الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الدوال المعقدة

للصف الثالث فيزياء في كليات التربية



$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz$$

تأليف

الدكتور سهير بشير خليل

شكيب عبد سعيد

Scanned by CamScanner

الدوال المعقدة

للصف الثالث فيزياء في كليات التربية

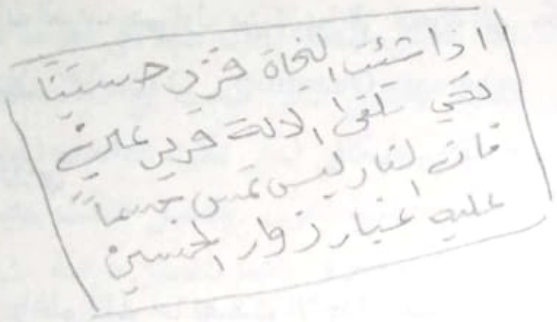
تأليف

سمير بشير حديد — مدرس في كلية التربية – جامعة الموصل

يحيى عبد سعيد — استاذ مساعد كلية التربية – جامعة الموصل

Scanned by CamScanner

بسم الله الرحمن الرحيم



المقدمة

نظراً للاهمية الكبرى التي اولتها حكومة الثورة في تعريب الدراسة في مراحلها المختلفة بالجامعات العراقية ، ولكون الكتاب هو الوسيلة العلمية لتحقيق عملية التعريب هذه ، وتمشياً مع توحيد المناهج في هذه الجامعات ، قمنا بتكليف من وزارة التعليم العالي والبحث العلمي بتأليف كتاب « الدوال المعقدة » المقرر تدريسها لطلبة الصفوف الثالثة من فرع الفيزياء في كليات التربية بموجب الامر الوزاري المرقم ٧/٢٦/٣٢٢٨٠ في ١٩٧٩/١٢/٢٢ وفق مفردات الرابع رياضيات التي اعدتها لجنة دراسة شؤون التعليم – لجنة اعداد مناهج كليات التربية بموافقة دائرة العلوم الصرفة في كتابها المرقم ٧/٢٦/٢١٦٨ في ١٩٨٠/١/٢٧

كان هذا الكتاب ثمرة محاضرات في المادة المذكورة القيت على طلبة الفيزياء والرياضيات في كلية التربية بجامعة الموصل . وقد راعينا في تأليفه الامانة العلمية ، والدقة ، والشرح الواضح مكثرين من الامثلة المحلولة والتطبيقات الفيزيائية والتمارين التي اعطيت اجوبة عن بعضها متوخين من ذلك تسهيل المادة وفائدة الطالب .

يعالج هذا الكتاب بصورة عامة المواضيع الاساسية في الدوال المعقدة وتطبيقاتها ، ومن ناحية خاصة فقد كان اعداد الكتاب لطلبة الفيزياء والرياضيات .

ولأجل ان يكون الطالب مهيأً لاستيعاب مادة الكتاب يجب ان يكون ملماً بموضوع التفاضل والتكامل وبخاصة المواد المتعلقة بالمتتابعات وسلاسل الاعداد والدوال الحقيقية وبعض التطبيقات الاولية في الفيزياء .

Scanned by CamScanner

قبل سرد أهم محتويات هذا الكتاب ، علينا ان نشير الى دور العرب والمسلمين في بناء مقومات هذا الموضوع . إن امتنا العربية غنية برجالها عريقة في تاريخها مثابرة في نضالها . وقد انجبت على ترابها علماء ونوابغ لعبوا دوراً رائعاً في تقدم الحضارة الانسانية ، وكانت مسيرتهم وما تزال ضوءاً يكشف للاجيال عظمة هذه الامة العربية التي انجبتهم .

ان العرب هم اول من تنبهوا الى الحالة التي يكون فيها جذرا المعادلة من الدرجة الثانية مقدارين خياليين (Imaginary Quantities) فقد جاء كتاب الجبر والمقابلة لمؤلفه الخوارزمي * .

«واعلم انك اذا نصفت الاجذار وضربتها في مثلها فكان يبلغ ذلك اقل من الدراهم التي مع المال فالمسألة مستحيلة »

أي حينما تكون الكمية تحت علامة الجذر سالبة ففي هذه الحالة يقال لها كمية خيالية بحسب التعبير الرياضي الحديث .

وقد هيأ العرب المواضيع المقدمة لموضوع التحليل العقدي مثل النسب المثلثية واللوغاريتمات وحساب التفاصيل والتكامل حيث أن ابن يونس* المصري اول من استعمل العلاقة :

$$\text{جتا س جتا ص} = \frac{1}{2}\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) + \frac{1}{2}\text{جتا}(\text{س} - \text{ص})$$

---

* هو محمد بن موسى الخوارزمي توفي بعد سنة ٢٣٢ هـ عاصر الخليفة العباسي المأمون وقد احاطه بضروب من الرعاية وولاه منصب بيت الحكمة وقد برز في الرياضيات والفلك وكان له اكبر الاثر في تقدمها وهو اول من استعمل كلمة الجبر فقد استعملت هذه اللفظة لهذا الموضوع في معظم لغات العالم (تراث العرب العلمي لقدري حافظ طوقان) .

* هو علي بن عبدالرحمن بن احمد بن يونس بن عبد الاعلى الصدفي المصري وبعده سارطون من فحول علماء القرن الحادي عشر للميلاد وقد يكون اعظم فلكي ظهر في مصر ، ولد فيها وتوفي بها سنة ٣٩٩ هـ - ١٠٠٩ م (تراث العرب العلمي لقدري حافظ طوقان) .

Scanned by CamScanner

التي توحي الى تحويل عمليات الضرب الى جمع وهذا ماتقوم به اللوغاريتمات كما وأن ثابت بن قرة (ولد بحّران عام ٨٣٥ موتوفي في بغداد عام ٩٠٠ م)أول من استعمل مبرهنة افناء الفرق (Theory of Exhaustion) في حساب حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ وهي تقابل عملية التكامل في حساب الحجوم الدورانية .

لقد كان بناء هذا الكتاب على فصول سبعة يحتوي الفصل الاول منها على مقدمة عن الاعداد المقعدة وتعيين منطقة في المستوي المقعد .والفصل الثاني يبحث في دراسة الدوال التحليلية والاستمرارية والمشتقة ،واشتقاق الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة تحليلية مع تطبيقات على معادلتي كوشي – ريمان ،ومفاهيم اساسية اخرى .والفصل الثالث يتضمن دراسة الدوال اللوغاريتمية والأسية والمثلثية ودوال خاصة اخرى ،كما يتضمن دراسة شاملة للتحويلات .ويبحث الفصل الرابع في دراسة التكامل المعقد وصيغتي كوشي التكامليتين ومبرهنات كوشي – ريمان وموريرا والقيمة المتوسطة لكاوس مع بعض التطبيقات .واقتصر الفصل الخامس على دراسة متتابعات ،وسلاسل الاعداد المعقدة ،وسلاسل القوى ،وسلسلتي تايلور و لوران .وتناول الفصل السادس البحث في تصنيف النقاط الشاذة وحساب الرواسب أما الفصل السابع فقد تناول معالجة اهم التطبيقات الفيزيائية ،وبخاصة في مواضيع سريان الموائع الكهربائية الساكنة ،انتقال الحرارة ومسائل القيم المحددة .مقترحين على اخواننا الاساتذة الذين سيدرسون هذه المادة بأن يخصصوا اسبوعين لكل فصل ؛ عدا الفصل الثالث حيث يستغرق ثلاثة اسابيع .وبعد :–

فلا نزعم اننا قد ارتفعنا الى مستوى الكمال في تحقيق الهدف ،فالكمال لله وحده . ولكننا بذلنا ما استطعنا من الجهد آملين أن يكون هذا العمل ذا نفع وفائدة . فان ظهر فيه مايسر ذلك . ففضل من الله جل شأنه ،وان أسدى لنا اخواننا اساتذة المادة بعض ملاحظاتهم فسنأخذ بها في طبعة قادمة ان شاء الله شاكرين لهم عنايتهم .

وختاما نقدم خالص شكرنا وامتناننا لعمادة كلية التربية لما أولته لنا من رعاية وتشجيع لانجاز هذا العمل وتقويمه ونشكر العاملين في مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر في جامعة الموصل

كما نقدم شكرنا وتقديرنا للدكتور سعيد الخزاعي مقيم الكتاب ونقدم شكرنا للدكتور امجد عبد الرزاق كرجيه . لملاحظاته القيمة على بعض ما ورد في الكتاب .

والله نسأل التوفيق والسداد وهو من وراء القصد

المؤلفان

الموصل ١٩٨٠ .

Scanned by CamScanner

المحتويات

المقدمة ٣
الفصل الاول : الاعداد المعقدة ٩
1.1 تمهيد ٩
1.2 العدد المعقد ١١
تمارين (1.1) ١٦
1.3 الصفات الجبرية ١٧
تمارين (1.2) ١٩
1.4 القيمة المطلقة ١٩
تمارين (1.3) ٢١
1.5 التمثيل الهندسي للعدد المعقد ٢١
1.6 الاحداثيات القطبية ٢٥
تمارين (1.4) ٣١
1.7 القوى والجذور ٣١
تمارين (1.5) ٣٦
1.8 تعيين مناطق في المستوى المعقد ٣٨
تمارين (1.6) ٤٥
1.9 النقطة في اللانهاية ٤٧
الفصل الثاني : الدوال التحليلية ٤٩
2.1 دوال المتغير المعقد ٤٩
تمارين (2.1) ٥٣
2.2 التطبيق او التحويل ٥٣
2.3 النهايات ٥٧
تمارين (2.2) ٦٩
2.4 الاستمرارية ٧١
تمارين (2.3) ٧٣
2.5 المشتقة ٧٤
تمارين (2.4) ٧٩
2.6 الدوال التحليلية

Scanned by CamScanner

2.7 الدوال التوافقية ٨٩
تمارين (2.5) ٩٣
الفصل الثالث : الدوال المعقدة الاولية ٩٧
3.1 الدالة الاسية ٩٧
3.2 الدالة اللوغاريتمية ١٠٢
تمارين (3.1) ١٠٧
3.3 الدوال المثلثية ١٠٨
3.4 الدوال المثلثية العكسية ١١٢
3.5 الدوال الزائدية ١١٥
تمارين (3.2) ١١٩
3.6 التطبيق بواسطة دوال بسيطة ١٢٢
تمارين (3.3) ١٥١
الفصل الرابع : التكامل المعقد ١٦٥
4.1 المسارات ١٦٥
4.2 التكامل المعقد ١٧٠
تمارين (4.1) ١٧٧
4.3 مبرهنة كوشي كورسا ١٧٩
4.4 تعميم مبرهنة كوشي كورسا على منطقة متعددة الاتصال ١٨٣
4.5 التكاملات غير المحددة ١٨٥
تمارين (4.2) ١٨٩
4.6 صيغتا كوشي التكامليتين ١٩١
4.7 مبرهنة ليوفيل ١٩٩
4.8 مبرهنة موريرا ٢٠١
4.9 المبرهنة الاساسية في الجبر ٢٠٢
4.10 مبرهنة القيمة المتوسطة لكاوس ٢٠٣
تمارين (4.3) ٢٠٤
الفصل الخامس : المتتابعات والسلاسل ٢٠٧
5.1 تقارب المتتابعات والسلاسل ٢٠٧
تمارين (5.1) ٢١٧
5.2 سلاسل القوى ٢١٨

Scanned by CamScanner

تمارين (5.2) ٢٢٣
5.3 سلسلة تايلور ٢٢٥
تمارين (5.3) ٢٣١
5.4 سلسلة لوران ٢٣٢
تمارين (5.4) ٢٤١
الفصل السادس : النقاط الشاذة وحساب الرواسب ٢٤٣
6.1 تصنيف النقاط الشاذة ٢٤٣
تمارين (6.1) ٢٥٠
6.2 اصفار الدالة ٢٥١
6.3 الرواسب ٢٥٢
6.4 مبرهنة الرواسب ٢٥٦
6.5 حساب الرواسب ٢٥٩
تمارين (6.2) ٢٦٥
6.6 حساب التكاملات المعتلة ٢٦٧
6.7 التكاملات المعتلة المتضمنة دوال مثلثية ٢٧٠
تمارين (6.3) ٢٧٣
6.8 تكاملات محددة لدوال مثلثية ٢٧٤
6.9 التكامل حول نقطة تفرع ٢٧٥
تمارين (6.4) ٢٨١
الفصل السابع : تطبيقات فيزياوية ٢٨٥
7.1 انسياب الموائع ٢٨٥
7.2 السريان حول اسطوانة ٢٩١
7.3 السريان الخارج من قناة ٢٩٤
تمارين (7.1) ٢٩٥
7.4 تطبيقات على الكهربائية الساكنة ٢٩٧
تمارين (7.2) ٣٠٠
7.5 تطبيقات على سريان الحرارة ٣٠١
تمارين (7.3) ٣٠٦
مصادر الكتاب الاجنبية ٣٠٧
مصادر الكتاب العربية ٣٠٧
جدول المصطلحات ٣٠٨

Scanned by CamScanner

الفصل الأول

الاعداد المعقدة Complex Numbers

1·1 تمهيد :

ان الاعداد الطبيعية (Natural Numbers) 1,2,3,4, ... هي اولى الاعداد التي عرفها الانسان وكان يستخدمها عندما بدأ يعد الاشياء واطلق عليها اسم ارقام العد

ان مجموعة الاعداد الطبيعية والتي سوف نرمز لها بالرمز N تكون مغلقة (Closed) بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب . أي أن حاصل جمع عددين طبيعيين يكون عدداً طبيعياً وكذلك حاصل ضرب عددين طبيعيين يكون عداً طبيعياً ايضاً.

لكن مجموعة الاعداد الطبيعية ليست مغلقة دائماً بالنسبة لعملية الطرح . ولذا سوف نواجه اعداداً غير طبيعية عند محاولتنا ايجاد حلول معادلات من النوع .

$$a + x = b \qquad \ldots\ldots (1.1.1)$$

Scanned by CamScanner

عندما يكون a , b عددين طبيعين و $a = b$ او $a > b$

(مثلاً عند ايجاد جذري المعادلتين $1 + x = 1$ و $4 + x = 1$)

لاجل الحصول على حلول شاملة للمعادلة (1.1.1) سوف نوسع مجموعة الاعداد الطبيعية باضافة العدد صفر والاعداد الصحيحة السالبة Negative Integers لها وهي ..... -3, -2, -1 - سنطلق على هذه المجموعة الموسعة من الاعداد بالاعداد الصحيحة (Integers) ونرمز لها بالحرف I وهي الاعداد الطبيعية والصفر والاعداد الصحيحة السالبة .

ان مجموعة الاعداد الصحيحة هذه تكون مغلقة بالنسبة لعمليات الجمع والطرح والضرب ولكنها ليست مغلقة بالنسبة لعملية القسمة . فعند حل المعادلة

$$px = q \qquad \ldots\ldots (1.1.2)$$

حيث ان p . q عددان صحيحان و q ليست من مضاعفات p . فسوف نواجه اعداداً غير صحيحة (مثلاً عند ايجاد حل المعادلة $3x = 4$) تلك هي الاعداد الكسرية .

مرةً اخرى ولاجل الحصول على حلول شاملة للمعادلة (1.1.2) سوف نوسع نظام اعدادنا باتحاد مجموعة الاعداد الصحيحة مع مجموعة كل الكسور $\frac{p}{q}$. حيث ان p وq عددان صحيحان وان $q \neq 0$.سوف نطلق على هذه المجموعة الجديدة من الاعداد بالاعداد النسبية (Rational Numbers)ونرمز لها بالحرف Q

ان الاعداد النسبية تشكل مجموعة واسعة جداً ومع هذا فان المعادلة .

$$x^2 = k \qquad \ldots\ldots (1.1.3)$$

عندما يكون k عدداً صحيحاً (اوعدداً نسبياً)موجباً غير مربع كامل . ليس لها حلول بين الاعداد النسبية (مثلاً عندما تكون $k = 2$ فان جذري المعادلة (1.1.3)هما $\pm\sqrt{2}$ وهما عددان غير نسبيين (Irrationals) ان مجموعة الاعداد غير النسبية مجموعة واسعة أيضا وهي تحوي على الجذور الصماء . مثلا $\sqrt{7}$ و $\sqrt[3]{3}$ وتحوي أيضاً على الاعداد المتسامية (Transcendental numbers) مثلا $\pi, e, \ln 2$ ان اتحاد مجموعة الاعداد النسبية Q مع مجموعة الاعداد غير النسبية يشكل لنا مجموعة جديدة من الاعداد تسمى بالاعداد الحقيقية (Real Numbers)والتي سوف نرمز لها بالرمز R

يتصور البعض بان مجموعة الاعداد الحقيقية R هي اوسع مجموعات الاعداد ولكن لازالت هناك اعداداً اخرى ، تلك هي الاعداد غير الحقيقية وهي الاعداد الناتجة من حل المعادلة (1.1.3)عندما تكون k عدداً سالباً . ان هذه الاعداد تسمى بالاعداد الخيالية

Scanned by CamScanner

ومنها نستدل الاعداد المعقدة (Complex Numbers)التي سوف نرمز لها بالحرف C .
خلال الفصول المقبلة سوف نتناول دراسة شاملة وشرح مفصل لهذه المجموعة من الاعداد وهي اوسع مجموعات الاعداد .
نستنتج من طريقة بناء الاعداد المعقدة وابتداءً بالاعداد الطبيعية . أن :

$$N \subset I \subset Q \subset R \subset C \qquad \ldots (1.1.4)$$

1.2 العدد المعقد (Complex Number)

يعرف العدد المعقد ، بانه زوج مرتب

$$z = (x,y) \qquad \ldots\ldots (1.2.1)$$

حيث أن x,y عددان حقيقيان ، والخاضعان لعمليتي الجمع والضرب على النحو الاتي :
اذا كان $z_1 = (x_1 , y_1)$. $z_2 = (x_2 , y_2)$. فان

$$z_1 + z_2 = (x_1,y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 , y_1)(x_2 , y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2 , x_1y_2 + y_1x_2)$$

الازواج المرتبة بالصيغة (0,y) تسمى بالاعداد الخيالية الصرفة (pure imaginary numbers)

والازواج المرتبة بالصيغة (x,0) تسمى بالاعداد الحقيقية وتكتب بالصيغة x وبذلك فان مجموعة الاعداد الحقيقية R تكون مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الاعداد المعقدة C كما في (1.1.4)
يسمى x بالجزء الحقيقي للعدد المعقد $z = (x,y)$ ويرمز له بالرمز $R(z)$ ، كما يسمى y بالجزء الخيالي ويرمز له بالرمز $I(z)$. أي :

$$x = R(z) \quad ; \quad y = I(z)$$

ومن الملاحظ هنا أن $I(z)$ هو عدد حقيقي .
الزوج المرتب (0,0) هو العدد الحقيقي صفر .
يمكن كتابة كل عدد معقد $z = (x,y)$ بالصيغة

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y)$$

$$= (x,0) + (0,1)(y,0) \qquad \ldots\ldots (1.2.2)$$

Scanned by CamScanner

فاذا رمزنا للعدد الخيالي الصرف (0,1) بالرمز i* يمكننا كتابة العدد المعقد z في المعادلة (1.2.2) بالصيغة

$$z = x + iy \quad \ldots\ldots (1.2.3)$$

ملاحظة

سوف نجد ان كتابة العدد المعقد z بالصيغة (1.2.3) حيث ان x,y عددان حقيقيان وان i وحدة الاعداد الخيالية ($i^2 = -1$) . هو أكثر ملائمة من الصيغة (1.2.1) وخاصة في التعبير عن الاعداد المعقدة وتحقيق خواصها

مثال (1) العدد المعقد $z = (2,3)$ يمكن كتابته بالصيغة

$z = 2 + i.3$ حيث $R(z) = 2 , I(z) = 3$.

باستعمال خاصية ضرب الاعداد المعقدة نجد أن

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1 ;$$

$$i^3 = i^2.i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$$

وبصورة عامة i^n (حيث أن n عدد صحيح موجب) يساوي $1, i, -1, -i$ عندما يكون باقي قسمة n على 4 هو $0, 1, 2, 3$ على التوالي .

خاصية (1) يكون العدد المعقد z مساوياً الصفر اذا وفقط اذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي صفراً أي

$$z = x + iy = 0 \iff x = 0 , y = 0$$

خاصية (2) يتساوى العددان المعقدان اذا وفقط اذا تساوي جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما الخياليان أي

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff x_1 = x_2 , y_1 = y_2$$

مثال (2) جد قيم x,y الحقيقية التي تحقق المعادلة

$$(x - y - 6) + i(y^2 - x) = 0$$

* في الفيزياء والهندسة الكهربائية يستعمل الرمز j بدل i لان الاخير i يستعمل رمزاً للتيار.

Scanned by CamScanner

الحل : باستعمال الخاصيه (1) اعلاه ينتج

$$x - y - 6 = 0 \quad , \quad y^2 - x = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين . ينتج ان

$$x = 9 \, . \, y = 3 \quad , \quad x = 4 \, . \, y = -2$$

تتم عمليات جمع وطرح وضرب وقسمة الاعداد المعقدة باتباع قواعد الجمع والطرح والضرب والقسمة للاعداد الحقيقية مع ملاحظة $i^2 = -1$ على النحو الاتي

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \; ; \; z_2 = x_2 + iy_2$

فان

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \qquad \ldots\ldots (1.2.4)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad \ldots\ldots (1.2.5)$$

حاصل قسمة العدد z_1 على العدد z_2 . $(z_2 \neq 0)$. يكتب بالصيغة $\frac{z_1}{z_2}$ هو العدد z بحيث يحقق العلاقة

$$z_1 = z \, . \, z_2$$

أي

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)(x_2 + iy_2)$$

وبمساواة الجزئين الحقيقي والخيالي بعد فتح القوسين ينتج

$$x_1 = x\,x_2 - y\,y_2$$

$$y_1 = x\,y_2 + y\,x_2$$

وبحل هاتين المعادلتين من اجل x,y نجد :

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad ; \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

اذاً حاصل القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ هو

Scanned by CamScanner

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad \ldots\ldots (1.2.6)$$

مرافق العدد المعقد (Complex Conjugate)

ان مرافق العدد المعقد $z = x + iy$ ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ هو العدد المعقد $\bar{z} = x - iy$

اي ان المرافق لعدد معقد ينتج بتغيير اشارة الجزء الخيالي فيه .

مثال (3) ان مرافق العدد $z = 2 - 3i$ هو $\bar{z} = 2 + 3i$

ملاحظة : يمكن الحصول على حاصل القسمة (1.2.6) باستخدام المرافق كما يلي

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

وبشرط $z_2 \neq 0$

بصورة خاصة اذا كان $z \neq 0$ فان

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \ldots\ldots (1.2.7)$$

مثال (4) ليكن العددان المعقدان $z_1 = 1 + 2i \; ; z_2 = 2 - i$

يمكن اجراء العمليات الاربعة عليهما على النحو الاتي

Scanned by CamScanner

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i$$

$$z_1 z_2 = (1 + 2i)(2 - i) = 4 + 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = i$$

كما أن مقلوب العدد z_1 هو

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$$

بعض خواص المرافق

(1) $\bar{z} = 0 \iff z = 0$

(2) $\overline{(x + iy)} = x - iy \quad ; \forall\, x,y \in R$

(3) $\bar{i} = -i, \; -\bar{i} = i$

(4) $\bar{\bar{z}} = z$ مرافق المرافق لعدد معقد z هو العدد z أي

(5) $\bar{z} = -z$ اذا كان العدد المعقد z خيالياً صرفاً فان

(6) $\bar{z} = z$ اذا كان العدد المعقد z حقيقيا فان

(7) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

مجموع عدد معقد z ومرافقة $\bar{z}$ يساوي ضعف جزءه الحقيقي أي

(8) $z + \bar{z} = 2R(z) = 2x$

كل عدد معقد z مطروحاً منه مرافقه $\bar{z}$ يساوي ضعف جزءه الخيالي مضروباً بـ i. اي

(9) $z - \bar{z} = 2i\, I(z) = 2iy$

ان عملية المرافقة تخضع لقاعدة التوزيع في العمليات الاربعة الجمع والطرح والضرب والقسمة . اي

Scanned by CamScanner

(10) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(11) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(12) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

يمكن برهنة العلاقات (10), (11), (12) بالتعويض عن هذه الاعداد المعقدة بالصيغة (1.2.3) وتطبيق تعريف المرافق .

تمارين (1.1)

اكتب الاعداد المعقدة الاتية بالصيغة $x + iy$ حيث أن x . y عددان حقيقيان .

(أ) $(2 + 3i)^2$ الجواب $-5 + 12i$ (ب) $(3 - i)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)$

(ج) $\frac{1}{1-i} + \frac{1}{i}$ الجواب $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ (د) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

(هـ) $\frac{7 - 6i}{2 + 3i}$ الجواب : $\frac{-4}{13} - \frac{33}{13}i$ (و) $\frac{1 + 2i}{(2 + i)^2}$

2- اثبت ان العددين $z = 1 \pm i$ هما جذرا المعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

3 حل المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ بفرض $z = x + iy$ ثم جد قيمة x,y الحقيقين.

4- برهن (أ) $I(iz) = R(z)$

(ب) $R(iz) = -I(z)$

5- برهن (أ) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$

(ب) $\overline{(iz)} = -i(\bar{z})$

(ج) $\frac{\overline{(2 + i)^2}}{3 - 4i} = 1$

Scanned by CamScanner

6- برهن اذا كان حاصل ضرب عددين معقدين يساوي صفراً، فان على الاقل احد هذين العددين المعقدين يساوي صفراً . أي اذا كان $z_1 z_2 = 0$ فاما $z_1 = 0$ أو $z_2 = 0$ أو كلاهما صفران .

1.3 الصفات الجبرية (Algebraic Properties)

ان معظم صفات الجمع والضرب بين الاعداد المعقدة تطابق نظيراتها بين الاعداد الحقيقية . سوف ندرج اهم هذه القواعد ونحقق قسماً منها :-

1 - قاعدة الابدال (The Commutative Law)

بالنسبة للجمع $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

بالنسبة للضرب $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

ملاحظة

طبقاً لقاعدة الابدال في الضرب ، فان $iy = yi$ ، ولهذا يمكننا كتابة العدد المعقد $z = x + iy$ بالصيغة $z = x + yi$

2- قاعدة التجميع (The Associative Law)

بالنسبة للجمع $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

وبالنسبة للضرب $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

3- قاعدة التوزيع (Distributive Law)

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 \cdot z_3$$

يمكن تحقيق هذه القواعد بكتابة الاعداد المعقدة الواردة بالصيغة $x + iy$ ثم الاخذ بنظر الاعتبار أن هذه القواعد تسري على المقادير الحقيقية ، فمثلاً

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$z_2 z_1 = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1) + i(x_2 y_1 + y_2 x_1)$$

نلاحظ أن النتيجتين متساويتان لان صيغة الابدال تسري بين الاعداد الحقيقية .

Scanned by CamScanner

4- العنصر المحايد الجمعي (Additive Identity)

بما أن $0 = (0,0) = 0 + i.0$

فان لكل عدد معقد $z \in C$ ينتج $z + 0 = 0 + z = z$

5- العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Identity)

بما ان $1 = (1,0) = 1 + i.0$ فان لكل عدد معقد $z \in C$ ينتج

$z.1 = 1.z = z$

6- النظير الجمعي (Additive Inverse)

لكل عدد معقد $z \in C$ يوجد عدد $-z = -x - iy \in C$

بحيث $z + (-z) = 0$

يسمى العدد المعقد $(-z)$ بالنظير الجمعي للعدد z .

7- النظير الضربي (Muttiplicative Inverse)

لكل عدد معقد $z\ (z \neq 0)$ يوجد عدد معقد z^{-1} بحيث

$z z^{-1} = z^{-1} z = 1$

يسمى العدد المعقد z^{-1} بالنظير الضربي للعدد z .

لقد سبق ان وجدنا النظير الضربي للعدد المعقد z في (1.2.7)

مثال : جد النظير الضربي للعدد المعقد $z = 3i - 2$.

الحل : ان النظير الضربي للعدد z هو

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3i-2} = \frac{1}{-2+3i} = \frac{(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}$$

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\therefore z^{-1} = \frac{-2}{13} - i\ \frac{3}{13}$$

يمكن تحقيق صحة الجواب باجراء الضرب الاعتيادي ، أي

$$z z^{-1} = (3i-2)\left(\frac{-2}{13} - i\ \frac{3}{13}\right) = \frac{-6}{13} i + \frac{9}{13} + \frac{4}{13} + \frac{6}{13} i$$

$$= \frac{13}{13} = 1$$

Scanned by CamScanner

تمارين (1. 2)

1 برهن : $z(z_1 + z_2 + z_3) = z z_1 + z z_2 + z z_3$

2 برهن $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$

3 برهن : $(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4)$

4 – برهن أن العددين المعقدين صفر و 1 هما العنصران المحايدان الوحيدان بالنسبة للجمع والضرب على التوالي ، أي برهن وحدانية العنصر المحايد الجمعي والعنصر المحايد الضربي .

1.4 القيمة المطلقة (Absolute Value)

القيمة المطلقة للعدد المعقد $z = x + iy$ ويرمز لها بالرمز $|z|$ هي :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نلاحظ ان القيمة المطلقة للعدد المعقد z هي مقدار حقيقي غير سالب .

مثال : القيمة المطلقة للعدد $z = 4 + 3i$ هي

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$$

وكذلك القيمة المطلقة للعدد $z = 4 - 3i$ هي $|z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5$

بعض خواص القيمة المطلقة .

(1) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

(2) $|z| = |\bar{z}|$

(3) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

(4) $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(5) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = y \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(6) $|z_1 . z_2| = |z_1||z_2|$

(7) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

Scanned by CamScanner

يمكن برهنة (6) باستعمال خاصية (11) من خواص المرافق مع الخاصية (1)

اعلاه اي

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}} = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1 . \bar{z}_2}$$

خاصية الابدال الضربي

$$= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 . z_2 \bar{z}_2}$$

$$= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} . \sqrt{z_2 \bar{z}_2}$$

$$= |z_1| . |z_2|$$

وكذلك يمكن برهنة (7) بنفس الاسلوب .

$$(8) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

تسمى هذه بالمتباينة المثلثية (Triangle Inequality)

وبرهانها على النحو الآتي

حسب الخاصية (1) اعلاه

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$$

حسب خاصية التوزيع لصفة المرافق

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

خاصية التوزيع والابدال

$$= z_1 \bar{z}_1 + (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2) + z_2 \bar{z}_2$$

اذا فرضنا $u = z_1 \bar{z}_2$ فان $\bar{u} = \bar{z}_1 z_2$ ومنها ينتج

$$z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 = \bar{u} + u = 2R(u) \leq 2|u| = 2|z_1||z_2|$$

بموجب الخاصية 4 للقيمة المطلقة اعلاه .

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

وبهذه يتم تحقيق الخاصية (8)

$$(9) \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

يمكن برهان (9) بفرض $z_3 = z_1 - z_2$ واستعمال (8)

Scanned by CamScanner

(تمارين 1.3)

1- برهن $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2\bar{z}+5|$

2- احسب (أ) $\left|\frac{3i-2}{3-2i}\right|$ (ب) $\left|\frac{1-4i}{4+3i}\right|$

3 برهن $\sqrt{2}\,|z| \geq |R(z)| + |I(z)|$

4- برهن $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5 - اذا كان $z_2 \neq z_3$ برهن $\left|\frac{z_1}{z_2}\frac{}{+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$

6- برهن $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

1.5 التمثيل الهندسي للعدد المعقد

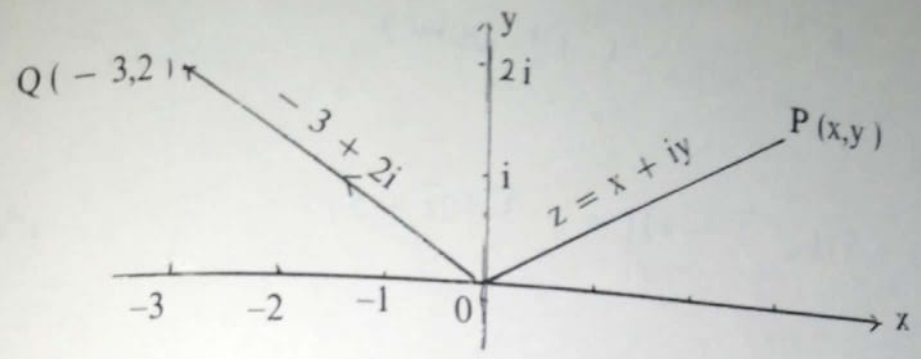
(Geometric Representation of a Complex number)

ان كل عدد معقد $z = x + iy$ يقابل نقطة احداثياتها (x,y) من المستوى xy وبالعكس (أي كل نقطة في المستوى xy تقابل عددا معقدا) وكل عدد معقد z يمكن تمثيله بمتجه (Vector) مبدؤه الاصل ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد (أوباي متجه اخر يساويه).

يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور الخيالي والمستوى xy بمستوى الاعداد المعقدة أو المستوى z

مثال (1) العدد المعقد $2i-3$ يقابل النقطة $Q(-3,2)$ كما في شكل (1.1)

Scanned by CamScanner

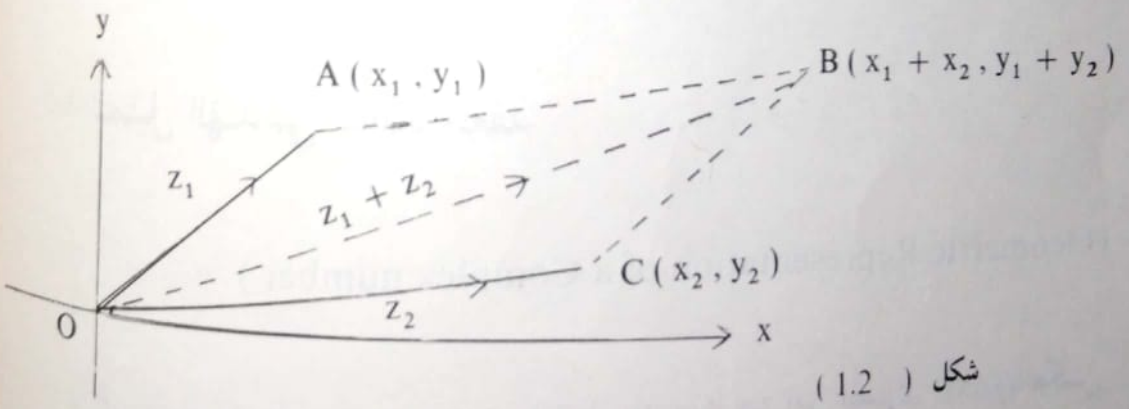


شكل (1.1)

ويمكن تمثيله بمتجه مبدؤه نقطة الاصل O ونهايته النقطة Q . لنجد الآن التمثيل الهندسي لمجموع وحاصل طرح عددين معقدين . اذا كان

$$z_2 = x_2 + i\,y_2 \quad , \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

استناداً الى (1.2.4) فان النقطة التي تقابل المجموع $z_1 + z_2$ هي النقطة B التي احداثياها $(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ ويمثل هذا المجموع متجه مبدؤه الاصل ونهايته النقطة $B(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ وهو متجه محصلة المتجهين $z_1 = \overrightarrow{OA}$ و $z_2 = \overrightarrow{OC}$ كما في شكل (1.2)



شكل (1.2)

ان حاصل الطرح $z_1 - z_2$ يمثل بمتجه مبدؤه النقطة z_2 ونهايته النقطة z_1 كما في شكل (1.3)

ملاحظة : يمكن برهنة المتباينة المثلثية

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

من الشكل 1.2 . حيث ان مجموع أي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث أي

Scanned by CamScanner

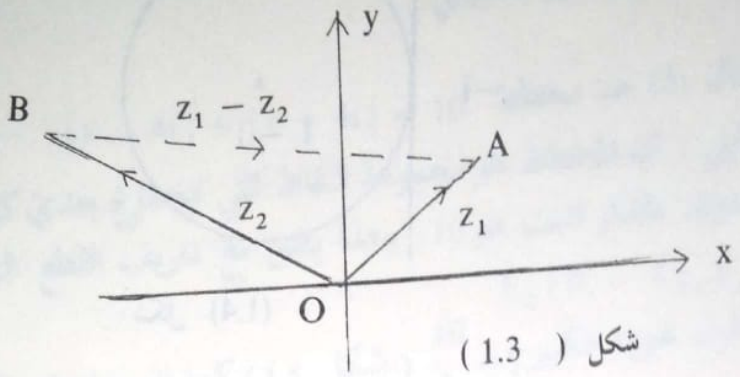
(المساواة عندما C تقع على OB)

$$|OC| + |CB| \geq |OB|$$

$$|z_2| + |z_1| \geq |z_1 + z_2|$$

أي

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



شكل (1.3)

المسافة بين نقطتين ممثلتين بالعددين المعقدين z_2 , z_1 هي

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \ldots (1.5.1)$$

* الاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها الاصل ونصف قطرها r(حيث r عدد حقيقي موجب) تحقق المعادلة

$$|z| = r$$

والاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ونصف قطرها عدد حقيقي موجب r تحقق المعادلة

$$|z - z_0| = r \quad \ldots (1.5.2)$$

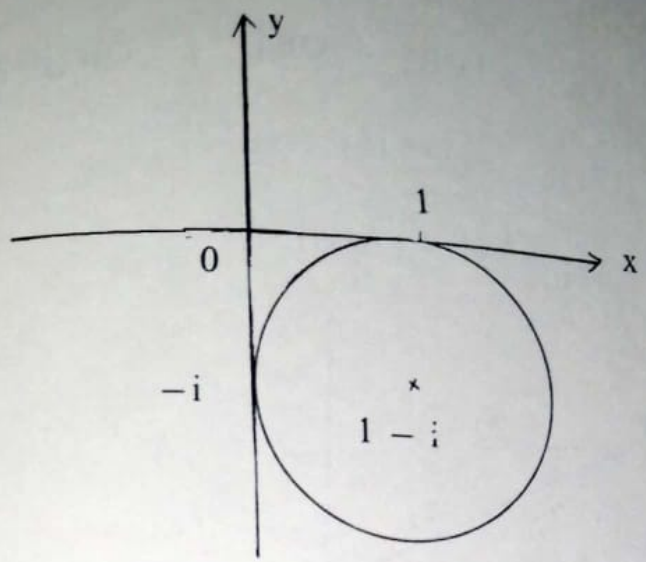
مثال (2) ارسم مخطط مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة $|z - 1 + i| = 1$

الحل : بالمقارنة مع صيغة معادلة الدائرة (1.5.2) نجد أن المجموعة تمثل دائرة مركزها $1 - i$ ونصف قطرها 1

يمكن تحويل هذه المعادلة بالصيغة التحليلية الحقيقية كالاتي

$$|z - 1 + i| = 1$$
$$|x + iy - 1 + i| = 1$$
$$|(x - 1) + i(y + 1)| = 1$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1^2$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

Scanned by CamScanner



شكل (1.4)

ملاحظة

النقاط التي تحقق المتباينة $|z - z_0| \leq r$ تقع داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r .

مثال (3)

ماهو مخطط المعادلة $I(\bar{z} - i) = 2$ ، $R(\bar{z} - i) = 2$ ؟

الحل :

$$\bar{z} - i = \overline{x + iy} - i = x - iy - i = x - i(y + 1)$$

$$\therefore R(\bar{z} - i) = x = 2$$

فالمخطط هو كل النقاط الواقعة على المستقيم الرأسي $x = 2$

كذلك

$$I(\bar{z} - i) = -(y + 1) = 2$$
$$\therefore y = -3$$

فالمخطط لـ $I(\bar{z} - i) = 2$ هو كل النقاط الواقعة على المستقيم الافقي $y = -3$

مثال (4) ماهو مخطط $|z - i| = |z + i|$ ؟

الحل : ان المخطط هو مجموعة النقاط المتساوية البعد عن النقطتين $-i, i$ وتشمل جميع نقاط المحور الحقيقي x

ويمكن ايجاده بالصيغة التحليلية الحقيقية

Scanned by CamScanner

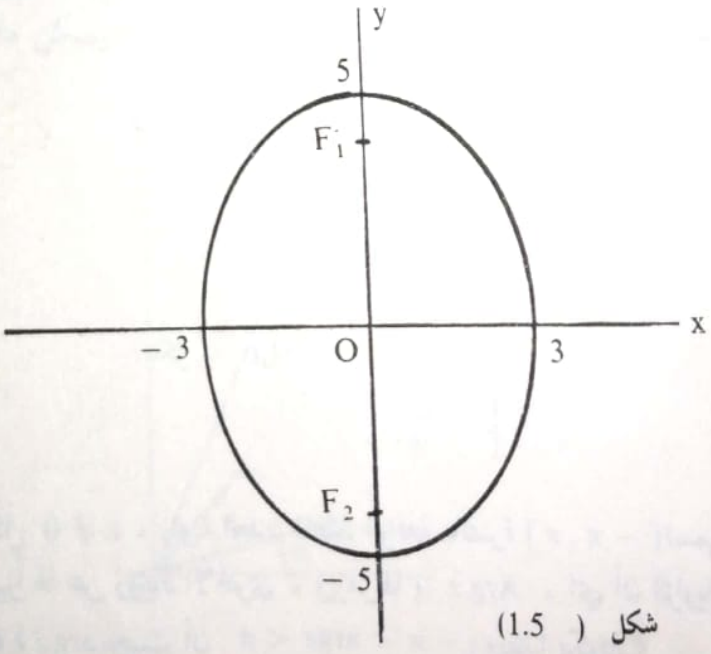
$$|x + iy - i| = |x + iy + i|$$
$$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2$$
$$4y = 0$$
$$y = 0$$

وهذه هي معادلة المحور الحقيقي x

مثال (5) جد مخطط $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

الحل : ان المخطط هو مجموعة النقاط التي مجموع بعدي كل نقطة عن النقطتين $4i$ ، $-4i$ يساوي مقدار ثابت هو 10. وهذا يتفق مع تعريف القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(0,-4), F_1(0,4)$ ونصف طول محوره الكبير $\frac{10}{2} = 5$ (شكل 1.5) كما ان معادلته الكارتيزية

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$



شكل (1.5)

1.6 الاحداثيات القطبية (Polar Coordinates)

لتكن $r\ (r \geq 0)$ ، θ احداثيات قطبية للنقطة P التي تقابل العدد المعقد غير الصفر $z = x + iy$. لما كان

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad \ldots (1.6.1)$$

Scanned by CamScanner

فان العدد المعقد z يمكن اعادة كتابته بالصيغة

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \ldots (1.6.2)$$

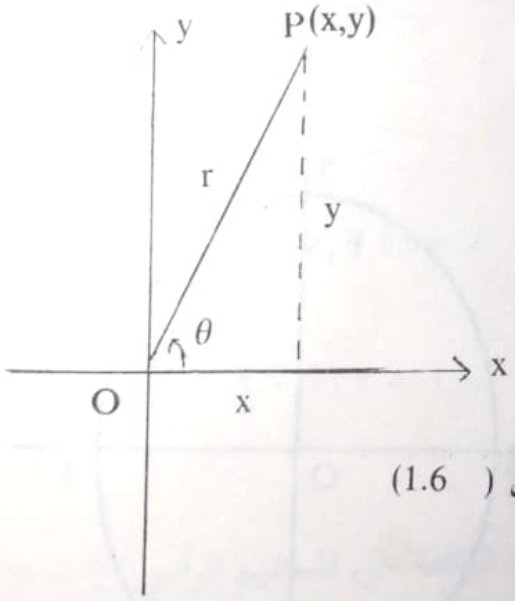
ان العدد الحقيقي r هو طول المتجه الذي يمثل z أي أن $r = |z|$

والعدد الحقيقي θ يسمى زاوية للعدد المعقد z (argument of z)

ويكتب $\theta = \arg z$ كما في شكل (1.6)

ان زاوية للعدد المعقد z أي الزاوية θ تقاس بالتقدير الدائري ، وهي الزاوية التي يصنعها المتجه z مع محور x الموجب باتجاه عكس عقارب الساعة . وعلى ذلك فان لكل θ عدد غير منته من القيم الحقيقية تختلف عن بعضها بمضاعفات 2π . يمكن ايجاد هذه القيم من المعادلة

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots (1.6.3)$$



شكل (1.6)

الأن لكل $z \neq 0$ ، زاوية العدد المعقد الواقعة بالفترة $[-\pi , \pi)$ تسمى بالزاوية الاساسية له تمييزاً لها عن زواياه الاخرى ، ويرمز لها بـ $\mathrm{Arg}\, z$ ، أي أن الزاوية الاساسية هي القيمة الوحيدة لـ $\arg z$ بحيث أن $-\pi < \mathrm{arg} z \leq \pi$. وبهذا يكون

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi , (k = 0 , \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

اذا كانت $z = 0$ ، فأن θ غير معرفة لان المعادلة $\tan\theta = \frac{y}{x}$ تصبح $\frac{0}{0}$ وهذا مقدار غير معرف . وعلى ذلك لا يمكن تمثيل $z = 0$ بالاحداثيات القطبية

من المتطابقات المهمة في زاوية العدد المعقد هي

Scanned by CamScanner

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \ldots (1.6.4)$$

أي ان زاوية حاصل ضرب عددين معقدين يساوي المجموع الجبري لزاوية العدد الأول مع زاوية العدد الثاني

البرهان : ليكن العدد الأول $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

والعدد الثاني $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

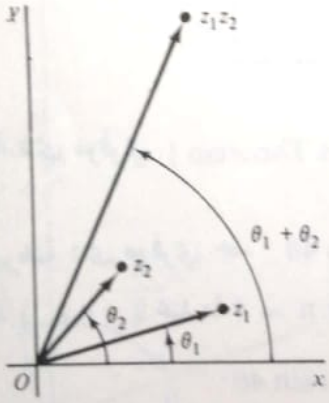
اذاً $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2] \qquad \ldots (1.6.5)$$

ومنها ينتج $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

ان معكوس المتطابقة (1.6.4) صحيح ايضا ، أي ان المجموع الجبري لزاوية عدد معقد z_1 وزاوية عدد معقد z_2 يساوي زاوية حاصل ضربهما $z_1 z_2$ ويمكن ملاحظة ذلك في شكل (1.7) ادناه .



شكل (1.7) .

ملاحظة : اذا عوضنا عن arg z بـ Arg z فان المتطابقة (1.6.4) قد تكون غير صحيحة (مثال ، خذ $z_1 = -1$ و $z_2 = i$ فتحصل على

$$\left(-\frac{\pi}{2} = \text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\right.$$

Scanned by CamScanner

ان المتطابقة (1.6.4) يمكن تعميمها لـ n من الاعداد المعقدة . فاذا فرضنا

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
$$\vdots$$
$$z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

فانه يمكن تعميم (1.6.5) في ايجاد حاصل الضرب $z_1 z_2 \dots z_n$ وذلك بطريقة الاستقراء الرياضي (Mathematical Induction) لنحصل على :

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] \quad \dots (1.6.6)$$

وعندما يكون

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

فان المعادلة (1.6.6) تكتب بالصيغة

$$r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \dots (1.6.7)$$

حيث ان n عدد صحيح موجب . وباختزال r^n من الطرفين ينتج

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta} \quad \dots (1.6.8)$$

والتي تسمى بمبرهنة دي موفري (De Moivre's Theorem)

مثال 1 : بواسطة مبرهنة دى موفري جد $\sin 4\theta , \cos 4\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$

الحل : من المعادلة (1.6.8) عندما $n = 4$ نجد أن

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

وباستعمال قاعدة مفكوك ذي الحدين وترتيب الجزئين الحقيقي والخيالي بعد تعويض قوى i بقيمها نجد أن

$$(\cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) + i (4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \sin^3 \theta) = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

وبمساواة الجزئين الحقيقين والجزئين الخياليين للطرفين ينتج :

Scanned by CamScanner

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

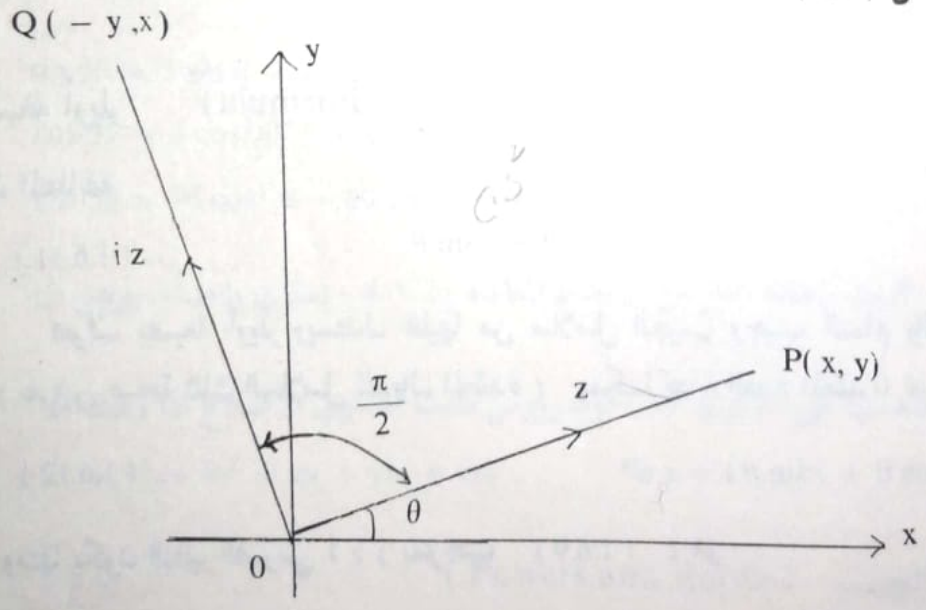
$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta = 4\sin\theta\cos\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

اذا ضرب العدد المعقد z بـ i فان متجه العدد z يدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة لينطبق على متجه العدد iz ، والسبب هو

$$iz = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

يمكن تمثيل عملية الضرب بـ i . هندسياً . كالآتي اذا كان العدد المعقد z يمثل بالمتجه OP (شكل 1.8) واذا رسمنا المتجه OQ بطول يساوي طول OP ويعمل زاوية POQ قائمة موجبة فان العدد المعقد iz يمثل المتجه OQ، أي أن ضرب العدد المعقد بـ i يعني دوران المتجه الذي يمثل ذلك العدد المعقد بزاوية قائمة موجبة (عكس عقارب الساعة) كما في شكل (1.8).



شكل (1.8)

يمكننا تفسير فكرة الاعداد المعقدة هندسياً بالاستناد الى هذه القاعدة . فاذا اعتبرنا x يمثل متجه على المحور الحقيقي x . وعملية الضرب بـ i هي دوران المتجه بزاوية قائمة موجبة . فان iy يمثل بمتجه طوله y ويقع على المحور الخيالي y . وبذلك يكون متجه العدد المعقد

Scanned by CamScanner

$z = x + iy$ هو محصلة متجه الجزء الحقيقي x والجزء الخيالي y على محور y .

يمكننا ايجاد النظير الضربي للعدد المعقد $z \neq 0$ بدلالة الاحداثيات القطبية

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

وبهذا يكون النظير الضربي

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \qquad \ldots (1.6.9)$$

اذا كان $z_2 \neq 0$ فمن العلاقة (1.6.9) نجد أن

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \qquad \ldots (1.6.10)$$

صيغة أويلر (Euler's Formula)

ان المتطابقة

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \ldots (1.6.11)$$

تعرف بصيغة أويلر ويستدل عليها من سلاسل الجيب وجيب التمام والدالة الاسية (بفرض صحة تلك السلاسل للدوال المعقدة) يمكننا كتابة العدد المعقد $z \neq 0$ بالصيغة .

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta} \qquad \ldots (1.6.12)$$

ومنها يكون النظير الضربي لـ z (بموجب (1.6.9)) هو

$$z^{-1} = \frac{1}{r\,e^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

وحاصل الضرب (1.6.5) بالصيغة

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Scanned by CamScanner

وناتج القسمة (1.6.10) بالصيغة .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\theta_1}}{r_2\, e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

تمارين (1.4)

1 – برهن

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

2 – اكتب العددين الاتيين بالصيغة القطبية ثم مثلهما بالرسم

(أ) $2 + 2\sqrt{3}\,i$ (ب) $-5 + 5i$

3 – مثل العددين الاتيين على الرسم

(أ) $4\, e^{(3\pi/5)i}$ (ب) $2\, e^{-(\pi/4)i}$

4 – حقق صحة المتطابقات الاتية باستعمال مبرهنة دي موفري .

(أ) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

(ب) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

(ج) $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

5 – اذا كانت القيمة المطلقة لكل من الاعداد المعقدة z, v, ω تساوي واحداً . برهن ان

مواقعها الهندسية على المستوي xy تكون رؤوس مثلث متساوي الاضلاع اذا وفقط اذا

$$z^2 + v^2 + \omega^2 = zv + v\omega + z\omega$$

1.7 القوى والجذور (Powers and Roots)

ان القوى الصحيحة لعدد معقد $(z \neq 0)\, z = re^{i\theta}$ يمكن ايجاد صيغتها

$$z^n = r^n\, e^{in\theta} \quad \ldots (1.7.1)$$

وهذه مطابقة للعلاقة (1.6.7) والتي سبق ان برهنت في حالة n عدد صحيح موجب . ان

Scanned by CamScanner

هذه الصيغة (1.7.1) صحيحة ايضا في حالة n عدد صحيح سالب وذلـــك لان
$z^n = (z^{-1})^{-n}$ وبما ان (− n) عدد صحيح موجب ، اذاً

$$z^n = \left(\frac{1}{r\, e^{i\theta}} \right)^{-n} = \left(\frac{1}{r} \right)^{-n} (e^{-i\theta})^{-n}$$

$$= (r^{-1})^{-n} (e^{-i\theta})^{-n} = r^n e^{in\theta}$$

وهذا يحقق (1.7.1) عندما تكون n عدد صحيح سالب .
بصورة خاصة اذا كانت $r = 1$ فان $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
ومنها تنتج صيغة دي موفيري (1.6.8)

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال (1) احسب (أ) $(1 + i)^8$ (ب) $(1 + i)^{-8}$

الحل : (أ) نكتب $1 + i$ بالصيغة القطبية وذلك بحساب قيمته المطلقة

$$|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1$$

ثم نحسب زاويته وهي

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore (1 + i) = r\, e^{i\theta} = \sqrt{2}\ e^{i(\pi/4)}$$

$$(1 + i)^8 = \left(\sqrt{2}\ e^{i\pi/4} \right)^8 = \left(\sqrt{2} \right)^8 e^{i2\pi} = 2^{8/2} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16$$

(ب) وجدنا من (أ) ان

$$(1 + i) = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$$

$$\therefore (1 + i)^{-8} = \left(\sqrt{2} \right)^{-8} e^{-i2\pi} = \frac{1}{16} (\cos 2\pi - i \sin 2\pi) = \frac{1}{16} (1 - 0)$$

$$= \frac{1}{16}$$

يمكننا استعمال الصيغة (1.7.1) في ايجاد جذور الاعدد المعقدة ، فمثلاً لايجاد
جذور المعادلة
(n عدد صحيح موجب) ; $z^n = 1$
نفرض $z = re^{i\theta}$ ولما كان $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ فان

Scanned by CamScanner

$$(re^{i\theta})^n = 1.e^{i0}$$

اذاً

$$r^n e^{in\theta} = 1.e^{i\cdot 0}$$

اذا تساوى عددان معقدان ، تساوت قيمتاهما المطلقتان وان زاويتيهما تختلفان بمضاعفات 2π ، أي أن

$$r^n = 1, n\theta = 0 + 2k\pi; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ومنها نجد ان

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, r = 1, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \dots (1.7.2)$$

وبهذا نحصل على الحلول :

$$z = e^{i(2\pi k/n)} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

اذا حددت قيم k بالمجموعة المنتهية $N = \{1,2, \dots, n-1\}$ سوف نحصل على الحلول المختلفة ، التي عددها n ، للمعادلة $z^n = 1$. اما قيم k من الاعداد الصحيحة التي لاتنتمي لهذه المجموعة N سوف تكرر تلك الحلول المختلفة بسبب دورية النسب المثلثية .

يمكن تمثيل هذه الجذور بنقاط رؤوس مضلع منتظم عدد اضلاعه n ونصف قطر دائرته الخارجية 1 ومركزه الاصل .

اذا وضعنا $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

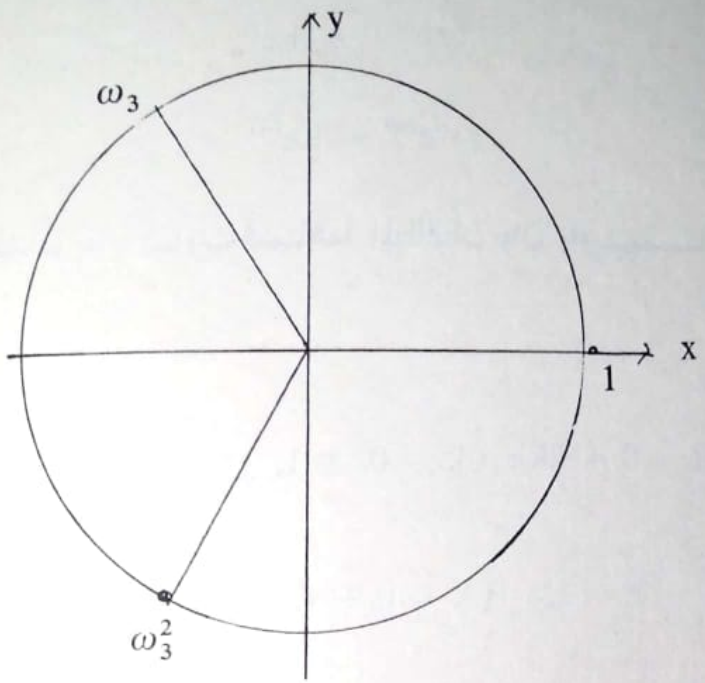
فبموجب مبرهنة دي موفري تكون الجذور النونية للواحد هي

$$1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \dots, \omega_n^{n-1}$$

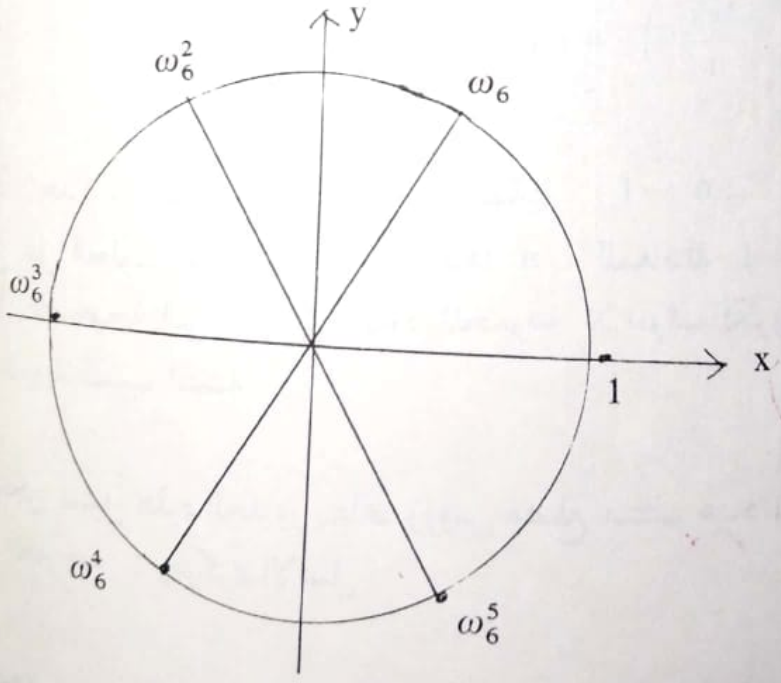
لاحظ ان $\omega_n^n = 1$

يمكن تعميم هذه الفكرة في حساب الجذور النونية لاي عدد معقد

Scanned by CamScanner



شكل(1.9) الجذور التكعيبية للواحد



شكل (1.10) الجذور السداسية للواحد

$\omega \neq 0$, $\omega = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ لتصبح بالصيغة .

$$\sqrt[n]{\omega} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right] \quad \ldots\ldots (1.7.3)$$

$$(k = 0,1,2, \ldots, n-1)$$

حيث $\sqrt[n]{\rho}$ الجذر النوني الموجب للعدد الحقيقي ρ الذي يمثل طول كل من المتجهات التي تمثل مواقع الجذور النونية .

Scanned by CamScanner

الزاوية $\frac{\phi}{n}$ تمثل زاوية العدد المعقد لاحد الجذور . ان زوايا الجذور الاخرى تنتج باضافة مضاعفات $\frac{2\pi}{n}$ الى $\frac{\phi}{n}$.

أي ، لايجاد جذر عدد معقد ، يلزم ايجاد جذر طول متجهه ثم تقسيم زاويته على دليل الجذر واذا كان z_0 هو اي من الجذور النونية للعدد المعقد ω ، فان مجموعة كل الجذور النونية هي

$$\{ z_0 , z_0 \omega_n , z_0 \omega_n^2 , z_0 \omega_n^3 , ... , z_0 \omega_n^{n-1} \}$$

حيث

$$\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

وان الضرب بـ ω_n يزيد زاوية العدد المعقد بمقدار $\frac{2\pi}{n}$.

مثال (2) : جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$

الحل : نكتب العدد $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ بالصيغة القطبية فتكون قيمته المطلقة

$$\rho = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$ وزاويته $$\phi = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\, e^{(1/3)(-\pi/6)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{18} - i \sin \frac{\pi}{18} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ) = \sqrt{2} [\cos(-10) + i \sin(-10)]$$

ان الجذرين الاخرين ينتجان باضافة الى الزاوية -10° مايعادل $\frac{1}{3}$ الدورة الواحدة اي

$$\frac{360}{3} = 120$$ فيكون

$$z_0 \omega_3 = \sqrt{2} [\cos(-10)^\circ + i \sin(-10)^\circ] [\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ]$$

$$= \sqrt{2} (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) = \sqrt{2}\, e^{i 110\pi/180}$$

Scanned by CamScanner

والجذر الاخر

$$z_0\omega_3^2 = \sqrt{2}\,[\cos(-10^\circ) + i\sin(-10^\circ)]\,[\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ]^2$$

$$= \sqrt{2}\,[\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ] = \sqrt{2}\; e^{i(230/180)\pi}$$

تمارين (1.5)

1- جد قيمة واحدة لزاوية العدد المعقد z عندما

(أ) $z = \dfrac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$ (ب) $z = \dfrac{i}{-2 - 2i}$ (جـ) $z = (\sqrt{3} - i)^2$

2- باستعمال الاحداثيات القطبية برهن

(أ) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

(ب) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$

(جـ) $(1 + i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + i\sqrt{3})$

(د) $\dfrac{5i}{2 + i} = 1 + 2i$

3- في كل مما يأتي جد كل الجذور وخطط مواقعها على الرسم .

(أ) $(2i)^{1/2}$ (ب) $(-1)^{1/3}$ (جـ) $(-i)^{1/3}$ (د) $(8)^{1/6}$

4- جد قيم كل الجذور للمقادير

(أ) $\sqrt{i}$ (ب) $\sqrt{-i}$ (جـ) $\sqrt{1 + i}$ (د) $\sqrt{\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$ (هـ) $\sqrt[4]{-1}$

(و) $\sqrt[4]{i}$ (ز) $\sqrt[4]{-i}$

5- برهن

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{(n+2)/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Scanned by CamScanner

6- لكل الارتباطات المختلفة في العلامات برهن

$$\left[\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]^6 = 1 \text{ (ب)} \quad \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \text{ (أ)}$$

7- اذا كان z, ω عددين معقدين وكان $|\omega| = 1$ برهن

$$\left|\frac{\omega - z}{1 - \bar{\omega} z}\right| = 1$$

8- اذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ جد الجزء الحقيقي والخيالي للمقدار $\frac{1-z}{1+z}$

9- جد جميع جذور المعادلة

$$(z+i)^n + (z-i)^n = 0$$

(تلميح : اقسم الطرفين على $(z-i)^n$ حيث $z \neq i$ لأنه لايحقق المعادلة .)

10- اذا كان ω_n $(\omega_n \neq 1)$ هو احد الجذور النونية للواحد ، برهن

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \omega_n^3 + ... + \omega_n^{n-1} = 0 .$$

11- اذا كان $1, \omega, \omega^2$ الجذور التكعيبية للواحد ، برهن

(أ) $(1+\omega^2)^4 = \omega$

(ب) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) = 4$

(ج) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$

12- أذا كان $z = \rho e^{i\phi}$ برهن $|e^{iz}| = e^{-\rho\sin\phi}$

13- باستعمال مبرهنة دى موفري ، برهن

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + ... + 2\cos n\theta = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\sin(\theta/2)}$$

14- اذا كان $z = e^{it}$ برهن أن

$$z^n + z^{-n} = 2\cos nt$$

Scanned by CamScanner

1.8 تعيين مناطق في المستوى المعقد (Regions in the Complex Plane)

لقد سبق وان اخذ الطالب بعض الاصطلاحات المتعلقة بالمجموعة ، المجموعة الخالية ϕ اتحاد مجموعتين وتقاطع مجموعتين .

مجموعة نقاط (set of points)

هي اية مجموعة من نقاط المستوي المعقد سواءً كانت منتهية (finite) او غير منتهية (Infinite)

مثال (1) مجموعة نقاط المحور الحقيقي x هي مجموعة نقاط غير منتهية

مثال (2) مجموعة جذري معادلة من الدرجة الثانية هي مجموعة نقاط منتهية .

