القسم الاول

منطق الفرضيات المركبة

الكلمات المفتاحية:

منطق – منطق صوري – مسلّمة – فرضية – نتيجة – تكافؤ منطقي – اقتضاء شرطي – برهان.

ملخص:

على عكس علم الحساب والرياضيات المستمرة التي تصف عادة عالم من المتحولات والمقادير التي تتغير على نحوٍ مستمر (غير متقطع)، فإن الرياضيات المتقطعة هي عالم من المتحولات والكميات التي تتغير من حال إلى أخرى بقفزات لا يمكن وصفها بالمستمرة. أهم المواضيع التي تعالجها الرياضيات المتقطعة هي: المنطق والبرهان، العودية والاستقراء، الاحتمالات المتقطعة، الخوارزميات وتحليلها.

أهداف تعليمية:

يكتسب الطالب في هذا الفصل القدرة على التجريد وعلى صياغة البراهين صياغةً منطقية. يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- الفرضيات والفرضيات المركبة؛
- قيم الحقيقة (الصح والخطأ)؛
- تقدير قيم الحقيقة للفرضيات المركبة؛
- التكافؤ المنطقي؛
- التضارب المنطقي والقيم الغامرة المنطقية.

الفرضيات البسيطة والبراهين

تعاريف:

الفرضية هي جملة تحمل أحد المعنيين المنطقيين: صح أو خطأ ولكن ليس كلاهما

ثلاثة مفاهيم أساسية نسلم بها: الصح **T**، الخطأ **F** ، والجملة

مثال 1 : "2+2=4" هي فرضية لأنها جملة قيمتها المنطقية هي دائما صح

مثال 2 : "2+2=5" هي فرضية لأنها جملة قيمتها المنطقية هي دائما خطأ

مثال 3 : " $x+y>0$ " هي ليست فرضية لأنها جملة قيمتها المنطقية يمكن أن تكون صح من أجل بعض القيم لـِ x و y ($x=1,y=1$) ويمكن أن تكون خطأ من أجل بعض القيم الأخرى ($x=-1,y=-1$)

البرهان: هو تتابع لسلسلة من الفرضيات يؤدي إلى نتيجة منطقية

مثال: ليكن x عدد حقيقي

إذا كان $x>2$ (مسلّمة ***p***) أو إذا كان $x<-2$ (مسلّمة ***Q***) فإن $x^2>4$ (نتيجة **r**)

يكون البرهان تجريداً:

*If **p** or **Q** then **r***

في صياغة أي برهان منطقي، ننطلق من فرضيات كي نصل إلى نتيجة، ولكي تكون النتيجة المراد برهنتها موثوقة منطقيا فإن ذلك يحتم أن تكون الفرضيات مصاغةً منطقياً على نحوٍ صحيح.

و لتوضيح ذلك ليكن المثال التالي:

إذا كان لدينا خطأ لغوي في نص برنامج (فرضية ***p***) أو إذا كان لدينا قسمة على قيمة الصفر خلال تنفيذ البرنامج (فرضية ***Q***) فإننا سنحصل على رسالة خطأ (**نتيجة *r***).

ويمكن كتابة ما سبق بشكل مجرد:

*If **p** or **Q** then **r***

مما يستدعي بداهة أن:

*If not **r** then not **p** and not **Q***

ونعبر عن ذلك بقولنا أنه إذا لم يكن هنالك رسالة خطأ أثناء تنفيذ البرنامج فإن البرنامج لا يحتوي أخطاء لغوية وإن البرنامج لا يقوم بعمليات قسمة على قيمة الصفر.

العمليات المنطقية على الفرضيات

عملية النفي المنطقية: رمزها "~"، لها معامل وحيد (فرضية ***p***)، القيم المنطقية لنفي ***p*** ممثلة بالجدول التالي:

p	$\sim p$
T	F
F	T

جدول الحقيقة لـــ $\sim p$

عملية الضم المنطقية (**و**): رمزها "$\wedge$"، لها معاملان (فرضية ***p***) و (فرضية ***Q***)، جدول الحقيقة لعملية الضم:

p	Q	$p \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عملية الفصل المنطقية (أو): رمزها "$\vee$"، لها معاملان (فرضية ***p***) و (فرضية ***Q***)، جدول الحقيقة لعملية الفصل:

p	Q	$p \wedge Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

لتوضيح معنى عملية النفي:

لتكن الفرضية ***p*** $(1 < x)$(**تُقرأ: إيكس أكبر من واحد**)، إن نفي ***p*** أو (***p***~) هو $(x < 1)$(**تُقرأ: إيكس أصغر من واحد**)، وبالتالي عندما تكون ***p*** محققة (أي القيمة المنطقية لـــ ***p*** = True) أي $(x > 1)$ فإن نفي ***p*** (***p***~) غير محققة (أي القيمة المنطقية لـــ $\sim p$ تساوي False.

الفرضيات المُركَبة

الفرضية المركبة هي مجموعة من الفرضيات البسيطة المرتبطة فيما بعضها بروابط منطقية (~، $\wedge$، $\vee$).

يجري حساب القيم المنطقية للفرضية المركبة انطلاقا من القيم المنطقية لفرضياتها البسيطة وذلك بإنشاء جدول الحقيقة للفرضية المركبة مع اعتبار كافة التوافقيات الممكنة لقيم الفرضيات البسيطة.

لتوضيح كيفية حساب القيم المنطقية لفرضية مركبة ابتداء من الفرضيات البسيطة ليكن لدينا الفرضيتان البسيطتان **p** و **Q** ولتكن الفرضية المركبة التالية:

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

ننشئ جدول الحقيقة لهذه الفرضية بالتدرج (أي بحساب القيم المنطقية لما بين الأقواس الداخلية ($(p \vee q)$ و $(p \wedge q)$)، ومن ثم العمليات على المستوى الأعلى وهكذا دواليك:

p	Q	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

تمرين:

إنشاء جدول الحقيقة للفرضية المركبة $((p \wedge q) \vee \sim r)$

الفرضية المركبة هي مجموعة من الفرضيات البسيطة المرتبطة فيما بعضها بروابط منطقية ($\sim$، $\wedge$، $\vee$) **(تُقرأ: النفي، و، أو)**

يجري حساب القيم المنطقية للفرضية المركبة انطلاقا من القيم المنطقية لفرضياتها البسيطة وذلك بإنشاء جدول الحقيقة للفرضية المركبة مع اعتبار كافة التوافقيات الممكنة لقيم الفرضيات البسيطة.

تبين الشريحة مثالاً حول كيفية حساب القيم المنطقية لفرضية مركّبة ابتداء من الفرضيات البسيطة.

التكافؤ المنطقي

نقول عن فرضيتين مركبتين **P, Q**، أنهما متكافئتان منطقياً إذا وفقط إذا تطابق جدولا الحقيقة لكلتيهما وذلك من أجل جميع التوافقيات الممكنة للقيم المنطقية لفرضياتهم البسيطة. ونعبر عن ذلك بـــ **$P \equiv Q$**

مثال: قانونا دو مورغان:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

لنبرهن قانون دو مورغان الأول:

ننشئ جدول حقيقة يحوي عمود منه قيم الحقيقة لـِ $P=(\sim(p\wedge q))$ و آخر يحوي قيم الحقيقة لـِ $Q=(\sim p\vee\sim q)$ كما يلي:

p	Q	$\sim p$	$\sim Q$	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p\vee\sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

بمقارنة العمودين الأخيرين نلاحظ التطابق بين القيم المنطقية ومنه نستنتج التكافؤ.

تمرين:

برهن قانون دو مورغان الثاني

لاختبار ما إذا كانت فرضيتان مركبتان P, Q متكافئتين منطقياً نتبع الخطوات التالية:

- ننشئ جدول حقيقة يحوي عمود منه قيم الحقيقة لـِ P و آخر يحوي قيم الحقيقة لـِ Q
- من أجل كل توافقية ممكنة لمتحولات P, Q (فرضياتهما البسيطة) نتحقق من تطابق القيم المنطقية لـِ P, Q
  1. إذا كان هنالك تطابق تام، نقول أنّ $P\equiv Q$ **(تُقرأ: بي تكافئ كيو)**،
  2. إذا كان هنالك اختلاف ولو بقيمة منطقية واحدة فالفرضيتان غير متكافئتان.

الفرضية الكلية والفرضية المتناقضة

الفرضية الكلية (t) هي مسلّمة مركبة قيمتها المنطقية دائماً صح (T) وذلك مهما كانت القيم المنطقية لمتحولاتها (فرضياتها البسيطة).

مثال: لتكن لدينا الفرضية المركبة $p\vee\sim p$ ، بإنشاء جدول الحقيقة لهذه الفرضية:

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	T	T

نلاحظ أن هذه المسلّمة قيمتها دائما T و ذلك مهما كانت قيم p و بالتالي فهي كلية.

الفرضية المتناقضة (c) هي فرضية مركبة قيمتها المنطقية دائماً خطأ (F) و ذلك مهما كانت القيم المنطقية لمتحولاتها (فرضياتها البسيطة).

مثال: لتكن لدينا الفرضية المركبة $p \wedge \sim p$ ، بإنشاء جدول الحقيقة لهذه الفرضية:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

نلاحظ أنّ هذه الفرضية قيمتها دائماً F و ذلك مهما كانت قيم p و بالتالي فهي متناقضة.

خواص التكافؤ المنطقي

ليكن لدينا الفرضيتان البسيطتان p وQ، ولتكن المسلّمة الكلية t والمسلّمة المتناقضة c نستطيع برهنة الخصائص التالية:

1. الخاصة التبديلية: $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
2. الخاصة التجميعية: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. الخاصة التوزيعية: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. خاصة العنصر الواحدي: $p \wedge t \equiv p$
   $p \vee c \equiv p$
5. خاصة النظير: $p \vee \sim p \equiv t$
   $p \wedge \sim p \equiv c$
6. خاصة النفي المزدوج: $\sim (\sim p) \equiv p$
7. خاصة العنصر الماص: $p \vee t \equiv t$
   $p \wedge c \equiv c$
8. خاصة التماثل: $p \wedge p \equiv p$
   $p \vee p \equiv p$
9. خاصة الامتصاص: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
10. قانونا دو مورغان: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

تمرين:

برهن الخواص من 1 إلى 9.

الفرضيات الشرطية

تعريف : لتكن p و Q فرضيتان بسيطتان، إن التّعابير التالية متكافئة:

- p يقتضي Q
- *If* p *then* Q
- Q مشروط بـِ p

نرمز لذلك بـِ $p \to Q$ ونقول عن أي تعبير من هذا النوع أنه فرضية شرطية.

جدول الحقيقة لأيّ فرضية شرطية هو كالآتي:

p	Q	$p \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

في المسلّمة الفرضية $p \to Q$ نقول عن p أنّها فرضية المقدمة، و نقول عن Q أنّها فرضية النتيجة.

ملاحظة 1: الرمز "$\to$" هو عملية منطقية من صنف $(\wedge, \vee, \sim)$

ملاحظة 2: أولوية العمليات في تعبير منطقي هي كما يلي:

1. النفي $\sim$
2. الضم والفصل المنطقي $\wedge$ ، $\vee$ تأتيان في المرتبة الثانية، في حال التضارب يجب استخدام الأقواس
3. الاقتضاء الشرطي يأتي أخيراً

لتوضيح معنى الفرضية الشرطية، ليكن المثال التالي:

إذا كان العدد 4,686 قابلاً للقسمة على 6 إذاً العدد 4,686 قابل للقسمة على 3.

- المقدمة في هذه الفرضية الشرطية p هي (العدد 4,688 قابل للقسمة على 6).
- النتيجة في هذه الفرضية الشرطية Q هي (العدد 4,688 قابل للقسمة على 3).

ولنناقش الآن القيم المنطقية لهذه الفرضية الشرطية حسب القيم المنطقية لـِ p و Q :

1. العدد 4,688 يقبل القسمة على 6 أي (p=T) و العدد 4,688 يقبل القسمة على 3 أي (Q=T)، في هذه الحالة يكون الاقتضاء الشرطي صحيحاً أي T=($p \to Q$) **(تُقرأ: T تساوي العلاقة بي تؤدي إلى كيو).**
2. العدد 4,688 يقبل القسمة على 6 أي (p=T) و العدد 4,688 لا يقبل القسمة على 3 أي (Q=F)، في هذه الحالة يكون الاقتضاء الشرطي خاطئاً أي F=($p \to Q$).
3. العدد 4,688 لا يقبل القسمة على 6 أي (p=F) و العدد 4,688 يقبل القسمة على 3 أي (Q=T)، في هذه الحالة وباعتبار أن الاقتضاء الشرطي يعطينا إمكانية الحكم عليه فقط إذا كانت فرضيته صحيحة، فنحن لا نستطيع أن نجزم ما إذا كانت النتيجة الصحيحة ناتجة عن المقدمة الخاطئة أم لا، وبالتالي نستطيع أن نقول أنّ الاقتضاء الشرطي هو صحيح في هذه الحالة أي T=($p \to Q$).

نفس طريقة التفكير السابقة تُطبّق في حالة أنّ العدد 4,688 لا يقبل القسمة على 6 أي (**p**=F) والعدد 4,688 لا يقبل القسمة على 3 أي (**Q**=F) ويكون الاقتضاء الشرطي صحيح في هذه الحالة أي $(p \to Q)$=T.

خصائص الاقتضاء الشرطي

-التحويل من *if – then* إلى *Or*-

ليكن لدينا الاقتضاء الشرطي $(p \to Q)$ نستطيع أن نبرهن التكافؤ المنطقي التالي:

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

ولتوضيح ذلك، ليكن المثال التالي:

إما **أن تذهب إلى العمل** أو **ستُطرد**

هو مسلّمة مركبة من الشكل $\sim p \vee q$ حيث **(أن تذهب إلى العمل)** هو الفرضية البسيطة **$\sim p$** و**(تُطرد)** هو الفرضية البسيطة **Q**.

للتحويل إلى الصيغة ***if – then*** نحسب **p :**

p لها الصيغة التالية **(لم تذهب إلى العمل)**

و تكون الصيغة المكافئة

إذا **لم تذهب إلى العمل** إذاً **ستُطرد**

لبرهان التكافؤ المنطقي بين $\sim p \vee q$ و $(p \to Q)$ ننشئ جدول الحقيقة لكلتا المسلّمتين:

p	$\sim p$	Q	$\sim p \vee q$	$p \to Q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

بملاحظة القيم المنطقية في العمودين الأخيرين، نستنتج التكافؤ المنطقي بين $\sim p \vee q$ و $(p \to Q)$

خصائص الاقتضاء الشرطي

– نفي الاقتضاء الشرطي –

تعريف 1: ليكن لدينا الاقتضاء الشرطي $(p \to Q)$، نقول عن الفرضية المركبة $\sim(p \to Q)$ أنها **نفي** الاقتضاء الشرطي $(p \to Q)$، نستطيع أن نبرهن التكافؤ المنطقي التالي:

$$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

بالتعريف الاقتضاء الشرطي (**$p\rightarrow Q$**) يكون خاطئاً إذا و فقط إذا كانت مقدمته صحيحة **و**نتيجته خاطئة و بالتالي فإنّ نفي (**$p\rightarrow Q$**) مكافئ منطقياً لـِ $p\wedge \sim q$

لبرهان التكافؤ المنطقي $\sim(p\rightarrow q)\equiv p\wedge \sim q$ نتبع ما يلي :

$$\sim(p\rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)$$

ومن قانون دو مورغان $\equiv\sim(\sim p)\wedge(\sim q)$

ومن قانون النفي المزدوج $\equiv p\wedge \sim q$

ملاحظة هامة: يميل المرء عادة عند نفي الاقتضاء الشرطي (***if then*** statement) إلى استبداله باقتضاء شرطي آخر، وهو خطأ شائع. يجب التذكر أنّ نفي الاقتضاء الشرطي لا يبدأ أبداً بــِ **if**.

تعريف 2: ليكن لدينا الاقتضاء الشرطي (**$p\rightarrow Q$**)، نقول عن الاقتضاء الشرطي (**$\sim Q\rightarrow \sim p$**) أنه **نفي إيجابي** للاقتضاء الشرطي (**$p\rightarrow Q$**)، ونستطيع أن نبرهن التكافؤ المنطقي التالي:

$$(p\rightarrow q)\equiv\sim q\rightarrow \sim p$$

أهمية النفي الإيجابي للاقتضاء الشرطي تأتي من كونه مكافئ منطقياً للاقتضاء الشرطي، ومن ثم فإنه في كثير من المسائل يكون التعامل مع النفي الإيجابي أسهل من التعامل مع الاقتضاء الشرطي.

خصائص الاقتضاء الشرطي

– عكس ومقلوب الاقتضاء الشرطي –

تعريف: ليكن لدينا الاقتضاء الشرطي(*if **p** then **Q***) نعرّف:

- **مقلوب** الاقتضاء الشرطي (*if **p** then **Q***) بـــ (*if **Q** then **p***)
- **عكس** الاقتضاء الشرطي (*if **p** then **Q***) بـــ (*if ~**p** then ~**Q***)

وبلغة الرموز:

- **عكس** الاقتضاء الشرطي (**$p\rightarrow Q$**) هو (**$\sim p\rightarrow \sim Q$**)
- **مقلوب** الاقتضاء الشرطي (**$p\rightarrow Q$**) هو (**$Q\rightarrow p$**)

ملاحظات هامة:

- الاقتضاء الشرطي وعكسه **غير متكافئان** منطقياً
- الاقتضاء الشرطي ومقلوبه **غير متكافئان** منطقياً
- مقلوب الاقتضاء الشرطي وعكسه **متكافئان** منطقياً

تجدر ملاحظة أن التكافؤ المنطقي بين عكس ومقلوب اقتضاء شرطي يأتي من حقيقة أن عكس الاقتضاء الشرطي هو النفي الإيجابي لمقلوبه.

خصائص الاقتضاء الشرطي

– شرط فقط إذا (*only if*) والاقتضاء الشرطي ثنائي الاتجاه–

تعريف: ليكن لدينا الفرضيتان p و Q ، التعبير p فقط إذا Q (p *only if* Q) يعني
($if \sim Q\ then \sim p$)

أو باستخدام التكافؤ المنطقي مع النفي الإيجابي:

($if\ p\ then\ Q$)

تعريف: ليكن لدينا الفرضيتان p و Q :

- نعرف الاقتضاء الشرطي ثنائي الاتجاه (p إذا وفقط إذا Q) بالتعبير:
  (p *If, and only if,* Q)
- نرمز له بـِ: $(p\leftrightarrow Q)$
- القيم المنطقية للاقتضاء الشرطي ثنائي الاتجاه ممثلة بالجدول التالي:

p	Q	$p \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- ملاحظة 1: الاقتضاء المنطقي ثنائي الاتجاه يكون صحيحاً عندما تكون لمتحولاته المنطقية نفس القيم ويكون خاطئاً عندما يكون لمتحولاته المنطقية قيم متعاكسة.
- ملاحظة 2: هنالك تكافؤ منطقي بين $p \leftrightarrow Q$ و $(p \to q)\wedge(q \to p)$ أي:
  $$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q)\wedge(q \to p)$$
- ملاحظة 3: الرمز "$\leftrightarrow$" هو عملية منطقية من صنف $(\wedge,\vee,\sim,\to)$ و ترتيب هذه العملية من حيث الأولوية هو من نفس مرتبة الاقتضاء الشرطي.

خصائص الاقتضاء الشرطي

- الاقتضاء الشرطي اللازم والكافي-

تعريف 1: ليكن لدينا الفرضيتان p و Q

التعبير p هو الشرط الكافي لـِ Q (*p is a **sufficient condition** for Q*) يعني:

$$(\text{if } p \text{ then } Q)$$

تعريف 2: ليكن لدينا الفرضيتان p و Q

التعبير p هو الشرط اللازم لـِ Q (*p is a **necessary condition** for Q*) يعني

$$(\text{if } {\sim}p \text{ then } {\sim}Q)$$

ملاحظة: باستخدام التكافؤ المنطقي بين الشرط اللازم ومكافئه المنطقي نستطيع أن نستنتج:

التعبير p هو الشرط اللازم لـِ Q (*p is a **necessary condition** for Q*) يعني أيضاً:

$$(\text{if } Q \text{ then } p)$$

وبالتالي كون p هو الشرط اللازم والكافي لـِ Q يعني أنّ p ،إذا و فقط إذا، Q

قولنا أنّ p هو الشرط الكافي لـِ Q يعني بكلمات أخرى أن تحقُّق p كافٍ لتحقُّق Q، ومن ناحية ثانية القول أنّ p هو الشرط اللازم لـِ Q يعني أنّ عدم تحقُّق p يقتضي بالضرورة عدم تحقُّق Q

القسم الثاني والثالث

مقدمة في المسلمات والعبارات المُكمَمة

الكلمات المفتاحية:

مُسلّمة، عبارة، تكميم، عبارة مُكممة، تكميم عام، تكميم وجودي، تكميم شرطي.

ملخص:

نتناول في هذه الفقرة المُسلمات والعبارات المُكممة وندرس التعابير الرياضية المكافئة للعبارات المُكممة ونفيها، كما نتناول مفهوم الشرط اللازم والشرط الكافي.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المُسلّمات؛
- العبارات المُكممة؛
- التكميم العام؛
- التكميم الوجودي؛
- الشرط اللازم والكافي.

المُسلّمات

- المسلّمة هي جملة تحوي عدداً منتهياً من المتحولات، وتصبح هذه الجملة، عِبارة عندما تأخذ هذه المتحولات قيماً محددة.
- نُعبِّر عن مجال قيم المتحول في مسلّمة بمجموعة تحوي جميع القيم التي يمكن للمتحول أن يأخذها. مثال: $P(x)$ حيث x طالب في في الجامعة الافتراضية السورية.
- إذا كانت $P(x)$ مسلّمة وكانت قيم x تقع ضمن المجال D، فإننا ندعو مجموعة القيم الصحيحة لـــ $P(x)$ المجموعة المؤلفة من جميع عناصر D، والتي عند تعويضها بـــx تجعل $P(x)$ صحيحة. نعبر عن مجموعة القيم الصحيحة بـــ $\{x \in D \mid P(x)\}$ (x تنتمي إلى D حيث P(x) صحيحة).
- بفرض أن $P(x)$ و $Q(x)$ مسلّمتان مُعرفتان على نفس المجال D، نقول أن $P(x) \to Q(x)$ (P(x) تؤدي إلى Q(x)) إذا كان كل عنصر من مجموعة القيم الصحيحة لـــ $P(x)$ ينتمي إلى مجموعة القيم الصحيحة لـــ $Q(x)$.
- نقول أن P(x) تكافئ Q(x) ونرمز لها بالرمز $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ عندما يكون لكلٍ من $P(x)$ و $Q(x)$ نفس مجموعة القيم الصحيحة.

المُكمِم العام

بفرض $P(x)$ مسلّمة على المجال D. تكون العِبارة العامة عِبارة من الشكل:

$$\forall x \in D, P(x)$$

(مهما تكن x تنتمي إلى D، تتحقق P(x))

- تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة من أجل كل x من D.
- تكون العبارة غير محققة إذا كانت $P(x)$ غير محققة من أجل عنصر واحد على الأقل من عناصر المجموعة D.
- تشكل قيمة x التي تكون من أجلها $P(x)$ غير محققة، مثالاً معاكساً للعبارة العامة.

مثال:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\} : \forall x \in D, x^2 \geq x$$

$$\forall x \in R, x^2 \geq x$$

أمثلة عن عبارات ذات تكميم عام

يعني الرمز $\forall$ ، مهما يكن.

مثال: $\forall x \in R, x^2 \geq 0$

- تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة من أجل كل x من D؛
- يكون المجال D في مثالنا هو مجموعة الأعداد الحقيقية؛
- يكون $P(x)$ في مثالنا هو $x^2 \geq 0$ ؛
- تكون العبارة السابقة صحيحة (مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب).

مثال: $\forall x \in R, x^2 < 0$

- تكون العبارة غير محققة إذا كانت $P(x)$ غير محققة من أجل عنصر واحد على الأقل من عناصر المجموعة D؛
- يكون المجال D في مثالنا هو مجموعة الأعداد الحقيقية؛
- يكون $P(x)$ في مثالنا $x^2 < 0$ ؛
- تكون العبارة السابقة خاطئة (لايمكن أن يكون مربع عدد حقيقي سالباً ويكفي أن نأخذ العدد 2، لنجد أن مربعه وهو العدد 4 يكون موجباً).

المُكمِم الوجودي

- بفرض $P(x)$ مسلّمة على المجال D ، تأخذ العبارة الوجودية الشكل $\exists x \in D, P(x)$ (يوجد x ينتمي إلى D يحقق P(x)).
- تكون العبارة محققة إذا كانت $P(x)$ محققة من أجل قيمة واحدة على الأقل لـــــ x من D؛
- تكون العبارة غير محققة إذا كانت $P(x)$ غير محققة من أجل جميع عناصر المجموعة D.

مثال:

$$\exists m \in Z, m^2 = m$$
$$E = \{5,6,7,8,9\}, \exists x \in E, m^2 = m$$

عبارات ذات تكميم وجودي

يعني الرمز $\exists$، يوجد واحد على الأقل.

مثال: $\exists x \in R, x^2 = x$

- تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة في حال وجود x واحد على الأقل يحقق $P(x)$؛
- يكون المجال D في مثالنا هو مجموعة الأعداد الحقيقية؛
- يكون $P(x)$ في مثالنا هو $x^2 = x$؛
- تكون العبارة السابقة صحيحة (يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل هو 1 بحيث يكون مربع 1 يساوي 1).

مثال: $\exists x \in R, x^2 < 0$

- تكون هذه العبارة صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة في حال وجود x واحد على الأقل يحقق $P(x)$؛
- يكون المجال D في مثالنا هو مجموعة الأعداد الحقيقية؛
- يكون $P(x)$ في مثالنا هو $x^2 < 0$؛
- تكون العبارة السابقة خاطئة (لا يوجد أي عدد حقيقي مربعه أصغر من الصفر).

المُكمِم العام الشَرطي

العبارة الشرطية العامة:

$$\forall x, if \ \ P(x) \ then \ Q(x)$$

(مهما تكن x، إذا تحققت P(x) فإن Q(x) تكون محققة)

يمكن كتابة العبارة الشرطية السابقة على الشكل التالي أيضاً:

$$\forall x \in D, P(x) \rightarrow Q(x)$$

(مهما تكن x، تحقق P(x) يؤدي إلى تحقق Q(x))

مثال: $\forall x \in R, if \ \ x > 2 \ then \ x^2 < 4$

نقول عن عبارة شرطية أنها محققة تلقائياً إذا كان $P(x)$ خاطئاً من أجل كل x ينتمي إلى المجال D.

مثال: $\forall x \in R, if \ \ x^2 < 0 \ then \ x > 0$

في هذه الحالة يكون $P(x)$ خاطئاً من أجل أي x ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، لذا نقول أن العبارة السابقة الشرطية هي عبارة محققة تلقائياً.

