

التوبولوجي العام

General Topology

تأليفه

أ.د. أحمد عبد القادر رمضان د. طه مرسى العدوي

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة الملك سعود - فرع القصيم

ما هو التوبولوجي ؟

What is topology?

من المعلوم أن علاقة التطابق congruence لمثلثين في المستوى X تتم بواسطة بعض الدوال (التحويلات) مثل دالة الإزاحة ، دالة الانعكاس ، دالة الدوران وهذه الدوال تحافظ على المسافة وعلى قياس الزوايا وبالتالي فإن المسافة تعتبر لا متغير **Invariant** ولهذا فإن المسافة تسمى خاصية هندسية. الخواص الهندسية هي تلك الخواص التي لا تتغير تحت تأثير هذه الدوال ، وبمعنى آخر الخصائص الهندسية هي التي تظل ثابتة تحت تأثير الحركات المتماثلة (انسحاب ، دوران ، انعكاس).

علاقة التطابق هي علاقة تكافؤ على المجموعة X وتجزئ X إلى فصول تكافؤ (تطابق) وكل فصل تكافؤ هو مجموعة كل الأشكال الهندسية المتطابقة ويمكن القول أن الخواص الهندسية هي تلك الخواص المشتركة بين جميع عناصر فصل التكافؤ الواحد. بإدخال دوال متصلة وذات معكوسات متصلة في الهندسة فإن وظيفة هذه الدوال هي تجميع كل الأشكال الهندسية المتكافئة في فصل تكافؤ واحد، عملية التعرف على فصول التكافؤ واللامتغيرات هي ما يسمى بعلم التوبولوجي **Topology** الدوال المتصلة ذات المعكوسات المتصلة تعرف باسم الهوميومورفزم **Homeomorphism** ، والهوميومورفزم يحافظ على خاصية الجوار أي النقاط المتجاورة تظل متجاورة، والأشياء التي يمكن تحويل إحداها إلى الأخرى بالهوميومورفزم تعرف على أنها فصل تكافؤ توبولوجي **Topological equivalent class** واللامتغيرات ، الخواص الثابتة تحت تأثير الحركات المرنة (المط أو اللي) تسمى بالخواص التوبولوجية **Topological properties**. يُعرف التوبولوجي على أنه ذلك العلم الذي يهتم بدراسة الخواص التي لا تتغير تحت تأثير دالة الهوميومورفزم والمعنى اللغوي لكلمة توبولوجي هو علم دراسة المكان (الموضع) ولهذا نجد تطابق المعنى اللغوي والعلمي ويمكن القول أن التوبولوجي هو دراسة لعلاقات القرب **near relations** بين المجموعات والنقاط.

مقدمة الكتاب

الحمد لله القائل " قل هل يستوى الذين يعلمون والذين لا يعلمون " والصلاة والسلام على نبينا محمد القائل " من سلك طريقاً يلتمس فيه علماً سهل الله له طريقاً إلى الجنة ".

كلنا يعرف ما يعانيه طلابنا من مشقة في دراسة العلوم بلغه غير لغتهم ونحن إذ نضع هذا الكتاب باللغة العربية بين يدي طلابنا نهدف في المقام الأول إلى إثراء المكتبة العربية بكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم ونهدف في المقام الثاني إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً في التوبولوجي العام ، لكونه ضرورياً لطلاب كليات العلوم والتربية. انطلاقاً من ذلك تم وضع هذا الكتاب ليغطي مقرر التوبولوجي ، قدمنا فيه عرض متماسك وشامل للمفاهيم الأساسية ، وحاولنا تقديم أسهل الطرق وأقصرها في إثبات النظريات ، وتوجيهاً لهذا العمل وزيادة في التعمق في فهم المقرر اعتنينا بكثرة الأمثلة وتنويعها. قدمنا للقارئ في الفصل الأول المفاهيم الأساسية التي سيحتاجها والتي تمثل العمود الفقري للمادة العلمية لهذا الكتاب ويجد ذلك موظفاً في الفصل الثاني عند تقديم مفهوم الفضاءات التوبولوجية وأنواعها والمفاهيم الأساسية التي تمت دراستها بصورة تفصيلية لأهميتها القصوى، كما سيجد في الفصل الثالث دراسة لأهم طرق توليد التوبولوجيات التي يكون لها صفات معينة مثل أنظمة الجوار - الأساس - الأساس الجزئي بالإضافة إلى صنف معين من الفضاءات التوبولوجية التي تتمتع بقابلية العد الأولى أو الثانية وهذا يتعلق بقدرة المجموعات الكثيفة وبقدرة الأساس . وأخيراً طريقة بناء فضاء جزئي Subspace من الفضاء الكلي وسوف يجد القارئ أن هناك بعض الخواص التي تنقل بشكل آلي من الفضاء الكلي إلى أي فضاء جزئي منه وتسمى الخاصية الوراثية (hereditary property).

يتضمن الباب الرابع دراسة لمفهوم الدالة: المتصلة - المفتوحة - المغلقة والخواص التوبولوجية التي تتركز على البنية التوبولوجية للفضاء وبالتالي نكون قد حققنا الغاية المرجوة لدراسة علم التوبولوجي ألا وهي دراسة الخواص التوبولوجية Topological

property من ناحية ومعرفة متى تكون الفضاءات التوبولوجية متكافئة من ناحية أخرى . سيجد القارئ في الفصل الخامس تعميم لمفهوم دالة المسافة من الفضاءات الإقليدية إلى الفضاءات المترية Metric spaces، وبيناً أن كل فضاء مترى يكون فضاء توبولوجى وكذلك الشروط اللازمة لكي يكون الفضاء التوبولوجى فضاء مترى وبذلك نكون قد انتقلنا من التحليل الرياضي إلى التوبولوجى والعكس، ووجدنا أن دالة المسافة ليست هي المعيار الجوهرى لتحديد اتصال الدوال ورأينا أن الاتصال يعتمد على عائلة المجموعات الجزئية من الفضاء وبذلك أمكن تعميم الفضاءات المترية إلى فضاءات أخرى تشملها ألا وهى الفضاءات التوبولوجية. من اجل الحصول على نتائج اعمق في دراسة الفضاء التوبولوجى تم إضافة بعض الشروط التي تتعلق بإمكانية فصل نقطتين أو مجموعتين بواسطة مجموعات مفتوحة وهذا ما يسمى بمسلمات الانفصال Separation Axioms التي أوردناها في الفصل السادس. سيجد القارئ في الفصلين السابع والثامن نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية ألا وهى الفضاءات المحكمة (المتراصة) Compact spaces والفضاءات المترابطة Connected spaces التي تعمم بعض الصفات الهامة لمجموعات محدودة ومغلقة من مجموعة الأعداد الحقيقية. في الباب الأخير قدمنا مفهوم فضاء حاصل الضرب وفضاء القسمة وكذلك نبذة مختصرة عن التوبولوجى الجبرى ومتى تكون المفاهيم التي وردت في الفصول السابقة محققة في هذه الفضاءات.

أخيراً نأمل أن يكون هذا الكتاب سهل الفهم سلس الأسلوب واسهاماً متميزاً ويؤدي الغاية المرجوة من تأليفه وان كان هناك اوجه للخطأ والقصور فارجو التنبيه إلى مواضعها حتى نتمكن من تلافي ذلك في المستقبل إن شاء الله والله نسأل أن يوفقنا لما فيه الخير لبلادنا العربية والإسلامية ويجعل هذا العمل خالصاً لوجهة الكريم والله الموفق والمستعان.

المؤلفان : أ.د. احمد عبد القادر رمضان - د. طه مرسى العدوى

المحتويات

الصفحة

١		الباب الأول : مفاهيم أساسية
١		بند (١) : المجموعات والمجموعات الجزئية
٧		بند (٢) : العلاقات
١٣		بند (٣) : الدوال
٢٠		بند (٤) : الدوال وعلاقة التكافؤ
٢٣		الباب الثاني : الفضاءات التوبولوجية
٢٣		بند (١) : الفضاء التوبولوجي
٣٤		تمارين (١ . ٢)
٣٥		بند (٢) : بعض المفاهيم التوبولوجية
٤٩		تمارين (٢ . ٢)
٥١		بند (٣) : الأغلاق (اللساقة) للمجموعات
٦٢		تمارين (٣ . ٢)
٦٣		بند (٤) : النقاط الداخلية والخارجية والحدية
٧٨		تمارين (٤ . ٢)
٧٩		تمارين عامة على الباب الثاني
٨٣		الباب الثالث : طرق توليد التوبولوجي
٨٣		بند (١) : الجوار وأنظمة الجوار
٩٠		بند (٢) : الأساس والأساس الجزئي
١٠٥		بند (٣) : التوبولوجي النسبي والفضاءات الجزئية

١١٤	تعاريف عامة على الباب الثالث
١١٩	<u>الباب الرابع : الدوال المتصلة والتكافؤ التوبولوجي</u>
١١٩	بند (١) : الدوال المتصلة
١٣٠	بند (٢) : الدوال المفتوحة والدوال المغلقة
١٣٥	بند (٣) : التكافؤ (التشاكل) التوبولوجي
١٤٣	تعاريف عامة على الباب الرابع
١٤٥	<u>الباب الخامس : الفراغ المترى</u>
١٤٥	بند (١) : تعريفه وبعض الأمثلة التوضيحية
١٦٠	بند (٢) : المسافة بين مجموعتين
١٦٧	بند (٣) : المجموعات المفتوحة في الفضاء المترى
١٨١	بند (٤) : المجموعات المغلقة في الفضاء المترى
١٩٠	بند (٥) : المتتابعات في الفضاء المترى
١٩٥	تعاريف عامة على الباب الخامس
١٩٩	<u>الباب السادس : مسلمات الاتصال</u>
٢٣٢	تعاريف عامة على الباب السادس
٢٣٥	<u>الباب السابع : الفضاءات المحكمة (المتراصة)</u>
٢٣٥	بند (١) : الفضاءات المحكمة (المتراصة)
٢٤٢	بند (٢) : المجموعات المحكمة الجزئية
٢٤٧	بند (٣) : الأحكام ومسلمات الاتصال
٢٥١	بند (٤) : الأحكام والاتصال

٢٥٤	بند (٥) : بعض أنواع الأحكام
٢٦٢	تعاريف عامة على الباب السابع
٢٦٥	الباب الثامن : الترابط
٢٦٥	بند (١) : المجموعات المنفصلة
٢٦٩	بند (٢) : الفخاعات المترابطة والمجموعات المترابطة
٢٨٥	بند (٣) : الترابط المحلي
٢٩٠	بند (٤) : الترابط المساري
٢٩٣	بند (٥) : المسارات المتوافقة توبولوجياً
٢٩٥	تعاريف عامة على الباب الثامن
٢٩٧	الباب التاسع : فضاء الضرب - فضاء القسمة - الزمرة التوبولوجية
٢٩٧	بند (١) : فضاء حاصل الضرب
٣١٣	بند (٢) : فضاء القسمة
٣٢٣	بند (٣) : الزمرة التوبولوجية
٣٢٥	تعاريف عامة على الباب التاسع
٣٢٦	المراجع

الباب الأول

مفاهيم أساسية
(Basic concepts)

الباب الأول

مفاهيم أساسية (Basic concepts)

التوبولوجي (Topology) هو أحد فروع الرياضيات الحديثة حيث أن نظرية المجموعات (set theory) تلعب دوراً رئيسياً في هذا المقرر. في حقيقة الأمر فإن نظرية المجموعات تعتبر لغة (language) التوبولوجي. في هذا الباب نستعرض أهم المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والتي سوف تستخدم خلال دراسة هذا المقرر. ولمزيد من المعلومات عن نظرية المجموعات على القارئ الرجوع لبعض مراجع الكتاب.

بند (١) : المجموعات والمجموعات الجزئية : (Sets and Subsets)

تعريف (١.١.١) : (مفهوم كانتور للمجموعة)

المجموعة هي تجمع من الأشياء المعرفة تعريفاً تاماً . وهذه الأشياء قد تكون متجانسة أو غير متجانسة ، ونعني بكلمة معرفة أننا نستطيع لأي شيء مهما كان أن نحدد هل هو موجود في المجموعة أم لا.

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة (elements of the set)، ونرمز عادة للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة (Capital letters) مثل :

$$A, B, C, \dots; X, Y, \dots$$

ونرمز لعناصرها بحروف لاتينية صغيرة (Small letters) مثل :

$$a, b, c, \dots; x, y, \dots$$

نكتب $X = \{a, b, c, d\}$ لتعني أن المجموعة X تتكون من أربعة عناصر هي: a, b, c, d وتوضع عناصر المجموعة بين قوسين من النوع $\{ \}$. ونكتب $x \in X$ لتعني أن العنصر x ينتمي إلى المجموعة X (belongs to) كما أننا سنكتب $y \notin X$ لتعني أن العنصر y ليس أحد عناصر المجموعة X أو لا ينتمي إلى المجموعة X .

تعريف (١.١.٢): (المجموعات المنتهية وغير المنتهية - Finite and Infinite Sets) يقال إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا كانت تحتوى على عدد هائى من العناصر (عدد محدد من العناصر) ، ويقال إنها مجموعة غير منتهية إذا كانت تحتوى على عدد لا نهائى من العناصر. فيما يلى سوف نذكر الرموز الشائعة الاستخدام لبعض المجموعات والتي سوف تستخدم خلال هذا المقرر :

١ - مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) وهى :

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

٢ - مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) وهى ::

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

٣ - مجموعة الأعداد القياسية (Rational Numbers) وهى :

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z, b \in N \right\}$$

٤ - مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (Non-negative Numbers) وهى :

$$Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

٥ - مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) ويرمز لها بالرمز R .

٦ - مجموعة الأعداد المركبة (Complex Numbers) وهى:

$$C = \{x = a+ib : a, b \in R ; i = \sqrt{-1}\}$$

تعريف (١.١.٣): (المجموعة الخالية - The empty set)

المجموعة الخالية هى المجموعة التى لا تحتوى على أى عنصر. ويرمز لها بالرمز " ϕ "

وقد تكتب $\{ \}$.

تعريف (١.١.٤): (المجموعات الجزئية - Subsets)

يقال إن المجموعة A مجموعة جزئية (Subset) من المجموعة B إذا كان كل

عنصر من عناصر A ينتمي إلى المجموعة B ونكتب $A \subseteq B$ وتقرأ A مجموعة جزئية من المجموعة B ، وقد تكتب $B \supseteq A$ ويقال أن B تحتوى (Contains) المجموعة A (أو تتضمن المجموعة A). ونعبر عن ذلك رياضياً على

$$\text{النحو التالي : } (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$\text{وهذا يكافئ أن : } \forall x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

تعريف (١ . ١ . ٥) : (تساوى المجموعات - Equality of Sets)

يقال إن المجموعتان A, B متساويتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر وتكتب $A=B$. أى أن A تساوى B إذا كان كل عنصر منتمى إلى A ينتمى إلى B وكذلك كل عنصر منتمى إلى B ينتمى إلى A . ونعبر عن التساوى رياضياً على النحو التالي :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \& B \subseteq A)$$

الرمز $\Leftrightarrow$ يعنى " إذا وفقط إذا كان (if and only if) " وقد تكتب " iff " ، أى أن " $\Leftrightarrow$ " تعنى تكافؤ التقريرين .

تعريف (١ . ١ . ٦) :

يقال إن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (proper subset) من المجموعة B (وتكتب $A \subset B$) إذا كان: $A \subseteq B$, $A \neq B$. ونكتب $A \not\subset B$ لتعنى أن A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B .

$$\text{نلاحظ أن } N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

تعريف (١ . ١ . ٧) : (المجموعة الشاملة - Universal Set)

المجموعة الشاملة هي المجموعة غير الخالية والتي تحتوى على جميع المجموعات الجزئية في مسألة ما تحت الاعتبار . فمثلاً عند دراسة مجموعات من الأعداد الصحيحة فإنه يوجد مجموعة شاملة وهي في هذه الحالة المجموعة Z . نرمز للمجموعة الشاملة بالرمز U .

تعريف (٨ . ١ . ١) : (الاتحاد - Union)

اتحاد المجموعتان A, B يعرف على أنه المجموعة المكونة من جميع العناصر التي في المجموعة A أو في المجموعة B ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ أى أن

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

ونلاحظ أن : $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B$

تعريف (٩ . ١ . ١) : (التقاطع - Intersection)

تقاطع المجموعتان A, B هي المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A, B . ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتقرأ A تقاطع B ونعبر عن ذلك

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

ونلاحظ أن : $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B$

تعريف (١٠ . ١ . ١) : (الانفصال - The disjoint)

يقال أن المجموعتين A, B غير متقاطعتان (منفصلتان) إذا لم يوجد بينهما عناصر مشتركة. أى إذا تحقق أن $A \cap B = \phi$.

نظرية (١١ . ١ . ١) :

لأى ثلاث مجموعات A, B, C القوانين التالية صحيحة :

- (i) $A \cup \phi = A$; $A \cap \phi = \phi$ (ii) $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$
- (iii) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$ (iv) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
- (v) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- (vi) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (viii) $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$;
 $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$, $B_i \subseteq U$

حيث $\bigcap_i A_i = \{x \in U : x \in A_i \text{ for every } i \in I\}$

$\bigcup_i A_i = \{x \in U : x \in A_i \text{ for some } i \in I\}$

I تسمى مجموعة الدليل .

تعريف (١.١.١٢) :

(The difference between two sets - الفرق بين مجموعتين)

إذا كانت المجموعتان A, B جزئيتين من المجموعة الشاملة U . فإننا نعرف

الفرق (The difference)، ويرمز له بالرمز $A - B$ على أنه المجموعة الجديدة :

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \text{ and } x \notin A\} \quad \text{وكذلك نعرف}$$

ملاحظة :

يلاحظ أنه على وجه العموم $A - B \neq B - A$

تعريف (١.١.١٣) : (مكملة مجموعة - Complement of a set)

نفرض أن U هي المجموعة الشاملة، ونفرض $A \subseteq U$. مكملة المجموعة A بالنسبة إلى المجموعة الشاملة U هي المجموعة التي عناصرها هي جميع عناصر المجموعة الشاملة U ما عدا العناصر المنتمية للمجموعة A . ويرمز لها بالرمز A^c ونعبر عنها رياضياً كما يلي :

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = U - A$$

نظرية (١.١.١٤) :

لأي مجموعتين A, B من المجموعة الشاملة U الآتي صحيح :

$$(i) \phi^c = U \quad (ii) U^c = \phi \quad (iii) (A^c)^c = A$$

$$(iv) A \cap A^c = \phi ; A \cup A^c = U$$

$$(v) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c ; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(vi) A - B = A \cap B^c$$

$$(vi) U - \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_i (U - B_i) ; \quad U - \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_i (U - B_i)$$

ويجب أن نلاحظ أنه إذا كانت $I = \emptyset$ فإن :

$$\bigcap A_i = U , \bigcup A_i = \emptyset , A_i \subseteq U$$

القانونان في (٧) يسميان قانوني ديمورجان (De Morgan's laws) .

تعريف (١.١.١٥) : (مجموعة القوة - The power set)

إذا كانت X مجموعة ، فإن مجموعة القوة للمجموعة X هي المجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X ونرمز لها بالرمز $P(X)$.

$$P(X) = \{ A : A \subseteq X \} \quad \text{أى أن :}$$

تعريف (١.١.١٦) : (الفترات - Intervals)

نفرض I مجموعة جزئية من R . يقال أن I فترة من خط الأعداد الحقيقية R إذا كان لكل $x, y \in I$ ، $x < z < y$ فإن $z \in I$.

لأى $a, b \in R$ نعرف المجموعات التالية :

$$(i) (a, b) = \{ x \in R : a < x < b \}$$

تسمى فترة مفتوحة (open interval)

$$(ii) [a, b] = \{ x \in R : a \leq x \leq b \}$$

تسمى فترة مغلقة (closed interval)

$$(iii) (a, b] = \{ x \in R : a < x \leq b \}$$

$$(iv) [a, b) = \{ x \in R : a \leq x < b \}$$

تسمى نصف مفتوحة (half open) أو نصف مغلقة (half closed) .

خط الأعداد الحقيقية هو الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$.

نكتب $x > a$ لتعني $x \in (a, \infty)$ ونكتب $x \geq a$ لتعني $x \in [a, \infty)$.
كما نكتب $x < b$ لتعني $x \in (-\infty, b)$ ونكتب $x \leq b$ لتعني $x \in (-\infty, b]$.

بند (٢) : العلاقات : Relations

تعريف (١ . ٢ . ١) : حاصل الضرب الكارتيزي (Cartesian Product)

حاصل الضرب الكارتيزي (أو الديكارتى) للمجموعتين A, B "يرمز له بالرمز $A \times B$ " يعرف على أنه مجموعة جميع الأزواج المرتبة (a, b) حيث أن $a \in A, b \in B$. أى أن $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

بالمثل يمكن تعريف حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$

بالصورة : $\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i\}$

أيضا $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i \in A_i\}$

نظرية (٢ . ٢ . ١) :

إذا كانت X هي المجموعة الشاملة ، $A, B, C \subseteq X$ فإن

$$(1) A \times \phi = \phi \times A = \phi$$

$$(2) A \times B \neq B \times A \quad (A \neq \phi, B \neq \phi \text{ حيث})$$

$$(3) A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

$$(4) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(5) (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

$$\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \subseteq X$$

في الحالة الخاصة عندما $A = B$ فإنه يمكن تعريف حاصل الضرب الديكارتى

للمجموعة A في نفسها بالصورة :

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) : a, b \in A\}$$

تعريف (٢ . ٢ . ١) :

نفرض المجموعتان A, B ، إذا كانت $\delta \subseteq A \times B$ فإن δ تسمى علاقة ثنائية (Binary Relation) من A إلى B ، ونكتب $(a, b) \in \delta$ أو $a \delta b$ لتعني أن العنصر a مرتبط بالعنصر b تحت تأثير العلاقة δ . كما نكتب $(a, b) \notin \delta$ لتعني أن العنصر a غير مرتبط مع العنصر b وفق العلاقة δ .

في الحالة الخاصة ، إذا كانت $\delta \subseteq A \times A$ فإننا نقول أن δ علاقة ثنائية على المجموعة A .

إذا كانت δ علاقة ثنائية على المجموعة A فإن :

$$\delta^{-1} = \{(b, a) \in A^2 : (a, b) \in \delta\}$$

تسمى بالعلاقة العكسية للعلاقة δ .

المجموعة $\Delta = \{(a, a) : a \in A\}$ تسمى قطر المجموعة A^2 .

تعريف (٣ . ٢ . ١) :

نفرض δ علاقة ثنائية على المجموعة A فإن :

(١) يقال أن العلاقة δ عاكسة (Reflexive) إذا كان $(x, x) \in \delta$ لكل $x \in A$ ، وبصورة أخرى إذا كانت $\Delta \subseteq \delta$.

(٢) يقال أن العلاقة δ متماثلة (Symmetric) إذا كان $(x, y) \in \delta$ فإن $(y, x) \in \delta$ ، وبصورة أخرى إذا كانت $\delta = \delta^{-1}$.

(٣) يقال أن العلاقة δ متعدية (transitive) (ناقلة) إذا كان $(x, y) \in \delta$ ، $(y, z) \in \delta$ فإن $(x, z) \in \delta$ لكل $x, y, z \in A$.

(٤) يقال أن العلاقة متخالفة (antisymmetric) إذا كان $(x, y) \in \delta$ ، $(y, x) \in \delta$ فإن $x = y$ ، وبصورة أخرى إذا كانت $\delta \cap \delta^{-1} \subseteq \Delta$.

تعريف (١ . ٢ . ٤) :

العلاقة δ تسمى علاقة تكافؤ (equivalent relation) إذا كانت عاكسة ومتماثلة ومتعدية. في هذه الحالة إذا كانت $x \delta y$ نقول أن العنصر x يكافئ العنصر y ونكتب $x \approx y$ بدلا من $x \delta y$.

فصل التكافؤ الممثل بالعنصر a هو مجموعة كل العناصر المكافئة للعنصر $a \in A$ (مجموعة العناصر من A المرتبطة بالعنصر a وفق علاقة التكافؤ δ)

ويرمز له بالرمز $[a]$ أى أن : $[a] = \{x \in A : x \delta a\}$

تسمى مجموعة فصول التكافؤ بمجموعة القسمة (quotient set) ويرمز لها بالرمز

$$A/\delta = \{[a] : a \in A\} \quad : \text{أى أن}$$

نظرية (١ . ٢ . ٥) :

إذا كانت δ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن :

$$(1) a \in [a], \forall a \in A$$

$$(2) a \delta b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$(3) a \delta b \Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset, \quad (a \neq b \text{ حيث})$$

نظرية (١ . ٢ . ٦) :

مجموعة فصول التكافؤ A/δ لعلاقة التكافؤ δ المعرفة على المجموعة A تشكل تجزئاً للمجموعة A . أى أن فصول التكافؤ غير متقاطعة مثنى مثنى وأتحادها يساوى المجموعة A . ويجب أن نلاحظ أن عكس النظرية صحيح ، أى إذا كانت $P = \{P_i\}_{i \in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من A غير متقاطعة مثنى مثنى وأتحادها يساوى A فانها تعرف علاقة تكافؤ δ على A بالصورة :

$$a \delta b \Leftrightarrow \exists P_i \in P : a, b \in P_i$$

فصول تكافؤها تتطابق مع عناصر التجزئ أى مع عناصر العائلة P .

تعريف (٧ . ٢ . ١) :

تسمى العلاقة δ بعلاقة ترتيب جزئي (Partial order relation) على المجموعة A إذا كانت عاكسة ومتخالفة ومتعدية. في هذه الحالة نكتب $a \leq b$ بدلا من $a \delta b$ ونقول أن b أكبر من أو يساوي a أو b يلي a .
إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فنقول أن A مجموعة مرتبة جزئياً.

تعريف (٨ . ٢ . ١) :

تسمى المجموعة A مرتبة كلياً (totally order) إذا كانت المجموعة A مرتبة جزئياً وأي عنصرين فيها متقارنين (العنصرين a, b متقارنين إذا كان $a \leq b$ أو $a \geq b$) وفي هذه الحالة نكتب $(A, \leq)$ للدلالة على علاقة الترتيب الكلي.
مجموعة الأعداد الحقيقية مع علاقة الترتيب الطبيعية $\leq$ هي مجموعة مرتبة جزئياً وفيها أي عنصرين متقاربين ، كذلك علاقة الاحتواء " $\subseteq$ " المعرفة على $P(X)$ هي علاقة ترتيب جزئي وعلى هذا فإن $(R, \leq)$ مرتبة كلياً بينما $(P(X), \subseteq)$ مرتبة ترتيباً جزئياً.

تعريف (٩ . ٢ . ١) :

إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً فإننا نقول أن المجموعة A مرتبة تماماً أو مرتبة ترتيباً حسناً (well orderd set) إذا كانت أي مجموعة جزئية غير خالية من A تحتوي عنصر أصغر.

تعريف (١٠ . ٢ . ١) :

لتكن $(X, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، $S \subseteq X$

يقال إن العنصر $L \in X$ حد علوي (upper bound) للمجموعة S إذا تحقق :

$$x \leq L ; \forall x \in S$$

ويقال إن العنصر $\ell \in X$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة S إذا تحقق :

$$x \geq \ell ; \forall x \in S$$

تعريف (١١.٢.١) :

يقال للمجموعة $S \subseteq X$ أنها محدودة من أعلى (bounded from above) إذا كان لها حد علوى، ويقال أنها محدودة من أسفل (bounded from below) إذا كان لها حد سفلى. ويقال للمجموعة S أنها محدودة (bounded) إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

ملاحظة (١٢.٢.١) :

يلاحظ أنه إذا كان للمجموعة S حد علوى فإنه يوجد لها عدد لا نهائى من الحدود العلوية، وأصغر هذه الحدود يسمى أصغر حد علوى للمجموعة S ، وإذا كان للمجموعة S حد سفلى فإنه يوجد لها عدد لا نهائى من الحدود السفلية، وأكبر هذه الحدود يسمى أكبر حد سفلى للمجموعة S .

فيما يلى سوف نسرد التعريف الرياضى لأصغر حد علوى وأكبر حد سفلى.

تعريف (١٣.٢.١) :

يقال إن العنصر L_0 أصغر حد علوى (supremum) للمجموعة $S \subseteq X$ إذا تحقق :

- (i) L_0 حد علوى للمجموعة S .
- (ii) لا يوجد للمجموعة S حد علوى أصغر من L_0 . أى أنه إذا كان L حد علوى للمجموعة S فإن $L_0 \leq L$.

نرمز لأصغر حد علوى للمجموعة S بالرمز $L_0 = \sup S$.

أى أن $L_0 = \sup S$ إذا تحقق :

- (i) إذا كان $x \leq L_0$ ، لجميع قيم $x \in S$
- (ii) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $x \in S$ بحيث أن $x > L_0 + \varepsilon$

يقال إن العنصر ℓ_0 أكبر حد سفلى (infimum) للمجموعة $S \subseteq X$ إذا تحقق :

(i) ℓ_0 حد سفلى للمجموعة S .

(ii) لا يوجد للمجموعة S حد سفلى أكبر من ℓ_0 . أى أنه إذا كان ℓ حد سفلى للمجموعة S فإن $\ell_0 \geq \ell$.

نرمز لأكبر حد سفلى للمجموعة S بالرمز $\ell_0 = \inf S$.

أى أن $\ell_0 = \inf S$ إذا تحقق :

- (i) إذا كان $x \leq L_0$ ، لجميع قيم $x \in S$
- (ii) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $x \in S$ بحيث أن $x > L_0 + \varepsilon$

تعريف (١ . ٢ . ١٤) :

يقال إن M قيمة عظمى (maximum) للمجموعة $S \subseteq X$ (وتكتب $M = \max S$) إذا تحقق :

- (i) M حد علوى للمجموعة S (ii) $M \in S$.

ويقال أن m قيمة صغرى أو عنصر أصغر (minimum) للمجموعة $S \subseteq X$ (وتكتب $m = \min S$) إذا تحقق :

- (i) m حد سفلى للمجموعة S (ii) $m \in S$.

نظرية (١ . ٢ . ١٥) :

إذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) فإن القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة S هي أصغر حد علوى (أكبر حد سفلى) لهذه المجموعة.

البرهان :

لتكن M هي القيمة العظمى للمجموعة S . إذاً من التعريف M حد علوى وإذا كانت L حد علوى للمجموعة فإن $M \leq L$ وذلك لأن $M \in S$ وبالتالى يكون M هو أصغر حد علوى للمجموعة S .

بالمثل يمكن برهنة أن القيمة الصغرى للمجموعة S هي أكبر حد سفلى

للمجموعة S .

ملاحظة (١.٢.١٦) :

النظرية السابقة تنص على أنه إذا وجدت القيمة العظمى M والقيمة الصغرى m للمجموعة S فإن $M = \sup S$, $m = \inf S$.

بديهية زورن (١.٢.١٧) : (Zorn's Lemma)

إذا كانت A مجموعة غير خالية ومرتبة جزئياً وكانت المجموعات الجزئية من A والمرتبة كلياً محدودة من أعلى (أسفل) فإن المجموعة A تحتوى على عنصر أكبر (أصغر).

بند (٣) : الدوال : Functions

تعريف (١.٣.١) :

الدالة (أو الراسم) هي علاقة من المجموعة غير الخالية X إلى المجموعة غير الخالية Y بحيث أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر وحيد في Y . ونكتب $f: X \rightarrow Y$ لتعني أن f دالة من X إلى Y . كما نكتب $y = f(x)$ (أو $(x, y) \in f$) لتعني أن العنصر y الذى ينتمى إلى المجموعة Y هو صورة العنصر x الذى ينتمى إلى المجموعة X تحت تأثير الدالة أو الراسم f ، ويقال إن المتغير y دالة في المتغير x . x تسمى بالمتغير المستقل، y تسمى بالمتغير التابع. وعليه فإن f تكون دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y إذا حققت: لكل عنصر $x \in X$ بحيث $(x, y) \in f$ ، $(x, z) \in f$ ، فإن $y = z$.

المجموعة X تسمى نطاق تعريف الدالة f أو اختصاراً نطاق (domain) الدالة ويرمز لها بالرمز D_f ، والمجموعة Y تسمى بالنطاق المصاحب (co-domain) للدالة. عناصر المجموعة Y والمرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمى مدى (range) الدالة، ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $f(X)$ أو R_f ، أى أن :

$$R_f = \{ f(x) : \forall x \in X \}$$

وعلية فإن الدالة هي علاقة بين متغيرين متغير مستقل ومتغير تابع ، وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة المتغير الواحد (single variable function). والدوال ذات المتغير الواحد والتي نطاقها ونطاقها المصاحب مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R تسمى بالدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي الواحد.

وعليه إذا كانت $y = f(x)$ فإن نطاق الدالة f هو قيم x الحقيقية التي تجعل قيمة الدالة $f(x)$ حقيقية. أما مدى الدالة فهو القيم الحقيقية التي تأخذها الدالة $f(x)$. وإذا لم يذكر نطاق الدالة f فإننا نعتبر نطاقها هو أقصى مجموعة جزئية ممكنة من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي عناصرها x تجعل قيم الدالة $f(x)$ حقيقية.

تعريف (١.٣.٢) :

يقال إن المجموعة الجزئية A من مجموعة الأعداد الحقيقية R متماثلة حول نقطة الأصل إذا تحقق :

$$\forall x : x \in A \Rightarrow -x \in A$$

تعريف (١.٣.٣) :

يقال إن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة زوجية (even function) إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :

$$f(-x) = f(x) ; \forall x \in A$$

ونلاحظ أن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور الصادات.

يقال إن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة فردية (odd function) إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :

$$f(-x) = -f(x) ; \forall x \in A$$

وعليه فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الأصل.

تعريف (١.٣.٤) :

يقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تزايدية (increasing) إذا حققت :

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تناقصية (decreasing) إذا حققت:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تزايدية فعلا أو مطردة الزيادة

(monotonic increasing) إذا حققت:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تناقصية فعلا أو مطردة النقصان

(monotonic decreasing) إذا حققت :

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تعريف (١.٣.٥) :

يقال إن L حد علوى للدالة $f: A \rightarrow B$ إذا كان L حد علوى لمدى الدالة

$$R_f. \text{ أى أن } y \leq L ; \forall y \in R_f$$

ويقال إن ℓ حد سفلى للدالة f إذا كان ℓ حد سفلى لمدى الدالة R_f .

$$\text{أى أن } y \geq \ell ; \forall y \in R_f$$

إذا كان للدالة حد علوى فإننا نقول أن الدالة محدودة من أعلى ، وإذا كان للدالة

حد سفلى فإننا نقول أن الدالة محدودة من أسفل. الدالة f تكون محدودة إذا كانت

محدودة من أعلى ومن أسفل، أى أن الدالة f تكون محدودة إذا وجد L, ℓ بحيث

$$\text{أن : } \ell \leq y \leq L ; \forall y \in R_f$$

وعليه تكون الدالة f محدودة إذا وفقط إذا وجد M بحيث :

$$|f(x)| \leq M ; \forall x \in D_f$$

تعريف (١.٣.٦) :

يقال إن L_0 أصغر حد علوى للدالة $f: A \rightarrow B$ إذا كان L_0 أصغر حد

علوى لمدى الدالة. ويقال إن ℓ_0 أكبر حد سفلى للدالة f إذا كان ℓ_0 أكبر حد

سُفلى لمدى الدالة . ويمكن تعريف القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة بالمثل.

وعليه فإن: $L_0 = \sup f = \sup R_f$; $\ell_0 = \inf f = \inf R_f$;

$M = \max f = \max R_f$; $m = \min f = \min R_f$.

مثال (١ . ٣ . ٧) :

إذا كانت $h(x) = 7 - 3\sqrt{4-x^2}$ إدرس ما يلي:

(أ) هل الدالة محدودة أم لا؟

(ب) أوجد $\max h$, $\min h$, $\sup h$; $\inf h$ إن وجدت؟

الحل :

نطاق هذه الدالة هو $D_h = [-2, 2]$ ومداها هو $R_h = [1, 7]$ (برهن ذلك؟).

(أ) الدالة محدودة لأن مداها محدود من أعلى بالعدد 7، ومن أسفل بالعدد واحد.

(ب) حيث أن $1, 7 \in R_h$ إذاً

$$\sup h = \max h = 7 ; \inf h = \min h = 1$$

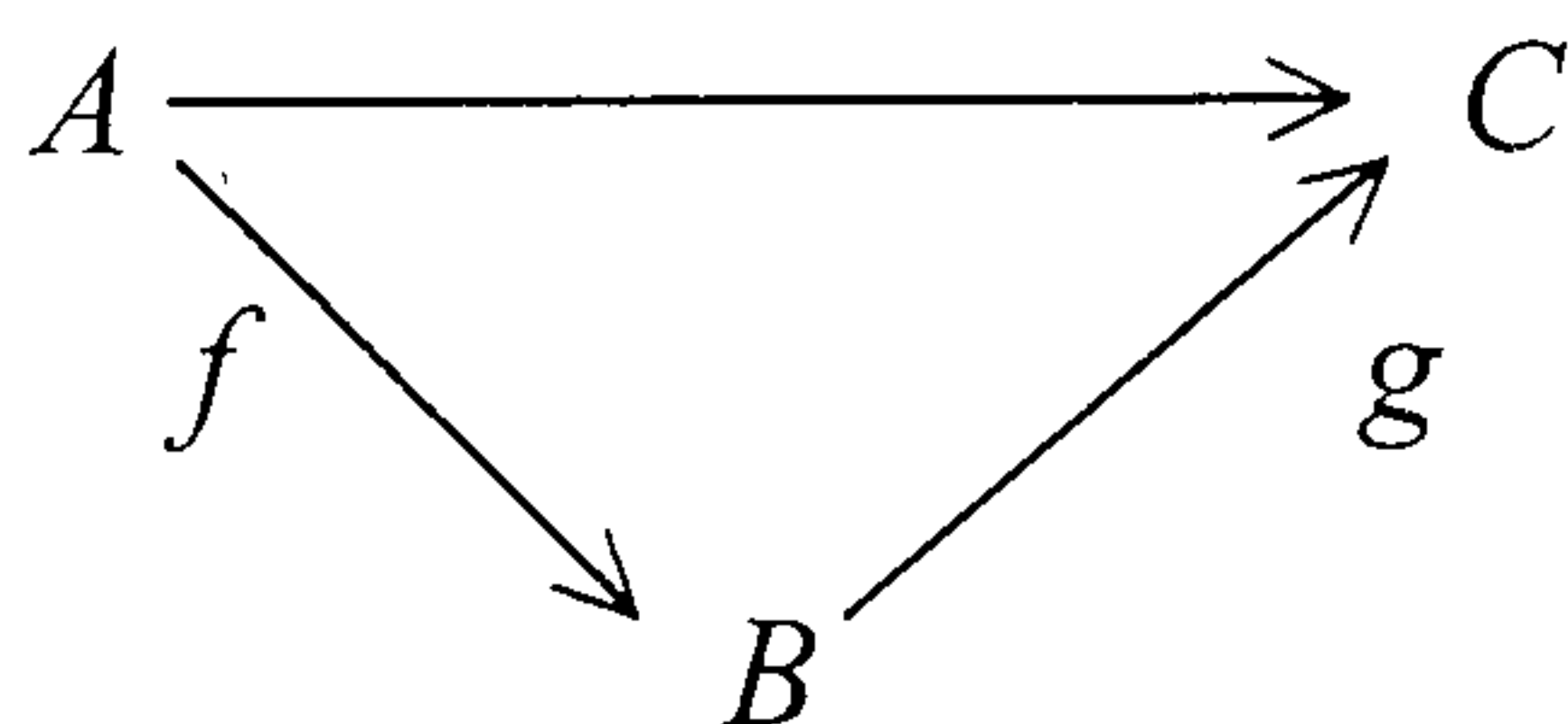
تعريف (١ . ٣ . ٨) :

نفرض الدالتين $f : A \rightarrow B$; $g : B \rightarrow C$. نعرف الدالة التركيبية من

الدالتين f , g والتي يرمز لها بالرمز $g \circ f$ على النحو التالي :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) ; \forall x \in A$$

في هذه الحالة يتضح أن نطاق الدالة التركيبية $g \circ f$ هو المجموعة A ونطاقها المصاحب هو C .



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$x \xrightarrow{gof} g(f(x))$$

وعلى وجه العموم إذا كان: $f: A \rightarrow B; g: C \rightarrow D$. فإن نطاق الدالة التركيبية gof يتكون فقط من العناصر $x \in A$ بحيث أن $f(x) \in C$ ، أى أن:

$$D_{gof} = \{x \in A: f(x) \in D_g\}$$

ونطاق الدالة fog يعطى من العلاقة:

$$D_{fog} = \{x \in C: g(x) \in D_f\}$$

ملاحظة (١.٣.٩):

إذا كان $R_f \subseteq D_g$ فإن نطاق الدالة gof هو نفسه نطاق f . أى أن $D_{gof} = D_f$. وإذا كان $R_g \subseteq D_f$ فإن نطاق الدالة fog هو نفسه نطاق g . أى أن $D_{fog} = D_g$.

تعريف (١.٣.١٠):

يقال إن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة أحادية أو واحد لواحد (one to one) أو injective (إذا تحقق):

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يكافئ منطقياً:

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

تعريف (١.٣.١١):

يقال إن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة فوقية أو غامرة (onto, surjective) إذا كان مداها يساوى النطاق المصاحب لها، أى إذا تحقق: $R_f = B$. وهذا يعنى أنه لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $f(x) = y$.

تعريف (١٢.٣.١) :

يقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تناظر أحادي (bijective) إذا كانت أحادية و غامرة.

أي أن تناظر أحادي $\Leftrightarrow$ أحادية + غامرة (أو فوقية)

$$bijective \Leftrightarrow injective + surjective$$

ملاحظات (١٣.٣.١) :

١ - على وجه العموم الدالة الزوجية لا تكون أحادية على نطاقها المتماثل.

٢ - إذا كانت الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة ترايدية فعلا (أو تناقصية فعلا) على

المجموعة A فإنها تكون أحادية.

تعريف (١٤.٣.١) :

يقال إن الدالتين $y = f(x)$, $y = g(x)$ كلاهما دالة عكسية للأخرى إذا

تحقق أن :

$$(f \circ g)(x) = x ; \forall x \in D_g \quad \&$$

$$(g \circ f)(x) = x ; \forall x \in D_f$$

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = f(x)$ بالرمز $y = f^{-1}(x)$.

من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كانت الدالة $f: A \rightarrow B$ تناظر أحادي فإن لها

دالة عكسية هي : $f^{-1}: B \rightarrow A$ ، $(f^{-1})^{-1} = f$ ،

ملاحظة (١٥.٣.١) :

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة تناظر أحادي ، فإن الدالة العكسية لها هي

$f^{-1}: B \rightarrow A$ تكون تناظر أحادي أيضا ويكون : $D_f = R_{f^{-1}}$ ،

$D_{f^{-1}} = R_f$. ونجد أن

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x ; \forall x \in A ;$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x ; \forall x \in B$$

نظرية (١٦.٣.١) :

نفرض الدالة $f: X \rightarrow Y$. إذا كان $A, B \subseteq X$ ، $C, D \subseteq Y$ فإن

$$(i) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(ii) \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$(iii) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$(iv) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$(v) \quad f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$$

$$(vi) \quad f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

$$(vii) \quad A \subseteq f^{-1}f(A) , \forall A \subseteq X$$

في العلاقات (ii)، (v)، (vii) يحدث التساوى إذا وفقط إذا كانت f أحادية .

$$(viii) \quad f f^{-1}(D) \subseteq D ; \forall D \subseteq Y$$

في العلاقة السابقة يحدث التساوى إذا وفقط إذا كانت f شاملة.

$$(ix) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D_i) ; D_i \subseteq Y$$

$$(x) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D_i) ; D_i \subseteq Y$$

$$(xi) \quad f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) ; A_i \subseteq X$$

$$(xii) \quad f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i) ; A_i \subseteq X$$

تعريف (١٧.٣.١) :

يقال للمجموعة S أنها قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو يوجد راسم

تناظر أحادى f من مجموعة الأعداد الطبيعية N إلى المجموعة S ، أى إذا أمكن

ترقيم (denumerable) عناصرها بواسطة N أو بصورة أخرى إذا أمكن كتابة S في صورة متتابعة لا نهائية من العناصر المختلفة $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.
 من أهم المجموعات القابلة للعد مجموعة الأعداد الطبيعية N ، ومجموعة الأعداد الصحيحة Z ، ومجموعة الأعداد القياسية Q . أما مجموعة الأعداد الحقيقية R فهي غير قابلة للعد. كذلك أى فترة مفتوحة أو مغلقة من مجموعة الأعداد الحقيقية R تكون غير قابلة للعد.

تعريف (١٨.٣.١):

يقال إن الدالة $f: G \rightarrow R$ متصلة (Continuous) عند النقطة a حيث

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad : \quad a \in R \subseteq R$$

وهذا يعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ويقال أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند جميع نقاط المجموعة G . وهذا التعريف يكافئ القول بأن :

$$x \in f(a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in f(f(a) - \delta, f(a) + \delta)$$

أى أنه إذا كان لكل فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) V تحوى $f(a)$ توجد فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) U تحوى a بحيث أن $f(U) \subseteq V$.

نظرية (١٩.٣.١):

الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

بند (٤): الدوال وعلاقة التكافؤ (Functions and Equivalence Relations)

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة، ρ علاقة معرفة على X بالصورة :

$$x \rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y) ; \forall x, y \in X$$

فإن

(١) العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على X تسمى علاقة تكافؤ ناتجة عن الدالة f

(Equivalence relation determined by f)

(٢) إذا كانت $x \in X$ فإن فصل التكافؤ هو $[x] = f^{-1}(f(x)) = \rho_x$

لأن $y \in [x] \Leftrightarrow y \rho x \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow y \in f^{-1}(f(x))$

مثال (١ . ٤ . ١) :

لتكن $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ، $X = \{1, 2, 4, 6\}$ ، $f: X \rightarrow Y$ معرفة

بالصورة : $f(n) = n! ; \forall n \in X$

إذا كانت ρ علاقة معرفة على X بالصورة :

$$x \rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y) ; \forall x, y \in X$$

فإن $\rho = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

واضح أن ρ علاقة تكافؤ فصول التكافؤ

$$[0] = \{0,1\} = f^{-1}f(0) ,$$

$$[2] = \{2\} = f^{-1}f(2) ,$$

$$[3] = \{3\} = f^{-1}f(3)$$

نظرية (١ . ٤ . ٢) :

إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على المجموعة X وكانت $f: X \rightarrow X/\rho$ حيث

$f(x) = [x] , \forall x \in X$ فإن f دالة شاملة. وإذا كانت σ علاقة تكافؤ على

X ، $f: X \rightarrow X/\sigma$ حيث $f(x) = \sigma_x$ لكل $x \in X$ فإن σ علاقة

تكافؤ على X ناتجة عن f .

البرهان :

حيث أن $D_f = X$ ، $R_f = X/\rho$. فإذا كانت $x = y$ فإن $[x] = [y]$

ومنها نجد أن $f(x) = f(y)$ وعليه فإن f دالة.

$$[x] \in X / \rho \Rightarrow x \in X \text{ \& } f(x) = [x]$$

أى أن f دالة شاملة.

كذلك إذا كانت σ علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f فإن

$$(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow \sigma_x = \sigma_y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

ومن ثم فإن $\sigma = \rho$.

تعريف (٣ . ٤ . ١) :

تسمى الدالة $\pi: X \rightarrow X / \rho$ حيث $\pi(x) = [x]$ ، $\forall x \in X$

بالدالة الطبيعية أو القانونية (Natural or Canonical function)

نظرية (٤ . ٤ . ١) :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة ، η علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f ، ρ

علاقة تكافؤ على X حيث $\rho \subseteq \eta$ فإن η / ρ علاقة تكافؤ على X / ρ ناتجة

عن الدالة $f / \rho: X / \rho \rightarrow Y$.

الباب الثاني

الفضاءات التوبولوجية
Topological Spaces

الباب الثاني

الفضاءات التوبولوجية

Topological Spaces

سنقدم في هذا الباب مفهوم الفضاء التوبولوجي ، ثم نتعرض لبعض أنواع الفضاءات التوبولوجية . ثم ندرس المفاهيم الأساسية المتعلقة بالفضاء التوبولوجي . ونسوق بعض الأمثلة التي توضح هذه المفاهيم . والجدير بالذكر أن كثيراً من المفاهيم التي نتعرض لها ما هي الا تعميماً لمفاهيم مشابهة في التحليل الحقيقي .

بند (١) : الفضاء التوبولوجي : (Topological Spaces)

نفرض أن X مجموعة غير خالية . ونفرض τ تجمع من المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط الآتية :

$$(01) X, \phi \in \tau$$

$$(02) \text{ If } A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$$

$$(03) \text{ If } A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$$

نلاحظ أن : الشرط الأول (01) يعنى أن τ تحتوى X, ϕ والشرط الثانى (02) يعنى أن تقاطع أى عنصرين من عناصر τ يعطى عنصراً في τ . أما الشرط الثالث (03) يعنى أن اتحاد أى عدد من عناصر τ يعطى عنصراً في τ .

تسمى τ توبولوجى (Topology) على X ويسمى الزوج المرتب (X, τ) فضاء توبولوجى وأختصاراً نقول أن X فضاء توبولوجى . ويسمى كل عنصر في τ مجموعة مفتوحة (open set) .

ملاحظة (٢-١-١) :

يتضح من التعريف أن :

$$(١) \tau \subseteq P(X) , \tau \in P(P(X))$$

$$(٢) U \Leftrightarrow U \in \tau \text{ مجموعة مفتوحة.}$$

ترمز $P(X)$ إلى مجموعة القوة للمجموعة X والتي تعرف على النحو التالي:

$$P(X) = \{U : U \subseteq X\}$$

(٣) الشرط الثاني يكافئ القول بأن تقاطع عدد منته من عناصر τ هو عنصر في τ .

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau \quad \text{أى أن}$$

مثال (٢-١-٢) :

لتكن $X = \{a, b\}$ فإن التجمعات التالية تشكل توبولوجى على X :

$$(i) \tau_1 = \{X, \phi\}$$

$$(ii) \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}\}$$

$$(iii) \tau_3 = \{X, \phi, \{b\}\}$$

$$(iv) \tau_4 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\} = P(X)$$

مثال (٣ . ١ . ٢) :

لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ بين أى من التجمعات التالية تشكل توبولوجى على

X :

$$(i) \tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$(ii) \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$$

$$(iii) \tau_3 = \{X, \phi, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$(iv) \tau_4 = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

الحل :

(i) واضح أن τ_1 لا تشكل توبولوجى على X لأن :

$$\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \notin \tau_1 \quad \text{ولكن } \{a, b\}, \{b, c\} \in \tau_1$$

أى أن τ_1 لا تحقق الشرط (03).

(ii) τ_2 تشكل توبولوجى على X لأن τ_2 تحقق الشروط من (03) $\rightarrow$ (01)

وبذلك يكون (X, τ_2) فضاء توبولوجى.

(iii) τ_3 لا تشكل توبولوجى على X لأن :

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \tau_3$ ولكن $\{a, b\}, \{a, c\} \in \tau_3$
 (iv) τ_4 تشكل توبولوجى على X لأن τ_4 تحقق جميع الشروط .
تعريف (٢ . ١ . ٤) :

حيث أن رتبة المجموعة هي عدد عناصرها فإن رتبة التوبولوجى المكون من عدد منته من العناصر هي عدد العناصر المكونه له.

ويلاحظ أنه في المثالين السابقين أن : في مثال (٢ . ١ . ٢) أن رتبة τ_1 هي 2 ورتبة τ_2 هي 3 ورتبة τ_4 هي 4 . وفي مثال (٣ . ١ . ٢) رتبة τ_4 هي 6 .
أمثلة هامة للفضاءات التوبولوجية :

(Important examples of topological spaces)

(١) الفضاء المنفصل (أو المتقطع) : (Discrete Space)

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، $\tau = P(X)$ هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X . من الواضح أن τ تشكل توبولوجى على X . يسمى هذا التوبولوجى بالتوبولوجى المنفصل وهو أوسع (أكبر أو أقوى) توبولوجى يعرف على X . ويسمى (X, τ) بالفضاء المنفصل ويرمز له بالرمز (X, D) .

ملاحظة :

يجب أن نلاحظ هنا أن الفضاء المنفصل (X, D) ينفرد بخاصية هامة جداً وهي تطابق مجموعاته المفتوحة مع مجموعاته الجزئية من X أى أن كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة.

(٢) الفضاء الغير منفصل (غير المتقطع) : (Indiscrete Space)

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، $\tau = \{X, \phi\}$. إذاً τ تشكل توبولوجى على X . يسمى هذا التوبولوجى بالغير منفصل وهو أصغر توبولوجى يعرف على X . ويسمى (X, τ) بالفضاء الغير منفصل ويرمز له بالرمز (X, I) .

ومن هذا يتضح أن X, ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان في τ .

(٣) فضاء المكملات المنتهية : (Cofinite Topology)

نفرض أن X مجموعة لا نهائية. ونفرض

$$\begin{aligned}\tau &= \{\phi, U \subseteq X : U^c \text{ finite}\} \\ &= \{\phi, U \subseteq X : |X - U| < \infty\}\end{aligned}$$

أى أن τ هى عائلة كل المجموعات الجزئية من X والتي مكملاتها تكون منتهية ، بالإضافة إلى المجموعة الخالية ϕ .

وفيما يلي نبرهن أن τ تمثل توبولوجى على X :

(01) $\phi \in \tau$ من التعريف ، وحيث أن $X^c = \phi$ وهى مجموعة منتهية إذاً $X \in \tau$ وعليه فإن $X, \phi \in \tau$.

(02) نفرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ والمطلوب إثبات أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ؟

حيث أن $U_1, U_2 \in \tau$ فإن U_1^c, U_2^c مجموعتان منتهيتان ومن ثم فإن $U_1^c \cup U_2^c$ مجموعة منتهية ولكن باستخدام ديمورجان نعلم أن $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ ، وبالتالي فإن $(U_1 \cap U_2)^c$ مجموعة منتهية وعلى هذا يتضح أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض أن $U_i \in \tau, \forall i=1,2,3,\dots$ ونحاول إثبات أن $\bigcup_i U_i \in \tau$

حيث أن $U_i \in \tau$ لكل i فإن U_i^c مجموعة منتهية ومن ثم فإن $\bigcap_i U_i^c$ مجموعة منتهية ولكن $(\bigcup_i U_i)^c = \bigcap_i U_i^c$ وبالتالي فإن $(\bigcup_i U_i)^c$ مجموعة منتهية وبناء على ذلك فإن $\bigcup_i U_i \in \tau$.

إذاً يمكن القول بأن τ تمثل توبولوجى على X يسمى هذا التوبولوجى توبولوجى

المكملات المنتهية ويسمى الزوج (X, τ) بفضاء المكملات المنتهية (Cofinite Topological Space) وسوف نرمز لهذا الفضاء بالرمز (X, C) .

(٤) فضاء المكملات القابلة للعد : (Complement Countable Space)

بفرض أن X مجموعة غير خالية ونفرض

$$\tau = \{ \phi, A \subseteq X : A^c \text{ is countable} \}$$

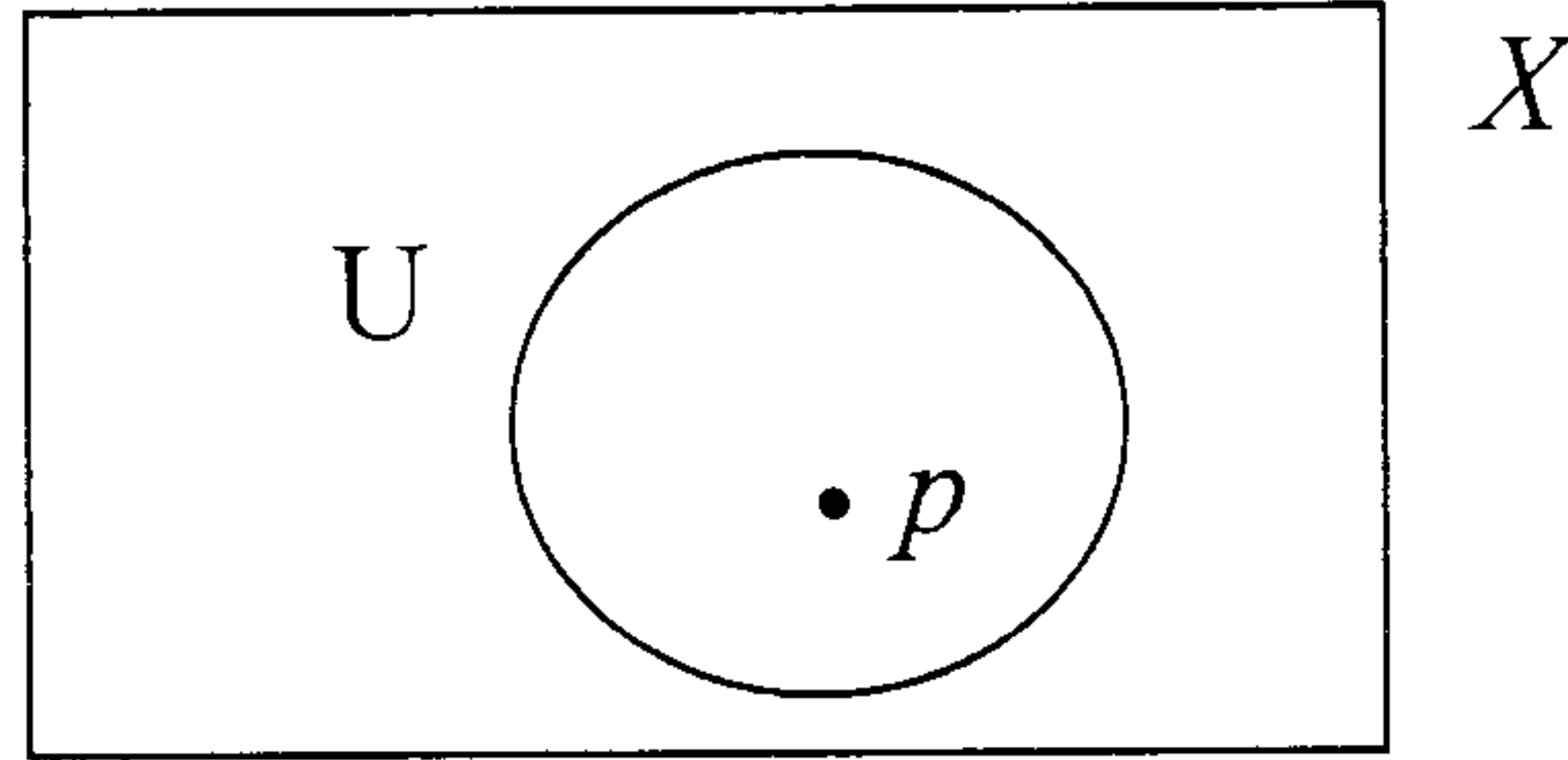
واضح أن τ تشكل توبولوجي على X .

(٥) فضاء توبولوجي النقطة المختارة : (Particular Point Topology)

بفرض أن X مجموعة غير خالية ، $p \in X$ وبفرض

$$P = \{ \phi, U \subseteq X : p \in U \}$$

سوف نبرهن أن P توبولوجي على X .



(01) $\phi \in P$ من التعريف وكذلك حيث أن $p \in X$ فإن $X \in P$ وبالتالي فإن

$$X, \phi \in P$$

(02) إذا كانت $U_1, U_2 \in P$ فإن $p \in U_1 \cap U_2$ وعلى ذلك يكون

$$U_1 \cap U_2 \in P$$

(03) إذا كانت $U_i \in P$ لكل i فإن $p \in U_i$ وعليه فإن $p \in \bigcup_i U_i$ أي أن

$$\bigcup_i U_i \in P$$

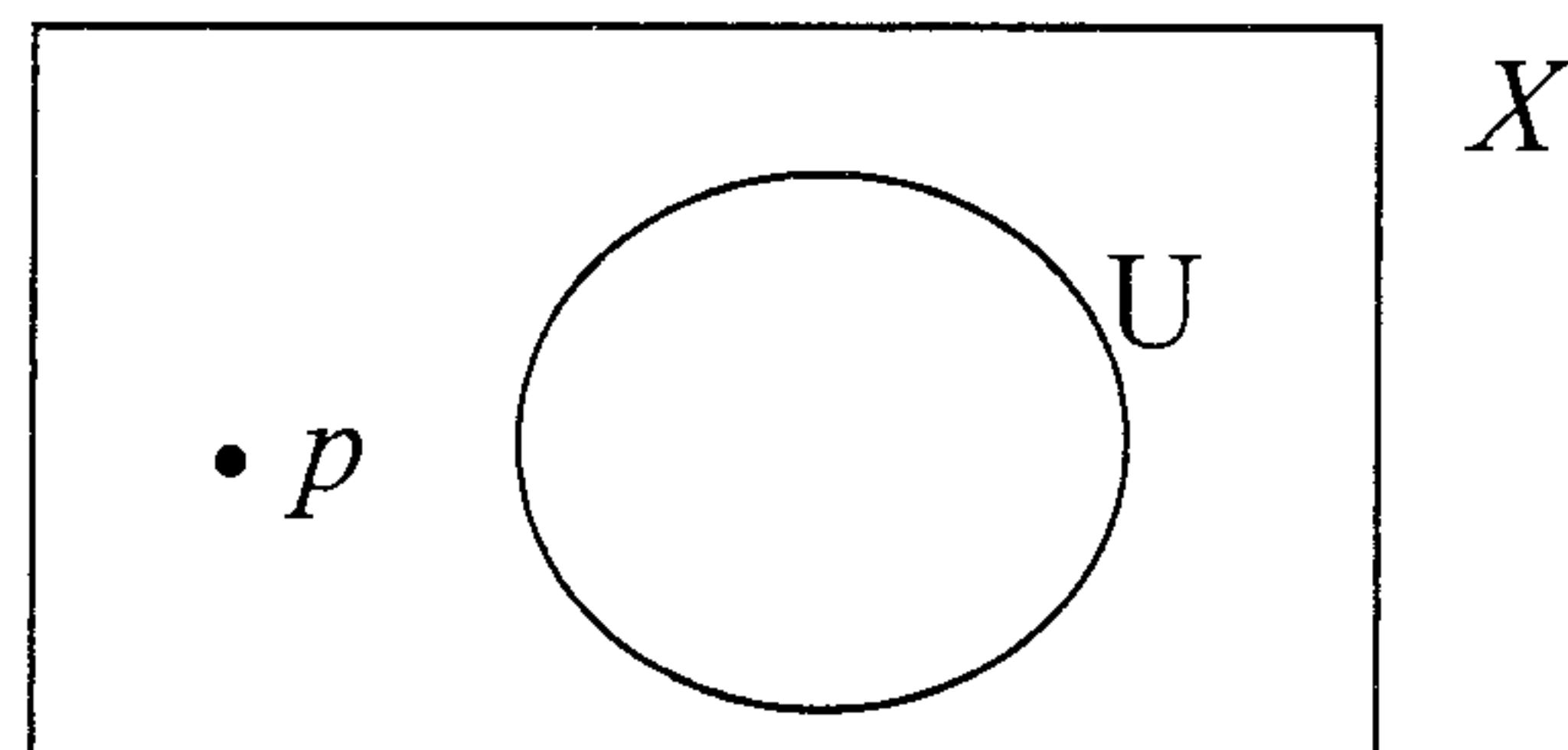
إذاً P توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة المختارة ويسمى الزوج

(Particular Point Topology) . (X, P) فضاء النقطة المختارة

(6) فضاء توبولوجي النقطة المستبعدة : (Excluding Point Topological Space)

بفرض أن X مجموعة غير خالية ، $p \in X$ ، وبفرض

$$E = \{X, U \subseteq X : p \notin U\}$$



من السهل إثبات أن E توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة المستبعدة ويسمى الزوج (X, E) فضاء النقطة المستبعدة.

(7) الفضاء التوبولوجي العادي (الطبيعي أو المعتاد أو الأقليدي) :

(Usual Topological Spaces)

بفرض أن $X = R$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، ونفرض

$$\tau = \{U \subseteq R : \forall x \in U \exists \delta > 0 \text{ such that } (x - \delta, x + \delta) \subseteq U\}$$

أي أن τ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية U من R التي تحقق أن لكل $x \in U$ توجد فترة مفتوحة $(x - \delta, x + \delta)$ بحيث أن $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$.

سوف نبرهن الآن أن τ تشكل توبولوجي على R .

(01) واضح أن $\phi \in U$ ، R

(02) بفرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ ، $x \in U_1 \cap U_2$ نحصل على $x \in U_1$ أو

$x \in U_2$. وعليه فإنه يوجد $\delta_1, \delta_2 > 0$ بحيث أن

$$(x - \delta_1, x + \delta_1) \subseteq U_1 \text{ و } (x - \delta_2, x + \delta_2) \subseteq U_2$$

باختيار $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ ومنها نجد أن

$$(x - \delta, x + \delta) \subseteq U_1 \text{ و } (x - \delta, x + \delta) \subseteq U_2$$

$$(x - \delta, x + \delta) \subseteq U_1 \cap U_2, \forall x \in U_1 \cap U_2 \quad \text{إذاً}$$

$$U_1 \cap U_2 \in \tau \text{ وعليه فإن}$$

$$(03) \text{ بفرض أن } \{U_i : i \in I\} \subseteq \tau, x \in \bigcup_i U_i.$$

إذاً يوجد U_{i_0} بحيث أن $x \in U_{i_0}$ ، ولكن $U_{i_0} \in \tau$ إذاً يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$U_{i_0} \subseteq \bigcup_i U_i \text{ وحيث أن } (x - \delta, x + \delta) \subseteq U_{i_0}$$

فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$(x - \delta, x + \delta) \subseteq \bigcup_i U_i, \forall x \in \bigcup_i U_i$$

$$\text{إذاً } \bigcup_i U_i \in \tau.$$

إذاً τ تمثل توبولوجى على R وهذا التوبولوجى يسمى التوبولوجى المعتاد (العادى أو الأقليدى) والزوج (R, τ) يسمى الفضاء العادى وسوف نرمز لهذا الفضاء بالرمز $(R, \mathcal{U})$. يمكن اعتبار $\mathcal{U}$ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من R المساوية لاتحاد فترات مفتوحة.

ملاحظات (٢ . ١ . ٥) :

- (١) كل فترة مفتوحة في R هي مجموعة مفتوحة.
- (٢) تقاطع فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة.
- (٣) اتحاد فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة ولكنه ليس بالضرورة أن تكون فترة مفتوحة فمثلا $U = (0,1) \cup (2,5)$ مجموعة مفتوحة ولكنها ليست فترة مفتوحة.

مثال (٢ . ١ . ٦) :

لتكن $X = N$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية . نفرض

$$\tau = \{ \phi, N, A_n = \{1, 2, \dots, n\} : n \in N \}$$

بين أن العائلة τ تشكل توبولوجي على X .

الحل :

$$(01) \text{ واضح أن } \phi, N \in \tau$$

$$(02) \text{ بفرض أن } A_i, A_j \in \tau \text{ حيث } i, j \in N, \text{ وعليه نحصل على}$$

$$A_i \cap A_j = A_k \in \tau \text{ حيث } k = \min\{i, j\}.$$

$$(03) \text{ بفرض أن } A_{n_i} \in \tau \text{ حيث } i \in N, \text{ وبالتالي فإن}$$

$$A_{n_i} = \{1, 2, \dots, n_i\} \text{ وعليه يكون } \cup A_{n_i} = \{1, 2, \dots, k\} \in \tau \text{ حيث}$$

$$k = \max\{n_i : i \in I\}$$

ملاحظات :

(١) إذا أخذت n القيم $\{1, 2, \dots, n\}$ فإننا نحصل على عدد لا نهائي من

التوبولوجيات المختلفة على X وهي $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots\}$ حيث

$$\tau_n = \{\phi, N, A_n = \{1, 2, \dots, n\} : n \in N\}$$

(٢) يمكن تعريف أكثر من توبولوجي على R يختلف عن التوبولوجي العادي.

تعريف (٢.١.٧) : (القرص المفتوح Open Disk)

القرص المفتوح D في المستوى R^2 هو مجموعة النقاط التي تقع داخل الدائرة التي

مركزها $P(x_0, y_0)$ ونصف قطرها $r > 0$. أي أن:

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

$$= \{q \in R^2 : d(p, q) < r\}$$

حيث $d(p, q)$ ترمز إلى المسافة بين نقطتين في المستوى أي أن :

$$d(p, q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \text{ حيث } q = (x, y)$$

تعريف (٨ . ١ . ٢) :

المجموعة $A \subseteq R^2$ تسمى مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت لكل $x \in A$ يوجد قرص مفتوح D بحيث أن $x \in D \subseteq A$.

تعريف (٩ . ١ . ٢) :

العائلة $\mathcal{U}$ المكونة من كل المجموعات المفتوحة على R^2 تشكل توبولوجي على R^2 ويسمى الزوج المرتب $(R^2, \mathcal{U})$ بالفضاء التوبولوجي العادي على المستوى.
البرهان :

تترك للقارئ كتمرين

المثال التالي يوضح أنه ليس من الضروري أن يكون اتحاد عدد من التوبولوجيات على مجموعة ما X يمثل توبولوجي.

مثال (١٠ . ١ . ٢) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c\}$ نعرف

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\}, \tau_2 = \{X, \phi, \{b\}\}$$

من الواضح أن كل من τ_1, τ_2 تمثل توبولوجي على X . ونجد أن

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$$

لا تمثل توبولوجي على X . حيث أن $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$

نظرية (١١ . ١ . ٢) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية. ونفرض τ_i عائلة توبولوجيه على X إذاً

$$\bigcap_i \tau_i \text{ تمثل توبولوجي على } X.$$

البرهان :

لإثبات أن $\bigcap_i \tau_i$ تمثل توبولوجي على X نجد أن

$$(01) \text{ حيث أن } \forall i ; X, \phi \in \tau_i \text{ إذا } X, \phi \in \bigcap_i \tau_i$$

$$(02) \text{ نفرض أن } A_1, A_2 \in \bigcap_i \tau_i \text{ إذا } \forall i, A_1, A_2 \in \tau_i \text{ وعليه يكون}$$

$$A_1 \cap A_2 \in \tau_i, \forall i \text{ إذا } A_1 \cap A_2 \in \bigcap_i \tau_i$$

$$(03) \text{ نفرض أن } A_1, A_2, \dots \in \bigcap_i \tau_i \text{ وبالتالي فإن } A_1, A_2, \dots \in \tau_i, \forall i$$

$$\text{وعليه يكون } A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \tau_i, \forall i \text{ إذا } A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \bigcap_i \tau_i$$

تعريف (١٢ . ١ . ٢) :

نفرض τ_1, τ_2 توبولوجيان على المجموعة غير الخالية X . يقال أن τ_1 أضعف Coarser (or Weaker) من τ_2 أو τ_2 أقوى (Stronger) من τ_1 إذا كان $\tau_1 \subset \tau_2$ أي أن $\forall A \in \tau_1 \Rightarrow A \in \tau_2$

ملاحظة :

إذا كان $\tau_1 \not\subset \tau_2$ أو $\tau_2 \not\subset \tau_1$ فإننا نقول أن هذه التوبولوجيات غير قابلة للمقارنة (incomparable).

مثال (١٣ . ١ . ٢) :

(١) التوبولوجي غير المتقطع (indiscrete) على المجموعة الغير خالية X والذي يعرف بالصورة $I = \{X, \phi\}$ ، هو مجموعة جزئية من أي توبولوجي آخر على X وعليه فهو أضعف توبولوجي (Coarsest Topology) على X .

وعلى الجانب الآخر التوبولوجي المتقطع (discrete topology) يحتوي على أي توبولوجي آخر من X . وعليه فهو أقوى توبولوجي (finest topology) على X .

(٢) نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ونفرض

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\}, \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\tau_3 = \{X, \phi, \{a, b\}\}, \tau_4 = I, \tau_5 = D$$

نلاحظ أن $\tau_1 \subset \tau_2$, $\tau_2 \not\subset \tau_1$, $\tau_1 \not\subset \tau_3$

وهذا يعنى أن τ_1 أضعف من τ_2 أو τ_2 أقوى من τ_1 .

بديهية (١٤ . ١ . ٢) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى فإن $A \in \tau$ إذا وفقط إذا كان لكل $x \in A$

توجد $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U \subseteq A$

البرهان :

أولاً : نفرض أن $A \in \tau$ وبوضع $U = A$ فإننا نحصل على $x \in U \subseteq A$.

ثانياً : بفرض أن لكل $x \in A$ توجد $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U \subseteq A$ وبالتالى

فإن $A = \bigcup_{x \in A} U$. أى أن $A \in \tau$ لأنها عبارة عن اتحاد لمجموعات مفتوحة.

والآن نرى كيف يمكن توليد توبولوجى بواسطة الدوال.

نظرية (١٥ . ١ . ٢) :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ داله معرفه من المجموعة X إلى المجموعة Y ، نفرض τ

توبولوجى على Y فإن

$$\tau^* = \{U \subseteq X : U = f^{-1}(V) \text{ and } V \in \tau\}$$

تمثل توبولوجى على X .

البرهان :

(01) بما أن $Y, \phi \in \tau$. إذاً $f^{-1}(\phi) = \phi$ & $f^{-1}(Y) = X$ وعليه يكون

$X, \phi \in \tau^*$.

(02) نفرض $U_1, U_2 \in \tau^*$. إذاً يوجد $V_1, V_2 \in \tau$ بحيث

$$U_1 = f^{-1}(V_1) \text{ \& } U_2 = f^{-1}(V_2) \text{ . ومنها نحصل على}$$

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

وحيث أن $V_1 \cap V_2 \in \tau$ إذاً $U_1 \cap U_2 \in \tau^*$.

(03) نفرض $\forall i=1,2,\dots U_i \in \tau^*$ إذاً يوجد $V_i \in \tau \forall i=1,2,\dots$
 بحيث أن $\forall i=1,2,\dots U_i = f^{-1}(V_i)$. إذاً

$$\bigcup_i U_i = \bigcup_i f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup_i V_i)$$

 ولكن $\bigcup_i V_i \in \tau$ ومنها $\bigcup_i U_i \in \tau^*$
 إذاً τ^* تمثل توبولوجى على X .

تمارين (٢ . ١)

- (١) أعط كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة $X = \{a, b, c\}$.
- (٢) هل العائلة : $\tau = \{\phi, N, E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n \in N\}$ تشكل توبولوجى على N .
- (٣) هل العائلة $\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$ تشكل توبولوجى على R ؟
 إذا كان الامر كذلك بين أن $\tau \subseteq \mathcal{U}$.
- (٤) بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ داله شاملة (غامرة) ، (X, τ) فضاء توبولوجى. هل العائلة $\tau^* = \{f(U) : U \in \tau\}$ تعرف توبولوجى على Y ؟ ولماذا؟
- (٥) بفرض أن X لانهائية و τ توبولوجى معرف على X بحيث أن المجموعات الجزئية اللانهائية من X مفتوحة. بين أن τ هو التوبولوجى المنفصل.
- (٦) بفرض أن X لانهائية و τ تتكون من ϕ والمجموعات الجزئية من X التى تكون مكملاتها قابلة للعد .
 (i) بين أن τ توبولوجى على X .
 (ii) إذا كانت X قابلة للعد، صف التوبولوجى المعين بواسطة τ .
- (٧) بفرض أن X مجموعة غير قابلة للعد وأن ∞ نقطة معينة في X وأن τ عائلة كل المجموعات الجزئية من G بحيث أن :

(i) $\infty \notin G$ (ii) $\infty \in G$ بشرط أن تكون G^c منتهية .

برهن أن τ توبولوجى على X .

(٨) إذا كانت $A, B \subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين ، $\tau = \{X, \phi, A, B\}$

فما هى الشروط التى يجب أن تتوفر في A, B كي تكون τ توبولوجى على X .

(٩) إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ أوجد كل التوبولوجيات التى تتكون من أربعة

عناصر يمكن تعريفها على X .

بند (٢) : بعض المفاهيم التوبولوجية :

تعريف (٢ . ٢ . ١) : نقطة التراكم (النهاية-التجمع) (limit (accumulation) point)

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى ، $p \in X$. يقال أن النقطة p هى نقطة

تراكم (أو نقطة نهاية) للمجموعة $A \subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى

العنصر p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A بخلاف النقطة p . أى أن

$$\forall U \in \tau, p \in U \Rightarrow (U - \{p\}) \cap A \neq \phi$$

مجموعة جميع نقاط التراكم (أو النهاية) للمجموعة A تسمى مشتقة A (derived

set of A) ويرمز لها بالرمز A' أو $d(A)$.

ويقال أن النقطة p نقطة مفردة أو منعزلة (isolated point) إذا تحقق أن :

$$p \notin A' ; p \in A$$

ومما سبق نجد أن :

$$p \in A' \Leftrightarrow (U - \{p\}) \cap A \neq \phi ; \forall U \in \tau, p \in U$$

من هذا المفهوم يتضح أن :

(i) $p \notin A' \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U$ such that $(U - \{p\}) \cap A = \phi$

(ii) $p \notin A, p \notin A' \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U$ such that $U \cap A = \phi$

$$(iii) \quad p \notin A, p \in A' \Leftrightarrow U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \tau, p \in U$$

مثال (٢.٢.٢) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$. نعرف التوبولوجي τ على X على النحو التالي :

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

إذا كانت $A = \{a, b, d\}, B = \{a, b\}, C = \{c, e\}$ أوجد A', B', C' ؟
الحل :

أولاً : بالنسبة للمجموعة $A = \{a, b, d\}$ نجد أن

العنصر $a \notin A'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{a\}$ تحتوى على العنصر a ولا تحتوى على نقاط من A غير العنصر a نفسه.

والعنصر $b \in A'$ حيث لا يوجد سوى مجموعتين مفتوحتين للنقطة b هما $X, \{b, c, d, e\}$ وكلا منهما تحتوى على نقاط غير b من المجموعة A أى أن

$$(X - \{b\}) \cap A \neq \emptyset, (\{b, c, d, e\} - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$$

العنصر $c \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحتوى على c هي $\{b, c, d, e\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$ وجميعها تحتوى على نقاط من A .

والعنصر $d \notin A'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{c, d\}$ وتحقق :

$$(\{c, d\} - \{c\}) \cap A = \emptyset$$

والعنصر $e \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحتوى على e هي $X, \{b, c, d, e\}$ وتتقاطع مع A في نقاط خلاف e .

وعليه مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A هي $A' = \{b, c, e\}$.

ثانياً : بالنسبة للمجموعة $B = \{a, b\}$ نستطيع أن نرى أن $B' = \{e\}$

ثالثاً : بالنسبة للمجموعة $C = \{c, e\}$ نجد أن

العنصر $a \notin C'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{a\}$ وتحقق أن :

$$(\{a\} - \{a\}) \cap C = \emptyset$$

والعنصر $b \in C'$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحتوي b هي : $X, \{b, c, d, e\}$ وهذه المجموعات تحتوي على نقاط من C وهي النقاط c, e .

والعنصر $c \notin C'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة وهي $\{c, d\}$ تحتوي على العنصر c ولا تحتوي على نقاط من المجموعة C خلاف العنصر c .

والعنصران $d, e \in C'$ لأنهما يحققا التعريف ، وعليه يكون $C' = \{b, d, e\}$

ويلاحظ في هذا المثال أن : $B' \subseteq A' \iff B \subseteq A$

مثال (٢.٢.٣) :

أوجد A' للمجموعة A الجزئية من X بالنسبة للفضاء المتقطع (X, D) .

الحل :

نعلم أن $D = P(X)$ أى أن كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة .

إذاً $\forall p \in X \Rightarrow \{p\} \in D$. أى أن $(\{p\} - \{p\}) \cap A = \emptyset$. وبالتالي فإن

$p \notin A', \forall p \in X$. وعليه تكون $A' = \emptyset$.

مثال (٢.٢.٤) :

أوجد A' للمجموعة A الجزئية من X بالنسبة للفضاء الغير متقطع (X, I) .

الحل :

نعلم أن $I = \{X, \emptyset\}$ أى أن $X, \emptyset$ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان . فإذا

كانت المجموعة A تحتوي على عنصر واحد فقط p أى أن $A = \{p\}$ فنجد أن

المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحتوي p هي X . وعليه نجد أن

$(X - \{p\}) \cap A = \emptyset$ إذاً $p \notin A'$. ولأى نقطة أخرى q حيث $q \neq p$

نجد أن $(X - \{q\}) \cap A = \{p\} \neq \emptyset$ إذا $q \in A'$ وحيث أن q اختيارية فإن

$$A' = X - \{p\} = \{p\}^c$$

أما إذا كانت المجموعة A تحتوي على أكثر من عنصر فإننا نجد أن $A' = X$.
وفي ضوء ما تقدم يتضح أن :

$$A' = \begin{cases} X - \{p\} & ; \text{if } A = \{p\} \\ X & ; \text{o.w.} \end{cases}$$

ملاحظة : الاختصار o.w. (أى otherwise) وتعني خلاف ذلك أى أن المجموعة A تحتوي على أكثر من عنصر.

مثال (٥ . ٢ . ٢) :

إذا كانت $A \subseteq X$ مجموعة جزئية من فضاء النقطة المختارة (X, P) أوجد A' .

الحل :

إذا كانت $p \in X$ فإنه يوجد لدينا احتمالان :

أولاً : نفرض أن $p \in A$ وعليه توجد $\{p\} \in P$ وتحقق

$$(\{p\} - \{p\}) \cap A = \emptyset . \text{ إذاً نحصل على } p \notin A' .$$

ونجد أنه ولأى نقطة $x \in X$ بحيث أن $x \neq p$ نجد أن كل مجموعة مفتوحة U تحتوي x سوف تحتوي على p في نفس الوقت (وذلك حسب تعريف توبولوجي

النقطة المختارة) . وعليه نجد أن $x \in A'$. أى أن $A' = X - \{p\}$

ثانياً : نفرض أن $p \notin A$ وبالتالي لكل $x \in X$ توجد مجموعة مفتوحة

$$U = \{x, p\} \text{ وتحقق } (U - \{x\}) \cap A = \emptyset . \text{ إذاً } x \notin A' .$$

وعليه من أولاً وثانياً نستنتج أن :

$$A' = \begin{cases} X - \{p\} & ; \text{if } p \in A \\ \emptyset & ; \text{if } p \notin A \end{cases}$$

نظرية (٢.٢.٦) :

أوجد A' حيث $A \subseteq R$ مجموعة جزئية من الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$. إذا كانت

(i) $A = (0,1)$

(ii) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

(iii) $A = Q$ مجموعة الأعداد القياسية

(iv) $A = Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة

الحل :

(i) بفرض أن $x \in A = (0,1)$ وحيث أن أي فترة مفتوحة

$$G = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ حول النقطة } x \text{ تحقق } \{G - \{x\}\} \cap (0,1) \neq \emptyset$$

فإن $x \in A'$. من جانب آخر بأخذ الفترة المفتوحة $(-\varepsilon, \varepsilon)$ حول الصفر نجد أن

$$\{(-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}\} \cap (0,1) \neq \emptyset \text{ إذا } 0 \in A'. \text{ أيضا يلاحظ أن } 1 \in A'. \text{ أخيرا}$$

بفرض أن $x \in R$ بحيث أن $x \notin [0,1]$ نستطيع أن نرى أن $|x - 0| < \varepsilon_1$ ،

$|x - 1| < \varepsilon_2$ حيث $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ فإذا أخذنا $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ فإن

$$(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}) \cap (0,1) = \emptyset \text{ وبالتالي فإن } x \notin A' \text{ ومن ذلك نستنتج أن}$$

$$A' = [0,1].$$

(ii) تترك للقارئ لاثبات أن $A' = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}' = \{0\}$

(iii) تترك للقارئ لاثبات أن $A' = Q' = R$

(iv) تترك للقارئ لاثبات أن $A' = Z' = \emptyset$

نظرية (٢.٢.٧) :

نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي. إذا كانت $A, B \subseteq X$ ، فإن :

- (i) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$
- (ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
- (iii) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$
- (iv) If $x \in A' \Rightarrow x \in (A - \{x\})'$

البرهان :

(i) Let $A \subseteq B$ and $p \in A' \Rightarrow \forall U \in \tau, p \in U$ s.t.

$$\begin{aligned} & (U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset, A \subseteq B \\ \Rightarrow & \forall U \in \tau, p \in U \text{ s.t. } (U - \{p\}) \cap B \neq \emptyset \\ \Rightarrow & p \in B' \Rightarrow A' \subseteq B' \end{aligned}$$

(ii) $A \subseteq A \cup B ; B \subseteq A \cup B$ من المعلوم أن

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $A' \subseteq (A \cup B)'; B' \subseteq (A \cup B)'$

$$A' \cup B' \subseteq (A \cup B)' \dots \dots \dots (*) \quad \text{إذاً}$$

ولاثبات أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$

Let $p \notin A' \cup B' \Rightarrow p \notin A' \text{ and } p \notin B'$

$\Rightarrow \exists U, V \in \tau, p \in U, p \in V$ such that

$$(U - \{p\}) \cap A = \emptyset, (V - \{p\}) \cap B = \emptyset$$

ولكن $p \in U \cap V \in \tau$ في الوقت الذي فيه

$$((U \cap V) - \{p\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$$

إذاً $p \notin (A \cup B)'$ وعليه فإن

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \dots \dots \dots (**)$$

ومن (*) ، (**) نحصل على $(A \cup B)' = A' \cup B'$

من المعلوم أن (iii) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $(A \cap B)' \subseteq A'$; $(A \cap B)' \subseteq B'$

إذاً $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

(iv) Let $x \in A' \Rightarrow \forall U \in \tau, x \in U, (U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow (U \cap \{x\}^c) \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, x \in U$

$\Rightarrow (U \cap \{x\}^c) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in (A - \{x\})'$

المثال التالى يوضح أن العلاقة العكسية فى الجزء (iii) من النظرية السابقة ليست

بالضرورة صحيحة . أى أن المثال التالى يوضح أن $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$

مثال (٨ . ٢ . ٢) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c\}$. ونفرض $A = \{a, c\}$, $B = \{b, c\}$

نعرف التوبولوجى τ على X على النحو التالى : $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$

نجد أن $A' = \{c\}$, $B' = \{a, c\}$

وبما أن $A \cap B = \{c\}$. إذاً $(A \cap B)' = \{c\}' = \emptyset$

وعليه يتضح أن $(A \cap B)' = \emptyset \neq (A' \cap B') = \{c\}$

نظرية (٩ . ٢ . ٢) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجى . إذاً

$$(i) \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^n A_i'$$

$$(ii) \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i'$$

$$(ii) \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' \neq \bigcap_{i=1}^n A_i'$$

البرهان :

(i) $A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i ; \forall i=1,2,\dots,n$ من المعلوم أن

$$A_i' \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' ; \forall i=1,2,\dots,n \quad \text{إذاً}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i' \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \quad \dots \dots \dots (*)$$

ولبرهان أن $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i'$. نفرض $p \notin \bigcup_{i=1}^n A_i'$ إذاً

إذاً يوجد $U_i \in \tau , p \in U_i$ بحيث أن $(U_i - \{p\}) \cap A_i = \emptyset$ لجميع قيم

$i=1,2,\dots,n$. نضع $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. إذاً يوجد $U \in \tau , p \in U$ بحيث أن

$$(U - \{p\}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \emptyset \quad \text{وعليه نحصل على } p \notin \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \quad \text{إذاً}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i' \quad \dots \dots \dots (**)$$

من (*), (**) نحصل على المطلوب .