مجموعة النقاط الواقعة داخل دائرة هي مجموعة نقاط غير منتهية

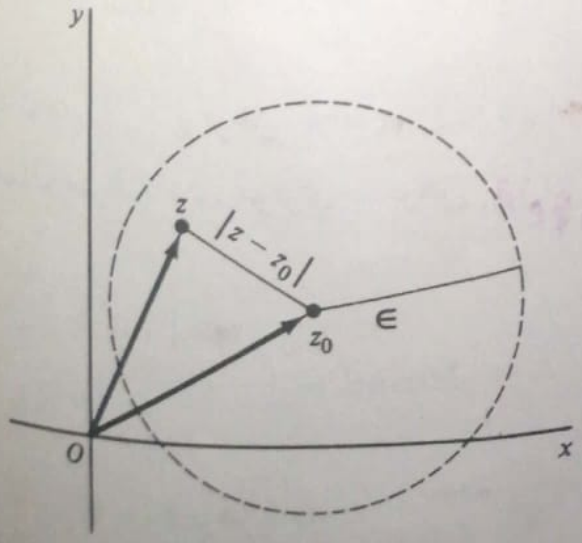
جوار نقطة (Neighborhood of a point)

يعرف جوار نقطة z_0 بمقدار $\in$ [حيث $\in$ عدد موجب] ، هو مجموعة النقاط z من المستوي المعقد التي تحقق المتباينة

$$|z - z_0| < \in \ldots\ldots (1.8.1)$$

يرمز لجوار النقطة z_0 بمقدار $\in$ بالرمز $N(z_0, \in)$

أي أن الجوار $N(z_0, \in)$ هو مجموعة كل نقاط المستوى المعقد التي تقع داخل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها $\in$. كما في شكل (1.11) .



شكل (1.11)

Scanned by CamScanner

النقاط الداخلية : (Interior points)

يطلق على النقطة z_0 اسم نقطة داخلية بالنسبة لمجموعة نقاط S ، اذا وجد جوار للنقطة z_0 ينتمي برمته الى المجموعة S ، أي أن الجوار لـ z_0 يؤلف مجموعة جزئية فعلية من S ، بمعنى يوجد $\epsilon > 0$ بحيث أن

$$N(z_0, \epsilon) \subset S$$

يرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة S بالرمز S^0 . نلاحظ من التعريف أن $S^0 \subseteq S$

النقطة الخارجية (Exterior point)

يطلق على النقطة z_0 المنتمية الى المستوى المعقد اسم نقطة خارجية بالنسبة لمجموعة نقاط S ، اذا امكن ايجاد جوار للنقطة z_0 لا يحوي اية نقطة من نقاط المجموعة S . اي ، يوجد $\epsilon > 0$ بحيث

$$N(z_0, \epsilon) \cap S = \phi$$

يرمز لمجموعة النقاط الخارجية بالنسبة للمجموعة S بالرمز S^e

النقطة المحيطية (Boundary point)

يطلق على النقطة z_0 اسم نقطة محيطية بالنسبة لمجموعة نقاط S ، اذا كان لكل جوار للنقطة z_0 يحتوي على الاقل نقطة داخلية وعلى الاقل نقطة خارجية بالنسبة لـ S عدا النقطة z_0 .

يرمز لمجموعة النقاط المحيطية بالرمز $b(S)$.

بعض خواص النقاط المحيطية

1 – قد تنتمي النقطة المحيطية للمجموعة S وقد لا تنتمي اليها .

2 – ان النقاط المحيطة ليست نقاط داخلية وليست نقاط خارجية .

مثال (3) : الدائرة $|z| = 1$ تؤلف محيط للمجموعتين

$$|z| < 1 \quad , \quad |z| > 1$$

Scanned by CamScanner

النقطة المعزولة (Isolated point)

تسمى النقطة z_0 ، المنتمية للمجموعة S ، نقطة معزولة ، اذا وجد جوار للنقطة z_0 بحيث لا يحوي على اية نقطة من نقاط S . أي يوجد $\epsilon > 0$. بحيث

$$N(z_0, \epsilon) \cap S = \{ z_0 \} .$$

نقطة التراكم (نقطة النهاية) Accumulation point (Limit point)

تسمى النقطة z_0 المنتمية للمستوى المعقد نقطة تراكم او نقطة نهاية المجموعة S، اذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحوي على الاقل نقطة واحدة من نقاط المجموعة S غير النقطة z_0 . أي أن لكل $\epsilon > 0$.

$$S \cap N(z_0, \epsilon) - \{ z_0 \} \neq \phi \qquad \ldots\ldots (1.8.2)$$

يرمز لمجموعة نقاط تراكم المجموعة S بالرمز d(S) .
يلاحظ بان نقطة التراكم قد تنتمي للمجموعة S وقد لا تنتمي اليها .

المجموعة المكملة (Complementary set)

اذا كانت S مجموعة نقاط من المستوى المعقد ، فان المجموعة المكملة لـ S ويرمزلها S^c هي مجموعة كل النقاط التي لا تنتمي للمجموعة S .

المجموعة المحددة (Bounded set)

تكون مجموعة النقاط S محددة اذا كانت جميع نقاط S واقعة داخل دائرة مركزها نقطة الاصل وبنصف قطر معين .
اي يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث

$$|z| \leq M$$

لكل قيم z المنتمية الى المجموعة S .
اذا لم يتوفر هذا الشرط فالمجموعة S تسمى مجموعة غير محددة .

Scanned by CamScanner

مثال (4) ان مجموعة النقاط $\{z \mid |z| < 2\}$ محددة

مثال (5) ان مجموعة النقاط $\{z \quad |z| > 2\}$ غير محددة

المجموعة المفتوحة (Open set)

هي المجموعة التي تحتوي على نقاط داخلية فقط .

بعض خواص المجموعة المفتوحة :

1- ان لكل نقطة من نقاط المجموعة المفتوحة يوجدلها جوار ينتمي برمته للمجموعة .

2- $S^\circ = S$ اذا وفقط اذا كانت S مفتوحة

3- S° هي اكبر مجموعة جزئية مفتوحة من S .

مثال (6) ان مجموعة النقاط $\{z \mid |z| > 2\}$ مفتوحة

مثال (7) ان مجموعة النقاط $\{z \mid |z| < 2\}$ مفتوحة

(مثال (8) ان مجموعة النقاط $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$ مفتوحة . انها تمثل مجموعة النقاط الوقعة داخل الحلقة المحصورة بين محيطي الدائرتين المتمثلتين بالمعادلتين $|z| = 2$, $|z| = 1$.

مثال (9) ان مجموعة النقاط $\{z \mid |z| \leq 3\}$ ليست مفتوحة وذلك لانها تحوي على النقاط المحيطية $|z| = 3$.

لمجموعة المغلقة (Closed set)

تسمى المجموعة S مجموعة مغلقة ، اذا احتوت على جميع نقاط تراكمها . أي أن

$$d(S) \subseteq S$$

ملاحظات

1- تكون المجموعة S مغلقة اذا وفقط اذا كانت المجموعة المكملة S^c مفتوحة (ان برهان هذه الخاصية خارج عن مجال هذا الكتاب ويكفي بان نشير الى المصدر [8] من قائمة المصادر)

Scanned by CamScanner

2- ان بعض المجموعات قد تكون ليست مفتوحة وليست مغلقة .

مثال (10) :ان المجموعة $S = \{ z \mid 0 < |z| \leq 1 \}$ هي ليست مفتوحة وليست مغلقة.

مثال(11):ان المجموعة الخالية ϕ ومجموعة الاعداد المعقدة C هما مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان معاً .

مثال (12):ان المجموعة $S_1 = \{ z \mid |z| \leq 2 \}$ مغلقة وذلك لان المجموعة المكملة للمجموعة S_1 وهي $S_1^c = \{ z \mid |z| > 2 \}$ تؤلف مجموعة مفتوحة .

المجموعة المتراصة (Compact set)

تسمى المجموعة S مجموعة متراصة ، اذا كانت S مجموعة مغلقة ومحددة .

مثال (13): أن المجموعة $S = \{ z \mid |z| \leq 1 \}$ هي مجموعة متراصة وذلك لانها مغلقة ومحددة .

المجموعة القابلة للعد (Countable set)

اذا امكن ايجاد مقابلة ، واحد بواحد ، بين عناصر مجموعة ما وعناصر مجموعة الاعداد الطبيعية N ، تسمى هذه المجموعة بالمجموعة القابلة للعد .

المجموعة المتصلة (Connected set)

تسمى المجموعة S مجموعة متصلة ، اذا امكن وصل اية نقطتين فيها بمسار مضلعي الشكل يتكون من عدد منته من قطع المستقيمات مسلسلة الاتصال بحيث تكون جميعها واقعة داخل S . مثال ذلك .

المجموعة $\{ z \mid |z| < 1 \}$ هي مجموعة متصلة ،

المجموعة $\{ z \mid 1 < |z| < 2 \}$ هي مجموعة متصلة ايضا ، بينما

المجموعة $\{ z \mid |z| < 1 \text{ or } |z| > 2 \}$ ليست متصلة .

انغلاق المجموعة (Closure of a set)

ان انغلاق المجموعة S ويرمز له بـ $\bar{S}$ هي المجموعة المتكونة من اتحاد عناصر S مع عناصر d(S) . أي ان

$$\bar{S} = S \cup d(S)$$

Scanned by CamScanner

بعض صفات الانغلاق (Closure)

1- $S \subseteq \bar{S}$

2- $S = \bar{S}$ اذا وفقط اذا كانت S مغلقة

3- $\bar{S}$ دائماً مغلقة وذلك لاحتوائها على جميع نقاط التراكم .

ملاحظة : انرمز الانغلاق $\bar{S}$ حيث وضع خط افقي فوق رمز المجموعة وهي صفة من صفات المجموعة ، بينما اذا كان z عددا معقداً فان الرمز $\bar{z}$ يعني مرافق العدد وهو من صفات الاعداد المعقدة .

المنطقة المفتوحة (Open Region, Domain)

وهي مجموعة نقاط مفتوحة ومتصلة . مثال ذلك

مجموعة النقاط $\{ z \mid |z| < 2 \}$

المنطقة المغلقة (Closed Region)

وهي مجموعة نقاط مغلقة ومتصلة . مثال ذلك

مجموعة النقاط $\{ z \mid |z| \leq 2 \}$

المنطقة (Region)

المنطقة المفتوحة مع قسم ، كل ، أو بدون نقاط التراكم تسمى منطقة . اذا اضيفت جميع نقاط التراكم فالمنطقة تكون مغلقة . واذا لا يوجد أي نقطة تراكم فالمنطقة تكون مفتوحة . عندما نذكر كلمة منطقة فاننا نقصد بها المنطقة المفتوحة .

مثال (14) : ليكن لدينا مجموعة S المعرفة بالصيغة

$$S = \left\{ \frac{i}{n} \right\} = \left\{ i, \frac{1}{2} i, \frac{1}{3} i, \frac{1}{4} i, \frac{1}{5} i, ... \right\}$$

1- ما هي النقاط الداخلية وما هي النقاط المحيطية ؟

الجواب : بما ان كل جوار لاي نقطة من S يحوي على نقاط تنتمي للمجموعة S ونقاط

Scanned by CamScanner

لاتنتمي للمجموعة S ، اذاً جميع النقاط المنتمية للمجموعة S ومن ضمنها الصفر هي نقاط محيطية ، وبذلك فان المجموعة S لاتحوي نقاط داخلية .

2 – هل يوجد نقاط تراكم وما هي ؟

الجواب : بما ان أي جوار للنقطة $z = 0$ يتقاطع مع مجموعة S بعدد غير منته من النقاط ، فان النقطة $z = 0$ هي نقطة تراكم ، أي حسب المعادلة (1.8.2) وليكن $\in > 0$ ، فان

$$S \cap N(0,\in) - \{0\} \neq \phi$$

في الحقيقة ان النقطة $z = 0$ هي نقطة التراكم الوحيدة أي $d(S) = \{0\}$

3– هل المجموعة S محددة ؟

الجواب : نعم لان جميع النقاط المنتمية للمجموعة S تحقق صحة المتباينة

$$|z| < 2$$

4– هل المجموعة S مغلقة ؟

الجواب : كلا لان النقطة $z = 0$ وهي نقطة تراكم لاتنتمي للمجموعة S .

5– هل المجموعة S مفتوحة ؟

الجواب : كلا لان S لاتحوي نقاط داخلية (حسب ما جاء في 1)

6– هل المجموعة S متصلة ؟

الجواب : كلا لانه اذا ربطنا اية نقطتين من المجموعة بمسار فان ذلك المسار يحوي على نقاط لاتنتمي للمجموعة S .

7– هل المجموعة S منطقة مفتوحة ؟

الجواب : كلا لان المجموعة ليست مفتوحة ومتصلة .

8– ما هو انغلاق المجموعة S ؟

ان انغلاق المجموعة S هو اتحاد S مع نقاط تراكمها أي

$$\bar{S} = \left\{ 0, i, \frac{1}{2} i, \frac{1}{3} i, ... \right\}$$

والصفر هو نقطة تراكم وحيدة بالنسبة لـ S في هذا السؤال .

9– ما هي المجموعة المكملة للمجموعه S ؟

ان المجموعة المكملة لـ S هي مجموعة كل النقاط التي لاتنتمي الى S أي

$$S^c = \left\{ z : z \neq i, \frac{1}{2} i, \frac{1}{3} i, ... \right\}$$

Scanned by CamScanner

10-هل المجموعة S متراصة ؟

بما ان المجموعة S هي محددة ولكن ليست مغلقة ، فان المجموعة S ليست متراصة .

11- هل انغلاق المجموعة S ($\bar{S}$) متراصة ؟

الجواب : نعم لان المجموعة S محددة ومغلقة .

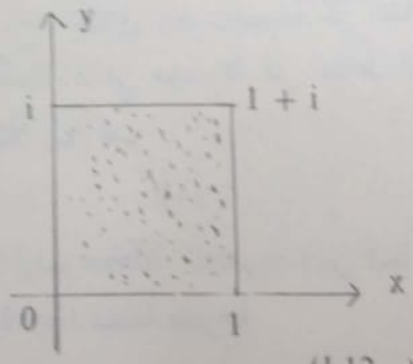
12- هل المجموعة S قابلة للعد ؟

الجواب : نعم لانه يوجد تقابل بين نقاط المجموعة S والاعداد الطبيعية على النحو الاتي

$$\begin{array}{ccccccc} i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{3}i & \frac{1}{4}i & \frac{1}{5}i & \cdots\cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots \end{array}$$

تمارين (1.6)

1 -انفرض بان S تتكون من مجموعة النقاط (a + bi) حيث أن b,a عددان نسبيان يقعان داخل المربع $0 < y < 1 , 0 < x < 1$ كما في الشكل (1.12)



شكل (1.12)

(أ) هل المجموعة S محددة ؟ الجواب نعم

(ب)ما هي نقاط التراكم ، ان وجدت ؟ الجواب : كل نقطة داخل وعلى محيط المربع هي نقطة تراكم .

(ج) هل المجموعة S مغلقة ، الجواب كلا

(د) ما هي النقاط الداخلية والمحيطية ؟

الجواب : كل نقاط المجموعة ونقاط المحيط هي نقاط محيطية ، لاتوجد نقاط داخلية

Scanned by CamScanner

(هـ) هل المجموعة S مفتوحة ؟ الجواب : كلا
(و) هل المجموعة S متصلة ؟ الجواب : كلا
(ز) هل المجموعة S منطقة مفتوحة ؟ الجواب كلا .
(ح) ما هو انغلاق S ؟ الجواب : هو مجموعة كل النقاط داخل المربع وعلى محيطه ذات الاحداثيات النسبية .
(ط) ما هي المجموعة المكملة لـ S ؟ الجواب : كل النقاط ذات احداثيات غير نسبية الواقعة داخل المربع مع كل النقاط خارج وعلى محيط المربع .
(ى) هل المجموعة S قابلة للعد ؟ الجواب : نعم
(ك) هل المجموعة S متراصة (Compact) ؟ الجواب : كلا
(ل) هل انغلاق المجموعة S متراصة ؟ الجواب : نعم .

2- اجب عن السؤال الاول اذا كانت S مجموعة كل النقاط داخل المربع (أي التي احداثياتها اعداد نسبية وغير نسبية ومحصورة بين صفر وواحد).
الجواب (أ) نعم (ب) كل نقطة داخل وعلى محيط المربع هي نقطة تراكم (ج) كلا (د) كل نقطة داخل المربع هي نقطة داخلية ، بينما كل نقطة على المحيط هي نقطة محيطية (هـ) نعم (و) نعم (ز) نعم (ح) انغلاق S هو مجموعة كل النقاط داخل وعلى محيط المربع (ط) المجموعة المكملة لـ S هي مجموعة كل النقاط الواقعة على محيط المربع وخارجه (ى) كلا (ك) كلا (ل) نعم .

3- في كل من التمارين الاتية ارسم مخطط المجموعة وبين فيما اذا كانت (i) مفتوحة (ii) مغلقة (iii) محددة (iv) منطقة مفتوحة

(أ) $|z - 3 + i| \leq 3$ (ب) $|2z + 3| > 2$

(ج) $I(z) > 1$ (د) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ و $|z| > 0$

(هـ) $|z - 4| \geq |z|$ (و) $|I(z)| > 1$

4- ارسم مخطط انغلاق (Closure) المجموعات الاتية

Scanned by CamScanner

(أ) $|z| > 0$ و $-\pi < \arg z < \pi$

(ب) $|R(z)| < |z|$

(ج) $R\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}$

(د) $R(z^2) > 0$

5- بين لماذا المجموعة المكونة من $|z| < 1$ و $|z - 2| < 1$ تكون غير متصلة ؟

6- برهن ان المجموعة المنتهية من النقاط .

$z_1, z_2, z_3, ..., z_n$

ليس لها نقاط تراكم .

7- جد نقاط التراكم لكل من مجموعات النقاط الآتية :-

(أ) $z_n = (i)^n$, $n = 1, 2, 3, ...$ الجواب : لايوجد

(ب) $z_n = \frac{1}{n}(i)^n$ $n = 1, 2, 3, ...$ الجواب : 0

(ج) $|z| > 1$ $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$

(د) $z_n = (-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+i)$, $n = 1, 2, 3, ...$

الجواب $\pm(1 + i)$

1.9 النقطة فى اللانهاية (The point at infinity)

من المناسب أن تؤخذ نقطة مثالية في المستوي المعقد تسمى بنقطة اللانهاية ويرمز لها بالرمز ∞ . وفي هذه الحالة يسمى المستوي مع هذه النقطة بالمستوي المعقد الموسع (اوالممتد) (The extended complex plane) من اجل تصور النقطة في اللانهاية نستعرض الاسقاط الجسماني (Stereographic Projection) بواسطة الكرة الواحدية (نصف قطرها واحد) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ واعتبار المستوي xy هو المستوي المعقد . ان كل

Scanned by CamScanner

نقطة $P(x,y)$ على المستوي xy تقابل نقطةوفقط نقطة واحدة Q على سطح الكرة الناتجة من تقاطع NP (او امتداده) مع سطح الكرة حيث $N(0,0,1)$ القطب الشمالي . النقاط خارج دائرة خط الاستواء $|z| = 1$ تقابل نقاط على سطح النصف الشمالي للكرة والنقاط داخل دائرة خط الاستواءتقابل نقاط سطح النصف الجنوبي . واذا افترضنا أن النقطة N تقابل النقطة في اللانهاية ينتج اقتران متقابل بين نقاط المستوى المعقد ونقاط سطح الكرة الواحدية .

[يمكن ايجاد علاقة بين احداثيات $P(x,y)$ واحداثيات $Q(l, m, n)$ حيث أن

$$\left[l = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} , m = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} , n = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right.$$

اذا كانت $\in$ عدد صغير موجب فان كل النقاط من المستوي الموسع الواقعة خارج الدائرة أي $|z| > 1$ تقابل نقاط من سطح الكرة قريبة من N نطلق على المجموعة $|z| > \frac{1}{\in}$ بجوار $\in$ لـ اللانهاية .

اذا كان كل جوار لـ ∞ يحتوي على الاقل نقطة واحدة من مجموعة اعداد معقدة S نقول أن ∞ هي نقطة تراكم للمجموعة S .

فمثلاً الـ ∞ هي نقطة تراكم للمجموعة $z_n = ni \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ لاحظ أن المجموعة S تكون غير محددة اذا كانت الـ ∞ هي نقطة تراكم لهذه المجموعة S .

عندما نذكر نقطة z في المستوي المعقد نقصد المستوي المعقد غير الموسع واذا اردنا المستوي المعقد الموسع (الذي يضم ∞) سوف نؤكد ذكر ذلك .

تمرين : برهن في المستوي الموسع أن الـ ∞ هي نقطة تراكم للمجموعة $R(z) > 0$ وكذلك الـ ∞ نقطة تراكم للمجموعة $R(z) < 0$.

Scanned by CamScanner

الفصل الثاني

الـدوال التحليلية Analytic Functions

2.1 دوال المتغير المعقد (Functions of a Complex variable)

المتغير المعقد (Complex variable)

اذا كانت D مجموعة نقاط غير خالية ، وكان z يرمز لاي عدد من مجموعة الاعداد المعقدة المقابلة الى نقاط D ، فان z يسمى متغيراً معقداً وتسمى D منطقة تغيره (domain of variation)

الدالة المعقدة (Complex function)

اذا وجدت قاعدة ما التي بواسطتها يمكن اقران أي عدد معقد $z \in D$ بعدد معقد ω فان هذه القاعدة تسمى دالة معقدة وتكتب

$$\omega = f(z) \quad \ldots (2.1.1)$$

Scanned by CamScanner

حيث ان f تمثل القاعدة التي بواسطتها يتم تعيين ω المقابلة للعدد z . يطلق على D منطلق الدالة (Domain of Definition)

ويطلق على مجموعة قيم الدالة ω التي تقابل قيم z بـ مدى (مستقر) الدالة (Range of the function)

مثال (1) ان منطلق كل من الدالتين $\omega = z^2 + 2z + 1, \omega = |z + 2|$ هي جميع نقاط المستوي المعقد .

مثال (2) ان منطلق الدالة $\omega = \frac{1}{z^2 + 4}$ هي جميع نقاط المستوي المعقد عدا النقطتين $z = \pm 2i$

لنفرض u, v هما القسمان الحقيقي والخيالي للدالة $\omega = f(z)$ (u القسم الحقيقي ، v القسم الخيالي) عندئذ u, v دالتان حقيقيتان تعتمدان على المتغيرين الحقيقين x, y حيث $z = x + iy$. وتكتب الدالة المعقدة بالشكل الاتي :

$$\omega = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \ldots (2.1.2)$$

مثال (3) تأمل الدالة $\omega = z^2$. عندئذ

$$\omega = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

وبمقارنتها بالمعادلة (2.1.2) ينتج

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$v(x,y) = 2xy$$

الدالة الوحيدة القيمة (Single valued function)

تكون الدالة $\omega = f(z)$ وحيدة القيمة في المنطقة D اذا كان لكل $z \in D$ يقابله قيمة وفقط قيمة واحدة من قيم الدالة $f(z)$

مثال (4) الدالة $\omega = z^2 + z + 1$ وحيدة القيمة.

Scanned by CamScanner

الدالة المتعددة القيم (Multiple valued function)

تسمى الدالة $\omega = f(z)$ متعددة القيم في المنطقة D . اذا كان لكل $z \in D$ يقابله عدة قيم من $\omega = f(z)$.

مثال (5) الدالة $\omega = z^{1/3}$ ثلاثية القيمة لان لكل z يقابله ثلاث قيم لـ ω .ولتحقيق ذلك نستعمل الصيغة القطبية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وبتطبيق قاعدة دي موفري . نجد أن

$$\omega = z^{1/3} = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{3}\right)$$

حيث

$$k = 0, 1, 2$$

وبهذا تظهر القيم المختلفة الثلاثة لكل قيمة معينة بـ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ لنتفق على اصطلاح الدالة $\omega = f(z)$ بانها وحيدة القيمة دائماً الا اذا ذكر عكس ذلك.

الدالة المتباينة : (One − One Function)

لتكن $\omega = f(z)$ دالة منطلقها D . يقال بان f دالة متباينة اذا وفقط اذا كان لكل $z_1, z_2 \in D$ ، فأن

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$$

الدالة العكسية (Inverse function)

اذا كانت f دالة متباينة منطلقها D ومداها S ، فان الدالة العكسية للدالة f (ويرمز لها بالرمز f^{-1}) هي الدالة التي منطلقها S ومداها D ولكل $\omega \in S$ يوجد $z \in D$ بحيث

$$\omega = f(z) \qquad \ldots (2.1.3)$$

ولحساب الدالة العكسية f^{-1} للدالة f المعرفة بالصيغة (2.1.3) نجد z بدلالة ω ثم نعيد كتابتها بالصيغة $z = f^{-1}(\omega)$,

لـكل $z \in S$

Scanned by CamScanner

مثال (6) لتكن الدالة $\omega = f(z) = \frac{1}{z+2}$ ، $z \neq -2$ ، جد معكوسها.

الحل : نحل المعادلة $\omega = \frac{1}{z+2}$ من اجل z . ينتج

$$z = \frac{1}{\omega} - 2 \quad ; \omega \neq 0$$

ويمكن اعادة كتابتها بالصيغة

$$\omega = f^{-1}(z) = \frac{1}{z} - 2 , z \neq 0.$$

الدالة المركبة (Composite function)

لتكن f دالة معرفة على المنطقة D . و g دالة معرفة على المنطقة E .نفرض لكل $z \in D$. ان $f(z) \in E$ ، اي ان جميع قيم f تقع في المنطقة E (منطلق g) عندئذ يمكن تعريف الدالة $g(f(z))$ على المنطقة D .

هذه الدالة $g(f(z))$ تسمى بالدالة المركبة من f و g .

مثال (7) اذا كان $f(z) = 3z + i$ و $g(z) = z^2 + z + 1 - i$

جد $f(g(z))$ ؛ $g(f(z))$

الحل :

$$f(g(z)) = 3(g(z)) + i = 3(z^2 + z + 1 - i) + i$$
$$= 3z^2 + 3z + 3 - 2i$$
$$g(f(z)) = f^2 + f + 1 - i = (3z + i)^2 + (3z + i) + 1 - i$$
$$= 9z^2 + 3z(2i + 1)$$

نلاحظ ان $g(f(z)) \neq f(g(z))$

Scanned by CamScanner

تمارين (2.1)

1 اذا كان $\omega = f(z) = z^2 - 1$ جد (أ) $f(-2+i)$ (ب) $f(1-3i)$ (ج) $f(-i)$

2 - عين منطلق الدوال الاتية

(أ) $f(z) = \frac{1}{z}$ (ب) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

(ج) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ (د) $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)$

(هـ) $f(z) = \frac{z}{z+\bar{z}}$ (و) $f(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$

3 - اكتب كل من الدوال الاتية بالصيغة $u(x,y) + i\,v(x,y)$

(أ) $f(z) = z^3 + z + 1$ (ب) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}, z \neq -1$

4 - جد معكوس كل من الدالتين الاتيتين.

(أ) $f(z) = \sqrt{z-1}$ (ب) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}, z \neq 1$

5 - جد الدالة المركبة $g(f(z)), f(g(z))$ لكل مما يأتي

(أ) $f(z) = z - 1$, $g(z) = \sqrt{1-z}$

(ب) $g(z) = z^2, z \neq 1, f(z) = \frac{1}{z-1}$

2.2- التطبيق او التحويل (Mapping or Transformation)

ان من خواص الدوال الحقيقية $y = f(x)$ حيث x متغير مستقل . و y متغير معتمد هي انه يمكن تمثيلها بخط بياني (graph) في المستوي xy . اما بالنسبة للدالة المعقدة $\omega = f(z)$ لايمكن تمثيلها بخط بياني لان كلا من المتغيرين المعقدين z و ω

Scanned by CamScanner

يمثل مستوياً وليس خطاً مستقيماً حيث ان $z = x + iy$ يعتمد على متغيرين x و y
وكذلك $\omega = u + iv$ يعتمد على متغيرين u ، v .

ومن اجل دراسة $\omega = f(z)$ هندسياً يجب تحديد منطقة من المستوي z ثم ايجاد المنطقة المقابلة من المستوي ω بواسطة الدالة $\omega = f(z)$. وبذلك يطلق على الدالة المعقدة $\omega = f(z)$ اسم التطبيق او التحويل .

لتكن $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة معقدة . ان كل نقطة $M(x,y)$ تقابل نقطة $M'(u,v)$ في المستوي ω . تسمى النقطة M' صورة النقطة M ، وعندما ترسم النقطة M منحنياً γ في المستوي z ، فان النقطة المقابلة M' ترسم منحنياً اخر γ' في المستوي ω . يسمى المنحني γ' صورة المنحني γ بواسطة التحويل او التطبيق او الدالة $\omega = f(z)$

مثال. تأمل الدالة المعقدة $\omega = \frac{1}{z}$ ، $z \neq 0$. جد صورة المستقيمات الرأسية $x = c$ ثم جد صورة المستقيمات الافقية $y = k$. ماهي الصورة عندما $c = 0$ وعندما $k = 0$ ؟

الحل : نكتب دالة التطبيق $\omega = \frac{1}{z}$ بالصيغة $\omega = u + iv$ اي :

$$\omega = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore\ u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

لايجاد صورة المستقيمات الرأسية $x = c$ نعوض في هاتين المعادلتين السابقتين عن كل $x = c$ ثم نحذف y منهما أي

$$u = \frac{c}{c^2 + y^2} \quad , \quad v = -\frac{y}{c^2 + y^2}$$

بتربيع المعادلتين وجمعهما ينتج ،

$$\therefore\ u^2 + v^2 = \frac{c^2 + (-y)^2}{(c^2 + y^2)^2} = \frac{1}{c^2 + y^2}$$

ثم نعوض في المعادلة الاولى عن $c^2 + y^2$ ينتج $u = c(u^2 + v^2)$

Scanned by CamScanner

اذا كانت $c \neq 0$ ، تكون صورة المستقيمات الرأسية هي الدوائر

$$u = c(u^2 + v^2)$$

التي تمر بالاصل ومراكزها على المحور u . وبواسطة اكمال المربع تصبح

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4c^2}$$

وتكون هذه الدوائر الى اليمين اذا كانت c موجبة والى اليسار اذا كانت c سالبة. اما اذا كانت $c = 0$ فالصورة تكون المحور v (اي $u = 0$) هذه الدوائر تكبر كلما صغرت c (أي اقتربت مواقع المستقيمات الراسية في المستوي z من الاصل) وبالعكس (شكل 2.1).

ولو اخذنا مجموعة المستقيمات الافقية في المستوي z ($y = k$) ، بالتعويض $y = k$

بالمعادلتين $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

ينتج $u = \frac{x}{x^2 + k^2}$, $v = \frac{-k}{x^2 + k^2}$

ثم نحذف x من المعادلتين ينتج

$$v = -k(u^2 + v^2)$$

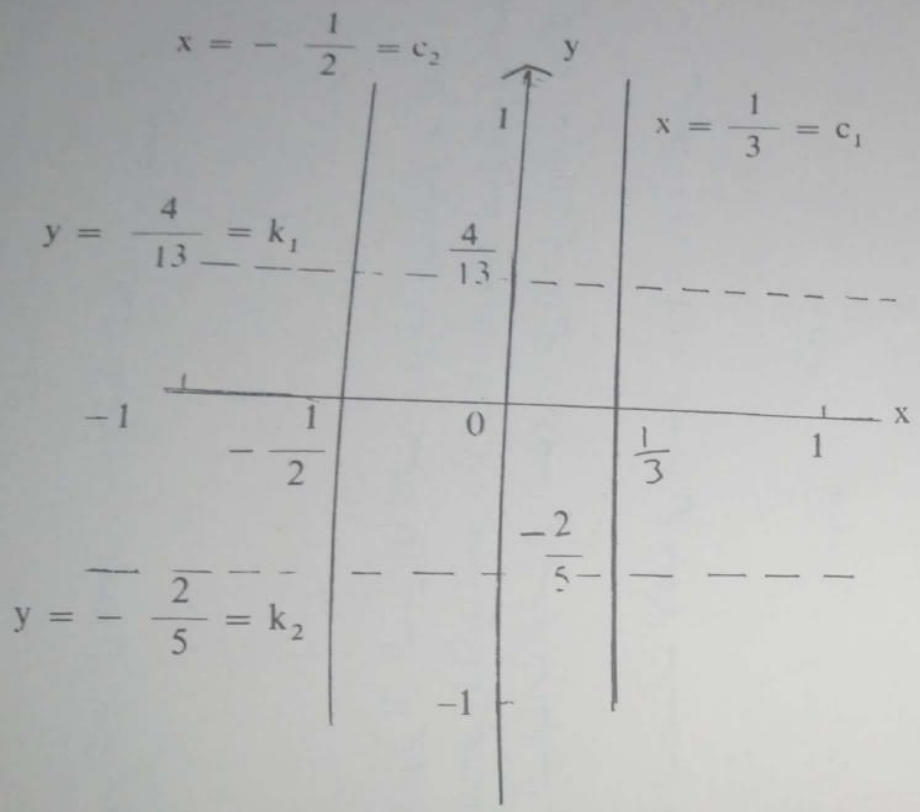
فاذا كانت $k \neq 0$ تصبح صورة هذه المستقيمات الافقيه في المستوي ω ، الدوائر

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k^2}$$

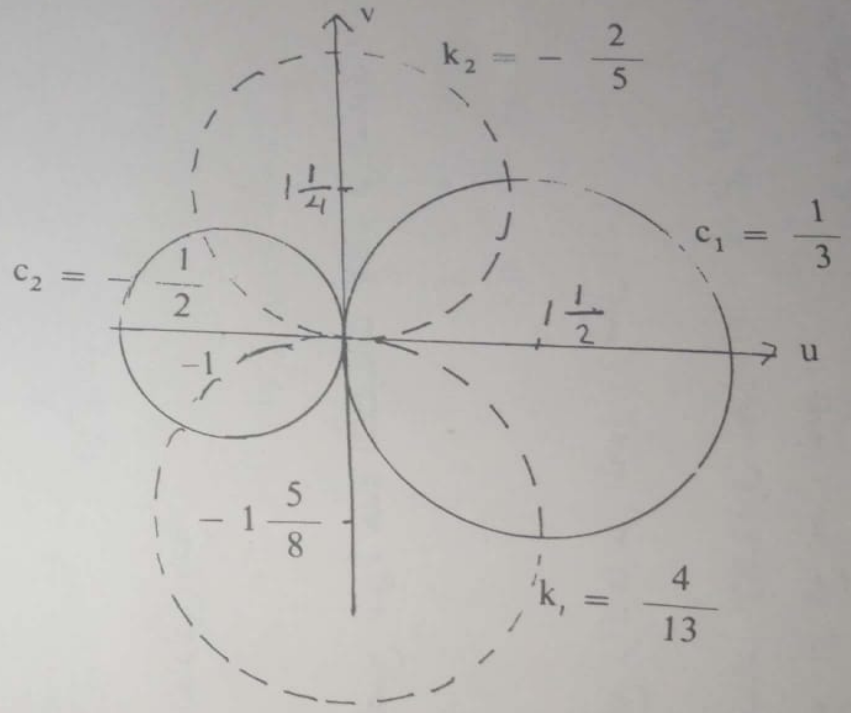
وهي تمر بالاصل وتقع مراكزها على المحور v (شكل 2.1)

ان صورة المستقيمات الافقية فوق المحور x ($k > 0$) هي دوائر تمر بالاصل ومراكزها على محور v السالب ، أي تقع تحت المحور u .
وصورة المستقيمات الافقية تحت المحور x ($k < 0$) هي دوائر فوق المحور u وتقع مراكزها على محور v الموجب وتمر بالاصل.

Scanned by CamScanner



المستوي (ن)



المستوى z

شكل (2.1)

Scanned by CamScanner

اذا كانت $k = 0$ فان صورة المستقيم $y = 0$ (المحور x) هو المستقيم $v = 0$ (المحور u)
كذلك نلاحظ ان الدوائر تكبر كلما اقتربت المستقيمات التي تقابلها من نقطة الاصل في المستوي z .

2.3- النهايات (او الغايات) (Limits)

يقال للدالة $\omega = f(z)$ المعرفة بجوار النقطة z_0 (قد لاتعرف في النقطة z_0) لها نهاية او غاية مثل ω_0 عندما تقترب z من z_0 وتكتب

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0 \qquad \ldots (2.3.1)$$

اذا وفقط اذا كان لكل عدد حقيقي صغير موجب $\epsilon > 0$ يمكن ايجاد عدد اخر $\delta > 0$ بحيث

$$|f(z) - \omega_0| < \epsilon$$

لكل z التي تحقق المتباينة

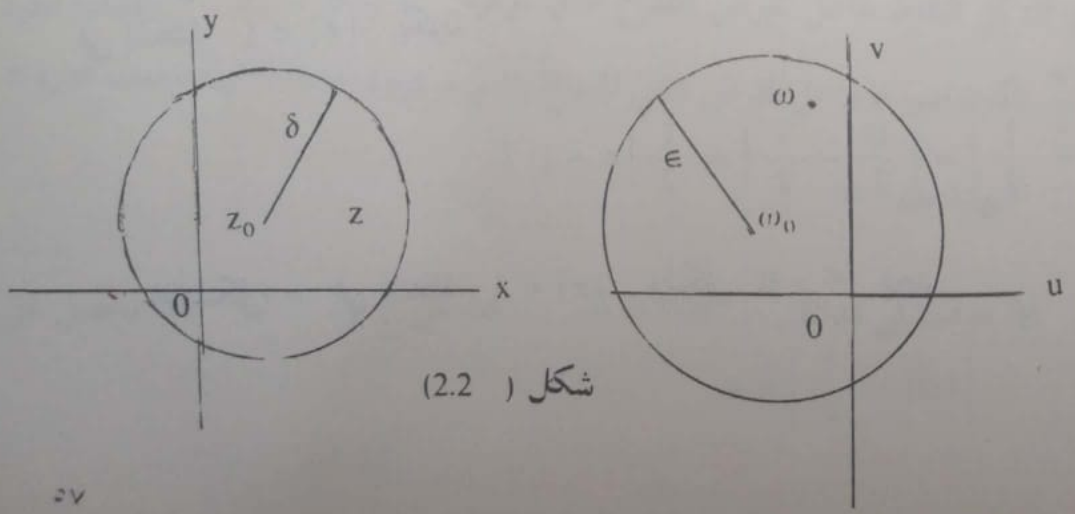
$$0 < |z - z_0| < \delta$$

يمكن كتابة ذلك باختصار كما يأتي :

$$\forall \epsilon > 0 , \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\omega - \omega_0| < \epsilon$$

وهذا يعني ان قيمة $\omega = f(z)$ تصبح قريبة جداً من ω_0 عندما تكون z قريبة جداً من z_0 .

كما يمكن تمثيل هذا التعريف هندسياً (شكل 2.2)



شكل (2.2)

Scanned by CamScanner

لكل جوار للنقطة ω_0 بقدر $\in$ (أي $N(\omega_0, \in)$) يوجد جوار لـ z_0 بقدر δ (أي $N(z_0, \delta)$) بحيث أن كل نقطة z من الجوار $N(z_0, \delta)$ تكون صورتها داخل الجوار $N(\omega_0, \in)$ (ملاحظة قد تكون صورة z_0 لاتنطبق على ω_0 ، او لاتوجد صورة لـ z_0) .

ملاحظات :

1 - من تعريف النهاية نلاحظ ان الدالة f يجب ان تكون معرفة على جميع القيم المتممة الى جوار z_0 (قد لاتكون f معرفة على z_0) . ان هذا الجوار لـ z_0 يكون دائماً موجوداً عندما تكون z_0 نقطة داخلية بالنسبة لمنطلق الدالة D .

2 - من تعريف النهاية لم يشترط على الاتجاه الذي تقترب به z نحو z_0 ، وعليه اذا كانت النهاية موجودة حسب التعريف (2.3.1) فان قيمة النهاية لاتعتمد على الاتجاه الذي تقترب به z نحو z_0 .

يمكن توسيع تعريف النهاية (2.3.1) لتشمل الحالة التي يكون فيها z_0 نقطة محيطية لمنطلق الدالة وذلك بأن تتحقق المتباينة الاولى من تعريف النهاية لجميع قيم z التي تقع في منطلق الدالة وتحقق المتباينة $0 < |z - z_0| < \delta$.

مثال 1 : اذا كانت الدالة $f(z) = \frac{1}{2} iz$

معرفة على القرص المفتوح $|z| < 1$ (open disc) ، برهن ان

$$\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

الحل : ان النقطة $z_0 = 1$ نقطة محيطية لاتنتمي الى منطلق f لكل z في المنطقة $|z| < 1$ يكون

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} |z - 1|$$

اذاً لكل z في المنطقة $|z| < 1$ ولكل $\in > 0$ نجد

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \in$$

Scanned by CamScanner

عندما $|z-1|<2\epsilon$ ، اي أن $\delta=2\epsilon$ وبذلك فان تعريف النهاية يتحقق عندما $\delta=2\epsilon$ لاحظ ان الدالة $f(z)=\frac{iz}{2}$ غير معرفة على النقطة $z_0=1$ لان $z_0=1$ لاتنتمي الى منطلق $|z|<1$.

مثال (2) : برهن أن $\lim_{z\to 2i-1}(2z+3)=4i+1$

الحل : لتكن $\epsilon>0$ أي عدد حقيقي موجب صغير ، علينا ايجاد $\delta>0$ بحيث لكل قيم z التي تحقق المتباينة

$$0<|z-(2i-1)|<\delta$$

ينتج لدينا أن

$$|2z+3-(4i+1)|<\epsilon$$

نبدأ من المتباينة الخاصة بالدالة أي من : $|f(z)-\omega_0|<\epsilon$

$$|2z+3-(4i+1)|<\epsilon$$

$$|2z-4i+2|<\epsilon$$

$$|2(z-(2i-1))|<\epsilon$$

$$|z-(2i-1)|<\frac{\epsilon}{2}$$

أي

$$|z-z_0|<\frac{\epsilon}{2}$$

$\therefore \delta=\frac{\epsilon}{2}$ تؤدي المهمة المطلوبة

أي ان كل النقاط داخل القرص المفتوح الذي مركزه $z_0=2i-1$ ونصف قطره $\frac{\epsilon}{2}$ تكون صورها داخل القرص الثاني المفتوح والذي مركزه $\omega_0=4i+1$ ونصف قطره ϵ

النهاية عند ∞ :

اذا عوضنا في الدالة $\omega=f(z)$ عند كل z بـ $\frac{1}{z}$ فاننا نحصل على

Scanned by CamScanner

دالة جديدة نرمز لها بـ $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

لايجاد نهاية الدالة $\omega = f(z)$ فعندما $z \to \infty$ تكون $\frac{1}{z} \to 0$.

عندما $z \to \infty$ يكفي ان نجد نهاية الدالة $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ عندما $z \to 0$.

مثال (3) احسب نهاية المقدار $\lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{3z+1}$

الحل :

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} - 1}{3\left(\frac{1}{z}\right) + 1} = \frac{1-z}{3+z}$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1-z}{3+z} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{3z+1} = \frac{1}{3}$$

مبرهنة (2.1) (وحدانية النهاية Uniqueness of limit)

اذا كان للدالة f نهاية عند النقطة z_0 . فان هذه النهاية وحيدة .

البرهان :

لنفرض وجود اكثر من نهاية واحدة ولتكن نهايتان ω_1 , ω_2 أي

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_1 \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_2$$

حسب تعريف النهاية

$$\forall \epsilon > 0, \quad \delta_1 > 0, \forall\, 0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - \omega_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \delta_2 > 0, \forall\, 0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - \omega_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

لتكن δ اصغر العدين δ_2 , δ_1 أي

Scanned by CamScanner

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\therefore |\omega_2 - \omega_1| = |(f(z) - \omega_1) - (f(z) - \omega_2)|$$

$$\leq |f(z) - \omega_1| + |f(z) - \omega_2|$$

$$< \epsilon$$

$0 < |z - z_0| < \delta$ وذلك لكل قيم z التي تحقق المتباينة .

وبما أن ϵ اختياري (مثلاً : اختار $\epsilon = |\omega_2 - \omega_1|$) فنحصل على $|\omega_2 - \omega_1| < |\omega_2 - \omega_1|$ ، وهذا غير ممكن) فنحصل على $\omega_2 = \omega_1$ ؛ اي أن النهاية وحيدة .وبهذا يتم برهان المبرهنة .

مبرهنة (2.2) :

لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ، عندئذ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = \omega_0 \qquad \ldots\ldots (2.3.2)$$

اذا وفقط اذا

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 \qquad \ldots\ldots (2.3.3)$$

حيث أن $z_0 = x_0 + iy_0$

البرهان :

اذا كانت (2.3.2) صحيحة علينا برهنة (2.3.3)

حسب تعريف النهاية . لتكن $\epsilon > 0$ فانه توجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(z) - \omega_0| < \epsilon$$

لكل قيم z التي تحقق المتباينة

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

أي أن

$$|f(z) - \omega_0| = |u + iv - (u_0 + iv_0)| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| < \epsilon$$

Scanned by CamScanner

لكل قيم z التي تحقق المتباينة

$$0 < |z - z_0| = |x + iy - (x_0 + iy_0)| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$$

ولما كان

$$|u - u_0| \le |f(z) - \omega_0| < \epsilon$$

$$|v - v_0| \le |f(z) - \omega_0| < \epsilon$$

لكل قيم x,y التي تحقق

$$|x - x_0| \le |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$$

$$|y - y_0| \le |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u = u_0 \ , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v = v_0$$

وبهذا ينتج (2.3.3)

برهان القسم الثاني :

اذا كانت (2.3.3) صحيحة فالمطلوب برهنة (2.3.2)

لتكن $\epsilon > 0$ ، يمكن ايجاد عددين حقيقين $\delta_1 > 0 \ , \delta_2 > 0$ بحيث

$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$ عندما $|u - u_0| < \frac{\epsilon}{2}$

$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2$ عندما $|v - v_0| < \frac{\epsilon}{2}$

لتكن δ اصغر العددين $\delta_1 \ , \delta_2$ ولما كان

$$|u - u_0 + i(v - v_0)| \le |u - u_0| + |v - v_0|$$

(u,v دالتان بـ x,y)

$$\therefore |(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \epsilon$$

لكل $z = x + iy$ التي تحقق المتباينة

$$0 < |x + iy - (x_0 + iy_0)| < \delta$$

وهذه هي (2.3.2)

Scanned by CamScanner

مبرهنة (2.3)

اذا كانت $f(z)\ ,\ g(z)$ **دالتين بالمتغير** z **،وكان**

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \quad , \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = M \qquad \ldots\ldots (2.3.4)$$

فان

(أ)

$$\lim_{z\to z_0} [\, f(z) \pm g(z)\,] = L \pm M$$

(ب)

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\,.\,g(z) = L\,.\,M$$

(جـ) **وعندما** $M \neq 0$ **فان**

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$$

البرهان :

(أ) سنكتفي ببرهان حالة الجمع اي

$$\lim_{z\to z_0} [\, f(z) + g(z)\,] = L + M$$

لكل $\epsilon > 0$ **علينا ايجاد** $\delta > 0$ **بحيث ان**

$$\forall\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) + g(z) - L - M| < \epsilon$$

من مفروض المبرهنة (2.3.4) **لكل** $\epsilon > 0$ **يوجد عددان** $\delta_1 > 0\ ,\ \delta_2 > 0$ **بحيث**

$$|f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

$$|g(z) - M| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

Scanned by CamScanner

عندئذ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ أي δ_1, δ_2 لنفرض δ اصغر العددين

$$|f(z) + g(z) - (L + M)| = |(f(z) - L) + (g(z) - M)|$$

$$\leq |f(z) - L| + |g(z) - M|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

لكل قيم z التي تحقق المتباينة $0 < |z - z_0| < \delta$

وبنفس الاسلوب يجري برهان حالة الفرق وذلك بوضعها بصيغة الجمع أي

$$f(z) - g(z) = f(z) + (-g(z))$$

(ب) اذا فرضنا

$$f(z) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$$

$$g(z) = g_1(x,y) + i g_2(x,y)$$

$$L = L_1 + iL_2$$

$$M = M_1 + iM_2$$

ومنها ينتج

$$f(z)\,g(z) = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i(f_1 g_2 + f_2 g_1)$$

ومن مفروض المبرهنة (2.3.4) وتطبيق مبرهنة (2.2) نجد عندنا $z \to z_0$ (أي $y \to y_0 , x \to x_0$) أن :

$$f_1 \to L_1 ; f_2 \to L_2 ; g_1 \to M_1 ; g_2 \to M_2$$

وباستخدام خواص النهايات على الدوال الحقيقية ينتج :

Scanned by CamScanner

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f_1 g_1 - f_2 g_2) = (L_1 M_1 - L_2 M_2)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f_1 g_2 + f_2 g_1) = (L_1 M_2 + L_2 M_1)$$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} f(z)\, g(z) = (L_1 M_1 - L_2 M_2) + i(L_1 M_2 + L_2 M_1)$$

$$= (L_1 + iL_2)(M_1 + iM_2)$$

$$= L \cdot M$$

(ج) يمكن برهنة حالة القسمة باستخدام الضرب والملاحظة الآتية

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{M}, \quad M \neq 0$$

وان برهنة هذه الاخيرة يتم بارجاع جزئيها الحقيقي والخيالي على النحو الآتي

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g_1 + ig_2} = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2} - i\,\frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1 + iM_2} = \frac{M_1}{M_1^2 + M_2^2} - i\,\frac{M_2}{M_1^2 + M_2^2}.$$

ثم استعمال خواص النهايات على الدوال الحقيقية ينتج

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2} - i \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2} = \frac{M_1 - iM_2}{M_1^2 + M_2^2}$$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{M_1 + iM_2} = \frac{1}{M}.$$

وبتطبيق صيغة الضرب (ب) من المبرهنة ينتج

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left(\lim_{z\to z_0} f(z)\right).\left(\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)}\right) = L.\frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

وبهذا ينتهي برهان (2.3)

Scanned by CamScanner

مبرهنة (2.4)

1- نهاية الدالة الثابتة هي مقدار ثابت . اي . اذا كان c اي عدد معقد ثابت وكان z_0 اي عدد معقد ثابت فان

$$\lim_{z \to z_0} c = c$$

2 - اذا كان z_0 أي عدد معقد ثابت فان

$$\lim_{z \to z_0} z = z_0$$

3 اذا كان n اي عدد صحيح موجب وكان z_0 اي عدد معقد ثابت فان

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$$

4- اذا كانت

$$P(z) = \sum_{k=0}^{i} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

حدودية معاملاتها $a_0, a_1, ..., a_n$ ثوابت معقدة فان

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0) .$$

5- اذا كان $\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$ فان

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |\omega_0|$$

برهان 1 :

لتكن $c = c_1 + ic_2$ لكل $\epsilon > 0$ يمكن اختيار $\delta > 0$ كيفما تكون . ينتج:

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow c_1 - \epsilon < c_1 < c_1 + \epsilon$$

$$c_2 - \epsilon < c_2 < c_2 + \epsilon$$

Scanned by CamScanner

وذلك لان هاتين المتباينتين صحيحتان دائما ، كما انهما لاتعتمدان على z وبالتالي لاتعتمدان على y,x

$$\therefore \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} c_1 = c_1 \ , \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} c_2 = c_2$$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} c = \lim_{z\to z_0} (c_1 + ic_2) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} c_1 + i \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} c_2 = c_1 + ic_2 = c$$

برهان (2) : لتكن $\epsilon > 0$. نختار $\delta = \epsilon$ عندئذ

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| < \epsilon$$

عندئذ $\lim_{z\to z_0} z = z_0$ حسب تعريف النهاية

برهان 3 : بواسطة الاستقراء الرياضي (Mathematical induction) نفرض

$$\lim_{z\to z_0} z^{n-1} = z_0^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} z^n = \lim_{z\to z_0} z^{n-1} . z = (\lim_{z\to z_0} z^{n-1}) (\lim_{z\to z_0} z)$$

حسب مبرهنة (2.3 ب)

$$= z_0^{n-1} . z_0$$

حسب افتراضنا ومبرهنة (2.4) القسم 2 .

$$\therefore \lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$$

ولما كانت صحيحة عندما $n = 1$ فانها صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

برهان 4 :

$$\lim_{z\to z_0} P(z) = \lim_{z\to z_0} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lim_{z\to z_0} a_k) (\lim_{z\to z_0} z^k)$$

Scanned by CamScanner

بموجب مبرهنة (2.3 ب).

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k$$

حسب مبرهنة (2.4) القسم (1) , (3)

$$\therefore \lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0) .$$

برهان 5 :

لتكن $\epsilon > 0$ ، لما كان $\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$ ، فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon \quad \ldots\ldots (2.3.5)$$

بما أن

$$\| f(z)| - |\omega_0 \| \leq |f(z) - \omega_0|$$

حسب خاصية (9) بند (1.4)

$$\therefore 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \| f(z)| - |\omega_0 \| < \epsilon ,$$

حسب (2.3.5) اعلاه

$$\therefore \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |\omega_0|$$

وبهذا ينتهي برهان (2.4)

مثال 4 جد (أ) $\lim_{z \to 1+i} \frac{5z + 1}{5z - i}$ (ب) $\lim_{z \to 2i} (z^2 + 4z - 2)$

الحل : (أ) بتطبيق خواص النهايات ينتج

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{5z + 1}{5z - i} = \left[\frac{\lim (5z) + \lim 1}{\lim (5z) + \lim i} \right]_{z \to 1+i}$$

$$= \frac{5(1 + i) + 1}{5(1 + i) - i} = \frac{6 + 5i}{5 + 4i} = \frac{50}{41} + \frac{i}{41}$$

(ب)

$$\lim_{z \to 2i} (z^2 + 4z - 2) = \lim_{z \to 2i} z^2 + \lim_{z \to 2i} 4z - \lim_{z \to 2i} 2$$

$$= (2i)^2 + 4(2i) - 2 = -6 + 8i$$

Scanned by CamScanner

(تمارين 2.2)

1 بفرض a ، c ، و z_0 ثوابت معقدة ، استخدم تعريف النهاية (طريقة $\in$ و δ) لاثبات

(أ) $\lim_{z \to z_0} a = a$ (ب) $\lim_{z \to z_0} az + c = az_0 + c$

(ج) $\lim_{z \to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$ (د) $\lim_{z \to z_0} R(z) = R(z_0)$

(هـ) $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ (و) $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$

(ز) $\lim_{z \to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$

2- اذا كانت $P(z)$ ، $Q(z)$ دالتين معقدتين وان $Q(z_0) \neq 0$، باستخدام مبرهنات النهايات اثبت

$$\lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$$

3- جد النهايات الاتية

(أ) $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n}$ حيث $z_0 \neq 0$ و n عدد صحيح موجب

(ب) $\lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$ (ج) $\lim_{z \to 2e^{i\pi/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$

4- برهن ان النهاية $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة

5- اذ كان $\Delta z = z - z_0$ برهن ان $\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$ اذا وفقط اذا كان

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = \omega_0$$

Scanned by CamScanner

6 - اذا كان $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ و $|g(z)| \leq M$ حيث M أي عدد موجب محدد لكل قيم z المنتمية لأي جوار لـ z_0 برهن

$$\lim_{z \to z_0} f(z)\, g(z) = 0$$

7 - جد النهايات الاتيه

(أ) $\lim_{z \to \infty} \dfrac{5z - 5}{-4z + 1}$ (ب) $\lim_{z \to \infty} \dfrac{2z^2 + 5z - 3}{-z^2 + 3z + 1}$

(ج) $\lim_{z \to i} \dfrac{2}{1 - 3z}$ (د) $\lim_{z \to 2i} \left[\dfrac{z + 2 - i}{z^2 + z - 1} \right]^2$

(هـ) $\lim_{z \to 1 - i} (z^2 - 2z + 1)$ (و) $\lim_{z \to -i} (z^3 - 5z^2 + 2z - 2)$

8 - اذا كان $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$

(أ) برهن $\lim_{z \to z_0} [3i\, f(z) - 4\, g(z)] = 3i\, A - 4\, B$

(ب) $\lim_{z \to z_0} [f(z)\, g(z) - 2i\, f^2(z)] = AB - 2iA$

9 - اذا كان

$$f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & ; z \neq i \\ 3 + 2i & ; z = i \end{cases}$$

جد $\lim_{z \to i} f(z)$ وحقق صحة الجواب

10 - اذا كان $f(z) = \dfrac{2z - 1}{3z + 2}$. برهن ان

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{7}{(3z_0 + 2)^2}$$

بحيث ان $z_0 \neq -\dfrac{2}{3}$

Scanned by CamScanner

2.4 الاستمرارية (Continuity)

يقال للدالة $\omega = f(z)$ المعرفة بجوار النقطة z_0 انها مستمرة في النقطة z_0 ، اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يمكن ايجاد $\delta > 0$ بحيث أن $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ لكل قيم z التي تحقق المتباينة $0 < |z - z_0| < \delta$.

أو بتعبير اخر تكون الدالة $\omega = f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 اذا تحققت الشروط الاتية :

1- يمكن تحديد وايجاد قيمة $f(z_0)$

2- يمكن ايجاد النهاية $\lim_{z \to z_0} f(z)$

3- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

تكون الدالة $\omega = f(z)$ مستمرة في المنطقة D اذا كانت مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة D .

مثال (1)

الدالة $\omega = \frac{1}{z}$ مستمرة لجميع قيم z عدا القيمة $z = 0$ لانه عند هذه القيمة $z = 0$ لاتوجد قيمة للدالة ω (أي تخالف الشرط الاول اعلاه)

مثال (2)

الدالة $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$ غير مستمرة في النقطة $z = 0$ وذلك لانه عندما تقترب z من الصفر على المحور الحقيقي تكو ن النهاية

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x + 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1$$

بينما اذا اقتربت z من الصفر على المحور الخيالي تكون النهاية

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x - iy}{x + iy} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - iy}{0 + iy} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

نجد ان النهايتين غير متساويتين (وبذ لك تخالف الشرط الثالث اعلاه)

مبرهنة (2.5) :

اذا كانت الدالتان $f(z), g(z)$ مستمرتين في النقطة $z = z_0$ ، فان الدوال :

Scanned by CamScanner

1- $f(z) \pm g(z)$

2- $f(z) \cdot g(z)$

3- $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f(z)}{g(z)}$

تكون جميعها مستمرة في النقطة $z = z_0$.

يمكن البرهنة عليها بتطبيق المبرهنات المقابلة لها في موضوع نهاية الدالة

مبرهنة (2.6)

اذا كانت الدالة $\omega = g(z)$ مستمرة في النقطة $z = z_0$ وكانت الدالة $f(\omega)$ مستمرة في النقطة $\omega_0 = g(z_0)$ فان الدالة المركبة $f(g)(z)$ مستمرة في النقطة $z = z_0$.

البرهان :

لما كانت $f(\omega)$ مستمرة في ω_0 بمعنى لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\varepsilon' > 0$ بحيث $|f(\omega) - f(\omega_0)| < \varepsilon$ لجميع ω في $|\omega - \omega_0| < \varepsilon'$ ولما كانت $\omega = g(z)$ مستمرة في z_0 بمعنى لكل $\varepsilon'' > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث $|g(z) - g(z_0)| = |\omega - \omega_0| < \varepsilon''$ لجميع قيم z التي تحقق $0 < |z - z_0| < \delta$ فاذا اخترنا $\varepsilon' = \varepsilon''$ ينتج لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث $|f(g(z)) - f(g(z_0))| < \varepsilon$ لجميع قيم z في $0 < |z - z_0| < \delta$ وبذلك تكون $f(g(z))$ مستمرة في z_0 أي أن $f(g(z)) \to f(g(z_0))$ عندما $z \to z_0$.

الاستمرارية المنتظمة (Uniform Continuity)

من تعريف الاستمرارية نلاحظ ان δ تعتمد على عددين $\in$ ، z_0 . اذا امكن ايجاد δ بحيث تعتمد فقط على $\in$ ولا تعتمد على النقطة $z_0 \in D$ فاننا نقول ان الدالة منتظمة الاستمرارية في المنطقة D . أي

Scanned by CamScanner

« تكون الدالة $\omega = f(z)$ منتظمة الاستمرارية في المنطقة D اذا كان لكل عدد $\epsilon > 0$ يمكن ايجاد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(z_2) - f(z_1)| < \epsilon$$

لكل قيم $z_1, z_2 \in D$ اللتين تحققان المتباينة

$$0 < |z_2 - z_1| < \delta$$ »

مبرهنة (2.7)

اذا كانت الدالة $\omega = f(z)$ مستمرة في منطقة محددة ومغلقة D فانها تكون منتظمة الاستمرارية في D .

لا داعي لبرهنة هذه المبرهنة وسوف نكتفي بذكر المنطوق ويمكن الاطلاع على البرهان في المصدر [2] من قائمة المصادر الاجنبية .

مثال (2)

برهن ان الدالة $f(z) = z^2$ منتظمة الاستمرارية في المنطقة $|z| < 1$.

الحل :

يجب ان نبرهن لكل $\epsilon > 0$ يمكن ايجاد δ بحيث $|z_2^2 - z_1^2| < \epsilon$ لكل $z_2 \in D$ و z_1 تحققان المتباينة $0 < |z_2 - z_1| < \delta$.

$$\therefore |z_2^2 - z_1^2| = |z_1 + z_2|\,|z_2 - z_1| \le [\,|z_1| + |z_2|\,]\,|z_2 - z_1|$$

$$< [\,1 + 1\,]\,|z_2 - z_1| < \epsilon$$

$$\therefore |z_2 - z_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

ومنها $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ وبهذا δ تعتمد فقط على ϵ ولا تعتمد على موقع z_2, z_1 في المنطقة $|z| < 1$ طالما المسافة بينهما اقل من $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

(تمارين 2.3)

1- هل الدالة

$$f(z) = \frac{3z^4 + 8z^3 + 7z^2 + 8z + 4}{z - i}$$

مستمرة عند النقطة $z = i$ ؟ لماذا ؟

Scanned by CamScanner

2 برهن أن الدالة $f(z) = \begin{cases} z^2 \ , \ z \neq z_0 \\ 0 \ , \ z = z_0 \end{cases}$ عندما $z_0 \neq 0$ هي غير مستمرة في النقطة $z = z_0$.

3- برهن أن $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الاستمرارية في المنطقة $|z| < 1$.

2.5 المشتقه (Derivative)

لتكن f دالة معقـــدة معرفـــة على المنطقـــة D التي تحوي جوار نقطة مـــا z_0 ، أي $N(z_0, \in)$. تعرف مشتقة الدالة f عند النقطة z_0 (وتكتب $f'(z_0)$) بانها النهاية

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \ldots\ldots (2.5.1)$$

بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة

يقال ان الدالة f قابلة الاشتقاق (differentiable) عند النقطة z_0 اذا كانت مشتقة f موجودة عند النقطة z_0 .

اذا رمزنا لـ $\Delta z = z - z_0$. يمكن اعادة كتابة (2.5.1) بالصيغة

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \ldots\ldots (2.5.2)$$

لما كانت $f(z)$ معرفة على جميع قيم z المنتمية الى جوار z_0 فان $f(z_0 + \Delta z)$ معرفة عندما $|\Delta z|$ صغيرة بكفاية .

غالباً مانضع المتغير z بدل نقطة معينة z_0 في المعادلة (2.5.2) ونفرض

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$$

التي تعني التغير في $\omega = f(z)$ الذي يقابل التغير Δz وبذلك تصبح الصيغة (2.5.2)

$$\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$$

Scanned by CamScanner

مثال (1)

اذا كانت $\omega = f(z) = z^2$ ، جد $\frac{d\omega}{dz} = f'(z)$

الحل :

باستخدام الصيغة (2.5.2) بعد جعل $z = z_0$ ينتج

$$\frac{d\omega}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

وبذلك ينتج

$$\frac{d\omega}{dz} = f'(z) = 2z$$

مثال (2)

برهن لاتو جد مشتقة للدالة $f(z) = \bar{z}$ $(I(z) \neq 0)$

الحل :

نفرض $z = x + iy$ ، فيكون

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

باعتبار $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، ينتج

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

واذا فرضنا $\Delta z \to 0$ على مسار يوازي المحور الحقيقي $(\Delta y = 0)$ ينتج

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - i.0}{\Delta x + i.0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1} = 1$$

واذا فرضنا $\Delta z \to 0$ مسار يوازي المحور $(\Delta x = 0)$ ينتج

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-1}{1} = -1$$

Scanned by CamScanner

نلاحظ ان الجوابين مختلفان عند اختلاف مسار الاقتراب نحو اية نقطة z في المستوي المعقد لذا نقول ان المشتقة للدالة $f(z) = \bar{z}$ غير موجودة .

مبرهنة (2.8)

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 فان تلك الدالة f مستمرة في النقطة z_0 .

البرهان :

لما كانت f قابلة للاشتقاق في z_0 فان $f'(z_0)$ موجودة

$$\therefore \lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$\therefore \lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \left[\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \cdot$$

$$[\lim_{\Delta z \to 0} \Delta z]$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

ومن ذلك نستنتج $\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$

أي $\lim_{z \to 0} f(z) = f(z_0)$

وبهذا ينتهي البرهان :

ملاحظة : ان معكوس هذه المبرهنة غير صحيح دائما . أي أن استمرارية الدالة في نقطة z_0 غير كاف لجعل الدالة قابلة للاشتقاق في z_0 ، كما وجدنا في المثال (2) حيث $f(z) = \bar{z}$ مستمرة في جميع نقاط المستوي المعقد لكنها غير قابلة للاشتقاق عندما $I(z) \neq 0$

التفاضل (Differential)

لتكن الدالة $\omega = f(z)$ عندئذ $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$.

اذا كانت f(z) مستمرة في المنطقة D وكذلك المشتقة $f'(z)$ مستمرة في تلك المنطقة. فان :

$$\Delta \omega = f'(z)\, \Delta z + \epsilon \Delta z$$

حيث $\epsilon \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$.