نفي العبارات المُكمَمة

نفي العبارة المكممة العامة $\forall x \in D, P(x)$ هو $\exists x \in D, \sim P(x)$

مثال:

العبارة: جميع الكرات التي في الوعاء، هي كرات حمراء.

نفي العبارة: توجد كرة واحدة على الأقل في الوعاء، غير حمراء.

نفي العبارة الوجودية المكممة $\exists x \in D, P(x)$ هو $\forall x \in D, \sim P(x)$.

مثال:

العبارة: توجد كرة واحدة على الأقل في الوعاء، صفراء.

نفي العبارة: جميع الكرات التي في الوعاء، غير صفراء.

نفي العبارة الشرطية $\forall x \in D, P(x) \rightarrow Q(x)$ هو $\exists x \in D, P(x) \wedge \sim Q(x)$.

مثال:

العبارة: من اجل جميع الكرات التي في الوعاء إذا كان الوعاء أحمر تكون جميع الكرات التي في الوعاء حمراء.

نفي العبارة: توجد كرة واحدة على الأقل في الوعاء، بحيث يكون الوعاء أحمر وتكون الكرة غير حمراء.

تمارين

1. **اكتب نفي العبارات التالية:**
   - جميع الديناصورات منقرضة: يوجد ديناصور غير منقرض.
   - بعض التمارين لها حل: كل التمارين دون حلّ.
   - جميع برامج COBOL تحوي على أكثر من 20 سطراً: بعض برامج COBOL تحوي على أقل من 20 سطراً.
   - ناتج جمع أي عددين صحيحين زوجيين هو عدد زوجي: يوجد عددين صحيحين زوجيين على الأقل ناتج جمعهما غير زوجي.
   - مربع أي عدد صحيح زوجي هو عدد زوجي: يوجد عدد صحيح زوجي واحد على الأقل مربعه عدد غير زوجي.

2. **تحقق من صحة العبارات المكممة:**
   - مهما يكن العدد الصحيح الموجب x فإن $x^2 > 0$: صح
   - مهما يكن العدد الصحيح x فإن $x^2 > 0$: خطأ
   - مهما يكن العدد الصحيح x فإن $x^2 \geq 0$: صح
   - يوجد على الأقل عدد حقيقي يحقق $x^2 < x$: صح
   - يوجد على الأقل عدد صحيح يحقق $x^2 < x$: خطأ

3. بفرض $P(x)$ مسلّمة مُعرَّفة مهما يكن العدد الحقيقي x ، بفرض:

$$r = \forall x \in Z, P(x);$$
$$s = \exists x \in Q, P(x);$$
$$t = \exists x \in R, P(x)$$

حيث تعبر Z و Q و R عن مجموعات الأعداد الصحيحة والعادية والحقيقية على الترتيب.

- اقترح $P(x)$ بحيث تكون r و s و t محققة:
  - $x^2 \geq 0$.
- اقترح $P(x)$ بحيث s و t محققتين و r غير محققة؛
  - $x^2 < x$

الشرط اللازم والشرط الكافي

نقول أن العبارة $\forall x, r(x)$ **هي شرطٌ كافٍ** من أجل $s(x)$، إذا تحقق لدينا ما يلي:
$\forall x$ ، **إذا كانت** $r(x)$ **صحيحة، فإن** $s(x)$ **صحيحة.**

نقول أن العبارة $\forall x, r(x)$ **هي شرط لازم** من أجل $s(x)$ إذا تحقق لدينا ما يلي:
$\forall x$ ، **إذا كانت** $s(x)$ **صحيحة فإن** $r(x)$ **صحيحة.**

العبارات ذات التكميم المتعدد

مهما يكن العدد x الموجب، يوجد على الأقل عدد y بحيث $y < x$
يوجد على الأقل عدد x يحقق، مهما يكن y عدداً موجباً، $y < x$

مهما يكن الشخص x يوجد على الأقل شخص y بحيث x يحب y
يوجد على الأقل شخص x يحقق مهما يكن الشخص y فإن **x يحب y**

نفي العبارات ذات التكميم المتعدد

إن نفي العبارة $\forall x, \exists y, P(x, y)$ يكافئ منطقياً $\exists x, \forall y, \sim P(x, y)$

إن نفي العبارة $\exists x, \forall y, P(x, y)$ يكافئ منطقياً $\forall x, \exists y, \sim P(x, y)$

مثال:

العبارة: مهما يكن العدد x الموجب، يوجد على الأقل عدد y بحيث $y < x$.

النفي: يوجد على الأقل عدد موجب x، بحيث مهما يكن العدد y فإن $x < y$.

العبارة: يوجد على الأقل شخص x يحقق مهما يكن الشخص y فإن x يحب y.

النفي: مهما يكن الشخص x، يوجد على الأقل شخص y بحيث x لايحب y.

تذكرة بالعلاقات المنطقية الأساسية وجداول القيم الصحيحة الخاصة بها

1. **علاقة النفي** $\sim P$:

P	$\sim P$
T	F
F	T

2. **علاقة AND** $P \wedge Q$:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. **علاقة OR** $P \vee Q$:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. علاقة OR $P \to Q$ **وهي علاقة تكافئ** $\sim P \vee Q$:

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال:

جدول القيم الصحيحة لعلاقة مركبة: $(P \to Q) \vee (P \wedge Q)$

P	Q	$(P \to Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \to Q) \vee (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

تمارين

1. حدد من بين أزواج العبارات المكممة التالية، الأزواج التي لها نفس مجموعة القيم الصحيحة.

(1) $\forall x \in D, \left(P(x) \wedge Q(x)\right) \; vs \left(\forall x \in D, P(x)\right) \wedge \left(\forall x \in D, Q(x)\right)$

(2) $\forall x \in D, \left(P(x) \wedge Q(x)\right) \; vs \left(\exists x \in D, P(x)\right) \wedge \left(\exists x \in D, Q(x)\right)$

(3) $\forall x \in D, \left(P(x) \vee Q(x)\right) \; vs \left(\forall x \in D, P(x)\right) \vee \left(\forall x \in D, Q(x)\right)$

(4) $\exists x \in D, \left(P(x) \vee Q(x)\right) \; vs \left(\exists x \in D, P(x)\right) \vee \left(\exists x \in D, Q(x)\right)$

2. اكتب كل عبارة من العبارات التالية بالإضافة إلى نفي العبارة باستخدام تعبير رياضي:

a. مهما تكن x عدد صحيح، إما x أصغر تماماً من الصفر أو x أكبر تماماً من الصفر؛

b. لاينتمي حاصل قسمة أي عددين صحيحين إلى مجموعة الأعداد الصحيحة؛

c. مهما تكن x يؤدي تحقق P(x) إلى تحقق أحد العبارتين Q(x) أو E(x)؛

d. يوجد x بحيث يكون P(x) محققاً وأي y لايساوي x يجعل Q(x) محققاً.

3. **ما هو نفي الجملة التالية:** إذا كانت n غير سالبة فإن n موجبة أو n تساوي الصفر؛

4. **ليكن لدينا مايلي:**
   a. العبارة: A="حضّر سامي الامتحان"
   b. العبارة: B="رسب سامي في الامتحان"
   c. العبارة: C="شعر سامي بالإحباط"

   عبّر عن:
   a. $A\wedge \sim B\wedge \sim C$؛
   b. $A \wedge B\wedge \sim C$؛
   c. $A\wedge \sim B \wedge C$؛

5. **أعد كتابة الجمل التالية على الشكل if-then (إذا... فإن):**
   a. لن أتأخر لأني سأستقل قطار الساعة السابعة؛
   b. يجب علي غسل هذه السترة وإلا فإني لن أجد ما ألبسه هذا المساء؛
   c. توقف وإلا أطلقت النار؛

6. **حول العبارات only-if (فقط إذا) إلى عبارات if-then (إذا... فإن):**
   a. سيتخرج فقط إذا أنهى مشروع التخرج؛
   b. ستذهب في نزهة فقط إذا أنهت وظائفها.

7. **أعط جدول الحقيقة الخاص بالعبارة التالية:**

$$\left[\sim P \to ((P \to Q) \vee (P \wedge Q))\right] \vee (P \to Q)$$

القسم الرابع والخامس والسادس:

الاستقراء الرياضي

الكلمات المفتاحية:

الاستقراء الرياضي، التدرُّج، البرهان بالتدريج، علاقة ترتيب، علاقة ثنائية، علاقة انعكاسية، علاقة متعدية، مخطط استقرائي، مجموعة جيدة التأسيس، ترتيب جيد التأسيس.

ملخص:

نتعرف في هذا الفصل على تعريف الاستقراء الرياضي آليات وآليات البرهان بالتدرُّج.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المُسلَّمات الخمسة الخاصة بتعريف مجموعة الأعداد الطبيعية؛
- البرهان بالتدرُّج؛
- علاقة الترتيب والترتيبين الكلّي والجزئي؛
- الترتيب والاستقراء الجيد التأسيس؛
- المخطط الاستقرائي.

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

مُسلَّمات تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية (Giuseppe Peano):

- الصفر عدد طبيعي؛
- لكل عدد طبيعي n، عدد طبيعي يليه هو n+1؛
- لايوجد أي عدد طبيعي يليه الصفر؛
- يكون كل عددين طبيعيين لهما نفس العدد الطبيعي التالي، عددان متساويان؛
- إذا احتوت مجموعة على العدد 0 وكان لكل عدد طبيعي فيها عدد تالي، كانت المجموعة مساوية للمجموعة $\mathbb{N}$ (مبدأ التدرج).

ملاحظة:

للمسلمات الخمس السابقة أهمية كبرى في تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية، بحيث يؤدي إسقاط إحدى المُسلَّمات من التعريف إلى استخدام تعريف خاطئ لمجموعة الأعداد الطبيعية. فعلى سبيل المثال، يؤدي إسقاط المُسلَّمة الأولى من التعريف إلى جعل التعريف ينطبق على المجموعة الفارغة التي تحقق المسلمات الأربعة الأخيرة.

تذكير بالبرهان بالتدرُّج في $\mathbb{N}$

للبرهان على أن الخاصة P(n) صحيحة من أجل أي عدد طبيعي n، نبرهن على أن:

- الخاصة صحيحة من أجل P(0)؛
- من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

(P(n) تؤدي إلى P(n+1))

تذكير بالبرهان بالتدرُّج في $\mathbb{N}$: ابحث عن الخطأ (2)

لنبحث في الحالة التالية:

مهما كان العدد الطبيعي n، إذا وُجِدَ في صندوق يحوي على n قطعة نقدية، قطعة واحدة من فئة الليرة، فإنه لا يوجد في هذا الصندوق إلا قطع من فئة الليرة.

تكون هذه الخاصة صحيحة من أجل n=1. ولنفترض أنها صحيحة من أجل صندوق يحوي على n قطعة، ولنبرهنها من أجل صندوق يحوي على n+1 قطعة:

- لنفرض إذاً أن لدينا صندوقاً مؤلفاً من n+1 قطعة نقدية، ويحتوي على قطعة واحدة من فئة الليرة.
- لنسحب إحدى القطع النقدية من الصندوق المختلفة عن القطعة الآنفة الذكر.
- سيبقى لدينا عندها صندوقاً يحتوي على n قطعة نقدية بينها قطعة من فئة الليرة.
- تبعاً للفرض الصحيح على n، تكون جميع قطع الصندوق المتبقية عبارة عن قطع من فئة الليرة.
- لنُضف القطعة التي سحبناها، ولنسحب قطعة مختلفة، سيبقى عندها لدينا صندوقاً يحتوي على n قطعة نقدية بينها على الأقل قطعة من فئة الليرة.
- تبعاً للفرض الصحيح على n، تكون جميع قطع الصندوق المتبقية عبارة عن قطع من فئة الليرة.
- إذاً هذا الصندوق لايحوي إلا على قطع من فئة الليرة، والقطعة التي سحبناها وأعدناها هي قطعة من فئة الليرة، فالـــ n+1 قطعة إذاً هي قطع من فئة الليرة !!!!!

أين الخطأ؟

في الحقيقة، لايكون التدرج صحيحاً عندما تكون n=1. ففي حال وجود صندوق مؤلف من n+1 قطعة نقدية، **أي من قطعتين نقديتين**، فإن الصندوق سيحتوي عندها على قطعة P1 من فئة الليرة وقطعة أخرى P2. فإذا سحبنا قطعة مختلفة عن فئة الليرة حسب البرهان (وهي في حالتنا P2)، فإننا سنحصل على صندوق حاوي على قطعة واحدة من فئة الليرة (وهي في حالتنا P1)، ولكن إذا كانت P2 مختلفة عن فئة الليرة، وأعدناها إلى الصندوق وسحبنا P1 فإننا سنحصل على صندوق مختلف لايحوي أي قطعة من فئة الليرة.

التدرُّج القوي

للبرهان على أن الخاصة P(n) صحيحة من أجل أي n، يكفي البرهان على أن:

- الخاصة P(0) صحيحة؛
- من أجل كل n طبيعي من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$\left[\forall m < n, P(m)\right] \Rightarrow P(n)$$

(إذا كانت P(m) محققة من أجل كل m أصغر من n ، فإن P(n) تكون محققة)

البرهان على التدرج القوي:

- لنفرض وجود خاصة P صحيحة من أجل 0.
- لنفرض أن P صحيحة من أجل n ما ومن أجل أي m أصغر من n، أي أن:

$$[\forall m < n, P(m)] \Rightarrow P(n)$$

- لنفرض أن هذه الخاصة غير صحيحة من أجل أي n من $\mathbb{N}$.
- لتفرض أن F هي مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكون من أجلها الخاصة P خاطئة؛ بالفرض لاتكون F خالية؛
- إذا، وبما أن F هي مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$، فهي تحتوي إذاً على عنصر أصغري وليكن n_0.
- وعليه، تكون الخاصة P صحيحة من أجل جميع العناصر التي تكون أصغر من n_0 (والتي تكون منتمية إلى $\mathbb{N}$ وليس إلى F)؛
- بالنتيجة تكون الخاصة P صحيحة من أجل n_0 وهو مخالف للفرض الموضوع على F.

مثال:

برهن أن كل عدد طبيعي موجب هو ناتج جداء أعداد أولية. (العدد الأولي هو العدد الذي لايقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد).

الحلّ:

البرهان بالتدرُّج القوي:

قاعدة البرهان: الخاصة صحيحة من أجل n=2 كون 2 أساساً هوعدد أولي؛

التدرُّج: من أجل أي عدد طبيعي موجب n:

- لنفرض أن الخاصة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي موجب أصغر تماماً من n، وعليه يكون كل عدد أصغر تماماً من n، هو ناتج جداء مجموعة من الأعداد الأولية (أي أننا فرضنا الآن الجزء $[\forall m < n, P(m)]$ من التدرُّج القوي)؛
- لنبرهن على أن n هو حاصل جداء أعداد أولية (أي سنبرهن الجزء $[\forall m < n, P(m)] \Rightarrow P(n)$ من التدرُّج القوي)؛
- إذا كان n أولياً، فإنه لن يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد وسيكون عندها n مساوي لحاصل جداء أعداد أولية؛
- أما إذا لم يكن n أولياً، فسيمتلك n قاسم d مختلف عن 1 وعن نفسه وبحيث يكون n=d*p حيث d و p أصغر من n؛
- ولكن حسب الفرض، وبما أن d وp أصغر تماماً من n فإن كليهما يكون حاصل جداء أعداد أولية، مما يعني أن n هو حاصل جداء أعداد أولية.

علاقة الترتيب

العلاقة الثنائية:

لتكن A و B مجموعتان. نُعرِّف العلاقة الثنائية من A إلى B بأنها مجموعة جزئية من مجموعة الثنائيات المنتمية إلى $A\times B$ حيث $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$.

نرمز للعلاقة الثنائية بالرمز $\Re$ ونكتب أن x مرتبط بـــ y بالعلاقة $\Re$ كما يلي:

$x\Re y$ أو $(x,y)\in\Re$

مثال: علاقة قابلية القسمة بين الأعداد على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

يكون x مرتبطاً بالعلاقة ($\Re$: قابل للقسمة) مع y (أي $x\Re y$) إذا كان x يقبل القسمة على y. وعليه تكون لدينا الأمثلة التالية:

$$6\ \Re\ 2,\quad 9\ \Re\ 3,\quad 20\ \Re\ 5$$

الانعكاس، والتناظر والتعدي:

تكون العلاقة $\Re$ على مجموعة A:

1. **منعكسة:** إذا تحقق $\forall x\in A, x\Re x$؛
2. **متناظرة:** إذا تحقق $\forall x,y\in A,\ \text{if}\ x\Re y\ \text{then}\ y\Re x$
3. **متعدية:** إذا تحقق $\forall x,y,z\in A,\ \text{if}\ x\Re y\ \text{and}\ y\Re z\ \text{then}\ x\Re z$

مثال: تكون علاقة قابلية القسمة بين الأعداد على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

1. **منعكسة:** فأي عدد يكون قابل للقسمة على نفسه؛
2. **غير متناظرة:** إذا كان x قابل للقسمة على y فمن المؤكد أن y غير قابل للقسمة على x إلا إذا كانا متساويين، فعلى سبيل المثال يكون 6 قابل للقسمة على 3 ولكن العكس غير صحيح؛
3. **متعدية:** فعلى سبيل المثال، إذا كان 20 قابل للقسمة على 4 وكان 4 قابل للقسمة على 2 فإن 20 يكون قابل للقسمة على 2.

علاقة الترتيب:

تكون العلاقة $\Re$ على مجموعة A علاقة ترتيب بالمعنى العريض إذا كانت علاقة ثنائية انعكاسية، غير متناظرة، ومتعدية. وتكون العلاقة الثنائية علاقة ترتيب بالمعنى الصارم إذا كانت غير انعكاسية، وغير متناظرة، ومتعدية.

مثال: يمكن اعتبار العلاقة $\leq$ (أصغر أو يساوي) على مجموعة الأعداد الطبيعية، علاقة ترتيب بالمعنى العريض وربطها بعلاقة ترتيب صارمة هي $<$ بحيث يكون:

$$x<y \Leftrightarrow x\leq y\ \text{and}\ x\neq y$$

الترتيب الكلي والترتيب الجزئي

تكون علاقة الترتيب $\Re$ على المجموعة E علاقة ترتيب كلية إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\forall x, y \in E,\ x\Re y \ \vee\ y\Re x$$

(من أجل أي x و y من E، إما x مرتبطة بـــ y أو y مرتبطة بـــ x)

وإلا فإن علاقة الترتيب تكون جزئية.

مثال:

على مجموعة الأعداد الطبيعية، تكون علاقة الترتيب $\leq$ (أصغر أويساوي) علاقة ترتيب كلية، في حين تكون العلاقة (قابل للقسمة) علاقة ترتيب جزئية.

تمرين

لتكن E مجموعة، ولتكن P(E) مجموعة أجزاء المجموعة E؛

1. برهن أن علاقة الاحتواء على P(E) هي علاقة احتواء:

$$x\ \Re\ y \ \Leftrightarrow\ x \subseteq y$$

(x متعلقة بـــ y إذا وفقط إذا كانت x محتواة في أو تساوي y)

2. هل هذه العلاقة علاقة ترتيب كلي أو جزئي، علل؟

الحلّ:

1. علاقة انعكاسية، غير متناظرة ومتعدية؛
2. ترتيب جزئي.

الترتيب على الكلمات والترتيب الأبجدي

- لتكن A أبجدية؛
- لتكن الكلمة $u=u_1u_2\ldots u_i\ldots u_n$ (حيث $u_1 \ldots u_i \ldots u_n \in A$) ولتكن الكلمة $v=v_1v_2\ldots v_i\ldots\ v_n$ (حيث $v_1 \ldots v_i \ldots v_n \in A$)؛
- نقول أن الكلمة u تشكل سابقة (Prefix) للكلمة v في خال تحقق مايلي:

$$u\ (\text{is Prefix})\ v \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq m \\ 1 \leq \forall i \leq n,\ u_i = v_i \end{cases}$$

- بمعنى آخر، يكون v=um حيث m كلمة؛

يُستَخدَم الترتيب السابق كترتيب أبجدي.

المجموعات المُرتبة

نقول عن المجموعة E أنها مُرتبة ونرمز لها بالرمز $(E,\leq)$ إذا كانت مزودة بعلاقة ترتيب $\leq$ (أصغر أويساوي، أو أكبر أويساوي).

نقول أن المجموعتين المُرتبتين $(E,\Re_1)$ و $(E,\Re_2)$ أنهما مختلفتين، إذا كانت العلاقتين $\Re_1$ و $\Re_2$ مختلفتين.

لتكن E' مجموعة جزئية من المجموعة المُرتبة E:

- نقول عن عنصر m من E أنه من الحدود العليا للمجموعة E' إذا وفقط إذا كان أي عنصر من E' أصغر من m؛
- نقول عن عنصر m من E أنه من الحدود الدنيا للمجموعة E' إذا وفقط إذا كان أي عنصر من E' أكبر من m؛

تمارين

هل يمكن لعنصر من مجموعة E أن يكون من الحدود العليا للمجموعة E؟
الحلّ: نعم، فعلى سبيل المثال في $(N,\leq)$ يكون 23 من الحدودالعليا للمجموعة $E=\{2,8,23\}$.

هل يمكن لعنصرين مختلفين من مجموعة E أن يكون كلاهما من الحدود العليا للمجموعة E؟
الحلّ: كلا، فإذا كان كل من x و y من الحدود العليا للمجموعة E وكان كلاهما ينتمي إلى E، يكون عندها $x<y$ و $y<x$ مما يعني أن $x = y$.

هل يتغير أي شيئ في الخاصة السابقة (في 2) في حال كانت E منتهية؟
الحلّ: كلا.

هل يتغير أي شيئ في الخاصة السابقة (في 2) في حال كانت علاقة الترتيب كاملة؟
الحلّ: كلا.

الحد الأعلى والحد الأدنى

يُعرَّف الحد الأدنى للمجموعة E بأنه عنصر ينتمي إلى المجموعة E، ويكون عنصر من عناصر الحدود الدنيا للمجموعة E.
يُعرَّف الحد الأدنى للمجموعة E بأنه عنصر ينتمي إلى المجموعة E، ويكون عنصر من عناصر الحدود العليا للمجموعة E.

مثال:
في المجموعة $E'=\{6,8,23\}$ من $(\mathbb{N},\leq)$ يكون 6 حداً أدنى، و 23 حداً أعلى.

العنصر الأعظمي والعنصر الأصغري

لتكن E' مجموعة جزئية من E. نقول عن عنصر m من E' أنه عنصر أعظمي في E' إذا تحقق مايلي:

$$\forall y \in E', y \geq m \Rightarrow y = m$$

لتكن E' مجموعة جزئية من E. نقول عن عنصر m من E' أنه عنصر أصغري في E' إذا تحقق مايلي:

$$\forall y \in E', y \leq m \Rightarrow y = m$$

نتيجة:

- إذا كان للمجموعة E' حداً أعلى، فإن هذا الحد الأعلى يكون العنصر الأعظمي الوحيد للمجموعة.
- إذا كان للمجموعة E' حداً أدنى، فإن هذا الحد الأدنى يكون العنصر الأصغري الوحيد للمجموعة.

مثال:

في المجموعة $\{\{6,8,23\},\{8,23,37\},\{6,8,23,42\}\}$ من $(P(\mathbb{N}),\subset)$

تكون العناصر الأعظمية هي: $\{6,8,23,42\}$ و $\{8,23,37\}$

وتكون العناصر الأصغرية هي: $\{8,23,37\}$ و $\{6,8,23\}$

لتكن E' مجموعة جزئية من E. نقول عن عنصر m من E' أنه عنصر أعظمي في E' إذا لم يكن هناك أي عنصر أكبر منه وفقاً لعلاقة الترتيب.

لتكن E' مجموعة جزئية من E. نقول عن عنصر m من E' أنه عنصر أصغري في E' إذا لم يكن هناك أي عنصر أصغر منه وفقاً لعلاقة الترتيب.

المجموعة الجيدة التأسيس والترتيب الجيد التأسيس
(Well-funded Set & Well-funded Order)

نقول عن مجموعة E مرتبة $(E,\leq)$ أنها **مجموعة جيدة التأسيس** إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية منها تقبل عنصراً أصغرياً. بالنتيجة، يكون الترتيب المُعرَّف على المجموعة **ترتيباً جيد التأسيس** إذا لم يكن للمجموعة سلسلة متناقصة لانهائية من العناصر

مثال:

المجموعة $\{\{6,8,23\},\{8,23,37\},\{6,8,23,42\}\}$ من $(P(\mathbb{N}),\subset)$.

مجموعة الأعداد الطبيعية

يمكننا تعريف $\mathbb{N}$ بأنها مجموعة:

- تحتوي على الصفر الذي يشكل العنصر الأصغري في المجموعة؛
- مزودة بترتيب جيد التأسيس.

الاستقراء الجيد التأسيس

لبناء عملية استقراء جيدة التأسيس على مجموعة E:

- يجب أن تكون E مزودة بترتيب جيد التأسيس $\leq$؛
- يمكن البرهان بالتدرج على E؛
- للبرهان على خاصة P على E، يجب البرهان على:
  - تحقُق P(y) من أجل كل عنصر y أصغري في E؛
  - إذا تحققت P(z) من أجل كل z<x، تكون P(x) محققة.

المخطط الاستقرائي

لتكن B مجموعة جزئية من المجموعة E، ولتكن W مجموعة من العمليات على E.

نُعرِّف الاغلاق الاستقرائي لــ B باستخدام العمليات المُعرَّفة في W، بأنه أصغر مجموعة X جزئية من E (بمعنى الاحتواء) تحقق:

- X تحتوي B؛
- مهما يكن w عملية من عمليات W التي تأخذ p مُعامِل، ومهما يكن x1,x2,....,xp عناصر من X فإن ناتج تطبيق العملية w على هذه العناصر، أي w(x1,x2,....,xp) يكون ضمن X؛

يمكن القول أيضاً بأن X مُعرَّف بشكل استقرائي بالمخطط (B,W).

مثال:

يمكن تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالمخطط الاستقرائي (B,W) التالي:

المجموعة القاعدية (المجموعة B من $\mathbb{N}$)= مجموعة الأعداد الأولية؛

العملية المُستَخدَمة في البناء (أي محتوى W) = جداء عددين طبيعيين.

التحليل الانشائي (من القاعدة إلى القمة)

يمكن إنشاء المجموعة X اعتماداً على المتتالية B_i المُعرَّفة بالشكل التالي:

$$B_0 = B$$

$$B_{i+1} = W(B_i) \cup B_i$$

مثال:

تعريف IN

القاعدة (المجموعة B أو B_0) = مجموعة الأعداد الأولية؛

العملية (أي محتوى W)= الجداء بين عددين طبيعيين.

التحليل التنازلي (من القمة إلى القاعدة)

لتكن X معرفة بالمخطط (B,W).

