منشورات جامعة حلب

كلية الهندسة

الجبر والتفاضل

لطلاب الاعدادي العام « مدني ـ ميكانيك ـ كهرباء »

القسم النظري ـ القسم العملي

الجزء الأول

للاستاذ

أحمد علوظي

الطبعة الخامسة

مديرية الكتب والمطبوعات

العام الدراسي ١٩٧٨ – ١٩٧٩

مصمم الغلاف : وعد علوظي

مقدمة الطبعة الخامسة

طبع كتابي ثلاث مرات ، وكل طبعة جديدة كانت تعدل سابقتها ، إلا الطبعة الرابعة فلم يمسسها التعديل لأنها طبعت على الاوفست بغية تلبية حاجة الطلاب للكتاب بالسرعة الممكنة بعد نفاد الطبعة الثالثة بشكل مفاجىء وغير متوقع . واليوم أدفع الطبعة الخامسة لتعدل ما سبق فاطرة هذا الكتاب الى جزأين :

الأول : ويضم الجبر والتفاضل ويقع في أحد عشر فصلاً .

والثاني : ويشمل التكامل ، ويضم ثمانية فصول .

والفصل الاخير في كل من الجزأين يحتوي على تمارين محلولة فضلاً عن حل الاسئلة الواردة في الدورات السابقة .

حلب ١٩٧٩/١/١

المؤلف
أحمد علوظي

مقدمة الطبعة الثالثة

لما كانت الدراسة في كلية الهندسة تعير الناحية التطبيقية اهتماماً كبيراً لتعد الطالب للحياة العملية فاني أغنيت الطبعة الثالثة بوافر من التمارين المحلولة وغـــير المحلولة لترسخ معلومات الطالب النظرية وتكسبه مهارة عملية .

ولي وطيد الامل بأن يستفيد الطالب من القسم العملي الذي عرضته في الفصل الخامس عشر مطلعاً من خلاله على نماذج الاسئلة التي وردت في الدورات السابقة .

ولبلوغ الغاية المرجوة من العملي يحسن بالطالب أن يقرأ نص التمرين محاولا حله بالاعتماد على نفسه ، باذلا قصارى جهده ، مستأنساً بالدساتير الواردة في البحث النظري ، فان توصل الى الحل ـ وهو ما أرجوه له ـ قارنه مع جواب التمرين ، وإن تعثرت مسيرته في التفكير استرشد بما انطوى عليه الحل من أفكار كانت قد غابت عن ذهنه .

هذا وأن مواضيع القسم العملي رتبت وفق ترتيب مواضيع القسم النظري بحيث أصبح بوسع الطالب أن يلقى الافادة من القسم العملي فور تلقيه المحاضرات الاولى دون أن يرجىء ذلك الى ما تأخر من العام الدراسي .

حلب/١/٤/١٩٧٥

المؤلف

أحمد علوظي

مقدمة الطبعة الثانية

خلال ثلاث سنوات من تدريس كتاب الجبر والتحليل لمست مع الزملاء أن هنالك بعض التعاريف تعوزها صياغة جديدة ، وبعض الفقرات تحتاج الى تعديـــل ، وبعض الفصول تتطلب مزيداً من التمارين .

فجاءت الطبعة الثانية تسعى الى ما يفتقر اليه الكتاب من اضافة وتنقيح وتعديل، آخذة بعين الاعتبار ما تفضل به السادة الزملاء من ملاحظات قيمة ، واقتراحات وجيهة تستأثر بشكري وامتناني .

ولا يسعني إلا أن أخص بالشكر الدكتورة رجاء الصابوني ، والاستاذ ميشيل منصور على مؤازرتهما في التنقيح ، مزجياً لهما اكباري وخالص تقديري .

حلب/١٢/٨/١٩٧٢

المؤلف
أحمد علوظي

مقدمة الطبعة الاولى

وضعت الخطوط الاولى لهذا الكتاب على شكل محاضرات القيتها على طلاب الاعدادي العام في كلية الهندسة بحلب منذ ثلاث سنوات ونيف . ثم أجريت عليها بعض التعديل والتنسيق ، فحذفت منها ما قد علق بها من فقرات لا حاجة للطالب بها ، وأضفت اليها بعض الابحاث التي يفتقر الطالب اليها في دراسته المقبلة وبذلك أصبحت متكاملة تستوعب مقرر الاعدادي العام ، فسقتها على شكل كتاب أضعه بين يدي الطلاب ليكون لهم عوناً في دراستهم .

لقد صغت هذا الكتاب في أربعة عشر فصلا استهلالتها بالفصل الاول وأسميته : (معلومات لا بد منها) وضمنته باقتضاب كل ما يحتاج اليه الطالب من دساتير جبرية وهندسية ومثلثية تلك التي كان قد عرج عليها في دراسته الثانوية ، ولا مندوحة له عنها لمتابعة دراسته للرياضيات العالية ، كما أنهيت هـــذا الفصل بفكرة موجزة عن الاعداد الناطقة والصماء .

أما بقية الفصول فقد عرضت فيها مقرر الجبر والتحليل للاعدادي العام ، ونثرت في ثنايا المقرر أمثلة محلولة متدرجة بالصعوبة لتساعد الطالب على تلمس طريقه في الحل ، وختمت كل فصل بتمارين كثيرة ومتنوعة درجت أجوبتها الى جانبها لتكون هذه الاجوبة بمثابة صوى يهتدي بها الطالب الى تقويم ما أعوج من خط سيره نحو الحل الصحيح .

أملي أن يجد الطالب في كتابي هذا اسلوباً سلساً يساعده على تفهم الرياضيات ؛ ومادة غنية ترسخ أسساً له يعتمد عليها في دراسته المقبلة .

ورجائي أن يزودني الزملاء بملاحظاتهم لاعمل بها مستدركاً ما قـد أكون غفوت عنه وفاتني تلافيه .

حلب ١٩٦٩/١١/١

المؤلف

أحمد علوظي

القسم النظري

الفصل الأول

معلومات لا بد منها

١ ـ ١ ـ في الهندسة

سطح الدائرة : $S = \pi R^2$

حيث R نصف القطر .

محيط الدائرة : $L = 2\pi R$

حجم الاسطوانة الدورانية : $V = \pi R^2 . H$

حيث H ارتفاع الاسطوانة ، R نصف قطر قاعدتها .

السطح الجانبي للاسطوانة الدورانية : $S = 2\pi R . H$

حجم المخروط الدوراني : $V = \frac{1}{3} \pi R^2 . H$

حجم الكرة : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

سطح الكرة : $S = 4 \pi R^2$

١ ـ ٢ ـ في الجبر

١ ـ ٢ ـ ١ ـ حل المعادلة من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وليكن مميزها : $\Delta = b^2 - 4\,ca'$ نراعي ثلاث حالات :

آ ـ بفرض $\Delta > 0$ للمعادلة جذران يعطيان بالدستور :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ومجموعها :

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

وجداؤهما :

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

ب ـ بفرض : $\Delta = 0$ للمعادلة جذر مضاعف :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

جـ ـ بفرض : $\Delta < 0$ للمعادلة جذران تخيليان .

١ ـ ٢ ـ ٢ ـ اشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية :

ليكن ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ فلدراسة اشارته نحتكم الى المميز ونراعي ثلاث حالات :

آ ـ بفرض : $\Delta < 0$ تكون اشارة الثلاثي دوماً وأبداً ـ مهما أخذت x من قيم ـ من اشارة a .

ب ـ بفرض : $\Delta = 0$ يكون للثلاثي جذر مضاعف :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

ينعدم من أجله ، أما اشارته فهي ـ ما عدا الجـــذر المضاعف ـ دوماً وأبداً من اشارة a .

جـ ـ بفرض : $\Delta > 0$ للثلاثي جذران حقيقيان x', x'' فاذا أخذت x قيما محصورة بين الجذرين $x'.x''$ جعلت اشارة الثلاثي مخالفة لاشارة a . أما اذا اخذت x قيماً خارج منطقة الجذرين فاشارة الثلاثي من اشارة a .

١ ـ ٢ ـ ٣ ـ خواص القوى :

تعريف : القوة n للعدد a ونرمز لها a^n حيث n عـدد موجب صحيح نقصد بها جداء a بنفسها n مرة أي :

$$a^n = a \cdot a \ldots$$

وتتمتع القوى بالخواص الآتية :

آ ـ لرفع جداء عدة مضاريب الى قوة يكفي رفع كل مضروب الى هذه القوة أي :

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

ب ـ لضرب قوتين لنفس المدد يكفي أن نجمع الأسس أي :

$$a^n \cdot a^q = a^{n+q}$$

جـ ـ لرفع قوة الى قوة جديدة يكفي أن نضرب الأسين أي :

$$(a^n)^q = a^{n \cdot q}$$

د ـ لرفع كسر الى قوة يكفي أن نرفع كلا من الصورة والمخرج الى نفس القوة أي :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

هـ ـ لتقسيم قوتين لنفس العدد يكفي أن نطرح أس المخرج من أس الصورة أي :

$$\frac{a^n}{a^q} = a^{n-q}$$

حالة خاصة : بفرض $n = q$ يكون :

$$\frac{a^n}{a^q} = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

من جهة ومن جهة ثانية لدينا عن طريق الاختصار :

$$\frac{a^n}{a^q} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

بالمقارنة ينتج :

$$\boxed{a^0 = 1}$$

أي كل عدد مثل a اذا رفع للقوة صفر أصبحت قيمته الواحد .

حالة خاصة أيضاً : بفرض $n > q$ مثال :

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

من جهة ، ومن جة ثانية لدينا عن طريق الاختصار :

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$$

أي أن القوه ذات الأس السالب إن هي إلا اصطلاح يقصد به قلب العدد ورفعه لنفس القوة بأس موجب .

١ ـ ٢ ـ ٤ ـ الجذور وخواصها :

تعريف : الجذر الحسابي (من دليل n) للعدد الموجب a ونرمز له $\sqrt[n]{\ }$ هـو عدد موجب جديد مثل A شريطة أن تتحقق العلاقة :

$$A^n = a$$

وتتمتع الجذور بالخواص الآتية :

آ ـ جداء الجذور من دليل n لعدة أعداد يساوي الجذر من دليل n لجدائها أي :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

البرهان : برفع الطرفين الى القوة n .

ب ـ لرفع جذر الى قوة يكفي رفع العدد المجذور الـ هذه القوة أي :

$$(\sqrt[n]{a})^q = \sqrt[n]{a^q}$$

البرهان برفع الطرفين الى القوة n .

ج ـ حاصل قسمة جذرين من دليل واحد لعددين هو جذر من نفس الدليل لحاصل قسمتهما أي :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

البرهان : برفع الطرفين الى القوة n .

د ـ الجذر من دليل q للجذر من دليل n للعدد a هو جذر جديد دليله جداء الدليلين أي :

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot q]{a}$$

البرهان : برفع الطرفين الى القوة n . q .

هـ ـ لا يتغير الجذر اذا ضربنا (أو قسمنا) داليه وأس العدد المجذور بنفس العدد أي :

$$\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n \cdot r]{a^{q \cdot r}}$$

البرهان : برفع الطرفين الى القوة n . r .

حالة خاصة : ليكن الجذر $\sqrt[n]{a^q}$ لنقسم الدليل وأس العدد المجذور على n يكون:

$$\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n/n]{a^{q/n}} = \sqrt[1]{a^{q/n}} = a^{q/n}$$

وهذه العلاقة تدل على أنه يمكن رد كل جذر الى قـــوة أسها على شكل كسر

صورته أس المجذور ومخرجه دليل الجذر . وهذه الخاصة تفيدنا بالانتقال من الجذر الى القوة وبالعكس .

مثـال $a^{3/4} = \sqrt[4]{a^3}$ ، مثـال $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$

١ - ٢ - ٥ - خواص اللغاريتمات :

آ - لغاريتم جداء يساوي مجموع اللغاريتمات أي :

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

ب - لغاريتم كسر يساوي لغاريتم الصورة ناقصاً لغاريتم المخرج أي :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

جـ - لغاريتم قوة يساوي جداء الأس في لغاريتم العدد المرفوع الى هذه القوة أي :

$$\log a^n = n \log a$$

د - لغاريتم الجذر يساوي لغاريتم المجذور مقسوماً على دليل الجذر أي :

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

هـ - ليس للعدد السالب لغاريتم :

و - $\log 1 = 0$. $\log (+0) = -\infty$ ، $\log \infty = \infty$

١ - ٢ - ٦ - المتوالية العددية :

بفرض a الحد الاول ، r الاساس ، فالحد العام الذي رتبته n يعطى بالدستور :

$$L = a + (n - 1) r$$

ومجموع n حداً يعطى بالدستور :

$$S = \frac{n}{2} (a + L)$$

مثـــال :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (1 + n)$$

أو بالدستور :

$$\boxed{S = \frac{n}{2} [\, 2a + (n-1)\, r]}$$

١ - ٢ - ٧ - المتوالية الهندسية :

بفرض a الحد الاول ، r الاساس ، فالحد العام الذي رتبته n يعطى بالدستور:

$$L = a \cdot r^{n-1}$$

ومجموع n حداً يعطى بالدستور :

$$S = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

حالة خاصة : بفرض $r < 1$ وعدد الحدود n مالا نهاية ، تصبح المتوالية الهندسية متناقصة ولا نهائية ويعطى مجموعها بالدستور :

$$\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$$

١ - ٢ - ٨ - بعض المتطابقات :

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 \equiv a^3 - 3ba^2 + 3b^2a - b^3$$

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + 3ba^2 + 3b^2a + b^3$$

$$a^n - b^n \equiv (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a.b^{n-2} + b^{n-1})$$

مجموع مربعات n عدداً من الاعداد الاولى الصحيحة :

نعلم أن :

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

باعطاء x القيم $1, 2, 3, \ldots n$ والتعويض نجد :

$$(1-1)^3 = 0^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3.1 - 1$$

$$(2-1)^3 = 1^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3.2 - 1$$

$$(3-1)^3 = 2^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3.3 - 1$$

$$(4-1)^3 = 3^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 3.4 - 1$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(n-1)^3 = (n-1)^3 = n^3 - 3.n^2 + 3n - 1$$

بالجمع طرفاً الى طرف والرمز بـ S_1 لمجموع n عدداً من الاعداد الاولى الصحيحة وبـ S_2 لمجموع مربعاتها و بـ S_3 لمجموع مكعباتها ينتج :

$$S_3 - n^3 = S_3 - 3.S_2 + 3.S_1 - n$$

أو :

$$3.S_2 = 3.S_1 + n^3 - n$$

$$3.S_2 = 3.S_1 + n\,(n+1)\,(n-1)$$

لكن نعلم أن :

$$S_1 = \frac{n}{2}\,(n+1)$$

نعوض :

$$3.S_2 = \frac{3n}{2}\,(n+1) + n\,(n+1)\,(n-1)$$

بالاصلاح نجد :

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}}$$

أي :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

١ - ٢ - ٩ - التبادلات والتراتيب :

إذا أعطينا n عنصراً مختلفاً وشكلنا منها مجموعات يتألف كل منها من R عنصراً مرتباً فان عدد هذه المجموعات الممكن تشكيلها ، أو عدد هذه التراتيب ، يعطى بالدستور :

$$A\,(n,R) = n\,(n-1)\,(n-2) \quad .\quad (n-R+1) \qquad (1)$$

أو بالدستور المكافىء له ،

$$A\,(n,R) = \frac{n!}{(n-R)\,!} \qquad (2)$$

حالة خاصة : بفرض $R = n$ نعوض في كل من (1) ، (2) نحصل على عدد متبادلات n عنصراً مأخوذة جميعاً ونرمز :

$$P_n = A(n,n) = n\,! \quad , \quad P_n = \frac{n!}{0!}$$

بالمقارنة نستنتج :

$$\boxed{0\,! = 1}$$

١ - ٢ - ١٠ - المتوافقات :

المتوافقة هي كل مجموعة يمكن تكوينها من عناصر مفروضة دون التقيد بترتيب عناصرها . ويتعين عدد المتوافقات لـ n عنصراً مأخوذة R عنصراً R عنصراً بالدستور :

$$C(n,R) = \frac{n(n-1) \quad (n-R+1)}{R!}$$

أو بالدستور :

$$C(n,R) = \frac{n!}{(n-R)!\,R!}$$

١ - ٢ - ١١ - مفكوك ذي الحدين لنيوتون :

بفرض n عدداً موجباً صحيحاً فان مفكوك المقدار $(x+a)^n$ يعطى بالدستور الآتي :

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1!} \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 x^{n-2} + \quad a^n$$

ونعلم أن الحد الذي رتبته $r+1$ في هذا المفكوك تعطى قيمته بالدستور :

$$u = C(n,r) \cdot a^r \cdot x^{n-r}$$

أما أمثال المفكوك فيمكن الحصول عليها من مثلث باسكال :

الدرجة		الامثال
$(x+a)^1$	1	1 1
$(x+a)^2$	2	1 2 1
$(x+a)^3$	3	1 3 3 1
$(x+a)^4$	4	1 4 6 4 1
$(x+a)^5$	5	1 5 10 10 5 1
...	...	...
...	...	...

١ - ٢ - ١٢ - الاعداد العقدية :

العدد العقدي يتألف من مجموع عددين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي وصيغته الجبرية (الديكارتية) :

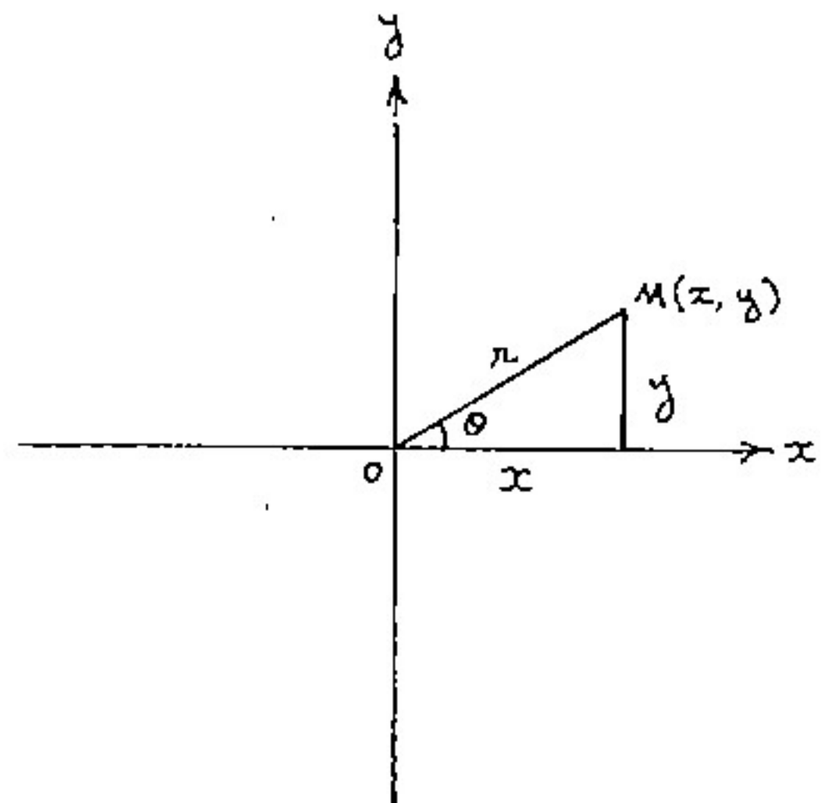
$$z = x + i\,y$$

حيث x يمثل القسم الحقيقي ، iy يمثل القسم التخيلي ، على اعتبار : $i^2 = -1$

ويمثل العدد العقدي في مستوي المحورين الاحداثيين بنقطة M(x,y) تسمى صورة العدد العقدي شكل (١) أما صيغته المثلثية (القطبية) فهي :

$$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

يسمى r بمطلق العدد العقدي أو طويلة العدد العقدي كما تسمى θ بمضمون العدد العقدي .



الشكل (١)

١ - ٢ - ١٣ - جمع الاعداد العقدية :

لجمع عددين عقديين نجمع القسمين الحقيقيين جبرياً كذلك نجمع القسمين التخيليين :

مثال :

$$z_1 = x_1 + i\,y_1$$

$$z_2 = x_2 + i\,y_2$$

بالجمع :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

١ - ٢ - ١٤ - ضرب عددين عقديين :

آ - العددان بشكلهما الجبري : نتبع طريقة فك الاقواس ثم التعويض عن i^2 بـ -1 .

مثال :

$$z_1 = 2 + 3\,i$$

$$z_2 = 1 + i$$

بالضرب :

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 + i)$$

$$= 2 + 5\,i + 3\,i^2$$

$$= 2 + 5\,i - 3$$

$$= -1 + 5\,i$$

ب - العددان بشكلهما المثلثي : حاصل ضرب عددين عقديين بشكلهما المثلثي هو عدد عقدي جديد طويلته تساوي جداء الطويلتين ، وعمدته يساوي مجموع العمدتين للعددين أي :

بفرض :

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad , \quad z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

بالضرب والاصلاح :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

١ - ٢ - ١٥ - تقسيم عددين عقديين :

آ - العددان بشكلهما الجبري : نضرب الصورة والمخرج برافق المخرج .

مثال : بفرض :

$$z_1 = 1 + 2\,i$$

$$z_2 = 2 + i$$

بالتقسيم :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2\,i}{2 + i}$$

$$= \frac{(1 + 2i(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$= \frac{2 + 3i - 2i^2}{4 - i^2}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{5} i$$

ب ـ العددان بشكلها المثلثي : لتقسيم عددين عقديين بشكلها المثلثي نضرب الصورة والمخرج بمرافق المخرج ونصلح فنحصل على عدد عقدي جديد طويلته حاصل قسمة الطويلتين، ومضمونه هو حاصل طرح مضمون العدد الموجود في المخرج من مضمون العدد الموجود في الصورة : أي : بفرض :

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

بالتقسيم :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

١ ـ ٢ ـ ١٦ ـ دستور دوموافر De Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$$

حيث n عدد موجب صحيح .

١ ـ ٢ ـ ١٧ ـ الجذر التربيعي للعدد العقدي :

آ ـ العدد بشكله الجبري : الجذر التربيعي للعدد العقدي هو عـــدد جديد مربعه يساوي العدد العقدي المفروض . أي : بفرض :

$$z_1 = a + i b \qquad (1)$$

فان جذره التربيعي من قبيل :

$$z = x + i y \qquad (2)$$

شريطة أن تتحقق العلاقة :

$$(x + i y)^2 = a + i b$$

$$x^2 - y^2 + 2 x y i = a + i b$$

بالمقارنة نستنتج :

$$2 x . y = b \quad , \quad x^2 - y^2 = a$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على x . y نعوضهما في (2) فنحصل على الجذر التربيعي.
ومن انجاز الحل يتضح لنا أنه لا يوجد إلا جذران تربيعيان للعدد المقدي .

ب ـ العدد بشكله المثلثي :

$$z_1 = r (\cos 0 + i \sin 0) \qquad (1)$$

جذره التربيعي من قبيل :

$$z = \rho (\cos \omega + i \sin \omega) \qquad (2)$$

شريطة أن تتحقق العلاقة :

$$\rho^2 (\cos \omega + i \sin \omega)^2 = r (\cos 0 + i \sin 0)$$

وحسب دوموافر :

$$\rho^2 (\cos 2 \omega + i \sin 2 \omega) = r (\cos 0 + i \sin 0)$$

بالمقارنة نستنتج :

$$2 \omega = 0 + 2 \pi K \quad , \quad \rho^2 = r$$

حيث K عدد جبري صحيح ، ومن هاتين العلاقتين نحصل على ω , ρ نعوضهما في (2) فنحصل على الجذر التربيعي . وبسهولة تبين أنه لا يوجد إلا جذران تربيعيان للعدد المقدي .

١ ـ ٢ ـ ١٨ ـ الجذر التكعيبي للعدد (1) :

آ ـ الطريقة الجبرية : نفرض الجذر التكعيبي للعدد (1) هو x بحيث تتحقق العلاقة :

$$x^3 = 1 \quad \text{أو} \quad x^3 - 1 = 0$$

ولدى الحل نحصل على ثلاثة جذور هي :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ب ـ الطريقة المثلثية : يمكن كتابة العدد (1) بالشكل المثلثي الآتي :

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

نفرض جذره التكعيبي من قبيل :

$$z = \cos \omega + i \sin \omega$$

شريطـــة :

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^3 = \cos 0 + i \sin 0$$

أو :

$$\cos 3\omega + i \sin 3\omega = \cos 0 + i \sin 0$$

وباجراء التطابق بين الطرفين نستنتج وجود ثلاثة جذور تكعيبية للعدد (1) وهي:

$$z_1 = 1 \quad , \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad , \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

وبسهولة يمكن اثبات ان الجذرين التكعيبين التخيليين للعدد (1) أحدهما يساوي مربع الآخر . لذلك اذا فرضنا أحدهما j يكون الآخر j^2 .

ونعلم أن :

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0} \quad \text{وان} \quad \boxed{j^3 = 1}$$

أمثلة : احسب قيم المقادير : الجواب

$$q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1200} \qquad q = 1$$

$$q = \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}\, i}{2}\right)^{600} \qquad q = 1$$

$$q = (j^8 + j^9)^{10} \qquad q = j$$

$$q = (j^2 + j^3 + j^4)^{15} \qquad q = 0$$

$$q = (1 + j^4 + j^5 + j^7)^5 \qquad q = j^2$$

- احسب :

مستخدماً دستور دوموافر $\begin{cases} \text{siu } x \text{ بدلالة } \sin 4x \\ \cos x \text{ بدلالة } \cos 4x \end{cases}$

- اكتب العدد المقدي $1 + i$ بشكله المثلثي .

١ ـ ٣ ـ في المثلثات

١ - ٣ - ١ - دساتير مثلثية :

اليك أهم الدساتير المثلثية :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$$

العلاقات بين النسب المثلثية لازوايا المتتامة :

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{tg } x = \text{colg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

العلاقات بين النسب المثلثية لازوايا التي فضلها π :

$$\sin x = -\sin(x + \pi)$$

$$\cos x = -\cos(x + \pi)$$

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + \pi)$$

العلاقات بين النسب المثلثية للزوايا المتكاملة :

$$\sin x = \sin (\pi - x)$$

$$\cos x = - \cos (\pi - x)$$

$$\operatorname{tg} x = - \operatorname{tg} (\pi - x)$$

جمع الاقوس :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

طرح الاقواس :

$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

ضرب الاقواس :

$$\sin 2 a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2 a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

بفرض $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$ لدينا الدساتير الآتية :

$$\sin a = \frac{2 t}{1 + t^2}$$

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

تقسيم الاقواس :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

دساتير التحويل :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

١ - ٣ - ٢ - في أي مثلث abc لدينا العلاقات الآتية :

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$$

$$\frac{a'}{\sin a} = \frac{b'}{\sin b} = \frac{c'}{\sin c} = 2R$$

حيث R نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث .

ولدينا :

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2\, b' \cdot c' \cos a$$

١ - ٤ - بعض الرموز

١ - ٤ - ١ - بعض أحرف الابجدية الاغريقية :

كثيراً ما نحتاج في دراستنا المقبلة الى مزيد من الاحرف فنستعين ببعض الحروف

اليونانيه والتي كثيراً ما يصادفها الطالب في بطون الكتب الاجنبية لدى تقصيه الحقائق الرياضية ، لذا فاننا سنورد بعض هذه الحروف :

الحرف	لفظه	الحرف	لفظه
α	alpha	ρ	rhô
β	bêta	σ أو Σ	sigma
γ	gamma	φ	phi
ε	epsilon	ω	oméga
η	êta	ψ	psi
θ	thêta	ν	nû
λ	lambda	∂ أو Δ	delta
π	pi	μ	mû

١ – ٤ – ٢ – بعض الاصطلاحات :

$a \Rightarrow b$ تقرأ : a تقتضي (Implique) b أو تقرأ a تؤدي الى (Entraine) b .

$a \Leftrightarrow b$ تقرأ : a تكافىء (Equivant à) b .

$\forall a$ تقرأ : مهما يكن (Pour tout) a .

$\exists a$ تقرأ : يوجد على الاقل عدد a (Il existe au moins un) .

$a \in A$ تقرأ : a ينتمي الى A (Appartient à) .

$\cup$ تقرأ : اجتماع (Réunion) .

$\cap$ تقرأ : تقاطع (Intersection) .

بفرض $a < b$ نقول :

$[a,b]$ مجال مغلق (Intervalle fermé) ونعني به :

$$[\,a\,,b\,] = (\,x : a \leq x \leq b\,)$$

]a,b[مجال مفتوح (Intervalle ouvert) ونعني به :

$$]\,a\,,b\,[\,=\{\,x : a < x < b\,\}$$

]a,b] مجال نصف مفتوح من اليسار ونعني به :

$$]\,a\,,b\,]\,=\{\,x : a < x \leqq b\,\}$$

[a,b[مجال نصف مفتوح من اليمين ونعني به :

$$[\,a\,,b\,[\,=\{\,x : a \leqq x < b\,\}$$

١ ــ ٥ ــ في الاعداد الناطقة والاعداد الصماء

١ ــ ٥ ــ ١ ــ تعريف :

نقصد بالاعداد الناطقة الصفر وجميع الاعداد الصحيحة والكسرية من موجبة وسالبة .

فالاعداد الصحيحة : نقدر بها مجموعة الاشياء وتتميز بأن لكل عدد صحيح عدداً صحيحاً آخر يليه . أي أن مجموعة الاعداد الصحيحة غير محدودة .

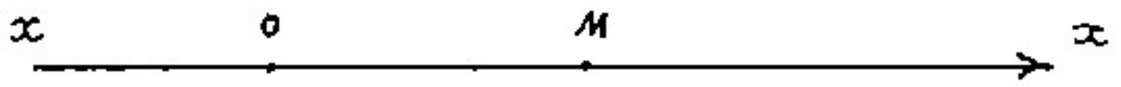
والاعداد الكسرية : تقدر بها أجزاء الشيء . وينشأ الكسر من تقسيم عددين صحيحين على بعضهما ، بحالة خاصة اذا كان المخرج عشرة أو قوة للعشرة سمي الكسر بالعشري . وتتميز الكسور :

آ ــ يتساوى الكسران a/b , c/d فيما اذا تحقق $ad = cb$.

ب ــ لا تتغير قيمة الكسر اذا ضربنا (أو قسمنا) صورته ومخرجه بعدد واحد .

والاعداد الجبرية : يصبح العدد الحسابي جبرياً اذا سبق باحدى الاشارتين + ، ــ ويمكن تمثيل الاعداد الجبرية بنقاط محمولة على محور موجه من اليسار الى اليمين اتخذت عليه نقطة ثابتة 0 تسمى بالمبدأ . فالنقاط الموجودة عن يمين المبدأ تمثل الاعداد الموجبة ، والنقاط الموجودة عن يساره تمثل الاعداد السالبة . فكل عدد جبري نمثله بنقطة بحيث

بعدها الجبري عن المبدأ (نسميه بالفصل) يمثل هـذا العدد ، ونسمي النقطة بصورة العدد . وبالعكس كل نقطة من المحور مثل M يمثل فصلها عدداً جبرياً شكل (٢) .



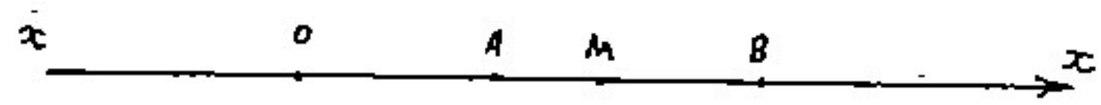
الشكل (٢)

١ ـ ٥ ـ ٢ ـ خواص الاعداد الناطقة :

لما كانت الاعداد الناطقة تشمل الاعداد الصحيحة والكسرية الموجبـــة والسالبة فيمكن تمثيلها بنقاط محمولة على محور تتخذ عليه وحدة لقياس الاطوال .

فاذا مثلنا عددين مختلفين a , b بصورتيهما A , B شكل (٣) نجد أنه يوجـد على القطعة المستقيمة A B عدد غير متناه من النقاط التي تصلح أن تكون صـــوراً لاعداد ناطقة . إذن :

يوجد عدد غير متناه من الاعداد الناطقة تقع بين العددين a , b نعبر عن هـذه الفكرة بقولنا أن الاعداد الناطقة كثيفة .



الشكل (٣)

ومع ذلك فان صور الاعداد الناطقة لا تشغل جميع نقاط المحور فمثلا اذا أخذنا نقطة مثل M تبعد عن المبدأ بقدر قطر المربع الذي ضلعه يساوي (1) فهذه لا تمثـل عدداً ناطقاً إذ لا يوجد أي عـــدد صحيح أو كسري يساوي مربعه (2) الامر الذي يقودنا الى القول أن النقطة M وأمثالها هي صورة لاعداد لا تنتمي الى الاعداد الناطقة أي هناك مجموعة من الاعداد غير ناطقة نسميها :

١ ـ ٥ ـ ٣ ـ الأعداد الصماء :

يعرف العدد الاصم بقطع نجريه على مجموعة الاعداد الناطقة كما يلي :

نقسم هذه المجموعة الى صنفين A_1 , A_2 بحيث :

آ ـ كل عدد من الصنف A_1 أصغر من كل عدد من الصنف A_2 .

ب ـ الصنفان A_2 , A_1 معاً يحويان جميع الاعداد الناطقة .

جـ ـ البعد بين الصنفين معدوم وهذا يعني أنه يمكن ايجاد عدد ناطق من الصنف الاعلى وعدد ناطق من الصنف الادنى بحيث يكون الفرق بينها صغير بقدر ما نريد . فالمقطع المتصف بهذه الصفات يمثل عدداً أصماً ، وكأن هذا المقطع هو الحدالفاصل بين الصنفين A_1 ، A_2 ويرمز للمقطع بالرمز A_1/A_2 .

مثـال : العدد الاصم $\sqrt{2}$ نمثله على المحور بمقطع يقسم الاعـــداد الناطقة الى صنفين : الصنف الادنى ويحوي على الاعداد الناطقة والتي مربعاتها أصغر من 2 ، والصنف الاعلى ويحوي على الاعداد الناطقة التي مربعاتها أكبر من 2 .

ويمكن ايجاد عدد من الصنف الادنى a_1 وعدد من الصنف الاعلى a_2 بحيث يكون $a_2 - a_1 = \varepsilon$ حيث ε عدد صغير بقدر ما نريد ، عندئذٍ نسمي كلاً من $a_2 \cdot a_1$ بالقيمتين التقريبيتين للعدد $\sqrt{2}$.

نتيجة : يتـساوى العددان الاصمان اذا استطعنا تمثيلهما بمقطعين منطبقين .

نتيجة : يكون العدد الاصم α المعين بالمقطع A_1/A_2 أكبر من العدد الناطق a فيما اذا كان a واقعاً في الصنف الادني A_1 كما يكون العدد الاصم α أصغـر من العدد العدد الناطق b فيما اذا كان b واقعاً في الصنف الاعلى A_2 .

الفصل الثاني

المعينات

LES DETERMINANTS

٢ ـ ١ ـ غايتها

إن بحث المعينات يهدف الى اعطائنا طريقة سهلة وسريعة تمكننا من حـــل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين أو جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل . وبصورة عامة تمكننا المعينات من حل جملة n معادلة خطية ذات n مجهولاً .

٢ ـ ٢ ـ حل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين

لتكن المعادلتان :

$$a\,x + b\,y = c \qquad (1)$$

$$a'\,x + b'\,y = c' \qquad (2)$$

من (1) نجـــد :

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad (3)$$

نعوض في (2) :

$$a'\,\frac{c - by}{a} + b'\,y = c'$$

بالاصلاح نجد :

$$y = \frac{a \cdot c' - ca'}{ab' - ba'}$$

نعوض في (3) ونجري الاصلاح نجد :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

نلاحظ أن المخرج مشترك بين قيمتي x, y ، نسمي الكمية المشتركة $ab' - ba'$ بالمعين من المرتبة الثانية ونرمز له :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

كما نسمي الاعداد الاربعة a, b, a', b' بعناصر المعين ، وهي ليست إلا أمثال المجهولين في المعادلتين .

واذا أعطى المعين بشكله الرمزي فلحسابه نضرب العناصر تصالبياً ونطرح الجداءين ابتداء من اليسار أي :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

أما صورتا المجهولين x ، y فهما معينان أيضاً . فصورة x هي :

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$$

وصورة y هي :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$$

ونلاحظ أن صورة x يمكن الحصول عليها من معين المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال x بالحدين الثابتين .

كذلك صورة y نحصل عليها من معين المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال y بالحدين الثابتين . نستنتج مما تقدم أنه يمكن كتابة قيمتي المجهولين بالشكل :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

إن طريقة المعينات هذه تمكننا بسهولة من حساب قيمتي المجهولين فوراً أو تمكننا من حساب قيمة أحد المجهولين فقط دون الاضطرار لحساب الآخر .

مثال (١) : حل جملة المعادلتين :

$$3x + 2y = 5 \quad , \quad x - 3y = 2$$

لدينـــا :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-15-4}{-9-2} = \frac{19}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{6-5}{-9-2} = -\frac{1}{11}$$

مثال (٢) : حل جملة المعادلتين :

$$x + y = 3 \quad , \quad 3x - y = 1$$

لدينـــا :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-1}{-1-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \quad -9}{-1 \quad -3} = 2$$

٢ ـ ٣ حل جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل

لتكن جملة المعادلات :

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$

$$a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'$$

$$a''\,x + b''\,y + c''\,z = d''$$

ولحلها نكتب المعادلة الاولى والثانية بالشكل :

$$a\,x + b\,y = d - c\,z$$

$$a'\,x + b'\,y = d' - c'z$$

وبتطبيق قاعدة المعين من المرتبة الثانية نجد قيمتي x ، y بدلالة z :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d-cz & b \\ d'-c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{(d-cz)b' - (d'-c'z)b}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & d-cz \\ a' & d'-c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{a\,(d'-c'z) - a'(d-cz)}{ab'-ba'}$$

نعوض في المعادلة الثالثة :

$$a''\,\frac{(d-cz)b' - (d'-c'z)b}{ab'-ba'} + b''\,\frac{a(d'-c'z) - a'(d-cz)}{ab'-ba'} + c''z = d''$$

وبفك الاقواس والاصلاح نجد :

$$z = \frac{a''bd' - a''db' + b''da' - b''ad' + d''ab' - d''ba'}{a''bc' - a''b'c + b''ca' - b''c'a + c''ab' - c''ba'} \qquad (1)$$

ولو حسبنا قيمتي x . y بنفس الطريقة لوجدنا أن المخرج في الطرف الايمن لا يتغير .
نسمي المخرج المشترك للمجاهيل الثلاثة بالمعين من المرتبة الثالثة ونرمز له :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ويحوي على تسعة عناصر (وهي ليست إلا أمثال المجاهيل) مرتبة في ثلاثة أسطر وفي ثلاثة أعمدة .

أما صورة z ولنرمز لها D_z فنحصل عليها من معين المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال z بالحدود الثابتة أي :

$$\boxed{z = \frac{D_z}{\Delta}}$$

كذلك صورة y ولنرمز لها D_y نحصل عليها من معين المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال y بالحدود الثابتة أي :

$$\boxed{y = \frac{D_y}{\Delta}}$$

وصورة x ونرمز لها D_x نحصل عليها من معين المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال x بالحدود الثابتة أي :

$$\boxed{x = \frac{D_x}{\Delta}}$$

٢ ـ ٤ ـ نشر المعين من المرتبة الثالثة

يكتب المخرج في العلاقة (1) ، بعد اخراج خارج أقواس عناصر العمود الاول في (2) مثلاً ، أقول يكتب هذا المخرج بالشكل :

$$a\,(b'c'' - c'b'') - a'(bc'' - cb'') + a''\,(bc' - cb')$$

ان الكميات الموجودة داخل الاقواس تمثل منشورات لمعينات من المرتبة الثانية ، ولهذا تكتب العلاقة الاخيرة بالشكل :

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

وبمقارنة هذه الصيغة مع (2) نهتدي الى طريقة تمكننا من نشر المعين (2) كما يأتي:

نأخذ أحد الاعمدة (أو أحد الاسطر) وليكن العمود الاول مثلاً ، ولننشر وفق هذا العمود ، وذلك بأخذ العنصر a وضربه بالمعين الصغير من المرتبة الثانية الذي نحصل عليه بعد حذف سطر وعمود العنصر a .

ثم نأخذ العنصر a' ونسبقه باشارة ناقص ونضربه بالمعين الصغير الذي نحصل عليه بعد حذف سطر وعمود العنصر a' .

كذلك نأخذ العنصر a'' ونضربه بالمعين الصغير الذي نحصل عليه بعد حذف سطر وعمود العنصر a'' . نأخذ المجموع الجبري لهـــذه المقادير فنحصل على منشور المعين من المرتبة الثالثة .

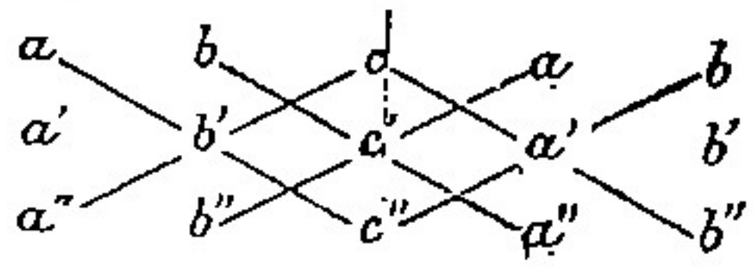
ولمعرفة اشارات أمثال المعينات الصغيرة نأخذها من الجدول :

+	−	+
−	+	−
+	−	+

ملاحظـــة :

يمكن نشر المعين من المرتبة الثالثة بطريقة سارو Sarrus وتتلخص :

نكتب عن يمين المعين المفروض عمودين آخرين هما العمود الاول والثاني كما في الشكل (٤) .



الشكل (٤)

ونشكل جداء عناصر القطر الاول بدءاً من a والخطوط الموازية له والتي تحوي على b , c ومتجهة نحو اليمين ونعطيها اشارة + كما نشكل جداء حروف القطر الثاني بدءاً من c والخطوط الموازية له والتي تحوي على a , b والمتجهة نحو اليسار ونعطيها اشارة — . ان مجموع هذه الجداءات الستة تشكل منشور المعين .

٢ ــ ٥ ــ خواص المعين من المرتبة الثالثة

٢ ـ ٥ ـ ١ ـ لا يتغير المعين اذا جعلنا أسطره اعمدةً أو أعمدته أسطراً :

أي :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

البرهان : ننشر الطرف الايسر وفق عناصر العمود الاول . وننشر الطرف الايمن وفق عناصر السطر الاول فنحصل على نتيجة واحدة .

٢ ـ ٥ ـ ٢ ـ يغير المعين اشارته عندما نبادل بين سطرين أو بين عمودين :

أي :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

البرهان : ننشر حسب عناصر السطر الذي لم يتغـــير أي حسب عناصر السطر الثالث نجد أن المعينات الصغيرة المتعلقة بـ a" , b" , c" في الطرف الايسر لا تختلف عن المعينات الصغيرة المتعلقة بالاحرف a" , b" , c" في الطرف الايمن إلا بالاشارة . وهذا يعني أن المعين من المرتبة الثالثة يغير اشارته عندما نبادل بين سطرين (أو عمودين) .

٢ – ٥ – ٣ – ينعدم المعين عندما يتطابق فيه سطران أو عمودان :

أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b' \end{vmatrix} = 0$$

البرهان : ننشره حسب عناصر العمود الثالث :

$$\Delta = b \begin{vmatrix} a' & a' \\ a'' & a'' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} a & a \\ a'' & a'' \end{vmatrix} + b'' \begin{vmatrix} a & a \\ a' & a' \end{vmatrix}$$

$$\Delta = b \,.\, 0 - b' . 0 + b'' . 0 = 0$$

٢ – ٥ – ٤ – اذا ضربنا «اوقسمنا» جميع عناصر سطر « او عمود » في معين بعدد واحد فان المعين يضرب « او يقسم » بهذا العدد :

أي :

$$\begin{vmatrix} Ka & b & c \\ Ka' & b' & c' \\ Ka'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

البرهان : ننشر الطرف الايسر حسب عناصر العمود الاول نجد :

$$Ka \begin{vmatrix} b & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - Ka' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + Ka'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

أو :

$$K\left[a\begin{vmatrix} b & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\right]$$

وهذه العلاقة تمثل منشور الطرف الايمن وهو المطلوب .

نتيجة : لضرب معين بعدد يكفي أن نضرب عناصر أحد أسطره (أو أحد أعمدته) بنفس العدد .

٢ ـ ٥ ـ ٥ ـ اذا تناسبت عناصر سطرين « أو عمودين » في معين فان قيمة المعين تصبح صفراً :

أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & Ka & b \\ a' & Ka' & b' \\ a'' & Ka'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

البرهان : حسب الخاصة (٢ ـ ٥ ـ ٤) يكتب بالشكل :

$$\Delta = K\begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

وحسب الخاصة (٢ ـ ٥ ـ ٣) نكتب :

$$\Delta = K \cdot 0 = 0$$

وهو المطلوب .

٢ - ٥ - ٦ - اذا كان في المعين كل عنصر من عناصر احد الاسطر « او احد الاعمدة » يتألف من مجموع p حدا فان المعين المفروض يرد الى مجموع p معينا جديداً :

أى :

$$\begin{vmatrix} a + a_1 & b & c \\ a' + a'_1 & b' & c' \\ a'' + a''_1 & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a'_1 & b' & c' \\ a''_1 & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

البرهان : ننشر الطرف الايسر حسب عناصر العمود الاول فنحصل على المطلوب .

٢ - ٥ - ٧ - لا تتغير قيمة المعين اذا اضفنا « او طرحنا » الى عناصر احد الاسطر « او احد الاعمدة » عناصر سطر آخر « او عمود آخر » مضروبة بعدد ثابت K :

أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + Kb & b & c \\ a' + Kb' & b' & c' \\ a'' + Kb'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

البرهان : ننشر الطرف الايمن حسب عناصر العمود الاول ، واستناداً الى الخاصة السابقة نكتب :

$$\begin{vmatrix} a + Kb & b & c \\ a' + Kb' & b' & c' \\ a'' + Kb'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + K \begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

وحسب الخاصه (٢ ـ ٥ ـ ٣) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + K \cdot 0$$

وهو المطلوب .

مثال (١) : انشر المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

تسهيلاً لعملية النشر نستفيد من خواص المعينات . نجمع السطرين الثاني والثالث الى الاول فلا يتغير شيء حسب الخاصة (٢ ـ ٥ ـ ٧) ويكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

وحسب الخاصة (٢ ـ ٥ ـ ٤) نكتب :

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

وحسب الخاصة (٢ ـ ٥ ـ ٧) نطرح العمـــود الاول من العمودين الثاني والثالث فلا يتغير شيء :

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

ننشره الآن بالنسبة الى السطر الاول :

$$\Delta = (a + b + c)\,[\,(-b - c - a)\,(-c - a - b)\,]$$

ومنـــه :

$$\Delta = (a + b + c)^3$$

مثـال (٢) : انشر المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & -b & a \\ a & 0 & a \\ a-b & b & a \end{vmatrix}$$

نجمع العمود الاول الى الثاني :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a & a \\ a-b & a & a \end{vmatrix}$$

نلاحظ وجود عمودين متساويين فقيمة المعين تساوي الصفر أي $\Delta = 0$.

مثال (٣) : تحقق من صحة العلاقة :

$$\begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3x & 0 & 2z \\ 3x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6\,x\,y\,z$$

٢ ـ ٦ ـ حل ومناقشة جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل

تمهيـــد :

٢ - ٦ - ١ - مسألة (1) :

أوجد الشرط اللازم والكافي ليكون لمعادلتين من الدرجة الاولى وذات مجهول واحد حل واحد .

لتكن المعادلتان :

$$a\,x = b \quad (1) \qquad , \qquad a'\,x = b' \quad (2)$$

بما أن المعادلة (1) من الدرجة الاولى فرضاً هذا يعني أن $a \neq 0$ وبالتالي حلها :

$$x = \frac{b}{a}$$

ولكي يحقق هذا الحل المعادلة (2) يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة :

$$a' \cdot \frac{b}{a} = b' \Longrightarrow a \cdot b' - a' \cdot b = 0$$

أي :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

أي أن الشرط المطلوب هو أن يكون معين كافة الامتال صفراً .

٢ - ٦ - ٢ - مسألة (2) :

لتكن جملة المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ولنفرض أن معين أمثال المجهولين لا يساوي الصفر ، فما هو الشرط الواجب توفره لكي يكون حل هذه الجملة محققاً للمعادلة :

$$a''\,x + b''\,y = c'' \quad (2)$$

نعلم أن حل الجملة (1) يتعين بالدستورين :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{c \cdot b' - c' \cdot b}{a \cdot b' - a' \cdot b}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot c' - a' \cdot c}{a \cdot b' - a' \cdot b}$$

ولكي يحقق هذا الحل المعادلة (2) يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة :

$$a'' \frac{c \cdot b' - c' \cdot b}{a \cdot b' - a' \cdot b} + b'' \frac{a \cdot c' - a' \cdot c}{a \cdot b' - a' \cdot b} = c''$$

أي :

$$c''(a.b' - a'.b) - b''(a.c' - a'.c) - a''(c.b' - c'.b) = 0$$

أو :

$$c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

ونلاحظ أن الطرف الايسر ليس إلا منشور معين كافة الامثال للمعادلات الثلاث المفروضة ، ومنه نستنتج :

لكي يحقق حل الجملة (1) المعادلة (2) يكفي أن يتحقق :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

بعد هذا التمهيد نستطيع الآن حل ومناقشة جملة ثلاث معادلات خطيـــة ذات ثلاثة مجاهيل كما يلي :

لتكن الجملة :

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d''$$

لحلها نحسب معين أمثال المجاهيل وليكن Δ ونميز ثلاث حالات :

٢ ـ ٦ ـ ٣ ـ الحالة الاولى : بفرض $\Delta \neq 0$: تكون قيم المجاهيل هي :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{D_y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{D_z}{\Delta}$$

حيث D_x , D_y , D_z معينات نستنتجها من معين أمثال المجاهيل Δ بعد التبديل فيه عن أمثال المجهول المطلوب بالحدود الثابتة الموجودة في الطرف الايمن وتدعى هـذه القاعدة بقاعدة كرامر Cramer . ويمكن تعميمها لحل جمـــلة n معادلة خطية تحوي على n مجهولاً .

مثـال : حل الجملة :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -3 \\ 4x + 2y \quad\quad &= 14 \\ 4x \quad\quad -2z &= 0 \end{aligned}$$

لحلها نقول : لدينا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

ننشره حسب عناصر السطر الثاني مثلاً نجد :

$$\Delta = -4 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 48$$

ولدينـا :

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

نشره حسب عناصر السطر الثالث نجد :

$$D_x = 96$$

نعوض :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{96}{48} = 2$$

ولدينا :

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

ننشره حسب عناصر السطر الثالث نجد :

$$D_y = 144$$

نعوض :

$$y = \frac{D_y}{\Delta} = \frac{144}{48} = 3$$

ولدينا :

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 14 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ننشره حسب عناصر السطر الثالث نجد :

$$D_z = 192$$

نعوض :

$$z = \frac{D_z}{\Delta} = \frac{192}{48} = 4$$

ملاحظة :

اذا كان $d = d' = d'' = 0$ تصبح الجملة بالشكل :

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a''x + b''y + c''z = 0$$

وتسمى بالجملة المتجانسة بالنسبة الى المجاهيل x, y, z ، وبفرض $\Delta \neq 0$ يكون حلها بعد تطبيق قاعدة كرامر :

$$x = y = z = 0$$

ويسمى بالحل التافه :

٢ ـ ٦ ـ ٤ ـ الحالة الثانية ـ بفرض $\Delta = 0$ دون ان تكون المعينات الصغيرة معدومة جميعاً :

اذا كانت أكثر المعينات الصغيرة لا تساوي الصفر ـ وهي الحالة العامة ـ فاننا نختار واحداً منها ونسميه بالمعين الرئيسي . وبحالة خاصة اذا كان هنالك معين صغير وحيد لا يساوي الصفر فاننا نأخذه كمعين رئيسي . ولتثبيت الفكرة نقول : ليكن المعين الرئيسي :

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

وللايجاز نسمي المعادلات الرئيسية تلك المعادلات التي من أمثالها يتشكل المعين الرئيسي ، كما نسمي المجاهيل الرئيسية تلك المجاهيل الخاصة بهذه الامثال نفسها . وعلى هذا يكون المجهولان الرئيسيان هما x, y وتكون المعادلتان الرئيسيتان هما (1) ، (2) من جملة المعادلات :

$$I \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (3) \end{cases}$$

بفرض : x_1, y_1, z_1 تمثل حلا للجملة I فان x_1, y_1 تشكل حلاً للجملة :

$$II \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z_1 = d \\ a'x + b'y + c'z_1 = d' \end{cases}$$

حيث عوضنا في المعادلتين الرئيسيتين عن المجهول غير الرئيسي بـ z_1 ، وبما أن معين II ونقصد به δ لا يساوي الصفر فرضاً اذن هذه الجملة لها حل وحيد والذي هو بالضرورة x_1 , y_1 . بالعكس :

اذا أعطينا الى المجهول غير الرئيسي قيمة اختيارية z_1 فان II تقبل حلاً x_1 , y_1 ولكي يحقق هذا الحل المعادلة :

$$a''x + b''y + c''z_1 = d''$$

وبالتالي لكي يحقق x_1 , y_1 , z_1 الجملة I يلزم ويكفي حسب المسألة (2) أن يتحقق :

$$\begin{vmatrix} a & b & d & -c\ z_1 \\ a' & b' & d' & -c'\ z_1 \\ a'' & b'' & d'' & -c''z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ويكتب بالشكل :

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

لكن أمثال z_1 يساوي الصفر فرضاً لانه معـــين أمثال المجاهيل Δ للجملة I . ما تبقى من العلاقة السابقة تسميه بالمعين المميز المتعلق بالمعادلة غير الرئيسية ونرمز له :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

وهو يتألف من المعين الرئيسي مع عمود عناصره هي الاعداد الثابتـــة للمعادلات الرئيسية وغير الرئيسية ومن سطر عنصراه الأولان هما أمثال المجهولين الرئيسيين في المعادلة غير الرئيسية وهنا نميز :

a) ـ اذا كان المعين المميز $\delta_1 \neq 0$ نستنتج أنه من المستحيل ايجاد قيمة مثل z_1 بحيث x_1 , y_1 , z_1 تشكل حلا للجملة I . وتكون الجملة مستحيلة .

b) ـ اذا كان $\delta_1 = 0$ مهما يكن z_1 فان x_1 , y_1 , z_1 تشكل حلاً للجملة I والجملة غير معينة من الدرجة الاولى اذ المجهول غير الرئيسي اختياري ، وقيم المجهولين الرئيسيين نحصل عليهما من حل المعادلتين الرئيسيتين . وفي هذه الحالة تكون المعادلة غير الرئيسية ناتجة عن المعادلتين الرئيسيتين .

٢ ـ ٦ ـ ٥ ـ الحالة الثالثة : بفرض $\Delta = 0$ لانعدام المعينات الصغيرة جميعاً :

عندما تكون المعينات الصغيرة معدومة جميعاً نميز حالتين فرعيتين :

آ ـ ليست كافة عناصر المعينات الصغيرة اصفاراً :

لتثبيت الفكرة نفرض $a \neq 0$ ، وضمن هذه الفرضية فاننا نختار a كعنصر رئيسي، وتكون المعادلة الاولى هي المعادلة الرئيسية ويكون x هو المجهول الرئيسي .

لنفرض x_1 , y_1 , z_1 تشكل حلا للجملة I فان x_1 تحقق المعادلة :

$$\text{III} \mid ax + by_1 + cz_1 = d$$

حيث حصلنا على هذه المعادلة من المعادلة الرئيسية بعد التعويض عن y بـ y_1 وعن z بـ z_1 ، لدينا فرضاً $a \neq 0$ اذن يكون للمعادلة III حل وحيد هو x_1 .

بالعكس : اذا أعطينا للمجهولين غير الرئيسيين قيمتين اختياريتين y_1 , z_1 فان III تقبل x_1 كحل لها . ولكي يحقق هذا الحل المعادلتين غير الرئيسيتين :

$$a' x + b' y_1 + c' z_1 = d'$$
$$a'' x + b'' y_1 + c'' z_1 = d''$$

وبالتالي لكي يحقق x_1 , y_1 , z_1 الجملة I يلزم ويكفي حسب المسألة (1) أن يتحقق الشرطان :

$$\begin{vmatrix} a & d - b y_1 - c z_1 \\ a' & d' - b' y_1 - c' z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & d - b\,y_1 - c\,z_1 \\ a'' & d'' - b''y_1 - c''z_1 \end{vmatrix} = 0$$

أي :

$$\begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & d \\ a'' & d'' \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

إلا أنه فرضاً :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

كمعينات صغيرة في المعين Δ . وما تبقى من الشرطين السابقين أي :

$$\delta'' = \begin{vmatrix} a & d \\ a'' & d'' \end{vmatrix} \quad , \quad \delta' = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}$$

نسميها بالمعينين المميزين المتعلقين بالمعادلتين غـــير الرئيسيتين ، إذ كل معادلة منها يوافقها معين مميز . وهنا نميز :

a) ـ اذا كان أحد المعينين المميزين على الاقل لا يساوي الصفر تكون الجملة مستحيلة .

b) ـ اذا كان $\delta' = \delta'' = 0$ تكون الجملة I غير معينة من الدرجة الثانية إذ المجهولان غير الرئيسيين اختياريان ، والمجهول الرئيسي نحصل عليه من حل المعادلة الرئيسية ، وفي هذه الحالة تكون المعادلتان غـــير الرئيسيتين ناتجتين عن المعادلة الرئيسية . (تحقق من ذلك) .

ب ـ عناصر المعينات الصغيرة كافة تساوي الصفر :

اذا أصبحت أمثال المجاهيل في الجملة I اصفاراً نميز :

a) ـ اذا كان أحد الاعداد الثابتة في الطرف الايمن لا يساوي الصفـر وليكن مثلاً $d \neq 0$ فان الجملة تكون مستحيلة .

b) ـ اذا كان $d = d' = d'' = 0$ فالجملة تكون غير معينة من الدرجة الثالثة اذ يمكن أن نعطي لـكل من x, y, z قيماً اختيارية وتتحقق الجملة I .

٢ ـ ٧ ـ المعين من المرتبة n

تعريف: نسمي معيناً من المرتبة n مجموعة من الاعداد تعدادها n^2 وقد رتبت في n سطراً ، و n عموداً ، وقيمة هذا المعين نقصد بها المجموع الجبري لجداءات كل عنصر من أحد الاسطر (أو أحد الاعمدة) في المعين الصغير الذي نحصل عليه من حـذف سطر وعمود ذلك العنصر أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ik} \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث رمزنا لـكل عنصر بحرف a وقد ذيل برقمين : الرقم الموجود عن اليسار يمثل رتبة السطر الذي يقع فيه العنصر والرقم الموجود عن اليمين يمثل رتبة العمود الذي يقع فيه العنصر . وحسب التعريف السابق نكتب قيمة المعين من المرتبة n منشوراً وفق السطر i بالشكل الرمزي :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

حيث A_{ik} هو المعين الصغير الذي نحصل عليه من حذف السطر i والعمود k أما الاشارة التي تسبقه فتتعين من العلاقة :

$$\boxed{(-1)^{i+k}}$$

٢ ـ ٨ ـ حل جملة n معادلة خطية ذات n مجهولاً

لتكن جملة المعادلات :

$$a_{11}\ x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}\ x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

فلحلها نحسب معين أمثال المجاهيل وليكن $\Delta \neq 0$ ، وحسب قاعدة كرامر نحسب قيمة كل مجهول بكسر مخرجه Δ وصورته معين نحصل عليه من المخرج بعد التبديل فيه عن أمثال المجهول المطلوب بالاعداد الثابتة الموجودة في الطرف الثاني .

٢ ـ ٩ ـ ضرب المعينات

جداء معينين كل منهما من المرتبة n : هو معين جديد من المرتبة n عنصره العام C_{ik} نحصل عليه من مجموع جداء عناصر السطر i من المعين الاول في العناصر المقابلة لها من العمود k من المعين الثاني . ولنشرح ذلك بمثال :

جداء معينين من المرتبة الثانية هو معين جديد من المرتبة الثانية كل عنصر فيه هو مجموع جداءين نحصل عليها كما يأتي :

العنصر الاول من السطر الاول : نحصل عليه من ضرب عنصري السطر الاول من المعين الاول في عنصري العمود الاول من المعين الثاني .

العنصر الثاني من السطر الاول : نحصل عليه من ضرب عنصري السطر الاول من المعين الاول في عنصري العمود الثاني من المعين الثاني .

العنصر الاول من السطر الثاني : نحصل عليه من ضرب عنصري السطر الثاني في المعين الاول في عنصري العمود الاول من المعين الثاني .

العنصر الثاني من السطر الثاني : نحصل عليه من ضرب عنصري السطر الثاني في المعين الاول في عنصري العمود الثاني من المعين الثاني .

أي :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a'_1 & b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot a_1 + ba'_1 & ab_1 + bb'_1 \\ a' \cdot a_1 + b'a'_1 & a'b_1 + b'b'_1 \end{vmatrix}$$

تطبيق : طبق القاعدة السابقة في حساب المقدار :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

حسب القاعدة نكتب :

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 72 + 2 & 32 + 1 \\ 36 + 16 & 16 + 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 74 & 33 \\ 52 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 74 \cdot 24 - 52 \cdot 33 = 60$$

نلاحظ أن هذه الطريقة عقيمة عندما تكون المعينات أعـــداداً لذلك نعدل عنها ونشر كل معين بالطريقة المباشرة فيكون :

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (64-4)\,(9-8) = 60.1 = 60$$

❁❁❁❁❁❁❁❁❁

تمارين

١ ـ حل جملة المعادلتين بطريقة المعينات :

$$2x + 5y = 18 \quad , \quad 3x + y = 1$$

الجـــواب :

$$x = -1 \quad , \quad y = 4$$

٢ ـ حل الجملة الآتية بطريقة المعينات :

$$3x + 2y = 3 \quad , \quad 5x - 4y = 7$$

الجـــواب :

$$x = \frac{13}{11} \quad , \quad y = \frac{-3}{11}$$

٣ ـ حل الجملة الآتية بطريقة المعينات :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x \quad\quad + z &= 4 \\ 3x + y \quad\quad &= 3 \end{aligned}$$

الجـــواب :

$$x = 1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 2$$

٤ ـ أوجد بطريقة المعينات قيمة x التي تحقق الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{2}z &= 3 \\ \frac{9}{5}x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{3}z &= \frac{37}{30} \\ 3x + \frac{y}{5} - 5z &= 0 \end{aligned}$$

الجـــواب :

$$x = 3$$

٥ ـ برهن أن :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 68$$

٦ ـ برهن أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = a\,b$$

٧ ـ برهن أن :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = c\,(a^2 - b^2)$$

٨ ـ ليكن المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

والمطلوب : ١ ـ احسب قيمته

٢ ـ بين أنه يساوي المعين :

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

٣ ـ استنتج أن المقدار $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc$ يقبل القسمة على $a + b + c$.

٩ – برهن على صحة العلاقة :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\,(b-a)\,(c-b)\,(d-c)$$

١٠ – برهن على صحة العلاقة :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\,(x^2 - 2^2)$$

١١ – برهن على صحة العلاقة :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (x^2 - 1)(x^2 - 3^2)$$

١٢ – برهن على صحة العلاقة الآتية :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\,(x^2 - 2^2)\,(x^2 - 4^2)$$

١٣ ـ أوجد بطريقة المعينات قيمة x التي تحقق الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + v &= 15 \\ x - y - z + v &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \\ 4x - 4y + v &= 0 \end{aligned}$$

(دورة حزيران ١٩٧٠)[1]

١٤ ـ عن قيمة x التي تحقق العلاقة الآتية :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

(الفرع المدني : دورة ايلول ١٩٧٨)

١٥ ـ حل وناقش الجملة الآتية :

$$qz - ry = a \quad , \quad rx - pz = b \quad , \quad py - qx + c$$

١٦ ـ حل الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} x + y + z &= a + b + c \\ bx + cy + az &= bc + ca + ab \\ cx + ay + bz &= bc + ca + ab \end{aligned}$$

حيث a, b, c أعداد مختلفة .

الجـــواب :

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

---

(١) يجد الطالب حل تمارين الدورات في القسم العملي : (الفصل الحادي عشر) .

١٧ ـ حل الجملة الآتية :

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = 0$$

$$a^3x + b^3y + c^3z = a^2\,(b-c) + b^2\,(c-a) + c^2\,(a-b)$$

حيث $a\,,\,b\,,\,c$ اعداد مختلفة وكل منها يختلف عن الصفر .

الجـــواب :

$$x = \frac{b-c}{a} \quad ، \quad y = \frac{c-a}{b} \quad ، \quad z = \frac{a-b}{c}$$

الفصل الثالث

التوابع - النهايات - كثيرات الحدود - الاستمرار

FONCTIONS – LIMITES – POLYNOMES – CONTINUITÉ

٣ـ ١ ـ التوابع

٣ - ١ - ١ - تعاريف :

آ ـ التابع هو كمية تتغير بتغير كمية أخرى نسميها المتحول :

مثـال :

$$y = x + 3$$

نسمي عادة y بالتابـع ، x بالمتحول المستقل . وبصورة عامة نرمز للعلاقة الـتي تعطينا قيمة التابع y بدلالة المتحول المستقل x ، بالرمز $y = f(x)$.

ب ـ التابع الزوجي :

هو التابع الذي يأخذ قيمة واحدة من أجل قيمتين متعاكستين للمتحول أي :

$$f(x) = f(-x)$$

مثـال : $y = x^4$ تابع زوجي . مثـال : $y = \cos x$

جـ ـ التابع الفردي :

هو التابع الذي يأخذ قيمتين متعاكستين من أجل قيمتين متعاكستين المتحول أي :

$$f(-x) = -f(x)$$

مثـال : $y = x^3$ ، مثـال : $y = \sin x$

د ـ التابع الظاهر والتابع الضمني :

التابع الظاهر هو كل تابع محلول بالنسبة الى أحد المتحولين مثال $y = x^2 + 9$.
التابع الضمني هو كل تابع y معين بمعادلة غير محلولة بالنسبة اليه مثال :

$$y^2 + x^2 + 5x = 0$$

هـ ـ التابع الدوري :

يكون التابع $f(x)$ دورياً ودوره T فيما اذا تحققت العلاقة :

$$\forall x \ , \ f(x) = f(x+T)$$

فالدور اذن هو أصغر عدد اذا أضيف الى المتحول x فان قيمة التابع لا تتغير .
ومن الواضح أن التابع إذا قبل دوراً T فهو يقبل KT كدور له أيضاً حيث K عدد صحيح .