فاذا كتبنا $\Delta z = dz$ ، عندئذ المقدار $f'(z)\, dz$ (وهو القسم الرئيسي من $\Delta \omega$) يسمى بتفاضل الدالة $f(z)$ ويرمز له بـ $d\omega = f'(z)\, dz$ وعلى ذلك يكون

Scanned by CamScanner

$$d\omega = f'(z)\,dz \qquad \ldots\ldots (2.5.4)$$

$$\frac{d\omega}{dz} = f'(z)$$

ملاحظة : ان الرمز $\frac{d}{dz}$ هومؤثر تفاضلي (operator) اذا أثرعلى الدالة $\omega = f(z)$

فانه يعطي $f'(z) = \frac{d\omega}{dz}$

وبصورة مشابهة نحصل على مشتقات من مرتبات اعلى ، أي

$$f''(z) = \frac{d^2\omega}{dz^2}, f'''(z) = \frac{d^3\omega}{dz^3}, \ldots, f^{(m)}(z) = \frac{d^m\omega}{dz^m}, (m = 1,2, \ldots)$$

قواعد الاشتقاق Differentiation Formulas

ان صيغ اشتقاق المجموع والضرب والنسب والقوى بالنسبة للمتغير المعقد z هي نفسها كتلك التي بالنسبة للمتغير الحقيقي.

بعبارة اخرى، اذا كان k عدداً معقداً ثابتاً و n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(z), g(z)$ دالتين لهما مشتقتان في منطلقاتها من المستوي المعقد z فان الصيغ الآتية صحيحة :

1- $\frac{d}{dz}(k) = 0$ 2- $\frac{d}{dz}(z) = 1$ 3- $\frac{d}{dz}(k f(z)) = k \frac{d}{dz}(f(z))$

4- $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{d}{dz}(f(z)) \pm \frac{d}{dz}(g(z))$

5- $\frac{d}{dz}\{f(z) . g(z)\} = f(z) . \left\{\frac{dg(z)}{dz}\right\} + \left\{\frac{df(z)}{dz}\right\} . g(z)$

6- اذا كان $g(z) \neq 0$ فان

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z) . \frac{df(z)}{dz} - f(z) . \frac{dg(z)}{dz}}{\{g(z)\}^2}$$

7- $\frac{d}{dz}\{f(z)\}^n = n\{f(z)\}^{n-1} \frac{df(z)}{dz}$.

وبصورة خاصة عندما $f(z) = z^n$ حيث ان n عدد صحيح . ينتج

$$\frac{d}{dz}(z^n) = n z^{n-1}.$$

8- اذا كانت $\xi = g(z)$ و $\omega = f(\xi)$ فان $\frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz}$

يطلق على هذه القاعدة اسم قاعدة السلسلة (Chain Rule)

Scanned by CamScanner

9 اذا كان $w = f(t)$, $z = g(t)$ حيث t متغير معقد . فان

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \Big/ \frac{dz}{dt}$$

كذلك يمكن ايجاد صيغ مشابهة للتفاضل . مثلاً

$$d\{f(z) + g(z)\} = df(z) \pm dg(z) = \{f'(z) \pm g'(z)\}\, dz$$

$$d\{f(z) \cdot g(z)\} = f(z)\, dg(z) + g(z)\, df(z)$$

ان برهان الصيغ السابقة (9 1) هو بنفس الطريقة التي نبرهن بها الصيغ المماثلة في الدوال الحقيقية ولنبرهن مثلا الصيغ 6.5.4

برهان الصيغة 4

بتطبيق المبرهنة (2.3) في النهايات وباستعمال الصيغة (2.5.2) ينتج

$$\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) \pm g(z+\Delta z) - \{f(z) \pm g(z)\}}{\Delta z}$$

$$\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \pm \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{d}{dz}\{f(z)\} \pm \frac{d}{dz}\{g(z)\}.$$

برهان الصيغة 5

$$\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)\, g(z+\Delta z) - f(z)\, g(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)\{g(z+\Delta z) - g(z)\} + g(z)\{f(z+\Delta z) - f(z)\}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} f(z+\Delta z) \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} g(z) \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= f(z) \frac{d}{dz}\{g(z)\} + g(z) \frac{d}{dz}\{f(z)\}$$

برهان الصيغة 6

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{f(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)} - \frac{f(z)}{g(z)}\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z)\{f(z+\Delta z) - f(z)\} - f(z)\{g(z+\Delta z - g(z)\}}{g(z+\Delta z).\ g(z)\, \Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{g(z)\, g(z+\Delta z)}\left\{ g(z) \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f(z) \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}\right\}$$

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z) f'(z) - f(z) g'(z)}{\{g(z)\}^2}$$

Scanned by CamScanner

تمارين 2.4

1. استخدم صيغ المشتقة لايجاد $f'(z)$ لكل مما يأتي

(أ) $f(z) = z^6 + 2z^3 - 3$

(ب) $f(z) = (2z + 5)^8 (1 - 2z + z^2)^{10}$

(ج) $f(z) = \dfrac{(2z + 5)^8}{(1 - 2z + z^2)^{10}}$

2. استخدم تعريف المشتقة لايجاد $f'(z)$ لكل مما يأتي :

(أ) $f(z) = z^2 + 3z$

(ب) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

3- جد $f'(z_0)$ لكل مما يأتي

(أ) $f(z) = 3z^2 - z^{-1}$; $z_0 = i$,

(ب) $f(z) = z^3 + 2z - 3$; $z_0 = -1 + i$,

(ج) $f(z) = iz^2 + (1 - i)z$; $z_0 = \pi i$,

(د) $f(z) = z^2 + 1$; $z_0 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$,

(هـ) $f(z) = \dfrac{z + 1}{z - 1}$; $z_0 = 1 + i$.

4- اذا كان $f(z) = R(z)$ ، برهن على أن $f'(z)$ غير موجودة لجميع قيم z .

5- هل الدالة $f(z) = I(z)$ قابلة الاشتقاق ؟ برهن ذلك :

6- برهن أن الدالة $f(z) = |z|^2$ غير قابلة الاشتقاق .

Scanned by CamScanner

برهن على أن الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(z)^3}{|z|^2} & , \ z \neq 0 \\ 0 & , \ z = 0 \end{cases}$$

غير قابلة الاشتقاق عند النقطة $z = 0$

(تلميح : استخدم تعريف المشتقة لايجاد $f'(0)$ على المسار $y = mx$ ثم خذ قيمتين مختلفتين لـ m .)

2.6 الدوال التحليلية (Analytic functions)

يقال أن الدالة $\omega = f(z)$ تحليلية في النقطة z_0 اذا كانت قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 وفي كل نقطة في جوار للنقطة z_0 .

يقال أن الدالة $\omega = f(z)$ تحليلية في المنطقة D اذا كانت تحليلية في جميع نقاط هذه المنطقة D .

يقال أن الدالة $\omega = f(z)$ كلية (Entire function) اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد .

اذا كانت الدالة f تحليلية في بعض نقاط جوار ما لـ z_0 ماعدا z_0 نفسها فان النقطة z_0 تسمى نقطة شاذة (singular point) للدالة $f(z)$.

مثال (1)

جد النقاط الشاذة للدالة $\omega = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

الحل : بما ان $\dfrac{d\omega}{dz} = \dfrac{2}{(1-z)^2}$

اذاً الدالة تحليلية لجميع قيم z عدا $z = 1$ وهي النقطة التي عندها تكون المشتقة غير موجودة . ان النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة .

مثال (2)

ان الحدوديات (polynomial) هي دالة تحليلية لجميع نقاط المستوي المعقد . أي انها دالة كلية .

Scanned by CamScanner

مثال (3) برهن أن الدالة $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $z = 0$ لكنها ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$

الحل : بما أن

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \Delta \bar{z}) - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} \qquad \ldots\ldots (i)$$

اذا كانت $z = 0$ فان $\frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$ ومنها ينتج

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = 0 = f'(0)$$

أي أن مشتقة الدالة عند النقطة $z = 0$ موجودة وتساوي صفر .

الان سوف نبرهن على ان المشتقة لهذه الدالة غير موجودة بجوار النقطة $z = 0$.

اذا كانت $z \neq 0$ وكانت Δz حقيقية أي $\Delta z = \Delta x$ فان $\overline{\Delta z} = \Delta x$

وبالتعويض في (i) اعلاه واخذ النهاية ينتج

$$\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \left[\bar{z} + \Delta x + z \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \right]_{\Delta z,\ \Delta x \to 0} = \bar{z} + z$$

واذا كانت Δz خيالية صرفة أي $\Delta z = i\Delta y$ يكون $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$

وبالتعويض في (i) اعلاه ينتج (بعد أخذ النهاية)

$$\frac{d\omega}{dz} = \left[\bar{z} + (-i\Delta y) + z \cdot \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} \right]_{\Delta z = i\Delta y \to 0} = \bar{z} - z$$

وبما أن $z \neq 0$ (لانها أية نقطة بجوار النقطة $z = 0$) نجد أن النهاية للمشتقة $\frac{d\omega}{dz}$ ليست وحيدة حيث اعطت نتيجتين مختلفتين عندما $\Delta z \to 0$ عن طريقين مختلفين . نستنتج ان الدالة $f(z) = |z|^2$ غير قابلة للاشتقاق بجوار النقطة $z = 0$ وبذلك تكون الدالة $f(z) = |z|^2$ غير تحليلية.

من صيغ اشتقاق الدوال التي درسناها في البند السابق نستنتج بسهولة المبرهنة الاتية :

Scanned by CamScanner

مبرهنة (2.9)

اذا كانت الدالتان $f(z)$ ، $g(z)$ تحليليتين في المنطقة D فان

المجموع والفرق $f(z) \pm g(z)$

والضرب $f(z) \cdot g(z)$

والقسمة $\frac{f(z)}{g(z)}$; $g(z) \neq 0$

كلها دوال تحليلية في المنطقة D

معادلتا كوشي – ريمان Cauchy – Riemann Equations

الان سوف نضع الشرط اللازم والكافي من اجل ان تكون دالة معلومة تحليلية .
سوف نبرهن مبرهنة اساسية في تطوير دراسة الدوال التحليلية .
القسم الاول من هذه المبرهنة سوف يحتوي على الشرط اللازم تحققه دالة معلومة اذا كانت تحليلية .والقسم الثاني من المبرهنة سوف يحتوي على الشرط الكافي عندما تحققه دالة ما . تصبح دالة تحليلية .

مبرهنة (2.10)

اذا كانت الدالة

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (2.6.1)$$

تحليلية في المنطقة D فان الجزئين الحقيقي u والخيالي v يحققان معادلتي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \ldots\ldots (2.6.2)$$

وبالعكس اذا كانت المشتقات الجزئية في (2.6.2) مستمرة في D فان معادلتي كوشي ريمان تكونان كافيتين لان تجعل الدالة f تحليلية في المنطقة D

Scanned by CamScanner

ملاحظة

يمكن اثبات لزوم الشرط بفرض أن الدالة f قابلة للاشتقاق في المنطقة D بدل كونها تحليلية (راجع المصدر [2] من قائمة المصادر الاجنبية في نهاية الكتاب).

البرهان : القسم الاول : (لزوم الشرط)

بما أن الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة D وبفرض $z \in D$ فان

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

$$\therefore \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

اذا اخذنا النهاية نحو z على طريق يوازي المحور الحقيقي x ، أي نجعل

$$\Delta z = \Delta x + i(0) = \Delta x$$

ينتج

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \ldots\ldots (2.6.3)$$

واذا اخذنا النهاية عن طريق يوازي المحور الخيالي y ، أي نجعل

$$\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$$

ينتج

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right]$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \ldots\ldots (2.6.4)$$

وبما ان الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق في النقطة z فان القيمتين في (2.6.3) و (2.6.4) متساويتان أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Scanned by CamScanner

وبمساواة الجزئين الحقيقي مع الحقيقي والخيالي مع الخيالي ينتج

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبما أن z أية نقطة من D ، فان هذا يبرهن صحة (2.6.2)

القسم الثاني (كفاية الشرط) :

أي اذا تحققت المعادلتان (2.6.2) (معادلتي كوشي ريمان) وكانت هذه المشتقات الجزئية u_x , u_y , v , v_y مستمرة في D فان $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية في D.

لما كانت المشتقة الجزئية u_x وكذلك u_y مستمرتين فان

$$\Delta u = u(x + \Delta x , y + \Delta y) - u(x,y)$$

$$= \{u(x + \Delta x , y + \Delta y) - u(x , y + \Delta y)\} +$$

$$\{u(x , y + \Delta y) - u(x , y)\}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu_1 \right) \Delta y$$

حيث أن $\mu_1 \to 0 , \epsilon_1 \to 0$ عندما $\Delta y , \Delta x$ يقتربان من الصفر.

كذلك v_y ، v_x مستمرتان في D فان

$$\Delta v = v(x + \Delta x , y + \Delta y) - v(x , y)$$

$$= \{v(x + \Delta x , y + \Delta y) - v(x , y + \Delta y)\} + \{v(x , y + \Delta y) - v(x,y)\}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu_2 \right) \Delta y$$

Scanned by CamScanner

حيث أن $\epsilon_2 \to 0 \, , \mu_2 \to 0$ عندما $\Delta x \, . \, \Delta y$ يقتربان من الصفر

$$\therefore \Delta\omega = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + \epsilon \Delta x + \mu \Delta y$$

حيث أن $\epsilon = \epsilon_1 + i \epsilon_2 \to 0 \, , \mu = \mu_1 + i \mu_2 \to 0$ عندما $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

وباستعمال معادلتي كوشي ريمان نحصل على

$$\Delta\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(- \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y + \epsilon \Delta x + \mu \Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + \epsilon \Delta x + \mu \Delta y$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta x + i\Delta y = \Delta z$ نحصل على :

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \epsilon \frac{\Delta x}{\Delta z} + \mu \frac{\Delta y}{\Delta z} ,$$

وحيث أن الحدين الاخيرين في الطرف الايمن يقتربان من الصفر عندما $\Delta z \to 0$ لأن

$$\left| \epsilon \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| = \epsilon \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right|$$

ومن الواضح أن $\epsilon \to 0$ بينما $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right|$ لايتجاوز الواحد عندما $\Delta z \to 0$

وبهذا نحصل على :

$$\frac{d\omega}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

وهي مشتقة الدالة وبذلك فالمشتقة موجودة ووحيدة في أية نقطة z من D

∴ الدالة $f(z)$ تحليلية في D .وبهذا ينتهي البرهان .

Scanned by CamScanner

ملاحظة : اذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة D فان لجميع قيم $z \in D$ ينتج

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (2.6.5)$$

اذا رمزنا (للسهولة فقط) لـ $\frac{\partial u}{\partial x}$ بـ u_x ، $\frac{\partial v}{\partial y}$ بـ v_y وهكذا فالمعادلة (2.6.5)

تكتب بالصيغة :

$$f'(z) = u_x + i\,v_x = -i\,[\,u_y + i\,v_y\,]$$

مثال (4)

برهن ان الدالة $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$ كلية (أي تحليلية في جميع نقاط المستوي .)

الحل : بما ان $z = x + iy$ فان

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i(2xy + 5x - 1)$$

أي أن $u = x^2 - y^2 - 5y + 3$ و $v = 2xy + 5x - 1$

$$u_x = 2x = v_y$$
$$v_x = 2y + 5 = -u_y$$

فالمعادلتان لكوشي ريمان محققتان ولما كانت المشتقات الجزئية للدالتين u, v مستمرة عندئذ تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد . وان $f'(z) = 2x + i(2y + 5) = 2z + 5i$

وبذلك تكون الدالة $f(z)$ كلية .

مثال (5) ان الدالة $f(z) = z - i\bar{z}$ غير تحليلية ؛ برهن ذلك .

البرهان : نضع $z = x + iy$ ينتج .

$$f(z) = (x - y) + i(y - x)$$
$$= u + iv$$

$\therefore u_x = 1 = v_y\,,\ u_y = -1 \neq -v_x$

Scanned by CamScanner

أي ان معادلتي كوشي ريمان لا تتحققان عند اية نقطة في المستوي وبذلك تكون f(z) غير تحليلية .

مثال (6)

برهن ان الدالة $w = f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ تحقق معادلتي كوشي ريمان عند النقطة $z = o$ ولكنها ليست تحليلية عند النقطة $z = o$

الحل : بما ان $v = o$ و $u = x^2 + y^2$ ينتج

$$u_x = 2x \, , u_y = 2y \qquad , v_x = 0 . v_y = 0$$

ان معادلتي كوشي ريمان تتحققان عند النقطة $z = o + io$ لكن الدالة $f(z) = |z|^2$ غير تحليلية حسب ماجاء في مثال (3)

مثال (7)

برهن ان الدالة $f(z) = \sqrt{|xy|}$

غير تحليلية عند النقطة $z = o$ ولكنها تحقق معادلتي كوشي ريمان عند النقطة $z = o$.

الحل : من تعريف الداله نستنتج $u = \sqrt{|xy|} \, , v = o$

لجميع النقاط الواقعة على المحور الحقيقي $(y = o)$ وكذلك على المحور الخيالي $(x = o)$

يكون $v = 0$ و $u = \sqrt{|x| .0} = \sqrt{0. |y|} = 0$

وبذلك تكون جميع المشتقات الجزئية عند $z = 0$ أصفاراً أي أن

$$u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$$
$$\because u_x(0,0) = v_y(0,0) = 0 \quad ; u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$$

أي أن معادلتي كوشي ريمان تتحققان عند النقطة $z = 0$.

الان من تعريف المشتقة عند النقطة $z = 0$ نحصل على

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$$

اذا اخذنا المسار $y = mx$ نحو نقطة الاصل ينتج

Scanned by CamScanner

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|m|}\cdot x}{x(1+im)} = \frac{\sqrt{|m|}}{1+im}$$

أي أن المشتقة تأخذ قيم مختلفة باختلاف قيم m عند النقطة $z = 0$ وهذا يعني ان الدالة غير تحليلية عند النقطة $z = 0$.

ملاحظة : نلاحظ من المثال (7) ان تحقيق معادلتي كوشي ريمان غير كاف من اجل أن تكون الدالة تحليلية .

الصيغة القطبية لمعادلتي كوشي ريمان

يمكن كتابة معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية وذلك باستعمال الاحداثيات القطبية:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = re^{i\theta}$$

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

باستخدام قاعدة السلسلة وتطبيق تعريف المشتقة كما في المبرهنة (2.10) نحصل بسهولة على :

$$f'(z)\frac{\partial z}{\partial r} = u_r + iv_r$$

ولما كان $z = re^{i\theta}$ ينتج $\frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\theta}$

$$f'(z)\cdot e^{i\theta} = u_r + iv_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

ثم نعيد اشتقاق المعادلة $f(z)$ اعلاه جزئياً بالنسبة θ ∫

$$f'(z)\frac{\partial z}{\partial \theta} = u_\theta + iv_\theta$$

$$f'(z).re^{i\theta}.i = u_\theta + iv_\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

وبضرب طرفي (a) بـ $r.i$ يصبح الطرف الايسر لكل من (a) . (b) متساويان وبذلك ينتج

$$ri\,u_r - r\,v_r = u_\theta + iv_\theta$$

$$\therefore ru_r = v_\theta \quad ; \quad rv_r = -u_\theta$$

وهما صيغتا معادلتي كوشي ريمان بالاحداثيات القطبية

Scanned by CamScanner

ومن (a) و (b) ينتج

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r) = -ie^{-i\theta}[u_\theta + i v_\theta] . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot6\cdot6)$$

2.7 الدوال التوافقية : (Harmonic Functions)

لتكن $h(x,y)$ دالة حقيقية تعتمد على متغيرين حقيقيين x,y منطلقها في المستوي xy. تسمى h دالة توافقية في ذلك المنطلق اذا كانت مشتقاتها الجزئية الاولى والثانية مستمرة في ذلك المنطلق وتحقق المعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 , \quad \ldots \qquad (2\cdot7\cdot1)$$

وتسمى المعادلة (2·7·1) بمعادلة لابلاس (Laplace's equation).

يمكن كتابة (2·7·1) باختصار :

$$\nabla^2 h = 0 ,$$

حيث أن

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

مبرهنة (2·11)

اذا كانت $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ **دالة تحليلية في المنطقة** D، **فأن الدالتين** u,v **توافقيتان في** D .

البرهان :

بما أن f **دالة تحليلية ، فأن معادلتي كوشي ، ريمان تتحققان لكل** $z \in D$. أي أن ،

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x$$

الآن ، نستنتج من استمرارية المشتقات الجزئية في D (من احدى مبرهنات التفاضل والتكامل للدوال الحقيقية التي يمكن الاطلاع عليها في الجزء الاول . في [3]) أن

$$u_{xy} = u_{yx} \quad , \quad v_{xy} = v_{yx} \quad \ldots \qquad (2\cdot7\cdot2)$$

Scanned by CamScanner

باشتقاق معادلتي كوشي – ريمان ، نحصل على

$$u_{yx} = v_{yx} \quad , \quad u_{yy} = - v_{xy} \quad \ldots\ldots \quad (2\cdot7\cdot3)$$

بجمع المعادلتين في (2·7·3) وتطبيق (2·7·2) ، نحصل على

$$u_x + u_{yy} = 0$$

ولجميع قيم $z \in D$.

مرة اخرى باشتقاق معادلتي كوشي – ريمان ، نحصل على

$$u_{xy} = v_{yy} \quad , \quad u_{yx} = - v_{xx}$$

ومنها ينتج : $v_{xx} + v_{yy} = 0$.وبهذا يتم برهان المبرهنة .

مثال (1)

اثبت أن $f(x,y) = e^x \cos y$ دالة توافقية

البرهان : بما أن $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y\,(1)^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - e^x \cos y \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - e^x \sin y \,.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y + (- e^x \cos y) = 0$$

من الواضح بان المشتقات الجزئية الاولى والثانية للدالة f مستمرة لانها تركيب دالتين مستمرتين. وبما ان الدالة f قد حققت معادلة لابلاس . ∴ f دالة توافقية.

المرافق التوافقي (harmonic Conjugate)

اذا كانت الدالتان $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ توافقيتين في المنطقة D بحيث أن الدالة

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

تحليلية . فان الدالة $v(x,y)$ تسمى المرافق التوافقي للدالة u

ملاحظة :

(1) ان كلمة مرافق في التعريف السابق تختلف تماماً عن مرافق عدد معقد z والذي يرمز له $\bar{z}$

(2) اذا كان $v(x,y)$ مرافقاً توافقياً للدالة $u(x,y)$ فان $-u(x,y)$ هو مرافق توافقي للدالة $v(x,y)$ وذلك لان $-if(z)$ و $-u(x,y)$ على التوالي . هما القسمان الحقيقي والخيالي للدالة

Scanned by CamScanner

مثال (2)

جد مرافقاً توافقيا $v(x,y)$ للدالة $u(x,y) = e^x \cos y$

الحل :

لقد اثبتنا في المثال (1) بان $u(x,y)$ دالة توافقية . باستخدام معادلتي كوشي – ريمان نحصل على

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$\therefore v = \int v_y \, dy + \phi(x) = \int e^x \cos y \, dy + \phi(x) = e^x \int \cos y \, dy + \phi(x)$$

باخذ التكامل بالنسبة لـ y واعتبار x ثابتة

$$\therefore v = e^x \sin y + \phi(x)$$

حيث أن $\phi(x)$ دالة اختيارية تعتمد على x فقط وقابلة للاشتقاق .

نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x للمعادلة الاخيرة ونساوي الناتج مع $-\frac{\partial u}{\partial y}$ لان ينتج $v_x = -u_y$

$$v_x = e^x \sin y + \phi'(x) = -u_y = -(e^x.(-\sin y))$$
$$\therefore e^x \sin y + \phi'(x) = e^x \sin y$$
$$\therefore \phi'(x) = 0$$
$$\phi(x) = c_1$$

حيث أن c_1 ثابت معقد اختياري

$\therefore$ المرافق التوافقي هو

$$\therefore v = e^x \sin y + c_1$$

وان الدالة

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + i(e^x \sin y + c_1) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + i c_1 \\ &= e^x e^{iy} + c \\ &= e^{x+iy} + c \\ &= e^z + c \end{aligned}$$

حيث $c = ic_1$

ملاحظة : يمكن الحصول على الدالة

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

بالتعويض عن كل x بـ z وعن كل y بـ صفر لان $z = x + i.o$ يجعل $z = x$

وذلك بعد التأكد من ان $v(x,y)$ هي مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$

فيكون

$$f(z) = u(z,o) + iv(z,o)$$

Scanned by CamScanner

معادلة لابلاس بالصيغة القطبية

مبرهنة (2·12) :

المعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

تكافي $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$

البرهان : من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية :

$$r u_r = v_\theta$$
$$- r v_r = u_\theta$$

نشتق الاولى جزئياً بالنسبة لـ r ، نحصل على :

$$r u_{rr} + u_r = v_{\theta r}$$

ثم نشتق الثانية جزئياً بالنسبة لـ θ ، نحصل على :

$$- r v_{r\theta} = u_{\theta\theta}$$

ولما كان $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ لان المشتقات الجزئية مستمرة ينتج

$$r u_{rr} + u_r = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta}$$

$$\therefore r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

وبنفس الطريقة نشتق معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية بالنسبة لـ θ ثم بالنسبة لـ r (للمعادلتين السابقتين) ينتج

$$r u_{r\theta} = v_{\theta\theta} \quad , \quad - r v_{rr} - v_r = u_{\theta r}$$

وبحذف $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ لان المشتقات الجزئية مستمرة ، نحصل على :

$$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = 0$$

وبهذا يتم برهان المبرهنة .

Scanned by CamScanner

تمارين (2.5)

1 ــ برهن أن كلاً من الدوال الاتية كلية :

(أ) $f(z) = (3x + y) + i(3y - x)$,

(ب) $f(z) = e^{-y}.e^{ix}$,

(ج) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

(د) $f(z) = (z^2 - 2)\ e^{-x}.e^{iy}$.

2 – عين النقاط التي لا تكون فيها الدوال الأتية تحليلية ثم احسب مشتقة هذه الدوال في بقية النقاط :

(أ) $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z - i}$ ، (ب) $f(z) = \dfrac{z + 2}{z^2 - 4z + 5}$

3 – برهن انه اذا حققت الدالة $f(z) = u + iv$ معادلتي كوشي ريمان وكانت $f'(z) \neq 0$. فان مجموعة المنحنيات في المستوي xy

$u(x,y) = c_1$ $\qquad$ $v(x,y) = c_2$

تكون متعامدة (c_1 , c_2 ثابتان) .

4 – اذا كانت $\omega = f(z)$ تحليلية في المنطقة D، برهن أن

(أ) الدالة $f(z)$ ثابتة اذا كانت $f(z)$ (الدالة المرافقة) دالة تحليلية في D ،

(ب) الدالة $f(z)$ ثابتة اذا كانت القيمة المطلقة $|f(z)|$ ثابتة في D .

(ج) الدالة $f(z)$ ثابتة اذا كانت $f(z)$ دالة حقيقية في D .

5 – برهن ان الدوال الاتية ليست تحليلية في اي نقطة من المستوي المعقد :

(أ) $f(z) = xy + iy$ ، (ب) $f(z) = e^{y}(\cos x + i \sin x)$

6 – برهن أن الدالة :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & , z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$ ولكنها تحقق معادلتي كوشي ريمان عند $z = 0$.

(تلميح : خذ المسار $y = mx$).

7- برهن أن الدالة :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^2 + y^4} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$ ولكنها تحقق معادلتي كوشي – ريمان عند النقطة $z = 0$،

(تلميح : خذ المسار $x = my^2$).

8- برهن أن الدوال الاتية تحقق معادلة لابلاس التفاضلية الجزئية واحسب الدوال التحليلية المقابلة لها . $u + iv = f(z)$

(أ) $u = e^x.x\cos y - e^x.y\sin y$,

(ب) $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$,

(جـ) $u = (x - 1)^3 - 3xy^2 + 3y^2$.

9- برهن ان u دالة توافقية ثم جد المرافق التوافقي v عندما :

(أ) $u = 2x(1 - y)$ (ب) $u = 2x - x^3 + 3xy^2$

(جـ) $u = \sin h x \sin y$ (د) $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

10- برهن انه اذا كانت v مرافق توافقي للدالة u في منطقة معينة وان u مرافق توافقي للدالة v ، فان الدالتين u,v ثابتتان .

(تلميح : طبق معادلتي كوشي ريمان على الدالتين $u + iv$, $v + iu$).

11- برهن ان مجموعة المنحنيات حيث $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$

$f(z) = u + iv = \dfrac{z + 4}{z - 4}$

Scanned by CamScanner

تشكل مجموعتين من الدوائر المتعامدة (c_1 , c_2 ثابتان)

12- اذا كانت $z , \bar{z}$ مستقلة عن بعضها ، وكانت $u(x,y)$ دالة توافقية .

برهن $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \bar{z}} = 0$

(تلميح : طبق معادلة لابلاس واستعمل $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2} , y = \dfrac{z - z}{2i}$)

13- اذا كانت الدالة $f(z) = u + iv$ تحليلية في المنطقة D وكانت المشتقات الجزئية للدالتين u,v مستمرة في D ، برهن أن

(أ) $$\left[\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|^2 \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right]^2 = |f'(z)|^2 .$$

(ب) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

Scanned by CamScanner

الفصل الثالث

الدوال المعقدة الاولية

(3.1) الدالة الاسية (The exponential function)

قبل تعريف الدالة الأسية $f(z)$ ذات المتغير المعقد $z = x + iy$ ، علينا أقران هذه الدالة بالدالة الأسية الحقيقية e^x عندما يصبح x حقيقي . هكذا دالة يجب أن تحقق :

$$f(x + io) = e^x , \quad \ldots \quad (3\cdot1\cdot1)$$

لجميع الاعداد الحقيقية x .

نظراً لكون $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ؛ اذاً يجب اضافة شرط آخر على $f(z)$ وهو :

f ..... (3·1·2) دالة كلية و , $f'(z) = f(z)$ لجميع قيم z .

تأمل الدالة f المعرفة على كل المستوي المعقد بالمعادلة

$$f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y, \quad \ldots (3.1.3)$$

Scanned by CamScanner

من الواضح أن الدالة $f(z)$ المعرفة بالصيغة $f(z) = e^z$ عندئذ سوف نكتب

حيث أن y مقاسة بالتقدير الدائري . $(3\cdot1\cdot1)$ ، $(3\cdot1\cdot2)$ تحقق الشرطين $(3\cdot1\cdot3)$

تعرف الدالة الاسية للمتغير المعقد $z = x + iy$ بـ :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \ldots\ldots (3.1.4)$$

حيث y مقاسة بالتقدير الدائري .

اذا كانت $y = 0$ ، عندئذ (3.1.4) تؤدي الى الدالة الاسية الحقيقية e^x

واذا كانت $x = 0$ ، فان (3.1.4) تؤدي الى صيغة اويلر (Euler's formula)

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

بعض صفات الدالة الاسية :

1 – ان القيمة المطلقة للدالة الاسية هي :

$$|e^z| = e^x \left| \cos y + i \sin y \right| = e^x (\cos^2 y + \sin^2 y)^{1/2} = e^x$$

2 – ان زاوية الدالة الاسية هي :

$$\arg (e^z) = y + 2n\pi, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3– ان الدالة الاسية $\omega = e^z$ لاتساوي صفر لاية قيمة من قيم z اي ان $\omega = 0$ لاتقابل اية نقطة من نقاط المستوى z ، وبصورة عامة ان الدالة $e^z = \omega = p(\cos \phi + i \sin \phi) \neq 0$ هي صورة للدالة

$z = \text{Log} p + i\phi$ حيث $\text{Log}\, p$ ترمز الى اللوغاريتم الطبيعي للاعداد الحقيقية .

4– ان الدالة الاسية دورية بمقدار $2\pi i$ لان النسبتين $\sin y , \cos y$ دالتان دوريتان بمقدار 2π ، اي ان

$$e^{z + (2\pi i)k} = e^z . e^{2k\pi i} = e^z \{ \cos (2\pi k) + i \sin (2k\pi) \}$$

$$= e^z . (1 + i.0) = e^z \quad , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Scanned by CamScanner

5- ان الدالة الاسية تحليلية لانها :

(i) تحقق شرطي كوشي ريمان فاذا كان $e^z = u + iv$

فان

$$v = e^x \sin y \quad , \quad u = e^x \cos y$$

وان

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y = \frac{\partial u}{\partial x}$$

وكذلك

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

(ii) ان المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u,v بالنسبة y,x هي دوال مستمرة وان

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z .$$

اذاً

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^z) = e^z$$

وهكذا فإن مشتقة e^z هي نفسها e^z كما أن الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوي z وبذلك تؤلف e^z دالة كلية .

Scanned by CamScanner

خواص الدالة الاسية

اذا كان z, z_1, z_2 أية أعداد معقدة فإن

1. $e^0 = 1$
2. $e^z \neq 0$
3. $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y + 2n\pi$, $(n = 0, \pm 1 ...)$
4. $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
5. $(e^z)^n = e^{nz}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
6. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
7. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$
8. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$
9. $e^z = e^{z + 2\pi i}$

يمكن تحقيق هذه الخواص بفرض $z = x + iy$; $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$ واستعمال التعريف (3.1.4) ، فمثلاً لاثبات الخاصية (7) :

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} = e^{x_1 - x_2} \frac{(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)}{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2}$$

وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

اذاً

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \{ \cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2) \}$$

$$= e^{x_1 - x_2} e^{i(y_1 - y_2)} = e^{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} = e^{z_1 - z_2}$$

ولأثبات الخاصية (8) نكتب

$$\overline{(e^z)} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x . e^{-iy} = e^{x - iy} = e^{\bar{z}}$$

Scanned by CamScanner

مثال (1) جد كل قيم z بحيث $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

الحل : نلاحظ أن

$$e^x = |e^z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

ومنها ينتج $x = \text{Log}\, 2$

كما ان

$$\tan y = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\therefore z = \text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وهي مجموعة الحل المطلوبة .

مثال (2) برهن أن

$$|e^{2z+i} + e^{iz^2}| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

الحل :

$$|e^{2z+i} + e^{iz^2}| = |e^{2x}\{\cos(2y+1) + i\sin(2y+1)\},$$

$$+ e^{-2xy}\{\cos(x^2 - y^2) + i\sin(x^2 - y^2)\}|$$

$$= |\{e^{2x}\cos(2y+1) + e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)\}$$

$$+ i\{e^{2x}\sin(2y+1) + e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)\}|$$

$$= \{e^{4x} + e^{-4xy} + 2e^{2x - 2xy}(\cos(2y + 1 - x^2 + y^2))\}^{1/2}$$

$$\leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

لان القيمة العظمى لجيب التمام واحد .

Scanned by CamScanner

3.2 الدالة اللوغاريتمية (The Logarithmic Function)

ان الدالة اللوغاريتمية لعدد معقد z تعرف بـ

$$\omega = \log z = \text{Log } r + i \arg(z) \ , \ z \neq 0 \qquad \ldots (3.2.1)$$

حيث $r = |z|$ هو اللوغاريتم الطبيعي الحقيقي للقيمة المطلقة $\text{Log } r = \text{Log}|z|$

كما ان

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \ , (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, 0 \leq \theta < 2\pi) \ldots (3.2.2)$$

يظهر من (3.2.1), (3.2.2) ان الدالة اللوغاريتمية متعددة القيم (عددها غير منته) ان اية قيمة k تعين فرعاً (Branch) وحيداً للدالة اللوغاريتمية . فاذا كانت $k=0$ فان الفرع

$$\omega_0 = \text{Log} z = \text{Log } r + i\theta \ , r > 0 \ , 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \ldots (3.2.3)$$

يسمى بالقيمة الاساسية (Principal Value) للدالة اللوغاريتمية او الفرع الاساسي (Principal branch) . (لاحظ استخدام الرمز Log z لتعني الفرع الاساسي للوغاريتم) .

ان اي فرع من الدالة اللوغاريتمية هو دالة عكسية للدالة الاسية $\omega = e^z$ وذلك لان

$$e^{\log z} = e^{\text{Log}|z| + i \arg z} = e^{\text{Log}r + i(\theta + 2k\pi)} \ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= r\{\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)$$

$$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta = x + iy = z$$

ان القيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية (3.2.3) غير مستمرة في جميع نقاط المحور الحقيقي الموجب وذلك لانه اذا كانت $\alpha > 0$ فان النقطة $\theta = 0 \ , r = \alpha$ تقع على المحور الحقيقي الموجب ويكون الجزء الخيالي لـ Log z يساوي صفراً واذا اخذنا نقطة مجاورة الى $z = \alpha$ ومن القسم الاسفل للمحور الحقيقي الموجب نجد ان الجزء الخيالي يقترب من 2π مما يثبت ان Log z غير مستمرة عند النقطة $z = \alpha$. وبهذا فالقيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية (3.2.3) .. تحليلية في جميع نقاط المحور الحقيقي غير السالب .

القيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية تحقق شرطي كوشي – ريمان لانه اذا كان

Scanned by CamScanner

$$\text{Log } z = u + i\,v = \text{Log } r + i\theta$$

$$u = \text{Log} r\,,\ v = \theta$$

فان

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\,,\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\ \frac{1}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

اذاً

لو حددت المنطقة بـ $0 < \theta < 2\pi\,, r > 0$ لكانت القيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية $\text{Log } z$ تحليلية .

مشتقة الدالة اللوغاريتمية (3.2.3) هي

$$\frac{d}{dz}(\text{Log } z) = e^{-i\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\text{Log} r) + i \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\}$$

$$= e^{-i\theta} \left\{ \frac{1}{r} + 0 \right\} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}\,,$$

$$\{ |z| > 0\,, 0 < \theta < 2\pi \}$$

لقد اثبتنا ان $\text{Log } z$ ليست مستمرة في جميع نقاط المحور الحقيقي غير السالب وبذلك تكون $\text{Log } z$ غير قابلة للاشتقاق في نقاط المحور الحقيقي الموجب ونقطة الاصل

ملاحظة يمكن تحديد القيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية بتحديد θ ضمن اية فترة مفتوحة تبدأ من اية زاوية α وذات سعة 2π ، اي

$$\omega = \text{Log } z = \text{Log} r + i\theta\,.\,(r > 0.\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \ldots (3.2.4)$$

عندئذ تكون $\text{Log } z$ مستمرة وتحليلية ضمن الشريط الافقي المفتوح

$$\alpha < I(\omega) < \alpha + 2\pi$$

لان ضمن هذا الشريط (شكل 3.1) تكون مركبات الدالة اللوغاريتمية قابلة للاشتقاقات الجزئية بالنسبة لـ r,θ في كل نقاط هذا الشريط وان هذه المشتقات الجزئية تحقق الصيغ القطبية لشرطي كوشي – ريمان لذلك فان فرع دالة f (المتعددة القيم) هو أي دالة F وحيدة القيمة تكون تحليلية في منطقة ما بحيث لكل z فيها تكون $F(z)$ احدى قيم $f(z)$ المتعددة .

Scanned by CamScanner

شکل (3.1)

Scanned by CamScanner

ان جميع نقاط الشعاع $\theta = \alpha$ ونقطة الأصل تؤلف نقاطاً شاذة للفرع (3.2.4) . يطلق على الشعاع $\theta = \alpha$ قطع الفرع (branch cut) وبذلك يكون $\theta = 0$ قطع الفرع (3.2.3) وان نقطة الأصل هي نقطة شاذة لكل فروع الدالة اللوغارتيمية $\log z$ المتعددة القيم .

خواص $\log z$

اذا كان ω, z أي عددين غير الصفر فان

1. $\log (z\omega) = \log z + \log \omega$
2. $\log \dfrac{z}{\omega} = \log z - \log \omega$
3. $\log e^{z} = z + 2n\pi i, (n = 0, \pm 1, \pm 2....)$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log z^{1/k} = \dfrac{1}{k} \log z \ (k = \pm 1, \pm 2, ...)$

يمكن برهنة هذه الخواص بسهولة ، فمثلاً برهان الخاصية (1) ، نأخـــذ

$$\log (z\omega) = \text{Log} | z\omega | + i \arg (z\omega)$$

$$= \text{Log} | z | + \text{Log} | \omega | + i \arg z + i \arg \omega$$

$$= \text{Log} | z | + i \arg z + \text{Log} | \omega | + i \arg \omega$$

$$= \log z + \log \omega$$

ولبرهان الخاصية (3) نفرض $z = x + iy$ ، فإن :

$$\log e^{z} = \text{Log} | e^{z} | + i \arg e^{z} = x + i (y + 2k\pi)$$

$$= (x + iy) + 2k\pi i = z + 2k\pi i , k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Scanned by CamScanner

أما بالنسبة لبقية الخواص فتترك كتمرين للطالب .

نلاحظ من الخاصيتين (4) ، (5) أن

$$z^{1/n} = e^{(\log z)/n} \quad , n = 1, 2, \ldots\ldots$$

أي أن لكل قيمة ثابتة لـ z نحصل على n من القيم المختلفة في الطرف الأيمن .

نلاحظ أيضاً وبصورة عامة أن

$$\log z^n \neq n \log z, (n = 1, 2, \ldots) \ldots (3.2.5)$$

كما في المثال الآتي

مثال (1) أثبت أن $\log (i)^2 \neq 2 \log i$

الحل :

$$\log(i)^2 = \log(-1) = \text{Log}\,1 + i(\pi + 2k\pi) . k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= i(2k + 1)\pi$$

بينما

$$2 \log i = 2\left[\text{Log}\,1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= i(4k + 1)\pi$$

نجد أن نتيجتي الطرفين غير متساويتين .

أما بالنسبة للقيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية فان المعادلة (3. 2. 5) قد تبقى سارية المفعول وقد لاتبقى كما في المثالين الاتيين

مثال (2) أثبت أن $\text{Log}(1 + i)^2 = 2\text{Log}(1 + i)$

الحل :

$$\text{Log}(1 + i)^2 = \text{Log}(1 + 2i - 1) = \text{Log}\,2i = \text{Log}\,2 + i\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\text{Log}(1 + i) = 2\left[\text{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \text{Log}\,2 + i\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Scanned by CamScanner

وبهذا نجد أن الطرفين متساويان .

مثال (3) أثبت أن $\text{Log}(-1+i)^4 \neq 4\text{Log}(-1+i)$

الحل :

$$\text{Log}(-1+i)^4 = \text{Log}(-2i)^2 = \text{Log}(-4) = \text{Log}4 + i\pi$$

$$4\text{Log}(-1+i) = 4\left[\text{Log}\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right] = \text{Log}4 + 3\pi i$$

نجد أن الطرفين غير متساويين .

(تمارين 3.1)

1 – برهن $e^{(2+\pi i)/4} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

2 – جد جميع قيم z التي تحقق المعادلة

$$e^{2z-1} = 1 - i$$

الجواب :

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log 2 + i\left(\frac{7\pi}{8} + k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3 – برهن أن $e^{\bar{z}}$ دالة ليست تحليلية لكل قيم z .

4 – اكتب $R(e^{1/z})$ بدلالة x,y ثم برهن أنها دالة توافقية عندما $z \neq 0$

5 – اذا كانت $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ برهن أن

(أ) $\log(-1) = (2k+1)\pi i$ (ب) $\log 1 = 2k\pi i$

(ج) $\log(-i) = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$ (د) $\log i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$

6 – جد جميع جذور المعادلة $\log z = \frac{3\pi}{2}i$

Scanned by CamScanner

7 - أحسب اللوغاريتمات الآتية ثم عين قيمها الأساسية

(أ) $\log(\sqrt{3} - i)$ (ب) $\log(-3i)$ (جـ) $\log(1 - i)$

8 - برهن أن الدالة $\text{Log}(z - i)$ تحليلية في كل نقاط المستوى عدا مجموعة نقاط الشعاع

$x \geq 0$, $y = 1$.

9 - برهن أن $\text{Log}(x^2 + y^2)$ دالة توافقية في كل نقاط المستوي عدا نقطة الاصل.

10 - اذا كان $z \neq 0$. ω أي عددين معقدين ، يُعرف z^ω بالصيغة الآتية.

$$z^\omega = e^{\omega \log z}$$

استعمل التعريف أعلاه لكتابة كل مما يأتي بالصيغة $a + bi$ حيث أن a, b حقيقيان

(أ) $(i)^i$ (ب) $(1)^{\sqrt{2}}$ (جـ) $(1 + i)^{1-i}$ (د) 2^{1+i} (هـ) $\log(1 + i)^{1-i}$

11 - أثبت أن

$$\text{Log}(1 - i)^2 \neq 2\,\text{Log}(1 - i)$$

12 - ماهو الخطأ في العمليات الآتية

$$0 = 0$$

$$\text{Log } 1 = \text{Log } 1$$

$$\text{Log}(-1)^2 = \text{Log } 1$$

$$2\,\text{Log}(-1) = \text{Log } 1$$

$$2(\pi i) = 0$$

(3.3) الدوال المثلثية (Trigonometric Functions)

تأمل صيغة اويلر

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ومنهما ينتج

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

وعلى نفس المنوال يعرف جيب وجيب تمام المتغير المعقد $z = x + iy$ بالصيغ الآتية :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \ldots (3.3.1)$$

Scanned by CamScanner

ان الجيب وجيب التمام المعقدة هي دوال كلية (أي تحليلية في جميع نقاط المستوى) لانها ناتجة من تركيب خطي من e^{iz}, e^{-iz} التحليليتين في كل نقاط المستوي تعرف بقية النسب المثلثية المعقدة على نفس العلاقات الحقيقية . أي

$$\left.\begin{aligned} &\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, (\cos z \neq 0), \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, (\sin z \neq 0) \\ &\sec z = \frac{1}{\cos z}, (\cos z \neq 0), \csc z = \frac{1}{\sin z}, (\sin z \neq 0) \end{aligned}\right\} \ldots (3.3.2)$$

ان $\tan z \,.\, \sec z$ دالتان تحليليتان في كل نقاط المستوى عدا النقاط التي تجعل $\cos z = 0$ وكذلك $\cot z \,.\, \csc z$ دالتان تحليليتان في كل نقاط المستوى عدا النقاط التي تجعل $\sin z = 0$ كما يمكن أثبات قوانين الأشتقاق لهذه النسب المثلثية باستعمال التعريف (3.3.1) والعلاقات (3.3.2)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z, \quad \frac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z \\ &\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z, \quad \frac{d}{dz}(\cot z) = -\csc^2 z \\ &\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z, \quad \frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z \end{aligned}\right\} \ldots (3.3.3)$$

كذلك من (3.3.1) يمكن تحقيق العلاقات الاتية

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \\ &\sin(-z) = -\sin z \\ &\cos(-z) = \cos z \\ &\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 \\ &\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ &\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z \\ &\sin(2z) = 2 \sin z \cos z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3.3.4)$$

Scanned by CamScanner

حيث يمكن أثبات أي واحدة منها باستعمال التعريف (3.3.1) وحساب قيمة كل طرف من طرفي تلك العلاقة .

كيفية تعيين الجزئين الحقيقي والخيالي للجيب وجيب التمام المعقد

عند وضع $z = x + iy$ في التعريف (3.3.1) واستخدام (3.3.4) ينتج

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{1}{2}\left\{ e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2} e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2} e^{y}(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \right) - i \sin x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \right)$$

اذاً

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad \ldots\ldots (3.3.5)$$

وبنفس الأسلوب نجد أن

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad \ldots\ldots (3.3.6)$$

اذا جعلنا $x = 0$ في (3.3.5) , (3.3.6) نحصل على

$$\cos iy = \cosh y \quad ; \quad \sin iy = i \sinh y \quad \ldots\ldots (3.3.7)$$

واذا فرضنا $iy = t$. ينتج من (3.3.7)

$$\cos t = \cosh it \quad ; \quad \sin t = -i \sinh it \quad \ldots\ldots (3.3.8)$$

Scanned by CamScanner

أثبت أن $\cos z = \cos \bar{z}$; $\overline{\sin z} = \sin(\bar{z})$

مثال (1)

الحل :

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$$

$$= \sin x \cosh y - i \sin h y \cos x \quad \ldots\ldots (i)$$

$$\sin(\bar{z}) = \sin(x - iy) = \sin x \cos h y - i \sin h y \cos x \quad \ldots\ldots (ii)$$

من تساوي (i) ، (ii) ينتج المطلوب . (باستخدام 3.3.6)

وبنفس الأسلوب نبرهن القسم الثاني ويترك كتمرين للطالب .

ملاحظة : أن $|\cos z|, |\sin z|$ قد تاخذ قيماً اكثر من الواحد ؛ بينما نظيراتها في الدوال المثلثية الحقيقية تكون قيمها في الفترة $[0,1]$.

خواص الدوال المثلثية

اذا كان ω, z أي عددين معقدين فإن

1) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi . \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

2) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi ; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

3) $\sin(-z) = -\sin z$

4) $\cos(-z) = \cos z$

5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

6) $\sin(z + \omega) = \sin z \cos\omega + \cos z \sin\omega$

7) $\cos(z + \omega) = \cos z \cos\omega - \sin z \sin\omega$

8) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad ; z = x + iy$

9) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sin h^2 y \quad ; z = x + iy$

10) $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$: 11) $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$

12) $\sin(iy) = \sinh y$: 13) $\cos(iy) = \cos h y$

14) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$: 15) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$

16) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

Scanned by CamScanner

(3.4) الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

اذا كان $z = \cos\omega$ فإن حل المعادلة من أجل ω هو

$$\omega = \cos^{-1} z$$

وهو مايعرف بدالة جيب التمام العكسية . ومن أجل حساب جزئيها الحقيقي والخيالي نضع

$$z = \cos\omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}$$

ومنها نحصل على

$$e^{2i\omega} - 2z\, e^{i\omega} + 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة ينتج :

$$e^{i\omega} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

وحيث أن $\sqrt{z^2 - 1}$ دالة ثنائية القيمة ؛ اذا اخترنا الفرع الرئيسي للدالة $\omega = \cos^{-1} z$ الذي يحقق $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ ، نحصل على $e^{i\omega} = z + \sqrt{z^2 - 1}$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\omega = \frac{1}{i} \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

وبهذا يكون معكوس دالة جيب التمام بالصيغة الآتية

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i} \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \ldots (3.4.1)$$

نلاحظ أن دالة جيب التمام العكسية تؤلف دالة متعددة القيـــم .

عندما نستخدم فرعين محددين للجذر التربيعي واللوغاريتم (وليكن الفرع الرئيسي) فأن الدالة (3.4.1) تصبح احادية القيمة وتحليلية ، لكونها تركيب دالتين

Scanned by CamScanner

(3.4.1) عندئذٍ يمكننا ايجاد مشتقة دالة جيب التمام العكسية من الصيغة

تحليليتين . كما يلي :

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1}z) = \frac{1}{i}\,\frac{1 + \frac{-z}{\sqrt{z^2-1}}}{z + \sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{i(z^2-1)^{1/2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dz}(\cos^{-1}z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \ldots (3.4.2)$$

أما بالنسبة لدالة الظل العكسية $\omega = \tan^{-1}z$

نجد

$$z = \tan\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i(e^{i\omega} + e^{-i\omega})}$$

$$e^{-2i\omega} = \frac{1 - iz}{1 + iz} = \frac{i + z}{i - z}$$

$$\therefore \omega = \frac{i}{2}\log\frac{i + z}{i - z} \; ; \quad (z \neq \pm i)$$

$$\therefore \boxed{\tan^{-1}z = \frac{i}{2}\log\frac{i + z}{i - z}, \; z \neq \pm i} \quad \ldots (3.4.3)$$

أما مشتقة دالة الظل العكسية على أحد فروعه (ليكن الفرع الرئيسي) فهـــي :

$$\boxed{\frac{d}{dz}(\tan^{-1}z) = \frac{1}{1 + z^2} : \; z \neq \pm i} \quad \ldots (3.4.4)$$

وكذلك يمكن ايجاد بقية الدوال المثلثية العكسية :

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{aligned}
\sin^{-1}z &= \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),\\
\cot^{-1}z &= \frac{1}{2i}\log\frac{z+i}{z-i},\\
\sec^{-1}z &= \frac{1}{i}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right),\\
\csc^{-1}z &= \frac{1}{i}\log\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right),
\end{aligned}\right\} \quad \text{... (3.4.5)}$$

ومشتقاتها كما في (3.4.2) و (3.4.4)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\sin^{-1}z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\\
\frac{d}{dz}(\cot^{-1}z) &= \frac{-1}{1+z^2},\\
\frac{d}{dz}(\sec^{-1}z) &= \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}},\\
\frac{d}{dz}(\csc^{-1}z) &= \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}},
\end{aligned}\right\} \quad \text{..... (3.4.6)}$$

مثال : جد جميع قيم z التي تحقق المعادلة

$$\cos z = 3$$

الحل : من (3.4.1) نجد أن

$$z = \cos^{-1}3 = -i\log\left(3+\sqrt{9-1}\right) = -i\log\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

ولما كان

$$\cos(z+2k\pi) = \cos z$$

ينتج

$$z = 2k\pi - i\log\left(3+2\sqrt{2}\right);\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Scanned by CamScanner

الدوال الزائدية (Hyperbolic Functions)

تعرف دالتا الجيب وجيب التمام الزائدية بمتغيرات معقدة كما في حالة المتغيرات الحقيقية ، أي

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \; ; \; \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \ldots\ldots (3.5.1)$$

ومن هاتين الصيغتين تنتج بقية الدوال ، مثلاً

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \; ; \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

لما كانت e^{-z}, e^z دالتين تحليليتين في جميع نقاط المستوي المعقد (أي انهما دالتان كليتان) . ينتج من (3.5.1) ان جيب وجيب التماه زائدية دالتان كليتـــان . وكذلك بقية الدوال الزائدية تكون كلية في كل نقاط المستوي المعقد عدا النقاط التي تجعل مقامات صيغها اصفار

من (3.5.1) يمكن ايجاد المشتقتين

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \; ; \; \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z \qquad \ldots. (3.5.2)$$

وباستعمال قواعد الاشتقاق يمكن استخراج مشتقات بقية الدوال الزائدية

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}(\tanh z) = \operatorname{sech}^2 z \; ; \; \frac{d}{dz}(\coth z) = -\operatorname{csch}^2 z \\ &\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) = -\operatorname{sech} z \tanh z \; ; \; \frac{d}{dz}(\operatorname{csch} z) = -\operatorname{csch} z \coth z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3.5.2)$$

ان هذه المشتقات موجودة في كل نقاط المستوي عدا النقاط التي تجعل مقامات صيغها بدلالة الجيب وجيب التمام الزائدي . اصفار .

باستعمال معادلات (3.5.1) يمكن اثبات المتطابقات الآتية

1- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

2- $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

3- $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

4- $\sinh(-z) = -\sinh z \; ; \cosh(-z) = \cosh z$

5- $\sinh(iz) = i \sin z \; ; \cosh(iz) = \cos z$

Scanned by CamScanner

6- $\sin(iz) = i\sin hz \; ; \cos(iz) = \cos hz$

7- $\sin hz = \sin h(x + iy) = \sin hx \cos y + i\cos hx \sin y$

8- $\cos hz = \cos hx \cos y + i\sin hx \sin y$

9- $|\sin hz|^2 = \sin h^2 x + \sin^2 y$

10- $|\cos hz|^2 = \sin h^2 x + \cos^2 y$

ان دالتي الجيب وجيب التمام الزائديتين هما دالتان دوريتان بمقدار $2\pi i$ لان

$$\sin h(z + 2\pi i) = \frac{1}{2}[e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^z . e^{2\pi i} - e^{-z} e^{-2\pi i}] = \frac{1}{2}[e^z .1 - e^{-z} .1] = \sin hz$$

لان

$$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

كما أن دورة دالة الظل الزائدي هي πi لان

$$\tanh(z + \pi i) = \frac{e^z . e^{\pi i} - e^{-z} e^{-\pi i}}{e^z . e^{\pi i} + e^{-z} e^{-\pi i}} = \frac{e^z e^{2\pi i} - e^{-z}}{e^z e^{2\pi i} + e^{-z}}$$

$$= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \tanh z$$

اذا كان $\sin hz = 0$ فان $z = k\pi i \; ; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

واذا كان $\cos hz = 0$ فان $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i \; ; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

ويمكن تحقيقهما باستعمال (3.5.1)

Scanned by CamScanner

الدوال الزائدة العكسية (Inverse hyperbolic functions)

اذا كان $\sin h\omega = z$

فان $\omega = \sinh^{-1} z$ هو دالة الجيب الزائدي العكسي .

لايجاد صيغها نضع $\sin h\,\omega = z$

من (3.3.7) نحصل على

$$\sin(i\omega) = i\sin h\,\omega$$

$$\therefore \sin h\,\omega = -i\sin(i\omega) = z$$

أي أن

$$i\omega = \sin^{-1}(iz)$$

وباستعمال (3.4.5) ينتج

$$i\,\omega = -i\log\left(i(iz) + \sqrt{1-(iz)^2}\right)$$

$$\omega = -\log\left(-z + \sqrt{1+z^2}\right) = \log\frac{1}{-z+\sqrt{1+z^2}}$$

$$= \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\sin h^{-1} z = \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)} \quad \ldots(3.5.3)$$

وبنفس الاسلوب يمكن ايجاد بقية الدوال الزائدية العكسية ، وصيغها كالاتي :

Scanned by CamScanner

$$\cosh^{-1} z = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \ldots (3.5.4)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}, \; z \neq \pm 1 \quad \ldots (3.5.5)$$

$$\coth^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{z + 1}{z - 1} = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{z} \right), \; z \neq \pm 1 \quad \ldots (3.5.6)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} z = \log \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{z} \right), z \neq 0 \quad \ldots (3.5.7)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} z = \log \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{z} \right); z \neq 0 \ldots (3.5.8)$$

كما ان مشتقاتها كما في (3.4.2) , (3.4.4):

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

$$\frac{d}{dz}(\coth^{-1} z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sech}^{-1} z) = \frac{-1}{z\sqrt{1 - z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{csch}^{-1} z) = \frac{-1}{z\sqrt{z^2 + 1}}$$

Scanned by CamScanner

مثال : جد قيم z التي تحقق المعادلة $\cos h z = -\frac{1}{2}$

الحل باستعمال (3.5.4) نجد أن

$$z = \cos h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \log\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = \log e^{i(2\pi/3)} = \frac{2\pi}{3} i$$

ولما كانت دالة جيب التمام الزائدية دورية بمقدار $2\pi i$ فان كل قيم z التي تحقق معادلة السؤال هي

$$z = i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right); (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$$

تمارين (3.2)

١ استعمل تعريف الدوال المثلثية المعقدة لكتابة الدوال الاتية بالصيغة $u + iv$:

(أ) $\cos \pi$ (ب) $\sin \frac{\pi}{2}$ (ج) $\sin h (\pi i)$ (د) $\cos h (2i)$ (م) $\cos^{-1}(i)$ (ف) $\sec h^{-1}(1 + i)$

(هـ) $\tan(-\pi i)$ (و) $\sin i$ (ز) $\cos(-i)$ (ح) $\sin(1 + i)$ (ن) $\tan^{-1}(1 - i)$

(ط) $\coth i$ (ي) $\sec h(1 - i)$ (ك) $\sec(1 - i)$ (ل) $\csc(2i)$ (ص) $\sin h^{-1}(i)$

Scanned by CamScanner

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), z = k\pi i$ اذا وفقط اذا $\sinh z = 0$ -2 برهن

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ اذا وفقط اذا $\cosh z = 0$ -3 برهن

-4 برهن (أ) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ (ب) $\tan z = \tan \bar{z}$

-5 برهن $f(z) = \sin(\bar{z})$ ليست تحليلية لكل قيم z في المستوي المعقد

-6 برهن ان $\sin z, \cos z$ دالتان كليتان (اي تحليليتان في كل نقاط المستوي المعقد) .

-7 برهن $\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right| + \left|\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right| = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|$

حيث ان α, β اي عددين معقدين .

(تلميح : لاحظ ان $\left|\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha - \beta}\right|^2 = 2\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right|$

ثم استعمل المتطابقة $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.)

-8 برهن (أ) $\cosh\left(\frac{1}{2}\pi i \pm z\right) = \pm i \sinh z$

(ب) $\sinh\left(\frac{1}{2}\pi i \pm z\right) = i \cosh z$

(ج) $\tanh\left(\frac{1}{2}\pi i \pm z\right) = \pm \coth z$

(د) $\sinh(\pi i \pm z) = \mp \sinh z$

-9 جد الجزء الحقيقي والجزء الخيالي والقيمة المطلقة لكل من

(أ) $\sin z$ (ب) $\tan z$

-10 اذا كان $\sinh(x + iy) = e^{i\pi/2}$ جد قيم x, y الحقيقية .

-11 جد الجزء الحقيقي والخيالي للمقادير

(أ) $\operatorname{Log} \sin(\alpha + \beta i)$ حقيقيان α, β .

Scanned by CamScanner

(ب) $\tan\left\{ i\alpha \log \frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} \right\}$ ، α حقيقي

(جـ) $\left\{ \sin \frac{1+i}{4}\pi \right\}^{i}$

(د) $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^{\cos\alpha + i\sin\alpha}$ ، α عدد حقيقي

12 جد كل قيم z التي تحقق كل من المعادلات الآتية

(أ) $\sinh z = -1$ (ب) $\cos z = i$ (جـ) $\sin z = 2$

(د) $\csc z = -i$ (هـ) $\tanh z = 3$

13- اذا كان $|\cos(x+iy)| = 1$ برهن $\sin^2 x = \sinh^2 y$

14- اذا كان $|\sin(x+iy)| = 1$ برهن $\cos^2 x = \sinh^2 y$

15- جد مشتقات الدوال الآتية

(أ) $\log \sec^{-1}(z^2)$ (ب) $\cos^{-1}(3z+2)$

(جـ) $\tan^{-1}(\sinh z \cos z)$ (د) $\sinh^{-1}(z+i)$

16- اذا كان $\omega = t\sec(t \quad 2i)$ ، $z = \sec^{-1}(3t+2i)$

جد $\frac{d\omega}{dz}$

17- ابحث سلوك $\sin z$ ، $\cos z$ ، $\tan z$ عندما $z \to \infty$

18 اذا كان $z = re^{i\theta}$ برهن

$$z^i = e^{-(\theta+2k\pi)}\{\cos(\ln r) + i\sin(\ln r)\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

19- برهن $\left|\tanh \frac{(1+i)\pi}{4}\right| = 1$

20- اذا كانت $f(z)$ قابلة للاشتقاق برهن

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

Scanned by CamScanner

3.6 التطبيق بواسطة دوال بسيطة Mapping by Elementry Functions

لتكن R منطقة في المستوى z و $\omega = f(z)$ دالة وحيدة القيمة ، فان نقطة $P \in R$ المثلة بعدد معقد z تقابل نقطة وفقط نقطة واحدة Q المثلة بالعدد $\omega = f(z)$ في المستوى ω . لتكن T مجموعة كل النقاط Q في المستوى ω المقابلة لكل النقاط P الواقعة في R من المستوي z . يطلق على $\omega = f(z)$ اسم تطبيق (mapping) او تحويل (transformation) من المنطقة R في المستوي z الى المنطقة T في المستوى ω . ويطلق على Q المثلة بـ $\omega = f(z)$ صورة النقطة P المثلة بـ z

بصورة عامة اذا كانت مجموعة نقاط تؤلف منحنياً C في المستوي z فان مجموعة النقاط المقابلة بموجب التطبيق $\omega = f(z)$ تؤلف منحنياً Γ في المستوى ω . في بعض الحالات قد يكون Γ نقطة واحدة .