لتعريف X نبحث عن عناصرها. تكون x تنتمي إلى X إذا وفقط إذا:

- x تنتمي لـــ B؛
- يوجد w عملية من العمليات المُعرَّفة في المجموعة W تأخذ p مُعامِل (x1,x2,...,xp) من عناصر X بحيث يكون: x = w(x1,x2,...,xp)

تكمن الصعوبة في عملية التحليل التنازلي اللازمة لإيجاد عناصر X، في إياد العملية w والمُعاملات (x1,x2,...,xp) بحيث يكون w(x1,x2,...,xp) عنصراً من X.

مثال آخر عن المخطط الاستقرائي

لتكن A أبجدية منتهية.

لتكن +A مجموعة غيرخالية من الكلمات والمُعرَّفة بالمخطط الاستقرائي التالي:

- القاعدة: يكون كل حرف من الأبجدية A كلمةً من +A؛
- قاعدة البناء: إذا كانت كلاً من الكلمتين m و n عناصر من +A فإن الكلمتان mn وnm الناتجتان عن دمجهما بشكل متتالي، هما كلمتين من +A.

تعريف لغة الأقواس

لتكن LP مجموعة من الكلمات الناتجة عن استخدام أقواس متوازنة اعتماداً على الأبجدية {(,)}.

لنستخدم المخطط الاستقرائي التالي لتعريف LP:

- القاعدة: المجموعة الحاوية على الكلمة الخالية؛
- عملية البناء:
  - إذا كان u و v ينتميان إلى LP فإن uv ينتمي إلى LP؛
  - إذا كان u ينتمي إلى LP فإن (u) ينتمي إلى LP.

مثال:

في هذه اللغة، تنتمي الكلمات () و (()) و ()(()) إلى LP.

التعريف الاستقرائي لتابع

لتكن المجموعة E المُعرَّفة بالمخطط الاستقرائي (B,W)؛

يمكننا تعريف تابع f: $f : E \rightarrow B$:

- بتعريف f(b) من أجل كل b في B؛
- بتعريف f(w(x1,x2,…,xp)) بدلالة xi و f(xi).

مثال:

تعريف تابع العاملي (factorial) على $\mathbb{N}$.

ليكن لدينا $\mathbb{N}$ المُعرَّفة بالمخطط الاستقرائي (B,W)=({0}, +1)

- نُعرِّف: factorial(0)=1

نُعرِّف:

factorial(n+1)=(n+1)*factorial(n)

القسم السابع والثامن والتاسع والعاشر

الموضوع الأول: المجموعات

الكلمات المفتاحية:

مجموعة، مجموعة خالية، اجتماع، تقاطع، متمم مجموعة؛

ملخص:

لا يمكن، في كثيرٍ من المسائل الاقتصادية أو الاجتماعية، إعطاء إجابات أو حلول دقيقة، وذلك لكثرة العوامل المؤثرة فيها. تمكننا نظريات وقواعد علم الاحتمالات من التعامل مع مثل هذه المسائل وإعطاء توقع أو تقدير لحلها.

ندرس في هذه الوحدة مبادئ المجموعات الضرورية في دراسة الاحتمالات، وندرس العمليات الأساسية عليها.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مفهوم المجموعة؛
- المجموعة الخالية؛
- التقاطع والاجتماع والمتمم؛
- مخططات فن.

المجموعات

- تُعرَّف المجموعة على أنها عدد من العناصر ذات التعريف المحدد. فمثلاً نتكلم عن مجموعة طلاب مادة اللغـــة الإنكليزية، ومجموعة مدرسيّ الصف الثالث في مدرسة ابتدائية، ومجموعة المحاضرين في كلية معينة.

- عندما نتعامل مع مجموعات رياضية، فإنها غالباً ما تكون مؤلفةً من أعداد. فعلى سبيل المثال، نتكلم عن مجموعة الأعداد 3,4,5 ونكتبها بين معترضتين، حيث تحدد الأقواس المُعترضة عناصر المجموعة. كما نفصل بين العناصر بفواصل.

- نقول أن العنصر 3 ينتمي إلى المجموعة {3,4,5} ونرمز للعبارة برمز الإنتماء. كذلك الحال بالنسبة للعنصرين 4 و5.

- نقول أن العنصر 8، لاينتمي إلى المحموعة {3,4,5} ونرمز للعبارة برمز عدم الإنتماء.

- نستخدم عادةً الأحرف الكبيرة مثل B و D لتسمية المجموعات فنكتب مثلاً B هي المجموعة المؤلفة من 3 و 4 و 5 أو D هي المجموعة المؤلفة من 8 و 7 و 3 ويمكننا استخدام علاقة الانتماء فنقول: 4 لا تنتمي إلى D و3 تنتمي إلى D.

المجموعة الخالية

نسمي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر، المجموعة الخالية ونرمز لها ϕ. فمثلاً يمكننا القول أن مجموعة الديناصـــورات التـــي لازالت على قيد الحياة هي مجموعة خالية ومجموعة الأشخاص الذي يبلغ طولهم فوق 3 أمتار هي مجموعة خالية أيضاً.

انتبه: لا يجب الخلط بين المجموعة الخالية والمجموعة التي تحوي العنصر 0 أي {0} فهذه المجموعة تحوي عنصراً واحداً هـــو الصفر.

$$\phi \neq \{0\}$$

$0 \in \{0\}$ ولكن $0 \notin \phi$

المجموعات المتساوية

نقول عن مجموعتين أنهما متساويتان عندما تحتويان نفس العناصر مثال:

{7,6,5} = {5,6,7} = {6,7,5}

لاحظ أن ترتيب العنصر داخل أقواس المجموعة ليس مهماً.

في الحالة المغايرة نقول أن المجموعتين غير متساويتين

$$\{5,6,7\} \neq \{5,6,7,8\}$$

المجموعات الجزئية

لنأخذ المجموعتين التاليتين:

$A = \{3,4,5,6\}$ و $B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

- نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B.

- إذا كانت A مجموعة جزئية من B نقول أن المجموعة A محتواة أو تساوي B ونكتب ذلك باستخدام رمز الاحتواء على الشكل:

$$A \subseteq B$$

- إن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها

$$A \subseteq A$$

- إن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة

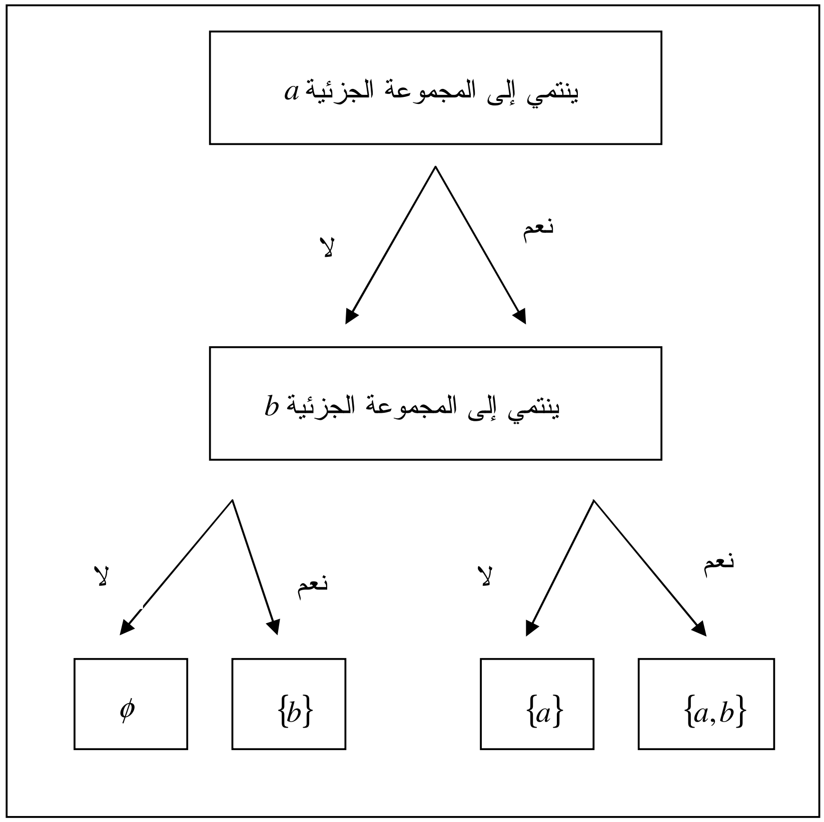
$$\phi \subseteq A$$

انتبه:

من الضروري التمييز بين علاقة الانتماء التي تربط عنصراً بمجموعة $a \in A$ (فنقول أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A، وبين علاقة الاحتواء التي تربط مجموعة بمجموعة أخرى، حيث لا نكتب $a \subseteq A$ ولكن $\{a\} \subseteq A$ (فنقول أن المجموعة المؤلفة من العنصر a محتواة في المجموعة A)

إيجاد المجموعات الجزئية من مجموعة

إذا بحثنا عن عدد من المجموعات الجزئية الموجودة في المجموعة {a, b} لوجدنا {a}، {b}، {a,b}، ϕ أي نحصل بالنتيجة على أربع مجموعات. يمكن تمثيل ذلك بالطريقة الشجرية التالية:



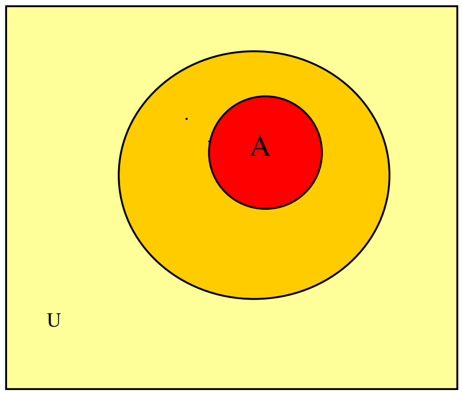
- يمكن القيام بنفس العمل من أجل المجموعة المؤلفة من {a,b,c} فنجد أن المجموعات الجزئية هي: {a}، {b}، {c}، {a,b}، {b,c}، {a,c}، ϕ.

نرى من الجدول الشجري أن كل عنصر في المجموعة يعطي خيارين. وبالتالي يمكن أن نستنتج ما يلي:
يكون عدد المجموعات الجزئية من مجموعة A تحوي n عنصراً، مساوياً لــ 2^n مجموعة

مخططات ڤِن

- لتسهيل التعامل مع المجموعات نقوم بتمثيلها عن طريق مخططات ندعوها مخططات ڤن:

مثال: يظهر المخطط المجاور كيفية تمثيل العلاقة $A \subseteq B$ عن طريق مخططات ڤن.
(لا يوجد بالضرورة تناسب بين حجم الدوائر
وحجم المجموعات).
تمثل المساحة داخل المربع المجموعة العامة U



$A \subseteq B$

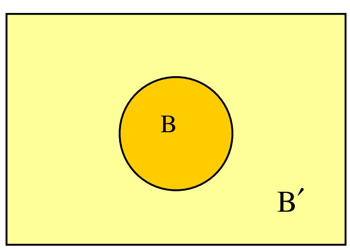
متمم مجموعة

- نقول أن B' هي متمم المجموعة B عندما يكون مجموع هاتين المجموعتين هو المجموعة العامة.

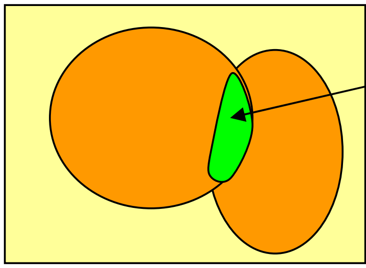
مثال: نعتبر

U = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {3,4,6}

- متمم المجموعة B إلى U هي المجموعة B'
حيث $B' = \{1,2,5,7\}$
- متمم المجموعة U إلى U هي المجموعة U'
حيث $U' = \phi$



التقاطع والاجتماع



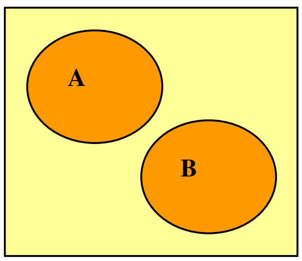
- نعرف تقاطع المجموعتين A و B ونرمز له $A \cap B$ بأنه مجموعة العناصر المشتركة بين A و B

مثال:

$$A = \{1,2,4,5,7\}$$
$$B = \{2,4,5,7,9,11\}$$

$$A \cap B = \{2,4,5,7\}$$

- نسمي المجموعات التي لا تحوي عناصر مشتركة بالمجموعات المنفصلة حيث يكون تقاطع هذه المجموعات مساوياً للمجموعة الخالية ϕ

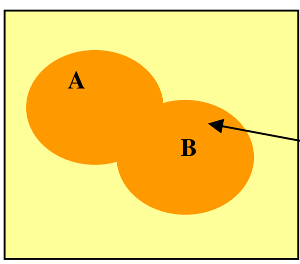


مثال:

B= {1,2,4}　　　　A = {9,15,25}

A و B مجموعتان منفصلتان حيث $A \cap B = \phi$

- نعرف اجتماع مجموعتين، ونرمز له بالرمز $A \cup B$، بأنه المجموعة المؤلفة من العناصر الموجودة في A أو في B أو في كلتيهما معاً.



مثال:

$A = \{1,3,5\}$　　$B = \{3,5,7,9\}$

$$A \cup B = \{1,3,5,7,9\}$$

العمليات على المجموعات

بما أن عناصر المجموعة تجمعها قاعدة مشتركة، فإن بالإمكان تمثيلها اعتماداً على هذه القاعدة، حيث نقرأ هذا التمثيل كما يلي:

المجموعة A، هي مجموعة العناصر x حيث x تجمعها قاعدة مشتركة.

باستخدام هذا التمثيل يمكن أن نُعرِّف العمليات على المجموعات كما يلي:

لتكن A وB مجموعتان و u المجموعة العامة:

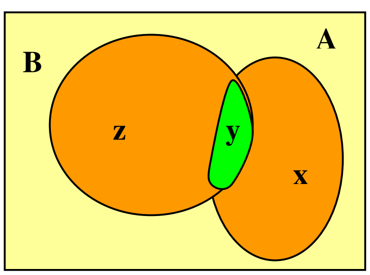
1. نُعرِّف المجموعة A' المتممة للمجموعة A كما يلي:
المجموعة A' المتممة للمجموعة A هي مجموعة العناصر x حيث x لا تنتمي لــ A و x تنتمي لــ U

2. نُعرِّف تقاطع المجموعتين A وB كما يلي:
تقاطع المجموعتين A وB هو مجموعة العناصر x حيث x تنتمي لــ A و x تنتمي لــ B

3. نُعرِّف اجتماع المجموعتين A وB كما يلي:
اجتماع المجموعتين A وB هو مجموعة العناصر x حيث x تنتمي لــ A أو x تنتمي لــ B أو x تنتمي لكلتيهما معاً

خاصة الاجتماع

لنأخذ المجموعتين A ، B ولنفرض أن هاتين المجموعتين تتقاطعان وأن عدد عناصر تقاطعهما تساوي y. لنفرض أن عدد عناصر A التي لا تنتمي إلى التقاطع (أي لا تنتمي إلى B) هو x ،
ولنفرض أن عدد عناصر B التي لا تنتمي إلى التقاطع (أي لا تنتمي إلى A) هو z



نستنتج أن عدد عناصر المجموعة $A \cup B$ هو $x+y+z$
يمكننا كتابة ذلك على الشكل $(x+y)+(y+z)-y$

أي أن عدد عناصر $A \cup B$ هو عدد عناصر المجموعة A مضاف إليه عدد عناصر المجموعة B ومطروح منه عدد عناصر تقاطع المجموعتين.

باستخدام الرمز n(S) الذي يشير إلى عدد عناصر المجموعة S نكتب:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

مثال:

تتقدم مجموعة مؤلفة من 10 طلاب إلى الامتحانات، يتقدم 5 طلاب منهم إلى امتحان مادة اللغة الإنكليزية، و 7 طلاب منهم إلى امتحان مادة المعلوماتية. ولنحسب كم طالباً تقدم إلى الامتحانين في آن واحد علماً أن الطلاب العشرة تقدموا إلى امتحان واحد على الأقل.

- لنفرض المجموعة A الطلاب الذين تقدموا لامتحان اللغة
- لنفرض المجموعة B الطلاب الذين تقدموا لامتحان المعلوميات
- نبحث إذاً عن عدد طلاب المجموعة $(A \cap B)$
- بحسب خاصة الاجتماع

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$10 = 5 + 7 - n(A \cap B)$$

وبالتالي $n(A \cap B) = 2$

وهو عدد الطلاب الذين تقدموا للامتحانين معاً

تطبيق على مخططات ڤن

بيّن استطلاع رأي أجري على 60 شخصاً لمعرفة أنواع الرياضة التي يمارسونها النتائج التالية:

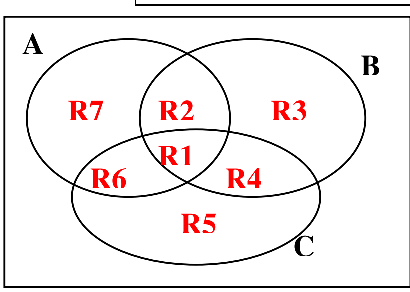
- 19 شخصاً يمارسون السباحة
- 18 شخصاً يمارسون الجري
- 50 شخصاً يمارسون كرة القدم
- 13 شخصاً يمارسون الجري والسباحة
- 11 شخصاً يمارسون الجري وكرة القدم
- 13 شخصاً يمارسون السباحة وكرة القدم
- 9 أشخاص يمارسون الرياضات الثلاث

باستخدام هذه المعطيات لنحدد ما يلي :

1- عدد الأشخاص الذين لا يمارسون أي من الرياضات الثلاث
2- عدد الأشخاص الذين يمارسون كرة القدم فقط
3- عدد الأشخاص الذين يمارسون السباحة والجري ولا يمارسون كرة القدم.

للإجابة على هذه الأسئلة نقوم برسم مخطط ڤن:

- لنسّم مجموعة الأشخاص الذين يمارسون السباحة A
- لنسّم مجموعة الأشخاص الذين يمارسون كرة القدم B
- لنسّم مجموعة الأشخاص الذين يمارسون الجري C



إن المنطقة المشتركة بين المجموعات الثلاث (R1) تمثل تقاطعهم أي $A \cap B \cap C$ وهي بحسب `المعطيات، تعبر عن الأشخاص الذين يمارسون الرياضات الثلاث وبالتالي ففيها 9 أشخاص.

إن عدد الأشخاص الذين يمارسون كرة القدم والسباحة يمثلون $A \cap B$ وعددهم 13 وهم على المخطط ممثلون بالمنطقتين (R1) و (R2)، وبما أننا وجدنا أن المنطقة (R1) تحوي 9 أشخاص فيبقى في المنطقة (R2) 4 أشخاص.

يمكن بنفس الطريقة أن نستنتج أن المنطقة (R4) تحوي شخصين والمنطقة (R6) تحوي أربعة أشخاص.

كما تشير المعطيات إلى أن 19 شخصاً يمارسون السباحة أي أن المناطق (R1) و(R2) و(R6) و(R7) تحوي 19 شخصاً. وبالتالي نستنتج أن المنطقة (R7) تحوي شخصين.

بنفس الطريقة نستنتج أن المنطقة (R3) تحوي 35 شخصاً والمنطقة (R5) تحوي 3 أشخاص.

إذاً جمعنا عدد الأشخاص في A وB و C نجد 59 شخصاً وبالتالي لدينا شخص واحد لا يمارس أي من الرياضات الثلاث.

من المخطط نجد أن 35 شخصاً يمارسون كرة القدم فقط (المنطقة (R3)).

من المخطط نجد أن عدد الأشخاص الذين يمارسون السباحة والجري ولا يمارسون كرة القدم هو 4 (المنطقة (R6)).

القسم السابع والثامن والتاسع والعاشر

الموضوع الثاني: مبادئ الاحتمالات

الكلمات المفتاحية:

فضاء العينة، حدث بسيط، حدث أكيد، حدث مستحيل، الأحداث المُستقلة، الاحتمال

ملخص:

لايمكن، في كثيرٍ من المسائل الاقتصادية أو الاجتماعية، إعطاء إجابات أو حلول دقيقة، وذلك لكثرة العوامل المؤثرة فيها. تمكننا نظريات وقواعد علم الاحتمالات من التعامل مع مثل هذه المسائل وإعطاء توقع أو تقدير لحلها.

ندرس في هذه الوحدة أساسيات علم الاحتمالات.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مفهوم الاحتمال
- مفهوم الحدث
- الأحداث البسيطة، والأحداث الأكيدة، والأحداث المستحيلة، والأحداث المستقلة
- العمليات على مجموعات الأحداث

مدخل إلى الاحتمالات
-توطئة 1-

لنفرض أن شخصاً دخل إلى مكتبة وطلب شراء 4 دفاتر ثمن كل منها 25 ليرة سورية. يستطيع هذا الشخص حساب ما يجب عليه دفعه بدقة وهو 4×25.

إلا أن صاحب المكتبة لا يستطيع أن يحدد تماماً وبدقة عدد الدفاتر التي سيبيعها، خلال فترة أسبوع أوشهر، بل سيحاول إعطاء تقدير لهذا العدد بحيث يبقى هذا العدد عشوائياً ومتعلقاً بطلب الزبائن.

في مثل هذه الحالات وفي المسائل والتطبيقات التي ترتبط بظواهر عشوائية نستخدم مفهوم الاحتمال، أي أننا نحاول تحديد القيمة المحتملة للحل عن طريق أسس وقواعد ندرسها في هذه الوحدة

مدخل إلى الاحتمالات
-توطئة 2-

- لنفترض أننا نقوم برمي حجر النرد عدة مرات، نسمي كل مرة نرمي فيها النرد محاولة، ونسمي مجموعة النتائج التي يمكن أن نحصل عليها بعد كل محاولة فضاء العينة. في تجربتنا هذه يكون فضاء العينة هو:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- ندعو حدثاً أي مجموعة جزئية من فضاء العينة. فعلى سبيل المثال:

الحدث: (نتيجة رمي حجر النرد عدد فردي) يعطي المجموعة التالية: $E_1 = \{1,3,5\}$

الحدث: (نتيجة رمي حجر النرد عدد زوجي) يعطي المجموعة التالية: $E_2 = \{2,4,6\}$

الحدث: (نتيجة رمي النرد عدد أصغر تماماً من 4) يعطي المجموعة التالية: $E = \{1,2,3\}$

- لنفرض أننا نبحث عن الحدث (نتيجة رمي النرد تساوي 4). يعطي هذا الحدث المجموعة: $E = \{4\}$ أي أننا يمكننا الحصول عليه بطريقة واحدة نسمي هذا الحدث حدثاً بسيطاً.

- لنعتبر الحدث (نتيجة رمي النرد عدد أصغر من 10) يعطي هذا الحدث $E = \{1.2.3.4.5.6\}$ أي أنه يساوي فضاء العينة، حيث أن نتيجة رمي النرد هي دائماً عدد أصغر من 10 نسمي هذا الحدث حدثاً أكيداً.

- لنعتبر الحدث (نتيجة رمي النرد تساوي 7) يعطي هذا الحدث $E = \phi$ لا يمكن لنا أن نحصل على نتيجة تساوي 7. نسمي هذا الحدث حدثاً مستحيلاً.

العمليات على مجموعات الأحداث

لنفرض E و F حدثين في فضاء العينة S:

- نحصل على الحدث $E \cap F$ عندما يحصل E و F في آن واحد
- نحصل على الحدث $E \cup F$ عندما يحصل E أو F
- نحصل على الحدث E' (متمم الحدث E إلى S) عندما لا يحدث E

مثال:

لنأخذ مجموعة عمال مصنع ما ولنقم باختيار عامل من بينهم. نعرّف الأحداث التالية :

E : عمر العامل المختار أصغر من 20 عاماً

F : العامل المختار أبيض

G: العامل المختار أنثى

لنحاول تعريف الأحداث التالية:

- الحدث E':

هو الحدث المتمم لــ E أي أنه الحدث الذي يعبّر بأن عمر العامل المختار أكبر أو يساوي 20 عاماً.

- الحدث $E \cup G$:

هو الحدث الذي يعبّر عن حصول E أو G أي أنه الحدث "عمر العامل أصغر من 20 أو أنه أنثى".

- الحدث $F \cap G'$:

هو الحدث الذي يعطي حدوث F و G' في آن واحد أي أنه الحدث "العامل أبيض وليس أنثى".

الأحداث المستقلة

نسمي حدثين لا يمكن أن يحصلا في آن واحد حدثين مستقلّين.

فمثلاً في تجربة رمي قطعة نقدية نعرّف الحدث E_1 بأنه الحصول على النقش والحدث E_2 الحصول على الكتابة. ويكون الحدثان E_1 و E_2 حدثين مستقين لأنه لايمكننا الحصول على نقش وكتابة في آن واحد.

بشكل عام يكون الحدثان F و E مستقلين عندما يعطي تقاطعهما المجموعة الخالية.

من أجل فضاء عينة S تكون فيه جميع العناصر متكافئة، نعرّف احتمال حدوث الحدث E ونرمز له $P(E)$ بأنه عدد عناصر المجموعة E على عدد عناصر المجموعة S أي:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

وبما أن الحدث E عبارة عن مجموعة جزئية من فضاء العينة S فإن عدد عناصر E هو حتماً أصغر أو يساوي عدد عناصر فضاء العيّنة.

مما سبق نستنتج أن احتمال حدوث حدث معين هو عدد محصور حتماً بين القيمتين 0 و 1:

$$0 \le P(E) \le 1$$

مثال:

لنعد إلى مثال حجر النرد. يكون فضاء العينة في هذه الحالة هو: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$:

- نعبر عن الحدث (الحصول على عدد فردي) بالمجموعة $E_1=\{1,3,5\}$
  ويكون احتمال حصولنا على عدد فردي هو $\frac{n(E_1)}{n(s)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

- نعبر عن الحدث (الحصول على عدد أصغر تماماً من 3) بالمجموعة $E_2=\{1,2\}$
  يكون احتمال هذا الحدث هو $\frac{n(E_2)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

- نعبر عن الحدث (الحصول على 8) بالمجموعة $E_3=\{\phi\}$
  يكون احتمال هذا الحدث هو $\frac{n(E_3)}{n(S)}=\frac{0}{6}=0$

القسم السابع والثامن والتاسع والعاشر

الموضوع الثالث: المفاهيم الأساسية للاحتمالات

الكلمات المفتاحية:

احتمال اجتماع حدثين، اجتماع أحداث متنافرة، الاحتمال الشرطي، أحداث مستقلة، علاقة بايز، الجداء العاملي، التراتيب، التوافيق.

