الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين
كلية العلوم

التحليل العقدي

السنة الثالثة
قسم الإحصاء الرياضي

د. حسن بدور
أستاذ في قسم الرياضيات

د. محمد علي
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

1430 -1431هـ
2009 -2010 م

الفهرس

الفصل الثالث: التابع العقدي

الفصل الرابع: التفاضل العقدي

الفصل الخامس: التوابع التحليلية الأولية

الفصل السادس: التكامل العقدي

الفصل السابع: خواص التوابع التحليلية

الفصل الثامن: السلاسل العقدية

الفصل التاسع: النقاط الشاذة والرواسب

الفصل العاشر: نظرية الرواسب وتطبيقاتها

الفصل الحادي عشر: مبادئ انتقال المناطق

الفصل الثاني عشر: التحويلات المحافظة الأساسية

المقدمة

تعد مادة التحليل العقدي التي تتضمن دراسة التوابع في مجموعات الأعداد العقدية واحداة من أهم فروع التحليل الرياضي. وأول ماتتميز به هذه المدة من نجاح هوسماحها فـي دراسـة التابع ذي المتحولين كتابع لمتحول واحد . وقد أعطت هذه الامكانية نتائج باهرة وسريعة في معالجة مسائل كثيرة متعلقة بحساب التفاضل والتكامل . هذا الأمر أدى ، بدوره ، إلى ظهور طرق للبحث جديدة ومتميزة بتناسقها وبتطبيقاتها . وقد تبين أن الكثير من النماذج الرياضية تصبحأكثر وضوحاً وانسجاماً عند دراستها في ضوء التوابع العقدية.وهناك شواهد كثيرة على ذلك في نظرية الحقول وعلم البصريات ونظرية العمليات العشوائية وغيرها.

تغطي مفردات هذا الكتاب مقرر التحليل العقدي لطلاب السنة الثالثة ، إحصـاء رياضـي ، بجزأيه النظري والعملي وهو يتضمن أساسيات هذه المـادة المتمثلـة بـالتوابع التحليليـة وخواصها.

وقد تم عرض المواضيع بطريقة تسهل فيها القراءة والفهم على الطالب وخصوصاً بوجـود أمثلة كثيرة مرفقة بأشكال هندسية توضيحية ، هذا بالإضافة إلى طرح تمارين كثيرة للحل مع أجوبتها أو مع توجيه للحل في حالة المسائل الأكثر صعوبة أو عندما كان يلزم الأمر.

نتمنى لطلابنا الحصول على الفائدة المرجوة من الكتاب مع التوفيق والنجاح.

المؤلفان

الفصل الأول

الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية ①
THE SET OF COMPLEX NUMBERS

تعريف ❶

لتكن ≤ مجموعة تتكون عناصرها z من الثنائيات المرتبة للأعداد الحقيقية a,b التـــي نرمز لها بالشكل:

$$(1)\qquad \le z=(x,y),\ \ x,y\in\Re,\ \ z\in$$

ولنعرف عملية التساوي و العمليات الأربع عليها بالعلاقات:

$$(2)\qquad (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=y_1, x_2=y_2$$

$$(3)\qquad (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=\qquad (x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$(3')\qquad (x_1,y_1)-(x_2,y_2)=\qquad (x_1-x_2,y_1-y_2)$$

$$(4)\qquad (x_1x_2-y_1y_2,y_1x_2+x_1y_2)\,(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=$$

$$(5)\qquad \frac{(x_1,y_1)}{(x_2,y_2)}=\Big(\ \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ \ ,x_2^2+y_2^2\neq 0\ \ ,\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}\ \Big)$$

تدعى هذه العناصر المعطاة بالعلاقة (1) بالأعداد العقدية و تدعى المجموعة ≤ بمجموعـــة الأعداد العقدية .

يمكن التحقق أن عناصر المجموعة السابقة تحقق جملة من الخواص نعرضـــها مـــن خـــلال الخاصة الآتية:

خاصة ❶

مهما يكن z,z_1,z_2,z_3 من ≤ فإن:

$$i)\qquad z_1+z_2=z_2+z_1$$

$$ii)\qquad z_1\times z_2=z_2\times z_1$$

$$iii)\qquad z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$$

$$iv)\quad z_1\times(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

$$i)\quad 0+z=z$$

$$v)\quad z\times 1=z$$

نتيجة ❶

إن مجموعة الاعداد العقدية $\leq$ تشكل حقلاً يعرف بحقل الأعداد العقدية (الحقل هو زمرة تبديلية عرفت عليها عمليتا ضرب العناصر وقسمتها المحققتان للشروط المذكورة أعلاه).

مجموعة الأعداد الحقيقية ②

THE SET OF REAL NUMBERS

لتكن $\leq_0$ المجموعة الجزئية ، من $\leq$ ، التي يكون ترتيب الثنائيات فيها مساوياً إلى الصفر. ولتكن $(x_1,0),(x_2,0)$ ثنائيتين منها، حيث $x_1,x_2\in\Re$. عندئذ يكون:

$$(6)\qquad (x_1+x_2\ ,\quad 0)=(x_1,0)+(x_2,0)$$

$$(7)\qquad (x_1,0)\times(x_2,0)=(x_1x_2,0)$$

$$(8)\qquad (x_1,0)/(x_2,0)=(x_1/x_2,0)\quad ,x_2\neq 0$$

ونستطيع أن نكتب :

$$z_1=(x_1,,0)=x_1$$
$$z_2=(x_2,,0)=x_2$$

نتيجة ❷

إذا كانت $\Re^2$ هي مجموعة نقاط المستوي فإن:

$$(9)\qquad \leq\leq\subset_0$$

$$(10)\qquad \leq\Re=_0$$

$$(11)\qquad \leq\subset\Re^2$$

تعريف ❷

تدعى الأعداد من الشكل $(x,0)$ بالأعداد الحقيقية
وتدعى الأعداد من الشكل $(0,y)$ بالأعداد التخيلية
ويدعى العدد الخاص $(0,1)$ بالواحدة التخيلية ويرمز له بالرمز i .

الشكل الديكارتي للعدد العقدي ③

CARTESIAN FORM OF COMPLEX NUMBER

ليكن (x, y) عدداً عقدياً كيفياً . لدينا :

$$(x, y) = (x,0) + (0, y) = x + (0, y)$$
$$(0, y) = (y,0)(0,1) = y(0,1) = yi$$

ولذلك نستطيع كتابة العدد العقدي $z = (x, y)$ بالشكل:

$$z = (x, y) = x + yi, x, y \in \Re, i = (0,1) \tag{12}$$

تعريف ❶

ندعو التركيب $z = x + yi$ بالشكل الديكارتي للعدد العقدي z (أو الشكل الجبري) .
وندعو العدد x بالقسم الحقيقي للعدد العقدي z ونرمز له بالرمز $Re\, z$.
وندعو العدد y بالقسم التخيلي للعدد العقدي z ونرمز له بالرمز $Im\, z$. وهكذا يكون:

$$x = Re\, z, \qquad y = Im\, z$$

نتيجة ❶

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0) = -1 \tag{13}$$

يعود جمع عددين عقدين بالشكل الديكارتي إلى الجمع الجبري للقسمين الحقيقيين والقسمين التخيليين لكل منهما وتعود عملية ضرب عددين عقدين بالشكل الديكارتي إلى عملية ضرب التراكيب ثنائية الحدين مع الأخذ بعين الاعتبار أن $i^2 = -1$ وذلك وفق الخاصة الآتية:

خاصة ❶

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1 + y_1 i) \times (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + y_1 x_2 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (y_1 x_2 + x_1 y_2) i \end{aligned} \tag{15}$$

مثال ❶. حل المعادلة:

$$z^2 + 1 = 0$$

الحل: من المعلوم أن لا يوجد حل لهذه المعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية ولكن في مجموعة الأعداد العقدية لدينا:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z^2 = i^2 \Rightarrow z = \pm i$$

وبذلك يكون:

$$i = \sqrt{-1}$$

④ CONJUGATE NUMBER — مرافق العدد العقدي

تعريف ❶

ندعو العدد $x - yi$ بالعدد المرافق للعدد $z = x + yi$ ونرمز له بالرمز $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi \qquad (16)$$

خاصة ❶

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$z = \overline{(\overline{z})} \qquad (17)$$

البرهان.

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$$

خاصة ❷

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in R \qquad (17')$$

البرهان.

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Leftrightarrow x + yi = x - yi \\ &\Leftrightarrow +yi = -yi \\ &\Leftrightarrow y = 0 \\ &\Leftrightarrow z = x \in \Re \end{aligned}$$

خاصة ❸

جداء عددين مترافقين $z\bar{z}$ هو عدد حقيقي موجب .

البرهان:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2 - xyi + yxi - y^2i^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

خاصية 4

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}i \qquad (18)$$

البرهان: بالضرب بالعدد المرافق للمقام نحصل على:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$$

ملاحظة 1. تتفق الصيغة (18) مع تعريف قسمة عددين عقيين بواسطة العلاقة (5) فهيتغنينا إذاً عن تذكر هذه العلاقة . ويصح الكلام نفسه بالنسبة للعلاقة (15) المتعلقة بضرب الأعداد.

مثال 1 اكتب العدد الآتي بالشكل الديكارتي:

$$w = \frac{(2-3i)+(5+2i)}{(-1+2i)(1+i)}$$

الحل .لدينا على التوالي:

$$w = \frac{7-i}{-1-i+2i-2} = \frac{7-i}{-3+i}$$

$$= \frac{(7-i)(-3-i)}{9+1} = \frac{-22-4i}{10}$$

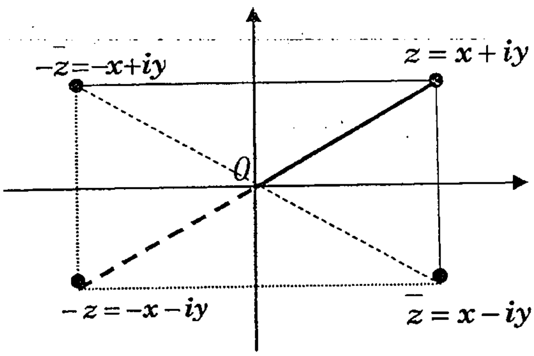
$$\Rightarrow w = \frac{-11-2i}{5} = -\frac{11}{5} - \frac{-2}{5}i$$

المعنى الهندسي للأعداد العقدية ⑤
GEOMETRIC MEANINGFORM OF COMPLEX NUMBERS

من المطابقة بين الأعداد العقدية وثنائيات الأعداد نستنتج وجود تقابل بين نقـاط المسـتوي المحدد بجملة نظامية متعامدة oxy وبين الأعداد العقديـة $z = x + yi$ مـع العلـم أن (x, y) هي احداثيات النقطة , لذلك يمكن تمثيل الأعداد العقدية فـي المسـتوي المنسـوب لجملة نظامية بواسطة النقاط $z = (x, y)$ (شكل1):

فتكون الأعداد الحقيقية واقعة على المحور الأفقي ox

وتكون الأعداد التخيلية واقعة على المحور العمودي oy



شكل 1

تعريف ❶

ندعو ox بالمحور الحقيقي و oy بالمحور التخيلي.

خاصة ❶

يتقابل العدد $z = x + yi$ على المستوى ، مع شعاع $\overrightarrow{oz}$ بدايته النقطة 0 ونهايته النقطة z . وبالعكس كل شعاع $\overrightarrow{oz}$ بدايته 0 ونهايته z يتقابل مع العدد العقدي z.

خاصة ❷

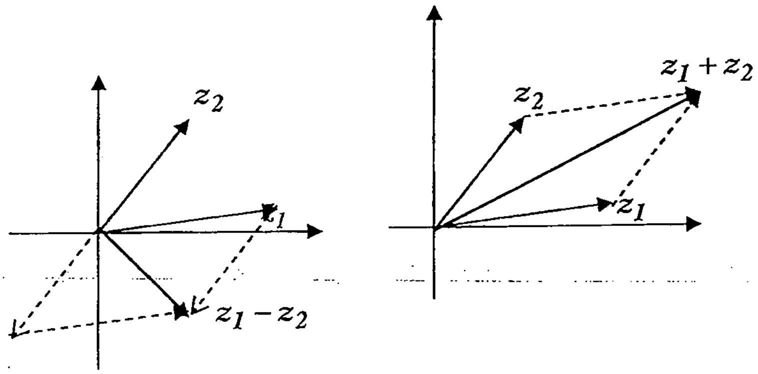
عملية جمع عددين عقديين $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ تقابل هندسياً عمليـة جمع الشعاعين oz_1 و oz_2 شكل (2) ويكون :

$$z_1 + z_2 = oz_1 + oz_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

خاصية ❸

عملية طرح عددين عقديين $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$ تقابل هندسياً عملية طرح الشعاعين oz_1 و oz_2 ويكون(شكل 2):

$$z_1-z_2=oz_1-oz_2=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$



شكل 2

خاصية ❹

المسافة d بين النقطتين z_1 و z_2 هي طول الشعاع z_1-z_2 ، أي الطول

$$d=|z_1-z_2|$$

مثال ❶ أوجد المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة:

$$|z+i|^2=Im(z+2i)$$

الحــل : بعد التحويل إلى الشكل الديكارتي:

$$x^2+(y+1)^2=y+2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+y=1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=1$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

وهي معادلة دائرة ، مركزها $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$

طويلة العدد العقدي وسعته ⑥

MODULUS AND ARGUMENT

تعريف ❶

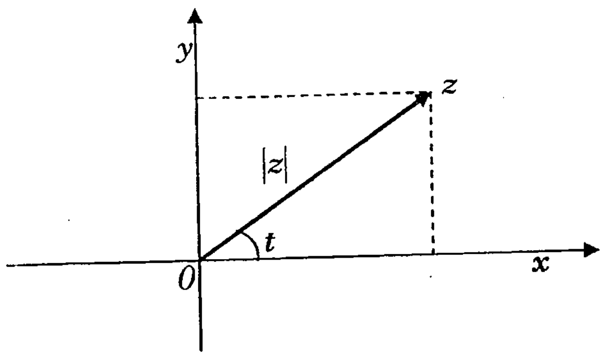
ندعو طول الشعاع الذي بدايته O ونهايته z بطويلة العدد العقدي z (أو بالقيمة المطلقة للعدد العقدي) $z = x + yi$ ونرمز لها بالرمز $|z|$. أي أن:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (19)$$

تعريف ❷

ندعو الزاوية t ، التي يصنعها الشعاع oz مع المحور ox، بسعة (أو زاوية) العدد العقدي $z = x + yi$ ونرمز لها بالرمز $arg\, z$، أي أن:

$$t = arg\, z$$



شكل 3

من الشكل3 نلاحظ أن العلاقة بين سعة العدد العقدي t والطويلة $|z|$ تعطى بجملة المعادلتين:

$$\cos t = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin t = \frac{y}{|z|}, \quad z \neq 0 . \qquad (20)$$

ملاحظة ❶

من دورية التابعين الجيب والتجيب نستنتج وجود عدد غير منته من الزوايا t المحققة لجملة المعادلتين (20) والتي تختلف عن بعضها بمضاعفات العدد 2π على الأكثر. ومن بينها زاوية واحدة فقط واقعة ضمن المجال$]-\pi, \pi]$. وهذا الأمر يبرر التعريف الآتي:

تعريف ❸

ندعو سعة العدد العقدي الواقعة ضمن المجال$]-\pi,\pi[$ بالقيمة الرئيسية للسعة ونرمز لها بالرمز $Argz$ ، أي أن:

$$Argz = arg\,z = t, \quad t \in [-\pi, \pi] \tag{21}$$

نتيجة ❶

مهما يكن z من $\le$ لدينا:

$$arg\,z = Argz + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{22}$$

خاصة ❶

إذا كان $-\pi/2 < arg\,z < \pi/2$ فإن

$$arg\,z = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{23}$$

علما أن tan^{-1} هو التابع العكسي للتابع الظل tan.

البرهان: من العلاقتين (20) لدينا

$$x = |z|\cos t, \qquad y = |z|\sin t$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = \tan(Argz)$$
$$\Rightarrow Argz = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ملاحظة ❶

يرمز ، أحياناً ، للتابع العكسي للظل tan^{-1} بالرمز $arctan$ أي أن:

$$Argz = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

نتيجة ❶

من خواص الظل لدينا:

$$\arg z=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), & if\ \ x>0\ ,\ y\neq 0\\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\pi\ , & if\ \ x<0\ ,\ y\geq 0\\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)-\pi\ , & if\ \ x<0\ ,y<0\end{cases}$$

خاصة ②

من أجل كل عدد عقدي z لدينا:

$$|Re\,z|\leq|z|,\quad |Im\,z|\leq|z| \tag{24}$$

$$|z|\leq|Re\,z|+|Im\,z| \tag{25}$$

البرهان: العلاقة الأولى تنتج هندسياً من أن طول الضلع القائمة في المثلث القائم أقل من طول الوتر، والعلاقة الثانية تنتج هندسياً من أن طول الوتر في المثلث القائم أقل من مجموع الضلعين القائمتين.

خاصة ③

من أجل كل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا:

$$|z_1|-|z_2|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2| \tag{26}$$

البرهان: العلاقة الأولى تنتج من أن $|z_1|$و$|z_2|$ و $|z_1+z_2|$ هي أطوال أضلاع مثلث رؤوسه z_1و z_2 و z_1+z_2 (انظر الشكل2) ، ومعروف أن طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع الضلعين الباقيتين وأكبر من فرقهما.

مثال ①. أوجد السعة الرئيسية للعدد

$$z=1+\sqrt{3}\,i$$

الحل: حسب تعريف السعة:

$$t=\arg z=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\arctan\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

أما السعة الرئيسية لهذا العدد فهي أصغر قيمة موجبة للسعة t واقعة بين $-\pi$ و π أي أن $t=\dfrac{\pi}{3}$.

⑦ POLAR FORM الشكل المثلثي للعدد العقدي

تعريف ❶

ليكن العدد العقدي $z = x + yi \neq 0$, و $|z| = r$ و $t = \arg z$ (شكل4)عندئذ:

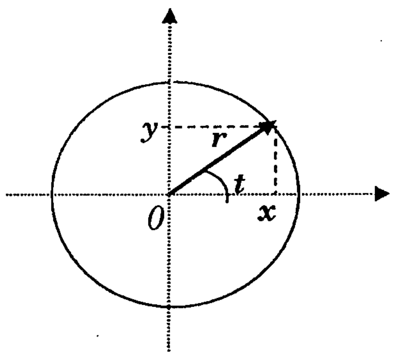
$$\cos t = \frac{x}{r}, \quad \sin t = \frac{y}{r} \tag{27}$$

$$, \quad t = \arg z \; x = r\cos t, \quad y = r\sin t \tag{28}$$

وبالتالي

$$z = r(\cos t + i\sin t), \tag{29}$$

تعرف العلاقة أعلاه بالشكل المثلثي للعدد العقدي z .



شكل 4

خاصة ❶

ليكن

$$z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$$

عندئذ

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, t_1 = t_2 + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

خاصة ❷

ليكن:

$$z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$$

عندئذ:

$$(30)\quad z_1 z_2 = |z_1 z_2|[\cos(t_1+t_2) + i\sin(t_1+t_2)]$$

$$(31)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos t(t_1 - t_2) + i\sin t(t_1 - t_2)\right]$$

البرهان: الحالة الأولى:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)|z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2) \\ &= |z_1||z_2|[(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + \\ &\quad + i(\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1)] \\ &= |z_1 z_2|[\cos(t_1+t_2) + i\sin(t_1+t_2)] \end{aligned}$$

الحالة الثانية:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \frac{|z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)}{|z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos t_1 + i\sin t_1)}{(\cos t_2 + i\sin t_2)}\frac{(\cos t_2 - i\sin t_2)}{(\cos t_2 - i\sin t_2)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{1}{\cos^2 t_2 + \sin^2 t_2}[(\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) + \\ &\quad + i(\cos t_1 \sin t_2 - \cos t_2 \sin t_1)] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos t(t_1 - t_2) - i\sin t(t_1 - t_2)\right] \end{aligned}$$

نتيجة ❶

من أجل أي عددين عقديين z_1 و z_2 يكون:

$$(32)\quad |z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$$

$$(32')\quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_1)$$

نتيجة ❷

من أجل أي عددين عقديين z_1 و z_2 وبفرض ان $z_2 \neq 0$ يكون:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad (33)$$

$$arg\frac{z_1}{z_2} = arg(z_1) - arg(z_1) \qquad (33')$$

⑧ POWER القوة

لتكن الأعداد العقدية:

$$z_1 = |z_1|(cos\,t_1 + i\,sin\,t_1)$$
$$z_2 = |z_2|(cos\,t_2 + i\,sin\,t_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = |z_n|(cos\,t_n + i\,sin\,t_n)$$

من العلاقة (30) نستنتج التعميم التالي:

$$(34) \quad |z_1|.|z_2|.|z_3|\,[cos(t_1 + t_2 + t_3) + i\,sin(t_1 + t_2 + t_3)]\; z_1.z_2.z_3 =$$

$$z_1.z_2\dots\dots z_n = \quad (34')$$
$$[cos\,t(t_1 + \dots\dots + t_n) + i\,sin\,t(t_1 + \dots. + t_n)] = |z_1||z_2|\dots\dots|z_n|$$

نتيجة ❶

من أجل كل عدد عقدي z لدينا:

$$z^2 = |z|^2(cos\,2t + i\,sin\,2t)$$

نتيجة ❷

من أجل كل عدد عقدي z وكل عدد طبيعي n لدينا:

$$z^n = |z|^n(cos\,nt + i\,sin\,nt)$$

وبشكل عام ونتيجة للعلاقة $(34')$ فإننا نعبر عن القوة z^n بما يلي :

$$z^n = |z|^n(\cos nt + i\sin nt), n = 1,2.... \quad (35)$$

وإذا كان العدد z يحقق الشرط $|z| = 1$ حصلنا على ما هو معروف بدستور موافر الذي يستخدم عادة لحساب القوة:

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt \quad (36)$$

⑨ THE N-TH ROOT الجذر النوني للعدد العقدي

تعريف ❶.

ندعو كل عدد عقدي z يحقق الشرط $z^n = a$ بالجذر النوني للعـدد a ونرمـز لـه بـالرمز $\sqrt[n]{a}$. وبذلك يكون:

$$z^n = a \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{a}$$

فإذا كان:

$$z = |z|(\cos t + i\sin t),$$
$$a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حصلنا على التوالي:

$$|z|^n(\cos t + i\sin t)^n = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$|z|^n(\cos nt + i\sin nt) = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$|z|^n = |a|, nt = \theta + 2k\pi$$
$$|z| = \sqrt[n]{|a|}, t = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, \mp 1....$$

مع ملاحظة أنه من بين جميع السعات(أي الزوايا) $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ (عنـدما تتحـول k علـى مجموعة الأعداد الصحيحة) يوجد بالضبط n من الزوايا المختلفة والتي لا تختلـف عـن بعضها بمضاعفات العدد 2π . ويتم الحصول عليها عادةً بوضـع $k = 0,1,...,n-1$.
وعندئذ تكون قيم هذه الزوايا:

$$t_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1$$

نتيجة ❶

يوجد بالضبط n من الجذور النونية z للعدد a. وهذه الجذور هي:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \qquad (37)$$

حيث $k = 0,1,2,\ldots\ldots,n-1$

نتيجة ❷

تقع الجذور، المعطاة بالعلاقة (37) ، على محيط دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt[n]{|a|}$ وهذه الجذور تقسم محيط الدائرة هذه إلى n من الأقسام المتساوية .

البرهان:

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots.,n-1,$$

مع ملاحظة أن $z_n = z_0$.

مثال ❶

حل المعادلة

$$z^4 - 1 + i = 0$$

الحل.

حلول المعادلة هي قيم الجذر $z = \sqrt[4]{1-i}$. ولدينا:

$$1 - i = |1-i|(\cos t + i\sin t) = |2|\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

إذن بحسب (37) يكون

$$\sqrt[4]{1-i} = z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)$$

حيث $k = 0,1,2,3$. وفي النهاية

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$
$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\sin\frac{15}{16}\pi\right)$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi + i\sin\frac{23}{16}\pi\right)$$

⑩ TRIGONOMETRIC FORM الشكل الأسي للعدد العقدي

تعريف ⓫

إذا كان $|z| = 1$ فإننا نحصل على العدد العقدي $z = \cos t + i\sin t$ الـذي يرمـز لـه بالرمز e^{it}. وهو الرمز الذي يعبر عنه بصيغة أولر الآتية:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \qquad (38)$$

وهي تعبر عن العدد العقدي z عندما تكون طويلته تساوي إلى الواحد:

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{it} = \cos t + i\sin t$$

خاصة ❶

من أجل كل عدد حقيقي t لدينا:

$$\left|e^{it}\right| = 1$$

وكذلك.

$$e^{2\pi i} = 1,\ e^{\pi i} = -1,\ e^{\pi i/2} = i,\ e^{-\pi i/2} = -i,$$

خاصة ❷

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \qquad (39)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \qquad (39')$$

البرهان: إذا بدلنا t بـ $-t$ في العلاقة (38) وجدنا أن

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$
$$e^{-it} = (\cos t - i\sin t)$$

و الآن بجمع طرفي هاتين العلاقتين مرة ، وطرحهما مرة أخرى ، نحصل على المطلوب:

$$2\cos t = e^{it} + e^{-it}$$
$$2i\sin t = e^{it} - e^{-it}$$

هاتان العلاقتان – المعروفتان بعلاقتي أولر – تفيدان في التعبير عن التوابع المثلثية بلغة التابع الأسي.

خاصة ❸

من التعريف نستنتج ما يلي:

$$e^{it_1}e^{it_2} = e^{i(t_1+t_2)} \qquad (40)$$

$$\frac{e^{it_1}}{e^{it_2}} = e^{i(t_1-t_2)} \qquad (41)$$

$$\left(e^{it}\right)^n = e^{int},\ n = 0, \mp 1, \ldots \qquad (42)$$

نتيجة ❶

كل عدد عقدي يمكن وضعه بالشكل

$$z = re^{it},\ ,t = \arg z\ \ |z| = r \qquad (43)$$

البرهان. بضرب طرفي العلاقة (38) بالعدد $|z| = r$ نجد أن:

$$z = |z|(\cos t + i\sin t) = re^{it}$$

تعريف ❷

ندعو العبارة (43) بالشكل الأسي للعدد العقدي z .

من هذا التعريف ونتيجة للعلاقتين (40) و (41) نستطيع ببساطة التعبير عن جداء وقسمة عددين عقديين بواسطة الشكل الأسي للعدد العقدي:

خاصية ❹

إذا كان $z_1 = r_1 e^{it_1}$ و $z_2 = r_2 e^{it_2}$ فإن

$$z_1 z_2 = r_1 e^{it_1} r_2 e^{it_1} = r_1 r_2 e^{i(t_1+t_2)} \tag{44}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{it_1}}{e^{it_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(t_1-t_2)} \tag{45}$$

أخيراً وباستخدام الشكل الأسي للعدد العقدي يمكن صياغة النتيجة1 (فقرة ⑨) كما يلي:

نظرية ❶

تحوي المعادلة :

$$z^n = a$$

بالضبط n من الجذور المختلفة وهذه الجذور هي

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\ e^{(\theta+2k\pi)i/n} \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots,n-1 \tag{46}$$

مع العلم أن θ هي سعة العدد a و n عدد طبيعي ما.

التطبيقات العملية

⦿ SOLVED PROBLEMS تمارين محلولة

تمرين ①. احسب قيمة المقدار الآتي(بتحويله إلى الشكل الديكارتي):

$$I=\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{1}{1+i}$$

الحل: لدينا:

$$I=\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{1}{1+i}=\frac{1}{5-i}$$

$$=\frac{1}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i}$$

$$=\frac{5+i}{26}=\frac{5}{26}+i\frac{1}{26}$$

تمرين ② . لدينا:

$$a)\ z=-2+4i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{20},$$

$$b)\ z=1+i \Rightarrow |z|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2},$$

$$c)\ z=-1+0i \Rightarrow |z|=\sqrt{(1)^2+0^2}=1,$$

$$d)\ z=\mp i \Rightarrow |z|=1,$$

تمرين ③ لدينا:

تمرين ⑥. ضع العدد الآتي بالشكل المثلثي:

$$p = 1 + i\sqrt{3} \ .$$

الحـــل. ليكن :

$$p = z = 1 + i\sqrt{3} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ .$$

لدينا:

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 ,$$

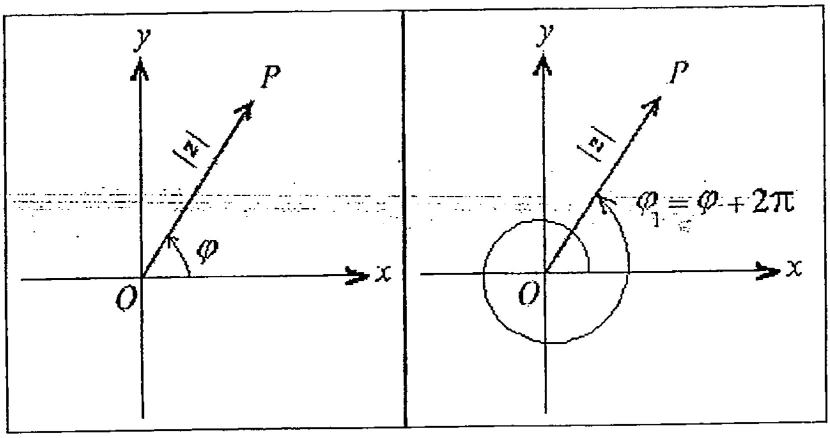
$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبذلك يكون(شكل6)

$$|z| = 2 , \quad \varphi = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \ .$$

ومنه

$$z = \left(1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) \ .$$



شكل6

تمرين⑦ إحسب قيمة المقدار

$$I = (1 + i)^{10} \ .$$

الحــل. لدينا

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\,,\quad \cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبذلك يكون :

$$|z|=\sqrt{2}\,,\quad t=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,.$$

ومنه

$$I=(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

باستخدام دستور موافر (35) نجد أن:

$$\begin{aligned}
I&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}\\
&=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10\frac{\pi}{4}+i\sin 10\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2^{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&=2^{5}(0+i)=32i
\end{aligned}$$

تمرين ⑧ حل المعادلة $z^n-i=0$ ثم استنتج قيم الأعداد: $\sqrt{i}\,,\ \sqrt[3]{i}\,,\sqrt[4]{i}$.

الحــل. لدينا:

$$z^{n}=i\,,\ |i|=1\,,\quad \arg i=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ولذلك:

$$z=z_k=\sqrt[n]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n},\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

ولدينا:

$$n = 2 \Rightarrow \sqrt{i} = z_k, k = 0,1 \Rightarrow$$

$$z_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$z_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{n} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

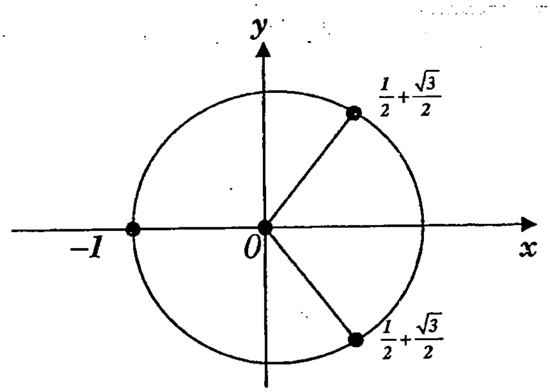
$$n = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{i} = z_k, k = 0,1,2 \Rightarrow$$

$$z_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -1$$

لاحظ هذه الجذور على الشكل 7



شكل 7

تمرين ⑨ حل المعادلة :

$$x^2-4x+13=o$$

$$z_0=\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$z_1=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{n}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

الحــل. بطريقة مشابهة للحالة الحقيقية نستخدم المميز:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 13=-36=(6i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=6i$$

وبالتالي له جذران عقديان لأن المميز أصغر من الصفر وهذا ن الجذران هما:

$$z_1=\frac{4-6i}{2}=2-3i$$

$$z_2=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

تمرين ⑩ حل المعادلة

$$2z^4+1-i\sqrt{3}=0.$$

الحــل. حلول المعادلة المعطاة هي قيم الجذر:

$$z=\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

لنضع:

$$p=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

فيكون

$$|p| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}, \; \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

إذن بحسب (37) يكون:

$$, z_k = \sqrt[4]{|p|}\left(\cos\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) + i\sin\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \right) \quad k = 0,1,2,3$$

وفي النهاية وبتعويض $k = 0,1,2,3$ نحصل على قيم الجذور المطلوبة:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \; .$$

◉ UNSOLVED PROBLEMS — تمارين للحل

❶ بين بالحساب أن:

a) $(-1+2i)(7-5i) + (-3+4i) = -2+9i$

b) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i} = 3-i$

c) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=1+i$

❷ أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة الآتية:

a) $(4+2i)x+(5+3i)y=13+i$

b) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$

الجواب : a) $x=2, y=1$

b) $x=\dfrac{20}{17},\ y=-\dfrac{36}{17}$

❸حل المعادلتين الآتيتين:

a) $z^2-5z+6=o$,

b) $z^2+(2+2i)z+1+2i=o$

الجواب: a) $z_1=2,\ z_2=3$

b) $z_1=-1,\ z_2=-1-2i$

❹ ضع الأعداد الآتية بالشكل المثلثي وبالشكل الأسي:

a) -2

b) $2i$

c) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

d) $z=1-i\sqrt{3}$

e) $z=-\sin\dfrac{\pi}{4}-i\cos\dfrac{\pi}{4}$

f) $z=-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$

g) $z=\cos\varphi-i\sin\varphi$, $\left(\pi<\varphi<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

❺ أثبت مايلي:

$$a)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = 1\ .$$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{60} = 2^{60}\ b)\ .$$

❻ حل المعادلات الآتية :

$a)\ z^2 - i = o$

$b)\ z^2 + 16 = o$

$c)\ z^3 - 1 = o$

$d)\ z^3 - 1 + i = o$

❼ مربع مركزه $z_0 = 1+i$ وإحد رؤوسه $z_1 = 1-i$, أوجد بقية رؤوس المربع.

الجواب:

$z_2 = 3+i,$

$z_3 = 1+3i,$

$z_4 = -1+i$

❽ضع كل من المعادلتين الآتيتين بالشكل العقدي:

$a)\ x^2 - y^2 = 1$

$b)\ xy = 1$

الجواب: $a)\ z^2 + \bar{z}^2 = 2$

$b)\ z^2 - \bar{z}^2 = 4i$

الفصل الثاني

المجموعات في المستوي العقدي

① NEIGHBORHOOD OF POINT جوار النقطة

تعريف ❶

لتكن a نقطة في المستوي العقدي وليكن r عدداً حقيقياً موجباً ما. ندعو المجموعة التي تحقق عناصرها الشرط:

$$z : |z-a| < r, r > 0 \qquad (1)$$

بالقرص المفتوح ذي المركز a ونصف القطر r أو بالجوار (الدائري) للنقطة a وقد نرمزه $D(a,r)$.

تعريف ❷

ندعو النقطة a، التي تنتمي إلى المجموعة E أو لا تنتمي إليها ، بنقطة تراكم لهذه المجموعة ، إذا كان أي جوار لهذه النقطة يحتوي على عدد غير منته من نقاط المجموعة E. وكل نقطة منها لا تملك هذه الصفة ندعوها بالنقطة المعزولة للمجموعة E. سنرمز لمجموعة نقاط التراكم بالرمز E' ونسمي المجموعة $E' \cup E$ لصاقة ونرمز لها بالرمز $\overline{E}$ (أي أن $\overline{E} = E' \cup E$)

تعريف ❸

إذا انتمت كل نقاط تراكم مجموعة E إلى المجموعة نفسها قلنا عنها إنها مغلقة ونكتب عندئذ $\overline{E} = E$.

تعريف ❹

نقول إن المجموعة E محدودة إذا أمكن حصرها ضمن قرص مفتوح مركزه الصفر ونصف قطره محدود ، إي إذا كان:

$$\exists R : \forall z \in E : |z| \le R$$

تعريف ❺

لتكن E مجموعة في المستوي العقدي و لتكن a نقطة من هذه المجموعة . نسمي a نقطة داخلية بالنسبة للمجموعة E إذا وجد جوار للنقطة a محتوى في E .

تعريف ❻

إذا كانت كل نقاط E داخلية قلنا عنها أنها مجموعة مفتوحة .

تعريف ❼

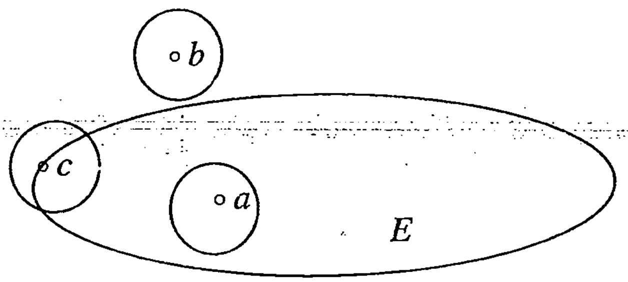
نقول إن a نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة E إذا كانت a لا تنتمي إلى E بالإضافة إلى نقاط جوار مناسب للنقطة a . ندعو مجموعة النقاط الخارجية بمتممة E ونرمز لها ب E' .

تعريف ❽

نقول إن a نقطة محيطيه (أو طرفية) إذا لم تكن نقطة داخلية أو خارجية بالنسبة للمجموعة E .

تعريف ❾

نقول عن المجموعة E إنها متراصة في المستويالعقدي إذا كانت مغلقة ومحدودة .



شكل1

على الشكل1:

a نقطة داخلية
b نقطة خارجية
c نقطة محيطية .

② CIRCLE AND DISC — الدائرة والقرص

خاصة ❶.

مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$(2) \qquad C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

تعين دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r.

البرهان: لتكن النقطتان $z_0 = x_0 + iy_0$ و $z = x + iy$. إن القيمة المطلقة للفرق بين هاتين النقطتين– بحسب تعريف طويلة العدد العقدي – هي:

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |(x - x_0) + i(y - y_0)| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

وهذا المقدار الأخير يمثل المسافة بين النقطتين (x, y) و (x_0, y_0) في المستوي . فإذا كانت هذه المسافة r حصلنا على العلاقة:

$$(3) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

وهذه العلاقة تمثل –كما هو معلوم– دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها r.

خاصة ❷

مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$(4) \qquad D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$$

تعين قرصاً مفتوحاً مركزه z_0 ونصف قطره r.

حالة خاصة.

مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$(5) \qquad D(0, r) = \{z : |z| < r\}$$

تعين قرصاً مفتوحاً مركزه 0 ونصف قطره r.

خاصة ❸

مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$(6) \qquad \overline{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \le r\}$$

تعين قرصاً مغلقاً مركزه 0 ونصف قطره r.

خاصية ❹

مجموعة النقاط z التى تحقق العلاقة :

$$D^c = \{z : |z - z_0| > r\} \qquad (7)$$

تعين النقاط الواقعة خارج القرص المفتوح الذي مركزه z_0 ونصف قطره r .

تعريف ❶.

مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$D_0^c = \{z : |z| > r\} \qquad (8)$$

تعين النقاط الواقعة خارج القرص المفتوح الذي مركزه 0 ونصف قطره r . تدعى مجموعة النقاط (8) بجوار اللانهاية .

③ ANNULUS الحلقة والجوار الحلقي

تعريف ⓫

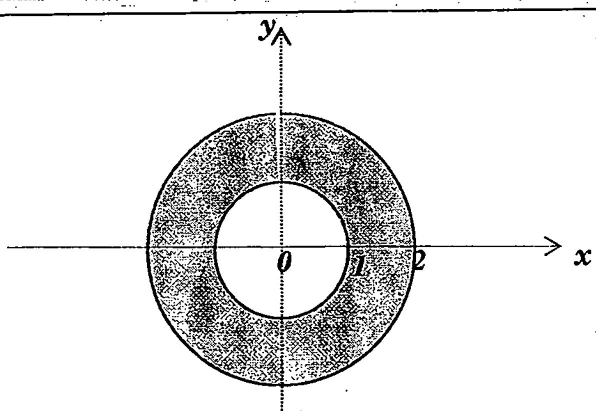
ندعو المجموعة المعرفة بالشكل:

$$P(z_0, r, R) = \{z : r < |z - z_0| < R\}, 0 < r < R \qquad (9)$$

بالحلقة المفتوحة ذات المركز z_0 ونصفي القطرين r و R .

مثال ⓫. يبين الشكل 2 شكل الحلقة

$$P(0,1,2) = \{z : 1 < |z| < 2\}.$$



شكل2

تعريف ❷

ندعو المجموعة المعرفة بالشكل:

$$A(z_0,r,R)=\{z: r\le|z-z_0|\le R\},0<r<R \qquad (10)$$

بالحلقة المغلقة ذات المركز z_0 ونصفي القطرين r و R .

تعريف ❸

ندعو المجموعة المعرفة بالشكل:

$$A(z_0,0,R)=\{z: 0<|z-z_0|<R\},R>0 \qquad (11)$$

بالجوار الحلقي للنقطة z_0 (أو بالجوار المحذوف للنقطة z_0) .

ملاحظة ❶

يمكن القول أن الجوار الحلقي للنقطة هو القرص المفتوح $D(z_0,r)$ الذي حذف منه المركز.

ملاحظة ❷

إذا كانت E مجموعة غير محدودة أمكننا القول ، إن النقطة في اللانهاية هي نقطة داخلية بالنسبة لهذه المجموعة. وقد تكون ∞ محيطية، في حالات أخرى. فمثلا ∞ هي نقطة داخلية للقرص $|z|>R$ و محيطية للحلقة

$$P(0,r,\infty)=\{z: r<|z|<\infty\}, \qquad (12)$$

تعريف ❷

يعرف المستوي العقدي مضافاً إليه النقطة في اللانهاية بالمستوي المغلق أو المستوي الموسع ويرمز له بالرمز $\leq^*$

④ STRAIGHT LINE المستقيم

من الهندسة التحليلية نعلم أن معادلة المستقيم المار من النقطتين $z_0=(x_0,y_0),z_1=(x_1,y_1)$ تعطى بالعلاقة:

$$y-y_0=m(x-x_0),\quad m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \qquad (13)$$

مع العلم أن m هو ميل المستقيم على المحور ox وزاوية الميل هي:

$$\varphi = \tan^{-1} m$$

نظرية ❶

تمثل المعادلة :

$$z = z_0 + at, -\infty < t < +\infty \qquad (a \neq o) \qquad (14)$$

مستقيماً ماراً من النقطة z_0 و يميل على المحور ox بزاوية φ مساوية لسعة العدد a:

$$\varphi = \arg a$$

البرهان. لنضع $a = \alpha + i\beta$ ولنأخذ جملة المعادلتين :

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, t \in I \qquad (15)$$

من الهندسة التحليلية نعلم أن العلاقتين ، أعلاه ، تمثلان المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم المار من النقطة(x_0 , y_0) ويميل على المحور الحقيقي بزاوية φ يعطى ظلها بالعلاقة

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (16)$$

وبملاحظة أن

$$a = \alpha + i\beta = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi = \arg a$$

$$\alpha = |a|\cos\varphi \ , \quad \beta = |a|\sin\varphi$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{|a|\sin\varphi}{|a|\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$

نحصل على المطلوب.

نتيجة ❶

تمثل المعادلة

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)t\,, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (17)$$

معادلة قطعة مستقيمة التي طرفاها z_0 , z_1 ونرمزها: $[z_0, z_1]$

البرهان . إذا كان المستقيم المعطى ماراً من النقطتين :

$$z_0 = (x_0 , y_0), z_1 = (x_1 , y_1)$$

كان بحسب (16):

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\beta}{a}=\tan\varphi$$

حيث φ هي زاوية ميل المستقيم على المحور ox ، وإضافة إلى ذلك، لدينا:

$$t=0 \Rightarrow z=z_0$$
$$t=1 \Rightarrow z=z_1$$

⑤ CONNECTED SETS المجموعات المترابطة

تعريف ❶

لتكن

$$\{z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n\}$$

مجموعة من النقاط على المستوي C . ندعو مجموعة القطع المستقيمة التي تكون نهاية إحداها بداية للأخرى أي المجموعة

$$[z_1, z_2], [z_2, z_3], \ldots, [z_{n-1}, z_n]$$

بالخط المنكسر ذي الرؤوس $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

تعريف ❷

نقول إن المجموعة E مترابطة إذا كان بالإمكان وصل كل نقطتين منها بوساطة خط منكسر واقع كلياً داخل هذه المجموعة . وهذا التعريف يبين مغزى التسمية بالمجموعة المترابطة .

ملاحظة ❶.

يمكن تعريف المجموعة المفتوحة المترابطة بشكل آخر مطابق للتعريف السابق في المستوي:
نقول مثلا إن المجموعة E مترابطة إذا لم يكن بالإمكان تقسيمها إلي مجموعتين E_1 و E_2 غير خاليتين ومنفصلتين بحيث يكون اجتماعهما مساوياً للمجموعة E نفسها أي بحيث يكون

$$E=E_1 \cup E_2 \ , \ E_1 \cap E_2=\Phi$$

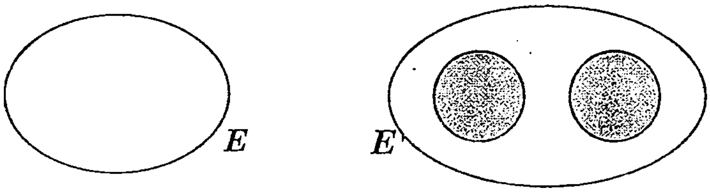
تعريف ❸

إذا كانت المجموعة E مفتوحة ومترابطة دعوناها بالمنطقة .

ملاحظة ❷.

