

ملخصات شوم
نظريات ومسائل
في
المصفوفات

تأليف
الدكتور فرانسيس آيرز
أستاذ سابق ، رئيس قسم الرياضيات
كلية ديكنسون

ترجمة
مجموعة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة
الدكتور فاروق البتانوني
قسم الرياضيات - جامعة المنصورة
جمهورية مصر العربية

دار ماكجرو هيل للنشر



الدار الدولية للنشر والتوزيع



مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،
والكلمة هي مصدر المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .
وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ،
حيث حملت إلباء حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة
الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم
توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم
يحظى القارئ العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبقات العربية للكتب
العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات
القارئ العربى استاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية
للتعاون معنا فى إصدار طبقات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى
للقارئ العربى

والله ولى التوفيق

محمد وفائى كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساسا للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحديا بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية لا زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير في إعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة شوم Schaum Series التي لقيت في طبعها الأصلية نجاحاً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكمن وراء سلسلة ملخصات شوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب شوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التكوين والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

مقدمة الطبعة الأجنبية

إن حساب المصفوفات أداة رياضية ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الكهرباء ، والكيمياء وعلم الاجتماع وعلم الاحصاء ، وهي أكثر ضرورة لدراسة الرياضيات البحتة . يعتبر هذا الكتاب الذى يعطى المواضيع الأساسية ، متما للكتب المستعملة ، ومرجعا من أجل أولئك الذين يحتاجون إلى معرفة طرق حساب المصفوفات واستعمالها . ومن جهة ثانية فإن الملخصات النظرية التى يحويها هذا الكتاب كافية لاستعماله كتابا لمقرر .

تقسم أبحاث هذا الكتاب إلى ستة وعشرين فصلا ، الأمر الذى لا يضر بالوضع المنطقي للموضوع ، بل يزيد من فائدة هذا الكتاب . وهذا ما يسمح للفصل بين دراسة المصفوفات الحقيقية - التى تهتم الكثيرين - عن المصفوفات ذات العناصر المركبة . يحوى كل فصل تذكرا بالتعاريف والنظريات والمبادئ . مع أمثلة متعددة ، ويتبع ما تقدم مسائل محلولة وعدد كبير من التمارين الإضافية .

إن الطالب الذى يتعرض لحساب المصفوفات يجد بسرعة أن حل التمارين العددية سهل جداً ، ولكن الصعوبة فى أن هذه الدراسة ، تكمن فى التعاريف والنظريات وبراهينها . ومن الممكن أن يسبب نقص الخبرة الرياضية بعض المشاكل ، وهذا أمر ضئيل ، لأنه كثيرا ما يكون على الطالب أن يحل تطبيقات عديدة لا تذكر مبادئها الأساسية ولا تبرز نظرياتها إلا بعد حين . يؤدي هذا الكتاب على العكس بالقارى الذى يداوم على قراءة المذكرات والمسائل المتعلقة بكل فصل من فصوله ، إلى جعله مطمئنا لفهم محتواه .

تتمتاز المسائل المحلولة عن الأمثلة التى توضح النظريات بتعدد أشكالها . وهى تحوى معظم البراهين الطويلة للنظريات الهامة ، كما تحوى البراهين القصيرة .

تتطلب المسائل الإضافية من الطالب أن يجد بنفسه البرهان والحل وستكون هذه البراهين ، فى بعض الأحيان ، أشكالا أخرى البراهين أعطيت سابقا ، ومع هذا فإن برهان بعض النظريات لا يتطلب أكثر من عدة أسطر - ويمكن خطأ اعتبار بعض المسائل بدئية - بينما يحتاج برهانها إلى كثير من المهارة والدقة .

لا يجوز أن تعالج أى واحدة من هذه المسائل بشئ من الاستخفاف لأن حساب المصفوفات ، بسبب كثرة نظرياته ، يعتبر مقورا أساسيا للذين يرغبون التوصل إلى درجة جيدة من النضج الرياضى .

إن العدد الكبير من المسائل التى يحويها كل فصل من فصول هذا الكتاب ، يجعل حلها كلها ، قبل الانتقال إلى ما بعدها أمرا غير عملي ، ومع ذلك فإنه من الضروري إعطاء اهتمام خاص للمسائل الإضافية التى يحويها الفصلان الأول والثانى من هذا الكتاب . وبعد أن يتمكن القارى من هذه المسائل فإنه سوف يشعر باطمئنان قوى عند متابعة دراسة هذا الكتاب .

يشكر المؤلف هيئة مؤسسة شوم للنشر على تعاونهم الكبير .

فرانك امرز

كارليل

أكتوبر ١٩٦٢

المحتويات

صفحة

١١-١

الفصل الأول : المصفوفات :

المصفوفات - المصفوفات المتساوية - جميع المصفوفات - ضرب المصفوفات الضرب بالتجزئة .

٢٢-١٢

الفصل الثاني : بعض أنماط من المصفوفات :

المصفوفة المثلثية - المصفوفة العددية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - معكوس مصفوفة - منقول مصفوفة - المصفوفات المتماثلة - المصفوفات المتخالفية - المصفوفات المرافقة - مصفوفات هيرميت مصفوفات هيرميت المتخالفية - المجموع المباشر .

٣٥-٢٣

الفصل الثالث : محددة مصفوفة مربعة :

المحددات من الدرجة الثانية والثالثة - خواص المحددات - المصفوفات والمعاملات المرافقة - المتتمات الجبرية .

٤٣-٣٦

الفصل الرابع : حساب المحددات :

الفك على طول صف أو عمود - مفكوك لابلاس - الفك على طول الصف الأول أو العمود الأول - محددة حاصل ضرب مصفوفتين - مشتقة محددة .

٥٤-٤٤

الفصل الخامس : التكافؤ :

رتبة مصفوفة - المصفوفة الشاذة وغير الشاذة - التحويلات الأولية - عكس تحويل أولى - المصفوفة المتكافئة - الشكل القانوني الصفى - الشكل النظامى - المصفوفات الأولية - المجموعة القانونية بالنسبة للتكافؤ - رتبة حاصل ضرب

٦١-٥٥

الفصل السادس : المصفوفة المرافقة لمصفوفة مربعة :

المرافق - المرافق حاصل الضرب - مصفر المرافق .

٧١-٦٢

الفصل السابع : معكوس مصفوفة :

معكوس مصفوفة قطرية - المعكوس باستخدام المصفوفة المرافقة - المعكوس باستخدام المصفوفات الأولية المعكوس بالتجزئة - معكوس المصفوفات المتماثلة - المعكوس من اليمين ومن اليسار لمصفوفة درجتها $M \times n$

٧٤-٧٢

الفصل الثامن : الحقول :

الحقول العددية - الحقول بصورة عامة - الحقل الجزئى - المصفوفات على حقل .

٨٢-٧٥

الفصل التاسع : الارتباط الخطى للمتجهات والصيغ :

المتجهات - الارتباط الخطى للمتجهات - الصيغ الخطية - كثيرات الحدود والمصفوفات .

٩٤-٨٢

الفصل العاشر : المعادلات الخطية :

مجموعة المعادلات غير المتجانسة - الحل باستعمال المصفوفات - قاعدة كرامر - مجموعة المعادلات المتجانسة .

صفحة

١٠٤-٩٥

الفصل الحادى عشر : الفراغات الاتجاهية :

الفراغات الاتجاهية - الفراغات الجزئية - الأساس والبعد - مجموع الفراغات - تقاطع الفراغات - الفراغ الصفرى للمصفوفة - قانون سلفستر للاندامية - الأساس والاحداثيات .

١١١-١٠٥

الفصل الثانى عشر : التحويلات الخطية :

التحويلات الشاذة وغير الشاذة - تغيير الأساس - الفراغ اللامتغير - مصفوفة التبديل .

١٢١-١١٢

الفصل الثالث عشر : المتجهات على الحقل الحقيقى :

حاصل الضرب الداخلى - الطول - متباينة شوارز - المتباينة المثلثية - المتجهات والفراغات المتعامدة - الأساس العيارى المتعامد - طريقة جرام سميث للتعامد - مصفوفة جرام - المصفوفات المتعامدة - التحويلات المتعامدة - حاصل الضرب الاتجاهى .

١٢٧-١٢٢

الفصل الرابع عشر : المتجهات على حقل الأعداد المركبة :

الأعداد المركبة - حاصل الضرب الداخلى - الطول - متباينة شوارز - المتباينة المثلثية - المتجهات والفراغات المتعامدة - الأساس العيارى المتعامد - طريق جرام سميث للتعامد - مصفوفة جرام - المصفوفات الواحدية - التحويلات الواحدية .

١٣٩-١٢٨

الفصل الخامس عشر : التماثل :

المصفوفات المتطابقة - المصفوفات المتماثلة المتطابقة - الشكل القانونى لمصفوفة حقيقية - لمصفوفة ممتثلة تحالفية - لمصفوفة هرميتية - لمصفوفة هرميتية تحالفية بالنسبة للتطابق .

١٤٥-١٤٠

الفصل السادس عشر : الصيغ ثنائية الخطية :

مصفوفة الصيغة - التحويلات - الشكل القانونى - التحويلات موافقة التغير - التحويلات مخالفة التغير - تحليل الأشكال .

١٦٢-١٤٦

الفصل السابع عشر : الأشكال الصيغ التربيعية :

مصفوفة الشكل الصيغ - التحويلات - الأشكال القانونية - طريقة لاگرانج فى الاختزال - قانون القصور لسلفستر - الأشكال المحددة وشبه المحددة - المصبرات الرئيسية - الأشكال المنتظمة - طريقة كروفر فى الاختزال - تحليل الأشكال لعوامل .

١٦٥-١٦٣

الفصل الثامن عشر : الأشكال الهرميتية :

مصفوفة الشكل - التحويلات - الأشكال القانونية - الأشكال المحددة وشبه المحددة .

١٧٣-١٦٦

الفصل التاسع عشر : المعادلة المميزة لمصفوفة :

المعادلة المميزة والقيم الخاصة - المتجهات والفراغات اللامتغيرة .

١٨٢-١٧٤

الفصل العشرون : التشابه :

المصفوفات المتشابهة - اختزال لصيغ مثلثين - المصفوفات التى تقبل أن تكون قطرية .

صفحة

١٨٣-١٩٣

الفصل الحادى والعشرون : المصفوفات المشابهة لمصفوفة قطرية :

المصفوفات المتماثلة الحقيقية - التشابه التامدى - أزواج الأشكال التربيعية الحقيقية - المصفوفات الهرميتية - التشابه الواحدى - المصفوفات النظامية - التحليل الطيفى - حقل القيم .

١٩٤-٢٠١

الفصل الثانى والعشرون : كثيرات الحدود على حقل :

جمع وضرب وخارج قسمة كثيرات الحدود - نظرية الباقي - القاسم المشترك الأعظم - المضاعف المشترك الأصغر - كثيرات الحدود الأولية نسبيا - التحليل الوحيد .

٢٠٢-٢١٢

الفصل الثالث والعشرون : مصفوفات لا مبدا :

مصفوفة λ أو كثير حدود مصفوفى - المجموع وحاصل ضرب وخارج القسمة - نظرية الباقي - نظرية كابل - هاملتون - تفاضل مصفوفة .

٢١٣-٢٢٢

الفصل الرابع والعشرون : شكل سميث النظامى :

شكل سميث النظامى - العوامل اللامتغيرة - القواسم الأولية .

٢٢٣-٢٣١

الفصل الخامس والعشرون : كثير الحدود الأدنى لمصفوفة :

اللامتغيرات التشابهية - كثير الحدود الأدنى - المصفوفة المتردية وغير المتردية - المصفوفة الرقيقة .

٢٣٣-٢٤٦

الفصل السادس والعشرون : الأشكال القانونية بالنسبة للتشابه :

الشكل القانونى الجذرى - شكل قانونى ثان - المصفوفات فوق الرقيقة شكل جاكوبى القانونى - الشكل القانونى الكلاسيكى - الاختزال إلى الشكل القانونى الجذرى .

٢٤٧-٢٥٢

قائمة بالمصطلحات

٢٥٣-٢٥٨

فهرس ثبت المصطلحات

الفصل الأول

المصفوفات

تسمى مجموعة الأعداد المرتبة على شكل مستطيل والموضوعة داخل قوسين مثل

$$(أ) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

والتي تخضع لقواعد معينة لعمليات سنيها فيها بعد مصفوفة . المصفوفة . (أ) يمكن اعتبارها كمصفوفة المعاملات لمجموعة

$$\text{المعادلات المتجانسة : } \begin{cases} 2x+3y+7z=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases} \text{ أو كمصفوفة محددة لمجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة :}$$

سرى فيها بعد كيف يمكن استعمال المصفوفات لحل هذه المجموعات ، ومن الممكن إعطاء تفسير مشابه للمصفوفة (ب) بأن نعتبر صفوفها ممثلة لاحداثيات النقاط (1,3,1) ، (2,1,4) ، و (4,7,6) في الفراغ العادي . سنستعمل أيضا فيها بعد المصفوفات ، لكي نبرهن على أن ثلاث نقاط واقعة أو غير واقعة في مستوى واحد مع نقطة الأصل أو على أنها واقعة أو غير واقعة على استقامة واحدة مع نقطة الأصل .

تسمى الأعداد أو الدوال a_{ij} الواردة في المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

عناصر المصفوفة ، حيث يعنى الدليل الأول في العنصر a_{ij} رقم الصف ويعنى الدليل الثاني رقم العمود الذي يقع فيه العنصر ، وبذا سيحمل كل عنصر من الصف الثاني العدد 2 كدليل أول كما يحمل كل عنصر من العمود الخامس الرقم 5 كدليل ثان . توصف كل مصفوفة ذات m صف و n عمودا بأنها من درجة $m \times n$ ويقرأ ذلك : من درجة $(n \times m)$ (نستعمل في بعض الأحيان للدلالة على مصفوفة القوسين) أو الزوجين من القطع المستقيمة « » ولكننا سنستعمل القوسين في كل مكان من هذا الكتاب) .

نذكر في بعض الأحيان المصفوفة (1.1) بقولنا المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ أو المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ ، وعندما تكون الدرجة مقررمة ومعروفة سنكتب بشكل مختصر « المصفوفة A » .

المصفوفات المربعة : إذا كانت $m=n$ فإن (1.1) يكون مربعا ويمكن عندئذ تسميته مصفوفة مربعة من درجة n أو مصفوفة مربعة n .

في مصفوفة مربعة نسمى العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ عناصر قطرية ، ونسمى حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A ، أثر المصفوفة .

المصفوفات المتساوية : نقول إن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط)

هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكان كل عنصر من إحداها مساويا للعنصر المقابل له من الثانية أى إذا كان وإذا كان فقط .

$$a_{ij} = b_{ij} , \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

أى : تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كانت وإذا كانت فقط إحداها نسخة من الثانية .

المصفوفات الصفيرية : تسمى المصفوفة ، التى كل عنصر فيها صفر ، المصفوفة الصفيرية وعندما تكون المصفوفة صفرا ولا يكون هناك التباس فى درجتها ، فإننا نكتب $A = O$ ، بدلا من أن نكتب الجدول $m \times n$ حيث كل عنصر فيه صفر .

مجموع مصفوفتين : إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة $m \times n$ فإن مجموعهما (حاصل طرحهما) $A \pm B$ يعرف بالمصفوفة $C = [c_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ حيث كل عنصر من C هو مجموع (حاصل طرح) العنصرين المقابلين من المصفوفتين A و B وبذا يكون : $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

$$\text{مثال ١ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ فإنه يكون}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

إذا كانت مصفوفتين من درجة واحدة فإننا نقول عنهما متوافقتين للجمع والطرح . لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من درجتين مختلفتين . مثال ذلك : المصفوفتان (١) و (ب) غير متوافقتين للجمع والطرح .

إن جمع k مصفوفة مثل المصفوفة A هى مصفوفة من الدرجة نفسها ، وكل عنصر فيها ينتج عن تكرار العنصر المقابل من A k مرة .

نعرف : إذا كان k مقدارا عدديا (يسمى k مقدارا عدديا لتمييزه عن الشكل $[k]$ الذى هو مصفوفة من الدرجة 1×1) فإن $A = kA$ تعنى المصفوفة التى تنتج عن A بضرب كل عنصر من عناصرها فى k .

$$\text{مثال ٢ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \text{ فإن :}$$

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3 ,$$

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix} ,$$

ونسى ، بصورة خاصة ، المصفوفة $-A$ سالب A . ونحصل على هذه المصفوفة بضرب كل عنصر من A فى -1 أو ، بشكل أبسط ، بتغيير إشارة كل عنصر من عناصرها . لكل مصفوفة A نجد $A + (-A) = O$ حيث O يعنى المصفوفة الصفيرية ذات الدرجة المساوية لدرجة A .

إذا كانت المصفوفات A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع فإنه يكون :

$$(١) \quad A + B = B + A \quad (\text{قانون التبديل}) .$$

$$(ب) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{قانون جمع الحدود الجبرية}) .$$

$$(ج) \quad k(A+B) = kA + kB = (A+B)k \quad \text{حيث } k \text{ مقدار عددي .}$$

$$(د) \quad \text{توجد مصفوفة } D \text{ بحيث يكون } A+D = B$$

هذه القوانين تنتج من قوانين الجبر الابتدائي التي تحكم جمع الأعداد وجمع كثيرات الحدود . كما وأن هذه القوانين تبين .

I - أن خواص جمع المصفوفات المتوافقة متفقة مع خواص جمع عناصر هذه المصفوفات .

الضرب : بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1m}]$ التي درجتها $1 \times m$

$$C = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1}] \quad \text{والمصفوفة } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{التي درجتها } m \times 1 \text{ فإنه يقصد المصفوفة}$$

$$[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} \right] \quad \text{أي}$$

يجب ملاحظة أن هذه العملية هي صف في عمود : يضرب كل عنصر من الصف بالعنصر المقابل له من العمود وتجمع حواصل الضرب .

$$\text{مثال ٣ : } [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7] \quad (١)$$

$$[3 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6 - 6 + 12] = 0 \quad (ب)$$

بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ التي درجتها $m \times p$ والمصفوفة $B = [b_{ij}]$ التي درجتها $p \times n$ حيث يقصد المصفوفة $C = [c_{ij}]$ التي درجتها $m \times n$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

حيث A مكونة من m صفًا و B مكونة من n عمودًا . لتكوين $C = AB$ فإن كل صف من A يضرب مرة ومرة واحدة فقط في كل عمود من أعمدة B . إن العنصر c_{ij} من C هو حاصل ضرب الصف ذي الرقم i من A بالعمود ذي الرقم j من B .

$$A B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

نقول إن حاصل الضرب AB معرف أو إن A موافقة لـ B بالنسبة للضرب إذا كان (وإذا كان فقط) عدد أعمدة A مساويا لعدد صفوف B وإذا كان A موافقا لـ B بالنسبة للضرب (AB معرف) فإنه ليس من الضروري أن يكون B موافقا لـ A بالنسبة للضرب ، (إن BA يمكن أن يكون أو لا يكون معرفا) .

أنظر المسائلين ٣ و ٤

إذا فرضنا أن A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب كما هي واردة أدناه ، فإنه يكون :

$$(أ) \quad A(B+C) = AB + AC \quad \text{قانون التوزيع الأول .}$$

$$(و) \quad (A+B)C = AC + BC \quad \text{قانون التوزيع الثاني .}$$

$$(ز) \quad A(BC) = (AB)C \quad \text{قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود) .}$$

وهكذا نجد أنه :

$$(ح) \quad AB \neq BA \quad \text{بصورة عامة .}$$

$$(ط) \quad AB = O \quad \text{لا يستلزم بالضرورة أن يكون } A = O \text{ أو } B = O .$$

$$(ي) \quad AB = AC \quad \text{لا يستلزم بالضرورة أن يكون } B = C .$$

أنظر المسائل ٣ - ٨

الضرب بالتجزئة : لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $p \times n$. عند تكوين حاصل الضرب AB ، تقسم المصفوفة A في الواقع إلى m مصفوفة من الدرجة $1 \times p$ ، أما المصفوفة B فإنها تقسم إلى n مصفوفة من الدرجة $p \times 1$. إن هناك تقسيمات أخرى يمكن استعمالها ، فلنجزئ مثلا كلا من A و B إلى مصفوفات أخرى ذات درجات محددة على الجدول ، وذلك برسم مستقييات من الشكل :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array} \right]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array} \right] \quad \text{أو}$$

في كل تجزئة يجب أن تجزأ أعمدة A و صفوف B بشكل واحد ، ومن جهة أخرى يمكن أن تكون الأعداد m_1, m_2, n_1, n_2 أي أعداد صحيحة غير سالبة (محتوية الصفر) ويكون $m_1 + m_2 = m$ و $n_1 + n_2 = n$ ويكون عندئذ :

$$AB = \left[\begin{array}{cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{array} \right] = C$$

$$\text{مثال ٥ : احسب } AB \text{ إذا علمت أن } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنجر التجزئة التالية :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right], \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

فجد

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [2] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [1] [2 \ 3 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [1] [2] \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

انظر أيضا المسألة ٩ .

لتكن $A, B, C, \dots$ مصفوفات مربعة من الدرجة n ولنجزئ A إلى مصفوفات كما هو مبين فيما يلي ومن الدرجات الموضحة أدناه :

$$\begin{bmatrix} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \dots & (p_1 \times p_s) \\ (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \dots & (p_2 \times p_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \dots & (p_s \times p_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن المصفوفات $B, C, \dots$ قد جزئت بالطريقة السابقة نفسها . يمكن عندها ، لإجراء جمع وطرح وضرب

المصفوفات الاستمارة بالمصفوفات $A_{11}, A_{12}, \dots; B_{11}, B_{12}, \dots; C_{11}, C_{12}, \dots$

مسائل محلولة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{أ - ١}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب -}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ج -}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{د -}$$

٢- إذا كان $A + B - D = 0$. بحيث يكون $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ أو $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

إذا كان $A + B - D = \begin{bmatrix} 1-3-p & 2-2-q \\ 3+1-r & 4-5-s \\ 5+4-t & 6+3-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-p & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $-2-p = 0$

و $p = -2, 4-r = 0$

فإن $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = A + B$ ، و $r = 4, \dots$

3. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [4(2) + 5(3) + 6(-1)] = [17]$ - ١ - ٣

ب- $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3(4) & 3(5) & 3(6) \\ -1(4) & -1(5) & -1(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1(4) + 2(0) + 3(5) & 1(-6) + 2(-7) + 3(8) & 1(9) + 2(10) + 3(-11) & 1(6) + 2(7) + 3(-8) \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 19 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

د- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(3) \\ 1(1) + 5(2) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

ه- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

٤- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

يمكن للقارئ أن يبرهن على أن $A^3 = A \cdot A^2$ ، و $A^2 \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2$.

هـ - برهن أن

١- $\sum_{k=1}^2 a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^2 a_{ik}c_{kj}$

ب- $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij}$

ج- $(c) \sum_{k=1}^2 a_{ik} \left(\sum_{h=1}^3 b_{kh} c_{hj} \right) = \sum_{h=1}^3 \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}$

$\sum_{k=1}^2 a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j})$
 $= \sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^2 a_{ik}c_{kj}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} &= \sum_{i=1}^2 (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ &= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) \quad \text{ب.} \\ &= \sum_{i=1}^2 a_{i1} + \sum_{i=1}^2 a_{i2} + \sum_{i=1}^2 a_{i3} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij}. \end{aligned}$$

إن هذا يبين ببساطة ، أنه لإيجاد مجموع كل عناصر مصفوفة يمكن للمرء أن يجمع أولا عناصر كل صف أو عناصر كل عمود .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 a_{ik} \left(\sum_{h=1}^3 b_{kh} c_{hj} \right) &= \sum_{k=1}^2 a_{ik} (b_{k1} c_{1j} + b_{k2} c_{2j} + b_{k3} c_{3j}) \quad \text{ج.} \\ &= a_{i1} (b_{11} c_{1j} + b_{12} c_{2j} + b_{13} c_{3j}) + a_{i2} (b_{21} c_{1j} + b_{22} c_{2j} + b_{23} c_{3j}) \\ &= (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{21}) c_{1j} + (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22}) c_{2j} + (a_{i1} b_{13} + a_{i2} b_{23}) c_{3j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k1} \right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k2} \right) c_{2j} + \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k3} \right) c_{3j} \\ &= \sum_{h=1}^3 \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}. \end{aligned}$$

٦- برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وكان كل من $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$

$$\text{فإن } A(B+C) = AB + AC$$

إن عناصر الصف ذي الرقم i من A هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ وعناصر العمود ذي الرقم j من $(B+C)$ هي $b_{1j} + c_{1j}, b_{2j} + c_{2j}, \dots, b_{nj} + c_{nj}$. ينتج عن هذا أن العنصر الذي يقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم

j من $A(B+C)$ هو

$$a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}.$$

وهو مجموع الحدين الواقعين في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j في AB و AC

٧- برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ و $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $p \times q$

$$\text{فإن } A(BC) = (AB)C$$

إن عناصر الصف ذي الرقم i من A هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ وعناصر العمود ذي الرقم j من BC هي

$$\sum_{h=1}^p b_{1h} c_{hj}, \sum_{h=1}^p b_{2h} c_{hj}, \dots, \sum_{h=1}^p b_{nh} c_{hj};$$

الرقم j من $A(BC)$ هو

$$\begin{aligned} a_{i1} \sum_{h=1}^p b_{1h} c_{hj} + a_{i2} \sum_{h=1}^p b_{2h} c_{hj} + \dots + a_{in} \sum_{h=1}^p b_{nh} c_{hj} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{h=1}^p b_{kh} c_{hj} \right) \\ &= \sum_{h=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k1} \right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k2} \right) c_{2j} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kp} \right) c_{pj} \end{aligned}$$

وهذا هو العنصر الواقعي في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من $(AB)C$ أي $A(BC) = (AB)C$

٨- نفرض أن A, B, C, D مصفوفات متوافقة فيما بينها بالنسبة للجمع والضرب ، برهن بطريقتين مختلفتين أن :

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

بلاستفادة من العلاقة (٥) ثم من العلاقة (و) نجد :

$$(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D = AC + BC + AD + BD.$$

أما إذا استعنا بالعلاقة (و) وثم بـ (هـ) فإننا نجد :

$$(A+B)(C+D) = A(C+D) + B(C+D) = AC + AD + BC + BD \\ = AC + BC + AD + BD.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [3 \ 1 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [1] \cdot [8 \ 7] & [1] \cdot [6 \ 5 \ 4] & [1] \cdot [1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 10 & 13 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 31 & 33 \\ 20 & 22 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & 37 & 39 \\ 24 & 26 & 28 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 30 \\ 13 \end{bmatrix} \\ [8 \ 7] [6 \ 5 \ 4] [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\ 20 & 22 & 24 & 26 & 28 & 30 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{cases} \text{ ثلاث متغير خطية في } y_1 \text{ و } y_2 \text{ ، ولنفرض أن } \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{cases} \text{ ١٠ - لنفرض أن}$$

هو تحويل خطي من الأحداثيين $(y_1 \text{ و } y_2)$ إلى الإحداثيين $(z_1 \text{ و } z_2)$. إذا طبقنا هذا التحويل على المتغير الخطية المطاة فإننا نحصل على مجموعة المتغير .

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2 \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2 \\ x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})z_2 \end{cases}$$

وإذا استعملنا رموز المصفوفات فإن المتغير الثلاث تصبح $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ وكذلك فإن التحويل يكون

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{ ، أما ناتج تطبيق هذا التحويل فيعطى المتغير الثلاث .}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

وهكذا إذا خضعت مجموعة من m من الصور الخطية في n متغير مصفوفتها A لتحويل خطي للمتغيرات مصفوفته B فإنه ينتج مجموعة من m من الصور الخطية مصفوفتها $C = AB$

مسائل إضافية

$$11 - \text{إذا أعطيت: } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 - \text{فاحسب } A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ و } A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ب- واحسب

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \text{ و } 0 \cdot B = 0$$

$$ج- وحقق } A+(B-C) = (A+B)-C.$$

د- أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A+D=B$ ونحقق من أن $A+B=D$

$$12 - \text{إذا أعطيت } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ و } BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \text{ تحقق من أن } AB=0$$

تحقق بعد ذلك من أن $BA \neq AB$ بصورة عامة.

$$13 - \text{وإذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

برهن أن $AB \neq AC$ وأن كون $AB=AC$ لا يستلزم بالضرورة أن يكون $B=C$

$$14 - \text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ برهن أن } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

١٥ - استعمل مصفوفات المسألة ١١ ونحقق من أن $A(B+C) = AB+AC$ وأن $(A+B)C = AC+BC$

$$16 - \text{فر بصورة عامة لماذا } (A-B)(A+B) \neq A^2-B^2 \text{ و } (A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$17 - \text{إذا أعطيت } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$1 - \text{برهن أن } AB=BA=0, AC=A, CA=C.$$

$$ب - \text{استفد من نتائج (١) وبرهن أن } ACB=CBA, A^2-B^2 = (A-B)(A+B), (A \pm B)^2 = A^2 + B^2.$$

١٨- إذا فرض $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ، حيث $i^2 = -1$ ، فاستنتج صيغة تعطي القوى الصحيحة الموجبة لـ A .

الجواب : $A^n = I, A, -I, -A$ بحسب ما يكون، $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ حيث $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

١٩- برهن أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من مجموعة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

هو مصفوفة من هذه المجموعة.

٢٠- إذا أعطيت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times p$ والمصفوفة C من الدرجة $r \times q$ فافهم الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد p و q و r لكي تكون حواصل الضرب موجودة. ما هي درجة كل من مصفوفات حواصل الضرب.

$$A(B+C)? \quad - \quad ACB, \quad - \quad B \quad - \quad ABC, \quad - \quad 1$$

$$r = n, p = q; m \times q \quad - \quad r = n = q; m \times p \quad - \quad p = r; m \times q \quad - \quad \text{الجواب ١}$$

٢١- احسب AB إذا علمت :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

٢٢- برهن أن (١) أثر $(A+B) =$ أثر $A +$ أثر B (ب) أثر $kA = k$ أثر A

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{نحقق أن} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases} \quad \text{٢٣- إذا كان}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}$$

٢٤- ليكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وإذا كان $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ برهن أن

$$(A+B)C = AC + BC$$

٢٥- إذا كان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, n)$:

وإذا رمزنا بالرمز β_i لمجموع عناصر الصف ذي الرقم i من B أى $\beta_i = \sum_{k=1}^n b_{ik}$. فبرهن أن العنصر الواقع

في الصف ذي الرقم i من حاصل الضرب $A \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$ هو مجموع عناصر الصف ذي الرقم i من حاصل الضرب AB .

استخدم هذه الطريقة لحساب حواصل الضرب الوارد في المسألتين ١٢ ، ١٣ .

٢٦ - تسمى العلاقة (مثل التوازي التطابق) بين عناصر رياضية علاقة تكافؤ فيما إذا حققت الخواص التالية :

- (١) التحديد : إما أن يكون a يحقق العلاقة مع b وإما أن يكون a غير يحقق لهذه العلاقة مع b .
- (ب) الانمكاس : a يحقق العلاقة مع a لكل a .
- (ج) التماثل : إذا كان a يحقق العلاقة مع b فإن b يحقق هذه العلاقة مع a .
- (د) التمدى : إذا كان a يحقق العلاقة مع b وكان b يحقق هذه العلاقة مع c فإن a يحقق هذه العلاقة نفسها مع c .

برهن أن توازي المستقيمت وتشابه المثلثات وتساوى المصفوفات هي علاقات تكافؤ .

برهن أن تعامد المستقيمت ليس علاقة تكافؤ .

٢٧ - برهن أن علاقة التوافق بالنسبة لجمع المصفوفات هي علاقة تكافؤ ، بينما علاقة التوافق بالنسبة لضرب المصفوفات ليست علاقة تكافؤ .

٢٨ - برهن أنه إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات تحقق العلاقات $AC = CA$ و $BC = CB$.

فإن : $(AB \pm BA) C = C (AB \pm BA)$.

الفصل الثاني

بعض أنماط من المصفوفات

مصفوفة الوحدة (المحايدة) :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $a_{ij} = 0$ لقيم $i > j$ فإنها تسمى مصفوفة مثلثية عليا وإذا كانت $a_{ij} = 0$ لقيم $i < j$ فإنها تدعى مصفوفة مثلثية دنيا . وعلى ذلك :

مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية دنيا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ، والتي هي مثلثية عليا ومثلثية دنيا تسمى مصفوفة قطرية .

كثيرا ما تكتب هذه المصفوفة بالشكل :

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

أنظر المسألة ١

إذا كان في المصفوفة القطرية D ، $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ فإنها تدعى مصفوفة عددية وبالإضافة إلى ذلك إذا كان $k = 1$ فإن هذه المصفوفة تدعى مصفوفة الوحدة (المحايدة) . ويرمز لها بالرمز I_n مثال ذلك

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت درجة المصفوفة واضحة أو غير هامة فإننا نرمز لمصفوفة الوحدة بالرمز I . من الواضح أن مجموع p من

المصفوفات I_n يحقق

$$I^p = I.I \dots = I \quad \text{وأن}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

إن لمصفوفة الوحدة خواص مطابقة لبعض خواص الواحد كعدد صحيح . مثال ذلك إذا كان

$$I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = I_2 A I_3 = A \quad \text{فإن} \quad , \quad \text{ويمكن للقارئ أن يحقق ذلك بسهولة .}$$

مصفوفات مربعة خاصة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين وحققنا العلاقة $AB = BA$ فإننا نسمى هاتين المصفوفتين تبديليتين أو قابليتين للتبديل . ومن السهل أن نبرهن على أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإنها تبديلية مع نفسها ومع المصفوفة I_n .

أنظر المسألة ٢

إذا حققت المصفوفات A و B العلاقة $AB = -BA$ قلنا إنهما تبديليتان عكسيتان .

إذا حققت المصفوفة A العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث k عدد صحيح موجب ، قلنا إن هذه المصفوفة دورية .

وإذا كان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^{k+1} = A$ قلنا إن دورة A هي k .

إذا كان $k = 1$ أى إذا كان $A^2 = A$ فإننا نقول عن A إنها متساوية القوى .

أنظر المسائلين ٣-٤

تسمى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^p = 0$ حيث p عدد صحيح موجب بالمصفوفة معدومة القوى . وإذا كان p أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^p = 0$ قلنا إن A مصفوفة معدومة القوى من الدليل p .

أنظر المسائلين ٥ و ٦

معكوس مصفوفة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين بحيث يكون $AB = BA = I$ فإن B تدعى معكوس A ونكتب $B = A^{-1}$ (B تساوى معكوس A) . إن المصفوفة B يكون لها ، أيضا ، معكوس هو المصفوفة A ويمكننا أن نكتب $A = B^{-1}$.

مثال ١ : بما أن $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ فإن كل مصفوفة في حاصل الضرب هي معكوس الأخرى .

سنرى فيما بعد (الفصل السابع) أنه ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس وسنبرهن عندها أنه إذا كان للمصفوفة A معكوس فإنه يكون معكوس وحيد

أنظر المسألة ٧

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة واحدة وكان لهما المعكوسان A^{-1} و B^{-1} على الترتيب فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ أى :

I - إن معكوس حاصل ضرب مصفوفتين ، يوجد لهما معكوسان ، هو حاصل الضرب بترتيب معاكس لمعكوسيهما .

أنظر المسألة ٨

تدعى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^2 = I$ مصفوفة ملتفة . إن مصفوفة الوحدة مصفوفة من هذا النوع وإن المصفوفة الملتفة هي معكوس نفسها .

أنظر المسألة ٩

منقول المصفوفة :

تسمى المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$

منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' (منقول A) . مثال ذلك إن منقول المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ هو المصفوفة}$$

يلاحظ أن العنصر a_{ij} الذي يقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j في المصفوفة A يقع في تقاطع الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i للمصفوفة A' .

إذا كان A' و B' هما منقول A و B على الترتيب وإذا كان k مقدارا عدديا فإننا نجد بسهولة :

$$(kA)' = k A' \quad (\text{ب}) \quad (A')' = A \quad (\text{أ})$$

يرهن في المسألتين ١٠ و ١١ ما يلي :

II — إن منقول مجموع مصفوفتين هو مجموع منقولي هاتين المصفوفتين أى :

$$(A + B)' = A' + B'$$

III — إن منقول حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل الضرب بترتيب معاكس لمنقولهما أى أن

$$(AB)' = B' A'$$

أنظر المسائل ١٠-١٢

المصفوفات المتماثلة :

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A' = A$ قلنا إنها مصفوفة متماثلة . وعلى ذلك فالمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ تكون مصفوفة متماثلة إذا تحققت العلاقة $a_{ji} = a_{ij}$ لكل قيم i و j .

مثال ذلك : المصفوفة 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة وكذلك المصفوفة kA لأى عدد k .

في المسألة ١٣ سنبرهن

IV — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن المصفوفة $A + A'$ متماثلة .

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A' = -A$ سميت مصفوفة متماثلة تخالفية أى تكون المصفوفة المربعة متماثلة تخالفية إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ذلك}$$

مصفوفة متماثلة تخالفية وكذلك المصفوفة kA مهما كان العدد k . بتغيير طفيف في برهان المسألة ١٣ يمكننا أن نبرهن ما يلي :

V — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A - A'$ تكون مصفوفة متماثلة تخالفية .

نستنتج من النظريتين IV و V ما يلي :

VI — يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A كمجموع المصفوفة المتماثلة $B = \frac{1}{2}(A + A')$ والمصفوفة المتخالفية

أنظر المسائل ١٤-١٥

$$C = \frac{1}{2}(A - A').$$

المصفوفة المترافقة :

إذا كان a و b عددين حقيقيين وكان $i = \sqrt{-1}$ فإن $z = a + bi$ يسمى عددا مركبا . ويسمى العددان المركبان $a + bi$ و $a - bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر . إذا كان $z = a + bi$ فإنه يرمز لمرافقه بالرمز $\bar{z} = a - bi$.

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = a - bi$ فإنه يكون $\bar{z}_2 = \overline{a - bi} = a + bi = z_1$ أى أن المرافق للمرافق لعدد مركب z هو هذا العدد نفسه .

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ فإنه يكون :

$$\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \quad (i)$$

أى أن المرافق لمجموع عددين مركبين هو مجموع مرافقي هذين العددين :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i \quad (ii)$$

أى أن المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما .

إذا كانت A مصفوفة ، لها عناصر أعداد مركبة ، فإن المصفوفة التى تنتج عن A بتعويض كل عنصر فيها بمرافقه تدعى المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز A' (المرافقة للمصفوفة A) .

$$\text{مثال ٢ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix} \text{ فإن يكون } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$$

إذا كان A' و B' المرافقين للمصفوفتين A و B وإذا كان k عددا ما فإنه يكون :

$$(kA) = k.A \quad (\text{د}) \quad \text{و} \quad (A)' = A' \quad (\text{ج})$$

من (i) و (ii) الواردة أعلاه يمكن إثبات ما يلي :

VII - المصفوفة المرافقة لمجموع مصفوفتين هي مجموع مرافقيهما أى : $(A+B)' = A' + B'$

VIII - المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين هي حاصل ضرب مرافقيهما بنفس الترتيب أى : $(AB)' = A'.B'$

يرمز لمنقول A بالرمز A^* (منقول المصفوفة المرافقة لـ A) . ونكتب ذلك فى كثير من الأحيان بالشكل A^* كذلك :

IX - إن منقول المصفوفة المرافقة للمصفوفة A يساوى المصفوفة المرافقة لمنقول A أى $(A')' = A$

مثال ٣ :

من المثال ٢ ينتج أن :

$$(\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \text{ بينما } A' = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \text{ و } (\bar{A})' = A'$$

المصفوفات الهرميتية :

تسمى المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $A' = A$ مصفوفة هرميتية . أى أن المصفوفة A تكون هرميتية إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل قيم i و j . ومن الواضح أن عناصر قطر كل مصفوفة هرميتية أعداد حقيقية

$$\text{مثال ٤ : } A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة هرميتية .}$$

هل المصفوفة kA هرميتية إذا كان k عددا حقيقيا ما ؟ وإذا كان عددا مركبا ما ؟

المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $A' = -A$ تسمى مصفوفة هرميتية متخالفة أى تكون المصفوفة هرميتية متخالفة فيما إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل قيم i و j ومن الواضح أن عناصر قطر مصفوفة هرميتية متخالفة أما أن تكون أصفارا أو أعدادا تخيلية بحتة .

مثال ٥ :

$$\text{إن المصفوفة } A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة هرميتية متخالفة . هل } A \text{ هرميتية متخالفة إذا كان } k \text{ عددا حقيقيا ما ؟ وإذا كان عددا مركبا ؟ وإذا كان عددا تخيليا بحتا ؟}$$

بإحداثيات تغيرات طفيفة في المسألة ١٣ يمكننا أن نبرهن :

X - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A + A'$ تكون مصفوفة هيرميتية و $A - A'$ مصفوفة هيرميتية متخالفة .

ينتج عن النظرية X ما يلي :

XI - يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A لها عناصر أعداد مركبة ، كمجموع المصفوفة الهيرميتية $B = \frac{1}{2} (A + A')$ والمصفوفة الهيرميتية المتخالفة $C = \frac{1}{2} (A - A')$

المجموع المباشر :

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_s$ مصفوفات مربعة درجاتها على الترتيب $m_1, m_2, \dots, m_s$ فإن المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i

مثال ٦ : إذا كان $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, و $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

فإن المجموع المباشر للمصفوفات A_1 و A_2 و A_3 هو

$$\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

إن المسألة ٩ (ب) من الفصل ١ توضح النظرية التالية :

XII - إذا كانت $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ مصفوفتان من درجة واحدة

لقيم $(i = 1, 2, \dots, s)$ فإنه يكون $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_sB_s)$.

مسائل محلولة

١ - بما أن

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{22}b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

الضرب AB لمصفوفة مربعة قطرية $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ درجاتها m بأى مصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ نحصل عليه بضرب الصف الأول من B في a_{11} والصف الثاني منها في a_{22} وهكذا

٢- برهن أن المصفوفتين $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ تبديليتن لكل قيم a, b, c, d إن هذا ينتج عن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

٣- برهن أن $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ متساوية القوى .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

٤- برهن أنه إذا كان $AB = A$ و $BA = B$ فإن A و B تكونا متساويتا القوى .
 إن $ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ و $ABA = A(BA) = AB = A$; وعلى ذلك $A^2 = A$ أى أن A متساوية القوى .
 استخدم حاصل الصرب BAB لكي تبرهن أن B مصفوفة متساوية القوى .

٥- برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ مدمومة القوى من الدرجة 3 .

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

٦- إذا كانت A مصفوفة معلومة القوى ذات الدليل 2 نبرهن أن $A(I \pm A)^n = A$ لأي عدد صحيح موجب n .

$$A(I \pm A)^n = A(I \pm A) = A \pm nA^2 = A \quad \text{بما أن} \quad A^2 = 0, A^3 = A^4 = \dots = A^n = 0.$$

٧- إذا فرضنا A و B و C مصفوفات مربعة تحقق $AB=I$ و $CA=I$ فإنه ينتج عن العلاقة $(CA)B=C(A B)$ أن $B=C$. وعلى ذلك $B=C=A^{-1}$ (ما هي المصفوفة B^{-1} ؟) .

٨- برهن أن $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

بالتعريف $(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I$ والآن

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

$$AB(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I \quad \text{و}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad \text{وحيدة . أى : } (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} .$$

٩- برهن مايل : تكون المصفوفة A مصفوفة ملتفة فيما إذا (وإذا فقط) كان $(I-A)(I+A) = 0$.

لتفرض $(I-A)(I+A) = I - A^2 = 0$; فينتج عن ذلك أن $A^2 = I$ وأن A مصفوفة ملتفة .

لتفرض أن A مصفوفة ملتفة فينتج عن هذا أن $A^2 = I$ و $(I-A)(I+A) = I - A^2 = I - I = 0$.

١٠- برهن أن $(A+B)^{\sim} = A^{\sim} + B^{\sim}$.

لتفرض $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ يكفيننا أن نبرهن أن العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفات $A^{\sim}$ و $B^{\sim}$ و $(A+B)^{\sim}$ هي على الترتيب a_{ji} و b_{ji} و $a_{ji} + b_{ji}$.

١١- برهن أن : $(AB)' = B'A'$.

بفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة درجتها $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة درجتها $n \times p$ فإن $C = AB = [C_{ij}]$ مصفوفة درجتها $m \times p$. إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من AB هو $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ وهو أيضا العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من المصفوفة $(AB)'$.

إن عناصر الصف ذي الرقم j من B' هي $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ وإن عناصر العمود ذي الرقم i من A' هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. إذن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i من $B'A'$ هو :

$$\sum_{k=1}^n b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}$$

وهذا يؤدي إلى أن : $(AB)' = B'A'$.

١٢- برهن أن : $(ABC)' = C'B'A'$.

اكتب $ABC = (AB)C$ واستنتج من المسألة ١١ أن : $(ABC)' = \{ (AB)C \}' = C'(AB)' = C'B'A'$.

١٣- برهن أنه إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $B = [b_{ij}] = A + A'$ تكون مصفوف متماثلة

البرهان الأول :

إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من A هو a_{ij} وإن العنصر المناظر له في A' هو a_{ji} إذن $b_{ij} = a_{ji} + a_{ij}$. إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i من A هو a_{ji} وإن العنصر المناظر له من A' هو a_{ij} . إذن $b_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$ أي أن $b_{ij} = b_{ji}$ وإن B مصفوفة متماثلة .

البرهان الثاني :

استنادا إلى المسألة ١٠ نجد $(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A' = A + A'$ هي مصفوفة متماثلة .

١٤- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين متماثلتين فإن AB تكون مصفوفة متماثلة إذا (وإذا فقط) كانت المصفوفتان A و B تبديليتين .

لنفرض أن A و B تبديليتان أي $(AB)' = B'A' = BA = AB$ فيكون $AB = BA$ أي أن AB متماثلة . لنفرض أن AB متماثلة أي $(AB)' = A'B' = BA = AB$ الآن $(AB)' = B'A' = BA$ وينتج عن ذلك أن $AB = BA$ وأن المصفوفتين A و B تبديليتان .

١٥- برهن أنه إذا كانت المصفوفة المربعة ذات الدرجة m متماثلة (متماثلة تخالفية) وإذا كانت المصفوفة P من الدرجة $m \times n$ فإن $B = P'AP$ مصفوفة متماثلة (متماثلة تخالفية) .

إذا كانت A متماثلة (انظر المسألة ١٢) ، فإن $B' = (P'AP)' = P'A'(P')' = P'A'P = P'AP$ وينتج عن هذا أن B متماثلة .

إذا كانت A متماثلة تخالفية فإن $B' = (P'AP)' = -P'AP$ وينتج عن ذلك أن B متماثلة تخالفية .

١٦- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n فإن A و B تبديليتان إذا (وإذا فقط) كان $A - kI$ و $B - kI$ تبديليتين لأي قيمة للعدد k .

لنفرض أن A و B تبديليتان أي $AB = BA$ وعلى ذلك

$$\begin{aligned} (A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI) \end{aligned}$$

وينتج عما تقدم أن $A - kI$ و $B - kI$ تبديليتان .

لنفرض أن $A - kI$ و $B - kI$ تبديلتان فيكون :

$$\begin{aligned}(A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI)\end{aligned}$$

ونجد أن $AB = BA$ وهذا يعني أن A و B تبديلتان.

مسائل إضافية

١٧ - برهن أن حاصل ضرب مصفوفتين مثلثيتين علويتين (سفليتين) هو مصفوفة مثلثية علوية (سفلية) .

١٨ - استنتج قاعدة لتكوين حاصل الضرب BA للمصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ بالمصفوفة القطرية : $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

إرشاد : أنظر المسألة ١

١٩ - برهن أنه يمكن كتابة المصفوفة العددية التي عناصرها قطرها هي العدد k بالشكل kI وأن $kA = kIA = \text{diag}(k, k, \dots, k)$.
حيث تساوى درجة I عدد صفوف المصفوفة A .

٢٠ - إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n برهن أن $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$ حيث p و q عدداً صحيحان موجبان .

$$٢١ - (١) \text{ برهن أن } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ متساويتا القوى .}$$

(ب) استعمل A و B لتبرهن على أن عكس المسألة غير صحيح .

٢٢ - إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى فبرهن أن $B = I - A$ متساوية القوى . وأن $AB = BA = 0$:

$$٢٣ - (١) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ فبرهن أن } A^2 - 4A - 5I = 0.$$

$$(ب) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ فبرهن أن } A^3 - 2A^2 - 9A = 0. \text{ لكن } A^2 - 2A - 9I \neq 0.$$

$$٢٤ - \text{برهن أن } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I.$$

$$٢٥ - \text{برهن أن } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة دورية دورتها 2}$$

$$٢٦ - \text{برهن أن } \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ معدومة القوى .}$$

$$٢٧ - \text{برهن أن } (١) \text{ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \text{ تبديلتان}$$

$$(ب) \text{ } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{bmatrix} \text{ تبديلتان}$$

٢٨- برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ تبديلتان عكسيا وأن $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

٢٩- برهن أن كلا من المصفوفات $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ تبديلية عكسيا كل مع الأخرى.

٣٠- برهن أن المصفوفات الوحيدة التبديلية مع كل مصفوفة مربعة من الدرجة n هي المصفوفات المربعة العددية من الدرجة n .

٣١- (أ) أوجد كل المصفوفات التبديلية مع $\text{diag}(1, 2, 3)$

(ب) أوجد كل المصفوفات التبديلية مع $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

الجواب (أ) $\text{diag}(a, b, c)$ حيث a, b, c هي اختيارية.

٣٢- برهن أن (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ هي معكوس $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ هي معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

٣٣- افرض $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ الجواب $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

٣٤- برهن أن معكوس مصفوفة قطرية A لا يساوي أى عنصر في قطرها الصفر ، هو مصفوفة قطرية عناصر قطرها ، معكوسات عناصر قطر A وواقعة بالترتيب الأصل ذاته وهي من درجة A نفسها وبصورة خاصة يكون معكوس I_n هو I_n نفسها.

٣٥- برهن أن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ملتفتان.

٣٦- بالتجزئ اكتب $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$ برهن أن $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$.

٣٧- برهن أن (أ) $(A')' = A$, (ب) $(kA)' = kA'$, (ج) $(A^p)' = (A')^p$ حيث p عدد صحيح موجب.

٣٨- برهن أن $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ ارشاد ... اكتب : $(AB)C$ $A B C$

٣٩- برهن (أ) $(A^{-1})^{-1} = A$, (ب) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ حيث p عدد صحيح موجب.

٤٠- برهن أن كل مصفوفة حقيقية متماثلة هي مصفوفة هيرميتية.

٤١- برهن أن (أ) $(\overline{A}) = A$, (ب) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$, (ج) $(\overline{kA}) = \overline{k} \overline{A}$, (د) $(\overline{AB}) = \overline{A} \overline{B}$.

٤٢- برهن أن (أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية.

(ب) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية متخالفة.

(ج) iB هيرميتية.

(د) $\overline{A}$ هيرميتية و $\overline{B}$ هيرميتية متخالفة.

٤٣- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن (١) AA' و $A'A$ متماثلتان (ب) $A + \bar{A}$ و $\overline{AA}$ هيرميتية.

٤٤- برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هيرميتية وكانت A أى مصفوفة متوافقة بالنسبة للضرب فإن HA ($\bar{A}$) تكون مصفوفة هيرميتية.

٤٥- برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية A بالشكل $B + iC$ حيث B مصفوفة حقيقية متماثلة و C مصفوفة حقيقية متماثلة تخالفية.

٤٦- برهن (١) أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية تخالفية A بالشكل $A = B + iC$ حيث B حقيقية متماثلة تخالفية و C مصفوفة متماثلة حقيقية.

(ب) وأن $\bar{A}A$ تكون حقيقية إذا (وإذا فقط) كانت B و C متبادلتين عكسيا.

٤٧- برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين فإن $A^{-1}, B^{-1}; A', B'; \bar{A}, \bar{B}$ تكون ثلاثة أزواج تبديلية من المصفوفات.

٤٨- برهن أنه لقيم m و n الصحيحة الموجبة تكون B^n و A^m تبديليتين فيما إذا كانت المصفوفتان A و B تبديليتين.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (١) \quad ٤٩- برهن أن$$

٥٠- برهن أنه إذا كانت A متماثلة أو متماثلة تخالفية فإن $AA' = A'A$ و A^2 متماثلتان.

٥١- إذا كانت $\alpha, b, \dots, g$ مقادير عددية p عدد صحيح موجب، فأثبت أنه إذا كانت A متماثلة فإن $\alpha A^p + bA^{p-1} + \dots + gI$ تكون متماثلة أيضا.

٥٢- برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + C$ حيث B مصفوفة هيرميتية و C مصفوفة هيرميتية متخالفة.

٥٣- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة تخالفية أو إذا كانت A مصفوفة مركبة و هيرميتية تخالفية فإن $\pm iA$ هيرميتية.

٥٤- برهن أنه يمكن ذكر النظرية الواردة في المسألة ٥٢ بالشكل التالي :

يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + iC$ حيث B و C مصفوفتان هيرميتيتان.

٥٥- برهن أنه إذا حققت كل من A و B العلاقتين $AB = A$ و $BA = B$ فإن (١) $B'A' = A'$ و $A'B' = B'$ (ب) A', B' مصفوفتان متساويتا القوى.

(ج) $A = B = I$ وذلك إذا كان A معكوس.

٥٦- إذا كانت A مصفوفة ملتفة فبرهن أن $\frac{1}{2}(I + A)$ و $\frac{1}{2}(I - A)$ مصفوفتان متساويتا القوى وأن $\frac{1}{2}(I + A) \cdot \frac{1}{2}(I - A) = 0$.

٥٧- إذا كان لمصفوفة مربعة A معكوس A^{-1} فبرهن أن :

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \quad (١) \quad (A^{-1})' = \overline{(A')^{-1}} \quad (ب) \quad \text{و} \quad (\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})} \quad (ج)$$

إرشاد : (١) يمكن باستخدام منقول $AA^{-1} = I$ وإيجاد $(A^{-1})'$ كمعكوس للمصفوفة A'

٥٨- أوجد كل مصفوفة قابلة للمبادلة مع (١) $\text{diag}(1, 1, 2, 3)$ (ب) $\text{diag}(1, 1, 2, 2)$

الجواب : (١) $\text{diag}(A, b, c)$ ، (ب) $\text{diag}(A, B)$ حيث A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية عناصرهما اختيارية و c و b مقداران عدديان.

٥٩- إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_s$ مصفوفات عددية درجتها على الترتيب $m_1, m_2, \dots, m_s$ ، فأوجد كل المصفوفات القابلة للعبادة

مع $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$

الجواب : $\text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ حيث $B_1, B_2, \dots, B_s$ مصفوفات درجتها على الترتيب $m_1 + m_2 = m$

وعناصرها اختيارية .

٦٠- إذا كان $AB = 0$ حيث A و B مصفوفتان مربعتان غير صفريتين ، فإننا نقول إن A و B قاسمان للصفر .

برهن أن المصفوفتين A و B الواردتين في المسألة ٢١ قاسمان للصفر .

٦١- إذا كان $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ و $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ حيث B_i و A_i من نفس الدرجة ، $(i=1, 2, \dots, s)$

فبرهن أن :

$$A + B = \text{diag}(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_s + B_s) \quad (أ)$$

$$AB = \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_s B_s) \quad (ب)$$

$$\text{trace } AB = \text{trace } A_1 B_1 + \text{trace } A_2 B_2 + \dots + \text{trace } A_s B_s. \quad (ج)$$

٦٢- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n متماثلتين تخالفيتين فإن AB تكون متماثلة إذا

(وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٣- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان $B = rA + sI$ حيث r و s مقداران عدديان ،

فإن A و B تبديليتان .

٦٤- لنفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n وأن r_1, r_2, s_1, s_2 مقادير عددية بحيث يكون $r_1 s_2 \neq r_2 s_1$

برهن أن المصفوفتين $C_1 = r_1 A + s_1 B$ ، $C_2 = r_2 A + s_2 B$ تبديليتين ، إذا (وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٥- برهن أن مصفوفة مربعة A درجتها n لا يكون لها معكوس إذا (أ) كانت عناصر صف (عمود) منها معدومة أو

(ب) كان صفان (عمودان) منها متساويين أو (ج) كان صف (عمود) مساويا لمجموع صفين (عمودين) آخرين فيها .

٦٦- إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n وكان لـ A معكوس فبرهن أن :

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

الفصل الثالث

محددة مصفوفة مربعة

التباديل : اعتبر التباديل $3! = 6$ للأعداد الطبيعية 1,2,3 مأخوذة كلها

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321 \quad (3.1)$$

وثمانية تباديل من أصل التباديل $4! = 24$ للأعداد الطبيعية 1,2,3,4 مأخوذة كلها :

$$\begin{array}{cccc} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \end{array} \quad (3.2)$$

إذا وقع عدد طبيعي في تبديل ، قبل آخر يصفره ، نقول إنه يوجد تعاكس . وإذا كان ، في تبديل ما ، عدد التماكسات زوجيا (فرديا) فإننا نسمي هذا التبديل بأنه زوجي (فردي) . مثال ذلك في (3.1) ، نجد أن التبديل 123 زوجي لأنه لا يحوي تماكسات وأن التبديل 132 فردي لأن العدد 3 يسبق العدد 2 وأن التبديل 312 زوجي لأن فيه العدد 3 يسبق العدد 1 والعدد 3 يسبق العدد 2 . أما في (3.2) ، فإن التبديل 4213 زوجي لأن العدد 4 يسبق العدد 2 والعدد 4 يسبق العدد 1 والعدد 4 يسبق العدد 3 وأخيرا العدد 2 يسبق العدد 1 .

محددة مصفوفة مربعة : اعتبر المصفوفة المربعة من الدرجة n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

وحاصل الضرب .

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (3.4)$$

n من عناصر هذه المصفوفة ، اختيرت بأخذ عنصر واحد فقط من كل صف وعنصر واحد فقط من كل عمود من هذه المصفوفة . في (3.4) تم ترتيب العوامل ، كما هو معتاد ، بحيث تكون متوالية الدليل الأول لهذه العوامل بالترتيب الطبيعي 1,2,...,n إن المتوالية $j_1, j_2, \dots, j_n$ للدليل الثاني هي واحدة من متبادلات الأعداد 1,2,...,n والتي يساوي عددها n (سيزداد القارئ خبرة لو أجرى موازيا للعمل الوارد في هذا الكتاب ، برهانا آخر يستعمل فيه حاصل ضرب حيث تكون متوالية الدليل الثاني مرتبة بالترتيب الطبيعي) .

لأي تبديل معين $j_1, j_2, \dots, j_n$ لأدلة العوامل الثانية ، نفرض $\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = +1$ أو -1 بحسب ما يكون هذا التبديل زوجيا أو فرديا ولنكتب حاصل الضرب المذكور مزودا بإشارة :

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (3.5)$$

نعني بمحددة A ونرمز لها بالرمز $|A|$ ، مجموع كل حواصل الضرب التي من الشكل (3.5) والمسماة بمحدود $|A|$

والتي يمكن تكوينها من عناصر A وأي

$$|A| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (3.6)$$

حيث يشمل التجميع على $j_1, j_2, \dots, j_n$ تباديل الأعداد الطبيعية 1,2,...,n وإن عدد هذه التباديل يسوى $n!$.
تسمى محددة المصفوفة المربعة من الدرجة n محددة من الدرجة n .

المحددة من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة :

من (3.6) في حالة $n = 2$ و $n = 3$ نحصل على

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12} a_{11}a_{22} + \epsilon_{21} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \epsilon_{123} a_{11}a_{22}a_{33} + \epsilon_{132} a_{11}a_{23}a_{32} + \epsilon_{213} a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231} a_{12}a_{23}a_{31} + \epsilon_{312} a_{13}a_{21}a_{32} + \epsilon_{321} a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \quad \text{ـ أـ}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 = 0 + 3 = 3 \quad \text{ـ بـ}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 3(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + 5(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9 \end{aligned} \quad \text{ـ جـ}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} &= 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0 \cdot 0\} \\ &= -20 - 18 + 20 = -18 \end{aligned} \quad \text{ـ دـ}$$

أنظر المسألة ١

خواص المحددات :

في كل موضع من هذا البند ، نعتى بـ A مصفوفة مربعة يعطى محددها $|A|$ بالعلاقة (3.6) .
لنفرض أن كل عنصر من الصف ذي الرقم i (كل عنصر من العمود ذي الرقم j) يساوى الصفر . بما أن كل حد من حدود المجموع (3.6) يحوى عنصرا من هذا الصف (العمود) فإن كل عنصر من هذا المجموع يساوى الصفر ونستنتج من ذلك :

- I. إذا كان كل عنصر من صف (عمود) في مصفوفة مربعة ، مساويا للصفر ، فإن $|A| = 0$.
- ليكن A' متقول المصفوفة A نرى أن كل حد من (3.6) يمكن الحصول عليه من A بأن نختار العوامل بالترتيب من العمود الأول ثم الثاني ثم الأخير أى :
- II. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $|A'| = |A|$ وهذا يعنى أنه ، لكل نظرية تتعلق بمصفوف محددة ، يوجد نظرية مناظرة تتعلق بأعمدة هذه المحددة والنكس بالعكس .

لتكن B المصفوفة التي تنتج من A بضرب كل عنصر من عناصر صفها ذي الرقم i بالعدد k بما أن كل حد من مفكوك $|B|$ يحوى عنصرا واحدا فقط من عناصر هذا الصف فإنه ينتج عن ك، أن كل حد من هذا المفكوك يحوى k كعامل ويكون :

$$|B| = k \sum_p \{\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}\} = k |A|$$

لذلك ،

III. إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ بالعدد k فإن المحددة تضرب في k إذا حوى كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ العامل (المضروب) k فإنه يمكن وضع k كضروب مشترك في $|A|$

مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

لنرمز بالرمز B للمصفوفة التي تنتج عن A بالمبادلة بين الصفين اللذين يحملان الرقمن i و $i+1$. إن كل حاصل ضرب في (3.6) المتعلق بـ $|A|$ هو حاصل ضرب في $|B|$ والعكس بالعكس أى ، بإهمال الإشارات، يمكننا أن نقول إن (3.6) هو مفكوك $|B|$. عند عد التعاكسات في دليل أى حد من (3.6) كحد في $|B|$ فإننا نلاحظ أن وضع $i+1$ قبل i يعطى تعاكسا إضافيا وعلى ذلك فكل مضروب في (3.6) مع تغيير إشارته هو حد من حدود $|B|$ ويكون $|B| = -|A|$ أى :

IV. إذا نتج B عن A بالمبادلة بين صفين (عمودين) متجاورين فإنه يكون $|B| = -|A|$.
كنتيجة للنظرية IV نجد :

V. إذا نتج B من A بالمبادلة بين أى صفين (عمودين) منه فإن $|B| = -|A|$.

VI. إذا نتج B عن A بإمرار الصف (العمود) ذي الرقم i فوق p صفا (عمودا) من A فإنه يكون :

$$|B| = (-1)^p |A|$$

VII. إذا كان صفان (عمودان) من A متطابقين فإن $|A| = 0$.

لنفرض أن كل عنصر من عناصر الصف الأول من A مكونا من مجموع حدين : $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$ حيث $(j = 1, 2, \dots, n)$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} (b_{1j_1} + c_{1j_1}) a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} + \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

على وجه العموم

VIII. إذا كان كل عنصر من عناصر الصف (العمود) ذي الرقم i من A مجموع p حدا فإنه يمكن كتابة $|A|$ كمجموع p محددة .

إن عناصر الصف (عمود) ذى الرقم i من هذه المحددات على الترتيب العناصر الأولى ، الثانية ... الأخيرة من المجاميع المذكورة ، أما بقية الصفوف (الأعمدة) فتبقى هي نفسها الموجودة في A .
إن النظرية الأكثر استعمالاً هي التالية :

IX. إذا أنتجت المصفوفة B من المصفوفة A ، بإضافة عناصر الصف (عمود) ذى الرقم i بعد ضربها بعدد ثابت إلى العناصر المناظرة لصف (عمود) آخر من A ، فإنه يكون $|B| = |A|$.
مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{21} & a_{32} + ka_{22} & a_{33} + ka_{23} \end{vmatrix}$$

أنظر المسائل ٢ - ٧

المصفورات الأولى والمعاملات المرافقة :

لتكن المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n المعطاة في (3.3) ومحددتها $|A|$ المعطاة بالعلاقة (3-6) إذا حذفنا من A عناصر صفه ذى الرقم i وعموده ذى الرقم j فإننا نسمى محددة المصفوفة المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ الناتجة ، المصغر الأول للمصفوفة A أو للمحددة $|A|$ ونرمز له بالرمز $|M_{ij}|$ وكثيراً ما نسميه مصغر a_{ij} . تسمى المصغر مزوداً بإشارته $|M_{ij}|$ $(-1)^{i+j}$ بالمعامل المرافق للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز α_{ij} .

مثال ١ : إذا كان $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ فإن

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}| , \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}| ,$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}|$$

وتأخذ عندها العلاقة (3.8) الشكل :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} \end{aligned}$$

في المسألة ٩ نبرهن النظرية التالية :

X. إن قيمة المحددة $|A|$ حيث A هي المصفوفة المعطاة في (3.3) تساوى مجموع حواصل الضرب التي نحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر صف (عمود) من المعامل المرافق له أى :

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\alpha_{ik} \quad (3.9)$$

$$= a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \dots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}\alpha_{kj} \quad (i, j, = 1, 2, \dots, n) \quad (3.10)$$

باستخدام النظرية VII يمكننا أن نبرهن :

XI. إن مجموع حواصل الضرب المكونة من ضرب عناصر صف (عمود) من المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n بالعملات المرافقة لعناصر صف (عمود) آخر من A يساوى الصفر .

مثال ٢ : إذا كانت A مصفوفة المثال ٢ فإنه يكون :

$$a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} = |A|$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} = |A|$$

و

بيننا نجد :

$$a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$$

و

أنظر المسألتين ١٠-١١

المصفورات والمتممات الجبرية :

لتكن المصفوفة (3.3) ولنفرض أن $i_1, i_2, \dots, i_m$ مرتبة بالترتيب المتزايد هي m ، حيث $(n > m \geq 1)$ دليل من أدلة الصفوف $1, 2, \dots, n$ نفرض أيضاً أن $j_1, j_2, \dots, j_m$ مرتبة بالترتيب المتزايد هي m دليل من أدلة أعمدة ولنفرض أخيراً أن الصفوف والأعمدة الباقية مرتبة أيضاً بالترتيب المتزايد هي $j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n$ و $i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n$ على الترتيب . إن مثل هذا الفصل لأدلة الصفوف والأعمدة يعين ، بشكل وحيد ، المصفوفتين :

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \dots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & a_{i_{m+1}, j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ a_{i_{m+2}, j_{m+1}} & a_{i_{m+2}, j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+2}, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n, j_{m+1}} & a_{i_n, j_{m+2}} & \dots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

والثان تسميان المصفوفتين الجزئيتين للمصفوفة A .

نسمى محددة كل من هاتين المصفوفتين الجزئيتين مصغراً لـ A ونسمى زوج المصفورين $\left| A_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} \right|$ والمصفورين المتممين لـ A وكل واحد منهما متمم للآخر .

مثال ٣ : المصفوفة المربعة من الدرجة الخامسة $A = [a_{ij}]$ تكون المحدتان .

$$\left| A_{1,3,4}^{2,4,5} \right| = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} , \quad \left| A_{2,5}^{1,3} \right| = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{bmatrix}$$

زوجاً من المصفورات المتتامة .

إذا فرضنا

$$p = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m \quad (3.13)$$

$$q = i_{m+1} + i_{m+2} + \dots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \dots + j_n \quad (3.14)$$

فإننا نسمى المصغر ذا الإشارة $(-1)^p \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \text{ وأن } \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} (-1)^q \text{ هو المتمم الجبرى لـ}$$

مثال ٤ : المصغرين الواردين في المثال ٣ يكون $\begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix}$ هو المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix}$ وأن $\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix} (-1)^{1+3+4+2+4+5}$ هو المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix}$. يلاحظ أن الإشارة المعطاة لاثنتين من المصغرات المتتامة واحدة هل هذا صحيح دوما ؟

عندما يكون $m=1$ فإن (3.11) تصبح $A_{i_1}^{j_1} = [a_{i_1 j_1}]$ و $\begin{vmatrix} j_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = a_{i_1 j_1}$ عنصرا من A . يكتب المصغر المتمم $\begin{vmatrix} j_2, j_3, \dots, j_n \\ i_2, i_3, \dots, i_n \end{vmatrix}$ بالشكل M_{i_1, j_1} الوارد في البند السابق ويصبح المتمم الجبرى هو المعامل المرافق $a_{i_1 j_1}$

يسمى مصفر A الذى عناصره القطرية هي عناصر قطرية في A ، مصفراً رئيسياً لـ A . إن المتمم الجبرى لمصفر رئيسى لـ A هو أيضا مصفر رئيسى لـ A ، إن المتمم الجبرى لمصفر رئيسى هو متممة نفسه .