عند دراسة التوابع المثلثية نكتفي بدراستها خلال المجال T أصغر الادوار .

٣ ـ ١ ـ ٢ ـ تعيين دور التابع المثلثي :

آ ـ دور التابع : $y = \sin x$

نفرض دوره T فحسب التعريف نكتب :

$$y = \sin x = \sin(x+T)$$

لكن نعلم من المثلثات أن :

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

بالمقارنة نستنتج أن :

$$x + T = x + 2\pi \implies T = 2\pi$$

ب ـ دور التابع :

$$y = \cos x$$

نفرض دوره T فحسب تعريف الدور نكتب :

$$y = \cos x = \cos (x + T)$$

لكن نعلم :

$$\cos x = \cos (x + 2\pi)$$

بالمقارنة نستنتج :

$$T = 2\pi$$

جـ ـ دور التابع :

$$y = \operatorname{tg} x$$

نفرض دوره T فحسب التعريف :

$$y = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (x + T)$$

لكن نعلم :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (x + \pi)$$

بالمقارنة نستنتج :

$$T = \pi$$

د ـ بصورة عامة :

ليكن التابع $y = \sin \omega x$ ولنفرض دوره T فحسب التعريف :

$$y = \sin \omega x = \sin \omega (x + T)$$

أي :

$$y = \sin \omega x = \sin (\omega x + \omega T)$$

ونعلم أن :

$$\sin \omega x = \sin (\omega x + 2\pi)$$

بالمقارنة نستنتج :

$$\omega T = 2\pi \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

بنفس الطريقة نجد أن دور التابع $y = \cos \omega x$ هو أيضاً $T = \frac{2\pi}{\omega}$

كذلك دور التابع $y = tg\, \omega x$ هو $T = \frac{\pi}{\omega}$.

٣ ـ ١ ـ ٣ ـ تصنيف التوابع :

آ ـ التوابع الجبرية :

وهي التي نحصل عليها من حل معادلة جبرية تحوي على x, y .

مثال : $y = x^2 + 3x + 1$ ويسمى بالتابع الصحيح الناطق .

مثال : $y = \frac{3+x}{x^2+1}$ ويسمى بالتابع الكسري الناطق .

مثال : $y = \sqrt{x(x+1)}$ ويسمى بالتابع الأصم .

ب ـ التوابع المتسامية :

وهي التوابع التي لا يمكن حلها بالطرق الجـــبرية : كالتوابع الدائرية ، والتوابع اللغاريتمية ، والتوابع الاسية . . .

٣ ـ ١ ـ ٤ ـ التابع المعين :

نقول عن التابع $y = f(x)$ انه معين في المجال $[a,b]$ ، فيما اذا كانت كل قيمة عددية الى x وضمن المجال يوافقها قيمة معروفة للتابع .

مثال التابع : $y = \frac{x}{x+1}$.

معين من أجل $x = 1$ مثلاً لأن $y = \frac{1}{2}$.

وغير معين من أجل $x = -1$ لأن y تصبح غير معينة .

ويقال ان التابع معين عن يسار x_0 فيما اذا كان معيناً في مجال حده الاعلى x_0 (وقد لا يكون معيناً من أجل $x = x_0$ بالذات) . أي يمكن ايجاد العدد الموجب α بحيث يكون التابع معيناً من أجل قيم x التي تحقق المتراجحة :

$$x_0 - \alpha < x < x_0$$

مثـال :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

هذا التابع معين عن يسار $x_0=1$ وغير معين من أجل $x_0=1$ وكذلك يقـال أن التابع معين عن يمين x_0 فيما إذا كان معيناً من أجل قـيم x التي تحقق المتراجحة $x_0 < x < x_0 + \alpha$.

مثـال :

$$y = \sqrt{x-2}$$

هذا التابع معين عن يمين $x_0 = 2$.

ويقال ان التابع معين بجوار x_0 فيما اذا كان معيناً عن يمين ويسار العدد x_0 أي يكون التابع معيناً من أجل $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$.

مثـال :

$$y = \frac{1}{2-x}$$

انه معين بجوار $x_0=2$.

٣ - ١ - ٥ - التابع العكسي :

ليكن المتحول x ، والتابع y بحيث يرتبطان بالعلاقة :

$$y = f(x) \qquad (1)$$

يمكن اعتبار y كمتحول ، بينما نعتبر x كتابع ، في هذه الحالة نحل العلاقة (1) بالنسبة الى x ولنفرض أننا حصلنا على العلاقة :

$$x = g(y) \qquad (2)$$

نسمي العلاقة (2) بالتابع العكسي .

مثـال : ليكن التابع : $y = 1/x$ فتابعه العكسي $x = 1/y$.

مثـال :

$$y = \sqrt{x+1}$$

بتربيع الطرفين والاصلاح نجد : $x = y^2 - 1$ وهو التابع العكسي .

ملاحظة هامة :

إذا درسنا ورسمنا الخط البياني للتابع $y = f(x)$ أو التابـــع العكسي له $x = g(y)$ فاننا نحصل على نفس النتائـــج ونفس الخط البياني . أي أن الخط البياني للتابع $y = f(x)$ هو نفس الخط البياني للتابع العكسي $x = g(y)$.

أما اذا غيرنا أسماء المتحولات بحيث نسمي دوماً التابع بـ y والمتحول بـ x فان التابع العكسي يصبح بالشكل $y = g(x)$ ويكون الخط البياني له مناظراً للخط البياني للتابع $y = f(x)$ بالنسبة الى منصف الربع الاول .

٣ ـ ٢ ـ النهايات

٣ ـ ٢ ـ ١ ـ تعاريف :

نقول عن المتحول x أنه ينتهي الى b ونرمز $x \longrightarrow b$ فيما اذا أخذت x قيماً جد قريبة من b من اليمين أو اليسار دون أن تدركها . وهذا يعني أن $|x-b| < \varepsilon$ حيث ε عدد موجب صغير بقدر ما نريد .

حالة خاصة :

اذا كان $x \longrightarrow 0$ يقال أن x أصبح لا متناهياً في الصغر .

— نقول عن التابع $y=f(x)$ المعين بجوار $x=h$ انه ينتهي الى L عندما تنتهي x

الى b فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة $|x-b| < \epsilon$ الى تحقيق المتراجحة $|y-L| < \epsilon_1$ حيث ϵ , ϵ_1 عددان موجبان صغيران بقدر ما نريد . وبعبارة أخرى ينتهي $y-L$ الى الصفر عندماينتهي $x-b$ الى الصفر .

ونرمز $f(x) \longrightarrow L$ عندما $x \longrightarrow b$ أو نرمز $\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = L$.

قد يكون التابع $y = f(x)$ معيناً عن يسار $x=b$ نقول عن هـذا التابع انه ينتهي الى L عندما تنتهي x الى b من اليسار فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة :

$|y-L| < \epsilon_1$ الى تحقيق المتراجحة $b - \epsilon < x < b$

وقد يكون التابع معيناً عن يمين $x=b$ نقول عن هذا التابع انه ينتهي الى L عندما تنتهي x الى b من اليمين فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة :

$|y-L| < \epsilon_1$ الى تحقيق المتراجحة $b < x < b + \epsilon$

— نقول ان المتحول x ينتهي الى ∞ فيما اذا أصبح أكبر من أي عدد كبيرمفروض ونرمز $x \longrightarrow \infty$. ويقال ان x أصبح لا متناهياً في الكبر .

— نقول عن التابع $y = f(x)$ انه ينتهي الى L عندما $x \longrightarrow \infty$ فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة $|x| > A$ حيث A عدد موجب كبير جداً وبقدر ما نريد ، الى تحقيق المتراجحة $|y-L| < \epsilon$.

— نقول عن التابع $y = f(x)$ انه ينتهي الى ∞ عندما تنتهي x الى b من اليمين أو من اليسار فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة $|x-b| < \epsilon$ الى تحقيق المتراجحة $|y| > A$ حيث A عدد موجب كبير جداً وبقدر ما نريد .

— نقول عن التابع $y = f(x)$ المعين عن يسار $x=b$ انه ينتهي الى ∞ عندماينتهي x الى b من اليسار فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة :

$|y| > A$ الى تحقيق المتراجحة $b - \epsilon < x < b$

— نقول عن التابع $y = f(x)$ المعين عن يمين $x = b$ انه ينتهي الى ∞ عندما ينتهي x الى b من اليمين فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة :

$$b < x < b + \varepsilon$$ الى تحقيق $$|y| > A$$

— نقول عن التابع $y = f(x)$ انه ينتهي الى ∞ عندما تنتهي x الى ∞ فيما اذا أدى تحقيق المتراجحة : $|x| > A$ الى تحقيق المتراجحة : $|y| > B$ حيث A ، B عددان موجبان كبيران وأكبر من أي عدد مفروض .

٣ - ٢ - ٢ - نظرية أساسية :

اذا جعلنا $x \to b$ وأدى ذلك الى كتابة التابع $y = f(x)$ على شكل مجموع مقدارين أحدهما عدد ثابت L والآخر α ينتهي الى الصفر أي :

$$y = L + \alpha \qquad (1)$$

فان :

$$\lim_{x \to b} y = L$$

وبالعكس اذا كان $\lim_{x \to b} y = L$ فيمكن كتابة $y = L + \alpha$.

البرهان :

من العلاقة (1) نستطيع أن نكتب :

$$|y - L| = |\alpha|$$

لكن مهما يكن ε ، فان جميع قيم α — اعتباراً من قيمة مالها — تحقق المتراجحة:

$$|\alpha| < \varepsilon$$

وبالتالي جميع قيم y — اعتباراً من قيمة ما لها — تحقق المتراجحة :

$$|y - L| < \varepsilon$$

وهذه تعني حسب تعريف النهايات أن : $y \to L$ عندما $x \to b$ أو :

$$\lim_{x \to b} y = L$$

بالعكس :

اذا كان $\lim_{x \to b} y = L$ حينئذٍ مهما يكن ε ، فان جميع قيم y ـ اعتباراً من قيمة ما لـ y ـ تحقق المتراجحة :

$$| y - L | < \varepsilon$$

نفرض :

$$y - L = \alpha \qquad (2)$$

حينئذٍ يكون لدينا :

$$|\alpha| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم α ـ اعتباراً من قيمة ما لها ـ أي أن α لا متناه في الصغر.
ونكتب العلاقة (2) بالشكل :

$$y = L + \alpha$$

وهو المطلوب .

مثال : احسب نهاية التابع $y = x^2 + 3$ عندما $x \to 2$.

حسب (٣ ـ ٢ ـ ٢) نكتب : $x \to 2$ بالشكل : $x = 2 + \alpha$

حيث α لا متناه في الصغر . نعوض في معادلة التابع :

$$y = (2 + \alpha)^2 + 3$$

$$y = 7 + \alpha (4 + \alpha)$$

وبما أن $\alpha (4 + \alpha)$ مقدار صغير بقدر ما نريد ولنرمز له α_1 نعوض :

$$y = 7 + \alpha_1$$

وحسب (٣ ـ ٢ ـ ٢) نكتب :

$$\lim_{x \to 2} y = 7$$

٣ - ٢ - ٣ - خواص النهايات :

النظرية الاولى :

اذا انتهى التابع $y = f(x)$ الى نهاية L عندما ينتهي المتحـــول x الى b فان المجموع $y + k$ والجداء $k . y$ ينتهيان الى $L+k$ ، $L . k$ حيث k عدد ثابت أي :

$$\lim_{x \to b} (y + k) = \lim_{x \to b} y + k = L + k \quad , \quad \lim_{x \to b} k . y = k . \lim_{x \to b} y = k . L$$

البرهان : بالفرض $\lim_{x \to b} y = L$.

وحسب (٣ - ٢ - ٢) نكتب :

$$y = L + \alpha$$

حيث α لا متناه في الصغر . أو :

$$y + k = L + k + \alpha$$

وهذه تعني حسب (٣ - ٢ - ٢) :

$$\lim_{x \to b} (y + k) = L + k$$

أو :

$$\lim_{x \to b} (y + k) = \lim_{x \to b} y + k$$

كذلك حسب (٣ - ٢ - ٢) يمكن أن نكتب : $\lim_{x \to b} y = L$ بالشكل :

$$y = L + \alpha$$

أو :

$$k . y = L . k + \alpha . k$$

بما أن $\alpha . k$ مقدار صغير بقدر ما نريد ولنرمز له α_1 نعوض :

$$k . y = L . k + \alpha_1$$

وهذه تعني :

$$\lim_{x\to b} k \cdot y = L \cdot k$$

أو :

$$\lim_{x\to b} k \cdot y = k \cdot \lim_{x\to b} y$$

مثـال :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1$$

النظرية الثانية :

نهاية مجموع تابعين تساوي مجموع نهايتيهما .

أي :

$$\lim_{x\to b}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to b}f(x)+\lim_{x\to b}g(x)$$

البرهان : ليكن :

$$\lim_{x\to b} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to b} g(x) = M$$

حسب (٣ ـ ٢ ـ ٢) نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = L + \alpha_1$$

$$g(x) = M + \alpha_2$$

حيث α_1 ، α_2 لا متناهيان في الصغر . بالجمع :

$$f(x) + g(x) = L + M + \alpha_1 + \alpha_2$$

وبما أن $L+M$ عدد ثابت وأن $\alpha_1 + \alpha_2$ مقدار صغـــير بقدر ما نريد ولنرمز له α_3 نكتب :

$$f(x) + g(x) = L + M + \alpha_3$$

وهذه تعني حسب (٣ ـ ٢ ـ ٢) أن :

$$\lim_{x \to b} [\, f(x) + g(x) \,] = L + M$$

أو :

$$\lim_{x \to b} [\, f(x) + g(x) \,] = \lim_{x \to b} f(x) + \lim_{x \to b} g(x)$$

مثـال :

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 3 \lim_{x \to 2} x = 4 + 3.2 = 10$$

حالة خاصة :

اذا انتهى التابع الاول الى $+\infty$ وانتهى التابع الثاني الى $-\infty$ فان مجموعهما ينتهي الى :

$\boxed{\infty - \infty}$ عدم تعيين

لأن اللامتناهيات في الكبر متفاوتة فيما بينها .

النظرية الثالثة :

نهاية جداء تابعين تساوي جداء نهايتيهما . أي :

$$\lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to b} f(x) \cdot \lim_{x \to b} g(x)$$

البرهان : ليكن :

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to b} g(x) = M$$

حسب (٣ ـ ٢ ـ ٢) نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = L + \alpha_1$$

$$g(x) = M + \alpha_2$$

بالضرب طرفاً في طرف :

$$f(x) \cdot g(x) = (L + \alpha_1)(M + \alpha_2)$$

أو :

$$f(x) \cdot g(x) = L \cdot M + \alpha_2 \cdot L + \alpha_1 M + \alpha_1 \cdot \alpha_2$$

بما أن $L \cdot M$ عدد ثابت وأن $\alpha_2 L + \alpha_1 M + \alpha_1 \alpha_2$ مقدار يمكن جعله صغيراً بقدر ما نريد ولنرمز له α_3 اذن نكتب :

$$f(x) \cdot g(x) = L \cdot M + \alpha_3$$

وهذه تعني أن :

$$\lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

أو :

$$\lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to b} f(x) \cdot \lim_{x \to b} g(x)$$

مثـال :

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \cos x = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \cos x = 0.1 = 0$$

حالة خاصة :

بفرض $f(x) \to \infty$ ، $g(x) \to 0$ عندما $x \to b$:

فان الجداء : $\boxed{\infty \cdot 0}$ $\to f(x) \cdot g(x)$ عدم تعيين

النظرية الرابعة :

نهاية حاصل قسمة تابعين تساوي حاصل قسمة نهايتيهما (شريطة أن تكون نهاية المقسوم عليه مخالفة للصفر) . أي :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to b} f(x)}{\lim_{x \to b} g(x)}$$

البرهان : ليكن :

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to b} g(x) = M \neq 0$$

فحسب النظرية (٣ - ٢ - ٢) نكتب :

$$f(x) = L + \alpha_1$$

$$g(x) = M + \alpha_2$$

حيث α_2 , α_1 لا متناهيان في الصغر .

بالتقسيم طرفاً على طرف :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L+\alpha_1}{M+\alpha_2}$$

$$= \frac{L}{M} + \left(\frac{L+\alpha_1}{M+\alpha_2} - \frac{L}{M} \right)$$

$$= \frac{L}{M} + \frac{\alpha_1 M - \alpha_2 L}{M (M + \alpha_2)}$$

إن الكسر $\frac{L}{M}$ عدد ثابت بينما الكسر $\frac{\alpha_1 M - \alpha_2 L}{M (M + \alpha_2)}$ لا متناه في الصغر (لأن صورته تنتهي الى الصفر بينما مخرجه ينتهي الى $M^2 \neq 0$) ولنرمز له α_3. تصبح العلاقة الاخيرة بالشكل :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} + \alpha_3$$

وهذه تعني حسب (٣ - ٢ - ٢) أن :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

أو :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to b} f(x)}{\lim_{x \to b} g(x)}$$

مثـال :

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\frac{3.1+5}{4.1-2}=\frac{8}{2}=4$$

حالة خاصـة :

بفرض $f(x)\longrightarrow\infty$ ، $g(x)\longrightarrow\infty$ عندما $x\longrightarrow b$ فان حاصل القسمة :

$$\frac{f(x)}{g(x)}\longrightarrow\boxed{\frac{\infty}{\infty}}\quad\text{عدم تعيين}$$

حالة خاصـة :

بفرض $f(x)\longrightarrow 0$ ، $g(x)\longrightarrow 0$ عندما $x\longrightarrow b$ فان حاصل القسمة :

$$\frac{f(x)}{g(x)}\longrightarrow\boxed{\frac{0}{0}}\quad\text{عدم تعيين}$$

لان اللامتناهيات في الصغر متفاوتة فيما بينها .

النظرية الخامسة :

عندما $x\longrightarrow b$ اذا تحققت :

$$\varphi(x)\leqq f(x)\leqq g(x)$$

وكان للتابعين $g(x)$ ، $\varphi(x)$ نهاية واحدة L فان للتابع $f(x)$ نهاية تساوي النهاية المشتركة للتابعين الآخرين .

البرهان : لدينا بالفرض :

$$\lim_{x\to b}\varphi(x)=\lim_{x\to b}g(x)=L$$

ولدينـا :

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq g(x)$$

لنطرح L من أطراف العلاقة الاخيرة :

$$\varphi(x) - L \leqq f(x) - L \leqq g(x) - L$$

فمن أجل كل $\varepsilon > 0$ يمكن أن نعين جواراً مركزه b بحيث تتحقق المتراجحة :

$$| \varphi(x) - L | < \varepsilon$$

كذلك يمكن أن نعين جواراً آخر مركزه b بحيث تتحقق أيضاً المتراجحة :

$$| g(x) - L | < \varepsilon$$

وفي أصغر هذين الجوارين تتحقق المتراجحتان :

$$-\varepsilon < \varphi(x) - L < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

ومن ثم تتحقق المتراجحة :

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

وهذه تعني أن :

$$| f(x) - L | < \varepsilon$$

وحسب تعريف النهايات نستنتج :

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{او} \quad \lim_{x \to b} f(x) = L$$

النظرية السادسة :

نهاية الجذر النوني تساوي الجذر النوني لنهايته أي :

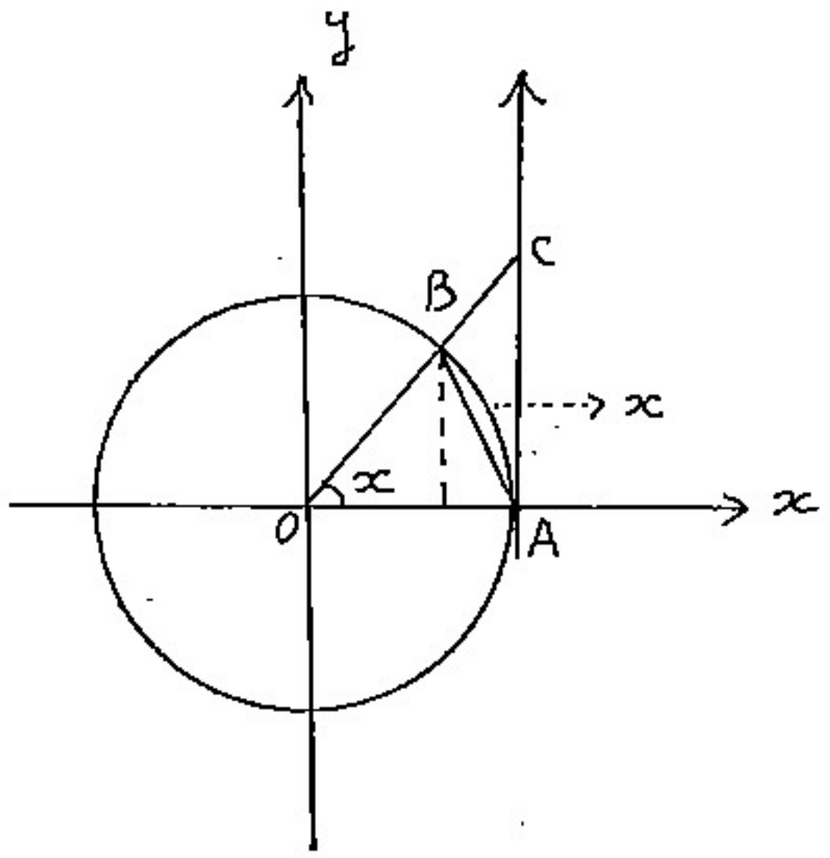
$$\lim_{x \to b} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to b} f(x)}$$

٣ - ٢ - ٤ - نظرية :

اذا انتهت قيمة x الى الصفر ، فان النسبة $\frac{\sin x}{x}$ تنتهي الى الواحد .

البرهان : لما كان التابع $\frac{\sin x}{x}$ زوجياً أي يأخذ قيمة واحدة من أجل قيمتين متعاكستين للمتحول x . لذلك نكتفي ببرهان هـــذه النظرية عندما تنتهي x الى الصفر بقيم موجبة .

لنأخذ الدائرة المثلثية شكل (٥) ولنعتبر الزاوية x مقدرة بالراديان . فيكون القوس $\widehat{AB} = x$.



الشكل (٥)

وتكون المتراجحة الآتية محققة :

$$\text{سطح } \overset{\Delta}{OAC} > \text{سطح القطاع } OAB > \text{سطح } \overset{\Delta}{OAB}$$

بالتعويض :

$$\frac{OA \cdot BH}{2} < \frac{OA.x}{2} < \frac{OA.AC}{2}$$

بالاختصار :

$$BH < x < AC$$

لكن :

$$BH = \sin x \quad , \quad AC = \operatorname{tg} x$$

بالتعويض :

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

نقسم المتراجحة المزدوجة على $\sin x$ الموجبة فيكون :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

أو :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

أو :

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

بجعل $x \longrightarrow 0$ فان $\cos x \longrightarrow 1$.

أي :

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \varepsilon$$

حيث ε عدد موجب صغير جداً .

وبما أن : $\frac{\sin x}{x}$ محصورة بين 1 وبين كمية تنتهي الى 1 فحسب النظرية الخامسة نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

٣ - ٢ - ٥ - نظرية :

اذا اتجهت قيمة x الى الصفر فان النسبة $\frac{\text{tg x}}{\text{x}}$ تنتهي الى الواحد .

البرهان : لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg x}}{\text{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

والخلاصة :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg x}}{\text{x}} = 1}$$

مثال : ادرس قيمة التابع :

$$y = \frac{x^2 + 3x}{\sin x} \quad \text{عندما} \quad x \to 0$$

يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{x}{\sin x}(x + 3)$$

بجعل $x \to 0$ ينتج :

$$y \to 1.(0 + 3) \Longrightarrow y \to 3$$

٣ ـ ٣ ـ كثيرات الحدود

٣ - ٣ - ١ - تعريف :

نسمي كثير حدود من الدرجة n كل تركيب جبري من الشكل :

$$f(x) = A\,x^n + A_1\,x^{n-1} + \ldots + A_n$$

حيث $A, A_1 \ldots A_n$ أعداد ثابتة ، n عدد صحيح موجب .

٣ - ٣ - ٢ - قيمة كثير الحدود عندما تتناهى x الى الصفر :

ليكن كثير الحدود :

$$f(x) = A\,x^n + A_1\,x^{n-1} + \ldots + A_n$$

فعندما تكون x صغيرة جداً (تنتهي الى الصفر) تصبح جميع الحدود الحاوية على x صغيرة . وبعبارة أخرى اذا كانت $A_n \ldots A_1, A$ أعداداً معطاة (مهما تكن) فيمكن البحث عن قيمة صغيرة لـ x كافية بصغرها ، كيما يصبح كل حد في x أصغر من ε ، فمجموع الحدود في x يكون بقيمته المطلقة أصغر من $n.\varepsilon$ وبذلك يصبح كثير الحدود :

$$f(x) < n\,.\,\varepsilon + A_n$$

أو :

$$f(x) - A_n < n\,.\,\varepsilon$$

وهذه تدل على أن كثير الحدود ينتهي الى العدد الثابت A_n عندما تنتهي x الى الصفر.

نتيجـــة :

اذا كان كثير الحدود لا يحوي على عدد ثابت فانه ينتهي الى الصفر عندما ينتهي x الى الصفر .

٣ - ٣ - ٣ - قيمة كثير الحدود من اجل $x \longrightarrow \infty$:

يكتب كثير الحدود بشكله العام على الصورة :

$$f(x) = A\,x^n \left[\, 1 + \frac{A_1}{Ax} + \frac{A_2}{Ax^2} + \ldots \frac{A_n}{Ax^n} \,\right]$$

ويجعل $x \longrightarrow \infty$ نجد أن الحدود الحاوية على x داخل القوسين تتناهى الى الصفر وبالتالي:

$$f(x) \longrightarrow A\,x^n \quad \text{عندما} \quad x \longrightarrow \infty$$

أي أن كثير الحدود يتلبس بقيمة وإشارة الحد الاكبر قوة من أجل $x \longrightarrow \infty$.

٣ – ٣ – ٤ – التطابق :

يقال عن كثير حدود $f(x)$ انه يطابق الصفر اذا كانت قيمته صفراً من أجل كل قيمة تعطى للمتحول x .

خاصة أساسية :

كيما يكون كثير حدود مطابقاً للصفر يلزم ويكفي أن تكون كافة أمثاله أصفاراً.

ويقال عن كثيري حدود $f(x)$ ، $g(x)$ انهما متطابقان إذا أخذا قيما متساوية من أجل كل قيم x .

يتضح أن الفضل $f(x) - g(x) \equiv 0$ وبالتالي نستنتج أن المقدارين يجب أن يكونا من درجة واحدة وأن تكون أمثالها واحدة .

٣ – ٣ – ٥ – قسمة كثير الحدود على المقدار $x-a$: (نظرية بيزو Bézout)

ليكن كثير الحدود $f(x)$ ولنفرض أننا قسمناه على $x-a$ وكان حاصل القسمة $g(x)$ والباقي R ، (وهو مقدار ثابت لأنه يجب أن تكون درجته أقل من درجة المقسوم عليه $x-a$) . فحسب متطابقة القسمة نكتب :

$$f(x) \equiv (x - a) \cdot g(x) + R$$

بجعل $x=a$ ينتج :

$$f(a) = 0 + R$$

نستنتج أن باقي قسمة كثير حدود $f(x)$ على المقدار $x-a$ هو $f(a)$ وبحالة خاصة اذا كان $f(a)=0$ يكون الباقي $R=0$ وبالتالي $f(x)$ يقبل القسمة على $x-a$ بدون باق نستنتج :

قاعدة : إذا انعدم كثير حدود من أجل $x=a$ فهو يقبل القسمة على $x-a$.

(يستفاد من هذه القاعدة في تحليل كثير الحدود الى جداء عوامل من الدرجة الاولى اذا علمت قيم x التي تعدمه) .

٣ - ٣ - ٦ - نظرية دالامبير :

نقبل هذه النظرية بدون برهان . وهي :

كل معادلة جبرية من درجة n تقبل n جذراً حقيقياً أو تخيلياً . ينتج عن هذه النظرية :

ليكن $f(x)=0$ ولتكن درجته n فيكون له n جذراً مثل $a,b,c,...v$ نفرضها مختلفة . بما أنه ينعدم من أجل $x=a$ فهـــو يقبل القسمة على $x-a$ ويكتب بعد التقسيم بالشكل :

$$f(x) \equiv (x-a)\, g_1(x)$$

حيث $g_1(x)$ من درجة $n-1$. بجعل $x=b$ يكون :

$$f(b) = (b-a) \cdot g_1(b)$$

أي :

$$0 = (b-a) \cdot g_1(b)$$

ومنه $g_1(b) = 0$ وهذه تدل على إن $g_1(x)$ يقبل القسمة على $x-b$ ويكتب بالشكل :

$$g_1(x) \equiv (x-b)\, g_2(x)$$

حيث $g_2(x)$ من درجة $n-2$ وهكذا . . . نصل الى :

$$g_{n-1}(x) \equiv (x-v) \cdot g_n(x)$$

حيث $g_n(x)$ من درجة الصفر أي ثابت وليكن K . نعوض :

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b)\,..\,(x-v)\,K$$

وهذه تدل على أن كل كثير حدود من درجة n يكتب على صورة جداء n عاملا كل منها من الدرجة الاولى .

قد يتفق أن لا تكون الجذور $a,b,c,...v$ مختلفة جميعاً . فاذا كان P من هذه الجذور يساوي a قيل ان a جذر مكرر من الترتيب P .

٣ ـ ٤ ـ استمرار التوابع

تمهيـــد :

ليكن التابع $y=f(x)$ المعين من أجل القيمة $x=x_0$ وفي جوار ما مركزه x_0 . وليكن $y_0=f(x_0)$. فاذا أعطينا للمتحول x تزايداً Δx اعتباراً من x_0 فان المتحول يأخذ قيمة جديدة ، $x=x_0+\Delta x$ كما أن التابع يأخذ قيمة جديدة :

$$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$$

وبالتالي يكون تزايد التابع :

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

٣ ـ ٤ ـ ١ ـ تعريف :

يقال عن التابع $y=f(x)$ انه مستمر من أجل $x=x_0$ (أو في النقطة $x=x_0$) فيما اذا كان هذا التابع معيناً في جوار ما للنقطة x_0 ، كذلك من أجلها ، وتحقق الشرط :

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0} \qquad (1)$$

ويكتب هذا الشرط بشكل آخر :

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \qquad (2)$$

يتضح مما تقدم أن استمرار تابع في نقطة مفروضة يعني هندسياً أن تكون القيمة المطلقة $|\Delta x|$ صغيرة بقدر ما نريد لفضل ترتيبي نقطتين من الخط البياني فصلاهما x_0 ، $x_0+\Delta x$ كلما كان $|\Delta x|$ صغيراً بقدر كاف .

مثـال :

بين أن التابع $y=x^2$ مستمر من أجل أية نقطة x_0 :

في الحقيقة لدينا :

$$y_o = x_o^2$$

$$y_0 + \Delta y = (x_o + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = (x_o + \Delta x)^2 - x_o^2$$

أو :

$$\Delta y = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

وبالتالي :

$$\lim_{\Delta x \to o} \Delta y = \lim_{\Delta x \to o} (2 x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2)$$

$$= 2 x_o \cdot \lim_{\Delta x \to o} \Delta x + \lim_{\Delta x \to o} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to o} \Delta x = 0$$

أي :

$$\lim_{\Delta x \to o} \Delta y = 0$$

٣ - ٤ - ٢ - ملاحظة :

يكتب شرط الاستمرار (2) بالشكل :

$$\lim_{\Delta x \to o} f (x_o + \Delta x) = f (x_o)$$

أو يكتب شرط الاستمرار بالشكل :

$$\boxed{\lim_{x \to x_o} f (x) = f (x_o)}$$

لكن :

$$x_o = \lim_{x \to x_o} x$$

نعوض :

$$\lim_{x \to x_o} f (x) = f \left(\lim_{x \to x_o} x \right) \qquad (3)$$

وهذه تعني أنه لمعرفة نهاية تابع مستمر عندما $x \to x_0$ يكفي أن نعوض عن المتحول x بقيمته x_0 في الصيغة $f(x)$.

مثـال :

نعلم أن التابع $y=x^2$ مستمر من أجل أية نقطة x_0 وبالتالي يكون :

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

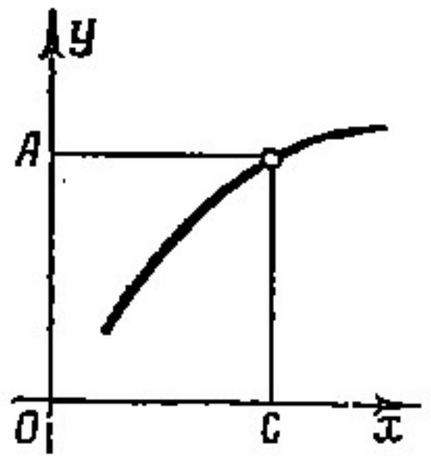
ويكون :

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

٣ ـ ٤ ـ ٣ ـ ملاحظة هامة :

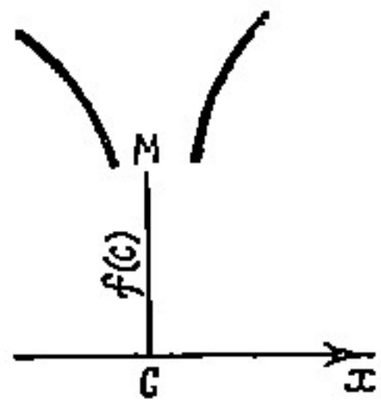
علينا أن نفرق جيداً بين $\lim_{x \to c} f(x)$ أي العدد A مثلا وبين $f(c)$ والذي يعبر عن قيمة $f(x)$ في النقطة c وقد نقع في بعض الأحيان على الحالات التالية :

آ ـ عدم وجود $f(c)$ مع أن $\lim_{x \to c} f(x) = A$ كما في الشكل (٦) حيث النقطة $x = c$ محذوفة من منحني التابع $y = f(x)$ لذلك فان التابع عند النقطة $x = c$ لايوجدله أية قيمة ولكن توجد له نهاية تساوي OA .



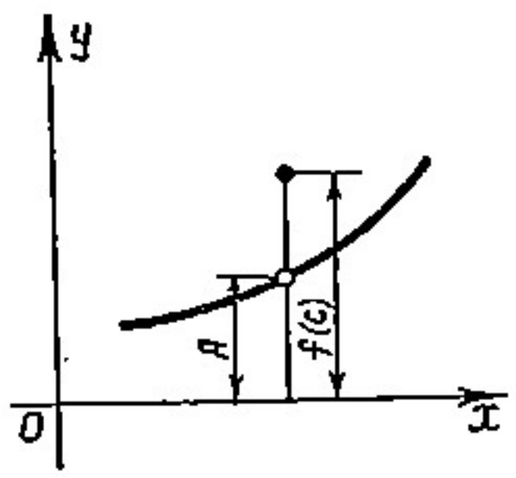
الشكل (٦)

ب ـ توجد قيمة للتابع $f(c)$ في النقطة $x = c$ حيث $f(c) = cM$ ولكن لاتوجد نهاية للتابع عندما $x \to c$ كما في الشكل (٧) .



الشكل (٧)

جـ – توجد قيمة للتابع عند النقطة c أي f(c) موجودة كذلك $\lim_{x \to c} f(x) = A$ موجودة أيضاً دون أن تتساوى القيمتان كما في الشكل (٨) .



الشكل (٨)

٣ – ٤ – ٤ – تعريف :

يقال عن التابع $y = f(x)$ إنه مستمر في المجال $[a,b]$ حيث $a < b$ فيما اذا كان مستمراً من أجل أية نقطة من هذا المجال . واذا كان التابع معيناً من أجل $x = a$ وكان :

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

قيل إن التابع $f(x)$ مستمر عن يمين النقطة $x = a$ واذا كان :

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

قيل إن التابع $f(x)$ مستمر عن يسار النقطة $x = b$.

واذا كان التابع $y=f(x)$ مستمراً من أجل أية نقطة من المجال بما في ذلك من أجل طرفي المجال قيل إن التابع $f(x)$ مستمر على المجـــال المغلق $[a,b]$. أما اذا لم يتحقق أحد الشروط التي يتطلبها الاستمرار ، كأن لايكون التابع $f(x)$ معيناً في النقطة $x=x_0$ أو أن لا تكون النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة في هذه النقطة ، أو أن يكون $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ عندما x تنتهي الى x_0 اختيارياً مع أن لطرفي اللامساواة وجود ، في هذه الاحوال يقال إن التابع $y=f(x)$ منقطع في النقطة $x=x_0$ كما يقال إن النقطة $x=x_0$ هي نقطة انقطاع .

مثال : التابع $y=\frac{1}{x}$ منقطع في النقطة $x=0$.

في الحقيقة : من أجل $x=0$ التابع غير معين لأن :

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$

مثال : التابع $y \quad 2^{1/x}$ منقطع في النقطة $x=0$.

في الحقيقة لدينا :

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{1/x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{1/x} = 0$$

أي أن التابع غير معين من أجل $x=0$ وبالتالي فهو منقطع في هذة النقطة .

مثال : ليكن التابع :

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

فمن أجل $x<0$ يكون .

$$\frac{x}{|x|} = -1$$

ومن أجل $x > 0$ يكون :

$$\frac{x}{|x|} = +1$$

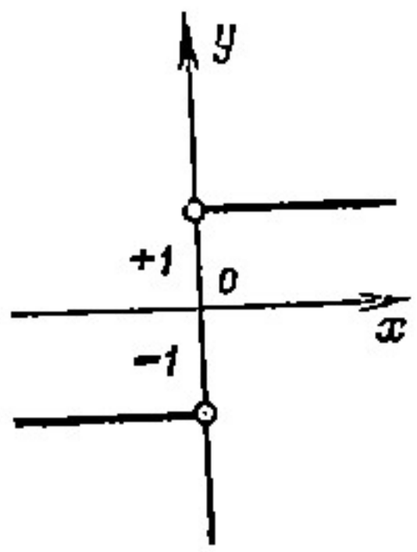
اذن :

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{x}{|x|} = -1$$

بينما :

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{|x|} = +1$$

أي أن التابع غير معين من أجل $x=0$ وبالتالي فهو منقطع في هـذه النقطة ، انظر الشكل (٩) :



الشكل (٩)

مثال : التابع $y = \sin 1/x$ منقطع في النقطة $x = 0$.

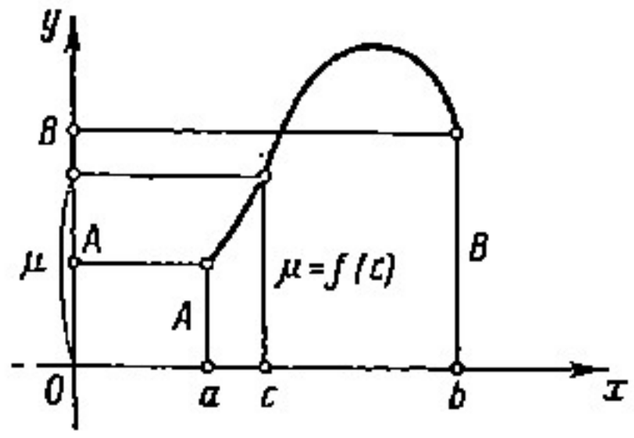
في الحقيقة عندما $x \longrightarrow 0$ فان التابع لاينتهي الى أية نهاية محددة أو غير محددة . وبالتالي فهو منقطع من أجل هذه النقطة .

٣ - ٤ - ٥ - خواص التوابع المستمرة :

تتصف التوابع المستمرة بالخواص الآتية ونقبلها بدون برهان :

الخاصة الاولى :

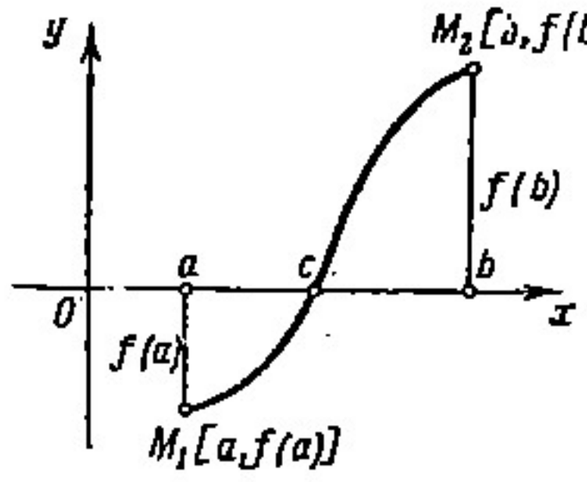
في مجال ما [a,b] اذا كان التابع $y = f(x)$ معيناً ومستمراً فان y تأخذ جميع القيم المحصورة بين $f(a)$ ، $f(b)$. وبعبارة أخرى لا يمكن لتابع مستمر أن ينتقل من قيمة الى أخرى بدون أن يمر بما بينها من قيم انظر الشكل (١٠) .



الشكل (١٠)

الخاصة الثانية :

اذا كان التابع $y = f(x)$ معيناً ومستمراً في المجال [a,b] وكان $f(a)$ ، $f(b)$ من اشارتين مختلفتين فانه توجد قيمة واحدة على الاقل للمتحول ولتكن $x = c$ واقعة داخل المجال بحيث تعدم التابع أي : $f(c) = 0$. انظر الشكل (١١) .



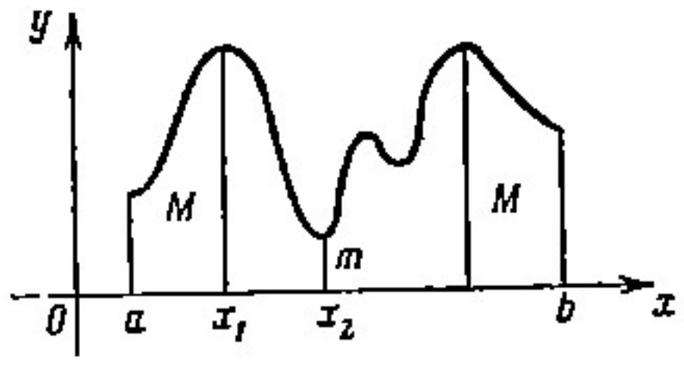
الشكل (١١)

الخاصة الثالثة :

اذا كان التابع $y = f(x)$ مستمراً في مجال [a,b] فانه يأخذ قيمة عظمى أو حداً

أعلى M ، وقيمة صغرى أو حداً أدنى m بحيث تكون قيم التابع f(x) أصغر أو تساوي M ، وأكبر أو تساوي m من أجل جميع قيم x الواقعة ضمن المجال .

وبعبارة أخرى : التابع المستمر ضمن مجال ، ومحدود من الاعلى ومن الادني ، يتوصل الى حده الاعلى مرة واحدة على الاقل كما يتوصل الى حده الادنى مرة واحدة على الاقل . انظر الشكل (١٢) .



الشكل (١٢)

تمارين

	احسب نهايات التوابع الآتية	الجواب
١ —	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$	4
٢ —	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\frac{1}{8}$
٣ —	$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$	3
٤ —	$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$	-1
٥ —	$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$	$\frac{\sqrt[m]{a}}{m\,.\,a}$
٦ —	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$	$\frac{1}{2}$
٧ —	$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\frac{2}{3}$
٨ —	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$	$\frac{1}{2}$

$x \to +\infty$ عندما $\frac{1}{2}$ $x \to -\infty$ عندما $-\infty$	$\lim_{x \to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$	— ٩
$\frac{2}{\pi}$	$\lim_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$	— ١٠
$\frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$	— ١١
$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$	— ١٢
$\sqrt{3}$	$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$	— ١٣
1	$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$	— ١٤
π	$\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$	— ١٥
$-\frac{1}{4}$	$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$	— ١٦
$\frac{2}{\pi}$	$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$	— ١٧
$\frac{1}{4}$	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$	— ١٨
12	$\lim_{x \to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	— ١٩

٢٠ — $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ 1

٢١ — $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ $\frac{1}{2}$

٢٢ — $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ n

٢٣ — $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

٢٤ — عين النقاط التي ينقطع فيها التابع :

$y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$ $x = -2, -1, 0, 2$

٢٥ — عين النقاط التي ينقطع فيها التابع :

$y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ $x = \pm \frac{2}{(2n+1)\pi}$ ، $x = 0$

٢٦ — عين النقاط التي ينقطع فيها التابع :

$y = 1 + 2^{1/x}$ $x = 0$

٢٧ — احسب ما يلي :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

(ميكانيك ، كهرباء : دورة ايلول ١٩٧٧)

الفصل الرابع

المتتاليات والسلاسل

LES SUITES – LES SERIES

٤ ـ ١ ـ المتتاليات اللانهائية

٤ ـ ١ ـ ١ ـ تعريف المتتالية :

نقصد بالمتتالية مجموعة من الاعداد مرتبة وفق نظام معين يبين قيمة كل حد من هذه المجموعة إذا علم ترتيبه . ونرمز لحدود المتتالية بحرف واحد مذيل بقرينة عددية تدل على رتبة الحد .

مثال : لتكن المتتالية :

$$u_1 , u_2 \dots u_n \dots$$

نسمي u_n بالحـــد العام ، وهي لا نهائية لأنها تتألف من عدد غير متناه من الحدود . وتعرف المتتالية بأحد أمرين :

آ ـ إما بالطريقة التي تكون حدودها المتتالية :

مثال : اذا كان كل حد ينشأ عن سابقه باضافة مقدار ثابت نحصل على المتتالية الحسابية:

بفرض الحد الاول u_1 والمقدار المضاف r يكون :

$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$$

.....

$$u_n = u_{n-1} + r = u_1 + (n-1)r$$

ب ـ وإما بالعلاقة الجبرية التي تعطي حدها العام .

مثـال : كون المتتالية التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

بسهولة نستنتج :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{2}{3} \quad , \ldots$$

٤ ـ ١ ـ ٢ ـ تعاريف :

تكون المتتالية غير متناقصة إذا كان كل حد فيها أكبر من سابقـه أو يساويه ، وتكون المتتالية غير متزايدة اذا كان كل حد فيها أصغر من سابقه أو يساويه .

مثال : المتتالية : $\ldots \frac{1}{2^n} \ldots \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ غير متزايدة :

مثال : المتتالية : $1, 4, 9 \ldots n^2, \ldots$ غير متناقصة .

وتكون المتتالية محدودة من الاعلى اذا كانت جميع حدودها أصغر من عدد مفروض A .

وتكون المتتالية محدودة من الاسفل اذا كانت جميع حدودها أكبر من عـدد مفروض B .

وتكون المتتالية محدودة من الاسفل والاعلى اذا كانت جميـع حدودها محصورة بين عددين مفروضين .

مثال : المتتاليه التي حدها العام $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ محدودة من الاعلى لان جميـع حدودها أصغر من (1) .

مثال : المتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ محـــدودة من الاسفل لأن جميع حدودها أكبر من (0) .

٤ ـ ١ ـ ٣ ـ نهاية متتالية :

نقول عن متتالية لا نهائية انها تقبل نهاية L (وتسمى بالتقاربة) فيما اذا أمكن ايجاد عدد صحيح P بحيث يؤدي تحقيق التراجحة $n > P$ الى تحقيق التراجحة :

$$| u_n - L | < \varepsilon$$

حيث ε عدد موجب صغير بقدر ما نريد ، u_n الحد العام للمتالية .

وبعبارة أخرى نقول إن المتالية تنتهي الى L فيما اذا أصبح حدها العام u_n جد قريب من L . فيما عدا ذلك تدعى المتالية متباعدة .

مثال : نهاية المتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ هي 0 فهي متقاربة .

مثال : نهاية المتالية التي حدها العام $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ هي 1 . فهي متقاربة .

مثال : نهاية المتالية التي حدها العام $u_n = \frac{n^2+1}{n}$ هي ∞ فهي متباعدة .

مثال : نهاية المتالية التي حدها العام $u_n = \sin (1+2n) \frac{\pi}{2}$ هي إما $+1$ وإما -1 فهي متباعدة .

٤ ـ ٢ ـ السلاسل العددية

٤ ـ ٢ ـ ١ ـ تعريف :

السلسلة هي مجموع حدود المتالية التي عدد حدودها غير متناه .

مثال : كون السلسلة التي حدها العام $1/n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots$$ هي

والغاية من دراسة السلاسل معرفة ما اذا كان لمجموع حدودها نهاية معينة أم لا . ونميز حالتين :

آ ـ إما أن يكون مجموع حدود السلسلة محدوداً ومعيناً . وتسمى بالتقاربة .

ب ـ وإما أن ينتهي مجموع حدودها الى اللانهاية ، أو أن لا يكون لهـا مجموع معين وتسمى بالمتباعدة .

مثال : السلسلة :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

هي سلسلة هندسية متناقصة لا نهائية مجموع حدودها محدود ومعين ويساوي الى (2) فهي متقاربة .

مثال : السلسلة :

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ n + \ldots$$

هي سلسلة حسابية حدها الاول (1) وأساسها (1) ومجموعها كما نعلم :

$$S = \frac{n}{2}\left[\, 2a + (n-1)\, r \,\right]$$

بالتعويض :

$$S = \frac{n}{2}\left[\, 2 + (n-1) \,\right]$$

ومنـــه :

$$S = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

نلاحظ أن المجموع ينتهي الى ∞ عندما ينتهي n الى مالا نهاية فهي متباعدة .

مثال : السلسلة :

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} \ldots$$

هي سلسلة مجموعها يتناوب بين الصفر و (1+) وهو مجموع محدود ولكن غـــير معين فهي متباعدة أيضاً .

وتتضمن دراسة السلاسل العددية ثلاثة مواضيع : السلاسل ذات الحدود الموجبة، السلاسل المتناوبة ، السلاسل الكيفية :

I السلاسل ذات الحدود الموجبة

٤ - ٢ - ٢ - تقارب السلسلة الموجبة (ذات الحدود الموجبة) :

لمعرفة تقارب السلسلة الموجبة يكفي أن نبرهن أن مجموع n حداً من حدودها الاولى ينتهي الى نهاية معينة ، عندما ينتهي n الى ∞ . إلا أنه من المتعذر علينا في أغلب الأحيان ايجاد هذا المجموع والتأكد من انتهائه الى قيمة معينة ، لذلك ، وفي كثير من الحالات : نرد دراسة السلسلة الى دراسة سلسلة هندسية . كما نستند في دراستنا للتقارب الى ما يلي :

٤ - ٢ - ٣ - خواص السلاسل :

الخاصة الاولى :

السلسلتان المتقاربتان مجموعهما يعطي سلسلة متقاربة .

لتكن السلسلتان :

$$s = u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$$

$$s' = u_1' + u_2' + \dots u_n' + \dots$$

فمجموعهما :

$$s + s' = (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2') + \dots$$

يؤلف سلسلة مجموعها $s + s'$ معين ومحدود فهي متقاربة .

الخاصة الثانية :

اذا حذفنا (أو أضفنا) من سلسلة عدداً معيناً من الحدود فان نوع هذه السلسلة لا يتغير . فان كانت متقاربة بقيت متقاربة وان كانت متباعدة بقيت متباعدة .

لتكن السلسلة :

$$s = u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots$$

ولنفرض أننا حذفنا منها p حداً مجموعها A ، يبقى لدينا بعد الحذف سلسلة ، نسمي مجموع حدودها s_{n-p} ويكون :

$$s_{n-p} = s - A$$

فاذا كانت السلسلة المفروضة متقاربة يكون s معيناً ومحدوداً وبالتالي s_{n-p} معيناً ومحدوداً أي أن السلسلة الباقية متقاربة .

أما اذا كانت السلسلة المفروضة متباعدة يكون s غير متناه أو غير معين وبالتالي s_{n-p} غير متناه أو غير معين أي أن السلسلة الباقية متباعدة .

الخاصة الثالثة :

اذا ضربنا جميع حدود سلسلة بعدد واحد فاننا نحصل على سلسلة جديدة متقاربة أو متباعدة حسبما تكون السلسلة المفروضة متقاربة أو متباعدة .

٤ - ٢ - ٤ - الشرط اللازم لتقارب سلسلة :

نظرية : اذا كانت السلسلة متقاربة فحدها العام u_n ينتهي الى الصفر عندما ينتهي n الى اللانهاية .

البرهان : لتكن السلسلة المتقاربة :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

فلدينا :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (1)$$

حيث s مجموعها المعين والمحدود :

ولدينا أيضاً :

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s \qquad (2)$$

لأن n و n—1 ينتهيان الى اللانهاية بنفس الوقت . بطرح (2) من (1) :

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

أو :

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$$

لكن نعلم أن :

$$s_n - s_{n-1} = u_n$$

لنعوض :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

وهو المطلوب .

ولكن هذا الشرط غير كاف :

أي اذا انتهى الحد العام الى الصفر فليس من الضروري أن تكون السلسلة متقاربة.

ولنضرب على ذلك مثالا هاماً :

٤ - ٢ - ٥ - السلسلة التوافقية :

لتكن السلسة المسماة بالسلسلة التوافقية :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \dots$$

فحدها العام $1/n$ ينتهي الى الصفر عندما تنتهي n الى ∞ ومع ذلك فهي ليست بالتقاربة . البرهان : نصنف حدود السلسلة كما يلي :

$$1 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

. . . . . .

نلاحظ أن كل مجموعة في الطرف الايسر أكبر من 1/2 فاذا صنفت الحدود الاولى في P مجموعة فان مجموعها يكون أكبر من P/2 . وبما أنه يمكننا أن نصنف من حدود السلسلة عدداً غير متناه من المجموعات فان العدد P ينتهي الى ∞ وبالتالي مجموع حدود السلسلة التوافقية ينتهي الى ما لا نهاية ايضاً والسلسلة متباعدة :

ملاحظة (1) :

يتضح مما سبق أنه اذا لم ينته الحد العام الى الصفر فان السلسلة متباعدة حتماً .

مثال (١) : ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{2n + 5}{n - 4}$$

نلاحظ أنه من أجل $n \to \infty$ فان :

$$u_n \to 2$$

وبالتالي السلسلة متباعدة .

مثال (٢) : ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام .

$$u_n = n^2$$

بجعل $n \to \infty$ نجد أن :

$$u_n \to \infty$$

والسلسلة متباعدة :

٤ - ٢ - ٦ - مقارنة السلاسل :

اذا تعذر دراسة تقارب سلسلة مباشرة فيمكن مقارنتها مع سلسلة أخرى معروفة استناداً الى النظريات الآتية :

النظرية الاولى :

اذا كانت حدود سلسلة موجبة ، اعتباراً من رقم ما P اصغر (أو تساوي) من الحدود التي تحمل الارقام نفسها لسلسلة أخرى موجبة ومتقاربة فان السلسلة المفروضة تكون متقاربة .

البرهان : نعلم أنه في كل سلسلة ، يمكن حذف عدد محدود من حدودها الاولى دون ان يتغير تقارب او تباعد السلسلة ، لذلك نستطيع أن نبدأ السلسلة من أي حد كان .

لتكن السلسلة المتقاربة فرضاً بعد أن حذفنا P حداً من حدودها الاولى :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$$

ولتكن السلسلة المفروضة بعد حذف P حداً من حدودها الاولى والتي كل حد فيها أصغر من مناظره في السلسلة المتقاربة :

$$s_n' = u_1' + u_2' + \dots u_n' + \dots$$

نستنتج إن :

$$s_n \geqq s_n'$$

وبما إن السلسلة الاولى متقاربة يكون للمجموع s_n نهاية s عندما تنتهي n الى ∞ وبالتالي للمجموع s_n' نهاية ولتكن 's عندما تنتهي n الى ∞ أي أن السلسلة المفروضة متقاربة.

النظرية الثانية :

اذا كانت حدود سلسلة موجبة ـ اعتباراً من رقم ما P ـ أكبر (أو تساوي) من الحدود التي تحمل نفس الارقام من سلسلة أخرى ومتباعدة فان السلسلة المفروضة تكون متباعدة .

البرهان : بنفس الطريقة السابقة وبنفس الرموز نكتب :

$$s_n' \geqq s_n$$

وبما أن السلسلة الاولى موجبة ومتباعدة إذن s_n ينتهي الى ∞ عندما n تنتهى الى ∞ وبما أن s_n' أكبر (أو تساوي) من s_n فمن الطبيعي أن ينتهي s_n' الى ∞ أيضاً وبالتالي السلسلة المفروضة متباعدة وهو المطلوب .

مثال (١) : ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^2 3x}{2^3} + \dots \frac{\sin^2 nx}{2^n} + \dots$$

نلاحظ أن الحد العام $\frac{\sin^2 nx}{2^n}$ هو على أبعد تقدير يساوي $\frac{1}{2^n}$ ، وبما أن السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{2^n}$ هي سلسلة هندسية متناقصة ولا نهائية فهي متقاربة ، إذن السلسلة المفروضة هي أيضاً متقاربة .

مثال (٢) : ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2^2} + \frac{1}{3\,.\,2^3} + \cdots \frac{1}{n\,.\,2^n} + \cdots$$

نلاحظ أن الحد العام $\frac{1}{n\,.\,2^n}$ هو على أبعد تقدير يساوي الى $\frac{1}{2^n}$ ، وبما أن هذا يمثل سلسلة هندسية متناقصة ولا نهائيةفهي متقاربة ، اذن السلسلة المفروضة متقاربة أيضاً .

النظرية الثالثة :

إذا كان v_n , u_n يمثلان حدي سلسلتين موجبتين ، واعتباراً من رقم ما P بقيت نسبتهما u_n/v_n محصورة بين عددين ثابتين A ، B لا يساويان الصفر ، فان السلسلتين متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً .

البرهان : بفرض $A<B$ لدينا اعتباراً من رقم P المتراجحة :

$$A < \frac{u_n}{v_n} < B$$

أو :

$$A\,.\,v_n < u_n < B\,.\,v_n$$

فاذا كانت السلسلة التي حدها العام v_n متقاربة فان السلسلة الـــتي حدها العام $B.v_n$ متقاربة أيضاً (لأن ضرب حدود سلسلة بعدد لا يغير من طبيعتها) وبالتالي فان المتراجحة :

$$u_n < B\,.\,v_n$$

تدل على أن السلسلة التي حدها العام u_n متقاربة بدورها استناداً الى النظرية الاولى.

واذا كانت السلسلة التي حدها العام v_n متباعدة وباتباع نفس المحاكمة السابقة نستنتج من المتراجحة :

$$A \cdot v_n < u_n$$

ان السلسلة التي حدها العام u_n متباعدة بدورها استناداً الى النظرية الثانية .

مثال : ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{3 + \sin n\alpha}{2^n}$$

نقارنها مع السلسلة التي حدها العام :

$$v_n = \frac{1}{2^n}$$

نجد أن النسبة u_n/v_n تبقى محصورة بين :

$$3 - 1 = 2$$

$$3 + 1 = 4$$

وبما أن $1/2^n$ يمثل حداً عاماً لسلسلة متقاربة اذن السلسلة المفروضة متقاربة .

النظرية الرابعة :

اذا كان u_n, v_n يمثلان حدي سلسلتين موجبتين وكان :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \neq 0$$

فان السلسلتين هما من طبيعة واحدة أي متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً .

البرهان : بما أن النسبة u_n/v_n تنتهي الى L فانه اعتباراً من $n = P$ يمكن أن تبقى هذه النسبة محصورة بين العددين $A = L - \varepsilon$, $B = L + \varepsilon$ واللذين يختلفان عن L بقدر مانريد . واستناداً الى النظرية الثالثة يتم المطلوب، أي السلسلتان من طبيعة واحدة :

مثال : ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{3}{2+5n}$$

لنأخذ السلسلة التي حدها العام $v_n = \frac{1}{n}$ والمتباعدة .

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2+5n} = \frac{3}{5}$$

فحسب النظرية الرابعة : السلسلتان من طبيعة واحدة ، وبما أن احداها متباعدة فالسلسلة الاخرى (أي المعطاة) متباعدة .

٤ – ٢ – ٧ – دراسة تقارب السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n^2}$:

لتكن السلسلة :

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \cdots$$

فلدراسة تقاربها يمكن تصنيف حدودها في مجموعات كما يأتي :

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{15^2} < 8 \cdot \frac{1}{8^2} = \frac{1}{8}$$

.....

.....

نجمع طرفاً الى طرف فيكون :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

أي :

$$s < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots$$

والطرف الايمن يمثل مجموع سلسلة هندسية متناقصة ولا نهائية ويعطى بالدستور

$\frac{a}{1-R}$ نقوص .

$$s < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S < 2$$

ونلاحظ أن مجموع حدود السلسلة المفروضة s هو أصغر من 2 مجموع حـــدود سلسلة هندسية متناقصة ولا نهائية ومتقاربة وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة وهو المطلوب .

٤ – ٢ – ٨ – قاعدة كوشي Cauchy :

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة :

$$u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots$$

فاذا انتهى الجذر النوني لحدها العام الى نهاية محدودة k عندما $n \to \infty$ أي :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$$

وكان : آ) $k < 1$ فالسلسلة متقاربة

ب) $k > 1$ فالسلسلة متباعدة .

البرهان :

آ) ليكن بالفرض $k < 1$ وليكن لدينا العدد q بحيث :

$$k < q < 1$$

ولنفرض انه اعتباراً من قيمة ما $n = N$ كان :

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

أو :

$$u_n < q^n$$

من أجل كل قيم :

$$n \geq N$$

لننظر الآن الى السلسلتين :

$$u_1 + u_2 + \dots u_N + u_{N+1} + \dots \quad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + \dots \quad (2)$$

ان السلسلة (2) متقاربة لأن حدودها تشكل متوالية هندسية متناقصة ولا نهائية . بينما حدود السلسلة (1) اعتباراً من u_N هي أصغر من الحدود التي تقابلها في السلسلة (2) وبالتالي تكون السلسلة (1) بدورها متقاربة .

ب) لنفرض $k > 1$ سيكون لدينا اعتباراً من قيمة ما $n=N$:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

أو :

$$u_n > 1$$

وبالتالي السلسلة متباعدة لأن حدها العام لن ينتهي الى الصفر .

أما اذا تناهى $\sqrt[n]{u_n}$ الى الواحد فهنالك حالة الشك أي قـــد تكون السلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة .

والخلاصـــة :

يقول كوشي اذا تناهى $\sqrt[n]{u_n}$ الى نهاية k عندما $n \to \infty$ نميز ثلاث حالات :

آ ـ بفرض $k < 1$ السلسلة متقاربة

ب ـ بفرض $k > 1$ السلسلة متباعدة

جـ ـ بفرض $k = 1$ حالة شك .

مثال (1) : ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

بتطبيق قاعدة كوشي على حدها العام :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة .

مثال (٢) : ادرس السلسلة :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots \frac{1}{a^n} + \cdots$$

بتطبيق قاعدة كوشي على حدها العام :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a}$$

فاذا كانت $a < 1$ السلسلة متباعدة

واذا كانت $a > 1$ السلسلة متقاربة

واذا كانت $a = 1$ حالة شك : لكن تصبح السلسلة :

$$1 + \frac{1}{1} + \cdots = n = \infty$$

وبالتالي السلسلة متباعدة .

٤ ـ ٢ ـ ٩ ـ قاعدة دالامبير D'Alambert :

لتكن السلسلة ذات الحدود الموجبة :

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots \qquad (1)$$

فاذا انتهت النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ الى نهاية محدودة k عندما $n \to \infty$ أي :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n^u} = k$$

وكان : آ) $k < 1$ فالسلسلة متقاربة

ب) $k > 1$ فالسلسلة متباعدة .

البرهان :

آ) ليكن $k < 1$ وليكن لدينا العدد q بحيث :

$$k < q < 1$$

ولنفرض أنه اعتباراً من قيمة ما $n=N$ كان لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q \quad \text{من أجل كل قيم } n \geqq N$$

أو :

$$u_{n+1} < q \cdot u_n$$

ولنكتب هذه المتراجحة من أجل قيم n المختلفة اعتباراً من $n=N$ يكون :

$$u_{N+1} < q \cdot u_N$$
$$u_{N+2} < q \cdot u_{N+1} < q^2 \cdot u_N$$
$$u_{N+3} < q \cdot u_{N+2} < q^3 \cdot u_N$$
.....

لننظر الآن الى السلسلتين :

$$u_1 + u_2 + \dots u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots \quad (1)$$

$$u_N + q \cdot u_N + q^2 \cdot u_N + \dots \quad (2)$$

إن السلسلة (2) هي سلسلة هندسية لا نهائية ومتناقصة لأن أساسها $q < 1$ فهي متقاربة ، بينما حدود السلسلة (1) اعتباراً من u_{N+1} هي أصغر من الحدود التي تقابلها في (2) وبالتالي تكون السلسلة (1) بدورها متقاربة .

ب) بفرض $k > 1$ سيكون لدينا اعتباراً من قيمة ما $n=N$ أي $n \geqq N$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

أو :

$$u_{n+1} > u_n \quad \text{من أجل قيم} \quad n \geqq N$$

وهذه تعني أن حدود السلسلة تصبح متزايدة اعتباراً من N+1 وبالتالي فان الحد العام لن ينتهي الى الصفر والسلسلة متباعدة .

اما اذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

فهنالك حالة شك أي قد تكون السلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة .

والخلاصة :

يقول دالامبير : في سلسلة موجبة اذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

نميز ثلاث حالات :

آ) بفرض $k < 1$ السلسلة متقاربة

ب) بفرض $k > 1$ السلسلة متباعدة

جـ) بفرض $k = 1$ حالة شك .

مثال (١) : ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} + \cdots$$

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة .

مثال (٢) : ادرس تقارب السلسلة $x^n/n!$ حيث $x > 0$.

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة .

مثال (٣) : ادرس تقارب السلسلة x^n/n حيث $x > 0$.