تقسم المناطق إلى وحيدة الترابط ومتعددة الترابط . فاذا كانت المنطقة E ذات محيط مترابط قلنا عنها إنها وحيدة الترابط . وإذا كان محيطها يتألف من مجموعتين مترابطتين قلنا عن المنطقة إنها ثنائية الترابط وهكذا . . .

من أمثلة المناطق وحيدة الترابط يمكن أن يكون القرص المفتوح أو المساحة داخل المثلث أو داخل القطع الناقص ...الخ . (يمثل الشكل 2 – من اليسار –منطقة وحيدة الترابط الشكل ومن اليمين منطقة ثلاثية الترابط).



شكل 3

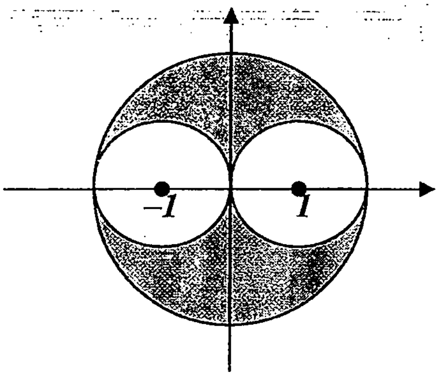
ملاحظة ❷.

يمكن القول إن المنطقة تكون وحيدة الترابط إذا كان محيطها مجموعة مترابطة(مثال ذلك المساحة داخل المثلث أو داخل القطع الناقص) .

مثال ❶. يمثل القرص: $D_0 = \{z : |z| < 1\}$ منطقة وحيدة الترابط وتمثل الحلقة : $P_0 = \{1 < |z| < 2\}$ منطقة ثنائية الترابط وتمثل المجموعة التي تحقق نقاطها المتراجحات:

$$G = \{z : |z| < 2 \,,\ |z-1| > 1 \,, |z+1| > 1 \}$$

منطقة ثلاثية الترابط (شكل3).



شكل 3

خاصة ❶. تمثل النقاط المحددة بالمتراجحات:

$x = re\,z > 0$	نصف المستوي اليميني المفتوح
$x = re\,z < 0$	نصف المستوي اليساري المفتوح
$y = im\,z > 0$	نصف المستوي العلوي المفتوح
$y = im\,z < 0$	نصف المستوي العلوي المفتوح
$rez > a$	تمثل نصف المستوي الواقع على يمين المستقيم $x = a$
$rez < a$	تمثل نصف المستوي الواقع على يسار المستقيم $x = a$
$imz > \beta$	تمثل نصف المستوي العلوي الواقع فوق المستقيم $y = \beta$.
$imz < \beta$	تمثل نصف المستوي السفلي الواقع تحت المستقيم $y = \beta$.

وجميع مجموعات هذه النقاط تمثل مناطق وحيدة الترابط.

خاصة ❷.

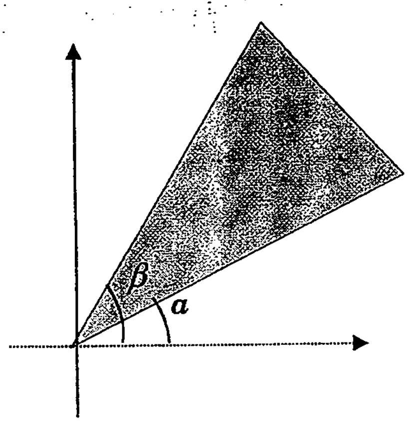
تمثل النقاط المحـــددة بجملـــة المتـــراجحتين: $a < imz < \beta$ شـــريطاً لانهائيـــاً محـــدداً بالمستقيمين $y = a,\;\; y = \beta$ الموازيين للمحور الحقيقي ox .

خاصة ❸.

تمثل النقاط المحددة بجملة المتراجحتين: $a < Argz < \beta$ قطاعاً زاوياً يقع رأســه فــي الصفر ومحدداً بمستقيمين يميلان على المحور الحقيقي بزاويتين هما a, β .

حالة خاصة

إذا وضعنا $a = 0 , \beta = \pi/2$ حصلنا على جملة المتراجحتين $0 < arg\,z < \pi$ اللتين تعبران هندسياً عن الربع الأول للمستوي.



شكل4

⑥ REIMANN SPHERE — كرة ريمان

لنأخذ في الفضاء الثلاثي جملة نظامية متعامــدة o,ξ,η,ζ ينطبــق فيهــا المحــوران $O\zeta$ و$O\eta$ على المحورين ox و oy ، على الترتيب ، ولنأخذ ، في هذه الجملة ، سـطح الكرة :

$$S:\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \qquad (19)$$

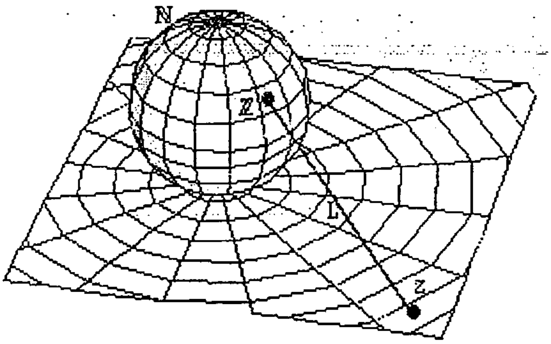
عندئذ يكون هذا السطح ماساً للمستوي الأفقي في النقطة $(0,0,0)$ ويقع مركزها في النقطة $(0,0,1/2)$ (انظر الشكل 5) .

تعريف ❶

يعرف سـطح الكـرة S (المعطـى بالعلاقـة (19))بقشـرة ريمـان وتعـرف النقطـة $N=(0,0,1)$ الواقعة على سطح هذه الكرة بالقطب .

تعريف ❷

يعرف التقابل الناتج من تقابل النقطة الكيفيـة $z=x+iy$ مـن المسـتوي $\le$ بالنقطـة $Z(\xi,\eta,\zeta)$ ،الناتجة عن تقاطع القطعة المستقيمة $[N,Z]$ بقشرة الكرة S ، بالاسـقاط الستيريوغرافي (**Stereographic projection**) للقشرة S في المستوي $\le$.



شكل5

تعريف ❸.

ندعو النقطة Z بالصورة الكروية (أو السفيرية) للنقطة z وندعو z بالمسقط الستيريوغرافي للنقطة Z .

نظرية ❶

تعطى العلاقة بين الصورة الكروية Z والمسقط الستيريوغرافي z بالعلاقات:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (20)$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta} \quad (21)$$

البرهان: لإيجاد احداثيات النقطة Z (الصورة الكروية لـ z) نبحث عن الحل المشترك لنقاط القشرة S مع معادلة القطعة المستقيمة $[N,Z]$ (شكل 4) التي لها الشكل الآتي (كما هو معروف من الهندسة التحليلية):

$$,L = [N,z]: \xi = xt, \eta = yt \quad \zeta = 1-t, 0 \le t \le 1$$

عندئذ بالتعويض في معادلة القشرة يكون

$$(xt)^2 + (yt)^2 + (1-t)^2 = 1-t$$

وبعد حسابات بسيطة نجد أن

$$t = \frac{1}{1+|z|^2}$$

وبالتالي

$$\xi = xt = \frac{x}{1+|z|^2}, \eta = yt = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (22)$$

وبالعكس ، إذا كانت النقطة $Z(\xi,\eta,\zeta)$ معلومة فإن العلاقات (22)تؤدي إلى

$$x = \xi(1+|z|^2) = \frac{\xi}{1-\zeta}$$

$$y = \eta(1+|z|^2) = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

نستنتج من ذلك ان الإسقاط الستيريوغرافي يحدد تقابلاً وحيد التعيين بين نقاط المستوي $\le$ والقشرة المحذوف منها القطب ∞ أي القشرة $S - \infty$.

ملاحظة ❷.

إذا اصطلحنا على أن نقطة القطب N تتقابل مع النقطة في اللانهاية ، فإننا نحصل على تقابل وحيد التعيين بين المستوي العقدي المغلق (اذي نرمز له بالرمز $\leq^*$) والقشرة S. لذلك نستطيع القول ان قشرة ريمان S تتطابق مع المستوى المغلق $\leq^*$.

⑦ EUCLIDEAN METRIC المسافة على المستوي

على غرار المفهومين الهندسين المذكورين عن الأعداد العقدية ، سوف نذكر مفهومين للمسافة (المترك) على المجموعتين C و Ċ ، الأول منهما هو متريك اقليدس والثاني هو المسافة الكروية (أو المتريك السفيري)

تعريف ❶.

تعرف المسافة الإقليدية $|\,.\,|$ بين نقطتين z_1 و z_2 بالعلاقة:

$$|\,.\,| = |z_1 - z_2| \tag{23}$$

تعريف ❷.

تعرف المسافة الكروية d بين نقطتين z_1 و z_2 بالعلاقة:

$$d = d(z_1.z_2) = |Z_2 - Z_1| \tag{24}$$

أي أن البعد $d(z_1.z_2)$ بين النقطتين z_1 و z_2 هو المسافة الإقليدية بين صورتيهما الفراغيتين .

تعريف ❸.

تعرف المسافة بين النقطة z و ∞ على أنها المسافة الإقليدية بين الصورة الكروية للنقطة z والقطب N

ملاحظة ❶.

يصلح المتريك الكروي للاستخدام على كامل المستوي العقدي المغلق بينما يستخدم المتريك الإقليدي على المستوي العقدي المفتوح فقط . ونظراً لأن التعامل مع متريك إقليدس أسهل، من الناحية العملية ، فإنه يكتفى عادة باستخدامه على المجموعات المحدودة.

نظرية ❶

البعد بين النقطة z $(z \in \leq)$ و ∞ يعطي بالعلاقة

$$(25) \qquad d(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

البرهان : لتكن النقطة

$$z=x+iy\in C$$

التي صورتها الكروية Z :

$$Z=(\xi,\eta,\zeta)\in S$$

بحسب التعريف يكون طول القطعة المستقيمة $[N,z]$ ممثلاً للبعد بين النقطتين z و ∞ وعندئذ (شكل 5)

$$d^2(z,\infty)=\overline{NZ}^2=(\xi-0)^2+(\eta-0)^2+(\zeta-1)^2$$

بتعويض إحداثيات النقطة Z بقيمها في (22) نحصل على

$$d^2(z,\infty)=\frac{x^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}+\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^2}$$

$$=\frac{|z|^2+1}{\left(1+|z|^2\right)^2}=\frac{1}{1+|z|^2}$$

وهذا يعني أن

$$d(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

خاصة ❶

البعد بين أي نقطتين z_1 و z_2 في المستوي العقدي يعطى بالعلاقة :

$$d(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

خاصة ❷

البعد الكروي بين أي نقطتين في المستوي العقدي لا يتجاوز العدد1 . أي أن

$$d(z_1, z_2) \leq 1 \quad \forall z_z, z_2 \in \overline{C}$$

⑧ SEQUENCE المتتالية العددية

تعريف ❶.

المتتالية العددية (Sequence) هي عملية مقابلة كل عدد طبيعي n بعدد عقدي ما من الشكل:

$$(25) \quad z_n = x_n + iy_n$$

وفق قانون معين ، ونرمز لها بأحد الرمزين :

$$(26) \qquad \{z_n\}, \quad n \in \aleph$$

$$(26') \qquad \{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots$$

تعريف ❷

نقول إن النقطة a هي نقطة تراكم للمتتالية $\{z_n\}$ إذا كان أي جوار للنقطة a يحتوي على نقاط من نقاط المتتالية $\{z_n\}$.

تعريف ❸.

نقول أن المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة نحو النهاية a إذا كان من أجل كل عدد موجب ε يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث تتحقق المتراجحة $|z_n - a| < \varepsilon$ من أجل كل n لا تقل عن n_0 ونستخدم أياً من الرمزين:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

في هذه الحالة تكون النهاية a نقطة تراكم للمتتالية في الوقت نفسه.

ويعني ذلك بلغة الرموز:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : |z_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

نتيجة ❶

يكون العدد a نهاية للمتتالية $\{z_n\}$ إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}|z_n - a| = 0$$

مثال①.بين انه إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة كانت متتالية قيمها المطلقة متقاربة أيضاً . أي أن

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$$

الحل. من التعريف ومن العلاقة :

$$\big||z_n| - |a|\big| \le |z_n - a|$$

لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \big||z_n| - |a|\big| = 0$$

نتيجة ❷

المعنى الهندسي لكون العدد a نهاية للمتتالية $\{z_n\}$ يعني ، بحسب المتراجحة $|z_n - a| < \varepsilon$ ، أن أي قرص مفتوح ، مركزه a ونصف قطره ε ، يحتوي على جميع حدود المتتالية $\{z_n\}$ ما خلا عدداً منتهياً منها على الأكثر.

نتيجة ❸

لكل متتالية متقاربة نهاية واحدة على الأكثر.

تعريف ❹

نقول إن المتتالية $\{z_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث يكون

$$|z_n| \le M \qquad \forall n \in N$$

نتيجة ❹

كل متتالية متقاربة محدودة

تعريف ❺

نعرف تقارب متتالية الأعداد العقدية $\{z_n\}$ نحو اللانهاية بالعلاقة:

$$\forall R > 0\ \exists N_0 \Rightarrow |z_n| > R \quad \forall n > N_0\ z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Leftrightarrow$$

نقول ، في هذه الحالة ، إن اللانهاية نقطة تراكم المتتالية $\{z_n\}$.

نتيجة 5

تكون متتالية الأعداد العقدية $\{z_n\}$ متقاربة نحو اللانهاية إذا كانت نهاية متتاليـة قيمهـا المطلقة $\{|z_n|\}$ متقاربة نحو اللانهاية أي أن:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Leftrightarrow |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

9 الشرط اللازم والكافي لتقارب المتواليات
CONVERGENT SEQUENCE

إذا وضعنا حدود المتتالية $\{z_n\}$ بالشكل

$$\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}, n=1,2,... \qquad (27)$$

فإننا نلاحظ وجود تقابل بين حدود متتالية الأعداد العقدية $\{z_n\}$ وويـين متتـاليتين مـن الأعداد الحقيقية $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$. من خلال هذه الحقيقة نستطيع صياغة المبرهنة الآتية:

نظرية 1.

الشرط للازم والكافي لتقارب المتتالية

$$\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$$

نحو النهاية $g=a+ib$ هو تقارب المتتالية x_n نحو a و تقارب المتتالية y_n نحو b.

البرهان : <u>الشرط اللازم</u> . ليكن $z_n \to g$. عندئذ من أجل كل $n \ge n_o$ يكـون بحسـب التعريف :

$$|z_n-g|=|(x_n-a)+i(y_n-b)|<\varepsilon$$

وبما أن

$$|x_n-a|\le|(x_n-a)+i(y_n-b)|$$

$$|y_n-b|\le|(x_n-a)+i(y_n-b)|$$

إذن

$$|x_n-a|<\varepsilon, \qquad |y_n-b|<\varepsilon$$

وبالتالي من اجل كل $n>n_0$ لدينا

$$x_n\to a, \qquad y_n\to b$$

وهذا يعني تقارب المتتاليتين $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$. نحو النهايتين a و b على الترتيب.

<u>الشرط الكافي</u> : ليكن $x_n\to a$ و $y_n\to b$ عندئذ

$$\forall \varepsilon > o \exists\, n_1 : |x_n - a| < \varepsilon \;/2 \,\forall n \geq n_1$$
$$\forall \varepsilon > o \exists n_2 : |y_n - b| < \varepsilon \;/2 \,\forall n \geq n_2$$

لــتكن n_0 الأكبــر بــين n_1 و n_2 أي $n_0 = max(n_1 . n_2)$ عندئــذ تكــون المتراجحتان أعلاه صحيحتين معاً من أجل كل $n > n_0$ وفي هذه الحالة

$$|z_n - g| = |(x_n - a) + (y_n - b)i|$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يعني بحسب التعريف تقارب z_n نحو g . وهو المطلوب

نتيجة 1

نستنتج من هذه النظرية أن دراسة تقارب متتالية من الاعداد العقدية تكافئ دراسة متتاليتين من الأعداد الحقيقية . لذلك يمكن وبسهولة نقل نتائج التحليل الحقيقي – المتعلقة بالتقارب – الى التحليل العقدي . وسوف نستفيد من هذه الحقيقة أكثر من مرة في المستقبل.

خواص المتتاليات المتقاربة ⑩

PRPERTIES OF CONVERGENT SEQUENCE

من النتيجة 1 السابقة نحصل على الخواص المتعلقة بالعمليات الأربع على نهايات متتاليات الأعداد العقدية كنتيجة مباشرة للنظريات المشابهة في التحليل الحقيقي وللمبرهنة السابقة.

خاصة 1.

إذا كانت نهايتا المتتاليتين $\{a_n\}, \{b_n\}$ موجودتين فإن:

(28) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(29) $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

(30) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

خاصة ❷

بشكل مشابه للحالة الحقيقية إذا كان $z = x + iy$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

خاصة ❸

تكون المتتالية $\{a^n\}$ متقاربة نحو الصفر إذا كان $|a| < 1$ ومتباعدة نحو ∞ إذا كان $|a| > 1$.

تعريف ❶

نقول إن المتتالية $\{z_n\}$ تحقق شرط كوشي إذا كان :

$$(32) \qquad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n0} : |z_n - z_m| < \varepsilon \forall n.m \geq n_o$$

من هذا التعريف ومن نظرية كوشي ، المتعلقة بالمتتاليات الحقيقية، نستنتج نظرية كوشي الآتية:

نظرية ❶

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية العددية $\{z_n\}$ هو تحقيقها لشرط كوشي :

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n0} : |z_n - z_m| < \varepsilon \forall n.m \geq n_o$$

التطبيقات العملية

⦿ SOLVED PROBLEMS تمارين محلولة

تمرين ①. أوجد المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

وحدد ذلك من أجل: $z_1=1,\ z_2=i$.

الحــل. من تعريف القيمة المطلقة لدينا:

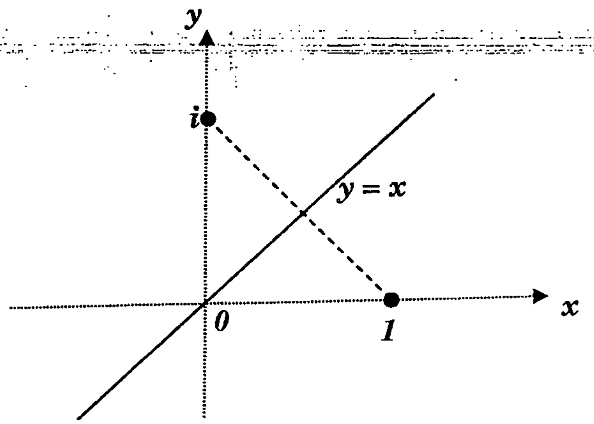
$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

$$\Leftrightarrow |x-x_1+i(y-y_1)|=|x-x_2+i(y-y_2)|$$

$$\Leftrightarrow (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

وهذه العلاقة تعبر – كما نعلم من الهندسة التحليلية– عن المحل الهندسي للنقاط المتســاوية البعد عن النقطتين (x_1,y_1) و (x_2,y_2) أي بين النقطتين z_1 و z_2.

من أجل: $z_1=1,\ z_2=i$ يكون:



شكل6

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$
$$y = x$$

نلاحظ في هذه الحالة أن المحل الهندسي هو المستقيم المنصف للربع الأول وهو ، في الوقت نفسه ، المستقيم الذي تتناظر بالنسبة له النقطتان $z_1 = 1 \,,\; z_2 = i$ (شكل٥).

تمرين ② . أوجد المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة

$$|z+i|^2 = im(z+2i)$$

الحـل. بتحويل المعادلة إلى الشكل الديكارتي

$$x^2 + (y+1)^2 = y+2$$
$$x^2 + y^2 + y = 1$$
$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

وهي معادلة دائرة مركزها $1/2$ ونصف قطرها $\sqrt{5}/2$

تمرين ③ أوجد المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة بالمتراجحات:

$$a)\ 1 \le re\left(\frac{1}{z}\right) \le 4\,,\quad b)\ -\frac{\pi}{4} \le arg\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{\pi}{4}$$

ثم استنتج المحل الهندسي لنقاط المجموعة:

$$P = \left\{ z : \frac{1}{4} \le re\left(\frac{1}{z}\right) \le 1 .\quad -\frac{\pi}{4} \le arg\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

الحل. آ) لدينا

$$re\left(\frac{1}{z}\right)=re\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right)=re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

فإذا كان

$$\frac{1}{4}\leq\frac{x}{x^2+y^2}\leq 1$$

فإن:

$$x^2+y^2\leq 4x\,,\quad x^2+y^2\geq x$$

$$(x-2)^2+y^2\leq 4\,,\quad (x-1/2)^2+y^2\geq 1/4$$

وهذا يعني أن المحل الهندسي المطلوب هو المنطقة المحصورة بين الدائرتين :

$$(x-2)^2+y^2=4\,,$$
$$(x-1/2)^2+y^2=1/4$$

ب) من أجل السعة الرئيسية لدينا:

$$arg\left(\frac{1}{z}\right)=arg\,1-arg\,z=0-arg\,z=-arg\,z$$

إذن

$$-\frac{\pi}{4}\leq -arg\,z\leq\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي

$$-\frac{\pi}{4}\leq arg\,z\leq\frac{\pi}{4}$$

وبما أن

$$tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1\,,\quad tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

فإن المحل الهندسي المطلوب هو الجزء الواقع في الربع الأول والرابع من المستوي والمحدد بنصفي المستقيمين $y=x$, $y=-x$

من الحل أعلاه نلاحظ أن نقاط المجموعة تكافئ نقاط المجموعة المحددة بالمنحنيات:

$$(x-2)^2+y^2=4\,,\quad (x-1/2)^2+y^2=1/4$$

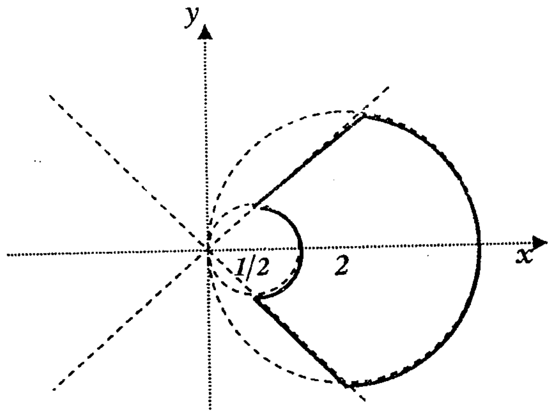
$$y=-x \ , \ y=x$$

بكلمات أخرى:

$$P=\left\{z:\frac{1}{4}\le re\left(\frac{1}{z}\right)\le 1. \quad -\frac{\pi}{4}\le arg\left(\frac{1}{z}\right)\le\frac{\pi}{4}\right\}\equiv$$

$$\left\{(x,y):(x-2)^2+y^2\le 4\,,\ (x-1/2)^2+y^2\le 1/4\,, y\ge -x\,, y\le x\right\}$$

(قارن شكل 7)



شكل7

تمرين ④ . اكتب معادلة المستقيم ℓ المار بالنقطة $z_0=1+i$ و:

a) يوازي المحور الحقيقي .
b) يوازي المحور التخيلي
c) يمر من مبدأ الاحداثيات .

الحــل.

بحسب (14)تكون المعادلة العامة للمستقيم المار من النقطة z_0 والمائل على المحور ox بزاوية قدرها φ هي:

$$\ell: z=z_0+at, -\infty<t<+\infty \quad , \quad \varphi=arg\, a$$

a) إذا كان المستقيم ℓ يوازي المحور الحقيقي فإن ميله على المحور الحقيقي هو الصفر:

$$\varphi = \arg a = 0 \Rightarrow a = a \in \Re$$
$$\Rightarrow \ell : z = 1 + i + at, -\infty < t < +\infty$$

وتكون معادلته بالشكل الديكارتي:

$$\ell : y = 1$$

b) في هذه الحالة يكون :

$$\varphi = \arg a = \pi/2 + k\pi$$

نستنتج من ذلك أن a عدد تخيلي بحت من الشكل $i\beta, \beta \in \Re$. وبذلك تكون معادلة المستقيم في هذه الحالة هي:

$$\ell : z = 1 + i + i\beta\, t, -\infty < t < \infty, \beta \in \Re$$

وتكون معادلته بالشكل الديكارتي:

$$\ell : x = 1$$

c) في هذه الحالة يمر المستقيم من المبدأ 0 وتكون معادلة المستقيم هي

$$z = at, -\infty < t < \infty, \quad a = z_0 - 0 = 1 + i$$

$$\Rightarrow \ell : z = (1+i)t, t \in \Re$$

وتكون معادلته بالشكل الديكارتي:

$$\ell : y = x$$

ملاحظة ❶

بملاحظة أن:

$$z = (1+i)t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)t = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)t = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

نستنتج أن معادلة المستقيم يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\ell : z = e^{\frac{\pi}{4}i}\, t, t \in \Re$$

تمرين ⑤. آ) اوجد الصورة الكروية للدائرة: $|z| = 1$

ب) اوجد الصورة الكروية للدائرة: $|z|=1/2$

ج) استنتج الصورة الكروية للحلقة المحددة بجملة المتراجحتين

$$1/2 \le |z| \le 1$$

الحـــل. آ) ليكن $|z|=1$. لدينا بحسب العلاقات (20):

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\eta=\frac{y}{1+|z|^2},\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$$\xi^2+\eta^2=\frac{x^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

نستنتج من ذلك أن صورة الدائرة $|z|=1$ هي الدائرة $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{4}$ الواقعة في المستوي $\zeta=\frac{1}{2}$

ب) إذا كان $|z|=1/2$ فإننا نجد بطريقة مشابهة لما سبق أن:

$$\xi^2+\eta^2=\frac{x^2+y^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}=\frac{1/4}{(1+1/4)^2}=\frac{4}{25}$$

$$\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}=\frac{1/4}{1+1/4}=\frac{1}{5}$$

وتكون صورة الدائرة المطلوبة هي $\xi^2+\eta^2=\frac{4}{25}$ الواقعة في المستوي $\zeta=\frac{1}{5}$

ج) إذا كان $1/2 \le |z| \le 1$ ووضعنا $|z|=r$ وجدنا أن:

$$\xi^2+\eta^2=\frac{x^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}=\frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2},\quad \frac{1}{2}\le r\le 1$$

$$\frac{1}{5}\le\zeta=\frac{r^2}{1+r^2}\le\frac{1}{2}$$

فإذا لاحظنا أن:

$$\frac{1}{2} \le r \le 1 \Rightarrow \frac{4}{25} \le \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2} \le \frac{1}{4}$$

ورمزنا $\rho = \frac{r}{\left(1+r^2\right)}$ استنتجنا أن الصورة الفراغية للحلقة المعطاة هي مجموعة الدوائر المعطاة بالمعادلات:

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \ , \quad \frac{2}{5} \le \rho \le \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} \le \varsigma \le \frac{1}{2},$$

تمرين ⑥ . بين أن التعريف أن

$$z_n = \frac{1+i^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

الحــل.

$$|z_n - g| = \left|\frac{1+i^n}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \forall\, n > n_0 .$$

$$|z_n - g| = \left|\frac{1+i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1+i^n}{n}\right| \le \left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon, \quad n > \frac{2}{\varepsilon}$$

باختيار $n_0 = \frac{2}{\varepsilon}$ تكون المتراجحة الأولى صحيحة و نحصل على التقارب المطلوب

تمرين⑦ . ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام:

$$z_n = 2 + \frac{i}{n} \qquad .$$

الحــل.

المتتالية متقاربة لأن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{i}{n} = 2+0=2$$

تمرين ⑧.ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام:

$$z_n = 1+(-1)^n i$$

الحـــل. المتتالية متباعدة لأن لها نهايتين مختلفتين $1+i, 1-i$ وهما نقطتا تراكم بالوقت نفسه .وهذه المتتالية تمثل مثالاً على المتتالية المتباعدة والمحدودة حيث لدينا من أجل كل n:

$$|z_n| = \left|1+(-1)^n i\right| \le |1| + |i| = 2$$

تمرين ⑨

ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام

$$z_n = (1+i)^n, \quad n = 1,2,\ldots$$

الحل . هذه المتتالية متباعدة لأن:

$$|z_n| = \left|(1+i)^n\right| = |(1+i)|^n = \sqrt{(1+1)}^n = \sqrt{2}^n$$

UNSOLVED PROBLEM تمارين للحل

❶ أوجد المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة بالمعادلات

$$a)\ re z = -1,\ b)\ |z| = re z + 3,\quad c)\ 2|z| = 3|z+1|$$

$$d)\ |z-2| = |z+i|, e)\ 1 < |z+i| < 2, f)\ re z^2 > 1$$

❷ .بين أن المحل الهندسي للنقاط التي تمثلها المجموعة:

$$z : 0 < arg \frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}$$

هي نصف المستوي اليميني الواقع خارج الدائرة $C(1,\sqrt{2})$ أي الدائرة ذات المركز $z_0 = 1$ ونصف القطر $r = \sqrt{2}$

❸ . بين أن المحل الهندسي للنقاط المعطاة بالمعادلة

$$|z+3| + |z-3| = 10$$

هي القطع الناقص المعطى بالمعادلة

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

❹ . ليكن المستقيمان:

$$z = z_0 + at, -\infty < t < +\infty$$
$$z = z'_0 + a's, -\infty < s < +\infty$$

والمطلوب : a) ما هي العلاقة بين a و a' ليكونا متوازيين؟
b) ما هي العلاقة بين a و a' ليكونا متعامدين؟

5 ● .بين أن معادلة المستقيم $z = z_0 + at$ العمودي على منتصف القطعة المستقيمة $[z_1, z_2]$ هي من الشكل:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + (z_2 - z_1)it$$

❻ . أوجد الصور الكروية للنقاط :

$a) e^{i\pi/2}$, $b) -1$, $c) -1+i$

الأجوبة:

$a)\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $b)\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $c)\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

❼ . برهن أن الصورتين الكرويتين للنقطتين $\bar{z}, 1/z$ متناظرتان بالنسبة لخط الاستواء على قشرة ريمان

8. برهن أن الصورتين الكرويتين للنقطتين $z,-z$ واقعتان على مدار واحد وهما متناظرتان بالنسبة للمحور $O\varsigma$

9. برهن باستخدام التعريف أن المتتالية التي حدها العام $z_n=\dfrac{in-2}{3n-5i}$ متقاربة نحو النهاية $g=\dfrac{i}{3}$.

10. برهن ، باستخدام التعريف ، أن المتتالية التي حدها العام:

$$z_n=\frac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n}$$

متقاربة نحو النهاية i.

11. برهن أن المتتالية التي حدها العام $z_n=(1+3i)^n$ متباعدة .

الفصل الثالث

التابع العقدي

① التابع العقدي ذو المتحول الحقيقي
COMPLEX FUNCTION WITH REAL VARIABLE

تعريف ❶

التابع العقدي ذو المتحول الحقيقي هو قانون يربط كل عدد حقيقي t من مجال ما I بعدد عقدي وحيد نرمز له بالرمز $z(t)$ ونكتبه بالشكل

$$z(t)=x(t)+iy(t) \qquad (1)$$

ملاحظة ❶

نلاحظ بسهولة أن المعادلة (1) تكافئ المعادلتين الآتيتين:

$$x=x(t)\ ,\ \ y=y(t),\ \ t\in I \qquad (2)$$

اللتين تعبران عن منحن ما في المستوي . يقال ، في هذه الحالة ، إن بيـان (أي منحنـي) التابع معطى بواسطة المعادلتين الوسيطيتين (2) أوبالشكل الديكارتي بينما يقال في الحالـة (1) بأنه معطى بالشكل العقدي. نتيجة لذلك ومن التعريف نستنتج أن دراسة خواص التابع $z(t)$ تكافئ دراسة خواص تابعين حقيقيين هما $x(t)$ و $y(t)$.

ملاحظة ❷

في الحالة الخاصة التي تكون فيها

$$z(t)=x_0+\alpha t+i(y_0+\beta t),t\in \Re$$

يكون لجملة المعادلتين (2) الشكل

$$x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t,t\in I \qquad (3)$$

ويكون المنحني ، في هذه الحالة ، مستقيماً ماراً من النقطة $x_0 + iy_0$ ويميل على المحور الحقيقي - كما رأينا سابقاً- بزاوية قدرها :

$$(4) \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{a}$$

تعريف ❷

نعرف نهاية التابع $z(t)$ في النقطة t_0 كما يلي:

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ni \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |z(t) - z_0| < \varepsilon$$

ويكافئ ذلك:

$$, z_0 = x_0 + iy_0 \; \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 , \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \right\}$$

تعريف ❸

نقول إن التابع $z(t)$ مستمر في النقطة $t_0 \in I$ إذا كان

$$z(t) = z(t_0) \; \lim_{t_n \to t_0}$$

ويكافئ ذلك أن يكون:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \; , \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$$

تعريف ❹

نعرف مشتق التابع $z(t)$ في النقطة t_0 بواسطة النهاية(إذا وجدت):

$$(5) \qquad z'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$$

ويكافئ ذلك أن يكون:

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \; , \quad y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

نتيجة ❶

إذا وجد المشتق في النقطة t_0 كان

$$(6) \qquad z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

نتيجة ❷

إذا وجد المشتق في كل نقطة t من مجال تعريفه I كان :

$$(7) \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

المعنى الهندسي للمشتق ②

GEOMETRICAL MEANINIG

ليكن

$$(8) \qquad z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in I$$

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0$$

من المعلوم أن معادلة القاطع لهذا المنحني في النقطتين:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

يعطى بالمعادلة ذات الشكل الديكارتي:

$$(9) \qquad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

ويكافئ ذلك أن معادلة القاطع بالشكل العقدي لهذا المنحني في النقطتين $z(t_0)$ و $z(t_1)$ هي :

$$z = z(t_0) + [z(t_1) - z(t_0)]t, \; t_0 \in I \;\; t_1 \in I$$

وإذا قسمنا أمثال t على المقدار $t_1 - t_0$ فإن ميل القاطع لايتغير وبالتالي يمكن أن تكون معادلته من الشكل:

$$z = z(t_0) + \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0}t, \; t \in I$$

فإذا جعلنا ، الآن ، t_1 تسعى نحو t_0 فان معادلة هذا القاطع تتحول إلى الشكل :

$$z = z(t_0) + z'(t_0)t, t \in I$$

$$d = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt$$

وذلك لأن معادلة المنحني $z(t)$ يمكن وضعها بوساطة معادلتين :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

ومعروف من التحليل الحقيقي أن طول المنحني المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين أعلاه يعطى بالعلاقة

$$d = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

لذلك ونتيجة للمساواة

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = |z'(t)|$$

نحصل على المطلوب

④ COMPLEX FUNCTION التابع العقدي

تعريف ❶

تدعى عملية مقابلة كل عدد عقدي z من مجموعة ما E ، في المستوي ، بعدد عقدي وحيد w من مجموعة أخرى E' ، وفق نظام معين ، بالتابع العقدي ويرمز له بأحد الأشكال:

$$f : E \to E', \quad z \xrightarrow{f} w, \quad w = f(z).$$

تدعى المجموعة E بمنطلق (أو مجموعة تعريف) التابع وتدعى المجموعة E' ، المؤلفة من جميع القيم w ، بمستقر التابع (أو بصورة E وفق التابع f) ونكتب عندئذ :

$$E' = f(E)$$

تعريف ❷

نقول إن التابع f :

آ- محدود إذا كان مستقره E' مجموعة محدودة

ب- متباين إذا كان

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in E$$

ج- نوني القيمة (أو نوني التباين) إذا أخذ أي قيمة w من E' في n من نقاط E على الأكثر ولكن توجد ، على الأقل ، نقطة واحدة w_0 ، مثلاً ، يأخذها التابع بالضبط في n من النقاط . أي أنه يوجد بالضبط n من النقاط المختلفة

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \in E$$

يكون فيها

$$w = f(z_1) = f(z_2) = ... = f(z_n), \quad w \in E'$$

تعريف ❸

يدعى التابع

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \tag{13}$$

بكثير الحدود من الدرجة n . هذا التابع معرف في كل المستوي العقدي .

تعريف ❹

يدعى التابع

$$w = f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{14}$$

بالتابع الكسري (أو التابع العادي) إذا كان كل من بسطه ومقامه كثير حدود أي إذا كان:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$
$$Q(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m$$

هذا التابع معرف على كل المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تعدم المقام $Q(z)$.

مثال ❶. إن التابع

$$w = f(z) = 2z + 1 + i$$

معرف على كل نقاط المستوي العقدي وهو متباين لأنه من أجل أي نقطتين z_1, z_2 في هذا المستوي يكون:

$$2z_1 + 1 + i = 2z_2 + 1 + i \Rightarrow z_1 = z_2$$

وصورة هذا التابع هي ، أيضا ، كل المستوي العقدي. وهو ينقل :

آ-الدائرة $|z| = 1$ في المستوي العقدي (z) إلى الدائرة $|w - (1+i)| = 2$ في المستوي العقدي (w) لأن:

$$w = 2z + 1 + i \Rightarrow w - 1 - i = 2z \Rightarrow |w - 1 - i| = 2|z|$$

ب- المثلث الذي رؤوسه :

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = i$$

في المستوي العقدي (z) إلى المثلث الذي رؤوسه:

$$w_0 = 1 + i, \quad z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 + 3i$$

في المستوي العقدي (w) .

نلاحظ أخيراً أن التابع المعطى يمثل ، في المستوي العقدي ، انسحاباً مقداره $1+i$ وتحاكياً قدره 2.

⑤ LIMITS AND CONTINUITY النهايات والاستمرار

تعريف ❶

لتكن z_0 نقطة تراكم للمجموعة E. نقول ان للتابع $f(z)$ المعرف على E، نهاية في النقطة z_0 قدرها g إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين:

$$(15)\qquad \forall\{z_n\}: z_n \to z_0, z_n \neq z_0 \Rightarrow f(z_n) \longrightarrow g,$$

$$(16)\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ 0<|z-z_0|<\delta, \Rightarrow |f(z)-g|<\varepsilon$$

وهذا ما نكتبه على أحد الشكلين:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = g \qquad f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} g,$$

بمعنى أن:

$$(I)\quad \forall\{z_n\}: z_n \to z_0, z_n \neq z_0 \Rightarrow f(z_n) \longrightarrow g,\ f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} g \Leftrightarrow$$

$$(II)\quad \forall\varepsilon>0\exists\delta>0:<0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-g|<\varepsilon\ \lim_{z\to z_0} f(z)=g \Leftrightarrow$$

تعريف ❷

نقول إن التابع $f(z)$ يسعى الى ∞ عندما تسعى z إلى z_0 إذا كان:

$$(17)\qquad \forall\{z_n\}: z_n \to z_0, z_n \neq z_0 \Rightarrow f(z_n) \to \infty,$$

بمعنى أن:

$$(I')\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \quad \forall\{z_n\}: z_n \to z_0, z_n \neq z_0 \Rightarrow f(z_n) \to \infty,$$

وكذلك:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \quad (II')\quad \forall\{z_n\}: z_n \to \infty \Rightarrow f(z_n) \to w_0,$$

نتيجة ❶.

$$(18) \quad \lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=w_0$$

نتيجة ❷.

$$(18') \qquad \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}=0$$

نتيجة ❸

إذا كانت درجة كثير الحدود

$$W(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m$$

أكبر من الصفر فان:

$$(19) \qquad \lim_{z\to\infty} W(z)=\infty$$

البرهان . تنتج (19) من العلاقة :

$$W(z)=z^m\left(\frac{a_0}{z^m}+\frac{a_1}{z^{m-1}}+\ldots+a_m\right)$$

ومن النهاية:

$$\lim_{z\to\infty} W(z)=\lim_{z\to\infty} z^m \lim_{z\to\infty}\left(\frac{a_0}{z^m}+\frac{a_1}{z^{m-1}}+\ldots+a_m\right)$$

$$=a_m \lim_{z\to\infty} z^m=a_m\cdot\infty=\infty$$

مثال ❶. بين أن:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}=2$$

الحـل. باستخدام النتيجة (18) لدينا :

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}=\lim_{z\to 0}\frac{2\frac{1}{z}+i}{\frac{1}{z}+1}=\lim_{z\to 0}\frac{2+iz}{1+z}=2$$

ملاحظة ❶ بالإمكان إيجاد النهاية السابقة مباشرة كما يلي:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{2+\frac{i}{z}}{1+\frac{1}{z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{2+0}{1+0}=2$$

تعريف ❸

نقول إن التابع $f(z)$ ،المعرف على المجموعة E:

آ- مستمر في النقطة z_0 إذا كان

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0), z_0\in E$$

ب- مستمر على المجموعة E إذا كان مستمرا في كل نقطة منها .

ج- مستمر بانتظام على E إذا كان :

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall z_1,z_2\in E:|z_1-z_2|<\delta\Rightarrow|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

ملاحظة ❶

التابع المستمر على مجموعة محدودة ومغلقة يكون مستمراً بانتظام على هذه المجموعة .

⑥ CARTESIAN FORM — الشكل الديكارتي

ليكن التابع

$$w=f(z), z\in E, z=x+iy=(x,y)$$

بما أن $f(z)$ تابع للمتحول z فهو تابع للمتحولين (x,y) .لذلك من الطبيعي أن يكون كل من القسم الحقيقي والقسم التخيلي للتابع $f(z)$ تابعاً للمتحولين (x,y) . فإذا وضعنا:

$$ref(z)=u(x,y),\quad imf(z)=v(x,y)$$

وجدنا أن تعريف التابع العقدي $f(z)$ يتعين بتعريف تابعين حقيقيين للمتحولين x و y هما u و v ولكل منهما نفس مجموعة تعريف التابع $f(z)$.وهكذا يكون:

$$(20)\qquad f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

تعريف ❶

ندعو المقدار (20) بالشكل الديكارتي للتابع العقدي $f(z)$.

مثال ❶. ضع التابع الآتي بالشكل الديكارتي:

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \tag{21}$$

الحـل. لدينا

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

وبالتالي $w = u + iv$ حيث:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \;,\quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \tag{22}$$

ملاحظة ❶

يمكن استخدام الاحداثيات القطبية r,θ للتعبير ديكارتياً عن التابع العقدي

$$w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

حيث يكون:

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = u(r,\theta) + iv(r,\theta),\;\; z = re^{i\theta}$$

مثال ❷. ضع التابع

$$w = f(z) = z^2$$

بالشكل الديكارتي ، مستخدماً الاحداثيات القطبية r,θ ، وادرس بعض خواصه.

الحل. 1- لدينا

$$w = z^2 = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right)$$

وبذلك يكون $w = u + iv$ حيث:

$$u(x,y) = r^2\cos 2\theta \;,\;\; v(x,y) = r^2 \sin 2\theta$$

2- هذا التابع معرف في كل المستوي العقدي . وهو ثنائي القيمة بشكل عام لأن :

$$z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = \mp z_2$$

ولكنه وحيد القيمة (متباين) على كل من نصف المستوي العلوي $imz > 0$ ونصف المستوي السفلي $imz < 0$ لأنه لدينا في كل من هاتين الحالتين:

$$z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

3- نلاحظ أيضاً أنه ينقل النقطة $z = re^{i\theta}$ إلى النقطة $w = r^2 e^{2i\theta}$ بتحاك قدره مربع الطويلة r^2 وبسعة جديدة 2θ مضاعفة للسعة الأصلية θ . يتضح من ذلك أن نصف المستوي العلوي مثلاً ينتقل إلى المستوي بكاملة من خلال هذا التابع (وربع المستوي الأول مثلاً إلى نصف المستوي العلوي)

ملاحظة ⓯

يعتمد تعميم مفهوم التابع على مقابلة قيم المتحول ،من مجموعة التعريف ، بأكثر من قيمة من مجموعة المستقر . مثل هذه الحالة ،التي تمثل تابعاً متعدد التعيين (أو القيمة) ، تظهر في نظرية التوابع العقدية كما هو الحال في نظرية التوابع الحقيقية . وعندما ندرس مثل هذه التوابع نجزئها ،عادة ، إلى أجزاء يعرف كل منها بالفرع الوحيد التعيين ومن خلال معالجة هذه الفروع نحصل على الخواص المبتغاة من التابع المتعدد التعيين. من أمثلة هذه التوابع يمكن ذكر التوابع الجذرية .