مثال ٥ : في المصفوفة المربعة ذات الدرجة الخامسة $A = [a_{ij}]$ نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 2,4,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مصفران رئيسيان متتامان لـ A . ما هو المتمم الجبرى لكل منهما ؟

إن التعابير مصفر ، مصفر متمم ، متمم جبرى ، ومصفر جبرى المعرفة سابقا للمصفوفة المربعة A ستستخدم بدون تغيير بالنسبة للمحددة $|A|$.

أنظر المسألتين ١٢-١٣

مسائل محلولة

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3(-1) = 11 \quad \text{ـ اـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) - 0 + 2(3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -2 - 4 = -6 \quad \text{ـ بـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 21 - 15 \cdot 6) + 6(3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -18 \quad \text{ـ جـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) = 4 \quad \text{ـ دـ}$$

٢ - أضف إلى عناصر العمود الأول العناصر المناظرة من بقية الأعمدة فتجد :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

استنادا إلى النظرية I .

٣ - أضف العمود الثاني إلى الثالث ، احذف العامل المشترك مع العمود الثالث الناتج واستفد من النظرية VII فتجد :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٤ - أضف إلى الصف الثالث ، الأول والثاني ، وحذف العامل المشترك 2 ، واطرح الصف الثاني من الصف الثالث ، واطرح الصف الثالث من الصف الأول ، واطرح الصف الأول من الثاني ، وأخيرا يحمل الصف الثالث فوق بقية الصفوف فتجد :

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

٥ - بدون فك أثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

اطرح الصف الثاني من الأول فتجد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1 - a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2) \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استنادا إلى النظرية III وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$. بالمثل $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ يكونان عاملان . بما أن $|A|$ من الدرجة الثالثة بالنسبة لهذه الحروف فإنه يكون :

$$|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1). \quad (i)$$

إن حاصل ضرب العناصر القطرية $a_1^2 a_2$ هو حد من $|A|$ وينتج من (i) أن هذا الحد هو $k a_1^2 a_2$ إذن

$$k = -1 \text{ and } |A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1). \text{ نلاحظ أن } |A| \text{ يتلاشى إذا (وإذا فقط)}$$

تساوى اثنان من a_1, a_2, a_3 .

٦ - برهن أنه إذا كانت A متماثلة تخالفية ومن درجة فردية $2p - 1$ فإن $|A| = 0$.

بما أن A متماثلة تخالفية $A' = -A$ ، إذن $|A'| = |-A| = (-1)^{2p-1} |A| = -|A|$. ولكن استنادا إلى النظرية

II نجد أن $|A| = |A|$ وينتج عن ذلك أن $|A| = -|A|$ و $|A| = 0$

v- برهن أنه إذا كانت A هرميتية ، فإن $|A|$ يكون عدداً حقيقياً .

بما أن A هرميتية فإنه يكون $\bar{A} = A$ استناداً إلى النظرية II وكذلك $|A| = |\bar{A}| = |A|$

ولكن إذا كان

$$|A| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a + bi$$

فإن

$$|\bar{A}| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \bar{a}_{1j_1} \bar{a}_{2j_2} \dots \bar{a}_{nj_n} = a - bi$$

ولكن $|A| = |\bar{A}|$ يتطلب أن يكون $b = 0$ وعلى ذلك يكون $|A|$ عدداً حقيقياً .

٨- في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ يكون

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

يجدر بنا أن نلاحظ أن الإشارات التي أعطيت لمصفوفات العناصر لتكوين المعاملات المرافقة تتبع الجدول التالي :

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

حيث تحتل كل إشارة نفس المكان الذي يحتله العنصر المراد الحصول على معاملة المرافق في A . اكتب جدول إشارات مشابه لمصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة .

٩- برهن : أن قيمة المحددة $|A|$ لمصفوفة مربعة من الدرجة n تساوي مجموع حواصل الضرب التي نحصل عليها

بضرب كل عنصر من صف (عمود) من A بمعاملة المرافق .

سنثبت هذا لصف . إن حدود (٣-٦) والتي تحوى a_{11} كعامل هي :

$$a_{11} \sum \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (1)$$

إن $\epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n} = \epsilon_{1 j_2 j_3 \dots j_n}$ وذلك لأن العدد 1 في التبديل $1, j_2, j_3, \dots, j_n$ يقع في الترتيب الطبيعي وينتج عن ذلك

أنه يمكن كتابة (١) بالشكل التالي :

$$a_{11} \sum_{\sigma} \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (ب)$$

حيث يمتد التجمع على $\sigma = (n-1)!$ تبديلاً للأعداد $2, 3, \dots, n$ ويمكن نتيجة لذلك كتابة المجموع السابق بالشكل :

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} |M_{11}| \quad (ج)$$

تتكون المصفوفة B التي تنتج عن A بنقل العمود ذي الرقم s فوق الأعمدة الـ $(s-1)$ الأول فينتج عن النظرية VI أن $|B| = (-1)^{s-1} |A|$. علاوة على ذلك فإن العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول في B هو a_{1s} وإن مصغر a_{1s} في B هو بالضبط المصغر $|M_{1s}|$ نفسه للعنصر a_{1s} من A . إذا استعدنا برهان العلاقة (ج) فإننا نجد أن حدود $|M_{1s}|$ هي كلها حدود $|B|$ التي تحوى a_{1s} كعامل وينتج عن هذا أنها جميعا حدود $|A|$ $(-1)^{s-1}$ والحاوية على a_{1s} كعامل. وهذا يؤدي إلى أن حدود $a_{1s} \{(-1)^{s-1} |M_{1s}|\}$ هي حدود المحددة $|A|$ التي تحوى a_{1s} كعامل أى :

$$|A| = a_{11} \{(-1)^{1+1} |M_{11}|\} + a_{12} \{(-1)^{1+2} |M_{12}|\} \\ + \dots + a_{1s} \{(-1)^{1+s} |M_{1s}|\} + \dots + a_{1n} \{(-1)^{1+n} |M_{1n}|\} \quad (3.15)$$

$$= a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} + \dots + a_{1n} \alpha_{1n}$$

وحيث أن $(-1)^{s-1} = (-1)^{s+1}$ نجد (3.9) يحسم $i = 1$ سنسمى (3.15) مفكوك $|A|$ على طول الصف الأول منه .

إن مفكوك $|A|$ ، على طول الصف ذي الرقم r (هو (3.9) بوضع $i = r$) ، يمكن الحصول عليه بإعادة البرهان السابق . لتكن B المصفوفة التي نحصل عليها من A بنقل الصف ذي الرقم r فوق الـ $(r-1)$ صفها الأول ونقل عمودها ذي الرقم s فوق $(s-1)$ الأعمدة الأول . فيكون :

$$|B| = (-1)^{r-1} \cdot (-1)^{s-1} |A| = (-1)^{r+s} |A|$$

إن عنصر الصف الأول والعمود الأول من B هو a_{rs} وإن مصغر a_{rs} من B هو بالضبط مصغر a_{rs} من A وينتج عن هذا أن حدود :

$$a_{rs} \{(-1)^{r+s} |M_{rs}|\}$$

هي كل حدود $|A|$ التي تحوى a_{rs} كعامل أى :

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{rk} \{(-1)^{r+k} |M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^n a_{rk} \alpha_{rk}$$

ونجد (3.9) للقيمة $i = r$

١٠- إذا كان a_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n فبرهن أن :

$$k_1 \alpha_{1j} + k_2 \alpha_{2j} + \dots + k_n \alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i)$$

تنتج هذه العلاقة عن (3.10) بعد أن نستعوض عن k_1 بـ a_{1j} وعن k_2 بـ a_{2j} ، ، k_n بـ a_{nj} بإجراء هذه التعديلات لا يتغير أى واحد من المعاملات المرافقة $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}$ لأنه لا يحوى أى واحد منها أى عنصر من العمود ذي الرقم j من A .

نجد استنادا إلى النظرية VII أن المحددة الواردة في (i) تساوى الصفر عندما يكون $k_r = a_{rs}$ حيث $(s \neq j, r=1, 2, \dots, n)$ واستنادا إلى النظريتين VIII و VII فإن المحددة الواردة في (i) هي $|A|$ عندما يكون $k_r = a_{rs} + k a_{rs}$ حيث $(k=1, 2, \dots, n)$ و $r = s$.

اكتب العلاقة المشابهة لـ (i) التي تنتج عن (3.9) عندما نستعوض فيها عن عناصر الصف ذي الرقم i من A

$$k_1, k_2, \dots, k_n =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} \quad \text{ـ ا} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{ـ ج} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ـ ١١ - احسب (١)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{ـ د} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ـ (ب)}$$

(١) بالفك على طول العمود الثاني (أنظر النظرية X) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0 \cdot \alpha_{12} + 0 \cdot \alpha_{22} + (-5)\alpha_{32} \\ = -5(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10$$

(ب) اطرح مرتين العمود الثاني من العمود الثالث (أنظر النظرية IX) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2 \cdot 4 \\ -2 & 1 & 5-2 \cdot 1 \\ -3 & 2 & 4-2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ = -3(14) = -42$$

(ج) اطرح ثلاث مرات الصف الثاني من الصف الأول واجمع مرتين الصف الثاني إلى الثالث :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} \\ = -(-4+36) = -32$$

(د) اطرح العمود الأول من العمود الثاني ثم قم بماقت به في (ج)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31$$

(هـ) ضع العدد 14 كعامل مشترك بين عناصر العمود الأول ، خارج المحددة واستعمل النظرية IX لإختزال عناصر بقية الأعمدة فتجد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix} \\ = 14 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770$$

١٢ - بين أن p و q المرفقين بالمعلاقين (3.13) و (3.14) إما أن يكونا زوجين معاً أو فرديين معاً .

بما أن دليل كل صف (عمود) واقع إما في p وإما في q ولا يمكن أن يقع فيهما معا فإن :

$$p + q = (1+2+\dots+n) + (1+2+\dots+n) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

أي أن $q + p$ زوجي (لأنه إما أن يكون n أو $n+1$ زوجيا) وهذا يعني أنه إما أن يكون q و p زوجين معا أو أن يكونا فرديين معا وأن $(-1)^p = (-1)^q$ وأنه يكفي حساب واحد منهما فقط .

$$١٣ - \text{في المصفوفة } A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix} \text{ إن المتمم الجبري لـ } |A_{2,3}^{2,4}| \text{ هو :}$$

$$(-1)^{2+3+2+4} |A_{1,4,5}^{1,3,6}| = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix}$$

أنظر المسألة ١٢

$$\text{وإن المتمم الجبري لـ } |A_{1,4,5}^{1,3,6}| \text{ هو } |A_{2,3}^{2,4}| = - \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$$

مسائل إضافية

١٤ - برهن أن التبديل 12534 للأعداد الطبيعية 1, 2, 3, 4, 5 زوجي 24135 فردى ، 41532 زوجي ، 53142 فردى و 52314 زوجي .

١٥ - اكتب مجموعة تبديل الأعداد 1, 2, 3, 4 كاملة وبرهن أن نصفها زوجي والنصف الآخر فردى .

١٦ - لنفرض أن a, b, c, d, e هي عناصر قطر مصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة A . برهن ، بالاستفادة من (3.6) أنه إذا كانت A قطرية ، مثلثة عليا أو مثلثة دنيا ، فإنه يكون : $|A| = a b c d e$.

١٧ - إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ برهن أن $AB \neq BA \neq A'B \neq AB' \neq A'B' \neq B'A'$ ولكن محددة كل واحدة من خواصل الضرب هذه يساوى 4 .

١٨ - برهن كافي المسألة (١) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{بـ} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{أـ} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$$١٩ - (١) \text{ برهن أن } (2) \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4$$

(ب) لرمز بالرمز $|B|$ المحددة التي تنتج عن $|A|$ بضرب عناصر عموده الثاني في 5

احسب $|B|$ لتحقيق النظرية III

(ج) لرمز بـ $|C|$ المحددة التي تنتج عن $|A|$ بالمبادلة بين عموده الأول والثالث ، احسب $|C|$ لتحقيق

النظرية V

$$(د) \text{ برهن أن } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

(٥) نحصل على المحددة $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ من المحددة $|A|$ بطرح عناصر العمود الأول ثلاث مرات من العناصر

المقابلة لها من العمود الثالث . احسب $|D|$ لتتحقق النظرية IX .

(و) اطرح ، في المحددة $|A|$ مرتين الصف الأول من الصف الثاني واطرح أربع مرات الصف الأول من الصف الثالث ثم احسب المحددة الناتجة .

(ر) في $|A|$ اضرب العمود الأول في 3 واطرح من الناتج العمود الثالث ثم برهن أن قيمة المحددة الناتجة تساوي ثلاثة أضعاف $|A|$ قارن مع (٥) لا تخلط بين (٥) و (ر) .

٢٠- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k مقدارا عدديا فاستخدم (3.6) لتبرهن أن $|kA| = k^n |A|$.

٢١- برهن أنه (أ) إذا كان $|A| = k$ فإنه يكون $|\bar{A}| = \bar{k} = |A|$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية فإن $|A|$ إما أن تكون عددا حقيقيا أو عددا تخيليا بحتا .

٢٢- (أ) عدد المرات التي بادلنا فيها بين صفين (عمودين) متتاليين لنحصل على B من A في النظرية V وبذا تبرهن هذه النظرية .

(ب) قم بالأمر ذاته بالنسبة للنظرية VI .

٢٣- برهن النظرية VII إرشاد . بادل بين الصفين المتطابقين واستفد من النظرية V .

٢٤- برهن أنه إذا كانت عناصر أى صفين (عمودين) في مصفوفة مربعة A متناسبة فإن $|A| = 0$.

٢٥- استخدم النظريات VIII و III و VII لكي تبرهن النظرية IX .

٢٦- احسب المحددات الواردة في المسألة ١٨ مثل المحددات الواردة في المسألة ١١ .

٢٧- استخدم (3.6) لحساب $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$ ربرهن بعد ذلك أن $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$ واستنتج أنه إذا كان

$A = \text{diag}(A_1, A_2)$ حيث A_1 و A_2 مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية ، فإن $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

٢٨- برهن أن المعامل المرافق لكل عنصر من $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ هو هذا العنصر ذاته .

٢٩- برهن أن المعامل المرافق لعنصر من أى صف من $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هو العنصر المناظر من العمود الذي يحمل رقم الصف ذاته .

٣٠- برهن (أ) إذا كانت A متماثلة فإن $a_{ji} = a_{ij}$ عندما يكون $i \neq j$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n متماثلة تخالفية فإن $a_{ji} = (-1)^{n-1} a_{ij}$ عندما يكون $i \neq j$.

٣١- للمصفوفة A الواردة في المسألة ٨ :

(أ) برهن أن $|A| = 1$.

(ب) كون المصفوفة $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ ، برهن أن $AC = I$.

(ج) وضح لماذا تكون نتيجة (ب) معروفة عندما تعرف نتيجة (أ) .

٣٢- اضرب أعمدة $|A| = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ عن الترتيب بالأعداد a, b, c احذف العامل المشترك في كل صف من الصفوف

$$|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix} \quad \text{وبرهن أن :}$$

٣٣- برهن ، دون حساب قيمة المحددة أن

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

٣٤- برهن : أن المحددة المربعة من الدرجة n

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

٣٥- برهن

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)\} \{(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_2 - a_n)\} \dots \{a_{n-1} - a_n\}$$

$$\begin{vmatrix} na_1 + b_1 & na_2 + b_2 & na_3 + b_3 \\ nb_1 + c_1 & nb_2 + c_2 & nb_3 + c_3 \\ nc_1 + a_1 & nc_2 + a_2 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2 - n + 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{٣٦- برهن بدون فك أن :}$$

$$\text{٣٧- برهن ، بدون فك أن المعادلة } \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{جنراً يساوى الصفر .}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1} (na+b). \quad \text{٣٨- برهن .}$$

الفصل الرابع

صلايات المحددات

إن طرق حساب المحددات من الدرجة الثانية والثالثة مرت في الفصل الثالث . في المسألة رقم ١١ في الفصل الثالث استخدمت النظرية IX لتوضيح كيفية : (١) الحصول على العنصر 1 أو 1 - كأحد عناصر المحددة إذا لم تكن المحددة تشمل مثل هذا العنصر . (ب) جعل عنصر من عناصر المحددة مساوياً للصفر .

في حالة المحددات ذات الدرجات الأعلى ، تقوم الطريقة العامة لحساب محددة ما على تكرار تطبيق النظرية IX من الفصل 3 بإحلال بدلا من المحددة المعطاة $|A|$ محددة أخرى $|B| = |b_{ij}|$ تتصف بكون كل عناصر صف (عمود) منها أصفارا عدا واحد منها . فإذا كان b_{pq} هو العنصر غير المتلاشي وكان B_{pq} هو معاملة المرافق فإن :

$$|A| = |B| = b_{pq} \cdot B_{pq} = (-1)^{p+q} b_{pq}.$$

minor b_{pq} وبعد ذلك يعامل مصغر b_{pq} المعاملة ذاتها التي تعرضت لها المحددة الأصلية ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى محددة من الدرجة الثانية أو الثالثة .

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

أنظر المسائل ١ - ٣

في حالة المحددات التي تحتوي عناصر مشابهة للعناصر الواردة في محددة المثال ٢ - التالي فإنه يمكن استعمال الطريقة التالية :

مثال ٢ :

$$\begin{vmatrix} 0.921 & 0.185 & 0.476 & 0.614 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0 & 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0 & 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921 \begin{vmatrix} 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0 & -0.320 & 1 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.309 & 0.265 & 0.217 \\ 0.492 & 0.757 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0.309 & 0.265 \\ 0.492 & 0.757 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921(-0.384)(0.104) = -0.037$$

مفكوك لابلاس :

إن مفكوك محددة $|A|$ من الدرجة n على طول صف (عمود) منه هو حالة خاصة من طريقة لابلاس لفك المحددات ،
فبدلاً من أن نختار صفاً معيناً من $|A|$ لنتأثر m صفاً مرقاً بـ $i_1, i_2, \dots, i_m$ المرتبة بحسب كبرها . من هذه الصفوف
والتي عددها m يمكننا أن نحصل على

$$\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} \quad \text{مصفراً من الشكل} \quad \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$$

يأخذ كل الاختيارات الممكنة لـ m عموداً من أصل n عموداً ، وإذا استعملنا كل المصفرات وتمماتها الجبرية فإننا
نحصل على مفكوك لابلاس

$$|A| = \sum_p (-1)^s \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

حيث $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ ، حيث يمتد التجميع على كل الاختيارات ، التي عددها p ، لأدلة
الأعمدة التي تأخذ منها m دليلاً في كل اختيار .

مثال ٢ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{احسب} \quad \text{مستخدماً مصفرات الصفين الأولين .}$$

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2} |A_{1,2}^{1,2}| \cdot |A_{3,4}^{3,4}| + (-1)^{1+2+1+3} |A_{1,2}^{1,3}| \cdot |A_{3,4}^{2,4}| \quad \text{نستنتج من (1.4)}$$

$$+ (-1)^{1+2+1+4} |A_{1,2}^{1,4}| \cdot |A_{3,4}^{2,3}| + (-1)^{1+2+2+3} |A_{1,2}^{2,3}| \cdot |A_{3,4}^{1,4}|$$

$$+ (-1)^{1+2+2+4} |A_{1,2}^{2,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,3}| + (-1)^{1+2+3+4} |A_{1,2}^{3,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,2}|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16)$$

$$= -286$$

أنظر المسائل ٤ - ٦

محددة حاصل ضرب مصفوفتين : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n فإن

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad (2.4)$$

أنظر المسألة ٧

فك محددة على طول صفها الأول وعمودها الأول : إذا كان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن

$$|A| = a_{11} \alpha_{11} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{1i} a_{1j} \alpha_{1j} \quad (3.4)$$

حيث a_{11} العامل المرافق للعنصر a_{11} و a_{1j} المتتم الجبري للمصفور $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ من A .

مشتقة محددة : لنفرض أن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ لها عناصر دوال في المتغير x قابلة للتفاضل فيكون :

I إن المشتقة $\frac{d}{dx} |A|$ المحددة $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوي مجموع n محدة تنتج من المحددة $|A|$ بأن نستعيف ،
على التوالي ، عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x .

مثال ٤ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5 \end{aligned}$$

أنظر المسألة ٨

مسائل محلولة

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286$$

(أنظر المثال ١)

يوجد طبعاً ، طرق كثيرة أخرى للحصول على العنصر $+1$ أو -1 فيمكننا مثلاً أن نطرح العمود الأول من الثاني ،
العمود الرابع من الثاني ، الصف الأول من الثاني ، وهكذا

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} \quad \text{٣ - احسب}$$

لنضرب الصف الثاني $1+i$ والصف الثالث $1+2i$ فنجد :

$$\begin{aligned} (1+i)(1+2i)|A| &= (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i \end{aligned}$$

ويكون $|A| = 6$

٤ - استنتج مفكوك لابلاس للمحددة $|A| = |a_{ij}|$ المربعة من الدرجة n باستعمال مصفورات من درجة $m < n$

اعتبر المصفر $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ من الدرجة m للمحددة $|A|$ حيث رتبنا أرقام الصفوف والأعمدة بحسب كبرها. الآن وبإجراء $i_1 - 1$ من المبادلات بين صفين متتاليين من صفوف $|A|$ فإن الصف ذا الرقم i_1 يمكن أن يحتل الصف الأول وبعد $i_2 - 2$ من المبادلات بين صفين متتاليين يمكننا أن نجعل الصف ذا الرقم i_2 في موضع الصف الثاني ثم بعد $i_m - m$ من المبادلات بين صفين متتاليين يقع الصف ذو الرقم i_m في موضع الصف ذي الرقم m أى بعد $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_m - m) = i_1 + i_2 + \dots + i_m - \frac{1}{2}m(m+1)$ من المبادلات بين صفين متتاليين تحتل الصفوف ذات الأرقام $j_1, j_2, \dots, j_m$ مواضع الصفوف الم الأولى. وبالشكل ذاته نتوصل بعد $j_1 + j_2 + \dots + j_m - \frac{1}{2}m(m+1)$ مبادلة بين عمودين متتاليين إلى أن تقع الأعمدة ذات الأرقام $i_1, i_2, \dots, i_m$ في مواضع الأعمدة الـ m الأولى وهكذا ونتيجة للمبادلات المبنية أعلاه بين الصفوف المتتالية والأعمدة المتتالية فإن المصفر المختار يحتل الركن الأعلى الأيسر ويحتل متممه الجبرى الركن الأسفل الأيمن من المحدد المفروض. علاوة على ذلك تكون المحددة $|A|$ قد غيرت إشارتها $\sigma = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m - m(m+1)$ مرة وهذا يعادل $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ تغييراً في الإشارة لهذا.

$$\text{يعطى } m!(n-m)! \text{ حداً من } (-1)^s |A| \text{ أو } \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$$

$$(a) \quad \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad \text{يعطى } m!(n-m)! \text{ حداً من } |A|$$

$$\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{فد ثبتت ويمكننا أن نختار من هذه الصفوف } i_1, i_2, \dots, i_m$$

من المصفورات المربعة ذات الدرجة m المختلفة . يعطى كل واحدة من هذه المصفورات بعد أن يضرب بمتممه الجبرى $m!(n-m)!$ حداً من حدود المحددة $|A|$ ونظراً لطريقة تكوينهم فإنه لا يوجد تكرار لحدود المحددة $|A|$ بين حواصل الضرب هذه لذلك

$$|A| = \sum_{\sigma} (-1)^s \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$$

حيث $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ وحيث يمتد التجميع على الاختيارات المختلفة لأدلة الأعمدة $j_1, j_2, \dots, j_m$ التى عددها p .

$$٥ - \text{احسب } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ باستعمال مصفورات العمودين الأولين.}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

٦ - إذا كانت C, B, A ثلاث مصفورات مربعة من الدرجة n فاثبت أن :

$$|P| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

من الـ n صفا الأول من $|P|$ ، يمكن تكوين مصفّر واحد $|A|$ مربع غير صفري من الدرجة n ويكون متممه الجبري هو $|B|$. وينتج عن هذا باستخدام مفكوك لابلاس ، $|P| = |A| \cdot |B|$ ،
 ٧- أثبت أن : $|AB| = |A| \cdot |B|$

لنفرض أن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة n ولتكن $C = [c_{ij}] = AB$ بحيث يكون $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ من المسألة ٦ .

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

لنصف إلى العمود ذي الرقم $(n+1)$ من $|P|$ العمود الأول مضروباً في b_{11} العمود الثاني مضروباً في b_{21} ، ، ، ، ، العمود ذا الرقم n مضروباً في b_{n1} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ثم نصف إلى العمود ذي الرقم $(n+2)$ من $|P|$ العمود الأول مضروباً في b_{12} والعمود الثاني مضروباً في b_{22} ، ، ، ، ، والعمود ذا الرقم n مضروباً في b_{n2} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

بالاستمرار في هذه العملية نجد في النهاية $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$ من الصفوف الـ n الأخيرة من $|P|$ يمكن تكوين مصفّر مربع واحد فقط غير متلاش من الدرجة n من الشكل $(-1)^n = |-I_n|$ متممه الجبري $|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C|$ و $|P| = (-1)^n(-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$ و $|C| = |AB| = |A| \cdot |B|$.

٨ - لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ حيث $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, دوال قابلة للتفاضل بالنسبة

للمتغير x فيكون :

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

وإذا رمزنا لـ $\frac{d}{dx}(a_{ij})$ بالرمز a'_{ij} فإننا نجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A| &= a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad + a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23} \\ &\quad - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a'_{11}a_{11} + a'_{12}a_{12} + a'_{13}a_{13} + a'_{21}a_{21} + a'_{22}a_{22} + a'_{23}a_{23} + a'_{31}a_{31} + a'_{32}a_{32} + a'_{33}a_{33} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

انظر المسألة ١٠ من الفصل ٣

مسائل إضافية

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304 \quad \text{ـ أ ـ} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156 \quad \text{ـ ب ـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118 \quad \text{ـ ج ـ} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$$

- ١٠ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن $|A'| = |A|$ عدد حقيقي غير سالب .
 ١١ - احسب المحددة الواردة في المسألة رقم ٩ (أ) مستخدماً مصفورات من الصفين الأولين ثم باستعمال مصفورات العمودين الأولين .

١٢ - (أ) ليكن $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$

استخدم العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ لتبرهن صحة العلاقة $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_2b_1 + a_1b_2)^2$

(ب) ليكن $A = \begin{bmatrix} a_1 + ia_3 & a_2 + ia_4 \\ -a_2 + ia_4 & a_1 - ia_3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} b_1 + ib_3 & b_2 + ib_4 \\ -b_2 + ib_4 & b_1 - ib_3 \end{bmatrix}$

استفد من العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ لتبرهن عن $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$ مجموع أربعة مربعات .

الجواب 2-720

ستعملا مصفورات من الصفوف الثلاثة الأولى .

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

١٣ - احسب

الجواب 2

ستعملا مصفورات من الصفين الأولين .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

١٤ - احسب

١٥ - إذا كان $A_1, A_2, \dots, A_5$ مصفورات مربعة استعمال طريقة لابلاس في فك المحددات لإثبات .

$$|\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_5)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_5|$$

ستخدما مصفورات من الصفين الأولين لإثبات أن :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

١٦ - فك

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

١٧ - استعمال طريقة لابلاس في فك المحددات وبرهن أن المحددة $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$ ذات الدرجة n حيث 0 مصفوفة مربعة من

الدرجة k تساوى الصفر عندما يكون $k < \frac{1}{2}n$.

١٨ - فك كل من المعاملات المرافقة $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ في $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$

على طول العمود الأول لكل منهما لتبيان

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 a_{i1}a_{1j}\alpha_{1j}^{i1}$$

حيث α_{1j}^{i1} هو المتمم الجبرى للمصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ من $|A|$

١٩ - إذا رمزنا بالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n فبرهن أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j \alpha_{ij}$$

إرشاد: استخدم (3.4)

٢٠ - احسب مشتقة كل من المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$1 - 6x + 21x^2 + 12x^3 - 15x^4 \quad - \quad 2x + 9x^2 - 8x^3 \quad - \quad \text{الجواب أ -}$$

$$6x^6 - 5x^4 - 28x^3 + 9x^2 + 20x - 2 \quad - \quad \text{ب -}$$

٢١ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين حقيقيتين من الدرجة a حيث A مصفوفة غير شاذة وإذا كان

$H = A + iB$ مصفوفة هيرميتية ، فإن :

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I + (A^{-1}B)^2|$$

الفصل الخامس

التكافؤ

رتبة مصفوفة :

نقول عن مصفوفة A غير صفيرية إنها ذات رتبة r إذا كان على الأقل أحد مصفوراتها المربعة من الدرجة r غير متلاشية وكان كل مصغر من الدرجة $(r+1)$ هذه المصفوفة يساوى الصفر. إن رتبة المصفوفة الصفيرية هي صفر.

مثال ١ : إن رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ هي $r = 2$ لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ بينما $|A| = 0$

انظر المسألة ١

نقول عن مصفوفة مربعة A درجتها n ، إنها غير شاذة إذا كانت رتبها $r = n$ أى إذا كان $|A| \neq 0$ أما في الحالة المعاكسة فإننا نسمى A مصفوفة شاذة. إن مصفوفة المثال رقم ١ هي مصفوفة شاذة.

من العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ ينتج :

١ — أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات غير الشاذة وذات الدرجة n هو مصفوفة غير شاذة وأن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات المربعة من درجة n هو مصفوفة شاذة فيما إذا كان على الأقل ، واحد من هذه المصفوفات شاذًا.

التحويلات الأولية :

إن العمليات التالية والمسماة تحويلات أولية ، لا تغير في درجة أو رتبة مصفوفة .

(١) (المبادلة بين الصفين) ذوى الرقين i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز H_{ij} المبادلة بين العمودين ذوى الرقين i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز K_{ij}

(٢) (ضرب) كل عنصر من عناصر الصف ذى الرقم i بعدد k لا يساوى الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_i(k)$ ضرب كل عنصر من عناصر العمود ذى الرقم i بعدد k لا يساوى الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_i(k)$ (٣) الإضافة إلى عناصر الصف ذى الرقم i العناصر المقابلة لها من الصف ذى الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_{ij}(k)$ الإضافة إلى عناصر العمود ذى الرقم i العناصر المقابلة من العمود ذى الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_{ij}(k)$.

إن التحويلات التى رمزنا لها بالرمز H تدعى تحويلات صفوف أولية وإن التحويلات التى رمزنا لها بالرمز K فإنها تدعى تحويلات أعمدة أولية.

إن من الواضح أن تحويل أوليا لا يغير في درجة مصفوفة . ويبرهن في المسألة ٢ ، أنه لا يغير أيضا في رتبة هذه المصفوفة .

معكوس تحويل أولى :

(إن معكوس تحويل أولى) هو عملية تلافى تأثير هذا التحويل الأولى أى إذا أخضنا A لتحويل أولى ثم أخضنا المصفوفة الناتجة للتحويل المعاكس لهذا التحويل ، فإن الناتج الأخير هو المصفوفة A نفسها .

مثال ٢ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ليكن (١)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{إن تأثير التحويل الأول للصفوف } H_{21}(-2) \text{ يؤدي إلى 3.}$$

أما تأثير التحويل الأول للصفوف $H_{21}(+2)$ على B فإنه يؤدي إلى A مرة ثانية .

لهذا فإن التحويلين $H_{21}(-2)$ و $H_{21}(+2)$ هما تحويلان أوليان عكسيان للصفوف
إن التحويلات الأولية العكسية هي :

$$H_{ij}^{-1} = H_{ij} \quad K_{ij}^{-1} = K_{ij} \quad (١)$$

$$H_i^{-1}(k) = H_i(1/k) \quad K_i^{-1}(k) = K_i(1/k) \quad (٢)$$

$$H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(-k) \quad K_{ij}^{-1}(k) = K_{ij}(-k) \quad (٣)$$

وعلى ذلك يتضح :

II أن عكس تحويل أولى هو تحويل أولى من نفس النوع .

المصفوفات المتكافئة :

نقول عن مصفوفتين A و B إنهما متكافئتان $A \sim B$ إذا أمكن الحصول على إحداها من الأخرى بإجراء تحويلات أولية متتالية .

مثال ٣ :

إذا أجرينا التحويلات $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$ فإننا نجد :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

حيث أن جميع مصفورات B ذات الدرجة 3 متلاشية بينما $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ إذن رتبة B تساوى 2 لذلك تكون رتبة A مساوية 2 أيضا . يمكن مقارنة طريقة الحصول على رتبة المصفوفة A وذلك بالحصول على مصفوفة مكافئة B يمكن معرفة رتبها بمجرد النظر بطريقة حساب مختلف مصفورات A لتحديد رتبته .

انظر المسألة ٣

التكافؤ بالمصفوف إذا حولت المصفوفة A إلى المصفوفة B باستعمال تحويلات أولية للصفوف فإننا نقول إن B مكافئة بالمصفوف للمصفوفة A وبالعكس . إن المصفوفتين A و B الواردتين في المثال ٣ متكافئتان بالمصفوف .

إن أى مصفوفة غير صفرية A رتبها r تكافؤ بالمصفوف مصفوفة قانونية C يكون فيها :

(١) واحد أو أكثر من عناصر كل صف من الصفوف الـ r الأولى غير صفرية بينما لا تحوى بقية الصفوف سوى عناصر صفرية .

(ب) إن العنصر الأول الغير صفري في الصف الذي رقه i حيث $(i=1,2,\dots,r)$ يساوى 1؛ وليكن رقم العمود الذي يقع فيه هذا العنصر ji .

$$(ج) \quad j_1 < j_2 < \dots < j_r.$$

(د) إن العنصر الوحيد الغير صفري في العمود ذي الرقم ji حيث $(i=1,2,\dots,r)$ هو العنصر 1 من الصف ذي الرقم i . لتحويل A إلى C نفرض أن ji هو رقم أول عمود غير صفري من A .

(i₁) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ فاستعمل $H_1(1/a_{1j_1})$ لجعل هذا العنصر 1 عندما يكون ذلك ضروريا.

(i₂) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ لكن $a_{pj_1} \neq 0$ استعمل H_{1p} ثم افعل ما فعلت في (i₁).

(ii) استعمل تحويلات الصفوف من النوع (٣) بضرب الصف الأول بمدد مناسب لنحصل على أصفار في المواقع الأخرى من العمود ذي الرقم j_1 .

إذا ظهرت عناصر غير صفرية في الصف الأول فقط من المصفوفة الناتجة B ، فإنه يكون $B = C$ وإذا كان غير ذلك فلنفرض أن j_2 رقم أول عمود لا يقع فيه هذا الأمر. إذا كان $b_{2j_2} \neq 0$ فاستعمل $H_2(1/b_{2j_2})$ كما في (i₁) وإذا كان $b_{2j_2} = 0$ بينما $b_{qj_2} \neq 0$ فاستعمل H_{2q} واتبع نفس ما تم في (i₁). ويكون عندئذ كما في (ii) العمود ذو الرقم j_2 خاليا من أى عنصر آخر غير صفري.

إذا ظهرت عناصر غير صفوية في المصفوفة الناتجة في الصفين الأولين فقط، فإننا نحصل على المصفوفة C . أما إذا لم يتحقق ذلك فإننا نكرر العملية السابقة حتى نحصل على المصفوفة C .

مثال ٤ : إذا أجريت تحويلات الصفوف $H_{21}(-2), H_{31}(1); H_2(1/5); H_{12}(1), H_{32}(-5)$ بالتتابع على A من المثال ٣ فإننا نحصل على ما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

= C وهي مصفوفة لها الخواص (١) - (د)

أنظر المسألة ٤

الشكل العادى لمصفوفة :

يمكن اختزال أى مصفوفة A رتبها $r > 0$ بواسطة تحويلات أولية إلى إحدى الصور التالية :

$$I_r, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [I_r \ 0], \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

التي تسمى الشكل العادى (النظامى) للمصفوفة A . إن المصفوفة الصفرية هي الشكل العادى الخاص بها. حيث أنه يمكن استخدام تحويلات الصفوف وتحويلات الأعمدة في وقت واحد فإن العنصر 1 من الصف الأول الذي حصلنا عليه في البند الوارد أعلاه، يمكن وضعه في العمود الأول. ومن الممكن عندها أن يكون كل من الصف الأول والعمود الأول خاليا من عناصر أخرى غير صفرية (متلاشية). وبنفس الطريقة يمكن وضع العنصر 1، من الصف الثاني، في العمود الثاني وهكذا.....

فتلا، إن إجراء التحويلات المتتالية $H_{21}(-2), H_{31}(1), K_{21}(-2), K_{31}(1), K_{41}(-4), K_{23}, K_2(1/5), H_{32}(-1), K_{42}(3)$ على A الواردة في المثال ٣ يعطى $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وهو الشكل العادى. أنظر المسألة ٥.

المصفوفات الأولية :

إن المصفوفة الناتجة عن تطبيق تحويل صفوف (تحويل أعمدة) على مصفوفة الوحدة I_n تدعى مصفوفة صفية (أعمدة) أولية. سنرمز للمصفوفة الأولية بنفس الرمز الذي استخدم للتعبير عن التحويلة الأولية التي استخدمت للحصول على المصفوفة.

مثال ٥ :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي أمثلة من المصفوفات الأولية الناتجة عن}$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}, \quad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k), \quad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

كل مصفوفة أولية هي مصفوفة غير شاذة (لماذا ؟).

يمكن الحصول على تأثير تحويل أول على المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ ، بضرب هذه المصفوفة بمصفوفة أولية.

لإجراء تحويل أول معين للصفوف على مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ ، قم بهذا التحويل على I_m لإيجاد المصفوفة الأولية المناظرة H ثم اضرب A من اليسار بالمصفوفة H .
لإجراء تحويل أولي للأعمدة على A ، قم بهذا التحويل على I_n للحصول على المصفوفة الأولية المناظرة K ثم اضرب A من اليمين بالمصفوفة K .

مثال ٦ :

$$\text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ فإن العملية } H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

والتالي في A : أما العملية $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ مضاعف العمود الثالث .

لتكن A و B مصفوفتين متكافئتين ، ولنرمز للمصفوفات الصفية والعمودية الأولية ، المناظرة للتحويلات الأولية للصفوف والأعمدة التي تحول المصفوفة A إلى B ، بالرموز $H_1, H_2, \dots, H_s; K_1, K_2, \dots, K_t$ حيث H_1 هو التحويل الأول للصفوف ، H_2 التحويل الثاني للصفوف ، K_1 التحويل الأول للأعمدة ، K_2 التحويل الثاني للأعمدة ويكون عندئذ :

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = PAQ = B \quad (5.2)$$

$$Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \quad \text{و} \quad P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad \text{حيث} \quad (5.3)$$

ونجد :

III تكون مصفوفتا A و B متكافئتين إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن إيجاد مصفوفتين غير شاذتين P و Q المرعفتين في (5.3) بحيث يكون $PAQ = B$

مثال ٧ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{إذا كان}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

بما أن كل مصفوفة متكافئة لشكلها العادي فإنه يكون :

IV إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وغير شاذة فإنه يوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q معرفتان في (5.3) وتحققان العلاقة $PAQ = I_n$

أنظر المسألة ٦

معكوس حاصل ضرب المصفوفات الأولية :

$$Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \quad P = H_s \dots H_2 \cdot H_1$$

كافي (5.3) . بما أن لكل من H و K معكوسا وبما أن معكوس حاصل الضرب هو حاصل ضرب المعكوسات بترتيب معاكس فإنه يكون :

$$Q^{-1} = K_t^{-1} \dots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} \quad P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \dots H_s^{-1} \quad (5.4)$$

لفرض أن A مصفوفة مربعة غير شاذة من الدرجة n ولتكن P و Q المصفوفتين المعرفتين سابقا والتي تحققان العلاقة $PAQ = I_n$ فيكون عندئذ :

$$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1} \quad (5.5)$$

ونكون بذلك قد برهننا :

V. يمكن التعبير عن كل مصفوفة غير شاذة كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

أنظر المسألة ٧

وينتج مما سبق ما يلي :

VI. إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن رتبة حاصل الضرب AB (حاصل الضرب BA أيضا) تكون مساوية لرتبة B .

VII. إذا كانت P و Q مصفوفتين غير شاذتين فإن رتبة PAQ تكون مساوية إلى رتبة A .

المجموعة القانونية المتكافئة :

نبرهن في المسألة ٨ :

VIII. تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة .

نسمى مجموعة المصفوفات من درجة $m \times n$ بأنها مجموعة قانونية تكافئية فيما إذا كانت كل مصفوفة من الدرجة $m \times n$ مكافئة لمصفوفة واحدة وواحدة فقط من المجموعة . إن مثل هذه المجموعة القانونية تحدد بالعلاقة (5.1) حيث r تأخذ إما القيم $1, 2, \dots, m$ وإما القيم $1, 2, \dots, n$ حسبما تكون m أصغر من n أو بالعكس .

أنظر المسألة ٩

رتبة حاصل الضرب :

لتكن المصفوفة A من درجة $m \times p$ والرتبة r . يوجد ، استنادا إلى النظرية III ، مصفوفتان غير شاذتين P و Q تحققان العلاقة :

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أى $A = P^{-1} N Q^{-1}$ لتكن B مصفوفة من درجة $p \times n$ ولنتظر في رتبة :

$$AB = P^{-1} N Q^{-1} B \quad (5.6)$$

استنادا إلى النظرية VI تكون رتبة AB هي رتبة $NQ^{-1}B$. وعلى ذلك فإن صفوف $NQ^{-1}B$ تكون من الصفوف الـ r الأول من $Q^{-1}B$ و $m-r$ صفاء مكونا من أصفار ، أى أن رتبة AB لا يمكن أن تزيد عن r ، رتبة المصفوفة A . وبالمثل فإن رتبة AB لا يمكن أن تزيد عن رتبة B . ونكون بذلك قد برهننا :

IX. إن رتبة حاصل ضرب مصفوفتين لا يمكن أن تزيد عن رتبة أى من مضروبيته .

نفرض أن $AB = 0$ تنتج عن (5.6) إن $NQ^{-1}B = 0$. إن هذا يتطلب أن تكون الصفوف الـ r الأول من $Q^{-1}B$ أصفارا بينما تكون بقية الصفوف اختيارية . أى أن رتبة $Q^{-1}B$ ورتبة B لا يمكن أن تزيد عن $(p-r)$ ونكون قد برهننا النظرية التالية :

X. إذا كانت رتبة مصفوفة A درجتها $m \times p$ تساوية r وإذا كانت B مصفوفة درجتها $p \times n$ وتحقق العلاقة $AB = 0$ فإن رتبة B لا تزيد عن $(p-r)$.

مسائل محلولة

١- (أ) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ ولأنه لا يوجد مصفورات من الدرجة الثالثة .

(ب) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $|A| = 0$ و $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

(ج) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ تساوى 1 لأن $|A| = 0$ ولأن المصفورات التسعة من الدرجة الثانية متلاشية

وليس كل عناصر هذه المصفوفة أصفارا .

٢- برهن أن التحويلات الأولية لا تغير في رتبة المصفوفة .

لن نعتبر هنا إلا تحويلات الصفوف ونترك كمتريين اعتبار تحويلات الأعمدة ، لتكن r رتبة المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لذلك تكون كل مصفورات A ذات الدرجة $(r+1)$ أصفارا ولتكن B المصفوفة الناتجة عن A بتحويل الصفوف . ل نرمز بالرمز $|R|$ لمصفر من الدرجة $(r+1)$ للمصفوفة A وبالرمز $|S|$ لمصفر من الدرجة $(r+1)$ للمصفوفة B له نفس وضع $|R|$.

ليكن تحويل الصفوف هو (H_{ij}) إن تأثير هذا التحويل على $|R|$ أما (i) تركه بدون تغير وأما (ii) المبادلة بين اثنين من صفوفه أو (iii) المبادلة بين واحد من صفوفه وصف آخر لا يقع في $|R|$. في الحالة (i) يكون $|S| = |R| = 0$; وفي الحالة (ii) يكون $|S| = |R| = 0$ أما في الحالة (iii) فإن $|S|$ ياهمال الإشارة يكون مصفرا آخر من مصفورات $|A|$ من درجة $(r+1)$ وبالتالي يكون مساويا للمصفر .

ليكن التحويل الصفى $H_i(k)$ أن تأثير هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه بدون تغير وإما (ii) أن يضرب أحد صفوفه بالعدد k . ويكون على التوالي $|S| = |R| = 0$ أو $|S| = k|R| = 0$. ليكن التحويل الصفى هو $H_{ij}(k)$ أن مفعول هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه كما هو وإما (ii) أن يضيف إلى أحد صفوفه صفا آخر منه مضروبا بالعدد k أو (iii) أن يضيف إلى أحد صفوفه

صفا آخر ، لا يقع في $|R|$ مضروباً بالعدد k . في الحالتين (i) و (ii) يكون $|S| = |R| = 0$ أما في الحالة (iii) فإنه يكون $|S| = |R| \pm k$ (مصفراً آخر من مصفورات A ذات الدرجة $(r+1)$) $0 = k \cdot 0 \pm 0 = 0$ مما تقدم يتضح ، أنه لا يمكن لتحويل صفوف أن يرفع رتبة مصفوفة كما أنه لا يمكن لهذا التحويل أن يخفض رتبة هذه المصفوفة لأنه لو حدث ذلك لرفع التحويل الماكس رتبة المصفوفة ويمكننا أن نقول باختصار إن تحويل أوليا للصفوف لا يغير في رتبة المصفوفة التي يقع عليها هذا التحويل .

٣- أوجد مصفوفة مكافئة B لكل واحدة من المصفوفات A الواردة فيما بعد ثم استنتج بالنظر رتبة A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \quad (1)$$

إن التحويلات المستعملة هي على التوالي من اليسار إلى اليمين : $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$; $H_2(-1/3)$, $H_3(-1/4)$; $H_{32}(-1)$. ونجد أن رتبة A هي 3 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \quad (ب)$$

رتبة A هي 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & i & 1+2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \quad (ج)$$

رتبة A هي 2

ملاحظة :

إن المصفوفات المكافئة B التي حصلنا عليها هنا ليست وحيدة . بصورة خاصة لم تستعمل في (1) و (ب) سوى تحويلات صفوف ويمكن للقارئ أن يجد مصفوفات أخرى فيما لو استعمل تحويلات أعمدة . عندما تكون العناصر أعداداً كسرية لا يكون هناك على وجه العموم أى كسب ينتج عن استخدام تحويلات صفوف وتحويلات أعمدة سوياً .

٤- أوجد المصفوفة القانونية C والمكافئة صفياً لكل مصفوفة A من المصفوفات الواردة أدناه :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C \quad - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C \quad - 2$$

٥ - اختزل كلا من المصفوفات الواردة أدناه إلى شكلها العادي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= [I_3 \ 0]$$

إن التحويلات الأولية المستعملة مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{21}(-3), H_{31}(2); K_{21}(-2), K_{41}(1); K_{23}; H_{32}(-2); K_{32}(2), K_{42}(-5); K_3(1/11), K_{43}(7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن التحويلات الأولية المستعملة ، مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{12}; K_1(\frac{1}{2}); H_{31}(-2); K_{21}(-3), K_{31}(-5), K_{41}(-4); K_2(\frac{1}{2}); K_{32}(-3), K_{42}(-4); H_{32}(-1)$$

٦ - اختزل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ إلى شكلها العادي N واحسب المصفوفتين P_1 و Q_1 بحيث تتحقق العلاقة

$$P_1 A Q_1 = N$$

بما أن A من الدرجة 3×4 فإن علينا أن نعمل على الشكل $I_4 \ A \ I_3$.
 من سبعة عناصر كما يجري كل تحويل أعمدة على عمود ذي سبعة عناصر .

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & -3 & 2 \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Q_1

I

$N \ P_1$

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

٧- عبر عن $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ كحاصل ضرب مصفوفات أولية :

نختزل التحويلات الأولية $H_{21}(-1), H_{31}(-1); K_{21}(-3), K_{31}(-3)$ مرتبة من اليسار إلى اليمين ، المصفوفة A إلى المصفوفة I_3 أى [أنظر (5.2)].

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

ينتج من (5.5) أن : $A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٨- برهن ما يلي : تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لها رتبة واحدة .

إذا كانت رتبتي A و B متساويتين فإنهما تكافئتان نفس المصفوفة (5.1) وتكون كل واحدة منها مكافئة للأخرى . على العكس إذا كانت A و B متكافئتين ، فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون : $B = P A Q$ واستنادا إلى النظرية VII تكون المصفوفتين A و B نفس الرتبة .

٩- تتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية من الدرجة الثالثة ما يلي :

$$I_3, \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية درجتها 3×4 ما يلي :

$$[I_3 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

١٠- إذا اخترنا من مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة r_A مصفوفة جزئية B مكونة من s صفا (عمودا) فإن رتبة B تساوى أو تزيد عن $r_A + s - n$.

إن الشكل المادى للمصفوفة A يكون له $(n - r_B)$ صفا عناصره أصفارا وإن الشكل المادى للمصفوفة B يكون له $(s - r_B)$ صفا عناصره أصفارا ومن الواضح أن :

$$n - r_A \geq s - r_B$$

ومنها $r_B \geq r_A + s - n$ كما هو مطلوب .

مسائل إضافية

١١- أوجد رتبة كل من المصفوفات : (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

الجواب : (أ) 2 ، (ب) 3 ، (ج) 4 ، (د) 2

- ١٢- برهن باعتبار المصفوفات أن المصفوفات A و A' و A و A' نفس الرتبة .
 ١٣- برهن أن المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لمصفوفة معينة A تحدد تحديدا تاما بواسطة A فقط .
 ١٤- أوجد المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لكل من المصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

- ١٥- اكتب الشكل المادي لكل من مصفوفات المسألة ١٤ .

الجواب : (ا) ، $[I_2 \ 0]$ ، (ب) ، $[I_3 \ 0]$ ، (ج) ، $[I_3 \ 0]$

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ١٦- لتكن المصفوفة$$

- (ا) من I_3 كون $H_{12}(3)$ ، $H_2(3)$ ، $H_{13}(-4)$ ثم برهن أن كل HA يعطى ناتج تحويل الصفوف المناظر .
 (ب) من I_4 كون K_{24} ، $K_3(-1)$ ، $K_{42}(3)$ ثم برهن أن كل AK يعطى ناتج تحويل الأعمدة المناظرة .
 (ج) اكتب المكموسات H_{12}^{-1} ، $H_2^{-1}(3)$ ، $H_{13}^{-1}(-4)$ للمصفوفات الأولية الواردة في (ا) وبرهن أنه لكل H يتحقق $H.H^{-1} = I$.
 (د) اكتب المكموسات K_{24}^{-1} ، $K_3^{-1}(-1)$ ، $K_{42}^{-1}(3)$ للمصفوفات الأولية الواردة من (ب) وبرهن أنه لكل K يتحقق $KK^{-1} = I$.

$$C = H_{13}^{-1}(-4) \cdot H_2^{-1}(3) \cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad B = H_{12} \cdot H_2(3) \cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \text{ احسب}$$

$$B \cdot C = C \cdot B = I \text{ برهن أن } (و)$$

- ١٧- (ا) برهن أن $K'_{ij} = H_{ij}$ و $K'_i(k) = H_i(k)$ و $K'_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.
 (ب) برهن أنه إذا كان R حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية ، فإن R' حاصل ضرب بترتيب معاكس ، لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

- ١٨- برهن ما يلي : (ا) يكون كل من AB و BA غير شاذا فيما إذا كانت A و B مصفوفتين غير شاذتين مربعيتين من الدرجة n .

- (ب) يكون كل من AB و BA شاذ فيما إذا كانت على الأقل واحدة من المصفوفتين A و B المربعتين ومن

الدرجة n ، شاذة .

- ١٩- إذا كانت A و Q غير شاذتين فبرهن أن A ، PA و AQ و PAQ تكون لها نفس الرتبة .

توضيح : اكتب P و Q كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

٢٠- اختزل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ إلى شكل عادي N واحسب المصفوفتين P_2 و Q_2 اللتين تحققان العلاقة $P_2 B Q_2 = N$.

٢١- (أ) برهن أن عدد المصفوفات في مجموعة قانونية لمصفوفة مربعة من الدرجة n بالنسبة للتكافؤ، يساوي $(n+1)$
(ب) برهن أن عدد المصفوفات، في مجموعة قانونية لمصفوفة درجتها $m \times n$ بالنسبة للتكافؤ، يساوي أصغر العددين $(m+1)$ و $(n+1)$.

٢٢- إذا أعطيت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ والتي رتبها 2، فأوجد مصفوفة مربعة من الدرجة الرابعة $B \neq 0$ وتحقق العلاقة $AB = 0$
توضيح : اتبع برهان النظرية X وخذ :

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

حيث $a, b, \dots, h$ أعداد اختيارية.

٢٣- المصفوفتان A من المسألة ٦ و B من المسألة ٢٠ متكافئتان. أوجد P و Q بحيث يكون $B = P A Q$

٢٤- إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ورتبها r_A ، B مصفوفة من نفس الدرجة ورتبها r_B فبرهن أن رتبة المصفوفة $A + B$ لا تزيد عن $r_A + r_B$.

٢٥- لتكن A مصفوفة اختيارية مربعة ومن الدرجة n و B مصفوفة أولية مربعة ومن الدرجة n أيضا.
باعتبار كل من الصور الستة المختلفة للمصفوفة B فأثبت أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

٢٦- نفرض أن A و B مصفوفتان مربعيتان من الدرجة n .
(أ) إذا كانت واحدة، على الأقل منها شاذة نبرهن أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(ب) إذا كانتا معا غير شاذتين، استخدم (5.5) والمسألة (٢٥) لكي نبرهن أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

٢٧- برهن أن تكافؤ المصفوفات علاقة تكافؤ.

٢٨- برهن أن الشكل الصفي التكافؤ القانوني لمصفوفة غير شاذة A هو I والعكس بالعكس.

٢٩- برهن أنه لا يمكن تحويل كل مصفوفة A إلى شكل عادي بواسطة تحويلات صفوف فقط.
توضيح : أوجد مصفوفة لا يمكن اختزالها بهذا الشكل.

٣٠- بين كيف يمكنك أن تطبق على أي مصفوفة A التحويل H_{ij} باستعمال تتابع من تحويلات الصفوف من النوع (٢) والنوع (٣).

٣١- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m \times n$ حيث $(m \leq n)$ ورتبها m فإن $A A^T$ تكون مصفوفة متماثلة غير شاذة. أذكر النظرية المقابلة عندما تكون رتبة A أصغر من m .

الفصل السادس

المصفوفة المرافقة لمصفوفة مربعة

المصفوفة المرافقة :

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n وكان α_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij} فإننا نسمي ، بالترتيب ، المصفوفة

$$\text{adjoint } A = \text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

يجب ملاحظة أن المعاملات المرافقة لعناصر الصف (العمود) ذى الرقم i من A هي عناصر العمود (الصف) ذى

الرقم i من $\text{adj } A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ١ :}$$

يكون المصفوفة

$$\alpha_{11} = 6, \alpha_{12} = -2, \alpha_{13} = -3, \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -5, \alpha_{23} = 3, \alpha_{31} = -5, \alpha_{32} = 4, \alpha_{33} = -1$$

ومن

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

انظر المسائلين ١ - ٢

باستخدام النظريتين X و XI من الفصل ٣ فإننا نجد

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \dots, |A|) = |A| I_n = (\text{adj } A) A \quad \text{مثال ٢ :}$$

في المصفوفة A الواردة في المثال ١ يكون $|A| = -7$ وكذلك

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7I$$

بأخذ محددات طرفي العلاقة (6.2) فإننا نجد :

$$|A| \cdot |\text{adj } A| = |A|^n = |\text{adj } A| \cdot |A| \quad (6.3)$$

وينتج عن ذلك :

I - إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة فإنه يكون :

$$|\text{adj } A| = |A|^{n-1} \quad (6.4)$$

II - إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وشاذة فإنه يكون :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = 0$$

إذا كانت رتبة A أصغر من $(n-1)$ فإن $\text{adj } A = 0$ إذا كانت رتبة A تساوى $(n-1)$ فإن رتبة $\text{adj } A$ تساوى الواحد .

انظر المسألة ٣ .

المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين :

سنبرهن في المسألة ٤ .

III - إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n فإن :

$$\text{adj } AB = \text{adj } B \cdot \text{adj } A \quad (6.5)$$

مصفور مصفوفة مرافقة :

سنبرهن في المسألة ٦ :

IV - ليكن $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ مصفورا مربعا من درجة m للمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n وليكن

$$A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \text{ متممة في } A$$

ونفرض أن $M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m}$ يرمز للمصفور المربع من الدرجة m للمصفوفة $\text{adj } A$ والذي تحتل عناصره في $\text{adj } A$

المواقع ذاتها التي تحتلها عناصر $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ في A ينتج بما تقدم أن :

$$|A| \cdot \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^m \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n} \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

حيث :

$$s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$$

إذا كانت في (6.6) المصفوفة A غير شاذة فإن :

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n} \end{vmatrix} \quad (6.7)$$

إذا كانت $m = 2$ فإن العلاقة (6.3) تأخذ الشكل :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} |A| \cdot \begin{vmatrix} j_3, j_4, \dots, j_n \\ i_3, i_4, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (6.8)$$

وهذا يساوى حاصل ضرب $|A|$ بالتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} j_1, j_2 \\ i_1, i_2 \end{vmatrix}$

إذا كانت $m = n - 1$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ الشكل .

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \\ i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{i_n+j_n} |A|^{n-2} a_{i_n, j_n} \quad (6.9)$$

وإذا كانت $m = n$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ شكل العلاقة (6.4)

مسائل محلولة

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{في المصفوفة } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad 1 - \text{إن المصفوفة المرافقة للمصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{في المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad 2 - \text{إن المصفوفة المرافقة للمصفوفة}$$

٣ - برهن أنه إذا كانت المصفوفة A من درجة n ورتبتها $n - 1$ فإن $adj A$ تكون ذات رتبة مساوية للواحد .

حيث أن المصفوفة A من الرتبة $n-1$ فإنه يوجد معامل مرافق واحد على الأقل ، لا يساوى الصفر . وإن رتبة $adj A$ تساوى على الأقل الواحد . استنادا إلى النظرية X من الفصل الخامس ، نجد أن رتبة $adj A$ هي على الأكثر $n-(n-1) = 1$ وينتج مما تقدم أن الرتبة تساوى الواحد فعلا .

٤ - أثبت أن $adj A \cdot B = adj B \cdot adj A$.

$$AB \cdot adj AB = |AB| \cdot I = (adj AB) AB \quad \text{من (6.2) نحصل على}$$

وبما أن :

$$AB \cdot adj B \cdot adj A = A(B \cdot adj B) adj A = A(|B| \cdot I) adj A = |B| (A adj A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$$

$$(adj B \cdot adj A) AB = adj B (adj A) A B = adj B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A| (adj B) B = |AB| \cdot I$$

فإننا نستنتج : $adj AB = adj B \cdot adj A$

٥ - أثبت أن $adj(adj A) = |A|^{n-2} \cdot A$ ، وذلك إذا كان $|A| \neq 0$

$$\begin{aligned} adj A \cdot adj(adj A) &= \text{diag}(|adj A|, |adj A|, \dots, |adj A|) \quad \text{من (6.2) و (6.4) نحصل على} \\ &= \text{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \dots, |A|^{n-1}) \end{aligned}$$

$$A \cdot \text{adj} A \cdot \text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-1} \cdot A \quad \text{وينتج عما تقدم :}$$

$$|A| \cdot \text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-1} \cdot A$$

و

$$\text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

- برهن ما يلي

$$\text{إذا كان } \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \text{ مصفرا مربعا من درجة } m \text{ المصفوفة المربعة } A = [a_{ij}] \text{ ذات الدرجة } n$$

$$\text{وإذا كان } \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \text{ متمم هذا المصفور في } A$$

$$\text{وإذا رمز } \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \text{ للمصفور المربع من درجة } m \text{ لـ } \text{adj} A \text{ والذي تحتل عناصره من } \text{adj} A \text{ المواقع ذاتها}$$

$$\text{التي تحتلها عناصر } \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \text{ في } A \text{ ، فإن :}$$

$$|A| \cdot \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^m \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$$

$$s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$$

حيث :

من

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_m} & a_{i_1, j_{m+1}} & \dots & a_{i_1, j_n} & \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} & \dots & \alpha_{i_m, j_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_m} & a_{i_2, j_{m+1}} & \dots & a_{i_2, j_n} & \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} & \dots & \alpha_{i_m, j_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \dots & a_{i_m, j_m} & a_{i_m, j_{m+1}} & \dots & a_{i_m, j_n} & \alpha_{i_1, j_m} & \alpha_{i_2, j_m} & \dots & \alpha_{i_m, j_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{i_{m+1}, j_1} & a_{i_{m+1}, j_2} & \dots & a_{i_{m+1}, j_m} & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} & \alpha_{i_1, j_{m+1}} & \alpha_{i_2, j_{m+1}} & \dots & \alpha_{i_m, j_{m+1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n, j_1} & a_{i_n, j_2} & \dots & a_{i_n, j_m} & a_{i_n, j_{m+1}} & \dots & a_{i_n, j_n} & \alpha_{i_1, j_n} & \alpha_{i_2, j_n} & \dots & \alpha_{i_m, j_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} |A| & 0 & \dots & 0 & a_{i_1, j_{m+1}} & \dots & a_{i_1, j_n} \\ 0 & |A| & \dots & 0 & a_{i_2, j_{m+1}} & \dots & a_{i_2, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| & a_{i_m, j_{m+1}} & \dots & a_{i_m, j_n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_n, j_{m+1}} & \dots & a_{i_n, j_n} \end{array} \right]$$

بأخذ محددات الطرفين نحصل على :

$$(-1)^S |A| \cdot \left| M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} \right| = |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \right|$$

حيث S معرف في نص النظرية . ينتج عما تقدم ، المطلوب مباشرة .

v - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة $2n$ فإن $|A|$ يكون مربع كثير (متعدد) حدود مكون من عناصر A .

من التعريف $|A|$ يكون كثير حدود مكونا من عناصرها ، فعلينا أن نبرهن تحت الشروط الواردة أعلاه ، أن كثير الحدود ، هذا ، مربع تام .

$$|A| = a^2 \text{ فإن } A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \text{ لأن } n=1 \text{ لأنه عندما يكون}$$

والآن نفرض ، أن النظرية صحيحة في حالة $n = k$ واعتبر المصفوفة المتماثلة التخالفية $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $2k+2$ يمكننا

أن نكتب بالتجزئة $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ حيث $E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1, 2k+2} \\ a_{2k+2, 2k+1} & 0 \end{bmatrix}$ وتكون B مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة $2k$. من الفرض $|B| = f^2$ حيث f كثير حدود مكون من عناصر B .

إذا رمزنا بالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} من A فإننا نجد استنادا إلى المسألة ٦ من الفصل الثالث والعلاقة (6.8) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1, 2k+1} & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & \alpha_{2k+2, 2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & 0 \end{vmatrix} = -|A| \cdot |B|$$

علاوة على ذلك : $\alpha_{2k+2, 2k+1} = -\alpha_{2k+1, 2k+2}$ أي أن

$$|A| \cdot f^2 = \alpha_{2k+1, 2k+2}^2 \text{ و } |A| = \left\{ \frac{\alpha_{2k+1, 2k+2}}{f} \right\}^2 \text{ وهو ما يثبت المطلوب .}$$

مسائل إضافية

٨ - احسب المصفوفة المرافقة لكل من :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

الجواب :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٩- تحقق من أن :

(أ) المصفوفة المرافقة لمصفوفة عددية هي مصفوفة عددية .

(ب) المصفوفة المرافقة لمصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية .

(ج) المصفوفة المرافقة للمصفوفة مثلثية هي مصفوفة مثلثية .

١٠- اكتب مصفوفة $A \neq 0$ من الدرجة الثالثة بحيث يكون $\text{adj } A = 0$.

١١- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية . فبرهن أن : $\text{adj } (\text{adj } A) = A$.

١٢- أثبت أن المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ هي $3A$ وأن المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

هي A نفسها .

١٣- برهن أنه إذا كانت رتبة المصفوفة A المربعة من الدرجة n أصغر من $(n-1)$ فإن $\text{adj } A = 0$.

١٤- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $\text{adj } A$ تكون متماثلة أيضا .

١٥- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هرميتية فإن $\text{adj } A$ تكون هرميتية أيضا .

١٦- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة n فإن $\text{adj } A$ تكون متماثلة أو متماثلة تخالفية بحسب ما يكون n فرديا أو زوجيا .

١٧- هل توجد نظرية مشابهة لنظرية المسألة ١٦ تتعلق بالمصفوفات الهرميتية التخالفية ؟

١٨- بين أنه في حالة المصفوفات الأولية يكون :

$$\text{adj } H_{ij}^{-1} = -H_{ij} \quad (أ)$$

(ب) $\text{adj } H_i^{-1}(k) = \text{diag}(1/k, 1/k, \dots, 1/k, 1, 1/k, \dots, 1/k)$ حيث يقع العنصر 1 في الصف ذي الرقم i .

(ج) $\text{adj } H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$ مع نتائج مشابهة لتحويلات K .

١٩- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ومن الرتبة n أو $(n-1)$ وإذا كان $H_3 \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = \lambda$

حيث λ رمز لـ I_n أو $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فإن :

$$\text{adj } A = \text{adj } K_1^{-1} \cdot \text{adj } K_2^{-1} \dots \text{adj } K_t^{-1} \cdot \text{adj } \lambda \cdot \text{adj } H_3^{-1} \dots \text{adj } H_2^{-1} \cdot \text{adj } H_1^{-1}$$

٢٠- استخدم الطريقة الواردة في المسألة ١٩ لحساب المصفوفة المرافقة للمصفوفات :

(أ) المصفوفة A الواردة في المسألة ٧ من الفصل الخامس .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب}$$

٢١- نفرض أن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [k - a_{ij}]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثالثة . إذا كان $S(C)$ يمثل مجموع عناصر مصفوفة C ، فبرهن أن

$$|B| = k \cdot S(\text{adj } A) - |A| \quad \text{و} \quad S(\text{adj } A) = S(\text{adj } B)$$

٢٢- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n فإن :

$$|\text{adj}(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$$

٢٣- لنفرض أن $A_n = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) مصفوفة مثلثية سفلى مثلثا هو مثلث باسكال ، مثال ذلك :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

افرض $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ وأثبت أنه إذا كانت $n = 2, 3, 4$ فإن :

$$\text{adj } A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1} \quad (i)$$

٢٤- لنفرض أن المصفوفة B تنتج عن المصفوفة A بحذف صفها i والذين يحملان الرقبن i و p وعموديهما الذين يحملان الرقبن j و q برهن أن :

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{pj} \\ a_{iq} & a_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

حيث a_{ij} هو المعامل المرافق لعنصر a_{ij} في A .

الفصل السابع

معكوس مصفوفة

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n بحيث كان $AB = BA = I$ فإن B تسمى معكوس المصفوفة

$$A, (B = A^{-1}) \text{ وأن } A \text{ تدعى معكوس المصفوفة } B, (A = B^{-1})$$

سنبرهن في المسألة ١ أن :

I. يكون للمصفوفة المربعة من درجة n معكوس إذا (وإذا فقط) كانت غير شاذة .

إن معكوس مصفوفة A المربعة ومن درجة n غير شاذة ، هي مصفوفة وحيدة . (انظر المسألة ٧ من الفصل ٢) .

II. إذا كانت A غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$

معكوس المصفوفة القطرية غير الشاذة $\text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ هي المصفوفة القطرية :

$$\text{diag}(1/k_1, 1/k_2, \dots, 1/k_n)$$

إذا كانت المصفوفات $A_1, A_2, \dots, A_s$ غير شاذة ، فإن معكوس المجموع المباشر $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ هو :

$$\text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1})$$

سنقدم فيما يلي طرق إيجاد معكوس مصفوفة عامة غير شاذة .

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات المرافقة من العلاقة (6.2) يكون I. $A \text{ adj } A = |A|$

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \dots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \dots & \alpha_{n2}/|A| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \dots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

مثال ١ :

$$\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ هو } 4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ من المسألة ٢ من الفصل ٦ نجد أن مرافق}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ وبما أن } |A| = -2 \text{ فإن}$$

انظر المسألة ٢ .

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات الأولية : لنفرض A مصفوفة مربعة غير شاذة من درجة n قد اختزلت إلى

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = PAQ = I \text{ المصفوفة } I \text{ بواسطة التحويلات الأولية بحيث يكون :}$$

من (5.5) نجد أن $Q^{-1} \cdot P^{-1} = A$ وبما أن $B^{-1} = B$ إذن

$$A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = Q \cdot P = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \cdot H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad (7.2)$$

مثال ٢ :

من المسألة ٧ من الفصل الخامس نحصل على :

$$H_2 H_1 A K_1 K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ومن ثم

$$A^{-1} = K_1 K_2 H_2 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لقد برهنا في الفصل الخامس أنه يمكن تحويل مصفوفة غير شاذة إلى الشكل العادي بواسطة تحويلات الصفوف فقط . وعلى ذلك واستنادا إلى (7.2) وبفرض $Q = I$ نجد :

$$A^{-1} = P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad (7.3)$$

وعلى ذلك فإنه يمكن القول :

III. إذا حولت المصفوفة A إلى I بواسطة متوالية من تحويلات الصفوف فقط ، فإن A^{-1} تساوى حاصل الضرب بترتيب معاكس ، للمصفوفات الأولية المناظرة لهذه التحويلات .

