

د . عبدالكاظم ماجود

دراسة في النظرية الاهتزازية



ديوان المطبوعات الجامعية
الجزائر

المقدمة

في وقتنا المعاصر أصبحت الأفكار حول الجمل
والأنظمة الاهتزازية التي تهدو لأول وهلة وكأنها
لا تشابه الظواهر الطبيعية المخطفه (الكرومغناطيسية ،
الكيمياء ، البايولوجيا ، الخ) طبيعية وقبولة ،
ليس فقط من قبل الباحثين العلميين ، بل وحتى من
قبل تلاميذ مدارس الأمس .

في الواقع وجوابا على سؤال : ما هو المزا ز
التوافقي ، يقدم كثير من المصتمين في وقت واحد
بهية امثلة النواس والدائره الكهناية ، المعكوبه
من مكثفه وطف .

وحتى يومنا هذا ليس من السهولة دائما ربط
الظواهر الاهتزازية والتاثيرات المشامده فسي
حالات ليست نادره ، مع العطيات الاولية الاساسيه .
لذلك الآن ، كما يبدو لي ، ظهرت ضروره طبعه لكتاب
علمي ، تعرض فيه النظرية الاهتزازية المعاصره .
امام القارئ ظواهرها وتاثيراتها ، المكثفه فسي
مختلف التطبيقات . من الضروري الاشاره الى أن
النظرية الاهتزازية تتمم بالدرجة الاولى : بالصفات
العامة للعطيات الاهتزازية وليس بالسلوك التفصيلي
للجمل والأنظمة الفيزيائية المرتبط بظهور الطبيعة
الجومريه لهذه الأنظمة (فيزيائية ، بايولوجيه
..... الخ) - اعتماداً على تحليل النموذج الدروس وأخذاً
بمبدأ الانطلاق من العام الى الخاص تصيغ النظرية

الامتزازية هذه الصفات العامة في الانظمة الحقيقية،
 محتوى هذه النظرية يكمن في كونها تصامد على
 تحديد العلاقة بين ما ييس النظام وبين امكانياته
 الامتزازية في حالة هذه أو تلك من التأثيرات .
 استخدام النظرية الامتزازية في كل حالة ملموسة
 يفترض تبسيطاً محدداً يقترب الى المثالية للنظام
 الحقيقي - بناءً نموذج بسيط ووصفه يتوافق مع
 المعادلات الرياضية التي تكون في العادة تفاضلية
 أو متحولات أو مصفوفات .

المثالية المستخدمة للنس النظام الواحد يمكن أن
 تكون مختلفة اعتماداً على ، حول بحث اية ظاهرة
 يجري الحديث، أي أن النموذج أو الموديل يجب أن يتوافق ليس فقط
 مع النظام، بل ومع الظاهرة أيضاً . على سبيل المثال
 عندما يجري الحديث فقط حول شروط أرجحة أراجيح
 الاطفال عند التفسير الدوري لاطوالها ، يمكن أن يكون
 النموذج بسيط للغاية - مزاز خطي بتردد متغير . لكن
 عندما يكون من الضروري تحديد شروط استقرار -

Stability الامتزازات، هيكلها الخ ، حينذاك يصبح
 من اللازم انجاز نموذج ، اخذين بالحسبان (على أقل
 تقدير) اعتماد تردد الامتزازات على سعاتها . بهذا
 الشكل يأتي الى نموذج المراز اللاخطي ذو القياس
 المتغير دورياً .

مرة أخرى نشير على أساس التصورات المتراكمة
 للنظرية الامتزازية يمكن ربط هذه أو تلك من الظواهر
 في الانظمة الملموسة مع طبيعة هذه الانظمة ، ففي

الحقيقة لا يعني ذلك حل المشكلة ، على سبيل المثال
عندما يدور الحديث حول انتقال أو اعادة انتاج
طاقة احدى الاهتزازات في أخرى لنظام لا غطيته
ضعيفه ، مثل ذبذبات (اهتزازات) البندول على التايغر
يمكن القول مباشرة ، أن مثل هذا التحول في الطاقة
يمكن فقط بتلك الحالة ، عندما

تتحقق شروط محددة للتناغم *Resonance*

بين الترددات الخاصة للأنظمة التناغمية .

من وجهة النظر الأكثر شمولية يبدو أن معظم ظواهر
عالمنا لاخطية وأن اللاخطية صفة حتمية فـ في
أي نظام يتغير ببطي مع الزمن . بحث المشاكل
اللاخطية يستمرى الآن اهتماما كبيرا ليس فقط في
الميكانيكيين والفيزيائيين بل وحتى البيولوجيين
والكيميائيين والاقتصاديين ... الخ . لكننا في كتابنا
هذا علينا بشكل رئيسي بالظواهر والأنظمة الخطية ،
متخذين أساساً لعملنا خبرة سنوات أربع في تدريس
هذا الموضوع لطلبة الجامعة .

فبالنسبة للنظرية الاهتزازية التي تقدم دراسة فيما
يعني الثقل المعلق بنماية نابض والدائرة الكهربائية
الاهتزازية كليهما يعنيان موضوع بحث واحد وكليهما
يكتبان بنفس المعادلات التفاضلية المعروفة ويوصفا
بنفس الفضاء الطوري الواحد . هذا التشابه بين ذبذبات

الثقل على التايغر وبين ذبذبات الشحنة أو التيار في
الدائرة الكهربائية امتد عميقا بحيث أصبح وسيلة
معتادة للبحث بأيدي الفيزيائيين بغض النظر عن

أن هاتين الظاهرتين نفسيهما تنسبان الى مجالين مختلفين . ما قيل يتفق مع محتوا الفصول الاربعة الاولى لهذا الكتاب ، حيث بحثت صفات وخصائص الانظمة الخطية مثل المراز الخطي - النموذج الاساسي للنظرية الخطية للامتزازات .

معادلة حركة المراز الخطي التي تصف ذبذباته الحرة ، تمتلك الهيئة

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(انظر المعادلة (2.23) .

المراز الخطي هو مثال خاص لكنه هام جداً . بالنسبة للأنظمة الديناميكية الخطية .

المعادلة اعلاه لا تتضمن الزمن ، هذا يعني أن النظام الموصوف بهما لا يعاني تأثير قوى متغيرة ومقاييسه ثابتة مع الزمن (نظاماً مستقلاً) . أما اذا أثرت على النظام او الجلة قوة دورية خارجية $f(t) = F_0 \cos \omega t$

فمعادلة حركته هي بالمية

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

(انظر المعادلة (2.29) .

حيث تكمن هنا ظاهرة الرنين او التناغم في النمو الحاد لسعة الذبذبات المستقامة (الذبذبات الاضطرابية او المجبرة) التي تبدأ عند اقتراب تردد التأثير التوافقي الخارجي ω من التردد الخاص ω_0 للمراز (بشكل عام الى التردد ω_0 لاحدى الذبذبات الخاصة للنظام المحلل) .

اذا كان النظام ليس بسيطاً ، بل يظهر بعض درجات

للحرية ، حينذاك يصبح ممكنا ظهور تأثير آخر مثل الرنين الداخلي Internal resonance بين الأنظمة الثنائية ، حيث يتم تبادل الطاقة . في الحالة العامة - تظهر في الأنظمة بدرجتي حرية تأثيرات كثيرة خصوصا بالنسبة للأنظمة المعقدة . مثال ذلك النواسين أو البندولين المرتبطين (البندول المركب) هما في الغالب بندولان رياضيان طوليهما l_1 و l_2 بكتل متكافئة $m_1 = m_2 = m$

موجودان في مجال الجاذبية . حركة مثل هذا النظام المعافظ بدرجتي حرية في التقريب الخطي وبأستخدام لاغرانج توصف بنظام معادلتين تفاضليتين خطيتين من الدرجة الثانية ومتجانستين

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 = 0 ,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1 = 0 .$$

(انظر المعادلة (3.8)).

عندما يمتلك النظام n من درجات الحرية فعني ذلك ان حركته تتخذ n من الاحداثيات المستقلة او المستتجة $q_1, q_2, \dots, q_n$ والتي يمكن تصوورها كأزاحات لبعض نقاط النظام الميكانيكي أو لشحنات الدوائر الكهربائية . لوصف حركة هذا النظام نستخدم معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0$$

التي نحصل منها على n من المعادلات التفاضلية الخطية والتي يمكن تحليلها بأستخدام اشكال المعنويات

(أو الماتركس $Matr ix e s$) التي يقود حسابها إلى المعادلة الماتركسية (انظر المعادلة (4.7) .
 بهذا الشكل يمكن تصوّر أي نظام خطي يحافظ بعدد درجات الحرية بحيفة طاقم N من المرازات المستقلة. فيما يخص تحديد المياكل الخاصة والترددات الخاصة فقد فضلنا تناول الموضوع تطبيقياً وبالأظمة المختارة.
 في الفصل الخامس تناولنا الامتزازات الكيموميكانيكية التي تتحقق في بعض الانظمة المادية وتكون مرافقة بتحول متبادل لميفة طاقية معيّنة في أخرى.
 الانظمة التي يظهر فيها هذا النوع من الامتزازات تسجل مبدلات وتعمل نفسها انظمة مرتبطة .

كذلك بحثنا في هذا الفصل، المعائل الكيموميكانيكية التي تشغل مكاناً هاماً في دراسة الامتزازات الميكانيكية والكهربائية للمرازات المشتربة بوجود التماثل بين الظواهر الميكانيكية والكهربائية .

الفصل السادس من هذا الكتاب خصص لدراسة الانظمة اللاخطية البسيطة ومن خلالها بالطبع جرى التعرف على الذبذبات اللاخطية . لكن في مجال كتاب واحد لا يمكن التعرف على فرض تفصيلي لنظرية الامتزازات المعاصرة خصوصاً اللاخطية ، لكنني أأمل ان يكون وسيلة مساعدة لطلبة الفيزياء في الجامعات والمعاهد العليا ، يستخدم كقدمة في هذا المجال الجذاب للغاية من علم الفيزياء .

د . عبد الكاظم ماجود

جامعة سطيف - الجزائر

الفصل الأول

الفصل الأول

الحركات الاهتزازية ومعادلاتها الرياضية

1. جوهر الحركة الاهتزازية

تسمى العطيات التي تختلف بهذه الدرجة أو تلك من التكرار بالاهتزازات أو الذبذبات . وخصائص من هل هذا التكرار يظهرها على سبيل المثال ، وقاس السامع ، اهتزازات الاوتار ، الجهد بين صفائح المكثف في اجهزة الراديو... الخ .

اعتمادا على الطبيعة الفيزيائية للعطيات المتكررة ، يمكن تمييز الاهتزازات التالية : اهتزازات ميكانيكية ، اهتزازات كهرومغناطيسية ، اهتزازات كهروميكانيكية ، الخ تتشعب الاهتزازات في الطبيعة كظاهرة وفي التكنولوجيا استعمالا بصورة واسعة وتطعب في كثير من الحالات ادواراً سلبية . مثال ذلك اهتزازات الجسور الناشئة بسبب الدفع الذي تكتسبه عند مرور القطارات عليها او صفاً من الجنود السائرين في سق معين . كذلك هناك اهتزازات أخرى لها ادواراً سلبية أيضا . مثل اهتزازات اجسام السفن واجنحة الطائرات . جميع هذه العطيات يمكن أن تقود الى نتائج ضارة .

في الحالات المماثلة تكمن المهمة في تلافى ظهور مثل هذه الاهتزازات أو بشكل عام يجب أن تؤخذ احتياطات لكي لا تلغ الاهتزازات مقاييساً خطيره . من الجانب الآخر تدخل العطيات الاهتزازية في صلب

بناءً مختلف مجالات التكنولوجيا الحديثة . مثل
التكنولوجيا الراديوية وغيرها . بالاستناد على
طبيعة التأثير السلط على الجثة أو النظام يمكن
تمييز الاهتزازات الخاصة من الاهتزازات الاضطرابية ،
الاتوماتيكية و الاهتزازات القياسية .

الاهتزازات الخاصة : هي تلك الاهتزازات التي ينجزها
النظام القائم بذاته بعد دفعه أو ازاحته من موضع
استقراره ثم تركه حراً لحاله .

حال ذلك ذبذبات النواس (المتكون من كتلة صغيرة
وتغطيها ممل الوزن موجود ضمن مجال الجاذبية
الارضية) المتسببه من ازاحة الكتلة الصغيره (قد تكون
كره من البلاستيك) جانباً وتركها طليقة .

أما الذبذبات الاضطرابية ، فهي تلك التي تصبح
خلالها العطيات الاهتزازية للأجسام الممتزة خاضعة
لتأثير قوه خارجيه دوريه . مثال ذلك ، اهتزازات
الجسور عند مرور الناس عليها مشياً على الاقدام .
الاهتزازات الاتوماتيكية تنابه بدورها هي الاخرى
الاهتزازات الاضطرابية ، حيث تكون مصحوبة بتأثير قوه
خارجيه على النظام الممتز ولكن اللحظه الزمنية
التي يتحقق فيها تأثير القوه الخارجيه تتحدد من
قبل النظام الممتز نفسه ، أي أن النظام نفسه ينظم
التأثير الخارجي . مثال الانظمة الاتوماتيكية : هو

المسامات التي يحصل فيها النواس دفعا على
حساب طاقة الثقل المرفوع أو النابض المبروم (السلك
الحلزوني الذي جرى لويه) ، اضافة الى ذلك

تحدث هذه الدفعات دوريا في لحظات مرور النوا س خلال وضع الاستقرار .

في الذبذبات القياسيه وعلى حساب التأثير الخارجي يحدث تغيير دوري لاي مقياس مــــن مقياس النظام ، مثل طول الخيط المعلقه بــــه الكره البلاستيكيه التي تنجز الذبذبات .
أبسط أنواع الذبذبات هي الذبذبات التوافقيه ، أي تلك الذبذبات التي تتغير فيها الكميّه الممتزّه (مثل انحراف النوا س) مع الزمن حسب قانون الجيب تمام . هذا النوع من الذبذبات مهم بشكل خاص للأسباب التاليه :

اولا : الذبذبات في الطبيعه وفي التكنولوجيا غالبا ما تمتلك طبيعة قريبة جدا الى الذبذبات التوافقيه ، وثانيا - العمليات الدوريّه بمعياة أخرى (باعتمادية أخرى على الزمن) يمكن ان تصور كتركيب مجموعة ذبذبات توافقيه .
2 كل . الذبذبات الصغيره .

بحث نظاما ميكانيكيا يمكن ان يحدد وضعه بمساعدة كمية واحدة والتي نرمز لها بـ x . في مثل هذه الحالات يقال ان النظام يمتلك درجة حرية واحدة . الكمية x التي تحدد وضع النظام يمكن أن تكون زاوية محسوبة من بعض المستويات ، أو مسافة محسوبة بامتداد منحنى محدد والذي يكون في الغالب مستقيماً ، خط الخ .

الطاقة الكامنه للنظام ستكون دالة لمتغير واحد هو x :

نفترض ان النظام يتمتع بوضع التوازن المستقر . في هذا الوضع تمتلك الدالة $U(x)$ قيمة اصغرية . نشترط أن يحسب الاحداثي x و الطاقة الكامنة U من وضع التوازن . حينذاك

$$U(0) = 0$$

نحلل الدالة $U(x)$ الى سلسلة بدرجات x ، اضافة الى ذلك نتحدد ببحت الذبذبات الصغيره ، بحيث ان الدرجات العليا للمتغير x يمكن اهمالها . نستخدم معادلة ماكليورين

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2!}U''(0)x^2 + \dots$$

(بقوة قلة x تحمل الحدود الاخرى).

بقدر ما ان $U(x)$ تكون اقل ما يمكن عند $x=0$ ، فان $U'(0)$ تساوي صفر ، بينما $U''(0)$ موجب . اضافة الى ذلك ، من

الشرط : $U(0) = 0$. ندخل التعبير :

$$U''(0) = k \quad (k > 0)$$

$$U(x) = 1/2 k x^2. \quad (1.1) \quad \text{حينذاك}$$

التعبير (1.1) يشابه التعبير الخاص بالطاقة الكامنة للسلك المشوه . وباستخدام مفهوم أن القوة التي تؤثر على الدقيقة في مجال القوى المستقر تساوي التغيير الجزئي *Gradient* للطاقة الكامنة باشارة معكوسة ، ومن هذا المفهوم نجد أن القوى المؤثرة على النظام

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \quad (1.2) \quad \text{قيد البحث هي :}$$

هذه المعادلة تعطي مسقط القوى على الاتجاه x .

لاحقا سوف لا نستخدم المعامل $\times$ عند التعبير عن القوة ، اى نكتب المعادله (1.2) بالهيئه :

$$F = -K \times .$$

المعادله (1.2) تتطابق تماما مع تعبير قوة المرونة للسلك المشوه . لذلك فالقوى من هيئه (1.2) بغض النظر عن طبيعتها تسمى قوى مرنة . من السهوله التصور ان القوى الموصوفه بالمعادله (1.2) تكون موجهه دائما باتجاه وضع التوازن . القيمه المطلقه لهذه القوى تتناسب طرديا مع مقدار انحراف النظام عن وضع التوازن . القوى التي تظهر مثل هذه الصفات يسمونها احيانا بالقوى المعيده .

فعلى سبيل المثال نبحث نظاما يتكون من كره بلاستيكيه كتلتها m ، معلقه على سلك مهمل الكتله مقارنة بالكتله m (لاحظ شكل 1.1) . في وضع التوازن آلقوه mg تعادل ، قوة المرونة

$$: K \Delta L_0$$

$$mg = K \Delta L_0 . \quad (1.3)$$

(ΔL_0) - استطالة النابض . سوف نعبّر عن ازاحه الكره عن وضع التوازن بالاحداثي $\times$ ، اضافه الى ان المحور $\times$ نوجهه باتجاه العمود الى الاسفل ، اما المحور الصفري فنطبقه مع وضع توازن الكره .

إذا جعلنا الكرة في وضع التوازن معبراً عنـها
بـ x ، فإن استطالة النـابـض
تصبح مساوية لـ :

$$\Delta L_0 + x$$

ومسقط القوه على محور x سوف يأخذ
المقدار

$$F = mg - k(\Delta L_0 + x) .$$

وبحساب الشرط (1.3) نحصل على

$$F = -kx \quad . (1.4)$$

بـهذا الشكل تمتلك محصلة قوتـي الجاذبيـه
والمرونيـه في المثال البـحـوث طبيعـة قـوة
مرونيـه متـجهـه نحو المـركـز .

نكسب الكرة ازاحة مقدارها $x = a$ ، بعد ذلك نترك النظام لحالة . تحت تاثير القوة المرنة سوف تتحرك الكرة باتجاه وضع التوازن بكل سرعة متنامية .

وخلال ذلك فان الطاقة الكامنة للنظام سوف تتناقص (لاحظ الشكل 1.2) ، ولكن مقابل ذلك تظهر كل الطاقة

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \text{الحركية النامية}$$

(كتلة النابض مهملة) . وعندما تبلغ الكرة وضع التوازن فانها لا تتوقف بل تستمر حركتها بالقصور الذاتي . هذه الحركة سوف تتباطئ وتتوقف عندما تتحول الطاقة الحركية تماما الى طاقة كامنة ، اي عندما تصبح ازاحة الكرة $(a - x)$. بعد ذلك مثل هذه العملية تظهر عند حركة الكرة بالاتجاه المعاكس . فاذا كان الاحتكاك يغييب في النظام فان طاقة النظام يجب ان تبقى ثابتة والكره سوف تتحرك بالحدود من $x = a$ الى $x = -a$ لمدة غير محدده من الزمن . معادلة قانون نيوتن الثاني بالنسبة للكرة تمتلك الميئة التالية:

$$m \ddot{x} = -kx \quad (1.5)$$

$$\omega_0^2 = k/m \quad (1.6) \quad \text{وبادخال التعبير:}$$

تتحول المعادلة (1.5) الى الشكل التالي

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.7)$$

حيث ان $\omega_0 > 0$ و k/m - كمية مادية . وهكذا ففي حالة غياب قوى الاحتكاك فان الحركة تحت تاثير القوة فوق المرنة توصف بالمعادلة التفاضلية (1.7) .

في أي نظام اهتزازي حقيقي توجد قوى مقاومة، والتي تأثيرها يقود الى نقصان طاقة النظام. اذا كان النقصان في الطاقة لا يحصل على حساب شغل القوى الخارجية، فان الاهتزازات سوف تخبث. في ابسط الحالات وفي اكثرها شيوعا هي حالة التناسب الطردي لقوة المقاومة مع مقدار السرعة

$$F_x^* = -b\dot{x} \quad (1.8)$$

هنا b - ثابت يسمى معامل المقاومة. أما اشارة السالب (-) فتشير ان القوة F^* والسرعة $\dot{x}$ يتلكان اتجاهين متعاكسين، وبالتالي فان مسقطيهما على محور x يتلكان اشارتين مختلفتين. معادلة قانون نيوتن الثاني عند وجود المقاومة تعطى بالمعادلة التالية:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (1.9)$$

وباستخدام التعبير : $(1.10) \quad \omega_0^2 = k/m, 2\beta = b/m$ نستطيع كتابة المعادلة (1.9) بالشكل : (1.11)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

هذه المعادلة تصف لنا الاهتزازات المخبث للنظام.

الاهتزازات الموصوفة بالمعادلتين (1.7) و (1.11) هي اهتزازات حرة (اوخاصة) : النظام المزاح عن وضع استقراره او الذي حصل دفعاً جانبياً، يلجز ذاتياً اهتزازاته الخاصة.

الا ن نفرض ان النظام الاهتزازي يخضع لتأثير قوة توافقية

$$F_x = F_0 \cos \omega t . \quad \text{خارجية تساوي :} \quad (1.12)$$

في هذه الحالة معادلة قانون نيوتن الثاني تمتلك

$$m \ddot{X} - kX - b\dot{X} + F_0 \cos \omega t . \quad \text{المية التالية :}$$

وبادخال التعبير (1 . 10) نكتب هذه المعادلة بالشكل التالي

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = f_0 \cos \omega t . \quad (1.13)$$

$$f_0 = F_0 / m . \quad (1.14) \quad \text{حيث}$$

المعادلة (1 . 13) تصف الاهتزازات الاضطرابية .

نحن أو ضحنا أن دراسة الاهتزازات المختلفة الانواع تجعلنا
بتماس مباشر مع ضرورة حل المعادلة التفاضلية من النوع

$$\ddot{X} + a\dot{X} + bX = f(t) . \quad (1.15)$$

حيث a و b - ثوابت ، $f(t)$ - دالة ما للزمن .

المعادلة من نوع (1 . 15) تسمى معادلة تفاضلية خطية
بمعاملات ثابتة . في حالة المعادلة (1.7) ، $a=0$ ، $b=\omega_0^2$.

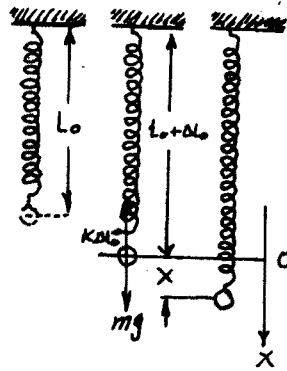
أما في حالة المعادلة (1 . 11) فان $a=2\beta$ و $b=\omega_0^2$.

في كلتا الحالتين تساوي الدالة $f(t)$ الصفر بالتطابق؛

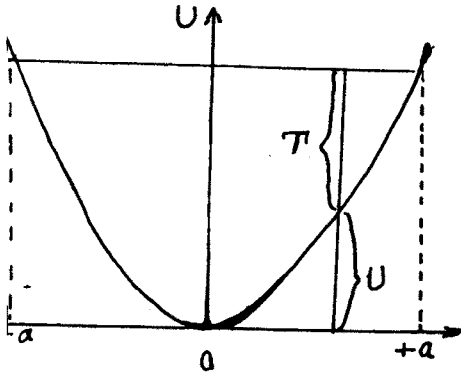
$$f(t) \equiv 0$$

في حالة الاهتزازات الاضطرابية $f(t) = f_0 \cos \omega t$

حل المعادلة (1 . 15) يشمل بقوة اذا انتقلنا الى الاعداد
أو التقادير المعقدة . ولذلك قبل ان نأتي الى البحث التفصيلي
للاستازات المختلفة الانواع سوف نتعرف على التقادير المعقدة .
وعلى طرق حل المعادلات التفاضليه الخطية بتقدير ثابتة .



شكل 1 . 1



شكل 1 . 2

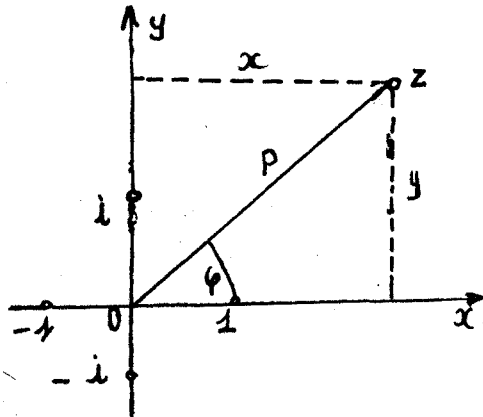
3. الأعداد المعقدة .

العدد $\hat{Z}$ من النوع: (1.16) ، $\hat{Z} = x + iy$ ، يسمى عدداً معقداً ، حيث x و y أعداد حقيقيين ، i -وحده خياليه ($i^2 = -1$) . يسمى العدد x الجزء الحقيقي للعدد المعقد $\hat{Z}$ أو المادي ، وهذا رمزياً يكتب بالميثه :

$$x = \text{Re } \hat{Z}$$

العدد y - يسمى الجزء الخيالي لـ $\hat{Z}$ (يكتب: $y = \text{Im } Z$) العدد: (1.17) . $\hat{Z}^* = x - iy$

يسمى المرافق المعقد للعدد $x + iy$ يمكن تمثيل العدد المادي x بنقطة على محور x . العدد المعقد $\hat{Z}$ يمكن تمثيله بنقطة على المستوي الذي يمتلك الاحداثيين x ، y (لاحظ الشكل 1.3) .



شكل 1 . 3

كل نقطة من نقاط المستوي تحدد بعض الأعداد المعقدة لـ $\hat{Z}$ ، وبالتالي ، فإن العدد المعقد يمكن تعيينه بالميثه (1.16) بمساعدة الاحداثيات الديكارتية x و y لنقاط ملائمه . ولكن نفس العدد يمكن تعيينه بمساعدة الاحداثيات

القطبي ρ ، و φ . بين زوج الاحداثيات تو جد العلاقات التاليه :

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \quad (1.18)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(y/x).$$

المسافه من بداية الاحداثيات الى النقاط التي تصور العدد $\hat{Z}$ تسمى القيمه المطلقه للعدد المعقد (يرمز لها بـ $|\hat{Z}|$).

$$|\hat{Z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.19)$$

العدد φ يسمى محدد (Argument) العدد المعقد $\hat{Z}$. وباخذ المعادله (1.18) بنظر الاعتبار يمكن ان تصور العدد المعقد بالميئه الهندسيه الثلاثيه :

$$\hat{Z} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.20)$$

العدددين المعقددين $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ بحسبان مساوين احدهما للاخر اذا تساوت اجزائهما العاديه والخياليه كل على انفراد: $Z_2 = Z_1$ إذا $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$. القيم المطلقه للعدددين المعقددين المساويين لبعضهما تكون متكافئه بينما محدداتهما يمكن ان تختلف فقط بحدود تكرار 2π :

$$\rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2k\pi. \quad (1.21)$$

من التعبيرين (1.16) و (1.17) واضح ان في الحاله عندما $\hat{Z}^* = \hat{Z}$ ، فان الجزء الخيالي لـ $\hat{Z}$ يساوي صفر، وهذا يعني ان العدد $\hat{Z}$ يبدو انه حقيقياً أو مادياً خالصاً.

بهذا الشكل فان شرط ماديه العدد يمكن ان يكتب
بالمهيه (1.22) . $Z^* = \hat{Z}$.

في الرياضيات تهرمن العلاقه

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (1.23)$$

والتي تسمى صيغة ايلر

يبدل في هذه المعادله φ بـ $(-\varphi)$ ونحسبان

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi \quad \text{بينما}$$

نحصل على العلاقه التاليه :

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \quad (1.24)$$

نجمع المعادلتين (1.23) و (1.24) ونحل العلاقه
المحصله بالنسبه الى $\cos\varphi$ ، نحصل على

$$\cos\varphi = 1/2(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad (1.25)$$

بمساعده المعادله (1.23) نحسب المعادله (1.24)

$$\sin\varphi = (1/2i)(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad \text{نحصل ان :}$$

وبمساعده المعادله (1.24) يمكن ان يكتب العدد

$$\hat{Z} = \rho e^{i\varphi} \quad \text{المعقد بهيئه اسيه .} \quad (1.26)$$

(لاحظ المعادله (1.20)) - العدد المرافق المعقد-

$$Z^* = \rho e^{-i\varphi} \quad \text{بالمصغه الاسيه يمتلك الهيئه} \quad \dots(1.27)$$

وفي حاله جمع الاعداد المعقده | تجمع على افراد

اجزائها الحقيقيه والخياليه

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.28)$$

أما ضرب الأعداد المعقدة من الملائم أن يتحقق
بأخذها بالصيغة الأسية .

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \cdot \rho_2 e^{i\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (1.29)$$

القيم المطلقة للأعداد المعقدة تضرب بينما محدداتها

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \quad \text{و} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (1.30) \quad \text{تجمع}$$

وبصورة مماثلة تتحقق قسمة الأعداد المعقدة:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{\rho_1 e^{i\phi_1}}{\rho_2 e^{i\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (1.31)$$

وأخذاً بنظر الاعتبار المعادلتين (1.26) ، (1.27) من

السهولة أن نحصل على

$$\hat{Z} Z^* = \rho^2 \quad (1.32)$$

(مربع القيمة المطلقة للعدد المعقد يساوي حاصل

ضرب هذا العدد في مرافقه المعقد) .

4. المعادلات التفاضلية الخطية .

المعادلة من النوع: (1.33) $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ حيث a ، b - ثوابت ، $f(t)$ دالة محددة بالزمن .
تسمى معادله خطيه من الدرجة الثانيه بمعاملات ثابتة . الثابتين a و b يمكن ان يكونا مساويين حتى للصفر . اذا كانت الدالة $f(t)$ تساوي صفر بالتطابق ($f(t) \equiv 0$) ، فان المعادله تسمى متجانسه وفي الحاله المعاكسه - تسمى غير متجانسه .
المعادله المتجانسه تمتلك الهيئه:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (1.34)$$

حل اي معادله تفاضليه من الدرجه الثانيه
(اي باكبر اشتقاق ثنائي) ، مثل $\ddot{x}$

يتضمن ثابتين اختياريين C_1 و C_2 .
وهذا يمكن ان يفهم اذا أخذنا بنظر الاعتبار أن تحديد الداله بتفاضلها الثاني يتحقق بتكاملين متكررين .
في كل تكامل يظهر ثابت تكامل . نبحث كمثل
المعادله: (1.35) $\ddot{x} = 0$

تكامل هذه المعادله يعطي: $\dot{x} = C_1$ ، تكرار
التكامل يقود الى الداله (1.36) $x = C_2 t + C_1$...

من السهوله التأكد أنه عند أية مقادير
للثابتين C_1 و C_2 تحقق الداله (1.36) المعادله
(1.35) . باعطاء الثابتين C_1 و C_2 مقادير
معينه ، نحصل على ما يسمى الحل الخاص للمعادله
التفاضليه - على سبيل المثال الداله $(3 + 5t)$
تصبح احد الحلول الخاصه للمعادله (1.35) .

مجموع كل الحلول الخاصة بدون استثناء يسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية .

وعلى هذا الاساس يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية (1.34) بهيئة المعادلة (1.36) .

في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية يبرهن انه ، اذا كانت X_1 و X_2 — يعنيان حلين خطيين مستقلين للمعادلة المتجانسة (1.34) لذلك فان الحل العام لهذه المعادلة يمكن تصوره بالهيئة

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 . \quad (1.37)$$

حيث C_1 و C_2 — ثابتين اختياريين .

افرض ان $X_H(t, C_1, C_2)$ — يعنى حلا عاما للمعادلة غير المتجانسة (1.33) ، (الثابتين الاختياريين C_1 و C_2 يدخلان في هذا الحل بهيئة مقاييس) ، بينما $X_H(t)$ تعنى واحدا من الحلول الخاصة لنفس المعادلة (هذا الحل لا يحتوى ثوابت اختيارية) .

نستخدم التعبير : $X(t, C_1, C_2) = X_H(t, C_1, C_2) - X_H(t)$.

حينذاك يمكن ان تصور الحل العام للمعادلة غير المتجانسة بالهيئة .

$$X_H(t, C_1, C_2) = X_H(t) + X(t, C_1, C_2) . \quad (1.38)$$

الداله (1.38) باية مقادير للثابتين C_1 و C_2 تحقق المعادلة

(1.33) ، وبالتالي يمكن ان تكتب العلاقة :

$$X_H(t) + \ddot{X}(t, C_1, C_2) + a \dot{X}_H(t) + a \dot{X}(t, C_1, C_2) + b X_H(t) + b X(t, C_1, C_2) = f(t) .$$

نرتب الحدود حسب المجاميع ، نحصل :

$$\ddot{X}(t, C_1, C_2) + a \dot{X}(t, C_1, C_2) + b X(t, C_1, C_2) + \left[\ddot{X}_H(t) + a \dot{X}_H(t) + b X_H(t) \right] = f(t) . \quad (1.39)$$

الحل الخاص $X_{\mu}(t)$ كذلك، يحقق المعادله (1.33).
لذلك فالتعبير الموجود داخل الاقواس المربعه في
الطرف الايسر من العلاقه (1.39) يساوي الطرف
الايمن من هذه العلاقه .

ومن ذلك ينتج ان الداله $X(t, c_1, c_2)$ يجب
ان تحقق الشرط:

$$\ddot{X}(t, c_1, c_2) + a\dot{X}(t, c_1, c_2) + bX(t, c_1, c_2) = 0$$

اي ان الداله $X(t, c_1, c_2)$ تمثل نفسما حلا
عاما للمعادله المتجانسه (1.34) . بهذا الشكل
نكون قد توصلنا الى بديهيته هامه جداً:

الحل العام للمعادله غير المتجانسه يساوي مجموع
الحل العام الذي يتطابق مع المعادله المتجانسه
واي حل خاص للمعادله غير المتجانسه .

X الحل العام للمعادله غير المتجانسه = X الحل العام للمعادله
المتجانسه $+ X^+$ الحل الخاص للمعادله غير المتجانسه .

(1.40) .

المعادلات التفاضليه الخطيه بمعاملات ثابتة يمكن

حلها بمساعدة الوضع

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

(1.41) .

حيث λ - كمية ثابتة .

اشتقاق الداله (1.41) يعطي ان

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (1.42)$$

بتمويض المعادلتين (1.41) و (1.42) في (1.34) نصل

بعد الاختصار على العامل $e^{\lambda t}$ المختلف عن الصفر،

نصل الى المعادله الجبريه :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (1.43)$$

هذه المعادله تسمى بالمعادله الخاصيه لوالميزه .
 جذور هذه المعادله تمثل نفسا نفسا مقادير λ ،
 التي فيها تحقق الداله (1.41) المعادله (1.34) .
 اذا كانت جذور المعادله (1.43) لا تتطابق ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) ،
 لذلك . فان الدالتين $e^{\lambda_1 t}$ و $e^{\lambda_2 t}$ يصبحان دالتين
 خطيتين مستقلتين ، وبالتالي فان الحل العام للمعادله
 (1.34) طبقا لـ (1.37) يمكن ان يكتب بالمليه .

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} . \quad (1.44)$$

يمكن ان نوضح انه في حالة عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ، فان
 الحل العام للمعادله (1.34) يبدو بالشكل التالي .

$$X = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} . \quad (1.45)$$

نفترض ان المعاملين a ، b حقيقيين ، بينما الداله
 الموجوده في الطرف الايمن من المعادله (1.33) معقده .
 متصورين ان هذه الداله بالمليه :

$$f(t) + i\varphi(t)$$

$$\ddot{Z} + a\dot{Z} + bZ = f + i\varphi . \quad (1.46)$$

(ارمزنا هنا الى الداله المبحوث عنها بالحرف Z) .
 من الواضح ان حل هذه المعادله سيكون معقدا .
 بكتابة الحل بالمليه $Z(t) = X(t) + i\varphi(t)$

معوذين عنه في المعادله (1.46) . نحصل في النتيجة :

$$\ddot{X} + i\ddot{\varphi} + a\dot{X} + ai\dot{\varphi} + bX + bzi\varphi = (1.47) \quad (1.47)$$

بالنسبة للاعداد المعقده المتساويه الاخرى تتساوى

زوجيا الاجزاء الحقيقيه والتخيليه . وبالتالي ~~مفجزا~~

المعادله (1.47) الى معادلتين مستقلتين :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \text{ و } \ddot{y} + a\dot{y} + by = \varphi(t) .$$

المعادله الاولى من هاتين المعادلتين تتطابق

مع المعادله (1.33) . هذه الصفة للمعادله (1.47)

تساعدنا على أن نأخذ بنظر الاعتبار مايلي :

أفرض أن في المعادله (1.33) التي حُلَّتْ مِنْ

قبلنا كان الجزء الايمن حقيقياً ، نضيف اليه

داله تخيليه اختياريه ، نقود الحل الى الميئه

(1.46) . بعد ذلك نجد الحل المعقد للمعادله

ثم نأخذ جزؤه الحقيقي .

هذا الجزء الحقيقي سوف يمثل نفسه حـ

للمعادله المبحوثة (1.33) .

5. الاهتزازات التوافقية (الذبذبات المرمونة).

نبحث الذبذبات الموسوفة بالمعادله : (1.48)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.48) \quad \text{مثل هذه الاهتزازات ينجزها جسم كتلته}$$

$$m, \text{ تؤثر عليه فقط قوة مرونة } F = -kx$$

حيث معامل x في هذه المعادله يمتلك المقدار (لاحظ المعادله (1.10))

$$\omega_0^2 = k/m \quad (1.49)$$

نعوثر في المعادله (1.48) التعبير : $x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{نصل الى المعادله الخصوصيه .}$$

$$\lambda_1 = +i\omega_0, \lambda_2 = -i\omega_0 \quad \text{هذه المعادله تمتلك جذوراً تخيليه}$$

وطبقا للمعادله (1.44) يصبح الحل العام للمعادله (1.48) بالميله التاليه :

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (1.50)$$

حيث C_1 و C_2 ثابتين معقدين .

الداله التي تصف الذبذبات المبحوثه $x(t)$ يجب ان تكون ماديه .

ولاجل هذا الغرض من الضروري اختيار الثابتين

C_1 و C_2 في المعادله (1.50) بحيث يحققا الشرط (لاحظ (1.22)) .

$$C_1 e^{* - i\omega_0 t} + C_2 e^{* i\omega_0 t} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (1.51)$$

(هنا ساوينا التعبير (1.50) بمرافقه). العلاقة
 (1.51) سوف تتحقق اذا : $C_1 = C_2^*$ (في هذه
 الحالة $C_1^* = C_2$). نتصور المعاملات التي
 تحقق هذا الشرط بميئه أُسيه (لاحظ المعادله
 (1.17)، رامزين للقيم المطلقه لمذين المعاملين عبر
 $a/2$ ولحددا تماما بالحرف α :

$$C_1 = (a/2)e^{-i\alpha}, C_2 = (a/2)e^{-i\alpha} \quad (1.52)$$

نعوض هذه التعبيرات في المعادله (1.50) نحصل على

$$X = (a/2) \left(e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} \right) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.53)$$

(لاحظ المعادله (1.25)). بهذا الشكل يصبح الحل
 العام للمعادله (1.58) بالميئه التاليه :

$$X = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.54)$$

حيث a و α ثوابت حرة .