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} x \frac{n}{n+1} = x$$

نميز ثلاث حالات :

بفرض $x < 1$ السلسلة متقاربة

بفرض $x > 1$ السلسلة متباعدة

بفرض $x = 1$ حالة شك . ولكن السلسلة تصبح توافقية ، وقد سبق ان وجدناها متباعدة .

مثال (٤) : ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

أي وقعنا على حالة الشك ولازالة الغموض الذي اكتنفها يكتب الحد العام بالشكل:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وتكتب السلسلة :

$$s = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots$$

وبحذف الحدود المتماثلة ينتج :

$$s = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وبجعل n تنتهي الى /∞/ فان المجموع ينتهي الى (1) وهي قيمـــة معينة وبالتالي السلسلة متقاربة .

II ـ السلاسل المتناوبة

السلسلة المتناوبة :

هي التي تكون حدودها موجبة وسالبة بالتناوب . ولدراسة تقاربها نستند الى النظرية الآتية :

٤ ـ ٢ ـ ١٠ ـ نظرية ليبنز Leibniz :

اذا كانت حدود السلسلة المتناوبة متناقصة بالقيمة المطلقة وانتهى حدها العـام الى الصفر فهي متقاربة .

البرهان : لتكن السلسلة المتناوبة :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots$$

حيث $u_1, u_2, u_3 \ldots$ اعداد موجبة ، لدينا بالفرض :

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \ldots \qquad (1)$$

$$u_n \to 0 \text{ عندما } n \text{ تنتهي الى } \infty \qquad (2)$$

لنبحث عن مجموع عدد زوجي 2n من حدودها الاولى أي :

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots + u_{2n-1} - u_{2n}$$

يكتب هذا المجموع بالشكل :

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

وحسب (1) نستنتج ان الكميات الموجودة داخل الاقواس هي موجبة فالمجموع موجب ويزداد مع n . أي :

$$s_{2n} > 0$$

لنكتب الآن هذا المجموع بالشكل الآتي :

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

وحسب (1) نستنتج أن الكميات الموجودة داخل الاقواس موجبة ومطروحة جميعها من الحد الاول u_1 فحاصل الطرح هو عدد أصغر من u_1 أي أن :

$$s_{2n} < u_1$$

يتضح مما سبق ان s_{2n} موجب ويزداد بازدياد n ومحدود من الاعلى فله نهاية s عندما تنتهي n الى ∞ بحيث :

$$0 < s < u_1$$

لنبحث الآن عن مجموع عدد فردي $2n+1$ من حدودها الاولى . فلدينا :

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$$

بجعل n تنتهي الى ∞ واستناداً الى (2) ينتج :

$$s_{2n+1} = s_{2n} + 0$$

ولكن برهنا أن المقدار s_{2n} ينتهي الى نهاية s نعوض :

$$s_{2n+1} = s$$

نستنتج أن مجموع عدد فردي من حدودها ينتهي الى نفس نهاية مجموع عدد زوجي ، أي أن مجموع السلسلة s_n — مهما تكن n — ينتهي الى نهاية معينة s . فالسلسلة متقاربة .

مثال (1) : ادرس السلسلة :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \ldots$$

هذه السلسلة متقاربة لأن حدها العام ينتهي الى الصفر وان حدودها متناقصة بالقيمة المطلقة .

مثال (2) : ادرس السلسلة :

$$-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \ldots (-1)^{n} \frac{1}{n^2} \ldots$$

نلاحظ أن القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، كما ان حدها العام $(-1)^n / n^2$ ينتهي الى الصفر . فالسلسلة متقاربة استناداً الى نظرية ليبنز .

مثال (3) : ادرس السلسلة :

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \ldots$$

القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، حدها العام $(-1)^{n-1}/n!$ ينتهي الى الصفر فالسلسلة متقاربة حسب ليبنز .

III ـ سلاسل ذات حدود اشاراتها كيفية

يقال عن سلسلة انها ذات حدود اشاراتها كيفية فيما اذا وجد فيها حدود موجبة وأخرى سالبة . (تعتبر السلسلة المتناوبة حالة خاصة منها) . ولدراسة تقاربها نستند الى:

٤ ـ ٢ ـ ١١ ـ نظرية :

في سلسلة كيفية ، اذا كانت القيم المطلقة لحدودها تشكل سلسلة متقاربة ، فالسلسلة الكيفية متقاربة أيضاً .

البرهان :

لتكن السلسلة الكيفية :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

حيث حدودها $u_1 . u_2 \ldots$ بعضها موجب وبعضها الآخر سالب .

ولتكن سلسلة القيم المطلقة لحدودها :

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

نرمز بـ s_n لمجموع n حداً من الحدود الاولى للسلسلة الكيفية ، والذي يحوي على حدود موجبة نرمز لمجموعها p_n ، وعلى حدود سالبة نرمز لمجموع قيمها المطلقة بـ q_n فيكون:

$$s_n = p_n - q_n$$

ويكون مجموع n حداً من الحدود الاولى في سلسلة القيم المطلقة هو :

$$s_n' = p_n + q_n$$

وعندما تزداد n فان كلا من p_n , q_n يزداد أو على الاقل لا يتناقص ، وبما ان للمقدار $p_n + q_n$ نهاية يسعى اليها متزايداً وهي مجموع سلسلة القيم المطلقة المتقاربة فرضاً ، وبما أن كلا من p_n , q_n أصغر من هذه النهاية الثابتة المعينة ، يكون لكل منهما نهاية معينة نرمز لهما بالحرفين p , q ويكون للمجموع s_n نهاية هي $s = p - q$ وبالتالي السلسلة الكيفية متقاربة .

والعكس غير صحيح : أي اذا كانت السلسلة الكيفية متقاربة فليس من الضروري أن تكون سلسلة القيم المطلقة متقاربة .

لهذا يكون من المفيد ضرورة ادخال مفهوم التقارب المطلق للسلاسل الكيفية :

٤ - ٢ - ١٢ - تعريف :

يقال عن سلسلة كيفية انها متقاربة مطلقاً فيما اذا كانت سلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة . ويقال عن سلسلة كيفية انها نصف متقاربة semi - convergente او انها ليست متقاربة مطلقاً فيما اذا كانت هذه السلسلة الكيفية متقاربة بينما سلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة .

مثال (١) : لتكن السلسلة :

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \ldots.$$

فهي متقاربة مطلقاً ، لان سلسلة القيم المطلقة لحدودها :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$$

متقاربة (حسب دالامبير) .

مثال (٢) : لتكن السلسلة :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots.$$

فهي نصف متقاربة : لان هذه السلسلة متناوبة ومتقاربة بسبب انتهاء حدها العام الى الصفر وتناقص القيم المطلقة لحدودها ، بينما سلسلة القـــيم المطلقة لحدودها (سلسلة توافقية) متباعدة .

مثال (٣) : ادرس تقارب السلسلة الكيفية :

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots.$$

حيث α عـــدد ما .

الحـــل :

لدينا سلسلة القيم المطلقة :

$$\left|\frac{\sin \alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots. + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots.$$

ولنقارن حدودها مع حدود السلسلة المتقاربة :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots. + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

نجد أن حدود سلسلة القيم المطلقة ليست أكبر من حدود هذه السلسلة . أي أن سلسلة القيم المطلقة متقاربة ، وبالتالي نستنتج أن السلسلة الكيفية المعطاة بدورها متقاربة .

مثال (٤) : ادرس تقارب السلسلة الكيفية :

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^3} + \dots + \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n} + \dots$$

الحـــل :

نلاحظ ان القيم المطلقة لحدودها هي أصغر من الحدود التي تقابلها في السلسلة :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

وبما ان الاخيرة متقاربة لأنها سلسلة هندسية لا نهائية متناقصة اذن سلسلة القيم المطلقة متقاربة وبالتالي تكون السلسلة الكيفية المعطاة متقاربة .

٤ ـ ٢ ـ ١٣ ـ حساب مجموع حدود السلسلة المتقاربة :

لما كان حساب مجموع حدود السلسلة المتقاربة واللانهائية متعذراً في أغلب الاحيان لذلك نلجأ الى حساب مجموعها التقريبي وذلك بالاكتفاء بأخذ الحدود الاولى منها وليكن عددها n واهمال الحدود الباقية التي هي صغيرة لان الحد العام ينتهي الى الصفر ، ونكون بذلك قد ارتكبنا خطأ يستحيل معرفة قيمته بالضبط في الحالة العامة ولكن يمكن جعله أصغر من قيمة مفروضة . أي :

لتكن السلسلة :

$$s = u_1 + u_2 + \dots u_n + u_{n+1} + \dots$$

نرمز لمجموع n حداً من حدودها الاولى بـ s_n ونرمز للباقي بـ R_n يصبح لدينا:

$$s = s_n + R_n$$

فاذا اعتبرنا s_n قيمة تقريبية لمجموع السلسلة نكون قد ارتكبنا خطأ قدره R_n .

تمارين

١ ـ ادرس طبيعة السلسلة : الجواب

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\cdots\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$$ متقاربة

٢ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots\frac{n}{2^n}+\cdots$$ متقاربة

٣ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots\frac{n+1}{n}+\cdots$$ متباعدة

٤ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{1+n^2}+\cdots$$ متقاربة

٥ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n^3}$ متقاربة

٦ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n^2+2n+3}$ متقاربة

٧ ـ بفرض x موجبة وأصغر من الواحد ، احسب مجموع السلسلة :

$$x+2x^2+3x^3+\cdots n\cdot x^n+\cdots$$ $\frac{x}{(1-x)^2}$

٨ ـ برهن أن السلسلة الآتية متقاربة مطلقاً :

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}\cdots\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\cdots$$

٩ ـ ادرس تقارب السلاسل الآتية والتي حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{n^2+3} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^3+n^2} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^4}$$

١٠ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام :

متباعدة $\qquad u_n = \frac{n}{2n+1}$

١١ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

متباعدة $\qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

١٢ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

متباعدة $\qquad \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots \frac{2^n}{n} + \dots$

١٣ ـ ادرس طبيعة السلسلة :

متقاربة $\qquad \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$

١٤ ـ ادرس تقارب السلسلة :

متباعدة $\qquad \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10\,n}} + \dots$

١٥ ـ برهن أن السلسلة الآتية متقاربة مطلقاً :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} \dots (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} \dots$$

ـ برهن أن السلاسل الآتية متباعدة :

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} \dots + \frac{n^2}{n^2+1} \dots \qquad - ١٦$$

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \dots \qquad - ١٧$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n}{2n-1} \dots \quad - ١٨$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots \quad - ١٩$$

ـ برهن أن السلاسل الآتية متقاربة :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots \quad - ٢٠$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \dots \quad - ٢١$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} \dots \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} \dots \quad - ٢٢$$

$$\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} \dots \frac{(-1)^{n-1} n}{e^n} \dots \quad - ٢٣$$

$$1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \dots + \frac{n!}{1.3.5 \dots (2n-1)} + \dots \quad - ٢٤$$

$$2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \dots \quad - ٢٥$$

٢٦ ـ لتكن السلسلة :

$$2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \dots$$

أوجد حدها العام وبين أنها متقاربة ثم استنتج تقارب السلسلة :

$$2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} \dots$$

ـ بين ما اذا كانت السلاسل الآتية متقاربة مطلقاً :

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \dots \quad - ٢٧$$ متقاربة مطلقاً

٢٨ - $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} \dots$ متقاربة مطلقاً

٢٩ - $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \dots (-1)^n \cdot \frac{1}{\log n} \dots$ نصف متقاربة

٣٠ - $1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \dots (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \dots$ نصف متقاربة

٣١ ـ لدينا السلسلة العددية التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n + 1 - 3^n}{3^n(n+1)}$$

١ً ـ فرق هذه السلسلة الى سلسلتين عدديتين .

٢ً ـ ادرس طبيعة كل من هاتين السلسلتين .

٣ً ـ استنتج أن السلسلة المعطاة متباعدة .

(دورة ايلول ١٩٧٠)

٣٢ ـ ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

(دورة حزيران ١٩٧٦)

٣٣ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{e^n}}$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

الفصل الخامس

العدد e

٥ - ١ - تعريف :

نقصد بالعدد e نهاية السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n!}$ حيث n تأخذ قيماً صحيحة موجبة بدءاً من الصفر حتى اللانهاية .

أي :

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{n!} + \dots$$

وللبرهان على تقارب هذه السلسلة نطبق قاعدة دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة .

٥ - ٢ - حساب القيمة التقريبية للعدد e :

نأخذ مجموع عدد معين من الحدود ونهمل الباقي شريطة أن يكون الباقي أقل من عدد مفروض : لنأخذ مثلاً مجموع $n+1$ من الحدود الاولى فما هو الحد الاعلى للباقي الذي أهملناه ؟ انه :

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

أو :

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)\,(n+1)!} + \cdots$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[\,1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)\,(n+2)} + \cdots\right]$$

فاذا بدلنا عن المقادير $n+2, n+3, \ldots$ بـ $n+1$ فالطرف الايمن يصبح أكبر من R_n أي :

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\left[\,1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right]$$

ان ما داخل القوسين يمثل سلسلة هندسية متناقصة ولا نهائية فهي متقاربة ومجموعها:

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

نعوض :

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n}$$

أو :

$$\boxed{R_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}}$$

ويكتب الباقي بالصيغة :

$$R_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta}{n}$$

حيث $0 < \theta < 1$.

فلحساب e بخطأ لا يتجاوز ε يكفي أن يكون الباقي أقـــل من ε أو يكفي أن يتحقق :

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n} < \varepsilon$$

مثلاً بجعل $n=5$ يكون :

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

والخطأ المرتكب :

$$R_n < \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$$

أي :

$$R_5 < \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{5}$$

ومنـــه :

$$R_5 < \frac{1}{600}$$

وإذا زدنا قيمة العدد n تضاءل الخطأ ، ويمكن حساب قيمـــة e بخمسة أرقام عشرية صحيحة هي :

$$\boxed{e = 2{,}71828}$$

ولهذا العدد أهمية كبرى في الرياضيات .

٥ – ٣ – العدد e هو $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$:

كثيراً ما نصادف العدد e في التحليل الرياضي على شكل نهاية المقدار $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ عندما ينتهي m الى ∞ .

في الحقيقة لدينا حسب نيوتون :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1!}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m\,(m-1)}{2!}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{3!}\cdot\frac{1}{m^3} + \ldots$$

وهكذا يكتب بعد الاختصار على الشكل :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$

بجعل m تنتهي الى ∞ فان المقدار $\frac{1}{m}$ ينتهي الى الصفر ويبقى لدينا في الطرف الايمن :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{m!} + \ldots$$

إلا أن الطرف الأيمن سمي قبل قليل بالعدد e نستنتج :

$$\boxed{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e}$$

ملاحظة هامة :

بفرض $\alpha = \frac{1}{m}$ حيث α تنتهي الى الصفر عندما تنتهي m الى ∞ . نعوض في العلاقة السابقة نجد :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e}$$

٥ - ٤ - التابع الاسي e^x :

ليكن التركيب :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ولنفرض $\frac{x}{n} = \alpha$ وبالتالي $n = \frac{x}{\alpha}$ نعوض في التركيب فيكون:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = (1+\alpha)^{x/\alpha} = \left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^x$$

بجعل n تنتهي الى ∞ فان α تنتهي الى الصفر والكمية $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ تنتهي الى e .
نعوض في الطرف الايمن نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ولو نشرنا الطرف الايسر حسب نيوتون :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{i!}\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \ldots$$

أو :

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots$$

بجعل n تنتهي الى ∞ فالمقدار $\frac{1}{n}$ ينتهي الى الصفر والطرف الايسر ينتهي الى e^x ويكون :

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$$

٥ - ٥ - اللغاريتم النيبري او اللغاريتم الطبيعي :

نعلم ان العدد b اذا كتب بالشكل :

$$b = a^{\alpha}$$

فاننا نسمي α بلغاريتم العدد b بالنسبة الى الاساس a ونكتب :

$$\log_a b = \alpha$$

واذا كتبنا العدد b بشكل قوة للعدد e أي :

$$b = e^{\lambda}$$

فاننا نسمى λ باللغاريتم النيبري للعدد b ، نستنتج ان اللغاريتم النيبري هو لغاريتم اتخذ فيه الاساس e . ونكتب :

$$\log_e b = \lambda$$

واختصاراً نكتب : $\log b = \lambda$ اي اننا نصطلح على عدم تذييل log بأي عدد ونعني بذلك اللغاريتم النيبري أو اللغاريتم الطبيعي .

مثال (١) :

برهن أن السلسلة $\frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots \frac{n^2}{n!} + \ldots$ متقاربة واحسب مجموعها :

حسب قاعدة دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة . ولحساب مجموعها نكتب الحد العام بالشكل :

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (1)$$

أو :

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (2)$$

نعوض في (1) عن n بـ 1 ثم نعوض في (2) عن n بـ 2 ، 3 ... فيكون :

$$n = 1 \Longrightarrow \frac{1^2}{1!} = 0 + 1$$

$$n = 2 \Longrightarrow \frac{2^2}{2!} = 1 + \frac{1}{1!}$$

$$n = 3 \Longrightarrow \frac{3^2}{3!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$n = 4 \Longrightarrow \quad \frac{4^2}{4!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

.....

$$n = n \Longrightarrow \quad \frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

وبالجمع طرفاً الى طرف :

$$s = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots \frac{1}{(n-2)!} + \ldots + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{(n-1)!} + \ldots.$$

بجعل n تنتهي الى ∞ نجد :

$$s = e + e = 2e$$

مثال (٢) :

برهن ان السلسلة $\ldots + \frac{n^3}{n!} + \ldots + \frac{2^3}{2!} + \frac{1^3}{1!}$ متقاربة واحسب مجموعها .

حسب دالامبير نجد :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة . ولحساب مجموعها يكتب الحد العام بالشكل :

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2 - 1 + 1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (1)$$

أو :

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

أو :

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n-2+2+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (2)$$

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (3)$$

نعوض في (1) عن n بـ 1 ، ونعوض في (2) عن n بـ 2 . ثم نعوض في (3) عن n بـ 3 ، 4 ، . . . . . نجد :

$$n = 1 \Longrightarrow \quad \frac{1^3}{1!} = 0 + \frac{1}{0!}$$

$$n = 2 \Longrightarrow \quad \frac{2^3}{2!} = 0 + \frac{3}{0!} + \frac{1}{1!}$$

$$n = 3 \Longrightarrow \quad \frac{3^3}{3!} = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$n = 4 \Longrightarrow \quad \frac{4^3}{4!} = \frac{1}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!}$$

.....

$$n = n \Longrightarrow \quad \frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

.....

بالجمع طرفاً الى طرف نجد :

$$s = e + 3e + e = 5e$$

مثال (٣) : أوجد السلسلة الناتجة عن جداء السلسلتين :

$$s_1 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$s_2 = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots$$

نعلم ان الاولى هي منشور e^x وان الثانية هي منشور e^y :

إذن :

$$s_1 \cdot s_2 = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

وحسب منشور e^x نكتب :

$$s_1 \cdot s_2 = e^{x+y} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots$$

مثال (٤) : احسب مجموع السلسلة الآتية :

$$s = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots$$

ان حدها العام هو : $\frac{(-1)^n}{n!}$. وبمقارنة هذه السلسلة مع السلسلة التي حدها العام $\frac{x^n}{n!}$ ، والتي مجموعها التابع الاسي e^x ، نستنتج أن لسلسلتنا مجموع هو e^{-1} .

تمارين

١ ـ ادرس تقارب السلسلة ... $+ \frac{(n-1)^3}{n!} + \ldots + \frac{3^3}{4!} + \frac{2^3}{3!}$ واحسب مجموعها .

الجواب : $s = e + \frac{1}{2}$ (دورة حزيران ١٩٦٨)

٢ ـ لتكن السلسلة $\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{1!} + \ldots$ أوجد حدها العام ثم احسب مجموعها .

الجواب : $s = \frac{1}{2}\left[e - e^{-1}\right]$

٣ ـ احسب مجموع السلسلة $1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \ldots$

الجواب : $s = 2e$

٤ ـ احسب مجموع السلسلة $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$

الجواب : $s = 1$

٥ ـ احسب مجموع السلسلة $\frac{1^2}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \ldots$

الجواب : $s = e - 1$

٦ ـ احسب مجموع السلسلة $1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots$

الجواب : $s = 5e$

٧ ـ احسب مجموع السلسلة التي حدها العام $\frac{n^4}{n!}$

الجواب : $s = 15e$

٨ ـ ادرس تقارب السلسلة الآتية واحسب مجموعها :

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\cdots$$

(دورة حزيران ١٩٦٩)

٩ ـ ادرس تقارب السلسلة الآتية واحسب مجموعها :

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots$$

(دورة ايلول ١٩٦٩)

١٠ ـ ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$\frac{n^2-n}{(n+1)!}$$

حيث n عدد صحيح موجب ويأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$ ثم احسب مجموع هذه السلسلة .

(دورة حزيران ١٩٧٠)

١١ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام :

$$u_n=\frac{e^n\,.\,n\,!}{n^n}$$

(لاحظ أن $u_{n+1}>u_n$) .

١٢ ـ ادرس طبيعة السلسلة التي حدها العام :

$$u_n=\frac{(n!)^2\,.\,4^n}{(2n)!}$$

(لاحظ أن $u_{n+1}>u_n$) .

الفصل السادس

اللامتناهيات في الصغر ـ اللامتناهيات في الكبر

المشتقات

LES INFINIMENT PETITS – LES INFINIMENT GRANDS

LES DÉRIVÉES

٦ ـ ١ ـ اللامتناهي في الصغر

٦ ـ ١ ـ ١ ـ تعاريف :

اذا تناهت كمية الى الصفر سميناها باللامتناهي في الصغر . واللامتناهيات في الصغر متفاوتة فيما بينها . فمثلا اذا انتهى x الى الصفر سمي بلا متناه في الصغر وعندئذٍ يكون $|x| < \varepsilon$ حيث ε عدد موجب صغير بقدر ما نريد .

ان اللامتناهيات في الصغر تلعب دوراً كبيراً في الرياضيات :

فمن اعتبارنا مجموع عدد لا متناه من اللامتناهيات في الصغر يعطي كمية معينة ولد علم التكامل .

ومن اعتبارنا حاصل قسمة لامتناهيين في الصغر يعطي كمية معلومة ولد علم التفاضل.

نقول ان المتحول x لا متناه في الصغر أساسي فيما اذا وجد عدد من اللامتناهيات في الصغر تتبع الى x وكانت تنتهي الى الصفر مع x .

اللامتناهيات في الصغر الآنية ، هي التي تنتهي الى الصفر معاً وضمن شروط واحدة.
مثال $y = \sin x$ حيث y ، x لا متناهيان في الصغر آنيان .

٦ - ١ - ٢ - مقارنة اللامتناهيات في الصغر :

ذكرنا ان اللامتناهيات في الصغر متفاوتة فيما بينها ، ولمقارنة لا متناهيين في الصغر y, z يكفي ان ندرس نسبتها الى بعضها ونميز ثلاث حالات :

آ ـ اذا انتهت النسبة y/z الى الصفر نقول ان مرتبة y في الصغر هي أكبر من مرتبة z .

ب ـ اذا انتهت النسبة y/z الى نهاية معينة نقول ان y, z من مرتبة واحدة .

جـ ـ اذا انتهت النسبة y/z الى ما لانهاية قيل ان مرتبة y أدنى من مرتبة z .

مثال (١) : ليكن التركيبان $y = 3x^4$ ، $z = 4x^4$ نلاحظ أن كلاً منهما ينتهي الى الصفر مع x . وأن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{4x^4} = \frac{3}{4}$$

فيقال ان y ، z من مرتبة واحدة .

مثال (٢) : ليكن التركيبان :

$$y = x^4 \quad , \quad z = 2x^2$$

نلاحظ أن كلاً منهما ينتهي الى الصفر مع x وأن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0$$

نقول ان مرتبة y هي اكبر من مرتبة z .

مثال (٣) : ليكن التركيبان :

$$y = x^2 \quad , \quad z = x^3$$

تلاحظ أن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

فنقول ان مرتبة y اخفض من مرتبة z .

نظرية : اذا كانت مرتبة اللامتناهيين في الصغر y_1 ، y_2 من مرتبة لا متناه في الصغر ثالث y_3 فان y_1 ، y_2 من مرتبة واحدة .

في الحقيقة لدينا :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1}{y_3} \cdot \frac{y_3}{y_2}$$

بما ان y_3 ، y_1 من مرتبة واحدة فرضاً فنسبتها تنتهي الى قيمة معينة A .

ولنفس السبب : y_3 ، y_2 يكون لنسبتها نهاية معينة B اذن نهاية y_1/y_2 هي A.B وهي قيمة معينة وبالتالي y_1 ، y_2 من مرتبة واحدة .

تكافؤ اللامتناهيات في الصغر : يتكافأ اللامتناهيان في الصغر اذا انتهت نسبتها الى الواحد . واذا كافأ لامتناهيان في الصغر ثالثاً فهما متكافئان .

مثال : اللامتناهيان في الصغر x ، $\sin x$ متكافئان لان :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

كذلك x ، $\operatorname{tg} x$ متكافئان اذن $\sin x$ يكافىء $\operatorname{tg} x$ عندما $x\to 0$.

٦ – ١ – ٣ – مرتبة اللامتناهي في الصغر :

ليكن x اللامتناهي في الصغر الاساسي ، وليكن y لا متناهياً في الصغر آخر ، فاذا كان y ، x^p لا متناهيين في الصغر من مرتبة واحدة قلنا ان y لا متناه في الصغر من المرتبة p .

واذا كان y لا متناهياً في الصغر من المرتبة p حيث x الـــلامتناهي في الصغر الاساسي ، واذا كانت a نهاية النسبة y/x^p نقول ان $a . x^p$ هو الجزء الرئيسي من اللامتناهي في الصغر ، وهو يكافىء y .

مثال : ليكن التركيب :

$$y = 2x^3 + 5x^2$$

ان y لا متناه في الصغر مع x ، نقسم الطرفين على x^2 نجد :

$$\frac{y}{x^2} = 5 + 2x$$

عندما $x \to 0$ فان $2x \to 0$ والنسبة تنتهي الى 5 ويكون $5x^2$ هو الجزء الرئيسي .
نستنتج ان y لا متناه في الصغر من المرتبة الثانية ويكافىء جزأه الرئيسي $5x^2$.

٦ ــ ٢ ــ اللامتناهي في الكبر

٦ - ٢ - ١ - تعريف :

اللامتناهي في الكبر هو كل كمية تصبح أكبر من أي عدد مفروض . واللامتناهيات في الكبر متفاوتة فيما بينها .

واذا كان x لا متناهياً في الكبر ووجد عدد من اللامتناهيات في الكبر تتبع الى x فاننا نسمي x باللامتناهي في الكبر الاساسي .

٦ - ٢ - ٢ - مقارنة اللامتناهيات في الكبر :

يفرض z , y لا متناهيين في الكبر آنيين نميز :

آ ــ اذا انتهت النسبة y/z الى اللانهاية قلنا ان y من مرتبة أعلى من مرتبة z .

ب ــ اذا انتهت النسبة y/z الى قيمة معينة محدودة قلنا ان z , y من مرتبة واحدة .

جـ ــ اذا انتهت النسبة y/z الى الصفر قلنا ان y من مرتبة ادنى من مرتبة z .

نظرية : اذا كان لا متناهيان في الكبر من مرتبة لا متناه في الكبر ثالث كان الأولان من مرتبة واحدة .

بالفرض : y_1 , y_2 من مرتبة y_3 :

نستطيع أن نكتب :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1}{y_3} \cdot \frac{y_3}{y_2}$$

بما ان y_1 ، y_3 من مرتبة واحدة فنهاية نسبتها محدودة A كذلك y_2 ، y_3 من مرتبة واحدة فنهاية نسبتها قيمة محدودة B . وبالتالي نهاية y_1 / y_2 هي A . B قيمة محدودة أي : y_1 ، y_2 من مرتبة واحدة .

تكافؤ اللامتناهيين في الكبر : يتكافأ لامتناهيان في الكبر اذا انتهت نسبتهما الى الواحد .

٦ - ٢ - ٣ - مرتبة اللامتناهي في الكبر :

بفرض y لا متناهياً في الكبر ويتبع الى لا متناه في الكبر أساسي x فاذا كان y ، x^p من مرتبة واحدة قلنا ان y لا متناه في الكبر من المرتبة p .

واذا كان y لا متناهياً في الكبر من المرتبة p وكان x لا متناهياً في الكبر أساسياً ، واذا كانت النسبة y/x^p لها نهاية معينة a نقول ان المقدار ax^p هو الجزء الرئيسي ويكون y مكافئا الى $a . x^p$.

مثال : ليكن التركيب :

$$y = Ax^3 + Bx^2 + C$$

ان y لا متناه في الكبر مع x نقسم الطرفين على x^3 نجد :

$$\frac{y}{x^3} = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^3}$$

بجعل $x \to \infty$ نرى ان النسب في الطرف الايمن تنتهي الى الصفر وبالتالي y/x^3 تنتهي الى A فيكون $A . x^3$ هو الجزء الرئيسي ويكافىء اللامتناهي في الكبر y .

٦ ـ ٣ ـ المشتقات

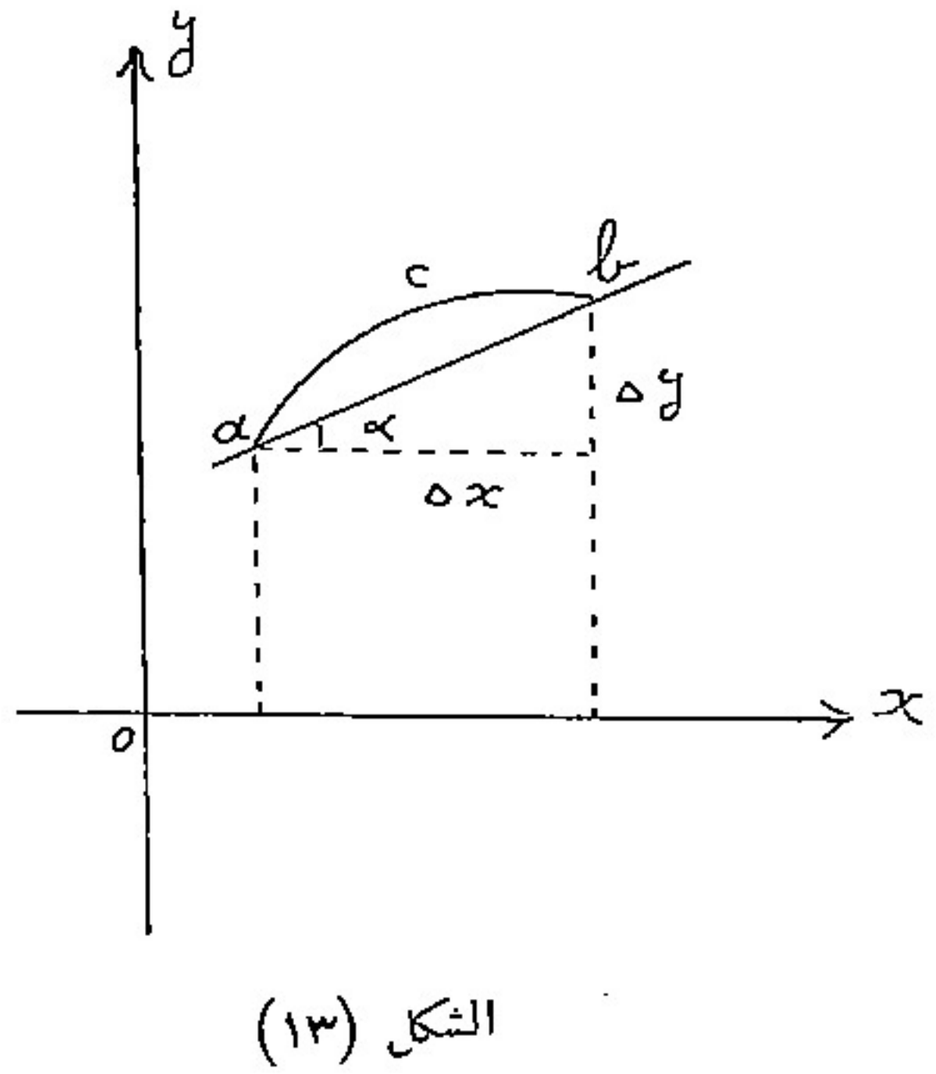
٦ ـ ٣ ـ ١ ـ تعاريف :

تزايد المتحول : اذا أعطينا للمتحول قيمة أولى x_1 ثم أعطيناه قيمة ثانية x_2 فاننا نسمي الفضل $x_2 - x_1$ بتزايد المتحول ونرمز له : $\Delta x = x_2 - x_1$.

تزايد التابع : من أجل x_1 اذا اخذ التابع قيمة أولى y_1 ومن أجل x_2 أخذ قيمة ثانية y_2 فاننا نسمي الفضل $y_2 - y_1$ بتزايد التابع ونرمز له : $\Delta y = y_2 - y_1$.

ميل القاطع : ليكن التابع $y = f(x)$ ولنفرض أننا رسمنا خطه البياني c شكل (١٣) ولتكن $a, b \in c$ بحيث $a(x,y)$ ، $b(x+\Delta x, y+\Delta y)$ نصل بين a, b نحصل على القاطع ab الذي يصنع مع محور الفواصل زاوية α ويكون :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



الشكل (١٣)

ميل المماس : اذا دورنا القاطع ab بحيث تقترب b من a حتى تنطبق عليها عندئذٍ يأخذ القاطع نهاية الاوضاع ويصبح مماساً للمنحني ويبقى في جميع الاوضاع ميل للقاطع $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ حتى اذا ما اصبح مماساً يصبح ميله نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$.

المشتق : نقصد بمشتق تابع نهاية نسبة تزايد التابع الى تزايد المتحول عندما ينتهي الاخير الى الصفر أي :

المشتق : $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ ،

ونرمز له :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لكن وجدنا أن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x \to 0}$ تمثل ميل المماس للمنحني نستنتج أن المشتق y' يمثل هندسياً ميل المماس للمنحني .

٦ - ٣ - ٢ - خواص المشتقات :

١ً - مشتق العدد الثابت يساوي الصفر :

أي بفرض $y = c$ حيث c ثابت .

فان :

$$y' = c' = 0$$

البرهان : بما أن c ثابتة فعندما نعطي للمتحول تزايداً Δx فان c لا يتغير أي :

$$y + \Delta y = c \qquad \text{وبالتالي} \qquad \Delta y = 0$$

ويكون :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

٢ً ـ مشتق المتحول يساوي الواحد :

أي بفرض :

$$y = x$$

فان :

$$y' = x' = 1$$

البرهان : ليكن $y = x$ نعطي للمتحول تزايداً Δx ينتج :

$$y + \Delta y = x + \Delta x$$

ومنه :

$$\Delta y = \Delta x$$

أو : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ وهذه النسبة صحيحة مهما تكن Δx وعندما نجعل $\Delta x \searrow 0$ فان النسبة تبقى مساوية الواحد أي :

$$y' = 1$$

٣ً ـ مشتق جداء تابع بعدد ثابت : ليكن $y = A \cdot u$ حيث A عدد ثابت ، u تابع، نعطي للمتحول تزايداً Δx ينتج :

$$y + \Delta y = A (u + \Delta u)$$

بالطرح :

$$\Delta y = A \cdot \Delta u$$

نقسم الطرفين على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A . \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

بجعل $\Delta x \to 0$ ينتج :

$$y' = A \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = A \cdot u'$$

٤ً ـ مشتق مجموع توابع يساوي مجموع مشتقاتها :

ليكن :

$$y = u_1 + u_2 + \ldots$$

نعطي المتحول تزايداً Δx ينتج :

$$y + \Delta y = u_1 + \Delta u_1 + u_2 + \Delta u_2 + \dots$$

بالطرح :

$$\Delta y = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots$$

نقسم الطرفين على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \dots$$

بجعل $\Delta x \to 0$ نجد :

$$y' = u_1' + u_2' + \dots$$

٥" ـ مشتق جداء تابعين : ليكن :

$$y = u \cdot v$$

نعطي المتحول تزايداً Δx ينتج :

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

بفك الاقواس :

$$y + \Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

بالطرح :

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

نقسم على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

نضرب ونقسم الحد الاخير في الطرف الايمن بـ Δx يكون :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

بجعل $\Delta x \to 0$:

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u' + u' \cdot v' \cdot 0$$

ومنه :

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

والخلاصة : مشتق جـــداء تابعين يساوي مشتق الاول في الثاني زائداً مشتق الثاني في الاول .

٦ً ـ مشتق جداء عدة توابع : ليكن :

$$y = u \cdot v \cdot w$$

لحساب المشتق يكتب بالشكل :

$$y = u \cdot (v \cdot w)$$

وبتطبيق الخاصة السابقة على اعتبار $(v.w)$ يمثل تابعاً واحداً :

$$y' = u' (v \cdot w) + u \cdot (v \cdot w)'$$

وهذا يعطي :

$$y' = u' \cdot v \cdot w + u (v' \cdot w + w' \cdot v)$$

ومنه :

$$y' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v$$

نستنتج ان مشتق جداء عدة توابع يساوي مجموع جداءات مشتق كل تابـع في بقية التوابـع .

٧ً ـ مشتق قوة لتابع : ليكن : $y = u^n$ حيث u تابع الى x , n عـدد صحيح موجب ، يكتب التابع بالشكل :

$$y = u \cdot u \ldots$$

نشتق الطرفين استناداً الى الخاصة (٦) :

$$y' = u' , u^{n-1} + u' \cdot u^{n-1} + \ldots$$

ومنـــه :

$$y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

٨ً ـ مشتق كسر : ليكن :

$$y = \frac{u}{v}$$

ولحساب المشتق يكتب التابع بالشكل :

$$y \cdot v = u$$

باشتقاق الطرفين :

$$y' \cdot v + v' \cdot y = u'$$

أو :

$$y' \cdot v = u' - v' \cdot y$$

نعوض عن y بقيمتها :

$$y' \cdot v = u' - v' \cdot \frac{u}{v}$$

وبالاصلاح :

$$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

أي : مشتق كسر يساوي مشتق الصورة في المخرج ناقصاً مشتق المخرج فيالصورة مقسوماً على مربع المخرج .

٩ً ـ مشتق تابع التابع :

ليكن $y = f(u)$ وبفرض $u = g(x)$ فاننا نسمي y بتابع التابع ، ولحساب مشتقه بالنسبة الى x نقول : حسب تعريف المشتق نكتب :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x}$$

بجعل $\Delta x \to 0$ ينتج :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

اي :

$$\boxed{y_x' = y_u' \cdot u_x'}$$

وهذه العلاقة تعني : لحساب مشتق تابع نشتقه بالنسبة للحرف المرتبط به مباشرة ثم نضرب الناتج بمشتق هذا الحرف سواء أكان الحرف متحولا أم تابعاً .

٦ - ٣ - ٣ - مشتق التابع العكسي :

ليكن التابع $y = f(x)$ ومشتقه y'_x وليكن التابع العكسي $x = g(y)$ ومشتقه x'_y فالعلاقة بين المشتقين هي :

$$\boxed{y'_x \cdot x'_y = 1}$$

البرهان : نستطيع أن نكتب :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

بجعل $\Delta x \to 0$ ينتج :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \qquad \text{وهو المطلوب}$$

٦ - ٣ - ٤ - مشتقات النسب المثلثية :

١ً - مشتق الجيب : ليكن $y = \sin x$.

نعطي المتحول تزايداً Δx فيكون :

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

بالطرح :

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

وحسب دساتير التحويل :

$$\Delta y = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2}$$

نقسم الطرفين على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

ويكتب بالشكل :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

بجعل $\Delta x \to 0$ مع مراعاة ان النسبة في الطرف الايمن تنتهي الى الواحد . نجد:

$$y' = \cos x \cdot 1$$

أي :

$$y' = \cos x$$

٢ً ـ مشتق جيب التمام :

ليكن التابع :

$$y = \cos x$$

لحساب المشتق نكتب :

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

بفرض :

$$\frac{\pi}{2} - x = u$$

يكون :

$$y = \sin u$$

بالاشتقاق :

$$y' = \cos u \cdot u'$$

بالتعويض :

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$$

ومنه :

$$y' = -\sin x$$

٣ً ـ مشتق الظل :

ليكن التابع :

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

وبتطبيق قاعدة مشتق كسر ينتج :

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

ومنـــه :

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

٦ ـ ٣ ـ ٥ ـ مشتق التابع : $y = x^n$

حيث n عدد ناطق ما .

آ ـ بفرض n على شكل كسر من قبيل $n = \frac{1}{q}$.

يكتب التابع بالشكل :

$$y = x^n = x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$$

حيث q عدد صحيح موجب ، برفع الطرفين الى القوة q نحصل على تابعه العكسي:

$$x = y^q$$

وبالاشتقاق :

$$x'_y = q \cdot y^{q-1}$$

وحسب العلاقة بين مشتقي التابع والتابع العكسي له ، نكتب :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{q \cdot y^{q-1}}$$

نعوض عن y بقيمتها :

$$y'_x = \frac{1}{q \cdot x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

لكن لدينا $n = \frac{1}{q}$ نبدل :

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

ونلاحظ أن قاعدة مشتق $y = x^n$ لم تتغير سواء أكان n عدداً صحيحاً أم كسراً من الشكل $\frac{1}{q}$.

ب ـ بفرض n على شكل كسر من نبيل $n = \frac{p}{q}$.

يكتب التابع بالشكل :

$$y = x^n = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

نفرض مجهولاً مساعداً :

$$u = x^p$$

نعوض :

$$y = \sqrt[q]{u} = u^{\frac{1}{q}}$$

وبالاشتقاق استناداً الى الحالة (آ) والى قاعدة تابع التابع :

$$y' = \frac{1}{q} \cdot u^{\frac{1}{q}-1} \cdot u'$$

نعوض :

$$y' = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-p} \cdot p \cdot x^{p-1}$$

أو :

$$y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} = n\, x^{n-1}$$

ونلاحظ أن قاعدة مشتق $y=x^n$ لم تتغير سواء أكان n صحيحاً أم كسراً من الشكل $\frac{p}{q}$.

جـ – بفرض n عدداً سالباً . أي : $n = -K$ حيث K عدد موجب .

يكتب التابع بالشكل :

$$y = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

وبتطبيق قاعدة مشتق كسر :

$$y' = \frac{-K\,x^{k-1}}{x^{2k}} = -K\,x^{-k-1}$$

أو :

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

والخلاصة : مهما تكن قيمة العدد الناطق n فإن مشتق التابع :

$y = x^n$ هو دوماً $y' = n \cdot x^{n-1}$

٦ – ٣ – ٦ – مشتق التابع اللغاريتمي :

آ – $y = \log x$

نعطي للمتحول تزايداً Δx فيكون :

$$y + \Delta y = \log (x + \Delta x)$$

ومنه :

$$\Delta y = \log (x + \Delta x) - \log x$$

أو :

$$\Delta y = \log \frac{x+\Delta x}{x}$$

$$\Delta y = \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

نقسم على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

أو :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

ويكتب بالشكل :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

وبفرض :

$$\frac{x}{\Delta x} = m \quad \text{يكون} \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m}$$

يصبح ما داخل اللغاريتم من الشكل :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

بجعل $\Delta x \to 0$ فان $m \to \infty$ والمقدار السابق ينتهي - كما نعلم - الى e .

بالتعويض ينتج :

$$y' = \frac{1}{x} \log e$$

أي :

$$y' = \frac{1}{x} \cdot 1$$

وأخيراً :

$$y' = \frac{1}{x}$$

والخلاصة بفرض :

$$y = \log x \quad \text{فان} \quad y' = \frac{1}{x}$$

ب ـ $y = \log_a x$

يكتب هذا التابع بالشكل :

$x = a^y$

تأخذ اللغاريتم النيبري للطرفين :

$\log x = y \log a$

بأخذ مشتق الطرفين :

$$\frac{1}{x} = y' . \log a$$

ومنـــه :

$$y' = \frac{1}{x . \log a}$$

نتيجة : بفرض $y = \log u$ فان :

$$y' = \frac{u'}{u}$$

نتيجة : بفرض $y = \log_a u$ فان :

$$y' = \frac{u'}{u . \log a}$$

٦ ـ ٣ ـ ٧ ـ مشتق التابع الاسي :

آ) $y = a^x$

التابع امكسي له :

$x = \log_a y$

بالاشتقاق :

$$x'_y = \frac{1}{y . \log a}$$

ونعلم ان :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

بالتعويض ينتج :

$$y'_x = y \cdot \log a$$

أو :

$$y'_x = a^x \cdot \log a$$

والخلاصة : بفرض :

$$y = a^x$$

فان :

$$y' = a^x \cdot \log a$$

ب)

$$y = e^x$$

حسب الحالة السابقة يكون :

$$y' = e^x \cdot \log e$$

$$y' = e^x \cdot 1 = e^x$$

والخلاصة : بفرض $y = e^x$ فان $y' = e^x$ وهذا هو التابع الوحيـــد الذي مشتقه يساويه .

٦ - ٣ - ٨ - الاشتقاق اللغاريتمي :

كثيراً ما يتعذر علينا حساب مشتق تابع بالطرق المعتادة ، وقد يكون من الاسهل أخذ لغاريتم الطرفين ثم اجراء عملية الاشتقاق . تسمي العملية هذه بالاشتقاق اللغاريتمي . هذه الطريقة يمكن اتباعها دوماً وبفضل تطبيقها عندما يكون التابع على شكل جداء أو حاصل قسمة وبصورة خاصة اذا كان التابع على شكل قوة اسها يتبع الى x .

مثال (١) : احسب مشتق التابع :

$$y = e^{x^2}$$

نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = x^2$$

بالاشتقاق :

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

نعوض عن y بقيمتها :

$$y' = 2x \cdot e^{x^2}$$

مثال (٢) : احسب مشتق التابع :

$$y = x^x$$

بأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = x \log x$$

بالاشتقاق :

$$\frac{y'}{y} = \log x + \frac{1}{x} \cdot x$$

أو :

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

نعوض عن y بقيمتها :

$$y' = x^x (\log x + 1)$$

مثال (٣) : احسب مشتق التابع :

$$y = a^{\log x}$$

نفرض $\log x = u$ فيكون :

$$y = a^u$$

بالاشتقاق :

$$y' = a^u \cdot \log a \cdot u'$$

نعوض :

$$y' = a^{\log x} \cdot \log a \cdot \frac{1}{x}$$

مثال (٤) : احسب مشتق التابع :

$$y = x^{\log x}$$

بأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = \log x \cdot \log x$$

أو :

$$\log y = (\log x)^2$$

بالاشتقاق :

$$\frac{y'}{y} = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}$$

أو :

$$y' = 2 y \log x \cdot \frac{1}{x}$$

نعوض عن y بقيمتها :

$$y' = 2 \frac{x^{\log x}}{x} \cdot \log x$$

أي :

$$y' = x^{\log x - 1} \cdot \log x^2$$

تمارين

١ – بفرض $x \to 0$ بين أن اللامتناهيات في الصغر الآتية هي من مرتبة x :

$$5x - 3x^2 \quad , \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg} 5x \quad , \quad \operatorname{tg} 2x \quad , \quad \sin 3x$$

٢ – بفرض $x \to 1$ بين ان اللامتناهيين في الصغر : $1 - x$ ، $1 - \sqrt{x}$ هما من مرتبة واحدة .

٣ – بفرض $x \to 0$ بين ان اللامتناهيين في الصغر $2(\operatorname{tg} x - \sin x)$, x^3 متكافئان :

٤ – بفرض $x \to \infty$ بين ان اللامتناهيين في الكبر الآتيين هما من مرتبة واحدة :

$$5x^4 - 2x \quad , \quad 3x^4 + 1$$

٥ – برهن أن :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + x - 1}{2x^3 + 3} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x^3 + 2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + 3x}{3x^2 - 5} = \infty$$

احسب مشتقات التوابع الآتية

الجواب

٦ – $y = e^{x^x}$

$$y' = x^x (\log x + 1) e^{x^x}$$

الجواب

$$y = x^{\sin x} \qquad y' = \left(\cos x \cdot \log x + \frac{\sin x}{x}\right) x^{snix} \qquad - ٧$$

$$y = (\sin x)^x \qquad y' = (\log \sin x + x \operatorname{cotg} x)(\sin x)^x \qquad - ٨$$

$$y = \frac{x^2}{\log x} \qquad y' = \frac{x(2 \log x - 1)}{\log^2 x} \qquad - ٩$$

$$y = x^3 \log x - \frac{x^3}{3} \qquad y' = 3 x^2 \log x \qquad - ١٠$$

$$y = \frac{e^x}{x^2} \qquad y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \qquad - ١١$$

$$y = \frac{x^5}{e^x} \qquad y' = \frac{5 x^4 - x^5}{e^x} \qquad - ١٢$$

$$y = \sqrt{x \cdot e^x + x} \qquad y' = \frac{1}{2}(x e^x + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (e^x + x \cdot e^x + 1) \qquad - ١٣$$

$$y = \sqrt{e^{ax}} \qquad y' = \frac{a}{2} e^{\frac{a x}{2}} \qquad - ١٤$$

$$y = \log \cos \frac{x-1}{x} \qquad y' = \frac{-\operatorname{tg}\frac{x-1}{x}}{x^2} \qquad - ١٥$$

$$y = \log [\log (3 - 2 x^3)] \qquad y' = \frac{-6 x^2}{(3 - 2 x^3) \log (3 - 2 x^3)} \qquad - ١٦$$

$$y = x^{x^2} \qquad y' = x^{x^2+1}[2 \log x + 1] \qquad - ١٧$$

$$y = \sqrt[x]{x} \qquad y' = x^{\frac{1}{x}-2}[1 - \log x] \qquad - ١٨$$

الجواب

١٩ - $y = x^{x^x}$

$$y' = x^{x^x} \cdot x^x \left[\log^2 x + \log x + \frac{1}{x} \right]$$

٢٠ - $y = (\cos x)^{\sin x}$

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \log \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x \right]$$

٢١ - $y = \log^2 x - \log(\log x)$

$$y' = \frac{2 \log x}{x} - \frac{1}{x \log x}$$

٢٢ - $y = e^{\sin x}$

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

٢٣ - $y = e^{\cos x} \sin x$

$$y' = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$$

٢٤ - $y = e^x \log \sin x$

$$y' = e^x (\operatorname{cotg} x + \log \sin x)$$

الفصل السابع

التوابع الدائرية العكسية ـ التوابع القطعية

التوابع القطعية العكسية

FONCTIONS CIRCULAIRES INVERSES — FONCTIONS HYPERBOLIQUES — FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES

٧ ـ ١ ـ التوابع الدائرية العكسية

نقصد بالتوابع الدائرية كلاً من الجيب $y = \sin x$ وجيب التمام $y = \cos x$ والظل $y = \operatorname{tg} x$. أما التوابع الدائرية العكسية فهي :

٧ ـ ١ ـ ١ ـ قوس الجيب :

ليكن التابع (1) $y = \sin x$.

لنقرأ العلاقة (1) من اليمين الى اليسار فنقول : x هي القوس التي جيبها y .

ونكتب هذا الكلام بالشكل :

$$x = \operatorname{arc\,sin}\, y \qquad (2)$$

والخط البياني لهذا التابع هو نفس الخط البياني للتابع (1) ولكن جرت العادة أن نسمي التابع y والمتحول x فنكتب التابع (2) بالاصطلاحات المألوفة فيصبح :

$$y = \operatorname{arc\,sin}\, x \qquad (3)$$

\oo

حيث x تمثل قيمة الجيب وتتحول ضمن المجال $[-1, +1]$ ونلاحظ :

$$\forall x_0 \in [-1, +1]$$

فانه يقابلها عدد غير متناه من القيم للزاوية y معينة بالعلاقتين :

$$y = y_0 + 2k\pi$$

$$y = \pi - y_0 + 2k\pi$$

حيث :

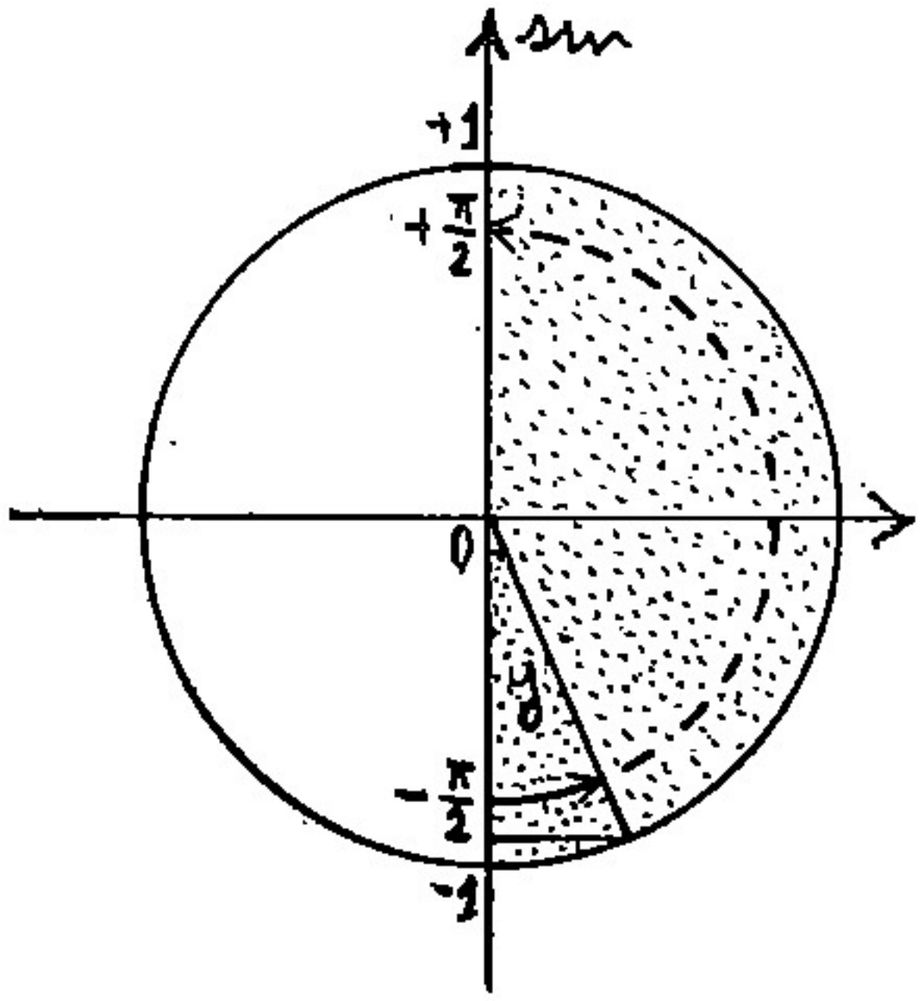
$$y_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

وتحقق العلاقة :

$$x_0 = \sin y_0$$

وعند دراسة التابع $y = \arcsin x$ نأخذ من هذه القيم لـ y ما هو كاف لتغطية المجال $[-1, +1]$ فنقتصر على جمل :

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$$



الشكل (١٤)

أما الخط البياني لهذا التابع فهو يناظر الخط البياني للتابع (1) بالنسبة الى منصف الربع الاول .

مشتق قوس الجيب : ليكن التابع :

$$y = \arcsin x$$

فتابعه العكسي :

$$x = \sin y$$

ولدينا :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

بما أن :

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$$

يكون :

$$\cos y \geq 0$$

ونستطيع أن نكتب :

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

ويصبح لدينا :

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

نعوض عن $\sin y$:

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

٧ - ١ - ٢ - قوس جيب التمام :

ليكن التابع :

$$y = \cos x$$

فاننا نكتب ـ ونحن نقرأ من اليمين الى اليسار ـ :

$$x = \arccos y$$

وجرياً على الاصطلاحات المألوفة نكتب :

$$y = \arccos x$$

حيث x تمثل قيمة جيب التمام وتتحول ضمن المجال $[+1\ ,\ -1]$ مع ملاحظة :

$$\forall\, x_0 \in [\ -1\ ,\ +1\ ]$$

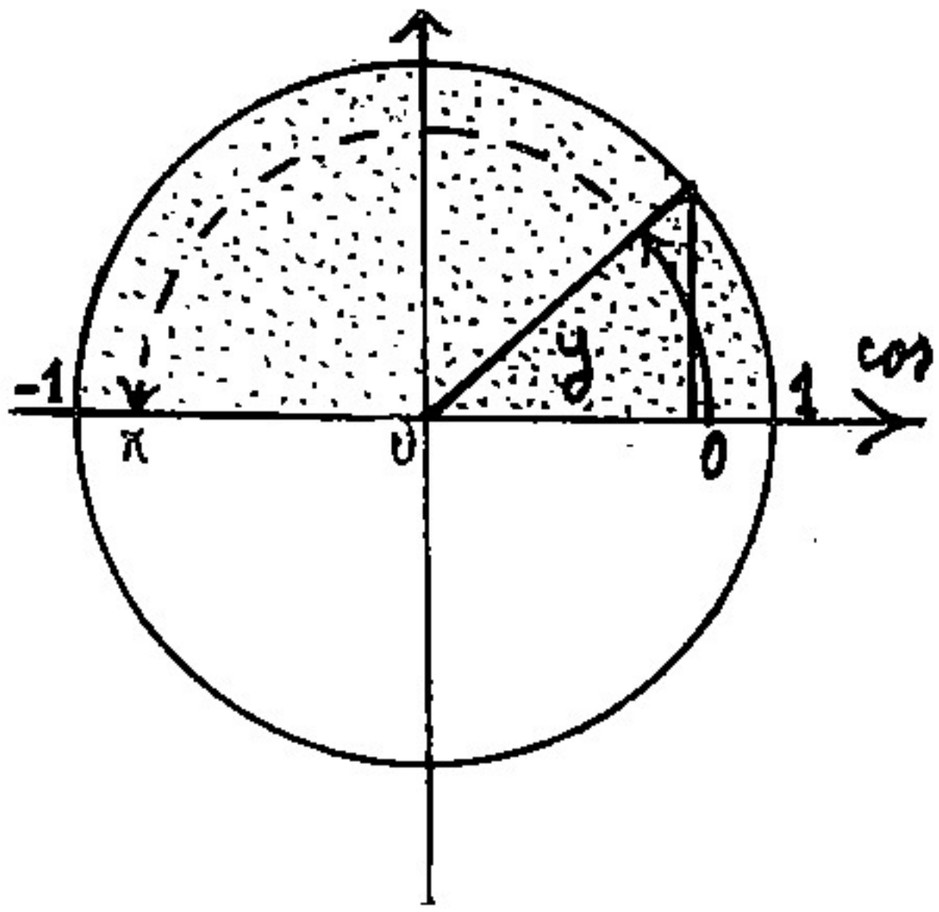
فانه يقابلها عدد غير متناه من القيم للزاوية y معينة بالعلاقة :

$$y = \pm\, y_{..} + 2\,k\,\pi$$

حيث $y_0 \in [0\ ,\pi]$ وتحقق العلاقة $x_0 = \cos y_0$:

وعند دراسة التابع $y = \arccos x$ نأخذ من هذه القيم لـ y ما هـــو كاف لتغطية المجال $[+1\ .\ -1]$ فنقتصر على جمل :

$$0 \leqq y \leqq \pi$$



الشكل (١٥)

مشتق قوس جيب التمام : ليكن التابع :

$$y = \arccos x$$

تابعة العكسي :

$$x = \cos y$$

نعلم أن :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y}$$

بما أن $0 \leqq y \leqq \pi$ يكون $\sin y \geqq 0$ ونستطيع أن نكتب :

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

ويصبح لدينا :

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

ومنه :

$$\boxed{y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

٧ - ١ - ٣ - قوس الظل :

ليكن التابع :

$$y = \operatorname{tg} x$$

تابعه العكسي :

$$x = \operatorname{arc\,tg} y$$

وجرياً على الاصطلاحات المألوفة :

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

حيث x تمثل قيمة الظل وتتحول ضمن المجال $]-\infty , +\infty[$ مع ملاحظة :

$$\forall x_0 \in]-\infty , +\infty[$$

فانه يقابلها عدد غير متناه من القيم للزاوية y معينة بالعلاقة :

$$y = y_0 + k\,\pi$$

حيث :

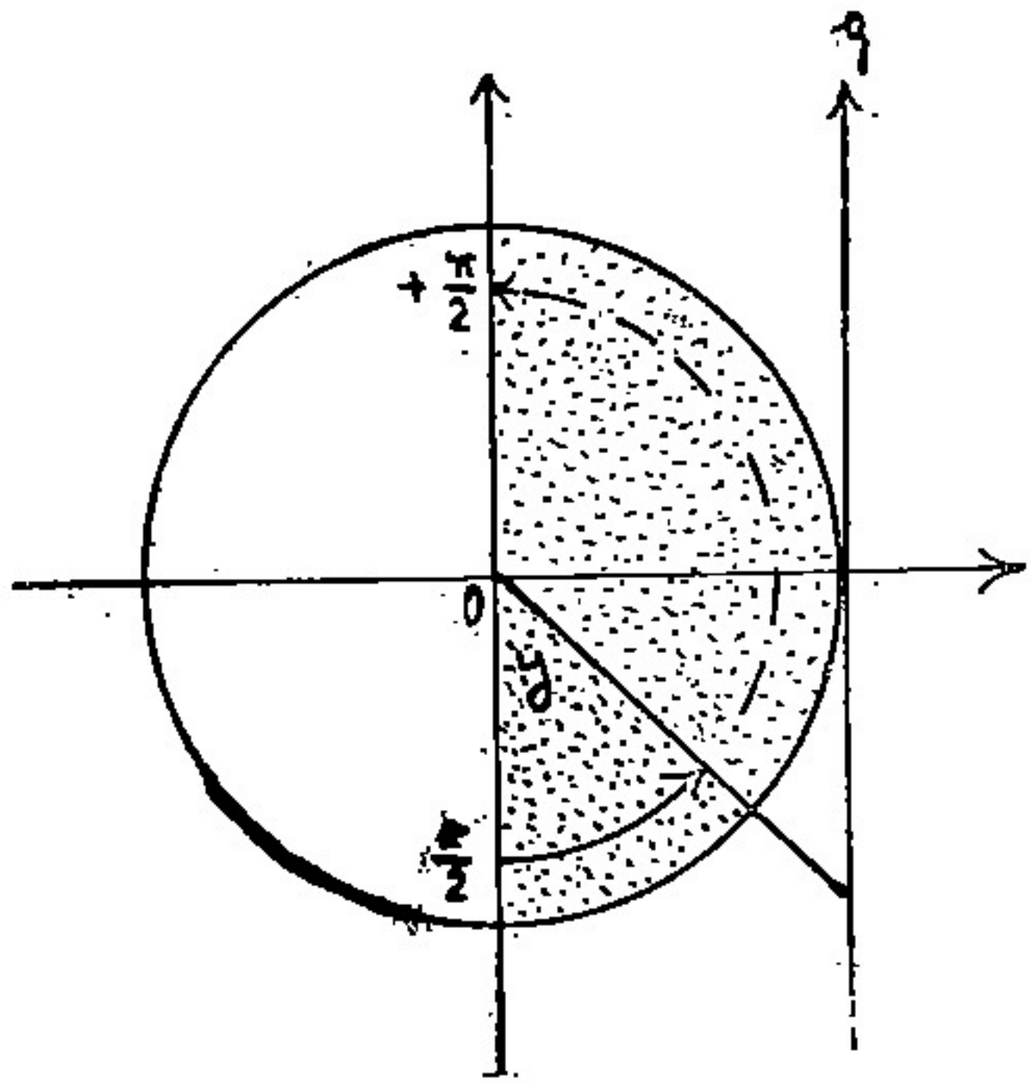
$$y_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,+\frac{\pi}{2}\right[$$

وتحقق العلاقة :

$$x_0 = \operatorname{tg} y_0$$

وعند دراسة التابع $y = \operatorname{arc\,tg}\, x$. نأخذ من هذه القيم لـ y ما هـو كافٍ لتغطية المجال $]-\infty\,,\,+\infty[$ فنكتفي بجعل :

$$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$



الشكل (١٦)

مشتق قوس الظل : ليكن التابع :

$$y = \operatorname{arc\,tg}\, x$$

تابعه العكسي :

$$x = \operatorname{tg} y$$

نعلم ان :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

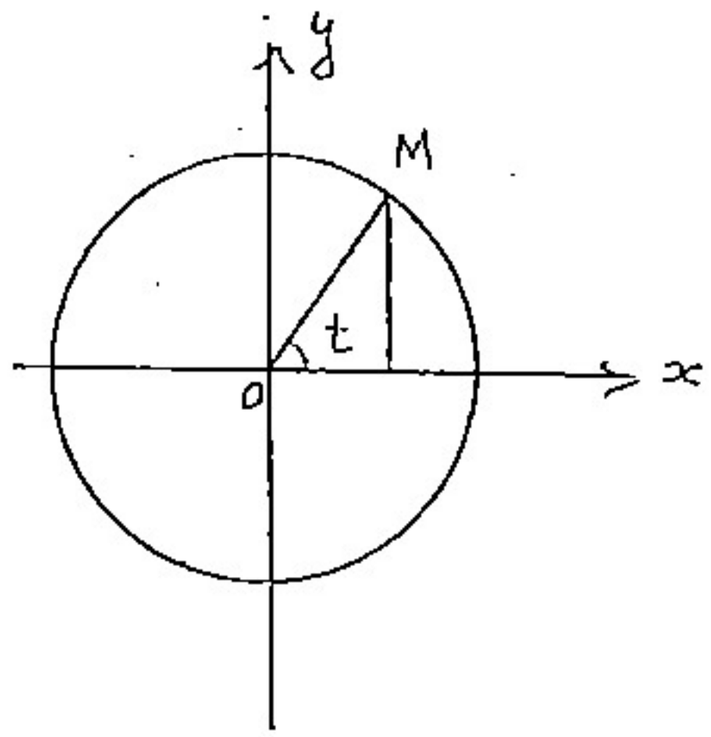
أي :

$$\boxed{y' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

٧ ـ ٢ التوابع القطعية

٧ ـ ٢ ـ ١ ـ تمهيد :

لنأخذ النقطة M على محيط الدائرة المثلثية التي معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ شكل(١٧). نعلم أن فصلها $\cos t$ وترتيبها $\sin t$ وميل نصف القطر OM هـو $\operatorname{tg} t$ حيث t زاوية نقدرها بالراديان :



الشكل (١٧)

ونعلم أن سطح القطاع الدائري AOM هو t/2 ومنه نستنتج ان :

$$t = \text{٢ سطح القطاع}$$

أي : ان فصل النقطة M هو cos t حيث t تمثل ضعف سطح القطاع .