مثال ٣ :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ الواردة في المثال ٢ وذلك باستعمال تحويلات صفوف فقط ، لتحويل A إلى I

اكتب المصفوفة $[A \ I_3]$ ثم طبق على صفوفها ذات العناصر الستة ، متوالية من تحويلات الصفوف التي تحول المصفوفة A إلى I_3 فنجد :

$$[A \ I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$= [I_3 \ A^{-1}]$$

وذلك استنادا إلى (7.3) . وحيث أن A قد تحولت إلى I_3 ، فإن I_3 قد تحولت إلى $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ انظر المسألة ٣ .

ايجاد معكوس مصفوفة بطريقة التجزئة :

لنفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من درجة n وأن $B = [b_{ij}]$ معكوس هذه المصفوفة ، ولنفرض أن هاتين المصفوفتين قد جزئنا إلى مصفوفات جزئية من الدرجات المبينة كما يلي :

$$p + q = n \quad \text{حيث} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{bmatrix}$$

بما أن $AB - BA = I_n$ فإننا نجد :

$$\begin{cases} \text{(i)} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \\ \text{(ii)} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ \text{(iii)} & B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(iv)} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \end{cases} \quad (7.4)$$

وإذا كانت A_{11} غير شاذة فإنه يكون :

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = - (A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1} \\ B_{21} = - \xi^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) \\ B_{22} = \xi^{-1} \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1} A_{12}).$$

حيث :

انظر المسألة ٤ .

في الحالات الفعلية ، يؤخذ A_{11} من الدرجة $(n-1)$ وللمحصل على A_{11}^{-1} تستعمل الطريقة التالية :

ليكن :

$$G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

بعد حساب G_2^{-1} تجزئ G_3 بحيث يكون $A_{22} = [a_{33}]$ وتستخدم العلاقة (7.5) لكي نحصل على G_3^{-1} .
تكرر هذه الطريقة على G_4 بعد أن تجزئها بحيث يكون $A_{22} = [a_{44}]$ وهكذا ...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

أوجد معكوس المصفوفة باستعمال طريقة التجزئة :

خذ $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $A_{21} = [1 \ 3]$ ، $A_{22} = [4]$. فنجد عندها

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad A_{21} A_{11}^{-1} = [1 \ 3] \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] .$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1} A_{12}) = [4] - [1 \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [1] , \quad \xi^{-1} = [1]$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} [1] \cdot [1 \ 0] \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_{12} = - (A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = - \xi^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) = [-1 \ 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

ونجد أخيرا :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

انظر المسألتين ٥ - ٦

معكوس مصفوفة متماثلة : إذا كانت المصفوفة A متماثلة ، أى $a_{ij} = a_{ji}$ فإننا لن نحتاج لحساب أكثر من $\frac{1}{2}n(n+1)$ عاملا مراققا ، بدلا من حساب n^2 للحصول على A^{-1} من $\text{adj } A$.

إذا كانت هناك أى فائدة من حساب A^{-1} كحاصل ضرب مصفوفات أولية ، فإنه يجب إجراء التحويلات الأولية بحيث نحافظ على خاصية التماثل التى تتمتع بها المصفوفة المفروضة وهذا يتطلب إجراء التحويلات أزواجا أزواجا بحيث إذا أجرى تحويل صفوف فإن علينا أن نتبعه مباشرة بنفس التحويل المقابل للأعمدة . مثال ذلك :

$$H_{12} \begin{bmatrix} 0 & b & c & \dots \\ b & a & \dots & \dots \\ c & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} K_{12} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & \dots \\ b & 0 & c & \dots \\ \vdots & c & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\frac{b}{a}) \begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ b & a & \dots & \dots \\ c & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} K_{21}(-\frac{b}{a}) = \begin{bmatrix} a & 0 & c & \dots \\ 0 & a & \dots & \dots \\ c & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

بصورة خاصة ، لتحويل العنصر القطرى a إلى 1 نحتاج إلى التحويلين $H_1(1/\sqrt{a})$ و $K_1(1/\sqrt{a})$. وسيكون بصورة عامة إما أن يكون $\sqrt{a}$ عددا غير جذرى أو عددا تخيليا ، ونحن لا ننصح بهذه الطريقة .

ونحصل على وفرة الجهد الكبير ، فى هذه الحالة ، باستعمال طريقة التجزئة لأن العلاقة (7.5) تختصر بالشكل :

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1} (A_{11}^{-1} A_{12})', & B_{21} &= B_{12}' \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1} A_{12}) \xi^{-1}, & B_{22} &= \xi^{-1} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1} A_{12}). \quad \text{حيث}$$

انظر المسألة ٧

إذا كانت المصفوفة A غير متماثلة فإنه يمكن استعمال الطريقة الواردة أعلاه لإيجاد معكوس المصفوفة A' والى تكون مصفوفة متماثلة واستنتاج مقلوب A من العلاقة .

$$A^{-1} = (A'A)^{-1} A' \quad (7.7)$$

مسائل محلولة

١ - أثبت أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n يكون لها معكوس فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) غير شاذة .
 لنفرض أن A غير شاذة ، من النظرية IV من الفصل الخامس ، توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PAQ = I$ ونجد عندها أن $Q^{-1} \cdot A = P^{-1}$ وأن $A^{-1} = Q \cdot P$ موجودة .
 لنفرض أن A^{-1} موجودة . إن هذا يؤدي إلى أن المصفوفة $A \cdot A^{-1} = I$ من الرتبة n إذا كانت A مصفوفة شاذة فإن رتبة AA^{-1} ستكون أصغر من n أي أن A لا يمكن أن تكون شاذة .

$$٢ - (أ) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 5$ ، $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$$

$$(ب) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 18$ ، $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$$

$$٣ - احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$$

$$[A \ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

$$= [I_4 \ A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

ونجد أخيراً معكوس المصفوفة :

٤ - حل مجموعة المعادلات التالية

$$\begin{cases} \text{(i)} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \\ \text{(ii)} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{(iii)} & B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(iv)} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$$

بالنسبة لـ B_{22} و B_{21} ، B_{12} ، B_{11} لنفرض $B_{22} = \xi^{-1}$ فنجد من العلاقة (ii) أن $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$ ومن العلاقة (iii) أن $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$ ومن العلاقة (i) أن $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$.

وأخيرا ، بالتعويض في العلاقة (iv) نجد :

$$\xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} \quad \text{و} \quad -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I$$

$$\text{هـ - أوجد معكوس المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ بطريقة التجزئة}$$

$$(1) \text{ لتأخذ المصفوفة } G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ولنجزئها بالطريقة التالية :}$$

$$A_{22} = [3] \quad , \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21} = [2 \ 4].$$

ولكن :

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [2 \ 4] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ 0]$$

$$\xi^{-1} = [-1/3] \quad \text{و} \quad \xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3].$$

ومن ثم

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 \end{bmatrix} [2 \ 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \frac{1}{3} [2 \ 0] \quad , \quad B_{22} = \xi^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 \end{bmatrix}$$

ونجد أخيرا :

$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = [1] \quad , \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21} = [1 \ 1 \ 1]. \text{ بحيث يكون (ب) لنجزى } A$$

ونجد في هذه الحالة

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{3} [2 \ -3 \ 2].$$

$$\xi^{-1} = [3] \quad \text{و} \quad \xi = [1] - [1 \ 1 \ 1] \left(\frac{1}{3} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

وينتج عن ذلك أن

$$B_{11} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [3] \frac{1}{3} [2 \ -3 \ 2] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \ 3 \ -2], \quad B_{22} = [3]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ونجد أخيرا

$$٦ - \text{أوجد معكوس المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ بطريقة التجزئة.}$$

$$\text{لا يمكننا أن نأخذ } A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ لأنها مصفوفة شاذة}$$

$$\text{من المثال ٣ يكون معكوس } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} H_{23} A \text{ أو } B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وينتج عن هذا أن}$$

$$A^{-1} = B^{-1} H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك إذا كان المصفّر المربع A_{11} ذو الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة غير الشاذة المربعة A ذات الدرجة n شاذًا فإننا نشكل ، أولاً ، مصفوفة غير شاذة مربعة ومن الدرجة $(n-1)$ واقعة في الزاوية العلوية اليسرى منه لكي نحصل على المصفوفة B ثم نوجد معكوس المصفوفة B ومن ثم بإجراء تحويل مناسب على B^{-1} نحصل على A^{-1}

$$٧ - \text{احسب معكوس المصفوفة المتماثلة } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{لننظر أولاً في المصفوفة الجزئية } G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ وننجزها بالشكل :}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \ 2], \quad A_{22} = [1]$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ف نجد}$$

$$\xi = A_{22} - A_{21} (A_{11}^{-1} A_{12}) = [1] - [-1 \ 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2]$$

$$\xi^{-1} = [-\frac{1}{2}] \quad \text{و}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ومن ثم}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} -1/2 \end{bmatrix}$$

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

و

اعتبر الآن المصفوفة A مجزأة كما يلي :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \ -3 \ -1], \quad A_{22} = [4]$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi = [18/5], \quad \xi^{-1} = [5/18] \quad \text{ف نجد عندها}$$

$$B_{11} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \frac{1}{18} [1 \ -2 \ 10], \quad B_{22} = [5/18] \quad \text{ومن ثم}$$

ويكون أخيراً :

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

مسائل إضافية

٨- أوجد المصفوفة المرافقة ومعكوساً لكل من المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب: المعكوسات:}$$

- ٩- أوجد معكوس المصفوفة (د) الواردة في المسألة ٨ كجسوع مباشر .
 ١٠- أوجد معكوس كل من المصفوفات الواردة في المسألة ٨ مستعلا طريقة المسألة ٣ .
 ١١- السؤال السابق نفسه إذا كانت المصفوفات هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\frac{1}{48} \begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الأجوبة :}$$

$$\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

- ١٢- استخدم نتائج المثال ٤ لإيجاد معكوس المصفوفة (د) الواردة في المسألة (١١) بطريقة التجزئة .
 ١٣- احسب بطريقة التجزئة معكوس كل من المصفوفتين (أ) و (ب) من المسألة ٨ والمصفوفات من (أ) إلى (ج) من المسألة ١١ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{١٤- احسب بطريقة التجزئة ، معكوس كل من المصفوفات المتماثلة } A$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{الجواب :}$$

- ١٥- أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$
 ١٦- برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين A و B تبديليتين فإن المصفوفات (أ) A^{-1} و B ، (ب) A و B^{-1} ، (ج) A^{-1} و B^{-1} تكون تبادلية

$$A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} \quad (أ) \quad \text{إرشاد :}$$

- ١٧- برهن أنه إذا كانت المصفوفة غير الشاذة A متماثلة فإن A^{-1} تكون متماثلة أيضا .

$$A^{-1}A = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A \quad \text{إرشاد :}$$

- ١٨- برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين المتماثلتين A و B ، فإن (أ) $A^{-1}B$ ، (ب) AB^{-1} و (ج) $A^{-1}B^{-1}$ تكون متماثلة .

$$(A^{-1}B)' = (BA^{-1})' = (A^{-1})'B' = A^{-1}B \quad (أ) \quad \text{إرشاد :}$$

١٩ - نقول إن المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لها معكوس من اليمين B فيما إذا كان $AB = I$ كما نقول إن لها معكوساً من اليسار C فيما إذا كان $CA = I$.

برهن أنه يكون للمصفوفة A معكوس من اليمين فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A من الرتبة m ويكون لها معكوس من اليسار وفيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) من الرتبة n .

٢٠ - أوجد معكوساً من اليمين للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ فيما إذا كان موجوداً .

إرشاد : إن رتبة A تساوي 3، وإن المصفوفة الجزئية $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ غير شاذة ولها معكوس S^{-1} إن المعكوس من اليمين

المصفوفة A هو المصفوفة $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ من الدرجة 4×3 .

٢١ - برهن أن المصفوفة الجزئية $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ للمصفوفة A في المسألة ٢٠ ، غير شاذة واستنتج أن

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معكوس آخر من اليمين للمصفوفة A .

٢٢ - احصل على $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ كمكوس من اليسار للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث a, b, c اختيارية.

٢٣ - برهن أنه ليس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ معكوس من اليمين ولا معكوس من اليسار .

٢٤ - برهن أنه إذا كان $|A_{11}| \neq 0$ فإن $|A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$

٢٥ - إذا كان $|I + A| \neq 0$ فإن $(I + A)^{-1}$ و $(I - A)$ تبديليتان .

٢٦ - برهن العلاقة (i) من المسألة ٢٣ في الفصل السادس .

الفصل الثامن

الحقول (المجالات)

الحقول العددية (مجالات الأعداد) :

إن أى تجمع أو مجموعة S من الأعداد الحقيقية أو المركبة ، تحوى الصفر وعناصر أخرى تدعى حقلا عدديا إذا كان إجراء عمليات جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة (باستثناء القسمة على الصفر) أى زوج من الأعداد ، يعطى أحد أعداد المجموعة S .

أمثلة من الحقول العددية :

- (أ) مجموعة كل الأعداد الجذرية .
 - (ب) مجموعة كل الأعداد الحقيقية
 - (ج) مجموعة كل الأعداد التى من الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان جذريان .
 - (د) مجموعة كل الأعداد المركبة $a + bi$ حيث a و b عددان حقيقيان .
- أما مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد التى تكتب بالشكل $b\sqrt{3}$ حيث b عدد جذرى فليسا حقليين عدديين

الحقل :

بصورة عامة يسمى أى تجمع أو مجموعة S مكونة من عنصرين أو أكثر ومزودة بعمليتين تدعى أولاهما جمعا (+) وتدعى الثانية منهما ضربا (.) ، إنها حقل F فيما إذا تحققت الشروط التالية ($a, b, c, \dots$) عناصر من F أى مقادير عددية) .

$$ج ١ : a + b : \text{عنصر وحيد من } F$$

$$ج ٢ : a + b = b + a$$

$$ج ٣ : a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$ج ٤ : \text{يوجد لكل عنصر من } F \text{ عنصر } 0 \text{ من } F \text{ يحقق العلاقة } a + 0 = 0 + a = a$$

$$ج ٥ : \text{يوجد لكل عنصر } a \text{ من } F \text{ عنصر وحيد } -a \text{ من } F \text{ يحقق العلاقة } a + (-a) = 0$$

$$\text{ض ١ : } ab = a.b \text{ عنصر وحيد من } F$$

$$\text{ض ٢ : } ab = ba$$

$$\text{ض ٣ : } (ab)c = a(bc)$$

$$\text{ض ٤ : يوجد لكل عنصر } a \text{ من } F \text{ عنصر وحيد } 0 \neq a \text{ يحقق العلاقة } 1.a = a.1 = a$$

$$\text{ض ٥ : يوجد لكل عنصر } 0 \neq a \text{ من } F \text{ ، عنصر وحيد } a^{-1} \text{ فى } F \text{ نفسها ويحقق العلاقة } a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

$$\text{ت ١ : } a(b + c) = ab + ac$$

$$\text{ت ٢ : } (a + b)c = ac + bc$$

بالإضافة إلى حقول الأعداد الواردة أعلاه ، يمكن إعطاء أمثلة أخرى من الحقول :

$$(أ) \text{ مجموعة خوارزم القسمة } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ حيث } P(x) \text{ و } Q(x) \text{ كثيرات حدود فى المتغير } x \text{ وذات معاملات حقيقية .}$$

$$(و) \text{ مجموعة المصفوفات ذات الدرجة } 2 \times 2 \text{ وذات الشكل } \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عددان حقيقيان .}$$

(ر) المجموعة التي تتحقق فيها العلاقة $a+a=0$ يقال عن هذا الحقل إنه ذو مميز يساوى 2 وسنستبعده من الآن فصاعداً .
 في مثل هذا الحقل نجد ، مثلاً ، أن برهان الخاصية المعروفة التي تقول إن كل محددة تحوى صفين متطابقين تساوى الصفر ، لا يبقى قائماً فإذا بادلنا بين الصفين المتطابقين في المحددة فإننا نجد $D=-D$ أو $2D=0$ ولكن D ليس ، بالضرورة ، صفراً .

الحقول الجزئية :

إذا كانت T و S مجموعتين وإذا كان كل عنصر من S عنصر من T فإننا نقول إن S مجموعة جزئية من T .
 إذا كان T و S حقلين وإذا كانت S مجموعة جزئية من T فإن S تدعى حقلاً جزئياً من T . فثلاً إن حقل الأعداد الحقيقية هو حقل جزئى من حقل الأعداد المركبة ، إن حقل الأعداد الجذرية هو حقل جزئى من حقل كل الأعداد الحقيقية ومن حقل كل الأعداد المركبة .

المصفوفات المعرفة على حقل :

إذا اتت كل عناصر مصفوفة A إلى حقل F فإننا نقول إن « A معرفة على F » فثلاً .

إن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وإن $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل

الأعداد المركبة . إن A هنا مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الحقيقية بينما B ليست كذلك ويمكننا أن نعتبر أيضاً ، A معرفة على حقل الأعداد المركبة .

لتكن $A, B, C, \dots$ مصفوفات معرفة على نفس الحقل F ولنفرض أن F أصغر حقل يحوى كل عناصر هذه المصفوفات ، أى أنه لو فرضنا أن كل هذه العناصر أعداد جذرية فإن الحقل F يكون حقل الأعداد الجذرية وليس حقل الأعداد الحقيقية ولا حقل الأعداد المركبة . لو تفحصنا مختلف العمليات التي تعرف على هذه المصفوفات منفردة أو مجتمعة والواردة في الفصول السابقة ، لوجدنا أننا لا نحتاج لأى عناصر غير منتمية إلى F مثال ذلك :

إن مجموع وحاصل ضرب مصفوفات معرفة على F هي مصفوفات معرفة على F .

إذا كانت A غير شاذة فإن معكوسها معرف على F .

إذا كان $A \sim I$ ، فإنه توجد مصفوفتان P و Q معرفتان على F بحيث يكون $PAQ = I$ و I مصفوفة معرفة على F

إذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وكانت رتبها r فإن رتبها لا تتغير فيها إذا اعتبرت

معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد المركبة .

سنعتبر بعدما تقدم وعندما نقول إن المصفوفة A معرفة على F أن F أصغر حقل يحوى عناصر A .

سيكون من الضروري في الفصول القادمة وضمن بعض الحالات ، أن نقصر الحقل على حقل الأعداد الحقيقية . وفي حالات أخرى سيحدد حقل عناصر المصفوفات مثلاً من حقل الأعداد الجذرية إلى حقل الأعداد الحقيقية . وفي بعض الأحيان لا تؤدي العبارة « A معرفة على F » إلى أى قصر على الحقل باستثناء الحقل المستبعد ذي المميز المساوى 2 .

مسائل محلولة

١ - برهن أن مجموعة كل الأعداد المركبة تكون حقلاً .

يمكننا التحقق من ذلك بمراجعة الخواص ج ١ - ج ٥ ، ض ١ - ض ٥ ، ت ١ - ت ٢ . إن العنصر المعلوم (ج ٤) هو الصفر وعنصر الوحدة (ض ٥) هو الواحد . إذا كان $a + bi$ و $c + di$ عنصرين من المجموعة المفروضة فإن سالب (ج ٥) للعدد $a + bi$ هو $-a - bi$ وإن حاصل الضرب (ض ١) هو $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

وإن المعكوس (ض ٥) للعدد $a + di \neq 0$ هو :

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

إن التحقق من صحة بقية الخواص متروك كتمرين للقارئ .

٢- تحقق من أن (١) مجموعة كل الأعداد الحقيقية ذات الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عدadan جذريان و
(ب) مجموعة كل خوارج القسمة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود في المتغير x معاملاتها أعداد حقيقية ، تكونان حقلين ؛

٣- برهن أن (١) مجموعة كل الأعداد الجذرية
(ب) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عدadan جذريان و
(ج) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a + bi$ حيث a و b عدadan جذريان ، هي حقول جزئية من حقل الأعداد المركبة .

برهن أن هذا هو حقل جزئي من حقل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

٦- إذا حققت مجموعة R عناصرها $a, b, c, \dots$ الخواص (ج ١، ج ٢، ج ٣، ج ٤، ج ٥، ض ١، ض ٢، ض ٣، ت ١، ت ٢) الواردة سابقا فإنها تدعى حلقة ولكي نؤكد على أن الضرب المعرف على هذه المجموعة ، غير تبديل فإننا نصف هذه الحلقة بأنها غير تبديلية وعندما تحقق الحلقة R الخاصة ض ٢ فإنها توصف بكونها تبديلية وإذا حققت الحلقة R الخاصة ض ٤ فإنها تدعى حلقة ذات عنصر وحده تحقق ما يلي :

(ج) أن مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة n والمعرفة على F مثال حلقة غير تبديلية ذات عنصر الوحدة .

ذات عنصر وحدة .

٨ - استنادا إلى المسألة ؛ تكون المجموعة (د) الواردة في المسألة : حقا . هل كل حقل حلقة ؟ هل كل حلقة
تبدلية ذات عنصر وحدة حقل ؟

ما من هذه الحلقة وكان $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فر هن أن $LA = A$ تسمى L عنصر وحدة من اليسار. هل يوجد عنصر وحدة من اليمين؟

حقيقية . نعتبر العدد المركب $a+bi$ والمصفوفة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ كمعبرين متناظرين من هاتين المجموعتين ولنسم كلا منهما x بالآخر .

(د) ما هو خيال المرافق للعدد $a + bi$ ؟

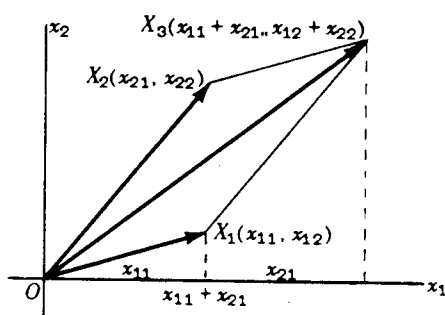
إن هذا مثال للتشاكل (الايرومورفيزم) بين مجموعتين .

الفصل التاسع

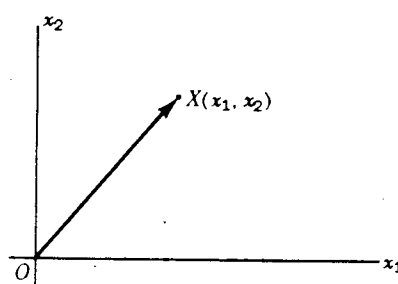
الارتباط الخطي للمتجهات والصيغ

الزوج المرتب :

يستعمل الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية (x_1, x_2) للتعبير عن نقطة X في مستوى ونستعمل هنا ، هذا الزوج المرتب نفسه ونكتبه بالشكل $[x_1, x_2]$ للدلالة على المتجه ذي البعدين OX (انظر الشكل ٩ - ١)



شكل ٩ - ٢



شكل ٩ - ١

إذا كان $X_1 = [x_{11}, x_{12}]$ و $X_2 = [x_{21}, x_{22}]$ متجهين مختلفين فإن مجموعهما الذي يتعين بحسب قانون متوازي الأضلاع (انظر الشكل ٩ - ٢) يكون :

$$X_3 = X_1 + X_2 = [x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}]$$

وإذا عاملنا X_1, X_2 كصفوفتين من الدرجة 1×2 فإننا نلاحظ أن ما سبق يمثل قاعدة جمع المصفوفات الواردة في الفصل الأول . وإذا كان فوق ذلك k عدد ما فإن :

$$kX_1 = [kx_{11}, kx_{12}]$$

هو حاصل ضرب المتعاد للمتجهات بعدد في علم الفيزياء .

المتجهات :

نمى بمتجه ذي n بعدا على F ، مجموعة مرتبة مكونة من n عنصرا x_i من F ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (9.1)$$

تسمى العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ على الترتيب من الشمال اليمين المركبة الأولى ، الثانية .. للمتجه X . سنرى فيما بعد أنه من الأفضل أن نكتب مركبات متجه على صورة عمود ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (9.1')$$

ومع أن كلا من (9.1)، (9.1') تعتبر عن نفس المتجه إلا أننا نقول، عن (9.1) إنه متجه صفا وعن (9.1') إنه متجه عمودي، ويمكننا عندئذ أن نعتبر المصفوفة A ذات الدرجة $p \times q$ كمتبر عن p متجها صفا (عناصر أى صف من صفوفها مركبات متجه ذى q بعدا) أو كمتبر عن q متجها عمودا .

يسمى المتجه الذى يكون كل عنصر من عناصره صفرا ، بالمتجه الصفري ، ويرمز له بالرمز O .
إن مجموع وحاصل طرح متجهين صفين (عمودين) وحاصل ضرب عدد بمتجه تخضع تماما لقواعد هذه العمليات فى المصفوفات .

مثال ١ :

اعتبر المتجهات ذات الأبعاد الثلاثة :

$$X_4 = [-4, -4, 6] \quad \text{و} \quad X_1 = [3, 1, -4], \quad X_2 = [2, 2, -3], \quad X_3 = [0, -4, 1].$$

تحقق العلاقات التالية

$$2X_1 - 5X_2 = 2[3, 1, -4] - 5[2, 2, -3] = [6, 2, -8] - [10, 10, -15] = [-4, -8, 7] \quad (١)$$

$$2X_2 + X_4 = 2[2, 2, -3] + [-4, -4, 6] = [0, 0, 0] = 0 \quad (ب)$$

$$2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0 \quad (ج)$$

$$2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0 \quad (د)$$

إن المتجهات المستعملة هنا هى متجهات صفوف ومن السهل أن نلاحظ أنه لو مثل كل قوس من الأقواس السابقة متجها عمودا ، فإن النتائج السابقة تبقى صحيحة .

الارتباط الخطي للمتجهات :

إن مجموعة المتجهات والى عددها m ذات الـ n مركبة المعرفة على F

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}]$$

$$X_2 = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}]$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}]$$

(9.2)

تسمى مرتبطة خطياً على F فيما إذا وجد m عنصرا $k_1, k_2, \dots, k_m$ من F ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m = 0 \quad (9.3)$$

أما إذا لم يتحقق 9.3 فإنه يقال بأن مجموعة المتجهات مستقلة خطياً .

مثال ٢ :

اعتبر المتجهات الأربعة الواردة فى المثال ١ . من (ب) يتضح أن المتجهين X_2, X_4 مرتبطين خطياً وكذلك المتجهات X_1, X_2, X_3 و X_2 مرتبطة خطياً كما يتضح من (ج) وأن المجموعة كلها مرتبطة خطياً كما هو واضح من (د) ومن جهة ثانية نجد أن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطياً إذ أنه لو فرضنا العكس لوجب أن يكون

$$k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2] = [0, 0, 0]$$

$$\text{أى : } 3k_1 + 2k_2 = 0, \quad k_1 + 2k_2 = 0 \quad \text{و} \quad -4k_1 - 3k_2 = 0$$

ينتج عن العلاقتين الأولىتين أن $k_1 = 0$ ثم نجد أن $k_2 = 0$

أى متجه X ذا n مركبة (بعدا) مرتبط خطياً مع المتجه الصفري ذى n بعدا .

نقول عن المتجه X_{m+1} إنه قابل للتمثيل كاتلاف خطى للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ فيما إذا وجدت عناصر $k_1, k_2, \dots, k_m$ من F بحيث يتحقق :

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m .$$

نظريات أساسية :

في (9.3) إذا كان $k_i \neq 0$ فإنه يمكن الحل بالنسبة لـ

$$X_i = -\frac{1}{k_i} \{k_1 X_1 + \dots + k_{i-1} X_{i-1} + k_{i+1} X_{i+1} + \dots + k_m X_m\}$$

أو

$$X_i = s_1 X_1 + \dots + s_{i-1} X_{i-1} + s_{i+1} X_{i+1} + \dots + s_m X_m \quad (9.4)$$

وعلى ذلك

I. إذا كان هناك m متجها مرتبطة خطيا فإنه يمكن دائما التعبير عن أحدها كائتلاف (تركيب) خطي من المتجهات الأخرى .

II. إذا كانت m متجها $X_1, X_2, \dots, X_m$ مستقلة خطيا بينما تكون المجموعة ، التي نحصل عليها ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} إلى المجموعة السابقة ، مرتبطة خطيا . فإنه يمكن التعبير عن X_{m+1} بائتلاف خطي للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$.

مثال ٣ :

من المثال ٢ يتضح أن المتجهين X_2, X_1 مستقلان خطيا بينما X_3, X_2, X_1 مرتبطة خطيا وهي تحقق العلاقة $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$ ومن الواضح أن : $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

III. إذا وجد بين الـ m متجها $X_1, X_2, \dots, X_m$ مجموعة جزئية مكونة من $m > r$ متجها مرتبطة خطيا ، فإن المجموعة كاملة تكون مرتبطة خطيا .

مثال ٤ :

ينتج من (ب) من المثال ١ أن المتجهين X_4, X_2 مرتبطان خطيا وينتج عن (د) أن مجموعة المتجهات الأربعة مرتبطة خطيا .

IV. إذا كانت رتبة المصفوفة A حيث

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

المصاحبة للمتجهات (9.2) التي عددها m مساوية $m > r$. فإنه يوجد على الضبط r متجها ، من هذه المجموعة ، مستقلة خطيا ، ويمكن تمثيل كل متجه من المتجهات المتبقية والتي عددها $(m-r)$ بائتلاف خطي للمتجهات r المذكورة .

انظر المسألين ٢ - ٣

V. إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن تكون رتبة مصفوفة المتجهات (9.5) هي $m > r$ إذا كانت الرتبة تساوي m فإن المتجهات المذكورة تكون مستقلة خطيا .

إن مجموعة المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا ، بالضرورة ، في الحالة التي يكون فيها $n < m$.

إذا كانت مجموعة المتجهات (9.2) مستقلة خطيا فإن كل مجموعة جزئية منها تكون كذلك .

الصيغة (الصورة) الخطية :

إن الصيغة الخطية على F في n متغير $x_1, x_2, \dots, x_n$ هو كثير حدود من النوع

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (9.6)$$

حيث معاملات كثيرة الحدود عناصر من F .

اعتبر مجموعة مكونة من m من الصيغ الخطية في n متغيرا

اعتبر الآن مصفراً من الدرجة $(r+1)$ فنجد :

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

حيث العناصر x_{pj}, x_{iq} هي على الترتيب من أى صف أو أى عمود غير واقعين في Δ لتكن $k_1, k_2, \dots, k_{r+1} = \Delta$ هي المعاملات المرافقة الخاصة بالعناصر $x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{rq}, x_{pq}$ المكونة للعمود الأخير من ∇ لذلك من (3-10) :

$$k_1 x_{1i} + k_2 x_{2i} + \dots + k_r x_{ri} + k_{r+1} x_{pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$k_1 x_{1q} + k_2 x_{2q} + \dots + k_r x_{rq} + k_{r+1} x_{pq} = \nabla = 0 \quad \text{كذلك من الفرض}$$

والآن لنغير . العمود الأخير من ∇ بعمود آخر من الأعمدة الباقية وليكن العمود ذا الرقم u الذى لا يظهر في Δ إن المعاملات المرافقة لعناصر هذا العمود هي المعاملات المرافقة k التى ذكرناها سابقاً . لهذا :

$$k_1 x_{1u} + k_2 x_{2u} + \dots + k_r x_{ru} + k_{r+1} x_{pu} = 0$$

$$k_1 x_{1t} + k_2 x_{2t} + \dots + k_r x_{rt} + k_{r+1} x_{pt} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad \text{لذلك}$$

وبالتجميع على جميع قيم t فإننا نجد :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r + k_{r+1} X_p = 0$$

وبما أن $k_{r+1} = \Delta \neq 0$ فإن X_p تركيب خطى لـ r متجه $X_1, X_2, \dots, X_r$ المستقلة خطياً . ولكن X_p هو أى متجه من الـ $(m-r)$ متجه $X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_m$ أى أنه يمكن التعبير عن كل متجه من هذه المتجهات بتركيب خطى للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_r$.

أما في حالة $n < m$ اعتبر المصفوفة عندما نضيف لكل متجه من المتجهات الـ m عدداً إضافياً من المركبات المتلاشية (الأصفار) عددها $m-n$ وليرمز لهذه المصفوفة بالشكل $[A : 0]$. إن من الواضح أن الارتباط الخطى والاستقلال الخطى للمتجهات ورتبة المصفوفة A لم تتغير .

وهكذا نكون قد برهننا في أى من الحالتين أن المتجهات $X_{r+1}, \dots, X_m$ تراكيب خطية للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_r$ المستقلة خطياً .

٣ - برهن باستعمال مصفوفة ، أن كلا من مجموعتي المتجهات الثلاثية

$$X_1 = [2, 3, 1, -1]$$

$$X_1 = [1, 2, -3, 4]$$

$$X_2 = [2, 3, 1, -2]$$

(ب) و

$$X_2 = [3, -1, 2, 1]$$

(١)

$$X_3 = [4, 6, 2, -3]$$

$$X_3 = [1, -5, 8, -7]$$

مرتبطة خطياً . في كل منها عين مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطياً وعبر عن الأشكال الباقية بتركيب خطية للأول.

(١) إن المصفوفة ذات رتبة مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطياً وليكونا X_1, X_2 . إن المصففر

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{اعتبر المصففر} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

فنجد أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير هي على الترتيب

من الشمال اليمين -7, -14, 7 - فيكون إذن

اعتبر الآن مصفرا من الدرجة $(r+1)$ فنجد :

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

حيث العناصر x_{pj}, x_{iq} هي على الترتيب من أى صف أو أى عمود غير واقعين في Δ لتكن $k_1, k_2, \dots, k_{r+1} = \Delta$ المكوّنة للعمود الأخير من ∇ لذلك من (10-3) :

$$k_1 x_{1i} + k_2 x_{2i} + \dots + k_r x_{ri} + k_{r+1} x_{pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$k_1 x_{1q} + k_2 x_{2q} + \dots + k_r x_{rq} + k_{r+1} x_{pq} = \nabla = 0 \quad \text{كذلك من الفرض}$$

والآن لنغير . العمود الأخير من ∇ بعمود آخر من الأعمدة الباقية وليكن العمود ذا الرقم u الذى لا يظهر في Δ إن المعاملات المرافقة لعناصر هذا العمود هي المعاملات المرافقة k التى ذكرناها سلفا . لهذا :

$$k_1 x_{1u} + k_2 x_{2u} + \dots + k_r x_{ru} + k_{r+1} x_{pu} = 0$$

$$k_1 x_{1t} + k_2 x_{2t} + \dots + k_r x_{rt} + k_{r+1} x_{pt} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad \text{لذلك}$$

فإننا نجد :

وبالتجميع على جميع قيم t فإننا نجد :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r + k_{r+1} X_p = 0$$

وبما أن $k_{r+1} = \Delta \neq 0$ فإن X_p تركيب خطى r متجها $X_1, X_2, \dots, X_r$ المستقلة خطيا . ولكن X_p هو أى متجه من الـ $(m-r)$ متجه $X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_m$ أى أنه يمكن التعبير عن كل متجه من هذه المتجهات بتركيب خطى للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_r$.

أما في حالة $n < m$ اعتبر المصفوفة عندما نضيف لكل متجه من المتجهات الـ m عددا إضافيا من المركبات الثلاثية (الأصفار) عددها $m-n$ ولترمز لهذه المصفوفة بالشكل $[A : 0]$. إن من الواضح أن الارتباط الخطي والاستقلال الخطي للمتجهات ورتبة المصفوفة A لم تتغير .

وهكذا نكون قد برهنا في أى من الحالتين أن المتجهات $X_{r+1}, \dots, X_m$ تراكيب خطية للمتجهات المستقلة خطيا $X_1, X_2, \dots, X_r$.

٣ - برهن باستعمال مصفوفة ، أن كلا من مجموعى المتجهات الثلاثية

$$X_1 = [2, 3, 1, -1]$$

$$X_1 = [1, 2, -3, 4]$$

$$X_2 = [2, 3, 1, -2]$$

(ب) و

$$X_2 = [3, -1, 2, 1]$$

(١)

$$X_3 = [4, 6, 2, -3]$$

$$X_3 = [1, -5, 8, -7]$$

مرتبطة خطيا . في كل منها عين مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطيا وعبر عن الأشكال الباقية بتركيب خطية للأول.

(١) إن المصفوفة ذات رتبة مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا وليكونا X_1, X_2 . إن المصفر

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{اعتبر المصفر} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

فنجد أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير هي على الترتيب

من الشمال اليمين -7, 14, 7 - فيكون إذن

(ب) إن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا لكن X_1 و X_2 ونحده أن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{لئلا} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{لئلا} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير في $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ هي على الترتيب من الشمال إلى اليمين 2, 2, -2 فيكون

$$Y_0 = X_1 + X_2, \quad 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0$$

٤ - لتكن $P_1(1, 1, 1), P_2(1, 2, 3), P_3(3, 1, 2), P_4(2, 3, 4)$ نقاطا من الفراغ العادي. تحدد النقطتان P_2 و P_1 مع نقطة الأصل مستويا π معادلته

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0 \quad (i)$$

لنعوض في الطرف الأيسر من العلاقة (i) بأحداثيات النقطة P_4 فنجد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أى أن P_4 واقعة في المستوى π إن هذا يعنى أن $[P_4, P_1, P_2]$ من الرتبة 2 لقد تبينا أن ثلاثة نقاط من الفراغ العادي تقع في مستوى يمر بنقطة الأصل فيما إذا كانت مصفوفة إحداثياتها مع الرتبة الثانية.

برهن أن P_3 لاتقع في المستوى π .

مسائل اضافية

٥ - برهن أنه إذا كانت الـ m متجه $X_1, X_2, \dots, X_m$ مستقلة خطيا بينما تكون المجموعة ، التى تنتج عن هذه المتجهات ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} مرتبطة خطيا فإنه يمكن التعبير عن X_{m+1} بتركيب خطي للمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$.

٦ - برهن أن تمثيل X_{m+1} الوارد في المسألة ٥ هو تمثيل وحيد .

$$\text{إرشاد : افترض } X_{m+1} = \sum_{i=1}^m k_i X_i = \sum_{i=1}^n s_i X_i \quad \text{ثم اعتبر} \quad \sum_{i=1}^m (k_i - s_i) X_i = 0$$

٧ - برهن أن الشرط اللازم والكافى لكي تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن يكون لمصفوفة هذه المتجهات

$$(9.5) \text{ رتبة } r \text{ حيث } m > r.$$

إرشاد : نفرض أن الـ m متجها مرتبطة خطيا وأن (9.4) محققة . في (9.5) لنطرح من الصف ذى الرقم i

حاصل ضرب الصف الأول في s_1 وحاصل ضرب الصف الثانى في $s_2, \dots$ كما هو موضح في (9.4)

من أجل العكس أنظر المسألة ٢ .

٨ - افحص كل واحدة من مجموعات المتجهات التالية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية وذلك من حيث الارتباط .

والاستقلال الخطيين . وانتخب في كل واحدة من المجموعات المرتبطة خطيا مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطيا ومثل

كل واحد من المتجهات الباقية بتركيب خطي للمتجهات المستقلة خطيا .

$$\begin{array}{lll}
 X_1 = [2, 1, 3, 2, -1] & X_1 = [1, 2, 1] & X_1 = [2, -1, 3, 2] \\
 X_2 = [4, 2, 1, -2, 3] & X_2 = [2, 1, 4] & X_2 = [1, 3, 4, 2] \\
 X_3 = [0, 0, 5, 6, -5] & X_3 = [4, 5, 6] & X_3 = [3, -5, 2, 2] \\
 X_4 = [6, 3, -1, -6, 7] & X_4 = [1, 8, -3] &
 \end{array}
 \quad (أ) \quad (ب)$$

$$\begin{array}{lll}
 X_3 = 2X_1 - X_2 & X_3 = 2X_1 + X_2 & X_3 = 2X_1 - X_2 \\
 X_4 = 2X_2 - X_1 & X_4 = 5X_1 - 2X_2 &
 \end{array}
 \quad (أ) \quad (ب) \quad (ج)$$

- ٩ - لماذا لا يوجد أكثر من n متجهاً مستقلة خطياً في مجموعة المتجهات ذات n مركبة على F ؟
- ١٠ - برهن أنه إذا كان في (2.9) أما $X_i = X_j$ أو $X_i = aX_j$ حيث a من F فإن مجموعة المتجهات تكون مرتبطة خطياً. هل العكس صحيح ؟
- ١١ - برهن أن أى متجه X ذي n مركبة مرتبط خطياً مع المتجه الصفري ذي n مركبة : أى أنه يمكن اعتبار X و 0 متناسين .

$$\text{إرشاد : اعتبر العلاقة } k_1X + k_2 \cdot 0 = 0 \text{ حيث } k_1 = 0 \text{ و } k_2 \neq 0$$

- ١٢ - (أ) برهن أن : $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ مرتبطة خطياً على حقل الأعداد الجذرية وبالتالي على حقل الأعداد المركبة .
- (ب) برهن أن $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ مستقلة خطياً على حقل الأعداد الحقيقية ومرتبطة على حقل الأعداد المركبة .
- ١٣ - افحص الارتباط والاستقلال الخطيين للصور الخطية :

$$\begin{array}{ll}
 f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 & f_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 f_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 & f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\
 f_3 = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & f_3 = 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4
 \end{array}
 \quad (أ) \quad (ب)$$

$$3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0 \quad (أ) \quad \text{الجواب}$$

- ١٤ - ابحث في الارتباط والاستقلال الخطيين لمجموعة كثيرات حدود :

$$P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \dots + a_{i,n-1}x + a_{in} \quad \text{حيث } (i = 1, 2, \dots, m)$$

وبرهن أن هذه المجموعة تكون مرتبطة خطياً أو مستقلة خطياً حسبما تكون متجهات صفوف مصفوفة معاملات كثيرات

الحدود

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مرتبطة أو مستقلة خطياً . أى حسبما تكون الرتبة r للمصفوفة A أصغر من أو تساوى m .

- ١٥ - إذا كانت كل واحدة من المجموعتين التاليتين مرتبطة خطياً ، فأوجد تركيباً خطياً لكل منهما ، يساوى الصفر .

$$\begin{array}{ll}
 P_1 = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3 & P_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\
 P_2 = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & P_2 = 2x^2 - 6x + 4 \\
 P_3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2 & P_3 = x^3 - 2x^2 + x
 \end{array}
 \quad (أ) \quad (ب)$$

$$P_1 + P_2 - 2P_3 = 0 \quad (ب) \quad 2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0 \quad (أ) \quad \text{الجواب}$$

١٦ - ابحث في الارتباط والاستقلال الخطيين لمجموعة المصفوفات من الدرجة 2×2 على F

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$$

برهن أن صحة العلاقة $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0$ إذا كانت k (في F) ليست كلها متلاشية يتطلب أن تكون المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$$

ذات رتبة أصغر من العدد 3. (لاحظ أن المصفوفات M_1, M_2, M_3 معتبرة كمجموعة عن متجهات ذات

أربع مركبات) مدد هذه النتيجة لمجموعة مكونة من مصفوفات من الدرجة $m \times n$.

١٧ - برهن أن

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مرتبطة خطيا.

١٨ - برهن أنه يمكن كتابة أى مصفوفة درجتها 2×2 كتركيب خطي للمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و هم ما سبق على المصفوفات ذات الدرجة $n \times n$

١٩ - إذا كانت المتجهات ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة خطيا، فبرهن أن $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ حيث $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ مستقلة خطيا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $A = (a_{ij})$ غير شاذ.

٢٠ - إذا كانت A مصفوفة رتبها r بين كيف يمكن بناء مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $AB = [C_1, C_2, \dots, C_r, 0, \dots, 0]$

حيث $C_1, C_2, \dots, C_r$ هي مجموعة معطية من أعمدة A المستقلة خطيا.

٢١ - لتكن النقاط : $P_1(1, 1, 1, 1), P_2(1, 2, 3, 4), P_3(2, 2, 2, 2), P_4(3, 4, 5, 6)$ أربع نقاط من فراغ

ذو أربعة أبعاد

(أ) برهن أن رتبة $[P_1, P_3]$ تساوى الواحد وأن هاتين النقطتين واقعتان على مستقيم يمر بنقطة الأصل.

(ب) برهن أن رتبة $[P_1, P_2, P_3, P_4]$ تساوى 2 وأن هذه النقاط واقعة في مستوى مار بنقطة الأصل.

(ج) هل تقع النقطة $P_5(2, 3, 2, 5)$ في المستوى الوارد في (ب).

٢٢ - برهن أن كل مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n على F تحقق معادلة من الشكل

$$A^p + k_1 A^{p-1} + k_2 A^{p-2} + \dots + k_{p-1} A + k_p I = 0$$

حيث k_i هي أعداد من F .

إرشاد : أنظر في $I, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ واستعن بالمسألة ١٦.

٢٣ - أوجد المعادلة ذات أقل درجة (أنظر في المسألة ٢٢) والتي تتحقق بـ $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$A^2 - 2A + 2I = 0, \quad (أ) \quad A^2 - 2A + I = 0 \quad (ب) \quad A^2 - 2A = 0, \quad (١) \quad \text{الجواب}$$

٢٤ - في (ب) و (ج) من المسألة ٢٣ اضرب كل معادلة في A^{-1} لكي نحصل على (ب) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$

و (ج) $A^{-1} = 2I - A$ ومن ثم حقق مايلي : إذا كان A معرفا على F وغير شاذ فإنه يمكن التعبير عن A^{-1} بكثير

حدود بالنسبة لـ A معاملاتها عناصر من F .

لنعتبر الآن المصفوفة الممددة لمجموعة المعادلات (10.1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A \ H] \quad (10.4)$$

(كل صف من (10.4) هو شكل مختصر للمعادلة المناظرة من (10.1) ولإستنتاج معادلة من صف يكفى أن نضيف المجاهيل وإشارات + وإشارة - بطريقة ملائمة) .

حل مجموعة المعادلات (10.1) بواسطة المصفوفة (10.4) نطبق التحويلات الأولية للصفوف لكي نستعير عن A بالمصفوفات القانونية الصفية المكافئة الواردة في الفصل ٥ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{مثال ١ : حل المجموعة :}$$

إن المصفوفة الممددة :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أى أن الحل هو مجموعة المعادلات المكافئة $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ المثلة في الصورة الاتجاهية $X = [1, 0, 1]$

نظريات أساسية :

عندما نحول مصفوفة المعادلات A للمجموعة (10.1) إلى شكلها القانونى الصفى المكافئ C فإننا نفرض أن $[A \ H]$ قد تحولت إلى $[C \ K]$ حيث $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$. إذا كانت رتبة A هي r فإن الصفوف الـ r الأولى من C تحوى عنصراً أو أكثر غير صفري . إن العنصر الأول غير الصفري في كل من هذه الصفوف يساوى الواحد أما بقية عناصر العمود الذى يقع فيه هذا الواحد فهي أصفار . وتتكون الصفوف المتبقية من أصفار فقط . من الصفوف الـ r الأولى من $[C \ K]$ يمكننا الحصول على كل من المتغيرات $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ (الرموز هي ذاتها الواردة في الفصل ٥) بدلالة المجاهيل الباقية $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ واحد من $k_1, k_2, \dots, k_r$.

إذا كان $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_m = 0$ فإن هذا يعنى أن (10.1) متوافقة وأى مجموعة اختيارية من القيم للمتغيرات $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ بالإضافة إلى القيم الناتجة $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ تكون حلاً . وعلى العكس إذا كان على الأقل واحد من $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_m$ يختلف عن الصفر وليكن مثلاً $k_t \neq 0$ فإن المعادلة المناظرة تكتب بالشكل

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = k_t \neq 0$$

وهذا يعنى أن المجموعة (10.1) متناقضة (متعارضة)

في الحالة التي تكون فيها المجموعة متوافقة ، يكون لـ A و $[A \ H]$ رتبة واحدة ، أما في الحالة التي لا تكون فيها المجموعة متوافقة فإن لهاتين المصفوفتين رتبتين مختلفتين .

أى :

I - تكون مجموعة المعادلات $AX = H$ المكونة من m معادلة خطية في n مجهولا ، متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لمصفوفة المعاملات والمصفوفة الممددة للمجموعة رتبة واحدة .

II - في مجموعة متوافقة (10.1) ذات رتبة r حيث $n > r$ ، يمكن اختيار $(n-r)$ من المجاهيل بحيث تكون مصفوفة معاملات المجاهيل الـ r الباقية ذات رتبة مساوية r . وعندما تعطى لهذه الـ $(n-r)$ مجهولا قيم اختيارية ، فإن بقية المجاهيل والتي عددها r تتعين بشكل وحيد .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases} \quad \text{مثال ٢ : لمجموعة المعادلات (14) يكون}$$

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C \ K]$$

بما أن رتبة كل من A و $[A \ H]$ واحدة وتساوى 3 فإن المجموعة المعطاة متوافقة علاوة على ذلك فإن الحـل العام يحوى $n - r = 4 - 3 = 1$ ثابتا اختياريا . من الصف الأخير من $[C \ K]$ ، $x_4 = 0$ ، لنفرض أن $x_3 = a$ حيث a عدد اختياري ، فنجد $x_1 = 10 + 11a$ و $x_2 = -2 - 4a$ ،

حيث a عدد اختياري ، فنجد $x_1 = 10 + 11a$ و $x_2 = -2 - 4a$ ، $x_3 = a$ ، $x_4 = 0$ ويكون حل المجموعة هو

$$X = [10 + 11a, -2 - 4a, a, 0]^T \quad \text{أو}$$

إذا كان لمجموعة معادلات متوافقة على F حل وحيد (مثال ١) فإن هذا الحل ينتمى إلى F . وإذا كان لهذه المجموعة عدد لانهاى من الحلول (مثال ٢) فإنه هذه الحلول تقع في F فيما إذا اخترت القيم الاختيارية من F . ولكن المجموعة يكون لها عدد لانهاى من الحلول التي تنتمى إلى أى جـمـل يكون F حـقـلا جزئيا منه . مثال ذلك : يكون لمجموعة معادلات المثال ٢ عدد لانهاى من الحلول على F (حقل الأعداد الجذرية) فيما إذا كان a قد اخترت من بين الأعداد الجذرية ، ولها عدد لانهاى من الحلول الحقيقية فيما إذا كان اختيار a من بين الأعداد الحقيقية ولها عدد لانهاى من الحلول المركبة فيما إذا كان اختيار a من مجموعة الأعداد المركبة .

أنظر المسألتين ١ - ٢

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى المعادلة الخطية :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = h$$

معادلة غير متجانسة فيما إذا كان $h \neq 0$ وتسمى المجموعة $AX = H$ مجموعة معادلات غير متجانسة فيما إذا كان H متجها غير صفري . إن مجموعتي المثالين ١ و ٢ هما مجموعتين غير متجانستين .

سنبرهن في المسألة ٣

III - يكون لمجموعة مكونة من n معادلة غير متجانسة ذات n مجهولاً ، حل وحيد فيما إذا كانت رتبة مصفوفة المعاملات A مساوية n أى إذا كان $|A| \neq 0$.

بالإضافة إلى الطريقة المذكورة آنفاً . ستقدم طريقتين إضافيتين لحل مجموعة متوافقة مكونة من n معادلة غير متجانسة ومتعددة المجهول $AX = H$. أولى هاتين الطريقتين هي الطريقة المعتادة باستخدام المحددات .

(١) الحل باستخدام قاعدة كرامر . ل نرمز بالرمز A_i حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$. للمصفوفة التي نحصل عليها

من المصفوفة A بالاستعاضة عن العمود ذي الرقم i ، بعمود المقادير الثابتة (عمود المقادير h) . فإذا كانت

$|A| \neq 0$ فإن المجموعة $AX = H$ يكون لها الحل الوحيد :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \quad (10.5)$$

أنظر المسألة ٤ .

$$\text{مثال ٣ : حل مجموعة المعادلات} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{نجد على التوالى}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240 \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120.$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24.$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-120} = 0, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-120} = \frac{1}{5}, \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2 \quad \text{ويكون أخيراً :}$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}.$$

(ب) الحل باستعمال A^{-1} إذا كان $|A| \neq 0$ فإنه يوجد A^{-1} ويكون حل المجموعة $AX = H$ هو

$$X = A^{-1}H \quad \text{أو} \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1}H \quad (10.6)$$

$$\text{مثال ٤ : إن مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{هي} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومن الجزء (ب) في المسألة ٢ من الفصل السابع نجد أن $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. وعلى ذلك فإن

$$A^{-1} \cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ويكون حل مجموعة المعادلات هو : $x_1 = 35/18, x_2 = 29/18, x_3 = 5/18$.

أنظر المسألة ٥

المعادلات المتجانسة :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \quad \text{إن المعادلة الخطية} \quad (10.7)$$

تسمى معادلة خطية متجانسة . ومجموعة المعادلات الخطية :

$$AX = 0 \quad (10.8)$$

ذات الـ n مجهولا ، تسمى مجموعة معادلات متجانسة . إن رتبة مصفوفة المعاملات A لمجموعة المعادلات (10.8) هي نفسها رتبة المصفوفة الممتدة $[A \ 0]$ وعلى ذلك فهذه المجموعة تكون متوافقة دائماً . يلاحظ أن $X=0$ أى أن $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ هو دائماً حل للمجموعة يسمى هذا الحل بالحل التافه (عديم الأهمية) .

إذا كانت رتبة A مساوية n فإنه يمكن حل n معادلة من مجموعة المعادلات (10.8) باستخدام قاعدة كرامر ويكون لها حل وحيد هو $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ويكون للمجموعة الحل التافه فقط . وإذا كانت رتبة A هي r حيث $n > r$ فإن النظرية II تؤكد وجود حل غير تافه للمجموعة . وعلى ذلك .

IV - إن الشرط اللازم والكافي ليكون للمجموعة (10.8) حل بالإضافة إلى الحل التافه ، هو أن تكون رتبة A هي r حيث $n > r$.

V - أن الشرط اللازم والكافي ليكون لمجموعة مكونة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولا حلا غير الحل التافه ، هو أن يكون $|A| \neq 0$.

VI - إذا كانت رتبة (10.8) هي r حيث $n > r$ فإن لها ، على الضبط ، $(n-r)$ حلا مستقلة خطيا وإن كل حل آخر هو تركيب خطي من الـ $(n-r)$ حلا وإن كل تركيب خطي لهذه الحلول هو حل أيضا .

أنظر المسألة ٦

نفرض أن X_1 و X_2 حلان مختلفان للمجموعة $AX = H$ ، فيكون $AX_1 = H$ ، $AX_2 = H$ ، و $A(X_1 - X_2) = AY = 0$. أى أن $Y = X_1 - X_2$ حل غير تافه للمجموعة $AX = 0$.

وعلى العكس . إذا كان Z حل غير تافه للمجموعة $AX = 0$ وإذا كان X_p حلا للمجموعة $AX = H$ فإن $X = X_p + Z$ هو حل أيضا للمجموعة $AX = H$. بما أن Z يمثل الحل التام للمجموعة $AX = 0$ فإنه ينتج عن هذا أن $X_p + Z$ يمثل الحل التام للمجموعة $AX = H$ أى :

VII - إذا كانت مجموعة المعادلات الغير متجانسة $AX = H$ متسقة فإننا نحصل على حل تام لهذه المجموعة بأن نضيف إلى الحل التام للمجموعة $AX = 0$ حلا خاصاً للمجموعة $AX = H$.

مثال ٥ : في المجموعة $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ ضع $x_1 = 0$ فنجد أن $x_3 = 2$ و $x_2 = 1$. ويكون $X_p = [0, 1, 2]^t$. حلاً خاصاً لهذه المجموعة . إن الحل التام للمجموعة هو $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ هو $[-7a, a, 3a]^t$ حيث a اختياري ويكون الحل التام للمجموعة المعطاة هو

$$X = [-7a, a, 3a]^t + [0, 1, 2]^t = [-7a, 1+a, 2+3a]^t$$

ملاحظة :

يمكن أن تمتد الطريقة السابقة على مجموعة أكبر . ومن الضروري عندها أن نبرهن أن المجموعة متسقة ومن العسير حل هذه المجموعة بطريقة المصفوفة الممددة كما أعطيت أعلاه .

مسائل محلولة

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases} \quad \text{١ - حل}$$

الحل :

إن المصفوفة الممددة

$$\begin{aligned} [A \ H] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وعلى ذلك، $x_1 = 1$ ، $x_2 - 2x_3 = 0$ ، و $x_4 + 3x_5 = 0$. لنفرض $x_3 = a$ ، $x_5 = b$ حيث a و b اختياريان . إن الحل التام يعطى بما يلي :

$$X = [1, 2a, a, -3b, b]^t \quad \text{أو بالشكل} \quad x_1 = 1, x_2 = 2a, x_3 = a, x_4 = -3b, x_5 = b$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{٢ - حل}$$

الحل :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

إن الصف الأخير يعطى $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -5$ ، وذلك، فالمجموعة المعطاة هي مجموعة متعارضة وليس لها حل .

الحل :

$$\text{إذن } \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix} \text{ هو } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ إن مكموس المصفوفة}$$

$$X = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(أنظر المثال ٣)

$$e \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{٦ - حل}$$

الحل :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \quad x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b, \quad x_3 = a, \quad x_4 = b. \quad \text{إن الحل التام لهذه المجموعة هو}$$

وبما أن رتبة المصفوفة A تساوى 2 فإننا نحصل على 2 حلًا مستقلًا خطيًا . فنحصل مثلاً . على إحدى هذه الأزواج بأن نأخذ أولاً $a = 1, b = 1$ ثم $a = 3, b = 1$ فيكون :

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1 \quad \text{و} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

ماذا يمكننا أن نقول عن زوج الحلول الذي نحصل عليه عندما نأخذ

$$a = b = 3 \quad \text{و} \quad a = b = 1$$

٧ - برهن مايلي : في مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة $(n-1)$ تكون المعاملات المرافقة لعناصر أى صفين (عمودين) من A متناسبة .

بما أن $|A| = 0$ فإن المعاملات المرافقة لعناصر أى صف (عمود) من A هي حل للمجموعة $AX = 0$ ($A^T X = 0$) .

بما أنه ليس للمجموعة سوى حل وحيد مستقل خطياً وذلك لأن رتبة (A^T) هي $(n-1)$ وعلى ذلك فللمعاملات المرافقة

لصف (عمود) آخر من A (حلاً آخر X_2 لهذه المجموعة) ونحصل على $X_2 = kX_1$.

٨ - برهن أنه إذا كانت $f_1, f_2, \dots, f_m$ هي m حيث $n > m$ صورة خطية مستقلة في n متغير على F فإن الـ p

صورة خطية

$$g_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} f_i, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

مرتبطة خطياً ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times p$ هي r حيث $p > r$.

إن الـ s مرتبطة خطياً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد كميات عددية $a_1, a_2, \dots, a_p$ من F ليست كلها أصفاراً وتحقق العلاقة :

١١ - أوجد كل الحلول غير التافهة للمجموعات :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (أ)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \quad (د) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad (ب)$$

الاجوبة : (أ) : $x_1 = -3a, x_2 = 0, x_3 = a$

(ب) : $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$

(د) : $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b, x_2 = a, x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b, x_4 = b$

١٢ - قارن حل (د) من المسألة رقم ١٠ مع حل الآخر : $x_1 = c, x_2 = d, x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3}, x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d$

١٣ - إذا أعطيت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة B ذات الرتبة الثانية والتي تحقق العلاقة $AB = 0$

إرشاد : اختر أعمدة B من حلول المجموعة $AX = 0$

١٤ - برهن أن مصفوفة مربعة تكون شاذة إذا كانت (وإذا كانت فقط) صفوفها (أعمدتها) مرتبطة خطياً.

١٥ - لتكن $AX = 0$ مجموعة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولاً ولنفرض أن $r = n - 1$ هي رتبة A . برهن أن أى متجه غير صفري للمعاملات المرافقة $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}]$ نصف من A هو حل للمجموعة $AX = 0$.

١٦ - استخدم المسألة ١٥ لحل المجموعات :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (أ)$$

إرشاد : أضيف إلى معادلات (أ) المعادلة $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ ثم أوجد المعاملات المرافقة لعناصر الصف الثالث من

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{المصفوفة}$$

الاجوبة : (أ) : $x_1 = -27a, x_2 = 0, x_3 = 9a$ أو (ب) : $[3a, 0, -a]^T$, (ج) : $[2a, -7a, -17a]^T$ (د) : $[11a, -2a, -4a]^T$

١٧ - لنفرض أن كلا من رتبة مصفوفة معاملات مجموعة من ثلاث معادلات غير متجانسة في خمسة مجاهيل $AX = H$ ورتبة المصفوفة المدة لهذه المجموعة تساوى 2 ولنفرض أن الشكل القانوني للمصفوفة المدة هو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث لا يساوى كل من c_1 و c_2 مع الصفر. لنختار أولاً $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

فند $X_1 = [c_1, c_2, 0, 0, 0]^T$ حل $AX = H$ ونختار بعد ذلك $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ثم $x_4 = 1$

$x_3 = x_5 = 0$ وأخيراً $x_5 = 1$ $x_3 = x_4 = 0$ لكي نجد حلولاً أخرى X_2 و X_3 و X_4 برهن أن الحلول $5 - 2 + 1 = 4$ تكون مستقلة خطياً.

١٨ - اعتبر التركيب الخطي $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ لحل المسألة ١٧. برهن أن Y حل لـ $AX = H$ إذا كان (وإذا كان فقط) (i) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$. وإن Y هو الحل التام ، فيما إذا كانت s_1, s_2, s_3, s_4 اختيارية ومرتبطة بالعلاقة (i) للمجموعة $AX = H$.

١٩ - برهن النظرية VI. إرشاد : اتبع المسألة ١٧ وافرض أن $c_1 = c_2 = 0$

٢٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m \times p$ ورتبتها r_1 و B مصفوفة درجتها $p \times n$ ورتبتها r_2 بحيث يكون $AB = 0$ فإن $r_1 + r_2 \leq p$.

إرشاد : استفد من النظرية VI.

٢١ - باستعمال المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة 4×5 والرتبة 2 تحقق من أنه : في مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r تكون المحددات المربعة ذات الدرجة r والمكونة من أعمدة المصفوفة الجزئية المكونة من أى r صفا من المصفوفة A ، متناسبة مع المحددات من درجة r المكونة من أى مصفوفة جزئية أخرى تحوى r صفا من A .

إرشاد : نفرض أن الصفين الأولين مستقلان خطيا فيكون عندها $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j}$ ، $a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j}$ ، $(j = 1, 2, \dots, 5)$. احسب بعد ذلك المحددات ذات الدرجة الثانية.

$$\begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}.$$

٢٢ - اكتب برهان النظرية الواردة في المسألة ٢١.

٢٣ - استنتج من المسألة ٧ مايلي : إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وذات رتبة تساوى $n-1$ ، فإن العلاقات التالية بين المعاملات المرافقة تكون صحيحة :

$$\alpha_{ii}\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\alpha_{ji} \quad (\text{ب}) \quad \alpha_{ij}\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\alpha_{hj} \quad (1)$$

$$(h, i, j, k = 1, 2, \dots, n).$$

حيث :

$$B = [A \ H] \text{ من } B \text{ مكافئ صفيا لـ } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{٢٤ - برهن أن } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموعة من ست معادلات خطية في أربعة مجاهيل يكون لها خمس معادلات مستقلة خطيا وبرهن أن مجموعة من m حيث $n < m$ معادلة خطية ذات n مجهولا تحوى على الأكثر $(n+1)$ معادلة مستقلة خطيا ثم برهن أنه عندما يوجد فعلا $n+1$ معادلة مستقلة خطيا فإن المجموعة تكون غير متوافقة.

٢٥ - إذا كانت $AX = H$ مجموعة متوافقة رتبتها r . لأى مجموعة مكونة من r مجهولا يمكن الحل ؟

٢٦ - عمم نتائج المسألة ١٧ والمسألة ١٨ على m معادلة غير متجانسة في n مجهولا وافرض أن لمصفوفة العوامل والمصفوفة الممددة رتبة واحدة r وذلك لكي تبرهن على أنه إذا كانت للمصفوفة الممددة والمصفوفة العوامل للمجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، رتبة واحدة مساوية r وإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n-r+1}$ حلولا مستقلة خطيا للمجموعة ، فإن :

$$X = s_1X_1 + s_2X_2 + \dots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

$$\text{حيث } \sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1, \text{ حل تام.}$$

٢٧ - تعطي الكيات الداخلة E_1 و I_1 في شبكة كهربائية ذات أربعة أقطاب بدلالة الكيات الخارجة E_2 و I_2

بما يلي :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} E_1 &= aE_2 + bI_2 \\ I_1 &= cE_2 + dI_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

برهن أن

حل أيضا بالنسبة لـ E_2 و I_2 ، I_1 و I_2 ، I_1 و E_2 .

٢٨ - افرض أن لمجموعة المعادلات الخطية $AX = H$ حيث $H \neq 0$ والتي عددها n معادلة في n مجهول حل

وحيد . برهن أن للمجموعة $AX = K$ حل وحيد لأي متجه $K \neq 0$ له n مركبة .

$$٢٩ - \text{حل مجموعة الصور الخطية } AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

والآن اكتب حل المجموعة $AX = Y$.

٣٠ - لتكن A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة ولنفرض أن S_i حل للمجموعة $AX = E_i$ ، ($i = 1, 2, \dots, n$) .

حيث E_i متجه ذو n مركبة حيث تساوى مركبته التي رقمها i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر .

حقق المصفوفة $[S_1, S_2, \dots, S_n]$.

٣١ - لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $n > m$ ولنفرض أن S_i حل لـ $AX = E_i$ ، ($i = 1, 2, \dots, m$) .

حيث E_i متجه ذو m مركبة تساوى مركبة ذات الرقم i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر . إذا كان

$$K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$$

فبرهن أن

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + \dots + k_m S_m$$

هو حل للمجموعة $AX = K$

الفصل الحادى عشر

الفراغات الاتجاهية

سنمثل فيما يلى ، كل متجه بمتجه عمود ، مالم نذكر خلاف ذلك . وعندما تكون مركبات المتجه واضحة فإننا سنكتبه بالشكل $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. إن رمز منقول المصفوفة $(\sim)$ يشير إلى أنه يجب أن تكتب هذه العناصر فى عمود . إن مجموعة من هذه المتجهات ذات الـ n مركبة والمعروفة على F تكون مغلقة بالنسبة للجمع فيما إذا كان مجموع أى متجهين منها ، متجه من هذه المجموعة . وبالمثل تكون هذه المجموعة مغلقة بالنسبة للضرب بمقدار عددى ، فيما إذا كان حاصل ضرب أى عنصر من F بأى متجه من هذه المجموعة يعطى متجهاً من المجموعة ذاتها .

مثال ١ :

- (أ) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]$ من الفراغ العادى ذات المركبات المتساوية $(x_1 = x_2 = x_3)$ مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بعدد ، وذلك لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى عدد حقيقى k هما متجهان مركبات كل منهما متساوية أيضاً .
- (ب) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]$ من الفراغ العادى مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بعدد .

الفراغات الاتجاهية :

إن كل مجموعة من المتجهات ذات الـ n مركبة على F مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بمقدار عددى تدعى فراغاً اتجاهياً وهكذا ، إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_m$ متجهات ذات n مركبة على F فإن مجموعة كل التراكيب (التآلفات) الخطية :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_m X_m \quad (11.1)$$

حيث $(F \text{ فى } k_i)$ هي فراغ اتجاهى على F . مثال ذلك أن كلا من مجموعى المتجهات الواردة فى (أ) و (ب) من المثال ١ فراغ اتجاهى ، ومن الواضح أن كل فراغ اتجاهى من الشكل (11.1) يحوى صفر المتجهات ذات الـ n مركبة . وأن المتجه الصفري ذا الـ n مركبة بمفرده هو فراغ اتجاهى . (يسمى الفراغ (11.1) أيضاً فراغاً اتجاهياً خطياً) .

إن المجموعة الكلية $V_n(F)$ لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F تدعى فراغاً اتجاهياً من البعد n على F

الفراغ الجزئى :

نقول عن مجموعة V من المتجهات $V_n(F)$ إنها فراغ جزئى من $V_n(F)$ فيما إذا كانت V مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بمقدار عددى وهكذا فإن صفر المتجهات ذات الـ n مركبة هو فراغ جزئى من $V_n(F)$ وكذلك الحال بالنسبة إلى $V_n(F)$ ذاته . إن المجموعة (أ) الواردة فى المثال ١ هي فراغ جزئى (خط) من الفراغ العادى . عموماً إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_m$ متمية إلى $V_n(F)$ فإن فراغ جميع التراكيب الخطية (11.1) يكون فراغاً جزئياً من $V_n(F)$.

نقول عن فراغ اتجاهى V إنه مولد بالمتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ ذات الـ n مركبة فيما إذا تحقق (أ) X_i متمية إلى V (ب) كل متجه من V هو تركيب خطى (11.1) للمتجهات المفروضة . لنلاحظ أنه ليس من الضروري أن نقصر المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ على الحالة التى تكون فيها مستقلة خطياً .