مثال ❸. إذا كان $z = re^{i\theta}$ عدداً غير معدوم فإن للمقدار $z^{1/2}$ ،كما نعلم من الفصل السابق ، قيمتين هما:

$$z^{1/2} = \mp\sqrt{r}e^{i\theta/2} \ , \ -\pi < \theta \le \pi$$

أي أن θ هي القيمة الرئيسية للسعة) . ولكن إذا اخترنا القيمة الموجبة للمقدار وكتبنا :

$$f(z) = +\sqrt{r}e^{i\theta/2} \ , r > 0 \ , \quad -\pi < \theta \le \pi$$

فإننا نحصل على تابع وحيد التعيين ومعرف جيداً في المنطقة المفروضة. وبما أن الجذر الوحيد للصفر هو الصفر نفسه فإننا نحصل على التابع هذا ، معرفاً ، في كل المستوي باستثناء نصف المستقيم الحقيقي السالب: $\theta = \pi$

نظرية ❶

ليكن:

$$, \ g = p + iq \quad z_0 = x_0 + iy_0 \ , \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

عندئذ:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = g \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = p, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = q \end{cases}$$

البرهان: الشرط اللازم: نفرض أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=g$.من التعريف لدينا:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ 0<|z-z_0|<\delta,\Rightarrow|f(z)-g|<\varepsilon$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,\Rightarrow|f(z)-g|<\varepsilon$$

وبما أن:

$$f(z)-g=u(x,y)-p+i(v(x,y)-q)$$

$$|u(x,y)-p|=|Re(f(z)-g)|\le|f(z)-g|$$

$$|v(x,y)-q|=|Im(f(z)-g)|\le|f(z)-g|$$

فهذا يؤدي أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\quad\Rightarrow|u(x,y)-p|<\varepsilon$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\quad\Rightarrow|v(x,y)-q|<\varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=p,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=q$$

الشرط الكافي: نفرض الآن العكس ! أي ليكن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=p,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=q$$

عندئذ من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\quad\Rightarrow|u(x,y)-p|<\varepsilon/2$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\quad\Rightarrow|v(x,y)-q|<\varepsilon/2$$

وبالتالي إذا كان:

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

فإن:

$$\begin{aligned}|f(z)-g| &= |u(x,y)-p+i(v(x,y)-q)| \\ &\le |u(x,y)-p|+|(v(x,y)-q)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

من هذه النظرية ينتج مباشرة ما يلي :

نتيجة ❶

ليكن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=g_1,\ \lim_{z\to z_0} h(z)=g_2$$

عندئذ:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+h(z)]=\lim_{z\to z_0} f(z)+\lim_{z\to z_0} h(z)=g_1+g_2$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-h(z)]=\lim_{z\to z_0} f(z)-\lim_{z\to z_0} h(z)=g_1-g_2$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot h(z)]=\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim_{z\to z_0} h(z)=g_1\cdot g_2$$
$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/h(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)/\lim_{z\to z_0} h(z)=\frac{g_1}{g_2},\ g_2\neq 0$$

نتيجة ❷

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للتابع $f(z)$ مستمراً في النقطة $z_0=x_0+iy_0$ هو أن يكون كل من التابعين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مستمراً في النقطة (x_0,y_0) .

نتيجة ❸

1- التابع الثابت:

$$f(z)=c=const$$

معرف ومستمر في كل نقطة من المستوي .

2- كل كثير حدود من الشكل (13) -بغض النظر عن درجته- معرف و مستمر في كل المستوي العقدي.

3- كل تابع كسري من الشكل (14) مستمر في كل نقطة من مجموعة تعريفه ، أي في كل نقطة من المستوي ، باستثناء النقاط التي تعدم المقام

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

تمرين ①. التابع

$$w=f(z)=\sqrt{x^2+y^2}$$

معرف في كل المستوي العقدي ولكنه يأخذ قيماً حقيقية فقط . فهو ينقل هذا المستوي إلى نصف المستقيم الحقيقي الموجب $[0,\infty)$ وهو غير متباين لأنه ، مثلاً ، من أجل $z_1=-1, z_2=+1$ لدينا

$$|z_1|=|z_2|=1$$

تمرين ②. التابع

$$w=f(z)=\bar{z}$$

يمثل تحويلاً للمستوي العقدي في نفسه بحيث تنتقل النقطة z إلى النقطة $w=\bar{z}$ المناظرة لها بالنسبة للمحور الحقيقي .

تمرين ③. ليكن التابع

$$w=f(z)=z+\frac{1}{z}$$

1) ضع التابع بالشكل الديكارتي مستخدماً الإحداثيات القطبية r,θ

2) ما هي صورة الدائرة $|z|=1$ بوساطة التابع ؟

3) ما هو المنحني الذي تنتقل إليه الدائرة $|z|=r, r>1$ بوساطة هذا التابع ؟

4) استنتج صورة الحلقة $2\le|z|\le3$ بوساطة هذا التابع .

الحل:

1) لدينا

$$z=re^{i\theta}\ ,\ \ 0\le\theta\le2\pi\ ,0<r<1,\ w=u+iv$$

$$w = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} =$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}(r\cos\theta - ir\sin\theta) =$$

$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

وبذلك يكون $w = u + iv$ حيث :

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \ , \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

2) إذا كان $|z| = 1$ فإن:

$$u = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\cos\theta = 2\cos\theta,$$

$$v = \left(1 - \frac{1}{1}\right)\sin\theta = 0$$

وبما أن $-1 \le \cos\theta \le 1$ فإن $-2 \le u \le 2$ وبالتالي صورة الدائرة الواحدية هي القطعة المستقيمة $[-2,2]$ (شكل1).

3) لنفرض أن $|z| = r, r > 1$ ولنضع :

$$a = r + \frac{1}{r} \ , \quad \beta = r - \frac{1}{r}$$

فيكون:

$$u = a\cos\theta \ , \quad v = \beta\sin\theta$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص محرقاه:

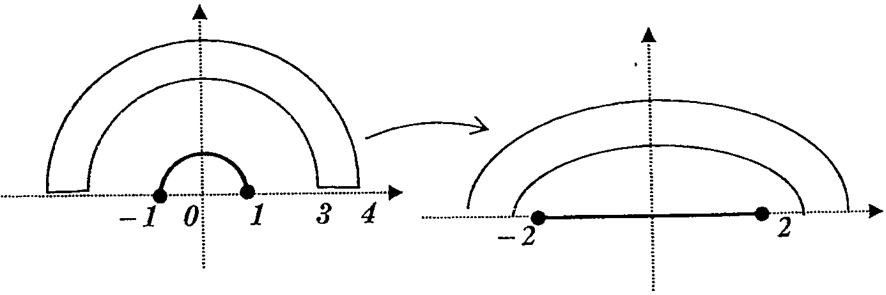
$$w = \mp\sqrt{a^2 - \beta^2} = \mp 2$$

وبملاحظة أن:

$$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow -1 \le \cos\theta \le 1 \ , \quad \sin\theta \ge 0$$

نستنتج أن أنصاف الدوائر العليا $|z| = r, r > 1$ تنتقل إلى أنصاف القطوع الناقصة العليا:

$$\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}=1\,,\;\alpha>0\,,\beta>0$$



شكل 1

4) لنفرض أن $3 \le r \le 4$ ولنضع :

$$3+\frac{1}{4}\le r+\frac{1}{r}\le 4+\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{13}{4}\le \alpha \le \frac{13}{3}$$

$$3-\frac{1}{3}\le r-\frac{1}{r}\le\; 4-\frac{1}{4}\;\;\Rightarrow \frac{8}{3}\le \beta \le \frac{15}{4}$$

نستنتج من ذلك أن الحلقة $2 \le |z| \le 3$ تنتقل إلى المنطقة الواقعة بين منحنيي القطعين الناقصين (شكل1):

$$\frac{u^2}{\left(\frac{13}{4}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2}=1\,,\qquad \frac{u^2}{\left(\frac{13}{3}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{15}{4}\right)^2}=1$$

تمرين ④. إذا علمت أن التابع

$$f(z)=\frac{iz}{2}$$

معرف في القرص المفتوح $|z|<1$ فبين أن:

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\frac{i}{2}$$

الحل. لاحظ أن النقطة $z=1$ هي نقطة محيطية بالنسبة للقرص $|z|<1$ ومن أجل z الواقعة داخل هذا القرص لدينا:

$$\left|f(z)-\frac{iz}{2}\right|=\left|\frac{iz}{2}-\frac{i}{2}\right|=\frac{|z-1|}{2}$$

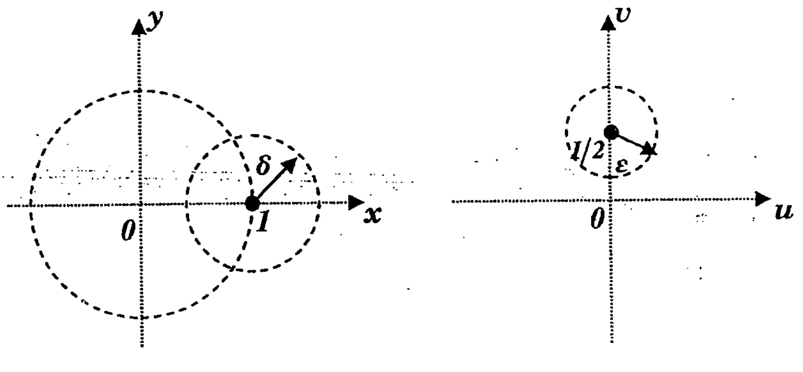
وعندئذ:

$$0<|z-1|<\delta \Rightarrow \left|f(z)-\frac{iz}{2}\right|=\frac{|z-1|}{2}<\frac{\delta}{2}$$

وانسجاماً مع التعريف (II):

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=2\varepsilon:<0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-i/2|<\varepsilon$$

ونرى أن ذلك يتحقق من أجل أي δ يساوي 2ε أو أصغر من ذلك(شكل2)



شكل2

تمارين للحل

❶ بين أن المحل الهندسي لنقاط المنحني : $z=\dfrac{1}{1-it}$ هي نقاط الدائرة ذات المركز $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\dfrac{1}{2}$.

❷ برهن أن التابع الخطي $w=az+b$:

1) ينقل أي دائرة من المستوي (z) الى دائرة في المستوي (w)

2) ينقل أي مستقيمين متوازيين في المستوي (z) إلى مستقيمين متوازيين في المستوي (w).

❸. بين أن التابع $w=\dfrac{1}{z}$ ينقل أسرة الدوائر $|z-\alpha|=\alpha,\quad \alpha\in\Re$ إلى أسرة المستقيمات $rew=\dfrac{1}{2a}$

❹. ليكن التابع

$$w=f(z)=z^2$$

1) ضع التابع هذا بالشكل الديكارتي

2) ما هي صورة نصف الدائرة العليا $|z|=r$ بوساطة التابع ؟

3) ما هي صورة نصف الحلقة العليا $1\leq|z|<3$ بوساطة التابع ؟

4) ماهي صورة المستقيم $x=1$ بوساطة التابع ؟

5) ماهي صورة القطع المستقيمة الآتية بوساطة هذا التابع:

$$C_1 : z=t,0\leq t\leq 1,$$
$$C_2 : z=1+it,0\leq t\leq 1,$$
$$C_2 : z=t+it,0\leq t\leq 1$$

❺. برهن ، استناداً إلى التعريف ، أن :

$$a)\ \lim_{z\to 1}\frac{iz+1}{z+i}=1$$

$$b)\ \lim_{z\to 2i}\left(2x+iy^{2}\right)=4i$$

$$c)\ \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^{2}}{z}=0$$

غير مطلوب

❻. باستخدام خواص النهايات بين أن:

$$a)\lim_{z\to 1}\frac{4z^{2}}{(z-1)^{2}}=4\ ,$$ نبدل كل z بـ $\frac{1}{z}$

$$b)\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^{3}}=\infty\ ,$$ نبدل $f(z)$ بـ $\frac{1}{f(z)}$

$$c)\lim_{z\to 1}\frac{z^{2}+1}{z-1}=\infty$$

❼ . ادرس استمرارية التوابع الآتية في النقطة $z=0$:

غير مستمر

$$a)f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{\operatorname{re}z}{1+|z|}, & z\neq 0\end{cases}$$

$$b)f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{1}{z}\operatorname{re}z, & z\neq 0\end{cases}$$

$$c)f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{y^{2}(x+iy)}{x+y^{2}}, & z=x+iy\neq 0\end{cases}$$

الفصل الرابع

التفاضل العقدي

① THEDERIVATIVE — مشتق التابع العقدي

تعريف ❶

ليكن لدينا التابع $f(z)$ معرفا في جوار ما للنقطة z_0 نعرف مشتق التابع $f(z)$ في تلك النقطة بالعلاقة:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \qquad (1)$$

مع العلم أن Δz تسعى نحو الصفر عبر قيم عقدية كيفية وأن النهاية هذه موجودة. ونقول إن التابع $f(z)$ قابل للاشتقاق في المنطقة D إذا كان له مشتق في جميع نقاط هذه المنطقة.

ملاحظة ❶

بوضع :

$$z = z_0 + \Delta z \,, \quad \Delta z = z - z_0$$
$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

يمكن أن تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{df}{dz} = f'(z_0) \qquad (2)$$

تعريف ❷

يعرف المشتق من المرتبة الثانية للتابع على أنه مشتق المشتق الأول ويرمز له كما يلي:

$$f''(z_0) = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\Big|_{z = z_0} = [f'(z_0)]' \qquad (3)$$

ويعرف المشتق من المرتبة n للتابع $f(z)$ في النقطة z_0 بالعلاقة:

$$(4) \qquad f^{(n)}(z)=\frac{d}{dz}\left(\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}}\right)\bigg|_{z=z_0}=\left[f^{(n-1)}(z_0)\right]'$$

مثال ❶

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{c-c}{\Delta z}=\frac{0}{\Delta z}=0 \Rightarrow f'(z)=0 \quad 1)f(z)=c \Rightarrow$$

$$2)f(z)=z \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z}=\frac{\Delta z}{\Delta z}=1 \Rightarrow f'(z)=1$$

$$3)f(z)=z^n \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=$$

$$\xrightarrow[\Delta z \to 0]{} nz^{n-1} \quad \frac{1}{\Delta z}\left[z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}\Delta z+\ldots+\binom{n}{n}\Delta z^n+z^n\right]$$

$$\Rightarrow f'(z)=nz^{n-1}$$

نظرية ❶. إذا كان التابع $f(z)$ اشتقاقياً ، في نقطة ما ، كان مستمراً فيها.

البرهان : ليكن $f(z)$ اشتقاقيا في النقطة z_0 ولنبين أن:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=f(z_0)$$

لدينا:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)-f(z_0)=\lim_{z \to z_0}\left[f(z)-f(z_0)\right]$$

$$=\lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)\right]$$

$$=\lim_{z \to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\lim_{z \to z_0}(z-z_0)$$

$$=f'(z_0)\lim_{z \to z_0}(z-z_0)=0$$

وبذلك يكون:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=f(z_0)$$

وهو المطلوب .

ملاحظة ❷

إن نظرية العكس للنظرية السابقة ليست صحيحة . فقد يكون التابع مستمرا في نقطة ما دون أن يكون قابلاً للاشتقاق فيها.يبين ذلك المثال الآتي:

مثال ❷. ليس للتابع

$$f(z)=\overline{z}$$

مشتق في أي نقطة من المستوي ، لأن المقدار

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}, \Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

يتناهى إلى 1 عندما $\Delta x=o$ وينتهي الى -1 عندما $\Delta y=o$ ، فهو لا يسعى إلى النهاية نفسها عندما يتناهى Δz إلى الصفر عبر قيم حقيقية أولاً ثم عبر قيم تخيلية ثانيا .

① PROPERTIES OF THE DERIVATIVE خواص المشتق

من تعريف المشتق ومن خواص العمليات على النهايات (وبالمقارنة مع خواص مشتقات التوابع الحقيقية) نستنتج بعض خواص المشتقات نذكر منها الخواص الآتية:

خاصة ❶.

جداول مشتقات التوابع الأولية المعروفة تبقى صحيحة في حالة التوابع العقدية مثلها مثل الحالة الحقيقية.

خاصة ❷. ليكن التابعان $f(z)$ و $g(z)$ اشتقاقيين في النقطة z . عندئذ

$$[f(z)+g(z)]'=[f(z)]'+[g(z)]'$$

$$[f(z)-g(z)]'=[f(z)]'-[g(z)]'$$

$$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{\cdot g(z)}\right]'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0$$

خاصة ❸

نستنتج من الصيغ أعلاه – كما هو الحال بالنسبة للتوابع الحقيقية – أن كثيرات الحدود وكذلك التوابع الكسرية تمثل توابعاً اشتقاقية في مناطق وجودها وكذلك الصيغة:

$$\left(z^n\right)' = nz^{n-1}$$

الواردة في المثال 3 (الفقرة 1) صحيحة من أجل الأعداد الصحيحة السالبة $n = -1, -2, \ldots,$ عندما $z \neq 0$.

تعريف ❷

ليكن التابع f الذي منطلقه E ، في المستوي (z) ، ومستقرة E' ، في المستوي (w):

$$w = f(z), \quad E \xrightarrow{f} E'$$

وليكن F تابعا أخراً منطلقه E' ومستقرة المجموعة E'' حيث:

$$\Phi = F(w), \qquad E' \xrightarrow{F} E''$$

عندئذ يتشكل تابع جديد وفق الصيغة:

$$\begin{aligned} &E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{F} E'' \\ &E \xrightarrow[\Phi]{\qquad\quad} E'' \end{aligned}$$

منطلقه E ومستقرة المجموعة E'' . ندعو هذا التابع الجديد بالتابع المركب ونرمز له بالرمز

$$\Phi(z) = F(w) = F[f(z)] \tag{5}$$

نظرية ❶ (مشتق التابع المركب):

إذا كان التابع $w = f(z)$ قابلاً للاشتقاق في النقطة $z_0 \neq \infty$ وكان للتابع $F(w)$ مشتق في النقطة $w_0 = f(z_0)$ فإن التابع المركب (5) يقبل للاشتقاق في النقطة z_0 ويكون:

$$\Phi'(z_0) = F'(w_0) f'(z) \tag{6}$$

البرهان: في الحقيقة إذا كان $f(z)$ معرفاً في جوار النقطة z_0 فان التابع المركب $\Phi(z_0 + h)$ يكون معرفاً من أجل القيم الصغيرة بما فيه الكفاية لـ h . فإذا افترضنا أن h تقبل قيمًا بحيث يكون

$$\Phi(z_0 + h) \neq \Phi(z_0)$$

فإن المقدار

$$\frac{\varphi(z_0+h)-\varphi(z_0)}{h}=\frac{F[f(z_0+h)]-F[f(z_0)]}{f(z_0+h)-f(z_0)}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

يسعى الى النهاية $F'(f(z_0))f'(z_0)$ عندما $h\to o$ وهو المطلوب .

تعريف ❷

ليكن التابع $w=f(z)$ متباينا على المجموعة E ، في المستوي (z) ، ولتكن صورته هي المجموعة E' في المستوي (w) . لنقابل الآن كل نقطة $w\in E'$ بتلك النقطة $z=F(w)$ التي تحقق الشرط $f(z)=w$. فنحصل عندئذ على تابع جديد $F(w)$ منطلقه E' . ندعو هذا التابع بالتابع العكسي لـ $f(z)$ ونرمز له بالرمز

$$z=f^{-1}(w) \tag{7}$$

نظرية❷ (مشتق التابع العكسي)

إذا كان التابع $w=f(z)$ يحقق الشروط الآتية:

1) $f(z)$ مستمر ومتباين في جوار ما للنقطة z_0 .

2) مشتقه في النقطة z_0 مختلف عن الصفر: $f'(z_0)\neq o$

3) تابعه العكسي مستمر في جوار النقطة $w_0=f(z_0)$

فإن للتابع العكسي

$$z=F(w)=f^{-1}[w]$$

مشتقا في النقطة w_0 وهذا المشتق يعطى بالعلاقة

$$F'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)} \tag{8}$$

③ الشروط اللازمة والكافية لوجود المشتق

ليكن التابع

$$f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{9}$$

معرفا في جوار النقطة

$$z_0=x_0+iy_0=(x_0,y_0)$$

و مشتقه $f'(z_0)$ موجود فيها . تبين النظرية الآتية الشرط اللازم لوجود المشتق في النقطة z_0 :

نظرية 1

لكي يكون للتابع $f = u + iv$ مشتق في النقطة $z_0 = (x_0 . y_0)$ يلزم وجود المشتقات الجزئية u'_x, u'_y, v'_x, v'_y المحققة للشرطين:

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \qquad (10)$$

$$v_y'(x_0, y_0) = -u_x'(x_0, y_0)$$

في هذه النقطة.

البرهان. إن وجود المشتق للتابع في النقطة يعني بحسب التعريف أن المشتق $f'(z_0)$ هو نهاية النسبة :

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

أي نهاية النسبة:

$$\frac{u(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) + iv(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

عندما $\Delta z \to 0$ وذلك بغض النظر عن الطريق التي يسلكها $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ نحو الصفر . فإذا جعلنا Δz يسعى نحو الصفر أفقياً (أي عبر المحور الحقيقي) أولاً :

$$\Delta y = 0, \ \Delta z = \Delta x \to 0$$

ثم جعلناه يسعى نحو الصفر عمودياً (أي عبر المحور التخيلي) ثانياً :

$$\Delta x = 0, \ \Delta z = i\Delta y \to 0$$

وجدنا على الترتيب أن

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

وبالتالي:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{i}u'_y(x_0,y_0)+v'_y(x_0,y_0)$$

وبالمقارنة:

$$u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)-u'_y(x_0,y_0)$$

نحصل على المطلوب:

$$\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= v'_y(x_0,y_0)\\ v'_x(x_0,y_0) &= -u'_y(x_0,y_0)\end{aligned}$$

ملاحظة ❶

تعرف العلاقتان ، أعلاه ، بشرطي كوشي – ريمان ويرمز لهما ، عادة ، باختصار ، بالشكل:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y\\ v'_x &= -u'_y\end{aligned}$$

ملاحظة ❷

يتبين أن وجود المشتقات الجزئية المحققة لشرطي كوشي – ريمان في النقطة $z_0=(x_0.y_0)$ غير كافية لوجود المشتق $f'(z_0)$ ولكي يتحقق ذلك يفرض عادة استمرار المشتقات الجزئية u'_x,u'_y,v'_x,v'_y . وعندئذ تصاغ النظرية الأخيرة كما يلي:

نظرية ❶

لكي يكون للتابع $f=u+iv$ مشتق في النقطة $z_0=(x_0.y_0)$ يلزم ويكفي وجود المشتقات الجزئية u'_x,u'_y,v'_x,v'_y للتابع $f=u+iv$ المستمرة والمحققة لشرطي كوشي – ريمان في هذ النقطة .

نتيجة ❶

إذا كان التابع اشتقاقياً في نقطة ما z كان:

$$f'(z)=u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)$$

شرطا كوشي ريمان في الإحداثيات القطبية ④
CAUCHY- RIEMANN CONDITIONS IN POLAR COOR.

نعلم أن العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية (x, y) والإحداثيات القطبية (r, φ) تعطى بالمعادلتين:

$$(10) \qquad x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

وعندئذٍ –وبحسب ما نرغب – نستطيع كتابة التابع $w = f(z)$ بدلالة المتحول z بالشكل :

$$(11) \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)\,, \;\; z = x + iy$$

أو بالشكل

$$(12) \qquad f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)\,, \;\; z = re^{i\varphi}$$

نظرية ❶

إذا كان التابع (12) اشتقاقياً في النقطة $z = x + y = re^{i\varphi}$ فإن :

$$u'_r = \frac{1}{r} v'_\varphi \;,\quad \frac{1}{r} u'_\varphi = -v'_r$$

$$r u'_r = v'_\varphi \;،\; u'_\varphi = -r v'_r \qquad (13)$$

فإذا كانت المشتقات الجزئية للتابع $w = f(z)$ موجودة بالنسبة للمتحولين x و y وتحقق شرطي كوشي– ريمان كان لمشتقاته بالنسبة للمتحولين r و φ نفس الصفة.
باستخدام مبدأ اشتقاق التابع المركب نجد أن:

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dr}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta}$$

ونستطيع أن نكتب:

$$(14) \qquad u'_r = u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi\,, \quad u'_\varphi = -u'_x r\sin\varphi + u'_y r\cos\varphi$$

$$(15) \qquad v'_r = v'_x\cos\varphi + v'_y\sin\varphi\,, \quad v'_\varphi = -v'_x r\sin\varphi + v'_y r\cos\varphi$$

فإذا كان شرطا كوشي ريمان في الإحداثيات الديكارتية محققين:

$$u'_x = v'_y\,, \qquad v'_x = -u'_y$$

في نقطة ما فإن المعادلتين (14) تؤديان إلى صحة العلاقتين:

$$u'_r = -u'_y \cos\varphi + u'_x \sin\varphi ,$$

$$v'_\varphi = u'_y r \sin\varphi + u'_x r \cos\varphi$$

في هذه النقطة .

بمقارنة المعادلتين الناتجتين مع العلاقة (13) نجد أن:

$$u'_r = \frac{1}{r} v_\varphi \text{ ،} \qquad \frac{1}{r} u'_\varphi = -v_r$$

وهو المطلوب.

تعرف العلاقتان الأخيرتان بشرطي كوشي ريمان في الإحداثيات القطبية.

نتيجة 1

إذا كان التابع $f(z)$ اشتقاقيا في النقطة $z = re^{i\varphi}$ كان لمشتقه في الإحداثيات القطبية الشكل:

$$f'(z) = e^{-i\varphi}(u_r + iv_r) \tag{15}$$

مثال 1

احسب مشتق التابع $f(z) = 1/z$ مستخدما الإحداثيات القطبية.

الحل. بما أن:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

فإن:

$$u(r,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{r} \text{ , } v(r,\varphi) = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

نلاحظ أن شروط النظريةالسابقة محققة من أجل كل نقطة غير معدومة $z = re^{i\varphi}$ في المستوي وبالتالي بحسب (15) يكون

$$f^1(z) = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi}{r^2} + i\frac{\sin\varphi}{r^2}\right) = -\frac{1}{\left(re^{i\varphi}\right)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

تمرين ① .بين أن التابع الآتي قابل للاشتقاق ثم أوجد مشتقه:

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

الحـــل. لدينا:

$$f(z) = u + iv, \quad u = x^2 - y^2 =, \quad v = 2xy$$

$$u'_x = 2x\,, \; v'_x = 2y$$

$$u'_y = -2y\,, \; v'_y = 2$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية مستمرة وتحقق شرطي كوشي- ريمان:

$$u'_x = v'_y\,, \quad v'_x = -u'_y$$

في كل نقطة فالتابع اشتقاقي إذاً في كل نقطة ويكون لدينا:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z$$

تمرين②. بين أن التابع

$$f(z) = rez = x$$

غير قابل للاشتقاق في أي نقطة.

الحـــل. لدينا

$$f(z) = u + iv, \quad u = x, \quad v = 0$$

$$u_x{}' = 1, \quad u_y{}' = 0, \quad v_x{}' = 0, \quad v_y{}' = 0$$

فهو لايحقق شرطي كوشي- ريمان في أي نقطة وبالتالي فهو غير قابل للاشتقاق

تمرين③..بين أن التابع

$$w = f(z) = |z|^2$$

قابل للاشتقاق في النقطة $z = 0$ فقط.

الحـــل. لدينا:

$$w = f(z) = \left(x^2 + y^2\right) + i0$$

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$$

$$u'_x = 2x\,, \; v'_x = 0$$

$$u'_y = 2y\,, \; v'_y = 0$$

نلاحظ أن شرطي كوشي– ريمان

$$u'_x = v'_y\,, \quad v'_x = -u'_y$$

محققان فقط عندما $x = 0, y = 0$ إي في النقطة $z = 0$.

تمارين للحل

❶أوجد مشتقات التوابع الآتية:

$$a)\; f(z) = \left(1 - 4z^2\right)^3$$

$$b)\; f(z) = \frac{z - 1}{2z + 1}, \quad z \neq \frac{-1}{2}$$

$$c)\; f(z) = \frac{\left(1 + z^2\right)^4}{z^2}, \quad z \neq 0$$

❷..بين أن التوابع الآتية غير قابلة للاشتقاق في أي نقطة.

$$a)\; f(z) = z - \bar{z}$$

$$b)\; f(z) = 2x + ixy^2$$

$$c)\; f(z) = e^x e^{-iy}$$

❸ .بين أن التوابع الآتية قابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى والثانية في كل نقطة ثم احسبها.

$$a)\ f(z) = iz + 2$$
$$b)\ f(z) = e^{-x}e^{-iy}$$
$$c)\ f(z) = z^3$$

❹ . برهن أنه ليس للتابع

$$f(z) = f(x,y) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} z \neq 0, f(0) = 0$$

نهاية في النقطة $z = 0$.

توجيه: تحقق أن النسبة $\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ تسعى نحو الصفر عندما تسعى z نحو الصفر على أي مستقيم وأنها تسعى نحو العدد $\frac{1}{2}$ عندما تسعى z نحو الصفر على طول القطع المكافئ $y = x^2$

❺ . ضع التابع . $f(z) = \frac{1}{z}$ بالشكل $f(z) = u + iv$ ثم استنتج صورة المستقيمين :

$$x = 1\ ,\ \ y = 1/2$$

الفصل الخامس

التوابع التحليلية الأولية

① HOLOMOEPHIC FUNCTION مفهوم التابع التحليلي

تعريف ❶

نقول عن التابع $f(z)$ ، المعرف في المنطقة D، إنه تحليلي في النقطة z_0 من هذه المنطقة إذا كان له مشتق في كل نقطة من جوار ما للنقطة z_0 . ونقول إنه تحليلي في المنطقة D إذا كان تحليلياً في جميع نقاط هذه المنطقة . يدعى التابع التحليلي أيضاً بالتابع الهولومورفي .

ملاحظة ❶

من قوانين التفاضل ومن التعريف ينتج ، مباشرة ، أن مجموع (أو فرق أو جداء أو قسمة) تابعين تحليلين ، معرفين على منطقة مشتركة ، هو تابع تحليلي في هذه المنطقة .

مثال ❶. ان كثير الحدود

$$f(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$$

الذي يعد من أبسط التوابع العقدية ، تحليلي في جميع نقاط المستوي C ومشتقه في كل نقطة هو:

$$f'(z)=a_1+2a_2z...+na_nz^{n-1}$$

وكذلك التوابع الكسرية من الشكل:

$$g(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

حيث f_1 و f_2 كثيرا حدود ، هي أيضاً تحليلية لانها اشتقاقية في مجموعة تعريفها.
وسوف نلتقي مع المزيد من التوابع التحليلية في الفصل القادم.

② EXPONENTIAL FUNCTION التابع الأسي e^z

تعريف ❶

نعرف التابع الأسي بالمساواة:

$$e^z = e^x \cos x + ie^x \sin y \qquad (1)$$

نتيجة ❶.

من اجل القيم الحقيقية لـ z ينطبق التابع e^z على التابع الحقيقي المعروف:

$$z = Re\, z = x \Rightarrow e^z \equiv e^x$$

نتيجة ❷.

من اجل القيم التخيلية لـ z نحصل على صيغة أولر المعروفة:

$$z = i\, Im\, z = iy \Rightarrow e^{iy} \equiv \cos y + i \sin y$$

سنذكر ، فيما يلي ، بعضاً من خواص التابع e^z :

خاصة ❶

$$i)\ \forall a,b \in C \Rightarrow e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$ii)\ \forall a \in C, \forall n \in \aleph \Rightarrow (e^a)^n = e^{na}$$

$$ii)\ \forall a,b \in C \Rightarrow e^a / e^b = e^{a-b}$$

خاصة ❷

$$\Rightarrow e^z \neq 0 \leq \forall z \in$$

البرهان: نفرض أن $e^a = 0$ من أجل قيمة ما $z = a$. عندئذ

$$0 = e^a = e^{-a} e^a = e^{-a+a} = e^0 = 1$$

وهذه مستحيل . إذن $e^a \neq 0$

خاصة ❸.

التابع e^z تحليلي في كل المستوي العقدي ومشتقه في كل نقطة z يعطى بالعلاقة :

$$(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \quad \leq$$

البرهان: لدينا

$$e^z = u + iv = e^x \cos x + ie^x \sin y$$

$$u = e^x \cos y \ , \quad v = e^x \sin y$$

$$u'_x = e^x \cos y \ , \ u'_y = -e^x \sin y$$

$$v'_x = e^x \sin y \ , \ v'_y = e^x \cos y$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي-ريمان في كل نقطة . فالتابع الأسي إذاً قابل للاشتقاق ، في كل نقطة ، وهو بالتالي تحليلي في كل المستوي العقدي ومشتقه يعطى بالعلاقة:

$$(e^z)' = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

خاصة ❹

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

البرهان : من اجل $z = x + iy$ لدينا :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

وعندئذ

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^x \cos y = 1, \quad e^x \sin y = 0$$

وهنا يجب ان يكون:

$$e^x > 0 \Rightarrow \quad \sin y = 0 \Rightarrow \qquad y = n\pi, n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$$

إذا كان n عدداً فردياً فإن المقدار $\cos y = \cos n\pi$ يكون سالبا

ص ، ولذلك لكي يكون $e^x \cos y = 1$ يجب أن يكون n عدداً زوجياً ومن هنا ينتج أن:

$$e^x = 1, \quad y = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ولكن التابع e^x – كما نعلم – يقبل القيمة 1 فقط عندما $x = 0$. ولذلك

$$z = x + iy = 2k\pi i$$

وهو المطلوب .

تعريف ❷.

نقول عن التابع $f(z)$ المعرف على E انه دوري ، دوره s ، اذاكان $z \pm s \in E$ وكان:

$$f(z) = f(z \pm s) \quad \forall z \in E \tag{3}$$

خاصة ❶.

التابع e^{z} هو تابع دوري ودوره أيّ من مضاعفات العدد $2\pi.i$.

البرهان : إذا كان $z' = z + 2k\pi.i$ فمن المبرهنة 1 ينتج أن

$$e^{z'} = e^{z+2k\pi.i} = e^{z}e^{2k\pi.i} = e^{z}.$$

وبالعكس

$$e^{z'} = e^{z} \Rightarrow e^{z'-z} = 1 \Rightarrow z' - z = 2k\pi.i$$

وهذا يعني أن :

$$e^{z'} = e^{z} \Rightarrow z' = z + 2k\pi.i$$

وبذلك ينتهي البرهان .

نتيجة ❸

من المبرهنة أعلاه ينتج أن التابع الأسي لا نهائي التباين في المستوي فهو يأخذ القيمة $z = 1$ مثلا في عدد غير منته من النقاط هي:

$$z = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

نتيجة ❹

التابع الأسي متباين (وحيد التباين) على كل شريط مواز للمحور الحقيقي لا يزيد عرضه عن 2π فهو متباين ، مثلا ، على الشريط:

$$0 < imz < 2\pi$$

وهو ينقل النقاط z من هذا الشريط الى النقاط $w = e^{z}$ من المستوي العقدي (w) .

نتيجة ❺

التابع الأسي ينقل الشريط الجزئي (الموجود ضمن الشريط السابق)

$$y_1 < imz < y_2$$

إلى منطقة محددة بالزاوية(انظر الشكل1)

:

$$y_1 < \arg w < y_2$$

مثال ❶. انشر التابع الآتي في سلسلة القوى (سلسلة لوران) ذات المركز 0 :

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$$

الحل. لانستطيع نشر هذا التابع في سلسلة ماك لوران كونه غير تحليلي في الصفر . ولكننا نعلم – بحسب (21) – أن:

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad , \ |z|<1$$

وبالتالي من أجل $0<|z|<1$ لدينا:

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{z^3}\frac{2\left(1+z^2\right)-1}{\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{z^3}\left(2-\frac{1}{1+z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}\left[2-\left(1-z^2+z^4-z^6+\ldots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(2-1+z^2-z^4+z^6+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}-z+z^3-z^5+\ldots$$

وبذلك نكون قد حصلنا على سلسلة لوران في الجوار الحلقي للنقطة $z=0$ علماً أن:

$$a_n=0 \quad , \ \forall n>3$$

التطبيقات العملية

تمارين محلولة ⊙

تمرين ①. ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} = p + \frac{p^2}{2} + \dots + \frac{p^n}{n} + \dots \qquad (5')$$

الحل. نضع: $a_n = p^n/n$ فيكون:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}/(n+1)}{p^n/n} = \frac{np^{n+1}}{(n+1)p^n} = \frac{n}{(n+1)}p$$

وبما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}p\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}|p| = |p|$$

فإن السلســــلة $(5')$ متقاربة مطلقاً عندما يكون $|p| < 1$ ومتباعدة عندما يكون $|p| > 1$ بحسب اختبار دالمبير.

تمرين ②. ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

الحـــل. بوضع $e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ ثم التعويض في السلسلة يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

وعندئذ نلاحظ أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ متقاربة بينما السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ متباعدة.

ومن ذلك نستنتج أن السلسلة المطلوبة متباعدة .

$$(23') \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

متقاربتين في تلك النقطة .

ملاحظة ❶

نلاحظ أن السلسلة الأولى تمثل سلسلة قوى متقاربة ضمن القرص $|z-z_0| < R$ الذي يعطى نصف قطره بالعلاقة (4) (أو (5)) وتمثل السلسلة الثانية سلسلة قوى من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \ , \ w = \frac{1}{z-z_0}$$

فإذا كان قرص تقاربها مثلاً هــو $|w| < \rho$ أي $|z-z_0| > \frac{1}{\rho} = r$ وكــان $r < R$ كانت كل من السلسلتين (23) و $(23')$ متقاربة في آن واحد وكانت سلسلة لــوران (22) في الوقت نفسه متقاربة ضمن الحلقة

$$(24) \qquad P(z_0, r, R) : r < |z-z_0| < R$$

ومتباعدة خارجها. على محيط حلقة التقارب قد تكون سلسلة لــوران متقاربــة وقــد تكــون متباعدة. وفي حالة التقارب تكون السلسلة (22) مجموعاً للسلسلتين (23) و $(23')$.

من هذه الملاحظة ومن النظريتين ❷ و ❶ فقرة 5) نستنتج أن سلســلة لــوران (22) متقاربة بانتظام في كل حلقة مغلقة وواقعة ضمن حلقة التقارب $P(z_0, r, R)$ ونستنتج أن المجموع :

$$(25) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

يمثل تابعاً تحليلياً في الحلقة $P(z_0, r, R)$. بذلك تكون النظرية الآتية صحيحة:

نظرية ❶

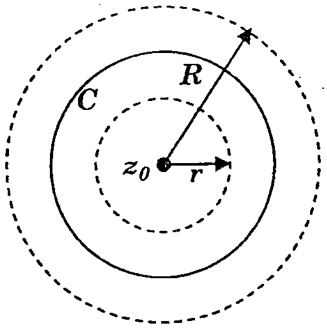
إذا كان $r < R$ كانت سلسلة لوران (22) متقاربة ضمن الحلقة $P(z_0, r, R)$ وكان التابع الذي تمثله هذه السلسلة تحليلياً في هذه الحلقة.
وبالعكس ! إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في الحلقة $P(z_0, r, R)$ فإنه يقبل النشــر فــي سلسلة لوران الآتية:

$$(26) \quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

مع العلم أن الأمثال a_n تعطى بالعلاقات

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\zeta, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (27)$$

حيث C دائرة موجبة الاتجاه مركزها z_0 (شكل2) وواقعة كلياً في الحلقة (24) .



شكل 2

ملاحظة ❷

تفيد هذه النظرية في أن التابع التحليلي $f(z)$ في الحلقة (24) يقبل التوزيع إلى مجموع تابعين من الشكل

$$(28) \qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

حيث يكون الأول تحليلياً في القرص $|z-z_0| < R$ والثاني تحليلياً عندما يكون:

$$|z-z_0| > r$$

$$(19) \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \, , \quad n = 0,1,2,...$$

نتيجة ❷

إن نصف قطر تقارب السلسلة (18) لا يقل عن بعد النقطة z_0 عن محيط المنطقة D التي يكون عليها التابع $f(z)$ تحليلياً.

نتيجة ❸

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في جوار النقطة $z_0 = 0$ فانه يقبل النشر، في جوار هذه النقطة ، في سلسلة القوى (ماك لوران) الآتية:

$$(20) \qquad f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + ...$$

مثال ❶. انشر التابع الآتي في سلسلة ماك لوران:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

هذا التابع تحليلي في كل المستوى العقدي باستثناء النقطة $z = 1$ فهو قابل للنشـر ، فـي جوار أي نقطة $z_0 \neq 1$ ، وبالتالي قابل للنشر في سلسلة ماك لوران (يرمز في هذه الحالة لجوار الصفربالرمز $|z| < 1$) . مشتقات هذا التابع هي:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \, ,..., \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} ,$$

$$f'(0) = 1 \, , \quad f'(0) = 1 \, , \quad f''(0) = 1 \cdot 2 \, ,..., \quad f^{(n)}(0) = n!$$

ويكون بحسب (20):

$$(21) \qquad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \ |z| < 1$$

وبذلك نكون قد حصلنا في الوقت نفسه على مايعرف بمجموع السلسلة الهندسية.

ملاحظة ❶.

باستخدام دستور مجموع سلسلة هندسية يمكن الحصول مباشرة على منشور بعض التوابع في سلسلة تايلور نذكر بعضاً منها فيما يلي:

آ) باشتقاق طرفي العلاقة في (21) نحصل على المنشور الآتي:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad , \ |z| < 1$$

ب) بتبديل z بِ $-z$ في العلاقة (21) يكون:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad , \ |z| < 1$$

ج) بتبديل z بِ $1-z$ في العلاقة (21) نحصل على منشور التابع في جوار النقطة 1 ويكون:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n \quad , \quad |z-1| < 1$$

وهذ محقق لأنه لافرق بين العلاقة $|z-1| < 1$ أو العلاقة $|1-z| < 1$.

⑥ LAURENT SERIES — سلاسل لوران

تعريف ❶

تدعى السلسلة

$$(22) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

بسلسلة لوران (*Laurent Series*) ذات المركز z_0 والأمثال a_n.

تعريف ❷

نقول عن السلسلة (22) إنها متقاربة في النقطة z_0 إذا كانت السلسلتان الآتيتان :

$$(23) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

في جوار أي نقطة z_0 من هذه المنطقة ، مع العلم أن نصف قطر تقارب هذه السلسلة لا يقل عن بعد النقطة z_0 عن محيط D وأمثالها a_n تعطى بالعلاقات

$$a_n = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \;, \quad n = 0,1,2,... \qquad (15)$$

أما C فهي دائرة مركزها z_0 وواقعة كليا في D .

البرهان . لتكن z_0 نقطة داخلة من المنطقة D ولتكن الدائرة :

$$K : |\varsigma - z_0| = r$$

موجبة الاتجاه وموجودة كليا في D. إذا كانت النقطة z واقعة داخل K فان

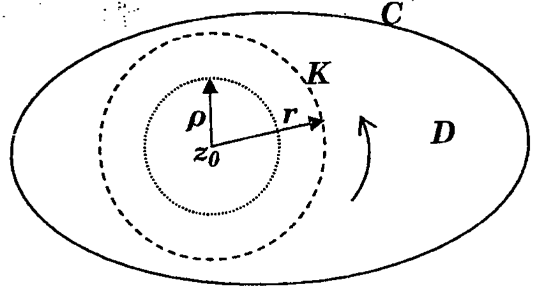
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \;\; \zeta \in K, \qquad (16)$$

بحسب صيغة كوشي التكاملية . ومن ناحية أخرى z تقع على محيط دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها ρ مثلا (شكل 1) ، أي لنضع:

$$|z - z_0| = \rho, \quad r = |\zeta - z_0|$$

وعندئذ $\rho / r < 1$. وهذا يعني ، بحسب خاصة السلسلة الهندسية ، أن

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\varsigma - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}$$



شكل 1

بالاعتماد على ذلك يمكن نشر النسبة $1/(\varsigma - z)$ في سلسلة هندسية متقاربة كما يلي:

$$\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{1}{(\varsigma-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\varsigma-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}} \qquad (17)$$

$$=\frac{1}{\varsigma-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}$$

وهذه السلسلة متقاربة بانتظام بالنسبة لــ ς المتحولة على الدائرة K لان حدودها بالقيمة المطلقة لاتتجاوز الحدود المقابلة للسلسلة الهندسية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{r^{n+1}}, \quad \rho<r$$

لذلك نستطيع تعويض المنشور (17)في العلاقة (16) ثم الانتقال بإشارة التكامل إلى داخل السلسلة (أي المكاملة حدا فحد) ويكون:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_K f(\varsigma)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}\right]d\varsigma$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma\right](z-z_0)^n$$

ينتج من ذلك أن التابع $f(z)$ يقبل النشر في سلسلة (14) حيث a_n معطاة بالعلاقات (15).

من هذه النظرية ومن صيغة كوشي التكاملية العامة ينتج مايلي:

نتيجة ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحليليا في جوار النقطة z_0 فانه يقبل النشر، في جوار هذه النقطة ، في سلسلة القوى الآتية:

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

مع العلم أن:

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^{x}+e^{x}}{2}, \\
\sinh z &= \frac{e^{x}-e^{x}}{2},
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

وهذا التعريف ينقل مباشرة إلى الساحة العقدية.

تعريف ❶.

نعرف التابعين القطعيين $\sinh z$ و $\cosh z$ على الساحة العقدية بواسطة العلاقتين:

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \frac{e^{z}+e^{z}}{2}, \\
\sinh z &= \frac{e^{z}-e^{z}}{2}, z = x+iy
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

تعريف ❷.

نعرف التابعين القطعيين $\tanh z$ و $\coth z$ على الساحة العقدية بواسطة العلاقتين:

$$(22) \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$(22') \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

من هذين التعريفين نستنتج ببساطة العلاقات بين التوابع المثلثية والتوابع المثلثيةالقطعية.