(ii) $\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A_i ; \forall i=1,2,\dots,n$ من المعلوم أن

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' \subseteq A_i' ; \forall i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i'$$

(iii) $A_1 = (1,3) , A_2 = (3,5)$ بفرض أن

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap A_2)' = \emptyset \quad \dots \dots \dots (*)$$

ونجد أن $A_1' = [1,3] , A_2' = [3,5]$ إذاً

$$A_1' \cap A_2' = \{3\} \dots \dots \dots (**)$$

من $(*)$, $(**)$ نجد أن $(A_1 \cap A_2)' \neq A_1' \cap A_2'$

مثال (٢.٢.١٠) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. إذا كانت $U \in \tau$ برهن أن :

$$U \cup A' \subseteq (U \cap A)'$$

الحل :

نفرض $x \in U \cap A'$ ، ومنها $x \in U$ & $x \in A'$. إذاً يوجد $V \in \tau$ ، $x \in V$ بحيث أن $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. وحيث أن $x \in U$ ، $x \in V$ فإن $U \cap V \in \tau$ ، $x \in U \cap V$ لكل $x \in V$. ومن ذلك نحصل على أن :

$$(U \cap V - \{x\}) \cap A = (V - \{x\}) \cap (U \cap A) \neq \emptyset$$

$$; \forall V \in \tau, x \in V$$

وهذا يؤدي إلى $p \in (U \cap A)'$ وعليه فإن $U \cap A' \subseteq (U \cap A)'$.

تعريف (٢.٢.١١) : (المجموعات المغلقة Closed Sets)

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى مجموعة مغلقة

(closed) إذا وفقط إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة. أي أن

$$A \text{ مجموعة مغلقة (closed)} \Leftrightarrow A^c \text{ مجموعة مفتوحة (Open)}$$

$$A \text{ مجموعة مفتوحة (Open)} \Leftrightarrow A^c \text{ مجموعة مغلقة (closed)}$$

سوف نرمز لمجموعة المجموعات المغلقة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) بالرمز $\mathcal{T}_X$ أو $\mathcal{T}$.

مثال (٢.٢.١٢) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$. نعرف التوبولوجي τ على X

على النحو التالي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\mathfrak{T}_X = \{\phi, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\} \quad \text{إذاً}$$

مثال (٢.٢.١٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجي المتقطع (X, D) . نجد أن كل مجموعة جزئية A من (X, D) هي مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت لأن :

$$P(X) = D, \forall A \subseteq X \Leftrightarrow A \in D \Leftrightarrow A^c \text{ مغلقة}$$

مثال (٢.٢.١٤) :

في الفضاء التوبولوجي الغير متقطع (X, I) ، المجموعتان X, ϕ هما المجموعتان المغلقتان فقط.

مثال (٢.٢.١٥) :

في الفضاء التوبولوجي للمكملات المنتهية (X, C) . نجد أن المجموعات المغلقة هي كل المجموعات الجزئية المنتهية بالإضافة الى المجموعة X (وهي المجموعة الوحيدة

$$\mathfrak{T}_X = \{F \subseteq X : F \text{ (finite) منتهية}\} \quad \text{اللا نهائية} . \text{ أى أن}$$

مثال (٢.٢.١٦) :

في الفضاء التوبولوجي للنقطة المختارة (X, P) . نجد أن

$$P = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\} ; \mathfrak{T} = \{X, F \subseteq X : p \notin F\}$$

ونلاحظ أن X, ϕ مجموعتان مغلقتان.

وكذلك أى مجموعة $A \subseteq X$ بحيث أن $p \notin A$.

مثال (٢.٢.١٧) :

في الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$ المجموعة $Z \subseteq R$ مغلقة لأن

$$Z^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) = R - Z$$

$$\therefore Z^c = \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$

وهي اتحاد عدد لا نهائى من المجموعات المفتوحة.

وفي الفضاء التوبولوجى (R, τ) . حيث

$$\tau = \{R, \phi, E_a \subset R : E_a = (a, \infty), a \in R\}$$

$$\mathfrak{T} = \{\phi, R, E_a^c \subset R : E_a^c = (-\infty, a], a \in R\} \quad \text{نجد أن}$$

النظرية التالية توضح خصائص المجموعات المغلقة في أى فضاء توبولوجى

(X, τ) حيث أن :

(١) المجموعتان X, ϕ مغلقتان

(٢) تقاطع أى عدد من المجموعات المغلقة يعطى مجموعة مغلقة.

(٣) اتحاد عدد محدد من المجموعات المغلقة يعطى مجموعة مغلقة.

يتضح مما سبق ذكرة في بند (١) أنه لكى نشكل فضاء توبولوجى (X, τ) يجب أن نعرف أولاً العائلة τ ، أى عائلة المجموعات المفتوحة. وتوجد أكثر من طريقة لتعريف توبولوجى على المجموعة X (كما سنرى في الباب الثالث) إحدى هذه الطرق بواسطة المجموعات المغلقة وهذه الطريقة هي الأكثر استعمالاً بعد طريقة المجموعات المفتوحة ، والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (٢ . ٢ . ١٨) :

إذا كانت X مجموعة غير خالية ، نفرض $\mathfrak{T}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X

وتحقق الشروط التالية :

$$(C1) \quad X, \phi \in \mathfrak{T}$$

$$(C2) \quad \bigcap_i F_i \in \mathfrak{T}, \quad \forall F_i \in \mathfrak{T}, i=1,2,\dots$$

$$(C3) \quad \text{If } F_1, F_2 \in \mathfrak{T} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{T}$$

فإنه يمكن إيجاد توبولوجى τ على X حيث $\tau = \{U \subseteq X : U^c \in \mathfrak{T}\}$

هو التوبولوجى الوحيد الذى تتطابق فيه عائلة المجموعات المغلقة مع العائلة $\mathfrak{T}$.

البرهان :

أولاً : نبرهن أن τ تعرف توبولوجي على X . لذلك نفرض أن $U_i \in \tau$ من ذلك نرى أن $U_i^c \in \mathfrak{T}$ لكل $i \in I$. وباستخدام الخواص $(C1) \rightarrow (C2)$ وأعتماًداً على قانون دي مورجان نحصل على : $(\bigcup_i U_i)^c = \bigcap_i U_i^c \in \mathfrak{T}$ وهذا يكافئ القول بأن $\bigcup_i U_i \in \tau$. بنفس الطريقة يمكن إثبات بقية الشروط .

ثانياً : نبرهن أن عائلة المجموعات المغلقة في (X, τ) تطابق العائلة $\mathfrak{T}$. إذا كانت $F \in \mathfrak{T}$ فإن $F^c \in \tau$ وهذا يعني أن المجموعة F مغلقة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) . العكس ، لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) ومن تعريف المجموعة المغلقة نجد أن $F^c \in \tau$ وهذا يؤدي إلى أن $F = (F^c)^c \in \mathfrak{T}$ وهو المطلوب .

ثالثاً : لأثبت وحدانية τ نفرض أن τ^* توبولوجي آخر معرف على X وتحقق الشروط $(C1) \rightarrow (C2)$ ومن ثانياً نرى أن المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ) تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ^*) لأن كل منها يطابق العائلة $\mathfrak{T}$ ، وهذا يؤدي إلى أن $\tau = \tau^*$ وهو المطلوب .

نظرية (٢ . ٢ . ١٩) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي . إذا كانت $A \subseteq X$ فإن

$$(١) \quad A \text{ مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت } A' \subseteq A$$

$$(٢) \quad A \cup A' \text{ مجموعة مغلقة.}$$

البرهان :

(١) أولاً : نفرض أن A مجموعة مغلقة سوف نثبت أن $A' \subseteq A$ ، ولذلك نفرض أن $p \notin A$ إذاً $p \in A^c \in \tau$. وعليه يوجد مجموعة مفتوحة A^c تحتوى p بحيث

يكون $A \cap A^c = \emptyset$. إذاً $p \notin A'$. ومنها نحصل على $A' \subseteq A$.

ثانياً : نفرض أن $A' \subseteq A$ وسوف نبرهن أن A مجموعة مغلقة ويكفى لبرهان

ذلك إثبات أن A^c مجموعة مفتوحة.

نفرض $p \in A^c$ نقطة اختيارية. إذاً $p \notin A$ وبما أن $A' \subseteq A$. فإن $p \notin A'$.

إذاً يوجد $U_p \in \tau$ ، $p \in U_p$ بحيث أن $U_p \cap A = \emptyset$. ومنها نحصل على

$$p \in U_p \subset A^c . \text{ ومن ثم فإن } A^c = \cup \{U_p : p \in A^c\} .$$

وهذا يعنى أن المجموعة A^c مجموعة مفتوحة حيث أنها اتحاد مجموعات مفتوحة .

(٣) لأثبت أن $A \cup A'$ مجموعة مغلقة سوف نبرهن أن: $(A \cup A')' \subseteq A \cup A'$

نفرض أن $p \notin A \cup A'$. ومنها $p \notin A$ & $p \notin A'$. وهذا يؤدي إلى أنه توجد

$G \in \tau$ ، $p \in G$ بحيث أن $(G - \{p\}) \cap A = \emptyset$ ، وحيث أن $p \notin A$.

فإن $G \cap A = \emptyset$. ويجب أن نلاحظ أن G لا تحتوى على نقاط تراكم للمجموعة

A' طالما $G \cap A = \emptyset$ لأن:

$$p \in G \in \tau , G \cap A = \emptyset \Rightarrow p \notin A \Rightarrow (G - \{p\}) \cap A = \emptyset$$

$$\Rightarrow p \notin A' \Rightarrow G \cap A' = \emptyset$$

ويكون لدينا $G \cap A = \emptyset$ & $G \cap A' = \emptyset$ ، وعليه نحصل على

$$G \cap (A \cup A') = \emptyset \Rightarrow p \notin (A \cup A')$$

وهذا يؤدي إلى $(A \cup A')' \subseteq A \cup A'$ وهو المطلوب.

الآن نسوق لك بعض الأمثلة على الخواص.

مثال (٢.٢.٢٠) :

إذا كانت المجموعة A مغلقة فإن المجموعة A' تكون مغلقة . عكس هذه العلاقة

ليس بالضرورة صحيح.

الحل :

أولاً : حيث أن A مجموعة مغلقة فإن $A' \subseteq A$. ومنها نجد أن $(A')' \subseteq A'$.
وبالتالي فإن A' مجموعة مغلقة.

ثانياً : نفرض الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$. إذا كانت $A =]a, b[\subset R$.
فإن $A' = [a, b]$. في هذا المثال يلاحظ أن A' مجموعة مغلقة ولكن A مجموعة مفتوحة.

مثال (٢١ . ٢ . ٢) :

في فضاء المكملات المنتهية (X, C) حيث X مجموعة لانهائية . بين أنه لاى مجموعة جزئية A من X تكون A' مجموعة مغلقة. وأن $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)' \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$ حيث $A_i \subseteq X$.

الحل :

(i) إذا كانت A مجموعة منتهية (finite) فإن A تكون مغلقة. إذاً $A' \subseteq A$ ومنها تكون A' مجموعة منتهية . أى أن A' مجموعة مغلقة.
(ii) إذا كانت A مجموعة لانهائية (Infinite) سوف نثبت أن A' مجموعة مغلقة.

نفرض أن $p \in X, p \notin A'$. إذاً يوجد $U \in C, p \in U$ بحيث أن

$$(U - \{p\}) \cap A = \emptyset \quad \dots \dots (*)$$

وحيث أن U مجموعة مفتوحة . فإن U^c مجموعة منتهية ومن (*) نجد أن :

$$A \subseteq (U - \{p\})^c$$

وهذا تعارض (لأن A مجموعة لانهائية) وبالتالي فإن $p \in A' ; \forall p \in X$ ومنها نجد أن $A' = X$ وحيث أن X مجموعة مغلقة ، فإن A' مجموعة مغلقة .
والآن بفرض أن (X, C) فضاء المكملات المنتهية حيث X مجموعة لانهائية .
نفرض أن $A_i = \{x_i\}$ لجميع قيم i الطبيعية ولكل $x_i \in X$ فإن $A_i' = \phi$.
لأن $\{x_i\}$ مغلقة لجميع قيم i . إذاً

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' = \phi \dots \dots \dots (*)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = B \quad \text{بأخذ}$$

وحيث أن B مجموعة لانهائية مرقمة . إذاً $B' = X$. وعليه نجد أن

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = X \dots \dots \dots (**)$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)' \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \quad \text{من } (*), (**) \text{ نجد أن :}$$

تمارين (٢ . ٢)

(١) بين أنه إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فإن $A' = \phi$.

(٢) برهن أن كل مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية R تكون مغلقة .

(٣) عين نقاط التراكم للمجموعات التالية : $N, Z, (a, b], Q^c$

(٤) بفرض أن $\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$

(i) عين المجموعات المغلقة في τ . (ii) أوجد $[3, 7)'$ ، $\{2, 5, 9, \dots\}'$.

(٥) بفرض أن $\tau = \{\phi, N, E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n \in N\}$

(i) أوجد المجموعات المفتوحة التي تحتوى على العدد 8 .

(ii) أوجد N' ، $\{4,13,28,37\}'$ ، $\{1,2,4,6\}'$.

(٦) نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$. نعرف التوبولوجي τ على المجموعة X على النحو التالي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}, \{a, b, e\}\}$$

إذا كانت $A = \{c, d, e\}$ ، $B = \{b\}$ ، $C = \{a\}$ مجموعات جزئية من X . أوجد A' ، B' ، C' .

(٧) بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ أوجد توبولوجي ذا أصغر رتبة على X بحيث يحتوى على كل من المجموعتين $\{a, b, c\}$ ، $\{b, c, d\}$ ويحقق أن $A = \{b, c\}$ ، $A' = \{a, b, c\}$.

(٨) إذا كانت $A \subseteq F$ حيث F مجموعة مغلقة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) بين أن $A' \subseteq F$.

(٩) بفرض أن (X, C) هو فضاء المكملات المنتهية. أثبت أن A' مغلقة لأي مجموعة جزئية A من X .

(١٠) إذا كانت U مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) ، $U \cap A = \phi$ ، أثبت أن $U \cap A' = \phi$.

(١١) في أي فضاء توبولوجي (X, τ) إذا كانت $A' = \phi$ لأي $A \subseteq X$. بين أن A تكون مغلقة.

(١٢) في الفضاء التوبولوجي (X, τ) بين أن $\{x\}' \subset \{x\}^c$ لكل $x \in X$.

(١٣) بين أن مجموعة الأعداد الصحيحة Z تكون مغلقة في الفراغ التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$ بطريقتين.

بند (٣) : الإغلاق (اللساقة) للمجموعات : (The closure of Sets)

تعريف (٢.٣.١) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي ونفرض المجموعة $A \subseteq X$. يعرف الإغلاق للمجموعة A (يرمز لها بالرمز $\bar{A}$) على أنه تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي المجموعة A . أي أن

$$\bar{A} = \bigcap_i \{F_i : A \subseteq F_i, F_i \subseteq X, F_i \text{ مغلقة } \forall i\}$$

ملاحظات (٢.٣.٢) : من التعريف يتضح ما يلي :

- (١) $\bar{A}$ مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعات مغلقة.
- (٢) $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A أي أنه لأي مجموعة مغلقة F تحتوي المجموعة A فإن $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$.

مثال (٢.٣.٣) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$. نعرف التوبولوجي τ على X كما يلي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

إذا كانت $A = \{a\}, B = \{b, c\}, C = \{b, d\}, D = \{a, b, c\}$ أوجد $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ ؟

الحل :

نجد أن مجموعة جميع المجموعات المغلقة في X هي :

$$\mathfrak{T} = \{\phi, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$$

$$\bar{A} = \{a\}, \bar{B} = \{b, c, d, e\} = \bar{C} \text{ \& } \bar{D} = X \text{ وعليه يكون}$$

مثال (٢.٣.٤) :

نفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X, C) . مجموعة جميع المجموعات الجزئية المغلقة من X هي :

$$\mathfrak{T} = \{X, F \subseteq X : F \text{ finite منتهية}\}$$

وهذا يعنى أن $\bar{A} = A$ إذا كانت A مجموعة منتهية ، $\bar{A} = X$ إذا كانت A مجموعة غير منتهية .

مثال (٢ . ٣ . ٥) :

نفرض الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$. إذا كانت $A = (a, b)$ أو $A = [a, b)$ أو $A = (a, b]$ أو $A = [a, b]$ فإن $\bar{A} = [a, b]$.

مثال (٢ . ٣ . ٦) :

نفرض أن A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء النقطة المختارة (X, P) . أوجد $\bar{A}$.

الحل :

حيث أن $P = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\}$. إذاً مجموعة جميع المجموعات الجزئية المغلقة من X هي : $\mathfrak{T} = \{X, F \subseteq X : p \notin F\}$

أى هى العائلة التى تحتوى المجموعتان X, ϕ وكذلك أى مجموعة جزئية F من X بحيث أن $p \notin F$. وإذا كانت $A \subseteq X$ فإن

$$\bar{A} = \begin{cases} A & , p \notin A \\ X & , p \in A \end{cases}$$

نظرية (٢ . ٣ . ٧) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجى . إذا كانت $A \subseteq X$ فإن :

$$(i) A \subseteq \bar{A}$$

$$(ii) \bar{A} = A \Leftrightarrow A \text{ مغلقة}$$

$$(iii) \bar{A} = A \cup A'$$

$$(iv) A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$$

الحل :

برهان (i), (ii) يأتى مباشرة من التعريف. والآن نبرهن العلاقة (iii).

سوف نبرهن أولاً أن $A \cup A' \subseteq \bar{A}$.

بما أن $A \subseteq \bar{A}$ إذاً باستخدام نظرية (٢.٢.٧) نجد أن $A' \subseteq (\bar{A})'$ وحيث أن $\bar{A}$ مجموعة مغلقة فإن $(\bar{A})' \subseteq \bar{A}$. وعليه نجد أن $A' \subseteq \bar{A}$, $A \subseteq \bar{A}$. إذاً نحصل

$$A \cup A' \subseteq \bar{A} \dots \dots \dots (*) \quad \text{على}$$

والآن سوف نبرهن أن $\bar{A} \subseteq A \cup A'$

سبق وأن برهنا أن $A \cup A'$ مجموعة مغلقة وهى تحتوى المجموعة A . وعليه نجد أن

$$\bar{A} \subseteq A \cup A' \dots \dots \dots (**)$$

من (*), (**) نحصل على $\bar{A} = A \cup A'$.

(iv) بما أن $A \subseteq B$. إذاً باستخدام نظرية (٢.٢.٧) نجد أن $A' \subseteq B'$. إذاً

$$A \cup A' \subseteq B \cup B'.$$

نظرية (٢.٣.٨):

في الفضاء التوبولوجى (X, τ) . إذا كانت $A \subseteq X$, $p \in X$. فإن

$p \in \bar{A}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى p تحتوى على الأقل

عنصر من A . أى أن :

$$p \in \bar{A} \Leftrightarrow U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, p \in U$$

البرهان :

أولاً : نفرض أن $p \in \bar{A} = A \cup A'$. إذاً $p \in A$ أو $p \in A'$

إذا كانت $p \in A$. فإن $U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, p \in U$

وإذا كانت $p \in A'$. فإن $U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, p \in U$

ومن ثم فإن $U \cap A \neq \phi, \forall U \in \tau, p \in U$

ثانياً : نفرض $U \cap A \neq \phi, \forall U \in \tau, p \in U$. إذاً $p \in A$ أو $p \notin A$
إذا كانت $p \in A$ فإن $p \in \bar{A}$ (وذلك لأن $A \subseteq \bar{A}$)

وإذا كانت $p \notin A$ ، $U \cap A \neq \phi, \forall U \in \tau, p \in U$ ، فإن

$$(U - \{p\}) \cap A \neq \phi, \forall U \in \tau, p \in U$$

وعليه نحصل على $p \in A'$. وحيث أن $\bar{A} = A \cup A'$. إذاً $p \in \bar{A}$
ملاحظة (٢ . ٣ . ٩) :

(i) إذا كانت $p \notin \bar{A}$ فإنه يوجد $U \in \tau, p \in U$ بحيث أن $U \cap A = \phi$

(ii) إذا كانت $p \in A'$ فإن $p \in \bar{A}$ وعليه يكون $A' \subseteq \bar{A}$.

(iii) يمكن برهان النظرية (٢ . ٣ . ٨) بطريقة أخرى كالتالي:

نفرض أن $p \notin \bar{A}$ ، وهذا يعني أن $p \in (\bar{A})^c$ ولكن $A \cap (\bar{A})^c = \phi$ وحيث

أن $(\bar{A})^c = U$ مجموعة مفتوحة تحتوي p فإن $A \cap U = \phi$ وهذا يؤدي إلى انه

إذا كان $A \cap U \neq \phi$ لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي p فإن $p \in \bar{A}$.

والعكس ، نفرض أنه توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي على p ($p \notin U^c$) بحيث

يكون $A \cap U = \phi$ ومن ثم فإن $A \subseteq U^c$ وبالتالي فإن $\bar{A} \subseteq \overline{U^c} = U^c$ لأن

U^c مجموعة مغلقة ومن ذلك نحصل على أن $p \notin \bar{A}$. وهذا يعني انه إذا كانت

$p \in \bar{A}$ فإن $A \cap U \neq \phi$ لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي p .

نظرية (٢ . ٣ . ١٠) :

إذا كانت A, B مجموعتان جزئيتان من الفضاء التوبولوجي (X, τ) . فإن

$$(C1) \quad \overline{\phi} = \phi \quad (C2) \quad A \subseteq \bar{A} \quad (C3) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(C4) \quad \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \quad (C5) \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A}$$

البرهان :

العلاقات (C1), (C2) تأتي من التعريف.

(C3) بما أن $A \subseteq A \cup B$. إذاً من نظرية (٢ . ٣ . ٧) نحصل على

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

وبما أن $B \subseteq A \cup B$. إذاً $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. وبالتالي نحصل على

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B} \dots \dots \dots (*)$$

وكذلك من نظرية (٢ . ٣ . ٧) ، (C2) نجد أن $A \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$ وعليه نحصل

على : $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$. إذاً $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \cup B}$. أى أن

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B} \dots \dots \dots (**)$$

من (*), (**) نحصل على : $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$

(C4) بما أن $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. إذاً

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cap B} \text{ وعليه نحصل على } \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} , \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$$

(C5) نفرض $\overline{A} = F$ مجموعة مغلقة . إذاً $\overline{F} = F$. وعليه فإن $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

فيما يلي نعطى بعض الأمثلة التي توضح أن عكس العلاقة (C4) في النظرية

السابقة ليست بالضرورة صحيحة.

مثال (٢ . ٣ . ١١) :

نفرض A, B مجموعتان جزئيتان من الفضاء الغير متقطع (X, I) . إذا كان

$A \cap B = \phi$. فإن $\overline{A \cap B} = \overline{\phi} = \phi$ ولكن $\overline{A} = X$, $\overline{B} = X$ وعليه نجد أن

$$\overline{A \cap B} = \phi \neq \overline{A} \cap \overline{B} = X$$

مثال (٢ . ٣ . ١٢) :

في الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$. إذا كانت $A = (1, 3)$; $B = (3, 5)$. فإن

$$A \cap B = \phi \Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{\phi} = \phi$$

ولكن $\bar{A} = [1,3]$; $\bar{B} = [3,5]$. ومن ثم فإن $\bar{A} \cap \bar{B} = \{3\}$. وبالتالي نحصل على $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال (٢ . ٣ . ١٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) ، حيث

$$X = \{a, b, c\} , \tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$$

إذا كانت $A = \{a, c\}$, $B = \{b, c\}$. نجد أن $A \cap B = \{c\}$

عائلة جميع المجموعات المغلقة في X هي : $\mathfrak{T} = \{X, \phi, \{b, c\}, \{c\}\}$

$$\bar{A} = \overline{\{a, c\}} = X ; \bar{B} = X \cap \{b, c\} = \{b, c\} = B$$

ومنها $\bar{A} \cap \bar{B} = X \cap B = B = \{b, c\}$. ولكن $\overline{A \cap B} = \overline{\{c\}} = \{c\}$

$$\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{إذاً}$$

النظرية التالية هي تعميم للخواص المذكورة في نظرية (٢ . ٣ . ١٠) .

نظرية (٢ . ٣ . ١٤) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي . نفرض المجموعات الجزئية $\{A_i\}_{i \in I}$ من X .

$$(i) \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A_i} \quad \text{إذاً :}$$

$$(ii) \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \bar{A_i}$$

$$(iii) \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A_i}$$

البرهان :

تترك (i), (ii) للدارس كتمرين . وسوف نبرهن العلاقة (iii) .

نفرض (X, C) فضاء المكملات المنتهية ، X لانهائية . بفرض أن $\{A_i\}_{i \in I}$

عائلة من المجموعات الجزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن :

إذا كانت $\{A_i\}_{i \in I}$ منتهية . إذاً $\{A_i\}_{i \in I}$ مغلقة . وعليه يكون

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \quad \text{إذاً} \quad \overline{A_i} = A_i, \forall i$$

ولكن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعة لانهائية ، ومن مثال (٢ . ٣ . ٤) نحصل

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \text{على } X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ أى أن}$$

والآن ندرس مفهوم مؤثر الإغلاق الذى يحمل اسم العالم كوراتوفسكى (Kuratowski) الذى يعرف توبولوجى على المجموعه باستخدام خواص الإغلاق.

نظرية (٢ . ٣ . ١٥) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي معرف على المجموعة X فإن المؤثر

$$cl: P(X) \rightarrow P(X) \quad \text{والذي يسمى مؤثراً أغلاقياً يحقق الشروط الآتية :}$$

$$(cl1) \quad cl(\phi) = \phi$$

$$(cl2) \quad A \subseteq cl(A) ; \forall A \subseteq X$$

$$(cl3) \quad cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B) ; \forall A, B \subseteq X$$

$$(cl4) \quad cl(cl(A)) = cl(A) ; \forall A \subseteq X$$

وعلى العكس إذا كان cl مؤثر أغلاقى يحقق الشروط من (cl1) إلى (cl4) فإن

العائلة $\mathfrak{T} = \{F \subseteq X : cl(F) \subseteq F\}$ هي عائلة المجموعات المغلقة في X ،

والعائلة $\tau = \{G \subseteq X : cl(G^c) = G^c\}$ تعرف توبولوجي وحيد علي X

وأن cl هو مؤثر الأغلاقي بالنسبة إلى X أى أن $cl(A) = \overline{A}$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان :

سبق وأن برهنا الشروط (cl1) – (cl4) . والآن سوف نثبت أن τ يشكل

توبولوجى على X .

(01) بما أن $X \subseteq cl(X) = X$ إذاً $cl(X) = X$. من ذلك نجد أن $cl(\phi) = \phi$. وبالتالي فإن $X, \phi \in \tau$.

(02) إذا كانت $G_1, G_2 \in \tau$. فإن $cl(G_1^c) = G_1^c ; cl(G_2^c) = G_2^c$ وعليه نحصل على أن

$$\begin{aligned} cl((G_1 \cap G_2)^c) &= cl(G_1^c \cup G_2^c) = cl(G_1^c) \cup cl(G_2^c) \\ &= G_1^c \cup G_2^c \quad (\text{من } cl3) \\ &= (G_1 \cap G_2)^c \end{aligned}$$

إذاً $G_1 \cap G_2 \in \tau$

(03) نفرض $G_i \in \tau ; \forall i$. إذاً $cl(G_i^c) = G_i^c ; \forall i$.

وبما أن $\bigcap_i G_i^c \subseteq G_i^c ; \forall i$ إذاً $\bigcap_i G_i^c \subseteq cl(\bigcap_i G_i^c)$.

وعليه يكون $cl(\bigcap_i G_i^c) \subseteq \bigcap_i cl(G_i^c) = \bigcap_i G_i^c = (\bigcup_i G_i)^c$

ولكن $\bigcap_i G_i^c = (\bigcup_i G_i)^c$.

ومن ذلك نحصل على $cl(\bigcap_i G_i^c) \subseteq (\bigcup_i G_i)^c$.

إذاً $cl((\bigcup_i G_i)^c) = (\bigcup_i G_i)^c$. أى أن $\bigcup_i G_i \in \tau$.

والآن نثبت أن cl ما هو الا مؤثر الاغلاق بالنسبة للتوبولوجى τ أى المطلوب

أثبت أن $cl(A) = \bar{A}$ لأى مجموعة جزئية A من X . وذلك باثبات أن عائلة

المجموعات المغلقة في (X, τ) تطابق المجموعات المغلقة

$\mathfrak{T} = \{F \subseteq X : F^c = F\}$ والتي تحقق الشروط $cl1$ إلى $cl4$ وذلك كما يلي :

(i) حيث أن $cl(cl(A)) = cl(A)$ (من $cl4$) فإن $cl(A)$ مجموعة مغلقة

تحتوى A وبالتالى فإن $\bar{A} \subseteq cl(A)$ لأن $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحتوى A .

(ii) حيث أن $\overline{A} \cup A = \overline{A}$ فإنه من (cl3) نحصل على

$$cl(\overline{A} \cup A) = cl(\overline{A}) \cup cl(A) = cl(\overline{A})$$

وهذا يؤدي إلى أن $cl(A) \subseteq cl(\overline{A})$ ولكن $\overline{A}$ مجموعه مغلقة في الفضاء

(X, τ) نجد أن $cl(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ ومنها $cl(A) \subseteq \overline{A}$.

من (i)، (ii) نستنتج أن $cl(A) = \overline{A}$.

ولاثبات وحدانية τ نفرض أن τ^* توبولوجي آخر على X تحقق شروط النظرية ومن ثم فإن المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ) تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ^*) ومن ثم فإن $\tau = \tau^*$.

بالرجوع إلى بعض الأمثلة التي أوردناها في بداية هذا البند نجد أن هناك بعض المجموعات لصاقتها تطابق الفضاء X هذه المجموعات تلعب دوراً مهماً في الفضاءات التوبولوجية، من أجل ذلك نعطي التعريف التالي :

تعريف (٢.٣.١٦) : (المجموعة الكثيفة Dense Set)

في الفضاء التوبولوجي (X, τ) إذا كانت $A, B \subseteq X$ فإن :

(١) يقال إن A كثيفة (dense) في B إذا كانت $B \subseteq \overline{A}$.

(٢) يقال إن A كثيفة (dense) في X إذا كانت $\overline{A} = X$.

ملاحظة (٢.٣.١٧) :

المجموعة X كثيفة في أي مجموعة جزئية منها لأنه لأي $A \subseteq X$ يكون

$$A \subseteq X = \overline{X}$$

مثال (٢.٣.١٨) :

في الفضاء الغير متقطع (X, I) إذا كانت $A \subseteq X$ حيث $A \neq \emptyset$ فإن A

كثيفة في X لأن X هي المجموعة الوحيدة المغلقة التي تحتوي A . ومن ثم فإن

$$\overline{A} = X$$

مثال (٢.٣.١٩) :

في الفضاء المتقطع (X, D) لا توجد مجموعة جزئية فعلية وتكون كثيفة في X لأن $\bar{A} = A ; \forall A \subseteq X$.

مثال (٢.٣.٢٠) :

في الفضاء التوبولوجي (R, τ) حيث

$$\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$$

اثبت أن المجموعتين $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, \dots\}$

مجموعات كثيفة في R بينما المجموعة $C = \{-2, -4, -6, \dots\}$ ليست كثيفة في R .

الحل :

المجموعات المغلقة في (R, τ) هي العائلة

$$\mathfrak{T} = \{\phi, R, E_a^c = (-\infty, a] : a \in R\}$$

وبالتالي فإن R هي المجموعة المغلقة التي تحتوي كلا من A, B ولهذا يكون

$$\bar{A} = R, \bar{B} = R. \text{ إذا } A, B \text{ كثيفة في } R \text{ ولكن}$$

$$\bar{C} = \overline{\{-2, -4, \dots\}} = (-\infty, -2]$$

أي أن $\bar{C} \neq R$ ولهذا فإن C ليست كثيفة في R .

مثال (٢.٣.٢١) :

في فضاء النقطة المختارة (X, P) ، $A \subseteq X$ نعلم أن

$$\bar{A} = \begin{cases} A & , \text{ if } p \notin A \\ X & , \text{ if } p \in A \end{cases}$$

وهذا يعني أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت $p \in A$.

مثال (٢.٣.٢٢) :

في فضاء المكملات المنتهية (X, C) ، $A \subseteq X$ نعلم أن

$$\bar{A} = \begin{cases} A & , \text{ if } A \text{ finite} \\ X & , \text{ if } A \text{ infinite} \end{cases}$$

وهذا يعنى أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت A لانهائية.

نظرية (٢.٣.٢٣) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى وكانت $A \subseteq X$ فإن الخواص التالية متكافئة :

(١) A كثيفة في X

(٢) إذا كانت F مجموعة مغلقة تحتوى A فإن $F = X$.

(٣) لكل $p \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة U بحيث أن $p \in U$ فإن $A \cap U \neq \emptyset$.

البرهان : (١) $\Leftrightarrow$ (٢)

نفرض أن F مجموعة مغلقة تحتوى A إذاً $\bar{A} \subseteq F$ وباستخدام (١) نحصل على أن $X = \bar{A} \subseteq F$ ومنها نجد أن $X = F$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣)

نفرض أن $p \in X$ ، U مجموعة مفتوحة بحيث أن $p \in U$ ، $A \cap U = \emptyset$. إذاً $A \subseteq U^c$ وحيث أن U^c مجموعة مغلقة فإنه من (٢) نجد أن $X = U^c$ وهذا يؤدي إلى أن $U = \emptyset$ وهذا تناقض لأن $U \neq \emptyset$ ومن ثم فإن $A \cap U \neq \emptyset$.

(٣) $\Leftrightarrow$ (١)

نفرض $\forall p \in X, U \in \tau, p \in U$ إذاً $U \cap A \neq \emptyset$; $\forall U \in \tau, p \in U$. إذاً من (٣) ونظرية (٢.٣.٨) نجد أن $p \in \bar{A}$ أى أن $X \subseteq \bar{A}$ ولكن $\bar{A} \subseteq X$ وبالتالي نحصل على $\bar{A} = X$. أى أن المجموعة A كثيفة في X .

مثال (٢.٣.٢٤) :

في الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$. أثبت أن مجموعة الأعداد القياسية (أو

النسبية Q كثيفة في R .

الحل :

المطلوب اثبات أن $R \subseteq \overline{Q}$ حيث $\overline{Q} \subseteq R$ ؟

نفرض $x \in R$. إذا يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $x \in (x - \delta, x + \delta)$. وهذه فترة مفتوحة تحتوي x ونصف قطرها δ وتحتوي عدد لا نهائي من الاعداد القياسية. إذاً $Q \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \emptyset$. وهذا يتحقق لكل فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) تحتوي x ، وهذا يعني أن $x \in \overline{Q}$; $\forall x \in R$. ومنها نجد أن $R \subseteq \overline{Q}$. وعليه يكون $\overline{Q} = R$. أى أن Q كثيفة في R .

تمارين (٢ . ٣)

(١) في الفضاء التوبولوجي (R, τ) حيث $\tau = \{R, \emptyset, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$

أثبت أن $(-\infty, 4] = \overline{[3, 4)}$, $\overline{\{7, 24, 47, 85\}} = (-\infty, 85]$

(٢) في الفضاء التوبولوجي (N, τ) حيث

$$\tau = \{\emptyset, N, E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n \in N\}$$

أوجد (i) $\overline{\{7, 24, 47, 85\}}$, $\overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}}$

(ii) عين المجموعات الجزئية الكثيفة في N .

(٣) أثبت أن $\overline{A - B} \subseteq \overline{A} - \overline{B}$.

(٤) إذا كانت $A \cap B \neq \emptyset$. أثبت أن $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(٥) نفرض أن F مجموعة مغلقة. أثبت أن $\overline{F \cap A} \subseteq \overline{F} \cap \overline{A}$; $\forall A \subseteq X$

(٦) نفرض أن U مجموعة مفتوحة. أثبت أن $\overline{U \cap A} \subseteq \overline{U} \cap \overline{A}$ $\forall A \subseteq X$

(٧) بفرض أن U مجموعة مفتوحة ، A كثيفة في X . أثبت أن $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap A}$

(٨) بين أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت $A^c \cap (A')^c = \emptyset$.

بند (٤) : النقاط الداخلية والخارجية والحدية :

(Interior , exterior and boundary points of a set)

تعريف (٢ . ٤ . ١) :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, τ) . النقطة $p \in A$ تسمى نقطة داخلية (interior point) للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $p \in U \subseteq A$.

مجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A يرمز لها بالرمز A° (أو $\text{int}(A)$) وتقرأ داخلية A . أى أن $p \in A^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U \text{ s.t. } p \in U \subseteq A$

تعريف (٢ . ٤ . ٢) :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, τ) . النقطة $p \in X$ تسمى نقطة خارجية (exterior point) للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $p \in U \subseteq A^c = X - A$. أى إذا كانت $p \in (A^c)^\circ$. مجموعة جميع النقاط الخارجية للمجموعة A يرمز لها بالرمز $\text{ext}(A)$ وتقرأ خارجية A . أى أن

$$p \in \text{ext}(A) \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U \text{ s.t. } p \in U \subseteq A^c$$

تعريف (٣ . ٤ . ٢) :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, τ) . النقطة $p \in X$ تسمى نقطة حدية (boundary point) للمجموعة A إذا وفقط إذا كانت $p \in X$ ليست نقطة داخلية وليست نقطة خارجية. يرمز لمجموعة جميع النقاط الحدية للمجموعة A بالرمز $b(A)$. وعليه يكون

$$p \in b(A) \Leftrightarrow p \notin A^\circ \text{ \& } p \notin \text{ext}(A)$$

أى أن

$$b(A) = X - (A^\circ \cup \text{ext}(A))$$

مثال (٢.٤.٤) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. حيث $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،
 $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ إذا كانت
 $A = \{b, c, d\}$ أوجد $A^\circ, \text{ext}(A), b(A)$ ؟

الحل :

واضح أن $c, d \in A$ هما العنصران الوحيدان اللذان يحققان وجود
 $\{c, d\} \in \tau$ بحيث أن $\{c, d\} \subseteq A$ ومن ثم فإن $A^\circ = \{c, d\}$.
وبالمثل $A^c = \{a, e\}$ نجد أن $a \in A^c$ هو العنصر الوحيد الذي يحقق وجود
 $\{a\} \in \tau$ بحيث أن $\{a\} \subseteq A^c$ ومن ثم فإن $\text{ext}(A) = \{a\}$. وحيث أن
 $A^\circ \cup \text{ext}(A) = \{a, c, d\}$ نحصل على $b(A) = \{b, e\}$.

مثال (٢.٤.٥) :

في الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$ إذا كان :

$$\begin{aligned} A &= [a, b), B = (a, b), C = (a, b], D = [a, b], E = Q \\ A^\circ &= B^\circ = C^\circ = D^\circ = (a, b), E^\circ = \phi \quad \text{فإن} \\ \text{ext}(A) &= \text{ext}(B) = \text{ext}(C) = \text{ext}(D) = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \\ \text{ext}(E) &= \phi \\ b(A) &= b(B) = b(C) = b(D) = \{a, b\}, b(E) = R \end{aligned}$$

مثال (٢.٤.٦) :

في الفضاء المتقطع (X, D) . إذا كانت $A \subseteq X$ فإن

$$A^\circ = A, \text{ext}(A) = A^c, b(A) = \phi$$

مثال (٢.٤.٧) :

في الفضاء الغير متقطع (X, I) . إذا كانت $A \subseteq X$ فإن

$$A^{\circ} = \phi, \text{ext}(A) = \phi, b(A) = X$$

تعريف (٢ . ٤ . ٨) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. يقال أن المجموعة $A \subseteq X$ متناثرة (nowher dense) في X إذا تحقق أن $(\bar{A})^{\circ} = \phi$.

مثال (٢ . ٤ . ٩) :

في الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$. المجموعة $A = \{1/n : n \in N\}$ متناثرة في R لأن $(\bar{A})^{\circ} = \phi$.

مثال (٢ . ٤ . ١٠) :

أثبت أنه إذا كانت المجموعة A الجزئية من الفضاء (X, τ) متناثرة فإن $(\bar{A})^c$ تكون كثيفة في X .

البرهان :

بفرض أن A متناثرة وأن $(\bar{A})^c$ ليست كثيفة في X وبالتالي من نظرية (٢ . ٣ . ٨) توجد مجموعة مفتوحة G في X ونقطة $p \in X$ تحقق :

$$p \in G, G \cap (\bar{A})^c = \phi$$

وهذا بدورة يؤدي إلى أن $p \in G \subseteq \bar{A}$.

أي أن $p \in (\bar{A})^{\circ}$ وهذا تعارض لأن $(\bar{A})^{\circ} = \phi$ ، وعليه تكون $(\bar{A})^c$ كثيفة في X .

مثال (٢ . ٤ . ١١) :

(١) أي مجموعة A جزئية من الفضاء (X, C) تكون كثيفة في X إذا كانت لا نهائية وتكون متناثرة إذا كانت A منتهية.

(٢) لا توجد مجموعة جزئية فعلية متناثرة في الفضاء المتقطع أو في الفضاء الغير متقطع. النظريات التالية توضح بعض خواص المجموعات الداخلية والخارجية والحدية.

نظرية (٢.٤.١٢) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن الخواص الآتية محققة:

$$A^{\circ} = \cup \{G_i : G_i \in \tau, G_i \subseteq A\} \quad (١)$$

$$A^{\circ} \text{ هي أكبر مجموعة مفتوحة تقع داخل } A. \quad (٢)$$

$$A^{\circ} = A \text{ إذا وفقط إذا كانت } A \text{ مجموعة مفتوحة.} \quad (٣)$$

$$(\overline{A})^c = (A^c)^{\circ}, \quad (A^{\circ})^c = \overline{(A^c)}, \quad A^{\circ} = \overline{(A^c)^c} \quad (٤)$$

البرهان :

$$(١) \text{ نفرض أن } x \in A^{\circ} \text{ فإنه توجد } G_{i_0} \in \tau \text{ بحيث أن } x \in G_{i_0} \subseteq A \text{ إذاً}$$

$$x \in A^{\circ} \text{ وهذا يؤدي إلى } A^{\circ} \subseteq \cup \{G_i : G_i \in \tau, G_i \subseteq A\}$$

$$\text{نفرض } x \in \cup \{G_i : G_i \in \tau, G_i \subseteq A\} \text{ إذاً يوجد } G_{i_0} \subseteq A \text{ بحيث}$$

$$x \in G_{i_0} \text{ أي أن } x \in A^{\circ} \text{ إذاً } \cup \{G_i : G_i \in \tau, G_i \subseteq A\} \subseteq A^{\circ}$$

$$\text{وعليه يكون } A^{\circ} = \cup \{G_i : G_i \in \tau, G_i \subseteq A\}$$

$$(٢) \text{ حيث أن } A^{\circ} \text{ هي اتحاد المجموعات المفتوحة التي تقع داخل } A \text{ (من (١)) فإن}$$

$$A^{\circ} \text{ مجموعة مفتوحة وهي أكبر مجموعة مفتوحة تقع داخل } A \text{ ونوضح ذلك :}$$

$$\text{إذا كانت } G \in \tau, p \in G, G \subseteq A \text{ إذاً } p \in G \subseteq A \text{ وعليه يكون}$$

$$p \in A^{\circ} \text{ إذاً } G \subseteq A^{\circ} \text{ وأيضاً } A^{\circ} \subseteq A.$$

$$(٣) \text{ نفرض أن } A^{\circ} = A \text{ ومن ثم فإن } A \text{ مجموعة مفتوحة.}$$

$$\text{وبفرض أن } A \text{ مجموعة مفتوحة فإنه لأي } p \in A \text{ نجد أن } p \in A \subseteq A \text{ إذاً}$$

$$p \in A^{\circ} \text{ ومنها نحصل على } A \subseteq A^{\circ} \text{ وحيث أن } A^{\circ} \subseteq A \text{ فإن } A^{\circ} = A.$$

$$(٤) \text{ سوف نبرهن علاقة واحدة من العلاقات المعطاة بطريقتين مختلفتين:}$$

$$A^o = \cup \{E : E \in \tau \text{ and } E \subseteq A\} \quad \text{حيث}$$

$$E \subseteq A \Leftrightarrow A^c \subseteq E^c = F \quad \text{مغلقة}$$

$$A^o = \cup \{F : F \text{ closed and } A^c \subseteq F\} \quad \text{نجد أن}$$

$$= (\cap \{F^c : F \text{ closed and } A^c \subseteq F\})^c = (\overline{A^c})^c$$

طريقة أخرى :

$$\text{if } p \in X - \overline{A} \Leftrightarrow p \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U \text{ s.t. } U \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U \text{ s.t. } p \in U \subseteq A^c$$

$$\Leftrightarrow p \in (A^c)^o = (X - A)^o$$

$$X - \overline{A} = (X - A)^o, (A^c)^o = (\overline{A})^c \quad \text{أى أن}$$

نظرية (٢ . ٤ . ١٣) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن الخواص

الآتية محققة :

$$b(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} \quad (١) \quad b(A) \text{ مجموعة مغلقة} \quad (٢)$$

$$b(A) = \overline{A} - A^o \quad (٤) \quad b(A) = b(A^c) \quad (٣)$$

$$\overline{A} = b(A) \cup A^o \quad (٥)$$

البرهان :

$$b(A) = \{x \in X : x \notin A^o \text{ \& } x \notin (A^c)^o\} \quad (١) \text{ نجد أن}$$

$$= \{x \in X : x \notin (\overline{A^c})^c \text{ \& } x \notin (\overline{A})^c\} \quad (\text{من نظرية (٢ . ٤ . ١٢)})$$

$$= \{x \in X : x \in \overline{A^c} \text{ \& } x \in \overline{A}\}$$

$$= \{x \in X : x \in \overline{A^c} \cap \overline{A}\} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

(٤) نجد أن

$$\begin{aligned}
b(A) &= \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (A^o)^c = \overline{A} \cap (X - A^o) \\
&= \overline{A} \cap X - \overline{A} \cap A^o \quad (A^o \subseteq A \subseteq \overline{A}) \\
&= \overline{A} - A^o
\end{aligned}$$

(٥) حيث أن $A^o \subseteq A \subseteq \overline{A}$ فاننا نحصل على

$$b(A) \cup A^o = (\overline{A} - A^o) \cup A^o = \overline{A}$$

نظرية (٢.٤.١٤) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فان الخواص الآتية محققة:

$$b(A) \cap A^o = \phi \quad (١)$$

$$b(A) \cap \text{ext}(A) = \phi \quad (٢)$$

$$A^o \cap \text{ext}(A) = \phi \quad (٣)$$

$$A^o \cup \text{ext}(A) \cup b(A) = X \quad (٤)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
b(A) \cap A^o &= (\overline{A} - A^o) \cap A^o = \overline{A} \cap A^o - A^o \cap A^o \quad (١) \\
&= A^o - A^o = \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(A) \cap \text{ext}(A) &= b(A^c) \cap (A^c)^o \quad (٢) \\
&= b(X - A) \cap (X - A)^o = \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^o \cap \text{ext}(A) &= A^o \cap (A^c)^o = A^o \cap (\overline{A})^c \quad (٣) \\
&= A^o \cap (X - \overline{A}) = A^o \cap X - A^o \cap \overline{A} \\
&= A^o - A^o = \phi
\end{aligned}$$

$$b(A) \cup A^o \cup \text{ext}(A) = \overline{A} \cup (A^c)^o = \overline{A} \cup (\overline{A})^c = X \quad (٤)$$

ملاحظة :

نستنتج من هذه النظرية أن المجموعة $\{A^o, \text{ext}(A), b(A)\}$ تشكل تجزئاً للمجموعة X في الفضاء التوبولوجي (X, τ) .

مثال (٢.٤.١٥) :

ليكن (N, τ) فضاء توبولوجي . حيث τ معرفة كما يلي :

$$\tau = \{\phi, N, A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} : n \in N\}$$

حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية. أوجد $A^o, \text{ext}(A), b(A)$ إذا كان :

$$(i) A = \{1, 2, 4, 6\} \quad (ii) A = \{5, 7, 9, 20\}$$

الحل:

(i) حيث أن $A = \{1, 2, 4, 6\}$ فإن أكبر مجموعة مفتوحة محتواه في A هي

$A_2 = \{1, 2\}$ وبذلك تكون $A^o = \{1, 2\}$ ومن السهل أن نرى أن $\text{ext}(A) = \phi$, $b(A) = \{3, 5, 7, \dots\}$

(ii) حيث أن $A = \{5, 7, 9, 20\}$ وهي لا تحوى أى مجموعة مفتوحة فإن

$A^o = \phi$. المجموعات المغلقة في N هي :

$$\phi, N, \{2, 3, 4, \dots\}, \{3, 4, 5, \dots\}, \dots, \{n, n+1, \dots\}$$

وأصغر مجموعة مغلقة تحوى A هي $\{5, 6, 7, \dots\}$ وبذلك تكون

$$\bar{A} = \{5, 6, 7, \dots\} \text{ ومنها نجد أن :}$$

$$\text{ext}(A) = (A^c)^o = N - \bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ويجب أن نلاحظ أن المجموعة $A_1 = \{1\}$ كثيفة في N وكذلك أى مجموعة جزئية من N تحوى A_1 تكون كثيفة. وهذا بدوره يؤدي إلى أن $N - A$ مجموعة كثيفة في N وعليه تكون :

$$b(A) = \bar{A} \cap \overline{N - A} = \bar{A} \cap N = \bar{A} = \{5, 6, 7, \dots\}$$

وبناء على ذلك نرى أن هناك ثلاث مجموعات مرتبطة بأى مجموعة جزئية A من الفضاء التوبولوجي (N, τ) وهى $ext(A), b(A), A^o$ وهى تجزئياً للمجموعة X .

نظرية (٢.٤.١٦) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن الخواص الآتية محققة :

- (i) $ext(A) \subseteq X - A$
- (ii) $ext(A) = ext(A - ext(A))$
- (iii) $ext(A \cup B) = ext(A) \cap ext(B)$

البرهان : يترك للقارئ كتمرين

مثال (٢.٤.١٧) :

لأى مجموعة A جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X, C) . أوجد :

$A^o, ext(A), b(A)$ ؟

الحل :

حيث أن $C = \{\phi, U \subseteq X : U^c \text{ finite}\}$ ولأى مجموعة A جزئية من X يكون لدينا حالتان:

(أ) إذا كانت A مجموعة منتهية فإن $A^o = \phi$ لأنه في هذه الحالة A لا تحوى أى مجموعة مفتوحة. وحيث أن A مغلقه فإن $ext(A) = X - \bar{A} = X - A$ وبالتالي نحصل على $b(A) = \bar{A} - A^o = A - \phi = \phi$.

(ب) إذا كانت A غير منتهية فإنه توجد حالتان : الأولى A^c منتهية وفي هذه الحالة A تكون مفتوحة وتكون

$$A^o = A, ext(A) = X - \bar{A} = X - X = \phi,$$

$$b(A) = \overline{A \cap X - A} = X \cap (X - A) = X - A$$

وفي الحالة الثانية A^c غير منتهية فإننا نجد أن

$$A^o = \phi, \text{ext}(A) = \phi, b(A) = X$$

نظرية (٢ . ٤ . ١٨) :

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن الخواص الآتية محققة:

- (1) $\phi^o = \phi, X^o = X$
- (2) $A^o \subseteq A$
- (3) $A \subseteq B \Rightarrow A^o \subseteq B^o$
- (4) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$
- (5) $(A^o)^o = A^o$
- (6) $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$

البرهان :

واضح من التعريف أن (1) , (2) محققة.

(٣) نفرض أن $p \in A^o$ إذاً يوجد $U \in \tau, p \in U \subseteq A$ ، وحيث أن $A \subseteq B$ إذاً توجد $U \in \tau, p \in U \subseteq B$ ، وعليه فإن $p \in B^o$. إذاً $A^o \subseteq B^o$.

(٤) بما أن $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ إذاً

$$(A \cap B)^o \subseteq A^o, (A \cap B)^o \subseteq B^o$$

$$(A \cap B)^o \subseteq A^o \cap B^o \dots \dots \dots (*)$$

وبما أن $A^o \subseteq A, B^o \subseteq B$ إذاً $A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$. إذاً

$(A^o \cap B^o)^o = A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$ وذلك لأن $A^o \cap B^o$ مجموعة

مفتوحة. إذاً $(**) \dots \dots \dots A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$

من $(**)$, $(*)$ نحصل على $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

(٥) بما أن $A^o = B$ مجموعة مفتوحة . إذاً $A^o = B = (A^o)^o = B^o$. إذاً $(A^o)^o = A^o$

(٦) بما أن $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ فإن

$$A^o \subseteq (A \cup B)^o , B^o \subseteq (A \cup B)^o \text{ إذاً } A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$$

المثال التالي يوضح أنه ليس من الضروري تساوى العلاقة رقم (٦) من النظرية السابقة .

مثال (٢ . ٤ . ١٩) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$. نعرف التوبولوجى τ على X كما يلى :

$$\tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

نفرض المجموعتان

$$A = \{a, c\} , B = \{b, d\} \text{ يلاحظ أن } A^o = \phi , B^o = \phi \text{ ونجد أن}$$

$$(A \cup B)^o = X \text{ إذاً } (A \cup B) = \{a, b, c, d\} = X$$

$$(A \cup B)^o = X \neq A^o \cup B^o \text{ وعليه فإن}$$

النظرية التالية هى تعميم لبعض النتائج التى حصلنا عليها فى النظرية السابقة.

نظرية (٢ . ٤ . ٢٠) :

إذا كانت $\{A_j\}_{j \in N}$ عائلة من المجموعات الجزئية من الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن :

$$(1) \left(\bigcap_{j=1}^n A_j \right)^o = \bigcap_{j=1}^n A_j^o$$

$$(2) \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right)^o \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_j^o$$

$$(3) \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^o \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o$$

البرهان :

نترك للقارئ إثبات العلاقات (1), (2) والبرهان يسلك نفس الأسلوب كما في النظرية السابقة. والمثال التالي يبرهن العلاقة (3).

نفرض الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$. ونفرض المجموعات الجزئية التالية:

$$A_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right) ; \forall j \in \mathbb{N} \text{ . إذا } \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \{0\} \text{ وعليه يكون}$$

$$\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^o = \phi \dots \dots \dots (*)$$

وذلك لأنه لا توجد مجموعة مفتوحة تحتوى الصفر وتقع داخل المجموعة $\{0\}$.

ولكن $A_j^o = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right) ; \forall j \in \mathbb{N}$ وبالتالي نحصل على:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o = \{0\} \dots \dots \dots (**)$$

$$\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^o \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o \text{ نلاحظ أن من } (**), (*)$$

مثال (٢.٤.٢١) :

$$\text{إذا كان } \overline{A} \cap \overline{B} = \phi \text{ فإن } (A \cup B)^o = A^o \cup B^o$$

الحل :

لإثبات أن $(A \cup B)^o \subseteq A^o \cup B^o$ نفرض أن $x \notin A^o \cup B^o$.

ونفرض $x \in (A \cup B)^o$ إذاً يوجد $U \in \tau$ بحيث $x \in U \subseteq A \cup B$. إذاً

$U \subseteq A$ أو $U \subseteq B$ أو $(U \not\subseteq A \& U \not\subseteq B)$.

(i) إذا كان $U \subseteq A$ فإن $x \in A^o$ إذاً $x \in A^o \cup B^o$

(ii) إذا كان $U \subseteq B$ فإن $x \in B^o$ إذاً $x \in A^o \cup B^o$

(iii) إذا كان $U \not\subseteq A$ و $U \not\subseteq B$ فإن $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap B \neq \emptyset$. إذاً

لكل $x \in V$, $V \in \tau$ نحصل على $x \in \bar{A}$ و $x \in \bar{B}$ إذاً $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

وهذا تعارض للفرض أن $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. وبالتالي فإن (i) ، (ii) صحيحة ، أى أن

$x \in A^o \cup B^o$. إذاً $(A \cup B)^o \subseteq A^o \cup B^o$.

الأمثلة الآتية توضح متى تكون أى مجموعة A جزئية من الفضاء التوبولوجي مغلقة أو مفتوحة وذلك بالاعتماد على حدية A .

مثال (٢٢ . ٤ . ٢) :

A مفتوحة ومغلقة إذا وفقط إذا كان $b(A) = \emptyset$

الحل :

($\Rightarrow$) نجد أن

$$b(A) = \bar{A} - A^o = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \subset A^o \Rightarrow A \subseteq \bar{A} \subseteq A^o$$

ولكن $A^o \subseteq A \subseteq \bar{A}$ إذاً $A = A^o = \bar{A}$.

أى أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة .

($\Leftarrow$)

وحيث أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة فإن $A = A^o = \bar{A}$ إذاً $b(A) = \emptyset$

(لأن $b(A) = \bar{A} - A^o$.)

مثال (٢٢ . ٤ . ٢) :

في أى فضاء توبولوجي المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت

$b(A) \subseteq A$ وتكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $b(A) \subseteq X - A$.

الحل :

لنفرض أن $b(A) \subseteq A$ ومن نظرية (٢.٤.١٣) نجد أن $b(A) = \bar{A} - A^o \subseteq A$ وهذا يؤدي إلى أن $A \subseteq \bar{A} \subseteq A$ أى أن $A = \bar{A}$ وبالتالي فإن A مغلقة. العكس نفرض أن A مغلقة أى أن $A = \bar{A}$ ومن ثم نجد أن $b(A) = \bar{A} - A^o = A - A^o \subseteq A$.

من جانب آخر تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $X - A$ مغلقة ومن الحالة السابقة نستنتج أن $X - A$ تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $b(X - A) \subseteq X - A$ ولكن $b(A) = b(X - A)$ ومن ثم فإن A مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $b(A) \subseteq X - A$.

مثال (٢.٤.٢٤) :

أثبت أن $b(A \cup B) \neq b(A) \cup b(B)$

الحل :

نفرض الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$. ونفرض

$A = (1, 3]$, $B = [3, 5)$. إذاً $b(A) = \{1, 3\}$, $b(B) = \{3, 5\}$

إذاً $b(A) \cup b(B) = \{1, 3, 5\}$

ونجد أن $A \cup B = (1, 5)$. إذاً $b(A \cup B) = \{1, 5\}$. وعليه يلاحظ أن

$$(1, 5) = b(A \cup B) \neq b(A) \cup b(B) = \{1, 3, 5\}$$

نظرية (٢.٤.٢٥) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. نفرض $A \subseteq X$. الخواص التالية متكافئة:

(i) A كثيفة في X .

(ii) إذا كانت $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة بحيث $A \subseteq F$ فإن $F = X$

(iii) $ext(A) = \emptyset$.

لبرهان :

$$(ii) \Leftarrow (i)$$

حيث أن A كثيفة في X فإن $\bar{A} = X$. ولكن F مجموعة مغلقة تحتوى A
 أى أن $A \subseteq F \Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow X \subseteq F \Rightarrow F = X$
 $(iii) \Leftarrow (ii)$

حيث أن $\bar{A} \subseteq X$ مجموعة مغلقة وتحقق $A \subseteq \bar{A}$ ومن (ii) نحصل
 على $\bar{A} = X$. إذا $(A^c)^o = (\bar{A})^c = X - X = \phi$
 إذاً $ext(A) = (A^c)^o = \phi$.
 $(i) \Leftarrow (iii)$

حيث أن $(A^c)^o = \phi$ فإن $\bar{A} = X$ $\phi = X - \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = X$
 أى أن A كثيفة في X .

ونختتم هذا الباب بمفهوم المؤثر الداخلى والذى عن طريقة يمكن توليد توبولوجي.

تعريف (٢٦ . ٤ . ٢) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. المؤثر $Int: P(X) \rightarrow P(X)$ يسمى
 مؤثراً داخلياً إذا حقق الشروط التالية :

- (Int.1) $Int(X) = X$, $Int(\phi) = \phi$
- (Int.2) $Int(A) \subseteq A$; $\forall A \subseteq X$
- (Int.3) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$; $\forall A, B \subseteq X$
- (Int.4) $Int(Int(A)) = Int(A)$; $\forall A \subseteq X$

نظرية (٢٧ . ٤ . ٢) :

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن $Int: P(X) \rightarrow P(X)$ مؤثر داخلى
 فإن العائلة $\tau = \{A \subseteq X : Int(A) = A\}$ تشكل توبولوجي وحيد على X وأن
 $Int(A) = A^o$.

البرهان :

أولاً : نثبت أن $\tau = \{A \subseteq X : Int(A) = A\}$ تشكل توبولوجي على X .
واضح أن $X, \emptyset \in \tau$. لتكن $A_1, A_2 \in \tau$ ومن الشرط (Int.3) نجد أن

$$Int(A_1 \cap A_2) = Int(A_1) \cap Int(A_2) = A_1 \cap A_2$$

ومن ذلك نحصل على أن $A_1 \cap A_2 \in \tau$. لنفرض أن $A_i \in \tau$ لكل i فإن

$$A_i = Int(A_i) \text{ لكل } i \text{ وحيث أن } A_i \subseteq \bigcup_i A_i \text{ فإن}$$

$$A_i = Int(A_i) \subseteq Int(\bigcup_i A_i) \quad (\text{من (Int.3)})$$

ومن ذلك نستنتج أن $\bigcup_i A_i \subseteq Int(\bigcup_i A_i)$ ، ومن الشرط (Int.2) نجد أن

$$\bigcup_i A_i = Int(\bigcup_i A_i) . \text{ وبالتالي فإن } \bigcup_i A_i \in \tau .$$

ثانياً : نبرهن أن $Int(A) = A^\circ$ حيث A° هي المجموعة الداخلية للمجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X, τ) .

(i) حيث أن $Int(A)$ مجموعة مفتوحة (من الشرط (Int.4)) وأيضاً

$$Int(A) \subseteq A \text{ من الشرط (Int.2) فإن } Int(A) \subseteq A^\circ .$$

(ii) حيث أن $A^\circ \cap A = A^\circ$ فإنه ينتج من الشرط (Int.3) أن :

$$Int(A^\circ \cap A) = Int(A^\circ) \cap Int(A) = Int(A^\circ)$$

وهذا يؤدي إلى أن $Int(A^\circ) \subseteq Int(A)$ ولكن A° مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) . إذاً $A^\circ \subseteq Int(A)$.

من (i) ، (ii) نحصل على التساوي ، أي أن $Int(A) = A^\circ$.

مثال (٢٨ . ٤ . ٢) :

لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ، لأي مجموعة جزئية A من N يكون لدينا

المجموعة الجزئية A^* المعرفة بالصورة :

$$A^* = \{n \in N : \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq A\}$$

أثبت أنه يوجد توبولوجى وحيد τ على N بحيث أن $A^* = A^o$.
الحل :

واضح أن $A^* \subseteq A$ ، $N^* \subseteq N$ ، $\phi^* \subseteq \phi$. أيضاً $(A^*)^* = A$.
بفرض أن $A, B \subseteq N$ نجد أن

$$\begin{aligned} (A \cap B)^* &= \{n \in N : \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq A \cap B\} \\ &= \{n \in N : \{1, \dots, n\} \subseteq A\} \cap \{n \in N : \{1, \dots, n\} \subseteq B\} \\ &= A^* \cap B^* \end{aligned}$$

وحسب نظرية (٢ . ٤ . ٢٧) يوجد توبولوجى وحيد τ على N بحيث أن $A^* = A^o$ وبذلك نستنتج أن المجموعة A تكون مفتوحة في الفضاء (N, τ) إذا كانت $A = \{1, 2, \dots, n\}$.
وبهذا نحصل على التوبولوجى τ المذكور في مثال (٢ . ١ . ٦).

تمارين (٢ . ٤)

(١) نفرض الفضاء التوبولوجى (X, τ) حيث أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،
 $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$
إذا كانت $A = \{c, d, e\}$ ، $B = \{b\}$. أوجد

$$A^o, \text{ext}(A), b(A), B^o, \text{ext}(B), b(B)$$

(٢) نفرض الفضاء التوبولوجى (X, τ) ، إذا كانت $A, B \subseteq X$ بين أن

- (i) $b(A^o) \subseteq b(A)$
- (ii) $b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$
- (iii) $(\overline{A})^o \supseteq A, A \in \tau$
- (iv) $((\overline{A})^o)^o = (\overline{A})^o$

$$(v) \quad \overline{(A^o)^o} = \overline{A^o}$$

(٣) أوجد $b(A)$ في الفضاء المنفصل (X, D) حيث $A \subseteq X$.

(٤) برهن أن $b(A) \subset A^c$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

(٥) إذا كانت $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ ، $A^c \cap B^c = \phi$ بين أن A, B مجموعتين مفتوحتين ومغلقتين.

(٦) بين أنه إذا كانت $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ فإن $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$

(٧) إذا كانت U مجموعة مفتوحة بين أن $\overline{(\overline{U})^o} = \overline{U}$

(٨) إذا كانت F مجموعة مغلقة بين أن $\overline{(F^o)^o} = F^o$

(٩) بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ أوجد توبولوجي ذا أصغر رتبة على X ومجموعة جزئية ذات أصغر رتبة بحيث أن $\overline{A} = \{c, b, e\}$ ، $A^o = \{d, e\}$.

تمارين عامة على الباب الثاني

(١) أي من التجمعات التالية تشكل توبولوجي على المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$(i) \quad \tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

$$(ii) \quad \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

$$(iii) \quad \tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}\}$$

$$(iv) \quad \tau_4 = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

(٢) لتكن X مجموعة غير خالية ، A مجموعة جزئية من X . برهن أن العائلة

$$\tau_{(A)} = \{U \subseteq X : A \subseteq U\}$$

كـى تطابق $\tau_{(A)}$ التوبولوجي المنفصل ، التوبولوجي الغير منفصل ؟

(٣) بفرض أن $\tau = \{R, \phi, E_q = (q, \infty) : q \in Q\}$ حيث Q هي مجموعة

لأعداد القياسية. بين أن τ لا تمثل توبولوجي على R .

(٤) بين أن العائلة $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ تشكل توبولوجي على المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$. إذا كانت $A = \{a, b, c\}$ أوجد $A^o, \text{ext}(A), b(A), A', \bar{A}$.

(٥) أعط مثال في الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$ تكون فيه المجموعات التالية مختلفة :

$$A^o, A, A', \bar{A} \cap \bar{B}, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, b(A), b(A'), b(\bar{A})$$

لأي $A, B \subseteq R$.

(٦) لتكن $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ما هو أصغر توبولوجي يمكن تعريفه على X لكي تكون المجموعات التالية مفتوحة $X, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$.

(٧) نفرض أن X هو فضاء المكملات المنتهية. بين أن A' مغلقة لأي مجموعة A جزئية من X .

$$(٨) \text{ بفرض أن } \tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$$

أوجد $Z', [4, 10)$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

إذا كانت $A = [7, \infty)$ أوجد $A^o, \text{ext}(A), b(A)$.

(٩) أعط مثال لتوبولوجي لا يكون منفصل بحيث أن المجموعات المغلقة تتطابق مع المجموعات المفتوحة ؟

(١٠) بين أن كل مجموعة جزئية غير منتهية في فضاء المكملات المنتهية اللانهائي تكون كثيفة؟

$$(١١) \text{ إذا كانت } U \text{ مجموعة مفتوحة ، } V = (\bar{U})^o \text{ بين أن } \bar{U} = \bar{V}.$$

(١٢) برهن أن $((\bar{A})^o)^o = (\bar{A})^o$ لكل $A \subseteq X$ في الفضاء التوبولوجي (X, τ) .

(١٣) إذا كانت F مجموعة مغلقة ، $H = \overline{(F^o)}$ بين أن $H^o = F^o$.
 (١٤) لتكن U مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) . تسمى U مجموعة مفتوحة بانتظام (regular open) إذا كان $\overline{U^o} = U$ وتسمى U مجموعة مغلقة منتظمة (regular closed) إذا كان $\overline{U^o} = U$ سنرمز بـ $Ro(U)$ ، $Rc(U)$ للمجموعتين $\overline{U^o}$ ، $\overline{U^o}$ على الترتيب .
 (i) برهن أنه إذا كانت U مفتوحة فإن $U \subseteq Ro(U)$. وإذا كانت U مغلقة فإن $U \subseteq Rc(U)$.

(ii) برهن أنه إذا كانت U مجموعة مغلقة بانتظام U^o فإن تكون كذلك .
 (iii) بين أن تقاطع (إتحاد) عدد منتهى من المجموعة المفتوحة (المغلقة) بانتظام يكون كذلك .

(١٥) بفرض أن τ_1, τ_2 توبولوجيين على X بحيث أن $\tau_1 \subset \tau_2$. إذا كانت $A \subset X$.

(i) بين أن نقاط تراكم A في الفضاء (X, τ_2) هي أيضا نقاط تراكم A في لفضاء (X, τ_1) .

(ii) أعط توبولوجيين τ_1, τ_2 على X بحيث يكون نقاط تراكم $A \subseteq X$ بالنسبة إلى τ_1 لا تكون نقاط تراكم A بالنسبة إلى τ_2 .

(١٦) إذا كانت X مجموعة منتهية ، (X, C) هو فضاء المكملات المنتهية . صف هذا الفضاء .

(١٧) بين أن $P \cup E$ هو التوبولوجي المنفصل على X حيث P هو توبولوجي نقطة المختارة ، E هو توبولوجي النقطة المستبعدة على المجموعة X .

(١٨) أعط مثال لمجموعتين جزئيتين A, B ومختلفتين في الفضاء (X, τ) بحيث تكون $A' = B'$.

(١٩) إذا كان τ_1, τ_2 توبولوجيين على X بحيث أن $\tau_1 \subseteq \tau_2$ بين أن $\tau_2 - \bar{A} \subseteq \tau_1 - \bar{A}$ لكل $A \subseteq X$.

(٢٠) برهن أن عائلة كل المجموعات الجزئية من R والمتماثلة حول نقطة الأصل تشكل توبولوجي على R ثم بين أن المجموعات المفتوحة تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء الناتج.

الباب الثالث

طرق توليد التوبولوجيات

Methods of generating topologies

الباب الثالث

طرق توليد التوبولوجيات

Methods of generating topologies

بفرض أن X مجموعة اختيارية وغير خالية . (بتوليد توبولوجي) معرف على X نعى بذلك اختيار عائله τ من المجموعات الجزئية من X والتي تحقق الشروط (01), (02), (03) أى العائله τ بحيث يكون (X, τ) فضاء توبولوجي. سوف نتعرض في هذا الباب لعدة طرق لتعريف توبولوجي على مجموعة خلاف التي اوردناها في الباب الثاني وذلك عن طريق تقديم بعض المفاهيم مثل نظم الجوار - الأساس والأساس الجزئي - التوبولوجي النسبي.

بند (١) : الجوار وأنظمة الجوار :

(Neighbourhood and Neighbourhood Systems)

تعريف (٣ . ١ . ١) : Neighbourhood

في الفضاء التوبولوجي (X, τ) ، إذا كانت $p \in X$ ، $N \subseteq X$ ، يقال أن المجموعة N جواراً (nbd, for short) للنقطة p إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $p \in U \subseteq N$. أى أن

$$N \text{ is a nbd of } p \Leftrightarrow \exists U \in \tau \text{ s.t. } p \in U \subseteq N$$

مجموعة كل مجموعات الجوار للنقطة p تسمى أنظمة الجوار ويرمز لها بالرمز N_p

$$N_p = \{N \subseteq X : \exists U \in \tau, p \in U \subseteq N\} \quad \text{أى أن :}$$

ملاحظة : N جوار للنقطة p يكافئ أن p نقطة داخلية للمجموعة N أى أن :

$$N \in N_p \Leftrightarrow p \in N^\circ$$

مثال (٣ . ١ . ٢) :

(١) نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) حيث أن $X = \{a, b, c\}$ ،

$\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{b, c\}\}$. أوجد الجوارات للنقاط التي تنتمي إلى المجموعة X .

الحل :

الجوار الوحيد للنقطة a هو المجموعة X .

بالنسبة للنقطة b فإن المجموعات الأربعة : $\{a, b\}, X, \{b, c\}, \{b\}$ هي جوارات للنقطة b حيث أن كل منها يحتوى على المجموعة المفتوحة $\{b\}$ والتي تحتوى على العنصر b .

وبالنسبة للنقطة c فإن المجموعات : $\{b, c\}, X$ هي جوارات للنقطة c .

(٢) نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ، ونفرض $\tau = \{X, \phi, \{b\}\}$ من الواضح أن (X, τ) فضاء توبولوجي ونجد أن المجموعة $\{b, c\}$ هي جوار للنقطة b حيث $b \in \{b\} \subset \{b, c\}$. ونلاحظ أن المجموعة $\{b, c\}$ ليست مفتوحة حيث أنها لا تنتمي إلى التوبولوجي τ .

(٣) نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) حيث $X = \{a, b, c, d\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ المجموعة $A = \{a, b, c\}$ تعتبر جوار للنقاط a, b حيث $a \in \{a\} \subseteq A, b \in \{b\} \subseteq A$ أيضا $a, b \in \{a, b\} \subseteq A$. ولكن المجموعة A ليست جوار للنقطة c (وضح ذلك؟). الجوار الوحيد في هذا المثال للنقطة c هو المجموعة X .

مثال (٣.١.٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) حيث أن

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \quad X = \{a, b, c, d\}$$

أوجد مجموعة الجوارات للنقاط a, b, c, d .

الحل :

$$N_a = \{N \subseteq X : \exists U \in \tau, a \in U \subseteq N\}$$

$$N_a = \{N \subseteq X : \{a\} \subseteq N\}$$

$$= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \\ \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, X\}$$

$$N_b = \{N \subseteq X : \{a\} \subseteq N\} \\ = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$$

$$N_c = \{N \subseteq X : \{a, b, c\} \subseteq N\} = \{\{a, b, c\}, X\}$$

$$N_d = \{N \subseteq X : X \subseteq N\} = \{X\}$$

مثال (٣ . ١ . ٤) :

في الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$ إذا كانت $N = [0, \frac{3}{2})$ نجد أن $N \in \mathcal{N}_1$ لأن :

$1 \in (0, \frac{3}{2}) \subset N$. ولكن $N \notin \mathcal{N}_0$ وأيضا $N \notin \mathcal{N}_{3/2}$ حيث لا توجد

مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوى 0 وتقع بأكملها داخل N .

مثال (٣ . ١ . ٥) :

في الفضاء المنفصل (X, D) ، $\forall p \in X \Rightarrow N_p = \{N \subseteq X : p \in N\}$ ،
أى أن لكل $N \subseteq X$ إذا كانت $p \in N$ فإن $N \in \mathcal{N}_p$.

مثال (٣ . ١ . ٦) :

في الفضاء التوبولوجى الغير منفصل (X, I) ، لأى نقطة $p \in X$ نجد أن :

$$N_p = \{X\} ; \forall p \in X$$

نظرية (٣ . ١ . ٧) :

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجى (X, τ) تكون مفتوحة إذا وفقط إذا

كانت A جوار لجميع نقاطها . أى أن :

$$A \text{ مفتوحة} \Leftrightarrow A \in \mathcal{N}_p ; \forall p \in A$$

البرهان : تترك للقارئ كتمرين .

ملاحظة (٣ . ١ . ٨) :

(١) من البديهي أن نرى أنه إذا كانت N جوار للنقطة p فإن أى مجموعة جزئية من X تحتوى N تكون أيضاً جوار للنقطة p .

(٢) من السهل أن نرى أن تقاطع جوارين للنقطة p هو أيضاً جوار للنقطة p .

النظرية التالية تقدم مسلمات نظام الجوار لنقطة في أى فضاء توبولوجى وبواسطة هذه المسلمات يمكن تكوين توبولوجى يسمى التوبولوجى المولد بواسطة نظام الجوار.

نظرية (٣ . ١ . ٩) :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى فإن نظام الجوار $\{N_p : p \in X\}$ يحقق المسلمات الآتية :

$$(N_1) N_p \neq \emptyset \text{ and } p \in N; \forall N \in N_p$$

$$(N_2) \text{ If } N \in N_p, N \subseteq M \Rightarrow M \in N_p$$

$$(N_3) \text{ If } N_1, N_2 \in N_p \Rightarrow N_1 \cap N_2 \in N_p$$

$$(N_4) \forall N \in N_p \Rightarrow \exists M \subseteq N, M \in N_p,$$

$$(\text{بحيث أن } M \in N_q ; \forall q \in M)$$

البرهان :

(N_1) حيث أن X مجموعة مفتوحة تحتوى p لكل $p \in X$ فإن $X \in N_p$ ومن ثم فإن $N_p \neq \emptyset$. أيضاً $p \in N$ لكل $N \in N_p$.

(N_2) نفرض أن $N \in N_p, N \subseteq M$ فإنه يوجد $U \in \tau$ بحيث $p \in U \subseteq N$. وحيث أن $N \subseteq M$ فإنه يوجد $U \in \tau$ بحيث أن $p \in U \subseteq M$ وعليه يكون $M \in N_p$.

(N_3) نفرض أن $N_1, N_2 \in N_p$ ، فإنه توجد مجموعتان $U, V \in \tau$ بحيث

$p \in U \cap V \subseteq N_1 \cap N_2$ وعليه فإن $p \in V \subseteq N_2$ ، $p \in U \subseteq N_1$
وحيث أن $U \cap V \in \tau$ فإن $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_p$

(N_4) نفرض أن $N \in \mathcal{N}_p$ إذاً يوجد $M \in \tau$ بحيث $p \in M \subseteq N$. إذاً
 $M \subseteq N$ ، ومن ذلك نجد ان $p \in M \subseteq M$ اي ان $M \in \mathcal{N}_p$. وحيث أن
 M مجموعة مفتوحة فعلية تكون أى نقطة $q \in M$ هى نقطة داخلية للمجموعة M
ومن ثم فإن $M \in \mathcal{N}_q$; $\forall q \in M$.

ملاحظات (١٠ . ١ . ٣) :

(١) من الخاصية (N_3) يمكن القول بأنه إذا كانت $N_1, N_2, \dots, N_n \in \mathcal{N}_p$
فإن $\bigcap_{i=1}^n N_i \in \mathcal{N}_p$ أيضاً.

(٢) من نظرية (٣ . ١ . ٧) أتضح أن كل مجموعة مفتوحة هى جوار لكل النقاط التى
تنتمى اليها ، والسؤال الآن هو هل العملية العكسية لهذه النظرية صحيح ؟ أى هل
يمكن تكوين توبولوجى على X باعتبار أن المجموعات المفتوحة هى تلك المجموعات
التي تكون جوارات لكل نقاطها؟ النظرية التالية سوف تجيب على هذا السؤال وتعطى
الشروط الواجب أن تحققها أنظمة الجوار لكي تعين توبولوجى على X .
نظرية (٣ . ١ . ١١) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية. ولكل $p \in X$ نفرض أن M_p هى عائلة كل
المجموعات الجزئية من X التى تحقق الشروط (N_1) - (N_4) فى النظرية (٣ . ١ . ١ . ٩)
فإنه يوجد توبولوجى وحيد $\tau = \{U \subseteq X : \forall p \in U \Rightarrow U \in M_p\}$
بحيث أن M_p تتطابق مع أنظمة الجوار للنقطة p .
البرهان :

فيما يلى نبرهن أن العائلة τ تمثل توبولوجى على X .

(01) بما أن $X \in M_p ; \forall p \in X$ فإن $X \in \tau$. أيضا ϕ تحقق تعريف الجوار وعليه فإن $\phi \in \tau$.

(02) نفرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ وسوف نبرهن أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
نفرض $p \in U_1 \cap U_2$ فإن $p \in U_1$ ، $p \in U_2$ ، وعليه $U_1 \in M_p$ ،
 $U_2 \in M_p$ من (N3) نحصل على $U_1 \cap U_2 \in M_p \forall p$. وعليه نحصل
على $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض أن $U_i \in \tau ; \forall i$ وسوف نبرهن أن $\bigcup_i U_i \in \tau$.
بفرض ان $p \in \bigcup_i U_i$ فإنه يوجد U_{i_0} بحيث $p \in U_{i_0}$. إذاً $U_{i_0} \in M_p$ لكل
 $p \in U_{i_0}$ وحيث أن $U_{i_0} \subseteq \bigcup_i U_i$ وباستخدام (N2) نحصل على :
 $\bigcup_i U_i \in M_p$ لكل $p \in \bigcup_i U_i$ اي ان $\bigcup_i U_i \in \tau$. إذاً τ تمثل توبولوجي
على X .

والمطلوب الآن أثبات أن M_p تتطابق مع أنظمة الجوار في الفضاء التوبولوجي
(X, τ) أي أن $M_p = N_p$. لذلك نفرض أن $N \in M_p$ فانه من الشرط
(N₄) نجد انه توجد M حيث $M \subseteq N$ تحقق $p \in M \subseteq N$ ، $M \in M_p$
لكل $p \in M$ وهذا يعنى أن M جوار لكل نقطة فيها وبالتالي فهي مجموعة مفتوحة
 $M \in \tau$. ومن ثم فإن $N \in N_p$ ، أي أن $M_p \subseteq N_p$.

ومن جانب آخر ، بفرض أن $N \in N_p$ أي N جوار للنقطة p في الفضاء
(X, τ) . إذاً توجد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث $p \in U \subseteq N$ وحيث أن
 $U \in \tau$ فإن $U \in M_p$ ومن الشرط (N₂) نجد أن $N \in M_p$ أي أن
 $N_p \subseteq M_p$ ومن ذلك نستنتج ان $N_p = M_p$ وهو المطلوب.

مثال (٣. ١. ١٢) :

بفرض أن N_p هي عائلة جوارات النقطة p في الفضاء التوبولوجي (X, τ) ،
 $N_i \in N_p$ لجميع قيم $i=1,2,\dots$. بين أن $\bigcap_i N_i \notin N_p$.

الحل :

نعتبر الفضاء التوبولوجي العادي $(R, \mathcal{U})$ ، $n \in N, n \neq 0$ ، $N_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ،
 وعليه تكون N_n جوار للصفر لكل $n \in N$ أي أن $N_n \in N_0$ ولكن
 $\bigcap_n N_n = \{0\}$ ، ولا توجد مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوى الصفر وتقع
 باكملها داخل المجموعة $\{0\}$ ، ومن ثم فإن $\bigcap_n N_n \notin N_0$.

مثال (٣. ١. ١٣) :

في فضاء المكملات المنتهية (X, C) ، $p \in X$ أثبت أن $N_p \subseteq C$.

