طرائق التكامل

تويتر : @timath2021

معلومات

هنا أقدم بعض المعلومات عن الملف .

- الكتب التي تم الإعتماد عليها

1. مبادئ التغاضل و التكامل (الجزء الثاني) ,تأليف د.معروف سمحان واخرون.
2. CALCULUS The Classic Editoin , تأليف Swokowski
3. CALCULUS EARLY TRANSCENDENTALS , تأليف ANTON HOWARD واخرون.

- جميع الموضوعات تم شرحها على قناة اليوتيوب ويمكنكم زيارة القناة عن طريق الباركود التالي

- تويتر

- قناة التيليجرام

- للتواصل

المحتويات

1 التكامل بالتعويض

مبرهنة 1.1 لتكن الدالة g قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ ومشتقاتها متصلة . ولتكن f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g . إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = F\left(g(x)\right) + C \,,\; \forall x \in [a,b]$$

• ملاحظات :

1. لكي نحسب التكامل $\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx$ نضع $u = g(x)$ ويكون $du = g'(x)\, dx$ و نستبدل المتغير x بالمتغير u لنحصل على التكامل $\int f(u)\, du$.
2. الهدف من طريقة التكامل بالتعويض هو التحول من تكامل دالة ذات شكل معقد وصعب التعامل معه الى تكامل دالة ذات شكل بسيط و سهل التعامل معه وأقصد بذلك أنه بعد استخدام تعويض مناسب نتحول الى تكامل دالة نعرف الدالة الأصلية لها أو تكامل بسيطة الشكل .
3. إذا وضعنا $u = g(x)$ إذا كانت $g'(x)$ موجودة مع dx فإن الطريقة دائماً تنجح .

تنبية: من المفيد استخدام هذه الطريقة حتى اذا كانت $g'(x)$ غير موجودة.

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int \cos(5x)\, dx$

   الحل :

$$u = 5x \Longrightarrow du = 5\, dx \Longrightarrow \frac{1}{5} du = dx$$

$$\int \cos(5x)\, dx = \int \cos u \,\frac{1}{5}\, du = \frac{1}{5}\int \cos u\, du = \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$$

2. احسب التكامل $\int e^{2x}\, dx$

   الحل :

$$u = 2x \Longrightarrow du = 2\, dx \Longrightarrow \frac{1}{2} du = dx$$

$$\int e^{2x}\, dx = \int e^{u}\,\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\int e^{u}\, du = \frac{1}{2} e^{u} + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

3. احسب التكامل $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

الحل :

$$u = x^2 + 9 \Longrightarrow du = 2x\,dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = xdx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C$$
$$= \sqrt{x^2+9} + C$$

4. احسب التكامل $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

الحل :

$$u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx$$
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1}(e^x) + C$$

5. احسب التكامل $\int x^2\sqrt{x-1}dx$

الحل :

$$u = x - 1 \Longrightarrow du = dx$$

وبما أن $u = x - 1$ فإن

$$x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$$

$$\therefore \int x^2\sqrt{x-1}dx = \int \left(u^2 + 2u + 1\right)\sqrt{u}du = \int \left(u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}\right) du$$
$$= \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

1.1 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 70 احسب التكامل المعطى :

1. $\int x\left(x^2+1\right)^{50}\, dx$
2. $\int \sqrt{2x+3}\, dx$
3. $\int \sin\left(x+9\right)\, dx$
4. $\int \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\, dx$
5. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$
6. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{3}\right)-8\right]^5}$
8. $\int \left(x+\sec^2(\pi x)\right)\, dx$
9. $\int t^4\sqrt[3]{3-t^5}\, dt$
10. $\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$
11. $\int x\left(x^2+1\right)^3\, dx$
12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\, dx$
13. $\int x\sqrt[3]{7-6x^2}\, dx$
14. $\int x^3\cos\left(x^4+1\right)\, dx$
15. $\int \frac{x}{x^4+1}\, dx$
16. $\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^4-9}}\, dx$
17. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}\, dx$
18. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$
19. $\int \frac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)^3}\, dx$
20. $\int x\sec^2\left(x^2\right)\, dx$
21. $\int \sec\left(2x\right)\tan\left(2x\right)\, dx$
22. $\int \cos x\sqrt{\sin x+1}\, dx$
23. $\int \sec^2 x\tan^6 x\, dx$
24. $\int \sec x\left(\sec x-\tan x\right)^{2020}\, dx$
25. $\int \cos^3 x\, dx$
26. $\int \frac{\sin\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$
27. $\int \sec x\tan x\sqrt{4\sec x+1}\, dx$
28. $\int \frac{\left(1+x^{2/3}\right)^3}{x^{1/3}}\, dx$
29. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\, dx$
30. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$
31. $\int \frac{\sin^{-1}\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta$
32. $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}\theta}}{1+\theta^2}\, d\theta$
33. $\int \cot x\csc^2 x\, dx$
34. $\int \left[\csc(\sin x)\right]^2\cos x\, dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-3x)^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(5+\cos(2x))^3}\,dx$

37. $\displaystyle\int \sin(\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$

38. $\displaystyle\int \sec^2(\cos 3\theta)\sin 3\theta\,d\theta$

39. $\displaystyle\int \left(4x^2-12x+9\right)^{2/3}\,dx$

40. $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}\,dx$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2-x}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$

43. $\displaystyle\int \sin^3(3\theta)\,d\theta$

44. $\displaystyle\int \tan^2(3\theta)\,d\theta$

45. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^{-2/3}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{7-3\sin 2\theta}}\,d\theta$

47. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5+x}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-3x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{\sec^2}{\sqrt{1-\tan^2 x}}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+1}\,d\theta$

52. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+3}\,dx$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\,dx$

54. $\displaystyle\int \sin x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)^2\,dx$

55. $\displaystyle\int (2+5\cos x)^3\sin x\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

57. $\displaystyle\int \sec x\tan x\sqrt{1+\sec x}\,dx$

58. $\displaystyle\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx$

59. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^3+1}\,x^5\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

61. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\,dx$

64. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\,dx$

65. $\displaystyle\int x(x-1)^{10}\,dx$

66. $\displaystyle\int (x+1)^2(1-x)^5\,dx$

67. $\displaystyle\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx$

68. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta$

70. $\displaystyle\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{\left(2+\tan^3 x\right)^2}\,dx$

71. إذا كان $\int_0^9 f(x)\,dx = 5$ فاحسب $\int_0^3 f(3x)\,dx$

72. إذا كان $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ فاحسب $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

73. إذا كان $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$ فاحسب $\int_{-2}^0 x f\left(x^2\right)\,dx$

74. إذا كان $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$ فاحسب $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$

75. (ا) أثبت أن $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)-f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

(ب) استخدم الفقرة (أ) لحساب $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{3-x}}\,dx$

(ج) استخدم الفقرة (أ) لحساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

76. احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

77. احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

78. احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdot+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$

79. احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2+k^2}$

2.1 أجوبة بعض التمارين

1. $\int x\left(x^2+1\right)^{50}\, dx$

الحل:

$$u = x^2+1 \Longrightarrow du = 2x\,dx$$

$$\therefore \int x\left(x^2+1\right)^{50}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)\, dx = \frac{1}{2}\int u^2\,du = \frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+C = \frac{\left(x^2+1\right)^3}{6}+C$$

2. $\int \sqrt{2x+3}\,dx$

الحل:

$$u = 2x+3 \Longrightarrow du = 2\,dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}+C\end{aligned}$$

4. $\int \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx$

الحل:

$$u = 3+\frac{1}{x} \Longrightarrow du = \frac{-1}{x^2}\,dx \Longrightarrow -du = \frac{dx}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx = -\int u^{\frac{3}{2}}\,du &= -\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C \\ &= -\frac{2\left(3+\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}}{5}+C\end{aligned}$$

5. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

الحل:

$$u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x\,dx$$

$$\therefore \int \sin^2 x\cos x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+C = \frac{(\sin x)^3}{3}+C$$

6. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$$u=\sqrt{x} \Longrightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Longrightarrow 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\sin u + C = 2\sin\left(\sqrt{x}\right)+C$$

10. $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

الحل:

$$u=x-1 \Rightarrow du=dx\,, u=x-1 \;\Rightarrow\; x=u+1$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}\,du &= \int \left(u^2+2u+1\right)\,u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \int \left(u^{2+\frac{1}{2}}+2u^{1+\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)\,du\\ &= \int u^{\frac{5}{2}}\,du+\int u^{\frac{3}{2}}\,du+\int u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

18. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

الحل:

$$u=x^2+1 \Rightarrow du=2x\,dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2}=x\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

25. $\int \cos^3 x\,dx$

الحل:

$$u=\sin x \;\Rightarrow\; du=\cos x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\,\cos x\,dx = \int \left(1-u^2\right)\,du&\\ &= u-\frac{u^3}{3}+C\\ &= \sin x-\frac{(\sin x)^3}{3}+C\end{aligned}$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx \quad .29$$

الحل:

$$u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx = \int u^3\, 2du = 2\int u^3 du = 2\frac{u^4}{4} + C = \frac{(1+\sqrt{x})^4}{2} + C$$

$$\int \left(4x^2 - 12x + 9\right)^{2/3}\, dx \quad .39$$

الحل:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2\,(2x)\,(3) + 3^2 = (2x-3)^2$$

$$\int \left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{2}{3}} dx = \int \left((2x-3)^2\right)^{\frac{2}{3}}\, dx = \int (2x-3)^{\frac{4}{3}} \;\; ,dx$$

$$u = 2x-3 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\begin{aligned}
\int \left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{2}{3}}\, dx = \int (2x-3)^{\frac{4}{3}}\, dx &= \int u^{\frac{4}{3}}\,\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\,(2x-3)^{\frac{7}{3}} + C \\
&= \frac{3}{14}\,(2x-3)^{\frac{7}{3}} + C
\end{aligned}$$

$$\int x\sqrt{x-3}\, dx \quad .40$$

الحل:

$$u = x-1 \Rightarrow du = dx \text{ , } x = u+1$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x-3}\, dx = \int (u+1)\,\sqrt{u}\, du &= \int (u+1)\, u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)\, du \\
&= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}\,(x-1)^{\frac{5}{2}} + 2\,(x-1)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

2 التكامل بالتجزئ

مبرهنة 1.2 إذا كان $u = f(x)$, $v = g(x)$ وكانت كل من f' و g' متصلة , فإن

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int xe^x\,dx$

الحل :

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\therefore \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2. احسب التكامل $\int x\cos x\,dx$

الحل :

$$u = x \qquad dv = \cos x dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\therefore \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

3. احسب التكامل $\int \ln(3x-2)\,dx$

الحل :

$$u = \ln(3x-2) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{3}{3x-2}dx \qquad v = x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\therefore \int \ln(3x-2)\ dx = x\ln(3x-2) - \int x\frac{3}{3x-2}\,dx$$
$$= x\ln(3x-2) - \int \frac{3x}{3x-2}\,dx$$
$$= x\ln(3x-2) - \int \frac{(3x-2)+2}{3x-2}\,dx$$
$$= x\ln(3x-2) - \int dx - 2\int \frac{1}{3x-2}\,dx$$
$$= x\ln(3x-2) - x - 2\,\frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx$$
$$= x\ln(3x-2) - x - \frac{2}{3}\ln(3x-2) + C$$