خاصة ❶

$$
(23) \qquad
\begin{aligned}
\cosh z &= \cos(iz), \\
\cos z &= \cosh(iz) \\
\sinh z &= -i\sin(iz), \\
\sin z &= -i\sinh(iz)
\end{aligned}
$$

خاصة ❷

$$
\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y, \\
\sin(x+iy) &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

خاصة ❸

$$
\begin{aligned}
\coth z &= i\cot(iz).\\
\cot z &= i\coth(iz)\\
\tanh z &= -i\tan(iz),\\
\tan z &= -i\tanh(iz)
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

⑥ CYCLIC FUNCTIONS التوابع المثلثية العكسية

تعريف ❶

تعرف التوابع

$$\sin^{-1} z\,,\ \cos^{-1} z\,, \tan^{-1} z\,, \cot^{-1} z\,,$$

على أنها التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

$$\sin z\,,\ \cos z\,, \tan z\,, \cot z\,,$$

يرمز لهذه التوابع ، أيضاً ، بالرموز:

$$\arcsin z\,,\ \arccos z\,, \arctan z\,, \operatorname{arccot} z\,,$$

كل من هذه التوابع متعدد التعيين وهي تتكون من فروع كثيرة وحيدة التعيين . ندعوالفرع الرئيسي المناسب للمجال $[-\pi,\pi[$ لكل منها بالفرع الرئيسي ونرمز لها كما يلي:

$$\operatorname{Arc}\sin z\,,\ \operatorname{Arccos} z\,, \operatorname{Arc}\tan z\,, \operatorname{Arccot} z\,,$$

وفي هذه الحالة نستطيع أن نكتب من أجل تابع الجب مثلاً:

$$z = \sin w \Leftrightarrow w = \operatorname{Arc}\sin z$$

خاصة ❶

ترتبط التوابع المثلثية العكسية بالتابع اللوغاريتمي بواسطة العلاقات الآتية:

$$
\begin{aligned}
\arcsin z &= -i\log\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\\
\arccos z &= -i\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\\
\arctan z &= \frac{-i}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz}\,,\\
\operatorname{arc}\,\cot z &= \frac{-i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}\,,
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

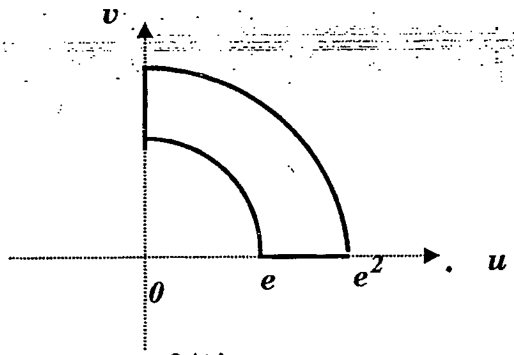
تمرين ① من خلال التابع الأسي أوجد صورة المستقيمات الآتية:

$$a)\ell_1 : y=0\ ,\ b)\ell_2 : y=\pi/2$$
$$c)\ell'_1 : x=1\ ,\ d)\ \ell'_2 : x=2\ ,\ \ 0\le y\le 2\pi$$

ثم استنتج صورة المنطقة المحاطة بالمستطيل الناتج من تقاطع هذه المستقيمات.

الحل. لدينا في جميع الحالات:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$
$$w=u+iv\ ,\quad u=e^x\cos y\ ,\quad v=e^x\sin y$$
$$a)\ell_1 : y=0\Rightarrow u=e^x\ ,\ \ v=0\Rightarrow v=0\ ,u\in\Re^+$$
$$b)\ell_1 : y=\pi/2\Rightarrow u=0\ ,\ \ v=e^x\Rightarrow u=0\ ,v\in\Re^+$$
$$c)\ell'_1 : x=1\Rightarrow w=e^z=e^{x+iy}=ee^{iy},0\le y\le 2\pi$$
$$\Rightarrow |w|=\left|ee^{iy}\right|=e$$
$$d)\ell'_2 : x=2\Rightarrow w=e^{x+iy}=e^2e^{iy},0\le y\le 2\pi$$
$$\Rightarrow |w|=\left|e^2e^{iy}\right|=e^2$$



شكل2

نستنتج مما تقدم أن:

$a)$ المستقيم ℓ_1 ينتقل إلى نصف المحور الحقيقي الموجب

$b)$ المستقيم ℓ_2 ينتقل إلى نصف المحور التخيلي الموجب

c) المستقيم ℓ_1' ينتقل إلى الدائرة $|w| = e$

d) المستقيم ℓ_2' ينتقل إلى الدائرة $|w| = e^2$ (شكل2).

تمرين ② تحقق أن:

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$$

الحل. من التعريف لدينا:

$$2\sin a\cos b = 2\left(\frac{e^{ia}-e^{-ib}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ia}+e^{-ib}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i}+\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2i}$$

$$= \sin(a+b)+\sin(a-b)$$

تمرين ③. اثبت أن:

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z = 1$$

الحل:من التعريف

$$\cosh^2 z = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2z}+2e^z e^{-z}+e^{-2z}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x}e^{2iy}+2+e^{-2x}e^{-2iy}\right)$$

$$\sinh^2 z = \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2z}-2e^z e^{-z}+e^{-2z}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x}e^{2iy}-2+e^{-2x}e^{-2iy}\right)$$

بطرح الطرفين نحصل على العلاقة المطلوبة:

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z = \frac{1}{4}(2+2) = 1$$

تمارين غير محلولة

❶. بين أن قيم التابع الأسي تكون :

أ- حقيقية بحتة على المستقيمات $y = k\pi$

ب_ تخيلية بحتة على المستقيمات $y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث k عدد صحيح.

ج-أوجد جميع القيم التي تحقق المعادلة:

$$e^z = -2$$

الجواب:

$$z = log\,2 + (2n + 1)\pi i\,,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

❷.بين أن :

$$a)\,Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$$

$$b)\,Log(1-i) = \frac{1}{ln\,2} - \frac{\pi}{4}i$$

❸. تحقق أن:

$$a)\,Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$$

$$b)\,Log\,i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i\,,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

❹. أثبت صحة مايلي:

$$a)\,cosh\,z = cos(iz), \qquad a')\,cos\,z = cosh(iz)$$

$$b)\,sinh\,z = -i\,sin(iz), \qquad b')\,sin\,z = -i\,sinh(iz)$$

$$c)\,coth\,z = i\,cot(iz), \qquad c')\,cot\,z = i\,coth(iz)$$

$$d)\,tanh\,z = -i\,tan(iz), \qquad d')\,tan\,z = -i\,tanh(iz)$$

❺. برهن على صحة العلاقات الآتية:

$$a)\,sin\,\overline{z} = \overline{sin\,z}, \quad b)\,cos\,\overline{z} = \overline{cos\,z},$$

$$c)\,tg\,\overline{z} = \overline{tg\,z}, \qquad d)\,ctg\,\overline{z} = \overline{ctg\,z}$$

❻. بين أن حل المعادلة $\sin z = 3$ هو :

$$k = 0 \mp 1, \mp 2, \ldots \ , \ z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + -i\log\left(3 \mp \sqrt{8}\ \right)$$

توجيه : استفد من العلاقة الأولى في (26) ثم لاحظ أن:

$$z = Arc\sin 3 = -iLog\left(3i + \sqrt{-8}\right)$$

❼.تحقق أن:

$$a)\tan^{-1}(2i) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{2}\log 3 \ , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$b)\tan^{-1} h(0) = n\pi i \ , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

❽. أثبت أن:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y,$$
$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

❾.من خلال التابع الأسي e^z أوجد صورة المستقيم في الحالتين الآتيتين:

$$a)x = x_0 \ , \ 0 \le y \le \pi$$
$$b)y = y_0 \ , \ 0 < x < \infty$$

الجواب :

$$a)|w| = e$$
$$b)v = (\tan y_0)u \ ,$$

❿.من خلال التابع $w = \sin z$ أوجد صورة المستقيمين:

$$a)\ell_1 : y = y_0 \ , b)\ell_2 : x = x_0$$

تطبيق: استنتج الصورة من أجل: $y_0 = 1/2 \ , x = \pi/4$

⓫. أوجد أسرة المنحنيات

$$u(x, y) = \alpha \ , \quad v(x, y) = \beta$$

الناتجة من التحويل $w = Log\alpha$ مع العلم أن α و β عدداد ثابتان.

الجواب:أسرة القطوع الزائدة من الشكل:

$$x^2 - y^2 = const, \quad xy = const$$

الفصل السادس

التكامل العقدي

① COMPLEX INTEGRAL — التكامل العادي

ليكن $w=f(t)$ تابعاً عقدياً لمتحول حقيقي t على المجال $\alpha \le t \le \beta$ وليكن

$$f(t)=\varphi(t)+i\,\psi(t),\alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

حيث إن كلاً من $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ تابع حقيقي على المجال المعطى.

تعريف ❶

نعرف التكامل العادي (Simple Integral) للتابع $w=f(t)$ على المجال $a \le t \le \beta$ بالعلاقة:

$$\int_a^\beta f(t)dt=\int_a^\beta \varphi(t)dt+i\int_a^\beta \psi(t)dt \qquad (2)$$

من هذا التعريف نستنتج أن الشرط اللازم والكافي لقبول التابع (1) المكاملة على المجال $[\alpha,\beta]$ هو قبول كل من التابعين $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ للمكاملة على هذا المجال وفق العلاقة (2) . وبذلك نلاحظ أن عملية إيجاد التكامل العقدي للتابع (1) تؤول إلى عملية إيجاد التكامل العادي، المعروف بتكامل ريمان ، للتابعين الحقيقيين $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ اللذين يمثلان القسم الحقيقي والقسم التخيلي للتابع $f(t)$ على الترتيب. وبذلك ، أيضاً ، نستطيع نقل جميع الخواص المعروفة للتكاملات الحقيقية مباشرة إلى التكاملات العادية للتابع العقدي ذي المتحول الحقيقي .

خاصة ❶.

من أجل كل تابع $f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,\beta]$ لدينا

$$Re\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} Re\, f(t)dt\,,$$

$$Im\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} Im\, f(t)dt\,,$$

خاصة ❷

من أجل كل تابع $f(t)$ قابل للمكاملة على المجال $[\alpha,\beta]$ لدينا

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = -\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt\,, \qquad \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0\,.$$

خاصة ❸.

إذا كان $\alpha < \gamma < \beta$ فإن

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt\,.$$

خاصة ❹.

إذا كان التابع $f(t)$ قابلاً للتكامل على المجال $[\alpha,\beta]$ وكانت $|f(t)|$ قيمته المطلقة فإن:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\,dt\,. \qquad (3)$$

② PRIMITIVE FUNCTION التابع الأصلي

تعريف 1. إذا كان التابع $f(t)$ مستمرا على المجال $[\alpha,\beta]$ فإن التابع $F(t)$ المعرف بواسطة العلاقة

$$F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(\tau)d\tau,\ \ \alpha \leq t \leq \beta$$

يدعى بالتابع الأصلي للتابع $f(t)$.

من هذا التعريف نستنتج الخاصتين الآتيتين:

خاصة ❶

إذا كان $F(t)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$ فإن:

$$F'(t) = f(t)$$

خاصة ❷

إذا كان التابع $F(t)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$ فإن التكامل العادي للتابع $f(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$ يعطى بواسطة العلاقة

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = [F(t)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (4)$$

مثال ❶. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_{0}^{1} (1+it)^2 \, dt$$

الحل. لدينا على التوالي:

$$I = \int_{0}^{1} 1 + 2it - t^2 dt = \int_{0}^{1} (1-t^2)dt - i\int_{0}^{1} 2tdt =$$

$$= [t - \frac{t^3}{3}]_{0}^{1} - [t^2]_{0}^{1} = \frac{2}{3} + i$$

③ LINEAR INTEGRAL التكامل على طول منحن

تعريف ❶

ليكن التابع العقدي $f(z)$ ذو المتحول العقدي z ، معرفاً ومستمراً في المنطقة D وليكن C منحنياً نظامياً (مفتوحاً أو مغلقاً) في هذه المنطقة ولنفرض أن:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy \qquad (5)$$

حيث $u(x,y)$ و $v(x,y)$ تابعان حقيقيان لمتحولين حقيقيين x و y . نعرف التكامل المنحني للتابع العقدي على طول المنحني بواسطة التكامل المنحني للتابعين الحقيقيين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ وفق العلاقة:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \qquad (6)$$

ملاحظة ❶

إذا كان a و b طرفي المنحني C فإنه يمكن كتابة التكامل المنحني السابق على النحو التالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

ويستخدم الرمز الأخير عادة عندما يكون التكامل المحني غير متعلق بالمسار بين النقطتين a و b .

سوف نستخدم النظرية الآتية في التطبيقات:

نظرية 1.

إذا كان التابع $f(z)$ مستمراً على طول المنحني النظامي C كان هذا التابع قابلاً للتكامل على طول المنحني المذكور وكان

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt. \qquad (7)$$

مع العلم ان:

$$C : z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

مثال ❶. احسب تكامل التابع $f(z) = z^2$ على طول القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين 0 و $2i$.

الحل. معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين 0 و $2i$ هي:
لدينا أولاً:

$$C : z = 2i\,t, \quad 0 \le t \le 1$$

لاستخدام الصيغة (7) نضع:

$$z(t) = 2it$$

$$f(z) = z^2(t) = (2it)^2 = -4t^2$$

$$z'(t)dt = 2idt, \ 0 \le t \le 1$$

فيكون:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^\beta f[z(t)]z'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 -4t^2(2it)dt$$

$$= -8i\int_0^1 t^3 dt$$

$$= -8i\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = -2i$$

خواص التكامل على طول منحنٍ ④

من التعريف نستنتج الخواص الآتية:

خاصة ❶

لنرمز بـ $-C$ للمنحني C بعد تغيير اتجاهه ، فيكون عندئذ :

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz .$$

خاصة ❷

إذا قسمنا المنحني C إلى قسمين C_2, C_1 بشكل كيفي ، كان:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz .$$

خاصة ❸

إذا كان $f(z)$ و $g(z)$ قابلين للتكامل ،على طول المنحني C كان :

$$\int_C [f(z)+g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$$
$$\int_C [f(z)-g(z)]dz = \int_C f(z)dz - \int_C g(z)dz$$

خاصة ❹

إذا كان A عدداً ثابتاً حصلنا على:

$$\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz.$$

نتيجة ❶

إذاكان التابع $|f(z)|$ محدوداً على المنحني C بالعدد M وكان طول المنحني مساويا للعدد d ، كان

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le Md. \qquad (8)$$

البرهان. لدينا أولاً أن طول المحني C يعطى بالعلاقة

$$d = \int_a^\beta |z'(t)|dt = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

ومن ناحية ثانية ، واعتماداً على العلاقتين (7) و (3) ، لدينا على التوالي :

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^\beta f[z(t)]z'(t)dt\right| \le \int_a^\beta |f[z(t)]||z'(t)|dt \le$$
$$M\int_a^\beta |z'(t)|dt = Md$$

وهو المطلوب

مثال 1. إذا علمت أن C هي دائرة موجبة الاتجاه معادلتها $|z-z_0| = r$ فبين أن :

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \qquad (9)$$

الحل. بالإمكان كتابة معادلة الدائرة C كما يلي:

$$z = z_0 + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi i$$

والآن باستخدام العلاقة (7)ينتج أن

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} re^{it} i dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

⑤ GREEN THEOREM نظرية غرين

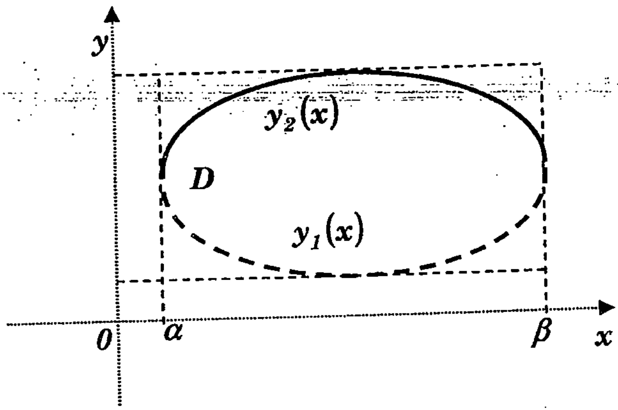
تفيد نظرية غرين (Green) في تحويل حساب التكاملات المنحنية الحقيقية على طول منحن مغلق إلى التكامل الثنائي على المنطقة المحاطة بالمنحني المعطى .

نظرية 1.
لتكن المنطقة

$$D=\{(x,y): \alpha \leq x \leq \beta, y_1(x) \leq y \leq y_1(x)\}$$

(المعروفة بالمنطقة البسيطة (شكل 1))وليكن C محيط هذه المنطقة . ولنفرض ان $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ تابعان معرفان على D ولهما مشتقات جزئية مستمرة $\dfrac{\partial P}{\partial Y}$ و $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. عندئذ

$$(10) \quad \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



شكل 2

ملاحظة 1.إذا كانت المنطقة D محددة بالعلاقات:

$$\alpha \le x \le \beta, y_1(x) \le y \le y_1(x)$$

فإن التكامل الثنائي (10) يحول إلى التكامل على التسلسل من خلال العلاقة:

$$(10') \qquad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{y_1(x)}^{y_1(x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\right] dx$$

⑥ PRIMITIVE FUNCTION التابع الأصلي للتابع العقدي

تعريف ❶

ليكن التابع $f(z)$ معرفاً في المنطقة D . ندعو التابع $F(z)$ الذي يحقق على D الشرط

$$F'(z) = f(z)$$

بالتابع الأصلي للتابع $f(z)$ ونرمز له بالرمز $\int f(z)$.

نتيجة ❶

إذا كان $F(z)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(z)$ فإن $F(z)+c$ ، حيث c ثابت كيفي هو أيضاً تابع أصلي للتابع $f(z)$ وذلك لأن :

$$[F(z)+c]' = f(z)$$

نتيجة ❷

جدول تكاملات التوابع الشهيرة لا يختلف عن جدول التكاملات هذه في الحالة الحقيقية .

نظرية 1. إذا كان $F(z)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(z)$ على المنطقة D فإن

$$(11) \qquad \int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$

وذلك على طول أي منحن نظامي C موجود في D بدايته a ونهايته b .

البرهان . ليكن المنحني

$$z = z(t), \ \alpha \le t \le \beta, \ \ z(\alpha) = a, \ z(\beta) = b$$

هو المسار C ولنرمز $\Phi = F[z(t)]$

عندئذ :

$$\Phi'(t) = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t)$$

ولكن بحسب العلاقة (7) لدينا

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t) = \int_\alpha^\beta F'[z(t)]z'(t) = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)dt$$

اذن

$$\int_C f(z)dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(b) - F(a).$$

وهو المطلوب برهانه .

ملاحظة 1

تبين هذه النظرية ان قيمة التكامل من نقطة ما الى أخرى مستقلة عن المسار بين طرفي المنحني في حالة وجود التابع الأصلي للتابع المكامل

نتيجة 1

إذا كان مشتق التابع $F(z)$ يساوي إلى الصفر في كل نقاط المنطقة D ، كان هذا التابع ثابتاً .

البرهان . لنبدل في النظرية السابقة b بنقطة كيفية z من المنحني C وليكن $f(z) = F'(z) = 0$.عندئذ

$$0 = \int_a^z F'(z)dz = F(z) - F(a)$$

وهذا يعني أن $F(z) = F(a)$ في كل نقطة من D.

مثال 1. إذا كانت z_0 عدداً ثابتاً و C دائرة موجبة الاتجاه مركزها z_0 فبين ان :

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n = 0,1,\mp 2,\mp 3,\ldots \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \qquad (12)$$

الحل. إذا كان $n \neq -1$ فإن للتابع المكامل تابعا أصليا هو

$$F(z) = \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1} + c$$

وطبعا لدينا في (7) أن $a = b$. أما إذا كان $n = -1$ فإن قيمة التكامل (12) هي $2\pi i$ بحسب (9).

التطبيقات العملية

تمارين محلولة ⊙

تمرين ①. إذا كان التابع $f(t)$ معطى بالعلاقة

$$f(t)=(1+i+it)^n, \quad n\neq -1$$

فإن تابعه الأصلي على المجال $(-\infty,\infty)$ هو

$$F(t)=\frac{(1+i+it)^{n+1}}{i(n+1)}+c$$

حيث c هو ثابت كيفي.

تمرين ②. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I=\int_0^{\pi/2} e^{it}dt$$

الحل . بما أن $de^{it}=ie^{it}dt$ فإن:

$$I=\int_0^{\pi/2} e^{it}dt=\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{i}\left(e^{i\pi/2}-1\right)=\frac{1}{i}(i-1)=1+im.$$

ملاحظة ❶

بالإمكان حل التمرين السابق من خلال توزيع التابع $f(t)=e^{it}$ إلى قسميه الحقيقي والتخيلي:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

ثم استخدام (2) فيكون:

$$\int_0^{\pi/2} e^{it}dt=\int_0^{\pi/2}(\cos t+i\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt+i\int_0^{\pi/2}\sin dt$$

$$=[\sin t]_0^{\pi/2}+i[-\cos t]_0^{\pi/2}=1+i$$

تمرين ③. احسب التكامل $f(z)=i\bar{z}$ على طول:

أ) القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين -1 و 1 .

ب) نصف الدائرة العليا: $|z|=1$

الحل. أ) معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين -1 و 1 هي:

$$C : z=t, \quad -1 \le t \le 1$$

وفي هذه الحالة:

$$z(t)=t \Rightarrow f(z)=i\bar{z}=i\bar{t}=it$$

$$z'(t)dt=dt, \; -1\le t\le 1$$

ويكون:

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt=$$

$$=i\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0=\int_{-1}^{1} itdt$$

ب) معادلة نصف الدائرة العليا: $|z|=1$ هي

$$C : z=e^{it}, \quad 0\le t\le \pi$$

وعندئذ:

$$z(t)=e^{it}, \quad 0\le t\le \pi$$

$$f(z)=i\bar{z}=ie^{-it}$$

$$z'(t)dt=ie^{it}dt$$

فيكون

$$\int_C f(z)dz=\int_0^\pi -e^{-it}\left(ie^{-it}\right)dt=-1\int_0^\pi dt=-[t]_0^\pi=-\pi$$

تمرين ④. احسب التكامل $f(z)=1-\bar{z}^2$ على طول القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين 1 و $1+i$.

الحل. لدينا أولاً:

$$C : z=1+it, \quad 0\le t\le 1$$

$$z(t)=1+it$$
$$\bar{z}(t)=1-it$$
$$\bar{z}^2(t)=(1-it)^2=1-2it-t^2$$
$$f(z)=1-\bar{z}^2(t)=1-\left(1-2it-t^2\right)=t^2+2it,$$

$$z'(t)dt=idt,\ 0\le t\le 1$$

بحسب الصيغة (7) يكون:

$$\int_0^1 2\left(t^2+2t\right)idt\ \int_C f(z)dz=\int_a^\beta f[z(t)]z'(t)dt=$$
$$=2i\int_0^1\left(t^2+it\right)dt$$
$$=2i\left[\frac{t^3}{3}+i\frac{t^2}{2}\right]_0^1=2i\left(\frac{1}{3}+i\frac{1}{2}\right)=-1+\frac{2}{3}i$$

تمرين⑤. احسب تكامل التابع $f(z)=\bar{z}$ على طول محيط المنطقة D المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=x$.

الحل. لدينا أولا

$$I=\int_C \bar{z}dz=\int_C (x-iy)(dx+idy)$$
$$=\int_C xdx+ydy+i\int_C -ydx+xdy.$$

بما أن المنحنيين $y=x^2$ و $y=x$. يتقاطعان عندما يكون $x=0, x=1$ فإن المنطقة المعنية ستكون بسيطة بالنسبة للمحور ox كما يلي (شكل2):

$$D=\left\{(x,y): 0\le x\le 1\ ,\ x^2\le y\le x\right\}$$

ومحيط هذه المنطقة $C=C_1+C_2$ مكون من جزء المنحني:

$$C_2: y=x^2\ ,\ 0\le x\le 1$$

ومن القطعة المستقيمة:

$$C_1: y=x\ ,\ 0\le x\le 1$$

وبتطبيق العلاقة (10) على كل من التكاملين السابقين نجد أن:

$$\int_C xdx + ydy = \iint_D \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (0)\, dxdy = 0$$

$$\int_C -ydx + xdy = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (2)\, dxdy = \frac{1}{12}$$

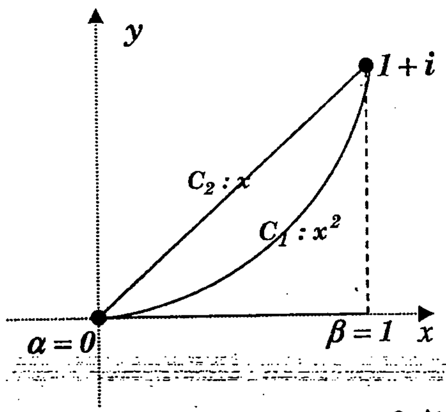
وذلك لأن:

$$\iint_D 2\, dxdy = 2\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} dy\right] dx = 2\int_0^1 x\,[y]_{x^2}^{x}\, dx$$

$$= 2\int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

ومنه يكون:

$$I = 0 + i \cdot \frac{1}{12} = i\frac{1}{12}$$



شكل 2

تمارين غير محلولة

❶. احسب التكامل $\int_C xdz$ عندما يكون الطريق المسلوك : a) قطعة مستقيمة طرفاها $-1,+1$. b) نصف دائرة $|z| = 1$ و $Re\, z > o$.

❷.احسب التكامل

$$I = \int_C |z-1||dz|, C : |z| = 1.$$

❸. احسب تكامل التابع $f(z) = 1 - 2\bar{z}$ على طول القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين 0 و $1+i$ بطريقتين: الأولى باستخدام العلاقة (6) والثانية باستخدام العلاقة (7) . الجواب: $1-i$

❹.احسب تكامل التابع $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$

آ) على طول القطعة المستقيمة C الواصلة بين النقطتين -1 و $+1$. (الجواب $1=$)

ب) على طول نصف دائرة العلوي العلوي C' (الواصلة بين النقطتين -1 و $+1$.

(الجواب $I_0 = i/2$)

❺. احسب التكامل $\int_C \bar{z}dz$ على طول المنحني C في الحالات الآتية:

آ) $C = C_0$ هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين 0 و $1+i$ (الجواب $I_0 = 1$)

ب) $C = C_1$ هو الخط المنكسر المؤلف من القطعتين المستقيمتين $[0,1]$ و $[1,1+i]$

(الجواب $I_0 = 1+i$)

ج) C هو المثلث الذي رؤوسه $[0,1,1+i]$ باستخدام النتيجتين السابقتين ثم باستخدام نظرية غرين.

❻. باستخدام نظرية غرين احسب التكامل $\int_C \bar{z}dz$ على طول المنحني C في الحالات الآتية:

آ) $C = C_1$ هو المربع الذي تقع رؤوسه في النقاط $0,2,2i,2+2i$ (الجواب) $8i$

ب) $C = C_2$ هو الدائرة $|z-2| = 3$ (الجواب $18\pi i$)

ج) $C = C_3$ هو محيط المنطقة المحددة بالمستقيم $y = x$ والقطع المكافئ $y^2 = x$

(الجواب $I = \dfrac{i}{3}$).

الفصل السابع

خواص التوابع التحليلية

نظرية كوشي التكاملية ①

CAUCHY INTEGRA THEOREM

قلنا عن التابع $f(z)$ إنه تحليلي (أو هولومورفي) في النقطة z_0 من منطقة تعريفه إذا كان له مشتق في كل نقطة من جوار ما لهذه النقطة . وقد اعتمد العالم الفرنسي أرنست كوشي مؤسس مـادة التحليـل العقدي ، لإيجاد الخواص الأساسية للتابع التحليلي ، على المبرهنة الآتية :

نظرية ❶ (نظرية كوشي التكاملية)

ليكن التابع $f(z)$ تحليليا في المنطقة D الوحيدة الترابط وعلى محيطها C، وليكن C منحنياً نظامياً . عندئذ:

$$\int_C f(z)dz = 0 \qquad (1)$$

البرهان. لدينا بحسب تعريف التكامل المنحني:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

بتحويل التكامل على طول المنحني C إلى التكامل الثنائي على المنطقة D واعتمادا على نظرية غرين يكون:

$$\int_C udx - vdy = \iint_D \left(-v'_x - u'_y\right)dxdy = \iint_D (0)dxdy = 0$$

$$\int_C vdx + udy = \iint_D \left(u'_x - v'_y\right)dxdy = \iint_D (0)dxdy = 0$$

وذلك لأن

$$-v'_x - u'_y = 0$$

$$u'_x - v'_y = 0$$

بحسب شرطي كوشي – ريمان . وهو المطلوب.

وتعمم نظرية كوشي التكاملية إلى المناطق المتعددة الترابط كما يلي:

نظرية ❷

ليكن التابع $f(z)$ تحليليا في المنطقة بالمنحنيات النظامية $C_0, C_1, ..., C_k$ علما أن $C_1, ..., C_k$ موجودة داخل C_0 . عندئذ

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_k} f(z)dz \qquad (6)$$

ومن هذه النظرية نحصل على النتيجتين الآتيتين المتعلقتين بالمناطق ثنائية الترابط:

نتيجة ❶

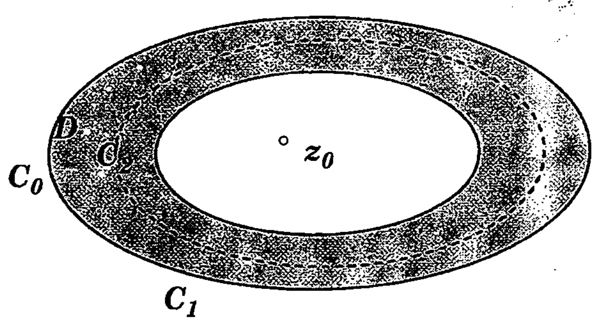
ليكن التابع $f(z)$ تحليليا في المنطقة بالمنحنين النظاميين C_0, C_1 علما أن C_1 موجود داخل C_0 . عندئذ :

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz \qquad (2)$$

نتيجة ❷

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة الوحيدة الترابط D ، باستثناء النقطة z_0 التي تنتمي إلى D ، وكان كل من المنحنيين النظاميين C_2 و C_1 الموجودين في D ، يحويان داخلهما z_0 (شكل1) فإن :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \qquad (3)$$



شكل1

مثال ❶ احسب التكامل

$$I = \int_S \frac{1}{z-i} dz$$

حيث S هو مربع مركزه $z_0 = i$ وطول ضلعه 1 .

الحل. لتكن C دائرة مركزها $z_0 = i$ وواقعة كلياً داخل المربع S، ليكن مثلاً:

$$C : |z - z_0| = 1/2$$

عندئذ سيكون التابع المكامل $\frac{1}{z-i}$ تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المربع والدائرة وبالتالي بحسب العلاقة (3) سيكون(قارن العلاقة (6) فصل6):

$$I = \int_S \frac{dz}{z-i} = \int_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

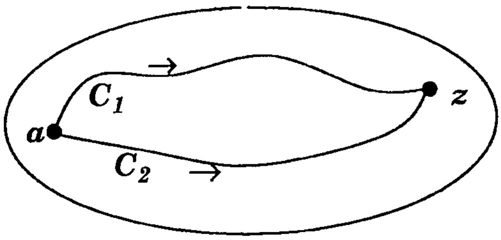
نظرية ❸

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة الوحيدة الترابط D وكانت a نقطة كيفية وثابتة من D فإن التابع $\Phi(z)$ المعبر عنه بالتكامل :

$$\Phi(z) = \int_a^z f(z) dz \tag{4}$$

غير متعلق بالمسار المسلوك داخل D

البرهان : ليكن C_1 و C_2 طريقتين مختلفتين من a الى z (شكل2) . في هذه الحالة يكون $C_1 + (-C_2)$ منحنياً نظامياً داخل D ينعدم على طوله التكامل (4) بحسب نظرية كوشي التكاملية1 ، وعليه فالتابع $\Phi(z)$ يتعلق بالثابت a فقط .



شكل2

نتيجة ❸

التابع $\Phi(z)$ المعطى بالعلاقة (4) تحليلي في D وإضافة إلى ذلك:

$$(5) \quad \Phi'(z) = f(z)$$

$$(5') \qquad \frac{d}{dz}\int_a^z f(z)dz = \int_a^z \frac{d}{dz} f(z)dz = f(z)$$

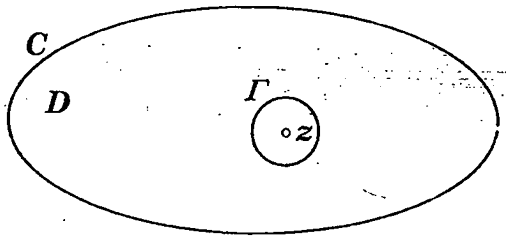
صيغة كوشي التكاملية ②

CAUCHY INTEGRA FORMULA

نظرية 1 $(Cauchy)$. إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً على المنطقة D المحاطـــة بمنحنـــي جوردان C الموجب الاتجاه فان قيمة هذا التابع في كل نقطة z من D تعطى بالعلاقة

$$(7) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \, .$$

البرهان . لتكن z نقطة كيفية من D ولتكن Γ دائرة موجبة الاتجاه مركزها z وواقعة كليا داخل المنطقة D (شكل3) .



شكل 3

إن التابع f ذا المتحول ζ والمعطى بالعلاقة (7) تحليلـــي علـــى المجموعـــة المحاطـــة بالمنحنيين C و Γ (لان $z \neq \zeta$ في هذه المجموعة) . إذاً وبحسب الصيغة (3) يكون:

$$\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{8}$$

فإذا وضعنا الآن

$$f(\varsigma) = f(z) + f(\zeta) - f(z)$$

كان

$$\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_K \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_K \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

لنرمز لأول التكاملين الواقعين في الطرف الأيمن بـــالرمز I_1 ولثانيهما بـــالرمز I_2 فيكون عندئذ

$$I_1 = f(z) \int_K \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i$$

سنبين الآن أن $I_2 = 0$. في سبيل ذلك نختار نصف القطر r للدائرة K صغيراً بما فيه الكفاية بحيث

$$|\varsigma - z| \le r \Rightarrow |f(\varsigma) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \tag{9}$$

(وهذا الاختيار ممكن لأن التابع $f(\zeta)$ مستمر في النقطة z) . أما على الدائرة K نفسها فلدينا $|\zeta - z| = r$. نستنتج من ذلك أن .

$$|I_2| = \left| \int_K \frac{f(\zeta) - f(z)}{|\zeta - z|} d\zeta \right| \le \int_K \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta|$$

بما أن طريق التكامل يساوي إلى $2\pi r$ فإننا نحصل ، من خلال العلاقة (9)، على ما يلي:

$$|I_2| \le \frac{\varepsilon}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \varepsilon$$

وهذا يعني أن $|I_2|$ صغير بشكل كيفي ، فهو إذاً يساوي الصفر وبالتالي $I_2 = 0$.

بالرجوع الآن إلى العلاقة (8) نجد أن

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I_2 = f(z) \cdot 2\pi i$$

وهذا يعني صحة العلاقة (7). وهو المطلوب .

تحمل العلاقة (7) اسم صيغة كوشي التكاملية هذه العلاقة تعطي الصفات المميزة للتابع التحليلي , وسوف نعرض بعض هذه الصفات من خلال الملاحظات الآتية:

ملاحظة ❶.

تسمح صيغة كوشي التكاملية بمعرفة قيم التابع $f(z)$ داخل المنطقة بمعرفة قيمه على محيط هذه المنطقة .

ملاحظة ❷

إذا كانت z واقعة خارج المنطقة D ، كان التابع المكامل في (7) تحليلياً في المنطقة D وعلى محيطها C. وعندئذ بحسب نظرية كوشي التكاملية يكون :

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad .$$

ملاحظة ❸

إذا كانت z_0نقطة محددة معطاة داخل المنطقة فإن اسم صيغة كوشي التكاملية (7) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (10)$$

ملاحظة ❹

تستخدم صيغة كوشي التكاملية عادة في حساب بعض تكاملات التوابع من خلال معرفة قيمة هذه التوابع في نقاط معينة. يبين ذلك المثال الآتي:

مثال ❶. إذا كانت C دائرة معطاة بالمعادلة $|z|=2$ وموجبة الاتجاه فأوجد قيمة التكامل

$$I=\int_C\frac{z}{\left(9-z^2\right)(z+i)}dz.$$

الحــل. بوضع:

$$f(z)=\frac{z}{\left(9-z^2\right)},z_0=-i$$

نجد بحسب صيغة كوشي التكاملية (10) أن:

$$I=\int_C\frac{z}{\left(9-z^2\right)(z+i)}dz=\int_C\frac{\frac{z}{\left(9-z^2\right)}}{(z-(-i))}dz$$

$$=2\pi i f(z_0)=2\pi i\frac{-i}{10}=\frac{\pi}{5}$$

الخاصة الأساسية للتابع الاشتقاقي ③

إحدى النتائج الهامة لصيغة كوشي التكاملية (7) هي أن وجود المشتق الأول للتابع في نقطة ما يؤدي إلى وجود بقية المشتقات مهما كانت المرتبة . تبين ذلك النظرية الآتية:

نظرية ❶.

وجود المشتق الأول للتابع $f(z)$ في المنطقة D يؤدي إلى وجود مشتقاته من أي مرتبة في هذه المنطقة ويعبر عن هذه المشتقات في النقطة z بالعلاقات:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=1,2,\dots \tag{11}$$

البرهان. إذا كان C منحنياً مغلقاً ضمن المنطقة D وكانت z واقعة داخل C كان بحسب صيغة كوشي التكاملية:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

بالاعتماد على العلاقة $(5')$ نجد أن :

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d}{dz}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

وبالتالي:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

وبتطبيق هذا الاشتقاق مرة ثانية نحصل على العلاقة:

$$f''(z)=\frac{1\cdot 2}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta$$

وبتطبيقه مرة ثالثة ورابعة ... وهكذا حتى n نجد أن

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

وهذا يعني صحة النظرية في النقطة z وكل نقطة أخرى داخل D ومن أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظة ❸

إذا كانت نقطة z_0 محددة معطاة داخل المنطقة D فإن صيغة كوشي التكاملية (7) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\quad n=1,2,3,\dots \tag{11'}$$

تسمح الصيغة $(11')$ بحساب بعض أنواع التكاملات التي يصعب حسابها بطرق أخرى. يبين ذلك المثال الآتي:

مثال ❶. إذا كانت دائرة C المعطاة بالمعادلة $|z|=2$ فاحسب قيمة التكامل

$$I=\int_C\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3}dz\,.$$

الحل. نفرض أن $z_0=i\,,\quad f(z)=e^{\pi z}$ فيكون بحسب (11):

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-i)^3}dz\,,\quad n=2.$$

وبما أن

$$f'(z)=\pi e^{\pi z}\,,$$

$$f''(z)=\pi^2e^{\pi z}\,,$$

$$f''(i)=\pi^2e^{\pi i}=\frac{2}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-i)^3}dz=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3}dz\;.$$

ومنه:

$$I=\int_C\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3}dz=-\pi^3 i$$

④ CAUCHY INEQUALIT متراجحات كوشي

تعريف ❶

ندعو النقطة z_0 بجذر التابع أو صفر للتابع $f(z)$ إذا كان $f(z_0)=0$. يقال في هذه الحالة أيضاً إن z_0 هي نقطة صفر للتابع $f(z)$ (أو باختصار صفر التابع $f(z)$)

نظرية ❶

إذا كان التابع $f(z)$:

آ- تحليلياً في القرص $|z|<R$.

ب- قابلاً للنشر في سلسلة القوى

$$f(z)=a_0+a_1z+.....,|z|<R$$

ج- محدوداً بالعدد M :

$$|f(z)|\le M\,,\quad \forall z\in\{|z|<R\}$$

فإن

$$|a_n|\le\frac{M}{R^n}\,,\quad n=0,1,2,...,\qquad (12)$$

البرهان. لتكن C دائرة معطاة بالمعادلة

$$z=re^{it},0\le t\le 2\pi,r<R$$

عندئذ وبحسب (11) يكون

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}.d\zeta\,.$$

بما أن $\zeta=r$ على محيط الدائرة C إذا فالتابع المكامل ، بالقيمة المطلقة ، لايتجاوز العدد $M\ /r^{n+1}$. ومنه نستنتج أن

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi i}\frac{M}{r^n+1}.2\pi r=\frac{M}{r^n}$$

إذا جعلنا الآن r تسعى نحو R فإننا نحصل على المتراجحة المطلوبة (7).

تعريف ❶

تدعى العلاقات (12) بمتراجحات كوشي .

⑤ النظرية الأساسية في الجبر
FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA

تعريف ❶

ندعو التابع التحليلي في جميع نقاط المستوي (المفتوح أو المغلق) بالتابع الكامل (*Entire Function*) .

تقسم التوابع الكاملة إلى توابع كاملة عادية ، مثل كثيرات الحدود ، والى توابع كاملة صماء، مثل $\sin z, \cos z$, e^2 . سنبرهن فيما يلي على صحة نظرية هامة تدعى بنظرية ليوفيل :

نظرية ❶ (ليوفيل *Liouville*)

كل تابع كامل ومحدود هو ثابت .

البرهان . ليكن $f(z)$ تابعاً كاملاً ومحدوداً بالعدد M في جميع نقاط المستوي العقدي أي ليكن

$$|f(z)| < M,\ z \in C$$

من اجل أي عدد R لدينا– بحسب متراجحات كوشي -(12) أن

$$|a_n| \le \frac{M}{R^n},\ n = 0, 1, 2, \ldots,\qquad R > 0\ .$$

بما انه يمكن لـــ R أن يكون كبيراً بشكل كيفي إذاً يمكن لـــ $|a_n|$ أن يكون صغيراً بشكل كيفي من اجل كل n أكبر من الصفر . لهذا السبب يترتب على التابع $f(z)$ أن يختصر إلى العدد الثابت a_0 . أي أن $f(z) = a_0$

ملاحظة ❶

نستنتج من النظرية أعلاه أن التابع الكامل ، الذي يختلف عن الثابت ، يقبل قيماً كبيرة بقيمتها المطلقة بشكل كيفي . ونعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$\limsup_{z \to \infty} |f(z)| = \infty\ .$$

بالاعتماد على نظرية ليوفيل يمكننا الآن وبسهولة ، البرهان على صحة النظرية الأساسية في الجبر وهي:

نظرية ❸ (غوص *Gauss*)

كل كثير حدود درجته اكبر من الصفر يملك ، على الأقل ، جذراً واحداً .

البرهان . ليكن كثير الحدود

$$W(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m \,, m>0$$

إذا لم يكن لكثير الحدود هذا أي جذر ، كان التابع $1/W(z)$ تحليليا في جميع نقاط المستوي وبالتالي كاملاً . وهو محدود لأن :

$$1/W(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0 .$$

(قارن الفصل 3 $((18)$) . نستنتج من ذلك أن المقدار $1/W(z)$ يساوي إلى الثابت ($constant$) بحسب نظرية ليوفيل. ولذلك:

$$\frac{1}{W(z)}=c\,,\quad c=const$$

$$W(z)=\frac{1}{c}=const .$$

وهذا مخالف للفرض .

⑥ HARMONIC FUNCTION التوابع التوافقية

تعريف ❶

نقول عن التابع ذي المتحولين $u=u(x,y)$ المعرف في المنطقة D إنه توافقي في النقطة (x_0,y_0) إذا كان له مشتقان جزئيان مستمران من المرتبة الأولى والثانية في جوار ما لهذه النقطة وكان :

$$u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0 \qquad (13)$$

في كل نقطة من هذا الجوار. ونقول عن هذا التابع إنه توافقي في المنطقة D إذا كان توافقياً في كل نقطة من هذه المنطقة . تعرف المعادلة (13) بمعادلة لابلاس التفاضلية ويرمز لها اختصاراً بالرمز: $\Delta u=0$

تلعب التوابع التوافقية دوراً هاماً في نظرية الكمون . لذلك تدعى التوابع التوافقية ذات المتحولين ، أحياناً بالكمون اللوغاريتمي .

من التعريف ينتج مباشرة مايلي:

نتيجة ❶

أن كل تابع ثابت هو تابع توافقي ,

نتيجة ❷

إذا كان التابع u توافقياً وكان a و b ثابتين كيفيين كان التابع $au+b$ توافقياً أيضاً .

نتيجة ❸

إذا كان u و v تابعين توافقيين في منطقة مشتركة و كانت a و b و c ثوابتاً كان التابع

$$w = au + bv + c$$

توافقياً .في هذه المنطقة .

ملاحظة ❶

ليس من الضروري أن يكون جداء تابعين توافقيين تابعاً توافقياً فمثلاً xy تابع تواقفي بينما مربعه $(xy)^2$ ليس بالتوافقي لأنه لا يحقق معادلة لابلاس (13) .

نظرية ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D كان قسمه الحقيقي $u(x,y)$ تابعاً توافقياً في هذه المنطقة.

البرهان : ليكن:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

تابعاً تحليلياً في المنطقة D , لدينا بحسب قاعدة اشتقاق التابع العقدي

$$f'(z) = u'_x + iv'_x \;,$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\left(u'_y + iv'_y\right)$$

$$f''(z) = u''_{xx} + iv''_{xx} \;,$$

$$f''(z) = \frac{1}{i^2}\left(u''_{yy} + iv''_{yy}\right)$$

وبالمقارنة يكون

$$u''_{xx} + iv''_{xx} = -u''_{yy} - iv''_{yy}$$

$$\Rightarrow u''_{xx} = -u''_{yy} \Rightarrow \qquad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

وهذا يعني أن معادلة لابلاس التفاضلية محققة ولذلك $u(x,y)$ تابع توافقي في D.

بمحاكمة مشابهة يبرهن على صحة النظرية الآتية:

نظرية ❷

كل تابع توافقي $u(x,y)$ في منطقة ما ، وحيدة الترابط، يصلح لأن يكون قسماً حقيقياً لأحد التوابع التحليلية.

نتيجة ❹

القسم التخيلي v للتابع التحليلي $f(z) = u + iv$ هو تابع توافقي لأن v بدوره هو قسم حقيقي للتابع التحليلي

$$\frac{1}{i} f(z) = v(x,y) - iu(x,y). \qquad (14)$$

تعريف ❸

إذا كان التابعان $u(x,y)$ و $v(x,y)$ توافقيين في منطقة مشتركة D ويحققان شرطي كوشي – ريمان فيها فإننا ندعو $v(x,y)$ بالتابع المرافق للتابع $u(x,y)$ ، نقول في هذه الحالة ، أيضاً ، إن التابعين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مترافقان.

نتيجة ❺

إذا كان التابع أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلياً في منطقة ما كان قسماه الحقيقي والتخيلي مترافقين في هذه المنطقة.