الحل :

نفرض أن $N \in N_p$ ومن تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة U تحقق
 $p \in U \subseteq N$. ومن ذلك نحصل على أن $N^c \subseteq U^c$ ولكن U^c منتهية (لأن U
 مجموعة مفتوحة). إذاً N^c منتهية وبالتالي فإن $N \in C$ وعليه فإن $N_p \subseteq C$.

مثال (٣. ١. ١٤) :

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ، N_x عائلة المجموعات الجزئية من R

التي تحتوى فترة مفتوحة تحتوى x أى أن :

$$N_x = \{U \subseteq R : \exists a, b \in R, x \in (a, b) \subseteq U\}$$

نجد أن N_x تحقق الشروط الواردة في نظرية (٣. ١. ٩) وبالتالي يوجد توبولوجي

وحيد على R بحيث تكون N_x أنظمة جوار للنقطة x وهو :

$$\tau = \{G \subseteq R : \forall x \in G \Rightarrow x \in N_x\}$$

أى أن المجموعة G تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت لكل نقطة x من G فإن G تحوى فترة مفتوحة تحتوى x وهذا يكافئ أن G هى اتحاد فترات مفتوحة. وعليه تكون τ هى التوبولوجى العادى والفضاء (X, τ) هو الفضاء العادى.

بند (٢) : الأساس والأساس الجزئى : (Base and Subbase)

تعريف (١ . ٢ . ٣) : (الأساس Base)

في الفضاء التوبولوجى (X, τ) . العائلة $\mathcal{B} \subseteq \tau$ تسمى أساس (base) للتوبولوجى τ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة هى عبارة عن اتحاد عناصر من العائلة $\mathcal{B}$. أو بمعنى مكافئ يقال أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى τ إذا وفقط إذا كان لكل $p \in U$ حيث $U \in \tau$ يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث يكون $p \in B \subseteq U$.
مثال (٢ . ٢ . ٣) :

في الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$. عائلة الفترات المفتوحة $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in R\}$ تمثل أساس على R لأنه لأى مجموعة مفتوحة U في R ولأى $p \in U$ توجد فترة مفتوحة $(p - \delta, p + \delta) \subseteq U$ بحيث أن $p \in (p - \delta, p + \delta) \subseteq U$.
مثال (٣ . ٢ . ٣) :

العائلة $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ تمثل أساس للتوبولوجى المنفصل D على X .

مثال (٤ . ٢ . ٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجى (X, τ) حيث أن $X = \{a, b, c, d\}$ ،

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\} \text{ فإن } \tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

تمثل أساس للتوبولوجى τ . كذلك المجموعة $\mathcal{B}_2 = \{X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ تمثل أساس للتوبولوجى τ . أما المجموعة $\mathcal{B}_3 = \{X, \{a, b\}\}$ لا تمثل أساس للتوبولوجى

τ لأن : $\{c, d\}$ مجموعة مفتوحة ولا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من B_3 .
ملاحظة : السؤال الذى يطرح نفسه الآن هو ما هى الشروط التى يجب ان تحققها العائلة $B \subseteq P(X)$ لكي تكون أساس لتوبولوجى على X ؟ وقبل الإجابة على هذا السؤال نسوق لك المثال التالى.

مثال (٣ . ٢ . ٥) :

نفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ وأن $B = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \subseteq P(X)$ ولو افترضنا أن هناك توبولوجى τ معرف على X . هل B تمثل أساس لهذا التوبولوجى ؟ ليكن τ توبولوجى معرف على X فهذا يلزم أن يكون $B \subseteq \tau$ ومن ثم فإن $\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau$ إذاً $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \in \tau$. لكن المجموعة المفتوحة $\{b\}$ لا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من B وكذلك X لا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من B .

ملاحظة (٣ . ٢ . ٦) :

مثال (٣ . ٢ . ٥) يجعلنا نستنتج أن اختيار B يجب ان يتوفر فيه الشروط التالية:

- (i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup \{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$
- (ii) $X = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}$

النظرية التالية تعطى الشروط الضرورية والكافية لكي تكون عائلة من المجموعات الجزئية من X تمثل أساس لتوبولوجى ما على X .

نظرية (٣ . ٢ . ٧) :

إذا كانت $\mathcal{B}$ عائلة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X فإن $\mathcal{B}$ أساس لتوبولوجى على X إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

- (i) $X = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}$
- (ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup \{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$

أو بمعنى آخر

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}, p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

البرهان :

أولاً : نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على X :

$$(i) \because X \in \tau \Rightarrow X = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}$$

$$(ii) \text{ If } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1, B_2 \in \tau \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \tau \\ \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup \{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$$

ثانياً : نفرض أن $\mathcal{B}$ عائلة كل المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشرطين (i)، (ii) وأن τ عائلة كل المجموعات الجزئية من X التي يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من $\mathcal{B}$ أي أن : $\tau = \{U \subseteq X : U = \cup B_i, B_i \in \mathcal{B}\}$

سوف نبرهن أن τ تشكل توبولوجي على X وبالتالي $\mathcal{B}$ أساس لهذا التوبولوجي.

$$(01) \text{ من التعريف والخاصية (i) نجد أن } X \in \tau, \phi = \cup \phi, \phi \in \mathcal{B}$$

أي أن ϕ هي اتحاد المجموعات الخالية من $\mathcal{B}$ وعليه يكون : $X, \phi \in \tau$

$$(02) \text{ إذا كان } U_1, U_2 \in \tau \text{ فإن } U_1 = \cup \{B_i : B_i \in \mathcal{B}\},$$

$$U_2 = \cup \{B_j : B_j \in \mathcal{B}\} \text{ ومن ذلك نجد أن :}$$

$$U_1 \cap U_2 = (\cup_i B_i) \cap (\cup_j B_j) = \cup (B_i \cap B_j)$$

ومن الخاصية (ii) $B_i \cap B_j$ عبارة عن اتحاد عناصر من $\mathcal{B}$. وعليه يكون

$$U_1 \cap U_2 = \cup \{B_k : B_k \in \mathcal{B}\} \text{ أي أن } U_1 \cap U_2 \in \tau.$$

$$(03) \text{ نفرض أن } U_i \in \tau \text{ إذاً } U_i = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}, \forall i \text{ وعليه يكون}$$

$$\cup U_i \in \tau \text{ ومنها نحصل على } \cup U_i = \cup [\cup \{B_k : B_k \in \mathcal{B}\}]$$

ملاحظة : التوبولوجي τ المعرف في النظرية السابقة يسمى التوبولوجي المولد بواسطةالأساس $\mathcal{B}$. وهو التوبولوجي الوحيد على X الذي له الأساس $\mathcal{B}$.

وبالتالى من هذه النظرية نستنتج أن :

إذا كانت X مجموعة غير خالية، $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ عائلة من المجموعات الجزئية من X وتحقق الشروط (i) ، (ii) فإن العائلة τ المؤلفة من كل المجموعات الجزئية من X التى تساوى اتحاد عناصر من $\mathcal{B}$ تُعرف توبولوجى وحيد على X تكون $\mathcal{B}$ أساس له. ومن أبسط الأمثلة على ذلك عائلة الفترات المفتوحة في R تحقق الشروط (i) ، (ii) وبالتالي يوجد على R توبولوجى وحيد أساسه هذه العائلة وكل مجموعة مفتوحة فيه هى اتحاد لفترات مفتوحة وبالتالي نحصل على الفضاء العادى.

سوف نتعرض إلى نوعين من التوبولوجى على خط الأعداد الحقيقية يسمى الأول توبولوجى النهاية العليا (upper limit topology) والآخر يسمى توبولوجى النهاية السفلى (lower limit topology). وهذا كما يلى:

مثال (٣ . ٢ . ٨) : نفرض أن

$$(i) \mathcal{B}_1 = \{(a, b] : a, b \in R, a < b\}$$

$$(ii) \mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in R, a < b\}$$

نثبت الآن أن كلا من $\mathcal{B}_1$ ، $\mathcal{B}_2$ أساسين لتوبولوجيين ما على R .

(i) (a) $R = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}_1\}$ لأن لأي عدد حقيقى $x \in R$ يوجد له

مجموعة نصف مفتوحة $(a, b]$ بحيث أن : $x \in (a, b] \subseteq R$.

(b) إذا كانت $(a, b], (c, d] \in \mathcal{B}_1$ فإن

$$(a, b] \cap (c, d] = \begin{cases} \phi & ; \text{if } a < b < c < d \\ (c, b] & ; \text{if } a < c < b < d \\ (a, d] & ; \text{if } c < a < d < b \\ (a, b] & ; \text{if } c < a < b < d \end{cases}$$

أى أن تقاطع عنصرين من $\mathcal{B}_1$ هو عنصر من $\mathcal{B}_1$.

إذاً B_1 أساس لتوبولوجي τ على R . وطبقاً لنظرية (٣ . ٢ . ٧) فإن التوبولوجي τ يحتوي على كل العناصر التي هي عبارة عن اتحاد عناصر من B_1 . إذاً τ توبولوجي على R يسمى توبولوجي النهاية العليا. ويجب أن نلاحظ أن هذا التوبولوجي ليس هو التوبولوجي العادي $\mathcal{U}$ على R بل $\mathcal{U} \subseteq \tau$ لأن أي فترة مفتوحة (a, b) يمكن

$$(a, b) = \bigcup \left\{ \left(a, b - \frac{1}{n} \right] : n \in \mathbb{N} \right\} : B_1$$

والفترات المفتوحة أساس للتوبولوجي $\mathcal{U}$ وبذلك يكون التوبولوجي العادي $\mathcal{U}$ أصغر من توبولوجي النهاية العليا على R .

بالمثل يمكن إثبات أن B_2 هو أساس لتوبولوجي τ على R ويسمى τ توبولوجي النهاية الدنيا.

ملاحظة : يجب أن نلاحظ هنا بأنه على مجموعة الأعداد الحقيقية R يمكن تعريف عديد من التوبولوجيات ولكن عندما نقول التوبولوجي العادي (الحقيقي) نقصد بذلك التوبولوجي $\mathcal{U}$ المعروف في الباب الثاني والذي فيه الفترات المفتوحة هي مجموعات جزئية من المجموعات المفتوحة.

تعريف (٣ . ٢ . ٩) : (الأساس الجزئي Subbase)

نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي. العائلة $S \subseteq \tau$ تسمى أساس جزئي للتوبولوجي τ على X إذا وفقط إذا كانت التقاطعات المنتهية من عناصر S هي أساس للتوبولوجي τ .

مثال (٣ . ٢ . ١٠) :

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ، نعرف التوبولوجي τ على X كما يلي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$$

وبفرض أن $S = \{\{a, c\}, \{a, d\}\}$ بالتالي فإن التقاطعات المنتهية من عناصر S

هي $B = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, X\}$.

(لاحظ أن $X \in \mathcal{B}$ لأنها التقاطعات الخالية من عناصر S)

وحيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ فإن S أساس جزئي للتوبولوجي τ .

نظرية (١١.٢.٣) : بفرض أن $(R, \mathcal{U})$ الفضاء العادي فإن :

$$S = \{(a, \infty), (-\infty, b) : a, b \in R, a < b\}$$

أساس جزئي للتوبولوجي $\mathcal{U}$ لأن : $(a, \infty) \cap (-\infty, b) = (a, b)$

وحيث أن عائلة الفترات المفتوحة تكون أساس للتوبولوجي على R فإن S أساس جزئي.

ملاحظة : أى أساس للفضاء التوبولوجي يكون أساس جزئي ولكن العكس غير صحيح وهذا يتضح من مثال (١١.٢.٣).

مثال (١٢.٢.٣) :

في الفضاء المنفصل (X, D) ، العائلة $S = \{\{a, b\} : a, b \in X\}$. أساس جزئي للتوبولوجي D . ولتوضيح ذلك بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ ، D تأخذ الصورة :

$$D = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

فإن العائلة $S = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ أساس جزئي وذلك لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ التي تشكل أساس للتوبولوجي D .

نظرية (١٣.٢.٣) :

العائلة $S \subseteq P(X)$ تكون أساس جزئي لتوبولوجي وحيد على X .

البرهان :

بفرض أن العائلة $\mathcal{B}$ تتكون عناصرها من التقاطعات المنتهية من عناصر S ومن ثم

فإن المطلوب أثبات أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ .

(i) حيث أن X هي التقاطعات الخالية من عناصر S فإن

$$X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\} \quad (\text{ليس من الضروري أن يكون } X \text{ أحد عناصر } S)$$

(ii) نفرض أن $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ ومن ثم فإن كلاً من U_1, U_2 عبارة عن تقاطع عدد منته من عناصر S وبالتالي فإن $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.

والآن بفرض أن $x \in U_1 \cap U_2$ فإنه يوجد $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ بحيث أن $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ وعليه فإن $\mathcal{B}$ تحقق الشرط (ii).

وبفرض أن S أساساً جزئياً لكل من التوبولوجيين τ, τ^* سوف نثبت ان $\tau = \tau^*$ أي أن التوبولوجي المولد باساس جزئي يكون وحيد.

لذلك نفرض أن $S = \{s_i : i \in I\}$ أساس جزئي لـ τ ، τ^* . نفرض أن

$G \in \tau$. إذاً $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^m S_{n_i})$ ، وحيث أن S أساس جزئي لـ τ^* فإن

$S \subseteq \tau^*$ وعليه فإن $s_{n_i} \in \tau^*$ ومنها $\bigcap_{n_i=1}^m S_{n_i} \in \tau^*$. إذاً

$G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^m S_{n_i}) \in \tau^*$. وعليه نحصل على $\tau^* \subseteq \tau$. وبنفس الطريق يمكن

أثبت أن $\tau \subseteq \tau^*$. إذاً $\tau = \tau^*$.

من هذه النظرية نستطيع القول بأنه إذا كانت $S \subseteq P(X)$ حيث

$X = \bigcup \{s_i : s_i \in S\}$ فإن S تكون أساس جزئي لتوبولوجي وحيد على X .

كذلك $S \cup \{X\}$ أساس جزئي لتوبولوجي وحيد فيه عناصر S مجموعات مفتوحة.

مثال (٣ . ٢ . ١٤) :

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ، ونفرض أن $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

مجموعة جزئية اختيارية من X . إذاً عائله كل التقاطعات لعناصر S هي :

$$\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \phi, X\}$$

وعليه فإن اتحادات عناصر $\mathcal{B}$ تعطى التوبولوجي:

$$\tau = \{X, \phi, \{d\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \\ \{b, d\}, \{a, b, c\}\}$$

مثال (١٥ . ٢ . ٣) :

$$S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}\} , X = \{a, b, c, d\}$$

هل S تشكل أساس جزئي للتوبولوجي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \text{ على } X.$$

الحل :

$$\{a\} \cap \{a\} = \{a\} , \{c\} \cap \{c\} = \{c\}$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} , \{a\} \cap \{c\} = \phi$$

$$\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$$

$$\mathcal{B} = \{X, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\} \text{ إذاً}$$

واضح ان $\mathcal{B}$ تشكل أساس للتوبولوجي τ . إذاً S أساس جزئي للتوبولوجي τ .

نظرية (١٦ . ٢ . ٣) :

إذا كانت $S \subseteq P(X)$ تجمع من المجموعات الجزئية الغير خالية من X فإن

التوبولوجي τ_S المولد بالأساس الجزئي S هو أصغر توبولوجي يحتوي على S .

البرهان :

نفرض أن τ_i تجمع التوبولوجيات التي يحتوي كل منها على S ، $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$.

المطلوب إثبات أن $\tau^* = \tau_S$. واضح أن $\tau^* \subseteq \tau$. نفرض أن $G \in \tau_S$. إذاً

، $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^m S_{n_i})$ ، وحيث أن S أساس جزئي لـ τ_S ، $S_{n_i} \in S$. وحيث أن

$S \subseteq \tau^*$ فإن $S_{n_i} \in \tau^*$. ومن ثم فإن $(\bigcap_{n_i}^m S_{n_i}) \in \tau^*$. وعليه تكون

$G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^m S_{n_i}) \in \tau^*$ ومنها نحصل على $\tau_S \subseteq \tau^*$. إذاً $\tau_S = \bigcap_i \tau_i$.

أى أن التوبولوجى τ_S على X المولد بواسطة S هو تقاطع كل التوبولوجيات على X التى تحتوى S . ومن ثم فإن τ_S هو أصغر توبولوجى يحتوى على S .
مثال (١٧ . ٢ . ٣) :

إذا كانت $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e\}\}$ ، $X = \{a, b, c, d, e\}$ أوجد أصغر توبولوجى على X يحتوى S .

الحل :

واضح أن $B = \{X, \phi, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e\}, \{b\}, \{c\}\}$

أساس لأصغر توبولوجى على τ_S . وبناء على النظرية السابقة حيث

$$\tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \\ \{a, b, c, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, e\}, \{b, e\}\}$$

المثال التالى يوضح أنه كيف يمكن تكوين توبولوجى يحتوى ضمن عناصره مجموعات معلومة (أى التوبولوجى المولد بواسطة عائلته من المجموعات) .

مثال (١٨ . ٢ . ٣) :

بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ، كون التوبولوجى τ على X الذى يحتوى ضمن عناصره المجموعات التالية : $\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}$

الحل :

أولاً : أى توبولوجى على X لابد وأن يحتوى على X, ϕ إذاً $X, \phi \in \tau$. وهذا يحقق الشرط (01) .

ثانياً : حيث أن $\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d\} \in \tau$

فإنه لكى يتحقق الشرط (02) من تعريف التوبولوجى يلزم لذلك أن :

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\} \in \tau$$

$$\{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau$$

$$\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\} \in \tau$$

وبذلك نجد أن

$$\{X, \phi, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, c\}, \{c\}\} \subseteq \tau$$

ولكى يتحقق الشرط (03) من تعريف التوبولوجى يلزم لذلك أن :

$$\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

وأیضا اتحاد بعض المجموعات محققة تلقائيا ولهذا لم نركز عليها مثل :

$$\{c\} \cup \{c, d\} = \{c, d\} \text{ وكلها موجودة .}$$

وبالتالى فإن التوبولوجى المطلوب هو :

$$\tau = \{X, \phi, \{c\}, \{c, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\},$$

$$\{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

مثال (٣ . ٢ . ١٩) :

بفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ ، كون التوبولوجى τ على X ، الذى له أقل رتبة

ممكنه المولد بواسطة العائلة : $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}\}$

أى عناصر $\mathcal{A}$ ضمن عناصر τ .

الحل :

أولا : أى توبولوجى على X لابد وأن يحتوى على X, ϕ إذا $X, \phi \in \tau$.

ثانيا : التقاطعات المحدودة لعناصر A هى :

$$\{a, b\} \cap \{b, d\} = \{b\} \in \tau$$

$$\{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau$$

$$\{b, d\} \cap \{a, c, d\} = \{d\} \in \tau$$

إذا $\mathcal{B} = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}\} \subseteq \tau$

ثالثا : اتحادات عناصر $\mathcal{B}$ هى :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \\ \{b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}\}$$

مثال (٢٠.٢.٣) :

عين التوبولوجي τ على R المولد بواسطة كل الفترات المغلقة $[a, a+1]$ حيث $a \in R$ التي طولها يساوي الواحد.

الحل :

بفرض أن $p \in R$ فإن $[p-1, p] \cap [p, p+1] = \{p\}$

وحيث أن $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in R\}$ أساس للتوبولوجي τ فإن τ يتطابق مع التوبولوجي المنفصل D على R .

تعريف (٢١.٢.٣) : (الأساس المحلي Local base)

نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي . عائلة كل المجموعات المفتوحة $\mathcal{B}_p$ والتي تحتوي p تسمى أساس محلي عند النقطة p إذا وفقط إذا كان :

$$\forall U \in \tau, p \in U \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_p, p \in B \subseteq U$$

أو إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{B}_p$ هي أصغر مجموعة مفتوحة تحتوي p .

مثال (٢٢.٢.٣) :

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ، نعرف التوبولوجي τ على X كما يلي :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{B}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \quad \mathcal{B}_b = \{\{a, b\}\}, \quad \text{فإن}$$

$$\mathcal{B}_c = \{\{a, b, c\}\}$$

نظرية (٢٣.٢.٣) :

إذا كانت $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على X وأن $p \in X$ فإن كل عناصر الأساس

التي تحتوي p تكون أساس محلي عند النقطة p أي أن : $\mathcal{B}_p = \{B : p \in B\}$

أساس محلي عند p .

البرهان :

بفرض أن U مجموعة مفتوحة ، $p \in U$ حيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث أن $p \in B \subseteq U$. إذاً $B \in \mathcal{B}_p$ بحيث أن $p \in B \subseteq U$ وعليه يكون $\mathcal{B}_p$ أساس محلي عند p .

نظرية (٢٤ . ٢ . ٣) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي ، $p \in X$ فإن النقطة p تكون نقطة نهاية للمجموعة $A \subseteq X$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر الأساس المحلي عند p يحتوي على الأقل عنصر من A يختلف عن p ، أي أن

$$p \in A' \Leftrightarrow (B - \{p\}) \cap A \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_p.$$

البرهان : $(\Rightarrow)$

نفرض أن $p \in A'$ إذاً $p \in U$ ، $\forall U \in \tau$ ، $(U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ ، وبما أن $\mathcal{B}_p \subseteq \tau$ إذاً $(B - \{p\}) \cap A \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_p$.

$(\Leftarrow)$ نفرض أن $(B - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ لكل $B \in \mathcal{B}_p$

وأن U مجموعة مفتوحة تحتوي p وحيث أن $\mathcal{B}_p$ أساس محلي عند p فإنه توجد مجموعة $B \in \mathcal{B}_p$ بحيث يكون $p \in B \subseteq U$. إذاً

$p \in A'$ ، وعليه تكون $p \in A'$ ، $(U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, p \in U$.

مثال (٢٥ . ٢ . ٣) :

نعتبر توبولوجي النهايه السفلى τ على R حيث $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in R\}$ أساس لهذا التوبولوجي وبفرض أن $A = (0, 1)$ فإن المجموعة $U = [1, 2)$ من عناصر الأساس تحتوي على العنصر واحد وتحقق أن $U \cap A = \emptyset$ وعليه فإن

ولكن $1 \notin A'$ ولكن $0 \in A'$ لأن أى عنصر من عناصر الأساس $B = [a, b)$ حيث $0 \in B$ فإن $a \leq 0 < b$ وعليه فإن $(B - \{0\}) \cap A \neq \emptyset$.
تعريف (٢٦ . ٢ . ٣) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى ، يقال أن :

(١) X يتمتع بقابلية العد الأولى (first countable) إذا وفقط إذا كان للفضاء X أساس محلى قابل للعد لكل نقطة $p \in X$.

(٢) X يتمتع بقابلية العد الثانية (second countable) إذا وفقط إذا كانت X لها أساس قابل للعد.

(٣) X فضاء منفصلاً (separable space) إذا وفقط إذا كانت X لها مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد (countable dense).

مثال (٢٧ . ٢ . ٢) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$ يتمتع بقابلية العد الأولى وذلك لأنه لأى

$$p \in R \text{ فإن العائلة } : \mathcal{B}_p = \left\{ \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

أساس محلى قابل للعد عند النقطة p .

مثال (٢٨ . ٢ . ٢) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$ يتمتع بقابلية العد الثانية وذلك لأن عائلة المجموعات المفتوحة (a, b) حيث $a, b \in R$ تشكل أساس قابل للعد.

مثال (٢٩ . ٢ . ٣) :

لتكن X مجموعة غير قابلة للعد ، (X, D) الفضاء المنفصل فإن X يتمتع بقابلية العد الأولى ولا يتمتع بقابلية العد الثانية.

مثال (٣٠ . ٢ . ٣) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$ هو فضاء منفصلاً وذلك لاحتوائه على

المجموعة الكثيفة Q القابلة للعد.

نظرية (٣١ . ٢ . ٣) :

إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإنه يتمتع بقابلية العد الأولى ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح .

البرهان :

أولاً : نفرض أن X فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية ، $p \in X$. إذاً

$B_p = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ أساس محلي عند p حيث $\mathcal{B}$ أساس . وحيث أن $\mathcal{B}$

قابل للعد فإن B_p قابل للعد أيضاً . إذاً X لها أساس محلي قابل للعد ومن ثم فإن X فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى .

ثانياً : نبين أنه إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الأولى فإن X لا يتمتع بقابلية العد الثانية بالمثال التالي :

بفرض أن X مجموعة غير قابلة للعد ، (X, D) هو الفضاء المنفصل فإن :

$\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ هو أصغر أساس للتوبولوجي D وحيث أن $\mathcal{B}$ غير قابله

للعد فإن X لا يتمتع بقابلية العد الثانية في حين أن X يتمتع بقابلية العد الأولى لأنه :

$\forall p \in X \Rightarrow B_p = \{\{p\}\}$ أساس محلي قابل للعد عند p .

نظرية (٣٢ . ٢ . ٣) :

إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإن X منفصلاً (Separable) .

البرهان :

أولاً : بفرض أن X يتمتع بقابلية العد الثانية فإن X لها أساس $\mathcal{B}$ قابل للعد .

نفرض المجموعة $A = \{p \in B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$

وحيث أن $\mathcal{B}$ قابل للعد فإن A قابله للعد . والمطلوب أثبات أن A كثيفة في X

أي أن $\overline{A} = X$ ؟

نفرض $p \in X, U \in \tau, p \in U$ إذا يوجد $B_i \in \mathcal{B}$ بحيث أن $p \in B_i \subseteq U$ وعليه فإن $A \cap B_i \subseteq A \cap U$ ومنها نحصل على $U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \tau, p \in U$ إذاً $p \in \bar{A}$ وعليه يكون $X \subseteq \bar{A}$. ولكن $\bar{A} \subseteq X$ ومن ثم فإن $\bar{A} = X$. إذاً A كثيفة وحيث أن A قابله للعد فإن A كثيفة و قابله للعد وعليه فإن X فضاء منفصلاً.

ثانياً : في المثال التالي سوف نوضح أن الفضاء X منفصلاً ولكن لا يتمتع بقابلية العد الثانية :

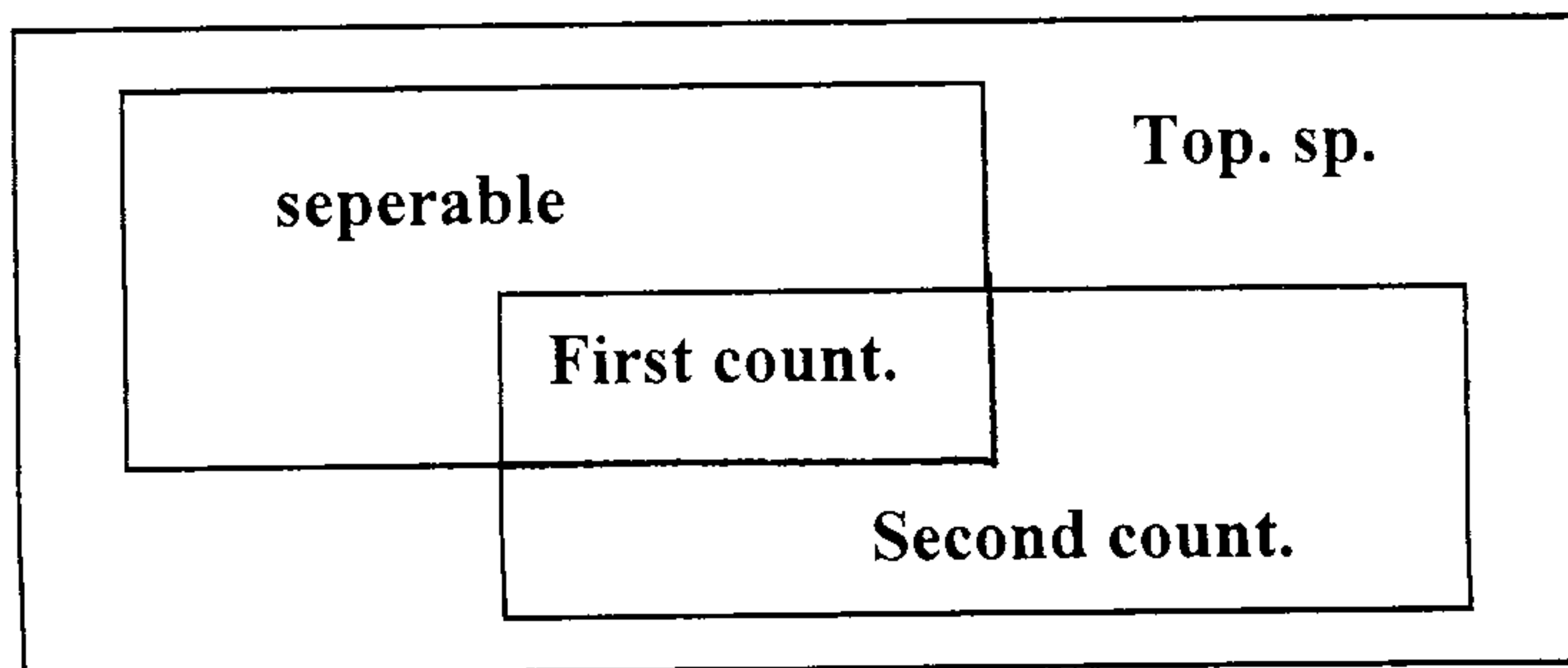
بفرض أن X غير قابله للعد، (X, P_p) فضاء النقطة المختارة حيث

$$P_p = \{\emptyset, U \subseteq X : p \in U\}$$

$$\mathcal{B} = \{\{p\}, \{p, q\} : q \in X\} \quad \text{إذاً}$$

أساس للتوبولوجي P_p وهو أصغر أساس للتوبولوجي P_p . إذاً $\mathcal{B}$ أساس غير قابل للعد لأن X غير قابله للعد. إذاً X لا يتمتع بقابلية العد الثانية في حين أن : $A = \{p\}$ تعطى $\bar{A} = X$. وعليه فإن X لها مجموعة كثيفة قابلة للعد أى أن X فضاء منفصلاً.

من الأمثلة السابقة يمكن رسم الشكل التوضيحي الآتي :



بند ٣ : التوبولوجي النسبي والفضاءات الجزئية :

(The Relative Topology and Subspaces)

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي ، A مجموعة جزئية فعلية من X . نعرف عائلة كل المجموعات الجزئية من A الناتجة من تقاطع كل المجموعات المفتوحة في X مع المجموعة A ويرمز لها بالرمز τ_A أي أن $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ وهذا يعني أن $V \in \tau_A \Leftrightarrow \exists U \in \tau, V = U \cap A$ النظرية التالية تبرهن أن τ_A تمثل توبولوجي على A .

نظرية (٣ . ٣ . ١) :

نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) ، A مجموعة جزئية غير خالية من X .
العائلة $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ تمثل توبولوجي على المجموعة A .
البرهان :

(01) بما أن $X, \phi \in \tau$ إذاً $X \cap A = A \in \tau_A$ ، $\phi \cap A = \phi \in \tau_A$ ،
وعليه فإن $X, \phi \in \tau_A$.

(02) نفرض $V_1, V_2 \in \tau_A$ إذاً يوجد $U_1, U_2 \in \tau$ بحيث
 $V_1 = U_1 \cap A$ ، $V_2 = U_2 \cap A$ وعليه فإن

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \cap A \in \tau_A$$

لأن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض $\{V_i : i \in I\} \subseteq \tau_A$. إذاً يوجد $U_i \in \tau$ ،
وعليه فإن $V_i = U_i \cap A$

$$(\bigcup_i U_i \in \tau \text{ لأن } \bigcup_i V_i = \bigcup_i (U_i \cap A) = (\bigcup_i U_i) \cap A \in \tau_A .$$

إذاً τ تشكل توبولوجي على A .

تعريف (٣.٣.٢) :

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن التوبولوجي τ_A المعرف على المجموعة A يسمى التوبولوجي النسبي (relative topology) ويسمى الفضاء بالفضاء الجزئي Subspace .

مثال (٣.٣.٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) حيث $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

أوجد τ_C ، τ_B ، τ_A

حيث $C = \{a\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ ، $A = \{a, d\}$

الحل :

$$\begin{aligned} \tau_A = \{X \cap A, \phi \cap A, \{a\} \cap A, \{c, d\} \cap A, \\ \{a, c, d\} \cap A, \{b, c, d, e\} \cap A\} \end{aligned}$$

$$= \{A, \phi, \{a\}, \{d\}\}$$

$$\tau_B = \{B, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$\tau_C = \{C, \phi\}.$$

ملاحظة (٣.٣.٤) :

(١) في المثال السابق يلاحظ أن τ_A هو التوبولوجي المنفصل ، τ_C هو التوبولوجي الغير منفصل بالرغم من أن τ ليس توبولوجي منفصل أو غير منفصل على X . ونلاحظ أيضا أنه يمكن إيجاد $V \in \tau_A$ ولكن $V \notin \tau$. أي هناك مجموعات مفتوحة في A وليست مفتوحة في X .

(٢) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي (X, τ) فإن (A, τ_A) يسمى فضاء جزئي مفتوح.

مثال (٣.٣.٥) :

أى فضاء جزئى من الفضاء المنفصل (غير المنفصل) يكون أيضا فضاء منفصل (غير المنفصل).

مثال (٣.٣.٦) :

في الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$ إذا كانت $A = [3, 8]$ فإن $A \cap (1, 5) = [3, 5)$ أى أن $[3, 5) \in \tau_A$ ومن ثم فإن $[3, 5)$ مجموعة مفتوحة بالنسبة إلى A ولكنها ليست مفتوحة بالنسبة إلى R .

مثال (٣.٣.٧) :

إذا كانت X مجموعة غير منتهية ، $C = \{\phi, U \subseteq X : U^c \text{ finite}\}$ ولتكن $A \neq \phi$ مجموعة جزئية منتهية من X . أوجد τ_A .

الحل :

لتكن p نقطة اختيارية من A فإن المجموعة $X - \{A - \{p\}\}$ مفتوحة في X وتقاطعها مع المجموعة A يساوى المجموعة $\{p\}$ أى أن

$$\{p\} = A \cap (X - \{A - \{p\}\})$$

ومن ثم فإن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئى A وحيث أن p اختيارية فإن الفضاء الجزئى المعروف على A هو الفضاء المنفصل.

مثال (٣.٣.٨) :

في الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$. صف التوبولوجى النسبى $\mathcal{U}_N$ حيث N مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل :

لكل $n \in N$ فإن $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ فترة مفتوحة تحوى n ،

$$N \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) = \{n\}.$$

لذلك فإن كل مجموعة $\{n\}$ تحتوي على عدد طبيعي هي مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي $(N, \mathcal{U}_N)$ وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية من N هي مجموعة مفتوحة. وعليه يكون $\mathcal{U}_N$ هو التوبولوجي المنفصل على N .

نظرية (٩.٣.٣) :

إذا كان (A, τ_A) فضاء جزئي من الفضاء (X, τ) فإن المجموعة الجزئية E من A تكون مغلقة في الفضاء الجزئي إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي بحيث يكون $E = A \cap F$.

البرهان :

نفرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (A, τ_A) فإن E^c مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي وبالتالي من تعريف الفضاء الجزئي توجد مجموعة مفتوحة U في الفضاء الكلي بحيث يكون : $E^c = U \cap A = A - E$.

$$E = A - (A \cap U) = A \cap (A \cap U)^c = A \cap U^c \quad \text{إذاً}$$

وبوضع $U^c = F$ فهي مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإنه توجد مجموعة مغلقة F بحيث أن $E = A \cap F$.

والعكس ، لنفرض أنه توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث يكون $E = A \cap F$ ونحاول أثبات أن E مغلقة في A أي E^c مفتوحة في A .

$$E^c = A - E = A - (A \cap F)$$

$$\therefore E^c = A \cap (A \cap F)^c = A \cap (A^c \cup F^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap F^c) = A \cap F^c$$

وبالتالي فإن المجموعة E^c مفتوحة في الفضاء الجزئي A .

نتيجة (٣.٣.١٠) :

إذا كانت A مجموعة جزئية مفتوحة (مغلقة) وغير خالية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن المجموعة B من الفضاء التوبولوجي الجزئي (A, τ_A) تكون مفتوحة (مغلقة) إذا وفقط إذا كانت B مفتوحة في الفضاء الكلي (X, τ) .

نظرية (٣.٣.١١) :

ليكن (A, τ_A) فضاء جزئي من الفضاء الكلي (X, τ) ، N مجموعة جزئية من A فإن : $N \in (N_x)_A \Leftrightarrow \exists V \in N_x, N = A \cap V$
 أى تكون N جوار للنقطة x في الفضاء الجزئي إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x في الفضاء الكلي بحيث يكون $N = A \cap V$.

البرهان :

 $(\Rightarrow)$

نفرض $N \in (N_x)_A$. إذاً يوجد $H \in \tau_A$ ، $x \in H \subseteq N$ وعليه يوجد $G \in \tau$ بحيث $H = A \cap G$ إذاً $V = G \cup N \in N_x$ جوار للنقطة x في الفضاء الكلي.

والآن

$$\begin{aligned} V \cap A &= (G \cup N) \cap A = (G \cap A) \cup (N \cap A) \\ &= H \cup N = N \end{aligned}$$

إذاً يوجد جوار V للنقطة x في الفضاء الكلي بحيث أن $N = V \cap A$.

 $(\Leftarrow)$

لتكن N مجموعة جزئية من الفضاء الجزئي (A, τ_A) ، V جوار للنقطة x في الفضاء الكلي (X, τ) بحيث أن $N = A \cap V$.

وعليه يوجد $G \in \tau$ ، $x \in G \subseteq V$ إذاً $x \in (G \cap A) \subseteq (V \cap A) \subseteq V$ ،

ومن ثم فإن $N \in (N_x)_A$.

نظرية (٣.٣.١٢) :

إذا كان (A, τ_A) فضاء جزئى من الفضاء الكلى (X, τ) . إذا كانت $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ أساس للفضاء الكلى فإن $\mathcal{B}^* = \{B_i \cap A\}_{i \in I}$ تشكل أساس للفضاء الجزئى.

البرهان :

بفرض أن $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ أساس للتوبولوجى τ . إذاً

$$\forall U \in \tau, p \in U \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}, p \in B_{i_0} \subseteq U$$

ومن تعريف الفضاء الجزئى ، تكون المجموعات $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ مفتوحة في الفضاء الجزئى وإذا كانت $p \in A$ فإن $p \in B_{i_0} \cap A \subseteq U \cap A$:

وحيث أن $U \cap A \in \tau_A$ فإن $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ تشكل أساس للفضاء الجزئى.

والسؤال الذى يطرح نفسه الآن ما هى العلاقة بين نقاط النهاية والنقاط الداخلية وعلاقة المجموعة في كل من الفضاءين الكلى والجزئى. سوف نرمز بـ $A_Y', A_Y^o, \bar{A}_Y$ لمشتقة ، داخلية ، وعلاقة المجموعة A في الفضاء الجزئى .

نظرية (٣.٣.١٣) :

بفرض أن (Y, τ_Y) فضاء جزئى من الفضاء (X, τ) . إذا كانت $A \subseteq Y$ فإن:

$$(i) A_Y' = A' \cap Y$$

$$(ii) A^o = A_Y^o \cap Y^o, A^o \cap Y \subseteq A_Y^o$$

$$(iii) \bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$$

البرهان :

(i) نفرض $x \in A_Y'$. إذاً لكل $U \in \tau_Y, x \in U, U \cap A \neq \emptyset$ ،

إذاً يوجد $W \in \tau, U = W \cap Y, x \in U$ ، إذاً لأى $W \in \tau$ بحيث

يكون $x \in W$ سوف نجد أن $W \cap Y \neq \emptyset$ وبذلك نحصل على

$$A'_Y \subseteq A' \text{ وعليه فإن } x \in A' \text{ إذا } (W \cap Y) \cap A = W \cap A \neq \emptyset$$

ولبرهان العلاقة العكسية ، نفرض $x \in A'$. إذا يوجد $U \in \tau$ ، $x \in U$ ،

$U \cap A \neq \emptyset$. واضح أن $W = U \cap Y \in \tau_Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء

الجزئي والتي تحتوى على x وعليه فإن

$$W \cap A = (U \cap Y) \cap A = Y \cap (U \cap A) \neq \emptyset$$

$$\text{إذا } x \in A_Y' \text{ وعليه فإن } A' \subseteq A_Y' \text{ إذا } A_Y' = A' \cap Y$$

(ii) نفرض $p \in A^o$. إذا يوجد $H \in \tau$ بحيث $p \in H \subseteq A \subseteq Y$

إذا $p \in Y^o$ ، $p \in Y \cap A \subseteq A$. وعليه فإن $p \in A_Y^o$ ، $p \in Y^o$. إذا

$$A^o \subseteq A_Y^o \cap Y^o \text{ إذا } p \in Y^o \cap A_Y^o$$

والآن نفرض أن $x \in A_Y^o \cap Y^o$. إذا يوجد $H_1, H_2 \in \tau$ بحيث أن

$x \in H_2 \subseteq Y$ ، $x \in Y \cap H_1 \subseteq A$. إذا $x \in H_1 \cap H_2 \subseteq A$ وعليه فإن

$x \in A^o$. إذا $A_Y^o \cap Y^o \subseteq A^o$. وعليه نحصل على $A^o = A_Y^o \cap Y^o$.

والجزء الآخر واضح من كون أن $A^o \cap Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي

ومحتواة في المجموعة A .

$$\overline{A_Y} = A_Y' \cup A = (A' \cap Y) \cup A , \quad A \subseteq Y \quad (iii)$$

$$= (A' \cap Y) \cup (A \cap Y) = (A' \cap A) \cup Y = \overline{A} \cap Y$$

مثال (٣.٣.١٤) :

(١) بين أنه إذا كانت $A' = \emptyset$ في الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن τ_A هو

التوبولوجي المنفصل.

الحل :

لكى نثبت أن τ_A هو الفضاء المنفصل يجب أن نبين أن كل مجموعة جزئية من A تكون مغلقة.

إذا كانت $B \subseteq A$ فإن $B' \subseteq A'$ وعليه يكون $B' \subseteq \phi$ (لأن $A' = \phi$)
إذاً B مغلقة في X . وحيث أن $A \cap B = B$ مغلقة في A . إذاً B مغلقة في A .
(٢) بين أنه إذا كانت $\bar{A} \cap B = \phi$ فإن A مغلقة في $A \cup B$ حيث A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجي (X, τ) .

الحل :

بما أن $\bar{A}$ مغلقة في X . إذاً $\bar{A} \cap (A \cup B)$ مغلقة في $A \cup B$
ولكن $\bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup \phi = A$
إذاً A مغلقة في $A \cup B$.

(٣) بفرض أن A, B مجموعتين جزئيتين من X . بين أن U مجموعة مفتوحة في $A \cup B$ إذا وفقط إذا كانت $U \cap A$ مفتوحة في A ، $U \cap B$ مفتوحة في B .

الحل :

($\Rightarrow$)

بما أن $U \in \tau_{A \cup B}$. إذاً يوجد $V \in \tau$ بحيث أن $U = V \cap (A \cup B)$
إذاً $U \cap A = V \cap (A \cup B) \cap A = V \cap A$
بما أن $U \in \tau$. إذاً $V \cap A \in \tau_A$. إذاً $U \cap A \in \tau_A$
وبطريقة مشابهة يمكن إثبات أن $U \cap B \in \tau_B$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} \tau_{A \cup B} &= \{V \cap (A \cup B) : V \in \tau\}, \\ \tau_{(A \cup B)_A} &= \{V \cap (A \cup B) \cap A : V \in \tau\}, \\ &= \{V \cap A : V \in \tau\} = \tau_A \end{aligned}$$

بالمثل $\tau_{(A \cup B)_B} = \tau_B$. بما أن $U \cap A \in \tau_A, U \cap B \in \tau_B$.

إذاً $U \cap A \in \tau_{(A \cup B)_A}, U \cap B \in \tau_{(A \cup B)_B}$

إذاً يوجد $W \in \tau_{A \cup B}$ بحيث أن $W \cap A = U \cap A, W \cap B = U \cap B$.

إذاً $(W \cap A) \cup (W \cap B) = (U \cap A) \cup (U \cap B)$

وعليه فإن $W \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B)$

وبما أن $U, W \subseteq A \cup B$. إذاً $U = W, U \in \tau_{A \cup B}$

إذاً $U \in \tau_{A \cup B}$

تمارين عامة على الباب الثالث

- (١) إذا كانت $X = \{a, b, c, d\}$. برهن أن
- $$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
- تشكل توبولوجي على X ثم أوجد N_b, N_a .
- (٢) برهن أنه إذا كانت (Y, τ_Y) فضاء جزئي من فضاء الكلي فإن $\tau_Y \subseteq \tau$ إذا وفقط إذا كان $Y \in \tau$.
- (٣) إذا كانت $Z \subseteq Y \subseteq X$. برهن أن $\tau_Z \subseteq (\tau_Y)_Z$.
- (٤) إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ ،
- $$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$
- بين أن $S = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ أساس جزئي للتوبولوجي τ .
- (٥) لتكن X مجموعة مرتبة كلياً وغير خالية، $B = \{[a, \infty) : a \in X\}$
- (i) برهن أن B أساس لتوبولوجي على X .
- (ii) برهن أن $\overline{\{x\}} = (-\infty, x]$
- (٦) برهن أن قابلية الانفصال هي خاصية توبولوجية.
- (٧) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هي خاصية وراثية.
- (٨) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الثانية هي خاصية توبولوجية.
- (٩) بين أن عائلة الفترات
- $$S = \{(a, 1], (0, b) : 0 < a, b < 1\}$$
- هي أساس جزئي للتوبولوجي العادي المعرف على الفترة $I = [0, 1]$.
- (١٠) إذا كان (X, D) هو الفضاء المنفصل حيث $X = \{a, b, c, d, e\}$.
- أوجد الأساس الجزئي S بحيث لا تحتوي S على المجموعات وحيدة العنصر.

(١١) برهن أن النقطة p هي نقطة تراكم للمجموعة الجزئية A من الفضاء (X, τ) إذا وفقط إذا كان كل عنصر من الأساس المحلي B_p عند p يحتوى على نقاط من A تختلف عن p .

(١٢) بين أن كل نقطة p في الفضاء المنفصل لها أساس محلي منتهى.

(١٣) بين أن التوبولوجى τ المعرف على المجموعة X يكون منتهى إذا وفقط إذا كانت τ لها أساس منتهى.

(١٤) بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$

أوجد التوبولوجى المولد بالعائلة $\{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$.

(١٥) بفرض أن X هو فضاء المكملات المنتهية. بين أن كل جوار للنقطة $p \in X$ هو مجموعة مفتوحة.

(١٦) بين أنه إذا كانت N_p منتهية فإن $\bigcap \{N : N \in N_p\} \in N_p$

(١٧) بفرض أن X مجموعة غير خالية، لكل $p \in X$ نفرض أن $\mathcal{A}_p$ هي عائلة المجموعات الجزئية من X التى تحتوى p .

(i) بين أن $\mathcal{A}_p$ تحقق مسلمات الجوار. (ii) عين التوبولوجى المولد بالعائلة $\mathcal{A}_p$.

(١٨) بفرض الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$. أى من المجموعات التالية :

$$(0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, 1]$$

تكون مجموعات مفتوحة في الفضاء الجزئى $([0, 1], \mathcal{U})$.

(١٩) لتكن N هي مجموعة الأعداد الطبيعية ، لأى A مجموعة جزئية يكون لدينا المجموعة A^* المعرفة بالصورة :

$$A^* = \begin{cases} \{n \in N : n \geq \min \{x : x \in A\}\} & , \text{ if } A \neq \phi \\ \phi & , \text{ if } A = \phi \end{cases}$$

ثبت أنه يوجد توبولوجى وحيد على N يحقق أن $A^* = \overline{A}$.

(٢٠) لتكن X مجموعة غير خالية، $\delta \subseteq P(X) \times P(X)$ علاقة ثنائية على X تحقق الشروط التالية :

$$(P_1) (A, B) \in \delta \Rightarrow A \neq \phi \text{ \& } B \neq \phi$$

$$(P_2) (A, B) \in \delta \Rightarrow (B, A) \in \delta$$

$$(P_3) \text{ If } A \cap B \neq \phi \Rightarrow (A, B) \in \delta$$

$$(P_4) (A \cup B, C) \in \delta \Rightarrow (A, C) \in \delta \text{ \& } (B, C) \in \delta$$

$$(P_5) \text{ If } (A, B) \notin \delta \Rightarrow \exists D \subseteq X : (A, D) \notin \delta \text{ \& } (D^c, B) \notin \delta$$

فإن δ تسمى علاقة قرب (proximity relation) على X ، الزوج (X, δ) يسمى فضاء القرب (proximity space).

(أ) بين أن الدالة $A \rightarrow \bar{A}$ حيث $\bar{A} = \cap \{B^c : (B, A) \notin \delta\}$ تحقق شروط مؤثر الأغلاق.

(ب) بين أن العائلة : $\tau_\delta = \{A \subseteq X : A^c = \bar{A}^c\}$ تشكل توبولوجى على X .

(ج) بين أن العائلة : $A^o = \{B : B \subseteq A, A \in \tau_\delta\}$ تحقق شروط المؤثر الداخلى.

(د) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى. بين أن العلاقة δ المعرفة بالصورة :

$$(A, B) \in \delta \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \phi$$

هى علاقة قرب على X .

(هـ) الدالة $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \eta)$ تكون متصلة بالنسبة إلى δ, η إذا وفقط إذا كانت :

$$(A, B) \in \delta \Rightarrow (f(A), f(B)) \in \eta ; \forall A, B \subseteq X$$

$$\text{or } (f^{-1}(C), f^{-1}(D)) \in \delta \Rightarrow (C, D) \in \eta ; \forall C, D \subseteq Y$$

بين أن f تكون متصلة بالنسبة إلى τ_δ, τ_η إذا كانت f متصلة بالنسبة إلى δ, η .

(٢١) لتكن $(X, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً . يسمى التوبولوجى τ المولد بالأساس الجزئى :

$$S = \{(\leftarrow, a), (b, \rightarrow) : a, b \in X, a \leq b\}$$

حيث $(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}, (b, \rightarrow) = \{x \in X : x > b\}$

بالتوبولوجى المرتب (order topology) على X والزوج (X, τ) بالفضاء التوبولوجى المرتب.

(i) أوجد أساس للتوبولوجى المرتب.

(ii) إذا كانت $X = R$. بين أن التوبولوجى المرتب τ على X يطابق التوبولوجى العادى.

(iii) إذا كانت $X = Z$. بين أن التوبولوجى المرتب τ على X يطابق التوبولوجى المنفصل.

(iv) إذا كانت أى مجموعة جزئية من X محدودة من أعلى بحيث أن أصغر حد على supremum لها ينتمى إلى X تسمى شبكة (lattice). بين أن أى مجموعة جزئية U من الشبكة X تكون مفتوحة في الفضاء التوبولوجى المرتب إذا وفقط إذا كانت U هى اتحاد فترات مفتوحة غير متقاطعة مثنى مثنى.

(٢٢) لتكن X مجموعة غير خالية العائلة $\mathcal{U} \subseteq P(X \times X)$ تسمى منتظمة (uniformity) على X إذا توفرت الشروط التالية :

$$(U1) \text{ If } \Delta \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{U}$$

$$(U2) U \subseteq V, U \in \mathcal{U} \Rightarrow V \in \mathcal{U}$$

$$(U3) U, V \in \mathcal{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$$

$$(U4) U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subseteq U$$

حيث $V \circ U = \{(x, y) : \exists z \in X, (x, z) \in U, (z, y) \in V\}$

$$(U5) U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$$

حيث $(x, y) \in U^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in U$

في هذه الحالة الزوج $(X, \mathcal{U})$ يسمى الفضاء المنتظم (uniform space).
(i) أثبت أن العائلة :

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{A \subseteq X : \exists U \in \mathcal{U}, \forall x \in X, U[x] \subseteq A\}$$

$$U[x] = \{y \in X : (y, x) \in U\} \quad \text{حيث}$$

تشكل توبولوجي على X .

(ii) أثبت أن

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall (U \in \mathcal{U} \rightarrow x \in U[A])$$

$$U[A] = \{x \in X : \exists y \in A, (y, x) \in U\} \quad \text{حيث}$$

(٢٣) برهن أنه إذا كان (X, τ) فضاء منفصلاً ويتمتع بقابلية العد الأولى فإن أي مجموعة جزئية وكثيفة منه تشكل فضاء جزئي منفصل.

(٢٤) لتكن $X = [0, 1]$ ، τ هو التوبولوجي على X الذي له أساسه الجزئي :

$$\mathcal{S} = \{[a, b[: a < b \leq 1, 0 \leq a < 1\}$$

أثبت أن :

(i) X يتمتع بقابلية العد الأولى .

(ii) X فضاء منفصل .

(iii) X لا يتمتع بقابلية العد الثانية .

(٢٥) إذا كان (X, P) هو فضاء النقطة المختارة ، $A \subseteq X$ بين أن (A, τ_A) هو

فضاء النقطة المختارة إذا كانت $p \in A$. صف التوبولوجي النسبي إذا كانت $p \notin A$.

الباب الرابع

الدوال المتصلة و التماثل التوبولوجي

Continuous Functions and Topological
Equivalent

مجموعة

المرحلة

الباب الرابع

الدوال المتصلة و التكافؤ التوبولوجي

Continuous Functions and Topological Equivalent

مقدمة : أن اتصال الدوال يلعب دوراً مهماً في التحليل الرياضي والتوبولوجي وفي العديد من فروع الرياضيات. أن مفهوم الدوال المتصلة (في الفضاءات الأقليدية) يعتمد على مفهوم الدوال المترية. في هذا الباب سنحاول إعطاء التعريف الأساسي لمفهوم الدالة المتصلة من فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر مع دراسة العديد من التكافؤات لتعريف الاتصال. أيضاً تعرضنا لمفهوم الدوال المفتوحة والدوال المغلقة وبعض الأمثلة. وأخيراً قدمنا مفهوم التشاكل (التكافؤ التوبولوجي) للفضاءات التوبولوجية.

بند (١) : الدوال المتصلة : (Continuous Functions)

تعريف (١.١.٤) :

بفرض أن (X, τ) ، (Y, τ^*) فضاءين توبولوجيين. يقال أن الدالة $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X أي أن

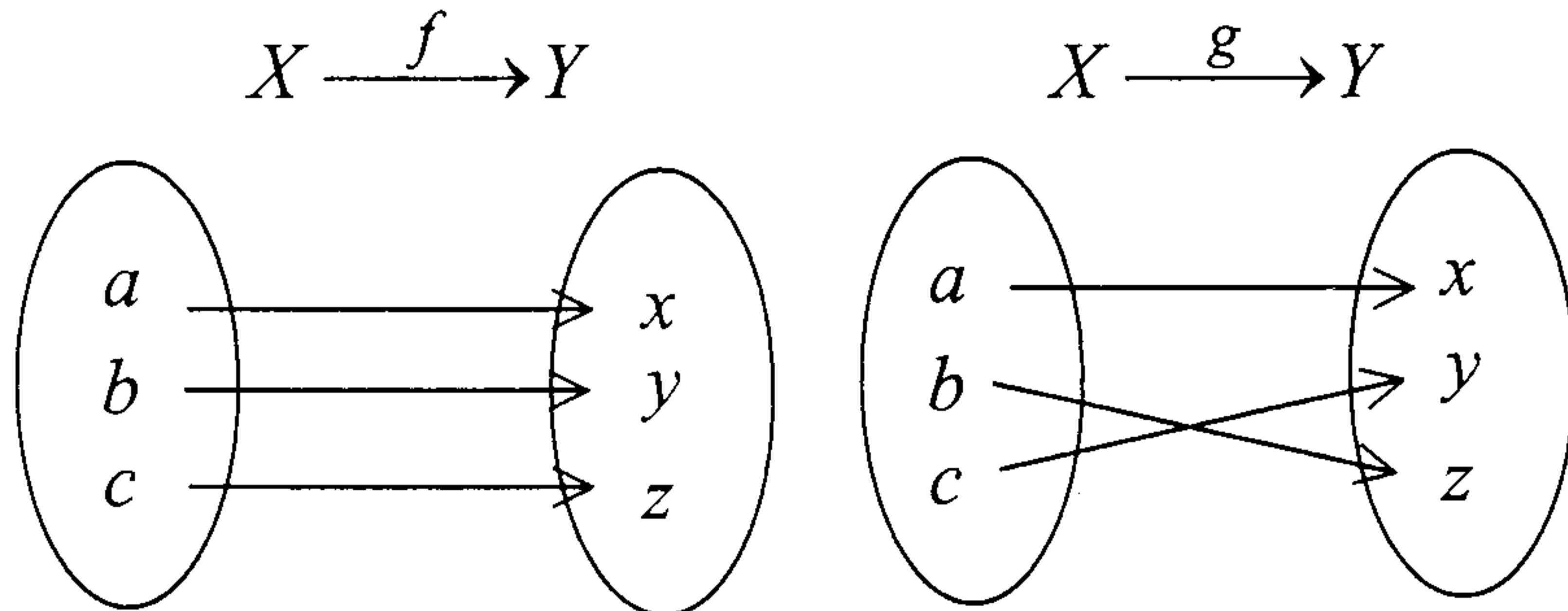
$$\forall V \in \tau^* \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau$$

مثال (٢.١.٤) :

نفرض $X = \{a, b, c\}$ ، $Y = \{x, y, z\}$. ونفرض

$$\tau_Y = \{Y, \phi, \{x\}, \{x, y\}\} , \quad \tau_X = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$$

ونفرض الدوال $f, g: X \rightarrow Y$ المعرفة بالصورة :



نجد أن f دالة متصلة لأن :

$$f^{-1}(Y) = X \in \tau_X, f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau_X,$$

$$f^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in \tau_X, f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b\} \in \tau_X$$

$$g^{-1}(\{x, y\}) = \{a, c\} \notin \tau_X \quad \text{لكن } g \text{ ليست متصلة لأن :}$$

مثال (٤ . ١ . ٣) :

لتكن $f: (X, D) \rightarrow (Y, \tau)$ فإن f دالة متصلة لأنه إذا فرضنا أن

$$V \in \tau \quad \text{فإن } f^{-1}(V) \subseteq X \text{ وعليه فإن } f^{-1}(V) \in D. \text{ إذاً } f^{-1}(V)$$

مفتوحة في X .

مثال (٤ . ١ . ٤) :

ليكن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, I)$ فإن f دالة متصلة لأن :

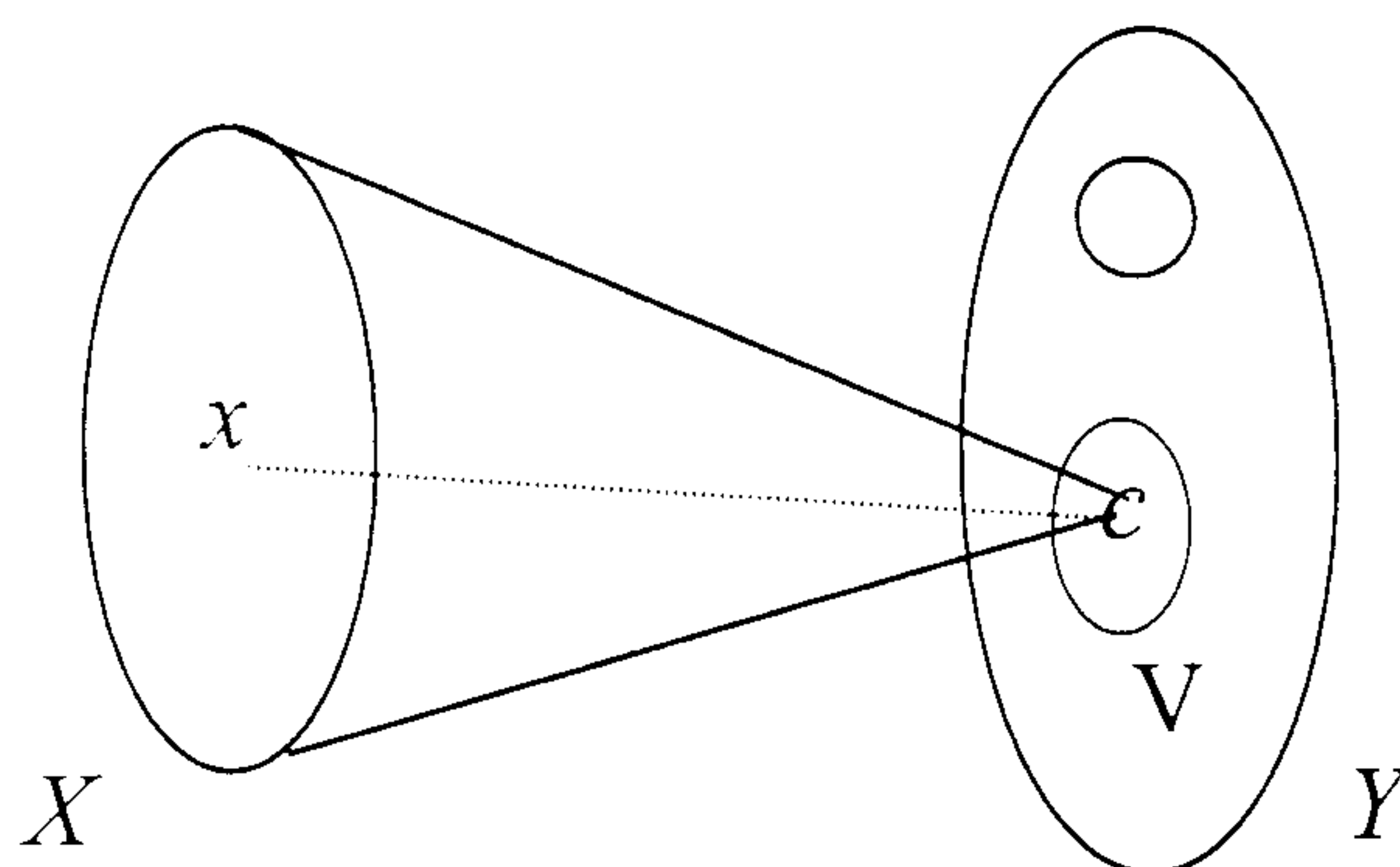
$$f^{-1}(Y) = X, f^{-1}(\phi) = \phi, X, \phi \in \tau$$

مثال (٥ . ١ . ٤) :

بفرض أن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ هي الدالة الثابتة .

$$f(x) = c, (c \text{ ثابت}) \forall x \in X$$

فإن f دالة متصلة لأن :



نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y فإن :

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \phi & \text{if } c \notin V \\ X & \text{if } c \in V \end{cases} \Rightarrow X, \phi \in \tau_X$$

مثال (٤ . ١ . ٦) :

إذا كان $(R, \mathcal{U})$ هو الفضاء العادي على R ، (R, C) هو الفضاء ذو المكملات المنتهية على R . هل الدالة $f: R \rightarrow R$ المعرفة بالصورة :

$$f(x) = I_X(x) = x; \forall x \in R \quad (\text{دالة الوحدة})$$

دالة متصلة ؟

الحل :

بفرض أن $(a, b) \in \mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة في $\mathcal{U}$ فإن :

$$f^{-1}((a, b)) = (a, b) \notin C$$

لأن $(a, b)^c = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ ليست مجموعة منتهية . إذاً الدالة f ليست متصلة.

مثال (٤ . ١ . ٧) :

لتكن $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ دالة متصلة ، $A \subseteq X$

أثبت أن $f/A: (X, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ متصلة حيث f/A دالة التقييد.

الحل :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة ، $A \subseteq X$ فإن دالة القيد $f/A: A \rightarrow Y$

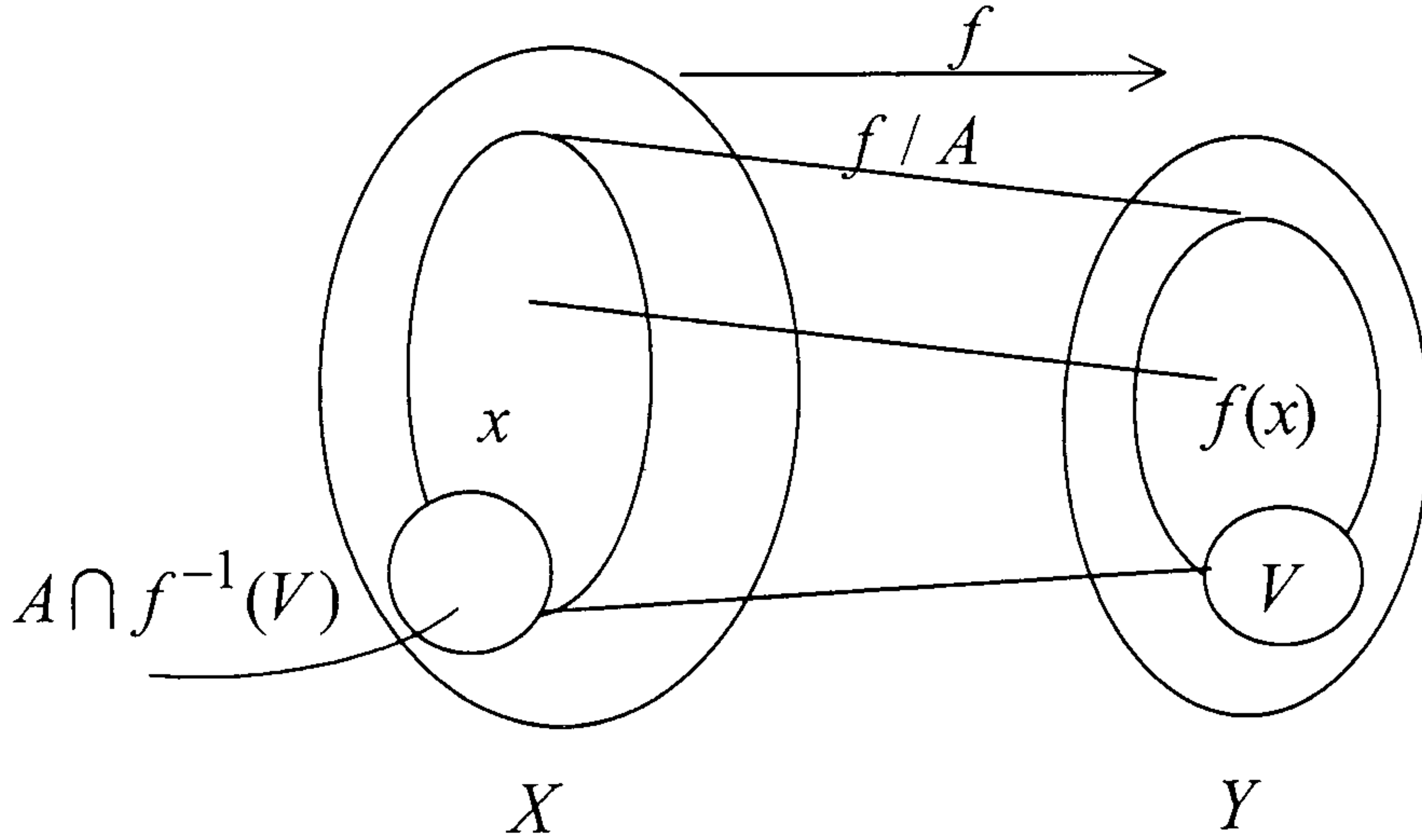
تعرف بالصورة : $(f/A)(x) = f(x); \forall x \in A$

بفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(V)$

مجموعة مفتوحة في X . إذاً $A \cap f^{-1}(V) \in \tau_A$.

أي مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (A, τ_A) وحيث أن

دالة متصلة $(f / A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V) \Rightarrow f / A$



نظرية (٨ . ١ . ٤) :

تحويل دالتين متصلتين هو دالة متصلة. أى إذا كان كل من $f: X \rightarrow Y$ ،
 $g: Y \rightarrow Z$ دالتين متصلتين فإن $g \circ f: X \rightarrow Z$ دالة متصلة أيضاً.

تعريف (٩ . ١ . ٤) :

نفرض الدالة $f: X \rightarrow Y$ ، $p \in X$. يقال أن الدالة f متصلة عند النقطة p إذا كانت الصورة العكسية لكل جوار للنقطة $f(p)$ هي جوار للنقطة p . أى

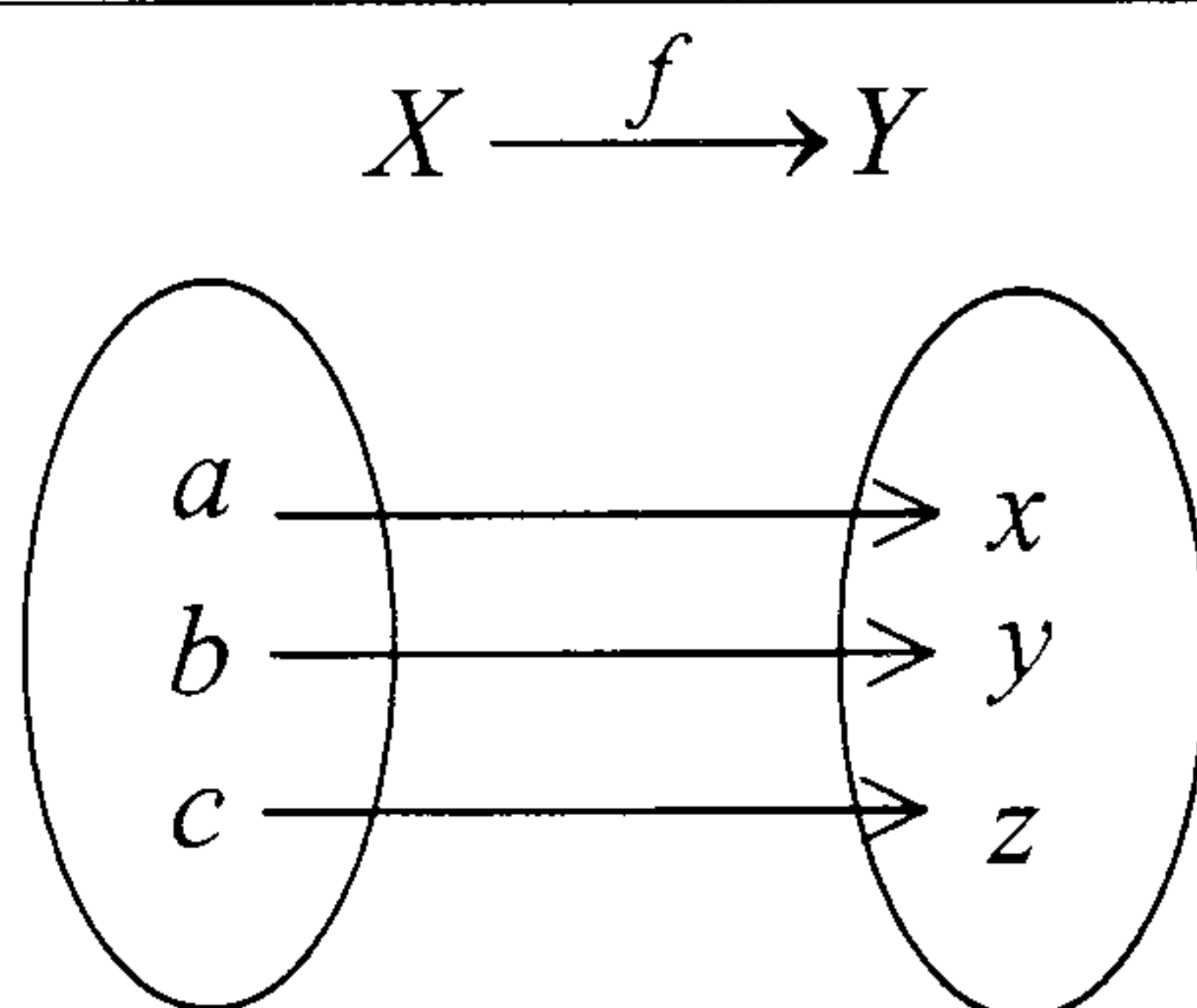
$$\forall N \in \mathcal{N}_{f(p)} \Rightarrow f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_p$$

مثال (١٠ . ١ . ٤) :

نفرض $X = \{a, b, c\}$ ، $Y = \{x, y, z\}$. ونفرض

$$\tau_Y = \{Y, \phi, \{x\}, \{x, z\}\} , \tau_X = \{X, \phi, \{a\}\}$$

وإذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة معرفة بالصورة :



بين أن f دالة متصلة عند a ولكنها غير متصلة عند c ؟

الحل :

(i) مجموعة جوارات $f(a)$:

$$N_{f(a)} = N_x = \{Y, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$$

$$N_a = \{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\} \quad \text{مجموعة جوارات } a :$$

$$\text{والآن } f^{-1}(Y) = X \in N_a, \quad f^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in N_a$$

$$f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b\} \in N_a, \quad f^{-1}(\{x, z\}) = \{a, c\} \in N_a$$

أي أن f متصلة عند a .

$$N_c = \{X\} ; \quad N_{f(c)} = N_z = \{Y, \{x, z\}\} \quad (ii)$$

$$\text{والآن } f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, c\} \notin N_c$$

إذاً f ليست متصلة عند b .

والآن نتعرض لخواص الدوال المتصلة وذلك عن طريق العلاقة بين اتصال الدالة

وعلاقة المجموعة وداخلية المجموعة والاساس والاساس الجزئي والجوار.

نظرية (١١ . ١ . ٤) :

لتكن $f : X \rightarrow Y$ دالة فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) f دالة متصلة .

(٢) الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y تكون مغلقة في X .

$$(٣) \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \text{لكل } A \subseteq X.$$

$$(٤) \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) \quad \text{لكل } B \subseteq Y.$$

(٥) f دالة متصلة عند كل نقطة $p \in X$.

(٦) $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $B \in \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على Y .

(٧) $f^{-1}(S)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $S \in \mathcal{S}$ حيث $\mathcal{S}$ أساس جزئي للتوبولوجي على X .

$$(٨) \quad f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o \quad \text{لكل } A \subseteq Y.$$

البرهان : (1) $\Leftrightarrow$ (2) :

بفرض أن f دالة متصلة وأن F مجموعة مغلقة في Y فإن F^c مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(F^c)$ مجموعة مفتوحة في X ولكن $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ إذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

والعكس ، بفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة F في Y هي مغلقة في X ولاثبات أن f متصلة. لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن G^c مجموعة مغلقة في Y وباستخدام الفرض $f^{-1}(G^c)$ مجموعة مغلقة في X ولكن $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X وبالتالي فإن f دالة متصلة.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) :

بفرض أن f دالة متصلة وأن $A \subseteq X$ فإن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة في Y ومن ثم فإن $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة في X أي أن

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) = \overline{f^{-1}(f(A))}$$

والآن $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))}$. وعليه نحصل على

$$\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))} = f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$$f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$$

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X \quad \text{إذاً}$$

والعكس ، نفرض أن $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$ والمطلوب إثبات أن f دالة متصلة ، لذلك نفرض أن F مجموعة مغلقة في Y ، بوضع

$$A = f^{-1}(F) \quad \text{إذاً} \quad f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$$

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) \subseteq f^{-1}(F) \quad \text{إذاً}$$

$$f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \quad \text{ولكن} \quad f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)} \quad \text{إذاً}$$

أي أن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

$$(1) \Leftrightarrow (4)$$

نفرض أن $B \subseteq Y$ فإن $f^{-1}(B) \subseteq X$ وباستخدام (3)

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{B})} \quad \text{إذاً} \quad f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$$

والعكس ، نفرض أن $\overline{V}$ مجموعة مفتوحة في Y وبالتالي فإن V^c مجموعة مغلقة في

Y وباستخدام الفرض

$$\overline{f^{-1}(V^c)} \subseteq f^{-1}(\overline{V^c}) = f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$$

$$\overline{f^{-1}(V^c)} = f^{-1}(V^c) \quad \text{ولكن} \quad f^{-1}(V^c) \subseteq \overline{f^{-1}(V^c)}$$

وعليه فإن $f^{-1}(V^c)$ مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة

مفتوحة في X أي أن f دالة متصلة .

(5) $\Leftrightarrow$ (1) :

نفرض أن f دالة متصلة. نفرض أن $p \in X$ ، جوار للنقطة $f(p)$ أي أن $N \in \mathcal{N}_{f(p)}$ وعليه يوجد $U \in \tau$ بحيث $f^{-1}(U) \subseteq N$ ، إذاً $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(N)$ وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة وعليه فإن $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_p$ ، إذاً f متصلة عند النقطة p وحيث أن p اختيارية فإن f متصلة عند كل نقطة $p \in X$.
والعكس ، نفرض أن f دالة متصلة عند $p \in X$ وأن V مجموعة مفتوحة في Y ،
 $p \in f^{-1}(V)$ وعليه فإن $f(p) \in V$ ومنها فإن $V \in \mathcal{N}_{f(p)}$ ، إذاً $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_p$ ، $\forall p$ وعليه فإن $f^{-1}(V) \in \tau$ مجموعة مفتوحة إذاً f دالة متصلة.

(6) $\Leftrightarrow$ (1) :

نفرض أن f دالة متصلة ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على Y أي أن $B \in \mathcal{B}$ ومن ثم فإن $f^{-1}(B) \in \tau_X$ لكل $B \in \mathcal{B}$ ، إذاً $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $B \in \mathcal{B}$.

والعكس ، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على Y فإن $V = \bigcup B_i$; $B_i \in \mathcal{B}$ وعليه فإن

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

وحيث أن $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في X فإن $f^{-1}(V)$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة وبالتالي فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة أي أن f دالة متصلة .

(7) $\Leftrightarrow$ (1) : يترك للقارئ كتمرين .(8) $\Leftrightarrow$ (1) :

نفرض أن f دالة متصلة ، $A \subseteq Y$ فإن A^o مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن

$$f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o \text{ أي } X \text{ مجموعة مفتوحة في } X$$

وبما أن $A^o \subseteq A$ فإن $f^{-1}(A^o) \subseteq f^{-1}(A)$ وعليه فإن

$$f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o \subseteq (f^{-1}(A))^o$$

إذاً $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$.

والعكس ، نفرض أن لكل $A \subseteq Y$ يتحقق $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$

ولإثبات أن f دالة متصلة ، نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y أي أن $G = G^o$.

إذاً $f^{-1}(G) = f^{-1}(G^o) \subseteq (f^{-1}(G))^o$

ولكن $(f^{-1}(G))^o \subseteq f^{-1}(G)$ وبناءً على ذلك

فإن $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G))^o$. إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X ومن ثم فإن f دالة متصلة .

مثال (١٢ . ١ . ٤) :

نفرض أن $f: X \rightarrow I = [0,1]$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفترة المغلقة I . بين أنه إذا كانت $f^{-1}((a,1])$ ، $f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I لكل $a > 0$ ، $b < 1$ فإن f دالة متصلة .

الحل :

حيث $a > 0$ ، $b < 1$ فإن $[0,b) \cap (a,1] = (a,b) \subseteq I$

ولذلك فإن العائلة $S = \{(a,1], [0,b) : a > 0, b < 1\}$

أساس جزئي للتوبولوجي المعرف على I . وإذا كانت $f^{-1}((a,1])$ ، $f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I فإنه ينتج من نظرية (١١ . ١ . ٤) أن الدالة f متصلة .

نظرية (١٣.١.٤) :

نفرض أن $\{\tau_i\}; \forall i=1,2,\dots$ عائلة من التوبولوجيات المعرفة على المجموعة X ، إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة بالنسبة إلى τ_i لكل i . فإن f متصلة بالنسبة إلى التوبولوجي $\tau = \bigcap_i \tau_i$.

البرهان :

نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y ، حيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(G) \in \tau_i$ لكل i . من ذلك نجد أن $f^{-1}(G) \in \bigcap_i \tau_i = \tau$ أي أن f دالة متصلة بالنسبة للتوبولوجي τ .

نظرية (١٤.١.٤) :

نفرض أن $f_i: X \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ عائلة من الدوال، ونفرض أن

$$S = \bigcup_i \{f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

نفرض التوبولوجي τ على X هو التوبولوجي المولد بواسطة S فإن :

- (١) f_i متصلة لكل i .
- (٢) إذا كان τ^* هو تقاطع كل التوبولوجيات على X بحيث أن كل الدوال f_i تكون متصلة فإن $\tau^* = \tau$.
- (٣) τ هو أضعف توبولوجي على X بحيث أن كل الدوال f_i تكون متصلة.
- (٤) S أساس جزئي للتوبولوجي τ .

البرهان :

- (١) لكل دالة $f_i: X \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ إذا كانت $H \in \tau_i$ فإن $f_i^{-1}(H) \in S$ وحيث أن $S \subseteq \tau$ فإن $f_i^{-1}(H) \in \tau$. إذاً كل الدوال f_i متصلة.

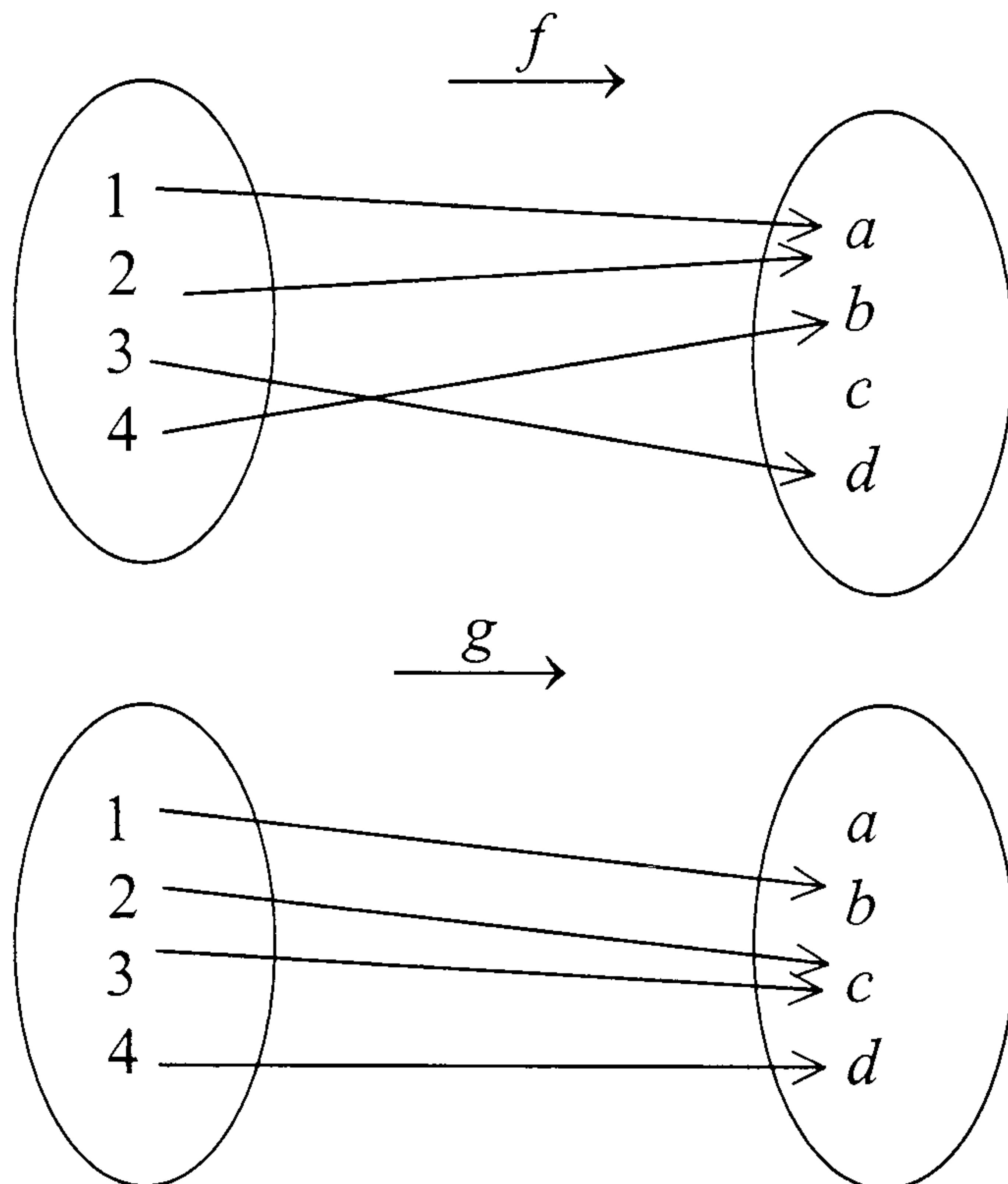
(٢) من نظرية (٤. ١. ١٣) الدوال f_i متصلة بالنسبة للتوبولوجي τ^* ، إذاً $S \subseteq \tau^*$. وحيث أن τ هو التوبولوجي المولد بواسطة S فإن $\tau \subseteq \tau^*$. من جانب آخر τ هو أحد التوبولوجيات بحيث أن f_i دوال متصلة ، من ذلك نستنتج أن $\tau^* \subseteq \tau$ ، وعليه فإن $\tau^* = \tau$.

(٣) واضح من (٢) .

(٤) حيث أن أي تجمع من المجموعات الجزئية من X هو أساس جزئي لتوبولوجي على X فإن S أساس جزئي للتوبولوجي τ .

