الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

محتويات الوحدة

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

أهلاً بك في هذه الوحدة الأولى من مقرر رياضيات (1) الرياضيات الأساسية. وهذه الوحدة تتناول "المنطق الرياضي".

إن المنطق الرياضي علم هام لكل شخص يريد أن يفكر ويستدل بصورة صحيحة، ونحن نستخدم المنطق الرياضي في غالبية العلوم وعلى وجه خاص في الرياضيات، فهو مؤسس على مفاهيم منطقية، فحري بنا أن نتعرف على مفاهيمه ومكوناته الأساسية.

في هذه الوحدة ستتعرف على مفهوم المنطق الرياضي وكونه منطقاً رمزياً، كما ستتعرف على العبارات وأنواعها. وستتعرف على روابط هذه العبارات، وعلى قيم الصواب وكيفية عمل جداول الصدق. وستتعرف على الشرط الكافي والشرط الضروري. وبالنهاية ستتعرف على التكافؤ.

فيجدر بك عزيزي الدارس أن تهتم بهذه الوحدة وتدرسها بالتسلسل الذي وضعت به، فلا تنتقل إلى جزء إلاّ بعد أن تفهم الجزء السابق له فهماً جيداً، إلاّ إذا كنت ملماً بما سبق قبل دراستك لهذا المقرر.

أهلاً بك مرة أخرى في هذه الوحدة، أرجو أن تفيد منها وأن تساهم معنا في نقدها وتقييمها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس ...

يتوقع منك بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

- **تعرّف** المنطق الرياضي.
- **تشرح** مفهوم المنطق الرمزي وكون المنطق الرياضي منطقاً رمزياً.
- **تميّز** العبارات وأنواعها.
- **تعبّر** عن الجمل العادية بعبارات رمزية.
- **تستخدم** جداول الصدق لمعرفة قيم صدق العبارات المركبة.
- **تحدد** الشرط الكافي والشرط الضروري.
- **تشرح** خواص الروابط المنطقية.
- **تعرّف** التكافؤ.
- **تثبت** تكافؤ عبارتين منطقياً.

1. المنطق الرياضي والمنطق الرمزي

لقد نال المنطق الرياضي منذ أواخر القرن التاسع عشر اهتمام الفلاسفة والرياضيين على حد سواء، وذلك للدور الأساسي الذي يلعبه في البحث العلمي الحديث.

عزيزي الدارس، قبل أن تصل إلى مفهوم المنطق الرياضي عليك المرور على بعض المفاهيم أولاً، فعندما خلق الله الإنسان ميزه عن غيره من المخلوقات وكرّمه بأن جعله قادرا على التفكير، و والتفكير فعل مرتبط بالعقل، وينقسم إلى نوعين: تفكير استدلالي وتفكير عشوائي. ونستعرض فيما يلي هذين النوعين بشيء من الإيجاز.

أولا: التفكير الاستدلالي Reasoning Thinking

يكون لهذا النوع من التفكير هدف معين، ونضرب لذلك المثال التالي:

مثال (1)

لاحظ أستاذ مادة ما تدني علامات معظم الطلبة في مادته، فأخذ يفكر في أسباب ذلك، وبدأ يتساءل: هل وقت الامتحان كان غير مناسب؟ أم أن صعوبة الأسئلة هي السبب؟ وغيرها من الأسئلة محاولاً الوصول إلى حل لتلك المشكلة. إن هذا النمط من التفكير نطلق عليه اسم التفكير الاستدلالي.

ثانيا: التفكير العشوائي Random Thinking

لا يكون لهذا النوع من التفكير هدف مقصود، وإنما هي أفكار عشوائية لا يربطها رابط. ومثال ذلك:

مثال (2)

رجل يجلس على شاطئ البحر، فتبدأ أفكار غير مترابطة بالورود إلى ذهنه، فمثلاً قد يفكر في أن البحر جميل، وفكرة اجتماع العائلة حول مائدة الطعام جميلة، وفكرة أن الهواء عليل، وغيرها من الأفكار التي لا ترمي إلى تحقيق أي هدف.

والمنطق يتناول التفكير الاستدلالي، ولا علاقة له بالتفكير العشوائي، ولهذا يطلق على التفكير الاستدلالي اسم "التفكير المنطقي".

المنطق : هو علم الاستدلال الصحيح، أو هو تحليل طرق التفكير والاستنتاج.

في البداية كان علم المنطق يعتمد على الألفاظ اللغوية فقط؛ ولكن هذا لم يفِ بالغرض في بعض الحالات ولا سيما المعقدة منها. فكان لا بد من استخدام الرموز للتعبير عن القوانين والقواعد المنطقية وبهذا أصبح المنطق رمزياً.

لاحظ عالم اسمه باول (Boole) أننا إذا كنا نستخدم في عمليات الجبر رموزاً لها خصائص معينة فإنه من الممكن استخدام رموز مشتقة من الرمزية الجبرية للتعبير عن العمليات الفكرية.

وبهذا فإن المنطق الرمزي يستند إلى استخدام الرموز بالإضافة إلى قواعد تأليف تلك الرموز.

وبهذا نلاحظ أن المنطق اقترب من الجبر والرياضيات.

ظهر المنطق الرياضي على يد العالمين براترند رسل (Bertrand Russell) وألفرد نورث هوايتهد A. N. Whitehead.

تعريف:

المنطق الرياضي Mathematical Logic: مشتق من اللفظ اليوناني Logistich'e techn'e أي فن الحساب. وهو منطق يستخدم الطرق والمفاهيم الرياضية البحتة في تحليل العبارات والعمليات الاستدلالية من جهة، ويحاول تأسيس الرياضيات على مفاهيم منطقية من جهة أخرى.

والمنطق الرياضي، كالرياضيات البحتة- لا يعنى بمحتوى ومضمون العبارات والاستدلال بل بصورها وحسب. ولذلك يستخدم المنطق الرياضي **الرموز** (الثوابت، المتغيرات، وغيرها) في صياغة القضايا والحجج الاستدلالية.

وهذا هو الذي جعل المنطق الرياضي **منطقاً رمزياً** Symbolic logic يقوم على استخدام الرموز بدل الألفاظ ذات المعاني. فاستخدام الرموز هذا جعل عملية الفهم والاستدلال أسهل وأكثر اختصاراً ووضوحاً.

والوحدات الأساسية في المنطق الرياضي هي **العبارات**. وينظر إلى العبارات على أنها عناصر، وذلك لتركيز الانتباه على طريقة ربط هذه العناصر. فهو يعطي للعبارة رمزاً لتدل عليها.

مثال (3)

الجملة التالية: "الخرطوم عاصمة السودان" سيرمز لها بالرمز P مثلاً، وبالتالي يصبح الرمز P دالاً عليها مما سيسهل عملية التفكير والاستدلال.

وتستخدم الروابط المنطقية Logical Operator للربط بين العبارات، ولكل رابط رمز محدد ومعنى واضح ومعرّف.

وهذه الروابط هي: **(و ، أو، إذا كان .. فإن، إذا وفقط إذا)** وغيرها لها معان محددة وتأثير محدد.