4. احسب التكامل $\int e^x \cos x\, dx$

الحل :

$$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\therefore I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx$$
$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \qquad (1)$$

الان نوجد $\int e^x \sin x\, dx$ باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$u = \sin x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$
$$= e^x \sin x - I$$

الان نعود ونعوض في (1) لنحصل على

$$\therefore I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx$$
$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$\therefore I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \Longrightarrow 2I = e^x \cos x + e^x \sin x$$
$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$$
$$\therefore \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

5. احسب التكامل $\int x \ln x \, dx$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = x dx$$
$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$\therefore \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$
$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

1.2 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 35 احسب التكامل المعطى :

1. $\int xe^{-x}dx$
2. $\int xe^{2x}dx$
3. $\int x^2e^{-2x}dx$
4. $\int x\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$
5. $\int x^2\cos x dx$
6. $\int \ln x dx$
7. $\int \sin^{-1} x dx$
8. $\int x\tan^{-1} x dx$
9. $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$
10. $\int x\sec^2 x dx$
11. $\int (\ln x)^2dx$
12. $\int x\sin x\cos x dx$
13. $\int x\sec x\tan x dx$
14. $\int \csc^3 x dx$
15. $\int e^x\cos(3x)dx$
16. $\int x\sinh x dx$
17. $\int x\sec^{-1} x dx$
18. $\int \cos^{-1} x dx$
19. $\int \sinh^{-1} x dx$
20. $\int x\tan^2 x dx$
21. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$
22. $\int \tan^{-1} x dx$
23. $\int \frac{2x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx$
24. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$
25. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
26. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$
27. $\int \sqrt{x}\tan^{-1}(\sqrt{x})dx$
28. $\int \sin(\ln x)dx$
29. $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$
30. $\int \left(\sin^{-1} x\right)^2dx$
31. $\int \cos(\sqrt{x})dx$
32. $\int \sec^{-1}(\sqrt{x})dx$
33. $\int x(2x+3)^{99}dx$
34. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}dx$
35. $\int (x+1)^{10}(x+2)dx$

2.2 أجوبة بعض التمارين

.1 $\int xe^{-x}dx$

الحل:

$$u = x \quad dv = e^{-x}dx$$
$$du = dx \quad v = -e^{-x}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\therefore \int xe^{-x}dx = x\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}dx$$
$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

.2 $\int xe^{2x}dx$

الحل:

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\therefore \int xe^{2x}dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$
$$= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
$$= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

.3 $\int x^2e^{-2x}dx$

الحل:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-2x}dx$$
$$du = 2xdx \qquad v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\therefore \int x^2e^{-2x}dx = x^2\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\right)-\int(2x)\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{x^2e^{-2x}}{2}+\int xe^{-2x}dx$$

الان نقوم بحل $\int xe^{-2x}dx$

$$u = x \qquad dv = e^{-2x}dx$$

$$du = 2dx \qquad v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$$

$$\therefore \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \int \frac{-1}{2}e^{-2x} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2x} + C$$

$$\therefore \int x^2e^{-2x}dx = -\frac{x^2e^{-2x}}{2}+\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

4. $\int x\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

الحل:

$$u = x \qquad dv = \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$du = dx \qquad v = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\therefore \int x\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

$$= -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

7. $\int \sin^{-1}xdx$

الحل:

$$u = \sin^{-1}x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\therefore \int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x - \left(\frac{1}{-2}\right)\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$\int x\tan^{-1} x dx$ .8

الحل:

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = x dx$$
$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$\begin{aligned}
\therefore \int x\tan^{-1} x dx &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1} x\right) + C \\
&= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C
\end{aligned}$$

$\int x\sec x\tan x dx$ .13

الحل:

$$u = x \qquad dv = \sec x\tan x dx$$
$$du = dx \qquad v = \sec x$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$\int x\sec x\tan x dx = x\sec x - \int \sec x dx \quad = x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$\int e^x\cos(3x)dx$ .15

الحل:

$$u = \cos(3x) \qquad dv = e^x dx$$
$$du = -3\sin(3x)dx \qquad v = e^x$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \int e^x \cos(3x)dx = e^x \cos(3x) - \int -3\sin(3x)e^x dx = e^x \cos(3x) + 3\int \sin(3x)e^x dx$$

الان نقوم بحل $\int \sin(3x)e^x dx$

$$\begin{aligned} u &= \sin(3x) & dv &= e^x dx \\ du &= 3\cos(3x)dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int \sin(3x)e^x dx = \sin(3x)e^x - 3\int \cos(3x)e^x dx = e^x \sin(3x) - 3I$$

$$\therefore I = \int e^x \cos(3x)dx = e^x \cos(3x) + 3\left(e^x \sin(3x) - 3I\right)$$

$$I = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9I$$

$$10I = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) \Rightarrow I = \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x)}{10} + C$$

.17 $\int x \sec^{-1} x dx$

الحل:

$$\begin{aligned} u &= \sec^{-1} x & dv &= x dx \\ du &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x \sec^{-1} x dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \sec^{-1} x - \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \sec^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \sec^{-1} x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \sec^{-1} x - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sec^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$$

.21 $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$

الحل:

$$u = \ln\left(x^2+1\right) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2x}{x^2+1}dx \qquad v = x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\begin{aligned}\int \ln\left(x^2+1\right)dx &= x\ln\left(x^2+1\right) - \int x \cdot \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2\left[\int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx\right] \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2\left[x - \tan^{-1}x\right] + C \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

.26 $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

الحل:

$$t = \sqrt{3x+9} \Rightarrow dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}dx \Rightarrow dt = \frac{3}{2t}dx$$
$$\Rightarrow \frac{2t}{3}dt = dx$$
$$\therefore I = \int e^{\sqrt{3x+9}}dx = \frac{2}{3}\int te^t dt$$
$$u = t \qquad dv = e^t dt$$
$$du = dt \qquad v = e^t$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\begin{aligned}I = \frac{2}{3}\left[te^t - \int e^t dt\right] &= \frac{2}{3}\left[te^t - e^t\right] + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3x+9}e^{\sqrt{3x+9}} - \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}} + C\end{aligned}$$

3 تكاملات قوى الدوال المثلثية

في هذا البند سنعالج التكاملات التالية $\int \sin^n x\, dx$, $\int \cos^m x\, dx$, $\int \sin^n x \cos^m\, dx$, $\int \tan^m x\, dx$, $\int \sec^n x\, dx$, $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$, $\int \cot^m x\, dx$, $\int \csc^n x\, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ حيث $m, n \in \mathbb{N}$, وسنقدم هذه المعالجة بطريقة تعتمد على الفهم بتقديم عدد من الأمثلة ومن ثم نضعها على شكل إرشادات.

- ملاحظات

1. تعتمد هذه المعالجة على نوع كل من n و m من حيث كونه عدد فردي أم زوجي.
2. من المهم أن يكون القارئ ملم بالمتطابقات المثلثية وبالتحدبد:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sec^2 x - \tan^2 x = 1 \\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{cases}$$

1.3 $\int \sin^n x\, dx$, $\int \cos^m x\, dx$, $\int \sin^n x \cos^m\, dx$

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int \sin^2 x\, dx$.

الحل : من الواضح أننا لا نعرف دالة أصلية $F(x)$ بحيث

$$\int \sin^2 x\, dx = F(x) + C$$

الان نعتبر السؤال كأنه مشكلة و نبحث عن حل لها وأول طريقة نفكر في استخدامها هي التعويض و نلاحظ أن الخيارات المتاحة هي

$$\begin{cases} u = x \\ u = \sin x \\ u = \sin^2 x \end{cases}$$

الان نناقش الاختيارت و نتحقق هل تحولنا الى تكامل أسهل : الاختيار الاول لا فائدة منه , و أما الاختيار الثاني فإنه يحولنا الى التكامل

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

وهو أصعب من التكامل المعطى (مع العلم أنه يمكن حله وسنقدم الحل في موضوع قادم بإذن الله) و أيضاً الاختيار الثالث يقودنا إلى تكامل أصعب من التكامل المعطى وبالتالي التعويض لا يخدمنا حالياً , وإذا فكرنا أن نستخدم التجزئ فإن الخيارات المتاحة هي

$$\begin{cases} u=\sin x \qquad dv=\sin x\,dx \\ du=\cos x\,dx \qquad v=-\cos x \\ u=\sin^2 x \qquad dv=\,dx \\ du=2\sin x\cos x\,dx \qquad v=x \end{cases}$$

الان الاختيار الأول يقودنا الى

$$\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x dx$$

وهنا نجد أن التكامل $\int \cos^2 x dx$ هو قريب من السؤال المعطى و بالتالي لا يخدمنا و أما الاختيار الثاني فإنه لا يفيد ومنه التجزئ لا يخدمنا , الان لنتوقف قليلاً و نفكر ما هي الصعوبة في هذا السؤال ؟ و نحاول التخلص منها , الصعوبة في التربيع و نجد أن المتطابقة

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

تخلصنا من هذه الصعوبة و هي مفتاح الحل فدعونا نستخدمها

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx&=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx\\ &=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin(2x)+C\\ &=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C\end{aligned}$$

2. احسب التكامل $\int \sin^4 x dx$

الحل : أعتقد من المناقشة التي تمت في السؤال السابق أصبح من الواضح أن مفتاح الحل هو استخدام المتطابقة

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

إذن

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2\,dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx \qquad \boxed{\cos^2(2x)=\tfrac{1+\cos(4x)}{2}} \\
&= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\left(\int dx+\int \cos(4x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\sin(4x)\right)+C \\
&= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C
\end{aligned}
$$

3. احسب التكامل $\int \cos^3 x\,dx$

الحل :

الطريقة الأولى :

$$I=\int \cos^3 x\,dx=\int \cos^2 x\cos x\,dx$$

$$
\begin{aligned}
u &= \cos^2 x & dv &= \cos x\,dx \\
du &= -2\cos x\sin x\,dx & v &= \sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sin x\cos^2 x+2\int \sin^2 x\cos x\,dx \\
&= \sin x\cos^2 x+2\int t^2\,dt \qquad \boxed{t=\sin x \Longrightarrow dt=\cos x\,dx} \\
&= \sin x\cos^2 x+2\,\frac{t^3}{3}+C \\
&= \sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin^3 x+C
\end{aligned}
$$

الطريقة الثانية : نلاحظ أن

$$\cos^3 x=\cos^2 x\cos x=\left(1-\sin^2 x\right)\cos x$$

بوضع $u=\sin x$ نجد أن $du=\cos x\,dx$ وبالتالي يمكن تحويل التكامل من قوى دوال مثلثية إلى تكامل كثيرة حدود باستخدام التعويض $u=\sin x$

وتكامل كثيرة الحدود من السهل حسابه .