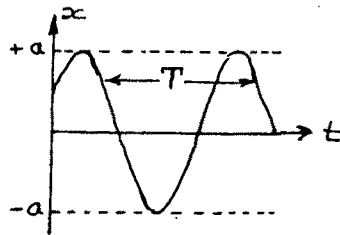
وهكذا تتغير الازاحة x مع الزمن حسب قانون
 الجيب تمام. وبالتالي فان حركة النظام الواقع
 تحت تاثير قوه بميئه $F = -kx$ ، تمثل نفسها
 ذبذبه توافقية .

منحني الحركة الاهتزازيه ، اي منحني الداله (1.54)
 موضِع على الشكل 1.4 . على المحور الافقي مَّثل
 الزمن t ، وعلى المحور الشاقولي-الازاحة x .
 بقدرما أنَّ الجيب تمام يتغير بحدود من -1 الى
 $+1$ ، فان مقادير x تقع بحدود من $-a$ ، الى $+a$.

مقدار اكبر انحراف للنظام عن وضع التوازن يسمى سعة الذبذبه . السعة α - كميته موجهه ثابتة ، يتحدد مقدارها بكمية أول انحراف أو الدفع الذي بلغه النظام عن وضع التوازن .

الكمية $(\omega_0 t + \alpha)$ الموجودة ، تحت علاقته الجيب تمام تسمى طور الذبذبه . الثابت α - يمثل نفسه مقدار الطور في اللحظة الزمنية $t=0$ ويسمى بالطور الابتدائي للذبذبه .

بتغيير بداية حساب الزمن سوف تتغير α ايضا . بالتالي فان مقدار الطور الابتدائي يتحدد باختيار بداية حساب الزمن . بما ان مقدار x لا يتغير بأضافة او انقاص اعداد صحيحة من 2π الى او من الطور ، لذلك يمكن دائما ان يتحقق بقاء الطور الابتدائي اقل من π . لذلك تبحث عادة فقط مقادير α الواقعة بحدود من $-\pi$ الى $+\pi$. بقدر ما أن الجيب تمام - داله دوريه بدورة 2π . لذلك فان الحالات المختلفه للنظام الذي ينجز ذبذبات توافقية تتكرر خلال ذلك الزمن T الذي يحصل الطور اثنايه على زيادة تساوي 2π (شكل 1.4) .



شكل 1.4

هذا الفاصل الزمني T يسمى زمن الذبذبة أو المدة .
ويمكن ان يتحدد من الشرط التالي :

$$[w_0(t+T) + \alpha] = [w_0t + \alpha] + 2\pi ,$$

ومن ذلك ينتج أن

$$T = \frac{2\pi}{w_0} \quad (1.55)$$

عدد الذبذبات في وحدة الزمن يسمى تردد الذبذبة ν . من الواضح ان التردد ν يرتبط بزمن الذبذبة الواحد T بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (1.56)$$

ويعبر عن مقدار التردد بتردد تلك الذبذبة التي زمن دورتها يساوي ثانيه واحد . هذه الوحدة تسمى (هيرتز) ويرمز لها بالرمز Hz .

اما التردد $10^3 Hz$ هيرتز فيسمى كيلو هيرتز kHz و $10^6 Hz$ ميغا هيرتز . من المعادله (1.55) ينتج ان

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.57)$$

بهذا الشكل فان w_0 تعطي عدد الذبذبات خلال 2π من الثواني . تسمى الكمية w_0 بالتردد الزاوي او التردد الدائري ، وهو يرتبط مع التردد العادي بالعلاقة

$$w_0 = 2\pi\nu \quad (1.58)$$

بتفاضل المعادله (1.54) بالنسبة للزمن نحصل على
علاقه للسرعه .

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (1.59)$$

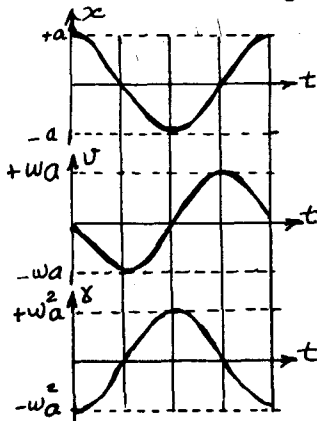
وكما هو واضح من المعادله (1.59)، فان السرعة تتغير كذلك بالقانون التوافقي، اضافة الى ان سعة السرعة تساوي $a\omega_0$. من مقارنة المعادلتين (1.59) و (1.59) ينتج ان السرعة تسبق الازاحة بطور يساوي $\pi/2$.

وبمفاضلة المعادله (1.59) مرة اخرى بالنسبة للزمن نجد تعبيراً للتسارع .

$$\gamma = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) \quad (1.60)$$

وكما يتضح من المعادله (1.60) فان التسارع والازاحة يقعان في طورين متضادين . هذا يعني انه في تلك اللحظة ، عندما تبلغ الازاحة مقدارها الاعظم الموجب ، فان التسارع يبلغ اعظم كمية بمقدار

سالبة ، وبالعكس . على الشكل 1.5



صورت منحنيات للازاحة وللسرعة ، وللتسارع عند $\alpha = 0$. كل ذبذبة مغموسة تتصف بمقادير محدده للسرعة وللطور الابتدائي .

شكل 1.5

مقادير هذه الكميات لذبذبه محدد ، يمكن ان تتحدد من الظروف الابتدائية ، اي تتحدد بمقادير الانحراف x_0 والسرعه v_0 في اللحظة الزمنية الابتدائية t_0 . وفي الحقيقه عندما نعوض في المعادلتين (1.54) ، (1.59) ، $t=0$ ، نحصل على معادلتين :

$$x_0 = a_0 \cos \alpha \quad , \quad v_0 = -a_0 \omega_0 \sin \alpha$$

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2} \quad . \quad (1.61)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد ان

$$\tan \alpha = -v_0 / x_0 \omega_0 \quad . \quad (1.62)$$

المعادله (1.62) تحقق مقدارين اثنين للكميه α ، واقعين في المدى من $-\pi$ الى $+\pi$. من بين هذين المقدارين من الضروري اخذ ذلك المقدار الذي فيه نحصل على اشارات صحيحه للجيب ولجيب تمام ، قوه المرونه - قوه محافظه ، لذلك فان الطاقه الكليه للذبذبه التوافقية يجب ان تبقى ثابتة .

في عملية الذبذبه يحدث تحول الطاقه الحركيه الى كامنه وبالعكس ، اضافه الى أنه في لحظتي أكبر انحراف عن وضع التوازن تتكون الطاقه الكليه فقط من الطاقه الكامنه التي تبلغ أكبر مقدارا لها

$$E = U_{max} = \frac{k a^2}{2} . \quad (1.63)$$

وعند مرور النظام عبر وضع التوازن فان الطاقه الكليه E تتكون فقط من الطاقه الحركيه ، التي تبلغ في هذه اللحظه قيمتها العظمى $E_{c max} = T_{max}$:

$$E = E_{c \max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2. \quad (1.64)$$

(ا) $a \omega_0$ اشير سابقا، ان سعة السرعة تساوي التعبيرين (1.63)، (1.64) يساويان احدهما الاخر لانه وطبقا للمعادله (1.49) فان $m \omega_0^2 = k$. الآن نوضح كيف تتغير الطاقتين الحركيه والكامنه للذبذبه التوافقيه مع الزمن. الطاقه الحركيه

$$E_c = T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m a^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.65)$$

الطاقه الكامله يعبر عنها بالمعادله (1.66).

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.66)$$

نجمع المعادله (1.65) مع المعادله (1.66) آخذين بنظر الاعتبار أن $m \omega_0^2 = k$ ، نحصل على معادله للطاقه الكامله:

$$E = T + U = \frac{k a^2}{2} = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2. \quad (1.67)$$

(قارن مع المعادلتين (1.63)، (1.64)).

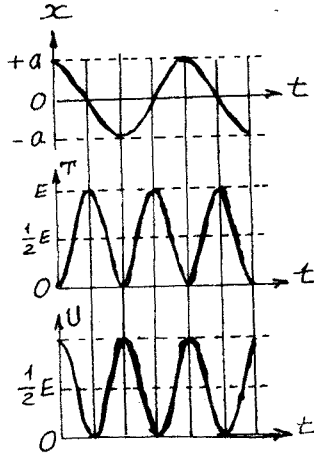
بهذا الشكل فان الطاقة الكامله للذبذبه التوافقيه تبدو في الحقيقه أنها ثابتة.

باستخدام المعادلات المثلثيه المعروفه يمكن ان نعبر عن الطاقه الحركيه والطاقه الكامله بالمميزات التاليه

$$T = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right] \quad (1.68)$$

$$U = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right] \quad (1.69)$$

حيث E - الطاقه الكامله للنظام.



شكل 1.6

من هذه المعادلات واضح ان T و U تتغير مع
التردد $2\omega_0$ ، اي بتردد يزيد مرتين تردد الذبذبه.
على الشكل 1.6 ، صورت منحنيات x ، T و U .
متوسط مقدار مربع الجيب ومربع الجيب تمام يساوي
كما هو معروف النصف ، وبالتالي فان متوسط
مقدار T يتطابق مع متوسط مقدار U ويساوي $E/2$.

هـ . البندول (أو النواس) : يعرف البندول فيزيائياً بأنه كل جسم صلب ينجز تحت تأثير قوة الجاذبية ذبذبات حول نقطة ثابتة أو حول اسن ثابت . جرت العادة على تمييز بندولين : رياضي وفيزيائي . البندول الرياضي - هو ذلك النظام المثالي المتكون من خيط مهمل الوزن وغير قابل للتمدد ربطت بنهايته السفلى كتلة متمركزة في نقطة واحدة ، مثال ذلك كرة منضدة غير ثقيلة معلقة في خيط طويل ورقائق .

سوف نصف انحراف البندول عن وضع التوازن بالزاوية ϕ التي يصنعها الخيط مع الشاقول شكل 1.7 .

عند انحراف البندول عن

وضع التوازن يظهر عزماً

مدوراً N يساوي

من حيث المقدار $mgL \sin \phi$

(m - الكتلة ، L - طول الخيط) ،

وتأثير العزم متجه دائماً باتجاه وضع التوازن ، وهو

بمذا يماثل في عمله عمل القوة F_x (قوة العروة المركزية) .

ولذلك يجب ان نكتب العزم المدور N والازاحه الزاويه

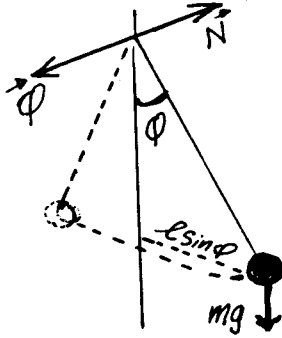
ϕ بإشارتين متضادتين كما هو الحال عند كتابتنا

لقوة العروة المركزيه F_x والازاحه x . بالتالي تعبير

العزم المدور يمتلك الهيئه التاليه :

$$N = -mgL \sin \phi. \quad (1.70)$$

بالنسبة للحركة الدورانية للبندول (أو النواس) نكتب معادلة الديناميكا .
 رمز للتسارع الزاوي خلال $\ddot{\phi}$ وناخذ بنظر الاعتبار ، ان عزم عطالة
 النواس يساوى ML^2 ، نحصل : $ML^2 \ddot{\phi} = -mgL \sin \phi$



شكل 1.7

يمكن نقل هذه المعادلة الى الهيئه

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L} \sin \phi = 0 \quad (1.71)$$

نتحدد ببحت الذبذبات الصغيره .

فى هذه الحالة يمكن وضع

$$\sin \phi \approx \phi$$

اضافة الى ذلك ، بدخل التعبير

$$\frac{g}{L} = \omega_0^2 \quad (1.72)$$

نصل الى المعادلة

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0. \quad (1.73)$$

التي تتماثل مع المعادلة (1.48) .

حل المعادلة (1.73) يمتلك الهيئه :

$$\phi = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.74)$$

بالتالى ، عند الذبذبات الصغيره يتغير الانحراف الزاوى للنواس الرياضى

مع الزمن بقانون توافقى .

كما ينتج من المعادلة (1.74) ، فان التسارع الزاوى للنواس الرياضى

يعتمد فقط على طول النواس وعلى تسارع قوة الجاذبية ولا يعتمد على

كتلة النواس .

بقانون توافق طبقا للمعادله (1.56). وبحسب (1.55) والمعادله (1.72) نحصل على المعادله المعروفه الخاصه بزمـن ذبذبة البندول الرياضي

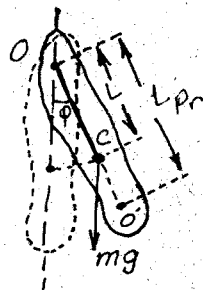
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.75)$$

نشير الى انه بحل المعادله (1.71) يمكن ان نجد المعادله التاليه الخاصه بزمـن الذبذبه: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right\}$, حيث a - سعة الذبذبه , أي اكبر زاويه يمكن ان ينحرف عليها البندول عن وضع التوازن .

البندول الفيزيائي : اذا كان لا يمكن اعتبار الجسم المتذبذب كنقطه ماديـه , حينذاك يسمى بندولا فيزيائيا . عند انحراف البندول عن وضع التوازن على زاويه φ يظهر عزمـا مدورا يحاول اعاده البندول في وضع التوازن . هذا العزم يساوي

$$V = -mgl \sin \varphi \quad (1.76)$$

حيث m - كتلة البندول , L - المسافه بين نقطـة التعليق O ومركز عطالة البندول C (شكل 1.8) .



شكل 1.8

الاشارة السالبة تمتلك نفس المعنى الوارد في المعادله (1.70).

نرمز لعزم عطالة البندول بالنسبة الى المحور خلال نقطة التعليق بالحرف I ، يمكن ان نكتب

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi . \quad (1.77)$$

في حالة الذبذبات الصغيرة تتحول المعادله (1.77) الى المعادله المعروفه لدينا: (1.78) . $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$

في هذه الحاله عبرنا خلال ω_0^2 عن المييه التاليه: (1.79) . $\omega_0^2 = mgl/I$

من المعادلتين (1.78) ، (1.79) ينتج انه في حالة الانحراف الصغير عن وضع التوازن ينجز البندول الفيزيائي ذبذبات توافقيه ، التي تردد ما يعتمد على كتلة البندول ، عزم عطالة البندول بالنسبة الى محور الدوران والمسافه بين محور الدوران ومركز العطالة . وبالتوافق مع المعادله (1.79) يتحدد زمن ذبذبه البندول الفيزيائي . بالتعبير: (1.80) —

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgl} . \quad (1.80)$$

من مقارنة المعادلتين (1.75) و (1.80) يحمل 1 ان

$$L_{pr} = \frac{I}{mL} \quad \dots (1.81)$$

سوف يمتلك نفس زمن الذبذبه كما في حاله البندول الفيزيائي . الكمية (1.81) تسمى طولاً متحولاً للبندول الفيزيائي . بهذا الشكل نعرف الطول المتحول على انه طول ذلك البندول الرياضي الذي زمن ذبذبه يتطابق مع زمن ذبذبه البندول الفيزيائي المحسوس .

النقطة على المستقيم الراسل بين نقطة التعليق ومركز العطاله ، وعلى مسافه الطول المتحول

من محور الدوران ، تسمى مركز اهتزاز البندول الفيزيائي (النقطة O على الرسم 1.8) .

يمكن أن نوضح انه عند تعليق البندول في مركز الاهتزاز O فان الطول المتحول وبالتالي زمن الذبذبه سوف يكونان نفسهما كما في البدايه . وهذا يعني ان نقطة التعليق ومركز الاهتزاز يظهران صفات متكافئه .

عند نقل نقطة التعليق في مركز الاهتزاز فان النقطة الاولى تصبح مركزا جديدا للاهتزاز . على هذه الصفة اسس تعريف تسارع السقوط الحر بمساعده ما يسمى بالبندول المتعاكس .

فالبندول الدوار يسمى ذلك البندول الذي يمتلك نهايتين موشوريتين موازيتين احدهما للأخرى والذي يمكن ان يعلق بمما على التوالي . بامتداد هذا البندول يمكن ان تزاح او تثبت عليه او زان ثقيله . ازاحة الاثقال تحصل بسبب انه عند تعليق البندول على اي من الموشورين فان زمن الذبذبه يبقى متكافئا .

حينذاك تكون المسافة بين جناحي الموشورين تساوي

L_{nr} . وبقياس زمن ذبذبه البندول ومعرفه

مسقط الطول L_{nr} من المعادله $T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{nr}}{g}}$

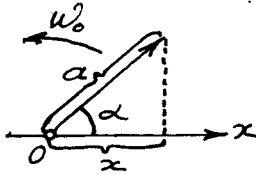
نجد التسارع الحر g .

§7 التخطيط او البناء الاتجاهي .

حل مجموعة الاسئلة ، خاصة تلك التي تتعلق بجمع بعض الذبذبات المتكافئه الاتجاه (او الشئ نفسه

جمع بعض الدوال التوافقية (هذه المممه تتسهل الى حد كبير وتصبح منظوره اذا صورت الذبذبه بيانيا بميئة متجمات على مستوي . التخطيط المحصل بمثل هذه الطريقة يسمى بنا . اتجاهي . ناخذ المحور ، الذي نرمز له بالحرف x (شكل 1.9) . من النقطة O ، الماخوذه على المحور ، نرسم متجه بطول a ، يصنع مع المحور زاوية α . اذا جعل هذا المتجه في

حالة دوران بسرعة زاوية ω_0 ،



فان سقط نهاية المتجه سوف يزاح

بامتداد محور x بحدود من a -

الى a + ، اضافة الى ان احداثي هذا

المتجه سوف يتغير مع الزمن طبقا للقانون

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

بالتالي ، سقط نهاية المتجه على المحور سوف يلجز ذبذبات توافقية بسعة ، تساوي طول المتجه وتردد زاوي يساوي السرعة الزاوية لدوران المتجه ، وطور ابتدائي ، يساوي الزاوية ، التي يصنعها المتجه مع المحور في بداية اللحظة الزمنية . مما تقدم ينتج ، أن الذبذبه التوافقية يمكن أن تتحدد بمساعدة المتجه ، الذي طوله يساوي سعة الذبذبه ، بينما اتجاه المتجه يصنع مع محور x زاوية ، تساوي الطور الابتدائي للذبذبه ،

بحث جمع ذبذبتين توافقيتين متكافئتي الاتجاه ، ومتكافئتي التردد . ازاحة الجسم المنتزعو تكون مجموع الازاحتين X_1 و X_2 ، اللتين يعبر عنهما بالشكل التالي :

$$X_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) , \quad X_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) . \quad (1.31)$$

نتصور كلتا الذبذبتين بمساعدة $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ (شكل 1.10) . نبني طبقا لقاعدة جمع

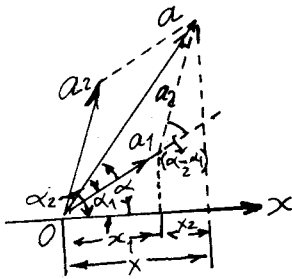
المتجهات محصلة المتجهات $\vec{a}$.

من السهل ملاحظة ،

أن مسقط هذا المتجه على

محور X يساوي مجموع مسقطي

المتجهين X_1 ، X_2 :



شكل 1.10

$$X = X_1 + X_2$$

بالتالي ، المتجه $\vec{a}$ يمثل نفسه ذبذبه محصلة .

هذا المتجه يدور بنفس تلك السرعة الزاويه ω_0 ،

كما لدى المتجهين $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ ، بحيث ان محصلة

الحركه سوف تكون ذبذبه توافقيه بتردد ω_0 .

وبسعة a وطور ابتدائي α . من البناء يتضح

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \quad \text{ان}$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) . \quad (1.32)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2} \quad (1.83)$$

هكذا تصور الذبذبات التوافقية بواسطة المتجهات يعطي امكانيه تحويل عملية جمع بعض الذبذبات الى عملية جمع المتجهات . هذا التناول يفكر ان يكون مفيدا بصورة خاصة ، على سبيل المثال ، في الضوء ، حيث الذبذبات الضوئية في بعض النقاط تتحدد كمحصلة تركيب ذبذبات كثيرة ، مطارة في نقطه محوثة من اجزاء* مختلفه بجهة الموجه . المعادلتين (1.82) و (1.83) يمكن الحصول عليهما بجمع المعادله (1.81) واجراء التحويلات الثلاثية المطابقه .

لكن الطريقه التي استخدمناها للحصول على هذه الصيغ تختلف عن الطرق الاخرى ، كونهما اكثر بساطة منظوره . نعيد تحليل التعبير (1.82) بالنسبة للسعه . اذا كان فرق الطور لكلا الذبذبتين يساوي صفرا ، فان سعة الذبذبه المحصله تساوي مجموع α_1 و α_2 ، اذا كان فرق الطور $(\alpha_2 - \alpha_1)$ يساوي $+\pi$ او $-\pi$ ، اي ان كلتي الذبذبتين يقعان بطور متضاد ، لذلك فان سعة الذبذبة المحصله تساوي $|a_1 - a_2|$. اذا كان ترددا الذبذبتين χ_1 و χ_2 غير متكافئين ، فان المتجهين $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ سوف يدوران بسرعه مختلفه . في هذه الحاله فان المتجه المحصل $\vec{a}$ يتركب بالمقدار ويدور بسرعه غير ثابتة . بالتالي ، الحركه المحصله ستكون في هذه الحاله ذبذبه غير توافقية ، بل بعض عملية اهتزازيه معقد .

٣. التداخلات

تمثل أهمية خاصة تلك الحالة ، عندما تجمع ذبذبتان توافقيتان متكافئتا الاتجاه ، مختلفتان قليلا بالتردد . الحركة المحصلة عند هذه الظروف يمكن النظر اليها كذبذبة توافقية بسعة الطاقم

مثل هذه الذبذبة تسمى التداخلات

نرمز لتردد احدى الذبذبتين بالحرف ω ، ولتردد الثانية

عبر $\omega + \Delta\omega$. من شروط الحالة المبحوثة ان

$$\Delta\omega \ll \omega . \text{ سعتى كلتا الذبذبتين يفترض}$$

ان تكونا متكافئتين وتساوى A . لكي لا تتعقد الصيغ

بشكل غير ملائم ، نفرض ، ان الاطوار الابتدائية لكلتى الذبذبتين

يساويان صفر . حينذاك سوف تمتلك معادلتى الذبذبتين

$$X_1 = A \cos \omega t, X_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega)t . \text{ الهيئة التالية:}$$

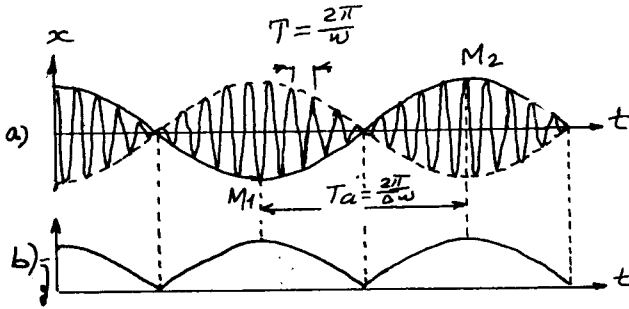
بجمع هاتين المعادلتين واستخدام الصيغ المثلثية بالنسبة

لمجموع الجيوب تمام ، نحصل :

$$X = X_1 + X_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (1.84)$$

(فى المضروب الثانى نهمل الحد $\Delta\omega/2$ بالمقارنة مع ω) .

يبين الدالة (1.84) صور على الشكل (1.11). هذا البيان



شكل 1.11

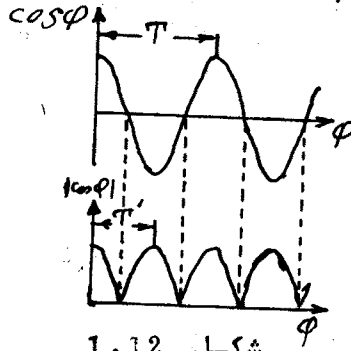
المضروب المعصور داخل الاقواس في المعادله (1.84) يتغير ببطئ أكثر بكثير ، من المضروب الثاني . بقوة الشرط $\Delta\omega \ll \omega$ ، خلال ذلك الزمن ، الذي اثناؤه يلجز المضروب $\cos\omega t$ بعن الذبذبات الكامله ، خلال هذا الزمن لا يتغير تقريبا المضروب الواقع داخل الاقواس . هذا يعطينا أساسا أن نبحث الذبذبه (1.84) كذبذبه توافقية بتردد ω ، التي سعتهملا تتغير ببعض قانون دوري . تعبیر هذا القانون لا يمكن أن يكون المضروب الواقع داخل الاقواس ، لان هذا المضروب يتغير بحدود من $(-2a)$ الى $(+2a)$ ، في الوقت نفسه نجد ان السعة من التحديد او التعريف هي كمية موجبه . بياني السعة وضح على الشكل

1.11,b

التعبير التحليلي للسعة من الواضح

انه يمتلك التعبير التالي:

$$A = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (1.85)$$



شكل 1.12

الدالة (1.85) دالة دوريه ذات تردد ،يزيد مرتين تردد التعبير الواقع تحت اشارة المطلق (لاحظ الشكل 1.12) . الذي عليه صورت منحنيات الجيب تمام وقيمتها المطلقة ، اي انه ، بتردد $\Delta\omega$. بهذا الشكل ، تردد السعة المعززه يسمونه تردد المتناغم - يساوي فرق ترددات الذبذبات المجموعه . نشير الى ان ، المضروب $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ ليس فقط يحدد سعة ، بل ويؤثر على طور الذبذبه . هذا يظهر مثلاً ، عندما الانحراف الذي يتوافق مع القيم المتتاليه المتجاوره للسعه ، يمتلك اشارت متضاده (لاحظ النقطتين M_1 و M_2 على الشكل 1.11) .

وكم. جمع ذبذبتين متعامدتين

نفرض ان النقطة المادية يمكن ان تنجز ذبذبات كما با متماد محور x ، كذلك بنفس الوقت با متماد محور y العمودى على x . اذا اثبرت كلتى الذبذبتين ، فان النقطة المادية سوف تتحرك بمسار ما ، يمكن القول بشكل عام ، انه مسار منحنى ، والذي هيئته تعتمد على فرق طور كلتى الذبذبتين . نختار بداية حساب الزمن بشكل بحيث ان الطور الابتدائى للذبذبه الاولى كان مساويا للصفر. حينذاك تكتب معادلة الذبذبه بالهيئه التاليه :

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.86)$$

حيث α فرق طور كلتى الذبذبتين . التعبيرين (1.86) يمثلان نفسهما معادلة المسار ، المحدد بهيئه مقاييسيه ، والذي يتحرك فيه الجسم ، الذى يشارك بكلتى الذبذبتين . لغرض الحصول على معادلة المسار بالهيئه العاديه ، من الضروري استثناء الزمن من المعادله (1.86) . من المعادله الاولى ينتج ان

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (1.87)$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - x^2/a^2}. \quad (1.88)$$

الان نحول الجيب تمام بالمعادله الثانيه للتعبير (1.86) الى صيغه بالنسبة لجيب تمام المجموع ، معوضين خلال ذلك بدل $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ بمقاديرهما من (1.87) و (1.88) .

فى النتيجة حصل :

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

المعادله الاخيره وبعد تحويلات غير معقدده يمكن جعلها بالميهه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (1.89)$$

من الهندسة التحليليه معروف، أن المعادله (1.89) تمثل قطعاً ناقصاً (لو البس)، توجه محوره بميهه حره بالنسبة للاحداثيين x و y . توجهً الالبس ومقدار انصاف اقطاره يعتمد بشكل معقد الى حد ما على السعات a و b وفرق الطور α . نبحث ميهه المسار في بعض الحالات الخصه:

1. فرق الطور α يساوي صفره في هذه الحاله

تأخذ المعادله (1.89) الميهه :

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

من هنا تحصل معادله مستقيم: (1.90) $y = \frac{b}{a}x$

النقطه الممتزه تزاح بهذا المستقيم، اضافه الى ذلك فان بعدهما من بدايه الاحداثيات يساوي r ، حيث

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. نعوض هنا المعادله (1.86) بالنسبه ل x و y ، آخذين بنظر الاعتبار، ان $\alpha = 0$ ؛ فنحصل:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t \quad (1.91)$$

من المعادله (1.91) ينتج، أن محصلة الحركه تصبح ذبذبه توافقية بامتداد المستقيم بتردد ω وسعة تساوي $\sqrt{a^2 + b^2}$ (لاحظ الشكل 1.13).

2. فرق الطور α يساوي $\pm \pi$. المعادله (1.89) :

تملك الميهه :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

من ذلك ينتج ، ان محصلة الحركة تمثل نفسها ذبذبة توافقية بامتداد خط مستقيم (شكل 1.14)

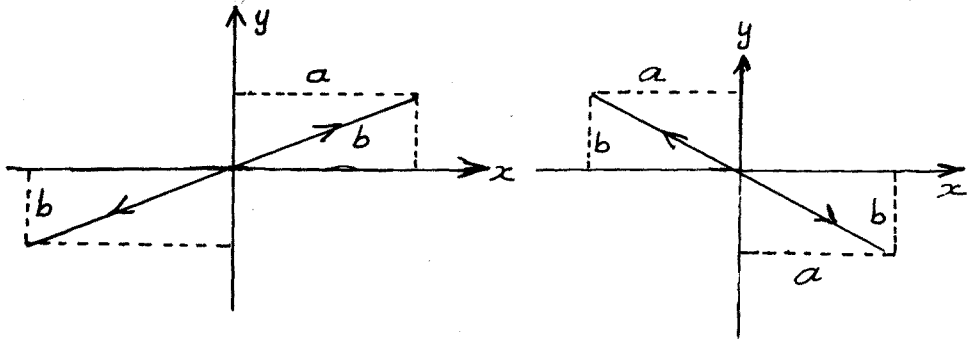
$$y = -\frac{b}{a}x .$$

3. عند $\alpha = \pm \pi/2$ تتحول المعادلة (1.49) في الهيئة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (1.92)$$

أي في معادلة الاليس ، المتحول الى المحاور الاحداثية ، عدا عن ان انصاف محاور الاليس تساوى ما يتوافق معها من ساعات للذبذبة .

عند تساوى السعتين a و b يجرى عن الاليس بدائره



شكل 1.13

شكل 1.14

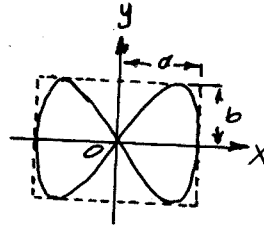
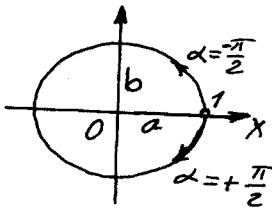
الحالتين $\alpha = +\pi/2$ و $\alpha = -\pi/2$ يختلفان باتجاه الحركة بالاليس او بالدائره . اذا كانت $\alpha = +\pi/2$ ، حينذاك يمكن ان نكتب المعادلة (1.86) بالشكل التالى

$$x = a \cos \omega t , \quad y = -b \sin \omega t . \quad (1.93)$$

فى اللحظة الزمنية $t = 0$ يكون الجسم موجودا فى النقطة 1

(شكل 1.15) .

في اللحظات الزمنية التالية ينقص الاحداثي x ، بينما الاحداثي y يصبح سالبا . بالتالي ، تنجز الحركة باتجاه حركة عقارب الساعة .



شكل 1.15

شكل 1.16

عند $\alpha = -\pi/2$ ، فان معادلة الذبذبه تمتلك الميئه

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t. \quad (1.94)$$

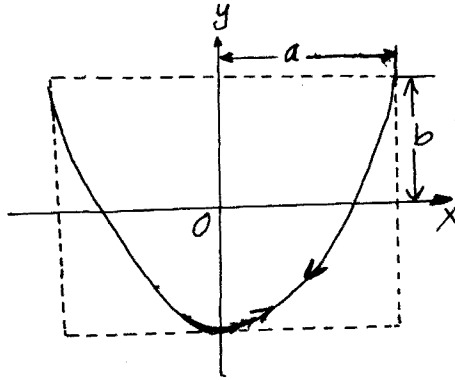
من ذلك يمكن استنتاج ، أن الحركة تحدث عكس حركة عقارب الساعة . مما قيل ينتج ، أن الحركة المنتظمة بدائره نصف قطرها R وبسرعة زاويه ω يمكن أن تمثل كمجموع ذبذبتين متبادلتا التعامد :

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t. \quad (1.95)$$

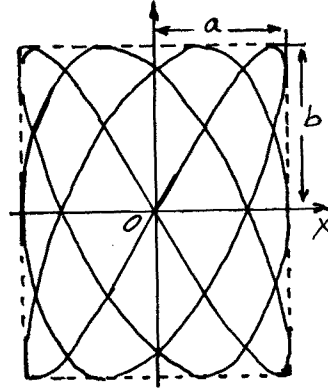
(الاشارة «+» في التعبير بالنسبة لـ ω تتوافق مع الحركة بعكس عقارب الساعة ، الاشارة «-» تتوافق مع الحركة باتجاه عقارب الساعة) .
 في الحالة ، عندما ترددات الذبذبات المتعامده تختلف بمقدار صغير جدا $\Delta\omega$ ، حينذاك يمكن النظر الى هاتين الذبذبتين كذبذبات متكافئه التردد ولكن بفرق طور يتغير ببطى* . بنفس الوقت يمكن ان نتصور معادلة الذبذبة بالشكل التالي :

$$x = a \cos \omega t , \quad y = b \cos [\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)] .$$

والتعبير $(\Delta\omega t + \alpha)$ يبحث باعتباره فرق الطور ، الذى يتغير ببطى* مع الزمن بقانون خطى .



شكل 1.17



شكل 1.18

محصلة الحركة في هذه الحالة تحدث بمنحنى يتغير ببطى* ملاحظ ،
 والذى ياخذ بصورة متواليه اشكالا ، تجارب على جميع قيم فرق
 الطور من $-\pi$ الى $+\pi$.

إذا كان ترددا الذبذبتين المتعامدتين غير متكافئان ،
 فإن مسار محصلة الحركة يمتلك هيئة معقدة لمنحنيات
 تسمى أبينية ليساج . على الشكل 1.16 عرض واحد
 من المسارات البسيطة المحملة عند العلاقة 1:2 للترددين
 وفرق الطور $\pi/2$. معادلة الذبذبه في هذه الحالة
 تمتلك الميوه

$$x = a \cos \omega t , \quad y = b \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

خلال نفس الزمن ، الذي مانزال فيه بامتداد محور x ،
 تستطيع النقطة ان تزااح من وضع نمائي الى آخر ،
 بامتداد محور y تستطيع هذه النقطة ان تبلغ احد
 الاوضاع النمائيه ، مزاحه من الوضع الصفري ، بعد
 ذلك الوضع النمائي الآخر ومن ثم تعود الى الوضع
 الصفري ، عند علاقة التردد بين 1:2 وفرق الطور المساوي
 للصفر ، فإن المسار يعبر عنه بمنحني غير مغلق (شكل 1.17) ،
 الذي تتحرك فيه النقطة ذهابا وايابا . بقدر ما يكون
 الكسر الموجه ، الذي يعبر عن علاقة ترددي الذبذبتين
 قريبا من الواحد الواحد ، يصبح بناء ليساج
 اكثر تعقيدا . على الشكل 1.18 و الغرض التوضيحي
 عرض مثالا لعلاقة التردد بين 3:4 وفرق الطور $\pi/2$.

أمثله وتما ريس عن الفصل الاول

1. سعة ذبذبه توافقيه لنقطه مادييه تساوي 5 Cm .

كتلة النقطه 10 g وطاقتها الكامله $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$.

اكتب معادله الذبذبه التوافقيه لهذه النقطه

(بمعاملات عددييه) ، اذا كان الطور الابتدائي

للذبذبه يساوي 60° .

الحل: المعادله العامه للذبذبه التوافقيه تمتلك

الهيئته :

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) . \quad (1)$$

لدينا $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ، $A = 5 \text{ Cm}$

دور الذبذبه T غير معروف ، لكن يمكن ايجاده من الشرط

$$E = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2} = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Joule} .$$

من هنا

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 A^2 m}{E}} . \quad (2)$$

لدينا ، $m = 10^{-2} \text{ kg}$ ، $A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ،

$$E = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$$

نعوض هذه المعطيات في (2) ، نحصل $T = 4 \text{ second}$.

$$\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} t \quad , \quad \text{حينذاك}$$

والمعادله (1) تأخذ الحينه

$$X = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm} .$$

نشير الى أن : بما أن $\sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}\right)$ -كميه

بدون مقياس ، فلا ضرورة أن تعوض A بالامتار .
أما وحدات الازاحه X فسوف تتطابق مع وحدات A .

اكتب معادلة الحركه الاهتزازيه التوافقيه ، اذا كان ²س
الطور الابتدائي للذبذبه يساوي :

$$1) 0 \quad , \quad 2) \frac{\pi}{2} \quad , \quad 3) \pi \quad , \quad 4) \frac{3}{2} \pi \quad ,$$

$$5) 2\pi .$$

سعة الذبذبه تساوي 5 cm ، ودورها 8 sec .

الحل :

$$1) x = 5 \sin \frac{\pi t}{4} \text{ cm} ;$$

$$2) x = 5 \sin \left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$3) x = 5 \sin \left(\frac{\pi t}{4} + \pi \right) ;$$

$$4) x = 5 \sin \left(\frac{\pi t}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) ;$$

$$5) x = 5 \sin \left(\frac{\pi t}{4} + 2\pi \right) = 5 \sin \frac{\pi t}{4} .$$

3. ارسم على بياني واحد ذبذبتين توافقيتين

بـسـعـتـين مـكـافـئـتين ($A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}$)

وـدـورـين مـكـافـئـين ($T_1 = T_2 = 8 \text{ Second}$)

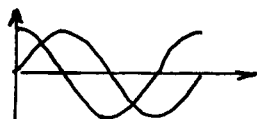
ولكنهما يمتلكان فرقاً بالطور :

1) $\frac{\pi}{4}$ ، 2) $\frac{\pi}{2}$ ، 3) π ، 4) 2π .

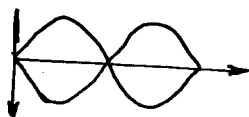
الحل : لاحظ الشكل 1.19 .



1 (عندما يكون فرق الطور
بين الذبذبتين مساويا : $\frac{\pi}{4}$



2 (عندما يكون فرق الطور
مساويا : $\frac{\pi}{2}$



3 (وعندما يكون : π

4 (كلا الجيبان يتطابقان .

س: 4 اكتب معادلة حركة اهتزازيه توافقية بسعة

يساوي صفر .
ودور $0,1M$ و 4 Second ، و طور ابتدائي

س: 5 سعة ذبذبه توافقية تساوي $50mm$ ، دورها

4 Sec والطور الابتدائي $\frac{\pi}{4}$.

(1) اكتب معادلة هذه الذبذبه .

(2) اوجد ازاحة النقطة المتزده عن وضع الاستقرار عند

$t=0$ وعند $t=1,5\text{ sec}$.

(3) ارسم منحنى هذه الذبذبه .

س: 6 اكتب معادلة الحركة الاهتزازيه التوافقية بسعة

5 Cm ، اذا انجزت في الدقيقه الواحده 150 ذبذبه

بطور ابتدائي يساوي 45° . ارسم منحنى هذه الحركة .