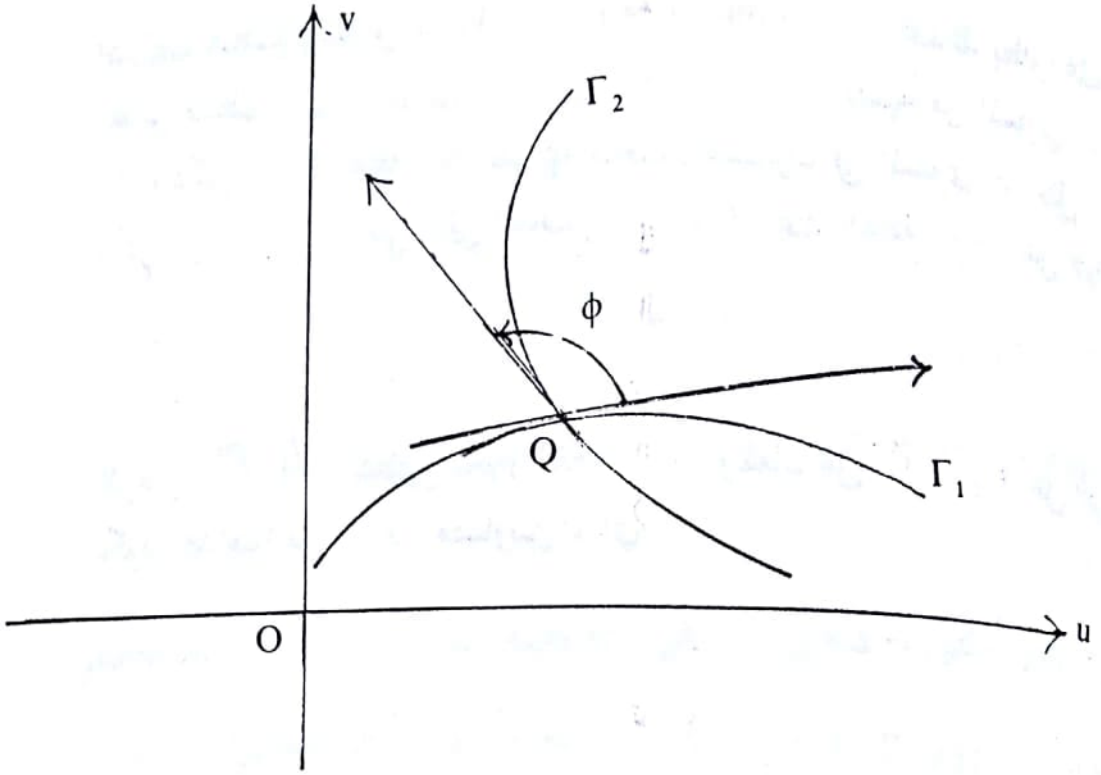
التطبيق العكسي Inverse mapping

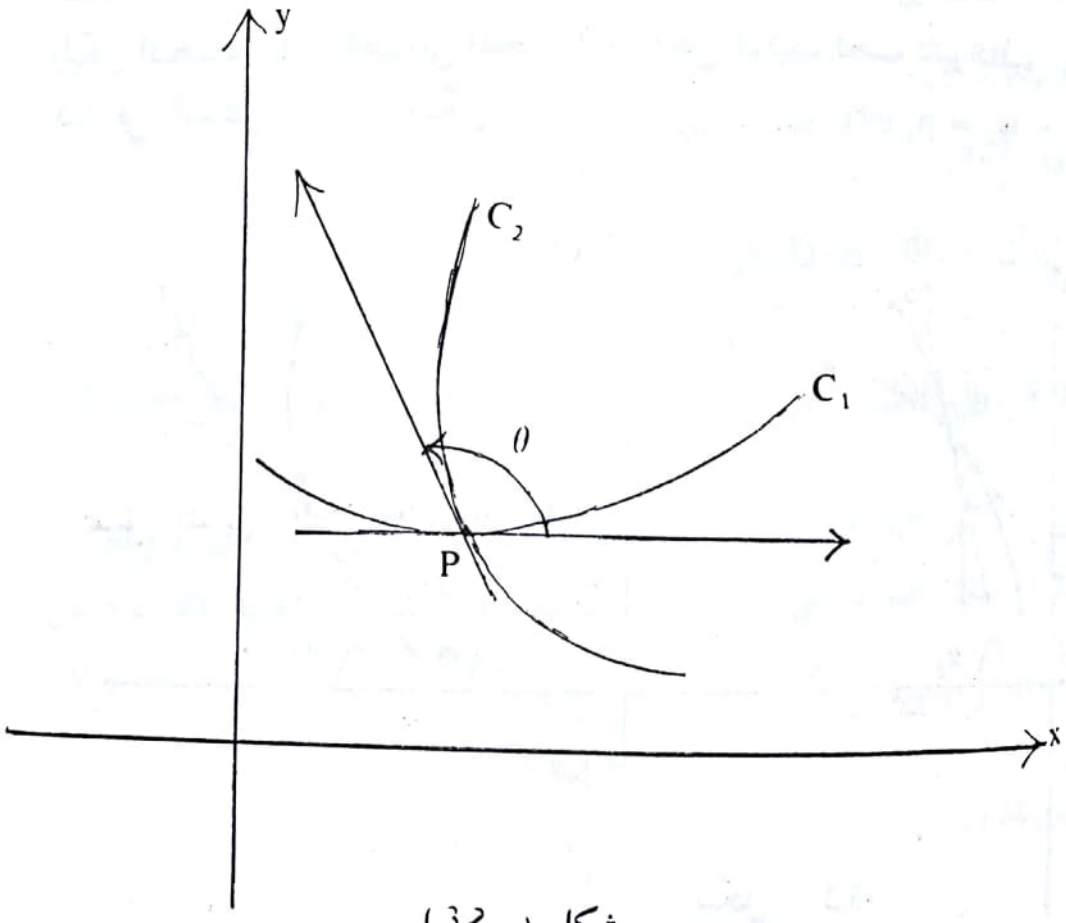
هو الذي يرجع نقاط من المستوي ω الى المستوي z . فاذا كان $\omega = f(z)$ تطبيقاً من المستوي z الى المستوي ω فان التطبيق العكسي هو الدالة الناتجة من حل z بدلالة ω ويكتب $z = f^{-1}(\omega)$ (لقد سبق ذكر الدالة العكسية في الفصل الثاني) وقد تكون هذه الدالة العكسية متعددة القيم . فمثلاً اذا كانت $\omega = z^n$ (n عدد صحيح موجب) فان $z = \omega^{1/n}$ تؤلف دالة متعددة القيم .

التطبيق المطابق Conformal mapping

لتكن $P(x_0, y_0)$ نقطة تقاطع منحنين C_1 . C_2 في المستوي z . ولتكن θ الزاوية بين مماسيهما عند النقطة P . لتكن $Q(u_0, v_0)$ صورة النقطة P في المستوي ω تحت تأثير التطبيق $\omega = f(z)$. وليكن امنحنياد Γ_1, Γ_2 صورتي المنحنين C_1, C_2 في المستوي ω (طبعاً Γ_1, Γ_2 يتقاطعان في Q) ولتكن ϕ الزاوية بين المماسين لـ Γ_1 . Γ_2 عند النقطة Q (كما في شكل 3.2) ، فاذا كانت $\phi = \theta$ يسمى التطبيق $\omega = f(z)$ تطبيقاً مطابقاً وعلى ذلك فالتطبيق المطابق هو الذي يبقى الزوايا بالمقدار والاتجاه دون تغيير .

Scanned by CamScanner





شکل (3.2)

Scanned by CamScanner

التطبيق المطابق المنتظم :

اذا كان التطبيق المطابق متبايناً (one - one) عندئذ يطلق عليه اسم تطبيق مطابق منتظم (Biuniform) . لتكن $\omega = f(z)$ تطبيقاً من المستوي z الى المستوي ω ولتكن z_0 نقطة ثابتة يمر بها منحنيان مستمران في المستوي z مثل C_1 C_2 لتكن α_1 , α_2 زاويتي ميلي المنحنين C_1 , C_2 عند النقطة z_0 على التوالي . وليكن

$$f'(z_0) \neq 0 .$$

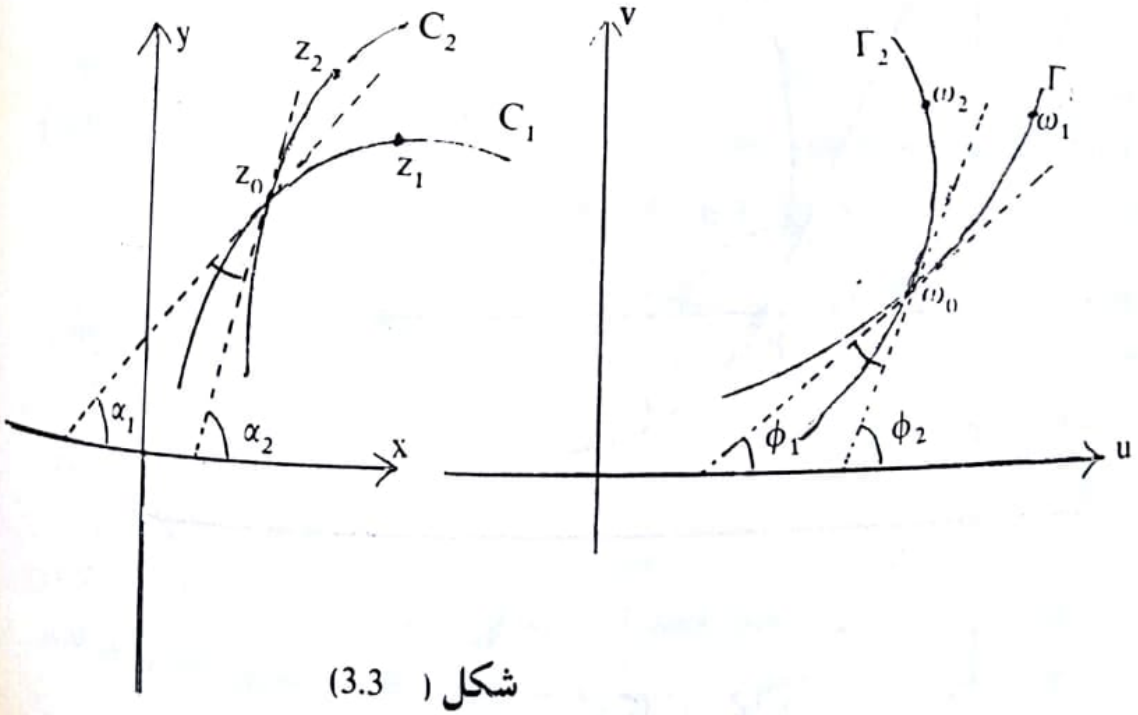
نفرض z_1 , z_2 نقطتين بجوار النقطة z_0 وتقعان على C_1 , C_2 على الترتيب بحيث يكون بعداهما من z_0 متساويين ، اي

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = r$$

$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}$$

عندئذ $z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}$,

عندما $r \to 0$ فان $\theta_1 \to \alpha_1 , \theta_2 \to \alpha_2$. لتكن النقاط $\omega_0 , \omega_1 , \omega_2$ صور النقاط z_0 , z_1 , z_2 وليكن المنحنيان Γ_1 , Γ_2 صورتي المنحنين C_1 , C_2 على الترتيب تحت تأثير التطبيق $\omega = f(z)$ كما في الشكل (3.3) . وليكن $\omega_1 - \omega_0 = p_1 e^{i\phi_1} , \omega_2 - \omega_0 = p_2 e^{i\phi_2}$



شكل (3.3)

Scanned by CamScanner

عندئذ

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{\omega_1 - \omega_0}{z_1 - z_0} = f'(z_0) \overset{\text{let}}{=\!=} R\, e^{i\lambda}$$

$$\lim_{\theta_1 \to \alpha_1} \frac{p_1\, e^{i\phi_1}}{r\, e^{i\theta_1}} = R\, e^{i\lambda}$$

أي أنّ

$$\lim_{\theta_1 \to \alpha_1} (\phi_1 - \theta_1) = \lambda \Rightarrow \lim_{\theta_1 \to \alpha_1} \phi_1 = \alpha_1 + \lambda$$

وعلى ذلك فان المماس للمنحني Γ_1 عند النقطة ω_0 يصنع زاوية $\alpha_1+\lambda$ مع المحورالحقيقي الموجب u .

وبنفس الطريقة فان المماس للمنحني Γ_2 في ω_0 يصنع زاوية $\alpha_2 + \lambda$ مع المحو الحقيقي الموجب u ، يؤدي الى $\phi_2-\phi_1=\alpha_2-\alpha_1$ ينتج من ذلك أن المنحنين Γ_1, Γ_2 يحصران نفس الزاوية التي يحصرها المنحنيان C_1, C_2 وبنفس الاتجاه. وبهذا يتم اثبات المبرهنة الاتية .

مبرهنة *(3.1)*

اذا كانت f دالة تحليلية في المنطقة R وكانت

$$f'(z) \neq 0$$

في المنطقة R . فان التطبيق $\omega = f(z)$ يكون مطابقاً (conformal) لكل نقاط R

ملاحظة 1، اذا كان التطبيق $\omega = f(z)$ مطابقاً فان كل شكل في المستوي z وبالقرب من النقطة z_0 تكون صورته في المستوي ω تقريباً مشابهة للشكل الاصلي بالقرب من ω_0 ومستديرة بزاوية

$$\lambda = \arg f'(z_0)$$

ومكبرة بمقدار

$$|f'(z_0)|$$

Scanned by CamScanner

ملاحظة (2) لتكن f دالة غير ثابتة وتحليلية عند النقطة z_0 اذا كانت $f'(z_0) = 0$ تسمى z_0 نقطة حرجة (critical point) . فمثلا النقطة $z = 0$ هي نقطة حرجة للتحويل $\omega = z^2$ بموجب هذا التحويل يكون الشعاع $\theta = c$ المرسوم من $z = 0$ صورة الشعاع $\phi = 2c$ المرسوم من $\omega = 0$. اي أن الزاوية بين اي شعاعين مرسومين من النقطة الحرجة $z = 0$ تتضاعف بموجب هذا التحويل . بصورة عامة اذا كانت z_0 نقطة حرجة للتحويل $\omega = f(z)$ عندئذ يوجد عدد صحيح موجب m بحيث ان الزاوية بين أي منحنين املسين يمران بالنقطة z_0 تتضاعف m من المرات تحت تأثير هذا التحويل. ان هذا العدد m هو اصغر عدد صحيح بحيث $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

ملاحظة (3) لما كان التطبيق $\omega = \bar{z} = x - iy$ يعكس النقاط بالنسبة للمحور الحقيقي ويبقى الزوايا على قيمها لكن يعكس اتجاهها ،لذلك فاذا كانت $\omega = f(z)$ تطبيقا مطابقاً، فان الدالة $\omega = f(\bar{z})$ تحفظ الزوايا ولكن تعكس اتجاهها.

سوف ندرس بعض التطبيقات الخاصة.

التطبيق الخطي Linear mapping

التطبيق الخطي هو الذي دالته $\omega = f(z)$ من الدرجة الاولى ، أي

$$\omega = az + b$$

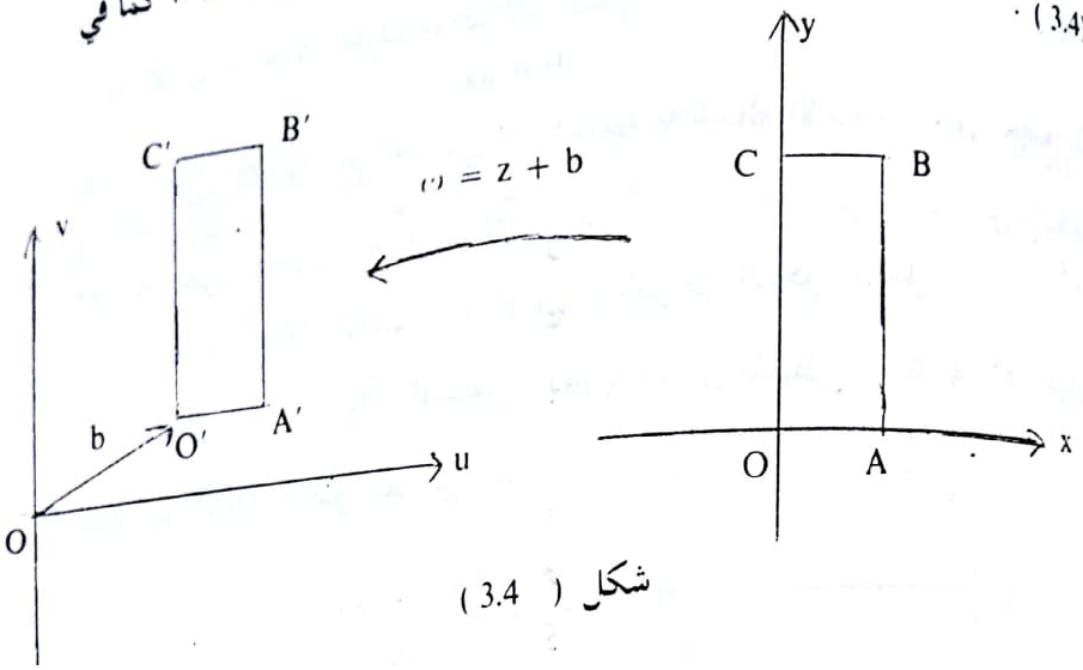
حيث ان b,a ثابتان معقدان

أ– اذا كان $a = 0$ فالتحويل $\omega = b$ يأخذ جميع نقاط المستوي z الى نقطة واحدة في المستوي ω هي b . واذا كانت $b = 0$ فالتحويل $\omega = 0$ يأخذ نقاط المستوى z الى نقطة الاصل في المستوي ω .

ب – التحويل $\omega = z + b$ هو انتقال نقاط المستوي z الى النقاط المماثلة في المستوي بعد تحريكها بالمتجه الذي يمثل العدد المعقد b . فاذا كانت $b = b_1 + ib_2$ عندئذ صورة النقطة (x,y) من المستوي z هي النقطة

Scanned by CamScanner

($x + b_1$ ، h_1) في المستوي ω . التطبيق $\omega = z + b$ ينقل المستطيل OABC الى
(h_1 ، $B'C'$) طبق الاصل لكنه مزاح عن 0 بالمتجه الذي يمثل العدد b كما في
المستطيل
شكل (3.4) .



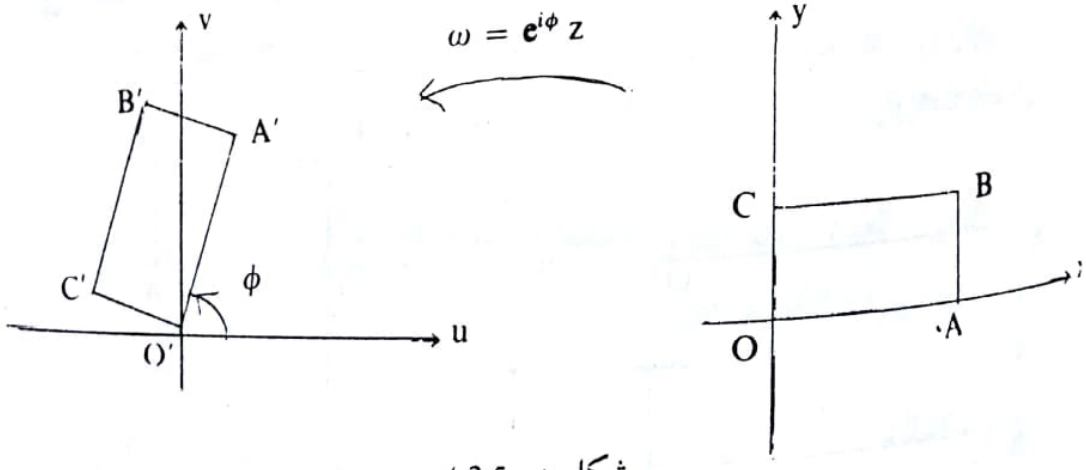
شكل (3.4)

ج) التطبيق التدويري (Rotation) $\omega = e^{i\phi}z$
حيث ان ϕ عدد حقيقي . لما كانت

$$\arg \omega = \arg z + (\phi + 2k\pi)\ ; k = 0, \pm 1, \pm 2,...$$

والقيمتان المطلقتان $|z| = |\omega|$ متساويتان ، فان الاشكال في المستوي z تكون صورها في المستوي ω طبق الاصل لكنها مستدارة حول 0 بزاوية مقدارها ϕ .

فالمستطيل OABC في المستوي z ينتقل الى المستطيل $O'A'B'C'$ في المستوي ω بواسطة التحويل $\omega = e^{i\phi}z$ كما في شكل (3.5)



شكل (3.5)

Scanned by CamScanner

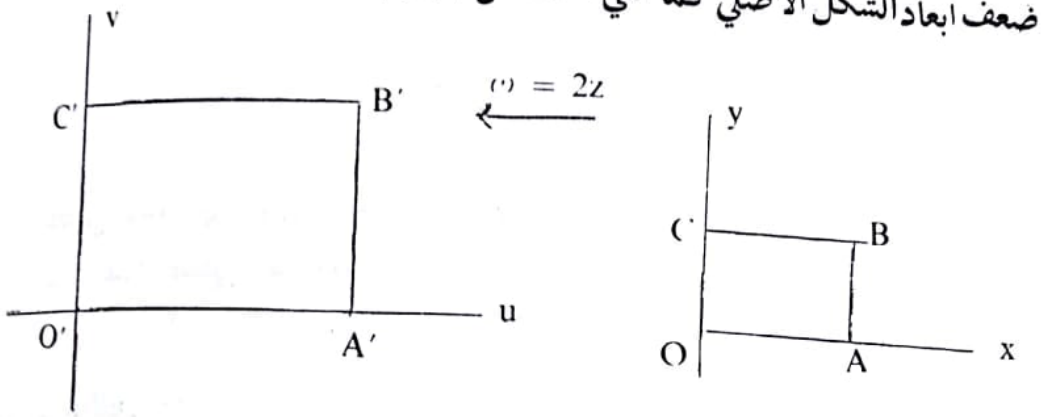
د) التكبير (magnification)

اذا كانت a عددا حقيقيا موجبا فان التطبيق

$$\omega = az$$

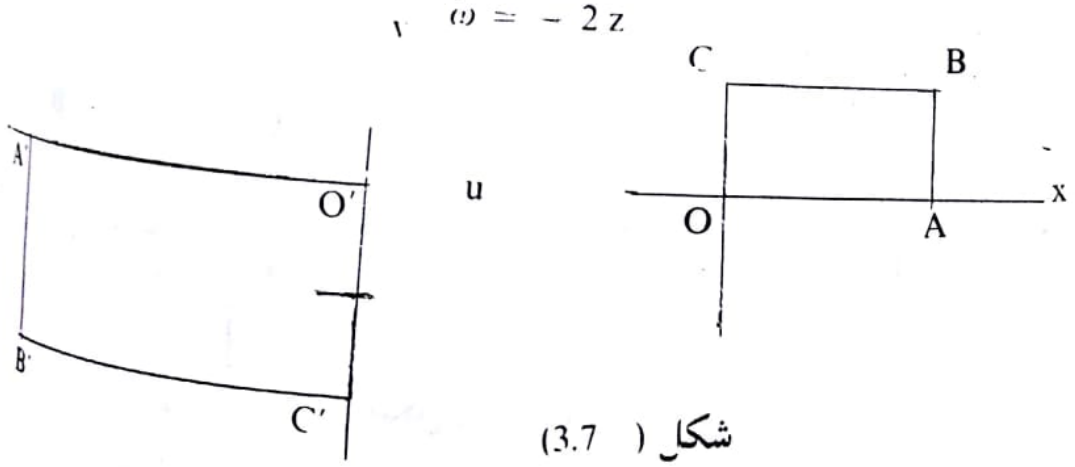
يبقي صور الاشكال في المستوي z متشابهة للاشكال الاصلية وبنفس الموضع لكن بعادهـ تكون مضروبة بعامل a . اذا كانت $0 < a < 1$ يسمى التطبيـق تقلص (contraction) .واذا كانت $a > 1$ فالصورة اكبر من الشكل الاصلي،

التطبيق $\omega = 2z$ ينقل المستطيل OABC الى المستطيل O′A′B′C′ ذي ابعاد ضعف ابعاد الشكل الاصلي كما في الشكـل (3.6) .



شكل (3.6)

اذا كانت a عددا حقيقيا سالباً فان الاشكال في المستوي z تنتقل الى اشكال مشابهة في المستوي ω بعد ضرب ابعادها بـ |a| وتدويرها بزاوية π حول الاصل (شكل 3.7)



شكل (3.7)

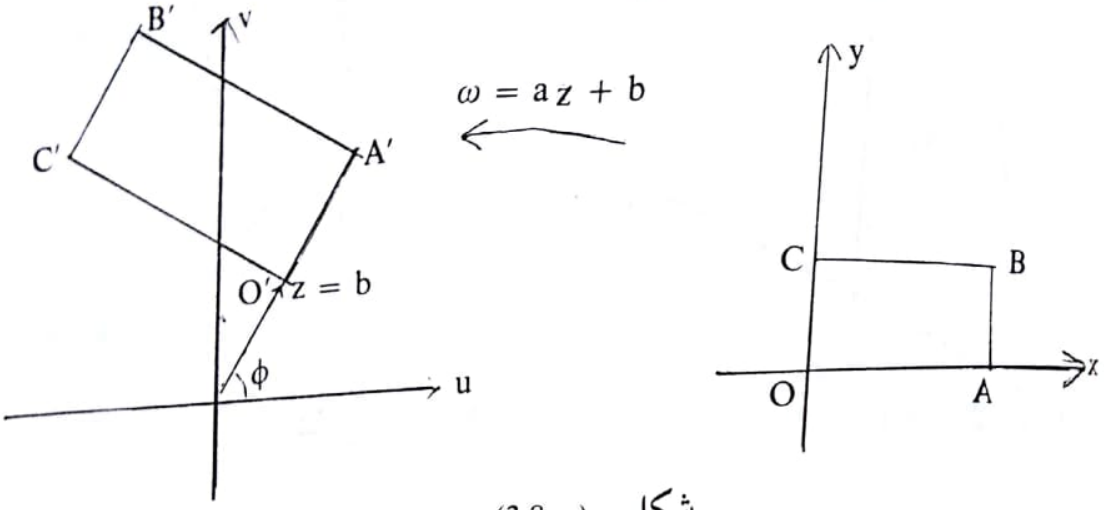
Scanned by CamScanner

٨) التكبير والتدوير

اذا كانت $a = re^{i\phi}$ فان التطبيق $\omega = a\,z$ يؤول الى

$$\omega = re^{i\phi}\, z$$

ويشمل عمليتين ، عملية تكبير بالضرب بـ r وعملية تدوير بزاوية ϕ ان التطبيق الخطي بصورة عامة $\omega = az + b$ يشمل ثلاث عمليات هي التكبير والتدوير والانتقال (كما في شكل 3.8) .



شكل (3.8)

ان التطبيق الخطي ينقل المستوي z بكامله ، بما في ذلك نقطة اللانهاية الى المستوى نفسه وينقل اللانهاية الى نفسها .

مثال 1 اذا كانت $A(2,1), B(-1,1), C(1,-2)$ جد صورة المثلث ABC بواسطة التحويل $\omega = (1-i)z - 1 - i$

الحل : العدد المعقد المقابل للنقطة $A(2,1)$ هو $z = 2 + i$

اذاً صورة النقطة A هي

$$A' = (1-i)(2+i) - 1 - i = 2 - 2i$$

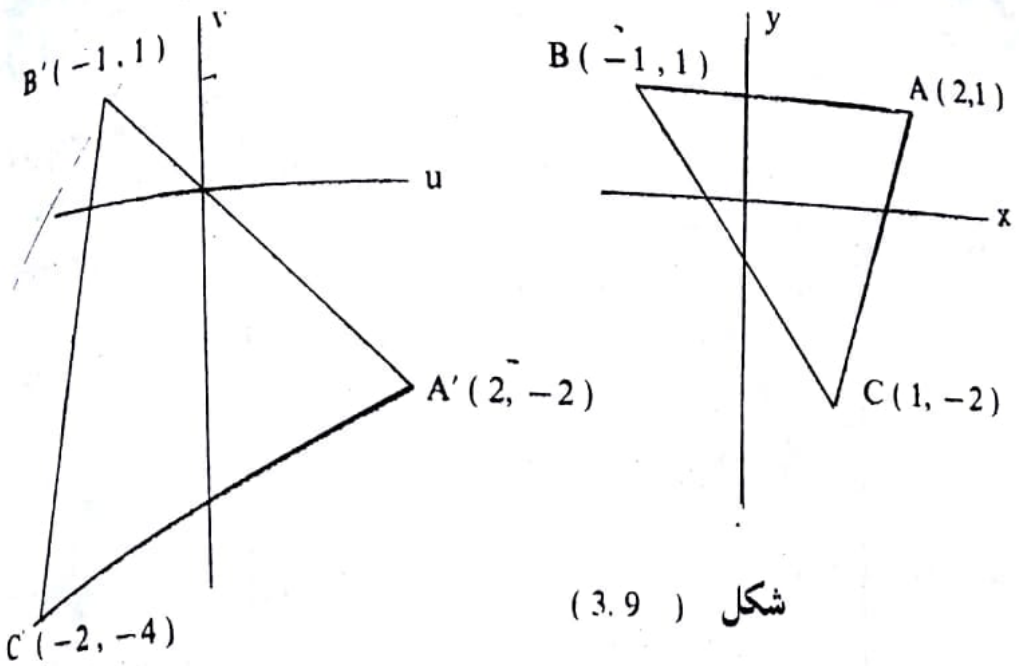
وكذلك

$$B' = (1-i)(-1+i) - 1 - i = -1 + i$$

$$C' = (1-i)(1-2i) - 1 - i) = -2 - 4i$$

Scanned by CamScanner

والشكل (3.9) يوضح هذا التطبيق



شكل (3.9)

ملاحظـة التطبيق الخطي ينقل المستقيمات في المستوى z الى مستقيمات في المستوى ω لان المعادلة الخطية تبقى خطية عند تأثير التطبيق الخطي عليها .

مثال (2) جد صورة الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ تحت تأثير التطبيق الخطي

$$\omega = (2 + 3i) z + 1 - i$$

الحل : نضع $\omega = u + iv , z = x + iy$ في دالة التطبيق ينتج

$$u = 2x - 3y + 1 \qquad v = 3x + 2y - 1$$

وبحل هاتين المعادلتين من اجل y,x ينتج

$$x = \frac{1}{13} (2u + 3v + 1) \quad , \quad y = \frac{1}{13} (2v - 3u + 5)$$

Scanned by CamScanner

وبالتعويض في معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ ينتج

$$u^2 + v^2 - 2u + 2v = 50$$

اي ان

$$(u - 1)^2 + (v + 1)^2 = 52$$

وهي دائرة مركزها $(1, -1)$ ونصف قطرها $2\sqrt{13}$ اي ان مركز دائرة الصورة هي النقطة التي احداثياتها متمثلة بالحد المطلق $(1-i)$ في دالة التطبيق الخطي ونصف قطرها $|2+3i|$ مضروب في نصف قطرها الاصلي .

2 - التطبيق $\omega = \frac{1}{z}$

ان الدالة $\omega = \frac{1}{z}$, $(z \neq 0)$ هي تطبيق متباين لكل نقاط المستوى z عدا نقطة الاصل.

فاذا كانت $z = r\,e^{i\theta}$ ، عندئذ $\omega = \frac{1}{r}\,e^{-i\theta}$

اذاً

$$|\omega| = \frac{1}{|z|}\,,\quad \arg\omega = -\arg z$$

ان هذا التطبيق يغير الاشكال ، فمثلاً يحول الدائرة أما الى دائرة اخرى او الى مستقيم .

تأمل الدائرة

$$|z - z_0| = r$$

أي أن

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$$

وباستعمال التطبيق $\omega = \frac{1}{z}$ ينتج

$$\left(\frac{1}{\omega} - z_0\right)\left(\frac{1}{\bar{\omega}} - \bar{z}_0\right) = r^2$$

$$(1 - z_0\bar{z}_0 - r^2)\,\omega\bar{\omega} - z_0\,\omega - \bar{z}_0\,\bar{\omega} + 1 = 0$$

فاذا كان $r^2 = z_0\bar{z}_0$ (أي ان الدائرة تمر بنقطة الاصل) فان صورتها في المستوي (ω) تكون خطا مستقيما لان المعادلة تصبح خطية بالنسبة لـ ω . واذا كان $r^2 \neq z_0\bar{z}_0$ فان المعادلة تصبح

Scanned by CamScanner

$$\left| \omega - \frac{\bar{z}_0}{z_0 \bar{z}_0 - r^2} \right| = \frac{r}{|z_0 \bar{z}_0 - r^2|}$$

وهي دائرة مركزها $\frac{\bar{z}_0}{z_0 \bar{z}_0 - r^2}$ ونصف قطرها $\frac{r}{|z_0 \bar{z}_0 - r^2|}$ يلاحظ أن مركز دائرة الصورة

$\frac{\bar{z}_0}{z_0 \bar{z}_0 - r^2} \neq \frac{1}{z_0}$ وأن $\frac{1}{z_0}$ ليست صورة مركز الدائرة الاصلية لان صورة لمركز z_0 هي

الا اذا كان $r=0$ ، أي أن الدائرة $|z - z_0| = r$ تؤدل الى نقطة واحدة هي المركز z_0

ان التطبيق $\omega = \frac{1}{z}$ يحول النقاط خارج الدائرة $|z| = 1$ إلى نقاط داخل الدائرة $|\omega| = 1$

بعد تغيير علامات الزوايا المعقدة . فاذا كانت $z = x + iy$, $\omega = u + iv$ فان

$$1 = \omega z = (u + iv)(x + iy) \Rightarrow$$

$$1 = ux - vy \ , \ 0 = uy + vx$$

وبحل هاتين المعادلتين من اجل x,y ينتج

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad , y = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

يمكن بواسطة هاتين المعادلتين من ايجاد انعكاس أي منحني بواسطة التطبيق $\omega = \frac{1}{z}$

فمثلا لايجاد انعكاس المستقيم $3x + 4y = 1$ نعوض عن x , y بدلالة u , v ينتج

$$3u - 4v = u^2 + v^2$$

أي

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + (v + 2)^2 = \frac{25}{4}$$

وهي دائرة مركزها $\left(\frac{3}{2} , -2\right)$ ونصف قطرها $\frac{5}{2}$ (لاحظ انها تمر بنقطة الاصل في المستوي ω)

Scanned by CamScanner

3- التحويل الكسري العام Bilinear transformation or Linear fractional transformation

اذا كانت a, b, c, d, اعداداً معقدة فان التحويل الكسري هو التطبيق الذي دالته

$$\omega = \frac{a z + b}{c z + d} \quad , \quad ad - bc \neq 0 \qquad \ldots\ldots (3.6.1)$$

ولوحسبنا z بدلالة ω من (3.6.1) لحصلنا على التحويل العكسي

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$$

الذي هو تحويل كسري أيضا .

اذا كانت $c \neq 0$ يمكن اعادة كتابة التحويل (3.6.1) بالصيغة

$$\omega = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{da}{c}}{cz + d} \qquad \ldots\ldots (3.6.2)$$

ان الصيغة (3.6.2) تقابل التطبيق الخطي

$$\omega_1 = cz + d$$

ثم اخذ مقلوبه $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$ ثم التطبيق الخطي

$$\frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c} \right) \omega_2$$

اذا كان $ad - bc = 0$ فان التحويل أو التطبيق (3.6.1) يؤول الى

$$\omega = \frac{a}{c}$$

Scanned by CamScanner

وهو التطبيق الثابت الذي ينقل جميع نقاط المستوي z الى النقطة $\frac{a}{c}$ اذا كانت $c=0$ فان

(3.6.1) تصبح تطبيقا خطيا

نفرض ان $c \neq 0$ ، فان المعادلة (3.6.1) تنقل نقاط المستوي z الموسع إلى نقاط المستوي ω الموسع واحدة بواحدة وعندئذ تنتقل النقطة $z=\infty$ الى النقطة $\omega = \frac{a}{c}$ والنقطة $z = -\frac{d}{c}$ الى $\omega = \infty$ وهذا يعني أن صورة نقطة اللانهاية في التحويل الكسري العام ليست نقطة اللانهاية

مثال (3) برهن ان التحويل الكسري $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوي الايمن $R(z) > 0$ الى داخل القرص $|\omega| < 1$

الحل : نحل $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ من اجل z ، ينتج $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$ اذاً

$$R(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\omega}{1-\omega} + \frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}\right] > 0$$

$$\frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad |\omega| < 1$$

النسبة التبادلية Cross ratio

يمكن ايجاد التحويل الكسري الذي ينقل ثلاث نقاط مختلفة z_1, z_2, z_3 الى ثلاث نقاط مختلفة $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ على الترتيب وذلك باستعمال صيغة النسبة التبادلية :

$$\frac{(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)}{(\omega-\omega_3)(\omega_2-\omega_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad \ldots (3.6.3)$$

التي يمكن اثباتها كما يلي :

Scanned by CamScanner

تأمل التحويل الكسري العام (3.6.1) . اذا كان $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ يناظر z_1, z_2, z_3 على .
التوالي فان :

$$\omega - \omega_1 = \frac{(z - z_1)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_1 + d)} ,$$

$$\omega - \omega_3 = \frac{(z - z_3)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_3 + d)} ,$$

وبالقسمة نحصل على :

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} = \frac{(z - z_1)(cz_3 + d)}{(z - z_3)(cz_1 + d)} \quad \ldots (i)$$

باحلال ω_2 بدل من ω , z_2 بدل من z ، نحصل على

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{(z_2 - z_1)(cz_3 + d)}{(z_2 - z_3)(cz_1 + d)} \quad \ldots (ii)$$

وبقسمة المعادلة (i) على (ii) نحصل على (3.6.3) ،

وبحساب ω من هذه المعادلة نحصل على تحويل كسري عام من الصيغة (3.6.1) اذا عوضنا عن $z = z_1$ ينتج $\omega = \omega_1$ واذا عوضنا عن $z = z_2$ ينتج $\omega = \omega_2$.
واذا قلبنا النسبتين في (3.6.3) ثم عوضنا عن $z = z_3$ ينتج $\omega = \omega_3$

مثال (4) جد التحويل الكسري الذي ينقل النقاط $z_1 = 0, z_2 = i$ $z_3 = -1$
الى النقاط $\omega_1 = 12, \omega_2 = 11 + i, \omega_3 = 11$ على الترتيب
الحل : بالتعويض في الصيغة (3.6.3) نجد ان

$$\frac{(\omega - 12)(11 + i - 11)}{(\omega - 11)(11 + i - 12)} = \frac{(z - 0)(i + 1)}{(z + 1)(i - 0)}$$

وبعد التبسيط نحصل على $\omega = \frac{10z - 12}{z - 1}$

Scanned by CamScanner

ملاحظة ان من خواص التحويل الكسري العام (3.6.1) ، اذا كانت $c \neq 0$ فانه توجد على الاكثر نقطتان ثابتتان هما جذرا المعادلة

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} = z$$

اي

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

لما كان التحويل الكسري العام (3.6.1) قابل للاشتقاق في كل النقاط $z \neq -\frac{d}{c}$

فان التحويل الكسري هو تطبيق مطابق في كل النقاط $z \neq -\frac{d}{c}$

مثال (5) جد التحويل الكسري الذي ينقل النقاط $z_3 = 0 \ , \ z_2 = i \ , z_1 = \infty$

الى النقاط $\omega_3 = \infty \ , \omega_2 = i \ , \omega_1 = 0$

الحل : بالتعويض في المعادلة (3.6.3) ينتج

$$\lim_{\omega_3 \to \infty} \frac{(\omega - 0)(i - \omega_3)}{(\omega - \omega_3)(i - 0)} = \lim_{z_1 \to \infty} \frac{(z - z_1)(i - 0)}{(z - 0)(i - z_1)}$$

بقسمة حدي الكسر الايمن على z_1 وحدي الكسر الايسر على ω_3 ثم اخذ النهاية ينتج

$$\frac{\omega}{i} = \frac{i}{z}$$

اي $\omega = \frac{-1}{z}$ وبهذا ينتهي الحل .

اذا وضعنا $z = x + iy$ في التحويل الكسري العام (3.6.1) ينتج

$$\omega = \frac{(ax + b) + iay}{(cx + d) + icy}$$

وبفصل الجزء الحقيقي عن الخيالي (بفرض a,b,c,d اعداد حقيقية) ينتج

Scanned by CamScanner

$$\omega = u + iv = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + c^2 y^2} + \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + c^2 y^2} i$$

من هذا يتضح ان الجزء الخيالي لـ ω يكون موجباً اذا كان $y > 0$ و $ad - bc > 0$.
(a,b,c,d اعداد حقيقية) .

وهكذا نرى ان التحويل الكسري العام الذي ينقل نصف المستوى العلوي الى نفسه هو من الصيغة (3.6.1) على ان تكون الثوابت حقيقية وتحقق المتباينة اعلاه .

4- التحويل $\omega = z^\alpha$

لنكن

$\omega = z^\alpha$ (α عدد حقيقي موجب) ... (3.6.4)

(أ) لما كان

$$|\omega| = |z|^\alpha ; \arg \omega = \alpha \arg z$$

فان الدوائر في المستوى z المتمركزة في نقطة الاصل تكون صورها بواسطة التحويل (3.6.4) في المستوى ω دوائر متمركزة في نقطة الاصل ايضاً . كذلك الاشعة الصادرة من نقطة الاصل تكون صورها في المستوي ω اشعة صادرة من نقطة الاصل ايضاً .

(ب) ان التحويل (3.6.4) مطابق في كل نقاط المستوي z عندما $z \neq 0$ لكن الزاوية θ عند نقطة الاصل تتغير الى $\alpha\theta$ اذا كانت $\alpha = 1$ فان التحويل (3.6.4) متباين ولجميع نقاط المستوى z .

اذا كانت α كسراً موجباً فان هذا التحويل ليس وحيد القيمة ، تأمل القطاع

$S_0(\theta_1, \theta_2)$

لجميع النقاط $z \neq 0$ وبحيث

$$\theta_1 < \arg z < \theta_2$$

و

$$0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$$

ان $S_0(\theta_1, \theta_2)$ متباين اذا كان غير خالية ومتصلة وبذلك تؤلف منطقة . ان التحويل (3.6.4)

Scanned by CamScanner

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1) \leq 2\pi$$

وفي هذه الحالة فان التحويل $\omega = z^\alpha$ يحول القطاع $S_0(\theta_1, \theta_2)$
في المستوي z الى القطاع $S_0(\alpha\theta_1, \alpha\theta_2)$ في المستوي ω
ويجب ملاحظة ان القطاع

$$S_0(\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi) ; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ينطبق هندسياً على $S_0(\theta_1, \theta_2)$ ولكن صورته بواسطة التحويل (3.6.4) قد لاتنطبق على صورة $s_0(\theta_1, \theta_2)$.

(ج) ان التحويل (3.6.4) يؤلف دالة تحليلية في جميع نقاط $S_0(\theta_1, \theta_2)$ وان مشتقتها $\alpha z^{\alpha-1}$ لاتساوي صفراً في هذه المنطقة (لانها لاتحوي الصفر : اي $z \neq 0$) .

(د) ان التحويل (3.6.4) يحول الدائرة التي نصف قطرها r_0 ومركزها نقطة الاصل الى الدائرة $u^2 + v^2 = r_0^{2\alpha}$
ويحول القوس $r = r_0$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{\alpha}$
الى كل الدائرة $u^2 + v^2 = r_0^{2\alpha}$ في المستوى ω .

لندرس التحويل $\omega = z^2$ بشيء من التفصيل .

اذا فرضنا $\omega = u + iv$. فان :

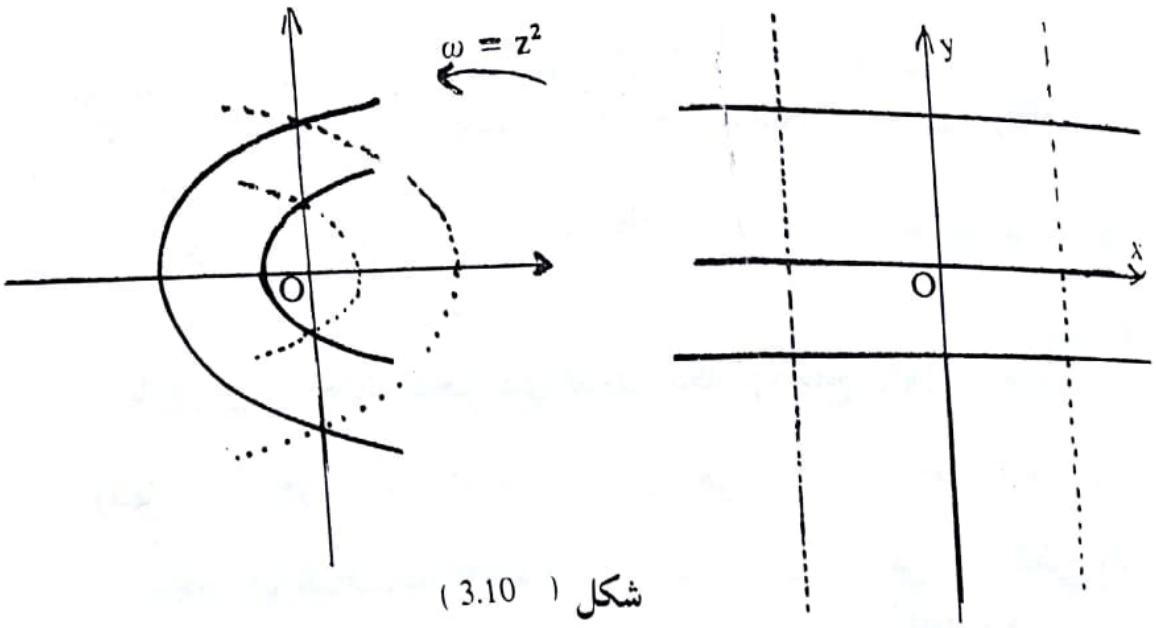
$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy \qquad \ldots (3.6.5)$$

(أ) ان صور المستقيمات الافقية $y = k$ في المستوي z (بواسطة التحويل $\omega = z^2$) هي القطوع المكافئة

$$v^2 = 4k^2(u + k^2) \qquad \ldots (3.6.6)$$

التي تشترك في بؤرة واحدة هي نقطة الاصل وكذلك تشترك في محور واحد هو $v = 0$ لكل قيم k وتكون رؤوسها على محور u السالب ومفتوحة باتجاه محور u الموجب .

Scanned by CamScanner



شكل (3.10)

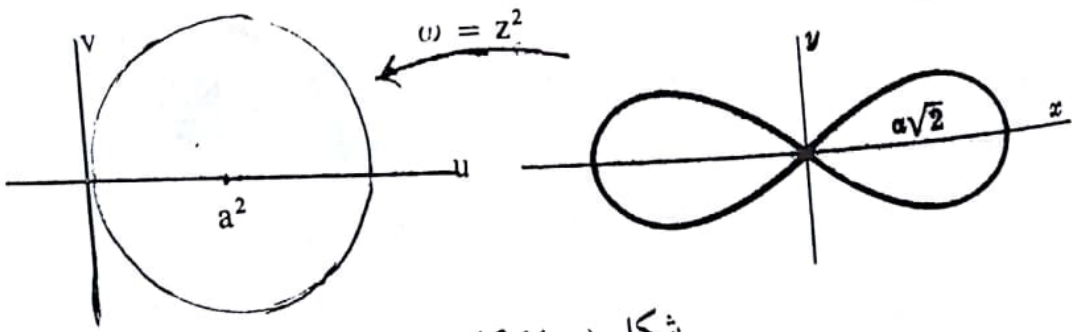
كما أن صور المستقيمات الرأسية $x=h$ في المستوى z بواسطة التحويل $\omega=z^2$ هي ايضاً قطوع مكافئة

$$v^2 = -4h^2(u - h^2) \quad \ldots (3.6.7)$$

تشترك في بؤرة واحدة هي نقطة الاصل وكذلك تشترك في محور واحد هو $v=0$ لكل قيم h لكن رؤوسها تقع على محور u الموجب ومفتوحة باتجاه محور u السالب (شكل 3.10) ان مجموعتي القطوع المكافئة (3.6.6) ، (3.6.7) متعامدتان في نقاط تقاطعهما $(h^2 - k^2, \pm 2hk)$ ويمكن بسهولة تحقيق ذلك بحساب الميل لكل منهما في نقاط التقاطع وهذا مايؤيد أن الزاوية لاتتغير في التحويل المطابق باعتبار ان المستقيمات الافقية تتعامد مع المستقيمات الرأسية في المستوي z .

ب) تأمل معادلة المنحني ذي العروتين (Lemniscate)

$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ بالاحداثيات القطبية (شكل 3.11)



شكل (3.11)

Scanned by CamScanner

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

ومعادلته بالاحداثيات الكارتيزية

ان صورة هذا المنحني بواسطة التحويل $\omega = z^2$ هي الدائرة $|\omega - a^2| = a^2$ وذلك من

(3.6.4) و $u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$ ينتج

$$(x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2$$

وبالتعويض في معادلة المنحني ذي العروتين الكارتيزية ينتج $u^2 + v^2 = 2a^2u$

ومنها $(u - a^2)^2 + v^2 = a^4$ التي هي $|\omega - a^2| = a^2$

جـ) ان المستقيمات الافقية والرأسيـــة في المستوي ω هي صور لقطوع زائدة في المستوي z لان $u = c$ (حيث c عدد حقيقي) هو صورة للقطع الزائد

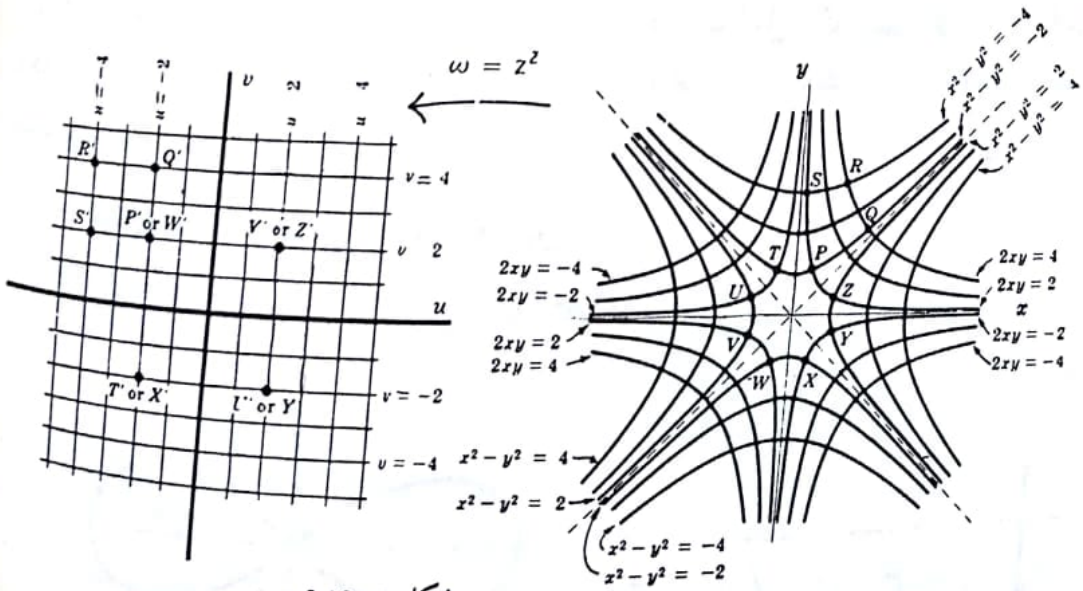
$$u = x^2 - y^2 = c$$

مركزه نقطة الاصل ومحوره المقطوع هو المحور x اذا كان $c > 0$

بينما يكون محوره المقطوع هو المحور y اذا كان $c < 0$ وكذلك $v = k$ هو صورة للقطع الزائد

$$v = 2xy = k$$

مركزه ايضا نقطة الاصل ومحوره المقطوع هو $y = x$ اذا كان $k > 0$ بينما يكون محوره المقطوع هو $y = -x$ اذا كان $k < 0$ كما في شكل (3.12)



شكل (3.12)

Scanned by CamScanner

5 - التحويل $\omega = e^z$

اذا استعملنا الصيغة القطبية $z = x + iy$, $\omega = \rho e^{i\phi}$ فان التحويل $\omega = e^z$ يصبح

$$\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$$

ومنها ينتج

$$\rho = e^x , \phi = y \quad \ldots\ldots (3.6.8.)$$

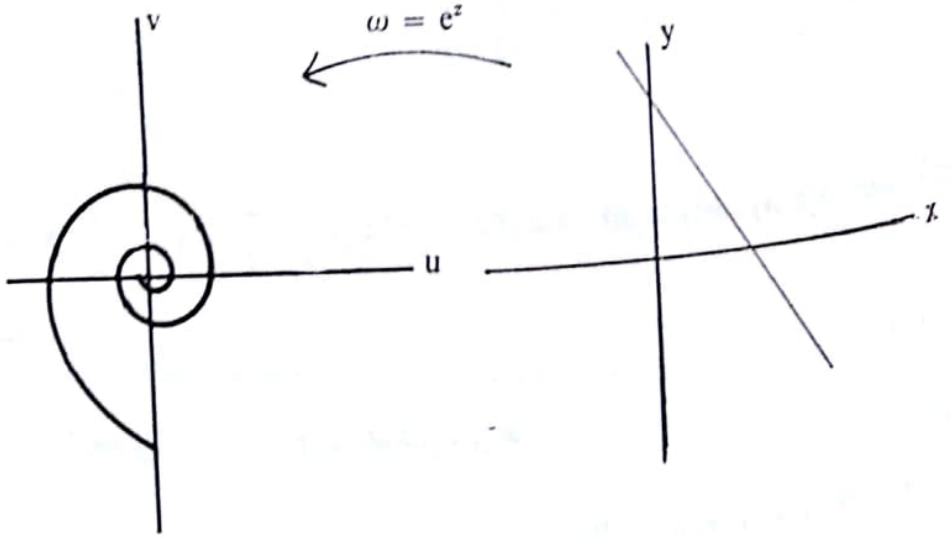
(أ) من هذا ينتج ان المستقيمات الرأسية $x = h$ تكون صورها في المستوي ω الدوائر المتمركزة في الاصل وانصاف اقطارها $\rho = e^h$ والمستقيمات الافقية $y = k$ تكون صورها في المستوي ω الاشعة الصادرة من الاصل والتي تصنع زاوية $\phi = k$ مع المحور u

كذلك اي مستقيم اخر في المستوي z ولتكن معادلته

$$ax + by = c \quad ; \quad (ab \neq 0)$$

تكون صورته اللولب اللوغاريتمي (logarithmic spiral) شكل (3.13)

$$\rho = e^{(c - b\phi)/a} = A e^{m\phi}$$



شكل (3.13)

Scanned by CamScanner

ب) ان التحويل $\omega = e^z$ يكون متبايناً لكل منطقة لاتحوي نقطتين الفرق بين عدديهما المعقدين من مضاعفات $2\pi i$

ج) ان الشريط الافقي

$$y_1 < y < y_2 \quad , \quad y_2 - y_1 < 2\pi$$

تكون صورته في المستوى ω بواسطة التحويل $\omega = e^z$

القطاع $y_1 < \phi < y_2$

واذا كان $y_2 - y_1 = \pi$ فان صورة هذا الشريط هو نصف المستوى ω.

بصورة خاصة يتحول الشريط $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ بواسطة التحويل $\zeta = e^z$ الى النصف الايمن للمستوي ζ، $R(\zeta) > 0$، واذا اعقبناه بالتحويل

$$\omega = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

فان هذا النصف الايمن $R(\zeta) > 0$ يتحول الى داخل الدائرة $|\omega| < 1$ (انظر حل مثال 3)

وعلى ذلك فالتحويل المركب

$$\omega = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$$

يحول الشريط $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ الى داخل دائرة نصف قطرها واحد ومركزها نقطة الاصل في المستوى ω

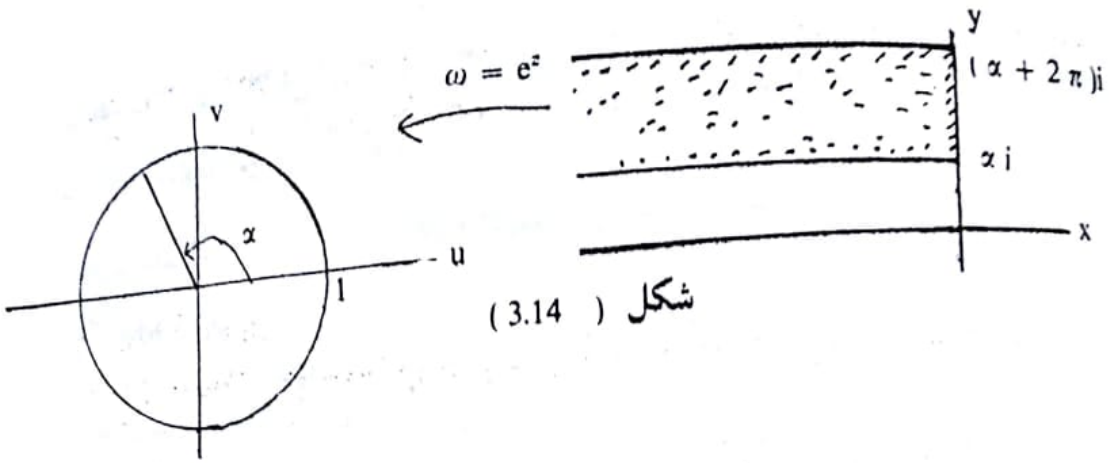
د) ان التحويل $\omega = e^z$ يحول نصف الشريط

$$x < 0 \, , \alpha < y < \alpha + 2\pi$$

$$z < \phi < \alpha + 2\pi$$

الى داخل الدائرة $|\omega| < 1$ لان $\rho = e^x < 1$ و $x < 0$ (شكل 3.14) باعتبار $y = \phi$

Scanned by CamScanner

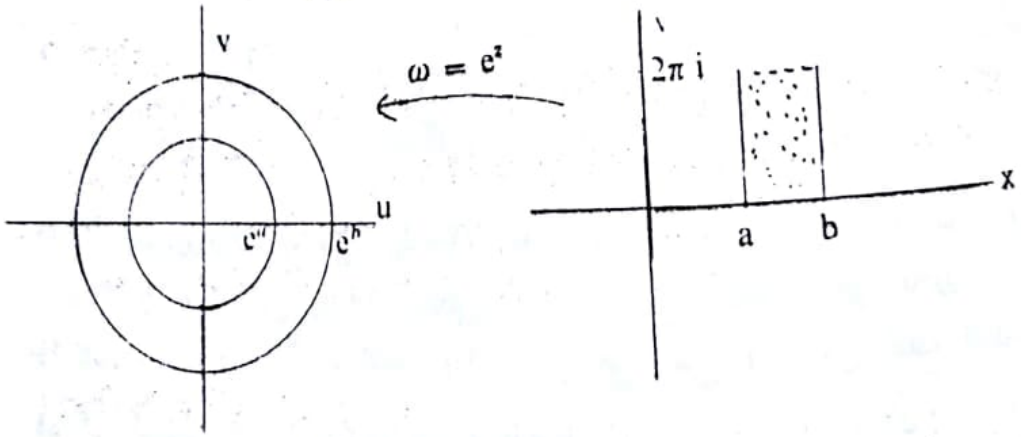


شكل (3.14)

هـ) التحويل $\omega = e^z$ يحول المستطيل

$$0 < y < 2\pi \; ; \qquad a < x < b$$

الى الجزء المحصور بين الدائرتين المتمركزيتين (شكل 3.15)
لان $|\omega| = e^x$ ، $e^a < |\omega| < e^b$



شكل (3.15)

و-التحويل $\omega = \sin z$

من العلاقة $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

ينتج

$$u = \sin x \cos h\, y \quad ; \quad v = \cos x \sin h\, y \qquad \ldots\ldots (3.6.9)$$

أ) ان التحويل $\omega = \sin z$ يحول الشريط الرأسي $y \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Scanned by CamScanner

الى نصف المستوى الاعلى $v > 0$

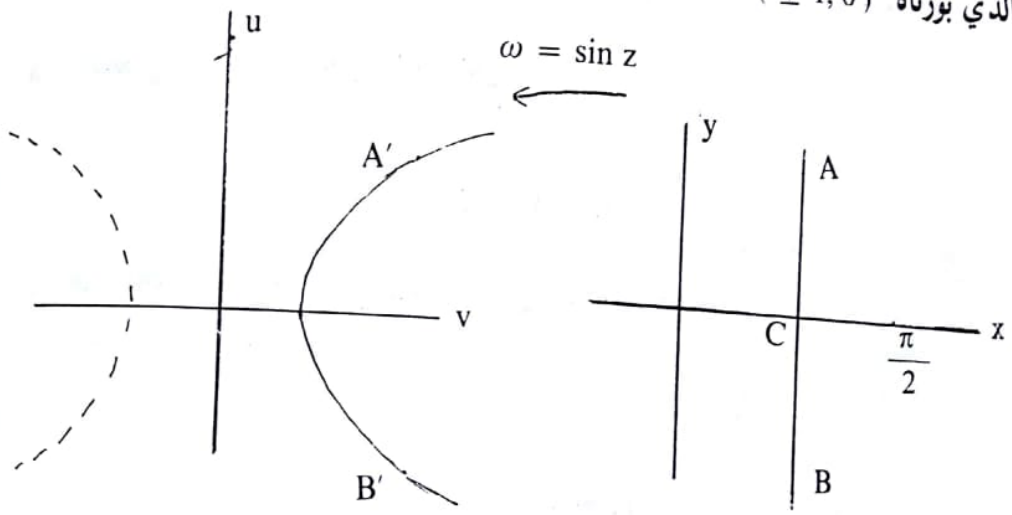
$$0 < c < \frac{\pi}{2}, \quad x = c$$

كما أن المستقيم الرأسي

يتحول بواسطة $\omega = \sin z$ الى الفرع الايمن من القطع الزائد (شكل 3.16)

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \quad \ldots\ldots (3.6.10)$$

الذي بؤرتاه $(\pm 1, 0)$



شكل (3.16)

ان هذه المعادلة تنتج من (3.6.9) بعد التعويض عن $x = c$ ثم حذف y منهما.

اذا كانت $c = 0$ فان (3.6.9) تعطي $u = 0$ أي صورة المحور y هي المحور v

اذا كانت $-\frac{\pi}{2} < c < 0$ فان صورة $x = c$ هي الفرع الايسر من القطع الزائد

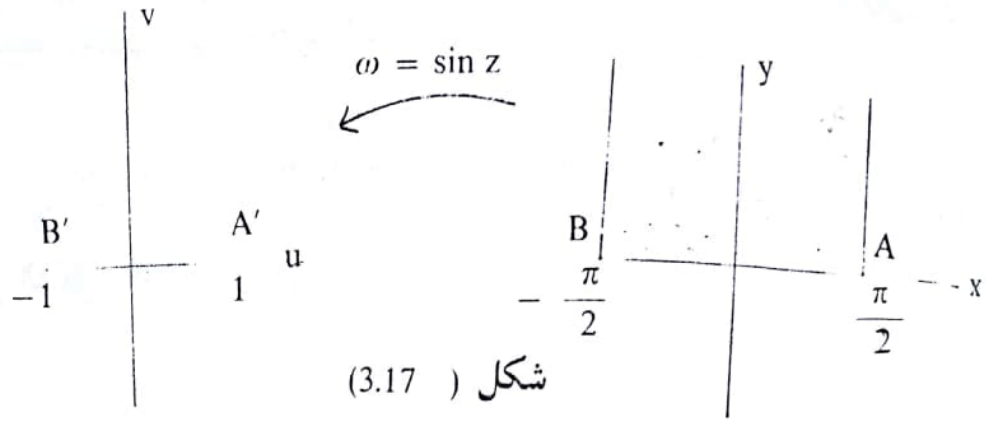
كما ان المستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ تكون صورته النقاط $(u,0)$ حيث $u \geq 1$ لان $\cosh y \geq 1$

كذلك المستقيم $x = -\frac{\pi}{2}$ تكون صورته $u \leq -1$

اما المحور y $(x = 0)$ فان صورته هي المحور v (أي $u = 0$)

ب) ان التحويل $\omega = \sin z$ ليس متبايناً من كل المستوى z الى المستوى ω ، الا انه متباين من الشريط $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y > 0$ الى النصف الاعلى $v \geq 0$ كما في شكل (3.17)

Scanned by CamScanner



شكل (3.17)

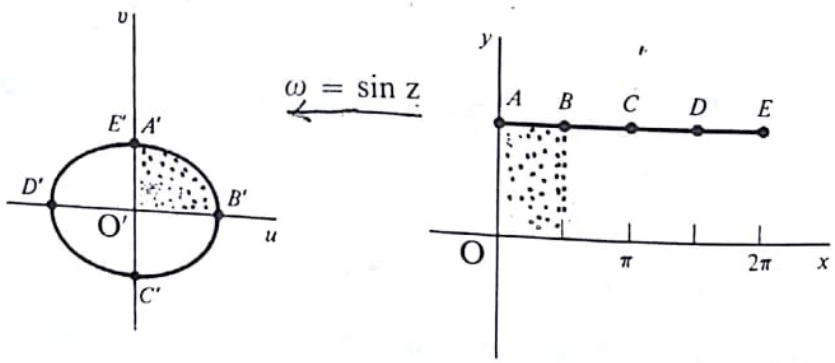
ج) ان التحويل $\omega = \sin z$ ينقل المستقيم الافقي $y = m$ الى المنحني

$$u = \sin x \cosh m \, , \, v = \cos x \sinh m \qquad \ldots\ldots (3.6.10)$$

اذا كانت $m \neq 0$ فان هذا المنحني هو القطع الناقص

$$\frac{u^2}{\cosh^2 m} + \frac{v^2}{\sinh^2 m} = 1$$

ان قطعة المستقيم $0 \leq x < \pi \, , \, y = m$ تقابل النصف الايمن من القطع الناقص بشكل متباين والقطعة $\pi \leq x < 2\pi \, , \, y = m$ تقابل النصف الايسر كما في شكل (3.18) ادناه



شكل (3.18)

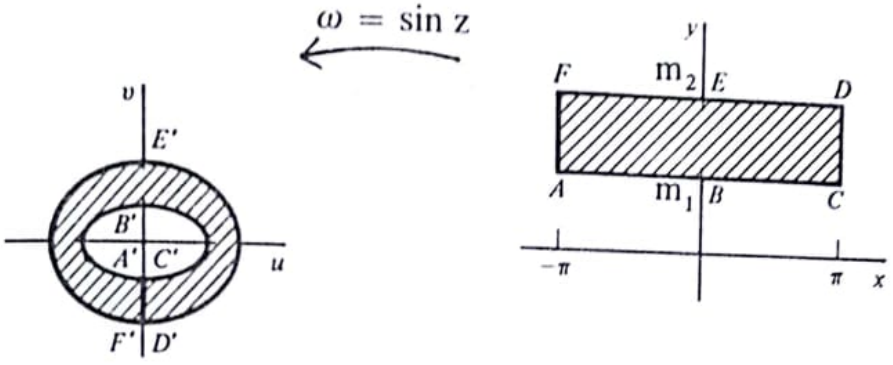
ان صورة المحور x $y = m = 0$ هو القطعة من المحور u المحصورة بـ $-1 \leq u \leq 1$ كما أن صورة المستطيل $0 \leq y \leq m \, , \, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ هي محتويات الربع الاول $O'B'A'$ من القطع الناقص . كذلك صورة المستطيل الثاني $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \, , \, 0 \leq y \leq m$ هي محتويات الربع الرابع $O'B'C'$ وهكذا .