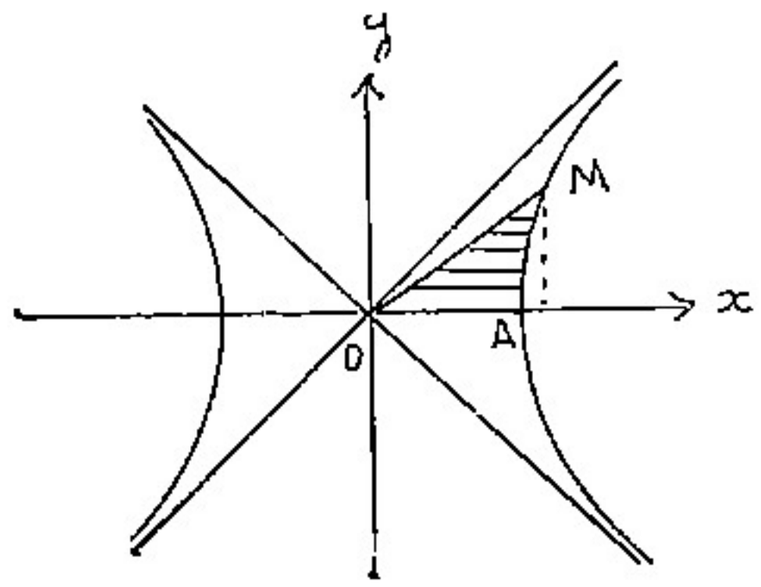
وان ترتيب النقطة M هو sin t حيث t تمثل ضعف سطح القطاع ، وان ميل نصف القطر OM هو tg t حيث t تمثل ضعف سطح القطاع .

٧ - ٢ - ٢ - التوابع القطعية :

بدلاً من الدائرة لنأخذ قطعاً زائداً متساوي الساقين معادلته :

$$x^2 - y^2 = 1$$

وليكن خطه البياني كما في الشكل (١٨) . نأخذ نقطة على أحد فرعيه ولتكن M ، ولنرمز لضعف السطح الذي يمسحه نصف القطر الشعاعي OM بالحرف u .



الشكل (١٨)

أي : $u = \text{OAM سطح القطاع ٢}$

وهو موجب اذا وقع فوق محور الفواصل وسالب تحته . نسمي فصل النقطة M - وهو موجب دوماً وأكبر أو يساوي الواحد - بجيب التمام القطعي للمتحول u ونرمز له :

$$\text{ch u} \quad \text{حيث} \quad \text{chu} \geqq 1$$

ونسمي ترتيب النقطة M بالجيب القطعي للمتحول u وزمز له :

sh u واشارته من اشارة u

كما نسمي ميل نصف القطر الشعاعي OM بالظل القطعي وزمز له :

$$\text{th } u = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u}$$

اعتماداً على هذه التعاريف الهندسية سنبرهن في المستقبل أن :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ch } u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \\ \text{sh } u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} \\ \text{th } u &= \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \end{aligned}}$$

وهي تمثل التوابع القطعية ، كما أن هذه الدساتير تولد بحثاً جديداً يسمى :

٧ - ٢ - ٣ - المثلثات القطعية :

لدينا :

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

بالجمع :

$$\boxed{\text{ch } x + \text{sh } x = e^x} \qquad (1)$$

بالطرح :

$$\boxed{\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}} \qquad (2)$$

بضرب الدستورين (1) ، (2) طرفاً بطرف نجد :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1} \qquad (3)$$

١ً) دساتير الجمع : لدينا :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \frac{e^a \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}}{2}$$

وحسب الدستورين (1) ، (2) نعوض في الطرف الايمن :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{ch}\, a + \mathrm{sh}\, a)(\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b) + (\mathrm{ch}\, a - \mathrm{sh}\, a)(\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, b) \right]$$

بفك الاقواس والاصلاح نجد :

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b \qquad (4)$$

بنفس الطريقة نجد :

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b \qquad (5)$$

بتقسيم (5) على (4) ثم تقسيم الصورة والمخرج على $\mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b$ نجد :

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a \cdot \mathrm{th}\, b} \qquad (6)$$

٢ً) دساتير الطرح : نبدل عن b ؛ $-b$ في الدساتير السابقة نحصل على :

$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b \qquad (7)$$

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b \qquad (8)$$

$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a \cdot \mathrm{th}\, b} \qquad (9)$$

٣ً) دساتير التحويل : ومن دساتير الجمع ودساتير الطرح نستنتج الدساتير الآتية :

$$2\,\mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b = \mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b) \qquad (10)$$

$$2\,\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b = \mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b) \qquad (11)$$

$$2\,\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b = \mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b) \qquad (12)$$

نفرض :

$$a+b=p \qquad a-b=q$$

ومنـــه :

$$b=\frac{p-q}{2} \quad , \quad a=\frac{p+q}{2}$$

ونعوض في الدساتير السابقة نجد :

$$\text{ch}\,p+\text{ch}\,q = 2\,\text{ch}\frac{p+q}{2}\,.\,\text{ch}\frac{p-q}{2} \tag{13}$$

$$\text{ch}\,p-\text{ch}\,q = 2\,\text{sh}\frac{p+q}{2}\,.\,\text{sh}\frac{p-q}{2} \tag{14}$$

$$\text{sh}\,p+\text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\frac{p+q}{2}\,.\,\text{ch}\frac{p-q}{2} \tag{15}$$

وبالتعويض في الدستور الاخير عن q بـ q— نجد :

$$\text{sh}\,p-\text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\frac{p-q}{2}\,.\,\text{ch}\frac{p+q}{2} \tag{16}$$

٤ً) دساتير الضرب : بجعل $a=b=x$ في الدساتير (4) ، (5) ، (6) نجد :

$$\boxed{\text{ch}\,2x=\frac{1+\text{th}^2x}{1-\text{th}^2x}} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{\text{ch}\,2x=\text{ch}^2x+\text{sh}^2x} \tag{17}$$

$$\boxed{\text{sh}\,2x=\frac{2\,\text{th}\,x}{1-\text{th}^2x}} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{\text{sh}\,2x=2\,\text{sh}\,x\,.\,\text{ch}\,x} \tag{18}$$

$$\text{th}\,2x=\frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2x} \tag{19}$$

٥ً) دساتير التقسيم : لدينا :

$$\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$$

ومنـــه :

$$\text{ch}^2x=1+\text{sh}^2x$$

نعوض في (17) نجد :

$$\mathbf{ch\ 2x = 1 + 2\ sh^2\ x}$$

ومنـــه :

$$\boxed{\mathbf{2\ sh^2\ x = ch\ 2x - 1}} \qquad (20)$$

كذلك لدينا $\mathbf{sh^2\ x = ch^2\ x - 1}$. نعوض في (17) نجد :

$$\boxed{\mathbf{2\ ch^2\ x = ch\ 2x + 1}} \qquad (21)$$

٧ - ٢ - ٤ - مشتقات التوابع القطعية :

آ - مشتق جيب التمام القطعي :

نعلم ان :

$$\mathbf{y = ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

بالاشتقاق :

$$\mathbf{y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x}$$

والخلاصة : بفرض :

$$\mathbf{y = ch\ x}$$

فان :

$$\mathbf{y' = sh\ x}$$

ب - مشتق الجيب القطعي :

نعلم ان :

$$\mathbf{y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x}$$

بالاشتقاق :

$$\mathbf{y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\ x}$$

والخلاصة : بفرض :

$$y = \text{sh } x$$

فان :

$$y' = \text{ch } x$$

جـ ـ مشتق الظل القطعي :

نعلم ان :

$$y = \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$$

بالاشتقاق :

$$y' = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x}$$

أو :

$$y' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$$

والخلاصة : بفرض :

$$y = \text{th } x$$

فان :

$$y' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$$

٧ ـ ٣ التوابع القطعية العكسية

٧ ـ ٣ ـ ١ ـ التابع العكسي لجيب التمام القطعي :

ليكن التابع $x = \text{ch } y$ نسمي y بدليل (او مضمون Argument) التابع القطعي:

نرمز لتابعه العكسي بالرمز :

$$y = \text{arg ch } x$$

حيث $x \geq 1$ مع اعتبار $y \geq 0$. ويمكن ايجاد قيمة y كما يأتي :

لدينا بالفرض :

$$x = \text{ch}\, y$$

ولدينـــا :

$$\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$$

نعوض :

$$x^2 - \text{sh}^2 y = 1$$

ومنـــه :

$$\text{sh}\, y = \mp \sqrt{x^2 - 1}$$

مع العلم ان اشارة sh y من اشارة y ، وبما اننا اخذنا $y > 0$ اذن :

$$\text{sh}\, y = + \sqrt{x^2 - 1}$$

وحسب الدستور :

$$\text{ch}\, y + \text{sh}\, y = e^y$$

نعوض :

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

بأخذ لغاريتم الطرفين :

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

والخلاصة : بفرض :

$$x = \text{ch}\, y$$

تابعه العكسي :

$$y = \arg \text{ch}\, x$$

أو :

$$\boxed{y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

ـ مشتق التابع العكسي لجيب التمام القطعي :

ليكن التابع :

$$y = \arg \text{ch}\, x$$

فتابعه العكسي :

$$x = \operatorname{ch} y$$

لدينـا :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}}$$

بالتعويض :

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

٧ ـ ٣ ـ ٢ ـ التابع العكسي للجيب القطعي :

ليكن التابـع :

$$x = \operatorname{sh} y$$

فتابعه العكسي :

$$y = \operatorname{arg\,sh} x$$

ويمكن ايجاد قيمة y كما يأتي :

لدينا بالفرض :

$$\operatorname{sh} y = x$$

ولدينـا :

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$$

بالتعويض :

$$\operatorname{ch}^2 y - x^2 = 1$$

ومنـــه :

$$\operatorname{ch} y = \sqrt{x^2 + 1}$$

حيث ch y موجب دوما :

وحسب الدستور :

$$e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$$

نعوض :

$$e^y = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

بأخذ لغاريتم الطرفين :

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

والخلاصة : بفرض :

$$x = \text{sh}\, y$$

تابعه العكسي :

$$y = \text{arg sh}\, y$$

أو :

$$\boxed{y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$$

ـ مشتق التابع العكسي للجيب القطعي :

ليكن :

$$y = \text{arg sh}\, x$$

فتابعه العكسي :

$$x = \text{sh}\, y$$

ولدينا :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 y + 1}}$$

نعوض :

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

٧ ـ ٣ ـ ٣ ـ التابع العكسي للظل القطعي :

ليكن التابع :

$$x = \text{th}\, y$$

فتابعه العكسي :

$$y = \operatorname{arg\,th}\, x$$

ويمكن ايجاد قيمة y كما يأتي :

لدينا :

$$x = \operatorname{th}\, y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}$$

أو :

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

أو :

$$x + x \cdot e^{2y} = e^{2y} - 1$$

ومنه :

$$e^{2y}(1 - x) = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

بأخذ لغاريتم الطرفين :

$$2y = \log \frac{1 + x}{1 - x}$$

وأخيراً :

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|}$$

- مشتق التابع العكسي للظل القطعي :

ليكن التابع :

$$y = \operatorname{arg\,th}\, x$$

تابعه العكسي :

$$x = \operatorname{th}\, y$$

ولدينا :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

والخلاصة : بفرض :

$$y = \operatorname{arg\,th}\, x$$

فان :

$$y = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|$$

وان :

$$\boxed{y' = \frac{1}{1 - x^2}}$$

تمارين

احسب مشتقات التوابع التالية :

الجواب

١ - $y = \arcsin \frac{x}{a}$ — $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

٢ - $y = (\arcsin x)^2$ — $y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

٣ - $y = \operatorname{arc\,tg} (x^2+1)$ — $y' = \frac{2x}{1 + (x^2+1)^2}$

٤ - $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2}$ — $y' = \frac{2}{1 + x^2}$

٥ - $y = \frac{\arccos x}{x}$ — $y' = \frac{-(x + \sqrt{1-x^2} \arccos x)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$

٦ - $y = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ — $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

٧ - $y = x \arcsin x$ — $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

٨ - $y = \arccos (\log x)$ — $y' = -\frac{1}{x \sqrt{1 - \log^2 x}}$

٩ - $y = x \operatorname{sh} x$ — $y' = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$

١٠ - $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$ — $y' = \frac{2x \operatorname{ch} x - x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$

١١ - $y = \operatorname{th} x - x$ — $y' = -\operatorname{th}^2 x$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arg\,th} x \qquad y' = \frac{-2x^2}{1-x^4} \qquad -\ ١٢$$

$$y = \operatorname{arc\,sin} x \cdot \operatorname{arg\,sh} x \qquad -\ ١٣$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arg\,sh} x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arc\,sin} x$$

$$y = \frac{\operatorname{arg\,ch} x}{x} \qquad y' = \frac{x - \sqrt{x^2-1}\ \operatorname{arg\ ch} x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \qquad -\ ١٤$$

تمارين عامة على المشتقات

	احسب مشتقات التوابع الآتية :	الجواب
١ -	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
٢ -	$y = \sqrt{x^2 + a^2}$	$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
٣ -	$y = \sin^2 x$	$y' = \sin 2x$
٤ -	$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$	$y' = \frac{1}{1 + \cos x}$
٥ -	$y = x \sin x + \cos x$	$y' = x \cos x$
٦ -	$y = \log \cos x$	$y' = -\operatorname{tg} x$
٧ -	$y = \log \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{2}{\sin 2x}$
٨ -	$y = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$	$y' = \frac{1}{\cos x}$
٩ -	$y = \sin (\log x)$	$y'' = \frac{\cos (\log x)}{x}$
١٠ -	$y = \sin (\cos x)$	$y' = -\sin x \cdot \cos (\cos x)$
١١ -	$y = \log (ax + b)$	$y' = \frac{a}{ax + b}$
١٢ -	$y = \log \frac{1 + x}{1 - x}$	$y' = \frac{2}{1 - x^2}$

$y = \log(x^2 + x)$	$y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$	- ١٣
$y = \log(x^3 - 2x + 5)$	$y' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$	- ١٤
$y = x \cdot \log x$	$y' = \log x + 1$	- ١٥
$y = \log^3 x$	$y' = \frac{3\log^2 x}{x}$	- ١٦
$y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	- ١٧
$y = \log(\log x)$	$y' = \frac{1}{x \log x}$	- ١٨
$y = e^{ax}$	$y' = ae^{ax}$	- ١٩
$y = a^{x^2}$	$y' = 2x \cdot a^{x^2} \cdot \log a$	- ٢٠
$y = \frac{e^x}{1+e^x}$	$y' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$	- ٢١
$y = \arccos \frac{x}{a}$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	- ٢٢
$y = \arccos(x^2)$	$y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$	- ٢٣
$y = \arcsin x^2 + \arccos x^2$	$y' = 0$	- ٢٤
$y = \sqrt{a^2-x^2} + a \cdot \arcsin \frac{x}{a}$	$y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	- ٢٥
$y = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$	$y' = \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$	- ٢٦
$y = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}$	$y' = \frac{1}{5+4\sin x}$	- ٢٧

$$y' = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$$

$$y = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \log \operatorname{tg} x \qquad - ٢٨$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$y = \log \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \qquad - ٢٩$$

$$y' = \sqrt{2} \cdot \sin (\log x)$$

$$y = x \cdot \sin \left(\log x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad - ٣٠$$

$$y = \frac{1}{3} \log (1+x) - \frac{1}{6} \log (x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \qquad - ٣١$$

$$y' = \frac{1}{1+x^3}$$

$$y' = \frac{-1}{\sin x}$$

$$y = \arg \operatorname{th} (\sec x) \qquad - ٣٢$$

٣٣ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

٣٤ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = x^{2x} + \log (\sin x^2)$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

الفصل الثامن

التفاضل - المزايدات المحدودة
التفاضل الكلي - المشتق الكلي

DIFFÉRENTIELLE — ACCROISSEMENTS FINIS
DIFFÉRENTIELLE TOTALE – DÉRIVÉE TOTALE

٨ ـ ١ ـ التفاضل

٨ - ١ - ١ - تعريف :

ليكن التابع $y = f(x)$ فاذا اخذت x تزايداً Δx نتج للتابع تزايد Δy ، وتكون نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x \to 0}$ هي المشتق y' .

الا انه قبل ان نجعل $\Delta x \to 0$ فان النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لا تساوي المشتق y' ، ففي هذه الحالة نستطيع أن نكتب :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$$

حيث ε لامتناه في الصغر مع Δx ومنه :

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

وهذه تدل على ان Δy لامتناه في الصغر من المرتبة الاولى بالنسبة الى Δx وجزؤه الرئيسي هو $y' . \Delta x$ نسمي بالتعريف الجزء الرئيسي هذا بتفاضل التابع y ونرمز له بـ dy أي :

$$dy = y' . \Delta x \qquad (1)$$

بصورة خاصة اذا كان :

$$y = x$$

فان :

$$dy = dx = 1 . \Delta x = \Delta x$$

أي :

$$dx = \Delta x$$

وهذا يعني أنه لا فرق أن نقول تفاضل المتحول او تزايد المتحول . لنعوض في العلاقة (1) نجد :

$$\boxed{dy = y' . dx}$$

ويفيد هذا الدستور ان تفاضل تابع يساوي جداء مشتقه بتفاضل المتحول :

ومنه ينتج :

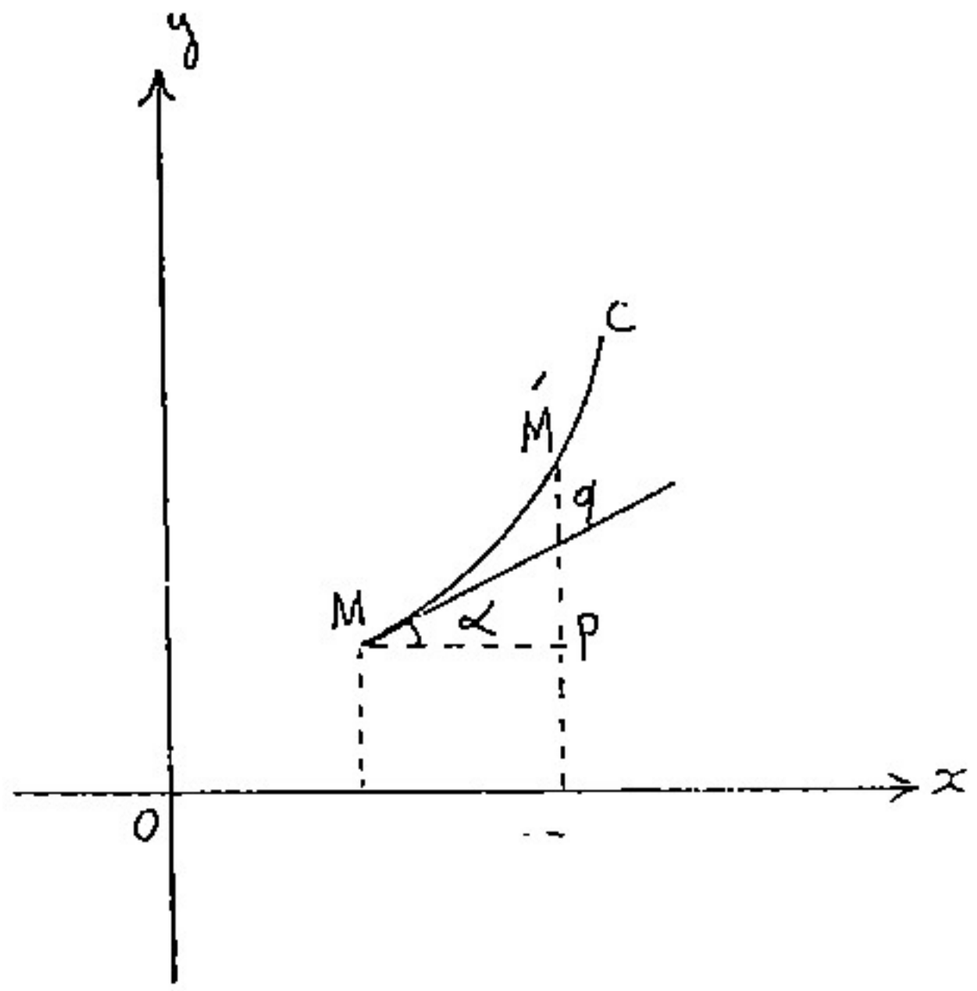
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y'}$$

أي أن مشتق تابع إن هو إلا حاصل قسمة تفاضل التابع على تفاضل المتحول .

٨ - ١ - ٢ - المعنى الهندسي لتفاضل تابع :

ليكن التابع $y = f(x)$ وليكن خطه البياني c شكل (١٩) وليكن $M, M' \in c$ حيث $M(x,y)$ ، $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$. ولنرسم المماس للمنحني في النقطة M. نجد في المثلث القائم :

$$tg\,\alpha = \frac{Pq}{Mp} = \frac{Pq}{\Delta x}$$



(الشكل ١٩)

لكن ميل المماس هو المشتق y′ اذن بالتعويض :

$$y' = \frac{Pq}{\Delta x}$$

ومنـــه :

$$Pq = y' \cdot \Delta x = y' \cdot dx$$

لكن نعلم ان :

$$dy = y' \cdot dx$$

بالمقارنة نجد :

$$dy = Pq$$

بينما تزايد التابـع :

$$\Delta y = PM'$$

ونلاحظ ان تفاضل التابع dy لا يساوي تزايده Δy اذ بينها فرق qM' يتضاءل تدريجياً كلمـا صغرنا Δx .

٨ ـ ٢ ـ ٣ ـ تفاضل تابع التابع :

ليكن التابع :

$$y = f(u) \qquad \text{حيث} \qquad u = g(x)$$

نعلم أن مشتق التابع y بالنسبة الى x :

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$$

نضرب الطرفين بـ dx :

$$y'_x \cdot dx = f'_u(u)\, u'_x \cdot dx$$

وحسب تعريف التفاضل نستطيع أن نعوض :

$$y'_x \cdot dx = dy$$

$$u'_x \cdot dx = du$$

ويصبح :

$$\boxed{dy = f'_u(u) \cdot du}$$

أي أن تفاضل تابع ما يساوي مشتق هذا التابع بالنسبة الى المتحول المتعلق به مباشرة مضروبا بتفاضل هذا المتحول وإن كان المتحول المذكور ليس بالمتحول المستقل .

٨ ـ ١ ـ ٤ ـ خواص التفاضل :

لما كان التفاضل هو جداء المشتق بتفاضل المتحول اذن خواص التفاضل هي نفس خواص المشتقات .

٨ ـ ١ ـ ٥ ـ التفاضلات المتالية :

ليكن التفاضل $dy = y' \cdot dx$ حيث نعتبر دوماً dx ثابتاً اختيارياً في جميع الحسابات . فاذا فاضلنا هذا التركيب حصلنا على التفاضل الثاني ولترمز d^2y (ونلفظه d اثنين y) فيكون :

$$d^2y = (y' \cdot dx)' \, dx$$

أي :

$$d^2 y = y'' \cdot dx \cdot dx$$

أو :

$$d^2 y = y'' \cdot dx^2$$

حيث dx^2 هو جداء dx في dx أي كمية مربعة بينما d^2y هـــو رمز ، ومن العلاقة الاخيرة نكتب :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

ولحساب التفاضل الثالث نكتب :

$$d^3 y = (y'' \cdot dx^2)' \cdot dx$$

أي :

$$d^3 y = y''' \cdot dx^2 \cdot dx$$

أو :

$$d^3 y = y''' \cdot dx^3$$

ومنـــه :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

ويقرأ (d ثلاثة y على dx ثلاثة) . وبنفس الطريقة نحسب التفاضـل النوني ونرمز له d^ny .

مثال : احسب التفاضلات المتالية للتابع :

$$y = \sin x$$

لدينـا :

$$dy = \cos x \cdot dx$$

$$d^2y = - \sin x \cdot dx^2$$

$$d^3y = - \cos x \cdot dx^3$$

ملاحظة هامة : اذا كان التابع على الشكل $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$ فان التفاضل الاول $dy = f'_u(u)\, du$.

واذا أردنا أن نجد التفاضل الثاني يجب الانتباه الى ان du لم يعد ثابتاً اختيـاريا تفاضله معدوم بل هو تابع للمتحول x . أي نعتبر f′(u)du جداء تابعين du , f′(u) وبتطبيق خواص تفاضل جداء تابعين نكتب :

$$d^2 y = f'' (u)\, du \,.\, du + d^2 u \,.\, f' (u)$$

أي :

$$d^2 y = f'' (u) \,.\, du^2 + f' (u)\, d^2 u$$

وهكذا . . . .

٨ - ١ - ٦ - مشتق التابع المعين وسيطياً :

ليكن :

$$y = f (t)$$
$$x = g (t)$$

ان مشتق y بالنسبة الى x يعطى بالعلاقة :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f' (t)\, dt}{g' (t)\, dt} = \frac{f' (t)}{g' (t)}$$

٨ ـ ٢ ـ التزايدات المحدودة

٨ - ٢ - ١ - نظرية رول Rolle :

اذا كان التابع f (x) معيناً ومستمراً في المجال [a,b] وكانت قيمتاه متساويتين من أجل طرفي المجال أي : $f (a) = f (b) = K$ وكان مشتقه معيناً من أجل جميع قيم المجال ، فانه يوجد ضمن المجال تختلف عن a , b بحيث ينعدم من أجلها المشتق .

البرهان : إما ان يبقى التابع ثابتاً خلال المجال ويكون مشتقه صفراً بطبيعة الحال وتكون النظرية صحيحة .

وإما أن لا يبقى ثابتاً ضمن المجال وعندئذ يأخذ التابع قيماً تختلف عن K من

أجل قيم x الواقعة داخل المجال . وبما أن التابع خلال المجال [a,b] محدود من الاعلى ومحدود من الاسفل فهو يبلغ حده الاعلى M مرة واحدة على الاقل وحده الادنى m مرة واحدة على الاقل . ولتوضيح الفكرة نفرض أن التابع أخذ قيماً أكبر من K فعندئذ يكون حده الاعلى M اكبر من K ولنفرض أنه بلغ هذا الحد من أجل $x = c$ التي تختلف عن a , b أي : $M = f(c)$. نعطى للمتحـــول اعتباراً من c تزايداً h موجباً أو سالباً بحيث تبقى القيمة $c + h$ ضمن المجال ولنشكل العلاقة :

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

ان الصورة سالبة أو الصفر لاننا فرضنا $f(c)$ حداً أعلى للتابع . فاذا اتجهت h الى الصفر بقيم موجبة فان النسبة تنحدر الى نهايتها $f'(c)$ وتبقى سالبـة او الصفر . واذا اتجهت h الى الصفر بقيم سالبة فان النسبة تنحدر الى نهايتها $f'(c)$ وتبقى موجبة أو الصفر .

وبما ان المشتق معين من أجل جميع قيم المجال فرضاً ويأخذ قيمة واحدة فـلا يحقق الحالتين السابقتين معاً إلا كون $f'(c) = 0$ والتابع يمر بنهاية صغرى أو عظمى .

حالة خاصة : اذا انعدم التابع $f(x)$ من أجل نهايتي المجال [a,b] أي :

$$f(a) = f(b) = 0$$

فمشتقه ينعدم مرة واحدة على الاقل من اجل قيمة لـ x تقع داخل المجال . ويمكن صياغة نظرية رول في هذه الحالة بالشكل الآتي :

بين كل جذرين لتابع يوجد على الاقل جذر واحد لمشتقه .

٨ - ٢ - ٢ - نظرية التزايدات المحدودة (نظرية لاغرانج Lagrange) :

اذا كان التابـع $y = f(x)$ معيناً ومستمراً في المجـــال [a,b] ويقبل مشتقاً من أجل جميع قيم المجال فانه $\exists c \in [a,b]$ بحيث تحقق العلاقة :

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)} \qquad (1)$$

البرهان : نفرض :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = A \qquad (2)$$

ولنكون التابع :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)$$

بما ان $\varphi(a) = 0$ وان $\varphi(b) = 0$ فنظرية رول تنطبق عليه . أي ان هذا التابع $\varphi(x)$ ينعدم مشتقه مرة واحدة على الاقل من أجل قيمـــة $x = c$ الواقعة ضمن المجال ، بالاشتقاق :

$$\varphi'(x) = f'(x) - A$$

بالتعويض :

$$\varphi'(c) = f'(c) - A = 0$$

ومنـــه :

$$A = f'(c)$$

نعوض عن A بقيمتها في (2) فيكون :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

نلاحظ ان هذه العلاقة تذكرنا بتعريف المشتق الا ان الصورة والمخرج في الطرف الايسر ليسا بمتحولين ولا ينتهيان الى الصفر ، بل هما تزايدان محدودان للتابع والمتحول، ومن هنا أتت تسمية النظرية بالتزايدات المحدودة .

البرهان الهندسي : نلاحظ من الشكل (٢٠) ، انه توجد نقطة على المنحني فصلها c محصور بين a,b بحيث يكون المماس موازياً للقاطع AB وعليه يكون :

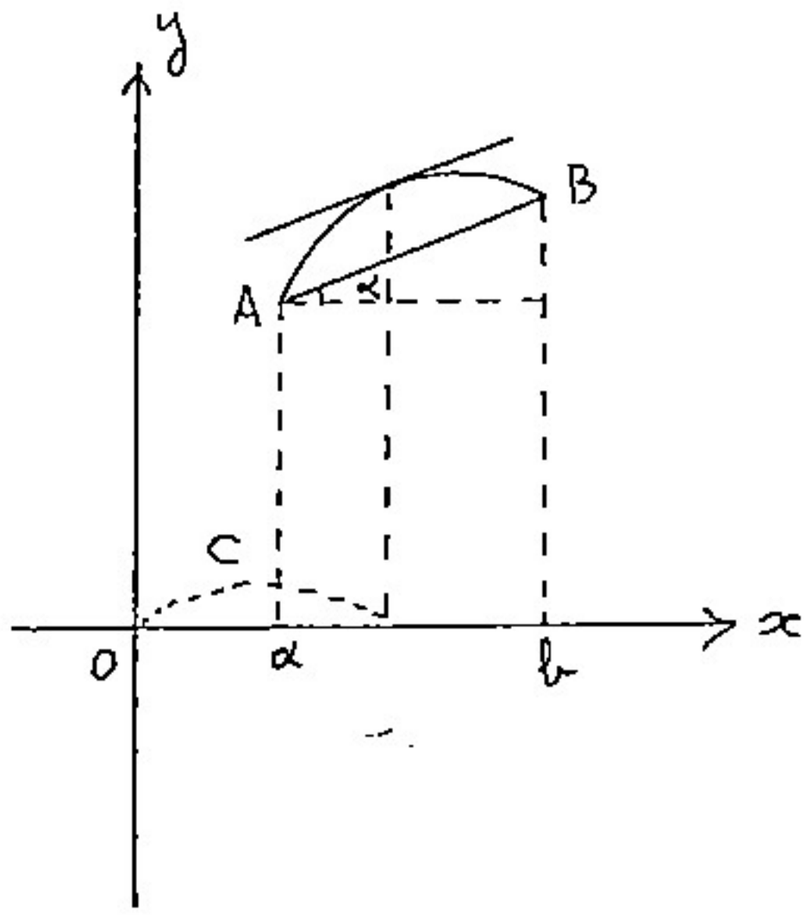
$$f'(c) = tg\,\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

ملاحظة : يكتب الدستور (1) بشكل آخر بعد ان نفرض :

$$c = x + \theta h \quad , \quad a = x \quad , \quad b = x + h \qquad \text{حيث} \quad 0 < 0 < 1$$

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x+\theta h)}$$

ويسمى بدستور التزايدات المحدودة .



الشكل (٢٠)

٨ ـ ٣ ـ حالات عدم التعيين

نبدأ بمعالجة حالتي عدم التعيين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ لانهما كثيرتا التردد في الرياضيات ، ثم ننتقل الى بقية الحالات .

٨ ـ ٣ ـ ١ ـ حالة $\frac{0}{0}$:

نقع على هذه الحالة عادة في التوابع الكسرية $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، اذ عندما نجعل $x \to a$ قد يصبح التابع من الشكل :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}$$

ولايجاد القيمة الحقيقية نعطي اعتباراً من a تزايداً h ونطبق على الصورة والمخرج دستور التزايدات المحدودة فنكتب :

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f(a)+h\,f'(a+0h)}{g(a)+h\,g'(a+\beta h)}$$

$$=\frac{0+h\,.\,f'(a+\vartheta h)}{0+h\,.\,g'(a+\beta h)}$$

$$=\frac{f'(a+0h)}{g'(a+\beta h)}$$

نجعل h تنتهي الى الصفر يبقى لدينا :

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

وهذه العلاقة تـــدل على ان التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ إذا أصبح من الشكل $\frac{0}{0}$ من أجل $x\to a$ فان القيمة الحقيقية له نحصل عليها من تقسيم مشتق الصورة فقط على مشتق المخرج فقط ثم التعويض عن x بـ a ، تسمي هذه الطريقة بقاعدة اوبيتال Hôpital .

ملاحظة : اذا طبقنا قاعدة اوبيتال ووجدنا ان التابع عاد مجدداً الى $\frac{0}{0}$ فاننا نعيد الكرة فنحسب $\frac{f''(a)}{g''(a)}$ وهكذا دواليك حتى نحصل على قيمة معينة .

٨ - ٣ - ٢ - حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

ليكن التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ ولنفرض أنه أصبح من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ من أجـــل $x\to a$ فلازالة حالة عدم التعيين هذه يكتب التابع بالشكل :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

وبذلك ردت المسألة الى حالة $\frac{0}{0}$. ولايجاد القيمة الحقيقية نطبق على الطرف الايمن قاعدة اوبيتال :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}$$

أو :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^2(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)\cdot f'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

أو :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بالتعويض ينتج :

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

أي أنالقيمة الحقيقية للتابععندما يصبحمنالشكل $\frac{\infty}{\infty}$ هي أيضاً من قيمة حاصل قسمة مشتق الصورة على مشتق المخرج : أي أن قاعدة اوبيتال تطبق أيضاً على حالة $\frac{\infty}{\infty}$.

مثال (١) احسب قيمة المقدار $y = \frac{\sin 5x}{3x}$ من اجل $x\to 0$.

بالتعويض ينتج :

$\lim_{x\to 0} y = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين ولازالتها :

الطريقة الاولى : يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{\sin 5\,x}{3\,x} = \frac{5\,.\,\sin 5\,x}{3\,.\,5\,x}$$

بجعل $x \to 0$ فان النسبة $\frac{\sin 5\,x}{5\,x}$ تنتهي الى الواحد بالتعويض :

$$\lim_{x\to 0} y = \frac{5}{3}\,.\,1 = \frac{5}{3}$$

الطريقة الثانية : بما ان التابع يصبح من الشكل $\frac{0}{0}$ فلازالتها نطبق قاعدة اوبيتال:

أي :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5\,x}{3\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5.1}{3} = \frac{5}{3}$$

مثال (٢) : احسب قيمة التابع :

$y = \frac{\log (1+x)}{x}$ عندما $x \to 0$.

يصبح التابع من الشكل $\frac{0}{0}$ ولازالة حالة عدم التعيين هذه نطبق قاعدة اوبيتال .

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

ونلاحظ ان $\log (1+x)$ هو لا متناه في الصغر عندما $x \to 0$ ويكافىء اللامتناهي في الصغر x لان نسبتهما (1) .

مثال (٣) : احسب قيمة التابع :

$y = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ عندما $x \to 0$.

بالتعويض نجد ان التابع يصبح من الشكل $\frac{0}{0}$ ولازالة حالة عدم التعين هـذه نطبق قاعدة اوبيتال . فيكون :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال مرة أخرى :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال مرة ثالثة :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

٨ - ٣ - ٣ - حالات عدم تعين اخرى :

ان الاشكال $0 . \infty$ ، ∞^0 ، 0^0 ، 1^∞ تمثل حالات عدم تعيين .

ولايجاد القيم الحقيقية لها نحاول وضع هذه التراكيب على شكل حاصل قسمة ، عندئذ نطبق قاعدة اوبيتال . وفي الحالة الـــتي يوجد فيها قوة يكفي أن نأخذ لناريتم الطرفين فنحصل على جداء ، وهذا يرد بدوره وبسهولة الى قسمة .

مثال (١) احسب قيمة التابع $y = x \log x$ عندما $x \to 0$.

نلاحظ انه من اجل $x \to 0$ يصبح التابع من الشكل $0 . \infty =$ (حالة عـدم تعيين) ولازالتها يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

وهذه الصيغة جعلت التابع يرتد الى حالة $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x \to 0$. بتطبيق او بيتال نجد :

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

وهي القيمة الحقيقية للتابع المفروض .

مثال (٢) : احسب قيمة التابع $y=x^x$ عندما $x\to 0$.

يصبح من الشكل 0^0 ولازالة هذه الحالة نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = x \cdot \log x$$

فمن اجل $x\to 0$ وجدنا في المثال السابق ان الطرف الايمن انتهى الى الصفر اذن :

$$\lim_{x\to 0} \log y = 0$$

وبالتالي :

$$y = c^0 = 1$$

أي أن القيمة الحقيقية للتابع المفروض تساوي (1) .

مثال (٣) : احسب قيمة التابع :

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$$

عندما $x\to 0$. يصبح التابع من الشكل ∞^0 ولازالة هذه الحالة تأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = \text{tg } x \cdot \log \frac{1}{x}$$

أو :

$$\log y = -\text{tg } x \cdot \log x$$

ويكتب بالشكل :

$$\log y = -\frac{\log x}{\frac{1}{\text{tg } x}}$$

ويجعل $x\to 0$ يصبح من قبيل $\frac{\infty}{\infty}$. بتطبيق اوبيتال :

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1-\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x}}$$

أو :

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{x\,(1+\mathrm{tg}^2 x)}$$

أو :

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \cdot \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = 1.0 = 0$$

أي :

$$\lim_{x\to 0} \log y = 1.0 = 0 \Longrightarrow y = 1$$

وهي القيمة الحقيقية للتابع المفروض .

مثال (٤) : أوجد قيمة التابع :

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

عندما $x\to\infty$. يصبح التابع من الشكل : 1^∞ ولازالة عـــدم التعيين نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)$$

اذا عوضنا نقع على حالة $0 . \infty$ ، ولازالتها تكتب العلاقة السابقة بالشكل :

$$\log y = \frac{\log\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

فاذا عوضنا نقع على حالة $\frac{0}{0}$ ، ولازالتها نطبق قاعدة اوبيتال :

$$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-a}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a$$

أي :

$$\lim_{x\to\infty} \log y = a \implies y = e^a$$

وهي القيمة الحقيقية للتابع المفروض .

٨ ـ ٤ ـ التفاضل الكلي ـ المشتق الكلي

٨ ـ ٤ ـ ١ ـ تعريف :

اذا وجدت كمية تتغير بتغير متحولين مستقلين أو أكثر سميت هذه الكمية بتابع متعدد المتحولات :

مثال : حجم الغاز يتبع الى درجة الحرارة كما يتبع الى الضغط .

مثال : حجم متوازي المستطيلات يتبع الى الطول والعرض والارتفاع .

مثال : كمية الحركة تتبع الى كتلة الجسم والى سرعته .

بفرض z كمية تتبع الى المتحولين المستقلين x, y وقد ارتبطت معهما بالعلاقة :

$$z = f(x, y)$$

فاننا نسمي z بتابع متعدد المتحولات .

٨ ـ ٤ ـ ٢ ـ المشتق الجزئي :

في التوابع لعدة متحولات يمكن اعتبار كل المتحولات ثابتة باستثناء أحدها . مثلا ليكن التابع $z = f(y, x)$ نستطيع أن نجعل y ثابتاً ونحول x لوحده عندئذٍ يصبح z تابعاً لمتحول واحد . نسمي مشتق التابع هذا بالنسبة الى x بالمشتق الجزئي ونرمز له $z'_x = f'_x(y,x)$ (ويقرأ z فتحة x) .

أما اذا ثبتنا x وجعلنا y تتحول وحسبنا المشتق بالنسبة الى y نسمي هذا المشتق بالمشتق الجزئي ونرمز له :

$$z'_y = f'_y(x,y) \quad (\text{ ويقرأ } z \text{ فتحة } y)$$

كنا رمزنا للمشتق العادي بالرمز :

$$\frac{dy}{dx}$$

كذلك نرمز للمشتق الجزئي بالرمز :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \ , \ \frac{\partial z}{\partial y}$$

حيث استعمل الحرف ∂ خصيصاً للدلالة على المشتق الجزئي .

٨ - ٤ - ٣ - حساب المشتقات الجزئية :

نتبع نفس الطرق المتبعة في اشتقاق التوابع العادية بعد أن نعتبر جميع المتحولات ثابتة باستثناء أحدها والذي نشتق بالنسبة اليه .

مثال : احسب المشتقين الجزئيين للتابع :

$$z = x^2 + 3xy + y^2$$

لدينا :

$$z'_x = 2x + 3y$$

ولدينا :

$$z'_y = 3x + 2y$$

٨ - ٤ - ٤ - المشتقات الجزئية المتتالية :

ليكن التابع $z = f(x,y)$ ولنحسب مشتقيه الجزئيين z'_x , z'_y . ان كلاً من المشتقين الجزئيين يمثل بدوره تابعاً لمتحولين ويكون لكل منها مشتقان جزئيان جديدان، نسمي كلا منها بالمشتق الجزئي الثاني ونرمز :

$$z''_{yy} \, , \, z''_{xy} \, , \, z''_{yx} \, , \, z''_{xx}$$

أو نرمز :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \, , \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \, , \, \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} \, , \, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

ويبرهن أن تغيير ترتيب الاشتقاق لا يغير النتيجة . أي :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}}$$

٨ ـ ٤ ـ ٥ ـ التفاضل الكلي :

ليكن $z = f(x,y)$ تابعاً لمتحولين مستقلين $x \, , y$. نعطي للمتحول x تزايداً Δx ، وللمتحول y تزايداً Δy ينتج للتابع z تزايد Δz بحيث :

$$\Delta z = f(x + \Delta x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y)$$

نضيف ونطرح الكمية $f(x \, , y + \Delta y)$ فيكون :

$$\Delta z = [\, f(x + \Delta x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y + \Delta y) \,] +$$
$$+ [\, f(x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y) \,] \qquad (1)$$

فاذا كان التابع مستمراً أمكن تطبيق نظرية التزايدات المحدودة بحيث :

$$f(x + \Delta x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y + \Delta y) = \Delta x \, f'_x(x + \theta \, \Delta x \, , y + \Delta y)$$

حيث :

$$0 < \theta < 1$$

كذلك :

$$f(x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y) = \Delta y \, . \, f'_y(y + \beta \, \Delta y \, , x)$$

نعوض في (1) :

$$\Delta z = \Delta x \, . \, f'_x(x + \theta \, \Delta x \, , y + \Delta y) + \Delta y \, . \, f'_y(y + \beta \, \Delta y \, , x) \qquad (2)$$

ونلاحظ انه اذا تناهت $\Delta x \, , \Delta y$ الى الصفر معاً فان :

$f'_x(x,y)$ تتناهى الى $f'_x(x+\theta\,\Delta x, y+\Delta y)$

$f'_y(x,y)$ تتناهى الى $f'_y(y+\beta\,\Delta y, x)$

وعندما يكون $\Delta x, \Delta y$ صغيرين كفاية فان العلاقة (2) تكتب بالشكل :

$$\Delta z = \Delta x \,.\, [\, f'_x(x,y) + \varepsilon\,] + \Delta y\,[\, f'_y(x,y) + \varepsilon_1\,]$$

حيث $\varepsilon, \varepsilon_1$ لا متناهيان في الصغر مع $\Delta x, \Delta y$.

أو :

$$\Delta z = \Delta x \,.\, f'_x(x,y) + \Delta y \,.\, f'_y(x,y) + \Delta x \,.\, \varepsilon + \Delta y \,.\, \varepsilon_1$$

ونلاحظ ان Δz لا متناه في الصغر قسمه الرئيسي :

$$\Delta x \,.\, f'_x + \Delta y \,.\, f'_y$$

نسمي القسم الرئيسي هذا بالتفاضل الكلي للتابع ونكتب :

$$dz = f'_x \,.\, \Delta x + f'_y \,.\, \Delta y$$

ومن أجل تزايدات جد صغيرة للمتحولين x, y يكون :

$$\Delta y = dy \quad , \quad \Delta x = dx$$

بالتعويض :

$$\boxed{dz = f'_x \,.\, dx + f'_y \,.\, dy}$$

أو يكتب :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \,.\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \,.\, dy$$

وهذا يدل على أن التفاضل الكلي ليس إلا مجموع التفاضلين الجزئيين للتابع المفروض . وبصورة عامة اذا كان التابع لعدة متحولات من الشكل :

$$u = f(x, y, z, w \ldots)$$

فان التفاضل الكلي :

$$du = f'_x \,.\, dx + f'_y \,.\, dy + \cdots$$

مثال (١) : احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = x \cdot y + z^2 \cdot \cos x$$

لدينا الدستور :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y\, dy + u'_z\, dz \qquad (1)$$

ولدينا :

$$u'_x = y - z^2 \sin x$$

$$u'_y = x \quad , \quad u'_z = 2\, z \cdot \cos x$$

نعوض في (1) :

$$du = (\, y - z^2 \sin x\,)\, dx + x\, dy + 2\, z \cos x \cdot dz$$

مثال (٢) : احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$z = (\, x \cdot \sin y\,)^{x \cdot y}$$

لدينا :

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy \qquad (1)$$

بأخذ لغاريتم الطرفين للتابع :

$$\log z = x \cdot y \log (\, x \cdot \sin y\,) \qquad (2)$$

نشتق (2) بالنسبة الى x أولاً ثم بالنسبة الى y :

$$\frac{z'_x}{z} = y \log (\, x \cdot \sin y\,) + y$$

$$z'_x = (\, x \cdot \sin y\,)^{x \cdot y} [\, y \log (\, x \cdot \sin y\,) + y\,]$$

$$\frac{z'_y}{z} = x \log (\, x \cdot \sin y\,) + x \cdot y \operatorname{cotg} y$$

$$z'_y = (\, x \cdot \sin y\,)^{x \cdot y} [\, x \cdot \log (\, x \cdot \sin y\,) + x \cdot y \operatorname{cotg} y\,]$$

نعوض في (1) :

$$dz = (\, x \cdot \sin y\,)^{x \cdot y} [\, y \log (\, x \cdot \sin y\,) + y\,]\, dx +$$

$$(\, x \cdot \sin y\,)^{x \cdot y} [\, x \cdot \log (\, x \cdot \sin y\,) + x \cdot y \operatorname{cotg} y\,]dy$$

٨ - ٤ - ٦ - المشتق الكلي :

ليكن التابع :

$$z = f(x, y)$$

لنفرض ان المتحولين x, y يتبعان الى متحول واحد t ، نسمي التابع في هذه الحالة بالتابع المركب .

لنحسب التفاضل الكلي لهذا التابع ، يكون :

$$dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

نقسم الطرفين على dt :

$$\frac{dz}{dt} = f'_x \cdot \frac{dx}{dt} + f'_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

ويكتب بالشكل :

$$z'_t = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y'$$

أو :

$$\boxed{f'_t = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y'}$$

ويسمى بالمشتق الكلي :

٨ - ٤ - ٧ - مشتق التابع الضمني :

ليكن التابع :

$$f(x, y) = 0$$

يمكن اعتباره تابعاً مركباً لأن y تابع الى x ، وبما ان التابع المركب هـــذا يساوي دوماً الصفر فمشتقه الكلي يساوي الصفر أي :

$$f'_x(x, y)x' + f'_y(x, y) \cdot y' = 0$$

وبما ان $x' = 1$ إذن :

$$f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\,y' = 0$$

ومنـــه :

$$y' = \frac{-f'_x}{f'_y}$$

مثال : ليكن التابع الضمني :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

لحساب مشتقه y' لدينا :

$$f'_y = 2y \quad , \quad f'_x = 2x$$

فيكون :

$$y' = \frac{-f'_x}{f'_y} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

أمثلة محلولة : أوجد التفاضل الكلي للتوابع الآتية :

مثال (١) :

$$z = \log x \,.\, y$$

نعلم أن :

$$dz = z'_x \,.\, dx + z'_y \,.\, dy$$

بالتعويض :

$$dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

مثال (٢) :

$$z = x^3 + xy^2 + \sin y$$

نكتب :

$$dz = (2x + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy$$

مثال (٣) : بفرض :

$$z = \sqrt{x^3 + y^2}$$

احسب dz من أجل :

$$dy = \frac{1}{4} \quad , \quad dx = \frac{1}{2} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = 1$$

لدينـا :

$$dz = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

بالتعويض :

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} + 0$$

$$dz = \frac{1}{2}$$

★ ★ ★ ★

تمارين

أوجد نهاية التوابع الآتية :

		الجواب
١ -	$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	1
٢ -	$y = \lim_{x \to 0} \frac{\log \operatorname{tg} 7x}{\log \operatorname{tg} 2x}$	1
٣ -	$y = \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	$\frac{1}{e}$
٤ -	$y = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$	∞
٥ -	$y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{(\pi - 2x)^2}$	$-\frac{1}{8}$
٦ -	$y = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$	$\log \frac{a}{b}$
٧ -	$y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$	$\frac{1}{3}$
٨ -	$y = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$	e^{-6}

٩ - $y = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$ 0

١٠ - $y = \lim_{x \to \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}$ a

١١ - $y = \lim_{x \to 0} x^{\frac{3}{4 + \log x}}$ e^3

١٢ - $y = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$ $\frac{1}{2}$

١٣ - $y = \lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ $-\frac{1}{6}$

١٤ - $y = \lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$ $\frac{1}{3}$

١٥ - $y = \lim_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{\pi x}{2}}$ $\frac{1}{e}$

١٦ - $y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$

١٧ - احسب ما يلي :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + \gamma x + \lambda x^2) - \log (1 - \gamma x + \lambda x^2)}{1 - \cos x}$$

حيث γ , λ عددان ثابتان .

(دورة حزيران ٩٧٠)

١٨ ـ احسب ما يلي :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\log^2 (1+2x) - \sin^2 3x}{1 - e^{-x^2}}$$

(دورة حزيران ٩٧١)

١٩ ـ احسب ما يلي :

$$y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

(دورة ايلول ٩٧٢)

٢٠ ـ اوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ اذا علمت ان :

$x = a \cos t$

$y = b \sin t$

$-\frac{b}{a} \cot g\, t$

٢١ ـ $x = \frac{3at}{1+t^2}$

$y = \frac{3at^2}{1+t^2}$

$\frac{2t}{1-t^2}$

٢٢ ـ $x = a \cos^3 t$

$y = b \sin^3 t$

$-\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$

احسب تفاضلات التوابع الآتية :

٢٣ ـ $y = \sqrt{1+x^2}$

$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

٢٤ ـ $y = \frac{x \log x}{1-x} + \log (1-x)$

$dy = \frac{\log x\, dx}{(1-x)^2}$

٢٥ ـ $y = 1/3 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$

$dy = \sec^4 x\, dx$

احسب تفاضلات التوابع الآتية من أجل القيم المذكورة بجانبها :

٢٦ - $y = \cos x \quad , \quad x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \Delta x = \frac{\pi}{36} \quad dy = -\frac{\pi}{72}$

٢٧ - $y = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad , \quad x = 9 \quad , \quad \Delta x = -0{,}010 \quad dy = \frac{1}{2700}$

٢٨ - $y = \operatorname{tg} x \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \Delta x = \frac{\pi}{180} \quad dy = \frac{\pi}{45}$

احسب المشتق الثاني $\frac{d^2y}{dx^2}$ للتوابع الآتية : الجواب

٢٩ - $y^2 - 4ax = 0 \quad -\frac{4a^2}{y^3}$

٣٠ - $x^2 + y^2 = r^2 \quad -\frac{r^2}{y^3}$

٣١ - $b^2 . x^2 + a^2 . y^2 = a^2 . b^2 \quad -\frac{b^4}{a^2 . y^3}$

٣٢ - بفرض $z = x . y + x . e^{\frac{y}{x}}$ تحقق من أن :

$$x . \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

(دورة حزيران ٩٦٨)

٣٣ - بفرض $u = x + \frac{x - y}{y - z}$ تحقق من أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

٣٤ - بفرض $z = \log (x^2 + x.y + y^2)$ بين أن :

$$x . \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

٣٥ ـ بفرض $u = (x-y)(y-z)(z-x)$.

تحقق من صحة العلاقة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(دورة حزيران ١٩٧٢)

٣٦ ـ ليكن التابع $u = x^{y^z}$.

والمطلوب حساب التفاضل الكلي لهذا التابع .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

٣٧ ـ احسب التفاضل الكلي للتوابع :

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \cdot y}{z^2} \quad , \quad z = e^{x^3 + y^2}$$

$$u = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{y} \quad , \quad z = x^2 + x \cdot y^2 + \operatorname{tg} y$$

٣٨ ـ احسب المشتقات الجزئية للتوابع الآتية :

$$z = x^2 \cdot \sin^2 y \qquad z = x^{y^2} \qquad u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$$

$$z = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \qquad z = c^{\sin \frac{y}{x}} \qquad u = z^{x \cdot y}$$

٣٩ ـ احسب المشتقات الكلية للتوابع :

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{حيث} \quad x = \cos t \ , \ y = \sin t \ , \ z = H$$

$$u = y^z \quad \text{حيث} \quad y = \sin x \ , \ z = \cos x$$

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad \text{حيث} \quad y = e^t \ , \ x = t$$

٤٠ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = x \cdot y^z$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

٤١ ـ بفرض : $z = \frac{x \cdot y^2}{x + y}$ برهن أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y . \partial x} + \frac{6\,x \cdot y^2}{(x+y)^3}$$

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٧)

٤٢ ـ بفرض $u = ch\left(x + \frac{1}{y}\right)$ تحقق من صحة العلاقة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}\right) = u$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٨)

★ ★ ★ ★

الفصل التاسع

تطبيقات المشتقات في دراسة تحولات التوابع

APPLICATIONS DES DÉRIVÉES A L'ÈTUDE DES VARIATIONS DE FONCTIONS

٩ ـ ١ ـ توطئة

٩ ـ ١ ـ ١ ـ التابع المتزايد :

نقول عن التابع $y = f(x)$ انه متزايد في المجال $[a,b]$ فيما اذا سارت y والمتحول x في اتجاه واحد . أي اذا كبرت x كبرت y وبالعكس اذا صغرت x تصغر معها y . ينتج عن هذا التعريف أن :

$$\text{هما من اشارة واحدة} \begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$$

وبالتالي تكون النسبة $\Delta y/\Delta x$ موجبة .

ونجعل $\Delta x \to 0$ فالنسبة تنتهي الى المشتق y' ويكون موجباً . وبالعكس اذا كان y' موجباً فهذا يعني ان $\Delta y/\Delta x$ موجب . وبالتالي Δx , Δy من اشارة واحدة ، أي تسير x , y باتجاه واحد ، وبالتالي فان التابع متزايد ، نستنتج :

قاعدة : الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع متزايداً في مجال ما هو أن يكون مشتقه y' موجباً .

٩ - ١ - ٢ - التابع المتناقص :

نقول عن التابع $y=f(x)$ المعين في المجال $[a,b]$ انه متناقص فيما اذا سارت x, y في اتجاهين مختلفين . أي اذا كبرت x صغرت y وبالعكس .

ينتج عن هذا التعريف ان :

$$\text{هما من اشارتين مختلفتين} \begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$$

وبالتالي النسبة $\Delta y/\Delta x$ سالبة . بجعل $\Delta x \to 0$ فالنسبة تنتهي الى المشتق y' ويكون سالباً . وبالعكس اذا كان المشتق سالباً في مجال ما فالتابع متناقص . نستنتج :

قاعدة : الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع متناقصاً في مجال ما هو أن يكون مشتقه y' سالباً .

٩ - ١ - ٣ - النهاية العظمى :

نقول عن التابع $y=f(x)$ المعين والمستمر في المجال $[a,b]$ انه يدرك نهاية عظمى من اجل $x=c$ الواقعة داخل المجال فيما اذا أصبحت قيمة التابع أي $f(c)$ أعظم من جميع القيم التي يأخذها من أجل قيم المتحول المجاورة الى c . اي اذا كانت M نقطة من منحني التابع فصلها c وترتيبها $f(c)$ فهذه النقطة تمثل النهاية العظمى ، عندما يكون ترتيبها أعظم من جميع تراتيب نقاط المنحني المجاورة لها .

ينتج عن هذا التعريف ان المنحني اذا بلغ نهاية عظمى في M فقبلها يكون التابع متزايداً وبالتالي يكون y' موجباً وبعيدها يصبح التابع متناقصاً وبالتالي يصبح y' سالباً ، وبما أن y' يتغير باستمرار من الموجب الى السالب فلا بد له إلا أن يعبر على الصفر من أجل النهاية العظمى نستنتج :

قاعدة : يدرك منحني التابع المستمر نهاية عظمى عندما ينعدم مشتقه مغيراً اشارته من الموجب الى السالب .

٩ - ١ - ٤ - النهاية الصغرى :

نقول عن التابع $y=f(x)$ المعين والمستمر في المجال $[a,b]$ انه يدرك نهايةصغرى من أجل $x=c$ الواقعة داخل المجال فيما اذا أصبحت قيمة التابع أي $f(c)$ أصغر من جميع القيم التي يأخذها من أجل قيم المتحول المجاورة الى c .

أي : اذا كانت P نقطة من منحني التابع فصلها c وترتيبها $f(c)$ فهذه النقطة تمثل النهاية الصغرى عندما يكون ترتيبها أصغر من جميع تراتيب نقاط المنحني المجاورة لها. ينتج عن ذلك أنه قبيل p يكون التابع متناقصاً وبالتالي يكون y' سالباً وبعيدها يصبح التابع متزايداً وبالتالي يصبح y' موجباً . وبما ان المشتق يتغير باستمرار من السالب الى الواجب فلا بد له إلا أن ينعدم من أجل النهاية الصغرى . نستنتج :

قاعدة : يدرك منحني التابع المستمر نهاية صغرى عندما ينعدم مشتقه مغيراً اشارته من السالب الى الموجب .

ملاحظة هامة : وجدنا ان اشارة المشتق تدلنا على طبيعة التابع ان كان متزايداً أو متناقصاً . كما ان انعدامه مع تغيير اشارته يدلنا على وجود نهاية صغرى أو عظمى . لهذا اذا اردنا دراسة تحولات التابع فاننا نحتكم الى مشتقه .

مثال (١) : ادرس تحولات التابع :

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

هذا التابع معين ومستمر من أجل جميع قيم x . ولدراسة تحولاته نحسب المشتق :

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

ينعدم المشتق من أجل $x=\pm 1$ ويكون $y = \pm \frac{1}{2}$. ولدراسة التحولات نرتب الجـــدول :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$'y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

مثال (٢) : ادرس تحولات التابع :

$$y = \frac{x^3}{3} + x + 5$$

هذا التابع معين ومستمر من أجل جميع قيم x ولدراسة تحولاته نحسب مشتقه :

$$y' = x^2 + 1$$

ونلاحظ ان اشارة المشتق موجبة دوماً وأبداً وبالتالي يكون التابع متزايداً دوماً، ولا يوجد نهايات .

٩ - ١ - ٥ - تعريف الخط البياني :

ليكن التابع $y=f(x)$ المعين في المجال $[a,b]$ ، فكل قيمة تعطى الى x يقابلها قيمة الى y ، والقيمتان تعينان نقطة في مستوي المحورين الاحداثيين . فاذا أعطينا x جميع قيم المجال $[a,b]$ وحسبنا القيم المقابلة لـ y ثم عينا النقاط المقابلة لكل زوج من هذه القيم نحصل على عدد غير متناه من النقاط تشكل خطاً بيانياً للتابع . هذه الطريقة في رسم الخطوط البيانية تسمى بالطريقة النقطية وهي ابتدائية سنعدل عنها ونعتمد على المشتق وبعض القواعد والخواص التي تساعدنا على الرسم .

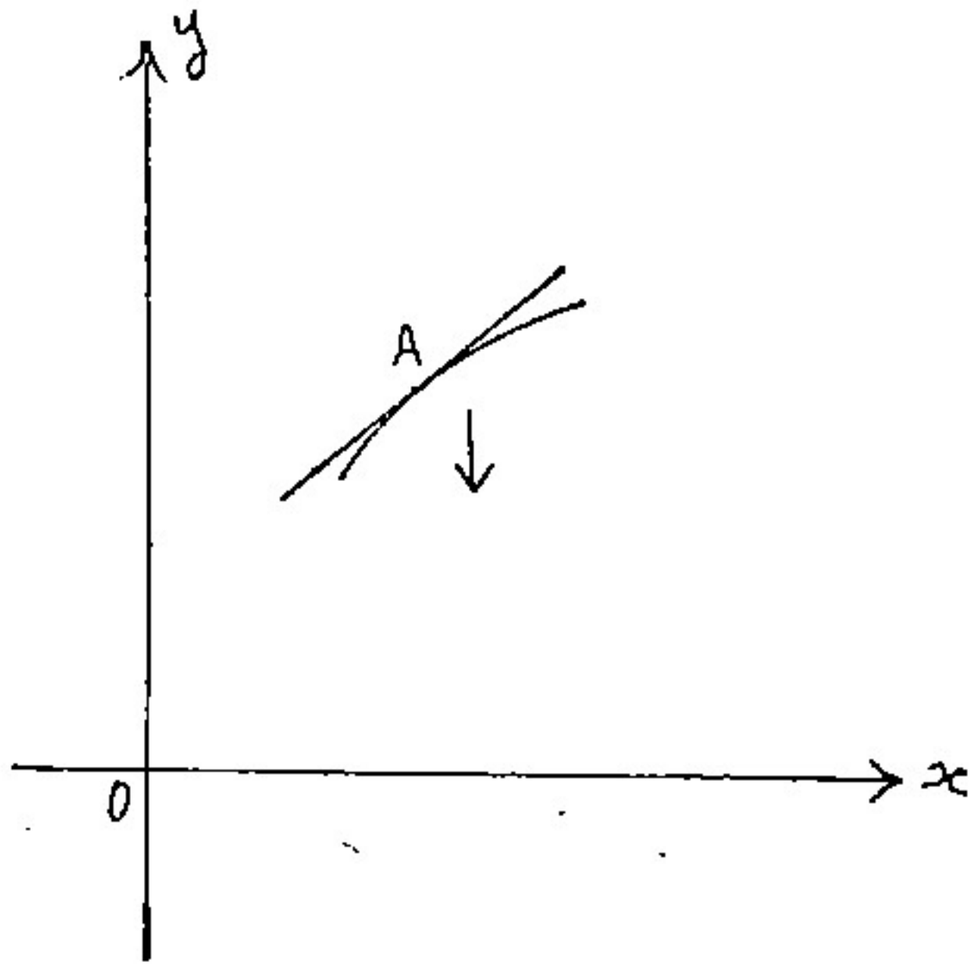
٩ - ١ - ٦ - تقعر المنحني :

تعريف : نقول ان تقعر المنحني في جوار النقطة A التي فصلها $x=a$ يتجه نحو الاسفل أو نحو التراتيب السالبة فيما اذا رسمنا المماس للمنحني في A ووقعت نقاط المنحني المجاورة الى A تحت المماس . وبالعكس اذا وقعت نقاط المنحني المجاورة لنقطة التماس فوق المماس قيل ان التقعر يتجه نحو الاعلى أو نحو التراتيب الموجبة .

تعيين اتجاه تقعر المنحني :

آ ـ التقعر نحو الاسفل : ليكن التابع $y = f(x)$ ولنفرض ان خطه البياني بجوار النقطة A يتجه نحو الاسفل (شكل ٢١) نلاحظ ان x عندما تزداد فان ميل المماس يتناقص أي y' يتناقص ، ولما كان y' يتبع بدوره الى x وهـــو متناقص فيجب أن يكون مشتقه y'' سالباً . نستنتج :

قاعدة : يتجه تقعر المنحني نحو الاسفل عندما يكون مشتقه الثاني سالباً .



الشكل (٢١)

ب ـ التقعر نحو الاعلى : بنفس الطريقة نبرهن ان تقعر المنحني يتجه نحو الاعلى عندما يكون مشتقه الثاني موجباً .

٩ ـ ١ ـ ٧ ـ نقطة الانعطاف :

هي النقطة التي يكون التقعر عن يسارها ويمينها باتجاهين مختلفين . ومن البدهي أن المماس في نقطة الانعطاف يخترق المنحني .

ليكن التابع $y=f(x)$ ولنفرض أن منحنيه يدرك نقطة انعطاف في A فقبيل A التقعر نحو الاسفل (مثلاً) اذن "y سالب ، وبعيد A التقعر نحو الاعلى اذن "y موجب، وبما ان "y يتغير باستمرار من السالب الى الموجب فلا بد له الا ان ينعدم من أجل نقطة الانعطاف ، نستنتج :

قاعدة : يدرك منحني التابع نقطة انعطاف عندما ينعدم "y مغيراً اشارته .

٩ - ١ - ٨ - الخطوط المقاربة :

آ - تعريف : نقول عن منحن انه يقبل فرعاً لا نهائياً فيما اذا ابتعدت نقاط هذا المنحني باتجاه ما نحو اللانهاية .

ب - تعريف : نقول عن منحني التابع $y=f(x)$ انه يقبل المستقيم Δ كمحور مقارب فيما اذا انتهى بعد نقطة M من المنحني عن Δ الى الصفر عندما ترمي M في اللانهاية.