س: 7 خلال كم من الزمن منذ بدايه حركة نقطة ماديته

تنجز ذبذبه توافقية ، تزاح هذه النقطه من وضع

استقرارها بمقدار نصف السعه .

اذا كان دور الذبذبه يساوي 24 Sec والطور الابتدائي

يساوي صفر .

الحل: نمتلك $x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$

حسب الشرط $x = \frac{A}{2}$ ، اضافة الى ذلك

$$\varphi = 0 \quad T = 24 \text{ sec.}$$

بالتالي ،

$$0,5 = \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

أي أن

$$\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

من هنا ينتج أن $t = 2 \text{ sec.}$

س: 8
الطور الابتدائي لذبذبه توافقيته يساوي صفر
خلال أي جزء من دور الذبذبه سوف تساوي سرعة
نقطة ماديه نصف سرعتها العظمى ؟

س: 9
خلال كم من الزمن منذ بداية الحركه ، تقطع نقطة
ماديه الطريق من وضع الاستقرار الى اكبر ازاحه
ممكنه ، اذا كانت هذه النقطة تنجز حركة امترازيه
طبقا للمعادله

$$x = 7 \sin 0,5\pi t.$$

س: 10
سعة ذبذبه توافقيته تساوي 5 cm ، الدور 4 sec .
أوجد السرعة العظمى للنقطة الممتزحه وتسارعها الاعظم.

س: 11
معادلة حركة نقطة اعطيت بالمئيه

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm.}$$

أوجد: (1) دور الذبذبه ، (2) السرعة العظمى للنقطة،

3) تسارعا الاعظم .

12 س : معادلة حركة نقطه اعطيت بالميينة

$$x = \sin \frac{\pi}{6} t .$$

أوجد اللحظات الزمنية التي تبلغ فيها السرعة والتسارع قيمهما العظمي .

الحل: نمتلك طبقا للشرط $x = \sin \frac{\pi}{6} t .$

من هنا السرعة v تساوي

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) .$$

السرعة تكون اعظم ما يمكن عند الشرط

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) = 1$$

اي عند الشرط

$$\frac{\pi}{6} t = n\pi$$

حيث $n = 0, 1, 2, \dots$

بئذا الشكل تصبح السرعة اعظم ما يمكن في اللحظات الزمنية

$$t = 0, 6, 12 \text{ sec} .$$

التسارع سوف يكون اعظم ما يمكن تحت الشرط

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} t\right) = 1 ,$$

اي تحت شرط ان

$$\frac{\pi}{\phi} t = (2n + 1) \frac{\pi}{2} .$$

بمذا الشكل ، يبلغ التسارع قيمته العظمى في اللحظات الزمنية

$$t = 3 , 9 , 15 \text{ Sec}, \dots$$

س¹³: نقطة تنجز ذبذبه توافقيه . دور الذبذبه . 2 Sec ،
سعتما 50 mm ، الطور الابتدائي يساوي صفر . اوجد
سرعة النقطة في اللحظة الزمنية ، عندما تصبح ازاحتها
عن وضع الاستقرار مساوية لـ 25 mm .

س¹⁴: اكتب معادلة الحركة الاهتزازيه التوافقية ، لنقطة
ماديه ، اذا كان تسارعها $\gamma_{max} = 49,3 \frac{\text{cm}}{\text{Sec}}$ ، دور الذبذبه
 $T = 2 \text{ Sec}$ وازاحة النقطة عن وضع الاستقرار في بدايه
اللحظة الزمنية تساوي 25 mm .

س¹⁵: الطور الابتدائي لذبذبه توافقيه يساوي صفر . عند ازاحة
النقطة عن وضع الاستقرار بمقدار 4 cm و 62 كانت سرعتها
تساوي 3 cm/sec . بينما عند ازاحتها بمقدار 2 , 8 ، كانت
السرعة تساوي 20 cm/sec .
اوجد سعة ودور هذه الذبذبه .

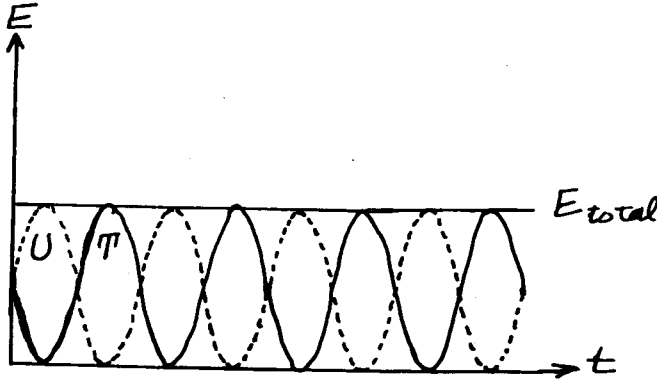
1.5
س
أ) معادلة ذبذبة نقطة مادية كتلتها $m = 16 \text{ g}$ تمتلك الهيئه :

$$x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ m.}$$

ارسم منحنى الاعتماد على الزمن (لحدود دور واحد) للطاقت الحركية ، الكامنة والكلية لهذه النقطة .

ب) حدد دور ذبذبة ثقل وزنه $P = 2,5 \text{ N}$ (نيوتن) معلق في نابض ، اذا كان النابض يتمدد تحت تأثير قوة $F = 3 \text{ N}$ بمقدار 9 cm .

ج حدد دور النواس الرياضى الذى طوله ℓ .



شكل 1.20

الحل: 16 أ.

على الشكل 1.20 . صوراعتماد الطاقة الحركية والكامنه والكليه على الزمن للنقطه ، التي تمتاز طبقا للمعادله المعطاة بالسؤال . اعطي المنحني بحدود دور واحد . من المنحني يتضح ، ان دور ذبذبه الطاقه اقل بمرتين من دور الحركه الاهتزازيه نفسها .

س: 17 ما هي العلاقه بين الطاقة الحركيه والكامنه لنقطه ماديه تنجز ذبذبه توافقيه ، للفرات الزمنيه :

$$t = \frac{T}{12} \text{ Sec} , \quad (1)$$

$$t = \frac{T}{6} \quad (2) \quad t = \frac{T}{8} \text{ Sec} \quad (3)$$

اذا علمت ان الطور الابتدائي للذبذبه يساوي صفر .

س: 18 ما لعلاقه بين الطاقتين الحركيه والكامنه لنقطه تنجز ذبذبه توافقيه ، عندما ازاحة النقطه من وضع

الاستقرار تشكل :

$$x = \frac{A}{2} \quad (2) \quad x = \frac{A}{4} \quad (1)$$

$$x = A \quad (3)$$

حيث A - سعة الذبذبه .

19: الطاقة الكامله لجسم، ينجز حركة اهتزازيه توافقيه تساوي $3 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$. اكتب معادله حركة هذا الجسم، اذا كان دور الذبذبه يساوي 2 sec والطور الابتدائي 60° . القوه المؤثره $F = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

20: كرة صغيرة معلقة بنهاية خيط طولها 2 M ، حرفت الكرة عن الشاقول بزاوية 4° وشوهدت اهتزازاتما . فاذا افترض ان الذبذبات توافقيه والحركه تنجز دون فقدان بالطاقه، أوجد سرعة الكرة عند مرورها خلال وضع الاستقرار .
افحص الحل الذي حصلت عليه، أوجد سرعة الكرة عند نفس الوضع باستخدامك المعادله الميكانيكيه .

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} = 2,8 \text{ sec} \quad \text{الحل: دور ذبذبه الكرة}$$

سعة الذبذبه عند الانحرافات الصغيره عن وضع الاستقرار يمكن ان توجد بالصورة التاليه :

$$A = L \sin \alpha = 2 \text{ meter} \sin 4^\circ = 2 \cdot 0,0698 \text{ meter}$$

$$\cong 0,14 \text{ M} .$$

حينذاك تكتب معادلة حركة الكرة هكذا:

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0,14 \sin \frac{2\pi t}{2,8} \text{ م} ,$$

إذا حسب الزمن اعتباراً من وضع الاستقرار. عند مرور الكرة خلال وضع الاستقرار تكون سرعتها أعظم ما يمكن.

$$\text{بما أن } v = \frac{0,14 \cdot 2\pi}{2,8} \cos \frac{2\pi t}{2,8} \text{ م/ث. فإن}$$

$$v_{\max} = \frac{0,14 \cdot 2\pi}{2,8} \text{ م/ث} = 0,31 \text{ م/ث.}$$

نفس هذه السرعة نستطيع إيجادها من العلاقة الميكانيكية

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

حيث h الارتفاع الذي تبلغه الكرة .

$$v = \sqrt{2gh} \quad . \quad \text{من هذا ينتج}$$

ليس من الصعبه ملاحظة ، أن

$$h = L(1 - \cos \alpha) ,$$

حيث L - طول الخيط .

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} = 0,31 \text{ م/ث.} \quad \text{حينذاك}$$

عند الانحرافات الكبيرة لهذا النواس (الكرة المعلقة بالخيط) عن وضع الاستقرار فلن تكون ذبذبات النواس حينذاك توافقيه .

21 من : بنمائية نابض شاقولي علق ثقل 10 kg قوه .
فاذا علمت أن النابض يتمدد تحت تأثير قوه مقدارها 1 kg قوه بمقدار 1.5 cm ، حدد دور الذبذبات الشاقوليه للثقل .

22 من : كيف يتغير دور الذبذبات الشاقوليه لثقل ، معلق على نابضين متكافئين ، اذا انتقلنا من الربط المتوالي للنابضين الى ربطهما المتوازي .

23 من : كره صغيره من النحاس معلقه بنمائية نابض ، تنجز ذبذبات شاقوليه . كيف يتغير دور الذبذبه ، إذا ما علقت بالكره كره أخرى من الالمنيوم لما نفس نصف القطر .

24 من : اناء أثقال معلق في نابض مع الاثقال . خلال ماذا كان دور الذبذبات الشاقوليه يساوي 0.5 sec .
بعد أن أضيفت الى اناء الاثقال ، أثقالا اضافيه ، اصبح دور الذبذبات الشاقوليه يساوي 0.8 sec .
كم استطال النابض بسبب الاثقال الاضافيه .

25 من : أكتب معادلة الحركه ، المحصله بنتيجة جمع حركتين اعتزازيتين توافقيتين وجمتا بصورة متكافئه بساكنة دوران متكافئه 0.02 M وبسعة متكافئه 6 sec .

فرق الطور بين هاتين الذبذبتين يساوي $\pi/4$.
الطور الابتدائي لا حدى هاتين الذبذبتين يساوي صفر .

س: 25 أوجد السعة والطور الابتدائي للذبذبه التوافقية
المحصلة من جمع ذبذبتين متوجعتا بصورة متكافئه،
والمعبر عنهما بالمعادلتين

$$x_1 = 0,02 \sin \left(5\pi t + \frac{\pi}{2} \right) M ,$$

9

$$x_2 = 0,03 \sin \left(5\pi t + \frac{\pi}{4} \right) M .$$

س: 26 بنتيجة جمع ذبذبتين توافقيتين متوجعتا بصورة متكافئه
بسعتين متكافئتين ودورين متكافئين ، تحصل ذبذبه
محصلة بنفس الدور وبفس السعه . أوجد فرق طور
الذبذبتين المتراكبتين .

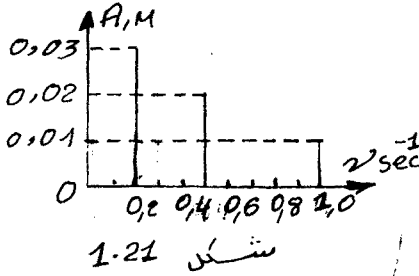
س: 27 أوجد السعه والطور الابتدائي للذبذبه التوافقية،
المحصلة من جمع ذبذبتين ، وجعتا بصورة متكافئه،
والمعبر عنهما بالمعادلتين

$$x_1 = 4 \sin \pi t \text{ cm}$$

$$x_2 = 3 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm} .$$

(2) اكتب معادلة محصلة الذبذبه

(3) اعطي التخطيط الاتجاهي لجمع السعات .



28: على الشكل 1.21

عرض طيف ذبذبه معقده .

(1) استخدم معطيات

هذا الرسم ، اكتب

معادلة الذبذبات ،

التي تكونت منها

الذبذبه المعقده

(2) ارسم منحنى هذه الذبذبات (آخذين ، بنظر الاعتبار ،

أن فرق الطور بين هذه الذبذبات في اللحظة

$t=0$ يساوي صفرا) .

(3) ارسم منحنى الذبذبه المحصله المعقده .

29: لتكن لدينا ذبذبتان توافقيتان

$$x_1 = 3 \sin 4\pi t \text{ cm}$$

9

$$x_2 = 6 \sin 10\pi t \text{ cm} .$$

ارسم منحنى هاتين الذبذبتين . اجمع بيانيا هاتين

الذبذبتين وارسم منحنى الذبذبه المحصله . ارسم

تخطيطيا كذلك طيف الذبذبه المعقده المحصله .

س٣٠: يمكن لدينا ذبذبه بحيغة المعادله

$$x = A \sin 2\pi \nu_1 t , \quad (1)$$

حيث A تتغير مع الزمن طبقا للقانون

$$A = A_0 (1 + \cos 2\pi \nu_2 t) .$$

$$A_0 = \text{const} . \quad \text{هنا}$$

اوجد من اي الذبذبات التوافقية تتكون الذبذبه
في المعادله (1) .

ارسم منحني مركبات الذبذبه المحمله بالنسبة للحاله

$$A_0 = 4 \text{ cm} , \quad \nu_1 = 2 \text{ sec}^{-1} , \quad \nu_2 = 1 \text{ sec}^{-1}$$

خطط طيف الذبذبه المعقده .

س٣١: اكتب معادله الذبذبه المحمله ، الناشئه بنتيجة

جمع ذبذبتان متبادلتا التعادليتين متكافئتين

$$\nu_1 = \nu_2 = 5 \text{ Hz}$$

وبطور ابتدائي متكافئ $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$.

سعة احدى هاتان الذبذبتان تساوي

$$A_1 = 0,10 \text{ m} ,$$

سعة الاخرى

$$A_2 = 0,05 \text{ m} .$$

32: نقطة تشارك بذبذبتين متكافئتا الدور وطورين ابتدائيين متكافئين .

$$A_1 = 3 \text{ cm} , A_2 = 4 \text{ cm} .$$

أوجد سعة الذبذبة المحملة، إذا:

(1) كانتا الذبذبتان تنجزان باتجاه واحد،

(2) الذبذبتان متبادلتا التعامد.

33: نقطة تشارك في أن واحد بذبذبتين متعامدتين

$$x = \cos \pi t \quad \text{و} \quad y = \cos \frac{\pi t}{2} .$$

أوجد مسار حركة النقطة

34: نقطة تساهم في نفس اللحظة الزمنية (في أن واحد) بذبذبتين متعامدتين

$$x = 2 \sin \omega t + M$$

$$y = 2 \cos \frac{\pi t}{2} .$$

أوجد مسار محملة حركة النقطة .

35: نقطة تساهم في أن واحد بذبذبتين متعامدتين

$$x = \sin \pi t \quad \text{و} \quad y = 2 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

أوجد مسار حركة النقطة وخطط مقاييس هذا المسار البيانيه .

36 س : نقطة تساهم في أن واحد بذبذبتين متبادلتا التعامد
(متعامدتين)

$$x = \sin \pi t$$

$$y = 4 \sin (\pi t + \pi) . \quad \circ$$

أوجد مسار حركة النقطة وخطط مقاييسه البيانيه .

الفصل الثاني

٧

الفصل الثاني

الاهتزازات الحرة بدرجة حريه واحده في الانظمه الخاليه .

§1. الاهتزازات الحرة بدرجة حريه واحده في الانظمه الخاليه المحافظه (نظرية المحافظه) .

عند بحثنا للانظمة المعتزة يجب ان نولي اهتمام خاص لتلك الانظمة ذات الخمود القليل في اهتزازاتها والتي فيما تشتت الطاقه خلال زمن المزه الواحد قليل بالمقارنه مع الاحتياطي العام لطاقه النظام المرتبطه بالحركه المبحوثه . في مثل هذه الانظمه تظهر الصفات الاهتزازيه بوضوح . في التطبيق العملي نلتقي مع كثير من الانظمه ذات القدره العاليه على الاهتزاز .

يمكن ان نذكر على سبيل المثال عناصر التناغم أو الانسجام الداخليه في بناء دائرة الاستقبال الراديويه أو البناء الاهتزازي الداخلي في صناعة اشراطه الفلترات أو بناء النواير أو التوازنات في ميكانيزم الساعات . كثير من الخصائص الاهتزازيه لمثل هذه الانظمة تعتمد قليل جداً على مقدار وطبيعة الخمود اذا هو بقي في حدوده الدنيا . لذلك عند تحديد انفسنا بفهم زمني ليس بكبير مقارنه بزمن المزه الواحد نستطيع ان نبحث كثير من الخواص النوعيه المامه للعمليات الاهتزازيه باعما لنا الخمود الذي يمكن ان يحصل وننظر الى النظام كنظام محافظ . ومن الواضح ان هذا الافتراض يقودنا الى بحث انظمة مثاليه واستخدام النتائج المحصله وتطبيقها على الانظمه الفيزيائيه الحقيقيه لقرينه منها .

الانظمة المحافظة: هي تلك الانظمة التي فيها احتياط الطاقة الميكانيكية أو الكهرومغناطيسية أو كليهما معا يبقى ثابتا خلال الاهتزاز الواحد (ذبذبة واحدة). يوجد كذلك مجموعة كاملة من الانظمة الاهتزازية التي فيها خسران الطاقة خلال زمن المزة يعوض على حساب المصادر الداخلية للطاقة . وبهذا الشكل فان احتياطي الطاقة لا يتغير من مزة الى مزة اخرى.

مثل هذه الانظمة تحمل تسمية المشتتات الاتوماتيكية. بغض النظر من قلة وجود الانظمة المحافظة فهي الطبيعة فان دراستها تساعدنا على الحصول على معلومات كثيرة تسهل دراسة الانظمة المختلفة عن الانظمة المحافظة ولكنها قريبة منها .

عدد درجات الحرية للنظام يتحدد بعدد المتغيرات المستقلة الضرورية لوصف حركة النظام وصفا كاملا. ويتحدد دراستنا على الانظمة ذات درجة الحرية الواحد يجب علينا بشكل عام لغرض وصف الحركة في الانظمة المحافظة ان نبحث المعادله التفاضلية من الدرجة الثانية

$$\ddot{X} = \Phi(X, \dot{X}) \quad (2.1)$$

لكن مثل هذه المعادله سوف تصف الحركة في الانظمة المحافظة لبعض اشكال الداله $\Phi(X, \dot{X})$ وليس في اي شكل منها .

ولغرض تبسيط البحث نبدأ بدراسة الحالة عندما

تكون المعادله التي تصف الحركه في النظام المبحث خالية من $\ddot{x}$ ، اي ان القوه المعيدة لاتعتمد على السرعة . حينذاك سيكون الشكل العام للمعادله (2.1)

$$\ddot{x} = f(x) . \quad \text{هو ما يلي : (2 . 2)}$$

اضافة الى انه من الميئة : $f(\ddot{x}, \dot{x}) = 0$ ، ستطيع دائما ان تنتقل الى الميئة $\ddot{x} = f(x)$ ، حيث يمكننا حل هذه المعادله بالنسبة الى $\ddot{x}$. بالنسبة للأنظمة

الميكانيكيه في المعادلات التي تصفها من نوع المعادله (2.2) ، يمكن اعتبار أن المشتقة الثانية $\ddot{x}$ تمثل قوة العطالة الناتجه .

أما الجزء الايمن من المعادله (2.2) فانه يمثل القوة الناشئه في النظام والمرتبطة فقط بوضع الكتله المبحوثه (مثل قوة المرويه) . وكلتا القوتان ينتسبان الى وحدات الكتله .

في الانظمة الكهربائيه التي بالنسبة لها تعتبر x (الشحنة) هي المتغير الأساسي ، فان الجزء الايسر من المعادله (2.2) يعتمد على القوة الكهربائيه المؤثره والظاهره على الحث ، بينما الجزء الايمن يعتمد على القوه الكهربائيه المؤثره والظاهره على سعة النظام .

كذلك تنتسب الى المعادله (2.2) معادلة المراز التوافقي

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (2.3)$$

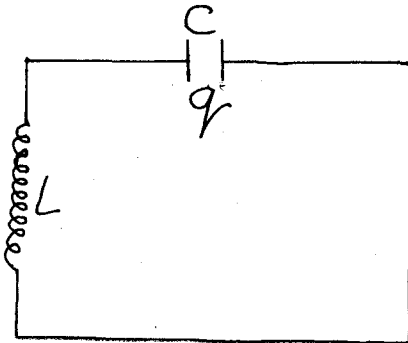
فالمراز التوافقي والذي سبقت دراسته في الفصل الاول

يمتلك معادله تفاضليه لحركته بالاحداثيات
الزاويه وضمن مجال الجاذبيه الارضيه
ممثله بالحيثه المعروفه μ الهزاز التوافقي هوكل جسم
معلق بنابض او طافيا على سطح الماء μ وجزى μ ثنائى الذرة او ذره فى
شبكة بلورية μ و شحنة q مهتزة فى دائرة (LC) الكهربائيه)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (2.4)$$

اما فى حالة الدائره الكهربائيه الممتزه
بدون فقدان فى الطاقه والموضحه على
الشكل 2.1 ، فان معادله الحركه المحصله
من قانون كيريتشوف

$$L \ddot{q} + q/C = 0.$$



شكل 2.1

دائره كهربائيه مهتزه .

فان عوضنا q بـ x ، $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ ،

نحصل على المعادله :

$$\ddot{C} + \omega_o^2 x = 0 .$$

فكل من المعادلتين (2.3) و (2.4) تصف

عمليات الاهتزاز في انظمه محافظه .

لكن المعادله (2.3) هي خطيه بالنسبة

للاحداثي x .

وبالتالي ، فمعي تصف حركة نظام

خطي ممتر .

وبالعكس ، فان المعادله (2.4) التي تصف

حركة الهزاز التوافقي بالاحداثيات القطبيه ، هذه الحركة التي تتناسب

فيها القوة المرجعة التي تعيد الجملة او النظام الى وضع التوازن عندما

يختل هذا التوازن طردا مع الازاحة ، التي هي الكمية الفيزيائية المتغيرة

الوحيدة في حالة بحثنا هذا (مثل الازاحة او الزاوية او الشحنة)

عن وضع التوازن . هذه المعادلة هي :

ليست خطيه بالنسبة للاحداثي θ ، أي أن القوة المعيده تتناسب طرديا مع $\sin \theta$ ، ولذلك فالنظام الموصوف بمذه المعادله ليس نظاما خطيا .
 نعود الى المعادلة (2.2) معتبرين أن الدالة $f(x)$ هي ، عبارة عن داله لاخطيه جرى تكاظمها بالنسبة للاحداثي x .

ندخل متغير جديد هو $y = \dot{x}$ والذي يسامدنا أن نستثني t من معادلة الحركه بشكل واضح ، رغم أنه كالسابق $y = y(t)$ و $x = x(t)$ حينذاك يمكن أن نكتب $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx}$ في الاحداثيات الجديده تصبح المعادله (2.2) بالشكل التالي :

$$y \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} f(x) . \quad (2.5)$$

بتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$\left. \begin{aligned} \int y dy - \int f(x) dx &= 0 \\ \frac{1}{2} y^2 - \int f(x) dx &= h \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

حيث $h = \text{const.}$

التعبير $(-\int f(x) dx)$ يعني داله كامنه تتناسب طرديا مع الطاقه الكامنه للنظام .
 اما المقدار $\frac{1}{2} y^2$ فهو يمثل الطاقه الحركيه لوحده الكتله . ولذلك تصبح المعادله (2.6) بالمئه التاليه

$$\frac{1}{2} y^2 + V(x) = h . \quad (2.7)$$

المعادله (2.7) هي الشرط الطبيعي للنظام المحافظ (المعزول عن تاثير القوى الخارجيه) والذي يمكن أن يعبر عنه بأحتياطي ثابت للطاقه .

اما بالنسبة للحالة الأكثر عمومية ، عندما تكون القوم المعيدة تعتمد على السرعة فان المعادله (2.1) يمكن ان تكتب بالصورة التاليه :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Phi(x, y) ; \quad y dy = \Phi(x, y) dx ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi(x, y)}{y} .$$

وفي هذه الحالة سكتب المعادله (2.1) كمعادله تصف النظام المحافظ بشرط ان يتحقق تكامل ذات مقدار واحد لهذه المعادله :

$$F(x, y) = \text{Const.}$$

2. طريقة المستوي الطوري

بتعويض $y = \dot{x}$ يمكن ان نستخدم طريقه معروفه لدراسة سلوك النظام المبحوث ، بمساعدة المستوي الطوري (مستوى المتغيرات x و y) . كل حاله من حالات هذا النظام تتفق مع قيمتين لـ x و y - اي ان كل حاله تمثل بنقطه على المستوي الطوري . سوف نسمي مثل هذه النقطه التي تتحدد احداثياتها بمقدار واحد للحاله اللحظيه للنظام - بالنقطه الواصفه او المصوره . من الواضح انه فسي حاله الحركه المنجزه من قبل النظام سوف يحصل تغيير لمقادير x و y ، وبالتالي فان النقطه المبحوثه سوف تزاح بمسار منحنى غير محدد اتفق على تسميته بالمسار الطوري للحركه .

فبالنسبة للنظام المبحوث ترتبط المتغيرات x و y بهذا النظام بمعادلتين تفاضليتين من الرتبه الاولى .

$$\ddot{x} = y . \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = f(x) . \quad (2.9)$$

او يرتبط المتغيرين x ، y ، العائدين لنفس النظام

بمعادلة واحدة هي: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} f(x)$ ، والتي تكاملها يعطي معادلة المسار الطوري .

ومن الخصائص العامة للمعادلات التفاضلية ينتج ان : خلال كل نقطة من المستوى الطوري يجب ان يمر مسار طوري واحد فقط ، باستثناء تلك النقاط التي فيها $f(x) = 0$ ، يتحولون الى الصفر في نفس الوقت . في هذه النقاط الخاصه يصبح اتجاه وعدم المسارات الطوريه غير محدد والنظام نفسه يخضع لدراسة خاصه . نلاحظ ان معادله المسار الطوري قد استثنينا منها الزمن بشكل واضح .

شكل المسار الطوري يعطي بعض المؤشرات عن الخطوات اللحظيه للعمليات المدروسه ، وبدون بحوث اضافيه لانستطيع الحصول على المتغير الاساسي x كداله للزمن .

نبحث الظروف التي تظهر فيما حالة التوازن في النظام : في حالة التوازن تؤول سرعة الحركه الى الصفر والقوى المسببه لحركة النظام يجب ان تغيب اي ان

$$\dot{y} = \dot{x} = 0 , \quad \ddot{y} = \ddot{x} = 0$$

ومن ذلك ينتج انه في حالة التوازن يجب ان

$$y = 0 \quad x = \dot{x} = 0$$

في النقاط المطابقه لحالة التوازن $f(x) = 0$ ، وبالتالي

فان الداله الكامنه $V(x)$ في الحالة عندما $x = \dot{x}$

تمتلك حداً أدنى ، وذلك لان : $y = f(x) = -\frac{d}{dx} V(x)$.

بينما في الحالة عند $x = x_i$ فإن

$$f(x_i) = \frac{d}{dx} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0$$

النقاط التي يتحقق فيها هذا الشرط الأخير تسمى نقاطاً خاصة من الرتبة الأولى .

فإذا كانت

$$\frac{d^n}{dx^n} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0, \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} V(x) \Big|_{x=x_i} \neq 0$$

حيث $n = 1, 2, \dots$ ، 1.2 ،

لذلك فنحن نعلم علاقته مع النقاط الخاصة من الرتبة

n . وبهذا الشكل فإن وضع التوازن للنظام يتطابق

مع $f(x_i) = 0$ ، $y_i = 0$.

أي يتطابق مع النقاط الخاصة على المستوى الطوري .

3 كـ . حركة الأنظمة المزدوجة من وضع توازنها الدائم

أحد الأسباب التي تجعل الحركة التوافقية البسيطة تتناسب أهمية خاصة هو أنه إذا أزيح النظام عن وضع توازنه أزاحه صغيره فإن الحركة الناشئة في هذه الحالة (عند غياب الاحتكاك) هي حركة توافقية بسيطة . ولكي نبحت ذلك نصف الانحراف عن وضع التوازن الدائم بالاحداثي η .

حيث يمكن ان تعبر عن مسافة او زاويه او اي نوع من الاحداثيات . وشرط حدوث التوازن الدائم هو ان تكون $\eta = 0$.

في هذه الحالة تصبح طاقة الوضع (الطاقة الكامنه) اقل ما يمكن أما القوه او عزم الدوران فيجب ان يساوي صفراً اي ان

$$F(\eta=0) = -\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0$$

حيث U - طاقة الوضع .

وباستعمال نشر تيلر للداله U المتغيره مع η نحصل على :

$$U(\eta) = U_0 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0} \eta + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3U}{d\eta^3}\right)_{\eta=0} \eta^3 + \dots$$

حيث يؤخذ نشر تيلر حول $\eta = 0$. باعمال الحدود المحتويه على η^3 والحدود الاعلى مما ذلك لان η كميه صغيره واخذنا بنظر الاعتبار ان :

$$\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = \text{const.}$$

نحصل على:

$$U(\eta) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta^2$$

بمفاضلة هذه المعادلة نحصل على:

$$F(\eta) = - \frac{\partial U(\eta)}{\partial \eta} = - \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta.$$

حيث $F(\eta)$ يمكن أن تمثل قوة أو عزم دوران أو قوة كمية ذات فعل قوة. أما الإشارة السالبة فتعني أن القوة تحاول إعادة النظام إلى وضع التوازن عند $\eta = 0$.

بالتالي يبدو أن شرط التوازن الدائم هو:

$$\left.\frac{d^2U}{d\eta^2}\right|_{\eta=0} > 0.$$

أي أن $F(\eta)$ في التعبير الأخير تعني قوة معيده. وبأستعمال قانون نيوتن الثاني تصبح معادله الحركه

$$m\ddot{\eta} = - \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta.$$

حيث m - كمية لها فعل الكتله.

أما الاحداثي η فهو يصف حركة توافقية بسيطه لنظام خطي بدرجة حريه واحده.

هذا التعبير الأخير يمكن تطبيقه على تلك الانظمة التي تمتلك دالة تفاعليه تعبر عن طاقتها الكامنه.

4. الاهتزازات الحرة بدرجة حرية واحدة ليس الانظمة غير المحافظه .

المميزات الاساسيه للعمليات الاهتزازيه في الانظمه غير المحافظه وطرق بحثها : كما أوضحنا سابقا في الانظمه الحقيقيه يحدث دائما تشتت للطاقتة خسرا ناء ، انتقالا من النظام . وكنتيجه لهذا يحدث نقصان للاحتياطي العام للطاقتة الاهتزازيه . عملية التشتت تعني عدم المحافظه على الطاقه ، ونقصان الاحتياطي العام يشمل جميع الانظمة التي لاتملك وسيله لتعويض هذا النقص الطاقوي . ولذلك فحين على صبح حينما نأخذ بنظر الاعتبار حساب عملية النقص للاحتياطي الاساسي لطاقتة الاهتزاز لان ذلك يساعدنا على الحصول على أجوبه تصف تماما الحركه الحقيقيه اكثر صحة من بحث الانظمه المحافظه . من الممكن الاشاره الى مجموعه خصائص العمليات الاهتزازيه التي تشترط وجود الخساره في طاقتة النظام والتي تحدث بقانون محدد وهي جومرييه كما للانظمه الخطيه وللانظمه اللاخطيه .

فالي مجموعه المشاكل التي يتطلب حلها حساب النقصان في الطاقتة (الانظمه غير المحافظه) تنتسب على سبيل المثال : تقدير السعات المتكاثفه في الانظمه الخطيه أو في الانظمه ذات اللاخطيه القليله ، الشكل العام للحركه الحاصله بوجود القوي المؤثره (القوي المبره) ، قانون تغير سعات الاهتزازات الحرة

مع الزمن واستقراره الحالات المختلفة . لهذه الاسباب
فان الاسئلة والمشاكل المشار اليها اعلاه لاتستطيع
نظرية الانظمة المحافظه الممتزه ان تعطي اجوبه
صحيحة عليها .

فأخذاً بنظر الاعتبار ما تقدم في كل حاله ملموسه
يبدو واضحاً ان نظرية الانظمة المحافظه الممتزه غير
ناجعه . ومن الطبيعي تماماً ان حساب الالمحافظه
حتمي وضروري ولكنه بلاشك يعقد حل المسائل
المطروحه . واذا كان بالامكان الحصول على اجوبه
بواسطة نظريه الانظمة المحافظه على الاسئلة
المطروحه ، فلا باس الاخذ بها . أما فيما يخص الخصائص
العامه للانظمة التي تظهر خموداً في اهتزازاتها فان
الاستنتاجات التي استخلصت من تحليل الانظمة
المحافظه المعزوله يمكن ان تبدو مبدئياً غير صحيحة .
بين الانظمة المحافظه وغير المحافظه توجد فوارق
مبدئية فيزيائية تظهر على اساس اختلاف سلوك
الطاقه في هذه او تلك من الانظمة .

فاذا كانت هذه الفروق خلال فتره زمنية
صغيره جداً يمكن ان تظهر ضعيفه للغاية فانما
خلال فتره زمنية كبيره بمافيه الكفايه منذ بدء
العملية سوف تكون في الانظمة الحقيقيه محسوسه
ومتميزه كماً ونوعاً وسوف تبدو الحركه في الانظمة
غير المحافظه مختلفه عما في الانظمة المحافظه .
وبما ان الاهتزازات الحره في الانظمة المحافظه

يجب أن تتحقق وتبقى مستمره لزمان طويل ولا محدود وسعتما يجب أن تتحدد بالظروف الابتدائية ، فان في الانظمة غير المحافظه يمكن دائما الاشارة الى الفتره الزمنية المحدوده التي خلالها سعة الحركه باية ظروف ابتدائية حقيقيه ستكون اقل مما في الفتره الزمنية السابقه .

ومما تقدم يتضح : ان الانظمة غير المحافظه الممتزة والتي لا تمتلك مصادر للطاقة تمتلك حالة استقرار واحد في السكون . وب نفس الوقت يمكن ان تكون الظروف الابتدائية والاحتياطي العام لطاقة النظام عاملا مسببا للخمود الحاصل للاهتزازات الحرة للنظام والتي يمكن ان تتوقف تماما في الانظمة الحقيقيه خلال فتره زمنية كافيه .
في الوصف الرياضي للانظمة المحافظه المستقلة نتعامل مع التكامل التالي

$$\Phi(x, y) = \hbar, \quad y \equiv \dot{x}. \quad (2.10)$$

وهذا التعبير الرياضي لحركة النظام الممتز بدرجة حرة واحد يشترط ثبوت احتياطي طاقه حركه النظام . وفي أبسط الحالات يمكن ان توصف حركة النظام المحافظه بالمعادلة التاليه :

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 + V(x) = \hbar. \quad (2.11)$$

حيث $V(x)$ - دالة كامنه تعبر بقياس محدد عن الطاقة الكامنه للنظام. اما في الانظمة غير المحافظه

(التي تشتت الطاقه) فان المعادله (2.10) تأخذ الشكل التالي :

$$\Phi(x, y) = W(t). \quad (2.12)$$

حيث

$$\frac{dW}{dt} \neq 0$$

هنا الداله $W(t)$ تعبر عن المقدار اللحظي (الآني) لا احتياطي الطاقه الاهتزازيه للنظام .

وبصورة مماثله نستطيع ان نكتب الشرط العام للانظمة غير المحافظه . مما تقدم ينتج انه رغم صغر الفاصل الزمني Δt في الفتره الزمنيه المبحوثة التي فيها $\frac{dW}{dt} \neq 0$ فان هذا النظام خلال هذا الفاصل الزمني المعطى يعتبر غير محافظ ، اضافة الى ذلك ، قد ينتج انه خلال فترات زمنيه منفردة يحصل ان :

$\frac{dW}{dt} = 0$ ، لذا فانه خلال هذه الفواصل الزمنيه اللحظية والمؤقتة يمكن أن نعتبر النظام أو نفس النظام كنظام محافظ والذي بالنسبة له $\frac{dW}{dt} = 0$.

في الانظمه غير المحافظه دائما تكون $\frac{dW}{dt} < 0$ ، وهذا فيزيائياً يتطابق مع وجود الخسران في الطاقه الذي يقود الى النقصان المستمر بأحتياطي الطاقه المرتبط بالحركه المدروسه . فاذا رمزنا الى سرعة التشتت بالداله

$$F(x, y) = - \frac{dW}{dt}$$

فانه في الانظمه غير المحافظه يتحقق دائما

الشرط التالي : $F(x, y) > 0$

في الحالات الحقيقية فإن هذه الدالة تعبر عن مقدار استطاعة الخسارة في الطاقة . بالنسبة لـ لا نظمة التي توصف فيها الحركة بواسطة معادلة الطاقة (2.12) التي يمكن كتابتها بالهيئه :

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 + V(x) = W(t) . \quad (2.13)$$

من السهولة ان نحصل على معادلة القوي التي تؤثر على هذه الانظمة وذلك بتفاضل المعادلة (2.13) بالنسبة الى الزمن .

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{y}^2 + V(x) \right] = -F(x, y) \quad \text{حاصل على :} \quad (2.14)$$

$$\dot{y} - f(x) + \frac{1}{y} F(x, y) = 0$$

حيث $V(x) = -\int_0^x f(x) dx$ هي القوة المعيدة .
اما التعبير $\frac{1}{y} F(x, y)$ فهو يمثل مقدار قوة الاحتكاك

التي خصائصها في مختلف الأنظمة تعتمد على حالة حركة النظام .

$$\frac{1}{y} F(x, y) = -\frac{1}{y} \frac{dW}{dt} . \quad (2.15)$$

وهذا خاص بالانظم غير المحافظه (المشتته للطاقة) . حينذاك تصبح

المعادله (2.14) بالهيئه التاليه :

$$\dot{y} - f(x) - \frac{1}{y} \frac{dW}{dt} = 0 . \quad (2.16)$$

حيث الحد الثاني من الطرف الايسر $(-f(x))$ يمثل القوة المعجيد .

نلاحظ ان التعبير $(\frac{1}{y} F(x, y))$ الممثل لقوة الاحتكاك يؤول الى

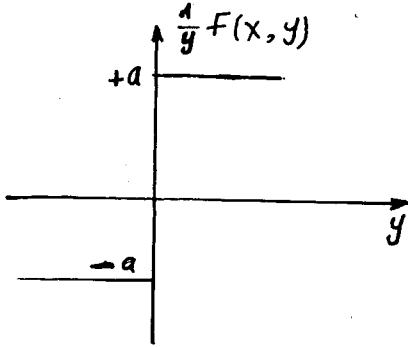
الصفر عندما $y = 0$ ، أي

عند غياب الحركة . وهذا يظهر من التصور الفيزيائي وبالذات من تصور أن قوة الاحتكاك والخسران فسي الطاقة يمكن أن يمتلك مكاناً فقط بوجود الحركة في النظام أي عندما $(y \neq 0)$. ومن ذلك ينتج أن: في الدالة $F(x, y)$ المتغير y يجب أن يدخل بأش أكبر من 1 . وبحساب الشرط اللازم للانظمة غير المحافظه $F(x, y) > 0$ ، نستطيع أن نصل الى استنتاج مفاده أن التعبير $\frac{1}{y} F(x, y)$ ، يجب أن يكون متغير الاشارة ويأخذ اشارة تطابق اشارة y . أي أن اشارة $\frac{1}{y} F(x, y)$ تطابق اشارة سرعة الحركة في النظام أو التيار في الدائره الكهربائيه .

