

$$\psi_{\alpha, \beta}(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\beta + \dots + c_{n-1}\beta^{n-1}, c_i \in F$$

أيزومورفيزم من $F(\alpha)$ على $F(\beta)$ إذا كان فقط إذا كان α ، β مترافقين على F .

(٢٢) الحقلا $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\mathbb{Q}(3 + \sqrt{2})$ هما نفس الحقل . ليكن $\alpha = 3 + \sqrt{2}$

(أ) أوجد مرافقاً β لـ α على $\mathbb{Q}$ ، بحيث يكون $\beta \neq \alpha$

(ب) بالإشارة إلى (أ) قارن الأوتومورفيزم $\psi_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$ لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ مع الأوتومورفيزم $\psi_{\alpha, \beta}$

(٢٣) ليكن F حقلاً ، وليكن X غير محدد على F . عين جميع الأوتومورفيزمات لـ $F(X)$ التي تترك F ثابتاً ، وذلك بتعيين كل قيمها على X .

(٢٤) التمرين (٢١) أعلاه يصف أيزومورفيزمات أساسية (basic isomorphisms)

في حالة α ، β جبريين مترافقين على F . هل يوجد أيزومورفيزم مشابه لـ $F(\alpha)$ مع $F(\beta)$ في حالة α ، β متساميين على F ؟

(٢٥) ليكن F حقلاً له المميز $p \neq 0$. اضرب مثلاً لبيان أن الراسم

$$\sigma_p : F \rightarrow F$$

$$a \mapsto a^p$$

لجميع $a \in F$ ليس بالضرورة أوتومورفيزماً إذا كان F ليس منتهياً .

(٢٦) برهن على أن $f \in F[X]$ ليس لها صفر مكرر إذا كان فقط إذا كان f, f' ،

ليس لهما عامل غير ثابت مشترك في $F[X]$.

(٢٧) عين زمرة جالوا للامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}$

(٢٨) ليكن $K \supset F$ امتداد حقلى طبيعياً منتهياً ، وليكن $\alpha \in K$. يعرف معيار α

على F (norm α over F) ونرمز له بالرمز $N_{K/F}(\alpha)$ كالآتي :

$$N_{K/F}(\alpha) := \prod_{\sigma \in \text{Aut}(K;F)} \sigma(\alpha)$$

بينما يعرف أثر α على F (trace α over F) كالآتي :

$$\text{Tr}_{K/F}(\alpha) := \sum_{\sigma \in \text{Aut}(K;F)} \sigma(\alpha)$$

والآن ليكن $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. احسب :

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad (\text{ب})$$

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) \quad (\text{ا})$$

$$N_{K/\mathbb{Q}}(2) \quad (\text{د})$$

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6}) \quad (\text{جـ})$$

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad (\text{و})$$

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) \quad (\text{هـ})$$

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(2) \quad (\text{ح})$$

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6}) \quad (\text{ز})$$

(٢٩) صف زمرة جالوا لكثيرة الحدود $X^4 - 5X^2 + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$

(٣٠) صف زمرة جالوا لكثيرة الحدود $X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ على $\mathbb{Q}$

(٣١) اعتبر الامتداد $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}$

(أ) أية زمرة تشاكلها $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \mathbb{Q})$ ؟

(ب) ارسم شبكة الزمر الجزئية من $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \mathbb{Q})$ ،

شبكة الحقول الجزئية من $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

(٣٢) ليكن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ، ما رتبة $Ord(Aut(E; \mathbb{Q}))$ ؟ ما رتبة

$Ord(Aut(\mathbb{Q}(\sqrt{10}); \mathbb{Q}))$ ؟

(٣٣) ليكن E حقل تشقيق كثيرة حدود على حقل F له المميز صفر . إذا كانت

$Aut(E; F)$ زمرة ابدالية من الرتبة 10 ، فارسم شبكة الحقول الجزئية للحقول بين E, F .

(إرشاد : استخدم شبكة الزمرة $\mathbb{Z}_{10}$)

(٣٤) ليكن F حقلاً له المميز صفر ، E حقل تشقيق لكثيرة حدود على F . إذا كانت

$Aut(E; F)$ تتشاكل مع A_4 فبرهن على أنه لا يوجد حقل جزئي K بحيث يكون

$$[K : F] = 2$$

(إرشاد : A_4 ليس لها زمرة جزئية من الرتبة 6)

(٣٥) إذا علم أن زمرة الأوتومورفيزمات لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ تتشاكل مع

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ، فعين عدد الحقول الجزئية من $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ التي درجة

امتدادها على $\mathbb{Q}$ هي 4 .

(٣٦) برهن على أن زمرة جالوا لـ $X^3 - 3$ على $\mathbb{Q}$ تتشاكل مع S_3 .

(٣٧) ليكن E هو حقل التشقيق لكثيرة حدود ما على حقل F له المميز صفر . إذا كان

$[E : F]$ منتهياً ، فبرهن على أنه يوجد عدد منته فقط من الحقول بين E, F .

(٣٨) إذا كانت w عدداً مركباً غير حقيقي بحيث إن $w^5 = 1$ ، وإذا كان φ

أوتومورفيزماً لـ $\mathbb{Q}(w)$ ينقل w إلى w^4 ، فاوجد الحقل الثابت لـ $[\varphi]$.

(٣٩) عين زمرة حقل الأوتومورفيزمات لـ $GF(4)$

(٤٠) ليكن $E \supset F$ امتداد حقل . برهن على أن زمرة أوتومورفيزمات E التي تثبت F هي بالفعل زمرة .

(٤١) ليكن $E \supset F$ امتداد حقل ، $H \subset Aut(E;F)$ زمرة جزئية . برهن على أن الحقل الثابت لـ H هو بالفعل حقل .

(٤٢) اعتبر الحقل المنتهى $\mathbb{Z}_{11}$. اوجد الجذور البدائية الخمسية والجذور البدائية التربيعية للوحدة في $\mathbb{Z}_{11}$. (ارشاد : انظر مثالي ٢٤ ، ٦٦ من أمثلة متنوعة ٢)

المحتويات

الجزء الأول نظرية الزمر

الباب الأول

المفاهيم الأساسية ٧

الباب الثاني

زمر التبديلات ١٢٣

الباب الثالث

حواصل الضرب الخارجية والداخلية المباشرة ١٤١

الباب الرابع

النظرية الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية ١٧٧

الباب الخامس

نظريات سيلو ١٩٧

الباب السادس

المتسلسلات الطبيعية ومتسلسلات التركيب والزمر القابلة للحل ٢١٩

الجزء الثاني نظرية الحلقات

الباب الأول

المفاهيم الأساسية ٢٣٥

الباب الثاني

حلقات كثيرات الحدود ٣٥١

الباب الثالث

القسم في النطاق المتكامل ٣٩١

إساليب تطوير المحتوى

الباب الأول

المفاهيم الأساسية ٤٨٧

الباب الثاني

نظرية جالوا ٥٥٩



مدونة ملحوظة