جـ - المحور المقارب الموازي محور التراتيب :

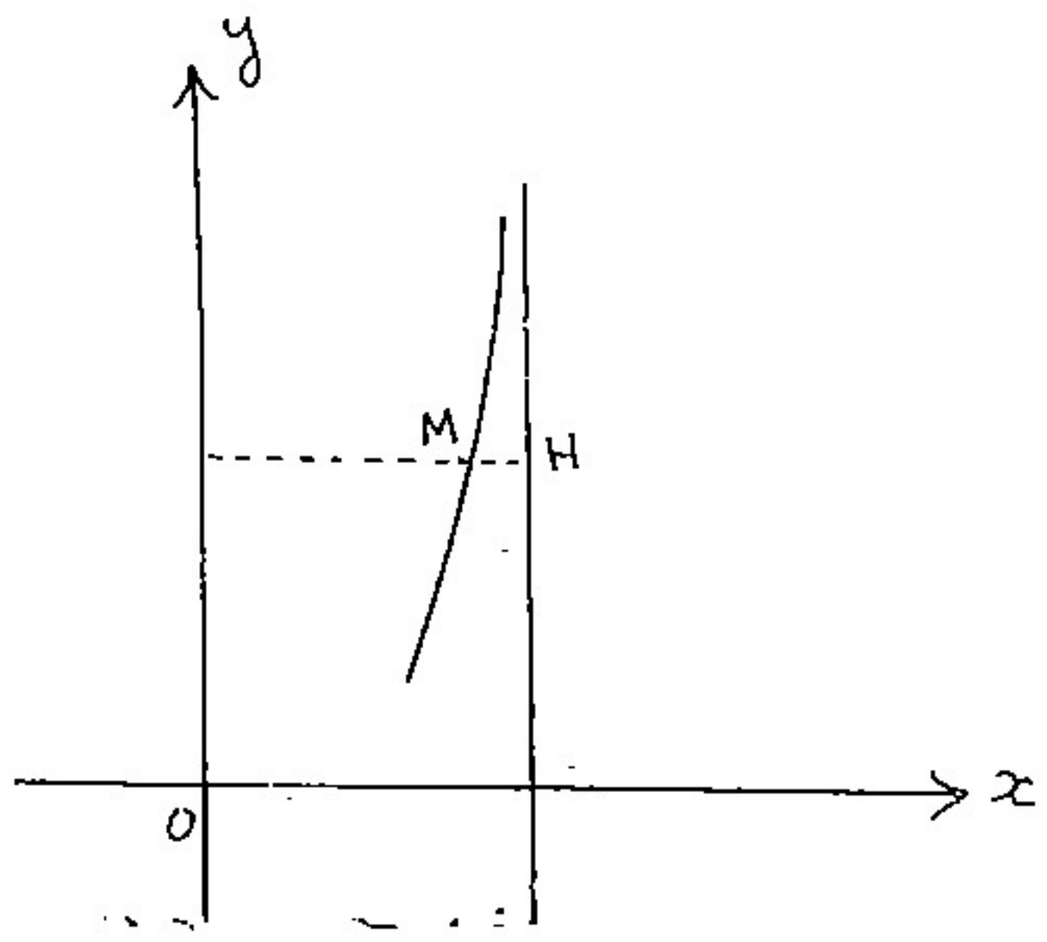
ليكن المستقيم $x=a$ الموازي محـــور التراتيب والمقارب لمنحني التابع $y=f(x)$ شكل (٢٢) ولتكن $M(x,y)$ نقطة من منحني التابع $y=f(x)$ ، نلاحظ ان بعد M عن المستقيم Δ هو :

$$MH = a - x$$

ونلاحظ ان هذا البعد يصغر كلما ابتعدت M فعندما $a-x\to 0$ فان $y\to\infty$ أي : ان $x\to a$ عندما $y\to\infty$ ومنه نستنتج :

قاعدة : يقبل المنحني محوراً مقارباً موازياً محور التراتيب معادلته $x=a$ فيما اذا جعلنا في معادلة المنحني $x\to a$ ونتج عن ذلك $y\to\infty$.

وبعبارة أخرى لايجاد المحاور المقاربة والموازية محور التراتيب يكفي ان نبحث في معادلة المنحني عن قيم x التي تجعل y مالا نهاية ، وهذه القيم هي معادلات المحاور المقاربة .



الشكل (٢٢)

مثال : ليكن التابع :

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

له محوران مقاربان يوازيان محور التراتيب هما :

$$x = -1 \quad , \quad x = 1$$

مثال : ليكن التابع :

$$y = \operatorname{tg} x$$

في المجال $[0,\pi]$ له محور مقارب يوازي محور التراتيب معادلته :

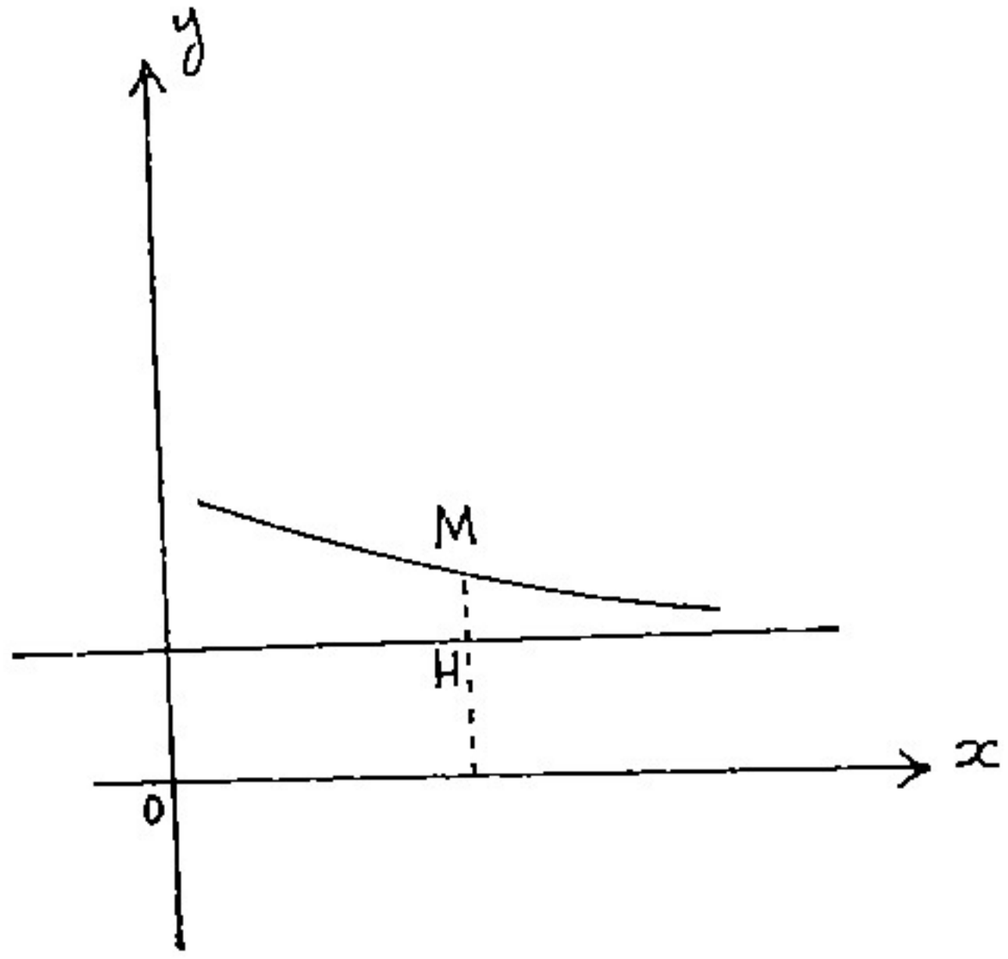
$$x = \frac{\pi}{2}$$

د ـ المحور المقارب الموازي محور الفواصل :

ليكن المستقيم $y=b$ الموازي محور الفواصل والمقارب لمنحني التابع $y=f(x)$ شكل (٢٣) ولتكن $M(x,y)$ نقطة من المنحني . نلاحظ أن بعد M عن المستقيم هو :

$$MH = y - b$$

ونلاحظ ان هذا البعد يصغر كلما ابتعدت M ، فعندما M ترمي في اللانهاية فان $y-b\to 0$ ويكون $x\to\infty$ اي : ان $y\to b$ عندما $x\to\infty$ ومنه نستنتج :



الشكل (٢٣)

قاعدة : يقبل المنحني محوراً مقارباً يوازي محور الفواصل ومعادلته $y=b$ فيما اذا جعلنا في معادلة المنحني $x\to\infty$ ونتج عن ذلك $y\to b$.

مثال : ليكن التابع :

$$y = \frac{x^2}{2x^2+3}$$

بجعل $x\to\infty$ ينتج $y\to 1/2$ وبالتالي $y = 1/2$ محور مقارب .

مثال : ليكن التابع :

$$y = \frac{1}{x}$$

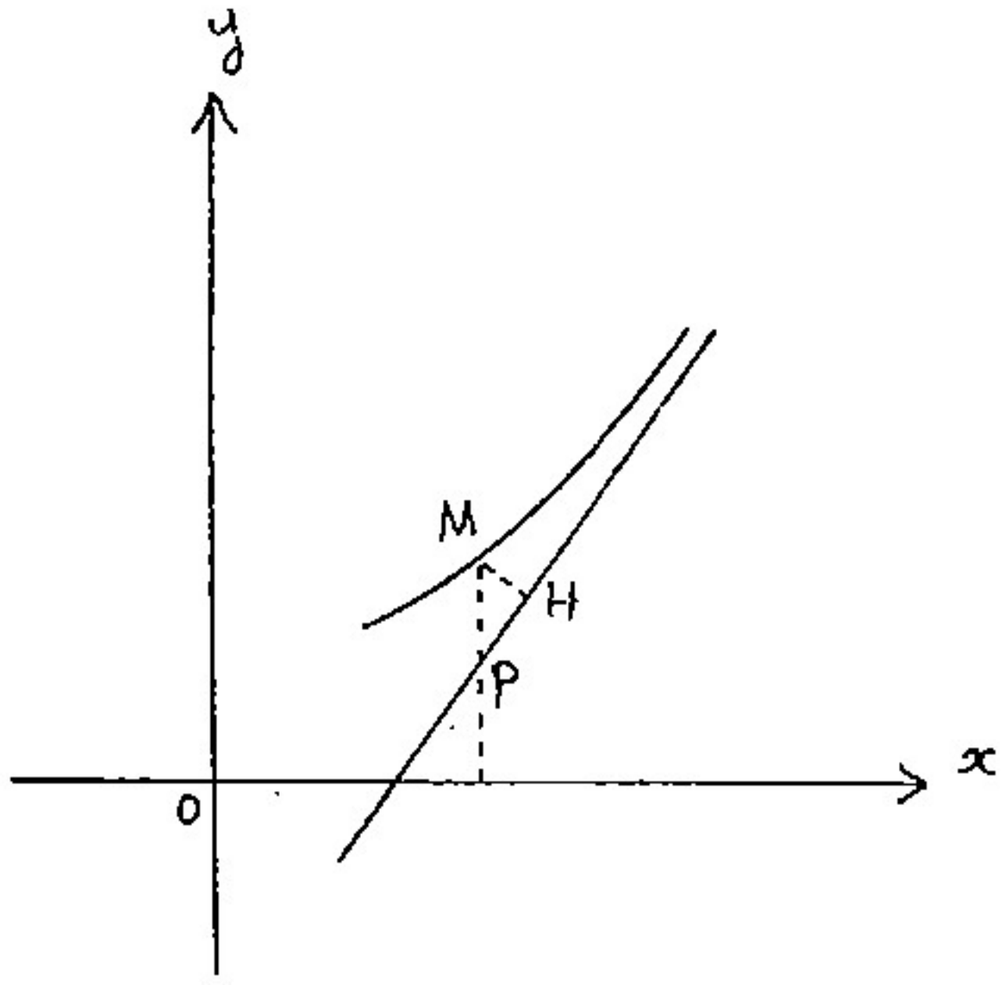
بجعل $x\to\infty$ ينتج $y\to 0$ وبالتالي $y = 0$ محور مقارب .

هـ ـ المحور المقارب المائل : طريقة اولى :

ليكن المستقيم $y=mx+K$ ولتكن $M(X,Y)$ نقطة من منحني التابع $Y=f(X)$ شكل (٢٤) ولكي يقارب المنحني المستقيم يكفي ان يكون $MH \to 0$ عندما ترمي M في اللانهاية أي عندما $x\to\infty$. ولتحقيق هذا الشرط يكفي ان يتحقق :

$$MP \to 0 \quad \text{عندما} \quad x\to\infty$$

(لان MP وتر في المثلث القائم MPH والوتر أكـــبر من الضلع القائم ، فاذا انتهى MP الى الصفر فمن باب اولى ان ينتهي الضلع MH الى الصفر) .



الشكل (٢٤)

أي $Y-y\to 0$ عندما $x\to\infty$.

وبالتالي $Y\to y$ عندما $x\to\infty$.

وهذه تدل على أنه اذا جعلنا $x\to\infty$ في معادلة التابع ووجدنا ان معادلة التابع المفروض $Y=f(X)$ قد تلبست بمعادلة مستقيم من قبيل :

$$y = m\,x + K$$

فهذا المستقيم يمثل محوراً مقارباً مائلاً .

طريقة ثانية : (طريقة كوشي) :

اذا قبل منحني التابع $Y=f(X)$ محوراً مقارباً مائلا فستكون معادلته من الشكل:

$$y = m\,x + K$$

ولايجاد هذه المعادلة يكفي حساب الميل m والترتيب عن المبدأ K .

لدينا من تعريف المحور المقارب شكل (٢٤) :

$MH \to 0$ عندما ترتمي M في اللانهاية أي عندما $x\to\infty$ ، ولتحقيق هذا الشرط يكفي أن يتحقق :

$$PM \to 0 \quad \text{عندما} \quad x\to\infty$$

لدينا من الشكل :

$$Y = y + PM$$

أو :

$$Y = m\,x + K + PM \qquad (1)$$

ومنـــه :

$$m = \frac{Y}{x} - \frac{K}{x} - \frac{PM}{x}$$

نجعل $x\to\infty$ نجد :

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Y}{x} - \frac{K}{x} - \frac{PM}{x}\right)$$

أو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{PM}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{K}{x} = 0 \text{ : لأن} \quad ; \quad m = \lim_{x\to\infty}\frac{Y}{x}$$

بعد حساب الميل m حسبما تقدم نعوض عن قيمته في العلاقة (1) والتي تكتب بالشكل :

$$K = Y - m\,x - P\,M$$

ونجعل $x \to \infty$ نجد :

$$K = \lim_{x \to \infty} (Y - m\,x - F\,M)$$

او :

$$K = \lim_{x \to \infty} (Y - m\,x) \text{ ، لأن : } \lim_{x \to \infty} P\,M = 0$$

والخلاصـــة :

لايجاد معادلة المحـــور المقارب المائل للتابع $y = f(x)$ ولتكن من الشـــكل $y = m\,x + K$ يكفي ان نحسب ميله m من العلاقة :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

وان نحسب ترتيبه عن المبدأ K من العلاقة :

$$K = \lim_{x \to \infty} (y - m\,x)$$

و ـ المنحني المقارب :

بنفس الطريقة نجعل $x \to \infty$ في معادلة التابع فاذا وجدنا ان معادلته قـد تلبست بمعادلة منحن من قبيل $y = g(x)$ فهذا المنحني يمثل منحنياً مقارباً للمنحني المفروض .

ز ـ تعيين وضع المنحني بالنسبة الى خطه المقارب :

ندرس اشارة المقدار $y - Y$ حيث Y ترتيب نقطة من المنحني ، y ترتيب نقطـة

نقطة من المقارب لها نفس الفصل : فاذا حافظ هذا الفضل على الاشارة الموجبة عندما تكون x كبيرة يكون المنحني فوق المقارب ، وأما اذا كان سالباً فالمنحني تحت المقارب .

٩ - ١ - ٩ - التناظر :

اذا بدلنا في معادلة التابع x بـ x— ولم تتغير قيمة y فالمنحني متناظر بالنسبة الى محور التراتيب .

اذا بدلنا في معادلة التابع y بـ y— ولم تتغير قيمة x فالمنحني متناظر بالنسبة الى محور الفواصل .

اذا بدلنا في معادلة التابع x بـ x— ، y بـ y— ولم تتغير معادلة التابع فالمنحني متناظر بالنسبة الى المبدأ 0 .

اذا بدلنا في معادلة التابع x بـ y ، y بـ x ولم تتغير معادلة التابع فالمنحني متناظر بالنسبة الى المنصف الاول .

اذا بدلنا في معادلة التابع x بـ y— ، y بـ x— ولم تتغير معادلة التابع فالمنحني متناظر بالنسبة الى المنصف الثاني .

ملاحظة : يستفاد من دراسة التناظر . في اختزال مجال الدراسة ، وفي دقة الرسم .

٩ ـ ٢ ـ دراسة تحولات تابع معين بمعادلته الديكارتية ورسم خطه البياني

٩ - ٢ - ١ - دراسة التحولات :

لدراسة تحولات تابع ورسم خطه البياني : نتبع المراحل الآتية :

١ ـ تعيين المجال الذي يكون فيه التابع معيناً ومستمراً ، فان كان التابع دورياً نكتفي بدراسته ضمن أصغر الادوار .
٢ ـ تعيين الخطوط المقاربة ان وجدت .
٣ ـ نحسب المشتق ، وجذوره ، وندرس اشارته .
٤ ـ نحسب المشتق الثاني لنعين اتجاه التقعر ونقاط الانعطاف .

٥ ـ نبحث عن القيم الشهيرة : قيمة التابع من أجل حدود المجال ، نقاط التقاطع مع المحورين .

٦ ـ ندرج المعلومات السابقة في جدول .

٧ ـ نرسم المنحني على ضوء المعلومات السابقة .

٩ ـ ٢ ـ ٢ ـ أمثلة محلولة :

مثال (١) : ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$$

التابع معين ، ومستمر من أجل جميع القيم ما عدا $x = 2$ ، ندرسه في المجال $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ ويقبل $x = 2$ كمحور مقارب يوازي محور التراتيب ، لأنه من أجل $x \to 2$ فان $y \to \infty$.

بجعل $x \to \pm\infty$ فان $y \to -1$ اذن $y = -1$ محور مقارب يوازي محور الفواصل.

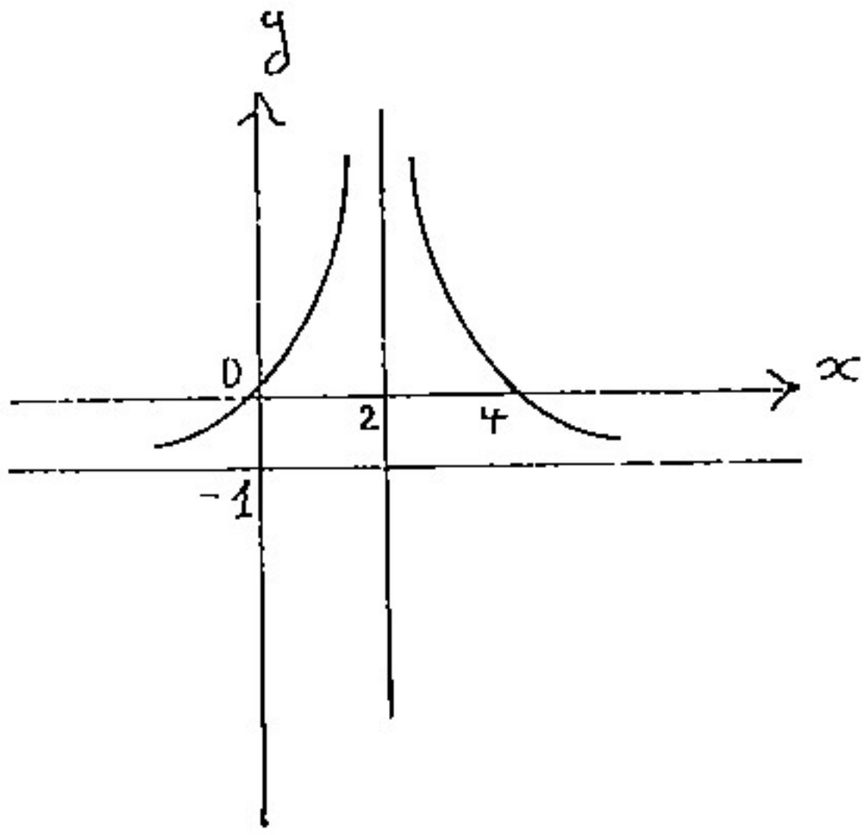
نحسب المشتق :

$$y' = \frac{-8}{(x-2)^3}$$

وهو سالب من اجل $x > 2$ وموجب من أجل $x < 2$ ولا ينعدم من أجلقيمة محدودة ، وبالتالي لا توجد نهايات . بعض القيم الشهيرة :

$$y = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 4 \end{matrix}$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$-$	
y	-1	↗	0	↗	$+\infty$ $\mid -\infty$	↘	0	↘	-1



الشكل (٢٥)

مثال (٢) : ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = x + \frac{16}{x}$$

تابع معين ومستمر من أجـــل جميع القيم ما عدا $x = 0$ ندرسه في المجـال $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ ويقبل $x = 0$ كمحور مقارب أي محور التراتيب هو محور مقارب.

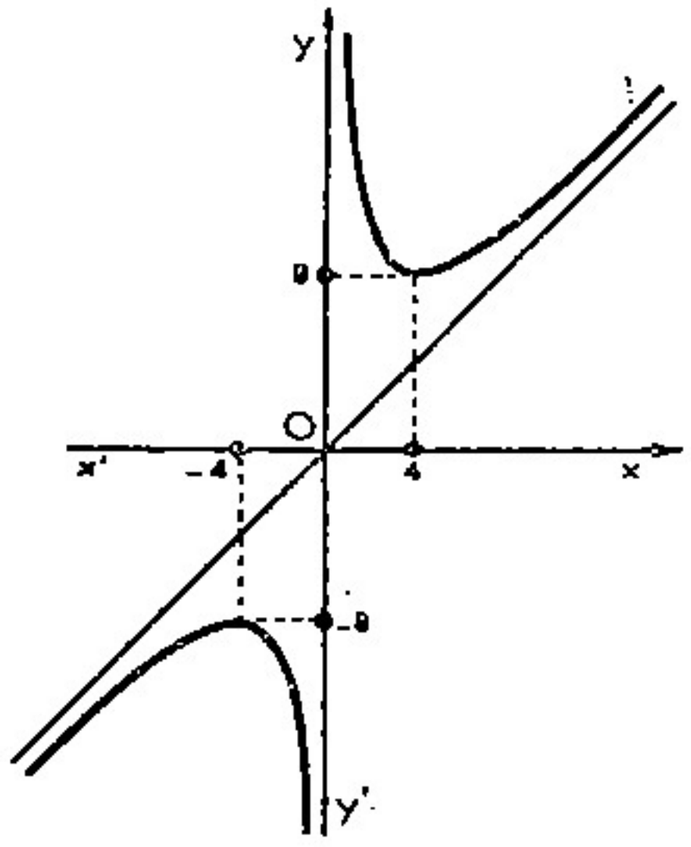
بجعل $x \to \pm\infty$ فان معادلة التابع تتلبس بـ $y = x$ فهـو محـور مقارب مائل ، نحسب المشتق :

$$y' = \frac{x^2 - 16}{x^2}$$

ينعدم مع تغيير الاشارة من أجل $x = \pm 4$ وتوجد نهايتان :

$$x = -4 \Longrightarrow y = -8 \quad , \quad x = 4 \Longrightarrow y = 8$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$'y$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-8	↘	$+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$



الشكل (٢٦)

مثال (٣) : ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

تابع معين ومستمر من أجل جميع القيم ما عدا $x = \pm 1$ حيث يمثلان محورين مقاربين يوازيان محور التراتيب . ندرسه في المجال :

$$]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]1, +\infty[$$

بجعل $x \to \infty$ فان معادلة التابع تكتب بعد اجراء التقسيم :

$$y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

وبالتالي تتلبس بالمعادلة $y = x$ فهو محور مقارب مائل .

مثال (٤) : ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

تابع أصم معين ومستمر من أجل جميع قيم x التي تجعل ما تحت الجذر موجباً أو صفراً . أي معرف ومستمر على المجال :

$$]-1\ ,\ +1\ ]$$

التناظر : من أجل أية قيمة لـ x تقع ضمن المجال يقابلها قيمتان متناظرتان لـ y اذن المنحني متناظر بالنسبة للمحور ox لذلك نكتفي بأخذ احدى الاشارتين ولتكن الموجبة:

من اجل $x \to -1$ فان $y \to -\infty$ أي $x = -1$ محور مقارب . المشتق :

$$y' = \frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

ينعدم المشتق من أجل قيمة واحدة تقع داخل المجال وهي :

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0{,}3$$

من أجل :

$$x = 1 \Longrightarrow y = 0 \quad , \quad x = 0 \Longrightarrow y = 0$$

x	-1		0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		1
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}3$	$\searrow$	0

المشتق :

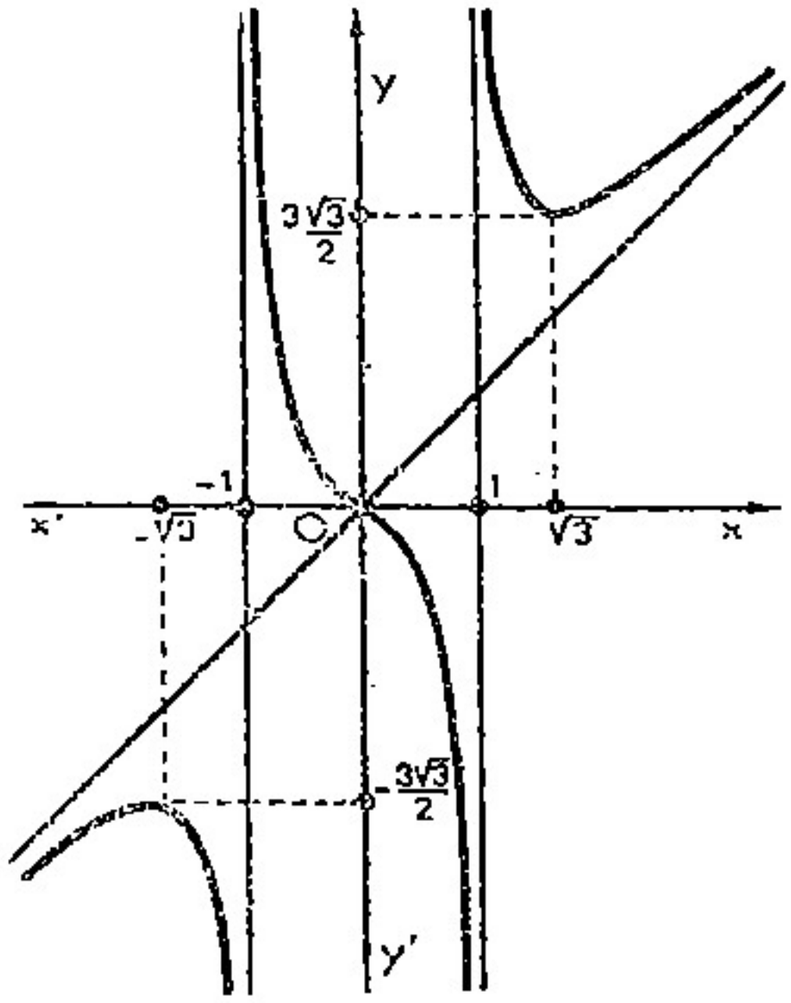
$$y' = \frac{x^2 (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

ينعدم من أجل $x = 0$ ولا يغير اشارته ، فلا توجد نهاية تقابل هذه القيمة ، وينعدم من أجل $x = \pm \sqrt{3}$ ويغير اشارته ، وبالتالي توجد نهايتان عظمى وصغرى .

ويكون :

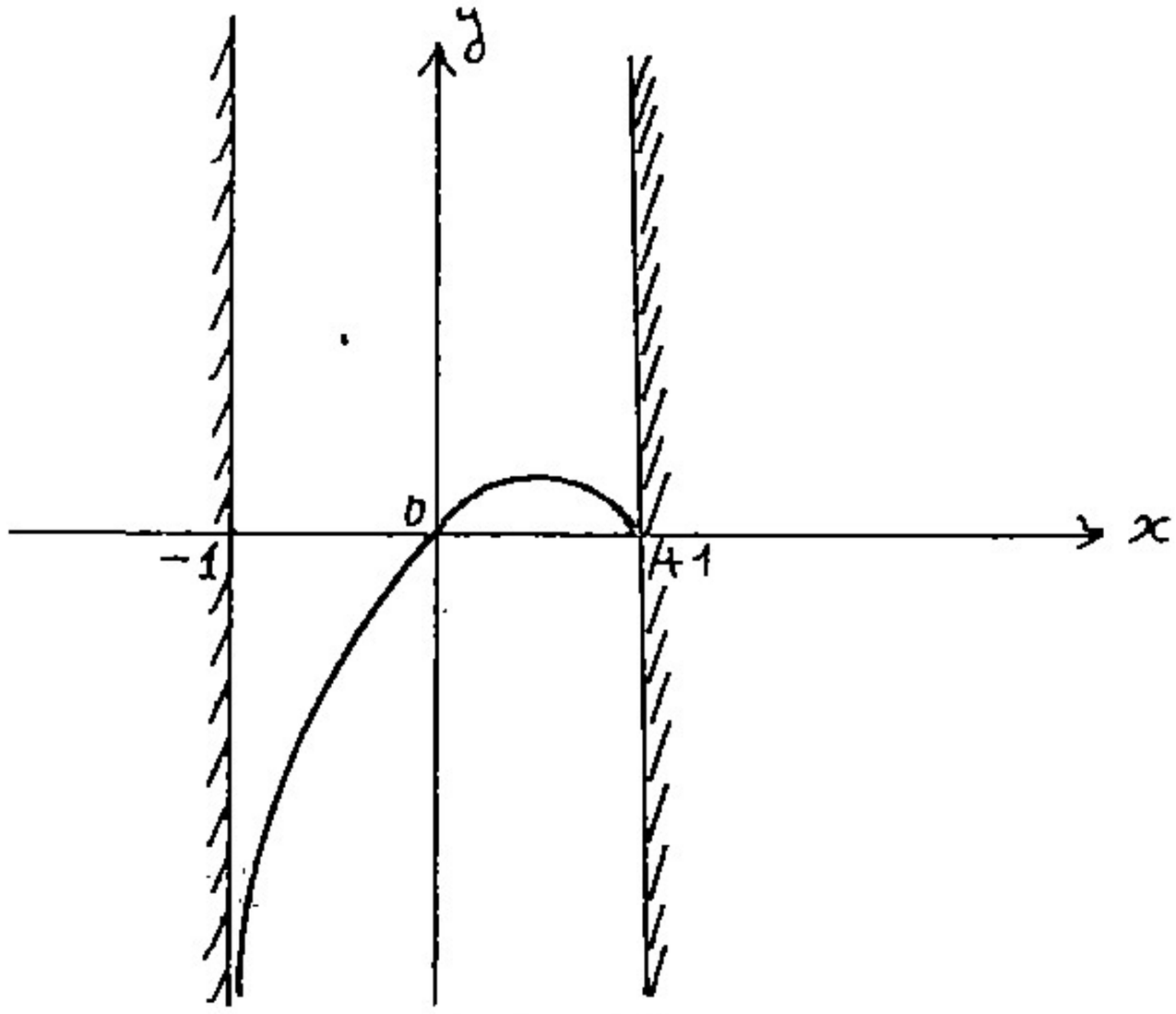
$$x = -\sqrt{3} \Longrightarrow y = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \; ; \quad x = \sqrt{3} \Longrightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$



الشكل (٢٧)

والخط البياني كما في الشكل (٢٨) :



الشكل (٢٨)

مثال (٥) : ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

تابع أصم معين ومستمر من أجل جميع قيم x التي تجعل المجذور موجباً ، أو صفراً . أي : معرف ومستمر على المجال :

$$]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

التناظر : من أجل أي قيمة لـ x تقع ضمن المجال يقابلها قيمتان متناظرتان لـ y اذن المنحني متناظر بالنسبة الى المحور ox لذلك يكفي اخذ احدى الاشارتين ولتكن الموجبة:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

المحاور المقاربة : نبحث من المحاور المقاربة ، فمعادلتها من الشكل :

$$y = mx + K$$

فمن أجل $x\to+\infty$ فان :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$$

$$K=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)=\infty-\infty$$

ولازالة عدم التعين هذه نضرب ونقسم على المرافق :

$$K=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[-3+\frac{2}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right]}$$

$$=\frac{-3}{2}$$

والمحور المقارب الاول :

$$y=x-\frac{3}{2}$$

من أجل $x\to-\infty$ فان :

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$K=\lim_{x\to-\infty}(y-mx)=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x)$$

$$=\infty-\infty$$

ولازالتها نضرب ونقسم على المرافق :

$$K=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2-3x+2}-1}$$

$$K = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1}$$

$$= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

والمحور المقارب الثاني :

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

المشتق :

$$y' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$y' > 0$ من أجل $x > \frac{3}{2}$

$y' < 0$ من أجل $x < \frac{3}{2}$

نلاحظ أن $y'=0$ عندما $x = \frac{3}{2}$ وهي خارج المجال :

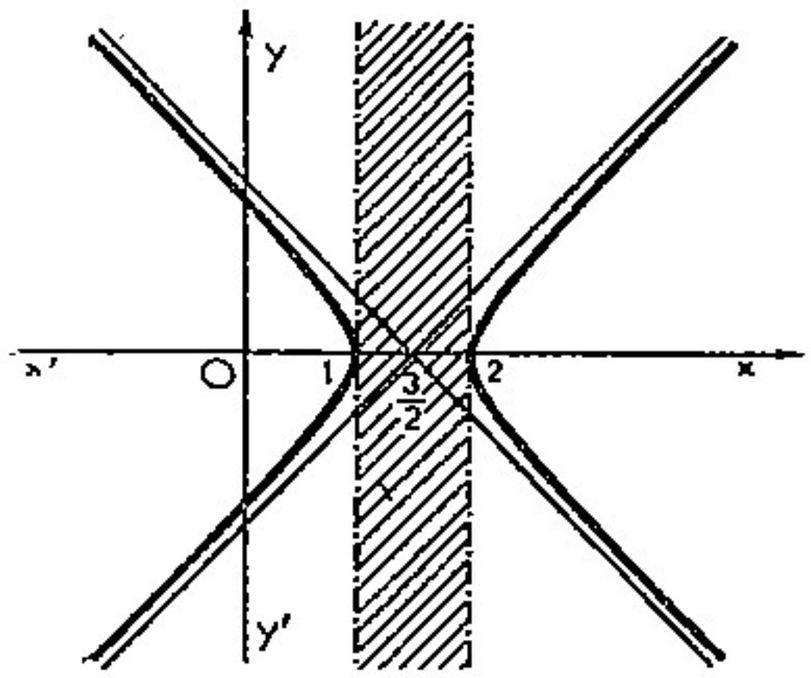
القيم الشهيرة :

$$x = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{2}$$

$$y = 0 \Longrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y' = \infty$$

ويقال ان المنحني شاقولي :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	∄	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$ $\sqrt{2}$ $\searrow$	0	0	$\nearrow$ $+\infty$



الشكل (٢٩)

٩ ـ ٢ ـ ٣ ـ ملاحظة هامة جداً :

اذا كان التابع من الشكل :

$$y = \sqrt{a x^2 + b x + c}$$

واذا كان مجاله يسمح بجعل $x \to \pm\infty$ فلايجاد محاوره المقاربة نتمم ما تحت الجذر الى مربع كامل ونلبس التابع بالقيمة المطلقة لجذر المربع الكامل .

في المثال السابق لدينا :

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

لايجاد محاوره المقاربة نكتب :

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2} = \left|x - \frac{3}{2}\right|$$

أي المحوران المقاربان :

$$y = \left|x - \frac{3}{2}\right|$$

فمن أجل $x \to +\infty$ يكون :

$y = x - \frac{3}{2}$ المقارب الاول

ومن أجل $x \to -\infty$ يكون :

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

أي :

$y = -x + \frac{3}{2}$ المقارب الثاني

٩ ـ ٣ ـ دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابـع المثلثية البسيطـة

٩ - ٣ - ١ - التابع $y = \sin x$:

تابع دوري دوره 2π اذن نكتفي بدراسته فى المجال $[0, 2\pi]$. المشتق :

$$y' = \cos x$$

ينعدم من أجل :

$$x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

واشارته : بين الجذرين سالبة وخارجها موجبة .

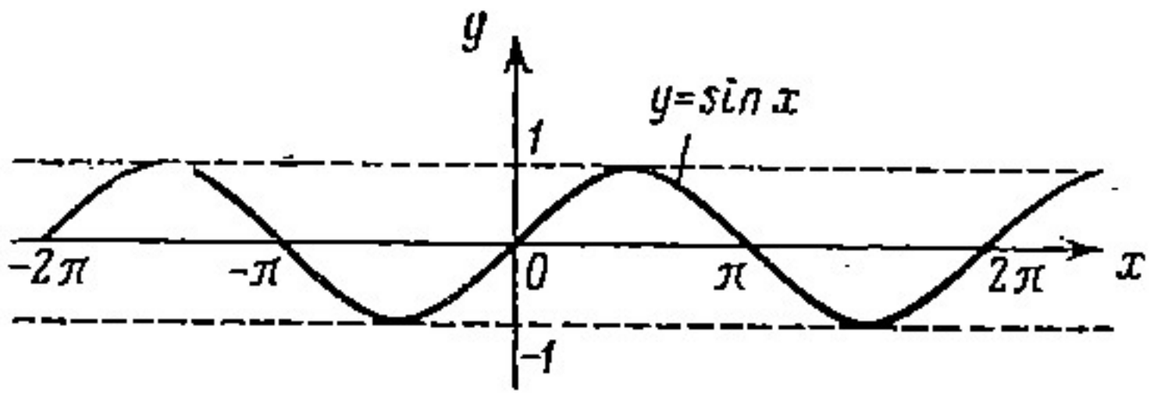
الانعطاف :

$$y'' = -\sin x$$

ينعدم من أجل :

$$x = 0 \quad , \quad \pi \quad , \quad 2\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



الشكل (٣٠)

٩ ـ ٣ ـ ٢ ـ التابع $y = \cos x$:

تابع دوري دوره 2π نكتفي بدراسته ضمن المجال $[0 , 2\pi]$. المشتق :

$$y' = -\sin x$$

ينعدم من أجل :

$$x = 0 \quad , \quad \pi \quad , \quad 2\pi$$

واشارته بين $0 , \pi$ سالبة ثم تتعاقب اشارته بالتناوب .

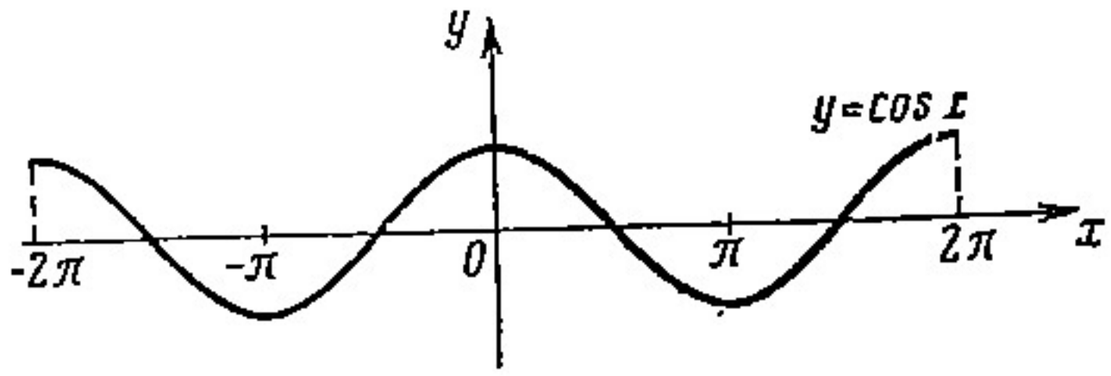
الانعطاف :

$$y'' = -\cos x$$

ينعدم من أجل :

$$x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



الشكل (٣١)

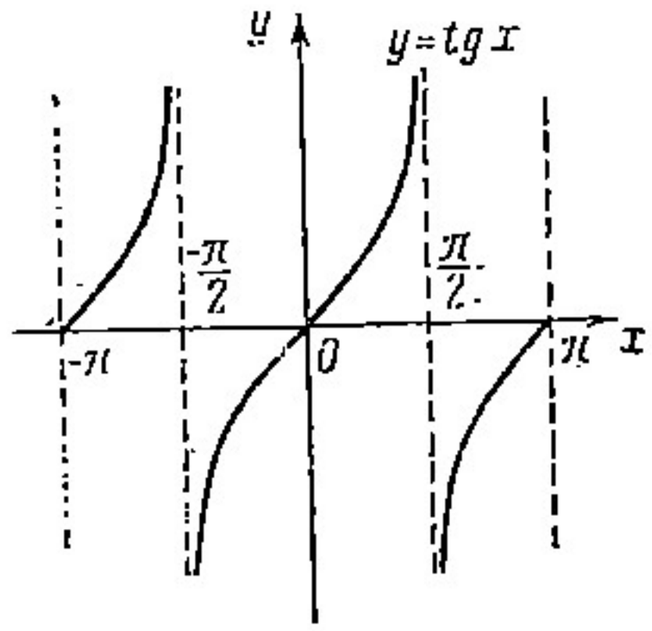
٩ - ٣ - ٣ - التابع $y = \operatorname{tg} x$:

تابع دوري دوره π ومنقطع من أجل ($x = \frac{\pi}{2}$ فهو خط مقارب) . المشتق:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

وهو موجب دوماً والتابع صاعد دوماً .

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$+$		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	0



الشكل (٣٢)

٩ – ٣ – ٤ – التابع $y = \arcsin x$:

هذا التابع ، فيه المتحول x يتغير بين $+1$ ، -1 بينما الزاوية y تأخذ عدداً لا نهائياً من القيم لتغطية هذا المجال كما شرحنا ذلك في (٧ – ١ – ١) . ونكتفي من هذه القيم بجعل :

$$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

المشتق :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وهو موجب دوماً والتابع متزايد ولا توجد نهايات . من أجل $x \to \pm 1$ فان $y' \to \infty$ والمنحني شاقولي .

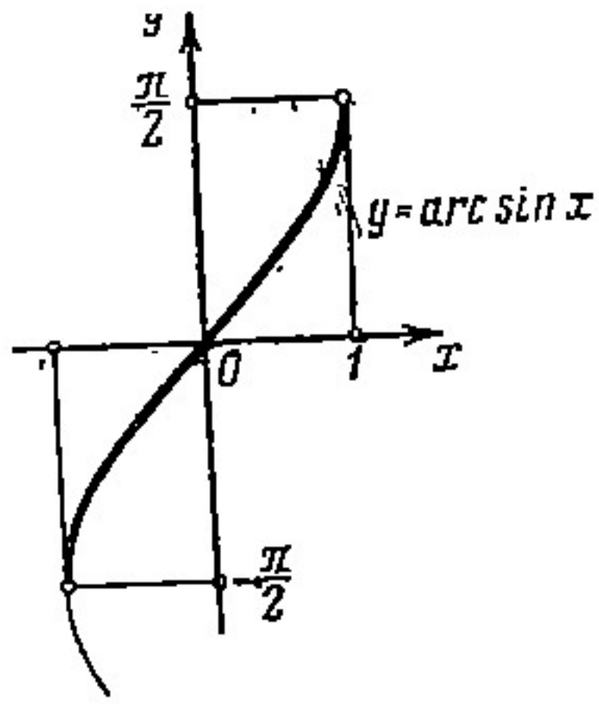
القيم الشهيرة :

$$x = 0 \implies y = 0$$

$$x = -1 \implies y = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = +1 \implies y = \frac{\pi}{2}$$

x	-1		0		$+1$
$'y$	∞	$+$		$+$	∞
y	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$+\frac{\pi}{2}$

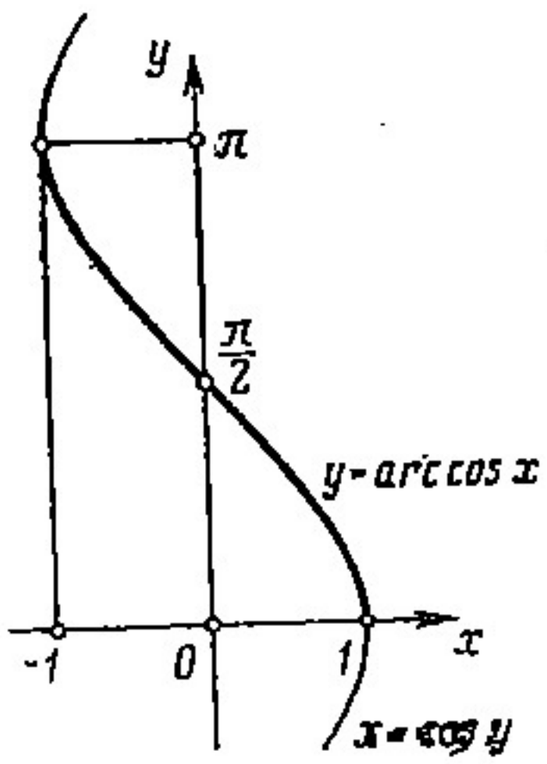


الشكل (٣٣)

٩ - ٣ - ٥ - التابع $y = \arccos x$:

هذا التابع ، يتحول فيه x بين -1 ، $+1$ بينما y تأخذ عدداً لا نهائياً من القيم لتغطية هذا المجال حسب (٧ - ١ - ٢) ونكتفي من هذه القيم بجعل :

$$0 \leqq y \leqq \pi$$



x	-1		0		$+1$
y'	∞	$-$		$-$	∞
y	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

الشكل (٣٤)

المشتق :

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

سالب دوماً ولا توجـــد نهايات والتابع متناقص . من أجل $x \to \pm 1$ فان $y' \to \infty$ والمنحني شافولي .

القيم الشهيرة :

$$x = -1 \implies y = \pi$$

$$x = 0 \implies y = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 1 \implies y = 0$$

٩ - ٣ - ٦ - التابع $y = \text{arc tg } x$:

فيه x تتحول من $-\infty$ الى $+\infty$ وحسب (٧ - ١ - ٣) نكتفي بجعل :

$$\frac{-\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

المشتق :

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

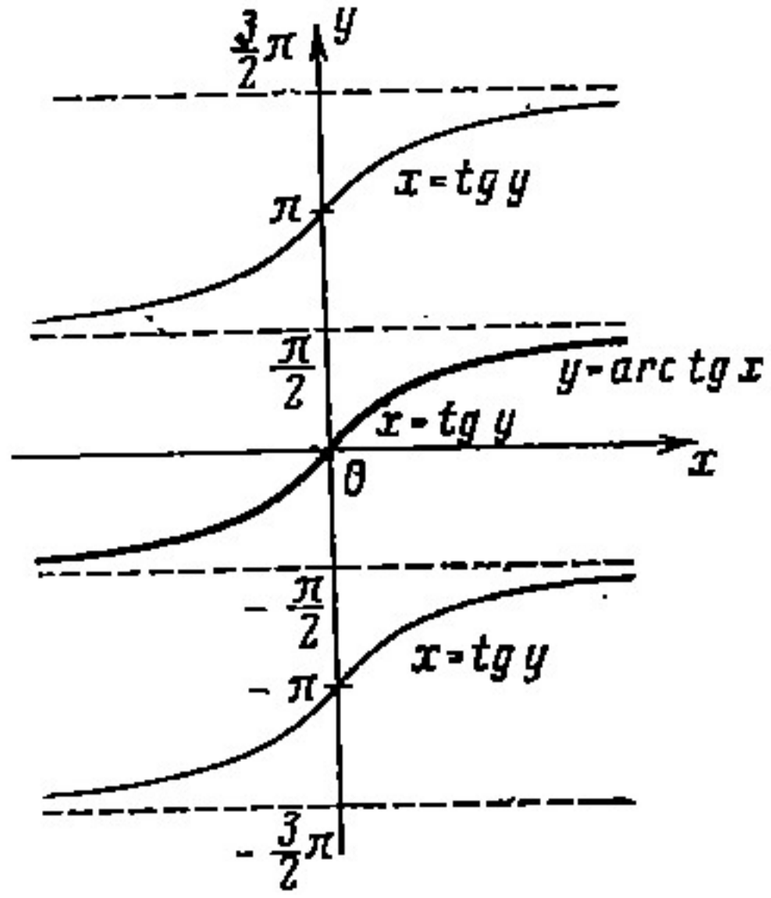
موجب دوماً والتابع متزايد ولا توجد نهايات .

من أجل $x = 0$ فان $y' = 1$.

ومن أجل $x \to \pm\infty$ فان $y \to \pm\frac{\pi}{2}$.

وبالتالي : $y = \pm\frac{\pi}{2}$ محوران مقاربان :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$'y$	0	$+$		$+$	0
y	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



الشكل (٣٥)

٩ ـ ٤ ـ دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع القطعية

٩ ـ ٤ ـ ١ ـ التابع $y = \operatorname{ch} x$:

نعلم ان :

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

فهو تابع معين ومستمر من أجل جميع القيم . وهو متناظر بالنسبة الى محور التراتيب لانه اذا بدل x بـ $-x$ فان y لا تتغير ، لذلك ندرسه في المجال $]0, +\infty[$.

المشتق :

$$y' = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ينعدم عندما :

$$e^x - e^{-x} = 0$$

أو :

$$e^{2x} - 1 = 0$$

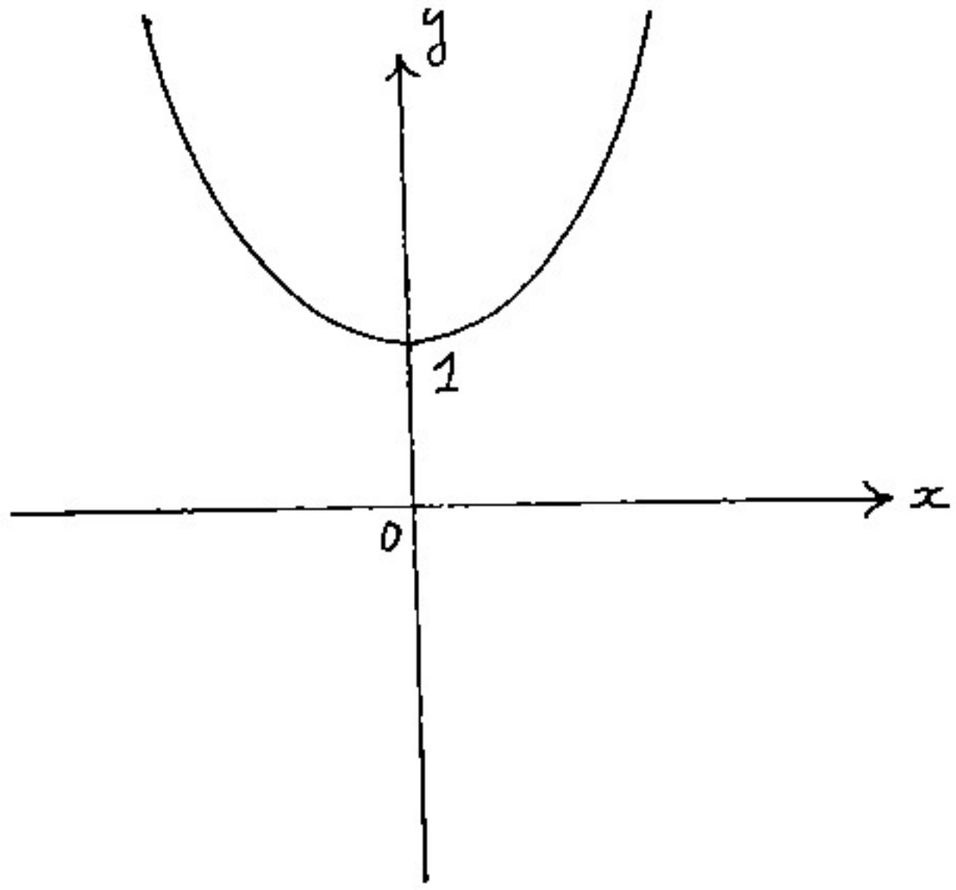
أي :

$$2x = \log 1 = 0$$

ومنه $x = 0$ ، ويغير اشارته لان $y' = \text{sh}\, x$ تصبح اشارته موجبة اذا كانت x موجبة وبالعكس . اذن توجد نهاية صغرى $x = 0$ ، $y = 1$.

التقعر والانعطاف : $y'' = \text{ch}\, x$ موجب دوماً والتقعر نحو الاعلى ولا يوجد انعطاف . من أجل $x \to +\infty$ فان $y \to +\infty$.

x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	1	$\nearrow +\infty$



الشكل (٣٦)

٩ - ٤ - ٢ - التابع $y = \text{sh}\, x$:

نعلم ان :

$$y = \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وهو تابع معين ومستمر من أجل جميع القيم ، مجاله $]-\infty, +\infty[$.

اذا بدلنا x بـ $-x$ فان y تصبح $-y$ فهو متناظر بالنسبة الى المركز .

المشتق :

$$y' = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

موجب دوماً والتابع متزايد ولا توجد نهايات .

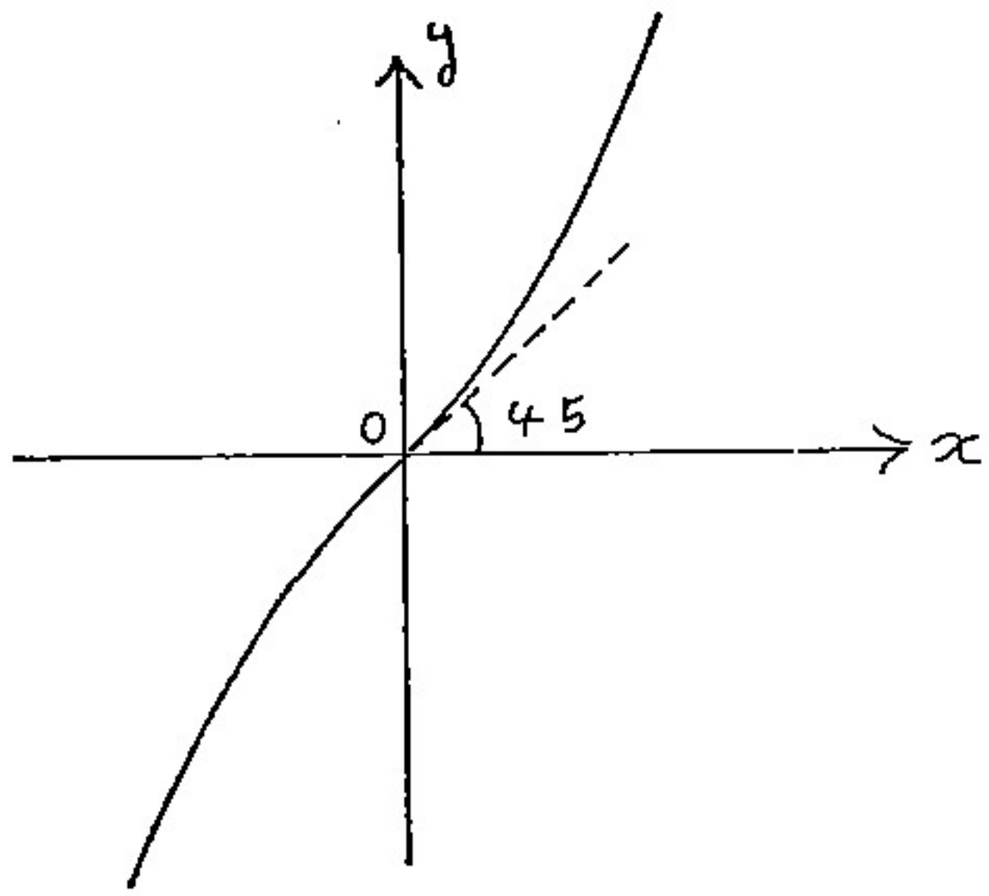
التقعر والانعطاف : $y'' = \text{sh}\, x$ ينعدم من أجل $x = 0$ ويغير اشارته اذن توجد نقطة انعطاف ($x = 0$ ، $y = 0$) أي نقطة المبدأ . من أجل :

$$x \to -\infty \implies y \to -\infty$$

$$x \to +\infty \implies y \to +\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

:



الشكل (٣٧)

٩ - ٣ - ٣ - التابع $y = th\,x$:

نعلم ان :

$$y = th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

تابع معين ومستمر من أجل جميع القيم . اذا بدلنا x بـ $-x$ فان y تصبح $-y$ فهو متناظر بالنسبة الى المبدأ .

المشتق :

$$y' = \frac{1}{ch^2 x}$$

موجب دوماً والتابع متزايد ولا توجد نهايات . من أجل :

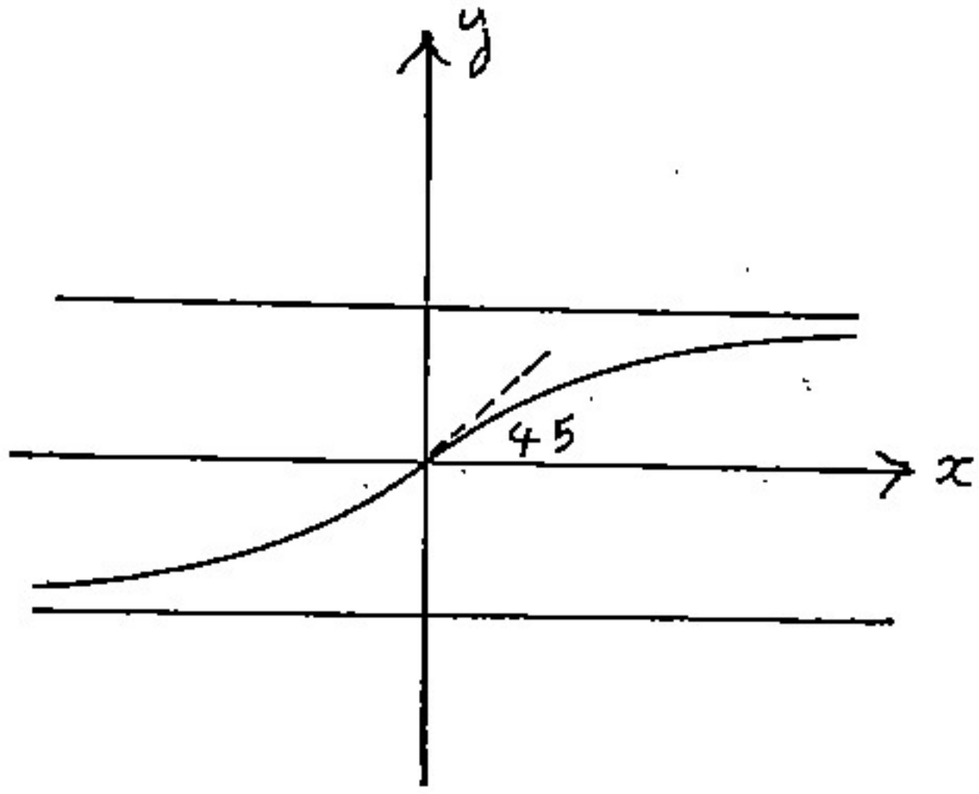
$$x = 0 \text{ فان } y' = 1 \quad , \quad y = 0$$

القيم الشهيرة :

$$x \to -\infty \implies y \to -1 \text{ وبالتالي } y = -1 \text{ محور مقارب}$$

$$x \to +\infty \implies y \to 1 \text{ وبالتالي } y = 1 \text{ محور مقارب}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



الشكل (٣٨)

٩ ـ ٥ ـ دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع الاسية واللغاريتمية

٩ ـ ٥ ـ ١ ـ التابع : الاسي $y = e^x$:

معين ومستمر من أجل جميع القيم ، مجاله $]-\infty, +\infty[$.

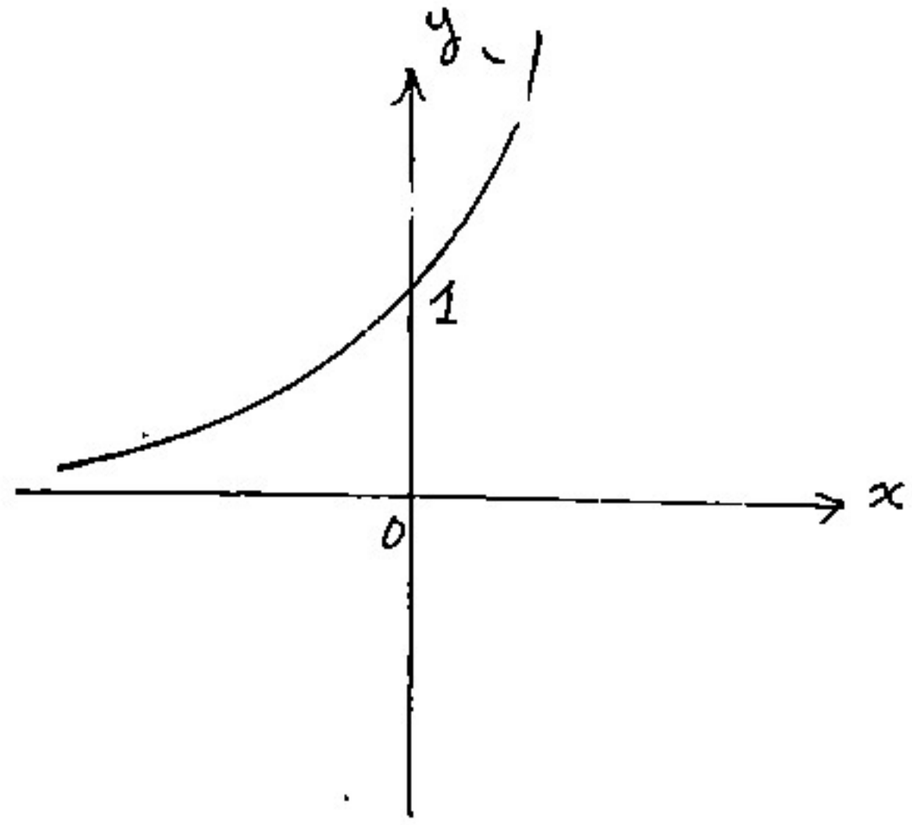
المشتق : $y' = e^x$ موجب دوماً ولا ينعدم والتابع متزايد دوماً . القيم الشهيرة :

من أجل : $x = 0 \implies y = 1$

$x \to -\infty \implies y \to 0$ وبالتالي $y = 0$ محور مقارب

$x \to +\infty \implies y \to +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$'y$		$+$		$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



الشكل (٣٩)

٩ - ٥ - ٢ - التابع الاسي $y = e^{-x}$:

بنفس الطريقة ندرس هذا التابع ونجد خطه البياني كما في الشكل (٤٠) :

٩ - ٥ - ٣ - التابع اللغاريتمي $y = \log x$:

معين ومستمر من أجل القيم الموجبة للمتحول ، فمجاله $]0 , +\infty[$.

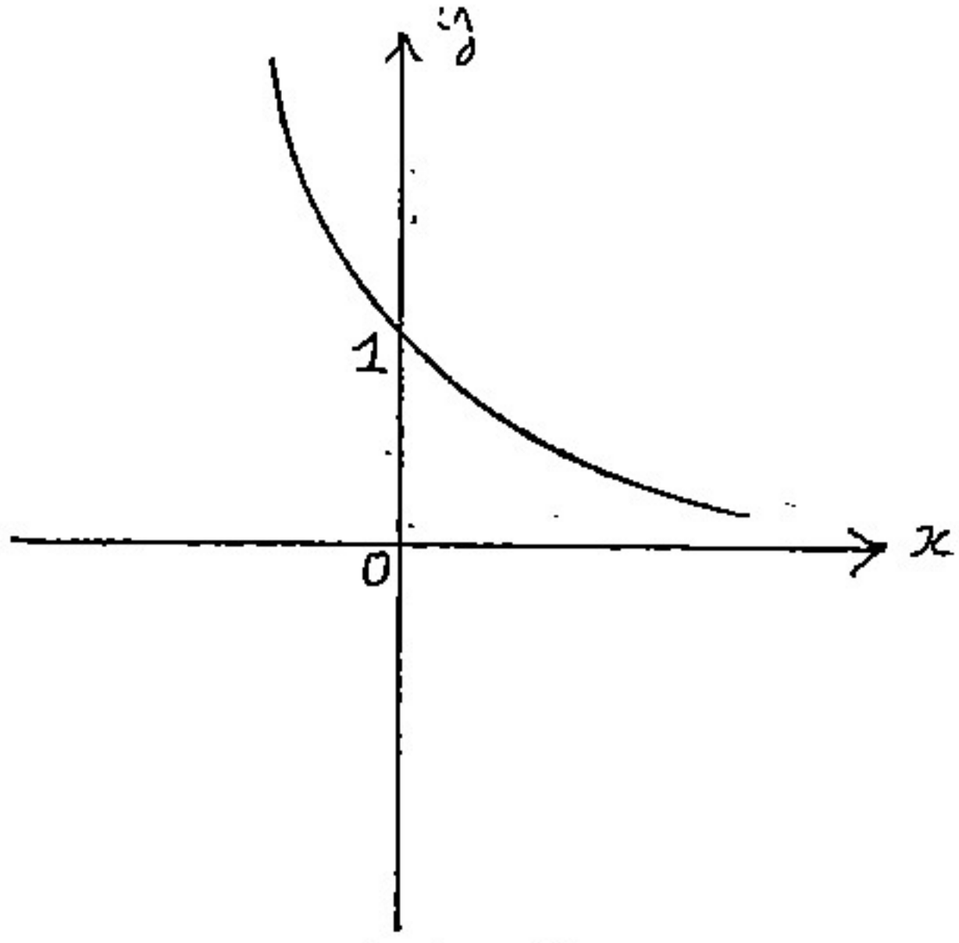
المشتق :

$$y' = \frac{1}{x}$$

موجب من أجل قيم المجال والتابع متزايد .

القيم الشهيرة :

من أجل $x \to +\infty$ فان $\lim y' = 0$ والمنحني أفقي ، $y \to \infty$

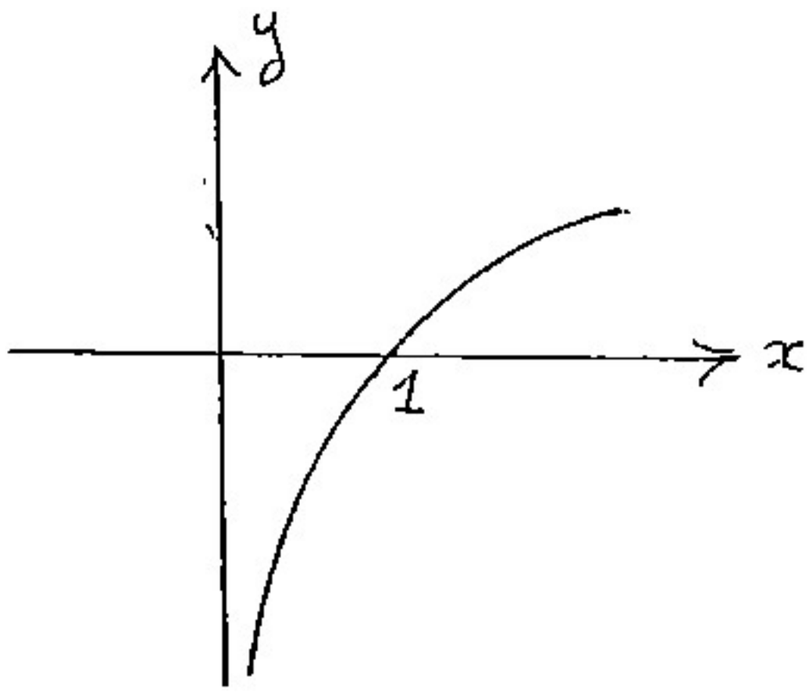


الشكل (٤٠)

$x \to 0$ فان $y' \to +\infty$ والمنحني شاقولي ، $y \to -\infty$ اذن $x = 0$ مقارب

$x = 1$ فان $y' = 1$ ، $y = 0$

x	0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$		$+$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الشكل (٤١)

٩ - ٥ - ٤ - التابع الأسي $y = a^x$:

نميز حالتين : آ) بفرض $a > 1$ يكون التابع معيناً ومستمراً من أجل جميع القيم . المشتق $y' = a^x . \log a$ وهو موجب دوماً والتابع متزايد .