ملخص:

نتابع في هذه الوحدة دراسة مفاهيم الاحتمالات حيث نتعرف على قواعد حساب الاحتمال الشرطي كما ندرس علاقة بايز لحساب الاحتمال.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- قاعدة احتمال الاجتماع
- قاعدة اجتماع الأحداث المتنافرة
- الاحتمال الشرطي
- الأحداث المستقلة وقاعدة جدائها
- علاقة بايز
- الجداء العاملي
- التراتيب
- التوافيق

قاعدة احتمال الإجتماع

- درسنا احتمال حدث E ووجدنا أنه يساوي $\frac{n(E)}{n(S)}$ حيث S فضاء العينة.
- كما درسنا في المجموعات أن: $n(E\cup F)=n(E)+n(F)-n(E\cap F)$
  حيث تعبر n عن عدد عناصر المجموعة.
- لنقسم طرفي هذه المساواة على $n(S)$ فنجد: $\frac{n(E\cup F)}{n(S)}=\frac{n(E)}{n(S)}+\frac{n(F)}{n(S)}-\frac{n(E\cap F)}{n(S)}$
- ندعو بالتعريف $\frac{n(E\cup F)}{n(S)}$ احتمال الحدث $E\cup F$
- بالتالي، يمكن استنتاج قاعدة احتمال اجتماع حدثين كالتالي: $\boxed{P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)}$

مثال:

لنفرض أننا نسحب ورقة من ورق اللعب (52 ورقة) نرغب بحساب احتمال أن تكون الورقة حمراء أو أن تكون صورة

- لنسمِّ الحدث (سحب ورقة حمراء)، E
- لنسّم الحدث (سحب ورقة صورة)، P
- فيكون الحدث: (سحب ورقة حمراء أو صورة) هو $(E\cup F)$
- وبالتالي حسب قاعدة احتمال الإجتماع: $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

لنحسب $P(E\cup F)$:

- بما أن $P(E)$ يدل على احتمال سحب ورقة حمراء، وبما أن لدينا 26 ورقة حمراء في ورق اللعب (أي $n(E)=26$)،
  يكون: $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{26}{52}$
- بما أن $P(F)$ يدل على احتمال سحب صورة، وبما أن لدينا 12 صورة في ورق اللعب (أي $n(F)=12$)، يكون:
  $P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{12}{52}$
- بما أن $P(E\cap F)$ يدل على احتمال سحب صورة حمراء وبما أن لدينا 6 صور حمراء (أي $n(E\cap F)=6$)، يكون:
  $P(E\cap F)=\frac{6}{52}$
- ويكون

$$P\left(E\cup F\right)=\frac{26}{52}+\frac{6}{52}=\frac{32}{52}=\frac{8}{13}$$

احتمال الإجتماع بالنسبة للأحداث المتنافرة

نعرف حدثين متنافرين بأنهما حدثان، يمنع وقوع أحدهما وقوع الآخر، أي أن تقاطعهما يساوي ϕ. بالتالي، بالنسبة لحدثين متنافرين يكون:

- احتمال التقاطع صفرٌ
- احتمال الاجتماع هو مجموع احتمالي الحدثين

قاعدة المتمم

عرفنا بالنسبة لحدث E، الحدث المتمم E' على أنه الحدث الذي يحقق $E \cup E' = S$.

لكن الحدثين E و E' هما حدثان متنافران، إذاً: $E \cap E' = \phi$

وبما أن $P(S) = 1$ وبالتالي حسب قاعدة احتمال اجتماع الأحداث المتنافرة، يكون:

$$\begin{aligned} P(E \cup E') &= P(E) + P(E') \\ 1 &= P(E) + P(E') \Rightarrow \\ P(E') &= 1 - P(E) \end{aligned}$$

أي أن احتمال متمم حدث هو ناتج طرح احتمال الحدث من 1.

ففي تجربة رمي قطعة نقدية، يكون الحدث "الحصول على نقش" هو متمم الحدث "الحصول على كتابة" وبما أن احتمال الحصول على نقش يساوي $\frac{1}{2}$ فإن احتمال الحصول على كتابة هو $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ أيضاً.

فكرة الاحتمال الشرطي

لنطبق التجربة التالية:

نفرض اننا نقوم برمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين وبأننا نسجّل النتيجة نقش أو كتابة. ولنفرض أن فضاء العينة في هذه الحالة (كافة الحالات الممكنة) هو:

S = {(كتابة كتابة)، (نقش كتابة)، (كتابة نقش)، (نقش نقش)}

1. لنحسب احتمال الحصول على كتابة في الرميتين أي (كتابة كتابة) ولنسّم هذا الحدث E:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

2. لنفرض أننا حصلنا في الرمية الأولى على كتابة ولنسم هذا الحدث F، وأننا نريد معرفة احتمال الحصول على الحدث E علماً بأننا الحدث F قد حصل. إن حصولنا على كتابة في الرمية الأولى يعني أن فضاء العينة قد تقلص إلى الفضاء S' حيث:

S' = {(كتابة كتابة)، (كتابة نقش)}

3. وبالتالي فإن احتمال حصول الحدث E بفرض F قد حصل ونرمز لذلك $P(E/F)$

$$P(E/F) = \frac{n(E)}{n(S')}$$

$$P(E/F) = \frac{1}{2}$$

تعريف الاحتمال الشرطي

يتغير احتمال حدوث حدث E عند افتراض حدوث حدث آخر إذ أن الافتراض يقلّص فضاء العينة. نقبل بأن الاحتمال الشرطي يعطى بالعلاقة:

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

ونقرؤها: احتمال وقوع الحدث E بفرض أن الحدث F قد وقع، هو النسبة بين احتمال تقاطع الحدثين واحتمال الحدث F.

مثال:

نفرض اننا نقوم برمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين وبأننا نسجّل النتيجة نقش أو كتابة. ولنفرض أن فضاء العينة في هذه الحالة (كافة الحالات الممكنة) هو:

S = {(كتابة كتابة)، (نقش كتابة)، (كتابة نقش)، (نقش نقش)}

- ليكن الحدث F هو حدث (الحصول على كتابة في الرمية الأولى). يكون احتمال هذا الحدث هو: $P(F)=\frac{1}{2}$
- ليكن الحدث $E\cap F$ هو الحدث (الحصول على كتابة في الرمية الأولى و الحصول على كتابة في الرميتين). يكون احتمال هذا الحدث هو: $P(E\cap F)=\frac{1}{4}$
- وعليه، يكون احتمال وقوع الحدث E بفرض وقوع الحدث F هو:

$$P(E/F)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

قاعدة الجداء

بفرض E و F حدثان بحيث $P(E)\neq 0$ و $P(F)\neq 0$

يكون بحسب تعريف الاحتمال الشرطي

$$P(F\mid E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)} \qquad \text{و} \qquad P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

ولكن بحسب الخاصة التبديلية للتقاطع فإن $E\cap F=F\cap E$ وبالتالي $P(E\cap F)=P(F\cap E)$

نستنتج مما سبق ببساطة القاعدة التالية:

$$P(E\cap F)=P(F)\times P(E\mid F)$$
$$P(E\cap F)=P(E)\times P(F\mid E)$$

مثال:

في صف يحوي $\frac{2}{5}$ من الطالبات و $\frac{3}{5}$ من الطلاب، نعلم أن 25% من الطالبات يدرسن اللغة الإنكليزية. في حال اخترنا أحد الطلاب بشكل عشوائي، ما احتمال أن يقع اختيارنا على طالبة تدرس اللغة الإنكليزية.

- نسمي حدث (اختيار طالبة): E
- نسمي حدث (تدرس اللغة الإنكليزية): F.
- الاحتمال المطلوب هو $P(E\cap F)$

$$P(E\cap F)=P(E)\times P(F\mid E)$$

- من المعطيات:

$$P(E\mid F)=0.25,\quad P(E)=\frac{2}{5}=0.4\Rightarrow$$
$$P(E\cap F)=0.4\times 0.25=0.10$$

بفرض E و F حدثان بحيث أن احتمالهما غير معدوم

اعتماداً على تعريف الاحتمال الشرطي وعلى الخاصة التبديلية للتقاطع، يمكننا أن نستنتج ببساطة القاعدة التالية:

احتمال تقاطع الحدثين:

- يساوي احتمال الحدث الأول ضرب الاحتمال الشرطي للحدث الثاني شرط وقوع الأول.

أو

- يساوي احتمال الحدث الثاني ضرب الاحتمال الشرطي للحدث الأول شرط وقوع الثاني.

قاعدة الجداء بالنسبة للأحداث المستقلة

نقول عن حدثين أنهما مستقلان إذا كان حصول أحدهما لا يؤثر على حصول الآخر. بمعنى آخر يكون:

$$P(E \mid F) = P(E) \qquad \text{أو} \qquad P(F \mid E) = P(F)$$

وبالتالي فإن قاعدة الجداء بالنسبة للأحداث المستقلة تصبح في حال كان كلٌّ من E و F حدثين مستقلين:

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

مثال:

في يوم عادي من أيام كانون الثاني في دمشق يكون احتمال أن تُثلج هو 0.10 واحتمال حصول ازدحام سير هو 0.20 واحتمال أن تُثلج أو حصول زحام سير هو 0.82. هل الحدثان (أن تُثلج) و (حصول ازدحام سير) مستقلان ؟

لنفرض S هو حدث (أن تُثلج) وأن T هو حدث (حصول ازدحام سير). يجب علينا أن نحدّد ما إذا كان:

$$P(S \mid T) = P(S) \qquad \text{أو} \qquad P(T \mid S) = P(T)$$

نعلم أن

$$P(S \cup T) = 0.82,\ P(T) = 0.80,\ P(S) = 0.10$$

باستخدام قاعدة الاجتماع نحدد $P(S \cap T)$

$$P(S \cap T) = P(S) + P(T) - P(S \cup T) \Rightarrow P(S \cap T) = 0.08$$

$$P(S \cap T) = P(S) \times P(T \mid S) \Rightarrow 0.08 = 0.01 \times P(T/s) \Rightarrow P(T/s) = 0.8 = P(T)$$

بنفس الطريقة نبرهن أن $P(S \mid T) = P(S)$ وبالتالي الحدثان S و T مستقلان.

انتبه: استقلال الأحداث لا يتبع الحَدْسْ بالضرورة ويتم استنتاجه أو برهانه رياضياً ليكون دقيقاً.

علاقة بايز

لنفرض أن الدراسات التي أجريت على عينة من الأشخاص أعطت احتمال أن يصاب الشخص بسرطان الرئة علماً بأنه يدخن علبة سجائر يومياً. ولنفرض أنه لفائدة البحث يجب علينا معرفة احتمال أن يكون الشخص يدخن علبة سجائر يومياً علماً أنــه مــصاب بسرطان الرئة. بمعنى آخر، هل من الممكن معرفة $P(F|E)$ إذا كنا نعلم $P(E|F)$

إن هذا ممكن باستخدام علاقة ندعوها علاقة بايز.إذ نقبل بأنه بالنسبة لحدثين E و F:

$$P(F/E)=\frac{P(F)\times P(E|F)}{P(F)\times P(E|F)+P(F')\times P(E|F')}$$

حيث F' **هو الحدث المتمم للحدث** F

مثال:

لنفرض أنه من أجل فترة زمنية محددة، يكون احتمال أن يخطئ عامل على خط الإنتاج هو 0.1 وأن احتمال وقوع حادث عند حصول هذا الخطأ هو 0.3 وأن احتمال وقوع حادث عندما لا يكون هناك خطأ هو 0.2. ما احتمال أن يكون العامل مخطئاً علماً أن حادثاً قد وقع.

من معطيات المسألة لدينا

- بفرض F هو الحدث (أخطأ العامل)
- بفرض E هو الحدث: (وقوع حادث)
- لدينا حسب معطيات المسألة:

$$P(F)=0.1$$
$$P(E|F)=0.3$$
$$P(E|F')=0.2$$

- نطبق علاقة بايز:

$$P(F|E)=\frac{P(F)\times P(E|F')}{P(F)\times P(E|F)+P(F')\times P(E|F')}\Rightarrow$$
$$P(F|E)=\frac{(0.1)(0.3)}{(0.1)(0.3)+(0.9)(0.2)}=0.143$$

تعميم علاقة بايز

بفرض $F_1,F_2,\ldots\ldots F_n$ أحداث متنافرة بين بعضها مثنى مثنى، يكون:

$$P(F_i|E)=\frac{P(F_i)\times P(E|F_i)}{P(F_1)\times P(E|F_1)+\ldots\ldots+P(F_n)\times P(E|F_n)}$$

الجداء العاملي

نفرض اننا نريد ترتيب 5 كتب على مكتبة جنباً إلى جنب، ما هو عدد الطرق التي يمكن أن نقوم بها لذلك؟

- يمكن في البداية أن نختار الكتاب الأول من 5 كتب لذلك لدينا خمس خيارات للكتاب الأول
- من أجل الكتاب الثاني يبقى لدينا 4 خيارات (لأننا اخترنا سابقاً أحد الكتب)
- من أجل الكتاب الثالث يبقى لدينا ثلاث خيارات وهكذا
- ويكون عدد الطرق ولنسمه P هو حاصل جداء عدد طرق اختيار كل كتاب (في حالتنا هو 5 في 4 في 3 في 2 في 1)

$$P = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$$

نسمي هذا الجداء الجداء العاملي ونرمز له في هذه الحالة بالرمز !5

نعرّف بشكل عام الجداء العاملي للعدد n حيث n عدد طبيعي ونرمز له !n ونقرؤه n عاملي كما يلي:

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times.....\times3\times2\times1$$

يعبّر الجداء العاملي عن عدد الطرق التي يمكن فيها ترتيب عناصر مجموعة تحوي n عنصراً ونسمي هذه الطرق تباديل المجموعة.

مثال:

يوجد 6 طرق لترتيب عناصر المجموعة $\{1,2,3\}$:

$$3! = 6$$

(1,2,3) ، (1,3,2) ، (2,1,3) ، (2,3,1) ، (3,1,2) ، (3,2,1).

التراتيب

لنعد إلى مثال الكتب ولنفرض أننا نرغب بوضع ثلاثة كتب من الكتب الخمسة على الرف، ماعدد الطرق الممكنة لوضع ثلاثة كتب على الرف؟

في هذه الحالة يكون لدينا 5 احتمالات للكتاب الأول، 4 للثاني و 3 للثالث. أي أن عدد الطرق هو:

$$5\times4\times3 = 60$$

نعرّف بشكل عام الترتيب P_n^r حيث $r \le n$ بأنه عدد التباديل الممكنة لاختيار عنصراً من مجموعة تحوي n عنصراً. ويُعطى عدد التراتيب على الشكل:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:

لنعد إلى مثال الكتب ولنفرض أننا نرغب بوضع ثلاثة كتب من الكتب الخمسة على الرف، ماعدد الطرق الممكنة لوضع ثلاثة كتب على الرف؟

لدينا: $n = 5$ و $r = 3$ ومنه نستنتج:

$$P_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

التوافيق

لنعد إلى مثال الكتب، ولنفرض أننا نريد إهداء ثلاثة كتب من الكتب الخمسة إلى أحد الأصدقاء. ما عدد الاحتمالات الممكنة لهذا؟ قد تكون الإجابة السريعة للوهلة الأولى هي ما وجدناه سابقاً أي 60 احتمالاً. ولكن إذا رمزنا لكل كتاب برقم فهذا يعني أن اختيار الكتب 1,2,3 لا يكافئ اختيار الكتب 2,1,3 وهذا غير صحيح في حالتنا لأن ترتيب الكتب هنا غير مهم.

نسمي عدد الطرق لاختيار r عنصراً من مجموعة من n عنصر دون مراعاة ترتيب العناصر بالتوافيق ونرمز لها C_n^r. نقبل بأن عدد التوافيق لـ r عنصر من n عنصر $r \le n$ هو

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

تطبيق على التراتيب والتوافيق

لنفرض أننا نريد سحب كرتين من كيس يحوي على أربع كرات ملونة (حمراء، صفراء، زرقاء، خضراء).

1. ما عدد الطرق لاختيار كرتين في حال سحبنا الكرتين معاً.
2. ما عدد الطرق لاختيار كرتين في حال سحبنا كرة ثم سحبنا كرة ثانية.

في الحالة الأولى يكون السحب (حمراء، صفراء) مكافئاً (صفراء، حمراء) حيث أننا نسحب الكرتين معاً والترتيب لا يكون مهماً. وبالتالي يكون عدد الطرق هو التوافيق C_4^2

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$$

في الحالة الثانية يكون ترتيب السحب مهماً أي أن سحب كرة حمراء في المرة الأولى وصفراء في المرة الثانية لا يكافئ السحب (صفراء، حمراء) وبالتالي يكون عدد الطرق هو التراتيب P_4^2

$$P_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

القسم السابع والثامن والتاسع والعاشر

الموضوع الرابع: تتمات في الاحتمالات

الكلمات المفتاحية:

تراتيب، توافيق، الاحتمال الثنائي، التجارب الثنائية، المتحول العشوائي، توزع الاحتمال، القيمة المتوقعة، سلسلة ماركوف، مصفوفة الانتقال المُنتظمة، شعاع توازن مصفوفة الانتقال.

ملخص:

نتابع في هذه الوحدة، دراسة الاحتمالات حيث نتعرف على كيفية استخدام التراتيب والتوافيق في حساب الاحتمالات ثمّ نتعرّف على مفهوم التجارب الثنائية كما ندرس المتحول العشوائي وسلسلة ماركوف وبعض التطبيقات.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تطبيقات على التراتيب والتوافيق
- مفهوم المتحول العشوائي
- سلاسل ماركوف

مصفوفة الانتقال وشعاع توازنها

حساب الاحتمال باستخدام التراتيب

لدى مدرِّسة موسيقى ثلاث طلاب: سالم، سامي، باسم، تريد هذه المدرسّة اختيار أحد الطلاب ليكون عازفاً أولاً، وطالب آخر ليكون عازفاً ثانياً. أما الثالث فسيعزف مع أوركسترا المدرسة.

- لنحسب أولاً ما احتمال أن يقع اختيارها على سامي كعازف أول, وعلى باسم كعازف ثان وعلى سالم كعازف مع الأوركسترا.
  - في هذه المسألة نحن أمام اختيار ثلاثة عناصر، أي الثلاثية (سامي، باسم، سالم)، من مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر أيضاً، حيث يكون ترتيب العناصر المُختارة مهماً.
  - تكون عدد الطرق الكليّة للاختيار (أي عدد عناصر فضاء العينة) هي التراتيب P_3^3، والحدث الذي نريد وقوعه هو اختيار واحد من هذه التراتيب فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(E)=\frac{1}{P_3^3}=\frac{1}{6}$$

- لنحسب الآن ما احتمال أن يقع اختيارها على باسم كعازف أول, وعلى سالم كعازف ثان وعلى سامي كعازف مع الأوركسترا، أو على سامي كعازف أول, وعلى باسم كعازف ثان وعلى سالم كعازف مع الأوركسترا
  - في هذه المسألة نحن أمام اختيار الثلاثية (باسم, سالم, سامي)، أو الثلاثية (سامي, باسم, سالم) من مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر أيضاً، حيث يكون ترتيب العناصر المُختارة مهماً.
  - تكون عدد الطرق الكليّة للاختيار (أي عدد عناصر فضاء العينة) هي التراتيب P_3^3 والحدث الذي نريد وقوعه هو اختيار إحدى الثلاثيتين. في هذه الحالة نحسب احتمال اجتماع الثلاثيتين أي:

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

من التطبيق السابق نستنتج أن التراتيب تساعد على حساب الاحتمالات.

انتبه:

1. لاحظ أن الحدثين E و F منفردين أي $E\cap F=\phi$
2. لاحظ أنه من المفيد دائماَ ربط مفهوم الـــ و في الاحتمال بعملية الضرب وربط مفهوم الـــ أو بعملية الجمع.

حساب الإحتمال باستخدام التوافيق

في أحد ألعاب ورق اللعب المؤلف من 52 ورقة، يتم توزيع خمس أوراق لكل لاعب, ما احتمال أن يحصل اللاعب على خمس أوراق "بستوني"؟

- إن عدد الطرق الذي يمكن فيها أن يحصل اللاعب على خمس أوراق من 52 ورقة، حيث لا يهم الترتيب هنا، هي التوافيق C_{52}^{5}:

$$C_{52}^{5} = \frac{52!}{5!\times 47!} = 2598960$$

- إن عدد الطرق التي يمكن فيها أن يحصل اللاعب على خمس أوراق بستوني (علماً أنه يوجد 13 ورقة بستوني) هي التوافيق C_{13}^{5}

$$C_{13}^{5} = \frac{13!}{5!\times 8!} = 1287$$

- ويكون الاحتمال المطلوب هو : $\dfrac{\text{عدد طرق اختيار خمس أوراق من بين أوراق البستوني}}{\text{عدد طرق اختيار خمس أوراق من بين الأوراق كلها}}$

أي: $$P(E) = \frac{C_{13}^{5}}{C_{52}^{5}} = \frac{1287}{2598960} = 0.00495$$

من التطبيق السابق نستنتج أن التوافيق تساعد على حساب الاحتمالات.

التجارب الثنائية والاحتمال الثنائي

ترتبط الكثير من مسائل الاحتمالات بتكرار نفس التجربة عدّة مرات، مثل تجربة رمي قطعة نقدية ثمان مرات والبحث عن احتمال الحصول على نقش 7 مرات، أو تجربة رمي 6 طلقات على هدف واحتمال إصابته في المرات الستة.

في مثل هذه التجارب تمثل بعض النتائج نجاحاً وتمثل باقي النتائج فشلاً نسمّي هـذا النـوع مـن التجـارب بتجـارب برنـولي (Bernolli) أو التجارب الثنائية.

تتميز التجارب الثنائية بالخصائص التالية:

1- تتكرر التجربة نفسها عدّة مرات.

2- هناك نوعان من النتائج: "نجاح" و "فشل".

3- التجارب المكررة مستقلة ويبقى احتمال النجاح أو الفشل نفسه في كل تجربة.

حساب الاحتمال في التجارب الثنائية

لنرمِ حجر النرد 5 مرات متتالية ولنحاول حساب احتمال الحصول على الرقم (1) في الرميات الخمس.

- تحقق هذه المسألة شروط التجربة الثنائية حيث يتم تكرار التجربة 5 مرات ويمثل الحصول على (1) نجاحاً والحصول على أي رقم آخر فشلاً كما أن الرميات الخمس مستقلة.

- يكون الاحتمال المطلوب هو جداء احتمالات الحصول على "1" في كل رمية أي:

$$P(E) = P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(1) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

لنرمِ الآن حجر النرد 5 مرات متتالية ولنحاول الآن إيجاد احتمال الحصول على "1" في أربع رميات من الرميات الخمس.

- للوهلة الأولى قد نرغب بكتابة هذا الاحتمال على الشكل:

$$P(E) = P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(\text{not}1)$$

- ولكن هذا التركيب قد يحدث بخمس طرق مختلفة وهي توافيق اختيار أربع عناصر من خمسة C_5^4 ، وذلك لأننا إذا رمزنا بـــ T للحصول على "1"، وبـــ f للحصول على عدد مغاير للـــ 1 يكون لدينا الاحتمالات التالية:

f T T T T
T f T T T
T T f T T
T T T f T
T T T T f

- إذاً الاحتمال المطلوب هو:

$$P(F) = P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(1)\times P(\text{not}1)\times C_5^4$$

$$P(F) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{5}{6} \times 5 = 0.0032$$

احتمال التجارب الثنائية

–تعميم–

بفرض P تمثل احتمال النجاح في إحدى محاولات تجربةٍ ثنائيةٍ، فيكون احتمال الفشل في هذه التجربة هو $1-P$.

أما إذا قمنا بــ n محاولة في هذه التجربة فيكون احتمال حدوث x نجاح وبالتالي $n-x$ فشل، ولنسمه $P(E_n^x)$، هو:

$$P(E_n^x) = C_n^x \times P^x \times (1-P)^{n-x}$$

مثال:

عند رمي النرد، ما احتمال الحصول على رقم 2، ثلاث مرات

نستخدم العلاقة السابقة حيث $n = 5, x = 3$ فنحصل على:

$$P(E_5^3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0032$$

المتحول العشوائي

لنفرض إن إحدى الشركات استلمت طرداً مؤلفاً من 12 شاشة حاسوبية، وأن المسؤول عن الاستلام اكتشف، بعد أن تفحص الشاشات، وجود ثلاث شاشات مكسورة.

لنفرض أن هذا المسؤول قد أخذ عينة مؤلفة من أربع شاشات وتفحص هذه الشاشات، ولنرمز بـــ x لعدد الشاشات المكسورة التي يجدها في العينة. يمكن أن يأخذ المتحول x القيم $0,1,2,3$ ندعو هذا النوع من المتحولات: المتحول العشوائي.

نعرّف المتحول العشوائي على أنه تابع يعطي عدداً حقيقياً يقابل كل نتيجة في تجربة ما.

مثال:

لنقم بحساب احتمال عدم العثور على شاشة مكسورة في عينة من 4 شاشات علماً بأن لدينا 3 شاشات مكسورة في فضاء العينة المؤلف من 12 شاشة. في هذه الحالة يكون x=0 والاحتمال المطلوب هو $P(x=0)$.

يعني الاحتمال $P(x=0)$ اختيار 0 شاشة مكسورة من ثلاث شاشات مكسورة و 4 شاشات سليمة من 9.

$$P(x=0) = \frac{C_3^0 \times C_9^4}{C_{12}^4} = \frac{14}{55}$$

بنفس الطريقة، يكون احتمال العثور على شاشة مكسورة في عينة من 4 شاشات علماً بأن لدينا 3 شاشات مكسورة في فضاء العينة المؤلف من 12 شاشة هو:

$$P(x=1)=\frac{C_3^1\times C_9^3}{C_{12}^4}=\frac{28}{55}$$

بنفس الطريقة، يكون احتمال العثور على شاشتين مكسورتين في عينة من 4 شاشات علماً بأن لدينا 3 شاشات مكسورة في فضاء العينة المؤلف من 12 شاشة هو:

$$P(x=2)=\frac{12}{55}$$

بنفس الطريقة، يكون احتمال العثور على ثلاث شاشات مكسورة في عينة من 4 شاشات علماً بأن لدينا 3 شاشات مكسورة في فضاء العينة المؤلف من 12 شاشة هو:

$$P(x=3)=\frac{1}{55}$$

انتبه: $0!=1$ و $C_n^0=1$

توزع الاحتمال

يمكن جمع النتائج التي وجدناها في التمرين السابق كما يلي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

- يُدعى الجدول الذي يجمع كافة قيم المتحول العشوائي المحتملة ويربطها بالاحتمال المقابل: جدول توزّع الاحتمال.
- يجب أن يساوي حاصل جمع الاحتمالات، المقابلة لقيم المتحول العشوائي، الواحد (أو يختلف بشكل طفيف جداً بسبب تقريب نتائج الكسور في بعض الأحيان).