بالنسبة لكثير من الانظمة غير المحافظه تعتمد قوة الاحتكاك فقط على السرعة (أو على قوة التيار) ولا تعتمد على الاحداثيات (أو الشحنة) ولكن طبيعة هذا الاعتماد يمكن أن تكون مختلفه اعتمادا على خصائص النظام والظروف التي تنجز فيها الحركة المدروسة .

فكرة الاحتكاك التي لا تعتمد على السرعة وترتبط فقط بأشارتها تحصل اسم - الاحتكاك الجاف - هذا النوع من الاحتكاك يساعد على فهم الخصائص الجوهرية للعمليات الحادثة في مجموعة حقيقيه من الانظمة الميكانيكيه . ولكن لا يمكن أن نجد شبيه له وسطح العمليات التي تحدث في الدوائر الكهربائيه الامتزازيه البسيطه . خاصيه الاحتكاك الجاف يمكن ملاحظتها من الشكل التالي :

اضافة الى ان $\frac{1}{y} F(x, y) = a$



حيث $a > 0$ عند $y > 0$

$a < 0$ عند $y < 0$

في الشكل 2.2 يلاحظ انقطاع

في الدالة الممثل لقوة الاحتكاك

عند $y = 0$ ، وهذه صفة

ملازمه للاحتكاك الجاف.

شكل (2.2) يمثل خاصية

الاحتكاك الجاف.

ومع ضرورة تجزئة بحث أنواع الحركه نلتقي كذلك

مع تلك الحالات عندما تكون قوة الاحتكاك (المقاومة)

معبرا عنها بدالة أو سية للسرعه وبمعامل قوة زوجي.

فعلى سبيل المثال، في حالة ما يسمى بالاحتكاك التربيعي

$$\frac{1}{y} F(x, y) = \delta y^2 \quad (2.17)$$

حيث $y < 0$ عندما $\delta < 0$ و $y > 0$ عندما $\delta > 0$

نلاحظ أن مقدار قوة الاحتكاك عند $y = 0$ لاتعاني

القفز في هذا النوع من الاحتكاك . عند وجود التغير

القفزي لقوة الاحتكاك عند النقطة $y = 0$ فمن الملائم

ان نجزم كل السؤال الى امترازات خاصه في النظام

غير المحافظ، الى نوعين .

الاولى : تتطابق مع احدى اشارات الاحتكاك

الثانيه : = مع الاشاره الثانيه

عده الانواع من الامترازات الحره تتبادل احداها

الاخرى على التوالي. ودراسة الحركه ككل تتطلب

تحليل مفصل لكلا النوعين. أما حالة الاعتماد الخطي لقوة الاحتكاك على السرعة فهي أكثر انتشارا فهي الانظمة الميكانيكية وهي تعبر عن الاحتكاك اللزج في الميكانيكا وفي حالة السرعة غير العاليه .

في هذه الحالة (حالة الاحتكاك اللزج) فان قوة الاحتكاك

$$\frac{1}{y} F(x, y) = \delta y \quad (2.18)$$

اي ان $F(x, y) = \delta y^2$ و $\delta > 0$ عند اية y .

أما في الدائره الكهريائيه فان قوة الاحتكاك تتطابق مع معكوس القويه الكهريائيه المؤثره الناشئه على المقاومه الخطيه. ولذلك يعبر عنهما (عن قوة الاحتكاك) بصورة Ri وبتعبيرنا تكون قوة الاحتكاك في الدائره الكهريائيه δy .

وبصورة مطابقه فان Ri تمثل قدرة مثل هذا الخسران في الطاقه (القدره المميزه على المقاومه الخطيه). أما بالنسبة للاحتكاك التكميبي نملك:

$$\frac{1}{y} F(x, y) = \delta y^3$$

هذا القانون للاحتكاك نلتقي

به في ميكانيك السرعة العاليه، وهو صحيح ايضا بالنسبة للانظمة الكهريائيه ذات التشتت الخطي. اضافة الى انه يصادف غالبا ما نتعامل مع مركب الاحتكاك الخطي التكميبي. لغرض بحث الحركه في الانظمه الخطيه غير المحافظه وكذلك الانظمه المحافظه من الممكن استخدام مختلف الطرق الكميه والنوعيه.

ولكن ليست كل الطرق ناجعه لغرض تحليل الحركه في الانظمه المحافظه. اما في الانظمه اللامحافظه

فمن الممكن استخدام كل الطرق بدون اضافات أو تحويل.

٥. طرق تحليل الحركة الاهتزازية في الانظمة الخطية المختلفة .

من الطرق المختلفة لايجاد حلول تقريبيه لمهمات الحركة الاهتزازية تأتي بالدرجه الاولى : (1) طريقة التغير البطئ للسعه . (2) طريقة البحث التدريجي . (3) طريقة المستوى الطوري . (4) طريقة التجزئه الخطيه . (5) طريقة ليونار . من

انجع هذه الطرق هي طريقة التغير البطئ للسعه ؛ فمذه الطريقة هي وسيله ممكنه لتحليل الحركه في الانظمه البحوثه التي تظهر شيوعا كبيرا ، وهي (الطريقة) يمكن ان تعطي حلا مستمرا لآية فترة زمنييه مؤقتة وتساعدنا على دراسة الصفات العامه للحركه وعمليات اقامة وتوازن النظام .

ولكننا بقياس كامل يجب أن نستخدم مجموعه محدده (رغم انها كبيره) من الانظمه المهتزّه وخصوصا الانظمه ذات التشتت القليل وذات الاخطيه القليله ، والتي فيما تخطف الاهتزازات عن الاهتزازات التوافقية البسطية . شروط الاخطيه القليله للانظمة الملائمه والخمـسـود القليل مع التغير المستمر لصفات النظام وحل معادله حركته ، كل هذه الشروط التي تصف المعادله التفاضليه للنظام ، تقود الى اعتبار أن حركة هذا النظام فـيـهـذه هذه الحاله المحدد سوف تكون قريبه الى الحركه المرمويه الدقيقه ، وبصورة مطابقه الى النظام الخطي المحافظ . فبالنسبة الى النظام المحافظ الخطي وبدرجه حريه واحده تكون المعادله التفاضليه التي تصف الاهتزازيه كما هو معروف لدينا :

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (2.19)$$

في هذه الحالة يكون مقياس الزمن τ محددًا بالعلاقة $\tau = u_0^{-1}$ حيث τ الزمن المستغرق المحو و τ زمن اعتيادي ، u_0 - التردد الزاوي للذبذبات الحرة . اما بالنسبة الى النظام غير المحافظ والقريب الى المحافظ الخطي، تكون معادلته

$$\ddot{x} + x = f(x, \dot{x}). \quad (2.20)$$

حيث $f(x, \dot{x})$ - عبارته عن دالة لاخطية منتظمة حرة للاحداثي x وسرعة تغييره $\dot{x}$. ومقادير هذه الدالة تبقى قليلة جدا مقارنة بالحدود على الطرف الايسر للمعادله (2.20)، وذلك انطلاقا من قوة الافتراض ان النظام المحو قريب الى الخطية أو أن لاخطيته قليلة وأن الخسائر بطاقةاته الاحتياطية قليل أيضا . فاذا بحثا تغيرات المتغير x طبقا للمقياس المختص بالاحداثي والتي فيما تكون x بحدود وحده واحده، فان الطرف الايمن من المعادله (2.20) سوف يكون صغيرا بالمقارنة مع وحده واحده . ولذلك فان المعادله (2.20) يمكن أن تكتب بالصورة :

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (2.21)$$

حيث $f(x, \dot{x})$ - دالة منتظمة محدده لارتبط مع شروط القلة (لا ترتبط مع شروط قلة لاخطية النظام المحو) . اما μ - هو عبارته عن الكمية التي تحدد أو توعف درجة قرب النظام المحو من النظام الخطي المحافظ . من كل ما تقدم نستنتج ان قوة الاحتكاك وبكل

انواعها هي قوة تنشأ في النظام اثناء الحركة وتعمل على اعاقه حركته وبالتالي اخماد الاهتزازات التي يعطها النظام. ولذا فهي تسمى قوة مخمدة وهي رياضيا تتناسب مع سرعة حركة النظام . فاذا كانت F_r تمثل قوة الاحتكاك (قوة التخميد)

فان $F_b \propto \dot{\psi}$ ، حيث $\dot{\psi}$ السرعة ومن ذلك ينتج ان :

$$F_b = -b \dot{\psi} \quad (2.22)$$

وقد وضعت الاشاره السالبة لان القوة F_r تعمل باتجاه معاكس لاتجاه الحركة اي باتجاه معاكس لاتجاه السرعة . وحتى نتعرف على تاثير القوة المخمدة في النظام الذي يعمل اهتزازات توافقية نفترض انما القوة الوحيدة المؤثرة في النظام الذي تسمى اهتزازاته في هذه الحالة اهتزازات مخمدة .

6. **الذبيذيات التوافقية المخمدة (او المضمحلة)**

في دراستنا السابقة للحركة التوافقية البسيطة بدرجة حرية واحدة كنا قد اوضحنا تاثير القوة التي اسميناها القوة المخمدة والتي سبق وبحثنا تاثيرها عندما تعمل على النظام بشكل انفرادي وقلنا ان هذه القوة تعمل على تقليل سرعة حركة النظام ، ومن ثم تقليل عدد الاهتزازات التي يعطها النظام قبل عودته الى وضع التوازن الاعلى ، وذلك لانها تعمل باتجاه معاكس لاتجاه الازاحه . وهي من حيث المقدار تتناسب مع سرعة الحركة . من هذا نفهم ان القوة المخمدة والتي هي قوة الاحتكاك والمساءة بالمقاومة تعمل باتجاه القوة المرجعة او المعيدة (قوة المرونة) ،

أي أن خط عظمها واحد، واما يعملان سووية على تدمير حركة النظام وإيقافه بأقصى سرعه .
والان نستطيع كتابة المعادلة التفاضليه التي تصف حركة الذبذبات المخمده (لاحظ المعادله 1.11).

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.23)$$

$$2\beta = b/m, \quad \omega_0^2 = k/m \quad (2.24) \quad \text{حيث}$$

(b- معامل المقاومه ، اي معامل التناسب الطرقي بين السرعه $\dot{x}$ وقوة المقاومه ، k - معامل قوة المرونه او الصلادة .

نشير الى ان ω_0 تمثل نفسها ذلك التردد الذي كان يمكن ان تنجز به الذبذبات الحره للنظام عند غياب مقاومة الوسط (عندما $b=0$). هذا التردد يسمونه

التردد الخاص للنظام .
عند تعويض الداله $x = e^{\lambda t}$ في المعادله (2.23) يقودنا ذلك الى المعادله الخصوصيه والمميزه

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2.25)$$

جذري هذه المعادله يساويان

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.26)$$

في حالة التخمد غير الكبير (عند $\beta < \omega_0$) فالتعبير تحت الجذر سوف يكون سالبا . نتصوره بالهيئه (ω^2) ، حيث ω كمية ماديّه ، تساوي

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.27)$$

حيث ان فان جذري المعادله الخصويه سوف يكتبان بالشكل

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega, \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega. \quad (2.28)$$

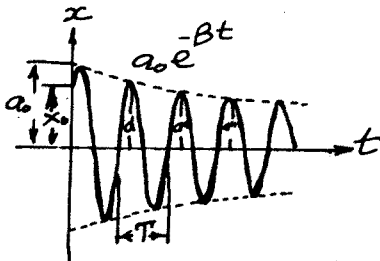
طبقا للمعادله (1.38) فان الحل العام للمعادله

$$(2.23) \text{ هو : } X = C_1 e^{(-\beta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta - i\omega)t} = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

التعبير داخل الاقواس يماثل التعبير (1.50)، لذلك يمكن تصويره بمهيئة مماثله للتعبير (1.54). بهذا الشكل في حالة التخميد غير الكبير فان الحل العام للمعادله (2.23) يمتلك المهيئه التاليه :

$$X = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.29)$$

هنا a_0 ، α ثابتين اختياريين، ω - كميته محددته بالمعادله (2.27). على الشكل 2.3 اعطي منحنى الداله (2.29). الخطوط المنقطه توضح الحدود التي تقع فيما ازا حه النقطه المستزه X .



شكل 2.3

بالتوافق مع هيئة الداله (2.29) يمكن النظر الى حركة النظام كذبذبه توافقية للتردد ω بسعة تتغير بالقانون $a(t) = a_0 e^{-\beta t}$. قم المنحنيات المقطع تعطي منحنى الداله $a(t)$ ، اضافة الى ان الكمية a_0 تمثل نفسها السعة في بداية اللحظة الزمنية .

الازاحة الابتدائية x_0 تعتمد، اضافة الى a_0 كذلك على الطور الابتدائي α ، حيث: $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$. سرعة خمود الذبذبه تتحدد بالمقدار $\frac{b}{2m}$ الذي يساوي $\beta = \frac{b}{2m}$ ويسمونه معامل الخمود .

نجد الزمن τ الذي خلاله تتناقص السعة في e من المرات. من التعريف $e^{-1} = e^{-\beta \tau}$ ، ينتج ان $\beta \tau = 1$ وبالتالي $\beta = \frac{1}{\tau}$ ، اي ان معامل الخمود β هو من حيث المقدار مقلوب ذلك الفاصل الزمني الذي خلاله تتناقص السعة بمقدار e من المرات. طبقا للمعادلة (1.55) يصبح زمن الذبذبه المخمده يساوي

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (2.30)$$

عندما تكون مقاومه الوسط غير كبيره ($\beta^2 \ll \omega_0^2$)، فإن زمن الذبذبه عمليا يساوي $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ومع نمو معامل الخمود يزداد زمن الذبذبه. الانحرافات العظمى المتتاليه (القم) في أي اتجاه (على سبيل المثال $a, a'', a''', \dots$ الخ على الشكل 2.3) تشكل متناقصه هندسيه .

$$a' = a_0 e^{-\beta t}$$

في الحقيقه انه، اذا كانت

$$a'' = a_0 e^{-\beta(t+\pi)} = a' e^{-\beta\pi} \quad , \quad \text{فإن}$$

$$a''' = a_0 e^{-\beta(t+2\pi)} = a'' e^{-\beta\pi}$$

... الخ -

وبشكل عام فإن علاقة مقادير السعات المتوافقة مع اللحظات الزمنية التي تختلف عن بعضها بزمن يساوي زمن ذبذبه واحدة تساوي:

$$\frac{a(t)}{a(t+\pi)} = e^{\beta t}$$

هذه العلاقة تسمى تحديد الخمود ، ولو غاريتم هذه العلاقة يسمى - اللوغاريتم المحدد للخمود ويرمز له بالحرف λ حيث:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+\pi)} = \beta\pi, \quad (2.31)$$

(لا يجب أن نخلط بين λ في المعادلتين (2.25) و (2.31) .
 للتعبير عن خصائص النظام الممتز يستخدم عادة المحدد اللوغاريتمي للخمود λ . فعند تعويض معامل الخمود β من المعادله (2.31) عبر λ و π ، يمكن كتابة قانون تناقص السعة مع الزمن بالميت ، التاليه :

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{\pi} t}$$

خلال الزمن τ ، الذي اثنائه تقل السعة بمقدار e من المرات ، يستطيع النظام أن ينجز $N_e = \frac{\tau}{\pi}$ من الذبذبات .
 من الشرط $e^{-\lambda \frac{\tau}{\pi}} = e^{-1}$ يحصل ، أن $\lambda \frac{\tau}{\pi} = 1$ $N_e = 1$ وبالتالي فإن المحدد اللوغاريتمي للخمود هو من حيث

المقدار مقلوب عدد الذبذبات المنجزه خلال ذلك الزمن الذي تتقن اثنائه السعه بمقدار e من المرات. للتعبير عن خصوصيات النظام الممتز غالبا ما تستخدم

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N e , \quad (2.32)$$

المساة ب ملائمة النظام الممتز أوجودته . وكما يبدو من تعريف جودة النظام أو ملائمته فانما تتناسب طرديا مع عدد الذبذبات $N e$ المنجزه من قبل النظام خلال ذلك الزمن ، الذي تنقن خلاله السعه بمقدار e من المرات. في الفصل الاول نحن أو ضحنا أن الطاقة الكامله للنظام الممتز تتناسب طرديا مع مربع السعة (لاحظ المعادله (1.67)). بالتوافق مع هذا فان الطاقة الكامله للنظام في حالة الذبذبات المعتمد تناقص مع الزمن بالقانون

$$E = E_0 e^{-2\beta t} \quad (2.33)$$

(حيث E_0 مقدار الطاقة في الزمن $t=0$). وبأعادة تفاضل هذه المعادله بالنسبة للزمن ، نحصل على سرعة نمو طاقة النظام :

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E . \quad (2.34)$$

بتغيير الاشاره الى العكس ، نحصل على سرعة تناقص الطاقة :

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E . \quad (2.35)$$

إذا كانت الطاقة تتغير قليلا خلال زمن يساوي زمن الذبذبه ، فان نقصان الطاقة خلال زمن الذبذبه

الواحد يمكن أيجاده بضرب المعادله (2.35) في T :

$$-\Delta E = 2\beta T E$$

(نشير الى ان ΔE تعني زيادة الطاقه ، بينما $-\Delta E$ تعني نقصان الطاقه). في النهاية عند الاخذ بنظر الاعتبار المعادلتين (2.31)، (2.32) نصل الى العلاقة

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{\mathcal{Q}}{2\pi} \quad (2.36)$$

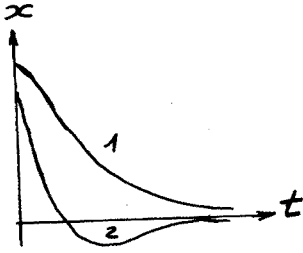
التي ينتج منها انه في حالة الخمود الضعيف للذبذبات فان جودة النظام من الدقه ، الى عامل الضرب 2π تساوي علاقة الطاقه المخزنه في النظام في لحظة محدده ، الى نقصان هذه الطاقه خلال زمن ذبذبه واحد . من المعادله (2.30) ينتج انه مع نمو معامل الخمود فان زمن الذبذبه يزداد .

(1) عند $\beta = \omega_0$ فان زمن الذبذبه يؤول الى المالانهايه ، اي ان الحركه تكف عن ان تكون دورية .

(2) عند $\beta > \omega_0$ فان جذري المعادله الخصوصيه يصبحان ماديان (لاحظ المعادله (2.26) وحل المعادله (2.23) يصبح مساويا لمجموع حدين اسيين :

$$X = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} .$$

حيث C_1 ، C_2 ثابتين حقيقيين ، تعتمد مقاديرهما على الظروف الابتدائيه (على X_0 وعلى $\dot{X}_0$) وبالتالي فان الحركه تحمل طبيعة لادوريه ، اي ان النظام المزاج عن وضع توازنه عند عودته الى وضع التوازن لاينجز ذبذبه .



يوضح الشكل (2.4)

طريقتين ممكنتين

لمعودة النظام الى

وضع التوازن في

حالة الحركة اللا توريه .

شكل 2.4

اي من هاتين الطريقتين يسلكها النظام في عودته الى وضع التوازن فذلك يعتمد على الظروف الابتدائية. فالحركة المصوره بالمنحنى 2، تحصل في تلك الحالة ، عندما النظام يبدأ يتحرك من وضع موعوف بالازاحه x_0 ، الى وضع التوازن بسرعة ابتدائية v_0 محدد بالشرط

$$|v_0| > |x_0| (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}). \quad (2.37)$$

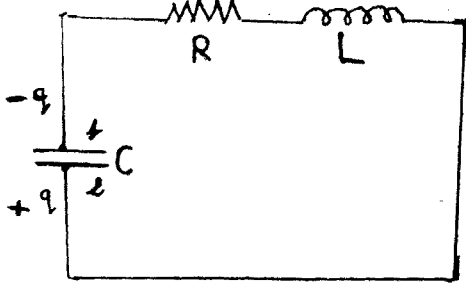
عذا الشرط سوف يتحقق في تلك الحالة ، اذا أُكسب النظام المزاج عن وضع التوازن دفعة قوية بمافيه الكفايه الى وضع التوازن .

اما اذا ازيج النظام عن وضع التوازن وترك بدون اي دفع (اي بسرعة ابتدائية $v_0 = 0$) او أُكسب دفعة غير كافية القوه (دفعه بحيث ان v_0 تبدو أنهما أقل مما حددت في الشرط (2.37) ، فإن الحركة سوف تمر طبقا مع المنحنى 1 على الشكل 2.4 .

7 اهتزازات الدوائر الكهربائية

أ دائرة (LC) : الدائرة الكهربائية التي يمكن أن

تحدث فيها اهتزازات حرة يمكن أن يؤخذ مثال لها
تكون من دائره اهتزازيه بسيطه مؤلفه من مكثفه
(C) مربوطه على التوالي مع ملف حيث
(L)، (لاحظ الشكل 2.5).



ففي حالة توصيل الملف

بالمكثف المشحونه

تظهر في الدائرة الكهربائية

اهتزازات حرة للشحنه

على المكثف وللتيار في ملف الحث . شكل 2.5

أما المجال الكهرومغناطيس المتغير فينتشر في الفضاء
بسرعة تساوي سرعة الضوء . ولذلك إذا كانت
المقاييس الطويله لهذه الدائرة ليست كبيره، أي أن

$$L \ll C/2$$

حيث $C = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ سرعة الضوء في الفراغ .

ل- تردد الاهتزازات في الدائرة الكهربائية (LC) ، لذلك

يمكن ان نعتبره أنه في كل لحظة من الزمن t ، فإن

قوة التيار I في جميع اجزاء الدائرة تكون متكافئه .

مثل هذا التيار المتغير يسمى مستقر المرونه . من

قانون اوم بالنسبة لاجزاء الدائرة 1- L - 2

نحصل ان

$$iR = \phi_1 - \phi_2 + \mathcal{E}_C$$

او

$$iR = -q/C - L \frac{di}{dt}$$

حيث q شحنة المكثف
 $(\phi_1 - \phi_2)$ فرق الجهد (فرق الكمون) على طرفي
 المكثف في لحظة حرة من الزمن t .
 R - المقاومة الكهربائية للدائرة ϵ ($\epsilon_C = -L \frac{dI}{dt}$)
 الحث الذاتي في الملف.

من قانون حفظ الشحنة الكهربائية ينتج ان قوة التيار
 المستقر المرونة هي $I = \frac{dq}{dt}$ ، ولذلك فان المعادله
 التفاضليه لاهتزاز الشحنة q تمتلك الشكل التالي :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (2.38)$$

ولكن الاهتزازات الكهربائيه الحرة في هذه الدائرة
 تصبح توافقية بسيطه اذا كانت المقاومة الكهربائيه
 $R=0$ ، حينذاك تصبح المعادله (2.38) بالميهه التاليه :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (2.39)$$

اما التردد الزاوي ω ودور الذبذبه T فمهما
 يحققان معادلات ثومسون .

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \dots (2.40)$$

من المعادله (2.39) يبدو لنا ان الكميه الفيزيائيه
 المتغيره الوحيده هي q . فاذا عوضنا $\psi = q$ نحصل على

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0. \quad \dots (2.41)$$

وهذه هي معادله تفاضليه من الدرجه الثانيه تمثل
 حركه اهتزازيه توافقيه ، اي حركه هزاز توافقية .
 حل هذه المعادله يصبح كما سبقت دراسته بالميهه
 التاليه :

$$\psi = \psi_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (2.42)$$

$$q = q_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad \text{أو}$$

أي أن الشحنة $q = \psi$ تتغير حسب قانون الجيب . أما تيار الدائره i فيساوي

$$I = \dot{q} = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{aligned} i &= I_0 \cos(\omega t + \alpha) \\ &= I_0 \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.43)$$

حيث

q_0 - سعة شحنة المكثف أو المتسعة ، $I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ - سعة التيار φ - الطور الابتدائي لشحنة المكثف . وكما يتضح من المعادلتين (2.42) ، (2.43) ، فإن التيار في الدائره يسبق في الطور شحنة المكثف بـ $\frac{\pi}{2}$. أما فرق الجهد $u = \varphi_2 - \varphi_1$ فمما الآخر يتغير بقانون توافقي ويتطابق في الطور مع الشحنة q

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{C} \int i dt \\ &= \frac{1}{C} q_0 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

$$u_c = U_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.44)$$

حيث $U_0 = \frac{q_0}{C}$ - سعة فرق الجهد وبالتالى نحصل أن سعة قوة التيار

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

حيث الكمية $\sqrt{L/C}$ تسمى المقاومة الموجية للدائرة. في حالة الاهتزازات التوافقية الحرة يحدث في الدائرة الاهتزازية تحول دوري لطاقة المجال الكهربائي E_e للمكثف الى طاقة مجال مغناطيسي E_m في ملف الحث وبالعكس، أي أن

$$E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_e = \frac{q_0^2}{4C} [1 - \cos(2\omega t + 2\alpha)] \quad (2.45)$$

$$E_m = L \frac{I^2}{2} = L \frac{i^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_m = \frac{1}{4} LI_0 [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] \quad (2.46)$$

ولذلك، فالاهتزازات التي تحدث في الدائرة الكهربية غالباً ما تسمى بالاهتزازات الكهرومغناطيسية. مقادير E_e و E_m في الاهتزازات الكهرومغناطيسية تتراوح بين 0 و E_{max} وبالتطابق فيما يساوي $q_0^2/2C$ و $LI_0^2/2$ إضافة الى أن $LI_0^2/2 = q_0^2/2C$. أما اهتزازات E_e و E_m فتكون مزاحة بالطور، أي أن :

عندما $E_e = 0$ ، فإن $E_m = E_{max} = \frac{LI_0^2}{2}$ ، وبالعكس،

وعندما $E_m = 0$ فان $E_e = E_{max} = \frac{1}{2C} q_0^2$.

الطاقة الكاملة للاهتزازات الكهرومغناطيسية في الدائرة الحرة الخالية من المقاومة R لا تتغير مع الزمن :

$$E = E_e + E_m = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} = \text{const} = h$$

حيث h - ثابت .

(2) دائرة (LRC)

دراسة الدائرة الكهربية (LRC) تعني دراسة الذبذبات المخمدة الحرة في هذه الدائرة. وبالتالي معرفة طبيعة الخمود الحاصل لاهتزازات النظام. الاهتزازات الميكانيكية الحرة مثلا تكون خمودا سببا بشكل رئيسي من قبل الاحتكاك أو من قبل الاثار في الاوساط المحيطة ذات الموجات المرنة .

أما الخمود في الدوائر الكهربية الممتزة فيكون سببا من قبل خساره الحراريه في الموصلات (الكابلات) التي يتكون منها النظام، أو تلك الكابلات الموجوده في المجال الكهربائي المتغير للنظام، أو بسبب خسران الطاقه على الموجات الكهرومغناطيسية أو الخسران الحراري في أشباه الموصلات والمواد ذات الصفات المغناطيسية .

وبشكل عام يمكن استخلاص الاستنتاج التالي :
ان قانون خمود الاهتزازات يعتمد على صفات الانظمه الممتزة . يسمى النظام خطيا إذا كانت مقاييسه التي تصف طبيعته الفيزيائية الجبرميه في العملية المحوثة لا تتغير أثناء سير العملية .

فعلى سبيل المثال سلكه أو نابض البندول المتحرك في وسط لزج يمثل نظاما خطيا اذا كان معامل مقاومه الوسط ومرونة النابض لا يعتمدان على سرعته وازاحة النابض .

اما الدائره الكهربائيه، فيمكن اعتبارها نظام خطيا اذا كانت مقاومتها R وسعتها الكهربائيه C والحث L لا يعتمدون جميعهم على التيار في الدائره، ولا على شدة المجال . في الغالب تكون الانظمه الحقيقيه الممتزحه قريبه للغاية في صفاتها الى الانظمه الخطيهه . فالمعادله التفاضليه التي تصف الاهتزازات الحره المنعده في الدائره الكهربائيه الحقيقيه والتي مقاومتها

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 . \quad R \neq 0 \text{ هي : } (2.47)$$

حيث $\beta = R/2L$ و $\omega = 1/\sqrt{LC}$. فاذا كان الخمود ليس كبيرا، أي عندما $(\beta < \omega)$ فان اعتماد الازاحه q يحقق معادله الاهتزازات المنعده

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.48)$$

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

حيث $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ و $\phi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2}$ الكميات الثابته q_0 ، α ، ϕ_0 ، تعتمد على الظروف الابتدائيه أي على مقادير q ، dq/dt في بداية اللحظه الزمنيه . $t=0$

٥.٨. الذبذبات الاضطرابيه (المجبره)

في الحالة عندما تكون القوى المجبره تتغير بقانون توافقى حينذاك توصف الذبذبات بالمعادله التفاضليه .

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (2.49)$$

(لاحظ المعادله (1.13)).

هنا β -معامل الخمود ، ω_0 -التردد الخاص للنظام . (لاحظ المعادله (2.24)....) $f_0 = F_0/m$ (سعة القوى المثيره) ω - تردد القوى المثيره (91 المجبره) .

المعادله (2.49) تصبح غير متجانسه . طبقا للبديهييه (1.31) فان الحل العام للمعادله غير المتجانسه يساوي مجموع الحل العام للمعادله المتجانسه والحل الخاص للمعادله غير المتجانسه . الحل العام للمعادله المتجانسه سبق لنا ودرسناه لاحظ (2.29) والذي هو حلا عاما للمعادله (2.23....) وهو يمتلك الصوره التاليه :

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha). \quad (2.50)$$

حيث $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ و a_0, α ثابتين حريين . يبقى ان نجد الحل الخاص للمعادله (2.49) الذي لا يتضمن ثوابت حره . نستخدم لهذا الغرض الطريقه الموصوفه في نهايه البند 4 .

نضيف الى الداله الموجوده في الطرف الايمن من المعادله (2.49) جزءاً خيالياً مثل الداله $e^{i\omega t}$. بعد ذلك نتصور الجزء الايمن بمهيئه $f_0 e^{i\omega t}$ (لاحظ المعادله (1.24)). بهذا الشكل نصل الى المعادله :

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.51)$$

حل هذه المعادله أسهل من حل المعادله (2.49) لأن تفاضل الأُس وتكامله هنا أسهل من الداله المثلثيه .
نحاول ان نبحث عن الحل الخاص للمعادله (2.51) بالهيئه

$$\hat{X} = \hat{a} e^{i\omega t} \quad (2.52)$$

حيث $\hat{a}$ بعض عدد معقد . الداله (2.52) هي ايضا معقده ، حيث اشير الى ذلك بالعلامة (^) فوق X .
تفاضل الداله (2.52) بالنسبة للزمن ، نحصل على

$$\dot{\hat{X}} = i\omega \hat{a} e^{i\omega t}, \quad \ddot{\hat{X}} = -\omega^2 \hat{a} e^{i\omega t} \quad (2.53)$$

وبتعيين المعادلتين (2.52) و (2.53) في المعادله (2.51) ،
نصل بعد الاختصار على العامل المشترك $e^{i\omega t}$ الى

$$\text{المعادله الجبريه:} \quad -\omega^2 \hat{a} + 2i\beta\omega \hat{a} + \omega_0^2 \hat{a} = f_0 .$$

ومنما

$$\hat{a} = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega} \quad (2.54)$$

نحن وجدنا مقدار $\hat{a}$ الذي فيه الداله (2.52) تحقق الداله (2.51) .

نتصور العدد المعقد الموجود في مقام المعادله (2.54) بميئة أسيه :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega = \rho e^{i\varphi} \quad (2.55)$$

وطبقا للمعادله (1.18) فإن :

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.56)$$

نعوض في المعادله (2.54) المقام بالتوافق مع (2.55)

$$\hat{a} = f_0 / \rho e^{i\varphi} = (f_0 / \rho) e^{-i\varphi}. \quad \text{نحصل}$$

نعوض $\hat{a}$ في المعادله (2.52) نحصل على الحل الخاص

$$\hat{x} = (f_0 / \rho) e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = (f_0 / \rho) e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (2.51) \text{ للمعادله}$$

في النهاية نأخذ الجزء الحقيقي من هذه الدالمة

نحصل على الحل الخاص للمعادله (2.49)

$$x = (f_0 / \rho) \cos(\omega t - \varphi).$$

وبتعويض مقدار f_0 ، وكذلك مقدار ρ ، φ من المعادله

(2.56) نصل الى التعبير النهائي .

$$x = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (2.57)$$

نشير الى ان المعادله (2.57) لاتضم ثوابت حرة . نستطيع

الحصول على الحل الخاص للمعادله (2.49) بطريقة أخرى

بمساعدة التخطيط الاتجا هي. نفترض ان الحل الخاص للمعادلة

(2.49) يمتلك الميئه

$$x = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.58)$$

حينذاك

$$\dot{x} = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \omega a \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (2.59)$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \phi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \phi + \pi). \quad (2.60)$$

نعوض التعابير (2.60) - (2.58) في المعادله (2.49)، نحصل

$$\begin{aligned} & \text{على العلاقة} \\ & \omega^2 a \cos(\omega t - \phi + \pi) + 2\beta \omega a \cos(\omega t - \phi + \pi/2) + \\ & + \omega_0^2 a \cos(\omega t - \phi) = f_0 \cos \omega t. \quad (2.61) \end{aligned}$$

من المعادله (2.61) ينتج أن الثابتين a و ϕ يجب أن يمتلكا تلك المقادير بحيث أن الداله التوافقية $f_0 \cos \omega t$ كانت تساوي مجموع ثلاث دوال توافقية، موجوده في يسار المعادله .

إذا صورنا الداله $\omega_0^2 a \cos(\omega t - \phi)$ بمتجه طوله $\omega_0^2 a$ متجهه الى اليمين (لاحظ الشكل 2.6)،

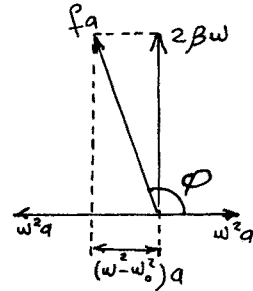
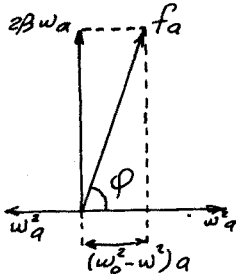
لذلك فالداله $2\beta \omega a \cos(\omega t - \phi + \pi/2)$ تصور بالمتجه الذي طوله $2\beta \omega a$ دائر بزاويه $\pi/2$ بالنسبة للمتجه $\omega_0^2 a$ عكس عقارب الساعه، بينما الداله $\omega^2 a \cos(\omega t - \phi + \pi)$ فتصور بمتجه طوله $\omega^2 a$ دائر بالنسبة الى المتجه $\omega_0^2 a$ على زاويه π . لكي تحقق المعادله (2.61) مجموع ثلاثة متجهات حسابيه يجب أن تتطابق مع المتجه الذي يصور الداله $f_0 \cos \omega t$. ومن الشكل 2.6. يبدو أن مثل هذا التطابق ممكن فقط بمقدار السعه a التي يمكن أن تتحقق من الشرط :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

ومن ذلك نجد : —

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (2.62)$$

(عوضنا f_0 من العلاقة):
 F_0/m



شكل 2.6 ب
 الشكل أ (2.6) يجاوب عن الحالة : $\omega < \omega_0$. من
 الشكل ب (2.6) الذي يجب عن الحالة : $\omega > \omega_0$ ، نحصل
 على نفس المقدار للسعة a .

الشكل 2.6 . يساعدنا كذلك في الحصول على
 مقدار الزاوية φ التي تصور نفسها كمقدار التأخر
 في الطور من طرف الذبذبات الاضطرابية (2.53)
 عن القوة الخارجيه التي تشترطها هذه الذبذبات.
 من الشكل ينتج ان

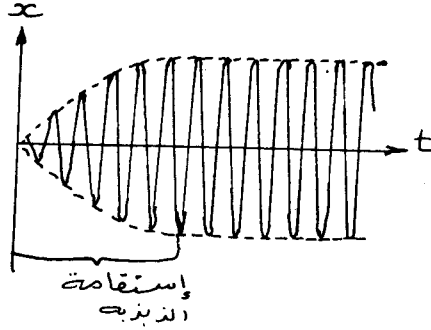
$$\tan \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.63)$$

بتعويض بمقادير a ، φ المحدده في المعادلات (2.62) ،
 (2.63) في المعادله (2.58) نحصل على الداله (2.57) .
 الداله (2.57) بجمعها مع الداله (2.50) تعطي الحل
 العام للمعادله (2.49) التي تصف سلوك للنظام في

حالة الذبذبات الاضطرابيه . الحد (2.50) يلعب دورا ملحوظا فقط في المرحلة الابتدائيه لعطية ما يسمى استقامة الذبذبات شكل 2.7. مع مرور الزمن وبقوة قانون الاسس للمضروب $e^{\beta t}$ يتناقص أكثر فأكثر دور الحد (2.50) . وبعد مرور كفايه من الزمن يمكن اهماله ، محتفظين فقط بالحد (2.57) . بهذا الشكل فان الداله (2.57) تصف الذبذبات الاضطرابيه المستقامه التي تمثل نفسها ذبذبات هرمونيه بتردد يساوي تردد القوه الاضطرابيه أو المجبره .

سعة الذبذبات الاضطرابيه (2.62) تتناسب طرديا مع سعة القوه الاضطرابيه . بالنسبة للنظام المبحوث (المحدده ω_0 و β) تعتمد السعه على تردد القوه المجبره . الذبذبات الاضطرابيه تتأخر في الطور عن القوه الاضطرابيه ، اضافة الى أن كمية التأخر ϕ تعتمد كذلك على تردد القوه الاضطرابيه (لاحظ المعادله (2.63) .

اعتماد سعة الذبذبات الاضطرابيه على تردد القوه الاضطرابيه يقود الى انه عند بعض الترددات المحدده للنظام المبحوث تبلغ سعة الذبذبات قيمتها العظمي . النظام الممتز يبدى تعاظفا خاصا عند هذا التردد . هذه الظاهره تسمى الرنين *Resonance* ، والتردد المطابق لها يسمى بتردد الرنين .



استقامه الذبذبات

شكل 2.7 .

لكي نحدد تردد الرنين ω_{res} ، من الضروري ان نجد القيمه العظمى للداله (2.62) أو ما يماثل ذلك ، القيمه الصغرى للتعبير الموجود تحت الجذر في المقام . نفاضل مقام الداله بالنسبة الى ω ونساويه بصفر ، نحصل على الشرط الذي يحدد ω_{res} :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (2.64)$$

المعادله (2.64) تمتلك ثلاثه حلول ω

$$\omega = 0 \text{ و } \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} .$$

الحل الذي يساوي صفر ، يتوافق مع القيمه العظمى للمقام . من الحلين الآخرين يجب أن يهمل الحل السالب لأنه لا يمتلك معنى فيزيائي (التردد لا يمكن أن يكون سالب) .