من أجل $x \to -\infty$ فان $y' \to 0$ والمنحني أفقي ويكون $y = 0$ أي محورالفواصل هو محور مقارب .

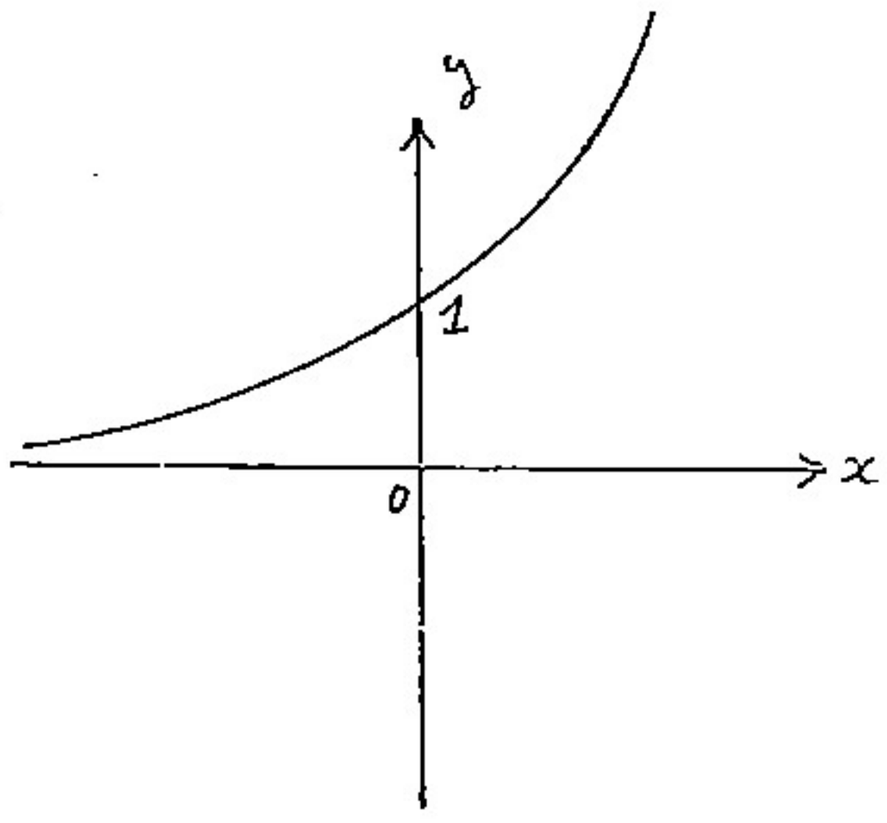
من أجل $x \to \infty$ فان $y' \to +\infty$ والمنحني شاقولي :

القيم الشهيرة :

$$y = 1 \quad , \quad x = 0$$

$$y = a \quad , \quad x = 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	0	$+$		$+$		$+$	∞
y	0	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	$+\infty$



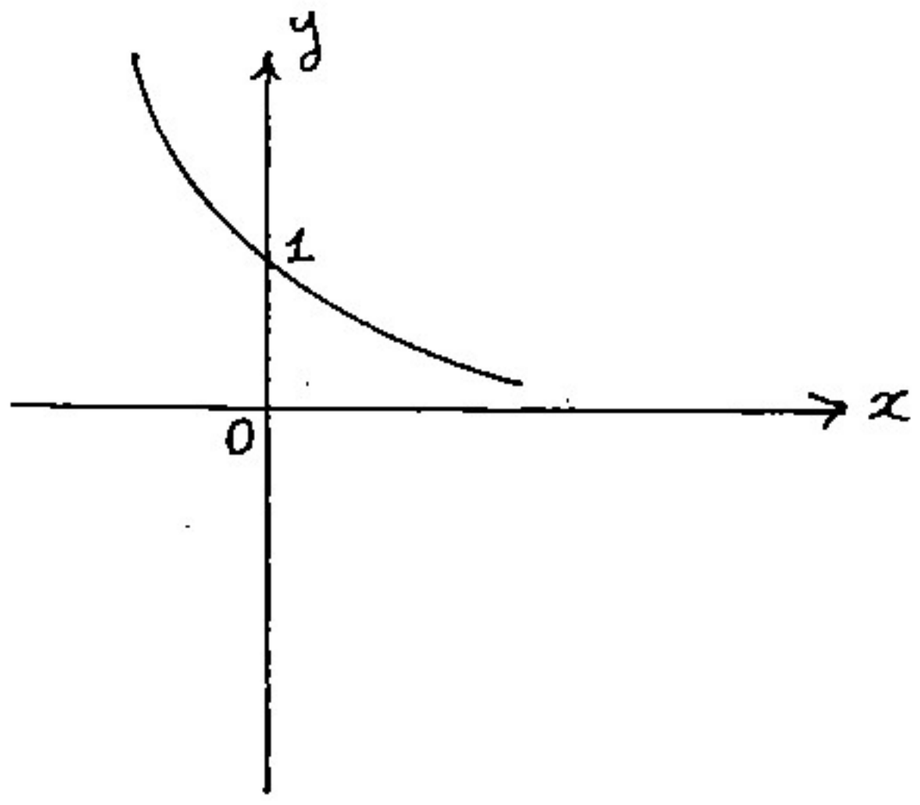
الشكل (٤٢)

ملاحظة : اذا فرضنا نقطة (x,y) بحيث $y=a^x$ وأخذنا نقطة فصلها يزيد 1 عن فصل الاولى وليكن ترتيبها y_1 فلدينا :

$$y_1 = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot y$$

أي أن ترتيب كل نقطة يكبر a مرة عندما يزداد فصلها 1 ، أي أن y تزداد بسرعة فائقة .

ب) بفرض $a < 1$: نتبع نفس الطريقة ونجد الخط البياني كما في الشكل (٤٣).



الشكل (٤٣)

ونجد أيضاً أن ترتيب كل نقطة ينقص a مرة عندما يزداد فصلها 1 ، أي أن y تتناقص بسرعة كبيرة .

٩ ــ ٦ ــ دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع المعينة بمعادلاتها الوسيطية

٩ - ٦ - ١ - دراسة التحولات :

ليكن التابع المعين بمعادلتيه الوسيطيتين :

$$y = g(t) \quad , \quad x = f(t)$$

فلدراسة تحولاته ورسم خطه البياني نقتفي الخطوات التالية :

١ً ـ ندرس القيم الخاصة :

$$y = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t = 0$$

$$y \to \infty \quad , \quad x \to \infty \quad , \quad t \to \infty$$

٢ً ـ ندرس ما اذا كان المنحني يمر من نقطة المبدأ وذلك بالبحث عن قيم t تلك التي تجعل $x = 0 , y = 0$ بآن واحد ثم نحسب ميل المماس من أجل هـذه النقطة وذلك بحساب $\lim_{x \to 0} y/x$.

٣ً ـ ندرس تناظر المنحني كما يلي :

اذا بدلنا t بـ t— وتغير y , x فأصبحا x— , y— نستنتج أن المنحني متناظر بالنسبة الى المبـــدأ . اذا بدلنا t بـ t— وتغيرت x فأصبحت x— دون أن تتغير y نستنتج أن المنحني متناظر بالنسبة الى المحور oy .

اذا بدلنا t بـ t — وتغيرت y فأصبحت y— دون ان تتغير x نستنتج أن المنحني متناظر بالنسبة الى المحور 0x .

٤ً ـ نبحث عن المحاور المقاربة كما يلي :

المحور المقارب الموازي محور التراتب نحصل عليه بجعل y مالا نهاية دون أن تصبح x كذلك .

المحور المقارب الموازي محور الفواصل نحصل عليه بجعل x مالا نهاية دون أن تصبح y كذلك .

المحور المقارب المائل نحصل عليه بالبحث عن قيم t الـتي تجعل كلا من x , y مالا نهاية بآن واحد . ويمكن ايجاد ميله بالبحث عن :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{g(t)}{f'(t)}$$

ثم نبحث عن الترتيب عن المبدأ وذلك بحساب نهاية $y - mx$ عندما $x \to \infty$.

٥ً ـ نحسب x'_t , y'_t ونستنتج y'_x كما نحسب قيم t , y , x التي من أجلها يصبح $y' = 0 , y' \to \infty$.

٦ً ـ ننظم جدولاً يحوي أربعة أسطر تتضمن تحولات كلٍ من t , x , y , y' .

٧ً ـ نرسم المنحني على ضوء الجدول .

٩ ـ ٦ ـ ٢ ـ السيكلوئيد Cycloïde :

يتولد السيكلوئيد من حركة نقطة مثبتة على محيط دائرة عندما تتدحرج هـذه الدائرة (بدون انزلاق) على مستقيم مفروض .

لتكن M النقطة الثابتة على محيط الدائرة ولنفرض أنها كانت في نقطة الاصل عند بدء حركة الدائرة . ولنعين احداثيات M بعدما تكون الدائرة قد دارت زاوية θ . لدينا من الشكل (٤٤) .

$$x = OP = OB - PB \qquad (1)$$

وبما أن الدائرة تدور بدون انزلاق يكون لدينا :

حيث R نصف قطر الدائرة $\quad OB = \widehat{MB} = R \cdot \theta$

$$PB = MK = R \cdot \sin \theta$$

نعوض في (1) :

$$x = R \cdot \theta - R \cdot \sin \theta = R (\theta - \sin \theta)$$

ولدينا :

$$y = MP = BK = CB - CK = R - R \cos \theta = R (1 - \cos \theta)$$

مما تقدم نحصل على الاحداثيات الوسيطية للسيكلوئيد وهي :

$$x = R (\theta - \sin \theta)$$

$$y = R (1 - \cos \theta)$$

ولدراسة ورسم السيكلوئيد نتبع ما يلي :

اذا بدلنا θ بـ $-\theta$ ـ فان x تصبح $-x$ بينما y لا تتغير ، اذن المنحني متناظر

بالنسبة الى المحور ox . واذا بدلنا θ بـ $2\pi + 0$ فان y تأخذ نفس القيمة بينما x تزداد بمقدار $2\pi R$ الامر الذي يجعلنا نكتفي بدراسته خلال المجال $[0, 2\pi]$ لأن بقية فروع المنحني يمكن استنتاجها بعد ذلك من انسحابات متتالية كل منها $2\pi R$ وفق $0x$.

لدينـا :

$$x'_\theta = R(1 - \cos\theta)$$

$$y'_\theta = R \sin\theta$$

وبالتـالي :

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

ينعدم هذا المشتق من أجل $\theta = \pi$ ويكون المماس أفقياً في النقطة $x = R.\pi$ ، $y = 2R$. اما من أجل $\theta \to 0$ ، $\theta \to 2\pi$ فان المشتق يصبح بالشكل :

$$y' \longrightarrow \frac{0}{0}$$

عدم تعيين وحسب اوبيتال :

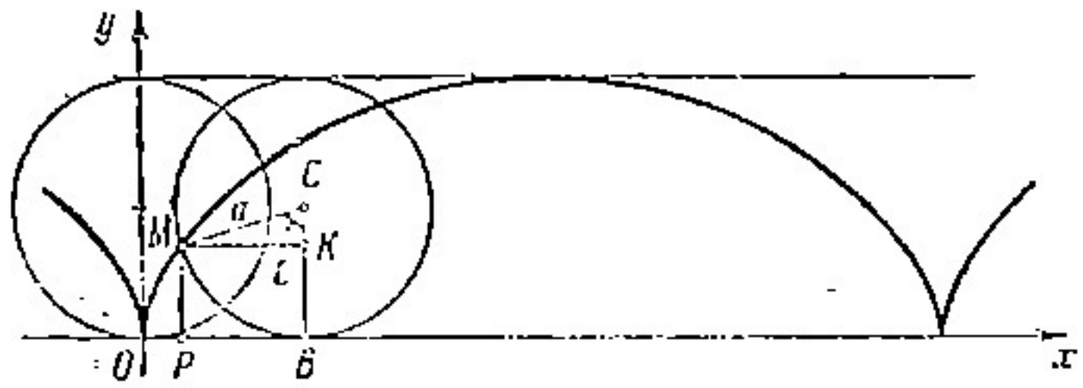
$$y' = \lim \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

نعوض :

من أجل $\theta \longrightarrow 0$ فان $y' \longrightarrow \infty$ ويصبح المماس شاقولياً في النقطة $y=0 , x=0$.

من أجل $\theta \longrightarrow 2\pi$ فان $y' \longrightarrow \infty$ ويصبح المماس شاقولياً في النقطة $y = 0 , x = 2\pi R$.

θ	0	π	2π
x	0	πR	$2\pi R$
y	0 ↗	$2R$ ↘	0
y'	∞	0	∞



الشكل (٤٤)

٩ - ٦ - ٣ - الاستروئيد Astroïde :

نسمي بالاستروئيد ذلك المنحني الذي معادلتاه الوسيطيتان :

$$x = a \cdot \cos^3 t$$

$$y = a \cdot \sin^3 t$$

ولدراسة ورسم الاستروئيد نتبع ما يلي :

إن $\cos^3 t$, $\sin^3 t$ دوريان ودورهما 2π لذلك نكتفي بدراسته ضمن المجال $[2\pi , 0]$.

نلاحظ أن x تتحول ضمن النطاق $(-a,a)$ كذلك y تتحول ضمن النطاق $(-a,a)$ ومن الواضح أن المنحني لا يقبل محاور مقاربة :

لدينـا :

$$x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$$

ومنـــه :

$$y' = \frac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t$$

ينعدم المشتق من أجل : $t = 0$ ويكون المماس أفقياً في النقطة $y=0 , x=a$

$t=\pi$ ويكون المماس أفقياً في النقطة $y=0 , x=-a$

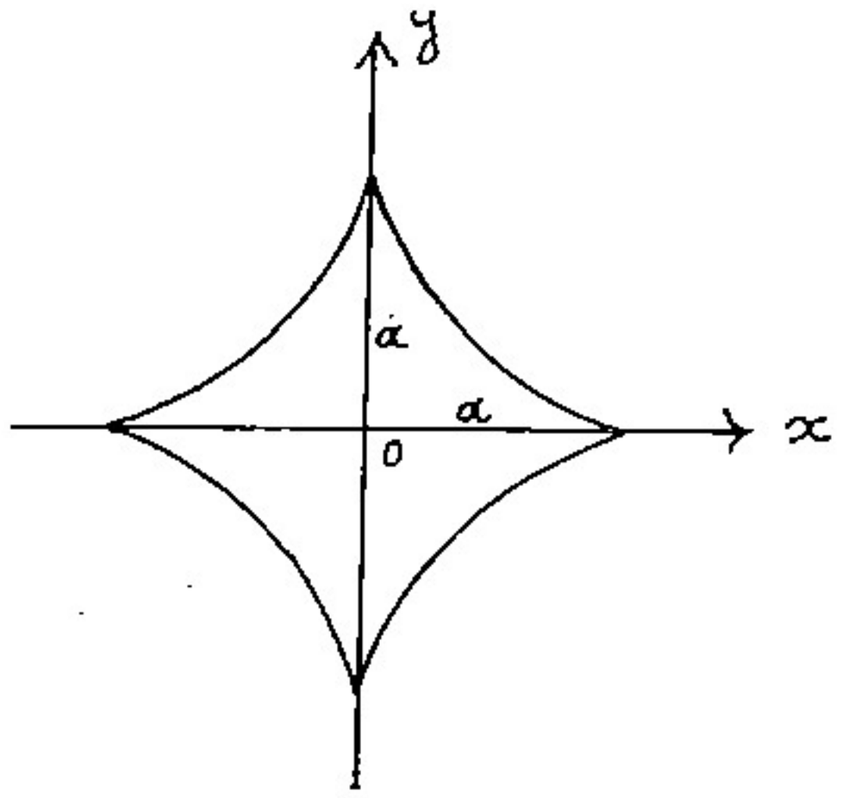
$t=2\pi$ ويكون المماس افقياً في النقطة $x=a\ ,\ y=0$

ويصبح المشتق $y' \longrightarrow \infty$ من أجل $t \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ ويكون المماس شاقولياً في النقطة $x=0\ ,\ y=a$

$t \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$ ويكون المماس شاقولياً في النقطة $x=0\ ,\ y=-a$

وخطه البياني كما في الشكل (٤٥) :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a
y	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0
y'	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	0



الشكل (٤٥)

٩ - ٦ - ٤ - فوليوم دوديكارت Folium de Descartes :

معادلتاه الوسيطيتان :

$$y = -\frac{3\,a\,t^2}{1+t^3} \quad , \quad x = \frac{3\,a\,t}{1+t^3}$$

١ً ـ ان الوسيط t يأخذ جميع القيم ما عدا $t = -1$ لذلك يكون مجال الدراسة $]-\infty , +\infty[/\{-1\}$.

٢ً ـ من اجل $t = 0$ فان $x = y = 0$ والمنحني يمر من المركز ويكون ميل المماس في المبدأ معيناً بالعلاقة :

$$m = \lim_{t \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{t \to o} \quad t = 0$$

وبالتالي المنحني يمس محور الفواصل .

٣ً ـ إن x , y يصبحان مالا نهاية معاً عندما : $t \to -1$

نستنتج أن المنحني يقبل محـــوراً مقارباً من أجل $t \to -1$ ويكون ميله معيناً بالعلاقة :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} \quad t = -1$$

ولايجاد الترتيب عن المبدأ نبحث عن :

$$\lim_{t \to -1} (y - mx) = \lim_{t \to -1} (y + x)$$

$$= \lim_{t \to -1} \left(\frac{3\,a\,t^2}{1+t^3} + \frac{3\,a\,t}{1+t^3} \right)$$

$$= \lim_{t \to -1} \left(\frac{3\,a\,t\,(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)} \right)$$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{3\,a\,t}{1-t+t^2}$$

$$= \frac{-3\,a}{3} = -a$$

وتصبح معادلة المحور المقارب :

$$y = -x - a$$

٤ً ـ لدينا :

$$x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \qquad y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

ومنه نستنتج :

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

ينعدم المشتق من أجل :

$t = 0$ ويصبح المماس أفقياً في النقطة $x=0$, $y=0$ أي المنحني يمس محور الفواصل .

$t=2^{1/3}=1,25$ ويصبح المماس أفقياً في النقطة $x = 1.25\,a$, $y = 1.6\,a$.

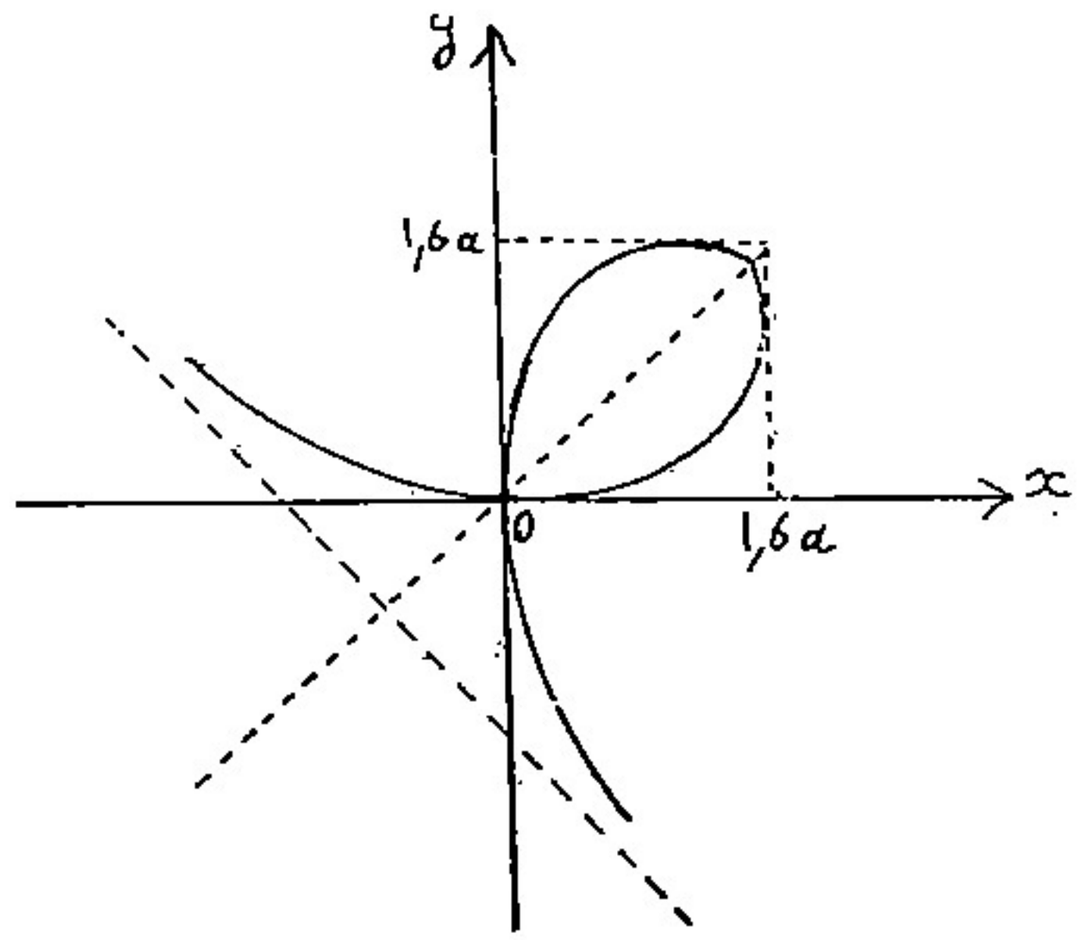
ويصبح المشتق $y' \to \infty$ من أجل :

$t \to \infty$ ويصبح المماس شاقولياً في النقطة $x=0$, $y=0$ أي المنحني يمس محور التراتيب .

$t=(1/2)^{1/3}=0,8$ ويصبح المماس شاقولياً في النقطة $x=1,6\,a$, $y=1,25a$.

الجـــدول :

t	$-\infty$	-1	0	$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
x	0 $\quad +\infty$	$-\infty$	0	$1,6\,a$	$1,25a$	0
y	0 $\quad +\infty$	$-\infty$	0	$1,25\,a$	$1,6\,a$	0
y'	∞	-1	0	∞	0	∞

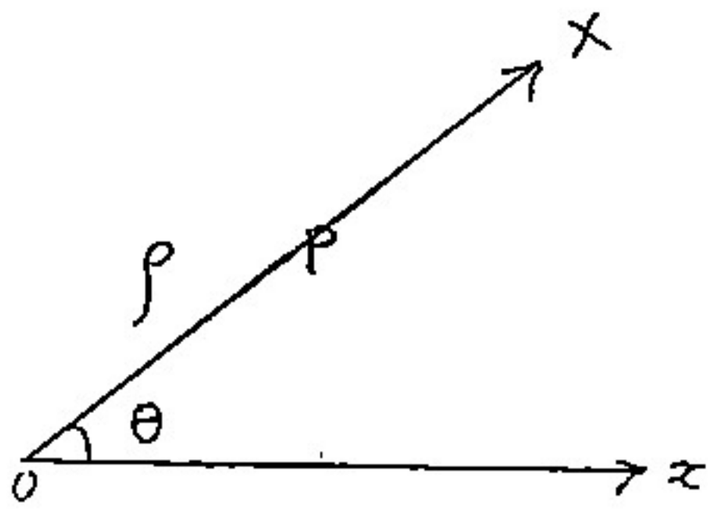


الشكل (٤٦)

٩ ــ ٧ ــ دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع المعينة بالاحداثيات القطبية

٩ ــ ٧ ــ ١ ــ الاحداثيات القطبية :

نأخذ نقطة ثابتة O نسميها بالقطب ، ونتشىء منها محوراً ox نسميه بالمحورالقطبي، ولنأخذ نقطة P في المستوي ، ولنرسم المحور OX المار من النقطة P شكل (٤٧) .



الشكل (٤٧)

نسمي القياس الجبري لـ OP بنصف القطر الشعاعي ρ ، كما نسمي ($\widehat{Ox}, \overrightarrow{OP}$) بالزاوية القطبية ونرمز لها θ . ان العددين الجبريين (ρ,θ) يسميان بالاحداثيات القطبية .

نعتبر θ موجبة اذا كانت ناتجة من دوران Ox بالاتجاه الموجب وتكون سالبة اذا كان العكس . كما نعتبر ρ موجباً اذا كان يمثل ضلع الزاوية θ ، وسالباً اذا كان محمولاً على امتداد ضلع الزاوية .

كل عددين جبريين مثل (ρ.θ) يعينان نقطة وحيدة في المستوي ، وبالعكس كل نقطة من المستوي يقابلها مجموعات من الاحداثيات القطبية التي توصلنا اليها بشتى الطرق .

مثال : النقطة (3,60°) يمكن تعيينها بـ : (3,420°) ، (−3 , −120°) ، (3, −300°) ويفضل عملياً أخذ القيم الموجبة للزاوية θ .

المعادلة القطبية لمنحن : هي العلاقة التي تربط بين الاحداثيين القطبيين (ρ,θ) لكل نقطة من نقاط المنحني ونرمز لها :

$$\rho = f(\theta)$$

حالة خاصة : اذا كانت θ ثابتة فهي تمثل مستقيماً يمر من القطب ، واذا كان ρ ثابتاً فهو يمثل دائرة مركزها القطب .

العلاقات بين الاحداثيات الديكارتية والقطبية :

لتكن النقطة $p(\rho,\theta)$ المعينة باحداثياتها القطبية ، فللانتقال الى الاحداثيات الديكارتية: لدينا :

$$y = \rho \sin \theta \quad , \quad x = \rho \cos \theta$$

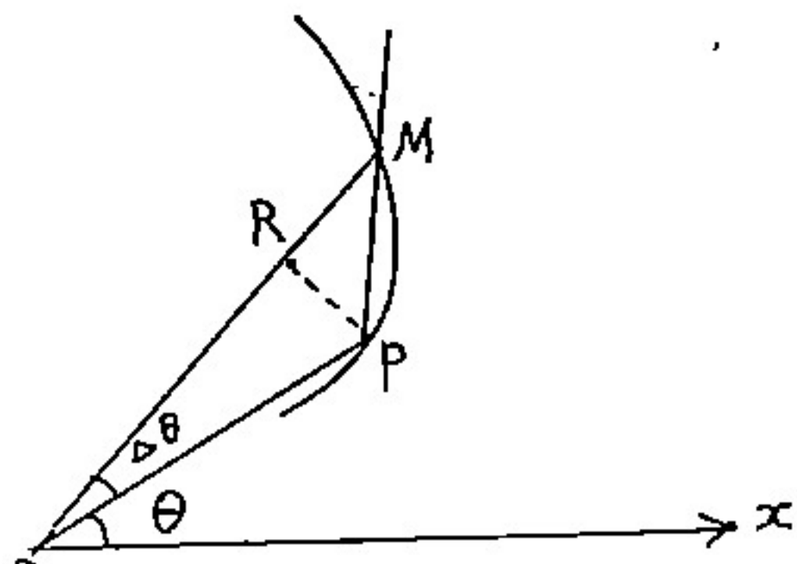
وبالعكس لتكن $p(x,y)$ المعينة باحداثياتها الديكارتية فللانتقال الى احداثياتها القطبية نكتب :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad ، \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

٩ - ٧ - ٢ - الزاوية التي يصنعها ρ المتعلق بالنقطة p مع المماس لمنحني التابع في تلك النقطة :

لتكن معادلة المنحني $\rho = f(\theta)$ ولتكن النقطتان $p(\rho,\theta)$, $M(\rho+\Delta\rho,\theta+\Delta\theta)$ من المنحني ، شكل (٤٨) . نصل القاطع pM وننزل عموداً من p على OM وليكن PR فيكون :

$$oR = \rho.\cos\Delta\theta \quad , \quad pR = \rho.\sin\Delta\theta \quad , \quad oM = \rho + \Delta\rho$$



الشكل (٤٨)

وينتج لدينا :

$$\text{tg p MR} = \frac{pR}{RM} = \frac{\rho \sin \Delta\theta}{oM - OR}$$

بالتعويض :

$$\text{tg p M R} = \frac{\rho \,.\, \sin \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta}$$

$$= \frac{\rho \,.\, \sin \Delta\theta}{\Delta\rho + \rho\,(1 - \cos \Delta\theta)}$$

$$= \frac{\rho \,.\, \sin \Delta\theta}{\Delta\rho + 2\,\rho \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}$$

لنقسم الصورة والمخرج على $\Delta\theta$ يكون :

$$\mathrm{tg\ p\ M\ R} = \frac{\rho\ \dfrac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta} + \rho \sin\dfrac{\Delta\theta}{2} \cdot \dfrac{\sin\ \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}}$$

بجعل $\Delta\theta \to 0$ فالنسبة :

$$\frac{\sin\ \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}$$

تنتهي الى الواحد ، كذلك :

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} \to 0$$

بالتعويض ، مع العلم ان القاطع Mp يأخذ نهاية الاوضاع ويصبح مماساً ، وان الزاوية pMR تصبح زاوية المماس مع نصف القطر الشعاعي ولتكن ψ ينتج :

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\rho}{\rho'}$$

والخلاصة : اذا كانت ψ زاوية المماس مع نصف القطر الشعاعي فهي معينة بالعلاقة :

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\rho}{\rho'}}$$

حالات خاصة :

آ ـ عندما تكون $\psi = \frac{\pi}{2}$:

فان المماس يكون عمودياً على نصف القطر الشعاعي وهذا يعني ان p يصبح ناظماً للمنحني .

ب ـ عندما تكون $\psi = 0$:

فان نصف القطر الشعاعي يصبح مماساً للمنحني .

٩ ـ ٧ ـ ٣ ـ النقطه المقاربة ، والدائرة المقاربة :

ليكن التابع $\rho = f(\theta)$ ولتكن $M(\rho,0)$ احدى نقاط منحنيه ، فاذا اتهى ρ الى الصفر عندما تنتهي θ الى ∞ فان النقطـــة M تنتهي الى القطب ويبقى OM بحالة دوران لا نهائية . في هذه الحالة نسمي القطب O بالنقطة المقاربة .

مثال : التابع $\rho = a\, e^{-\theta}$ يقبل القطب كنقطة مقاربة لانه من أجل :

$$\theta \to \infty \qquad \text{فان} \qquad \rho \to 0$$

أما اذا انحدر ρ الى قيمة معلومة c تختلف عن الصفر عندما θ تنتهي الى ∞ ، فان M تتقارب بشـكل لا نهائي من الدائرة التي معادلتها $\rho = c$. نسمي هـذه الدائرة بالدائرة المقاربة .

٩ ـ ٧ ـ ٤ ـ رسم منحن معين بمعادلته القطبية :

ليكن التابع $\rho = f(\theta)$ فلرسم خطه البياني نتبع المراحل الآتية :

آ ـ نعين المجال : فان كانت معادلة التابع خالية من النسب المثلثية فان المجـال يكون عادة $]-\infty, +\infty[$ وان كانت تحتوي على النسب المثلثية اكتفينا بدراسة التابع خلال الدور . ولنتذكر ان :

$\sin\theta$	أو	$\cos\theta$	دوره	2π
$\operatorname{tg}\theta$			دوره	π
$\sin m\theta$	أو	$\cos m\theta$	دوره	$\frac{2\pi}{m}$
$\operatorname{tg} m\theta$			دوره	$\frac{\pi}{m}$

ب ـ دراسة التناظر : يمكن الاستفادة من التناظر في اختصار المجال اذ ندرس جزءاً من المنحني بالطريقة المباشرة ونستنتج بقية الاجزاء من التناظر . والبحث عن التناظر نقوم بما يأتي :

نغير θ بـ $-\theta$ فاذا لم يتغير ρ كان المنحني متناظراً بالنسبة الى المحور القطبي ox .

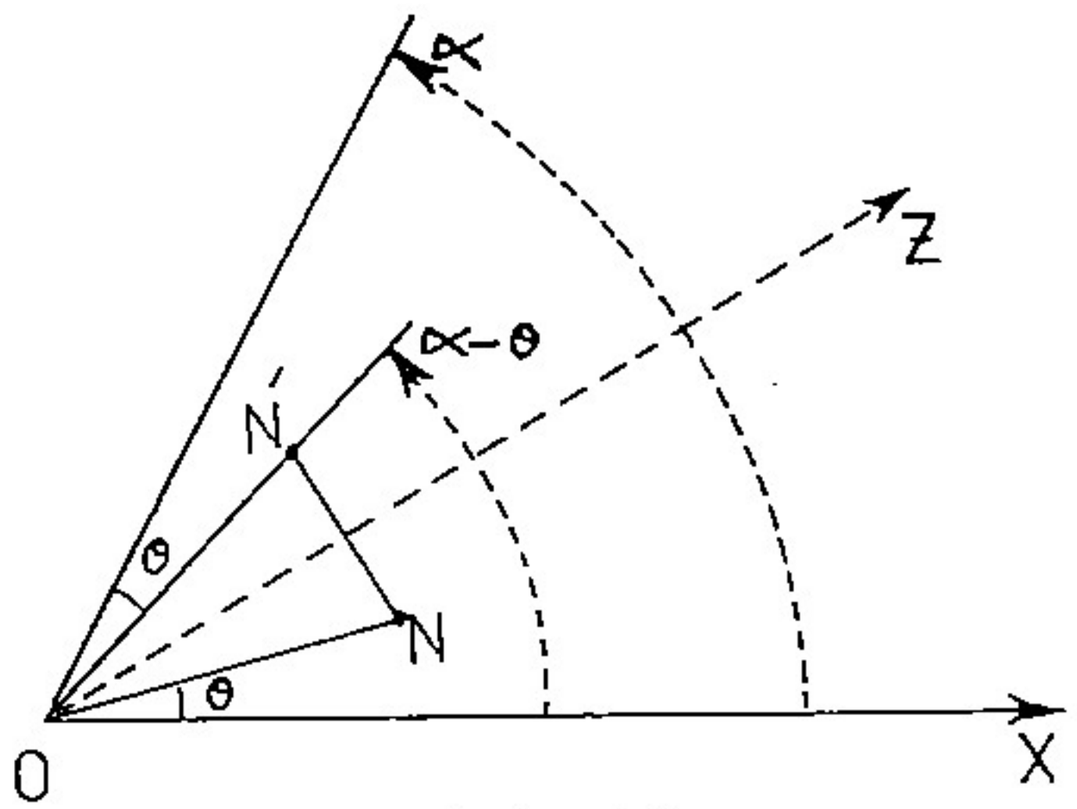
نغير θ بـ $-\theta$ فاذا تغير ρ وأصبح $-\rho$ فالمنحني متناظر بالنسبة الى المحور oy .

كذلك اذا غيرنا θ بـ $\pi-\theta$ ولم يتغير ρ فالمنحني متناظر بالنسبة للمحور oy أيضاً .

نغير θ بـ $\pi+\theta$ فاذا لم يتغير ρ فالمنحني متناظر بالنسبة الى القطب .

اذا غيرنا θ بـ $\alpha-\theta$ حيث α زاوية ما ولم يتغير ρ أي :

$$\rho = f(\theta) = f(\alpha - \theta)$$



الشكل (٤٩)

فالمنحني متناظر بالنسبة الى المحور oz حيث :

$$ox \cdot \widehat{oz} = \frac{\alpha}{2}$$

جـ ـ نحسب المشتق $\rho' = f'(\theta)$ فان كان $\rho' = \theta$ فان العلاقة :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\rho'} \quad \Longrightarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

أي المماس عمود على ρ .

وان كان $\rho' = \infty$ فان $\psi = 0$ والمنحني يمس نصف القطر الشعاعي ρ .

د ـ القيم الشهيرة : نعطي قيماً خاصه للمتحول θ ونحسب قيم ρ المقابلة لها .

٩ ـ ٧ ـ ٥ ـ امثلة محلولة :

مثال (١) : انشىء الخط البياني للتابع :

$$\rho = a \sin 2\theta$$

تابع دوري دوره $T = \pi$ اذن ندرسه في المجال $[0,\pi]$.

اذا بدلنا θ بـ $-\theta$ فان ρ تتغير وتصبح $-\rho$ فهو متناظر بالنسبة الى المحور oy فيكفي دراسته في المجال $\left[0 \, , \frac{\pi}{2}\right]$.

اذا بدلنا θ بـ $\frac{\pi}{2} - 0$ فان ρ لا تتغير فهو متناظر بالنسبة الى منصف الربع الاول اذن يكفي دراسته في المجال $\left[0 \, , \frac{\pi}{4}\right]$.

اذا بدلنا θ بـ $\theta + \pi$ فان ρ لا تتغير فهو متناظر بالنسبة الى القطب .

المشتق : $\rho' = 2a \cos 2\theta$ ينعدم من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$ وبالتالي :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\rho'} \quad \Longrightarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

أي نصف القطر الشعاعي عمود على المماس .

إن المشتق موجب دوماً من أجل قيم المجال اذن التابع متزايد .

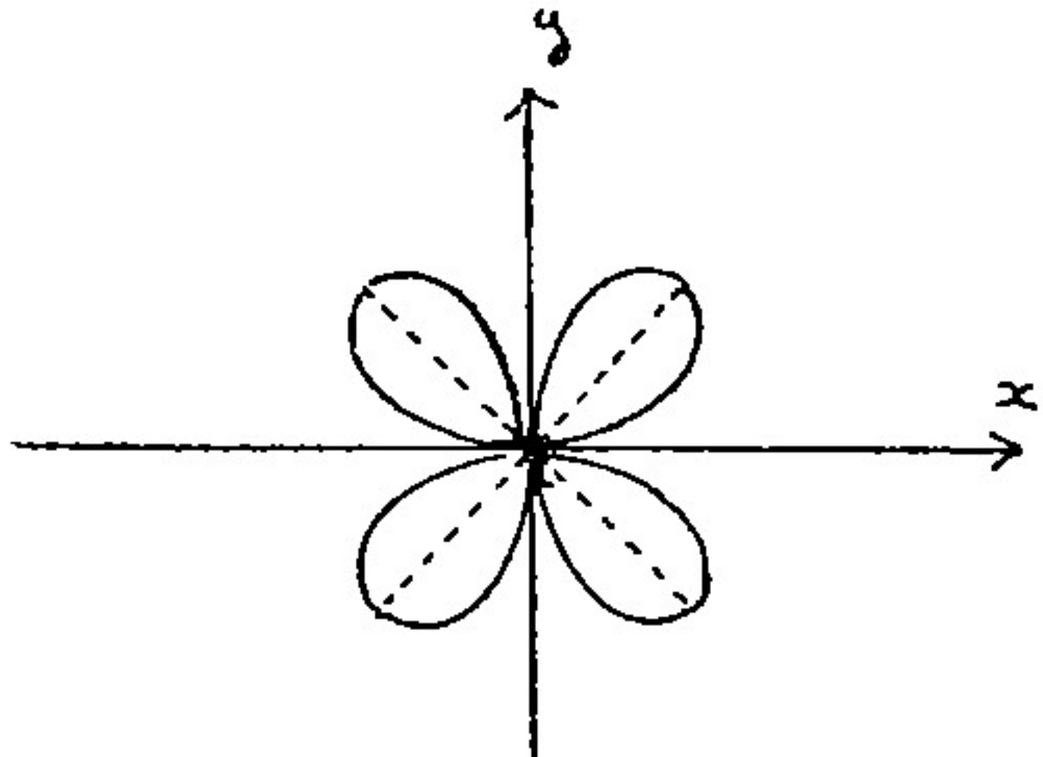
القيم الشهيرة : من أجل $\theta = 0$ فان $\rho = 0$

من أجل $\theta = \frac{\pi}{8}$ فان $\rho = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$ فان $\rho = a$

الجـــدول :

θ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$
ρ'		+		+	
ρ	0	⟶	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	⟶	a



الشكل (٥٠)

مثال (٢) : انشىء الخط البياني للتابع $\rho = a.\theta$ حيث a عدد ثابت موجب .

تابع معين ومستمر من أجل جميع القيم بحاله $]-\infty, +\infty[$.

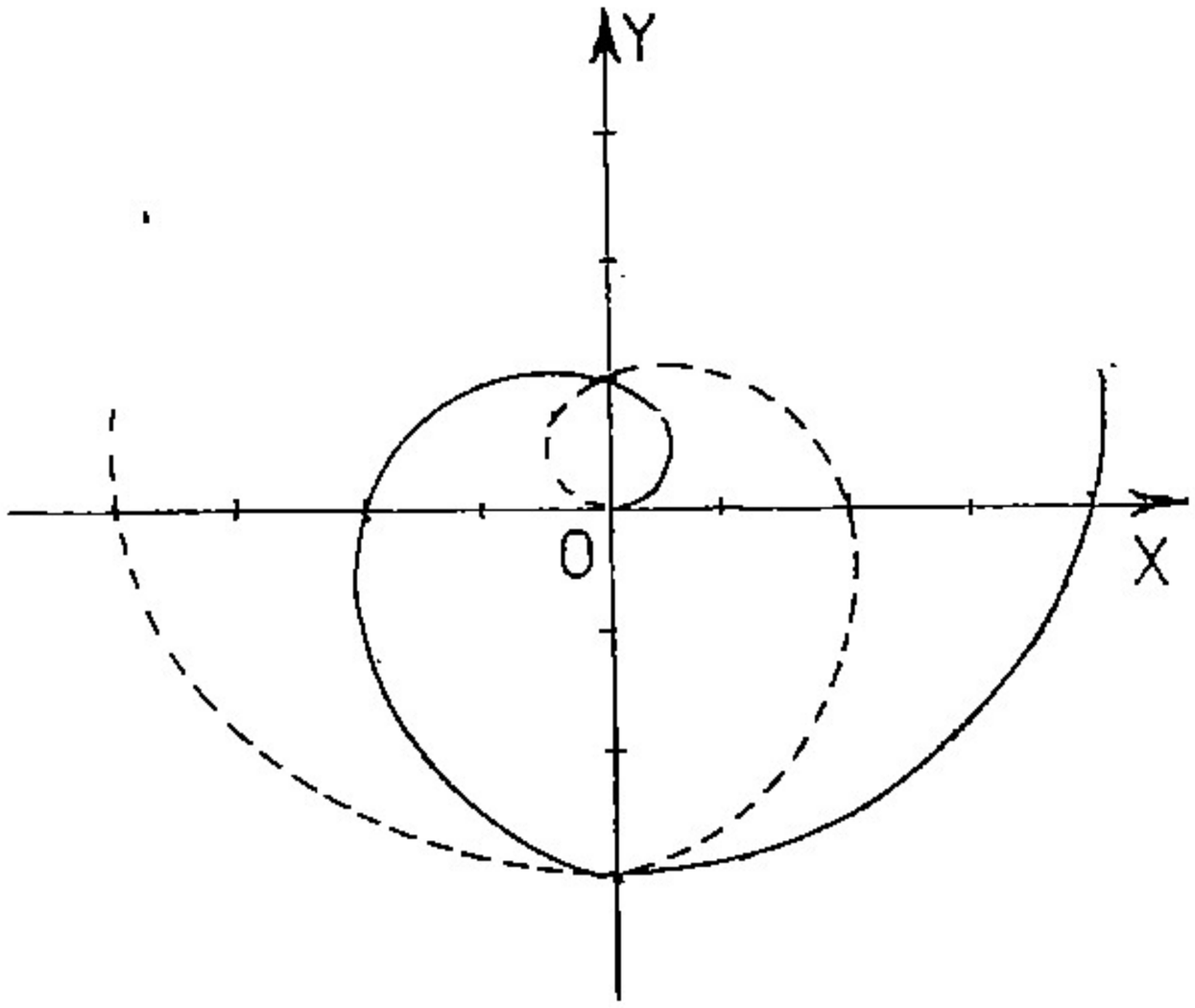
اذا بدلنا θ بـ $-\theta$ فان ρ تتغير وتصبح $-\rho$ فالمنحني متناظر بالنسبة الى المحور Oy .

يكفي دراسته في المجال $]0, +\infty[$.

المشتق :

$$tg\,\psi = \frac{\rho}{\rho'} = \theta \qquad \text{ويكون} \qquad \rho' = a$$

فمن أجل $\theta = 0$ فان $\rho = 0$ ويكون $tg\psi = 0$ أي المحور القطبي مماس المنحني في النقطة o . ويسمى بحازون ارخميدس شكل (٥١) .



الشكل (٥١)

تمارين

ادرس تحولات التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية :

١ - $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2}$

٢ - $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

٣ - $y = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$

٤ - $y = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{x}$

انشىء الخطوط البيانية للتوابع الآتية :

٥ - $\rho = a \cdot \sin 3\theta$

٦ - $\rho = a \cdot \cos 3\theta$

٧ - $\rho = a \cdot \cos 2\theta$

٨ - $\rho = a \cdot \sin 4\theta$

٩ - $\rho = 1 + \cos 3\theta$

١٠ - $\rho = a \cdot e^{m\theta}$

١١ - انشىء الخط البياني للتابع الآتي والمسمى كارديوئيد Cardioïde :

$$\rho = a\,(1 + \cos\theta)$$

١٢ - ادرس وارسم المنحني الآتي المعين بمعادلتيه الوسيطيتين والمسمى سيسوئيد Cissoïde :

ثم أوجد معادلته الديكارتية :

$$y = \frac{a \cdot t^3}{1 + t^2} \quad , \quad x = \frac{a \cdot t^2}{1 + t^2}$$

١٣ - ادرس وارسم المنحني الآتي المعين بمعادلتيه الوسيطيتين والمسمى ستروفوئيد Strophoïde :

$$y = \frac{a \cdot t(1 - t^2)}{1 + t^2} \quad , \quad x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$$

ثم أوجد معادلته الديكارتية .

ادرس تحولات التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية :

١٤ - $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

١٥ - $y = \pm \sqrt{x^2 + 4x}$

١٦ - $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

١٧ - $y = x \pm \sqrt{x^2 - 6x + 6}$

١٨ - ارسم المنحني البياني للتابع :

$$y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

مبيناً نهاياته وخطوطه المقاربة ونقاط انعطافه ان وجدت .

(دورة حزيران ١٩٧٠)

١٩ - ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$$

(دورة حزيران ١٩٧١)

٢٠ - ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$\rho = 2 \sin 2\theta$$

(دورة حزيران ١٩٦٩)

٢١ ـ ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

٢٢ ـ ادرس تحولات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \frac{1 - x}{1 + x^2}$$

(دورة حزيران ١٩٧٠)

٢٣ ـ ليكن التابع :

$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x - 2}$$

والمطلوب : آ ـ عين المجال الذي يكون فيه التابع معينا .

ب ـ أوجد معادلات مستقيماته المقاربة .

(دورة حزيران ١٩٧٣)

٢٤ ـ لدينا التابع :

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

والمطلوب : آ ـ حدد المجال الذي يكون فيه التابع معيناً .

ب ـ عين المستقيمات المقاربة لهذا التابع .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

٢٥ ـ ليكن التابع :

$$y = \frac{x^2}{x - 1}$$

والمطلوب : دراسة تحولات هذا التابع ورسم خطه البياني .

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

٢٦ ـ ليكن التابع :

$$y = 2x - 1 - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$$

والمطلوب : آ ـ عين مجموعة تعريفه .

ب ـ أوجد معادلات محاوره المقاربة .

(الفرع المدني : دورة ايلول ١٩٧٧)

الفصل العاشر

السلاسل الصحيحة أو سلاسل القوى ـ مجال التقارب
النشر المحدود ـ تطبيقات

SÉRIES ENTIÈRES OU SÉRIES DE PUISSANCES – INTERVALLE DE CONVERGENCE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ — APPLICATIONS

١٠ ـ ١ ـ السلاسل الصحيحة

١٠ ـ ١ ـ ١ ـ تعريف :

نسمي سلسلة صحيحة كل سلسلة تتكون حدودها من القوى الصحيحة والمتزايدة للمتحول x ، فهي من الشكل :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

حيث $a_0 , a_1 \dots a_n \dots$ ثوابت معطاة تدعى أمثال السلسلة ، ويلاحظ أن السلسلة الصحيحة ليست إلا كثير حدود من الدرجة مالا نهاية .

١٠ ـ ١ ـ ٢ ـ نظرية آبل (Abel) :

١ ـ اذا كانت سلسلة صحيحة متقاربة من أجل قيمة ما x_0 غير معدومة فهي متقاربة مطلقاً من أجل كل قيمة للمتحول x تحقق العلاقة :

$$|x| < |x_o|$$

٢ ـ اذا كانت سلسلة صحيحة متباعدة من أجل قيمة ما x'_o فهي متباعدة من أجل كل قيمة للمتحول x تحقق العلاقة :

$$|x| > |x'_o|$$

البرهان : لتكن السلسلة الصحيحة :

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots \qquad (1)$$

لدينا فرضاً السلسلة العددية الآتية متقاربة :

$$a_o + a_1 \cdot x_o + a_2 \cdot x^2_o + \dots + a_n \cdot x^n_o + \dots \qquad (1')$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot x^n_o = 0$$

وهذه العلاقة تؤكد وجود عدد موجب M بحيث تكون جميع حـــدود السلسلة أصغر بالقيمة المطلقة من M .

لنكتب السلسلة (1) بالشكل :

$$a_o + a_1 \cdot x_o \left(\frac{x}{x_o}\right) + a_2 \cdot x^2_o \left(\frac{x}{x_o}\right)^2 + \dots + a_n \cdot x^n_o \left(\frac{x}{x_o}\right)^n + \dots \qquad (1'')$$

لننظر في سلسلة القيم المطلقة للسلسلة السابقة :

$$|a_o| + |a_1 \cdot x_o| \cdot \left|\frac{x}{x_o}\right| + |a_2 \cdot x^2_o| \cdot \left|\frac{x}{x_o}\right|^2 + \dots + |a_n \cdot x^n_o| \cdot \left|\frac{x}{x_o}\right|^n + \dots \qquad (2)$$

نجد أن حدود هذه السلسلة أصغر من الحدود التي تقابلها في السلسلة الآتية :

$$M + M\left|\frac{x}{x_o}\right| + M\left|\frac{x}{x_o}\right|^2 + \dots + M\left|\frac{x}{x_o}\right|^n + \dots \qquad (3)$$

وبما أنه لدينا فرضاً :

$$|x| < |x_o|$$

تصبح السلسلة الاخيرة سلسلة هندسية أساسها :

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ أي متناقصة ، وبالتالي فهي متقاربة .

وبما أن حدود السلسلة (2) أصغر من الحدود التي تقابلها في السلسلة (3) ينتج ان (2) متقاربة أيضاً ، وهذا يعني أن السلسلة (1′) أو السلسلة (1) متقاربة مطلقاً ما دامت :

$|x_0| > |x|$ وهو المطلوب .

٢ ـ نفرض أن السلسلة (1) متباعدة من أجل قيمة ما x'_0 فهي متباعدة أيضاً من أجل كل نقطة x تحقق العلاقة $|x| > |x'_0|$: لأنه في الحقيقة لو كانت السلسلة متقاربة من أجل نقطة ما x تحقق الشرط السابق لكانت متقاربة فى النقطة x'_0 استناداً الى الشق الاول من النظرية لأن $|x| > |x'_0|$ ولكن هذا يخالف الفرض إذ أن السلسلة متباعدة في النقطة x'_0 نستنتج أن السلسلة لا يمكن أن تكون إلا متباعدة في النقطة x المحققة للشرط وهو المطلوب .

ملاحظة هامة :

إن نظرية آبل تسمح لنا بتصنيف نقاط التقارب ونقاط التباعد للسلسلة الصحيحة: في الحقيقة اذا كانت x_0 هي نقطة تقارب فان جميع نقاط المجال $]-|x_0|\ ,\ |x_0|[$ هي نقاط تقارب مطلق . وإذا كانت x'_0 نقطة تباعد فان نقاط نصف المستقيم الواقعة عن يمين $|x'_0|$ ونقاط نصف المستقيم الواقعة عن يسار $-|x'_0|$ تشكل نقاط التباعد . وهذا يدفعنا للتحري عن عدد مثل R بحيث تكون النقاط $|x| < R$ هي نقاط التقارب المطلق بينما النقاط $|x| > R$ هي نقاط التباعد :

١٠ ـ ١ ـ ٣ ـ نظرية :

من أجل كل سلسلة صحيحة أمثالها تحقق العلاقة :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$$

يمكن أن نجد عدداً مثل R (نسميه نصف قطـــر التقارب) بحيث تكون السلسلة الصحيحة متقاربة مطلقاً في المجـــال $R > x > -R$ (نسميه مجال التقارب للسلسلة الصحيحة) ، ومتباعدة من أجل قيم x الواقعة خارج هذا المجال . أما من أجل طرفي المجال فلاجزم .

البرهان : لتكن السلسلة الصحيحة :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ولنشكل سلسلة القيم المطلقة لحدودها :

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots$$

فلدراسة تقارب سلسلة القيم المطلقة نطبق قاعدة دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right|$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

وبالاستفادة من الفرض يكون :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \cdot K$$

وهنا نميز ثلاث حالات :

آ ـ اذا كان $|x| \cdot K < 1$ فالسلسلة متقاربة مطلقاً ويكون :

$$|x| < \frac{1}{K}$$

نرمز للمقدار :

$$\frac{1}{K} = R$$

نعوض فنجد :

$$|x| < R \Longrightarrow R > x > -R$$

ب ـ اذا كان : $|x| . K > 1$ فالسلسلة متباعدة . ويكون :

$$|x| > \frac{1}{K}$$

أو :

$$|x| > R$$

جـ ـ اذا كان :

$$|x| . K = 1$$

أو :

$$|x| = \frac{1}{K} = R \Longrightarrow x = \pm R$$

نقع على حالة الشك أي قد تكون السلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة . وبعبارة أخرى لدراسة طبيعة السلسلة الصحيحة من أجل طرفي المجال علينا أن نعوض في السلسلة :

مرة $x=R$ ومرة أخرى $x=-R$

وفي كل من الحالتين نحصل على سلسلة عددية ندرس طبيعتها حسب القواعد المتبعة في دراسة السلاسل العددية .

١٠ ـ ١ ـ ٤ ـ ملاحظة هامة :

لدينا فرضاً :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{K} = R$$

فاذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$$

اي :

$$R \to +\infty$$

فالسلسلة متقاربة مطلقاً مهما تكن قيمة x .

واذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$$

أي :

$$R = 0$$

تكون السلسلة متباعدة مهما تكن قيمة x ما عدا $x = 0$.

مثال (١) : عين مجال تقارب السلسلة :

$$x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n \cdot (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة مطلقاً مهما تكن قيم x .

أي أن مجال التقارب :

$$-\infty < x < +\infty$$

مثال (٢) : عين مجال تقارب السلسلة :

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (n \cdot x)^n + \dots$$

الحل : حسب كوشي :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |n.x| = |x| \cdot \infty$$

ونلاحظ ان اختبار كوشي ينتهي الى ∞ مهما تكن قيمة x المغايرة للصفر . وبالتالي تكون السلسلة متباعدة من أجل جميع قيم x ما عدا $x = 0$.

١٠ - ١ - ٥ - نظرية :

اذا وجدت سلسلة صحيحة وكان مجال تقاربها $-R < x < R$ - فان مشتقها يشكل سلسلة صحيحة جديدة تقبل نفس المجال كمجال لتقاربها .

البرهان : لتكن السلسلة الصحيحة :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots$$

وليكن مجال تقاربها $-R < x < R$ - .

نعلم ان نصف قطر تقاربها يعطى بالعلاقة :

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad . \qquad (1)$$

ولتكن السلسلة الناتجة عن الاشتقاق :

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \ldots$$

ولنحسب نصف قطر تقاربها R' بالعلاقة :

$$R' = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n \cdot a_n}{(n+1) \cdot a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نستنتج :

$$R = R'$$

أي أن السلسلة الصحيحة ومشتقها لهما نصف قطر تقارب واحد وبالتالي يكون لهما مجال تقارب واحد وهو المطلوب .

١٠ - ١ - ٦ - نظرية :

اذا وجدت سلسلة صحيحة ، وكان لها مجال تقارب معلوم ، فان تابعها الاصلي يشكل سلسلة صحيحة جديدة تقبل نفس المجال كمجال لتقاربها .

البرهان : ان السلسلة المفروضة تعتبر مشتقاً لسلسلة التابع الاصلي وحسب النظرية السابقة يكون لها نفس نصف قطر التقارب وبالتالي لهما مجال واحد للتقارب .

ملاحظة هامة :

كل سلسلة صحيحة متقاربة يمكن اعتبارها تابعاً ، ضمن مجال التقارب ، قيمته هي نهاية مجموع السلسلة (اذا امكن ايجاده) ، ومشتق السلسلة ، أو تابعها الاصلي يؤلفان سلسلتين صحيحتين لهما نفس نصف قطر تقارب السلسلة المفروضة .

مثال : انشـــر التابع : $y = \log(1+x)$ بجوار $x = 0$. حتى الآن لا نعرف نشر هذا التابع على شكل سلسلة . ولكن بالاشتقاق :

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

والطرف الايمن يمثل مجموع سلسلة هندسية حدها الاول (1) وأساسها $-x$ فهي متقاربة مطلقاً ما دامت x تحقق المتراجحة $-1 < x < 1$. ضمن هـــذا الشرط يكتب الطرف الايمن بالشكل :

$$y' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$$

والتابع الاصلي يمثل أيضاً سلسلة صحيحة متقاربة أيضاً ضمن نفس الشروط . اذن بالارتقاء :

$$y = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

وقد أهملنا الثابت لأنه من أجل $x = 0$ فان $\log(1+x) = 0$.

١٠ - ١ - ٧ - سلسلة قوى $(x-a)$:

نسمي أيضاً سلسلة قوى كل سلسلة من الشكل :

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

وبحالة خاصة اذا كان $a = 0$ حصلنا على سلسلة قوى x أو السلسلة الصحيحة .

ولتعيين مجال تقاربها نغير المتحول فنفرض $x - a = X$ تصبح السلسلة المفروضة بشكلها الجديد .

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots \qquad (2)$$

وعلى فرض أننا درسنا تقارب السلسلة الاخيرة وكان مجال تقاربها :

$$-R < X < R$$

يكون مجال تقارب السلسلة (1) :

$$-R < x - a < R$$

أو :

$$a - R < x < a + R$$

وبالطبع اذا اخذت x قيماً خارج المجال السابق تصبح السلسلة (1) متباعدة .

وتتمتع السلسلة (1) بنفس الخواص التي تتمتع بها السلسلة الصحيحة من حيث انها اذا كانت متقاربة في مجال ما فان مشتقها وتابعها الاصلي يقبلان نفس المجال كمجال لتقاربها .

مثال : عين مجال تقارب السلسلة :

$$(x-2) + (x-2)^2 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$$

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(x-2)^n} \right| = |x-2| < 1$$

أي مجال تقاربها :

$$-1 < x - 2 < 1$$

أو :

$$1 < x < 3$$

١٠ ـ ٢ ـ نشر التابع

يقصد بنشر التابع استبداله ـ ضمن شروط خاصة ـ بسلسلة صحيحة ، وحسبما يكون عدد حدودها محدوداً أو غير محدود يسمى النشر بالمحدود أو غير المحدود .

طريقه تايلور بالنشر :

نعلم ان التابع $y = f(x)$ اذا كان مستمراً في مجال ما ، وأخذت x قيمتين a , b من هذا المجال فان تزايد التابع $f(b) - f(a)$ هو لا متناه في الصغر مع تزايد المتحول $b - a$. ويهدف تايلور الى وضع الفضل $f(b) - f(a)$ على شكل سلسلة صحيحة تظهر فيها بعض قوى اللامتناهي في الصغر $b - a$.

١٠ ـ ٢ ـ ١ ـ تايلور في كثيرات الحدود :

ليكن التابع الذي صيغته على شكل كثير حدود :

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n . x^n$$

نعطي للمتحول تزايداً h فيكون :

$$f(x+h) = a_0 + a_1 (x+h) + a_2 (x+h)^2 + \dots a_n (x+h)^n$$

لننشر كل حد حسب دستور نيوتون فيكون :

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 (x+h) &= a_1 x + a_1 h \\ a_2 (x+h)^2 &= a_2 x^2 + 2 a_2 hx + a_2 h^2 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

$$a_n (x+h)^n = a_n x^n + a_n . \frac{n}{1!} h x^{n-1} + a_n . \frac{n (n-1)}{2!} h^2 . x^{n-2} + \dots a_n h^n$$

بالجمع يعطي الطرف الايسر قيمة التابع $f(x+h)$ ويكون :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

ان هذا الدستور يمثل متطابقة صحيحة مهما كانت قيمة المتحول x .

نفرض $x = a$, $x+h = b$ حيث $b-a = h$ بالتعويض :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

ويسمى بدستور تايلور Taylor .

وبحالة خاصة اذا جعلنا $a = 0$, $b = x$ يصبح بالشكل :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

ويسمى بدستور ماك لوران Mac-Laurin .

١٠ ـ ٢ ـ ٢ ـ تايلور في الحالة العامة :

كنا أوجدنا دستور تايلور بالنسبة الى تابع على شكل كثير حدود ولنتساءل الآن هل يوجد دستور مشابه ينطبق على كل تابع مستمر له مشتقات متتالية من جميع المراتب ؟ ؟ سنرى انه يمكن ايجاد هذا الدستور .

نفرض تابعاً مستمراً $f(x)$ ضمن المجال $[a,b]$ وله مشتقات متتالية معينة حتى المرتبة $n+1$. لنعين العدد المجهول A الذي يحقق العلاقة الآتية :

$$f(b) - f(a) - \frac{(b-a)}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} . f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} . A = 0 \quad (1)$$

ولنتصور تابعاً ينتج عن الطرف الايسر بعد ابدال x بـ a وليكن :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{(b-x)}{1!} . f'(x) - \dots \frac{(b-x)^n}{n!} . f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} . A \quad (2)$$

فلما كان بالفرض $f(x)$ ومشتقاته مستمرة في المجال $[a,b]$ اذن التابع $\varphi(x)$

مستمر ضمن نفس المجال . فاذا جعلنا فيه $x=a$ فانه ينعدم حسب (1) : واذا جعلنا $x=b$ فهو ينعدم أيضاً حسب (2) . وبما ان التابع $\varphi(x)$ ينعدم من أجل $x=a$, $x=b$ فان مشتقه $\varphi'(x)$ ينعدم مرة واحدة على الاقل من أجل قيمة $x=c$ المحصورة داخل المجال وذلك حسب قاعدة رول .

باشتقاق (2) ثم جعل المشتق صفراً من أجل $x=c$:

$$\varphi'(x)=-f'(x)-[(b-x)f''(x)-f'(x)]-\left[\frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f'''(x)-(b-x)f''(x)\right]\cdots$$

$$-\left[\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x)\right]+\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot A$$

ونلاحظ ان الحد الثاني من كل معترضة يمكن اختصاره مع الحد الاول من المعترضة السابقة وعليه يبقى :

$$\varphi'(x)=-\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)+\frac{(b-x)^n}{n!}\cdot A$$

وبما أنه يصبح صفراً من أجل $x=c$ بالتعويض :

$$-\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)+\frac{(b-c)^n}{n!}\cdot A=0$$

ومنـــه :

$$A=f^{(n+1)}(c)$$

نبدل في العلاقة (1) :

$$\boxed{f(b)-f(a)=\frac{(b-a)}{1!}\cdot f'(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(c)}$$

يدعى بدستور تايلور في الحالة العامة . ويكتب بشكل آخـــر اذا بدلنا فيـه $a=x$, $b=x+h$ نعوض :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}\cdot f'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

حيث :

$$0 < 0 < 1$$

نسمي $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$ بباقي لاغرانج

كذلك إذا جعلنا : $a=h$, $b=x+h$ يأخذ دستور تايلور الشكل :

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(h) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(h+\theta x)$$

وبجعل $a = 0$, $b = x$ نعوض :

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta.x)}$$

ويدعى بدستور ماك لوران .

ملاحظة (١) : اذا جعلنا n تنتهي الى ∞ اصبح النشر غـــير محدود . أما اذا جعلنا n محدودة سمي النشر بالنشر المحدود .

ملاحظة (٢) : ان دستور ماك لوران يمثل سلسلة صحيحة ونعلم أن هذه السلسلة لا تصلح لتمثيل التابع $f(x)$ إلا اذا كانت متقاربة . اي ان التابع $f(x)$ لا يصح تمثيله بسلسلة ماك لوران الا عندما تأخذ x قيماً محصورة ضمن مجال التقارب . ولنتساءل ترى متى تكون سلسلة ماك لوران متقاربة ؟؟ .

١٠ ـ ٢ ـ ٣ ـ نظرية :

اذا كانت المشتقات المتتالية للتابع $f(x)$ محدودة من الاعلى بعدد نرمز له M وذلك من أجل قيم x الواقعة ضمن المجال $[-\alpha , +\alpha]$ فان التابع المفروض قابل للنشر ضمن هذا المجال حسب دستور ماك لوران . أي تكون سلسلة ماك لوران متقاربة .

البرهان : نعلم ان الحد العام في سلسلة ماك لوران هو :

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

وهو أصغر من جداء M بالقدار $x^n/n!$.

وبما أن $x^n/n!$ يمثل حداً عاماً لسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x — حسب قاعدة دالامبير ـ فان سلسلة ماك لوران متقاربة دوماً وبالتالي ينتهي الباقي الى الصفر من أجل $n\to\infty$ والتابع $f(x)$ قابل للنشر حسب دستور ماك لوران من أجل جميع قيم المتحول الواقعة ضمن المجال المذكور .