Scanned by CamScanner

ان صورة المستطيل $m_1 \le y \le m_2 , -\pi \le x \le \pi$ بواسطة التحويل $\omega = \sin z$
هي المنطقة المحصورة بين القطعين الناقصين

$$\frac{u^2}{\cosh^2 m_1} + \frac{v^2}{\sinh^2 m_1} = 1 \qquad \frac{u^2}{\cosh^2 m_2} + \frac{v^2}{\sinh^2 m_2} = 1$$

كما في الشكل (3.19)



شكل (3.19)

مثال 6 جد صورة الدائرة $|z| = c > o$ بواسطة التحويل $\omega = \dfrac{z + i}{z - i}$
ثم ناقش الحالات التي فيها $c = 0 , c = 1 , c = \infty$

الحل : من $\omega = \dfrac{z + i}{z - i}$ ينتج $Z = \dfrac{i(\omega + 1)}{\omega - 1}$

اي ان

(أ) $|z| = c \quad \Rightarrow \quad |w + 1| = c|w - 1|$....

$\therefore (\omega + 1)(\bar{\omega} + 1) = c^2 (\omega - 1)(\bar{\omega} - 1)$

(ب) $\omega\bar{\omega}(c^2 - 1) - (\omega + \omega)(c^2 + 1) + c^2 - 1 = o$...

$\therefore u^2 + v^2 - 2\dfrac{c^2 + 1}{c^2 - 1} u + 1 = o$

$$\left(u - \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1}\right)^2 + v^2 = \frac{4c^2}{(c^2 - 1)^2}$$

Scanned by CamScanner

ان صورة الدائرة $|z| = c$ (عندما c لاتساوي 1، 0، ∞) هي الدائرة التي مركزها $\left(\frac{c^2+1}{c^2-1}, 0 \right)$ ونصف قطرها $\frac{2c}{c^2-1}$.

اذا كانت $c = 0$ فان صورة $|z| = 0$ هي النقطة $(-1,0)$ في المستوي ω

وذلك بالتعويض في المعادلة (أ) عن $c = o$ ،

اذا كانت $c = 1$ ، فان صورة $|z| = 1$ هي $u = 0$ وذلك بالتعويض عن $c = 1$ في المعادلة (ب)

اذا كانت $c = \infty$ فمن المعادلة (أ) بعد قسمة طرفيها على c وأخذ النهاية عندما $c \to \infty$ ينتج $|\omega - 1| = 0$ اي النقطة $(1,0)$.

مثال (7) جد صورتي الدائرتين $|z-1| = 1$، $|z-1| = 3$ بواسطة التحويل $\omega = \frac{i}{z}$

كذلك جد صورتي المستقيمين $2x - 3y = 6$، $2x - 3y = 0$ بواسطة هذا التحويل .

الحل : نحل $\omega = \frac{i}{z}$ من اجل z فنجد ان $(x + iy)(u + iv) = i$

$$\therefore xu - yv = 0, \qquad uy + vx = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$y = \frac{u}{u^2+v^2} \quad ; \quad x = \frac{v}{u^2+v^2} \qquad \ldots\ldots \quad (أ)$$

ان الدائرة $|z-1| = 1$ تكافيء

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

وباستعمال (أ) ينتج $v = \frac{1}{2}$

اذا صورة الدائرة $|z-1| = 1$ هي المستقيم $v = \frac{1}{2}$ في المستوي ω وكذلك صورة الدائرة $|z-1| = 3$ المكافئة لـ $(x-1)^2 + y^2 = 9$ هي الدائرة

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{9}{64}$$

في المستوي ω بعد استعمال (أ) وهي الدائرة التي مركزها $\left(0, -\frac{1}{8} \right)$ ونصف قطرها $\frac{3}{8}$

Scanned by CamScanner

كذلك باستعمال (أ) على معادلة المستقيم $2x - 3y = 6$ ينتج

$$\left(u + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(v - \frac{1}{6} \right)^2 = \frac{13}{144}$$

وهي دائرة مركزها $\left(-\frac{1}{4} , \frac{1}{6} \right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{13}}{12}$

وباستعمال معادلتي (أ) على معادلة المستقيم $2x - 3y = 0$ ينتج المستقيم $2v - 3u = 0$

مثال (8) استعمل التحويل $\omega = \frac{i(2z + 3i)}{z + 2i}$ لايجاد

(أ) صورة المنطقة $|z + 2i| < 3$

(ب) صورة المنطقة $I(z) > -2 , R(z) > 0$

الحل : (أ) لما كان التحويل $\omega = \frac{i(2z + 3i)}{z + 2i}$ يكافيء

$$\omega = 2i + \frac{1}{z + 2i}$$

$$|\omega - 2i| = \frac{1}{|z + 2i|}$$

لذلك فان الدائرة $|z + 2i| = c \neq 0$ تكون صورتها

$$|\omega - 2i| = \frac{1}{c}$$

عندما $0 < c < 3$ فان $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \infty$

ينتج ان صورة محتويات الدائرة $|z + 2i| < 3$ هي كل النقاط خارج الدائرة

$$|\omega - 2i| = \frac{1}{3}$$

في المستوى ω (شكل 3.20)

(ب) لما كان $\omega - 2i = \frac{1}{z + 2i}$ فان

زاوية $(\omega - 2i) =$ - زاوية $(z + 2i)$

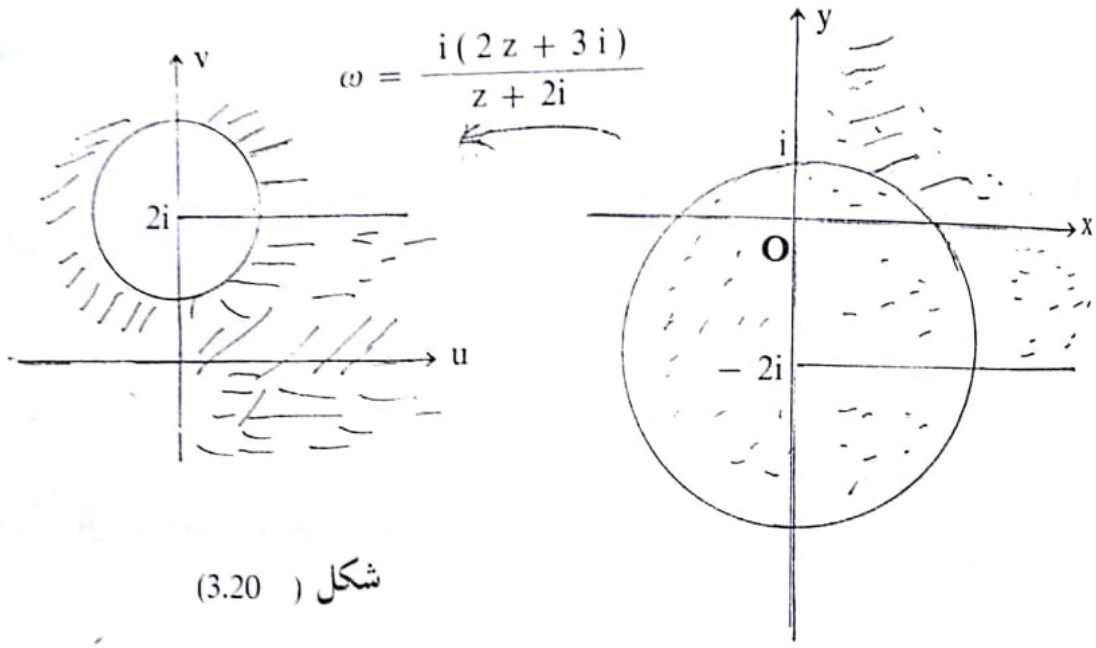
Scanned by CamScanner

لكن $I(z) > -2 , R(z) > 0$ تودي الى ان تكون زاوية $(z + 2i)$ محصورة

بين $0 , \frac{\pi}{2}$ لان $\tan\theta = \frac{y+2}{x}$ تأخذ قيمتها الصغرى صفر عندما $x \neq 0 , y = -2$

ولايمكن ان يكون $\tan\theta$ سالب لان $y > -2 , R(z) > 0$

∴ الصورة تكون محصورة بين $0 , -\frac{\pi}{2}$ اي $I(\omega) \leq 2 , R(\omega) > 0$



شكل (3.20)

مثال (9) اثبت ان المنطقة داخل القطع المكافيء $y^2 = 4(1-x)$ تقابل المنطقة $R(\omega) > 1$ بواسطة التحويل $\omega = z^{1/2}$. ثم بين ان المنطقة $R(\omega) \geq 0$ تقابل كل المستوى z .

الحل : بوضع $z = x + iy , \omega = u + iv$ في التحويل $\omega = z^{1/2}$ ينتج

$$x = u^2 - v^2 \quad , \quad y = 2uv$$

ان المستقيمات الرأسية $u = c$ حيث c ثابت هي صور للقطوع المكافئة

$$y^2 = 4c^2(c^2 - x)$$

التي تشترك بالمحور x السالب والبؤرة $(0,0)$ في المستوي z ويكون رأس كل منها النقطة

Scanned by CamScanner

$(c^2,0)$ ووتره البؤري $4c^2$ (شكل 3.21) ان الشريط الرأسي

$$u = c_1 \ , \ u = c_2 \qquad c_2 > c_1 > 0$$

من المستوى ω هو صورة للمنطقة المحصورة بين القطعين المكافئين

$$y^2 = 4\,c_2^2\,(c_2^2 - x) \qquad y^2 = 4\,c_1^2\,(c_1^2 - x)$$

فاذا جعلنا $c_2 \to \infty \ , c_1 = 1$. تتحدد المنطقة $u > 1$ في المستوى ω

$\therefore$ المنطقة داخل القطع المكافيء تكون صورتها المنطقة $u < 1$ في المستوى ω

وعندما $c_1 \to 0$ فان القطع المكافيء

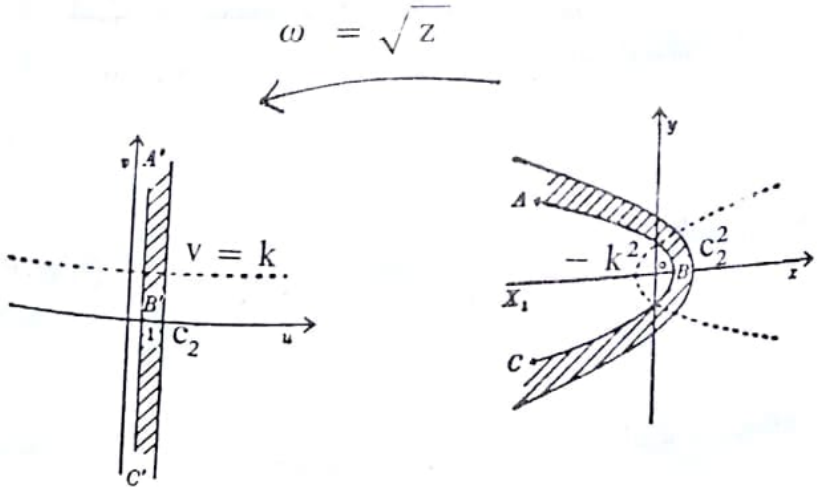
$$y^2 = 4\,c_1^2\,(c_1^2 - x)$$

يقترب من المحور الحقيقي السالب في المستوى z وبذلك نجد أن نصف المستوي ω

$$R(\omega) \geq 0$$

يقابل كل المستوي z المقطوع بالمحور الحقيقي السالب

من $x=0$ الى $x = -\infty$



شكل (3.21)

Scanned by CamScanner

تمارين 3.3

1) جد صورة المنطقة $x<0, 0<y<\pi$ بواسطة التحويل $\omega = e^z$ ،

2) جد صورة الشريط $x>0, 0 \leq y \leq \pi$ بواسطة التحويل $\omega = e^z$.

3) جد فرع من التحويل $\omega = \log(z-1)$ الذي بواسطته ينقل كل المستوي z عدا قطعة المستقيم $y=0, x>1$ الى الشريط $0<v<2\pi$ في المستوي ω .

4) بين أن التحويل $\omega = \sin z$ ينقل المستقيم $x=c \quad \left(0<c<\frac{\pi}{2}\right)$ نقلاً متبايناً الى الفرع الايمن من القطع الزائد $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$

5) جد صورة المستقيم $x=c \quad \left(-\pi<c<\frac{\pi}{2}\right)$ بواسطة التحويل $\omega = \sin z$

6) بين أن التحويل $\omega = \cosh z$ يحول النقاط $z=iy \quad \left(0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ الى قطعة المستقيم $v=0, 0 \leq u \leq 1$

7) بين أن التحويل $\omega = z + \frac{1}{z}$ يحول النصفين الاعلى والاسفل من الدائرة $|z|=1$ الى جزء المستقيم $v=0, -2 \leq u \leq 2$

8) بين أن التحويل $\omega = z + \frac{1}{z}$ يحول الدائرة $|z|=c$ الى القطع الناقص

$$u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta \quad , \quad v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

9) بين أن التحويل $\omega = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ ينقل الشريط المحدد بالمستقيمين $y=0 \ , \ y=\pi$ الى دائرة الوحدة (نصف قطرها 1)

الجدولان الاتيان يعطيان التحويلات المناسبة لنقل مناطق من المستوي z الى المستوي ω

Scanned by CamScanner

	Domain in the z-plane $z = x+iy = re^{i\theta}$.	Domain in the w-plane $w = u+iv = \rho e^{i\phi}$.	Transformation.
1.	Unit circle $\lvert z\rvert \leqslant 1$	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$w = e^{i\lambda}\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$
2.	Upper half-plane	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$w = \dfrac{i-z}{i+z}$
3.	Infinite strip of finite breadth $-\infty \leqslant y \leqslant \infty$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$\dfrac{w-1}{w+1} = ie^{iz}$
4.	Area outside the ellipse $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$2z = (a-b)w + \dfrac{a+b}{w}$
5.	Area outside the parabola $r\cos^2\frac{1}{2}\theta = 1$	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$(w+1)^2 z = 4$
6.	Area within same parabola	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$w = \tan^2(\frac{1}{4}\pi\sqrt{z})$
7.	Semicircle $x^2+y^2 = c^2$, $x>0$	Unit circle $\lvert w\rvert \leqslant 1$	$w = i\dfrac{z^2-c^2+2cz}{z^2-c^2-2cz}$

Scanned by CamScanner

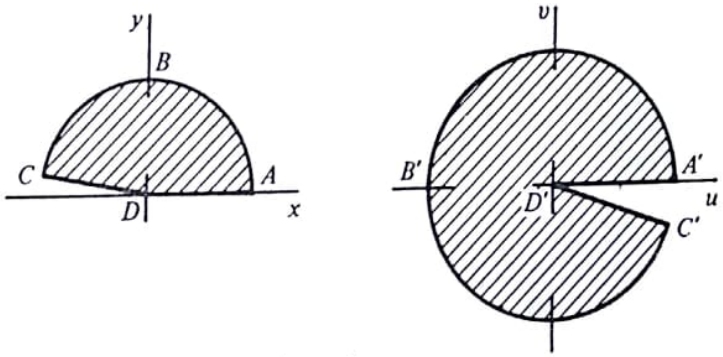
بعض التحويلات الخاصة

	Domain in z-plane.	Domain in w-plane.	Transformation.
1.	The angle $0<\theta<2\pi/n$	Upper half-plane	$w = z^n$
2a.	Semicircle $\lvert z\rvert<1,\ y>0$	Upper half-plane	$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
2b.	Semicircle $\lvert z\rvert<1,\ y>0$	First quadrant of w-plane	$w = \frac{1+z}{1-z}$
3.	Sector $\lvert z\rvert<1,\ 0<\theta<\pi/n$	Upper half-plane	$w = \left(\frac{z^n+1}{z^n-1}\right)^2$
4.	Domain between two circular arcs intersecting at $z=a$, $z=b$ at angles π/n	Half-plane	$w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$
5.	Strip $0<y<\pi$	Upper half-plane	$w = e^z$
6.	Outside of parabola $y^2 = 4c^2(x+c^2)$ (not containing the focus $z=0$)	Upper part of plane above the line $v=c>0$	$w = \sqrt{z}$
7a.	Upper half of the inside of the same parabola	Strip $0<u<\infty,\ 0<v<c$	$w = \sqrt{z}$
7b.	Strip $0<x<\infty,\ 0<y<c$	Semicircle $\lvert w\rvert<1,\ v>0$	$w = -e^{-\pi z/c}$
8.	Domain between the two branches of the hyperbola $\frac{x^2}{(2\cos a)^2} - \frac{y^2}{(2\sin a)^2} = 1,$ $0<a<\frac{1}{2}\pi$	The angle (a) $a<\phi<\pi-a$, and (b) $a+\pi<\phi<2\pi-a$	(a) $w = \frac{z+\sqrt{(z^2-4)}}{2}$ (b) $w = \frac{z-\sqrt{(z^2-4)}}{2}$
9.	Upper half of inside of the branch of the same hyperbola $x>0,\ y>0$	Sector $\lvert w\rvert<1,\ -a<\phi<0$	$w = \frac{z-\sqrt{(z^2-4)}}{2}$
10.	Upper half of inside of ellipse $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1,\ y>0$ $a = r+1/r,\ b = 1/r-r,\ r<1.$	Annulus between $\lvert w\rvert = 1,$ $\lvert w\rvert = r<1,\ v>0$	$w = \frac{z+\sqrt{(z^2-4)}}{2}$

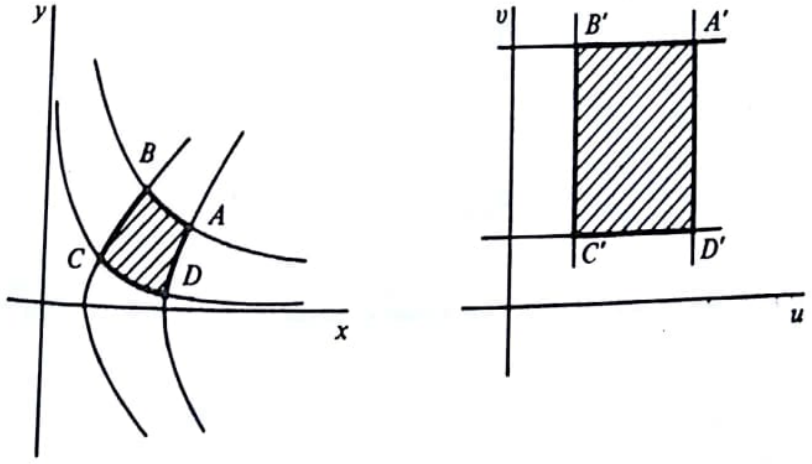
جدول 2

Scanned by CamScanner

فيما يلي مجموعة من الاشكال التي تظهر تطبيقات
لعدد من المناطق بواسطة دوال بسيطة
ومتنوعة والمستلة من المصدر
[2]

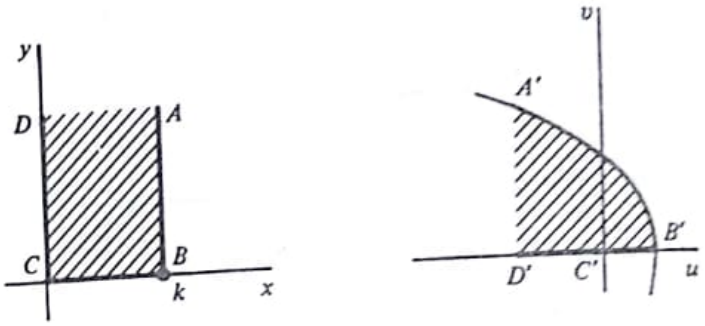


الشكل 1. التحويل $w = z^2$.



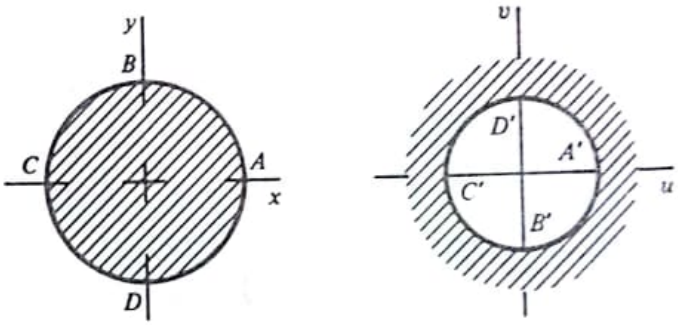
الشكل 2. التحويل $w = z^2$.

Scanned by CamScanner



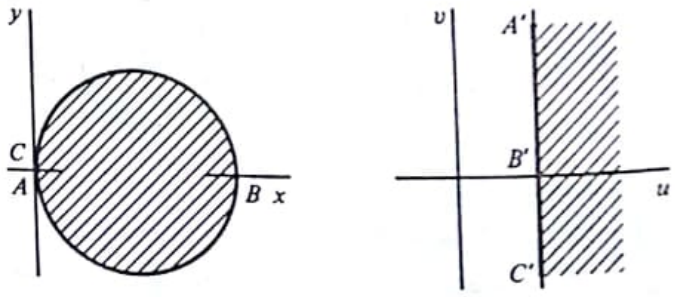
التحويل $w = z^2$; $A'B'$ on parabola $\rho = \dfrac{2k^2}{1+\cos\phi}$.

الشكل 3.



التحويل $w = \dfrac{1}{z}$.

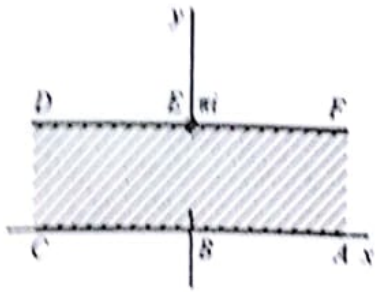
الشكل 4.

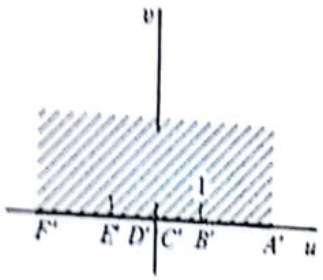


التحويل $w = \dfrac{1}{z}$.

شكل 5.

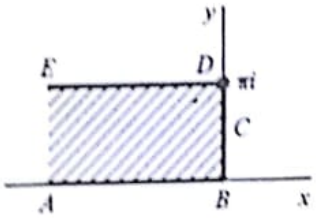
Scanned by CamScanner

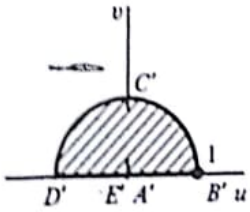




التحويل $w = e^z$.

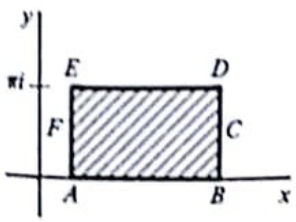
شكل 6.

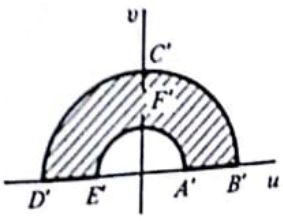




التحويل $w = e^z$

شكل 7.

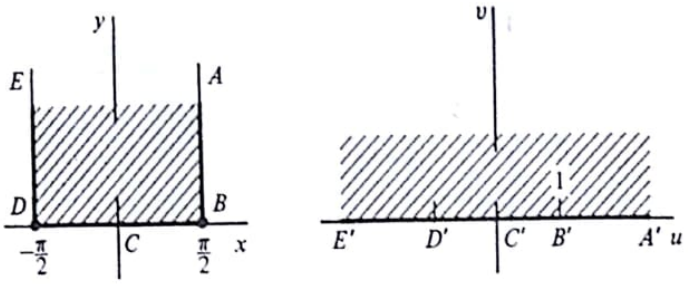




التحويل $w = e^z$

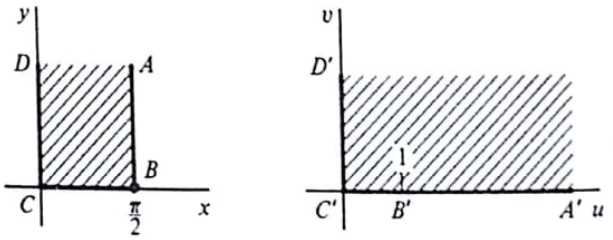
شكل 8.

Scanned by CamScanner



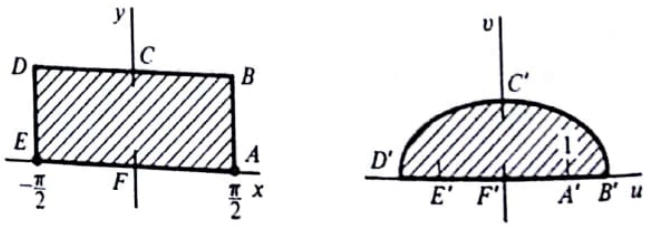
التحويل $w = \sin z$.

شكل 9.



التحويل $w = \sin z$.

شكل 10.

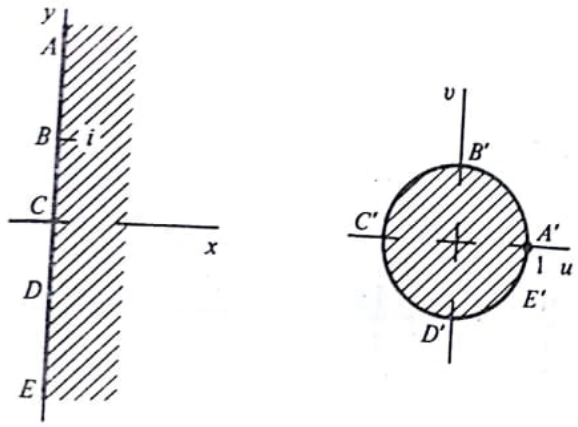


التحويل $w = \sin z$; BCD on line $y = k$, $B'C'D'$ on ellipse

$$\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1.$$

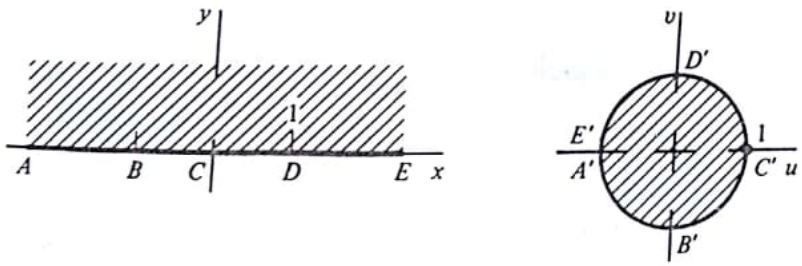
شكل 11.

Scanned by CamScanner



التحويل $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

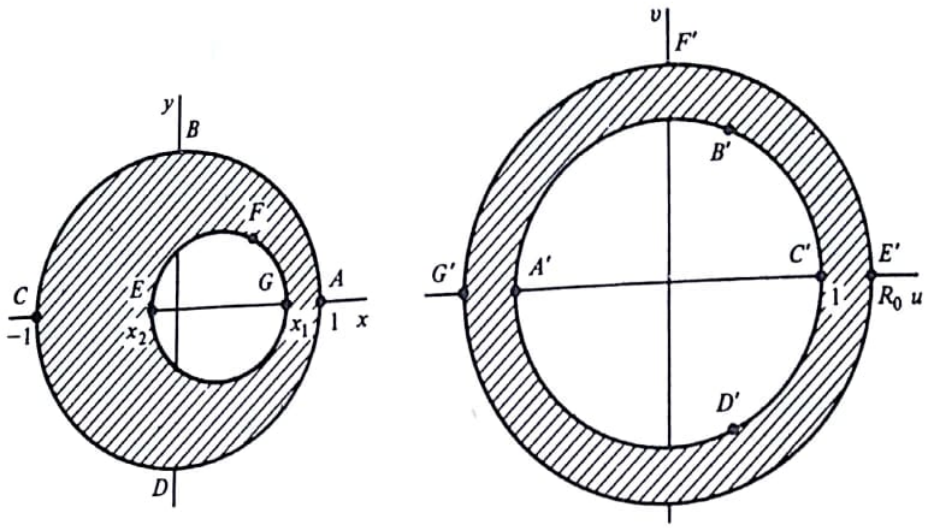
شكل 12



التحويل $w=\dfrac{i-z}{i+z}$.

شكل 13

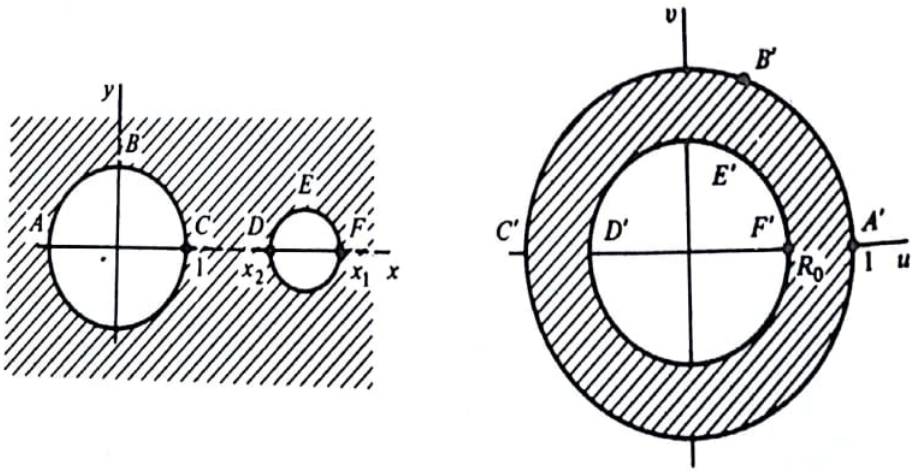
Scanned by CamScanner



التحويل $w=\dfrac{z-a}{az-1}$; $a=\dfrac{1+x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}$;

$R_0=\dfrac{1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}$ ($a>1$ and $R_0>1$ when $-1<x_2<x_1<1$).

شكل 14



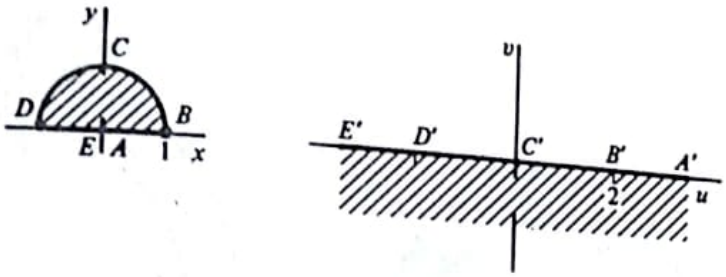
التحويل $w=\dfrac{z-a}{az-1}$; $a=\dfrac{1+x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}$;

$R_0=\dfrac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$

($x_2<a<x_1$ and $0<R_0<1$ when $1<x_2<x_1$).

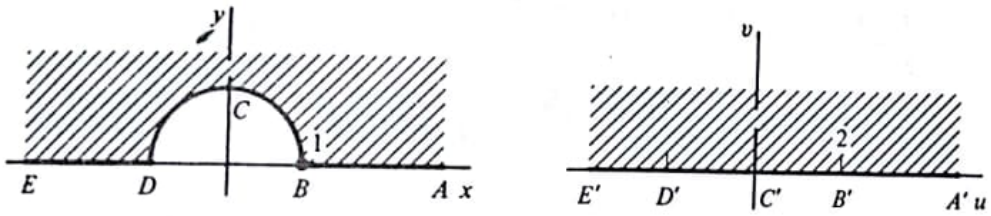
شكل 15

Scanned by CamScanner



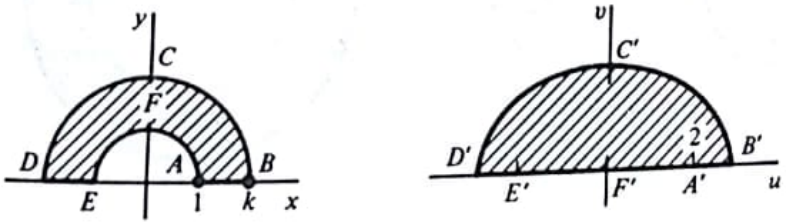
شكل 16.

التحويل $w = z + \frac{1}{z}$.



شكل 17.

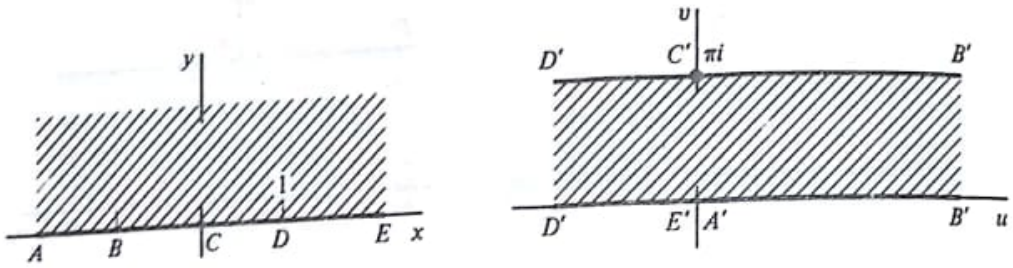
التحويل $w = z + \frac{1}{z}$.



شكل 18.

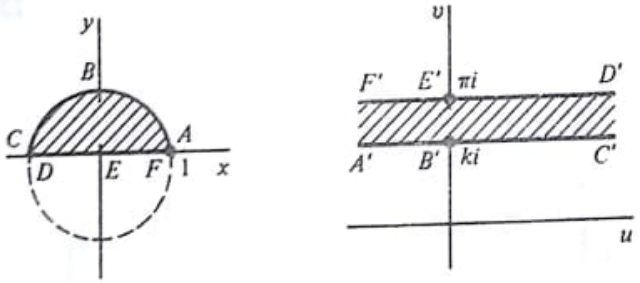
التحويل $w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$ on ellipse $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$.

Scanned by CamScanner



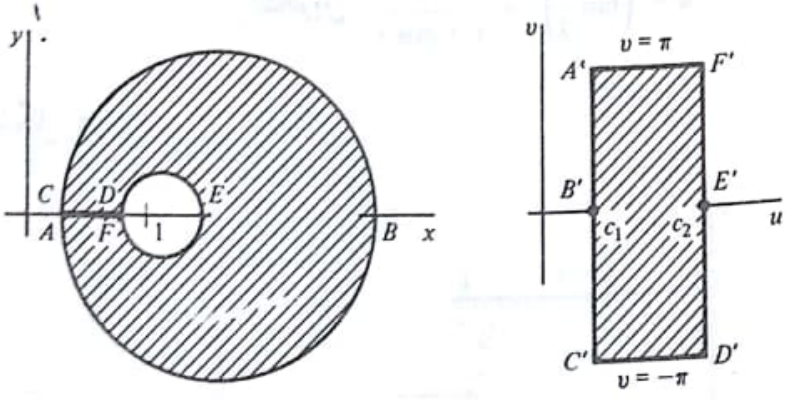
التحويل $w = \text{Log}\,\dfrac{z-1}{z+1}$; $z = -\coth\dfrac{w}{2}$.

شكل 19.



التحويل $w = \text{Log}\,\dfrac{z-1}{z+1}$; ABC on circle $x^2 + y^2 - 2y\cot k = 1$.

شكل 20.

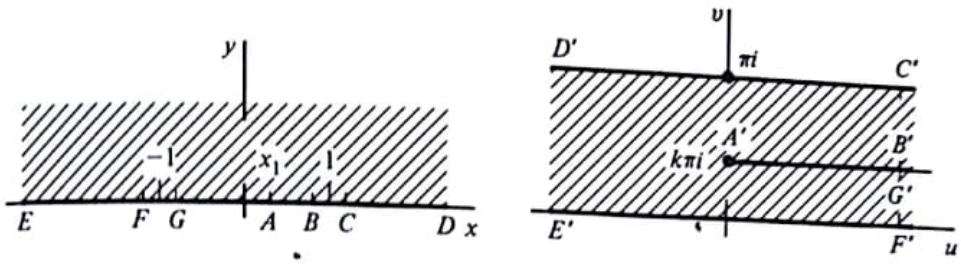


التحويل $w = \text{Log}\,\dfrac{z+1}{z-1}$; centers of circles at $z = \coth c_n$,

radii: $\operatorname{csch} c_n (n = 1, 2)$.

شكل 21.

Scanned by CamScanner

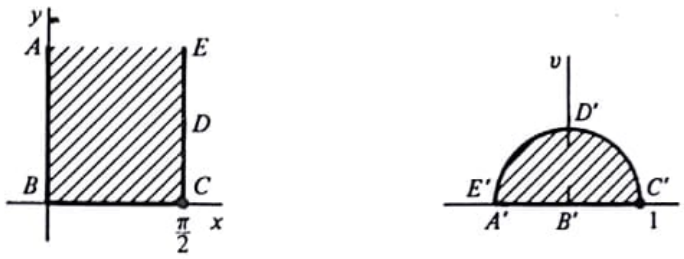


التحويل

$$w = k \operatorname{Log} \frac{k}{1-k} + \operatorname{Log} 2(1-k) + i\pi - k \operatorname{Log}(z+1) - (1-k) \operatorname{Log}(z-1),$$

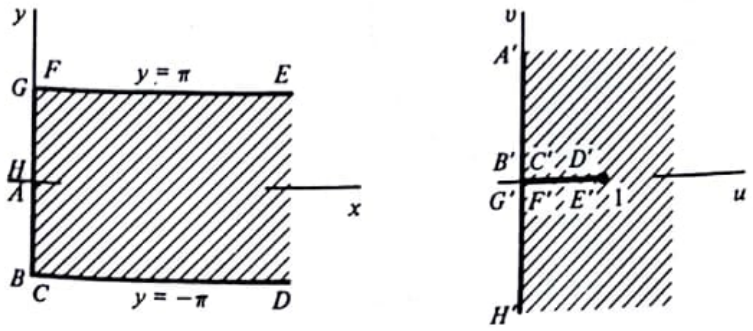
$x_1 = 2k - 1.$

شكل 22.



التحويل $w = \left(\tan \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos z}{1+\cos z}.$

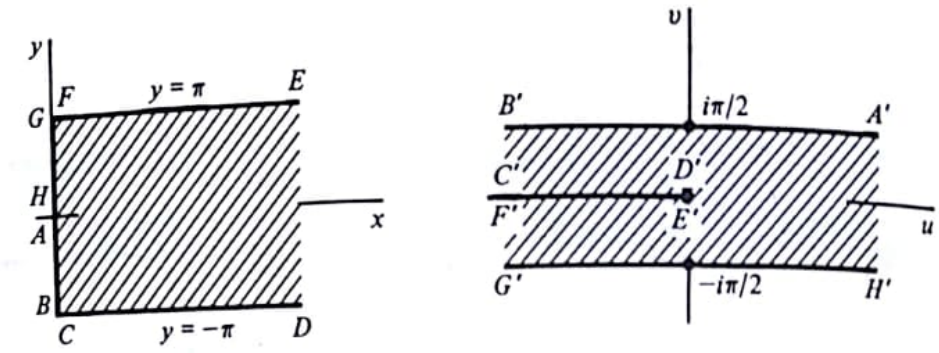
شكل 23.



التحويل $w = \coth \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$

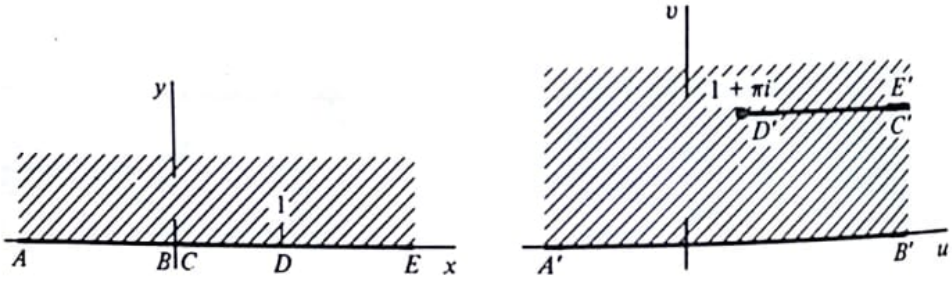
شكل 24.

Scanned by CamScanner



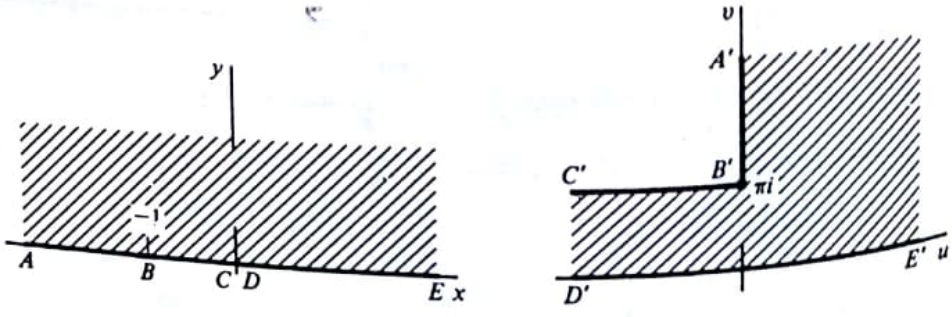
التحويل $w = \text{Log coth}\,\frac{z}{2}$.

شكل 25.



التحويل $w = \pi i + z - \text{Log}\, z$.

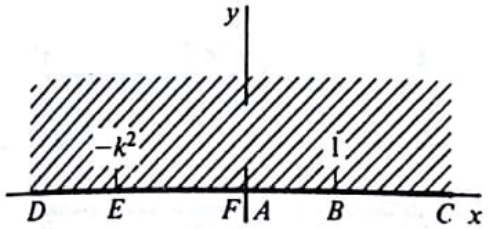
شكل 26.

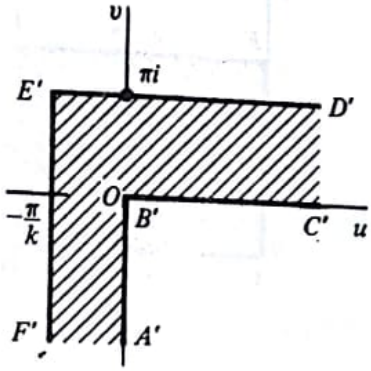


التحويل $w = 2(z+1)^{1/2} + \text{Log}\,\frac{(z+1)^{1/2} - 1}{(z+1)^{1/2} + 1}$.

شكل 27.

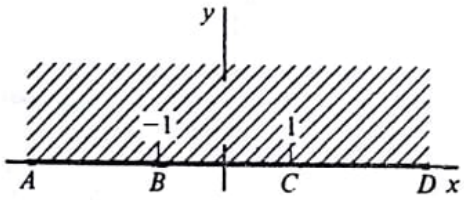
Scanned by CamScanner

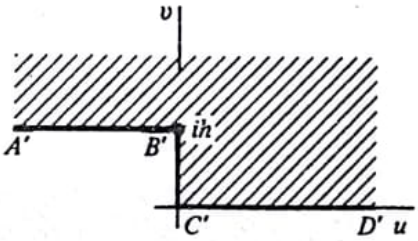




التحويل $w = \frac{i}{k}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+ikt}{1-ikt} + \mathrm{Log}\,\frac{1+t}{1-t};\ t = \left(\frac{z-1}{z+k^2}\right)^{1/2}$.

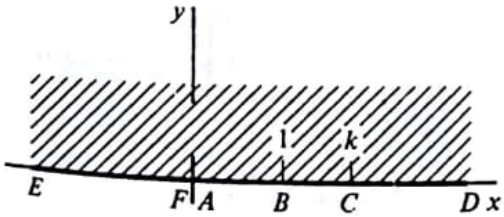
شكل 28.

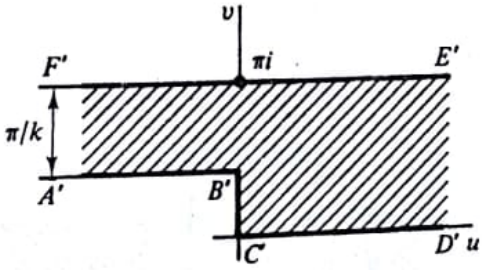




التحويل $w = \frac{h}{\pi}\,[(z^2-1)^{1/2} + \cosh^{-1} z]$.

شكل 29.





التحويل $w = \cosh^{-1}\left(\frac{2z-k-1}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\cosh^{-1}\left[\frac{(k+1)z-2k}{(k-1)z}\right]$.

شكل 30

Scanned by CamScanner

الفصل الرابع

التكامل المعقد Complex Integration

(4.1) المسارات Paths

ان تمثيل معادلة منحني بالاحداثيات الوسيطية (Parametric coordinates) مألوف لدى الطالب في دراسته لموضوع التفاضل والتكامل . فمثلاً معادلة القطع المكافيء

$$y = x^2$$

يمكن وضعها بالصيغة

$$x = t , y = t^2 , -\infty < t < \infty$$

حيث ان t وسيط بين المتغيرين x, y وبواسطة تحديد فترة الوسيط t يمكن تركيز الدراسة على جزء من المنحني ضمن تلك الفترة وترك الباقي من المنحني غير المرغوب دراسته والذي ليس له علاقة بما هو مطلوب.

ان المعادلات الوسيطية (Parametric equations) تلعب دوراً مهماً في دراسة التكاملات المعقدة .

Scanned by CamScanner

القوس arc
القوس C هو مجموعة نقاط $z = (x, y)$ في المستوي المعقد بحيث

$$x = \phi(t) \quad , \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

حيث ان $\psi(t), \phi(t)$ دالتان مستمرتان بوسيط حقيقي t . ان هذا التعريف يعين تطبيقاً مستمراً (continuous mapping) للفترة $\alpha \leq t \leq B$ على المستوي xy والنقاط المقابلة تكون مرتبة وفقا لازدياد t . من المناسب وصف نقاط القوس C بالمعادلة

$$z = z(t) = \phi(t) + i\,\psi(t), (\alpha \leq t \leq \beta), \qquad \ldots\ldots (4.1.1)$$

وتكون $z(t)$ مستمرة لان $\psi(t), \phi(t)$ كلتاهما مستمرتان .

القوس C يكون قوسا بسيطا (simple arc) اوقوس جوردن (Jordan arc) اذا لم يقطع نفسه اي ان C قوس بسيط اذا كان $t_1 \neq t_2$ يؤدي الى $z_1(t) \neq z_2(t)$ لكل t_2, t_1 من الفترة المفتوحة (α, β)

اذا كان $z(\alpha) = z(\beta)$ فان القوس البسيط C يسمى منحنياً مغلقاً بسيطاً (simple closed curve)

فمثلا المستقيم المنكسر

$$z(t) = \begin{cases} t + it & (0 \leq t \leq 1) \\ t + i & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$$

يؤلف قوساً بسيطاً . كما ان الدائرة الواحدية

$$z(t) = \cos t + i \sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Scanned by CamScanner

حول نقطة الاصل ، هي مثال على منحني مغلق بسيط .

ان الدالة ذات القيمة المعقدة $z(t)$ المعطاة في (4.1.1) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للوسيط t اذا كانت كلتا الدالتين $\psi(t)\,,\,\phi(t)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ t

المشتقة $z'(t)$ ، او $\frac{dz(t)}{dt}$ تعرف بـ

$$z'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t) \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

مشتقتا $\psi(t)\,,\,\phi(t)$ عند $t = \alpha$ تكونان من الجانب الايمن فقط وعند $t = \beta$ من الجانب الايسر فقط .

المنحني الاملس (Smooth curve)

يطلق على القوس او المنحني C الذي معادلته (4.1.1)
اسم منحني املس اذا وفقط اذا كانت المشتقتان

$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t)\,, \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

موجودتين ومستمرتين لكل قيم t ضمن تلك الفترة وان $z'(t) \neq 0$ في تلك الفترة
ان هذا التعريف يؤدي بنا الى تحقيق الشروط الثلاثة الاتية .

(أ) تكون الدالتان $\phi\,,\,\psi$ مستمرتين ضمن فترة التعريف (لان مشتقتيهما موجودتان) وهذه بدورها تضمن استمرارية المنحني .

(ب) يكون لمنحني الدالة C مماس في كل نقطة من نقاطه ضمن فترة التعريف ، وهذه تضمن بان يكون المنحني املساً .

Scanned by CamScanner

(ج) ان استمرارية المشتقتين ضمن فترة التعريف يؤكد بان للمنحني C طول محدد ومن موضوع التفاضل والتكامل. ([2′] . كتاب توماس ، التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ترجمة موفق دعبول وجماعته الفصل السادس في الجزء الاول) . نجد ان طول المنحني يعطى بالصيغة

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \qquad \ldots\ldots (4.1.2)$$

ان النقطة من المنحني الاملس C الذي معادلتاه بالصيغة (4.1.1) والتي تقابل $t = \alpha$ تسمى النقطة الابتدائية (initial point) والنقطة من المنحني الاملس C والتي تقابل $t = \beta$ تسمى النقطة النهائية (terminal point) للمنحني C

المسار (Path)

يسمى المنحني C (ليس من الضروري ان يكون املساً) مساراً اذاً تالف من عدد منته من منحنيات ملساء $C_1, C_2 \ldots C_n$ متصلة وبحيث النقطة النهائية للمنحني C_k تنطبق على النقطة الابتدائية للمنحني C_{k+1} ولكل قيم

$k = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$

ملاحظة : توجد اسماء اخرى للمسار فمثلا املس جزئي (Piecewise smooth) او املس مقطعياً (sectionally smooth)

ان نقطة ابتداء C_1 هي نقطة ابتداء C وان نقطة انتهاء C_n هي نهاية C وبذلك يمكن كتابة

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

المسار المغلق (Closed path)

اذا كانت نهاية المسار C تنطبق على نقطة ابتداءه يسمى المسار C مساراً مغلقاً . وفيما عدا ذلك يسمى مساراً مفتوحاً (open path)

Scanned by CamScanner

المسار البسيط (Simple Path)

اذا كان المسار لايقطع نفسه (فيما عدا انطباق نقطة نهايته على نقطة ابتداءه) يسمى مساراً بسيطاً وفيما عدا ذلك يسمى مساراً مضاعفاً (multiple path) على الطالب ان يميز بين مسار مغلق او مفتوح وبين مجموعة مغلقة او مفتوحة . ان المسارات تلعب دوراً مهماً في التكاملات المعقدة فهي تقابل فترات التكامل في الدوال الحقيقية . ولاهمية اتجاه المسار ندرج منطوق مبرهنة منحني جوردن .

مبرهنة منحني جوردون (Jordan Curve theorem)

ليكن C مساراً بسيطاً مغلقاً في المستوي z . عندئذٍ المستوي z ينقسم بهذا المسار الى ثلاث مجموعات منفصلة عن بعضها كالاتي :

(أ) المسار C نفسه
(ب) نقاط المستوي داخل C وتؤلف مجموعة مفتوحة ومحددة
(ج) نقاط المستوي خارج C وتؤلف مجموعة مفتوحة ومحددة

كذلك يكون المنحني C محيطاً للمجموعتين الداخلية والخارجية .

الاتجاه الموجب للمسار (Positively Oriented Path)

الاتجاه الموجب للمسار البسيط المغلق هو ذلك المسار الذي اذا سلكناه تكون مجموعة نقاط المستوي الداخلية الى جهة اليسار .

الاتجاه السالب للمسار (Negatively oriented path)

الاتجاه السالب للمسار البسيط هو الاتجاه المعاكس للاتجاه الموجب للمسار .

Scanned by CamScanner

4.2 التكامل المعقد (Complex Integration)

لتكن C مساراً املساً في المستوي المعقد z الذي معادلته الوسيطية

$$C : z(t) = x(t) + iy(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$$

ولتكن $\omega = f(z)$ دالة معرفة على كل نقاط المسار C . اذا قسمنا الفترة $\alpha \leq t \leq \beta$ الى n من الاجزاء ، فان المسار C سوف يتجزأ بالنقاط

$$z_0 , z_1 , z_2 , \dots , z_{k-1} , z_k , \dots , z_n$$

حيث z_0 تنطبق على نقطة بداية C ، و z_n تنطبق على نقطة نهاية C .

لنفرض $(\Delta z)_k = z_k - z_{k-1}$; $k = 1,2, \dots , n$

الان نأخذ نقطة اختيارية ζ_k على القوس الذي يصل بين النقطتين z_k , z_{k-1} من المنحني C .تأمل المجموع

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k$$

لتكن λ طول اكبر الفترات الجزئية $(\Delta t)_k = t_k - t_{k-1}$. وافرض $\lambda \to 0$ عندئذ لكل $k = 1, 2, \dots , n$ فان $(\Delta t)_k \to 0$ ومنها $(\Delta z)_k \to 0$

نعرف التكامل المعقد للدالة $\omega = f(z)$ على المنحني C بالصيغة

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k \qquad \dots (4.2.1)$$

على أن تكون هذه النهاية موجودة ولاتعتمد على طريقة تجزئة الفترة $\alpha \leq t \leq \beta$ ، وكذلك لاتعتمد على كيفية اختيار ζ_k طالما تقع على جزء المسار الواصل بين z_k , z_{k-1} . بهذا نقول الدالة f قابلة التكامل (integrable) على المسار C .

يسمى المسار C مسار التكامل (Path of integration)

ان استمرارية f على المسار C تضمن لنا وجود هذا التكامل.

Scanned by CamScanner

مبرهنة (4.1)

لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المسار المستمر C . عندئذ تكامل f على C موجود وأن

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - \int_C v\,dy + i\int_C u\,dy + i\int_C v\,dx \qquad \ldots (4.2.2)$$

البرهان : لتكن

$$(\Delta z)_k = (\Delta x)_k + i(\Delta y)_k \; ; \zeta_k = (\sigma_k, \omega_k)$$

ولما كان $f(z) = u + iv$ ، ينتج

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k = \sum_{k=1}^{n} [\,u(\sigma_k, \omega_k) + iv(\sigma_k, \omega_k)\,]\,[\,(\Delta x)_k + i(\Delta y)_k\,]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k - \sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k + i\sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k$$

وبالتعويض في 4.2.1 ينتج

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k - \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k +$$

$$i \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k + i \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k$$

Scanned by CamScanner

حيث λ هي طول اكبر فترة جزئية من تجزئة الفترة $\alpha < t < \beta$ أي

$$\lambda = \max \{ (\Delta t)_k , k = 1, 2, 3, \ldots n \}$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - \int_C v\,dy + i \int_C u\,dy + i \int_C v\,dx$$

وذلك من تعريف التكامل الخطي على الدوال الحقيقية.

وبهذا ينتهي البات المبرهنة .

اذا عكس اتجاه المسار C بالشكل C^- فان

$$\int_{C^-} f(z)\,dz = - \int_C f(z)\,dz$$

وذلك من (4.2.2) وصفة التكامل الحقيقي المحدد

$$\int_a^b f(t)\,dt = - \int_b^a f(t)\,dt$$

ان التكامل المعقد يمتلك بعض الخواص التي يمتلكها التكامل الحقيقي نذكر منها ثلاث خواص

1 - اذا كانت γ عدد امعقدا ثابتاً فان

$$\int_C \gamma f(z)\,dz = \gamma \int_C f(z)\,dz \qquad \ldots (4.2.3)$$

2 - اذا كانت $f \cdot g$ دالتين قابلتين للتكامل على المسار C فان

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz \qquad \ldots (4.2.4)$$

3 - اذا كان C مؤلفا من جزئين $C_1 \sim C_2$ بحيث أن نقطة نهاية C_1 تنطبق على نقطة بداية C_2 . فان

Scanned by CamScanner

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad \ldots (4.2.5)$$

ان اثبات هذه الخواص يأتي من الخواص المماثلة على التكاملات الخطية الحقيقية ثم استعمال العلاقة (4.2.2)

مبرهنة 4.2

ليكن $F(t) = u(t) + iv(t)$ ، حيث كل من $u \cdot v$ دالتين حقيقيتين وقابلتين للتكامل ضمن الفترة $\alpha \leq t \leq \beta$ ، فان

$$\left| \int_\alpha^\beta F(t)\,dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \qquad \ldots (4.2.6)$$

البرهان :

يمكن كتابة ناتج التكامل $\int_\alpha^\beta F(t)\,dt$ بالصيغة القطبية $re^{i\theta}$ (حيث ان $r \cdot \theta$ في هذا البرهان مقداران ثابتان) أي أن $(r>0)$

$$re^{i\theta} = \int_\alpha^\beta F(t)\,dt$$

$$r = \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} F(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta R\left(e^{-i\theta} F(t)\right) dt$$

لان r تمثل القيمة المطلقة لناتج التكامل . ولما كان

$$R\left(e^{-i\theta} F(t)\right) \leq \left|e^{-i\theta} F(t)\right| = \left|e^{-i\theta}\right| |F(t)| = |F(t)|$$

$$r \leq \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

$$\therefore \quad \left| \int_\alpha^\beta F(t)\,dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \qquad \text{بشرط } \alpha < \beta$$

وبذلك ينتهي البرهان .

من الواضح بأن المتباينة (4.2.6) تبقى صحيحة عندما نكون قيمة التكامل في الطرف الايسر صفر، اي عندما تكون $r = 0$

Scanned by CamScanner

ملاحظة : اذا كان التكامل موجوداً عندما $\beta \to \infty$ فان

$$\left| \int_{\alpha}^{\infty} F(t)\, dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\infty} |F(t)|\, dt \qquad \ldots\ldots (4.2.7)$$

مبرهنة (4.3)

اذا كانت نقطة ابتداء المسار C عندما $t = \alpha$ ونقطة انتهاء C عندما $t = \beta$ فان

$$\int_C f(z)\, dz \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

البرهان : يستنتج من المتباينة (4.2.6) وقاعدة السلسلة (chain rule) .

مبرهنة (4.4)

اذا كانت f قابلة للاشتقاق على مسار C وكان هناك عدد حقيقي ثابت موجب M بحيث $|f(z)| \leq M$ ولكل قيم z على المسار C وكان طول المسار C مقدار محدد مثل L فان

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML \qquad (4.2.8)$$

البرهان : من (4.2.6) نجد أن

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C M\, |dz| = M \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

$$= M \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right| dt$$

$$= M \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}\, dt$$

$$= ML \qquad \text{من } (4.1.2)$$

Scanned by CamScanner

ان هذا يتحقق دائماً لان f مستمرة على المسار C باعتبار $|f(z)|$ دالة حقيقية مستمرة على المسار C وتصل الى القيمة العظمى M على المسار المستمر C.

ملاحظة :ان التكامل المعقد لايتغير عند تبديل الوسيط بدالة متزايدة $t = h(\zeta)$ التي تنقل الفترة $a \le \zeta \le b$ الى الفترة $\alpha < t < \beta$ وبشرط ان تكون هذه الدالة $t = h(\zeta)$ قابلة للاشتقاق في الفترة $a < \zeta < b$. وان $\alpha = h(a)$. $\beta = h(b)$. ويتضح هذا من :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(z)\,\frac{dz}{dt}\,dt = \int_{\zeta=a}^{\zeta=b} f(z(h(\zeta)))\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{d\zeta}\,d\zeta$$

$$= \int_a^b f(z)\,\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta .$$

امثلة محلولة

مثال (1)

جد $\int_C z^2\,dz$ حيث أن معادلة المسار C هي

$$z = t + it^2 \ , \ 0 \le t \le 1$$

الحل :

$$\int_C z^2\,dz = \int_0^1 (t + it^2)^2\,d\,(t + it^2)$$

$$= \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2it^3)\,(1 + 2ti)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 5t^4)\,dt + i\int_0^1 (4t^3 - 2t^5)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^5\right]_0^1 + i\left[t^4 - \frac{1}{3}t^6\right]_0^1 = \frac{2}{3}(i-1)$$

مثال (2)

جد $\int_C \frac{dz}{z}$ حيث ان معادلة المسار C هي

Scanned by CamScanner

$$z(t) = \cos t + i \sin t , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

الحل :

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i \cos t}{\cos t + i \sin t} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)\ (\cos t - i\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

مثال (3)

جد $\int_C \frac{dz}{z}$ حيث ان معادلة المسار C هي

$$z(t) = 2 + e^{it} , \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

الحل :

ان المسار C هو محيط دائرة نصف قطرها 1 ومركزها $(2,0)$

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\, e^{it}\, dt}{2 + e^{it}} = \log |2 + e^{it}| + i \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{2 + \cos t} \right) \Bigg]_0^{2\pi}$$

$$\log (2 + e^{it}) = \log |2 + e^{it}| + i \tan^{-1} \frac{I(2 + e^{it})}{R(2 + e^{it})}$$

$$2 + e^{it} = 2 + \cos t + i \sin t$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = \log |2 + e^{2\pi i}| - \log |2 + e^0| + i (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 0)$$

$$= \log 3 - \log 3 + i(0) = 0$$

نلاحظ من التكاملين في المثالين (2) و (3) انهما لدالة واحدة هي $f(z) = \frac{1}{z}$ التي فيها

$$z = 0$$

تمثل نقطة شاذة (singular point). في المثال (2) النقطة الشاذة $z=0$ تقع داخل المسار C وكانت نتيجة التكامل عليه $2\pi i$ والمثال (3) فيه النقطة الشاذة $z=0$ خارج المسار C وكانت نتيجة التكامل عليه صفر. وهذا مايحقق مبرهنة كوشي كورسا التي سوف نبحثها في الفقرة القادمة .

Scanned by CamScanner

تمارين 4.1

١- جد قيمة $\int_C y\,dz$ حيث أن $C : x = t - 1 , y = e^{t-1} , 2 \leq t \leq 3$

الجواب: $e^2 - e + \frac{1}{2} i (e^4 - e^2)$

٢- جد $\int_C \frac{dz}{z - i}$ حيث أن C محيط الدائرة $|z - i| = 1$

الجواب : $2\pi i$

٣- جد $\int_C (x^2 + y^2) dz$ حيث أن $C : x = t^2 , y = \frac{1}{t} ; 1 \leq t \leq 3$

الجواب : $\frac{728}{3} + \log 9 - \frac{728}{81} i$

٤- جد $\int_C \bar{z}\,dz$ حيث أن

(أ) C الخط المنكسر ABE الواصل من $A (0,1)$ الى $B (0,0)$ الى $E (1,0)$

(ب) C قوس الدائرة AE التي مركزها الاصل وتمر بالنقطتين $E (1,0) , A (0 , - 1)$

الجواب (أ) 0 ، (ب) $i \frac{\pi}{2}$

٥- جد $\int_C \bar{z}\,dz$ حيث أن C الخط المنكسر ABED الواصل بين النقاط

$D (3,1) , E (3,2) , B (2,1) , A (0,1)$

الجواب : $\frac{9}{2} - 4i$

٦- جد $\int_C e^z\,dz$ حيث ان C المنحني $y = 2x$ من $A (- 1 , - 2)$ الى $B (1,2)$

الجواب : $e^{1+2i} - e^{-1-2i}$

٧- جد $\int_C \frac{dz}{z}$ حيث ان C الدائرة $x^2 + y^2 = 9$ الجواب $2\pi i$

٨- جد $\int_C (\bar{z})^2\,dz$ حيث أن C المنحني $y = x^2$ من $(0,0)$ الى $(1 , 1)$

الجواب : $\frac{14 - 5i}{15}$

٩- جد $\int_C x\,dz$ حيث أن C الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب ، الجواب πi

Scanned by CamScanner

10 - جد $\int_C y\,dz$ من $A(-2,0)$ الى $B(2,0)$ على المسارات الاتية

(أ) الخط المنكسر من $A(-2,0)$ الى $E(-2,-1)$ الى $D(2,-1)$ الى $B(2,0)$

(ب) النصف الاسفل من الدائرة التي قطرها AB

(ج) النصف الاعلى من الدائرة التي قطرها AB

الجواب (أ) -4 (ب) -2π (ج) 2π

11 - جد $\int_C \frac{2z-3}{z}\,dz$ من $z=-2$ الى $z=2$ على كل من المسارات الثلاثة في المسألة السابقه

الجواب (أ) $8-3\pi i$ (ب) $8-3\pi i$ $8+3\pi i$

12 جد $\int_C (\bar{z})^2\,dz$ حيث ان C النصف الاعلى من الدائرة $|z|=2$ من -2 الى $+2$.

الجواب : 16 -

13 - جد $\int_C i\sin z\,dz$ حيث ان C قطعة المستقيم من $i-$ الى i . الجواب : صفر

14 - جد $\int_C (x^2+xy)\,dy$ حيث ان C قطعة المستقيم من $(0,0)$ الى $(1,2)$. الجواب : 2

15 جد $\int_C (z+2)\,e^{iz}\,dz$ حيث ان C القطع المكافيء $\pi^2 y = x^2$ من $(0,0)$ الى $(\pi,1)$

الجواب : $-2e^{-1}-1+i(2+\pi e^{-1}+2e^{-1})$

16 - لماذا التكامل $\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx$ على المسار $y=e^x$ لايمكن حسابه ؟

17 - جد التكامل $\int_C (x-y)\,dz$ على المسار

(أ) الخط المنكسر من $z=0$ الى $z=1$ ثم الى $z=1+i$

(ب) الخط المنكسر من $z=0$ الى $z=i$ ثم الى $z=1+i$

الجواب (أ) $\frac{1+i}{2}$ (ب) $-\frac{1+i}{2}$

18 - جد التكامل $\int_{-1}^{2} |\bar{z}|^2\,dz$ على المسار

Scanned by CamScanner

(أ) النصف الاعلى من الدائرة $|z| = 1$ من (−1) الى (+1) ثم على المستقيم من $z = 1$ الى $z = 2$.

(ب) النصف الاسفل من الدائرة $|z| = 1$ من (−1) الى (+1) ثم على المستقيم من $z = 1$ الى $z = 2$.