مثال (٤. ١. ١٥) :

نفرض $\tau = \{Y, \phi, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$ ، $Y = \{a, b, c, d\}$ ونفرض $X = \{1, 2, 3, 4\}$ نعرف الدوال $f: X \rightarrow (Y, \tau)$ ، $g: X \rightarrow (Y, \tau)$ بالصورة التالية :



أوجد الأساس الجزئي S للتوبولوجي τ^* على X المولد بواسطة الدوال f, g .
الحل :

$$S = \{f^{-1}(H) : H \in \tau\} \cup \{g^{-1}(H) : H \in \tau\}$$

أى أن S مكونة من الصور العكسية للمجموعات المفتوحة في X بواسطة الدوال f, g إذاً

$$S = \{X, \phi, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

بند (٢) : الدوال المفتوحة والدوال المغلقة ، (Open and closed function)

تعريف (١ . ٢ . ٤) :

بفرض أن X ، Y فضاءان توبولوجيان ، الدالة $f: X \rightarrow Y$ تسمى :

(١) مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y

$$\text{أي أن : } \forall U \in \tau_X \Rightarrow f(U) \in \tau_Y$$

(٢) مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X هي مجموعة مغلقة في Y أي

$$\text{أن : } \forall F \in \mathfrak{T}_X \Rightarrow f(F) \in \mathfrak{T}_Y$$

مثال (٢ . ٢ . ٤) :

بفرض أن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, D)$ دالة من أي فضاء X إلى الفضاء

المنفصل. أثبت أن f دالة مفتوحة ؟

الحل :

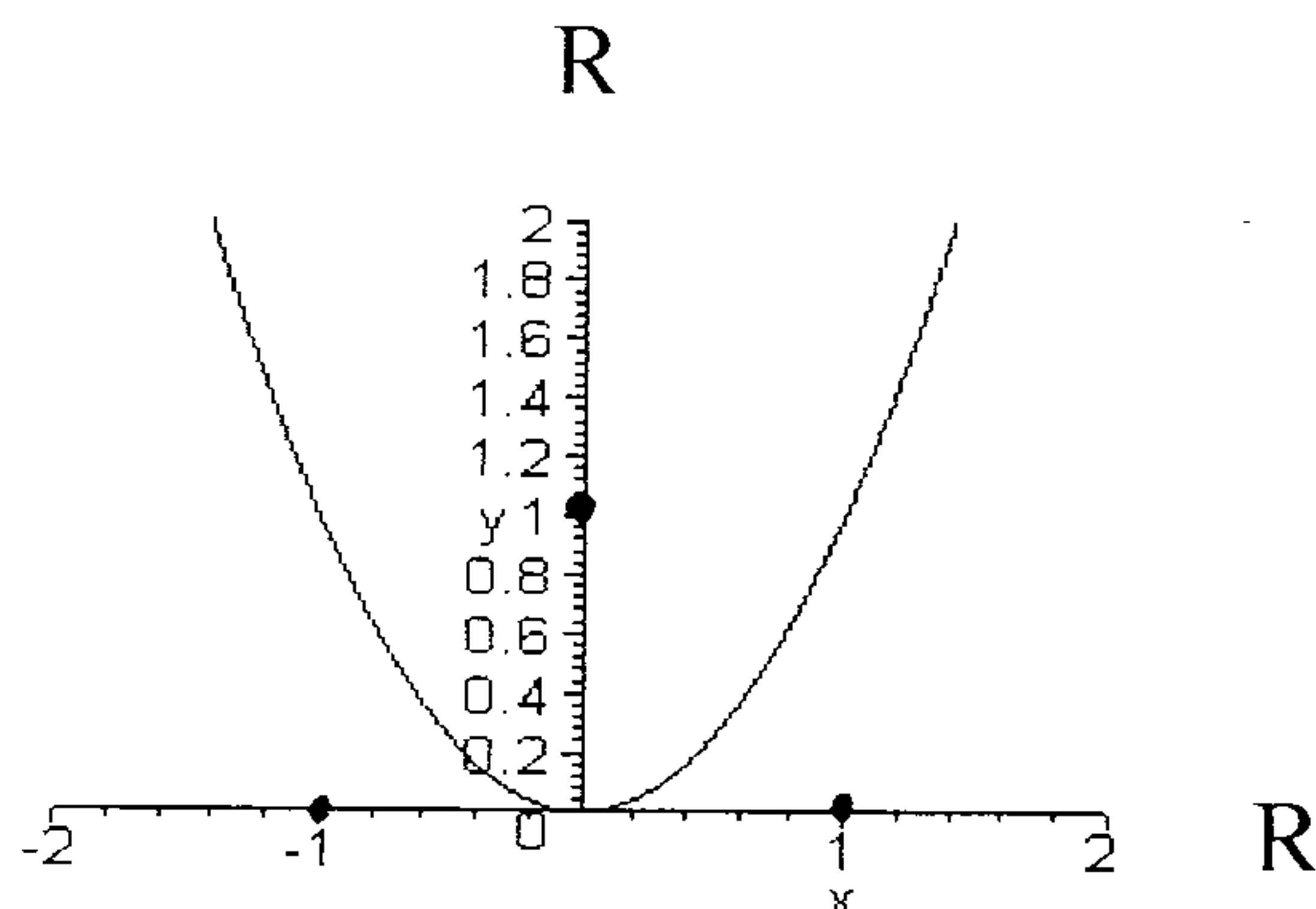
نفرض $U \in \tau$. إذاً $f(U) \subseteq Y$ وعليه فإن $f(U) \in D$ مجموعة مفتوحة

في Y ومن ثم فإن f دالة مفتوحة.

مثال (٣ . ٢ . ٤) :

بفرض أن $f: R \rightarrow R$ معرف بالصورة : $f(x) = x^2 ; \forall x \in R$ هل

f دالة مفتوحة ؟

الحل :

إذا كانت $U = (-1, 1)$ مجموعة مفتوحة فإن $f(U) = [0, 1)$ مجموعة ليست مفتوحة . إذاً f ليست دالة مفتوحة .

ملاحظة :

الدالة في المثال السابق متصلة ومغلقة ولكنها ليست مفتوحة ، وعموماً ليست بالضرورة أن تكون الدالة المغلقة تكون مفتوحة والعكس وذلك يتضح من الأمثلة الآتية :-

مثال (٤ . ٢ . ٤) :

الدالة الثابتة $f: R \rightarrow R$ هي دالة متصلة ومغلقة وليست مفتوحة ؟

الحل :

بفرض أن $f: R \rightarrow R$ والمعرفة كما يلي : $f(x) = a \quad \forall x \in R$

بالتالي فإن f دالة متصلة ولكن لأي مجموعة جزئية U في R تكون :

$$f(U) = \{a\}$$

(i) إذا كانت U مجموعة مفتوحة فإن $f(U)$ ليست مجموعة مفتوحة ؟

(ii) إذا كانت U مجموعة مغلقة فإن $f(U)$ مجموعة مغلقة ؟ لماذا ؟

ملاحظات (٤ . ٢ . ٥) :

(١) الدالة $f: (X, D) \rightarrow (Y, D)$ متصلة ومفتوحة ومغلقة في الوقت نفسه :

(٢) الدالة $f: (X, D) \rightarrow (X, I)$ حيث X مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر هي دالة متصلة وليست مفتوحة وليست مغلقة .

(٣) الدالة $f: (X, I) \rightarrow (X, D)$ حيث X مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر هي دالة مفتوحة ومغلقة ولكنها ليست متصلة .

مثال (٤ . ٢ . ٦) :

(i) إذا كان كل من $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ دالة مفتوحة فإن $gof: X \rightarrow Z$ دالة مفتوحة .

الحل :

بفرض أن U مجموعة مفتوحة في X . وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y . وحيث أن g دالة مفتوحة فإن $g(f(U))$ مجموعة مفتوحة في Z . لكن $gof(U) = g(f(U))$. إذاً $gof(U)$ مجموعة مفتوحة في Z ومن ثم فإن gof دالة مفتوحة .

(ii) إذا كانت $f: R \rightarrow R$ حيث $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\forall x \in R$.

بين أن f دالة ليست مفتوحة وليست مغلقة ولكنها متصلة .

الحل : تمرين

الآن سوف نعطي بعض الخواص للدوال المفتوحة والدوال المغلقة.

نظرية (٤ . ٢ . ٧) :

لتكن $f: X \rightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y

فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) f دالة مفتوحة.

(٢) $f(A^o) \subseteq (f(A))^o$ لكل $A \subseteq X$.

(٣) $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $B \in \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على X .

(٤) لكل $p \in X$ ولكل جوار N للنقطة p يوجد جوار W للنقطة $f(p)$ بحيث أن $W \subseteq f(N)$ أي أن :

$$\forall p \in X, \forall N \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists W \in \mathcal{N}_{f(p)}, W \subseteq f(N)$$

البرهان :

$$(1) \Rightarrow (2)$$

نفرض أن f دالة مفتوحة ، فإن $A \subseteq X$ فإن A^o مجموعة مفتوحة في X . بما أن $A^o \subseteq A$ فإن $f(A^o) \subseteq f(A)$ وعليه فإن $(f(A^o))^o \subseteq (f(A))^o$ وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(A^o)$ مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن $(f(A^o))^o = (f(A))^o$. إذاً $f(A^o) \subseteq (f(A))^o$: (2) $\Leftarrow$ (3)

نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على X ، $B \in \mathcal{B}$ فإن $B^o = B$ من (٢) نجد أن : $f(B) = f(B^o) \subseteq (f(B))^o$ ومن ثم فإن $f(B) = (f(B))^o$ أي أن $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y . : (3) $\Rightarrow$ (4)

نفرض أن $p \in X$ ، N جوار للنقطة p أي أن

$$N \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}, p \in U \subseteq N$$

$$\Rightarrow f(p) \in f(U) \subseteq f(N)$$

ومن (٣) نجد أن $W = f(U)$ مجموعة مفتوحة . إذاً نحصل على :

$$W \in \mathcal{N}_{f(p)}, W \subseteq f(N)$$

(1) $\Rightarrow$ (4) :

بفرض أن U مجموعة مفتوحة في X والمطلوب إثبات أن $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y لذلك نفرض $y \in f(U)$ ، إذاً يوجد $x \in U$ بحيث $f(x) = y$. إذاً U جوار للنقطة x ومن (٤) يوجد جوار W للنقطة y بحيث أن $W \subseteq f(U)$ ومن ثم فإن $y \in W \subseteq f(U)$. إذاً

$$f(U) = \bigcup \{W : y \in f(U)\}$$

إذاً $f(U)$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن f دالة مفتوحة .

ملاحظة :

يمكن إثبات النظرية السابقة بطريقة أخرى بالتكافؤات الآتية :

$$(1) \Leftrightarrow (2) , (1) \Leftrightarrow (3) , (1) \Leftrightarrow (4)$$

مثال (٤ . ٢ . ٨) :

إذا كانت $f : X \rightarrow Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) f دالة مفتوحة .

$$(٢) \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) \quad \text{لكل } B \subseteq Y$$

$$(٣) \quad f(A^o) \subseteq (f(A))^o \quad \text{لكل } A \subseteq X$$

الحل : تترك كتمرين للقارئ.

نتيجة : ليكن $f : X \rightarrow Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) الدالة f متصلة ومفتوحة.

$$(٢) \quad \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B}) \quad \text{لكل } B \subseteq Y$$

نظرية (٤ . ٢ . ٩) :

الدالة $f : X \rightarrow Y$ مغلقة إذا وفقط إذا كانت $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ لكل

$A \subseteq X$

البرهان :

بفرض أن f دالة مغلقة وأن $A \subseteq X$ فإن $\bar{A}$ مغلقة في X وبالتالي فإن

$f(\bar{A})$ مغلقة في Y أي أن $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ولكن

$$A \subset \bar{A} \Rightarrow f(A) \subseteq f(\bar{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A})$$

إذاً $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$.

والعكس ، نفرض أن F مجموعة مغلقة في X ومن الفرض

$$\overline{f(F)} \subseteq f(\bar{F}) = f(F) \quad ; \quad (F = \bar{F} \text{ لأن } F \text{ مغلقة})$$

ولكن $f(F) \subseteq \overline{f(F)}$ إذاً $f(F) = \overline{f(F)}$

أي أن $f(F)$ مغلقة ومن ثم فإن الدالة f مغلقة .

نتيجة : لتكن $f : X \rightarrow Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) الدالة f متصلة ومغلقة

(٢) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ لأي $A \subseteq X$.

بند (٣) : التكافؤ (التماثل) التوبولوجي Homeomorphic :

تعريف (١.٣.٤) :

بفرض أن $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ دالة من الفضاء التوبولوجي

(X, τ_1) إلى الفضاء (Y, τ_2) يقال أن f هومومورفيزم أو دالة توبولوجية إذا

كانت الدالة f تحقق الخواص الآتية :-

١ - f دالة تناظر أحادي (تقابل).

٢ - f دالة متصلة .

٣ - $f^{-1} : Y \rightarrow X$ دالة متصلة .

وعندئذ يقال أن الفضاءين X, Y متكافئان توبولوجياً (متشاكلان) ويرمز لذلك

بالرمز $X \cong Y$ ، من هذا التعريف يتضح لنا بأنه يمكن تعريف علاقة تكافؤ على

عائلة الفضاءات التوبولوجية كما يلي :-

يوجد $f: X \rightarrow Y$ هومومورفيزم $X \cong Y \Leftrightarrow$

(i) حيث أن دالة التطابق من أي فضاء توبولوجي إلى نفسه هي دالة توبولوجية

إذاً $X \cong X ; \forall X$ (علاقة عاكسة)

(ii) حيث أن معكوس الدالة التوبولوجية هو أيضاً دالة توبولوجية

إذا كان $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$ (علاقة متماثلة)

(iii) تركيب دالتين توبولوجيتين هو أيضاً دالة توبولوجية

إذا كان $X \cong Y, Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$ (علاقة ناقلة)

إذاً خاصية الدالة التوبولوجية هي علاقة تكافؤ .

في هذه الحالة نحصل على فصول التكافؤ ويتكون فصل التكافؤ الواحد من كل

الفضاءات التوبولوجية المتشاكلة ، بالإضافة إلى ذلك إذا كان الفضاءان X, Y

متشاكلان فإنه يكون لهما نفس الخواص التوبولوجية لأنه هناك تناظر أحادي بين

العناصر وبين المجموعات المفتوحة وبين المجموعات المغلقة والأساس إلخ ، ويكون

الاختلاف فقط في طبيعة العناصر وهذا الاختلاف لا يؤخذ بعين الاعتبار في دراستنا

لأن دراسة علم التوبولوجي تتعلق فقط بالخواص التوبولوجية .

هناك خواص معينة إذا تمتع بها فضاء توبولوجي ما فإنه يتمتع بها أي فضاء توبولوجي

آخر يتشاكل معه وهذه الخاصية تسمى خاصية توبولوجية (Topological Property).

تعريف (٢ . ٣ . ٤) :

الخاصية P تكون خاصية توبولوجية إذا وفقط إذا كانت محافظة على نفسها

بالنسبة لأي هومومورفيزم . وهذا يعني أنه إذا كان X فضاء توبولوجي يتمتع

بالخاصية P فإن P تسمى خاصية توبولوجية إذا وجد $f: X \rightarrow Y$

هومومورفيزم اختياري من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y بحيث

أن Y يتمتع بنفس الخاصية P .

مثال (٤ . ٣ . ٣) :

خاصية أن يكون الفضاء منفصل (Discrete) هي خاصية توبولوجية ؟

حل :

بفرض أن الدالة $f: (X, D) \rightarrow (Y, D)$ تناظر أحادي نستطيع أن نرىسهولة أن f, f^{-1} دوال متصلة . إذاً f هو مورفيزم . إذاً $X \cong Y$ وحيث أن X هو $D \Leftrightarrow Y$ هو D . إذاً D خاصية توبولوجية .

مثال (٤ . ٣ . ٤) :

بين أن $[0,1] \cong [a,b]$ وأن الطول ليست خاصية توبولوجية .

حل :

نفرض الدالة $f: [0,1] \rightarrow [a,b]$ والمعرفة كما يلي :

$$f(x) = (b-a)x + a ; \forall x \in [0,1]$$

ونعتبر التوبولوجى المعروف على $[0,1], [a,b]$ هو التوبولوجى العادي .(i) نفرض $f(x_1) = f(x_2)$. إذاً $(b-a)x_1 + a = (b-a)x_2 + a$ ومن هنا نحصل على $x_1 = x_2$. إذاً f أحادية.نفرض $y = f(x) ; y \in [a,b]$. إذاً $y = (b-a)x + a$ وعليه فإن

$$x = \frac{y-a}{b-a} \in [0,1] \text{ . إذاً } f \text{ شامله وبالتالي فإن المعكوس موجود حيث}$$

$$f^{-1}: [0,1] \rightarrow [a,b] \text{ تأخذ الصورة :}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a} ; \forall y \in [a,b]$$

ونلاحظ أن f, f^{-1} دوال متصلة . إذاً f هو مورفيزم .

$$\text{إذاً } [0,1] \cong [a,b]$$

فإذا كانت $a=0, b=5$ فإن الطول ليست خاصية توبولوجية .

مثال (٤.٣.٥) : بين أن $[0,1) \cong [0,\infty)$

الحل :

نعرف الدالة $f: [0,1) \rightarrow [0,\infty)$ حيث $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$

بالتالي فإن f دالة متصلة (باعتبار التوبولوجي العادي) ومن السهل أن نرى أن f

تناظر أحادي . إذاً $y(1-x) = x \Rightarrow y = x(y+1) \Rightarrow x = \frac{y}{y+1}$ وعليه

فإن $g: [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ حيث $g(y) = \frac{y}{y+1}$

ولإثبات أن g هو معكوس f . نجد أن

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = x ; \forall x \in [0,1)$$

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y}{y+1}\right) = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{y}{y+1} + 1} = y ; \forall y \in [0,\infty)$$

إذاً $g = f^{-1}$. ونلاحظ أيضاً أن f^{-1} دالة متصلة لأن $|g(y)| < 1$ لجميع قيم y . إذاً $[0,1) \cong [0,\infty)$.

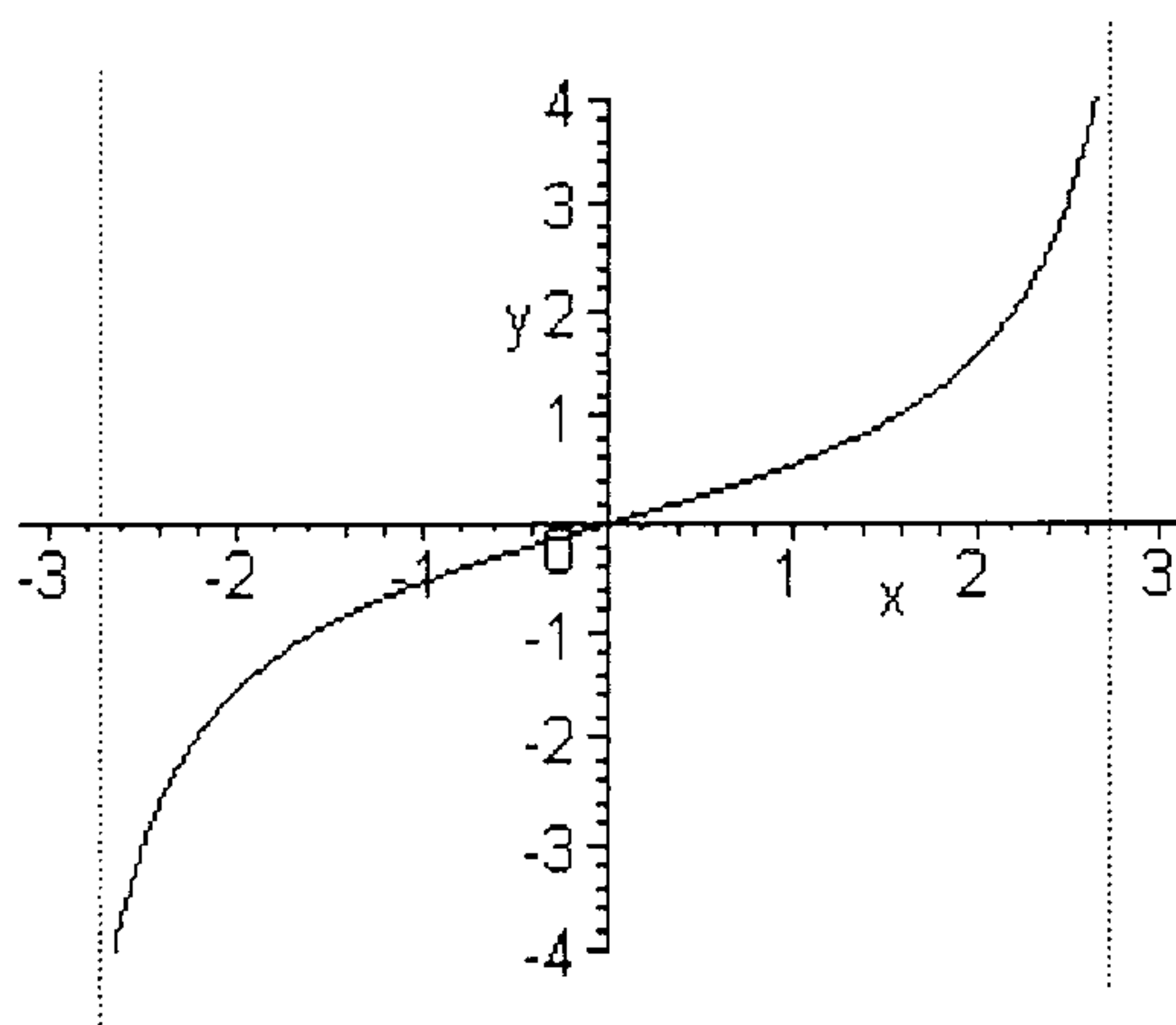
مثال (٤.٣.٦) :

بين أن $R \cong (-1,1) = X$ وأن المحدوديه (boundedness) ليست خاصية

توبولوجية.

الحل :

نعرف الدالة $f: X \rightarrow R$ بالصورة $f(x) = \tan \frac{\pi}{2} x ; \forall x \in X$



واضح أن :

(١) f دالة تناظر أحادي .

(٢) f دالة متصلة وكذلك f^{-1} .

إذاً f دالة توبولوجية ومن ثم فإن $X \cong R$ ولكن X محدودة بينما R ليست كذلك .

مثال (٧ . ٣ . ٤) :

خاصية انعزال مجموعة هي خاصية توبولوجية .

الحل :

لتكن A مجموعة منعزلة في X أي أنه توجد $x \in A$ ولكن $x \notin A'$ بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة هومومورفيزم من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y .

$$x \notin A' \Rightarrow \exists G \in \tau_X, x \in G, (G - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

ولكن $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y تحتوي $y = f(x)$ وحيث أن f تناظر أحادي فإن :

$$\begin{aligned}
 f(G - \{x\} \cap A) &= f(G - \{x\}) \cap f(A) \\
 &= (f(G) - f(x)) \cap f(A) \\
 &= (f(G) - \{y\}) \cap f(A) = \phi
 \end{aligned}$$

أي أن $y \notin (f(A))'$ مجموعة منعزلة في Y .

وبالتالي فإن خاصية انعزال مجموعة هي خاصية توبولوجية.

نظرية (٤ . ٣ . ٨) :

بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة تناظر أحادي من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y . فإن الخواص الآتية متكافئة :

- (١) f هومومورفيزم .
- (٢) f متصلة ومفتوحة .
- (٣) f متصلة ومغلقة .
- (٤) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.
- (٥) $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B \subseteq Y$.
- (٦) $f(A^o) = (f(A))^o$ لكل $A \subseteq X$.
- (٧) $f^{-1}(B^o) = (f^{-1}(B))^o$ لكل $B \subseteq Y$.

مثال (٤ . ٣ . ٩) :

خاصيتي الإنغلاق والتكثيف توبولوجيتين.

الحل :

بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y وأن A مجموعة جزئية من X . إذاً $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (من نظرية (٤ . ٣ . ٨)).
إذاً خاصية إغلاق A هي توبولوجية.

وإذا كانت A كثيفة في X فإن $\overline{A} = X$. إذاً

$$f(\overline{A}) = f(X) = Y ; \overline{f(A)} = f(\overline{A}) = Y$$

إذاً $f(A)$ كثيفة في Y ومن ثم خاصية أن تكون المجموعة كثيفة هي خاصية توبولوجية.

مثال (١٠.٣.٤) :

١ - بفرض أن $f : X \rightarrow Y$ دالة تناظر أحادي فإن :-

(i) f دالة مفتوحة $\Leftrightarrow f$ دالة مغلقة

(ii) f دالة مغلقة $\Leftrightarrow f^{-1}$ دالة متصلة

(iii) f دالة مفتوحة $\Leftrightarrow f^{-1}$ دالة متصلة

الحل :

(i) بفرض أن f دالة مفتوحة وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة وبالتالي فإن F^c مجموعة مفتوحة، وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(F^c)$ مجموعة مفتوحة في Y ، وحيث أن f دالة تناظر أحادي فإن $f(F^c) = (f(F))^c$ ومن ثم فإن $f(F)$ مجموعة مغلقة في Y أي أن f دالة مغلقة، ويمكن إثبات العكس بنفس الطريقة.

(ii) بفرض أن f دالة مغلقة، $f^{-1} : Y \rightarrow X$ وأن $U \subseteq X$ مجموعة مفتوحة في X بالتالي U^c مجموعة مغلقة في X وحيث أن f دالة مغلقة فإن $f(U^c)$ مجموعة مغلقة في Y ولكن f تناظر أحادي.

$$f(U^c) = (f(U))^c \Rightarrow (f(U))^c \text{ مجموعة مغلقة}$$

$$\Rightarrow f(U) \text{ مجموعة مفتوحة}$$

$$\Rightarrow f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \text{ في } Y$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ متصلة}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات العكس .

(٢) بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y فإنه لكل $A \subseteq X$ يكون $f(A') = (f(A))'$.

الحل :

إذا كان $y \notin (f(A))'$ $\Leftrightarrow$ يوجد $V \in \tau_Y$ ، $y \in V$ بحيث أن

$$(V - \{y\}) \cap f(A) = \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}[(V - \{y\}) \cap f(A)] = f^{-1}(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1}(V) - f^{-1}(y)) \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) \notin A' \Leftrightarrow y \notin f(A')$$

$$\text{إذاً } f(A') = (f(A))'$$

(٣) بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y فإن

$$A \cap A' = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap (f(A))' = \emptyset$$

الحل :

$$A \cap A' = \emptyset \Rightarrow f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A) \cap f(A') = \emptyset \quad \text{وحيث أن } f \text{ تناظر أحادي فإن :}$$

وحيث أن f هومومورفيزم وباستخدام (٢) :

$$f(A') = (f(A))'$$

$$\Rightarrow f(A) \cap (f(A))' = \emptyset$$

مثال (٤ . ٣ . ١١) :

$$\text{اثبت أن } (0,1) \cong (-1,1)$$

الحل :

نعرف الدالة $f: (0,1) \rightarrow (-1,1)$ بالصورة :

$$f(x) = 2x - 1 ; \forall x \in (0,1)$$

(١) واضح أن f تقابل. (٢) f, f^{-1} دوال متصلة.

مثال (٤.٣.١٢) : اثبت أن $R \cong (-1,1)$

الحل : نعرف الدالة $f: (-1,1) \rightarrow R$ بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; -1 < x < 0 \\ \frac{x}{1-x} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

مثال (٤.٣.١٣) : اثبت أن $(0,1) \cong R$

الحل : تترك للقارئ كتمرين

تمارين عامة على الباب الرابع

(١) إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة و غامرة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y . برهن أن صورة أى مجموعة كثيفة في X تكون مجموعة كثيفة في Y .

(٢) إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة و غامرة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y . بين أن f تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت

$$f^{-1}(B^o) \subseteq (f^{-1}(B))^o \text{ لكل } B \subseteq Y$$

(٣) أعط مثالا لدالة متصلة ومفتوحة وليست مغلقة.

(٤) أعط مثالا لدالة متصلة ومغلقة وليست مفتوحة .

(٥) أعط مثالا لدالة مفتوحة ومغلقة وليست متصلة .

(٦) أعط مثالا لدالة متصلة ومفتوحة ومغلقة.

(٧) لتكن $f_i: X \rightarrow Y$ عائلة من الدوال بحيث أن (Y, τ) فضاء توبولوجي.

برهن أن العائلة : $S = \{f_i^{-1}(G) : \forall i \in I, \forall G \in \tau\}$

تشكل أساس جزئي لأصغر توبولوجي على X تجعل كل الدوال f_i متصلة.

(٨) إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) إلى المجموعة

$$Y \text{ . برهن أن } \tau^* = \{G \subseteq Y : f^{-1}(G) \in \tau\}$$

هو أقوى (أكبر) توبولوجي على Y يجعل f دالة متصلة.

(٩) يقال أن الدالة $f: X \rightarrow Y$ من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء

التوبولوجي Y قوية الاتصال (strongly continuous) إذا كانت

$$f(\overline{A}) \subseteq f(A) \text{ لكل } A \subseteq X \text{ . برهن أن } f \text{ قوية الاتصال إذا وفقط إذا كانت}$$

الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مغلقة ومفتوحة من X . هل

كل دالة قوية الاتصال تكون متصلة؟ هل العكس صحيح؟

(١٠) يقال أن الدالة الحقيقية $f: X \rightarrow R$ نصف متصلة من أعلى (upper-

semicontinuous) إذا كانت $f^{-1}(-\infty, a]$ مجموعة مفتوحة في X ويقال أن

f نصف متصلة من أسفل (Lower-semicontinuous) إذا كانت $f^{-1}[b, \infty)$

مجموعة مفتوحة في X . برهن أن الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت نصف متصلة

من أعلى ونصف متصلة من أسفل.

(١١) إذا كانت كل من $f: X \rightarrow Y$ ، $g: Y \rightarrow Z$ دالة توبولوجية ، بين أن

الدالة $g \circ f: X \rightarrow Z$ دالة توبولوجية أيضاً .

(١٢) أعط مثال لدالة متصلة $f: X \rightarrow Y$ تحقق :

$$(i) f(A') \neq (f(A))' \quad (ii) \overline{f(A)} \neq f(\overline{A})$$

(١٣) أعط مثال بحيث أن $(X, \tau_X) \not\cong (Y, \tau_Y)$

(١٤) برهن أن

$$(i) (a, b) \cong (0, 1) \quad (ii) (a, \infty) \cong (1, \infty) \quad (iii) (1, \infty) \cong (0, 1)$$

$$(iv) [a, b) \cong [0, 1) \quad (v) [a, b] \cong [0, 1]$$

الباب الخامس

الفراغ المترى

The metric Space

الباب الخامسالفضاء المترى The metric spaceبند (١) تعريفه وبعض الأمثلة التوضيحية :تعريف (١.١.٥) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية وأن d دالة من $X \times X$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R أي أن $d: X \times X \rightarrow R$. تسمى الدالة d بدالة المسافة أو دالة مترية (metric) إذا حققت الشروط التالية :

$$(D_1): d(x, y) \geq 0 \text{ and } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D_2): d(x, y) = d(y, x)$$

$$(D_3): d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

لجميع قيم $x, y, z \in X$.يسمى الزوج (X, d) بالفضاء المترى (metric space).ملاحظات (١.٥.٢) :

(١) الشرط الأول (D_1) يعنى أن المسافة بين أى نقطتين لا يمكن أن تكون سالبة، وتكون المسافة صفراً إذا وفقط إذا أنطبقت النقطتان على بعضهما البعض. والشرط الثانى (D_2) يعنى المحافظة على المسافة بين أى نقطتين وهى تسمى خاصية التماثل. الشرط الثالث (D_3) فهو الخاصية المثلثية (Triangle inequality) والى تنص على أن مجموع طولى ضلعين فى مثلث أكبر من أو تساوى طول الضلع الثالث.

(٢) بالاستنتاج الرياضى ممكن أن نعمم الخاصية (D_3) لتصبح :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_n) &\leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) \end{aligned}$$

(٣) وباستخدام الخاصية (D_3) يمكن إثبات أن :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

يلاحظ أنه من الممكن تعريف أكثر من دالة مترية على المجموعة غير الخالية X ، وهذا يعني أن المجموعة X تتحول إلى فضاء مترى بأكثر من طريقة ، وهذا مما سنراه في الأمثلة .

أمثلة توضيحية (٥ . ١ . ٣) :

(١) أعتبر مجموعة الأعداد الحقيقية R نعرف الدالة d على R حيث $d: R \times R \rightarrow R$ على النحو التالي : $d(x, y) = |x - y|$; $\forall x, y \in R$ الزوج (R, d) تمثل فضاء مترى ؟

الحل : من خواص المقياس (دالة القيمة المطلقة) نعلم أن :

- (i) $|x| \geq 0$,
- (ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii) $|-x| = |x|$
- (iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$

في ضوء ذلك نجد أن :

$$(D_1) \because |x - y| \geq 0 \xrightarrow{(i)} d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D_2) d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$$

$$(D_3) d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z|$$

$$\leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

هذه الدالة d المعرفه في هذا المثال على R تسمى بالدالة العادية .

(٢) لأي مجموعة غير خالية X ، نعرف d على النحو التالي :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أن (X, d) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

(D_1) من التعريف يتضح أن $d(x, y)$ إما تساوي صفر أو واحد وعليه فإن

$$d(x, y) \geq 0 \text{ ويتضح أيضا أن : } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D_2) \text{ واضحة أيضا من التعريف حيث } d(x, y) = d(y, x)$$

لإثبات (D_3) هناك أربعة حالات ممكنة وهي على النحو التالي :

الحالة الأولى : $x = y = z$

$$\therefore d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 0$$

$$\Rightarrow d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) = 0$$

الحالة الثانية : $x \neq y \neq z$

$$\therefore d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 1$$

$$\Rightarrow d(x, z) = 1 < d(x, y) + d(y, z) = 2$$

الحالة الثالثة : $x = y \neq z$

$$\therefore d(x, y) = 0, d(x, z) = d(y, z) = 1$$

$$\Rightarrow d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$$

الحالة الرابعة : $x \neq y = z$

$$\therefore d(x, y) = 1, d(x, z) = 1, d(y, z) = 0$$

$$\Rightarrow d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$$

بالتالي فإن d دالة مترية ، (X, d) فضاء مترى ، هذا الفضاء يسمى بالفضاء

المتقطع (discrete metric) أو التافهه.

(٣) نعرف الدالة $d: R \times R \rightarrow R$ على النحو التالي :

$$d(x, y) = |x^2 - y^2| ; \forall x, y \in R$$

(R, d) لا تمثل فضاء مترى ؟ برهن ذلك ؟

الحل :

بأخذ $x=1$, $y=-1$ نجد أن

$$d(x, y) = |x^2 - y^2| = |1^2 - (-1)^2| = |1 - 1| = 0$$

$$\therefore d(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y$$

وعليه فإن D_1 غير محققة على وجه العموم .(٤) نفرض $X = R^2 = R \times R$ ، نعرف الدالة $d: X \times X \rightarrow R$ على

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{النحو التالي :}$$

$$\text{حيث } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$$

إذاً (R, d) تمثل فضاء ممتري ؟

الحل :

$$(D_1) \because |x_1 - y_1| \geq 0, |x_2 - y_2| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 = |x_2 - y_2|$$

$$\Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$$

$$\Leftrightarrow x = (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$$(D_2) d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d(y, x)$$

لإثبات (D_3) نفرض $z = (z_1, z_2)$ إذاً

$$d(x, z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|$$

$$= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2|$$

$$\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$$

$$= d(x, y) + d(y, z)$$

(٥) نعرف الدالة $d: R \times R \rightarrow R$ على النحو التالي :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} ; \forall x, y \in R$$

برهن أن (R, d) تمثل فضاء مترى ؟

الحل : (من التعريف)

(D₁) $d(x, y) \geq 0$ من الواضح أن

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D_2) d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} = d(y, x)$$

$$\begin{aligned} (D_3) d(x, y) + d(y, z) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} \\ &\geq \frac{|x - y|}{1 + |x - y| + |y - z|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z| + |x - y|} \\ &= \frac{|x - y| + |y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} = \frac{1}{\frac{1}{|x - y| + |y - z|} + 1} \\ &\geq \frac{1}{\frac{1}{|x - z|} + 1} = \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} = d(x, z) \end{aligned}$$

٦) نفرض $X = C[0, 1]$ ترمز إلى مجموعة الدوال الحقيقية المتصلة (المستمرة) على الفترة المغلقة $[0, 1]$ ، نعرف $d : X \times X \rightarrow R$ على النحو التالي :

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| ; \forall f, g \in X$$

برهن أن $(C[0, 1], d)$ تمثل فضاء مترى ؟

حل : (من التعريف)

(D₁) $d(f, g) \geq 0$

$$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \sup |f(x) - g(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 ; \forall x \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x); \forall x \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow f = g \quad (\text{حيث أن } f, g \text{ دوال متصلة})$$

$$(D_2) \quad d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| = \sup |g(x) - f(x)| \\ = d(g, f)$$

$$(D_3) \quad |f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

$$\therefore \sup |f(x) - h(x)| \leq \sup |f(x) - g(x)|$$

$$+ \sup |g(x) - h(x)|$$

$$\therefore d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h); \forall f, g, h \in C[0,1]$$

وهو المطلوب .

نظرية (٥ . ١ . ٤) :

إذا كانت X مجموعة غير خالية ، فإن $d: X \times X \rightarrow R$ دالة مترية إذا وفقط إذا كان :

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \forall x, y \in X$$

$$(ii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z); \forall x, y, z \in X$$

البرهان :

تترك للقارئ كتمرين

والآن قبل أن نسرد بقية الأمثلة سوف نحتاج إلى بعض المتباينات سوف نسردها

فيما يلي :

نظرية (٥ . ١ . ٥) :

المعادلة $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$ حيث $a \neq 0$ لجميع قيم λ الحقيقية إذا وفقط إذا

كان $a > 0, 4ac \leq b^2$.

البرهان :

بإكمال المربع نحصل على :

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + b\lambda + c &= a\left(\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \dots \dots \dots (*) \end{aligned}$$

المقدار $\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2$ يعتمد على λ ويمكننا أن نجعله مقدار كبير كما نرغب أن يكون ، فإذا كانت $a < 0$ فإنه لمقدار مناسب لـ λ فإننا نجعل الطرف الأيمن من العلاقة السابقة سالبا وعلية فإن $a\lambda^2 + b\lambda + c < 0$ إذاً لكي تكون $a\lambda^2 + b\lambda + c > 0$ يجب أن يكون $a > 0$.

أيضا نجد أن $a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ أما إذا كانت $a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ فإن $\lambda = -\frac{b}{2a}$ ، إذاً لكي يكون المقدار $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$ لجميع قيم λ يجب

أن يكون $c - \frac{b^2}{4a} \geq 0$ ، أي أن $c \geq \frac{b^2}{4a}$ أي أن $4ac \geq b^2$.

وواضح من (*) أنه إذا كان $4ac \geq b^2$ ، $a > 0$ فإن $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \geq 0$ ،

$a > 0$ وعليه فإن الطرف الأيمن من (*) يكون غير سالبا وعليه فإن $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$.

نظرية (٥ . ١ . ٦) : (متباينة كوشي - Cauchy inequality)

إذا كان لدينا المتابعتان اللانهائيتان (x_r) ، (y_r) ; $\forall r=1,2,3,\dots$ بحيث

$$\sum_{r=1}^{\infty} x_r < \infty , \sum_{r=1}^{\infty} y_r < \infty \text{ فإن :}$$

$$(i) \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \infty$$

$$(ii) \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2}$$

البرهان :

نختار $\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 > 0$ لأنه إذا كان $x_r = 0, \forall r$ فإن الحل يكون تافهه .

لأي عدد حقيقي λ فإن :

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\lambda x_r + y_r)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (x_r^2 \lambda^2 + 2 x_r y_r \lambda + y_r^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 \right) \lambda^2 + 2 \left(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r \right) \lambda + \left(\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2 \right) \geq 0$$

بوضع $a = \sum_{r=1}^{\infty} x_r^2$, $b = 2 \left(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r \right)$, $c = \sum_{r=1}^{\infty} y_r^2$ وباستخدام

النظرية (٥.١.٥) نحصل على $4ac \geq b^2$ أي أن :

$$4 \left(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r \leq \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2}$$

وحيث أن $\sum_{r=1}^{\infty} x_r < \infty$, $\sum_{r=1}^{\infty} y_r < \infty$ إذاً $\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \infty$

نظرية (٥ . ١ . ٧) : (المتباينة المثلثية)

نفرض المتابعتان اللانهائيتان $(x_r), (y_r); \forall r=1, 2, 3, \dots$ إذاً

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} (x_r + y_r)^2} \leq \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} + \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2}$$

البرهان :

بما أن $(x_r + y_r)^2 = x_r^2 + 2x_r y_r + y_r^2; \forall r=1, 2, 3, \dots$ إذاً

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} (x_r + y_r)^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r + \sum_{r=1}^{\infty} y_r^2 \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 + 2 \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2} + \sum_{r=1}^{\infty} y_r^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} + \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} (x_r + y_r)^2} \leq \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} + \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2} \quad \text{إذاً}$$

والآن نتابع بقية الأمثلة على الفضاء المترى .

أمثلة (٥ . ١ . ٨) :

(i) نفرض $R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n\text{-times}}$ نعرف الدالة $d: R^n \times R^n \rightarrow R$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{على النحو التالي :}$$

حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ برهن أن (R^n, d) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

تترك كتمرين للقارئ .

(ii) نعرف الدالة $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ كما يلي :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$

برهن أن (R^n, d) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

(D₁)

$$\because |x_i - y_i| \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow |x_i - y_i|^2 \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i - y_i| \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i=1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x = y$$

(D₂)

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|, \quad \forall \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$$

$$\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$$

إذا كانت $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ فإن (D_3)

$$\begin{aligned} |x_i - z_i| &= |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \quad ; \forall i=1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} |x_i - z_i|^2 &\leq (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2 \quad ; \forall i=1, 2, \dots, n \\ \therefore \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|^2} \end{aligned}$$

(وذلك باستخدام المتباينة المثلثية)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{إذاً}$$

وعليه فإن (R^n, d) تمثل فضاء مترى ويعرف هذا الفضاء بالفضاء الإقليدي ذات البعد (النوني) .

(iii) نفرض F مجموعة جميع المتتابعات اللانهائية $(x_n) = (x)$ حيث $x_n \in R$ لجميع قيم $n=1, 2, \dots$ نعرف $d: F \times F \rightarrow R$ على النحو التالي :

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

حيث $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in F$

برهن أن (F, d) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

هذا الفضاء يسمى فضاء فريشيه (Frechet space).

وتترك للقارئ كتمرين .

تعريف (٩ . ١ . ٥) :

يقال للفضاء المترى (E, d) أنه محدود (bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث $0 \leq d(x, y) \leq k ; \forall x, y \in E$ خلاف ذلك يقال أن (E, d) فضاء مترى غير محدود (unbounded) .

مثال (١٠ . ١ . ٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، نعرف الدالة $\rho: X \times X \rightarrow R$ على النحو

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} ; \forall x, y \in X \quad \text{التالي:}$$

أثبت أن (X, ρ) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

$$(D_1) \because d(x, y) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + d(x, y) \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0 \Rightarrow \rho(x, y) \geq 0$$

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D_2) \rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \rho(y, x)$$

$$(D_3) \rho(x, y) + \rho(y, z) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}$$

$$\geq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z) + d(x, y)}$$

إذاً

$$\begin{aligned}\rho(x, y) + \rho(y, z) &\geq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{d(x, y) + d(y, z)} + 1} \\ &\geq \frac{1}{\frac{1}{d(x, z)} + 1} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = \rho(x, z)\end{aligned}$$

إذاً (X, ρ) فضاء مترى.

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1 ; \forall x, y \in X \quad \text{من الواضح أن}$$

$$0 \leq \rho(x, y) < 1 ; \forall x, y \in X \quad \text{وعليه فإن}$$

إذاً (X, ρ) فضاء مترى محدود.

مثال (١١.١.٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، نعرف الدالة $\rho: X \times X \rightarrow R$ على النحو

$$\rho(x, y) = \frac{m d(x, y)}{1 + d(x, y)} ; \forall x, y \in X ; m > 0 \quad \text{التالي :}$$

اثبت أن (X, ρ) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

تترك كتمرين للقارئ .

مثال (١٢.١.٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، نفرض الدالة $\rho: X \times X \rightarrow R$ ومعرفة

$$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} ; \forall x, y \in X \quad \text{كما يلي :}$$

إذاً (X, ρ) تمثل فضاء مترى ؟

الحل :

$$(D_1) \because \rho(x, y) = 1 \text{ or } d(x, y) \geq 0 \Rightarrow \rho(x, y) \geq 0$$

$$\rho(x, y) = 0 \Rightarrow \min\{1, d(x, y)\} = 0$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(D_2) \text{ بما أن } \rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

إذاً يوجد حالتان هما :

الحالة الأولى : إذا كانت $\rho(x, y) = 1$. إذاً

$$\min\{1, d(x, y)\} = 1 \Rightarrow d(x, y) > 1 \Rightarrow d(y, x) > 1$$

$$\Rightarrow \min\{1, d(y, x)\} = 1 \Rightarrow \rho(y, x) = 1$$

$$\therefore \rho(x, y) = 1 = \rho(y, x)$$

الحالة الثانية : إذا كانت $\rho(x, y) = d(x, y)$. إذاً

$$\min\{1, d(x, y)\} = d(x, y) \Rightarrow d(x, y) < 1 \Rightarrow d(y, x) < 1$$

$$\Rightarrow \min\{1, d(y, x)\} = d(y, x)$$

$$\Rightarrow \rho(y, x) = d(y, x)$$

$$\therefore \rho(x, y) = d(x, y) = d(y, x) = \rho(y, x)$$

لاحظ أنه في كلتا الحالتين $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

$$(D_3) \text{ من التعريف نجد أن : } \rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \leq 1$$

وينشأ هنا حالتان هما :

الحالة الأولى :

إذا كانت إحدى المسافتين $\rho(x, y)$, $\rho(y, z)$ مساويا الواحد أو كليهما فإن

$$\text{الخاصية المثلثية } \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ محققة .}$$

الحالة الثانية :

إذا كانت كلا المسافتين $\rho(x, y)$, $\rho(y, z)$ أقل من الواحد فنجد أن :

$$\begin{aligned}\rho(x, y) + \rho(y, z) &= d(x, y) + d(y, z) \\ &\geq d(x, z) \geq \min\{1, d(x, z)\} = \rho(x, z) \\ \rho(x, z) &\leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{أى أن} \\ &\text{وحيث أنه من تعريف } \rho(x, y) \text{ نجد أن :}\end{aligned}$$

$$0 \leq \rho(x, y) \leq 1 ; \forall x, y \in X$$

إذاً $\rho(x, y)$ فضاء مترى محدود .

تعريف (١٣ . ١ . ٥) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، يقال أن الدالة $d: X \times X \rightarrow R$ دالة شبه مترية (Pseudo metric) معرفة على X إذا حققت :

$$(P_1): d(x, y) \geq 0 \text{ and } x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$$

$$(P_2): d(x, y) = d(y, x)$$

$$(P_3): d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

لجميع قيم $x, y, z \in X$.

الزوج (X, d) يسمى بالفضاء شبه المترى (pseudo metric space) .

ملاحظة :

شرط (D_1) في الفضاء المترى يؤدي إلى الشرط (P_1) في التعريف السابق ، ولكن العكس غير صحيح على وجه العموم ولقد سبق وأن أخذنا المثال التالي :

مثال (١٤ . ١ . ٥) :

اعتبر الدالة $d: R \times R \rightarrow R$ والمعرف كما يلي :

$$d(x, y) = |x^2 - y^2| ; \forall x, y \in R$$

واضح أن d دالة شبه مترية والعكس ليس صحيح لأنه على سبيل المثال إذا

كانت $x=1, y=-1$ فإن $x \neq y$ ولكن $d(x, y) = 0$ وعليه فإن (R, d)

هي فضاء شبه مترى .

مثال (١٥.١.٥) :

نفرض مجموعة الأعداد الحقيقية R نعرف $d : R \times R \rightarrow R$ على النحو

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y & ; x \geq y \\ 1 & ; x < y \end{cases} \quad \text{التالي :}$$

بين ما إذا كان d دالة مترية أم لا ؟الحل : d ليست دالة مترية وذلك لأن :

$$d(3, 6) = 1 \quad (\text{لأن } 3 < 6)$$

$$d(6, 3) = 6 - 3 = 3 \quad (\text{لأن } 6 > 3) \quad \text{بينما}$$

وعلى ضوء ذلك نجد أن $d(3, 6) \neq d(6, 3)$ ، إذاً d ليست دالة مترية .بند (٢) : المسافة بين مجموعتين : (Distance between two sets)نفرض (X, d) فضاء متري ، ونفرض أن A, B مجموعتان جزئيتان غير خاليتان من X .تعريف (١.٢.٥) :المسافة بين المجموعتان A, B والتي يرمز لها بالرمز $D(A, B)$ تعرف كما يلي :

$$D(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

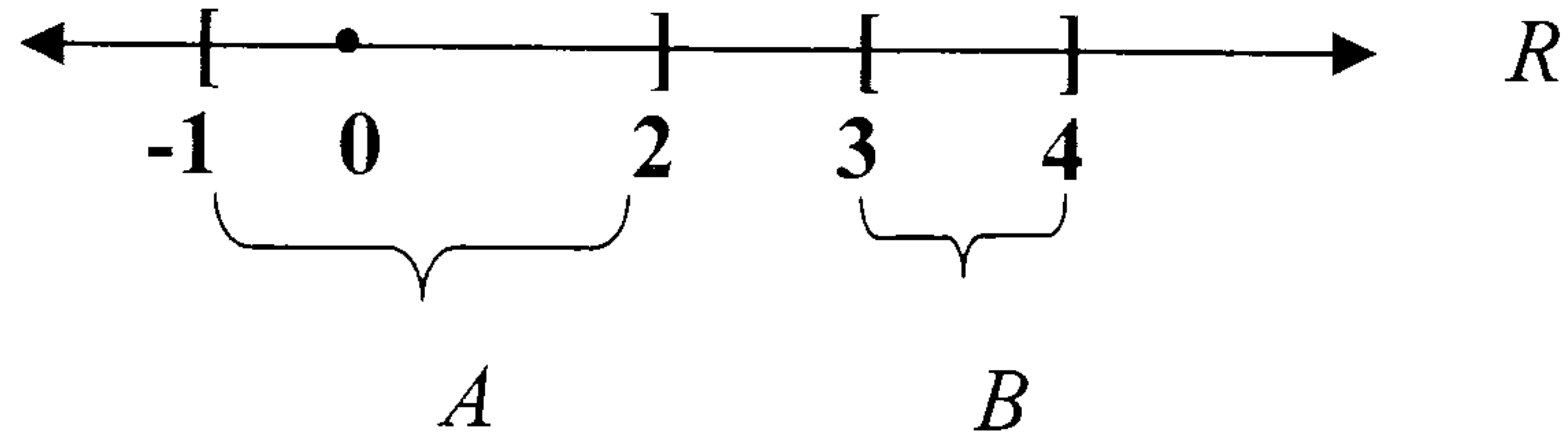
(أي أنها أكبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد نقاط المجموعة A عن نقاط المجموعة B).مثال (٢.٢.٥) :إذا كان لدينا الفضاء المتري (R, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; x, y \in R$$

$$A = [-1, 2], B = [3, 4], C = [1, 3] \quad \text{وكانت}$$

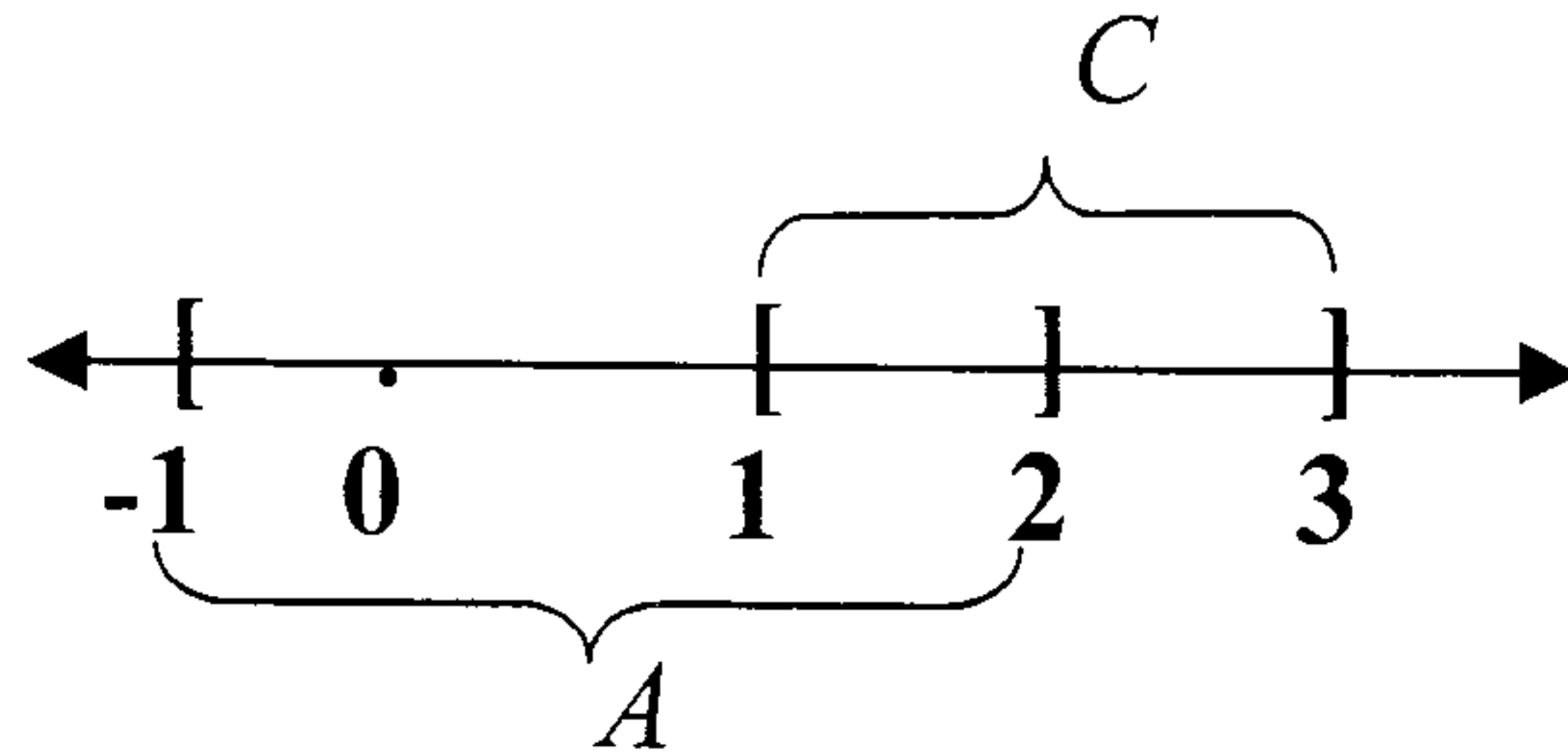
$$(i) D(A, B) \quad (ii) D(A, C) \quad \text{أوجد}$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(A, B)$ نرسم المجموعتين A, B على خط الأعداد كما يلي :واضح أن $A \cap B = \emptyset$ ونجد أنه لأي $a \in A, b \in B$:

$$1 < d(a, b) \leq d(4, -1) = |4 - (-1)| = 5$$

$$D(A, B) = \inf \{x : x \in [1, 5]\} = 1$$

(ii) لإيجاد $D(A, C)$ نرسم المجموعتين A, C كما يلي :نجد أن $A \cap C = [1, 2]$ وواضح من الشكل أنه لأي $a \in A, c \in C$ فإن

$$0 \leq d(a, c) \leq d(3, -1) = |3 - (-1)| = 4$$

$$\therefore D(A, C) = \inf \{x : x \in [0, 4]\} = 0$$

تعريف (٥ . ٢ . ٣) :

إذا كانت $A = \{x\}$ فإن $D(\{x\}, B)$ تعرف كما يلي :

$$D(\{x\}, B) = \inf \{d(x, y) : y \in B\}$$

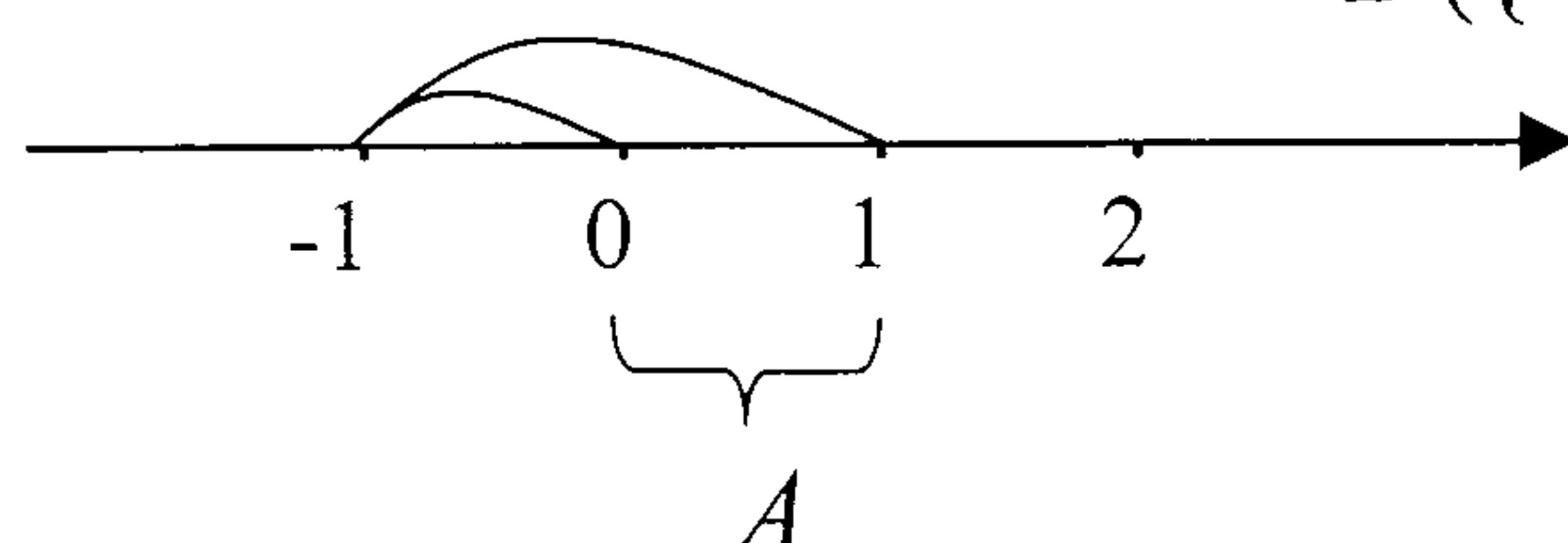
وهي عبارة عن أكبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد " x " عن نقاط B .وهذه الصيغة تعطى المسافة بين نقطة ومجموعة ، أي $d(x, B)$.

مثال (٥ . ٢ . ٤) :

لتكن $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ وأن d راسم المسافة $d: X \times X \rightarrow R$ الطبيعية والتي تحقق شروط الراسم المتري ، وكانت $A = \{0, 1\}$. أوجد

$$(i) D(\{-1\}, A) \quad (ii) D(\{0\}, A)$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(\{-1\}, A)$:

من الشكل

نجد أن

$$(a) d(-1, 0) = |-1 - 0| = 1 \Rightarrow D(\{-1\}, A) = \inf \{1, 2\} = 1$$

$$(b) d(-1, 1) = |-1 - 1| = 2 \Rightarrow D(\{-1\}, A) = \inf \{1, 2\} = 1$$

(ii) لإيجاد $D(\{0\}, A)$:

$$(a) d(0, 0) = 0 \Rightarrow D(\{0\}, A) = \inf \{0, 1\} = 0$$

$$(b) d(0, 1) = 1 \Rightarrow D(\{0\}, A) = \inf \{0, 1\} = 0$$

من (i), (ii) نحصل علي :

$$D(\{x\}, A) = \begin{cases} 0 & ; x \in A \\ 1 & ; x \notin A \end{cases}$$

مثال (٥ . ٢ . ٥) :

ليكن $d: R \times R \rightarrow R$ معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| \quad ; \quad \forall x, y \in R$$

وكانت $A = [1, 2]$ أوجد :

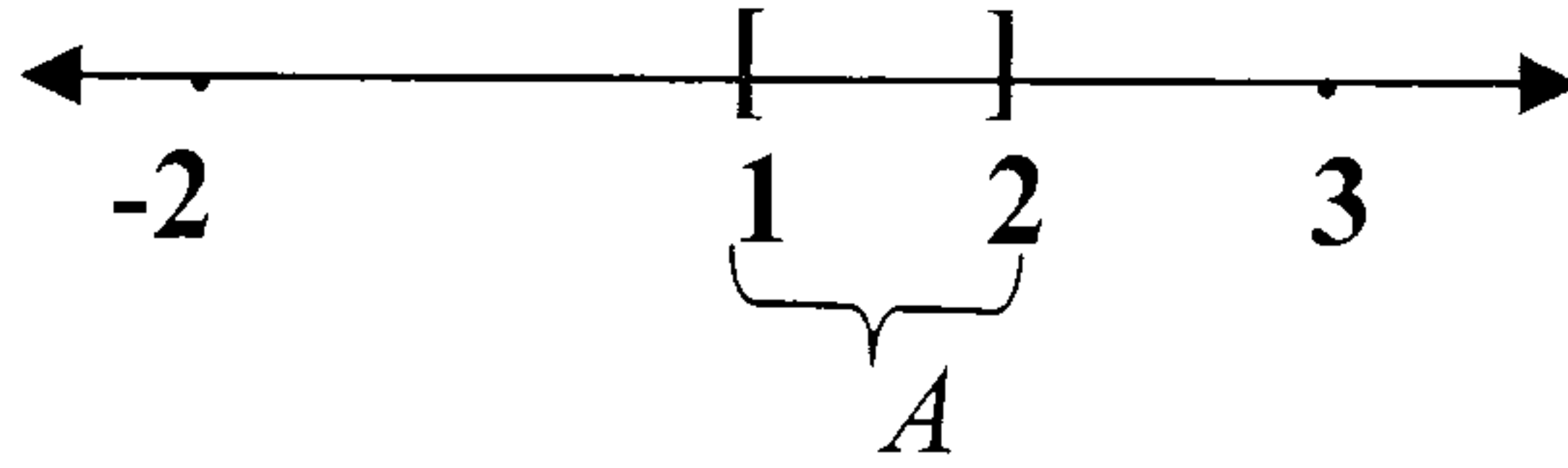
$$(i) D(\{3\}, A) \quad (ii) D(\{2\}, A) \quad (iii) D(\{-2\}, A)$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(\{3\}, A)$:

المطلوب إيجاد المسافة بين العنصر "3" وكل عنصر من عناصر A ولكن من الواضح أن A مجموعة غير منتهية لهذا لا بد من اتباع أسلوب آخر وهو اتباع أسلوب الرسم .

والشكل التالي يوضح موقع "3" والمجموعة A على خط الأعداد :



واضح من الرسم أن : $d(3,2)=|3-2|=1$, $d(3,1)=|3-1|=2$ وأنه لكل $x \in A$ تكون المسافة $d(3,x)$ تحقق المتباينة :

$$1 \leq d(3, x) \leq 2$$

$$\therefore D(\{3\}, A) = \inf\{d(3, x) : x \in A\} = \inf\{[1, 2]\} = 1$$

(ii) لإيجاد $D(\{2\}, A)$: نجد أن

$$d(2,2)=0 , d(2,1)=|2-1|=1$$

$$\text{إذاً } 0 \leq d(2, x) \leq 1 \text{ لجميع قيم } x \in A$$

$$\text{إذاً } D(\{2\}, A) = \inf[0, 1] = 0$$

(iii) لإيجاد $D(\{-1\}, A)$: نجد أن

$$d(-2,1)=|-2-1|=3 , d(-2,2)=|-2-2|=4$$

$$\text{إذاً } 3 \leq d(-2, x) \leq 4 ; \forall x \in A$$

$$\text{وعليه فإن } D(\{-2\}, A) = \inf\{[3, 4]\} = 3$$

تعريف (٥ . ٢ . ٦) :

قطر (diameter) المجموعة A ويرمز له بالرمز $\delta(A)$ يعرف على النحو

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \quad \text{التالي :}$$

وهذا يعني أنه أدنى حد علوي (lower upper bound) للمسافات بين نقاط A .
مثال (٧ . ٢ . ٥) :

إذا كان $d: R \times R \rightarrow R$ معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| \quad ; \quad \forall x, y \in R$$

وكانت $A = [3, 7]$ فأوجد $\delta(A)$.

الحل :

واضح أن $0 \leq d(x, y) \leq d(3, 7) = |7 - 3| = 4 \quad ; \quad \forall x, y \in A$

$$\delta(A) = \sup \{[0, 4]\} = 4 \quad \text{إذا}$$

مثال (٨ . ٢ . ٥) :

نفرض $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ ونفرض $d: R \times R \rightarrow R$ معرفة

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases} \quad \text{كما يلي : لجميع قيم } x, y \in X$$

وكان لدينا المجموعتين $A = \{4, 6\}$, $B = \{5\}$ فأوجد

$$(i) \delta(A) \quad (ii) \delta(B)$$

الحل :

(i) لإيجاد $\delta(A)$: نجد أن المسافة بين جميع عناصر A تصاغ على النحو

التالي :

	4	6
4	0	1
6	1	0

واضح أن $\delta(A) = 1$.

(ii) لإيجاد $\delta(B)$: نجد أن المسافة بين عناصر B هي صفر ، إذاً

$$\delta(A) = \sup (\{0\}) = 0$$

تعريف (٩ . ٢ . ٥) :

إذا كانت $\delta(A) < \infty$ سميت المجموعة A بمجموعة محدودة (bounded) أما إذا كان $\delta(A) = \infty$ سميت المجموعة A غير محدودة (unbounded).

مثال (١٠ . ٢ . ٥) :

نفرض $d: R \times R \rightarrow R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

ولتكن (i) $A = [3, 5[$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\delta(A) = \sup \{[0, 5 - 3]\} = \sup \{[0, 2]\} = 2 < \infty$$
 نجد أن

$$\delta(B) = \sup \{1, 2, 3, \dots\} = \infty$$
 ونجد أن A محدودة .

إذاً B غير محدودة ، B هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

نظرية (١١ . ٢ . ٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، ونفرض A, B مجموعتان جزئيتان غير خاليتين من X . إذاً

$$(i) A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$$

$$(ii) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow D(A, B) = 0$$

$$(iii) \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + D(A, B) + \delta(B)$$

$$(iv) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$$

البرهان :

(i) واضحة من التعريف حيث أن :

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

$$\leq \sup \{d(x, y) : x, y \in B\} = \delta(B)$$

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (ii)$$

وحيث أن $A \cap B \neq \emptyset$ إذاً يوجد عنصر $x \in A \cap B$ وبالتالي فإن

$$d(x, x) = 0$$
 ، وعليه فإن الصفر أحد عناصر المجموعة

$\{d(a,b): a \in A, b \in B\}$. إذاً $D(A,B)=0$.

(iii) نفرض أن a, b نقطتين اختياريتين من A, B على التوالي وأن x, y

أي نقطتين من $A \cup B$ سوف نتدارس الحالات الثلاثة التالية :

الحالة الأولى : إذا كانت $x, y \in A$:

واضح أن $d(x,y) \leq \delta(A)$ (وذلك من التعريف $\delta(A)$)

الحالة الثانية : إذا كانت $x, y \in B$: فإن $d(x,y) \leq \delta(B)$

الحالة الثالثة : إذا كانت $x \in A, y \in B$ فإن

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \quad (a \in A)$$

$$\leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \quad (b \in B)$$

$$\leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B) \quad (*)$$

بالمثل إذا كان $x \in B, y \in A$ فإن (*) ما زالت صحيحة ، وعليه فهي

صحيحة في جميع الحالات وحيث أن a, b نقاط اختيارية ، إذاً

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + D(A,B) + \delta(B)$$

(iv) تأتي مباشرة من (ii), (iii) .

ملحوظة :

عكس الجملة (ii) ليس صحيحاً على وجه العموم ، المثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٥ . ٢ . ١٢) :

نفرض $d: R \times R \rightarrow R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x,y) = |x-y| ; \forall x, y \in R$$

ونفرض $A = [1,2[$, $B = (2,3]$. واضح أن $A \cap B = \emptyset$ بينما

$$D(A,B) = \inf \{d(a,b): a \in A, b \in B\}$$

$$= \inf \{(0,2]\} = 0$$

ومن ثم فإن $A \cap B = \emptyset$ ولكن $D(A,B) = 0$.

مثال (٥.٢.١٣) :

نفرض A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المترى (X, d) ، لأي $x \in X$ فإن :

$$(i) \text{ إذا كان } x \in A \text{ فإن } D(\{x\}, A) = 0$$

$$(ii) \text{ إذا كانت } A \text{ مجموعة منتهية فإن } \delta(A) < \infty$$

البرهان : تترك للقارئ كتمرين .

مثال (٥.٢.١٤) :

نفرض $d: R \times R \rightarrow R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

نفرض المجموعة $A = [1, 2)$ ونأخذ $x = 2 \in R$ من الواضح أن $2 \notin A$ ، ولكن

$$D(\{x\}, A) = \inf \{d(2, a) : a \in A\} = \inf \{(0, 1]\} = 0$$

نستخلص مما سبق أن :

$$D(\{x\}, A) = 0 \Rightarrow x \in A \quad (\text{على وجه العموم})$$

مثال (٥.٢.١٥) :

نفرض $d: R \times R \rightarrow R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

نفرض $A = [0, 1]$ هذه المجموعة غير منتهية ونجد أن

$$\delta(A) = \sup \{[0, 1]\} = 1 < \infty$$

بند (٣) : المجموعات المفتوحة في الفضاء المترى :

(Open sets on Metric space)

تعريف (٥.٣.١) :

نفرض الفضاء المترى (X, d) لأي $x_0 \in X$ ، عدد حقيقي موجب

$(r > 0)$. نعرف المجموعة الجزئية التالية :

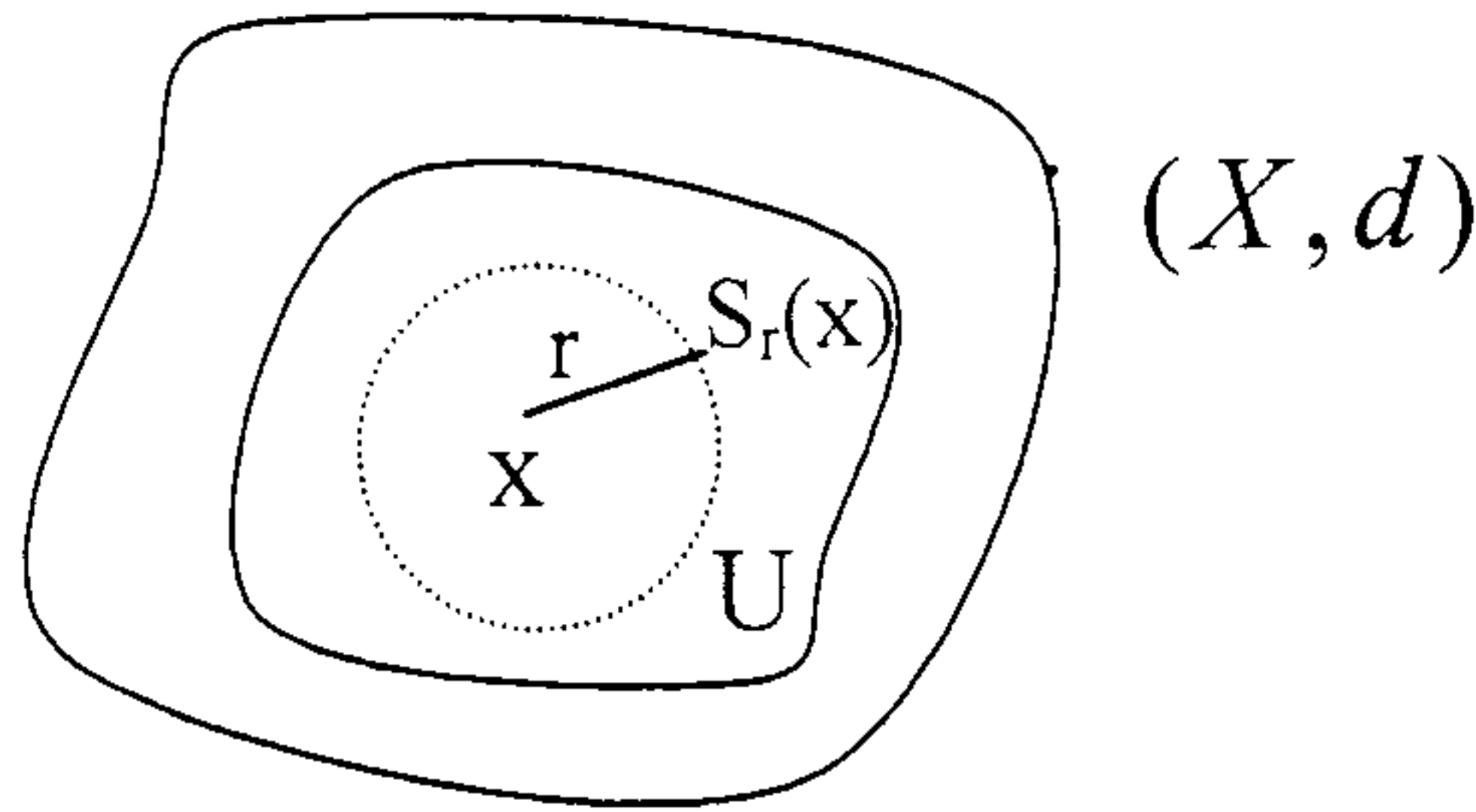
$$S(x_0, r) = S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r, r > 0\}$$

المجموعة الجزئية $S_r(x_0)$ من X تسمى كرة مفتوحة (open sphere) لها نصف قطر r ، ومركز x_0 . من الواضح أن $S_r(x_0) \neq \phi$ وذلك لأنها تحتوي على الأقل على نقطة مركزها x_0 .

تعريف (٢ . ٣ . ٥) :

تسمى المجموعة الجزئية الغير الخالية U من الفضاء المترى (X, d) بالمجموعة المفتوحة (open set) إذا تحقق ما يلي :

لكل نقطة $x \in U$ يوجد $r > 0$ بحيث $S_r(x) \subseteq U$



ملحوظة هامة :

واضح أن تعريف المجموعة المفتوحة يعتمد على وجود كرات مفتوحة التي بدورها تعتمد على الدالة المترية d المعرفه على X ، فهذا يعني ضمناً أن المجموعة المفتوحة تعتمد على شكل الدالة المترية d وبالتالي يطلق عليها دائماً (d- open set) أي المجموعة المفتوحة منسوبة إلى d .

سوف نستخدم الرمز G للتعبير عن مجموعة جميع المجموعات المفتوحة في الفضاء المترى (X, d) .

مثال (٣ . ٣ . ٥) :

(i) نفرض أن (R, d) الفضاء المترى العادي حيث أن

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

أوجد $S(p, r)$ ومن ثم أوجد $S(0, 2)$ ، $S(0, 1)$.

الحل :

$$S(p, r) = S_r(p) = \{x \in R : d(x, p) < r\}$$

$$= \{x \in R : |x - p| < r\}$$

$$= \{x \in R : -r < x - p < r\}$$

$$= \{x \in R : p - r < x < p + r\}$$

ومن هذا يتضح أن عائلة الكرات المفتوحة في الفضاء المترى العادي هي كل

$$S(0, 2) = (-2, 2) ; S(0, 1) = (-1, 1) \text{ ونجد أن}$$

(ii) نفرض أن (R, d) الفضاء المترى العادي حيث أن :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

$$\text{نفرض } x_0 = 1, r = \frac{1}{2}, \text{ أوجد } S(1, \frac{1}{2}).$$

الحل :

$$S(1, \frac{1}{2}) = S_{\frac{1}{2}}(1) = \{x \in R : d(x, 1) < \frac{1}{2}\}$$

$$= \{x \in R : |x - 1| < \frac{1}{2}\}$$

$$= \{x \in R : 1 - \frac{1}{2} < x < 1 + \frac{1}{2}\} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

إذاً $S_{\frac{1}{2}}(1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ والتي هي فترة مفتوحة.

وعموماً عائلة الكرات المفتوحة في الفضاء المترى العادي هي عائلة الفترات

المفتوحة.

مثال (٥ . ٣ . ٤) :

نفرض الفضاء المترى (R^2, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

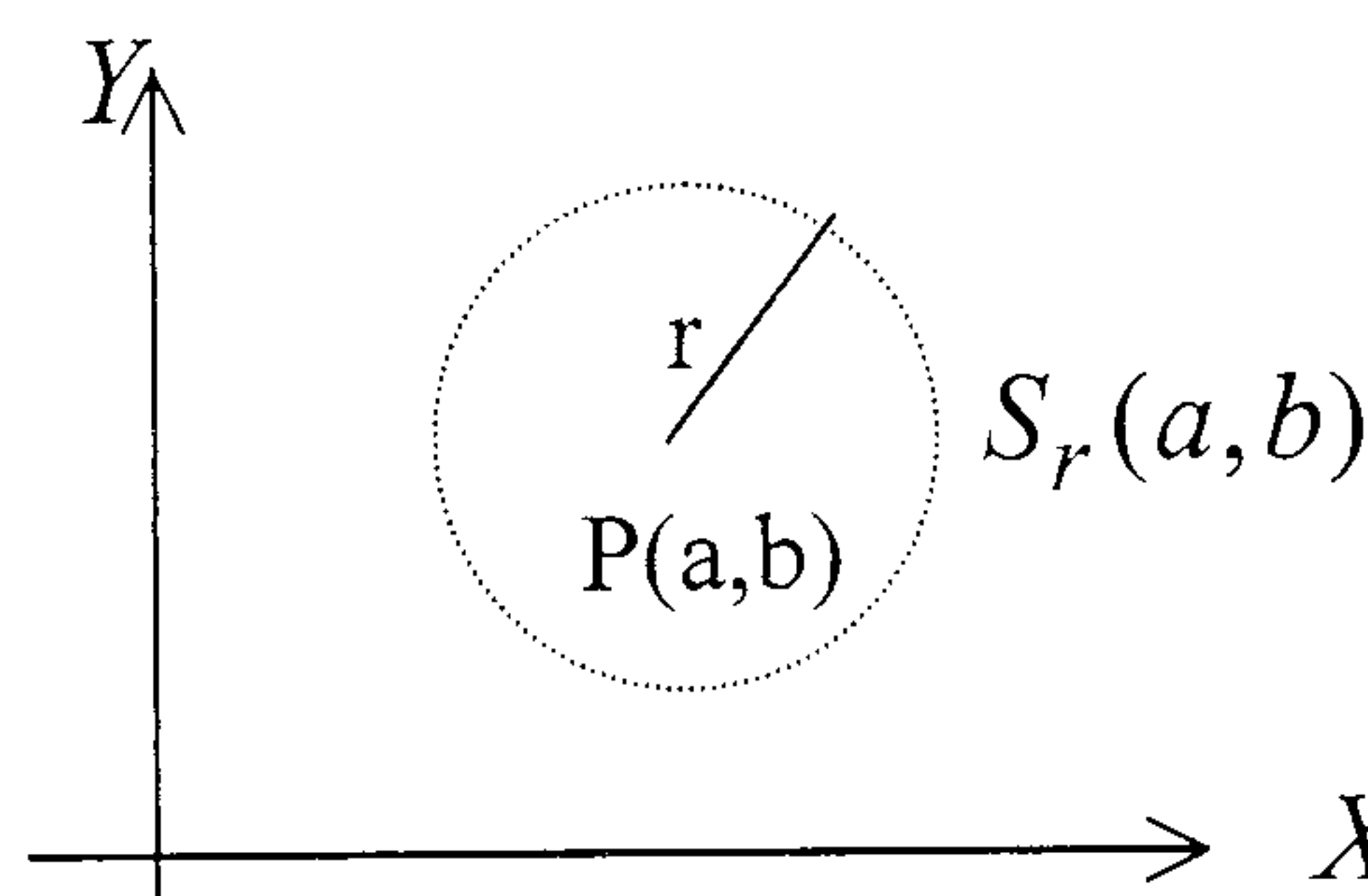
$$; \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$$

نفرض النقطة $p=(a,b)$ ، $r=1$. أوجد $S(p,r)$.

الحل : نجد أن

$$\begin{aligned} S(p,r) &= S_r(p) = \{q=(x,y) \in R^2 : d(q,p) < r\} \\ &= \{q=(x,y) \in R^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\} \end{aligned}$$

وهي قرص مفتوح نصف قطره r ومركزه $p=(a,b)$. وتعطى بالشكل التالي :



ونجد أن $S(p,1)$ تمثل قرص مفتوح نصف قطره الوحدة ومركزه $p=(a,b)$.
مثال (٥ . ٣ . ٥) :

نفرض الفضاء المترى (R^2, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(p,q) = |x - x_1| + |y - y_1|$$

$$; \forall q=(x,y), p=(x_1,y_1) \in R^2$$

أوجد $S(p,r)$ ومن ثم أوجد $S((0,0),1)$.

الحل : نجد أن

$$\begin{aligned} S(p,r) &= \{q \in R^2 : d(p,q) < r\} \\ &= \{(x,y) \in R^2 : |x - x_1| + |y - y_1| < r\} \end{aligned}$$

وبالتالي إذا كانت $r=1$ ، $p=(0,0)$ فإن

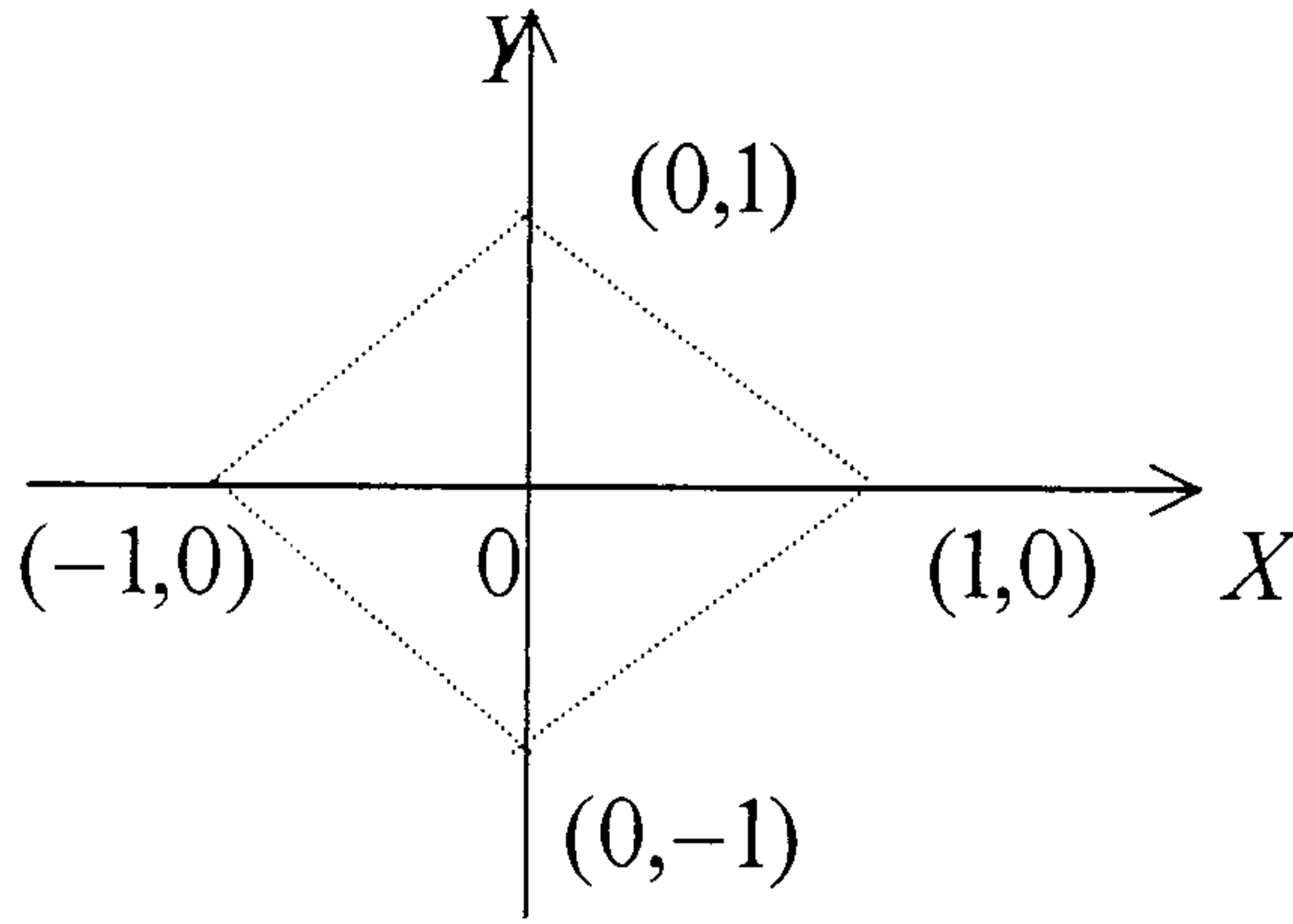
$$S((0,0),r) = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 1\}$$

عندما يكون $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ فإن $|x| + |y| = x + y$ وتكون

$$S((0,0),r)=\{(x,y)\in R^2 : x+y < 1\}$$

وهى تمثل مجموعة كل النقاط (x,y) فى المستوى المحدد بالمستقيمين $x=0$ ، $y=0$ بحيث أن $x+y < 1$.