بإمكاننا القول إن المنطق الرياضي هو:

أداة للعمل مع العبارات المركبة المعقدة، وهذا يشمل:

- لغة من أجل توضيحها.
- صيغة موجزة للتعبير عنها.
- عبارة عن منهج، للاستدلال على صدقها أو كذبها.
- أساس للتعبير عن طرق البرهان في كافة فروع الرياضيات.

عزيزي الدارس،

بعد إكمالك لفصول هذه الوحدة ستفهم جيداً المقصود بالمنطق الرمزي، وكيف سنستخدم الرموز في المنطق الرياضي. وستتعلم كيف تعبّر عن الجمل اللغوية العادية بالرموز، وكيف ترجع الرموز إلى جمل مكتوبة باللغة العربية العادية.

2. العبارات وروابطها

1.2 العبارة البسيطة والعبارة المركبة

تعريف:

العبارة Statement: هي جملة خبرية محددة، إما أن تكون صائبة وإما أن تكون خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.

كون العبارة صائبة أو خاطئة يسمى بقيمة الحقيقية Truth value.

وسنرمز للعبارة الصائبة بالرمز T أي True.

وسنرمز للعبارة الخاطئة بالرمز F أي False.

كما يتضح من التعريف فالعبارة يجب أن تكون:

1- من النوع الذي يمكن الحكم عليه بالصواب أو الخطأ. وهذا بالتالي يستبعد جمل الأمر والتعجب والنهي والرجاء والاستفهام من مجال العبارات.

2- أحد خيارين: إما صادقة أو كاذبة، ولا يمكن أن تكون صادقة وكاذبة في وقت واحد.

مثال (4)

فيما يلي بعض الجمل، مع التوضيح، أيها تمثل عبارة وأيها ليست عبارة.

1- الشمس تشرق من المشرق.

2- مساحة المربع تساوي مكعب ضلعه.

3- هل اليوم ماطر؟

4- 5×3

5- $5 \times 3 = 15$

6- $5 \times 3 = 20$

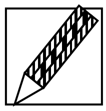
7- لا تعصِ ربك

8- $2X + 1 = 9$

التوضيح:

1- عبارة وهي صائبة.
2- عبارة وهي خاطئة.
3- ليست عبارة فهي استفهام ولا يمكن الحكم عليها هل هي صائبة أم خاطئة.
4- ليست عبارة فهي لا يمكن الحكم عليها هل هي صواب أم خطأ.
5- عبارة وهي صائبة.
6- عبارة وهي خاطئة.
7- ليست عبارة لأنها جملة نهي.
8- ليست عبارة فهي تحتمل الصواب والخطأ معاً؛ فبما أن قيمة X غير محددة ففي قيم معينة عندما X=4 تصبح الجملة صحيحة وعندما X = 1 مثلاً تصبح الجملة خاطئة ومثل هذه الجملة تسمى جملة مفتوحة (هي جملة تتحول إلى عبارة صائبة عند بعض قيم المتغير X وتتحول إلى عبارة خاطئة عند قيم أخرى).

تدريب (1)



حدد أياً من الجمل التالية هي عبارة ؟
1- 6+7
2- ما أروع هذا المكان!
3- يقع السودان في قارة أفريقيا

سوف نرمز للعبارات بحروف من اللغة لتدل عليها، وعادة نستخدم P,q,r... وهذا الترميز سيجعل عملية التعبير عن العبارات سريعة وموجزة، وسيسهل علينا فهم الروابط بين العبارات كما ستلاحظ لاحقاً.

مثال (5)

لدينا العبارة "الشمس تشرق من المشرق".

لو رمزنا لهذه العبارة بالرمز P. فإنه سيصبح من الأسرع ذكر هذا الرمز للدلالة عليها.

في المثال (4) تلاحظ أن العبارات كانت تحمل خبراً واحداً، وهي بسيطة بحيث لا يمكن تقسيمها إلى أجزاء أصغر ومثل هذه العبارات تسمى عبارة بسيطة. فالجمل 1 ، 2 ، 5، 6 كلها عبارات بسيطة.

> **العبارة البسيطة Simple Proposition** : هي عبارة تحمل خبراً واحداً، ولا يمكن تقسيمها إلى عبارات أبسط منها.

وتصنف العبارات البسيطة إلى الأصناف التالية:

1- العبارة الحملية Predicative Proposition

وهي العبارة التي تعبر عن صفة تعود إلى شيء. والعبارة هذه تتكون من موضوع ومحمول. موضوع تخبر عنه ومحمول تخبر به

ومثال ذلك: السماء عالية، فهذه العبارة تعبر عن صفة العلو محمولة على السماء.

2- عبارة العضوية في فئة Class - member ship proposition

وهي تعبر عن أن شيئاً ما عضواً في فئة وينتمي إليها.

ومثال ذلك: التفاح فاكهة.

هذه العبارة تعني أن التفاح هو عضو في فئة الفاكهة.

3- العبارة العلاقية Relational Proposition

وهي العبارة التي تعبر عن علاقة بين شيئين أو أكثر. وهناك ألفاظ عديدة تعبر عن العلاقات، مثل الأفعال المتعدية (الأفعال التي تأخذ مفعولاً به) مثل يقرأ ويأكل وغيرها، والألفاظ الدالة على المقارنة مثل يساوي، أكبر من، أصغر من، وغيرها.

ومثال ذلك العبارتين التاليتين:

- المتر أكبر من البوصة.
- المنطق يدرس القضايا.

تدريب (2)

صنف الجمل التالية إلى عبارات حملية، عضوية وعلاقية.

1- 5 أكبر من 3   4- سقراط حكيم.
2- 4 ينتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة.   5- سقراط إغريقي.
3- $10 < 4$ 6- الشمس مشرقة.

يمكن أن نربط عبارتين بسيطتين أو أكثر في عبارة واحدة فنحصل على عبارة جديدة تسمى العبارة المركبة.

العبارة المركبة Compound Proposition : هي عبارة التي يمكن تحليلها وتجزئتها إلى عبارات بسيطة.

<u>أمثلة على العبارات المركبة:</u>

1- 2 أكبر من 1 و 4 أكبر من 2.   لاحظ هنا وجود عبارتين بينهما الرابط "و".
2- الشمس مشرقة والجو بارد.   لاحظ هنا وجود عبارتين بينهما الرابط "و".
3- الجو ماطر أو 5 عدد فردي.   لاحظ هنا وجود عبارتين بينهما الرابط "أو".

تدريب(3)

أي من العبارات التالية تعتبر عبارات بسيطة، وأيها عبارات مركبة.

1- أحمد مريض ومحمد عجوز.
2- 5 عدد زوجي.
3- 7 عدد أولي أو 9 عدد زوجي.
4- 3 عدد فردي و $5 > 2$

لو كان لدينا عبارة مثل "5 عدد أولي" فإن العبارة "ليس 5 عدد أولي" هي عبارة عن نفي لهذه العبارة. ويمكننا أن نكتب تعريفا لنفي العبارة كما يلي:

تعريف:

إذا كانت **P** عبارة معينة فالعبارة "ليس **P**" هي عبارة أخرى وتسمى نفي العبارة **P** (**Negation**). **ويرمز لها بـ P** ~.

