رياضيات عامة

المعادلات

المعادلات

٣

اسم الوحدة: المعادلات

الجدارة: معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية؛
- حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد؛
- حل المعادلات الخطية ذات مجهولين؛
- حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: اثناتي عشر ساعة.

الفصل الأول: المعادلات

درس المصريون والبابليون المعادلات منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م) والذي يعتبر المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر. وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية.

وتكمن أهمية المعادلات في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات.

١. تعريف المعادلات

تعريف١: المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيري حدود). وتكون هذه المعادلة إما صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثال١: المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأية قيمة أخرى لـ x. إذن نقول إن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

مثال٢: $x=3$ و $x=2$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$.

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل: $x=$ *ثابت*.

لإيجاد هذه المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل التبديلية، التجميعية والتوزيعية: $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متكافئتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة: $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتان متكافئتان.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفراً:
$\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معادلتان متكافئتان

٢. حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد:

تعريف ٢ : معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي معادلة خطية ذات مجهول واحد (سنتطرق إليها أكثر تفصيلا في الفصل الثاني) وهي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$

مثال ٣: حل المعادلات التالية: $1)\,2x+5=9,\quad 2)\,\frac{3}{4}x-6=0,\quad 3)\,(x+2)(5x+1)=5x(x+1).$

الحل:

1) يتم حل هذه المعادلة بطرح 5 من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على 2:

$$2x+5-5=9-5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=4$$

2) هنا نضيف 6 إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}x-6=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x-6+6=0+6 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=6 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6) \Leftrightarrow x=8$$

3) نقوم أولا بفك الأقواس ثم نطرح على التوالي 2 , $5x$, $5x^2$ من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على 6:

$$(x+2)(5x+1)=5x(x+1) \Leftrightarrow 5x^2+11x+2=5x^2+5x \Leftrightarrow 11x+2=5x$$
$$\Leftrightarrow 6x+2=0 \Leftrightarrow 6x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام. وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال ٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \frac{x}{x-3}=\frac{24-5x}{x-3},\qquad 2)\ 1+\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}.$$

الحل:

1) أولا يجب أن ندرك أن $x\neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-3)\frac{x}{x-3}=(x-3)\frac{24-5x}{x-3} \Leftrightarrow x=24-5x \Leftrightarrow x+5x=24-5x+5x$$

$$\Leftrightarrow 6x=24 \Leftrightarrow \frac{6x}{6}=\frac{24}{6} \Leftrightarrow x=4$$

وهذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

2) هنا كذلك يجب أن ندرك أن $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-5)\left(1+\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) \Leftrightarrow (x-5)1+(x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-5+x=5 \Leftrightarrow 2x-5=5 \Leftrightarrow 2x-5+5=5+5 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفرا فإذن الحل $x=5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول أن المعادلة الأصلية ليس لها حلا.

تمارين

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

1) $2x+10=40$,

2) $-3y+20=2$,

3) $4x-11=7x+20$,

4) $4(2x-17)+5(3x-8)=0$,

5) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$,

6) $\frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2}$,

7) $5(x+3)(x-3)=5x(x-1)$,

8) $\frac{40-3x}{5x}=\frac{6x+7}{8}$,

9) $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7}$,

10) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2}$,

11) $\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4}$,

12) $2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3}$,

13) $\frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2}$,

14) $\frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2$,

15) $\frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4}$,

16) $\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3}$,

17) $5[x-(4x-5)]=3-2x$,

18) $6[3y-2(y-1)]-2+7y=0$,

19) $[2+(y+1)^2]=(y+2)^2$,

20) $(y+3)^2=(y+4)^2+1$,

21) $(z-7)^2=(z-2)^2+9$.

٣. حل المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف ٣ : معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

١,٣ طريقة التحليل

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ باستخدام أعداد صحيحة فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ أو $B = 0$

مثال ٥: حل المعادلات التالية: $1) x^2 + 8x + 15 = 0, \quad 2) 2x^2 + x - 6 = 0.$

الحل:

1) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في هذا الفصل نجد أن

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$

وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \{x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ أو } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5\}$$

إذن حلول المعادلة $x^2 + 8x + 15 = 0$ هي $x = -3$ و $x = -5$. وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

2) يكون التحليل هنا بالبحث عن قيم للأعداد m, n, p, q لأن $a \neq 1$ ويكن الحل كالتالي:

$$2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $2x^2 + x - 6 = 0$ هي $x = -2$ و $x = \dfrac{3}{2}$

٢,٣ طريقة الجذر التربيعي

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2 = B$ و $B > 0$ إذن $A = \pm\sqrt{B}$.

مثال ٦ : حل المعادلات التالية: $1) x^2 - 5 = 0, \quad 2) (x+1)^2 = 49,$

الحل:

1) بعد إضافة 5 إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2 - 5 + 5 = 0 + 5 \iff x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5}$$

إذن الحلول هي: $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$

2) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2 = 49 \iff x+1 = \pm\sqrt{49} \iff x+1 = \pm 7 \iff x+1 = 7 \text{ أو } x+1 = -7$$
$$\iff x = 7-1 = 6 \text{ أو } x = -7-1 = -8$$

إذن الحلول هي: $x = 6$ و $x = -8$.