وبهذا الشكل بالنسبة لمتردد الرنين يحصل مقداراً واحداً:

$$\omega_{reg} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (2.65)$$

يعوض هذا المقدار في (2.62) نحصل

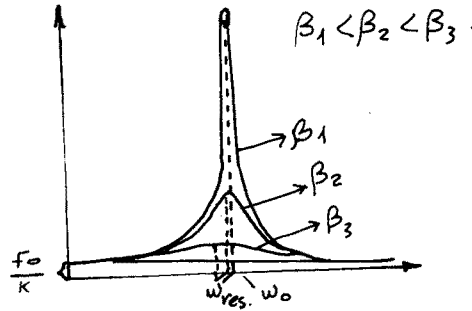
$$a_{reg} = F_0 / 2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.66)$$

من هذه المعادلة ينتج أنه ، عند غياب مقاومة الوسط تؤول السعة في حالة الرنين السـيـمـالـا نمائيه .

طبقاً للمعادلة (2.65) فإن تردد الرنين عند نفس الظروف (عند $\beta = 0$) يتطابق مع التردد الخاص لذبذبات النظام ω_0 . اعتماد سعة الاهتزازات الاضطراريه على تردد القوه الخارجيه المجبره (او الشيء نفسه على تردد الذبذبات) وضع بياناً على الشكل 2.8 . المنحنيات الانفراديه على البياني تتوافق مع المقادير المختلفه β . وبالتوافق مع (2.65) و (2.66) ، بقدر ما يكون β صغيراً ، تكون قيمة هذا المنحنى عاليه ومزاحه نحو اليمين .

عند التخميد الثقيل جداً (بحيث أن $\omega_0^2 > 2\beta^2$) يصبح تعبير تردد الرنين خيالياً . هذا يعني أنه فـيـمـثـل هذه الظروف لا يلاحظ الرنين - مع زيادة التردد تتناقس سعة الذبذبات الاضطراريه بصورة متكافئه جانبياً .

(لاحظ المنحنى الاسفل على الشكل 2.8) . مجموعة منحنيات الداله (2.62) المصوره على الشكل 2.8 والتي تتوافق مع مقادير مختلفه للمقياس β ، تسمى منحنيات الرنين .



شكل 2.8

من مفهوم منحنيات الرنين يمكن صياغة ملاحظة أخرى: عند اقتراب ω إلى الصفر فإن جميع المنحنيات تمر أو تأتي إلى نفس المقدار الحرج المختلف عن الصفر الذي يساوي $F_0/m\omega_0^2$ ، أي إلى F_0/K . هذا المقدار يمثل نفسه الإزاحة من وضع التوازن، التي يحصل عليها النظام تحت تأثير قوة ثابتته F_0 . عند اقتراب ω إلى الصفر، فإن جميع المنحنيات بصورة غير متماثلة تقترب إلى الصفر، لأنه عند التردد الكبير تغير القوة الاضطرابية اتباعاً بسرعة عالية جداً، بحيث أن النظام لا يستطيع أو لا يلحق أن يلاحق عن وضع التوازن. في النهاية نلاحظ أنه كلما كان β صغيراً، كلما تتغير السعة بقوة مع التردد قرب الرنين، وكلما كانت قيمة المنحني أكثر حدة.

من المعادلة (2.66) ينتج أنه عند التخميد القليل أو الضعيف (أي عند $\omega \ll \beta$) فإن السعة عند الرنين

تساوي بالتقريب

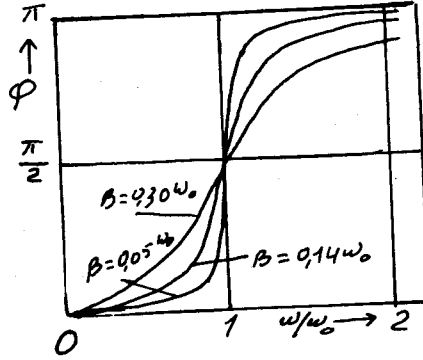
$$a_{res} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0} .$$

نقسم هذا التعبير على الازاحة x_0 عن وضع التوازن تحت تأثير قوه ثابتة F_0 ($x_0 = F_0/m\omega_0^2$) في النتيجة نحصل :

$$\frac{a_{res}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q \quad (2.67)$$

(لاحظ المعادلة 2.32) . بهذا الشكل تُظهر جودة النظام Q كم مرة تزيد السعة في لحظة الرنين ازاحه النظام عن موضع التوازن تحت تأثير قوه ثابتة وهو نفس الكمية التي تمثلها سعة الاهتزازات الاضطرابيه (عذا صحيح فقط عند التخميد غير الكبير) .

من الشكل 2.9 واضح ان الذبذبات الاضطرابيه تتأخر بالطور عن القوه الخارجيه الاضطرابيه ، اضافة الى ان كمية هذا التأخر ϕ تقع بحدود من 0 الى π . اعتماد ϕ على ω عند مقادير مختلفه لـ β ووضح بيانياً على الشكل 2.9 .



شكل 2.9

التردد ω_0 يتوافق مع $\phi = \pi/2$.
 تردد الرنين اقل خصوصيه (لاحظ (2.65))، وبالتالي
 ففي لحظة الرنين $\phi < \pi/2$. عند التخميد الضعيف
 $\omega_0 \approx \omega_{Re2}$ ومقدار ϕ عند الرنين يمكن اعتباره
 مساوياً لـ $\pi/2$. مع ظاهرة الرنين يمكن أن
 نعتبر أنه عند بناء الماكينات ومختلف انواع الاجهزه
 لا يجب في أية حاله من الاحوال ان يقترب التردد
 الخاضع ω_0 لهذه الادوات من ترددات التأثيرات الخارجيه
 الممكنه. فعلى سبيل المثال التردد الخاضع لذبذبات
 مياكل السفن او اجنحة الطائرات تختلف بقوه من تردادات

الذبذبات التي يمكن أن تثار من قبل دوران بعض
 صوِّجات هذه الأجهزة . في الحالة المعاكسة
 تظهر بعض الذبذبات التي يمكن أن تسبب خللاً
 لهذه الأجهزة ، ومثال على هذا التحذير الحادثه
 المعروفة عندما أنهار جسر أثناء مرور مجموعته من
 العسكر عليه مشياً على الأقدام وذلك لتوافق التردد
 الخاص لميكل الجسر مع التردد الذي سار به العسكر .
 ولكن رغم هذه المحاذير فإن لظاهرة الرنين
 فوائد هامة خاصة في مجال الصوت والتكنيك
 الراديوي .

يمكن أن تحل معادلة الاهتزازات الاضطرابية باستخدام
 لاغرانج . إذا كان انحراف النظام عن وضع التوازن صغيراً ،
 لذلك كقاعده يمكن أن نعبر عن هذه الحركة بمعادله
 خطيه .

معادلة حركة النظام بدرجة حريه واحده توصف
 بالنسبة لآحداثي مستتج ، حر ، مختار وواحد q_j .
 الانتخاب الجيد لهذا الاحداثي يسهل حل السؤال المطروح .
 معادلة الحركة يمكن أن تصاغ أو تتركب على قاعده
 معادله لاغرانج من الصنف الثاني ؛

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \pi}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.68)$$

حيث T الطاقة الحركية للنظام

Q - القوة المستنتجة

في حالة الاحتكاك اللزج والحركة في مجال القوى

الكاملة فان (2.69)

$$Q = - \left[\frac{\partial U}{\partial q_j} + b(q_j) \dot{q}_j \right].$$

حيث U - الطاقة الكامنة

$b(q_j)$ - معامل الاحتكاك

الطاقة الحركية يعبر عنها بالتعبير

$$T = \frac{1}{2} a(q_j) \dot{q}_j^2 \quad (2.70)$$

وضع التوازن للنظام $q_j = q_0$ يحدد بالعلاقة

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{q_j = q_0} = 0 \quad (2.71)$$

أما وضع الاستقرار فيحدد بالعلاقة

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2} \right|_{q_j = q_0} > 0 \quad (2.72)$$

إذا كان انحراف النظام عني عن وضع الاستقرار المتوازن صغيراً، فإنه من الممكن أن نهمل الحدود / الصغيره في تحليل $a(q)$ ، $b(q)$ و $U(q)$ في مسلسل من عني ونبقي في U ، T و Q حدود الدرجة الثانيه من الصغر.

حينذاك

$$a(q_j) \cong a(q_0) = a \quad (2.73)$$

$$T(q_j) \cong \frac{1}{2} a \dot{\xi}^2 \quad (2.74)$$

$$b(q_j) \cong b(q_0) = b \quad (2.75)$$

$$U(q_j) \cong U(q_0) + \xi \left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{q_j=q_0} + \frac{1}{2} \xi^2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2} \right|_{q_j=q_0} \quad (2.76)$$

يقترح أن $U(q_0) = 0$ وبحساب (2.71) يمتلك

$$U(\xi) = \frac{1}{2} e \xi^2 \quad (2.77)$$

$$e = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2} \right|_{q_j=q_0} \quad \text{حيث}$$

وباستخدام المعادلات (2.68)، (2.69)، (2.74)، (2.75)، و (2.77) نحصل على معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية لأحرفات النظام الصغيره عن وضع التوازن .

$$\ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (2.78)$$

حيث $\beta = \frac{b}{2a}$ -معامل الخمود (2.78) و $\omega_0 = \sqrt{eta}$ و ω_0 هي التردد الزاوي الخاص للنظام الخطي المحافظ. عند $\omega_0 > \beta$ ، فإن حل المعادله (2.78) يمتلك الميئه

$$\xi(t) = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^{-\beta t} \cos \omega t + C_2 e^{-\beta t} \sin \omega t \quad (2.79)$$

لاحظ المعادلة (2.25) و (2.26).

نجد الثابت C_1 بتطبيق الظروف الابتدائية على المعادلة (2.79) أي عند $t = 0$ فإن $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ، وبالتالي فإن

$$C_1 = \dot{x}_0$$

ولايجاد الثابت C_2 نفاضل المعادلة (2.79) ونطبق الظروف الابتدائية عند $t = 0$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega}$$

نعوض C_1 و C_2 في المعادلة (2.79) نحصل

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (2.80)$$

حيث $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ حُدَّت من مقاييس النظام.

$\dot{x}_0$ و x_0 هما على التوالي إزاحة وسرعة النظام عند $t = 0$ أي الظروف الابتدائية للحركة.

حل المعادلة (2.80)، يمكن تصويره كذلك بالهيئة

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.81)$$

لا حظ المعادله (2.29):

حيث a_0 و α - ثابتين اختياريين يمكن تحديدهما من الظروف الابتدائية للحركه كمايلي :
عند الزمن $t = 0$ تصبح المعادله (2.81) بالمعني التاليه:

$$\xi_0 = a_0 \cos \alpha ; a_0 = \frac{\xi_0}{\cos \alpha} \quad (2.82)$$

تفاضل المعادله (2.81) ونعوض عن a_0 من المعادله (2.82) نحصل

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\beta \dot{\xi}_0 - \ddot{\xi}_0}{\omega \xi_0} . \quad (2.83)$$

والان نستطيع ان نجد السعه a_0 في الظروف الابتدائية باستخدام المعادلتين (2.82) ، (2.83) بالشكل التالي

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \sin \alpha = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha ,$$

$$1 - \frac{\xi_0^2}{a_0^2} = \frac{\xi_0^2}{a_0^2} \left(- \frac{\dot{\xi}_0 + \beta \ddot{\xi}_0}{\omega \xi_0} \right)^2$$

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0 + \beta \ddot{\xi}_0}{\omega} \right)^2} . \quad \dots (2.84)$$

عند $\beta > \omega_0$: يصبح حل المعادلة (2.78) بالمهية التالية :

$$\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.85)$$

لا يجاد الثابت C_1 تطبق الظروف الابتدائية :

عند $t = 0$ فان $\xi(0) = \xi_0$ وبالتالي تصبح المعادلة (2.85) بالشكل التالي :

$$\xi_0 = C_1 + C_2$$

وبالتالي ينتج ان : (2.86) $C_1 = \xi_0 - C_2$

تفاضل المعادله (2.85) بالنسبة للزمن وتطبق الظروف الابتدائية آخذين بنظر الاعتبار المعادله (2.86) نجد ان .

$$C_2 = \frac{\dot{\xi}_0 - \xi_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\xi_0 \lambda_1 - \dot{\xi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.87)$$

وبالتالي فان :

$$C_1 = \frac{\xi_0 \lambda_2 - \dot{\xi}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.88)$$

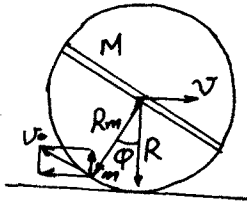
نعوض المعادلتين (2.87) ، (2.88) في المعادله (2.85) نحصل

$$\xi(t) = \frac{\xi_0 \lambda_2 - \dot{\xi}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\xi_0 \lambda_1 - \dot{\xi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \quad (2.89)$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad .$$

حيث

مثال : جد تردد الذبذبت الصغيره في نظام يتكون من إطار مهمل الوزن نصف قطره R ، سلك متجانس كتلته M موضوع بقطر الاطار ، وثقل كتلته m موجود على الاطار بمسافات متساويه عن نهايتي السلك (لاحظ الشكل 1) . 2.10



المقاييس الطويله للثقل أقل بكثير من R ، الاطار يتدحرج على سطح أفقي بدون تزلزل . احتكاك التدحرج يهمل .

شكل 2.10

الحل : ندخل بميثقة احداثيات ستتجه الزاويه φ .
الموضحه بالشكل . لتحديد وضع توازن النظام من الضروري أن نجد طاقته الكامنه U كداله للزاويه φ .
بما أن مركز ثقل السلك يتحرك بمستوي أفقي ، لذلك فان طاقته الكامنه لا تتغير ويمكن أن لا نحسبها .
حينذاك يمكن تحديد الطاقه الكامنه للنظام بالطاقه الكامنه للثقل m في مجال قوة الجاذبيه ويعبر عنها بالمعادله (1) ...

$$U = mgR(1 - \cos \varphi) . \quad (1)$$

$$\cos \varphi = \frac{R-h}{R} , \quad h = R(1 - \cos \varphi) \quad \text{حيث}$$

ومن شرط التوازن (2.71) نحصل أن

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi = 0 \quad \dots (2)$$

من ذلك ينتج أن النظام يمتلك وضعين للتوازن:
الوضع الأول عند $\varphi_1 = 0$ والوضع الثاني عند $\varphi_2 = \pi$.

وبما أن

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgr \cos \varphi \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} mgr > 0 \text{ عند } \varphi = \varphi_1 = 0, \\ -mgr < 0 \text{ عند } \varphi = \varphi_2 = \pi. \end{cases} \quad \text{لذلك}$$

الوضع الأول هو وضع توازن مستقر، أما الثاني فهو وضع توازن غير مستقر (قلق). لتحديد التردد الخاص للذبذبات الصغيرة ω_0 قرب وضع التوازن المستقر، من الضروري أن نعبر عن الطاقة الحركية للنظام خلال φ و $\dot{\varphi}$. لاجل ذلك نجد السرعة المطلقة للثقل V_a في نظام إحداثيات غير متحرك مرتبط بسطح التدحرج. إذا كانت سرعة حركة الثقل بالنسبة لمحور الإطار هي

$$V_o = [\dot{\varphi} R_m] ,$$

بينما سرعة حركة محور الإطار نفسه هي :

$$V = [\dot{\varphi} R] , \quad (|R_m| = |R|) ,$$

لذلك فإن

$$V_a = V_o + V .$$

من ذلك ينتج أنه بالنسبة للمركبة الأفقية لـ V_a نمتلك

$$V_{ah} = v - \dot{\varphi} R \cos \varphi ,$$

وبالنسبة للمركبة الشاقولية : $V_{av} = \dot{\varphi} R \sin \varphi$

الطاقة الحركية للثقل

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_{ah}^2 + \frac{1}{2} m V_{av}^2 ,$$

بينما الطاقة الحركية لكل النظام = الطاقة الحركية للسلك (دورانيه + انتقاليه) + الطاقة الحركية للثقل

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (v - \dot{\varphi} R \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2 \varphi ,$$

حيث $I = \frac{1}{3} MR^2$ - عزم عطالة السلك بالنسبة لمحور الاطوار .

وبالتالي تصبح الطاقة الحركية لكل النظام

$$T = \left[\frac{2}{3} MR^2 + MR^2 (1 - \cos \varphi) \right] \dot{\varphi}^2 . \quad (4)$$

نبحث الذبذبات الصغيرة للنظام قرب وضع التوازن φ_1 ، معبراً عنها بالاحداثي ξ ، أي ندخل $\varphi = \varphi_1 + \xi$.
حيث أن ، بتحليلنا

$$\cos(\varphi_1 + \xi) \approx \cos \varphi_1 - \xi \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} \xi^2 \cos \varphi_1 - \dots$$

نعمل الحدود من الترتيب الثالث في تعبير الطاقة
ثم نحسب

$$\cos \phi_1 = 1 \text{ نجد ان}$$

$$T \cong \frac{2}{3} MR^2 \xi^2 . \quad \dots\dots(5)$$

نحلل ($U(\phi_1 + \xi)$) الى سلسل، مفترضين ان
 $U(\phi_1) = 0$ ونعمل حدود الترتيب الثالث من
القلة، نجد ان

$$U = \frac{1}{2} m g R \xi^2 . \quad \dots\dots(6)$$

وباستخدام التعبير (2.78)، حيث $w_0 = \sqrt{e/a}$

نجد ان a من المعادله (5) تساوي $\frac{2}{3} MR^2$

و e من المعادله (6) تساوي $\frac{1}{2} m g R$

$$. \quad w_0 = \sqrt{e/a} = \sqrt{\frac{3mg}{4MR}} \quad \text{لذلك فان}$$

تحليل الحل : نبحث الحالات الحرجه للحركه .

عند $m \ll M$ او $m \rightarrow 0$ ، فان:

هذه الحركه تتوافق مع التدحرج المنتظم للاطار
مع السلك على السطح الافقي .

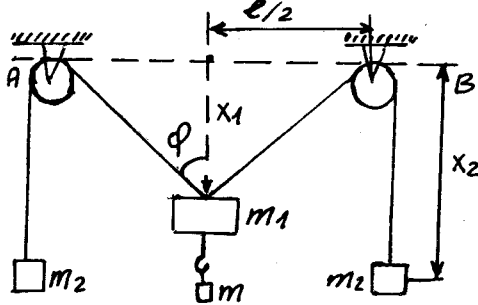
$$\text{عند } m = 0 \text{، فان كل من } \frac{\partial U}{\partial \phi} \text{ و } \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

يؤولان الى الصفر، لانه في هذه الحالة لا تمتد
الطاقة الكامنه U على ϕ وليست هناك اهميه لوضع
توازن النظام .

عند $m \ll M$ في هذه الحالة يكون
 الثقل m قد ثبت عملياً على الاطار المهمل
 (الوزن) تصبح الطاقة الحركية للنظام في
 التقريب (5) آيلة الى الصفر. من الضروري
 ان نشير الى ان اهمال الحدود من الرتبة
 الثالثة فما فوق من حيث القلة تصبح
 مقارنة مع حدود الرتبة الثانية ، أي
 أنه حتى الذبذبات الصغيره قرب وضع
 التوازن لا تقترب بميثمتها الى الشكل التوافقي
 ، الامر الذي لا يساعدها على استخدام طريقة
 المعادلات الخطيه .

المثال : 2 - الحركة في الظروف الابتدائية المحددة.

على الثقل المتوسط m_1 ، الموجود في النظام المتوازن
 (لاحظ الشكل 2.11) علق ثقل



كثافته $m \ll m_1$ بدون

دفع . جد قانون

• حركة الثقل m_1

الثقلين m_2

في الجانبين متكافئين

• وكتلة كل منهما m_2

• البكرات تعتبر بدون وزن

الخيوط - بدون وزن وغير قابل

للتمدد . الاحتكاك ومقايبين البكرات تعمل . « شكل 2.11 »

الحل : بقدر ما أن $m \ll m_1$ ، لذلك فإن الذبذبات الناتجة عند تعليق الثقل m سوف تكون صغيرة . أن ذلك يساعدنا على جعل معادلة حركة النظام خطيه نجد الوضع الجديد لتوازن النظام مع الثقل m . لهذا الغرض نكتب تعبير الطاقة الكامنة U في مجال قوى الجاذبيه . نأخذ الخط الافقي AB باعتباره مستوي حساب الطاقة الكامنة U . ندخل الاحداثي المستنتج X_1 . على الشكل التوضيحي أشير الى الاحداثي X_2 للثقل m_2 والذي يعبر عنه خلال X_1 بالصورة التاليه :

$$X_2 = \mathcal{L} - \sqrt{X_1^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{4}} \quad (1)$$

حيث $\mathcal{L}$ طول كل من الخيطين ،
وهكذا نجد أن

$$U = -(m_1 + m)gX_1 - 2m_2g\mathcal{L} + 2m_2g\sqrt{X_1^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{4}} \quad \dots\dots 2$$

بتحديدنا الوضع التوازن ، نحسب

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = -(m_1 + m)g + 2m_2g \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{4}}} \quad \dots\dots 3$$

بمساواة $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ للصفر وحل المعادله المحصله ، نجد

$$X_{10} = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m}{\sqrt{4m_2^2 - (m_1 + m)^2}} \quad \dots\dots (4)$$

يتحقق وضع التوازن ، اذا كان $2m_2 > m_1 + m$. لتقدير استقراريه هذا الوضع نحسب

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = m_2g \frac{\mathcal{L}^2}{2(X_1^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{4})^{3/2}} > 0. \quad (5)$$

وضع التوازن مستقر .

نصيغ معادله للذبذبات الصغيره للثقل m_1 حول X_{10} .

الطاقة الحركيه للنظام

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m) \dot{X}_1^2 + \frac{4m_2 X_1^2}{4X_1^2 + \ell^2} \dot{X}_1^2 \quad \dots (6)$$

بأدخال الانحراف الصغير $(X_1 - X_{10}) = \xi$ ، وجمع U وكذلك المعامل عند $\dot{X}_1^2$ للتعبير (6) في مسلسل بالنسبة ل ξ محددتين أنفسنا بحدود الدرجة الثانيه للنقطة نجد

$$U \cong \frac{1}{4} \frac{m_2 g \ell^2}{(X_{10}^2 + \frac{\ell^2}{4})^{3/2}} \quad (7)$$

$$T \cong \left[\frac{1}{2} (m_1 + m) + \frac{X_{10}^2}{X_{10}^2 + \frac{\ell^2}{4}} m_2 \right] \dot{\xi}^2 \quad (8)$$

من شروط السؤال فان قوى الاحتكاك لا تحسب ، ومعامل

الخمود $\beta = 0$. لذلك ، باستخدام المعادله (2.78)

و (2.78') نحصل على معادلة الذبذبات الصغيره بالمئه

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 , \quad \dots (9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} m_2 g \ell^2 \left[(m_1 + m) \left(X_{10}^2 + \frac{\ell^2}{4} \right) + 2m_2 X_{10}^2 \right]^{-1} \left(X_{10}^2 + \frac{\ell^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

الازاحه الابتدائيه ξ_0 للثقل m_1 عن وضع التوازن

X_{10} هي :

$$\dots (10) \quad \dot{x}_{10} = x'_{10} - x_{10}$$

حيث x'_{10} - وضع التوازن الابتدائي للنظام
قبل تعليق m وهذا الوضع يتحدد بالمعادله
(4) اذا وضعنا $m = 0$.

بالتعويض عن x_{10} ، وما حصل بالطرق المشار اليها لقيمة
 x'_{10} في المعادله (10) ، نحصل

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_0(0) = \frac{g}{2} \left(\frac{m_1}{\sqrt{4m_2^2 - m_1^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{4m_2^2 - (m_1 + m_2)^2}} \right). \quad (11)$$

بلا اتجاه الموجب الذي اختير $x_1 \dot{x}_0 < 0$.

السرعه الابتدائيه للثقل m_1 من شروط السؤال تساوي
صفر ، لأن الثقل يخلق بدون دفع :

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_0(0) = 0. \quad (12)$$

من الشروط الابتدائيه (11) ، (12) يصبح حل المعادله
(9) بالمئه

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_0 \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

تحليل الحل ومناقشته . نفترض أن تركيب النظام أوبنائيه
بالمئه ، بحيث أن الزاويه ϕ قريبه من الصفر . هذا

يمتلك مكانا عندما $m_2 = \frac{m_1}{2}$ ، $\mathcal{L} \gg l$

في الحالة الحرجه عند $\phi = 0$ ، $l = 0$ ، $m_2 = \frac{m_1}{2}$

تصبح احداثيات وضع التوازن x_{10} بالمعادله (4) غير
محدده . أي ثقل مهما يكن صغيرا m ينقل النظام من

وضع التوازن الابتدائي ، اضافة الى أن وضع التوازن
الجديد لا يتحقق . تحليل التعبير (11) يوضح أن الانحراف

الابتدائي $\mathcal{E}(0)$ عند $m_2 = \frac{m_1}{2}$ لانمائي وغير محدد. بهذا الشكل، بقدر ما تكون الزاوية ϕ صغيرة، بقدر ما يجب أن يتحقق الشرط $m \ll m_1$ بدقه، والذي فيه أمكن جعل معادلة الحركة خطية.

(2) .. افترض أن كتلة الشغل المتوسط m_1 أقل بكثير من الكتلتين الجانبيتين $m_1 \ll m_2$.
لأجل تفسير خصوصية مثل هذا النظام يكفي وضع $m_1 = \nu$ في المعادلات المحملة أعلاه. حينذاك يصبح إحراف النظام الابتدائي

$$\mathcal{E}(0) = -\frac{\ell}{2} \frac{m}{\sqrt{4m_2^2 - m}} \quad (11a)$$

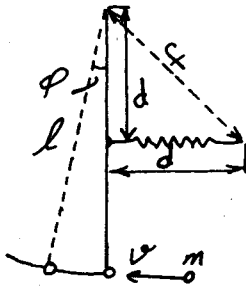
$$m \ll m_2 \quad \text{أو عند} \quad \mathcal{E}(0) \cong -\frac{\ell}{4} \frac{m}{m^2}.$$

هذه التعابير توضح أن امكانية أن تكون معادلة الحركة خطية عند $m_1 \ll m_2$ تتحدد بالشرط $m \ll m_2$ وليس $m \ll m_1$.

مثال 3 : مذبذبا رياضي طوله l وكتلته

m_2 يرتبط بنابض موضوع أفقيا طوله d كما

موضح على الشكل (2 . 12) :



1 طلقت على الثقل m_2

اطلاقه كتلتها m (شكل 2.12)

كانت طائرته أفقيا بسرعة v .

حدد الشرط الذي يكون فيه انحراف المذبذب بعد تصادم الاطلاقه صغيرا.

ضمن هذا الشرط جد قانون حركة المذبذب، اذا كان عزم قوة الاحتكاك بالنسبة للمحور O يتناسب طرديا مع السرعة الزاوية ($M = k \dot{\phi}$) حدد المحدد اللوغاريتمي لخمود النظام.

اذا علمت أن معامل مرونة النابض C ، وهو غير قابل للتشوه في هذه الظروف.

الحل : بما أنه في الوضع الشاقولي للمذبذب يبقى النابض بدون تشويه ، لذلك فان هذا الوضع هو وضع توازن .

الانحرافات الصغيرة للمذبذب تشترط أن تحسب مقادير ϕ أصغر بكثير من $\pi/2$ ، أي أن $(\phi \ll \frac{\pi}{2})$ والتي ضمن حدودها يمكن لمعادلة الحركة ان تكون خطية .

انحرافات النظام بعد التصادم صغيره ، اذا كانت الطاقة الحركية للأطلاقه يمكن مقارنتها مع تغيير الطاقة الكامنه للنظام عند $\phi \ll \frac{\pi}{2}$. الطاقة

الكامله للنظام عند انحراف المذبذب على زاوية ϕ تساوي

$$U = (m + m_L) g \ell (1 - \cos \phi) + \frac{1}{2} C X^2, \quad \dots 1$$

$$X \cong \sqrt{d^2 + f^2 - 2df \cos(45^\circ + \phi)} - d \quad \dots (2) \text{ حيث}$$

هي الاستطالة المطلقة للنابض .

الحمد الاول من المعادله (1) يعني الطاقه الكامله للثقل مع الاطلاقه المقذوفه في مجال الجاذبيه الارضييه .

الحمد الثاني الطاقه الكامله لمرونة تشوه النابض . نعوض المعادله (1) بمعادله تمثل حاصل ضرب ϕ^2 على معامل ثابت . لاجل هذا الغرض نحسب

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = (m + m_L) g \ell \cos \phi + \sqrt{2} C d^2 A^{-1} [C(A-d) - \dots (3) \\ - \sqrt{2} d^3 A^{-2} S^2]$$

حيث

$$A = d \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} C, \quad S = \sin(45^\circ + \phi), \quad C = \cos(45^\circ + \phi).$$

بما انه في وضع التوازن $\phi = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} = (m + m_L) g \ell + C d^2,$$

لذلك

$$U \cong \frac{1}{2} [(m + m_L) g \ell + C d^2] \phi^2,$$

بمذا الشكل ، اذا

$$\frac{mv^2}{2} \cong \frac{1}{2} [(m + m_L) g \ell + C d^2] \phi^2$$

حيث $\phi \ll \frac{\pi}{2}$ ، لذلك فان خطية معادله الحركه ممكنه . لاجل هذا التركيب من الضروري التعبير عن الطاقه

الحركية للنظام

$$T = \frac{1}{2} (m + m_e) \ell^2 \dot{\phi}^2 = \frac{a \dot{\phi}^2}{2}. \quad (4)$$

المعامل a في المعادله (4) ثابتة، ولذلك ليس هناك ضرورة لعمل اية تفاضلات إضافية.

معامل الخمود $\beta = \frac{b}{2a}$ وطبقا لشروط المسألة فإن

$$\beta = \hbar/2(m + m_e)\ell^2.$$

نعول مقادير المعاملات e و a في العلاقة (2.73)، نجد ω_0 .

وبتعيين β و ω_0 في المعادله (2.73) نحصل على معادلة حركة النظام بالنيئة.

$$\ddot{\phi} + \frac{\hbar}{(m + m_e)\ell^2} \dot{\phi} + \frac{(m + m_e)g\ell + cd^2}{(m + m_e)^2\ell^2} \phi = 0. \quad (5)$$

عند البحث عن الشروط الابتدائية للحركة من الضروري حساب طبيعة التأثير المتبادل للاطلاقه مع النوايس. هذا التأثير المتبادل هو تأثير التصادم. خلال زمن تباطئ الاطلاقه في الثقل تهل توقفها النمايس بالنسبة له خلال هذا الفاصل الزمني كان الثقل عطيا غير مزاح، ولذلك

$$\phi(0) = 0. \quad (6)$$

السرعة الابتدائية لحركة المذبذب يمكن إيجادها باستخدام قانون حفظ عزم كمية الحركة لنظام المذبذب - الاطلاقه :

$m v \cdot l = (m + m_e) l \dot{\varphi}(0)$ ،
حيث $\dot{\varphi}(0) = l \dot{\varphi}(0)$ - السرعة الابتدائية الخطيية
لحركة الثقل مع الاطلاقه المقذوفه فيه بصوره
مباشره بعد التصادم . لذلك

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{m}{(m + m_e) l} v \quad (7)$$

حل المعادله (5) طبقا للصياغه (2.80) آخذين
الظروف الابتدائيه (6) ، (7) بنظر الاعتبار يمتلك الميئه .

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \frac{m v}{(m + m_e) l \omega} \sin \omega t \quad (8)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{c d^2}{(m + m_e) l^2} - \frac{\hbar^2}{4(m + m_e)^2 l^4}} \quad (9)$$

المحدد اللوغاريتمي للنظام وحسب المعادلتين (2.30)

(2.31) يساوي

$$\lambda = \frac{\hbar}{2(m + m_e) l^2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \hbar}{\sqrt{4(m + m_e)^2 l^4 g + 4(m + m_e) l^2 c d^2 - \hbar^2}}$$

تحليل الحل :

كتابة الحل بالمعيره (8) يكون ملائما إذا كان النظام
فعلا فعلا نظاما إمتزازيا . أي أن ω عدد حقيقي .
وهذا يمتلك مكانا عند

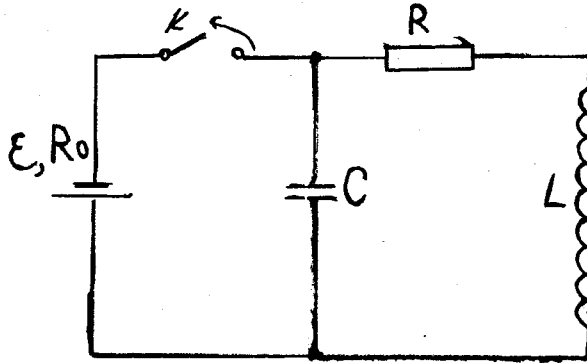
$$\frac{\hbar^2}{4(m + m_e)^2 l^4} < \frac{g}{l} + \frac{c d^2}{(m + m_e) l^2} \quad (10)$$

إذا كان الشرط (10) غير متحققاً ، لذلك فإن الحركة
في النظام متباطئه وحلما يمكن بحثه في المعادله
(2.89) . بأمكن الطالب ان يحل السؤال تحت شرط
ان يستعان عن الاطلاقه بكره صغيره مرنبه . تصادم
مذه الكره مع الثقل ، $m l$ يحتبر تصادما مرنباً
مطلقاً ومركزيّاً .

مثال 4

بناءً كهربائي متوالي يتكون من مكثف بسعة C ، ملت حث L ومقاومه أو ميه R .

يربط المكثف الى مصدر مستمر $\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} \cdot C$ بمقاومه داخلية R_0 (لاحظ الشكل 2.13) .



شكل 2.13 .

أوجد هيئة الذبذبات الخاصه الناتجه في الدائره الكهربائيه بعد قطع المصدر $\mathcal{E} \cdot d \cdot C$ تحت الشروط

التاليه : $\sqrt{L/C}$:
 1) $R < 2\sqrt{L/C}$; 2) $R > 2\sqrt{L/C}$; 3) $R = 2\sqrt{L/C}$.

الحل : باستخدام قاعدة كيرشوف

نصيغ معادلة ذبذبات التيار i في الدائره بعد قطع المصدر $\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} \cdot C$.

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i + \frac{1}{C} \int i dt = 0 . \quad (1)$$

بفاضله هذه المعادله ، نحصل على معادله من

نوع (2.79) حيث $\mathcal{E} = i$; $B = R_0 / 2L$; $\omega_0^2 = 1/LC$

نحدد الظروف الابتدائية . قبل قطع المصدر $\mathcal{E}$.
كان يمر عبر الملف تيار

$$i(0) = \mathcal{E} / R_0 + R_0 \quad (2)$$

وجهد على المكثف

$$u_C(0) = \frac{R_0}{R_0 + R_0} \mathcal{E} \quad (3)$$

التيار الجاري عبر الملف، والجهد على المكثف لا يستطيعان ان يتغيرا بصورة قفزيه، لأنه مع هذه الكميات يرتبط على التوالي طاقة المجال المغناطيسي للملف وطاقة المجال الكهربائي للمكثف، لذلك تبقى المقادير $i(0)$ و $u_C(0)$ محتفظة بقيمتها في الفتره ما قبل بدء عمليات الذبذبات الخاصة،
ويحسبان بالمعادلتين (2) ، (3) .

بما ان : $u_C(0) = R_0 i(0)$ ، لذلك فان هبوط الجهد على الملف

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} \neq 0 \quad \text{و} \quad \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

عند حل المعادله (2.78) بهذا الشكل من الضروي
حساب الظروف الابتدائية (2) ، (4) . (1) الا متساويه
 $R_0 < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ تكافئ الا متساويه $B < \omega$ لذلك فان
حل المعادله (2.78) يجب بحثه بالمعيره (2.79) أو

$$(2.81) . \text{ بتعويض الشروط (2) ، (4) في المعادله (2.81) نحصل}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_0} \left(\cos \omega t + \frac{R_0}{2L\omega} \sin \omega t \right) \exp\left(-\frac{R_0}{2L} t\right),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_0^2}{4L^2}}$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

(2) عند $R > 2\sqrt{L/C}$ وبالتالي ، $B > \omega$ تصبح الحركة متباطئة (متراخيه) ، وقانونها نحصل عليه بتعويض الظروف الابتدائية (2) ، (4) في المعادله (2.79) وحساب الجذرين λ_1 ، λ_2 من المعادله (2.26)

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{2(R + R_0)K} \left[\left(\frac{R_0}{2L} + K \right) \exp(Kt) + \left(K - \frac{R_0}{2L} \right) \exp(-Kt) \right] \exp\left(-\frac{R_0}{2L}t\right) \quad (5)$$

$$K = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

حيث

(3) عند $R = 2\sqrt{L/C}$ يؤول المقدار K الى الصفر . في هذه الحالة $i(t)$ يمكن ان يوجد كحد

$$\text{خرج ، تقترب اليه المعادله (5) عند } K \rightarrow 0 \lim_{K \rightarrow 0} i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0} \exp\left(-\frac{R_0}{2L}t\right).$$

بالنسبة للحاله 1- اوجد قانون تغير الجهد على المكثف $U_C(t)$ والمكثف $U_L(t)$ ، مفترضاً ان المقاوّمه الداخليه للمصدر $E.D.C$ تساوى صفر .

٥٩. العمليات الانتقالية والذبذبات المستقامة في

الانظمة بدرجة حرته واحده

في الانظمة الخطيه يمتلك تراكب الحركة مكاناً هاماً

، حيث ان كل تأثير على النظام يسبب رد فعل مستقل

عن التأثيرات الاخرى (مبدأ التراكب) .

بالامكان تمييز صنفاً خاصاً من المسائل التي تتحدد فيها

القوى المؤثره على الانظمة بدوال دوريه .

$$f(t) = f(t + nT) \quad (2.90)$$

عند

$$-\infty < t < +\infty \quad (2.91)$$

حيث n - اى عدد صحيح ، T - كمية ثابتة تسمى الدور او زمن

الذبذبه . ولكن يجب ان نأخذ في حسابنا ان مثل هذه

الوضعيه تصبح مقرهه . عمليا في الانظمة الحقيقيه

قبل لحظة تسليط القوه t_1 ، $f(t) = 0$. لذلك فان الفاصل

الزمني (2.91) يجب ان يستعاض عنه بالتعبير التالي :

$$t_1 \leq t < +\infty \quad (2.92)$$

بنتيجه ذلك فان الحل $X(t)$ للمعادله التفاضليه التي تصف

الحركه المبحوثه سيكون بالهيئه التاليه :

$$\mathcal{D}(X, \dot{X}, \ddot{X}) = f(t) , \quad (2.93)$$

حيث $f(t)$ تحقق الشرط (2.90) في الفاصل الزمني

(2.92) . هذا الحل يتجزء دائما الى حل عام للمعادله

المتجانسه $X_1(t)$ وحل خاص للمعادله غير المتجانسه

$X_2(t)$ ماى ان

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) .$$

في الانظمة الفعالة يسبب تشتت الطاقة نقصان الحد
 $X_1(t)$ ، الذى يمثل الذبذبات الخاصه والمرافقه
للنظام . هذه العمليه تسمى عملية استقامة الذبذبات
الاضطرابيه $X_2(t)$.
عندما الحد $X_1(t)$ بدرجة من الدقه يمكن اهماله
بالمقاربه مع $X_2(t)$ حينذاك يصبح بالامكان اعتبار
الذبذبات الاضطرابيه مستقامه .
يمكن ايجاد الذبذبات الاضطرابيه او القسريه
المستقامه بتعويض الشرط (2.92) بالشرط (2.91)
اي اعتبار $f(t)$ داله دوريه دقيقه .