➢ **ملاحظة**

في اللغة العربية نستخدم أدوات مثل **لا، لن، ما ، ليس ، ليس صحيحاً،..** وذلك للتعبير عن النفي ولكن الرمز ~ في المنطق يعبر عن كل تلك الأدوات وبشكل واضح وموجز. ألا يعتبر ذلك استخداما رائعاً للرموز**!؟**

مثال (6)

$5 + 6 = 11$: P

P ~ : ليس صحيحاً أن $5 + 6 = 11$

العبارات المركبة تتكون من عبارات بسيطة وأدوات ربط تربط بينها لتكوّن هذه العبارات المركبة.

2.2 أدوات الربط والرموز في التعبير عن العبارات

الروابط المنطقية connectives تضم عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة من هذه العبارات.

وهذه الروابط المنطقية هي:

و AND ، أو OR، إذا كان فإن if ... then ، إذا وفقط إذا if and only if

وفيما يلي شرح لكل عبارة منها، مع ضرب أمثلة لطريقة استخدامها، وكيفية تحويل الجمل العادية إلى جمل رمزية باستخدام هذه الروابط المنطقية، وبالعكس.

أولاً: أداة الربط "و" Conjunction

تستخدم للربط بين عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة مركبة تعطي معنى جديداً، وهي بمثابة أداة وصل بين العبارتين لذلك تسمى أيضاً (وصلة).

نرمز لأداة الربط وبالرمز: Λ

مثال (7)

أفرض أن :

P: "إنها تمطر" q :"الشمس مشرقة"

فالعبارة "إنها تمطر والشمس مشرقة" نعبر عنها بـ $P\Lambda q$

ثانياً: أداة الربط "أو" disjunction

تستخدم للربط بين عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة مركبة تعطي معنى جديداً. وهي بمثابة أداة فصل بين القضيتين، لذلك تسمى أيضاً (الفاصلة).

نرمز لـ أو بالرمز V .

مثال (8)

أفرض أن:

P : "دمشق عاصمة سوريا" q : "2 عدد زوجي".

فالعبارة: "دمشق عاصمة سوريا أو 2 عدد زوجي" نعبر عنها بـ PVq.

ثالثاً: "إذا كان فإن" Conditional

تستخدم للربط بين عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة مركبة تعطي معنى جديداً وتسمى عبارة شرطية.

هذه الأداة تستخدم مقدمة وتالية، ففي العبارة الشرطية $P \rightarrow q$ (يكون اتجاه السهم من المقدمة إلى التالية). حيث P هي المقدمة و q هي التالية.

نرمز لـ إذا كان ... فإن بالرمز $\rightarrow$

مثال (9)

أفرض أن:

P : " $6 = 2 + 4$" q : أرسطو فيلسوف.

فالعبارة "إذا كان $6 = 2 + 4$ فإن أرسطو فيلسوف" نعبر عنها بـ $P \rightarrow q$.

رابعاً: "إذا وفقط إذا" Biconditional

تستخدم للربط بين عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة مركبة تعطي معنى جديداً. وتسمى عبارة شرطية مزدوجة أو تكافؤ مادي Material Equivalence.

تتكون هذه العبارة من دمج عبارتين إذا كان فإن باتجاهين متعاكسين مدموجتين بأداة الوصل Λ.

فلو فرضنا أن:

P : " 5 عدد أولي " q: "3 عدد فردي"

فالعبارة " 5 عدد أولي إذا وفقط إذا 3 عدد فردي" ونرمز لها بالرمز: $P \leftrightarrow q$.

ويمكننا كتابتها على صورة عبارتي "إذا كان فإن" مركبتين كما يلي:

"إذا كان 5 عدداً أولياً فإن 3 عدد فردي، وإذا كان 3 عدداً فردياً فإن 5 عدد أولي"

مثال (10)

افرض أن:

P : "هي جميلة"

q : "هي أنيقة"

أكتب جملاً بسيطة تصف كلاً من:

1- $\sim P$ 2- $P \Lambda q$

3- $\sim P V \sim q$ 4- $\sim P V q$

5- $\sim (\sim P V q)$ 6- $P V (\sim P \Lambda q)$

الحل:

1- هي ليست جميلة.

2- هي جميلة وأنيقة.

3- هي ليست جميلة أو ليست أنيقة.

4- هي ليست جميلة أو هي أنيقة.

5- من الخطأ القول أنها قبيحة أو أنيقة.

6- هي جميلة أو هي قبيحة وأنيقة.

كما رأينا فإن الجمل اللغوية الطويلة يمكن التعبير عنها باستخدام الرموز، رموز للعبارات البسيطة ورموز للروابط.فالمنطق الرمزي يمكننا من التعبير بطريقة أكثر وضوحاً وأكثر سهولة.

تدريب (4)

افرض أن P ترمز للعبارة : "محمد يلعب رياضة".

Q : "محمد جسمه سليم"

اكتب جملاً بسيطة تصف كلاً من

1- $P \wedge q$ 2- $\sim P \vee \sim q$

3- $P \rightarrow \sim q$ 4- $\sim \sim q$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

إذا علمت أن : **P** : استلم محمد الجائزة.

q : اشترى محمد سيارة.

أكتب ما يلي مستخدماً الرمزين **P, q** والروابط المنطقية المناسبة.

1- استلم محمد الجائزة ولم يشتر سيارة.

2- إذا كان محمد اشترى سيارة فإن محمد استلم الجائزة.

3- لم يشتر محمد سيارة.

4- اشترى محمد سيارة إذا وفقط إذا استلم محمد الجائزة.

3. قيم وجداول الصدق

عزيزي الدارس، تذكر عندما تكلمنا عن العبارات قلنا أن:

- قيمة الصواب أو قيمة الصدق truth value تعني هل العبارة المعطاة صحيحة أم خاطئة.

العبارة الصحيحة يرمز بالرمز T

العبارة الخاطئة يرمز لها بالرمز F

والعبارة البسيطة نتحقق من صدقها من حيث مطابقتها للواقع، فهي إما T أو F. أما العبارات المركبة فيعتمد صدقها على:

1- صدق مكوناتها (العبارات البسيطة التي تكونها).

- فقد تصدق العبارتان معاً.
- أو تكذبان معاً.
- أو تصدق إحداهما وتكذب الأخرى.

2- على معنى الثابت المنطقي الذي تحتويه.

ومثال ذلك لو كان لدينا العبارة البسيطة التالية:

P: العدد 5 عدد أولي

يمكن الحكم على العبارة P البسيطة من خلال مطابقتها للواقع، فالعدد 5 هو فعلاً عدد أولي من معرفتنا السابقة لذلك.

إذن قيمة الصدق للعبارة P هو T (صحيحة).

بينما العبارة المركبة التالية:

"العدد 2 زوجي والعدد 2 أولي".