(ج) الخط المستقيم من $z = -1$ الى $z = 2$

الجواب (أ) $\frac{13}{3}$ (ب) $\frac{13}{3}$ (ج) 3

4.3 مبرهنة كوشي كورسا (The Cauchy-Goursat theorem)

مبرهنة (4.5)

لتكن R منطقة في المستوي z محاطة بمنحني مغلق بسيط C وبالاتجاه الموجب لتكن

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

دالة تحليلية في كل نقاط R بضمنها المحيط C لتكن $f'(z)$ مستمرة في R عندئذ

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

البرهان : حسب المبرهنة (4.1)

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \int_C u\,dx - v\,dy) + i \int_C (v\,dx + u\,dy)$$

ولما كانت $f(z)$ تحليلية و $f'(z)$ مستمرة في R فان الجزئين الحقيقي u والخيالي v دالتان لهما مشتقات جزئية مستمرة . وباستعمال مبرهنة كرين (Green theorem) [2'] في الدوال الحقيقية

$$\int_C u\,dx - v\,dy = \iint_R (-u_y - v_x)\,dx\,dy$$

$$\int_C v\,dx + u\,dy = \iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy$$

Scanned by CamScanner

وباستعمال معادلتي كوشي ريمان ، أي

$$u_x = v_y \quad ; \quad u_y = - v_x$$

يؤول كل من التكاملين المضاعفين صفرا ومن ذلك ينتج

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

وبهذا ينتهي البرهان

وكحالة خاصة عندما الدالة f تأخذ المقادير $1, z, z^2$ التي هي دوال كلية (أي تحليلية في كل نقاط المستوى z) وكان C منحنيا بسيطاً مغلقاً فان

$$\int_C dz = 0 \quad ; \quad \int_C z dz = 0 \quad ; \quad \int_C z^2\, dz = 0$$

لقد استطاع كورسا (E. Goursat 1858 – 1936) بينما عاش كوشي في الفترة 1857 - 1789 باعطاء برهان لهذه المبرهنة بدون الشرط الثالث اي بدون فرض $f'(z)$ مستمرة في R . ولهذا اطلق على هذه المبرهنة اسم مبرهنة كوشي كورسا ويكون منطوقها :

اذا كانت f دالة تحليلية في كل نقاط على وداخل منحني بسيط مغلق C فان

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

مثال (1)

اذا كان C الدائرة $|z| = 1$ برهن $I = \int_C \frac{z^2\, dz}{z - 3} = 0$

الحل :

ان الدالة $f(z) = \frac{z^2}{z - 3}$ تحليلية في كل نقاط المستوى z عدا النقطة $z = 3$ ولكن هذه النقطة $z = 3$ لاتقع داخل الدائرة $|z| = 1$ ولا على محيطها . وبذلك تتوفر شروط مبرهنة كوشي كورسا ويكون التكامل I صفراً وبهذا يتم اثبات المطلوب

يمكن حل السؤال بالطريقة المباشرة وذلك باستعمال الاحداثيات القطبية

Scanned by CamScanner

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ اي $z = 1.e^{i\theta}$ لان $|z| = 1$ ، $0 < \theta < 2\pi$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}.\, i\, e^{i\theta}\, d\theta}{e^{i\theta} - 3} = \int_0^{2\pi} \left[e^{2i\theta} + 3e^{i\theta} + 9\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 3} \right] i\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} e^{2i\theta} + 3e^{i\theta} + 9\log(e^{i\theta} - 3) \Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{4\pi i} - e^0) + 3(e^{2\pi i} - e^0) + 9[\log(e^{2\pi i} - 3) - \log(e^0 - 3)]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 1) + 3(1 - 1) + 9(\log(-2) - \log(-2)) = 0$$

مثال (2)

اذا كان C المربع بالاتجاه الموجب الذي رؤوسه $A(1,1), B(-1,1)$

$D(1,-1), E(-1,-1)$ جد التكامل $\int_C \frac{dz}{z}$

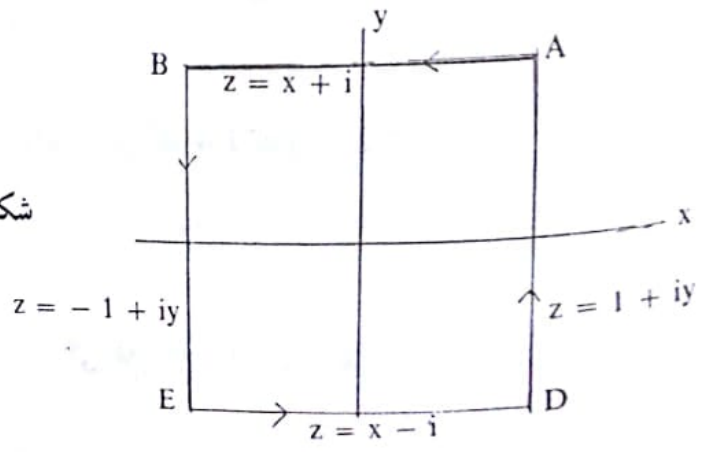
الحل :

نجزء التكامل الى اربعة اجزاء بحيث كل جزء يجري على ضلع من اضلاع المربع ABED كما في شكل (4.1) ان النقاط على الضلع AB تأخذ الصيغة $z = x + i$ وتكون $dz = dx$ ويصبح الجزء الاول من التكامل على AB

$$I_1 = \int_1^{-1} \frac{dx}{x + i} = \log(x + i) \Big]_1^{-1} = \log(-1 + i) - \log(1 + i)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} - \left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right) = i\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I_1 = i\frac{\pi}{2}$$



شكل (4.1)

Scanned by CamScanner

ثم نأخذ التكامل على الضلع BE الذي نقاطه بالصيغة $z = -1 + iy$ منها $dz = i\,dy$

$$I_2 = \int_1^{-1} \frac{i\,dy}{-1+iy} = \int_1^{-1} \frac{dy}{i+y} = \log(i+y)\Big]_1^{-1}$$

$$= \log(i-1) - \log(i+1)$$

$$\log\sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{4} - \left(\log\sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4}\right) = i\,\frac{\pi}{2}$$

والتكامل الثالث على الضلع ED الذي نقاطه بالصيغة $z = x - i$ ومنها $dz = dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-i} = \log(x-i)\Big]_{-1}^{1} = \log(1-i) - \log(-1-i)$$

$$\log\sqrt{2} + i\,\frac{7\pi}{4} - \left(\log\sqrt{2} - \frac{5\pi}{4}\,i\right) = i\,\frac{\pi}{2}$$

والتكامل الرابع على الضلع DA الذي نقاطه بالصيغة $z = 1 + iy$ منها $dz = dy$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{i\,dy}{1+iy} = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{-i+y} = \log(-i+y)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \log(1-i) - \log(-1-i)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\,\frac{7\pi}{4} - \left(\log\sqrt{2} + i\,\frac{5\pi}{4}\right) = i\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = i\,\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2} = 2\pi i$$

نلاحظ من هذا المثال ان مبرهنة كوشي كَورسا لاتنطبق عليه لان الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

غير تحليلية عند النقطة $z = 0$ والتي تقع داخل المنحني المغلق (المربع) C .

Scanned by CamScanner

4. تعميم مبرهنة كوشي كورسا على منطقة متعددة الاتصال

Generalization of Cauchy - Gousat theorem On multiply Connected re

4.6

لكن C منحنياً بسيطاً مغلقاً وليكن $C_k , (k = 1,2,3,... n)$ عدد منته من منحنيات مغلقة منفصلة عن بعضها وجميعها تقع داخل المنحني C . لتكن R المنطقة المغلقة كل النقاط الواقعة داخل C وخارج المنحنيات المغلقة $C_k , (k = 1,2,...,n)$.

مزلكل المحيط R المكون من C وجميع C_k ذات الاتجاهات التي تترك R فاذا كانت f دالة تحليلية في R فان $\int_B f(z)\,dz = 0$

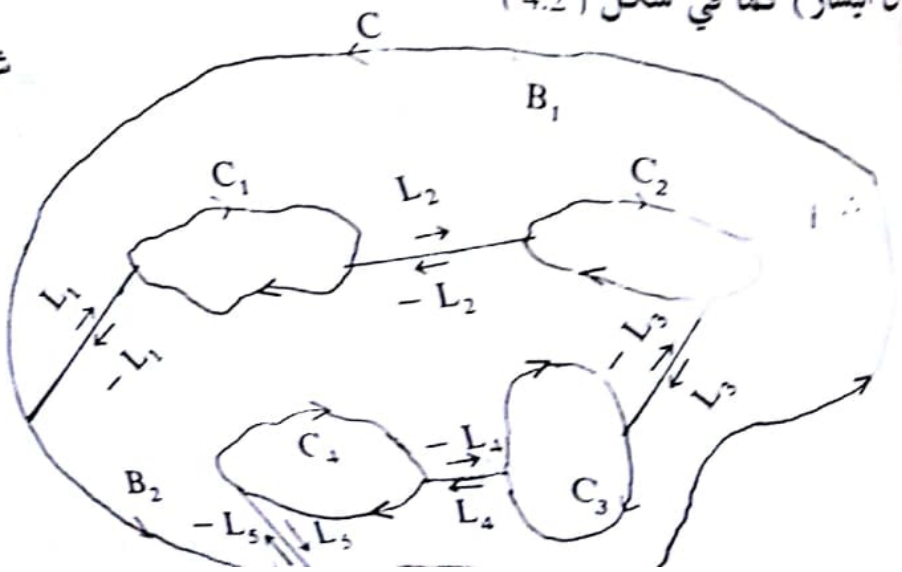
البرهان:

مسار L_1 مضلع الشكل يتكون من عدد منته من مستقيمات متصلة بصورة يصل المنحني الخارجي C والمنحني C_1 ويقع في R .

مسار L_2 مضلع الشكل ايضاً ويقع في R بحيث يوصل C_1 بـ C_2 المسارات التوصيلية L_3 من C_2 الى C_3 . وهكذا وليكن L_n بل الاخير يقع في R ويصل C_{n-1} بـ C_n ثم المسار الاخير L_{n+1} الذي يوصل C_n بالمنحني الخارجي C ويقع في R كما في الشكل الذي يوضح هذه باحداث منحنين مغلقين B_1 و B_2 .

يتكون المنحني المغلق B_1 من جزء من المنحني C ثم L_1 ثم جزء من C_1 ثم L_2 ثم جزء من C_2 ثم L_3 ، وهكذا يستمر ويصل جزء المنحني C_n ثم L_{n+1} وبحيث ان اتجاه B_1 يكون عكس عقارب الساعة (الاتجاة الموجب الذي يترك محتويات الداخل الى اليسار) كما في شكل (4.2)

شكل (4.2)



Scanned by CamScanner

يتكون المنحني المغلق B_2 من الجزء المتبقي من C ثم $-L_1$ ثم الجزء المتبقي من
ثم $-L_2$ ثم الجزء المتبقي من C_2 ثم $-L_3$ وهكذا يستمر ويصل الجزء الم
المنحني C_n ثم $-L_{n+1}$ وبحيث يكون اتجاه B_2 عكس عقرب الـ
وبتطبيق مبرهنة كوشي كورسا على الدالة f التحليلية في المنطقتين المحددتين بالـ
المغلقين B_1, B_2 كل على حدا ينتج

$$\int_{B_2} f(z)\,dz = 0 \quad ; \quad \int_{B_2} dz = 0$$

وبجمع هذين التكاملين وملاحظة اختزال التكاملات على L_k مع التكامل
$-L_k$ التوصيلة ينتج

$$\int_B f(z)\,dz = 0$$

وبهذا ينتهي برهان المبرهنة

ملاحظة

من المبرهنة (4.6) نلاحظ اذا كانت المنحنيات المغلقة $C, C_1, C_2, \ldots C_n$ لها نفس الاتجاه وليكن عكس عقرب الساعة فان

$$0 = \int_B f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \ldots - \int_{C_n} f(z)\,dz$$

وبهذا يمكن استنتاج مايلي

نتيجة (4.1)

اذا كانت f دالة تحليلية في المنطقة R المحاطة بالمنحنيات البسيطة المغلقة
$C, C_1, C_2, \ldots C_n$

ولها نفس الاتجاهات وبحيث $C_1, C_2, \ldots, C_n$ كلها واقعة داخل C ومنفصلة عن بعضها عندئذ

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

مثال (3)

جد قيمة التكامل $\int_B \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$ حيث B مكون من المنحنين

$C_1 : |z| = 5$ ، $C_2 : |z| = 3$ بالاتجاهات التي تترك المنطقة بينهما الى اليسار .

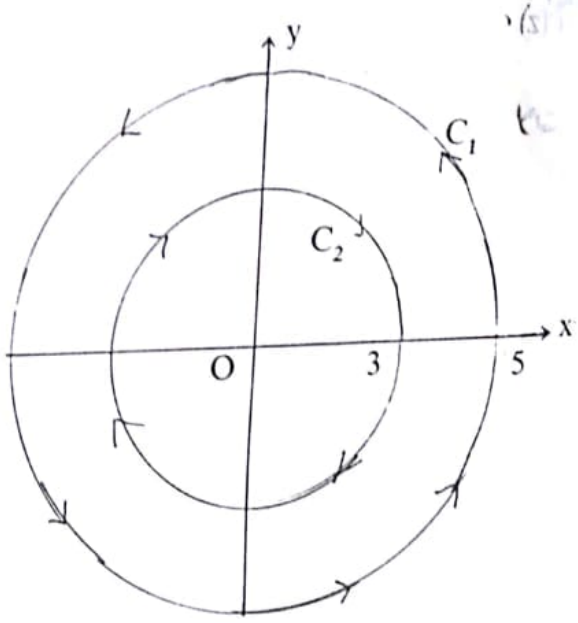
Scanned by CamScanner

الحل :

الدالة $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}$ تحليلية في الحلقة

$3 \leq |z| \leq 5$ لان النقاط الشاذة لهذه الدالة وهي $1, \pm 2i$ لاتقع في

$3 \leq |z| \leq 5$ وبذلك تنطبق مبرهنة كوشي كورسا وتكون قيمة هذا التكامل



شكل (4.3)

4.5 التكاملات غير المحددة (Indefinte Integrals)

لتكن f دالة تحليلية في منطقة بسيطة الاتصال D . لتكن z, z_0 نقطتين في D .
اذا كان C_1, C_2 أي منحنين بسيطين يصلان النقطتين z, z_0 ويقعان في D عندئذ
$C_1, -C_2$ معاً يؤلفان منحنياً بسيطاً مغلقاً.
باستعمال مبرهنة كوشي كورسا ينتج

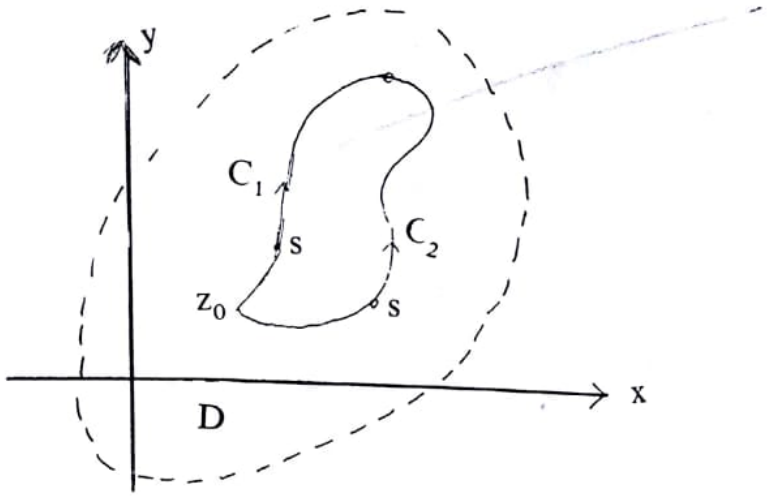
$$\int_{C_1 - C_2} f(s)\, ds = 0$$

حيث s يرمز للنقاط على C_1, C_2 . عندئذ

$$\int_{C_1} f(s)\, ds - \int_{C_2} f(s)\, ds = 0$$

وبهذا فالتكامل من z_0 الى z لايعتمد على المسار الذي يصل بين النقطتين طالما يقع في المنطقة D

Scanned by CamScanner



شكل (4.4)

لنفرض

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds$$

سوف نبرهن ان مشتقة $F(z)$ موجودة وتساوي $f(z)$

تأمل

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\, ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds$$

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\, ds \qquad \ldots (4.5.1)$$

حيث المسار من z الى $z + \Delta z$ أي منحني في D وليكن هذا المسار هو جزء المستقيم الواصل بين النقطتين $z + \Delta z, z$. لكن

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, ds \qquad \ldots (4.5.2)$$

من المعادلتين (4.5.1) و (4.5.2) نحصل على

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} (f(s) - f(z))\, ds$$

لما كانت f دالة مستمرة في z عندئذ لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب $\delta > 0$ بحيث

$$|f(s) - f(z)| = |f(z) - f(s)| < \varepsilon$$

Scanned by CamScanner

عندما $|s - z| < \delta$. والآن عندما تكون $z + \Delta z$ قريبة من z أي $|\Delta z| < \delta$

فان

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} (\varepsilon) |\Delta z| = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

ي أن

$$F'(z) = f(z) \qquad \ldots\ldots (4.5.3)$$

على ذلك فان التكامل المحدد لدالة تحليلية يؤلف دالة تحليلية بالحد الاعلى للتكامل بشرط
ن يكون مسار التكامل منحني متصل في المنطقة التي يكون فيها التكامل تحليلياً . وبهذا فان
لتكامل

$$F(z) = \int_{z=0}^{z} f(s)\, ds$$

يمكن حسابه بمقدار تغير التكامل غير المحدد كما في التكامل الحقيقي . اي

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz = \int_{z0}^{\beta} f(z)\, dz - \int_{z0}^{\alpha} f(z)\, dz = F(\beta) - F(\alpha) = F(z) \Big]_{\alpha}^{\beta}$$

بشرط ان مسار التكامل يقع في المنطقة التي تكون فيها f دالة تحليلية .

مثال (4)

التكامل غير المحدد للدالة $f(z) = z^2$ هو الدالة الكلية (entire)

$F(z) = \frac{z^3}{3}$ حيث ان $f(z) = z^2$ دالة كلية وبذلك يمكننا ايجاد

$$\int_0^{1+2i} z^2 dz = \frac{1}{3}(1 + 2i)^3$$

لاي مسار في المستوى z من النقطة $z = 0$ الى النقطة $z = 1 + 2i$

مثال (5)

جد قيمة التكامل $\int_1^1 z^{1/2} dz$

الحل :

اذا اخترنا المنطقة $(r > 0, 0 \le \theta < 2\pi)$ ، $z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$

تكون الدالة $f(z) = z^{1/2}$ غير تحليلية على الشعاع $\theta = 0$ عند النقطة $z = 1$

لان الاقتراب الى $\theta = 0$ من قيم اعلى محور x يعطي صفراً بينما الاقتراب من النقاط
تحت محور x يعطي 2π . وبذلك تكون $f(z) = z^{1/2}$ ذات قيمتين مختلفتين
عند حد التكامل $z = 1$. ولكن اخترنا المنطقة

Scanned by CamScanner

$$f(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \; ; \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

تكون $z^{1/2}$ تحليلية على المحور الحقيقي (في الحقيقة تكون تحليلية في كل نقاط المستوي z عدا نقاط الشعاع $\theta = -\frac{\pi}{2}$)

وبذلك نضع

$$z = 1.e^{i\theta} \; ; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} z^{1/2} dz = \int_{\pi}^{0} e^{i\theta/2} . e^{i\theta}\, id\theta = \int_{\pi}^{0} e^{3i\theta/2}\, id\theta$$

$$= \frac{2}{3} \left(e^{i\,3\theta/2} \right)_{\pi}^{0} = \frac{2}{3} \left(e^{0} - e^{i\,3\pi/2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} (1 + i)$$

اما اذا اخترنا المنطقة $g(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \; ; \quad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \right)$

واخذنا المسار اسفل المحور الحقيقي من الدائرة $|z| = 1$ التي تمر بنقطتي حدي التكامل

ووضعنا

$$z = 1.e^{i\theta} \; ; \; \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

تكون الدالة تحليلية عدا نقاط الشعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ الذي لايلتقي مع نصف محيط الدائرة $|z| = 1$ الواقع تحت المحور x وباعادة التكامل السابق بالتعويض نحصل على

$$\frac{2}{3} \left[e^{3i\theta/2} \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{3} \left(e^{3\pi i} - e^{3\pi i/2} \right) = \frac{2}{3} (-1 + i)$$

نلاحظ ان الجوابين مختلفان لان $f(z) = z^{1/2}$ غير تحليلية على الشعاع الفاصل بين نهاية وبداية فترة الزاوية ، كما ان المشتقة $f'(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2}$ غير معرفة عند النقطة $z = 0$

Scanned by CamScanner

ويكون التكامل حول المنحني المغلق من المسارين في الحالتين هو

$$\frac{2}{3}(-1+i)-\frac{2}{3}(1+i)=-\frac{4}{3}$$

هذا الناتج لايساوي صفر لان الدالة $f(z)=z^{1/2}$ غير تحليلية عند النقطة $z=0$ الواقعة داخل المسار $|z|=1$

تمار ين 4.2

1- ليكن C محيط المنطقة R المحصورة بين الدائرة $|Z|=4$ والمربع الذي اضلاعه $x=\pm 1, y=\pm 1$ حيث ان الاتجاه الموجب لـ C هو الذي يترك محتويات R الى اليسار. بين لماذا $\int_c f(z)\,dz=0$ عندما

(أ) $f(z)=\frac{1}{3z^2+1}$ (ب) $f(z)=\frac{z+2}{\sin\frac{z}{2}}$ (ج) $f(z)=\frac{z}{1-e^z}$

2- ليكن C منحنياً بسيطاً مغلقاً يقع داخل المنحني البسيط المغلق C_0 حيث ان الاتجاه الموجب لكل من C_0, C يترك المنطقة داخله الى اليسار (أي عكس عقارب الساعة) اذا كانت f دالة تحليلية في المنطقة المحصورة بين C_0, C برهن

$$\int_c f(z)\,dz=\int_{c_0} f(z)\,dz$$

3- استعمل نتيجة التمرين 2 في اثبات

(أ) $\int_c \frac{dz}{z-2-i}=2\pi i$ (ب) $\int_c (z-2-i)^{n-1}\,dz=0$

حيث ان $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ وان C محيط المستطيل $0\le x\le 3, 0\le y\le 2$ باتجاه عكس عقارب الساعة .

4- جد قيمة كل من التكاملات الاتية حيث مسار التكامل هو أي منحني في المستوى z يصل بين نقطتي حدي التكامل

Scanned by CamScanner

$\int_1^3 (z-2)^3\,dz$ (ج) $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\,dz$ (ب) $\int_1^{1/2} e^{i\pi z}\,dz$ (أ)

الجواب (أ) $\frac{1-i}{\pi}$ (ب) $e + e^{-1}$ (ج) صفر

5- جد المنطقة التي تكون فيها f تحليلية ثم طبق مبرهنة كوشي كورسا لاثبات $\int_C f(z)\,dz = 0$ حيث C الدائرة $|z| = 1$ عندما

(أ) $f(z) = z\,e^{-z}$

(ب) $f(z) = \operatorname{sech} z$

(ج) $f(z) = \operatorname{Log}(z+2)$

(د) $f(z) = \tan z$

6- جد التكامل $\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$ لأي منحني بسيط يصل حدي التكامل بحيث لايمس الشعاع غير السالب من المحور الحقيقي الجواب : $-\pi i$

7- جد قيمة التكامل $\int_C x\,dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = r$ بالاتجاه الموجب

(أ) باستعمال المعادلات الوسيطية

(ب) بملاحظة $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$

8 جد قيمة $\int_C \frac{dz}{z-1}$

حيث C الدائرة $|z| = 2$ بالاتجاه الموجب

9- جد قيمة $\int_C |z-1|\,|dz|$

حيث C الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب

10 جد قيمة $\int_C x\,dz$

حيث C قطعة المستقيم من $z = 0$ الى $z = 1 + i$

Scanned by CamScanner

4.6 صيغتا كوشي التكامليتين Couchy's Integral Formulas

مبرهنة (4.7)

لتكن f تحليلية داخل وعلى منحني بسيط مغلق C وبالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) ولتكن a اية نقطة داخل C عندئذ

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} \qquad \ldots\ldots (1)$$

كذلك لكل قيم $n = 1,2,3 \ldots$ تكون المشتقة $f^{(n)}(a)$ موجودة ومعطاة بالصيغة

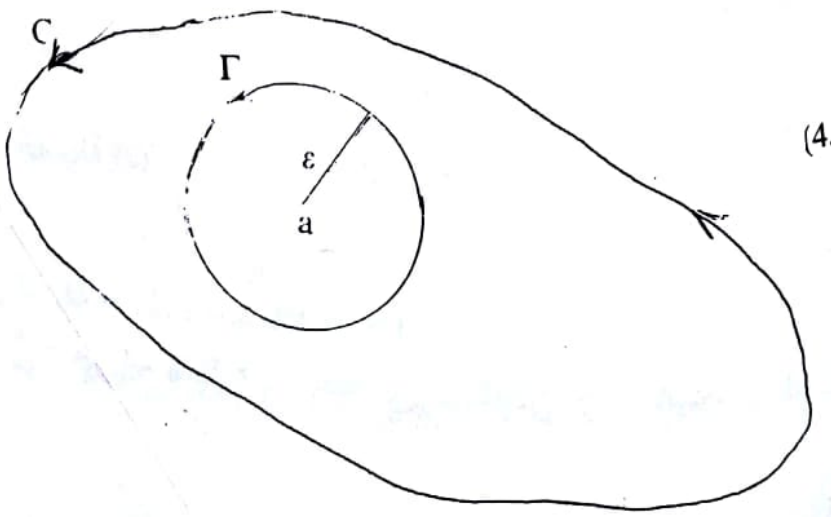
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad \ldots\ldots (2)$$

البرهان (1)

ان الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية داخل وعلى C عدا عند النقطة $z = a$. نأمل الدائرة Γ التي معادلتها $|z-a| = \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ أي عدد حقيقي موجب وبصفرٍ كافٍ يجعل Γ تقع كليا داخل C وباتجاه عكس عقارب الساعة (شكل 4.5) .

اذا تكون الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية على Γ, C وفي المنطقة المحصورة بينهما وبذلك حسب مبرهنة كوشي كورسا (مبرهنة 4.2) ينتج

$$\int_{C-\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0$$



شكل (4.5)

Scanned by CamScanner

أي أن

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

وباستعمال الاحداثيات القطبية على معادلة الدائرة $\Gamma : |z-a| = \varepsilon$ أي

$$z - a = \varepsilon e^{i\theta} \; ; 0 \le \theta < 2\pi$$

وبالتعويض ينتج

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

ولما كانت $f(z)$ مستمرة ناخذ النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ ينتج

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\, d\theta$$

$$= i f(a)\int_0^{2\pi} d\theta = i f(a)\, 2\pi$$

$$\therefore f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

وبهذا ينتهي برهان الصيغة (1)

برهان الصيغة (2)

لنبرهن المشتقة الاولى (عندما $n = 1$) باستعمال الصيغة (1) نجد ان

ليكن $a + h$ اية نقطة قريبة جداً من a داخل C ،

Scanned by CamScanner

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right\} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \frac{h}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

يمكن تحقيق الاخيرة بجمع الكسرين .

حسب ماجاء في برهان الصيغة (1) نختار دائرة Γ مركزها a ونصف قطرها عدد صغير موجب ε بحيث يجعل Γ يقع كلياً داخل C ثم نجعل $|h|$ صغيرة بحيث $0 < |h| \le \frac{\varepsilon}{2}$ عندئذ التكامل الثاني في المقدار الاخير اعلاه يصبح

$$\frac{h}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2} = \frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

لكن

$$|z-a-h| \ge |z-a| - |h| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ولما كانت $f(z)$ تحليلية داخل C فانه يمكن ايجاد عدد حقيقي موجب M بحيث

$$|f(z)| < M$$

ولما كان طول محيط الدائرة Γ هو $2\pi\varepsilon$. نجد ان

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}\right| \le \frac{|h|\,M\,(2\pi\varepsilon)}{2\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon^2} = \frac{2\pi M|h|}{\pi\varepsilon^2}$$

باعتبار $|z-a| = \varepsilon$

فاذا جعلنا ε ثابتة وتركنا $|h| \to 0$ عندئذ التكامل الاخير يقترب الى الصفر وبهذا ينتج

Scanned by CamScanner

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

$$\therefore f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

ومن اجل اكمال البرهان عندما $n = 2$ نعيد طريقة الاشتقاق هذه على الدالة

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

وذلك باحاطة النقطة a بدائرة Γ نصف قطرها $\varepsilon > 0$ ثم ناخذ نقطة قريبة من a مثل $a+h$ بحيث $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ وينتج

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right\} f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right\} f(z)\,dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3} + \frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\{3(z-a)-2h\}f(z)\,dz}{(z-a)^3(z-a-h)^2}$$

ان التكامل الثاني يقترب من الصفر عندما $h \to 0$ لان

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{3(z-a)-2h}{(z-a)^3(z-a-h)} f(z)\,dz\right| \le \frac{|h|\,M(2\pi\varepsilon)}{2\pi\varepsilon^3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{4|h|M}{\varepsilon^3}$$

حيث M عدد حقيقي موجب ويحقق المتباينة

$$|3(z-a)-2h|\,|f(z)| < M$$

وهذا ممكن لان $f(z)$ تحليلية ضمن الدائرة Γ المحددة
وعندما $h \to 0$ تنتج المشتقة الثانية

Scanned by CamScanner

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3} = \frac{2!}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}$$

وبطريقة مماثلة نستنتج الصيغة عندما $n = 3,4,\ldots$ وبهذا تنتج الصيغة بصورة عامة

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

وبهذا ينتهي برهان صيغة كوشي التكاملية الثانية .

ملاحظة (1) :

يمكن الحصول على نتيجة المشتقة الاولى $f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$

بأخذ المشتقة الجزئية الاولى للصيغة (1) أي $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)}$

بالنسبة للرمز a واستعمال قاعدة ليبنز * (Leibniz's rule) في اجراء الاشتقاق للمقادير داخل علامة التكامل .أي اننا نشتق جزئياً بالنسبة لـ (a) للصيغة التكاملية الاولى ينتج

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c} f(z)(-1)(z-a)^{-2}(-1)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} .$$

---

* يمكن الاطلاع على قاعدة ليبنز في كتب التفاضل المتقدم [12] من قائمة المصادر الاجنبية .
Advanced calculus by A.E. Taylor . 16.5 الفصل السادس عشر فقرة

Scanned by CamScanner

وبصورة عامة يمكننا اتباع قاعدة ليبنز باجراء الاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ a داخل التكامل للصيغة التكاملية الاولى n من المرات أي أن

$$f^{(n)}(a) = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{f(z)\,dz}{z-a}\right)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

ملاحظة (2) :

ان صيغتي كوشي التكامليتين تصحان أيضاً عندما تكون المنطقة R مكونة من عدد منته من المنحنيات المغلقة البسيطة المنفصلة عن بعضها والتي تقع داخل احدها .

نتيجة 4.2 :

اذا كانت f تحليلية في منطقة R فان كل مشتقات f ولكل المراتب هي دوال تحليلية في R .

البرهان :

لتكن z أية نقطة في R ولتكن C أي منحني مغلق بسيط يحوي z كنقطة داخلية . لما كانت f(z) تحليلية في R وبموجب الصيغة التكاملية الاولى لكوشي ينتج

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{s-z}$$

وبموجب الصيغة التكاملية الثانية لكوشي عندما n = 1 ينتج

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2}$$

وهكذا الى المشتقة n أي

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+1}}$$

Scanned by CamScanner

وبذلك تكون $f(z)$ قابلة للاشتقاق لكل المراتب ولكل $z \in R$

$\therefore$ كل المشتقات دوال تحليلية فى R

نتيجة 4.3 :

اذا كانت f دالة تحليلية داخل وعلى محيط دائرة C نصف قطرها r ومركزها $z = a$ واذا كانت $|f(z)| \leq M$ لكل قيم z على محيط الدائرة C حيث M عدد حقيقي موجب . فان لكل القيم $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ يكون

$$f^{(n)}(a) \leq \frac{n!\, M}{r^n}$$

البرهان :

بموجب الصيغة التكاملية الثانية لكوشي ينتج

$$\left| f^{(n)}(a) \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z-a|^{n+1}}$$

$$\therefore |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(2\pi r)}{r^{n+1}} = \frac{M(n!)}{r^n}$$

بموجب المتباينة (4.2.8) باعتبار محيط الدائرة C يساوي $L = 2\pi r$.

ان هذه الصيغة تدعى بمتباينة كوشي (Cauchy's Inequality)

مثال (1)

جد قيمة التكامل $I = \int_C \frac{z^2\,dz}{(z-1)(z-2)}$ حيث C الدائرة $|z| = 3$

الحل :

لما كان $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

وباستعمال صيغة كوشي التكاملية الاولى على الكسر الاول باعتبار $f(z) = z^2$ التي هي تحليلية وأن $a = 2$ ثم $a = 1$ تقعان داخل C ينتج

Scanned by CamScanner

التكامل على الكسر الاول

$$\int_c \frac{z^2\,dz}{z-2} = 2\pi i\,(2)^2 = 8\pi i$$

والتكامل على الكسر الثاني

$$\int_c \frac{z^2\,dz}{z-1} = 2\pi i\,(1)^2 = 2\pi i$$

وبالطرح ينتج

$$\int_c \frac{z^2\,dz}{(z-2)(z-1)} = 8\pi i - 2\pi i = 6\pi i$$

مثال (2)

جد قيمة التكامل $\int_c \frac{e^{2z}\,dz}{(z+1)^4}$

عندما (أ) C الدائرة $|z| = 2$ (ب) C الدائرة $|z-3| = 1$

الحل :

(أ) لما كانت $f(z) = e^{2z}$ تحليلية في كل المستوي z تقع $a = -1$ داخل الدائرة $|z| = 2$ وبموجب صيغة كوشي التكاملية الثانية عندما $n = 3$ نجد

$$f'(z) = 2e^{2z}\ ;\ f''(z) = 4e^{2z}\ ;\ f'''(z) = 8e^{2z}\ ;\ f'''(-1) = 8e^{-2}$$

$$f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4}$$

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i}\int_c \frac{e^{2z}\,dz}{(z+1)^4}$$

$$\therefore \int_c \frac{e^{2z}\,dz}{(z+1)^4} = \frac{8}{3}\pi i\, e^{-2}$$

(ب) ان الدالة $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4} = \frac{f(z)}{(z+1)^4}$ تحليلية داخل الدائرة $|z-3| = 2$

لان النقطة الشاذة $z = -1$ تقع خارج هذه الدائرة فيمكن استعمال مبرهنة كوشي كورسا (4.2) ومنها ينتج

Scanned by CamScanner

$$\int_C \frac{e^{2z}\,dz}{(z+1)^4} = 0$$

مثال (3)

احسب التكامل $\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2+1}$ حيث C الدائرة (أ) $|z-i|=1$

(ب) $|z+i|=1$

الحل :

(أ) لما كان $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ فان الدالة $\frac{e^z}{z+i}$ تحليلية داخل وعلى الدائرة $|z-i|=1$ وبتطبيق صيغة كوشي التكاملية الاولى

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

باعتبار $a = i$, $f(z) = \frac{e^z}{z+i}$ ينتج

$$\int_C \frac{e^z dz}{z^2+1} = \int_C \frac{\left(\frac{e^z}{z+i}\right)dz}{z-i} = 2\pi i\left(\frac{e^i}{i+i}\right) = \pi e^i$$

(ب) الدالة $\frac{e^z}{z-i}$ تحليلية داخل وعلى محيط الدائرة $|z+i|=1$ لان $z=i$ لاتقع داخل ولا على محيط الدائرة $|(z+i)|=1$.وباعادة تطبيق صيغة كوشي التكاملية الاولى ينتج

$$\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2+1} = \int_C \frac{\left(\frac{e^z}{z-i}\right)}{z+i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-i}}{-i-i}\right) = -\pi e^{-i}$$

4.7 مبرهنة ليوفيل (Liouville's theorem)

مبرهنة (4.8) :

اذا كانت f دالة كلية ومحددة لكل قيم z في المستوي z عندئذ تكون f دالة ثابتة .

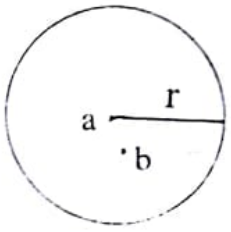
Scanned by CamScanner

البرهان :

ليكن a ، b اية نقطتين في المستوى z ولتكن C دائرة مركزها a ونصف قطرها r بحيث $|b-a| < \frac{r}{2}$. باستعمال صيغة كوشي التكاملية الاولى ينتج

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-b}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

$$=\frac{b-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$$



شكل (4.6)

ولما كان

$$|z-a|=r\,,\ |z-b|=|z-a+a-b|\geq |z-a|-|a-b|$$

$$\therefore |z-b|>r-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}$$

ولما كانت $f(z)$ محددة في المستوى z فانه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث

$$|f(z)|<M$$

لكل z داخل وعلى محيط الدائرة ، ولما كان محيط الدائرة $2\pi r$ فانه ينتج

$$|f(b)-f(a)|=\frac{|b-a|}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-b)(z-a)}\right|$$

$$<\frac{|b-a|\,M.2\pi r}{2\pi\left(\frac{r}{2}\right)r}=\frac{2M|b-a|}{r}$$

Scanned by CamScanner

$|\int f(z)dz| \leq ML$

بموجب المتباينة (4.2.8) .

والآن اذا جعلنا $r \to \infty$ نجد أن $|f(b) - f(a)| \to 0$

أي أن $f(a) = f(b)$

ولما كانت a, b أية نقطتين في المستوى z

$\therefore$ تكون الدالة f ثابتة

وبهذا ينتهي البرهان .

مثال

الدالة الحقيقية $f(x) = \sin x$ تحليلية ومحددة أي $|\sin x| \leq 1$ لكل x ولكنها غير ثابتة . هل هذا يناقض منطوق مبرهنة ليوفيل ؟ ولماذا ؟

الحل

ان الدالة $\sin x = \sin\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)$ غير قابلة الاشتقاق في المستوى المعقد z لان

$$\frac{d}{dz}(\sin x) = \left[\cos\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\right]\frac{1}{2}\left(1 + \frac{d\bar{z}}{dz}\right)$$

ولما كان $\frac{d\bar{z}}{dz}$ غير موجود لان $\frac{d\bar{z}}{dz}$ تقترب من 1 على المحور x وتقترب من (-1) على المحور y وبذلك تكون $\sin x$ غير تحليلية في المستوي المعقد z وبها لا تتحقق شروط مبرهنة ليوفيل وبهذا لا يمكن أن تكون $\sin x$ دالة ثابتة

4.8 مبرهنة موريرا (Morera's theorem)

هي معكوس مبرهنة كوشي كورسا مبرهنة (4.5) وتنص .

مبرهنة (4.9)

اذا كانت f دالة مستمرة في منطقة بسيطة الاتصال R وكان

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

حيث C اي منحني بسيط مغلق يقع في R ، عندئذٍ تكون f تحليلية في R .

Scanned by CamScanner

البرهان :

لما كان $\int_C f(z)\,dz = 0$ لاي مسار مغلق C يقع في R فانه بموجب المعادلة(4.5.3)

ولكل z ينتمي الى R نحصل على $F'(z) = f(z)$

حيث $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$, z_0 اية نقطة ثابتة في R .

من هذا نستنتج ان F (z) قابلة للاشتقاق في اية نقطة z من R وبذلك تكون F(z) تحليلية

∴ المشتقة $F'(z) = f(z)$ دالة تحليلية بموجب النتيجة (4.2) .

وبهذا ينتهي برهان هذه المبرهنة .

4.9 – المبرهنة الاساسية في الجبر Fundamental Theorem of Aigebra

مبرهنة (4.10)

ان كل حدودية :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0$$

حيث n عدد صحيح اكبر أو يساوي 1 و $a_n \neq 0$

يكون لها على الاقل جذر واحد .

البرهان :

اذا كان العكس ، أي لا يوجد أي جذر للمعادلة $P(z) = 0$ بمعنى أن لكل قيم z في المستوي z يكون $P(z) \neq 0$ عندئذ تكون الدالة

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

تحليلية في كل نقاط المستوي z . كذلك $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ محددة لان

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

اذاً $\frac{1}{P(z)}$ تحقق شروط مبرهنة ليوفيل (مبرهنة 4.8) فيجب أن تكون P (z) دالة

Scanned by CamScanner

ثابتة لكل قيم z . وهذا يؤدي الى تناقض لان P(z) دالة متغيرة القيم بالنسبة لتغير قيم z .
∴ المعادلة P (z) = 0 لابد أن يكون لـ z قيمة تحققها ، أي لابد من وجود على الاقل جذر واحد
وبهذا ينتهي البرهان .

4.10 مبرهنة القيمة المتوسطة لكاوس (Gaus's Mean Value Theorem)

مبرهنة (4.11)

لتكن f دالة تحليلية داخل وعلى محيط دائرة C مركزها a ونصف قطرها r ، عندئذ f (a) هي القيمة المتوسطة لقيم f على C ، أي أن

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

البرهان :

بموجب صيغة كوشي التكاملية الاولى ينتج

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - a}$$

ولما كان نصف قطر الدائرة C هو r ومركزها a ، فان معادلتها $|z - a| = r$ تقابل

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad z = a + r e^{i\theta}$$
$$dz = ir e^{i\theta}\, d\theta$$

وبالتعويض ينتج

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})\, ir e^{i\theta}\, d\theta}{re^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

وبهذا ينتهي البرهان .

Scanned by CamScanner

تمارين (4.3)

1- جد قيمة $\int_C \frac{e^z\,dz}{z-2}$ اذا علمت (أ) C الدائرة $|z|=3$ (ب) C الدائرة $|z|=1$
الجواب (أ) $2\pi e^2 i$ (ب) صفر

2- جد $\int_C \frac{e^{3z}dz}{z-\pi i}$ حيث أن $C:|z|=5$. الجواب $-2\pi i$

3- جد $\int_C \frac{\sin 3z}{z+\frac{\pi}{2}}dz$ حيث أن $C:|z|=2$ الجواب $2\pi i$

4- برهن $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{xz}}{z^3+1}dz = \sin\alpha$ حيث ان C الدائرة $|z|=3$

5- جد قيمة $\int_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^3}$ حيث ان C الدائرة $|z|=2$. الجواب $-\pi i$

6- جد قيمة (أ) $\int_C \frac{\sin^6 z\,dz}{z-\frac{\pi}{6}}$ (ب) $\int_C \frac{\sin^6 z\,dz}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}$ حيث أن C الدئرة $|z|=1$
الجواب (أ) $\frac{\pi i}{32}$ ، (ب) $\frac{21\pi i}{16}$

7- جد قيمة $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zz}\,dz}{(z^2+1)^2}$ حيث أن C الدائرة $|z|=3$

الجواب : $\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$

8- جد $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$ الجواب $\frac{1}{4}$

9- برهن أن $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log(\sin\theta)\,d\theta = -\log 2$

(تلميح تأمل $\log(\sin\theta) = \log\frac{1-e^{-2i\theta}}{2ie^{-i\theta}}$ ثم جزء واستعمل مبرهنة كاوس)

10- جد قيمة التكامل $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2\,dz}{z^2+4}$ حيث ان C محيط المربع بالاتجاه الموجب

Scanned by CamScanner

والذي رؤوسه النقاط $\pm 2 + 4i , \pm 2$ الجواب i

11- جد قيمة $\int_c \frac{\cos^2 tz}{z^3}$ حيث أن C الدائرة $|z| = 1$ الجواب $-2\pi i\, t^2$

12- اذا كانت C الدائرة $|z| = 3$ بالاتجاه الموجب وكانت

$g(z) = \int_c \frac{2s^2 - s - 2}{s - z}\, ds$ عندما $|z| \neq 3$ برهن $g(2) = 8\pi i$

ثم احسب قيمة $g(z)$ عندما $|z| > 3$

13- ليكن C منحنياً بسيطاً مغلقاً بالاتجاه الموجب وليكن

$$g(z) = \int_c \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3}\, ds$$

برهن أن $g(z) = 6\pi i\, z$ عندما تقع z داخل C ثم برهن أن $g(z) = 0$ لكل قيم z التي نقاطها تقع في المستوى z خارج C

14- ليكن C محيط المربع الذي اضلاعه $y = \pm 2 , x = \pm 2$ بالاتجاه الموجب جد قيمة التكاملات الاتية :

(أ) $\int_c \frac{e^{-z}\, dz}{z - \frac{\pi}{2} i}$ (ب) $\int_c \frac{\cos z\, dz}{z(z^2 + 8)}$ (جـ) $\int_c \frac{z\, dz}{2z + 1}$

(د) $\int_c \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right) dz}{(z - x_0)^2}$, $-2 < x_0 < 2$ (هـ) $\int_c \frac{\cos h z\, dz}{z^4}$

الجواب (أ) 2π (ب) $\frac{\pi i}{4}$ (جـ) $\frac{-\pi i}{2}$ (د) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$ (هـ) صفر

15- اذا كانت C الدائرة $|z - i| = 2$ بالاتجاه الموجب جد

(أ) $\int_c \frac{dz}{z^2 + 4}$ (ب) $\int_c \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$ الجواب (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{16}$

16- اذا كانت ، دالة تحليلية داخل وعلى منحنٍ بسيط مغلق C و z_0 لا تقع على C برهن

Scanned by CamScanner

$$\int_C \frac{f'(z)\,dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}$$

17- لتكن C الدائرة $-\pi \le \theta < \pi , z = e^{i\theta}$ وليكن a ثابتاً حقيقياً برهن

$$I = \int_C \frac{e^{az}\,dz}{z} = 2\pi i$$

ثم اكتب التكامل I بدلالة θ ومنه برهن

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)\,d\theta = \pi$$

18- اذا كانت a عدداً حقيقياً موجباً جد $\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2 + a^2}$ حيث أن C (أ) الدائرة $|z| = 2a$ بالاتجاه الموجب (ب) الدائرة $|z - ai| = a$ بالاتجاه الموجب

الجواب (أ) $\frac{2\pi i \sin a}{a}$ (ب) $\frac{\pi}{a} e^{ai}$

19- جد التكامل $\int_C e^{-z} z^{-2} \sin z\,dz$ حيث أن C الدائرة $|z-1| = 5$ بالاتجاه الموجب .

الجواب $2\pi i$

20- جدقيمة التكامل $\int_C \frac{(e^z - z^3)\,dz}{(z - a)^3}$ حيث ان C منحني بسيط مغلق و a نقطة داخل C

الجواب : $\pi i (e^a - 6a)$

21- اذا كانت C الدائرة $|z - 1| = 5$ بالاتجاه الموجب ، جد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{dz}{z^4 - 1}$$

الجواب : صفر

22- جد قيمة التكامل $\int_C \frac{dz}{z^3 (z - 2)^2}$ حيث أن C الدائرة $|z - 3| = 2$ بالاتجاه الموجب .

الجواب : $\frac{-3\pi i}{8}$

23- اعد حل التمرين 22 عندما C الدائرة $|z - 1| = 3$

الجواب : صفر .

Scanned by CamScanner

الفصـــل الخامس

المتتابعات والسلاسل Sequences and Series

5.1 تقارب المتتابعات والسلاسل (Convergence of sequences and series).

المتتابعة (Sequence)

تعرف متتابعة الاعداد المعقدة بانها دالة منطلقها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ومداها اعداد معقدة .

اذا كانت f ترمز لهذه الدالة فان قيمها تكتب بالشكل

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

لغرض السهولة سوف نرمز لمتتابعة الاعداد المعقدة بالرمز

$$\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots\} \qquad (5.1.1)$$

حيث ان $z_n = f(n)$ لكل قيم $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Scanned by CamScanner

مثال (1)

ان المتتابعة

$$\{ i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \dots \}$$

تمثل دالة منطلقها الاعداد الصحيحة الموجبة وحيث أن الاعداد الصحيحة

1, 2, 3, 4, 5, ...

تقابلها الاعداد المعقدة

$$i, i^2, i^3, i^4, i^5 \dots,$$

أي أن

$$f(n) = i^n$$

ولغرض السهولة يُرمز لهذه المتتابعة بالرمز $\{ i^n \}$.

حدود المتتابعة (terms of sequence)

ان الاعداد $z_1, z_2, \dots$ في (5.1.1) يطلق عليها اسم حدود المتتابعة وبصورة خاصة الحد z_n يدعى بالحد العام (genernl term) أو الحد الذي ترتيبه n .

المتتابعة الثابتة (Constant se quence)

هي المتتابعة $\{ z_n \}$ والتي فيها جميع الحدود متساوية ، أي أن

$$z_k = z_{k+1} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

المتتابعة المتقاربة (Convergent sequence)

تكون المتتابعة $\{ z_n \}$ متقاربة نحو z عندما تتزايد n بلاتناه $(n \to \infty)$ ونكتب

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \quad \dots \quad (5.1.2)$$

اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$| z_n - z | < \varepsilon$$

لكل قيم $n > N$.

أي أن لكل n الكبيرة بما فيه الكفاية تكون النقاط z_n قريبة من z (أي أن z_n تقع بجوار z الذي بعده ε) . اذا لم تكن المتتابعة $\{ z_n \}$ متقاربة فتدعى متباعدة (Divergent)

Scanned by CamScanner

مبرهنة (5.1) :

لتكن $(n = 1, 2, \ldots)\ z_n = x_n + i\, y_n$

و

$z = x + i\, y$

عندئذٍ

(i) $\lim_{n \to \infty} z_n = z$

اذا وفقط اذا كان

...(ii) $\lim_{n \to \infty} y_n = y\,,\ \lim_{n \to \infty} x_n = x$

البرهان :

لنفرض اولاً بأن الشرط (i) يتحقق . سوف نثبت صحة الشر ط (ii) . من (i) ، لكل عدد موجب ε يوجد عدد صحيح موجب N بحيث :

$$|x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

لكل قيم $n > N$.

لكن

$$|x_n - x| \le |x_n - x + i(y_n - y)|$$

و

$$|y_n - y| \le |x_n - x + i(y_n - y)|.$$

وبذلك نستنتج ،

$$|y_n - y| < \varepsilon\,,\ |x_n - x| < \varepsilon$$

لكل قيم $n > N$ ؛ أي أن الشرط (ii) تحقق .

العكس ، لنفرض بأن (ii) صحيحة ، لكل عدد صحيح موجب ε يوجد عددان صحيحان موجبان $N_1\,,\ N_2$ بحيث أن

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل قيم $n > N_1$

و

$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل قيم $n > N_2$

أذاً

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scanned by CamScanner

لكل قيم $n > N$ ، حيث أن N هي اكبرالعددين N_1, N_2 ، اي أن

$N = \max(N_1, N_2)$ ، لكن $|x_n + iy_n - (x + iy)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$

وثم $|z_n - z| < \varepsilon$ لكل قيم $n > N$.

أذاً الشرط (i) تحقق . وبهذا يتم اثبات المبرهنة .

مثال (2) : هل المتتابعة $\left\{ \frac{i}{n} \right\}$ متقاربة ؟

الحل :

نعم أن المتتابعة $\left\{ \frac{i}{n} \right\}$ متقاربة نحو الصفر وذلك لأنه عندما $n \to \infty$ فأن $\frac{1}{n} \to 0$.

مثال (3) :

هل المتتابعة $\{(2i)^n\}$ متباعدة ام متقاربة ؟

الحل :

بما أن i^n تساوي $1, i, -1, -i$ عندما يكون باقي قسمة n على 4 هو $0, 1, 2, 3$ على التوالي وأن 2^n كبيرة عندما تكون n كبيرة فأن المتتابعة $\{(2i)^n\}$ تكون متباعدة .

مثال (4) :

ناقش تقارب المتتابعة $\left\{ \frac{i^n}{n} \right\}$

الحل :

سوف نثبت أن المتتابعة $\left\{ \frac{i^n}{n} \right\}$ تقترب نحو الصفر . اي يجب أن نبرهن لكل $\varepsilon > 0$

يوجد عدد صحيح موجب N بحيث $\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

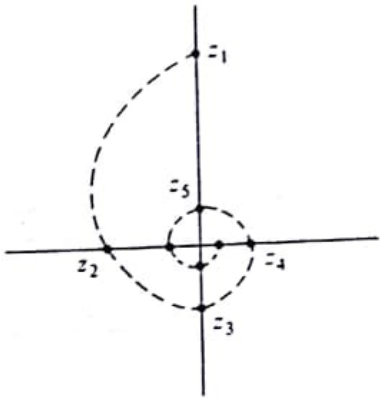
عندما $n > N$.

الآن

$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

أن اختيار $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ يحقق الهدف المطلوب ، اي ان المتتابعه تقترب نحو الصفر عندما $n \to \infty$ والشكل (5.1) يوضح فكرة التقارب هذه .

Scanned by CamScanner



شكل (5.1)

السلسلة (Series)

لتكن $\{z_n\}$ متتابعة . ان المجموع

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \quad (5\cdot1\cdot3)$$

يعرف بسلسلة الاعداد المعقدة اللانهائية حيث ان z_n هو الحد الذي ترتيبه n.

اذا كان

$$s_1 = z_1$$
$$s_2 = z_1 + z_2$$
$$s_3 = z_1 + z_2 + z_3$$
$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots z_n$$

فان s_n يسمى المجموع الجزئي (Partial sum) للسلسلة .

السلاسل المتقاربة (Convergent series)

يقال بان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة نحو s عندما $n \to \infty$ وتكتب

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Scanned by CamScanner

اذا كانت المتتابعة $\{s_n\}$ ، حيث s_n المجموع الجزئي للسلسلة ، يقترب نحو s ،
أي ان

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n , \ldots \qquad (5\cdot1\cdot4)$$

اذا لم تكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة فتدعى متباعدة.
يدعى s مجموع السلسلة (sum of the series) وان هذا المجموع وحيد لان النهاية (5·1·4) وحيدة (البرهان يترك كتمرين للطالب وهومشابه الى برهان المبرهنة (2.1) من الفصل الثاني) .

يمكن كتابة الصيغة (5·1·4) بالشكل

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = s_n + R_n$$

حيث ان $R_n = s - s_n$ يدعى بالباقي (Remainder) ومنها ينتج

$$|s_n - s| = |R_n - 0|$$

اذاً الشرط اللازم والكافي لكي تكون السلسلة (5·1·3) متقاربة نحو s هو ان الباقي R_n يقترب نحو الصفر عندما $n \to \infty$.
وبتعبير آخر نقول أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون السلسلة (5.1.3) متقاربة نحو s. هو انه لكل عدد حقيقي موجب ε ، يوجد عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة .

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon \ldots . \qquad (5.1.5)$$

عندما $n > N$ و p أي عدد اختياري صحيح اكبر من الواحد .

مبرهنة (5.2) : لتكن $z_n = x_n + i\, y_n \quad (n = 1, 2, \ldots .)$

و $S = X + i\, Y,$

عندئذ

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \qquad \ldots (i)$$

Scanned by CamScanner

اذا وفقط اذا كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y , \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \qquad \text{... (ii)}$$

البرهان :

لتكن S_N ترمز للمجموع الجزئي لـ N من الحدود الاولى للسلسلة (i) . فان

$$S_N = X_N + i\, Y_N , \qquad \text{... (iii)}$$

حيث ان

$$Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n , \; X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

الآن ، تكون (i) صحيحة اذا وفقط اذا كان

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S : \qquad \text{....(iv)}$$

ومن المعادلة (iii) والمبرهنة (5.1) ، يكون (iv) صحيحاً اذا وفقط اذا كان

$$\lim_{N\to\infty} Y_N = Y , \quad \lim_{N\to\infty} X_N = X \qquad \text{...(v)}$$

وبهذا فان (i) تنتج (v) وبالعكس ،

بما ان Y_N, X_N المجموع الجزئي للسلسلة (ii) فالمبرهنة تكون صحيحة وبهذا يتم اثبات المبرهنة .

مثال (5)

ناقش تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

الحل :

ان هذه السلسلة تدعى بالسلسلة الهندسية (Geometric series) وان مجموعها الجزئي هو

$$s_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Scanned by CamScanner

اذا كان $|z| < 1$ فان

$z^n \to 0$ عندما $n \to \infty$

ومنها نستنتج بان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تقترب من $\frac{1}{1-z}$

اما اذا كان $|z| \geq 1$ فان $|z^n| \geq 1$ ومنها تكون السلسلة متباعدة

مثال (6)

ناقش تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{3^n}$

الحل

ان المجموع الجزئي للسلسلة

$$s_n = 2i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right)$$

يؤلف سلسلة هندسية حدها الاول $\frac{2i}{3}$ واساسها (ratio) $\frac{1}{3}$ ومجموعها

$$s = \frac{2i/3}{1 - 1/3} = i$$

اذاً السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{3^n}$ تقترب نحو i .

التقارب المطلق Absolute convergence

لنشرح الآن مفهوم التقارب المطلق للسلسلة (5.1.3)

اذا كان

$$z_n = x_n + i\,y_n \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

واذا عوضنا بكل حد من السلسلة (5.1.3) بطول متجهه (قيمته المطلقة) فاننا نحصل على السلسلة ذات الحدود الموجبة الاتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \ldots, \quad (5.1.6)$$

اذا تقاربت هذه السلسلة (5.1.6) فاننا نقول عن السلسلة (5.1.3) انها ذات تقارب مطلق .

Scanned by CamScanner

سوف نثبت انه اذا تقاربت السلسلة (5.1.6) فان السلسلة الاصلية (5.1.3)
تتقارب ايضاً . تأمل المتباينتين

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq |x_n|,$$

$$\sqrt{x^2 + y_n^2} \geq |y_n|.$$

اذا تقاربت السلسلة (5.1.6) فان السلسلتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

متقاربتان ، أي ان السلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ , \qquad \ldots (5.1.7)$$

متقاربتان مطلقاً ، لأن التقارب المطلق لسلسلة الاعداد الحقيقية يؤدي الى تقارب السلسلة نفسها (انظر مبرهنة 8 ، الفقرة 18.9 المصدر [2′]) اذاً السلسلتان (5.1.7) متقاربتان ومن المبرهنة (5.2) نستنتج ان السلسلة (5.1.3) متقاربة . أي ان التقارب المطلق لسلسلة من الاعداد المعقدة يؤدي الى تقارب السلسلة نفسها (وباختصار ، اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ متقاربة فان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة ايضاً)

مثال (7)

ناقش تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ عندما تكون $|z| \leq 1$ ؟

الحل :

ان هذه السلسلة متقاربة مطلقاً ولكل قيم z عندما $|z| \leq 1$ وذلك لأن

$$\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{عندما} \quad |z| \leq 1$$

وباستخدام الاختبار بطريقة المقارنة (comparison test) وحيث ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة (لانها سلسلة p حيث $p = 2 > 1$ ، انظر مثال (3) فقرة 18.2 من المصدر [2′]) فان السلسلة الاصلية متقاربة .

Scanned by CamScanner

السلسلة المتقاربة شرطياً (Conditionally Convergent Series) :

اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة ولكن $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ متباعدة فان هذه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ تدعى بالسلسلة المتقاربة شرطياً .

مثال (8)

اثبت ان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ متقاربة شرطياً ؟

الحل

ان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right|$ متباعدة لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ,$$

ولما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ من النوع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ المتباعدة عندما $p \leq 1$ ، فان

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right|$ متباعدة .

ولكنها متقاربة شر طياً ، لان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ متقاربة .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$= i\left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \log 2 = \log (1 + i) ;$$

(يمكن الاطلاع على هاتين السلسلتين الحقيقيتين في المصدر [12] الفصل السابع عشر)

Scanned by CamScanner

تمارين (5.1)

1 - ناقش تقارب كل من المتتابعات الاتية

(أ) $\{ 2i^n \}$ (ب) $\left\{ \frac{1}{n(1-i)^n} \right\}$ (جـ) $\left\{ \frac{2n-i}{n+2i} \right\}$ (د) $\left\{ n - \frac{i}{n} \right\}$

(هـ) $\{ |z|^n \}$ لكل قيم z

الجواب (أ) متباعدة (ب) متقاربة (جـ) متقاربة (د) متباعدة (هـ) متقاربة اذا كان $|z| < 1$

2 - اثبت ان المتتابعة $\{ z_n \}$ متقاربة حيث أن

$$z_n = -2 + i\,\frac{(-1)^n}{n^2} \; ; \; (n = 1,2,\ldots)$$

3 - استخدم الباقي R_n لاثبات

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

عندما يكون z أي عدد معقد يحقق $|z| < 1$.

(تلميح اثبت أن $|R_n| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}$)

4 - اختبر كلاً من السلاسل الاتية فيما اذا كانت متقاربة مطلقاً ، متقاربة شرطياً . ام متباعدة :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{n^3}$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ (جـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{4n}}{(2n)!}$ (هـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n$ (و) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+1+i} \right)$

الجواب (أ) متقاربة مطلقاً (ب) متباعدة (جـ) متقاربة شرطياً (د) متقاربة مطلقاً (هـ) متقاربة مطلقاً (و) متقاربة مطلقاً .

5 اذ كان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ اثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{s}$

Scanned by CamScanner

6 - جد منطقة تقارب كل من السلاسل الاتية

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

الجواب (أ) $|z+2| \leq 4$ (ب) $|z| < \infty$

(5.2) سلاسل القوى (Power Series)

ان سلسلة القوى هي سلسلة من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_o + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots, \dots \quad (5.2.1)$$

حيث ان a_n , z_0 $(n = 0,1,2,\dots)$ اعداد معقدة معلومة .

ملاحظات

1- اذا كانت $z = z_0$ فان سلسلة القوى (5.2.1) تكون متقاربة نحو a_0

2 - اذا كانت $z_0 = 0$ فان سلسلة القوى (5.2.1) تصبح

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots , \quad (5.2.2)$$

3 - تكون سلسلة القوى (5.2.1) متقاربة مطلقاً اذا كانت سلسلة القيم المطلقة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = |a_0| + |a_1 (z - z_0)| + \dots + |a_n (z - z_0)^n| + \dots$$

متقاربة . ولدراسة تقارب سلسلة القيم المطلقة والتي هي سلسلة حقيقية ذات حدود موجبة نطبق اختبار كوشي (يمكن الاطلاع عليه في مبرهنة 16 فقرة 17.4 في المصدر [12] من قائمة المصادر الاجنبية في الكتاب)

$$\lim_{n \to \infty} |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} |z - z_0| = \frac{1}{R} |z - z_0|$$

وذلك بفرض

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

وتكون بذلك سلسلة القوى (5.2.1) متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة اذا كان $\frac{1}{R} |z - z_0| < 1$ أي ان $|z - z_0| < R$

ومتباعدة عندما $\frac{1}{R} |z - z_0| > 1$ أي أن $|z - z_0| > R$

Scanned by CamScanner

ان جميع قيم z التي من اجلها تكون السلسلة متقاربة تقع داخل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها R

يطلق على هذه الدائرة اسم دائرة تقارب السلسلة كما يطلق على نصف قطرها R اسم نصف قطر دائرة التقارب (radius of convergence)

وعندما يكون نصف قطر دائرة التقارب مالانهاية تكون سلسلة القوى متقاربة لجميع نقاط المستوي المعقد

مثال (1) ناقش تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z - i)^n$

الحل :

ان هذه السلسلة من نوع (5.2.1) والتي فيها $a_n = 3^n , z_0 = i$ ان نصف قطر دائرة التقارب R يمكن ايجاده كما يأتي

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} |3^n|^{1/n} = 3$$

أي أن $R = \frac{1}{3}$. وبذلك تكون السلسلة متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة عندما $|z - i| < \frac{1}{3}$

ومتباعدة عندما $|z - i| > \frac{1}{3}$ وبذلك تكون دائرة التقارب :

الدائرة التي مركزها i ونصف قطرها $\frac{1}{3}$

مثال (2)

ان نصف قطر دائرة التقارب لكل من السلاسل الاتية

(i) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots ,$

(ii) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots ,$

(iii) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$

يساوي مالانهاية أي أن السلاسل (i) , (ii) , (iii) تكون متقاربة لكل نقاط المستوي المعقد

Scanned by CamScanner

مثال (3)

ناقش تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} (z-1)^n$

الحل :

ان هذه السلسلة من نوع (5.2.1) والتي فيها $z_0 = 1$ ، يمكن $a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

ايجاد نصف قطر دائرة التقارب R كما يأتي

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \right]^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

أي ان دائرة تقارب هذه السلسلة هي : $|z-1| < e^{-1}$

التقارب المنتظم (Uniform Convergence)

يقال بان سلسلة القوى (5.2.1) متقاربة بانتظام في منطقة D اذا وفقط اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ فانه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k - \sum_{k=0}^{n-i} a_k (z - z_0)^k \right| < \varepsilon \quad \ldots (5.2.2)$$

لكل قيم $n > N$ ولكل $z \in D$

ملاحظة

1 - في التقارب المنتظم العدد N لا يعتمد على z بل يعتمد على ε فقط ويرمز له بـ $N(\varepsilon)$

2 - المنطقة D تدعى منطقة تقارب السلسلة .

3 - اذا كانت السلسلة متقاربة بانتظام في منطقة D فان تلك السلسلة تكون متقاربة في D ، أي أن التقارب المنتظم لسلسلة يؤدي الى تقاربها .

مثال : (4)

ناقش التقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

الحل :

لقد بينا في المثال (5) من البند السابق بان هذه السلسلة متقاربة ومجموعها $= \frac{1}{1-z}$

Scanned by CamScanner

عندما $|z| < 1$. أي أن نصف قطر دائرة التقارب $R = 1$ سوف نبين بان هـذه السلسلة ليست متقاربة بانتظام ضمن منطقة تقاربها .
تأمل

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} z^k \right| \leq \frac{|z|^n}{|1-z|}$$

لتكن ε مقدار ثابت $(0 < \varepsilon < 1)$ بحيث أن

$$\frac{|z|^n}{|1-z|} < \varepsilon$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين والتبسيط نحصل على

$$\frac{\log \frac{1}{\varepsilon} - \log|1-z|}{\log \frac{1}{|z|}} < n$$

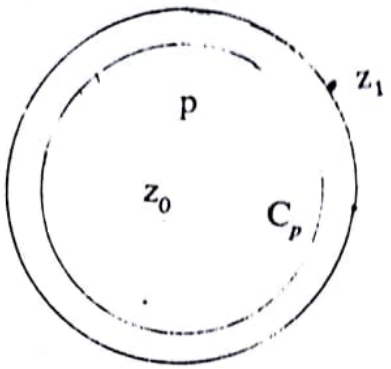
ان الطرف الايسر دائماً موجب لأن $|z| < 1$
عندما $|z| \to 1$ فان مقام الايسر يقترب من الصفر وبسطه يقترب من ∞
ε ثابت وبهذا يكون الطرف الايسر كبيراً جداً
اذاً لاتوجد N $(n \geq N)$ تعتمد على ε فقط في تحقيق هذه المتباينة أي أن N تعتمد على ε z
اذاً السلسلة ليست متقاربة بانتظام .
ان هذا المثال يبين بان سلاسل القوى قد تكون غير متقاربة بانتظام في دائرة تقاربها
المبرهنة الاتية تعين المنطقة التي تكون فيها سلاسل القوى متقاربة بانتظام .