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx \\
&= \int \left(1-u^2\right)\,du \qquad \boxed{u=\sin x \Longrightarrow du=\cos x\,dx} \\
&= u-\frac{u^3}{3}+C \\
&= \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C
\end{aligned}$$

4. احسب التكامل $\int \sin^7 x\,dx$ الحل :

نلاحظ أن

$$\sin^7 x=\sin^6 x\sin x=\left(\sin^2 x\right)^3\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)^3\sin x$$

بوضع $u=\cos x$ نجد أن $du=-\sin x\,dx$ وبالتالي يمكن تحويل التكامل من قوى دوال مثلثية إلى تكامل كثيرة حدود باستخدام التعويض $u=\cos x$ وتكامل كثيرة الحدود من السهل حسابه .

$$\begin{aligned}
\int \sin^7 x\,dx &= \int \sin^6 x\sin x\,dx \\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^3\sin x\,dx \\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)^3\sin x\,dx \\
&= -\int \left(1-u^2\right)^3\,du \qquad \boxed{u=\cos x \Longrightarrow du=-\sin x\,dx} \\
&= -\int \left(1-3u^2+3u^4-u^6\right)\,du \\
&= -\left(u-3\frac{u^3}{3}+3\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}\right)+C \\
&= -u+u^3-\frac{3}{5}u^5+\frac{u^7}{7}+C \\
&= -\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{\cos^7 x}{7}+C
\end{aligned}$$

5. احسب التكامل $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cos x=\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x$$

ومنه فإن

$$\therefore I = \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx$$

الان إذا وضعنا $u = \sin x$ فإن $du = \cos x \, dx$ وهي موجودة وبالتالي يصبح التعويض $u = \sin x$ مفيد و يحول التكامل المعطى من تكامل قوى دوال مثلثية إلى تكامل كثيرة حدود. إذن

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx \\ &= \int u^2 \left(1 - u^2\right) \, du \qquad \boxed{u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx} \\ &= \int \left(u^2 - u^4\right) \, du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

6. احسب التكامل $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\sin^5 x \cos^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^4 x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^4 x \sin x$$

ومنه فإن

$$\therefore I = \int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^4 x \sin x \, dx$$

بوضع $u = \cos x$ نجد أن $du = -\sin x \, dx$ وبالتالي يمكن تحويل التكامل من قوى دوال مثلثية إلى تكامل كثيرة حدود باستخدام التعويض $u = \cos x$ وتكامل كثيرة الحدود. إذن

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^4 x \sin x \, dx \\ &= -\int \left(1 - u^2\right)^2 u^4 \, du \\ &= -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) u^4 \, du \\ &= -\int \left(u^4 - 2u^6 + u^8\right) \, du \\ &= -\left(\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right) + C \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + C \end{aligned}$$

7. احسب التكامل $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x$$

ومنه فإن

$$\therefore I = \int sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx$$

الان إذا وضعنا $u = \sin x$ فإن $du = \cos x \, dx$ وهي موجودة وبالتالي يصبح التعويض $u = \sin x$ مفيد و يحول التكامل المعطى من تكامل قوى دوال مثلثية إلى تكامل كثيرة حدود. إذن

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx \\ &= \int u^4 \left(1 - u^2\right) \, du \qquad \boxed{u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx} \\ &= \int \left(u^4 - u^6\right) \, du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

8. احسب التكامل $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$

الحل : هذا المثال قريب من المثال الأول من حيث الفكرة بمعنى اذا فكرنا في إنجاز التكامل باستخدام التعويض مباشرة (أي بدون تلاعب في الشكل و استخدام بعض المتطابقات) أو التجزئ (مهما كان اختيار u و dv) فإننا سنصل إلى تكامل (ربما يمكن إنجازه) أصعب و أيضاً لا يمكن تحويل التكامل إلى تكامل كثيرة حدود كما فعلنا في الأمثلة 5 , 6 , 7 ولكن نستطيع تخفيض الأس من 4 إلى 2 إلى 1 وذلك باستخدام متطابقة الضعف لكل من $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ الأن لدينا :

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^4 x &= \left(\sin^2 x\right)^2 \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}[1 - \cos 2x]\right)^2 \left(\frac{1}{2}[1 + \cos 2x]\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}\left(1 - \cos^2 2x\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\sin^2 2x\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) = \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{64} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\left(1 + \cos 8x\right) = \frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^4 x\cos^4 x = \frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x$$

وبالتالي نجد أن

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x\right)dx\\ &= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C\end{aligned}$$

الان نضع إرشادات لحساب التكاملات $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, $\int \sin^n x\cos^m\,dx$ (وهذه الإرشادات تعتمد بشكل كبير على فهم الأمثلة السابقة) كمايلي :

■ إرشادات لحساب $\int \sin^n x\,dx$ حيث $n \geq 2$.

1. إذا كان $\underbrace{n = 2k+1}_{\text{عدد فردي}}$ حيث $k \geq 1$ نطبق مايلي :

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{2k+1} x\,dx &= \int \sin^{2k} x\sin x\,dx\\ &= \int \left(\sin^2\right)^k x\sin x\,dx\\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k x\sin x\,dx \qquad \boxed{\sin^2 x = 1-\cos^2 x}\\ &= -\int \left(1-u^2\right)^k du \qquad \boxed{u=\cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx}\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sin^n x\,dx \underset{du=-\sin x dx}{\overset{u=\cos x}{=}} -\int \left(1-u^2\right)^k du \qquad (2)$$

ونلاحظ في (2) أنه تحولنا إلى تكامل كثيرة حدود (هذا ما فعلناها في أحد الأمثلة السابقة) وكل ما علينا فعله الأن هو فك الأقواس و مكاملة كل حد وهذا سهل جداً و بذلك نكون انتهينا من مناقشة هذه الحالة .

2. إذا كان $\underbrace{n = 2k}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $k \geq 1$ نستخدم متطابقة الضعف

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

كمايلي :

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{2k} x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k\,dx$$
$$= \frac{1}{2^k}\int (1-\cos 2x)^k\,dx$$

$$\therefore \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{2k} x\,dx = \frac{1}{2^k}\int (1-\cos 2x)^k\,dx \qquad (3)$$

ولكي نحسب التكامل الموضح باللون الأحمر في (3) نقوم بفك القوس (باستخدام ذات الحدين) و من ثم نوزع التكامل على الحدود (باستخدام الخاصية الخطية للتكامل) و من الطبيعي أن تحتوي بعض التكاملات بعد التوزيع على $\cos^a$ في هذه التكاملات و يتم التعامل معها على حسب نوع الأس في حال كان فردي نطبق ما ورد في 1 و إذا كان زوجي نستخدم متطابقة الضعف و من ثم نكمل كما ورد في 2 .

■ إرشادات لحساب $\int \cos^m x\,dx$ حيث $n \geq 2$.

1. إذا كان $\underbrace{m = 2k+1}_{\text{عدد فردي}}$ حيث $k \geq 1$ نطبق مايلي :

$$\int \cos^m x\,dx = \int \cos^{2k+1} x\,dx = \int \cos^{2k} x \cos x\,dx$$
$$= \int \left(\cos^2\right)^k x \cos x\,dx$$
$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^k x \cos x\,dx \qquad \boxed{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}$$
$$= \int \left(1-u^2\right)^k\,du \qquad \boxed{u = \sin x \implies du = \cos x dx}$$

$$\therefore \int \cos^m x\,dx \overset{u=\sin x}{\underset{du=\cos x dx}{=}} \int \left(1-u^2\right)^k\,du \qquad (4)$$

ونلاحظ في (4) أنه تحولنا إلى تكامل كثيرة حدود (هذا ما فعلناه في أحد الأمثلة السابقة) وكل ما علينا فعله الأن هو فك الأقواس و مكاملة كل حد وهذا سهل جداً و بذلك نكون انتهينا من مناقشة هذه الحالة .

2. إذا كان $\underbrace{m = 2k}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $k \geq 1$ نستخدم متطابقة الضعف

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

كمايلي :

$$\begin{aligned}\int \cos^m x \, dx = \int \cos^{2k} x \, dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^k \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^k \, dx \\ &= \frac{1}{2^k} \int (1 + \cos 2x)^k \, dx\end{aligned}$$

$$\therefore \int \cos^m x \, dx = \int \cos^{2k} x \, dx = \frac{1}{2^k} \int (1 + \cos 2x)^k \, dx \qquad (5)$$

ولكي نحسب التكامل الموضح باللون الأحمر في (5) نقوم بفك القوس (باستخدام ذات الحدين) و من ثم نوزع التكامل على الحدود (باستخدام الخاصية الخطية للتكامل) و من الطبيعي أن تحتوي بعض التكاملات بعد التوزيع على $\cos^a$ في هذه التكاملات و يتم التعامل معها على حسب نوع الأس في حال كان فردي نطبق ما ورد في 1 و إذا كان زوجي نستخدم متطابقة الضعف من ثم نكمل كما ورد في 2 .

■ إرشادات لحساب $\int \sin^n x \cos^m \, dx$

1. إذا كان $\underbrace{n = 2k + 1}_{\text{عدد فردي}}$ نطبق مايلي:

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \cos^m x \, dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^m x \, dx \\ &= \int \sin^{2k} x \cos^m x \sin x \, dx \\ &= \int \left(\sin^2 x\right)^k \cos^m x \sin x \, dx \\ &= \int \left(\ 1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x \sin x \, dx \qquad \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} \\ &= -\int \left(1 - u^2\right)^k u^m \, du \qquad \boxed{u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx}\end{aligned}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx \underset{du = -\sin x \, dx}{\overset{u = \cos x}{=}} -\int \left(1 - u^2\right)^k u^m \, du \qquad (6)$$

ونلاحظ في (6) أنه تحولنا إلى تكامل كثيرة وكل ما علينا فعله هو تبسيط ما داخل التكامل و من ثم مكاملة كل حد و هو أمر بسيط جداً .

2. إذا كان $\underbrace{m=2t+1}_{\text{عدد فردي}}$ نطبق مايلي:

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x \cos^m x\, dx &= \int \sin^n x \cos^{2t+1} x\, dx \\
&= \int \sin^n x \cos^{2t} x \cos x\, dx \\
&= \int \sin^n x \left(\cos^2 x\right)^t \cos x\, dx \\
&= \int \sin^n x \left(\, 1-\sin^2 x\right)^t \sin x\, dx \qquad \boxed{\cos^2 x = 1-\sin^2 x} \\
&= \int u^n \left(1-u^2\right)^t\, du \qquad \boxed{u=\sin x \Longrightarrow du=\cos x dx}
\end{aligned}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx \overset{u=\sin x}{\underset{du=\cos x\, dx}{=}} \int u^n \left(1-u^2\right)^t\, du \tag{7}$$

ونلاحظ في (7) أنه تحولنا إلى تكامل كثيرة وكل ما علينا فعله هو تبسيط ما داخل التكامل و من ثم مكاملة كل حد و هو أمر بسيط جداً .

3. إذا كان $\underbrace{n=2k}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $k \geq 1$ و $\underbrace{m=2t}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $t \geq 1$ نستخدم متطابقة الضعف لكل من $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ وليصبح لدينا

$$\begin{aligned}
\int sin^n x \cos^m\, dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^k \left(\cos^2 x\right)^t\, dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^t\, dx \\
&= \frac{1}{2^{k+t}} \int \left(1-\cos 2x\right)^k \left(1+\cos 2x\right)^t\, dx
\end{aligned}$$

$$\int \sin^n x \cos^m\, dx = \frac{1}{2^{k+t}} \int \left(1-\cos 2x\right)^k \left(1+\cos 2x\right)^t dx \tag{8}$$

وكل ما علينا القيم به في (8) لحساب التكامل الموضح باللون الأحمر هو تبسيط ما داخل التكامل و بعد ذلك نوزع التكامل على الحدود و نلاحظ أن بعض التكاملات تحتوي على $\cos^a$ و بغض النظر ما يكون داخل الزاوية نتعامل مع هذه التكاملات كما تعاملنا مع التكامل $\int \cos^m x dx$ في السابق.