بتحليل هذه العبارة المركبة إلى العبارتين البسيطتين اللتين تكونهما:

P : العدد 2 زوجي   q : العدد 2 أولي

فالعبارة المركبة يرمز لها بـ $P\wedge q$

إذن قيمة صدقها يعتمد على كل من P ، q ، ومعنى الأداة $\wedge$.

إن أفضل طريقة للتحقق من صدق العبارات المركبة هو استخدام ما يعرف بجداول الصدق.

وجداول الصدق: عبارة عن جداول عادية يتم فيها دمج قيم الصواب لعبارتين أو أكثر باستخدام إحدى أدوات الربط أو بعضها.

و يتحدد عدد الصفوف في جدول الصدق بالقاعدة = 2^n حيث:

2 : تشير إلى قيمتي الصدق للعبارة T, F.

n : عدد رموز العبارات المكونة للعبارة المركبة.

مثلاً: العبارة $P\wedge q$ تحتوي على $2^2 = 4$ صفوف، بينما العبارة المركبة $P\vee q\wedge r$ تحتوي على $2^3 = 8$ صفوف لأنها تحتوي على 3 رموز P,q,r .

استخدام النفي ~

عند نفي العبارة فإن هذا يعطي عبارة أخرى منافية تماماً للعبارة الأولى في المعنى وفي قيم الصواب.

إذا كانت **P** عبارة فإن **P** ~ هي نفي العبارة
قيمة الحقيقة في النفي تحقق الخاصية التالية:
إذا كانت **P** صحيحة فإن **P** ~ خاطئة وإذا كانت **P** خاطئة فإن **P** ~ صحيحة.

الجدول (1)

قيم الصواب للعبارة P~

P	~P
T	F
F	T

مثال (11)

إذا كانت P : 2 عدد زوجي. q : 7 أكبر من 2.
r : 4 عدد فردي.

فما قيمة الصواب لكل من:

1- ~P 2- ~q 3- ~ r

الحل:

1- P~ هي خطأ لأن P كانت صحيحة.
2- q~ هي خطأ لأن q كانت صحيحة.
3- r ~ هي صحيحة لأن r كانت خطأ.

استخدام أداة الربط و Λ:

إذا كانت P,q عبارتان، فإن قيمة الحقيقة للعبارة PΛq تحقق الخاصية التالية:
إذا كانت P صحيحة و q صحيحة فإن PΛq صحيحة، وغير ذلك تكون خاطئة.

الجدول (2)

قيم الصواب للعبارة المركبة P Λ q

P	**q**	**PΛq**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تلاحظ في السطر الأول من الجدول أنه عندما كانت كل من P صحيحة و q صحيحة فإن PΛq كانت صحيحة.
ولكن عندما كانت إحداهما خاطئة فإن PΛq خاطئة.
وعندما كانت كلتاهما P خاطئة و q خاطئة فإن PΛq خاطئة أيضاً.

مثال (12)

إذا كان لدينا العبارات التالية:

P : العدد 5 عدد فردي   q : العدد 6 عدد زوجي

r : 3 > 2   n : العدد 21 عدد أولي

حدد قيم الصواب للعبارات المركبة التالية:

1- $q \land P$ 2- $r \land P$

3- $q \land n$ 4- $n \land r$

الحل:

في البداية نحدد قيم الصواب لكل عبارة بسيطة P,q,r,n وهي كالتالي:

P صحيحة q صحيحة r خاطئة n خاطئة.

1- بما أن P صحيحة، q صحيحة إذن من الجدول (2) من السطر الأول فإن $P\land q$ صحيحة. (كلاهما صحيح إذن الناتج صحيح).

2- $r\land P$ خاطئة: لأن r خاطئة، P صحيحة (أحدهما خاطئ، إذن خاطئ).

3- $q\land n$ خاطئة: لأن q صحيحة، n خاطئة (أحدهما خاطئ إذن خاطئ).

4- $n\land r$ خاطئة : لأن n خاطئة، r خاطئة (كلاهما خاطئ إذن خاطئ).

استخدام أداة الربط V أو :

إذا كانت **P, q** عبارتان، فإن قيمة الحقيقة للعبارة المركبة **PVq** تحقق الخاصية التالية:
إذا كانت **P** صحيحة أو **q** صحيحة أو كلاً من **q, P** صحيحتان فإن العبارة **PVq** صحيحة، وعدا ذلك تكون خاطئة.

أي: في الحالة P، q كلاهما خاطئ تكون PVq خاطئة.

الجدول (3)

قيم الصواب للعبارة المركبة PVq

P	**q**	**P Vq**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نلاحظ من الجدول أنه عندما كانت كل من العبارتين P,q خاطئة كانت PVq خاطئة.
أما إذا كانت كل من العبارتين P,q صحيحة كانت PVq صحيحة.
وكذلك عندما كانت إحدى العبارتين P,q صحيحة فإن PVq كانت صحيحة.

مثال (13)

إذا كان لدينا العبارات التالية:

P : "3 عدد أولي"   q : "8 عدد فردي"

r : "16 من مضاعفات العدد 5"   n : "4 عدد زوجي"

فحدد قيم الصواب لكل من:

1- PVq   2- rVq   3- qVP   4- nVP

الحل:

في البداية نحدد قيم الصواب لكل من P,q,r,n وهي كالتالي:

P صحيحة   q خاطئة   r خاطئة   n صحيحة

1- صحيحة: لأن P صحيحة، q خاطئة (إحداهما صحيحة إذن صحيحة).
2- خاطئة: لأن r خاطئة، q خاطئة (إحداهما خاطئة إذن خاطئة).
3- صحيحة: لأن q خاطئة، P صحيحة (إحداهما صحيحة إذن صحيحة).
4- صحيحة: لأن n صحيحة، P صحيحة (كلاهما صحيحة إذن صحيحة).

استخدام رابط الشرط: إذا كان .. فإن →

إذا كانت P,q عبارتان، فإن قيمة الحقيقة للعبارة P→q تحقق الخاصية التالية:
تكون P→q صحيحة، إلاّ في حالة P صحيحة، q خاطئة.
وتسمى P المقدمة وتسمى q النتيجة.

P → q يمكن أن تقرأ:

حدوث P كافٍ لحدوث q .   P is sufficient for q

q ضرورية لـ P   q is necessary for P

الجدول (4)

قيم الصواب للعبارة المركبة $P \to q$

P	**q**	**$P \to q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تلاحظ من الجدول أنه فقط في السطر الثاني عندما P صحيحة و q خاطئة فإن $P \to q$ خاطئة، في الحالات الباقية كانت $P \to q$ صحيحة.

مثال (14)

إذا كان لدينا العبارات البسيطة التالية:

P: 2 عدد زوجي   q : 10 يقبل القسمة على 2

r : $5 < 2$ n : $5 + 3 = 6$

فما قيم الصواب لكل من ؟

1- $q \to P$ 2- $n \to P$

3- $P \to n$ 4- $r \to n$

الحل:

في البداية نحدد قيم الصواب لكل من n, r, q, p كالتالي:

P صحيحة   q صحيحة   r خاطئة   n خاطئة

1- صحيحة؛ لأن المقدمة q صحيحة والنتيجة P صحيحة.