1 . طريقه التحليل التوافقي(الهرموني)لفوريه
يمكن استخدام مختلف اساليب الحل للمسائل
المتعلقه بالذبذبات القسريه تحت تاثير قوى خارجيه
دوريه .
جوهر هذه الطريقه الطيفيه يكمن في تحليل الداله
الدوريه $f(t)$ الى مركبات توافقيه منفرده (توافقيات
او هرمونيات) ومن ثم ايجاد استجابة او رد فعل
النظام الخطي على كل توافقى بصورة منفرده .
النتائج المحصله تجمع على اساس مبدأ التراكب .
تحليل الداله الدوريه $f(t)$ الى مركبات توافقيه
(في مسلسل فوريه) يتحقق بالمعادلات التاليه :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (2.94)$$

حيث

حيث

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.95)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt, \quad (2.96)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.97)$$

بهئية اخرى

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \alpha_n), \quad (2.97)$$

حيث

$$C_0 = A_0, \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (2.98)$$

$$\tan \alpha_n = -B_n/A_n. \quad (2.99)$$

في الهئية المعقدة

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{A}_n e^{jn\omega t} \quad (2.100)$$

$$j = \sqrt{-1}$$

عنا وفي كل مكان

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt. \quad (2.101) \quad \text{حيث}$$

الكمية $\tilde{A}_n$ تسمى السعة المعقدة للمركبة الهرمونية برقم n و $\tilde{A}_n$ ترتبط مع A_n و B_n بالمعادلة

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n). \quad (2.102)$$

2. طريقة السعة المعقدة. عند حل المسائل المتعلقة بالذبذبات الاضطرابية، فإن استخدام السعة المعقدة يساعد على استبدال المعادلات التفاضلية للحركة جبرياً : خلال ذلك فإن المضروب الزمني لكل مركبة هرمونية يمكن اختصاره . لغرض الانتقال الى السعة المعقدة نكتب المعية المثلثية للذبذبة

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

بمعينة معقدة :

$$x^* = A e^{j\alpha} \cdot e^{jn\omega t} = \tilde{A} e^{jn\omega t} \quad (2.103)$$

السعة المعقدة $\tilde{A} = A e^{j\alpha}$ تحتوي، بهذا الشكل، معلومات حول سعة وطور الذبذبة بتردد ω ، تعويض المعادلة التفاضلية جبرياً يجري حسب الخطوات التالية :

(1) عملية المفاضلة $\dot{x}$ تعوّض بالضرب في $j\omega$

للسعة المعقدة $\tilde{A}$

$$\dot{x} \longrightarrow j\omega \tilde{A} \quad (2.104)$$

حيث ω -تردد الذبذبه الاضطرابيه، الذي يتطابق مع تردد ذبذبة القوى الخارجيه .

(2) عطية التكامل تتعوض بالقسمه على $j\omega$

$$\int x dt \rightarrow \frac{\tilde{A}}{j\omega} . \quad (2 \cdot 105)$$

بنتيجة حل المعادله الجبريه للحركه أو لنظام مثل هذه المعادلات فان السعه المعقده المبحوثه للذبذبه الاضطرابيه ($\tilde{A}$) يعبر عنها عبر سعة ذبذبة القوى الخارجيه كالتالي :

$$\tilde{A} = K(j\omega) F . \quad (2 \cdot 106)$$

هنا $K(j\omega) = r + js$ الخصومعويه التردديه المعقده للنظام ، أو بعبارة أخرى دالة التردد ، بينما r و s معاملات تتحدد بمقاييس النظام ، سعة الذبذبات الاضطرابيه المبحوثه

$$A = |\tilde{A}| = F \sqrt{r^2 + s^2} . \quad (2 \cdot 107)$$

ازاحة الطور بين الذبذبات الاضطرابيه $x(t)$ و $f(t)$ هي:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{s}{r}\right) . \quad (2 \cdot 108)$$

التعبير (108) يحدد الطور α من الدقه الى π . اختيار المقدار الصحيح لازاحة الطور α في كثير من المسائل لا يسبب اية صعوبات . اذا كان هذا الاختيار ليس واضحاً جداً ، عند ذلك يجب حساب $\sin \alpha = \frac{s}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$

$$6 \cos \alpha = \frac{r}{(r^2 + s^2)^2} \quad 9$$

كل على إفراد ، أو بناء تخطيط اتجاهي . بناء التخطيط الاتجاهي يعني من حيث الجوهر حلا بيانها لنظام المعادلات بالنسبة للسعة المعقدة . كل سعة معقدة $\tilde{A} = A e^{j\alpha}$ تصور على التخطيط الاتجاهي ، بمتجهه ، الذي قيمته المطلقه A واتجاهه الذي يضع الزاويه α مع الشعاع المعبر عن بداية الحساب ($\alpha = 0$) . بالتوافق مع النظام المحلول للمعادلات الجبريه تجري بيانها عطية جمع أو طرح المتجهات على التخطيط الاتجاهي . عند بناء التخطيط الاتجاهي من الضروبي

استخدام القواعد التاليه :
 (1) ضرب السعة المعقدة $\tilde{A}$ في $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ يتوافق مع دوران المتجه الممثل بـ $\tilde{A}$ الى الامام على زاوية $\frac{\pi}{2}$.
 (2) تقسيم السعة المعقدة $\tilde{A}$ على $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ يتوافق مع دوران المتجه الممثل بـ $\tilde{A}$ ، الى الخلف على زاويه $\frac{\pi}{2}$.

1 في العاده يعبر عن الاتجاه الموجب بالاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعة ،

الطريقة الطيفية هي إحدى الطرق الناجعة المستخدمة لحساب الحركات الانتقالية والحركات المستقامه ، أي التي استقامت بفضل تأثير قوة خارجية دوريه .

هذه الطريقة تعوض (أو تنوب عن) العمليات المجرة على الدوال الزمنية بعمليات تجرى على صور هذه الدوال . بعد حل المسألة يجرى في فضاء الصورة انتقال معاكس أو عوده للأصل (للدالة الزمنية) . الانتقال من أصل الدالة $f(t)$ إلى صورتها يجرى طبقا لقاعدة تحويل لبلاس المباشر .

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt . \quad (2.109)$$

عند الشرط ، ان $f(t) = 0$ لـ $t < 0$.
يرمز لهذا التحويل بالرمز

$$F(p) \stackrel{\circ}{=} f(t) \quad (2.110)$$

نذكر الصفات الأساسية لتحويلات لبلاس التي معرفتها ضروريه لحل المسائل قيد البحث .

1 . خطية التحويل

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \stackrel{\circ}{=} \alpha F_1(p) + \beta F_2(p) , \quad (2.111)$$

حيث α ، و β معاملات غير معتمده على الزمن
(2) عملية مفاغلة الاعل .

$$\frac{df}{dt} \div -f(+0) + pF(p) \quad (2.112)$$

حيث $f(+0)$ - مقدار $f(t)$ عند اقتراب t الى الصفر
من جانب المقدار الموجب لا t .

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dt^n} \div & p^n F(p) - p^{(n-1)} f(+0) - p^{(n-2)} \frac{df}{dt} (+0) - \dots \\ & - p \frac{d^{(n-2)} f}{dt^{(n-2)}} (+0) - \frac{d^{(n-1)} f}{dt^{(n-1)}} (+0). \quad (2.113) \end{aligned}$$

(3) عملية التكامل تحت الشرط : $f(+0) = 0$

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p} \quad (2.114)$$

(4) بديمية التحليل : اذا كان صورة الداله $f(t)$.

تملك الميئه :

$$f(t) \div F(p) = \frac{U(p)}{V(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} ,$$

حيث $m < n$ ، اضافة الى ان المعادله $V(p) = 0$
تملك فقط جذورا بسيطه وليس هناك اي من هذه
الجذور لا يساوي صفر ، لذلك

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{U(p_k)}{V'(p_k)} e^{p_k t} , \quad (2.115)$$

حيث p_k - الجذر k لمتعدد الحدود $V(p)$

$$V'(p_k) = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p=p_k} \quad \text{ببساطة}$$

إذا كان أحد جذور $V(p)$ يساوي صفره، لذلك عند وضع $V(p) = pW(p)$ نجد أن :

$$f(t) = \frac{U(0)}{W(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{U(p_k)}{p_k W'(p_k)} e^{p_k t} \quad (2.116)$$

(5) بدائية ضرب الصور (بدائية الحزم) :

$$X(p) \doteq x(t), \quad Y(p) \doteq y(t).$$

$$X(p)Y(p) \doteq \int_0^t x(\theta)y(t-\theta)d\theta \quad (2.117) \quad \text{حينذاك}$$

تكمّل مثل هذا النوع يسمى داله حزميه لـ $x(t)$

$$y(t) \text{ و صورته التكمّل } \int_0^t \frac{df(\theta)}{d\theta} h(t-\theta)d\theta + f(0)h(t) \doteq p H(p) F(p) \quad (2.118)$$

مثل هذا التكمّل يحمل اسم تكامل ديوميل .

(6) بدائية التخلف : صورتورة الداله $f(t-\tau)$ عند

$$f(t) \doteq F(p) \quad t \geq \tau \geq 0 \quad \text{يتربط مع تمثيل الدالة}$$

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p) \quad (2.119)$$

(7) قاعدة إيجاد صورة الداله الدوري :

$$f(t) = f(t+nT) \doteq F_n(p),$$

$$F_n(p) = \frac{\Psi(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (2.120)$$

حيث $\psi(p)$ - صورة الدالة المساعده

$$\psi(t) = f(t) - f(t - T),$$

اي ان

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{عند } t < 0 \\ f(t) & \text{عند } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{عند } t > T. \end{cases}$$

والعكس صحيح .

اذا كانت صورة بعض الدوال $f(t)$ تمتلك الهيئه
(2.12 0) ، حيث الاصل $\psi(t)$ يؤول الى الصفر
عند $t > T$ ، فان $f(t)$ - هي داله دوريه بدور T .
دور واحد $0 < t < T$ تتطابق الداله .
هذه الصفه للصوره تستخدم لبحث عمليات الاستقامه
في حالة التأثير الدوري .

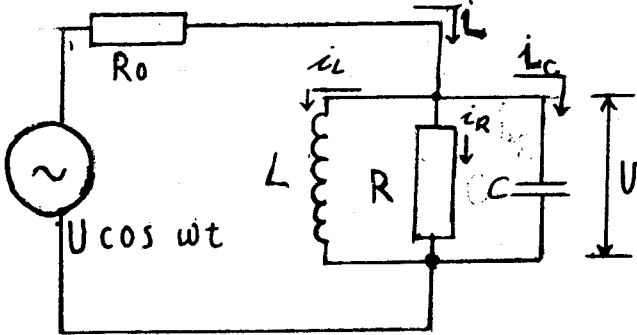
مثال 5 :

في السلسلة الكهربية الموضحة في (الشكل 2.14)

يُعطى مولد جهده $u = U \cos \omega t$.

أوجد سعيات واطوار ذبذبات الجهد U والتيارات i_L و i_C .

ارسم تخطيطا اتجاهيا للتيارات والجهود.



شكل 2.14

الحل : نظام المعادلات التفاضلية المكون حسب

قاعدة كيرشوف للتخطيط ، الموضح على الشكل

أعلاه يمتلك الهيكل

نكتب نظام المعادلات هذا بالنسبة للسعة المعقد .
 مستخدمين المعادله (2.104) والمعادله (2.105)

$$\tilde{I} = \tilde{I}_L + \tilde{I}_R + \tilde{I}_C ,$$

$$j\omega L \tilde{I}_L = \tilde{V}$$

$$R \tilde{I}_R = \tilde{V} , \quad (2)$$

$$\frac{1}{j\omega C} \tilde{I}_C = \tilde{V} ,$$

$$\tilde{U} = \tilde{I} R_o + \tilde{V} .$$

حل النظام بالنسبة الى $\tilde{V}$ ، $\tilde{I}_L$ و $\tilde{I}_C$ وملاحظة
 ان السعة المعقدة $\tilde{U} = U$ ، نجد

$$\tilde{V} = \left[\omega^2 L^2 R (R_o + R) + \right. \quad (3)$$

$$\left. + j\omega L R^2 R_o (1 - \omega^2 LC) \right] \frac{U}{A} ,$$

$$\tilde{I} = \left[R^2 R_o (1 - \omega^2 LC) - j\omega L R (R_o + R) \right] \frac{U}{A} , \quad (4)$$

$$\tilde{J}_C = \left[-\omega^2 L C R^2 R_o (1 - \omega^2 L C) + j \omega^3 L^2 C R (R_o + R) \right] \frac{U}{A}, \quad (5)$$

$$A = R^2 R_o^2 (1 - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 L^2 (R_o + R)^2. \quad \text{حيث}$$

التعابير (5) ← (3) تحولت إلى الميئة (2.106) .
 لتحديد سعات الذبذبات V ، $\tilde{J}_L$ و $\tilde{J}_C$ نستخدم
 المعادله (2.107) :

$$V = \frac{\omega L R U}{\sqrt{A}}, \quad (6)$$

$$\tilde{J}_L = \frac{1}{\omega L} V, \quad \tilde{J}_C = \omega C V. \quad (7)$$

اما فيما يخص علاقات التوافق بين الجهد U وبين

اطوار الذبذبات $\mathcal{L}_L$ و $\mathcal{L}_C$ - α_L و α_C على التوالي بالنسبة الى ذبذبات الجهد $\mathcal{U}$ نجدها باستخدام المعادله (2.108)

$$\mathcal{L}_C = \arctg \frac{RR_0(1-\omega^2 LC)}{\omega L(R_0+R)}, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_L = \arctg \left[- \frac{(\omega L(R_0+R))}{RR_0(1-\omega^2 LC)} \right], \quad (9)$$

بالنسبة الى $\mathcal{L}_C$ فيمكن الحصول على تعبير يتطابق مع المعادله (9) . ولكن ذلك لحد الآن لا يعني ان $\alpha_C = \alpha_L$.

في الحقيقيه ان الجهد $\mathcal{U}$ هو جهد عام بالنسبة الى طرف الحث L والمكثف C .

التيار عبر الحثيه L يتأخر بالطور عن $\mathcal{U}$ بمقدار

$\frac{\pi}{2}$. اما تيار المكثف C فمو يتقدم بالطور على

الجهد العام $\mathcal{U}$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$. لذلك فان الطورين

α_C و α_L يختلفان مع بعضهما بمقدار π .

انتخاب مقادير α_L و α_C يساعد في بناء التخطيط

الاتجاهي (شكل 2.14)

نفرض ان $\omega^2 > \frac{1}{LC}$.

الأرقام داخل الأقواس تشير إلى ترتيب تمثيل المتجهات على التخطيط .

الأول في الاتجاه المنتخب ينبغي بالجمد $\tilde{V}$.
بعد ذلك يقل متجه السعة المقده $\tilde{J}_L$ ، المزاح
إلى الخلف بالنسبة إلى $\tilde{V}$ على زاوية $\frac{\pi}{2}$ ،

$$\tilde{J}_L = \frac{1}{j\omega L} \tilde{V} . \quad \text{لأن}$$

القيمة المطلقة لهذا المتجه تساوي $\frac{|\tilde{V}|}{\omega L}$.

الباء الثالث هو المتجه $\tilde{J}_C$ ، المزاح إلى الامام
بالنسبة إلى $\tilde{V}$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ ،

$$\tilde{J}_C = j\omega \tilde{V} . \quad \text{لأن}$$

القيمة المطلقة لهذا المتجه هي $\omega C |\tilde{V}|$

$$\tilde{J}_R = \frac{1}{R} \tilde{V}$$

يتطابق بالاتجاه مع $\tilde{V}$ ، لأن التيار i_R والجمد v
على المقاومة الفعلية R يتذبذبان في الطور (لما
نفس الطور) .

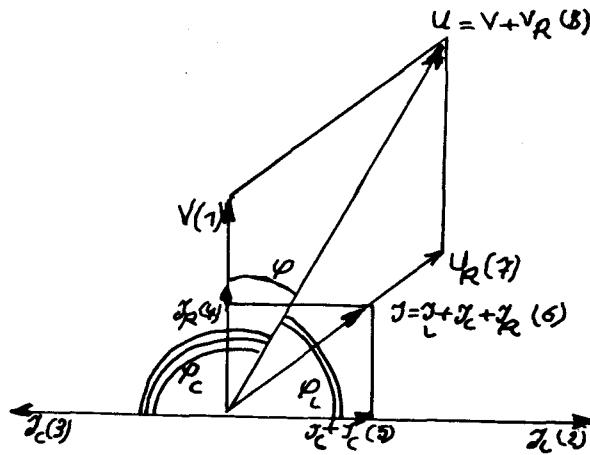
بعد ذلك بيانياً نجد مجموع المتجهات :

$$\tilde{J}_L + \tilde{J}_C = \tilde{J} .$$

متجه الجهد $\tilde{U}_R = R\tilde{I}$ يتطابق بالاتجاه مع $\tilde{I}$ ،
 لان R - مقاومه فعاله . مجموع المتجهات

$$\tilde{V} + \tilde{U}_R = \tilde{U}$$

اذا ثبتت اثناء البناء المقاييس المختاره بالنسبة
 للتيارات والجهود ، فان مقادير الزوايا المبحوثه
 α_L و α_C يمكن ان تقاس مباشرة من التخطيط .



شكل 2.15

عند $\omega > \frac{1}{LC}$ ، فان ذبذبات التيار i_C تتقدم ، بينما
 ذبذبات التيار i_L تتأخر عن ذبذبات الجهود V و U .
 تحليل الحل . التعبير (7) يساعد على ايجاد التردد
 ω_0 الذي عليه تتساوى سعرات ذبذبات التيارين i_C
 و i_L . عند مساواة الاطراف اليمنى للمعادله (7) نجد

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

على الترددات الاهتزازيه : $\omega > \omega_0$ ، فان $|\tilde{I}_L|$

تزيد من $|\tilde{I}_C|$ ، والمقاومة العامة للدائره
تتلك خاصيه حثيه . على الترددات $\omega < \omega_0$ فان
 $|\tilde{I}_C| > |\tilde{I}_L|$ وطبيعة مقاومه الدائره تصبح طبيعه
سحتم

نعوض في المعادله (8) ، $\omega = \omega_0$ ، من السهل
ان نتأكد أن على هذا التردد تصبح $\phi = 0$ ، اي
ان المقاومه المكافئه للدائره فعاله خالصه .
تعويض القدار ω_0 في المتساويات (6) ، (7) ، و (9) يعطي

$$V|_{\omega=\omega_0} = \frac{R}{R+R} U = R I .$$

$$I_L|_{\omega=\omega_0} = R \sqrt{\frac{C}{L}} I = Q I .$$

$$I_C|_{\omega=\omega_0} = R \sqrt{\frac{C}{L}} I = Q I .$$

$$\phi_L = -\frac{\pi}{2} , \quad \phi_C = +\frac{\pi}{2} .$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{الكمه}$$

تسمى جودة النظام الاهتزازي للدائره المتوازيه .
على التردد ω_0 تزيد سمات ذبذبات التيار
 i_C ، i_L بـ Q من المرات من سمات ذبذبات
التيار في السلسه الخارجيه i .

نمو سمات ذبذبات التيارات في فرع الدائره الاهتزازيه المتوازيه عند اقتراب تردد ذبذبات التيار ω من السلسله الخارجيه الى التردد الخاص للدائره يحتمل اسم رنين التيارات .

في الدائره المثاليه بدون فقدان ($R = \infty$)
تنمو مقادير $\mathcal{U}_C$ و $\mathcal{U}_L$ على التردد ω بدون حدود .
مثال 2:

في دائره اهتزازيه متواليه ذات تردد خاص ω_0
وجودة $Q=20$ ربط مولد جمد $\mathcal{U}(t)$ (شكل 2.16)

الجمد

$$\mathcal{U}(t) = U \cos \omega t$$

عند

$$\frac{4K-1}{2} \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{4K+1}{2} \frac{\pi}{\omega}$$

حيث K اي عدد صحيح .

خارج هذا المدى الزمني $\mathcal{U}(t) = 0$ (لاحظ الشكل 2.17) .

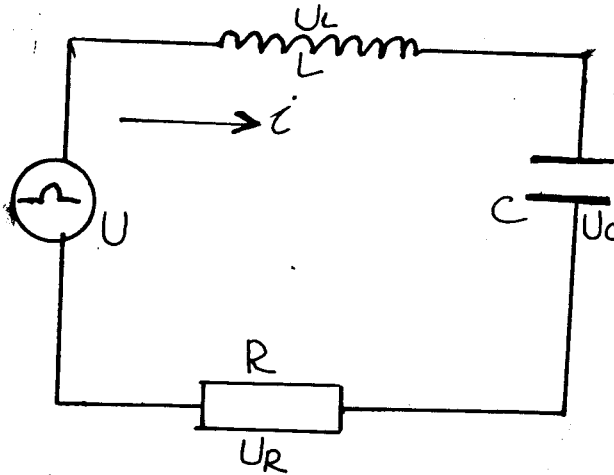
اوجد علاقة سمات التوافقي الثاني الى الاول
لذبذبات الجمد على المكثف عند $\omega = \frac{\omega_0}{2}$.

الحل: نرتب الداله $\mathcal{U}(t)$ بصيغه التحولات (2.96)
و (2.97) نجد معاملات سلسل فورييه (2.94)

$$A_1 = \frac{2U}{\pi} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} U. \quad (1)$$

حدود التكامل $(-\frac{T}{4} \div +\frac{T}{4})$ تم تعويضها في (1) بـ $(-\frac{T}{4} \div +\frac{T}{4})$ ، لانه خارج هذه الاخير

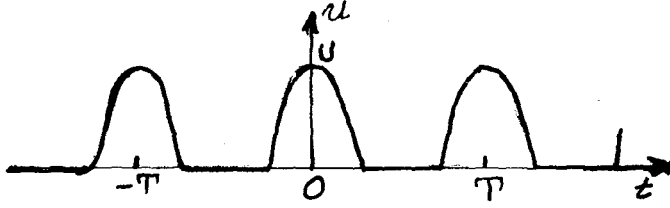
$$u(t) = 0$$



شكل 2.16

$$A_n = \begin{cases} U \frac{2n}{2(n^2-1)\pi} & \text{عند } n \text{ زوجيه} \\ 0 & \text{عند } n \text{ فرديه (ماعدا } n=1) \end{cases} \quad (2)$$

ليس من الضروري تحديد الثابت $B_n = 0$.



شكل 2.17

من المعادله (2) ينتج ان سعتي المرمونيك (التوافقي الاول والثاني) $u(t)$ يساويان :

$$U_1 = 0,5 U \quad (3)$$

$$U_2 = \frac{2}{3\pi} U = 0,21 U. \quad (4)$$

عند حساب الذبذبات الاضطرابيه في الدائره يمكن على اساس مبدأ التركيب (او التراكب) ، ان نبحث تاثير كل من المركبتين المورمونيتين بصورة مستقلة الواحده عن الأخرى .

لاجل هذا الغرض نستخدم طريقة السعات المعقدة .
نظام معادلات كيرشوف

KIRCHHOFF'S Law

للسعات المعقدة للتيارات والجهد عند تأثير فقط
من الجهود المرمونية، $u(t)$ يمتلك الميثة

$$\tilde{U}_n = \tilde{U}_L + \tilde{U}_C + \tilde{U}_R, \quad \tilde{U}_L = jn\omega L \tilde{I}$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{jn\omega C} \tilde{I}, \quad \tilde{U}_R = R \tilde{I}.$$

يحل هذا النظام بالنسبة الى $\tilde{U}_C$ ، نحصل

$$\tilde{U}_C = \frac{(1 - n^2 \omega^2 LC) - jn\omega CR}{(1 - n^2 \omega^2 LC)^2 + n^2 \omega^2 C^2 R^2} \tilde{U}_n.$$

على اساس التساويه (2.107) ترتبط السعات U_{cn}
و U_n بالعلاقه

$$U_{cn} = \left[(1 - n^2 \omega^2 LC)^2 + n^2 \omega^2 C^2 R^2 \right]^{-\frac{1}{2}} U_n. \quad \dots (5)$$

من شرط المساويه $\omega = \frac{\omega_0}{2}$.

هذا يعني أنه لا جل ايجاد العلاقه البحوثه عنها
 U_{c2} / U_{c1} يجب تعويض $(0, 5\omega_0)$ و ω_0 محل

• nW في المعادله (5) .

في النتيجة نحصل

$$\frac{U_{C2}}{U_{C1}} = \sqrt{\frac{(1 - 0,25\omega_0^2 LC)^2 + 0,25\omega_0^2 C^2 R^2}{(1 - \omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 C^2 R^2}} \frac{U_2}{U_1}$$

التردد الخاص للبناء الكهربائي التوالي

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (7)$$

اما جودة هذا البناء فهي

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (8)$$

بتعويض القادير (7) و (8) وكذلك (3) و (4) في (6) ، نحصل بصورة نمائيه

$$\frac{U_{C2}}{U_{C1}} = \frac{0,21}{0,5} \sqrt{(0,75)^2 Q^2 + 0,25} \approx 0,32Q$$

من ذلك ينتج انه عند $Q = 20$ فان

$$U_{C2} = 6,4 U_{C1}$$

تحليل الحل : النتيجة المحصلة تشير ان النظام

الموضح على الشكل 2.16 يحقق دور محلل طيف

الجمد $Q \neq 1$

وبغض النظر عن أن سعة المرمون الثاني ω_2 تقريباً أقل بمرتين من سعة المرمون الأول ،

فعند بناء الدائره وضبطها على المرمون الثاني

$$\omega_2 = 2\omega_1$$

فان سعة ذبذبات هذا المرمون في الدائره أكبر

بمئة مرات من سعة المرمون الاول .

الصفات الفلترية لهذا البناء الكهربائي ، تتحسن برفع

مستوى جودته .

بإمكان الطالب ان يحسب العلاقة $\frac{U_{C4}}{UC_2}$ عند

الشرط ، ان : $\omega_2 = 4\omega_1$ ،

ببما $Q = 100$.

اسئلة الفصل

س1: زمن ذبذبه مخمد . 4 Sec ، المحدد اللوغاريتمي

للخمود (6 و 1) الطور الابتدائي يساوي صفر .

ازاحة النقطة عند $t = \frac{T}{4}$ تساوي 4,5 cm .

(1) أكتب معادلة حركة هذه الذبذبه

(2) ارسم معني الحركة الاهتزازيه هذه

بحدود ذبذبتين .

س2: ارسم معني الذبذبه المخمد ، التي معادلتها

تعطي بالمهيئه

$$X = e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{4} t \text{ Meter}$$

س3: معادلة ذبذبه مخمده معصاة بالمهيئه $X = 5e^{-0,25t} \sin \frac{\pi}{2} t$

جد سرعة النقطة الممتزه في اللحظات الزمنية :

$$0, T, 2T, 3T, 4\pi$$

إذا علمت ان $(X = 5e^{-0,25t} \sin \frac{\pi}{2} t)$ محسوبة بالمتر

س4: المحدد اللوغاريتمي للخمود لمذبذب بندولي يساوي

2,0 . جد بكم مرة تنقص سعة الذبذبه خلال

ذبذبه كامله واحده .

س5: كم يساوي المحدد اللوغاريتمي للخمود لبندول رياضي

إذا نقصت سعة الذبذبه خلال دقيقه واحده بمرتين ؟

طول البندول 1 meter .

س6: بندول رياضي طوله 70 cm و 24 يلجز ذبذبات

مخمد . خلال كم من الزمن تنقص طاقة البندول

بقدر 4 و 9 مره . يحل السؤال لعاديرالمحدد

اللوغاريتمي للخمود التاليه . 1) $\lambda = 0,01$; 2) $\lambda = 1$

س⁷ سعةذبذبه مخمده (اومتخامده) لبندول (اولنواس)
رياضى خلال دقيقة واحدہ نقصت الى النصف .
بكم مره تنقص خلال ثلاث دقائق .

س⁸ علق ثقل بنهاية نابض مثبت شاقوليا . خلال ذلك
استطال النابض بمقدار $9,8 \text{ cm}$ عند سحب الثقل
الى الاسفل وتركه حرا ينجز حركة اهتزازية .

كم يجب ان يساوى معامل الخمود لكى :

(1) تتوقف الذبذبات خلال 10 sec . (اعتبر شرط
توقف الذبذبات عندما تنقص السعة الى 1% من
مقدارها الابتدائى) .

(2) اذا عاد الثقل الى وضع التوازن بحركة لا دوريه .

(3) اذا كان المحدد اللوغاريتمى للخمود يساوى β

س⁹ جسم كتلته $m = 10 \text{ g}$ ينجز ذبذبات مخمده (ا
ومتخامده) بسعة عظمى مقدارها 7 cm ، الطور

الابتدائى يساوى صفر ومعامل الخمود $\beta = 1,6 \text{ sec}^{-1}$.

على هذا الجسم بدات توفتر قوة خارجيه دوريه ،
والتي بتاثيرها استقامت الذبذبات الاضطرابية .

فاذا كانت معادلة حركة الذبذبات الاضطرابيه

تمتلك الهيئه

$$x = 5 \sin(10\pi t - 0,75\pi) \text{ cm}$$

أوجد :

(1) معادلة حركة الاهتزازات الخاصة (بمعاملات

عددية)

(2) معادلة حركة القوة الخارجيه الدوريه (بمعاملات

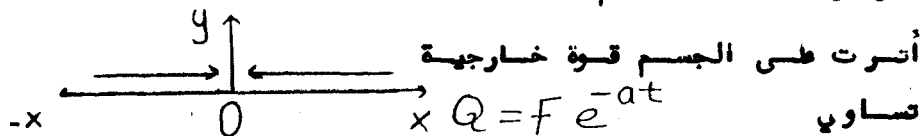
عددية) .

10: جهاز لقياس الذبذبات الشاويليه لهيكل طائره
اوسفيية أو بنايه . هذا الجهاز يتكون من كتله m
مثبتة بنمايه نابض معامل مرونته C . ربطت
هذه الكتله بعكس صغير يتحرك داخل سائل
يعمل قوة مقاومه تتناسب طرديا مع سرعة كتله
 m (معامل التناسب b) . أُكْسِيتَ النمايه
العياء للنابض حركة اهتزازيه طبقا للمعادله

$$y = H \cos \omega t . \quad (1)$$

فإذا كان التردد الخاص للكتله m يساوي ω_0
ومعامل مقاومه السائل B يشكل $\sqrt{\frac{1}{2}}$ من
القدار الحرج للخمود (عندما تؤول الذبذبات
الخموده الى حركة متراخييه) .
جد سعة الذبذبات المستقله (الاضطرابيه)
للكتله m التي يمكن تسجيلها على لوحة الجهازيه

11: جسم صلب لكتله m يتحرك بموجعات (بسطوح)
أفقيه مساه تحت تأثير قوة جذب نحو المركز O
تتناسب طردياً مع المسافه من النقطه O الى
مركز عطالة الجسم (لاحظ الشكل 2.18) .

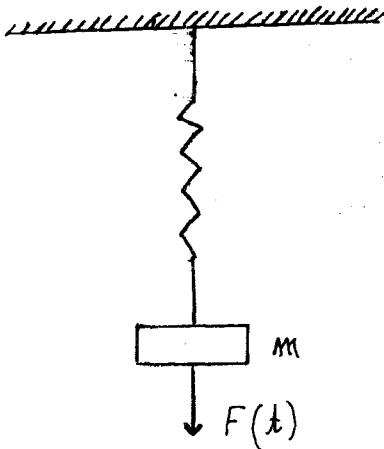


شكل 2.18

متجهه باتجاه السطوح . في بداية اللحظة الزمنية
الطبق مركز عطالة الجسم على المركز O ،
وسرعته ساوت صفر . جد معادلة الحركة
الامتزائية للجسم .

١٢: جسم كتلته $M = 400g$ معلق بنماية نابض
مثبت شاقوليا . فإذا تمدد النابض بمقدار
 $1cm$ تحت تأثير قوه خارجيه $F = 0,4 \cdot 10^{-5} N$ ،
وكان المحد اللوغاريتمي للخمود $1,57$. جد
زمن الذبذبه التي يحصل فيها الربيع .

١٣: على الثقل m المعلق بنماية نابض مثبت شاقوليا
(لاحظ الشكل ١٩ . ٢) . معامل مرونته C ،
تؤثر قوه $f(t)$ فتسحب الجسم الى الاسفل
وتتغير حسب القانون



$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{عند } t < 0 \\ \alpha t & \text{عند } 0 \leq t \leq \tau \\ F_0 & \text{عند } t > \tau \end{cases}$$

حيث α - معامل ثابت

F_0 - قوه ثابتة .

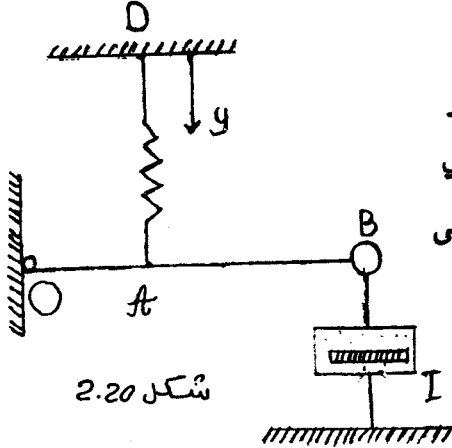
شكل ١٩ . ٢

أو جد معادلة حركة الثقل اذا كانت قوه الاحتكاك
المؤثر على الثقل تتناسب طرديا مع سرعته
مع اهمال كتلة النابض .

١٤: نظام يتكون من سلك OB . في نهاية B توجد

لرّه من البلاستيك مضغوطه الى النمايه B .
ثُبَّتَ السلك مفصلياً في النقطه O (لاحظ الشكل

. (2.20))



عزم عطالة النظام الممتز

بالنسبة الى محور افقي

يمر عبر O وعمودي على

مستوى الرسم يساوي

شكل 2.20

$$I = 26.83 \text{ N.cm.sec}^2$$

يربط الى السلك وفي النقطه A نابض معامل

مرونته $C = 120 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. أما النمايه الثانيه

للنابض D فهي تفجّر إمتزازات شاقوليه محدد .

طبقاً للمعادله التاليه :

$$y = 0.05 \cos 6\pi t \text{ cm}$$

قوة مقاومه لسائل تتناسب طردياً مع سرعة

حركة النظام بمعامل تناسب $b = 0.2 \text{ N} \frac{\text{sec}}{\text{cm}}$

اوجد :

١) معادله الاهتزازات الاضطرابيه للدره B .

٢) أكبر تمدد للنابض .

٣) القيمه العظمي للقوه المسلطه على النقطه

. D

إذا علمت أن : $OA = 10 \text{ cm}$, $AB = 14 \text{ cm}$

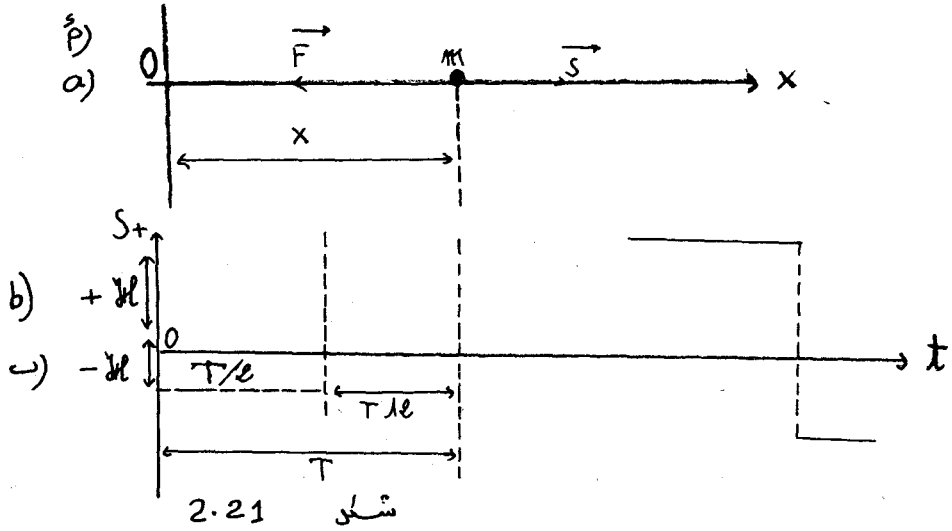
١٥: عنصر حساس كتلته m موجود داخل جهاز كشف

Indicator

هذا العنصر يتحرك بامتداد محور x تحت تأثير

قوة مرونة f وإشارة كهربائية S (لاحظ

الشكل 2.21)



مسقط القوة f على محور x يساوي $f = -Cx$ حيث C - معامل المرونة .

ومسقط القوة المثيرة (الإشارة الكهربائية) S فهو

مبين على الشكل (2.21) من الشكلين . واضح

أن زمن ذبذبة القوة المثيرة T . القوة المثيرة تعاني

انقطاع خلال نصف زمن الذبذبة والقيمة المطلقة

لها تساوي H (القيمة المطلقة للقوة المثيرة $H = |f(t)|$) .

أوجد معادلة حركة العنصر الحساس الذي كتلته m

إذا كان في بداية الزمن ساكناً .

الفصل الثالث

الفصل الثالث

الامتزازات الحرة في الانظمة الخطية بدرجتي حرة

معلومات عامة

1

عدد درجات الحرية يتحدد كاصغر عدد للمتغيرات

المستقلة الضرورية لوصف حركة النظام . في النظام

الميكانيكي يمكن ايجاد عدد درجات الحرية كأقل عدد

للقاط التي يجب تثبيتها لكي تتوقف حركة النظام .

اما بالنسبة للنظام الكهربائي فالذى يقابل النقاط اللازم

تثبيتها يكفي قطع الدائرة الكهربائيه اذا كان التيار هو

المتغير فيها او توصيل الدائرة اذا كان المتغير المستقل

هو الجهد المطبق .

من الضروري ان يكون واضحا ، ان هذا التحديد لا يشمل الانظمة

الحقيقية بل النماذج المثالية للانظمة الحقيقية .

اي نظام حقيقي يظهر عمليا اعدادا لانتهائيه لدرجات

الحرية اذا حسبنا كل امكانيات الحركة فيه .

فعلى سبيل المثال : الثقل المعلق في نهاية النابض

يمكن بحته كنظام ذو درجه حرية واحده اذا هو انجز

امتزازات فقط باتجاه محور X الذى يمتد باتجاهه محور

النابض .

ولكن هذا النظام يمتلك ثلاث درجات للحرية اذا حسبنا

الاشكال الهندولييه لامتزازات الثقل بمستويين .

اما اذا اخذنا بنظر الاعتبار امكانية الذبذبات المرتبطة

به لي النابض فان عدد درجات الحرية سيكون غير محدد ،

اضافة الى ذلك يمكن حساب درجات الحرية الناتجه من الذبذبات

المربى لنفس الثقل ، وكذلك ذبذبات الجزيئات التي
يتكون منها الثقل . ولذلك فان تحديد عدد درجات
الحرية التي يجب ان نحسبها في النظام المثالي يعتمد
على طبيعة حركة الجسم الحقيقي المدروس .

كقاعده يمكن اهمال تلك الدرجات من الحرية العائده
للنظام الحقيقي التي تتطابق مع الترددات التي تختلف
بقوه عن ترددات الذبذبات المدروسة .

ان الاختيار الصحيح للنظام المثالي يفيد لغرض البحث
النظري ، اى يجب ان يكون هذا الجسم بسيطا ونفس
الوقت يحتفظ بالخصائص الاساسيه للنظام الحقيقي
المبحث الذى قد يمثل صعوبات كبيره في اى بحث
فيزيائى .