مثال ٢ :

ليكن F حقل الأعداد الحقيقية R ولتكن المتجهات ذات الثلاث مركبات $X_1 = [1, 1, 1]^T$, $X_2 = [1, 2, 3]^T$, $X_3 = [3, 2, 1]^T$, $X_4 = [1, 3, 2]^T$, الواقعة في الفراغ العادى $V_3(R)$. إن كل متجه $[a, b, c]^T$ من S يمكن التعبير عنه كـ يلى :

$$y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن مجموعة المعادلات الناتجة

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned} \quad (i)$$

متوافقة وتكون المتجهات X_1, X_2, X_3, X_4 مولدة لـ S

إن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطياً فهما يولدان فراغاً جزئياً (المستوى π) من S يحوى كل متجه من الشكل $hX_1 + kX_2$ حيث h و k عددان حقيقيان .

يولد المتجه X_4 فراغاً جزئياً (الخط L) من S وهو يحوى كل متجه من الشكل hX_4 حيث h عدد حقيقى .
أنظر المسألة ١

الأساس والبعد :

نقول (بعد) فراغ إتجاهى V أكبر عدد من المتجهات (مستقلة خطياً) الواقعة في V أو بشكل مكافئ ، أصغر عدد من المتجهات المستقلة خطياً يكوّن لتوليد V . في علم الهندسة الأولية ، يعتبر الفراغ العادى فراغاً ذا ثلاثة أبعاد للنقط (a, b, c) . وسنعتبره هنا كفراغ ذو ثلاثة أبعاد للمتجهات $[a, b, c]$. إن المستوى π الوارد في المثال ٢ ذو بعدين وإن الخط L ذو بعد واحد .
يرمز لفراغ إتجاهى بعده r ومكون من n متجهها بالشكل $V_n^r(F)$ وعندما تكون $r = n$ فن المقبول كتابة $V_n(F)$ بدلا من $V_n^n(F)$

تدعى أى مجموعة مكونة من r متجهها مستقلة خطياً من $V_n^r(F)$ أساساً لهذا الفراغ . ويكون عندها . كل متجه من هذا الفراغ تركيباً خطياً وحيداً لمتجهات الأساس . إن لكل قواعد الفراغ $V_n^r(F)$ عدد واحد من المتجهات وإن أى r متجهها مستقلة خطياً تصلح أساساً لهذا الفراغ .

مثال ٣ :

إن المتجهات X_1, X_2, X_3 الواردة في المثال ٢ تولد S لأنه يمكن التعبير عن أى متجه $[a, b, c]^T$ من S بالشكل :

$$y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

إن مجموعة المعادلات الناتجة ،

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$$
 على التقيض من (i) حل وحيد . إن المتجهات X_1, X_2, X_3 هي أساس الفراغ S . إن المتجهات X_1, X_2, X_4 ليست أساساً لـ S (برهن ذلك) . إنها تولد الفراغ الجزئى π من المثال ٢ الذى أساسه المجموعة X_1, X_2 .

إن النظريات $I - V$ الواردة في الفصل التاسع قابلة للتطبيق هنا طبعاً . على وجه الخصوص فإن النظرية IV يمكن إعادة صياغتها على النحو التالى :

I. إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_m$ هى مجموعة من المتجهات ذات n مركبة على F وإذا كانت r رتبة المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ لمركبات هذه المتجهات، فإنه يمكن الاختيار ، من هذه المتجهات ، r متجها فقط مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n'(F)$ الذى يحوى الـ $(m-r)$ متجها الباقية .

أنظر المسألتين ٢ - ٣

إن لما يلى من نظريات أهمية خاصة :

II. إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_m$ هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً من $V_n(F)$ وإذا كانت $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$ هى أى $(n-m)$ متجها من $V_n(F)$ أيضاً والى تكون مع $X_1, X_2, \dots, X_m$ مجموعة مستقلة خطياً فإن المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_n$ تكون أساس الفراغ $V_n(F)$.

أنظر المسألة ٤

III. إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_m$ هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F فإن الـ p متجها

$$Y_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} X_i \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

تكون مرتبطة خطياً فيما إذا كان $m < p$ ، أو ، عندما يكون $m \geq p$ إذا كانت رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ هى r حيث $r > p$

IV. إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n$ ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F ، فإن المتجهات $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ تكون مستقلة خطياً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $[a_{ij}]$ غير شاذة

الفراغات الجزئية المتطابقة :

إذا كان $V_n^I(F)$ و $V_n^J(F)$ فراغين جزئيين من $V_n(F)$ فإنهما يكونان متطابقين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) كل منهما من $V_n^I(F)$ هو متجه من $V_n^J(F)$ والعكس أى إذا كان وإذا كان فقط كل واحد منهما فراغاً جزئياً من الآخر .

أنظر المسألة ٥

مجموع وتقاطع فراغين :

ليكن $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ فراغين إتجاهيين نعى بمجموع هذين الفراغين مجموعة كل المتجهات $X + Y$ حيث X من $V_n^h(F)$ و Y من $V_n^k(F)$ ومن الواضح أن هذا فراغ إتجاهى نسميه فراغ المجموع ونرمز له بالرمز $V_n^{h+k}(F)$. إن البعد s لفراغ مجموع فراغين إتجاهيين لايزيد على مجموع بعدى هذين الفراغين .

ونعى بتقاطع فراغين إتجاهيين كل المتجهات المشتركة بين هذين الفراغين إذا كان X متجها مشتركاً بين هذين الفراغين فإن $aX + bY$ مشترك بينهما أيضاً وكذلك إذا كان X و Y متجهين مشتركين بين الفراغين المذكورين فإن $aX + bY$ واقع فى تقاطعهما وهذا يؤدي إلى أن تقاطع فراغين إتجاهيين هو فراغ إتجاهى ندعوه فراغ التقاطع ونرمز له بالرمز $V_n^t(F)$. إن بعد فراغ التقاطع لايزيد عن أصغر بعدى الفراغين المفروضين

V. إذا كان لفراغين إتجاهيين $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع $V_n^s(F)$ وتقاطع $V_n^t(F)$ فإن $h + k = s + t$

مثال ٤ :

ليكن الفراغ الجزئى π_1 المولد بالمتجهين X_1 و X_2 من المثال ٢ والفراغ الجزئى π_2 المولد بالمتجهين X_3 و X_4 . أن بما π_1 و π_2 غير متطابقين (برهن ذلك) وبما أن هذه المتجهات الأربعة تولد S فإن فراغ مجموع π_1 و π_2 هو S .

والآن بما أن $4X_1 - X_2 = X_4$ فإن X_4 ينتمى فى الوقت ذاته - إلى π_1 و π_2 إن الفراغ الجزئى (الخط L) المولد بـ X_4 هو إذن تقاطع الفراغين π_1 و π_2 . يلاحظ أن بعد كل من π_1 و π_2 هو 2 وأن بعد S يساوى 3 بينما بعد L يساوى الواحد . وهذا يتفق مع النظرية V .

أنظر المسائل ٦ - ٨

انعدامية (صفرية) مصفوفة :

تكون حلول مجموعة متجانسة من المعادلات الخطية $AX = 0$ فراغاً إتجاهياً نسميه الفراغ الصفرى للمصفوفة A . يسمى بعد هذا الفراغ والذي نرسم له بالرمز N_A بصفرية A (انعدامية A) .

وإذا تذكرنا النظرية VI من الفصل العاشر فإننا نجد :

VI . إذا كانت N_A هى صفرية A فإن المجموعة $AX = 0$ يكون لها N_A حلاً مستقلة خطياً $X_1, X_2, \dots, X_{N_A}$ وبحيث يكون كل حل من حلول المجموعة $AX = 0$ هو تركيب خطى لهذه الحلول وكل تركيب خطى لهذه الحلول حل للمجموعة . إن أساس الفراغ الصفرى لـ A هو أى مجموعة من N_A من الحلول المستقلة خطياً لـ $AX = 0$.

أنظر المسألة ٩

VII . لأى مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r_A وصفريتها N_A تتحقق العلاقة :

$$r_A + N_A = n \quad (11.2)$$

قوانين سيلفستر للانعدامية :

إذا كانت A و B مصفوفتين من درجة n وكانت رتبتهما على الترتيب r_A و r_B فإن رتبة وانعدامية حاصل ضربهما AB تحقق المتباينات

$$r_{AB} \geq r_A + r_B - n$$

$$N_{AB} > N_A, \quad N_{AB} > N_B \quad (11.3)$$

أنظر المسألة ١٠

$$N_{AB} \leq N_A + N_B$$

الاساس والاحداثيات :

تسمى المتجهات ذات الـ n مركبة :

$$E_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]', \quad E_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]', \quad \dots, \quad E_n = [0, 0, 0, \dots, 1]'$$

متجهات أولية أو متجهات وحدة معرفة على F . يسمى المتجه الأولى E_j الذى مركبته ذات الرقم j تساوى الواحد ، المتجه الأولى ذا الرقم j ، تؤلف المتجهات الأولية $E_1, E_2, \dots, E_n$ أساساً هامة للفراغ $V_n(F)$.

يمكن التعبير عن كل متجه $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ من $V_n(F)$ بشكل وحيد ، بالمجموع

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n$$

المتجهات الأولية . فى هذه الحالة تسمى المركبات $x_1, x_2, \dots, x_n$ للمتجه X احداثيات X بالنسبة للأساس E . سنعتبر بعد الآن ، إلا إذا أشير بغير ذلك ، أن كل متجه X معطى منسوباً لهذا الأساس .

نفرض أن $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ أساس آخر لـ $V_n(F)$. توجد مقادير عددية وحيدة $a_1, a_2, \dots, a_n$ من F بحيث يكون :

$$X = \sum_{i=1}^n a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \dots + a_n Z_n$$

تسمى المقادير العددية $a_1, a_2, \dots, a_n$ احداثيات المتجه X بالنسبة للأساس Z . إذا كتبنا $X_Z = [a_1, a_2, \dots, a_n]'$ فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] X_Z = Z \cdot X_Z \quad (11.4)$$

حيث Z هي مصفوفة أعمدتها هي متجهات الأساس $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

مثال ٥ :

إذا كانت $Z_1 = [2, -1, 3]'$, $Z_2 = [1, 2, -1]'$, $Z_3 = [1, -1, -1]'$ وكان $V_3(F)$ أسس $V_3(F)$ هو متجهها من $V_3(F)$ منسوباً إلى هذه القاعدة ، فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3] X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [7, 0, -2]'$$

منسوبة للأساس E .

أنظر المسألة ١١

افرض أن $W_1, W_2, \dots, W_n$ أسس آخر لـ $V_n(F)$ وافرض أن $X_W = [b_1, b_2, \dots, b_n]'$ بحيث يكون :

$$X = [W_1, W_2, \dots, W_n] X_W = W \cdot X_W \quad (11.5)$$

نستنتج من (11.4) و (11.5) أن $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$

$$X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = P X_Z \quad (11.6) \text{ و}$$

حيث $P = W^{-1}Z$ ويكون :

VIII إذا كانت X_W و X_Z احداثيات متجه من الفراغ $V_n(F)$ بالنسبة لأساسين لهذا الفراغ فإنه يوجد مصفوفة

غير شاذة P معينة بشكل وحيد بهذين الأساسين ومعطية بـ (١١-٦) بحيث يكون $X_W = P X_Z$

انظر المسألة ١٢

مسائل محلولة

١ - إن مجموعة كل المتجهات $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ حيث $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ هي فراغ جزئي V من $V_4(F)$ لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى مقدار عددي يكون متجهها مجموع مركباته يساوى الصفر ، أى أنها متجهان في هذه المجموعة .

$$X_1 = [1, 2, 2, 1]', X_2 = [3, 4, 4, 3]'$$

٢ - بما أن رتبة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوى ٢ فإن المتجهات

$X_3 = [1, 0, 0, 1]'$ مرتبطة خطأً وتولد فراغاً إتجاهياً $V_4^2(F)$ أى أن متجهين من المتجهات المفروضة مستقلة خطأً وهذا يعنى أنه يمكننا أن نأخذ X_1, X_2 و X_3 أو X_2 و X_3 ، كقاعدة للفراغ الإتجاهي $V_4^2(F)$.

$$X_2 = [4, 3, 2, -1]', X_1 = [1, 1, 1, 0]'$$

٣ - بما أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

من الرتبة الثانية فإن المتجهات

$$X_4 = [4, 2, 0, -2]'$$
 و $X_3 = [2, 1, 0, -1]'$ مرتبطة خطأً وأنها تولد فراغاً $V_4^2(F)$.

يمكننا أن نأخذ كأساس لهذا الفراغ ، أى زوج من المتجهات الأربعة معاً الزوج X_3 و X_4 .

٤ - أن المتجهات X_3 و X_2 و X_1 الواردة في المسألة ٢ تقع في $V_4(F)$. أوجد أساساً لهذا الفراغ .

يمكننا أن نأخذ أساساً لهذا الفراغ المتجهات X_2, X_1 ، $X_4 = [1, 0, 0, 0]'$ و $X_5 = [0, 1, 0, 0]'$ أو X_2, X_1 ، $X_7 = [1, 3, 6, 8]'$ وذلك لأن المصفوفتين $|X_1, X_2, X_4, X_5|$ و $|X_1, X_2, X_6, X_7|$ من الرتبة الرابعة .

٥ - لتكن $X_1 = [1, 2, 1]'$ ، $X_2 = [1, 2, 3]'$ ، $X_3 = [3, 6, 5]'$ ، $Y_1 = [0, 0, 1]'$ ، $Y_2 = [1, 2, 5]'$ من $V_3(F)$. برهن أن الفراغ المولد بالمتجهات X_1, X_2, X_3 والفراغ المولد بالمتجهين Y_1 و Y_2 متطابقان .

لتلاحظ أولاً أن X_1 و X_2 مستقلان خطياً بينما $X_3 = 2X_1 + X_2$ وهذا يعنى أن X_3 تولد فراغاً اتجاهياً بعدد 2 وليكن $V_3^2(F)$. وأن متجهين مستقلين خطياً يولدان فراغاً اتجاهياً بعده 2 وليكن $V_3^2(F)$.

بعد ذلك $aY_1 + bY_2$ هو متجه أى متجه $aY_1 + bY_2$ ، وهكذا نجد أن أى متجه $aY_1 + bY_2$ هو متجه $aY_1 + bY_2$ ، $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$ ، $Y_2 = 2X_2 - X_1$ ، $X_1 = Y_2 - 4Y_1$ ، $X_2 = Y_2 - 2Y_1$. من $V_3^2(F)$ هو متجه $(\frac{1}{2}a + 2b)X_2 - (\frac{1}{2}a + b)X_1$ ونجد بالطريقة ذاتها أن أى متجه $cX_1 + dX_2$ من $V_3^2(F)$ هو متجه $(c+d)Y_2 - (4c+2d)Y_1$ وهذا يؤدى إلى أن الفراغين متطابقين .

٦ - (أ) إذا كان $X = [x_1, x_2, x_3]'$ واقعاً فى $V_3^2(F)$ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, -1, 1]'$ و $X_2 = [3, 4, -2]'$ فإن

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 .$$

(ب) إذا كان $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ واقعاً فى الفراغ $V_4^2(F)$ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, 1, 2, 3]'$ و $X_2 = [1, 0, -2, 1]'$ فإن

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{فإن} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 , \quad \text{من الرتبة الثانية. بما أن} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \quad \text{فإن ذلك يتطلب}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 . \quad \text{و}$$

إن هذه المسائل توضح أن كل فراغ اتجاهى $V_n^k(F)$ يمكن تعريفه كجموعة كل الحلول على F لمجموعة مكونة من $(n-k)$ معادلة متجانسة ومستقلة خطياً معرفة على F وذات n مجهولاً .

٧ - برهن أنه إذا كان $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع وتقاطع الفراغين الاتجاهيين $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ ، $h+k = s+t$ ، $s=k$ ، $t=h$.

لنفرض أن $t=h$ فينتج عن ذلك أن $V_n^h(F)$ فراغ جزئى من $V_n^k(F)$ وأن مجموعهما هو $V_n^k(F)$ نفسه ويكون عندها

$s=k$ ، $t=h$ وهذا يؤدى إلى $s+t=h+k$ ويمكن للقارىء أن يبرهن على أن هذا يكون صحيحاً أيضاً إذا كان $t=k$.

لنفرض ، بعد ذلك أن $h > t$ و $k > t$ وليكن $X_1, X_2, \dots, X_t$ مولدة لـ $V_n^t(F)$ من النظرية ١٠ . يوجد متجهات

$Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_h$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_t, Y_{t+1}, \dots, Y_h$ الفراغ $V_n^h(F)$ كما يوجد متجهات $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_k$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_t, Z_{t+1}, \dots, Z_k$ الفراغ $V_n^k(F)$.

لنفرض الآن أنه يوجد أعداد a وأعداد h بحيث يكون .

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^k b_i Z_i = 0 \quad (11.4)$$

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^k -b_i Z_i \quad \text{أو}$$

أن المتجه على الشمال يتبع $V_n^h(F)$ ، وبسبب الطرف الأيمن منها ، فإنه يتبع أيضاً $V_n^k(F)$. فهو إذن يتبع $V_n^l(F)$. ولكن $a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_h = 0$. فينتج عن ذلك أن $X_1, X_2, \dots, X_t$ تولد الفراغ $V_n^l(F)$.

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h b_i Z_i = 0 \quad (11.4) \text{ والآن من}$$

ولكن لا X 's ولا Z 's مستقلة خطياً فيكون إذن $a_1 = a_2 = \dots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \dots = b_h = 0$. وهكذا تكون المتجهات Z 's و Y 's و X 's مجموعة مستقلة خطياً ومولدة للفراغ $V_n^s(F)$ أى أن $s = h + k - t$. قد تحققت .

٨ - ليكن الفراغ الاتجاهي $V_3^2(F)$ الذى يكون $X_1 = [1, 2, 3]^t$ و $X_2 = [1, 1, 1]^t$ أساساً له والفراغ الاتجاهي $V_3^2(F)$ الذى يكون $Y_1 = [3, 1, 2]^t$ و $Y_2 = [1, 0, 1]^t$ أساساً له . بما أن مصفوفة المركبات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

من الرتبة الثالثة فإن فراغ المجموع هو $V_3(F)$. يمكننا أن نأخذ X_1 و X_2 و Y_1 كأساس له .

ينتج من $h + k = s + t$ أن فراغ التقاطع يكون $V_3^1(F)$. لى نوجد أساساً نساوى بين تركيبتين خطيتين للمتجهات منسوبة إلى أساس كل من $V_3^2(F)$ و $V_3^2(F)$ بالشكل التالى :

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

$$\text{لنأخذ } d = 1 \text{ للتيسير ، ولنحل مجموعة المعادلات } \begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases} \text{ فنجد } a = 1/3, b = -4/3, c = -2/3$$

أى أن $aX_1 + bX_2 = [-1, -2/3, -1/3]^t$ قاعدة لفراغ التقاطع ونجد أيضاً أن المتجه $[3, 2, 1]^t$ قاعدة للفراغ المذكور .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad ٩ - \text{أوجد أساس الفراغ المعلوم للمصفوفة}$$

اعتبر مجموعة المعادلات $AX = 0$ التى يمكن اختصارها للمجموعة $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ إن أساس الفراغ الصفري للمصفوفة A تتكون من الحلين المستقلين خطياً لهذه المجموعة وهما : $[1, 2, 0, -1]^t$ و $[2, 1, -1, 0]^t$.

$$١٠ - \text{برهن أن } r_4 \geq r_2 + r_3 - n$$

نفرض أولاً ، أن A من الشكل $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فتكون r_A صفراً الأول من AB هى r_A صفراً الأول من B بينما تكون الصفوف الباقية أصفاراً . من المسألة ١٠ من الفصل الخامس تكون رتبة AB محققة للعلاقة $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.
نفرض ، بعد ذلك ، أن A ليست من الشكل السابق الذكر فيوجد إذن مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون PAQ ذلك الشكل بينما تكون رتبة $PAQB$ مساوية على التام رتبة AB (لماذا ؟)

$$B = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ يمكن للقارئ أن يعتبر الحالة الخاصة التى يكون فيها}$$

١١ - ليكن المتجه $X = [1, 2, 1]^t$ منسوباً للأساس E . أوجد مركباته منسوباً للأساس الجديد ، $Z_1 = [1, 1, 0]^t$ ،

$$Z_2 = [1, 0, 1]^t \text{ و } Z_3 = [1, 1, 1]^t$$

الحل (١) لنكتب :

$$a = 0, b = -1, \text{ ونجد أخيراً } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + c = 2 \\ b + c = 1 \end{cases} \text{ فينتج } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ أى } X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3. \quad (i)$$

$c = 2$ ويكون $X_Z = [0, -1, 2]^T$ منسوباً للأساس Z

الحل (ب) بإعادة كتابة (i) بالشكل $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$ فيكون :

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1, 2]^T$$

١٢ - افرض X_Z و X_W كاحداثيات المتجه X بالنسبة للأساسين $Z_1 = [1, 1, 0]^T, Z_2 = [1, 0, 1]^T, Z_3 = [1, 1, 1]^T$

و $X_W = PX_Z$ بحيث يكون $W_1 = [1, 1, 2]^T, W_2 = [2, 2, 1]^T, W_3 = [1, 2, 2]^T$ و

$$W^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ بما أن}$$

$$P = W^{-1}Z = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ فإنه يكون (١١-٦)}$$

مسائل إضافية

١٣ - ليكن $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ متجهاً اختيارياً من $V_4(R)$ حيث R ترمز لحقل الأعداد الحقيقية بين أى من المجموعات التالية فراغات جزئية من $V_4(R)$ ؟

- جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = x_2, x_3 = 2x_4$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_4 = 0$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = 1$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها x_1, x_2, x_3, x_4 أعداد صحيحة.
- الجواب : كلها عدا (د) و (هـ) فراغات جزئية.

١٤ - برهن أن $[1, 1, 1, 1]^T$ و $[2, 3, 3, 2]^T$ أساس $V_4(F)$ الوارد في المسألة ٢

١٥ - عين بعد الفراغ الإتجاهي المولد بكل واحدة من مجموعات المتجهات التالية ثم اختر أساساً لكل منها

$$\begin{array}{lll} \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1, 1, 0, -1 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 3, 4, 5, 6 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 5, 4, 3, 2, 1 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2, 3, 3, 3 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1, 1 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 1, 0, -1, -2 \end{bmatrix}^T & & \end{array} \quad (أ) \quad (ب) \quad (١)$$

الجواب : (أ) ، (ب) ، (ج) $r = 2$

١٦ - برهن أن المتجهين $X_1 = [1, -1, 1]'$ و $X_2 = [3, 4, -2]'$ يولدان الفراغ ذاته الذي يولده المتجهان $Y_1 = [9, 5, -1]'$ و $Y_2 = [-17, -11, 3]'$

(ب) برهن أن المتجهين $X_1 = [1, -1, 1]'$ و $X_2 = [3, 4, -2]'$ لا يولدان الفراغ ذاته الذي يولده المتجهان $Y_1 = [-2, 2, -2]'$ و $Y_2 = [4, 3, 1]'$

١٧ - برهن أنه إذا كانت مجموعة المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_k$ أساساً للفراغ $V_n^k(F)$ فإنه يمكن كتابة أى متجه

آخر Y من هذا الفراغ ، بشكل وحيد ، كتركيب خطى لـ $X_1, X_2, \dots, X_k$

$$Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i = \sum_{i=1}^k b_i X_i \quad \text{إرشاد : افترض أن}$$

١٨ - لتكن المصفوفة ذات الدرجة 4×4 متجهات أعمدها هي متجهات أساس الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٢ أساس

الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٣ . برهن أن رتبة هذه المصفوفة تساوى 4 . وهكذا يكون $V_4(R)$ فراغ مجموع الفراغين المذكورين و $V_4^0(R)$ ، فراغ الصفر ، هو فراغ تقاطع هذين الفراغين .

١٩ - تتبع البرهان المعطى فى المسألة ٨ فى الفصل العاشر لبرهان النظرية III .

٢٠ - برهن على أن بعد الفراغ المولد بـ $[1, 0, 0, 1, 1]'$ ، $[0, 0, 1, 0, 0]'$ ، $[1, 0, 1, 0, 0]'$ ، $[0, 0, 0, 0, 1]'$ ، $[1, 0, 0, 0, 0]'$ هو البعد الرابع وأن بعد الفراغ المولد بـ $[0, 1, 1, 1, 0]'$ ، $[1, 0, -1, 0, 1]'$ ، $[0, 1, -2, 1, 0]'$ ، $[0, 1, 0, 1, 0]'$ ، $[1, 0, 0, 0, 1]'$ هو البعد الثالث . برهن أن $[1, 0, 1, 0, 1]'$ و $[1, 0, 2, 0, 1]'$ يؤلفان أساساً لتقاطع هذين الفراغين .

٢١ - أوجد ، بالنسبة للأساس $Z_1 = [1, 2, 2]'$ ، $Z_2 = [2, 2, 1]'$ ، $Z_3 = [1, 1, 2]'$ ، احداثيات كل من المتجهات :

$$[1, 1, 0] \quad (أ) \quad [1, 0, 1] \quad (ب) \quad [1, 1, 1] \quad (ج)$$

الجواب : (أ) $[-1/3, 2/3, 0]'$ ، (ب) $[4/3, 1/3, -1]'$ ، (ج) $[1/3, 1/3, 0]'$

٢٢ - أوجد بالنسبة للأساس $Z_1 = [3, 2, 1]'$ ، $Z_2 = [1, 1, 1]'$ ، $Z_3 = [0, 1, 0]'$ احداثيات المتجهات

$$[2, -1, 0] \quad (أ) \quad [1, -3, 5] \quad (ب) \quad [0, 0, 1] \quad (ج)$$

الجواب : (أ) $[-2, -1, 1]'$ ، (ب) $[-6, 7, -2]'$ ، (ج) $[-1/2, 3/2, -1/2]'$

٢٣ - لتكن X_w و X_z مركبات متجه X بالنسبة لزوج الأساسين المعطيين أوجد المصفوفة P المحققة للعلاقة : $X_w = P X_z$

$$\begin{aligned} Z_1 = [1, 0, 0]', Z_2 = [1, 0, 1]', Z_3 = [1, 1, 1]' & \quad (أ) \\ Z_1 = [0, 1, 0]', Z_2 = [1, 1, 0]', Z_3 = [1, 2, 3]' & \quad (ب) \\ W_1 = [0, 1, 0]', W_2 = [1, 2, 3]', W_3 = [1, -1, 1]' & \quad (ج) \\ W_1 = [1, 1, 0]', W_2 = [1, 1, 1]', W_3 = [1, 2, 1]' & \quad (د) \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب :}$$

٢٤ - أثبت أنه إذا كان P_j حلاً لمجموعة $AX = E_j$ ، $(j = 1, 2, \dots, n)$ ، فإن $\sum_{j=1}^n h_j P_j$ حل للمجموعة حيث

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_n]'$$

$$H = h_1 E_1 + h_2 E_2 + \dots + h_n E_n \quad \text{إرشاد :}$$

٢٥ - يسمى الفراغ الاتجاهى المؤلف من كل التراكيب الخطية لمتجهات أعمدة مصفوفة A ، فراغ الأعمدة لـ A ويسمى

الفراغ المعروف بكل التراكيب الخطية لصفوف المصفوفة A فراغ الصفوف لـ A برهن أن أعمدة AB واقعة فى فراغ لأعمدة لـ A وأن صفوف AB واقعة فى فراغ الصفوف لـ A .

٢٦ - برهن أن المجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، تكون متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) المتجه H متتميا إلى فراغ الأعمدة لـ A .

$$٢٧ - \text{أوجد أساس الفراغ المعلوم للمصفوفتين (١) ، (ب) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{الجواب (١) } [1, 1, -1, -1] \quad \text{(ب) } [1, 1, -1, -1] \cdot [1, 2, -1, -2]$$

$$٢٨ - \text{برهن أن : (١) } N_{AB} \geq N_A \cdot \hat{N}_{AB} \geq N_B \quad \text{(ب) } N_{AB} \leq N_A + N_B$$

$$\text{الإرشاد : (١) } N_{AB} = n - r_{AB} \text{ و } r_A \geq r_{AB} \text{ و } r_B$$

$$\text{(ب) اعتبر } (n - r_{AB}) \text{ و طبق النظرية الواردة في المسألة ١٠}$$

٢٩ - استنتج طريقة لحل المسألة ١٦ مستملا فقط تحويلات أعمدة على $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ ثم أعد حل المسألة رقم ٥ .

الفصل الثاني عشر

التحويلات الخطية

تعريف :

ليكن $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$, $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$ متجهين من $V_n(F)$ حيث نسبت احداثياتها لنفس الأساس لهذا الفراغ ولنفرض أن احداثيات X واحداثيات Y مرتبطة مع بعضها بعضا بالعلاقة :

[illegible]

أو بشكل مختصر

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$$

حيث $A = [a_{ij}]$ معرف على F . إن (12.1) تمثل تحويلا T يحول بصورة عامة أى متجه X من $V_n(F)$ إلى (عادة) متجه آخر Y من الفراغ نفسه يدعى المتجه الثانى خيالا للأول.

وإذا حولت (12.1) المتجه X_1 إلى Y_2 و X_2 إلى Y_2 فإنها :

(١) تحول kX_2 إلى kY_1 مهما كان المقدار العددي k

(ب) تحول $aX_1 + bX_2$ إلى $aY_1 + bY_2$ مهما كان المقداران العدديان a و b لهذا السبب سمي هذا التحويل خطياً .

مثال ۱ :

اعتبر التحويل الخطي $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$ في الفراغ المادي $V_3(R)$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix} = [12, 27, 17]'. \quad \text{هو} = [2, 0, 5]' \text{ إن خيال (1)}$$

(ب) نحصل على المتجه X الذي يخياله $Y = [2, 0, 5]$ بحل المجموعة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{bmatrix}, \quad X = [13/5, 11/5, -7/5]'$$

نظريات أساسية :

إذا فرضنا في (12.1) أن $X = [1, 0, \dots, 0]' = E_1$ فإن $Y = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]'$ وبصورة عامة إذا كان $X = E_i$ فإن $Y = [a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}]'$ أى :

I - يتعين التحويل الخطى (12.1) تعييناً وحيداً عندما نعرف أخيلة قاعدة الفراغ الإتجاهى الذى عرف عليه هذا التحويل . أن أعمدة المصفوفة A هى على الترتيب أحداثيات أخيلة هذه المتجهات .

انظر المسألة ١

يقال عن التحويل الخطى (12.1) إنه غير شاذ فيما إذا كانت خيالات المتجهات المتميزة X_i هى متجهات مختلفة متميزة Y_i وفى الحالة المماكسة نصف هذا التحويل بأنه شاذ .

II - يكون التحويل الخطى (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A ، مصفوفة التحويل الخطى غير شاذة .

انظر المسألة ٢

III - يحول التحويل الخطى غير الشاذ مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطياً إلى مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطياً .

انظر المسألة ٣

ينتج عن النظرية III مايل :

IV - بتطبيق التحويل الغير شاذ (12.1) فإن خيال فراغ $V_n^k(F)$ يكون فراغاً إتجاهياً $V_n^k(F)$ أى أن بعد الفراغ الإتجاهى قد حفظ . بصورة خاصة إن التحويل الخطى لـ $V_n(F)$ هو تقابل لهذا الفراغ مع نفسه . عندما تكون A غير شاذة ، فإن عكس (12.1)

$$X = A^{-1}Y$$

يحول المتجهات $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ التى تكون مركباتها هى أعمدة A إلى متجهات أساس الفراغ الإتجاهى . وإن هذا التحويل هو تحويل خطى أيضاً .

V - إن من الممكن إيجاد تحويل خطى غير شاذ يحول مجموعة المتجهات الأولية E_i للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ إلى أى مجموعة مكونة من n متجهاً ذا n مركبة مستقلة خطياً والعكس صحيح .

VI - إذا حول $Y = AX$ متجهاً X إلى متجه Y وإذا حول $Z = BY$ المتجه Y إلى Z وإذا حول $W = CZ$ فإن $Z = BY = (BA)X$ يحول X إلى Z وإن $W = (CBA)X$ يحول X إلى W .

VII - إذا أعطيت مجموعتان تتكون كل واحدة منها من n متجهاً ذات n مركبة مستقلة خطياً ، فإنه يوجد تحويل خطى غير شاذ يحول متجهات واحدة منها إلى متجهات أخرى .

تغيير الأساس :

لنفرض أن $Y_Z = AX_Z$ تحويل خطى للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ منسوباً للأساس Z . ولنفرض أنه قد تغير الأساس ولنفرض أن X_W و Y_W تمثل أحداثيات X_Z و Y_Z فى الأساس الجديد . استناداً إلى النظرية VIII من الفصل ١١ ، يوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $X_W = PX_Z$ و $Y_W = PY_Z$ أو يوضع $P^{-1}Q$ بحيث يكون

$$Y_Z = Q Y_W \text{ و } X_Z = Q X_W$$

$$Y_W = Q^{-1}Y_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = BX_W \text{ فإن}$$

$$B = Q^{-1}AQ \text{ حيث}$$

$$(12.2)$$

نقول عن مصفوفتي A و B أنهما متشابهتان فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة Q تحقق العلاقة $B = Q^{-1} A Q$ وبذلك تكون قد برهننا النظرية :

VIII إذا كان $Y_Z = AX_Z$ تحويلا خطيا لـ $V_n(F)$ بالنسبة لأساس معين (الأساس Z) وإذا كان $Y_W = BX_W$ التحويل الخطي ذاته بالنسبة لأساس آخر (الأساس W) فإن A و B تكونان متشابهتين .

ملاحظة :

بما أن $Q = P^{-1}$ فإنه من الممكن كتابة (12.2) بالشكل $B = PAP^{-1}$. سنقدم فيما بعد دراسة للمصفوفات المتشابهة وسنفضل كتابة $B = R^{-1}AR$ على الكتابة $B = SAS^{-1}$ وذلك لمبررات غير إلزامية .

مثال ٢ :

$$Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X \quad \text{ليكن} \quad \text{تحويل خطي بالنسبة للأساس } E \quad \text{ولنفرض أن}$$

$X =$ فأوجد احداثيات خياله بالنسبة للأساس W . (ب) أوجد التحويل الخطي $Y_W = BX_W$ المناظر للتحويل الخطي $Y = AX$. (ج) استخدم نتائج (ب) لإيجاد الخيال Y_W للمتجه $X_W = [1, 3, 3]^T$

$$W^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{اكتب} \quad W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ثم استنتج}$$

(أ) إن للمتجه $X = [3, 0, 2]^T$ بالنسبة للأساس W الاحداثيات : $X_W = W^{-1}X = [1, 1, 1]^T$ وإن خيال $Y_W = W^{-1}Y = [14/3, 20/9, 19/9]^T$ بالشكل $Y = AX = [9, 5, 7]^T$ الذي يكتب بالنسبة للأساس W

$$Y_W = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_W = BX_W = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_W \quad (\text{ب})$$

$$Y_W = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = [6, 2, 7]^T \quad (\text{ج})$$

أنظر المسألة ٥ .

مسائل محلولة

١ - (أ) عين التحويل الخطي $Y = AX$ الذي يحول E_1 إلى E_2 ، $Y_1 = [1, 2, 3]^T$ إلى E_3 و $Y_3 = [2, 1, 3]^T$

(ب) أوجد أوعية المتجهات $X_1 = [1, 1, 1]^T$ ، $X_2 = [3, -1, 4]^T$ و $X_3 = [4, 0, 5]^T$.

(ج) برهن أن X_1 و X_2 مستقلان خطيا وأن خيالهما أيضاً مستقلان خطيا .

(د) برهن أن X_1 ، X_2 و X_3 مرتبطة خطياً وأن أخیلتها أيضاً مرتبطة خطياً .

(١) من النظرية ١ يكون $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$ وتكتب معادلة التحويل الخطي بالشكل $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

(ب) إن خیال $X_1 = [1, 1, 1]'$ هو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6, 4, 8]'$ وخیال X_2 هو $Y_2 = [8, 9, 19]'$ وخیال X_3 هو $Y_3 = [14, 13, 27]'$

(ج) إن رتبة المصفوفة $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ تساوى 2 وكذلك رتبة المصفوفة $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$ تساوى 2

إذن المتجهان X_1 و X_2 مستقلان خطياً وكذلك يكون خیالاهما مستقلين خطياً
(د) علينا أن نقارن بين رتبتي المصفوفتين $[X_1, X_2, X_3]$ و $[Y_1, Y_2, Y_3]$ وبما أن $Y_3 = Y_1 + Y_2$ و $X_3 = X_1 + X_2$ فإن كلا من المجموعتين مرتبطة خطياً .

٢ - برهن أنه يكون التحويل الخطي (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A غير شاذة .
لنفرض أن A غير شاذة وأن تحويل $X_1 \rightarrow X_2$ هما $Y = AX_1 = AX_2$ فيكون $Y = A(X_1 - X_2) = 0$ ويكون لمجموعة المعادلات المتجانسة $AX = 0$ حل غير تافه هو $X = X_1 - X_2$ وهكذا يمكن فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $|A| = 0$. وهذا يخالف لما فرضناه من أن A مصفوفة غير شاذة .

٣ - برهن أن تحويلاً خطياً غير شاذ يحول مجموعة متجهات مستقلة خطياً إلى مجموعة متجهات مستقلة خطياً .
لنفرض العكس هو أن الأخیلة $Y_i = AX_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, p)$ لمجموعة المتجهات المستقلة خطياً $X_1, X_2, \dots, X_p$ هي مجموعة مرتبطة خطياً وهذا يعنى وجود مقادير عددية $s_1, s_2, \dots, s_p$ ليست كلها أصفاراً بحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^p s_i Y_i = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 + \dots + s_p Y_p = 0$$

أو

$$\sum_{i=1}^p s_i (AX_i) = A(s_1 X_1 + s_2 X_2 + \dots + s_p X_p) = 0$$

بما أن A غير شاذة فإن $s_1 X_1 + s_2 X_2 + \dots + s_p X_p = 0$. ولكن هذا يناقض لما فرضناه من كون X_i مستقلة خطياً وعلى ذلك فإن Y_i مستقلة خطياً

٤ - إذا علمت أن تحويلاً خطياً $Y = AX$ يحول المتجه $X_1 = [1, 0, 1]'$ إلى $[2, 3, -1]'$ والمتجه $X_2 = [1, 1, 1]'$ إلى $[3, 0, -2]'$ والمتجه $X_3 = [1, 2, -1]'$ إلى $[-2, 7, -1]'$ فأوجد أخیلة المتجهات E_1, E_2, E_3 واكتب معادلات هذا التحويل .

إذا فرضنا $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$ فإننا نجد $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ ومنه $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$ أى أن

$E_1 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$ وخیاله هو $[1, 2, -2]'$ و $E_2 = [-1, 3, 1]'$ وخیاله هو $[1, 1, 1]'$ و $E_3 = [1, 1, 1]'$ وتكون معادلات التحويل الخطي المفروض هي :

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

٥ - إذا كان $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ تحويلاً خطياً بالنسبة للأساس Z المعرف في المسألة ١٢ من الفصل

١١ ، أوجد نفس التحويل $Y_W = BX_W$ بالنسبة للأساس W الوارد في المسألة المذكورة ذاتها .

نستنتج من المسألة ١٢ من الفصل ١١ أن $X_W = PX_Z = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z$

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W$$

مسائل إضافية

٦ - في المسألة ١ بين (١) أن التحويل الوارد فيها غير شاذ (ب) وأن التحويل $X=A^{-1}Y$ يحول متجهات أعمدة A إلى المتجهات الأولية .

٧ - مستخدماً التحويل الوارد في المسألة ١ أوجد (١) خيال $X=[1,1,2]$ (ب) المتجه X الذي خياله $[-2,-5,-5]$ الجواب (١) $[8,5,11]$ (ب) $[-3, -1, 2]$

٨ - أدرس تأثير التحويل $Y = KIX$ و $Y = IX$

٩ - عين التحويل الخطي الذي يحول E_1 إلى $[1,2,3]$ و E_2 إلى $[3,1,2]$ و E_3 إلى $[2,-1,-1]$ ثم بين أن هذا التحويل شاذ ويحول المتجهين المستقلين خطياً $[1,1,1]$ و $[2,0,2]$ لمتجه واحد .

١٠ - افرض أن (12.1) غير شاذ ، وبين أنه إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n$ مرتبطة خطياً فإن أخيلتها $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ تكون كذلك مرتبطة خطياً .

١١ - استخدم النظرية III لتبرهن أنه من خلال تحويل خطي غير شاذ ، لا يتغير بعد فراغ إنجامي .

إرشاد : اعتبر أخيلة أساس الفراغ $V_n^k(F)$

١٢ - باستخدام التحويل الخطي $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X$ برهن (١) أن هذا التحويل شاذ

(ب) إن أخيلة المتجهات المستقلة خطياً $X_1=[1,1,1]$ و $X_2=[2,1,2]$ و $X_3=[1,2,3]$ هي متجهات مرتبطة خطياً

(ج) إن خيال $V_3(R)$ هو $V_3^2(R)$

١٣ - باستخدام التحويل الخطي $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$ بين أن (أ) إن هذا التحويل شاذ . (ب) إن خيال كل متجه

من $V_3^2(R)$ المولد بالمتجهين $[1,1,1]'$ و $[3,2,0]'$ ينتمي إلى الفراغ $V_3^1(R)$ المولد بـ $[5,7,5]'$

١٤ - برهن النظرية : VII

إرشاد : لتكن X_i ، Y_i حيث $(i=1,2,\dots,n)$ مجموعتي المتجهات المفروضتين وليكن $Z = AX$ التحويل الخطي الذي يحول المجموعة X_i إلى المجموعة E_i و $Y = BZ$ الذي يحول E_i إلى Y_i
١٥ - برهن أن المصفوفات المتشابهة تكون محدثاتها متساوية .

١٦ - ليكن $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ تحويلاً خطياً بالنسبة للأساس E وبفرض اختيار الأساس الجديد

$Z_1 = [1,1,0]'$ ، $Z_2 = [1,0,1]'$ ، $Z_3 = [1,1,1]'$ لنفرض المتجه $X = [1, 2, 3]'$ منسوباً للأساس E بين أن :

(أ) إن $Y = [14, 10, 6]'$ خيال X من خلال هذا التحويل .
(ب) وإنه إذا نسبنا إلى الأساس الجديد فإن أحداثيات X تكون $X_Z = [-2, -1, 4]'$ وتكون أحداثيات Y هي $Y_Z = [8, 4, 2]'$

(ج) وإن $X_Z = PY$ و $Y_Z = PY$ حيث $P = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(د) وإن $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$ حيث $Q = P^{-1}$.

١٧ - ليكن التحويل الخطي $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$ منسوباً للأساس $W_1 = [0, -1, 2]'$ ، $W_2 = [4, 1, 0]'$

$W_3 = [-2, 0, -4]'$ اكتب تمثيلاً منسوباً للأساس Z حيث

الجواب : $Z_1 = [1, -1, 1]'$ ، $Z_2 = [1, 0, -1]'$ ، $Z_3 = [1, 2, 1]'$.

١٨ - إذا كانت في تحويل خطي $Y = AX$ المصفوفة A شاذة ، فإن الفراغ المنعدم للمصفوفة A هو فراغ إتجاهي يتحول كل متجه منه وفوق هذا التحويل إلى المتجه الصفري . عين الفراغ الصفري (المنعدم) للتحويلات :

(أ) الوارد في المسألة ١٢ (ب) الوارد في المسألة ١٣ (ج) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X$

الجواب : (أ) $V_3^1(R)$ المولد بـ $[1, -1, 1]$

(ب) $V_3^1(R)$ المولد بـ $[2, 1, -1]$

(ج) $V_3^2(R)$ المولد بـ $[2, -1, 0]^*$ و $[3, 0, -1]^*$

١٩ - إذا حول $Y=AX$ كل متجه من الفراغ الإتجاهي V_n^h إلى متجه من هذا الفراغ ذاته ، فإننا نقول عن الفراغ V_n^h إنه فراغ لامتغير للتحويل . بين أنه في الفراغ الحقيقي $V_3(R)$ بتطبيق التحويل الخطي .

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (أ)$$

الفراغ V_3^1 المولد بـ $[1, -1, 0]$ والفراغ V_3^1 المولد بـ $[2, -1, -2]$ و V_3^1 المولد بـ

$[1, -1, -2]^*$ هي فراغات إتجاهية لامتغيرة .

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X \quad (ب)$$

الفراغ V_3^1 والمولد بـ $[1, 1, 1]$ والفراغ V_3^2 المولد بالمتجهين $[1, 0, -1]^*$

و $[2, -1, 0]^*$ هما فراغان لامتغيران للتحويل المفروض . (لاحظ أن خيال كل متجه من V_3^2 هو هذا المتجه نفسه) .

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} X \quad (ج)$$

الفراغ V_4^1 المولد بـ $[1, 1, 1, 1]$ هو فراغ لامتغير للتحويل المفروض .

٢٠ - اعتبر التحويل الخطي $Y = P X$ حيث $y_i = x_{j_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) وفيه $j_1, j_2, \dots, j_n$ تبديل لـ $1, 2, \dots, n$.

(أ) صف مصفوفة التبديل P .

(ب) برهن أنه يوجد $n!$ مصفوفة تبديل من الدرجة n .

(ج) برهن أنه إذا كان كل من P_1 و P_2 مصفوفتي تبديل فإن $P_3 = P_1 P_2$ و $P_4 = P_2 P_1$ هما مصفوفتا تبديل أيضاً .

(د) برهن أنه إذا كانت P مصفوفة تبديل فإن P^* مصفوفة تبديل و $PP^* = I$.

(هـ) برهن أنه يمكن التعبير عن كل مصفوفة تبديل P كحاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية $K_{12}, K_{23}, \dots, K_{n-1, n}$.

(و) اكتب $P = [E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}]$ حيث $i_1, i_2, \dots, i_n$ تبديل لـ $1, 2, \dots, n$ وحيث E_{i_j} المتجهات الأولية

ذات الـ n مركبة (أو حد فاعلة) عبر القاعدة $(P^{-1} = P^*)$ لكتابة P^{-1} . مثال ذلك ، عندما يكون $n=4$

$$P = [E_3, E_1, E_4, E_2], \text{ و } P^{-1} = [E_2, E_4, E_1, E_3]; \text{ وإذا كان } P = [E_4, E_2, E_1, E_3], \text{ فإن } P^{-1} = [E_3, E_2, E_4, E_1].$$

الفصل الثالث عشر

المتجهات على الحقل الحقيقي

حاصل الضرب الداخلي :

في هذا الفصل نعتبر كل متجه متجهاً حقيقياً كما نعتبر $V_n(R)$ الفراغ الإتجاهي لكل المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة . إذا كان $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ و $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$ متجهين من $V_n(R)$ فإننا نعرف حاصل ضربهما الداخلي بأنه العدد

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (13.1)$$

مثال ١ :

المتجهات $X_1 = [1, 1, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$, $X_3 = [1, -2, 1]'$ يكون

$$X_1 \cdot X_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 \quad (أ)$$

$$X_1 \cdot X_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 0 \quad (ب)$$

$$X_1 \cdot X_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \quad (ج)$$

$$X_1 \cdot 2X_2 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2) \quad (د)$$

ملاحظة :

يعرف حاصل الضرب الداخلي في أغلب الأحيان بالشكل

$$X \cdot Y = X'Y = Y'X \quad (13.1')$$

إن إستعمال الرمز $X'Y$ و $Y'X$ مفيد ولكن $X'Y$ و $Y'X$ مصفوفتان من الدرجة 1×1 بينما $X \cdot Y$ هو عنصر المصفوفة . سنستخدم (13.1') في هذا الفصل وفقاً لهذا المفهوم . يستعمل مؤلفون آخرون الرمز $X|Y$ بدلا من $X \cdot Y$ في تحليل المتجهات . يسمى حاصل الضرب الداخلي الضرب القياسي .

إن قواعد حاصل الضرب الداخلي بادية الوضوح

$$X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \quad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2) \quad (أ)$$

$$X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 \quad (ب) \quad (13.2)$$

$$(X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4 \quad (ج)$$

المتجهات المتعامدة :

نقول عن متجهين X و Y من $V_n(R)$ إنهما متعامدان فيما إذا كان حاصل ضربهما الداخلي مساويا للصفر . إن المتجهين X_1 و X_3 من المثال ١ متعامدان .

طول المتجه : X من $V_n(R)$ المثل بـ $\|X\|$ يعرف بالجزء التربيعي لحاصل الضرب الداخلي للمتجه X بالمتجه X أي :

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (13.3)$$

مثال ٢ :

ينتج من (ج) من المثال ١ أن $\|X_1\| = \sqrt{3}$

أنظر المسألتين ١ - ٢

باستخدام (13.1) و (13.1) فن الممكن برهان :

$$X \cdot Y = \frac{1}{2} (\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2) \quad (13.4)$$

يدعى المتجه X الذى طوله $\|X\| = 1$ متجه الوحدة إن المتجهات الأولية E_i أمثلة من متجهات الوحدة .

متباينة شوارز : إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإنهما يحققان :

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad (13.5)$$

أى أن القيمة العددية لحاصل الضرب الداخلى لمتجهين حقيقيين لاتزيد عن حاصل ضرب طولى هذين المتجهين .

أنظر المسألة ٣

المتباينة المثلثية :

إذا كان X و Y متجهين من الفراغ $V_n(R)$ فإن :

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (13.6)$$

المتجهات والفراغات المتعامدة :

إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_m$ متجهها حيث $n \geq m$ غير صفرية متعامدة كل منها على الأخرى وإذا كان $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m = 0$ فإنه لقيم $c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$. نتحقق العلاقة $(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m) \cdot X_i = 0$. حيث أن ذلك يتطلب أن $C_i = 0$ لقيم $i = 1, 2, \dots, m$ فإنه يكون :

I إن أى مجموعة مكونة من m حيث $n \geq m$ متجهها ذا n مركبة لايساوى أى واحد منها الصفر ومتعامدة متشئ ، هى مجموعة مستقلة خطياً وتولد فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$. نقول عن متجه Y أنه متعامد مع فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ فيما إذا كان متعامداً مع كل متجه من هذا الفراغ .

II إذا كان متجه Y متعامداً مع كل متجه من المتجهات ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \dots, X_m$ فإنه يكون متعامداً مع الفراغ الإتجاهى المولد بهذه المتجهات .

أنظر المسألة ٤

III إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $k > h$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد V من $V_n^k(R)$ متعامد مع $V_n^h(R)$.

أنظر المسألة ٥

بما أن المتجهات المتعامدة متشئ هى متجهات مستقلة خطياً . فإن فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ لا يمكن أن يحوى أكثر من m من المتجهات المتعامدة متشئ . لنفرض أننا وجدنا r حيث $m > r$ متجهها متعامدة متشئ من الفراغ $V_n^m(R)$. إن هذه المتجهات تولد فراغاً جزئياً $V_n^r(R)$ من $V_n^m(R)$ ووفقاً إلى النظرية III فإنه يوجد على الأقل متجه واحد من $V_n^m(R)$ متعامد مع الفراغ $V_n^r(R)$. فنكون قد حصلنا الآن على $(r+1)$ متجهها متعامدة متشئ من $V_n^m(R)$ وإذا كررنا هذه العملية فإننا نكون قد برهننا :

IV يحوى كل فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ على m ، وليس أكثر من ذلك ، من المتجهات المتعامدة متشئ .
نقول عن فراغين إتجاهيين إنهما متعامدان ، فيما إذا كان كل متجه من أحدهما متعامد مع كل متجه من الآخر ، مثال ذلك إن الفراغ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, 0, 0, 1]$ و $X_2 = [0, 1, 1, 0]$ متعامد مع الفراغ المولد بالمتجهين $X_3 = [1, 0, 0, -1]$ و $X_4 = [0, -1, -1, 0]$ وذلك لأن $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ لكل قيم a, b, c, d .
V إن مجموعة كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من الفراغ $V_n^k(R)$ تولد فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$.

أنظر المسألة ٦

يمكننا أن نزال أى متجه $X \neq 0$ بمتجه فريد (وحيد) U نحصل عليه بقسمة مركبات X على $\|X\|$. تسمى هذه العملية التعيير . أى لكي نجعل متجهها عيارياً مثل $X = [2, 4, 4]$ نقسم كل مركبة من مركباته على $\|X\| = \sqrt{4+16+16} = 6$ فنجد متجه الوحدة $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$.

يسمى أساس الفراغ الإتجاهى $V_n^m(R)$ المكون من متجهات متعامدة متنى . أساس متعامد لهذا الفراغ . وإذا كانت متجهات الأساس المتعامدة متجهات وحدة فإن هذا الأساس يدعى الأساس العيارى المتعامد . إن المتجهات الأولية أسس متعامدة عيارية للفراغ . أنظر المسألة ٧

طريقة جرام — شميث للتعامد : لنفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساس لـ $V_n^m(R)$. عرف

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \dots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

وهكذا تكون $G_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|}$ متجهات الوحدة ، حيث $(i = 1, 2, \dots, m)$ متعامدة متنى وتكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n^m(R)$.

مثال ٣ : كون ، مستخدماً طريقة جرام — شميث ، أساساً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت الأساس

$$X_1 = [1, 1, 1]', X_2 = [1, -2, 1]', X_3 = [1, 2, 3]'$$

$$Y_1 = X_1 = [1, 1, 1]' \quad (i)$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, -2, 1]' - \frac{0}{3} Y_1 = [1, -2, 1]' \quad (ii)$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, 2, 3]' - \frac{0}{6} Y_2 - \frac{6}{3} [1, 1, 1]' = [-1, 0, 1]' \quad (iii)$$

$$G_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]' \quad \text{إن المتجهات}$$

$$G_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]' \quad , \quad G_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = [1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$$

تكون أساساً متعامداً عيارياً لـ $V_3(R)$. كل متجه G_i منها هو متجه وحدة وكل حاصل ضرب $G_i \cdot G_j = 0$ لاحظ في هذه الحالة أن $Y_2 = X_2$ لأن X_1 و X_2 هما متجهان متعامدان .

أنظر المسألتين ٨ — ٩

لنفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساس للفراغ $V_n^m(R)$ ولنفرض أن المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_s$ حيث $(m > s \geq 1)$ متعامدة متنى . إذن يمكننا ، باستخدام طريقة جرام — شميث ، إيجاد أساس متعامد $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ لهذا الفراغ ومن السهل أن نرى أن $Y_i = X_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, s)$ وهكذا نجد

٧ . إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_s$ حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة متعامدة متنى من $V_n^m(R)$ فإنه يوجد متجهات وحدة $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_m$ من هذا الفراغ بحيث تصبح المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساساً متعامداً عيارياً

مصفوفة جرام (الجراميان) : لنفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_p$ مجموعة من المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة ونعرف مصفوفة جرام بالشكل :

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1 X_1 & X'_1 X_2 & \dots & X'_1 X_p \\ X'_2 X_1 & X'_2 X_2 & \dots & X'_2 X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X'_p X_1 & X'_p X_2 & \dots & X'_p X_p \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

من الواضح أن هذه المتجهات تكون متعامدة متى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة G قطرية .
في المسألة ١٤ من الفصل ١٧ سنبرهن :

VII. لمجموعة المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \dots, X_p$ يكون $|G| \geq 0$ وتكون المساواة صحيحة فيما إذا كانت (وإذا فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطياً .

المصفوفات المتعامدة : نقول عن مصفوفة A إنها متعامدة فيما إذا كان :

$$AA' = A'A = I \quad (13.9)$$

أى إذا كان

$$A' = A^{-1} \quad (13.9')$$

يتضح من العلاقة (13.9) أن متجه أعمدة (صفوف) مصفوفة متعامدة A هي متجهات وحدة متعامدة متى .

مثال ٤ : ينتج عن المثال ٣ أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ متعامدة}$$

ينتج عما سبق مباشرة مايل :

VIII. إذا كانت المصفوفة A المربعة : الحقيقية ذات الدرجة n . متعامدة فإن أعمدتها (صفوفها) تكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n(R)$ والعكس صحيح .

IX. إن معكوس ومنقول مصفوفة متعامدة هما مصفوفتان متعامدتان .

X. إن حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين أو أكثر ، هو مصفوفة متعامدة .

XI. يساوى محددة مصفوفة متعامدة ± 1

التحويلات المتعامدة ليكن

$$Y = AX \quad (13.10)$$

تحويلاً خطياً معرفاً على $V_n(R)$ ولنرمز لحيزي المتجهين X و X_2 من هذا الفراغ بالرمزين Y_1 و Y_2 على الترتيب نستنتج من العلاقة (13.4) أن

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{2} \{ \|X_1 + X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2 \}$$

$$Y_1 \cdot Y_2 = \frac{1}{2} \{ \|Y_1 + Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2 \}$$

إذا قارنا بين الأطراف اليمنى والأطراف اليسرى ، فإننا نرى أنه إذا كانت العلاقة (١٣-١٠) تحافظ على الأطوال فإنها تحافظ على حاصل الضرب الداخلى والعكس بالعكس . أى :

XII. يحافظ التحويل الخطى على الأطوال فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يحافظ على حاصل الضرب الداخلى .

نقول عن تحويل خطى $Y = AX$ إنه متعامد فيما إذا كانت مصفوفته A متعامدة . سنبرهن في المسألة ١٠ :

XIII. يحافظ تحويل خطى على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

مثال هـ : إن التحويل الخطي $Y = AX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} X$ يعتمد وإن خيال $X = [a, b, c]$ هو :

$$Y = \left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \right]$$

ولكل من هذين المتجهين طول واحد يساوى $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
 XIV. وإذا كان (13.10) تحويلًا للاحداثيات من الأساس E إلى الأساس Z فإن الأساس Z يكون عيارياً متعامداً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A متعامدة.

مسائل محلولة

١ - إذا كان $X_1 = [1, 2, 3]$ و $X_2 = [2, -3, 4]$ أوجد :
 (أ) حاصل ضربهما الداخلي (ب) طول كل منهما.

$$X_1 \cdot X_2 = X_1' X_2 = [1, 2, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8 \quad (1)$$

$$\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = X_1' X_1 = [1, 2, 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14 \quad \text{and} \quad \|X_1\| = \sqrt{14} \quad (ب)$$

٢ - (أ) برهن أن المتجهين $X = [1/3, -2/3, -2/3]$ و $Y = [2/3, -1/3, 2/3]$ متعامدان.
 (ب) أوجد متجهها Z متعامداً مع كل من X و Y .

$$X \cdot Y = X' Y = [1/3, -2/3, -2/3] \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \text{ لنكتب } [X, Y, 0] \text{ ونحسب المعاملات المرافقة } 2/3, -2/3, 1/3 \text{ لعناصر العمود الصفري.}$$

من (3.11) نجد أن $Z = [-2/3, -2/3, 1/3]$ متعامد مع كل من X و Y .

٣ - برهن متباينة شوارز. إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإن $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.
 من الواضح، أن هذه النظرية صحيحة إذا كان X أو Y المتجه الصفري. نفرض أن المتجهين X و Y ليسا متجهات صفرية. إذا كان a أى عدد حقيقى فإن :

$$\begin{aligned} \|aX + Y\|^2 &= (aX + Y) \cdot (aX + Y) \\ &= [ax_1 + y_1, ax_2 + y_2, \dots, ax_n + y_n] \cdot [ax_1 + y_1, ax_2 + y_2, \dots, ax_n + y_n]' \\ &= (a^2 x_1^2 + 2ax_1 y_1 + y_1^2) + (a^2 x_2^2 + 2ax_2 y_2 + y_2^2) + \dots + (a^2 x_n^2 + 2ax_n y_n + y_n^2) \\ &= a^2 \|X\|^2 + 2aX \cdot Y + \|Y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ولكن من المعلوم أن كثيرة حدود من الدرجة الثانية بالنسبة في a يكون أكبر أو يساوى الصفر لكل قيمة حقيقية لـ a فيما إذا كان (وإذا كان فقط) مميزه أصغر أو يساوى الصفر أى :

$$4(X \cdot Y)^2 - 4\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 \leq 0$$

ومنه نجد

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

٤ - برهن أنه إذا كان المتجه Y متعامداً مع كل من المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ ذات الـ n مركبة ، فإنه يكون متعامداً مع الفراغ المولد بهذه المتجهات . يمكن كتابة أى متجه في الفراغ المولد بالمتجهات المفروضة بالشكل $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m$ ويكون :

$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m) \cdot Y = a_1 X_1 \cdot Y + a_2 X_2 \cdot Y + \dots + a_m X_m \cdot Y = 0$$

وبما أن $X_i \cdot Y = 0$ ، $(i = 1, 2, \dots, m)$ فإن Y يكون متعامداً مع كل متجه من الفراغ المولد بالمتجهات ويكون ، بالتعريف ، متعامداً مع هذا الفراغ . وعلى وجه الخصوص إذا كان Y متعامداً مع كل متجه من أساس فراغ إتجاهي فإنه يكون متعامداً مع هذا الفراغ .

٥ - برهن أنه إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد X من $V_n^k(R)$ متعامد مع $V_n^h(R)$

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_h$ أساساً لـ $V_n^h(R)$ ولتكن X_{h+1} متجهاً من $V_n^k(R)$ غير واقع في $V_n^h(R)$ واعتبر المتجه :

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_h X_h + a_{h+1} X_{h+1} \quad (i)$$

إن شرط تعامد المتجه X مع كل من $X_1, X_2, \dots, X_h$ يتكون من h معادلة خطية متجانسة .

$$a_1 X_1 \cdot X_1 + a_2 X_2 \cdot X_1 + \dots + a_h X_h \cdot X_1 + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_1 = 0$$

$$a_1 X_1 \cdot X_2 + a_2 X_2 \cdot X_2 + \dots + a_h X_h \cdot X_2 + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_1 X_1 \cdot X_h + a_2 X_2 \cdot X_h + \dots + a_h X_h \cdot X_h + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_h = 0$$

ذات الـ $(h+1)$ مجهول $a_1, a_2, \dots, a_{h+1}$ من النظرية IV من الفصل العاشر ، يكون لهذه المجموعة حل غير تافه . عندما نموض هذه القيم في (i) فإننا نحصل على متجه X غير صفري (لماذا ؟) متعامد مع أساس الفراغ الإتجاهي $V_n^h(R)$ أى متعامد مع هذا الفراغ .

٦ - برهن أن مجموع كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من فراغ معين $V_n^k(R)$ يكون فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$ لتكن $X_1, X_2, \dots, X_k$ أساساً للفراغ الإتجاهي $V_n^k(R)$. إن المتجه X ذا الـ n مركبة المتعامد مع كل X_i يحقق مجموعة المعادلات المتجانسة .

$$X_1 \cdot X = 0, X_2 \cdot X = 0, \dots, X_k \cdot X = 0 \quad (i)$$

بما أن X_i هي مجموعة مستقلة خطياً فإن رتبة مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات (i) تساوي k ، وينتج عن ذلك أنه يوجد ($n - k$) حلاً (متجهاً) مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n^{n-k}(R)$ (أنظر النظرية VI الفصل ١٠) .

بما أن تقاطع الفراغين $V_n^k(R)$ و $V_n^{n-k}(R)$ يساوى الفراغ الصفري وأن مجموع هذين الفراغين يساوى $V_n(R)$ فإن الفراغ الموجود وحيد .

٧ - أوجد أساس عيارية متعامدة للفراغ $V_3(R)$ إذا أعطيت : $X = [1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$

من الملاحظ أن X متجه وحدة . بإختيار $Y = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]'$ متجه وحدة آخر بحيث يكون $X \cdot Y = 0$. وكذا في (١) من المسألة ٢ نجد $Z = [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$ الذى يتم المجموعة المطلوبة .

٨ - استنتج معادلات جبريم - شيت (13.7)

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساساً للفراغ $V_n^m(R)$ ولنرمز بالرموز $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ مجموعة المتجهات المتعامدة متنى التى يراد إيجادها .

$$(أ) \text{ لنأخذ } Y_1 = X_1$$

(ب) لنأخذ $Y_2 = X_2 + aY_1$ وبما أنه يلزم أن يكون Y_1 و Y_2 متعامدين متنى أى :

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot aY_1 = Y_1 \cdot X_2 + aY_1 \cdot Y_1 = 0$$

$$\text{ومن ثم } a = -\frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} \text{ أى } Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

(ج) لنأخذ $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$ وبما أن المتجهات الثلاث Y_1, Y_2, Y_3 يجب أن تكون متعامدة كل منها على الأخرى (متنى) فإنه يلزم أن يكون .

$$Y_1 \cdot Y_3 = Y_1 \cdot X_3 + aY_1 \cdot Y_2 + bY_1 \cdot Y_1 = Y_1 \cdot X_3 + bY_1 \cdot Y_1 = 0$$

$$Y_2 \cdot Y_3 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 + bY_2 \cdot Y_1 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 = 0$$

$$\text{ومن ثم } b = -\frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2}, \quad a = -\frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} \text{ و } Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

(د) استمر في هذه العملية حتى تحصل على Y_m .

٩ - أوجد أساس متعامدة عيارية لـ V_3 فيما إذا أعطيت الأساس $X_1 = [2, 1, 3]^T, X_2 = [1, 2, 3]^T, X_3 = [1, 1, 1]^T$.

لنأخذ $Y_1 = X_1 = [2, 1, 3]^T$ فنجد :

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, 2, 3]^T - \frac{13}{14} [2, 1, 3]^T = [-6/7, 15/14, 3/14]^T$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$= [1, 1, 1]^T - \frac{2}{9} \left[-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14} \right]^T - \frac{3}{7} [2, 1, 3]^T = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right]^T$$

اجعل المتجهات Y عيارية فنحصل على $[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]^T, [-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]^T$

كأساس عيارى متعامد المطلوب . $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]^T$

١٠ - برهن أن تحويلاً خطياً يحافظ على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

ليكن Y_1 و Y_2 خيالى X_1 و X_2 على الترتيب وفق التحويل الخطى $Y = AX$

فلنفرض أن A متعامدة أى $A^T A = I$ فيكون عندها :

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1^T Y_2 = (X_1^T A^T)(AX_2) = X_1^T X_2 = X_1 \cdot X_2 \quad (i)$$

ومن النظرية XII نجد أن الأطوال محفوظة

على العكس ، لنفرض أن الأطوال مخفوفة (وكذلك حاصل الضرب الداخلي) فيكون :

$$Y_1 \cdot Y_2 = X_1'(A'A)X_2 = X_1'X_2, \quad A'A = I$$

أي أن A مصفوفة متعامدة .

مسائل إضافية

- ١١ - إذا أعطيت المتجهات $X_1 = [1, 2, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$, $X_3 = [2, 1, -4]'$ فأوجد :
 (أ) حاصل الضرب الداخلي لكل زوج منها .
 (ب) طول كل واحد منها .
 (ج) متجهها متعامداً مع زوج المتجهات X_1 و X_2 وآخر مع زوج المتجهات X_1 و X_3
 الجواب (أ) -3 , 0 , 6 (ب) $\sqrt{6}$, 3 , $\sqrt{21}$ (ج) $[3, -2, 1]'$, $[1, 0, -1]'$
- ١٢ - استعمل متجهات اختيارية من $V_3(R)$ و حقق العلاقات (13.2)
- ١٣ - برهن العلاقة (13.4)
- ١٤ - لنفرض أن المتجهين $X = [1, 2, 3, 4]'$ و $Y = [2, 1, -1, 1]'$ أساساً للفراغ $V_4^2(R)$ وأن $Z = [4, 2, 3, 1]'$ واقع في فراغ $V_4^3(R)$ يحوى X و Y
 (أ) برهن أن Z غير منتم إلى $V_4^2(R)$.
 (ب) اكتب $W = aX + bY + cZ$ وأوجد متجهها W من $V_4^3(R)$ متعامداً مع كل من X و Y .
- ١٥ - (أ) برهن أن متجهها من $V_n(R)$ يكون متعامداً مع نفسه فيما إذا كان (إذا كان فقط) . المتجه الصفري .
 (ب) برهن أنه إذا كانت X_1, X_2, X_3 مجموعة من المتجهات المرتبطة خطياً وغير صفيرية وذات n مركبة وإذا كان $X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = 0$ فإن المتجهين X_2 و X_3 يكونان مرتبطين خطياً .
- ١٦ - برهن أن متجهها X يكون متعامداً مع كل متجه من $V_n^m(R)$ إذا كان (وإذا كان فقط) متعامداً مع كل متجه من أساس هذا الفراغ .
- ١٧ - برهن أنه إذا كان الفراغان الإتجاهيان $V_n^h(R)$ و $V_n^k(R)$ متعامدين فإن فراغ تقاطعهما هو $V_n^0(R)$.
- ١٨ - برهن المتباينة الثلاثية .
 إرشاد : برهن أن $\|X + Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2$ مستخدماً من متباينة شوارز .
- ١٩ - برهن أن $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$ إذا كان (وإذا كان فقط) X و Y مرتبطين خطياً .
- ٢٠ - اجمل المتجهات الواردة في المسألة ١١ عيارية .
- ٢١ - برهن أن المتجهات X و Y و Z الواردة في المسألة ٢ تؤلف أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$.
- ٢٢ - (أ) برهن أنه إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_m$ مستقلة خطياً فإن متجهات الوحدة التي تنتج عن جمل هذه المتجهات عيارية تكون مستقلة خطياً .
 (ب) برهن أنه إذا كانت المتجهات الواردة في (أ) غير صفيرية ومتعامدة كل منها على الأخرى فإن نفس الحال تكون بالنسبة لمتجهات الوحدة التي نحصل عليها بجعلها عيارية .

- ٢٣ - برهن: (١) إذا كانت A متعامدة و $|A| = 1$ فإن كل عنصر من A يساوى معاملة المرافق في $|A|$.
(ب) إذا كانت A متعامدة و $|A| = -1$ فإن كل عنصر من A يساوى سالب المعاملة المرافق في $|A|$.