2- صحيحة؛ لأن المقدمة n خاطئة والنتيجة P صحيحة.

3- خاطئة؛ لأن المقدمة P صحيحة والنتيجة q خاطئة.

4- صحيحة، المقدمة r خاطئة والنتيجة n خاطئة.

التدريب (5)

أوجد قيمة الصواب لكل من:
1- إذا كان 5 = 1 + 1 فإن للحصان أجنحة.
2- إذا كان **7** > **5** فإن 3 عدد فردي.
3- إذا كان 3 عدد زوجي فإن 4 عدد زوجي.
4- إذا كان 8 عدد زوجي فإن 9 عدد أولي.

الشرطية المزدوجة إذا وفقط إذا $\leftrightarrow$:

إذا كانت **q**، **P** عبارتان، فإن قيمة الحقيقة للعبارة **$P\leftrightarrow q$** تحقق الخاصية التالية:
إذا كانت **$P\leftrightarrow q$** لهما قيمة الحقيقة نفسها، إذن **$P\leftrightarrow q$** صائبة، وإذا كانت قيمتا الحقيقة لـ **P,q** مختلفتان فإن **$P\leftrightarrow q$** خاطئة.

الجدول (5)

قيم الصواب للعبارة المركبة $P \leftrightarrow q$

P	**q**	**$P\leftrightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

نقرأ العبارة $P \leftrightarrow q$:
- "P إذا وفقط إذا q "
- "P ضرورية وكافية لـ q".

نلاحظ من الجدول في السطرين الأول والرابع عندما كان كلاً من P,q لهما نفس قيمة الصواب كانت $P\leftrightarrow q$ صواباً.
وعندما كانت P صواباً و q خطأ كانت $P\leftrightarrow q$ خطأ.
وعندما كانت P خطأ و q صواباً كانت $P\leftrightarrow q$ خطأ.

مثال (15)

إذا كان لدينا العبارات البسيطة التالية:

P : 12 عدد زوجي   q : عدد زوايا المثلث هو 3

r : عدد أضلاع المربع هو 6   n : 4 عدد فردي.

فما قيم الصواب لكل من:

1 - $P\leftrightarrow q$ 2- $P\leftrightarrow n$ 3- $r\leftrightarrow q$ 4- $n\leftrightarrow r$

الحل:

حدد قيم الصواب لكل من P,q,r,n في البداية، وهي كالتالي:

P صحيحة   q صحيحة   r خاطئة   n خاطئة

1- صحيحة. لأن P,q كلاهما صحيح.

2- خاطئة. لأن P صحيحة بينما n خاطئة.

3- خاطئة. لأن r خاطئة بينما q صحيحة.

4- صحيحة لأن n,r كلاهما خاطئ.

والآن لننظر إلى العبارات المركبة التالية الأكثر تعقيداً وكيف نبني جداول الصدق لها.

لاحظ أن وضع الأقواس يزيل الغموض واللبس الذي قد ينشأ عند حساب قيم الصدق للعبارات المركبة، فبوضع الأقواس تتحدد أولوية حساب قيم الصدق للعبارات، فتحسب ما بداخل الأقواس أولاً.

مثال (16)

أوجد جدول الحقيقة للعبارة المركبة التالية:

$$(P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow P)$$

الحل:

P	**q**	**P→q**	**q → P**	**(P→q) Λ (q→P)**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

هل لاحظت أن قيم الصواب لهذه العبارة مطابقة لقيم الصواب للعبارة $P \leftrightarrow q$ في الجدول (5).

مثال (17)

أوجد جدول الحقيقة للعبارات المركبة التالية:

1) $\sim (P \wedge q) \leftrightarrow (P \vee q)$

P	**q**	**PΛq**	**~ (PΛq)**	**PVq**	**~ (PΛq) ↔(P Vq)**
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F

2) $(P \wedge q) \rightarrow \sim P$

P	**q**	**(PΛq)**	**~ P**	**PΛq → ~P**
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

تدريب(6)

أوجد جدول الحقيقة للعبارة: **$\sim (P \wedge q) \vee P$**

مثال (18)

أوجد جدول الحقيقة للعبارة المركبة التالية: $(\sim P \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow q)$

P	**q**	**~ P**	**~ q**	**~P ↔ ~q**	**P↔q**	**(~p↔~q) ↔ (P↔q)**
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

هل لاحظت أن قيم الصواب لهذه العبارة هي دائماً صحيحة T بغض النظر عن صدق مكوناتها. مثل هذه العبارة تسمى تحصيل حاصل Tautology .

مثال (19)

أوجد جدول الحقيقة للعبارة التالية: $P \wedge \sim P$

الحل:

P	**~ P**	**P Λ ~ P**
T	F	F
F	T	F

هل لاحظت أن قيم الصواب لهذه العبارة هي دائماً خاطئة بغض النظر عن صدق مكوناتها. مثل هذه العبارة تسمى تناقضاً Contradiction.

تعريف:

العبارات المركبة التي تكون دائماً صحيحة، بغض النظر عن صدق العبارات التي تكونها تسمى تحصيل حاصل **Tautology**.

العبارات المركبة التي تكون دائماً خاطئة، بغض النظر عن قيمة صدق العبارات التي تكونها تسمى تناقض **Contradiction** .

مثال (20)

أوجد جدول الحقيقة للعبارة المركبة التالية والتي تحتوي على ثلاثة رموز، أو (ثلاث عبارات بسيطة P,q,r).
$(P \wedge q) \rightarrow r$

الحل:

P	**q**	**r**	**$P\wedge q$**	**$(P\wedge q) \rightarrow r$**
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

تدريب (7)

1- إذا كانت P,q,r عبارات. وكانت P صائبة، q خاطئة، r صائبة، فأوجد قيمة الحقيقة لكل من:

1- $(P \wedge q) \rightarrow \sim P$ 2- $(P \leftrightarrow q) \vee r$

3- أوجد جدول الحقيقة لكل من:

1- $(P \vee q) \rightarrow P$ 2- $\sim (P \wedge q) \vee P$ 3- $(P \rightarrow q) \leftrightarrow q$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1- أوجد جدول الحقيقة لكل من:

أ) $(P \rightarrow q) \vee P$

ب) $(P \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow P)$

جـ) $(P \vee q) \rightarrow (P \wedge q)$

2- هل $(P \rightarrow q) \vee (\sim P \rightarrow r)$ تحصيل حاصل؟

3- هل $\mathbf{(P \wedge q) \wedge (\sim P \vee \sim q)}$ تناقض؟

4. الشرط الكافي والشرط الضروري

كما سبق وذكرنا أن العبارة $P \rightarrow q$ يمكن أن تقرأ كما يلي:

P كافية لـ q P is sufficient for q .

q ضرورية لـ P q is necessary for P.

ومثال ذلك: أنظر للعبارة الشرطية التالية:

"إذا كان أحمد قد فتح الباب فإن أحمد قد استخدم المفتاح"

هي بالرموز $P \rightarrow q$ حيث:

P : أحمد فتح الباب q : أحمد استخدم المفتاح.