1.1.3 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 23 احسب التكامل المعطى.

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$
2. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$
3. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$
4. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$
5. $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$
6. $\int \cos^4 x dx$
7. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
8. $\int \cos^3 x \sin x dx$
9. $\int \sin^5 3x \cos 3x dx$
10. $\int \sin^2 5\theta d\theta$
11. $\int \cos^2 3x dx$
12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
13. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
14. $\int \cos^{1/3} x \sin x dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$
16. $\int_0^{\pi/3} \sin^4 3x \cos^3 3x dx$
17. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 5\theta d\theta$
18. $\int \frac{\cos x}{2 - \sin x} dx$
19. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx$
20. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$
21. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
22. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$
23. $\int \frac{dx}{1 - \sin x} dx$

2.1.3 أجوبة بعض التمارين

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$

الحل:

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

3. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

الحل:

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx \\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x dx \\
&= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x dx \qquad \boxed{u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx} \\
&= -\int \left(1 - u^2\right)^2 u^2 du \\
&= -\int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) u^2 du \\
&= \int \left(-u^2 + 2u^4 - u^6\right) du \\
&= -\frac{u^3}{3} + 2\frac{u^4}{4} - \frac{u^7}{7} + C \\
&= -\frac{(\sin x)^3}{3} + 2\frac{(\sin x)^4}{4} - \frac{(\sin x)^7}{7} + C
\end{aligned}$$

$\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$ .4

الحل:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx &= \int \sin^2 x\sqrt{\cos x}\sin x\, dx\\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)\sqrt{\cos x}\sin x\, dx \quad \boxed{\sin^2 x = 1-\cos^2 x}\\
&= -\int \left(1-u^2\right)\sqrt{u}\, du \quad \boxed{u=\cos x \Longrightarrow du = -\sin x\, dx}\\
&= -\int \left(1-u^2\right)u^{\frac{1}{2}}\, du\\
&= -\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}\right)\, du\\
&= -\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) + C\\
&= -\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + \frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x + C
\end{aligned}$$

$\int \cos^4 x dx$ .6

الحل:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right) dx\\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx\\
&= \frac{1}{4}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin(4x)}{4}\right) + C\\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C
\end{aligned}$$

$\int \sin^2 x\cos^2 x dx$ .12

الحل:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx\\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx\\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}$$

.23 $\int \frac{dx}{1-\sin x}\,dx$

الحل:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \boxed{\cos^2 x = 1-\sin^2 x} \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx \\
&= \int \sec^2 x\,dx + \int \cos^{-2} x \sin x\,dx \\
&= \tan x - \int u^{-2}\,du \qquad \boxed{u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x\,dx} \\
&= \tan x - \frac{u^{-1}}{-1} + C \\
&= \tan x + (\cos x)^{-1} + C \\
&= \tan x + \sec x + C
\end{aligned}$$

2.3 قوى الدوال $\sec x$ ، $\tan x$ ، $\csc x$ ، $\cot x$

• $\int \tan^m x\, dx$ ، $\int \sec^n x\, dx$ ، $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int \sec^6 x\, dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\sec^6 x = \left(\sec^2 x\right)^2 \sec^2 x = \left(\tan^2 x + 1\right)^2 \sec^2 x$$

$$\therefore I = \int \sec^6 x\, dx = \int \left(\tan^2 x + 1\right)^2 \sec^2 x\, dx$$

$$I \underset{du=\sec^2 x\, dx}{\overset{u=\tan x}{=}} \int \left(u^2+1\right)^2\, du = \int \left(u^4 + 2u^2 + 1\right)\, du$$

$$= \frac{u^5}{5} + 2\frac{u^3}{3} + u + C$$

$$= \frac{(\tan x)^5}{5} + 2\frac{(\tan x)^3}{3} + \tan x + C$$

2. احسب التكامل $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$

الحل: نلاحظ أن

$$\begin{aligned}\tan^3 x \sec^3 x &= \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x\\ &= \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^2 x \sec x \tan x\\ &= \left(\sec^4 x - \sec^2 x\right) \sec x \tan x\end{aligned}$$

$$\therefore I = \int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \left(\sec^4 x - \sec^2 x\right) \sec x \tan x\, dx$$

$$I \underset{du=\sec x \tan x dx}{\overset{u=\sec x}{=}} \int \left(u^4 - u^2\right)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

3. احسب التكامل $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$

الحل: نلاحظ أن

$$\begin{aligned}\tan^3 x \sec^5 x &= \tan^2 \sec^4 x \sec x \tan x\\ &= \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^4 x \sec x \tan x\end{aligned}$$

$$\therefore I = \int \tan^3 x \sec^5 x \, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^4 x \sec x \tan x \, dx$$

$$\begin{aligned} I \underset{du=\sec x \tan x dx}{\overset{u=\sec x}{=}} \int \left(u^2 - 1\right) u^4 \, du &= \int \left(u^6 - u^4\right) \, du \\ &= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

4. احسب التكامل $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \tan^2 x \sec^4 x &= \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \\ &= \tan^2 x \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore I = \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} I \underset{du=\sec^2 x dx}{\overset{u=\tan x}{=}} \int u^2 \left(u^2 + 1\right) \, du &= \int \left(u^4 + u^2\right) \, du \\ &= \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

5. احسب التكامل $\int \tan^5 x \sec^6 x \, dx$

الحل : نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \tan^5 x \sec^6 x &= \tan^5 x \sec^4 x \sec^2 x \\ &= \tan^5 x \left(\tan^2 x + 1\right)^2 \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore I = \int \tan^5 x \sec^6 x \, dx = \int \tan^5 x \left(\tan^2 x + 1\right)^2 \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} I \underset{du=\sec^2 x dx}{\overset{u=\tan x}{=}} \int u^5 \left(u^2 + 1\right)^2 \, du &= \int u^5 \left(u^4 + 2u^2 + 1\right) \, du \\ &= \int \left(u^9 + 2u^7 + u^5\right) \, du \\ &= \frac{u^{10}}{10} + 2\frac{u^8}{8} + \frac{u^6}{6} + C \\ &= \frac{\tan^{10} x}{10} + \frac{\tan^8 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C \end{aligned}$$

6. احسب التكامل $\int \sec^3 x\,dx$

الحل : في هذا المثال لن نستطيع أن نطبق ما فعلناه في الأمثلة السابقة و السبب في ذلك أن مشتقة $\tan x$ هي $\sec^2 x$ و إذا جعلنا $\sec^3 x = \sec x \sec^2 x$ فإنه لا يمكن أن نتحول إلى تكامل كثيرة حدود وذلك بوضع $u = \tan x$ لأنه نحتاج إلى أن يكون الأس المتبقي على $\sec x$ بعد إخراج $\sec^2$ عدد زوجي لكي نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ كما في الأمثلة السابقة . لذلك سوف نستخدم طريقة التجزئ .

$$I = \int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x dx \\ du &= \sec x \tan x\,dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan x \tan x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right)\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \left(\sec^3 x - \sec x\right)\,dx \\ &= \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{=I} + \int \sec x\,dx \\ &= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

إذن

$$I = \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|$$

وبالتالي

$$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

ومنه نجد أن

$$I = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$

7. احسب التكامل $\int \sec^5 x\,dx$

الحل : في هذا المثال نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ كما فعلنا في المثال 6 لنفس السباب.

$$I = \int \sec^5 x\,dx = \int \sec^3 x \sec^2 x\,dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sec^3 x & dv = \sec^2 x dx \\ du = 3\sec^3 \tan x \, dx & v = \tan x \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \left(\sec^5 x - \sec^3 x\right) \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\underbrace{\int \sec^5 x \, dx}_{=I} + 3\int \sec^3 x \, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3I + \frac{3}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) \end{aligned}$$

إذن

$$I = \sec^3 x \tan x - 3I + \frac{3}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right)$$

وبالتالي

$$4I = \sec^3 x \tan x + \frac{3}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right)$$

ومنه نجد أن

$$I = \frac{1}{4}\left(\sec^3 x \tan x + \frac{3}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right)\right) + C$$

8. احسب التكامل $\int \tan^4 x \, dx$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \left(\sec^2 x - 1\right) \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \sec^2 x \, dx + \int \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C \end{aligned}$$

9. احسب التكامل $\int \tan^5 x\, dx$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x\, dx &= \int \tan^3 x \tan^2 x\, dx \\
&= \int \tan^3 x \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx \\
&= \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^3 x\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x \sec^2 x\, dx + \int \tan x\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

10. احسب التكامل $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x\, dx &= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x\, dx \\
&= \int \left(\sec^3 x - \sec x\right)\, dx \\
&= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) - \ln|\sec x + \tan x| + C \\
&= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x + \tan x| + C \\
&= \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

11. احسب التكامل $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$

$$\begin{aligned}
I = \int \tan^2 x \sec^3 x\, dx &= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^3 x\, dx \\
&= \int \left(\sec^5 x - \sec^3 x\right)\, dx \\
&= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx
\end{aligned}$$

ومن المثالين 6 و 7 نجد أن

$$\begin{cases}\displaystyle\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_0\\ \displaystyle\int \sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^3 x\tan x + \frac{3}{8}\sec x\tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C_1\end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$I = \frac{1}{4}\sec^3 x\tan x - \frac{1}{8}\sec x\tan x = \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

■ إرشادات لحساب التكامل $\displaystyle\int \sec^n x\,dx$.

1. إذا كان $\underbrace{n = 2k+1}_{\text{عدد فردي}}$ حيث $k \geq 1$ نطبق مايلي :

نستخدم التكامل بالتجزئ كما يلي

$$I = \int \sec^n x\,dx = \int \sec^{(2k+1)} x\,dx = \int \sec^{2k-1} x\sec^2 x\,dx$$

ومن ثم نأخذ

$$\begin{aligned} u &= \sec^{2k-1} x & dv &= \sec^2 x\,dx\\ du &= (2k-1)\sec^{2k-1} x\tan x\,dx & v &= \tan x\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^n x\,dx\\ &= \sec^{2k-1} x\tan x - (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\tan^2 x\,dx\\ &= \sec^{2k-1} x\tan x - (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\left(\sec^2 x - 1\right)\,dx\\ &= \sec^{2k-1} x\tan x - (2k-1)\int \sec^{2k+1} x\,dx + (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\,dx\\ &= \sec^{2k-1} x\tan x - (2k-1)\underbrace{\int \sec^n x\,dx}_{=I} + (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\,dx\end{aligned}$$

$$\therefore I = \sec^{2k-1} x\tan x - (2k-1)I + (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\,dx$$

وبالتالي فإن

$$\therefore (2k)I = \sec^{2k-1} x\tan x + (2k-1)\int \sec^{2k-1} x\,dx$$

أي أن

$$\therefore I=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\,dx \qquad \boxed{n-2=2k-1\,,\,n-1=2k}$$

الأن لحساب التكامل I ما علينا الا حساب التكامل $\int\sec^{n-2}x\,dx$ ونلاحظ أن العدد $n-2$ عدد فردي ولحسابه نستخدم التكامل بالتجزئ كما فعلنا بالتكامل I وهكذا نستمر حتى نصل إلى قيمة التكامل كما فعلنا في المثالين 6 و 7 .