يمكن أيضاً كتابة توزع الاحتمال على شكل مجموعة من الأزواج المرتّبة تكون فيها القيمة الأولى هي x والقيمة الثانية هي $P(x)$. مثل:

$$\left\{\left(0,\frac{14}{55}\right),\left(1,\frac{28}{55}\right),\left(2,\frac{12}{`55}\right),\left(3,\frac{1}{55}\right)\right\}$$

القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي

لنفرض المتحول العشوائي x الذي يمكن أن يأخذ n قيمة $x_1, x_2, ...x_n$
بفرض أن احتمالات الحصول على هذه القيم هي $P_1, P_2, ...P_n$
نعرّف القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي بأنها القيمة $E(x)$ حيث
$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

مثال:

لنعد إلى مثال عينّة الشاشات. إن القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي x في هذه الحالة هي:

$$E(x) = 0 \times \frac{14}{55} + 1 \times \frac{28}{55} + 2 \times \frac{12}{55} + 3 \times \frac{1}{55} = 1$$

أي أنه وسطياً، وفي عينة من 4 شاشات، سيجد الموظف المكلف بالاستلام شاشة واحدة تالفة. أي $\frac{1}{4}$ من العينة. إذا أمعنّا في النتيجة، نجد أن هذا منطقي لأننا من أصل 12 شاشة لدينا 3 شاشات تالفة.

القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي في التجارب الثنائية

يمكن قبول مايلي بالنسبة للتجارب الثنائية فقط:
من أجل التجارب الثنائية تكون القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي $E(x)$ مساوية لجداء العدد المتوقع من نتائج النجاح باحتمال النجاح في كل تجربة $E(x) = nP$

مثال:

استنادا إلى إحصائيات الهيئات التعليمية فإن 79% من الناجحين في الشهادة الثانوية لعام 1993/1992 هم من الإناث. لنفرض أننا اخترنا عشوائياً 5 ناجحين.

1. احسب توزع احتمال عدد الإناث في هذه العينة المؤلفة من خمس أشخاص.
2. احسب القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي (عدد الإناث في العينة).

- إذا أمعنا التفكير في هذه المسألة نجد أنها مسألة تجربة ثنائية يكون فيها احتمال النجاح 79% واحتمال الفشل هو 0.21 (أي 1-0.79)

بفرض x المتحول العشوائي الممثل لعدد الإناث. يكون لدينا بحسب ما درسناه سابقاً بالنسبة للتجارب الثنائية:

$$P(x) = C_n^x \times P^x \times (1 - P)^{n-x}$$

مثلاً
$$P(x = o) = C_5^0 \times (0.79)^o \times (0.21)^5 \cong 0.0004$$

بنفس الطريقة نجد احتمالات القيم المختلفة لـــ x التي نجمعها في جدول التوزع التالي:

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.0004	0.0077	0.0578	0.2174	0.409.	0.3077

- باستخدام العلاقة الخاصة بالقيمة المتوقعة للمتحول العشوائي نجد:

$$E(x)=0\times(0.0004)+1\times(0.007)+2\times(0.0578)+3(0.2174)+4\times(0.4090)+5(0.3077)=3.95$$

وبالتالي وسطياً يكون 3.95 من الأشخاص إناثاً في عينة من 5 أشخاص.

لكن لدينا من المثال $n=5$ و $P=0.79$ لذا يمكننا حسب القاعدة التي وضعناها في البداية تطبيق $E(x)=nP$ وسنحصل على: 3.95 كقيمة متوقعة.

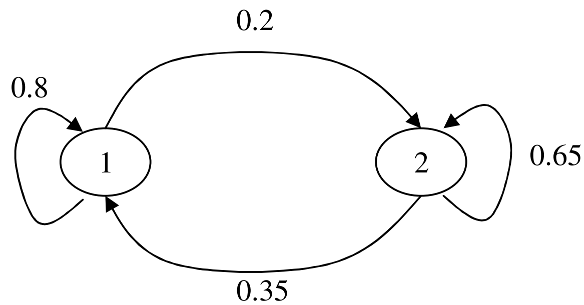
سلسلة ماركوف

لنفرض أننا نقوم بعدة تجارب بحيث تتعلق نتيجة التجربة الحالية بنتيجة التجربة التي سبقتها فقط أو بشكل آخر تكون الحالة المقبلة تتعلق بالحالة الحالية فقط ولا تتعلق بالحالات السابقة. ندعو هذا النوع من التجارب سلسلة ماركوف.
لتمثيل سلاسل ماركوف وتمثيل احتمالات الانتقال من حالة إلى حالة أخرى، نستخدم مصفوفة ندعوها مصفوفة االانتقال

مثال:

في بلدة صغيرة، متجران لبيع الثياب، ولنرمز لهما بالرموز (1) و (2).
بينت دراسات السوق التي أجريت، أن احتمال عودة زبون، كان قد اشترى الثياب في المرة السابقة من المتجر (1)، لشراء ثياب أخرى من نفس المتجر هو 0.8، وأن احتمال عودة زبون كان قد اشترى الثياب في المرة السابقة من المتجر (2) لشراء ثياب أخرى من نفس المتجر هو 0,35.
بفرض أن احتمال ذهاب الزبون إلى أحد المتجرين يتعلق فقط بالمرة السابقة التي اشترى فيها الثياب، فيكون احتمال ذهاب زبون كان قد اشترى في المرة السابقة من (1)، إلى (2) هو $1-0.8=0.2$ احتمال ذهاب زبون كان قد اشترى في المرة السابقة من (2)، إلى (1) هو $1-0.35=0.65$

يمكن جمع النتائج في الجدول والمخطط التاليين:



الوضع الحالي	الوضع التالي	
	1	2
1	0.8	0.2
2	0.35	0.65

يمكن كتابة الجدول السابق على شكل مصفوفة نسميها مصفوفة االانتقال وهي تساعدنا لمعرفة احتمال الانتقال من حالة إلى حالة أخرى.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (1) & (2) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \end{array}$$

هذا يعني أن العنصر $a_{11} = 0.8$ يعطي احتمال الانتقال إلى الحالة (1) علماً أن الحالة الحالية هي (1)وهكذا.

شعاع التوازن الخاص بالمصفوفة الإنتقالية

- ندعو كل مصفوفة تحوي سطراً واحداً فقط و n عموداً، شعاعاً.

- نعرف شعاع التوازن الخاص بمصفوفة انتقالية P تمثل سلسلة ماركوف، بأنه الشعاع V الذي يحقق $V \times P = V$ شرط أن تكون P منتظمة.

- يمثل شعاع التوازن الاحتمال طويل المدى لحالات المصفوفة الانتقالية.

<u>مثال:</u>

لنوجد شعاع التوازن للمصفوفة في مثال متجر الملابس حيث مصفوفة الانتقال هي

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$$

- بحسب تعريف شعاع التوازن V لدينا $V \times A = V$

- ببساطة نلاحظ (بحسب خصائص ضرب المصفوفات) أن الشعاع V مؤلف من سطر واحد ومن عمودين ولنرمز لـ V بالرمز: $V=(x,y)$ فيكون لدينا:

$$(x,y)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.35 & 0.65\end{pmatrix}=(x,y)\Rightarrow$$
$$(0.8x+0.35y,0.2x+0.65y)=(x,y)$$

- نحصل على جملة معادلتين بمجهولين:

$$\begin{aligned}0.8x+0.35y&=x\\ 0.2x+0.65y&=y\end{aligned}$$

- يعطي حل هذه الجملة:

$$\begin{aligned}x&=0.64\\ y&=0.36\end{aligned}$$

- أي أن $V=(0.64,0.36)$

- بما أن شعاع التوازن يمثل الاحتمال طويل المدى لحالات المصفوفة الانتقالية، فإن $V=(0.64,0.36)$ يمثل الوضع التالي: من أجل عدد كبير جداً، n، من الزيارات إلى متجر الملابس يكون احتمال الذهاب إلى المتجر (1) يساوي 0.64 واحتمال الذهاب إلى المتجر الثاني (2) هو 0.36.

القسم الحادي عشر والثاني عشر

الأشجار والبيانات: تعاريف ومفاهيم أساسية

الكلمات المفتاحية:

بيان، رأس، عقدة، ضلع، قوس، بيان موجَّه، بيان غير موجَّه، بيان مُركَّب، بيان بسيط، درجة الرأس، درجة الرأس الخارجية، درجة الرأس الداخلية، سلسلة، حلقة، طريق، دارة، بيان مترابط، شجرة غابة.

ملخص:

نتعرف في هذا القسم على مفاهيم وتعاريف أساسية تتعلق بالبيانات وأنواعها.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف البيان الموجه والبيان غير الموجه؛
- تعريف البيان البسيط والبيان المُركَّب؛
- تعريف درجات رؤوس بيان؛
- المصفوفات المُمثِلة لبيان؛
- السلاسل والحلقات والطرق والدارات؛
- الغابات والأشجار.

تعريف البيان غير الموجَّه

نُعرِّف بيان غير موجَّه (منته) بأنه ثلاثية $G=(V,E,\Psi)$ مؤلفة من:

- مجموعة منتهية V (حيث $|V|=n$) من العناصرالتي ندعوها رؤوس أو عُقَد.
- مجموعة منتهية E (حيث $|E|=m$) من العناصرالتي ندعوها أضلاع.
- تابع $\Psi: E \to P_2(V)$ ندعوه تابع انتقال يربط كل ضلع $e \in E$ بزوج غير مُرتَب (u(e),v(e))=(a, b) من العقد التي تنتمي إلى V والتي ندعوها، أطراف الضلع e.
  - نقول عندها أن الضلع e يصل العقدتين a و b؛
  - كما نقول أن العقدتان a و b متجاورتان.

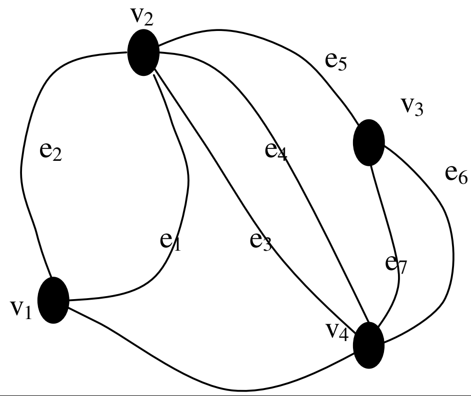
نُعرِّف بيان غير موجَّه (منتهي) بأنه ثلاثية $G=(V,E,\Psi)$ مؤلفة من:

- مجموعة منتهية V من العناصرالتي ندعوها رؤوس أو عُقَد.
- مجموعة منتهية E من العناصرالتي ندعوها أضلاع.
- تابع Ψ من E إلى مجموعة الثنائيات المُشَكلة على V، ندعوه تابع انتقال يربط كل ضلع e بزوج غير مُرتَب (a, b) من العقد التي تنتمي إلى V والتي ندعوها، أطراف الضلع e.
  - نقول عندها أن الضلع e يصل العقدتين a و b؛
  - كما نقول أن العقدتين a و b متجاورتان.

تمثيل البيان غير الموجَّه في المستوي

نربط نقطة من المستوي مع كل عقدة من عقد البيان ونمثل كل ضلع بمنحني بسيط يربط بين النقطتين المرتبطتين بطرفي الضلع.

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$
$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$



Ψ	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
u(e)	v_1	v_1	v_2	v_2	v_2	v_3	v_3
v(e)	v_2	v_2	v_4	v_4	v_3	v_4	v_4

نربط نقطة من المستوي مع كل عقدة من عقد البيان ونمثل كل ضلع بمنحني بسيط يربط بين النقطتين المرتبطتين بطرفي الضلع.

البيان الموجه

نُعرِّف بيان موجَّه (منته) بأنه ثلاثية $G=(V,E,\Psi)$ مؤلفة من:

- مجموعة منتهية V (حيث $|V|=n$) من العناصر التي ندعوها رؤوس أو عُقَد.
- مجموعة منتهية E (حيث $|E|=m$) من العناصر التي ندعوها سهام.
- تابع $\Psi:E\to V\times V$ ندعوه تابع انتقال يربط كل سهم $e\in E$ بزوج مُرتَب (u(e),v(e)) من العقد التي تنتمي إلى V والتي ندعوها، أطراف السهم e.
- في حال كان السهم e يمتد من العقدة u(e)=a إلى العقدة v(e)=b، نقول أن a هي الطرف البدائي للسهم، وb هو الطرف النهائي للسهم.

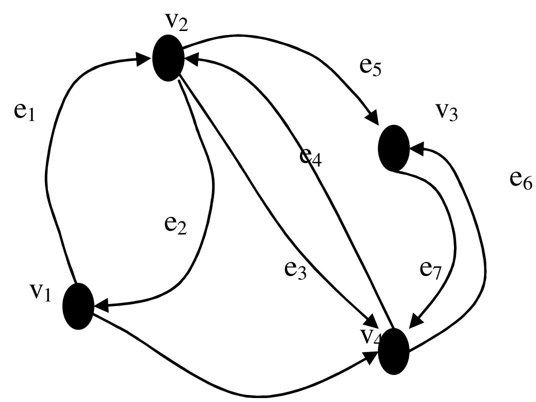
نُعرِّف بيان موجَّه (منته) بأنه ثلاثية $G=(V,E,\Psi)$ مؤلفة من:

- مجموعة منتهية V من العناصر التي ندعوها رؤوس أو عُقَد.
- مجموعة منتهية E من العناصر التي ندعوها سهام.
- تابع Ψ ندعوه تابع انتقال يربط كل سهم من E بزوج مُرتَب (u(e),v(e)) من العقد التي تنتمي إلى V والتي ندعوها، أطراف السهم e.
- في حال كان السهم e يمتد من العقدة u(e)=a إلى العقدة v(e)=b، نقول أن a هي الطرف البدائي للسهم، وb هو الطرف النهائي للسهم؛

تمثيل البيان الموجَّه في المستوي

نربط نقطة من المستوي مع كل عقدة من عقد البيان ونمثل كل سهم بمنحني بسيط موجه يمتد من نقطة البداية وحتى نقطة النهاية.

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$
$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

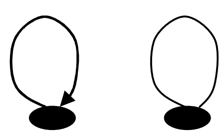


Ψ	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
u(e)	v_1	v_1	v_2	v_4	v_2	v_4	v_3
v(e)	v_2	v_2	v_4	v_2	v_3	v_3	v_4

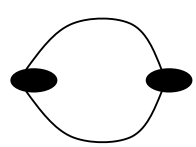
نربط نقطة من المستوي مع كل عقدة من عقد البيان ونمثل كل سهم بمنحني بسيط موجه يمتد من نقطة البداية وحتى نقطة النهاية.

الحلقات والأضلاع (الأسهم) المتعددة

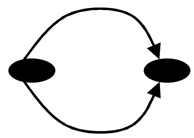
ندعو كل ضلع (سهم) يكون طرفاه متطابقان، حلقة.



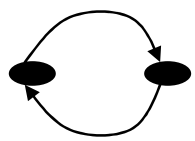
ندعو الأضلع التي تتشارك بنفس النهايات أضلعاً متوازية.



ندعو الأسهم التي لها نفس البدايات، ونفس النهايات، أسهماً متوازية.



لايُعتبر السهمان المتعاكسان (حيث بداية الأول هي نهاية الثاني وبالعكس) سهمين متوازيين.



ندعو كل ضلع (سهم) يكون طرفاه متطابقان، حلقة.

ندعو الأضلع التي تتشارك بنفس النهايات أضلعاً متوازية.

ندعو الأسهم التي لها نفس البدايات، ونفس النهايات، أسهماً متوازية.

لايُعتبر السهمان المتعاكسان (حيث بداية الأول هي نهاية الثاني وبالعكس) سهمين متوازيين.

البيانات البسيطة والبيانات المُركبة

نقول عن بيان أنه بيان بسيط إذا كان خالٍ من الحلقات ومن الأضلاع المكررة (أضلاع لها نفس زوج الرؤوس).

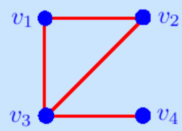
تكون البيانات بسيطة في غالبية الحالات التي سندرسها، مع ذلك، تكون معظم النتائج التي سنعرضها محققة بالنسبة لجميع البيانات المنتهية. لكن سنتكلم في بعض الأحيان عن البيانات المركبة للتأكيد على إمكانية السماح بوجود الأضلاع المكررة والحلقات.

يمكن تحديد كل ضلع في البيان البسيط دون أي التباس عن طريق تحديد زوج العقد أو الرؤوس (المرتب أو غير المرتب) الذي يعطي نهايتيه.

يصبح تمثيل التابع في هذه الحالة ممكناً بالثنائية $G=(V,E)$ حيث تعبِّر V عن مجموعة الرؤوس و E عن مجموعة أزواج نهايات الأضلاع (كل ضلع ممثل بنهايتيه).

مثال:

بيان غير موجّه بسيط

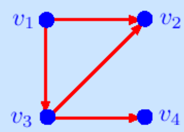


$G = (V, E)$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$$

بيان موجّه بسيط



$G = (V, E)$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4)\}$$

درجات

بفرض G بيان مركب:

- نعرف **درجة الرأس** (أو العقدة) v والتي نرمز لها $\deg(v)$، بأنها عدد الأسهم (الأضلاع) المرتبطة بالرأس v.

ملاحظة:

إذا كان للرأس حلقة أو عدة حلقات، فإن كل حلقة ستساهم بـــ 2 عند حساب درجة الرأس.

بفرض G بيان مركب موجّه:

- نعرف **الدرجة لرأس الخارجية** v، ونرمز لها $\deg_+(v)$، بأنها عدد الأسهم الصادرة عن الرأس v.
- نعرف **الدرجة الرأس الداخلية** v، ونرمز لها $\deg_-(v)$، بأنها عدد الأسهم التي تنتهي عند الرأس v.

ملاحظة:

يكون مجموع درجات الرأس في أي بيان عدداً زوجياً مساوياً لضعف عدد أضلاع البيان.

المصفوفات الممثلة لبيان بسيط غير موجه

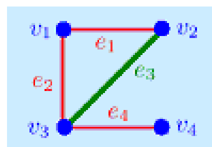
يمكن تمثيل أي بيان بسيط غير موجه بنوعين من المصفوفات:

مصفوفة التجاور

تكون أعمدتها وأسطرها مؤلفة من رؤوس البيان:

- نضع القيمة 1 في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر وعمود إذا كان هناك ضلع واصل بين الرأسين الممثلين بالسطر والعمود.
- نضع القيمة 0 في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر وعمود إذا لم يكن هناك ضلع واصل بين الرأسين الممثلين بالسطر والعمود.

مثال:



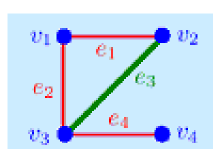
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\boldsymbol{B} = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
$$

مصفوفة الوصل

تكون أسطرها مؤلفة من رؤوس البيان، في حين تُعبِّر أعمدتها عن الأضلاع:

- نضع القيمة 1 في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر (رأس) وعمود (ضلع) إذا كان الرأس مرتبط بالضلع.
- نضع القيمة 0 في خانة المصفوفة الناتجة تقاطع سطر (رأس) وعمود (ضلع) إذا كان الرأس غيرمرتبط بالضلع.

مثال:



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\
\boldsymbol{A} = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
$$

المصفوفة الممثلة لبيان بسيط موجه

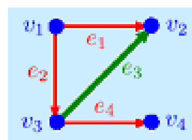
يمكن تمثيل أي بيان بسيط موجه بنوعين من المصفوفات:

مصفوفة التجاور

تكون أعمدتها وأسطرها مؤلفة من رؤوس البيان:

- نضع القيمة 1 في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر وعمود إذا كان هناك سهم واصل من الرأس المُمَثَّل بالسطر إلى الرأس المُمَثَّل بالعمود.
- نضع القيمة 0 في خانة المصفوفة في الحالات الأخرى.

مثال:



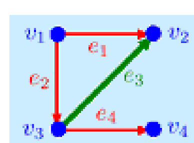
$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

مصفوفة الوصل

تكون أسطرها مؤلفة من رؤوس البيان، في حين تُعبِّر أعمدتها عن الأسهم:

- نضع القيمة 1 في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر (رأس) وعمود (سهم) إذا كان السهم يرد إلى الرأس.
- نضع القيمة 1- في خانة المصفوفة الناتجة عن تقاطع سطر (رأس) وعمود (سهم) إذا كان السهم يخرج من الرأس.
- نضع القيمة 0 في الحالات الأخرى.

مثال:

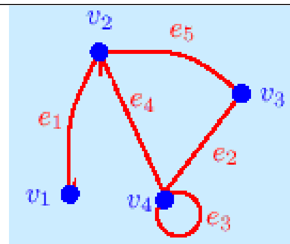


$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

حالات خاصة للمصفوفات المُمَثلة لبيان

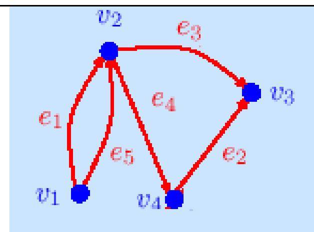
1. يمكن تمثيل بيان مُركَّب غير موجَّه ويمكن أن يكون له عند أي رأس حلقة على الأكثر، بواسطة مصفوفة تجاور.

مثال:

	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

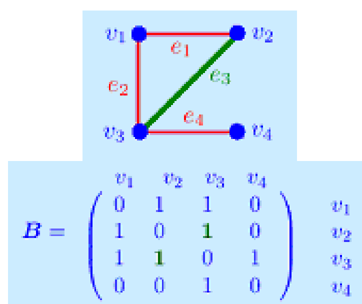
2. يمكن تمثيل بيان مُركَّب (موجَّه أو غير موجَّه) بدون حلقات، بواسطة مصفوفة وصل.

مثال:

	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. تكون مصفوفة التجاور لبيان غير موجَّه، متناظرة دوماً.

مثال:



1. يمكن تمثيل بيان مُركَّب غير موجَّه ويمكن أن يكون له عند أي رأس حلقة على الأكثر، بواسطة مصفوفة تجاور.

2. يمكن تمثيل بيان مُركَّب (موجَّه أو غير موجَّه) بدون حلقات، بواسطة مصفوفة وصل.

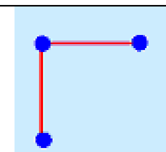
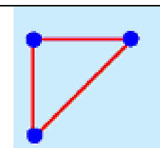
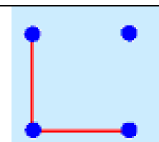
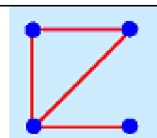
3. تكون مصفوفة التجاور لبيان غير موجَّه، متناظرة دوماً.

البيانات الجزئية، وأجزاء البيان

بفرض أن $G=(V,E)$ بيان:

- نقول أن G' جزء من البيان G إذا كان $G'=(V,E')$، و $E'\subseteq E$؛
- نقول أن G'' بيان جزئي من G تولده W إذا كان $G''=(W,E(W))$، بحيث يكون $W\subseteq V$ وتعبر $E(W)$ عن مجموعة الأضلاع التي تكون نهايتيها ضمن W.
- نقول أن G''' جزء من بيان جزئي من G إذا كان G''' جزء من أحد البيانات الجزئية لــ G.

مثال:

			
البيان G''' الذي يشكل جزء من البيان G'' الجزئي من البيان G	البيان G'' الجزئي من البيان G	البيان G' جزء من البيان G	البيان G

بفرض أن $G=(V,E)$ بيان:

- نقول أن G' جزء من البيان G إذا كان $G'=(V,E')$، و $E'\subseteq E$؛
- نقول أن G'' بيان جزئي من G تولده W إذا كان $G''=(W,E(W))$، بحيث يكون $W\subseteq V$ وتعبر $E(W)$ عن مجموعة الأضلاع التي تكون نهايتيها ضمن W.
- نقول أن G''' جزء من بيان جزئي من G إذا كان G''' جزء من أحد البيانات الجزئية لــ G.

البيانات غير الموجَّهة: السلاسل والحلقات
- تعاريف ومصطلحات -

- نُعرِّف **السلسلة** بأنها متتالية متناوبة من العقد والأضلاع، تبدأ بعقدة وتنتهي بعقدة:
$$C = \left(u_0, f_1, u_1, f_2, u_2, \ldots\ldots, u_{k-1}, f_k, u_k\right)$$
$$where\ (u_i \in V, \forall i)\ and\ (f_i \in E, \forall i)\ and\ (f_i = \{u_{i-1}, u_i\}, \forall i)$$

- نُعرِّف **الحلقة** بأنها سلسلة تحوي على الأقل ضلعاً له نفس النهايتين.

- ندعو السلسلة التي تحوي عقدةً واحدة فقط سلسلة **بديهية**؛

- تكون السلسلة أو الحلقة **أولية** إذا ظهرت عقدة فيها لمرة واحدة فقط.

- تكون السلسلة أو الحلقة **بسيطة** إذا ظهر كل ضلع فيها لمرة واحدة فقط.

- نُعرِّف **طول** السلسلة أو الحلقة بعدد أضلاعها.

- نقول عن بيان غير موجه بأنه **خالٍ من الحلقات** إذا لم يكن يحتوي على أية حلقة بسيطة.

- نقول عن البيان الخالي من الحلقات بأنه **غابة**.

البيانات الموجهة: الطرق والدارات
- تعاريف ومصطلحات -

- نُعرِّف **الطريق** بأنه متتالية متناوبة من الرؤوس والأسهم، يبدأ برأس وينتهي برأس:
$$C = \left(u_0, f_1, u_1, f_2, u_2, \ldots\ldots, u_{k-1}, f_k, u_k\right)$$
$$where\ (u_i \in V, \forall i)\ and\ (f_i \in E, \forall i)\ and\ (f_i = \{u_{i-1}, u_i\}, \forall i)$$

- نُعرِّف **الدارة** بأنها طريق يحتوي على الأقل سهماً واحداً له نهايتين مندمجتين.

- ندعو الطريق الذي يحوي رأساً واحداً فقط طريق **بديهي**؛

- يكون الطريق (الدارة) **أولي** إذا ظهر كل رأس فيه لمرة واحدة فقط.

- يكون الطريق (الدارة) **بسيط** إذا ظهر كل سهم فيه لمرة واحدة فقط.

- نُعرِّف **طول** الطريق (الدارة) بعدد أسهمه.

- نقول عن بيان موجَّه بأنه **خالٍ من الدارات** إذا لم يكن يحتوي على أية دارة بسيطة.

علاقة الترابط

- ليكن لدينا البيان المُركَّب غير الموجه التالي:

$$G = (V, E, \psi)$$

- نُعرِّف على V علاقة ترابط C كمايلي:

$v_i \; C \; v_j \Leftrightarrow$ توجد سلسلة (بديهية على الأقل) بين v_i و v_j.

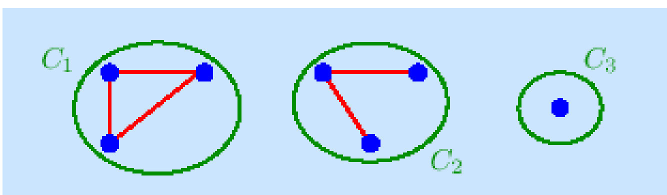
- تكون C علاقة تكافؤ: إنعكاسية، متناظرة، متعدية.