مبرهنة (5.3) :
اذا تقاربت السلسلة (5.2.1) : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$
في نقطة ما $z = z_1$ $(z_1 \neq z_0)$ فانهـــا تتقارب مطلقاً في أية نقطة z اقرب الى z_0 من z_1 أي انها تتقارب عندما

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

Scanned by CamScanner

كما تتقارب تقارباً منتظماً في أية دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها p اصغرمن $|z_1 - z_0|$ (شكل 5.2).



شكل(5.2)

البرهان :

بما أن السلسلة التي حدودها $a_n (z_1 - z_0)^n$ متقاربة (بالفرض) فان هذه الحدود تكون جميعها محددة ،أي يوجد عدد M بحيث تتحقق المتباينة .

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| < M \qquad \ldots\ldots (5.2.3)$$

ولجميع قيم n .

اذا فرضنا الان دائرة C_p مركزها z_0 ونصف قطرها p أصغر من $|z_1 - z_0|$ فانه يمكن أن نرمز لنصف القطر هذا بـ

$$p = \theta |z - z_0|$$

حيث $0 < \theta < 1$ وعندها يكون لكل قيم z المنتمية الى الدائرة C_p

$$|z - z_0| \leq \theta |z_1 - z_0| \qquad \ldots\ldots (5.2.4)$$

لايجاد القيم العظمى لحدود السلسلة (5.2.1) في الدائرة C_p ،نلاحظ انه يمكننا أن نكتب استناداً الى (5.2.3) و (5.2.4) مايلي

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \theta^n$$

ومنها ينتج مباشرة بان القيم المطلقة لحدود السلسلة (5.2.1) في الدائرة C_p اصغر من الحدود المناظرة لمتوالية هندسية متناقصة ذات حدود موجبة ولاتعتمد على z أي أن السلسلة (5. 2.1) تتقارب في الدائرة C_p تقارباً مطلقاً ومنتظماً .وبهذا يتم البرهان .

Scanned by CamScanner

ملاحظة

نلاحظ من المبرهنة اعلاه بان تقارب السلسلة (5. 2.1) يكون منتظماً في أية دائرة تقع ضمن دائرة التقارب (أي نصف قطرها اصغر من نصف قطر دائرة التقـارب R)

تمارين 5.2

1 - جد نصف قطر دائرة تقارب كل من السلاسل الآتية :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{2^n + 1} z^n$ (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!z^n}{(n!)^2}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{n^2} z^n$

(هـ) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n (z+2)^n$ (و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$

الاجوبة (أ) 1 (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) e^{-2} (هـ) e^{-1} (و) 3

2- تأمل سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

اشتق السلسلة حداً حداً لتحصل على $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{2^n}$

كامل السلسلة حداً حداً من $z = 0$ الى $z = t$ لتحصل على $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{2^n (n+1)}$

اثبت بان نصف قطر دائرة تقارب كل من هذه السلاسل الثلاثة يساوي 2

3- اذا كان r نصف قطر دائرة تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، جـد نصف قطـر دائرة تقارب كل من السلاسل الاتية

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n z^n$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} a_n z^n$ (هـ) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p a_n z^n$

4- جد نصف قطر دائرة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{n!}$

ثم ادرس تقارب هذه السلسلة على محيط دائرة التقارب .

Scanned by CamScanner

5- اثبت أن داخل دائرة تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = S(z)$ تؤلف $S(z)$

دالة منتظمة الاستمرارية وان مشتقتها للرتبة p هي

$$S^{(p)}(z) = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} (z - z_0)^n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث ان

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{p!\,n!}$$

6- اثبت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

حيث أن z تقع داخل تقاطع دوائر التقارب الثلاثة . ثم اثبت أيضاً أن

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) z^n$$

حيث أن z تقع داخل تقاطع دوائر التقارب الثلاثة .

7 لنفرض بان سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ لها دائرة تقارب C التي نصف قطرها $r > 0$ اثبت

(أ) ان السلسلة تقترب من الدالة $f(z)$ المستمرة عند كل نقطة z تقع داخل C .

(ب) ان السلسلة يمكن تكاملها حداً حداً على مسار Γ يقع داخل C وان

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma} a_n z^n \, dz \right)$$

(ج) ان السلسلة تقترب من الدالة $f(z)$ التحليلية داخل C

(د) ان مشتقة $f(z)$ تعطي بالصيغة

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (a_n z^n)$$

أي أن السلسلة قابلة للاشتقاق حداً حداً داخل C .

(تلميح : يمكن الاطلاع على براهين هذه الحقائق في المصدر [7])

Scanned by CamScanner

5.3 سلسلة تايلور Taylor's Series

رأينا في البند السابق أن مجموع سلسلة القوى يؤلف دالة تحليلية داخل دائرة تقارب تلك السلسلة . سوف نبرهن في هذا البند أن أية دالة تحليلية داخل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 يمكن تمثيلها بسلسلة قوى من الصيغة (5.2.1) وان هذا التمثيل وحيد .

مبرهنة (5.4) (مبرهنة تايلور Taylor's Theorem)

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل الدائرة C التي مركزها z_0 فان لكل قيم z داخل هذه الدائرة C

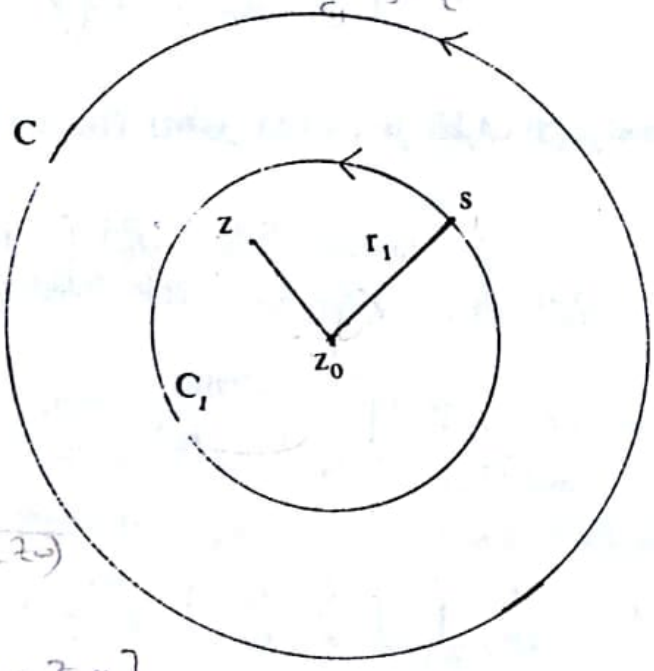
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots , \qquad \ldots (5.3.1)$$

البرهان :

نفرض أن z اية نقطة داخل C . نرسم دائرة C_1 مركزها z_0 ونصف قطرها $r_1 > |z - z_0|$ وتقع كلياً داخل الدائرة C (شكل 5.3) . حسب صيغة كوشي التكاملية الاولى ولكل قيم s على المنحني C_1 يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{(s - z)} \qquad \ldots (5.3.2)$$



شكل (5.3)

Scanned by CamScanner

ومن جانب اخر

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{s-z_0}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\right)$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)}\right]$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0}+(z-z_0)\frac{1}{(s-z_0)^2}+(z-z_0)^2\frac{1}{(s-z_0)^3}$$

$$+\ldots+(z-z_0)^{n-1}\frac{1}{(s-z_0)^n}$$

$$+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n\frac{1}{s-z} \qquad \ldots(5.3.3)$$

نضرب طرفي المعادلة (5.3.3) بـ $f(s)$ وبتطبيق (5.3.2) على الطرف الايسر نحصل على

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{s-z_0}+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^2}+\ldots+$$

$$\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^n}+u_n. \qquad \ldots(5.3.4)$$

حيث أن

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n\frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

Scanned by CamScanner

الآن باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

على حدود الطرف الايمن من المعادلة (5·3·4) ينتج

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1} + u_n$$

الان سوف نبرهن $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

بما ان s تقع على محيط الدائرة C_1 فان

أي ان $|z-z_0| < |s-z_0|$

$$\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < \gamma < 1$$

حيث γ ثابت . فاذا كانت M القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ على الدائرة C_1 (M ثابت) ينتج

$$|s-z| = |(s-z_0)-(z-z_0)| \geq r_1 - |z-z_0|$$

$$\therefore |u_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c_1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n \frac{f(s)}{s-z_0}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\gamma^n M \cdot 2\pi r_1}{r_1-(z-z_0)}$$

$$= \frac{\gamma^n M r_1}{r_1 - |z-z_0|} \to 0$$

عندما $n \to \infty$. أي ان

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

وهذا يبرهن (5·3·1) ولكل قيم z داخل الدائرة C

ملاحظات

1- ان تمثيل $f(z)$ داخل دائرة C مركزها z_0 بالصيغة (5·3·1) وحيد وذلك لانه اذا فرضنا بان $f(z)$ يمكن تمثيلها بالصيغة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (5·3·5)$$

Scanned by CamScanner

فان $a_0 = f(z_0)$ ولو وجدنا المشتقة ووضعنا $z = z_0$ نحصل على

$$f'(z_0) = a_1.$$

(ان الاشتقاق في حدود السلسلة اللانهائية ممكن لان $f(z)$ تحليلية تمرين 6 فـرع د من البند السابق)

واذا استمرينا في حساب المشتقة الثانية لـ (5·3·5) وعوضنا $z = z_0$ نحصل على

$$a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$$

وهكذا اذا حسبنا المشتقة n وعوضنا عن $z = z_0$ نجد ان

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad ,n = 0,1,2,3,....$$

ان الصيغة (5.3.5) هي نفس الصيغة (5·3·1)

2- اذا وضعنا $z_0 = 0$ في السلسلة (5·3·1) نحصل على سلسلة مكلورين (Maclaurin series)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \cdots \quad (5\cdot3\cdot6)$$

ولكل قيم z التي تقع داخل الدائرة C .

مثال (1)

جد مفكوك سلسلة مكلورين للدالة $f(z) = e^z$ في المنطقة المتمثلة بالمستوى z

الحل :

من الواضح ان لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$

ومنها نحصل على

$$f^{(n)}(z) = e^z$$
$$f^{(n)}(0) = 1 \ , n = 1, 2, 3, ...$$

بما ان $f(z) = e^z$ تحليلية داخل المنطقة $|z| < \infty$ فمن الصيغة (5.3.6) نحصل على

ولكل z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$$

Scanned by CamScanner

مثال (2)

جد مفكوك سلسلة مكلورين للدالة $f(z) = \text{Log}(1+z)$ في المنطقة $|z| < 1$

الحل

$$f(z) = \text{Log}(1+z) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -(1+z)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(z) = 2(1+z)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(z) = -3!(1+z)^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$f^{(n+1)}(z) = (-1)^n n!(1+z)^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!$$

ومن الصيغة (5.3.1) نحصل على

$$f(z) = \text{Log}(1+z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \ldots$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

طريقة ثانية

من الواضح بان لكل $|z| < 1$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

وبتكامل طرفي المعادلة من 0 الى z نحصل على

Scanned by CamScanner

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

مثال (3)

جد مفكوك سلسلة تايلور للدالة $f(z) = \sin z$ في المنطقة $|z| < \infty$ عند النقطة $z = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$$f(z) = \sin z \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(z) = \cos z \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(z) = -\sin z \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(z) = -\cos z \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و هكذا ، ومن الصيغة (5·3·1) نحصل على

$$f(z) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \ldots.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{1!} - \frac{(z - \pi/4)^2}{2!} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots..\right]$$

Scanned by CamScanner

تمارين 5.3

1- اثبت ان مفكوك سلسلة مكلورين لكل من الدوال الاتية ضمن منطقة تقاربها تاخذ الصيغة ازاءها

(i) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$; $|z| < \infty$

(ii) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $|z| < \infty$

(iii) $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$; $|z| < \infty$

(iv) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $|z| < \infty$

(v) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} z^{n}$; $|z| < 1$

2- جد مفكوك سلسلة تايلور للدالة $f(z) = \cos z$ عند النقطة $z = \frac{\pi}{2}$

3- جد مفكوك سلسلة تايلور للدالة $f(z) = \sinh z$ عند النقطة $z = \pi i$

4- اثبت انه عندما $z \neq 0$ فان

$$\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \ldots.$$

5- جد مفكوك سلسلة $f(z) = \text{Log}\frac{1+z}{1-z}$ عند النقطة $z = 0$

6- اثبت ان

$$\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots., |z| < 1$$

7- اثبت ان

(i) $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \ldots., |z| < \frac{\pi}{2}$

(ii) $\sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24} z^4 + \ldots, |z| < \frac{\pi}{2}$

(iii) $\csc z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360} z^3 + \ldots., 0 < |z| < \pi$

Scanned by CamScanner

5.4 سلسلة لوران (Laurent's Series)

سوف ندرس في هذا البند امكانية ايجاد مفكوك دالة تحليلية ذات نمط أعم من سلاسل القوى وسلسلة تايلور والتي تحوي على قوى صحيحة موجبة وسالبة لـ $(z - z_0)$. تسمى عادة هكذا سلسلة بسلسلة لوران وصيغتها العامة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \ldots\ldots (5.4.1)$$

حيث أن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\, ds}{(s - z_0)^{n+1}} , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \ldots\ldots (5.4.2)$$

سوف نضع فيما بعد سلسلة لوران (5.4.1) بصيغة اكثر ملائمة . قبل كل شيء ندرس منطقة تقارب هذه السلسلة .

ان منطقة تقارب السلسلة (5.4.1) هي منطقة تقارب كل من هاتين السلسلتين

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (5.4.3)$$

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \ldots , \qquad \ldots (5.4.4)$$

ان السلسلة (5.4.3) ما هي إلا سلسلة قوى عادية من النمط الذي درسناه سابقاً ومنطقة تقاربها هي دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها

$$R_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

ولدراسة السلسلة (5.4.4) نستبدل z بمتغير جديد ω بموجب

$$\omega = (z - z_0)^{-1}$$

ان هذا التبديل يحول السلسلة (5.4.4) الى سلسلة قوى عادية من الشكل

$$a_{-1}\omega + a_{-2}\omega^2 + a_{-3}\omega^3 + \ldots , \qquad \ldots (5.4.5)$$

Scanned by CamScanner

وتكون منطقة تقاربها دائرة مركزها الاصل (في المستوى ω) فلو رمزنا لنصف القطر لهذه الدائرة بـ $\frac{1}{R_2}$ لكانت منطقة تقارب السلسلة (5.4.5) هي

$$|\omega| < \frac{1}{R_2}$$

أي أن $\left|\frac{1}{\omega}\right| > R_2$.وبرجوعنا الى المتغير الاصلي z ، نحصل على منطقة تقارب السلسلة (5.4.4) بالشكل

$$|z - z_0| > R_2$$

وهكذا فان منطقة تقارب السلسلة (5.4.1) تعرف بالمتباينتين

$$|z - z_0| < R_1 \ , \ |z - z_0| > R_2 \qquad \ldots\ldots (5.4.6)$$

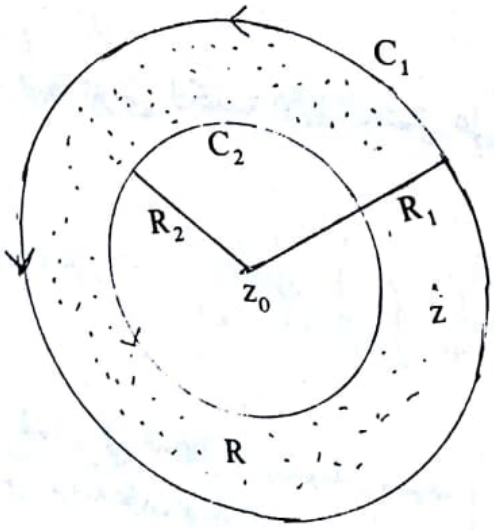
ان المتباينة $|z - z_0| < R_1$ تعين القسم الداخلي للدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها R_1 . والمتباينة الثانية $|z - z_0| > R_2$

تعين القسم الخارجي من الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها R_2

اذا كان $R_1 \leq R_2$ فان المتباينتين (5.4.6) لاتؤلف اي منطقة . اما اذا كان $R_1 > R_2$ فان (5.4.6) تؤلف حلقة دائرية

$$R_2 < |z - z_0| < R_1 \qquad \ldots\ldots (5.4.7)$$

كما مبين بالشكل (5.4) حيث ان C_1 تمثل الدائرة التي نصف قطرها R_1 وان C_2 تمثل الدائرة التي نصف قطرها R_2



شكل (5.4)

Scanned by CamScanner

مبرهنة لوران (5.5) (Lourent 's theorem)

اذا كانت $w = f(z)$ تحليلية داخل الحلقة

$$R_2 < |z - z_0| < R_1 \quad \ldots (5.4.7)$$

فان لكل z داخل هذه الحلقة يمكن تمثيل $f(z)$ بسلسلة لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \ldots\ldots (5.4.8)$$

حيث ان

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)\, ds}{(s - z_0)^{n+1}}, \ (n = 0,1\ 2, 3, \ldots.) \quad \ldots\ldots (5.4.9)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\, ds}{(s - z_0)^{-n+1}}, \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad \ldots\ldots (5.4.10)$$

حيث ان C_1 محيط الدائرة الخارجية التي نصف قطرها R_1 و C_2 محيط الدائرة الداخلية التي نصف قطرها R_2 وكلاهما بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة)

البرهان :

حسب صيغة كوشي التكاملية الاولى نحصل على

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)\, ds}{(s - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\, ds}{(s - z)}, \quad \ldots\ldots (5.4.11)$$

ولكل قيم z في الحلقة R والمعرفة بالصيغة (5 · 4.7)
كما فى مبرهنة تايلور نجد ان

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)\left[1-\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{s-z_0} + \frac{(z-z_o)}{s-z_o)^2} + \ldots + \frac{(z-z_o)^{n-1}}{(s-z_o)^n} +$$

$$\left(\frac{z-z_o}{s-z_o}\right)^n \frac{1}{(s-z)} \qquad \ldots\ldots (5.4.12)$$

اذاً الحد التكاملي الاول من الصيغة (5.4.11) يصبح

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)} + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^2}$$

$$+ \ldots. \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^n} + u_n$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{s-z} = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + u_n$$

$$\cdots (5.4.13)$$

حيث ان

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)}\ , a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^2}\ ,\ \ldots\ ,$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^n}$$

وان

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n \frac{f(s)\,ds}{s-z}$$

Scanned by CamScanner

لنأخذ الان الحد التكاملي الثاني من الصيغة (5·4·11) ، بتبديل z ، s احدهما محل الاخر في المعادلة (5·4·12) نحصل على

$$\frac{-1}{s-z} = \frac{1}{z-s}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} + \frac{s-z_0}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{(s-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n \left(\frac{1}{z-s}\right).$$

ومنها نحصل على

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)\,ds}{s-z} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)ds}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{(s-z_0)}{(z-z_0)^2} f(s)\,ds + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{(s-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} f(s)\,ds + v_n$$

$$\therefore \frac{-1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)\,ds}{s-z} = \frac{1}{z-z_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} f(s)\,ds\right\}$$

$$+ \frac{1}{(z-z_0)^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} (s-z_0) f(s)\,ds\right\} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(z-z_0)^n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} (s-z_0)^{n-1} f(s)\,ds\right\} + v_n$$

$$= \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + v_n \qquad \ldots (5\cdot4\cdot14)$$

Scanned by CamScanner

حيث ان

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(s)\,ds, \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} (s - z_0)\, f(s)\,ds, \ldots$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} (s - z_0)^{n-1} f(s)\,ds$$

وأن

$$v_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^n \frac{f(s)}{(z - s)}\,ds$$

الان من (5·4·11) ، (5·4·13) نحصل على (5·4·14)

$$f(z) = \{a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_{n-1}(z - z_0)^{n-1}\} + \left\{\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}\right\} + u_n + v_n \quad \cdots$$

(5·4·15)

ومن اجل اكمال مبرهنة لوران علينا اثبات $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

لقد سبق ان برهنا في مبرهنة (5·4) أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

الآن . لكل قيم s على المنحني C_2 نجد ان

$$\left|\frac{s - z_0}{z - z_0}\right| = p < 1$$

حيث ان p ثابت . من المعلوم ايضا ان $|f(s)| < M$. M عدد حقيقي موجب

$$|z - s| = |(z - z_0) - (s - z_0)| \geq |z - z_0| - R_2$$

اذاً

$$|v_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_2}\left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^n \frac{f(s)\,ds}{(z - s)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{p^n M\, 2\pi R_2}{(|z - z_0| - R_2)}$$

$$\therefore |v_n| \leq \frac{p^n M R_2}{|z - z_0| - R_2} \to 0$$

عندما يكون $n \to \infty$

وبهذا يتم برهان مبرهنة لوران

Scanned by CamScanner

ملاحظات

1- يسمى القسم $a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$ بالقسم التحليلي (Analytic part) من سلسلة لوران ، والقسم الباقي من سلسلة لوران يطلق عليه اسم القسم الاساسي (Principal part)

2- اذا كان القسم الاساسي من سلسلة لوران صفراً فان سلسلة لوران تصبح سلسلة تايلور

مثال (1)

جد مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ ضمن الحلقة

$$R : 1 < |z - 1| < \infty$$

الحل :

من الواضح بان الدالة $f(z)$ تحليلية ضمن الحلقة R وأن

$$\left| \frac{1}{z - 1} \right| < 1$$

كذلك

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z - 1) + 1} = \frac{1}{(z - 1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z - 1}}$$

$$= \frac{1}{z - 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - 1} \right)^n \quad ; \quad \left| \frac{1}{z - 1} \right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z - 1)^{n+1}} \quad ; \quad |z - 1| > 1$$

اذاً مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ كالاتي

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1}{(z - 1)^3} + \ldots$$

مثال (2)

جد مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z) = \frac{-1}{(z - 1)(z + 2)}$ ضمن الحلقة $1 < |z| < 2$

Scanned by CamScanner

الحل :

بواسطة تجزئة الكسور يمكن كتابة $f(z)$ بالصيغة

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

الآن لكل z بحيث $|z| > 1$ لدينا

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

كذلك من اجل $|z| < 2$ ، اي ان $\frac{|z|}{2} < 1$ يكون لدينا

$$\frac{-1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

وبذلك يمكن كتابة $f(z)$ بالصيغة

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

من اجل جميع قيم z التي تحقق المتباينة $1 < |z| < 2$

Scanned by CamScanner

مثال (3)

جد مفكوك $f(z) = \dfrac{5z + 2i}{z(z + i)}$ في المنطقة $1 < |z - i| < 2$

الحل :

بواسطة تجزئة الكسور نجد ان $f(z) = \dfrac{5z + 2i}{z(z + i)} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{z + i}$

في المنطقة $|z - i| > 1$ يكون $\left|\dfrac{1}{z - i}\right| < 1$ فيكون

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{z - i + i} = \frac{2}{(z - i)\left[1 + \dfrac{i}{z - i}\right]}$$

$$= \frac{2}{z - i}\left[1 - \frac{i}{z - i} + \frac{i^2}{(z - i)^2} \cdots\right]$$

$$\frac{2}{z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{(z - i)^{n+1}}$$

وفي المنطقة $|z - i| < 2$ يكون $\left|\dfrac{z - i}{2}\right| < 1$ وان الكسر الثاني

$$\frac{3}{z + i} = \frac{3}{z - i + 2i} = \frac{3}{2i\left[1 + \dfrac{z - i}{2i}\right]}$$

$$= \frac{3}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i)^n}{(2i)^n}$$

$$\frac{3}{z + i} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

ان الدالة $f(z)$ تساوي مجموع السلسلتين في المنطقة المشتركة لهما اي المنطقة خارج الدائرة $|z - i| > 1$ وداخل الدائرة $|z - i| < 2$

Scanned by CamScanner

$$\frac{5z+2i}{z(z+i)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z+i} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$+ 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

لكل z تقع داخل الحلقة $1 < |z - | < 2$

5.4 تمارين

برهن على صحة سلاسل الدوال الاتية ضمن المناطق المحددة لها .

-1 $$\frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} \quad ; \ |z| > 3$$

-2 $$\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(z-2)^{n+1}} - \frac{(z-2)^n}{4^{n+1}} \right],$$

$$i < |z-2| < 4$$

-3 $$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}}, 0 < |z| < \infty$$

-4 $$\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-4^n}{(z-2)^{n+1}}, 4 < |z-2| < \infty$$

-5 $$\frac{e^z - (z+1)}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n+2)!}, 0 < |z| < \infty$$

-6 $$\frac{\cos(z-1)}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n-1} ; 0 < |z-1| < \infty$$

Scanned by CamScanner

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{2n}}, 0 < |z| < \infty \quad -7$$

$$\frac{\sinh 7}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}, 0 < |z| < \infty \quad -8$$

$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-2}, 0 < |z-1| < 1 \quad -9$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i^{n-1}} - 1 \right) z^n, 0 < |z| < 1 \quad -10$$

$$(z-c)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{z^{n+1}}; |c| < |z| < \infty \quad -11$$

$$(z-c)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, c^n}{z^{n+2}}; |c| < |z| < \infty \quad -12$$

$$\frac{1}{(z-c)^2} = \frac{1}{(z-c)(z-c)} =$$

Scanned by CamScanner

الفصل السادس

النقاط الشاذة وحساب الرواسب

Singularity points and Calculation of Residues

6.1 تصنيف النقاط الشاذة (Classification of singularities)

النقطة الشاذة (singular point)

تسمى النقطة z_0 نقطة شاذة للدالة $\omega = f(z)$ اذا كانت f ليست دالة تحليلية عند النقطة z_0 وان كل جوار لـ z_0 يحوي على الاقل نقطة واحدة عندها تكون الدالة تحليلية .

هنالك نوعان من النقاط الشاذة وهي :

النقاط الشاذة غير المعزولة (Nonisolated singularity)

تسمى النقطة z_0 نقطة شاذة غير معزولة للدالة $f(z)$ اذا كانت z_0 نقطة شاذة للدالة f وكل جوار للنقطة z_0 يحوي على الاقل نقطة شاذة واحدة للدالة f غير النقطة z_0

Scanned by CamScanner

مثال (1)

ان النقطة $z = 0$ تؤلف نقطة شاذة غير معزولة للدالة $g(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}$

وذلك لان اي جوار للنقطة $z = 0$ يحوي عدداً غير منته من النقاط الشاذة الاخرى وهي

$$z = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \cdots$$

مثال (2)

ان الدالة $f(z) = \text{Log } z, 0 \leq z < 2\pi$ تؤلف نقطة شاذة غير معزولة عند كل نقطة من النقاط الواقعة على المحور الحقيقي غير السالب .

النقاط الشاذة المعزولة (Isolated singularity)

تدعى النقطة الشاذة z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $\omega = f(z)$ اذا وجد جوار للنقطة z_0 بحيث تكون الدالة f تحليلية لجميع النقاط المنتمية لذلك الجوار عدا عند النقطة z_0

مثال (3)

ان النقطة $z = 0$ تؤلف نقطة شاذة معزولة للدال $f(z) = \dfrac{1}{z}$

مثال (4)

ان النقاط $z = \pm i$ تؤلف نقاط شاذة معزولة للدالة $f(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 1}$

سوف ندرس تصنيف النقاط الشاذة المعزولة . لنفرض ان z_0 تؤلف نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ فحسب التعريف يوجد جوار للنقطة z_0 وليكن

$$0 < |z - z_0| < p$$

بحيث تكون الدالة $f(z)$ تحليلية لجميع قيم z $(z \neq z_0)$ التي تحقق المتباينة اعلاه عندئذ يمكن ايجاد مفكوك سلسلة لوران للدالة f حسب الصيغة الاتية :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \ldots\ldots (6.1.1)$$

هنالك ثلاث حالات وهي :

Scanned by CamScanner

اولاً : اذا كانت الحدود التي فيها $(z-z_0)$ والمرفوعة لاس سالب معدومة ، أي أن القسم الرئيسي من سلسلة لوران (6.1.1) يساوي صفر فان النقطة z_0 تدعى نقطة شاذة زائلة (Removable singularity)

نلاحظ أن سلسلة لوران تأخذ سلسلة تايلور في حالة كون النقطة z_0 نقطة شاذة زائلة.

مثال (5)

النقطة $z=0$ تؤلف نقطة شاذة زائلة للدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$

الحل :

من الواضح أن مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ هو

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots\ldots (6.1.2)$$

ان هذه السلسلة لاتحوي حدود فيها z مرفوعة لأس سالب ، أي أن القسم الرئيسي من سلسلة لوران للدالة $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ يساوي صفر . نلاحظ بان السلسلة (6.1.2) معرفة عند النقطة $z=0$ وتأخذ القيمة 1 ، وهذا واضح من اخذ النهاية للصيغة (6.1.2) عندما تقترب z من الصفر

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

نستنتج من هذا بان النقطة الشاذة $z=0$ يمكن ازالتها وذلك بتعريف الدالة $f(z)=1$ عندما $z=0$، عندئذ تصبح الدالة f تحليلية عند النقطة $z=0$. وبصورة عامة اذا كانت النقطة z_0 نقطة شاذة زائلة للدالة f ، وعندئذ تعرف الدالة f بانها تأخذ القيمة a_0 عند النقطة z_0 ، أي أن $f(z_0)=a_0$ فتصبح الدالة f تحليلية عند z_0

مثال (6)

ان النقطة $z=2$ هي نقطة شاذة زائلة للدالة $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{(z-2)}$

حيث أن $f(z)=z-1$ عندما $z\neq 2$

Scanned by CamScanner

مثال (7)

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$$ ان النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة زائلة للدالة

الحل :

ان مفكوك سلسلة لوران للدالة f هو

$$\frac{1 - \cos z}{z} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - \ldots$$

والتي فيها القسم الرئيسي يساوي صفر .

ثانياً : اذا كان عدد الحدود التي فيها $(z - z_0)$ والمرفوعة لاس سالب هو N ، أي أن عدد حدود القسم الرئيسي من مفكوك سلسلة لوران (6.1.1) منته ويساوي N حيث أن $a_{-N} \neq 0$ ويعطى بالصيغة

$$\frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-N}}{(z - z_0)^N} \quad \ldots\ldots (6.1.3)$$

فان النقطة z_0 تدعى قطب (pole) للدالة $f(z)$ من الرتبة N. اذا كانت N=1 فتسمى النقطة z_0 قطب بسيط (simple pole)

من الملاحظ بانه اذا كان z_0 قطب للدالة f فان $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

مثال (8)

ان النقطة $z = 2$ تؤلف قطب من الرتبة 3 للدالة $f(z) = \frac{1}{(z - 2)^3}$

مثال (9)

ان النقطة $z = 0$ تؤلف قطب بسيط للدالة $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$

الحل : بما ان

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots$$

Scanned by CamScanner

فان $z = 0$ تؤلف قطب من الرتبة 1 للدالة f . أي قطب بسيط

مثال(10)

ان النقطة $z = 0$ تؤلف قطب من الرتبة 2 للدالة $g(z) = \frac{\sin hz}{z^3}$

الحل : ان مفكوك سلسلة لوران للدالة g .

$$\frac{\sin hz}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

وعندها $z = 0$ تؤلف قطب من الرتبة 2 للدالة g

ان المبرهنة الآتية توضح كيفية ربط علاقة بين نقاط الأقطاب والنقاط الشاذة الزائلة.

مبرهنة (6.1)

نفرض ان الدالة $f(z)$ تحليلية ضمن المنطقة $0 < |z - z_0| < p$ عندئذ النقطة z_0 تؤلف قطب للدالة f من الرتبة N اذا وفقط اذا z_0 تؤلف نقطة زائلة للدالة

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z)$$

وان

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) \neq 0$$

البرهان

نفرض أن z_0 تؤلف قطب للدالة $f(z)$ من الرتبة N إذاً مفكوك سلسلة لوران للدالة f حسب الصيغة (6.1.3) يصبح

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-N}}{(z - z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots +$$

$$\frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad \dots (6.1.4)$$

حيث ان $a_N \neq 0$] لانه لو كان $a_{-N} = 0$ يصبح القطب من الرتبة $N - 1$]بضرب طرفي المعادلة (6.1.4) بـ $(z - z_0)^N$ ، نحصل على

Scanned by CamScanner

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z) = a_{-N} + a_{-N+1}(z - z_0) + ... + a_{-1}(z - z_0)^{N-1}$$
$$+ a_0(z - z_0)^N + a_1(z - z_0)^{N+1} + ..., \quad ..... (6.1.5)$$

إنَّ الطرف الايمن من الصيغة (6.1.5) هوعبارة عن مفكوك سلسلة تايلور التي نصف قطر دائرة تقاربها موجب اقل من p وبهذا نستنتج ان الدالة

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z)$$

تحليلية وان قطب الدالة f أصبح نقطة زائلة للدالة g بل واكثر من ذلك

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) = a_{-N} \neq 0$$

وبهذا ينتهي الجزء الاول من المبرهنة.

الان نفرض أن z_0 تؤلف نقطة زائلة للدالة

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z)$$

وان

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) \neq 0$$

سوف نبرهن ان z_0 تؤلف قطب للدالة f من الرتبة N

بما ان z_0 نقطة زائلة للدالة $g(z)$ فان مفكوك سلسلة لوران للدالة $g(z)$ يأخذ شكل سلسلة تايلور لكل قيم z التي تحقق $0 < |z - z_0| < p$ اي

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + ... + a_N(z - z_0)^N + ...$$

نستنتج من ذلك ان لكل قيم z التي تحقق $0 < |z - z_0| < p$

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^N} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-1}} + ... + a_N + a_{N+1}(z - z_0) + ...$$

وان $a_0 \neq 0$ ، لان $a_0 = \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$ (بالفرض)

اذاً z_0 تؤلف قطب للدالة f من الرتبة N . وبهذا يتم برهان المبرهنة (6.1)

مثال (11)

اثبت ان $z = \pi$ تؤلف قطب من الرتبة 3 للدالة $f(z) = \frac{e^{iz} - \sin z}{(z - \pi)^3}$

الحل :

بما ان الدالة

$$g(z) = (z - \pi)^3 f(z) = e^{iz} - \sin z$$

تحليلية عند النقطة $z = \pi$ ، وان النقطة $z = \pi$ تؤلف نقطة زائلة للدالة $g(z)$ كما

وان

$$\lim_{z \to \pi} (z - \pi)^3 f(z) = e^{i\pi} - \sin\pi = -1 \neq 0$$

Scanned by CamScanner

اذاً حسب المبرهنة (6.1) تؤلف النقطة $z = \pi$ قطباً للدالة f من الرتبة 3 .

ثالثاً: اذا كان عدد الحدود التي فيها $(z - z_0)$ والمرفوعة لاس سالب غير منته اي ان القسم الرئيسي من سلسلة لوران (6.1.1) يحوي على عدد غير منته من الحدود التي معاملاتها لاتساوي اصفار ، عندئذ تدعى النقطة z_0 نقطة شاذة اساسية

(Essential singularity)

مثال (12)

ان النقطة $z = 0$ تؤلف نقطة شاذة اساسية للدالة $f(z) = e^{1/z}$

الحل :

لما كان مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z) = e^{1/z}$ هو

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

والتي فيها عدد حدود القسم الرئيس غير منته ، فان $z = 0$ تؤلف نقطة شاذة اساسية

مثال (13)

ان النقطة $z = -2$ تؤلف نقطة شاذة اساسية للدالة $g(z) = (z - 3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$

الحل :

نفرض ان $z + 2 = u$ عندئذ مفكوك سلسلة لوران للدالة هو

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (u-5)\sin\frac{1}{u}$$

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (u-5)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} - \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} \cdots$$

$$= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3}$$

$$+ \frac{1}{120(z+2)^4} \cdots$$

اي ان $z = -2$ تؤلف نقطة شاذة اساسية

النقطة الشاذة في اللانهاية (Singularity at infinity)

اذا وضعنا $z = \frac{1}{\omega}$ في الدالة $f(z)$ سوف نحصل على الدالة $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = g(\omega)$

واذا كانت $\omega = 0$ نقطة شاذة للدالة $g(\omega)$ فان $z = \infty$ هي نقطة شاذة للدالة $f(z)$

Scanned by CamScanner

مثال (14)

ان النقطة $z=\infty$ تؤلف قطب من الرتبة 2 للدالة $f(z)=z^2$ وذلك لان $\omega = 0$ تؤلف قطب من الرتبة 2 للدالة

$$g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}$$

مثال (15)

ان النقطة $z=\infty$ تؤلف نقطة شاذة اساسية للدالة $f(z) = e^z$ وذلك لان النقطة $\omega = 0$ تؤلف نقطة شاذة اساسية للدالة .

$$g(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = e^{1/\omega} = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{2!\,\omega^2} + \frac{1}{3!\,\omega^3} + \dots$$

تمارين (6.1)

صنف النقاط الشاذة لكل من دوال التمارين 1 − 10 الاتية

1- $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$ الجواب $z = 0$ قطب بسيط

2- $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ الجواب $z = 0$ اساسية

3- $f(z) = \dfrac{e^z - \cos(z-1)}{z-1}$ الجواب $z = 1$ قطب بسيط

4- $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ الجواب $z = 0$ زائلة

5- $f(z) = \dfrac{\cos(z+i)-1}{(z+i)^4}$ الجواب $z = -i$ قطب من الرتبة 2

6- $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3}$ الجواب $z = 0$ قطب من الرتبة 3

7- $f(z) = z^2 e^{-z^4}$ الجواب $z = \infty$ اساسية

8- $f(z) = \dfrac{1}{(2\sin z - 1)^2}$ الجواب $-\dfrac{\pi}{6} + (2m+1)\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2m\pi$ قطبان من الرتبة 2 $\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

9- $f(z) = \dfrac{z}{e^{1/z} - 1}$

الجواب $z = \dfrac{i}{2m\pi}$ $\quad m = \pm 1, \pm 2 \dots$ قطب بسيط

$z = 0$ اساسية . $z = \infty$ قطب من الرتبة 2

10- $f(z) = \cos(z^2 + z^{-2})$ الجواب $z = 0$ اساسية

$z = \infty$ اساسية

Scanned by CamScanner

جد مفكوك سلسلة لوران لكل من الدوال الاتية عند النقطة الشاذة المعطاة ثم صنف النقاط الشاذة وجد منطقة تقارب السلسلة .

-11 $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1$

-12 $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; $z = 0$

-13 $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$; $z = 0$

-14 $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$

-15 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$: $z = 3$

-16 $f(z) = z^{-1}\cos h(z^{-1})$; $z = 0$

-17 $f(z) = z \sin h \sqrt{z}$; $z = 0$

6.2 اصفار الدالة (Zeros of function)

لندرس باختصار اصفار الدوال التحليلية بصورة عامة اذا كانت $\phi(z)$ اي دالة معقدة فان العدد ζ يدعى صفر الدالة ϕ اذا وفقط اذا كان $\phi(\zeta) = 0$.

لنفرض بان الدالة $\omega = f(z)$ تحليلية عند النقطة z_0 عندئذ يمكننا ايجاد مفكوك سلسلة تايلور للدالة f وهو

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \ldots\ldots (6.2.1)$$

اذا كان $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{N-1} = 0$

وان $a_N \neq 0$ فالصيغة (6.2.1) تصبح

$$f(z) = a_N (z - z_0)^N + a_{N+1}(z - z_0)^{N+1} + \ldots , \qquad (6.2.2)$$

وفي هذه الحالة يكون للدالة f صفر من الرتبة N (zero of order N) عند النقطة $z = z_0$

Scanned by CamScanner

ملاحظات

1- اذا كانت $g(z)$ دالة تحليلية عند النقطة z_0 فان مفكوك تايلور

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

واذا كان $g(z_0) \neq 0$ أي أن $a_0 \neq 0$ فان الدالة

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z)$$

لها صفر من الرتبة N عند النقطة z_0 وبهذا يمكننا وضع المعيار الاتي :

ان الدالة $f(z)$ لها صفر من الرتبة N عند النقطة z_0 اذا امكن وضعها بالصيغة

$f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ حيث ان $g(z)$ تحليلية عند النقطة z_0 وان $g(z_0) \neq 0$

2- استناداً الى الملاحظة اعلاه وبما ان $g(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 نستنتج بان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أن $|g(z) - a_0| < \varepsilon$ ولكل قيم z التي تحقق المتباينة $|z - z_0| < \delta$

اذا اخترنا $\varepsilon = \frac{|a_0|}{2}$ و δ_0 القيمة المقابلة لـ δ فنحصل على

$$|g(z) - a_0| < \frac{|a_0|}{2} \quad \ldots\ldots (6.2.3)$$

من اجل $|z - z_0| < \delta_0$.

أي ان $g(z) \neq 0$ لجميع قيم z المنتمية للجوار $|z - z_0| < \delta_0$ لانه اذا كان $g(z) = 0$

عند احدى قيم z المنتمية لذلك الجوار فان (6.2.3) تصبح $|a_0| < \frac{|a_0|}{2}$ وهذا لايمكن وبذلك نحصل على النتيجة التالية« لنفرض بان الدالة $\omega = f(z)$ تحليلية عند النقطة z_0 التي تؤلف صفر للدالة f عندئذ يوجد جوار للنقطة z_0 تكون فيه f لاتساوي صفر عدا z_0 هذا فيما عدا اذا كانت f مطابقة للصفر » أي ان اصفار الدالة غير الثابتة تؤلف نقاط معزولة.

6.3 الرواسب (Residues)

لنفرض ان $f(z)$ دالة تحليلية وان z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f عندئذ يمكن ايجاد جوار للنقطة z_0 مثل $0 < |z - z_0| < r$ تكون فيه الدالة f تحليلية ماعدا عند النقطة z_0 حسب المبرهنة (5.5) يكون مفكوك سلسلة لوران للدالة f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

Scanned by CamScanner

حيث أن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

وان C اي منحني مغلق بسيط يحوي z_0 في داخله وباتجاه يترك النقاط الداخلية الى اليسار وبحيث تكون f تحليلية على C وجميع النقاط داخل C ماعدا z_0.

بصورة خاصة اذا كانت $n = -1$ فان

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \qquad ..... (6.3.1)$$

يسمى a_{-1} راسب الدالة f عند النقطة z_0 ويرمز له بـ $\text{Res}(f, z_0)$

أي ان $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

وبتعبير اخر

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i \, \text{Res}(f, z_0) \qquad ..... (6.3.2)$$

ان الصيغة (6.3.2) تلعب دورا مهما في بعض تطبيقات نظرية الرواسب وسوف نضع هذه الصيغة بصورة اعم في المبرهنة (6.2) القادمة

مثال (1)

احسب راسب الدالة $f(z) = e^{-1/z}$ عند النقطة $z = 0$

الحل :

ان النقطة $z = 0$ تؤلف نقطة شاذة اساسية للدالة $f(z) = e^{-1/z}$ وان مفكوك سلسلة لوران لهذه الدالة هو

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} - \frac{1}{3!\, z^3} + ...$$

ومنها نستنتج بان راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z = 0$ هو معامل $\frac{1}{z}$ ويساوي -1

اي ان

$$\text{Res}(e^{-1/z}, 0) = -1$$

مثال (2)

احسب $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz$ حيث C تمثل محيط الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب

الحل : ان مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ هو

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{z^2}e^z = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots$$

ومنها نحصل على

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{z^2}, 0\right) = 1$$

ومن الصيغة (6.3.2) نحصل على

$$\int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i \text{ Res}\left(\frac{e^z}{z^2}, 0\right) = 2\pi i$$

ملاحظة : يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية لحل هذا المثال والحصول على نفس النتيجة

مثال (3) احسب راسب الدالة $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ عند النقطتين $z = \pm 1$

الحل : ان الدالة $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ تحليلية من اجل جميع قيم z عدا النقطتين $z = \pm 1$ وهما قطبان بسيطان لهذه الدالة .

الآن سوف نجد مفكوك سلسلة لوران لهذه الدالة عند القطب $z = 1$. بطريقة تجزئة الكسور نحصل على

$$\frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2(z - 1)} + \frac{1}{2(z + 1)} \quad \ldots (6.3.3)$$

نفرض ان $z - 1 = u$ ، ومنه $z = 1 + u$

$$\frac{1}{2(z + 1)} = \frac{1}{2(2 + u)} = \frac{1}{4\left(1 + \frac{u}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \ldots\right)$$

وبارجاع قيمة u بدلالة z نحصل على

$$\frac{1}{2(z + 1)} = \frac{1}{4} - \frac{z - 1}{8} + \frac{(z - 1)^2}{16} - \frac{(z - 1)^3}{32} + \ldots$$

Scanned by CamScanner

ومن الصيغة (6.3.3) نحصل على

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{(z-1)}{8} + \frac{(z-1)^2}{16} - \frac{(z-1)^3}{32} + \cdots$$

ان هذا المفكوك صحيح من اجل $0 < |z-1| < 2$ ، وان راسب الدالة $f(z)$ عند القطب $z = 1$ هو

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2-1}, 1\right) = \frac{1}{2}$$

الآن نجد مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z)$ عند القطب $z = -1$

نفرض $z+1 = v$ اي ان $z = v-1$ ينتج

$$\frac{1}{2(z-1)} = \frac{1}{2(v-2)} = -\frac{1}{4\left(1-\frac{v}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{v}{2}+\frac{v^2}{4}+\cdots\right)$$

ثم من الصيغة (6.3.3) نحصل على

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} - \frac{(z+1)}{8} - \frac{(z+1)^2}{16} - \cdots\cdots$$

ومنها نجد

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2-1}, -1\right) = \frac{1}{2}$$

وان هذا المفكوك صحيح من اجل

$$0 < |z+1| < 2$$

مثال (4)

احسب راسب الدالة $f(z) = \dfrac{\operatorname{cotz}\coth z}{z^3}$ عند النقطة $z = 0$

Scanned by CamScanner

الحل :

$$f(z)=\frac{\cos z\cosh z}{z^3\sin z\sinh z}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)}{z^3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\dots\right)\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{z^4}{6}+\dots}{z^5\left(1-\frac{z^4}{90}+\dots\right)}=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{7}{45}z^4+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{z^5}-\frac{7}{45}\frac{1}{z}+\dots$$

وذلك بضرب وقسمة السلاسل

اذاً

$$\text{Res}(f,0)=-\frac{7}{45}$$

6.4 مبرهنة الرواسب (Residue Theorem)

اذكان للدالة f عدد منته من النقاط الشاذة بحيث كل نقطة شاذة تقع داخل منحني مغلق بسيط ، فان هذه النقاط الشاذة تكون معزولة والمبرهنة الاتية يمكن بواسطتها ايجاد تكامل الدالة f على المنحني C بدلالة رواسب هذه الدالة عند تلك النقاط الشاذة .

مبرهنة (6.2) (مبرهنة الرواسب)

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى منحني مغلق بسيط C بالاتجاه الموجب عدا عند النقاط $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ التي تؤلف عدداً منتهياً من نقاط شاذة معزولة بالنسبة للدالة f . عندئذ

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\text{Res}(f,z_1)+\text{Res}(f,z_2)+\dots+\text{Res}(f,z_n)\right] \quad \dots(6.4.1)$$

البرهان : بما أن كل من z_k هي نقطة شاذة معزولة للدالة f داخل المنحني C فيمكننا يجاد دوائر

$$C_k,\ k=1,2,3,\dots,n$$

يحيث تقع كلياً داخل C ومركزها z_k على التوالي ولاتحوي في داخلها أي نقطة من النقاط الشاذة عدا المركز z_k وأن هذه الدوائر صغيرة بحيث لا تتقاطع مع بعضها كما في شكل (6.1) . الآن لكل دائرة C_k بالاتجاه الموجب يكون

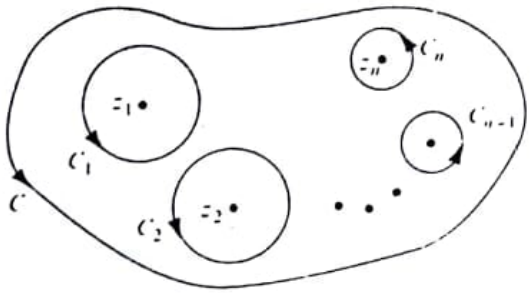
Scanned by CamScanner

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,z_k)$$

ان هذه الدوائر C_k تؤلف حلقات منفصلة وحسب النتيجة (4.1)نحصل على

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{c_n} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f,z_1) + \operatorname{Res}(f,z_2) + \ldots + \operatorname{Res}(f,z_n) \right]$$



شكل (6.1)

وذلك باستخدام الصيغة (6.3.2)
وبهذا يتم البرهان

ملاحظة ان الخطوة الاولى التي يجب اتباعها من اجل تطبيق هذه المبرهنة هي تصنيف النقاط الشاذة ثم ايجاد رواسب الدالة عند هذه النقاط .
سوف نميز ثلاث حالات .

1- اذا كانت z_k نقاط شاذة زائلة للدالة f فمن الواضح بان

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = 0. \forall\ k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

وذلك لان مفكوك سلسلة لوران لتلك الدالة يأخذ شكل سلسلة تايلور ومنها نستنتج بان

$$a_{-1} = 0$$

Scanned by CamScanner

2- اذا كانت z_k نقاط شاذة اساسية للدالة f ففي هذه الحالة نجد مفكوك سلسلة لوران لهذه الدالة عند النقاط z_k ثم نحسب راسب الدالة f عند تلك النقاط

3- اذا كانت z_k تؤلف قطب للدالة f نجد أولاً رتبة القطب حسب الطريقة التي استخدمناها في البند (6.1) وفي كثير من الحالات سوف نحصل على راسب الدالة عند النقطة z_k . اما اذا لم نستطع الحصول على راسب الدالة عند النقطة z_k فسوف نطبق مبرهنة حساب الرواسب التي سوف ندرسها في البند القادم

مثال (1)

احسب التكامل $\int_C \frac{z\,dz}{z^2-1}$ حيث C الدائرة $|z| = 2$ بالاتجاه الموجب .

الحل :

ان الدالة $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ لها قطبان $z = \pm 1$ يقعان داخل الدائرة $|z| = 2$. بتطبيق مبرهنة الرواسب (6.2) نجد

$$\int \frac{z\,dz}{z^2-1} = 2\pi i \{ \text{Res}(f,1) + \text{Res}(f,-1) \}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i$$

كما رأينا في المثال (3) من البند السابق .

طريقة ثانية

بما أن

$$\int_C \frac{z\,dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \int_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2} \int_C \frac{dz}{z+1}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i\, f(1) + \frac{1}{2} . 2\pi i\, g(-1)$$

حسب صيغة كوشي التكاملية (4.6.1) مع ملاحظة أن $f(z) = 1$ في التكامل الاول وكذلك $g(z) = 1$ في التكامل الثاني وبذلك يكون $f(1) = 1 , g(-1) = 1$

$$\therefore \int_C \frac{z\,dz}{z^2-1} = \frac{2\pi i}{2} [\,1 + 1\,] = 2\pi i$$

مثال (2)

احسب التكامل $\int_C \frac{e^z - 1}{z} dz$ حيث C الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب .

Scanned by CamScanner

الحل :

ان النقطة $z=0$ تؤلف نقطة شاذة زائلة للدالة $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ وذلك

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots.$$

ومنها ينتج $\text{Res}\,(f,0) = 0$ أي أن $\int_C \dfrac{e^z - 1}{z}\,dz = 0$

مثال (3)

احسب التكامل $\int_C \dfrac{\sin z}{(z-\pi)^4}$ حيث C الدائرة $|z| = 5$ بالاتجاه الموجب .

الحل :

ان النقطة $z = \pi$ تقع داخل الدائرة $|z| = 5$ وهي نقطة شاذة . نفرض $u = z - \pi$ عندئذ

$$\frac{\sin z}{(z-\pi)^4} = \frac{\sin(\pi + u)}{u^4} = \frac{-\sin u}{u^4} = -\frac{1}{u^4}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{u^3} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{u} - \frac{u}{120} + \ldots.$$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{(z-\pi)} - \frac{(z-\pi)}{120} + \ldots.$$

$$\therefore \int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}\,(f,\pi) = 2\pi i\,\frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

(6.5) حساب الرواسب (Calculation of Residues)

لحساب راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 يظهر لاول وهلة بانه من الضروري ايجاد مفكوك سلسلة لوران للدالة $f(z)$ عند z_0 ، الا انه يمكن حساب راسب الدالة عند z_0 التي تمثل قطب للدالة $f(z)$ بموجب المبرهنة الاتية

Scanned by CamScanner

مبرهنة (6.3) (مبرهنة حساب الرواسب)

لتكن الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة n عند النقطة z_0 ، عندئذ

$$\text{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \quad \ldots\ldots (6.5.1)$$

البرهان

بما ان z_0 تؤلف قطب من الرتبة n للدالة f فان

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \; ; a_{-n} \neq 0$$

بضرب طرفي المتطابقة بـ $(z - z_0)^n$ نحصل على

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{n+k}$$

$$= a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{n+k}$$

تصبح هذه سلسلة تايلور التي يمكن اشتقاقها حداً حداً لاي عدد من المرات وبعد ايجاد المشتقة للرتبة $(n-1)$ نحصل على

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} a_k (z - z_0)^{k+n}$$

وعند جعل $z \to z_0$ فان الطرف الايمن يقترب مـن الحد الثابت اي ان

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! a_{-1}$$

وبهذا يتم البرهان .

ملاحظة عندما $n = 1$ فان الصيغة (6.5.1) تصبح

$$\text{Res}(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] \quad \ldots\ldots (6.5.2)$$

Scanned by CamScanner

نتيجة (6.1)

نفرض ان الدالتين g,f تحليليتان عند النقطة z_0 وان $f(z_0) \neq 0$. وليكن

$g(z)$ لها صفر من الرتبة واحد عند النقطة z_0 . عندئذ

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

البرهان

بما ان z_0 صفر للدالة $g(z)$ من الرتبة واحد فان $g(z_0) = 0$ ومنها ينتج

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0)$$

الان نستخدم الصيغة (6.5.2) بعد استبدال الدالة f بالدالة $\frac{f}{g}$ ينتج

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} \left\{ (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} \right\}$$

$$= \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

وبهذا ينتهي البرهان.

مثال (1)

باستخدام حساب الرواسب جد التكامل $\int_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)}$

حيث أن C تمثل منحني الدائرة $|z| = 3$ بالاتجاه الموجب

الحل :

ان النقطتين $z = 1 , z = -1$ تؤلفان قطبين بسيطين للدالة

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

وتقعان داخل الدائرة $|z| = 3$. باستعمال الصيغة (6.5.2) نحصل على

Scanned by CamScanner

$$\text{Res}(f,1) = \lim_{z \to 1} (z-1)\left[\frac{1}{(z-1)(z+1)} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}(f,-1) = \lim_{z \to -1} (z+1)\left[\frac{1}{(z-1)(z+1)} \right] = -\frac{1}{2}$$

وبتطبيق مبرهنة (6.4) نحصل على

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = 2\pi i \left[\text{Res}(f,1) + \text{Res}(f,-1) \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 0$$

مثال (2) احسب $\int_C \frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3}$

حيث C تؤلف منحني الدائرة $|z-3| = 1$ بالاتجاه الموجب



الحل :

ان النقطة $z = \pi$ تؤلف قطبا للدالة من الرتبة 3 (كما جاء في مثال (11) من البند الاول)

باستعمال الصيغة (6.5.1) عندما $n = 3$ نحصل على

$$\text{Res}(f,\pi) = \frac{1}{2} \lim_{z \to \pi} \frac{d^2}{dz^2} (e^{iz} - \sin z) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_C \frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3} dz = 2\pi i \, \text{Res}(f,\pi) = \pi i$$

مثال (3)

احسب رواسب الدالة $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$

عند النقاط $z = \pm 2i , z = -1$

الحل :

ان النقطة $z = -1$ تؤلف قطب من الرتبة الثانية وان $z = \pm 2i$ تؤلفان قطبين بسيطين،

Scanned by CamScanner

فمن الصيغة (6.5.1) عندما $n = 2$ نحصل على

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} \right\}$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = \frac{-14}{25}$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} \left\{ (z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z-2i)(z+2i)} \right\}$$

$$= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2 (4i)} = \frac{7+i}{25}$$

$$\text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \to -2i} \left\{ (z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z-2i)(z+2i)} \right\}$$

$$= \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2 (-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

مثال (4)

احسب $$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}\, dz}{z^2 (z^2 + 2z + 2)}$$

حول الدائرة C التي معادلتها $|z| = 3$ بالاتجاه الموجب

الحل :

ان الدالة $$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2 (z^2 + 2z + 2)}$$ لها قطب من الرتبة 2

عند النقطة $z = 0$ ولها قطبان بسيطان عند النقطتين $z = -1 \pm i$. ان هذه الاقطاب جميعا تقع داخل C لان ابعادها عن مركز الدائرة C اقل من نصف القطر 3

Scanned by CamScanner

$$\text{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{ z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+2z+2)te^{zt} - e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{t-1}{2}$$

$$\text{Res}(f,-1+i) = \lim_{z\to -1+i}\left\{ (z-(-1+i)) \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\}$$

$$= \left(\lim_{z\to -1+i} \frac{e^{zt}}{z^2} \right)\left(\lim_{z\to -1+i} \frac{z-(-1+i)}{[z-(-1+i)][z-(-1-i)]} \right)$$

$$= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-1+i)^2} \quad \frac{1}{2i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$\text{Res}(f,-1-i) = \lim_{z\to -1-i}\left\{ [z-(-1-i)] \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\}$$

$$= \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

وبتطبيق مبرهنة الرواسب (6·3)نحصل على

$$\int_c \frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i \{ \text{Res}(f,0) + \text{Res}(f,-1+i) + \text{Res}(f,-1-i) \}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}(2\cos t)}{4} \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{zt}\,dt}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}\cos t}{2}$$

مثال 5

احسب راسب الدالة $h(z) = \dfrac{z^2+2z+5}{z-i}$ عند النقطة $z = i$

الحل :

ان الدالة $h(z)$ تتكون من بسط ومقام وكلاهما دالتان تحليليتان عند النقطة $z = i$ كما وان المقام له صفر من الرتبة 1 عند النقطة $z = i$ ، بتطبيق النتيجة (6·1) نحصل على

$$\text{Res}(h,i) = \left. \frac{z^2+2z+5}{\frac{d}{dz}(z-i)} \right]_{z=i} = \frac{-1+2i+5}{1} = 4+2i$$

Scanned by CamScanner

مثال (6)

احسب راسب الدالة $g(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ عند النقطة $z = 0$

الحل :

ان الدالة $\sin z$ لها صفر من الرتبة واحد عند النقطة $z = 0$ كما وان الدالتين e^{iz} و $\sin z$ تحليليتان عند النقطة $z = 0$ بالاضافة الى كون $e^{iz} \neq 0$ عند $z = 0$

بتطبيق النتيجة (6.1) نحصل على

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\sin z}, 0\right) = \left.\frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(\sin z)}\right]_{z=0} = \frac{e^{i\cdot 0}}{\cos 0} = 1$$

تمارين (6.2)

1 – جد الرواسب عند النقطة $z = 0$ للدوال الاتية

(أ) $\csc^2 z$ (ب) $z^{-3}\csc(z^2)$ (ج) $z\cos\frac{1}{z}$

الجواب (أ) صفر (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $-\frac{1}{2}$

2- احسب رواسب الدوال الاتية عند نقاطها الشاذة

(أ) $\frac{z^2+1}{z-1}$ (ب) $\frac{\sin h\, z}{z^2}$ (ج) $\frac{e^{2z}-1}{z}$

(د) $\frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^4}$ (هـ) $\frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}$ (و) $\frac{ze^z}{z^4-z^2}$

(ز) $\frac{\tan z}{z^3}$ (ح) $|z|<1$, $\frac{z^2-1}{(z-2)(z+1)(z-\pi)}$

(ط) $\frac{e^{iz}\cos z}{z(z-\pi)}$ (ي) $\frac{\cos(z-\pi)+1}{z^5}$

الجواب (أ) 2 (ب) 1 (ج) صفر (د) $-\frac{2}{3}$ (هـ) صفر

(و) $\operatorname{Res}(f,1) = \frac{e}{2}$. $\operatorname{Res}(f,-1) = -1$ (ز) صفر

Scanned by CamScanner

3- برهن ان كل من النقاط الشاذة للدوال الاتية هي اقطاب . جدرتية القطب m وراسبه عند تلك النقطة الشاذة

(أ) $\frac{z+1}{z^2-2z}$ (ب) $\tanh z$ (ج) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ (د) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ (هـ) $\frac{z}{\cos z}$ (و) $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$

الجواب

(أ) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, m=1$ (ب) $1, m=1$ (ج) $-\frac{4}{3}, m=3$ (د) $2e^2, m=2$

(هـ) $m=1$ (و) $\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $, m=1$ $\frac{\pm i}{2\pi}$ -

4- احسب تكامل كل من الدوال الاتية على المنحني المعطى بالاتجاه الموجب

(أ) $\frac{\tan z}{z^3}, |z|=1$ (ب) $\frac{e^{iz}-z^3}{(z-\pi)^3}, |z-3|=1$

(ج) $\frac{e^{2z}-z^3}{(z+1)(z+2)(z-1)}, |z|=3$ (د) $\frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}, |z|=\frac{1}{2}$

(هـ) $\frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}, |z-2|=3$ (و) $e^{1/z}, |z|=6$

(ز) $\frac{1}{z^2(z-1)(z+\pi i)}, |z|=2$ (ح) $\frac{z}{z^4-1}, |z|=4$

(ط) $\frac{e^{3z}+\cos 2z}{z(z-1)}, |z-1|=2$ (ي) $\tanh z, |z|=1$

(ك) $\frac{z^3}{(z^4-1)^2}, |z|=2$ (ل) $\frac{\sec z}{z}, |z|=2$

5- اثبت ان $\int_C \frac{\sinh z}{z^6}\,dz = \frac{\pi i}{60}$ حيث $C: |z|=2$ بالاتجاه الموجب

6- جد قيمة التكامل $\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$

حيث ان C محيط الدائرة (أ) $|z-2|=2$ (ب) $|z|=4$ بالاتجاه الموجب

الجواب (أ) πi (ب) $6\pi i$

7- جد قيمة التكامل $\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ حيث ان C الدائرة (أ) $|z|=2$

Scanned by CamScanner

(ب) $|z+2| = 3$ بالاتجاه الموجب .

الجواب (أ) $\frac{\pi i}{32}$ (ب) صفر

8- ليكن C الدائرة $|z| = 2$ بالاتجاه الموجب جد التكاملات الاتية

(أ) $\int_C \tan z \, dz$ (ب) $\int_C \frac{dz}{\sinh 2z}$ (ج) $\int_C \frac{\cosh \pi z \, dz}{z(z^2+1)}$

الجواب (أ) $-4\pi i$ (ب) $-\pi i$ (ج) $4\pi i$

9- جد تكامل f بالاتجاه الموجب حول محيط دائرة مركزها الاصل ونصف قطرها 1 عندما f(z) تأخذ المقادير الاتية

(أ) $z^{-2} e^{-z}$ (ب) $z^{-1} \csc z$ (ج) $z^{-2} \csc z$ (د) $z e^{\frac{1}{z}}$

الجواب (أ) $-2\pi i$ (ب) صفر (ج) $\frac{2\pi i}{3}$ (د) πi

6.6 حساب التكاملات المعتلة

(Evaluation of Improper Integrals)

يمكن الاستفادة من مبرهنة الرواسب في حساب بعض التكاملات الحقيقية المعتلة حيث سبق للطالب ان درس التكاملات المعتلة في موضوع حساب التفاضل والتكامل . يطلق على التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots \quad (6.6.1)$$

متقارب (Convergent) حيث ان f دالة مستمرة لجميع قيم x ، اذا كانت النهاية

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots (6.6.2)$$

موجودة لكل من هذين التكاملين يمكن اعادة كتابة (6.6.1) بالشكل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots (6.6.3)$$

يطلق على التكامل المعتل (6.6.3) اسم القيمة الاساسية لكوشي للتكامل (Cauchy Principal value) بشرط أن النهاية في الطرف الايمن موجودة . اذا كان التكامل

Scanned by CamScanner

(6.6.1) متقارباً فان قيمته هي القيمة الاساسية لكوشي . وعلى العكس ، مثلاً عندما $f(x) = x$ فان القيمة للتكامل (6.6.1) تساوي صفر بينما التكامل غير متقارب بموجب (6.6.2)

لتكن f دالة زوجية عندئذ $f(-x)=f(x)$ لكل x . اذا كانت القيمة الاساسية لكوشي للتكامل (6.6.1) موجودة عندئذٍ التكامل موجود ، باعتبار ان f زوجية وان

$$\int_{-R}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{R} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

وهكذا وجود النهاية في (6.6.3) يؤدي الى وجود كل من النهايتين في (6.6.2) هذا عندما f دالة زوجية .

لنفرض دالة التكامل f في (6.6.1) ذات صيغة كسرية بالشكل

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ ، $q(x)$ حدوديتان ولايوجد عامل مشترك بينهما وان $q(x)$ لها جذور حقيقية .