2. إذا كان $\underbrace{n=2k}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $k\geq 2$ نطبق مايلي :

$$\begin{aligned}
\int\sec^{n}x\,dx &= \int\sec^{2k}x\,dx\\
&= \int\sec^{2k-2}x\sec^{2}x\,dx\\
&= \int\sec^{2(k-1)}x\sec^{2}x\,dx\\
&= \int\left(\sec^{2}x\right)^{k-1}\sec^{2}x\,dx\\
&= \int\left(\tan^{2}x+1\right)^{k-1}\sec^{2}x\,dx\\
&= \int\left(u^{2}+1\right)^{k-1}du \qquad \boxed{u=\tan x\Longrightarrow du=\sec^{2}x\,dx}
\end{aligned}$$

الأن نقوم بفك الأقواس ومن ثم نحصل على تكامل كثيرة حدود.

■ إرشادات لحساب التكامل $\int\tan^{m}x\,dx$.

لحساب التكامل $\int\tan^{m}x\,dx$ حيث $m\geq 2$ نطبق ما يلي

$$\begin{aligned}
\int\tan^{m}x\,dx &= \int\tan^{m-2}x\tan^{2}\,dx\\
&= \int\tan^{m-2}x\left(\sec^{2}x-1\right)\,dx\\
&= \int\tan^{m-2}x\sec^{2}x\,dx-\int\tan^{m-2}x\,dx \qquad \boxed{u=\tan x\Longrightarrow du=\sec^{2}x\,dx}\\
&= \int u^{m-2}\,du-\int\tan^{m-2}x\,dx\\
&= \frac{\tan^{m-1}x}{m-1}-\int\tan^{m-2}x\,dx
\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نكمل لحساب $\int \tan^{m-2} x\, dx$.

■ إرشادات لحساب التكامل $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$.

1. إذا كان $\underbrace{n = 2k}_{\text{عدد زوجي}}$ حيث $k \geq 1$ نطبق ما يلي :

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^n x\, dx &= \int \tan^m x \sec^{2k} x\, dx \\
&= \int \tan^m x \sec^{2k-2} x \sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^m x \sec^{2(k-1)} x \sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^m x \left(\sec^2 x\right)^{k-1} \sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^m x \left(\tan^2 x + 1\right)^{k-1} \sec^2 x\, dx \\
&= \int u^m \left(u^2 + 1\right)^{k-1} du \qquad \boxed{u = \tan x \Longrightarrow du = \sec^2 x\, dx}
\end{aligned}$$

في هذه الحالة استخدمنا المتطابقة $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ و التعويض $u = \tan x$ و حصلنا على تكامل كثيرة حدود .

2. إذا كان $\underbrace{m = 2k+1}_{\text{عدد فردي}}$ حيث $k \geq 1$ نطبق ما يلي :

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^n x\, dx &= \int \tan^{2k+1} x \sec^n x\, dx \\
&= \int \tan^{2k} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx \\
&= \int \left(\tan^2 x\right)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx \\
&= \int \left(u^2 - 1\right)^k u^{n-1} du \qquad \boxed{u = \sec x \Longrightarrow du = \sec x \tan x\, dx}
\end{aligned}$$

في هذه الحالة استخدمنا المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ و التعويض $u = \sec x$ و حصلنا على تكامل كثيرة حدود .

3. إذا كان $\underbrace{n = 2t+1}_{\text{عدد فردي}}$ و $\underbrace{m = 2k}_{\text{عدد زوجي}}$ نطبق ما يلي :

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x\, dx &= \int \tan^{2k} x \sec^n x\, dx\\ &= \int \left(\tan^2 x\right)^k \sec^n\ dx\\ &= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^n\ dx\end{aligned}$$

في هذه الحالة استخدمنا المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ وتحول التكامل $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ إلى تكامل في قوى $\sec x$ وهذه القوى فردية وسبق أن بينا كيفية التعامل معه.

- $\int \cot^m x\, dx$, $\int \csc^n x\, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

تتم معالجة هذه التكاملات بطريقة مماثلة للتكاملات في 2.3 وكل ما علينا فعله هو استخدام المتطابقة $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ بدلاً من المتطابقة $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

1.2.3 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 27 احسب التكامل المعطى.

1. $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$
2. $\int \tan^5 x \sec^4 x \, dx$
3. $\int \tan 4x \sec^4 4x \, dx$
4. $\int \tan^4 \theta \sec^4 \theta \, d\theta$
5. $\int \sec^7 x \tan^5 x dx$
6. $\int \tan^5 \theta \sec \theta d\theta$
7. $\int \tan^4 x \sec x dx$
8. $\int \tan^9 x \sec^4 x dx$
9. $\int \tan t \sec^3 t dt$
10. $\int \tan x \sec^5 x dx$
11. $\int \sec^4 x dx$
12. $\int \sec^7 x dx$
13. $\int \tan^3 4x dx$
14. $\int \tan^6 x dx$
15. $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx$
16. $\int \tan x \sec^{3/2} x dx$
17. $\int \tan^2 2x dx$
18. $\int \sec^3 2\theta \tan 2\theta d\theta$
19. $\int \tan^5 \frac{x}{2} dx$
20. $\int \cot^3 x \csc^3 x dx$
21. $\int \cot^3 x dx$
22. $\int \csc^4 x dx$
23. $\int \csc^3 x dx$
24. $\int \csc^5 x dx$
25. $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} dx$
26. $\int \frac{\sec^3 x}{\tan x} dx$
27. $\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$

2.2.3 أجوبة بعض التمارين

8. $\int \tan^9 x \sec^4 x dx$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \tan^9 x \sec^4 x dx &= \int \tan^9 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^9 x \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x dx \\
&= \int u^9 \left(u^2 + 1\right) du \qquad \boxed{u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx} \\
&= \int \left(u^{11} + u^9\right) \partial u \\
&= \frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{10}}{10} + c \\
&= \frac{\tan^{12} x}{12} + \frac{\tan^{10} x}{10} + C
\end{aligned}$$

15. $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx &= \int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \sqrt{\tan x} \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x \, dx \\
&= \int \sqrt{u} \left(u^2 + 1\right) \, dx \qquad \boxed{u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx} \\
&= \int u^{1/2} \left(u^2 + 1\right) \, dx \\
&= \int \left(u^{5/2} + u^{1/2}\right) \, du \\
&= \frac{u^{7/2}}{7/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \\
&= \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C
\end{aligned}$$

20. $\int \cot^3 x \csc^3 x dx$

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \csc^3 x dx &= \int \cot^2 x \csc^2 x \cot x \csc x dx \\
&= \int \left(\csc^2 x - 1\right) \csc^2 x \cot x \csc x \partial x \\
&= -\int \left(u^2 - 1\right) u^2 du \qquad \boxed{u = \csc x \Rightarrow du = -\cot x \csc x x dx} \\
&= -\int \left(u^4 - u^2\right) du \\
&= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c \\
&= -\frac{\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

$\int \cot^3 x dx$ .21

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x dx &= \int \cot x \cot^2 x dx \\
&= \int \cot x \left(\csc^2 x - 1\right) dx \\
&= \int \cot x \csc^2 x dx - \int \cot x dx \\
&= -\int u du - \int \cot x dx \qquad \boxed{u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x x dx} \\
&= -\frac{u^2}{2} - \ln|\sin x| + C \\
&= -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C
\end{aligned}$$

$\int \csc^4 x dx$ .22

الحل :

$$\begin{aligned}
\int \csc^4 x dx &= \int \csc^2 x \csc^2 x dx \\
&= \int \left(\cot^2 x + 1\right) \csc^2 x dx \\
&= -\int \left(u^2 + 1\right) du \qquad \boxed{u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x x dx} \\
&= -\frac{u^3}{3} - u + c \\
&= -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + c
\end{aligned}$$

23. $\int \csc^3 x dx$

الحل :

$$I = \int \csc^3 x \, dx = \int \csc x \csc^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
u &= \csc x & dv &= \csc^2 x dx \\
du &= -\csc x \cot x dx & v &= -\cot x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x dx \\
&= -\csc x \cot x - \int \csc x \left(\csc^2 x - 1\right) dx \\
&= -\csc x \cot x - \underbrace{\int \csc^3 x dx}_{I} + \int \csc x dx \\
&= -\csc x \cot x - I + \ln|\csc x - \cot x| \\
\therefore I &= -\csc x \cot x - I + \ln|\csc x - \cot x|
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$I = -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln|\csc x - \cot x| + C$$

4 التعويضات المثلثية

الهدف من هذا البند هو معالجة التكاملات التي تحتوي على أحد الجذور التالية :

$$\sqrt{a^2-x^2}\,,\ \sqrt{a^2+x^2}\,,\ \sqrt{x^2-a^2}\,,\ a>0$$

وذلك من خلال التخلص من الجذر ويتم ذلك باستخدام الدوال $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$ وباستخدام هذه التعويضات نقوم بتحويل التكامل المعطى (الذي يحتوي الجذر) إلى تكامل قوى دوال مثلثية و نتعامل معه كما في البند السابق .

• ملاحظات :

1. $\cos\theta \geq 0$ لكل $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$.
2. $\sec\theta > 0$ لكل $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$.
3. $\tan\theta \geq 0$ لكل $\theta\in[0,\pi/2)\cup[\pi,3\pi/2)$.
4. الدالة $\sin\theta$ تقبل دالة عكسية على $[-\pi/2,\pi/2]$.
5. الدالة $\tan\theta$ تقبل دالة عكسية على $(-\pi/2,\pi/2)$.
6. الدالة $\sec\theta$ تقبل دالة عكسية على $[0,\pi/2)\cup[\pi,3\pi/2)$.

◄ للتخلص من الجذر $\sqrt{a^2-x^2}\,,\ a>0$ نضع $x=a\sin\theta$ حيث $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)}\\ &= a\sqrt{\cos^2\theta}\\ &= a\left|\cos\theta\right|\\ &= a\cos\theta\end{aligned}$$

وأيضاً $dx=a\cos\theta\,d\theta$.

◄ للتخلص من الجذر $\sqrt{a^2+x^2}\,,\ a>0$ نضع $x=a\tan\theta$ حيث $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2\left(1+\tan^2\theta\right)}\\ &= a\sqrt{\sec^2\theta}\\ &= a\left|\sec\theta\right|\\ &= a\sec\theta\end{aligned}$$

وأيضاً $dx=a\sec^2\theta\,d\theta$.

◄ للتخلص من الجذر $a > 0$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ نضع $x = a\sec\theta$ حيث $\theta \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$ عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 - a^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2 \left(\sec^2\theta - 1\right)} \\
&= a\sqrt{\tan^2\theta} \\
&= a\left|\tan\theta\right| \\
&= a\tan\theta
\end{aligned}$$

وأيضاً $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$.

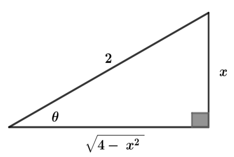
♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$.