مثال ①. إن التابعين

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

توافقيان في كل المستوي العقدي باستثناء الصفر $(0,0)$ ولذلك فهما مترافقان لكونهما القسم الحقيقي والتخيلي للتابع

$$f(z) = 1/z.$$

التطبيقات العملية

تمارين محلولة ⦿

تمرين ①. احسب التكامل

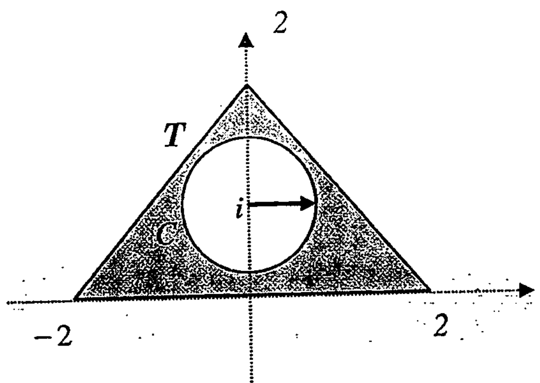
$$I = \int_T \left(z^2 + \frac{1}{z-i} \right) dz$$

حيث T هو مثلث رؤوسه $-2,2,2i$.

الحل. نلاحظ أن :

$$I = \int_T \left(z^2 + \frac{1}{z-i} \right) dz = \int_T z^2\, dz + \int_T \frac{1}{z-i} dz$$

وبالتالي لدينا أولاً بحسب نظرية كوشي التكاملية أن:



شكل 5

ومن ناحية ثانية إذا كان C دائرة مركزها i ومحتواة كلياً في المثلث T فإن التابع $\frac{1}{z-i}$ سيكون تحليلياً في المنطقة المحصورة بين هذا المثلث والدائرة C. عندئذ و بحسب (3) يكون:

$$\int_T \frac{dz}{z-i} = \int_C \frac{dz}{z-i}$$

وبما أن التكامل الأخير يساوي إلى $2\pi i$ (بحسب (6) فصل6) فإن:

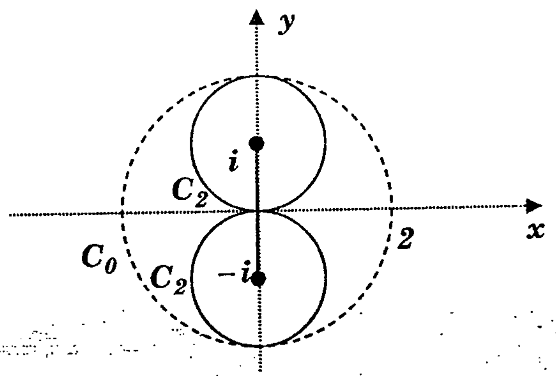
$$I = 0 + \int_T \frac{dz}{z-i} = \int_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

تمرين ③. أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz$$

في الحالات الآتية(شكل 6):

$$a)\ C = C_1 : |z-i| = 1$$
$$b)\ C = C_2 : |z+i| = 1$$
$$c)\ C = C_0 : |z| = 2$$



شكل 6

الحـل. نستخدم صيغة كوشي التكاملية (10)فيكون في الحالة الأولى:

$$I = \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz = \int_{C_1} \frac{z^3}{(z-i)(z+i)} dz$$
$$= \int_{C_1} \frac{z^3/(z+i)}{(z-i)} dz = 2\pi i\left(i^3/(i+i)\right)$$
$$= 2\pi i(-i/2i) = -\pi i$$

وفي الحالة الثانية:

$$I=\int_{C}\frac{z^3}{z^2+1}dz=\int_{C_2}\frac{z^3}{(z-i)(z+i)}dz$$
$$=\int_{C_2}\frac{z^3/(z-i)}{(z+i)}dz=2\pi i\left((-i)^3/(-i-i)\right)$$
$$=-2\pi i(i/2i)=-\pi i$$

وفي الحالة الثالثة نلاحظ أولاً أن المنحنيين C_1 و C_2 موجودان داخل C_0 (شكل 6) وبالتالي بحسب الصيغة العامة (6) يكون:

$$I=\int_{C_0}\frac{z^3}{z^2+1}dz=\int_{C_1}\frac{z^3}{z^2+1}dz+\int_{C_1}\frac{z^3}{z^2+1}dz$$
$$=-\pi i-\pi i=-2\pi i$$

تمرين ④. ليكن التابع $f(z)$ تحليليا ومختلفا عن الصفر في منطقة ما D , فيكون عندئذ:

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg f(z)$$

وبالتالي $\log|f(z)|$ هو تابع توافقي في المنطقة D .

حالة خاصة :إذا كان $f(z)=z^2$ كان التابع :

$$u(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)$$

توافقياً في جميع نقاط المستوي باستثناء النقطة $(0,0)$. غير أن التابع x^2+y^2 ليس توافقياً لأنه لا يحقق معادلة لابلاس التفاضلية .

تمرين ⑤. اوجد التابع المرافق للتابع التوافقي الآتي:

$$u(x,y)=y^3-3x^2y \qquad (15)$$

الحل . نلاحظ أولاً أن :

$$u'_x(x,y)=-6xy$$

وبما أن شرطي كوشي – ريمان محققان $(u'_x=v'_y)$ فإن:

$$v'_y(x,y)=-6xy$$

بأخذ تكامل الطرفين بالنسبة للمتحول y مع جعل x ثابتاً يكون:

$$v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x) \qquad (15')$$

وبما أن $u'_y = -v'_x$ فإن المعادلة (15) تؤدي إلى:

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \varphi'(x)$$

ومنه:

$$-3x^2 = -\varphi'(x)$$

$$\varphi(x) = x^3 + c$$

حيث c ثابت كيفي. ومنه:

$$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$$

هو التابع المرافق للتابع (15).

تمارين للحل

❶. إذا علمت أن S هو مربع موجب الاتجاه ومحدد بالمستقيمات $x = \mp 2 \,,\, y = \mp 2$ فبين أن:

$$a) \int_S \frac{e^{-z}}{z - (\pi i/2)} dz = 2\pi$$

$$b) \int_S \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz = \frac{\pi i}{4}$$

$$c) \int_S \frac{z}{2z+1} dz = \frac{-\pi i}{2}$$

❷. احسب قيمة التكامل

$$I = \int_C \frac{dz}{z(z - 1 + i)}$$

في الحالتين الآتيتين:

$$a)\, C = C_1 : |z-1| = 1/2$$

$$b)\, C = C_2 : |z-1+i| = 1/2$$

الجواب : 0 في الحالة الأولى و $-4\pi i$ في الحالة الثانية .

❸. أوجد تكامل التابع على طول الدائرة $C : |z-i| = 2$ ذات الاتجاه الموجب في الحالتين الآتيتين:

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 4},$$
$$b) f(z) = \frac{1}{\left(z^2 + 4\right)^2}$$

الجواب:

$a)\ \pi/2$

$b)\ \pi/16$

❹. إذا علمت أن S هو دائرة مركزها 1 ونصف قطرها 1 فبين أن:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = \frac{3}{2} e \cdot$$

❺. إذا كان u و v تابعين توافقيين في منطقة مشتركة و كانت a و b و b ثوابت فبين أن التابع $w = au + bv + c$ توافقي في هذه المنطقة

❻ . اوجد التابع المرافق للتابع التوافقي في الحالات الآتية :

$a) u(x,y) = 2x(1-y)$

$b) u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

$c) u(x,y) = \sinh x \sin y$

الجواب:

$a) v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$

$c) u(x,y) = -\cosh x \cos y$

الفصل الثامن

السلاسل العقدية

① NUMBER SERIES — السلاسل العددية

تعريف ❶

لتكن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد العقدية في المستوي العقدي $\leq$. سوف ندعو مجموع حدود هذه المتتالية :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \tag{1}$$

بالسلسلة العددية – وندعو a_n بالحد العام لهذه السلسلة .

تعريف ❷

ندعو المتتالية $\{s_n\}$ ذات الحدود

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \tag{2}$$

بمتتالية المجامع الجزئية للسلسلة (1)

تعريف ❸

نقول إن السلسلة (1) متقاربة نحو النهاية s إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة نحو s. و نكتب ذلك على الشكل :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=o}^{\infty} a_n = s. \tag{3}$$

أو على الشكل :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum a_n = s. \tag{3'}$$

إذا لم يكن هناك شك من ناحية الحدود الأولى للسلسلة.

تعريف ❹

نقول إن السلسلة (1) متقاربة مطلقاً إذا كانت السلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة .

تعريف ❺

اذا كانت $s=\infty$ قلنا عندئذ السلسلة $\sum a_n$ متباعدة نحو ∞ .

ملاحظة ❶

مما تقدم نلاحظ أن دراسة تقارب السلسلة العددية تؤول إلى دراسة تقارب المتتالية العددية المتمثلة بمتتالية المجاميع الجزئية للسلسلة . نتيجة لذلك واعتماداً على الشرط اللازم والكافي لتقارب المتواليات نستنتج أن دراسة تقارب السلسلة العددية $\sum a_n$ تكافئ دراسة تقارب سلسلتين عدديتين حقيقيتين من الشكل:

$$\sum_{n=o}^{\infty}\alpha_n,\ \ a_n=\alpha_n+i\beta_n;\quad \sum_{n=o}^{\infty}\beta_n$$

ويصبح بالإمكان استخدام نظريات التحليل الحقيقي المتعلقة بالسلاسل العددية .

نتيجة ❶ (الشرط اللازم لتقارب السلاسل):

الحد العام للسلسلة المتقاربة يسعى إلى الصفر. (إن العكس ليس صحيحا فقد ينتهي الحد العام نحو الصفر دون أن تتقارب السلسلة كالسلسلة التوافقية مثلاً).

نتيجة ❷ (الشرط اللازم لتقارب السلاسل مطلقاً):

السلسلة المتقاربة مطلقا هي متقاربة (العكس ليس صحيحا).

نتيجة ❸

إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ متقاربة وكان A عدداً عقدياً كيفياً كانت السلسلة $\sum Aa_n$ متقاربة .

نتيجة ❹

إذا كانت السلسلتان $\sum a_n , \sum b_n$ متقاربتين فإن السلسلة الناتجة حدودها من مجموع حدود هاتين السلسلتين تكون متقاربة، وإضافة إلى ذلك:

$$\sum_{n=o}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=o}^{\infty}a_n+\sum_{n=o}^{\infty}b_n$$

اختبارات التقارب

② CRITERIA OF CONVERGENCE

تفيد اختبارات التقارب في دراسة تقارب السلاسل العددية أو تباعدها. هذه الاختبارات تنتج مباشرة من النظريات المماثلة لها في التحليل الحقيقي بعد الاعتماد على الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتاليات.

تعريف ❶

نقول إن السلسلة العددية $\sum a_n$ تحقق شرط كوشي إذا كان من أجل كل عدد موجب ε يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث تتحقق المتراجحة :

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

من أجل كل عددين n و m يحققان الشروط : $n > n_0, m > n > n_0$.

اختبار ❶ (شرط كوشي):

الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة العددية $\sum a_n$ هو تحقيقها لشرط كوشي .

اختبار ❷ (دستور المقارنة)

إذا كانت السلسلتان $\sum a_n$ و $\sum A_n$ تحققان المتراجحة

$$|a_n| \leq A_n, A_n \geq 0$$

من أجل كل n وكانت السلسلة $\sum A_n$ متقاربة كانت السلسلة $\sum a_n$ متقاربة مطلقا .

اختبار ❸ (اختبار كوشي Cauchy) .

تكون السلسلة $\sum a_n$ ، التي تختلف حدودها عن الصفر ، متقاربة مطلقا إذا كان:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq n_0} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \qquad (4)$$

ومتباعدة إذا تغير اتجاه المتراجحة أعلاه .

اختبار ❸ (اختبار دالمبير D'alembert)

(. تكون السلسلة $\sum a_n$ ، التي تختلف حدودها عن الصفر ، متقاربة مطلقا إذا كان

$$q = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq n_0} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad (5)$$

ومتباعدة إذا تغير اتجاه المتراجحة أعلاه .

مثال ❶. ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=on}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \ldots \qquad (5')$$

الحل. لنضع: $a_n = b^n/n!$ ولنتحقق بواسطة اختبار دالمبير فنلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}/(n+1)!}{b^n/n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,b^{n+1}}{(n+1)!\,b^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b}{(n+1)} = 0 < 1$$

وهذا يعني أن السلسلة المعطاة متقاربة من أجل كل عدد عقدي b

ملاحظة ❶

من المثال السابق ، واعتماداً على اختبار المقارنة، نستنتج مباشرةً أن السلسلة $(5')$ متقاربة مطلقاً من أجل كل p واقعة داخل القرص $|p| < 1$ ومتباعدة من أجل p واقعة خارجه أي من أجل الأعداد المحققة للعلاقة $|p| > 1$.

③ CAUCHY PRODUCT — جداء كوشي لسلسلتين

تعريف ❶

لتكن السلسلتان

$$\sum_{o}^{\infty} a_n, \quad \sum_{o}^{\infty} b_n \qquad (6)$$

ندعو السلسلة الجديدة

$$\sum_{o}^{\infty} c_n \qquad (7)$$

التي ترتبط حدودها مع حدود السلسلتين السابقتين بالعلاقة :

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ...a_o b_n \qquad (7')$$

بحاصل جداء كوشي للسلسلتين (6).

ملاحظة ❶

نستنتج من هذا التعريف وجود بعض السلاسل اللانهائية التي يعطي جداء اثنتين منها بوساطة جداء كوشي . فما هي مجموعة السلاسل التي يصح فيها استخدام جداء كوشي؟ يجيب عن هذا السؤال مرتينز من خلال النظرية الآتية:

نظرية ❶ (مرتينز $Mertens$):

إذا كانت السلسلتان $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربتين نحو A و B وكانت إحداهما متقاربة مطلقا، كانت السلسلة

$$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n \qquad (8)$$

متقاربة نحو الجداء $A \cdot B$ وحدود السلسلة $\sum c_n$ معطاة بالعلاقات.

مثال ❶. برهن أن

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} \qquad (9)$$

الحل . بما أن كلاً من السلسلتين

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

متاربة من أجل كل عدد عقدي a أو b (كما بينا في المثال 1 منم الفقرة السابقة) إذاً يمكن استخدام جداء كوشي للسلاسل:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n$$

حيث تعطي الحدود c_n بالعلاقة $(7')$كما يلي:

$$c_n = \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)} \cdot \frac{b}{1!} + \dots + \frac{b^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \dots + \binom{n}{n} b^n\right] = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

④ POWER SERIES سلاسل القوى

تعريف ❶

تدعى السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \qquad (10)$$

حيث a_n أعداد عقدية كيفية ، بسلسلة القوى ذات المركز $z_0 = 0$.

تعريف ❷

كل سلسلة من الشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots \qquad (11)$$

تدعى بسلسلة القوى ذات المركز z_0 والأمثال a_n (تعرف هذه السلسلة أيضاً بسلسلة تايلور).

ملاحظة ❶

إذا بدلنا $z - z_0$ ب z في (11) فإننا نحصل على السلسلة (10) ذات المركز $z_0 = 0$. ومن هنا نستنتج ان دراسة خواص السلسلة (10) تكفي لمعرفة خواص السلسلة(11).

ملاحظة ❷

إن سلسلة القوى متقاربة دائماً في مركزها أما خارج المركز فقد تكون متقاربة او متباعدة . وفي هذا المجال تكون صحيحة (بشكل مشابه للحالة الحقيقية) النظرية الآتية:

نظرية ❶

إذا كانت السلسلة (10)متقاربة في النقطة z_1 فان :

أ – هذه السلسلة متقاربة مطلقا في القرص $|z| < r$ حيث $|z_1| = r$

ب– هذه السلسلة المتقاربة بانتظام في كل قرص $|z| \leq \theta < r$

ج- إذا كانت السلسلة (10) متباعدة في النقطة z_1 كانت متباعدة في كل قرص من الشكل:

$$|z| > r, \quad |z_1| = r$$

مع العلم أن التقارب المنتظم للسلسلة في المنطقة D يعني التقارب المطلق لها في كل مجموعة مغلقة محتواة في D .

ملاحظة ❸

من النظرية أعلاه نستنتج انه إذا كانت السلسلة (10)متقاربة في النقطة z_1 فإنها متقاربة داخل دائرة مارة بهذه النقطة ، مركزها $z_0 = 0$. سوف ندعو أكبر قرص $|z| < r$ تتقارب السلسلة (10) فيه بقرص التقارب وندعو نصف قطر هذا القرص بنصف قطر التقارب .

ملاحظة ❹

إذا كانت السلسلة (10)متقاربة في كل المستوى العقدي قلنا إن نصف قطر تقاربها هو $r = \infty$وإذا كانت متقاربة فقط في النقطة $z_0 = 0$ قلنا عندئذ ان $r = 0$.

ملاحظة ❺

من الطبيعي ان يمثل مجموع سلسلة القوى تابعاً مستمراً داخل قرص التقارب ذلك لأن حدود هذه السلسلة هي توابع مستمرة إضافة إلى أن التقارب منتظم في هذا القرص .

ملاحظة ❻

أن نصف قطر تقارب السلسلة (10)أو (11)متعلق بالأمثال a_n .ويتبين مدى هذه العلاقة من خلال النظريتين الآتيتين:

نظرية ❷ :(

يعطى نصف قطر كوشي- أيامارد (Cauchy Hadamar تقارب سلسلة القوى (10)بالعلاقة

$$r = \frac{1}{q}, \quad q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (12)$$

واضافة الى ذلك نقبل ان

$$r = 0 \Rightarrow q = \infty, \quad q = 0 \Rightarrow r = \infty$$

نظرية ❸ (دالمبير De.Lambert)

يعطى نصف قطر تقارب سلسلة القوى (10) بالعلاقة

$$r=\frac{1}{q}, \quad q=\lim_{n\to\infty}\sup_{n\geq n_0}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| \tag{13}$$

وإضافة إلى ذلك نقبل أن:

$$r=0\Rightarrow q=\infty, q=0\Rightarrow r=\infty$$

النشر في سلسلة تايلور ⑤ TAYLOR SERIES

يعرف التابع التحليلي في نقطة ما، أحياناً ، على انه التابع الذي يقبل النشر في سلسلة القوى في جوار هذه النقطة. وذلك لأنه (كما سنرى) يوجد تكافؤ بين قابلية التابع للنشر في سلسلة القوى في جوار نقطة ما وتحليليته في هذه النقطة. فمن التقارب المنتظم لسلسلة القوى ضمن قرص تقاربها ونتيجة لكون حدودها توابعاً مستمرة تكون النظرية الآتية صحيحة:

نظرية ❶

كل سلسلة قوى من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

تمثل تابعاً تحليلياً ضمن قرص تقاربها ومشتقها يعطى بالعلاقة :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

سوف نبين العكس! وهو أن التابع التحليلي يقبل النشر في سلسلة القوى (11) في جوار أي نقطة z_0 من منطقة تحليليته:

نظرية ❷ (تايلور $Taylor$):

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D فإنه يقبل النشر في سلسلة تايلور الآتية:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{14}$$

خاصة ❷.

من أجل كل عدد عقدي z لدينا:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

خاصة ❸

من أجل كل عدد عقدي z لدينا:

$$\cos(-z)=\cos z,$$
$$\sin(-z)=-\sin z$$

خاصة ❹

من أجل كل عددين عقديين a,b لدينا:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

خاصة ❺

التابعان $\cos z$ و$\cos z$ دوريان ودور كل منهما أيُ من مضاعفات العدد 2π:

$$\cos(z+2k\pi)=\cos z,$$
$$\sin(z+2k\pi)=-\sin z$$

البرهان:لدينا من التعريف:

$$\cos(z+2k\pi)=\frac{1}{2}\left(e^{i(z+2k\pi)}+e^{-i(z+2k\pi)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=\cos z$$

$$\sin(z+2k\pi)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2k\pi)}-e^{-i(z+2k\pi)}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=\sin z$$

خاصة ❻

$$\cos z=0 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$$
$$\sin z=0 \Leftrightarrow z=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$$

نستنج أيضا ، من هذه المبرهنة أن كلاً من $\cos z$ و$\cos z$ لانهائي التباين بشكل عام ولكنهما متباينان على كل شريط يوازي المحور التخيلي ولا يزيد عرضه على 2π.

تعريف ❷.

نعرف التابعين $\tan z$ و $\cot z$ بشكل مشابه للحالة الحقيقية :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad (18)$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (18')$$

خاصة ❼

يمكن التعبير عن $\tan z$ و $\cot z$ من خلال علاقتي اولر كما يلي :

$$\tan z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad (19)$$

$$\cot z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad (19')$$

خاصة ❽

كل من التابعين $\tan z$ و $\cot z$ تحليلي في المستوي C باستثناء النقاط التي تعدم مقامه ومشتقا هذين التابعين هما

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

$$(\cot z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} = -\csc^2 z$$

حيث يرمز عادة:

$$\frac{1}{\cos z} = \sec z\,, \quad \frac{1}{\sin z} = \cos z$$

⑥ التوابع المثلثية القطعية
HYPERBOLIC FUNCTIONS

من المعروف أن التابعين القطعيين الحقيقيين $\sinh x$ و $\cosh x$ يعرفان على الساحة الحقيقية بواسطة العلاقتين:

البرهان : التابع $w = log\, z$ هو تابع عكسي للتابع $z = e^w$ لذلك وبحسب مشتق التابع العكسي يكون :

$$(log\, z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

وبالتالي فإن مشتقه موجود في كل نقطة من مجموعة تعريفه ولذلك فهو تحليلي فيها .

تعريف ❶

ليكن u عدداً عقدياً كيفياً و E مجموعة مترابطة حيث يوجد فرع اللوغاريتم الوحيد التعيين.
نرمز بالرمز z^u لكل تابع معرف ومستمر في E بوساطة العلاقة

$$z^u = e^{u\, log\, z} \qquad (15)$$

وندعوه بفرع القوة الوحيد التعيين للمتحول z ذي الاسس u ، مع العلم أن $log\, z$ يعني فرعاً كيفياً للتابع $log\, z$

ملاحظة ❶

تدعى القوة $z^{1/n}$ بالفرع الوحيد التعيين للجذر النوني المتحول z ويرمز لها بشكل أخر هو $\sqrt[n]{z}$. عندئذ :

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} log\, z}$$

نتيجة ❺

للتابع $\sqrt[n]{z}$ بالضبط n من الفرع الوحيد التعيين وكل فرعين منهما يختلفان بمقدار ثابت هو

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0,1,2,...$$

⑤ TRIGONOMETRICIC FUNCTIONS التوابع المثلثية

من تعريف أولر للتابع الأسي نستنتج أن:

$$t \in \Re \quad e^{it} = cos\, t + i\, sin\, t$$
$$e^{-it} = cos\, t - i\, sin\, t$$

بجمع طرفي هاتين العلاقتين وطرحهما مرة أخرى نحصل على العلاقتين ، الآتيتين ، المعروفتين بعلاقتي أولر:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad (16)$$

$$, \quad t \in \Re \ , \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \qquad (16')$$

ومن هاتين العلاقتين نستنتج التعريف الآتي للتابعين $\cos z$ و $\cos z$ من أجل القيم العقدية للمتحول z :

تعريف ❶.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad (17)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (17')$$

من هذا التعريف واعتماداً على خواص التابع الاسي نستنتج الخواص الأساسية للتوابع المثلثية فهاتان العلاقتان – كما سنرى- تشكلان أسلوباً جديداً لحساب العلاقات الأساسية بين التوابع المثلثية .

نتيجة ❶

من اجل القيم الحقيقية لـ z ينطبق التابع التابعان $\sin z$ و $\cos z$ على التابعين الحقيقيين المعروفين: $\sin x$ و $\cos x$

خاصة ❶

التابعان $\sin z$ و $\cos z$ تحليليان في المستوي المفتوح .ومشتقاهما في كل نقطة z يعطيان بالعلاقة:

$$(\cos z)' = -\sin z,$$
$$(\sin z)' = \cos z$$

البرهان:لدينا من التعريف:

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

نتيجة ❹
للقوة (9) عدد غير منته من القيم ، تختلف عن بعضها بالأعداد :

$$e^{b2k\pi i}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

نتيجة ❺
عندما يكون b عدداً صحيحاً فإن القوة (9) قيمة واحدة (لأنه عندئذ $e^{2bk\pi i} = 1$) .

نتيجة ❻
إذا كان b عدداً عادياً من الشكل $\frac{m}{n}$ فإن القوة (9) تحوي على n من القيم المختلفة المناسبة للأعداد : $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

نتيجة ❼
إذا كان b عدداً أصم فإن لهذه القوى عدداً غير منته من القيم المختلفة .

مثال ❶ : إذا كان $b = 1/n$ ، حيث n عدد طبيعي ، فإن

$$\left(e^{bLoga}\right)^n = e^{Loga} = a \quad \Rightarrow \sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$$

④ التابع اللوغاريتمي وتابع القوة
LOGARITHMIC FUNCTION , POWER FUNCTION

تعريف ❶
لتكن E مجموعة مترابطة على المستوي (منطقة مثلاً) لا تحوي النقطة $z = 0$. ندعو التابع المستمر $l(z)$ الذي يحقق الشرط

$$e^{l(z)} = z \quad \forall z \in E \qquad (10)$$

بفرع اللوغاريتم الوحيد التعيين للمتحول z ونرمز له بالرمز $\log z$. لدينا إذاً :

$$e^{\log z} = z \quad \forall z \in E$$

وكذلك

$$(11) \qquad \log z = \log|z| + i \arg z \,, \; |z| > 0$$

نتيجة ❶.

عندما يكون $-\pi < \arg z \leq \pi$ فإننا ندعو $\log z$ باللوغاريتم الرئيسي ونرمز له بالرمز:

$$(12) \qquad Log z = \log|z| + i Arg z \,, \; |z| > 0$$

(لاحظ أن $\log|z| = Log|z|$).

نتيجة ❷.

إذا وجد فرع اللوغاريتم وحيد التعيين في مجموعة مترابطة E فانه يوجد عدد غير منته من فروع اللوغاريتم هذه وكل اثنين منهما يختلفان بمضاعفات العدد $2\pi.i$ على الأكثر ويكون:

$$(13) \qquad \log z = Log z + 2k\pi i \,, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

نتيجة ❸

فرع اللوغاريتم $\log z$ الوحيد التعيين على E هو تابع عكسي للتابع e^w في المجموعة E' المؤلفة من جميع القيم

$$w = \log z, \quad z \in E$$

البرهان : $\log z$ هو تابع متباين على المجموعة E لأنه من أجل أي نقطتين $z_1, z_2 \in E$ تحققان الشرط

$$\log z_1 = w = \log z_2$$

يكون

$$z_1 = e^w = z_2$$

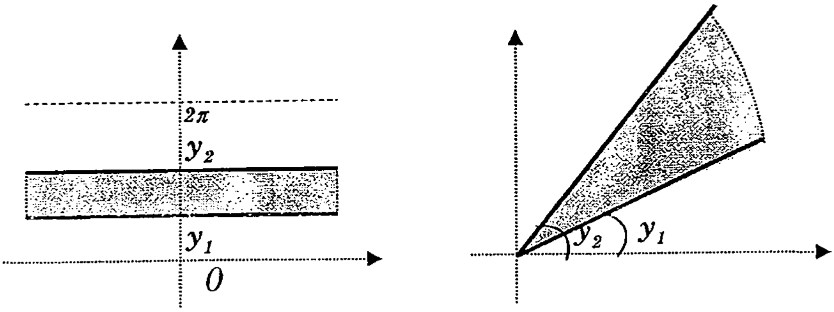
وبالتالي $z_1 = z_2$ مما يدل على أن $\log z$ متباين على E. لذلك:

$$z = e^w \Leftrightarrow w = \log z, \quad z \in E$$

نتيجة ❹.

التابع $\log z$ تحليلي في مجموعة وجوده ويعطى مشتقه بالعلاقة:

$$(14) \qquad (\log z)' = \frac{1}{z}$$



شكل 1

③ LOGARITHMIC AND POWER اللوغاريتم والقوة

تعريف ❶.

ليكن a ، عدداً كيفياً ، مختلفاً عن الصفر . كل عدد عقدي z يحقق المعادلة

$$e^z = a \tag{4}$$

يدعى بلوغارتيم العدد a ونرمز له بالرمز:

$$z = \log a \tag{5}$$

خاصة ❶

لا يوجد لوغاريتم للعدد 0 لان العادلة $e^z = 0$ لا تملك حلولاً .

خاصة ❷

تحتوي المعادلة $e^z = a$ على عدد غير منتهٍ من الحلول تختلف عن بعضها بمضاعفات العدد 2π,

البرهان: **ينتج ذلك لأن المعادلة**

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = |a| e^{i \arg a}$$

تكون محققة عندما

$$e^x = |a|, y = arg\, a = Arg a + 2k\pi\ , \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

ونظراً لأن سعة العدد a – كما نعلم – تتالف من عدد غير منته من القيم تختلف عن بعضها بمضاعفات العدد 2π , وبما أن:

$$e^x = |a| \Leftrightarrow x = log|a|$$

فإن :

$$z = log|a| + i\, arg\, a$$

$$log\, a = log|a| + i\, arg\, a$$

وبالتالي:

$$log\, a = log|a| + iArg a + 2k\pi i\ , \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,... \tag{6}$$

نتيجة ❶.

لكل عدد $a\,(a \neq 0)$ لانهاية من اللوغاريتمات المعبر عنها بالمعادلة (6). وكل لوغاريتمين للعدد نفسه يختلفان بمضاعفات العدد $2\pi.i$ على الأكثر .

تعريف ❷.

من بين جميع الاعداد (6) يوجد عدد وحيد سعته هي السعة الرئيسية للعدد a. ندعو هذا العدد الوحيد باللوغاريتم الرئيسي ونرمز له بالرمز $Loga$. أي أن

$$Loga = log|a| + iArga, -\pi < arg\, a \leq \pi \tag{7}$$

نتيجة ❷.

لكل عدد a مختلف عن الصفر ، يوجد لوغارتيم رئيسي واحد . وكل لوغاريتم آخر لهذا العدد ، يأخذ الشكل

$$log\, a = Loga + 2k\pi i, k = o,\pm 1,\pm 2,... \tag{8}$$

تعريف ❸

ليكن a و b عددين عقديين كيفيين ولكن $a \neq 0$. نعرف القوة ذات القاعـدة a والأس b التي نرمز لها بالرمز a^b من خلال العلاقة:

$$a^b = e^{b\, log\, a} = e^{b(Loga + 2k\pi i)}, k = 0,\pm 1,\pm 2,... \tag{9}$$

و ندعو العدد e^{bLoga} بالقيمة الرئيسية للقوة a^b .

تمرين ③.انشر في سلسلة ماك لوران(أي في جوار الصفر) التابعين:

$$a)\ f(z)=e^{z}\ ,\quad b)\ f(z)=z^{2}e^{3z}$$

الحل. $a)$ إن التابع e^{z} تحليلي في كل المستوي(تابع كامل) فهو يقبل النشر في جوار أي نقطة من المستوي . وفي جوار الصفر يكون لدينا:

$$f'(z)=e^{z}\ ,\ f''(z)=e^{z}\ ,...,\ f^{(n)}(z)=e^{z}$$
$$f'(0)=1\ ,\quad f''(0)=1\ ,...,\quad f^{(n)}(0)=1$$

ويكون بحسب (20):

$$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{1!}+...+\frac{z^{n}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

$b)$ إن التابع $f(z)=z^{2}e^{3z}$ تحليلي أيضاً في كل المستوي وهو يقبل النشر في جوار أي نقطة من المستوي . وأفضل طريقة لإيجاد منشوره في جوار الصفر هو أن نستفيد من النشر السابق للتابع الأسي e^{z} بأن نعوض z بـِ $3z$ ونضرب الناتج بالمقدار z^{2} فيكون:

$$z^{2}e^{3z}=z^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3z)^{n}z^{2}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{n!}z^{n+2}$$

وأخيراً بتبديل n بـِ $n-2$ يكون:

$$z^{2}e^{3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!}z^{n}$$

تمرين ④. انشر في سلسلة ماك لوران التابع $f(z)=\cos z$ ثم استفد من ذلك لإيجاد منشور ماك لوران للتابع $f(z)=\cosh z$ في جوار الصفر وفي جوار النقطة $z_{0}=-2\pi i$.

الحل. من أجل التابع $f(z)=\cos z$ لدينا:

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^{n}\ ,\ f^{(2n+1)}(0)=0\ ,\quad n=0,1,2,...$$

ويكون منشوره في سلسلة ماك لوران بحسب (20):

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{n}}{(2n)!}\ ,\quad |z|<\infty$$

لإيجاد منشور التابع $f(z) = \cosh z$ نستفيد من المنشور السابق بأن نضع $\cosh z = \cos(iz)$ فيكون:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

ولإيجاد منشور التابع $f(z) = \cosh z$ وفي جوار النقطة $z_0 = -2\pi i$ نبدل z بـ $3z + 2\pi i$ في كل من الطرفين في المنشور السابق ، بعد الأخذ بالحسبان أن
$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$

فيكون:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

==

تمرين ⑤. إنشر التابع

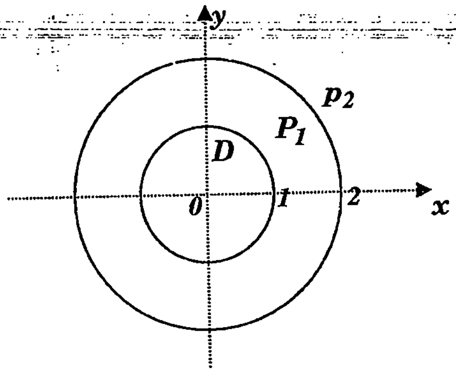
$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

في سلسلة لوران في الجوارات الحلقية الآتية (شكل3):

$a)\ D : |z| < 1,$

$b)\ P_1 : 1 < |z| < 2,$

$c)\ P_2 : 2 < |z| < \infty,$



شكل3

الحل_ بالإمكان استخدام منشور تايلور في حالة السلسلة الهندسية مباشرة ولكن بعد توزيع التابع $f(z)$ إلى كسرين بسيطين لهما الشكل:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(2-z)}=-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

حيث نلاحظ أن التابع تحليلي في كل مكان باستثناء النقطتين $z=1, z=2$ وبالتالي تحليلي في المناطق D , P_1 , P_2.

$a)$ لكي نستفيد من منشور السلسلة الهندسية:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , \ |z|<1$$

نضع التابع $f(z)$ بالشكل التالي:

$$f(z)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(z/2)}\right]$$

فإذا كان $|z|<1$ كان أيضاً $|z/2|<1$ ولذلك:

$$\frac{-1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

وبذلك نحصل في القرص D على النشر الآتي:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}-1\right)z^n \ , |z|<1$$

$b)$ نضع في هذه الحالة:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-(1/z)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(z/2)}\right]$$

فيكون $|1/z|<1$ و $|z/2|<1$ عندما يكون $1<|z|<2$ وبذلك نحصل على منشور لوران في الحلقة P_1 كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \ , \ 1<|z|<2$$

c) لنضع التابع $f(z)$ بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-(1/z)}\right]+\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-(2/z)}\right]$$

فنلاحظ أن $|1/z|<1$ و $|2/z|<1$ عندما يكون $2<|z|<\infty$ وبذلك نحصل على منشور لوران في الحلقة P_2 كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}},$$

وبذلك يكون:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}},\ 2<|z|<\infty$$

نلفت النظر هنا إلى أننا حسبنا أمثال سلسلة القوى السابقة دون الاعتماد على العلاقات (27).

تمارين للحل

❶ برهن على تقارب السلاسل الآتية ثم أوجد مجموعها:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{3}\right)^n,\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{(1-i)^n}$$

❷ برهن على تباعد السلسلتين الآتيتين

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i\sqrt{n}}{n+1}\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(1+i)^n}$$

❸ برهن على التقارب المطلق للسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos in}$$

④برهن أن التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ يؤدي الى التقارب المطلق للسلسلة

⑤أوجد نصف قطر تقارب كل من السلاسل الآتية:

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n\ , \quad a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n\ ,$$

الأجوبة 11 – أنصاف أقطار التقارب هي:

$$c)\ r=1\ ,\ b)\ r=4\ ,\ a)\ r=\frac{1}{e}$$

⑥برهن على صحة النشر الآتي:

$$log(1+z)=z-\frac{z^2}{n}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots, \quad |z|<1$$

⑦برهن على صحة النشر الآتي:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad |z-i|<\sqrt{2}$$

توجيه: استفد من التحويل (17).

⑧برهن على صحة النشر الآتي:

$$\frac{z}{z^4+9}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+2}}, \quad |z|<\sqrt{3}$$

⑨.انشر في سلسلة ماك لوران التابع $f(z)=sin\,z$ ثم استفد من ذلك لإيجاد منشور ماك لوران للتابع $f(z)=sinh\,z$ في جوار الصفر وفي جوار النقطة $z_0=2\pi i$.

⑩انشر في سلسلة ماك لوران التابع $f(z)=sin\,z$ ثم استفد من ذلك لإيجاد منشور ماك لوران للتابع $f(z)=sinh\,z$ في جوار الصفر وفي جوار النقطة $z_0=2\pi i$.

❶❶ إنشر التابع

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2}$$

في سلسلة لوران في الجوارات الحلقية:

$a)\ D:|z|<1,$

$b)\ P_1:1<|z|<2,$

$c)\ P_2:2<|z|<\infty,$

$d)\ P_3:0<|z+1|<1$

الجواب:

$$a)\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n-\frac{1}{2^{n+2}}\right)z^n$$

$$b)\quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}z^n$$

$$c)\quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}+2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}$$

$$d)\quad f(z)=\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n\ .$$

توجيه: ضع التابع المعطى بالشكل:

$$\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}$$

الفصل التاسع

النقاط الشاذة والرواسب

① ZEROS OF FUNCTION أصفار التابع التحليلي

تعريف ❶

ندعو النقطة z_0 بصفر التابع $f(z)$ إذا كان $f(z_0)=0$. يقال في هذه الحالة أيضاً إن z_0 هي جذر للتابع $f(z)$.

إذا كانت z_0 صفراً للتابع التحليلي $f(z)$ فان المنشور:

$$(1) \qquad f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+...+a_n(z-z_0)^n+...$$

يقتصر على الحد الثابت a_0 الذي يساوي بدوره إلى الصفر ، وذلك لأن

$$f^{(n)}(z_0)=0, \quad n=1,2,.....,$$

أما إذا كان

$$a_0=a_1=.....=a_{k-1}=0, a_k\neq 0$$

فان السلسلة (1)تأخذ الشكل :

$$(2) \qquad f(z)=a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+...$$

وعندئذ نعد النقطة z_0 صفراً مضاعفاً k مرة . ومن البدهي أن يكون في هذه النقطة:

$$f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0, f^{(k)}(z_0)\neq 0.,$$

إذا وضعنا الآن السلسلة (2)بالشكل

$$(3) \qquad f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$$

كان التابع

$$\varphi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+......$$

تحليلياً في النقطة z_0 ومختلفا عن الصفر . لذلك ونتيجة للاستمرار فهو يختلف عن الصفر في جوار ما $\left|z-z_0\right|<\delta$ للنقطة z_0 . ينتج من ذلك النظرية الآتية :

نظرية ❶

نقاط صفر التابع التحليلي معزولة . بكلمات أخرى : لا يمكن لمجموعة جذور التابع التحليلي $f(z)$ في المنطقة D أن تحتوي على نقطة تراكم داخل D إلا إذا كان التابع $f(z)$ مطابقاً للصفر .

نتيجة ❶

إذا كان التابعان $f(z)$ و $g(z)$ تحليليين في المنطقة D وكانا متساويين في مجموعة ، تحتوي على نقطة تراكم ، داخل D كان هذان التابعان متساويين في كل D .

البرهان . إن الفرق $f(z)-g(z)$ تابع تحليلي مساو للصفر على مجموعة من النقاط تحتوي على نقطة تراكم ، فهو إذاً – بحسب النظرية 1 _ مطابق للصفر في D :

$$f(z)-g(z)=0$$

وبالتالي $f(z)$ و $g(z)$ متساويان في كل المنطقة D .

مثال ❶ أوجد الأصفار ومرتبتها للتابع الآتي:

$$f(z)=z^5+9z^3$$

الحل.بما أن:

$$f(z)=z^5+9z^3=z^3(z-3i)(z+3i)$$

فإن الأصفار هي: $z=0, z=3i, z=-3i$ ولمعرفة مرتبة هذه الأصفار نلاحظ أن:

$$f'(z)=5z^4+27z^2$$

$$f'(3i)=5(3i)^4+27(3i)^2=5\cdot 81-27\cdot 9\neq 0$$

$$f'(-3i)=5(-3i)^4+27(-3i)^2=5\cdot 81-27\cdot 9\neq 0$$

$$f'(0)=0$$

$$f''(z)=20z^3+54z\Rightarrow f''(0)=0$$

$$f'''(z)=60z^2+54\Rightarrow f'''(0)\neq 0$$

$z_0=0$ صفر من المرتبة الثالثة و $z=\pm 3i$ صفران بسيطان.

ملاحظة ❶

يمكن أن توجد نقطة تراكم للأصفار على محيط المنطقة D ، دون أن يكون التابع $f(z)$ مطابقا للصفر في D . فمثلاً للتابع

$$f(z)=sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

عدد غير منته من الأصفار في النقاط

$$z=\frac{1}{n\pi}, \quad n=1,2,..$$

ولهذه الأصفار نقطة تراكم واقعة على محيط منطقة تعريف التابع . هذه النقطة هي $z=0$.

② IRREGULARITY POINTS النقاط الشاذة

تعريف ❶

ليكن التابع $f(z)$ تحليلياً في الجوار الحلقي $P_0 : 0<|z-z_0|<R$ وليكن منشوره في سلسلة لوران في هذا الجوار:

$$(4) \qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

تدعى السلسلة (4) بسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الجوار الحلقي P_0 وتدعى السلسلتان

$$(5) \qquad \psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

$$(6) \qquad \Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

بالقسم الرئيسي والقسم النظامي للتابع $f(z)$ على الترتيب.

تعريف ❷

نقول عن النقطة z_0 إنها نقطة نظامية للتابع $f(z)$ إذا كان التابع هذا تحليلياً في جوار هذه النقطة . وإذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في الجوار الحلقي فقط للنقطة z_0 قيل عن هذه النقطة إنها شاذة معزولة (أو –اختصاراً – نقطة شاذة) .

إذا كانت z_0 نقطة شاذة للتابع $f(z)$ كان التابع هذا قابلاً للنشر في سلسلة لوران (4) وكان بالامكان تصنيف النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ بحسب الشكل الذي يأخذه القسم الرئيسي في منشور لوران من خلال التعاريف الآتية:

تعريف ③

نقول عن النقطة z_0 إنها:

أ) نقطة شاذة بسيطة للتابع $f(z)$ إذا كان قسمه الرئيسي $\psi(z)$ في منشور لوران معدوماً ، أي إذا كان

$$a_{-n} = 0 \,, \; n = 1,2,...$$

ب) قطب من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا كان للقسم الرئيسي $\psi(z)$ في منشور لوران الشكل:

$$(7) \qquad \psi(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} \,, \; a_{-m} \neq 0$$

وإذا كانت $m = 1$ دعونا z_0 بالقطب البسيط .

ج) نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$ إذا كان القسم الرئيسي في منشور لوران يتكون من عدد غير منتهي الحدود أي له الشكل (5) .

سوف نعرض فيما يلي بعض النظريات التي تصف سلوكية التابع التحليلي في جوار نقاطه الشاذة .

③ CLASSIFICATION — تصنيف آخر للنقاط الشاذة

لنفرض أن z_0 نقطة شاذة بسيطة للتابع $f(z)$. عندئذ سيكون قسمه الرئيسي $\psi(z)$ في منشور لوران معدوماً ، وسوف يقبل النشر في سلسلة تايلور الآتية:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

وهذا يعني أن هذا التابع تحليلي في كل القرص $|z-z_0| < R$ وبالتالي وجود النهاية

$$(8) \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

الأمر الذي يعني أن z_0 تغدو نقطة نظامية .

نتيجة ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في الجوار الحلقي للنقطة z_0 ومحدوداً في جوار صغير لها كانت z_0 نقطة شاذة بسيطة .

إذا كانت z_0 قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ كان التابع هذا قابلاً النشر في الجوار الحلقي لهذه النقطة في سلسلة لوران الآتية:

$$(9)\quad f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

حيث $a_{-m}\neq 0$. بضرب طرفي المساواة بالقوة $(z-z_0)^m$ نجد أن

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+a_0(z-z_0)^m+\ldots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{-m+k}(z-z_0)^k$$

ويكون التابع

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{-m+k}(z-z_0)^k$$

تحليلياً في القرص $|z-z_0|<R$. وإضافة إلى ذلك

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=a_{-m}$$

فالتابع $f(z)$ إذاً يحقق الخاصة:

$$(10)\qquad \lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}=\infty$$

وبذلك تكون النتيجة الآتية صحيحة:

نتيجة ❷

نهاية التابع $f(z)$ في القطب z_0 تساوي إلى اللانهاية .

ملاحظة ❶

بمقارنة العلاقتين (10) و (3) نلاحظ أن التابع $\varphi(z)$ يمثل تابعاً تحليلياً في جوار النقطة z_0 ومختلفاً عن الصفر فيها ولذلك سيكون للتابع المقلوب $1/\varphi(z)$ نفس الصفة في هذا الجوار. نستنتج من ذلك أن للتابع :

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}$$

صفراً مضاعفاً من المرتبة m في النقطة z_0 التي تمثل قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$.