فإنه بإمكاننا القول:

فتح أحمد الباب هو كافٍ لأن يكون أحمد استخدم المفتاح.

أو: استخدام أحمد للمفتاح هو ضروري ليفتح أحمد الباب.

فعندما تكون الجملة الشرطية $\mathbf{P \rightarrow q}$ صحيحة فإن:

- صحة **q** شرط ضروري لصحة **P**.
- صحة P شرط كافي لصحة q.

P	**q**	**$P \rightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

أنظر إلى الجدول المجاور:

ستلاحظ أنه في الأسطر 1،3،4 كانت قيمة الصواب للعبارة $P \rightarrow q$ هي: T.

في السطر الأول كانت P صحيحة ، q صحيحة.

السطر الثالث كانت P خاطئة ، q صحيحة.

السطر الرابع كانت P خاطئة ، q خاطئة

في الحالة الوحيدة التي كانت فيها P صحيحة و $P \rightarrow q$ صحيحة كانت q صحيحة أيضاً (السطر الأول). **وهذا يعني أن q ضرورية لـ P** .

أنظر الجدول مرة أخرى ولاحظ متى تكون $P \rightarrow q$ صحيحة و P صحيحة، ستلاحظ أنه فقط في السطر الأول يتحقق ذلك.

أنظر إلى قيمة q ، ستلاحظ أنها صحيحة.

هذا يعني أن P كافية لـ q .

مثال (21)

أكتب العبارة المركبة التالية باستخدام شرط كاف، شرط ضروري:

"إذا كان هذا الحيوان فيل فإن له خرطوم".

الحل:

هذا الحيوان فيل شرط كافٍ لأن يكون له خرطوم.

أن يكون لهذا الحيوان خرطوم شرط ضروري لأن يكون فيلاً.

مثال (22)

إذا علمت ما يلي:

العبارة $P\rightarrow q$: "إذا درس الطالب فإنه سينجح" كانت صائبة.

P : "درس الطالب" كانت صائبة.

فما قيمة الصواب للعبارة q : "سينجح الطالب".

الحل:

بما أن صحة P شرط كافٍ لصحة q و $P\rightarrow q$ صائبة.

إذن ستكون q صائبة.

مثال (23)

إذا علمت ما يلي:

العبارة $P\rightarrow q$: " إذا درس الطالب فإنه سينجح" كانت صائبة.

q : " نجح الطالب" كانت صائبة.

فما قيمة الصواب للعبارة P : "درس الطالب".

الحل:

بما أن q هي شرط ضروري لـ P فإن P لا يمكن الحكم على قيمة صدقها.

لو نظرنا إلى الشرط الثنائي $\leftrightarrow$ بنفس المنظور فإننا سنرى:

إذا كانت $P\leftrightarrow q$ صواباً فإن:
صحة P شرط كاف وضروري لصحة q.
صحة q شرط كاف وضروري لصحة P.

مثال (24)

إذا علمت ما يلي:
$P\leftrightarrow q$: "يعد الشكل مثلثا إذا وفقط إذا كان له ثلاثة أضلاع" كانت صائبة.
P : "هذا الشكل مثلث" كانت صائبة.
بما أن P هو شرط كافٍ وضروري لـ q فإن q هي صائبة.

مثال (25)

إذا علمت أن العبارة التالية صائبة: "يعد الشخص أباً إذا وفقط إذا كان له أبناء."
وكانت العبارة q: "هذا الشخص له أبناء" صائبة أيضاً.
فما قيمة الصواب للعبارة P: "هذا الشخص أباً"

الحل:

العبارة الأولى على الصيغة $P\leftrightarrow q$ وهي صحيحة (من معطيات السؤال).
العبارة الثانية: q صحيحة من السؤال أيضاً.
بما أن صحة q شرط كافٍ وضروري لصحة P فإن P : "هذا الشخص أباً "هي صحيحة.

<u>والآن: لو نظرنا إلى أداة الربط و Λ بهذا المنظور:</u>

لو كانت $P\Lambda q$ عبارة صحيحة.
- صحة $P\Lambda q$ شرط كاف لصحة P.
صحة $P\Lambda q$ شرط كاف لصحة q.
- صحة P شرط ضروري لصحة $P\Lambda q$
صحة q شرط ضروري لصحة $P\Lambda q$.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

؟

إذا كانت قيمة الصواب للعبارة "إذا نجح الطالب حصل على جائزة" صحيحة. وكانت العبارة "نجح الطالب" صحيحة أيضاً.
فهل يمكن أن نستدل على قيمة الصواب لـ "حصل على جائزة" ؟

5. التكافؤ

أنظر إلى هاتين العبارتين:

P : تشرق الشمس من المشرق. q : عمان عاصمة الأردن.

هاتان العبارتان البسيطتان كل واحدة تتحدث عن موضوع وكل واحدة لها معنى خاص بها في اللغة، فالأولى تتحدث عن الشمس والثانية عن عمان.

ولكن لو نظرنا إليهما من الناحية المنطقية:

فأن P هي عبارة صائبة.

q هي عبارة صائبة.

وبما أن كلا العبارتين صائبة إذن P تكافئ q في قيمة الصواب.

> العبارات المركبة التي يكون لها قيم الصواب نفسها دائماً تسمى عبارات متكافئة منطقياً **Logically equivalent**.
>
> ويرمز لها بالرمز $\equiv$.

سنستخدم جداول الصدق لإثبات تكافئ العبارات. وفيما يلي بعض الأمثلة.

مثال (26)

أثبت تكافؤ العبارتين التاليتين، باستخدام جداول الصدق:

$$P \to q \quad , \quad \sim P \vee q$$

P	q	~ P	~ PVq
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

P	q	$P \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

هل لاحظت التطابق التام في العمود الأخير من الجدولين. إذن بالتأكيد العبارتان متكافئتان منطقياً فعندما كانت $P \to q$ صائبة كانت $\sim PV\ q$ صائبة أيضاً.
وعندما كانت $P \to q$ خاطئة كانت $\sim PVq$ خاطئة أيضاً.

مثال (27)

أثبت تكافؤ العبارتين التاليتين باستخدام جداول الصدق:

$$\sim (P \to q) \ , \ P \wedge \sim q$$

$\sim (P \to q)$

P	q	$P \to q$	$\sim (P \to q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

$P \wedge \sim q$

P	q	~ q	$P \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

نظرية:

العلاقة بين العبارات المعرفة بـ $P \equiv Q$ علاقة متكافئة أي أن:

1- لكل عبارة P، فإنها تكافئ نفسها أي $P \equiv P$.

2- إذا كان $P \equiv Q$ فإن $Q \equiv P$.

3- إذا كان $P \equiv Q$ و $Q \equiv R$ فإن $P \equiv R$

إن هذا النظرية واضحة وبديهية، ولكن التطبيقات التالية ستظهر أهميتها.

مثال (28)

في المثال السابق أثبتنا أن: $\sim (P \to q) \equiv P \wedge \sim q$

بالاعتماد على ذلك، أكتب نفي العبارة التالية بجملة واضحة.