١٠ - ٢ - ٤ - أمثلة محلولة:

مثال (١) : انشر التابع $\log x$ بدلالة قوى المقدار $(x-1)$.

ننشر التابع حسب سلسلة تايلور وذلك بحساب $f(1)$, $f'(1)$. $f''(1)$ ...

لدينا :

$$f(x) = \log x \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f''''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f''''(1) = -6$$

....

نعوض في دستور تايلور :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

بالتعويض :

$$f(x) = 0 + (x-1) \cdot 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \ldots$$

أي :

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \ldots$$

مثال (٢) : انشر التابع $\sin(a+x)$ بدلالة قوى المقدار x .

ننشر التابع حسب سلسلة تايلور وذلك بحساب $f(a)$, $f'(a)$ ....

لدينا :

$$f(x+a) = \sin(a+x)$$

فيكون :

$$f(x) = \sin x \implies f(a) = \sin a$$
$$f'(x) = \sin x \implies f'(a) = \cos a$$
$$f''(x) = -\sin x \implies f''(a) = -\sin a$$
$$f'''(x) = -\cos x \implies f'''(a) = -\cos a$$

....

وحسب الدستور :

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!} \cdot f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

نعوض :

$$\sin(a+x) = \sin a + x \cos a - \frac{x^2}{2!} \sin a - \frac{x^3}{3!} \cos a \ldots$$

مثال (٣) : انشر التابع $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ حسب قوى $(x-1)$:

لدينا :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \implies f(1) = -3$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \implies f'(1) = 4$$
$$f''(x) = 6x - 4 \implies f''(1) = 2$$
$$f'''(x) = 6 \implies f'''(1) = 6$$

نعوض في الدستور :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

نجـــد :

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

مثال (٤) : احسب $\sin 31^\circ$

تكتب بالشكل :

$$\sin 31^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \sin(x+h)$$

لدينـا :

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

فيكون :

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

. . . . . .

وحسب الدستور :

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) \dots$$

نعوض :

$$\sin 31^\circ = \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \sin\frac{\pi}{6} \dots$$

نكتفي من النشر بثلاثة حدود :

$$\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{360} - \frac{\pi^2}{29600}$$

وبانجاز الحساب :

$$\sin 31^\circ \approx 0{,}5149$$

١٠ ـ ٣ ـ تطبيقات دستور ماك لوران

١٠ ـ ٣ ـ ١ ـ نشر التابع الاسي :

آ ـ نشر التابع الاسي e^x :

ليكن $f(x) = e^x$ نلاحظ ان :

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 1 \quad , \quad f''(0) = 1 \ldots$$

وبتطبيق دستور ماك لوران :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

نعوض :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ldots \qquad (1)$$

ب ـ نشر التابع الاسي e^{-x} :

بنفس الطريقة نجد :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \ldots (-1)^n \frac{x^n}{n!} \ldots \qquad (2)$$

١٠ ـ ٣ ـ ٢ ـ نشر التوابع القطعية :

بجمع (2) و (1) والتقسيم على 2 نجد :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^{2n}}{2n!} \ldots$$

بطرح (2) من (1) والتقسيم على 2 نجد :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^{2\,n+1}}{(2n+1)!} \ldots$$

١٠ - ٣ - ٣ - نشر التوابع الدورية :

آ - نشر الجيب : ليكن التابع :

$$y = f(x) = \sin x$$

لدينا :

$$f(x) = \sin x \qquad \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -1$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$$

ونلاحظ ان المشتقات ذات المراتب الزوجية تنعدم بينما ذات المراتب الفردية تتناوب بين $+1$ و -1 بالتعويض في دستور ماك لوران نجد :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots$$

ب - نشر جيب التمام : ليكن التابع :

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$

لنكتب المشتقات التالية :

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos(\pi + x) \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'''(0) = 0$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$$

. . . . . .

نعوض في دستور ماك لوران نجد :

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ldots}$$

١٠ - ٣ - ٤ - دساتير أولر Euler :

لننشر التابع الاسي e^{ix} نجد :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} \ldots$$

نعوض عن i^2 بـ -1 نجد :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

أو :

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots\right)$$

وبمقارنة الطرف الثاني مع منشوري الجيب ، وجيب التمام نعوض :

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \qquad (1)$$

وبالتعويض في هذا الدستور عن i بـ $-i$ نجد :

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \sin x} \qquad (2)$$

ومن (1) ، (2) نستنتج :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}} \qquad (3)$$

وهذه الدساتير الثلاثة تسمى دساتير اولر والـــتي تعبر عن الجيب وجيب التمام بدلالة التوابع الاسية ، وهي شبيهة بالدساتير التي تعطينا التوابع القطعية .

٢٠ ـ ٣ ـ ٥ ـ نشر التابع $(1+x)^m$ حيث m عـــدد جبري صحيـح أو كسري :

ان التابع $f(x) = (1+x)^m$ معين دوماً عندما يكون $1 + x > 0$ ، ولنشره بطريقة ماك لوران . لدينا :

$$f(x) = (1+x)^m \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m(m-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(p)}(x) = m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+x)^{m-p} \Rightarrow f^{(p)}(0) =$$
$$= m(m-1)\ldots(m-p+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وبتطبيق ماك لوران :

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m.x}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

ويمثل الطرف الثاني منشور ذي الحدين لنيوتن عندما تكون m عدداً صحيحاً .

حالات خاصة :

بفرض $m = 1/2$ يكون :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots.$$

بفرض $m = -1/2$ يكون :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} \ldots.$$

١٠ - ٣ - ٦ - أمثلة محلولة :

مثال (١) : انشر التابع $y = \log(1+x)$ بتطبيق دستور ماك لوران وبين متى تكون السلسلة الناتجة متقاربة مطلقاً :

لدينا :

$$f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \Rightarrow f''''(0) = -6$$

. . . . . .

نعوض في سلسلة ماك لوران نجد :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots.$$

ولمعرفة تقاربها المطلق نطبق قاعدة دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1} \cdot x\right| = |x| < 1$$

أو :

$$-1 < x < 1$$

مثال (٢) : انشر التابع $\log(1-x)$ بتطبيق دستور ماك لوران وبين متى تكون السلسلة الناتجة متقاربة مطلقاً :

لدينا :

$$f(x) = \log(1-x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2$$

$$f''''(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} \Rightarrow f''''(0) = -6$$

. . . . . .

نعوض في سلسلة ماك لوران :

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots.$$

وبنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق نثبت أن تقاربها المطلق يكون من أجل :

$$-1 < x < 1$$

مثال (٣) : انشر التابع $f(x) = a^x$ حسب سلسلة ماك لوران وبين متى تكون السلسلة الناتجة متقاربة مطلقاً .

لدينا :

$$f(x) = a^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = a^x \cdot \log a \Rightarrow f'(0) = \log a$$

$$f''(x) = a^x \cdot \log^2 a \Rightarrow f''(0) = \log^2 a$$

$$f'''(x) = a^x \cdot \log^3 a \Rightarrow f'''(0) = \log^3 a$$

. . . . . .

نعوض في سلسلة ماك لوران :

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} \log^2 a + \frac{x^3}{3!} \log^3 a + \ldots$$

ولدراسة تقاربها نطبق قاعدة دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1!} \cdot \log^{n+1} a}{\frac{x^n}{n!} \log^n a} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x \log a}{n+1} \right| = 0 < 1$$

أي أن قاعدة دالامبير محققة دوماً وبالتالي السلسلة متقاربة مطلقاً من أجل اية قيمة تأخذها x .

تمارين

عين مجال تقارب السلاسل الآتية وادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال :

الجواب

$-1 \leqq x \leqq 1$	$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} \ldots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \ldots.$	- ١
$-1 \leqq x < 1$	$\frac{x}{1+\sqrt{1}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots.$	- ٢
$\lvert x \rvert < \frac{1}{3}$	$3x + 3^4 . x^4 + 3^9 . x^9 + \ldots + 3^{n^2} . x^{n^2} + \ldots.$	- ٣
$-4 < x < 4$	$x + \frac{(2!)^2}{4!} . x^2 + \frac{(3!)^2}{6!} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} . x^n \ldots.$	- ٤
$-2 \leqq x < 8$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n . 5^n}$	- ٥
$-4 \leqq x \leqq -2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$	- ٦
$x \neq -3$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$	- ٧
$x = 0$	$\sum_{n=1}^{\infty} n! . x^n$	- ٨

الجواب

٩ - $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ $\quad -\infty < x < \infty$

١٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$ $\quad 0 \leqq x < 4$

١١ - لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot 2^n} + \ldots.$$

عين مجال تقاربها ثم ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(دورة حزيران ٩٦٨)

١٢ - لتكن السلسلة :

$$S = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

والمطلوب : ١ً - عين مجال تقاربها .

٢ً - أوجد المشتق s' واحسب مجموعه (ضمن مجال التقارب) .

(دورة ايلول ١٩٦٨)

١٣ - لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{6 \cdot 3^3} + \frac{x^4}{8 \cdot 3^4} + \ldots.$$

والمطلوب : ١ً - كتابة صيغة الحد العام لهذه السلسلة .

٢ً - تعيين مجال x الذي تكون من أجله السلسلة متقاربة مطلقاً .

٣ً - بيان فيما اذا كانت السلسلة المعطاة متقاربة أم متباعدة من أجل كل من القيمتين $x = 3 , x = -3$.

(دورة حزيران ٩٧١)

١٤ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \ldots$$

١ً ـ أوجد صيغة الحد العام لهذه السلسلة .

٢ً ـ حدد مجال تقاربها .

٣ً ـ عين طبيعة السلسلة من أجل طرفي المجال .

(دورة ايلول ٩٧٢)

١٥ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$S = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

والمطلوب : آ ـ عين مجال تقاربها .

ب ـ عين طبيعتها من أجل طرفي المجال .

جـ ـ احسب بدلالة x مجموع السلسلة الناتجة عن اشتقاق حـــدود هذه السلسلة .

(دورة حزيران ٩٧٠)

١٦ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2+1^3} + \frac{x^2}{2+2^3} + \frac{x^3}{2+3^3} + \ldots$$

والمطلوب : آ ـ أوجد صيغة حدها العام .

ب ـ حدد مجال تقاربها .

جـ ـ عين طبيعة السلسلة من أجل طرفي المجال .

(دورة حزيران ٩٧٣)

١٧ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$S = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3} + \frac{3x^3}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n \cdot x^n}{(\sqrt{3})^n} + \ldots$$

والمطلوب : آ ـ عين مجال تقاربها .
ب ـ عين طبيعتها من أجل طرفي المجال مع التعليل .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

١٨ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x+2)^n}{n^3}$$

عين مجـال تقاربها المطلق وادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٦)

١٩ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$$

والمطلوب : آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .
ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال مع التعليل .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٧)

٢٠ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}$$

والمطلوب : آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .
ب ـ ادرس طبيعتها من اجل طرفي المجال .

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٨)

٢١ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-4)^n}{n \cdot 5^n}$$

والمطلوب : عين مجال تقاربها المطلق وادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

٢٢ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$$

والمطلوب : عين مجال تقاربها المطلق وادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(الفرع المدني : دورة ايلول ١٩٧٨)

تحقق من صحة نشر التوابع الآتية بطريقة ماك لوران :

٢٣ - $$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2.3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

٢٤ - $$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{5} \cdots$$

(دورة ايلول ١٩٦٨)

٢٥ - $$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \cdots$$

(دورة حزيران ١٩٦٧)

٢٦ - $$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{2\,x^3}{3!} - \frac{4\,x^5}{5!} - \frac{8\,x^6}{6!} \cdots$$

(دورة حزيران ١٩٧٠)

٢٧ - $$\sin^2 x = x^2 - \frac{2\,x^4}{3!} + \frac{32\,x^6}{6!} + \cdots$$

٢٨ - $$\operatorname{tg}\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + \cdots$$

٢٩ - انشر $\sin x$ بطريقة ماك لوران ثم احسب $\sin 1$ حيث الزاوية مقدرة بالراديان بأخذك أربعة حدود فقط من المنشور : الجواب :

$$\sin 1 \approx 0{,}84147$$

٣٠ ـ انشر التابع e^x حسب قوى $x-2$.

الجواب :

$$e^x = e^2 \left[1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} \dots \right]$$

٣١ ـ انشر التابع : $\log(x+h)$ حسب قوى x :

الجواب :

$$\log(x+h) = \log h + \frac{x}{h} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x^3}{3h^3} \dots$$

٣٢ ـ انشر التابع : $3y^2 - 14y + 7$ حسب قوى $(y-3)$.

الجواب :

$$-8 + 4(y-3) + 3(y-3)^2$$

٣٣ ـ انشر التابع $5x^2 + 7x + 3$ حسب قوى $(x-2)$.

الجواب :

$$37 + 27(x-2) + 5(x-2)^2$$

٣٤ ـ انشر التابع $4x^3 - 17x^2 + 11x + 2$ حسب قوى $(x-4)$.

٣٥ ـ انشر التابع $5y^4 + 6y^3 - 17y^2 + 18y - 20$ حسب قوى $(y+4)$.

٣٦ ـ انشر التابع e^x حسب قوى $(x+1)$.

٣٧ ـ انشر التابع $\cos(a+x)$ حسب قوى x .

٣٨ ـ انشر التابع e^{x+h} حسب قوى h .

٣٩ ـ انشر التابع $\cos x$ حسب قوى $(x-a)$.

أوجد الحدود الثلاثة الاولى (غير المعدومة) من منشور التوابع الآتية بطريقة ماك لوران :

الجواب

٤٠ - $y = \sec x$ $\quad y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5\,x^4}{24} + \ldots$

٤١ - $y = \log \cos x$ $\quad y = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} \ldots\right)$

٤٢ - $y = \text{th}\, x$ $\quad y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} \ldots$

٤٣ - $y = e^{\cos x}$ $\quad y = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \ldots\right)$

٤٤ - انشر التابع $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ حسب قوى $(x+4)$.

٤٥ - انشر التابع $y = \sqrt{x}$ حسب قوى $(x-4)$.

الجواب : $y = 2 + \frac{x-4}{2^2} - \frac{1}{4}\frac{(x-4)^2}{2^4} + \ldots$

٤٦ - أوجد ثلاثة حدود (غير معدومة) من منشور التابع الآتي حسب طريقة ماك لوران :

$$y = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

الجواب : $y = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$

٤٧ - انشر التابع $y = e^x$ حسب قوى $x + 2$.

(دورة حزيران ١٩٦٨)

٤٨ - أوجد أربعة حدود من منشور التابع $y = \log(2+x)$ بطريقة ماك لوران واستنتج الحد العام وادرس تقارب السلسلة الناتجة وعين مجال تقاربها .

(دورة حزيران ١٩٦٩)

٤٩ ـ أوجد ثلاثة حدود من منشور التابع $y = \log x$ بدلالة قوى $(x-1)$.

(دورة ايلول ١٩٦٩)

٥٠ ـ أوجد الحدود الثلاثة الاولى من منشور التابع : $y = (x+1)\log(2+x)$ حسب سلسلة ماك لوران .

(دورة حزيران ١٩٧٢)

٥١ ـ أوجد الحدود الثلاثة الاولى غير المعدومة من منشور التابع $y = \cos x \cdot e^{\sin x}$ حسب سلسلة ماك لوران .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

٥٢ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع : $y = x \cdot \cos x$ حسب قوى $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(دورة ايلول ١٩٧٥)

٥٣ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع : $f(x) = e^{e^x}$ وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٦)

٥٤ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$f(x) = (x+1) \cdot \log(x+1)$$

وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٦)

٥٥ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع : $y = \sin 2x \cdot e^x$
وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة ايلول ١٩٧٧)

القسم العملي

يحتوي على تمارين محلولة مرتبة حسب تسلسل الابحاث النظرية

الفصل الحادي عشر

١١ ـ ١ ـ تمارين على المعينات

١ ـ حل الجملة الآتية :

$$x + y + z = 1$$
$$ax + by + cz = d$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$$

حيث : a, b, c أعداد مختلفة :

الحل : لنحسب معين أمثال المجاهيل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

نطرح العمود الاول من العمود الثاني والعمود الثالث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر السطر الاول :

$$\Delta = (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)$$
$$\Delta = (b-a)(c-a)[c+a-b-a]$$
$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$$

بما أن : a, b, c أعداد مخالفة فرضاً ، نستنتج أن : $\Delta \neq 0$.

وان الجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بقاعدة كرامر :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} \qquad y = \frac{D_y}{\Delta} \qquad z = \frac{D_z}{\Delta}$$

لنحسب D_x : لدينا :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

نطرح العمود الاول من العمود الثاني والعمود الثالث :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & b-d & c-d \\ d^2 & b^2-d^2 & c^2-d^2 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر السطر الاول نجد :

$$D_x = (b-d)\,(c-d)\,(c-b)$$

ويكون :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{(b-d)\,(c-d)\,(c-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

نختصر :

$$x = \frac{(b-d)\ (c-d)}{(b-a)\ (c-a)}$$

بنفس الطريقة نجد :

$$y = \frac{(c-d)\ (a-d)}{(c-b)\ (a-b)} \qquad z = \frac{(a-d)\ (b-d)}{(a-c)\ (b-c)}$$

٢ ـ حل وناقش الجملة الآتية :

$$R.y + q.z = a \qquad (1)$$

$$R.x + p.z = b \qquad (2)$$

$$q.x + p.y = c \qquad (3)$$

الحل : نحسب معين أمثال المجاهيل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & R & q \\ R & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 2.p.q.R$$

المناقشة :

آ ـ بفرض : p, q, R ليست أصفاراً :

يكون $\Delta \neq 0$ وبالتالي تقبل الجملة حلا وحيداً يعطى بدساتير كرامر :

لنحسب :

$$D_x = \begin{vmatrix} a & R & q \\ b & 0 & p \\ c & p & 0 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} R & q \\ 0 & p \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} a & q \\ b & p \end{vmatrix}$$

أو :

$$D_x = p(c.R - p.a + b.q)$$

ويكون :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{P(c.R - P.a + b.q)}{2p.q.R}$$

$$x = \frac{c.R - p.a + b.q}{2q.R}$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$y = \frac{a.p - b.q + c.R}{2p.R} \quad , \quad z = \frac{a.p + b.q - c.R}{2P.q}$$

ب ـ بفرض P, q, R ليست جميعها أصفاراً . وليكن أحدها $R \neq 0$. حينئذ يكون $\Delta = 0$ مع وجود المعين الرئيسي :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{vmatrix} = -R^2 \neq 0$$

في هذه الحالة يكون المجهولان الرئيسيان : x, y وتكون المعادلان الرئيسيتان : (1) ، (2) .

لنحسب المعين المميز :

$$\delta' = \begin{vmatrix} 0 & R & a \\ R & 0 & b \\ q & p & c \end{vmatrix}$$

فاذا كان $\delta' \neq 0$ تكون الجملة مستحيلة :

واذا كان $\delta' = 0$ تكون الجملة غير معينة من الدرجة الاولى بالنسبة الى z .

جـ ـ بفرض : $P = q = R = 0$ يكون $\Delta = 0$:

وهنا نقع على حالتين :

أما أن يكون : $a = b = c = 0$ وحينئذ تكون الجملة غير معينة من الدرجة الثالثة بالنسبة الى x, y, z .

وأما أن يكون أحد الثوابت في الطرف الثاني على الاقل لا يساوي الصفر ، حينئذ تكون الجملة مستحيلة .

٣ ـ أوجد بطريقة المعينات قيمة x التي تحقق الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + v &= 15 \\ x - y - z + v &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \\ 4x - 4y + v &= 0 \end{aligned}$$

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحل : لدينا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

بطرح السطر الرابع من السطرين الاول والثاني :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر العمود الرابع :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

نضيف العمود الثاني الى العمودين الاول والثالث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ننشر حسب عناصر العمود الاول :

$$\Delta = 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -70$$

ولدينا :

$$D_x = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

نضيف العمود الرابع الى كل من العمودين الثاني والثالث :

$$D_x = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

نشر وفق عناصر السطر الثاني :

$$D_x = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

نشر وفق عناصر العمود الاول :

$$D_x = 15 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -70$$

ويكون :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{-70}{-70} = 1$$

٤ ـ عين قيمة x التي تحقق العلاقة الآتية :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

الحل : ننشر المعين وفق عناصر العمود الاول :

$$x\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$x^2\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$2x^3 + x - 2x = 14$$

$$2x^3 - x - 14 = 0$$

$$(x-2)\,(2x^2+4x+7) = 0$$

أما : $2x^2 + 4x + 7 = 0$

$\Delta = -40$ وليس لهذه المادلة جذور حقيقية

وأما : $x - 2 = 0$

$x = 2$ وهو المطلوب .

٥ ـ حل وناقش الجملة الآتية :

$$K.x + y - z = 1$$
$$3x + K.y + 2z = 2$$
$$-x - K.y + z = 3$$

الحل : نحسب معين أمثال المجاهيل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K & 1 & -1 \\ 3 & K & 2 \\ -1 & -K & 1 \end{vmatrix}$$

لدى النشر يكون :

$$\Delta = 3K^2 + 2K - 5$$

ويكون لثلاثي الحدود جذران $K = -5/3$ ، $K = 1$

المناقشة :

آ – بفرض $K \neq -\frac{5}{3}$, $K \neq 1$

يكون $\Delta \neq 0$ ويكون للجملة حل وحيد يعطى بقاعدة كرامر :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{D_y}{\Delta} \quad , \quad \frac{D_z}{\Delta}$$

لنحسب صورة المجهول x :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & K & 2 \\ 3 & -K & 1 \end{vmatrix} = 8K + 4$$

أي :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{8K + 4}{3K^2 + 2K - 5}$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$y = \frac{-4(K+4)}{3K^2 + 2K - 5} \quad , \quad z = \frac{5K^2 - 2K - 11}{3K^2 + 2K - 5}$$

ب – بفرض : $K = -5/3$ يصبح $\Delta = 0$ وتصبح الجملة :

$$-\frac{5}{3}x + y - z = 1$$

$$3x - \frac{5}{3}y + 2z = 2$$

$$-x + \frac{5}{3}y + z = 3$$

نلاحظ ان المعينات الصغيرة لا تساوي الصفر وليكن احدها :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} \neq 0$$

ولنحسب المعين المميز :

$$\delta' = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & 1 & 1 \\ 3 & -\frac{5}{3} & 2 \\ -1 & \frac{5}{3} & 3 \end{vmatrix} = \frac{56}{9} \neq 0$$

والجملة مستحيلة .

جـ ـ بفرض : $K=1$ يصبح $\Delta=0$. وتصبح الجملة :

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 2 \\ -x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

نلاحظ أن بعض المعينات الصغيرة لا يساوي الصفر وليكن أحدها :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

لنحسب المعين المميز :

$$\delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

والجملة مستحيلة أيضاً .

هـ ـ حل وناقش الجملة الآتية :

$$\begin{aligned} Kx + 2y + z &= 1 \\ x + y + Kz &= \frac{3}{2} \\ Kx + z &= 2 \end{aligned}$$

الحل : نحسب معين أمثال المجاهيل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K & 2 & 1 \\ 1 & 1 & K \\ K & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(K^2 - 1)$$

لثلاثي الحدود جذران : $K=1$, $K=-1$

المناقشة :

آ - بفرض $K \neq 1$, $K \neq -1$

يكون $\Delta \neq 0$ ويكون للجملة حل وحيد يعطى بالدساتير :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{D_y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{D_z}{\Delta}$$

لنحسب صورة المجهول x :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & K \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\,(K-1)$$

أي :

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{4\,(K-1)}{2\,(K^2-1)} = \frac{1}{K+1}$$

وبنفس الطريقة نحسب كلاً من y , z فنجد :

$$y = \frac{D_y}{\Delta} = \frac{-\,(K^2-1)}{2\,(K^2-1)} = -\,\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{D_z}{\Delta} = \frac{4\,(K-1)}{2\,(K^2-1)} = \frac{2}{K+1}$$

ب - بفرض : $K=1$ يصبح $\Delta=0$ وتصبح الجملة :

$$x + 2y + z = 1 \qquad (1)$$

$$x + y + z = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

$$x + z = 1 \qquad (3)$$

من الملاحظ أن بعض المعينات الصغيرة لا يساوي الصفر وليكن أحدها :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

نبحث عن المعين المميز :

$$\delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

هذا يعني أن الجملة غير معينة من الدرجة الاولى ، اذ نعطي الى المجهول غـــير الرئيسي z قيمة اختيارية ، نعوضها في المعادلتين الرئيسيتين (2) ، (1) ثم نحلها فنحصل على قيمتي y ، x . مثلا :

بفرض $z=5$ نعوض في (2) ، (1) :

$$x + 2y + 5 = 1$$

$$x + y + 5 = \frac{3}{2}$$

بالطرح :

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -3$$

ويكون حل الجملة :

$$x = -3 \quad , \quad y = -\frac{1}{2} \quad , \quad z = 5$$

وهكذا نحصل على عدد غير متناه من الحلول .

جـ - بفرض : $K=-1$ يصبح $\Delta=0$ وتصبح الجملة :

$$-x + 2y + z = 1$$

$$x + y - z = \frac{3}{2}$$

$$-x \quad + z = 2$$

يلاحظ أن بعض المعينات الصغيرة لا يساوي الصفر وليكن أحدها :

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

لنحسب المعين المميز :

$$\delta' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

والجملة مستحيلة .

١١ ـ ٢ ـ تمارين على النهايات

١ ـ أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{0}{0}$ ، لازالتها نحلل الصورة والمخرج الى جداء مضاريب :

$$y = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

مختصر :

$$y = \lim_{x \to a} \frac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \frac{a-1}{3a^2}$$

٢ ـ أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{\sqrt[3]{8x^3 + x}}$$

الحل : لدينا :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{\sqrt[3]{8x^3 + x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

وهي حالة عدم تعيين ، لازالتها نقسم الصورة والمخرج على x فيكون :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{5}{2}$$

٣ - أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ، لازالتها نفرض :

$$1 + x = u$$

بحيث :

$$x \to 0 \implies u \to 1$$

نعوض :

$$y = \lim_{u \to 1} \frac{\sqrt{u} - 1}{\sqrt[3]{u} - 1} = \lim_{u \to 1} \frac{u^{1/2} - 1}{u^{1/3} - 1}$$

أو :

$$y = \lim_{u \to 1} \frac{(u^{1/6})^3 - 1}{(u^{1/6})^2 - 1} = \lim_{u \to 1} \frac{(u^{1/6} - 1)(u^{2/6} + u^{1/6} + 1)}{(u^{1/6} - 1)(u^{1/6} + 1)}$$

مختصر :

$$y = \lim_{u \to 1} \frac{u^{1/3} + u^{1/6} + 1}{u^{1/6} + 1} = \frac{3}{2}$$

٤ - أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$$

الحل : لدى التعويض نقع على حالة : $\frac{\infty}{\infty}$ ، ولازالتها يكتب المقدار بالشكل :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+1}}{3^x} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1}$$

أو :

$$y = 3 \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 1} = 3 \cdot \frac{0+1}{0+1} = 3$$

٥ ـ أوجد نهاية المقدار :

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

الحل : إن ما داخل القوسين يمثل متوالية حسابية : حدها الاول : $a=1/n^2$ وأساسها : $R=1/n^2$ وعدد حدودها : $N=n-1$ فمجموعها يعطى بالدستور :

$$\frac{N}{3} [\, 2a + (N-1) R \,]$$

نعوض :

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{2} \left[\frac{2}{n^2} + (n-2) \cdot \frac{1}{n^2} \right]$$

أو :

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{n\,(n-1)}{2\,n^2} = \frac{1}{2}$$

٦ ـ احسب نهاية المقدار :

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2}{n^3}$$

الحل : إن الصورة تمثل مجموع مربعات n عدداً طبيعياً وهذا المجموع يعطى بالدستور:

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

نعوض :

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6\,n^3}$$

أو :

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}$$

٧ - أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{\infty}{\infty}$ لازالتها :

يكتب المقدار بالشكل :

$$y = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

نقسم صورة ومخرج الكسر على x :

$$y = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = 1$$

٨ - أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x\to\pi/3} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{0}{0}$ ، لازالتها :

يكتب الطرف الايمن بالشكل :

$$y = \frac{2}{3}\lim_{x\to\pi/3} \frac{\frac{1}{2} - \cos x}{\frac{\pi}{3} - x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\pi/3} \frac{\cos\frac{\pi}{3} - \cos x}{\frac{\pi}{3} - x}$$

وحسب دساتير التحويل :

$$y = -\frac{4}{3}\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}}{\frac{\pi}{3}-x}$$

أو :

$$y = -\frac{4}{3}\lim_{x\to\pi/3} \sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2} \lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}}{\frac{\pi}{3}-x} \cdot \frac{1}{2}$$

ومنـــه :

$$y = -\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

٩ ـ أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x\to\pi} \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{0}{0}$ لازالتها :

لدينـا :

$$y = \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\pi - x} = \lim_{x \to \pi} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi - x}{4}\right)}{\pi - x}$$

أو :

$$y = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi - x}{4}\right)}{2 \cdot \frac{\pi - x}{4}} \cdot \lim_{x \to \pi} \sin \left(\frac{\pi - x}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

١٠ ـ احسب نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{0}{0}$ لازالتها :

نضرب الصورة والمخرج بمرافق الصورة :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \sqrt{\cos x})\, x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sqrt{\cos x})\, x^2}$$

أو :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

١١ ـ احسب نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

الحل : بالتعويض نقع على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ، لازالتها :

نستعين بدساتير التحويل . يكون :

$$y = \lim_{x \to a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{2 \cdot \frac{x-a}{2}} = \lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

أو :

$$y = \cos a \cdot 1 = \cos a$$

١٢ ـ احسب نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة $\frac{0}{0}$ ، لازالتها :

لدينا :

$$y = \lim_{x \to -2} \frac{\sin \pi x}{(x+2) \cos \pi x} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{\cos \pi x} \cdot \lim_{x \to -2} \frac{\sin (\pi x + 2\pi)}{x + 2}$$

أو :

$$y = \lim_{x \to -2} \frac{1}{\cos \pi x} \cdot \lim_{x \to -2} \pi \cdot \frac{\sin \pi (x+2)}{\pi (x+2)}$$

ومنه :

$$y = 1 \cdot \pi \cdot 1 = \pi$$

١٣ — أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم تعيين من قبيل 1^∞ ولازالتهـــا :
يكتب المقدار بالشكل :

$$y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e} \quad (1)$$

ولحساب نهاية الصورة : نفرض : $\alpha = -\frac{1}{n}$ بحيث :

$$n\to\infty \Rightarrow \alpha\to 0$$

ويكون :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-1/\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{-1} = e^{-1}$$

نعوض في (1) :

$$y = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

١٤ — أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم تعيين من قبيل : 1^∞ ولازالتها :
نقسم صورة ومخرج الكسر على x :

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$$

١٥ — أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم تعين من الشكل 1^{∞} لازالتها :

يكتب المقدار بالشكل :

$$y = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2-3}{x+2+1}\right)^{x+2}$$

نقسم صورة ومخرج الكسر على $x+2$:

$$y = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{3}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}}\right)^{x+2}$$

نفرض :

$$x + 2 = u$$

بحيث :

$$x\to\infty \Longrightarrow u\to\infty$$

نعوض :

$$y = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{1-\frac{3}{u}}{1+\frac{1}{u}}\right)^{u} = \frac{\lim\limits_{u\to\infty} \left(1-\frac{3}{u}\right)^{u}}{\lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}$$

أو :

$$y = \frac{\lim\limits_{u\to\infty} \left(1-\frac{3}{u}\right)^{u}}{e} \qquad (1)$$

لاننا نعلم أن :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ولحساب نهاية الصورة : نفرض :

$$\frac{-3}{u} = \alpha$$

بحيث :

$$u\to\infty \Rightarrow \alpha\to 0$$

نعوض في (1) :

$$y = \frac{\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{-3/\alpha}}{e}$$

أو :

$$y = \frac{1}{e} \cdot \lim_{\alpha\to 0} \left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{-3} = \frac{1}{e} \cdot e^{-3} = e^{-4}$$

١٦ ـ احسب ما يلي :

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

الحل : لدينا :

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0 \cdot \infty$$

وهي حالة عدم تعيين ؛ ولازالتها يكتب التركيب بالشكل :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

ولازالة هذه الحالة نكتب :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{\cot g \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} . 1 = \frac{2}{\pi}$$

١١ ــ ٣ ــ تمارين على السلاسل العددية

١ — ادرس تقارب السلسلة العددية التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n^2 - n}{(n+1)!}$$

حيث n عدد صحيح موجب ويأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$. ثم احسب مجموع هذه السلسلة .

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحل : يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n\,(n-1)}{(n+1)!}$$

حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n\,(n-1)}$$

نختصر :

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة .

ولحساب المجموع يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n^2}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

أو :

$$u_n = \frac{n^2-1+1}{(n+1)!} - \frac{n+1-1}{(n+1)!}$$

$$u_n = \frac{(n+1)\,(n-1)}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

مختصر :

$$u_n = \frac{n-1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

وأخيراً :

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}$$

نعطي الى n القيم $1, 2, 2, 3, \ldots$ فنحصل على :

$$u_1 = \frac{1}{0!} + \frac{2}{2!} - \frac{2}{1!}$$

$$u_2 = \frac{1}{1!} + \frac{2}{3!} - \frac{2}{2!}$$

$$u_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{4!} - \frac{2}{3!}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

بالجمع :

$$S = e + 2(e-2) - 2(e-1)$$

مختصر :

$$S = e - 2$$

٢ ــ لتكن السلسلة :

$$\frac{2^3}{3!} + \frac{3^3}{4!} + \frac{4^3}{5!} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n!} + \ldots$$

برهن أنها متقاربة واحسب مجموعها .

(دورة حزيران ١٩٦٨)

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)^3}$$

نختصر :

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)\ (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

بما أن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة .

لحساب مجموع السلسلة يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n^3-3n^2+3n-1}{n!}$$

او :

$$u_n = \frac{n^2}{(n-1)!} - \frac{3n\ (n-1)}{n!} - \frac{1}{n!}$$

$$u_n = \frac{n^2-1+1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{(n-1)\ (n+1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{n-2+3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

وأخيراً :

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

ومن مقارنة الحد العام مع الحد الاول نستنتج أن n تأخذ قيماً صحيحة بدءاً من 3 . وباعطاء n القيم : ... 5 , 4 , 3 نجد :

$$u_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$u_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

$$u_3 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

. . . . . .

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

. . . . . .

بالجمع والاختصار :

$$S = e + \frac{1}{2}$$

٣ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

حيث n عدد موجب صحيح ويأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$. ثم احسب مجموع هذه السلسلة .

(دورة ايلول ١٩٦٩)

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة .

ولحساب مجموعها يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

نختصر :

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

باعطاء n القيم 1 , 2 , 3 , ... نحصل على :

$$u_1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

. . . . . .

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

. . . . . .

بالجمع والاختصار نجد :

$$S = 1$$

٤ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$$

حيث n عدد صحيح موجب ويأخذ قيماً اعتباراً من $n = 1$. ثم احسب مجموع هذه السلسلة .

(دورة حزيران ١٩٦٩)

الحل : يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$$

ونقارنه مع الحد العام $V_n = 1/n^2$ للسلسلة المتقاربة نجد :

$$\frac{1}{n^2 + 2n} < \frac{1}{n^2}$$

أي :

$$u_n < V_n$$

وهذه العلاقة تعني أن كل حد في سلسلتنا أصغر من الحد الذي يقابله في السلسلة المتقاربة ، اذن سلسلتنا بدورها متقاربة .

طريقة ثانية : نعلم ان السلسلة التي حدها العام $V_n = 1/n^2$ هي سلسلة متقاربة.

ولدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} = 1 \neq 0$$

فالسلسلتان من طبيعة واحدة ، وبما أن احداهما V_n متقاربة فسلسلتنا بدورها متقاربة.

ولحساب المجموع يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

باعطاء n القيم : $1, 2, 3, \ldots$ نحصل على :

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$u_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$u_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$$

. . . . . .

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

. . . . . .

بالجمع مع الاختصار :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

٥ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n^2 + n - 1}{(n-1)\,!}$$

حيث n عدد صحيح موجب يأخذ قيماً اعتباراً من $n = 1$. ثم احسب مجموع هذه السلسلة .

(دورة حزيران ١٩٧٥)

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (n+1) - 1}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^2 + n - 1}$$

بالاختصار :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + n^2 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة .

ولحساب المجموع يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!} \qquad (1)$$

$$= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{n+2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (2)$$

$$= \frac{n-2+4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \qquad (3)$$

بجعل : $n=1$ في (1) ، $n=2$ في (2) ، $n=3, 4\ldots$ في (3) :

$$u_1 = \frac{1}{0!}$$

$$u_2 = \frac{4}{0!} + \frac{1}{1!}$$

$$u_3 = \frac{1}{0!} + \frac{4}{1!} + \frac{1}{2!}$$

. . . . . .

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

. . . . . .

بالجمع طرفاً الى طرف بعد جعل $n \to \infty$ نجد :

$$S = e + 4e + e = 6e$$

٦ — ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \ldots + \frac{n^3}{e^n} + \ldots$$

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3.e}=\frac{1}{e}<1$$

والسلسلة متقاربة :

٧ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}$$

الحل : نقارنها مع السلسلة التوافقية المتباعدة والتي حدها العام :

$$V_n=\frac{1}{n}$$

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$$

فهما من طبيعة واحدة ، وبما أن السلسلة التي حدها العام V_n متباعدة اذن السلسلة المفروضة متباعدة وهو المطلوب .

٨ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$$

الحل : نعلم ان السلسلة التوافقية متباعدة وحدها العام $1/n$.

نفرض :

$$V_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

فيكون لدينا :

$$V_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{n}$$

وهذه العلاقة تعني ان السلسلة التي حدها العام V_n متباعدة أيضاً .

ولدينـا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+6}} = 1 \neq 0$$

أي أن السلسلتين من طبيعة واحدة ، وبما ان السلسلة الـــتي حدها العام V_n متباعدة اذن السلسلة المعطاة والتي حدها العام u_n بدورها متباعدة .

٩ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

الحل : حسب قاعدة كوشي :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

أو :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

والسلسلة متقاربة .

١٠ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ويكتب الطرف الايمن بالشكل :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot(n!)^2}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

بالاختصار :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)\,(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4\,n^2}=\frac{1}{4}<1$$

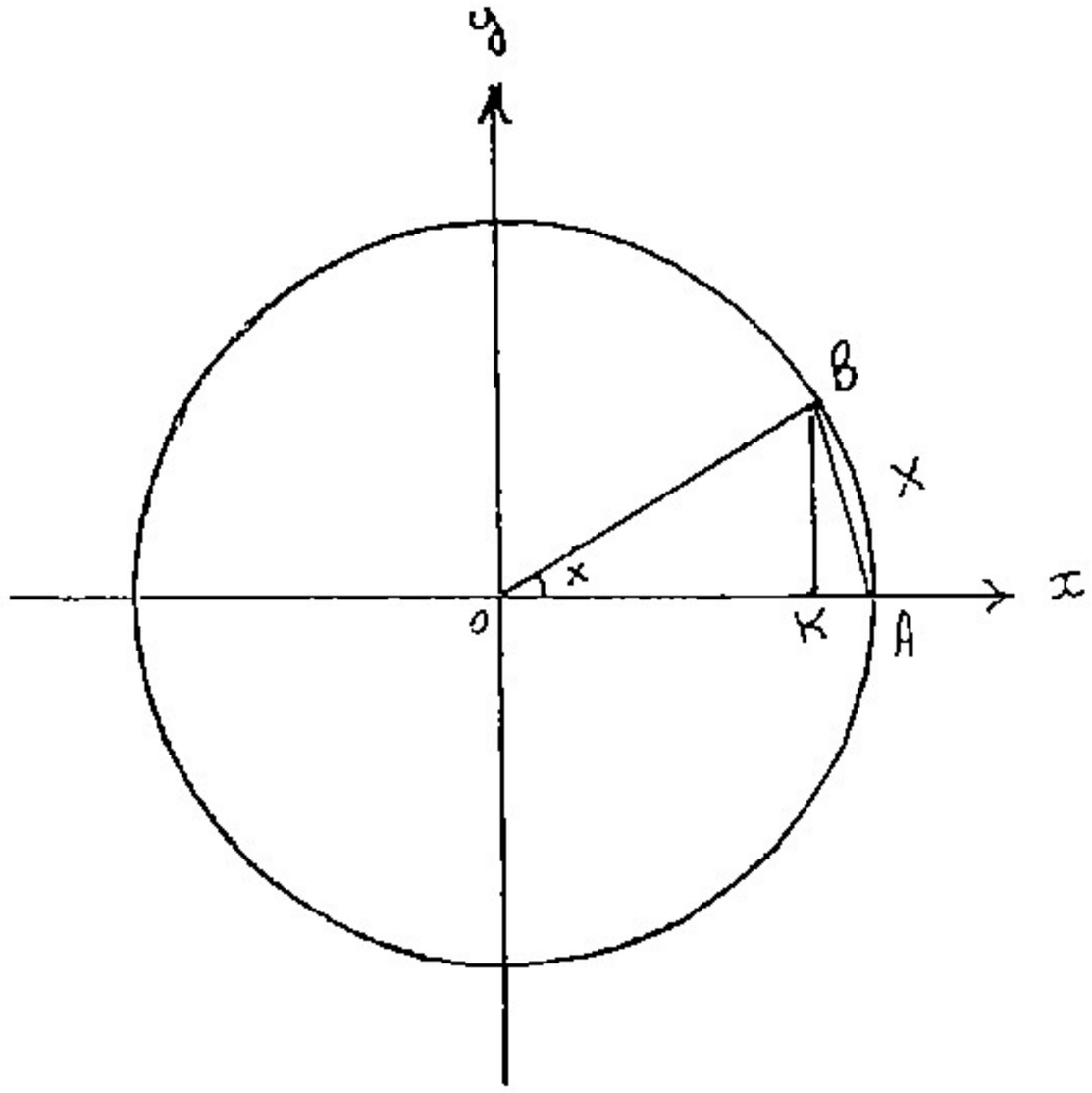
والسلسلة متقاربة :

١١ — ادرس تقارب السلسلة الآتية :

$$\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\ldots\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$$

الحل : نعلم ان الزاوية x اذا كانت مقدرة بالراديان فان القوس المقابلة لها هي x أيضاً . كما نعلم ان المساحات تحقق العلاقة :

سطح القطاع AOB > سطح المثلث AOB



الشكل (٥٢)

أو :

$$\frac{KB.OA}{2} < \frac{x \,.\, OA}{2}$$

أي :

$$KB < x \implies \sin x < x$$

نستنتج :

$$\sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

وبما أن $1/n^2$ هو حد عام لسلسلة متقاربة ، وبما ان الحد العام للسلسلة المعطاة أصغر منه إذن فهي متقاربة .

١٢ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{2^n \,.\, n!}{n^n}$$

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \,.\, (n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \,.\, n!}$$

بالاختصار :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\, n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

نقسم صورة ومخرج الكسر على n :

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

والسلسلة متقاربة .

١٣ — ادرس تقارب السلسلة :

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots \frac{1}{\log n} + \cdots$$

الحل : نعلم أن :

$$\log n < n$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

وبما ان السلسلة التي حدها العام $1/n$ متباعدة فالسلسلة المعطاة ، حدودها أكبر من الحدود التي تقابلها في السلسلة التوافقية المتباعدة ، فهي بدورها متباعدة وهوالمطلوب.

١٤ — ادرس تقارب السلسلة :

$$\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots$$

الحل : يكتب الحد العام بالشكل :

$$n_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$$

نعطي n قيماً صحيحة بدءاً من $n = 1$ ونعوض في الطرفين :

$$u_1 = \log 2 - \log 1$$

أي :

$$u_1 = \log 2 - 0$$

$$u_2 = \log 3 - \log 2$$

$$u_3 = \log 4 - \log 3$$

. . . . . .

$$u_n = \log(n+1) - \log n$$

. . . . . .

بالجمع مع مراعاة الاختصار وجعل $n\to\infty$ نجد :

$$S = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$$

والسلسلة متباعدة .

طريقة ثانية : نقارن السلسلة المعطاة مع السلسلة التوافقية المتباعدة والتي حدها العام:

$$V_n = \frac{1}{n}$$

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \log e = 1 \neq 0$$

والسلسلتان من طبيعة واحدة . أي السلسلة المعطاة متباعدة .

١٥ — ادرس تقارب السلسلة :

$$\log\left(1+\frac{1}{1^2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ldots$$

الحل : نقارنها مع السلسلة المتقاربة التي حدها العام $V_n = 1/n^2$.

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

نفرض :

$$n^2 = m$$

بحيث :

$$n \to \infty \implies m \to \infty$$

نعوض :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{m \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \log e = 1 \neq 0$$

والسلسلتان من طبيعة واحدة . أي السلسلة المعطاة متقاربة .

١٦ — لدينا السلسلة العددية التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n + 1 - 3^n}{3^n (n+1)}$$

١ً ـ فرق هذه السلسلة الى سلسلتين عدديتين .

٢ً ـ ادرس طبيعة كل من هاتين السلسلتين .

٣ً ـ استنتج أن السلسلة المعطاة متباعدة .

(دورة ايلول ١٩٧٥)

الحـــل :

١ً ـ يكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n = \frac{n + 1 - 3^n}{3^n(n+1)} = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{n+1} = V_n - W_n$$

٢ً ـ لدينـا :

$$V_n = \frac{1}{3^n}$$

فحسب دالامبير :

$$\lim \frac{V_{n+1}}{V_n} = \lim \frac{1}{3^{n+1}} \cdot 3^n = \frac{1}{3} < 1$$

والسلسلة متقاربة .

طريقة ثانية : إن السلسلة $V_n = \frac{1}{3^n}$ هي سلسلة هندسية متناقصة أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الاول $\frac{1}{3}$ فمجموعها معين ومحدود ومعطى بالدستور :

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

فهي متقاربة .

طريقة ثالثة : حسب كوشي :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

والسلسلة متقاربة .

ولدينا :

$$W_n = \frac{1}{n+1}$$

لدراسة تقاربها ، نقارنها مع السلسلة التوافقية $K_n = \frac{1}{n}$ المتباعدة نجد :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

والسلسلتان من طبيعة واحدة ، نستنتج أن السلسلة W_n متباعدة .

٣ً ـ إن مجموع السلسلة المعطاة :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} V_n - \sum_{n=1}^{\infty} W_n = A - \infty = -\infty$$

فهي متباعدة .

١٧ — ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{3^n . n!}{n^n}$$

(دورة حزيران ١٩٧٦)

الحل : لدينا حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} . (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n . n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1) . n^n}{(n+1)\ (n+1)^n}$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{3}{e} > 1$$

والسلسلة متباعدة .

١٨ — ادرس طبيعة السلسلة العددية التي حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{e^n}}$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{e^n}}{\sqrt{e^{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1$$

والسلسلة متقاربة :

طريقة ثانية : إن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{e^n}}=\frac{1}{\frac{n}{e^2}}$$

هي سلسلة هندسية متناقصة حدهـــا الاول $\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ وأساسها $\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$

فهي سلسلة متقاربة لأن مجموعها :

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}-1}$$

معين ومحدود .

طريقة ثالثة : حسب كوشي :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{e^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{e^n}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1$$

والسلسلة متقاربة .

١١ ـ ٤ ـ تمارين على المشتقات

١ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = \frac{\text{arc tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

الحـــل :

$$y' = \frac{\frac{1}{2\,(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{arc tg}\sqrt{x}}{x}$$

بالاصلاح :

$$y' = \frac{\sqrt{x} - (1+x)\,\text{arc tg}\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\,(1+x)}$$

٢ ـ احسب المشتق الاول للتابـع :

$$y = x^{2x} + \log(\sin x^2)$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

الحل : نفرض :

$$y_1 = \log(\sin x^2) \qquad (1)$$

$$y_2 = x^{2x} \qquad (2)$$

فيكون :

$$y' = y'_1 + y'_2 \qquad (3)$$

باشتقاق (1) :

$$y'_1 = \frac{2x \cdot \cos x^2}{\sin x^2} = 2x \cdot \text{cotg}\, x^2$$

لاشتقاق (2) نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y_2 = 2x \cdot \log x$$

$$\frac{y'_2}{y_2} = 2(\log x + 1)$$

$$y'_2 = 2 \cdot x^{2x}(\log x + 1)$$

نعوض عن y'_1, y'_2 بقيمتيهما في (3) :

$$y' = 2 \cdot x \cdot \cot g\, x^2 + 2 \cdot x^{2x}(\log x + 1)$$

٣ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = 10^{x \cdot tg x}$$

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = x \cdot tg\, x \cdot \log 10$$

بالاشتقاق :

$$\frac{y'}{y} = \left(tg\, x + \frac{x}{\cos^2 x}\right) \log 10$$

$$y' = 10^{x\, tg x} \cdot \log 10 \cdot (tg\, x + x \sec^2 x)$$

٤ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$x^3 + y^3 - 3a \cdot x \cdot y = 0$$

الحـــل :

لدينـا تابـع ضمني يرمز له :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3a\, x\, y = 0$$

ومشتقه يعطى بالدستور :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

لدينـا :

$$f'_x = 3x^2 - 3ay$$

$$f'_y = 3y^2 - 3ax$$

نعوض في الدستور ونختصر :

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

٥ ـ احسب مشتق التابع الآتي :

$$\cos(x.y) = x$$

الحل : لدينا تابع ضمني يرمز له :

$$f(x,y) = \cos(x,y) - x = 0$$

ومشتقه يعطى بالدستور :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

لدينـــا :

$$f'_x = -y.\sin(x.y) - 1$$

$$f'_y = -x.\sin(x.y)$$

نعوض في الدستور :

$$y' = -\frac{y.\sin(x.y) + 1}{x.\sin(x.y)}$$

$$y' = -\frac{1}{x}[\,y + \operatorname{cosec}(x.y)\,]$$

٦ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = \frac{1}{3}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\ tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

الحل : يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{1}{3}\left[\log(x+1) - \log\sqrt{x^2-x+1}\;\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\ tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

بالاشتقاق :

$$y' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

بالاصلاح :

$$y' = \frac{1-x}{2(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

بتوحيد المخارج والاختصار :

$$y' = \frac{1}{1+x^3}$$

٧ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = \text{arc tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

الحل : بالاستفادة من الدستورين :

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

يكتب التابع بالشكل :

$$y = \text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

بالاشتقاق :

$$y' = \frac{1}{2}$$

٨ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = x^{\text{arc sin } x}$$

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = \arcsin x \cdot \log x$$

بالاشتقاق :

$$\frac{y'}{y} = \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}$$

ومنـــه :

$$y' = x^{\arcsin x}\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right]$$

٩ ـ احسب المشتق الاول للتابع :

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)}$$

الحل : تسهيلاً ، يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right) - \log \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)\right]$$

بالاشتقاق :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right)} - \frac{\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)}\right]$$

بتوحيد المخارج :

$$y' = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right)^2-3}$$

او :

$$y' = \frac{1}{1+4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+2\sin x}$$

١٠ ـ احسب المشتق الثاني للتابع :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$$

الحل : بالاشتقاق :

$$y' = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{a} e^{x/a} - \frac{1}{a} e^{-x/a} \right] = \frac{1}{2}\left[e^{x/a} - e^{-x/a} \right]$$

بالاشتقاق مرة ثانية :

$$y'' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a} e^{x/a} + \frac{1}{a} e^{-x/a} \right] = \frac{1}{2a}\left[e^{x/a} + e^{-x/a} \right]$$

$$y'' = \frac{y}{a^2}$$

طريقة ثانيه : يكتب التابع بالشكل :

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

بالاشتقاق :

$$y' = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

بالاشتقاق مرة ثانية :

$$y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

١١ ـ بفرض :

$$x = a \cos 2t \quad , \quad y = b \sin^2 t$$

احسب المشتق الثاني لهذا التابع الوسيطي :

الحل : لدينا :

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2b \sin t \cdot \cos t \cdot dt}{-2a \sin 2t \cdot dt}$$

$$y'_x = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t \cdot \cos t}{2 \sin t \cdot \cos t} = -\frac{b}{2a}$$

$$y''_{xx} = 0$$

١٢ ـ احسب المشتق الثاني للتابع :

$$e^x + x = e^y + y$$

الحل : لدينا تابع ضمني يرمز له :

$$f(x, y) = e^x - e^y + x - y = 0$$

ويكون المشتق الاول :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{e^x + 1}{e^y + 1}$$

نشتق مرة ثانية :

$$y'' = \frac{e^x (e^y + 1) - e^y \cdot y' (e^x + 1)}{(e^y + 1)^2}$$

نعوض عن المشتق y' بقيمته ونصلح :

$$y'' = \frac{(e^x - e^y)(1 - e^{x+y})}{(e^y + 1)^3}$$

١٣ ـ احسب المشتق الثالث للتابع :

$$y = \sqrt[5]{x^3}$$

الحل : يكتب التابع بالشكل :

$$y = x^{3/5} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{5} x^{-2/5}$$

$$y' = \frac{3}{5} x^{-2/5} \Rightarrow \quad y'' = -\frac{6}{25} x^{-7/5}$$

$$y'' = -\frac{6}{25} x^{-7/5} \quad \Rightarrow \quad y''' = \frac{42}{125} \cdot x^{-12/5}$$

١٤ ـ احسب المشتق من المرتبة n للتابع :

$$y = x \cdot e^x$$

الحل : بالاشتقاق :

$$y' = e^x (1+x) \Rightarrow y'' = e^x (2+x)$$

$$y'' = e^x (2+x) \Rightarrow y''' = e^x (3+x)$$

$$y''' = e^x (3+x) \Rightarrow y'''' = e^x (4+x)$$

. . . . . .

وهكذا نستنتج :

$$y^{(n)} = e^x (n+x)$$

١١ ـ ٥ ـ تمارين على قاعدة أوبيتال

١ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

الحل : لدينا :

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^{\infty}$$

وهي حالة عدم تعيين ، ولازالتها : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = \lim_{x \to 0} \frac{3 \log \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

ولازالة هذه الحالة : نطبق قاعدة اوبيتال فيكون :

$$\log y = \lim_{x \to 0} \frac{-6}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\log y = -6 \cdot 1 = -6 \implies y = e^{-6}$$

٢ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\sin x}$$

الحل : لدى التعويض نقع على حالة عدم التعيين : ∞^0

ولازالتها : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log y = \lim_{x \to 0} \sin x . \log \frac{1}{\sin x} = 0 \cdot \infty$$

عدم تعيين أيضاً ، ولازالتها : يكتب التابع بالشكل :

$$\log y = \lim_{x\to 0} \frac{-\log \sin x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

وقعنا مجدداً على حالة عدم تعيين : ولازالتها نطبق أوبيتال :

$$\log y = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \sin x$$

أي :

$$\log y = 0 \implies y = e^{\circ} = 1$$

٣ ـ احسب نهاية التابع :

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\log (1+\gamma x+\lambda x^2)+\log (1-\gamma x+\lambda x^2)}{1-\cos x}$$

حيث γ , λ عددان ثابتان :

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحل : يكتب التابع بالشكل :

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\log \left[(1+\lambda x^2)^2 - \gamma^2 . x^2 \right]}{1-\cos x} \quad \frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ، ولازالتها : نطبق قاعدة اوبيتال :

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{4\lambda + 4\lambda^2 . x^2 - 2\gamma^2}{(1+\lambda x^2)^2 - \gamma^2 . x^2} = 1 . \frac{4\lambda - 2^2\gamma^2}{2}$$

$$y = 2(2\lambda - \gamma^2)$$

٤ ـ احسب :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\log^2 (1 + 2 x) - \sin^2 3x}{1 - e^{-x^2}}$$

(دورة حزيران ١٩٧١)

الحل : نعوض ، نقع على حالة عـدم التعيين $\frac{0}{0}$ ولازالتها : نطبق قاعدة أوبيتال :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{1 + 2x} \cdot \log (1+2x) - 3 \sin 6 x}{2 x \cdot e^{-x^2}} = \frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال مرة ثانية :

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{(1 + 2x)^2} [1 - \log (1 + 2x)] - 9 \cos 6 x}{e^{-x^2} (1 - 2x^2)}$$

$$y = \frac{4 - 9}{1} = - 5$$

٥ ـ أوجد نهاية المقدار :

$$y = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2 \sqrt[8]{x} + 1}{(x-1)^2}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$. ولازالتـــا : نطبق قاعدة اوبيتال :

$$y = \lim_{x \to 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/8} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{3} x^{-1/3} - \frac{2}{3} x^{-2/3}}{2 (x-1)} = \frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال مرة ثانية :

$$y = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{2}{9} x^{-4/3} + \frac{4}{9} x^{-5/3}}{2} = \frac{1}{9}$$

٦ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x \to \infty} x^n \cdot \sin \frac{a}{x}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم التعيين : $0 \cdot \infty$ ولازالتها : يكتب التابع بالشكل :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{1}{x^n}} = \frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة اوبيتال :

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{a}{x^2} \cdot \cos \frac{a}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}} = \frac{a}{n} \cdot \lim_{x \to \infty} x^{n-1} \cdot \cos \frac{a}{x}$$

نراعي ثلاث حالات :

آ) بفرض : $n > 1$ فان نهاية التابع : ∞

ب) بفرض : $n = 1$ فان نهاية التابع : a

جـ) بفرض : $n < 1$ فان نهاية التابع : 0

٧ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x \to 1} x^{1/1-x}$$

الحل : هي من قبيل : 1^{∞} وهي حالة عدم تعيين ولازالتها : نأخذ لغاريتم الطرفين:

$$\log y = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x} = \frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة اوبيتال :

$$\log y = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{-1}$$

٨ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}}$$

الحل : لدى التعويض نقع على حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ ولازالتها نطبق قاعدة اوبيتال:

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\pi}{x^2}}{\frac{-\frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}{x^2}$$

أو :

$$y = \frac{\pi^2}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{2}$$

٩ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$. لازالتها : نطبق اوبيتال:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5\,x^4} = \frac{\infty}{\infty}$$

أوبيتال مرة ثانية :

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{20\,x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

أوبيتال مرة ثالثة :

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{60\,x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

اوبيتال مرة رابعة :

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120\,x} = \frac{\infty}{\infty}$$

أوبيتال مرة خامسة :

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120} = \infty$$

١٠ ـ أوجد نهاية التابع :

$$y = \lim_{x\to 1} (1-x)\,tg\,\frac{\pi x}{2}$$

الحل : لدى التعويض ، نقع على حالة عدم التعيين : $0 . \infty$ ولازالتها :

يكتب التابع بالشكل :

$$y = \lim_{x\to 1} \frac{tg\,\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

حسب أوبيتال :

$$y = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{2\cos^2 \frac{\pi x}{2}}}{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

أو :

$$y = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)^2}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

أوبيتال مرة ثانية :

$$y = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to x} \frac{2(1-x)}{\pi \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}}$$

أو :

$$y = 2 \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sin \pi x} = \frac{0}{0}$$

أوبيتال مرة ثالثة :

$$y = 2 \lim_{x \to x} \frac{-1}{\pi \cos \pi x} = 2 \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$y = \frac{2}{\pi}$$

١٦ — احسب ما يلي :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

(ميكانيك ، كهرباء : دورة ايلول ١٩٧٧)

الحل : لدينا :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ، لازالتها نطبق قاعدة اوبيتال :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x (1+\operatorname{tg}^2 x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

ولازالة هذه الحالة يكتب المقدار بالشكل :

$$2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2 x) = 2$$

١١ ـ ٦ ـ تمارين على المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي

١ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$z = y \cdot x^y$$

الحل : نعلم أن :

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \qquad (1)$$

لدينا :

$$z'_x = y^2 \cdot x^{y-1}$$

ولحساب z'_y نأخذ لغاريتم الطرفين للتابع المفروض :

$$\log z = \log y + y \log x$$

بالاشتقاق بالنسبة الى y :

$$\frac{z'_y}{z} = \frac{1}{y} + \log x$$

ومنـــه :

$$z'_y = y \cdot x^y \left(\frac{1}{y} + \log x \right)$$

نعوض عن z'_x , z'_y بقيمتيهما في العلاقة (1) :

$$dz = y^2 \cdot x^{y-1} \cdot dx + x^y (1 + y \cdot \log x)\, dy$$

٢ ـ بفرض أن :

$$z = x \cdot y + x \cdot e^{y/x}$$

برهن أن :

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y + z$$

(دورة حزيران ١٩٦٨)

الحل : لدينا :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{y/x} - \frac{y}{x} \cdot e^{y/x}$$

وبالتـالي :

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot y + x \cdot e^{y/x} - y \cdot e^{y/x} \qquad (1)$$

ولدينـا :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + e^{y/x}$$

وبالتـالي :

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y + y \cdot e^{y/x} \qquad (2)$$

بجمع العلاقتين : (2) , (1) طرفاً الى طرف والاختصار :

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y + x \cdot e^{y/x} + x \cdot y$$

لكن لدينا فرضاً :

$$z = x \cdot y + x \cdot e^{y/x}$$

نعوض :

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + x \cdot y$$

٣ ـ بفرض أن :

$$u = (x-y)\,(y-z)\,(z-x)$$

تحقق من صحة العلاقة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(دورة حزيران ١٩٧٢)

الحل : لدينا :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)\,(z-x) - (x-y)\,(y-z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(y-z)\,(z-x) + (x-y)\,(z-x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -(x-y)\,(z-x) + (x-y)\,(y-z)$$

بالجمع طرفاً الى طرف والاختصار نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

٤ ـ ليكن التابع :

$$u = x^{y \cdot z}$$

والمطلوب حساب التفاضل الكلي لهذا التابع .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

الحل : لدينا :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz \qquad (2)$$

ولنأخذ لغاريتم الطرفين للتابع المعطى :

$$\log u = y \cdot z \cdot \log x \qquad (2)$$

باشتقاق العلاقة (2) بالنسبة الى x :

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{y,z}{x} \Rightarrow u'_x = y \cdot z \cdot x^{y \cdot z-1}$$

باشتقاق العلاقة (2) بالنسبة الى y :

$$\frac{u'_y}{u} = z \cdot \log x \Rightarrow u'_y = x^{y \cdot z} \cdot z \cdot \log x$$

باشتقاق العلاقة (2) بالنسبة الى z :

$$\frac{u'_z}{u} = y \cdot \log x \implies u'_z = x^{y \cdot x} \cdot y \cdot \log x$$

نعوض في (1) :

$$du = y \cdot z \cdot x^{y \cdot z - 1} \cdot dx + x^{y \cdot z} \cdot z \cdot \log x \cdot dy + x^{y \cdot z} \cdot y \cdot \log x \cdot dz$$

٥ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = x^y \cdot y^z \cdot z^{x^2}$$

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log u = y \log x + z \cdot \log y + x^2 \log z$$

بالاشتقاق بالنسبة الى x :

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{y}{x} + 2x \log z$$

$$u'_x = x^y \cdot y^z \cdot z^{x^2} \left(\frac{y}{x} + 2x \log z \right)$$

بالاشتقاق بالنسبة الى y :

$$\frac{u'_y}{u} = \log x + \frac{z}{y}$$

$$u'_y = x^y \cdot y^z \cdot z^{x^2} \left(\log x + \frac{z}{y} \right)$$

بالاشتقاق بالنسبة الى z :

$$\frac{u'_z}{u} = \log y + \frac{x^2}{z}$$

$$u'_z = x^y \cdot y^z \cdot z^{x^2} \left(\log y + \frac{x^2}{z} \right)$$

ولدينا الدستور :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

نعوض :

$$du = x^y \cdot y^z \cdot z^{x^2}\left[\left(\frac{y}{x} + 2x\log z\right)dx + \left(\log x + \frac{z}{y}\right)dy + \left(\log y + \frac{x^2}{z}\right)dz\right]$$

٦ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = x \cdot y^{\log z}$$

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log u = \log x + \log z \cdot \log y$$

بالاشتقاق بالنسبة الى x :

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{1}{x} \Rightarrow u'_x = y^{\log z}$$

بالاشتقاق بالنسبة الى y :

$$\frac{u'_y}{u} = \frac{\log z}{y} \Rightarrow u'_y = \frac{x}{y} \cdot y^{\log z} \cdot \log z$$

بالاشتقاق بالنسبة الى z :

$$\frac{u'_z}{u} = \frac{\log y}{z} \Rightarrow u'_z = \frac{x}{z} \cdot y^{\log z} \cdot \log y$$

ولدينا الدستور :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

نعوض :

$$du = y^{\log z}\left[dx + \frac{x}{y} \cdot \log z \cdot dy + \frac{x}{z} \cdot \log y \cdot dz\right]$$

٧ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = \left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right)^z$$

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log u = z \log\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right)$$

نشتق بالنسبة الى x :

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{z}{x} \Rightarrow u'_x = \frac{z}{x}\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right)^z$$

نشتق بالنسبة الى y :

$$\frac{u'_y}{u} = \frac{z\,(y^2-1)}{y\,(y^2+1)} \Rightarrow u'_y = \frac{z\,(y^2-1)}{y\,(y^2+1)}\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right)^z$$

نشتق بالنسبة الى z :

$$\frac{u'_z}{u} = \log\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right) \Rightarrow u'_z = \log\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right)^z$$

ولدينا الدستور :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

نعوض :

$$du = \left(x.y + \frac{x}{y}\right)^z \left[\frac{z}{x} \cdot dx + \frac{z(y^2-1)}{y(y^2+1)}\,dy + \log\left(x \cdot y + \frac{x}{y}\right) \cdot dz\right]$$

٨ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$z = \log\left(1 + \frac{x}{y}\right)$$

الحل : لدينا :

$$z'_x = \frac{1}{y + x}$$

ولدينا :

$$z'_y = \frac{-x}{y(y+x)}$$

ولدينا الدستور :

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

نعوض :

$$dz = \frac{1}{y+x}\left(dx - \frac{x}{y}\, dy \right)$$

٩ ـ احسب التفاضل الكلي للتابع :

$$u = x \cdot y^z$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٧)

الحل : نأخذ لغاريتم الطرفين :

$$\log u = \log x + z \cdot \log y$$

بالاشتقاق جزئياً :

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{1}{x} \Rightarrow u'_x = x \cdot y^z \cdot \frac{1}{x} = y^z$$

$$\frac{u'_y}{u} = \frac{z}{y} \Rightarrow u'_y = \frac{z}{y} \cdot x \cdot y^z = z \cdot x \cdot x^{z-1}$$

$$\frac{u'_z}{u} = \log y \Rightarrow u'_z = x \cdot y^z \cdot \log y$$

ولدينا الدستور :

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

نعوض :

$$du = y^z \cdot dx + x \cdot z \cdot y^{z-1} \cdot dy + x \cdot y^z \cdot \log y \cdot dz$$

١٠ ـ يفرض : $z = \frac{x \cdot y^2}{x+y}$ برهن أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y . \partial x} = \frac{6x \cdot y^2}{(x+y)^3}$$

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٧)

الحل : لدينا :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2\,(x+y) - x.y^2}{(x+y)^2} = \frac{y^3}{(x+y)^2}$$

ولدينا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2(x+y)\,.\,y^3}{(x+y)^4} = -\frac{2\,y^3}{(x+y)^3} \qquad (1)$$

ولدينـا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,.\,\partial x} = \frac{3\,y^2(x+y)^2 - 2\,(x+y)\,.\,y^3}{(x+y)^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y.\partial x} = \frac{y^3 + 3x\,.\,y^2}{(x+y)^3}$$

أو :

$$2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,.\,\partial x} = \frac{2\,y^3 + 6x\,.\,y^2}{(x+y)^3} \qquad (2)$$

بجمع (1) ، (2) :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,.\,\partial x} = \frac{6\,x\,.\,y^2}{(x+y)^3}$$

١١ - بفرض $u = \mathrm{ch}\left(x + \frac{1}{y}\right)$ تحقق من صحة العلاقة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,.\,\partial x}\right) = u$$

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٨)

الحل : لدينا :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{y}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{y}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,.\,\partial x} = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{ch}\left(x + \frac{1}{y}\right) \qquad (3)$$

نطرح (3) من (2) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \,.\, \partial x} = + \frac{1}{y^2}\left[\mathrm{ch}\left(x + \frac{1}{y} \right) - \mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{y} \right) \right]$$

نضرب طرفي العلاقة الاخيرة بـ y^2 :

$$y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \,.\, \partial x} \right) = \mathrm{ch}\left(x + \frac{1}{y} \right) - \mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{y} \right) \qquad (4)$$

نجمع العلاقتين (1) ، (4) طرفاً الى طرف :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \,.\, \partial x} \right) = \mathrm{ch}\left(x + \frac{1}{y} \right) = u$$

وهو المطلوب :

١١ ـ ٧ ـ تمارين على رسم التوابع

١ ـ ليكن التابع :

$$y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

والمطلوب : دراسة تحولاته ، ورسم خطه البياني : مبيناً نهاياته ، ومحاوره المقاربة ونقاط انعطافه ان وجدت . ثم احسب السطح المغلق المحدود بمنحني هذا التابع ، ومحور الفواصل ox والمستقيمين : $x = 1/2 , x = 1$.