نتيجة 3

إذا كانت النقطة z_0 قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ كانت النقطة هذه جذراً مضاعفاً من المرتبة m للتابع $1/f(z)$. وبالعكس! إذا كانت النقطة z_0 صفراً من المرتبة m للتابع $\varphi(z)$ كانت النقطة هذه قطباً من المرتبة m للتابع $1/\varphi(z)$.

نتيجة 4

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في الجوار الحلقي للنقطة z_0 وكان

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

كانت z_0 قطباً للتابع $f(z)$.

البرهان. لو كانت z_0 نقطة شاذة بسيطة لكانت النهاية السابقة محدودة ولو كانت نقطة شاذة أساسية لما وجدت النهاية السابقة بحسب النظرية 1.

مما تقدم نحصل على تصنيف آخر للنقاط الشاذة مكافئ للتصنيف السابق (ومرادف للتعريف 3) نعرضه من خلال النظريات الآتية:

نظرية 1

تكون النقطة z_0 شاذة بسيطة(نقطة نظامية) إذا كان للتابع $f(z)$ نهاية منتهية في هذه النقطة.

نظرية 2

تكون النقطة z_0 قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا كانت هذه النقطة صفراً من المرتبة m للتابع $\varphi(z) = 1/f(z)$.

نظرية 3

تكون النقطة z_0 شاذة أساسية إذا كانت النهاية $\lim_{z \to z_0} f(z)$ غير موجودة

سلوكية التابع في جوار اللانهاية ④

ليكن التابع $f(z)$ تحليلياً في جوار اللانهاية إي في المنطقة

$$(11) \qquad r < |z| < \infty \ , \quad r > 0 \ .$$

عندئذ سيكون التابع $f(1/z)$ تحليليا في الجوار الحلقي للصفر اي في الجوار

$$(11') \qquad 0 < |z| < 1/r \ .$$

وعلى هذا الأساس سوف نصنف النقاط الشاذة في اللانهاية من خلال التعاريف الآتية:

تعريف ❶

نقول إن للتابع $f(z)$ نقطة شاذة بسيطة(نقطة نظامية) في اللانهاية إذا كان للتابع $f(1/z)$ نقطة شاذة بسيطة في النقطة 0 .

تعريف ❷

نقول أن للتابع $f(z)$ قطباً من المرتبة m في اللانهاية إذا كان للتابع $f(1/z)$ قطب من المرتبة m في النقطة 0 .

تعريف ❸

نقول إن للتابع $f(z)$ نقطة شاذة أساسية في اللانهاية إذا كان للتابع $f(1/z)$ نقطة شاذة أساسية في النقطة 0 .

استناداً إلى الصيغة (4) يكون منشور التابع التحليلي في جوار اللانهاية من الشكل:

$$(12) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

مع العلم أن السلسلة الأولى متقاربة من أجل $|z| < \infty$ والثانية متقاربة عندما $|z| \geq r$. و

بالاتفاق مع التعاريف السابقة تكون اللانهاية:

آ) نقطة شاذة بسيطة للتابع $f(z)$ إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (التي تمثل القسم الرئيسي في منشور لوران (21) في هذه الحالة) معدومة . ويحدث ذلك عندما يكون

$$a_{-n} = 0 \ , \ n = 1,2,...$$

ب) قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا كان القسم الرئيسي في منشور لوران كثير حدود من الشكل

$$\psi(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z$$

ج) نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$ إذا كان القسم الرئيسي في منشور لوران (12) يتكون من عدد غير منته الحدود .

ملاحظة 1

مما تقدم نستنتج أن التابع التحليلي في جوار ∞ يقبل النشر في سلسلة واحدة من الشكل

$$f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\dots \qquad (13)$$

متقاربة في هذا الجوار, وفي هذه الحالة يكون للتابع نهاية في اللانهاية هي:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=a_0$$

تعرف هذه النهاية بقيمة التابع في اللانهاية ويكتب عندئذ $f(\infty)=a_0$.

مثال 1. حدد نوع النقطة الشاذة للتابع

$$f(z)=\frac{1-z-e^{-z}}{z^2}$$

الحل. النقطة الشاذة للتابع هي $z=0$. لإيجاد نوع هذه النقطة ننشر أولاً التابع الاسي في جوار هذه النقطة في سلسلة تايلور الآتية:

$$e^{-z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\dots$$

ثم نستنتج منشور التابع $f(z)$ في سلسلة لوران في جوار الصفر كما يلي:

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1-z-e^{-z}}{z^2}\\ &=\frac{1}{z^2}\left[1-z-\left(1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\right]\\ &=\frac{1}{z^2}\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\dots\right)=-\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}-\frac{z^2}{4!}\dots \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن القسم الرئيسي في منشور لوران غير موجود والنقطة $z=0$ تصبح نقطة نظامية للتابع المعطى

تعريف ❶

ليكن التابع $f(z)$ تحليلياً في الجوار الحلقي للنقطة z_0 وليكن منشوره في سلسلة لوران هو:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad , \quad 0<|z-z_0|<r. \tag{14}$$

يدعى المثل a_{-1} في سلسلة لوران هذه براسب التابع $f(z)$ في النقطة z_0 ويرمز لـه بالرمز

$$Res\, f(z_0)=a_{-1}.$$

إذا كانت z_0 نقطة شاذة بسيطة (نقطة نظامية) للتابع $f(z)$ كان القسم الرئيسي في سلسلة لوران معدوماً وراسب التابع في هذه الحالة يكون معدوماً أيضـاً لأن $a_{-1}=0$. أمـا إذا كانت النقطة z_0 نقطة غير نظامية للتابع – كأن تكون قطباً أو نقطة شاذة أساسية – فـإن تكامل الطرفين في (14) على طول إي دائرة من الشكل: $C_\rho : |z-z_0|<\rho$ حيـث ρ صغير بما فيه الكفاية ، يؤدي إلى المساواة:

$$\int_{C_\rho} f(z)dz=\int_{C_\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n dz$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\int_{C_\rho}(z-z_0)^n dz=2\pi i a_{-1}$$

لأن

$$\int_{C_\rho}(z-z_0)^n dz=\begin{cases}0, & n\neq -1\\ 2\pi i a_{-1}, & n=-1\end{cases}$$

نتيجة ❶

يعطى راسب التابع في النقطة z_0 بالتكامل

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)dz. \tag{15}$$

حيث C_ρ دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها ρ.

ملاحظة ❶

تفيد العلاقة (15)، أحياناً ، في حساب بعض التكاملات باستخدام راسب التابع.

⑥ RESIDUUM AT POLE — الراسب في القطب

تعريف ❶

إذا كانت النقطة z_0 قطباً من المرتبة الأولى للتابع دعوناها بالقطب البسيط .

نظرية ❶

إذا كانت z_0 قطباً بسيطاً للتابع $f(z)$ كان:

$$Res\, f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{16}$$

البرهان . إذا كانت z_0 قطباً بسيطاً للتابع $f(z)$ كان منشور هذا التابع في سلسلة لوران من الشكل :

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$$

ومنه:

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\dots$$

ويكون:

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

وهو المطلوب.

نظرية ❷

إذا كانت z_0 قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ فإن راسبه في هذه النقطة يعطى بالعلاقة:

$$Res\, f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right] \tag{17}$$

البرهان. إذا كانت z_0 قطباً من المرتبة m للتابع $f(z)$ كان منشور لوران لهذا التابع :

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$$

بضرب الطرفين بالمقدار $(z-z_0)^m$ نجد أن:

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+\dots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+a_0(z-z_0)^m+\dots$$

وهذه الصيغة تعبر عن منشور تايلور للتابع $(z-z_0)^m f(z)$ في جوار النقطة z_0 .
بالاشتقاق $m-1$ من المرات نجد أن

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\,a_{-m}+2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m+a_0(z-z_0)+\ldots$$

ومنه:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\,a_{-1}$$

وهذا يعني أن العلاقة المطلوبة صحيحة.

مثال ❶. أوجد راسب التابع الآتي في نقاطه الشاذة:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3-iz^2}$$

الحل. النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي النقاط التي تعدم المقام :

$$z^3-iz^2=z^2(z-i)=0$$

وهذه النقاط هي $z=i$, $z=0$ مع العلم أن $z_1=i$ هو قطب بسيط و $z_0=0$ قطب من المرتبة الثانية. في حالة القطب البسيط لدينا :

$$Res\, f(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z+1}{z^2(z-i)}(z-i)$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{z+1}{z^2}=\frac{i+1}{-1}=-1-i$$

وفي حالة النقطة $z_0=0$ فلدينا

$$Res\, f(z_0)=\lim_{z\to i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]$$

وبالتالي:

$$Res\, f(0)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{z+1}{z^2(z-i)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{(z-i)}=\lim_{z\to 0}\frac{-1-i}{(z-i)^2}=\frac{-1-i}{(-i)^2}=1+i$$

نظرية ❸

إذا كان التابعان $f(z)$ و $g(z)$ تحليليين في جوار النقطة z_0 وكان $g(z_0)=0$ و $g'(z_0)\neq 0$ فإن

$$(18) \qquad Res\frac{f(z_0)}{g(z_0)}=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

البرهان. بما أن $g'(z_0)\neq 0$ فإن z_0 هي جذر من المرتبة الأولى للتابع $g(z)$ وبالتالي قطب بسيط للتابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ لذلك ومن النظرية 1 لدينا

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

الأمر الذي يعني صحة النظرية.

⑦ RESIDUUM AT INFINITY الراسب في اللانهاية

تعريف ❶

ليكن التابع $f(z)$ تحليليا في الجوار الحلقي للنقطة في اللانهاية أي في الجوار $r<|z|<\infty$ وليكن

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\dots$$

منشوره في سلسلة لوران . ندعو المثل $-a_{-1}$ براسب التابع $f(z)$ في اللانهاية ونرمز له بالرمز

$$Res\,f(\infty)=-a_{-1}$$

من هذا التعريف ومن العلاقة (15) نلاحظ أن :

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z)dz \,, \quad C_\rho : |z| = \rho, \ \rho > r$$

فإذا فرضنا أن الدائرة $-C_\rho$ هي الدائرة $C_\rho : |z| = \rho$ نفسها بعد عكس الاتجاه لاحظنا أن

$$-a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_\rho} f(z)dz \,.$$

وهذا يعني أن

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_\rho} f(z)dz \tag{19}$$

مثال 1. أوجد راسب التابع الآتي في اللانهاية:

$$f(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{z^3}$$

الحل. نلاحظ مباشرة أن

$$f(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}$$

وهذا الشكل يمثل منشور التابع $f(z)$ في سلسلة لورانت في الجوار الحلقي للانهاية حيث $a_{-1} = 3$. لذلك

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1} = -3$$

ملاحظة 1

نلاحظ في المثال السابق أن التابع $f(z)$ تحليلي في اللانهاية لأن

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1 + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{z} + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{z^2} + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^3} = 1$$

وبالرغم من ذلك فإن راسبه في هذه النقطة غير معدوم على عكس الحالة التي تكون فيها النقطة الشاذة منتهية .

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

تمرين ① .أوجد أصفار التابع الآتي ومرتبة كل منها:

$$f(z)=1+\cos z$$

الحل.بما أن التابع ينعدم في النقاط التي تحقق المعادلة $\cos z=-1$ فإن مجموعة هذه النقاط هي

$$z_n=(2n+1)\pi\,,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

وهي أصفار التابع في الوقت نفسه.لإيجاد المرتبة نلاحظ أن

$$f'[(2n+1)\pi]=-\sin[(2n+1)\pi]=0$$
$$f''[(2n+1)\pi]=-\cos[(2n+1)\pi]=1\neq 0$$

وهذا يعني أن جميع النقاط $z_n=(2n+1)\pi$ هي أقطاب من المرتبة الثانية .

تمرين ② . حدد نوع النقطة الشاذة $z=0$ للتابع :

$$f(z)=\frac{1}{2+z^2-2\cosh z}$$

الحل, نلاحظ أن النقطة $z=0$ تعدم المقام فهي إذاً قطب من مرتبة ما للتابع المعطى. لإيجاد مرتبة هذا القطب في النقطة نأخذ مقلوب التابع

$$\varphi(z)=1/f(z)=2+z^2-2\cosh z$$

فتكون النقطة $z=0$ صفراً له لأن

$$\varphi(0)=2+0-2=0$$

لنجد الآن مرتبة هذا الصفر! لدينا على التوالي

$$\varphi'(z) = 2z - 2\sinh z\,, \quad \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(z) = 2 - 2\cosh z\,, \quad \varphi''(0) = 0$$

$$\varphi''''(z) = -2\sinh z\,, \quad \varphi'''(0) = 0$$

$$\varphi^{(IV)}(z) = -2\cosh z\,, \quad \varphi^{(IV)}(0) = -2 \neq 0$$

نستنتج من ذلك أن النقطة $z = 0$ هي صفر من المرتبة 4 للتابع $\varphi(z)$ فهي بالتالي قطب من المرتبة للتابع $f(z)$

تمرين ③ . أوجد مرتبة الصفر للتابع:

$$f(z) = \frac{z^7}{1 + \frac{1}{2}z^2 - \cos z}$$

في النقطة $z_0 = 0$:

الحل. في سبيل تجنب عملية الاشتقاق المعقدة يمكن هنا استخدام منشور تايلور للتابع $\cos z$ ويكون

$$f(z) = \frac{z^7}{1 - \frac{1}{2}z^2 - \cos z}$$

$$= \frac{z^7}{1 - \frac{1}{2}z^2 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)}$$

$$= \frac{z^7}{-\frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \dots}$$

$$= z^3 \frac{1}{-\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \frac{z^2}{8!} + \dots} = z^3 \varphi(z)$$

حيث

$$\varphi(z)=\frac{1}{-\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}-\frac{z^2}{8!}+\dots}$$

هو تابع تحليلي في النقطة $z_0 = 0$ ومختلف عن الصفر فيها: $\varphi(0)=-16\neq 0$. بذلك تكون النقطة $z_0 = 0$ صفراً من المرتبة 3 للتابع المعطى.

تمرين ④ . أوجد راسب التابع الآتي في نقاطه الشاذة:

$$f(z)=\tan z.$$

الحل . بما أن التابعين $\sin z$ و $\cos z$ تحليليان في كل المستوي العقدي فإن التابع $f(z)=\tan z$ تحليلي في المستوي العقدي باستثناء النقاط التي يكون من أجلها $\cos z = 0$ أي في النقاط

$$z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

وهذه النقاط جميعها أقطاب بسيطة لأن

$$(\cos z_k)'=-\sin z_k=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\pm1.$$

لذلك وبحسب النظرية 3 يكون:

$$Res\, f(z_k)=\frac{\sin z_k}{(\cos z_k)'}=\frac{\sin z_k}{-\sin z_k}=\pm1$$

تمرين ⑤ . أوجد راسب التابع الآتي في نقاطه الشاذة:

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

الحل. النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي النقاط التي تعدم المقام :

$$z^3-\frac{\pi}{4}z^2=z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$$

وهي $z=0$ و $z=\pi/4$. ففي النقطة $z=0$ لدينا

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}$$

ومنه نستنتج أن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة بسيطة وبالتـــالي $Res\, f(0)=0$ وفـــي النقطة $z=\pi/4$ لدينا

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=\infty$$

فهي قطب للتابع (لاحظ أنه قطب من المرتبة الأولى) . ولذلك:

$$Res\, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}$$

تمرين ⑥ . أوجد راسب التابع الآتي في نقاطه الشاذة:

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

الحل . النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي $z=2$ و $z=-1$. والنقطة $z=2$ هي قطـــب بسيط للتابع لذلك:

$$Res\, f(2)=\lim_{z\to 2}\frac{e^z(z-2)}{(z+1)^3(z-2)}$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^3}=-\frac{e^2}{27}$$

أما النقطة $z=-1$ في هي قطب من المرتبة الثالثة ، لذلك

$$Res\, f(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)$$
$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{\left(z^2-6z+10\right)e^z}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}$$

تمرين ⑦ . أوجد راسب التابع الآتي في نقاطه الشاذة:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

الحل . نلاحظ أن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي $z = 1$ و $z = 0$. وبما أن النقطة $z = 1$ هي قطب بسيط للتابع فإن :

$$Res\, f(1) = \lim_{z\to 1}\frac{e^{1/z}}{-1} = -e$$

في سبيل إيجاد نوع النقطة الشاذة $z = 0$ نستخدم منشور التابع في سلسلة القوى فيكون:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots$$
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

باستخدام جداء كوشي للسلاسل نجد أن :

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots\right)\left(1 + z + z^2 + \dots\right)$$
$$= \dots + a_{-2}\frac{1}{z^2} + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right)\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

مع العلم أن الأمثال a_{-n} مختلفة عن الصفر من أجل كل n (لأن القسم الرئيسي يتألف من عدد غير منته من الحدود) ولذلك سيكون راسب التابع في النقطة $z = 0$ هو :

$$Res\, f(0) = a_{-1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e - 1$$

تمارين غير محلولة

❶ أوجد مرتبة الصفر $z_0 = 0$ للتوابع الآتية:

$$a)\ f(z) = z^3 \sin\left(z^2\right)$$

$$b)\ f(z) = \frac{z^3}{1 + z - e^z}$$

$$c)\ f(z) = 2(\cosh z - 1) - z^2$$

الجواب:

a) $z_0 = 0$ صفر من المرتبة الخامسة.

b) صفر بسيط.

c) صفر من المرتبة الرابعة.

❷ بين أن النقطة $z = 0$ هي نقطة نظامية للتابع:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

❸ بين أن النقطة $z = 0$ هي قطب من المرتبة 5 للتابع:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}$$

❹ بين أن النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة أساسية للتابع:

$$f(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}$$

❺ أوجد النقاط الشاذة وحدد نوعها للتوابع الآتية:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}$$

$$b)\ f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$$

$$c)\ f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z^2}$$

$$d)\ f(z)=\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$$

$$e)\ f(z)=\frac{z}{\cos z-1}$$

الجواب:

a) $z_k=(4k+1)\pi i/2,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$ أقطاب من المرتبة الثانية.

b) $z_0=-2$ نقطة شاذة أساسية.

c) $z_0=0$ قطب من المرتبة الثانية و $z_k=2k\pi i,\ k=\pm1,\pm2,\dots$ أقطاب بسيطة.

d) $z_0=0$ نقطة شاذة بسيطة و $z_1=-1$ قطب من المرتبة الثانية.

e) $z_0=0$ قطب من المرتبة الثانية و $z_k=2k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\dots$ أقطاب من المرتبة الثانية.

❻ أوجد الراسب في النقطة للتوابع الآتية:

$$a)\ f(z)=\frac{1}{z+z^2},$$

$$b)\ f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$c)\ f(z)=\frac{z-\sin z}{z},$$

$$d)\ f(z)=\frac{\cot z}{z^4},$$

$$e)\ f(z)=\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)},$$

الجواب:

$$a)\,1\ ,\quad b)\,\frac{-1}{2},\quad c)\,0,\quad d)\,\frac{-1}{45}\ ,\quad e)\,\frac{1}{6}$$

الفصل العاشر

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

① C. RESIDUUM THEOREM نظرية الرواسب العقدية

سوف نبرهن على صحة النظرية الآتية المعروفة بنظرية الرواسب الأساسية :

نظرية ❶

ليكن التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D باستثناء النقاط $z_1, z_2, ..., z_k$ الواقعة داخلها وليكن مستمراً على محيطها C . عندئذ:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} Re\,s\,f(z_p) \qquad (1)$$

البرهان . لتكن $C_1, C_2, ..., C_k$ دوائر مراكزها $z_1, z_2, ..., z_k$ وصغيرة بما فيه الكفاية بحيث تكون منفصلة عن بعضها وواقعة داخل المنطقة D (شكل1) . عندئذ بحسب نظرية كوشي التكاملية العامة يكون

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_k} f(z)dz$$

وهذه العلاقة تبقى صحيحة حتى لو كانت المنطقة D متعددة الترابط . وبما أن

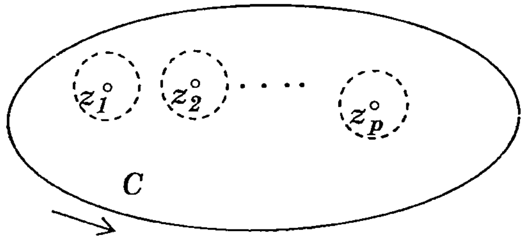
$$\int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i\, Re\,s f(z_1),$$
$$\int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i\, Re\,s f(z_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i\, Re\,s f(z_k)$$

فإن جمع هذه العلاقات يؤدي إلى العلاقة:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \, Re\, sf(z_1) + 2\pi i \, Re\, sf(z_2) + \dots + 2\pi i \, Re\, sf(z_k)$$

$$= 2\pi i \sum_{p=1}^{k} Re\, sf(z_p)$$

وهو المطلوب .



شكل 1

ملاحظة ❶

تعد هذه النظرية واحدة من أهم نظريات التحليل العقدي وهي تستخدم في حساب نماذج كثيرة من التكاملات وخصوصاً الحقيقية منها والتي يصعب حلها بطرق أخرى كما سنرى في الفقرات القادمة.

مثال ❶. احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_C \frac{z+1}{z^3 - iz^2} dz$$

على طول المنحني C في الحالات الآتية:

$a)\ C_1 :\ |z| = 1/4$

$b)\ C_2 :\ |z - i| = 1/2$

$c)\ C_3 :\ |z| = 2$

$b)\ C_4 :\ |z + i| = 1/2$

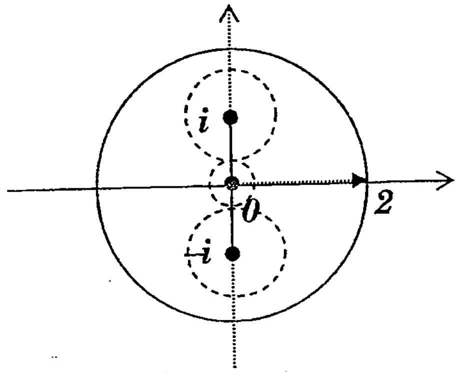
الحل. رأينا في المثال 1 من الفقرة 5 في الفصل السابق أن النقاط الشاذة للتابع:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3 - iz^2}$$

هي $z = i$, $z = 0$ مع العلم أن $z_1 = i$ هو قطب بسيط و $z_0 = 0$ قطب من المرتبة الثانية ورواسب التابع في هذه النقاط هي :

$$Res\, f(0)=1+i$$

$$Res\, f(i)=-1-i$$



شكل 2

فإذا لاحظنا (شكل 2) أن

a) الدائرة $|z|=1/4$: C_1 تحوي القطب $z=0$ فقط في داخلها .

b) الدائرة $|z-i|=1/2$: C_2 تحوي القطب $z=i$ فقط في داخلها.

c) الدائرة $|z|=2$: C_3 تحوي القطبين $z=0\,,\ z=i$ في داخلها

d) الدائرة $|z+i|=1/2$: C_4 لا تحوي أقطاباً في داخلها .

فإنه ينتج لدينا بحسب نظرية الرواسب على التوالي:

$$a)\, I=\int_{|z|=1/4}\frac{z+1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\, Res\, f(0)=2\pi i\cdot(1+i)$$

$$b)\, I=\int_{|z-i|=1/2}\frac{z+1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\, Res\, f(i)=2\pi i\cdot(-1-i)$$

$$c)\ \ I=\int_{|z|=2}\frac{z+1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i[Res\, f(0)+Res\, f(i)]$$

$$=2\pi i\cdot(1+i-1-i)=2\pi i\cdot(0)=0$$

$$b)\, I=\int_{|z+i|=1/2}\frac{z+1}{z^3-iz^2}dz=0$$

من تعريف الراسب في اللانهاية والنظرية الأساسية ❶ تنتج النظرية الآتية:

نظرية ❷

إذا كان للتابع $f(z)$ عدد منته من النقاط الشاذة في المستوي العقدي كان مجموع الرواسب ، بما فيها الراسب في اللانهاية ، مساوياً للصفر . فإذا كانت $z_1, z_2, ...z_k$ هي هذه النقاط الشاذة كان :

$$\sum_{p=1}^{k} Res\, f(z_p) + Res\, f(\infty) = 0 \qquad (2)$$

ملاحظة ❷

تفيد هذه النظرية في حساب بعض أنواع التكاملات .

مثال ❶ . سوف نستخدم مفهوم الراسب في اللانهاية وعلاقته ببقية الرواسب لحساب التكامل الوارد في المثال 1 على طول الدائرة الكبرى $C : |z| = 2$ أي التكامل:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^3 - iz^2} dz$$

الحل: إذا وضعنا

$$\frac{1}{z^3 - iz^2} = \frac{1}{z^3(1-i/z)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{i}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{i}{z^3} + ...\right)$$
$$= \frac{1}{z^3} - \frac{i}{z^4} - \frac{1}{z^5} - ...$$

حصلنا على منشور التابع المعطى في سلسلة لوران:

$$\frac{z+1}{z^3 - iz^2} = \frac{z+1}{z^3(1-i/z)} = (z+1)\left(\frac{1}{z^3} - \frac{i}{z^4} + ...\right)$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1-i}{z^3} + ... = (z+1)\left(\frac{1}{z^3} - \frac{i}{z^4} + ...\right)$$

ونلاحظ عندئذ أن

$$-a_{-1} = Res\, f(\infty) = 0 .$$

ومن جهة ثانية لدينا بحسب العلاقة (2) أن

$$Res\,f(0)+Res\,f(i)+Res\,f(\infty)=0$$

$$Res\,f(0)+Res\,f(i)=-Res\,f(\infty)=0$$

ومنه نحصل على قيمة التكامل المطلوبة وهي

$$c)\,I=\int_{|z|=2}\frac{z+1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i[Res\,f(0)+Res\,f(i)]$$

$$=2\pi i\cdot[-Res\,f(\infty)]=2\pi i\cdot(0)=0$$

② R. RESIDUUM THEOREM نظرية الرواسب الحقيقية

كنتيجة لنظرية الرواسب العامة (نظرية 1) سوف نورد النظرية الآتية التي تستخدم في حساب التكاملات الحقيقية المعتلة وغير المعتلة:

نظرية ❶

ليكن التابع $f(z)$:

آ) تابعاً تحليلياً في نصف المستوي العلوي $im\,z>0$ باستثناء النقاط $z_1,z_2,\dots,z_k$.

ب) حقيقياً على المحور الحقيقي $im\,z=0$.

ج) يحقق للشرط :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0 \qquad (3)$$

على طول نصف الدائرة $C_R:\ |z|=R,\ \ im\,z>0$.

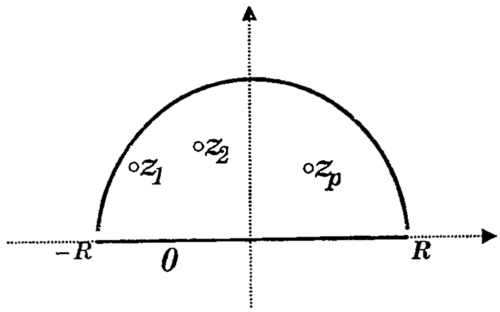
د) للتكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \qquad (4)$$

قيمة منتهية . عندئذ :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{p=0}^{k}Res\,f(z_p) \qquad (5)$$

البرهان . ليكن C منحنياً مغلقاً مؤلفاً من المجال $[-R,R]$ ونصف الدائرة العلوي $C_R : |z| = R$ بحيث يكون نصف قطرها كبيراً لدرجة تنتمى فيها كل النقاط الشاذة إلى داخل المنحني C (شكل 3) . عندئذ واعتماداً على نظرية الرواسب الأساسية ينتج أن



شكل 3

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{p=0}^{k} \operatorname{Res} f(z_p) \tag{6}$$

إذا جعلنا الآن $R \to \infty$ وجدنا أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 ,$$

نتيجة للشرط (3). وبذلك يكون:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{p=0}^{k} \operatorname{Res} f(z_p)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة ❶

تفيد هذه النظرية في حساب التكاملات الحقيقية المعتلة وغير المعتلة.

ملاحظة ❷

يلعب الشرط (3) دوراً هاماً في استخدام نظرية الرواسب . وعندما يصعب التحقق منه مباشرة فهناك شروط أخرى تؤدي إليه ، أو إلى ما يعوض عنه ، وسوف نعرضها من خلال التمهيديات الآتية:

تمهيدية ❶

يكون الشرط (3) محققاً عندما يكون التابع $f(z)$ محدوداً بالعلاقة

$$(7) \qquad |f(z)| \le M/|z|^{\alpha}, \quad M > 0, \ \alpha > 1$$

من أجل كل نقطة z واقعة ضمن القرص $|z| > R$.

تمهيدية ❷

يكون الشرط (3) محققاً إذا كان التابع $f(z)$ مستمراً على القوس γ من الدائرة C_R المعطى بالعلاقة

$$\gamma : z = z_0 + R\, e^{it}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

وكان

$$(8) \qquad \lim_{z\to\infty} (z - z_0) f(z) dz = 0$$

تمهيدية ❸ (تمهيدية جوردان)

ليكن التابع $f(z)$ تحليلياً في نصف المستوي العلوي باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة وليكن

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0 .$$

عندئذ يكون

$$(9) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad a > 0$$

مع العلم أن C_R هي نصف دائرة عليا مركزها 0 ونصف قطرها R .

③ تكامل التوابع الكسرية الحقيقية

THE INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS

نظرية ❶

ليكن :

آ) $P_n(z)$ كثير حدود من المرتبة n

ب) $Q_m(z)$ كثير حدود من المرتبة m

ج) $m \ge n + 2$

د) $f(z)$ تابعاً كسرياً من الشكل $f(z)=P_n(z)/Q_m(z)$

هـ) $f(z)$ حقيقي ومستمر على المحـــور الحقيقي ox

و) $Q_m(z)$ لايساوي الصفر على المحور الحقيقي $(Q_m(x)\neq 0)$ ox

عندئذ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{p=0}^{k} Res\, f(z_p) \tag{10}$$

مع العلم أن $z_1, z_2, ..., z_k$ هي أقطاب التابع الواقعة في نصف المستوي العلوي.

البرهان. ليكن

$$P_n(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0 \ , \ a_n \neq 0$$
$$Q_m(z)=b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_0 \ , \quad b_m \neq 0$$

ولنضع:

$$P_n(z)=z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right)$$
$$Q_n(z)=z^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + ... + \frac{b_0}{z^m}\right)$$

فيكون:

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=\frac{1}{z^{m-n}}\frac{\left(a_n + a_{n-1}/z + ... + a_0/z^n\right)}{\left(b_m + b_{m-1}/z + ... + b_0/z^m\right)}$$

علما أن $a_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$. وفي الحالة هذه:

$$\lim_{z\to\infty}[z\,f(z)] = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{m-n-1}}\lim_{z\to\infty}\frac{\left(a_n + a_{n-1}/z + ... + a_0/z^n\right)}{\left(b_m + b_{m-1}/z + ... + b_0/z^m\right)}$$

$$= \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{m-n-1}}\frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{m-n-1}}$$

ومن أجل $m-n\geq 2$ يكون:

$$\lim_{z\to\infty}[z\,f(z)] = \frac{a_n}{b_m}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{m-n-1}} = 0$$

وهذا يعني أن الشرط (8) في التمهيدية 2 (وبالتالي الشرط (3) في نظرية الرواسب1) يتحقق من أجل $m-n\geq 2$ وتتحقق الصيغة (10) في الوقت نفسه بحسب (5).

مثال ❶. احسب تكامل التابع

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx\ ,$$

الحل . نتأخذ التابع $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+4\right)^2}$. لدينا:

أ) هذا التابع كسري مرتبة البسط $n=2$ ومرتبة المقام هي $m=4$.

ب) درجة المقام تزيد بمقدار 2 عن درجة البسط (أي أن $m\geq n+2$).

ج) يتطابق على المحور الحقيقي مع التابع الحقيقي $f(x)=\dfrac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$.

د) ليس للتابع أقطاب على المحور الحقيقي .

هـ) هذا التابع زوجي ولذلك نستطيع أن نكتب

و) $$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

ز) لهذا التابع قطبان واحد منهما فقط يقع في نصف المستوي العلوي هو $z_0=2\,i$

ط) راسب التابع في هذا القطب هو

$$Res\,f(2i)=\lim_{z\to\alpha i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-2i)(z+2i)}(z-2i)\right]$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+2i)}\right]=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{2\cdot 2iz}{(z+2i)^3}\right]=\frac{1}{8i}$$

وبذلك تكون قيمة التكامل المطلوبة هي

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{1}{2}2\pi i\frac{1}{8i}=\frac{\pi}{8}$$

التكاملات من نوع تحويل فورييه ④
FOURIER INTEGRAL

نظرية ❶

ليكن التابع $f(z)$:

أ- تحليلياً في نصف المستوي العلوي باستثناء النقاط $z_1, z_2, \dots, z_k$.

ب- حقيقياً على المحور الحقيقي ox

ت- يسعى إلى الصفر عندما تسعى z نحو اللانهاية .

ث- كسرياً من الشكل $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$

عندئذ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} Res\left(e^{iaz} f(z_p)\right) \qquad (11)$$

البرهان. سوف نستخدم نظرية الرواسب بأن نختار – كمنحن للتكامل– نصف الدائرة العليا المغلقة

$$C = C_R + [-R, R]$$

التي تحوي داخلها جميع أقطاب التابع $f(z)$ الواقعة في نصف المستوي العلوي فيكون:

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x) dx + \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} Res\left(e^{iaz} f(z_p)\right)$$

وبما أن $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

بحسب تمهيدية جوردان3 .وبالتالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} Res\left[e^{iaz}\ f(z_p)\right]$$

ملاحظة ❶

يعرف التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx \qquad (12)$$

بتحويل فوريير للتابع الكسري $f(z)$.

مثال ❶. احسب تكامل التابع

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{\left(x^2+1\right)^2}dx\ ,$$

الحل . نأخذ التابع المساعد :

$$g(z)=e^{3iz}f(z),\ f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$$

فنلاحظ أن :

أ) عندما تكون $z=x$ حقيقية يكون التابع $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ مستمراً وحقيقيا أيضا

ب)عندما تسعى z نحو اللانهاية يسعى التابع $f(z)$ نحو الصفر وكذلك

$$\lim_{z\to\infty}\int_{\Gamma}g(z)dz=\lim_{z\to\infty}\int_{\Gamma}e^{3iz}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}dz=0$$

ج) أقطاب التابع $f(z)$ هي حلول المعادلة $x^2+1=0$ ولهذه المعادلة حلان يقع واحد منهما فقط في نصف المستوي العلوي هو $z_0=i$ وهو قطب من المرتبة الثانية للتابع $f(z)$.

د) راسب التابع $g(z)$ في هذا القطب هو:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} g(z_0)&=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(e^{i3z}\frac{(z-i)^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right)\\&=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}\right)\\&=\lim_{z\to i}\left(\frac{3ie^{i3z}(z+i)-2e^{i3z}}{(z+i)^3}\right)=\frac{e^{-3}}{i}\end{aligned}$$

في هذه الحالة :

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cos 3x+i\sin 3x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{\left(x^2+1\right)^2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$= 2\pi i \, Res \, g(z_0) = \frac{2\pi i}{i} e^{-3} = 2\pi e^{-3}$$

ينتج من ذلك أن:

$$= Res \, g(z_0) = \frac{2}{e^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx$$

ونلاحظ في الوقت نفسه أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+1)^2} dx = 0$$

وهذه الحقيقة الأخيرة تنسجم مع كون التابع المكامل فردياً .

نموذج من التكاملات المثلثية ⑤

ليكن التابع $F(\cos t, \sin t)$ كسرياً بالنسبة للتابعين $\cos t$ و $\sin t$ على المجال $[0,2\pi]$ وليكن محدوداًعليه .عندئذ يمكن تحويل التكامل:

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$$

على المجال المعطى إلى التكامل المنحني على طول دائرة الواحدة $|z| = 1$ من خلال التعويض :

$$z = e^{it} \ , \ \ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

حيث تتحول z على طول دائرة الواحدة مع تحول t على المجال $[0,2\pi]$. وفي الحالة هذه يكون

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} f(z) dz$$

حيث $f(z)$ تابع كسري بالنسبة للمتحول z وله الشكل

$$(13) \quad f(z) = -\frac{i}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

من نظرية الرواسب تنتج مباشرة النظرية الآتية:

نظرية ❶

اذا كانت $z_0 , z_1 , \dots , z_k$ أقطاب التابع $f(z)$ داخل قرص الواحدة كان :

$$I=\int_0^{2\pi} F(\cos t,\sin t)dt=\int_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\sum_{p=0}^{k} \operatorname{Res} f(z_p) \qquad (14)$$

مثال ❶. احسب التكامل

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}+\cos t\right)^2}$$

الحل. بوضع

$$z=e^{it}\ , \qquad \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

ثم التعويض في التابع المكامل نجد أن

$$I=\int_{|z|=1} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(z^2+2\sqrt{2}z+1\right)^2}=\frac{4}{i}2\pi i\sum_{p=0}^{k} \operatorname{Res} F(z_p)$$

حيث z_p هي أقطاب التابع:

$$F(z)=\frac{z}{\left(z^2+2\sqrt{2}z+1\right)^2}$$

داخل دائرة الواحدة . ولما كان $z_0=\sqrt{2}-1$ هو القطب الوحيد داخل دائرة الواحدة (وهو من المرتبة 2) فإن

$$\operatorname{Res} F(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z(z-z_0)^2}{z^2+2\sqrt{2}z+1}\right)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z(z-z_0)^2}{(z-z_0)^2(z-z_1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

وأخيراً

$$I=\frac{4}{i}2\pi i\frac{\sqrt{2}}{4}=2\pi\sqrt{2}$$

② LOG RESIDUUM — الراسب اللوغاريتمي

تعريف ❶

يعرف المشتق اللوغاريتمي للتابع $f(z)$ (الذي نرمز له بالرمز $F(z)$) بالعلاقة:

$$F(z)=[Log\, f(z)]'=\frac{f'(z)}{f(z)}. \qquad (15)$$

من الطبيعي أن النقاط الشاذة الوحيدة الممكنة هي أصفار التابع $f(z)$ أو اقطابه .

تعريف ❷

يدعى المقدار

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \qquad (16)$$

بالراسب اللوغاريتمي للتابع $f(z)$ بالنسبة للمنحني المغلق C مع العلم أن $f(z)$ تحليلي ومختلف عن الصفر في كل نقاط هذا المنحني .

تعطي النظرية الآتية العلاقة بين عدد أصفار التابع $f(z)$ داخل منطقة ما وبين قيم الراسب اللوغاريتمي بالنسبة إلى محيط هذه المنطقة:

نظرية ❶

ليكن:

آ) D منطقة ما بمنحن C مؤلف من منحن واحد أو عدة منحنيات نظامية ومغلقة وموجبة الاتجاه بالنسبة لداخل المنطقة D.

ب) التابع $f(z)$ تحليليا في المنطقة D وعلى محيطها C .

ج) ليس للتابع $f(z)$ جذور على المحيط C .

د) N عدد أصفار التابع $f(z)$ داخل D مع العلم أن الجذر المضاعف m مرة يعد m جذراً.

عندئذ يعطى الراسب اللوغاريتمي للتابع $f(z)$ بالعلاقة :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N \qquad (17)$$

أحد تعميمات هذه النظرية هو النظرية الآتية:

نظرية ❷

ليكن:

آ) التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D وعلى محيطها C .

ب) ليس للتابع $f(z)$ جذور أو أقطاب على المحيط C .

ج) N عدد أصفار التابع $f(z)$ داخل D مع مراعاة المرتبة .

د) P عدد أقطاب التابع $f(z)$ داخل D ، مع مراعاة المرتبة .

عندئذ يعطى الراسب اللوغاريتمي للتابع بالعلاقة :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P \qquad (18)$$

مثال ❶. أوجد الراسب اللوغاريتمي للتابع

$$f(z)=\frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$$

بالنسبة للدائرة $C: |z|=5/2$

الحل. لنجد أولاً أصفار التابع $f(z)$ ضمن الدائرةالمعطاة . بحل المعادلة $1+z^2=0$ نجد أن للتابع صفرين هما $z_1=i\,, z_2=-i$ وكل منهما وحيد المرتبة. ولكي نجد أقطاب التابع $f(z)$ نبحث حلول المعادلة

$$1-\cos 2\pi z=0$$

وهذه الحلول بشكل عام :

$$b_n=n\,,\quad n=0,\pm1,\pm2,...$$

ونتحقق بسهولة أن كلاً من هذه الأقطاب من المرتبة الثانية. أما داخل الدائرة $C: |z|=5/2$ فالأقطاب (وعددها 5) هي

$$z_1=-2\,,\quad z_2=-1\,, z_3=0\,,\quad z_4=1\,,\quad z_5=2$$

وبما أن عدد الأقطاب هو 2 فإن

$$N=2\,,\quad P=5\times 2=10$$

وبذلك يكون بحسب النظرية 2 :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2-10=-8\,.$$

② ARGUMENT PRINCIPLE — مبدأ السعة

ليكن التابع $f(z)$ مستمراً ومختلفاً عن الصفر على المنحني C المعطى بالمعادلة

$$C : z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

ولتكن Γ صورة هذا المنحني من خلال التابع $w = f(z)$ أي ليكن

$$\Gamma : w = f[z(t)] = w(t) \ , \quad \alpha \le t \le \beta$$

ولنعرف تابعاً جديداً

$$h(t) = \log w(t)$$

مستمراً على المجال $[\alpha, \beta]$ ومحققاً عليه الشرط $e^{h(t)} = w(t)$.

تعريف ❶

نعرف تزايد لوغاريتم التابع $f(z)$ على طول المنحني C بالعلاقة

$$\Delta_C \log f(z) = \log w(\beta) - \log w(\alpha) \qquad (19)$$

يعرف هذا الفرق أيضاً بتزايد لوغاريتم المتحول w على طول المنحني Γ ويرمز له بالرمز $\Delta_\Gamma \log w$.

من التعريف ومن خواص الراسب اللوغاريتمي تكون النظريتان الآتيتان صحيحتين:

نظرية ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً على المنحني النظامي C فإن تزايد اللوغاريتم (19) يعطى بالعلاقة:

$$\Delta_C \log f(z) = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \qquad (20)$$

نظرية ❷

إذا كان

آ) التابع $f(z)$ تحليليا في المنطقة D وعلى محيطها C

ب) ليس للتابع $f(z)$ جذور أو أقطاب على المحيط C .

ج) N عدد أصفار التابع $f(z)$ داخل D مع مراعاة المرتبة .

د) P عدد أقطاب التابع $f(z)$ داخل D مع مراعاة المرتبة .

فإن :

$$\frac{1}{2\pi i}\Delta_C \arg f(z) = N - P \qquad (22)$$

تعرف العلاقة (22) باسم مبدأ السعة (*Argument Principle*) ويبقى هذا المبدأ صحيحاً في حال كون التابع $f(z)$ تحليلياً داخل المنطقة D ومستمراً على محيطها C . أما إذا كان التابع $f(z)$ لايحوي أقطاباً داخل D فإن المبدأ (22) يأخذ الشكل

$$(23) \qquad \frac{1}{2\pi i}\Delta_C \arg f(z) = N$$

سوف نعرض أخيراً نظرية روشيه للتابع التحليلي .هذه النظرية تفيد في معرفة عدد أصفار التابع التحليلي داخل منطقة ما معطاة.

نظرية ❷ (روشيه Rouche)

ليكن التابعان $f(z)$ و $g(z)$ تحليليين في المنطقة D وعلى محيطها C ولتكن المتراجحة

$$(24) \qquad |g(z)| < |f(z)|$$

محققة على المحيط C . عندئذ يكون للتابعين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ الكمية نفسها من الأصفار داخل D .

البرهان. ليكن λ وسيطاً متحولاً على المجال $[0,1]$ ولنعرف التابع $F_\lambda(z)$ بالعلاقة :

$$F_\lambda(z) = f(z) + \lambda g(z).$$

هذا التابع يحقق على المنحني C - بحسب العلاقة (24) - المتباينة:

$$|F_\lambda(z)| = |f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - \lambda |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

لنرمز بـ N_λ لعدد أصفار التابع $F_\lambda(z)$ داخل المنحني C فيكون بحسب (17) :

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_\lambda'(z)}{F_\lambda(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+\lambda g'(z)}{f(z)+\lambda g(z)}dz$$

ونلاحظ أن الطرف الأيمن في العلاقة أعلاه يمثل تابعاً مستمراً في المجال $[0,1]$ ويقبل قيماً صحيحة فقط ، ضمن هذا المجال ، هي عدد أصفار التابع $F_\lambda(z)$ داخل المنحني C . ولكن من المعلوم أن التابع المستمر على المجال $[0,1]$ والذي يقبل قيماً صحيحة فقط يجب أن يكون ثابتاً ولذلك $N_0 = N_1$. فإذا لاحظنا الآن أن N_0 و N_1 هما عدد أصفار التابعين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ على الترتيب داخل المنطقة D حصلنا على المطلوب.

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

تمرين ①. احسب التكامل الآتي:

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$$

الحل. نلاحظ أن التابع $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ تحليلي في كل مكان باستثناء النقطتين $z = 0$ و $z = -1$ اللتين ينعدم المقام فيهما . بحسب نظرية الرواسب يكون

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(-1))$$

بما أن

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1$$

فإن $z = 0$ نقطة شاذة بسيطة ولذلك $\operatorname{Res} f(0) = 0$. ومن ناحية ثانية $z = -1$ قطب من المرتبة الأولى فراسب التابع فيها هو:

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z \to -1} f(z)(z+1) = \lim_{z \to -1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 - e^{-1}$$

وبذلك يكون

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i\left(0 + 1 - e^{-1}\right) = 2\pi i\left(1 - e^{-1}\right)$$

تمرين ②. احسب تكامل التابع

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx ,$$

الحل . لنضع:

$$f(z)=\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}=\frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} ,$$

فنجد أن:

أ) هذا التابع كسري مرتبة البسط $n=2$ ومرتبة المقام هي $m=4$.