"إذا كانت الطفلة نظيفة فإنها جميلة".

الحل:

لنفرض أن P: الطفلة نظيفة q: الطفلة جميلة

إذن العبارة المعطاة هي: $P \to q$.

من علاقة التكافؤ المعطاة سيكون النفي على الصورة $P \wedge \sim q$

"الطفلة نظيفة وليست جميلة" هي جملة النفي.

تدريب (8)

إنفِ العبارة الشرطية التالية: "إذا كان الجو بارداً فإنها ستمطر"

مثال (29)

أثبت تكافؤ العبارات التالية باستخدام جداول الصدق:

$\sim (P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q$ -1

P	**q**	**P Λ q**	**~ (P Λq)**
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

P	**q**	**~ P**	**~ q**	**~P V ~q**
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\sim (P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q$ -2

P	**q**	**P V q**	**~ (P Vq)**
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

P	q	~p	~q	~P Λ~q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

تسمى العلاقتان السابقتان بقانون دي مورغان في المنطق:

$\sim(P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q$ **$\sim(P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q$**

وفيما يلي جدولا يحتوي على بعض التكافؤات المنطقية الهامةالرمز T يرمز إلى أي عبارة صحيحة، F يرمز إلى أي عبارة خاطئة.

نظرية:

خواص الرابط المنطقي "أو" V	خواص الرابط المنطقي "و" Λ	
1. $P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$	
2. $(P \vee q) \vee r \equiv P \vee (q \vee r)$	$(P \wedge q) \wedge r \equiv P \wedge (q \wedge r)$	تسمى بالخاصية التجميعية
3. $P \vee q \equiv q \vee P$	$P \wedge q \equiv q \wedge P$	تسمى الخاصية التبديلية
4. $P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r)$	$P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$	تسمى الخاصية التوزيعية
5. $P \vee f \equiv P$	$P \wedge t \equiv P$	
6. $P \vee t \equiv t$	$P \wedge f \equiv f$	
7. $P \vee \sim P \equiv t$	$P \wedge \sim P \equiv f$	
8. $\sim(P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q$	$\sim(P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q$	قانوني دي مورغان في المنطق

من هذا الجدول تستطيع معرفة خواص الرابط Λ ، والرابط V. فهو يوضح العبارة وما يكافؤها.

بإمكانك عزيزي الدارس التأكد من صحة أي عبارتين متكافئتين بأن تستخدم جدول الصدق - كما تعلمت.

مثال (30)

باستخدام جداول الصدق أثبت أن الخاصية التجميعية صحيحة أي أثبت صحة تكافؤ $(P \vee q) \vee r \equiv P \vee (q \vee r)$.

P	**q**	**r**	**PVq**	**(PVq) Vr**
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

P	**q**	**r**	**qVr**	**PV (qVr)**
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	F

.

تدريب (9)

باستخدام جداول الصدق أثبت أن:

1- $P \equiv \sim(\sim P)$ (أي أن نفي النفي إثبات).

2- $P \leftrightarrow \sim q \equiv \sim P \leftrightarrow q$

3- $\mathbf{P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)}$ (إثبات الخاصية التوزيعية).

أسئلة التقويم الذاتي (4)

1- من معرفتك لخواص الروابط المنطقية انفِ العبارات التالية:

أ) السماء غائمة والجو بارد.

ب) السماء غائمة أو الجو بارد.

2- باستخدام جداول الصواب أثبت ما يلي:

أ) $P \leftrightarrow q \equiv (P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow P)$

ب) $P \rightarrow (q \rightarrow r)$ لا تكافئ $(P \rightarrow q) \rightarrow r$

جـ) $\mathbf{P \rightarrow (q \wedge r) \equiv (P \rightarrow q) \wedge (P \rightarrow r)}$.

الخلاصة

عزيزي الدارس...

في نهاية هذه الوحدة دعنا نستعرض أهم ما ورد فيها من مفاهيم:

- التفكير نوعان: استدلالي وعشوائي.
- المنطق: هو علم الاستدلال الصحيح، وهو تحليل طرق التفكير والاستنتاج.
- يستند المنطق الرمزي إلى استخدام الرموز وإلى قواعد تأليف تلك الرموز.
- المنطق الرياضي، هو منطق يستخدم الطرق والمفاهيم الرياضية البحتة في تحليل العبارات والعمليات الاستدلالية من جهة، ويحاول تأسيس الرياضيات على مفاهيم منطقية من جهة أخرى.
- العبارة: هي جملة خبرية محددة إما أن تكون صائبة وإما أن تكون خاطئة، ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.
- العبارات إما بسيطة لا يمكن تحليلها، أو مركبة يمكن تحليلها إلى عبارات أبسط.
- تستخدم الرموز للدلالة على العبارات.
- يمكن تحويل الجمل العادية إلى عبارات رمزية وبالعكس.
- معاني الروابط المنطقية، ونفسرها باختصار كما يلي:

إذا كانت P,q هما عبارتان فإن:

P	**q**	**~ P**	**P$\wedge$q**	**PVq**	**P $\rightarrow$q**	**P $\leftrightarrow$q**
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

- لإيجاد قيم الصواب للعبارات المركبة نوجد جداول الصدق.
- العبارة المركبة التي تسمى تحصيل حاصل هي العبارة التي تكون دائماً صحيحة؛ بغض النظر عن صدق مكوناتها.
- العبارة المركبة تسمى تناقضا عندما تكون دائماً خاطئة؛ بغض النظر عن صدق مكوناتها.
- $P \rightarrow q$ يعتبر P شرطاً كافياً لـ q ، q شرطاً ضروري لـP.
- التكافؤ المادي يختلف عن التكافئ المنطقي.
- عندما يكون لعبارتين قيم الصواب نفسها فنقول عنهما أنهما متكافئتان منطقياً، وتستخدم جداول الصدق في إثبات التكافؤ.

أرجو أن تساهم هذه الخلاصة في مساعدتك على استذكار ما ورد في هذه الوحدة.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عزيزي الدارس،

في الوحدة التالية سنتناول موضوع المجموعات، نبدأ بتعريفها وخواصها، ثم ننتقل لأهم العمليات على المجموعات، ونركز على الاتحاد والتقاطع والفرق بين مجموعتين وكذلك المتتمة. وتحتوي الوحدة على العديد من الرسوم البيانية التي توضح ما ورد فيها من مفاهيم.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

1. ليست عبارة (لا يمكن الحكم على صدقها).
2. ليست عبارة (جملة تعجب).
3. عبارة وهي صائبة.

تدريب (2)

1. عبارة علاقية
2. عبارة عضوية
3. عبارة علاقية
4. عبارة حملية
5. عبارة عضوية
6. عبارة حملية

تدريب (3)

1. عبارة مركبة
2. عبارة بسيطة
3. عبارة مركبة
5. عبارة مركبة

تدريب (4)

1. محمد يلعب الرياضية وجسمه سليم.
2. محمد لا يلعب الرياضة أو جسمه ليس سليماً.
3. إذا كان محمد يلعب الرياضية فإن جسمه ليس سليماً.
4. ليس حقيقياً أن محمد جسمه ليس سليماً.