الشكل التالى يوضح أن المجموعة $S((0,0),1)$ هى مجموعة كل النقاط التى تقع داخل المربع الذى مركزه نقطة الأصل وطول ضلعة $\sqrt{2}$ وقطراه ينطبقان على محورى الإحداثيات.



مثال (٥ . ٣ . ٦) :

نفرض الفضاء المترى (R^2, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(p_1, p_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

$$; \forall p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in R^2$$

نفرض النقطة $p_o = (0,0)$ ، $r=1$ أوجد $S(p_o,1)$.

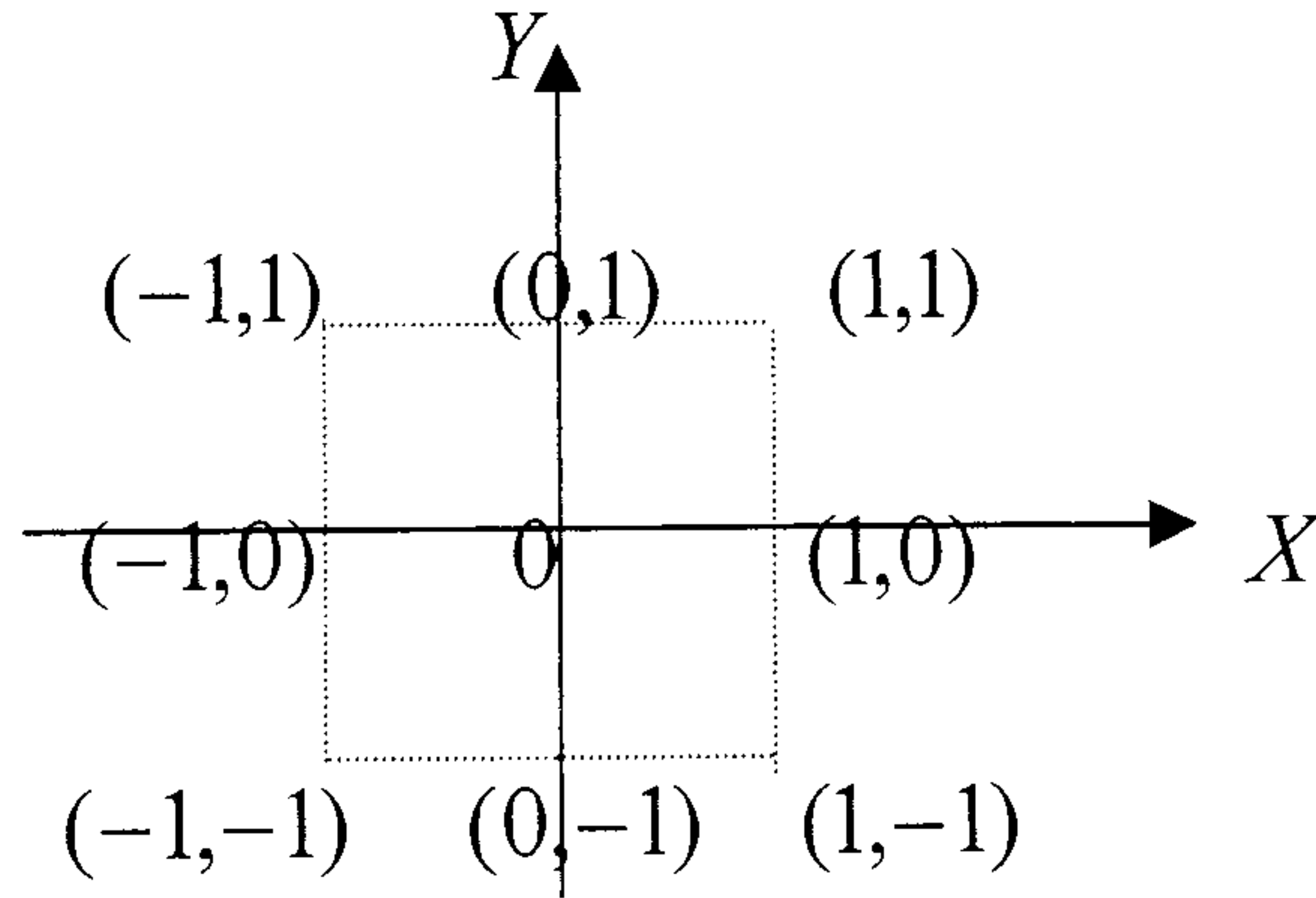
الحل :

$$S(p_o,1) = S_1(p_o) = \{p \in R^2 : d(p, p_o) < 1\} \quad \text{نجد أن}$$

$$= \{(x,y) \in R^2 : \max(|x|, |y|) < 1\}$$

والشكل التالى يوضح هذه المجموعة.

ونجد أن المجموعة $S(p_0, 1)$ هي مجموعة كل النقاط التي تقع داخل المربع الذي مركزه نقطة الأصل وطول ضلعة الوحدة.



مثال (٥ . ٣ . ٧) :

نفرض (X, d) هي الفضاء المترى المتقطع. حيث

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} ; \forall x, y \in R$$

إذا كانت $x_0 \in X$ ، $r > 0$ فإن :

$$S(x_0, r) = S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

وندرس هنا حالتان هما :

الحالة الأولى : إذا كانت $0 < r \leq 1$ فإن :

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d_o(x, x_0) < r \leq 1\} = \{x_0\}$$

ولتوضيح ذلك نأخذ مثلاً المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. إذاً

$$S(3, 0.2) = \{x \in X : d_o(x, 3) < 0.4\}$$

$$= \{x \in X : d_o(x, 3) = 0\} = \{3\}$$

$$S(2, 1) = \{x \in X : d_o(x, 2) < 1\}$$

$$= \{x \in X : d_o(x, 2) = 0\} = \{2\}$$

الحالة الثانية : إذا كانت $r > 1$ فإن :

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d_0(x, x_0) < r\} = X$$

لأنه لا توجد أي نقطة في X بحيث يكون بعدها عن النقطة x أكبر من الواحد ،
إذاً يوجد كرة مفتوحة وحيدة نصف قطرها واحد هي X نفسها .

مثال (٨ . ٣ . ٥) :

نفرض (R, d) الفضاء المترى العادي ، نفرض $U = (0, 1)$ ، إذاً U
مجموعة مفتوحة لأنه لأي نقطة في U يمكن إيجاد فترة مفتوحة نصف قطرها ε
مثلاً بحيث أن : $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U ; \forall x \in U$

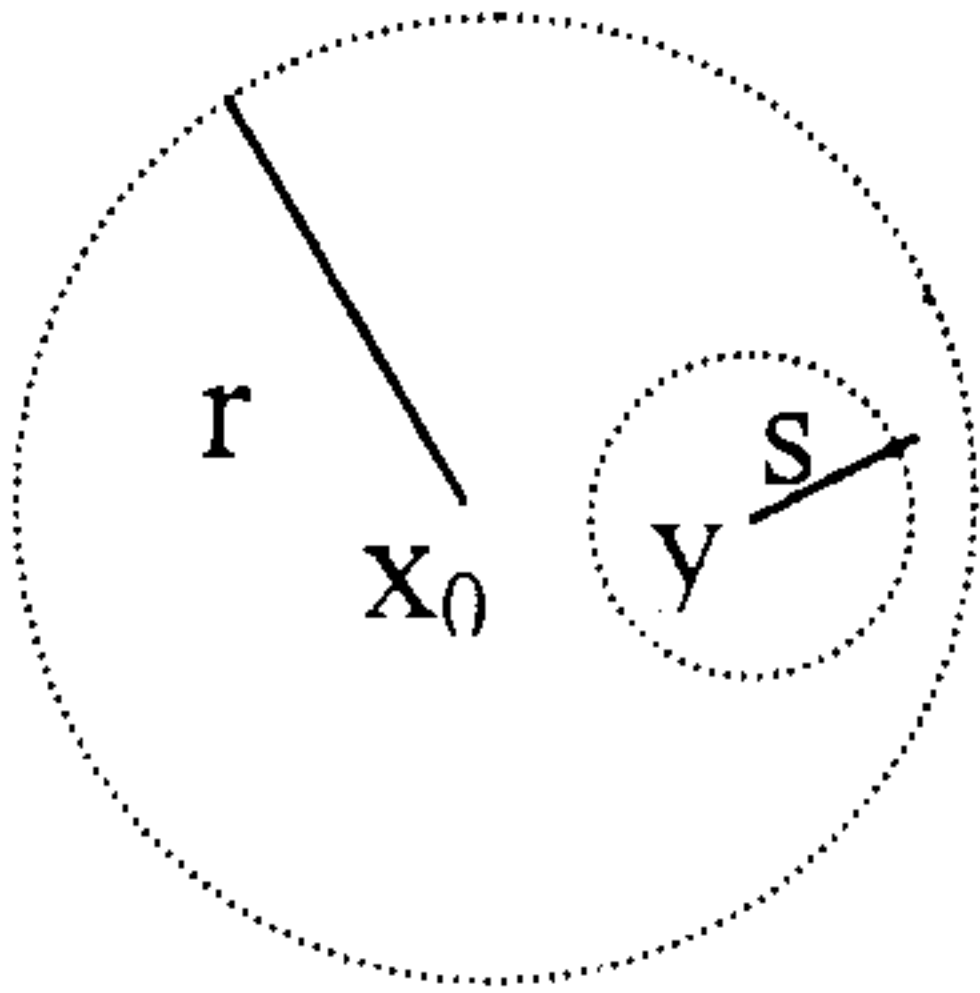
مثال (٩ . ٣ . ٥) :

نفرض (R, d) الفضاء المترى العادي، ونفرض المجموعة
 $U = \{x \in R : 0 \leq x < 1\}$. المجموعة U ليست مفتوحة لأنه من المستحيل
إيجاد فترة مفتوحة تحتوي الصفر وفي نفس الوقت تقع داخل U أو تكون مجموعة
جزئية من U . ونفس الطريقة يمكن إثبات أن الفترة : $\{x \in R : 0 < x < 1\}$
مجموعة ليست مفتوحة من R .

نظرية (١٠ . ٣ . ٥) :

الكرة المفتوحة $S_0(x_0)$ والتي مركزها x_0 ونصف قطرها r تمثل مجموعة
مفتوحة .

البرهان :



النقطة x_0 هي مركز الكرة المفتوحة $S_0(x_0)$ والتي
مركزها نقطة الأصل ، نأخذ النقطة $y \in S_0(x_0)$
سوف نحاول إيجاد عدد $s > 0$ بحيث أن

$$S_s(y) = S(y, s) \subseteq S_r(x_0) = S(x_0, r)$$

نفرض $s = r - d(x_0, y)$ بما أن $y \in S_r(x_0)$ إذاً $d(x_0, y) < r$ إذاً

$s > 0$ ، نفرض النقطة $z \in S_s(x_0)$ إذاً $d(y, z) < s$ وسوف نحاول فيما يلي إثبات أن $z \in S_r(x_0)$ باستخدام المتباينة المثلثية نجد أن :

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < d(x_0, y) + s < r$$

وهذا يعني أن $z \in S_r(x_0)$ وعليه فإن $S_s(y) \subseteq S_r(x_0)$ وحيث أن $y \in S_r(x_0)$ نقطة اختيارية ، إذاً لأي نقطة تقع في $S_r(x_0)$ يمكن إيجاد كرة مفتوحة تقع داخل $S_r(x_0)$. إذاً $S_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة.
نظرية (١١.٣.٥) :

في الفضاء المترى (X, d) إذا كانت S_1, S_2 كرتان مفتوحتان فإنه لكل $p \in S_1 \cap S_2$ توجد كرة مفتوحة S_p بحيث أن : $p \in S_p \subseteq S_1 \cap S_2$
البرهان : تترك للقارئ كتمرين
نظرية (١٢.٣.٥) :

المجموعة الجزئية U من الفضاء المترى (X, d) تكون مفتوحة إذا فقط إذا كانت U هي اتحاد كرات مفتوحة.
البرهان :

نفرض أن U مجموعة مفتوحة ، إذا كانت $U = \emptyset$ فإنها تكون $U = \bigcup \emptyset$
هي اتحاد مجموعات مفتوحة ، أما إذا كانت $U \neq \emptyset$ ، نفرض $x \in U$ ، إذاً يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ بحيث أن $S_r(x) \subseteq U$ والآن
$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} S_r(x) \subseteq U$$

وعليه فإن $U = \bigcup_{x \in U} S_r(x)$.

وهذا يعني أن U هي اتحاد كرات مفتوحة .

وعلى العكس بفرض أن U هي اتحاد مجموعات جزئية من الكرات المفتوحة ، وحيث أن الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة وأن اتحاد أي عدد من المجموعات

المفتوحة يعطى مجموعة مفتوحة ، إذاً U تكون مجموعة مفتوحة .

من النظرية السابقة نستطيع القول بأن عائلة كل الكرات المفتوحة في الفضاء المترى تشكل أساس لتوبولوجى هذا التوبولوجى يسمى التوبولوجى المترى (metric topology) أو التوبولوجى المولد بواسطة الدالة المترية d ويرمز له بالرمز $\tau(d)$ ، كما أن $(X, \tau(d))$ يسمى بالفضاء التوبولوجى المترى .

والآن وبعد أن أدخلنا مفهوم المجموعات المفتوحة في الفضاء المترى سوف نركز الاهتمام على دراسة خواص تلك المجموعات . فإذا فرضنا الفضاء المترى (X, d) وكانت τ هي عائلة كل المجموعات المفتوحة الناتجة عن دالة المسافة d فإننا نحصل على النظرية التالية :

نظرية (١٣ . ٣ . ٥) :

ليكن (X, d) فضاء مترى ، فإن :

- (i) المجموعات X, ϕ مجموعات مفتوحة .
- (ii) اتحاد أي عدد من المجموعات الجزئية المفتوحة تعطي مجموعة مفتوحة .
- (iii) تقاطع عدد محدد من المجموعات المفتوحة تعطي مجموعة مفتوحة .

البرهان :

(i) لإثبات أن ϕ مجموعة مفتوحة فهذا يتطلب أن تكون كل نقطة من نقاط ϕ مركزاً لكرة مفتوحة محتواه في ϕ وحيث أن ϕ خالية من العناصر فإن هذا المطلوب محقق دوماً .

والآن المجموعة X مجموعة مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$ فإنه على سبيل المثال $S(x, 1) \subset X$ حيث أن نصف قطرها الوحدة .

(ii) نفرض τ هي عائلة كل المجموعات المفتوحة ، ونفرض G_λ مجموعات جزئية مفتوحة من τ ، المراد إثبات أن $G = \cup G_\lambda$ مجموعة جزئية مفتوحة في τ ، بفرض أن $x \in G$ إذاً x تنتمي إلى إحدى المجموعات G_λ وذلك من

تعريف الاتحاد ، ولتكن مثلاً G_{λ_0} أى أن $x \in G_{\lambda_0}$ وبما أن G_{λ_0} مجموعة مفتوحة ، إذاً يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ مركزها x ونصف قطرها r بحيث $x \in S_r(x) \subseteq G_{\lambda_0}$ ولكن $G_{\lambda_0} \subseteq G$ إذاً $S_r(x) \subseteq G$ ، وبما أن x عنصر اختياري من المجموعة G وحيث أن $x \in S_r(x) \subseteq G$ ، إذاً G مجموعة مفتوحة في τ .

(iii) نفرض $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ حيث G_i مجموعات جزئية مفتوحة من τ نفرض

$x \in G$ إذاً $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$ ، إذاً x تنتمي إلى جميع المجموعات الجزئية G_i وحيث

أن هذه المجموعات الجزئية مفتوحة إذاً لجميع قيم $i=1,2,\dots,n$ يوجد كرة

مفتوحة S_i بحيث أن $x \in S_i \subseteq G_i ; \forall i$ إذاً $x \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n G_i$

وهذا يعني $x \in S \subseteq \bigcap_{i=1}^n G_i = G$ وحيث أن x نقطة اختيارية ، إذاً G

مجموعة مفتوحة في τ . أى أن $(X, \tau(d))$ فضاء توبولوجي.

أمثلة (١٤ . ٣ . ٥) :

(i) نفرض (X, d) الفضاء المترى العادي، حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

$$S_r(x) = (x - r, x + r) \quad \text{إذاً}$$

وهي فترة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r .

نعلم أن عائلة الفترات المفتوحة علي R هي أساس للتوبولوجي العادي $\mathcal{U}$ على

R . وعلى هذا فإن الفضاء المترى العادي (R, d) يولد الفضاء التوبولوجي

العادي $(R, \mathcal{U}(d))$. كذلك في الفضاء المترى (R^2, d) حيث أن مجموعة

الدوائر المفتوحة بواسطة دالة المسافة العادية على R^2 هي أساس للتوبولوجى العادى على R^2 فإن (R^2, d) يولد $(R^2, u(d))$.

(ii) بفرض أن $X \neq \emptyset$ ، d هي دالة المسافة التافهة. لأى $p \in X$ ، $r = \frac{1}{2}$ فإن : $S(p, \frac{1}{2}) = \{p\}$. أى أن $\{p\}$ كرة مفتوحة ومن ثم فإن كل مجموعة أحادية العنصر هي مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن أى مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة. إذاً الدالة المترية التافهة تولد التوبولوجى المنفصل D على X . إذاً $(X, \tau(d))$ هو الفضاء المنفصل.

نظرية (٥ . ٣ . ١٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، نفرض المجموعة الجزئية $\{x_0\} \subset X$ من X ، إذاً $X - \{x_0\}$ مجموعة مفتوحة .

البرهان :

نفرض $x \in X - \{x_0\}$ ، للبرهنة على أن $X - \{x_0\}$ مجموعة مفتوحة ، يجب أن نبرهن على أنه لأى نقطة $x \in X$ يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ مركزها x ونصف قطرها x بحيث $x \in S_r(x) \subseteq X - \{x_0\}$ نفرض $r = d(x, x_0)$ ، نفرض $x' \in S_r(x)$ ، إذاً $d(x, x') < r = d(x, x_0)$ ، $x' \neq x_0$ وعليه فإن $S_r(x) \subseteq X - \{x_0\}$. إذاً $X - \{x_0\}$ هي مجموعة مفتوحة .

مثال (٥ . ٣ . ١٦) :

نفرض x_1, x_2 نقطتان منفصلتان في الفضاء المترى (X, d) ، برهن أنه يوجد كرتان مفتوحتان $S_r(x_1), S_r(x_2)$ بحيث أن :

$$S_r(x_1) \cap S_r(x_2) = \emptyset$$

البرهان :

نفرض $d(x_1, x_2) = 2r$ ، ونفرض $S_r(x_1), S_r(x_2)$ كرتان لهما المركزان x_1, x_2 على الترتيب ، نفرض على سبيل الاعتراض أن $x \in S_r(x_1) \cap S_r(x_2)$ نجد أن :

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < r + r = 2r$$

إذاً $2r = d(x_1, x_2) < 2r$ وهذا يعني أن $r < r$ وهذا مستحيل

الحدوث ، وعليه فإن $S_r(x_1) \cap S_r(x_2) = \emptyset$

تعريف (١٧.٣.٥) :

يقال أن دالتى المسافة d_1, d_2 المعرفتين على المجموعة X متكافئتين إذا وفقط إذا ولدا التوبولوجى نفسه على X ويرمز لذلك بالرمز $d_1 \sim d_2$ أى أن :

$$d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow \tau(d_1) = \tau(d_2)$$

من السهل التحقق بأن خاصية التكافؤ هى علاقة تكافؤ لأن كل دالة تكافئ نفسها ومتماثلة وناقلة. بالتالى فإن جميع عناصر فصل التكافؤ الواحد تعطى نفس العائلة من المجموعات المفتوحة.

مثال (١٨.٣.٥) :

نفرض المجموعة غير الخالية X نعرف الدالتان التاليتان d_1, d_2 على X :

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} ; d_2(x, y) = \begin{cases} 2 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

هل $d_1 \sim d_2$ ؟

الحل :

عائلة الكرات المفتوحة المولدة بواسطة الدالة المترية d_2 هى :

$$S_{d_2}(p, r) = \begin{cases} \{p\} & ; r \leq 2 \\ X & ; r > 2 \end{cases}$$

وهى نفس الكرات المفتوحة المولدة بواسطة الدالة المترية d_1 (الدالة التافهة) والتي

هى أساس للتوبولوجى المنفصل على X ، $\tau(d_1) = D$

إذاً $\tau(d_1) = \tau(d_2) = D$. أى أن $d_1 \sim d_2$.

مثال (٥ . ٣ . ١٩) :

أثبت أنه لأى فضاء مترى (X, d) فإن $d \sim d_1 \sim d_2$ حيث

$$d_1(x, y) = r d(x, y) \quad ; \quad r > 0, \forall x, y \in X$$

$$d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad ; \quad \forall x, y \in X$$

الحل :

أولاً : نثبت أن $d_1 \sim d$ من أجل ذلك نفرض أن $S_d(p, \varepsilon)$ ، $S_{d_1}(p, \delta)$

هى كرات مفتوحة بالنسبة إلى d ، d_1 ونثبت أن : $S_{d_1}(p, \delta) = S_d(p, \varepsilon)$

$$\text{Let } x \in S_d(p, \varepsilon) \Leftrightarrow d(p, x) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow r d(p, x) = d_1(p, x) < \varepsilon r = \delta \quad ; \quad \forall r > 0$$

ومن ثم فإنه يوجد $\delta = \varepsilon r > 0$ بحيث أن $x \in S_{d_1}(p, \delta)$ وبالتالى فإنه لكل

$$\varepsilon > 0 \text{ يوجد } \delta = \varepsilon r > 0 \text{ بحيث أن } S_d(p, \varepsilon) = S_{d_1}(p, \delta)$$

وبالتالى إذا كانت $A \in \tau(d)$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $S_d(p, \varepsilon) \subseteq A$

(طبقاً لتعريف المجموعة المفتوحة). ومن ثم فإن $S_d(p, \varepsilon) = S_{d_1}(p, \delta) \subseteq A$

وهذا يؤدى إلى $A \in \tau(d_1)$ ومن ذلك نستنتج أن :

$$\tau(d) \subseteq \tau(d_1) \quad \dots \dots \dots (*)$$

وبالمثل إذا كانت $U \in \tau(d_1)$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن

$$S_{d_1}(p, \varepsilon) \subseteq U \text{ ومن ثم فإن } S_d(p, \varepsilon) = S_{d_1}(p, \delta) \subseteq U$$

أى أن $U \in \tau(d)$ ومن ذلك نستنتج أن :

$$\tau(d_1) \subseteq \tau(d) \quad \dots \dots \dots (**)$$

من (*) ، (**) نرى أن $\tau(d_1) = \tau(d)$ إذاً $d \sim d_1$

ثانياً : نثبت أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث $S_d(p, \varepsilon) = S_{d_2}(p, \varepsilon')$ ولنفرض أن لأي $\varepsilon > 0$ يكون $x \in S_d(p, \varepsilon)$ إذاً $d(p, x) < \varepsilon$ وعليه فإن

$$1 + d(p, x) < 1 + \varepsilon \quad \text{ومنها} \quad \frac{1}{1 + d(p, x)} < \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad \text{ومنها نحصل على:}$$

$$\frac{d(p, x)}{1 + d(p, x)} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \varepsilon' \quad (\text{تحقق من ذلك؟})$$

وبالتالي فإنه يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث أنه لكل $U \in \tau(d)$ فإن :

$$S_{d_2}(p, \varepsilon') = S_d(p, \varepsilon) \subseteq U$$

ومن ذلك نستنتج أنه إذا كانت $U \in \tau(d_1)$ فإن $U \in \tau(d_2)$ أي أن :

$$\tau(d) \subseteq \tau(d_2)$$

والعكس ، نفرض أن $U \in \tau(d_2)$ إذاً يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث أن

$$S_{d_2}(p, \varepsilon') \subseteq U \quad \text{والمطلوب الآن البحث عن } \varepsilon > 0 \text{ بحيث أن}$$

$$S_d(p, \varepsilon) = S_{d_2}(p, \varepsilon')$$

نفرض أن $x \in S_{d_2}(p, \varepsilon')$ فإنه ينتج من ذلك أن $d_2(p, x) < \varepsilon'$

$$d_2(p, x) = \frac{d(p, x)}{1 + d(p, x)} < \varepsilon' \quad \text{نجد أن } 0 < \varepsilon' < 1$$

$$\text{ومنها} \quad d(p, x) = \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon \quad \text{أي أن } x \in S_d(p, \varepsilon) \text{ ومنها نرى أن :}$$

$$S_{d_2}(p, \varepsilon') \subseteq S_d(p, \varepsilon)$$

ولأثبت العكس نأخذ $0 < \varepsilon' < 1$ ، $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'}$ حيث $x \in S_d(p, \varepsilon)$ أي

أن : $d(p, x) < \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'}$. إذاً $d_2(p, x) = \frac{d(p, x)}{1 + d(p, x)} < \varepsilon'$

أى أن $x \in S_{d_2}(p, \varepsilon')$ ومن ثم فإنه لكل $0 < \varepsilon' < 1$ يوجد

$$S_d(p, \varepsilon) = S_{d_2}(p, \varepsilon') \quad 0 < \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'}$$

وبفرض أن $U \in \tau(d_2)$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $S_{d_2}(p, \delta) \subseteq U$ وحيث أن $S_d(p, \varepsilon) = S_{d_2}(p, \delta)$. فإنه ينتج أن $U \in \tau(d)$ وعليه فإن $\tau(d_2) \subseteq \tau(d)$. إذاً $d_2 \sim d$. وبالتالي نحصل على أن $d \sim d_1 \sim d_2$.

تعريف (٢٠ . ٣ . ٥) :

يقال أن الفضاء التوبولوجى (X, τ) قابل بأن يكون مترياً metrizable (أو قابل للتمتر) إذا وفقط إذا وجدت دالة مترية d على X بحيث أن $\tau(d) = \tau$. وهذا يعنى أن τ مولداً بواسطة دالة المسافة d على X .

مثال (٢١ . ٣ . ٥) :

(١) كل فضاء منفصل (X, D) قابل بأن يكون مترياً وذلك لأن دالة المسافة التافهة المعرفة على X تولد التوبولوجى المنفصل D .

(٢) الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$ هو فضاء قابل بأن يكون مترياً وذلك لأن دالة المسافة العادية على R تولد التوبولوجى العادى $\mathcal{U}$.

بند (٤) : المجموعات المغلقة في الفضاء المترى :

(Closed set in Metric space)

تعريف (١ . ٤ . ٥) :

المجموعة الجزئية F من الفضاء المترى (X, d) تسمى مجموعة مغلقة

(closed set) إذا وفقط إذا كان $X - F (= F^c)$ مفتوحة وهذا يعنى أنه إذا

كانت مكملة F مفتوحة .

مثال (٢ . ٤ . ٥) :

نفرض الفضاء المترى العادي (R, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

نفرض المجموعة $A = [a, b]$ لجميع قيم $a, b \in R$ حيث $a < b$ ، نفرض

$$L_a = \{x \in R : x < a\} ; R_b = \{x \in R : x > b\}$$

إذاً $R - A = L_a \cap R_b$ لأي $x \in R - A$ حيث $x \in L_a$ فإن

$$d(x, a) = |x - a| = r \quad (\text{مثلاً})$$

$$S_r(x) = (x - r, x + r) \subseteq L_a \subseteq R - A \quad \text{إذاً}$$

إذاً $R - A$ مجموعة مفتوحة ، وعليه فإن A مجموعة مغلقة وهذا يعني أن أي فترة مغلقة من R هي مجموعة مغلقة .

مثال (٣ . ٤ . ٥) :

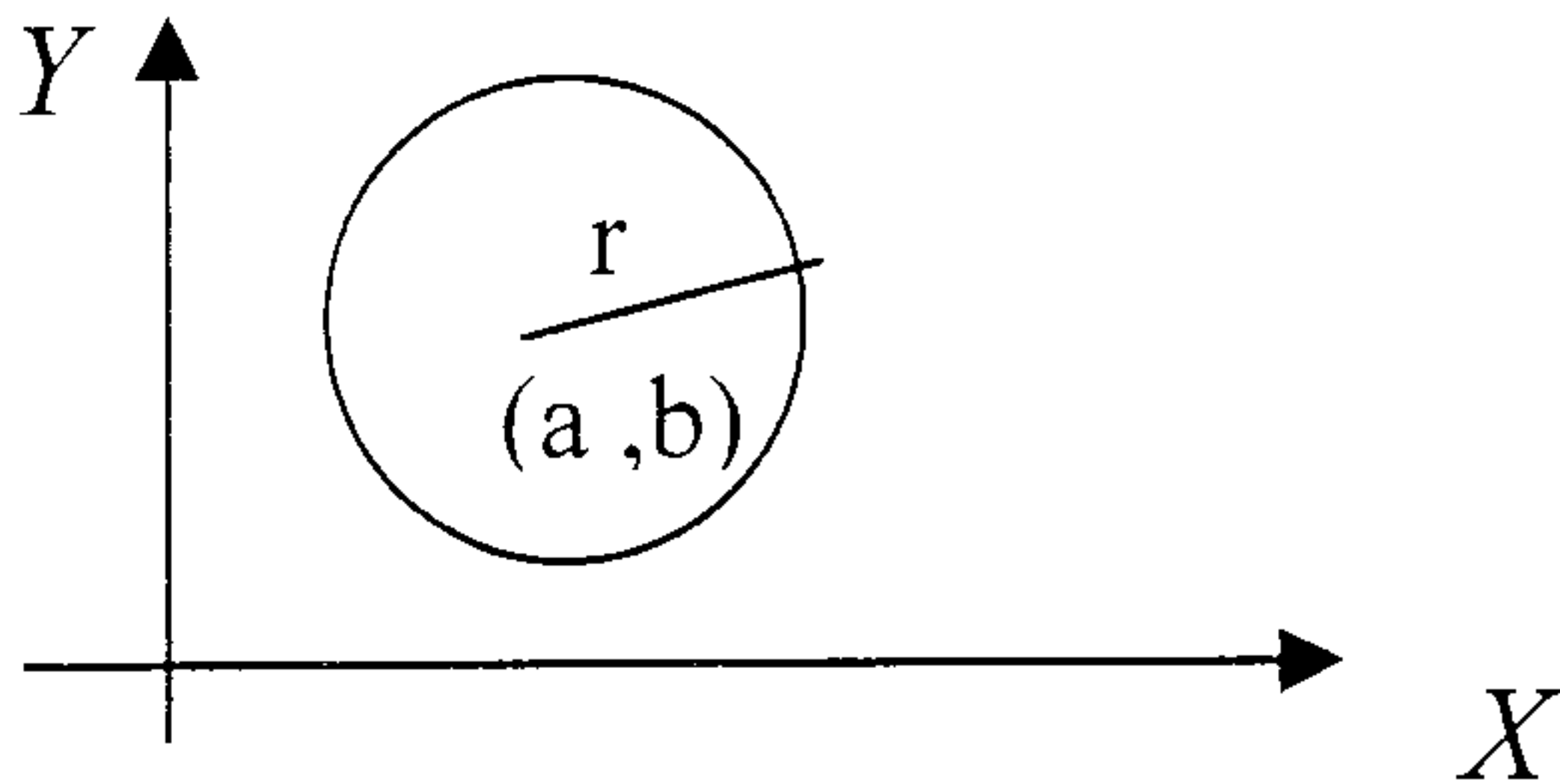
نفرض الفضاء المترى (R^2, d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} ; \forall x, y \in R^2$$

$$\text{حيث } x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in R^2$$

$$F = \{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1\}$$

F هي مجموعة جزئية مغلقة من R^2 ، ومن ذلك نستنتج أن القرص المغلق هو مجموعة مغلقة في R^2 .



مثال (٥ . ٤ . ٤) :

نفرض (R, d) الفضاء المترى العادي، نفرض المجموعة $A = \{x \in R : 0 \leq x < 1\}$ وهي مجموعة جزئية من R ، A ليست مغلقة وليست مفتوحة ؟ (برهن ذلك ؟)

نظرية (٥ . ٤ . ٥) : نفرض الفضاء المترى (X, d) ، إذاً

(i) ϕ ، X مجموعات مغلقة .

(ii) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة من X يعطي مجموعة مغلقة .

(iii) اتحاد عدد محدد من المجموعات المغلقة من X يعطي مجموعة مغلقة .

البرهان :

(i) حيث أن $X^c = \phi$ وتم إثبات أن ϕ مجموعة مفتوحة، إذاً X مجموعة مغلقة . وحيث أن $\phi^c = X$ وتم إثبات أن X مجموعة مفتوحة، إذاً ϕ مجموعة مغلقة.

(ii) نفرض أن $F_i ; \forall i$ مجموعات مغلقة من X ، المطلوب إثبات أن $F = \bigcap_i F_i$ مجموعة مغلقة، باستخدام قانوني (دي مورجان) نجد أن :

$$F^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup_i F_i^c$$

وحيث أن $F_i ; \forall i$ مجموعات مغلقة، إذاً $F_i^c ; \forall i$ مجموعات مفتوحة وحيث أن اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يعطي مجموعة مفتوحة إذاً $\bigcup_i F_i^c$

مجموعة مفتوحة وهذا يعني أن F^c مجموعة مفتوحة، إذاً F مجموعة مغلقة .

(iii) بفرض أن $F_i ; \forall i = 1, 2, \dots, n$ مجموعات مغلقة من X والمطلوب

إثبات أن $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ مجموعة مغلقة . باستخدام قانوني (دي مورجان) نحصل

$$F^c = \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c \quad \text{على :}$$

وحيث أن F_i لجميع قيم $i=1,2,\dots,n$ مجموعات مغلقة ، إذاً F_i^c مجموعات مفتوحة ، وبما أن تقاطع عدد محدد من المجموعات المفتوحة يعطي مجموعة مفتوحة ، إذاً F^c مجموعة مفتوحة ، وعليه فإن F مجموعة مغلقة وهو المطلوب.

كما سبق وجدنا أن مفهوم المجموعة المفتوحة في الفضاء $(X, \tau(d))$ يعتمد على مفهوم الكرة المفتوحة أى الدالة المترية ، بالمثل فإن معظم المفاهيم التوبولوجية: الجوار - نقاط التراكم - لصاقة المجموعة - الاتصال وغيرها تعتمد على مفهوم الدالة المترية ، ولذلك لسنا في حاجة إلى إعادة تعريفها بل تُعامل بنفس المفهوم العام ولكن على الفضاء المترى. وفي الجزء الأخير من هذا البند سوف نعطي نماذج لهذه المفاهيم بصورة مختصرة.

نظرية (٥ . ٤ . ٦) :

إذا كان (X, τ) هو فضاء قابل بأن يكون مترياً (بفرض أن τ توبولوجى مولد بدالة المسافة d). فإن لصاقة (غلاقة) المجموعة الجزئية A من X هي مجموعة كل النقاط التى تكون المسافة بينها وبين المجموعة A تساوى صفراً أى أن :

$$\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\} \quad \text{حيث}$$

البرهان :

بفرض أن $x \in X$ بحيث أن $d(x, A) = 0$. إذاً

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\} = 0$$

ومن ثم فإن $d(x, a) = 0$ لبعض $a \in A$ وبالتالى أما $x = a$ ومنها $x \in A$.

إذاً $x \in \bar{A}$ أو لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث ان $d(x, a) < \varepsilon$ أى أن

$a \in S(x, \varepsilon)$ ومنها نحصل على $S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ لكل $\varepsilon > 0$. إذاً

$$\{x \in X : d(x, A) = 0\} \subseteq \bar{A}$$

العكس ، نفرض أن $p \notin \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

أى أن $d(p, A) = \varepsilon > 0$ وبذلك $p \in S(p, \frac{\varepsilon}{2})$ وممنها

$$S(p, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset$$

أى أن $p \notin \bar{A}$. إذاً

$$\bar{A} \subseteq \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

نظرية (٧ . ٤ . ٥) :

في الفضاء المترى (X, d) كل مجموعة منتهية تكون مجموعة مغلقة.

البرهان :

من النظرية السابقة نستنتج أن :

$$\begin{aligned} \forall p \in X, \overline{\{p\}} &= \{x \in X : d(x, \{p\}) = 0\} \\ &= \{p\} \end{aligned}$$

إذاً كل مجموعة أحادية العنصر هي مجموعة مغلقة ومن ثم فإن أى مجموعة منتهية هي أيضاً مجموعة مغلقة لأنها اتحاد عدد منتهى من المجموعات المغلقة. بمعنى أنه إذا كانت

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

مجموعة منتهية من X فإن :

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

$$\text{إذاً } \bar{A} = \overline{\{a_1\}} \cup \overline{\{a_2\}} \cup \dots \cup \overline{\{a_n\}} = A$$

أى أن A مجموعة مغلقة.

نظرية (٨ . ٤ . ٥) :

(١) أى مجموعة F في الفضاء القابل بأن يكون مترياً X تكون مغلقة إذا وفقط

$$\{x \in X : d(x, F) = 0\} \subseteq F$$

إذا كانت

(٢) إذا كانت F مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء القابل بأن يكون مترياً بحيث أن

$$p \notin F, p \in X \text{ فإن } d(p, F) = 0$$

البرهان :

(١) تنتج مباشرة من النظرية السابقة.

(٢) إذا كانت $d(p, F) = 0$ فإن $p \in \bar{F}$ ولكن F مجموعة مغلقة أى أن $F = \bar{F}$ ومنها فإن $p \in F$ وهذا تعارض مع الفرض.

مثال (٩ . ٤ . ٥) :

بين أن الفضاء الغير منفصل (X, I) حيث X تحتوى على أكثر من نقطة غير قابل بأن يكون مترياً.

الحل :

نعلم أن $I = \{X, \phi\}$ ومنها X, ϕ هى المجموعات المغلقة الوحيدة فى الفضاء (X, I) .

فإذا عرفنا دالة مترية d على X نحصل على أن كل مجموعة منتهية فى الفضاء $(X, \tau(d))$ هى مجموعة مغلقة ومن ثم فإن X, ϕ ليست المجموعات المغلقة الوحيدة. لأنه مثلاً إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ فإن المجموعات المغلقة هى :

$$X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$$

أى أن $\tau(d) \neq I$.

تعريف (١٠ . ٤ . ٥) : نقطة التراكم (أو نقطة النهاية) (Limit point)

نفرض (X, d) فراغ مترى ، نفرض A مجموعة جزئية من X ، يقال أن $x_0 \in X$ نقطة تراكم للمجموعة A إذا كانت كل كرة مفتوحة تحتوى x_0 تقطع المجموعة A فى نقطة خلاف x_0 . أى إذا تحقق الشرط :

$$\forall x_0 \in X, S_r(x_0) : (S_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \phi$$

مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A يرمز لها بالرمز A' .

مثال (١١ . ٤ . ٥) :

نفرض الفضاء المترى العادي (R, d) ، نفرض المجموعة :

$$A = \{x \in R : x = \frac{1}{n} ; n \in N\} \subset R$$

نفرض $\varepsilon > 0$ ، ونفرض المجموعة المفتوحة $(-\varepsilon, \varepsilon)$ التي تحتوي على الصفر ، واضح أنه من الممكن إيجاد $n \in N$ بحيث أن $\varepsilon > \frac{1}{n}$ وعليه فإن $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. إذاً كل كره مفتوحة تحتوي الصفر تحتوي نقطة من المجموعة A تختلف عن الصفر ، وعليه فإن الصفر هو نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A .

ملاحظة :

من الواضح أن نقطة التراكم وهي الصفر لا تنتمي إلى المجموعة A ، وعلى وجه العموم ليس من الضروري أن تنتمي نقطة التراكم للمجموعة A .
مثال (٥ . ٤ . ١٢) :

نفرض (R, d) الفضاء المترى العادي، نفرض المجموعة :

$$A = \{x \in R : x = 1 \text{ or } x = 1 + \frac{1}{n} ; n \in N\}$$

A مجموعة جزئية من الفضاء المترى R . ومن السهولة التحقق من أن الواحد نقطة تراكم للمجموعة A والذي ينتمي إلى المجموعة A . وهو نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A .

مثال (٥ . ٤ . ١٣) :

نفرض (X, d) هو الفضاء المترى المتقطع حيث $d : X \times X \rightarrow R$ معرفة كما يلي :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

لأي $A \subseteq X$ فإن A ليس لها أي نقاط تراكم أي أن $A' = \emptyset$ (برهن ذلك ؟)

تعريف (١٤.٤.٥) :

نفرض x_0 نقطة في الفضاء المترى X ، المجموعة الجزئية N من X تسمى جوار (neighborhood) للنقطة x_0 إذا تحقق :

$$x_0 \in N \quad (i)$$

$$(ii) \text{ توجد مجموعة مفتوحة } U \text{ بحيث } x \in U \subseteq N$$

ملاحظة :

المجموعة المفتوحة تكون جوار لكل نقطة من نقاطها.

تعريف (١٥.٤.٥) : (النقطة الداخلية - interior point)

نفرض A مجموعة جزئية من الفضاء المترى (X, d) ، النقطة $x_0 \in X$ تسمى نقطة داخلية (interior point) للمجموعة A إذا وفقط إذا كان يوجد جوار N للنقطة x_0 بحيث أن $x_0 \in N \subseteq A$.

ملاحظات (١٦.٤.٥) :

١ - بما أن الجوار N للنقطة x_0 يحتوي مجموعة مفتوحة وتحتوي هذه المجموعة المفتوحة على النقطة x_0 ، إذاً x_0 نقطة داخلية للمجموعة A إذا وجد مجموعة مفتوحة U بحيث أن : $x_0 \in U \subseteq A$.

٢ - بما أن كل مجموعة مفتوحة V في X هو جوار لكل نقطة من نقاطها $x \in V \subseteq V$; $\forall x \in V$ إذاً كل نقطة في المجموعة المفتوحة V هي نقطة داخلية للمجموعة V .

نظرية (١٧.٤.٥) :

نفرض (X, d) فضاء مترى ، $F \subseteq X$ تكون مغلقة إذا فقط وإذا كانت تحتوي على جميع نقاط تراكمها .

البرهان :

نفرض $x \in X$ نقطة تراكم للمجموعة الجزئية المغلقة F إذاً يوجد $r > 0$

بحيث $(S_r(x) \setminus \{x\}) \cap F \neq \emptyset$ وعليه فإن $S_r(x) \subseteq F^c$.

وهذا يعني أن x ليست إحدى نقاط F^c الداخلية ولكن F^c مفتوحة لأن F

مغلقة من الفرض ، وحيث أن $x \notin F^c$ إذاً $x \in F^c$.

وعلى العكس ، نفرض أن $F' \subset F$ وأن $x \in F^c$ ، وحيث أن $F' \subset F$

فإن $(S_r(x) \setminus \{x\}) \cap F = \emptyset$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $S_r(x) \subseteq F^c$

أي أن x إحدى نقاط F^c الداخلية ومن ثم فإن F^c تكون مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن F تكون مجموعة مغلقة.

تعريف (١٨.٥.٥) : (الاتصال على الفضاء المترى)

نفرض الفضاءان المتران $X=(X, d_1)$ ، $Y=(Y, d_2)$. يقال للدالة

$f: X \rightarrow Y$ إنها متصلة عند النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد

$\delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث أن : $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

نظرية (٢٠.٤.٥) :

الدالة $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ تكون متصلة عند النقطة $x_0 \in X$ إذا

وفقاً إذا كان لكل كره مفتوحه $S_{d_2}(f(x_0), \delta)$ توجد كره مفتوحه

$S_{d_1}(x_0, \varepsilon)$ بحيث أن $f(S_{d_1}(x_0, \varepsilon)) \subseteq S_{d_2}(f(x_0), \delta)$

البرهان : يترك للقارئ كتمرين.

نظرية (٢١.٤.٥) :

الدالة $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة

العكسية لكل مجموعة مفتوحة في (Y, d_2) تكون مجموعه مفتوحة في

(X, d_1) .

البرهان : يترك للقارئ كتمرين.

بند (٥) : المتتابعات في الفضاء المترى :

تعريف (١ . ٥ . ٥) :

المتتابعة (x_n) في الفضاء المترى (X, d) تعرف على إنها دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N إلى قيم في (X, d) أي أن :

$$f: N \rightarrow X, f(n) = x_n, \forall n \in N$$

x_n يسمى بالحد النوني للمتتابعة ، x_1 الحد الأول ، x_2 الحد الثاني ، ... وهكذا .

تعريف (٢ . ٥ . ٥) :

يقال للمتتابعة (x_n) في الفضاء المترى (X, d) أنها تقاربية ولها النهاية $x \in X$ إذا كان لكل عدد صغير موجب ε نستطيع إيجاد العدد الطبيعي $N = N(\varepsilon)$ والذي يعتمد على ε بحيث أن : $d(x_n, x) < \varepsilon ; \forall n \geq N$ وتكتب رياضياً كالآتي :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.t. } d(x_n, x) < \varepsilon ; \forall n \geq N$$

وفي هذه الحالة نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ أو $x_n \rightarrow x$.

وبالتالي يمكن إعادة صياغة مفهوم تقارب المتابعة في الفضاءات التوبولوجية بالصورة :

المتتابعة $\{x_n\}$ في الفضاء (X, τ) تتقارب إلى النقطة $x \in X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي x تحتوي على معظم حدود المتابعة فيما عدا عدد منتهى .

نظرية (٣ . ٥ . ٥) :

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء $(X, \tau(d))$. إذا كانت المتتابعة

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المكونه من عناصر من A تتقارب إلى $x \in X$ فإن $x \in \bar{A}$ أى أن

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in \bar{A}$$

البرهان :

حيث أن $(\bar{A})^c$ مجموعة مفتوحة ، $x_n \in A$ لكل $n \in N$ فإن $x_n \notin (\bar{A})^c$ وهذا يؤدي إلى أن $(\bar{A})^c$ لا تحتوى على حدود المتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. وبالتالي فإن المتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب على نقطة في $(\bar{A})^c$.
نظرية (٤ . ٥ . ٥) :

الدالة $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ تكون متصلة عند النقطة $p \in X$ إذا وفقط إذا كانت كل متابعه (x_n) تتقارب إلى p فإن المتابعه $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(p)$.

البرهان :

بفرض أن $x_n \rightarrow p$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طيعى N بحيث يكون $d_1(x_n, p) < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.

وهذا يعنى أن $x_n \in S_{d_1}(p, \varepsilon)$ لكل $n \geq N$. حيث أن f دالة متصلة عند النقطة p فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$f(S_{d_1}(p, \varepsilon)) \subseteq S_{d_1}(f(p), \delta)$$

وهذا يؤدي إلى أن $f(x_n) \in S_{d_1}(f(p), \delta)$ لكل $n \geq N$ أى أن $d_2(f(x_n), f(p)) < \delta$ لكل $n \geq N$ ومن ثم فإن $f(x_n) \rightarrow f(p)$.
 برهان العملية العكسية تترك للقارئ كتمرين .

تعريف (٥ . ٥ . ٥) : (متابعة كوشي - Cauchy Sequence)

يقال أن المتابعة (x_n) في الفضاء المترى (X, d) متتابعة كوشية إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon ; \forall n, m \geq N$$

نظرية (٦ . ٥ . ٥) :

أي متتابعة تقاربية في الفضاء المترى تكون كوشية .

البرهان :

نفرض أن (x_n) متتابعة تقاربية في الفضاء المترى (X, d) إذاً

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\frac{\varepsilon}{2}) \text{ s.t. } d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}; \forall n \geq N$$

ومن ثم فإنه لجميع قيم $n, m \geq N$ نجد أن :

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يثبت أن (x_n) كوشية.ملاحظة : البرهان السابق اعتمد على وحدانية النهاية ، بمعنى إنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ أي أن (x_n) تقاربية ولها النهاية x فإن x تكون وحيدة ،

ونترك للطالب البرهنة على صحة هذه العلاقة ، عكس النظرية السابقة ليس بالضرورة صحيحا والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٧ . ٥ . ٥) :أعتبر الفضاء المترى $(R \setminus \{0\}, d)$ نأخذ المتتابعة (x_n) والمعرفة على النحوالتالي : $(x_n) = (\frac{1}{n}) ; \forall n \in N$ هذه المتتابعة كوشية وذلك لأنه لجميع قيم $\varepsilon > 0$ نختار $N > \frac{\varepsilon}{2}$. إذاً لجميع قيم $n, m \geq N$ فإن

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| \leq |x_n| + |x_m|$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

من الواضح أن المتتابعة (x_n) تتقارب إلى الصفر وحيث أن الصفر ليس عنصرا

من عناصر الفضاء المعطى ، إذاً هذه المتتابعة غير تقاربية (تباعدية) على هذا

الفضاء، بالرغم من كونها كوشية .

وهذا يبرهن على أن عكس النظرية السابقة ليس بالضرورة صحيح .

تعريف (٨ . ٥ . ٥) : الفضاء المترى التام (Complete Metric space)

يقال للفضاء المترى (X, d) أنه فضاءً تاماً (Complete) إذا كانت كل متتابعة كوشية في (X, d) تقاربية .

مثال (٩ . ٥ . ٥) :

الفضاء المترى (R, d) حيث $d: R \times R \rightarrow R$ والمعرفة على النحو التالي:

$$d(x, y) = |x - y| ; \forall x, y \in R$$

فضاء مترى تام ؟

الحل :

الحل يأتي من نظرية بلزانو - وفير شتراس التي تم دراستها في التحليل الحقيقي والتي تنص على أن كل متتابعة أعداد حقيقية من R إذا كانت كوشية فهي تقاربية .

مثال (١٠ . ٥ . ٥) :

نفرض $C[0,1]$ هي مجموعة جميع الدوال المتصلة على الفترة المغلقة. الفضاء

المترى $(C[0,1], d)$ حيث $d: C[0,1] \times C[0,1] \rightarrow R$ والمعرفة كما يلي :

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| ; \forall f, g \in C[0,1]$$

فضاء مترى تام .

الحل :

يترك للقارئ كتمرين .

مثال (١١ . ٥ . ٥) :

الفضاء المترى $(C[0,1], d)$ حيث $d: C[0,1] \times C[0,1] \rightarrow R$ معرفة

على النحو التالي :

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx ; \forall f, g \in C[0,1]$$

الفضاء المترى $(C[0,1], d)$ ليس تام ؟

الحل :

يترك للقارئ كتمرين.

نظرية (١٢.٥.٥) :

كل فضاء جزئي من الفضاء المترى التام يكون فضاء تام إذا وفقط إذا كان مغلق.

البرهان :

نفرض أن (X, d) فضاء مترى تام ، A فضاء جزئي تام من X . لأثبت أن A مجموعة مغلقة ، نفرض أن $x \in A'$ فإن كل كره مفتوحه تحتوى p تحتوى على نقاط من A خلاف x . إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$ يمكن إيجاد متتابعة من عناصر A بالصورة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بحيث يكون $x_n \in A \cap S_d(x, \frac{1}{n})$. وبالتالي فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متتابعة كوشية في A وتتقارب إلى x ، وحيث أن A فضاء تام فإن $x \in A$ أى أن $A' \subseteq A$ ومن ثم فإن A مغلقة.

العكس ، نفرض أن A مجموعة مغلقة . لإثبات أن A فضاء تام نفرض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشية في A ، بالتالى فهي متتابعة كوشية في X . حيث أن (X, d) فضاء تام فإن $x_n \rightarrow x \in X$. إذا كانت $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة منتهيه فإنها تحتوى على x ومن ثم فإن $x \in A$.

إذا كانت $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهيه فإن $x \in A'$ من نظرية (٣.٥.٥) حيث أن Y مغلقة فإن $x \in A$ وبالتالي فإن A فضاء تام.

تمارين خاصة على الباب الخامس

(١) نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية نعرف :

$$d_1: R \times R \rightarrow R ; d_2: R \times R \rightarrow R \text{ على النحو التالي:}$$

$$d_1(x, y) = |x| + |y| ;$$

$$d_2(x, y) = \max(|x|, |y|)$$

بين ما إذا كان d_1, d_2 تمثل رواسم مترية أم لا ؟

(٢) نفرض C هي مجموعة الأعداد المركبة ، نعرف $d: C \times C \rightarrow R$ على

النحو التالي :

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| ; \forall z_1, z_2 \in C$$

برهن أن (C, d) فضاء مترى ؟

(٣) نفرض (X, d) حيث X مجموعة غير خالية تمثل فضاء مترى ، نعرف

$$d_1: R \times R \rightarrow R ; d_2: R \times R \rightarrow R \text{ كما يلي :}$$

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} ;$$

$$d_2(x, y) = \frac{1 - d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

برهن أن d_1 تمثل دالة مترى على X ، بينما d_2 لا تمثل دالة مترى على X ؟

(٤) لأي $a, b \in R$ برهن أن :

$$(i) |ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

$$(ii) (|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$$

(٥) برهن أن $(C[a, b], d)$ فضاء مترى ، حيث d معرفة كما يلي :

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx ; \forall f, g \in C[a, b]$$

(٦) نفرض M_n هي مجموعة جميع المصفوفات ذات الرتبة النونية n أي أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة = n .

لأي $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$ نعرف الجمع والضرب في عدد قياسي على النحو التالي :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) ; \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

نعرف $d: M_n \times M_n \rightarrow R$ على النحو التالي :

$$d(A, B) = \sup_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}| \right) ; \forall i = 1, 2, \dots, n$$

برهن أن (M_n, d) تمثل فضاء متري .

(٧) لأي $a, b, c \in R$ برهن أن :

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

(٨) نفرض d دالة مترية على المجموعة غير الخالية X . نفرض الدالة

$$\rho: X \times X \rightarrow R \text{ والمعرفة على النحو التالي :}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \min(1, d(x_1, x_2)) ; \forall x_1, x_2 \in X$$

بين ما إذا كانت تمثل دالة مترية على X أم لا ؟

(٩) بين أن فضاء المكملات المنتهية غير قابل بأن يكون مترياً.

(١٠) ادرس اتصال الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$$

على نطاقها ؟

(١١) ادرس اتصال الدالة :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

على نطاقها ؟

(١٢) أثبت أن الفضاء الاقليدى (R^2, d) تام؟

(١٣) بفرض أن (X, d) فضاء مترى تام ، $\{A_n\}$ متتابعة تناقصية من

$$\text{المجموعات المغلقة بحيث أن } \lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n) = 0 . \text{ أثبت أن } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

(تسمى هذه بنظرية التقاطع لكانتور)

(١٤) بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء المترى (X, d) بين أن الدالة

$$f: X \rightarrow R \text{ المعرفة بالصورة } f(x) = d(x, A) \text{ تكون متصلة.}$$

(١٥) بفرض أن الدالة $f: R^2 \rightarrow R$ معرفة بالصورة :

$$d((a, b)) = |a - b| \text{ بين أن } d \text{ دالة متصلة.}$$

(١٦) بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, d) بين أن

$$D(A) = D(\bar{A}) .$$

(١٧) ليكن (X, d) فضاء مترى. أثبت أن $d(A, B)$ حيث $A, B \subseteq X$ هي

دالة شبه مترية.

(١٨) ليكن (X, d) فضاء مترى ، $A \subseteq X$ نعرف الدالة d_A بالصورة :

$$d_A(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in A$$

(i) برهن أن (A, d_A) فضاء مترى (ويسمى الفضاء المترى الجزئي).

(ii) برهن أن $\tau_A \equiv \tau_{(d_A)}$

(١٩) بين أن الفضاء المترى (R^2, d)

(i) منفصلاً

(ii) فضاء تام

(٢٠) لتكن $f: X \rightarrow R$ دالة. بين أن الدالة $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$

تكون شبة مترية.

(٢١) ليكن (X, d) فضاء شبة مترى ، $A \subseteq X$ بحيث أن

$d(x, y) \geq \varepsilon > 0$ لكل $x, y \in A$. بين أن $A' = \emptyset$.

الباب السادس

مسلمات الانفصال
Separation Axioms

الباب السادس

مسلمات الانفصال

Separation Axioms

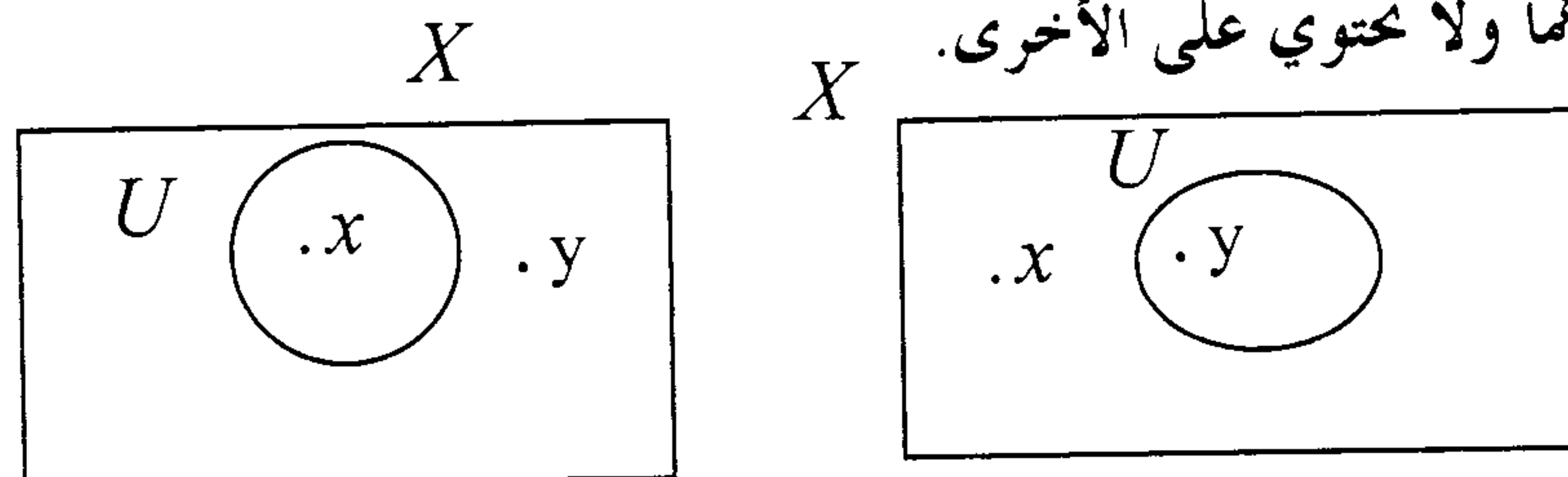
قدمنا في دراستنا السابقة مفهوم الفضاء التوبولوجي دون فرض أي قيود على عناصر هذا الفضاء. ولكن من أجل الحصول على نتائج أعمق وأوسع في هذه الدراسة لابد من وضع شروط أو فروض على الفضاءات التوبولوجية عن طريق فصل نقطتين أو مجموعتين أو نقطة ومجموعة في الفضاء التوبولوجي بواسطة مجموعات مفتوحة*. في هذا الباب سوف نقوم بدراسة الفضاءات $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4, T_5$ ودراسة العديد من خواص تلك الفضاءات والعديد من التكافؤات. وبهذا أمكن الحصول على نتائج أفضل وخصائص أقوى تساعدنا على برهنة العديد من النظريات في الفضاءات التوبولوجية.

الفضاء T_0 - : T_0 - Space or Kolmogorff space

يسمى الفضاء (X, τ) فضاء T_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U \in \tau : x \in U, y \notin U \text{ or } y \in U, x \notin U$$

أي أن لكل نقطتين مختلفتين x, y في X توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداها ولا تحتوي على الأخرى.



وهذا التعريف يكافئ القول بأن الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون T_0 إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين يوجد جوار لأحدهما لا يحوي النقطة الأخرى

* طريقة توزيع المجموعات المفتوحة في الفضاء التوبولوجي

نستطيع تبديل الجوار المجموعة المفتوحة في التعريف السابق)

مثال (١.٦) :

بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$ هل (X, τ) فضاء- T_0 ؟

الحل :

واضح أن (X, τ) فضاء T_0 لأنه من أجل $a, b \in X$ توجد $\{a\} \in \tau$ بحيث أن $b \notin \{a\}$. كذلك من أجل $a, c \in X$ توجد $a \in \{a\}$ ، $c \notin \{a\}$ و أخيراً من أجل $b, c \in X$ توجد $b \in \{b\}$ ، $c \notin \{b\}$.

مثال (٢.٦) :

بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$ هل (X, τ) فضاء- T_0 ؟

الحل :

واضح أن (X, τ) ليس فضاء T_0 لأنه لا توجد $U \in \tau$ بحيث أن $b \in U$ ، $c \notin U$ أو $c \in U$ ، $b \notin U$ (لاحظ أن التعريف محقق من أجل a, b وكذلك من أجل a, c) .

مثال (٣.٦) :

هل الفضاء المنفصل (X, D) هو فضاء- T_0 ؟

الحل :

من تعريف التوبولوجي المنفصل $D = P(X)$ نجد أنه لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $\{x\}$ بحيث أن $x \in \{x\}$ ولكن $y \notin \{x\}$. إذاً (X, D) فضاء- T_0 .

مثال (٤.٦) :

هل الفضاء الغير منفصل (X, I) حيث X تحتوي على أكثر من عنصر هو

فضاء T_0 ؟الحل : تترك للقارئ كتمرينمثال (٥.٦) :هل فضاء النقطة المختارة (X, P) هو فضاء T_0 ؟الحل :نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ وحيث أن :

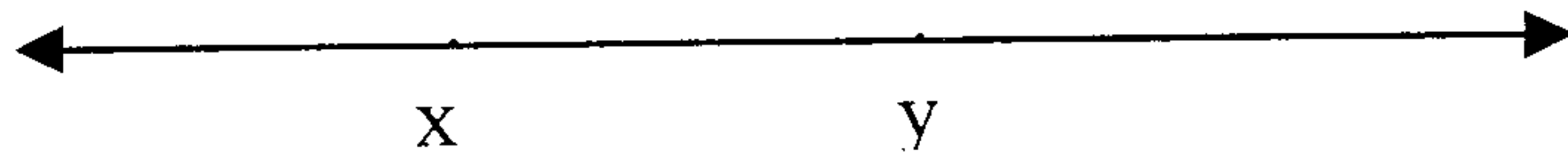
$$P = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\}$$

فيكون لدينا احتمالان الأول : $x \neq y \neq p$ إذاً توجد مجموعة مفتوحة $U = \{x, p\}$ بحيث يكون $x \in \{x, p\}$ ، $y \notin \{x, p\}$ والاحتمال الثاني : إحدى النقطتين تساوي p ولتكن $x = p$ ، إذاً توجد مجموعة مفتوحة هي $\{p\}$ بحيث يكون $p \in \{p\}$ ، $y \notin \{p\}$.
إذاً (X, P) هو فضاء T_0 .مثال (٦.٦) :هل فضاء المتممات المنتهية (X, C) فضاء T_0 ؟الحل :نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ ومن تعريف التوبولوجي C فإن

$$C = \{\phi, U \subseteq X : U^c \text{ finite}\}$$

نجد أن $\{x\}$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن $U = X - \{x\} \in C$ مجموعة مفتوحة لا تحتوي x أي $x \notin U$ وتحقق $y \in U$. إذاً (X, C) فضاء T_0 .مثال (٧.٦) :بفرض أن $\tau = \{\phi, R, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$ هل (R, τ) فضاء - T_0 ؟

الحل :

لكل $x, y \in R$ بحيث أن $x < y$ 

توجد مجموعة مفتوحة $E_x = (x, \infty)$ تحوي y ولكن $x \notin E_x$.
إذاً (R, τ) فضاء T_0 .

نظرية (٦.٨) :

نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات التالية متكافئة :(١) X فضاء T_0 (٢) $\{x\} \neq \{y\}$ لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$.(٣) لكل $x \in X$ فإن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة.

البرهان :

(١) $\Leftarrow$ (٢)

نفرض أن (X, τ) فضاء T_0 وأن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$. إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحدى النقطتين x, y ولا تحتوي على الأخرى ولتكن (مثلاً) $x \in U$ ، $y \notin U$ وبذلك يكون $U \cap \{y\} = \emptyset$ وهذا يعني أن $x \in \overline{\{x\}}$ ولكن $x \notin \overline{\{y\}}$. (راجع نظرية (٢.٣.٨)).

وبالمثل يمكن إثبات أن $y \notin \overline{\{x\}}$ ومن ثم فإن $\{x\} \neq \{y\}$.(٢) $\Leftarrow$ (٣)

من (٢) يكون لدينا (لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$) $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

نفرض أن $z \in \{x\}'$ إذاً $z \neq x$ (لأن $x \notin \{x\}'$). وعليه نحصل على $x \notin \overline{\{z\}}$

لكن $\{z\} \subset \overline{\{x\}}$ (وذلك لأن $z \in \overline{\{x\}} \Rightarrow z \in \{x\}$ وحيث أن

$$\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}' . \text{ إذا } z \in \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}' . \text{ وعليه فإن}$$

$$\{x\}' = \bigcup \{ \overline{\{z\}} : z \in \{x\} \}$$

أي أن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة .

$$(3) \Leftarrow (1) :$$

بفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن إما $y \in \{x\}'$ أو $y \notin \{x\}'$.

(أ) إذا كانت $y \in \{x\}'$ فإنه يوجد مجموعة مغلقة F بحيث $F \subseteq \{x\}'$ ،

$y \in F$. إذاً $V = X - F$. مجموعة مفتوحة تحتوي x ، $y \notin V$.

(ب) إذا كانت $y \notin \{x\}'$ فإن $y \notin \overline{\{x\}}$ وعليه فإن $y \in X - \overline{\{x\}} = V$ ،

V مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x .

في كلتا الحالتين (X, τ) فضاء T_0

تعريف (٩ . ٦) :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي . يقال لخاصية ما بأنها خاصية وراثية

(hereditary property) إذا وفقط إذا تحققت لأي فضاء جزئي (A, τ_A)

$A \subseteq X$ ، طالما هي محققة في الفضاء الكلي (X, τ) .

نظرية (١٠ . ٦) :

خاصية أن الفضاء T_0 هي خاصية وراثية .

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء T_0 ، (A, τ_A) فضاء جزئي منه وأن

$x, y \in A$ بحيث أن $x \neq y$. إذاً $x, y \in X$ وحيث أن (X, τ) فضاء T_0

T_0 ، إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداها ولا تحتوي الأخرى ولتكن

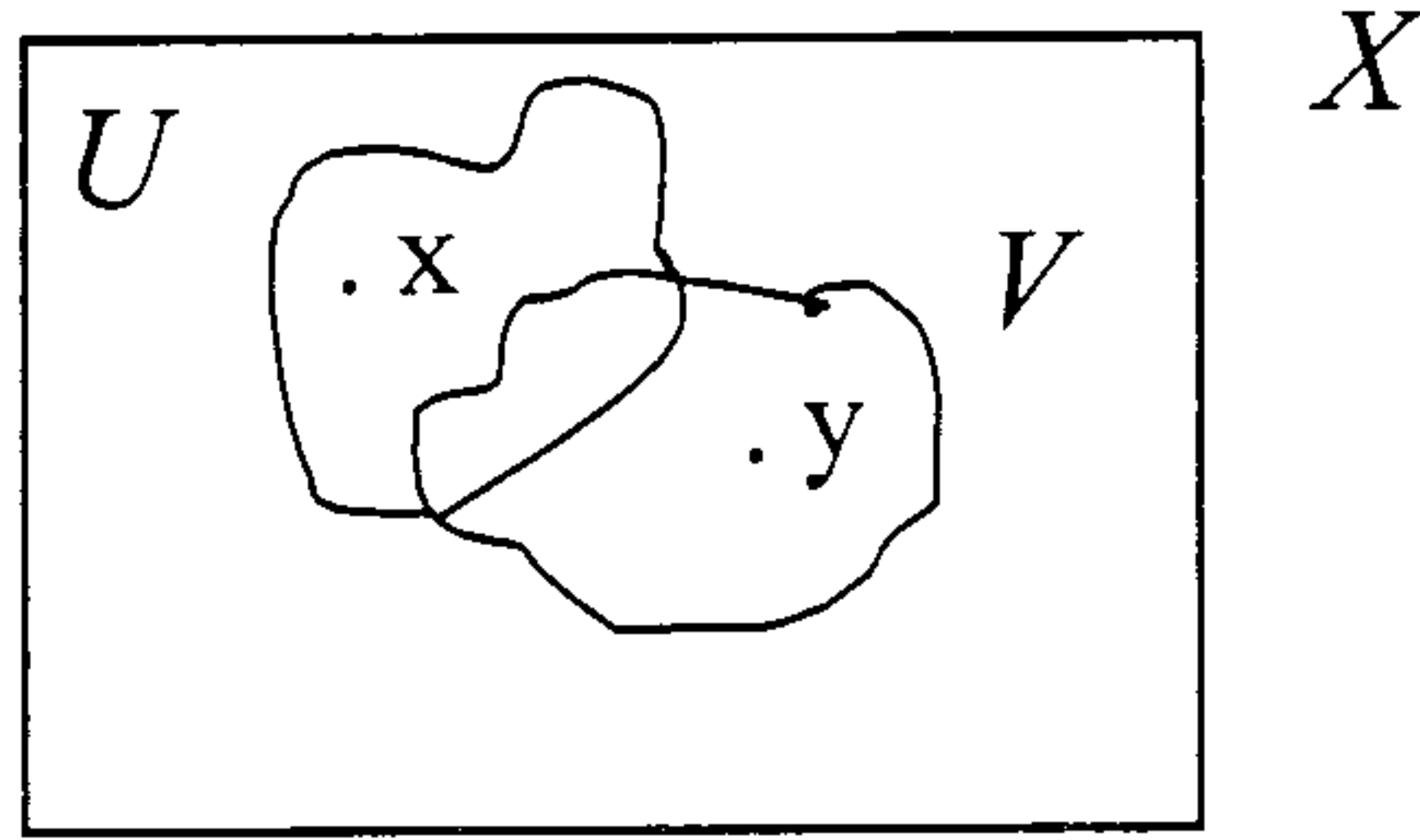
ولكن $V = A \cap U$ ، $y \notin U, x \in U$ مجموعة مفتوحة في A وتحقق أن
 $y \notin V, x \in V$ إذاً (A, τ_A) فضاء T_0 .

الفضاء T_1 : T_1 -space

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) بأنه T_1 إذا كان لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان U, V بحيث أن

$$x \notin V, y \in V, y \notin U, x \in U$$

أى أن X is T_1 -Space $\Leftrightarrow (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists U, V \in \tau) (x \in U, y \notin U) \& (y \in V, x \notin V)$



من هذا التعريف يتضح أن الفضاء T_1 هو فضاء T_0 أي أن $T_1 \Rightarrow T_0$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم ونوضح ذلك بالمثال التالي:
مثال (١١.٦) :

نفرض أن $X = \{a, b\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ فإن (X, τ) فضاء T_0 ولكنه ليس فضاء T_1 لأن المجموعة الوحيدة التي تحتوي b وأيضا تحتوي a .
مثال (١٢.٦) :

الفضاء المنفصل هو فضاء T_1 ولكن الفضاء الغير منفصل ليس فضاء T_1 .
مثال (١٣.٦) :

نفرض أن $X = \{a, b\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$ هل (X, τ) فضاء T_1 ؟

الحل :

واضح أن (X, τ) فضاء- T_1 لأنه توجد $\{a\}, \{b\} \in \tau$ بحيث أن $b \in \{b\}$, $a \notin \{b\}$, $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$.
نظرية (٦. ١٤) :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

$$(١) \quad X \text{ فضاء-} T_1$$

$$(٢) \quad \text{لكل } x \in X \text{ فإن } \{x\} \text{ مجموعة مغلقة .}$$

$$(٣) \quad \text{لكل } x \in X \text{ فإن } \{x\}' = \emptyset .$$

البرهان :

$$(١) \Leftrightarrow (٢) :$$

نفرض أن X فضاء- T_1 والمطلوب إثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة لكل $x \in X$ ؟ لذلك نفرض أن $y \in \{x\}^c$ وهذا يؤدي إلى أن $x \neq y$ وحيث أن X فضاء- T_1 ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \notin U$, $y \in U$ أي أن $y \in U \subseteq \{x\}^c$ ، ومن ثم فإن $\{x\}^c$ مجموعة مفتوحة (لأنها اتحاد مجموعات مفتوحة) وهذا يؤدي إلى أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة .

$$(٢) \Leftrightarrow (١) :$$

نفرض أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة لكل $x \in X$ ونحاول إثبات أن X فضاء- T_1 ،
 نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإنه ينتج أن $\{x\}^c$, $\{y\}^c$ مجموعتان مفتوحتان وأيضا $x \in \{y\}^c$, $y \in \{x\}^c$ ومن ثم فإن $\{x\}^c, \{y\}^c \in \tau$ بحيث أن

$$x \in \{y\}^c, y \notin \{y\}^c, y \in \{x\}^c, x \notin \{x\}^c$$

وهذا يعني أن X فضاء- T_1 .

$$(2) \Leftarrow (3) :$$

نفرض أن $x \in X$ فإنه ينتج من (٢) أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة أي أن $\overline{\{x\}} = \{x\}$. لكن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$. إذاً $\{x\} = \{x\} \cup \{x\}'$ وحيث أن $x \notin \{x\}'$ فإن $\{x\}' = \emptyset$.

$$(3) \Leftarrow (1) :$$

نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ ، من (٣) $\{x\}' = \emptyset$ وهذا يؤدي إلى أن $y \notin \{x\}'$ أي يوجد مجموعة مفتوحة U_y تحوي y وتحقق $U_y \cap \{x\} = \emptyset$ ومن ثم فإن $x \notin U_y$ بالمثل $\{y\}' = \emptyset$ تؤدي إلى أنه توجد مجموعة مفتوحة V_x تحقق $V_x \cap \{y\} = \emptyset$ ومن ثم فإن $x \in V_x$ ، $y \notin V_x$ وبالتالي فإن (X, τ) فضاء T_1 .

نتيجة (١٥.٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء T_1 فإن كل مجموعة جزئية منتهية من X ليس لها نقاط نهاية. أي أن لكل $A \subseteq X$ حيث X فضاء T_1 ، A مجموعة منتهية فإن $A' = \emptyset$.

البرهان :

نفرض أن A مجموعة جزئية منتهية من X ولتكن $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ومن ثم فإن $A = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$ وحيث أن X فضاء T_1 فإن $\{x_i\}' = \emptyset$ وبذلك

$$A' = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}' = \bigcup_{i=1}^n \emptyset = \emptyset \quad \text{نحصل على}$$

نتيجة (١٦.٦) :

إذا كانت X مجموعة منتهية ، (X, τ) فضاء T_1 فإن (X, τ) يكون

فضاء منفصل (متقطع).

البرهان :

نفرض أن $A \subseteq X$ ونحاول إثبات أن A مجموعة مغلقة حيث أن X منتهية فإن A منتهية ولكن X فضاء- T_1 فإنه من نتيجة (٦. ١٥) تكون $A' = \phi$. إذاً $A' \subseteq A \Rightarrow A$ مغلقة.

ومن ثم فإن كل مجموعة جزئية من X تكون مفتوحة ومغلقة ومن ذلك يكون (X, τ) هو الفضاء المنفصل.

نتيجة (٦. ١٧) :

أي فضاء متري يكون فضاء- T_1 .

نظرية (٦. ١٨) :

خاصية أن يكون الفضاء- T_1 هي خاصية وراثية.

نظرية (٦. ١٩) :

خاصية أن يكون الفضاء- T_1 هي خاصية توبولوجية.

البرهان :

نفرض أن (X, τ_1) فضاء- T_1 وأن (X, τ_2) فضاء توبولوجي ، $f: X \rightarrow Y$ دالة توبولوجية ، نحاول إثبات أن (X, τ_2) فضاء- T_1 . لذلك نفرض أن $x, y \in Y$ بحيث أن $x \neq y$ وحيث أن f دالة تقابل فإن $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ وبما أن (X, τ) فضاء- T_1 إذاً يوجد $U, V \in \tau_1$ بحيث أن $f^{-1}(x) \in U, f^{-1}(y) \notin U$ and $f^{-1}(y) \in V, f^{-1}(x) \notin V$ ومن ثم فإن $x \in f(U), y \notin f(U)$ and $y \in f(V), x \notin f(V)$ وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U), f(V) \in \tau_2$ وهذا يؤدي إلى أن

$$f^{-1}(x) \in U, f^{-1}(y) \notin U \text{ and } f^{-1}(y) \in V, f^{-1}(x) \notin V$$

ومن ثم فإن $x \in f(U), y \notin f(U)$ and $y \in f(V), x \notin f(V)$

وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U), f(V) \in \tau_2$ وهذا يؤدي إلى أن

(X, τ) فضاء T_1 .

نظرية (٢٠.٦) :

الفضاء (X, τ) يكون T_1 إذا وفقط إذا كانت تقاطع المجموعات المفتوحة التي تحتوي P لكل $P \in X$ هي المجموعة $\{p\}$ أي أن :

$$X \text{ is } T_1\text{-space} \Leftrightarrow \bigcap \{G : P \in G \in \tau\} = \{p\}$$

البرهان :

أولاً : نفرض أن X فضاء T_1 ونفرض أن $\bigcap \{G : G \in \tau\} = \{p, q\} ; p \neq q$ ومن ثم فإن كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي أيضاً q وبالتالي فإن X ليس فضاء T_1 وهذا تعارض .

ثانياً : نفرض أن $p, q \in X$ حيث $p \neq q$. إذاً

$$\bigcap \{G_p : p \in G \in \tau\} = \{p\} , \bigcap \{G_q : q \in G \in \tau\} = \{q\}$$

وبالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان G_p, G_q بحيث أن

$$p \in G_p, q \notin G_p, q \in G_q, p \notin G_q \text{ ومن ثم فإن } X \text{ فضاء } T_1.$$

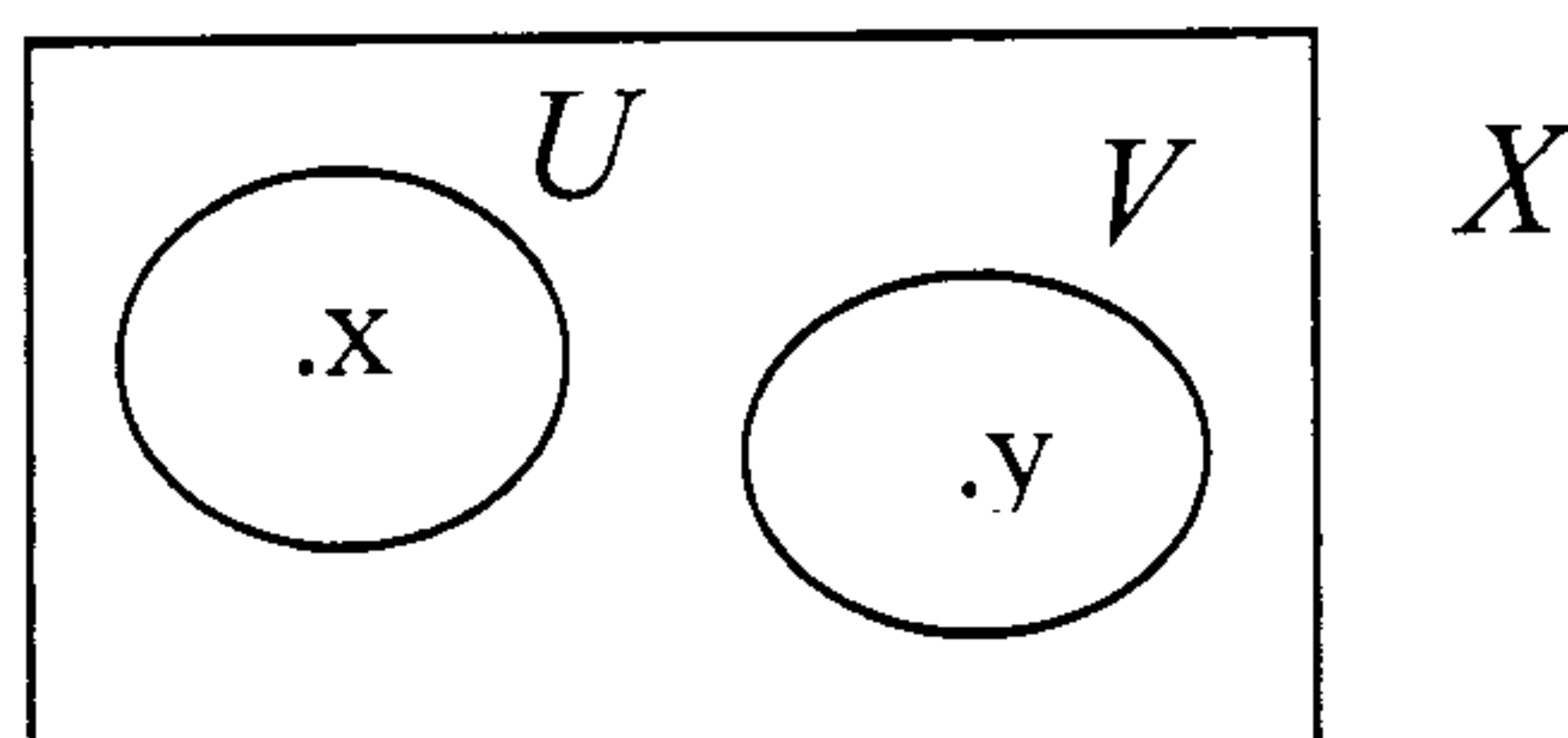
الفضاء T_2 : (أو فضاء هاوسدورف - T_2 - Space (or Housdorff space

تعريف (٢١.٦) :

يقال أن الفضاء (X, τ) فضاء T_2 إذا وفقط إذا وجد لكل نقطتين مختلفتين مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين تحتوي إحداهما النقطة الأولى والأخرى تحتوي النقطة الثانية أي أن :

$$X \text{ is } T_2\text{-space} \Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, \exists u, v \in \tau :$$

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$



من الواضح أن كل فضاء- T_2 هو فضاء- T_1 أي أن $T_2 \Rightarrow T_1$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم وهذا يتضح من المثال التالي :

مثال (٢٢.٦) :

فضاء المتتمات المنتهية (X, C) حيث X لا نهائية هو فضاء- T_1 ولكنه ليس فضاء- T_2 .

الحل :

(أ) نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن $U_x = \{y\}^c, U_y = \{x\}^c$ مجموعتان مفتوحة ، $y \in \{x\}^c = U_x, x \in \{y\}^c = U_y$ وأيضا $x \notin \{x\}^c = U_x, y \notin \{y\}^c = U_y$ ومن ثم فإن (X, C) فضاء- T_1 .
 (ب) نفرض العكس ، أي نفرض أن (X, C) فضاء- T_2 وعلى هذا فإنه لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان U_x, V_y بحيث أن $U_x \subseteq V_y^c$ ومن ذلك نستنتج أن $U_x \cap V_y = \emptyset$ ، $y \in V_y, x \in U_x$ وهذا يؤدي إلى أن V_y^c مجموعة منتهية تحتوي على U_x وبذلك يكون $U_x \subseteq V_y^c$ وهذا غير صحيح لأن U_x مجموعة غير منتهية ، أي تعارض مع $U \cap V = \emptyset$ ومن ثم فإن (X, C) ليس فضاء- T_2 .

ملاحظة :

من الممكن أن نرى بسهولة من (أ) أن (X, C) ليس فضاء- T_2 لأن :

$$U_x \cap U_y = \{y\}^c \cap \{x\}^c = \{x, y\}^c \neq \emptyset$$

مثال (٢٣.٦) :

إذا كان (R, τ) فضاء توبولوجي النهاية العليا فإنه يكون فضاء- T_2 .

الحل :

نعلم أن τ توبولوجي النهاية العليا يكون مولد بالأساس

$$\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ a-1 \quad a \quad b \end{array}$$

ومن الواضح أنه يوجد $U = (a-1, a], V = (a, b]$ مجموعتان مفتوحتان في τ وتحقق أن $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ ومن ثم فإن $(\mathbb{R}, \tau)$ يكون فضاء T_2 .

مثال (٦. ٢٤) :

كل فضاء منفصل يكون فضاء T_2 ولكن الفضاء الغير منفصل الذي يحتوي على أكثر من نقطة لا يكون فضاء T_2 .

الحل : يترك للقارئ كتمرين

نظرية (٦. ٢٥) :

كل فضاء مترى يكون فضاء T_2 .

البرهان :

نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ وأن (X, d) فضاء مترى ، من تعريف الفضاء المترى ينتج أن $d(x, y) = \varepsilon > 0$. نعتبر الكرتان المفتوحتان $G = S(x, \frac{1}{3}\varepsilon)$, $H = S(y, \frac{1}{3}\varepsilon)$ إذا $G \cap H = \emptyset$ نبين أن $G \cap H = \emptyset$ لذلك نفرض أن $p \in G \cap H$ من ذلك نستنتج أن $d(x, p) < \frac{1}{3}\varepsilon$ وكذلك $d(y, p) < \frac{1}{3}\varepsilon$ ولكن

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(y, p) < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon$$

وهذا تعارض مع أن $d(x, y) = \varepsilon$ ومن ثم فإن $G \cap H = \emptyset$ أي أن (X, d)

فضاء- T_2 .