ان الاختيار الصحيح للنظام المثالي تحدده فقط التجربه
، فكثير من الانظمه الميكانيكيه الحقيقيه والاجهزه
الكهربائيه يمكن دراستها كأنظمه ذات درجتين
للحرية ، مثال الانظمه الكهربائيه هو :

الاجهزه الكهربائيه الاهتزازيه المرتبطه ذات
الاستعمال الشائع في التكنيك الراديو بهيئة
فلترات ، او في المقاييس الثائيه الدوائر مثل
المكبرات الخ

اما النظام الميكانيكي فمثاله العارضه المثبتة على
مسنديين مرنيين .

النظام ذو درجتى الحرية يمكن تصويره كنظامين
منفردين بدرجة حرية واحده ، مرتبطين الواحد
بالاخر ، هذا الارتباط بين هذين النظامين يقود
الى ان الذبذبات في أى منهما تؤثر على الذبذبات

والعكس ، فالنظام او الانظمة التى يمكن ان تهجز النظام المعقد اليها تسمى انظمة ثنائية ، كل منها بدرجة حرية واحدة .

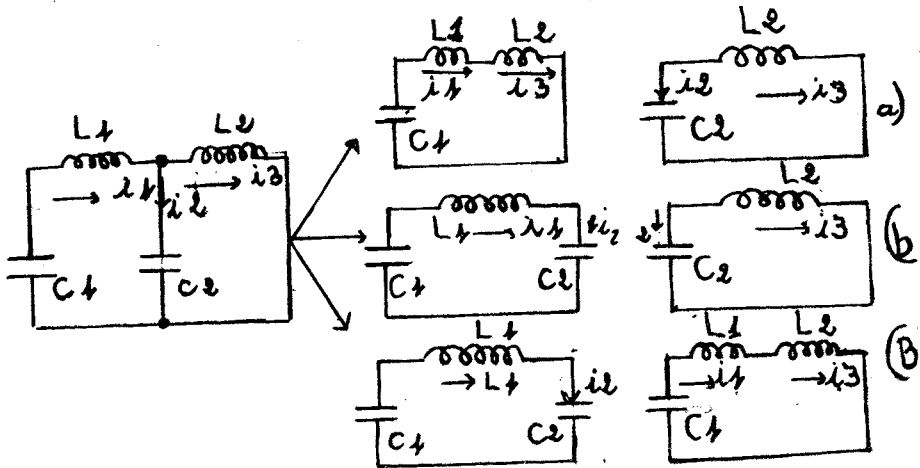
قاعدة تمييز النظام المنفرد او الانظمة الثنائية تكمن فى ان سلوك هذا النظام يوصف باحداثى محدد ، واحد يحصل من نظام متكامل اذا جعلنا جميع الاحداثيات الاخرى مساوية للصفر .

ترددات الذبذبات الحرة للانظمة الثنائية المنفردة تسمى ترددات ثنائيه للنظام الكامل .

تجزئة النظام المعقد الكامل الى انظمة ثنائية مرتبطه يتم بعدة طرق ، وهذا معتمد على الاحداثيات المستقلة التى يمكن اختيارها بهيئات مختلفة .

فعلى سبيل المثال :

الدوائر الكهربائيه المرسومه بالشكل 3.1 .



شكل 3.1

مهمة الاحداثيات المستقلة يمكن ان نختار اي زوج من التيارات i_1, i_2, i_3 .
 بالنسبة للأحداثين المستقلين i_1, i_2 فان الترددات التثائية تساوي

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1+L_2)}} , \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

وبالنسبة لـ i_1 و i_3 فان

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} , \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

اما بالنسبة لـ i_1 و i_3

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} , \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1+L_2)}}$$

فالنظام الكامل يمكن تجزئته الى أنظمة ثنائية (مرتبطه) بطرق مختلفه ولذلك فأن طبيعة الارتباط بين الأنظمة الثنائية تعتمد على اختيارها .

فالشكل (أ) 1 . 3 يمثل ارتباط حث

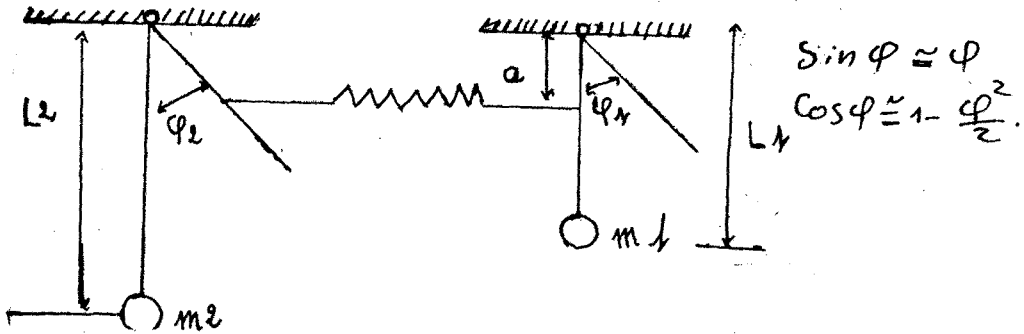
و (ب) 1 . 3 يمثل ارتباط سعة

و (د) 1 . 3 يمثل ارتباط مختلط

فيزياء ويا واضح أن الحركة في النظام الكامل بالظروف الابتدائية المحددة سوف تكون واحده وهي نسميها لكل الاختيارات ولكن وصفها أو تحليلها بواسطة احداثيات مختلفه سيكون مختلفا . نعطي مثالا كلاسيكيا لغرض دراسة الحركة الحرة أو الأمتزازات الحرة ففي الأنظمة ذات درجتين حريه هو البندولين المرتبطتين

مع بعضها البعض بنابض ويعملان اهتزازات في مستوي
الرسم كما في الشكل 3.1 .

فإذا كانت زاويتا انحراف البندولين من موضع
توازئهما صغيرتين للغاية فإن



شكل 3.2

لذلك فإن الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنظام

يساويان .

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$$

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 .$$

حيث x تمثل أزاحة كل من البندولين عن موضع
توازئهما . فإذا كانت هذه الأزاحة صغيرة ، فالتعبير بزوايا
الانحراف φ وطول كل بندول يمكن على أساس أن
الأزاحة x هي التي تقابل أزاحة الانحراف φ ، أي أن

$$\sin \varphi = \frac{x}{L} , \quad x = L \sin \varphi = L \varphi .$$

وسرعة النظام التبادلي :

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (L \varphi) .$$
 أي أن الطاقة الحركية والكامنة للنظام سيكونان
بالمصورة التالية .

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{L}_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{L}_2^2 \dot{\varphi}_2^2 . \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} U &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 L_1 g \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 g \varphi_2^2 + \frac{k a^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 . \end{aligned} \quad (3.2)$$

وذلك لان

$$h = \frac{1}{2} L \varphi^2 = L \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) = L(1 - \cos \varphi) .$$

$$\cos \varphi = L - h / L .$$

حيث K معامل الصلادة أو معامل المرونة لل نابض

$$: \frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \text{ أما الحد}$$

فهو يمثل الطاقة الكامنة للنابض المضغوط، فعند معرفة الطاقة الحركية والكامنة نستطيع أن نكتب معادلة حركة النظام باستخدام معادلة لغراج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_s} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_s} = 0 . \quad (3.3)$$

أو :

$$m_1 L_1 \ddot{\varphi}_1 + m_1 L_1 g \varphi_1 - k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 . \quad (3.4) \text{ أو}$$

$$\begin{aligned} m_2 L_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 L_2 g \varphi_2 + \\ + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

فإذا عوضنا في المعادلة (3.4) ، $\varphi_2 = 0$ ، فإننا نحصل على معادلة اهتزازات النظام الثاني الأول بالصورة التالية:

$$m_1 L_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_1 L_1 g \phi_1 + k a^2 \phi_1 = 0$$

$$\ddot{\phi}_1 + \left(\frac{g}{L_1} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} \right) \phi_1 = 0$$

وهذه الاخيره تمثل معادلة تعاضليه خطيه متجانسه من الدرجة الثالثه تمثل نظاما توافيقيا محافظا بتردد ثنائي ω_1 يساوي

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L_1} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} . \quad (3.6)$$

ومن المعادله (3.6) بوضع $\phi_1 = 0$ نحصل على تعبير للتردد التناهي الثاني حيث تصبح معادله التناهي الثاني بالشكل التالي:

$$m_2 L_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 L_2 g \phi_2 + k a^2 \phi_2 = 0$$

$$\ddot{\phi}_2 + \left(\frac{g}{L_2} + \frac{k a^2}{m_2 L_2^2} \right) \phi_2 = 0$$

ومن هذه المعادله فان التردد التناهي الثاني يساوي

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L_2} + \frac{k a^2}{m_2 L_2^2} . \quad (3.7)$$

فاذا أدخلنا معامل الارتباط $\alpha_1 = \frac{k a^2}{m_1 L_1^2}$ ، فان $\alpha_2 = k a^2 / m_2 L_2^2$

معادلة الاهتزازات لكل ثنائي مفرد باستخدام معادلة

لا فراج تكون بالصورة التالية :

$$m_1 L_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_1 L_1 g \phi_1 - k a^2 \phi_2 + k a^2 \phi_1 = 0$$

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_1 L_1 g}{m_1 L_1^2} \phi_1 - \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} \phi_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \nu_1^2 \phi_1 - \alpha_1 \phi_2 &= 0 \\ \ddot{\phi}_2 + \nu_2^2 \phi_2 - \alpha_2 \phi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

أي أننا بذلك حصلنا على نظام معادلتين خطيتين تفاضليتين من الدرجة الثانية . حل هذا النظام للمعادلتين يمكن أن يكون بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= A \cos(\omega t + \phi) \\ \phi_2 &= \beta \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

باشتقاق المعادله (3.9) ثم تعويضها في المعادله (3.8)

$$\dot{\phi}_1 = -A\omega \sin(\omega t + \phi), \quad \ddot{\phi}_1 = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi),$$

$$\dot{\phi}_2 = -\beta\omega \sin(\omega t + \phi), \quad \ddot{\phi}_2 = -\beta\omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

نعوض في المعادله (3.8) عن كل من ϕ_1 و ϕ_2 بحصل

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 A + \nu_1^2 A - \alpha_1 \beta &= 0 \\ -\omega^2 \beta + \nu_2^2 \beta - \alpha_2 A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10) \quad \text{على}$$

هذا النظام للمعادلات يمتلك حلاً حقيقياً في تلك الحالة

فقط إذا كان محدده أو *Determinant*

يساوي صفر :

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ومن هنا نحصل على معادلة لأجل تحديد ω

$$(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

$$\nu_1^2 \nu_2^2 - \nu_1^2 \omega^2 - \nu_2^2 \omega^2 + \omega^4 - \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (3.11)$$

حل هذه المعادلة ذات الأس الترباعي يعطي ترددين
ممكنين لأمتزازات النظام هما ω_1 و ω_2 حيث

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right] \quad (3.12)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right] \quad (3.13)$$

هذين الترددين ω_1 و ω_2 لا يساويان الترددات الذاتية
الثلاثية ν_1 و ν_2 ويسمان (ω_1, ω_2) بالترددات
الخاصة أو الطبيعية للنظام.

الترددات الطبيعية للنظام ω_1 و ω_2 لا تعتمد على
اختيار الاحداثيات ولا على الترددات الذاتية ν_1 و ν_2 بل
تتحدد فقط اعتماداً على صفات وخصائص النظام نفسه.
من المعادلة (3.10) نستطيع الحصول على العلاقة
بين A و β لأي من الترددين ω_1 أو ω_2 . بالنسبة
للتردد ω_1 :

$$\left[\frac{B}{A} \right]_{\omega_1} = \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}$$

$$= \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1} = \mathcal{H}_1 \quad (3.14)$$

القدار $\mathcal{H}_1$ يتحدد تماما بواسطة مقاييس النظام ولا يعتمد على الظروف الابتدائية ويسمى معامل قسمة السعات على التردد ω_1 .

بهذا الشكل، فإن سعة ذبذبه أحد البندولين على التردد ω_1 يمكن أن تكون حرة (هذه السعة تتحدد بواسطة الظروف الابتدائية)، بينما سعة ذبذبه البندول الثاني وعلى نفس التردد فهي دائماً موجودة بعلاقة محددة مع سعة ذبذبة البندول الأول (مرتبطه به).

الآن نجد القدار $\mathcal{H}_2$ وهو معامل قسمة السعات على التردد ω_2 .

$$\left[\frac{B}{A} \right]_{\omega_2} = \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\alpha_1} = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1} = \mathcal{H}_2 \quad (3.15)$$

وبالتالي يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية المعبره عن الحركة الاهتزازيه للنظام (المعادله 3.8) بالمليه :

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \\ \phi_2 &= B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \\ &= \mathcal{C}_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \mathcal{C}_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \end{aligned} \right\} (3.16)$$

الثوابت A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 تتحدد من الظروف الابتدائية. توضح المعادلة (3.16) أنه في الحالة العامة تمثل ذبذبة كل بندول مجموع ذبذبتين توافقتين بالترددين الطبيعيين ω_1, ω_2 .

هذه الذبذبات التوافقية تسمى الطرز الطبيعية *Normal modes*.

إذا كان الترددان الطبيعيين ω_1, ω_2 قريبين من بعضهما، فإن مجموع الذبذبات يحمل طبيعة التوافقية. (لاحظ البند 8 من الفصل الأول).

بواسطة الاختيار الخاص للظروف الابتدائية نستطيع الحصول على ذبذبات توافقية نقيه للنظام طين الترددين ω_1 أو ω_2 .

على سبيل المثال: إذا أزعجنا البندولين في بدايته اللحظة الزمنية بطريقة بحيث أن النسبة بين سعتيهما كانت تساوي $\mathcal{C}_1$ ، بينما سرعتهما متساويتان وكل منهما يساوي صفراً، فإن النظام يبدأ الاهتزاز بتردد ω_1 .

العلاقة (3.16) يمكن النظر اليها كقائمين للتحول الخطي للاحداثيين ϕ_1, ϕ_2 الى الاحداثيين x, y :

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (3.17)$$

حيثذاك يتضح ان كلا من هذين الاحداثيين الجديدين x و y ينجز ذبذبات توافقية بتردد w_1 (أو w_2) (x بـ w_1 و y بـ w_2) وبأية ظروف ابتدائية .
 الاحداثيان x, y - يسميان بالاحداثيات الطبيعية للنظام .
 الاحداثيان φ_1 و φ_2 يرتبطان بالاحداثيين الطبيعيين x و y بالعلاقة التالية :

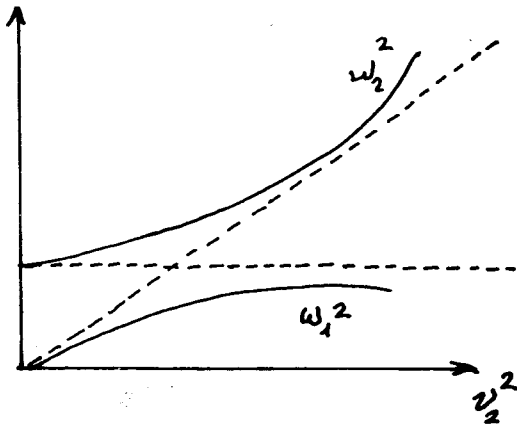
$$\varphi_1 = x + y, \quad \varphi_2 = 2\ell_1 x + 2\ell_2 y. \quad (3.18)$$

ليس من الصعوبة التوضيح بشكل عام، أنه بالنسبة لأي نظام بدرجةتي حرة يمكن الانتقال الى الاحداثيات الطبيعية بواسطة التحولات الخطية المطابقة .
 بالإضافة الى ذلك، فان معادلي الحركة الامتزاجية بالاحداثيين x و y تتلك الهيئة :

$$\ddot{x} + w_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + w_2^2 y = 0. \quad (3.19)$$

خصوصيات المعادلات المكتوبة بالاحداثيات الطبيعية هي غياب تلك الحدود التي تصف الارتباط بين الانظمة الثلاثية . وبصورة مماثلة فان في التعابير المتكلمة للطاقة الحركية والكامل المكتوب بالاحداثيات الطبيعية تغيب الحدود بالاحداثيات المتحولة . وبقدرة ان كل احداثي طبيعي ينجز ذبذبة توافقية بأحدى الترددات الخاصة ، فان هذه الترددات تسمى ترددات طبيعية للنظام .

ω^2 العلاقة بين الترددات الطبيعية والثائيه للنواسين المرتبطين
والان بحث اعتماد الترددات الطبيعية للنظام ω_1, ω_2 على الترددات
الثائيه ν_1, ν_2 للنواسين . ولغرض التحديد سوف نعتبر
ان هناك تردد واحد فقط يتغير هو ν_2 . وبمساعدة
العلاقة (3.12) و (3.13) يمكن ان نرسم منحنى اعتماد مربع
التردد الخاص للنظام على ν_2^2 كما في الشكل (3.3)



شكل 3.3

وهذا المنحنى يسمى
منحنى FIN وكما
نلاحظ انه في اية
قيمة للتردد الثائي
 ν_2^2 فان الترددات
الثائيه تقع بين
الترددات الخاصه .
وهذه الصفة هي
صفة عامه لاي نظام او

لكل الانظمة بدرجتي حريه .

والان نحلل بالتفصيل حالة ، عندما تختلف بقوة
الترددات الثائيه $\nu_2^2 > \nu_1^2$ ، $\nu_2^2 < \nu_1^2$
وحالة ، عندما يكونا متساويين $\nu_1^2 = \nu_2^2$. ففي
الحاله عندما $\nu_2^2 < \nu_1^2$ تكون الترددات الخاصه
متساويه لـ

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &\simeq \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2 \\ \omega_2^2 &\simeq \nu_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2 \end{aligned} \right\} . \quad (3.20)$$

وبقدر ما ان $\omega_1 \omega_2 \ll \nu_1^2 \nu_2^2$ فان التردد ω_1 يكون قريبا من ω_2 والتردد ω_2 يكون قريبا من ν_1 .

وفي الحالة عندما $\nu_2^2 \gg \nu_1^2$ فان الترددات الطبيعية تساوي

$$\omega_1^2 \approx \nu_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 / \nu_2^2, \quad \omega_2^2 \approx \nu_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 / \nu_2^2. \quad (3.21)$$

اما في حالة مساواة الترددات الثنائي $\nu_1^2 = \nu_2^2$ فلان الترددات الطبيعية تأخذ الاشكال التاليه :

$$\omega_1^2 = \nu^2 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \omega_2^2 = \nu^2 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (3.22)$$

وفي حالة مساواة كتلي البدولين فان العلاقة (3.22) تبسط :

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2K\alpha^2}{mL^2}. \quad (3.23)$$

وبهذا الشكل ففي حالة الاختلاف القوي للترددات الثنائي ν_1 و ν_2 ، فان الترددات الطبيعية ω_1, ω_2 يكونان قريبين الى الترددات الثنائيه .

وبقدر تقارب الترددات الثنائيه فان الترددات الخاصه او الطبيعيه يستعدان عنهما .

ان اكبر اختلاف بين ω و ν يظهر قرب مساواة الترددات الثنائيه ν_1, ν_2 .

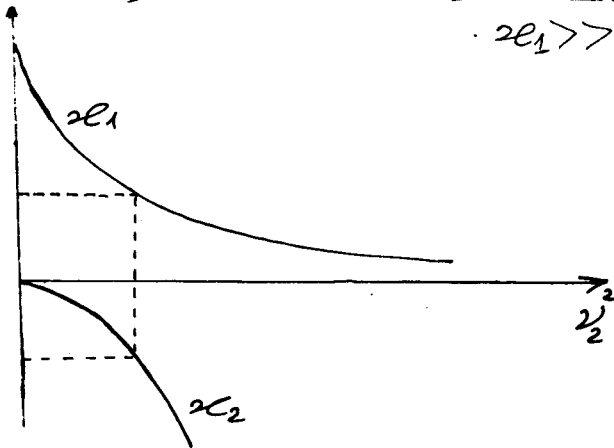
تتابع الآن سلوك معاملات القسمة للسعات (المعاملات ν_1, ν_2) :

في حالة تغير التردد الثنائي ν_2 .

بما ان ν_1 يكون دائما اكبر من ω_1 واقل من ω_2 ،
لذلك فمن العلاقتين (3.14) و (3.15) ينتج أن $\mathcal{L}_1$
يكون دائما اكبر من صفر، بينما $\mathcal{L}_2$ يكون دائما
اقل من الصفر. لذلك فأن ذبذبات اليندولين على
التردد ω_1 يحدثان دائما بطور واحد.
اما الذبذبات على التردد ω_2 فهي دائما بطور
مضاد . من العلاقتين (3.14) و (3.15) يمكن
أن نهي اعتماد معاملات قسمة السعات بالاحدييات
على التردد الثنائي ν_2 ، اي اعتماد $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$
على ν_2^2 في الحالة عندما $m_1 = m_2$

(لاحظ الشكل 3.4)

فمعامل قسمة السعتين $\mathcal{L}_1$ الذي يتفق مع الذبذبات
بطور واحد أي مع تلك الذبذبات لليندولين الذين
لهم نفس الطور (ذبذبات الطراز الاول)
وهي حالة عندما : $\nu_2 \ll \nu_1$ ، فان $\mathcal{L}_1 \approx \frac{\nu_1^2}{\alpha_1}$
اي ان $\mathcal{L}_1 \gg 1$



شكل 3.4

اعتماد معامل فسمدة السعات على الترددات الثلاثية:
 بحدود زيادة ν_2 فان المعامل ν_{e1} يقل ، أي
 ان الزيادة في ν_2 تعني النقصان في ν_{e1} حتى
 تبلغ الحالة التي فيها $\nu_1 \gg \nu_2$ ، حينئذ تصبح
 ν_{e1} أقل بكثير من وحده وهي تساوي بالتقريب

$$\nu_{e1} \cong d_2 / \nu_2^2.$$

سوف نعتبر ان تغيّر ν_2 مرتبطاً فقط بتغيّر
 طول البندول الثاني L_2 . حينذاك في حالة
 عندما $\nu_1 \gg \nu_2$ سيكون طول البندول الثاني أكبر
 بكثير من طول البندول الاول L_1 .

اما في حالة $\nu_1 \ll \nu_2$ فان $L_2 \ll L_1$ وان سعة
 الذبذبات التوافقية ذات الطور الواحد للبندول
 الطويل أكبر دائماً من سعة الذبذبات للبندول
 القصير (الشكل 4 . 3) . ان ذلك مرتبط بكون
 التردد الخاص للذبذبات ذات الطور الواحد
 ω_1 أقل من التردد الخاص للذبذبات التي
 بطور مضاد ω_2 ، ولذلك فان طاقة الذبذبات
 ذات الطور الواحد تكون بالاساس عند العقاديير
 المنخفضه للتردد الثنائي للنظام . وبالعكس فان
 طاقة الذبذبات ذات الطور المضاد تكون كامنه
 عند النظام الثنائي ذو التردد العالي ، أي ففي
 التردد ω_2 .

وبالتالي نستطيع ان نستخلص الاستنتاجات التالية :

1 (البندول الأكثر قصرا يهتز بسعة اكثر . وطبقا لنزله :

$$\alpha_1 > \alpha_2 \quad \text{لما} \quad |\alpha_2| < 1$$

$$\alpha_2 > \alpha_1 \quad \text{لما} \quad |\alpha_2| > 1$$

وفي حالة مساواة الترددات (عندما $\alpha_1 = \alpha_2$)

فان معاملات القسمة تبدو متساوية في قيمها المطلقة،

أي أن

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \\ = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (3.24)$$

(2) اذا كان البندولان متطابقين، أي أن

$$L_1 = L_2, \quad m_1 = m_2,$$

فان معاملا قسمة السعات α_1 و α_2 يكونان

متساويين ويساويان بقيمهما المطلقة لوحده واحده.

وبالتالي يعني ذلك تساوي سعتي ذبذبات كلا

البندولين على الترددين الخاصين ω_1 و ω_2 .

(3) في حالة عدم تطابق البندولين ($m_1 \neq m_2$)

فان سعتي ذبذباتهما تكونا مختلفتين حتي في

حالة تكافئ تردداتهما الثنائيه α_1 و α_2 .

لكن الطاقة في حالة تكافئ الترددات الثنائيه

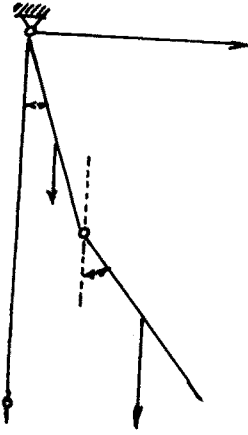
تكون موزعه بالاحداثيات بصورة متساويه .

مثال : بندول ثنائي يتكون من سلكين متجانسين متكافئ

الطول $AB=BC=2L$ ولهما وزن واحد $P_1 = P_2 = P$ ،

مرتبطان بفصل B كما موضح على الشكل 5.3، هذا

البندول ينجز ذبذبات صغيره في مسبقته شاقولي



شكل 3.5

حول وضع التوازن A_0 ،
 إضافة الى ان السلك
 AB يدور حول المحور A ،
 بينما السلك BC - حول
 المفصل B . جد معادلة
 الذبذبات الصغيرة لهذا
 البندول حول الوضع
 الشاقولي لتوازيه المستقر .
 الحل : اذا كان السلطان
 صليدين بصورة مطلقه ،
 فان النظام المبحوث يمتلك
 درجتين من الحرية .

كاحداثيين مستقلين نأخذ الزاويتين φ_1 ، φ_2 ،
 اللتين يصنعهما السلطان AB و BC مع الشاقول . في
 وضع التوازن المستقر عندما كلا السلكين ينطبقان
 على A_0 كانت :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 .$$

نختار محاور الاحداثيات بالصورة المبينه على الشكل 3.5 .
 الطاقة الحركيه للبندول الثنائي تساوي مجموع الطاقات
 الحركيه لكل من السلكين .
 السلك AB يدور حول المحور A ، وبالتالي ، فان طاقته
 الحركيه

$$T_1 = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2 = \frac{2}{3} \frac{P}{g} L^2 \dot{\varphi}_1^2 . \quad (1)$$

حيث $\bar{J}_A$ - عزم عطالة السلك بالنسبة للمحور A .
 السلك BC ينجز حركته معقدة ، طاقته الحركية T_2 حسب بديهية معروفة تساوي الطاقه الحركية لمركز العطالة (اذا افترضنا أن كل كتلة السلك متمركزة فيه) مجموعة مع الطاقه الحركية للسلك في دورانه النسبي حول مركز العطالة

$$T_2 = \frac{P}{2g} (\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2) + \frac{1}{2} J_D \dot{\varphi}_2^2 . \quad (12)$$

حيث x_D و y_D - إحداثيات النقطة D التي تعمل متصف
 السلك BC ، بينما $\bar{J}_D$ - عزم العطالة بالنسبة الى D .
 نعوض في هذا التعبير

$$x_D = L (2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) ,$$

$$y_D = L (2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) ,$$

$$J_D = \frac{P}{g} \frac{L^2}{3} ,$$

نعصل

$$2T = \frac{PL^2}{g} [4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{P}{g} \frac{L^2}{3} \dot{\varphi}_2^2 . \quad (13)$$

الطاقة الحركية لكل النظام

$$T = \frac{2PL^2}{3g} [4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] . \quad (14)$$

اذا كان البندول ينجز ذبذبات صغيرة ، لذلك عند تحليل $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ يمكن ان نتحدد بالحد الاول واضعين
 $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1$.

حيث أن (5) —
$$T = \frac{2PL^2}{3g} (4\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 3\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2).$$

الطاقة الكامنة تساوي شغل اوزان السلكين عند ازاحة النظام من بعض الاوضاع (ϕ_1 ، ϕ_2) في التوازن انشاقولي .
شغل وزن السلك الاول على هذه الازاحة سوف يساوي

$$U_1 = PL(1 - \cos \phi_1).$$

شغل وزن السلك الثاني BC

$$U_2 = PL[2(1 - \cos \phi_1) + (1 - \cos \phi_2)].$$

الطاقة الكامنة لكل النظام تساوي

$$U = PL[4 - 3\cos \phi_1 - \cos \phi_2].$$

تحليل الطاقة الكامنة U بدرجات الحرية

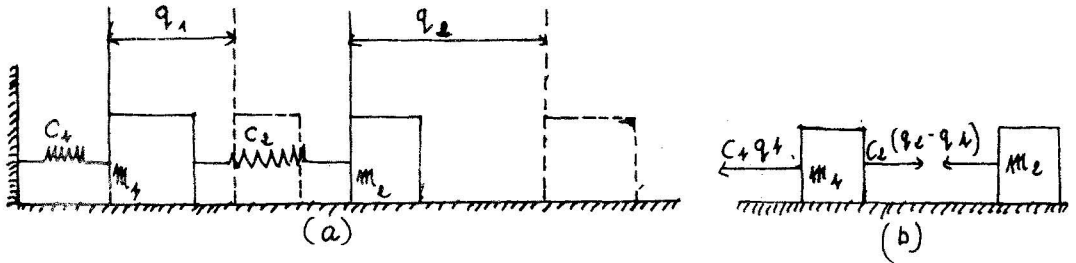
ϕ_1 و ϕ_2 يحددان مع حدود الترتيب الثاني بالنسبة الى ϕ_1 و ϕ_2 وسوف يمتلك بالنسبة للمقادير الصغيرة من ϕ_1 ، ϕ_2 الميئة التاليه :

$$2U = PL(3\phi_1^2 + \phi_2^2).$$

مثال 3: جسمان كتليهما m_1 ، m_2 موجودان على سطح أفقي أملس . ربط الجسم الاول الى حائط بواسطة نابض معامل صلادته C_1 ووصل الجسم الثاني بالاول بواسطة نابض ثاني معامل صلادته C_2

كما يوضح ذلك على الشكل 8.6. جد معادلة حركة النظام اذا أُكْبِبَ الجسم الثاني سرعه مقدارها v_0 في الوضع عندما كلا النابضين لم يتمددا بعد . جد

كذلك التردد الخاص أو الطبيعي للنظام .



شكل 6 . 3

الحل : النظام يمتلك درجتى حريه ، اي يمكن تحديد أوضاع النظام باحداثيين مستقلين .
 الاحداثي الاول q_1 - يحدد ازاحة الجسم الاول من وضع التوازن الابتدائي ، الاحداثي الثاني q_2 - يحدد ازاحة الجسم الثاني من وضع التوازن الابتدائي
 كما يلاحظ ذلك من الشكل 6 . 3 .
 نستخدم معادلات لاغرانج لصياغة المعادلات التفاضليه لاهتزازات النظام الصغيره . نجد معادلة الطاقة الحركيه للنظام

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 \quad (1)$$

اما الطاقة الكامنه للنظام فهي تتكون أيضا من الطاقة الكامنه للجسمين

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} c_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2. \quad (2)$$

لان $q_1 -$ هي عبارة عن استطالة النابض الاول ، أما $(q_2 - q_1)$ فهي استطالة النابض الثاني .
 ناتي الان لصياغة معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (3)$$

حيث $i = 1, 2$ ، لأن النظام يمتلك درجتين للحرية .
 وبقدر ما أن :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \ddot{q}_1 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 \quad \text{وإن} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

لذا فان المعادله التفاضليه الاولى ل لاغرانج تعطيك الصوره
 التاليه :

$$m_1 \ddot{q}_1 - c_1 q_1 + c_2 (q_2 - q_1) = 0. \quad (5)$$

اما بالنسبة للجسم الثاني فان

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 \quad , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \ddot{q}_2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = c_2 (q_2 - q_1).$$

لذلك فالمعادله التفاضليه لمركبة الجسم الثاني

$$m_2 \ddot{q}_2 - C_2(q_2 - q_1). \quad (7)$$

وبهذا الشكل حصلنا على نظام لمعادلتين تفاضلتين هما (5) و (7).

ولغرض إيجاد التكامل العام لهذا النظام من المعادلات الخطية التفاضلية والتجانسه ذات المعاملات الثابته سوف نبحث الحلول الخاصه بحيثه

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= B \sin(\omega t + \varphi), \quad q_2 = D \sin(\omega t + \varphi), \\ \ddot{q}_1 &= -B\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \quad \ddot{q}_2 = -D\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \right\} (8)$$

نعوض تفاضل المعادله (8) في نظام المعادلات (5) و (7) نجد ان :

$$\left. \begin{aligned} B\omega^2 m_1 - BC_1 + C_2(D - B), \\ D\omega^2 m_2 - C_2(D - B) \end{aligned} \right\} (9)$$

في هذا النظام للمعادلات توجد ثلاثة مجاهيل B و D و ω . من هذه المجاهيل نستطيع ان نجد العلاقه بين D و B . من المعادله (9) للنظام (9) نجد ان

$$\frac{B}{D} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \omega^2}. \quad (10)$$

ومن المعادله (2) للنظام المعادلات (9) نجد أن:

$$\frac{B}{D} = \frac{C_2 - m_2 \omega^2}{C_2}. \quad (11)$$

وبمساعدة المعادلتين (10) و (11) نحصل على معادله التردد، أي أن

$$\frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega}{C_2} = \frac{C_2}{C_2 - m_2 \omega} \quad (12)$$

ومن هذه المعادلة نجد أن :

$$\omega^4 - \left(\frac{C_2}{m_2} + \frac{C_1 + C_2}{m_1} \right) \omega^2 + \frac{C_1 C_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (13)$$

ومن هذه المعادلة الرباعية الأس نجد الترددات الخاصة
والطبيعية للنظام ω_1 و ω_2 ، أي ترددا الطراز الأول
(ω_1) والطراز الثاني (ω_2) .

$$\omega_{1,2} = \sqrt{0,5 \left(\frac{C_2}{m_2} + \frac{C_1 + C_2}{m_1} \right)} \pm \sqrt{0,25 \left(\frac{C_2}{m_2} + \frac{C_1 + C_2}{m_1} \right)^2 - \frac{C_1 C_2}{m_1 m_2}} \quad (14)$$

وبهذا الشكل يظهر من المعادلة (14) إمكانية تحقق ترددتين
ماديين أو طبيعيين ω_1 ، و ω_2 .

وبقوة خطية المعادلتين (5) ، (7) فإن الحد العام
أو التكاملي العام يمكن أن يكون مجموع حلين خاصين بميزة
المعادلة (8) ولكن بترددتين مختلفتين ω_1 و ω_2 ، وبطورين
مختلفين φ_1 ، φ_2 (طوريين ابتدائيين يتفقا مع الطراز
الأول الذي تردده ω_1 ومع الطراز الثاني بالتردد ω_2)
كذلك بسعتين مختلفتين ، أي أن الحل في المعادلة (8)
ياخذ الصورة التالية :

$$q_1 = B_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (15)$$

$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + D_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2).$$

حيث

$$q_1 = B_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), \quad (16)$$

$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1).$$

يصنعان الذبذبه الاساسيه الاولى للنظام ، أي ذبذبه الطراز الاول .

$$q_1 = B \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (17)$$

$$q_2 = D_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2).$$

فهما

يصنعان الذبذبه الاساسيه الثانيه ، أي ذبذبه

الطراز الثاني . ومن جانب آخر فان علاقة السعات في

الذبذبه الاساسيه الاولى من المعادله (10) بوضع

$$\omega = \omega_1$$

$$\left[\frac{B_1}{D_1} \right]_{\omega_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \omega_1^2} = \mathcal{L}_1. \quad (18)$$

ومن الذبذبه الاساسيه الثانيه نحصل

$$\left[\frac{B_2}{D_2} \right]_{\omega_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \omega_2^2} = \mathcal{L}_2. \quad (19)$$

حيث $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ معاملتا قسمة السعات للطرازين

(النغمتين) الاول والثاني . لذلك يأخذ الحـل

العام في المعادله (15) الميئه التاليه

$$q_1 = 2\ell_1 D_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + 2\ell_2 D_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (20)$$

$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + D_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2).$$

نلاحظ هنا ان سعة الجسم الثاني حرة ، بينما سعة الاول مقيدة ، وهذا يعتمد على ظروف التجربه ، اي ان الثوابت الحرة :

$$\phi_1, \phi_2, D_1, D_2$$

تحدد من الظروف الابتدائية للحركة .

طبقا لشروط المسأله ، عند $t=0$ فان

$$q_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dot{q}_2 = v_0. \quad (21)$$

نعوض مقادير المتغيرات للمعادله (21) في المعادله (20) ، نحصل :

$$\left. \begin{aligned} 2\ell_1 D_1 \sin \phi_1 + 2\ell_2 D_2 \sin \phi_2 &= 0 \\ D_1 \sin \phi_1 + D_2 \sin \phi_2 &= 0 \\ D_1 \omega_1 \cos \phi_1 + D_2 \omega_2 \cos \phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

من المعادله (22) تتحدد جميع الثوابت الحرة للتكامل

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \text{حيث}$$

أي أن الطور الابتدائي لكلتي الذبذبتين الاساسيتين يساوي صفر . اما سعات الذبذبتين الاساسيتين فتساوي :

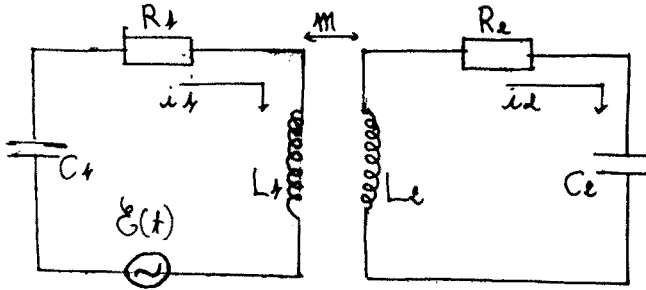
$$D_1 = \frac{v_0}{\omega_1(B_2 - B_1)}, \quad D_2 = \frac{v_0}{\omega_2(B_1 - B_2)} \quad (23)$$

طبقا للمعادله (20) ، فان حركة النظام تمثل تركيب

ذبذبتين توافقيتين بترددتين مختلفين .

3 الذبذبات الاضطرابيه في الانظمه بدرجتي حريه :

نبحث الاهتزازات الاضطرابيه في نظام مكون من دائرتي حث (ملفين لدائرتين) مرتبطتين وطبق على احدهما جهد خارجي متناوب كما في الشكل (3.7)



شكل 3.7

الشكل 3.7 يصور الدوائر الكهرمائية المرتبطة في حالة وجود التأثير الخارجي (دائرتين مرتبطتين حثياً). نكتب معادلات الذبذبات لهذه الدوائر معطيين في البداية الخمود

$$\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} = E_0 \cos \omega t + M \frac{di_2}{dt} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

حيث i_1 ، i_2 - التيارين في الدائرتين .