اذا كانت درجة $q(x)$ اكثر من درجة $p(x)$ باثنين على الاقل عندئذ التكامل (6.6.1) يكون متقارباً . ان قيمة هذا التكامل يمكن ايجاده بحساب القيمة الاساسية لكوشي بواسطة مبرهنة الرواسب . لتحقيق ذلك دعنا نجد قيمة التكامل المتقارب .

$$\int_{0}^{\prime} \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{2}\int_{,} \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^4+5x^2+4} \quad \text{..... (6.6.4)}$$

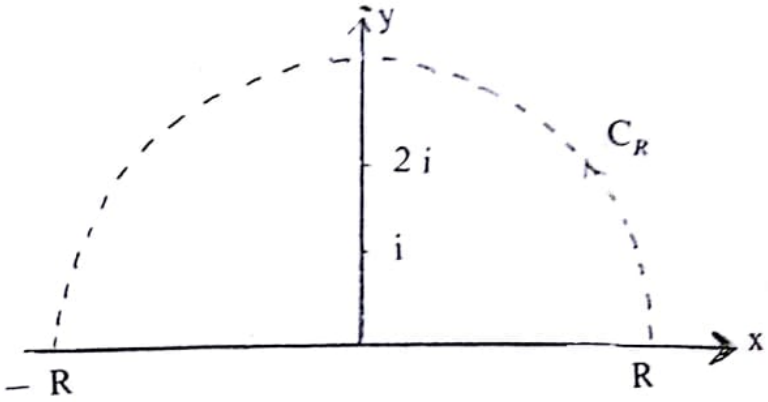
ان التكامل الايمن يمثل تكامل الدالة

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4} = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

على جميع نقاط المحور الحقيقي وان هذه الدالة تحليلية في جميع النقاط عدا في اقطابها البسيطة (أي النقاط $z = \pm i \,,\, z = \pm 2i$)

اذا كانت $R > 2$ فان النقاط الشاذة في نصف المستوي الاعلى من محور x والنصف العلوي C_R للدائرة $|z| = R$ (شكل 6.2) باجراء تكامل f عكس عقارب الساعة حول محيط منطقة نصف الدائرة نجد أن

Scanned by CamScanner



شكل (6.2)

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f,i) + \text{Res}(f,2i) \} \quad \ldots\ldots (6.6.5)$$

وبموجب (6.5.2) يكون $\text{Res}(f,i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = -\frac{i}{2}$

$$\text{Res}(f,2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i) f(z) = -\frac{-3i}{4}$$

وبهذا تكون المعادلة (6.6.5) بالصيغة

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\frac{\pi}{2} - \int_{C_R} f(z)\,dz \qquad \ldots. (6.6.6)$$

لكل قيم $R > 2$

سوف نبرهن أن التكامل في الطرف الايمن من (6.6.6) يقترب من الصفر عندما $R \to \infty$, من اجل ذلك نلاحظ

$$|z^4 + 5z^2 + 4| = |z^2 + 1|\,|z^2 + 4| \geq (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 4)$$

عندئذ عندما تكون z اية نقطة على C_R

$$|z^4 + 5z^2 + 4| \geq (R^2 - 1)(R^2 - 4)$$

كذلك على C_R

$$|2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

$$\therefore \left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}\,dz \right| \leq \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}\,\pi R$$

Scanned by CamScanner

حيث πR طول نصف محيط الدائرة

$$\therefore \lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

وهكذا ينتج من (6.6.6) أن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

بموجب (6.6.4) ينتج

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

6.7 التكاملات المعتلة المتضمنة دوال مثلثية

(Improper Integrals Involving Trigonometric functions)

ان مبرهنة الرواسب تفيدنا في ايجاد قيمة التكاملات المعتلة من النوع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x\, dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x\, dx \qquad \dots (6.7.1)$$

حيث أن $p(x)$ ، $q(x)$ حدوديتان حقيقيتان وان $q(x) = 0$ ليس لها جذور حقيقية ان الطريقة التي استخدمناها في الفقرة السابقة لايمكن اتباعها لان $|\sin z|$ ، $|\cos z|$ تزداد عندما z تقترب من ∞ باتجاه محور y. ان التكاملين في (6.7.1) هما الجزء الحقيقي والخيالي للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix}\, dx$$

وان القيمة المطلقة للدالة e^{iz} هي e^{-y} التي تكون محددة القيمة في نصف المستوي الاعلى أي عندما $y \to \infty$

من اجل تحقيق هذا التعديل دعنا نثبت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e} \qquad \dots (6.7.2)$$

ان هذا التكامل هو الجزء الحقيقي للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2}\, dx$$

الذي يمثل تكامل الدالة $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$ على المحور الحقيقي.

Scanned by CamScanner

ان الدالة f تحليلية عدا عند الاقطاب من الرتبة 2 (أي عند النقاط $z = \pm i$) القطب $z = i$ يقع داخل نصف الدائرة العلوي $|z| = R > 1$ ولنرمز لهذا النصف العلوي بالرمز C_R (كما في شكل 6.2)

باجراء التكامل عكس عقارب الساعة حول محيط نصف هذه الدائرة ، نجد

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \,\text{Res}(f,i) - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz \qquad \ldots (6.7.3)$$

لحساب $\text{Res}(f,i)$ نضع

$$\phi(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$$

وبموجب (6.5.1) يكون

$$\text{Res}(f,i) = \phi'(i) = \frac{-i}{2e}$$

لاثبات التكامل في الطرف الايمن من (6.7.3) يقترب من الصفر عندما $R \to \infty$ نلاحظ عندما z على C_R أن

$$|z^2+1|^2 \geq (R^2-1)^2$$

ولما كان $|e^{iz}| = |e^{-y}| \leq 1$ عندما $y \geq 0$ ينتج

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

من هذه المتباينة ومن المعادلتين (6.7.3) ، (6.7.4) ينتج

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e} \qquad \ldots (6.7.5)$$

ولما كان $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ينتج من (6.7.5) أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e} \qquad \ldots\ldots (6.7.6)$$

بمساواة الجزء الحقيقي من الطرفين ينتج

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+1)^2} = 0$$

وهكذا فان القيمة الاساسية لكوشي (6.7.2) موجودة وتساوي $\frac{\pi}{e}$

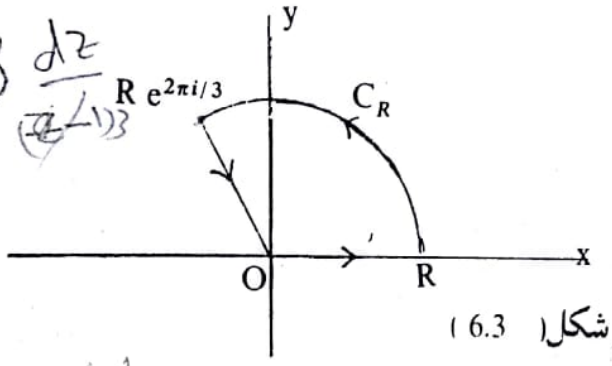
Scanned by CamScanner

مثال استعمل مبرهنة الرواسب والمنحني في شكل (6.3) لاثبات

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

الحل :

$$\int_0^R \frac{dx}{x^3+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_R^0 \frac{e^{2\pi i.3}\,dr}{r^3 e^{2i\pi}+1} = \int_C \frac{dz}{z^3+1}$$



شكل (6.3)

ان النقاط الشاذة هي $z = -1, \quad \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

لكن $z = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ وحده الذي يقع داخل C

$$\int_C \frac{dz}{z^3+1} = \frac{2\pi i}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+1\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi(\sqrt{3}-i)}{3}$$

عندما z تقع على C_R فان

$$|z^3+1| \geq R^3-1$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1}\right| \leq \int_{C_R} \frac{dz}{R^3-1} = \frac{2\pi}{3}\,\frac{R}{R^3-1}$$

وهذا يقترب من الصفر عندما $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R \frac{dx}{x^3+1} - \int_0^R \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\frac{dr}{r^3+1}\right]$$

$$= \frac{\pi\left(\sqrt{3}-i\right)}{3}$$

Scanned by CamScanner

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \lim_{R\to} \qquad \int_0^R \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}-i\right)}{3}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\pi(\sqrt{3}-i)}{3} \qquad \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

تمارين (6.3)

حقق التكاملات الاتية باستعمال مبرهنة الرواسب

1- $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$

2- $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

3- $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

4- $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

5- $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$

6- $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{6}$

7 $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}e^{-a}, a > 0$

8- $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^2}(1+ab)e^{-ab} \qquad a > 0, b > 0$

9- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax\,dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a\,, a > o$

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$

$a > b > 0$

Scanned by CamScanner

11 - جد القيمة الاساسية لكوشي لكل من التكاملين الاتيين

(أ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ (ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2+4x+5}$

الجواب (أ) $-\frac{\pi}{5}$ (ب) $-\frac{\pi}{e}\sin 2$

6.8 تكاملات محددة لدوال مثلثية
(Defintite Integrals of Trigonometric funtions)

ان طريقة حساب الرواسب تفيدنا كذلك في ايجاد قيمة تكاملات محددة من النوع

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta \qquad (6.8.1)$$

لما كانت θ تتغير من 0 الى 2π نعتبر θ زاوية النقطة z على دائرة نصف قطرها 1 ومركزها الاصل وبذلك نضع

$$z = e^{i\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ومنها ينتج

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \ldots (6.8.2)$$

وبهذا يكون التكامل

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} \qquad \ldots (6.8.3)$$

دالة بـ z حول الدائرة C بالاتجاه الموجب .

مثال برهن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1 < a < 1$$

الحل

ان التكامل يتحقق عندما $a = 0$ وسوف نستثني $a = 0$ في البرهان .باستعمال التعويضات (6.8.2) في التكامل ينتج

$$\int_C \frac{2a^{-1}\,dz}{z^2 + (2ia^{-1})z - 1} \qquad \ldots (6.8.4)$$

Scanned by CamScanner

حيث C الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب . ان مقام دالة التكامل يكون صفراً في النقطتين

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} i \; ; z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} i$$

وعندئذ تصبح دالة التكامل

$$f(z) = \frac{2a^{-1}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

لاحظ ان

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2} > 1$$

لان $0 < |a| < 1$

ولما كان $|z_1 z_2| = 1$ ينتج $|z_1| < 1$. عندئذ لاتوجد نقاط شاذة على المحيط C وانما فقط نقطة شاذة واحدة داخل C وهي قطب بسيط عند z_1 . ويكون الراسب عند هذه النقطة هو

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{2a^{-1}}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}$$

وبهذا يكون

$$\int_C \frac{2a^{-1} dz}{z^2 + (2ia^{-1})z - 1} = 2\pi i \, \text{Res}(f, z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

وبهذا يتم تحقيق هذا التكامل .

6.9 التكامل حول نقطة تفرع (Integration Around a Branch Point)

يمكن استعمال مبرهنة الرواسب في حساب التكاملات المعتلة التي تحوي نقاط تفرع (branch points) وقطوع فرع (branch cuts)

لقد درسنا في الفصل الثالث الدوال المتعددة القيم ، مثلا الدالة الثنائية $\omega = \sqrt{z}$ والدالة الثلاثية $\omega = z^{1/3}$ والدالة اللوغاريتمية . كما مر ذكر قطع الفرع ونقاط التفرع بالنسبة لهذه الدوال . بصورة عامة :

Scanned by CamScanner

« تكون النقطة z_0 نقطة تفرع لدالة مضاعفة اذا كان لكل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها مقدار صغير فان الابتداء من نقطة عليها ضمن منطلق احد الفروع والانتهاء بتلك النقطة التي سوف تكون في منطلق فرع اخر لتلك الدالة المضاعفة »

وعلى العكس تكون النقطة z_1 ليست نقطة تفرع اذا امكن ايجاد دائرة صغيرة مركزها z_1 بحيث ان الابتداء من نقطة على محيطها تقع ضمن فرع ما من فروع تلك الدالة المضاعفة والانتهاء بعد اكمال دورة كاملة تكون نقطة الانتهاء ضمن منطلق نفس ذلك الفرع .

فمثلا في دالة الجذر التربيعي $f(z) = \sqrt{z}$ يمكن وضعها بالفرعين

$$f_0(z) = \sqrt{r}\ e^{i\theta/2} \qquad 0 < \theta < 2\pi \quad r \neq 0$$

$$f_1(z) = \sqrt{r}\ e^{i\theta/2} \qquad : 2\pi < \theta < 4\pi : r \neq 0$$

ان الحد الفاصل بين هذين الفرعين اي قطع الفرع هو المحور الحقيقي غير السالب .

خذ $z = 0$ وارسم دائرة حولها مبتدئاً من اية نقطة عليها مثل $P : 2e^{i\pi/4}$ من الواضح ان P تعود الى منطلق f_0 (لان $0 < \frac{\pi}{4} < 2\pi$) . عندما تكمل P دورتها حول $z = 0$ فان زاوية P تزداد من $\frac{\pi}{4}$ الى $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ وترجع الى موقعها الاصلي لكن الوضع النهائي يكون في منطلق f_1 لان $2\pi < \frac{\pi}{4} + 2\pi < 4\pi$ وبذلك تكون $z = 0$ نقطة تفرع للدالة المضاعفة $f(z) = \sqrt{z}$

وبالعكس اذا اخذت اية نقطة مثل $z_1 = i - 1$ يمكن رسم دائرة مركزها z_1 ونصف قطرها صغير بحيث لاتحوي $z = 0$. تكون زوايا قيم الدالة f_0 المقابلة لنقاط هذه الدائرة محصورة ضمن منطلق f_0 وبذلك $z_1 = i - 1$ لاتمثل نقطة تفرع .

Scanned by CamScanner

مثال : جد قيمة التكل * الحقيقي المعتل

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx \quad ; \quad 0 < a < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (6.9.1)$$

الحل :

ان التكامل (6.9.1) موجود عندما $0<a<1$ لان دالة التكامل $\frac{x^{-a}}{x+a}$ تسلك سلوك x^{-a} عندما x تكون قريبة من الصفر ، كما انها تسلك سلوك الدالة x^{-a-1} عندما $x \to \infty$

لايجاد التكامل (6.9.1) تأمل التكاملين

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz \quad ; \quad \int_{C_2} f_2(z)\, dz$$

حيث ان

$$f_1(z) = \frac{z^{-a}}{z+1}, \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} ; \left(|z| > 0 ; \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2} \right)$$

C_1, C_2 منحنيان بسيطان مغلقان كما في شكل (6.4) .

في هذا الشكل $p<1<R$ وان ϕ اية زاوية بحيث $\frac{\pi}{2}<\phi<\pi$

لاحظ ان الدالة f_1 تحليلية داخل وعلى C_1 وبذلك يكون

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz = 0 \qquad \ldots (6.9.2)$$

والدالة f_2 تحليلية داخل وعلى المنحني المغلق C_2 عدا في القطب البسيط $z=-1$ الواقع داخل C_2 .

من تعريف f_2 ينتج

$$z^{-a} = e^{-a(Log|z| + i \arg z)}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$$

* ان هذا التكامل مهم في دراسة دالة كاما (Gamma function)

Scanned by CamScanner

وراسب f_2 عند $z = -1$ هو

$$\operatorname{Res}(f_2, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) f_2(z) = \lim_{z \to -1} z^{-a} = e^{-a\pi i}$$

وهكذا يكون

$$\int_{C_2} f_2(z)\, dz = 2\pi i\, e^{-a\pi i} \qquad (6.9.3)$$

ولما كان $f_1(z) = f_2(z)$ على الشعاع $\arg z = \phi$ ، عندئذ

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz + \int_{C_2} f_2(z)\, dz = \int_{\rho}^{R} f_1(x)\, dx - \int_{P}^{R} f_2(x)\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1} f_1(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)\, dz + \int_{\gamma_1} f_1(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f_2(z)\, dz \qquad \ldots(6.9.4)$$

حيث ان Γ_k القوس الدائري الكبير و γ_k القوس الدائري الصغير للمنحني البسيط المغلق C_k $(k = 1,2)$ كما في شكل (6.4)

عندما z تقع على القوس الكبير Γ_k $(k = 1,2)$ فان

$$|f_k(z)| = \left| \frac{z^{-a}}{z+1} \right| \le \frac{R^{-a}}{R-1}$$

ولما كان Γ_k جزء دائرة محيطها $2\pi R$ فان

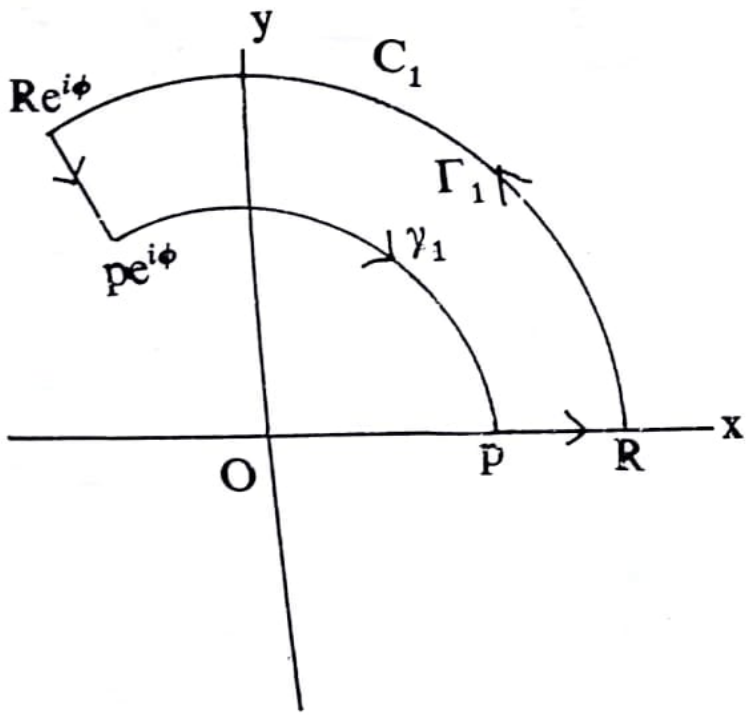
$$\int_{\Gamma_k} f_k(z)\, dz \le \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R$$

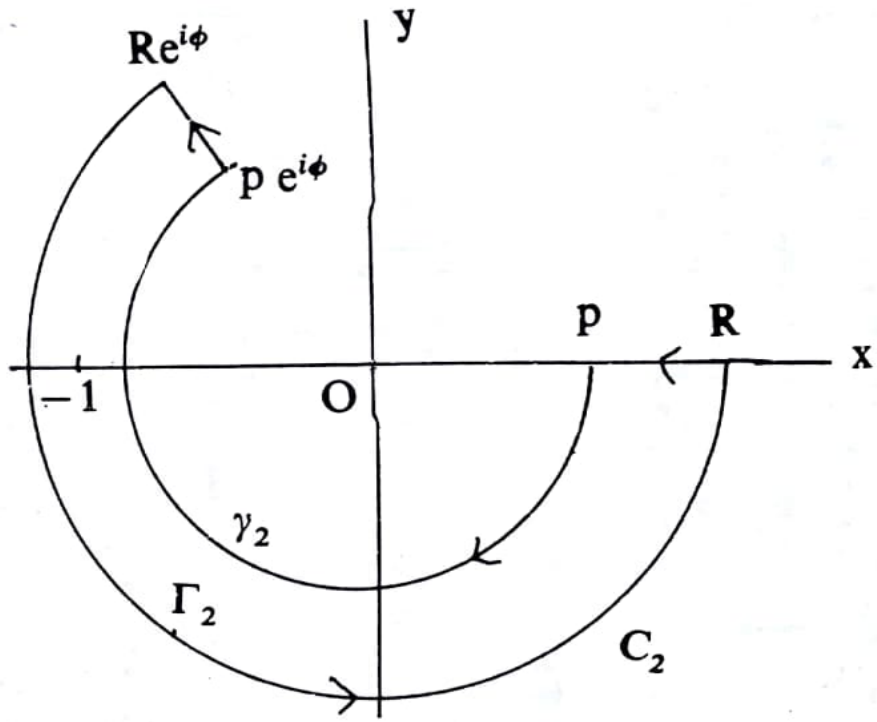
من هذه ينتج

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_k} f_k(z)\, dz = 0 \qquad k = 1,2 \qquad \ldots (6.9.5)$$

وعندما z تقع على γ_k $(k = 1,2)$ يكون

Scanned by CamScanner





شکل (6.4)

Scanned by CamScanner

$$|f_k(z)| = \left| \frac{z^{-a}}{z+1} \right| \leq \frac{p^{-a}}{1-p}$$

عند ئذ

$$\left| \int_{\gamma_k} f_k(z)\, dz \right| \leq \frac{p^{-a}}{1-p} \cdot 2\pi p$$

من هذا ينتج

$$\lim_{p \to 0} \int_{\gamma_k} f_k(z)\, dz = 0 \qquad (k = 1,2) \qquad \ldots\ldots (6.9.6)$$

ينتج من المعادلات (6.9.4) و (6.9.5) ، (6.9.6) وكذلك (6.9.2) ، (6.9.3) ان

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ p \to 0}} \left(\int_p^R f_1(x)\, dx - \int_p^R f_2(x)\, dx \right) = 2\pi i\, e^{-a\pi i}$$

ولما كان

$$\int_p^R f_1(x)\, dx - \int_p^R f_2(x)\, dx = \int_p^R \frac{1}{x+a} \left(e^{-a\,Log\,x} - e^{-a(Log\,x + 2\pi i)} \right) dx$$

$$= \int_p^R \frac{x^{-a}}{x+1} \left(1 - e^{-2a\pi} \right) dx$$

وبهذه نصل الى النتيجة الاتية :

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ p \to 0}} \int_p^R \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx = \frac{2\pi i\, e^{-a\pi i}}{1 - e^{-2\pi a i}}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

Scanned by CamScanner

تمارين (6.4)

استعمل مبرهنة الرواسب لاثبات التكاملات في التمارين 1 ← 6

1- (أ) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}$ (ب) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$

2- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$, $-1 < a < 1$.

3- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\, d\theta}{5 - 4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}$

4- $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{-\pi a}{(a^2 - 1)}$, $0 \le |a| < 1$

5- $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$, $a > 1$,

6- $\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$, $n = 1,2,3 \ldots$

7- برهن $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$, $b > 0$

باجراء تكامل الدالة e^{-z^2} حول المستطيل الذي رؤوسه $\pm a + bi, \pm a$

ثم اجعل $a \to \infty$. استعمل الحقيقة $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

8- برهن $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$ و $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = 0$

Scanned by CamScanner

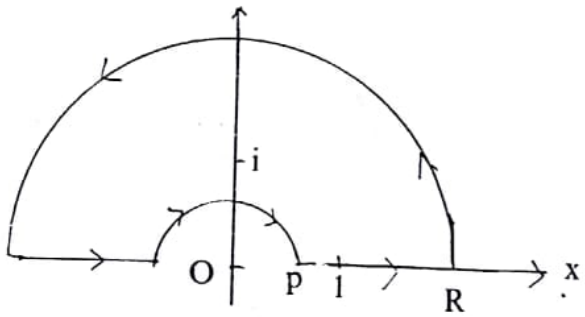
(تلميح : استعمل المنحني البسيط المغلق في شكل (6.5))

9- تعرف دالة بيتا (Beta function) بانها دالة بمتغيرين حقيقين ناتجة من التكامل المحدد

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt . \qquad p > 0, q > 0$$

استعمل التعويض $t = \frac{1}{x+1}$ ونتيجة المثال المحلول في الفقرة 6.9 لاثبات

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, 0 < p < 1$$



شكل (6.5)

10 - بواسطة شكل 6.4 اثبت صحة التكاملات الاتية

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad x^{-1/2} = e^{-(1/2)\log x} \qquad (أ)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1-a}{\cos\frac{\pi a}{2}}, \quad -1 < a < 3 \qquad (ب)$$

$$x^a = e^{a\log x}$$

Scanned by CamScanner

11 برهن $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

تلميح : استعمل شكل (6.5)

12 برهن ان $z = i$ هي نقطة تفرع للدالة $\log(z - i)$

13- برهن ان $z = \pm i$ هما نقطتا تفرع للدالة $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ ثم برهن ان اي منحني مغلق حول هاتين النقطتين لايغير منطلق فرع الدالة .

Scanned by CamScanner

الفصل السابع

تطبيقات فيزياوية

(Physical Applications)

في هذا الفصل سنتطرق الى بعض التطبيقات التي تشمل حل مسائل تتعلق بانسياب الموائع (السوائل والغازات) وانتقال الحرارة والكهربائية المستقرة .

7.1 انسياب الموائع (Fluid flow)

ان حلولا كثيرة من المسائل المهمة في موضوع سريان الموائع ، يطلق عليها احياناً اسم ديناميك المائع (fluid dynamics) او (hydrodynamics) او ديناميك الهواء (aero dynamics)

هذه الحلول تتم عادة باستخدام طريقة الدوال المعقدة . سوف نتناول الحالات التي يكون فيها

Scanned by CamScanner

1- سريان المائع في بعدين (Two dimensional fluid flow)

وهذا يعني بان سريان المائع في اي مستوي هو نفسه في اي مستوي اخر موازي للمستوي الاصلي . وبهذا يمكن اعتبار هذا المستوي هو المستوي xy وبذا يكون اهتمامنا على سريان المائع في المستوي xy .

2- السريان المنتظم (stationury or steady flow) اي ان سرعة المائع عند اي نقطة تعتمد فقط على احداثي النقطة (x,y) ولاتعتمد على الزمن .

3- مركبات السرعة هي المشتقات الجزئية للجهد : اي اذا كان V_x , V_y ترمزان الى مركبات سرعة المائع V عند النقطة (x,y) بالاتجاه الموجب للاحداثيين فانه توجد دالة ϕ تدعى جهد السرعة (Velocity Potential) بحيث ان

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{..... (7.1.1)}$$

هنالك فرضية مكافئة وهي اذا كان C منحني مغلق بسيط في المستوي Z وكانت V_t المركبة المماسة للسرعة (Tangential Component of the Velocity)

على المنحني C فان

$$\oint_C V_t \, ds = 0 \qquad \text{..... (7.1.2)}$$

(ان الدائرة الصغيرة وسط علامة التكامل تشير بان المنحني C مغلق)ان هذا التكامل يمثل دوران المائع حول المنحني C . وعندما يكون التكامل صفر فان السريان يدعي غير دوار (Irrotational أو Circulation free)

4 - المائع غير قابل للانضغاط (incompressible) وهذا يعني بان الكثافة (density) وهي كتلة وحدة الحجوم من ذلك المائع، تكون ثابتة.فاذا كانت V_n ترمز للمركبة العمودية للسرعة (Normal Component of the Velocity) على المنحني C فان

$$\oint_C V_n \, ds \qquad \text{..... (7.1.3)}$$

Scanned by CamScanner

وهذه تعني بان كمية المائع داخل المنحني C تكون ثابتة ، اي ان كمية المائع التي تدخل C مساوية لكمية المائع الخارجة من C . ولهذا السبب تسمى المعادلة (7.1.3) معادلة الاستمرارية (Equation of Continuity)

5- المائع غير لزج (non – viscus) أي ان المائع خالي من الاحتكاك الداخلي بين جزيئاته وبهذا تكون قوة الضغط على السطح عمودية.

ان المائع غير القابل للانضغاط وغير اللزج يدعى عادة بالمائع المثالي (ideal fluid) أو المائع النظري . بالطبع يجب ان ندرك بان هذا النوع من المائع هو نموذج رياضى لمائع حقيقي فيه التأثيرات الجانبية مهملة.

الان سوف نثبت العلاقتين المهمتين واللتين سوف نحتاجهمافيما بعد

$$\oint_C V_t\,ds = \oint_C V_x\,dx + V_y dy \qquad \ldots\ldots (7.1.4)$$

$$\oint_C V_n\,ds = \oint_C V_x\,dy - V_y dx \qquad \ldots\ldots (7.1.5)$$

حيث ان C اي منحني مغلق بسيط في المستوي z .باستخدام طريقة تدوير المحاور [2] فان احداثيات اية نقطة (x,y) بعد التدوير تكون

$$x = t\cos\theta - n\sin\theta$$

$$y = t\sin\theta + n\cos\theta$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial t} = \cos\theta\,, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sin\theta$$

وباستخدام قاعدة السلسلة ينتج

$$V_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$V_t = V_x\cos\theta + V_y\sin\theta \qquad \ldots\ldots (7.1.6)$$

حيث ان ϕ جهد السرعة (Velocity Potential) .كذلك

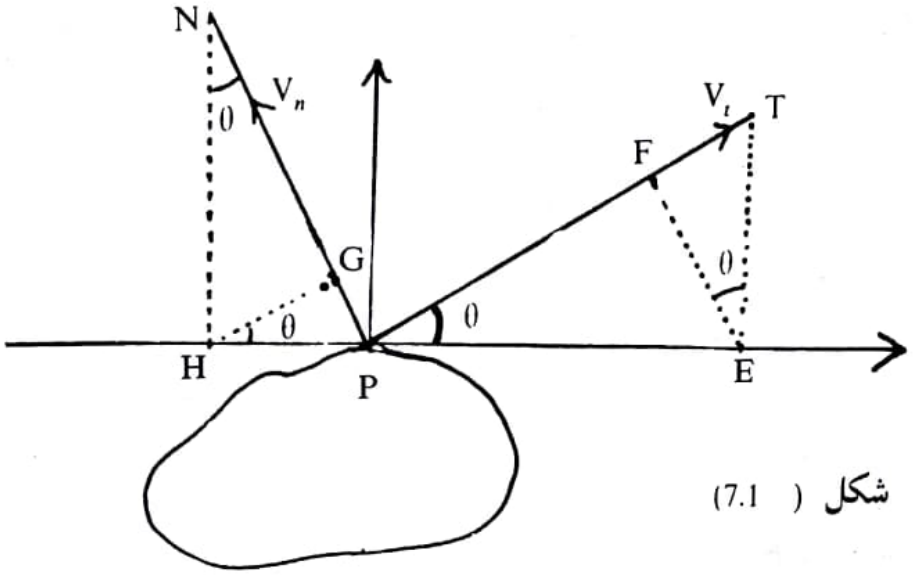
$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -V_x\sin\theta + V_y\cos\theta \qquad \ldots\ldots (7.1.7)$$

Scanned by CamScanner

ولكون ds باتجاه المماس ينتج

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$$

$$\therefore dx = \cos\theta\, ds \quad ; \quad dy = \sin ds \qquad \ldots (7.1.8)$$



شكل (7.1)

الآن من المعادلتين (7.1.6) , (7.1.8) نحصل على

$$V_t\, ds = (V_x \cos\theta + V_y \sin\theta)\, ds$$

$$= V_x\, dx + V_y\, dy$$

ومنها نحصل على المعادلة (7.1.4)

كذلك من المعادلة (7.1.7) , (7.1.8) نحصل على

$$V_n\, ds = -(\sin\theta\, ds)\, V_x + (\cos\theta\, ds)\, V_y$$

$$= -V_x\, dy + V_y\, dx$$

ومنها نحصل على المعادلة (7.1.5)

الآن ليكن لدينا مائع غير دوار وغير قابل للانضغاط فمن المعادلتين (7.1.4) و (7.1.2) نحصل على

$$\oint_C V_t\, ds = \oint_C V_x\, dx + V_y\, dy = 0 \qquad \ldots (7.1.9)$$

Scanned by CamScanner

كذلك من المعادلتين (7.1.3) , (7.1.5) نحصل على

$$\oint_c V_n ds = \oint_c V_x dy - V_y dx = 0 \qquad \ldots\ldots (7.1.10)$$

ومنها ينتج

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

وحسب المعادلة (7.1.1) نستنتج بان جهد السرعة ϕ هي دالة توافقية أي تحقق معادلة لابلاس.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \ldots\ldots (7.1.11)$$

وبذلك يكون للدالة ϕ مرافق توافقي وليكن ψ بحيث أن الدالة

$$f(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y) \qquad \ldots\ldots (7.1.12)$$

تكون تحليلية .

ان المنحنيات المتزنة (level curves) للعائلة $\phi(x,y) = c$ حيث أن c عدد حقيقي تدعى خطوط تساوي الجهد (equipotential lines) لذلك السريان كما وان الدالة ψ تدعى دالة الانسياب (stream function) وان المنحنيات المتزنة .

$$\psi(x,y) = k \qquad \text{حيث } k \text{ ثابت حقيقي}$$

تدعى بخطوط الانسياب (stream lines) للسريان وعموماً أن الدالة f تمثل الجهد المعقد (Complex Potential) لذلك السريان وتتميز دالة الجهد المعقد بالصفات الاتية.

اولا : ان سرعة السريان V تساوي مرافق مشتقة الدالة f أي أن

$$V = \overline{f'} \qquad \ldots\ldots (7.1.13)$$

وهذا ينتج من ايجاد مشتقة الدالة f المعرفة بالصيغة (7.1.12) وتطبيق معادلتي كوشي ريمان (لكون f تحليلية) ثم استخدام (7.1.1) أي ان

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

وذلك بتطبيق معادلتي كوشي – ريمان على الدالة التحليلية f

$$\therefore\ f'(z) = V_x - iV_y$$

Scanned by CamScanner

وبذلك فان السرعة V (وتدعى احياناً بالسرعة المعقدة) تعطى بالعلاقة

$$V = V_x + iV_y = \overline{\frac{df}{dz}}$$

ثانياً : القيمة المطلقة للسرعة V هي

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \overline{|f'(z)|} = |f'(z)|$$

ان النقاط التي عندها تكون السرعة صفر تدعى بنقاط الركود (stagnation points)

مثال (1)

ناقش دالة السريان $f(z) = \alpha z$

حيث α عدد حقيقي موجب .

الحل :

ان جهد السرعة هو $\phi = \alpha x$

وان دالة الانسياب هي $\psi = \alpha y$

كما ان خطوط الانسياب (stream lines) والتي تمثل عائلة $\psi = c$ (c عدد حقيقي) هي

مقدار ثابت $y = \frac{c}{\alpha}$.

والتي منها نستنتج بان السريان المتمثل بالدالة f يوازي محور x . أي ان اتجاه المائع ثابت

ان سرعة السريان يمكن حسابها من المعادلة (7.1.13)

$$V = f'(z) = \overline{\alpha} = \alpha$$

وهذا يشير الى ان سرعة سريان المائع ثابتة كما مبين في الشكل (7.2 (a))

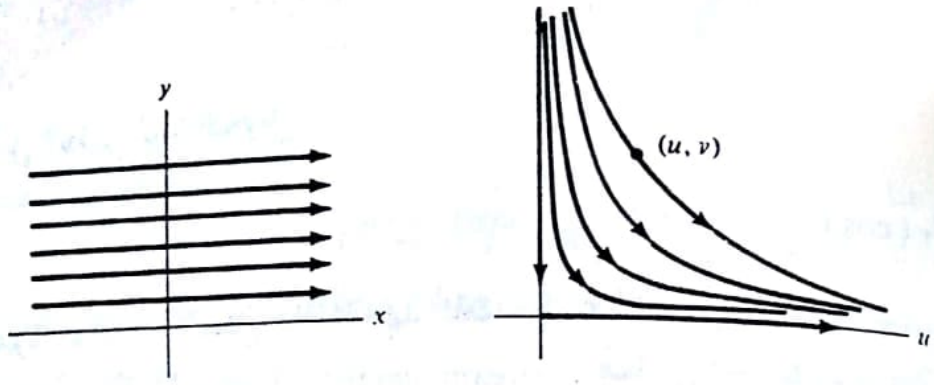
الآن لنناقش السريان الدائر بزاوية قائمة ولنأخذ الدالة

$$\omega = f(z) = z^{1/2} \quad \ldots\ldots (7.1.14)$$

من خلال دراستنا للدوال المتعددة القيم والتحويلات الخاصة في الفصول السابقة نعلم بان الدالة (7.1.14) تنقل النصف العلوي من المستوي z الى الربع الاول من المستوي ω ومن جانب اخر فان معكوس الدالة هذه هو

$$z = x + iy = \omega^2 = (u^2 - v^2) + 2uvi$$

Scanned by CamScanner



(a) شكل (7.2) (b)

ينقل الربع الاول من المستوي ω والمتمثلة (بالشكل (7.2 (b) الى النصف العلوي من المستوي z والمتمثلة (بالشكل (7.2 (a)

لنعد الى دراسة هذا المثال ومن المعلومات التي وردت في الجزء الاول من المثال نجد ان جهد السرعة

$$\phi = \alpha x = \alpha (u^2 - v^2)$$

وأن دالة الانسياب $\psi = \alpha y = 2\alpha uv$

اذاً خطوط الانسياب $\psi = c$ هي القطوع الزائدة

مقدار ثابت $uv = \frac{c}{2\alpha}$

وهذه تمثل تناسب عكسي بين u , v كما مبين في الشكل 7.2 (b)

ان الجهد المعقد هو $f = \phi + i\psi = \alpha \omega^2$

اخيراً ، ان سرعة السريان عند نقطة (u,v) في الربع الاول هي

$$V = \overline{f'} = 2\alpha (u - iv)$$

وان القيمة المطلقة لسرعة السريان (speed) هي

$$| V | = 2\alpha \sqrt{u^2 + v^2}$$

(7.2) السريان حول اسطوانة (Flow around a cylinder)

سوف ندرس في هذا البند بعض التحويلات الخاصة والتي تستخدم لتمثل بعض المسائل الفيزياوية وبصورة خاصة السريان حول اسطوانة . ولهذا النوع من السريان امثلة عديدة منها انسياب مياه الانهر حول دعائم الجسور وانسياب الهواء حول الاعمدة والاسلاك الكهربائية

ان معادلة التحويل التي تصف مثل هذا النوع من السريان هو

$$\omega = z + \frac{1}{z} \qquad \ldots\ldots (7.2.1)$$

Scanned by CamScanner

ان الشكل القطبي لهذا التحويل

$$\omega = r(\cos t + i\sin t) + \frac{1}{r}(\cos t - i\sin t) \quad \ldots\ldots (7.2.2)$$

اذا اعتبرنا الدالة ω تمثل دالة الجهد المعقد ، عندئذ جهد السرعة (velocity potential) ودالة الانسياب (stream function) هما

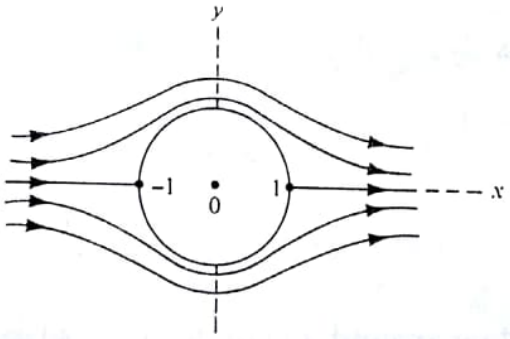
$$\phi(r,t) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t \quad \ldots\ldots (7.2.3)$$

$$\psi(r,t) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t \quad \ldots\ldots (7.2.4)$$

على التوالي .

الان نفرض بان لدينا اسطوانة مستقرة نصف قطرها وحدة واحدة ولنفرض عندنا مائع غير دوار وغير قابل للانضغاط (كثافته ثابتة) . نأخذ مقطع عرضي للسريان عمودي على محور الاسطوانة كما مبين في الشكل (7.3) . الآن نعوض عن الطرف الايسر من المعادلة (7.2.4) بمقدار ثابت وليكن c فان دالة السريان تصبح

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t = c$$



شكل (7.3)

وبصورة خاصة عندما نضع $c = 0$ فاما

$$\sin t = 0 \quad \text{او} \quad r = \pm 1$$

أي ان $t = n\pi$ (حيث n عدد صحيح) أو $r = \pm 1$

ولكن الحل العملي هو $t = \pi$ و $t = 0$ أو $r = 1$

Scanned by CamScanner

ومن هنا نستنتج بان خطوط السريان (stream lines) تمثل المحور الحقيقي والذي فيه $|x| \geq 1$ والدائرة التي نصف قطرها واحد ومركزها الاصل.
بالطبع عندما c تتغير بحيث تأخذ قيم حقيقية مختلفة سوف نحصل على جميع خطوط السريان كما مبين في شكل (7.3)
ان سرعة السريان هي

$$V = \overline{f'(z)} = 1 - \frac{1}{(\bar{z})^2} \quad \ldots\ldots (7.2.5)$$

من الواضح أن $V = 0$ اذا وفقط اذا كان $z = \pm 1$ وهذه النقاط تدعى نقاط الركود (stagnation points) للسريان.

ان النقاط البعيدة عن الاسطوانة أي النقاط التي فيها $|z|$ كبيرة جداً تبدوعندها حركة السريان منتظمة وهذا واضح من المعادلتين (7.2.5) و (7.2.1) حيث أن :

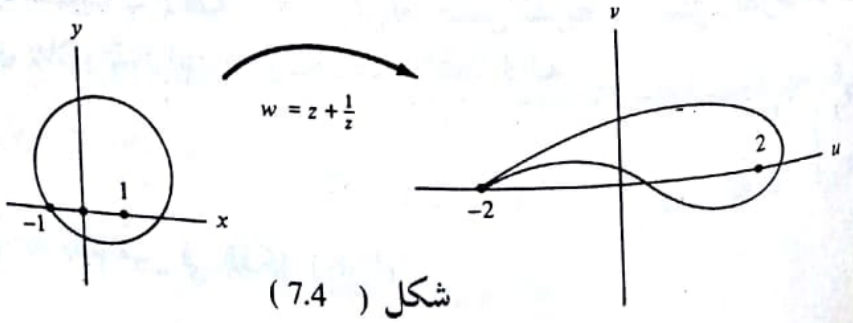
$$\omega \simeq z \quad ; \quad v \simeq 1$$

نستنتج من شرحنا هذا بان التحويل (7.2.1) يستخدم ليصف السريان حول اسطوانة.

<u>ملاحظة :</u>
ان التحويل (7.2.1) مطابق عدا عند النقطتين $z = \pm 1$ وذلك لان المشتقة

$$\omega' = 1 - \frac{1}{z^2}$$

تساوي صفر عند النقطتين $z = \pm 1$ (مبرهنة 3.1) ولما كان التحويل (7.2.1) غير مطابق عند هاتين النقطتين فانه يلعب دورا مهما في التطبيقات التي يستخدم فيها التحويل (7.2.1) في موضوع داينمك الهواء (aerodynamics) حيث يمكن اثبات ان التحويل (7.2.1) ينقل الدائرة التي تمر بالنقطة $z = -1$ وتحوي النقطة $z = 1$ في داخلها الى شكل يشبه جنح الطائرة كما في الشكل (7.4)



شكل (7.4)

Scanned by CamScanner

وهذا ما يسمى بسطح جوكفسكي (Joukowski airfoil) ان هذا السطح له حافة مذنبة حادة عند النقطة $\omega = -2$ ويضم النقطة $\omega = 2$ التي هي صورة النقطة $z = 1$ كنقطة داخلية وهاتان النقطتان $z = \pm 1$ يكون التحويل فيهما غير مطابق .

7.3 السريان الخارج من قناة (Flow out of a channel)

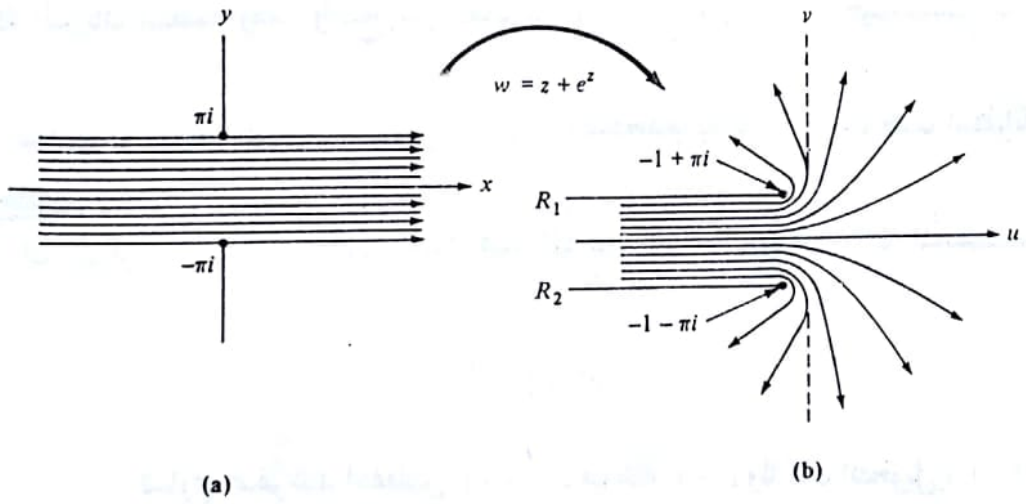
ان سريان المائع الخارج من قناة يمكن وصفه بالمعادلة

$$\omega = z + e^z \qquad \ldots\ldots (7.3.1)$$

نركز اهتمامنا الى المنطقة المتمثلة بالشريط A من المستوي z والمعرف بالصيغة

$$A : -\pi \le y \le \pi \quad ; \quad -\infty < x < \infty \qquad \ldots\ldots (7.3.2)$$

والمبينة في شكل (7.5a)



من المعادلة (7.3.1) نحصل على

$$u = x + e^x \cos y \quad ; v = y + e^x \sin y \qquad \ldots\ldots (7.3.3)$$

ان صورة المستقيمات الافقية $y = c$ والواقعة ضمن الشريط A تمثل خطوط الانسياب للمائع الساري خلال القناة المفتوحة والمحددة بالاشعة التالية

$$R_1 : \quad u \le -1 \quad ; \quad v = 1$$

$$R_2 : \quad u \le -1 \quad ; \quad v = -1$$

في المستوي ω كما مبين في الشكل (7.5b)

Scanned by CamScanner

لبيان ذلك نأخذ بعض الحالات الخاصة :

1- اذا اخذنا المستقيم $y = \pi$ فان المعادلة (7.3.3) تؤول الى

$$u = x - e^x \quad ; \quad v = \pi$$

فاذا تغيرت x بحيث تأخذ جميع القيم الحقيقية فان v تبقى ثابتة عند المستقيم $v = \pi$ وبصورة خاصة اذا تغيرت x من $\infty-$ الى الصفر فان u تتغير من $\infty-$ الى $1-$ ومن جهة اخرى اذا تغيرت x من الصفر الى $\infty+$ فان u ترسم الشعاع R_1 من $1-$ الى $\infty-$ ان التعليل الفيزياوي لهذه الحالة هو ان خطوط السريان القريبة من حدود القناة سوف تعود حالما السريان يصل فوهة القناة خارجاً الى الفضاء المفتوح .

2- بنفس الطريقة نشاهد ان صورة المستقيم $y = -\pi$ هي الشعاع R_2 من $\infty-$ الى $1-$ ثم يعود الى $-\infty$.

3- اذا كان $y = 0$ عندئذٍ

$$u = x + e^x \quad ; \quad v = 0$$

عندما تتغير x من $\infty-$ الى $\infty+$ سوف نحصل على المحور u وذلك لان $v = 0$ وان u تتغير من $-\infty$ الى ∞

أن التحويل (7.3.1) يصف السريان الخارج من قناة أو المجال الكهربائي الساكن القريب من حافة المتسعة المؤلفة من صفيحتين متوازين

تمارين (7.1)

1- برهن أن الدوال الاتية توافقية

(أ) $2xy + y^3 - 3x^2y$ (ب) $e^{-x}\sin y$

2- برهن ان كلاً من الدالتين في التمرين السابق تبقى توافقية بعد التحويل

(أ) $z = \omega^2$ (ب) $z = \sin\omega$

3- جد الجهد المعقد لمائع يتحرك بسرعة ثابتة V_0 باتجاه يصنع زاوية δ مع محور x الموجب.

(تلميح $V = V_x + iV_y = V_0 e^{i\delta}$, $V_y = V_0 \sin\delta$. $V_x = V_0 \cos\delta$)

$$\left(\frac{d\Omega}{dz} = \bar{V} = V_0 e^{-i\delta} \quad \Rightarrow \quad \Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z \right)$$

Scanned by CamScanner

4- جد جهد السرعة (vetocity potential) ودالة السريان (stream function)

في التمرين (3) الجواب : $\phi = V_0 (x \cos\delta + y \sin\delta)$ ، $\psi = V_0 (y \cos\delta - x \sin\delta)$

5- جد معادلات خطوط الانسياب (stream lines) وخطوط تساوي الجهد

في التمرين (3) الجواب :

$$\psi = V_0 (y \cos\delta - x \sin\delta) = \beta$$

$$\phi = V_0 (x \cos\delta + y \sin\delta) = \alpha$$

6- ارسم خطوط السريان وخطوط تساوي الجهد لمائع ساري فيه دالة الجهد

(أ) $z^2 + 2z$ (ب) e^{-z} (ج) z^4 (د) $\cos z$

7- اذا كانت دالة الجهد المعقد لمائع ساري هي

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

حيث ان $V_0 . a$ ثابتان موجبان ،

(أ) جد معادلات خطوط الانسياب وخطوط تساوي الجهد ممثلا ذلك بالرسم

علل فيزياوياً الجواب

$$V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta = c$$

$$V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta = k$$

(ب) وضح بان السريان يمثل سريان مائع حول اسطوانة نصف قطرها a

(ج) جد السرعة عند اي نقطة ثم جد قيمتها عند النقاط البعيدة من الاسطوانة

الجواب

$$V = V_0 \left[1 - \frac{2a^2 \cos 2\theta}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} \right]^{1/2}$$

(د) جد نقاط الركود الجواب $z = \pm a$

8 - ناقش سريان مائع فيه دالة الجهد المعقد

(a) $f(z) = i k \log z \quad , \quad k > 0$

(b) $f(z) = V_0 \left(z + \frac{1}{z^2} \right)$

Scanned by CamScanner

7.4 تطبيقات على الكهربائية الساكنة (Applications to Electrostatics)

لنفرض لدينا شحنات موزعة بشكل مستمر او متقطع . ولنفرض لدينا شحنة واحدة موجبة (صغيرة جداً بحيث لاتغير المجال الكهربائي) وموضوعة عند اية نقطة A في الفضاء. ان القوة المؤثرة على هذه الشحنة تدعى بشدة المجال الكهربائي (Electric field Intensity) عند النقطة A ويرمز لها بالرمز E. ان هذه القوة هي مشتقة الجهد ϕ الذي يدعى بجهد الكهربائية الساكنة (Electrostatic Potential) ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالمعادلة

$$E = - \text{grad}\, \phi = - \nabla \phi$$

حيث ان

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

في حالة كون الشحنة موزعة على سطح ذي بعدين كما هو الحال في دراستنا في هذا الفصل فان

$$E = E_x + i\, E_y = - \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \ldots (7.4.1)$$

حيث ان

$$E_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, E_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \ldots (7.4.2)$$

في هذه الحالة اذا كانت E_t ترمز لمركبة شدة المجال الكهربائية المماسة للمنحني المغلق البسيط C في المستوي z . كما في المعادلة (7.1.9) ينتج

$$\oint_c E_t\, ds = \oint_c E_x\, dx + E_y\, dy = 0 \quad \ldots (7.4.3)$$

الآن لنأخذ شحنات موزعة على سطح ذي بعدين ، فاذا كانت C ترمز لاي منحني مغلق بسيط في المستوي z ويحوي في داخله q من الشحنات وان E_n المركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي ،حسب قانون كاوس

$$\oint_c E_n\, ds = 4 \pi q \quad \ldots (7.4.4)$$

(7.1.10 اذا كان C لايحوي شحنات (قيمة $q = 0$) فان (كما في المعادلة

$$\oint_c E_n\, ds = \oint_c E_x\, dy - E_y\, dx = 0 \quad \ldots (7.4.5)$$

Scanned by CamScanner

نستنتج من هذا بان في أي منطقة خالية من الشحنات

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad (7.4.6)$$

باستخدام المعادلة (7.4.2) نحصل على معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (7.4.7)$$

أي أن ϕ دالة توافقية عند أي نقطة خالية من الشحنات وبهذا يوجد لدينا دالة ψ مرافقة للدالة ϕ وبحيث أن

$$f(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y) \qquad \ldots\ldots (7.4.8)$$

تكون تحليلية في اية منطقة خالية من الشحنات . ان الدالة f تدعى بالجهد الكهربائي الساكن المعقد وباختصار تدعى بالجهد المعقد . على هذا الاساس ان المعادلة (7.4.1) تصبح

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= -\left(\overline{\frac{df}{dz}}\right) = -f'(z) \qquad \ldots (7.4.9)$$

وان القيمة المطلقة لشدة المجال الكهربائي هي

$$|E| = |-\overline{f'(z)}\,| = |f'(z)| \qquad \ldots (7.4.10)$$

الان اذا وضعنا

$$\phi(x,y) = c \quad ، \quad c \text{ عدد حقيقي ثابت} \qquad \ldots (7.4.11)$$

ثم نجعل c تأخذ جميع القيم المحتملة ، سوف نحصل على عائلة من المنحنيات كل واحدة منها تمتلك الخاصية الاتية :

« الجهد يكون متساوي عند كل نقطة من نقاطه »

يدعى مثل هذا المنحني من هذه العائلة بخطوط تساوي الجهد (Equipotential lines) كما ان عائلة المنحنيات

$$\psi(x,y) = k \qquad \ldots (7.4.12)$$

حيث k عدد حقيقي ثابت . والتي تؤلف مجموعة من المنحنيات المتعامدة (orthogonal) مع عائلة (7.4.11) أي ان كل منحني من العائلة (7.4.12) يتقاطع مع جميع منحنيات العائلة (7.4.11) بزاوية قائمة . ان عائلة المنحنيات (7.4.12) تؤلف مايسمى بخطوط القوة (lines of force) لذلك المجال.

Scanned by CamScanner

مثال (1)

جد الجهد والقوة والجهد المعقد بين صفيحتين موصلتين عموديتين (vertical conducting plates)فيهما الجهد ثابت أي ان

$$\phi = p_1 \; ; \phi = \; p_2$$

وعلما بان الصفيحتين ذات اطوال غير منتهية

الحل : بما ان الصفيحتين توازيان محور y فان ϕ تعتمد على x فقط وان معادلة لابلاس التفاضلية سوف تأخذ الشكل

$$\phi_{xx} = 0 \qquad .$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\phi = c_1 x + c_2 \qquad \ldots (7.4.13)$$

حيث ان c_2 , c_1 يعتمدان على شروط القيم المحددة للمسألة.على سبيل المثال لو فرضنا ان الموصلين موضوعان بحيث يقطعان المستوي xy بالخطين $x = -d , x = d$ نعوض في المعادلة (7.4.13) نحصل على

$$p_1 = c_1 d + c_2 , \qquad p_2 = -c_1 d + c_2$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد ان

$$c_1 = \frac{1}{2d}(p_1 - p_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

الآن سوف نجد خطوط القوة وذلك بايجاد المرافق التوافقي للمعادلة (7.4.13) والتي تمثل القوة الكهربائية وهي

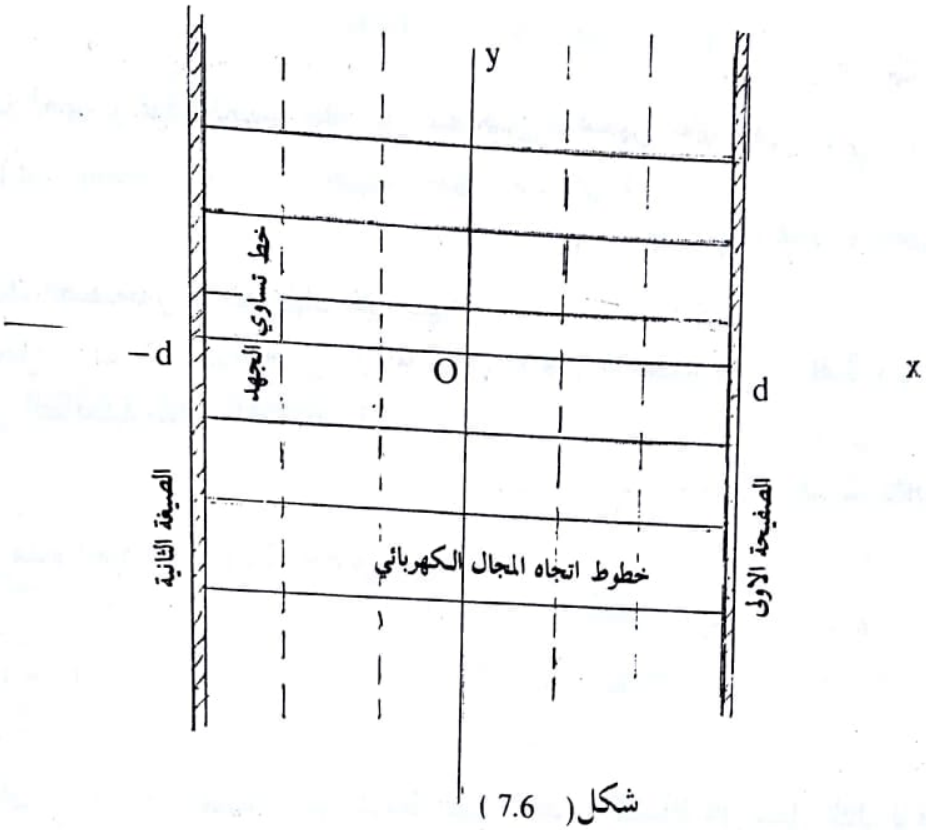
$$\psi = c_1 y + c$$

اي ان الجهد المعقد

$$f(z) = (c_1 x + c_2) + i(c_1 y + c)$$

$$= c_1 z + k$$

Scanned by CamScanner



شكل (7.6)

تمارين (7.2)

1 – جد خطوط تساوي الجهد مع الرسم لكل من الدوال الاتية

(أ) $f(z) = z+1$ الجواب المستقيمات $x = c - 1$, c ثابت

(ب) $f(z) = \frac{1}{z}$ الجواب $c(x^2 + y^2) - x = 0$, c ثابت

2 – ليكن الجهد المعقد $f(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$ معلوم ولناخذ عائلتي المنحنيات

$$\phi(x,y) = c \quad , \quad \psi(x,y) = k$$

(أ) جد التفاضل التام $d\phi = 0 \, , d\psi = 0$

(ب) برهن $\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \, , \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$

(ج) استخدم معادلتي كوشي ريمان لاثبات ان العائلتين تؤلف مجموعة متعامدة من المنحنيات

Scanned by CamScanner

7.5 تطبيقات على سريان الحرارة (Applications to Heat flow)

ان الفيض الحراري (Heat flux) عبر سطح ماداخل جسم صلد في نقطة ما على ذلك السطح تعرف بكمية الحرارة المنسابة خلال وحدة السطح في وحدة الزمن وتعطى بالعلاقة

$$T = - k \operatorname{grad} \phi = - k \nabla \phi$$

حيث ϕ دالة لدرجة الحرارة (Temperature function) والثابت k يسمى معامل التوصيل الحراري ويعتمد على المادة التي يصنع منها الجسم .

سوف نحصر تفكيرنا على الحالات التي تكون فيها الدالة ϕ متغيرة بالنسبة للاحداثين x,y فقط وبهذه الحالة

$$T = - k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = Q_x + i Q_y \qquad \ldots (7.5.1)$$

حيث أن

$$Q_x = - k \frac{\partial \phi}{\partial x} , \; Q_y = - k \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \ldots (7.5.2)$$

الآن نفرض بانه لدينا منحني مغلق بسيط في المستوي z فاذا كان Q_n . Q_t المركبتين العمودية والمماسة للفيض الحراري على التوالي وبفرض شروط حالة الاستقرار ، أي انه لايوجد تكاثف حراري عند نقطة ماداخل C ، فان

$$\oint_C Q_n \, ds = \oint_C Q_x \, dy - Q_y \, dx = 0 \qquad \ldots (7.5.3)$$

$$\oint_C Q_t \, ds = \oint_C Q_x \, dx + Q_y \, dy = 0 \qquad \ldots (7.5.4)$$

يمكن تحقيقهما كما في المعادلتين (7.1.10) , (7.1.9)

نفرض بانه لاتوجد مصادر حرارية ولا امتصاصات حرارية داخل المنحني C فان المعادلة (7.5.3) تصبح

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

وباستخدام (7.5.2) ينتج

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Scanned by CamScanner

أي ان الدالة ϕ توافقية . اذاً يوجد مرافق توافقي ψ للدالة ϕ بحيث ان الدالة

$$f(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

تكون تحليلية .

ان عائلة المنحنيات

$\phi(x,y) = c$, c ثابت حقيقي

تدعى خطوط تساوي درجات الحرارة (Isothermal lines)

كذلك عائلة المنحنيات

$\psi(x,y) = k$, k ثابت حقيقي

تدعى خطوط الفيض (flux lines) وان الدالة $f(z)$ تدعى درجة الحرارة المعقدة (Complex Temperature)

مثال (1)

حل مسألة القيم المحددة

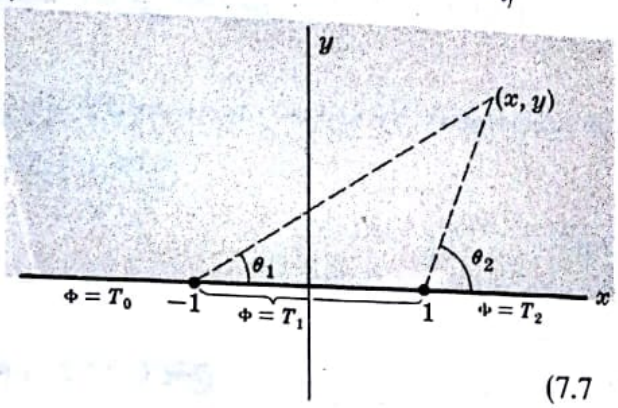
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \,,\ y > 0$$

$$\lim_{y\to 0} \phi(x,y) = G(x) = \begin{cases} T_0 \,,\ x < -1 \\ T_1 \,,\ -1 < x < 1 \\ T_2 \,,\ x > 1 \end{cases}$$

حيث ان T_0 , T_1 , T_2 ثوابت

الحل :

ان هذه تدعى مسألة ديربجلت (Dirichlet Problem) للنصف العلوي من المستوي z (شكل 7.7)



شكل (7.7)

Scanned by CamScanner

ان الدالة $A\,\theta_1 + B\,\theta_2 + c$

حيث ان c, B, A ثوابت حقيقية ، توافقية وذلك لان الجزء الخيالي من الدالة

$$A \log(z+1) + B \log(z-1) + ic$$

$$A\,\theta_1 + B\,\theta_2 + c$$

هو

لايجاد قيمة c, B, A نلاحظ بان الشروط المحيطية هي :

$\phi = T_2$ عندما $x > 1$ اي ان $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$\phi = T_1$ عندما $-1 < x < 1$ اي ان $\theta_2 = \pi, \theta_1 = 0$

$\phi = T_0$ عندما $x < -1$ اي ان $\theta_2 = \theta_1 = \pi$

عندئذ

$$T_2 = A(0) + B(0) + c$$
$$T_1 = A(0) + B(\pi) + c$$
$$T_0 = A(\pi) + B(\pi) + c$$

وبحل هذه المعادلات الثلاثة نحصل على

$$c = T_2$$
$$B = (T_1 - T_2)/\pi$$
$$A = (T_0 - T_1)/\pi.$$

والحل المطلوب هو

$$\phi = A\,\theta_1 + B\,\theta_2 + c$$

$$= \frac{T_0 - T_1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right) + \frac{T_1 - T_2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) + T_2$$

... (7.5.6)

مثال (2)

جد دالة درجة الحرارة المستقرة للمنطقة المظللة في الشكل (7.8 a) والتي تمثل شريحة (slab) نصفها العلوي غير منته وحافاتها الجانبية ثابتة الحرارة كما وان T ثابت .

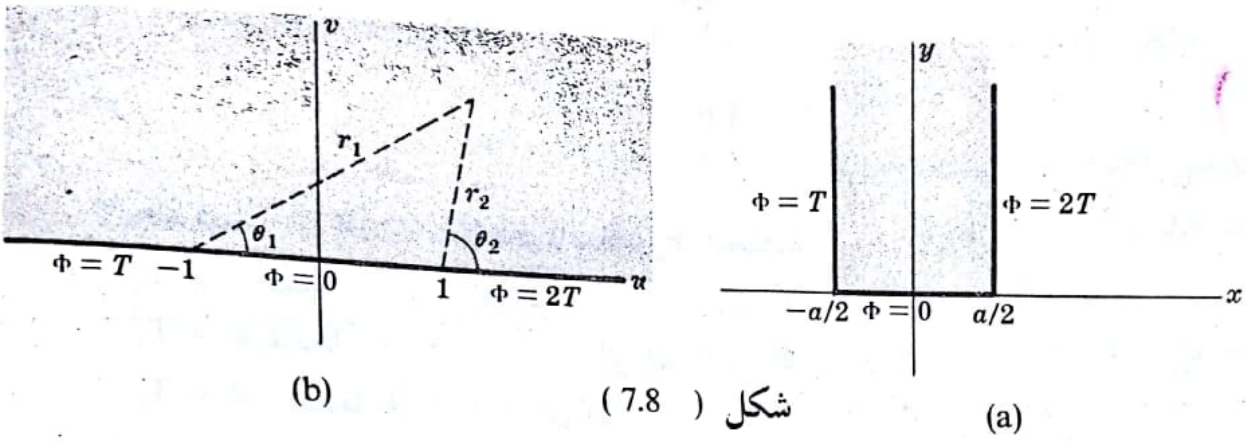
الحل :

ان التحويل

$$\omega = \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \qquad (7.5.7)$$

Scanned by CamScanner

ينقل المنطقة المظللة في المستوي z (شكل 7.8.a) الى النصف العلوي من المستوي ω (شكل 7.8.b)



(b) (a)

شكل (7.8)

كما وان التحويل (7.5.7) يكافيء

$$u = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$v = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

الآن سوف نحل المسألة المكافئة للمسألة الاصلية ، اي في المستوى ω . وبهذا سوف نستخدم الطريقة في المثال السابق اي المعادلة (7.5.6) ونحصل على الحل في المستوى ω

$$\phi = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u+1}\right) - \frac{2T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u-1}\right) + 2T$$

اي ان الحل المطلوب في المستوي z هو

$$\phi = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sin\frac{\pi x}{a}\cosh\frac{\pi y}{a}+1}\right\}$$

$$-\frac{2T}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{\pi y}{a}\right)-1}\right\}+2T$$

Scanned by CamScanner