نظرية (٢٦ . ٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن (X, τ) يكون فضاء- T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ فإن $\{x\} = \bigcap \{F : F \in \mathcal{N}_x\}$ حيث F جوار مغلق أي أن تقاطع الجوارات المغلقة للنقطة x يطابق المجموعة $\{x\}$.

البرهان :

أولا : نفرض أن (X, τ) فضاء- T_2 وأن $x \neq y$ ، على ذلك توجد مجموعتان مفتوحتان $U_i, V_i \in \tau$ بحيث أن $x \in U_i, y \in V_i, U_i \cap V_i = \emptyset$ ، ومن ثم فإن $U_i \subseteq V_j^c$ وهذا يؤدي إلى $U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq \overline{V_j^c} = V_j^c$ لأن $x \in U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq F_i$ أي أن F_i جوار مغلق للنقطة x لا يحتوي على y ومن ثم فإن : $\{x\} = \bigcap \{F_i : F_i \in \mathcal{N}_x\}$

ثانيا : نفرض أن لكل $x \in X$ ، المجموعة x يمكن التعبير عنها بالعلاقة الآتية:

$$\{x\} = \bigcap \{F_i : F_i \in \mathcal{N}_x\}$$

حيث F_i جوار مغلق للنقطة x .

سوف نبرهن على أن الفضاء (X, τ) هو فضاء- T_2 ، لذلك نفرض أن $x \neq y$ فإنه يوجد جوار مغلق F يحتوي x ولا يحتوي y وعليه تكون $V = F^c$ مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x وحيث أن F جوار مغلق يحتوي x فإنه توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي x بحيث أن $x \in U \subseteq F$ وتحقق أن $U \cap V = \emptyset$ وبالتالي فإن (X, τ) فضاء- T_2 .

نتيجة (٢٧ . ٦) :

الفضاء (X, τ) يكون فضاء- T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U, y \notin \overline{U}$ أي أن

X is T_2 -space $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y,$

$$\exists U \in \tau: x \in U, y \notin \bar{U}$$

البرهان :

نفرض أن X فضاء- T_2 ، $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ فإنه توجد مجموعتان

$U, V \in \tau$ بحيث أن $U \cap V = \emptyset$ ، $y \in V$ ، $x \in U$ إذاً

$$U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \subseteq V^c \Rightarrow \bar{U} \subseteq \overline{V^c} = V^c \Rightarrow y \notin \bar{U}$$

بفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وأنه توجد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث

أن $y \notin \bar{U}, x \in U$ إذاً $y \in \bar{U}^c = V \Rightarrow V \in \tau, y \in V$ إذاً

وعليه فإن : $U \cap V = U \cap \bar{U}^c = \emptyset$. ومن ثم فإن (X, τ) فضاء- T_2 .

نظرية (٢٨ . ٦) :

خاصية أن يكون الفضاء (X, τ) هو فضاء- T_2 هي خاصية (وراثية)

توبولوجية.

البرهان :

تترك للقارئ كتمرين.

نظرية (٢٩ . ٦) :

نفرض أن $f, g: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ دالتان متصلتان من الفضاء

التوبولوجي (X, τ_1) إلى الفضاء التوبولوجي (Y, τ_2) . إذا كان (Y, τ_2)

فضاء- T_2 فإن المجموعة $A = \{x: f(x) = g(x)\}$ تكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

نحاول إثبات أن المجموعة $A^c = \{x: f(x) \neq g(x)\}$ مجموعة مفتوحة .

نفرض أن $x \in A^c$ إذاً $f(x) \neq g(x)$ حيث أن (Y, τ_2) فضاء- T_2

بالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau_2$ بحيث أن $U \cap V = \phi$ ، $g(x) \in V, f(x) \in U$ وحيث أن f, g دالتان متصلتان فإن $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_1$ أي أن :

$$x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = W \in \tau$$

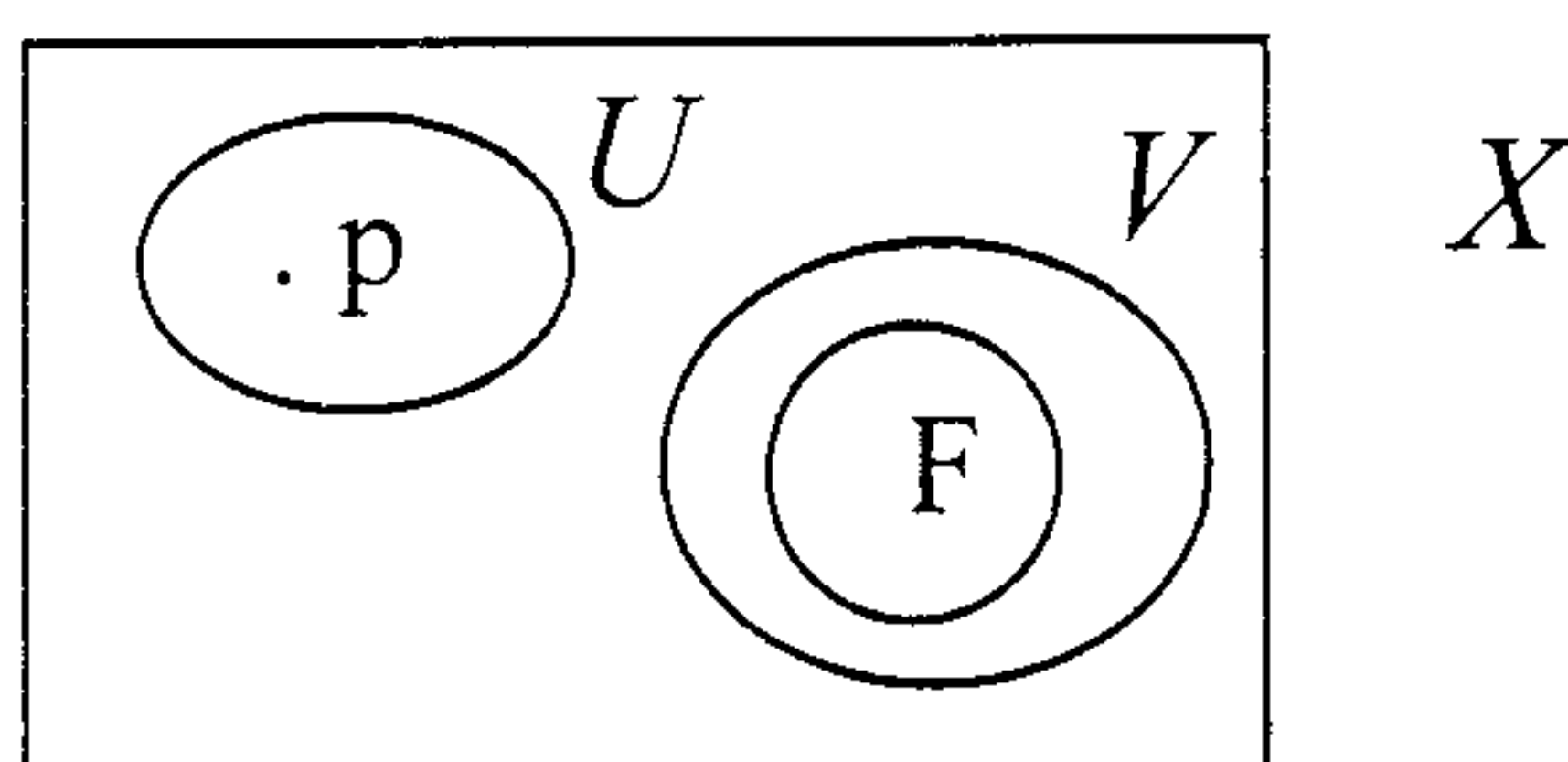
وهذا يؤدي إلى أن : $x \in W \subseteq A^c$. ومن ثم فإن A^c مجموعة مفتوحة .

الفضاءات المنتظمة والفضاءات الطبيعية (الناظمية) :

(Regular Space and Normal Space)

تعريف (٣٠ . ٦) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) بأنه فضاء منتظم (Regular space) إذا وجد لأي مجموعة مغلقة F وأي نقطة p لا تنتمي للمجموعة F مجموعتان مفتوحتان U, V بحيث يكون $p \in U, F \subset V, U \cap V = \phi$ أي أن :

$$X \text{ is regular} \Leftrightarrow \forall F \text{ closed}, \forall p \notin F, \exists U, V \in \tau, \\ p \in U, F \subset V, U \cap V = \phi$$


ملاحظة :

يعود الفضل في تعريف الفضاء المنتظم إلى العالم فيتروس (Vietrories) الذي قدمه في عام ١٩٢١ م .

تعريف (٣١ . ٦) :

يقال للفضاء (X, τ) إنه فضاء T_3 إذا كان منتظماً وفضاء T_1 أي أن

$$T_3 = regular + T_1$$

ملاحظة :

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة والفضاءات T_1 وهذا يتضح من المثال التالي.

مثال (٦ . ٣٢) :

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و أن τ توبولوجي معرف على X بالصورة :

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$$

فإن المجموعات المغلقة في X هي :

$$\mathfrak{T} = \{\phi, X, \{b, c\}, \{a\}\}$$

وأن

$$b \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, b \in \{b, c\}, \{a\} \subseteq \{a\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \phi$$

$$c \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, c \in \{b, c\}, \{a\} \subseteq \{a\},$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \phi$$

$$a \notin \{b, c\} \Rightarrow \exists \{a\}, \{b, c\} \in \tau, a \in \{a\}, \{b, c\} \subseteq \{b, c\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \phi$$

وبالتالي فإن (X, τ) فضاء منتظم ولكنه ليس فضاء T_1 ولا فضاء T_2 .

كذلك المثال التالي يوضح أنه قد يكون هناك فضاء T_1 لكنه ليس فضاء منتظم .

مثال (٦ . ٣٣) :

علمنا مما سبق أن فضاء المتممات المنتهية هو فضاء T_1 ، سوف نبين أنه ليس فضاء منتظم ، من أجل ذلك نفرض العكس ، أي نفرض أن فضاء المتممات المنتهية (X, C) منتظم وأن $x, y \in X$ ، حيث X لا نهائية وبالتالي $\{x\}$ مجموعة مغلقة لأنه فضاء T_1 وأن $y \notin \{x\}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U, V بحيث أن $U \cap V = \phi, y \in U, \{x\} \subseteq V$ ، من تعريف توبولوجي المتممات المنتهية U^c, V^c مجموعات منتهية وعليه يكون $U^c \cup V^c$ مجموعة منتهية لكن $(U \cap V)^c = X = U^c \cup V^c$ أي أن X

مجموعة منتهية وهذا تناقض إذاً (X, C) فضاء ليس منتظم.

مثال (٦ . ٣٤) :

كل فضاء غير منفصل (X, I) حيث X تحتوي على أكثر من نقطة هو فضاء منتظم ولا يكون T_0 أو T_1 أو T_2 .

مثال (٦ . ٣٥) :

كل فضاء منفصل (X, D) هو فضاء منتظم .

نظرية (٦ . ٣٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن الخواص التالية متكافئة :-

(١) فضاء X منتظم .

(٢) لكل $x \in X$ ، $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U$ توجد $V \in \tau$ بحيث أن :

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

(٣) كل جوار للنقطة $x \in X$ يحتوي على جوار مغلق.

البرهان :

$$(١) \Leftarrow (٢)$$

نفرض $x \in X$ ، $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U$ إذاً U^c مجموعة مغلقة ،

$x \notin U^c$ وحيث أن X فضاء منتظم ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان

$W, V \in \tau$ بحيث يكون $x \in V$ ، $U^c \subseteq W$ ، $V \cap W = \emptyset$ وحيث أن

W^c مجموعة مغلقة فإن :

$$V \subseteq W^c \Rightarrow \bar{V} \subseteq \overline{W^c} = W^c \Rightarrow x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W^c \subseteq U$$

$$(٢) \Leftarrow (١)$$

نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة ، $x \in F^c$

ومن (٢) نجد أنه توجد مجموعة مفتوحة V حيث $x \in V$ ، $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq F^c$.

ومن ذلك نستنتج أن $x \in V, F \subseteq \bar{V}^c, \bar{V}^c \in \tau, V \cap \bar{V}^c = \emptyset$ لأن $(V \subseteq \bar{V})$ وبالتالي فإن X فضاء منتظم .

(١) $\Leftarrow$ (٣) :

نفرض أن N جوار للنقطة x لذلك فإنه توجد مجموعة مفتوحة V حيث $x \in V \subseteq N$ إذاً V^c مجموعة مغلقة ، $x \notin V^c$ وحيث أن X فضاء منتظم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U, W بحيث يكون : $x \in U, V^c \subseteq W, U \cap W = \emptyset$ ومن ذلك نستنتج أن $W^c \subseteq V$ ، W^c مجموعة مغلقة ، $W^c \subseteq V \subseteq N$ أي أن N تحتوي W^c ، W^c جوار مغلق للنقطة x (لأن $x \in V \subseteq W^c$).

والعكس ، نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن $x \in F^c$ حيث F^c مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن F^c جوار للنقطة x لكل $x \in F^c$ ومن الفرض (٣) يوجد جوار مغلق $H \subseteq F^c$ للنقطة x . إذاً $F \subseteq H^c$ وحيث أن H جوار للنقطة x فإنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث يكون $x \in U \subseteq H, U \cap H^c = \emptyset$ ومن ذلك نجد أن $x \in U, F \subseteq H^c, U \cap H^c = \emptyset$ أي أن X فضاء منتظم .

نتيجة (٦ . ٣٧) :

الفضاء (X, τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة G يمكن التعبير عنها بالصورة : $G = \bigcup \{W \in \tau : \bar{W} \subseteq G\}$

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء منتظم ، $G \in \tau$ من النظرية السابقة فإنه توجد لكل $x \in G$ مجموعة مفتوحة W بحيث يكون $x \in W \subseteq \bar{W} \subseteq G$ والعكس ،

نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة بالتالي فإن :

$$F^c = \bigcup \{W \in \tau : \overline{W} \subseteq F^c\}$$

وحيث أن $x \in F^c$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة W_x بحيث يكون $\overline{W_x} \subseteq F^c$ ، $x \in W_x$ ومن ذلك نرى أن $V = (\overline{W_x})^c \supseteq F$ ، $V = (\overline{W_x})^c \supseteq F$ ، $W_x \cap V = \phi$ أي أن (X, τ) فضاء منتظم .

نتيجة (٣٨ . ٦) :

الفضاء (X, τ) يكون فضاء منتظم إذا وفقط إذا كانت لكل مجموعة مغلقة F فإن تقاطع الجوارات المغلقة للمجموعة F يطابق المجموعة F أي أن :

$$F = \bigcap \{N : N \text{ جوار مغلق لـ } F\}$$

البرهان :

نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن $x \in F^c$ ، F^c مجموعة مفتوحة ، من النظرية السابقة نستنتج أن توجد مجموعة مفتوحة V بحيث أن $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$. إذاً $F \subseteq (\overline{V})^c \subseteq V^c$. وحيث أن $(\overline{V})^c$ مجموعة مفتوحة فإن V^c جوار مغلق للمجموعة F ومنها نحصل علي :

$$F = \bigcap \{V^c : V^c \text{ جوار مغلق لـ } F\}$$

$$= \bigcap \{V^c : F \text{ لـ } V^c \text{ جوار مغلق}\}$$

والعكس ، لنفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإنه يوجد جوار مغلق N للمجموعة F لا يحتوي x أي توجد مجموعة مفتوحة U بحيث يكون $F \subseteq U \subseteq N$ ومن ثم فإن المجموعتين U, N^c مفتوحتان حيث أن : $F \subseteq U, x \in N^c$ أي أن (X, τ) فضاء منتظم .

نظرية (٣٩ . ٦) :

كل فضاء T_3 يكون فضاء T_2 .

البرهان :

نفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ والفضاء (X, τ) فضاء T_3 ،
حيث أن (X, τ) فضاء T_1 فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة حيث $y \notin \{x\}$ ، لكن
 (X, τ) فضاء منتظم وبذلك توجد مجموعتان $U, V \in \tau$ بحيث يكون
 $y \in U, \{x\} \subseteq V, U \cap V = \phi$ ومن ذلك نستنتج أن (X, τ) فضاء T_2 .

نظرية (٤٠ . ٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء منتظم فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) (X, τ) فضاء T_2 .

(٢) (X, τ) فضاء T_1 .

(٣) (X, τ) فضاء T_0 .

البرهان :

واضح أن $(١) \Leftarrow (٢) \Leftarrow (٣)$. ونبين فقط أن $(٣) \Leftarrow (١)$

لنفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وأن (X, τ) فضاء T_0 لذلك حسب
نظرية (٨ . ٦) يكون إما $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

نفرض أن $x \notin \overline{\{y\}}$ وحيث أن المجموعة $\overline{\{y\}}$ مغلقة والفضاء (X, τ) منتظم
فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن : $x \in U, \overline{\{y\}} \subseteq V$ ،
 $U \cap V = \phi$ من ذلك نرى أن (X, τ) فضاء T_2 .

نظرية (٤١ . ٦) :

خاصية أن يكون الفضاء منتظما أو T_3 هي خاصية وراثية.

البرهان :

ليكن (X, τ) فضاء منتظم ، (A, τ_A) فضاء جزئي منه ، ولتكن B مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (A, τ_A) ، $x \in A$ حيث $x \notin B$.
وبالتالي توجد مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي (X, τ) حيث $B = A \cap F$ وبموجب أن الفضاء الكلي منتظم وأن F مجموعة مغلقة في X وأن $x \notin F$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن $x \in U, F \subseteq V$ ، $U \cap V = \phi$ ومن ثم فإنه توجد $U_1, V_1 \in \tau_A$ بحيث يكون $U_1 = A \cap U, V_1 = A \cap V$ ، حيث $x \in U_1, B \subseteq V_1, U_1 \cap V_1 = \phi$.
أي أن (A, τ_A) فضاء منتظم.

نظرية (٤٢ . ٦) :

خاصية أن يكون الفضاء المنتظم هي خاصية توبولوجية.

البرهان :

نفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة توبولوجية من الفضاء المنتظم (X, τ) إلى الفضاء (Y, ν) وأن F مجموعة مغلقة في Y حيث $x \in Y, x \notin F$ وحيث أن f دالة تناظر أحادي ومتصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X وأن $f^{-1}(x) \notin f^{-1}(F)$. لكن (X, τ) فضاء منتظم ، بذلك توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث يكون $f^{-1}(x) \in U, f^{-1}(F) \subseteq V$ ، $U \cap V = \phi$. ولكن $f(U), f(V)$ مجموعتان مفتوحتان في Y ، حيث $x \in f(U), F \subseteq f(V), f(U) \cap f(V) = \phi$.
أي أن (Y, ν) فضاء منتظم .

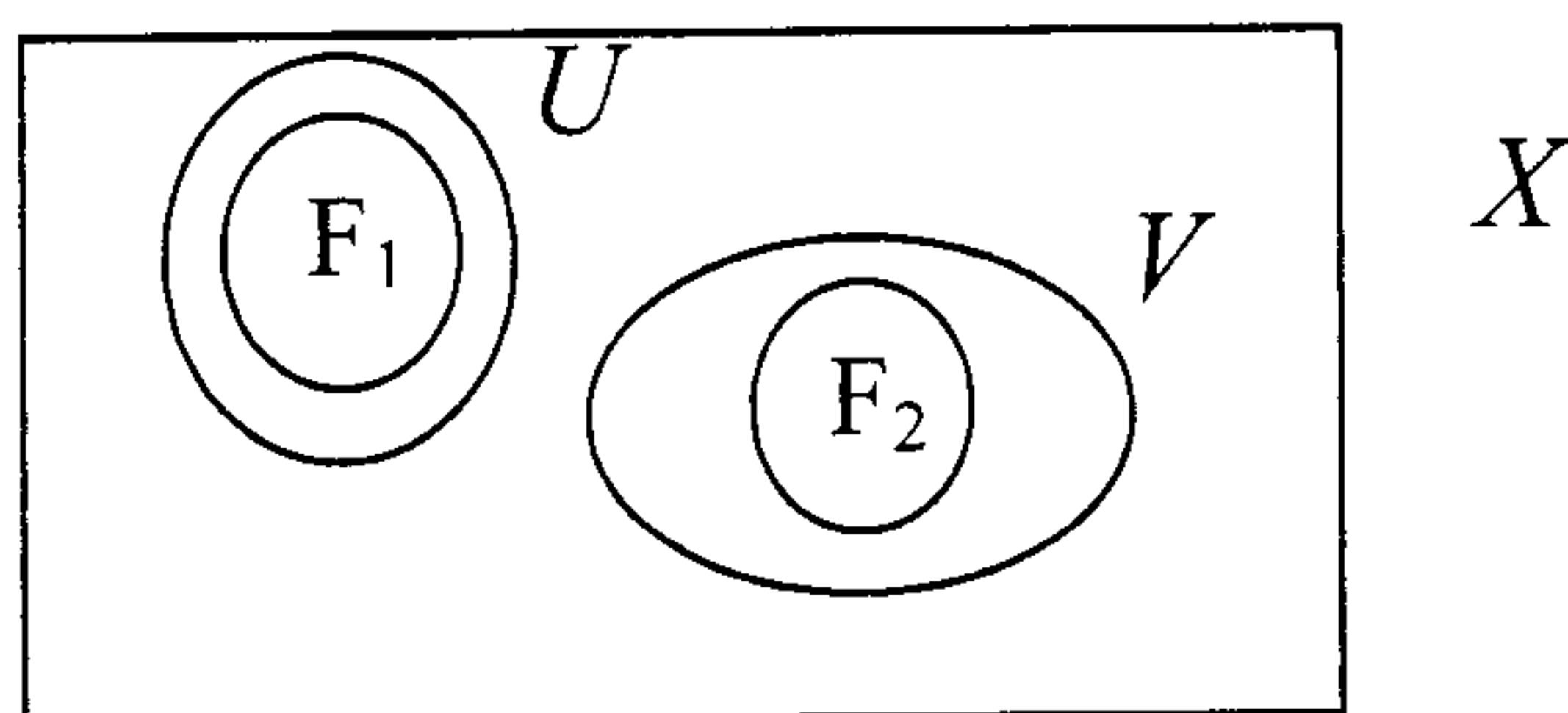
نظرية (٤٣ . ٦) :

خاصية أن يكون الفضاء T_3 هي خاصية توبولوجية .

الفضاء الطبيعي : Normal Space

تعريف (٤٤ . ٦) :

يسمى الفضاء التوبولوجي (X, τ) فضاء طبيعي إذا وفقط إذا وجد لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان إحداهما تحتوي على إحدى المجموعتين المغلقتين بينما تحتوي الثانية على المجموعة الأخرى. أي أن إذا كانت F_1, F_2 مجموعتين مغلقتين في X حيث $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ فإنه توجد $U, V \in \tau$ بحيث $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V, U \cap V = \emptyset$.



ملاحظة :

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة والفضاءات الطبيعية وذلك يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (٤٥ . ٦) :

بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ وأن τ توبولوجي على X حيث

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

من السهل ملاحظة أن (X, τ) فضاء طبيعي لأن المجموعات المغلقة في X هي :

$$\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$$

لايجاد مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين يجب أن تكون إحداهما هي $\emptyset$ ولتكن

$F_1 = \emptyset$ بالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان هما $\emptyset, X$ حيث

$$\emptyset = F_1 \subseteq \emptyset, F_2 \subseteq X$$

من جانب آخر (X, τ) ليس منتظماً حيث توجد مجموعة مغلقة $\{b, c\}$ ،
 $a \notin \{b, c\}$ ولا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان بحيث تحتوي إحداهما
 على النقطة a وتحتوي الأخرى على المجموعة المغلقة $\{b, c\}$ ، أيضاً (X, τ)
 ليس فضاء- T_1 لأن المجموعة $\{a\}$ ليست مغلقة .

المثال التالي يوضح أنه قد يكون الفضاء طبعياً ولكنه ليس فضاء- T_0 .

مثال (٤٦ . ٦) :

بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ من السهل أن نرى أن
 الفضاء (X, τ) فضاء طبعياً لكنه ليس فضاء- T_0 لأن $b \neq c$ والمجموعة
 الوحيدة التي تحتوي b هي X حيث $c \in X$.

والمثال التالي يوضح أنه قد يكون الفضاء هو فضاء- T_0 ولكنه ليس طبعياً .

مثال (٤٧ . ٦) :

بفرض أن

$\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ ، $X = \{a, b, c, d\}$
 من السهل أن نرى أن (X, τ) هو فضاء- T_0 ولكنه ليس فضاء طبعياً لأن
 $F = \{a, c, d\}$ هي مجموعة مغلقة ، $b \notin F$ ولا توجد مجموعة مفتوحة
 تحتوي F سوى المجموعة X التي تحتوي b أيضاً .

مثال (٤٨ . ٦) :

بفرض أن X مجموعة غير منتهية فإن فضاء التمامات المنتهية (X, C) لا
 يكون فضاء منتظم ولا فضاء طبعياً .

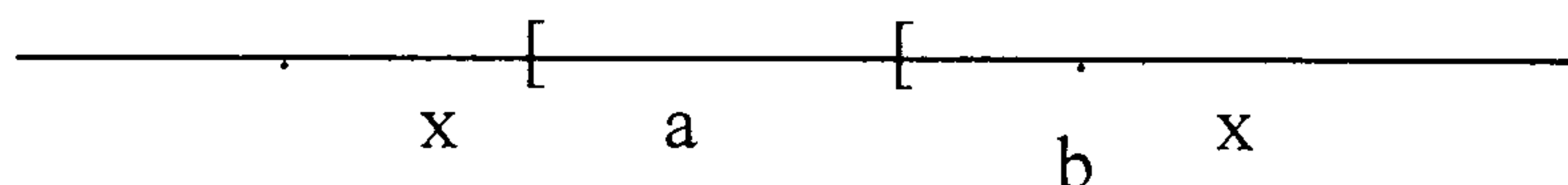
مثال (٤٩ . ٦) :

ليكن (R, τ) هو توبولوجي النهاية السفلي أي التوبولوجي الذي أساسه

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in R\}$$

يجب أن نلاحظ هنا إن عناصر الأساس مفتوحة ومغلقة في آن واحد وذلك لأن :

$$\text{let } x \notin [a, b) \Rightarrow x < a \text{ or } b \leq x$$



فإذا كانت $x < a$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $[x, a)$ حيث $x \in [x, a)$ ،
 $[x, a) \cap [a, b) = \emptyset$ وإذا كانت $b \leq x$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة
 $[x, x+1)$ تحتوي x ولا تتقاطع مع $[a, b)$ وهذا يؤدي إلى أن المجموعة
 $R - [a, b)$ مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن $[a, b)$ مجموعة مغلقة ، من السهل أن
نرى أن (R, τ) فضاء منتظم وفضاء طبيعي.

ملاحظة :

حيث أنه لا يوجد ارتباط بين الفضاءات الطبيعية والمنتظمة وكذلك
 T_0, T_1, T_2 من أجل إيجاد علاقة بين هذه الفضاءات نعطي التعريف التالي :

الفضاء T_4 - Space

تعريف (٥٠ . ٦) :

يسمى الفضاء (X, τ) فضاء- T_4 إذا كان فضاء طبيعي وكان فضاء T_1
أيضا أي أن : $T_4 - space \equiv T_1 + Normal$

تعريف (٥١ . ٦) :

كل فضاء- T_4 هو فضاء- T_3 .

البرهان :

بفرض أن (X, τ) هو فضاء- T_4 ، $P \in X$ ، $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة
في X بحيث أن $P \notin F$ ، وعليه تكون المجموعة $\{p\}$ مغلقة ، لأن X فضاء- T_1
وحيث أن X فضاء طبيعي فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين U, V وتحقق
 $U \cap V = \emptyset$ ، $F \subseteq U$ ، $\{p\} \subseteq V$ أي أن X فضاء منتظم وهو المطلوب .

المثال التالي يوضح أن خاصية أن يكون الفضاء (X, τ) طبيعي ليست خاصية وراثية .

مثال (٥٢ . ٦) : نفرض أن

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} , X = \{a, b, c, d\}$$

$$\mathfrak{T}_X = \{\phi, X, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}\}$$

حيث أن $\mathfrak{T}_X$ فإن المجموعتان المغلقتان والغير متقاطعتان هما فقط X, ϕ وبالتالي فإن (X, τ) فضاء طبيعي .

لنأخذ $Y = \{a, b, c\}$ فإن :

$$\tau_Y = \{Y, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

$$\mathfrak{T}_Y = \{\phi, Y, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}\}$$

ومن ذلك نجد أن (Y, τ_Y) لا يكون فضاء طبيعي لأن $\{b\}, \{c\}$ مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتان في Y ولا توجد مجموعتان مفتوحتان في Y و غير متقاطعتان وتحويان $\{b\}, \{c\}$.

ملاحظة :

في المثال السابق إذا أخذنا $Y = \{b, c, d\}$ فهي مجموعة مغلقة في X من السهل أن نرى أن (Y, τ_Y) فضاء طبيعي .

نظرية (٥٣ . ٦) :

كل فضاء جزئي مغلق من فضاء طبيعي يكون فضاء طبيعي .

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء طبيعي ، (Y, τ_Y) فضاء جزئي منه حيث Y مجموعة مغلقة في X ، نفرض أن $F_1, F_2 \in \mathfrak{T}_Y$ مجموعتان مغلقتان في Y بحيث أن $F_1 \cap F_2 = \phi$ من نظرية (٩ . ٣ . ٣) فإن $F_1, F_2 \in \mathfrak{T}_X$ ، وحيث

أن (X, τ) فضاء طبيعي فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن :

$$F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

وبالتالي فإن $U_1 = Y \cap U, V_1 = Y \cap V \in \tau_Y$ وتحقق

$$F_1 \subseteq U \cap Y = U_1, F_2 \subseteq V \cap Y = V_1$$

$$U_1 \cap V_1 = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) = \emptyset$$

أي أن (Y, τ_Y) هو فضاء طبيعي .

الفضاءات المنتظمة تماماً : Completely regular space

سوف نذكر هنا تمهيداً مهماً يسمى تمهيد أوريسون (Urysohn's lemma)

بدون برهان .

نظرية (٥٤ . ٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن X يكون فضاء طبيعي إذا وفقط إذا

كان لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F, H من الفضاء X توجد دالة

متصلة $f: X \rightarrow I = [0, 1]$ بحيث أن $f(F) = 1, f(H) = 0$. وحيث أن

$$[0, 1] \cong [a, b]$$

فإنه يمكن إعادة صياغة النظرية السابقة بالصور :

نظرية (٥٥ . ٦) :

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون فضاء طبيعي إذا وفقط إذا كان لكل

مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F, H من الفضاء X توجد دالة متصلة

$$f: X \rightarrow [a, b] \text{ بحيث أن } f(F) = b, f(H) = a .$$

تعريف (٥٦ . ٦) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) فضاء منتظم تماماً إذا كان لكل

$x \in X, F \in \mathfrak{T}_X$ بحيث أن $x \notin F$ توجد دالة متصلة $f: X \rightarrow [0, 1]$

بحيث أن $f(F) = 0, f(x) = 1$.

نظرية (٥٧ . ٦) :

الفضاء المنتظم تماماً هو فضاء منتظم.

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء منتظم تماماً ، $x \in X$ ، $F \in \mathfrak{T}_X$ بحيث أن $x \notin F$ ، فإنه توجد دالة متصلة $f: X \rightarrow [0,1]$ بحيث أن $f(F)=1, f(X)=0$ ولكن $[0,1]$ فضاء جزئي من فضاء T_2 (لأن R فضاء T_2) وبالتالي فإن $[0,1]$ فضاء T_2 ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U, V غير متقاطعتان بحيث أن $1 \in U, 0 \in V$ وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان في الفضاء X وتحقق $x \in f^{-1}(V), F \subseteq f^{-1}(U)$ وبالتالي فإن X فضاء منتظم .

ملاحظة :

عكس النظرية السابقة غير صحيح في الحالة العامة والنظرية التالية تعطي الشرط الضروري والكافي لكي يكون الفضاء منتظم تماماً ، كذلك الفضاءات الطبيعية ليست من الضروري أن تكون منتظمة تماماً.

نظرية (٥٨ . ٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء طبيعي فإن X يكون منتظم تماماً إذا وفقط إذا كان منتظم .

البرهان :

سوف نبرهن فقط على أن كل فضاء منتظم وطبيعي يكون منتظم تماماً ، ليكن (X, τ) فضاء منتظم وطبيعي وأن F مجموعة مغلقة في X ، $x \notin F$ ، ومن ذلك توجد مجموعتان مفتوحتان U, V بحيث أن $U \cap V = \emptyset, F \subseteq U, x \in V$ وحيث أن $H = U^c$ مجموعة مغلقة

وتحقق $F \cap H = \emptyset$ فإنه حسب نظرية أوريسون توجد دالة متصلة $f: X \rightarrow [0,1]$ بحيث أن $f(H)=0, f(F)=1$ وحيث أن $x \in V \subseteq U^c$ فإن $x \in H$ أي أن $f(F)=1, f(X)=0$ أي أن الفضاء X منتظم تماماً.

ملاحظة :

يمكن توضيح الجزء الأخير من برهان النظرية السابقة بطريقة مكافئة كالتالي :
حيث أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة وبموجب أن X فضاء منتظم فإنه حسب نظرية (٦ . ٣٦) توجد مجموعة مفتوحة V تحقق $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq F^c$ ومن هذا يتضح أن المجموعتين $\bar{V}, F$ مغلقتين وغير متقاطعتين ، طبقاً لنظرية أوريسون (٦ . ٥٤) توجد دالة $f: X \rightarrow [0,1]$ متصلة تحقق العلاقات الآتية : $f(y)=0$ إذا كانت $y \in \bar{V}$ ، $f(y)=1$ إذا كانت $y \in F$ وحيث أن $x \in \bar{V}$ فإن $f(x)=0$ وكذلك $f(F)=1$ أي أن الفضاء X منتظم تماماً.

فضاء تيخونوف : Tychonoff space

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) فضاء تيخونوف أو فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$ إذا

كان منتظم تماماً وكذلك فضاء T_1 .

من نظرية (٦ . ٥٦) يتضح أن $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

نظرية (٦ . ٥٩) :

خاصية أن يكون الفضاء فضاء تيخونوف هي خاصية وراثية .

البرهان :

يكفي أن نبين أنه إذا كان (X, τ) فضاء منتظم تماماً فإن أي فضاء جزئي

(Y, τ_Y) حيث $Y \subseteq X$ هو أيضا منتظم تماماً ، لذلك نفرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) ، $x \in Y$ حيث $x \notin E$ ، حسب نظرية (٣.٩) توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث أن $E = Y \cap F$ وحيث أن $x \notin E$ فإن $x \notin Y \cap F$ ولكن $x \in Y$ ومن ذلك نجد أن $x \notin F$. وحيث أن (X, τ) فضاء منتظم تماماً فإنه توجد دالة متصلة $f: X \rightarrow [0,1]$ بحيث أن $f(X) = 0$ ، $f(F) = 1$ ، وبتقييد الدالة f على الفضاء الجزئي Y تكون $f_Y: Y \rightarrow [0,1]$ دالة متصلة وتحقق $f_Y(E) = f_Y(Y \cap F) = 1$ ، $f_Y(X) = 0$ وهو المطلوب.

نظرية (٦.٦) :

خاصية أن يكون الفضاء منتظم تماماً هي خاصية توبولوجية.

البرهان :

نفرض أن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ دالة هومومورفيزم ، (X, τ) فضاء منتظم تماماً لإثبات أن (Y, τ^*) يكون أيضا منتظم تماماً نفرض أن $F \subseteq Y$ مجموعة مغلقة ، $y \in F$ حيث $y \in Y$ وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X تحقق $x = f^{-1}(y) \notin f^{-1}(F)$ لكن (X, τ) فضاء منتظم تماماً فإنه توجد دالة متصلة $g: X \rightarrow [0,1]$ بحيث تكون $g(X) = 0$ ، $g(f^{-1}(F)) = 1$ وحيث أن f دالة هومومورفيزم فإن f^{-1} دالة متصلة ومن ذلك نجد أن : $h = g \circ f^{-1}: Y \rightarrow [0,1]$ دالة متصلة وتحقق :

$$h(y) = g \circ f^{-1}(y) = g(h(f^{-1}(y))) = 0 ,$$

$$h(F) = g \circ f^{-1}(F) = g(f^{-1}(F)) = 1$$

أي أن (Y, τ^*) فضاء منتظم تماماً.

نظرية (٦١.٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء تيخونوف $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإنه توجد دالة حقيقية $f: X \rightarrow R$ بحيث أن $f(x) \neq f(y)$.

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء تيخونوف ، $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ ، إذاً (X, τ) فضاء T_1 . إذاً $\{y\}$ مجموعة مغلقة تحقق $x \notin \{y\}$ ، لكن (X, τ) فضاء منتظم تماماً وبالتالي توجد دالة متصلة $f: X \rightarrow R$ بحيث أن $f(x) = 0$ ، $f(y) = f(\{y\}) = 1$ أي أن $f(x) \neq f(y)$.

ملاحظة : النظرية السابقة تعني أن عائلة $C(X, R)$ كل الدوال الحقيقية المتصلة في فضاء تيخونوف تفصل بين نقاط R .

الفضاءات الطبيعية تماماً : Completely normal space

تعريف (٦٢.٦) :

يقال أن المجموعتين الجزئيتين A, B من الفضاء التوبولوجي (X, τ) منفصلتين إذا كان $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ أي أن A منفصلة عن B ، B منفصلة عن A ، سوف نرى أن المجموعات المنفصلة تلعب دوراً هاماً في الفضاءات المترابطة .

تعريف (٦٣.٦) : Completely normal space

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) فضاء طبيعي تماماً إذا كان لكل مجموعتين منفصلتين A, B من X توجد مجموعتين مفتوحتين U, V بحيث تكون $U \cap V = \emptyset, A \subseteq U, B \subseteq V$.

ومن هذا التعريف يتضح أن كل فضاء طبيعي تماماً هو فضاء طبيعي وذلك لأن أي مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين هما منفصلتين .

الفضاء - T_5 : (T_5 - space)

تعريف (٦٤ . ٦) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) بأنه فضاء- T_5 إذا كان فضاء طبيعي تماماً وكان فضاء- T_1 أي أن

$$T_5 = T_1 + \text{completely normal space}$$

من ذلك يتضح أن : $T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

نظرية (٦٥ . ٦) :

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون فضاء طبيعي تماماً إذا وفقط إذا كان أي فضاء جزئي (Y, τ_Y) منه فضاء طبيعي .

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء طبيعي تماماً ، Y مجموعة جزئية من X ، A, B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين من الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) ، بالرجوع إلى نظرية (١٢ . ٣ . ٣) نجد أن : $\overline{A_X} \cap Y = \overline{A_Y} = A$ وينتج من ذلك أن :

$$\begin{aligned} B \cap \overline{A_X} &= (B \cap Y) \cap \overline{A_X} = B \cap (Y \cap \overline{A_X}) \\ &= B \cap \overline{A_Y} = B \cap A = \phi \end{aligned}$$

بالمثل نجد أن $A \cap \overline{B_X} = \phi$ وبالتالي فإن المجموعتين A, B منفصلتين في الفضاء الكلي (X, τ) ومن ثم فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين U, V في الفضاء الكلي بحيث أن : $U \cap V = \phi$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$

ومن تعريف الفضاء الجزئي نجد أن المجموعتين $U \cap Y$, $V \cap Y$ مفتوحتين في الفضاء الجزئي وتحقق :

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \phi ,$$

$$A \subseteq U \cap Y , B \subseteq V \cap Y$$

وهذا يعني أن الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) طبيعي ، العكس ، لنفرض أن أي فضاء جزئي (Y, τ_Y) من الفضاء (X, τ) هو فضاء طبيعي ، لإثبات أن (X, τ) فضاء طبيعي تماماً ، لذلك نفرض أن A, B مجموعتين منفصلتين في الفضاء (X, τ) أي أن $A \cap \bar{B} = \phi, B \cap \bar{A} = \phi$ لنفرض أن $Y = X - (\bar{A} \cap \bar{B})$ ومن الفرض نجد أن (Y, τ_Y) هو فضاء طبيعي والمجموعتان $Y \cap \bar{A}, Y \cap \bar{B}$ مغلقتان وغير متقاطعتان لأن :

$$\begin{aligned} (Y \cap \bar{A}) \cap (Y \cap \bar{B}) &= Y \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= [X - (\bar{A} \cap \bar{B})] \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \phi \end{aligned}$$

ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن

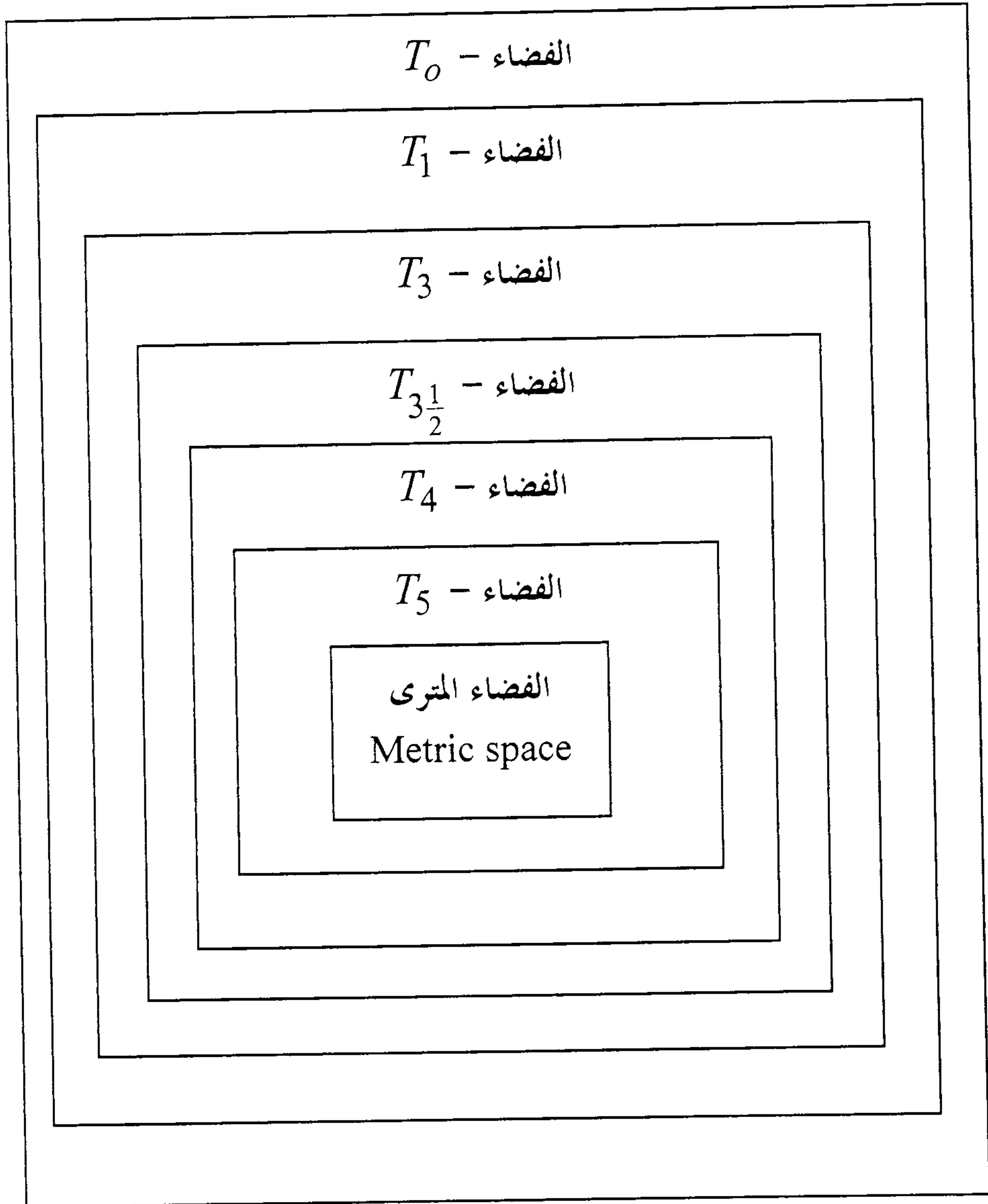
$$U \cap V = \phi, A \subseteq Y \cap \bar{A} \subseteq U, B \subseteq Y \cap \bar{B} \subseteq V$$

ولكن $Y = X - \bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن U, V مجموعتان مفتوحتان في X وغير متقاطعتان وتحويان A, B إذاً الفضاء (X, τ) طبيعي تماماً.

ملاحظة :

حيث أن أي فضاء جزئي من فضاء T_4 ليس من الضروري أن يكون فضاء T_4 . (راجع نظرية (٥٣.٦) وبالتالي فهو ليس طبيعي تماماً ومن ذلك نجد أن $T_5 \Rightarrow T_4$.

مما سبق يمكن رسم الشكل التوضيحي لأحتواء الفضاءات التوبولوجيه لبعضها البعض كما يلي :



تمارين عامة على الباب السادس

(١) إذا كان (X, τ) فضاء $T_0(T_1, T_2)$ ، $\tau \subseteq \tau^*$. أثبت أن (X, τ^*) يكون فضاء $T_0(T_1, T_2)$.

(٢) بفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون :

(i) (X, τ) فضاء T_0

(ii) (X, τ) فضاء T_1

(iii) (X, τ) فضاء T_2

(٣) بين أنه إذا كان (X, τ) فضاء T_2 حيث X مجموعة لا نهائية ، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المجموعات المفتوحة المنفصلة.

(٤) إذا كان (X, τ) فضاء T_0 بحيث أنه توجد نقطة واحدة x كثيفة في X أى أن $\overline{\{x\}} = X$. بين أنه لا توجد نقطة أخرى $y \in X$ تحقق $\overline{\{y\}} = X$.

(٥) إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ،

(i) هل (X, τ) فضاء T_0

(ii) هل (X, τ) فضاء T_1

(iii) هل (X, τ) فضاء T_2

(iv) هل (X, τ) فضاء منتظم

(v) هل (X, τ) فضاء طبيعي.

(vi) هل (X, τ) فضاء منتظم تماماً.

(٦) ليكن X فضاء توبولوجي ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على X . $\mathcal{B}$ يسمى

أساس منتظم إذا وجد لأي عنصر $B \in \mathcal{B}$ مجموعة مفتوحة U تحقق

$x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq B$. أثبت أن الفضاء (X, τ) يكون فضاء منتظم إذا وفقط إذا

كان للفضاء X أساس منتظم.

(٧) أثبت أن (X, τ) يكون فضاء طبعى إذا وفقط إذا كان لكل $U, V \in \tau$ بحيث أن $U \cup V = X$ توجد $F_1, F_2 \in \mathfrak{T}_X$ بحيث أن $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V$ حيث $F_1 \cup F_2 = X$.

(٨) أعط مثال لفضاء توبولوجى طبعى وليس منتظم.

(٩) أثبت أن كل فضاء منتهى ومنتظم فإنه يكون طبعى.

(١٠) لتكن $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R .

بفرض أن $\tau = \{G \subseteq R : G = U - A_1, U \in \mathcal{U}, A_1 \subseteq A\}$

حيث $(R, \mathcal{U})$ هو الفضاء العادى.

(i) أثبت أن τ توبولوجى على R .

(ii) أثبت (R, τ) أن فضاء- T_2 .

(iii) أثبت أن (R, τ) فضاء غير منتظم.

(١١) بفرض أن (X, τ) فضاء- T_2 . برهن أن كل متتابعة في X لها نقطة نهاية وحيدة.

(١٢) بفرض أن τ هو التوبولوجى على R المولد بواسطة الفترات النصف المفتوحة $[a, b)$ حيث $a < b$. بين أن (R, τ) فضاء- T_2 ومنتظم وطبعى.

(١٣) بفرض أن X مجموعة مرتبة، τ التوبولوجى المرتب أى أن τ مولد بواسطة المجموعات الجزئية التى على الصورة $\{x : x < a\}$ ، $\{x : x > a\}$ بين أن (X, τ) هو فضاء طبعى.

(١٤) لتكن $X = [0, 1[$ ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى τ على X حيث

$$\mathcal{B} = \{[a, b[: 0 < b \leq 1, 0 \leq a < 1\}$$

(i) أثبت أن (X, τ) فضاء منتظم.

(ii) أثبت أن (X, τ) فضاءاً منفصلاً.

(١٥) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة :

(i) X فضاء T_1

(ii) تقاطع المجموعات المفتوحة التي تحتوى المجموعة $A \subseteq X$ يطابق A .

(iii) تقاطع المجموعات المفتوحة التي تحتوى $x \in X$ يطابق $\{x\}$.

(iv) تقاطع المجموعات المغلقة التي تحتوى $x \in X$ يطابق $\{x\}$.

(v) لكل $x \in X$ فإن $\{x\}' = \emptyset$

(vi) لكل $x \in X$ فإن المجموعة $\{x\}$ مغلقة.

(١٦) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة لكل

$i = 0, 1, 2$:

(i) X فضاء T_i .

(ii) لكل $x, y \in X$ توجد دالة $f: X \rightarrow Y$ حيث Y فضاء T_i بحيث

يكون $f(x) \neq f(y)$.

الباب السابع

الفضاءات المحكمة (المتراصة)

Compact spaces

الباب السابعالفضاءات المحكمة (المتراصة)

Compact spaces

مقدمة :

الإحكام (التراص) هو تعميم لبعض خواص المجموعات المحدودة والمغلقة في فضاء الأعداد الحقيقية ، حيث هناك نظريات تلعب دوراً هاماً في التحليل الرياضي كنظرية هاين- بوريل (Heine-Borel) والتي تنص على أن كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة ، نظرية بولزانو- فيرشتراس (Bolzano-Weierstrass Theorem) ، والتي تنص على أن أي مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء الأعداد الحقيقية لها نقطة تراكم ونظرية كانتور للتقاطع (Cantor's intrection) و التي تنص على أنه : إذا كانت $\{F_n\}$ متتابعة تناقصية من المجموعات المغلقة الغير خالية في الفراغ المترى (X, d) وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n) = 0$ فإن $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

ونظراً للأهمية البالغة لهذه النظريات في تطوير التحليل الرياضي والتوبولوجي سنقدم في هذا الباب مفهوم الأحكام في الفضاءات التوبولوجية وعلاقتها بالفضاءات الأخرى كما سندرس الخصائص الأساسية لهذا المفهوم .

بند (١) : الفضاءات المحكمة (المتراصة) : Compact spacesتعريف (١ . ١ . ٧) :

يقال أن العائلة $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X بأنها غطاء (Cover) للمجموعة A إذا كانت :

$$A \subseteq \bigcup_i G_i = G_1 \cup G_2 \cup \dots$$

وإذا كانت عناصر العائلة $\mathcal{G}$ مجموعات مفتوحة فإنه يقال عندئذ أن $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح

(open cover) للمجموعة A . إذا كانت $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة A وكانت $\mathcal{G}^* = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ عائلة جزئية من $\mathcal{G}$ ومنتهية فإن $\mathcal{G}^*$ تسمى غطاء منتهى للمجموعة A إذا تحقق أن :

$$A \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = \bigcup_{i=1}^n G_i$$

أو نقول أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهى (finite subcover) للمجموعة A . إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي $\mathcal{G} \subseteq P(X)$ فإن $\mathcal{G}$ تسمى غطاء للمجموعة X إذا كان اتحاد عناصر $\mathcal{G}$ يساوي X . أي أن

$$X = \bigcup \{G_i : G_i \in \mathcal{G}, \forall i \in N\}$$

وتسمى $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح إذا كانت عناصر $\mathcal{G}$ مجموعات مفتوحة.

ملاحظة (٧. ١. ٢) :

إذا كانت العائلة $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X فإن لكل $x \in X$ توجد $G_{i_0} \in \mathcal{G}$ بحيث يكون $x \in G_{i_0}$.

تعريف (٧. ١. ٣) :

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يسمى فضاءً محكماً (compact) إذا كان لكل غطاء مفتوح للفضاء X يوجد غطاء جزئي منتهى للفضاء X .

$$X \text{ is compact} \Leftrightarrow \forall \mathcal{G} = \{G_i : i \in N, G_i \in \tau\}; X \subseteq \bigcup_i G_i;$$

$$\exists G_i, \forall i=1, \dots, n \text{ such that } X \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$$

ويجب أن نلاحظ أن (X, τ) يكون فضاء غير محكم إذا وجد غطاء مفتوح للفضاء X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى.

مثال (٧. ١. ٤) :

كل فضاء توبولوجي منتهى يكون محكم .

الحل :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي ، X مجموعة منتهية ولتكن

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

إذا كانت $\mathcal{G} = \{G_i : i \in N\}$ غطاء مفتوح للفضاء X فإنه لكل $x_j \in X$

توجد مجموعة $G_{ij} \in \mathcal{G}$ بحيث أن $x_j \in G_{ij}$ ومن هذا نجد أن :

$$x_1 \in G_{i1}, x_2 \in G_{i2}, \dots, x_n \in G_{in}$$

ومن ثم فإن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$

أي أن $\mathcal{G}^* = \{G_{ij}\}_{j=1}^n$ غطاء جزئي منتهى للمجموعة X .

مثال (٧ . ١ . ٥) :

فضاء المكملات المنتهية (X, C) فضاء محكم.

الحل :

(i) إذا كانت X منتهية فإنه طبقاً لمثال (٧ . ١ . ٤) تكون X محكمة

(ii) بفرض أن X لا نهائية وأن $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة

X . إذا كانت $G_o \in \mathcal{G}$ فإن G_o^c مجموعة منتهية ولتكن

$$G_o^c = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

وحيث أن $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X فإنه توجد $G_{ij} \in \mathcal{G}$ بحيث تكون :

$$a_1 \in G_{i1}, a_2 \in G_{i2}, \dots, a_n \in G_{in}$$

ومن هذا نجد أن $G_o^c \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$

ومن ثم فإن $X = G_o \cup G_o^c \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$

ولكن $G_o \cup G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in} \subseteq X$

إذاً $X = G_o \cup G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$

أي أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهى وبالتالي فإن الفضاء X محكم .

مثال (٦ . ١ . ٧) :

أي فضاء متقطع (X, D) غير منتهى هو فضاء غير محكم.

الحل :

نعتبر $\mathcal{G} = \{\{p\} : p \in X\}$ حيث أن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة لكل $p \in X$ فإن $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح للمجموعة X ولا يحتوي على غطاء جزئي منتهى ، وعلى هذا فإن X غير محكمة .

مثال (٧ . ١ . ٧) :

الفضاء الغير متقطع (X, I) هو فضاء محكم .

الحل :

حيث أن $I = \{X, \emptyset\}$ فإن أي غطاء مفتوح للمجموعة X يجب أن يكون على الصورة $\mathcal{G} = \{X\}$ وهو غطاء منتهى لأنه لا يحتوي إلا على عنصر واحد هو X .

مثال (٨ . ١ . ٧) :

بين أن فضاء النقطة المستبعدة (X, E) بدون النقطة p هو فضاء محكم.

الحل :

حيث أن $E_p = \{X, U \subseteq X : p \notin U\}$ وإذا كانت $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح للمجموعة X ، $p \in X$ فإنه توجد $G_{i_0} \in \mathcal{G}$ بحيث تكون $p \in G_{i_0}$. لكن المجموعة X هي المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي p ولهذا فإن $X \in \mathcal{G}$ لكل غطاء مفتوح $\mathcal{G}$ للمجموعة X . وبالتالي فإن $\{X\}$ غطاء جزئي منتهى إذاً X فضاء محكم .

مثال (٩ . ١ . ٧) :

بين أن فضاء النقطة المختارة (X, P) بدون النقطة p هو فضاء غير محكم.

الحل :

نعلم أن $P_p = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\}$ وبفرض أن X لا نهائية. إذا كانت $\mathcal{G} = \{\{p, x\} : x \in X\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X فإنه لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى لأن X لا نهائية وبالتالي فإن X غير محكم .
مثال (٧ . ١ . ١٠) :

الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$ غير محكم .

تعريف (٧ . ١ . ١١) :

يقال أن عائلة المجموعات $\mathcal{G} = \{G_i : i \in N\}$ لها خاصية التقاطع المنتهي Finite Intersection Property (F. I. P.) إذا كان تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{in}\}$ هو مجموعة غير خالية ، أي أن

$$G_{i1} \cap G_{i2} \cap \dots \cap G_{in} \neq \phi$$

ويقال أن $\mathcal{G}$ لها خاصية التقاطع الغير الخالي إذا كان $\bigcap \{G_i : G_i \in \mathcal{G}\} \neq \phi$
مثال (٧ . ١ . ١٢) :

العائلة $\mathcal{G} = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in N\}$ لها خاصية التقاطع المنتهي لأن تقاطع أي عائلة جزئية منتهية هو مجموعة غير خالية لأن :

$$(0,1) \cap (0, \frac{1}{2}) \cap \dots \cap (0, \frac{1}{m}) = (0, r) \neq \phi$$

حيث $r = \min \{1, 2, \dots, m\}$. ونلاحظ هنا أن $\mathcal{G}$ نفسها لها خاصية التقاطع الخالي لأن :

$$\bigcap \{(0, \frac{1}{n}) : n \in N\} = \phi$$

مثال (٧ . ١ . ١٣) :

العائلة $\mathcal{G} = \{(-\infty, n] : n \in Z\}$ لها خاصية التقاطع الخالي لأن :

$$\bigcap \{(0, \frac{1}{n}) : n \in Z\} = \phi$$

ولكن $\mathcal{G}$ تحقق F. I. P لأن تقاطع عدد منتهى منها هو مجموعة غير خالية حيث :

$$(-\infty, \frac{1}{n_1}] \cap (-\infty, \frac{1}{n_2}] \cap \dots \cap (-\infty, \frac{1}{n_m}] = (-\infty, r)$$

$$r = \min \left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_m} \right\} \quad \text{حيث}$$

نظرية (١٤ . ١ . ٧) :

في أي فضاء توبولوجي (X, τ) الخواص الآتية متكافئة :

(١) فضاء محكم .

(٢) كل عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P. لها تقاطع غير خالي.

البرهان :

$$(١) \Leftrightarrow (٢) :$$

بفرض أن X فضاء محكم ، $\mathcal{G} = \{F_i : i \in N\}$ عائلة من المجموعات المغلقة في

$$X \text{ تحقق F.I.P. ولنفرض جـداً أن : } \bigcap_i \{F_i : i \in N\} = \phi$$

من ذلك نحصل على أن العائلة $\{F_i^c : i \in N\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X

وبالتالي يوجد غطاء جزئي منتهى $\{F_{ij}^c : i \in N, j = 1, 2, \dots, n\}$

$$\text{للمجموعة } X \text{ لأن } X \text{ فضاء محكم. إذاً } X = \bigcup_{j=1}^n F_{ij}^c = X - \left(\bigcap_{j=1}^n F_{ij} \right)$$

$$\text{وهذا يؤدي إلى أن } \bigcap_{j=1}^n F_{ij} = F_{i1} \cap F_{i2} \cap \dots \cap F_{in} = \phi$$

مما يؤدي إلى تناقض مع الفرض أن $\mathcal{G}$ تحقق F.I.P. ومن ذلك نحصل على :

$$\bigcap_i \{F_i : i \in I\} \neq \phi$$

$$(٢) \Leftrightarrow (١) :$$

بفرض أن أي عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P. لها تقاطع غير

خالي. ولنفرض جـداً أن X فضاء غير محكم . وبالتالي يوجد غطاء مفتوح

$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ للمجموعة X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى وليكن $\{G_{ij}\}_{j=1}^n$ أي أن $X \neq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$.

ومن ثم فإن $X - (\bigcup_{j=1}^n G_{ij}) = \bigcap_{j=1}^n (X - G_{ij}) \neq \emptyset ; \forall n \in \mathbb{N}$

ولكن $\{G_i^c : G_i \in \mathcal{G}\}$ عائلة من المجموعات المغلقة تحقق F . I . P . وطبقاً

للفرض (٢) فإن $\bigcap_i \{G_i^c : G_i \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset$

أي أن $X - \bigcup_i \{G_i : G_i \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset$

وهذا يؤدي إلى تعارض مع كون أن $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X ومن ثم فإن X فضاء محكم .

ملاحظات (٧ . ١ . ١٥) :

(١) يمكن إثبات (٢) $\Leftarrow$ (١) في النظرية السابقة بطريقة مباشرة وذلك كما يلي:
بفرض أن $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X أي أن

$$X = \bigcup_i G_i \quad \text{ومن ذلك نستنتج أن : } \phi = (\bigcup_i G_i)^c = \bigcap_i G_i^c$$

وبالتالي فإن $\{G_i^c : i \in I\}$ عائلة من المجموعات المغلقة لها تقاطع خالي ومن (٢) فإنه

يوجد عائلة جزئية منتهية $\{G_{ij}^c\}_{i=1}^n$ لا تحقق F . I . P . أي $\bigcap_{j=1}^n G_{ij}^c = \phi$ ومن

ثم فإن $X = \bigcup_{j=1}^n G_{ij} = (\bigcap_{j=1}^n G_{ij}^c)^c$ وهذا يعني أنه يوجد غطاء جزئي منتهى

$\{G_{ij}\}_{j=1}^n$ للمجموعة X . أي أن X فضاء محكم .

(٢) يمكن إعادة كتابة النظرية السابقة بالصورة التالية :

الخواص الآتية متكافئة :

- (i) X فضاء محكم .
- (ii) كل عائلة من المجموعات الجزئية المغلقة $\{F_i\}$ في X تحقق $\bigcap_i F_i = \phi$ تحتوي على عائلة جزئية منتهية $\{F_{ij}\}_{j=1}^n$ تحقق $\bigcap_{j=1}^n F_{ij} = \phi$.

بند (٢) : المجموعات الجزئية المحكمة : (Compact Subsets)

تعريف (١ . ٢ . ٧) :

المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) تكون محكمة إذا كان كل غطاء مفتوح للمجموعة A يحتوي على غطاء جزئي منتهى .
أي أن

$$A \subseteq X \text{ is compact} \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i, \quad G_i \in \tau, \exists \{G_{ij}\}_{j=1}^n ;$$

$$\text{such that } A \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{ij}$$

نظرية (٢ . ٢ . ٧) :

كل مجموعة منتهية في أي فضاء توبولوجي تكون محكمة .

نظرية (٣ . ٢ . ٧) : (هاين - بورل Heine - Borel)

كل فترة محدودة ومغلقة في R تكون محكمة .

البرهان :

نفرض أن $\mathcal{G} = \{(a_i, b_i) : i \in N\}$ ، $I_1 = [c, d]$

غطاء للفترة I_1 عناصره عائلة الفترات المفتوحة . ونفرض جـداً أن $\mathcal{G}$ لا تحتوي على

غطاء جزئي منتهى للفترة I_1 . نقسم الفترة I بالنقطة $\frac{c+d}{2}$

من ذلك نحصل على الفترتين $I_2' = [c, \frac{c+d}{2}]$; $I_2'' = [\frac{c+d}{2}, d]$

نجد أن واحدة من الفترتين على الأقل لا تُغطى بعدد منتهى من الفترات المفتوحة من $\mathcal{G}$ ولتكن مثلاً $I_2 = [c_2, d_2]$ نقسم الفترة I_2 نحصل من ذلك على الفترتين

$$I_3' = [c_2, \frac{c_2 + d_2}{2}] ; I_3'' = [\frac{c_2 + d_2}{2}, d_2]$$

واحدة من هذه الفترات لا تُغطى بعدد منتهى من الفترات المفتوحة من $\mathcal{G}$ ولتكن مثلاً I_3 . نستمر في ذلك لنحصل على متتابعة من الفترات المغلقة المتداخلة :

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \quad (*)$$

بحيث أن كل فترة I_n لا تغطي بعدد منتهى من عناصر $\mathcal{G}$ وأيضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n .

ونعلم من التحليل الرياضي إنه إذا كانت لدينا متتابعة مرقمة من الفترات المغلقة

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset \quad : \text{فإنه } (*)$$

أي توجد نقطة p على الأقل في كل فترة I_n وعلى هذا فإن $p \in I_1$ وحيث أن $\mathcal{G}$ غطاء للفترة I_1 فإنه توجد فترة مفتوحة (a_{i_0}, b_{i_0}) بحيث أن $a_{i_0} < p < b_{i_0}$ ولكن $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ ونستنتج من ذلك أن

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |I_{n_0}| < \min(p - a_{i_0}, b_{i_0} - p) \\ \text{i.e. , } I_{n_0} \subseteq (a_{i_0}, b_{i_0}) \in \mathcal{G}$$

أي أن $\mathcal{G}$ تحتوي على عائلة جزئية تغطي I_{n_0} وهذا تعارض وعلى هذا فإن $\mathcal{G}$ تحتوي على عائلة جزئية منتهية تغطي I_1 . ومن ثم فإن الفترة $I_1 = [c, d]$ محكمة .

ملاحظة (٧ . ٢ . ٤) :

من نظرية هاين-بورل نستنتج أن كل غطاء مفتوح لأي فترة مغلقة ومحدودة يحتوي على غطاء جزئي منتهى والأمثلة الآتية توضح أن كلاً من شرطي الإغلاق والمحدودية هام .

مثال (٥ . ٢ . ٧) :

إذا كانت $A = (0,1)$ فإن A ليست محكمة ، لأن

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A . $A \subset \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \cup \dots$

ولكن $\mathcal{G}$ لا تحتوي على غطاء جزئي منتهى . من أجل ذلك نفرض أن :

$$\mathcal{G}^* = \{ (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m) \}$$

عائلة جزئية منتهية من $\mathcal{G}$. إذا كانت $0 < \varepsilon = \min(a_1, a_2, \dots, a_m)$ فإن

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_m, b_m) \subset (\varepsilon, 1)$$

ولكن $(0, \varepsilon] \cap (\varepsilon, 1) = \emptyset$. وبالتالي فإن $\mathcal{G}^*$ لا تغطي A وبذلك تكون A غير محكمة.

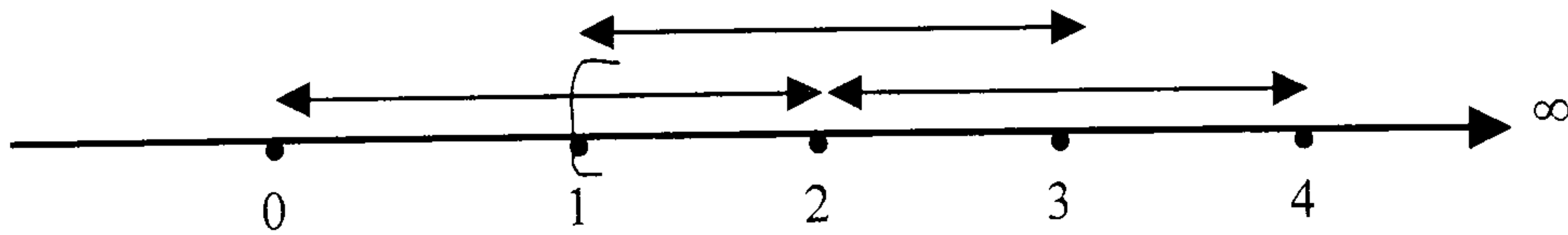
ولتوضيح ذلك إذا تم استبعاد فترة واحدة ولتكن $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ فإن العدد $\frac{1}{3}$ مثلاً لا يوجد له غطاء .

مثال (٦ . ٢ . ٧) :

المجموعة $A = [1, \infty)$ غير محكمة لأن

$$\mathcal{G} = \{ (0,2), (1,3), (2,4), \dots \}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى.



نظرية (٧ . ٢ . ٧) :

كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم تكون محكمة.

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء محكم ، F مجموعة جزئية مغلقة في X والمطلوب إثبات أن F محكمة ولذلك نفرض أن $\mathcal{G} = \{G_i\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F أي أن $F \subseteq \bigcup_i G_i$. عندئذ تكون F^c مجموعة مفتوحة حيث :

$$X = F \cup F^c \subseteq \left\{ \bigcup_i G_i \right\} \cup \{F^c\}$$

وبالتالي فإن $\left\{ \bigcup_i G_i \right\} \cup \{F^c\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X . ومن ذلك ينتج أنه يوجد غطاء جزئي منتهى للمجموعة X هو $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m}\} \cup \{F^c\}$ لأن X فضاء محكم . لكن

$$F \cap F^c = \phi, F \cup F^c = X$$

وهذا يعني أن $F^c \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$. أي أن F مجموعة محكمة .
نظرية (٧ . ٢ . ٨) :

الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) من الفضاء (X, τ) يكون محكماً إذا وفقط إذا كانت Y محكمة في الفضاء (X, τ) .

البرهان :

أولاً : نفرض أن (Y, τ_Y) هو فضاء جزئي من الفضاء (X, τ) بحيث أن Y محكمة في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) .

المطلوب إثبات أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) ولذلك نفرض

$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y (حيث $G_i \in \tau$ لكل $i \in I$)

بمجموعات مفتوحة من X أي أن $Y \subseteq \bigcup_i G_i$

ومن ذلك نجد أن $Y \subseteq Y \cap \left(\bigcup_i G_i \right) = \bigcup_i (Y \cap G_i) = \bigcup_i H_i$

حيث $H_i = Y \cap G_i \in \tau_Y$ وبالتالي فإن العائلة $\{H_i : i \in I\}$ غطاء للمجموعة Y بمجموعات مفتوحة من Y ، ومن ثم فإنه توجد عائلة جزئية منتهية

$$Y \subseteq H_{i1} \cup H_{i2} \cup \dots \cup H_{in} \quad \text{بحيث أن: } \{H_{ij}\}_{j=1}^n$$

$$= (Y \cap G_{i1}) \cup (Y \cap G_{i2}) \cup \dots \cup (Y \cap G_{in})$$

$$\subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots \cup G_{in}$$

وهذا يعني أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) .

ثانياً: العكس نفرض أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) ، $\mathcal{G} = \{G_i\}$ غطاء

للمجموعة Y بمجموعات مفتوحة من Y . أي أن $G_i \in \tau_Y$ ؛ $Y \subseteq \bigcup_i G_i$.

ومن تعريف الفضاء الجزئي نجد أنه لكل $i \in I$ توجد $H_i \in \tau$ بحيث أن

$$G_i = Y \cap H_i \quad \text{أي أن}$$

$$Y \subseteq \bigcup_i G_i = \bigcup_i (Y \cap H_i) = Y \cap \left(\bigcup_i H_i \right) \subseteq \bigcup_i H_i, \quad H_i \in \tau$$

أي أن العائلة $\{H_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y بمجموعات جزئية مفتوحة من X . وحيث أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) فإنه توجد عائلة

جزئية منتهية $\{H_{ij}\}_{j=1}^n$ بحيث أن $Y \subseteq \bigcup_{j=1}^n H_{ij}$. وهذا يؤدي إلى أن

$$Y \subseteq Y \cap \left(\bigcup_{j=1}^n H_{ij} \right) = \bigcup_{j=1}^n (Y \cap H_{ij}) = \bigcup_{j=1}^n G_{ij}$$

أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهى للمجموعة Y ومن ثم فإن Y محكمة في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) .

مثال (٧.٢.٩):

كل مجموعة جزئية من الفضاء الغير منفصل (X, I) تكون محكمة.

مثال (٧.٢.١٠):

كل مجموعة جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X, C) تكون محكمة.
نظرية (٧.٢.١١) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي وكانت $F \subseteq X$. إذا كانت A مجموعة محكمة ، F مجموعة مغلقة فإن $A \cap F$ تكون مجموعة محكمة.
البرهان :

بفرض أن $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $A \cap F$ أي أن $A \cap F \subseteq \bigcup_i G_i$. ومن ثم فإن $A \subseteq (\bigcup_i G_i) \cup F^c$. وحيث أن F مجموعة مغلقة في X فإن F^c مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن $\mathcal{G}^* = \{G_i\} \cup \{F^c\}$ غطاء مفتوح للمجموعة A ولكن A محكمة ، إذاً يوجد غطاء جزئي منتهى $\{G_{ij}\}_{j=1}^n \cup \{F^c\}$ للمجموعة A أي أن $A \subseteq (\bigcup_{j=1}^n G_{ij}) \cup \{F^c\}$. ومن ثم فإن $A \cap F \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{ij}$. وهذا يؤدي إلى أن $A \cap F$ مجموعة محكمة.

بند (٣) : الأحكام ومسلمات الانفصال :

(Compactness and separation Axioms)

من خلال دراستنا لمسلمات الانفصال وجدنا أن :

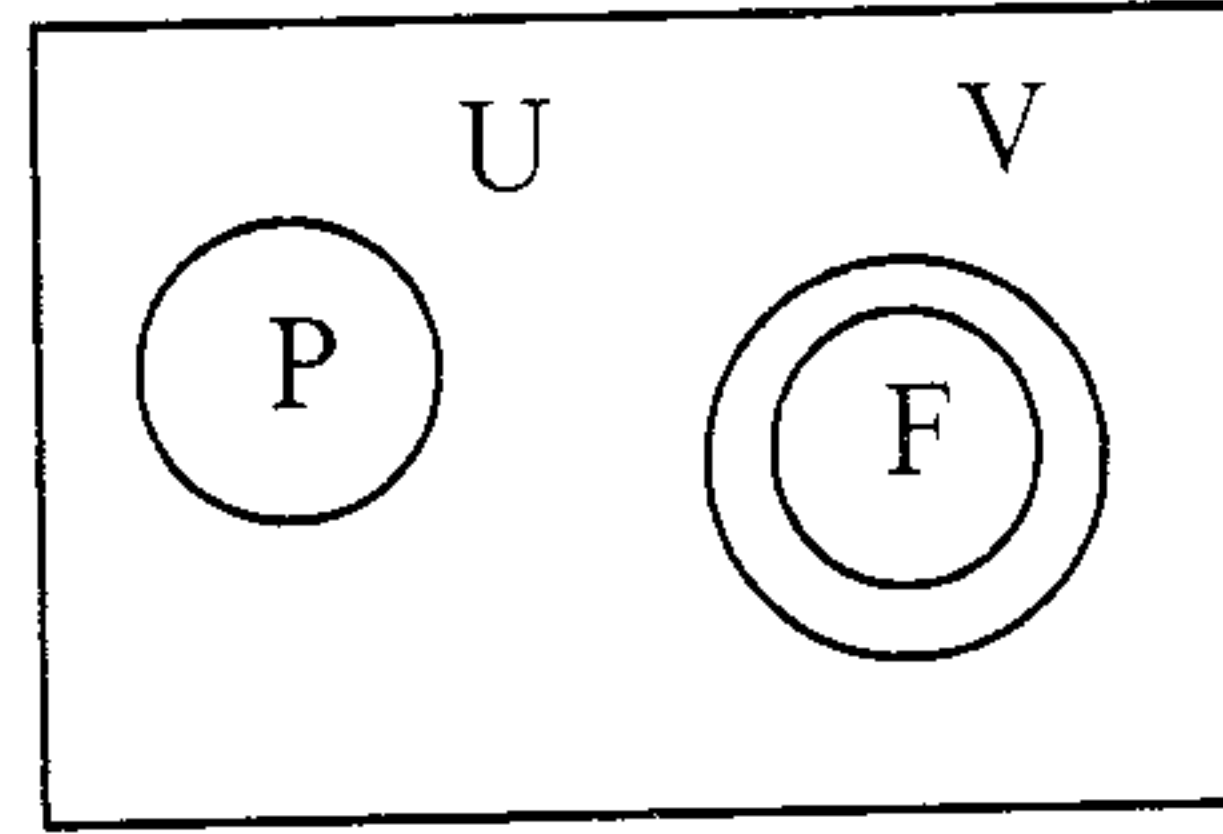
$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

ولكن العكس ليس صحيح دائماً . من خلال دراسة العلاقة بين الأحكام ومسلمات الانفصال سوف نعطي بعض النظريات التي تجعل عكس العلاقات السابقة يكون صحيح .

نظرية (٧.٣.١) :

بفرض أن (X, τ) فضاء T_2 ، $F \subseteq X$ مجموعة جزئية من X ومحكمة بحيث أنه لأي نقطة p ، $p \notin F$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U, V في X

بحيث تكون $p \in V, F \subseteq U, U \cap V = \phi$



البرهان :

نفرض أن $x \in F$ وحيث أن $p \notin F$ فإن $x \neq p$. لكن (X, τ) فضاء- T_2 . إذاً توجد $U_x, V_x \in \tau$ بحيث أن

$$x \in U_x, p \in V_x \text{ and } U_x \cap V_x = \phi$$

ومن ثم فإن العائلة $\{U_x : x \in F\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F وبما أن F مجموعة محكمة في X فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$

$$F \text{ تغطي أي أن } F \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} = U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$$

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \dots \cap V_{x_n} = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \quad \text{بوضع}$$

نستنتج من ذلك أن $p \in V; F \subseteq U; U, V \in \tau$

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) \cap (V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}) \\ &= (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_n} \cap V_{x_n}) = \phi \cup \dots \cup \phi = \phi \end{aligned}$$

نتيجة (٢ . ٣ . ٧) :

إذا كان (X, τ) فضاء- T_2 ، F مجموعة محكمة في X فإن F تكون مغلقة.

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء- T_2 ، F مجموعة محكمة في X . المطلوب إثبات

أن F مغلقة وهذا يكافئ أن F^c مجموعة مفتوحة . لذلك نفرض أن $p \notin F^c$ وهذا يعنى أن $p \in F$. طبقاً للنظرية (٧ . ٣ . ١) توجد $U, V \in \tau$ بحيث أن $p \in U, F \subseteq V, U \cap V = \phi$. وحيث أن $U \cap V = \phi$ نجد أن $U \cap F = \phi$ ومنها $p \in U \subseteq F^c$. وهذا يؤدي إلى أن $F^c = \cup \{U : p \in F^c\}$ ، وهي مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد لمجموعات مفتوحة . ونستنتج من ذلك أن كل مجموعة جزئية محكمة في الفضاء T_2 هي مغلقة .

نتيجة (٧ . ٣ . ٣) :

إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة من الفضاء T_2 فإنه توجد مجموعة مفتوحة U لكل $p \notin A$ بحيث يكون $p \in U \subseteq F^c$.

البرهان : واضح من نتيجة (٧ . ٣ . ٢)

نظرية (٧ . ٣ . ٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء T_2 ومحكماً فإنه يكون فضاء طبيعي (Normal)

البرهان :

نفرض أن (X, τ) فضاء T_2 ومحكماً . بفرض أن F_1, F_2 مجموعتان مغلقتان بحيث أن $F_1 \cap F_2 = \phi$. طبقاً لنتيجة (٧ . ٣ . ٢) فإن F_1, F_2 مجموعتان محكمتان ، ولكل $p \in F_2$ فإن $p \notin F_1$. وحيث أن X فضاء T_2 ، F_2 محكمة فإنه طبقاً لنتيجة (٧ . ٣ . ٣) توجد مجموعتان مفتوحتان U_p, V_p بحيث يكون $F_1 \subseteq U_p ; p \in V_p ; U_p \cap V_p = \phi$

وعلى هذا فإن العائلة $\{V_p : p \in F_2\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F_2 وحيث

أن F_2 محكمة، فإنه توجد $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}$ بحيث أن

$$F_2 \subseteq V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \dots \cup V_{p_n}$$

$$U = U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \dots \cap U_{p_n}$$

بوضع

وعليه فإن $F_2 \subseteq V ; F_1 \subset U ; U, V \in \tau$

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_{p_1} \cap \dots \cap U_{p_n}) \cap (V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}) \\ &= (U_{p_1} \cap V_{p_1}) \cup \dots \cup (U_{p_n} \cap V_{p_n}) = \phi \end{aligned}$$

أي أن X فضاء طبيعي.

نتيجة (٥ . ٣ . ٧) :

إذا كان (X, τ) فضاء- T_2 ومحكماً فإنه يكون فضاء منتظم.

البرهان :

حيث أن X فضاء- T_2 . محكم فإنه طبقاً لنظرية (٤ . ٣ . ٧) يكون X فضاء طبيعي. لكن X فضاء- T_1 (لأنه فضاء- T_2) وبالتالي فإن X فضاء- T_4 ومن ذلك نستنتج أن X فضاء- T_3 ومن ثم فإن X فضاء منتظم.

نظرية (٦ . ٣ . ٧) :

إذا كانت F مجموعة جزئية محكمة من الفضاء المنتظم (X, τ) ، U مجموعة مفتوحة تحتوي F (أي أن $F \subseteq U$) فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث يكون $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ أي أن U تحتوي على جوار مغلق للمجموعة F .

البرهان :

حيث أن U مجموعة مفتوحة ، $F \subseteq U$ فإن U جوار لكل نقطة $p \in F$. بما أن X فضاء منتظم فإنه توجد مجموعة مفتوحة V_p تحقق

$$p \in V_p \subseteq \bar{V}_p \subseteq U$$

وعليه تكون العائلة $V = \{V_p : p \in F\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F . لكن F حكمة وبالتالي توجد عائلة جزئية منتهية $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_n} \in V$ بحيث أن

$$F \subseteq V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \dots \cup V_{p_n} = V$$

وعلى ذلك فإن

$$\bar{V} = \bar{V}_{p_1} \cup \bar{V}_{p_2} \cup \dots \cup \bar{V}_{p_n},$$

$$F \subseteq V \subset \bar{V} \subseteq U$$

نتيجة (٧ . ٣ . ٧) :

كل فضاء محكم ومنتظم هو فضاء طبيعي . أي أن

$$\text{Compact} + \text{regular} \Rightarrow \text{Normal}$$

البرهان :

بفرض أن F_1, F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتان في الفضاء التوبولوجي

$$(X, \tau) \text{ المحكم والمنتظم . حيث أن } F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow F_2 \subseteq F_1^c$$

أي أن F_1^c مجموعة مفتوحة تحتوي F_2 . لكن F_2 مغلقة في الفضاء المحكم .

فإنه طبقاً لنظرية (٧ . ٢ . ٦) تكون F_2 محكمة . وبموجب أن X فضاء منتظم ،

F_2 مجموعة محكمة محتواه في F_1^c فإنه طبقاً لنظرية (٧ . ٣ . ٦) توجد مجموعة

مفتوحة V بحيث أن $F_2 \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq F_1^c$. وبالتالي يكون لدينا :

$$F_2 \subset V, F_1 \subset \bar{V}^c = U \in \tau, U \cap V = \bar{V}^c \cap V = \emptyset$$

وبذلك يكون (X, τ) فضاء طبيعي.

بند (٤) : الأحكام والاتصال Compactness and Continuity

نظرية (٧ . ٤ . ١) :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء

التوبولوجي Y وكان X فضاء محكم فإن $f(X)$ تكون أيضاً محكماً .

البرهان :

نفرض أن $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $f(X)$ ، أي أن :

$$f(X) \subseteq \bigcup_i G_i . \text{ ومن ثم فإن } X = \bigcup_i f^{-1}(G_i) \text{ وحيث أن } f \text{ دالة}$$

متصلة فإن العائلة $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X . لكن X فضاء محكم ومن ثم فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{f^{-1}(G_{ij})\}_{j=1}^n$ بحيث تكون

$$X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(G_{ij})$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$f(X) = f\left(\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(G_{ij})\right) = \left(\bigcup_{j=1}^n ff^{-1}(G_{ij})\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (G_{ij})$$

وعليه فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{G_{ij}\}_{j=1}^n$ من $\mathcal{G}$ تغطي $f(X)$ أي أن $f(X)$ محكمة.

نتيجة (٧ . ٤ . ٢) :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة وشاملة من الفضاء التوبولوجي Y وإذا كان X فضاء محكم فإن Y فضاء محكم أيضاً .

نظرية (٧ . ٤ . ٣) :

إذا كانت $f: X \rightarrow Y$ دالة أحادية من الفضاء التوبولوجي X إلى فضاء هاوسدورف Y فإن $X \cong f(X)$ أي أن $f(X)$ ، متكافئان توبولوجياً .
البرهان :

واضح أن الدالة $f: X \rightarrow f(X)$ دالة شاملة . وحيث أن f متصلة وأحادية فإن $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ موجودة . سنحاول الآن إثبات أن f^{-1} دالة متصلة ، لذلك نفرض أن F مجموعة مغلقة في X وبالتالي حسب نظرية (٧ . ٤ . ١) فإن F مجموعة محكمة في الفضاء الجزئي $f(X)$ من فضاء هاوسدورف Y فإن $f(X)$ يكون فضاء هاوسدورف ومن ثم فإن $f(F)$ مجموعة مغلقة حسب نتيجة (٧ . ٣ . ٢) .

لكن $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ وبالتالي فإن الصورة العكسية للمجموعة المغلقة

F وفق الدالة العكسية f^{-1} مجموعة مغلقة، وهذا يؤدي إلى أن $f: X \rightarrow f(X)$ دالة توبولوجية . أي أن $X \cong f(X)$.