٣. طريقة القانون العام (طريقة المميز):

تتلخص طريقة القانون العام في حساب $\Delta = b^2 - 4ac$ ونسمي هذه القيمة بالمميزوتكون:

حلول المعادلة: $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ هي $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ولأن قيمة المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ موجودة تحت الجذر فهناك ثلاث حالات هي كالتالي:

- إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان: $x = \dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ سالبة فليست هناك حلول حقيقية.

مثال ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\, 2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad 2)\, x^2 + 6x + 9 = 0, \quad 3)\, 3x^2 + 6x + 7 = 0.$$

الحل:

1) في هذه الحالة $c = 2$ $b = -5$ $a = 2$ إذن:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0$$

إذاً فهناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4} \iff x = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ أو } x = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) في هذه الحالة $a=1 \quad b=6 \quad c=9$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$$

إذاً فهناك حلان حقيقيان متشابهان وهما : $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(6)}{2(1)}=-3$

3) في هذه الحالة $a=3 \quad b=6 \quad c=7$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(3)(7)=36-84=-48<0$$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين

تمرين ١: *اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:*

1	حل المعادلة $3x-3=2x+6$ هو a) $x=3$ حل وحيد b) $x=9$ حل وحيد c) عدد لانهائي من الحلول d) مستحيلة الحل
2	حل المعادلة $\frac{6x-5}{2}=3x+1$ هو $x=3$ a) حل وحيد b) $x=-4$ حل وحيد c) عدد لانهائي من الحلول d) مستحيلة الحل
3	حل المعادلة $x^2-5x+6=0$ هو $x=2$, $x=3$ a) $x=-2$ b) d) $x=-2$, $x=0$ c) لا يوجد حلول حقيقية
4	حل المعادلة $2x^2-4x+3=0$ هو $x=1$, $x=1$ c) $x=-4$, $x=3$ b) $x=-2$, $x=2$ a) d) لا يوجد حلول حقيقية
5	حل المعادلة $x^2-4=0$ هو a) $x=4$, $x=-4$ b) $x=2$, $x=-2$ c) $x=-2$, $x=8$ d) لا يوجد حلول حقيقية
6	حل المعادلة $x^2+3x=0$ هو a) $x=5$, $x=1$ b) $x=-5$, $x=3$ c) $x=0$, $x=-3$ d) لا يوجد حلول حقيقية

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $8y^2+189y-72=0,$ 3) $3x^2-7x=0,$

4) $8+14t-15t^2=0,$ 5) $(x-5)^2-9=0,$ 6) $(2x-5)^2-(4x-11)^2=0.$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي

1) $x^2=81,$ 2) $2x^2-48=0,$ 3) $(x-5)^2=36,$

4) $(x-8)^2=(x+1)^2,$ 5) $x^2=(x+1)^2,$ 6) $4x^2=(2x+3)^2.$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $x^2+x-1=0,$ 3) $2x^2+4x+1=0,$

4) $3x^2-5x+3=0,$ 5) $x^2+3x-1=0,$ 6) $2x^2-5x+3=0,$

7) $-x^2=7x-1,$ 8) $2x^2+3x+5=0,$ 9) $2x^2+5x-3=0.$

الفصل الثاني :المعادلات الخطية

١. تعريف المعادلات الخطية :

تعريف١ : تعبير خطي لمتغيرات ما هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثال١ : هذه تعابير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ -x+2.5y+3x$$

$$2)\ y+\sqrt{3}\,x-2y+z$$

$$3)\ 2x-y+3z$$

وهذه تعابير غير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ x+xy-z$$

$$2)\ x^2+x+1$$

$$3)\ \sqrt{x}+y+z$$

تعريف٢ : معادلة خطية لمجاهيل معينة هو معادلة تحتوي على تعابير خطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثال٢ : هذه معادلات خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ -x+2.5y+3x-6=z-2y+3$$

$$2)\ 2x-y+3z=-2$$

$$3)\ x+3.5y=6$$

وهذه معادلات غير خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ x+xy-z=0$$

$$2)\ x^2+x+1=3$$

$$3)\ \sqrt{x}+y+z=-y+z+10$$

تعريف٣ : جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت.
لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثال٣ : هذه جملة 4 معادلات خطية للمجاهيل x و y و z :

$$1)\ -x+3y+2z=2$$

$$2)\ 3x-6y+z=-3$$

$$3)\ 2x+y-5z=10$$

$$4)\ x\qquad+3z=0$$

تعريف ٤: حل جملة معادلات خطية هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلا وحيدا، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لانهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لانهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة (أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين)..

٢. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:

قد مرت علينا هذه المعادلات في الفصل الأول ولكن في حالة خاصة وسندرس هنا حالتها العامة.