٢٤ - برهن النظريات VIII ، XI ، X ، XI .

٢٥ - برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين وكانت C متعامدة ، فإن $C'BC' C'AC'$ تبديليتان .

٢٦ - برهن أن AA' (أو $A'A$) حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، تكون مصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت) صفوف (أو أعمدة) A متعامدة .

٢٧ - برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة فإن المصفوفة $XY' + YX'$ تكون متماثلة .

٢٨ - برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $X.(AY) = (A'X)Y$

٢٩ - برهن أنه إذا كانت المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_n$ أساساً عيارياً متعامداً وإذا كان $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ،

فإن :

$$X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \quad (ب) \quad X \cdot X_i = c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (١)$$

٣٠ - أوجد أساساً عيارياً متعامداً للفراغ $V_3(R)$ فيما إذا أعطيت (١) $X_1 = [3/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}]'$

(ب) $[3, 0, 2]'$

الحساب (١)

$$X_1, [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]', [-4/\sqrt{34}, -3/\sqrt{34}, 3/\sqrt{34}]'$$

(ب)

$$[3/\sqrt{13}, 0, 2/\sqrt{13}]', [2/\sqrt{13}, 0, -3/\sqrt{13}]', [0, 1, 0]'$$

٣١ - كون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ بطريقة جرام - شмит مستخدماً مجموعة المتجهات المرتبة التالية :

(١)

$$[1, -1, 0]', [2, -1, -2]', [1, -1, -2]'$$

(ب)

$$[1, 0, 1]', [1, 3, 1]', [3, 2, 1]'$$

(ج)

$$[2, -1, 0]', [4, -1, 0]', [4, 0, -1]'$$

الحساب : (١)

$$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]', [\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3]', [-2/3, -2/3, -1/3]'$$

(ب)

$$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]', [0, 1, 0]', [\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$$

(ج)

$$[2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5, 0]', [\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0]', [0, 0, -1]'$$

٣٢ - أوجد أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1 = [1, 1, -1]'$ و $X_2 = [2, 1, 0]'$ إرشاد : خذ $Y_1 = X_1$ واحصل على Y_2 بطريقة جرام - شмит ثم على Y_3 بالطريقة الواردة في (ب) من المسألة ٢ الحساب :

$$[\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3]', [\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]', [\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6]'$$

٣٣ - أوجد أساس عيارى متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1 = [7, -1, -1]'$.

٣٤ - برهن بطريقتين مختلفتين على أن الاتجاهات $[1, -1, -2, -3]'$, $[1, 2, 3, 4]'$ و $[5, 4, 5, 6]'$ مرتبطة خطياً.

٣٥ - برهن أنه إذا كانت A متماثلة تخالفية وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ متعامدة.

٣٦ - استخدم المسألة ٣٥ لتحصل على مصفوفة متعامدة B إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \quad (١) \quad \text{الحساب :}$$

٣٧ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وإذا كان $B=AP$ ، حيث P مصفوفة غير شاذة فإن BP^{-1} متعامدة.

٣٨ - في تحويل للأحداثيات من الأساس E إلى أساس عيارى متعامد Z إذا فرضنا P مصفوفة هذا التحويل فإن $Y=AX$ يصبح

$Y_1 = P^{-1}APX_1$ أو $Y_1 = BX_1$ (أنظر في الفصل ١٢). برهن أنه إذا كانت A متعامدة فإن B تكون متعامدة أيضاً والعكس بالعكس وهذا ما يبرهن النظرية XIV.

٣٩ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ متماثلة تخالفية.

٤٠ - ليكن $X = [x_1, x_2, x_3]'$ و $Y = [y_1, y_2, y_3]'$ متجهين من $V_3(R)$ ولتعرّف حاصل الضرب الاتجاهى $X \times Y$

$$Z = X \times Y = [z_1, z_2, z_3]'$$
 حيث $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

بعد مطابقة z_i بالمعاملات المرافقة لعناصر العمود الثالث من $[X_1, Y_1, 0]$ حقق :

(١) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين مرتبطين خطياً هو متجه صفري.

(ب) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين مستقلين خطياً متعامداً مع كل من المتجهين.

$$X \times Y = -(Y \times X) \quad (ج)$$

$$(kX) \times Y = k(X \times Y) = X \times (kY), \quad \text{حيث } k \text{ مقدار عددي.} \quad (د)$$

٤١ - إذا كان Z, Y, X, W أربعة متجهات من $V_3(R)$ فبرهن :

$$X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z \quad (١)$$

(ب)

$$X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y) = |XYZ|$$

$$(W \times X) \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} W \cdot Y & W \cdot Z \\ X \cdot Y & X \cdot Z \end{vmatrix} \quad (ج)$$

$$(X \times Y) \cdot (X \times Y) = \begin{vmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{vmatrix} \quad (د)$$

الفصل الرابع عشر

المتجهات على حقل الأعداد المركبة

الأعداد المركبة :

إذا كان x و y عددين حقيقيين وكان معرفاً بالعلاقة (١) $i^2 = -1$ فإن $z = x + iy$ يدعى عدداً مركباً . يسمى العدد الحقيقي x الجزء الحقيقي ويسمى العدد الحقيقي y الجزء التخيلي للعدد $x + iy$.
يكون عددين مركبين متساويين فيما إذا كان الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل منهما يساوى على الترتيب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للآخر .

يكون العدد المركب $x + iy = 0$ فيما إذا كان $x = y = 0$ (وإذا كان فقط)
يعطى المرافق للعدد المركب $z = x + iy$ بالشكل $\bar{z} = x - iy$ إن مجموع (حاصل ضرب) أى عدد مركب مع مرافقه عدد حقيقى .

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{إن القيمة المطلقة } |z| \text{ للعدد المركب } z = x + iy \text{ تعطى بـ}$$

$$z = x + iy \quad \text{إن مايل واضح بشكل مباشر لأى عدد مركب}$$

$$|x| \leq |z| \quad \text{و} \quad |y| \leq |z| \quad (14.1)$$

المتجهات :

ليكن X متجهاً ذا n مركبة على حقل الأعداد المركبة C . إن مثل هذه المتجهات فى مجموعها تكون الفراغ الإتجاهى $V_n(C)$.
بما أن $V_n(R)$ حقل جزئى فن المتوقع أن كل نظرية تخص متجهات الفراغ $V_n(C)$ ستؤول لنظرية من نظريات الفصل ١٣ عند اعتبار المتجهات الحقيقية فقط .

إذا كان $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ متجهين من $V_n(C)$ فإن حاصل ضربهما الداخلى يعرف بالعلاقة :

$$X \cdot Y = \bar{X} Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n \quad (14.2)$$

يمكن تحقيق القوانين التالية التى تحكم حاصل الضرب الداخلى بسهولة تامة :

$$\begin{aligned} X \cdot Y + Y \cdot X &= 2R(X \cdot Y) \quad (د) & X \cdot Y &= \overline{Y \cdot X} \quad (أ) \\ \text{حيث } R(X \cdot Y) &\text{ هو الجزء الحقيقى من } X \cdot Y & (cX) \cdot Y &= \bar{c}(X \cdot Y) \quad (ب) \\ X \cdot Y - Y \cdot X &= 2C(X \cdot Y) \quad (ز) & X \cdot (cY) &= c(X \cdot Y) \quad (ج) \\ \text{حيث } C(X \cdot Y) &\text{ هو الجزء التخيلى من } X \cdot Y & X \cdot (Y+Z) &= X \cdot Y + X \cdot Z \quad (د) \\ \text{أنظر المسألة ١} & & (Y+Z) \cdot X &= Y \cdot X + Z \cdot X \quad (هـ) \end{aligned} \quad (14.3)$$

(١) إن هذا التعريف يوحى بشئ من الالتباس ومثل ذلك كتابة $i = \sqrt{-1}$ ويفضل تعريف العدد المركب $x + iy$ بالنقطة المرافقة $M(x, y)$ وتعريف i بالنقطة $A(0, 1)$.

يعرف طول متجه X بالعلاقة $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
 يكون المتجهان X و Y متعامدين فيما إذا كان $X \cdot X = Y \cdot X = 0$
 لمتجهات الفراغ $V_n(C)$ تتحقق المتباينة الثلاثية .

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (14.4)$$

وكذلك تتحقق متباينة شوارز (أنظر المسألة ٢)

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad (14.5)$$

علاوة على ذلك (أنظر النظريات VI 1 من الفصل ١٣) ما يلي :

I. إن أى مجموعة من m متجهها ذات الـ n مركبة على C المتعامدة كل منها على الأخرى والفسير صفرية هي مجموعة مستقلة خطياً ولذلك فهي تولد فراغاً اتجاهياً $V_n^m(C)$.

II. إذا كان المتجه Y متعامداً مع كل من المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ ذات الـ n مركبة فإنه يكون متعامداً مع الفراغ المولد بهذه المتجهات .

III. إذا كان $V_n^h(C)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(C)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل متجه واحد X من $V_n^h(C)$ متعامداً مع $V_n^k(C)$.

IV. كل فراغ اتجاهي $V_n^m(C)$ حيث $0 < m$ يحوى m وليس الأكثر من m متجا متعامدة متنى (أى كل منها على الآخر) .

يسمى أساس $V_n^m(C)$ والمكون من متجهات متعامدة متنى أساس متعامدة . إذا كانت هذه المتجهات وحدة فإن هذا الأساس يسمى الأساس العيارى المتعامد .

طريقة جرام - شميت : إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساساً للفراغ $V_n^m(C)$ فإننا نعرف :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\ Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\ &\dots \dots \dots \\ Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \dots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \end{aligned} \quad (14.6)$$

إن متجهات الوحدة $G_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|}$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m)$ تكون أساساً عيارياً متعامداً للفراغ $V_n^m(C)$.

V. إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_s$ حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة من $V_n^m(C)$ ومتعامدة متنى فإنه توجد متجهات وحدة (يمكن الحصول عليها بواسطة طريقة جرام - شميت) $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_m$ في الفراغ بحيث تكون المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساساً عيارياً ومتعامداً .

مصفوفة جرام (جراميان) : لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ مجموعة متجهات ذات n مركبة عناصرها مركبة نعرف مصفوفة جرام على أنها .

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1' X_1 & \bar{X}_1' X_2 & \dots & \bar{X}_1' X_p \\ \bar{X}_2' X_1 & \bar{X}_2' X_2 & \dots & \bar{X}_2' X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_p' X_1 & \bar{X}_p' X_2 & \dots & \bar{X}_p' X_p \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

إن من الواضح أن المتجهات تكون متعامدة كلا منها على الآخر فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) G قطرية. إذا اتبعنا حل المسألة ١٤ من الفصل ١٧ فإنه يمكننا أن نرهن .

VI. لمجموعة مكونة من المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_p$ ذات الـ n مركبة عناصرها مركبة يكون $|G| \leq 0$ تحقق المساواة فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطيا .
المصفوفة الواحدية : تسمى مصفوفة مربعة A من الدرجة n ، واحدة فيما إذا كان $(\bar{A})'A = A(\bar{A})' = I$ أى إن $(\bar{A})' = A^{-1}$.

إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة واحدة ، تكون متجهات وحدة متعامدة متى .
تمشيع النظريات المتعلقة بالمصفوفات المتعامدة التي أوردناها في الفصل ١٣ يمكننا أن نذكر هنا :
VII. إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة مربعة واحدة من n تؤلف أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n(C)$ والعكس صحيح .
VIII. إن مكسوس ومنقول مصفوفة واحدة هما مصفوفتان واحدتان .
IX. إن حاصل ضرب مصفوفتين واحدتين أو أكثر هي مصفوفة واحدة .
X. إن محددة مصفوفة واحدة تساوى الواحد .

التحويلات الواحدية : يسمى التحويل الخطى .

$$Y = AX \quad (14.8)$$

عندما تكون المصفوفة A واحدة ، تحويلاً واحداً .

XI. يحافظ التحويل الخطى على الأطوال (ونتيجة لذلك على حاصل الضرب الداخلى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته مصفوفة واحدة .

XII. إذا كان $Y = AX$ تحويلاً للاحداثيات من أساس E لأساس آخر Z فإن الأساس Z يكون عيارياً متعامداً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A واحدة .

مسائل محلولة

١- إذا كان $X = [1+i, -i, 1]'$ و $Y = [2+3i, 1-2i, i]'$ ،

(أ) أوجد $X \cdot Y$ و $Y \cdot X$ (ب) حقق $X \cdot Y = Y \cdot X$

(ج) حقق $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$ (د) حقق $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$

(أ) $(a) X \cdot Y = \bar{X}Y = [1-i, i, 1] \begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i$

$Y \cdot X = \bar{Y}X = [2-3i, 1+2i, -i] \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$

(ب) من (١) : أن $X \cdot Y$ المرافق لـ $Y \cdot X$ هو $7+3i = X \cdot Y$.

$$X \cdot Y + Y \cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X \cdot Y) \quad (ج)$$

$$X \cdot Y - Y \cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X \cdot Y) \quad (د)$$

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|. \quad ٢ - \text{برهن متباينة شوارز .}$$

كافي حالة المتجهات الحقيقية ، تكون المتباينة صحيحة إذا كان $X = 0$ أو $Y = 0$.

عندما يكون X و Y متجهين غير صفريين ويكون a عددا حقيقيا يكون

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y) \cdot (aX+Y) = a^2 X \cdot X + a(X \cdot Y + Y \cdot X) + Y \cdot Y = a^2 \|X\|^2 + 2aR(X \cdot Y) + \|Y\|^2 \geq 0.$$

بما أن الدالة التربيعية في a تكون غير سالبة إذا كان (وإذا كان فقط) ميزها غير موجب أي :

$$R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{و} \quad R(X \cdot Y)^2 - \|X\|^2 \|Y\|^2 \leq 0$$

إذا كان $X \cdot Y = 0$ فإن $|X \cdot Y| = R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$. أما إذا كان $X \cdot Y \neq 0$ فإننا نعرف $c = \frac{X \cdot Y}{|X \cdot Y|}$.

ونجد عندها $R(cX \cdot Y) \leq \|cX\| \cdot \|Y\| = |c| \|X\| \cdot \|Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$ بينما من (ب) (14.3) نجد $R(cX \cdot Y) = R[\bar{c}(X \cdot Y)] = |X \cdot Y|$.
لذلك $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ لكل X و Y .

٣ - برهن أن $B = (A)^{\sim} A$ مصفوفة هيرميتية لأي مصفوفة مربعة A .

وهذا يعني أن B هيرميتية. $(\bar{B})' = \{(\bar{A})' A\}' = (\bar{A} \bar{A})' = (\bar{A} A) = B$

٤ - إذا كانت $A = B + iC$ مصفوفة هيرميتية ، فبرهن أن $(A)^{\sim} A$ تكون حقيقية إذا كانت (وإذا كانت فقط) B و C متبادلتين عكسيا.

بما أن $B + iC$ مصفوفة هيرميتية فإن $(B + iC)' = B + iC$ وهكذا يكون :

$$(\bar{A})' A = (\overline{B + iC})' (B + iC) = (B + iC)' (B + iC) = (B + iC)(B + iC) = B^2 + i(BC + CB) - C^2$$

ويكون ذلك حقيقيا إذا كان (وإذا كانت فقط) $BC + CB = 0$ أو $BC = -CB$ أي إذا كانت (وإذا كانت فقط) B و C متبادلتين عكسيا.

٥ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية فإن $A + iI$ تكون هيرميتية.

اعتبر $B = -iA$ بما أن A هيرميتية تخالفية ، فإن $(\bar{A})' = -A$ أي

$$(\bar{B})' = (\overline{-iA})' = i(\bar{A})' = i(-A) = -iA = B$$

وهذا ما يبرهن على أن B هيرميتية . يمكن للقارىء النظر في الحالة $B = iA$.

مسائل إضافية

٦ - إذا أعطيت المتجهات $X_1 = [i, 2i, 1]'$ ، $X_2 = [1, 1+i, 0]'$ ، $X_3 = [i, 1-i, 2]'$ ، و

(أ) أوجد $X_1 \cdot X_2$ و $X_1 \cdot X_3$.

(ب) أوجد طول كل متجه X_i .

(ج) أثبت أن المتجه $[1-i, -1, 1-i]'$ متعامد مع كل من X_1 و X_2 .

(د) أوجد متجهها متعامدا مع كل من X_1 و X_3

الجواب : (أ) $2-3i$ و $-i$ (ب) $\sqrt{6}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$

$$[-1-5i, i, 3-i] \quad (د)$$

٧- برهن أن المتجهات $[i, 1-i, 0]'$, $[1+i, i, 1]'$ و $[1-i, 1, 3i]'$ مستقلة خطيا ومتعامدة كل منها على الأخرى .

٨- برهن صحة العلاقة (14.3)

٩- برهن صحة المتباينة المثلثية .

١٠- برهن صحة النظريات IV-I .

١١- استنتج العلاقة (14.6)

١٢- باستخدام العلاقات (14.6) ومن المتجهات المغطاة أدناه مرتبة كون أساس عيارى متعامد للفراغ $V_3(C)$ عندما تكون المتجهات هي

$$[0, 1, -1]', [1+i, 1, 1]', [1-i, 1, 1]' \quad (أ)$$

$$[1+i, i, 1]', [2, 1-2i, 2+i]', [1-i, 0, -i]' \quad (ب)$$

$$[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]', [\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]', [-\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]' \quad (أ)$$

$$[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}]', [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1-5i}{4\sqrt{3}}, \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}]', [\frac{7-i}{2\sqrt{30}}, \frac{-5}{2\sqrt{30}}, \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]' \quad (ب)$$

١٣- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة على حقل الأعداد المركبة فإن $A + \bar{A}$ تكون ذات عناصر حقيقية فقط وأن $A - \bar{A}$ تكون ذات عناصر تخيلية بحتة فقط .

١٤- برهن صحة النظرية V .

١٥- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

(أ) تكون المصفوفة $A \bar{A}$ قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات متعامدة متشابهة .

(ب) يكون $A \bar{A} = I$ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات وحدة متعامدة متشابهة .

١٦- برهن أنه إذا كان X و Y متجهين ذوي n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $X \cdot AY = \bar{A} X \cdot Y$.

١٧- برهن صحة النظريات VII - X

١٨- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هرميتية تخالفية بحيث تكون $I + A$ غير شاذة فإن $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ تكون مصفوفة واحدة .

$$\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\frac{1}{29} \begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix} \quad (أ)$$

٢٠- برهن أنه إذا كان كل من A و B مصفوفة واحدة وكانتا من نفس الدرجة فإن كلا من AB و BA تكون واحدة .

٢١- تابع برهان المسألة ١٠ من الفصل ١٣ لبرهن النظرية XI

٢٢- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وهرمتية فإن A مصفوفة ملتفة .

٢٣- برهن أن

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة واحدة.

٢٤- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وكان $B = AP$ حيث P غير شاذة ، فإن $B^{-1}P$ تكون واحدة.

٢٥- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وكانت $I+A$ غير شاذة ، فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ تكون مصفوفة هرميتية تخالفية .

الفصل الخامس عشر

التطابق

المصفوفات المتطابقة :

نقول عن مصفوفتين A و B من الدرجة n على F إنهما متطابقتان و C و F فيا إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P على F تحقق العلاقة :

$$B = P^{-1} A P \quad (15.1)$$

إن من الواضح أن التطابق هو حالة خاصة من التكافؤ لذلك فالمصفوفات المتطابقة لها نفس الرتبة .

عندما يعبر عن P بحاصل ضرب أعمدة مصفوفات أولية ، فإن P^{-1} يكون حاصل ضرب بترتيب معاكس لنفس مصفوفات الصفوف الأولية ، أي أن A و B تكونان مصفوفتين مطابقتين إذا كان من الممكن أن تختزل A إلى B بمتواليات من أزواج التحويلات الأولية بحيث يتكون كل زوج منها من تحويل صفوف أولي يتبعه نفس تحويل الأعمدة الأولي .

المصفوفات المتماثلة : سنبرهن في المسألة ١

I . كل مصفوفة متماثلة A رتبها r على F تطابق على F مصفوفة قطرية تكون عناصرها القطرية الأولي والتي عددها r غير صفرية بينها تكون بقية العناصر أصفارا .

مثال ١ :

أوجد مصفوفة غير شاذة P عناصرها أعداد جذرية ، بحيث تكون $D = P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية ، علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

لاختزال A إلى D نستعمل $[A \ I]$ ونحسب ، خلال ذلك ، P^{-1} . نستعمل أولا $H_{21} (-2)$ و $K_{21} (-2)$ ثم $H_{31} (-3)$ و $K_{31} (-3)$ وأخيرا $H_{41} (-2)$ و $K_{41} (-2)$ لكي نحصل على أصفار في الصف الأول والمود الأول . سنوفر كثيرا من الوقت فيما لو طبقنا أولا التحويلات الثلاثة للصفوف ثم اتبعناها بالتحويلات الثلاثة للأعمدة . وإذا لم تتحول A إلى مصفوفة متماثلة فإن ذلك يكون نتيجة خطأ ما قد حدث . والآن :

$$\begin{aligned}
 [AH] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 &= [DP']
 \end{aligned}$$

ويكون إذن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة D التي اختزلت إليها المصفوفة A ليست وحيدة . فالتحويلين الإضافيين $H_2(1/2)$ و $K_2(1/2)$ مثلا ،

$$\text{يحول } D \text{ إلى المصفوفة القطرية} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ بينما تستبدل التحويلات } H_2(3) \text{ و } K_2(3) \text{ المصفوفة } D \text{ بالمصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية ثانية ، لا يوجد زوج من التحويلات العادية (القياسية) أو الحقيقية قادرة أن تستبدل D

بمصفوفة قطرية عناصر قطرها أعداد غير سالبة فقط .

المصفوفات الحقيقية المتماثلة :

بفرض أن المصفوفة الحقيقية المتماثلة A قد اختزلت بواسطة تحويلات حقيقية أولية إلى مصفوفة متطابقة قطرية D . أي لنفرض أن $P^{-1}AP = D$. بينما تعتمد العناصر القطرية غير الصفرية في D على كل من A و P فإنه سيتضح في الفصل ١٧ أن عدد العناصر القطرية الموجبة وغير الصفرية تعتمد فقط على A .

بواسطة متتالية من تحويلات الصفوف ومثيلاتها من تحويلات الأعمدة من النوع ١ فإنه يمكن إعادة ترتيب العناصر القطرية في D بحيث تقع العناصر الموجبة قبل العناصر السالبة . وبعد ذلك فإنه من الممكن استعمال متتالية من تحويلات الصفوف الحقيقية وتحويلات الأعمدة المتماثلة ومن النوع ٢ لاختزال المصفوفة القطرية لمصفوفة قطرية تكون فيها العناصر غير الصفرية مساوية إما $+1$ أو -1 ويكون عندئذ :

II. إن كل مصفوفة حقيقية ممتلئة رتبها r تكون متطابقة ، على حقل الأعداد الحقيقية ، مع مصفوفة قانونية من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

إن العدد الصحيح P الوارد في (15.2) يدعى دليل المصفوفة كما يدعى العدد $s = p - (r - p)$ شارة المصفوفة .

مثال ٢ :

إذا طبقنا التحويلات H_{23}, K_{23} و $H_2(\frac{1}{2}), K_2(\frac{1}{2})$ على نتيجة المثال ١ فإننا نجد :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [C|Q]$$

ونجد أيضا $Q^{-1}AQ = C$. وهكذا فإن A من الرتبة $r = 3$ والدليل $p = 2$ وشارته $s = 1$.
III. تكون مصفوفتان مربعتان ممتثلتان من درجة n متطابقتين على حقل الأعداد الحقيقية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس الرتبة ونفس الدليل أو إذا كان لهما رتبة واحدة وشارة واحدة .
في حقل الأعداد الحقيقية ، كل المصفوفات المربعة من الدرجة n من النوع (15.2) هي مجموعة قانونية متطابقة لمجموعة المصفوفات الحقيقية المربعة الممتلئة ذات الدرجة n .

في حقل الأعداد المركبة ، يكون :

IV. كل مصفوفة مربعة مركبة ممتلئة ذات الرتبة r تكون متطابقة على حقل الأعداد المركبة مع مصفوفة قانونية من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

مثال ٣ :

إذا طبقنا التحويلين $H_3(i)$ و $K_3(i)$ على ناتج المثال ٢ فإننا نجد :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [D|R]$$

$$R^{-1}AR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ونجد أيضا :}$$

أنظر المسألتين ٢ - ٣

V. تكون مصفوفتان مركبتان ممتثلتان من الدرجة n متطابقتين على حقل الأعداد المركبة إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

المصفوفات المتماثلة التخالفية

إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية فإن :

$$(PAP)^T = P^T A^T P = P^T (-A) P = -P^T A P$$

وعلى ذلك :

VI. كل مصفوفة $B = P^T A P$ متطابقة مع مصفوفة متماثلة تخالفية A ، هي أيضا مصفوفة متماثلة تخالفية .
سنبرهن في المسألة ٤ :

VII. كل مصفوفة A مربعة من درجة n متماثلة تخالفية على F تكون متطابقة على F مع مصفوفة قانونية .

$$B = \text{diag} (D_1, D_2, \dots, D_t, 0, \dots, 0) \quad (15.4)$$

$$\text{حيث } D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (i = 1, 2, \dots, t). \quad \text{إن رتبة } A \text{ هي } r = 2t :$$

انظر المسألة ٥ .

ومنه :

VIII. أي مصفوفتان ، مربعتان من الدرجة n متماثلتان تخالفيتان على F ، تكونان متطابقتان على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .
إن مجموعة كل المصفوفات ذات الشكل (15.4) هي مجموعة قانونية بالنسبة للتطابق مع المصفوفات المربعة من الدرجة n المتماثلة التخالفية .

المصفوفات الهرميتية :

نقول عن مصفوفتين A و B مربعتين هرميتيتين من الدرجة n إنهما خطابقتان هرميتيا $[HC]$ أو إنهما مقترنتان (موحداث) فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$B = \bar{P} A P \quad (15.5)$$

أي :

IX. تكون مصفوفتان مربعتان هرميتيتان من الدرجة n ، مقترنتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن الحصول على إحداها من الأخرى بواسطة متتالية من أزواج التحويلات الأولية ، يتكون كل واحد من هذه الأزواج من تحويل أعمدة وتحويل صفوف المرافق المناظر .

X. إن مصفوفة هرميتية A رتبها r تكون مقترنة مع مصفوفة قانونية

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.6)$$

إن العدد الصحيح p الوارد في (15.6) يدعى دليل A وإن العدد $s = p - (r - p)$ يدعى شارة هذه المصفوفة .

XI. تكون مصفوفتان مربعتان هرميتيتان من الدرجة n مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

إن اختزال مصفوفة هرميتية إلى الشكل القانوني (15.6) يتبع الطريقة الواردة في المسألة ١ مع الانتباه إلى أزواج التحويلات الأولية المناسبة. تعالج المسألة ٧ الحالة الأكثر إزعاجا في هذا الموضوع.

أنظر المسألتين ٦ - ٧

المصفوفات الهرميتية المتخالفة :

إذا كانت A مصفوفة هرميتية متخالفة فإنه يكون :

$$(\overline{PAP})' = (\overline{PAP}) = -\overline{PAP}$$

ونجد :

XII. أن كل مصفوفة $B = P' A P$ مقترنة مع مصفوفة هرميتية متخالفة A هي أيضا مصفوفة هرميتية متخالفة. استنادا إلى المسألة ٥ من الفصل ١٤ نجد أن $H = -iA$ هي مصفوفة هرميتية إذا كانت A هرميتية متخالفة. واستنادا إلى النظرية X توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$\overline{P}HP = C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$, \quad i\overline{P}HP = i\overline{P}(-iA)P = \overline{P}AP = iC \quad \text{وهكذا يكون}$$

$$B = \overline{P}AP = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.7)$$

وعلى ذلك :

XIII. إن كل مصفوفة A مربعة هرميتية ، متخالفة من درجة n ، تكون مقترنة مع مصفوفة من الشكل (15.7) حيث r هي رتبة A و p دليل المصفوفة $-iA$.

XIV. مصفوفتان A و B مربعتان هرميتيتان متخالفتان من الدرجة n تكونان مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة وكانت $-iA$ و $-iB$ لهما نفس الدليل.

أنظر المسألة ٨

مسائل محلولة

١- برهن أنه يمكن اختزال كل مصفوفة متخالفة على F رتبها r إلى مصفوفة قطرية تحوى بالضبط r عنصرا غير صفري على قطرها.

لنفرض أن المصفوفة المتخالفة $A = [a_{ij}]$ غير قطرية. إذا كان $a_{11} \neq 0$ فإن متتالية من أزواج التحويلات الأولية من النوع ٣ يتكون كل واحد منها من تحويل صفوف ونفس تحويل الأعمدة ، تختزل A إلى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

نتابع التحويل طالما أن $b_{22}, c_{33}, \dots$ تختلف عن الصفر . لنفرض أنه ، خلال الاختزال حصلنا على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{ss} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{s+1, s+2} & \dots & k_{s+1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{s+2, s+1} & k_{s+2, s+2} & \dots & k_{s+2, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n, s+1} & k_{n, s+2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث العنصر القطري هو $k_{s+1, s+1} = 0$. إذا كان كل $k_{ij} = 0$ تكون قد برهنا النظرية لقيم $s = r$ أما إذا كانت بعض العناصر k_{ij} ، مثل $k_{s+u, s+u} \neq 0$ فإننا ننقله إلى الموضع $(s+1, s+1)$ بالتحويلين الصفى والعمودى الملائمين ومن النوع ١ عندما تكون $u = v$. وإذا لم يكن ذلك فإننا نضيف إلى الصف ذو الرقم $(s+v)$ الصف ذا الرقم $(s+u)$ وبعد تطبيق تحويل الأعمدة المناظر . فإننا نحصل على عنصر قطري غير صفري . (عندما يكون $a_{11} = 0$ فإننا نعمل كما في الحالة $k_{s+1, s+1} = 0$ السابقة الذكر) .

بما أننا توصلنا إلى متتالية من المصفوفات المتكافئة ، فإن المصفوفة A ستختزل ، في نهاية المطاف ، إلى مصفوفة قطرية ، لا يساوى أى عنصر من العناصر الـ r الأولى من قطرها ، الصفر بينما يساوى كل عنصر آخر منها الصفر .

٢ - اختزل المصفوفة المماثلة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ إلى الصيغة القانونية (15.2) وإلى الشكل القانونى (15.3)

وفى كل من الحالتين أوجد المصفوفة P التى تقوم بهذا الاختزال .

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &= [D|P'_1] \end{aligned}$$

المحول على (15.2) ، نكتب :

$$[D|P'_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] = [C|P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ونجد :}$$

لايجاد (15.3) ، نكتب

$$[D|P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array} \right] = [C|P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

وكنك :

٣- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP شكلا قانونيا من النوع (15.3)

علما أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array} \right]$$

$$= [C|P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

حيث :

٤- برهن أن كل مصفوفة A مربعة متماثلة تخالفية من الدرجة n على F ومن الرتبة $2t$ تكون متطابقة على F مع مصفوفة من الشكل :

$$B = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_t, 0, \dots, 0)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

حيث

إذا كانت $A = 0$ فإن $A = B$ إذا كانت $A \neq 0$ فإنه يوجد ، بعض $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$ لنبادل بين الصف ذي الرقم i والصف الأول ولنبادل أيضا بين الصف ذي الرقم j والصف الثاني ثم لنبادل بين العمود ذي الرقم i والعمود الأول والعمود ذي الرقم j والعمود الثاني فتتحول A إلى المصفوفة المتخالفة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a_{ij} & E_2 & \\ -a_{ij} & 0 & & \\ \hline & & E_3 & E_4 \end{array} \right]$$

لنضرب أخيرا ، الصف الأول والعمود الأول بـ $1/a_{ij}$ فنحصل على المصفوفة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & F_3 & E_4 \end{array} \right]$$

، ومنها بتطبيق تحويلات صفوف وأعمدة أولية من النوع ٣ ، نحصل على :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & F_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{array} \right]$$

إذا كانت $F_4 = 0$ فإن الاختزال يكون تاما وإلا فإن العملية تكرر على $F_4, \dots$ حتى نحصل على المصفوفة B .
 • - أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $P^T A P$ من الشكل القانوني (15.4) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مستخدما $a_{13} \neq 0$ فإننا نحتاج فقط ، أن نبادل بين الصفين الثالث والثاني ونتبع ذلك بأن نبادل بين

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{لكي نحصل على} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{العمودين الثالث والثاني لـ}$$

نضرب ، بعد ذلك ، الصف الأول والعمود الأول في $1/2$ ونتبع ذلك بأن نخلص الصفين الأولين والعمودين الأولين من العناصر الغير صفيرية ، فنجد على التعاقب :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad , \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

وأخيرا نضرب الصف الثالث والعمود الثالث في $1/5$ - لنحصل على

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{array} \right] P^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P'AP = \text{diag}(D_1, D_2). \quad \text{وهكذا عندما يكون}$$

٦- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون المصفوفة $\bar{P}AP$ في الشكل القانوني (15.6) علماً بأن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array} \right]$$

$$= [C|\bar{P}']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \quad \text{ونجد :}$$

٧- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}AP$ من الشكل القانوني (15.6) علماً أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$HC \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array} \right]$$

$$= [C|\bar{P}']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

٨- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}'AP$ من الشكل القانوني (15.7) علما أن

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$$

$$H = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix} \quad \text{احسب المصفوفة الهرمية}$$

$$\bar{P}'HP = \text{diag}[1, 1, -1]. \quad \text{تحقق الملاحظة} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{إن المصفوفة غير الشاذة}$$

$$\bar{P}'AP = \text{diag}[i, i, -i]. \quad \text{ونجد أخيرا}$$

مسائل إضافية

٩- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ في الصيغة القانونية (15.2) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (أ)}$$

١٠- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ في الصيغة القانونية (15.3) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1 & -3-5i \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (أ) \text{ الجواب}$$

١١- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.4) علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \text{ الجواب}$$

١٢- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.6) علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \text{ الجواب}$$

١٣- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.7) علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \text{ الجواب}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$C^*DC = D \quad \text{فبرهن أن هناك مصفوفة } C \text{ مربعة من الدرجة الثانية تحقق } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ١٤- \text{ إذا كان}$$

فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|C| = 1$

١٥- لنفرض أن A مصفوفة غير شاذة مربعة من الدرجة n حقيقية ومتأثلة دليلها p . برهن أن $|A| > 0$ فيما

إذا كان (وإذا كان فقط) $n - p$ زوجيا .

١٦- برهن أن مصفوفة غير شاذة ومتأثلة A تكون متطابقة مع مكموسها .

إرشاد : خذ $P = BB^*$ حيث $B^*AB = I$ ثم بين أن $P^*AP = A^{-1}$.

١٧- أعد كتابة المناقشة المتعلقة بالمصفوفات المتأثلة الواردة في برهان النظرية ١ لكي تحصل حل الملاحظة (15.6) الخاصة بالمصفوفات الهرمية .

١٨- برهن أنه إذا كان $A \sim B$ فإن A تكون متماثلة (متماثلة تخالفية) فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة B متماثلة (متماثلة تخالفية) .

١٩- لتكن S مصفوفة غير شاذة ومتماثلة و T مصفوفة متماثلة تخالفية بحيث يكون $(S + T)(S - T)$ مصفوفة غير شاذة . بين أن $P'SP = S$ عندما يكون

$$P = (S+T)^{-1}(S-T)$$

$$P'SP = [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}. \quad \text{إرشاد :}$$

٢٠- لتكن S مصفوفة غير شاذة ومتماثلة و T أى مصفوفة بحيث تكون المصفوفة $(S + T)(S - T)$ غير شاذة . بين أنه إذا كان $P'SP = S$ عندما يكون $P = (S + T)^{-1}(S - T)$ وكذلك $I + P$ غير شاذة فإن T تكون متماثلة تخالفية .

$$T = S(I-P)(I+P)^{-1} = S(I+P)^{-1}(I-P). \quad \text{إرشاد :}$$

٢١- برهن أن تطابق المصفوفات المربعة من الدرجة n هي علاقة تكافؤ .

ولنفرض أن المتغيرات y وإلى عددها n متغيرا استبدلت بمتغيرات جديدة U بواسطة التحويل الخطي

$$Y = CV \text{ أو } y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16.3)$$

فنجـد $X'AY = (BU)'A(CV) = U'(B'AC)V$ ، والآن بتطبيق التحويلين الخطيين $V = IY$ و $U = IX$ فإننا نحصل على صيغة ثنائي خطية جديد في المتغيرات الأصلية $X'(B'AC)Y = X'DY$.

نقول عن صيغتي ثنائي الخطية إنهما متكافئتا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطي غير شاذ يحول إحدى الصيغ الأخرى.

I. تكون صيغتا ثنائي الخطية ، مصفوفتهما A و B من الدرجة $m \times n$ على F متكافئتين على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

إذا كانت رتبة (16.1) هي r ، فإنه يوجد (أنظر الفصل ٥) مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون :

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا أخذنا $B = P'$ في (16.2) و $C = Q$ في (16.3) فإن صيغة ثنائي الخطية تختزل إلى :

$$U'(PAQ)V = U' \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_r v_r \quad (16.4)$$

أي :

II. يمكن اختزال أي شكل (صيغة) ثنائي الخطية على F ، رتبته r ، بواسطة تحويل خطي غير شاذ على F أيضا ،

إلى الشكل القانوني $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_r v_r$.

مثال ٢ : لمصفوفة الشكل ثنائي الخطية $X'AY = X' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$ الوارد في المثال ١ :

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ I_3 & & & & & & \\ & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ A I_3 & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & & & \\ & Q & & & & & \\ & = & I_3 P' & & & & \end{array}$$

$$\text{وهكذا نجد أن } X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U \text{ ، } Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V \text{ ، } X'AY \text{ تختزل إلى :}$$

$$U' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V = U' I_3 V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

وتكون معادلات التحويل

$$\begin{cases} y_1 = v_1 & - v_3 \\ y_2 = & v_2 + v_3 \\ y_3 = & v_3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = & u_2 \\ x_3 = & u_3 \end{cases}$$

أنظر المسألة ٢

أنواع الصيغ ثنائية الخطية :

نقول عن شكل ثنائي الخطية $X'AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ أنه :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مماثل} \\ \text{مماثلة تخالفية} \\ \text{هرميتية} \\ \text{هرميتية تخالفية} \end{array} \right\} \quad \text{فيما إذا كانت } A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{مماثل} \\ \text{متناوب} \\ \text{هرميتي} \\ \text{هرميتي متناوب} \end{array} \right\}$$

التحويلات الموافقة للتغير :

اعتبر صيغة ثنائي الخطية $X'AY$ في المجموعتين ذات n متغيران $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ إذا خضعت المتغيرات x والمتغيرات y لنفس التحويل $X = CU$ و $Y = CV$ فإننا نقول إن هذه المتغيرات قد تحولت بشكل موافق للتغير ويكون :

III. باستخدام التحويل الموافق للتغير $X = CU$ ، $Y = CV$ ، يتحول الشكل ثنائي الخطية $X'AY$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، إلى الشكل ثنائي الخطية $U'(C'AC)V$. إذا كانت المصفوفة A مماثلة فإن $C'AC$ تكون أيضا . أي :

IV. يبقى الشكل ثنائي الخطية المماثل ، بعد تحويل موافق للتغير للمتغيرات ، مماثلا أيضا .

V. نقول على شكلين ثنائيي الخطية على F إنهما متكافئان بالنسبة للتحويلات الموافقة للتغير للمتغيرات ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما متطابقتان على F .

نستنتج من النظرية I من الفصل ١٥ ما يلي :

VI. يمكن تحويل شكل ثنائي الخطية ومماثل رتبته r ، بواسطة تحويل موافق للتغير للمتغيرات غير شاذ إلى الشكل :

$$a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + \dots + a_r x_r y_r \quad (16.5)$$

من النظرية II والنظرية IV من الفصل ١٥ ينتج :

VII. يمكن تحويل شكل ثنائي الخطية حقيقي رتبته r مماثل بواسطة تحويل موافق للتغير غير شاذ للمتغيرات من حقل الأعداد الحقيقية إلى الشكل :

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_r y_r \quad (16.6)$$

وفي حقل الأعداد المركبة إلى الشكل .

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r \quad (16.7)$$

أنظر المسألة ٢

التحويل مخالف التغير :

بفرض أن الشكل ثنائي الخطية هو ذلك الوارد في الفقرة السابقة . إذا إخضعت المتغيرات x إلى التحويل $X = (C^{-1})^T U$ والمتغيرات y إلى التحويل $Y = C^T V$ فإننا نقول عن المتغيرات إنها قد تحولت بشكل مخالف التغير .

ونجد :

VIII. باستخدام تحويل مخالف التغير $X = (C^{-1})^T U$ و $Y = C^T V$ يتحول الشكل ثنائي الخطية $X^T A Y$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى الشكل ثنائي الخطية $U^T (C^{-1})^T A C^T V$.

IX. يتحول الشكل ثنائي الخطية $X^T Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ إلى الشكل ذاته فيما إذا كان (وإذا كان فقط) تحويل مجموعتي المتغيرات تم بواسطة تحويل مخالف التغير .

الشكل ثنائي الخطية القابل للتحليل لعوامل : سنبرهن في المسألة ٤ :

X. يمكن تحليل شكل ثنائي الخطية غير صفري لعوامل فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته مساوية الواحد .

مسائل محلولة

$$x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - 13x_1 y_3 - 4x_2 y_1 + 15x_2 y_2 - x_2 y_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} Y \quad ١$$

٢- اختزل $x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_1 y_3 - 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_2 y_3 + 3x_2 y_4 + 3x_3 y_1 + 4x_3 y_3 + x_3 y_4$ إلى شكل قاتون .

إن مصفوفة الصيغة هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. من المسألة ٦ من الفصل الخامس نجد أن المصفوفتين غير الشاذتين

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{تحققان العلاقة} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطيتين :

$$\begin{cases} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4 \\ y_2 = -\frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4 \\ y_3 = v_3 \\ y_4 = v_4 \end{cases} \quad , \quad Y = QV \quad , \quad \begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ x_2 = u_2 - u_3 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad , \quad X = P^T U$$

يجولان $X^T A Y$ إلى $u_1 v_1 + u_2 v_1$

٣- حول صيغة ثنائي الخطية المتماثل $X'AY = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} Y$ بواسطة تحويل موافق التغير (أ) إلى (16.5) حل

حلل الأعداد الجبرية ، (ب) إلى (16.6) على حلل الأعداد الحقيقية و (ج) إلى (16.7) على حلل الأعداد المركبة .

(أ) من المثال ١ - الفصل ١٥ - نجد أن التحويلين الخطيين $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} U$ ، $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V$

بحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(ب) من المثال ٢ - الفصل ١٥ - نجد أن التحويلين الخطيين $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$ ، $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$

بحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

(ج) من نتائج المثال ٢ من الفصل ١٥ ، يمكننا أن نجد

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

وهكذا فإن التحويلين الخطيين $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$ ، $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$ بحولان $X'AY$ إلى

$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

٤- برهن أنه ليكون شكل ثنائي الخطية غير صفري $f(x, y)$ قابلاً لتحليل إلى عوامل فإنه يلزم ويكفي أن تكون رتبته مساوية الواحد .

نفرض أن الشكل قابل لتحليل إلى عوامل : أي أن

$$\sum \sum a_{ij} x_i y_j = (\sum b_i x_i)(\sum c_j y_j) = \sum \sum b_i c_j x_i y_j$$

وعلى ذلك $a_{ij} = b_i c_j$. إن من الواضح أن أي مصفر من الدرجة الثانية من $A = [a_{ij}]$ مثل

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i b_j & a_i b_s \\ a_k b_j & a_k b_s \end{bmatrix} = b_j b_s \begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

يتلاشى وهذا يؤدي إلى أن رتبة A مساوية الواحد .

على العكس ، نفرض أن الشكل ثنائي الخطية من الرتبة ١ ، إذن نجد من النظرية ١ أنه يوجد تحويلات خطية غير شاذة تحول الشكل المفروض إلى $U'(BAC)V = u_1v_1$ ، والآن التحويلات المعكوسة لتحويلات

$v_i = \sum_j s_{ij} y_j$ ، $u_i = \sum_j r_{ij} x_j$
 تحول u_i, v_i إلى $f(x, y) = (\sum_j r_{ij} x_j)(\sum_j s_{ij} y_j)$ وعلى ذلك تكون $f(x, y)$ قابل التحليل إلى عوامل .

مسائل إضافية

٥ - أوجد تحويلات خطية تحتزل كلا من الصيغ ثنائية الخطية التالية إلى الشكل القانوني (16.4)

$$x_1 y_1 - 2x_1 y_3 + 3x_2 y_1 + x_2 y_2 - 3x_2 y_3 - x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_3 y_3 \quad (1)$$

$$X' \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} Y \quad X' \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} Y, \quad (ج) \quad X' \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y, \quad (ب)$$

٦ - أوجد تحويلا موافق التغير يحول :

$$(16.6) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} Y \quad (ب) \quad \text{و} \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix} Y \quad (أ)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

٧ - إذا كانت C_1, C_2 و B_1, B_2 مصفوفات مربعة من الدرجة n غير شاذة بحيث يكون $B_1 A_1 C_1 = B_2 A_2 C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد التحويل الذى يحول $X' A_1 Y$ إلى $U' A_2 V$.

$$\text{الجواب} \quad X = (B_2^{-1} B_1) U, \quad Y = C_1 C_2^{-1} V$$

٨ - فسر المسألة ٢٣ فى الفصل ٥ باستعمال زوج من الأشكال ثنائية الخطية .

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} V \quad \text{الجواب} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} U, \quad \text{٩ - اكتب التحويل مخالف التغير لـ}$$

١٠ - برهن أن تحويلا متعامدا هو تحويل مخالف التغير مع نفسه ، أى أن $X = P U$ و $Y = P V$.

١١ - برهن النظرية ١X

١٢ - إذا كان $X' A Y$ شكلا ثنائى الخطية حقيقيا وغير شاذ فإننا نسمى $X' A^{-1} Y$ بأنها صيغة ثنائى الخطية العكسية . برهن أنه إذا تحولت صيغتان ثنائيتا الخطية عكسيتان بشكل مخالف التغير بواسطة تحويل متعامد واحد ، فإنه ينتج عن ذلك شكلا ثنائيا الخطية عكسيان .

١٣ - استخدم المسألة ٤ من الفصل ١٥ لى ت برهن أنه يوجد تحويل موافق التغير $X = P U$, $Y = P V$ يحول شكلا ثنائى الخطية ومتناوبا رتبته $r = 2$ إلى الشكل القانوني .

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_3 v_4 - u_4 v_3 + \dots + u_{2t-1} v_{2t} - u_{2t} v_{2t-1}$$

١٤ - عين شكلا قانونيا لشكل ثنائى الخطية متناوب هرمي وهرمي .

إرشاد : أنظر (15.6) و (15.7)

الفصل السابع عشر

الصيغ التربيعية (الاشكال التربيعية)

يسمى كثير الحدود المتجانس من النوع

$$q = XAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (17.1)$$

والذى تكون معاملاته a_{ij} عناصر من F ، صيغة تربيعية على F في المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$

مثال ١ :

إن $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ صيغة تربيعية للمتغيرات x_1, x_2, x_3 يمكن كتابة مصفوفة هذه الصيغة بطرق مختلفة معتمدة على الطريقة التي توزع بموجبها حواصل ضرب الحدود التقاطعية (التصالية) $-4x_1x_2$ و $8x_1x_3$ لتكوين الحدود $a_{12}x_1x_2, a_{21}x_2x_1, a_{13}x_1x_3, a_{31}x_3x_1$ ، سنتفق على أن مصفوفة الصيغة التربيعية هي مصفوفة متماثلة ، وسنوزع حواصل ضرب التقاطعية بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$ وعلى ذلك

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

$$= X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$$

نسمى المصفوفة المتماثلة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة الشكل التربيعي (الصيغة التربيعية) ونسمى رتبة A رتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r بحيث تكون $n > r$ فإن الشكل يدعى شاذاً وفي الحالة المماكسة يدعى غير شاذ .

التحويلات :

إن التحويل الخطي $X = BY$ على F يحول الشكل التربيعي (17.1) ذا المصفوفة المتماثلة A على F إلى الشكل التربيعي

$$(BY)'A(BY) = Y'(B'AB)Y \quad (17.2)$$

فى المصفوفة المتماثلة $B'AB$

توصف صيغتان تربيعيتان في نفس مجموعة المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ بأنهما متكافئتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطي غير شاذ $X = BY$ الذى بالإضافة إلى $Y = IX$ ، يحول إحدى هاتين الصيغتين إلى الصيغة الأخرى . بما أن $B'AB$ متطابق مع A ، فإنه يكون :

- I. إن رتبة صيغة تربيعية تبقى ثابتة بعد إجراء تحويل غير شاذ للمتغيرات .
- II. يكون شكلان تربيعيان على F متكافئين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما متطابقتين على F .

ينتج عن المسألة ١ من الفصل ١٥ أن صيغة تربيعية رتيبها r يمكن أن تختزل للشكل

$$h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \dots + h_ry_r^2, \quad h_i \neq 0 \quad (17.3)$$

والتي توجد فيها حدود تربيعية فقط للمتغيرات بتحويل خطي غير شاذ $X = B Y$.
يجدر بنا أن نذكر أن المصفوفة B هي حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينما B' هي حاصل الضرب بترتيب معاكس ،
لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

مثال ٢ :

$$(17.3) \quad q = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X \quad \text{اختزل} \quad \text{الوارد في المثال ١ إلى الشكل}$$

$$[A \ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{لدينا :}$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right] = [D \ B']$$

$$q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2 \quad \text{بحول } q \text{ إلى} \quad X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا نجد أن}$$

أنظر المسألة ١ - ٢

طريقة لاجرانج للاختزال :

يمكن تحقيق الانتقال من شكل تربيعي إلى الشكل (17.3) بطريقة تعرف بطريقة لاجرانج وهي تقوم بشكل أساسي ،
على تكرار عملية الإتمام إلى مربع كامل .

مثال ٣ :

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{وهكذا نجد أن}$$

$$q \text{ حول } q \text{ إلى} \quad y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$$

أنظر المسألة ٣

الصيغ التربيعية الحقيقية :

نفرض الشكل التربيعي $q = X^T A X$ اختزل بواسطة تحويل حقيق غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إذا كان واحد أو أكثر من h_i سالباً ، فإنه يوجد تحويل غير شاذ $X = CZ$ ، حيث تنتج C عن B بمتتالية من تحويلات الصفوف والأعمدة من النوع ١ ، الذي يحول q إلى :

$$s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \dots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - \dots - s_r z_r^2 \quad (17.4)$$

والتي فيها تسبق الحدود ذات المعاملات الموجبة الحدود ذات المعاملات السالبة .
والآن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{aligned} w_i &= \sqrt{s_i} z_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ w_j &= z_j, \quad (j = r+1, r+2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$Z = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \dots, 1 \right) W \quad \text{أو}$$

يحول (17.4) إلى الصيغة القانونية .

$$w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \dots - w_r^2 \quad (17.5)$$

وحيث أن حاصل ضرب تحويلات غير شاذة هو تحويل غير شاذ ، فإنه يكون :

III. يمكن اختزال كل صيغة تربيعية حقيقية بواسطة تحويل حقيق غير شاذ إلى الصيغة القانونية (17.5) حيث تسمى p ، عدد الحدود الموجبة ، دليل الصيغة التربيعية المفروض و r رتبها .

مثال ٤ :

في المثال ٢ - الصيغة التربيعية $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ حُزمت إلى $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.
إن التحويل غير الشاذ $y_1 = z_1, y_2 = z_3, y_3 = z_2$ يحول q' إلى $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$. وإن التحويل غير الشاذ $z_1 = w_1, z_2 = w_2/3, z_3 = w_3/\sqrt{2}$ يحول q'' إلى $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

بتجميع التحويلات فإننا نجد أن التحويل الخطي غير الشاذ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} W \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x_1 &= w_1 + \frac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}w_3 \\ x_2 &= \frac{4}{3}w_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}w_3 \\ x_3 &= \frac{1}{3}w_2 \end{aligned}$$

يحول q إلى $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$. إن الصيغة التربيعية الناتجة من الرتبة ٣ والدليل ٢ .

قانون سيلفستر للقصور :

سنبرهن في المسألة ه قانون القصور :

IV. إذا اختزل شكل تربيعي حقيق بواسطة تحويلين غير شاذين إلى الصيغ القانونية (15.2) فإن هذين التحويلين يكون لهما نفس الرتبة والدليل .

وهكذا فإن دليل مصفوفة متماثلة حقيقية يعتمد على المصفوفة وليس على التحويلات الأولية التي تنتج (15.2) .

إن الفرق بين عدد الحدود الموجبة وعدد الحدود السالبة $p - (r - p)$ في (17.5) يدعى شارة الشكل التربيعي . كنتيجة للنظرية IV نجد :

V. يكون شكلان تربيعيان كل في n من المتغيرات متكافئين على حقل الأعداد الحقيقية ، إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

الصيغ التربيعية المركبة :

يفرض أن الشكل التربيعي المركب X^*AX يمكن اختزاله بتحويل غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إن من الواضح أن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{h_i} y_i , & (i = 1, 2, \dots, r) \\ z_j &= y_j , & (j = r+1, r+2, \dots, n) \end{aligned}$$

أو

$$Y = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \dots, 1 \right) Z$$

يحول (17.3) إلى

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2 \quad (17.6)$$

أى :

VI. يمكن اختزال كل شكل تربيعي على حقل الأعداد المركبة رتبته r بواسطة تحويل غير شاذ على حقل الأعداد المركبة إلى الشكل القانوني (17.6) .

VII. تكون صيغتان تربيعيتان مركبتان كل في n من المتغيرات . متكافئتين على الحقل المركب فيما إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة .

الصيغ (الأشكال) المحددة والصيغ (الأشكال) شبه المحددة :

نقول عن شكل تربيعي ، حقيقى غير شاذ $q = X^*AX$ حيث $|A| \neq 0$ في n من المتغيرات ، إنه محدد موجب فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين . وهكذا فإنه ، في حقل الأعداد الحقيقية ، يمكن اختزال شكل تربيعي محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ ويكون $0 < q$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة لمجموعة المتغيرات x .

يسمى الشكل التربيعي الحقيقى الشاذ $q = X^*AX$ حيث $|A| = 0$ ، شكلاً شبه محدد موجب فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين . أى إذا كان $p = r$ حيث $n > r$ ، وهكذا فإنه ، في الحقل الحقيقى يمكن اختزال شكل تربيعي شبه محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2$ ، ويكون $0 \leq q$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعي حقيقى غير شاذ $q = X^*AX$ إنه محدد سالب فيما إذا كان دليله $p = 0$ أى إذا كان $p = 0, n = r$. وهكذا فإنه ، في الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعي محدد سالب إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_p^2$ ، ويكون $0 > q$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعي حقيقى شاذ $q = X^*AX$ ، إنه شبه محدد سالب ، فيما إذا كان دليله $p = 0$ ، أى إذا كان $p = 0$ و $n > r$. وهكذا فإنه في الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعي شبه محدد سالب ، إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_p^2$ ويكون $0 \geq q$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

إن من الواضح أنه إذا كان q محدداً (شبه محدد) سالباً ، فإن $q -$ يكون محدداً (شبه محدد) موجباً .

يكون الشكل التربيعي المحدد الموجب :

VIII. إذا كان $q = X'AX$ محدداً موجباً فإن $0 < |A|$.

المصفورات الرئيسية :

نقول عن مصفر المصفوفة A إنه رئيسي فيما إذا حصلنا عليه بحذف بعض صفوف A والأعمدة ذات الأرقام المماثلة . وهكذا فإن العناصر القطرية لمصفر رئيسي للمصفوفة A هي عناصر قطرية في A .

سنبرهن في المسألة ٦ :

IX. إن لكل مصفوفة مماثلة رتبها r ، على الأقل ، مصفر رئيسي واحد من الدرجة r لا يساوي الصفر .

المصفورات المحددة وشبه المحددة :

تسمى المصفوفة A لصيغة تربيعية حقيقية $q = X'AX$ مصفوفة محددة أو شبه محددة إذا كان هذا الشكل التربيعي محدداً أو شبه محدداً ويكون :

X. تكون المصفوفة الحقيقية المماثلة A محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد مصفوفة غير شاذة C بحيث تحقق العلاقة $A = C'C$.

XI. تكون المصفوفة الحقيقية المماثلة A ذات الرتبة r يشبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r وبحيث تحقق العلاقة $A = C'C$.

أنظر المسألة ٧ .

XII. إذا كانت A محددة موجبة ، فإن كل مصفر رئيسي لـ A موجب .

أنظر المسألة ٨ .

XIII. إذا كانت A شبه محددة موجبة ، فإن كل مصفر رئيسي لـ A يكون غير سالب .

الصيغ التربيعية المنتظمة :

نمرف لمصفوفة مماثلة $A = [a_{ij}]$ على F . المصفورات الرئيسية المتقدمة ، كما يلي :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad p_n = |A| \quad (17.7)$$

سنبرهن في المسألة ٩ :

XIV. يمكن إعادة ترتيب أي مصفوفة A مربعة من الدرجة n غير شاذة بالمبادلة بين صفوف معينة والمبادلة بين الأعمدة المناظرة بحيث لا يكون p_{n-1} و p_{n-2} صفريين معاً .

XV. إذا كانت A مصفوفة مماثلة وكان $p_{n-2}p_n \neq 0$ و $p_{n-1} = 0$ فإن p_n و p_{n-2} يكون لهما إشارتان متضادتان .

مثال ٥ :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = |A| = 1. \quad \text{نجد أن} \quad X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} X, \quad \text{الصيغة التربيعية}$$

إن هنا $\alpha_{33} \neq 0$ إن التحويل $X = K_{34} \tilde{X}$ يؤدي إلى الشكل :

$$\tilde{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tilde{X} \quad (i)$$

والذي يكون له $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -1, p_4 = 1$ وهكذا فإنه في (i) لا يكون كل من p_2 و p_3 مساويين للصفر معا .
 نقول عن مصفوفة متماثلة A رتبها r إنها مصفوفة مرتبة بانتظام فيما إذا لم يكن حدان متتاليان p من المتوالية $p_0, p_1, \dots, p_r$ صفريين . عندما تكون A مرتبة بانتظام ، فإننا نقول إن الشكل التربيعي $X^T A X$ منتظم . إن الشكل منتظم في المثال ه غير منتظم ، وإن الشكل التربيعي (i) الوارد في هذا المثال منتظم .
 لتكن A مصفوفة متماثلة من الرتبة r . من النظرية IX ، تحوى A على الأقل مصغراً رئيسياً مربعاً M من الدرجة r عبر متلاشي والذي يمكن وضع عناصره في الزاوية العليا اليسرى من A . وهكذا فإن $p_r \neq 0$ بينما $p_{r+1} = p_{r+2} = \dots = p_n = 0$.
 من النظرية XIV يمكن إعادة ترتيب r صفاً الأول و r عموداً الأول بحيث يكون واحداً على الأقل من p_{r-2} و p_{r-1} غير مساو للصفر . إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ و $p_{r-2} = 0$ فإننا نطبق الطريقة السابقة على مصفوفة p_{r-1} ، إذا كان $p_{r-2} \neq 0$ فإننا نطبق هذه الطريقة على مصفوفة p_{r-2} وهكذا إلى أن يصبح M مرتباً بانتظام . وعلى ذلك .
 XVI . أى مصفوفة متماثلة (صيغة تربيعية) رتبها r يمكن ترتيبها بانتظام .

أنظر المسألة ١٠

XVII . يكون الشكل التربيعي الحقيقي $X^T A X$ محدداً موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة n وكانت جميع مصغراته الرئيسية المتقدمة موجبة .

XVIII . يكون الشكل التربيعي $X^T A X$ ذو الرتبة r شبه محدد موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) كل من المصغرات الرئيسية $p_0, p_1, \dots, p_r$ موجبة .

طريقة كرونكر للاختزال :

إن طريقة كرونكر لإختزال شكل تربيعي إلى شكل تربيعي آخر لا تظهر فيه إلا الحدود المربعة ، تقوم على ما يأتي :

XIX . إذا كان $X^T A X$ شكلاً تربيعياً على F في n متغيراً من الرتبة r فإنه يمكن تطبيق تحويل خطي غير شاذ على F ، نحوله إلى الشكل $q' = \tilde{X}^T B \tilde{X}$ بحيث يقع في الزاوية اليسرى العلوية B مصغراً C من A ، ذو r صفاً وغير شاذ . علاوة على ذلك يوجد تحويل خطي على F ، غير شاذ يختزل q إلى $q'' = \tilde{X}^T C \tilde{X}$ ، وهو شكل تربيعي غير شاذ في r متغيراً .
 XX . إذا كان $X^T A X$ شكلاً تربيعياً على F في n متغيراً وغير شاذ وإذا كان $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$ فإن التحويل الخطي غير الشاذ :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in} y_n , & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

أو

$$X = B Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

يحول q إلى $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_i y_j + p_{n-1} p_n y_n^2$ حيث عزل حد مربع واحد من بين المتغيرات .

مثال ٦ : لشكل التربيعي $X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$ نجد $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

إن التحويل الخطي غير الشاذ :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13} y_3 = y_1 - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23} y_3 = y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \alpha_{33} y_3 = -2y_3 \end{cases}$$

يختزل $X'AX$ إلى :

$$Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} Y$$

الذي يظهر فيه المتغير y_3 بشكل مربع فقط .

XXI. إذا كان $q = X'AX$ شكلاً تربيعياً غير شاذ على F وكان $\alpha_{n-1, n-1} = \alpha_{nn} = 0$ يبيأ $\alpha_{n, n-1} \neq 0$ فإن التحويل غير الشاذ على F :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i, n-1} y_{n-1} + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1, n} y_n, & x_n = \alpha_{n, n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

أو

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1, n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2, n-1} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-2, n-1} & \alpha_{n-2, n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n, n-1} & 0 \end{bmatrix} Y$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} y_i y_j + 2\alpha_{n, n-1} p_n y_{n-1} y_n.$$

يحول q إلى

إن التحويل الإضافي :

$$\begin{cases} y_i = z_i, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

يؤدى إلى $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} z_i z_j + 2\alpha_{n, n-1} p_n (z_{n-1}^2 - z_n^2)$ حيث عزل حدان تربيعيان لها إشارتين مختلفتين .

مثال ٧ : الشكل التربيعي :

$$X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} X$$

يكون $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ بينما $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. إن التحويل غير الشاذ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \alpha_{32}y_2 \end{cases}$$

يختزل $X'AX$ إلى الشكل :

$$Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2y_3$$

وإن التحويل :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z, \quad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{cases}$$

يحول $Y'BY$ إلى الشكل

$$Z' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z = Z' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

اعتبر الآن شكلاً تربيعياً في n متغيراً رتبته r . من النظرية XIX يمكن اختزال q إلى $q_1 = X'AX$ حيث يكون لـ A مصغر مربع من الدرجة r غير شاذ وواقع في الزاوية اليسرى والعلوية بينما تكون بقية العناصر أصفاراً . واستناداً إلى النظرية XVI يمكن ترتيب A بشكل نظامي .

إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ فإنه يمكن إستعمال النظرية XX لعزل حد مربع واحد :

$$p_{r-1} p_r y_r^2 \quad (17.8)$$

إذا كان $p_{r-1} = 0$ بينما $\alpha_{r-1, r-1} \neq 0$ فإن المبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين السمتين الأخيرين يؤدي إلى مصفوفة يكون فيها بالترتيب الجديد $p_{r-1} = \alpha_{r-1, r-1} \neq 0$. بما أن $p_{r-2} \neq 0$ فإنه يمكن

$$\text{استخدام النظرية } XX \text{ لعزل حدين مربعين} \\ p_{r-2} \alpha_{r-1, r-1} y_{r-1}^2 + \alpha_{r-1, r-1} p_r y_r^2 \quad (17.9)$$

والذى تكون إشارتهما متضادتان وذلك لأن إشارة p_{r-2} هى عكس إشارة p_r وذلك وفقاً للنظرية V X .
إذا كان $p_{r-1} = 0$ و $a_{r-1, r-1} = 0$ فإن (أنظر المسألة ٩) $a_{r, r-1} \neq 0$ ويمكن إستعمال النظرية XXI لعزل حدين مربعين :

$$2a_{r, r-1}p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2) \quad (17.10)$$

لها إشارتان مختلفتان .

يمكن تكرار هذه الطريقة حتى يختزل الشكل التربيعى المعطى إلى شكل تربيعى آخر لا يحوى سوى حدود مربعة للمتغيرات .
يكون الحد المعزول من (17.8) موجباً أو سالباً بحسب ما تكون المتوالية p_{r-1}, p_r إشارة ثابتة أو تتغيراً في
الإشارة . من الملاحظ في (17.9) و (17.10) أن المتوالتين : $p_{r-2}, a_{r-1, r-1}, p_r$ و $p_{r-2}, a_{r, r-1}, p_r$
تحويان ثباتاً واحداً في الإشارة وتغيراً واحداً في الإشارة بغض النظر عن إشارة $a_{r, r-1}$ و $a_{r-1, r-1}$.
وعلى ذلك .

XXII إذا اختزل الشكل التربيعى $q = X^T A X$ المنتظم ذا الرتبة r إلى شكل تربيعى قانونى بطريقة كرونكر
فإن عدد الحدود الموجبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تبقى فيها الإشارة ثابتة في المتوالية $p_0, p_1, p_2, \dots, p_r$
وأن عدد الحدود السالبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تتغير فيها الإشارة ، في هذه المتوالية . ويمكن حساب الصفر في المتوالية
إما حداً موجباً أو حداً سالباً ولكنه يجب أن يحسب .

أنظر المسائل ١١ - ١٣

الشكل التربيعى القابل للتحويل الى عوامل : لتكن $X^T A X \neq 0$ ذات المعاملات المركبة هي الصيغة التربيعية المعطية .
نفرض أن $X^T A X$ قد حلت لعوامل من الشكل

$$X^T A X = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n) \quad (i)$$

إذا كانت العوامل مستقلة خطياً فإنه يوجد على الأقل مصفوفة من الشكل

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$$

غير شاذة . نفرض

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

الشكل

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$$

أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها بحيث نأخذ

إن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \\ y_3 = x_3, \dots, y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $y_1 y_2$ فى الرتبة 2 . إذن (i) تكون من الرتبة 2 أيضاً .
إذا كانت العوامل مرتبطة خطياً أى يوجد على الأقل عنصر $a_i \neq 0$. نفرض أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها
بحيث يأخذ a_i موضع a_1 . إن التحويل غير الشاذ

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $\frac{b_1}{a_1} y_1^2$ فى الرتبة 1 . أى أن (i) من الرتبة 1 أيضاً .

على العكس إذا كان $X'AX$ من الرتبة 1 أو 2 فإنه يمكن اختزاله على التوالي بالنظرية VI إلى y_1^2 أو $y_1^2 + y_2^2$ ويمكن كتابة كل من هذين الشكلين ، في الحقل المركب ، كحاصل ضرب عاملين خطيين .
ونكون بهذا قد برهنا :

XXIII. يمكن وضع شكل تربيعي ذي عوامل مركبة $X'AX \neq 0$ بشكل حاصل ضرب معاملين خطيين فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته $r \geq 2$.

مسائل محلولة

$$1 - \text{اختزل } q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} X \quad \text{إلى الشكل (17.3)}$$

من المثال ١ - الفصل ١٥ ،

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [D|P']$$

$$X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

$$y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2.$$

يختزل q إلى الشكل المطلوب

$$2 - \text{اختزل } q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X \quad \text{الصيغة (17.3)}$$

نجد :

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [D|P']$$

$$X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

$$y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2.$$

يختزل q إلى

٣ - اختزال لاجرانج .

(١)

$$\begin{aligned} q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2\} \\ &\quad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2 \end{aligned}$$

$$2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2 \quad \text{يختزل } q \quad \text{إلى} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

(ب) الشكل التربيعي للمألة ٢ نجد ،

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

بما أن الشكل الأخير لا يحوى حدوداً في x_2^2 أو x_3^2 بل يحوى حداً في x_2x_3 فإننا نستعمل التحويل غير الشاذ :

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3 \quad (i)$$

المحصل على :

$$q = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2z_3 = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8(z_2 + \frac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X. \quad \text{وهكذا ،} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \quad (i) \quad \text{ومن} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$$

$$\text{أى أن التحويل غير الشاذ} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{يقوم بالاختزال المطلوب .}$$

٤ - باستخدام نتيجة المسألة ٢ نحصل على

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

وبتطبيق التحويلات $H_2(\frac{1}{8}\sqrt{2}), K_2(\frac{1}{8}\sqrt{2})$ و $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2}), K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$ نحصل على :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array} \right] = [C|Q']$$

$$q = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X \quad \text{يختزل ،} \quad X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

• - برهن أنه إذا تحول شكل تربيعي حقيقى q بواسطة تحويلين غير شاذين إلى شكلين متميزين مثل :

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \dots - y_r^2 \quad (i)$$

و

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \dots - y_r^2 \quad (ii)$$

الأول المصفوفة ولنفرض أيضاً ، أننا نقلنا الأعمدة ذات الأرقام $i_1, i_2, \dots, i_r$ بحيث تحتل مواقع r عموداً الأول .
والآن إن الصفوف r الأولى مستقلة خطياً بينما كل الصفوف الأخرى تراكيب خطية لها . فإذا أخذنا تراكيب خطية مناسبة للصفوف r الأولى المذكورة وأضافنا هذه التراكيب إلى الصفوف $(n-r)$ الباقية فإنه يمكن جعل هذه الصفوف أصفاراً . بما أن A مصفوفة ممتلئة فإن عمليات مماثلة على الأعمدة تجعل الأعمدة $(n-r)$ الأخيرة أصفاراً ، وهكذا نجد :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_r} & 0 \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \dots & a_{i_r i_r} & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right]$$

حيث يقع مصفر غير متلاشي في الزاوية اليسرى العلوية من المصفوفة . ومن الواضح أن هذا المصفر مصفر رئيسي لـ A .
٧ - برهن أن مصفوفة حقيقية ممتلئة A ذات رتبة r تكون شبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r بحيث يكون $A = C^T C$.