الحل : للتخلص من الجذر $\sqrt{4 - x^2}$ نضع $x = 2\sin\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = 2\cos\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} &= \int \frac{2\cos\theta d\theta}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} \\
&= \int \frac{2\cos\theta d\theta}{(2\sin\theta)^2(2\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{4}\cot\theta + C
\end{aligned}$$

ولإكمال الحل يتوجب علينا التعبير عن $\cot\theta$ بدلالة x وذلك بتمثيل التعويض $x = 2\sin\theta$ على مثلث قائم الزاوية كما في الشكل التالي



وبالتالي فإن

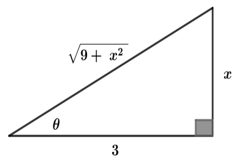
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} + C$$

2. احسب التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

الحل : للتخلص من الجذر $\sqrt{9+x^2}$ نضع $x = 3\tan\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = 3\sec^2\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C
\end{aligned}$$

ولإكمال الحل يتوجب علينا التعبير عن $\tan\theta$ و $\sec\theta$ بدلالة x وذلك بتمثيل التعويض $x = 3\tan\theta$ على مثلث قائم الزاوية كما في الشكل التالي



وبالتالي فإن

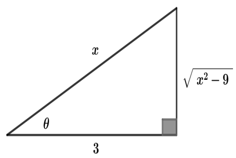
$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C$$

3. احسب التكامل $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

الحل : للتخلص من الجذر $\sqrt{x^2-9}$ نضع $x = 3\sec\theta$ حيث $\theta \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$ عندئذ $dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}}{3\sec\theta}\,3\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int 3\tan\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= 3\int \tan^2\theta\,d\theta \\
&= 3\int \left(\sec^2 - 1\right)\,d\theta \\
&= 3\tan\theta - 3\theta + C
\end{aligned}$$

الأن باستخدام المثلث التالي



نجد أن $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3}$ وبما أن $x = 3\sec\theta$ فإن $\theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$
ولذا فإن

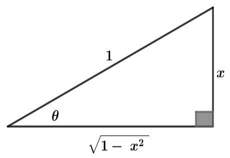
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

4. احسب التكامل $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx$.

الحل : بوضع $x = \sin\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = \cos\theta d\theta$
ولذا فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx &= \int \frac{\left(1-\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin^6\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^6\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos^3\theta}{\sin^6\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos^4\theta}{\sin^6\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \int \cot^4\theta\csc^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{5}\cot^5\theta + C
\end{aligned}$$

الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



وممنه نجد أن $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ وبالتالي نجد أن

$$\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx = -\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C = -\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + C$$

1.4 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 23 احسب التكامل المعطى.

1. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
2. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$
3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$
4. $\int \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$
5. $\int \dfrac{dx}{(2-x^2)^{3/2}}dx$
6. $\int \dfrac{dx}{(1+9x^2)^2}dx$
7. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$
8. $\int \dfrac{\cos t}{\sqrt{2-\sin^2 t}}dx$
9. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx$
10. $\int \dfrac{dx}{1+2x^2+x^4}dx$
11. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$
13. $\int \sqrt{1-x^2}dx$
14. $\int \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$
15. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$
16. $\int \dfrac{\sec^2\theta}{\sqrt{25+\tan^2\theta}}dx$
17. $\int \sqrt{e^{2x}-9}dx$
18. $\int \dfrac{2dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}dx$
19. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$
20. $\int \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}dx$
21. $\int \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx$
22. $\int \dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}dx$
23. $\int \dfrac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}dx$
24. $\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$
25. $\int \dfrac{dx}{(x^2-6c+13)^2}$

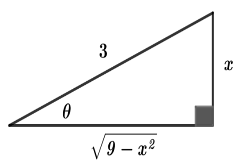
2.4 أجوبة بعض التمارين

.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

الحل : بوضع $x = 3\sin\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = 3\cos\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta d\theta}{9\sin^2\theta\sqrt{9-9\sin^2\theta}} = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta(3\cos\theta)}d\theta\\ &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta dx\\ &= -\frac{1}{9}\cot\theta + C\end{aligned}$$

الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



ومنه نجد أن

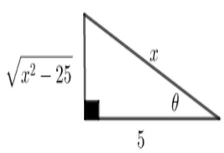
$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

.2 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

الحل : بوضع $x = 5\sec\theta$ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ عندئذ $dx = 5\sec\theta\tan\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx &= \int \frac{\sqrt{25\sec^2 x - 25}}{5\sec x}\cdot 5\sec\theta\tan\theta d\theta = \int 5\tan^2\theta d\theta\\ &= 5\int \left(\sec^2\theta - 1\right) d\theta = 5\tan\theta - 5\theta + C\end{aligned}$$

الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



ومنه نجد أن

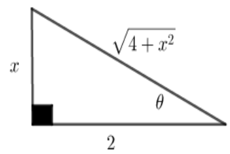
$$\therefore \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = 5\cdot\frac{\sqrt{x^2-25}}{5} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C = \sqrt{x^2-25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

.3 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

الحل : بوضع $x = 2\tan\theta$ حيث $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ عندئذ $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\tan\theta}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}} \cdot 2\sec^2\theta d\theta = \int \frac{2\tan\theta}{2\sec\theta} \cdot 2\sec^2\theta d\theta$$
$$= 2\int \tan\theta\sec\theta d\theta = 2\sec\theta + C$$

الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



ومنه نجد أن

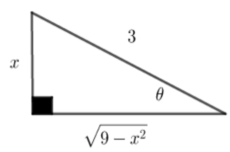
$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = 2\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + C = \sqrt{4+x^2} + C$$

.4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

الحل : بوضع $x = 3\sin\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = 3\cos\theta d\theta$ ولذا فإن

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}{9\sin^2\theta} \cdot 3\cos\theta \mathrm{d}\theta = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta} \cdot 3\cos\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int \cot^2\theta d\theta$$
$$= \int \left(\csc^2\theta - 1\right) d\theta = -\cot\theta - \theta + C$$

الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



وأيضاً $\left(\frac{x}{3}\right)$ $\theta = \sin^{-1}$ وبالتالي فإن

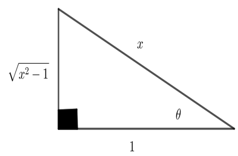
$$\therefore \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

.22 $\int \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}dx$

الحل : بوضع $x = \sec\theta$ حيث $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ عندئذ $dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$
ولذا فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int \frac{1}{(\sec^2\theta - 1)^{\frac{3}{2}}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{(\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{(\tan\theta)^3}\partial\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \\
&= \int \csc\theta\cot\theta d\theta = -\csc\theta + c
\end{aligned}$$

. الأن لابد من الرجوع إلى المتغير x وذلك باستخدام المثلث التالي



وبالتالي فإن

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

5 تكاملات الصيغ التربيعة

الهدف من هذا البند هو معالجة التكاملات التي تحتوي على كثيرة حدود من الدرجة الثانية ($P(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$) غير قابلة للتحليل قي $\mathbb{R}$.

لنفرض أن لدينا تكامل يحتوي على $P(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $P(x)$ غير قابلة للتحليل أولاً نقوم باكمال المربع كما يلي :

$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

$$\therefore P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \qquad (9)$$

الأن بعد اكمال المربع كما في (9) نأخذ $u = x\frac{b}{2a}$ ثم نستخدم التعويضات المثلثية أو الكسور الجزئية (البند القادم).

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}\,dx$.

الحل :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 13 \\ &= (x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

بوضع $u = x - 3$ نجد أن

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{(x-3)^2+4}dx &= \int \frac{2u+5}{u^2+4}dx \\ &= \int \frac{2u}{u^2+4}du + 5\int \frac{1}{u^2+4}dx \\ &= \ln\left|u^2+4\right| + 5\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + c \\ &= \ln\left|(x-3)^2+4\right| + \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c \end{aligned}$$

2. احسب التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$.

الحل :

$$\begin{aligned}8+2x-x^2 &= 8-\left(x^2-2x+1-1\right)\\ &= 8-\left[(x-1)^2-1\right]\\ &= 9-(x-1)^2\end{aligned}$$

بوضع $x-1=3\sin\theta$ نجد أن

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\\ &= \int \frac{3\cos\theta}{3\cos\theta}d\theta\\ &= \int d\theta\\ &= \theta + C\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)+c\end{aligned}$$

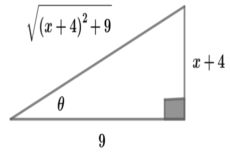
3. احسب التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx$.

الحل :

$$\begin{aligned}x^2+8x+25 &= \left(x^2+8x+16\right)-16+25\\ &= (x+4)^2+9\end{aligned}$$

بوضع $x+4=3\tan\theta$ نجد أن

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}dx\\ &= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}d\theta\\ &= \int \sec\theta d\theta\\ &= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{(x+4)^2+9}}{3}+\frac{x+4}{3}\right| + C\end{aligned}$$



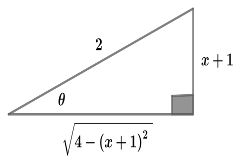
4. احسب التكامل $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

الحل :

$$\begin{aligned} 3-2x-x^2 &= 3-\left(x^2+2x\right) \\ &= 3-\left(x^2+2x+1-1\right) \\ &= 3-\left[(x+1)^2-1\right] \\ &= 3-(x+1)^2+1 \\ &= 4-(x+1)^2 \end{aligned}$$

بوضع $x+1=2\sin\theta$ نجد أن

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3-2x-x^2}dx &= \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx \\ &= \int 2\cos\theta(2\cos\theta)d\theta \\ &= 4\int \cos^2\theta d\theta \\ &= 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= 2\int (1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]+c \\ &= 2\theta+2\sin\theta\cos\theta+c \\ &= 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+2\frac{x+1}{2}\frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2}+C \\ &= 2\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}+C \end{aligned}$$



1.5 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 23 احسب التكامل المعطى.

.1 $\int \frac{x}{x^2-4x+8}dx$

.2 $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$

.3 $\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx$

.4 $\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}dx$

.5 $\int \frac{dx}{x^2-2x}$

.6 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

.7 $\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-6x-x^2}}dx$

.8 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x+e^{2x}}}dx$

.9 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

.10 $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-6\sin\theta+12}d\theta$

.11 $\int \sqrt{x^2-2x}dx$

.12 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

.13 $\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$

.14 $\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}dx$

.15 $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^{3/2}}dx$

.16 $\int \frac{x+5}{9x^2+6x+17}dx$

.17 $\int \frac{1}{(x^2-6x+34)^{3/2}}dx$

.18 $\int \sqrt{x(6-x)}dx$

.19 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

.20 $\int_2^3 \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}dx$

.21 $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$

.22 $\int \cos x\sin x\sqrt{1-\sin^4 x}dx$

.23 $\int (x\cos x+\sin x)\sqrt{1+x^2\sin^2 x}dx$

2.5 أجوبة بعض التمارين

.1 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+8}dx$

الحل : $x^2-4x+8=(x^2-4x+4)-4+8=(x-2)^2+4$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2-4x+8}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+4}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 2\int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 2\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

.2 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$

الحل :

$$x^2+2x-3=\left(x^2+2x+1\right)-1-3=(x+1)^2-4$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{1}{(x+1)^2-4}dx = -\frac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

الحل :

$$x^2-2x=\left(x^2-2x+1\right)-1=(x-1)^2-1$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x} = \int \frac{1}{(x-1)^2-1}dx = -\tanh^{-1}(x-1) + C$$

.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

الحل :

$$2x-x^2=-\left((x^2-2x+1)-1\right)=-\left((x-1)^2-1\right)=1-(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx \qquad ,u=x-1\Rightarrow du=dx\\&=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du\\&=\sin^{-1}(u)+C\\&=\sin^{-1}(x-1)+C\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx \qquad ,x-1=\sin\theta\Rightarrow dx=\cos\theta d\theta\\&=\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta\\&=\int\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta\\&=\int\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta\\&=\int d\theta\\&=\theta+C\\&=\sin^{-1}(x-1)+C\end{aligned}$$

6 الكسور الجزئية

في هذا البند نتناول التكاملات الدوال الكسرية, أي الدوال التي تكون على الشكل $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ حيث كل من $p(x)$ و $q(x)$ كثيرة حدود.