نتيجة (٧ . ٤ . ٥) :

خاصية أن يكون الفضاء محكم هي خاصية توبولوجية .

نظرية (٧ . ٤ . ٦) :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فإن الدالة المتصلة $f: X \rightarrow Y$ تكون مغلقة .

البرهان :

نفرض أن F مجموعة مغلقة في X . وحيث أن X فضاء محكم فانه حسب نظرية (٧ . ٤ . ١) تكون $f(F)$ مجموعة محكمة . لكن Y فضاء هاوسدورف ينتج من ذلك أن $f(F)$ مجموعة مغلقة حسب نتيجة (٧ . ٣ . ٢) . ومن ثم فإن صورة كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة ، أي أن f دالة مغلقة .
النتيجة التالية تلعب دوراً مهماً في الهندسة .

نتيجة (٧ . ٤ . ٧) :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فإن كل دالة تناظر احادي ومتصلة $f: X \rightarrow Y$ تكون هومومورفيزم .

البرهان :

حيث أن f تناظر أحادي ومتصلة فإننا سوف نبرهن فقط على أن $f^{-1}: Y \rightarrow X$ متصلة وهذا يكافئ إثبات أن f دالة مفتوحة . لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في X فإن G^c مجموعة مغلقة في X . وبالتالي فإن $f(G^c)$ مجموعة مغلقة لكن $f(G^c) = (f(G))^c$. لأن f دالة تناظر أحادي ولذلك فإن $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y .

المثال التالي يوضح أن النظرية السابقة ليست صحيحة في الصورة العامة.

مثال (٧ . ٤ . ٨) :

بفرض أن $f: X = [0,1) \rightarrow R$ دالة معرفة بالصورة :

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

نلاحظ أن f دالة تناظر أحادي من X إلى دائرة الوحدة S وهي دالة متصلة.

لكن $S \not\equiv [0,1)$ حيث $[0,1)$ ليست محكمة.

بند (٥) : بعض أنواع الأحكام :

• الفضاء المحكم محلياً

• الفضاء المحكم تتابعياً

• الفضاء المحكم عدياً

تعريف (٧ . ٥ . ١) : الفضاءات المحكمة محلياً (Locally compact spaces)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) محكم محلياً إذا وجد جوار محكم لكل $p \in X$.

يتضح من هذا التعريف أن كل فضاء محكم يكون فضاء محكم محلياً أي أن :

$$\text{Compact} \Rightarrow \text{Locally compact}$$

لأنه إذا كان X محكم فإن لكل $p \in X$ يوجد جوار محكم وهو المجموعة X .

ولكن العكس غير صحيح والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٧ . ٥ . ٢) :

الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$ محكم محلياً لأنه لكل $p \in R$ يوجد الجوار

$[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ وهذا الجوار مغلق ومحدد وبالتالي طبقاً لنظرية هاين - بورل

فإن جوار p محكم وعلى ذلك فإن R محكم محلياً . ونعلم أن R ليس فضاء

محكم لأن مجموعة الفترات المفتوحة :

$$G = \{ \dots, (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), \dots \}$$

$$= \{ (n, n+2) : n \in \mathbb{N} \}$$

غطاء مفتوح للمجموعة R ولكنها لا تحتوي على غطاء جزئى منتهى.

مثال (٧ . ٥ . ٣) :

الفضاء المنفصل (X, D) محكم محلياً لأن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$ جوار محكماً للنقطة p لأن $\{p\}$ مجموعة محكمة (لأنها منتهية).

ملاحظة (٧ . ٥ . ٤) :

الفضاء (X, I) محكم محلياً لأن X فضاء محكم .

ملاحظة (٧ . ٥ . ٥) :

إذا كان الفضاء (X, τ) محكم محلياً وكانت A مجموعة جزئية مغلقة في X فإن A تكون محكمة محلياً.

البرهان :

بفرض أن A مجموعة مغلقة في الفضاء المحكم محلياً (X, τ) ، $p \in A$.
ومن هذا يتضح أنه يوجد جوار محكم H للنقطة p . وحيث أن A مجموعة مغلقة في X فإنه طبقاً لنظرية (٧ . ٢ . ١١) تكون المجموعة $F = A \cap H$ مجموعة محكمة . لكن $p \in H^0$ ومن ثم فإن $p \in H^0 \cap A \subseteq F$ حيث $H^0 \cap A \in \tau_A$ وهذا يؤدي إلى أن p لها جوار محكم هو $F = A \cap H$ أي أن A مجموعة محكمة محلياً.

نظرية (٧ . ٥ . ٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء T_2 فإن X يكون فضاء محكم محلياً إذا وفقط إذا كان لكل $p \in X$ يوجد جوار مفتوح V بحيث أن V تكون مجموعة محكمة.

البرهان :

حيث أن (X, τ) فضاء محكم محلياً فإن لكل $p \in X$ يوجد جوار N

محكم ، ومن ثم فإن $V = N^o$ جوار مفتوح للنقطة p .

وحيث أن N مجموعة محكمة في الفضاء T_2 فإن N مجموعة مغلقة وبالتالي فإن:

$$N^o \subseteq N \Rightarrow \overline{N^o} \subseteq \overline{N} = N$$

لكن $\overline{N^o} = N^o$ مجموعة مغلقة وجزئية من مجموعة محكمة، إذاً V مجموعة محكمة.

ومن جانب آخر ، إذا كان X فضاء T_2 ولكل $p \in X$ يوجد جوار مفتوح

V بحيث تكون V جوار محكم للنقطة p وعلى هذا فإن X فضاء محكم محلياً.

نظرية (٧.٥.٧) :

إذا كان (X, τ) فضاء محكم محلياً وكانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة

ومفتوحة فإن $f(X)$ مجموعة محكمة محلياً.

البرهان :

نفرض أن $y \in f(X)$ ، إذاً توجد $x \in X$ بحيث أن $y = f(x)$. بما أن

X فضاء محكم محلياً إذاً يوجد جوار محكم N للنقطة x . لكن حيث أن الدالة

f متصلة فإن $f(N)$ محكمة من نظرية (٧.٤.١) . وحيث أن f دالة مفتوحة

فإن $f(N^o)$ مجموعة مفتوحة تحتوي y لأن $x \in N^o$ ، ومن ثم فإن

$$y = f(x) \in f(N^o) \subseteq f(N) = U$$

وبالتالي فإن U جوار محكم للنقطة y ، أي أن $f(X)$ يكون فضاء محكم محلياً.

نتيجة (٧.٥.٨) :

خاصية أن يكون الفضاء _____ محكم محلياً هي خاصية توبولوجية.

تعريف (٧.٥.٩) : الفضاءات المحكمة تتابعياً .

الفضاء (X, τ) تكون محكمة تتابعياً إذا كانت كل متتابعة في X تحتوي على

متتابعة جزئية متقاربة.

مثال (٧ . ٥ . ١٠) :

كل مجموعة منتهية في الفضاء (X, τ) تكون محكمة تتابعياً.

الحل :

بفرض أن A مجموعة منتهية في الفضاء X ، $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ متتابعة في A . حيث أن A منتهية فإنه على الأقل عنصر من A ليكن a_0 يجب أن يظهر بعدد لا نهائي من المرات في المتتابعة ، ومن ثم فإنه $\langle a_0, a_0, \dots \rangle$ متتابعة جزئية من $\langle a_n \rangle$ وهي متقاربة في A إلى a_0 .

مثال (٧ . ٥ . ١١) :

كل فترة مفتوحة في R ليست محكمة تتابعياً.

الحل :

بفرض أن $A = (0,1)$ فترة مفتوحة في الفضاء $(R, \mathcal{U})$ نعتبر المتتابعة

$$\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$$

في المجموعة A . نلاحظ أن $\langle a_n \rangle$ تتقارب إلى 0 وبالتالي كل متتابعة جزئية منها تتقارب إلى 0 ولكن $0 \notin A$. إذاً A ليست محكمة تتابعياً .

مثال (٧ . ٥ . ١٢) :

بفرض أن $\tau = \{ \phi, U \subseteq X : U^c \text{ للعد} \}$ بين أن كل مجموعة جزئية غير منتهية من X لا تكون محكمة تتابعياً .

الحل :

المتتابعة $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ تتقارب إلى $b \in X$ إذا وإذا فقط كانت المتتابعة على الصورة $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, \dots \rangle$ أي أن المجموعة A المكونة من حدود المتتابعة $\langle a_n \rangle$ التي تختلف عناصرها عن b منتهية. المجموعة A تكون قابله للعد وبالتالي فإن A^c مجموعة مفتوحة تحتوي b . إذا كانت $a_n \rightarrow b$ فإن A^c تحتوي

على حدود المتابعة فيما عدا عدد منتهى وبالتالي فإن A منتهية.

إذا كانت A غير منتهية فإنه توجد متتابعة $\langle b_n \rangle$ في A عناصرها مختلفة ، وبالتالي فإن $\langle b_n \rangle$ لا تحتوي على أي متتابعة جزئية متقاربة.

تعريف (٧.٥.١٣) : الفضاءات المحكمة عددياً (Countable compact)

الفضاء (X, τ) يسمى محكم عددياً إذا كان كل غطاء مفتوح قابل للعد للمجموعة X يحتوي على غطاء جزئي منتهى.

نظرية (٧.٥.١٤) :

في أي فضاء توبولوجي (X, τ) تكون الشروط التالية متكافئة :

(١) X فضاء محكم عددياً .

(٢) أي عائلة من المجموعات الجزئية القابلة للعد والمغلقة في X تحقق F. I. P لها تقاطع غير خالي.

(٣) كل مجموعة جزئية غير منتهية من X لها نقطة تراكم.

(٤) كل متتابعة في X لها نقطة لاصقة.

البرهان :

$$(١) \Rightarrow (٢)$$

برهان هذا الجزء يشبه نظرية (٧.١.١٤)

$$(٢) \Leftarrow (٣)$$

لنفرض أن A مجموعة جزئية غير منتهية ولتكن $S_n = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من عناصر A مختلفة مثني مثني .

ونعتبر المجموعات $S_m = \{a_i : i \geq m\}$ فإن عائلة المجموعات $\{S_m\}$ قابلة للعد وتحقق F. I. P. وبالتالي فإن العائلة $\{S_m\}$ مكونة من مجموعات مغلقة وتحقق

F. I. P. ومن ثم فإن $\bigcap S_m \neq \emptyset$.

بفرض أن $x \in \bigcap S_m$ نجد أن x تكون نقطة تراكم للمجموعة A لأن أي مجموعة مفتوحة تحوي x تتقاطع مع أي عنصر من العائلة $\{S_m\}$.

$$(3) \Leftarrow (4)$$

بفرض أن $\{x_n : n \in N\}$ متتابعة من عناصر X وبفرض أن A تتكون من عناصر هذه المتتابعة أي أن $A = \{x_n : n \in N\}$. إذا كانت A غير منتهية فإن A لها نقطة تراكم وبالتالي فإن هذه النقطة تكون نقطة لاصقة للمجموعة A . إذا كانت A منتهية فإن A يجب أن تكون على الصورة :

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

وبالتالي فإنه يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $x_n = x$ لكل $n \in N$ من ذلك نجد أن x نقطة لاصقة للمتتابعة.

ملاحظة (٧.٥.١٥) :

من النظرية السابقة يمكن إعادة تعريف الفضاء المحكم عدياً أو المجموعة المحكمة عدياً بالصورة التالية :

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي X تكون محكمة عدياً إذا كانت كل مجموعة B غير منتهية وجزئية من A لها نقطة تراكم في A .

نظرية (٧.٥.١٦) : (بولزانو — فيراستراش) Bolzano-Weierstrass

كل مجموعة محددة وغير منتهية جزئية من R لها نقطة تراكم .

مثال (٧.٥.١٧) :

كل فترة محدودة ومغلقة $A = [a, b]$ من R محكمة عدياً.

الحل :

إذا كانت B مجموعة جزئية غير منتهية من A فإن A تكون محدودة . طبقاً

لنظرية بولزانو — فيراستراش ، فإن B لها نقطة تراكم p وحيث أن A مغلقة فإن $p \in A$ ، أي أن A محكمة عدياً .

مثال (٧.٥.١٨) :

الفترة المفتوحة $A = (0,1)$ ليست محكمة عدياً .

الحل :

نعتبر المجموعة $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ ، الجزئية من A ، فإن B لا نهائية،
 B لها على الأكثر نقطة تراكم 0 حيث $0 \notin A$.

ملاحظة (٧.٥.١٩) :

العلاقة بين الفضاءات المحكمة ، المحكمة تنابعياً والمحكمة عدياً تعطي بالصورة :

محكم تنابعياً $\Leftarrow$ محكم عدياً $\Rightarrow$ محكم

$\text{Compact} \Rightarrow \text{Countable Compact} \Leftarrow \text{Sequentially Compact}$

نظرية (٧.٥.٢٠) :

إذا كان X فضاء توبولوجي فإن :

(١) إذا كان X فضاء محكم فإن X محكم عدياً

(٢) إذا كان X فضاء محكم تنابعياً فإن X محكم عدياً

المثال التالي يوضح أن عكس النظرية السابقة غير صحيح .

مثال (٧.٥.٢١) :

بفرض أن N مجموعة الأعداد الطبيعية ، ونفرض

$$B = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots\}$$

عائلة من المجموعات الجزئية من N . وبفرض أن τ هو التوبولوجي المولد بواسطة B .

لتكن A مجموعة غير خالية من N ، $n_0 \in A$ فإذا كان n_0 عدد فردي فإن $n_0 + 1$ يكون نقطة تراكم للمجموعة A وإذا كان n_0 عدد زوجي فإن $n_0 - 1$ يكون نقطة تراكم للمجموعة A وفي كلتا الحالتين A لها نقطة تراكم .

ومن ثم فإن (N, τ) فضاء محكم عددياً . ومن جانب آخر (N, τ) ليس فضاء محكم لأن $G = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots\}$ غطاء مفتوح للمجموعة N ولا يحتوي على غطاء جزئي منتهى. أيضاً (N, τ) فضاء غير محكم تابعيةً لأن المتابعة $\{1,2,3,\dots\}$ لا تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة.

مثال (٧ . ٥ . ٢٢) :

- (١) بين أن الصورة المتصلة للمجموعة المحكمة عددياً لا تكون محكمة عددياً .
 - (٢) بين أن كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم عددياً تكون محكمة عددياً .
- الحل :

(١) بفرض أن $X = (N, \tau)$ هو الفضاء التوبولوجي المعطى في المثال السابق وبالتالي فإن (N, τ) محكم عددياً . بفرض أن $Y = (N, D)$ حيث D هو التوبولوجي المنفصل على N وبالتالي فإن Y فضاء غير محكم عددياً . ومن جانب آخر الدالة $f: X \rightarrow Y$ المعرفة بالصورة : $f(n) = 2n; n \in N$ دالة متصلة .

(٢) بفرض أن X فضاء محكم عددياً ، F مجموعة جزئية مغلقة من X . بفرض أن A مجموعة جزئية غير منتهية من F . حيث أن $F \subseteq X$ فإن A مجموعة جزئية غير منتهية من X . ومن ثم فإن A لها نقطة تراكم $p \in X$. وحيث أن $F \subseteq X$ فإن p هي أيضاً نقطة تراكم للمجموعة F . ولكن F مغلقة . إذاً $p \in F$ أي أن F محكمة عددياً.

تمارين عامة على الباب السابع

(١) بين أنه إذا كان الفضاء (X, τ) محكم وكان (X, τ^*) فضاء توبولوجي بحيث أن $\tau^* \subseteq \tau$ فإن (X, τ^*) فضاء محكم أيضاً.

(٢) بفرض أن $(X, \tau^*) = \{X, \phi, U \subseteq X : U^c \text{ قابلة للعد}\}$ أثبت أن أي مجموعة لانهائية من X ليست محكمة تتابعياً.

(٣) أعط مثال يبين أن الصورة المتصلة لمجموعة محكمة عدياً لا تكون محكمة عدياً.

(٤) بين أن المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المحكم عدياً تكون محكمة عدياً.

(٥) برهن أن اتحاد عدد منته من المجموعات المحكمة هو مجموعة محكمة.

(٦) إذا كان (X, τ) فضاء T_2 وكان (X, τ^*) فضاء محكم بحيث أن $\tau \subseteq \tau^*$. اثبت أن $\tau = \tau^*$. هل (X, τ^*) فضاء T_2 ؟

(٧) إذا كانت الدالة $f: X \rightarrow Y$ أحادية ومتصلة من الفضاء المحكم X إلى الفضاء T_2 . أثبت أن $X \cong f(X)$

(٨) بين أن خاصية أن يكون الفضاء محكم تتابعياً (عدياً) هي خاصية توبولوجية.

(٩) إذا كان X فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى أثبت أنه إذا كان X فضاء T_1 فإن X محكم عدياً إذا وفقط إذا كان محكم تتابعياً.

(١٠) إذا كان X فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية . أثبت أنه إذا كان X فضاء T_1 فإن أي مجموعة جزئية تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت محكمة عدياً.

(١١) هل خاصية أن يكون الفضاء محكم (محكم تتابعياً - محكم محلياً - محكم عدياً) هي خاصية وراثية.

(١٢) إذا كان (X, τ) فضاء منتظم ، A مجموعة محكمة ، B مجموعة مغلقة بحيث أن $A \cap B = \emptyset$. أثبت أنه يوجد $U, V \in \tau$ بحيث أن $U \cap V = \emptyset$ ، $A \subseteq U, B \subseteq V$

(١٣) إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة في فضاء T_2 . برهن أنه إذا كانت $x \notin A$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث أن $x \in V \subseteq A^c$.

(١٤) بين أن أي مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء المنفصل ليست محكمة.

(١٥) إذا كان الفضاء X هو فضاء T_1 . بين أن X فضاء محكم عدياً إذا وفقط إذا كان كل غطاء مفتوح وقابلة للعد يحتوى على غطاء جزئي منتهى.

(١٦) بفرض أن X فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية ، فضاء T_1 . أثبت أن X فضاء محكم إذا وفقط إذا كان X محكم عدياً.

(١٧) بين أن أي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المحكم تتابعياً تكون محكمة تتابعياً.

(١٨) بفرض أن $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ دالة من الفضاء المحكم (X, d_1) إلى الفضاء المترى (Y, d_2) بين أن f تكون منتظمة الاتصال أي أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(١٩) بفرض أن A مجموعة جزئية ومحكمة عدياً من الفضاء المترى. أثبت أن A محكمة تنابعياً.

الباب الثامن

الترايط

Connectedness

الباب الثامنالترابط Connectedness

نظراً للأهمية البالغة لمفهوم الترابط في الفضاءات التوبولوجية حيث له أسهامات فاعلة فيما يعرف بالتوبولوجية الجبرية وكذلك في التحليل الرياضى ، سوف نقوم في هذا الباب بدراسة الفضاءات المترابطة والخصائص الأساسية لها ونعطى بعض الأمثلة لكي يستعين بها القارئ لتوضيح المعنى المطلوب. هذا ويعتبر الفصل الأول للعالم لينز (Lennes) (١٩١١) والعالم هاوسدروف (Hausdorff) (١٩١٤) في تطور مفهوم المجموعة المترابطة والمركبات المترابطة إلى شكلها الحالى. أيضاً أدخل العالم هان (Hahn) (١٩١٤) مفهوم الفضاءات المترابطة محلياً.

بند (١) : المجموعات المنفصلة : (Separated Sets)

تعريف (١.١.٨) :

يقال للمجموعتين غير الخاليتين A, B في الفضاء التوبولوجي (X, τ) إنهما منفصلتان، إذا تحقق الشرطين الآتيين :

$$(i) A \cap B = \phi \quad (ii) A \cap B' = \phi, B \cap A' = \phi$$

أى أن المجموعتين A, B غير متقاطعين ولا تحتوى أى منهما على نقاط تراكم للآخرى.

ومن جانب آخر يمكن القول بأن A, B منفصلتان إذا وفقط إذا كان :

$$A \cap \bar{B} = \phi, \bar{A} \cap B = \phi$$

مثال (٢.١.٨) :

في الفضاء العادي $(R, \mathcal{U})$ إذا كانت

$$A = (1, 2), B = (2, 3) \text{ \& } C = [3, 4]$$

فإن المجموعتان A, B منفصلتان لأن $\bar{A}=[1,2]$, $\bar{B}=[2,3]$

ولذلك فإن $A \cap \bar{B} = \phi$, $\bar{A} \cap B = \phi$

ولكن B, C غير منفصلتان لأن $3 \in C$ هي نقطة تراكم للمجموعة B ،

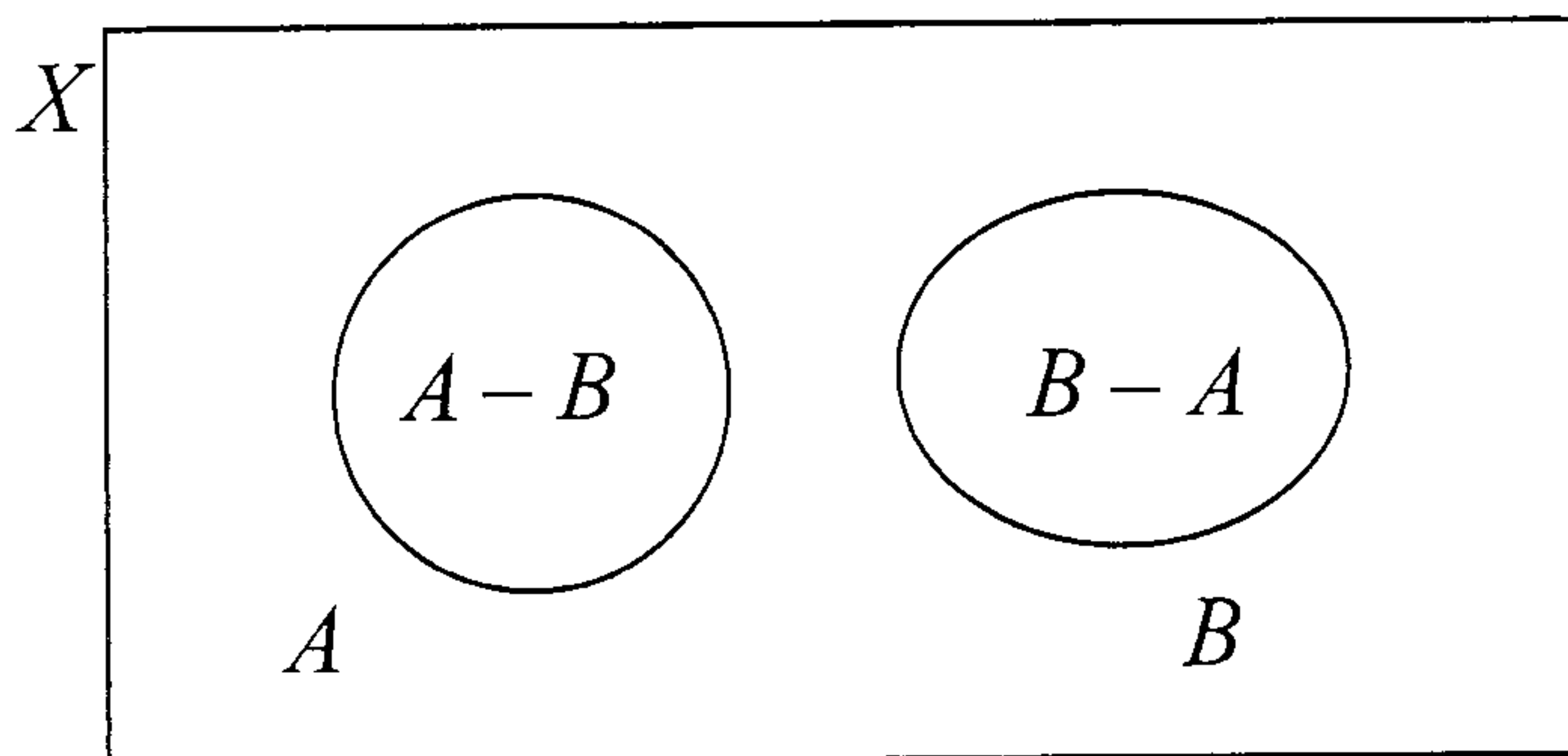
$$\bar{B} \cap C = [2,3] \cap [3,4) = \{3\} \neq \phi$$

نظرية (٨ . ١ . ٣) :

أي مجموعتين جزئيتين من أي فضاء توبولوجي مفتوحتين أو مغلقتين وغير متقاطعتين منفصلتين.

البرهان :

بفرض أن $A, B \subseteq X$ مجموعتين غير متقاطعتين أي $A \cap B = \phi$



(١) إذا كانت A, B مفتوحتين فإن

$$(i) (A - B) \cap \overline{(B - A)} \subseteq A \cap \overline{(B - A)} \\ \subseteq \overline{A \cap (B - A)} = \phi,$$

$$(ii) \overline{(A - B)} \cap (B - A) \subseteq \overline{(A - B)} \cap B \\ \subseteq \overline{(A - B) \cap B} = \phi$$

أي أن $A - B$, $B - A$ منفصلتين.

(٢) بطريقة مشابهة يمكن إثبات أن إذا كانت A, B مغلقتين فإن $B - A$ ،

$A - B$ منفصلتين.

من (١) ، (٢) يمكن أستنتاج أن A, B منفصلتان.

بديهية (٨ . ١ . ٤) :

إذا كانت A, B مجموعتين منفصلتين في الفضاء التوبولوجي (X, τ) بحيث أن $C \subseteq A, D \subseteq B$ فإن C, D مجموعتين منفصلتين .

البرهان : حيث أن $A \cap B = \phi$ فإن $C \cap D = \phi$ أيضاً

$$(i) \quad C \cap \bar{D} \subseteq A \cap \bar{B} = \phi$$

$$(ii) \quad \bar{C} \cap D \subseteq \bar{A} \cap B = \phi$$

بديهية (٨ . ١ . ٥) :

إذا كان (X, τ) فضاء T_1 فإن أى مجموعتين منتهيتين غير خاليتين وغير متقاطعتين في X منفصلتين.

البرهان :

بفرض أن $A, B \subseteq X$ ومنتهيه حيث

$$A \cap B = \phi, \quad A \neq \phi, \quad B \neq \phi$$

لكن كل مجموعة منتهيه في فضاء T_1 تكون مغلقة لأنها اتحاد لمجموعات منتهيه وحيدة العنصر وهذا بدورة يؤدي إلى أن A, B مجموعات مغلقة وعليه تكون A, B منفصلتان لأن

$$A \cap \bar{B} = A \cap B = \phi, \quad \bar{A} \cap B = A \cap B = \phi$$

تعريف (٨ . ١ . ٦) :

في أى فضاء توبولوجي (X, τ) إذا وجدت المجموعتين المفتوحتين G, H في X بحيث أنه لأى مجموعة جزئية A من X يكون :

$$(i) \quad A \cap G \neq \phi, \quad A \cap H \neq \phi$$

$$(ii) \quad (A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$$

$$(iii) (A \cap G) \cup (A \cap H) = A$$

فإن المجموعة $G \cup H$ تسمى مجموعة انفصال (disconnection) للمجموعة A

أو G, H مجموعتي انفصال. ومن هذا التعريف يتضح أن :

$$(A \cap G) \cap (A \cap H) = A \cap (G \cap H) = \phi$$

$$\Leftrightarrow G \cap H \subseteq A^c$$

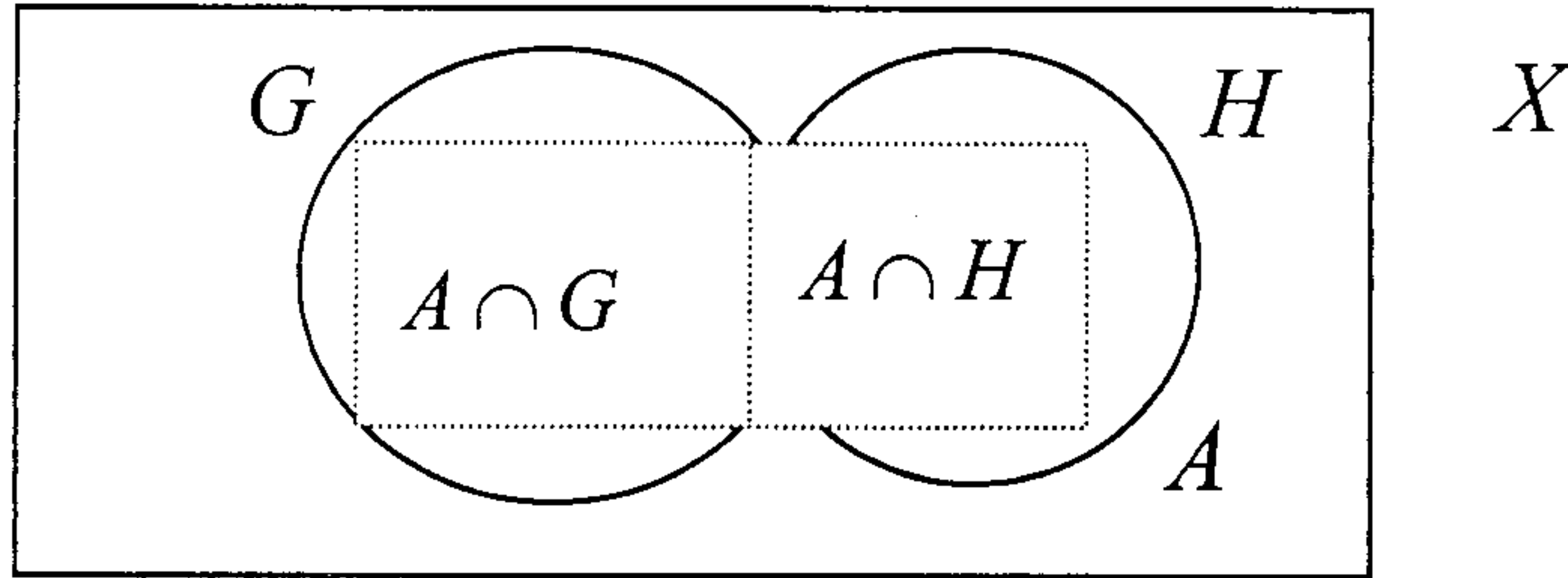
$$(A \cap G) \cup (A \cap H) = A \cap (G \cup H) = A$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq G \cup H$$

ولذلك يمكن إعادة التعريف على النحو التالي :

المجموعة $G \cup H$ تسمى مجموعة انفصال للمجموعة A إذا وفقط إذا كان :

$$A \cap G \neq \phi, A \cap H \neq \phi, A \subseteq G \cup H, G \cap H \subseteq A^c$$



نظرية (٨ . ١ . ٧) :

في أى فضاء توبولوجي (X, τ) ، $A \subseteq X$ ، إذا كانت $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A فإن $A \cap G$ ، $A \cap H$ مجموعتين منفصلتين.

البرهان :

حيث أن $G \cup H$ مجموعة انفصال فإن $G, H \in \tau$ حيث

$$(A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$$

والآن نشب أن كلاً من المجموعتين $A \cap G$ ، $A \cap H$ لا تحتوى على نقاط

تراكم للآخرى لذلك نفرض أن : $p \in (A \cap G)'$ ، $p \in A \cap H$

وحيث أن H مجموعة مفتوحة تحتوى p فإنها تحتوى على نقطة على الأقل من

$$A \cap G \text{ تختلف عن } p \text{ أى أن } (A \cap G) \cap H \neq \emptyset$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنه إذا كانت $p \in (A \cap H)'$ فإن $p \notin A \cap G$.
ومن ثم فإن $A \cap G$ ، $A \cap H$ مجموعات منفصلة.

بند (٢) : الفضاءات المترابطة والمجموعات المترابطة :

(Connected spaces and connected sets)

تعريف (٨ . ٢ . ١) :

يقال أن الفضاء التوبولوجى (X, τ) يانه فضاء مترابط إذا كان لا يمكن كتابه X كاتحاد لمجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين ، خلاف ذلك فإنه فضاء غير مترابط (disconnected). من هذا التعريف يمكن القول بأن (X, τ) فضاء مترابط إذا لم توجد مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث يكون :

$$A \cup B = X , A \cap \bar{B} = \emptyset , \bar{A} \cap B = \emptyset , A \neq \emptyset , B \neq \emptyset$$

ملاحظات (٨ . ٢ . ٢) :

(١) حيث أنه إذا كانت A, B مجموعتان غير خاليتين ومنفصلتين فإن

$$A \cap \bar{B} = \emptyset , \bar{A} \cap B = \emptyset$$

$$\text{وهذا يؤدي إلى أن } A \cap B = \emptyset \text{ لأن } A \subseteq \bar{A} , B \subseteq \bar{B}$$

ولذلك يمكن أستنتاج الآتي :

الفضاء التوبولوجى (X, τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

(i) إذا لم توجد فيه مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث أن

$$A \cup B = X , A \cap B = \emptyset , A \neq \emptyset , B \neq \emptyset$$

(ii) المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في الفضاء التوبولوجي (X, τ) هما فقط X, ϕ .

(٢) الفضاء (X, τ) يكون غير مترابط إذا وجدت فيه مجموعة جزئية فعلية مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت لأنه إذا كانت A مجموعة جزئية فعلية مفتوحة ومغلقة فإن A^c تكون مجموعة مفتوحة حيث $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = X$. ومن ذلك نستنتج أن X فضاء مترابط.

مثال (٨ . ٢ . ٣) :

ليكن (X, D) الفضاء المنفصل حيث X تحتوي على أكثر من عنصر هو فضاء غير مترابط لأن أي مجموعة جزئية فعلية من X تكون مفتوحة ومغلقة وبصورة أخرى توجد مجموعتين مفتوحتين $\{p\}$ ، $\{p\}^c$ حيث p عنصر اختياري من X .

مثال (٨ . ٢ . ٤) :

فضاء المكملات المنتهية (X, C) حيث X غير منتهية هو فضاء مترابط لأنه إذا كانت A, B مجموعتان مفتوحتان وغير خاليتان ، فإن A^c, B^c مجموعات منتهية وحيث أن $A \cap B = \phi$ فإن $A^c \cup B^c = X$.

وهذا بدورة يؤدي إلى أن X مجموعة منتهية وهذا يناقض أن X مجموعة غير منتهية وعليه لا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان اتحادهما هو المجموعة X .

مثال (٨ . ٢ . ٥) :

الفضاء الغير منفصل (X, I) يكون مترابط لأن X, ϕ هما فقط المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في X .

تعريف (٨ . ٢ . ٦) :

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ، A مجموعة جزئية من X . يقال أن المجموعة A غير مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A, τ_A) غير مترابط وتسمى المجموعة A مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A, τ_A) مترابط .
 من هذا التعريف يتضح أن المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وجدت مجموعتين مفتوحتين G, H في الفضاء الكلي (X, τ) بحيث أن:

$$A = (A \cap G) \cup (A \cap H) \Leftrightarrow A \subset G \cup H$$

$$\phi = (A \cap G) \cup (A \cap H) \Leftrightarrow G \cap H \subset A^c$$

ولهذا فإن المجموعة $G \cup H$ تسمى مجموعة انفصال للمجموعة A لأن :

$$A \subseteq G \cup H, (G \cap H) \cap A = \phi, A \cap G \neq \phi, A \cap H \neq \phi$$

من هذا التعريف أيضاً يتضح أن كلاً من المجموعتين ϕ ، $\{p\}$ مترابطة .

مثال (٨ . ٢ . ٧) :

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$$

فإن المجموعة $A = \{1, 4, 5\}$ غير مترابطة لأن المجموعتين المفتوحتين

$G = \{1, 2, 3\}$ ، $H = \{3, 4, 5\}$ في الفضاء (X, τ) ، $G \cup H$ مجموعة

انفصال للمجموعة A لأن

$$A \cap G = \{1\} \neq \phi, A \cap H = \{4, 5\} \neq \phi$$

$$H \cap G \neq \phi, (A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$$

$$(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$$

مثال (٨ . ٢ . ٩) :

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

إذا كانت $A = \{2, 4, 5\}$ ، $B = \{1, 2\}$ فإن A مجموعة مترابطة بينما B ليست مترابطة. لأن

$$\tau_B = \{B, A, \{1\}, \{2\}\} , \tau_A = \{A, \phi, \{2\}, \{2, 5\}\}$$

في الفضاء الجزئي (A, τ_A) لا توجد مجموعات مفتوحة وغير خالية في τ_A ولكن في الفضاء (B, τ_B) توجد المجموعتان غير الخاليتان $\{1\}, \{2\}$ منفصلتان في B حيث $B = \{1\} \cup \{2\}$.

مثال (٨. ٢. ١٠) :

إذا كانت X مجموعة غير منتهية ، (X, C) هو فضاء المكملات المنتهية إذا كانت $A \subseteq X$ أثبت أن:

(١) إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإن A تكون مترابطة.

(٢) إذا كانت A مجموعة منتهية فإن A تكون غير مترابطة.

الحل :

(١) بفرض أن A غير مترابطة وهذا يعني أن الفضاء الجزئي (A, τ_A) غير مترابط وبالتالي توجد مجموعتان منفصلتان $G, H \in \tau_A$ بحيث أن $A = G \cup H$ وبالتالي توجد $U_1, U_2 \in \tau$ بحيث أن $G = A \cap U_1$ ، $H = A \cap U_2$. وحيث أن $G \cap H = \phi$ فإن $\phi = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2)$ ومن ثم فإن

$$X = (A \cap U_1)^c \cup (A \cap U_2)^c = A^c \cup (U_1^c \cap U_2^c)$$

وهذا يؤدي إلى أن $A \subseteq U_1^c \cap U_2^c$. ولكن U_1^c, U_2^c مجموعات منتهية وهذا تناقض حيث A غير منتهية . وعليه تكون المجموعة A مترابطة.

(٢) واضح من (١).

نظرية (٨. ٢. ١١) :

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X, τ) تكون مترابطة في الفضاء الكلي إذا وفقط إذا كانت A مترابطة في الفضاء الجزئي (A, τ_A) .
البرهان :

نفرض أن A مجموعة غير مترابطة في الفضاء الكلي (X, τ) وبالتالي فإن $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A في X .
 والآن $G, H \in \tau$ ولذلك فإن $A \cap G, A \cap H \in \tau_A$ وطبقاً لهذا فإن كلاً من $A \cap G, A \cap H$ مجموعة انفصال للمجموعة A في الفضاء الجزئي (A, τ_A) ومن ثم فإن A مجموعة مترابطة في (A, τ_A) .
 العكس ، نفرض أن A غير مترابطة في الفضاء الجزئي (A, τ_A) . لنفرض أن $G^*, H^* \in \tau_A$ مجموعة انفصال للمجموعة A ولذلك فإنه توجد $G, H \in \tau$ بحيث أن $G^* = A \cap G, H^* = A \cap H$. ولكن

$$A \cap G^* = A \cap (A \cap G) = A \cap G$$

$$A \cap H^* = A \cap (A \cap H) = A \cap H$$

وبالتالي فإن $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A في الفضاء الكلي (X, τ) وعليه تكون A مجموعة غير مترابطة في X .

ملاحظة (٨. ٢. ١٢) :

(١) بفرض أن (X, τ) فضاء غير مترابط ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة X فإن

$$X = (X \cap G) \cup (X \cap H) ,$$

$$(X \cap G) \cap (X \cap H) = \phi$$

$$X \cap G = G , X \cap H = H \quad \text{لكن}$$

لذلك فإن X تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتين G, H غير

خاليتين ومفتوحتين بحيث أن $X = G \cup H$ ، $G \cap H = \emptyset$
 (٢) إذا كانت X مجموعة غير مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة
 X فإن الراسم : $f: X = G \cup H \rightarrow (Y, D)$
 حيث $Y = \{0, 1\}$ معرف عليها التوبولوجي المنفصل والمعرف بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } x \in G \\ 1 & ; \text{if } x \in H \end{cases}$$

يكون راسم متصل.

نظرية (٨ . ٢ . ١٣) :

الصورة المتصلة للمجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة من الفضاء (X, τ) المترابط إلى
 الفضاء التوبولوجي (Y, τ^*) . نثبت أن $f(X)$ مجموعة مترابطة. لذلك نفرض
 أن $f(X)$ مجموعة غير مترابطة ، G, H مجموعتي انفصال
 للمجموعة $f(X)$ فإن : $f(X) \subseteq G \cup H$ ، $G \cap H = \emptyset$
 ومن ذلك نستنتج أن :

$$X \subseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) , f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$$

وحيث أن $f^{-1}(G), f^{-1}(H)$ مجموعتين جزئيتين مفتوحتين وغير متقاطعتين
 فإن $f^{-1}(G)$ ، $f^{-1}(H)$ مجموعتي انفصال للمجموعة X وهذا تعارض لأن
 X مجموعة مترابطة ومن ثم فإن $f(X)$ مجموعة مترابطة.

مما سبق يمكن إعطاء تعريف مكافئ للفضاءات المترابطة على النحو التالي :

نظرية (٨ . ٢ . ١٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) الفضاء (X, τ) مترابط.

(٢) لا يمكن التعبير عن X كاتحاد لمجموعتين غير خاليتين مغلقتين وغير متقاطعتين.

(٣) المجموعتان X, ϕ هما فقط المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في X .

(٤) لأي مجموعة جزئية فعلية $A \neq \phi$ من X يكون $b(A) \neq \phi$

(٥) إذا كانت $A = \{x, y\}$ ومعرف عليها التوبولوجي المنفصل فإنه لا يوجد راسم $f: X \rightarrow A$ يكون متصل وشامل.

البرهان :

(1) $\Rightarrow$ (2)

نفرض العكس ، أى توجد مجموعتين مغلقتين A, B بحيث أن :

$$X = A \cup B, A \cap B = \phi, A \neq \phi, B \neq \phi$$

وبالتالى فإن A^c, B^c مجموعتين مفتوحتين حيث

$$A^c \cup B^c = X, A^c \cap B^c = \phi$$

وهذا تعارض لأن X فضاء مترابط.

(2) $\Rightarrow$ (3)

نفرض العكس أى توجد مجموعة جزئية A من X مفتوحة ومغلقة بحيث أن

$$A \neq \phi, A \neq X \text{ فإن هذا بدورة يؤدي إلى أن } A^c \neq \phi, A^c \neq X \text{ وحيث}$$

$$\text{أن } A \cap A^c = \phi, X = A \cup A^c \text{ وعليه تكون المجموعتين } A, A^c \text{ غير}$$

متقاطعتين ومغلقتين وأتحداهما يساوى X وهذا تعارض مع الفرض (٢) ومن ثم فإن

X, ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المغلقتان والمفتوحتان في X .

(3) $\Rightarrow$ (4)

نفرض أن A مجموعة جزئية فعلية من X وغير خالية بحيث أن $b(A) = \phi$

$$\text{لكن } b(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (A^o)^c = \phi$$

وعليه تكون $\bar{A} \subseteq A^o$ ومن ثم فإن $A \subseteq \bar{A} \subseteq A^o \subseteq A$

أى أن $A^o = A$ ، $\bar{A} = A$ وتكون A مجموعة مفتوحة.

ومغلقة في نفس الوقت وهذا تعارض مع الفرض (٣).

$$(4) \Rightarrow (5):$$

بفرض أنه يوجد راسم $f: X \rightarrow A$ يكون متصل وشامل وحيث أن $A = \{x, y\}$ ومعرف عليها التوبولوجى المنفصل ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة ومغلقة وهى مجموعة جزئية فعلية من A . حيث أن f راسم متصل فإن $B = f^{-1}(\{x\})$ مجموعة مفتوحة ومغلقة في X ، وعليه يكون :

$$b(B) = \bar{B} \cap \overline{B^c} = B \cap B^c = \phi$$

وهذا تعارض مع الفرض (٤). ومن ثم فإن مثل هذا الراسم غير موجود.

$$(5) \Rightarrow (1):$$

نفرض أن (X, τ) غير مترابط ، أى توجد مجموعتين غير خاليتين G, H ومفتوحتين في X بحيث أن : $X = G \cup H$, $G \cap H = \phi$ الراسم $f: X = G \cup H \rightarrow \{a, b\} = A$ المعرف بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} a & ; a \in G \\ b & ; b \in H \end{cases}$$

يكون متصل وشامل (لأن A معرف عليها التوبولوجى المنفصل) وهذا تناقض مع الفرض وبالتالي فإن (X, τ) مترابط.

مثال (٨ . ٢ . ١٥) :

لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

(١) أثبت أن (X, τ) غير مترابط .

(٢) المجموعة $A = \{b, d, e\}$ مترابطة.

الحل :

(١) حيث أنه توجد المجموعتين $\{a\}, \{b, c, d, e\}$ المفتوحتين والمغلقتين في X ،
 $\{a\} \cup \{b, c, d, e\} = X$. فإن (X, τ) يكون غير مترابط.

التوبولوجى النسبى τ_A هو $\tau_A = \{A, \phi, \{d\}\}$.

وحيث أن A, ϕ هما المجموعتين الجزئيتين المفتوحتين والمغلقتين في A فإن A مجموعة مترابطة.

مثال (٨ . ٢ . ١٥) :

الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$ مترابط لأن R, ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان.

نظرية (٨ . ٢ . ١٦) :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى ، V, W مجموعتين منفصلتين في X . إذا كانت A مجموعة مترابطة في X بحيث أن $A \subseteq V \cup W$ فإن $A \subseteq V$ أو $A \subseteq W$.

البرهان :

بفرض أن المجموعة A ليست محتواة في V أو W فإن هذا يؤدي إلى أن :

$$A \cap V \neq \phi , A \cap W \neq \phi$$

وعليه تكون المجموعة A غير مترابطة ولا ثبات ذلك :

حيث أن V, W مجموعتين منفصلتين في X فإن :

$$cl_A(A \cap V) \cap (A \cap W) = (A \cap \bar{V}) \cap (A \cap W)$$

$$= A \cap (\bar{V} \cap W) = A \cap \phi = \phi$$

كذلك

$$\begin{aligned} cl_A(A \cap W) \cap (A \cap V) &= (A \cap \bar{W}) \cap (A \cap V) \\ &= A \cap (\bar{W} \cap V) = A \cap \phi = \phi \end{aligned}$$

ومن ثم فإن $A \cap V$, $A \cap W$ مجموعتين منفصلتين في الفضاء الجزئي (A, τ_A) وحيث أن $A \subseteq V \cap W$. فإن

$$(A \cap V) \cup (A \cap W) = A \cap (V \cup W) = A$$

أى أن A مجموعة غير مترابطة وهذا تناقض.

نتيجة (٨ . ٢ . ١٧) :

إذا كانت المجموعة A مترابطة في أى فضاء توبولوجي (X, τ) فإنه لأى مجموعة جزئية B من X تحقق $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ تكون مترابطة في X .
البرهان :

نفرض العكس ، أى أن B مجموعة غير مترابطة وبالتالي توجد مجموعتين V, W منفصلتين في B أى أن $V, W \in \tau$ وتحقق :

$$B \subseteq V \cup W , B \cap V \neq \phi , B \cap W \neq \phi \& (V \cap W) \cap B = \phi$$

وحيث أن A مجموعة مترابطة وتحقق $A \subseteq V \cup W$ فإنه طبقاً لنظرية (٨ . ٢ . ١٦) نجد أن أما $A \subseteq V$ أو $A \subseteq W$.

إذا كانت $A \subseteq V$ فإن $cl_B(A) \subseteq cl_B(V)$

ولكن $cl_B(A) = \bar{A} \cap B = B$ وبالتالي نحصل على $B \subseteq cl_B(V)$ وحيث أن V, W منفصلتين في B فإن :

$$cl_B(V) \cap W = \phi \Rightarrow B \cap W = \phi$$

وهذا تعارض وعليه تكون B مجموعة مترابطة.

ملاحظة (٨ . ٢ . ١٨) :

يمكن إثبات النتيجة السابقة بصورة أخرى بفرض أن B مجموعة غير مترابطة في

X بالتالى توجد مجموعتين $V, W \in \tau$ تحقق :

$B \cap V \neq \phi$, $B \cap W \neq \phi$, $(V \cap W) \cap B = \phi$, $B \subseteq V \cup W$
 حيث أن $B \cap W \neq \phi$ ، مجموعة مفتوحة فإنه توجد نقطة لاصقة x بالمجموعة A (لأن $B \subseteq \bar{A}$) بحيث يكون $x \in B \cap W$ ، ولكن W مجموعة مفتوحة تحوى x وهذا بدورة يؤدي إلى أن $A \cap W \neq \phi$.

وبنفس الطريقة يمكن أثبات أن $A \cap V \neq \phi$

ولكن $(V \cap W) \cap A \subseteq (V \cap W) \cap B = \phi$, $A \subseteq B \subseteq V \cup W$ أى أن $V \cup W$ مجموعة انفصال للمجموعة A ، ومن ثم فإن A تكون مجموعة غير مترابطة.

نتيجة (٨ . ٢ . ١٩) :

إذا كانت A مجموعة مترابطة في الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن $\bar{A}$ تكون مترابطة أيضاً.

البرهان :

واضح من نظرية (٨ . ٢ . ١٧)

ملاحظة (٨ . ٢ . ٢٠) :

عكس النتيجة السابقة غير صحيح في الحالة العامة لأن الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$ مترابط ولكن مجموعة الأعداد النسبية غير مترابطة في حين $\bar{Q} = R$.

نتيجة (٨ . ٢ . ٢١) :

الفضاء التوبولوجى (X, τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.

البرهان :

بفرض أن A مجموعة كثيفة ومترابطة في الفضاء (X, τ) فإن $A \subseteq \bar{A} = X$ وحيث أن A مجموعة مترابطة فإن X مجموعة مترابطة.

بديهية (٨. ٢. ٢١) :

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن $A \cup B$ تكون مجموعة غير مترابطة.
البرهان :

حيث أن A, B مجموعتين منفصلتين فإن $A \cap \bar{B} = \phi$, $\bar{A} \cap B = \phi$
 وبفرض أن $G = (\bar{B})^c$, $H = (\bar{A})^c$ فإن G, H مجموعات مفتوحة حيث
 $(A \cup B) \cap G = A$, $(A \cup B) \cap H = B$

وهاتين المجموعتين غير متقاطعتين وأتحداهما هو المجموعة $A \cup B$. لذلك فإن المجموعتين G, H مجموعتي انفصال للمجموعة $A \cup B$ ومن ثم فإن $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة.

بديهية (٨. ٢. ٢٢) :

بفرض أن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجي (X, τ) ،
 $B \subseteq A$. إذا كانت B مجموعة مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A فإن أما $B \cap H = \phi$ or $B \cap G = \phi$ and $B \subseteq G$ or $B \subseteq H$
البرهان :

حيث أن $B \subseteq A$ ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة A فإن :

$$A \subseteq G \cup H \Rightarrow B \subseteq G \cup H ,$$

$$G \cap H \subseteq A^c \Rightarrow G \cap H \subseteq B^c$$

لذلك إذا كانت كل من $B \cap G \neq \phi$ ، $B \cap H \neq \phi$ مجموعات غير خالية فإن $B \cup G$ تكون مجموعة انفصال للمجموعة B . لكن B مجموعة مترابطة . إذاً

$$B \cap H = \phi \text{ or } B \cap G = \phi$$

$$B \subseteq G \text{ or } B \subseteq H$$

نظرية (٢٣ . ٢ . ٨) :

إذا كانت A, B مجموعتان مترابطتان وغير منفصلتان في الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن $A \cup B$ مجموعة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة $A \cup B$. وحيث أن $A \subseteq A \cup B$ ، A مترابطة فإن من نظرية (٨ . ٢ . ١٦) أو بديهية (٨ . ٢ . ٢٢) أما $A \subseteq G$ أو $A \subseteq H$

وبطريقة مشابهة يمكن الحصول على أن إما $B \subseteq G$ أو $B \subseteq H$

والآن $if A \subseteq G \& B \subseteq H (or B \subseteq G \& A \subseteq H)$

فإن $(A \cup B) \cap G = A, (A \cup B) \cap H = B$

مجموعتين منفصلتين وهذا تعارض مع الفرض أن $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة. لذلك فإن إما $A \cup B \subseteq G$ أو $A \cup B \subseteq H$. وعليه فإن $G \cup H$ ليست مجموعة انفصال للمجموعة $A \cup B$ ومن ثم فإن $A \cup B$ مجموعة مترابطة.

نظرية (٢٤ . ٢ . ٨) :

نفرض أن $\{A_i\}_{i \in I}$ عائلة من المجموعات المترابطة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) بحيث أن $A_i \cap A_j \neq \emptyset ; \forall i, j$ فإن $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ تكون مترابطة.

البرهان :

بفرض أن A_1 مجموعة جزئية مفتوحة ومغلقة في A . وبفرض أن $x \in A_1$ فإن $x \in A_{i_0}$ ، $i_0 \in I$ وحيث أن $A \cap A_{i_0}$ مجموعة غير خالية مفتوحة ومغلقة في A_{i_0} ، A_{i_0} مجموعة مترابطة فإن $A \cap A_{i_0} = A_{i_0}$. ولأي $j \in I$ فإن $A_i \cap A_j$ تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في A_j ولكن $A_{i_0} \subseteq A$ فإن

$$\phi \neq A_{i_0} \cap A_j \subseteq A_1 \cap A_j = A_j$$

حيث A_j مجموعة مترابطة . وعليه يكون $\forall j ; A_j \subseteq A_1$ لذلك فإن $A = \bigcup A_j \subseteq A_1$. إذاً $A = A_1$.

نتيجة (٨ . ٢ . ٢٥) :

إذا كانت الدالة $f: X \rightarrow Y$ متصلة وشاملة من الفضاء المترابط X إلى الفضاء التوبولوجي Y فإن Y فضاء مترابط أيضاً.

نتيجة (٨ . ٢ . ٢٦) : خاصية أن يكون الفضاء مترابط هي خاصية توبولوجية.

نظرية (٨ . ٢ . ٢٧) :

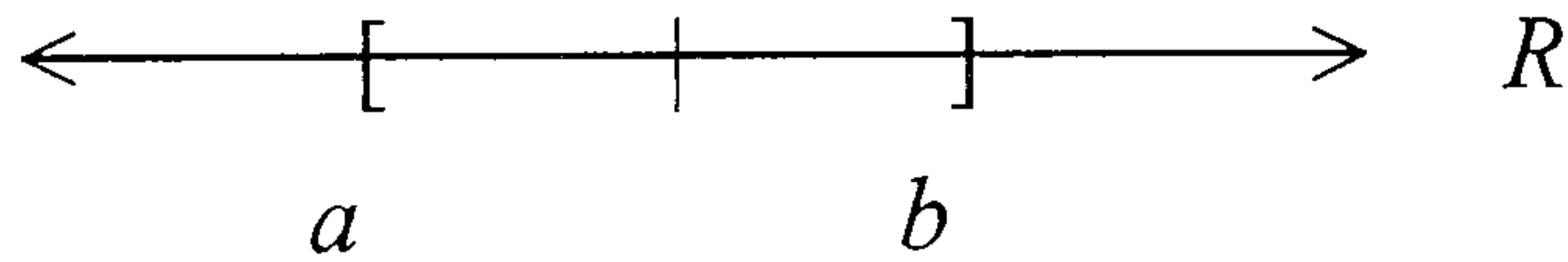
أى فترة مغلقة $[a, b]$ في الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$ تكون مترابطة.

البرهان :

بفرض أن الفترة $A = [a, b]$ ليست مترابطة أى أن الفضاء الجزئى A غير مترابط. وعليه توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \in \tau_A$ بحيث يكون :

$$G \cup H = A, G \cap H = \emptyset, G \neq \emptyset, H \neq \emptyset$$

وحيث أن G, H مجموعتين غير خاليتين لذلك نفرض أن $a \in G, b \in H$ بحيث أن $a < b$.



بفرض أن $S = [a, b] \cap G$ ، $c = \sup \{x : x \in S\}$. وحيث أن $[a, b]$ مجموعة مغلقة فإن $c \in [a, b]$ وعليه إما أن يكون $c \in G$ أو $c \in H$.

إذا كانت $c \in G$ ، مجموعة مفتوحة فإنه توجد فترة مفتوحة $(c - \delta, c + \delta)$ حيث $(c - \delta, c + \delta) \subseteq G$. وهذا يعنى أن $c + \delta \in G$ ، $c + \delta < b$. وهذا

تعارض مع تعريف العنصر c لأن $c = \sup \{[a, b] \cap G\}$. وفي الحالة الثانية إذا

كانت $c \in H$ ، مجموعة مفتوحة فإنه توجد فترة مفتوحة $(c - \delta, c + \delta)$ بحيث $(c - \delta, c + \delta) \subseteq H$ وهذا أيضاً يناقض أن $c = \sup S$. ومن ثم فإن

$[a, b]$ مجموعة مترابطة.

ملاحظة : يمكن توضيح الجزء الأخير من البرهان بصورة أخرى :

نلاحظ أن G مجموعة مغلقة في A لأن H مجموعة مفتوحة، $G = A - H$

وبالتالي توجد مجموعة مغلقة F في A بحيث أن $G = A \cap F$. وبالتالي

$$[a, b] \cap G = [a, b] \cap (A \cap F)$$

$$= ([a, b] \cap A) \cap F = [a, b] \cap F$$

وهذا يعنى أن المجموعة $S = [a, b] \cap G$ مغلقة. وعليه تكون $c \in S$ حيث

$c \notin H$. ومن جانب آخر $(c, b] \subseteq H$ ، H مجموعة مغلقة ومن ثم فإن $c \in H$

وهذا تعارض. أى أن A تكون مترابطة.

النظرية السابقة تقودنا إلى النظرية التالية.

نظرية (٨ . ٢ . ٢٨) :

أى مجموعة $E \subseteq R$ تحتوى على أكثر من عنصر تكون مترابطة إذا وفقط إذا كانت E فترة.

البرهان :

يكفى أن نبرهن على أنه إذا كانت $E \subseteq R$ مجموعة مترابطة وتحتوى على أكثر من عنصر فإن E فترة.

نفرض العكس ، أى أن E ليست فترة . وهذا يعنى أنه إذا كانت $a, b \in E$ فإنه لكل $c \in R$ بحيث أن $a < c < b$ فإن $c \notin E$.

وبفرض أن $G = (-\infty, c) \cap E$ ، $H = (c, \infty) \cap E$

فإن G, H مجموعتان مفتوحتان وغير خاليتان في الفضاء الجزئى E وايضاً

$$G \cap H = \emptyset , G \cup H = E$$

وبالتالى فإن E مجموعة غير مترابطة وهذا تعارض.

نعلم أن نظرية القيمة المتوسطة تنص على أنه :

إذا كانت الدالة $f: R \rightarrow R$ متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنه يوجد $x \in R$ بحيث أن $f(a) < f(x) = \alpha < f(b)$

وحيث أن الصورة المتصلة لكل مجموعة مترابطة تكون مجموعة مترابطة ، بالتالي يكون لدينا النظرية التالية التي تعتبر تعميم لنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية (٢٩ . ٢ . ٨) :

بفرض أن $f: X \rightarrow R$ دالة متصلة حيث X فضاء توبولوجي مترابط. إذا كانت $x_1, x_2 \in X, \alpha \in R$ بحيث أن $f(x_1) < \alpha < f(x_2)$ فإنه توجد $x \in X$ بحيث أن $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$ حيث $f(x) = \alpha$.

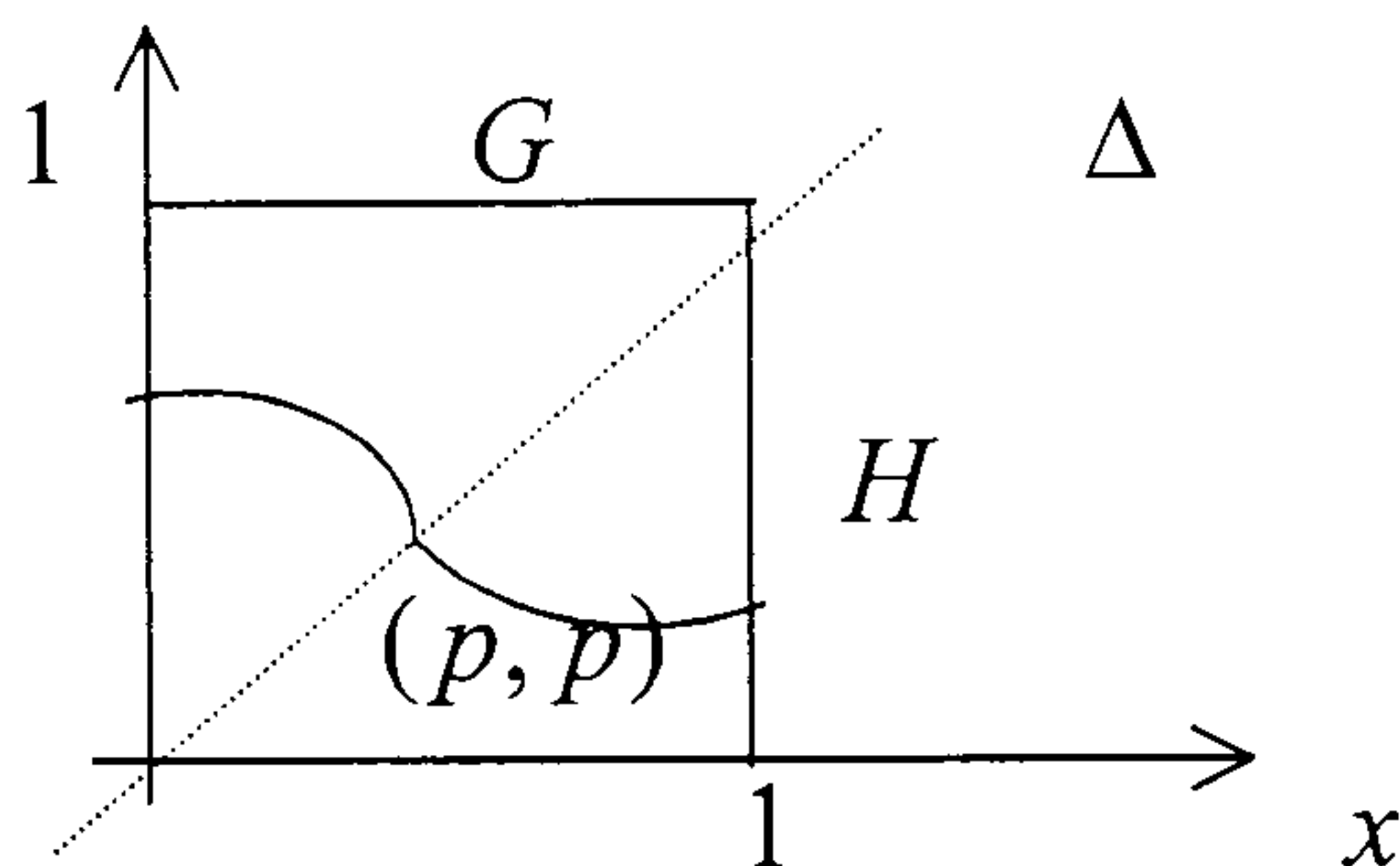
البرهان :

من نظرية (١٣ . ٢ . ٨) نحصل على أن $f(X)$ مجموعة مترابطة في R وبالتالي فإن $f(X)$ فترة وحيث أن $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$ ، $f(x_1) < \alpha < f(x_2)$ فإن $\alpha \in f(X)$ وعليه يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = \alpha$.

من أهم التطبيقات على نظرية الترابط هي نظرية النقطة الثابتة (fixed point Theorem) نظرية (٣٠ . ٢ . ٨) :

بفرض أن $f: I \rightarrow I, I = [a, b]$ دالة متصلة فإنه توجد نقطة $p \in I$ بحيث $f(p) = p$.

قبل أن نعطي البرهان نوضح النظرية هندسياً



منحنى الدالة $f: I \rightarrow I$ يقع داخل مربع الوحدة

$$I^2 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

والنظرية تنص على أن المنحنى للدالة f يتقاطع مع القطر Δ .

والآن إذا كانت $f(0)=0$ أو $f(1)=1$ فإن النظرية تكون قد بُرهنَت.

لذلك نفرض أن $f(0) > 0$ ، $f(1) < 1$

وحيث أن f دالة متصلة فإن الدالة $F: I \rightarrow R^2$ والمعرفه بالنحو التالى :

$$F(x) = (x, f(x)) \text{ أيضاً تكون متصلة.}$$

$$\text{بوضع } H = \{(x, y): y < x\} , \quad G = \{(x, y): x < y\}$$

$$\text{فإن } (0, f(0)) \in G , \quad (1, f(1)) \in H$$

وبالتالى إذا كانت $F(I)$ لا تحتوى على نقاط من القطر $\Delta = \{(x, y): x = y\}$

حيث $\Delta = R^2 - (G \cup H)$. فإن $G \cup H$ مجموعة انفصال للمجموعة

$F(I)$. وهذا تعارض لكون أن I مترابطة ، الصورة المتصلة $F(I)$ مترابطة

وبالتالى فإن $F(I)$ تحتوى على نقطة $(p, p) \in \Delta$ وعليه تكون $f(p) = p$.

بند (٣) : الترابط المحلى :

سنقوم بدراسة المركبة لفضاء توبولوجى ثم المركبة لمجموعة جزئية من الفضاء

التوبولوجى.

تعريف (٨ . ٣ . ١) :

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجى. تسمى المجموعة الجزئية C من X مركبة

للفضاء X إذا كانت C مجموعة مترابطة وكانت غير محتواة في أى مجموعة مترابطة

أكبر منها أى أن C هى أكبر مجموعة جزئية مترابطة في X .

مثال (٨ . ٣ . ٢) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى مترابط فإن X يملك مركبة مترابطة واحدة

فقط هي X نفسها. الفضاء الحقيقي $(R, \mathcal{U})$ له مركبة واحدة هي R .

مثال (٨.٣.٣):

في الفضاء المنفصل (X, D) أى مركبة مترابطة فيه تحوى نقطة واحدة فقط.

مثال (٨.٣.٤):

بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

فإن مركبات X هي $\{a\}$ ، $\{b, c, d, e\}$ وأى مجموعة جزئية مترابطة أخرى مثل

$\{b, d, e\}$ هي مجموعة جزئية في واحدة من المركبات.

نظرية (٨.٣.٥):

أى مجموعة جزئية مترابطة في أى فضاء توبولوجى تكون محتواه في مركبة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن A مجموعة جزئية مترابطة في الفضاء التوبولوجى (X, τ) . إذا كانت

$\{A_i : i \in N\}$ عائلة المجموعات المترابطة التى تحتوى A أى أن

$A_i \subseteq A ; \forall i \in N$ فإن $A \neq \phi$ وعليه يكون $\bigcap_{i \in N} A_i \neq \phi$. من نظرية (٨.٢.٢).

(٢٤) نجد أن $C = \bigcup_{i \in N} A_i$ مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة A وإذا كانت E

مجموعة مترابطة تحتوى C فإن E تحتوى A أيضاً وعليه فإن $E = C$ ومن ثم فإن

C مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة A .

نتيجة (٨.٣.٦):

كل نقطة في الفضاء التوبولوجى X تكون محتواه في مركبة مترابطة.

البرهان :

حيث أن لكل $x \in X$ فإن المجموعة $\{x\}$ مترابطة.

نظرية (٨ . ٣ . ٧) :

أى مركبة مترابطة في فضاء توبولوجي X تكون مجموعة مغلقة.

البرهان :

لتكن C مركبة مترابطة ، حيث أن $C \subseteq \bar{C}$ فإن مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة C وذلك حسب نتيجة (٨ . ٢ . ١٩) وحيث أن C مركبة فهي أكبر مجموعة مترابطة وبالتالي فإن $\bar{C} \subseteq C$ ومن ثم فإن $\bar{C} = C$ أى أن C مغلقة.

نظرية (٨ . ٣ . ٨) :

عائلة المركبات المترابطة في الفضاء التوبولوجي X تكون تجزئاً للفضاء X .

البرهان :

بفرض أن $\{C_i\}_{i \in N}$ عائلة المركبات المترابطة للفضاء التوبولوجي X فإن :

(i) $C_i \cap C_j = \emptyset$; $\forall i \neq j$ لأنه إذا كانت $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ فإنه ينتج من نظرية (٨ . ٣ . ٢٣) أن المجموعة $C_i \cup C_j$ تكون مترابطة وحاوية للمجموعتين C_i, C_j . وحيث أن C_i, C_j مركبتين مترابطتين فإن $C_i = C_i \cup C_j = C_j$ وهذا تناقض.

(ii) واضح أن $X = \bigcup_{i \in N} C_i$

تعريف (٨ . ٣ . ٩) :

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ، مجموعة جزئية من X تسمى أى مركبة مترابطة للفضاء الجزئي (A, τ_A) بمركبة المجموعة A . ويرمز لها بالرمز $C(A)$ أى

أن : $C(A) = \bigcup \{E \subseteq A : E \text{ مترابطة}\}$

إذا كانت $A = X$ فإن $C(X) = \bigcup \{E \subseteq X : E \text{ مترابطة}\}$

هى مركبة الفضاء X وإذا كانت $p \in E$ فإن :

$C(p) = \bigcup \{E \subseteq A : p \in E, E \text{ مترابطة}\}$

تسمى مركبة النقطة p .

مثال (٨ . ٣ . ١١) :

ليكن $(R, \mathcal{U})$ الفضاء العادي ، $A = R - \{-1, 0, 2\}$ مجموعة جزئية من R فإن A لها أربع مركبات هي : $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 2), (2, \infty)$ تعريف (٨ . ٣ . ١٢) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) مترابط محلياً (locally connected) عند النقطة $p \in X$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي على مجموعة جزئية مترابطة. أى أن كل المجموعات المفتوحة المترابطة التي تحتوي p هي أساس محلي عند p .

ويقال أن الفضاء مترابط محلياً إذا كان مترابط محلياً عند كل نقطة. من ذلك نجد أن X فضاء مترابط محلياً إذا كان من أجل أى جوار N للنقطة p لكل $p \in X$ يوجد جوار مترابط W للنقطة p حيث $W \subseteq N$. مثال (٨ . ٣ . ١٣) :

كل فضاء منفصل (X, D) مترابط محلياً لأنه إذا كانت $p \in X$ فإن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة مترابطة محتواة في أى مجموعة مفتوحة تحتوي p . لاحظ أن X فضاء ليس مترابط إذا كانت X تحتوي على أكثر من نقطتين. نظرية (٨ . ٣ . ١٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء مترابط محلياً ، Y مجموعة جزئية مفتوحة في X فإن الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) يكون مترابط محلياً. البرهان :

بفرض أن $p \in Y$ ، جوار للنقطة p في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) . إذاً توجد مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن $Y \cap U \subseteq N$. لكن Y مجموعة مفتوحة في X فإنه ينتج من ذلك أن $Y \cap U$ مجموعة مفتوحة في X وعليه تكون N جوار

لنقطة p في X ، وحيث أن X فضاء مترابط محلياً فإنه يوجد جوار مترابط W في X بحيث أن $W \subseteq N$. والآن $V = W \cap Y \subseteq Y \cap N = N$. حيث أن V جوار مترابط للنقطة p في Y ، فإن (Y, τ_Y) فضاء مترابط محلياً .
نتيجة (٨ . ٣ . ١٥) :

المركبة المترابطة لأي فضاء مترابط محلياً هي مجموعة مفتوحة في X .

نظرية (٨ . ٣ . ١٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) X مترابط محلياً

(٢) مركبة أي مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة .

(٣) المركبات المترابطة في X تشكل أساس للفضاء X .

البرهان :

$$(١) \Leftrightarrow (٢)$$

بفرض أن X فضاء مترابط محلياً وأن Y مجموعة جزئية مفتوحة في X وحسب نظرية (٨ . ٣ . ١٤) يكون (Y, τ_Y) فضاء مترابط محلياً . وحيث أن Y مجموعة مفتوحة فإنه بناءً على نظرية (٨ . ٣ . ١٥) تكون مركبة Y مجموعة مفتوحة في Y .

$$(٢) \Leftrightarrow (٣)$$

بفرض أن G مجموعة مفتوحة في X وأن مركبات G مفتوحة في X وحيث أن المركبات مترابطة فهي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة وبالتالي فهي أساس للفضاء X .

$$(٣) \Leftrightarrow (١)$$

بفرض أن N جوار مفتوح للنقطة $p \in X$. من (٣) فإن N هي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة المترابطة وبالتالي فإن X مترابطة محلياً .

بند (٤) : الترباط المساري :

تعريف (٨ . ٤ . ١) :

بفرض أن $I=[0,1]$ فترة مغلقة. المسار من النقطة a إلى النقطة b في الفضاء التوبولوجي (X, τ) هو دالة $f: I \rightarrow X$ متصلة بحيث أن $f(0)=a$ ، $f(1)=b$. في هذه الحالة a تسمى نقطة البداية ، b نقطة النهاية للمسار



مثال (٨ . ٤ . ٢) :

لأى نقطة $p \in X$ فإن الدالة الثابتة $e_p: I \rightarrow X$

حيث $e_p(s)=p$ هي دالة متصلة فهي مسار يسمى المسار الثابت.

مثال (٨ . ٤ . ٣) :

بفرض أن $f: I \rightarrow X$ مسار من a إلى b فإن الدالة $f: I \rightarrow X$

المعرفة بالصورة : $f(s)=f(1-s)$ هي مسار من b إلى a .

مثال (٨ . ٤ . ٤) :

بفرض أن $f: I \rightarrow X$ مساراً من a إلى b ، $g: I \rightarrow X$ مساراً من b إلى

c فإن الدالة $f \circ g$ حيث

$$f \circ g(s) = \begin{cases} f(2s) & ; 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & ; \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

هي مساراً من a إلى c .

يتضح مما سبق أن العلاقة المعرفة على المجموعة X حيث (X, τ) فضاء توبولوجي

بالصورة : $a \sim b \Leftrightarrow \exists \text{ path } f: I \rightarrow X$

هى علاقة تكافؤ تجزئ X إلى فصول تكافؤ $C(x)$ لكل $x \in X$ حيث

$$C(x) = \{y \in X : x \sim y\}$$

تعريف (٨ . ٤ . ٥) :

فصول التكافؤ الناشئة من علاقة التكافؤ السابقة تسمى المركبات المسارية
 (path connected) للفضاء X .

تعريف (٨ . ٤ . ٦) :

يقال أن الفضاء (X, τ) مترابط مسارياً (pathwise connected) إذا وجدت
 له مركبة مسارية واحدة فقط وتسمى المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ مترابطة مسارياً إذا
 كان الفضاء الجزئى (A, τ_A) مترابط مسارياً.

مثال (٨ . ٤ . ٧) :

الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$ مترابط مسارياً لأن الدالة $f: I \rightarrow X$ والمعرفة
 بالصورة : $f(x) = (1-x)a + bx ; \forall x \in I, a, b \in R$
 هى دالة خطية فهى متصلة وتحقق : $f(0) = a, f(1) = b$
 وعليه فإن مسار من a إلى b .

مثال (٨ . ٤ . ٨) :

الفضاء المنفصل (X, D) حيث X تحتوى على أكثر من عنصر غير مترابط
 مسارياً لأن أى دالة $f: I \rightarrow X$ تكون غير متصلة والسبب يرجع لكون أن
 المجموعة $\{x\}$ مفتوحة في X ولكن $f^{-1}(\{x\}) = \{0\}$ ليست مجموعة مفتوحة في I .

مثال (٨ . ٤ . ٩) :

الفضاء غير المنفصل X الذى يحتوى على أكثر من عنصر يكون مترابط مسارياً
 لأن أى دالة $f: I \rightarrow X$ تكون متصلة.

نظرية (٨ . ٤ . ١٠) :

كل فضاء مترابط مسارياً يكون مترابط.

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء مترابط مسارياً فإن لكل $x \in X$ يوجد مساراً $f: I \rightarrow X$ حيث $f_x(0) = x_0$; $f_x(1) = x$ وحيث أن I فضاء مترابط (لأن I فترة) ، f دالة متصلة فإن $f_x(I)$ مترابطة لكل $x \in X$. لكن $X = \bigcup_{x \in X} f_x(I)$. وعليه تكون X مترابطة لأنها اتحاد مجموعات مترابطة غير متقاطعة مثنى مثنى .
نظرية (٨ . ٤ . ١١) :

المركبة المسارية $C(x)$ لكل نقطة x في الفضاء التوبولوجي (X, τ) هي أكبر مجموعة مترابطة مسارياً في X تحتوى النقطة x .
البرهان :

بفرض أن A مجموعة مترابطة مسارياً في X وتحتوى النقطة x . بفرض أن $y \in A$ فإنه يوجد مساراً $f: I \rightarrow X$ بحيث أن $f(0) = x$; $f(1) = y$. بفرض أن $i: A \rightarrow X$ هو راسم الاحتواء المعروف بالصورة $i(x) = x$ لكل $x \in A$. والآن نعتبر $g = i \circ f: I \rightarrow X$. فهو دالة متصلة لأن تركيب دالتين متصلتين حيث $g(0) = i \circ f(0) = i(f(0)) = i(x) = x$, $g(1) = i \circ f(1) = i(f(1)) = i(y) = y$ ومن ثم فإن $x \sim y$ أى أن $y \in C(x)$. ومن ذلك نحصل على $A \subseteq C(x)$ أى أن $C(x)$ هو أكبر مجموعة تحتوى x .

والآن نبرهن أن $C(x)$ مترابطة مسارياً ، لذلك نفرض أن $p \in C(x)$ أى أن $p \sim x$. وعليه فإنه يوجد مسار $f: I \rightarrow X$ بحيث أن $f(0) = x$, $f(1) = p$ المطلوب الآن إثبات أن $f(I) \subseteq C(x)$.

Let $r \in I$, $g: I \rightarrow X$ is path , $g(t) = f(rt)$; $\forall t \in I$

$$\Rightarrow g(0) = x ; g(1) = f(1) = p$$

$$\Rightarrow x \sim g(t) \Rightarrow f(x) \subseteq C(x) \Rightarrow f(I) \subseteq C(x)$$

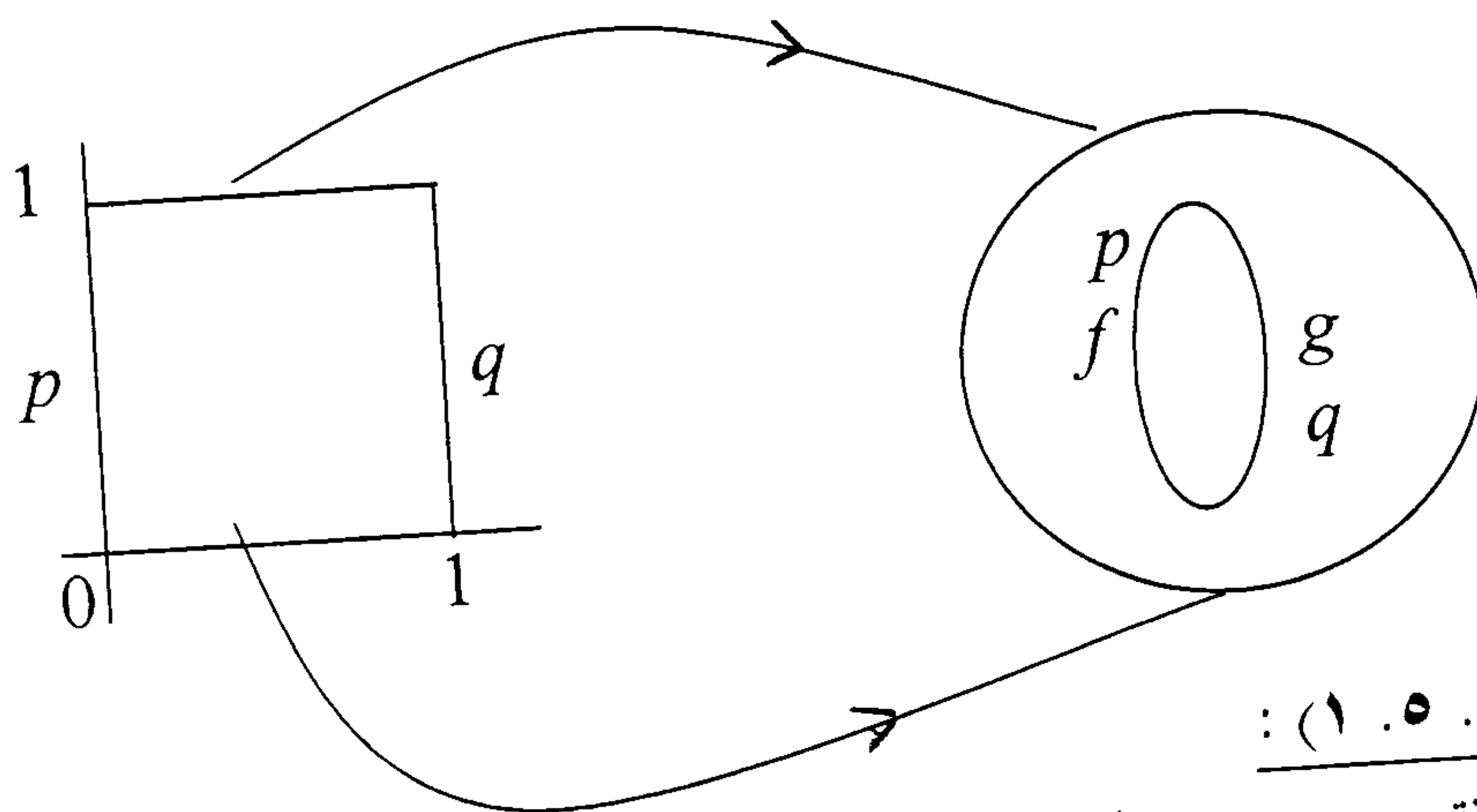
بند (٥) : المسارات المتوافقة توبولوجياً : (Homotopic Paths)

بفرض أن $f, g: I \rightarrow X$ مسارين لهما نفس نقطة البداية $p \in X$ ونقطة النهاية $q \in X$. يقال أن f متوافقة توبولوجياً (Homotopic) مع g ونكتب $f \approx g$ إذا وجد دالة متصلة $H: I^2 \rightarrow X$ بحيث أن

$$H(s, 0) = f(s), \quad H(0, t) = p$$

$$H(s, 1) = g(s), \quad H(1, t) = q$$

في هذه الحالة الدالة H تسمى توافقية (Homotopy) من f إلى g .



نظرية (٨.٥.١) :

العلاقة $\approx$ هي علاقة تكافؤ.

البرهان :

(i) بفرض أن $f: I \rightarrow X$ مساراً اختيارياً فإن $f \approx f$ لأن الدالة $H: I^2 \rightarrow X$ حيث $H(s, t) = f(s)$ دالة توافقية من f إلى f . أي أن $f \approx f$.

(ii) بفرض أن $f \approx g$ ، $H: I^2 \rightarrow X$ دالة توافقية من f إلى g ، فإن الدالة $H: I^2 \rightarrow X$ حيث $H(s, t) = H(s, 1-t)$

دالة توافقية من g إلى f أى أن $g \approx f$.

لتوضيح ذلك :

$$H(s,0)=H(s,1)=g(s)$$

$$H(s,1)=H(s,0)=f(s)$$

$$H(0,t)=H(0,1-t)=p$$

$$H(1,t)=H(1,1-t)=q$$

(iii) بفرض أن $f \approx g$ ، $g \approx h$. الدالة $F:I^2 \rightarrow X$ توافقية من f

إلى g ، الدالة $G:I^2 \rightarrow X$ توافقية من g إلى h ، والآن الدالة

$H:I^2 \rightarrow X$ المعرفة بالصورة :

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & ; \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & ; \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

دالة توافقية من f إلى h أى أن $f \approx h$.