بما أن A من الرتبة r فإن شكلها القانوني هو $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. أى توجد مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $A = B^T N_1 B$.
بما أن $A = B^T N_1 B$ فإنه يكون $N_1' = N_1 = N_1^2$.
لنفرض $C = N_1 B$ فتكون C من الرتبة r و $A = C^T C$ كما هو مطلوب .

على العكس لنفرض أن C هي مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n والرتبة r فإن رتبة المصفوفة $A = C^T C$ هي s حيث $r \geq s$. لنفرض أن شكلها القانوني هو :

$$N_2 = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0)$$

حيث كل d_i إما أن يساوى $+1$ أو -1 . أى أنه توجد مصفوفة حقيقية غير شاذة E بحيث يكون $E^T(C^T C)E = N_2$.
لنفرض $CE = B = [b_{ij}]$. بما أن $B^T B = N_2$ فإننا نجد :

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \dots + b_{in}^2 = d_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

و

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \dots + b_{jn}^2 = 0, \quad (j = s+1, s+2, \dots, n)$$

إن من الواضح أن كل $d_i < 0$ وأن A شبه محددة موجبة .

٨ - برهن أنه إذا كانت A محددة موجبة فإن كل مصفر رئيسي لـ A يكون موجباً .

لنفرض $q = X^T A X$. إن المصفر الرئيسي لـ A الناتج عن حذف الصف والعمود اللذين رقمهما i هو المصفوفة A_i للشكل التربيعي q_1 الذى ينتج عن q بوضع $x_i = 0$. والآن كل قيمة لـ q_i ، لمجموعة غير تافهة من القيم المعطاة لمتغيراته ، هي قيمة أيضاً لـ q وعلى ذلك فهي موجبة . أى أن A_i محدد موجب .

يمكن تكرار هذا البرهان للمصفرات الرئيسية $A_{ij}, A_{ijk}, \dots$ الناتجة عن A بعد حذف اثنين ، ثلاثة ... من صفوف A ونفس الأعمدة .

من النظرية VI يكون $A_i > 0, A_{ij} > 0, \dots$ أى أن كل مصفر رئيسي موجب

٩ - برهن أنه يمكن إعادة ترتيب كل مصفوفة مربعة غير شاذة ومن الدرجة n ، $A = [a_{ij}]$ بالمبادلة بين صفوف معينة منها والمبادلة بين الأعمدة المناظرة بحيث لا يكون p_{n-1} و p_{n-2} معلومين معا .

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة لمصفوفة A من الدرجة 1 أو من الدرجة 2 وعلاوة على ذلك ، فإنها صحيحة لمصفوفة A درجتها $2 < n$ عندما يكون $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. لنفرض أن $\alpha_{nn} = 0$ ؛ فيكون إما (١) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ لايساوى الصفر وإما (ب) كل $\alpha_{ii} = 0$.

لنفرض (١) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ فإذا نقلنا الصف ذا الرقم i والعمود ذا الرقم i إلى موقعي الصف والعمود الأخيرين فإنه يكون المصفوفة الجديدة $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

لنفرض الآن (ب) كل $\alpha_{ii} = 0$. بما أن $|A| \neq 0$ فإن واحداً على الأقل من $\alpha_{ni} \neq 0$. لنقل الصف ذا الرقم i إلى موضع الصف ذي الرقم $(n-1)$ والعمود ذا الرقم i إلى موضع العمود ذا الرقم $(n-1)$. فيكون في المصفوفة الجديدة $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0$. استناداً إلى (6.6) نجد :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1,n}^2 = p_{n-2}p_n$$

و $p_{n-2} \neq 0$.

لاحظ أن هذا يبرهن النظرية XV أيضاً .

$$10 - \text{ أعد ترقيم المتغيرات بحيث يصبح } q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \text{ منتظماً .}$$

نجد هنا أن $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -4, p_4 = -3$ ، بما أن $p_1 = p_2 = 0, p_3 \neq 0$ ،

$$\text{فإننا ندرس المصفوفة } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ لـ } p_3 \text{ . إن المعامل المرافق ، } B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ وإن المبادلة بين}$$

الصف الثاني والثالث ثم بين العمود الثاني والثالث من A يعطينا :

$$\bar{X} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

حيث يكون $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -4, p_4 = -3$ ، ونكون ، هنا ، x_2 قدرقت x_3 و x_3 قدرقت x_2

$$11 - \text{ اختزل بطريقة كرونكر } q = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} X .$$

نجد هنا أن $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = -3, p_3 = 20, p_4 = -5$ وأن q منتظم . إن متوالية p نحوى ثباتاً واحداً وثلاثة تغيرات في الإشارة وإن الشكل المختزل يحوى حداً واحداً موجباً وثلاثة حدود سالبة .

بما أن كل $p_i \neq 0$ فإن تكرار استعمال النظرية XIX يؤدي بنا إلى الشكل المختزل

$$p_0 p_1 y_1^2 + p_1 p_2 y_2^2 + p_2 p_3 y_3^2 + p_3 p_4 y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

$$q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} X. \quad ١٢ - \text{اختزل بطريقة كرونكر}$$

إن A هنا من الرتبة 3 و $\alpha_{33} \neq 0$ وإن مبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين العمودين الأخيرين تحول A إلى

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{حيث } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{بما أن } B \text{ من الرتبة الثالثة فإنه يمكن اختزالها إلى الشكل}$$

$$p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -1. \quad \text{ويكون لهذا الشكل } \tilde{X}'C\tilde{X} = \tilde{X}' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tilde{X} \quad \text{وهكذا فإن } q \text{ قد اختزل إلى الشكل}$$

يجب أن يحوى الشكل المختزل حدين موجبين وحداً واحداً سالباً . بما أن $p_2 = 0$ ، بينما $p_1 = 1$ ، $p_3 = -1$ ، $p_0 = 1$ ، $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ ، γ_{22} ولشكل المختزل يكون استناداً إلى (16.8)

$$p_0 p_1 y_1^2 + p_1 \gamma_{22} y_2^2 + \gamma_{22} p_3 y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

$$q = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X. \quad ١٣ - \text{اختزل بطريقة كرونكر}$$

نجد هنا : $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -9, p_4 = 27$ ، وأن الشكل المختزل سيحوى حدين موجبين وحدين سالبين . اعتبر

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة } p_3. \quad \text{بما أن } \beta_{33} = 0 \text{ ، بينما } \beta_{32} = -3 \neq 0 \text{ فإن الشكل المختزل يكون بواسطة (16.8) و (16.9) هو :}$$

$$p_0 p_1 y_1^2 + 2\beta_{32} p_3 (y_2^2 - y_3^2) + p_3 p_4 y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

١٤ - برهن أنه لمجموعة من المتجهات الحقيقية ذات n مركبة $X_1, X_2, \dots, X_n$ يكون

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

حيث تتحقق المساواة إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المجموعة مرتبطة خطياً .

(أ) لنفرض أن المتجهات X_i مستقلة خطياً ولنفرض $X = [x_1, x_2, \dots, x_p]' \neq 0$ ، فيكون $Z = \sum_{i=1}^p X_i x_i \neq 0$

$$0 < Z \cdot Z = \left(\sum_{i=1}^p X_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^p X_j x_j \right) = X' (X_i \cdot X_j) X = X' (X_i \cdot X_j) X = X' G X$$

وحيث أن هذا الشكل التربيعي محدد موجب $|G| > 0$.

(ب) لنفرض أن المتجهات X_i مرتبطة خطياً فإنه توجد مقادير عديدة $k_1, k_2, \dots, k_p$ ليست كلها أصفاراً بحيث

$$\xi = \sum_{i=1}^p k_i X_i = 0 \quad \text{ينتج عن ذلك ؛}$$

$$X_j \cdot \xi = k_1 X_j \cdot X_1 + k_2 X_j \cdot X_2 + \dots + k_p X_j \cdot X_p = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

وهكذا فإنه يكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$X_j \cdot X_1 x_1 + X_j \cdot X_2 x_2 + \dots + X_j \cdot X_p x_p = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

حل غير تافه، $|G| = 0$ ويكون $x_i = k_i$, $(i = 1, 2, \dots, p)$.

لقد برهننا أنه $0 \leq |G|$ ولبرهان عكس (ب) علينا فقط أن نفرض أن $|G| = 0$ ونعكس مراحل (ب) لكي نحصل

على $X_j \cdot \xi = 0, (j = 1, 2, \dots, p)$ حيث $\xi = \sum_{i=1}^p k_i X_i$. وهكذا فإن $\xi \cdot \xi = 0, \xi = 0$. وأن المتجهات المعطية X_i تكون مرتبطة خطياً.

مسائل إضافية

١٥ - اكتب الأشكال التربيعية التالية في صورة المصفوفات :

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3 \quad (أ) \quad x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 \quad (ب) \quad 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$$

$$\text{الحلول : (أ) } X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix} X \quad (ب) \quad X' \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$X' \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (١) \quad \text{١٦ - اكتب بالتفصيل الشكل التربيعي في المتغيرات } x_1, x_2, x_3 \text{ الذي مصفوفته هي}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{الحلول : } 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$$

١٧ - اختزل بطريقة المسألة ١ وبطريقة لا جرانج للاختزال :

$$X' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (أ) \quad X' \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (ب) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} X \quad (ج) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix} X \quad (١)$$

$$\text{الحلول : (أ) } y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2 \quad (ب) \quad y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 \quad (ج) \quad y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2 \quad (د) \quad y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

$$\text{إرشاد : استخدم في (ج) و (د) } x_1 = z_3, x_2 = z_1, x_3 = z_2.$$

$$\text{١٨ - (أ) برهن أن } X' \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X \quad \text{ولكن المصفوفتين لهما رتبتان مختلفتان.}$$

(ب) برهن أن المصفوفة المتأثلة لشكل تربيعي وحيدة.

$$\text{١٩ - برهن أن } x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 \text{ و } 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3 \text{ تتكافئان على الحقل الحقيقي.}$$

الفصل الثامن عشر

الصيغ الهرميتية

ان الشكل (الصيغة) المعروف بـ :

$$h = \bar{X}'HX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \bar{x}_i x_j, \quad \bar{h}_{ij} = h_{ji} \quad (18.1)$$

حيث H مصفوفة هرميتية ومركبات X من حقل الأعداد المركبة ، يدعى شكلاً هرميتية (صيغة هرميتية) . تدعى رتبة H برتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r حيث $n > r$ فإن هذا الشكل يدعى شاذاً وفي الحالة المخالفة يدعى غير شاذ .

إذا كان H و X حقيقيين فإن (18.1) يكون شكلاً حقيقياً ترييماً ، إننا سوف نجد هنا أن النظريات ستكون مشابهة لتلك الواردة في الفصل ١٧ ولكن البراهين ستختلف قليلاً عن تلك الواردة في الفصل المذكور .

بما أن H هرميتية فإن كل h_{ii} حقيقى وأن كل $h_{ij} \bar{x}_i x_j$ حقيقى أيضاً ، وعلاوة على ذلك سيكون لزوج حاصل الضرب التقاطعيين $h_{ij} \bar{x}_i x_j$ ، $h_{ji} \bar{x}_j x_i$ ،

$$h_{ij} \bar{x}_i x_j + h_{ji} \bar{x}_j x_i = h_{ij} \bar{x}_i x_j + \bar{h}_{ij} x_i \bar{x}_j$$

حقيقية . وهكذا نجد :

I إن قيم الشكل الهرميتى حقيقية .

إن التحويل الخطى غير الشاذ $X=BY$ يحول الشكل الهرميتى (18.1) إلى شكل هرميتى آخر .

$$(\bar{B}Y)'H(BY) = \bar{Y}'(\bar{B}'HB)Y \quad (18.2)$$

نقول عن شكلين هرميتيين في نفس مجموعة المتغيرات x_i ، إنهما متكافئان إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يحول بالإضافة إلى $Y=IX$ أحد هذين الشكلين إلى الآخر . بما أن $\bar{B}'HB$ و H مصفوفتان مقترنتان فإنه يكون :

II لا تتغير رتبة شكل هرميتى بتحويل غير شاذ للمتغيرات .

III يكون شكلان هرميتيان متكافئين إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما مقترنتين .

الاختزال لشكل قانونى :

يمكن اختزال شكل هرميتى (18.1) رتبته r إلى الشكل القطرى :

$$k_1 \bar{y}_1 y_1 + k_2 \bar{y}_2 y_2 + \dots + k_r \bar{y}_r y_r, \quad \text{حيث } k_i \neq 0 \text{ وحقيقى} \quad (18.3)$$

باستخدام تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يتضح من (18.2) أن B حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينا $\bar{B}$ هى حاصل ضرب ، بترتيب معاكس ، لمصفوفات الصفوف الأولية المرافقة .

باستخدام تحويل خطى آخر ، يمكن تحويل (18.3) إلى الشكل القانونى (أنظر (15.6))

$$\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \dots - \bar{z}_r z_r \quad (18.4)$$

الذي دليله p وشارته $p - (r - p)$. وهنا أيضاً ، تعتمد p على الصيغة المطاة ولا يعتمد على التحويل الذي حول هذا الشكل إلى (18.4).

IV. يكون شكلان هرميتيان في نفس مجموعة المجاهيل والتي عددها n ، متكافئين ، إذا كان (وإذا كان فقط) لها الرتبة ذاتها والدليل ذاته أو الرتبة ذاتها ونفس الشارة .

الاشكال المحددة والاشكال شبه المحددة :

يسمى الشكل الهرميتي غير الشاذ $h = X' H X$ في n متغيراً ، شكلاً محدداً موجباً إذا كان كل من رتبته ودليله مساوياً n أى أنه يمكن اختزال شكل هرميتي محدد موجب إلى الشكل $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \dots + \bar{y}_n y_n$ يكون $0 < h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

نقول عن شكل هرميتي شاذ $h = X' H X$ إنه شبه محدد موجب إذا كانت رتبته مساوية لدليله أى $r = p$ حيث $n > p$. أى أن يمكن تحويل شكل هرميتي شبه محدد موجب إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \dots + \bar{y}_r y_r$ ، $r < n$ وأن $0 \leq h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

تدعى المصفوفة H للشكل الهرميتي $X' H X$ ، مصفوفة محددة موجبة أو مصفوفة شبه محددة موجبة ، حسبما يكون هذا الشكل محدداً موجباً أو شبه محدد موجب .

V. يكون الشكل الهرميتي محدداً موجباً إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة غير شاذة C بحيث يكون $H = C' C$.

VI. إذا كانت H محددة موجبة فإن كل مصغر رئيسي لـ H موجب والعكس صحيح .

VII. إذا كانت H شبه محددة موجبة فإن كل مصغر رئيسي لـ H يكون غير سالب والعكس صحيح .

مسائل محلولة

$$1 - \text{اختزل } \bar{X} \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix} X \text{ إلى شكل قانونى (18.4).}$$

من المسألة ٧ من الفصل ١٥

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{HC} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

وهكذا فإن التحويل الخطى غير الشاذ :

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

يختزل الشكل الهرميتي المطى إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3$.

مسائل إضافية

٢ - اختزل كلا عامل ، إلى الشكل القانوني :

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix} X \quad (ج) \quad \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix} X \quad (ا)$$

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix} X \quad (د) \quad \bar{X}' \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} X \quad (ب)$$

إرشاد : في (ب) اضرب أولا المصفى الثاني من H في i ثم أضف الناتج إلى المصفى الأول .

الجواب :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ا)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ب)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ج)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3 \quad (د)$$

٣ - أوجد التحويل الخطي $X=BY$ الذى ، إذا اتبع بـ $Y=IX$ ، يحول (ا) من المسألة ٢ إلى (ب) من المسألة نفسها .

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{الجواب :}$$

$$٤ - \text{بين أن } \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix} X \text{ محدد موجب وأن } \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix} X \text{ شبه محدد موجب .}$$

٥ - برهن النظريات VII-VI

٦ - أوجد للأشكال الهرميتية ، نظريات مشابهة للنظريات XIX - XXI الواردة في الفصل ١٧ والمتعلقة بالأشكال

الترييمية .

$$H = |h_{ij}| \quad \text{حيث } \eta_{ij} \text{ هو المعامل المرافق لـ } h_{ij} \text{ في } H = |h_{ij}| \quad \text{برهن أن :}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \bar{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ \bar{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \bar{x}_i x_j$$

إرشاد : استعمل (4.3) .

الفصل التاسع عشر

المعادلة المميزة لمصفوفة

المسألة :

ليكن $Y = AX$ ، حيث $A = [a_{ij}]$ ، $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ ، تحويل خطي على F . على وجه المصوم يحول هذا التحويل المتجه $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ إلى المتجه $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ الذي يكون صلته بالمتجه X من خلال هذا التحويل . سنحاول هنا ، النظر في إمكان وجود بعض المتجهات X التي تتحول بهذا التحويل إلى λX . حيث λ إما أن يكون مقداراً عددياً من F أو من حقل $(\mathcal{F})$ يكون F حقلاً جزئياً منه .

يسمى أى متجه X ، يتحول وفق هذا التحويل إلى λX أى أن ، أى متجه X يحقق العلاقة :

$$AX = \lambda X \quad (19.1)$$

متجهاً لا متغيراً بالنسبة لهذا التحويل .

المعادلة المميزة : من (19.1) يكون لدينا

$$\lambda X - AX = (\lambda I - A)X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (19.2)$$

تكون لمجموعة المعادلات المتجانسة (19.2) حلول غير تافهة فيما إذا كانت (وإذا كان فقط) .

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (19.3)$$

إن مفكوك هذه المحددة يعطى كثير حدود $\phi(\lambda)$ من الدرجة n بالنسبة لـ λ والذي يعرف بإسم كثير الحدود المميز للتحويل المفروض أو للمصفوفة A . تدعى المعادلة $\phi(\lambda) = 0$ المعادلة المميزة لـ A وتسمى جذورها $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ الجذور المميزة لـ A . إذا كان $\lambda = \lambda_i$ جذراً مميزاً فإنه يكون للمعادلة (19.2) حلول غير تافهة هي مركبات المتجهات المميزة أو الإلتفاتية المصاحبة المناظرة لهذه القيمة الخاصة (المميزة) . تدعى القيم الخاصة أيضاً ، الجذور الكامنة كما تدعى المتجهات الخاصة ، متجهات كامنة .

مثال ١ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{عين القيم الخاصة والمتجهات اللامتغيرة المرافقة للمصفوفة}$$

إن المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ والقيم المميزة $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

إذا كان $\lambda = \lambda_1 = 5$ فإن (19.2) تأخذ الشكل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

بما أن $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ مكافئ صفي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

فإن أحد الحلول يعطى بالملاقة $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ وهكذا فإنه يرافق القيمة الخاصة (الجذر المميز) $\lambda = 5$ فراغ اتجاهي ذو بعد واحد مولد بالمتجه $[1, 1, 1]$ إن كل متجه $[k, k, k]$ من هذا الفراغ هو متجه لا متغير لـ A .
عندما تكون $\lambda = \lambda_2 = 1$ فإن (19.2) يأخذ الشكل :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

إن $(1, 0, -1)$ و $(2, -1, 0)$ حلان مستقلان خطيا . وهكذا فإن الفراغ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 1$ هو الفراغ الاتجاهي الذي بعده هو 2 والمولد بالمتجهين $X_1 = [2, -1, 0]$ و $X_2 = [1, 0, -1]$ إن كل متجه $kX_1 + kX_2 = [2k+k, -k, -k]$ هو متجه لا متغير لـ A .

أنظر المسألتين ١ - ٢

نظريات عامة :

سنبرهن في المسألة ٣ حالة خاصة ($k = 3$) من
I. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ جذورا خاصة مختلفة (متميزة) للمصفوفة A وإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_k$ هي متجهات غير صفيرية لا متغيرة مصاحبة على الترتيب لهذه الجذور فإن المتجهات X تكون مستقلة خطيا .

سنبرهن في المسألة ٤ حالة خاصة ($n = 3$) من

II. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكانت $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$ فإن مشتقة $\phi(\lambda)$ من المرتبة k بالنسبة إلى λ يساوي k مرة مجموع المصفرات الرئيسية من الدرجة $(n-k)$ للمصفوفة المميزة إذا كانت $n > k$ ويساوي n مرة إذا كانت $k = n$ ويساوي الصفر إذا كان $n < k$.

كنتيجة للنظرية II نجد :

III. إذا كانت λ جذرا مميزا مكررا r من المرات للمعادلة المميزة للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة المصفوفة $\lambda I - A$ لا تتقصر عن $n-r$ وإن بعد الفراغ الاتجاهي اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .
أنظر المسألة ٥

بصورة خاصة :

III. إذا كان λ_i جذرا بسيطا للمعادلة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n فإن رتبة $\lambda_i I - A$ تساوى $(n-1)$ وإن سمة الفراغ الاتجاهي للامتغير المصاحب تساوى الواحد .

مثال ٢ :

إن المعادلة المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ الواردة في المثال ١ هي $\phi(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$

إن المتجه للامتغير $[1, 1, 1]^T$ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 5$ وإن المتجهين للامتغيرين المستقلين خطيا $[2, -1, 0]^T$ و $[1, 0, -1]^T$ المصاحبين للجذر المضاعف $\lambda = 1$ تكون مجموعة مستقلة خطا (أنظر النظرية I) .
إن بعد الفراغ الاتجاهي للامتغير ، المصاحب للجذر البسيط المميز $\lambda = 5$ تساوى الواحد وإن بعد الفراغ الاتجاهي للامتغير المصاحب للجذر المميز $\lambda = 1$ المضاعف من القوة 2 يساوى 2 (أنظر النظريتين III و III') .
أنظر أيضاً المسألة رقم ٦

بما أن مصفر رئيسي لـ A يساوى المصفر الرئيسي المقابل من A فإننا نجد استنادا إلى العلاقة (19.4) من المسألة ١ :
IV. إن القيم الخاصة لـ A هي نفسها القيم الخاصة لـ A' .

بما أن أى مصفر رئيسي لـ A هو المرافق للمصفر الرئيسي المناظر من A فإنه يكون .

V. إن الجذور المميزة لكل من A و A' تكون المرافقة للجذور المميزة لـ A .

وإذا قارنا المعادلات المميزة فإننا نجد .

VI. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كانت k مقدارا عدديا فإن $k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n$ تكون القيم الخاصة (الجذور المميزة) لـ kA .

VII. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كان k مقدارا عدديا فإن $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \dots, \lambda_n - k$ تكون هي القيم الخاصة لـ $A - kI$.
سنبرهن في المسألة v :

VIII. إذا كانت α جذرا مميزا لمصفوفة غير شاذة A فإن $|A| / \alpha$ يكون جذرا خاصا لـ $\text{adj } A$.

مسائل محلولة

١ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \dots + s_{n-1} \lambda + (-1)^n |A| \quad (19.4)$$

حيث $(m = 1, 2, \dots, n-1)$ يمثل $(-1)^m$ من المرات مجموع كل المصفرات الرئيسية ذات الدرجة m للمصفوفة A نكتب من جديد $|\lambda I - A|$ بالشكل :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \dots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & 0 - a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث يوضع كل عنصر في هذه المحددة بشكل ثنائي الحد . لنفرض أننا عبرنا عن هذه المحددة بمجموع 2^n من المحددات وفقا للنظرية VIII من الفصل الثالث . يتكون قطر إحدى هذه المحددات من عناصر يساوى كل منها λ بينما تكون بقية عناصر المحددة أصفارا وتساوى قيمة هذه المحددة λ^n . وهناك محددة أخرى خالية من λ قيمتها هي $(-1)^n |A|$. أما بقية المحددات فإن كلا منها يحوى m عمودا حيث $(m = 1, 2, \dots, n-1)$ من $-A$ بينما يحوى كل عمود من الأعمدة الـ $n-m$ الباقية عنصرا وحيدا غير صفري يساوى λ .

اعتبر واحد من هذه المحددات ولنفرض أن أعمدته المرققة بالشكل $i_1, i_2, \dots, i_m$ أعمدة من $-A$.

بعد عدد زوجي من المبادلات (عد ذلك) بين صفين متتالين متجاورين وعمودين متتالين (متجاورين) تأخذ هذه المحددة الشكل .

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{i_1, i_1} & a_{i_1, i_2} & \dots & a_{i_1, i_m} & & \\ a_{i_2, i_1} & a_{i_2, i_2} & \dots & a_{i_2, i_m} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{i_m, i_1} & a_{i_m, i_2} & \dots & a_{i_m, i_m} & & \\ \hline & & & & \lambda & 0 \dots 0 \\ & & & & 0 & \lambda \dots 0 \\ & & & & \dots & \dots \\ a_{i_n, i_1} & a_{i_n, i_2} & \dots & a_{i_n, i_m} & & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \lambda^{n-m}$$

حيث $\begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ مصغر رئيسي من الدرجة m لـ A والآن

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$$

حيث يضم التجميع $\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \ 2 \dots m}$ من التوافق المختلفة لـ $1, 2, \dots, n$ أخذت m في كل مرة .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

٢ - استخدم العلاقة (19.4) في المسألة ١ لفك $|\lambda I - A|$ إذا علمت أن

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5 \quad \text{نجد}$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$|A| = 2$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2. \quad \text{أى}$$

٣ - لتكن $\lambda_1, X_1; \lambda_2, X_2; \lambda_3, X_3$ نفا خاصة (جنور مميزة) مختلفة (متباينة) والمتجهات اللامتغيرة المصاحبة للمصفوفة A برهن أن X_1, X_2, X_3 مستقلة خطيا .

لنفرض أن العكس هو الصحيح أى لنفرض وجود مقادير عددية a_1, a_2, a_3 ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0 \quad (i)$$

لنضرب (i) بـ A علما بأن $A X_i = \lambda_i X_i$ فنجد :

$$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + a_3 A X_3 = a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + a_3 \lambda_3 X_3 = 0 \quad (ii)$$

لنضرب (ii) في A فنجد :

$$a_1 \lambda_1^2 X_1 + a_2 \lambda_2^2 X_2 + a_3 \lambda_3^2 X_3 = 0 \quad (iii)$$

والآن ممكن كتابة العلاقات (i) ، (ii) ، (iii) كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (iv)$$

من المسألة ٥ من الفصل ٣ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \neq 0$ أى أن B^{-1} موجودة . لنضرب (iv) في B^{-1} فنجد

$[a_1 X_1, a_2 X_2, a_3 X_3]' = 0$ وهذا يتطلب أن يكون $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ وهو ما يتعارض مع الفرض

أى أن X_1, X_2, X_3 تكون مستقلة خطيا .

$$\text{نجد : } \phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi'(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

وهذا يساوى مجموع المصنرات الرئيسية للمصفوفة $I - A$ ذات الدرجة الثانية .

$$\begin{aligned} \phi''(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\{(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})\} \end{aligned}$$

وهذا يساوى $2!$ من المرات مجموع المصنرات الرئيسية للمصفوفة $I - A$ ذات الدرجة الواحدة

$$\phi'''(\lambda) = 3!$$

$$\text{ونجد أيضا } \phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \dots = 0.$$

٥ - برهن أنه إذا كانت λ_i جذرا مميزا مكرر r من المرات للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة $I - A$ لا تقل عن $n - r$ وأن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .

بما أن λ_i جذرا مكرر r من المرات المعادلة $\phi(\lambda) = 0$ فإن $\phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \dots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ فإن $\phi(\lambda_i) \neq 0$ والآن $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$ يساوي $r!$ مرة مجموع المصفرات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ المصفوفة $I - A$ لذلك لا يمكن أن يتلشى كل واحد من هذه المصفرات الرئيسية فينتج عن هذا أن رتبة $I - A$ لا يمكن أن تكون أقل من $(n-r)$ وينتج عن (11.2) أن الفراغ الاتجاهي اللامتغير المصاحب لـ $I - A$ لأي فراغه الصفري ، ذو رتبة لا تزيد عن r .

٦- أوجد المصفوفة الواردة في المسألة ٢ القيم الخاصة والفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المصاحبة .

إن القيم الخاصة لهذه المصفوفة هي 1, 1, 1, 2

للقيمة $\lambda = 2$ نجد أن $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تكون رتبها ثلاثة ويكون بعد فراغها الصفري الواحد ويتولد الفراغ الاتجاهي اللامتغير الخاص المصاحب بالمتجه $[2, 3, -2, -3]$

للقيمة $\lambda = 1$ نجد أن رتبة $I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي الثالثة ويكون بعد فراغه الصفري

هو الواحد . أما الفراغ الاتجاهي اللامتغير المصاحب فإنه يتولد بالمتجه $[3, 6, -4, -5]$

٧- برهن أنه إذا كانت α قيمة خاصة لا تساوي الصفر لمصفوفة A مربعة غير شاذة ومن الدرجة n فإن $|A|/\alpha$ تكون قيمة خاصة لـ $\text{Adj} A$

من المسألة ١ يكون :

$$\alpha^n + s_1 \alpha^{n-1} + \dots + s_{n-1} \alpha + (-1)^n |A| = 0 \quad (i)$$

حيث s_i يساوي $(-1)^i$ من المرات مجموع كل المصفرات الرئيسية ذات الدرجة i لـ A ويكون

$$|\mu I - \text{adj } A| = \mu^n + S_1 \mu^{n-1} + \dots + S_{n-1} \mu + (-1)^n |\text{adj } A|$$

حيث S_j يساوي $(-1)^j$ من المرات مجموع المصفرات الرئيسية ذات الدرجة j لـ $\text{adj } A$

استنادا إلى (6.4) وتعريف كل من s_i و S_j يكون $S_j = (-1)^j |A|^{n-j} s_1$ ، $s_1 = (-1)^1 s_{n-1}$ ، $S_2 = (-1)^2 |A| s_{n-2}$ ، $\dots$ ، $S_{n-1} = (-1)^{n-1} |A|^{n-1} s_1$ ، و $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ أي :

$$|\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n \{ (-1)^n \mu^n + s_{n-1} \mu^{n-1} + s_{n-2} |A| \mu^{n-2} + \dots + s_2 |A|^{n-3} \mu^2 + s_1 |A|^{n-2} \mu + |A|^{n-1} \}$$

$$|A|^{1-n} |\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n \{ 1 + s_1 \left(\frac{\mu}{|A|} \right) + \dots + s_{n-1} \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^n |A| \} = f(\mu)$$

والآن :

$$f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n \{ 1 + s_1 \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \dots + s_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n |A| \}$$

ومن (i) نجد :

$$\alpha^n f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n \{ \alpha^n + s_1 \alpha^{n-1} + \dots + s_{n-1} \alpha + (-1)^n |A| \} = 0$$

أي أن $|A|/a$ قيمة خاصة لـ $adj A$

٨- برهن أن المعادلة المميزة لمصفوفة متعامدة P هي معادلة عكسية
إن لدينا :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda PIP' - P| = |-P\lambda(\frac{1}{\lambda}I - P')| = \pm \lambda^n |\frac{1}{\lambda}I - P| = \pm \lambda^n \phi(\frac{1}{\lambda})$$

مسائل محلولة

٩- أوجد المصفوفات التالية القيم الخاصة (الجذور المميزة) لكل فراغ وأساس اتجاهي لا متغير مصاحب

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ط) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (هـ) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ج) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ا) } \\ & \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix} \text{ (ي) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ح) } \quad \begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ز) } \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \\ & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (م) } \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ (ل) } \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ك) } \end{aligned}$$

الجواب :

١. $[1, 1, 1]'$ ٢. $[2, 1, 0]'$ ٣. $[1, -1, -2]'$ (ا)
- 1, $[1, 0, 1]'$ ٢. $[1, 3, 1]'$ ١. $[3, 2, 1]'$ (ب)
١. $[1, 1, -1]'$ ٢. $[2, -1, -2]'$ (ج)
١. $[1, -1, 0]'$ (د)
٢. $[2, -1, 0]'$ ٠. $[4, -1, 0]'$ ١. $[4, 0, -1]'$ (هـ)
٠. $[3, -1, 0]'$ ١. $[12, -4, -1]'$ (و)
١. $[1, 0, -1]'$ ٠. $[0, 1, -1]'$ ٣. $[1, 1, 0]'$ (ز)
٠. $[1, -1, 0]'$ ١. $[0, 0, 1]'$ ٤. $[1, 1, 0]'$ (ح)
- 1, $[0, 1, -1]'$ i , $[1+i, 1, 1]'$ $-i$, $[1-i, 1, 1]'$ (ط)
٢. $[1, 0, 1]'$ $1+i$, $[0, 1, 0]'$ $2-2i$, $[1, 0, -1]'$ (ي)
١. $[1, 0, -1, 0]'$ $[1, -1, 0, 0]'$ ٢. $[-2, 4, 1, 2]'$ ٣. $[0, 3, 1, 2]'$ (ك)
١. $[1, 2, 3, 2]'$ -1, $[-3, 0, 1, 4]'$ (ل)
٠. $[2, 1, 0, 1]'$ ١. $[3, 0, 1, 4]'$ -1, $[3, 0, 1, 2]'$ (م)

١٠- برهن أنه إذا كان X متجه وحدة وإذا كان $AX = \lambda X$ فإن $X'AX = \lambda$

١١- برهن أن القيم الخاصة (الجذور المميزة) لمصفوفة قطرية هي عناصر قطرها وأن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة

لهذه المصفوفة هي المتجهات الأولية E_i .

١٢ - برهن النظريتين I و VI .

١٣ - برهن النظرية VI .

إرشاد : إذا كان $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ فإن $|\lambda I - A| = (\lambda + k - \lambda_1)(\lambda + k - \lambda_2) \dots (\lambda + k - \lambda_n)$.

١٤ - برهن أن القيم الخاصة للمجموع المباشر $A_1, A_2, \dots, A_s$ هي القيم الخاصة للمصفوفات $A_1, A_2, \dots, A_s$.

١٥ - برهن أنه إذا كانت A و $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n وكانت $n > r$ فإنه يكون لكل من NA و AN المعادلة المميزة ذاتها.

١٦ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n والرتبة r فإنه يكون هناك على الأقل $n-r$ من جُذورها المميزة أصفارا.

١٧ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n وكانت A غير شاذة . فإن $A^{-1}B$ و BA^{-1} القيم الخاصة ذاتها.

١٨ - بين أنه يكون للمصفوفتين B و $A^{-1}BA$ نفس الجُذور المميزة حيث المصفوفتين A و B هما المصفوفتان الواديتين في المسألة ١٧ .

١٩ - لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n اكتب $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$ ثم استنتج أن $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$ هي القيم الخاصة لـ A^{-1} .

٢٠ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة متعامدة P ذات قيمة مطلقة مشتركة مساوية الواحد .
إرشاد : إذا كان λ_i و X_i قيمة خاصة (جُذور مميزة) لـ P المتجه اللاحتملي المصاحب لها فإن $X_i' X_i = (P X_i)' (P X_i) = \lambda_i \lambda_i' X_i' X_i$.

٢١ - برهن أنه إذا كان $\lambda_i = \pm 1$ قيمة خاصة لمصفوفة متعامدة P وكان X_i المتجه اللاحتملي المصاحب لها فإن $X_i' X_i = 0$.

٢٢ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة واحدة ذات قيمة مطلقة مشتركة تساوي الواحد .

٢٣ - استند من النظرية II واستنتج أن :

$$\phi(0) = (-1)^n |A|$$

$\phi^{(0)}(0)$ يساوي $(-1)^{n-1}$ من المرات مجموع المصفوفات الرئيسية ذات الدرجة $n-1$ لـ A .

$\phi^{(r)}(0)$ يساوي $(-1)^{n-r} r!$ من المرات مجموع المصفوفات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ لـ A .

$$\phi^{(n)}(0) = n!$$

٢٤ - عوَض من المسألة ٢٣ في :

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0) \cdot \lambda + \frac{1}{2!} \phi''(0) \cdot \lambda^2 + \dots + \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(0) \cdot \lambda^n$$

الحصول على (19.4)

الفصل العشرون

التشابه

المصفوفتان المتشابهتان :

نقول عن مصفوفتين مربعيتين A و B من الدرجة n إنهما متشابهتان على F إذا وجدت مصفوفة غير شاذة R على F بحيث يكون :

$$B = R^{-1}AR \quad (20.1)$$

مثال ١ :

إن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ الواردة في المثال ١ من الفصل ١٩ والمصفوفة

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متشابهان .

إن المعادلة المميزة $(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$ للمصفوفة B هي أيضا المعادلة المميزة للمصفوفة A .
 إن المتجه الالامتغير لـ B المصاحب للقيمة $\lambda = 5$ هو $Y_1 = [1, 0, 0]'$ ومن السهل أن نرى أن $X_1 = RY_1 = [1, 1, 1]'$ متجه لـ A مرافق (مصاحب) للقيمة الخاصة ذاتها $\lambda = 5$. ويمكن لقارئ أن يبرهن على أن $Y_2 = [7, -2, 0]'$ و $Y_3 = [17, -3, -2]'$ زوج من المتجهات الالامتغيرة لـ B والمستقلة خطيا والمرافقة لـ $\lambda = 1$ بينما $X_2 = RY_2$ و $X_3 = RY_3$ زوج من المتجهات الالامتغيرة لـ A والمستقلة خطيا والمرافقة لنفس الجذر $\lambda = 1$.
 إن المثال ١ : يوضح النظريتين التاليتين .

I. يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

لبرهان أنظر المسألة ١

II. إذا كان Y متجه لـ A مرافق للمصفوفة $B = R^{-1}AR$ المناظر لجذر المميز λ_i لـ B فإن $X = RY$ يكون متجه لـ A مرافق للمصفوفة A المناظرة لنفس الجذر المميز λ_i للمصفوفة A .
 من أجل البرهان أنظر المسألة ٢

المصفوفات القطرية :

إن الجذور المميزة لمصفوفة قطرية $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هي العناصر القطرية لهذه المصفوفة .
 يكون دائماً لمصفوفة قطرية n من المتجهات الالامتغيرة المستقلة خطيا . إن المتجهات الأولية E_i تكون مثل هذه

المجموعة لأن $DE_i = a_i E_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$.
 كنتيجة لما تقدم نجد (أنظر المسألتين ٣ و ٤ للبرهان).

III. إن لأي مصفوفة مربعة A من الدرجة n المشابهة لمصفوفة قطرية n متجهها لا متغيرا مستقلة خطيا .

IV. إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ولها n متجهها لا متغيرا مستقلة خطيا فإنها تكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

أنظر المسألة ٥ .

سنبرهن في المسألة ٦ :

V. على حقل F تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة $\lambda I - A$ قابلة للتحويل كليا على F وإذا كان تعدد كل λ_i مساوية لعدد الفراغ المعلوم للمصفوفة $\lambda_i I - A$

ليس من الضروري أن تكون كل مصفوفة مربعة من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية . إن المصفوفة الواردة في المسألة ٦ من الفصل ١٩ مثال على ذلك . حيث يناظر الجذر الثلاثي $\lambda = 1$ الفراغ المعلوم للمصفوفة $\lambda I - A$ والثاني بعده يساوي الواحد . يمكننا من جهة أخرى أن نبرهن :

VI. يشابه كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هي الجذور المميزة للمصفوفة A .
 أنظر المسألتين ٧ - ٨

ونجد كحالة خاصة :

VII. إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة ومن الدرجة n ذات جنو مميزة حقيقية ، فإنه يوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP = P^tAP$ مصفوفة مثلثية عناصرها القطرية هي الجذور المميزة للمصفوفة A .
 أنظر المسألتين ٩ - ١٠

VIII. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n عناصرها مركبة أو مصفوفة مربعة حقيقية من الدرجة n جذورها المميزة مركبة ، فإنه توجد مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU = \bar{U}^tAU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألة ١١

نقول عن المصفوفتين A و $P^{-1}AP$ الواردتين في النظرية VII إنهما متشابهتان تماما .
 ونقول عن المصفوفتين A و $U^{-1}AU$ الواردتين في النظرية VIII إنهما متشابهتان واحدا .

المصفوفة القابلة لأن تكون قطرية :

نقول عن مصفوفة A مشابهة لمصفوفة قطرية إنها قابلة لأن تكون قطرية . إن النظرية IV هي أساس لدراسة بعض أنواع ، ترد في الفصل القادم من المصفوفات القابلة لأن تكون قطرية .

مسائل محلولة

١ - برهن أنه يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

لتفرض أن A و $B = R^{-1}AR$ مصفوفتان متشابهتان فإن

$$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda I R - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)R \quad (i)$$

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |R| = |\lambda I - A|$$

وهكذا فإنه يكون لكل من A و B المعادلة المميزة نفسها ونفس الجذور المميزة .

٢- برهن أنه إذا كانت Y متجهاً لا متغيراً لـ $B = R^{-1}AR$ المناظر للجذر المميز λ_i فإن $X = RY$ يكون متجهاً لا متغيراً لـ A المناظر لنفس الجذر المميز λ_i لـ A .
ينتج من الفرض أن $BY = \lambda_i Y$ و $RB = AR$ أى :

$$AX = ARY = RBY = R\lambda_i Y = \lambda_i RY = \lambda_i X$$

ويكون X متجهاً لا متغيراً المصفوفة A يناظر الجذر المميز λ_i

٣- برهن أن يكون لأي مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية ، n متجهاً لا متغيراً مستقلة خطياً .

لنفرض $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) = B$ أن المتجهات الأولية $E_1, E_2, \dots, E_n$ هي متجهات لا متغيرة لـ B .
ونجد استناداً إلى النظرية II أن $X_j = RE_j$ هي متجهات لا متغيرة لـ A وبما أن R غير شاذة فإن أعدتها تكون متجهات مستقلة خطياً .

٤- برهن أنه إذا كان لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، n متجهاً لا متغيراً مستقلة خطياً ، فإنها تكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

لنفرض أن الـ n متجهاً لا متغيراً $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، المستقلة خطياً ، تصاحبها على الترتيب الجذور المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بحيث يكون $AX_i = \lambda_i X_i$ ، $(i = 1, 2, \dots, n)$. ولنفرض $R = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ ، فيكون :

$$\begin{aligned} AR &= [AX_1, AX_2, \dots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n] \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ R^{-1}AR &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{ومنه} \end{aligned}$$

٥- إن مجموعة المتجهات اللا متغيرة المستقلة خطياً للمصفوفة A الواردة في المثال ١ من الفصل ١٩ هي :

$$X_1 = [1, 1, 1]', \quad X_2 = [2, -1, 0]', \quad X_3 = [1, 0, -1]'$$

$$\text{لتأخذ } R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ فيكون } R^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ وتكون :}$$

$$R^{-1}AR = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية .

٦- برهن أنه تكون ، على حقل F ، مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تحليل $A - \lambda I$ كلياً في F وإن تعدد كل λ_i تكون مساوية بعد الفراغ المعلوم للمصفوفة $A - \lambda_i I$

لنفرض أولاً أن $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = B$ وأن k على الضبط من هذه الجذور المميزة مساوية λ_i فيكون للمصفوفة $B - \lambda_i I$ على الضبط ، k صفراً واقفاً على قطرها وتكون إذن رتبها مساوية $n - k$ وتكون بعد فراغها المعلوم

مساويا $n - (n - k) = k$ ولكن $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$ ؛ إذن $\lambda_i I - A$ يكون له نفس الرتبة $n - k$ والانحدامية (صفرية) التي تكون للمصفوفة $\lambda_i I - B$.

على العكس ، لنفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ هي الجذور المميزة المتباينة لـ A وأن هذه الجذور ، على الترتيب ، تمددت $r_1, r_2, \dots, r_s$ حيث $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$. لرمز $V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_s}$ للفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المرافقة . ولنأخذ $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i}$ كأساس للفراغ الاتجاهي اللامتغير V_{r_i} ($i = 1, 2, \dots, s$). لنفرض أنه يوجد مقادير عددية a_{ij} ليست كلها أصفارا بحيث يكون :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \dots + a_{1r_1}X_{1r_1} + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \dots + a_{2r_2}X_{2r_2}) + \dots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \dots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

والآن كل متجه $Y_i = a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \dots + a_{ir_i}X_{ir_i} = 0$, ($i = 1, 2, \dots, s$). وإلا فإنه يكون متجهها لا متغيرا وتكون في مجموعها استنادا إلى النظرية I مستقلة خطيا . ولكن هذا يخالف (i) وعلى ذلك فإن المتجهات X تكون أساسا لـ V_n وأن A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية استنادا إلى النظرية IV .

v- برهن أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تشابه مصفوفة مثلثية تكون قطرها من الجذور المميزة لـ A .
لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A ولنفرض أن X_1 هو متجه لا متغير لـ A مناظر للقيمة الخاصة λ_1 ولنأخذ X_1 كأول عمود من مصفوفة غير شاذة Q_1 أعدتها الأخرى اختيارية شرط أن يكون $|Q_1| \neq 0$. إن العمود الأول من AQ_1 هو $\lambda_1 X_1$ وإن العمود الأول من $Q_1^{-1}AQ_1$ هو $Q_1^{-1}\lambda_1 X_1$ ولكن هذا ، كعمود أول من $Q_1^{-1}AQ_1$ يكون $[\lambda_1, 0, \dots, 0]^T$ وعلى ذلك

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (i)$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$

بما أن $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$ وبما أن $Q_1^{-1}AQ_1$ و A لهما القيم الخاصة ذاتها فإنه ينتج عن ذلك أن القيم الخاصة لـ A_1 هي $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ إذا كانت $n = 2$ فإن $A_1 = [\lambda_2]$ وتكون النظرية قد برهنت مع $Q = Q_1$

وإلا ، فلنفرض أن X_2 هو متجه لا متغير لـ A_1 مناظر للقيمة الخاصة (الجذر المميز) λ_2 ولنأخذ X_2 كعمود أول من مصفوفة غير شاذة Q_2 وتؤخذ بقية أعدتها اختيارية ضمن الشرط $|Q_2| \neq 0$ فيكون :

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

حيث A_2 من الدرجة $n-2$ إذا كان $n = 3$ فإن $A_2 = [\lambda_3]$ تكون النظرية قد برهنت

وإلا فإننا نكرر الطريقة السابقة وبعد $(n-1)$ خطوات على الأكثر نجد :

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix} \quad (iii)$$

بحيث تكون $Q^{-1}AQ$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

٨- أوجد مصفوفة غير شاذة Q بحيث تكون المصفوفة $Q^{-1}AQ$ مثلثية علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

نجد هنا $|\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$ وأن القيم الخاصة هي $1, -1, 2, -2$. لتأخذ $[5, 5, -1, 3]^T$ متجهها لا متغيرا مناظرا للقيمة الخاصة 1 ، كمبود أول في المصفوفة غير الشاذة Q_1 ولتأخذ بقية أعمدتها متجهات أولية ولتكن .

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فيكون :

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} , \quad Q_1^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_1 هو -1 والمتجه اللامتغير المصاحب لها هو $[4, 0, -1]^T$. لتأخذ $Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad Q_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} ,$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_2 هو 2 و $[8, 11]^T$ متجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة . لتأخذ $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد :

$$Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad Q_3^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$$

ينتج عما سبق أن :

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix} , \quad Q^{-1} = \frac{1}{160} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

٩- إذا كانت A هي أى مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n وذات قيمة خاصة حقيقية ، فإنه توجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A . بها أن هذه القيم حقيقية فإن المتجهات اللامتغيرة المرافقة لها تكون حقيقية أيضاً . كما في المسألة ٧ ، لتأخذ Q_1 مكونة من متجه لا متغير مناظر لـ λ_1 كمبوداً ول ولتستعمل طريقة

جرام - شيت لنحصل من Q_1 على مصفوفة متعامدة P_1 يتناسب عمودها الأول مع العمود الأول من Q_1 . أى :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$ ويكون $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ كيجنور مميزة له .

ننتقل بعدما تقدم من Q_2 المصفوفة التى يتكون عمودها الأول من متجه لا متغير لـ A_1 يناظر القيمة الخاصة λ_2 ونستعمل مرة أخرى طريقة جرام - شيت لكى نحصل على المصفوفة المتعامدة P_2 أى :

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

وبعد عدد كاف من هذه العمليات سنحصل على المصفوفة المتعامدة :

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

والتي يكون لها $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

١٠- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} P$$

مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

من المثال ١ من الفصل ١٩ نجد أن القيم الخاصة هى 5, 1, 1, وأن $[1, 0, -1]^T$ هو متجه لا متغير مناظر للقيمة الخاصة $\lambda = 1$

لنأخذ $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وباستخدام طريقة جرام - شيت نحصل على :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

كمصفوفة متعامدة يتناسب عمودها الأول مع المتجه $[1, 0, -1]^T$

ونجد بعدما تقدم :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

أن لـ A_1 القيمة الخاصة $\lambda = 1$ $[1, -\sqrt{2}]$ كمتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة .

نستنتج من $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ بتطبيق قاعدة جرام - شيت ، المصفوفة المتعامدة $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ وتكون المصفوفة

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{متعامدة و}$$

١١- أوجد مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A ، علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي $\lambda(\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5-i) = 0$ وإن $0, 1-i, 3+2i$ هي جذور هذه المعادلة المميزة ،

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{لنأخذ للقيمة } \lambda = 0 \text{ المتجه } [1, -1, 1] \text{ كتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة ولنكون}$$

إن طريقة جرام - شيمت تعطي المصفوفة الواحدة :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة :

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

ولذلك ، ولذا الاختيار للمصفوفة Q_1 تكون المصفوفة المطلوبة هي $U = U_1$

١٢- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن 2,3,6 هي القيم الخاصة لـ A وإنه من الممكن أن نأخذ $[1, -2, 1]$ ، $[1, 1, 1]$ ، $[1, 0, -1]$ كمتجهات لا متغيرة مصاحبة للقيم المذكورة . والآن ، إن هذه المتجهات الثلاثة مستقلة ومتعامدة متى فيما بينها . إذا أخذنا :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

فإننا نجد $P^{-1}AP = \text{diag}(2, 3, 6)$. إن هذا يتطلب منا دراسة أكثر كالا للمصفوفات الحقيقية المتماثلة وستتم هذه الدراسة في الفصل القادم .

مسائل إضافية

١٣- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A وذلك لكل مصفوفة A وردت في المسألة ٩ (أ) و (ب) ، (ج) ، (د) من الفصل ١٩ .

$$\text{الجواب (أ)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

١٤- فسر لماذا تشابه المصفوفتان (أ) و (ب) من المسألة ١٣ مصفوفة قطرية بينما لا تحقق ذلك المصفوفتان (ج) و (د) . ادرس المصفوفتان (أ) - (م) المسألة (٩) الفصل ١٩ وعين تلك التي تكون مشابهة لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة المفروضة .

١٥- أوجد لكل مصفوفة A واردة في المسألة ٩ (ط) و (ي) من الفصل ١٩ ، مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة المثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

$$\text{الجواب : ١ (ط)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(ي)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

١٦- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة وكانت P متعامدة ، فإن $B = P^{-1}AP$ تكون مصفوفة حقيقية متماثلة .

١٧- ادخل التعديلات الضرورية على المسألة ٩ لكي تبرهن النظرية VIII .

١٨- لنفرض أن B_i و C_i مصفوفتان متشابهتان للقيم $(i = 1, 2, \dots, m)$ بين أن المصفوفتين :

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m) \quad \text{و} \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$$

$$R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m) \quad \text{وكون} \quad C_i = R_i^{-1} B_i R_i \quad \text{افرض : إرشاد : متشابهتان}$$

١٩- ليكن $B = \text{diag}(B_1, B_2)$ و $C = \text{diag}(C_1, C_2)$ ، حيث درجة كل من I_2, I_1 وعلى

التوالي من درجتي B_1 و B_2 ثم افرض $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ بين أن $R^{-1}BR = C$ واستنتج أن B و C متشابهتان .

٢٠- مدد نتائج المسألة ١٩ على الحالة التي يكون فيها $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ و C أي مصفوفة نحصل عليها بتغيير مواقع B_i على طول قطر هذه المصفوفة .

٢١- إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n فإن للمصفوفتين AB و BA نفس الجذور المميزة .

إرشاد : نفرض $PAQ = N$ فيكون $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ و $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. أنظر المسألة ١٥ من الفصل ١٩ .

٢٢- إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_s$ مصفوفات غير شاذة ومن درجة واحدة فبرهن أن لمصفوفات $A_1 A_2 \dots A_s, A_2 A_3 \dots A_s A_1, A_3 \dots A_s A_1 A_2$ المعادلة المميزة ذاتها .

٢٣- لنفرض $Q^{-1}AQ=B$ حيث B مصفوفة مثلثية عناصر قطرها، $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A .
(١) بين أن $Q^{-1}A^kQ$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هي القيم الخاصة لـ A مرفوعة للأس k

$$(ب) \text{ برهن أن } \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{trace } A^k.$$

٢٤- برهن أن علاقة تشابه المصفوفات هي علاقة تكافؤ.

٢٥- برهن أن : لـ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ نفس القيم الخاصة ولكنهما غير متشابهتين.

الفصل الحادى والعشرون

المصفوفات المتشابهة لمصفوفة قطرية

المصفوفات المتماثلة الحقيقية :

يمكن دراسة المصفوفات المتماثلة الحقيقية والمصفوفات الهرميتية سويا ، ولكننا نفضل هنا دراستها بشكل منفصل للمصفوفات المتماثلة الحقيقية ، نجد :

I — أن الجدور المبرزة لمصفوفة متماثلة حقيقية ، كلها حقيقية .

أنظر المسألة ١

II — المتجهات الأيتبة المصاحبة لقيم الخاصة المختلفة لمصفوفة متماثلة حقيقية تكون متعامدة متى .

أنظر المسألة ٢

إذا كانت A حقيقية ومتماثلة ، فإن كل B_i الواردة فى المسألة ٩ من الفصل ٢٠ تساوى الصفر . وعلى ذلك :

III إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n متماثلة ، قيمها الخاصة هى $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ،

فإنه توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث يكون $P'AP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

إن النظرية III تستلزم .

IV إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i لمصفوفة حقيقية متماثلة فإنه يوجد فراغ لا متفترأ

مصاحب لـ λ_i من البعد r_i

وباستعمال مصطلحات الأشكال التربيعية الحقيقية تأخذ النظرية III الشكل التالى :

V . يمكن اختزال كل شكل تربيعى حقيقى $q = X'AX$ بواسطة التحويل المتعامد $X=BY$ إلى الشكل القانونى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (21.1)$$

حيث r رتبة A و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ هى القيم الخاصة الغير صفيرية للمصفوفة A .

وهكذا فإن رتبة q تساوى عدد القيم الخاصة الغير صفيرية للمصفوفة A بينما يساوى الدليل عدد القيم الخاصة الموجبة أو بشكل آخر ، استنادا إلى قاعدة ديكرات الخاصة بالإشارات ، يساوى عدد التغيرات فى الإشارة فى $|\lambda I - A| = 0$

VI . تكون مصفوفة متماثلة حقيقية محددة موجبة ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) جميع قيمها الخاصة موجبة .

التشابه المتعامد : إذا كانت P مصفوفة متعامدة وكان $B = P^{-1}AP$ فإننا نقول عن B إنها مشابهة تعامدا مع

A حيث أن $P^{-1} = P'$ فإن B تكون أيضا متطابقة تعامدا ومكافئة تعامدا مع A . النظرية III يمكن إعادة صياغتها كما يلى :

VII إن كل مصفوفة متماثلة حقيقية A تكون مشابهة تعامدا لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

أنظر المسألة ٣

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة المتماثلة A قد رتبنا بحيث يكون $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ هي المصفوفة الوحيدة المشابهة لـ A . تشكل مثل هذه المصفوفات القطرية في مجموعها ، مجموعة قانونية للمصفوفات المتماثلة الحقيقية بالنسبة للتشابه المتعامد ونجد :

VIII تكون مصفوفتان متماثلتان ، حقيقتان متشابهتين تعامدا إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا كانت (وإذا كانتا فقط) متشابهتين .

ازواج من الصيغ التربيعية الحقيقية نبرهن في المسألة ٤ :

IX إذا كان X^*AX و X^*BX شكلين تربيعيين حقيقيين في $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وإذا كان X^*BX محمدا موجبا ، فإنه يوجد تحويل خطى حقيقى غير شاذ $X = CY$ يحول X^*AX إلى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

ويحول X^*BX إلى :

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

حيث λ_i هي جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$.

أنظر أيضا المسألتين ٤ - هـ

المصفوفات الهرميتية : بالموازاة مع النظريات الخاصة بالمصفوفات المتماثلة الحقيقية ، يكون لدينا :

X - إن القيم الخاصة لمصفوفة هرميتية مقادير حقيقية .

أنظر المسألة ٧

XI - إن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لقيم خاصة مختلفة (متباينة) لمصفوفة هرميتية ، متعامدة متباينة .

XII - إذا كانت H مصفوفة هرميتية مربعة من الدرجة n قيمها الخاصة هي $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإنه توجد مصفوفة واحدة U بحيث يكون $\bar{U}'HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. تسمى المصفوفة H بأنها مصفوفة ذات تشابه واحد $U^{-1}HU$.

XIII - إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i للمصفوفة الهرميتية H ، فإنه يصاحب λ_i فراغ لا متغيرا بعده λ_i .

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة الهرميتية H قد رتبنا بحيث يكون $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ هي المصفوفة القطرية الوحيدة المشابهة لـ H .

تكون جميع المصفوفات القطرية ، من هذا النوع ، مجموعة قانونية للمصفوفات الهرميتية بالنسبة للتشابه الواحدى ، ونجد مايل :

XIV - تكون مصفوفتان هرميتيتان متشابهتين واحديا ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا (وإذا فقط) كانتا متشابهتين .

المصفوفات النظامية نقول عن مصفوفة مربعة A من الدرجة n إنها نظامية فيما إذا كان $\bar{A}\bar{A}' = \bar{A}'A$. تحوى مجموعة المصفوفات النظامية بصورة خاصة المصفوفات القطرية ، المصفوفات المتماثلة الحقيقية ، المصفوفات الحقيقية المتماثلة تخالفا ، المصفوفات المتعامدة ، المصفوفات الهرميتية ، المصفوفات لهرميتية التخالفية والواحدة .

لنفرض A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدة ولنكتب $B = \bar{U}'AU$ فيكون $\bar{B} = \bar{U}'\bar{A}'U$

$$\bar{B}'B = \bar{U}'\bar{A}'U \cdot \bar{U}'AU = \bar{U}'\bar{A}'AU = \bar{U}'A\bar{A}'U = \bar{U}'AU \cdot \bar{U}'\bar{A}'U = \bar{B}\bar{B}$$

وعلى ذلك :

XV - إذا كانت A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدة فإن $B = \bar{U}'AU$ يكون مصفوفة نظامية .

وسنبرهن في المسألة ٨ :

XVI اذا كان X_i متجهاً لامتغيراً مناظراً الجذر الخاص λ_i للمصفوفة النظامية A ، فإن X_i تكون أيضاً متجهاً لامتغيراً للمصفوفة $\bar{A}$ المناظر للقيمة الخاصة λ_i

سنبرهن فى المسألة ٩ :

XVII تكون مصفوفة مربعة A مشابهة واحدياً لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A نظامية .

كنتيجة لما سبق ، نجد :

XVIII إذا كانت A نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة المصفوفة تكون متعامدة

أنظر المسألة ١٠

XIX إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تمديدية r_i لمصفوفة نظامية A ، فإن الفراغ اللامتغير المصاحب لها يكون ذا بعد يساوى r_i .

XX تكون مصفوفتان متشابهتين واحدياً ، إذا كان (وإذا كان فقط) لهما القيم الخاصة ذاتها أى إذا كانتا متشابهتين .

مسائل محلولة

١ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة حقيقية متماثلة A ومن الدرجة n كلها حقيقية .

لنفرض أن $h + ik$ قيمة خاصة مركبة للمصفوفة A ، اعتبر :

$$R = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI - A)^2 + k^2I$$

التي هي مصفوفة حقيقية وشاذة لأن $(h+ik)I - A$ تكون شاذة . يوجد ، إذن ، متجه حقيقى X غير صفري بحيث يكون $BX = 0$ وعلى ذلك .

$$X'BX = X(hI - A)^2X + k^2X'X = X'(hI - A)'(hI - A)X + k^2X'X = 0$$

إن المتجه $X(hI - A)$ حقيقى وهذا يؤدي إلى $\{(hI - A)X\}'\{(hI - A)X\} \geq 0$. وإن $X'X < 0$ أى أن $k = 0$ وإنه لا توجد قيم خاصة مركبة .

٢ - برهن أن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لقيم خاصة متباينة لمصفوفة حقيقية متماثلة A تكون متعامدة فيما بينها .

لنفرض X_1 و X_2 متجهان لامتغيران مصاحبان على الترتيب للقيمتين الخاصيتين المختلفتين λ_1 و λ_2 للمصفوفة A فينتج عن هذا :

$$X_1'AX_2 = \lambda_2X_1'X_2 \quad \text{و} \quad X_2'AX_1 = \lambda_1X_2'X_1 \quad \text{كما ينتج أيضاً} \quad AX_2 = \lambda_2X_2 \quad \text{و} \quad AX_1 = \lambda_1X_1$$

لنأخذ منقول هذه المصفوفات فنجد :

$$X_2'AX_1 = \lambda_2X_2'X_1 \quad \text{و} \quad X_1'AX_2 = \lambda_1X_1'X_2$$

وهكذا نجد $\lambda_1X_1'X_2 = \lambda_2X_1'X_2$ وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإنه يكون $X_1'X_2 = 0$ أى أن X_1 و X_2 متعامدان .

٣ - أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A إذا علم أن :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة للمصفوفة المفروضة هي :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda - 10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

وإن جذور هذه المعادلة هي 6, 6, 12 .

للقية $\lambda = 6$ نجد $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ أو $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ لنختار كمتجهين لامتنيرين مصاحبين

المتجهين المتعامدين $X_1 = [1, 0, -1]$ و $X_2 = [1, 1, 1]$ ولنأخذ في حالة $\lambda = 12$ المتجه $X_3 = [1, -2, 1]$ كمتجه لامتنيراً مرافقاً .

باستخدام المصفيف المعيرة لهذه المتجهات كأعمدة في المصفوفة P نجد :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

سيترك ، كتمرين ، برهان صحة العلاقة $P^{-1}AP = \text{diag}(6, 6, 12)$.

٤ - برهن أنه إذا كان $X'AX$ و $X'BX$ شكلين تربيعيين حقيقيين في $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وإذا كان $X'BX$ محدداً موجباً ، فإنه يوجد تحويل خطي حقيقي غير شاذ $X = CY$ يحول $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ ويحول $X'BX$ إلى $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تمثل جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$ يوجد كنتيجة للنظرية VII تحويل متعامد $X = GV$ يحول $X'BX$ إلى

$$V'(G'BG)V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \dots + \mu_n v_n^2 \quad (i)$$

حيث $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ هي القيم الخاصة (كلها موجبة) للمصفوفة B . لنفرض $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \dots, 1/\sqrt{\mu_n})$ فينتج عن هذا أن $V = HW$ يحول (i) إلى :

$$W'(H'G'BGH)W = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 \quad (ii)$$

يوجد تحويل متعامد $W = KY$ يحول الشكل التربيعي الحقيقي $W'(H'G'BGH)W$ إلى :

$$Y'(K'H'G'AGHK)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هي القيم الخاصة لـ $H'G'AGH$ وهكذا نجد أن هناك تحويلاً حقيقياً غير شاذ $X = CY = GHKY$ كما يحول $X'BX$ إلى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

والآن $X_i' H X_i = \lambda_i \bar{X}_i' X_i$ حقيق ومختلف عن الصفر ويكون الأمر ذاته بالنسبة لمقول المصفوفة المرافقة $\bar{X}_i' H X_i = \bar{\lambda}_i \bar{X}_i' X_i$. وهكذا نجد أن $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ أى أن λ_i حقيق .

٨ - برهن أنه إذا كان X_i متجهاً لامتغيراً مناظر القيمة الخاصة λ_i لمصفوفة نظامية A ، فإن X_i يكون متجهاً لامتغير A^1 . يناظر القيمة الخاصة λ_i .
بما أن A نظامية فإنه يكون :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A})' &= (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A}') = \lambda \bar{\lambda} I - \lambda \bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A} \bar{A}' \\ &= \bar{\lambda} \lambda I - \lambda \bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A}' A = (\bar{\lambda} I - \bar{A}')(\lambda I - A) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $\lambda I - A$ مصفوفة نظامية - وبما أننا فرضنا $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0$ فإن $\bar{B}'X_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')X_i = 0$ و $(\bar{B}'X_i)'(BX_i) = \bar{X}_i' \bar{B}' \cdot BX_i = \bar{X}_i' B \cdot \bar{B}' X_i = (\bar{B}'X_i)'(B'X_i) = 0$ وإن X_i متجه لامتغير A^1 يناظر القيمة الخاصة λ_i .
٩ - برهن أن مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، تكون مشابهة واحدياً لمصفوفة قطرية ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفة نظامية .

لنفرض A نظامية فإنه يوجد ، كنتيجة للنظرية VIII من الفصل ٢٠ ، مصفوفة واحدة U بحيث يكون :

$$\bar{U}'AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

ونجد استناداً إلى النظرية XV أن B نظامية وأن $\bar{B}B = BB'$. والآن ، إن العنصر الواقع في الصف الأول والعمود الأول من $\bar{B}B$ هو $\lambda_1 \bar{\lambda}_1$ بينما يكون العنصر المناظر له في $\bar{B}'B'$ هو :

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + b_{12} \bar{b}_{12} + b_{13} \bar{b}_{13} + \dots + b_{1n} \bar{b}_{1n}$$

بما أن هذه العناصر متساوية وأن كل $b_{1j} \bar{b}_{1j} \geq 0$ ، فإننا نستنتج أن كل $b_{1j} = 0$. وبلاستمرار بالنسبة للعنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثاني ... وهكذا ، فإننا نستنتج أن كل b_{ij} من B يساوى الصفر وأن $B = \text{dia. } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
على العكس ، لنفرض أن A مصفوفة قطرية فتكون A نظامية .

١٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة لهذه المصفوفة ، تكون متعامدة .

لتكن X_1 و X_2 و λ_1 و λ_2 قيمتين خاصيتين متباينتين والمتجهين اللامتغيرين المرافقين للمصفوفة A فيكون $AX_1 = \lambda_1 X_1$ و $AX_2 = \lambda_2 X_2$ ونجد استناداً إلى المسألة ٨ أن $AX_1 = \lambda_1 X_1$ و $AX_2 = \lambda_2 X_2$. وبأخذ المرافق نجد : $\bar{X}_1' A' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. ولكن $\bar{X}_1' A' X_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2$. وهكذا نجد $\bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإن العلاقة $X_1' X_2 = 0$ تكون قد برهنت كما هو مطلوب .

١١ - اعتبر القطع المخروطى : $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$ أو

$$X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X = 40 \quad (i)$$

منسوبة لمجموعة محاور الاحداثيات المتعامدة OX_1 و OX_2

أن المعادلة المميزة لـ A هي :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 8) = 0$$

لنأخذ للقيمتين الخاصتين $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -8$ المتجهين اللامتغيرين $[3, -2]$ و $[2, 3]$ المصاحبين على الترتيب لهاتين

القيمتين الآن لنشكل المصفوفة المتعامدة: $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ حيث عموداها هما المتجهان المذكوران آنفاً ، بعد تغييرها . إن التحويل $X = PY$ يتحول (i) إلى

$$Y' \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} Y = 5y_1^2 - 8y_2^2 = 40$$

ونجد أن القطع المخروطي المفروض قطع زائد .

إن هذه الطريقة قد قامت بعملية دوران المحاور المعتادة في الهندسة التحليلية المستوية والتي تهدف إلى حذف حاصل الضرب المتقاطع في معادلة القطع المخروطي . ولنلاحظ أن استناداً إلى النظرية VII يعرف هذا الناتج عندما تعرف القيم الخاصة للمصفوفة .

١٢ - إن إحدى مسائل الهندسة التحليلية في الفراغ ، هي اختزال معادلة سطح تربيعي ، بواسطة انتقال ودوران المحاور ، إلى أبسط أشكالها . إن الصعوبة تكمن في تحديد موضع المركز . وتعيين الإتجاهات الرئيسية أى إتجاهات محاور القطع بعد الدوران . سنبين فيما يلي . بدون تبرير لمراحل البرهان المتتالية ، دور مصفوفتين في اختصار معادلة سطح تربيعي مركزي .

ليكن السطح $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$ ، المصفوفتان المثلثتان :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

المكونة على الترتيب من الحدود ذات الدرجة الثانية ومن كل الحدود .