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحل : تابع كسري ناطق معين ومستمر من أجل جميع القيم ماعدا $x = o$ أي:

مجاله :

$$]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$$

من أجل :

$$x \to 0 \Rightarrow y \to \pm\infty$$

اذن :

$x = 0$ محور مقارب

تكتب معادلة التابع بالشكل :

$$y = x - 2 + \frac{1}{x}$$

فمن أجل :

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to x - 2$$

نستنتج أن : $y = x - 2$ محور مقارب مائل :

المشتق :

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$x = 1 \implies y = 0$$

$$y' = 0 \implies$$

$$x = -1 \implies y = -4$$

التقعر والانعطاف :

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

المشتق الثاني لا ينعدم وبالتالي لا يوجد انعطاف .

ومن أجل :

$$x > 0 \implies y'' > 0$$

والتقعر نحو التراتيب الموجبة .

ومن أجل :

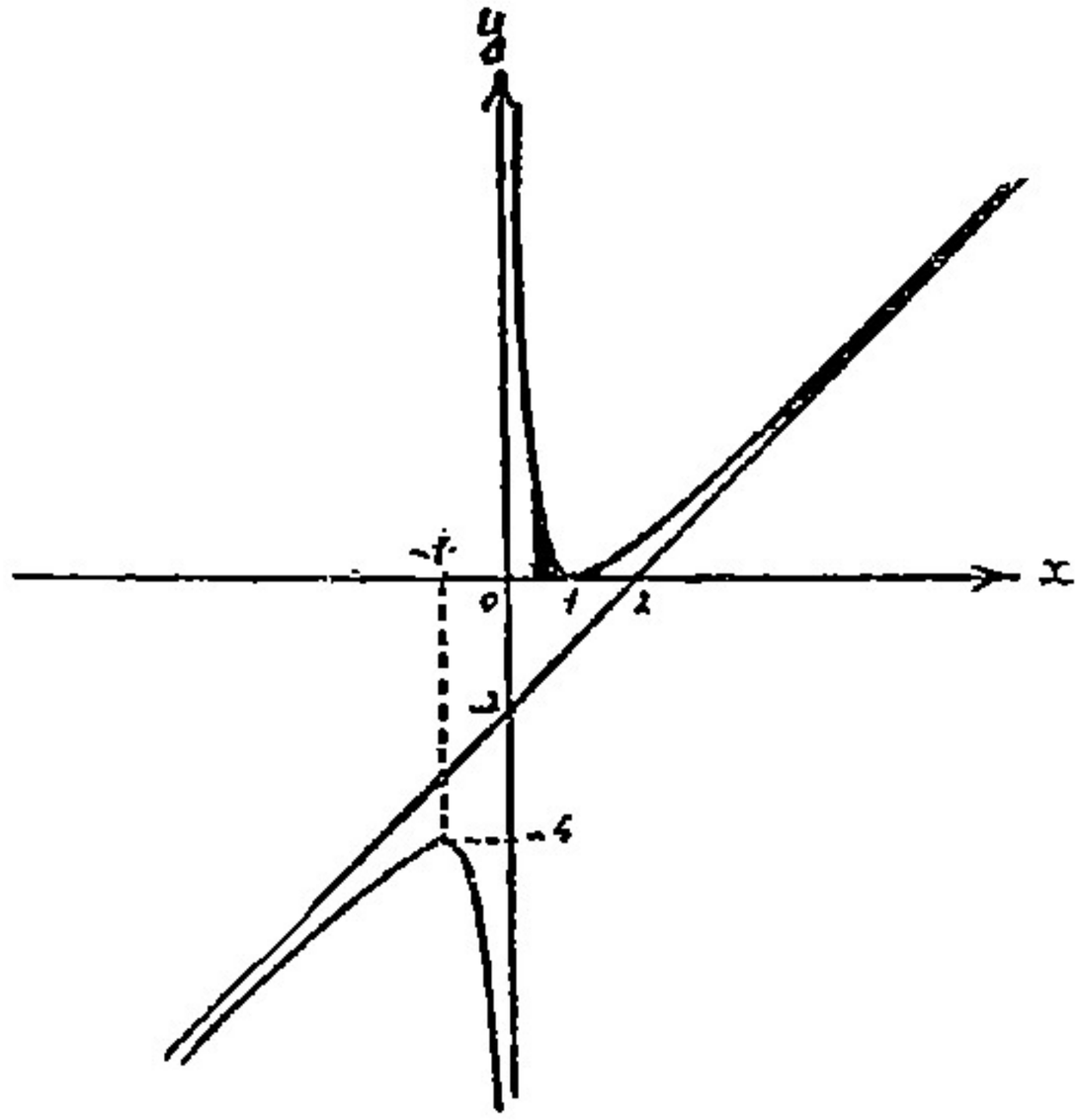
$$x < 0 \implies y'' < 0$$

والتقعر نحو التراتيب السالبة .

الجـــدول :

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

الرســـم :



الشكل (٥٣)

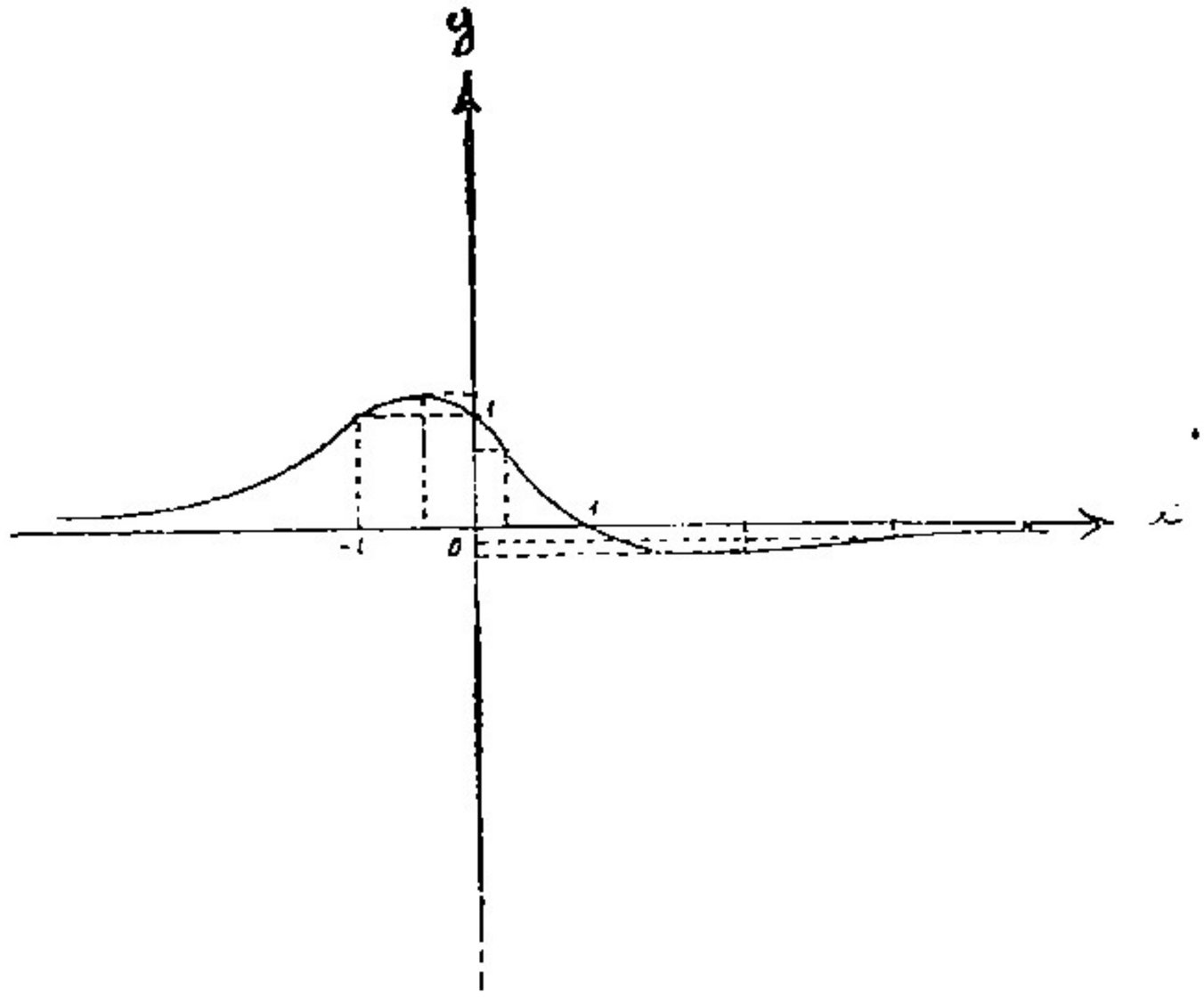
لدينا دستور السطح :

$$S = \int_a^b y \, . \, dx$$

$$S = \int_{1/2}^{1} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \log x \right]_{1/2}^{1}$$

$$S = \log 2 - \frac{5}{8}$$



الشكل (٥٤)

حيث :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x-x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1-1-x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$I_1 = -\int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I_1 = \left[-x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \operatorname{arc\,tg} x \right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\log 2$$

ولدينا :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$I_2 = \left[\text{arc tg } x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \right]_0^1$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

نعوض في (1) :

$$x_c = \frac{\pi - 4 + 2\log 2}{\pi - 2\log 2}$$

ولدينا :

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx} = \frac{I}{I_2} \qquad (2)$$

حيث :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

نفرق الكسر الى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

نعوض :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\text{arc tg } x + \frac{1}{1+x^2} \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

وكنا حسبنا :

$$I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

نعوض في (2) :

$$y_c = \frac{\pi - 2}{2\pi - 4\log 2}$$

٣ ـ لدينا التابع :

$$y = \frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$$

والمطلوب :

آ ـ دراسة تحولات هذا التابع ورسم خطه البياني .

ب ـ احسب السطح المغلق المحصور بين المنحني السابق والمحور oy والمحور ox والمستقيم $x = 5$.

(دورة حزيران ١٩٧١)

الحـــل :

آ ـ الدراسة والرسم :

١ً ـ تابع كسري ناطق ، معين ومستمر من أجل جميع القيم ما عدا :

$x = -1$ محور مقارب يوازي محور التراتيب .

أي : المجال :

$$]-\infty , -1[\cup]-1 , +\infty[$$

لدينـا :

$$x \to \pm\infty \implies y \to \pm\infty$$

فلنبحث عن وجود المحاور المقاربة المائلة ، نقسم الصورة على المخرج نجد :

$$y = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$$

فمن أجل :

$$x \to \pm\infty \implies y \to 2x-1$$

نستنتج أن :

$y = 2x - 1$ محور مقارب مائل .

٢ً ـ المشتق :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2}$$

$$x = 1 \implies y = 5$$

$$y' = 0 \implies$$

$$x = -3 \implies y = -11$$

٣ً ـ القيم الشهيرة :

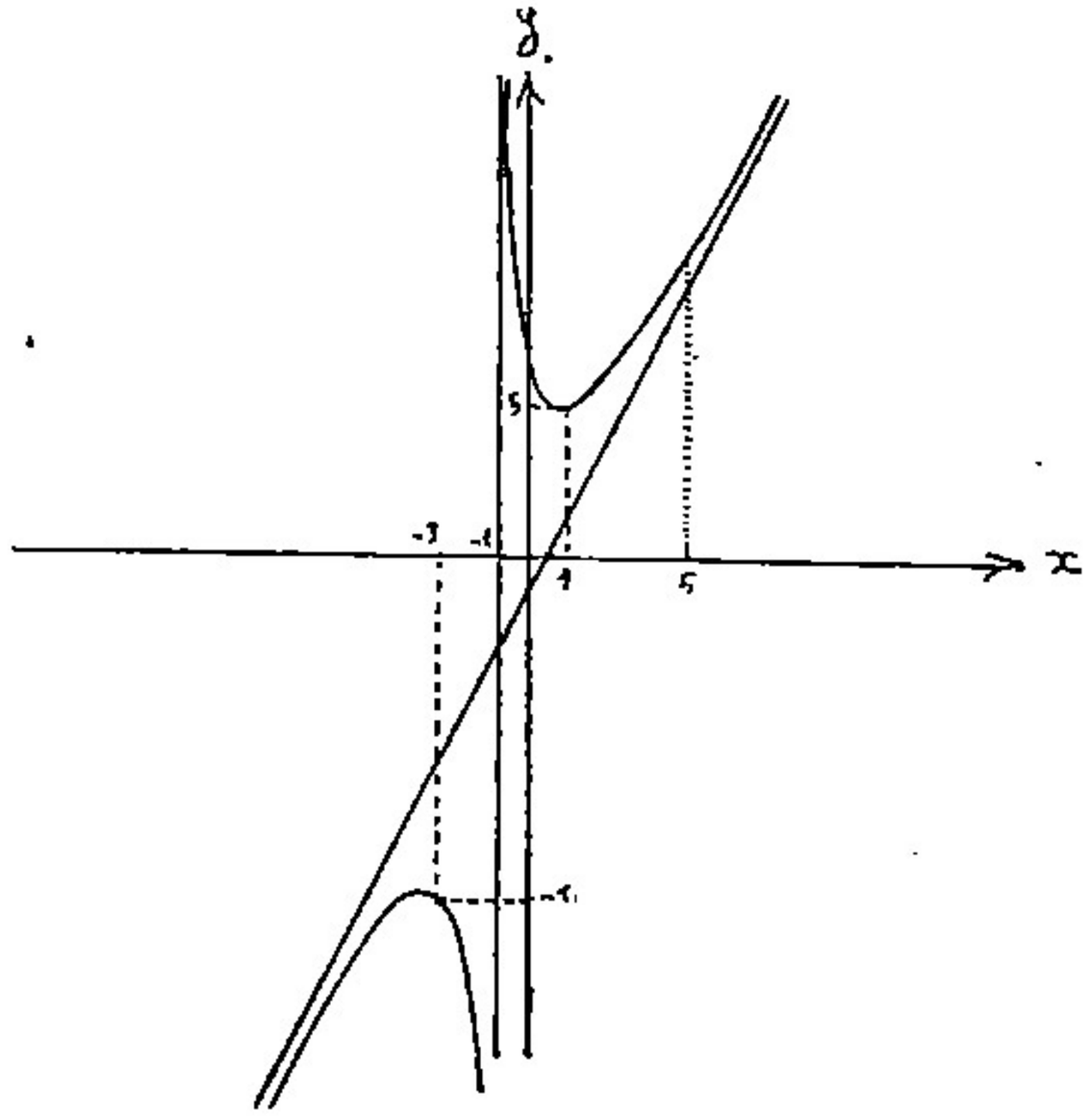
$$x = 0 \implies y = 7$$

$$y \neq 0$$

٤ً ـ الجـــدول :

x	$-\infty$		-3		1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-11	↘	$+\infty$	↘	7	↘	5	↗	$+\infty$

٥ً ـ الرســـم :



الشكل (٥٥)

ب ـ حساب السطح :

$$S = \int_0^5 y \, dx$$

$$S = \int_0^5 \left(2x - 1 + \frac{8}{x+1} \right) dx$$

$$S = \left[x^2 - x + 8 \log (x+1) \right]_0^5$$

$$S = 20 + 8 \log 6$$

٤ ـ لدينا التابع :

$$y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$$

والمطلوب :

آ ـ ادرس تحولات هذا التابع وارسم خطه البياني .

ب ـ احسب السطح المغلق المحصور بين المنحني السابق والمحور ox والمستقيمين :

$$x = 4 \quad , \quad x = 3$$

(دورة ايلول ١٩٧١)

الحل : آ ـ الدراسة والرسم :

١ً ـ المجال :

$$]-\infty , 2[\cup]2 , +\infty[$$

٢ً ـ المحاور المقاربة :

$$x \to 2 \implies y \to \infty$$

نستنتج أن : $x=2$ محور مقارب يوازي محور التراتيب :

$$x \to \pm\infty \implies y \to x+1$$

نستنتج أن : $y=x+1$ محور مقارب مائل .

٣ً ـ المشتق :

$$y' = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$x = 1 \implies y = 1$$

$$y' = 0 \implies$$

$$x = 3 \implies y = 5$$

٤ً ـ القيم الشهيرة :

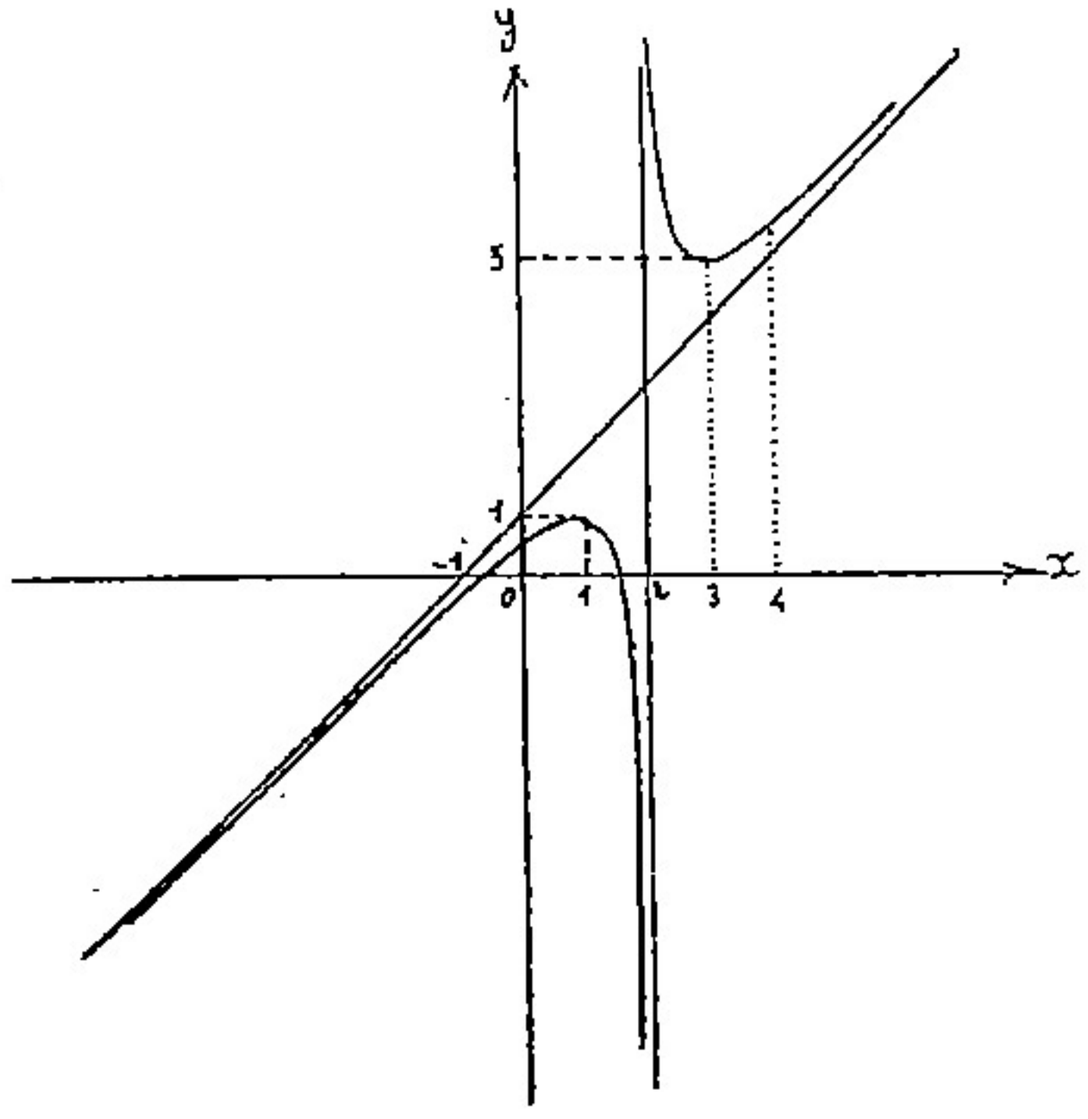
$$x = 0 \implies y = \frac{1}{2}$$

$$y = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

٥ً ـ الجدول :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

٦ً ـ الرســـم :



الشكل (٥٦)

ب ـ حساب السطح :

$$S = \int_3^4 \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} + x + \log (x - 2) \right]_3^4$$

$$S = 4{,}5 + \log 2$$

٥ ـ ليكن التابع :

$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x - 2}$$

والمطلوب :

آ ـ عين المجال الذي يكون فيه التابع معيناً .

ب ـ أوجد معادلات مستقيماته المقاربة .

(دورة حزيران ١٩٧٣)

الحل : آ ـ تعيين المجال :

يكون التابع معيناً عندما :

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

نبحث عن جذري الثلاثي ، نجد :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -2$$

وتتحقق المتراجحة عندما :

$$x > 1 \quad , \quad x < -2$$

أي أن المجال :

$$]-\infty , -2] \cup [1 , +\infty [$$

ب ـ المحاور المقاربة :

تكتب معادلة التابع بالشكل :

$$y = 2x - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4}}$$

وذلك بعد اتمام المجذور الى مربع كامل .

فمن أجل $x \to \pm\infty$ فان :

$$y \to 2x - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

أو :

$$y \to 2x - \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

أي أن التابع يقبل محورين مقاربين معادلتاهما :

$$y = 2x - \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

من أجل $x \to +\infty$ فان :

$$y = 2x - x - \frac{1}{2}$$

أي المقارب الاول :

$$y = x - \frac{1}{2}$$

ومن أجل $x \to -\infty$ فان :

$$y = 2x + x + \frac{1}{2}$$

أي المقارب الثاني :

$$y = 3x + \frac{1}{2}$$

٦ ـ ليكن التابع :

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

والمطلوب :

آ ـ حدد المجال الذي يكون فيه التابع معيناً .

ب ـ عين المستقيمات المقاربة لهذا التابع .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

الحل : آ ـ يكون التابع معيناً عندما :

$$x^2 - 4x + 3 \geqq 0$$

نبحث عن جذري ثلاثي الحدود وهما :

$$x = 1 \quad , \quad x = 3$$

وتتحقق المتراجحة السابقة عندما :

$$x \leq 1 \quad , \quad x \geq 3$$

ويكون المجال :

$$]-\infty \ , \ 1] \cup [3 \ , \ +\infty[$$

ب ـ نتمم المجذور الى مربع كامل :

$$y = x - \sqrt{(x-2)^2 - 1}$$

فمن أجل $x \to \mp\infty$ فان :

$$y \to x - \sqrt{(x-2)^2}$$

$$y \to x - |x-2|$$

وبالتالي نستنتج أن معادلة المستقيمات المقاربة هي :

$$y = x - |x - 2|$$

فمن أجل $x \to -\infty$ يكون المقارب الاول :

$$y = x + x - 2$$

$$y = 2x - 2$$

ومن أجل $x \to +\infty$ يكون المقارب الثاني :

$$y = x - x + 2 = 2$$

ويكون المجال :

$$x \geq -1$$

$$x \leq -3$$

ب) تكتب معادلة التابع بالشكل :

$$y = 2x - 1 - \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4 + 3}$$

$$y = 2x - 1 - \sqrt{(x+2)^2 - 1}$$

من أجل :

$$x \to \pm\infty \implies y \to 2x - 1 - |x+2|$$

ومن أجل :

$$x \to +\infty \implies y \to 2x - 1 - x - 2$$

$$y \to x - 3$$

نستنتج : $\boxed{y = x - 3}$ المقارب الاول

ومن أجل :

$$x \to -\infty \implies y \to 2x - 1 + x + 2$$

$y \to 3x + 1 \implies \boxed{y = 3x + 1}$ وهو المقارب الثاني

١١ ـ ٨ ـ تمارين على السلاسل الصحيحة

١ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\,.\,2^2}+\frac{x^3}{3\,.\,2^3}+\dots+\frac{x^n}{n\,.\,2^n}+\dots$$

عين مجال تقاربها ، وادرس طبيعتها من أجل ظرفي المجال .

(دورة حزيران ١٩٦٨)

الحل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,.\,2^{n+1}}\cdot\frac{n\,.\,2^n}{x^n}\right|<1$$

بالاختصار :

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\,.\,|x|<1$$

$$=\left|\frac{x}{2}\right|<1$$

أي :

$$-2<x<2$$

من أجل : $x=2$ ، نعوض :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

وهي السلسلة التوافقية المتباعدة .

ومن أجل : $x=-2$ ، نعوض :

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\dots\frac{(-1)^n}{n}\dots$$

وهي سلسلة متناوبة ، القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي الى الصفر ، فهي حسب ليبنز متقاربة .

٢ ـ لتكن السلسلة :

$$S = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \ldots$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها .

ب ـ عين طبيعتها من أجل طرفي المجال .

جـ ـ احسب بدلالة x مجموع السلسلة الناتجة عن اشتقاق حدود هذه السلسلة . ثم استنتج مجموع السلسلة المعطاة .

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحل : آ) حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = x^2 < 1$$

أي :

$$-1 < x < 1$$

ب) من أجل : $x=1$ نعوض نجد :

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \ldots$$

وهي سلسلة عددية حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{2n-1}$$

ولدراسة تقاربها نقارنها مع السلسلة التوافقية المتباعدة والتي حدها العام :

$$V_n = \frac{1}{n}$$

نجـــد :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

والسلسلتان من طبيعة واحدة .

وبما أن : $V_n = 1/n$ متباعدة فالسلسلة التي حدها العام u_n متباعدة .

من أجل : $x = -1$ نعوض :

$$S_2 = -1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \ldots$$

نلاحظ أن :

$$S_2 = -S_1$$

وبما ان السلسلة التي مجموعها S_1 متباعدة ، فالسلسلة التي مجموعها S_2 بدورهامتباعدة .

جـ) لدينـا :

$$S' = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

وهي تشكل سلسلة هندسية ، حـــدها الاول 1 وأساسها $x^2 < 1$ فهي متناقصة ولا نهائية ويعطى مجموعها بالدستور :

$$\frac{a}{1-R}$$

اذن :

$$S' = \frac{1}{1-x^2}$$

أو :

$$dS = \frac{dx}{1-x^2}$$

نكامل الطرفين :

$$S = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{lag} \frac{1+x}{1-x} + c$$

من الفرض نستنتج :

$$x = 0 \implies S = 0$$

نعوض :

$$0 = \frac{1}{2}\log\frac{1+0}{1-0} + c \implies c = 0$$

أي أن :

$$S = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

٣ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{4.3^2} + \frac{x^3}{6.3^3} + \cdots$$

والمطلوب :

آ ـ كتابة صيغة الحد العام لهذه السلسلة .

ب ـ تعيين مجال x الذي تكون من أجله السلسلة متقاربة مطلقاً .

جـ ـ بيان اذا كانت السلسلة المعطاة متقاربة أم متباعدة من أجل كل من القيمتين $x = 3 \quad x = -3$.

(دورة حزيران ١٩٧١)

الحل : آ) الحد العام هو :

$$u_n = \frac{x^n}{2n \cdot 3^n}$$

ب) لدراسة تقاربها نطبق دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{2n\cdot 3^n}{x^n}\right| < 1$$

بالاختصار :

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

أي :

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad -3 < x < 3$$

جـ ـ من أجل : $x=3$ نعوض :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)$$

إلا ان ما داخل القوسين ليس الا السلسلة التوافقية المتباعدة ، نستنتج أنه من أجل $x=3$ نقع على سلسلة متباعدة .

ومن أجل : $x = -3$ نعوض :

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

وهي سلسلة متناوبة ، القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي الى الصفر ، فحسب ليبنز تكون متقاربة .

٤ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{x}{2+1^3} + \frac{x^2}{2+2^3} + \frac{x^3}{2+3^3} + \ldots$$

والمطلوب :

آ ـ أوجد صيغة حدها العام .

ب ـ حدد مجال تقاربها .

جـ ـ عين طبيعة السلسلة من أجل طرفي المجال .

(دورة حزيران ١٩٧٣)

الحل : آ) حدها العام :

$$u_n = \frac{x^n}{2+n^3}$$

ب) لدراسة تقاربها نطبق دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^3} \cdot \frac{2+n^3}{x^n} \right| < 1$$

بالاختصار :

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^3}{2+(n+1)^3} \cdot |x| < 1$$

أي :

$$|x| < 1 \implies -1 < x < 1$$

جـ) من أجل $x=1$ نعوض :

$$\frac{1}{2+1^3} + \frac{1}{2+2^3} + \dots + \frac{1}{2+n^3} + \dots$$

وهي سلسلة عددية ، ولدراسة تقاربها نقارن حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{2+n^3}$$

مع الحد العام : $V_n = 1/n^2$ للسلسلة المتقاربة . نجد :

$$\frac{1}{2+n^3} < \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{n^2}$$

وبالتـالي :

$$u_n < V_n$$

أي كل حد في سلسلتنا أصغر من الحد الذي يقابله في السلسلة المتقاربة ، وبالتالي فسلسلتنا بدورها متقاربة .

ومن أجل $x = -1$ نعوض :

$$\frac{-1}{2+1^3} + \frac{1}{2+2^3} - \frac{1}{2+3^3} - \frac{(-1)^n}{2+n^3} \cdots$$

وهي سلسلة متناوبة ، والقيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي الى الصفر ، فهي حسب ليبنز متقاربة .

٥ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$S = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3} + \frac{3x^3}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{n \cdot x^n}{(\sqrt{3})^n} \cdots$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها .

ب ـ عين طبيعتها من أجل طرفي المجال مع التعليل .

(دورة ايلول ١٩٧٤)

الحـــل :

آ ـ حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1) \cdot x^{n+1}}{(\sqrt{3})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{3})^n}{n \cdot x^n} \right| < 1$$

$$= \lim \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{x}{\sqrt{3}} \right| < 1$$

اي :

$$\left| \frac{x}{\sqrt{3}} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

ب ـ من أجل : $x = \sqrt{3}$ نعوض :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

وهي سلسلة عددية موجبة متزايدة ، وحدها العام لا ينتهي الى الصفر فهي متباعدة.

ومن أجل $x = -\sqrt{3}$ نعوض :

$$S = -1 + 2 - 3 + 4 \ldots$$

وهي سلسلة متناوبة ، وحدها العام لا ينتهي الى الصفر فهي متباعدة أيضاً .

٦ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\frac{1! \cdot x}{1} + \frac{2! \cdot x^2}{2^2} + \ldots + \frac{n! \cdot x^n}{n^n} + \ldots$$

والمطلوب تعيين مجال تقاربها .

الحـــل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{|x|}{e}$$

ولكي تكون متقاربة يجب أن تتحقق العلاقة :

$$\frac{|x|}{e} < 1 \quad \Rightarrow \quad -e < x < e$$

٧ ـ لدينا سلسلة صحيحة ، حدها العام :

$$u_n = \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$$

حيث n تأخذ قيماً صحيحة بدءاً من $n = 1$. والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها .

ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

الحل : آ ـ حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+5)^{2n+1}}{2(n+1) \cdot 4^{n+1}} \cdot \frac{2n \cdot 4^n}{(x+5)^{2n-1}} \right|$$

بالاختصار نجد :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left(\frac{x+5}{2} \right)^2$$

ولكي تكون السلسلة متقاربة يجب أن يتحقق :

$$\left(\frac{x+5}{2} \right)^2 < 1$$

أو :

$$\left| \frac{x+5}{2} \right| < 1$$

أي :

$$-2 < x + 5 < 2$$

ومنـــه :

$$-7 < x < -3$$

ب ـ لندرس طبيعتها : من أجل : $x = -3$:

نعوض في صيغة الحد العام ونختصر نجد :

$$u_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$$

أي وقعنا على سلسلة عددية متباعدة : لأن حدها العام u_n إن هو إلا الحد العام للسلسلة التوافقية المتباعدة مضروباً بعدد ثابت 1/4 لا يغير من طبيعتها .

ومن أجل : $x = -7$:

نعوض في صيغة الحد العام ونختصر نجد :

$$u_n = (-1)^{2n-1} \cdot \frac{1}{4n}$$

أي أن السلسلة الناتجة هي :

$$-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right)$$

وهذه ليست إلا السلسلة التوافقية المتباعدة مضروبة بعدد ثابت 1/4— لا يغير من طبيعتها . اذن السلسلة الناتجة بدورها متباعدة أيضاً .

٨ ـ عين مجال تقارب السلسلة الصحيحة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{x^n}{n^n}$$

حيث n عدد موجب صحيح ، يأخذ قيماً بدءاً من $n = 1$.

الحـــل : حسب كوشي :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة دوماً ، أي أن مجال تقاربها :

$$-\infty < x < +\infty$$

٩ ـ عين مجال تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$$

حيث n عدد موجب صحيح يأخذ قيماً بدءاً من $n=1$.

الحـــل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,!\,(x+3)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,x+3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot|\,x+3\,|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot|\,x+3\,|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot|\,x+3\,|$$

$$= \frac{|x+3|}{e}$$

ولـكي تكون متقاربة ، يجب أن يتحقق :

$$\frac{|x+3|}{e} < 1 \implies -e-3 < x < e-3$$

١٠ ـ عين مجال تقارب السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$$

حيث n عدد موجب صحيح ، يأخذ قيماً بدءاً من $n=1$.

من أجل : $x = -1$ نعوض فنحصل على سلسلة عددية حدها العام :

$$u_n = \frac{1}{n^3}$$

نقارنها مع السلسلة المتقاربة :

$$V_n = \frac{1}{n^2}$$

نجـــد :

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

أي :

$$u_n \leq V_n$$

وبما أن V_n متقاربة فالسلسلة u_n بدورها متقاربة .

من أجل : $x = -3$ نعوض فنحصل على سلسلة عددية متناوبة حدها العام :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$$

نلاحظ أن القيم المطلقة لحدودها متناقصة وأن حدها العام ينتهي الى الصفر فهي حسب ليبنز متقاربة .

١٣ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .

ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال مع التعليل .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٧)

الحـــل : لدينا حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\,.\,2^{n+1}}\cdot\frac{n\,.\,2^n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\,(n+1)}\cdot|\,x-3\,| = \frac{|x-3|}{2} < 1$$

أي :

$$-1 < \frac{x-3}{2} < 1$$

$$1 < x < 5$$

من أجل : $x = 1$ نعوض :

$$u_n = \frac{(-2)^n}{n\,.\,2^n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

وهي سلسلة عددية متناوبة : القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي إلى الصفر ، فحسب ليبنز تكون متقاربة .

ومن أجل : $x = 5$ نعوض :

$$u_n = \frac{(2)^n}{n\,.2^n} = \frac{1}{n}$$

وهي السلسلة التوافقية المتباعدة .

١٤ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-4)^n}{n\,.\,5^n}$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .

ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال :

(الفرع المدني : دورة ايلول ١٩٧٧)

الحـــل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1)\,.\,5^{n+1}}\cdot\frac{n\,.\,5^n}{(x-4)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{|x-4|}{5}$$

$$= \left|\frac{x-4}{5}\right| < 1$$

$$|x-4| < 5$$

$$-5 < x-4 < +5$$

$$-1 < x < 9$$

من أجل : $x=-1$ نعوض :

$$u_n = \frac{(-5)^n}{n\,.\,5^n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

وهي سلسلة متناوبة ، القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العـام ينتهي الى الصفر فهي متقاربة حسب ليبنز .

من أجل : $x=9$ نعوض :

$$u_n = \frac{5^n}{n\,.\,5^n} = \frac{1}{n}$$

وهي السلسلة التوافقية المتباعدة .

١٥ ـ لتكن السلسلة التي حدها العام :

$$u_n = \frac{(x-1)^n}{(2n+1)\,.\,3^n}$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .

ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(الفرع المدني : دورة حزيران ١٩٧٨)

الحـــل : آ ـ حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(2n+3)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{(2n+1)\cdot 3^n}{(x-1)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)\,(2n+1)}{6n+9}\right|$$

$$= |x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6n+9} = \frac{|x-1|}{3} < 1$$

$$|x-1| < 3 \implies -3 < x-1 < +3$$

$$-2 < x < 4$$

ب ـ من أجل : $x = -2$ نعوض نجد :

$$u_n = \frac{(-3)^n}{(2n+1)\,3^n}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

وهي سلسلة متناوبة ، القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العـام ينتهي الى الصفر فهي حسب ليبنز متقاربة .

من أجل : $x = 4$ نعوض نجد :

$$u_n = \frac{3^n}{(2n+1)\,3^n} = \frac{1}{2n+1}$$

نعلم أن $v_n = \frac{1}{n}$ توافقية متباعدة ولدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

فهما من طبيعة واحدة .

١٦ ـ لتكن السلسلة الصحيحة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$$

والمطلوب :

آ ـ عين مجال تقاربها المطلق .
ب ـ ادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(الفرع المدني : دورة ايلول ١٩٧٨)

الحـــل : حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot x^{2n+1}}{(4n+1)^2} \cdot \frac{(4n-3)^2}{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(4n-3)^2}{(4n+1)^2} \cdot x^2 \right|$$

$$= 2x^2 < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ب ـ من أجل : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نعوض نجد :

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2 \cdot 2^{n-1/2}}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}(4n-3)^2}$$

وهي سلسلة عددية ، ولدراسة طبيعتها نقارنها كما يلي :

لدينـا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}(4n-3)^2} < \frac{1}{(4n-3)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن السلسلة $V_n = \frac{1}{n^2}$ متقاربة يكون : $u_n < V_n$

وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة .

ومن أجل : $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ نعوض فنقع على سلسلة جديدة :

$$W_n = \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1} \cdot 2^{n-1}}{(4n-3)^2 \cdot 2^{n-1/2}}$$

$$W_n = -\frac{1}{\sqrt{2}(4n-3)^2} = -u_n$$

وهي سلسلة سالبة ، وحيث أن السلسلة التي حدها العام u_n متقاربة برهاناً ، فان $-u_n$ وبالتالي W_n متقاربة لان الضرب بعدد ثابت لا يغير من طبيعة السلسلة .

١١ ـ ٩ ـ تمارين على النشر

١ ـ أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$y = e^{\sin x}$$

حسب طريقة ماك لوران :

(دورة حزيران ١٩٦٧)

الحـــل : نفرض :

$$f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f(0) = 1$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^{\sin x} \cdot \left(\cos^3 x - \frac{3}{2} \sin 2x - \cos x \right) \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f''''(x) = e^{\sin x} \cdot \left(-\frac{1}{4} \sin 2x - 6 \cos^2 x \cdot \sin x - 3 \cos 2x + \sin x \right)$$

$$\Rightarrow f''''(0) = -3$$

نعوض في الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \ldots$$

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{8} \ldots$$

٢ ـ أوجد أربعة حدود من منشور التابع $y = \log(2+x)$ بطريقة ماك لوران ، واستنتج الحد العام ، وعين مجال تقارب السلسلة الناتجة ، وادرس طبيعتها من أجل طرفي المجال .

(دورة حزيران ١٩٦٩)

الحل : لدينا :

$$f(x) = \log(2+x) \implies f(0) = \log 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \implies f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} \implies f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3} \implies f'''(0) = \frac{1}{4}$$

ولدينا الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \dots$$

نعوض ونصلح :

$$\log(2+x) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} \dots$$

أو يكتب بالشكل :

$$\log(2+x) = \log 2 + \frac{x}{1.2^1} - \frac{x^2}{2.2^2} + \frac{x^3}{3.2^3} \dots$$

نلاحظ أن المنشور ، اعتباراً من الحد الثاني ، يشكل سلسلة ، حدها العام :

$$u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n.2^n}$$

ونعلم ان اضافة (أو حذف) عدد محدود من الحدود الاولى لسلسلة لا يغير من طبيعتها فلنحذف الحد $\log 2$. وما تبقى يعتبر سلسلة صحيحة حدها الاول : $\frac{x}{1.2^1}$ ، ولندرس تقاربها حسب دالامبير :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n.2^n}{x^n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left|\frac{x}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{x}{2}\right|$$

ولكي تكون متقاربة يجب أن يتحقق :

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \implies -2 < x < 2$$

لندرس طبيعتها من أجل طرفي المجال :

فمن أجل : $x = 2$ نعوض في الحد العام نجد :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

أي يصبح لدينا سلسلة متناوبة ، القيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي الى الصفر ، فهي متقاربة حسب ليبنز .

ومن أجل : $x = -2$ نعوض في الحد العام نجد :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$$

وهذه العلاقة تمثل الحد العام للسلسلة التوافقية السالبة ، فهي متباعدة .

٣ - أوجد ثلاثة حدود من منشور التابع : $y = \log x$ حسب قوى $(x-1)$.

(دورة ايلول ١٩٦٩)

الحل : لدينا دستور تايلور :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}\cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \dots$$

نفرض :

$$f(x) = \log x \implies f(1) = \log 1 = 0$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 2$$

نعوض :

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \ldots$$

٤ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$y = e^x \cdot \sin x$$

حسب طريقة ماك لوران .

(دورة حزيران ١٩٧٠)

الحـــل : نفرض :

$$f(x) = e^x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2 e^x \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2 e^x (\cos x - \sin x) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2$$

ولدينا دستور ماك لوران :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

نعوض :

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} \ldots$$

٥ – أوجد ثلاثة حدود من منشور التابع :

$$y = (x+1)\log(2+x)$$

حسب سلسلة ماك لوران .

(دورة حزيران ١٩٧٢)

الحـــل : نفرض :

$$f(x) = (x+1)\log(2+x) \implies f(0) = \log 2$$

$$f'(x) = \log(2+x) + \frac{x+1}{2+x} \implies f'(0) = \log 2 + \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3+x}{(2+x)^2} \implies f''(0) = \frac{3}{4}$$

ولدينا الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}\cdot f''(0) + \cdots$$

نعوض :

$$(x+1)\log(2+x) = \log 2 + (\log 2 + \frac{1}{2})x + \frac{3}{8}x^2 \cdots$$

٦ – أوجد الحدود الثلاثة الاولى غير المعدومة من منشور التابع :

$$y = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

حسب سلسلة ماك لوران .

(دورة حزيران ١٩٧٤)

الحـــل : لدينا الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!}\cdot f''(0) + \cdots$$

ونفرض :

$$f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} \implies f(0) = 1$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^3 x - \frac{3}{2}\sin 2x - \cos x\right) \implies f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^{\sin x}(-\cos^2 x, \sin^2 x - 6\cos^2 x \cdot \sin x - 3\cos 2x + \sin x) \implies f'''(0) = -3$$

نعوض :

$$\cos x \cdot e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{2} \ldots$$

٧ ـ انشر التابع :

$$y = \frac{1}{x}$$

حسب قوى $x-1$.

الحل : لدينا دستور تايلور :

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!} \cdot f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot f''(1) + \ldots$$

نفرض :

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies f(1) = 1$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \implies f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \implies f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \implies f'''(1) = -6$$

. . . . . .

نعوض :

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 \ldots$$

أي :

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

٨ ـ انشر التابع :

$$y = \log x$$

حسب قوى المقدار :

$$\frac{1-x}{1+x}$$

الحل : نفرض :

$$\frac{1-x}{1+x} = v \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-v}{1+v}$$

فيكون :

$$\log x = \log \frac{1-v}{1+v} = f(v)$$

لننشر هذا التابع حسب قوى v :

$$f(v) = \log \frac{1-v}{1+v} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$f'(v) = \frac{-2}{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2$$

$$f''(v) = \frac{-4v}{(1-v^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(v) = \frac{-4(1+3v^2)}{(1-v^2)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -4$$

. . . . . .

نعوض في الدستور :

$$f(v) = f(0) + \frac{v}{1!} \cdot f'(v) + \ldots$$

$$\log \frac{1-v}{1+v} = -2v - \frac{2}{3} v^3 - \frac{2}{5} v^5 \ldots$$

نعوض عن v بقيمتها :

$$\log x = -2\left[\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^5 \ldots \right]$$

٩ ـ اشر التابع $\cos x$ حسب قوى $(x-\pi/2)$.

الحل : حسب دستور تايلور :

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!} \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

نفرض :

$$f(x) = \cos x \implies f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = -\sin x \implies f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f''(x) = -\cos x \implies f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'''(x) = \sin x \implies f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

. . . . . .

نعوض :

$$\cos x = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5 \ldots$$

ونلاحظ أن :

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$$

١٠ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$y = \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

حسب طريقة ماك لوران .

الحل : يكتب التابع بالشكل :

$$y = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

ونفرض :

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin^2 2x \implies f(0) = 0$$

بالاشتقاق :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sin 4x \implies f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \cos 4x \implies f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -8 \sin 4x \implies f'''(0) = 0$$

$$f^{(IV)}(x) = -32 \cos 4x \implies f^{(IV)}(0) = -32$$

$$f^{(V)}(x) = 128 \sin 4x \implies f^{(V)}(0) = 0$$

$$f^{(VI)}(x) = 512 \cos 4x \implies f^{(VI)}(0) = 512$$

ولدينا دستور ماك لوران :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \ldots$$

نعوض ونختصر :

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = x^2 - \frac{4}{3} x^4 + \frac{32}{45} x^6 \ldots$$

١١ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$y = x \cdot \cos x$$

حسب قوى $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(دورة ايلول ١٩٧٥)

الحل : لدينا الدستور :

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1!} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} \cdot f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \ldots.$$

نفرض :

$$f(x) = x \cdot \cos x \implies f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ويكون :

$$f'(x) = \cos x - x \cdot \sin x \implies f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f''(x) = -(2 \sin x + x \cdot \cos x) \implies f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$f'''(x) = -(3 \cos x - x \sin x) \implies f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

نعوض في الدستور :

$$x \cdot \cos x = -\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{12}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\ldots.$$

١٢ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدودة من منشور التابع :

$$f(x)=e^{ex}$$

وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(دورة حزيران ١٩٧٦)

الحل : لدينا الدستور :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}\cdot f'(0)+\frac{x^2}{2!}\cdot f''(0)+\ldots.$$

ولدينـا :

$$f(x)=e^{ex} \implies f(0)=e$$

$$f'(x)=e^{ex}\cdot e^x \implies f'(0)=e$$

$$f''(x)=e^{ex}\left(e^{2x}+e^x\right) \implies f''(0)=2e$$

نعوض :

$$e^{ex}=e+\frac{x}{1!}\cdot e+\frac{x^2}{2}\cdot 2e\ldots.$$

$$e^{ex}=e\left(1+x+x^2\right)\ldots.$$

١٣ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$f(x)=(x+1)\cdot\log(x+1)$$

وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة حزيران ١٩٧٦)

الحل : لدينا الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \ldots$$

ولدينـا :

$$f(x) = (x+1) \cdot \log(x+1) \implies f(0) = 0$$

$$f'(x) = \log(x+1) + 1 \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} \implies f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \implies f'''(0) = -1$$

نعوض :

$$(x+1) \cdot \log(x+1) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \ldots$$

١٤ ـ أوجد ثلاثة حدود غير معدومة من منشور التابع :

$$y = \sin 2x \cdot e^x$$

وذلك حسب طريقة ماك لوران .

(ميكانيك ، كهرباء : دورة ايلول ٩٧٧)

الحل : لدينا الدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \ldots$$

نفرض :

$$f(x) = \sin 2x \cdot e^x \implies f(0) = 0$$

$$f'(x) = (2\cos 2x + \sin 2x)\, e^x \implies f'(0) = 2$$

$$f''(x) = (4\cos 2x - 3\sin 2x)\, e^x \implies f''(0) = 4$$

$$f'''(x) = (-2\cos 2x - 11\sin 2x)\,e^x \implies f'''(0) = -2$$

نعوض :

$$\sin 2x \cdot e^x = 0 + \frac{x}{1!} \cdot 2 + \frac{x^2}{2!} \cdot 4 + \frac{x^3}{3!} \cdot (-2) \ldots$$

$$\sin 2x \cdot e^x = 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} \ldots$$

المراجع العلمية

1 — N.PISKOUNOV : Calcul Différentiel et Intégral . Tomes: I,II . Éditions Mir . Moscou 1969 .

(روسي ، فرنسي ، انكليزي)

2 — GRANVILLE ET SMITH : Élément de Calcul Différentiel et Intégral . Librairie Vuibert . Paris 1946.

(فرنسي ، انكليزي)

3 — G . BARANENKOV : Problems in Mathematical Ana'ysis , Mir Publishers Moscow . 1968 .

(فرنسي ، انكليزي)

4 — J. QUINET : Cours Élémentaire de Mathématiqnes . Supérieures . Tomes : I , II , III , IV. Dunot . Paris 1962 .

5 — VALIRON : Couris d'Analyse Mathématique . Masson et C^ie . Paris 1948 .

6 — COMMISSAIRE ET CAGNAC: Cours de Mathématiques. Tomes . I,II. Masson et C^ie Paris 1948 .

7 — DELTHEIL : Nouveaux Éléments de Mathématipues Générales . Tomes . I , II . Librairie J . B. Baillière et Fils Editeurs . Paris 1961

8 — AUBERT ET PAPELIER : Exercices d'Algèbre et d'Analyse . Tome I , II , Librairie Vuibert . Paris 1947 .

9 — VOGT : Élémente de Mathématiques Supérieures Librairie Vuibert . Paris 1925 .

10 — FRANK AYRES, JR : Theory and problems of differential and integral.Calculus Schaum publishing Co . 257 Park Avenue South , New york 10 — 1950 .

11 د. سودان تحليل رياضي I,II,III ١٩٥٨

12 د. سودان رياضيات عامة I,II,III ١٩٦٥

13 د. ماغوط الرياضيات ١٩٦٥

المصطلحات العلمية

عربي - افرنسي

- آ -

اجتماع	Réunion
احداثيات	Coordonnées
استمرار	Continuité
انعطاف	Inflexion
انقطاع	Discontinuité

- ت -

تابع اسي	Fonction exponentielle
تابع دوري	Fonction périodique
تابع زوجي	Fonction paire
تابع ضمني	Fonction implicite
تابع ظاهري	Foncit on explicite
تابع عكسي	Fonction inverse
تابع فردي	Fonction impaire
تابع قطعي	Fonction hyperbolique
تابع لغاريتمي	Fonction lagarithmique
تابع متسام	Fonction transcendante
تابع مركب	Foncion composée
تؤدي	Entraîne
تبادلات	Permutations
تباعد	Divergence

Arrangements	ترتيب
Aecroissement	تزايد
Différentielle	تفاضل
Convergence	تقارب
Intersection	تقاطع
Implique	تقتضي
Concavité	تقعر
Equivalance	تكافؤ
Symétrie	تناظر
Combinaisons	توافقات

- خ - ح - ج -

Sinus	جيب
Cosinus	جيب التمام
Partie Principale	جزء رئيسي
Spirale	حلزون
Asymptote	خط مقارب
Graphique	خط بياني

- س -

Série	سلسلة
Série harmonique	سلسلة توافقية
Série altérnée	سلسلة متناوبة

- ط -

Module	طويلة

- ظ -

Tangent	ظل

- ع -

Nombre irrationnel	عدد أصم
Nombre algébriqne	عدد جبري
Nombre arithmétique	عدد حسابي
Nombre entier	عدد صحيح ، تام
Nombre fractionnaire	عدد كسري
Nombre rationnel	عدد ناطق
Indétermination	عدم التعيين
Complexe	عقدي
Elément	عنصر

- ق -

Pôle	قطب
Valeur moyenne	قيمة وسطى

- ك -

Polynôme	كثير حدود
Fraction décimale	كسر عشري

- ل -

Infinement petit	لامتناه في الصغر
Infinement grand	لامتناه في الكبر

- م -

divergent	متباعد
Suite	متتالية
Intervalle	مجال
Variable	متحول
Croissant	متزايد

Décroissant	متناقص
Axe	محور
Dérivée	مشتق
Argument	مضمون
Absolue	مطلق
Absolument	مطلقاً
Déterminant	معين
Mineur	معين صغير
Coupure	مقطع
Pour tour	من أجل كل

– ن –

Développement	نشر
Limite	نهاية
Minimum	نهاية صغرى
Maximum	نهاية عظمى

– ي –

Appartient à	ينتمي الى
Il existe au moins	يوجد على الاقل

المصطلحات العلمية

فرنسي - عربي

(A)

Absolue	مطلق
Absolument	مطلقاً
Accroissement	تزايد
Appartient à	ينتمي الى
Argument	مضمون
Arrangements	التراتيب
Asymptote	خط مقارب
Axe	محور

(C)

Concavité	تقعر
Combinaisons	توافقات
Convergence	تقارب
Continuité	استمرار
Complexe	عقدي
Coordonnées	احداثيات
Croissant	متزايد
Cosinus	جيب التمام
Coupure	مقطع

(D)

Décroissant	متناقص

Dérivée	مشتق
Déterminant	معين
Développement	نشر
Différentielle	تفاضل
Discontinuité	انقطاع
Divergence	تباعد
Divergent	متباعد

(E)

Élément	عنصر
Entrainer	ادى
Equivalance	تكافؤ

(F)

Fonction composée	تابع مركب
Fonction explicite	تابع ظاهري
Fonction exponenticlle	تابع اسي
Fonctiou impaire	تابع فردي
Fonction inverse	تابع عكسي
Fonction implicite	تابع ضمني
Fonction hyperbolique	تابع قطعي
Fonction logarithmique	تابع لغاريتمي
Fonction paire	تابع زوجي
Fonction périodique	تابع دوري
Fonction transcendante	تابع متسام
Fraction décimale	كسر عشري

(G)

Graphique	خط بياني

(I)

Il existe au moins	يوجد على الاقل
Impliquer	اقتضى
Indétermination	عدم التعيين
Infinemet pdtit	لامتناه في الصغر
Infinement grand	لامتناه في الكبر
Inflexion	انعطاف
Intersection	تقاطع
Intervalle	مجال

(L)

Limite	نهاية

(M)

Maximum	نهاية عظمى
Minimum	نهاية صغرى
Mineur	معين صغير
Module	طويلة

(N)

Nombre algébrique	عدد جبري
Nombre arithmétique	عدد حسابي
Nombre entier	عدد صحيح ، تام
Nombre fractionnaire	عدد كسري
Nombre irrationnel	عدد أصم
Nombre rationnel	عدد ناطق

(P)

Pour tout	من أجل كل (مهما يكن)
Partie principale	جزء رئيسي

Permutations	تبادلات
Pôle	قطب
Polynôme	كثير حدود
(R)	
Réunion	اجتماع
(S)	
Série	سلسلة
Série alternée	سلسلة متناوبة
Série harmonique	سلسلة توافقية
Sinus	جيب
Spirale	حلزون
Suite	متتالية
Symétrie	تناظر
(T)	
Tangent	ظل
(V)	
Variable	متحول

الفهرس

الموضـــوع	الصفحة
مقدمات	٣
الفصـــل الاول	
معلومات لا بد منهـا	
دساتير هندسية	٩
حل المعادلة من الدرجة الثانية	١٠
اشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية	١٠
خواص القوى	١١
خواص الجذور	١٢
خواص اللفاريتمات	١٤
المتوالية العددية	١٤
المتوالية الهندسية	١٥
بعض المتطابقات	١٥
مجموع مربعات n عدداً من الاعداد الاولى الصحيحة	١٦
المتبادلات والتراتيب	١٧
المتوافقات	١٧
مفكوك ذي الحدين لنيوتون	١٨
الاعداد العقدية	١٨
جمع الاعداد العقدية	١٩
ضرب الاعداد العقدية	٢٠
تقسيم عددين عقديين	٢٠
الجذر التربيعي للعدد العقدي	٢١

الموضـــوع	الصفحة
الجذر التكعيبي للعدد (1)	٢٢
دساتير مثلثية	٢٤
بعض أحرف الابجدية الاغريقية	٢٦
بعض الاصطلاحات	٢٧
الاعداد الناطقة	٢٨
خواص الاعداد الناطقة	٢٩
الاعداد الصماء	٢٩
الفصل الثاني	
المعينـــات	
غاية المعينات	٣١
حل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين	٣١
حل جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل	٣٤
نشر المعين من المرتبة الثالثة	٣٥
خواص المعين من المرتبة الثالثة	٣٧
حل ومناقشة جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل	٤٢
المعين من المرتبة n	٥١
حل جملة n معادلة خطية ذات n مجهولاً	٥٢
ضرب المعينات	٥٢
تمـارين	٥٤
الفصل الثالث	
التوابع ـ النهايات ـ كثيرات الحدود ـ الاستمرار	
التوابع	٥٩
تعيين دور التابع المثلثي	٦٠
تصنيف التوابع	٦٢
التابع المعين	٦٢
التابع العكسي	٦٣
النهايات	٦٤

الموضـــوع	الصفحة
تعاريف	٦٤
نظرية أساسية	٦٦
خواص النهايات	٦٨
كثيرات الحدود	٧٧
قيمة كثير الحدود عندما $x\to 0$	٧٨
قيمة كثير الحدود عندما $x\to \infty$	٧٨
التطابق	٧٩
نظرية بيزو	٧٩
نظرية دالامبير	٨٠
استمرار التوابع	٨١
خواص التوابع المستمرة	٨٦
تمارين	٨٩
الفصل الرابع	
المتواليات والسلاسل	
تعاريف	٩٢
السلاسل العددية	٩٤
السلاسل ذات الحدود الموجبة	٩٦
خواص السلاسل	٩٦
الشرط اللازم لتقارب سلسلة	٩٧
السلسلة التوافقية	٩٨
مقارنة السلاسل	٩٩
دراسة تقارب السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n^e}$	١٠٣
قاعدة كوشي	١٠٤
قاعدة دالامبير	١٠٦
السلاسل المتناوبة	١١٠
نظرية ليبنز	١١٠
سلاسل ذات حدود اشاراتها كيفية	١١٢

الموضـــوع	الصفحة
حساب مجموع حدود السلسلة المتقاربة	١١٥
تمارين	١١٦
الفصل الخامس	
العدد e	
تعريف	١٢٠
حساب القيمة التقريبية للعدد e	١٢٠
العدد e هو $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	١٢٢
التابع الاسي e^x	١٢٣
اللغاريتم النيبري أو اللغاريتم الطبيعي	١٢٤
تمارين	١٢٩
الفصل السادس	
اللامتناهيات في الصغر ـ اللامتناهيات في الكبر ـ المشتقات	
تعاريف	١٣١
مقارنة اللامتناهيات في الصغر	١٣٢
مرتبة اللامتناهي في الصغر	١٣٣
مقارنة اللامتناهيات في الكبر	١٣٤
مرتبة اللامتناهي في الكبر	١٣٥
المشتقـــات	
تعاريف	١٣٦
خواص المشتقات	١٣٧
مشتق التابع العكسي	١٤٢
مشتقات النسب المثلثية	١٤٣
مشتق التابع $y=x^n$	١٤٤
مشتق التابع اللغاريتمي	١٤٦
مشتق التابع الاسي	١٤٨
الاشتقاق اللغاريتمي	١٤٩
تمارين	١٥٢

الموضـــوع	الصفحة
الفصل السابع	
التوابع الدائرية العكسية ـ التوابع القطعية	
التوابع القطعية العكسية	
قوس الجيب	١٥٥
قوس جيب التمام	١٥٧
قوس الظل	١٥٩
التوابع القطعية	١٦٢
المثلثات القطعية	١٦٣
مشتقات التوابع القطعية	١٦٦
التابع العكسي لجيب التمام القطعي	١٦٧
التابع العكسي للجيب القطعي	١٦٩
التابع العكسي للظل القطعي	١٧٠
تمارين	١٧٣
تمارين عامة على المشتقات	١٧٥
الفصل الثامن	
التفاضل ـ التزايدات المحدودة ـ التفاضل الكلي ـ المشتق الكلي	
التفاضل	١٧٨
المعنى الهندسي للتفاضل	١٧٩
تفاضل تابع التابع	١٨١
خواص التفاضل	١٨١
التفاضلات المتالية	١٨١
نظرية رول	١٨٣
نظرية التزايدات المحدودة	١٨٤
حالات عدم التعيين	١٨٦
حالة $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$	١٨٦

الموضـــوع	الصفحة
حالات : $0 . \infty$ ، ∞° ، 0° ، 1^{∞}	١٩٠
المشتق الجزئي	١٩٣
حساب المشتقات الجزئية	١٩٤
المشتقات الجزئية المتتالية	١٩٤
التفاضل الكلي	١٩٥
المشتق الكلي	١٩٨
مشتق التابع الضمني	١٩٨
تمارين	٢٠١
الفصل التاسع	
تطبيقات المشتقات في دراسة تحولات التوابع	
التابع المتزايد	٢٠٧
التابع المتناقص	٢٠٨
النهاية العظمى	٢٠٨
النهاية الصغرى	٢٠٩
الخط البياني	٢١٠
تقعر المنحني	٢١٠
نقطة الانعطاف	٢١١
الخطوط المقاربة	٢١٢
المحور المقارب الموازي محور التراتيب	٢١٢
المحور المقارب الموازي محور الفواصل	٢١٣
المحور المقارب المائل	٢١٥
التناظر	٢١٨
دراسة تحولات تابع معين بمعادلته الديكارتية ورسم خطه البياني	٢١٨
أمثلة محلولة	٢١٩
التابع $y = \sin x$	٢٢٨
التابع $y = \cos x$	٢٢٩

الموضـــوع	الصفحة
التابـع $y = tg\,x$	٢٣٠
التابـع $y = \arcsin x$	٢٣١
التابـع $y = \arccos x$	٢٣٢
التابـع $y = arc\,tg\,x$	٢٣٣
التابـع $y = ch\,x$	٢٣٤
التابـع $y = sh\,x$	٢٣٦
التابـع $y = th\,x$	٢٣٧
التابـع $y = e^x$	٢٣٨
التابع $y = \log x$	٢٣٩
التابـع الاسي $y = a^x$	٢٤١
دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع المعينة بمعادلاتها الوسيطية	٢٤٢
السيكلوئيد	٢٤٤
الاستروئيد	٢٤٦
فوليوم دوديكارت	٢٤٧
دراسة ورسم الخطوط البيانية للتوابع المعينة بالاحداثيات القطبية	٢٥٠
الزاوية التي يصنعها ρ مع المماس	٢٥٢
النقطة المقاربة ؛ والدائرة المقاربة	٢٥٤
أمثلة محلولة	٢٥٦
تمارين	٢٥٩

الفصل العاشر

السلاسل الصحيحة أو سلاسل القوى ـ مجال التقارب

النشر المحدود ـ تطبيقات

نظرية آبل	٢٦٣
نظرية (نصف قطر التقارب)	٢٦٥
سلسلة قوى $(x - a)$	٢٧٠

الموضـــوع	الصفحة
طريقة تايلور بالنشر	٢٧٢
تايلور في الحالة العامة	٢٧٣
أمثلة محلولة	٢٧٦
تطبيقات دستور ماك لوران :	٢٧٩
نشر التابع الاسي e^x	٢٧٩
نشر التوابع القطعية	٢٧٩
نشر التوابع الدورية	٢٨٠
دساتير اولر	٢٨١
أمثلة محلولة	٢٨٣
تمارين	٢٨٦
الفصل الحادي عشر	
القسم العملي	
تمارين على المعينات	٢٩٧
تمارين على النهايات	٣٠٩
تمارين على السلاسل العددية	٣٢٠
تمارين على المشتقات	٣٣٨
تمارين على قاعدة اوبيتال	٣٤٦
تمارين على المشتقات الجزئية والتفاضل الكلي	٣٥٤
تمارين على رسم التوابع	٣٦٣
تمارين على السلاسل الصحيحة	٣٨١
تمارين على النشر	٤٠٠
المراجع العلمية	٤١٣
المصطلحات العلمية	٤١٥
الفهرس	٤٢٣
الخطأ والصواب	٤٣١

الخطأ والصواب

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٢	١٧	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{a}$
١٣	٥	المجذور هذه	المجذور الى هذه
١٠٦	١٧	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n^u}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$
١٤١	الاخير	$yx' = yu' \cdot ux'$	$y'_x = y'_u \cdot u'_x$
٢٧٧	٩	$f'(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

مطبعة جامعة حلب


مدونة ملحوظة