لنفرض أننا نريد حساب التكامل $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$ قد يبدو أن التكامل صعب جداً ولكن إذا تنبهنا إلى المساواة التالية

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1} \tag{10}$$

فإن التكامل يصبح متاحاً لنا و يسيراً .

سنتبع طريقة تسمى بعملية التفريق إلى كسور جزية بمعنى سوف نفرق الكسر المعطى الى حاصل جمع أو طرح كسور يمكن التعامل معها كما فعلنا في (10).

مبرهنة 1.6 إذا كانت $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ دالة كسرية ودرجة $p(x)$ أصغر من درجة $q(x)$ فإن هناك كسوراً $F_1, F_2, \cdots, F_r$ تحقق

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_r(x)$$

وتكون كل F_i إما على الصورة $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ أو على الصورة $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}$, $b^2 - 4c < 0$.

تسمى الكسور $F_1, F_2, \cdots, F_r$ بكسور f الجزئية .

■ إرشادات لتفريق الكسر $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ إلى كسور جزئية .

1. إذا لم تكن درجة $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$ فإننا نستخدم القسمة المطولة لتكون درجة البسط أقل منة درجة المقام.
2. نحلل كثيرة الحدود $q(x)$ تماماً إلى عوامل خطية $ax+b$ وعوامل من الدرجة الثانية ax^2+bx+c غير قابلة للاختزال ومن ثم نضم العوامل المتكررة وبالتالي تصبح $q(x)$ كحاصل ضرب عوامل مختلفة من الشكل $(ax+b)^n$ أو الشكل $(ax^2+bx+c)^n$.
3. بعد 1 و 2 نطبق التالي

(ا) مساهمة العامل $(ax+b)^n$ حيث $n \geq 1$ في الكسور الجزئية تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}} + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_n$ أعداد حقيقية يتم حسابها لاحقاً .

(ب) مساهمة العامل $(ax^2+bx+c)^n$ حيث $n \geq 1$ في الكسور الجزئية تأخذ الصورة :

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ و $B_1, B_2, \cdots, B_n$ أعداد حقيقية يتم حسابها لاحقاً .

♦ أمثلة

1. احسب التكامل $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx$

الحل : نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام وبالتالي ننتقل مباشرة إلى الخطوة رقم 2 من الإرشادات لنجد أن

$$x^3+2x^2-3x = x\left(x^2+2x-3\right) = x(x+3)(x-1)$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1} \quad \mathbf{(11)}$$

بضرب طرفين **(11)** بالعدد $x(x+3)(x-1)$ لنحصل على

$$4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+3) \qquad (*)$$

بوضع $x=0$ في $(*)$ نجد أن

$$-9=-3A \Longrightarrow A=3$$

وبوضع $x=1$ في $(*)$ نجد أن

$$8=4C \Longrightarrow C=2$$

وبوضع $x=-3$ في $(*)$ نجد أن

$$-12=12B \Longrightarrow B=-1$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x}+\frac{-1}{x+3}+\frac{2}{x-1}$$

و بالتالي يكون لدينا

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx &= \int \frac{4x^2+13x-9}{x\,(x+3)\,(x-1)}\,dx\\ &= \int \left(\frac{3}{x}+\frac{-1}{x+3}+\frac{2}{x-1}\right)dx\\ &= 3\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{1}{x+3}\,dx+2\int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= 3\ln|x|-\ln|x+3|+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

2. احسب التكامل $\displaystyle\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)\,(x-2)^3}\,dx$

الحل : ليكن $\displaystyle I=\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)\,(x-2)^3}\,dx$.

نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام و كذلك المقام جاهز , إذن ننتقل إلى الخطوة رقم 3 من الإرشادات لنحصل على

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)\,(x-2)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}$$

بضرب الطرفين بالعدد $(x+1)\,(x-2)^3$ لنحصل على

$$3x^3-18x^2+29x-4=A\,(x-2)^3+B\,(x+1)\,(x-2)^2+C\,(x+1)\,(x-2)+D\,(x+1) \qquad (*)$$

بفك الأقواس في الطرف الأيمن من $(*)$ ومقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على النظام :

$$\begin{cases}A+B=3\\ -6A-3B+C=-18\\ 12A-C+D=29\\ -8A+4B-2C+D=-4\end{cases}$$

بحل نظام المعادلات نجد أن $A=2$, $B=1$, $C=-3$, $D=2$ وبالتالي

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)\,(x-2)^3}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{-3}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}$$

ومنه

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{2}{x+1}\,dx+\int \frac{1}{x-2}\,dx+\int \frac{-3}{(x-2)^2}\,dx+\int \frac{2}{(x-2)^3}\,dx\\ &=2\int \frac{1}{x+1}\,dx+\int \frac{1}{x-2}\,dx-3\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx+2\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx\\ &=2\ln|x+1|+\ln|x-2|+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C\end{aligned}$$

3. احسب التكامل $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx$

الحل : نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام وبالتالي ننتقل مباشرة إلى الخطوة رقم 2 من الإرشادات لنجد أن

$$2x^3-x^2+8x-4=x^2\left(2x-1\right)+4\left(2x-1\right)=\left(x^2+4\right)\left(2x-1\right)$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}$$

بضرب الطرفين بالعدد $(x^2+4)(2x-1)$ لنحصل على

$$x^2-x-21=\left(Ax+B\right)\left(2x-1\right)+C\left(x^2+4\right)\qquad(*)$$

بفك الأقواس في الطرف الأيمن من $(*)$ ومقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على النظام :

$$\begin{cases}2A+C=1\\ -A+2B=-1\\ -B+4C=21\end{cases}$$

بحل نظام المعادلات نجد أن $A=3$, $B=1$, $C=-5$ وبالتالي

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{-5}{2x-1}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx&=\int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx-5\int \frac{1}{2x-1}\,dx\\&=3\int \frac{x}{x^2+4}\,dx+\int \frac{1}{x^2+4}\,dx-5\int \frac{1}{2x-1}\,dx\\&=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{5}{2}\ln\left|2x-1\right|+C\end{aligned}$$

4. احسب التكامل $\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

الحل : نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام و كذلك المقام جاهز , إذن ننتقل إلى الخطوة رقم 3 من الإرشادات لنحصل على

$$\frac{5x^3-3x^2+7x-3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$

بضرب الطرفين بالعدد $(x^2+1)^2$ لنحصل على

$$5x^3-3x^2+7x-3=(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D \quad (*)$$

بفك الأقواس في الطرف الأيمن من $(*)$ ومقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على

$$\begin{cases} A=5 \\ B=-3 \\ A+C=7 \\ B+D=-3 \end{cases}$$

ومنه نجد أن $A=5$, $B=-3$, $C=2$, $D=0$ وبالتالي

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx &= 5\int \frac{x}{x^2+1}\,dx-3\int \frac{1}{x^2+1}+\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx \\ &= \frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)-3\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}+C\end{aligned}$$

1.6 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 18 احسب التكامل المعطى.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$
3. $\displaystyle\int \frac{5x-5}{3x^2-8x-3}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^4+x^3}$
9. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{x^3-x-3\sqrt{2}}{x^2-2}dx$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$
13. $\displaystyle\int \frac{2x^5-x^3-1}{x^3-4x}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+4\sin x-5}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x-\tan^2 x}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+2}{x\left(x^2+2\right)}dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-2)\left(x^2-3x+2\right)}$

2.6 أجوبة بعض التمارين

.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

الحل :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\therefore A(x+2)+B(x-1) = 1 ------(*)$$

بوضع $x=1$

في المعادلة (*) نحصل على

$$A(1+2)+B(1-1) = 1 \Rightarrow \boxed{A=\tfrac{1}{3}}$$

بوضع $x=-2$ في المعادلة (*) نحصل على

$$A(-2+2)+B(-2-1) = 1 \Rightarrow \boxed{B=-\tfrac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} &= \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

.2 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

الحل :

$$x^2+8x+7 = (x+1)(x+7)$$

$$\frac{1}{x^2+8x+7} = \frac{1}{(x+1)(x+7)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+7)} = \frac{A(x+7)+B(x+1)}{(x+1)(x+7)}$$

$$\therefore A(x+7)+B(x+1) = 1 ----------(*)$$

بوضع $x=-1$ في المعادلة (*) نحصل على

$$A(-1+7)+B(-1+1) = 1 \Rightarrow \boxed{A=\tfrac{1}{6}}$$

بوضع $x=-7$ في المعادلة (*) نحصل على

$$A(-7+7)+B(-7+1)=1 \Rightarrow \boxed{A=-\tfrac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{1}{x^2+8x+7}=\frac{\frac{1}{6}}{(x+1)}+\frac{-\frac{1}{6}}{(x+7)}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+8x+7} &= \int \left(\frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{6}\frac{1}{(x+7)}\right)dx\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+7}dx\\ &= \frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x+7|+C\end{aligned}$$

.5 $\displaystyle\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx$

الحل :

$$\frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}=\frac{(3x^2-12x+12)+(12x-22)}{x^2-4x+4}=3\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+4}+\frac{12x-22}{x^2-4x+4}$$

$$\therefore \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}=3+\frac{12x-22}{x^2-4x+4}$$

$$\frac{12x-22}{x^2-4x+4}=\frac{12x-22}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)+B=12x-22 \Rightarrow Ax-2A+B=12x-22$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A=12\\ -2A+B=-22\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A=12\\ 3=2\end{cases}$$

$$\therefore \frac{12x-22}{x^2-4x+4}=\frac{12}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx &= \int \left(3+\frac{12x-22}{x^2-4x+4}\right)dx\\ &= \int 3dx + \int \frac{12x-22}{x^2-4x+4}dx\\ &= 3x + \int \left(\frac{12}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx\\ &= 3x + 12\int \frac{1}{x-2}dx + 2\int (x-2)^{-2}dx\\ &= 3x + 12\ln|x-2| - 2\frac{1}{x-2} + C\end{aligned}$$

.9 $\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$

الحل :

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

$$\frac{x^3}{x^3+1}=\frac{\left(x^3+1\right)-1}{x^3+1}=1-\frac{1}{x^3+1}=1-\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)=1 \Rightarrow Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C=1$$

$$\therefore (A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)=1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0------(1)\\ -A+B+C=0---(2)\\ A+C=1------(3)\end{cases}$$

$$(1)-(2)\Rightarrow \begin{array}{c} A+B=0\\ \underline{-A+B+C=0}\\ 2A-C=0\end{array}$$

لتكن

$$2A-C=0------(4)$$

$$(4)+(3)\Rightarrow \begin{array}{c} 2A-C=0\\ \underline{A+C=1}\ +\\ 3A=1\end{array}$$

$$\begin{cases}\because 3A=1\Rightarrow A=\frac{1}{3}\\ \because A+B=0\Rightarrow B=\frac{-1}{3}\\ \because A+C=1\Rightarrow C=\frac{2}{3}\end{cases}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^3+1}dx &= x - \int \frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}dx \\
&= x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx \\
&= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx \\
&= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\left(\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}dx + \int \frac{1}{x^2-x+1}dx\right) \\
&= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\left(\ln\left|x^2-x+1\right| + \int \frac{1}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}dx\right) \\
&= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\left(\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right) + C \\
&= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C
\end{aligned}$$