ب) درجة المقام تزيد بمقدار 2 على درجة البسط (أي أن $m \geq n+2$).

ج) يتطابق على المحور الحقيقي مع التابع الحقيقي

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} ,$$

د) ليس للتابع $f(z)$ أقطاب على المحور الحقيقي .

هـ)هذا التابع زوجي ولذلك نستطيع أن نكتب

$$I=\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx ,$$

و) لهذا التابع أربعة أقطاب اثنـان منهـا فقـط يقعـان فـي نصـف المسـتوي العلـوي هما $z_1=i, z_2=2i$

ز) راسبا التابع فيهما– بعد الحساب– هما :

$$\operatorname{Res} f(i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\frac{-1}{2i}$$

$$\operatorname{Res} f(2i)=\lim_{z\to i}\left[(z-2i)\frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\frac{3}{4i}$$

وبذلك تكون قيمة التكامل المطلوبة هي:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}2\pi i[Resf(i)+Resf(2i)]$$
$$=\pi i\left(\frac{-1}{2i}+\frac{3}{4i}\right)=\frac{\pi}{4}$$

تمرين ③. احسب تكامل التابع

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+81}dx\ ,$$

الحل . نأخذ التابع المساعد

$$g(z)=e^{iz}f(z),\ f(z)=\frac{1}{z^4+81}$$

فنلاحظ أن

أ) عندما تكون $z=x$ حقيقية يكون التابع $f(z)=\dfrac{1}{x^4+81}$ مستمراً وحقيقيا أيضا

ب)عندما تسعى z نحو اللانهاية يسعى التابع $f(z)$ نحو الصفر وكذلك

$$\lim_{z\to\infty}\int_{\Gamma}g(z)dz=\lim_{z\to\infty}\int_{\Gamma}e^{iz}\frac{1}{z^4+81}dz=0$$

ج) أقطاب التابع $f(z)$ هي حلول المعادلة ($x^4+81=0$ أو المعادلة $z^4=-81$)
ولهذه المعادلة أربعة حلول :

$$z_k=3\cdot e^{\frac{(\pi+2k\pi)}{4}i}\ ,\ k=0,1,2,3$$

منها اثنان فقط يقعان في نصف المستوي العلوي هما :

$$z_0=3\,e^{\frac{\pi}{4}i}\ ,\ z_1=\sqrt{\beta}\ e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

وكل منهما قطب من المرتبة الأولى للتابع $f(z)$.

د) راسبا التابع $g(z)$ في هذين القطبين هما :

$$Res\, g(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(e^{iaz} \frac{(z - z_0)}{z^4 + 81} \right) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{e^{iz}}{4z^3} \right) = \frac{e^{iz_0}}{4{z_0}^3}$$

$$Res\, g(z_1) = \lim_{z \to z_1} \left(e^{iaz} \frac{(z - z_1)}{z^4 + 81} \right) = \lim_{z \to z_1} \left(\frac{e^{iz}}{4z^3} \right) = \frac{e^{iz_1}}{4{z_1}^3}$$

في الحالة هذه

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x + i \sin x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 81} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 81} dx$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{1} Res\, f(z_k)$$

وبما أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 81} dx = 0$$

كون التابع المكامل فردياً فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 81} dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{1} Res\, f(z_k)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{iz_0}}{4{z_0}^3} + \frac{e^{iz_1}}{4{z_1}^3} \right)$$

مع العلم أن:

$$z_0 = 3\, e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{3}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad z_1 = \sqrt{\beta}\, e^{\frac{3\pi}{4} i} = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

تمرين ④. احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

الحل . نلاحظ أن التابع

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$$

أ) تحليلي في نصف المستوي العلوي باستثناء النقطة $z_0 = -1+i$ (لاحظ أن المقام ينعدم في النقطتين $z_0 = -1+i\,,\ z_1 = -1-i$ إحداهما تقع فوق المحور الحقيقي والثانية تحته).

ب) حقيقي على المحور الحقيقي:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}.$$

ج) يسعى نحو الصفر عندما تسعى z نحو اللانهاية .

لذلك وبحسب (11) يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx = 2\pi i Res\left[e^{i\pi z} f(z_0)\right]$$

وبما أن z_0 قطب بسيط للتابع $f(z)$ فإن

$$Res\left(e^{iaz_0} f(z_0)\right) = \lim_{z\to z_0}\left((z+1-i)\frac{ze^{i\pi z}}{(z+1-i)(z+1+i)}\right)$$
$$= \frac{(-1+i)e^{i\pi(-1+i)}}{2i} = \frac{(-1+i)}{2i}e^{-\pi}e^{-i\pi}$$
$$= \frac{(1-i)}{2i}e^{-\pi}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx = 2\pi i\frac{1-i}{2i}e^{-\pi} = \pi(1-i)e^{-\pi}$$

ولذلك :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-\pi} - \pi i e^{-\pi}$$

ومنه نحصل على التكامل المطلوب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+2}\,dx = -\pi e^{-\pi}.$$

ملاحظة ❶

من خلال المثال السابق نكون قد وجدنا في الوقت نفسه قيمة تكامل معتل آخر هو :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+2}dx=\pi e^{-\pi}.$$

تمرين ⑤. أوجد الراسب اللوغاريتمي للتابع

$$f(z)=\frac{\cosh z}{e^{iz}-1}$$

بالنسبة للدائرة $C:|z|=1$.

الحل. نجد أولاً أصفار التابع $f(z)$ ضمن الدائرة $C:|z|=1$ من خلال حل المعادلة $\cosh z=0$، أو المعادلة $e^z+e^{-z}=0$. فإذا وضعنا هذه المعادلة بالشكل $e^{2z}=-1$ وجدنا أن الحل هو:

$$2z=\log(-1)=(2n+1)\pi i$$

وأن الأصفار هي

$$z_n=\frac{2n+1}{2}\pi i,\quad n=0,\pm1,\pm2,...$$

وكل من هذه الأصفار وحيد المرتبة .ومن ناحية ثانية نبحث عن الأقطاب من خلال حل المعادلة $e^{iz}-1=0$ أو المعادلة $e^{iz}=1$ فنجد أن $z=\log 1=2p\pi i$ وبالتالي:

$$z_p=2p\pi i,\quad p=0,\pm1,\pm2,...$$

هي أقطاب بسيطة للتابع $f(z)$ بشكل عام .أما داخل القرص فالأصفار (وعددها 6) هي

$$z_n=\frac{2n+1}{2}\pi i,\quad n=0,\pm1,\pm2,-3$$

والأقطاب (وعددها 3) هي:

$$z_p=2p\pi i,\quad p=0,\pm1$$

وبذلك يكون

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P=6-3=3$$

تمرين ⑥. أوجد عدد جذور المعادلة

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$$

داخل قرص الواحدة $|z| < 1$

الحل. لاستخدام نظرية روشيه نضع :

$$f(z) = -4z^5 \ , \ g(z) = z^8 + z^2 - 1$$

فنلاحظ على محيط القرص $|z| < 1$ (أي على دائرة الواحدة $|z| = 1$) أن :

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4$$

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \le |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

وبالتالي على محيط هذا القرص لدينا $|g(z)| < |f(z)|$. وبما أن للتابع $f(z)$ صفراً مضاعفاً مكرراً خمس مرات (مرتبة 5) في الصفر فإن للتابعين :

$$f(z) = -4z^5 \quad , \ F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

– بحسب نظرية روشيه– الكمية نفسها من الأصفار داخل $|z| < 1$ وعددها 5 وبالتالي للمعادلة المعطاة خمسة جذور داخل قرص الواحدة.

ملاحظة ❷

توجد أحياناً أكثر من طريقة لاختيار التابعين $f(z)$ و $g(z)$ ففي المثال السابق مثلاً يمكن اختيارهما ، بشكل آخر ، كما يلي:

$$f(z) = z^8 - 4z^5 \ , \ g(z) = z^2 - 1$$

ثم تطبق نظرية روشيه كما سبق.

تمارين غير محلولة

❶. احسب التكامل :

$$I = \int_C \frac{z+2}{z^4+z^2} dz$$

على طول المنحني C في الحالات الآتية:

$$a)\ C_1 :\ |z| = 1/2$$
$$b)\ C_2 :\ |z-i| = 1/2$$
$$c)\ C_3 :\ |z+i| = 1/2$$
$$d)\ C_5 :\ |z-2| = 1$$
$$e)\ C_4 :\ |z| = 2$$

الجواب:

$$a) = 2\pi i, \quad b) 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+i\right), \quad c) 2\pi i\left(-\frac{1}{2}-i\right), \quad d) 0, \quad e) 0$$

❷.احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_C \frac{1}{z^3(z+4)} dz$$

على طول انمنحني C في الحالتين الآتيتين:

$$a)\ C_1 :\ |z| = 2$$
$$b)\ C_2 :\ |z+2| = 3$$

الجواب: $a) = \frac{\pi i}{32}, \quad b) 0$

❸. اثبت أن:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{\pi}{6}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{6}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{5\pi}{16}$$

❹. اثبت أن:

$$a)\ I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+9}=\frac{\pi}{3e^3}$$

$$b)\ I=\int_{0}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+01}=\frac{1}{e^3}\left(\cos 1-3\sin 1\right)$$

$$c)\ I=\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}=\frac{1}{\pi e}\left(2\cos 2+\sin 2\right)$$

$$d)\ I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{e^2}\left(2e-1\right)$$

❺. بين أن:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

توجيه . كامل التابع $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ على طول محيط نصف الحلقة العلوي المحدد بالقوسين

$$\gamma : z=re^{i}\quad ,\quad 0<\quad<\pi$$

$$\Gamma : z=Re^{i}\quad ,\quad 0<\quad<\pi$$

والمجالين $[-R,-r],\ [r,R]$.

❻.برهن على صحة تكاملي فرينيه الآتيين:

$$I_1 = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \sqrt{\pi/8}\,,$$

$$I_2 = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \sqrt{\pi/8}.$$

توجيه: من المناسب أن نكامل التابع $f(z) = e^{-z^2}$ على طول محيط القطاع المحدد بالقوس

$$\Gamma : z = Re^{i} \quad , \quad 0 < \quad < \pi/4$$

❼. اثبت صحة مايلي:

$$a)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \ , \quad \alpha > 1$$

$$b)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ , \quad \alpha > b > 0$$

$$c)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}\,, \quad |a| < 1$$

$$d)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi}{a^2(a^2 - 1)}\ , \quad a > 1$$

❽.أوجد الراسب اللوغاريتمي للتوابع الآتية بالنسبة للدوائر الموجودة بجانب كل منها

$$a)\ f(z) = \frac{z}{1 + z^3}\,,\ C : |z| = 2$$

$$b)\ f(z) = \cos z + \sin z\,,\ C : |z| = 4$$

$$c)\ f(z) = (e^z - 2)^2\,,\ C : |z| = 8$$

$$d)\ f(z) = \tan hz\,,\ C : |z| = 8$$

$$e)\ f(z) = \tan^3 z\,,\ C : |z| = 6$$

$$f)\ f(z) = 1 - \tanh^2 z\,,\ C : |z| = 2$$

الجواب:

$$a)\ -2,\ b)\ 3\,,\ c)\ 6\,,\ d)\ -1\ ,e)\ -3\ ,f)\ -4$$

9. أوجد عدد جذور المعادلات الآتية في المناطق المجاورة لكل منها:

$$a)\ z^4 - 3z^3 - 1 = 0\ ,\ |z| < 2$$

$$b)\ z^5 + z^2 + 1 = 0\ ,\ |z| < 1/2$$

$$c)\ z^5 + z^2 + 1 = 0\ ,\ |z| < 2$$

$$d)\ z^8 + 6z + 10 = 0\ ,\ |z| < 1$$

$$e)\ 27z^{11} - 18z^3 + 10 = 0\ ,\ |z| < 1$$

الجواب

a) 3 . b) لايوجد . c) 5 . d) لايوجد . e) 11.

10. أوجد عدد جذور المعادلات الآتية في الحلقات المجاورة لكل منها:

$$a)\ 4z^4 - 29z^2 + 25 = 0\ ,\ 2 < |z| < 3$$

$$b)\ z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0\ ,\ 1 < |z| < 2$$

$$c)\ z^6 - 8z + 10 = 0\ ,\ 1 < |z| < 3$$

الجواب

$a)\ 2,\ b)\ 3\ ,\ c)\ 4\ .$

الفصل الحادي عشر

مبادئ انتقال المناطق

① SYMMETRY — التناظر بالنسبة للدائرة

تعريف ❶

نقول إن النقطتين p و q متناظرتان بالنسبة لمستقيم ما ℓ إذا كان :

$$|z-p| = |z-q|$$

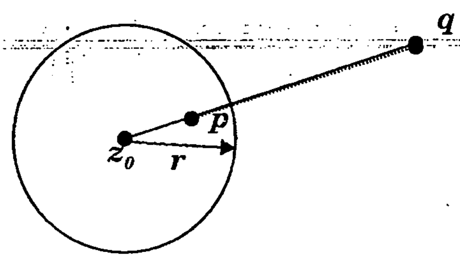
من أجل كل نقطة z واقعة على هذا المستقيم .

تعريف ❷

نقول إن النقطتين p و q متناظرتان بالنسبة للدائرة المعطاة بالمعادلة

$$|z-z_0| = r$$

إذا تحققت الشروط الآتية:



شكل1

آ) p و q مختلفتين عن النقطة z_0 .

ب) p و q واقعتين على نصف مستقيم تقع بدايته في النقطة z_0 (شكل1) .

ج) جداء بعدي p و q عن المركز z_0 يساوي مربع نصف القطر r. وهذا يعني

$$|p - z_0||q - z_0| = r^2$$

نقبل أن النقطتين z_0 و ∞ متناظرتان بالنسبة لهذه الدائرة

خاصة ❶

تمثل المعادلة:

$$|z - p| = \lambda|z - q|, \quad \lambda \neq 1 \tag{1}$$

معادلة دائرة تتناظر بالنسبة لها النقطتان p و q مع العلم أم مركز هـذه الـدائرة ونصـف قطرها يعطيان بالعلاقتين

:

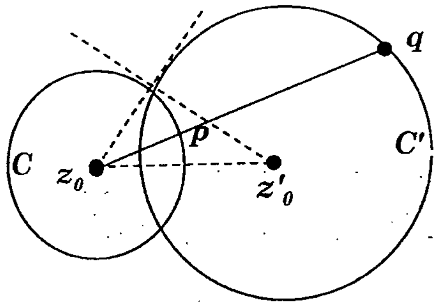
$$z_0 = \frac{p - \lambda^2 q}{1 - \lambda^2}, r = \frac{|p - q|}{1 - \lambda^2} \tag{2}$$

تعريف ❸

لتكن الدائرتان C و C' المعطيتان بالمعادلتين :

$$C : |z - z_0| = r, \qquad C' : |z - z'_0| = r'$$

نقول إن الدائرتين C و C' متعامدتان إذا كانت مماساتهما في نقاط التقاطع متعامدة .



شكل2

خاصة ❷

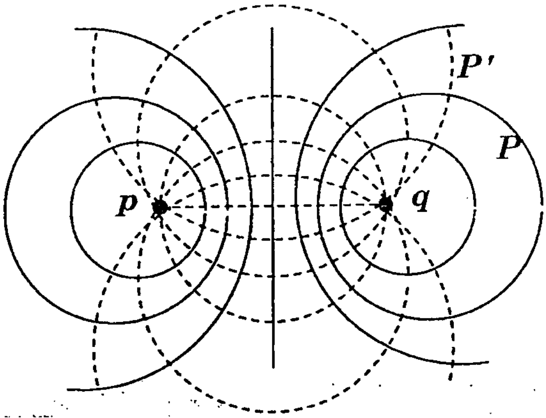
إذا كانت الدائرة C' تمر من النقطتين p و q المتنـاظرتين بالنسـبة للـدائرة C كانـت الدائرتان C و C' متعامدتين .

وبالعكس : إذا كانت الدائرتان C و C' متعامدتين والدائرة C' تقطع المستقيم المار مـن مركز الدائرة C في النقطتين p و q ، كانت النقطتان p و q متناظرتين بالنسبة للـدائرة C (شكل2).

رأينا أن المعادلة :

$$|z-p| = \lambda |z-q| \qquad (3)$$

تمثل معادلة مستقيم ℓ تتناظر بالنسبة له النقطتان p و q عندما يكـون $\lambda = 1$ وتمثـل معادلة دائرة C تتناظر بالنسبة لها النقطتان p و q عندما يكون $\lambda \neq 1$. إذا تحولت λ بين 0 و ∞ وبقيت النقطتان p و q ثابتتين فإننا نحصل على أسرة من الدوائر التي تتناظر النقطتان p و q بالنسبة لكل منها . لنرمز لهذه الأسرة من الدوائر بـالحرف P . ولنرمـز أيضا بالحرف P' لجميع الدوائر C' المارة من النقطتين p و q (على الشكل 3 رسمت دوائر P بخط مستمر بينما رسمت دوائر P' بخط متقطع .



شكل 3

تعريف ❶

ندعو الأسرة P بحزمة القطوع الناقصة من الدوائر و P' بحزمة القطوع الزائـدة ونـدعو النقطتين p و q برأسي الحزمتين P' و P . يقال أيضا عن الحزمتين P و P' أنهمـا مترافقتان .

من الخاصة ❷ (الفقرة السابقة) نحصل على النتيجة الآتية :

نتيجة ❶

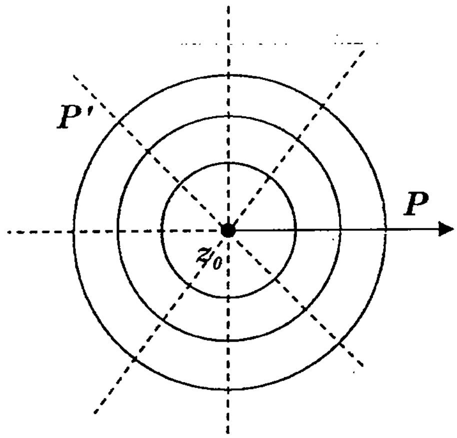
كل دائرة C' من حزمة القطوع الزائدة P' ذات الرأسين p و q ، متعامدة مع كل دائرة C من حزمة القطوع الناقصة P ذات الرأسين نفسهما .

ملاحظة ❶

عندما تقترب النقطة p من مركز الدائرة

$$C : \left| z - z_0 \right| = r$$

فان النقطة q المتناظرة معها تبتعد نحو ∞. لذلك نقول ان مركز الدائرة z_0 و ∞ متناظران بالنسبة للدائرة C ونقبل في هذه الحالة أن راسي حزمة القطوع هما z_0 و ∞ (يوضح ذلك الشكل 4).



شكل4

نتيجة ❶

إذا كان:

$$p = z_0 + \frac{r^2}{\overline{q - z_0}} \qquad (4)$$

كانت النقطتان p و q متناظرتين بالنسبة للدائرة ذات المركز z_0 ونصف القطر(والعكس أيضا صحيح).

مثال❶. أوجد النقطة المتناظرة مع النقطة $2+i$ بالنسبة للدائرة ذات المركز i ونصف القطر 3

الحل. بتعويض القيم المعطاة في العلاقة (4) :

$$r = 3 \qquad z_0 = i \qquad p = 2 + i$$

نجد أن النقطة المطلوبة هي

$$p = i + \frac{3^2}{2 - i + i} = i + \frac{9}{2}$$

المعنى الهندسي للمشتق العقدي ③

ليكن التابع $w = f(z)$ اشتقاقياً في جوار ما للنقطة z_0 وليكن:

$$w_0 = f(z_0) \quad , \quad f'(z_0) \neq o .$$

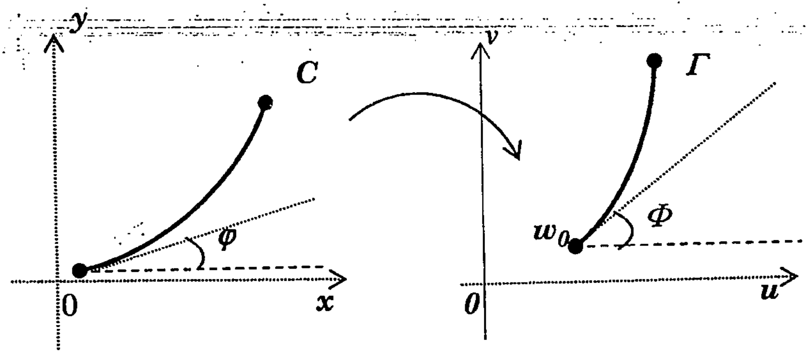
عندئذ ينتقل القوس النظامي C الذي معادلته

$$C : z = z(t), t_0 \leq t \leq t_1 \qquad (5)$$

بوساطة التابع $w = f(z)$ إلى المنحني Γ الذي معادلته:

$$\Gamma : w = f[z(t)] = w(t)$$

وإذا كانت النقطة $z_0 = z(t_0)$ بداية القوس C فان النقطة $w_0 = w(t_0)$ هي بداية المنحنى Γ (شكل 5) .



شكل 5

بإجراء التحويل الآتي :

$$\frac{w(t)-w(t_0)}{t-t_0}=\frac{f[z(t)]-f[z(t_0)]}{z(t)-z(t_0)}\cdot\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

نحصل ، بعد أن نجعل t تتناهى إلى t_0 ، على العلاقة:

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن المماس للمنحني Γ يصنع ،في النقطة w_0 مع المحور الحقيقي ، زاوية Φ قدرها :

$$\Phi=\arg w'(t_0)=\arg[f'(z_0)z'(t_0)]=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$$

وبما أن المماس للقوس C ، في النقطة z_0 ، يصنع مع المحور الحقيقي زاوية قدرها $\varphi=\arg z'(t)$ (شكل 7) فإن:

$$\Phi=\arg f'(z_0)+\varphi \tag{6}$$

وبذلك تكون النظرية الآتية(التي تعطي المعنى الهندسي للمشتق السعة) صحيحة :

نظرية ❶

ان ميل كل قوس نظامي $z=z(t)$ بدايته z_0 على المحور الحقيقي يزداد من خلال التابع $f(z)$ بزاوية ثابتة مساوية إلى سعة المشتق:

$$\varphi=\arg z'(t) \tag{6'}$$

هناك معنى هندسي لمعادلتي كوشي – ريمان سوف نعرضه من خلال مفهوم التحويل الزاوي المطابق . ليكن التابع

$$w=f(z)=u+iv$$

تحليليا في المنطقة D وليكن المنحنيان:

$$u(x,y)=a,\quad v(x,y)=\beta\,,\ a=const.\ \ \beta=const. \tag{7}$$

متقاطعين في النقطة $z_0=(x_0,y_0)$ حيث لا ينعدم المشتق $f'(z_0)$.من المعلوم ، في هذه الحالة ، أن مماسي المنحنيين u و v في النقطة (x_0,y_0) يتعينان بالمعادلتين:

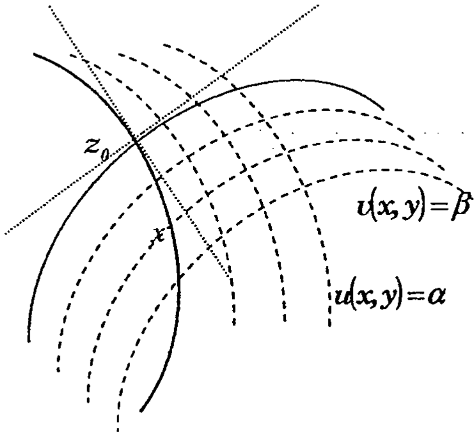
$$u_x'\cdot(x-x_0)+u_y'(y-y_0)=0 \tag{8}$$

$$v_x'\cdot(x-x_0)+v_y'(y-y_0)=0 \tag{8'}$$

ولكن وبحسب شرطي كوشي – ريمان لدينا:

$$u_x' v_x' + u_y' v_y' = 0$$

إذا فالمماسان (8) و $(8')$ متعامدان في النقطة z_0 (شكل6)، وتعامدهما لا يتعلق – كما نلاحظ– بالثابتين α و β . وهذا يعني أن كل منحن من الأسرة $u(x,y)=\alpha$ متعامد مع كل منحني من الأسرة $v(x,y)=\beta$.



شكل 6

وبذلك تكون صحيحة النظرية الآتية:

نظرية ❷

معادلتا كوشي – ريمان تعنيان ، هندسياً ، إن أسرتي التوابع (7) متعامدتان .

مثال ❶ ليكن التابع

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ان المنحنيات

$$u = x^2 - y^2 = \alpha, v = 2xy = \beta$$

تشكل بحسب النظرية ❷ ، أسرتين متعامدتين من القطوع الزائدة المتساوية الساقين .

ليكن التابع $w = f(z)$ مستمرا في منقطة ما D ويأخذ قيمه في المنطقة D' . نقول إن التابع $f(z)$ هو تحويل زاوي مطابق , في النقطة z_0 من المنطقة D ، مع الحفاظ على الاتجاه ، إذا أمكن مقابلة كل منحنيين نظامين C', C واقعين في المنطقة D و يبتدآن من النقطة z_0 بمنحنيين Γ', Γ في المنطقة D' لهما مماسان في النقطة المشتركة $w_0 = f(z_0)$ وكان :

$$\angle(\Gamma, \Gamma') = \angle(C, C') \qquad (9)$$

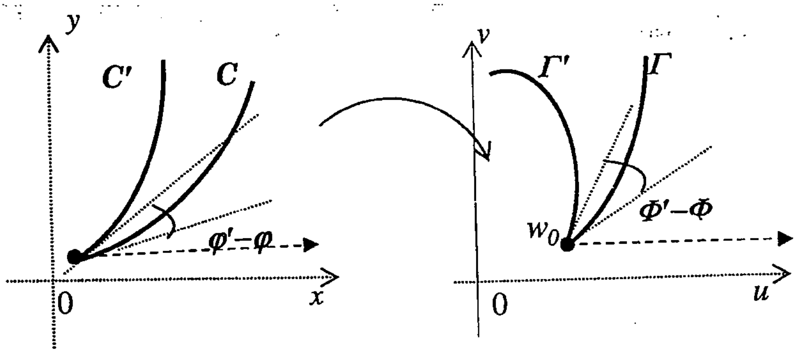
حيث $\angle(C, C')$ هي الزاوية التي رأسها z_0 وزراعاها المماسان للقوسين C و C' في النقطة z_0 ، وللزاوية $\angle(\Gamma, \Gamma')$ المعنى نفسه (الشكل شكل7) . أما إذا كان:

$$\angle(\Gamma, \Gamma') = \angle(C', C)$$

فإننا نقول إن التابع $f(z)$ هو تحويل زاوي مطابق مع تغيير الاتجاه في z_0 . ونقول أخيراً إن المنحنيين C و C' متعامدان إذا كان $\angle(C, C') = \pi/2$.

نظرية ❶

التابع التحليلي $f(z)$ هو تحويل زاوي مطابق مع الحفاظ على الاتجاه في كل نقطة z_0 لا ينعدم فيها المشتق .



شكل 7

البرهان : لنفرض أن $f(z)$ تابع تحليلي في المنطقة D وأن $f'(z_0) \neq o$ ولتكن الزاويتان التي يصنعها المنحنيان C و C' في النقطة z_0 ، مع المحور الحقيقي هما φ و φ' على الترتيب . ليكن المنحنيان Γ و Γ' صورة المنحنيين السابقين من خلال التابع $f(z)$ ولتكن الزاويتان التي يصنعهما هذان المنحنيان، في نقطة التلاقي $w_0 = f(z_0)$، مع المحور الحقيقي هما Φ و Φ' على الترتيب (شكل 7) .

بحسب العلاقة (6) يكون:

$$\Phi' = arg\, f'(z_0) + \varphi'$$

ومنه

$$\Phi' - \Phi = arg\, f'(z_0) + \varphi' - arg\, f'(z_0) - \varphi \quad = \varphi' - \varphi$$

وهذا يعني ان العلاقة (9) محققة . وهو المطلوب .

تجدر الاشارة هنا إلى أن الشرط $f'(z_0) \neq 0$ لا يمكن الاستغناء عنه في النظرية السابقة . يوضح ذلك المثال الآتي :

مثال 1. ان التابع $w = z^n$ تحليلي في كل المستوى C ومشتقه يعطى بالعلاقة: $$w' = nz^{n-1}, n = 1,2,...$$ هذا المشتق ينعدم في نقطة واحدة فقط هي $z = 0$ (هذا إذا كان $n > 1$) . فهو تحويل زاوي مطابق مع الحفاظ على الاتجاه في كل مكان من المستوي باستثناء الصفر .

التابع الخطي ⑤ LINEAR FUNCTION

تعريف 1

ندعو التابع الذي له الشكل

$$w = az + b, a \neq 0 \qquad (10)$$

بالتابع الخطي حيث a و b عددان ثابتان

خاصة 1

التابع الخطي متباين في كل المستوي العقدي لأن

$$az_1 + b = az_2 + b \Rightarrow z_1 = z_2$$

خاصة ❷

التابع الخطي تحويل للمستوي في نفسه (أي ينقل نقاط المستوي (z) الى نقاطه (w) مع الملم انه:

أ) إذا كان $a=1$ فان التابع الخطي يشكل انسحابا مقداره b .

ب) إذا كان $|a|=1$ و $b=0$ فان التابع $w=az$ يشكل دورانا حول النقطة $z=0$ بزاوية قدرها $\varphi=\arg a$ لان للنقطة z ولصورتها w الطويلة نفسها وإضافة إلى ذلك:

$$\arg w=\arg z+\arg a$$

ج) إذا كان $a>0$ و $b=0$ فان التابع $w=az$ يدعى بالإستطالة المركزية (أو التحاكي المركزي) ذات المركز $z=0$ ونسبة الإستطالة a .

مما تقدم نرى ان التابع الخطي بشكل عام هو تركيب للتوابع : التحاكي المركزي – الدوران – الانسحاب .

خاصة ❸

التابع الخطي تحليلي على كل المستوى C ومشتقه $w'=a$ مختلف عن الصفر في كل نقطة فهو إذا تحويل زاوي مطابق مع الحفاظ على الاتجاه .

نظرية ❶

التابع الخطي ينقل دائماً الدائرة إلى دائرة (طبعا يمكن اعتبار المستقيم دائرة) بحيث تنتقل النقاط المتناظرة بالنسبة للدائرة الأولى إلى نقاط متناظرة بالنسبة للدائرة الثانية .

البرهان : إن معادلة الدائرة التي تتناظر بالنسبة لها النقطتان p و q بحسب (1) هي :

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=\lambda \qquad (11)$$

بإجراء التحويل العكسي بالنسبة للتحويل: (10)

$$z=\frac{w-b}{a}$$

تنتقل المعادلة (11) إلى الشكل الآتي :

$$\left|\frac{w-(ap+b)}{w-(aq+b)}\right|=\lambda$$

وهذه المساواة تشكل معادلة دائرة تتناظر بالنسبة لها النقطتان $\lambda ap+b, aq+b$ وهو المطلوب.

تعريف ❶

كل تابع له الشكل

$$(12) \qquad w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$$

يدعى بالتحويل الكسري التناظري (أو باختصار- التحويل الكسري **Homography**) .

خاصة ❶

التحويل العكسي للتحويل الكسري هو ايضاً تحويل كسري .

البرهان. بحل المعادلة (12) بالنسبة لـ z نحصل على التابع العكسي بالشكل :

$$(13) \qquad z=\frac{dw-b}{-cw+a}, \quad ad-bc\neq 0$$

وهو شكل تحويل كسري معرف في كل المستوي.

نتيجة ❶

يمثل التابع الكسري تحويلاً للمستوي المغلق في نفسه . ونقبل هنا أن النقطة $z=-d/c$ $(c\neq 0)$ تقابل النقطة $z=\infty$ والنقطة $z=\infty$ تقابل النقطة $z=a/c$. إذا كان $c=0$ فان التقابل يكون بين $z=\infty$ و $w=\infty$.

تعريف ❷

يعرف التابع الآتي بالتابع المقلوب:

$$(14) \qquad w=\frac{1}{z}$$

خاصة ❷

التابع المقلوب هو حالة خاصة للتابع الخطي الكسري .

نظرية ❶

التابع المقلوب ينقل دائماً الدائرة إلى دائرة بحيث تنتقل النقاط المتناظرة بالنسبة للدائرة الأولى إلى نقاط متناظرة بالنسبة للدائرة الثانية .

البرهان :رأينا أن المساواة (11) تشكل معادلة الدائرة تتناظر بالنسبة لها النقطتان p و q .
بإجراء التحويل العكسي بالنسبة للتحويل (14) نجد أن $z = 1/w$. ومن خلال هذا التحويل تنتقل المعادلة (14) إلى الشكل الآتي :

$$\left|\frac{w-1/p}{w-1/q}\right| = \lambda\left|\frac{q}{p}\right|$$

وهي معادلة دائرة تتناظر بالنسبة لها النقطتان $1/p, 1/q$ وهو المطلوب.

نظرية ❶

التحويل الكسري ينقل دائماً الدائرة إلى دائرة بحيث تنتقل النقاط المتناظرة بالنسبة للدائرة الأولى إلى نقاط متناظرة بالنسبة للدائرة الثانية .

البرهان: إذا كان $c \neq 0$ كان بالإمكان كتابة التحويل الكسري (12) على الشكل(تحقق من ذلك) :

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{z+d/c} \qquad (15)$$

الأمر الذي يعني أن التحويل الكسري يعد تركيباً للتابعين: الخطي (10) والمقلوب (14) .
وهذا يؤدي إلى صحة النظرية (كنتيجة لصحة النظريتين 1 من الفقرة من السابقة و1 الفقرة الحالية)

نتيجة ❶

كل حزمة من الدوائر في المستوي تنتقل بوساطة التحويل الكسري إلى حزمة من الدوائر في هذا المستوي ، علماً أن:

أ) حزمة القطوع الناقصة تنتقل إلى حزمة من القطوع الناقصة .

ب) حزمة القطوع الزائدة تنتقل إلى حزمة من القطوع الزائدة .

ج) حزمة القطوع المكافئة تنتقل إلى حزمة من القطوع المكافئة .

ملاحظة ❶

تنتقل الدائرة (11)بوساطة التحويل ; الكسري

$$w = \frac{z-p}{z-q}, p \neq q$$

إلى الدائرة $|w| = \lambda$ ، وهذا يعني ان حزمة القطوع الناقصة المؤلفة من جميع الدوائر (11) (شكل3) تنتقل إلى حزمة الدوائر ذات المركز المشترك (شكل4) ومن خلال ذلك تنتقل النقطتان $z = p$ و $z = q$ إلى النقطتين $w = 0$ و $w = \infty$ المتناظرتين بالنسبة لجميع دوائر الحزمة $|w| = \lambda$ حيث $o < \lambda < \infty$.

ملاحظة ❷

بالإمكان دائماً إيجاد تحويل كسري من الشكل بحيث ينقل ثلاث نقاط z_1, z_2, z_3 مختارة كيفياً إلى ثلاث نقاط w_1, w_2, w_3 مختارة كيفياً وذلك من خلال العلاقة:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (16)$$

للتحقق من ذلك يكفي أن نضع المعادلة (16) بالشكل:

$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3)=(z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1)$$

فنلاحظ أنه إذا كان $z=z_1$ فإن $w=w_1$ ويصح الكلام نفسه من أجل الحالتين الباقيتين.

ملاحظة ❷

إذا كانت إحدى النقاط w_1, w_2, w_3 تساوي إلى اللانهاية مثلاً: $w_2=\infty$ فإن العلاقة (16) تصبح من الشكل:

$$\frac{(w-w_1)}{(w-w_3)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (17)$$

مبدأ المحافظة على المناطق ⑦

تعريف ❶

نقول إن التابع $f(z)$ نوني القيمة (أو نوني التباين) في جوار النقطة z_0 إذا وجد من أجل كل قرص $|z-z_0|<\delta$ ،صغير بما فيه الكفاية، قرص من الشكل :

$$|w-w_0|<\varepsilon, \quad w_0=f(z_0)$$

بحيث يقبل التابع $f(z)$ كل قيمة w_1(مختلفة عن w_0) من هذا القرص في n من النقاط المختلفة الموجودة في الجوار $|z-z_0|<\delta$.

من هذا التعريف ومن خواص التابع التحليلي تكون صحيحة الخواص الآتية:

خاصة ❶

إذا كانت النقطة z_0 صفراً من المرتبة n للتابع $f(z)-w_0$ كان التابع $f(z)$ نوني القيمة في هذه النقطة.

خاصة ❷

إذا كانت النقطة z_0 قطباً من المرتبة n للتابع $f(z)$ كان التابع هذا نوني القيمة في جوار هذا القطب (هذا لأن z_0 ستكون صفراً من المرتبة n للتابع $1/f(z)$).

خاصة ❸

. الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $f(z)$ متباينا في القطب z_0 هو أن يكون هذا القطب من المرتبة الأولى .

خاصة ❹

. الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع :

$$f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\dots,\quad |z|>R \qquad (15)$$

التحليلي في جوار اللانهاية متبايناً في هذا الجوار هو أن يكون

$$a_{-1}=-Res f(\infty)\neq 0$$

مثال ❶

أ) إن التابع $f(z)=z^3$ متباين في جوار صغير لكل نقطة من المستوي المستثنى منه النقطة $z=0$.

ب) إن التابع $g(z)=\frac{1}{z^3}$ متباين في جوار صغير لكل نقطة من المستوي المستثنى منه النقطة $z=\infty$.

ملاحظة ❶

إذا كان التابع التحليلي $f(z)$ مختلفا عن الثابت في جوار النقطة z_0 فإن هذا الجوار ينتقل إلى جوار ما للنقطة $w_0=f(z_0)$. وهذا يعني أن المجموعات المفتوحة تنتقل من خلال التابع التحليلي المختلف عن الثابت إلى مجموعات مفتوحة. من هذه الخواص ومن حقيقة أن التابع المستمر يحافظ على ترابط المناطق (المنطقة هي مجموعة مفتوحة ومترابطة) نحصل على النظرية الآتية التي تحدد مبدأ المحافظة على المناطق:

نظرية ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحليليا ومختلفا عن الثابت في المنطقة D كانت صورة هذه المنطقة $f(D)$ أيضا منطقة.

نظرية ❷

إذا كان $f'(z_0)\neq 0$ في جوار صغير بما فيه الكفاية للنقطة z_0 كان التابع $f(z)$ متبايناً في هذا الجوار وكان تابعه العكسي $z=f^{-1}(w)$ موجوداً.

ملاحظة ❶

تنتج النظرية الأخيرة من حقيقة أنه إذا كانت النقطة z_0 صفراً من المرتبة n للتابع $f(z)-w_0$ كانت قيمته في النقطة z_0 تساوي إلى w_0 وكان إضافة إلى ذلك :

$$f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(n-1)}(z_0)=0\ ,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0 .$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $n=1$ يكون التابع $f(z)$ متبايناً(وحيد القيمة) في النقطة z_0.

ملاحظة ❷

تعرف النظرية ❶ بمبدأ المحافظة على المناطق وتعرف النظرية الأخيرة بنظرية عكس التابع التحليلي موضعياً وهي تفيد في أن التابع العكسي للتابع التحليلي $f(z)$ في جوار النقطة z_0 هو تابع تحليلي في جوار النقطة $w_0=f(z_0)$ لأنه في هذا الجوار لدينا:

$$[f^{-1}(w)]'=\frac{1}{f'(z)} \qquad (16)$$

مثال ❷. إن التابع

$$f(z)=z^n$$

نوني التباين في كل جوار للنقطة $z=0$ ولكنه متباين (وحيد التباين) في جوار ما لأي نقطة $z_0\neq 0$ لأن مشتق التابع في هذه النقطة سيكون مختلفاً عن الصفر:

$$f^{(n)}(z_0)=nz_0^{n-1}\neq 0 .$$

في هذه الحالة يكون

$$z=w^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{w} .$$

تطبيق ❹. ليكن التابع $z = \sin w$. بما أن مشتق هذا التابع يحقق في النقطة $z = 0$ العلاقة:

$$z' = \cos w = \cos 0 = 1 \neq 0$$

فإن تابعه العكسي موجود في جوار الصفر $|z| < \delta$ وهذا التابع هو:

$$w = \arcsin z\,, \quad |z| < \delta \tag{17}$$

وهذا التابع تحليلي في جوار الصفر ومشتقه يعطى بالعلاقة:

$$\frac{d}{dz}\arcsin z = \frac{1}{(\sin w)'} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

وبمحاكمة مشابهة نجد التوابع العكسية لبقية التوابع المثلثية ونحصل على النتيجتين الآتيتين:

نتيجة ❶

$$z = \cos w\,, \quad w = \arccos z\,, \quad |z - \pi/2| < \delta \tag{18}$$

$$z = \tan w\,, \quad w = \arctan z\,, \quad |z| < \delta \tag{18'}$$

$$z = \cot w\,, \quad w = \operatorname{arc}\cot z\,, \quad |z - \pi/2| < \delta \tag{18''}$$

نتيجة ❷

$$\frac{d}{dz}\arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dz}\arccos z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{19'}$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{ar}\cot z = \frac{1}{1+z^2} \tag{19''}$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arc}\cot z = \frac{-1}{1+z^2}. \tag{19'''}$$

تعريف ❶

لتكن D و D' منطقتين في المستوي العقدي وليكن التابع $f(z)$ تقابلاً للمنطقة D في D' أي ليكن:

$$f : D \to D', \qquad D' = f(D)$$

ندعو التابع $f(z)$ بالتحويل المجافظ للمنطقة D في D' إذا كان التابع هذا تحليليا في المنطقة D باستثناء نقطة واحدة على الأكثر يكون للتابع فيها قطب من المرتبة الأولى .

تعريف ❷

نقول إن المنطقة D تقبل الانتقال بشكل محافظ إلى D' إذا وجد التحويل المحافظ الذي ينقل D إلى D'.

من هذا التعريف ومن تعريف التحويل الزاوي المطابق نحصل على الخواص الآتية:

خاصة ❶

التحويل المحافظ $f : D \to D'$ هو تحويل زاوي مطابق في كل نقطة من المنطقة D مع الحفاظ على الاتجاه.

خاصة ❷

إذا كان $f(z)$ تحويلاً محافظاً للمنطقة D في D' و كان $g(w)$ تحويلاً محافظاً للمنطقة D' في D'' كان التابع المركب $g[f(z)]$ تحويلاً محافظاً للمنطقة D في D''.

خاصة ❸

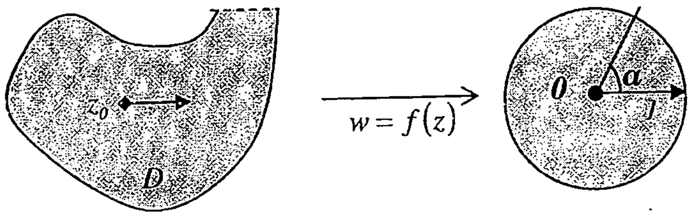
إذا كانت المنطقتان D_1 و D_2 تقبلان الانتقال بشكل محافظ إلى منطقة واحدة D' كانت هاتان المنطقتان قابلتين للانتقال بشكل محافظ إحداهما في الأخرى.

إن النظرية الأساسية في التحويلات المحافظة هي نظرية ريمان في التحويل وهي تحدد الشروط التي يجب أن تحققها المنطقتان D و D' لكي تقبلان الانتقال بشكل محافظ إحداهما في الأخرى . وفيما يلي نص هذه النظرية:

نظرية ❶ (*Riemann*).

كل منطقة وحيدة الترابط وتحوي متممتها أكثر من نقطة تقبل الانتقال بشكل محافظ إلى قرص الواحدة بحيث تنتقل النقطة المختارة كيفياً من هذه المنطقة إلى مركز القرص (شكل6).

نقبل النظرية هذه دون برهان مكتفين ببعض الملاحظات.



شكل8

ملاحظة 1

إن التحويل المحافظ في نظرية ريمان ليس وحيداً , ولكي يكون وحيداً يكفي إضافة أحد الشروط الآتية:

أ)
$$f(z_0)=w_0\ ,\ \arg f'(z_0)=\alpha\ ,\ |w_0|<1\ ,$$

حيث z_0 و w_0 و α ثوابت.

ب) يوجد تحويل محافظ وحيد $f(z)$ ينقل D إلى D' ويحقق الشرطين :

$$f(z_0)=w_0\ ,\ f(z_1)=w_1$$

مع العلم أن z_0 و w_0 نقطتان داخليتان من D و D' و z_1 و w_1 نقطتان محيطيتان للمنطقتين D و D' على الترتيب.

ج) يوجد تحويل محافظ وحيد $f(z)$ ينقل D إلى D' ويحقق الشرطين

$$f(z_k)=w_k\ ,\ k=1,2,3$$

مع العلم أن z_1 و z_2 و z_3 نقاط محيطية مختلفة من D و w_1 و w_2 و w_3 نقاط محيطية مختلفة من D' مرتبة بحسب الاتجاه الموجب لمحيطي D و D' .

نتيجة 1

كل منطقتين D و D' وحيدتي الترابط وتحوي متممة كل منهما أكثر من نقطة تقبلان الانتقال بشكل محافظ إحداهما في الأخرى بحيث تنتقل النقطة المختارة كيفياً من المنطقة الأولى إلى النقطة المختارة كيفياً من المنطقة الثانية.