تدريب (5)

1. عبارة صحيحة (مقدمة خاطئة ونتيجة خاطئة)
2. عبارة صحيحة (مقدمة صحيحة ونتيجة صحيحة)
3. عبارة صحيحة (مقدمة خاطئة ونتيجة صحيحة)
4. عبارة خاطئة (مقدمة صحيحة ونتيجة خاطئة)

تدريب (6)

P	q	$P\wedge q$	$\sim(P\wedge q)$	$\sim(P\wedge q)\vee P$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

تدريب (7)

1) 1. صحيحة.
2. صحيحة

.1 (2

P	q	PVq	(PVq)→ P
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	T

P	q	PΛq	~ (PΛq)	~ (PΛq)V P
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

P	q	P → q	(P → q) ↔q
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

تدريب (8)

"الجو بارد وهي لن تمطر".

تدريب (9)

P	~ P	~ ~P
T	F	T
F	T	F

1- بالنظر إلى العمود الأول والثالث نجد أنهما متطابقان وهذا يثبت التكافؤ $P \equiv \sim\sim P$

-2

P	q	~ q	P ↔~q
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

P	**q**	**~ P**	**~ P↔q**
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

-3

P	**q**	**r**	**(qVr)**	**PΛ (qVr)**
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

P	**q**	**r**	**(PΛq)**	**(PΛr)**	**(PΛq) V (PΛr)**
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

.

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة (1)

1. $P \wedge \sim q$
2. $q \rightarrow P$
3. $\sim q$
4. $q \leftrightarrow P$

أسئلة (2)

أ)

P	**q**	**P→q**	**(P →q) VP**
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

ب)

P	**q**	**P→q**	**q → P**	**(P→q) → (q→P)**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

جـ)

P	q	PVq	PΛq	(PVq) → (PΛq)
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

-2

P	q	v.	(P→q)	~P	(~P→r)	(P→q) V (~P→r)
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

إذن هي تحصيل حاصل.

P	q	PΛq	~ P	~ q	~ P V ~ q	(PΛq) Λ (~P V ~q)
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F

إذن هي تتناقض.

أسئلة (3)

-1 P → q صحيحة.

P صحيحة

نعم يمكن أن نستدل على أن q صحيحة فـ P شرط كافٍ لـ q .

أسئلة (4)

أ) أ . العبارة المعطاة هي على الصورة $P \wedge q$ ومن قانون دي مورغان

$\sim(P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q$ فإن نفيها سيكون: "السماء ليست غائمة أو الجو ليس بارداً".

ب. العبارة المعطاة هي على الصور $P \vee q$ ومن قانون دي مورغان

$\sim(P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q$ فإن نفي العبارة سيكون :"السماء ليست غائمة والجو ليس بارداً.

2- أ.

P	**q**	**$P \leftrightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	**q**	**$P \to q$**	**$q \to P$**	**$(P \to q) \wedge (q \to P)$**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ب.

P	**q**	**r**	**$P \to q$**	**$(P \to q) \to r$**
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

P	**q**	**r**	**$(q \to r)$**	**$P \to (q \to r)$**
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

لاحظ العمود الأخير في كل جدول من الجدولين مختلف عن الآخر وهذا يعني أنهما غير متكافئتين منطقياً.

-4

P	**q**	**r**	**$q \wedge r$**	**$P \rightarrow (q \wedge r)$**
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

P	**q**	**r**	**$(P \rightarrow q)$**	**$(P \rightarrow r)$**	**$(P \rightarrow q) \wedge (P \rightarrow r)$**
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

مسرد المصطلحات

- التفكير الاستدلالي (Reasoning thinking):

وهو تفكير يكون له هدف معين.

- التفكير العشوائي (Random thinking):

وهو التفكير الذي لا يرمي إلى تحقيق هدف مقصود.

- المنطق (Logic):

هو علم الاستدلال الصحيح، وهو تحليل طرق التفكير والاستنتاج.

- المنطق الرياضي (Mathematical Logic):

مشتق من اللفظ اليوناني 'Logistich'e techne' أي فن الحساب. وهو علم يستخدم الطرق والمفاهيم الرياضية البحتة في تحليل العبارات والعمليات الاستدلالية من جهة، ويحاول تأسيس الرياضيات على مفاهيم منظمة من جهة أخرى.

- القضية / العبارة (Proposition / Statement):

هي جملة خبرية محددة، إما أن تكون صائبة أو خاطئة، ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.

- قيمة الحقيقة (Truth value) :

هي كون العبارة صحيحة أو خاطئة (T, F).

- العبارة البسيطة (Simple Proposition):

هي قضايا تحمل خبراً واحداً، ولا يمكن تقسيمها إلى قضايا بسيطة.

- العبارة الحملية (Predicative Proposition):

هي القضايا التي تعبر عن صفة تعود إلى شيء. وتتكون هذه القضايا من موضوع ومحمول.

- عبارة العضوية في فئة Class - member ship proposition:

هي القضايا التي تعبر عن أن شيء ما عضو في فئة وينتمي إليها.

- العبارة العلاقية (Relational Proposition):

هي العبارة التي تعبر عن علاقة بين شيئين أو أكثر.

- العبارة المركبة (Compound proposition):

هي العبارات التي يمكن تحليلها وتجزئتها إلى عبارات بسيطة.

- الروابط المنطقية Connectives:

أدوات تجمع عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة جديدة، ومن هذه الروابط:

- و (Conjunction)
- أو (disjunction)
- إذا كان فإن (conditional).

- إذا وفقط إذا (Biconditional).

- جداول الصدق (Truth table):

هي عبارة عن جداول يتم فيها دمج قيم الصواب لعبارتين أو أكثر باستخدام إحدى أدوات الربط أو بعضها.

- تحصيل حاصل (Tautology):

هي العبارات المركبة التي تكون دائماً صحيحة بغض النظر عن صدق مكوناتها.

- عبارة تناقض (Contradiction) :

هي العبارات التي تكون دائماً خاطئة بغض النظر عن قيمة صدق مكوناتها.

المراجع العربية والأجنبية

1- كريم متّى، **المنطق الرياضي**. بيروت: مؤسسة الرسالة، 1983، ص.ص 66-3.
2- عدنان جميل حسون، **أسس الرياضيات**. عمان: دار الفرقان، 1984، ص.ص 102-76.
3- سيمور ليبشتر، ترجمة عمار صلاح الدين حامد، **نظرية الفئة وموضوعات مرتبطة بها**. عمان: الدار الدولية للنشر والتوزيع، ص.ص 360-329.

1. Kenneth H. Rosen, **Discrete Mathematics and it's Applications**, NY: McGraw Hill Inc. 3rd, 1995. pp 1-21.
2. Larry J. Gerstein, **Introduction to Mathematical structures and Proofs**. Springer. PP 1-28.
3. Internet Site: http://plato.stanford.eud/entries/necessary-sufficient.