.16 $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x - \tan^2 x}dx$

الحل : ضع $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x - \tan^2 x}dx = \int \frac{1}{u^3-u^2}du = \int \frac{1}{u^2(u-1)}du$$

$$\frac{1}{l^2(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1} = \frac{Au(u-1)+B(u-1)+Cu^2}{u^2(u-1)}$$

$$\therefore Au(u-1)+B(u-1)+Cu^2 = 1 ------(*)$$

بوضع $x = 1$ في (*) نجد أن

$$0+0+C = 1 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

بوضع $x = 0$ في (*) نجد أن

$$0-B+0 = 1 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

بمقارنة المعاملات في (*) نحصل على

$$A+C = 0 \Rightarrow A+1 = 0 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x-\tan^2 x}dx &= \int \frac{1}{u^2(u-1)}du\\ &= \int\left(\frac{-1}{u}+\frac{-1}{u^2}+\frac{1}{u-1}\right)du\\ &= -\int \frac{1}{u}du-\int \frac{1}{u^2}du+\int \frac{1}{u-1}du\\ &= -\ln|u|+\frac{1}{u}+\ln|u-1|+C\\ &= -\ln|\tan x|+\frac{1}{\tan x}+\ln|\tan x-1|+C\\ &= \cot x+\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x}\right|+C\\ &= \cot x+\ln|1-\cot x|+C\end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2-x+2}{x\left(x^2+2\right)}dx$ .17

الحل :

$$\frac{2x^2-x+2}{x^3+2x}=\frac{2x^2-x+2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{A\left(x^2+2\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+2\right)}$$

$$\therefore A\left(x^2+2\right)+(Bx+C)x=2x^2-x+2 \Rightarrow Ax^2+2A+Bx^2+Cx=2x^2-x+2$$

$$(A+B)x^2+Cx+2A=2x^2-x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2\\ C=-1\\ 2A=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1\\ B=1\\ C=-1\end{cases}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+2}{x^3+2x}dx &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+2}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x}dx+\int \frac{x}{x^2+2}dx-\int \frac{1}{x^2+2}dx\\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx-\int \frac{1}{x^2+(\sqrt{2})^2}dx\\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C\end{aligned}$$

$$\int \frac{x+1}{(x-2)\left(x^2-3x+2\right)}$$ .18

الحل :

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{(x-2)\left(x^2-3x+2\right)} &= \frac{x+1}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)} \\
&= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{A(x-2)(x-1) + B(x-1) + C(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}
\end{aligned}$$

$$\therefore A(x-2)(x-1) + B(x-1) + C(x-2)^2 = x+1 ------(*)$$

بوضع $x = 2$ في (*) نجد أن

$$0 + B + 0 = 2 + 1 \Rightarrow \boxed{B = 3}$$

بوضع $x = 1$ في (*) نجد أن

$$0 + 0 + C = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

بمقارنة المعاملات في (*) نحصل على

$$A + C = 0 \Rightarrow A + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-2)\left(x^2-3x+2\right)}dx &= \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx \\
&= -2\int \frac{1}{x-2}dx + 3\int \frac{1}{(x-2)^2}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx \\
&= -2\int \frac{1}{x-2}dx + 3\int (x-2)^{-2}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx \\
&= -2\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + 2\ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

7 تعويضات خاصة

◄ **التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية**

إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x فإن التعويض $u = x^{\frac{1}{m}}$ حيث m هو المضاعف الأصغر لمقامات القوى غالباً ما يكون مفيد لأنه نستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة وهي أسهل في التعامل.

♦ مثال :احسب $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

الحل : نلاحظ أن التكامل يحتوي على $x^{\frac{1}{2}}$ و $x^{\frac{1}{3}}$ وبالتالي نضع $u = x^{\frac{1}{6}}$ (المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3 هو 6) ومنه يكون لدينا $x = u^6$ وكذلك $dx = 6u^5\,du$ وعليه فإن

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{(u^6)^{1/2}}{1+(u^6)^{1/3}}\left(6u^5\right)du = 6\int \frac{u^8}{1+u^2}\,du$$

ونلاحظ أن

$$\begin{aligned}\frac{u^8}{1+u^2} = \frac{(u^8-1)+1}{1+u^2} &= \frac{(u^4-1)(u^4+1)}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\\ &= \frac{(u^2-1)(u^2+1)(u^4+1)}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\\ &= \left(u^2-1\right)\left(u^4+1\right) + \frac{1}{1+u^2}\\ &= u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right)du\\ &= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6\tan^{-1}u + C\\ &= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\tan^{-1}\left(x^{1/6}\right) + C\end{aligned}$$

◄ **التكاملات التي تحتوي على $\sqrt[n]{f(x)}$**

إذا كان التكامل يحتوي على $\sqrt[n]{f(x)}$ فإن التعويض $u = \sqrt[n]{f(x)}$ يكون مفيد في بعض الأحيان.

♦ مثال :احسب $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

الحل : بوضع $u=\sqrt{1+e^x}$ نجد أن $u^2=1+e^x$ ومنه $2u\,du=e^x\,dx$ وبما أن $u^2-1=e^x$ فإن $dx=\dfrac{2u}{u^2-1}\,du$ وعليه فإن

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+e^x}\,dx &= \int u\,.\,\frac{2u}{u^2-1}\,du \\
&= 2\int \frac{u^2}{u^2-1}\,du \\
&= 2\int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}\,du \\
&= 2\int du + \int \frac{2}{(u-1)\,(u+1)}\,du \\
&= 2u + \int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + C \\
&= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right) + C \\
&= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C
\end{aligned}$$

◄ **تكاملات الدوال الكسرية في** $\sin x$ **و** $\cos x$

في هذه التكاملات نقوم باستخدام التعويض

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ ,x\in(-\pi,\pi)$$

ويكون لدينا

$$\begin{aligned}
du=\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx &= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,dx \\
&= \frac{1+u^2}{2}\,dx
\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}
\because \sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &\Longrightarrow \sin x = 2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\
&\Longrightarrow \sin x = \frac{2u}{1+u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\because \cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &\Longrightarrow \cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2-\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 \\
&\Longrightarrow \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}$$

إذن في حال استخدام التعويض

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \, , x \in (-\pi, \pi)$$

نجد أن

$$\boxed{dx = \frac{2}{1+u^2}\,du \, , \, \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \, , \, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

♦ مثال : احسب $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$

الحل : بوضع

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \, , x \in (-\pi, \pi)$$

نجد أن

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du \, , \, \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \, , \, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)+\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\
&= \int \frac{2du}{(1+u^2)-2u+(1-u^2)} \\
&= \int \frac{du}{1-u} \\
&= -\ln|1-u|+C = -\ln|1-\tan(x/2)|+C
\end{aligned}$$

1.7 تمارين

◄ في التمارين من 1 إلى 24 احسب التكامل المعطى.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^6}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}}$
7. $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^3+1}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x+2}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$
11. $\displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+\sqrt[3]{x^2}}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2+\cos x-6}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\sec x}{1+\sin x}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$
17. $\displaystyle\int \sqrt{1-e^x}dx$
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\cos x}$
19. $\displaystyle\int \frac{\sec x}{4-3\tan x}dx$
20. $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}dx$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$
22. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$
23. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x}$
24. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\sin x}$

2.7 أجوبة بعض التمارين

.1 $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^6}dx$

الحل :

$$u=2x-1 \Rightarrow du=2dx, x=\frac{u+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(2x-1)^6}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(u+1)/2}{u^6}du=\frac{1}{4}\int \frac{u+1}{u^6}du\\ &=\frac{1}{4}\int (u+1)u^{-6}du=\frac{1}{4}\int \left(u^{-5}+2u^{-6}\right)du\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{u^{-4}}{-4}+\frac{u^{-5}}{-5}\right)+C=-\frac{(2x-1)^{-4}}{16}-\frac{(2x-1)^{-5}}{20}+C\end{aligned}$$

.2 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

الحل :

$$u=\sqrt{2x-1} \Rightarrow du=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}dx \Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx$$

$$\because u=\sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2=2x-1 \Rightarrow x=\frac{u^2+1}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx=\int \frac{u^2+1}{2}du=\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{2}u+C=\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2}+\frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}+C$$

.4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$

الحل :

$$u=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow u^3=x \Rightarrow 3u^2du=dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{u}{u^2+1}3u^2du=3\int \frac{u^3}{u^2+1}du\\ &=3\left[\int udu-\int \frac{u}{u^2+1}du\right]=3\left[\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du\right]\\ &=\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right|+C=\frac{3}{2}(x)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\ln\left|x^{\frac{2}{3}}+1\right|+C\end{aligned}$$

.5 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

الحل :

$$u=x^{1/3} \Rightarrow u^3=x \Rightarrow 3u^2du=dx$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{u^2}{1+u}\left(3u^2\right)du = 3\int \frac{u^4}{1+u}du = 3\int \left(u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= 3\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + C$$
$$= \frac{3}{4}x^{4/3} - x + \frac{3}{2}u^{2/3} - 3x^{1/3} + \ln\left|x^{1/3}+1\right| + C$$

.6 $\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}}$

الحل :

$$x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$$
$$\int \frac{1}{2+2\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{2+2u}\,2u\,du = \int \frac{2u}{2(1+u)}du$$
$$= \int \frac{u}{1+u}du = \int \frac{(u+1)-1}{1+u}du$$
$$= \int du - \int \frac{1}{1+u}du = u - \ln|1+u| + c$$
$$= \sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}| + c$$

.17 $\int \sqrt{1-e^x}dx$

الحل :

$$u = \sqrt{1-e^x} \Rightarrow u^2 = 1-e^x \Rightarrow 2udu = -e^x dx$$
$$\because u = \sqrt{1-e^x} \Rightarrow e^x = 1-u^2$$
$$\therefore \int \sqrt{1-e^x}dx = \int u\frac{-2u}{1-u^2}du = \int \frac{-2u^2}{1-u^2}du = \int \frac{-2+2-2u^2}{1-u^2}du$$
$$= -2\tanh^{-1}(u) + 2u + C$$
$$= -2\tanh^{-1}\left(\sqrt{1-e^x}\right) + 2\sqrt{1-e^x} + C$$
$$= 2\sqrt{1-e^x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}\right| + C$$

.23 $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

الحل :

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$
$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int \frac{2}{1-\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{2}{u^2-2u+1}du = 2\int \frac{1}{(u-1)^2}du$$
$$= \frac{-2}{u-1} + C = \frac{-2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + C$$

$$\int \frac{dx}{5+3\sin x} \quad .24$$

الحل :

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx=\frac{2}{1+u^2}du, \sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{5+3\sin x}=\int \frac{1}{5+\frac{6u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=2\int \frac{1}{5u^2+6u+5}du=\frac{2}{5}\int \frac{1}{u^2+\frac{6}{5}u+1}du$$

$$=\frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(u^2+\frac{6}{5}u+\frac{9}{25}\right)-\frac{9}{25}+1}du=\frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(u+\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}du$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}\tan^{-1}\left(\frac{5u+3}{4}\right)+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3}{4}\right)+C$$