تعريف (٢ . ٥ . ٨) :

المسار $f:I \rightarrow X$ الذى فيه نقطة البداية تتطابق مع نقطة النهاية أى أن

$$f(0)=f(1)=p \text{ يسمى مسار مغلق عند النقطة } p \in X .$$

في الحالة الخاصة ، المسار الثابت $e_p:I \rightarrow X$ حيث $e_p(s)=p$ لكل

$s \in I$ هو مسار مغلق. المسار المغلق $f:I \rightarrow X$ قابل للانكماش

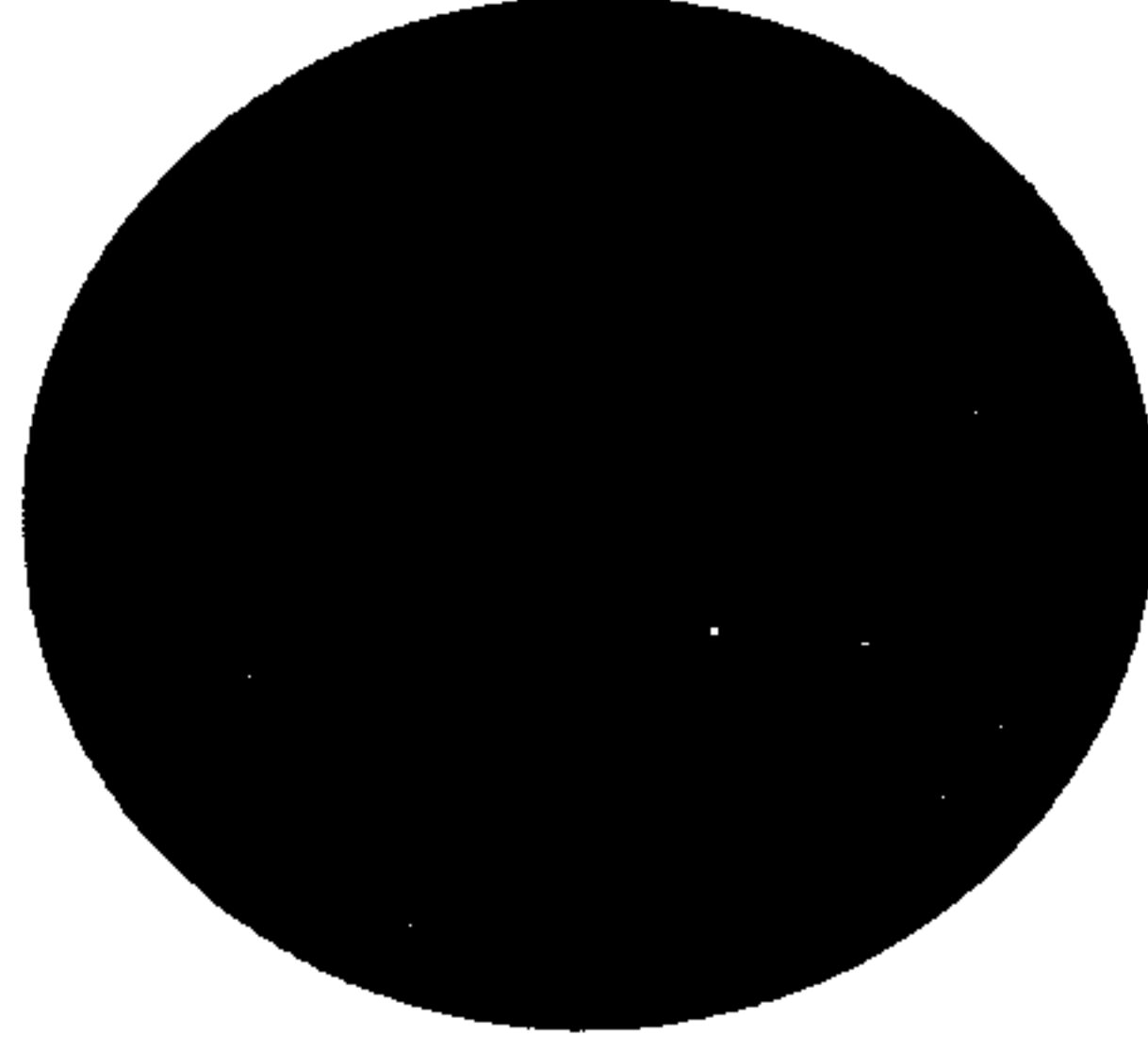
(contractable) عند نقطة إذا كان متوافق مع مسار مغلق.

تعريف (٣ . ٥ . ٨) :

الفضاء التوبولوجي X يسمى بسيط الترابط إذا كان كل مسار مغلق في X

قابل للانكماش لنقطة.

القرص المفتوح في المستوى R^2 بسيط الترابط.



Simply connected

تمارين عامة على الباب الثامن

- (١) بين أن خاصية الترابط ليست وراثية ؟
- (٢) إذا كان (X, τ) فضاء مترابط، $\tau^* \subseteq \tau$. بين أن (X, τ^*) فضاء مترابط ؟
- (٣) إذا كان (X, τ_1) ، (X, τ_2) فضائين مترابطين هل $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ فضاء مترابط ؟
- (٤) إذا كانت Y مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) . برهن أن $\bar{Y}$ تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتين A, B غير خاليتين بحيث يكون $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ، $A \cup B = Y$.
- (٥) صف المجموعات المترابطة في الفضاء التوبولوجي (X, τ) إذا كان τ هو التوبولوجي المنفصل ، τ التوبولوجي غير المنفصل.
- (٦) بين أن الفضاء (X, τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.
- (٧) هل المجموعات الجزئية من الفضاء العادي $(R^2, \mathcal{U})$ الآتية تكون مترابطة :
 $A = \{(x, y) \in R^2, y = 0\}$ ، $B = \{(x, y) \in R^2, x \neq 1\}$
- (٨) أوجد مركبات فضاء النقطة المختارة.
- (٩) إذا كانت C مركبة في الفضاء Y وكانت $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة من

الفضاء X إلى الفضاء Y . أثبت أن $f^{-1}(C)$ هي اتحاد مركبات في الفضاء X .
(١٠) أثبت أن الصورة المتصلة لأي مجموعة جزئية مترابطة مسارياً هي مجموعة مترابطة مسارياً.

(١١) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي، $A \subseteq X$ مجموعة كثيفة في X ومترابطة مسارياً. هل الفضاء (X, τ) مترابط مسارياً.

(١٢) إذا كان (X, τ) فضاء مترابط محلياً، $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة ومفتوحة وشاملة. بين أن الفضاء Y يكون مترابط محلياً.

(١٣) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي، $A, B \subseteq X$ مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A \cup B$ ، $A \cap B$ مجموعتين مترابطتين. بين أن كل من A, B مجموعة مترابطة.

(١٤) إذا كانت A مجموعة جزئية مترابطة في الفضاء (X, τ) . هل A^o ، $b(A)$ مجموعتان مترابطتان أيضاً؟

(١٥) إذا كان (X, τ) فضاء مترابط محلياً. بين أنه إذا كانت Y مجموعة جزئية من X ، C مركبة مترابطة للمجموعة Y فإن $b(C) \subseteq b(Y)$

(١٦) بين أن القرص المفتوح D في المستوى R^2 مترابط مسارياً.

(١٧) عين مركبات فضاء المكملات المنتهية.

(١٨) بين أن الفضاء الغير منفصل بسيط الترابط.

(١٩) بين أن كل مجموعة مفتوحة في الفضاء المترابط محلياً تكون مترابطة محلياً.

(٢٠) بين أن خاصية أن يكون الفضاء بسيط الترابط هي خاصية توبولوجية.

(٢١) بين أنه إذا كان للفضاء التوبولوجي عدد منتهى من المركبات فإن كل مركبة تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في الوقت نفسه.

(٢٢) بين أنه إذا كانت مركبات الفضاء المحكم عبارة عن مجموعات مفتوحة فإن عددها منتهى.

الباب التاسع

فناء حاصل الخرج -

فناء خارج القسم -

الزمرة التوبولوجية

الباب التاسع

فضاء حاصل الضرب - فضاء خارج القسم - الزمرة التوبولوجية

Product space - quotient Space and Topological Group

بند (١) : فضاء حاصل الضرب :

فضاء حاصل الضرب هو بناء توبولوجي على مجموعة حاصل الضرب الديكارتي لعائلة من المجموعات.

تعريف (١.١.٩) :

ليكن لدينا $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ عائلة من المجموعات، فإن مجموعة العناصر $\{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) : x_i \in X_i \forall i \in \Gamma\}$ تسمى مجموعة حاصل الضرب للعائلة $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ ونرمز لها بالرمز $\prod_{i \in \Gamma} X_i$ أي أن :

$$\prod_{i \in \Gamma} X_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) : x_i \in X_i \forall i \in \Gamma\}$$

العنصر $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ عبارة عن i من العناصر المرتبة بحيث انه عند المكان ذي الرتبة i يوجد عنصر من المجموعة X_i . ولبناء مثل هذا العنصر نختار من كل مجموعة X_i عنصراً وحيداً فقط.

المجموعة Γ تسمى مجموعة الدليل وعناصرها مرتبة بطريقة ما وعلى سبيل المثال:

$$\Gamma = \{1, 2, 3, \dots, i, j, k, \dots\}$$

وإذا كانت العائلة $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ مكونة من عدد منتهى من المجموعات $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ فإن :

$$\prod_{i \in \Gamma} X_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) : x_i \in X_i \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

تعريف (٢.١.٩) :

ليكن $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ عنصر من مجموعة حاصل الضرب $\prod_{i \in \Gamma} X_i$ للمجموعات $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$. يسمى العنصر x_i بالركبة i للعنصر x وتسمى المجموعة

X_i بالركبة i للمجموعة $\prod_{i \in \Gamma} X_i$. للاختصار يمكن أن نكتب $(x_i)_{i \in \Gamma}$ بدلا من العنصر $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$.
تعريف (٣ . ١ . ٩) :

لتكن $\prod_{i \in \Gamma} X_i$ مجموعة حاصل الضرب الديكارتي لعائلة المجموعات $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ ،
 X_j المركبة ذات الرتبة j . يسمى الراسم $\text{Pr}_j : \prod_{i \in \Gamma} X_i \rightarrow X_j$ المعروف بالصورة : $\text{Pr}_j(x) = x_j$ أي أن $(x_i)_{i \in \Gamma} \rightarrow x_j$ براسم الإسقاط على المركبة X_j أو راسم الإسقاط ذي الرتبة j .
تعريف (٤ . ١ . ٩) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من $\prod_{i \in \Gamma} X_i$ ، $\text{Pr}_j : \prod_{i \in \Gamma} X_i \rightarrow X_j$ راسم الإسقاط فإن المجموعة $\text{Pr}_j(A)$ تسمى مسقط المجموعة A على المركبة j وهي مجموعه جزئية من المركبة X_j أي أن $\text{Pr}_j(A) \subseteq X_j$. ويجب أن نلاحظ أن $\text{Pr}_j(\prod_{i \in \Gamma} X_i) = X_j$ أي أن راسم الإسقاط دائما شاملة أو غامرة.
بديهية (٥ . ١ . ٩) :

إذا كانت $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ ، $\{Y_i\}_{i \in \Gamma}$ عائلتان من المجموعات بحيث أن $X_i \subseteq Y_i$ فإن :
$$\left(\prod_i X_i \right) \subseteq \left(\prod_i Y_i \right)$$

تعريف (٦ . ١ . ٩) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة حاصل الضرب $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ فإن A تسمى مجموعه جزئية مضلعة إذا أمكن إيجاد عائلة من المجموعات الجزئية $Y_i \subseteq X_i$ بحيث أن :
$$A = \prod_{i \in \Gamma} Y_i$$

بديهية (٧ . ١ . ٩) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_{i \in \Gamma} X_i$ فإن المجموعة $\prod_{i \in \Gamma} \text{Pr}_j(A)$ هي أصغر مجموع جزئية مضلعة من $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$ تحتوي A (أي أن $A \subseteq \prod_{i \in \Gamma} \text{Pr}_j(A)$) حيث $\text{Pr}_j(A)$ مسقط المجموعة A على المركبة X_j . ويجب أن نلاحظ أنه إذا كانت A مجموع جزئية مضلعة من $\prod_i X_i$ فإن

$$A = \prod_{i \in \Gamma} \text{Pr}_j(A)$$

والمثال التالي يوضح أنه إذا كانت A مجموع جزئية من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_i X_i$ فإنه ليس من الضروري أن تكون A مضلعة.

مثال (٨ . ١ . ٩) :

لـتكن $X_1 = \{a, b, c\}$ ، $X_2 = \{x, y, z\}$. وإذا كانت $A = \{(a, x), (c, z)\}$ مجموعة جزئية من $X_1 \times X_2$. وليكن $\text{Pr}_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ حيث $\text{Pr}_1(a, x) = a$ ، $\text{Pr}_1(c, z) = c$ وليكن $\text{Pr}_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ حيث

$$\text{Pr}_2(a, x) = x , \text{Pr}_2(c, z) = z$$

فإن $\text{Pr}_1(A) = \{a, c\}$ ، $\text{Pr}_2(A) = \{x, z\}$ وبالتالي فإن

$$\text{Pr}_1(A) \times \text{Pr}_2(A) = \{(a, x), (a, z), (c, x), (c, z)\} \neq A$$

أي أن A ليست مضلعة.

نظريه (٩ . ١ . ٩) :

إذا كانت $\prod_i A_i$ ، $\prod_i B_i$ مجموعتان جزئيتان مضلعتان من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_i X_i$ فإن :

$$\left(\prod_{i \in \Gamma} A_i\right) \cap \left(\prod_{i \in \Gamma} B_i\right) = \prod_{i \in \Gamma} (A_i \cap B_i)$$

البرهان :

نجد أن

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in \Gamma} &\in \left(\prod_{i \in \Gamma} A_i\right) \cap \left(\prod_{i \in \Gamma} B_i\right) \\ &\Leftrightarrow (x_i)_{i \in \Gamma} \in \left(\prod_{i \in \Gamma} B_i\right), (x_i)_{i \in \Gamma} \in \left(\prod_{i \in \Gamma} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow x_i \in B_i \forall i \in \Gamma, x_i \in A_i \Leftrightarrow x_i \in A_i \cap B_i \\ &\Leftrightarrow (x_i)_{i \in \Gamma} \in \prod_{i \in \Gamma} (A_i \cap B_i) \end{aligned}$$

في الحالة الخاصة

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

الآن لنسني توبولوجي على مجموعة حاصل الضرب لعائلة منتهية من المجموعات

ويرجع الفضل في بناء هذا التوبولوجي إلى العالم فريشيه في عام ١٩١٠.

نظريته (٩ . ١ . ١٠) :

بفرض أن $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ عائلة منتهية من الفضاءات التوبولوجية، فإن العائلة

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n : U_i \in \tau_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

تشكل أساساً لتوبولوجي على مجموعة حاصل الضرب $X = \prod_{i=1}^n X_i$

البرهان :

سوف نبين أن التجمع $\mathcal{B}$ يشكل أساساً لتوبولوجي على $X = \prod_{i=1}^n X_i$.

ولسهولة البرهان نأخذ $n = 2$.

واضح أن $X_1 \in \tau_1, X_2 \in \tau_2$ وبالتالي فإن $X = X_1 \times X_2 \in \tau$. نفرض

أن $(U_1 \times U_2), (V_1 \times V_2) \in \beta$ فإنه من نظريته (٣ . ٢ . ٧) ينتج أن :

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$$

وحيث أن $U_1 \cap V_1 \in \tau_1$ ، $U_2 \cap V_2 \in \tau_2$ فإن

$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \in \mathcal{B}$ وعليه توجد B حيث

$B = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \in \mathcal{B}$ ومن ذلك نجد أن

$$B = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2)$$

من ذلك نجد أن β أساس للتوبولوجي على $X_1 \times X_2$.

ملاحظة : المجموعة $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ حيث $U_i \in \tau_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ تسمى المجموعة الأساسية. وتقاطع مجموعتين أساسيتين هو مجموعة أساسية. نظريه (٩. ١. ١١) :

إذا كان (X_1, τ_1) ، (X_2, τ_2) فضاءيين توبولوجيين ، $\mathcal{B}_1$ أساس للتوبولوجي τ_1 ، $\mathcal{B}_2$ أساس للتوبولوجي τ_2 فإن العائلة :

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_i \times \mathcal{B}_j : \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_j \in \mathcal{B}_2 \}$$

تشكل أساس لتوبولوجي معرف على $X_1 \times X_2$.
البرهان :

نفرض أن G مجموعة مفتوحة في $X_1 \times X_2$ وأن $x = (x_1, x_2) \in G$.
حسب نظريه (٩. ١. ١٠) فإنه يوجد عنصر في الأساس $\mathcal{B}$ وليكن $U \times V$ حيث $U \in \tau_1$ ، $V \in \tau_2$ بحيث تكون $x = (x_1, x_2) \in U \times V \subseteq G$
وحيث أن $U \in \tau_1$ ، $V \in \tau_2$ ، $\mathcal{B}_1$ أساس للتوبولوجي τ_1 وكذلك $\mathcal{B}_2$ أساس للتوبولوجي τ_2 فإنه توجد $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ، $B_2 \in \mathcal{B}_2$ بحيث أن $x_2 \in B_2 \subseteq V$ ، $x_1 \in B_1 \subseteq U$ ومن ثم فإن

$$x = (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq G$$

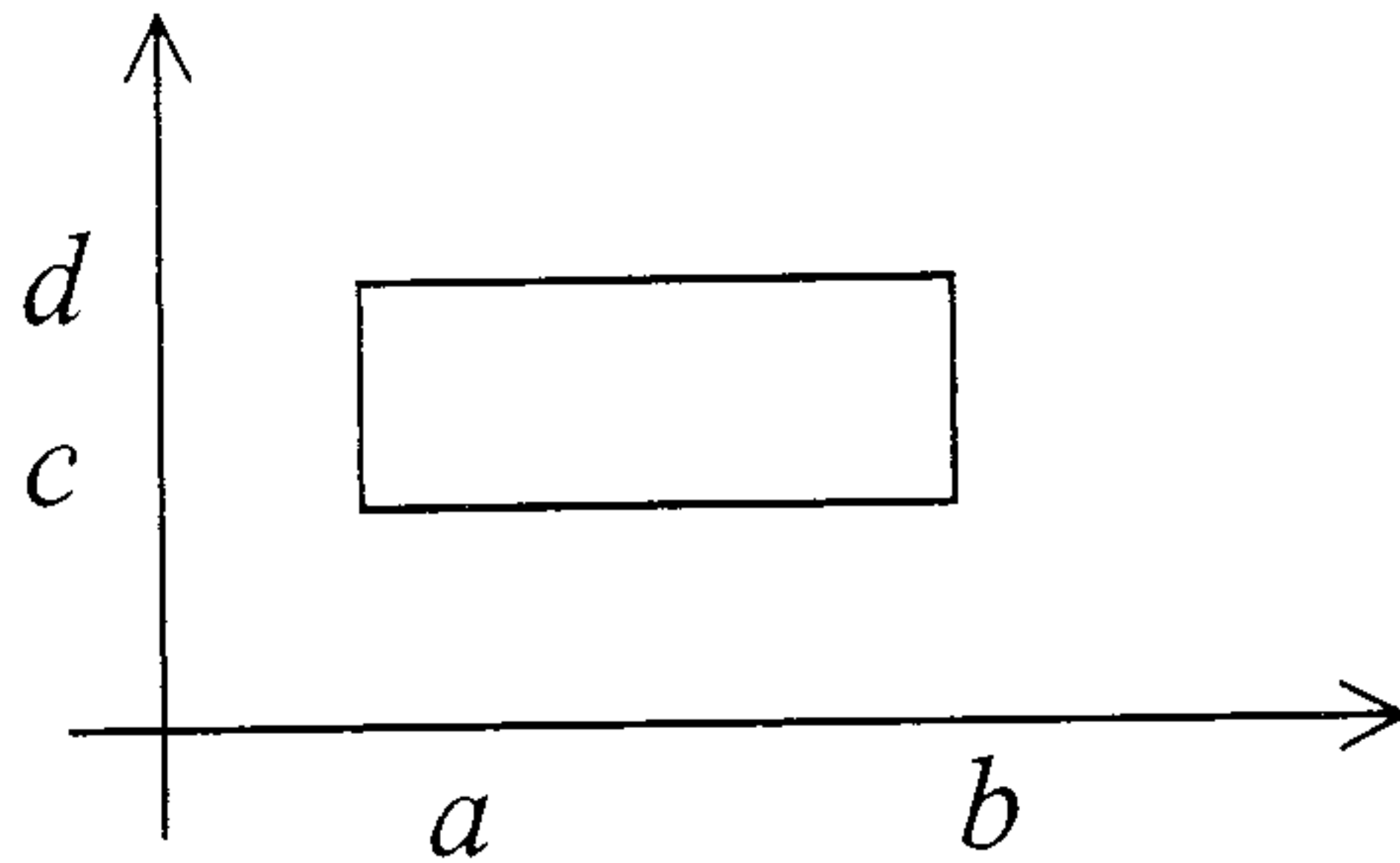
وهذا يؤدي إلى أن $\mathcal{B}$ تشكل أساس للتوبولوجي على $X_1 \times X_2$.

تعريف (٩.١.١٢) :

إذا كانت $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية. يسمى التوبولوجي τ المعرف على المجموعة $X = \prod_{i=1}^n X_i$ والذي أساسه عائلة المجموعات الأساسية من X بتوبولوجي حاصل الضرب أو التوبولوجي الضربي ونرمز له بالرمز $\tau = \prod_{i=1}^n \tau_i$ ويسمى الفضاء التوبولوجي (X, τ) بفضاء حاصل الضرب للفضاءات التوبولوجية $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$.

مثال (٩.١.١٣) :

حيث أن عائلة الفترات المفتوحة في R تشكل أساس للتوبولوجي العادي على R فإن التجمع $B = \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in R\}$ يشكل أساس لتوبولوجي على $R^2 = R \times R$ والذي يسمى التوبولوجي العادي في المستوى الديكارتي R^2 حيث $(a, b) \times (c, d)$ هو المستطيل المفتوح في المستوى الديكارتي.



وعموما فضاء حاصل الضرب الديكارتي $R^n = R \times R \times \dots \times R$ يسمى الفضاء التوبولوجي الحقيقي ذو البعد n حيث أساسه يتكون من كل المجموعات التي على الصورة $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ حيث U_i فترة مفتوحة في R ، $i = 1, 2, \dots, n$. سندرس الآن العلاقة بين فضاء حاصل الضرب الديكارتي ورو اسم الإسقاط.

تعريف (٩. ١. ١٤) :

بفرض أن $\text{Pr}_j : X \rightarrow X_j$ راسم إسقاط أي أن

$$\text{Pr}_j((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_j \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = \prod_{i=1}^n X_i$$

إذا كانت U_j مجموعة مفتوحة في X_j فإن المجموعة:

$$\text{Pr}_j^{-1}(U_j) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{j-1} \times U_j \times X_{j+1} \times \dots \times X_n$$

تسمى المجموعة الأساسية المفتوحة.

لاحظ أن : $\text{Pr}_j^{-1}(G)$ تتكون من كل النقاط $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $\text{Pr}_j(x) \in G$.

نظريه (٩. ١. ١٥) :

بفرض أن $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية ، $X = \prod_{i=1}^n X_i$.

فإن التوبولوجي الضربي على X هو أصغر توبولوجي يجعل كل رو اسم الإسقاط $\text{Pr}_j : X \rightarrow X_j$ متصلة.

البرهان:

بفرض أن τ هو توبولوجي آخر معرف على X بحيث إن كل رو اسم الإسقاط Pr_j تكون متصلة . بفرض أن كل من $U_1, U_2, \dots, U_n$ مجموعة مفتوحة في $X_1, X_2, \dots, X_n$ على الترتيب فإن

$$\text{Pr}_j^{-1}(U_j) \in \tau, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

وحيث أن

$$\text{Pr}_1^{-1}(U_1) \cap \text{Pr}_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \text{Pr}_n^{-1}(U_n) = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$$

فإن المجموعة الأساسية $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ تنتمي إلى τ أي أن τ يحتوي على

التوبولوجي الضربي.

من النظرية السابقة نستنتج أن التوبولوجي الضربي τ المعرفة على $X = \prod_{i=1}^n X_i$ هو التوبولوجي المولد بواسطة τ واسم الإسقاط. ويجب أن نلاحظ أن العائلة:

$$S = \{\text{Pr}_j^{-1}(G_j) : G_j \in \tau_j\}$$

تشكل أساس جزئي للتوبولوجي الضربي ويسمى الأساس الجزئي المعين أو (المحدد).
مثال (٩. ١. ١٦):

نعتبر $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{x, y\}$ ،

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\} , \tau_2 = \{Y, \phi, \{x\}\}$$

(١) أوجد الأساس الجزئي المعين S للتوبولوجي الضربي على $X \times Y$.

(٢) أوجد الأساس المعين B للتوبولوجي الضربي على $X \times Y$.

الحل :

حيث أن $X \times Y = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$ فإن:

$$S = \{\text{Pr}_x^{-1}(G), \text{Pr}_y^{-1}(H) : G \in \tau_1, H \in \tau_2\} \quad (١)$$

$$\text{Pr}_x^{-1}(X) = \text{Pr}_y^{-1}(Y) = X \times Y$$

$$\text{Pr}_x^{-1}(\phi) = \text{Pr}_y^{-1}(\phi) = \phi$$

$$\text{Pr}_x^{-1}(\{a\}) = \{(a, x), (a, y)\}$$

$$\text{Pr}_x^{-1}(\{b, c\}) = \{(b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

$$\text{Pr}_y^{-1}(\{y\}) = \{(a, y), (b, y), (c, y)\}$$

$$S = \{X \times Y, \{(a, x), (a, y)\}, \{(b, x),$$

$$(b, y), (c, x), (c, y)\}, \{(a, y), (b, y), (c, y)\}\}$$

(٢) الأساس المعين B يتكون من كل التقاطعات المنتهية لعناصر S

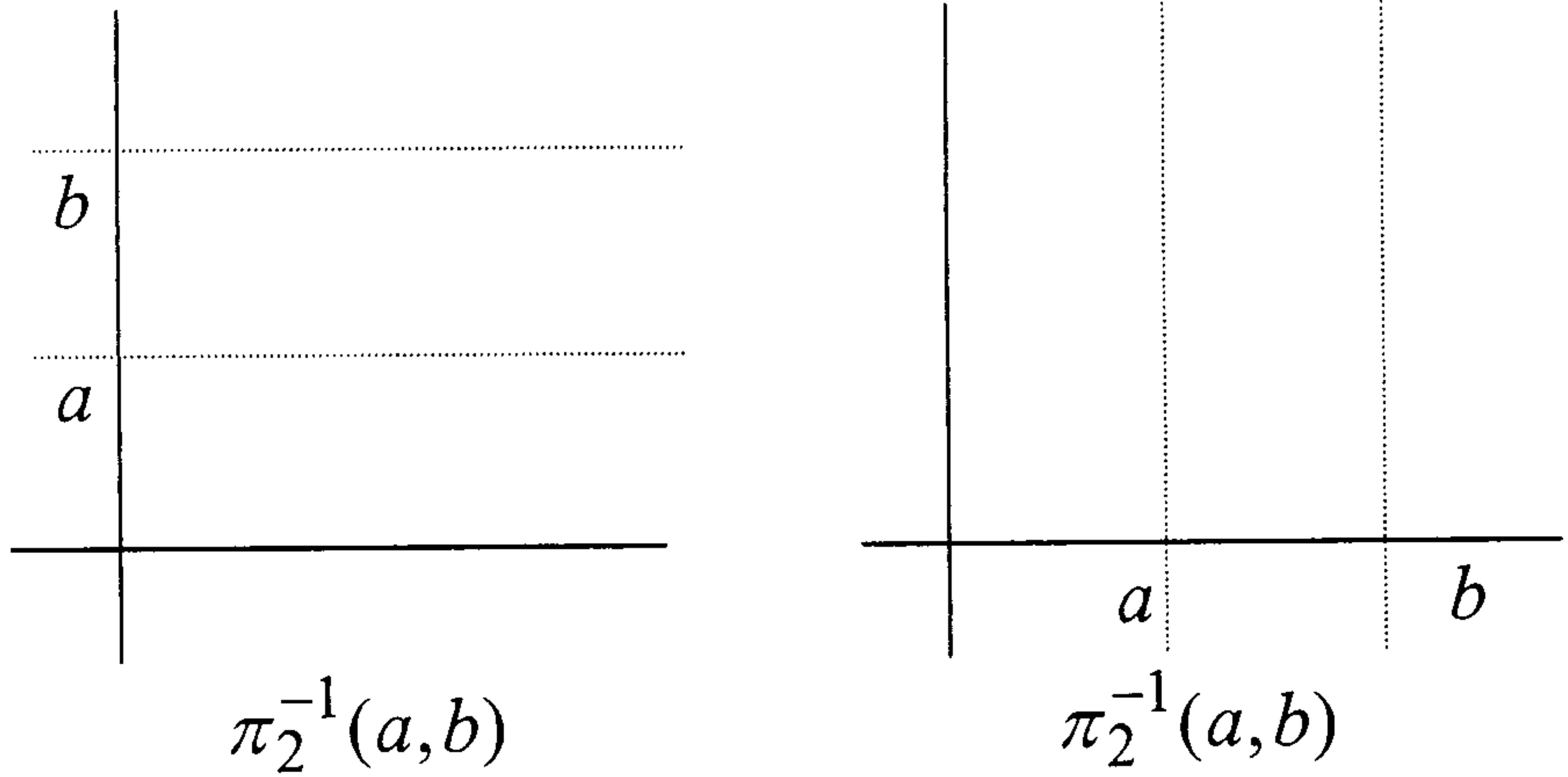
$$\mathcal{B} = \{X \times Y, \phi, \{(a, x), (a, y)\}, \{(b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}, \{(a, y), (b, y), (c, y)\}, \{(a, y)\}, \{(b, y), (c, y)\}\}$$

مثال (٩ . ١ . ١٧) :

في المستوى الديكارتي $R^2 = R \times R$

$$\text{Pr}_1 : R \times R \rightarrow R, \text{Pr}_2 : R \times R \rightarrow R$$

الأساس الجزئي المعين $\mathcal{S} = \{\text{Pr}_1^{-1}(a, b), \text{Pr}_2^{-1}(a, b)\}$



ولذلك فإن التوبولوجي العادي على R^2 هو التوبولوجي المولد بواسطة رو اسم الإسقاط من R^2 إلى R .

نظريه (٩ . ١ . ١٨) :

الدالة $f : Y \rightarrow X$ من الفضاء التوبولوجي Y إلى الفضاء الضربي

$X = \prod_{i=1}^n X_i$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان لكل راسم إسقاط

$\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ فإن $\text{Pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ دالة متصلة.

البرهان :

من تعريف الفضاء الضربي كل رو اسم الإسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ متصلة .

لذلك إذا كانت $f : Y \rightarrow X$ دالة متصلة فإن $\text{Pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ دالة متصلة أيضا لأن تحصيل دالتين متصلتين هو دالة متصلة.

من جانب آخر، نفرض أن $\text{Pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ دالة متصلة لكل i . المطلوب إثبات أن f دالة متصلة، لذلك نفرض أن G مجموعه مفتوحة في X_i حيث $G = P_i^{-1}(G_i)$ ، G_i مفتوحة في X_i وبما أن $\text{Pr}_i \circ f$ دالة متصلة فإن

$$(\text{Pr}_i \circ f)^{-1}(G_i) = f^{-1}(\text{Pr}_i^{-1}(G_i)) = f^{-1}(G)$$

مجموعة مفتوحة في Y ، لأن العائلة :

$$\mathcal{S} = \{\text{Pr}_i^{-1}(G_i) : G_i \text{ is open in } X_i\}$$

أساس جزئي معين للتوبولوجي الضربي على X ، فإنه ينتج من ذلك أن $f^{-1}(\text{Pr}_i^{-1}(G_i))$ مجموعه مفتوحة في Y لكل i وبالتالي فإن f دالة متصلة.

بديهية (٩.١.٩) :

بفرض أن B عنصر من عناصر الأساس المعين للتوبولوجي الضربي على $X = \prod_{i=1}^n X_i$ فإن صورة B بواسطة راسم الإسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ تكون مجموعة مفتوحة.

البرهان :

بفرض أن B عنصر من عناصر الأساس المعين للتوبولوجي الضربي على X فإن

$$B = \prod \{X_i : i \neq j_1, \dots, j_m\} \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \dots \times G_{j_m}$$

حيث G_{j_k} مجموعه مفتوحة في X_{j_k} . لذلك فإنه لأي راسم إسقاط

$$\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$$

$\text{Pr}_i(B) = X_i$ إذا كانت $i \neq j_1, \dots, j_n$ ، $\text{Pr}_i(B) = G_i$ إذا كانت $i = j_1, \dots, j_n$ وفي كلتا الحالتين فإن $\text{Pr}_i(B)$ مجموعه مفتوحة.

نظريه (٢٠ . ١ . ٩) :

كل راسم إسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ من الفضاء الضربي $X = \prod_{i=1}^n X_i$ إلى الفضاء X_i يكون مفتوح ومتصل.

البرهان :

حسب تعريف الفضاء الضربي فإن كل راسم إسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ يكون متصل . سوف نبين فقط أن Pr_i يكون مفتوح . لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في X فإنه ينتج من تعريف الأساس المعين للتوبولوجي الضربي أنه لكل $p \in G$ يوجد عنصر B من الأساس المعين بحيث أن $p \in B \subseteq G$ ولذلك فإنه لأي راسم إسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ تكون $\text{Pr}_i(p) \in \text{Pr}_i(B) \subseteq \text{Pr}_i(G)$ ومن البديهية السابقة نجد أن $\text{Pr}_i(G)$ مجموعه مفتوحة . أو بصورة أخرى ، لكل $\text{Pr}_i(p)$ تنتمي إلى $\text{Pr}_j(G)$ وهي مجموعه مفتوحة محتواة في $\text{Pr}_j(G)$ وهو المطلوب .

نتيجة (٢١ . ١ . ٩) :

التوبولوجي الضرب هو أضعف توبولوجي على المجموعة $X = \prod_{i=1}^n X_i$ تكون من أجلها رو اسم الإسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ متصلة .

والآن لندرس بعض من الخواص التوبولوجية في فضاء حاصل الضرب.

نظريه (٢٢ . ١ . ٩) :

إذا كانت $A = \prod_i A_i$ مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء الضربي $\prod X_i$ فإن

$$(i) \quad \overline{A} = \prod_i \overline{A_i}$$

$$(ii) \quad \forall i \quad A_i \text{ مغلقة} \Leftrightarrow A \text{ مغلقة}$$

(i) نفرض أن $x = (x_i)_i \in \bar{A}$ وحيث أن $\text{Pr}_i : X \rightarrow \bar{X}_i$ دالة متصلة فإنه ينتج من نظريته (١١.٤.١) أن

$$x_i = \text{Pr}_i(x) \in \text{Pr}_i(\bar{A}) \subseteq \overline{\text{Pr}_i(A)} = \bar{A}_i.$$

ومن ذلك نستنتج أن $x \in \prod_i \bar{A}_i$ أي أن $\bar{A} \subseteq \prod_i \bar{A}_i$

ولإثبات أن $\prod_i \bar{A}_i \subseteq \bar{A}$ نفرض أن $x \notin \bar{A}$ وهذا يؤدي إلى أنه توجد مجموعة

مفتوحة تحتوي x ولا تتقاطع مع A أي توجد مجموعته أساسية $G = \prod_i G_i$

تحتوي x ولا تتقاطع مع A (أي أن $A \cap G = \emptyset$) وهذا يعني أنه توجد مركبه

G_i للمجموعة G بحيث أن $A_i \cap G_i = \emptyset$ وبالتالي فإن $x_i \notin \bar{A}_i$ أي أن

$x \notin \prod_i \bar{A}_i$ وهو المطلوب.

(ii) من (i) نستنتج أن : $A_i = \bar{A}_i \Leftrightarrow \prod_i A_i = \prod_i \bar{A}_i \Leftrightarrow A = \bar{A}$

نظريته (١١.٩.٢٣) :

بفرض أن (X_i, τ_i) فضاء- T_2 لكل i ، فإن $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n \tau_i)$ يكون أيضاً

فضاء- T_2 .

البرهان :

نفرض أن $p = (a_i)_{i=1}^n \in \prod X_i = X$ ، $q = (b_i)_{i=1}^n$ حيث

$p \neq q$ ، فإنه توجد j_0 حيث أن $a_{j_0} \neq b_{j_0}$ أي أن p, q يجب أن تختلف

عند مركبة واحدة على الأقل وهي j_0 . وحيث أن X_{j_0} فضاء- T_2 فإنه توجد

مجموعتان مفتوحتان G, H في X_{j_0} بحيث يكون

$$G \cap H = \emptyset , b_{j_0} \in H , a_{j_0} \in G$$

من تعريف فضاء حاصل الضرب فإن راسم الإسقاط $\text{Pr}_{j_0} : X \rightarrow X_{j_0}$ يكون

متصل وعليه فإن $\text{Pr}_{j_0}^{-1}(G), \text{Pr}_{j_0}^{-1}(H)$ مجموعات مفتوحة في X وتحقق

$$\text{حيث } \text{Pr}_{j_0}^{-1}(G) \cap \text{Pr}_{j_0}^{-1}(H) = \text{Pr}_{j_0}^{-1}(G \cap H) = \phi$$

$$. T_2 \text{ -فضاء } X \text{ أي أن } q \in \text{Pr}_{j_0}^{-1}(H), p \in \text{Pr}_{j_0}^{-1}(G)$$

نظريه (٢٤ . ١ . ٩) :

متتابعة النقاط $p_1, p_2, \dots$ في الفضاء الضربي $X = \prod_i X_i$ تتقارب إلى النقطة

$q \in X$ إذا وفقط إذا كان لكل راسم إسقاط $\text{Pr}_i : X \rightarrow X_i$ فإن المتتابعة

$\dots, \text{Pr}_i(p_2), \text{Pr}_i(p_1)$ تتقارب إلى النقطة $\text{Pr}_i(q)$ في الفضاء X_i .

البرهان :

أولا : نفرض أن $p_n \rightarrow q$. حيث أن كل رواسم الإسقاط متصلة فإن

$$\text{Pr}_i(p_n) \rightarrow \text{Pr}_i(q)$$

ثانيا : بفرض أن $\text{Pr}_i(p_n) \rightarrow \text{Pr}_i(q)$ لكل راسم إسقاط Pr_i .

لكي نثبت أن $p_n \rightarrow q$ يكفي أن نثبت أنه إذا كانت B عنصر من عناصر

الأساس المعين للتوبولوجي الضربي $X = \prod X_i$ فإن B تحتوي q أي أن

$$\exists n_0 \in N \text{ such that } n > n_0 \Rightarrow p_n \in B$$

من تعريف الأساس المعين فإن

$$B = \text{Pr}_{j_1}^{-1}(G_{j_1}) \cap \text{Pr}_{j_2}^{-1}(G_{j_2}) \cap \dots \cap \text{Pr}_{j_m}^{-1}(G_{j_m})$$

حيث G_{j_k} مجموعه مفتوحة في الفضاء X_{j_k} . لكن $q \in B$ فإن

$$\text{Pr}_{j_k}(q) \in \text{Pr}_{j_k}(B)$$

ومن الفرض $\text{Pr}_{j_1}(p_n) \rightarrow \text{Pr}_{j_1}(q)$ وبالتالي لكل $i = 1, 2, \dots, m$ فإن

$$\exists n_i \in N, n > n_i \Rightarrow \text{Pr}_{j_1}(p_n) \in G_{j_1} \Rightarrow p_n \in \text{Pr}_{j_1}^{-1}(G_{j_1})$$

$$\text{وبأخذ } n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$$

$$\text{Pr}_{j_1}^{-1}(G_{j_1}) \cap \text{Pr}_{j_2}^{-1}(G_{j_2}) \cap \dots \cap \text{Pr}_n^{-1}(G_{j_m}) = B$$

$$. p_n \rightarrow q \text{ تكون } n > n_o \Rightarrow P_n \in B$$

بديهية (٢٥ . ١ . ٩) :

بفرض أن Y فضاء توبولوجي ، B أساس للفضاء Y . إذا كان أي غطاء مفتوح للمجموعة Y من عناصر B يحتوي على غطاء جزئي مفتوح فإن Y فضاء محكم .

البرهان :

بفرض أن $g = \{U_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y . لكل $y \in Y$ ، نختار $V_y \in \beta$ بحيث أن $y \in V_y \subseteq U_i$. العائلة $\{V_y : y \in Y\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y بواسطة عناصر B . من الفرض يوجد غطاء جزئي منتهى $Y = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$ أي أن $V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}$ وحيث أن $V_{y_i} \subseteq U_i$ لكل i ، فإننا نحصل على عدد منتهى من المجموعات $U_1, U_2, \dots, U_n$ والتي تكون غطاء للمجموعة Y ، ومن ثم فإن Y محكم .
نظريه (٢٦ . ١ . ٩) :

إذا كانت الفضاءات $X_1, X_2, \dots, X_n$ محكمه ، فإن $X = \prod_{i=1}^n X_i$ فضاء

محكم أيضاً .

البرهان :

يكفي أن نثبت النظرية عندما $n = 2$ ولذلك نعتبر $X = X_1 \times X_2$. نفرض

$$g = \{U \times V : U \in \tau_1 \text{ and } V \in \tau_2\} \quad \text{أن}$$

غطاء مفتوح للمجموعة X حيث U, V مجموعات مضلعة. من بديهية (٩. ١. ٢٥)،
يكفي أن نبين أن g يحتوي على غطاء جزئي منتهى. لذلك نفرض أن $x \in X_2$
وبالتالي فإن الشريحة $X_1 \times \{x\}$ تكون محكمة. وبالتالي فإنه يوجد عدد منتهى من
المجموعات $(U_1 \times V_1), \dots, (U_m \times V_m)$ ، والتي تغطي $X_1 \times \{x\}$ نفرض أن
 $x \in V_j$ لكل $1 \leq j \leq m$ فإن $V(x) = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m$

مجموعة مفتوحة في X_2 تحتوي x ، كذلك $\text{Pr}_2^{-1}(V(x))$ تغطي بعدد منتهى من
عناصر g وهي $U_j \times V_j$ حيث $1 \leq j \leq m$. العائلة $\{V(x) : x \in X_2\}$
غطاء مفتوح للمجموعة X_2 وحيث أن X_2 فضاء محكم، فإنه توجد
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in X_n$ بحيث أن

$$X_2 = V(x_1) \cup V(x_2) \cup \dots \cup V(x_n)$$

ومن ذلك نجد أن $X = \text{Pr}_2^{-1}(V(x_1)) \cup \dots \cup \text{Pr}_2^{-1}(V(x_n))$

وحيث أن كل مجموعة $\text{Pr}_2^{-1}(V(x_j))$ مغطاة بعدد منتهى من عناصر g فإن g
تحتوي على غطاء جزئي منتهى.

نظريه (٩. ١. ٢٧) : (Tychonoff Theorem)

إذا كانت $X = \prod_i X_i$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية، فإن X تكون

محكمة إذا وفقط إذا كانت جميع المركبات X_i محكمة.

نظريه (٩. ١. ٢٨) :

ضرب الفضاءات المترابطة يكون فضاء مترابط.

البرهان :

نفرض أن X_i فضاءات مترابطة.

(١) إذا كانت $\Gamma = 1, 2$ منتهية

نفرض أن $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$ نقطتين في فضاء حاصل الضرب $X_1 \times X_2$. حيث أن $\{x_1\} \times X_2 \cong X_2$ ، فإن $\{x_1\} \times X_2$ مجموعة مترابطة، كذلك $X_1 \times \{y_2\}$ مجموعة مترابطة. وحيث أن

$$\{x_1\} \times X_2 \cap X_1 \times \{y_2\} = \{(x_1, y_2)\} \neq \emptyset$$

$(\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{y_2\})$ مجموعة مترابطة لأن النقطتين p, q تنتميان إلى نفس المركبة. وحيث أن p, q اختيارية فإن $X_1 \times X_2$ له مركبة واحدة وبالتالي فإن $X_1 \times X_2$ فضاء مترابط.

(٢) إذا كانت Γ غير منتهية.

نفرض أن $p = (a_i)_{i \in \Gamma} \in X$ ، $E \subset X$ مركبة p . سوف نبين أن كل نقطة $\dot{x} = (x_i)_{i \in \Gamma} \in X$ تحقق أن $x \in \bar{E}$ وبالتالي فإن $x \in E$ لأن E مغلقة.

$$\text{بفرض أن } G = \prod \{X_i : i \neq i_1, i_2, \dots, i_m\} \times G_{i_1} \times \dots \times G_{i_m}$$

مجموعة أساسية حيث $x \in G$. الآن المجموعة

$$H = \prod \{\{a_i\} : i \neq i_1, i_2, \dots, i_m\} \times X_{i_1} \times \dots \times X_{i_m}$$

$$\cong X_{i_1} \times \dots \times X_{i_m}$$

وبالتالي فإن H مترابطة. بالإضافة إلى ذلك حيث أن $p \in H$ ، فإن $H \subseteq E$

(لأن E مركبة p). لكن $G \cap H \neq \emptyset$ من ذلك نجد أن G تحتوي على الأقل نقطة من E ، أي أن $x \in \bar{E} = E$. ومن ثم فإن X لها مركبة واحدة فهي مترابطة.

نظرية (٩. ١. ٢٩) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي فإن (X, τ) فضاء T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ المجموعة $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ مجموعة مغلقة في فضاء حاصل الضرب $X \times X$.

البرهان :

أولاً : نفرض أن (X, τ) فضاء- T_2 ونبرهن على أن Δ مجموعة مغلقة في الفضاء $X \times X$. نفرض $(x, y) \in \Delta^c$. إذاً $(x, y) \notin \Delta$ وعليه فإن $x \neq y$. وبالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن $U \cap V = \emptyset, y \in V, x \in U$.

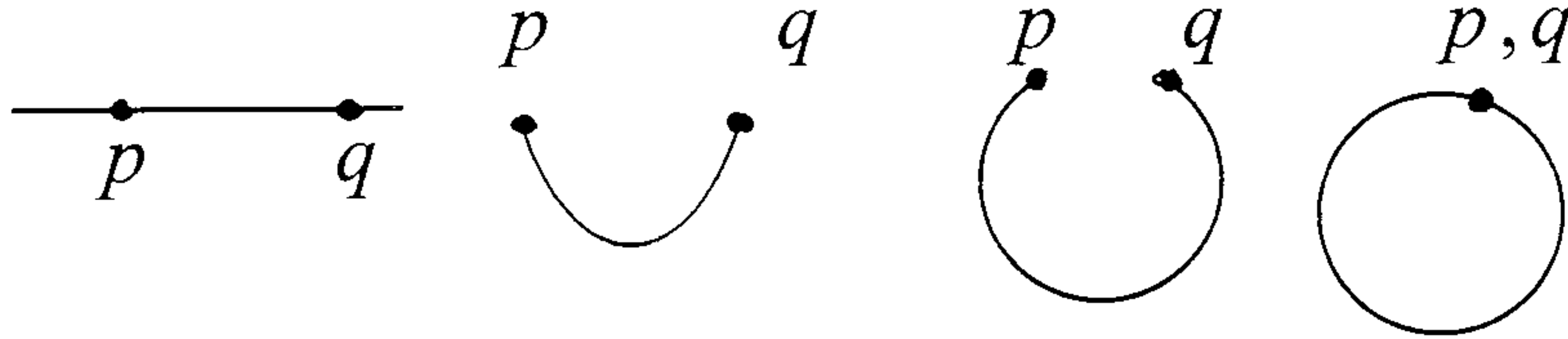
ولكن $U \times V$ مجموعة مفتوحة في فضاء حاصل الضرب $X \times X$ حيث $(x, y) \in U \times V, (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ ومنها نجزم أن : $(x, y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$. وعليه فإن $\Delta^c = \cup \{U \times V : (x, y) \in \Delta^c\}$. إذاً Δ^c مجموعة مفتوحة وهو المطلوب.

ثانياً : نفرض أن Δ مجموعة مغلقة ، $(x, y) \notin \Delta$ وحيث أن Δ^c مجموعة مفتوحة تحتوي (x, y) في فضاء حاصل الضرب $X \times X$ وبالتالي توجد مجموعة $U \times V$ من أساس توبولوجي حاصل الضرب بحيث يكون : $(x, y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$ من ذلك نحصل على : $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset, x \in U, y \in V$ أي أن $U \cap V = \emptyset$ ومن ثم فإن (X, τ) فضاء- T_2 .

بند (٢) : فضاء القسمة : (Quotient Space)

من المعلوم انه إذا كانت $\sim$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة غير الخالية X فإن هذه العلاقة تجزئ X إلى مجموعات جزئية (فصول تكافؤ) غير متقاطعة متنى متنى ، والعكس إذا كانت المجموعة P تجزئاً للمجموعة X فإن P تعين علاقة تكافؤ على X تكون فصول تكافؤها مطابقة لعناصر التجزئ P وهذه العلاقة تعرف إذا اعتبرنا أي عنصرين من عناصر التجزئ P يكونا متكافئين إذا كان يقعان في فصل واحد.

دعنا الآن نسوق لك المثال التالي، بفرض أن X قطعه مستقيم ، p, q هما نقطتي البداية والنهاية للمجموعة X ، نعرف علاقه تكافؤ على X بحيث أن p, q نقطتين متكافئتين بينما النقاط الباقية من X كلاً منها تكافئ نفسها.



المجموعة $X / \sim = Y$ تسمى مجموعة القسمة وتتألف من فصل التكافؤ $\{p, q\}$ ومن جميع الفصول $\{x\}$ حيث $x \neq a, b$ ، وبالتالي فإن المجموعة Y نحصل عليها من المجموعة X وذلك بان تنطبق النقطتان p, q على بعضهما والنقاط الباقية تظل كما هي ، ومن ثم نحصل على الدائرة من قطعه المستقيم بان تنطبق نقطتي البداية والنهاية لهذه القطعة.

عائله فصول التكافؤ $X / \sim$ تسمى مجموعة القسمة مقياس علاقة التكافؤ $\sim$. يوجد راسم إسقاط طبيعي $\pi : X \rightarrow X / \sim$ بحيث أن $\pi(x)$ هو فصل التكافؤ الممثل بالعنصر x أي أن $\pi(x) = [x]$ وبالتالي فإن π هو الراسم الذي يدخل كل عنصر x في فصل التكافؤ $[x]$ (راجع بند (٤) الباب الأول).

والآن إذا كان X فضاء توبولوجي ، ما هو التوبولوجي المعرف على المجموعة $X / \sim$ ؟ . في الحقيقة نستعين بالتوبولوجي τ المعرف على المجموعة X في إعطاء توبولوجي على المجموعة $X / \sim$ بحيث يكون الراسم $\pi : X \rightarrow X / \sim$ متصل. هذا يقودنا إلى تعريف فضاء القسمة.

تعريف (٩ . ٢ . ١) :

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي ، $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة X ، $\pi : X \rightarrow X / \sim$ راسم إسقاط طبيعي . يسمى أقوى توبولوجي على مجموعة

القسمة $X/\sim$ يجعل الراسم π متصل بتوبولوجى القسمة (Quotient topology) ويرمز له بالرمز $\tau/\sim$ ويسمى الزوج $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء القسمة (Quotient space).

من هذا التعريف يتضح لنا إن عائلة المجموعات المفتوحة Q في فضاء القسمة التي صورها العكسية بواسطة π تكون على الصورة:

$$Q = \{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$$

والآن نبرهن على أن العائلة Q تطابق توبولوجى القسمة $\tau/\sim$ المعروف على المجموعة $X/\sim$.

نظريته (٢. ٢. ٩):

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى ، $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة X ،
 $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء القسمة فإن $\tau/\sim = Q$.

البرهان :

من السهل إثبات أن Q تشكل توبولوجى على مجموعة القسمة $X/\sim$.
 ومن تعريف Q نستنتج إن الراسم π متصل. لإثبات أن Q هو أقوى توبولوجى يجعل π متصل، نفرض أن τ^* هو توبولوجى آخر على المجموعة $X/\sim$ يجعل الراسم π متصل. إذا كانت $U \in \tau^*$ فإن $\pi^{-1}(U) \in \tau$ لأن π متصل ، ومن تعريف Q نجد أن $U \in Q$ وهذا يؤدي إلى أن $\tau^* \subseteq Q$ ومن ثم فإن Q هو أقوى توبولوجى على المجموعة $X/\sim$ وبذلك نكون قد أثبتنا أن $\tau/\sim = Q$.

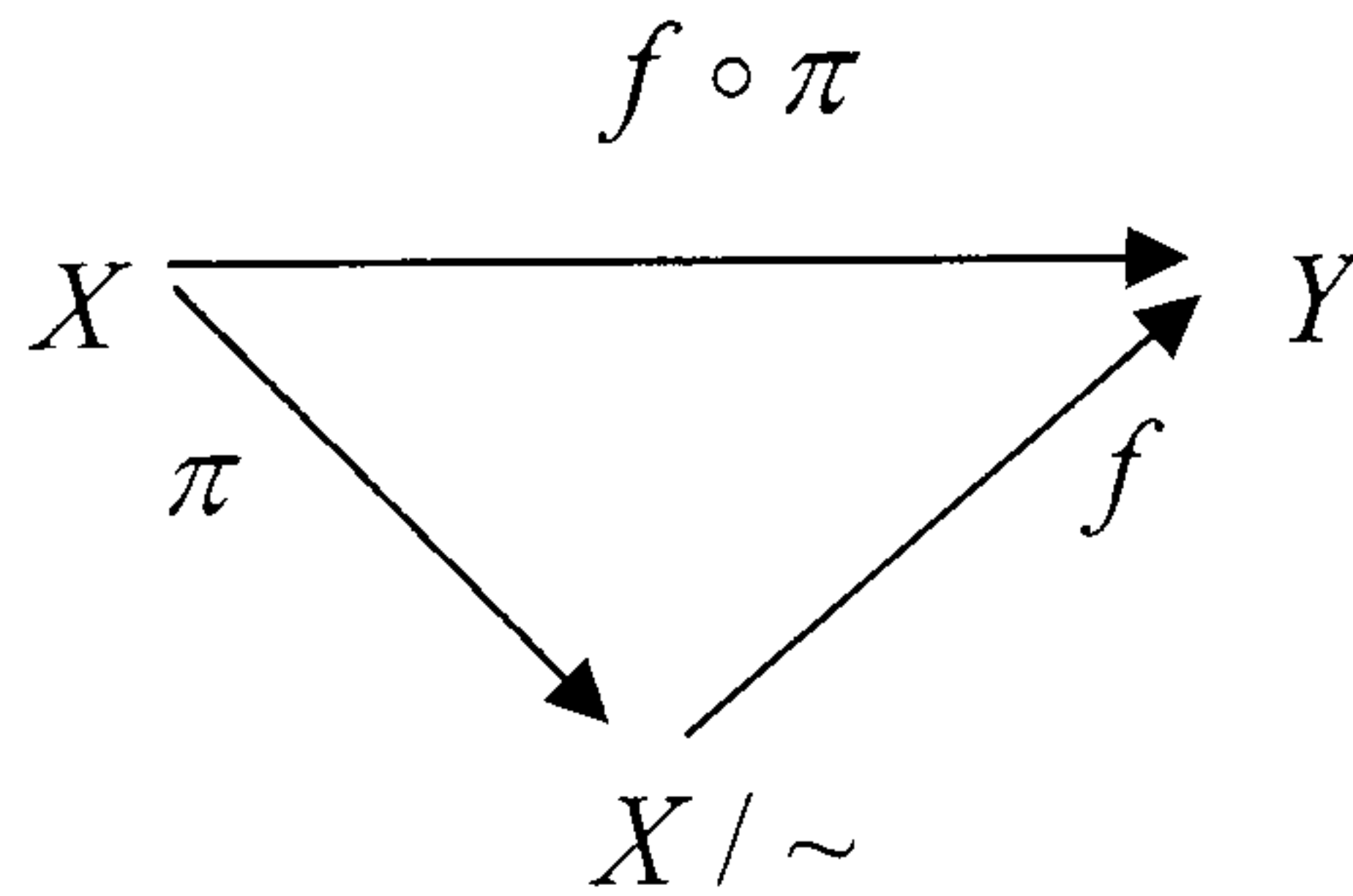
نتيجة (٣. ٢. ٩) :

المجموعة الجزئية U تكون مفتوحة في فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية $\pi^{-1}(U)$ مفتوحة في الفضاء (X, τ) . كذلك المجموعة الجزئية F تكون مغلقة في فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ إذا وفقط إذا

كانت الصورة العكسية $\pi^{-1}(F)$ مغلقه في الفضاء (X, τ) .

نظريه (٩ . ٢ . ٤) :

بفرض أن X فضاء توبولوجي ، $\sim$ علاقة تكافؤ على X ، $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ،
راسم إسقاط ، فإن الدالة $f : X/\sim \rightarrow Y$ من فضاء القسمة إلى الفضاء Y تكون
متصلة إذا وفقط إذا كانت $f \circ \pi$ دالة متصلة.



البرهان :

حيث أن محصله دالتين متصلتين هي دالة متصلة، فإذا كانت f دالة متصلة فإن
 $f \circ \pi$ متصلة أيضا. والعكس، نفرض أن $f \circ \pi$ دالة متصلة وان U مجموعة
مفتوحة في الفضاء التوبولوجي Y ، لكن $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$
أي أن $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X . وحيث أن π راسم متصل فإن
 $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي $X/\sim$ وهذا يعني أن f دالة
متصلة.

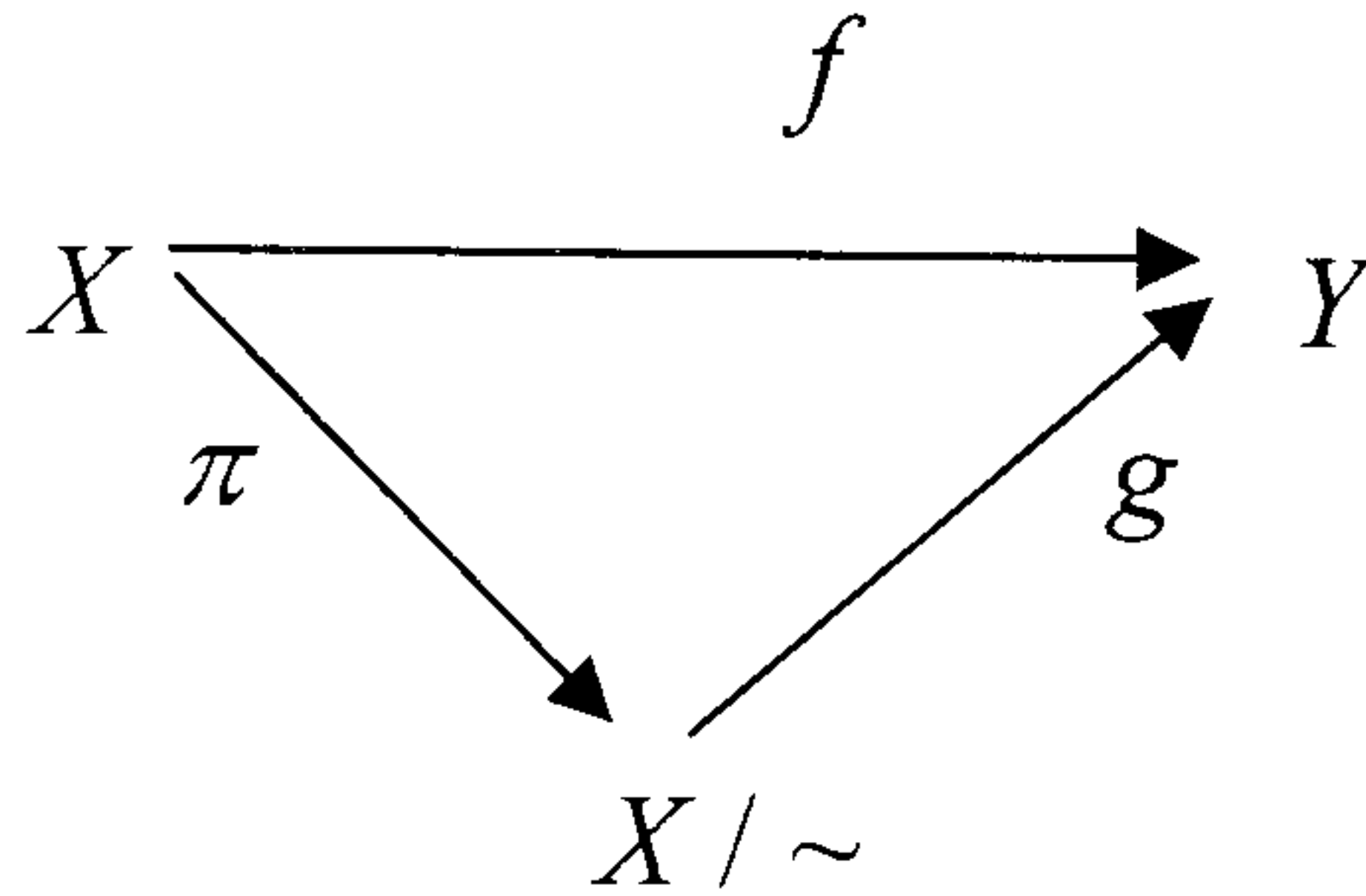
ملاحظة (٩ . ٢ . ٥) :

كما سبق نستنتج انه إذا كانت $X/\sim$ مجموعة القسمة حيث $\sim$ علاقة تكافؤ
معروفة على الفضاء التوبولوجي X فإن عناصر المجموعة $X/\sim$ هي فصول التكافؤ
وكل فصل هو عبارة عن مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X ولكنه عنصر
واحد في فضاء القسمة.

نظريه (٦. ٢ . ٩):

بفرض أن $f : X \rightarrow Y$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y ، إذا كانت $\sim$ علاقة تكافؤ على X بحيث تكون f دالة ثابتة على كل فصل تكافؤ. فإنه توجد دالة $g : X/\sim \rightarrow Y$ بحيث أن $f = g \circ \pi$

البرهان :



نعرف الدالة $g : X/\sim \rightarrow Y$ بالصورة : $g([x]) = f(x)$

وبذلك تكون الدالة g معرفة بحيث أن $f = g \circ \pi$ ومن نظريه (٤ . ٢ . ٩)

تكون g دالة متصلة.

نظريه (٧. ٢ . ٩)

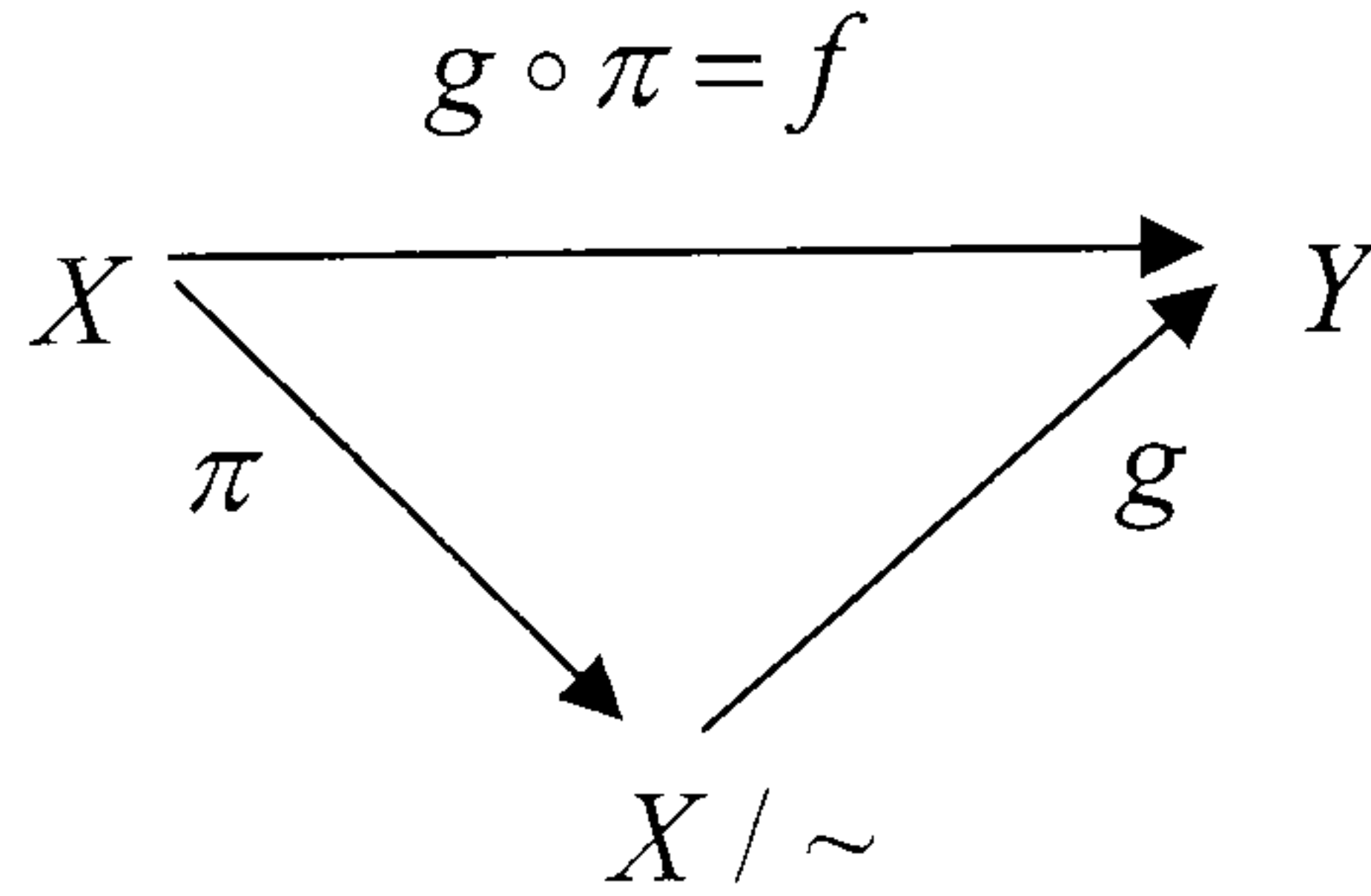
إذا كان كل من X, Y فضاء محكم وفضاء T_2 ، $f : X \rightarrow Y$ دالة شاملة ومتصلة. نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على X بالصورة :

$$p \sim q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$$

فإن $X/\sim \cong Y$.البرهان :

حيث أن $X/\sim$ هو صورة الفضاء المحكم X بواسطة راسم الإسقاط الطبيعي $\pi : X \rightarrow X/\sim$ المتصل ، فإن $X/\sim$ فضاء محكم. بفرض أن

$g : X/\sim \rightarrow Y$. دالة متصلة تحقق : $g \circ \pi = f$.



من ذلك نجد أن g دالة أحادية ومتصلة ومن ثم فإن g دالة توبولوجية ، وعليه يكون $X/\sim \cong Y$.

كتطبيق على هذه النظرية نسوق لك المثال التالي:

مثال (٨. ٢. ٩):

نعتبر الفضاء الجزئي $Y = [0,1]$ من الفضاء العادي R . نعرف علاقة التكافؤ

$\sim$ بالصورة : العنصرين $0,1$ متكافئين وأي عنصر مختلف عن $0,1$ يكافئ نفسه.

أي أن : $0 \sim 1 ; x \sim x , \forall x \neq 0,1$

من ذلك نجد أن $Y = [0,1]/\sim$ وتتكون من فصول التكافؤ $\{0,1\}$ وكل الفصول التي على الصورة $\{x\}$ حيث $0 < x < 1$ أي أن فضاء القسمة الناتج تنطبق فيه النقطتان $0,1$ وتبقى النقاط الأخرى كما هي

والآن نعتبر الدالة : $f : [0,1] \rightarrow S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

المعرفة بالصورة : $f(t) = e^{2\pi it}$ حيث $0 \leq t \leq 1$

وطبقا لنظرية (٧. ٢. ٩) فإن S تولد دالة توبولوجية من Y إلى S أي أن $S \cong Y$

ومن ثم فإن فضاء القسمة يطابق دائرة ويكون لدينا دالة متصلة من $[0,1]$ إلى الدائرة S .



والآن سوف ندرس بعض خواص فضاء القسمة.

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة تكافؤ على X ، $X/\sim$ هي مجموعة القسمة. فصل التكافؤ الممثل بالعنصر a لعلاقة التكافؤ $\sim$ هو المجموعة:

$$[a] = \{b \in X : a \sim b\}$$

وإذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ) فإن:

$$[A] = \{b \in X : \exists a \in A, a \sim b\} = \cup \{[a] : a \in A\}$$

نظريته (٩. ٢. ٩):

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي، $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء القسمة، فإن العبارات الآتية متكافئة:

(١) الراسم الطبيعي $\pi : X \rightarrow X/\sim$ مفتوح،

(٢) إذا كانت المجموعة A مفتوحة في الفضاء (X, τ) ، فإن المجموعة $[A]$ مفتوحة،

$$[A^0] \subseteq ([A])^0, \forall A \subseteq X \quad (٣)$$

البرهان :

$$(١) \Leftrightarrow (٢) :$$

بفرض أن الراسم π مفتوح، A مجموعة مفتوحة في X فإن $\pi(A)$ مجموعة

مفتوحة في فضاء القسمة. حيث أن π راسم متصل، فإن $\pi^{-1}(\pi(A))$ مجموعة

مفتوحة في X . والآن سوف نبين أن $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$

بفرض أن

$$x \in [A] \Leftrightarrow \exists a \in A : x \sim a \Leftrightarrow \exists a \in A : [x] = [a]$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\pi(a) = \pi(x) \in \pi(A) \Leftrightarrow x \in \pi^{-1}(\pi(A))$$

من ثم فإن $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ وعليه تكون $[A]$ مجموعة مفتوحة.

$$(2) \Leftarrow (3) :$$

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن المجموعة $[A^o]$ تكون مجموعة مفتوحة ذلك باستخدام (٢). ومن جانب آخر ، حيث أن $A^o \subseteq A$ فإن $[A^o] \subseteq [A]$ وبذلك نحصل على $[A^o] = [A^o]^o \subseteq [A]^o$.

$$(3) \Leftarrow (1) :$$

بفرض أن U مجموعة مفتوحة في X ومن (٣) نحصل على أن $[U] = [U^o] \subseteq [U]^o$ وهذا يعنى أن المجموعة $[U]$ مفتوحة، ولكن نعلم أن $U \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)) = [U]$ وهذا يعنى أن $\pi(U) \subseteq \pi([U])$ حيث $\pi(U)$ مجموعة مفتوحة في فضاء القسمة $X/\sim$ ، ومن ثم فإن الراسم π مفتوح. نظريته (٩. ٢. ١٠) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى ، $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء القسمة فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) الراسم $\pi : X \rightarrow X/\sim$ مغلق

(٢) إذا كانت المجموعة F مغلقة فإن المجموعة $[F]$ مغلقة.

(٣) $[\overline{A}] \subseteq \overline{[A]}$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان : يشابه برهان نظريته (٩. ٢. ٩).

نظريته (٩. ٢. ١١) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى ، P تجزئياً للفضاء X ، فإن فضاء القسمة $(X/P, \tau/P)$ يكون فضاء T_1 - إذا وفقط إذا كانت عناصر P مغلقة في X . البرهان :

حيث أن أي تجزئي P للمجموعة X يعرف علاقة تكافؤ بحيث يكون كل عنصر من P يطابق فصل التكافؤ، ومن تعريف فضاء القسمة X/P ينتج أن نقاط

فضاء القسمة تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت عناصر P مغلقة في X .
النظرية التالية توضح متى يكون فضاء القسمة فضاء T_2 (هاوسدورف).
نظريته (٩. ٢. ١٢):

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة تكافؤ على X فإن:
(١) إذا كان فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء T_2 فإن المجموعة
 $U = \{(x, y) : x \sim y\}$ مغلقة في الفضاء الضربي $X \times X$.
(٢) إذا كانت المجموعة U مغلقة في الفضاء الضربي $X \times X$ وكان الراسم
 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ مفتوح فإن فضاء القسمة $X/\sim$ يكون فضاء T_2 .
البرهان :

(١) حيث أن الراسم $\pi : X \rightarrow X/\sim$ متصل ، فإن الراسم
 $\pi \times \pi : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$ متصل أيضا والمجموعة القطرية
 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ مغلقة في الفضاء الضربي $X/\sim \times X/\sim$. (راجع
نظرية (٩. ١. ٢٩) وبالتالي تكون المجموعة $U = (\pi, \pi)^{-1}(\Delta)$ مغلقة في الفضاء
الضربي $X \times X$.

(٢) بفرض أن U مجموعة مغلقة في الفضاء $X \times X$ وأن $\pi : X \rightarrow X/\sim$
راسم مفتوح.

ولإثبات أن فضاء القسمة هو فضاء T_2 ، نفرض أن $\pi(x), \pi(y)$ نقطتين
مختلفتين في فضاء القسمة. من (١) نجد أن $(x, y) \notin U$ أو أن المجموعة
 $U^c = X \times X - U$ مفتوحة وتحتوي العنصر (x, y) في فضاء حاصل الضرب
 $X \times X$. من تعريف فضاء الضرب توجد مجموعة أساسية $H \times V$ بحيث يكون
 $(x, y) \in H \times V \subseteq X \times X - U$ وهذا يؤدي إلى أن
 $(H \times V) \cap U = \phi$ ومعنى ذلك أن أي نقطة من المجموعة U ، لا يمكن أن

تكافئ أي نقطة من المجموعة H ومن ذلك نستنتج أن $\pi(H) \cap \pi(V) = \phi$ وحيث أن الراسم π مفتوح فإن $\pi(H), \pi(V)$ مجموعتين مفتوحتين وغير متقاطعتين حيث $\pi(x) \in H, \pi(y) \in V$ وهذا يعني أن فضاء القسمة هو فضاء T_2 .

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو إذا كان الفضاء (X, τ) هو فضاء T_i حيث $i = 0, 1, 2$ هل فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ يكون فضاء T_i أيضاً؟ في الحقيقة أنه ليس من الضروري أن يكون فضاء القسمة لفضاء T_i هو فضاء T_i كذلك والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٩. ٢. ١٣):

ليكن $(R, \mathcal{U})$ هو الفضاء العادي، δ علاقة تكافؤ معرفة على R بالصورة:

$$(x, y) \in \delta \Leftrightarrow x - y \in Q, \forall x, y \in Q$$

حيث Q مجموعة الأعداد القياسية. فإن فصل التكافؤ $[x]$ الممثل بالعنصر x يكون على الصورة:

$$[x] = \{y \in R : (y, x) \in \delta\} = \{y \in R : y - x \in Q\}$$

$$\therefore [x] = \{y \in R : y - x = r \in Q\} = \{x + r : r \in Q\}$$

$$[0] = Q, [1] = 1 + Q, \dots [-2] = -2 + Q \quad \text{أي أن}$$

ومن ثم فإن مجموعة فصول التكافؤ:

$$R/\delta = \{[x] = x + Q : \forall x \in R\}$$

لنرى الآن وصف لتوبولوجي القسمة τ/δ :

لتكن F مجموعة مغلقة في فضاء القسمة فإن $\pi^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في R

وذلك لأن الراسم الطبيعي $\pi : R \rightarrow R/\delta$ متصل ومن ذلك نحصل على

$\pi^{-1}(F) = \overline{\pi^{-1}(F)}$ وحيث أن Q كثيفة في R فإن $x + Q$ كثيفة في R .
وبالتالي فإن المجموعة $\pi^{-1}(F)$ تكون كثيفة في R أيضا أي أن :

$$\pi^{-1}(F) = \overline{\pi^{-1}(F)} = R$$

وهذا يعنى أن فضاء القسمة يحتوى فقط على المجموعتين المغلقتين R/δ ، ϕ أي أن $\tau/\delta = \{R/\delta, \phi\}$ ومن ثم فإن τ/δ يتطابق مع التوبولوجى الغير منفصل.
لاحظ أن الفضاء R هو فضاء T_i حيث $i = 0, 1, 2$ ولكن فضاء القسمة لا يكون كذلك (لأن τ/δ هو التوبولوجى الغير منفصل).

نظريته (٩ . ٢ . ١٤) :

إذا كان الفضاء التوبولوجى (X, τ) فضاء محكم (مترابط) فإن فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ يكون محكم (مترابط) أيضاً.

البرهان :

واضح من كون أن الراسم الطبيعى $\pi : X \rightarrow X/\sim$ متصل وشامل وباستخدام نتيجة (٧ . ٤ . ٢) ونتيجة (٨ . ٢ . ٢٥) وينتج المطلوب.

بند (٣) : الزمرة التوبولوجية : Topological Groups

من أهم المفاهيم التي تتبع الفضاء الضربى هو التوبولوجى الجبرى Algebraic Topology ، وكحالة خاصة سوف نعرض في هذا البند وبصورة مختصرة مفهوم الزمرة التوبولوجية.

تعريف (٩ . ٣ . ١) :

النظام $(G, \bullet, \tau)$ يسمى زمرة توبولوجية إذا وفقط إذا توفرت الشروط الآتية:

(١) النظام $(G, \bullet)$ زمرة.

(٢) (G, τ) فضاء توبولوجى.

(٣) الدالة $f : G \times G \rightarrow G$ من فضاء حاصل ضرب $G \times G$ إلى الفضاء G حيث $f(x, y) = x \bullet y^{-1}$ لكل $(x, y) \in G \times G$ دالة متصلة.
مثال (٢ . ٣ . ٩) :

ليكن $(R, \mathcal{U})$ الفضاء العادي فإن :

(١) $(R, +)$ زمرة

(٢) الدالة $f : R^2 \rightarrow R$ حيث $f(x, y) = x + y^{-1} = x - y$ هي دالة متصلة .

بالتالي النظام $(R, +, \mathcal{U})$ زمرة توبولوجية.

مثال (٣ . ٣ . ٩) :

بين أن أي زمرة G مع التوبولوجي المنفصل أو الغير منفصل تكون زمرة توبولوجية.

نظرية (٤ . ٣ . ٩) :

النظام $(G, \bullet, \tau)$ زمرة توبولوجية إذا وفقط إذا كانت G زمرة ، (G, τ) فضاء توبولوجي والدوال $f : G \times G \rightarrow G, f(x, y) = xy$ ، $I : G \rightarrow G, I(x) = x^{-1}$ متصلة.

نظرية (٥ . ٣ . ٩) :

أي زمرة جزئية من زمرة توبولوجية هي زمرة توبولوجية.

نظرية (٦ . ٣ . ٩) :

لتكن $(G, \bullet, \tau)$ زمرة توبولوجية ، N زمرة جزئية عمودية Normal subgroup فإن $(G/N, \bullet, \tau/N)$ زمرة توبولوجية حيث τ/N هو توبولوجي القسمة.

تمارين عامة على الباب التاسع

(١) بفرض أن $\{(X_i, \tau_i): i \in N\}$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية ، $X = \prod X_i$. بين أن المجموعة الجزئية من X التي على الصورة $\prod \{G_i: i \in N\}$ حيث G_i مجموعة مفتوحة في X_i تشكل أساس للتوبولوجي τ المعروف على X .

(٢) بفرض أن τ^* هو التوبولوجي على R^2 المولد بواسطة المستطيلات نصف المفتوحة $[a, b) \times \{c, d) = \{(x, y): a \leq x < b, c \leq y < d\}$ ، τ هو توبولوجي النهاية السفلي المولد بالفترات نصف المفتوحة $[a, b)$. بين أن (R, τ^*) هو ضرب الفضاءات (R^2, τ) .

(٣) بين أن ضرب فضاءات T_1 هو فضاء T_1 .

(٤) بين أن ضرب فضاءات منتظمة هو فضاء منتظم .

(٥) بين أن ضرب فضاءات قابلة للعد وتحقق مسلمة العد الثانية هو فضاء يحقق مسلمة العد الثانية .

(٧) بفرض أن A_i مجموعة جزئية اختيارية من X_i . بين أن توبولوجي الضرب على $\prod A_i$ يطابق التوبولوجي النسبي على $\prod A_i$ حيث $\prod A_i$ مجموعة جزئية من $\prod X_i$.

(٨) أعط مثال لتوبولوجي على مجموعة حاصل الضرب $X = \prod X_i$ أضعف من توبولوجي حاصل الضرب .

(٩) بفرض أن دالة معرفة $f: X \rightarrow Y$ ، $F: X \rightarrow X \times X$ بالصورة $F(x) = (x, f(x))$ بين أن f متصلة إذا وفقط إذا كانت F دالة توبولوجية من X إلى $F(X)$.

(١) ليكن X فضاء توبولوجي ، $X \times X$ فضاء حاصل الضرب ولتكن

$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ برهن أن $X \approx \Delta$.

(١١) إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي ، ρ علاقة تكافؤ على X معرفة بالصورة: $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Leftrightarrow x \rho y$. بين أن الراسم الطبيعي $\pi: X \rightarrow X/\rho$ هو راسم مفتوح ومغلق في نفس الوقت.

(١٢) لتكن $(G, \bullet, \tau)$ زمرة توبولوجية ، $H \subseteq G$ زمرة جزئية من G .

(أ) بين أن $(H, \bullet, \tau_H)$ زمرة توبولوجية.

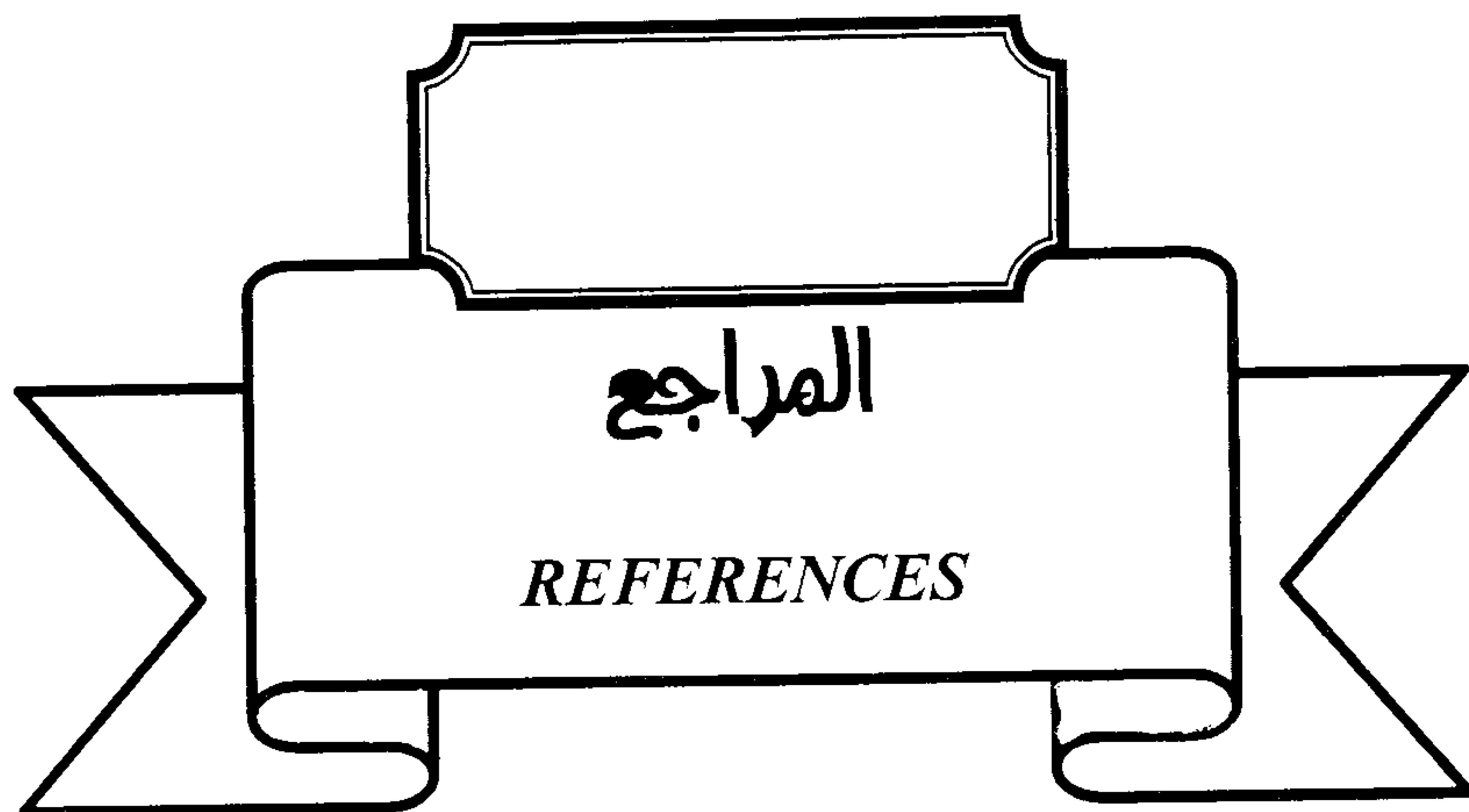
(ب) برهن أن لصاقة أي زمرة جزئية تكون زمرة جزئية.

(ج) برهن أن لصاقة أي زمرة جزئية عمودية تكون زمرة جزئية عمودية.

(١٣) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب $\prod X_j$ هو فضاء T_i حيث $i=0,1,2$ هو أن تكون كل مركبة X_j فضاء T_i أيضاً.

(١٤) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب $\prod X_i$ فضاء منتظم هو أن تكون كل مركبة X_i فضاء منتظم أيضاً.

(١٥) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب $\prod X_i$ مترابط (محكم) هو أن تكون كل مركبة X_i مترابطة (محكمة).



المراجع

REFERENCES

- [1] Bartle R. G. , Sherbert D. R. , Introduction to Real Analysis , second edition , John Wiley & Sons INC. 1992.
- [2] Bourbaki , Topologie generale , Act. Sci. Indust. (1940-1953).
- [3] Čech E. , Topological Spaces , Interscience- Wiely , London , New York , 1966.
- [4] Császár A. , General Topology , A Kademiai Kiado , Budapest , 1987.
- [5] Goshi , D. , Introduction to General Topology , Wiley Eastern Limited , New Delhi , 1986.
- [7] Kelly , J., General Topology , Van Nostrand , Princeton New Tersey , 1955.
- [8] Lipschutz , S. Theory and problems of General topology , Schum's Series , McGraw-Hill Int. 1965.
- [9] Munkres , J. , Topology : Afirst course , prentic0Hall , N. , Y. , 1975.
- [10] Naimpally S. N. , Warrack , B. D. , Proximity Spaces , Combridge Univ. Press , New York , 1970.
- [11] Sierpinski , W. , General topology , Toronto , 1952
- [12] Simmons , G. , F. , Introduction to topology and Modern Analysis , McGraw-Hill Int. 1963.
- [13] Willeard S. , General Topology , Reading M A , 1970.