مثال ٤: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

$$1)\ -x+3=2x-6 \qquad 2)\ 3.5x+4=7x-3-3.5x \qquad 3)\ 2(3-x)=-2x+6$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x-2x=-6-3$$

الخطوة الثانية: نبسّط الطرفين:

$$-3x=-9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة: المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x=\frac{-9}{-3}=3$$

2) الخطوة الأولى:

$$3.5x-7x+3.5x=-3-4$$

الخطوة الثانية:

$$0=-7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى:

$$6-2x=-2x+6$$
$$-2x+2x=6-6$$

الخطوة الثانية:

$$0=0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عدداً لا نهائياً من الحلول.

٣. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

١,٣ الحل بطريقة التعويض:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى.فنحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد فإن للجملة حلاً وحيداً نحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحالة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٥: حل كل من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}-2x+y=5\\3x-4y=-25\end{cases},\quad 2)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=-2.5\end{cases}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x-4(5+2x)=-25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x-20-8x=-25$$
$$\Leftrightarrow 3x-8x=-25+20 \Leftrightarrow -5x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-5}=1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة إذن للجملة حل وحيد نحصل عليه بالتعويض:

$$y = 5 + 2x \Leftrightarrow y = 5 + (2 \times 1) = 7$$

خلاصة: حل الجملة هو:

$$x = 1, \qquad y = 7$$

2) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = 2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = 2 \Leftrightarrow x - x = 2 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = -2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = -2.5$$
$$\Leftrightarrow x - x = -2.5 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

٢,٣ الحل بطريقة كرامير:

تعريف ٥: ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و b_1 و b_2 والثوابت c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

نظرية ١: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٦: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال السابق بطريقة كرامير.

الحل:

1) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = -20 - (-25) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = 50 - 15 = 35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{35}{5} = 7$$

2) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-2=-4.5\neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحدد x لا يساوي الصفر إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2.5 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-(-2.5)=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2.5\end{vmatrix}=5-5=0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل تساوي الصفر إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٧: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}2x+3y=4\\ x-y=-3\end{cases}\quad ,\ 2)\begin{cases}3x+2y=12\\ 5x-3y=1\end{cases},\quad 3)\begin{cases}2x+8y=4\\ x+4y=14\end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4-(-9)=5,\qquad D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{-5}=-1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-10=-19\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-36-2=-38$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3-60=-57$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-57}{-19}=3$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 14 & 4\end{vmatrix}=16-112=-96\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل.

٤. جمل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير وذلك لسهولتها.

تعريف ٦: ليكن لدينا جملة 3 معادلات خطية ذات 3 مجاهيل x و y و z على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z&=d_1\\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z&=d_2\\ a_3\,x+b_3\,y+c_3\,z&=d_3\end{aligned}$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 و c_1 و c_2 و c_3 والثوابت d_1 و d_2 و d_3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

نظرية ٢: حل جملة المعادلات الخطية ذات 3 مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}\qquad y=\frac{D_y}{D}\qquad z=\frac{D_z}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٨: حل جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases},\quad 2)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ -x-2y\quad =4 \end{cases},\quad 3)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ -x-2y\quad =-5 \end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{matrix}=36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{matrix}=22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}=39+33+24-54-22-26=-6$$

إذن للجملة حل وحيد ($D \neq 0$) هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$2)\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 0 - 1 - 4 - (-3) - (-2) - 0 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 4 & -2 \end{matrix} = 0 + 4 - 22 - 12 - (-12) - 0 = -18 \neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل (لأن $D_x \neq 0$, $D = 0$).

$$3)\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 0 - 1 - 4 - (-3) - (-2) - 0 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ -5 & -2 \end{matrix} = 0 - 5 - 22 - (-15) - (-12) - 0 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ -1 & -5 \end{matrix} = 0 - 6 - 10 - (-11) - (-5) - 0 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = -15 - 11 - 24 - (-18) - (-22) - (-10) = 0$$

إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول (لأن $D = D_x = D_y = D_z = 0$).

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات الخطية التالية:

تمرين ٢: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}2x-3y=1\\ -x+4y=0\end{cases},\quad 2)\begin{cases}4x+2y=-8\\ -x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+4y=0\\ x-2y=5\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}4x+5y=9\\ -x+3y=2\end{cases},\quad 5)\begin{cases}4x-5y=-9\\ -8x+10y=18\end{cases},\quad 6)\begin{cases}4x-5y=-9\\ -2x+2.5y=0\end{cases}$$

تمرين ٣: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}x+y+z=6\\ -x+2y-z=0\\ 2x-3y+4z=2\end{cases},\quad 2)\begin{cases}3x+5y-z=10\\ -x+2y+z=11\\ 5x+y-3z=-12\end{cases},\quad 3)\begin{cases}x-z=12\\ -3x+2y=-3\\ -6x+2y+3z=10\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}x+2z=13\\ -y+z=5\\ x-y=0\end{cases},\quad 5)\begin{cases}-x+2y-z=-2\\ x+15y-3z=11\\ -y+2z=3\end{cases},\quad 6)\begin{cases}y+z=0\\ x+y-z=10\\ x+2y=-12\end{cases}$$