التطبيقات العملية

تمارين محلولة

تمرين① . ضع التابع $w = iz + 1 + i$ بالشكل $w = u + iv$ ثم أوجد هندسياً حزمتي الدوائر المتعامدتين الناتجتين من الأشرتين:

$$u(x,y) = \alpha\ ,\ v(x,y) = \beta\ .$$

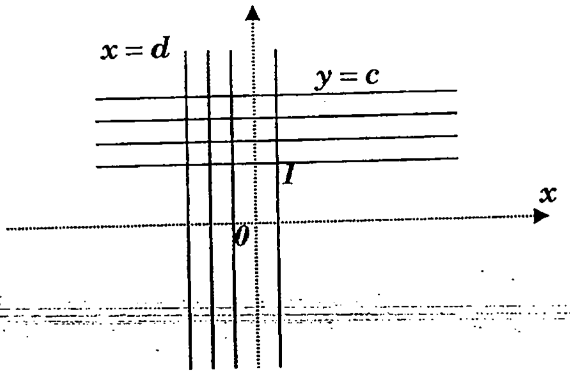
الحل: لدينا:

$$w = iz + 1 + i = ix - y + 1 + i = 1 - y + i(x+1)$$

$$u(x,y) = 1 - y = \alpha\ ,\ v(x,y) = x + 1 = \beta$$

$$y = 1 - \alpha\ ,\ x = \beta - 1$$

مع تحول نحصل على حزمتين من المستقيمات المتعادة المعطاتين بالجملة أعلاه (شكل9)



شكل9

تمرين ② . أوجد صورة المربع الذي رؤوسه $0, 1, 1+2i, 2$ من خلال التابع الخطي:

$$w = (1+i)z + (2-i)$$

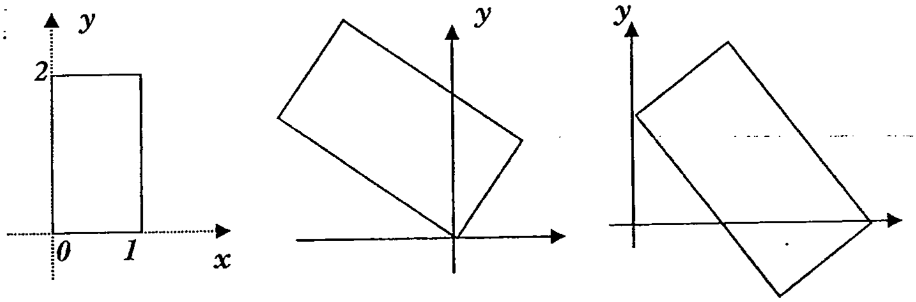
الحل. نلاحظ أن التابع يتكون من تركيب تابعين هما:

$$\varsigma = (1+i)z\ ,\ w = \varsigma + (2-i),$$

الأول منهما يمثل تحاكياً(أو استطالة) مقداره $\sqrt{2}$ ودوراناً مقداره لأن:

$$1+i=|1+i|e^{\pi/4}=\sqrt{2}\,e^{\pi/4}$$

بينما يمثل الثاني انسحاباً مقداره $2-i$. بذلك تكون صورة المستطيل المعطى ناتجاً عن المستطيل الأول كما على الشكل:



شكل10

تمرين③ ليكن التابع $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$

أ) أوجد هندسياً حزمتي الدوائر المتعامدتين الناتجتين من الأستين:

$$u(x,y)=\alpha\,,\ \ v(x,y)=\beta$$

ب) أوجد صورة الدائرتين الآتيتين:

$$a)\ x^2+y^2-x=0\,,\quad b)\ x^2+y^2-y=0$$

الحل.

آ) لدينا:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

ولذلك:

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}=\alpha,\quad v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}=\beta\,.$$

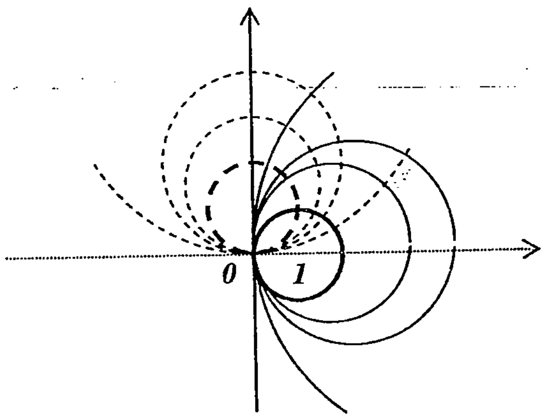
وهذا يعني أن:

$$x^2+y^2-\frac{x}{\alpha}=0 \ , \qquad x^2+y^2-\frac{y}{\beta}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2\alpha}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \ , \ x^2+\left(y-\frac{1}{2\beta}\right)^2=\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2$$

وهاتان المعادلتان تمثلان دائرتين متقاطعتين في المبدأ وتشكلان بتحول α و β حزمتين متعامدتين من دوائر القطوع المكافئة .

ت) لإيجاد صورة الدائرتين نلاحظ أن:



شكل11

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow u=1, a)\ x^2+y^2-x=0 \Rightarrow$$

$$v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow v=-1, b)\ x^2+y^2-y=0 \Rightarrow$$

وهذا يعني أن الدائرة الأولى تنتقل إلى المستقيم $u=1,$ والدائرة الثانية تنتقل إلى المستقيم $v=-1,$

تمرين④ أوجد التحويل الكسري الذي نقل النقاط $z_1=-1, z_2=0, z_3=1$ إلى النقاط على الترتيب: $w_1=-i, w_2=1, w_3=i$

الحل. بتعويض هذه القيم في العلاقة (16) نجد أن:

$$\frac{(w+i)(1-i)}{(w-i)(i+i)}=\frac{(z+1)(-1)}{(z-1)(+1)}$$

وبالتالي:

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

تمرين⑤ أوجد التحويل الكسري الذي نقل النقاط $z_1=1,z_2=0,z_3=-1$ إلى النقاط على الترتيب: $w_1=i,w_2=\infty,w_3=1$

الحل. بتعويض هذه القيم في العلاقة (17) نجد أن:

$$\frac{(w-i)}{(w-1)}=\frac{(z-1)(+1)}{(z-z_3)(-1)}$$

وبالتالي:

$$w=\frac{(1+i)z+(i-1)}{2z}.$$

تمارين للحل

❶ بين أن التحويل الخطي

$$w=az+b,a\neq 0$$

آ) ينقل الدوائر إلى دوائر

ب) ينقل المستقيمات المتوازية إلى مستقيمات متوازية

ج) يحافظ على الزوايا بين المنحنيات

❷ أوجد التحويل الخطي الذي ينقل الشريط :

$$0<rez<1$$

إلى الشريط:

$$-\pi/2<imw<\pi/2$$

بحيث تنتقل النقطة $z=1/2$ إلى النقطة $w=0$.

الجواب: $\pi i(z-1/2)$

❸أوجد التحويل الخطي الذي ينقل :

آ) نصف المستوي العلوي في نفسه

ب) نصف المستوي العلوي في نصف المستوي السفلي.

ج) نصف المستوي العلوي في نصف المستوي اليميني.

الجواب (على الترتيب) $w=az+b, a>0$

$w=az+b, a<0, b\in\Re$

$w=-i(az+b), a>0, b\in\Re$

❹عين التحويل الخطي الذي ينقل القطعة المستقيمة $[a,b]$ إلى القطعة المستقيمة $[A,B]$ بحيث تنتقل النقطة a إلى النقطة A وبحيث تنتقل النقطة b إلى النقطة B

الجواب:

$$w=\frac{B-A}{b-a}z+\frac{Ab-aB}{b-a}$$

❺عين التحويل الخطي الذي ينقل المثلث ذي الرؤوس $0,1,i$ إلى المثلث ذي الرؤوس $0,2,1+i$

الجواب: $w=(1+i)(1+z)$

❻أوجد التحويل الكسري الذي نقل النقاط :

$$z_1=-i, z_2=0, z_3=1$$

إلى النقاط على الترتيب:

$$w_1=-1, w_2=i, w_3=1$$

ثم أوجد صورة المحور التخيلي منخلال هذا التحويل.

❼أوجد التحويل الكسري الذي نقل النقاط :

$$z_1=\infty, z_2=i, z_3=0$$

إلى النقاط على الترتيب:

$$w_1=0, w_2=i, w_3=\infty$$

ثم أوجد صورة الحلقة $1<|z|<2$.

الجواب: $1 > |z| > \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{z}$

❽أوجد التحويل الكسري الذي ينقل الدائرة $1 = |z|$ إلى المحور الحقيقي بحيث تنتقل نقاط الدائرة $1,i,-1$ إلى نقاط المستقيم $1,0,1-$ على الترتيب .

الجواب: $w = -\frac{z-i}{z+i}$

❾من خلال التابع $w = \frac{1}{z}$ أوجد صورة الدائرتين الآتيتين:

$$a)\ x^2 + y^2 - 2x = 0\ ,\quad b)\ x^2 + y^2 - 4x = 0$$

ثم استنتج صورة المنطقة الواقعة بينهما.

❿ بين أن الدوائر المارة من النقطتين $7 \pm 4\sqrt{3}$ متعامدة الدائرتين :

$$|z| = 1, \qquad |z-1| = 4$$

الفصل الثاني عشر

التحويلات المحافظة الأساسية

تحويل المستوي في نفسه ①

رأينا في الفصل السابق (فقرة ⑥نتيجة⓭) أن الهوموغرافيا :

$$(1) \quad w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$$

تمثل تحويلاً للمستوي المغلق في نفسه .سنبين أن العكس صحيح أيضاً من خلال النظرية الآتية:

نظرية ❶

إذا كان التابع $f(z)$ تحويلاً للمستوي المغلق في نفسه كان التابع هذا تحويلاً كسرياً تناظرياً .

البرهان . من تعريف التحويل المحافظ نستنتج أن التابع $f(z)$ تحليلي في كل المستوي باستثناء النقطة z_0 (على الأكثر) التي تمثل قطباً بسيطاً للتابع في هذه الحالة . فإذا كانت النقطة z_0 منتهية كان

$$Res\, f(z_0)=A$$

وفي الحالة هذه يكون التابع:

$$g(z)=f(z)-\frac{A}{z-z_0}$$

تحليلياً ومحدوداً في كل المستوي العقدي . عندئذ ، من نظرية ليوفيل ، نستنتج أن $g(z)$ يساوي إلى الثابت : $g(z)=c$ وبالتالي سيكون للتابع $f(z)$ الشكل :

$$f(z)=\frac{A}{z-z_0}+c\,.$$

وهو شكل الهوموغرافيا المطلوبة.

أما إذا كان $z_0 = \infty$ فإن القسم الرئيسي في منشور لوران للقطب يقتصر علـى الحـد az وعندئذ $g(z) = f(z) - az$ سيكون تابعاً ثابتاً بحسب نظرية ليوفيـل. وسـيكون للتـابع $f(z)$ شكل التحويل الخطي $f(z) = az + c$: بهذا ينتهي البرهان .

تحويل نصف المستوي في قرص الواحدة ②

سوف نبرهن فيما يلي على وجود عدد غير منته من التحويلات الكسرية التناظرية التي ينقـل كل منها نصف المستوي العلوي إلى قرص الواحدة بشكل محافظ ومع الحفاظ على التناظر.

نظرية ❶

آ) يوجد عدد لانهائي من التحويلات الكسرية التناظرية التي ينقل كل منها نصـف المسـتوي العلوي $im\, z > 0$ إلى قرص الواحدة $|w| < 1$ بشكل محافظ ومع الحفاظ على التناظر. ولكل منها الشكل:

$$w = e^{i\varphi}\, \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad im\, a > 0 \qquad (2)$$

مع العلم أن φ عدد حقيقي كيفي و a نقطة كيفية من نصف المستوي العلوي .

ب) كل تحويل كسري لنصف المستوي العلوي في قرص الواحدة هو تابع كسري من الشكل (2).

البرهان. آ) سنبين أولاً أن التابع (2) ينقل نصف المستوي العلوي $im\, z > 0$ إلى قرص الواحدة بحيث تنتقل النقطة $z = a$ إلى مركز القرص. بالفعل! إذا تحولت z على المحور الحقيقي وكان $a = \alpha + i\beta$ فإن

$$|w| = \left|e^{i\varphi}\right| \left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right| = \left|\frac{x-\alpha-i\beta}{x-\alpha+i\beta}\right| = 1 .$$

نستنتج من ذلك أن المحور الحقيقي $y = 0$ ينتقل إلى دائرة الواحدة $|w| = 1$. من ناحية أخرى وبما أن $im\, z > 0$ فإن $\beta > 0$ وبالتالي من أجل $y > 0$ يكون لدينا:

$$|z-a| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2} = |z-\bar{a}|$$

وهذا يؤدي إلى المتراجحة:

$$\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|<1.$$

وبالتالي إلى المتراجحة $|w|<1$. نستنتج من ذلك أن نصف المستوي العلوي ينتقل إلى قرص الواحدة وأن هذا الانتقال يتم بشكل محافظ نتيجة لتباين التابع الكسري التناظري.

بالإضافة إلى ما تقدم فإننا نلاحظ أن النقطتين $z=a$ و $z=\bar{a}$ تنتقلان إلى النقطتين $w=0$ و $w=\infty$ على الترتيب . ومنه نستنتج أن حزمة الدوائر الزائدية ذات الرأسين $z=a$ و $z=\bar{a}$ تنتقل إلى مجموعة أقطار قرص الواحدة و حزمة الدوائر الناقصية ذات الرأسين $z=a$ و $z=\bar{a}$ تنتقل إلى مجموعة الدوائر ذات المركز المشترك والتي أنصاف أقطارها أقل من الواحد. فالحزم المتعامدة إذاً تنتقل إلى حزم متعامدة مع الحفاظ على التناظر.

ب) سنبين الآن العكس! أي سنبين أن كل تحويل كسري لنصف المستوي العلوي في قرص الواحدة هو بالضرورة تابع كسري من الشكل (2).

ليكن التابع (1) تحويلاً لنصف المستوي العلوي $y>0$ في قرص الواحدة $|w|<1$. عندئذ سيكون $c\neq 0$, لأنه لو كان $c=0$ لانتقل المستقيم $y=0$ إلى مستقيم بدلاً من الانتقال إلى دائرة الواحدة $|w|=1$. وكذلك يجب أن يكون $a\neq 0$, لأنه لو كان $a=0$ فإن النقطة $z=\infty$ الواقعة على محيط المنطقة ستنتقل إلى مركز قرص الواحدة $w=0$. لذلك يمكن كتابة التحويل الكسري بالشكل:

$$w=\frac{a}{c}\left(z+\frac{b}{a}\right)\Big/\left(z+\frac{d}{c}\right)\quad a\neq 0,\ \ c\neq 0$$

بملاحظة أن النقطتين $z_1=-b/a$ و $z_2=-d/c$ تنتقلان من خلال التابع أعلاه إلى النقطتين $w=0$ و $w=\infty$ المتناظرتين بالنسبة لدائرة الواحدة نستنتج تناظر هاتين النقطتين أي النقطتين z_1 و z_2 بالنسبة للمستقيم الحقيقي (من الطبيعي أن تكون الدائرة الواحدية هي صورة المستقيم الحقيقي). والآن بوضع $z_1=-A$ و $z_2=-\bar{A}$ نجد أن :

$$w=\frac{a}{c}\,\frac{z-A}{z-\bar{A}}$$

بما أن النقطة $z=0$ واقعة على المستقيم الحقيقي $y=0$ فإن صورتها واقعة على الدائرة $|w|=1$. ولذلك

$$|w(0)|=\left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{A}{\overline{A}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|=1\ ,\ \frac{a}{c}=e^{i\varphi}.$$

أخيراً وبما أن $w=0$ واقعة داخل قرص الواحدة $|w|<1$ فإن صورتها العكسية $z=a$ واقعة في نصف المستوي العلوي $im\ z>0$. بذلك ينتهي البرهان.

تحويل قرص الواحدة في نفسه ③

سنبين فيما يلي أن كل تحويل لقرص الواحدة في نفسه هو تابع كسري تناظري .

نظرية ❶

آ) يوجد عدد لانهائي من التحويلات الكسرية التناظرية التي ينقل كل منها قرص الواحدة $|z|<1$ إلى قرص الواحدة $|w|<1$ بشكل محافظ ولكل منها الشكل:

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-a}{\overline{a}z-1},\quad |a|<1\quad ,\ \varphi\in\Re \tag{3}$$

(مع العلم أن φ عدد حقيقي كيفي و a نقطة كيفية من قرص الواحدة) .

ب) كل تحويل كسري لقرص الواحدة في نفسه هو من الشكل (3).

البرهان: آ) سوف نبين أولاً أن كل تابع من الشكل (3) ينقل قرص الواحدة $|z|<1$ إلى نفسه $|w|<1$. في سبيل ذلك لنفرض أن $|z|=1$ ولنضع $z=e^{it}\ ,\ 0\le t\le 2\pi$. عندئذ :

$$|w|=\left|e^{i\varphi}\right|\left|\frac{e^{it}-a}{1-\overline{a}e^{it}}\right|=\frac{\left|e^{it}-a\right|}{\left|e^{it}\right|\left|e^{-it}-\overline{a}\right|}=1 \tag{4}$$

لأن

$$\left|e^{it}-a\right|=\left|\overline{e^{it}-a}\right|=\left|e^{it}-\overline{a}\right|$$

ومنه $|w|=1$. وبما أن النقطة a تنتقل إلى مركز القرص $|w|<1$ فالتحويل (3) إذا ينقل قرص الواحدة $|z|<1$ إلى نفسه $|w|<1$.

ب) سنبين الآن أن كل تحويل كسري لقرص الواحدة في نفسه هو من الشكل (3). ليكن التابع (1) تحويلاً لقرص الواحدة $|z|<1$ في نفسه $|w|<1$. عندئذ $a\neq 0$ و $d\neq 0$ ، لأنه لو كان $a=0$ لانتقلت اللانهاية إلى مركز القرص $w=0$ و لو كان $d=0$ لانتقلت النقطة $z=0$ إلى ∞ . لنضع $z_1=-b/a$ و $z_2=-c/d$. عندئذ سيكون للتابع (1) الشكل

$$w=-\frac{a}{d}\frac{z-z_1}{z_2z-1},\quad |a|<1$$

وينبغي على النقطتين $z=z_1$ و $z=1/z_2$ أن تتناظرا بالنسبة للدائرة $|z|=1$ لأن صورتيهما $w=0$ و $w=\infty$ متناظرتان بالنسبة للدائرة $|w|=1$. ولذلك $z_2=\overline{z}_1$.

فإذا وضعنا $z_1=A$ كان $z_2=\overline{A}$. لنلاحظ الآن أن النقطة $z=A$ تنتمي إلى داخل قرص الواحدة لأن صورتها $w=0$ واقعة ضمن القرص $|w|<1$ ولدينا في الوقت نفسه من أجل $z=e^{it}\ ,\ 0\leq t\leq 2\pi$ أن $|w|=1$.ينتج من ذلك ومن حقيقة أن النسبة في (3) تساوي إلى الواحد أن $\left|-\frac{a}{d}\right|=1$ وبالتالي $-\frac{a}{d}=e^{i\varphi}$ وهو المطلوب برهانه.

④ JHUKOVSKI FUNCTION تابع جوكوفسكي

تعريف 1. يعرف التابع الذي له الشكل

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\qquad (5)$$

بتحويل جوكوفسكي .

هذا التابع تحليلي في كل المستوي العقدي باستثناء النقطة $z=0$ التي تمثل قطباً بسيطاً للتابع . وهو إلى ذلك متباين في قرص الواحدة $|z|<1$ لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من قرص الواحدة لدينا

$$|z_1| < 1 , \ |z_2| < 1 , \quad |z_1 z_2| < 1$$

وبالتالي

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$$

أو ما يكافئها

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$$

وتكون هذه المعادلة صحيحة في كل قرص الواحدة فقط إذا كان $z_1 = z_2$.

بشكل مشابه نستطيع أن نبين أن تابع جوكوفسكي متباين في كل من المجموعات الآتية:

أ) خارج قرص الواحدة $|z| < 1$.

ب) في نصف المستوي العلوي $Im\, z > 0$.

ت) في نصف المستوي السفلي $Im\, z < 0$.

في سبيل إيجاد كيفية انتقال قرص الواحدة إلى نقاط المستوي نضع :

$$z = re^{it} , \quad 0 \le t \le 2\pi , 0 < r < 1 , \ w = u + iv$$

ونعوض في (5) فنحصل على:

$$w = \frac{1}{2}\left(re^{it} + \frac{1}{re^{it}}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t$$

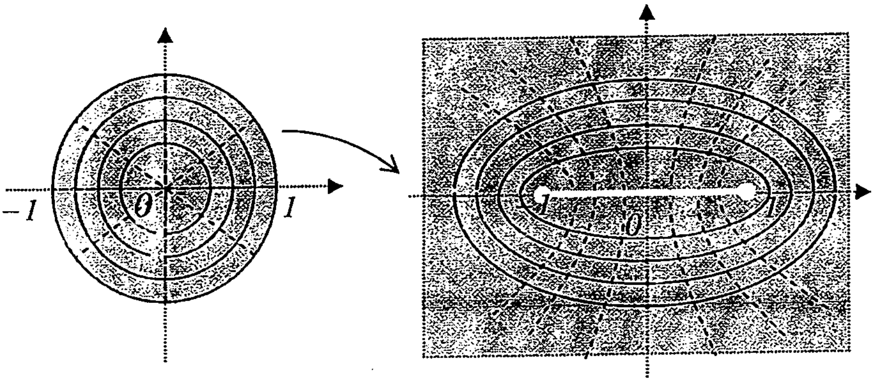
وعندئذ يكون

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t .$$

بتربيع الطرفين في كل من العلاقتين أعلاه ثم الجمع نتخلص من الوسيط t ونحصل على المعادلة

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \qquad (7)$$

الذي تمثل قطعاً ناقصاً محرقاه $w = \pm 1$.



شكل **1**

نستنتج من ذلك أن صورة الدوائر ذات المركز $z = 0$ ونصف القطر $r < 1$ تنتقل من خلال التحويل (19) إلى منحنيات القطوع الناقصة (6) (شكل **1**). وهذه القطـوع مشـتركة فـي المحرقين $w = \pm 1$ لأن

$$\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2 = 1, \quad 0 < r < 1.$$

عندما تسعى $r \to 1$ فإن $v \to 0$ ويتحول منحني القطع (6) إلى القطعة المستقيمة $[-1,1]$ لأنه لدينا في هذه الحالة :

$$u = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) = \cos t, \quad -1 \le u \le 1$$

أما إذا سعى r نحو الصفر فإن نقاط منحني القطع (6) تبتعد نحو اللانهاية.

نتيجة ❶

يمثل تابع جوكوفسكي (6):

أ) تحويلاً للقرص $|z| < r$ حيث $r < 1$ إلى خارج القطع الناقص (7)

ب) تحويلاً محافظاً لقرص الواحدة $|z| < 1$ في المستوي العقدي المحذوف منه القطعة المستقيمة $[-1,1]$.

ملاحظة ❶

إذا بدلنا z بالمقدار $1/z$ في (6) فإن القرص $|z|<1$ ينتقل إلى خارجه $|z|>1$ بينما يبقى الطرف الأيمن (إي تابع جوكوفسكي) على حاله والذي يتغير فقط هو جهة الحركة .
نستنتج من ذلك صحة النتيجة الآتية:

نتيجة ❶

يمثل تابع جوكوفسكي (6):

ت) تحويلاً للقرص $|z|<r$ حيث $r>1$ إلى خارج القطع الناقص (7)

ث) تحويلاً محافظاً للقرص $|z|<1$ في المستوي العقدي المحذوف منه القطعة المستقيمة $[-1,1]$.

التطبيقات العملية

تمارين محلولة ◉

تمرين ①. باستخدم التابع الأسي والتحويل الكسري انقل الشريط $0<y<\beta$ بشكل محافظ إلى قرص الواحدة.

الحل. بملاحظة أن :

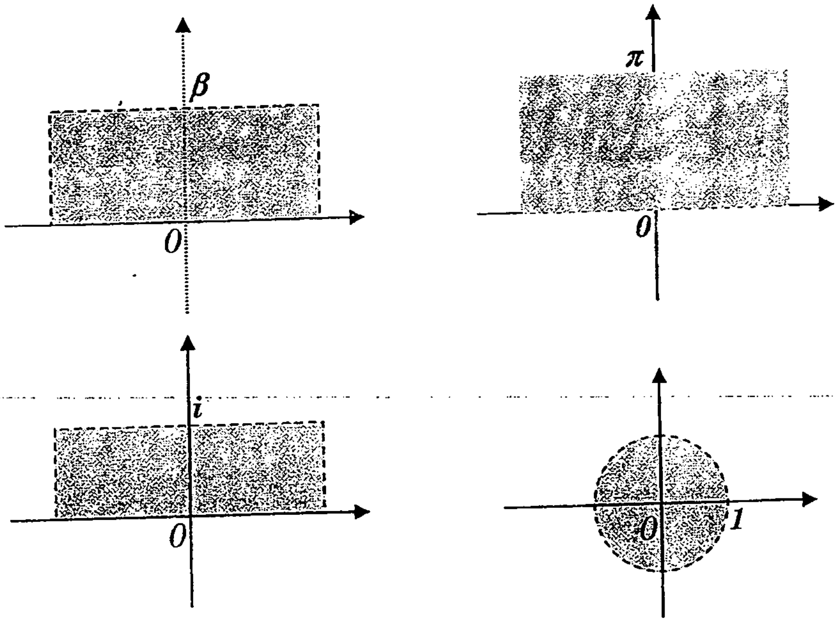
$$S=\frac{z}{\beta}:0<y<\beta\longrightarrow 0<y<1$$

$$\varsigma=\pi S=\frac{\pi}{\beta}z:0<y<\beta\longrightarrow 0<y<\pi$$

$$w=e^{\varsigma}=e^{\pi S}=e^{\frac{\pi}{\beta}z}:0<y<\pi\longrightarrow y>0$$

نحصل على تحويل الشريط المعطى إلى نصف المستوي العلوي (شكل2). وبما أن نصف المستوي العلوي $y>0$ ينقل من خلال التحويل الكسري إلى قرص الواحدة فإننا نستنتج أن تركيب التوابع السابقة يعطي التحويل المطلوب:

$$h = e^{i\varphi}\frac{e^{\varsigma} - a}{e^{\varsigma} - \bar{a}}, \quad im\, a > 0$$



شكل 2

تمرين ②. بين أن تابع القوة

$$w = z^n \;, \; n \ge 2 \;, n \in \aleph$$

ينقل بشكل محافظ القطاع مثلاً $0 < \varphi < 2\pi/n$ إلى المستوي العقدي محذوفاً منه نصف المستقيم الحقيقي الموجب ثم استخدم الناتج لنقل هذا القطاع إلى قرص الواحدة.

الحل . نعلم أن تابع القوة المعطى هو تمثيل زاوي مطابق في المستوي باستثناء النقطة $z = 0$ التي ينعدم فيها المشتق. وهو نوني القيمة في كل جوار للنقطة $z = 0$ ولكنه متباين في أي قطاع لاتزيد زاويته عن 2π . فهو ينقل القطاع $0 < \varphi < 2\pi/n$ إلى المستوي العقدي محذوفا منه نصف المستقيم الحقيقي الموجب لأنه إذا كان:

$$z = re^{i\varphi}, \; 0 < \varphi < 2\pi/n \,, \quad r > 0$$

فإن

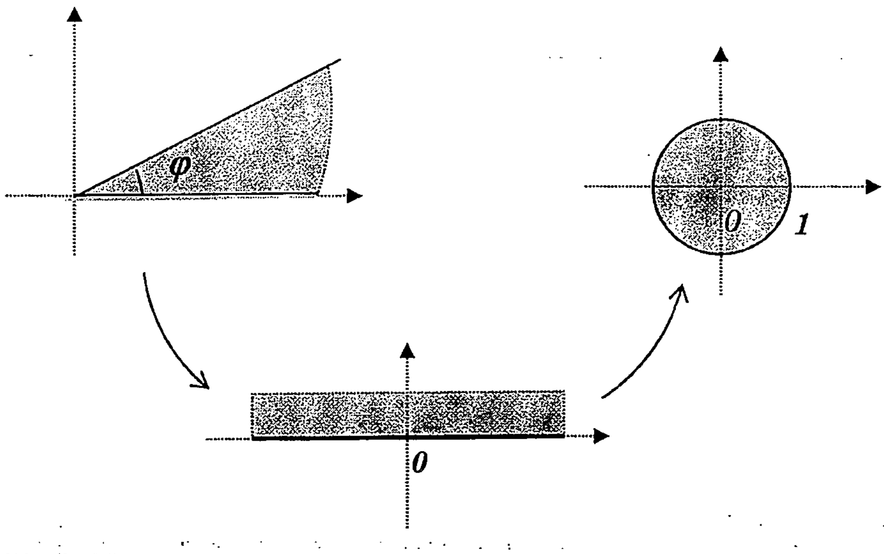
$$w = r^n e^{in\varphi} = Re^{i\Phi} \,, \quad R > 0 \,, \; 0 < \Phi < 2\pi$$

ومن ناحية ثانية بالامكان نقل داخل أي قطاع محدد بالزاوية φ إلى القرص الواحدة عن طريق تركيب التحويلين المحافظين : تابع القوة والتحويل الكسري الآتيين:

$$(8) \qquad \varsigma = z^{\frac{\pi}{\varphi}} ,$$

$$(8') \qquad w = e^{i\theta} \frac{\varsigma - a}{\varsigma - \bar{a}}, \quad im\, a > 0$$

وهذا ناتج من أنه إذا كان القطاع معين بالمتراجحة $0 < arg\, z < \varphi$ فإن تابع القوة (8) ينقل هذا القطاع إلى نصف المستوي العلوي $im\, \varsigma > 0$ لأن نصف المستقيم الحقيقي الموجب ينتقل إلى نصف المستقيم الحقيقي الموجب ونصف المستقيم المحدد بالزاوية φ ينتقل إلى نصف المستقيم الحقيقي السالب. ومن ناحية أخرى فإن التحويل الكسري $(8')$ ينقل نصف المستوي العلوي إلى قرص الواحدة (شكل3).



شكل 3

تمرين ③. بين أن التابع $w = sin\, z$ يمثل تحويلاً محافظاً للشريط غير المحدود $-\pi/2 < re z < \pi/2$ في المستوي العقدي المحذوف منه نصفي المستقيمين الحقيقيين :

$$-\infty < u < -1 \quad , \quad 1 < u < \infty$$

ثم بين أن صورة الشبكة المكونة من المستقيمات الموازية للمحورين هي شبكة متعامدة من القطوع الزائدة والقطوع الناقطة.

الحل. نعلم أن التابع $w = sin\, z$ تحليلي ومتعدد القيمة (التباين) في المستوي العقدي ولكنه وحيد التباين في كل شريط من الشكل :

$$-\pi/2+k\pi<rez<+\pi/2+k\pi\,,\quad k=0,\pm 1,\pm,...$$

لأن مشتق التابع في هذا الشريط مختلف عن الصفر. لنجد صورة الشبكة المتعامدة المؤلفة من المستقيمات الموازية للمحور التخيلي ضمن الشريط $-\pi/2<rez<\pi/2$ والقطع المستقيمة الموازية للمحور الحقيقي والواقعة ضمن الشريط المذكور. لنضع أولاً التابع $sin\,z$ بواسطة قسميه الحقيقي والتخيلي $w=u+iv$ من خلال علاقتي أولر. لدينا

$$sin\,z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}=\frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{+ix}}{2i}$$
$$=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}sin\,x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}cos\,x$$
$$=cosh\,y\,sin\,x+i\,sinh\,y\,cos\,x$$

وبذلك يكون

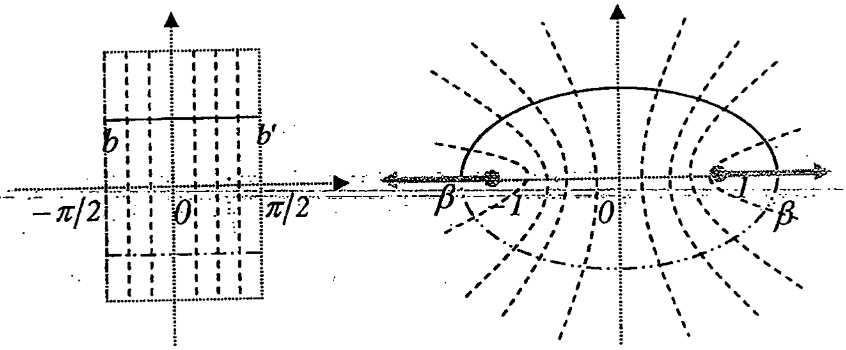
$$u=cosh\,y\,sin\,x\,,\;v=sinh\,y\,cos\,x \tag{9}$$

إذا إذا فرضنا الآن أن:

$$x=\alpha=const. \tag{10}$$

كان

$$u=cosh\,y\,sin\,\alpha\,,\;v=sinh\,y\,cos\,\alpha \tag{10'}$$



شكل4

وبالتالي:

$$\frac{u}{sin\,\alpha}=cosh\,y\,,\quad \frac{v}{cos\,\alpha}=sinh\,y$$

الأمر الذي يؤدي بعد تربيع الطرفين في هاتين العلاقتين ثم طرحهما إلى العلاقة:

$$\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{v^2}{\cos^2\alpha}=1 \qquad (11)$$

وذلك لأن $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$.نستنتج من ذلك أن كل مستقيم موازٍ للمحور التخيلي من الشكل (10) ينتقل إلى قطع زائد من الشكل (11). وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $x=0.$ يكون $u=0.$ وبالتالي فالمحور التخيلي ينتقل إلى المحور التخيلي.

لنجعل الآن z تتحول على القطعة المستقيمة الموازية للمستقيم الحقيقي ضمن الشريط $-\pi/2<rez<\pi/2$ ولتكن

$$z=x+i\beta \;,-1<x<1 \qquad (12)$$

معادلة هذه القطعة المستقيمة. إذا كان $y=0$ فإن العلاقتين (9)في تؤديان إلى العلاقتين:

$$u=\sin x\,,\; v=0$$

وهذا يعني القطعة المستقيمة $-\pi/2<rez<\pi/2$ الواقعة على المحور الحقيقي تنتقل إلى القطعة المستقيمة $-1<u<1$ الواقعة على المستقيم الحقيقي أيضاً . لاحظ أن المجال $(-\pi/2,\pi/2)$ ينتقل إلى المجال $(-1,1)$ الأمر الذي يتطابق مع خواص التابع الحقيقي $\sin x$.أما إذا كان $y\neq 0$ فإن التخلص من الوسيط x في العلاقتين (9) يؤدي إلى العلاقة:

$$\frac{u}{\frac{1}{4}\cosh^2\beta}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\sinh^2\beta}=1 \qquad (13)$$

نستنتج من ذلك أن كل قطعة مستقيمة من الشكل (12) تنتقل إلى قطع ناقص من الشكل (13).
يبقى أن نلاحظ أن شبكة القطوع الزائدة (11) متعامدة مع شبكة القطوع الناقصة (13) .

وفي النتيجة نلاحظ أن التابع $w=\sin z$ يمثل تحويلاً محافظاً للشريط غير المحدود $-\pi/2<rez<\pi/2$ في المستوي العقدي المحذوف منه نصفي المستقيمين الحقيقيين :

$$-\infty<u<-1 \quad , \quad 1<u<\infty$$

تمارين غير محلولة

❶.بين أن التابع:

$$w=i\frac{z-i}{z+i}$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى قرص الواحدة ثم تحقق أن حزمتي الدوائر الناقصية والزائدية ذات الرأسين $z=\pm i$ تنتقل إلى حزمتين من الدوائر المتعامدة ذات الرأسين $w=0$ و اللانهاية.

❷ بين أن التابع:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى نصف المستوي العلوي ثم تحقق أن المحور الحقيقي ينتقل إلى المحور الحقيقي.

❸ بين أن التابع $w = \cos z$ يمثل تحويلاً محافظاً للشريط غير المحدود:

$$k\pi < re z < (k+1)\pi \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

في المستوي العقدي المحذوف منه نصفي المستقيمين الحقيقيين

$$-\infty < u < -1 \ , \quad 1 < u < \infty$$

❹ بين أن الفرع الوحيد التعيين للتابع الجذر $\sqrt[n]{z}$ ينقل بشكل محافظ المستوي المحذوف منه نصف مستقيم يبدأ من الصفر إلى القطاع :

❹

$$2(k-1)2\pi/n < \varphi < 2k\pi/n \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

❺ بين أن التابع

$$w = z^m \ , \ m \geq \frac{1}{2}$$

تحويل محافظ للقطاع المحدد بالزاوية π/m إلى نصف المستوي العلوي بحيث ينتقل :

آ) النقطة 0 إلى النقطة 0.

ب) النقطة 1 إلى النقطة 1.

ج) نصف المستقيم الحقيقي الموجب إلى نصف المستقيم الحقيقي الموجب.

د) نصف المستقيم المحدد بالزاوية $\varphi = \pi/m$ إلى نصف المستقيم الحقيقي السالب .

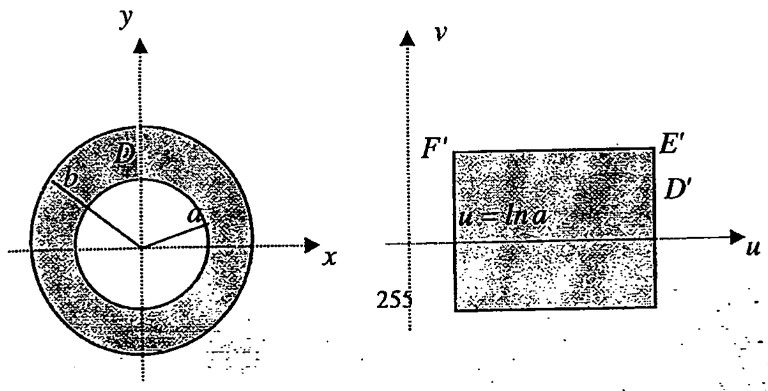
❻ بين أن التابع :

$$w = \log z$$

تحويلاً محافظاً للحلقة $a < |z| < b$ في المستطيل

$$R = \{(u,v) : \log a < u < \log b \ , \ -\pi < v < \pi\}$$

بحيث تكون النقاط المتقابلة كما على الشكل 5 :



شكل 5

E F $\quad$ G C $\quad$ B' $\quad$ C'

A H $\quad$ $u = \ln b$ B'

H' $\quad$ A'

B

❼ أوجد التحويل الكسري الذي ينقل قرص الواحدة $|z| < 1$ إلى القرص $|z-1| < 1$ بحيث تنتقل النقطتان $0,1$ إلى النقطتين $\frac{1}{2},0$ على الترتيب.

الجواب: $z = \dfrac{1-2w}{1+w}$.

❽ أوجد التحويل الكسري الذي ينقل قرص الواحدة $|z| < 1$ إلى القرص $|z-1| < 2$ بحيث تنتقل النقطتان $-1,0$ إلى النقطتين $-1,i$ على الترتيب.

الجواب: $z = -(1+i)\dfrac{w-i}{w+1-2i}$.

❾ أوجد التحويل المحافظ الذي ينقل القطاع $0 < \arg z < \pi/4$:إلى قرص الواحدة بحيث تنتقل النقطة $z_0 = e^{\pi i/8}$ إلى مركز القرص $w_0 = 0$ و مركز القرص $z_1 = 0$ إلى النقطة $w_1 = 1$.

الجواب: تركيب التحويلين:

$$\varsigma = z^2 \ , w = e^{i\varphi}\frac{\varsigma - i}{\varsigma + i} , \ e^{i\varphi} = -1$$

❿ أوجد التحويل المحافظ الذي ينقل الربع الأول من المستوي إلى قرص الواحدة بحيث تنتقل النقطة $z_0 = 1+i$ إلى مركز القرص.

الجواب: تركيب التحويلين:

$$\varsigma = z^2 \ , \quad w = \frac{\varsigma - 2i}{\varsigma + 2i}$$

المراجع

المراجع العربية

1) د. حسن بدور ،

التحليل العقدي 1 . مطبوعات جامعة تشرين 2005

2) د. حسن بدور ،

التحليل العقدي 2 . مطبوعات جامعة تشرين 2006

3) د. محمد كتكت ،

مبادئ التحليل المركب . دار الشروق ، جدة 1999

المراجع الأجنبية

[1] Churchill,R . V.

Complex Varibles and Applicatios , McGrow-hill New York (8th Revised edition) 2008

[2] David McMahon

Complex Variables, *Published 2008 by McGraw-Hill Professional, 1st Edition*

[3] Jenkins, A.

Univalent Functions and Conformal Mapping . Berlin Gottengen-Heidelberg 1968

[4] Murray R . Spiegel

Theory and Problems of Complex Variables . Shaum's Outline Series 1974

[5] **Murray Spiegel, Seymour Lipschutz, John Schiller,**
Theory and Problems of Complex Variables , **Dennis Spellman**
Paperback, Published 2009 by McGraw-Hill, 2nd Edition

[6] **Sidorov V. , Fedoryuk M. Shabunin M.**
Lecture on the Theory of Complex Variables **. Mir publisher ,**
Moscow, 1985

[7] **Stephen D. Fisher**
Complex Varialel , Publishedby Dover Publications, 2nd Edition
1999

Index (English) ثبت المصطلحات (عربي)

أ

ت

Infinite Integral .... بالتكامل المعتل

Linear Integral .... تكامل المنحني

Functions Analytic .... توابع تحليلية

Functions Hyperbolic .... توابع قطعية

ث

Ordered Pair .... ثنائية مرتبة

ج

Cauchy Product .... جداء كوشي

Zeros of Function .... جذر التابع

n-th Root The .... جذر نوني

of Point Neighborhood .... جوار النقطة

Annulus .... حلقة مفتوحة

Neighborhood of Infinity .... جوار اللانهاية

ح

Annulus .... حلقة مفتوحة

د

Circle .... دائرة

Orthogonal Circle .... دوائر متعامدة

ر

Residuum of function .... راسب التابع

س

Argument .... سعة
Argument Principle .... سعة رئيسية
Series of Complex Functions .... سلسلة التوابع العقدية
Number Series .... سلسلة العددية
(Taylor) Power Series .... سلسلة القوى(تايلور)
Laurent Series.. سلسلة لورانت

ش

Exponential Form .... شكل أسي للعدد العقدي
Cartesian Form .... شكل ديكارتي للعدد العقدي

ص

Formula Cauchy Integral .... صيغة كوشي التكاملية

ط

The Difference .... طرح

Modulus .... طويلة العدد العقدي

ع

number Conjugate .... عدد مرافق
Euler Formulae .... علاقتا أولر

ق

Disc .... قرص
Open disc .... قرص مفتوح
Disc of Convergence.. قرص التقارب
Imaginary Part .... قسم تخيلي

Real Part .... قسم حقيقي
Principle Part .... قسم رئيسي
Regular Part .... قسم نظامي
Segment .... قطعة مستقيمة

The Division .... القسمة

Pole .... قطب
Simple Pole .... قطب بسيط
Power .... قوة
Principle Value of Argument .... قيمة رئيسية للسعة
Mean Value .... قيمة متوسطة

Absolute Value .... قيمة مطلقة

ك

Binomial .... كثير الحدود

م

Argument Principle .... مبدأ السعة
Maximum Principle. ....مبدأ القيمة القصوى للتابع

Real Variable .... متحول حقيقي

Complex Variable .... متحول عقدي

Multy connected .... متعددة الترابط
Complement of Set ... . متممة المجموعة

Set of Complex Numbers The .... مجموعة الأعداد العقدية
Connected .... مجموعة مترابطة
Compact Set .... مجموعة المتراصة

Bounded set .... مجموعة محدودة
Convex .... محدبة

The Imaginary Axis .... محور تخيلي
The Real Axis .... محور حقيقي
Image of function ... . مستقر التابع
Straight Line .... المستقيم

Complex Plane The .... مستوي عقدي

Differential Laplace Equation ... . معادلة لابلاس التفاضلية

Tangent of Curve .... مماس للمنحنى
Smooth Curve .... منحي أملس
Closed Curve .... منحي مغلق
Regular Curve .... منحي نظامي
Curves Orthogonal .... منحنيات متعامدة
Domain .... منطقة
Elementary Region .... المنطقة البسيطة

Domain of function .... منطلق التابع

ن

Half Plane Lower .... نصف المستوي السفلي
Upper Half Plane .... نصف الميستوي العلوي
Half Plane Left .... نصف المستوي اليساري
Half Plane Right .... نصف المستوي اليميني
Radius of Conversion .... نصف قطر التقارب
Fundamental Theorem of Algebra ....النظرية الأساسية في الجبر

Green Theorem .... نظرية غرين

Theorem Cauchy Integral .... نظرية كوشي التكاملية
Symmetrical Points .... نقاط متناظرة

Point of accumulation.. نقطة تراكم
Exterior point .... نقطة خارجية
Interior point .... نقطة داخلية
Essential Point of singularity .... نقطة شاذة أساسية
Removable point .... نقطة شاذة بسيطة
Boundary point .... نقطة طرفية (محيطية)
Point of singularity.. نقطة معزولة
Multi-valued .... نوني القيمة

و

Imaginary Unit .... واحدة تخيلية
Single-valued .... وحيد القيمة أو وحيد التباين
Simply Connected .... وحيدة الترابط

المدققون العلميون

(على الجزء المؤلف من قبل الدكتور محمد علي)

الدكتور محمد بشير قابيل — قسم الرياضيات — كلية العلوم — جامعة دمشق

الدكتور أحمد الوسوف — قسم الإحصاء — كلية العلوم — جامعة تشرين

الدكتور عدنان ظريف — قسم الرياضيات — كلية العلوم — جامعة تشرين

رياضيات + فيزياء + كيمياء + حرشي

المدقق اللغــوي

الدكتورة عبير بركات — قسم اللغة العربية

كلية الآداب والعلوم الإنسانية

جامعة تشرين