إن المعادلة المميزة لـ A هي

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وإن القيم الخاصة ومتجهات الوحدة اللامتغيرة المصاحبة هي :

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right]'; \quad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]'; \quad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \left[0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]'$$

باستخدام تحويلات الصفوف الأولية $H_j(K)$ و $H_{ij}(K)$ فقط (حيث $j \neq 4$) فإننا نجد :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 \text{ نجد من } \begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ لتعتبر } B_1 \text{ مصفوفة مربعة لمجموعة المعادلات}$$

الحل $x = 1, y = 0, z = 4$ أو $C(-1, 0, 4)$ ومن D_2 نجد : $d = -4$
إن رتبة A تساوى 3 ورتبة B تساوى 4 وإن مركز السطح التربيعي يقع في النقطة $C(-1, 0, 4)$ ونكون
المعادلة المختزلة المطلوبة هي :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0$$

إن معادلات الانتقال هي $x = x' - 1, y = y', z = z' + 4$
وإن الاتجاهات الرئيسية هي v_1, v_2, v_3 لرمز بالرمز E لمكوس المصفوفة $[v_1, v_2, v_3]$ فتكون معادلات
دوران المحاور إلى الاتجاهات الرئيسية هي :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [X \ Y \ Z] \cdot E = [X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مثال اضافية

١٣ - أوجد ، لكل من المصفوفات A المتماثلة الحقيقية التالية ، مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة A .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (هـ) \\ & \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (ج) \\ & \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (هـ) \end{aligned}$$

١٤ - أوجد تحويلاً خطياً يختزل $X^T B X$ إلى $X^T A X$ ، $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$ إلى $\lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2 + \lambda_3 \gamma_3^2$ ، حيث λ_i هي جذور المعادلة $\lambda B - A I = 0$ علماً أن :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \\ & \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \quad (ب) \end{aligned}$$

١٥ - برهن النظرية IV .

إرشاد : إذا كان $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n)$ فإن $(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, \dots)$

تكون من رتبة تساوى $n - r$ $\lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_1 - \lambda_n$

١٦ - عدل في برهان المسألة ٢ لكي تهذه النظرية XI .

١٧ - برهن النظريات : XII و XIII و XIX .

١٨ - عين كلا من الحالات الهندسية التالية :

$$108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900, \quad (ج) \quad 20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369, \quad (ا)$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8 \quad (د) \quad 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4, \quad (ب)$$

١٩ - تفرض A مصفوفة حقيقية ومماثلة متخالفية ، برهن :

(ا) أن كل قيمة خاصة لـ A إما أن تساوى الصفر أو أن تكون تخيلية بحتة .

(ب) أن $I + A$ و $I - A$ غير شاذتين .

(ج) $B = (I+A)^{-1}(I-A)$ مصفوفة متعامدة . (أنظر المسألة ٣٥ من الفصل ١٣) .

٢٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وغير شاذة فإن A^{-1} يكون كذلك .

٢١ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن A تكون مشابهة لـ A' .

٢٢ - برهن أن مصفوفة مربعة A تكون نظامية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تمثيلها بالشكل $H + iK$ حيث

H و K مصفوفتان هرميتان تبديليتان .

٢٣ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n قيمها الخاص $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإن A تكون نظامية

فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) القيم الخاصة لـ A' هي $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.

إرشاد : اكتب $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$ حيث U مصفوفة واحدة و T مصفوفة مثلثية . إن $\text{tr}(T\bar{T}') = \text{tr}(A\bar{A}')$

تطلب $t_{ij} = 0$ لقيم $i \neq j$.

٢٤ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة ، فإن A' تكون مصفوفة هرميتية محددة موجبة . اذكر

هذه النظرية عندما تكون A مصفوفة حقيقية وغير شاذة .

٢٥ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n ونظاميتين وإذا كانت A و B تبديليتين

فإن AB و BA مصفوفتان نظاميتان .

٢٦ - لنفرض أن الدالة المميزة للمصفوفة A المربعة من الدرجة n هي :

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

ولنفرض أنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \dots, \lambda_s I_{r_s}) \quad (1)$$

لنرمز بالرمز B_i حيث $(i = 1, 2, \dots, s)$ للمصفوفات المربعة ذات الدرجة $(0, 0, \dots, 0, I_{r_i}, 0, \dots, 0)$

التي نحصل عليها بالاستماسة عن λ_i بـ ١ وعن λ_j ($j \neq i$) بصفر في الطرف الأيمن من (١) ولنفرض :

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

برهن أن

$$P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_s B_s \quad (ا)$$

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s \quad (ب)$$

(ج) كل واحدة من E_i متحدة القوى .

$$E_i E_j = 0 \quad \text{لقيم } i \neq j \quad (د)$$

$$E_1 + E_2 + \dots + E_s = I \quad (هـ)$$

(و) إن رتبة E_i تساوى قوة تضاعف (تعددية) القيمة الخاصة λ_i

$$(\lambda_i I - A)E_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (ز)$$

(ج) إذا كان $p(x)$ كثيرة حدود في x فإن $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \dots + p(\lambda_s)E_s$.
 إرشاد : برهن أن : $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \dots + \lambda_s^2 E_s$, $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \dots + \lambda_s^3 E_s$, ...
 (ط) إن كل E_i كثيرة حدود في A

إرشاد : افرض $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$ و $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$, ($i = 1, 2, \dots, s$).
 فيكون عندئذ $f_i(A) = f_i(\lambda_i)E_i$.

(ي) تكون المصفوفة B تبديلية مع A فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) تبديلية مع كل E_i

إرشاد : إذا كانت B تبديلية مع A فإنها تكون تبديلية مع كل كثيرة حدود A

(ك) إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن كل مصفوفة E_i هرميتية.

(ل) إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن :

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \dots + \lambda_s^{-1}E_s$$

(م) إذا كانت A مصفوفة هرميتية محددة موجبة فإن :

$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}E_1 + \sqrt{\lambda_2}E_2 + \dots + \sqrt{\lambda_s}E_s$$

تكون مصفوفة هرميتية محددة موجبة.

(ن) تسمى المعادلة (ب) التحليل الطيفي للمصفوفة A . برهن أن هذه المعادلة وحيدة.

٢٧ - (أ) أوجد التحليل الطيفي لـ

$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} = 49 \begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{196} \begin{bmatrix} 29 & 20 & -10 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{(ب) أوجد}$$

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix} \quad \text{(ج) أوجد}$$

٢٨ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وتبديلية مع B ، فإن A و B تبديليتان.

إرشاد : استفد من المسألة ٢٦ (ي).

٢٩ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإنه توجد مصفوفة واحدة U ومصفوفة هرميتية محددة موجبة H

$$A = H U$$

بحيث يكون

$$U = H^{-1}A \text{ و } H^2 = A A^*$$

إرشاد : عرف H بالعلاقة

٣٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن A تكون نظامية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفتان

H و U الواردتان في المسألة ٢٩، تبديليتين.

٣١ - برهن أن المصفوفة المربعة A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة

هرميتية محددة موجبة H بحيث يكون AH^{-1} مصفوفة نظامية.

٣٢ - برهن أن مصفوفة حقيقية متماثلة (هرميتية) تكون متحدة القوى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة

مساوية للصفر أو للواحد.

- ٣٣ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) ومتحدة القوى فإن $rA = t_r A$.
- ٣٤ - لنفرض أن A مصفوفة نظامية وأن $B = I + A$ مصفوفة غير شاذة وأن $C = B^{-1} \bar{B}$ برهن : (١) أن A و $(\bar{B})^{-1}$ تبديليتان . (ب) أن C مصفوفة واحدة .
- ٣٥ - برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هرمتية فإن $(I+iH)^{-1}(I-iH)$ تكون مصفوفة واحدة .
- ٣٦ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن مجموعة الأعداد X حيث $X^* A X$ متجه وحدة ، تسمى **حقل قيم A** . برهن مايل :
 (١) تقع القيم الخاصة لـ A في حقل قيمها .
 (ب) يقع كل عنصر قطرى من A وكل عنصر قطرى من المصفوفة $U^{-1} A U$ حيث U مصفوفة واحدة ، في **حقل قيم A** .
 (ج) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن كل عنصر من حقل قيمها يكون حقيقياً .
 (د) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن حقل قيمها هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمحققة للملاحة $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n$ حيث λ_1 هو أصغر القيم الخاصة لـ A و λ_n أكبر هذه القيم الخاصة .

الفصل الثاني والعشرون

كثيرات الحدود على حقل

مجال (نطاق) كثيرات الحدود على F لتكن λ رمزاً مجرداً (غير معين) ولنفرض أنه قابل للتبديل مع نفسه ومع كل عنصر من حقل F نسمى التمييز .

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \lambda^0 \quad (22.1)$$

حيث a_i هي عناصر من F ، كثير حدود في λ على F

إذا كانت كل $a_i = 0$ فإن (22.1) يسمى صفر كثيرات الحدود ونكتب $f(\lambda) = 0$ إذا كان $a_n \neq 0$ فإننا نقول عن (22.1) إنه من الدرجة n ونسمى a_n معامل المتكبر . نقول عن كثير الحدود $f(\lambda) = a_0 \lambda^0 = a_0 \neq 0$ إنه من الدرجة صفر . إن درجة صفر كثيرات الحدود غير معرف .
إذا كان $a_n = 1$ في (22.1) فإن كثير حدود يسمى واحداً .

نقول عن كثيرى الحدود في λ اللذين ، بصرف النظر عن الحدود ذات المعاملات الصفرية ، يحويان نفس الحدود ، إنهما متساويان .

نسمى كثيرات الحدود (22.1) في مجموعها مجال كثيرات الحدود $F[\lambda]$ على F .

المجموع وحاصل الضرب : إذا اعتبرنا كل كثير حدود من $F[\lambda]$ كعنصر من مجموعة أعداد ، فإنه يكون لنطاق كثيرات الحدود أغلب خواص الحقل وليست كلها .

مثال ذلك :

$$f(\lambda) \cdot g(\lambda) = g(\lambda) \cdot f(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) + g(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda)$$

إذا كان $f(\lambda)$ من الدرجة m و $g(\lambda)$ من الدرجة n فإنه يكون :

(i) $f(\lambda) + g(\lambda)$ يكون من الدرجة m إذا كان $n < m$ ومن درجة لا تزيد عن m إذا كانت $n = m$ ومن الدرجة n إذا كان $n > m$.

(ii) $f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ يكون من الدرجة $m + n$.

إذا كان $f(\lambda) \neq 0$ بينما $f(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$ فإن $g(\lambda) = 0$.

وإذا كان $g(\lambda) \neq 0$ ، و $h(\lambda) \cdot g(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda)$ فإن $h(\lambda) = k(\lambda)$.

خارج القسمة :

سنبرهن في المسألة ١ :

1 إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda) \neq 0$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدان $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ من $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda)$ إما أن تكون صفر كثيرا الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ ، بحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad (22.2)$$

تسمى هنا $r(\lambda)$ باقى قسمة $f(\lambda)$ على $g(\lambda)$. إذا كان $r(\lambda) = 0$ فإننا نقول إن $g(\lambda)$ يقسم $f(\lambda)$ وإن $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فتسمى عوامل $f(\lambda)$.

لنفرض أن $f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ من الدرجة صفر أى إذا كان $g(\lambda) = c$ حيث c عدد ثابت فإننا نقول عن هذا التحليل إلى العوامل إنه تافه . نقول عن كثير الحدود الغير ثابت على F ، إنه غير قابل للاختزال على F فيما إذا كان تحليله الوحيد إلى عوامل تافه .

مثال ١ : إن $\lambda^2 - 3$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجذرية ، وهو قابل للتحليل على حقل الأعداد الحقيقية بالشكل $(\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3})$. أن $\lambda^2 + 4$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية (وبالتالي على حقل الأعداد الجذرية) بينما يمكن تحليله على حقل الأعداد المركبة بالشكل $(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$.

نظرية الباقي ليكن $f(\lambda)$ أى كثير حدود و $g(\lambda) = \lambda - a$. فنأخذ هنا العلاقة (22.2) الشكل التالى :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot (\lambda - a) + r \quad (22.3)$$

حيث r خالية من λ . ينتج عن (22.3) أن $f(a) = r$ ويكون :

II . إذا قسم $f(\lambda)$ على $\lambda - a$ حتى نحصل على باقى خال من λ فإن هذا الباقى يكون $f(a)$.

III . يكون $(\lambda - a)$ أحد عوامل كثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان $f(a) = 0$ (وإذا كان فقط)

القاسم المشترك الأعظم : إذا قسم $h(\lambda)$ كلا من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فإننا نسميه قاسمًا مشتركًا لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$. نقول عن كثير حدود $d(\lambda)$ إنه قاسم مشترك أعظم لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيما إذا كان :

(i) $d(\lambda)$ واحدياً .

(ii) $d(\lambda)$ قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$.

(iii) كل قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكون قاسمًا لـ $d(\lambda)$.

سنبرهن فى المسألة ٢ :

VI إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ ليسا معدومين فى وقت واحد معاً ، فإنه يوجد لما قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد فى $F[\lambda]$ كثير الحدود $d(\lambda)$ و $k[\lambda]$ بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \quad (22.4)$$

أنظر المسألة ٣

إذا كان القاسم المشترك الوحيد لكثيرى الحدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ ثوابت فإن القاسم المشترك الأعظم لما هو $d(\lambda) = 1$

مثال ٢ : إن القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ و $g(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ هو $\lambda^2 + 3\lambda + 5$ وإن (22.4) تكون

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = \frac{1}{5}f(\lambda) - \frac{1}{5}g(\lambda)$$

ولدينا أيضاً $0 = (\lambda^2 + 4) \cdot g(\lambda) + (1 - \lambda^2) \cdot f(\lambda)$. إن هذا يوضح :

V إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ فى الدرجة $n > 0$ ولكثير الحدود $g(\lambda)$ فى الدرجة $m > 0$ ، مخالفاً للواحد ، فإنه يوجد كثير حدود غير صفري $a(\lambda)$ من درجة أقل من m وكثير حدود $b(\lambda)$ درجته أصغر من n بحيث يكون :

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$$

أنظر المسألة ٤

والمعكس صحيح

كثيرات الحدود الأولية نسبياً :

نقول عن كثيرى حدود إنهما أوليان نسبياً فيما إذا كان قاسمهما المشترك الأعظم هو الواحد .

- IV. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال في $F[\lambda]$ وكان $f(\lambda)$ كثير حدود من $F[\lambda]$ فإنه إما أن يكون $g(\lambda)$ قاسماً لـ $f(\lambda)$ وإما أن يكون $g(\lambda)$ أولياً نسبياً مع $f(\lambda)$.
- VII. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال ولكنه يقسم $h(\lambda)$ فإن $f(\lambda)$ يقسم على الأقل واحداً من $f(\lambda)$ و $h(\lambda)$.
- VIII. إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ أوليين نسبياً وإذا كان كل منهما قاسماً لـ $h(\lambda)$ فإن $g(\lambda)$. $f(\lambda)$ يكون قاسماً لـ $h(\lambda)$.

التحليل الوحيد : سنبرهن في المسألة ه مايل :

IX يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفري $f(\lambda)$ في $F[\lambda]$ بالشكل :

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda) \quad (22.5)$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحد غير قابل للاختزال من $F[\lambda]$.

مسائل محلولة

١ - برهن أنه إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda) \neq 0$ كثيرى حدود في $F[\lambda]$ ، فإنه يوجد كثيرا حدود ، وحيدتين $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ في $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda)$ إما أن يكون صفر كثيرا الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad (i)$$

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad \text{لنفرض :}$$

$$g(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0, \quad b_m \neq 0$$

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة إذا كان $f(\lambda) = 0$ أو إذا كان $m > n$ لنفرض أن $m \leq n$ فيكون عندئذ :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m} g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p \lambda^p + c_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + c_0$$

إما أن يكون صفر كثيرا الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$.

إذا كان $f_1(\lambda) = 0$ أو كان من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهننا النظرية حيث $h(\lambda) = \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m}$ و $r(\lambda) = f_1(\lambda)$ وإذا لم يكن ذلك تكون :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m} g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m} \lambda^{p-m} g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

مرة ثانية إذا كان $f_2(\lambda) = 0$ أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهننا النظرية ، وإذا لم يكن ذلك ، نكرر هذه الطريقة . بما أن درجة الباقي (التي نقرضها لمتساوى الصفر) تنخفض في كل مرحلة من مراحل البرهان

فإننا سنجد ، في آخر الأمر ، باقياً $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ يكون إما صفر كثيرات الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$.

لبرهان الوحدة نفرض :

$$f(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

حيث درجتا $r(\lambda)$ و $s(\lambda)$ تقلان عن درجة $g(\lambda)$ ويكون :

$$h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

و

والآن $r(\lambda) - s(\lambda)$ يكون من درجة أقل من m بينما تكون درجة $[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda)$ تساوى أو تزيد عن m باستثناء الحالة التي يكون فيها $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$. إذن $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$ و $r(\lambda) - s(\lambda) = 0$. أى أن $k(\lambda) = h(\lambda)$ و $r(\lambda) = s(\lambda)$ وهذا يقتضى أن يكون $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ وحيدين.

٢ - برهن أنه إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود في $F(\lambda)$ ليسا معلومين معا ، فإنه يكون لها قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد كثيراً حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ في F بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \quad (a)$$

إذا كان $f(\lambda) = 0$ فإن $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$ حيث b_m هو المعامل المتقدم في $g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $k(\lambda) = b_m^{-1}$ و $h(\lambda) = 1$

لنفرض الآن ، أن درجة $g(\lambda)$ لا تزيد عن درجة $f(\lambda)$. نستنتج من النظرية 1 أن :

$$f(\lambda) = q_1(\lambda) \cdot g(\lambda) + r_1(\lambda) \quad (i)$$

حيث يكون $r_1(\lambda) = 0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$. إذا كان $r_1(\lambda) = 0$ فإن $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $h(\lambda) = 0$ و $k(\lambda) = b_m^{-1}$

إذا كان $r_1(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$g(\lambda) = q_2(\lambda) \cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda) \quad (ii)$$

حيث يكون $r_2(\lambda) = 0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $r_1(\lambda)$. إذا كان $r_2(\lambda) = 0$ فإنه ينتج عن (i) أن

$$r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

ونحصل منها على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم في $r_1(\lambda)$.

إذا كان $r_2(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$r_1(\lambda) = q_3(\lambda) \cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda) \quad (iii)$$

حيث $r_3(\lambda) = 0$ أو يكون من درجة أدنى من درجة $r_2(\lambda)$. إذا كان $r_3(\lambda) = 0$ فإننا نحصل من (i) و (ii) على

$$r_2(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda) \cdot r_1(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda)]$$

$$= -q_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)]g(\lambda)$$

ومنها نحصل على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم لـ $r_2(\lambda)$. إذا تابعنا هذه الطريقة وفرضنا أن كل باق جديد لا يساوى

الصفر. فإننا نجد على وجه العموم :

$$r_i(\lambda) = q_{i+2}(\lambda) \cdot r_{i+1}(\lambda) + r_{i+2}(\lambda) \quad (iv)$$

علاوة على ذلك فإن هذه الطريقة تنتهى بـ

$$r_{s-2}(\lambda) = q_s(\lambda) \cdot r_{s-1}(\lambda) + r_s(\lambda), \quad q_s(\lambda) \neq 0 \quad (v)$$

و

$$r_{s-1}(\lambda) = q_{s+1}(\lambda) \cdot r_s(\lambda) \quad (vi)$$

من (vi) نجد أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-1}(\lambda)$ ومن (v) فإنه يقسم أيضاً $r_{s-2}(\lambda)$ ونجد استناداً إلى (iv)

$$r_{s-3}(\lambda) = q_{s-1}(\lambda) \cdot r_{s-2}(\lambda) + r_{s-1}(\lambda)$$

أى أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-3}(\lambda)$. وهكذا باستعادة المراحل المؤدية إلى (vi) ، نستنتج أن $r_s(\lambda)$ يقسم كلا

$$f(\lambda) \text{ و } g(\lambda) . \text{ إذا كان المعامل المتقدم لـ } r_s(\lambda) \text{ هو } c \text{ فإن } d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda)$$

ونستنتج من (i) $r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_1(\lambda) \cdot g(\lambda)$ وبالتعويض في (ii) نجد :

$$r_2(\lambda) = -q_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) = h_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_2(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

نستنتج من (iii) $r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda) \cdot r_2(\lambda)$. وإذا عوضنا عن $r_1(\lambda)$ و $r_2(\lambda)$ فإننا نجد :

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda) \cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) + [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_3(\lambda) \cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

وإذا تابعنا فإننا نجد في النهاية :

$$r_s(\lambda) = h_s(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_s(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

أى : $d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda) = c^{-1}h_s(\lambda) \cdot f(\lambda) + c^{-1}k_s(\lambda) \cdot g(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda)$ كما هو مطلوب .

بترك برهان أن $d(\lambda)$ وحيد كثرين .

٣ - أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(\lambda)$ لـ :

$$g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2 \quad \text{و} \quad f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6$$

وعبر عن $d(\lambda)$ بالشكل المعطى في النظرية III .

نجد على التوالى :

$$f(\lambda) = (3\lambda + 1)g(\lambda) + (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) \quad (i)$$

$$g(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) + (\lambda^2 + 7\lambda + 10) \quad (ii)$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10) + (17\lambda + 34) \quad (iii)$$

و

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = \left(\frac{1}{17}\lambda + \frac{5}{17}\right)(17\lambda + 34) \quad (iv)$$

ان القاسم المشترك الأعظم هو : $\frac{1}{17}(17\lambda + 34) = \lambda + 2$

نستنتج من (iii) أن

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10)$$

لنمض عن $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ من (ii)

$$\begin{aligned} 17\lambda + 34 &= (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)[g(\lambda) - (\lambda - 2)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4)] \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)g(\lambda) \end{aligned}$$

ولنمض عن $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$ من (i)

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2 - 5\lambda + 7)f(\lambda) + (-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)g(\lambda)$$

أى :

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2 - 5\lambda + 7) \cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4) \cdot g(\lambda)$$

٤ - برهن أنه إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ من الدرجة $n < 0$ وكثير الحدود $g(\lambda)$ من الدرجة $0 < m$ لا يساوى الواحد فإنه يوجد كثيرا حدود لا يساويان صفر كثيرات الحدود ، $a(\lambda)$ درجة أقل من m و $b(\lambda)$ درجة أقل من n بحيث يكون :

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0 \quad (a)$$

والعكس بالعكس .

لنفرض أن $d(\lambda) \neq 1$ هو القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون

$$g(\lambda) = d(\lambda) \cdot g_1(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) = d(\lambda) \cdot f_1(\lambda)$$

حيث $f(\lambda)$ من درجة أقل من n و $g(\lambda)$ من درجة أقل من m

الآن .

$$g_1(\lambda) \cdot f(\lambda) = g_1(\lambda) \cdot d(\lambda) \cdot f_1(\lambda) = g(\lambda) \cdot f_1(\lambda)$$

و

$$g_1(\lambda) \cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda) \cdot g(\lambda)] = 0$$

أى إذا أخذنا $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ و $b(\lambda) = -f_1(\lambda)$ فإننا نحصل على (a).

حل العكس ، لنفرض أن $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكونان أوليين نسبياً وأن (a) صحيحة . ينتج عندئذ من النظرية IV أنه يوجد كثيرا حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ بحيث يكون :

$$h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) = 1$$

وهكذا ، باستخدام (a) نستنتج أن :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a(\lambda) \cdot h(\lambda) \cdot f(\lambda) + a(\lambda) \cdot k(\lambda) \cdot g(\lambda) \\ &= -b(\lambda) \cdot h(\lambda) \cdot g(\lambda) + a(\lambda) \cdot k(\lambda) \cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

وأن $g(\lambda)$ يقسم $a(\lambda)$. ولكن هذا الأمر مستحيل . على ذلك إذا كانت العلاقة (a) محققة فإنه لا يمكن أن يكون $g(\lambda)$ و $f(\lambda)$ أوليين نسبياً .

٥ - برهن أنه يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفري $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ بالشكل التالي :

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \cdots q_r(\lambda)$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحد غير قابل للاختزال في $F[\lambda]$ لنكتب :

$$f(\lambda) = a_n \cdot f_1(\lambda) \quad (i)$$

حيث a_n المعامل المتقدم في $f(\lambda)$. إذا كان $f_1(\lambda)$ غير قابل للاختزال فإن (i) يحقق شروط هذه النظرية وإذا كان غير ذلك فإنه يوجد تحليل من الشكل :

$$f(\lambda) = a_n \cdot g(\lambda) \cdot h(\lambda) \quad (ii)$$

إذا كان كل من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ غير قابل للاختزال ، فإن (ii) يحقق شروط النظرية . إذا كان خلاف ذلك فإن تحليلًا جديدًا يقود إلى مجموعة عوامل واحدة غير قابلة للاختزال .
لبرهان الواحدية نفرض أن :

$$a_n \cdot p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda) \quad , \quad a_n \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda)$$

تحليلان فيهما $s > r$. بما أن $q_1(\lambda)$ يقسم $p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ فإنه يجب أن يقسم واحداً من $p_i(\lambda)$ الذي . بتغيير الترقيم ، يمكن اعتباره $p_1(\lambda)$. بما أن $p_1(\lambda)$ واحد غير قابل للاختزال فإن $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$ وهكذا نجد أن $q_2(\lambda)$ يقسم $p_2(\lambda) \cdot p_3(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ ، وبعد أن نكرر مقلتنا سابقاً ، نجد أن $q_2(\lambda) = p_2(\lambda)$ ونجد في النهاية أن $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ لقيم $i = 1, 2, \dots, r$ وأن $p_{r+1}(\lambda) \cdot p_{r+2}(\lambda) \dots p_s(\lambda) = 1$ بما أن المساواة الأخيرة مستحيلة فإن $r = s$ وبذلك تكون قد برهنا الواحدية .

مسائل إضافية

- ٦ - أعط مثلاً تكون فيه درجة $f(\lambda) + g(\lambda)$ أقل من درجة $f(\lambda)$ أو درجة $g(\lambda)$
- ٧ - برهن النظرية III .
- ٨ - برهن أنه إذا قسم $f(\lambda)$ كلا من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فإنه يقسم $g(\lambda) \pm h(\lambda)$
- ٩ - أوجد شرطاً لازماً وكافياً لكي يكون كل من كثيرى الحدود غير الصفريين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ من $F[\lambda]$ قاسماً للأخر .

١٠ - عبر لكل مما يلي عن القاسم المشترك الأعظم بالشكل الوارد في النظرية IV .

$$f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad (أ)$$

$$f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 \quad (ب)$$

$$f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1, \quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (ج)$$

$$f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad (د)$$

الجواب :

$$\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda - 1)f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2 + 1)g(\lambda) \quad (أ)$$

$$\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2 + 5\lambda + 5)g(\lambda) \quad (ب)$$

$$\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 9)g(\lambda) \quad (ج)$$

$$1 = \frac{1}{102}(5\lambda + 2)f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3 + 44\lambda^2 - 55\lambda + 45)g(\lambda) \quad (د)$$

١١ - برهن النظرية VI

إرشاد : افرض $d(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون $h(\lambda) = d(\lambda)$ وينتج من ذلك أنه إما أن يكون $d(\lambda)$ أو $h(\lambda)$ ثابتاً .

١٢ - برهن النظريتين VII و VIII .

١٣ - برهن إذا كان $f(\lambda)$ أولياً نسبياً مع $g(\lambda)$ ويقسم $\alpha(\lambda)$ فإنه يقسم $\alpha(\lambda)$.١٤ - إن المضاعف المشترك الأصغر لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ هو كثير حدود واحد ويكون مضاعفاً لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ وتكون درجته أصغر مما يمكن . أوجد القاسم المشترك الأعظم (ق . م . ع .) والمضاعف المشترك الأصغر -

(م . م . ص) لكل من :

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - 1 \quad (1)$$

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda + 2), \quad g(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^3(\lambda - 3) \quad (ب)$$

$$\text{الجواب : (1) ق . م . ع . } = \lambda - 1; \quad \text{و م . م . ص . } = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$\text{(ب) ق . م . ع . } = (\lambda + 1)(\lambda + 2); \quad \text{و م . م . ص . } = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^3(\lambda - 3)$$

$$10 - \text{ليكن} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{برهن :}$$

$$\phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0 \quad \text{و} \quad \phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 \quad (1)$$

$$\text{(ب) } m(A) = 0 \quad \text{حيث} \quad m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

١٦ - أى خاصية من خواص الحقل ليست محققة من قبل نطاق كثيرات الحدود ؟

١٧ - نقول عن العدد c إنه جذر لكثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان $f(c) = 0$ برهن أن العدد c جذر لـ $f(\lambda)$ إذاكان (وإذا كان فقط) $(\lambda - c)$ عاملاً من عوامل $f(\lambda)$.١٨ - نفرض أن $f(\lambda) = (\lambda - c)^k g(\lambda)$ (1) برهن أن c جذر ذو تعددية $(k-1)$ لـ $f'(\lambda)$.(ب) برهن أن c جذر ذو تعددية $1 < k$ لـ $f(\lambda)$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) c جذراً لكل $f(\lambda)$ و $f'(\lambda)$ ١٩ - لنأخذ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ غير معلومين سوياً ، في $F[\lambda]$ ولنفرض أن قاسميهما المشترك الأعظم $d(\lambda)$.ولنفرض أن K أى حقل يحوى F . برهن أنه إذا كان $D(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ باعتبارهما في $K[\lambda]$ ، فإن $D[\lambda] = d[\lambda]$.

$$\text{إرشاد : لنفرض} \quad f(\lambda) = s(\lambda) \cdot D(\lambda), \quad g(\lambda) = t(\lambda) \cdot D(\lambda), \quad d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda).$$

$$\text{و} \quad D(\lambda) = c(\lambda) \cdot d(\lambda).$$

٢٠ - برهن أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n تكون نظامية إذا كان من الممكن التعبير عن A^{-1} ككثير حدود

$$a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

في A .

الفصل الثالث والعشرون

المصفوفات لا مبدا

تعريف :

ليكن $F[\lambda]$ نطاق كثيرات الحدود المكونة من كل كثيرات الحدود في λ ذات المعاملات المنتمية إلى F . تسمى المصفوفة الغير صفرية ذات الدرجة $m \times n$ والمعروفة على F .

$$A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (23.1)$$

مصفوفة لا مبدا (مصفوفة λ).

لتكن p أعلى درجة لـ λ في كثيرات الحدود $a_{ij}(\lambda)$ الواردة في (23.1) يمكن كتابة $A(\lambda)$ ككثير حدود من الدرجة p بالنسبة لـ λ بمعاملاته مصفوفات نسميه كثير حدود مصفوفي.

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \quad (23.2)$$

حيث A_i مصفوفة مربعة على F من الدرجة $m \times n$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5 \\ \lambda^3 - 4 & \lambda^3 - 3\lambda^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال ١ : إن :

مصفوفة λ أو كثير حدود مصفوفي من الدرجة الرابعة

إذا كانت $A(\lambda)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . فإنها توصف بأنها شاذة أو غير شاذة حسبما يكون $|A(\lambda)|$ مساويا أو غير مساو للصفر. وتوصف $A(\lambda)$ فوق ذلك بأنها غير معتلة أو معتلة حسبما يكون A_p غير شاذة أو شاذة. إن كثير الحدود الوارد في المثال ١، غير شاذ ومعتل.

العمليات على مصفوفات لا مبدا :

لتكن مصفوفتا لا مبدا المربعتان ومن الدرجة n أو كثيرا الحدود المصفوفتين على $F(\lambda)$:

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \quad (23.3)$$

$$B(\lambda) = B_q \lambda^q + B_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0 \quad (23.4)$$

نقول عن المصفوفتين (23.3) و (23.4) إنهما متساويتان ، $A(\lambda) = B(\lambda)$ على شرط $p=q$ و $B_i = A_i$ لقيم $i=0,1,2,\dots,p$.

إن المجموع $A(\lambda) + B(\lambda)$ هو مصفوفة لا مبدا $C(\lambda)$ تنتج من جمع كل عنصرين متناظرين من مصفوفتي λ

المفروشتين .

إن حاصل الضرب $A(\lambda) \cdot B(\lambda)$ هو مصفوفة لامبدا أو كثير حدود مصفوفي لا تزيد درجته عن $p + q$. إذا كان أى من $A(\lambda)$ أو $B(\lambda)$ غير شاذ فإن درجة $A(\lambda) \cdot B(\lambda)$ و $B(\lambda) \cdot A(\lambda)$ تساوى $p+q$ بالضبط.

لا تتغير المساواة (23.3) عندما نستعيز عن λ بعدد آخر k من F . فلو فرضنا مثلا $\lambda = k$ فى (23.3) فإننا نجد :

$$A(k) = A_p k^p + A_{p-1} k^{p-1} + \dots + A_1 k + A_0$$

ولكننا ، لو أحلنا λ بمصفوفة C مربعة من الدرجة n فإنه من الممكن أن نحصل على نتيجتين مختلفتين ويرجع ذلك لأنه ، فى الحالة العامة ، لا تكون مصفوفتين مربعتين تبديليتين . تسمى بالتعريف .

$$A_R(C) = A_p C^p + A_{p-1} C^{p-1} + \dots + A_1 C + A_0 \quad (23.5)$$

$$A_L(C) = C^p A_p + C^{p-1} A_{p-1} + \dots + C A_1 + A_0 \quad (23.6)$$

وعلى الترتيب القيمة الدالية اليمنى والقيمة الدالية اليسرى لـ $A(\lambda)$.

مثال ٢ : لنفرض $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

فيكون $A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$

و $A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$ أنظر المسألة ١

القسم ٢ : سنبرهن فى المسألة ٢ :

I. إذا كان $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ كثيرا الحدود المرفين فى (23.3) و (23.4) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة ، فإنه يوجد بشكل وحيد أربع كثيرات حدود مصفوفية $Q_1(\lambda)$ ، $R_1(\lambda)$ ؛ $Q_2(\lambda)$ ، $R_2(\lambda)$ بحيث يكون كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما صفرا أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يتحقق مايل :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (23.7)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (23.8)$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ فإن $B(\lambda)$ يدعى قاسما من اليمين لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $A_2(\lambda) = 0$ فإن $B(\lambda)$ يدعى قاسما من اليسار لـ $A(\lambda)$

مثال ٣ : إذا كان $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$ و $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+2 \\ 2\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$

فإن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda+3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$

و $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$

و يكون هنا $B(\lambda)$ قاسما من اليسار لـ $A(\lambda)$

أنظر المسألة ٢

يسمى كثير الحدود المصفوفى ذا الشكل :

$$B(\lambda) = b_q \lambda^q \cdot I_n + b_{q-1} \lambda^{q-1} \cdot I_n + \dots + b_1 \lambda \cdot I_n + b_0 I_n = b(\lambda) \cdot I_n \quad (23.9)$$

بأنه عددى . إن كثير الحدود المصفوفى العددى $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I_n$ تبديل مع كل كثير حدود مصفوفى مربع من الدرجة n .

في (23.7) و (23.8) إذا كان $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I$ فإن :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (23.10)$$

مثال ٤ :

لنفترض أن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 - 1 & 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = (\lambda + 2)I_2$. فيكون :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ في (23.10) فإن $A(\lambda) = b(\lambda) \cdot I \cdot Q_1(\lambda)$ ويكون لدينا :

II. يقبل كثير حدود مصفوفى $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ من الدرجة n القسمة على كثير حدود مصفوفى

عددى $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I_n$ إذا كان (وإذا فقط) كل واحد من $a_{ij}(\lambda)$ يقبل القسمة على $b(\lambda)$

نظرية الباقي :

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة λ الواردة في (23-3) ولنفرض أن $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n معرفة على F . بما أن $I - B$ غير شاذة فإنه يمكننا أن نكتب :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_1 \quad (23.11)$$

$$A(\lambda) = (\lambda I - B) \cdot Q_2(\lambda) + R_2 \quad (23.12)$$

حيث R_1 و R_2 خاليا من λ يمكن أن نبين :

III. إذا قسم كثير الحدود المصفوفى $A(\lambda)$ الوارد في (23.3) على $I - B$ على λ حيث $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ، حتى نحصل على الباقيين R_1 و R_2 الخاليتين من λ ، فإنه يكون :

$$R_1 = A_R(B) = A_p B^p + A_{p-1} B^{p-1} + \dots + A_1 B + A_0$$

$$R_2 = A_L(B) = B^p A_p + B^{p-1} A_{p-1} + \dots + B A_1 + A_0$$

مثال ٥ :

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } 4(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} \\ \lambda I - B &= \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} \text{ فيكون :} \\ A(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_1 \\ A(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B) Q_2(\lambda) + R_2 \end{aligned}$$

من المثال ٢ نجد أن $R_1 = A_R(B)$ و $R_2 = A_L(B)$ وذلك متفق مع النظرية III .

إذا كان $A(\lambda)$ كثير حدود مصفوفى عددي

$$A(\lambda) = f(\lambda) \cdot I = a_p I \lambda^p + a_{p-1} I \lambda^{p-1} + \dots + a_1 I \lambda + a_0 I$$

فإن الباقيين الواردين في (23.11) و (23.12) يكونان متطابقين أى :

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \dots + a_1 B + a_0 I$$

ونجد :

IV. إذا قسم كثير حدود مصفوفى عددي $f(\lambda) \cdot I_n$ على $\lambda I_n - B$ حتى نحصل على باقى القسمة R خالياً من λ فإنه يكون $R = f(B)$

كنتيجة لما تقدم نجد :

V. يقبل كثير حدود مصفوفى عددي $f(\lambda) \cdot I_n$ القسمة على $\lambda I_n - B$ إذا كان $f(B) = 0$ (وإذا كان فقط)

نظرية كايلى — هاميلتون :

اعتبر المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n . الذى تكون $\lambda I - A$ مصفوفته المميزة $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ معادله المميزة . نستنتج من (6.2) أن

$$(\lambda I - A) \cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda) \cdot I$$

وهكذا نجد أن $\phi(\lambda) \cdot I$ قابل القسمة على $\lambda I - A$ ونستنتج من النظرية V . أن $\phi(A) = 0$ أى :

VI. كل مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ تحقق معادلتها المميزة $\phi(\lambda) = 0$

مثال ٦ :

$$\text{إن المعادلة المميزة لـ } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ هي } \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0 . \text{ الآن}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

أنظر المسألة ٤

مسائل اضافية

١- المصفوفة $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 \\ \lambda + 1 & 1 \end{bmatrix}$ احسب $A_L(C)$ و $A_R(C)$ عندما يكون $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ان $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ نجد :

$$\begin{aligned} A_R(C) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

٢- برهن أنه إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتي لا مبدا الواردتين في (32.3) و (23.4) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة فإنه يوجد أربع كثيرات حدود مصفوفية وحيدة : $R_2(\lambda)$ و $Q_2(\lambda)$; $R_1(\lambda)$ و $Q_1(\lambda)$ حيث كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما أن يكون صفراً أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (i)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (ii)$$

إذا كان $q > p$ فإن (i) تحقق لـ $Q_1(\lambda) = 0$ و $R_1(\lambda) = A(\lambda)$ لنفرض أن $q \leq p$ فيكون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

حيث $C(\lambda)$ إما أن يساوى الصفر أو أن يكون من درجة لا تزيد عن $p - 1$.

إذا كان $C(\lambda)$ صفراً أو من درجة تقل عن q فإننا نجد (i) مع

$$R_1(\lambda) = C(\lambda) \quad \text{و} \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1} \lambda^{p-q}$$

إذا كان $C(\lambda) = C_s \lambda^s + \dots$ حيث $q < s$ لنكون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

إذا كان $D(\lambda)$ إما صفراً أو من درجة أقل من q فإننا نجد (i) مع

$$R_1(\lambda) = D(\lambda) \quad \text{و} \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1} \lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1} \lambda^{s-q}$$

أما خلاف هذا ، فإننا نتابع هذا العملية . بما أن هذا سيؤدي إلى متوالية من كثيرات الحدود المصفوفية متناقصة الدرجة $\dots D(\lambda), C(\lambda)$ فإننا سنصل في النهاية إلى كثير حدود مصفوفى إما أن يكون معلوماً أو من درجة أدنى من q ونحصل على (i)

لكي نحصل على (ii) نبدأ من :

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

نترك إتمام البرهان وإثبات الوحدات كتمرين للقارئ .

أنظر المسألة ١ من الفصل ٢٢

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix} \quad \text{٣- إذا أعطيت}$$

أوجد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$.

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (\text{ب}) \quad A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda), \quad (\text{أ}) \quad \text{بحيث يكون (١)}$$

كما في المسألة ٢ .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{هنا}$$

(١) لنحسب ما يلي :

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda) \lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda) \lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda),$$

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

$$Q_1(\lambda) = (A_4 \lambda^2 + C_3 \lambda + D_2) B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{فوجد :}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(ب) لنحسب ما يلي :

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} A_4 \lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} E_3 \lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

$$F(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda)$$

$$Q_2(\lambda) = B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & 2\lambda + 2 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

٤ - إذا أعطيت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم حقيقة أن A تحقق معادلتها المميزة لحساب A^3 . A^4 وكذلك

بما أن A غير شاذة لحساب A^{-1} و A^{-2}

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

وهكذا نجد :

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3 \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193 & 160 & 144 \\ 224 & 177 & 160 \\ 272 & 224 & 193 \end{bmatrix}$$

ومن $11I = -7A - 3A^2 + A^3$ فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \{-7I - 3A + A^2\} = \frac{1}{11} \left\{ -7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11} \{-7A^{-1} - 3I + A\} = \frac{1}{121} \left\{ -7 \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 33 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{121} \begin{bmatrix} -8 & -24 & 29 \\ 40 & -1 & -24 \\ -27 & 40 & -8 \end{bmatrix}$$

٥ - لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وأن $h(x)$ كثير حدود في x من الدرجة p .

$$h(A) = h(\lambda_1) \cdot h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n). \quad \text{برهن أن}$$

إن لدينا :

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (i)$$

لتفرض

$$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x) \dots (s_p - x) \quad (ii)$$

فنجيد :

$$h(A) = c(s_1 I - A)(s_2 I - A) \dots (s_p I - A)$$

$$\begin{aligned}
|h(A)| &= c^p |s_1 I - A| \cdot |s_2 I - A| \dots |s_p I - A| \\
&= \{c(s_1 - \lambda_1)(s_1 - \lambda_2) \dots (s_1 - \lambda_n)\} \\
&\quad \cdot \{c(s_2 - \lambda_1)(s_2 - \lambda_2) \dots (s_2 - \lambda_n)\} \dots \{c(s_p - \lambda_1)(s_p - \lambda_2) \dots (s_p - \lambda_n)\} \\
&= \{c(s_1 - \lambda_1)(s_2 - \lambda_1) \dots (s_p - \lambda_1)\} \\
&\quad \cdot \{c(s_1 - \lambda_2)(s_2 - \lambda_2) \dots (s_p - \lambda_2)\} \dots \{c(s_1 - \lambda_n)(s_2 - \lambda_n) \dots (s_p - \lambda_n)\} \\
&= h(\lambda_1) h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n)
\end{aligned}$$

(ii) وذلك باستخدام

مسائل اضافية

٦ - إذا أعطيت $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 + \lambda \\ \lambda + 1 & \lambda \end{bmatrix}$ ، $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ فاحسب :

$$A(\lambda) + B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + 2\lambda & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda^2 + \lambda + 2 & 2\lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A(\lambda) - B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & -1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$A(\lambda) \cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 \\ \lambda^4 + 2\lambda^2 - 1 & \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$B(\lambda) \cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 - \lambda \\ 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٧ - إذا أعطيت $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ -\lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ فاحسب :

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} , \quad B_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad A_R(C) \cdot B_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -7 \end{bmatrix} , \quad B_R(C) \cdot A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} , \quad Q_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} , \quad B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} , \quad A_L(C) \cdot B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} , \quad B_L(C) \cdot A_L(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$P_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} , \quad Q_L(C) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$Q(\lambda) = B(\lambda) \cdot A(\lambda) , \quad P(\lambda) = A(\lambda) \cdot B(\lambda) \quad \text{حيث}$$

٨ - إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتي لا مبدا مربعيتين من درجة n غير متثلتين ولنفرض أنهما على الترتيب من الدرجة p و q . وإذا كانت $C(\lambda)$ أى مصفوفة لا مبدا غير صفيرية فبرهن أن درجة مصفوفة حاصل ضرب هذه المصفوفات الثلاث بلى ترتيب لا تقل عن $p + q$.

٩ - لكل زوج من المصفوفات $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ الواردة أدناه ، أوجد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ المحققة للمعادلتين (23.7) و (23.8)

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ -\lambda^2 + 2\lambda - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 2\lambda + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 7\lambda - 2 & 5\lambda^2 + 2\lambda + 4 \\ \lambda^4 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 & 3\lambda^3 + 2\lambda + 2 & 4\lambda^2 + 6\lambda + 1 \\ 2\lambda^3 - \lambda + 2 & \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 & 3\lambda - 1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4 + \lambda^2 - 1 & \lambda^3 - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ \lambda^3 - \lambda^2 + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 2 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda + 1 & 2\lambda^4 + \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 - 2\lambda \\ \lambda & \lambda - 2 & \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

الجواب :

$$(a) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ -\lambda + 2 & -\lambda + 2 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$(b) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda - 1 \\ -\lambda + 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$(c) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda + 1 & \lambda^2 + 3 & -\lambda + 7 \\ \lambda^2 - 1 & 3\lambda + 5 & -3\lambda + 2 \\ 2\lambda - 3 & \lambda & \lambda - 6 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda + 14 & -6\lambda - 3 & -5\lambda + 2 \\ -21\lambda + 4 & -2\lambda + 3 & \lambda - 5 \\ 5\lambda - 7 & 10\lambda + 3 & 18\lambda - 7 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = 0$$

$$(d) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 6\lambda + 31 & -3\lambda^2 - 5\lambda - 16 & 3\lambda^2 - 7\lambda + 8 \\ \lambda - 3 & \lambda^2 - \lambda - 1 & -\lambda^2 + 4\lambda - 7 \\ -2\lambda - 1 & 7 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda + 46 & -12\lambda - 16 & -85\lambda - 23 \\ 4\lambda - 1 & 15\lambda - 9 & 12\lambda - 5 \\ -9\lambda - 8 & -7\lambda & 17\lambda - 2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 5\lambda + 31 & -\lambda^2 - \lambda - 4 & 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 14 & \lambda^2 & -2\lambda^2 + 6\lambda - 6 \\ -3\lambda - 2 & 3 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda + 46 & -12\lambda - 8 & -\lambda + 11 \\ -26\lambda - 30 & 11\lambda + 6 & 4\lambda - 4 \\ -15\lambda - 30 & 2\lambda + 4 & 16\lambda - 16 \end{bmatrix}$$

١٠- تحقق في (ب) من المسألة ٩ أن $R_1(\lambda) = AR(C)$ و $R_2(\lambda) = A_L(C)$ حيث $B(\lambda) = \lambda I - C$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \text{ و } B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \quad ١١- \text{ إذا كان}$$

(١) احسب : $A(\lambda) = B(\lambda) \cdot C(\lambda)$

(ب) أوجد $Q(\lambda)$ و $R(\lambda)$ من درجة لا تزيد على الواحد بحيث يكون $A(\lambda) = Q(\lambda) \cdot B(\lambda) + R(\lambda)$.

$$\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{bmatrix} \quad \text{الجواب:}$$

١٢- إذا علمت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فاحسب كافي المسألة ٤ :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, & A^3 &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, & A^4 &= \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & A^{-2} &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, & A^{-3} &= \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

١٣- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين متشابهتين وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي فإن $g(A)$ و $g(B)$ يكونان متشابهين .

إرشاد : برهن أولاً أن A^k و B^k متشابهتان لأى عدد صحيح موجب k .

١٤- برهن أنه إذا كان $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي فإن

$$g(B) = \text{diag}(g(B_1), g(B_2), \dots, g(B_m))$$

١٥- برهن النظرية III .

إرشاد : حقق أن $\lambda I - B$ يقسم $A(\lambda) - A_R(B)$

١٦- نقول عن المصفوفة C إنها جذر لكثير الحدود المصفوفي العددي $B(\lambda)$ الوارد في (23.9) فيما إذا كان $B(C) = 0$. برهن أن المصفوفة C تكون جذراً لـ $B(\lambda)$ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة المميزة لـ C تقسم $B(\lambda)$.

١٧- برهن أنه إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A وإذا كان $F(A)$ أى كثير حدود عددي في A ، فإن القيم

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n) \quad \text{مى } f(A) \text{ الخاصة لـ}$$

إرشاد : اكتب : $\lambda - f(x) = c(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_s - x)$ بحيث يكون

$$|\lambda I - f(A)| = c^n |x_1 I - A| \cdot |x_2 I - A| \dots |x_s I - A|.$$

$$|x_i I - A| = (x_i - \lambda_1)(x_i - \lambda_2) \dots (x_i - \lambda_n) \quad \text{الآن استعمل الملاحظتين}$$

$$c(x_1 - \lambda_j)(x_2 - \lambda_j) \dots (x_s - \lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j). \quad \text{و}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ١٨- \text{ أوجد القيم الخاصة لـ } f(A) = A^2 - 2A + 3. \text{ إذا علمت أن}$$

١٩- أوجد النظرية الخاصة بالمسألة ٥ كنتيجة طبيعية للمسألة ١٧.

٢٠- برهن أنه إذا كان X متجهها لا متغيرا لمصفوفة المسألة ١٧ A ، فإن X يكون متجهها لا متغيرا لـ $f(A)$.

٢١- لنفرض $A(t) = [a_{ij}(t)]$ حيث $a_{ij}(t)$ كثير حدود حقيقي للمتغير الحقيقي t . خذ :

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

وفاضل الطرف الأخير كما لو كان كثير حدود معاملاته ثابتة لاقتراح التعريف :

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]$$

٢٢- أوجد صيفا لكل من

$$C = [c_{ij}] \text{ حيث } c \text{ عدد ثابت أو } \frac{d}{dt} \{cA(t)\}, \text{ (ب) } \frac{d}{dt} \{A(t) + B(t)\}; \text{ (ا) }$$

$$\frac{d}{dt} A^{-1}(t), \text{ (د) } \frac{d}{dt} \{A(t) \cdot B(t)\}; \text{ (ج) }$$

$$A(t) \cdot B(t) = C(t) = [c_{ij}(t)] \text{ اكتب (ج) إرشاد : في حالة}$$

$$A(t) \cdot A^{-1}(t) = I. \text{ ثم فاضل } c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) b_{kj}(t). \text{ في حالة (د) استعمل العلاقة}$$

الفصل الرابع والعشرون

شكل سميت النظامي

بالتحويلات الأولية :

على المصفوفة لابتدا $A(\lambda)$ على $F[\lambda]$ فإننا نفي :

(1) المبادلة بين الصفين ذوي الرقن i و j ونرمز لذلك بالرمز H_{ij} ؛ المبادلة بين العمودين ذوي الرقن i و j ونرمز له بالرمز K_{ij} .

(2) ضرب الصف ذي الرقم i بثابت غير صفري k ونرمز لذلك بالرمز $H_i(k)$ ضرب العمود ذي الرقم i بثابت غير صفري k ونرمز له بالشكل $K_i(k)$.

(3) إضافة حاصل ضرب كثير حدود $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ مع الصف رقم j للصف رقم i ونرمز لذلك بالرمز $H_{ij}(f(\lambda))$.

إضافة حاصل ضرب العمود رقم j و $f(\lambda)$ إلى العمود رقم i ويرمز لذلك بالرمز $K_{ij}(f(\lambda))$.

إن هذه التحويلات هي التحويلات الأولية الواردة في الفصل الخامس عدا التحويل . (3) حيث كلمة عددي قد تغيرت وأصبحت كثير حدود . نرمز للتحويل الأول والمصفوفة الأولية التي نحصل عليها نتيجة لإجراء هذا التحويل الأول على I بنفس الرمز . وهكذا فإنه يمكن إجراء تحويل صفوف على $A(\lambda)$ بضربه من اليسار ، بمصفوفة مناسبة H كما أنه يمكن إجراء تحويل أعمدة على $A(\lambda)$ بضربه من اليمين بمصفوفة مناسبة K .

تمشياً مع الفصل الخامس نجد :

I. أن لكل مصفوفة أولية من $F[\lambda]$ معكوساً هو أيضاً مصفوفة أولية من $F[\lambda]$

II. إذا كان $|A(\lambda)| = k \neq 0$ حيث k من F فإن $A(\lambda)$ يكون حاصل ضرب مصفوفات أولية .

III. لا تتغير رتبة مصفوفة λ من خلال تحويلات أولية .

نقول عن مصفوفتين λ مربعيتين ومن الدرجة n ، $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ عناصرهما من $F[\lambda]$ ، إنهما متكافئتين

فيما إذا وجد $P(\lambda) = H_s \dots H_2 \cdot H_1$ و $Q(\lambda) = K_1 \cdot K_2 \dots K_t$ بحيث يكون

$$B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) \quad (24.1)$$

وهكذا نجد :

IV. أن المصفوفات λ من الدرجة $m \times n$ المتكافئة تكون ذات رتبة واحدة .

المجموعة القانونية :

سنبرهن في المسألتين ١ و ٢ ما يلي :

V. بفرض أن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتين متكافئتين رتبتهما r فإن القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفورات $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة s حيث $s \geq r$ هو أيضاً القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفورات $B(\lambda)$ المربعة من الدرجة s .

سنبرهن في المسألة ٣ :

VI يمكن اختزال كل مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ من الرتبة r بواسطة تحويلات أولية إلى شكل سميث النظامي التالي :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (24.2)$$

حيث $f_i(\lambda)$ كثير حدود واحد ويقسم $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.
عندما تختزل مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ من الرتبة r إلى (24.2) فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفورات المربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ حيث $r \geq s$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصفورات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وذلك استنادا إلى النظرية V.

بما أن في $N(\lambda)$ كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفورات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وبالتالي لـ $A(\lambda)$ هو :

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (24.3)$$

لنفرض أن $A(\lambda)$ قد اختزل إلى

$$N(\lambda) = \text{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

وإلى :

$$N_1(\lambda) = \text{diag}(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

نجد من (24.3)

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda) \cdot \dots \cdot h_s(\lambda)$$

والآن $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)$ ، $f_2(\lambda) = h_2(\lambda)$, ...، بحيث يكون

بصورة عامة إذا عرفنا $g_0(\lambda) = 1$ فإن :

$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (24.4)$$

ونجد :

VII. تتعين المصفوفة $N(\lambda)$ المعرفة في (24.2) بشكل وحيد من المصفوفة المعطية $A(\lambda)$.

وهكذا فإن مصفوفات سميث النظامية تكون مجموعة قانونية بالنسبة للتكافؤ على $F[\lambda]$.

مثال ١ :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix} \quad \text{اعتبر}$$

إن من الواضح أن القاسم المشترك الأعظم للمصفورات ذات الصف الواحد (عناصر) من $A(\lambda)$ هو $g_1(\lambda) = 1$ وأن القاسم المشترك الأعظم للمصفورات ذات الصفين من $A(\lambda)$ هو $g_2(\lambda) = \lambda$ وأن $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. وهكذا نجد من (24.2) أن :

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)/g_1(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

وأن شكل سميث النظامي لـ $A(\lambda)$ هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

ولاختزال آخر أنظر المسألة ٤ :

العوامل اللا متغيرة :

تسمى كثيرات الحدود $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ الواقعة في قطر شكل سميث النظامي لـ $A(\lambda)$ عوامل لا متغيرة لـ $A(\lambda)$. إذا كان $f_k(\lambda) = 1$ حيث $r \geq k$ فإن $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \dots = f_k(\lambda) = 1$ وتسمى كل واحد من كثيرات الحدود هذه عاملا لا متغيرا تافهاً .

كنتيجة للنظرية VII نجد :

VIII. تكون مصفوفتا λ المربعيتين من الدرجة n والمعروفة على $F[\lambda]$ متكافئتين على $F[\lambda]$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس العوامل اللا متغيرة .

القواسم الأولية :

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة لا مبدا مربعة ومن الدرجة n على $F[\lambda]$ ولنفرض أنه يمكن كتابة عواملها اللا متغيرة بالشكل التالي :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}} \dots \{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, (i = 1, 2, \dots, r) \quad (24.5)$$

حيث $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_s(\lambda)$ كثيرات حدود واحدة متباينة وغير قابلة للاختزال على $F[\lambda]$. إن بعض q_{ij} يمكن أن يكون صفرا ويحذف في هذه الحالة المعامل المناظر ولكن بما أن $f_{i+1}(\lambda)$ يقسم $f_i(\lambda)$ فإن $q_{i+1,j} \leq q_{i,j}$ حيث $(i = 1, 2, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots, s)$

إن العوامل $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ التي تظهر في (24.5) تسمى قاسما أوليا على $F[\lambda]$ لـ $A(\lambda)$.

مثال ٢ :

لنفرض أن لمصفوفة λ مربعة $A(\lambda)$ ومن الدرجة 10 ، على حقل الأعداد الجذرية يكون له شكل سميث النظامي التالي :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & 0 & \\ \hline & & & 0 & & & 0 \end{array} \right]$$

إن رتبة هذا الشكل تساوي 5 وإن عوامله اللا متغيرة هي :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= 1, & f_2(\lambda) &= 1, & f_3(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda^2+1), \\ f_4(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, & f_5(\lambda) &= (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) \end{aligned}$$

إن قواسمه الأولية هي :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1), \lambda^2, \lambda, \lambda^2-3$$

نلاحظ أن القواسم الأولية ليست ، بالضرورة ، مختلفة . لقد كتب في القائمة السابقة كل مقسوم أولى كما يظهر غالبا في العوامل اللامتغيرة .

مثال ٣ :

(١) إن العوامل اللامتغيرة لـ $A(\lambda)$ الواردة في المثال ٢ لا تتغير على حقل الأعداد الحقيقية ولكن القواسم الأولية تأخذ الشكل :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1), \lambda^2, \lambda, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3}$$

لأنه لا يمكن تحليل λ^2-3

(ب) على حقل الأعداد المركبة ، تبقى العوامل اللامتغيرة كما هي ، بينما تصبح القواسم الأولية كما يلي :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda+i)^2, (\lambda+i)^2, \lambda+i, (\lambda-i)^2, (\lambda-i)^2, \lambda-i, \lambda^2, \lambda, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3}$$

إن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تعين رتبها وقواسمها الأولية وعلى العكس فإن رتبة مصفوفة وقواسمها الأولية تعين عواملها اللامتغيرة .

مثال ٤ :

لتفرض أن القواسم الأولية للمصفوفة لا يبدأ $A(\lambda)$ المربعة ذات الدرجة السادسة والرتبة الخامسة هي :

$$\lambda^3, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda-1, (\lambda+1)^2, \lambda+1$$

أوجد العوامل اللامتغيرة لهذه المصفوفة ، واكتب شكل سميت القانون لها .

لإيجاد $f_5(\lambda)$ كون المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الأولية أى :

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

ولإيجاد $f_4(\lambda)$ نحذف من قائمة القواسم الأولية تلك التى استعملت في تكوين $f_5(\lambda)$ ثم نوجد المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الباقية فنجد :

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

نعيد الكرة $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ فتكون بذلك قد استعملنا كل القواسم الأولية ونجد : $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$ ويكون شكل سميت القانون هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تكون لامتغيرة من خلال تحويل أولى فإن القواسم الأولية تبقى كذلك كما هي بعد تحويل أولى : لهذا

IX. تكون مصفوفتا λ المربعتان ومن الدرجة n والمعرفتين على $F[\lambda]$ ، متكافئتين على $F[\lambda]$ فيها إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة وكانت لهما نفس القواسم الأولية .

مسائل محلولة

١ - برهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية . فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ إن من الضروري أن نعتبر فقط حالات $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ التي يكون فيها $P(\lambda)$ واحدا من المصفوفات الأولية الثلاثة H .

لنفرض أن $R(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ ولنفرض أن $S(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ له نفس وضع $R(\lambda)$. ولنعتبر $P(\lambda) = H_{ij}$ ، إن تأثير هذا التحويل على $A(\lambda)$ هو إما (i) أن يترك $R(\lambda)$ بدون تغيير وإما (ii) أن يبادل بين صفين من صفوف $R(\lambda)$ وإما (iii) أن يبادل بين صف من $R(\lambda)$ وصف آخر لا يقع في $R(\lambda)$. في الحالة (i) يكون $S(\lambda) = R(\lambda)$ ، وفي الحالة (ii) يكون $S(\lambda) = -R(\lambda)$ أما في الحالة (iii) فإن $S(\lambda)$ يساوي ، بإهمال الإشارة ، مصفرا مربعا آخر من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

اعتبر الآن $P(\lambda) = H_i(k)$ فيكون عندها إما $S(\lambda) = R(\lambda)$ أو $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

لنعتبر أخيراً $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$ فيكون التأثير على $A(\lambda)$ واحدة من الحالات الآتية :

(i) يترك هذا التحويل $R(\lambda)$ كما هو بلا تغيير ، (ii) يضيف إلى واحد من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب $f(\lambda)$ بصف آخر من $R(\lambda)$. (iii) يضيف إلى صف من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب صف آخر ، غير واقع في $R(\lambda)$ في $R(\lambda)$ في الحالتين (i) و (ii) يكون $S(\lambda) = R(\lambda)$ أما في الحالة (iii) فيكون :

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda) \cdot T(\lambda)$$

حيث $T(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

وهكذا نجد أن كل مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ هو تركيب خطي لمصفوفات مربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $g_1(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda) - P(\lambda)$ فيكون إذن $g(\lambda)$ قاسم لـ $g_1(\lambda)$. لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$

الآن $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$ و $P^{-1}(\lambda)$ هي حواصل مصفوفات أولية وينتج عن ذلك أن $g_1(\lambda)$ يقسم $g(\lambda)$ وأن $g_1(\lambda) = g(\lambda)$

٢ - برهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ هي حواصل ضرب مصفوفات أولية فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ و $C(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ بما أن $C'(\lambda) = Q'(\lambda) \cdot B'(\lambda)$ و $Q'(\lambda)$ هي حواصل ضرب مصفوفات أولية ، فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $B'(\lambda)$ ولكن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفوفات $C(\lambda)$ المربعة من درجة s . والأمر صحيح أيضا بالنسبة لكل من $B'(\lambda)$

و $B(\lambda)$. وهكذا نجد أن القاسم المشترك الأعظم لكل المضمرات المربعة ذات الدرجة s لـ $C(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو نفسه القاسم المشترك الأعظم لكل المضمرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.
٣- برهن على أن كل مصفوفة لا مبدا من الشكل $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ ومن الرتبة r يمكن اختزالها بتحويلات أولية إلى شكل سميث النظري :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يكون كل $f_i(\lambda)$ واحدياً و $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ حيث $(i = 1, 2, \dots, r-1)$

إن النظرية صحيحة في حالة $A(\lambda) = 0$ فلنفرض إذا أن $A(\lambda) \neq 0$ أى أنه يوجد عنصر $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ ومن أقل درجة .
بواسطة تحويل من النوع ٢ ، يمكن جعل هذا العنصر واحدياً وبالمبادلة المناسبة بين الصفوف والأعمدة يمكن وضع هذا العنصر في الموضع $(1,1)$ في المصفوفة المفروضة ليصبح العنصر الجديد $a_{11}(\lambda)$
(١) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر آخر من $A(\lambda)$. وينتج عن ذلك أن تحويلاً من النوع (٣) يختزل المصفوفة $A(\lambda)$ إلى الشكل :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \quad (i)$$

حيث $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$

(ب) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم كل عنصر من $A(\lambda)$ وأن $a_{1j}(\lambda)$ هو عنصر من الصف الأول لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. يمكننا استناداً إلى النظرية I من الفصل ٢٣ أن نكتب :

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda) a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

حيث $r_{1j}(\lambda)$ من درجة أقل من درجة $a_{11}(\lambda)$. لنطرح من العمود j حاصل ضرب $q(\lambda)$ بالعمود الأول بحيث يصبح العنصر الجديد الواقع في الصف الأول والعمود j هو $r_{1j}(\lambda)$. لنجعل بواسطة تحويل من النوع ٢ من العنصر واحدياً وببديل بين الأعمدة ، نضعه في الموضع $(1,1)$ ليصبح $a_{11}(\lambda)$ إذا كان الآن $a_{11}(\lambda)$ قاسماً لكل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نستمر للحصول على (i) وإلا ، فبعد عدد محدود من تكرار هذه الطريقة ، سنحصل على مصفوفة يقبل كل عنصر واقع في الصف الأول والعمود الأول ، القسمة على العنصر الذي يحتل الموضع $(1,1)$.

إذا قسم هذا العنصر كل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نتبع الطريقة إلى أن نحصل على (i) وإلا فإننا نفرض أن $a_{ij}(\lambda)$ لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. لنفرض أن $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ و $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ لنطرح من الصف i الرقم i حاصل ضرب $q_{i1}(\lambda)$ بالصف الأول . إن هذا يحل الصف i على $a_{11}(\lambda)$ ويحل $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda)$. لننصف الآن الصف i إلى الصف الأول . إن هذا العمل يبق $a_{11}(\lambda)$ كما كان بدون تغيير ولكنه يحل محل $a_{ij}(\lambda)$ بحل $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda) \{1 - q_{i1}(\lambda)\} a_{11}(\lambda)$

بما أن هذا غير قابل للقسم على $a_{11}(\lambda)$ فإننا نقسمه على $a_{11}(\lambda)$ ونجد كالسابق ، تمويضا آخر (الباق) للمعبر $a_{11}(\lambda)$. نتابع هذه الطريقة حتى نحصل على كثير حدود واحد من كثيرات الحدود التي نختارها كعنصر $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم عنصر من عناصر المصفوفة بـ عدد محدود من المراحل المشابهة لما سبق نحصل على $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر ونحصل من جديد على (i) .

وأخيرا إذا عاملنا $B(\lambda)$ بالطريقة السابقة ذاتها سوف نحصل على :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

ونحصل في النهاية على شكل سميث النظامي المطلوب .

بما أن $f_1(\lambda)$ هو قاسم لكل عنصر من $B(\lambda)$ و $f_2(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ فإن $f_1(\lambda)$ يقسم $f_2(\lambda)$ وبطريقة مشابهة نجد أن كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$.

٤ - اختزل :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامي لها .

ليس من الضروري أن نتبع هنا طريقة المسألة ٣ . إن المعبر $f_1(\lambda)$ من شكل سميث النظامي هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $A(\lambda)$ ومن الواضح أن هذا المعبر هو الواحد . سنعمل مباشرة بحيث يحتل هذا المعبر الموضع (1,1) وبذلك نحصل على العلاقة (i) للمسألة ٣ . بعد أن نطرح العمود الثاني من العمود الأول نحصل على :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ويكون الآن القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ هو λ . وهكذا يكون :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

وهو الشكل المطلوب .

٥ - اختزل .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 & \lambda + 2 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda^2 - 2\lambda & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & \lambda^2 + \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامي لها .

نجد على التوالي :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

وذلك باستعمال التحويلات الأولية : $K_{32}(-1)$; $H_{21}(-\lambda)$, $H_{31}(-\lambda+2)$; $K_{21}(-\lambda+1)$, $K_{31}(-\lambda-2)$; $H_{23}(-1)$; $K_{23}(1)$; $H_{32}(\lambda+1)$, $H_2(-1)$; $K_{32}(-\lambda-1)$, $K_3(-1)$.

مسائل إضافية

- ٦- برهن أن : $H_{ij}K_{ij} = H_i(k)K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda)) \cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I$.
- ٧- برهن أن مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ مربعة من درجة n تأخذ شكل حاصل ضرب مصفوفات أولية فيما إذا كان $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفري .
- ٨- برهن أنه يمكن اختزال مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة n إلى I بواسطة تحويلات أولية فيما إذا كان $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفري .
- ٩- برهن أنه يكون لمصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المعرفة على $F[\lambda]$ معكوسا عنصريا من $F[\lambda]$ إذا كانت (وإذا كانت فقط) $A(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية .
- ١٠- أوجد مصفوفتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) = I$ ثم أوجد بعدها :

$$A(\lambda)^{-1} = Q(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

علما أن :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

إرشاد : أنظر في المسألة ٦ من الفصل الخامس . الجواب

١١- اختزل كل مصفوفة ممايل إلى شكل سميث النظامي لها .

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4 \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix} \quad (و)$$

١٢- أوجد القواسم الأولية على حقل الأعداد الجبرية وحقل الأعداد الحقيقية وحقل الأعداد المركبة لكل واحدة من المصفوفات الواردة في المسألة ١١ .