- تحدد صفوف التكافؤ الناجمة عن العلاقة السابقة **مكونات مترابطة** من البيان G.

- نقول عن بيان أنه **مترابط** $\Leftrightarrow$ يتألف من قطعة واحدة مترابطة.

مثال:

تؤلف المكونات C_1 و C_2 و C_3 الظاهرة في الشكل التالي مكونات مترابطة:



- ليكن لدينا بيان مُركَّب غير موجّه.
- نُعرِّف على أزواج عقد البيان علاقة ترابط C تكون مُعرَّفة على زوج من العقد في حال وجود سلسلة (بديهية على الأقل) بين عقدتي الزوج.
- تكون العلاقة السابقة علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية، ومتناظرة، ومتعدية.
- تحدد صفوف التكافؤ الناجمة عن العلاقة السابقة **مكونات مترابطة** من البيان.
- نقول عن بيان أنه **مترابط** إذا وفقط إذا كان البيان يتألف من قطعة واحدة مترابطة.

علاقة الترابط القوي

- ليكن لدينا البيان المُركَّب الموجَّه التالي:

$$G = (V, E, \psi)$$

- نُعرِّف على V علاقة ترابط قوية CF كمايلي:

$v_i \ CF \ v_j \Leftrightarrow$	يوجد طريق (بديهي على الأقل) بين v_i و v_j، ويوجد طريق (بديهي على الأقل) بين v_j و v_i.

- تكون CF علاقة تكافؤ: إنعكاسية، متناظرة، متعدية.
- تحدد صفوف التكافؤ الناجمة عن العلاقة السابقة **مكونات قوية الترابط** من البيان G.
- نقول عن بيان أنه **قوي الترابط** $\Leftrightarrow$ يتألف من قطعة واحدة قوية مترابطة.

- ليكن لدينا بيان مُركَّب موجّه.
- نُعرِّف على أزواج رؤوس البيان علاقة ترابط قوي FC تكون مُعرَّفة على زوج من الرؤوس في حال وجود طريق (بديهي على الأقل) من عالرأس الأول إلى الثاني وطريق آخر من الثاني إلى الأول.
- تكون العلاقة السابقة علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية، ومتناظرة، ومتعدية.

- تحدد صفوف التكافؤ الناجمة عن العلاقة السابقة **مكونات قوية الترابط** من البيان.

- نقول عن بيان أنه **قوي الترابط** إذا وفقط إذا كان البيان يتألف من قطعة واحدة قوية الترابط.

خوارزمية تحديد المكونات القوية الترابط في بيان مركَّب وموجَّه

ليكن لدينا البيان المُركَّب الموجَّه التالي: $G=(V,E,\psi)$، نريد تحديد المكونات القوية الترابط $C=\{C_1,...,C_k\}$ وعددها k ضمن البيان G:

الخوارزمية:

Input: $G=(V,E,\psi)$

k=0;
W=V;

While $(W \neq \phi)$
{
Get $v \in W$;
$Sc_v = \{v\}$; // Set of v Successor
$Pr_v = \{v\}$; // Set of v Predecessor

For each x direct or indirect successor of v
$Sc_v = Sc_v \cup \{x\}$;

For each y direct or indirect predecessor of v
$Pr_v = Pr_v \cup \{y\}$;

$C_k = Sc_v \cap Pr_v$;

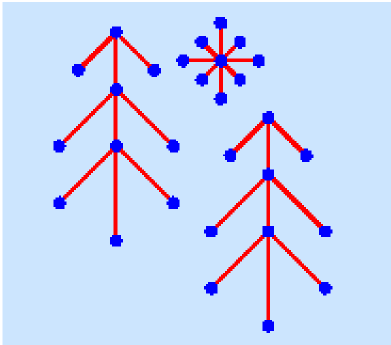
k=k+1;
$W = W - C_k$
}

Result: k, $C=\{C_1,...,C_k\}$

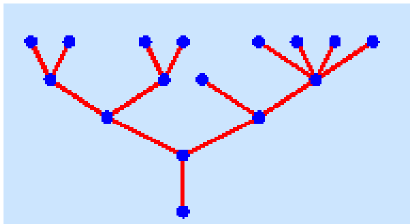
ليكن لدينا بيان مُركَّب موجَّه، نريد تحديد المكونات القوية الترابط وعددها k ضمن البيان G.

الأشجار والغابات

ندعو بيان غير موجَّه بدون حلقات **غابة**.



ندعو بيان غير موجَّه ومترابط **شجرة**.



تُعرِّف الأشجار والغابات بيانات بسيطة، بحيث يُعرِّف كل مكون قوي الترابط ضمن غابة، شجرة.

ندعو بيان غير موجَّه بدون حلقات **غابة**.
ندعو بيان غير موجَّه ومترابط **شجرة**.
تُعرِّف الأشجار والغابات بيانات بسيطة، بحيث يُعرِّف كل مكون قوي الترابط ضمن غابة، شجرة.

تمارين

تمرين 1:

لنفرض أن لدينا بيان تكون درجات عقده هي: 0، 2، 2، 3، 9. كم عدد أضلاع هذا البيان؟

الحلّ:

تكون درجة البيان: 0+2+2+3+9=16، لذا يكون عدد أضلاعه هو: 16/2=8.

تمرين 2:

ليكن لدينا مجموعة من 15 شخصاً، ولنعرِّف علاقة صداقة بحيث تربط هذه العلاقة بين شخصين وتكون متناظرة (إذا كان x صديق y فإن y صديق x).

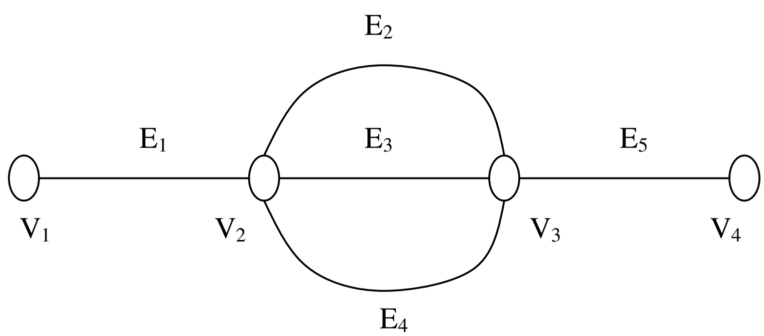
هل يمكن أن يكون لكل شخص من المجموعة السابقة 3 أصدقاء؟

الحلّ:

إذا مثلنا الأشخاص بعقد وعلاقات الصداقة بأضلاع (كل ضلع يربط بين صديقين). ففي حال كان لكل شخص من المجموعة 3 أصدقاء فهذا يعني أن لديه 3 أضلاع متصلة به وبأن درجة كل عقدة هي 3. بالنتيجة يكون مجموع درجات البيان $15*3=45$ وهو عدد فردي وهو مايخالف مسلّمة أن درجة البيان هو عدد زوجي لأنه يساوي ضعف عدد الأضلاع.

تمرين 3:

ليكن لدينا البيان التالي:



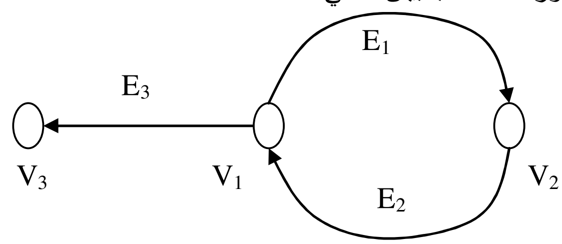
- كم عدد السلاسل البسيطة بين V_1 و V_4؟
- كم عدد السلاسل بين V_1 و V_4؟

الحلّ:

- 3
- 12

تمرين 4:

أوجد مصفوفة التجاور الخاصة بالبيان التالي:



الحلّ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين 5:

هل البيان الذي يمتلك مصفوفة التجاور التالية، هو بيان مترابط:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحلّ:

نعم.

القسم الثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر

الأشجار والبيانات: أنماط، ونظريات، وخورزميات

الكلمات المفتاحية:

بيان كامل، مُكمِّل بيان، بيان ذو جزئين، بيان مستوي، بيانات أولير، سلاسل أولير، حلقات أولير، البيانات الهاميلتونية، الحلقات الهاميلتونية، شجرة التغطية.

ملخص:

نتعرف في هذا القسم على بعض أنواع البيانات والأشجار وخصائصها، بالإضافة إلى بعض الخوارزميات الأساسية اللازمة للتعامل مع البيانات أو الأشجار.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- العدد الدال على الحلقات؛
- توصيف الأشجار؛
- البيان الكامل والبيان المُكمِّل؛
- بيانات أولير والبيانات الهاميلتونية؛
- البحث عن الطريق الأقصر؛
- خوارزمية Djikstra؛
- خوارزمية Bellman-Ford؛
- شجرة التغطية؛
- تطبيق على إدارة المشاريع.

العدد الدال على الحلقات

ليكن G بيان مُركَّب مؤلف من n عقدة، ومن m ضلع، ومن p مكون مترابط. نعرِّف العدد الدال على الحلقات v(G) الخاص بالبيان G كمايلي: $v(G)=m-n+p$

يمكننا أن نستنتج مما سبق مايلي:

نظرية:

من أجل كل بيان مُركَّب G، يكون $v(G)\geq 0$. ويكون $v(G)=0$ إذا وفقط إذا، كان G بدون أية حلقة.

البرهان:

ليكن G بيان مُركَّب مؤلف من n عقدة، ومن m ضلع، ومن p مكون مترابط.

لنأخذ سلسلة من البيانات G_i حيث $i=1...m$ وبحيث $E_i=\{e_1,...,e_m\},i=1...m$.

النظرية صحيحة من أجل $G_0=(V,\phi)$ الذي يتكون من n عقدة وبدون أضلاع، لأن:

$$v(G_0)=m(G_0)-n+p(G_0)$$
$$v(G_0)=0-n+n$$
$$v(G_0)=0$$

لنفرض أن النظرية صحيحة من أجل G_k ولنبرهن أنها صحيحة G_{k+1}. تكون لدينا الحالتين التاليتين:

1. يربط الضلع e_{k+1} بين رأسين موجودين في مكونين مترابطين مختلفين من G_k، بالنتيجة يكون:

$$v(G_{k+1})=m(G_{k+1})-n+p(G_{k+1})$$
$$v(G_{k+1})=(k+1)-n+(p(G_k)-1)$$
$$v(G_{k+1})=k-n+p(G_k)$$
$$v(G_{k+1})=v(G_k)\geq 0$$

بالإضافة لماسبق وفي حال كان G_k بدون حلقات، فإن $v(G_k)=0$ لأننا افترضنا أن النظرية صحيحة بالنسبة له، ممايعني أن $v(G_{k+1})=v(G_k)=0$.

2. يربط الضلع e_{k+1} بين رأسين موجودين في نفس المكون المترابط من G_k (مما يعني وجود حلقة على الأقل)، بالنتيجة يكون:

$$v(G_{k+1})=m(G_{k+1})-n+p(G_{k+1})$$
$$v(G_{k+1})=k+1-n+p(G_k)$$
$$v(G_{k+1})=v(G_k)+1\geq 0$$

ليكن G بيان مُركَّب مؤلف من n عقدة، ومن m ضلع، ومن p مكوِّن مترابط. نعرِّف العدد الدال على الحلقات v(G) الخاص بالبيان G كمايلي: $v(G)=m-n+p$.

يمكننا أن نستنتج مما سبق مايلي:

من أجل كل بيان مُركَّب G، يكون $v(G)\geq 0$. ويكون $v(G)=0$ إذا وفقط إذا، كان G بدون أية حلقة.

نظرية:

ليكن G=(V,E) بيان بسيط يحتوي على n رأس. تكون المواصفات التالية متكافئة:

1. G شجرة.
2. G بدون حلقات، ومترابط.
3. G بدون حلقات ويحتوي على n-1 ضلع.
4. G مترابط ويحتوي على n-1 ضلع.
5. تربط بين كل زوج من العقد المختلفة في G سلسلة واحدة بسيطة.

البرهان:

- تكون (1) مكافئة لـــ (2) بالتعريف.
- تكون (2) مكافئة لـــ (3) وفقاً لمايلي:
  - إذا افترضنا أن G بدون حلقات ومترابط، يكون $v(G)=0$ ويكون عدد المكونات المترابطة هو: $p=1$، بالإضافة إلى أن عدد الأضلاع يكون: $m=n-p=n-1$.
  - أما إذا افترضنا أن G بدون حلقات ويحتوي على n-1 ضلع، فيكون $v(G)=0$، و $m=n-1$ بالإضافة إلى أن $p=1$.
- تكون (3) مكافئة لـــ (4) وفقاً لمايلي:
  - إذا افترضنا أن G بدون حلقات ويحتوي على n-1 ضلع، فيكون $v(G)=0$، و $m=n-1$ بالإضافة إلى أن $p=1$ مما يعني أن G يشكل مكوِّن مترابط.
  - بالمقابل، إذا افترضنا أن G هو مكوِّن مترابط يحوي n-1 ضلع، مع العلم أن $p=1$، مما يعني أن $v(G)=m-n+p=n-1-n+1=0$ وبالتالي فإن G بدون حلقات ويمتلك n-1 ضلع.
- تكون (4) مكافئة لـــ (5) وفقاً لمايلي:
  - إذا افترضنا أن G هو عبارة عن مكون مترابط، فهذا يعني أن أي عقدتين تكون مرتبطتين بسلسلة بسيطة. فإذا كان G بدون حلقات، فإنه يوجد **على الأكثر** سلسلة بسيطة بين أي رأسين من G.
  - بالمقابل، يؤدي افتراض وجود سلسلة واحدة بسيطة بين أي عقدتين إلى الاستنتاج البديهي بكون G مترابط وبدون حلقات.

ليكن G=(V,E) بيان بسيط يحتوي على n رأس. تكون المواصفات التالية متكافئة:

1. G شجرة.
2. G بدون حلقات، ومترابط.
3. G بدون حلقات ويحتوي على n-1 ضلع.
4. G مترابط ويحتوي على n-1 ضلع.
5. تربط بين كل زوج من العقد المختلفة في G سلسلة واحدة بسيطة.

بعض خصائص الأشجار

- يكون لكل شجرة منتهية مؤلفة من n عقدة حيث $n \geq 2$، ورقتان، بمعنى آخر عقدتان ترتبط كل منهما بضلع واحد فقط.
- نقول عن بيان G أنه مترابط إذا وفقط إذا كان يملك بياناً جزئياً يمثل شجرة.
- يمكننا في كل شجرة منتهية لها n عقدة حيث $n \geq 2$، اختيار عقدة v_1 بشكل عشوائي، وإيجاد طريقة لترقيم العقـد الباقيـة $v_2, v_3, ...v_n$ ولترقيم الأضلاع $e_2, e_3, ..., e_n$ بحيث يكون طرفا e_i هما العقدتين v_i و v_j حيث $j < i$.
- تكون أبعاد مصفوفة الوصل لشجرة مؤلفة من n عقدة هو $(n-1)\times(n-1)$.

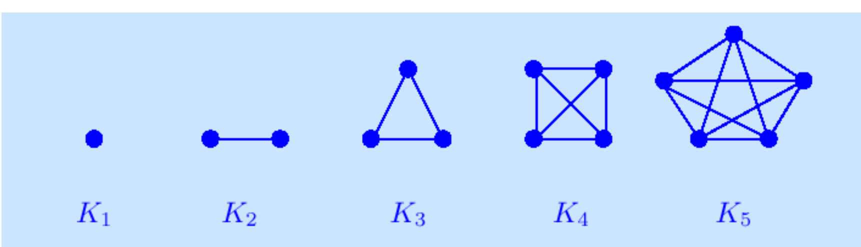
البيانات الكاملة

نعرّف البيان الكامل المؤلف من n عقدة ونرمز له بالرمز K_n بأنه بيان بسيط يحوي بالضبط ضلعاً واحداً بين كل زوج متبـاين من العقد.

يكون البيان المكمّل للبيان الكامل بياناً فارغاً.

ملاحظة:
يكون البيان المكمل للبيان البسيط $G = (V, E)$ هو البيان البسيط $\bar{G} = (V, \bar{E})$ والذي تكون فيه العقدتان المختلفتان متجاورتين إذا وفقط إذا لم تكونا متجاورتين في G.

أمثلة عن بيانات كاملة:

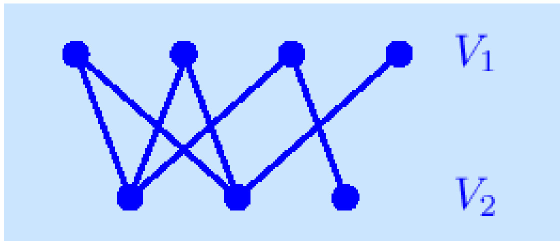


نربط نقطة من المستوي مع كل عقدة من عقد البيان ونمثل كل ضلع بمنحني بسيط يربط بين النقطتين المرتبطتين بطرفي الضلع.

البيانات ذات الجزئين

نقول عن بيان $G=(V,E,\psi)$ أنه ذو جزيئين إذا أمكننا تجزئة مجموعة العقد التي يتألف منها إلى مجموعتين V_1 و V_2 بحيث تكون النهاية الأولى لكل ضلع من أضلاع G في V_1 والنهاية الأخرى للضلع في V_2.

مثال:



خصائص:

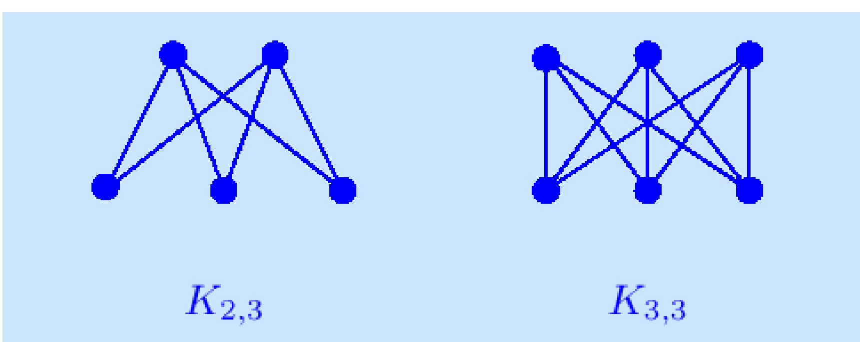
- نقول عن بيان $G(V,E,\psi)$ أنه ذو جزيئين إذا وفقط إذا كان لا يحوي حلقات طولها فردي.
- نقول عن بيان $G(V,E,\psi)$ أنه ذو جزيئين إذا وفقط إذا كان قابلاً للتلوين بلونين، بمعنى آخر إذا كان باستطاعتنا تلوين القمم بواسطة لونين، بحيث يكون لقمتين متجاورتين لونين مختلفين.

البيانات الكاملة ذات الجزئين $k_{n,m}$

البيان الكامل ذو الجزيئين $k_{n,m}$ هو بيان ذو جزيئين $G(V_1 \cup V_2, E)$ يحقق:

- $|V_1|=n, \quad |V_2|=m$.
- يوجد ضلع بين كل زوج من العقد (v_1,v_2) بحيث $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$.

مثال:

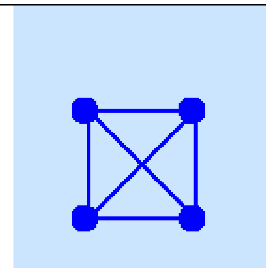
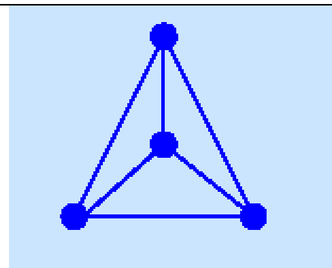


البيانات المستوية

نقول عن بيان أنه مستوي إذا كان من الممكن تمثيله بيانياً بحيث لا تتقاطع أضلاعه (إلا في النقاط الطرفية المشتركة).

نقول عن مثل هذا البيان بأنه بيان مستوي طبولوجياً.

مثال:

	
K4	التمثيل المستوي للبيان K4

نقول عن بيان أنه مستوي إذا كان من الممكن تمثيله بيانياً بحيث لا تتقاطع أضلاعه (إلا في النقاط الطرفية المشتركة).

نقول عن مثل هذا البيان بأنه بيان مستوي طبولوجياً.

بيانات أولير

نقول عن حلقة بأنها حلقة أولير، إذا كانت تمر مرة واحدة فقط من كل ضلع من أضلاع البيان.
نقول عن سلسلة بأنها سلسلة أولير، إذا كانت تمر مرة واحدة فقط من كل ضلع من أضلاع البيان.
نقول عن بيان أنه بيان أولير إذا احتوى على سلسلة أولير أو على حلقة أولير.

خصائص:

- إذا كانت جميع عقد بيان مترابط ذات درجات زوجية، فإنه سيحتوي على حلقة أولير.
- إذا امتلك بيان مترابط عقدتين ذات درجات فردية، فإن هذا البيان يحتوي على سلسلة أولير يكون طرفاها العقدتين المذكورتين ذات الدرجات الفردية.
- يكون البيان المترابط، بيان أولير إذا لم يمتلك أية عقدة ذات درجة فردية، أو امتلك عقدتين ذات درجات فردية.

تمرين:

أعط بالرسم أمثلة توضح كل خاصة من الخصائص السابقة.

البيانات الهاميلتونية

نقول عن حلقة بأنها حلقة هاميلتونية، إذا كانت تمر مرة واحدة فقط من كل عقدة من عقد البيان.

نقول عن بيان أنه بيان هاميلتوني إذا احتوى على حلقة هاميلتونية.

في بيان مُثقَّل (ذو أضلاع لها أوزان) ندعو عملية البحث عن أقصر حلقة هاميلتونية **بمسألة البائع المتجول** التي تحاول إيجاد أقصر طريق يمكن لبائع متجول أن يمر به بين مجموعة من المدن المترابطة مع بعضها البعض حتى يتمكن من زيارة جميع المدن لبيع بضاعته (تكون أوزان الأضلاع في هذه المسألة ممثلة بطول الطرقات بين المدن).

مسألة الطريق الأقصر

ليكن لدينا البيان البسيط الموجه والمترابط $G=(V,E)$. لنزود هذا البيان بتابع تثقيل: $c:E\to\mathbb{R}$ الذي يربط كل سهم (i,j) بوزن أو ثِقَل c_{ij}. ندعو البنية المؤلفة من البيان مع تابع التثقيل، **شبكة** ونرمز لها بالرمز: $R=(V,E,c)$.

عادةً، توجد أربعة بدائل من مسائل الطرق الأقصر:

- تحديد الطريق الأقصر اعتباراً من الرأس s الذي يحدد بداية الطريق، والرأس t الذي يحدد نهاية الطريق.
- تحديد الطريق الأقصر اعتباراً من الرأس s الذي يحدد بداية الطريق، وأي رأس من رؤوس البيان.
- تحديد الطريق الأقصر اعتباراً من أي رأس من رؤوس البيان إلى رأس t يحدد نهاية الطريق.
- تحديد الطريق الأقصر بين أي زوج من رؤوس البيان.

ملاحظة:

يكون طول الطريق في شبكة مساوياً لمجموع أوزان أمثال الأسهم التي تؤلفه.

مبدأ Bellman للأَمثَلة

إذا كان C الطريق الأقصر الذي يربط الرأس s بالرأس t، وإذا كان الرأس u ينتمي إلى هذا الطريق الأقصر، تكون الطرق من s إلى u ومن u إلى t هي الطرق الأقصر بين هذه الرؤوس.

نتيجة: يكون الطريق الأقصر مؤلف من الطرق الأقصر

معادلات Bellman

ليكن λ_j طول الطريق الأقصر من s إلى j. من أجل كل رأس j من الشبكة $R=(V,E,c)$ يكون لدينا:

$$\lambda_j \le \lambda_i + c_{ij} \quad \forall i \in Pred[j]$$

تصبح المتراجحة مساواة في حال وجود طريق أقصر من s إلى j ينتهي بالسهم (i,j).

ليكن $\lambda_s = 0$، تشكل أطوال الطرق الأقصرمن s إلى بقية رؤوس R، في حال وجودها، حلولاً لمعادلات Bellman:

$$\lambda_j = \min_{i \in Pred[j]}(\lambda_i + c_{ij}) \quad \forall j \in V-\{s\}$$

خوارزمية Dijkstra لحساب الطريق الأقصر

بنى المعطيات المُستَخدَمة:

- G(V,E): البيان.
- S: مجموعة الرؤوس التي تم حساب الطريق الأقصر إليها اعتباراً من القمة.
- V-{s}: الرؤوس التي لم يجر بعد حساب الطريق الأقصر إليها من القمة.
- d: جدول بالتقديرات الأفضل لأقصر طريق من أجل كل رأس.
- Pi: جدول بمجموعة الرؤوس التي تسبق الرأس i.

الخوارزمية:

```
shortest_paths( Graph g, Node s )
{
        initialise_single_source( g, s )
        S := { 0 }       /* Make S empty */
        Q := Vertices( g ) /* Put the vertices in a PQ */

        while not Empty(Q)
         {
                u := ExtractCheapest( Q );
                AddNode( S, u ); /* Add u to S */
                for each vertex v in Adjacent( u )
                        relax( u, v, w )
        }
}
```

```
initialise_single_source( Graph g, Node s )
{
        for each vertex v in Vertices( g )
        {
                g.d[v] := infinity
                g.pi[v] := nil
                g.d[s] := 0
        }
}
relax( Node u, Node v, double w[][] )
{
        if d[v] > d[u] + w[u,v] then
        {
                d[v] := d[u] + w[u,v]
                pi[v] := u
        }
}
```

خوارزمية Bellman-Ford

نبدأ من القيم الإبتدائية:

$$\lambda_s = 0,\ \lambda_j = \infty \quad j \in V\text{-}\{s\}$$

نكرر المرور على كافة أسهم البيان، ونختبر من أجل كل سهم (i,j) فيما إذا كان الشرط التالي محققاً: $\lambda_j \le \lambda_i + c_{ij}$ فإذا لم يكن محققاً، فإننا نضع $\lambda_j = \lambda_i + c_{ij}$، ثم نتحقق من وجود أوزان سالبة.

```
function BellmanFord(list V, list E, vertex s)
BEGIN

// Step 1: Initialize graph
for each vertex v in V:
{
       if v is source then v.distance := 0
       else v.distance := infinity
       v.predecessor := null
}

// Step 2: relax edges repeatedly
for i from 1 to size(V):
        for each edge uv in E:
        {
                u := uv.source
                v := uv.destination
                // uv is the edge from u to v

                if v.distance > u.distance + uv.weight:
                {
                        v.distance:=u.distance+uv.weight
                        v.predecessor := u
                }
        }

// Step 3: check for negative-weight cycles
for each edge uv in edges:
{
        u := uv.source
        v := uv.destination
        if v.distance > u.distance + uv.weight:
        error "Graph contains a negative-weight cycle"
}
END
```

تعقيد الخوارزمية

انطلاقاً من مجموعة من المعطيات التي ندعوها الدخل، تنفذ الخوارزمية مجموعة من العمليات، وتعطي نتيجة ندعوها الخرج. يقاس حجم المعطيات بعدد صحيح n (n بت أو بايت أو كيلوبايت أو... الخ).