١٣- إن كثيرات الحدود التالية هي عوامل لا متغيرة غير تافهة لمصفوفة . أوجد قواسمها الأولية في حقل الأعداد الحقيقية .

$$\lambda^2 - \lambda, \lambda^3 - \lambda^2, \lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4 \quad (أ)$$

$$\lambda+1, \lambda^2-1, (\lambda^2-1)^2, (\lambda^2-1)^3 \quad (ب)$$

$$\lambda, \lambda^3+\lambda, \lambda^7-\lambda^6+2\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2 \quad (ج)$$

$$\lambda, \lambda^3+\lambda, \lambda^5+2\lambda^3+\lambda, \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda \quad (د)$$

الجواب :

$$\lambda^4, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1 \quad (أ)$$

$$\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3 \quad (ب)$$

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda-1 \quad (ج)$$

$$\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, \lambda+1 \quad (د)$$

١٤- إن كثيرات الحدود التالية هي قواسم أولية لمصفوفة رتبها ستة : ما هي عواملها اللامتغيرة .

$$(\lambda-1)^3, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda-1, (\lambda+1)^2 \quad (أ) \quad \lambda, \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \lambda+3, \lambda+4 \quad (ب)$$

$$\lambda^5, \lambda^3, \lambda, (\lambda+2)^5, (\lambda+2)^4, (\lambda+2)^2 \quad (ج) \quad \lambda^3, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, \lambda-1 \quad (د)$$

الجواب :

$$1, 1, 1, 1, \lambda, \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) \quad (أ)$$

$$1, 1, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda-1), \lambda^3(\lambda-1)^2 \quad (ب)$$

$$1, 1, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2 \quad (ج)$$

$$1, 1, 1, \lambda(\lambda+2)^2, \lambda^3(\lambda+2)^4, \lambda^5(\lambda+2)^5 \quad (د)$$

١٥ - حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية العادية :

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t \end{cases}$$

حيث x_1, x_2, x_3 دوال حقيقية مجهولة لمتغير حقيقي t ، وحيث $D = \frac{d}{dt}$

إرشاد : يمكن كتابة هذه المجموعة برموز المصفوفات بالشكل :

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

والآن تعامل كثيرات الحدود في D الموجودة في A كما تعامل كثيرات الحدود في λ في مصفوفة λ .

بعد ما تقدم نبدأ بإيجاد شكل يشبه شكل المسألة ٦ في الفصل الخامس ونستعمل بالترتيب الوارد التحويلات الأولية :

$$K_{12}(-1), H_1(-1), K_{21}(D+1), H_{21}(-D-2), H_{31}(D+1), K_{23}(D), H_{23}(-4), K_2(\frac{1}{2}), K_{32}(5D+7), H_{32}(-\frac{1}{2}D), H_3(2), K_3(1/5)$$

لنحصل على :

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

وهو شكل سميث النظامي لـ A .

نستعمل التحويل الخطي $X = QY$ لتحويل $AX = H$ إلى $AQY = H$

ومن العلاقة $PAQY = N_1Y = PH$ نجد :

$$(D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5})y_3 = 6e^t - 1 \quad \text{و} \quad y_1 = 0, \quad y_2 = t - 4e^t,$$

$$y_3 = K_1 e^{-4t/5} + K_2 e^{-t} + \frac{5}{3}e^t - \frac{5}{4},$$

نستعمل أخيراً التحويل $X = QY$ لكي نحصل على الحل المطلوب :

$$x_1 = 3C_1 e^{-4t/5} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}, \quad x_2 = 12C_1 e^{-4t/5} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}, \quad x_3 = -2C_1 e^{-4t/5} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}$$

الفصل الخامس والعشرون

كثيرات الحدود الأدنى لمصفوفة

المصفوفة المميزة :

إن المصفوفة المميزة $\lambda I - A$ لمصفوفة مربعة A على F من الدرجة n هي مصفوفة لا مبدا غير شاذة ذات عوامل لامتنيرة وقواسم أولية باستخدام (24.4) يسهل علينا برهاننا ما يلي :

I. إذا كانت D مصفوفة قطرية فإن القواسم الأولية لـ $\lambda I - D$ هي عناصرها القطرية .
سنبرهن في المسألة :

II. تكون مصفوفتان A و B مربعتان من الدرجة n ومعرفتان على F متشابهتين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) لمصفوفتيها المميزتين نفس العوامل اللامتنيرة أو إذا كان لهما رتبة واحدة والقواسم الأولية ذاتها في $F[\lambda]$.

يستنتج من النظريتين I و II

III. تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n ومعرفة على F ، مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان (وإذا كان فقط) لـ $\lambda I - A$ قواسم أولية خطية في $F[\lambda]$.

لا متغيرات تشابهية :

تسمى العوامل اللامتنيرة لـ $\lambda I - A$ ، لامتنيرات تشابهية لـ A .

لتكن $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ مصفوفتين غير شاذتين بحيث يكون $P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)$ شكل سميث النظام .
 $\text{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$

والآن :- $|P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)| = |P(\lambda)| \cdot |Q(\lambda)| \phi(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_n(\lambda)$
بما أن $\phi(\lambda)$ و $f_i(\lambda)$ واحدانيان ، فإن $|P(\lambda)| \cdot |Q(\lambda)| = 1$ ويكون :

IV - إن كثير الحدود المميز لمصفوفة A مربعة ومن الدرجة n هو حاصل ضرب العوامل اللامتنيرة لـ $\lambda I - A$ أو اللامتنيرات التشابهية لـ A .

كثير الحدود الأدنى :

ينتج عن نظرية كاييل - هاملتون (الفصل ٢٣) أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تحقق معادلتها المميزة $\phi(\lambda) = 0$ ذات الدرجة n . يسمى كثير الحدود الواحدى $m(\lambda)$ ذو الدرجة الدنيا بحيث يكون $m(A) = 0$ كثير الحدود الأدنى لـ A وتسمى $m(\lambda) = 0$ المعادلة الصغرى لـ A . (يسمى $m(\lambda)$ أيضا الدالة الصغرى للمصفوفة A)

إن معظم الطرق الأولية المتبعة لإيجاد كثير الحدود الأدنى لـ $A \neq 0$ تنطوي على الروتين التالى .

(i) إذا كان $A = a_0 I$ فإن $m(\lambda) = \lambda - a_0$;

(ii) إذا كان $A \neq aI$ لكل a ولكن $A^2 = a_1 A + a_0 I$ فإن $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0$;

(iii) إذا كان $A^2 \neq aA + bI$ لكل a و b ولكن $A^3 = a_2A^2 + a_1A + a_0I$ فإن :

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

ومكنا

مثال ١ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

أوجد كثير الحدود الأدنى لـ A من الواضح أن $A - a_0I = 0$ مستحيل . ضع :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9 = a_1 + a_0 \\ 8 = 2a_1 \end{cases} \quad \text{باستعمال المتصيرين الأولين من الصف الأول من كل من هذه المصفوفات فنجد :}$$

أي $a_1 = 4$ و $a_0 = 5$. وبعد (ليس قبل) أن نتحقق لكل عنصر من عناصر A^2 يمكننا أن نستنتج أن $A^2 = 4A + 5I$ وأن كثير الحدود الأدنى المطلوب هو $\lambda^2 - 4\lambda - 5$

سنبرهن في المسألة ٢ :

V. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ أى كثير حدود على F فإن $f(A) = 0$ إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A قاسماً لـ $f(\lambda)$

سنبرهن في المسألة ٣ :

VI. إن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللامتغير المتشابهى $f_n(\lambda)$ لـ A فى الدرجة الأعلى .

بما أن اللامتغيرات المتشابهة $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_{n-1}(\lambda)$ تقسم كلها $f_n(\lambda)$ فإنه يكون :

VII. إن كثير الحدود المميز $\phi(\lambda)$ لـ A هو حاصل ضرب كثير الحدود الأدنى لـ A وعوامل واحدة معينة لـ $m(\lambda)$:

VIII. إن المصفوفة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n قواسم أولية خطية متباينة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لكثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A عوامل خطية متباينة فقط .

المصفوفات غير المتردية :

نقول عن مصفوفة A مربعة من الدرجة n إنها غير متردية فيما إذا كان كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأدنى لها متطابقين ونقول عنها فى الحالة المخالفة مصفوفة متردية ويكون :

IX. تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n غير متردية ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لها لامتغيراً تشابهاً غير تافه واحد فقط .

ومن السهل البرهان على :

X. إذا كان لـ B_1 و B_2 كثيرا حدود ادنيين $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$ على الترتيب ، فإن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ للمجموع المباشر $D = \text{diag}(B_1, B_2)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$

يمكن تمديد هذه النتيجة على المجموع المباشر لـ m مصفوفة .
 XI. لتكن $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \dots, g_m(\lambda)$ كثيرات حدود واحدة متباينة وغير قابلة للاختزال من $F[\lambda]$ ولنفرض
 $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}, (j = 1, 2, \dots, m)$. أن A_j مصفوفة غير مترتبة بحيث يكون
 $B = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ فإن $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1} \cdot \{g_2(\lambda)\}^{a_2} \dots \{g_m(\lambda)\}^{a_m}$ يكون لها
 كثير حدود أدنى وكثير حدود مميز في نفس الوقت .

المصفوفة الرفيعة :

لتكن A مصفوفة غير مترتبة ذات لا متغير تشابهي غير تافه .
 $g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (25.1)
 نعرف المصفوفة الرفيعة $g(\lambda)$ بما يلي :

$$C(g) = [-a], \quad \text{if } g(\lambda) = \lambda + a \quad (25.2)$$

ولقيم $n > 1$ يكون :

$$C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

سنبرهن في المسألة ٤ ما يلي :

XII. إن المصفوفة الرفيعة $C(g)$ لكثير حدود $g(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى يساويان في وقت مما $g(\lambda)$
 (يفضل مؤلفون آخرون تعريف $C(g)$ بمنقول المصفوفة الواردة في (25.3) سنستعمل في هذا الكتاب هاتين الصيغتين) .

من السهل البرهان على ما يلي :

XIII. إذا كانت A مصفوفة غير مترتبة ذات لا متغير تشابهي غير تافه ، فإن $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$.

$$I = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{و } J = [a] \text{ إذا كانت } n = 1 \quad (25.4)$$

يكون $F_n(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى له

مسائل محلولة

١- برهن أن مصفوفتين A و B مربعتين من الدرجة n ومعرفتين على F تكونان متشابهتين على F فيما إذا
 كان (وإذا كان فقط) لمصفوفتيهما المميزتين نفس العوامل اللامتغيرة أو إذا كان لهما نفس القواسم الأولية في $F[\lambda]$
 لنفرض أن A و B متشابهتان نستنتج من العلاقة (i) للمسألة ١ ، الفصل ٢٠ ، أن $\lambda I - A$ و $\lambda I - B$
 متكافئتان . وينتج عن هذا استنادا إلى النظريتين VIII و IX من الفصل ٢٤ أن لهما نفس العوامل اللامتغيرة والقواسم
 الأولية نفسها

على العكس ، لنفرض أن $\lambda I - A$ و $\lambda I - B$ العوامل اللامتغيرة نفسها أو القواسم الأولية ذاتها .
إن هذا يؤدي استنادا إلى النظرية VIII . من الفصل ٢٤ إلى أنه يوجد مصفوفتا لا مبدا غير شاذتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون :

$$\begin{aligned} P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda) &= \lambda I - B \\ \text{أو} \\ P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) &= (\lambda I - B) \cdot Q^{-1}(\lambda) \end{aligned} \quad (i)$$

لنفرض :

$$P(\lambda) = (\lambda I - B) \cdot S_1(\lambda) + R_1 \quad (ii)$$

$$Q(\lambda) = S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_2 \quad (iii)$$

$$Q^{-1}(\lambda) = S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_3 \quad (iv)$$

حيث R_1 و R_2 و R_3 خالية من λ . لنموض في (i) فنجد :

$$(\lambda I - B) \cdot S_1(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_1(\lambda I - A) = (\lambda I - B) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + (\lambda I - B) R_3$$

$$\begin{aligned} \text{أو} \\ (\lambda I - B) \{ S_1(\lambda) - S_3(\lambda) \} (\lambda I - A) &= (\lambda I - B) R_3 - R_1(\lambda I - A) \end{aligned} \quad (v)$$

وهكذا نجد $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$ و

$$(\lambda I - B) R_3 = R_1(\lambda I - A) \quad (vi)$$

وذلك لأنه ، في الحالة المماكة سيكون الطرف الأيسر من (v) من درجة لا تقل عن الدرجة الثانية بينما درجة الطرف الأيمن منها لا تزيد عن الدرجة الأولى .

إذا استخدمنا (iii) و (iv) و (vi) فإننا نجد :

$$\begin{aligned} I &= Q(\lambda) \cdot Q^{-1}(\lambda) \\ &= Q(\lambda) \{ S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_3 \} \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + \{ S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_2 \} R_3 \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) R_3 + R_2 R_3 \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + S_2(\lambda) \cdot R_1 \cdot (\lambda I - A) + R_2 R_3 \end{aligned}$$

أو

$$I - R_2 R_3 = \{ Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda) \cdot R_1 \} (\lambda I - A) \quad (vii)$$

والآن $I - R_2 R_3 = 0$ و $Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda) \cdot R_1 = 0$ وذلك لأنه في الحالة المماكة سيكون الطرف الأيسر من (vii) من الدرجة صفر بالنسبة λ بينما تكون درجة الطرف الأيمن مساوية الواحد على الأقل . أي أن $R_3 = R_2^{-1}$ ونستنتج من (vi) :

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I - A) R_2 = \lambda R_1 R_2 - R_1 A R_2$$

بما أن A و B و R_1 و R_2 خالية من λ فإن $R_1 = R_2^{-1}$ وهكذا $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1} A R_2$ وإن A و B متشابهان وهو المطلوب إثباته .

٢- برهن ما يلي : إذا كانت A هي أى مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ ككثير حدود في $F[\lambda]$

فإن $f(A) = 0$ إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A قاسماً لـ $f(\lambda)$.
نستنتج من طريقة التقسيم الواردة في الفصل ٢٢ .

$$f(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

وينتج عن ذلك أن :

$$f(A) = q(A) \cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

لنفرض أن $f(A) = 0$ فينتج أن $r(A) = 0$. الآن إذا كان $r(\lambda) \neq 0$ فإن درجته تقل عن درجة $m(\lambda)$ وهذا يخالف لما فرضناه من كون $m(\lambda)$ هو كثير الحدود الأدنى لـ A فلا بد إذن أن يكون $r(\lambda) = 0$ وأن $m(\lambda)$ قاسماً لـ $f(\lambda)$.

لبرهان العكس ، نفرض $f(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda)$ ويكون $f(A) = q(A) \cdot m(A) = 0$.

٣- برهن ما يلي : أن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللامتغير التشابهي $f_n(\lambda)$ لـ A ذي الدرجة الأعلى .

لنرمز بالرمز $g_{n-1}(\lambda)$ للقاسم المشترك الأعظم للمصفوفات المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة $\lambda I - A$ فيكون :

$$|\lambda I - A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda) \cdot f_n(\lambda)$$

و

$$\text{adj}(\lambda I - A) = g_{n-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$$

حيث القاسم المشترك الأعظم لمناصر $B(\lambda)$ هو الواحد .

$$(\lambda I - A) \cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda) \cdot I$$

$$(\lambda I - A) \cdot g_{n-1}(\lambda) \cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda) \cdot f_n(\lambda) \cdot I$$

أو

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = f_n(\lambda) \cdot I \quad (i)$$

وهكذا نجد أن $\lambda I - A$ قاسم لـ $f_n(\lambda) \cdot I$ واستناداً إلى النظرية ٧ من الفصل ٢٣ يكون $f_n(A) = 0$ استناداً إلى النظرية ٧ نجد أن $m(\lambda)$ يقسم $f_n(\lambda)$. لنفرض :

$$f_n(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) \quad (ii)$$

بما أن $m(A) = 0$ فإن $\lambda I - A$ يكون قاسماً لـ $m(\lambda) \cdot I$. فلنفرض :

$$m(\lambda) \cdot I = (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

وباستخدام العلاقتين (i) و (ii) لنجد :

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = f_n(\lambda) \cdot I = q(\lambda) \cdot m(\lambda) \cdot I = q(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

و

$$B(\lambda) = q(\lambda) \cdot C(\lambda)$$

الآن أن $q(\lambda)$ يقسم كل عنصر من $B(\lambda)$ أي أن $1 - q(\lambda)$ واستناداً إلى (ii) نجد .

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

وهو المطلوب برهانه .

٤- برهن أن المصفوفة $C(g)$ الرفيقة لكثير الحدود $g(\lambda)$ يكون لها $g(\lambda)$ ككثير حدود ميزوكثير حدود أدنى في نفس الوقت .

إن المصفوفة المميزة لـ (25.3) هي :

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

لنضف إلى العمود الأول العمود الثاني مضروباً في λ والعمود الثالث مضروباً في λ^2 والعمود الأخير مضروباً في λ^{n-1} فنجد

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

بما أن $|G(\lambda)| = g(\lambda)$ فإن كثير الحدود المميز لـ $C(g)$ هو $g(\lambda)$. بما أن مصغر العنصر $g(\lambda)$ في $G(\lambda)$ هو ± 1 ، فإن القاسم المشترك الأعلى لكل المصفورات ذات الدرجة $(n-1)$ لـ $G(\lambda)$ هو 1 وهكذا نجد أن $C(g)$ مصفوفة غير متردية. كثير حدودها الأدنى $g(\lambda)$.

• - إن المصفوفة الرفيعة لكثير الحدود $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ هو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{وإذا أردنا} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

مسائل إضافية

٦- اكتب المصفوفة الرفيعة لكل من كثيرات الحدود التالية :

- | | | | |
|--|------|--|-----|
| $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$ | (د) | $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ | (أ) |
| $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$ | (هـ) | $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ | (ب) |
| $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$ | (و) | $(\lambda - 1)^3$ | (ج) |

الجواب :

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	(ج)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$	(ب)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	(أ)
--	-----	--	-----	--	-----

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (و)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٧- برهن أن كل مصفوفة من الدرجة الثانية $A = [a_{ij}]$ التي يكون لها $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ هي مصفوفة غير متردية .

٨- اختزل $G(\lambda)$ الواردة في المسألة ٤ إلى $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, g(\lambda))$.

٩- لكل من المصفوفات A الواردة أدناه ، (i) أوجد كثيرى الحدود الأدنى والمميز و (ii) أعط قائمة بالموامل اللامتغير (ع . لامتغيرا) وغير التافهة والقواسم الأولية (ق . ا .) في حقل الأعداد الجبرية .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ح) \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (و) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (و)$$

الجواب :

$$(ا) \quad \phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3); \quad \text{ع . لا متغيرا } (\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-3); \quad \text{ق . ا . } (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3);$$

$$(ب) \quad \phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3; \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda^3$$

$$(ج) \quad \phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2); \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2); \quad \text{ق . ا . } \lambda-1, \lambda-1, \lambda-2$$

$$(د) \quad \phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5); \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-5)$$

$$m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5); \quad \text{ق . ا . } \lambda+1, \lambda+1, \lambda-5$$

$$(هـ) \quad \phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2; \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda, \lambda^2 - 4\lambda$$

$$m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda; \quad \text{ق . ا . } \lambda, \lambda, \lambda - 4$$

$$(و) \quad \phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1); \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda+1, \lambda^3 - \lambda$$

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1); \quad \text{ق . ا . } \lambda, \lambda+1, \lambda+1, \lambda-1$$

$$(ز) \quad \phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2; \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda, \lambda(\lambda+1)^2$$

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2; \quad \text{ق . ا . } \lambda, \lambda, (\lambda+1)^2$$

$$(ح) \quad \phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 2)^2; \quad \text{ع . لا متغيرا} \quad \text{ق . ا . } \lambda-2, \lambda^2 - \lambda - 2, \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$m(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2; \quad \text{ق . ا . } \lambda-2, \lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1$$

١٠- برهن النظريتين VII و VIII

١١- برهن النظرية X

إرشاد : إن $m(D) = \text{diag}(m(B_1), m(B_2)) = 0$ يتطلب أن يكون $m(B_1) = m(B_2) = 0$ أى أن $m_1(\lambda)$

و $m_2(\lambda)$ يقسمان $m(\lambda)$

١٢- برهن النظرية XI

١٣- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^k = 0$ فإن A

تسمى مصفوفة معلومة القوى من الدليل k .

برهن أن A تكون ممنوعة القوى من الدليل k إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة كلها أصفراً .

١٤- برهن (١) أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ومتساوية القوى تكون مساوية إما إلى الصفر أو إلى الواحد .

(ب) إن رتبة A تساوى عدد القيم الخاصة المساوية للواحد .

١٥- برهن ما يلي : إذا فرضنا أن A, B, C, D مصفوفات على F مربعة من الدرجة n ونفرض أن C و D غير شاذتين فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PCQ = A$, $PDO = B$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $L = \lambda C - A$ و $R(\lambda) = \lambda D - B$ نفس العوامل اللامتغيرة أو القواسم الأولية ذاتها .
إرشاد : اتبع البرهان الواردة في المسألة ١ ولاحظ التشابه قد استفيض عنه هنا بالتفكاك .

١٦- برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة A غير شاذة من الدرجة s فإنه يمكن التعبير عن A^{-1} بكثير حدود عددي لـ A من الدرجة $s-1$.

١٧- استعمل كثير الحدود الأدنى لإيجاد معكوس المصفوفة A الواردة في المسألة ٩ (ج) .

١٨- برهن أن كل عامل خطي $\lambda_i - \lambda_j$ من $\phi(\lambda)$ هو عامل لـ $m(\lambda)$

إرشاد : هذه النظرية تنتج من النظرية VII

أو افرض العكس واكتب $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)q(\lambda) + r$ حيث $r \neq 0$ فيكون $(A - \lambda_i I)q(A) + rI = 0$ وهكذا نجد أن لـ $A - \lambda_i I$ معكوساً .

١٩- استعمل $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لكي تبرهن أن كثير الحدود الأدنى ليس حاصل ضرب العوامل المتباينة لـ $\phi(\lambda)$

٢٠- برهن ما يلي إذا كان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي في λ فإن $g(A)$ تكون شاذة إذا كان (وإذا كان فقط) القاسم المشترك الأعظم لـ $g(\lambda)$ و $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A يكون $1 \neq d(\lambda)$.
إرشاد : (i) افرض $d(\lambda) \neq 1$ واستعمل النظرية V من الفصل ٢٢ .
(ii) افرض $d(\lambda) = 1$ واستعمل النظرية vi من الفصل ٢٢ .

٢١- استنتج من المسألة ٢٠ أنه إذا كانت $g(A)$ غير شاذة فإنه يمكن كتابة $[g(A)]^{-1}$ ككثير حدود في A من درجة تقل عن درجة $m(\lambda)$.

٢٢- برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A المعروف على F غير قابل للاختزال على $F[\lambda]$ وإذا كان من الدرجة s في λ فإن مجموعة كل كثيرات الحدود العددية في A والتي تأخذ معاملات من F وتكون درجتها أصغر من s تشكل حقلاً .

٢٣- لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين ولنرمز بـ $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ على الترتيب لكثيري الحدود الأدنى لـ AB و BA برهن :

(١) أن $m(\lambda) = n(\lambda)$ عندما لا تكون كل من A و B شاذتين .

(ب) أن $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ يختلفان عن بعضهما بما لا يزيد عن عامل λ وذلك عندما تكون المصفوفتان A و B شاذتين معاً .

إرشاد : $A \cdot n(BA) \cdot B = (AB) \cdot n(AB) = 0$ و $B \cdot m(AB) \cdot A = (BA) \cdot m(BA) = 0$

٢٤- لنفرض أن بعد المصفوفة A يساوي $m \times n$ وأن المصفوفة B من السعة $n \times m$ حيث $n < m$ ولترمز بـ $\phi(\lambda)$

و $\psi(\lambda)$ على الترتيب لكثيرتي الحدود المميزتين لـ AB و BA برهن أن $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n} \psi(\lambda)$.

٢٥- لنفرض أن X_i متجهه لا متغير مصاحب لقيمة خاصة بسيطة لـ A . برهن أنه إذا كانت A و B

تبدليتين فإن X_i يكون متجه لا متغير لـ B .

٢٦- إذا كانت المصفوفتان A و B تبدليتين فأوجد نظرية تتعلق بالمتجهات اللامتغيرة لـ B عندما

لا يكون لـ A إلا قيم خاصة بسيطة .

الفصل السادس والعشرون

الشكل قانونية بالنسبة للتشابه

المسألة : لقد رأينا في الفصل ٢٥ أن المصفوفتين الميزتين للمصفوفتين المربعتين من الدرجة n والمتشابهتين A و AR^{-1} على F يكون لها العوامل اللامتغيرة نفسها والقواسم الأولية ذاتها. سنوجد في هذا الفصل ، يمثلين لمجموعة كل المصفوفات AR^{-1} التي (i) تتصف بكونها ذات تكوين بسيط (ii) تنفع في الاعتبار إما عواملها اللامتغيرة أو قواسمها الأولية. تسمى هذه المصفوفات التي عددها أربع ، الأشكال القانونية لـ A وهي تناظر المصفوفة القانونية

$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي رأيناها سابقاً عند دراسة تكافؤ المصفوفات ذات البعد $m \times n$ والرتبة r .

الصيغ القانونية القياسية (الجذرية) :

لنفرض أن A مصفوفة على F مربعة من الدرجة n ولنفرض أولاً ، أن لمصفوفتها المميزة عاملاً واحداً فقط لا متغيراً غير تافه $f_n(\lambda)$ إن المصفوفة الرقيقة $C(f_n)$ لـ $f_n(\lambda)$ كما رأينا في الفصل ٢٥ مشابهة لـ A نقول عن هذه المصفوفات إنها الشكل القانوني الجذري S لكل المصفوفات المشابهة لـ A .

لنفرض بعد ذلك أن شكل سميث النظامي لـ $A - I\lambda$ هو :

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda)) \quad (26.1)$$

وله العامل اللامتغير غير التافه $f_i(\lambda)$ من الدرجة s_i حيث $(i = j, j+1, \dots, n)$ نعرف الشكل القانوني الجذري (القياس) لكل المصفوفات المشابهة لـ A بأنه

$$S = \text{diag}(C(f_j), C(f_{j+1}), \dots, C(f_n)) \quad (26.2)$$

لكي نبرهن أن A و S هما اللامتغيرات التشابهية ذاتها نلاحظ أن $C(f_i)$ مشابه لـ $D_i = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_i(\lambda))$ وينتج عن ذلك أن S مشابه لـ $\text{diag}(D_j, D_{j+1}, \dots, D_n)$. وبعد متوالية من المبادلات بين صفين وبين العمودين المقابلين لها نجد أن S مشابهة لـ

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$$

وتكون بذلك قد برهننا على ما يلي :

I أن كل مصفوفة مربعة A تكون مشابهة للمجموع المباشر (26.2) للمصفوفات الرقيقة للعوامل اللامتغيرة غير التافهة لـ A . لنفرض أن اللامتغيرات التشابهية غير التافهة لـ A على حقل الأعداد الجذرية هي :

مثال ١ :

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \quad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \quad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

فيكون عددها :
$$C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(f_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(f_0) = [-1]$$

$$S = \text{diag}(C(f_0), C(f_0), C(f_{10})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث S هو الشكل المطلوب في النظرية 1 .

لنلاحظ أنه ليس لترتيب الذي تقع بموجبه المصفوفات الرفيعة على القطر أهمية تذكر . وهكذا فإن المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون صيغة أخرى استعملنا فيها متقول كل مصفوفة رفيعة من المصفوفات الواردة أعلاه .

شكل قانوني ثان :

لنفرض أن المصفوفة المميزة لـ A يكون لها كمعامل لا متغيرة وغير تافهة ، كثيرات الحدود $f_i(\lambda)$ الواردة في (26.1) . ولنفرض

أيضا أن القواسم الأولية هي قوى t من كثيرات الحدود المتباينة وغير قابلة للاختزال في $F[\lambda]: p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_t(\lambda)$. ولنفرض أن :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}} \dots \{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}; \quad (i = j, j+1, \dots, n) \quad (26.3)$$

حيث ليس من الضروري أن تظهر كل العوامل لأنه من الممكن أن تكون بعض الـ q 's أصفارا . إن المصفوفة الرفيعة $C(p_k^{q_{ki}})$ لأي عامل يكون لها $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ كلا متغير تشابهى وحيد ينتج عن هذا أن $C(f_i)$ مشابهة لـ

$$\text{diag}(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \dots, C(p_t^{q_{ti}}))$$

ونجد :

II أن كل مصفوفة مربعة A على F مشابهة للمجموع المباشر للمصفوفات الرفيعة للقواسم الأولية على $\lambda I - A \cup F$.

مثال ٢ :

إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية ، للمصفوفة A الواردة في المثال ١ هي :

$(\lambda^2 - \lambda + 1)^2, (\lambda^2 - \lambda + 1), (\lambda + 1)^2, \lambda + 1, \lambda + 1, \lambda + 1$ إن المصفوفات الرفيعة لهذه القواسم هي على الترتيب :

$$[-1], [-1], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

والشكل القانوني الوارد في النظرية II هو :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الشكل القانوني الجاكوبي :

لتكن A المصفوفة الواردة في البند السابق حيث تعتبر القواسم الأولية لمصفوفتها المميزة ، قوى لكثيرات الحدود غير القابلة للاختزال على $F[\lambda]$ اعتبر قاسما أوليا $\{p(\lambda)\}^q$ إذا كان $q=1$ فإننا نستعمل المصفوفة الرفيعة $C(p)$ وإذا كان $1 < q$ فلنشكل :

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \quad (26.4)$$

حيث M مصفوفة من درجة ماثلة لدرجة $C(p)$ وتقبل الواحد عنصرا في زاويتها اليسرى السفلى بينما تكون بقية عناصرها أصفارا . إن المصفوفة $C_q(p)$ الواردة في (26.4) مع العلم أن $C_1(p) = C(p)$ تدعى المصفوفة فوق الرفيعة لـ $\{p(\lambda)\}^q$ لنذكر أنه يوجد في (26.4) خط متصل تساوى عناصره الواحد واقع فوق القطر مباشرة .

عندما نستعمل المصفوفة الرفيعة البديلة $C'(p)$ فإن المصفوفة متفوق الرفيعة لـ $\{p(\lambda)\}^q$ تكون

إن استعمال كلمة « جذرية » في النظرية I قد يؤدي إلى شيء من الالتباس .

لقد استعملت هذه الكلمة في الأصل للدلالة على أنه للحصول على الشكل القانوني ، نستمع عمليات جذرية فقط على الحقل الذي تنتمي إليه عناصر A . إن هذا الأمر طبعاً صحيح أيضاً للأشكال القانونية (الواردة فيما بعد) في النظريتين II و III ويضاف التباس آخر إلى ما سبق بسبب تسمية الشكل القانوني الوارد في النظرية III ، في بعض الأحيان ، شكلاً قانونياً جذرياً .

الشكل القانوني الكلاسيكي :

لنفرض أن القواسم الأولية للمصفوفة المميزة L هي قوى لكثيرات حدود خطية . إن الشكل القانوني للنظرية III هو إذن ، المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة للشكل .

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix} \quad (26.5)$$

المنظر للقاسم الأول $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. كشال على ذلك أنظر المسألة ٢ .

تدعى هذه الحالة الخاصة من الشكل القانوني الوارد في النظرية III شكل جوردان القانوني أو الشكل القانوني الكلاسيكي [لاحظ أن $C_q(p)$ الوارد في (26.5) هو من النوع I الوارد في (25.4)] ينتج عما سبق :

IV . لرمز ب $\mathcal{H}$ للحقل الذي يمكن فيه لكثير الحدود المميز للمصفوفة A أن يتحلل إلى كثيرات حدود خطية . فتكون عندها ، المصفوفة A مشابهة على $\mathcal{H}$ إلى المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة للشكل (26.5) يناظر كل مصفوفة قاسم أولي $(\lambda - a_i)^q$

مثال ٥ :

لنفرض أن القواسم الأولية على حقل الأعداد المركبة L هي $\lambda I - A$: $\lambda - i, \lambda + i, (\lambda - i)^2, (\lambda + i)^2$:

إن الشكل القانوني الكلاسيكي لـ A هو :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نستنتج من النظرية IV ما يلي :

V تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كانت (وإذا كانت فقط) القواسم الأولية لـ $\lambda I - A$ كثيرات حدود خطية وهذا يعني أنه إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى لـ A هو حاصل ضرب كثيرات حدود خطية متباينة .

أنظر المسائل ٢ - ٤ .

اختزال الى الشكل القانوني الجذري :

استنتاجا من المناقشات التي أوردناها فيما يتعلق بالأشكال القانونية ، سنبرهن أنه يمكن اختزال أى مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى شكلها القانوني الجذري بصورة نظرية على الأقل ، وذلك دون المعرفة المسبقة للعوامل المتغيرة لـ $I - A$.
توجد طريقة تختلف قليلا عما نوردته في كتاب عنوانه *Modern Algebraic Theories*, Benj. H. Sanborn, 1926.
ولقد تطور هذا الموضوع بشكل حسابي بحث في *Browne, E. T., American Mathematical Monthly*, vol. 48 (1940).

سنحتاج فيما بعد لتعاريف التالية :

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان X متجهها معرفا على F عدد مركباته n ، وإذا كان $g(\lambda)$ كثير الحدود الواحدى في $F[\lambda]$ ذا الدرجة الأدنى بحيث يكون $g(A) \cdot X = 0$ فإننا نقول بالنسبة لـ A إن المتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$

إذا كان بالنسبة لـ A المتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$ ذات الدرجة p فإن المتجهات المستقلة خطيا $X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X$ تدعى السلسلة التي حدها القائد هو X .

مثال ٦ :

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ أن المتجهين $X = [1, 0, 0]^T$ و $AX = [2, 1, 1]^T$ مستقلان خطيا بينما $A^2X = X$ ، فيكون

عندئذ $(A^2 - I)X = 0$ ويكون المتجه X منتجا لكثير الحدود $\lambda^2 - 1$. إذا كانت $Y = [1, 0, -1]^T$ نجد أن $AY = [-1, 0, 1]^T = -Y$ ؛ وعلى ذلك $(A + I)Y = 0$ فيكون Y منتجا لكثير الحدود $\lambda + 1$.

إذا كان $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لمصفوفة A مربعة من الدرجة n فإنه يكون $m(A) \cdot X = 0$ لكل متجه X عدد مركباته n إذن لا يمكن أن توجد سلسلة لايزيد طولها عن درجة $m(\lambda)$. إن كثير الحدود الأدنى للمصفوفة الواردة في المثال ٦ هو $\lambda^2 - 1$.

لتكن S الشكل القانوني الجذري للمصفوفة A المربعة وذات الدرجة n على F يوجد عندئذ مصفوفة غير شاذة R على F بحيث يكون :

$$R^{-1}AR = S = R \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \quad (26.6)$$

حيث لتلائم أفضل ، يستماض في (26.2) عن $C_i = C(f_i)$ سنفرض أن C_i المصفوفة الرقيقة للعامل اللامتغير :

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i,s_i} \lambda^{s_i-1} + \dots + c_{i,2} \lambda + c_{i,1}$$

لها الشكل :

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i,1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i,2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{i,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i,s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{i,s_i} \end{bmatrix}$$

من العلاقة (26.6) نستنتج ما يلي :

$$R^{-1}AR = S = \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \quad (26.7)$$

لنفرض أن R قد فصلت إلى كتل من الأعمدة $R_j, R_{j+1}, \dots, R_n$ بحيث تحوى R_i و C_i حيث $(i = j, j+1, \dots, n)$ العدد نفسه من الأعمدة . نستنتج من العلاقة (26.7)

$$\begin{aligned} AR &= A[R_j, R_{j+1}, \dots, R_n] = [R_j, R_{j+1}, \dots, R_n] \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= [R_j C_j, R_{j+1} C_{j+1}, \dots, R_n C_n] \end{aligned}$$

$$AR_i = R_i C_i, \quad (i = j, j+1, \dots, n)$$

لنرمز لمتجهات أعمدة R_i التي عددها s_i بالشكل $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}$ وكون حاصل الضرب :

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}] C_i = [R_{i2}, R_{i3}, \dots, R_{is_i}, - \sum_{k=1}^{s_i} R_{ik} c_{ik}]$$

بما أن

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \dots, AR_{is_i}] = R_i C_i$$

فإننا نجد :

$$R_{i2} = AR_{i1}, \quad R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}, \quad \dots, \quad R_{is_i} = A^{s_i-1} R_{i1} \quad (26.8)$$

و

$$- \sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} R_{ik} = AR_{is_i} \quad (26.9)$$

بالتعويض من (26.8) وفي (26.9) نجد :

$$- \sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} A^{k-1} R_{i1} = A^{s_i} R_{i1}$$

أو

$$(A^{s_i} + c_{is_i} A^{s_i-1} + \dots + c_{i2} A + c_{i1} I) R_{i1} = 0 \quad (26.10)$$

من تعريف C_i الوارد أعلاه ، يمكننا كتابة (26.10) بالشكل :

$$f_i(A) \cdot R_{i1} = 0 \quad (26.11)$$

لنرمز لـ R_{i1} بالرمز X_i بحيث تأخذ العلاقة (26.11) الشكل $f_i(A) \cdot X_i = 0$ بما أن المتجهات $X_i, AX_i, \dots, A^{s_i-1} X_i$ مستقلة خطياً فإن المتجه X_i ينتمى للعامل اللامتغير $f_i(\lambda)$. ينتج عما تقدم أن متجهات أعمدة R_i تتكون من متجهات السلسلة التي يكون فيها X_i الذي ينتمى إلى $f_i(\lambda)$ كحد قائد .

بالاختصار : إن أعمدة R التي عددها n والمستقلة خطياً والتي تحقق العلاقة (26-2) تتكون من $n-j+1$ سلسلة :

$$X_i, AX_i, \dots, A^{s_i-1} X_i \quad (i = j, j+1, \dots, n)$$

حيث الحدود القائمة تنتمى على الترتيب إلى العوامل اللامتغيرة $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ وحيث تحقق أطولها الشرط

$$0 < s_j \leq s_{j+1} \leq \dots \leq s_n.$$

ونجد بعد ما تقدم :

VI. لمصفوفة مربعة A درجتها n ومعرفة على F .

(i) ليكن X_n قائداً لسلسلة C_n ذات طول أقصى لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F .

- (ii) ليكن X_{n-1} قائداً لسلسلة E_{n-1} ذات الطول الأقصى (كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التي سبقتها ومع عناصر E_n) . لجميع الاتجاهات ذات الـ n مركبة على F والتي هي مستقلة خطياً مع اتجاهات E_n .
- (iii) ليكن X_{n-2} قائداً لسلسلة E_{n-2} ذات الطول الأقصى (كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التي سبقتها ومع عناصر E_{n-1} و E_n) . لجميع الاتجاهات ذات الـ n على F والتي هي مستقلة خطياً مع اتجاهات E_{n-1} و E_n . وهكذا . . .

فيكون بهذا ، من أجل :

$$R = [X_j, AX_j, \dots, A^{s_j-1}X_j; X_{j+1}, AX_{j+1}, \dots, A^{s_{j+1}-1}X_{j+1}; \dots; X_n, AX_n, \dots, A^{s_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ هو الشكل القانوني الجذري لـ A .

مثال ٧ :

لنفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ولنأخذ $X = [1, 0, 0]'$ فتكون الاتجاهات $A^2X = [3, 5, 6]'$ ، $AX = [1, 1, 1]'$ ، X, AX مستقلة خطياً بيما $A^3X = [14, 25, 30]'$ ، $5A^2X - X$ ، وينتج عما تقدم أن $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ وأن X ينتمي إلى $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$.

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ف نجد :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = S$$

إن A هنا غير متردية كثير حدودها الأدنى $m(\lambda)$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجبرية . كل متجه ذي ثلاث مركبات على هذا الحقل ينتمي إلى $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويقود سلسلة طولها ثلاثة . إن المصفوفة R التي تكون فيها اتجاهات أي سلسلة لاتجهات أعددة تحقق العلاقة $R^{-1}AR = S$.

مثال ٨ :

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ولنأخذ $X = [1, -1, 0]'$ فيكون $AX = X$ و X ينتمي إلى $\lambda - 1$ والآن $\lambda - 1$ لا يمكنه أن يكون كثير حدود أدنى $m(\lambda)$ لـ A ولكنه مع ذلك ، قاسم لـ $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويمكنه أن يكون لامتنيراً تشابهاً لـ A .

لنأخذ الآن $Y = [1, 0, 0]'$ فتكون الاتجاهات $A^2Y = [11, 8, 8]'$ ، $AY = [2, 1, 2]'$ ، Y مستقلة خطياً بيما $A^3Y = [54, 43, 46]'$ ، $5A^2Y + 3AY - 7Y$ ، إذن Y ينتمي إلى $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$.

إن كثير الحدود $\lambda I - C_q(p)$ ليس لامتنعياً تشابهاً . في الواقع ، إذا لم يكن الاختيار الأول لمتجه ينتمي لكثير الحدود الذي يمكننا أن نسميه بحق ، الدالة الصغرى ، فإن هذا الاختيار يكون زائفاً .

ويمكن للقارئ أن يتحقق من أن :

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

عندما يكون

أنظر المسألتين ٥ - ٦

مسائل محلولة

١ - برهن أن المصفوفة $C_q(p)$ الواردة في (26.4) يكون لها $\{p(\lambda)\}^q$ كلامتنع تشابهاً غير تافه وحيد .
لنفرض أن $C_q(p)$ من الدرجة s . إن مصفر العنصر الواقع في الصف الأخير والعمود الأول من $\lambda I - C_q(p)$ هو ± 1 . وهذا يكون القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة من الدرجة $(s-1)$ لـ $\lambda I - C_q(p)$ هو الواحد ، أي أن العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - C_q(p)$ هي $1, 1, \dots, 1, f_s(\lambda)$ ولكن $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$ وذلك لأن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - C_q(p)| = |\lambda I - C(p)|^q = \{p(\lambda)\}^q$$

٢ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل الوارد في النظريتين I و II وإن العامل اللامتغير وغير التافه والقاسم الأول هو $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$. إن الشكل القانوني الوارد في النظرية III هو (ب) :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad (١)$$

٣ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل الوارد في النظرية I حيث العوامل اللامتغيرة هي $\lambda + 2, \lambda^2 - 4, \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12$. إن الشكل القانوني المتعلق بالنظريتين II و III هو (ب) :
والقواسم الأولية هي $\lambda + 2, \lambda + 2, \lambda + 2, \lambda - 2, \lambda - 2, \lambda + 3$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (١)$$

٤ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل المتعلق بالنظرية III . إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجندرية هي :
 $\lambda + 2, \lambda + 2, (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2, (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$ وإن العوامل اللامتغيرة هي :

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2, \quad (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$$

إن الشكل القانوني الوارد في النظرية I هو (ب) أما الشكل الوارد في النظرية II فهو (ج)

$$(أ) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(ب) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ج) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولنأخذ $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ و

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

هـ - لنفرض أن

فتكون عندها : $A^3 X = [-3, 1, 1, 1, 1, 2]^T$ $A^2 X = [1, 0, -1, 0, 0, -1]^T$ $X, AX = [-2, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ متجهات مستقلة خطياً بينما $A^4 X = [1, 0, -2, 0, 0, -2]^T = 2A^2 X - X$ أن X ينتمي إلى $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ لنجرب $m(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ ولنكتب X_6 بدلا من X

إن المتجه $Y = [0, 0, 0, 1, 0, 0]'$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AY = [-1, 0, 1, -1, 1, 0]'$ مستقل خطيا مع Y ومع عناصر هذه السلسلة . والآن $A^2Y = Y$ أى أن Y ينتمى إلى $\lambda^2 - 1$. بما أن كثيرى الحدود هذين يتجان مجموعة العوامل اللامتغيرة وغير التافهة : فإننا نكتب X_5 بدلا عن Y

ونجد الشكل القانونى الجذرى لـ A :

$$R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إن المتجه $Z = [0, 1, 0, 0, 0, 0]'$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AZ = [3, 0, -2, 1, -2, 0]'$ مستقل خطيا مع Z ومع عناصر السلسلة ، من جهة ثانية : أن $A^2Z = [-1, 1, 0, 0, 0, 1]'$ $= -AX_6 + A^3X_6 + Z$; وهكذا يكون $(A^2 - 1)(Z - AX_6) = 0$ ويكون $W = Z - AX_6 = [2, 0, -1, -1, -1, -1]'$ متبعا إلى $\lambda^2 - 1$. إذا اتخذنا هذا المتجه كـ X_5 فإنه يمكننا أن نكون مصفوفة أخرى R نحصل بواسطتها على الشكل القانونى الجذرى .

$$X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{٦- ليكن}$$

ينتج عما تقدم أن ، $A^2X = [1, 1, -1, -1, 0]'$ ، $AX = [-2, 1, -1, -1, -2]'$ ، مستقلة خطيا بينما $A^3X = [-1, 2, -2, -2, 0]'$ $= 2A^2X - 3X$ وأن X ينتمى إلى $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$ لنجرب كثير الحدود هذا ككثير حدود أدنى $m(\lambda)$ ولنأخذ X كـ X_5 .

عندما نطرح في A العمود الرابع من العمود الأول فإننا نجد $[-1, 0, 0, 1, 0]'$ وإذا أخذنا بعد ما تقدم $Y = [1, 0, 0, -1, 0]'$ فإنه يكون $AY = -Y$ ويكون Y متبعا إلى $\lambda + 1$. وإذا طرحنا من جديد العمود الرابع في A من عمودها الثالث فإننا نجد $[0, 0, -1, 1, 0]'$ وإذا اتخذنا بعد ما تقدم $Z = [0, 0, 1, -1, 0]'$ فإن $AZ = -Z$ وأن Z ينتمى إلى $\lambda + 1$. بما أن Y و Z وعناصر السلسلة المقادة بـ X_3 تكون مستقلة خطيا فإننا نسمى Y كـ X_4 و Z كـ X_3 ونجد بعدها الشكل القانونى العادى لـ A

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مسائل إضافية

٧- اكتب المصفوفات القانونية الواردة في النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية لكل مصفوفة من مصفوفات المسألة ٩ من الفصل ٢٥ :

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{II, III, } \text{diag}(1, 2, 3) \quad (أ)$$

$$\text{I, II, III. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{II. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{III. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III, } \text{diag}(2, 2, 2, -1, -1) \quad (ح)$$

٨- ما هي الشروط الواجب توافرها (أ) لكي يكون الشكلان القانونيان المتعلقان بالنظريتين I و II متطابقتين؟ (ب) ولكي يكون الشكلان القانونيان الواردان في النظريتين II و III متطابقين؟ (ج) لكي يكون الشكل القانوني المتعلق بالنظرية II قطريا؟

$$٩- \text{حقق الشكل القانوني } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ وفارنه مع جواب (ب) من المسألة ٨.}$$

١٠- لنفرض أن للمصفوفة A غير الشاذة العوامل اللامتغيرة وغير التافهة.

$$(أ) \lambda^2 + 1, (ب) \lambda + 1, \lambda^3 + 1, (\lambda^3 + 1)^2, (ج) \lambda^6 + 6\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4, \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$$

اكتب لكل من هاتين الحالتين ، الأشكال القانونية الواردة في النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية ومن ثم الشكل المتعلق بالنظرية IV .

جواب (١)

$$\text{I.} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{II.} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{III.} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV.} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

حيث $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$

١١- برهن أنه لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، إذا كان المتجه X متممياً إلى $g(\lambda)$ فإن $g(\lambda)$ تقسم $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A

إرشاد : افرض العكس واعتبر $m(\lambda) = h(\lambda) - g(\lambda) + r(\lambda)$.

١٢- برهن في المثال ٦ أن X ، AX ، Y مستقلة خطياً واختزل A إلى شكلها القانوني الجذري .

١٣- في المسألة ٦ :

(أ) خذ $Y = [0, 1, 0, 0, 0]'$ المستقل خطياً مع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(ب) خذ $Z = [0, 0, 1, 0, 0]'$ المستقل خطياً مع X_4 ومع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_3 = Z - X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(ج) احسب $R^{-1}AR$ مستملاً المتجهين X_3 و X_4 من (ب) و (أ) لتكوين R .

١٤- أوجد R لكل مصفوفة A من مصفوفات المسألة ٩ الفصل ٢٥ شرط أن تكون $R^{-1}AR$ الشكل القانوني الجذري لـ A

الجذري لـ A

١٥- حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية التالية :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

حيث x_i دوال مجهولة للمتغير الحقيقي t

إرشاد : افرض $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ وعرف $\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dx_4}{dt} \right]'$

ومن ثم أعد كتابة المجموعة بالشكل التالي :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H \quad (i)$$

بما أن التحويل الخطي غير الشاذ $X = RY$ يحول (i) إلى :

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

فاختبر R بحيث تكون $R^{-1}AR$ هي الشكل القانوني الجذري لـ A . إن المتجه الأول E_1 ذا المركبات الأربعة المتتى

إلى $\lambda - \lambda^3$ هو القائد للسلسلة $X_1 = E_1, AX_1, A^2X_1, A^3X_1$ بينما E_4 يعطى $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$ الذي ينتهي إلى $\lambda + 1$

والآن باعتبار :

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

نجد

ويكون :

$$X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix}$$

GLOSSARY

Ch. 1

Matri
Coefficient matrix
Augmented
Elements
Trace
Conformable
Order of a matrix
Commutative law
Scalar
Associative law
Partitioning

Ch. 2

Types
Identity matrix
Triangular
Diagonal matrix
Commulative
Idempotent
Nilpotent
Index
Involutory
Transpose
Symmetric
Skew
Conjugate
Hermitian matrix
Diroect sum

Ch. 3

Determinant
Permutations
Inver and ion
Odd
even

قائمة بالمصطلحات

الفصل الأول

مصفوفة
مصفوفة المعاملات
معدة
عناصر
أثر
متوافقة
درجة مصفوفة
قانون التبدل
عددي
قانون جمع الحدود الجبرية - قانون ترتيب الحدود
تجزئة

الفصل الثاني

أنماط - أنواع
مصفوفة الوحدة
مثلي
مصفوفة قطرية
تبديلية
متساوية القوى
معدومة القوى
دليل
ملتفة
منقول
متماثل
تخالفي - متخالف
مرافق
مصفوفة هيرميتية
المجموع المباشر

الفصل الثالث

محددة
تباديل
تماكسن
فردى
زوجى

Terms	حدود
Minor	مصفّر
Cofactor	معامل مرافق
Algebraic complements	المتكمات الجبرية
Complementary minors	المصفّرات التكملة
Ch. 4	الفصل الرابع
Evaluation of determinants	حسابات المحددات
Expansion	مفكوك
Expansion along a row	الثقل على طول صف
Derivative	مشتقة
Ch. 5	الفصل الخامس
Equivalence	تكافؤ
Rank of a matrix	رتبة مصفوفة
Singular	شاذ
Non - singular	غير شاذ
Elementary transformations	التحويلات الأولية
Elementary row transformations	تحويلات صفوف أولية
Elementary column transformations	تحويلات أعمدة أولية
Inverse	معكوس
Equivalent matrices	المصفوفات المتكافئة
Row equivalence	التكافؤ بالصفوف
Canonical matrix	مصفوفة قانونية
Normal form	الشكل العادي - الصيغة النظامية
Elementary matrices	مصفوفات أولية
Ch. 6	الفصل السادس
Adjoint matrix	المصفوفة المرافقة
Ch. 7	الفصل السابع
Inverse of a symmetric matrix	معكوس مصفوفة متماثلة
Ch. 8	الفصل الثامن
Fields	حقول - مجالات
Of characteristic	ذو مميز
Subfield	حقول جزئي
Ch. 9	الفصل التاسع
Linear dependence	الارتباط الخطي
Linear independence	الاستقلال الخطي
Forms	صنغ - أشكال
Vectors	متجهات
Components	مركبات

Zero vector	متجه صفري
Linear combination	اكتلاف خطي
Linear form	صيغة خطية
Ch. 10	الفصل العاشر
Consistent	متسقة (غير متعارضة)
Inconsistent	غير متسقة - متعارضة
Homogeneous	متجانس
Trivial solution	حل تافه - حل غير هام
Ch. 11	الفصل الحادي عشر
Vector spaces	الفراغات الاتجاهية
Closed under	مغلقة بالنسبة
Dimension	بعد
Spanned by	مولد بـ
Subspace	فراغ جزئي
Basis	أساس
Intersection	تقاطع
Nullity of a matrix	صفيرية مصفوفة
Coordinates	احداثيات
Ch. 12	الفصل الثاني عشر
Ch. 13	الفصل الثالث عشر
Inner product	حاصل الضرب الداخلي
Orthogonal vectors	المتجهات المتعامدة
Unit vector	متجه الوحدة
Normalization	التعبير
Orthonormal	عياري متعامد
Ch. 14	الفصل الرابع عشر
Ortho - normal	عياري متعامد
Unitary transformation	التحول الواحدى
Ch. 15	الفصل الخامس عشر
Congruence	تطابق
Congruent	متطابقة
Index of the matrix	دليل المصفوفة
Signature of the matrix	شارة المصفوفة
Rank	رتبة
Skew - symmetric	مائلة تخالفية
Conjunctive	مقرن (موجد)
Conjugate	مرافق

Ch. 16

Bilinear Forme
Rank of the matrix
Canonical forms
Alternative
Cogredient
Contragredient
Factorable
Rational field
Minor
Reciprocal

الفصل السادس عشر
الصيغ ثنائية الخطية
رتبة المصفوفة
الصيغ القانونية
متناوب
الموافقة التغير
مخالف التغير
قابل التحليل لموامل
حقل الأعداد الجذرية
مصنر
عكسي

Ch. 17

Quadratic form
Cross terms
Equivalent
Invariant
Congruent
(Law) of inertia
Definite form
Semi - definite form
Minors
Leading minors
Regular
Reduction
Distinct
Permanence
Variation

الفصل السابع عشر
صيغة تربيعية (شكل تربيعي)
حدود تقاطعية
متكافئة
لا متغير (ثابتة)
متطابقة
(قانون) القصور
صيغة محددة
صيغة شبه محددة
مصفرات
مصفرات المتقدمة
منتظم
اختزال
متميز (مختلف)
دوام أو ثبات
تفسير

Ch. 18

الفصل الثامن عشر

Ch. 19

الفصل التاسع عشر

The characteristic equation
Invariant
Characteristic polynomial
Characteristic roots
Eigenvalues
Eigenvectors
Latent roots
Latent vectors

المعادلة المميزة
لا متغير
كثير حدود متميز
الجنور المميزة (الجنور الخاصة)
قيم خاصة
متجهات خاصة
جنور كامنة
متجهات كامنة

Distinct	مختلفة - متميزة
Ch. 20	الفصل العشرون
Similarity	التشابه
Associated with	مصاحب لـ أو مرافق لـ
Multiplicity	تمدد
Dimension	بمد
Null	مصدوم
Orthogonally similar	متشابهتان تعامديا
Unitarily similar	متشابهتان واحديا
Nullity	انعدامية (صفرية)
Ch. 21	الفصل الواحد والعشرون
Symmetric matrices	مصفوفات متماثلة
Distinct	مختلفة (متميزة) - متباينة
Multiplicity	تعددية
Unitarily similar	ذات تشابه واحد
Normal	نظاي
Identity transformation	التحويل الذاتي (التحويل المحايد)
To normalize	جمله عيارى
Augmented matrix	مصفوفة ممددة
Spectral decomposition	التحليل الطيفى
Ch. 22	الفصل الثانى والعشرون
Domain	نطاق أو مجال
Polynomial	كثير حدود
Leading coefficient	المعامل المتقدم
Monic	واحدى
Irreducible	غير قابل للاختزال
Rational	جذرى
Greatest common divisor	قاسم مشترك أعظم
Uniqueness	وحدانية
Ch. 23	الفصل الثالث والعشرون
Functional values	القيم الدالية
Matrix polynomials	كثيرات حدود مصفوفية
Right divisor	قاسم من اليمين
Left divisor	قاسم من اليسار
Proper	غير معتل
Improper	معتل
Ch. 24	الفصل الرابع والعشرون
Inverse	مكسوس

Invariant	لا متغير
Distinct	متباينة
Monic	واحدى
Elementary divisor	قاسم أولى
Ch. 25	الفصل الخامس والعشرون
Similarity invariants	لامتغيرات تشابهية
Derogatory	متردية
Non-deogatorry	غير متردية
Companion	رفيق (زميل)
Nilpotent	معدومة القوى
Idempotent	متساوية القوى
Dimension.	بعد أو سعة
Ch. 26	الفصل السادس والعشرون
Rational canonical form	شكل قانونى جبرى
Chain	سلسلة
Leader	القائد
Ledy by	مقادير

(١)

١٤	لمصفوفة		أحداثيات متجه
٤	تجزئة المصفوفات	٩٨	ارتباط خطي للمتجهات
١٩٢	تحليل طيفي	٧٦	أساس
٢١٣، ٤٨	تحليل لمصفوفات أولية		تغير ال
١٤٣	تحويلات غير موافقة التغير	١٠٧	عيارى متعامد
٢٢٣	تشابه لامتغير	١٢٣، ١١٤	لفراغ اتجاهي
	تساوى ال	٩٦	ارتباط
١٩٤	(عددى) كثيرى حدود		صنع
٢٠٢	كثيرى حدود مصفوفى	٧٧	كثير حدود
٢	مصفوفات تعامد	٨١	متجهات
١١٥	تحويل	٧٦	مصفوفات
١٨٣، ١٧٥	تشابه	٨١	ارتباط خطي (استقلال)
١٨٣	تطابق		للصنع
١٨٣	تكافؤ	٧٨	للمتجهات
١٢٢، ١١٢	متجهات	٧٦	للمصفوفات
١١٥	مصفوفة	٨٠	أعداد مركبة

(ج)

	جذر	٤٤	أولى
٢٠١	كثير حدود	٩٨	تحويلات
٢١١	كثير حدود مصفوفى عددى	٤٦	متجهات
١٦٦	جنور كامنة (متجهات)		مصفوفات
	جنور مميزة	٩٦	بعد فراغ اتجاهي
١٦٦	تعريف ال		
١٧٣	لمجموع مباشر		
١٧٣	لمصفوفات حقيقية متعامدة	١٥	
١٨٣	لمصفوفات حقيقية متماثلة	١٤	
١٩١	لمصفوفات حقيقية متماثلة تخالفية		
١٨٤	لمصفوفات هيرميتية	٤٤	تحويل
١٧٣	لمصفوفات واحدة	١٠٦	أولى
١٧٢	لمصفوفة قطرية	١٠٦	خطى
١٧٣	لمعكوس مصفوفة	١١٥	شاذ
١٢٣، ١١٤	جرام - شملت عملية	١٢٤	متعامد
١٢٣، ١١٥	جراميان	١٤٧	واحدى
	جمع		تحويلات موافقة التغير
٧٥	المتجهات	١٤	ترافق
٤٤٢	المصفوفات	١٤	لحاصل ضرب
٢٣٦	جوردان (كلاسيكى) صيغة قانونية	١٥	لعدد مركب
			لمجموع

(ب)

(ت)

تحليل مصفوفة إلى أجزاء هيرميتية وهيرميتية
تخالفية
تحليل مصفوفة إلى أجزاء متماثلة ومتماثلة عكسيا
تحويل
أولى
خطى
شاذ
متعامد
واحدى
تحويلات موافقة التغير
ترافق
لحاصل ضرب
لعدد مركب
لمجموع

(ش)

١٤٨	شارة	٤٨
١٦٣	صيفة حقيقية تربيعية	١٤
١٢٩	صيفة هير مبيتية	٣٧
١٣١	مصفوفة حقيقية متائلة	٥٦
٢١٤	مصفوفة هير مبيتية	١٣
	شكل سميت النظامى	١٣

(ص)

٤٤	صف	١١٢
١٠٣	تحويل	٧٢
٤٥	فراغ مصفوفة	١٩٣
٩٨	مصفوفات متكافئة	١٢٢، ١١٢
	صفريية	
	صورة	

١٠٦	فراغ اتجاهى	١٩٤
١٠٥	متجه	٢٠٢
١٤٩، ١٤٦	صيف تربيعية	١
	تكافؤ ال	
	صيفة تربيعية	١٤٨
١٥١	اختزال	١٦٤
١٤٧	كرو و نكر	
١٤٩، ١٤٨	لاجرانج	
١٥٤	صيفة قانونية ل	
١٤٦	تحليل لعوامل	٤٨
١٤٦	تعريف	١٤٦
١٥٠	رقية	١٤٠
	منتظمة	١٦٣
	صيفة تربيعية حقيقية	٥٤
١٤٨	دليل	٥٦
١٤٨	شارة	٤٤
١٤٩	شبه محدة	
١٤٩	محدة	

١٤١	صيف ثنائية الخطية	١٦٤، ١٤٩
١٤٣	اختزال ال	١٦٤، ١٤٩
١٤٠	تحليل لعوامل	٧
١٤١	تعريف ال	٢٣٧
١٤٠	تكافؤ	
١٤٠	رقية ال	٩٨
١٤٠	صيفة قانونية ل	١٤٨

(ح)

حاصل ضرب مصفوفات

رتبة	
مترافق	
محددة	
مترافق	
معكوس	
منقول	
حاصل الضرب العددي	
حقل	
حقل قيم	
حاصل ضرب داخل	

(د)

درجة

(عددي) كثير حدود	
كثير حدود مصفوفى	
درجة مصفوفة	
دليل	

لصيفة حقيقية تربيعية	
لصيفة هير مبيتية	

(ر)

رتبة

حاصل ضرب	
صيفة تربيعية	
صيفة ثنائية الخطية	
صيفة هير مبيتية	
مجموع	
مترافق	
مصفوفة	

(س)

سالب

صيفة شبه محدة (مصفوفة)	
صيفة محدة (مصفوفة)	
مصفوفة	
سلسلة من المتجهات	
سليستر قانون	
للصفريية	
للقصور	

٩٦	بعد	٢٣٤	صيفة جا كويان القانونية
٩٥	تعريف		صيفة قانونية
١١٢	عل حقل حقيقى	٤٥	تكافؤ صفر
١٢٢	عل حقل مركب	٢٣٤	جا كويون
٩٨	فراغ معدوم	٢٣٢	جذرية
	(ق)	٢٣٦	كلاسيكية (جوردان)
١٩٥	قاسم مشترك أعظم	١٤٨	لصيفة تريبية
٢٠٣	قاسم من اليمين	١٤٠	لصيفة ثنائية الخطية
	قانون التبادل لـ	١٦٣	لصيفة هيرميتية
٢	جمع المصفوفات	٤٧٠ ٤٦	لمصفوفة
٧٢	حقول	٢٣٦	صيفة قانونية كلاسيكية
٣	ضرب المصفوفات		صيغ هيرميتية
	قانون التوزيع لـ	١٦٣	تكافؤ الـ
٧٢	حقول		صيفة هيرميتية
٤	مصفوفات	١٦٤	دليل الـ
	قانون ترتيب الحدود	١٦٣	رتبة الـ
٧٢	حقول	١٦٤	شارة الـ
٢	ضرب المصفوفات	١٦٤	شبه محددة
٢	لجمع المصفوفات	١٦٣	صيفة قانونية لـ
	قطر	١٦٤	محددة
١	عناصر مصفوفة مربعة	٤٦	صيفة نظامية لمصفوفة
١٧٤٠١٢	مصفوفة		(ض)
٢٢	قواسم الصفر		ضرب
١٨٠	قواسم من اليسار		المصفوفات
١٦٦	قيم خاصة	٣	بالتجزئة
١٢٢	قيمة مطلقة لعدد مركب	٤	
	(ك)		(ع)
٢٠٥	كايلى - هاملتون نظرية		عددى
	كثير حدود	١٩٤	كثير حدود
١٩٤	عددى	٢٠٣	كثير حدود مصفوفى
٢٠٢	مصفوفة	١٣	مصفوفة
٢٠٣	مصفوفة عديدة	٢	مضاعفات مصفوفة
١٩٤	نطاق	١١	علاقة تكافؤ
١٩٤	واحدى		عمود
٢٢٢	كثير حدود أدنى	٤٤	تحويل
	كثير حدود مصفوفى	١٠٣	فراغ مصفوفة
٢٠٢	تعريف		(ف)
٢٠٣	حاصل ضرب		فراغ اتجاهى :
٢٠٢	درجة	٩٦	أساس

٢٠٢	مجموعة قانونية	شاذ (غير شاذ)
٢٠٤	بالتطابق	عددي
٢٠٢	بالتكافؤ	غير معتل (معتل)
٢٠٢	بالتشابه	مجموع
٨٦	محددة	كرامر ، قاعدة
١٥١	تعريف الـ	كرونكر ، اختزال
٣٧	مشتقة الـ	(ل)
١٤٧	مفكوك الـ	لابلاس ، مفكوك
٩٨	بطريقة لابلاس	لاجرانج ، اختزال
١٢٣، ١١٣	من خلال الصف الأول والعمود	(م)
١٢٣، ١١٣	من خلال صف (عمود)	متباينات شوارز
٩٨	الضرب بعدد قياسي	متباينة مثلثية
٧٥	لتحويل أولي لمصفوفة	متجه
١٢١	لحاصل ضرب مصفوفات	احداثيات
١١٢	لمصفوفة شاذة	تعريف
١٢٣، ١١٢	لمصفوفة مترافقة	حاصل الضرب الاتجاهي
١١٦	لمنتول مترافق لمصفوفة	حاصل الضرب الداخلي
١١٣	لمنتول مصفوفة	طول
١١٤	مصفرات متممة	لامتغير
١٦٦	مصفر رئيسي	متعامد
١٦٦	تعريف	معبر
١٦٦	متقدم	متجهات خاصة
١٦٦	مصفوفات	متجهات لامتغيرة
١٦٦	حاصل ضرب	تعريف
١٧٤	على حقل	لمصفوفات متشابهة
١٨٣	مجموع	لمصفوفة حقيقية متماثلة
١٧٤	مربعة	لمصفوفة قطرية
١٨٤	متساوية	لمصفوفة نظامية
١٨٤	متشابهة	لمصفوفة هيرميتية
١١٣	متطابقة	متجه وحدة
١٤٩، ١٤٦	متكافئة	متكافئة
١٤١	مضاعفات بمقدار عددي	صيغ تربيعة
١٦٣	مصفوفات تبادلية	صيغ ثنائية الخطية
٢١٣، ٤٥	مصفوفات تبادلية عكسية	صيغ هيرميتية
٢٨	مصفوفات قابلة لأن تكون قطرية	مصفوفات
٩٧	مصفوفات متشابهة	متممة جبرية
٢	مصفوفات متطابقة	مجموع
١٦	مصفوفات متوافقة	فراغات اتجاهية
١٦	لجميع	مصفوفات
١٦	للضرب	مجموع مباشر

٢٣٤	مصنوفة فوق المرافقة	١٣١	مصنوفات مقترنة
٢٠٢	مصنوفة لامبدا		مصنوفة
٢٢٤	مصنوفة متردية	٤٤	تحويلات أولية لـ
١٣	مصنوفة متساوية القوى	١	تعريف
	مصنوفة متماثلة	١٣١٠ ١٤	تمثيلية تحالفية
١٤	تعريف	١	درجة
١٨٣	جنور مميزة	١٣	دورية
١٨٣	متجهات لامتغيرة	٤٤	رتبة
١٧٥٠ ١٢	مصنوفة مثلثية	٤٤	شاذة
	مصنوفة مرافقة لمصفوفة مربعة	٤٧	صف (عمود) أولى
٥٥	تعريف	٩٨	صفيرية الـ
٥٦	رتبة	١٤٠	صيفة ثنائية الخطية
٥٥	محددة	٤٦	صيفة نظامية لـ
٦٢	معكوس	١٢	عددية
٢٢٥	مصنوفة رفيعة	٤٤	غير شاذة
١٣	مصنوفة معدومة القوى	٢٢٤	غير متردية
١٣	مصنوفة ملتفة	١٢	قطرية
٨٤	مصنوفة محددة	٢٠٢	كثيرة حدود
١٨٤٠١٣١٠١٥	مصنوفة هيرميتية	٢٠٢	لا ميذا
١٢	مصنوفة وحدة	١٤٦	لصيفة تربيعية
	معادلات عطية	١٦٣	لصيفة هيرميتية
٨٣	حل	٢٢٤	متردية
٨٧	مجموعة متجانسة	١٣	متساوية القوى
٨٣	مجموعة متكافئة من	١٨٣٠١١٥	متعامدة
٨٥	مجموعة غير متجانسة	١٨٣٠١٢٨٠١٤	متماثلة
٢٦	معامل مرافق	١٧٥٠ ١٢	مثلثية
	معكوس	١٣	معدومة القوى
٤٤	تحويلات أولية	٦٢٠ ١٣	معكوس
١٣	حاصل ضرب المصفوفات	١٦٤٠١٤٩	موجبة محددة (شبه محددة)
٦٢	مجموع مباشر	١٨٤	نظامية
٦٢٠ ١٣	مصنوفة	١٨٤٠١٣١٠١٥	هيرميتية
٦٢	مصنوفة قطرية	١٣٢٠ ١٥	هيرميتية تحالفية
٦٥	مصنوفة متماثلة	١٨٤٠١٢٤	واحدية
٧١	معكوس من اليسار	٨٤	مصنوفة المعاملات
٧١	معكوس من اليمين	٢٧	مصنوفة جزئية
	ميزة	٤٤	مصنوفة شاذة
١٦٦	كثير حدود	٢٢٤	مصنوفة غير متردية

١٦٤	صيفة هير ميتية	١٦٦	معادلة
١٦٤٠١٤٩	مصفوفة		منقول
	(ز)	١٤	حاصل ضرب
		١٤	مجموع
	واحدى	١٣	مصفوفة
١٢٤	تحويل	١٥	منقول مترافق
١٧٥	تشابه		موجة محددة (شبه محددة)
١٢٤	مصفوفة	١٤٩	صيح تربيعية



مدونة ملحوظة