يكون التعقيد الزمني للخوارزمية تابعاً لحجم معطيات الدخل n، إذ يجري قياس زمن الحساب تبعاً لمعطى حجمه n، فكلما ازدادت n ازداد زمن الحساب اللازم للخوارزمية:

- في أسوأ الحالات، يعطي الحد الأعلى لزمن الحساب من أجل جميع المعطيات ذات الحجم n؛
- وسطياً، يجري حساب متوسط زمن الحساب من أجل جميع المعطيات ذات الحجم n؛

يكون التعقيد في الذاكرة تابعاً لحجم معطيات الدخل n، إذ يجري قياس مساحة الذاكرة المطلوبة للخوارزمية تبعاً لمعطى حجمهn.

هل نقوم فعلياً بقياس زمن الحساب؟

كلا، لأن زمن الحساب يتعلق بساعة الجهاز، ولكن:

- نقدِّر عدد العمليات "الأساسية" المنفذة (جمع، جداء،..)؛
- نحصل بذلك على تقدير لزمن الحساب بارتياب قيمة هي قيمة الجداء بثابت (هذا الثابت هو الزمن اللازم للجهاز للقيام بعملية من العمليات الآنفة الذكر)؛
- لا نأخذ في هذا التقدير من كثير الحدود الذي ينتج إلا الحدّ الذي ندعوه بالحدّ الراجح.

مثال:

في خوارزمية حساب كالخوارزمية التالية:

```
for (i=1; i<=n; i=i+1)
        for  (j=1; j<=n; j=j+1)
                x=y*z;
```

- هناك n عملية x=y*z مكررة n مرة، مما يعني أن لدينا **n^2 عملية x=y+z**؛
- هناك **n عملية i=i+1**؛
- هناك n عملية j=j+1 مكررة n مرة، مما يعني أن لدينا **n^2 عملية j=j+1**.

اعتماداً على ماسبق، نهتم بالحد الراجح ونهمل بقية الحدود فنحصل على تعقيد هو **n^2**، ويكون مُعبراً عن زمن الحساب بارتياب قيمة ثابت هو الزمن اللازم للحاسب لحساب عملية من العمليات الحسابية.

نقول عندها أن تعقيد الخوارزمية هو من مرتبة مربع n ونرمز لذلك بالرمز $O(n^2)$.

هل نقوم فعلياً بقياس زمن الحساب؟

كلا، لأن زمن الحساب يتعلق بساعة الجهاز، ولكن:

- نقدِّر عدد العمليات "الأساسية" المنفذة (جمع، جداء،..)؛
- نحصل بذلك على تقدير لزمن الحساب بارتياب قيمة هي قيمة الجداء بثابت (هذا الثابت هو الزمن اللازم للجهاز للقيام بعملية من العمليات الآنفة الذكر)؛
- لا نأخذ في هذا التقدير من كثير الحدود الذي ينتج إلا الحدّ الذي ندعوه بالحدّ الراجح.

توقف خوارزمية Bellman-Ford

في حال وجود أقصر طريق من s إلى j، يكون هذا الطريق بسيطاً وأولياً. يتألف من n-1 سهم على الأكثر في حال كان البيان يمتلك n رأس.

تتوقف خوارزمية Bellman-Ford عن العمل في حال:

- لم يحصل أي تخفيض لقيم λ_j بعد دورة كاملة.
- أو في أسوأ الأحوال بعد n تكرار.

في حال تم التوقف بعد n تكرار وفي حال حصل تخفيض خلال التكرار الأخير، تكون للشبكة دارة ذات طول سالب (يمكن الوصول إليها اعتباراً من الرأس البداية s)، ولاتوجد طرق أقصر.

من أجل شبكة مؤلفة من n رأس و m سهم يكون تعقيد الخوارزمية من مرتبة O(mn).

شجرة التغطية: تعريف

ليكن G=(V,E) بياناً مترابطاً مزود بتابع تثقيل c لكل سهم من أسهمه.

نريد البحث عن الشجرة التي ندعوها شجرة التغطية $T=(V,E_T)$ من G والتي يكون وزنها الكلي أصغري.

ملاحظات:

- تمس شجرة التغطية كافة الرؤوس. ففي بيان مترابط يحتوي على n رأس يكون لشجرة التغطية n-1 سهم.
- إذا لم يكن البيان بسيطاً، يمكننا حذف كافة الحلقات منه، واختيار أسهم ذات الأوزان الأصغر من بين الأسهم المكررة.
- إذا لم يكن البيان مترابطاً، يمكننا التعامل مع كل مكون مترابط منه على حدى لتشكيل غابة تغطية ذات وزن أصغري.

خوارزمية Kruskal لحساب شجرة التغطية الأصغرية

الدخل:

- بيان G=(V,E) حيث |V|=n و |E|=m.
- تابع تثقيل: $c : E \to \mathbb{R}$ للأسهم.

الخرج:

- شجرة $T=(V,E_T)$ ذات وزن كلي أصغري.

الخوارزمية:

رتّب ورقِّم أسهم G بالترتيب غير التنازل لأوزانهم (ترتيب عشوائي في حال تساوي أوزان بعض الأسهم):

```
c(e1) ≤ ... ≤ c(em) .
k=1
ET = ϕ
while | ET |< n − 1 do
{
        if ek doesn't make any cycle with ET then
                ET = ET ∪ {ek}
        k=k+1;
}
```

تطبيق على إدارة المشاريع

لنأخذ مشروعاً معقداً موصفاً بما يلي:

- مجموعة من المهام والأعمال التي لها أوقات محددة.
- شروط أسبقية بين مجموعة من الأعمال.

لنبحث عن إمكانية ترتيب المهام وعلى تخطيط تواريخ تنفيذهم بحيث:

- نحقق شروط الأسبقية.
- نقلل قدر المستطاع من المدة الكلية اللازمة لتنفيذ المشروع.
- نقيِّم تأثير تأخير التنفيذ على مدة المشروع.

تطبيق على إدارة المشاريع: النمذجة

ننمذج المسألة السابقة بشبكة:

- تمثل رؤوسها مهام المشروع.
- يوجد سهم يصل بين أي رأسين i و j من رؤوسها إذا وُجد شرط أسبقية بين المهام المرتبطة بكل من i و j.
- يرتبط بكل سهم (i,j) من أسهمها وزن c_{ij} يعبر عن الفترة الزمنية d_i اللازمة لتنفيذ المهمة المرتبطة بالرأس i قبل الانتقال للمهام المرتبطة بالرأس j.

نضيف للشبكة السابقة:

- رأس α يمثل بداية المهام، ويكون للمهام المرتبطة به مدة null، وتسبق هذه المهام جميع المهام التي ليس لها أسبقية.
- رأس ω يمثل نهاية الأعمال، ويكون للمهام المرتبطة به مدة null، ولا يكون لهذه المهام أي مهام لاحقة.

يكون البيان المرتبط بمشروع من هذا النمط، عبارة عن بيان بدون دارات، وتعود عملية تحديد المدة الأقصر لتنفيذ المشروع إلى حساب الطريق الأقصر بين α و ω.

تطبيق على إدارة المشاريع: خوارزمية الطريق الحرج

الدَخل:

1. شبكة $R=(V,E,c)$ مرتبطة بمشروع.
2. تكون رؤوس اشبكة (عددها n) مُرقمة بشكل متوافق مع ترتيبها بحيث يكون للرأس a (البداية) الرقم 1 وللرأس w (النهاية) الرقم n.

الخَرج:

1. الزمن الأقصر D للمشروع.
2. من أجل كل مهمة i، التاريخ الأبكر B_i لبداية المهمة، والتاريخ E_i الأكثر تأخيراً لبداية نفس المهمة، والزمن D_i اللازم للوصول إلى المهمة.

الخوارزمية:

1. احسب تواريخ البدايات الأبكر:

$B_1=0$
for k=2 to n do
$$B_k=\max_{j\in Pred[k]}\{B_j+c_{jk}\}=\max_{j\in Pred[k]}\{B_j+D_j\}$$

2. احسب تواريخ البدايات الأكثر تأخيراً:

$D = B_n$
$E_n = B_n$
for k=n-1 to 1 do
$$E_k = \min_{k\in Succ[j]}\{E_j - c_{kj}\} = \min_{k\in Succ[j]}\{E_j\} - D_k$$

نتائج:

1. تكون مهمة i حرجة في حال كان $B_i=E_i$، إذ يؤدي كل تأخير في تنفيذ مهمة حرجة في زيادة مدة تنفيذ المشروع.
2. يكون الطريق من الرأس a إلى الرأس w حرجاً إذا كان مؤلفاً من رؤوس تحوي مهمات حرجة فقط.
3. يشير طول طريق حرج إلى المدة الأقصر الضرورية لتنفيذ مشروع.

القسم السادس عشر والسابع عشر والثامن عشر

مقدمة عن الأوتومات والتعابير المُنتظمة

الكلمات المفتاحية:

أوتومات، لغات صورية، أبجدية، سلسلة، إغلاق، تعاقب، أوتومات منتهي، حالة، انتقال، لاصقة، أوتومات منته حتمي، أوتومات منته لاحتمي.

ملخص:

نتعرف في هذا الفصل على الأوتومات والتعابير المُنتظمة كنماذج رياضية تساعد في تعريف لغات البرمجة واللغات الصورية، وكأدوات أساسية في بناء العديد من الأنظمة المعلوماتية كالمترجمات.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مقاربة عملية لاستخدام نموذج الأوتومات؛
- الأوتومات المنتهي الحتمي؛
- الأوتومات المنتهي اللاحتمي؛
- التعابير والقواعد المنتظمة؛
- التحويل من تعابير منتظمة إلى أوتومات منتهي وبالعكس.

مقدمة

يقع موضوع الأوتومات والتعابير المنتظمة ضمن إطار المعلوماتية النظرية. وقد وضع هذا الموضوع الأسس النظرية التي سمحت للهندسة المعلوماتية بالإنطلاق في السبعينات.

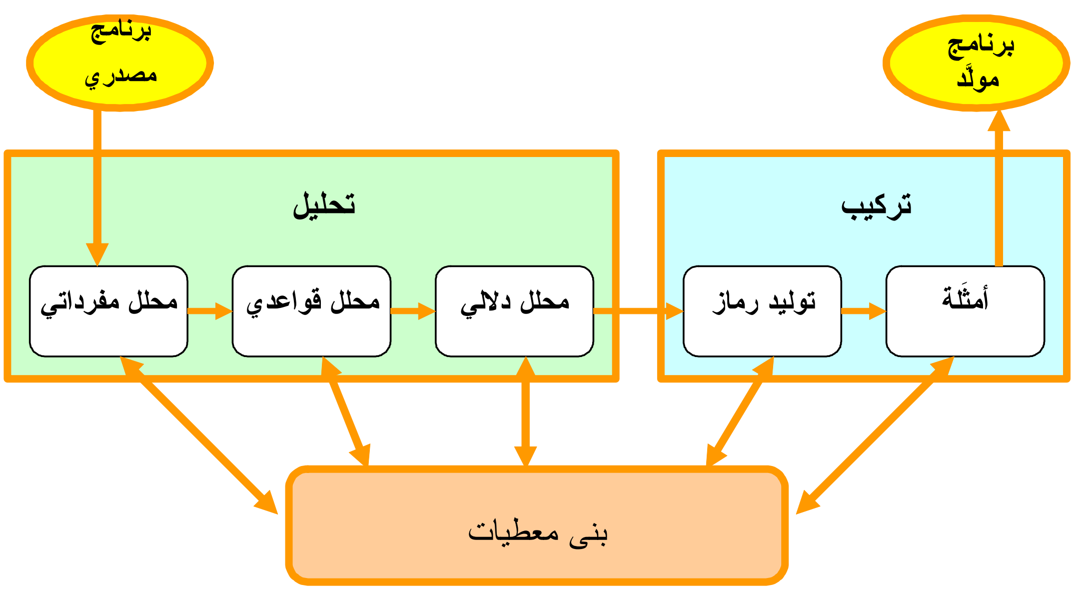
لقد كان لنموذج الأوتومات الحتمي وحده تأثيرُ كبيرٌ على تصميم وإنشاء المترجمات الخاصة بلغات البرمجة المختلفة. كما ساعد النموذج القواعدي الذي أُنشئ أصلاً لتوصيف اللغات الطبيعية، في توصيف النواحي الصرفية والنحوية للغات البرمجة بدقة بالغة، وفي أتمتة عملية إنشاء المترجمات.

ومع أن عدة نماذج قد ظهرت في الثلاثينيات والأربعينيات من هذا القرن، إلا أن معظمها قد ابتُكِرَ في الخمسينيات والستينيات والنصف الأول من السبعينيات، وذلك تبعاً للحاجة إليها أبان التوسع في استخدام الحواسيب الإلكترونية.

في الخمسينيات، ظهر نموذج الأوتومات المنتهي، وظهرت في الحقبة الزمنية ذاتها نماذج قواعدية لتوليد اللغات الصورية، وتبين في الحقبة التالية تكافؤ العديد من النماذج القواعدية مع النماذج الأوتوماتية. وجرى تطوير نظرية التعابير المنتظمة، وتبين تكافؤها مع الأوتومات المنتهي في الستينات. وقد استُخدِمت هذه النماذج منذ ذلك الحين في تصميم الدارات المنطقية والمترجمات ومعالجات النصوص.

لماذا نحتاج لنموذج الأوتومات؟

– مقاربة هندسية عملية (1): بنية مترجم –



قبل الخوض في التفاصيل النظرية لموضوع الأوتومات واللغات الصورية، نحتاج لمعرفة السبب الهندسي العملي من وراء هذه الدراسة وهذا الموضوع. فقد سبق وذكرنا أهمية استخدام هذه النماذج الرياضية التي نحن بصدد دراستها، في تصميم وإنشاء المترجمات ومعالجات النصوص والدارات المنطقية، لذا سنبدأ في هذه الفقرة بفهم أهمية استخدام هذه النماذج من خلال شرح بنية المترجمات كحالة عملية.

يتألف مترجم من:

1. **محلل مفرداتي ينفذ مايلي:**
   - تقسيم النص إلى مجموعة مفردات مثل (DO, IF)؛
   - تقسيم النص إلى أنواع مفردات مثل (Variable names, keywords ...الخ)؛
   - التأكد من عدم وجود سلاسل غير مقبولة (تحتوي مثلاً" على أحرف لا يمكن أن تظهر في تكوين كلمة من اللغة مثل حرف +)؛
   - تحديد بعض الأحرف التي يتوجب إهمالها مثل الفراغات؛
   - إعطاء كل مفردة رقم تسلسلي وحيد يمثلها.
2. **محلل قواعدي ينفذ مايلي:**
   - تحليل الجمل المختلفة ودراسة توافقها مع النحو الصرفي الخاص باللغة المدروسة مثل الجملة (A+B)*C؛
   - البدء بإخراج شجرة قواعدية أوراقها هي المفردات.
3. **محلل دلالي ينفذ مايلي:**
   - تحليل معنى التعابير مثل (A+B)*C؛
   - انهاء عملية بناء شكل وسيط للبرنامج المصدري؛
4. **مولِّد للرماز ينفذ عملية أمثَلة:**
   - بناء نموذج أولي مكافئ للبرنامج الأصلي باللغة المطلوب توليد البرنامج بها؛
   - يعتبر النموذج السابق أولي لحاجته إلى عملية أمثَلة تساعد على الحفاظ على النص مع حذف كافة التكرارات المتواجدة لتخفيض حجمه، وتكون عملية الأمثلة غير إجبارية وتبقى عادة كمعيار للتعريف بجودة ونوعية المترجم.

لماذا نحتاج لنموذج الأوتومات؟

– مقاربة هندسية عملية (2): لغات وقواعد صرفية –

- تمتلك الجملة بنية محددة بقواعد اللغة مثال:
  - جملة فعلية = فعل فاعل.
- لنحاول إكمال المثال باعتبار أن بإمكان الفعل والفاعل أن يأخذا عدة قيم، مثال:
  - فعل = أكل | شرب (حيث ترمز "|" إلى "أو")
  - فاعل = خالد | عمر

- تمكننا هذه القيم من تشكيل أربع جمل صحيحة من اللغة:
  - أكل خالد | شرب خالد | أكل عمر | شرب عمر

- تحتوي أية لغة على عدد لانهائي من الجمل ولكنها لا تحتاج لعدد لانهائي من القواعد، مثال: لأنتاج عدد صحيح يمكن أستخدام القاعدة التالية:

Number	=	Digit | Digit Number
Digit	=	0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

لماذا نحتاج لنموذج الأوتومات؟

– مقاربة هندسية عملية (3): لغات البرمجة –

يتضمن تعريف وتوصيف أي لغة برمجية ما يلي:

- **أبجدية اللغة:** وهي المفردات وأنواعها، حيث يمكن تقسيم المفردات إلى مجموعات ندعوها صفوف (تشكل الأحرف صف وكذلك تشكل الأرقام صف آخر)؛
- **القواعد الصرفية:** وهي مجموعة الجمل الصحيحة قواعدياً الممكن كتابتها اعتماداً على تلك القواعد؛
- **الدلالة:** وهي معنى البرامج المكتوبة اعتماداً على تلك الجمل.

صورياً، يمكن تعريف لغة L على أنها مجموعة الكلمات والجمل المبنية على أبجدية V ويمكن بهذا التعريف اعتبار أن L هي ناتج عملية إغلاق على V:

$$L \subseteq V^{*} \text{ The Closure of } V$$

لماذا نحتاج لنموذج الأوتومات؟

– مقاربة هندسية عملية (4): أهمية نموذج الأوتومات في التحليل المفرداتي –

- يمسح المحلل المفرداتي البرنامج المصدري لتوليد سلسلة الكلمات والتعابير التي يتألف منها البرنامج والتي تنتمي إلى اللغة التي يستخدمها؛
- يُهمل المحلل المفرداتي بعض الحروف مثل الفراغات البيضاء أو النصوص المحصورة بين علامات التعليق؛

يجري تمثيل المحلل المفرداتي الخاص بلغة برمجية، بأوتومات.

لماذا نحتاج لنموذج الأوتومات؟

– مقاربة هندسية عملية (5): مثال عن أهمية نموذج الأوتومات في التحليل المفرداتي –

- لكتابة محلل مفرداتي لأسماء متحولات في لغة برمجية:
  - نفترض أن إسم المتحول يمكن أن يتألف من أحرف أو أن يبدأ بحرف متبوع بسلسلة من الحروف والأرقام.
  - نفترض أن إسم المتحول ينتهي بالرمز ‘\n’.

- يمكن توصيف إسم المتحول بمجموعة من القواعد التي ندعوها قواعد منتظمة كما يلي :

Identifier = Letter{Letter | Digit}EndChar

Letter ="a"|"b"| ... |"z"

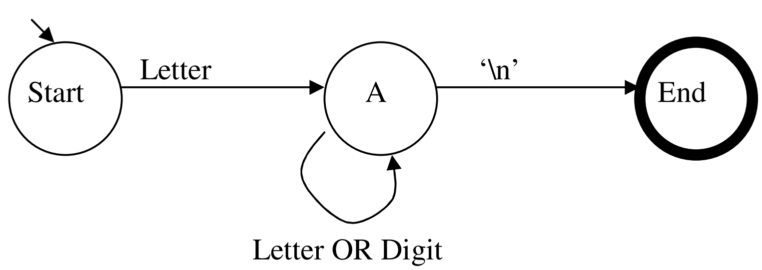
Digit ="0"| .... |"9"

EndChar ="\n"

- لنفترض الآن وجود أجرائية GetNext() تقرأ الحرف التالي من سلسلة الحروف وتضع هذا الحرف في متحول Symbol.
ولنكتب إجرائية IsIdentifier() التي تتحقق من كون الكلمة المقروءة هي عبارة عن أسم متحول.

```
int IsIdentifier( )
{
    GetNext();
    if (Symbol is a Letter)
    {
        GetNext();
        while ((Symbol is a Letter) | | (Symbol is a Digit)) /*Case Switch*/
            GetNext();
        if (Symbol = = ‘\n’)
            return TRUE;
        else    return Error();
        }
    }
    else    return Error();
}
```

- لنمثل المحلل المفرداتي السابق على شكل أوتومات مؤلفة من عدد محدود من الحالات والوصلات:



- نلاحظ أننا لو حصلنا على هذا التمثيل لكان بإمكاننا بناء الإجرائية IsIdentifier( ) الممثلة للماسح بشكل أوتوماتيكي.

- لذا تجري عملية تحويل القواعد السابقة آلياً إلى أوتومات من أجل توليد الإجرائيات التي تنفذ التحليل المفرداتي وهو ما سنتعرف عليه في الفقرات اللاحقة.

مفاهيم أساسية: الأبجدية والسلاسل

الأبجدية:

- تعتمد جميع النماذج على مجموعة رموز عددها منته تُدعى الأبجدية. وتشكل هذه الرموز المكونات الأساسية لأي تركيب لفظي.
- مثلاً، في أي لغة برمجة تتألف الأبجدية من الحروف اللاتينية والأرقام ورموز أخرى، أما في حالة الدارات المنطقية، فتكون الأبجدية مؤلفة من رمزين هما $\{0, 1\}$.

التعاقب:

- تشكل عملية التعاقب العملية الأساسية على الرموز ويُرمز إليها بنقطة (.) يجري حذفها في معظم الأحيان. فمثلاً، إذا كان a و b رمزان من رموز الأبجدية، تكون ab سلسلة مكونة من هذين الرمزين.
- تكون عملية التعاقب تجميعية؛
- تمثل هذه العملية تسلسل المحارف في لغة برمجة.

العنصر الحيادي:

- يتمثل العنصر الحيادي بالسلسلة الفارغة.

الإغلاق:

- نُعرِّف إغلاق التعاقب على الأبجدية بأنه مجموعة جميع السلاسل التي تنتج عن عمليات التعاقب الممكنة بين رموز الأبجدية.
- إذا كانت الأبجدية هي A، يُرمز إلى الإغلاق بالرمز A^* (نلفظها A star) وتكون له بنية شبه زمرة.

طول سلسلة:

يُعرَّف طول سلسلة x (ويُرمَز إليه بالرمز $|x|$) على أنه عدد الرموز الأبجدية في هذه السلسلة.

مفاهيم أساسية: اللغات الصورية

ندعو أي مجموعة محتواة في المجموعة A^* (التي تشمل جميع السلاسل المبنية على أبجدية A)، لغة صورية (وتُختَصَر بلغة).

بعض العمليات على اللغات الصورية:

- التعاقب:

$$L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

- الإغلاق:

$$L^2 = L \cdot L, L^3 = L \cdot L \cdot L \quad \text{حيث} \quad L^* = \{\varepsilon\} \cup L^2 \cup \ldots \cup L^i \cup \ldots$$

مثال (1):

لتكن A={a,b}، يمكن تعريف لغة L_1 على هذه الأبجدية، بأنها اللغة التي تبدأ فيها جميع السلاسل بالحرف b:

$$L_1 = \{ w \mid w \in A^*, w = bx \}$$

مثال (2):

لتكن A={a,b}، يمكن تعريف لغة L_2 على هذه الأبجدية، بأنها اللغة التي يكون فيها طول جميع السلاسل أصغر أو يساوي 8:

$$L_2 = \{ w \mid w \in A^*, |w| \leq 8 \}$$

نموذج الأوتومات المنتهي

يعتبر نموذج الأوتومات المنتهي من أبسط النماذج المعبّرة عن اللغات الصورية، وقد صُــمم أصلاً لنمذجة الدارات المنطقية التسلسلية.

ازدادت أهميته لدى استخدامه في تصميم وتنفيذ لغات البرمجة، ومترجماتها ومعالجات النصوص في الستينيات والسبعينيات.

هناك أربعة أبدال لنموذج الأوتومات المنتهي:

- الأوتومات المنتهي الحتمي؛
- الأوتومات المنتهي اللاحتمي؛
- الأوتومات المنتهي اللاحتمي مع ε-تحرك؛
- التعابير المنتظمة.

وبالرغم من وجود هذه الأبدال، إلا أن لجميعها طاقة تعبيرية واحدة، وتستطيع التعبير عما ندعوها باللغات المُنتظمة.

مواصفات الأوتومات المنتهي

تتصف الأوتومات المنتهي بانها:

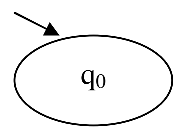
- بيان من مجموعة منتهية من الحالات والوصلات (التحركات)؛
- هناك أوتومات تتميز بوضع لاصقات على الحالات لتعريفها، وهناك أوتومات تتميز بوضع اللاصقات على الوصلات، وفي كلا الحالتين نحصل على نفس النتيجة؛
- لكل أوتومات حالة ابتدائية؛
- لكل أوتومات مجموعة من الحالات النهائية التي يمثل الوصول إليها انتهاء عمل الأوتومات؛

- يتم تعريف اللاصقات بالاعتماد على مجموعة من الرموز ومجموعة من العمليات؛
- يبدأ عمل الأوتومات اعتباراً من الحالة الابتدائية وتتبع, من أجل كل رمز مقروء على مدخلها، وصلة مرتبطة بها وذات لاصقة تتكون من الرمز المقروء؛
- في حال تمثيل الأوتومات لتعبير نظامي نقول عن كلمة أنها مقبولة من أوتومات إذا استطعنا الوصول إلى حالة نهائية (انطلاقا" من الحالة الابتدائية) باستخدام رموز وحروف الكلمة.

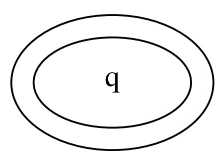
التعبير عن الأوتومات المنتهي

يتم عادةً تمثيل الأوتومات باستخدام بيان موجه:

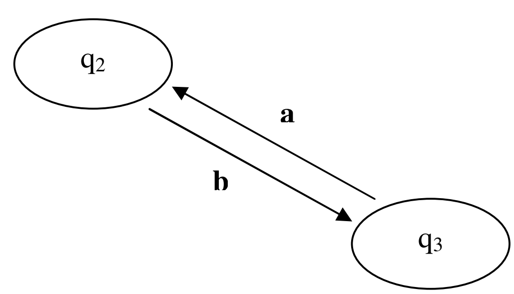
- يكون للحالة الابتدائية التي تبدأ منها الأوتومات عملها الشكل التالي:



- يكون للحالة النهائية التي تُنهي فيها الأوتومات عملها الشكل التالي:



- يكون للانتقالات بين حالتين من حالات الأوتومات الشكل التالي (يُعنّوَن كل انتقال بلاصقة تحتوي على حرف من حروف الأبجدية):



الأوتومات المنتهي الحتمي

يُعرَّف الأوتومات المنتهي الحتمي بخماسية $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ حيث:

- Q هي مجموعة الحالات ذات العدد المحدود: $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$؛
- Σ هي أبجدية الدخل (مجموعة منتهية)؛
- δ هو تابع الانتقال المُعرَّف كما يلي:

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$
$$\delta(q, a) = q'$$

- يمكن يمكن مدّ تابع الانتقال ليصبح مُعرَّفاً على سلسلة منمجموعة السلاسل Σ^* عوضاً عن رمز واحد من الأبجدية، كمايلي:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$
$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$$
$$\hat{\delta}(q, w.a) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$$

ويمكن استخدام δ عوضاً عن $\hat{\delta}$ نظراً إلى عدم وجود مجال للالتباس بسبب تطابق δ مع $\hat{\delta}$ عندما تكون السلسلة w عبارة عن رمز أبجدي a.

- q_0 هي الحالة الابتدائية للأوتومات؛
- F هي مجموعة الحالات النهائية للأوتومات وهي مجموعة جزئية من Q.

مثال:

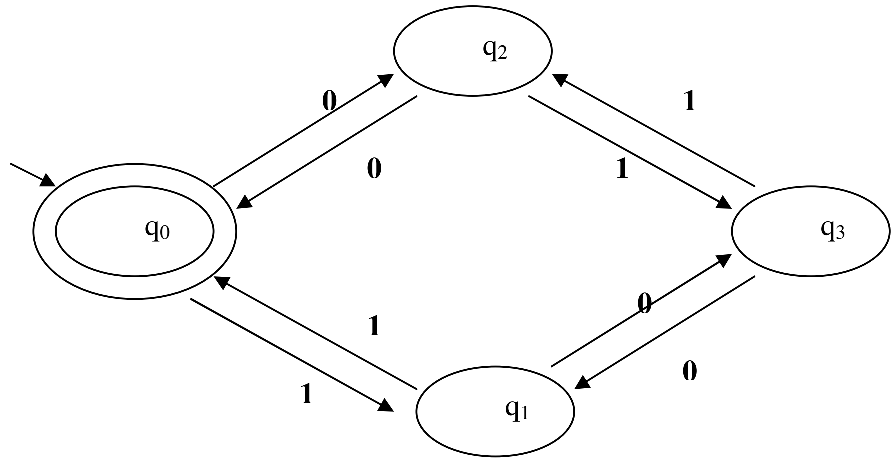
- ليكن الأوتومات المنتهي الحتمي التالي:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

- نُعرِّف تابع الانتقال وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

• يمكن تمثيل هذه الأوتومات باستخدام بيان موجه كما يلي:



للأوتومات المنتهي الحتمي المواصفات التالية:

- عدد الحالات محدود؛
- لا يمكن أن يوجد لكل حالة إلا حالة واحدة تليها، وذلك اعتماداً على نفس اللاصقة.
- لا يُستخدَم الرمز ε لتعريف الانتقالات بين الحالات المختلفة.

قبول سلسلة وقبول لغة

تُعتَبَر السلسلة w مقبولة من قبل الأوتومات المنتهي الحتمي $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ إذا كان:

$$\delta(q_0, w) \in F$$

بالنتيجة، نُعرِّف اللغة $L(M)$ المقبولة من قبل الأوتومات M كما يلي:

$$L(M) = \{w \mid \delta(q_0, w) \in F\}$$

أي أن الأوتومات يصل إلى حالة نهائية بعد قراءة سلسلة من سلاسل اللغة.

مثال:

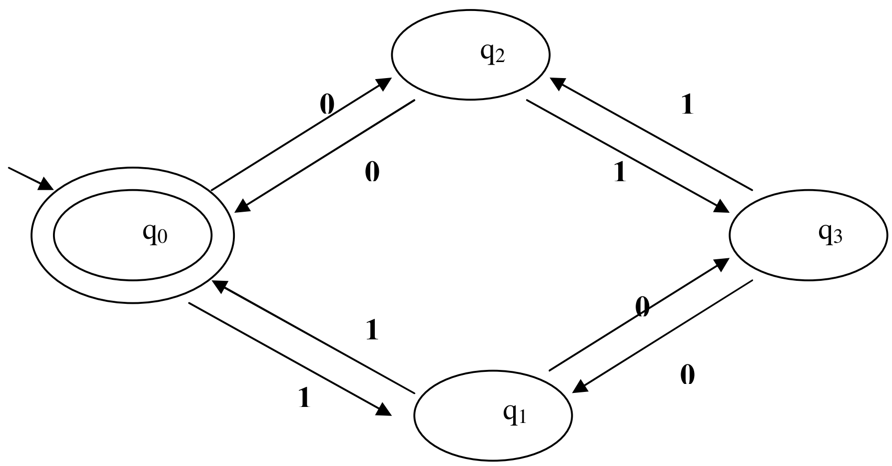
- ليكن الأوتومات المنتهي الحتمي التالي:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

• نُعرِّف تابع الانتقال وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

• يمكن تمثيل هذه الأوتومات باستخدام بيان موجه كما يلي:



• لنر الآن فيما إذا كان الأوتومات تقبل السلسلة 01110. تكون السلسلة 01110 غير مقبولة لأن:

$$\delta(q_0,01110) = \delta(\delta(q_0,0111),0) = \delta(\delta(\delta(q_0,011),1),0) = \delta(\delta(\delta(\delta(q_0,01),1),1),0)$$
$$= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(q_0,0),1),1),1),0) = \delta(\delta(\delta(q_2,1),1),1),0) = \delta(\delta(q_3,1),1),0)$$
$$= \delta(\delta(q_2,1),0) = \delta(q_3,0) = q_1 \notin F$$

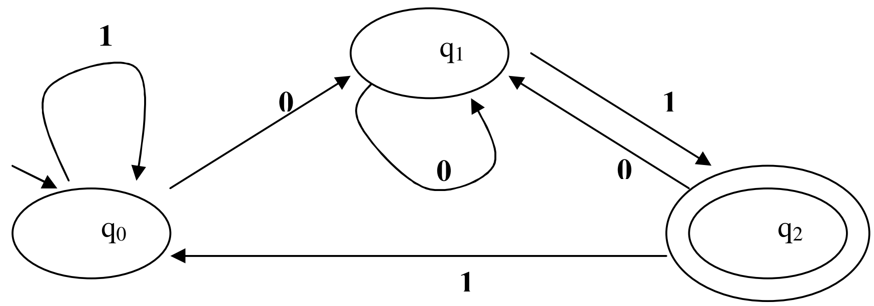
• تكون اللغة المقبولة من الأوتومات M هي اللغة التي تحتوي علىمجموعة السلاسل التي يكون فيها عدد الأصفار زوجياً وكذلك عدد الوحدان:

$$L(M) = \{ w \mid w \in \{0,1\}^*, \exists (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, |w|_0 = 2p, |w|_1 = 2p\}$$

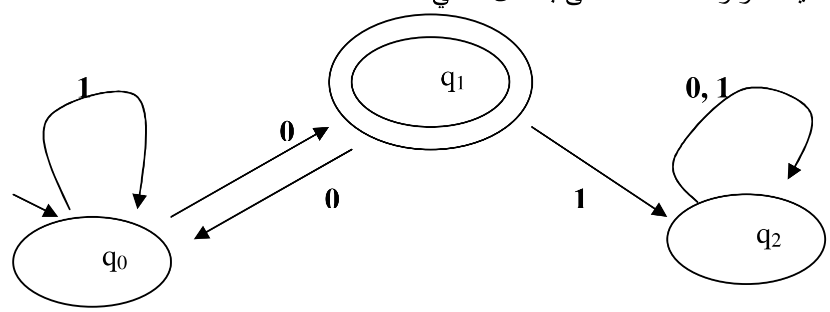
تمارين

1. أنشئ الأوتومات المنتهي الحتمي الذي يقبل جميع السلاسل من الأبجدية $\{0,1\}$ التي تنتهي بـــ 01.

الحلّ: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$



2. ليكن لدينا الأوتومات A المُعطى بالشكل التالي:



a. أعط 3 سلاسل غير مقبولة من هذه الأوتومات؛

b. أعط توصيفاً للغة التي تمثلها ألأوتومات.

الحل:

(a) سلاسل غير مقبولة: 0001000، 00111، 000001111101.

(b) مجموعة السلاسل التي لايمكن أن يوجد 1 إلا في بدايتها وتنتهي بـــ 0.

الأوتومات المنتهي اللاحتمي

يُعرَّف الأوتومات المنتهي اللاحتمي بخماسية $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ حيث:

- Q هي مجموعة الحالات ذات العدد المحدود: $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$؛
- Σ هي أبجدية الدخل (مجموعة منتهية)؛
- δ هو تابع الانتقال المُعرَّف كما يلي:

$$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$$
$$\delta(q, a) = \{p_1, ..., p_k\} \subseteq Q$$

- يمكن مدّ تابع الانتقال ليصبح مُعرَّفاً على سلسلة منمجموعة السلاسل $\sum^*$ عوضاً عن رمز واحد من الأبجدية، كمايلي:

$$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$
$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$$
$$\hat{\delta}(q, w.a) = \{r \mid \exists p \in \hat{\delta}(q, w), r \in \delta(q, a)\} \subseteq Q$$

ويمكن استخدام δ عوضاً عن $\hat{\delta}$ نظراً إلى عدم وجود مجال للالتباس بسبب تطابق δ مع $\hat{\delta}$ عندما تكون السلسلة w عبارة عن رمز أبجدي a.

- كما يمكن مدّ تابع الانتقال ليصبح مُعرَّفاً على مجموعة حالات P عوضاً عن حالة واحدة، كمايلي:

$$\hat{\hat{\delta}}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$
$$\hat{\hat{\delta}}(P, w) = \bigcup_{q \in P} \hat{\delta}(q, w)$$

ويمكن استخدام δ أو $\hat{\delta}$ عوضاً عن $\hat{\hat{\delta}}$ نظراً إلى عدم وجود مجال للالتباس بسبب تطابق δ مع $\hat{\delta}$ ومع $\hat{\hat{\delta}}$ عندما تكون مجموعة الحالات P عبارة عن حالة واحدة q.

- q_0 هي الحالة الابتدائية للأوتومات؛
- F هي مجموعة الحالات النهائية للأوتومات وهي مجموعة جزئية من Q.

مثال:

- ليكن الأوتومات المنتهي اللاحتمي التالي:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$$

- يكون تابع الانتقال مُعرَّفاً وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	ϕ	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	ϕ
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

للأوتومات المنتهي اللاحتمي المواصفات التالية:

- عدد الحالات محدود؛
- من الممكن أن يوجد لكل حالة عدة حالات محتملة تليها باستخدام نفس اللاصقة؛
- تكون خوارزميات المسح الخاصة بهذا النوع من الأوتومات معقدة وتحتاج إلى عمليات تراجع مستمرة (Back Tracking)؛
- لا يُستخدَم الرمز ε لتعريف الانتقالات بين الحالات المختلفة.

قبول سلسلة وقبول لغة

تُعتبَر السلسلة w مقبولة من قبل الأوتومات المنتهي اللاحتمي $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ إذا كان:

$$\delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \phi$$

بالنتيجة، نُعرّف اللغة $L(M)$ المقبولة من قبل الأوتومات M كما يلي:

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \exists p \in \delta(\{q_0\}, w), p \in F\}$$

أي أن الأوتومات يصل إلى حالة نهائية بعد قراءة سلسلة من سلاسل اللغة.

مثال:

- ليكن الأوتومات المنتهي اللاحتمي التالي:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$$

- يكون تابع الانتقال مُعرَّفاً وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	ϕ	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	ϕ
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

- تكون اللغة المقبولة من الأوتومات M هي:

$$L(M) = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, \exists w_1, w_2 \in \{0,1\}^*, w = w_1 11 w_2 \vee w = w_1 00 w_2\}$$

تكافؤ الأوتومات المنتهي الحتمي والأوتومات المنتهي اللاحتمي

- الأوتومات المنتهي الحتمي هو حالة خاصة من الأوتومات المنتهي اللاحتمي.

- لكل أوتومات منتهي لاحتمي M يوجد أوتومات منتهي حتمي M’ مكافئ بحيث يكون L(M)=L(M’).

مثال:

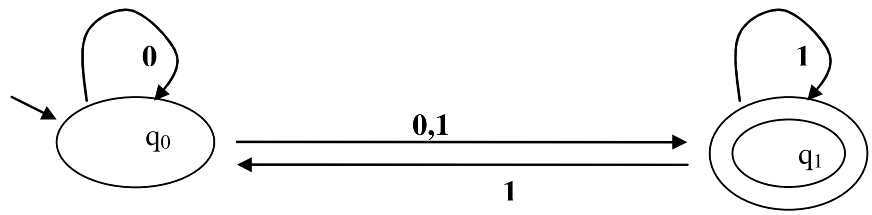
- ليكن الأوتومات المنتهي اللاحتمي التالي:

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

- يكون تابع الانتقال مُعرَّفاً وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	ϕ	$\{q_0, q_1\}$

- يكون لهذا الأوتومات المنتهي اللاحتمي الشكل التالي:



- يكون الأوتومات المنتهي الحتمي المكافئ هو:

$$M' = (\{\phi, [q_0], [q_1], [q_0, q_1]\}, \{0,1\}, \delta', [q_0], \{[q_1], [q_0, q_1]\})$$

- يكون تابع الانتقال δ' الخاص بالأوتومات المنتهي الحتمي المكافئ مُعرَّفاً وفق الجدول التالي:

δ	**0**	**1**
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1]$
$[q_1]$	ϕ	$[q_0, q_1]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$
ϕ	ϕ	ϕ

- بإعادة تسمية الحالات، نحصل على الأوتومات التالي

$$M' = (\{P_0, P_1, P_2, P_3\}, \{0,1\}, \delta', P_0, \{P_1, P_2\})$$

- كما نحصل على تابع الانتقال δ' التالي:

δ	**0**	**1**
P_0	P_2	P_1
P_1	P_3	P_2
P_2	P_2	P_2
P_3	P_3	P_3

الأوتومات المنتهي اللاحتمي مع ε–تحرك

- يُعتبر الأوتومات المنتهي اللاحتمي مع ε–تحرك حالة خاصة من الأوتومات المنتهي اللاحتمي.
- نحصل على مثل هذا الأوتومات بإضافة ε إلى الأبجدية.

القواعد والتعابير المُنتظمة (1)

- لنعد إلى توصيف أسم متحول بقواعد صرفية (ندعوها قواعد منتظمة):

$$\text{Identifier} = \text{Letter}\{\text{Letter} \mid \text{Digit}\}\text{EndChar}$$
$$\text{Letter} = "a" \mid "b" \mid ... \mid "z"$$
$$\text{Digit} = "0" \mid .... \mid "9"$$
$$\text{EndChar} = "\backslash n"$$

- لنحاول حل المعادلات السابقة لتوليد تعبير مؤلف من رموز أولية (أحرف، وأرقام، ونهاية السطر). تكون النتيجة على الشكل التالي الذي ندعوه تعبيراً منتظماً:

$$(a \mid b ... \mid z)(a \mid b \mid ... \mid z \mid 0 \mid ... 9)^{*} \text{'}\backslash n\text{'}$$

لنعد إلى توصيف أسم متحول بقواعد صرفية (ندعوها قواعد منتظمة)، ولنحاول حل المعادلات السابقة لتوليد تعبير مؤلف من رموز أولية (أحرف، وأرقام، ونهاية السطر). تكون النتيجة على الشكل الظاهر في الشريحة والذي ندعوه تعبيراً مُنتظماً.

القواعد والتعابير المُنتظمة (2)

- تعبير منتظم: توصيف لقاعدة لغوية باستخدام رموز الأبجدية بالإضافة إلى (ε).
- يجري استخدام المؤثرات التالية:
  - **الاحتمالات الممكنة:** ويُرمز له بالرمز | مثل: (a|b|c) أو {a|b|c}.
  - **الإغلاق:** ويُرمز له بالرمز * مثل: $(a)^*$.
  - **الإغلاق لمرة واحدة على الأقل:** ويُرمز له بالرمز + مثل: $(a)^+$.
  - **التعاقب:** لتمثيل تتالي الرموز مثل: aa أو (aa).
- يمكن دائماً تمثيل مجموعة من القواعد المنتظمة، باستخدام تعابير نظامية.
- هناك خوارزميات تقوم بتحويل أي مجموعة من القواعد المنتظمة، إلى تعبير منتظم (خوارزميات حل معادلات القواعد).

- يجري تعريف تعبير منتظم على أنه توصيف لقاعدة لغوية باستخدام رموز الأبجدية بالإضافة إلى الرمز الذي يمثل حرفاً فارغاً (ε).

- يجري استخدام المؤثرات التالية:
  - **الاحتمالات الممكنة:** ويُرمز له بالرمز | ويُستَخدَم لتمثيل احتمال ورود أحد الرموز مثل: (a|b|c) الذي يعني إما a أو b أو c.
  - **الإغلاق:** ويُرمز له بالرمز * ويُستَخدَم لتمثيل تكرار الرموز لعدد من المرات تتراوح بين الصفر واللانهاية مثل: $(a)^*$ الذي يرمز لتكرار a لعدد من المرات تتراوح بين الصفر واللانهاية.
  - **الإغلاق لمرة واحدة على الأقل:** ويُرمز له بالرمز + ويُستَخدَم لتمثيل تكرار الرموز لعدد من المرات تتراوح بين الصفر واللانهاية مثل: $(a)^+$ الذي يرمز لتكرار a لعدد من المرات تتراوح بين المرة الواحدة واللانهاية.
  - **التعاقب:** لتمثيل تتالي الرموز مثل aa أو (aa).

- تم البرهان على أنه بالإمكان دائماً تمثيل مجموعة من القواعد المنتظمة، باستخدام تعابير نظامية.

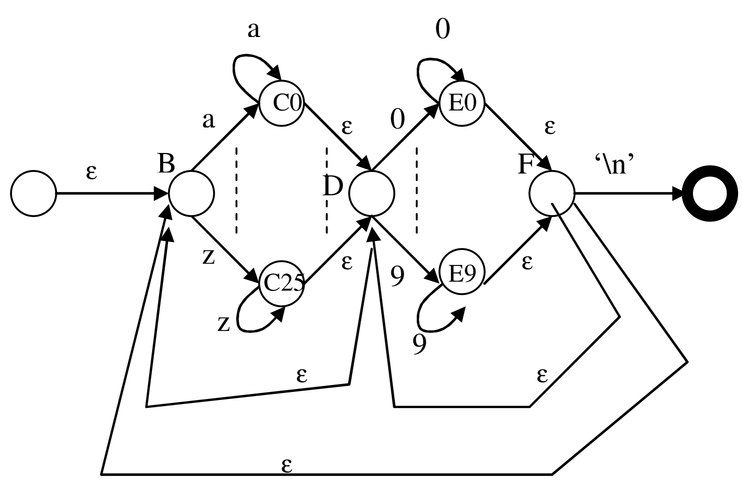
- هناك خوارزميات تقوم بتحويل أي مجموعة من القواعد المنتظمة، إلى تعبير منتظم (خوارزميات حل معادلات القواعد).

التعابير المُنتظمة والأوتومات

لنحاول توصيف التعبير المنتظم التالي على شكل أوتومات:

$$(a\,|\,b...|\,z)(a\,|\,b\,|...|\,z\,|\,0\,|...9)^*\ '\backslash n'$$

نحصل على الأوتومات التالي:

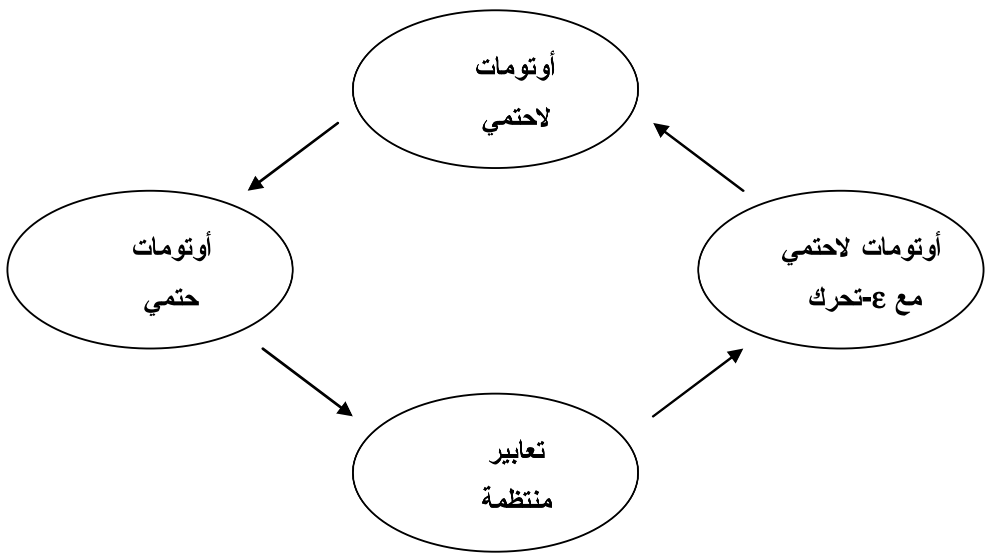


التكافؤ بين التعابير المنتظمة والأوتومات المنتهي

يمكن البرهان أن لكل تعبير منتظم أوتومات منتهي لاحتمي مع ε–تحرك. لحسن الحظ يمكن تحويل أوتومات من النوع السابق إلى أوتومات منتهي حتمي بحيث نتجنب عمليات العودة المتكررة عند تشغيل الأوتومات.

كما يمكن البرهان أن لكل أوتومات منتهي حتمي يوجد تعبير منتظم مكافئ يقبل نفس اللغة.

بالنتيجة لدينا تكافؤ لجميع أبدال الأوتومات كما هو موضح بالشكل التالي:



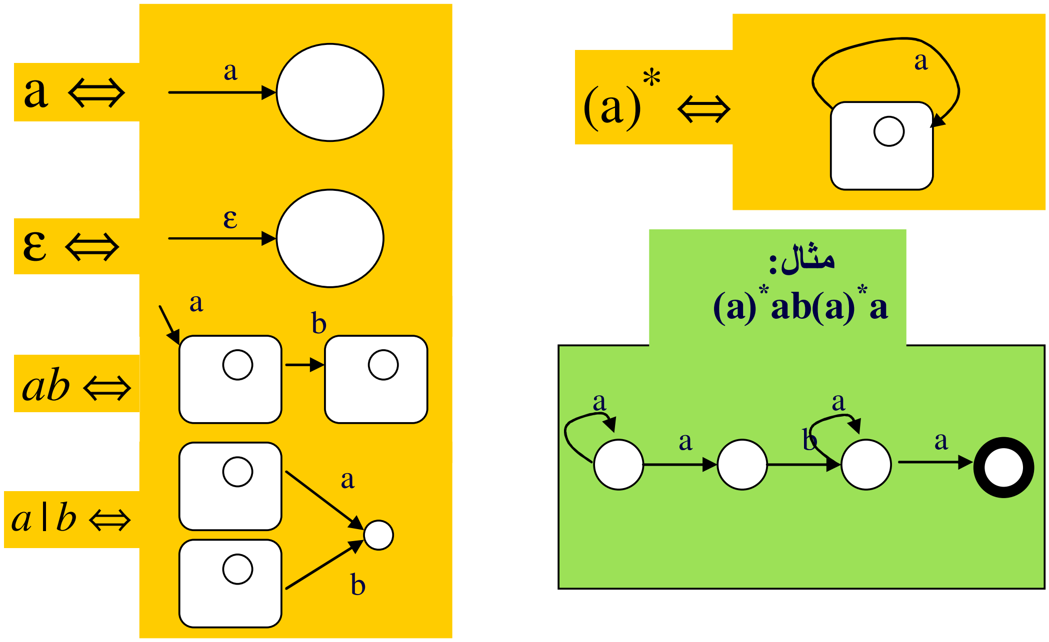
أتمتة عملية كتابة محلل مفردات (ماسح)

لتوليد محلل مفردات لغة آلياً، يمكن توليد الأوتومات المعبرة عن هذه المفردات والتي تشكل حسب ما ذكرنا سابقاً، نموذجاً معبراً تماماً عن إجرائية التحليل:

- تعريف مجموعة القواعد (المكتوبة كقواعد منتظمة) المعبّرة عن مجموعة المفردات التي نريد مسحها والتأكد من أنها تنتمي للغة المطلوبة؛
- استخدام خوارزمية تحويل مجموعة القواعد المنتظمة إلى تعبير منتظم؛
- استخدام خوارزمية تحويل تعبير منتظم إلى أوتومات منتهي لاحتمي؛
- تحويل الأوتومات المنتهي اللاحتمي إلى أوتومات منتهي حتمي.

سنستعرض في الفقرات اللاحقة بعض هذه الخوارزميات.

خوارزمية التحويل من تعبير منتظم إلى أوتومات منتهي لاحتمي



خوارزمية التحويل من أوتومات منتهي لاحتمي إلى أوتومات حتمي

- بسبب مشكلة العودة إلى الخلف (Back Tracking) عند تنفيذ الأوتومات المنتهي اللاحتمي، نحاول دائماً تحويلها إلى أوتومات منتهي حتمي قبل البدء بتنفيذها.
- يجري بناء أوتومات منتهي حتمي مؤلفة من حالات تمثل كل منها مجموعة من حالات الأوتومات الأصلية.
- نعتبر، في الأوتومات الحتمي، أن حالة ما هي حالة نهائية إذا كانت إحدى الحالات الأصلية التي تمثلها هذه الحالة، هي حالة نهائية.
- بما أننا افترضنا أن عدد حالات الأوتومات اللاحتمي منتهياً (N) فإن عدد حالات الأوتومات الحتمي المكافئة لها يكون منتهياً، ويكون (2^N) على الأكثر.

تمارين

التمرين الأول:

أنشئ أوتوماتاً حتمياً مكافئاً للتعابير المُنتظمة التالية:

$A = 10 + ((0+11)\ 0^*\ 1)$

$B = 0^*\ 1^*$

$C = 0^+\ 1^+$

التمرين الثاني:

أنشئ تعبيراً منتظماً لكل من الأوتوماتات الحتمية التالية:

$M1 = (\{A,B,C\},\{0,1\},\delta 1, A,\{A,B\})$

δ1	**0**	**1**
A	A	B
B	C	B
C	C	C

$M2 = (\{A,B,C\},\{0,1\},\delta 2, A,\{A\})$

δ2	**0**	**1**
A	A	B
B	C	B
C	A	B

$M3 = (\{A,B,C\},\{0,1\},\delta 3, A,\{C,B\})$

δ3	**0**	**1**
A	B	C
B	A	C
C	B	A

قراءات اضافية

- http://www.acts.tinet.ie/induction_645.html
- http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/pdf.html
- http://www.utm.edu/departments/math/graph/
- http://www-db.stanford.edu/~ullman/ialc.html
- http://archives.math.utk.edu/topics/discreteMath.html
- Discrete Mathematics with Application, Susanna S. Epp, Thomson third Edition, 2004