L_1 ، L_2 ، C_1 ، C_2 - الحث والسعات في

الدائرتين ، M - معامل الحث المتبادل . في النظام

الخطي يصح تطبيق او استخدام مبدأ التراكب
لذلك يكفي ان نبحث او ندرس تأثير القوة الخارجية
التوافقية $E(t) = E_0 \cos \omega t$ على النظام
ففي هذه الحالة فإن معادلات اهتزازات التيارات
تمتلك الاشكال التاليه :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_1 + \gamma_1^2 \dot{c}_1 - \alpha_1 \ddot{c}_2 &= -\frac{E_0}{L_1} \omega \sin \omega t \\ \ddot{c}_2 + \gamma_2^2 \dot{c}_2 - \alpha_2 \ddot{c}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

حيث

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \gamma_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}, \quad \alpha_1 = \frac{M}{L_1}, \quad \alpha_2 = \frac{M}{L_2} \quad (3.26)$$

الذبذبات في النظام سوف تتألف او تتكون
من : - ذبذبات خاصة بترددات ω_1 ، ω_2 ومن
ذبذبات اضطرارية بتردد القوة الخارجية ω .
بما أن الذبذبات الخاصة في الانظمة المماثلة قد
بحثناها سابقا لذلك فلان نتحدد فقط بدراسة
الذبذبات الاضطرارية ، لذلك فسوف نفتش عن حل
للمعادلة (3.25) بالصورة التالية :

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_1 &= I_1 \sin \omega t \\ \dot{c}_2 &= I_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

حيث I_1 ، I_2 - سعتي التيارين ، بإشتقاق المعادله
(3.27) مرتين ثم تعويضها في المعادله (3.25) نحصل على

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_1^2 - \omega^2) I_1 + \alpha_1 \omega^2 I_2 &= \frac{E_0 \omega}{L_1} \\ (\gamma_2^2 - \omega^2) I_2 + \alpha_2 \omega^2 I_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

من هذه المعادلة ومن جزئها الثاني ينتج أن

$$I_2 = \frac{-\alpha_2 \omega^2 I_1}{(\nu_2^2 - \omega^2)} \quad (3.29)$$

هذه العلاقة المحصلة للسعات I_1 ، I_2 على التردد $\omega = \omega_1$ تتطابق مع معامل قسمة السعات $\mathcal{L}_1$ في حالة الذبذبه الخاصه بتردد ω_1 .

أما على التردد $\omega = \omega_2$ فإن علاقة السعات $\mathcal{L}_2$. وبهذا الشكل فان علاقة سعات الذبذبات الاضطرابيه

في الدوائر الكهربائيه تتطابق مع علاقة سعات الذبذبات الخاصه (على نفس التردد المتناظر) .

وبتمويض العلاقة (3.29) في المعادله (3.28) ،

الجزء الاول - نحصل على تعبير لـ I_1 و I_2

$$I_1 = \frac{-\mathcal{E}_0 \omega (\nu_2^2 - \omega^2)}{L_1 [(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4]} \quad (3.30)$$

$$I_2 = \frac{\alpha_2 \mathcal{E}_0 \omega^3}{L_1 [(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4]} \quad (3.30')$$

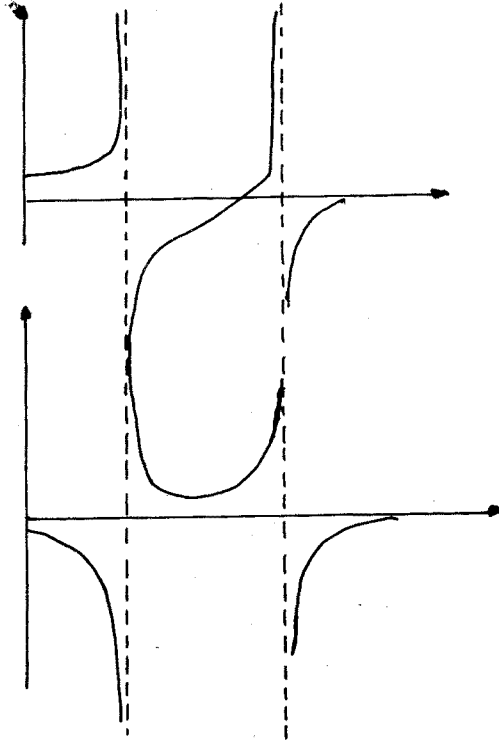
على الشكل (3.8) وضع اعتماد I_1 ، I_2 على تردد القوة الخارجيه ω .

ففي النقطة $\omega = \omega_1$ و $\omega = \omega_2$ فان السعات I_1 ، I_2

يؤولان الى المالانهايه .

وبهذا الشكل ففي النظام بدرجتين حررتيه فان الزيادة الاستجابيه (زياده التناغم) لسعة الذبذبه تحدث

على كلا الترددتين الخاصين ω_1 ، ω_2 .



شكل 3.8

يُبين هذا الشكل اعتماد السعات لنظام محافظ
بدرجتي حريته على تردد القوة الخارجية .

فعندما تكون $\omega < \omega_2$ ، فإن التيارات i_1 ، i_2

ينجزان ذبذبات متضادة الطور. وعندما تكون $\omega > \omega_2$

$\omega > \omega_2$ ، فإن الذبذبات المنجزة في هذه الحالة تكون بطور واحد. أما النقطة $\omega = \omega_2$ فمضي

هامة بسبب أن السعة I_1 عند هذه النقطة تؤول

الى الصفر. أي أنه في هذه النقطة يحدث هدوء أو

توقف للذبذبه ، في نفس الدائرة التي طبق

عليها الجهد الخارجي أو القوة الخارجية ، $\mathcal{E}(t)$.

أما في الدائرة الثانية فإن الذبذبات لا تؤول الى

الصفر بأيّة نهاية للتردد ω . أن تردد الهدوء أو

التوقف في الحالة العامه يعتمد على أي من

الدائرتين الشائيتين للنظام المعقد ، قد طبق الجهد

الخارجي .

ان هذا التردد (تردد الهدوء) يساوي دائما

التردد الشائي لذلك الجزء من الدائرة المقده الذي

يحصل عند قطع السلسلة في نقطة التوحيـل

بالمصدر الخارجي .

نفسر السبب الفيزيائي لغياب الذبذبه في الدائرة

الاولى عند $\omega = \omega_2$.

ولمذا الغرض نعتبر أن المصدر المتناوب المطبق على

الدائرة الاولى يكون بنفس تردد الذبذبة في الدائرة

الثانية اي أنه قد أثار في الدائرة الثانية تردد ω_2 .

$$\mathcal{E}_{21} = M \frac{di_1}{dt} = M \frac{d}{dt} (I_2 \sin \omega t) = M \omega I_2 \cos \omega t. \quad (3.31)$$

$$= -\mathcal{E}_0 \cos 2\omega_2 t.$$

وكما نلاحظ أن $\mathcal{E}_{21}$ لدرجة من الدقة أنه ينوب عن

أو يكون القوة الخارجية المتنا وبه .
لذلك فإن الذبذبات الاضطرابية في الدائره الاولى
على هذا التردد (على التردد $\frac{1}{2}$) لا تظهر أو
لا تحدث . وفي التطبيقات العملية يستخدم بصورة واسعة
الغناء أو أعمال الذبذبات غير المرغوبه في الدائره
المطبق عليها جملدا خارجيا بتردد معين وذلك بمساعدة
دائره اغاغة مبنية على هذا التردد، بنفس الطريقة
التي عنفت بها المرشحات الكهربية على فواصل
ترددية في المستقبلات الراديوية وغيرها .

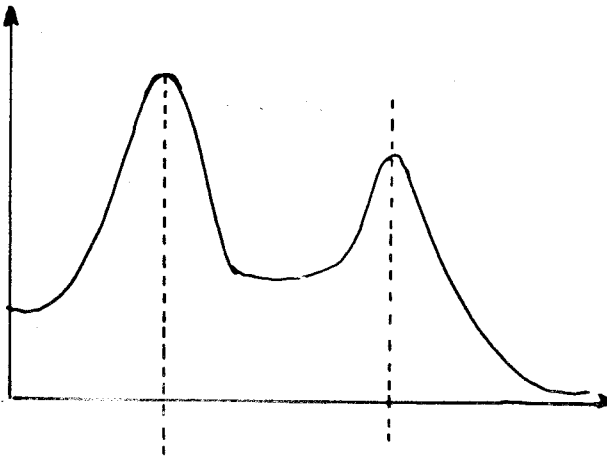
٤. الاختزازات الاضطرابية في الانظمة المشتتة بدرجتي حرية

حساب الخمود في الدائره الكمبرائية في حالة الاختزازات الاضطرابية يقود الى أن تصبح سعة الاختزازات في حالة الرنين نهائية .

ففي $\omega = 2\omega_2$ فان سعة الذبذبه في الدائره الكمبرائية الاولى في حالة حساب الخمود لا يؤول الى الصفر .

وبهذا اشكل فان سحب الذبذبات غير المرغوبه في النظام المشتت لا يمكن بأية حال أن يكون كاملا . ولكن قلة سعة الذبذبات على التردد $2\omega_2$ في حالة الخمود الضعيف كبيرة جدا .

على الشكل (3.9) المقابل



يوضح منحنى الاستجابة في الدائرة الاولى في حالة وجود الخسران في الطاقة .

ان وجود الخسران في الطاقة يقود الى قلة سعة الذبذبة قرب الرنين والى توسع

منحنى الرنين .

شكل 3.9

وفي حالة تقارب ω_1 و ω_2 الى ما فيه الكفاية فإن الخسران يمكن أن يحول منحني الاستجابة في تحذب واحد يخفي تماما الفجوات بين الترددين .
 مهمة الامتزازات الاضطرابيه في الانظمة المشتتة بدرجة حرة من الملائم أن تُحل باستخدام طريقة السعة المعقدة .

المعادلة التي تربط السعات المعقدة I_1 و I_2 مع مقاييس الدائره الكهربائيه ومع سعة القوة الكهربائيه المتحركة $\mathcal{E}_0$ تمتلك الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= I_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + j \omega M I_2 , \\ 0 &= I_2 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] + j \omega M I_1 \end{aligned} \right\} \quad 3.32$$

حيث R_1 و R_2 - مقاومات الدائرتين .
 وباستثناء I_2 من المعادلة (3.32) الجزء الثاني نحصل على :

$$\mathcal{E}_0 = I_1 \left[\left(R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2} \right) + j \mathcal{Z} \right] \quad 3.33$$

$$\text{حيث: } \mathcal{Z} = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2}$$

وبهذا الشكل فالنظام المتكون من دائرتي حث مرتبطتين تحول الى دائرة واحدة تضم مقاومة فعاله R_{act} ومقاومه غير فعاله $\mathcal{X}_{rea}$ حيث الفعال قبائي

$$R_{act} = R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})^2}$$

ففي هذه الدائره تؤثر القوة المتناوبه التي
سعتها $\mathcal{E}_0$ وفيها يمر التيار الذي سعته I_1 ،
اما شرط الرنين في هذه الدائرة فهو ان تكون
 $\mathcal{R}_{react} = 0$ مساوية للصفر .

(شرط الرنين هو ان تكون المقاومه
غير الفعاله $\mathcal{R}_{react} = 0$)

$$\Delta_1 = 1 - \frac{\mathcal{V}_1^2}{\omega^2}, \quad \Delta_2 = 1 - \frac{\mathcal{V}_2^2}{\omega^2} : \text{نطبق التعديل النسبي :}$$

والمحدد الثنائي للخمود $\mathcal{V}_1$ حيث
 $\mathcal{V}_1 = R_1 / \omega L_1$
والمحدد الثنائي للخمود $\mathcal{V}_2 = R_2 / \omega L_2$ • حينذاك
وبالاخذ بالاعتبار العلاقات التاليه

$$\mathcal{V}_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \mathcal{V}_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}, \quad \alpha_1 = \frac{M}{L_1}, \quad \alpha_2 = \frac{M}{L_2}$$

فان شرط الرنين ياخذ الصوره التاليه : -

$$\Delta_1 \mathcal{V}_2^2 + \Delta_2 \Delta_1 - \alpha_1 \alpha_2 \Delta_2 = 0. \quad (3.34)$$

وفي حالة تكافئ الترددات الثنائيه للدائرتين
 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ فأل التعديلات تكون متساويه
وحينذاك نحصل على

$$\Delta(\Delta^2 + \mathcal{V}_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0 \quad (3.35)$$

وفي هذه المعادله ثلاثة مقادير Δ :

$$\Delta_1 = 0, \Delta_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \nu_2^2} . \quad (3.36)$$

ومن هنا نجد ثلاثة مقادير لتردد القوى الخارجيه التي قيمارد الفعل $\mathcal{H}_{react} = 0$. وهذه الترددات

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \nu, & \omega_2 &= \nu \sqrt{1 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \nu_2^2}}, \\ \omega_3 &= \nu \sqrt{1 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \nu_2^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

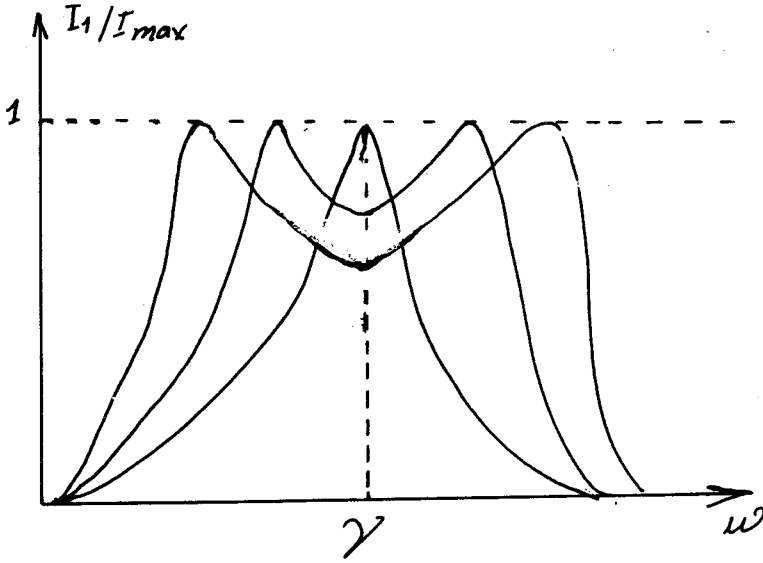
اذا كان غمود الدائره الثانيه كبير بما فيه الكفايه، لذلك يتحقق تردد رنين واحد $\omega = \nu$. وفي هذه الحالة فأن النظام بدرجتى حريه يقود نفسه كنظام بدرجه حريه واحده .

في حالة $\alpha_1 \alpha_2 > \nu_2^2$ تكون هناك ثلاث مقادير للتردد ω التي فيما يتحقق الشرط $\mathcal{H}_{react} = 0$. على الترددات ω_2 و ω_3 فان سعة التيار تبلغ قيمتها الصغرى .

وهذه القيمه الصغرى بقدر ما تكون عميقة بقدر ما يزيد او يفوق معامل الارتباط $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ على اكبر مقدار يزيد عن محدد الخمود للدائره الثانيه كما في الشكل (3 . 10) .

$$\alpha_1 \alpha_2 = \nu_2^2 \quad \text{معامل الارتباط الذي فيه}$$

يسمى معامل حرج .

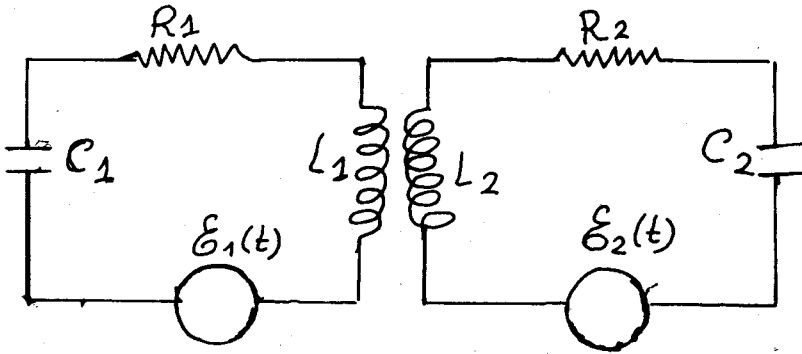


شكل (3 . 10) منحنيات الرنين للدائرتين المرتبطتين
بترددتين ثنائيتين متساويتين

- (1) بمعامل ارتباط : اقل من الحرج
- (2) قريب الى الحرج
- (3) اكبر من الحرج

5. خصائص الذبذبات القسرية في النظام ذو الدائرتين الكهربائيتين .
 في حالة غياب الخمود وعند تطبيق قوتين خارجيتين على كل من الدائرتين
 في ان واحد كما في الشكل 3.11 تصبح معادلة ذبذبات التيارات في مثل
 هذين الدائرتين تمتلك الهئه التاليه :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_1 + \gamma_1^2 \dot{c}_1 - \alpha_1 \ddot{c}_2 &= \dot{\mathcal{E}}_1 / L_1 . \\ \ddot{c}_2 + \gamma_2^2 \dot{c}_2 - \alpha_2 \ddot{c}_1 &= \dot{\mathcal{E}}_2 / L_2 . \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$



شكل 3.11 يبين خارطة دائرتين مرتبطتين بجهدين خارجيين
 في كل منهما .

فإذا كانت القوى الخارجية المتناوبة تؤثر بنفس
التردد الذي يتفق مع تردد الطور الواحد أي أن

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} \cos \omega t ,$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{20} \cos \omega t ,$$

فإن سعتي التيارين I_1 و I_2 يساويان

$$I_1 = \frac{L_2 \mathcal{E}_{10} \omega (\nu_2^2 - \omega^2) - M \mathcal{E}_{20} \omega^3}{L_1 L_2 [(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4]} , \quad (3.39)$$

$$I_2 = \frac{L_1 \mathcal{E}_{20} \omega (\nu_1^2 - \omega^2) - M \mathcal{E}_{10} \omega^3}{L_1 L_2 [(\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4]}$$

من المعادلة (3.39) نستنتج مبدئين أو خاصيتين
هامتين :

1. مبدأ التبادل الذي في حالتنا هذه هو أن:
سعة الذبذبات في الدائرة الثانية عند تطبيق
جهد معين في الدائره الاولى ، تساوي سعة
الذبذبات في الدائره الاولى اذا طبق نفس الجهد
الخارجي المتناوب في الدائره الثانيه . مبدأ التبادل
هذا صحيح بسبب خطية النظام . مثل هذه الحالة
تستخدم بصورة واسعة في التطبيق العملي ، كما في
مستقبله التلفزيون ANTEAN التي تعمل على
الاستقبال والبث بشكل متكافئ .

2 . غياب الرنين عند وجود علاقة محددة بين سعتي
الجمدين الخارجيين :

عندما تكون هناك علاقة معينة بين ξ_{20} و ξ_{10} فإنه
يمكن ان يغيب الرنين في النظام حتى في تلك الحالة
عندما $w = w_1$ أو $w = w_2$. ان هذا الرنين
يغيب اذا أل البسط والمقام في المعادلة (3.39) الى
الصفر في آن واحد في الحالة عندما $w = w_1$ أو $w = w_2$.
نفرس على سبيل المثال : على التردد $w = w_1$ يقول
مقام السعة I_1 الى الصفر . هذا ممكن عند العلاقة
التالية بين ξ_{10} و ξ_{20} .

$$\frac{\xi_{20}}{\xi_{10}} = \frac{\nu_2^2 - w_1^2}{\alpha_2 w_1^2} \quad (3.40)$$

بتعويض الشرط (3.40) في المعادلة (3.39) اخذين بالحساب

$$\nu_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} , \quad \nu_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} ,$$

$$\alpha_1 = M/L_1 , \quad \alpha_2 = M/L_2 . \quad \text{ان}$$

حصل على نتيجة ان مقام هذه المعادلة كذلك يساوي
صفر .

من هذا ينتج انه في حالة تحقق الشرط (3.40) فان
مقام وبسط المعادلة (3.39) يمثلان نفسيهما صفرين
الى المالا نهاية وبترتيب متكافئ .

لذلك فار سعتي الذبذبات في كلتي الدائرتين
تقتيان محدودتين بغیر النظر عن وجود القوى الخارجيه
المطبقة على الدائرتين وبتردد الرنين . الجزء الايمن

من المعادلة (3.40) يساوي :

$$-\frac{1}{2\epsilon_1} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\epsilon_2 \omega_1^2}$$

حيث ω_1 - معامل قسمة السعات الخاصة على التردد ω_1 . لذلك فان الشرط (3.40) يمكن أن يكتب بالشكل التالي :

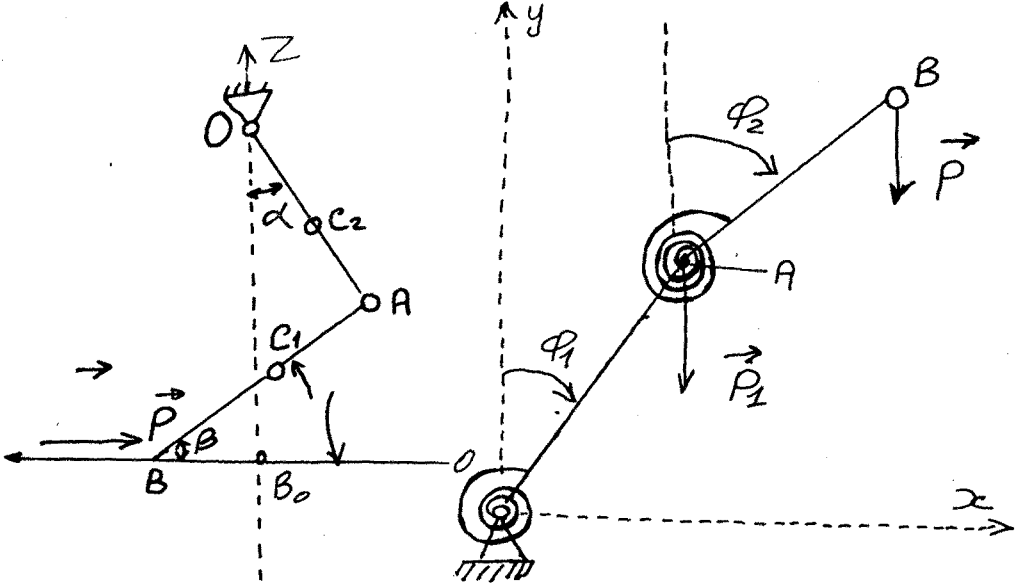
$$A \xi_{10} + B \xi_{20} = 0. \quad (3.41)$$

حيث A و B - سعتي الذبذبات الخاصة للدائرتين على التردد ω_1 .
الشرط (3.41) يسمى شرط تعامد القوى الخارجية للذبذبة الخاصة بتردد ω_1 . تعامد القوى الخارجية للذبذبة الخاصة فيزيائيا يعني أن شغل القوة الخارجية في النظام الثنائي الأول يساوي ويعاكس شغل القوة الخارجية في النظام الثنائي الثاني . وبما أن الشغل الكلي للقوى الخارجية يجب أن يساوي صفراً ، لذلك فإنه لا تحصل زيادة لسعات ذبذبات النظام . فعلى سبيل المثال :-

لواثرت قوتين خارجيتين متضادتين بالطور وبتردد ω_1 على بندولين متناقلين فإن الاهتزاز الرنيني لا يحصل .
تعامد القوى الخارجية والذبذبة الخاصة يمكن استخدامهما للتخلص من الرنين غير المرغوب فيه على أحد الترددات الطبيعية .

أسئلة الفصل الثالث:

س١: التوازن المستقر للسلكين .



شكل (3.12)

شكل (3.13)

سلكين طول كل منهما l ووزنه Q ، يرتبطان مع بعضهما بعضاً في النقطة A . نهاية أحدهما تثبتت في O ، بينما إحدى نهايتي السلك الثاني تمتد على سطح بسيط في B . النقطة A سلطت قوة أفقية ثابتة $\vec{P}$. عندما يكون النظام موجوداً في حالة التوازن ، فإن السلك OA يصنع زاوية α مع الشاقول ، بينما السلك AB يصنع زاوية β مع الأفق . حدد التوازن المستقر للنظام .

٢ بندون ثنائي يتكون من سلكين طويلين على

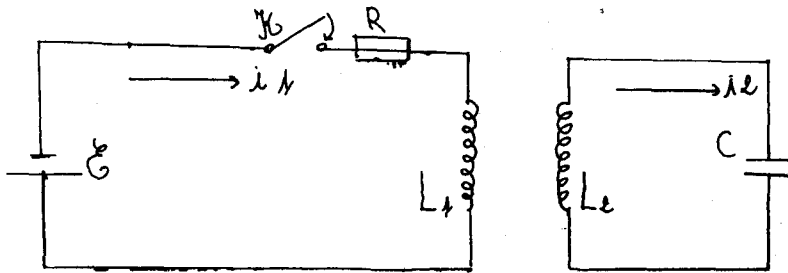
التوالي: $OA = l_1$, $OB = l_2$

(لاحظ الشكل 3.9) .

هذان السلكان يرتبطان مع بعضهما عبر مفصل واحد ويرتبطان في O عبر مفصل آخر بالأرض . قور الجاذبية الأرضية $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ يؤثران في A و B على التوالي .

في النقطتين O و A وضعنا نابضين حلزونيين $Spiral$ غير قابلين للتشوه عندما يكون البندولين في الوضع الشاقولي . حدد معاملًا صلابة السلكين C_1 و C_2 اللذين يصبح بالنسبة لهما الوضع الشاقولي وضع توازن مستقر للنظام في الحالة: عندما تعمل قور الاحتكاك .

٣



شكل 3.10

في الشكل اعلاه جد قانون تغير i_2 في الدائره الثانيه بعد توصيل المفتاح K وتحت شرط ان يكون معامل التأثير المتبادل يساوي $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

الفصل الرابع

الفصل الرابع

الاهتزازات في الانظمة الخطية بدرجة n من الحرية

1. الاهتزازات الخاصة في الانظمة المحافظة
كثير من الانظمة الاهتزازية يجب ان تبحث كأنظمة ذات n درجة حرية . لمثل هذه الانظمة تمتسب الدوائر الكهربائية المعقدة هي صورة خاصة الفلترات الكهربائية . اما في الانظمة الميكانيكية فيمكن استخدام الجزيئات ذات الذرات الكثيرة كمثال على الانظمة الاهتزازية بدرجة n حرية .

ان اهمية نظرية الاهتزازات بدرجات كثيرة من الحرية تتجلى في دراسة البلورات المسننة للأجسام الصلبة .
توصف الحركة في الانظمة ذات n من درجات الحرية — من الاحداثيات المستقلة ، والتي انتخابها يجرى بصورة حرة كما في الانظمة بدرجة n حرية .
ففي الانظمة الكهربائية (الدوائر الكهربائية المعقدة) يمكن اختيار الجهد على كل عنصر من عناصر الدوائر بهيئة متغير مستقل او اختيار التيار الكهربائي في كل وصلة مستقلة . لذلك فان عدد درجات الحرية يحدد كأقل عدد للمتغيرات الضروري للوصف الكامل للحركة .
وكما في الانظمة بدرجة n حرية يمكن استخدام الاحداثيات الطبيعية في الانظمة المبحوثة في هذا المبدأ :
لذا فان عدد الاحداثيات الطبيعية يساوي عدد درجات الحرية للنظام . حركة كل احداثي طبيعي تجرى

بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى. لذلك فان كل
احداثي طبيعي ينجز ذبذبة توافقية بتردد خاص
او طبيعي ، وبالتالي فان أي ذبذبات حرة أو اضطرارية
يمكن تصورها بمهيئة تركيب *Superpositions*
للاعتزازات الطبيعية .

لغرض بحث الاهتزازات الخاصة في نظام بدرجسية
 n من الحرية نستخدم معادلة لاغرانج .

LAGRANGE equation :

استخدام لاغرانج في وصف الحركة في الانظمة ذات
 n درجة حرية :
افرض ان الحركة في النظام تتحدد بـ n من الاحداثيات
المستتجة او المستقلة

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$$

في الحالة الغالبة يمكن أن تصور هذه الاحداثيات
المستتجة كإزاحات لبعض نقاط الجملة او النظام الميكانيكي
أو الشحنات على موصلات الدوائر الكهربائية ، لذلك
فإن الطاقة الكامنة للنظام تصبح دالة للاحداثيات

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{المستتجة :}$$

ففي وضع التوازن المستقر فإن الطاقة الكامنة تمتلك

الصورة التالية : - لاقبل مقاديرها U_{min} .

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s} \right)_{q_{so}} = 0 .$$

(4.1)

جميع قيم S من 1 الى n .
 حيث q_{s0} - مقدار الاحداثي المستنتج q_s عند وضع
 التوازن . فاذا اخترنا بمهيئة احداثيات جديدة
 $X_s = q_s - q_{s0}$ مثلة لانحراف الاحداثي
 عن وضع التوازن ، فبالنسبة للمقادير الصغيرة من X_s
 يمكن ان نكتب

$$U(X_1, X_2, \dots, X_n) - U(0, 0, \dots, 0) =$$

$$= \sum_{s=1}^n \frac{\partial U}{\partial X_s} \Big|_0 X_s + \frac{1}{2} \sum_{s,l=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X_s \partial X_l} \right) X_s X_l \quad (4.2)$$

وبما ان الطاقة الكامنه تتحدد بدقة حتي الثابت
 لذلك نضع $U(0, 0, \dots, 0)$ تساوي صفر . نستخدم المعادلة
 (4.1) ممطين الدرجات العليا لالانحراف نحصل على :

$$U(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{s,l=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X_s \partial X_l} \right) X_s X_l = \sum_{s,l=1}^n k_{sl} X_s X_l \quad (4.3)$$

$U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - هي عبارة عن هيئة موجبة
 مربعة تعتمد على X_s ، وبصورة مماثلة فان الطاقة
 الحركية للنظام تمثل هي أيضا هيئة محددة موجبة
 مربعة تعتمد على السرع العامة $\dot{X}_s$ ، اضافة الى
 $k_{sl} = k_{ls}$. ان

$$T(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_n) = \sum_{s,l=1}^n m_{sl} \dot{X}_s \dot{X}_l \quad (4.4)$$

في المعادلتين (4.3) ، (4.4) الحدود التي تحوى على $S = \ell$ تتطابق مع الطاقة الداخلية للنظم الثائما والافراديه . اما الحدود بـ $S \neq \ell$ ، فانها تتفق مع طاقة الارتباط للنظامين الثائمين S و ℓ . في الحالة الميكانيكية فان M_{SS} و K_{SS} تتفق مع كتل ومرونة النظام الثائي (الافرادى) S . اما اذا استخدمنا الان معادلة لاغرانج :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0,$$

فانما نحصل على n من المعادلات التفاضليه الخطيه من الشكل :

$$\begin{aligned} m_{11}^{\infty} \ddot{x}_1 + m_{12}^{\infty} \ddot{x}_2 + \dots + m_{1n}^{\infty} \ddot{x}_n + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + \dots + k_{1n} x_n &= 0, \\ m_{21}^{\infty} \ddot{x}_1 + m_{22}^{\infty} \ddot{x}_2 + \dots + m_{2n}^{\infty} \ddot{x}_n + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + \dots + k_{2n} x_n &= 0, \\ \dots & \\ m_{n1}^{\infty} \ddot{x}_1 + m_{n2}^{\infty} \ddot{x}_2 + \dots + m_{nn}^{\infty} \ddot{x}_n + k_{n1} x_1 + k_{n2} x_2 + \dots + k_{nn} x_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

لتحليل نظام المعادلات (4.5) يصبح من الملائم استخدام

اشكال المصفوفات (او الماتركس) .

ندخل المصفوف الممثل للكتلة $\hat{m}$ والمصفوف الممثل للمرونة $\hat{k}$

$${}^1M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

كلا المصفوفين $\hat{M}$ و $\hat{K}$ مربعين ومتماثلين .
والآن سوف نعتبر الاحداثيات $X_1, X_2, \dots, X_n$ كمركبات
لمتجه الدبدبة : $\vec{X}$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

طبقا لقاعدة حساب المصفوفات يمكن كتابة المعادلة
(4.5) بميثقة الماتريس أو المصفوف :

$$\hat{M} \vec{\ddot{X}} + \hat{K} \vec{X} = 0. \quad (4.7)$$

المقدار $\hat{M} \vec{\ddot{X}}$ هو عبارة عن متجه (ماتريس بصف
واحد او مصفوف بصف واحد) ويسمى متجه قوة العطالة.
وبالمثل المقدار $\hat{K} \vec{X}$ هو متجه ايضا ويمثل قوة

المرونة ويسمى متجه المرونة .
حل المعادله الماتركسيه (4.7) من الطبيعي ان
يبحث عنه في شكل المتجه :

$$\vec{X} = \vec{A} e^{i\omega t} \quad (4.8)$$

حيث $\vec{A}$ - متجه السعة ، وهو في الحالة العامه يمكن
ان يكون معقدا ، اي أن مركباته هي عبارة عن السعات
المعقدة للذبذبات التي تتطابق مع الاحداثيات .

من المعادلة (4.8) ينتج أن :

$$\vec{\ddot{X}} = -\omega^2 \vec{A} e^{i\omega t}$$

وباستخدام خواص الماتركس وإمكانية مفاضلته يمكن كتابة المعادلة (4.7) بالميتة التالية

$$(-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}) \vec{A} = 0. \quad (4.9)$$

هذه المعادلة الماتركسية تمتلك حلاً فقط بتلك الحالة: عندما يكون محدد معاملاتنا يساوي صفراً، أي عندما

$$| -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} | = 0. \quad (4.10)$$

المعادلة (4.10) هي عبارة عن معادلة الدرجة n بالنسبة إلى ω^2 ، حيث من هذه المعادلة يمكن أن نجد n من الترددات الخاصة لذبذبات الأنظمة ω_s^2 ، حيث

$$s = 1, 2, \dots, n.$$

وبقدر ما أن جميع معاملات المعادلة (4.9) هي أعداد حقيقية، لذا فإن الاتجاه $\vec{X}_s$ الذي يطابق التردد الخاص ω_s يمتلك الميتة التالية:

$$\vec{X}_s = \vec{A}_s e^{j\omega_s t} + \vec{A}_s^* e^{-j\omega_s t}. \quad (4.11)$$

حيث أن اتجاه السعة $\vec{A}_s$ يجب أن يحقق المعادلة التالية:

$$(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}) \vec{A}_s = 0. \quad (4.12)$$

ومنه المعادله الماتركسيه تكافئ نظام n من المعادلات المتجانسه بالنسبة للسعه A_{sm} . الرمز الاول للسعه A_{sm} (الرمز s) يطابق رقم التردد الخاص، أما الرمز الثاني (m) فهو يطابق رقم الاحداثي. من نظام المعادلات (4.12) يمكن ان نجد العلاقه بين السعات: $A_{sm}/A_{s1} = \mathcal{L}_{sm}$ المقدار $\mathcal{L}_{sm}$ ينتج المتجه $\vec{k}_s$ الذي يسمى متجه معامل قسمة السعات على التردد ω_s او يسمى متجه ميكل الذبذبه الخاصه s للنظام . المعاملات $\mathcal{L}_{sm}$ لجميع قيم s تشكل مصفوف مربع يمتلك الميئه التاليه :

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{22} \dots \mathcal{L}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{L}_{1n} & \mathcal{L}_{2n} \dots \mathcal{L}_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

متجه السعه $\vec{A}_s$ يعبر عنه خلال $\vec{k}_s$ بالشكل التالي:

$$\vec{A}_s = A_{s1} \vec{k}_s . \quad (4.14)$$

في الادلعه المحافظه جميع المعاملات $\mathcal{L}_{sm}$ حقيقيه، أي ان ذبذبات جميع الاحداثيات على تردد خاص معين تحدث بطور واحد او باطوار متضاده .

بالنسبة للمتجه $\vec{A}_S^*$ وبصوره ماثله نحصل على

$$\vec{A}_S^* = \vec{A}_{S1}^* \vec{K}_S e^{j\omega_S t} \quad (4.15)$$

ولذلك يمكن تشغيل الذبذبه الخاصه بالشكل

$$\vec{X}_S = \vec{A}_{S1} \vec{K}_S e^{j\omega_S t} + \vec{A}_{S1}^* \vec{K}_S e^{-j\omega_S t} \quad (4.16)$$

لذا فان الحل العام لمعادلة النظام الماتركسيه (4.7) يمثل نفسه تركيب *Superposition* للحلول من نوع الحل (4.16).

$$X(t) = \sum_{S=1} C_S \vec{K}_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) \quad (4.17)$$

حيث $C_S = 2|A_{S1}|$.

في هذا التعبير C_S و φ_S يتحددان من الظروف الابتدائيه ، اما أشكال أو مياكل الذبذبات الخاصه $\vec{K}_S$ والترددات ω_S فهي تعتمد على مقاييس النظام .
لتمييز الذبذبه الخاصه S من الضروري أن نحدد في بداية اللحظه الزمنيه انحراف النظام من وضع التوازن لكل احداثي والذي يتناسب طرديا مع $\vec{K}_S$. في هذه الحاله فان جميع السعات C

ما عدا C_s تساوي صفر .
وكما في حالة الانظمة بدرجةتي حريه نستطيع ان
ندخل الاحداثيات الطبيعيه بالنسبه للانظمة بدرجة
 n من الحريه . اي ندخل تلك الاحداثيات التي
تتجزذبذبذبات توافقية باية ظروف ابتدائية . يمكن ان
ندخل هذه الاحداثيات بالسورة التالية :
نحدد n من الاهتزازات التوافقية بميئته

$$\eta_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (4.18)$$

$$S = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{حيث}$$

كل من هذه الاهتزازات η_s يمكن النظر اليها كذبذبه
طبيعيه . في الحقيقه ان المجموع $\sum_{s=1}^n \eta_s$ يمثل حركة
الاحداثي الاول $x_1(t)$. اما حركة الاحداثيات
الاخرى في حالة تحديد η_s كذلك حُددت ففي
المعادله (4.17) .

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^n a_{sl} \eta_s, \quad l=1, 2, \dots, n. \quad (4.19)$$

العلاقة (4.19) تصبح عيئة أوتانوس للتحويل من
الاحداثيات الطبيعيه الى الاحداثيات x_l .
يمكن التعبير عن العلاقة (4.19) بميئة متركس
(ميئة مصفون)

حيث تصبح:

$$\vec{X} = 2e \vec{H} \quad (4.20)$$

حيث H - متجه ناتج من الاحداثيات الطبيعية (الخامه).
في حالة التحول أو الانتقال من $\vec{X}$ الى $\vec{H}$ في
المعادله (4.7) نحصل على

$$\vec{H} + 2e \overset{1-1}{m} \overset{1-1}{K} \vec{H} = 0. \quad (4.21)$$

وبما أن كل احداثي طبيعي ينجز امتزازا توافقياً،
لذلك لأي η_s تصح المتساويه

$$\eta_s + w_s^2 \eta_s = 0. \quad (4.22)$$

مقارنة المعادلتين (4.21) و (4.22) توضح أن

$2e \overset{1-1}{m} \overset{1-1}{K} \vec{H}$ تمثل نفسها قطر الماتركس (قطر

المصفوف).

أما عناصرها القطريه فهي عبارة عن الترددات
الخامه. لذلك، ففي حالة الاشتزازات الخاصه
للا نظمة، فإن كل احداثي طبيعي ينجز ذبذب
توافقيه بما يتطابق معاً من تردد خاص، وأن اية
ذبذب خامه أو امتزاز طبيعي يمثل نفسه تركيب
أو تراكب للذبذبات الخاصه أو للامتزازات الطبيعيه.

تحديد الترددات الخاصة والمتجهات الخاصة .

نبحث في البدايه بعن الامثله التي تفسر الطريقه العامه للحل وبعن الحالات الخاصه للاهتزازات .
(مثال 4/1) جد الترددات الخاصه ومتجهات الميكل الخاصه بالنسبه الى نظام كهربائي اعتزالي لاحظ الشكل (4 . 1) .

حيث ان جميع الملفات والمتسعات متكافئه ، تساوي L و C .
معامل ارتباط الحث $K = \frac{M}{L} = \frac{1}{2}$.

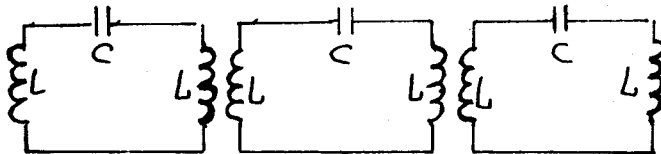
الحل : بميئة اعدائي مستقل ننتار الشحنات ، الجاريه في اللحظه الزمنيه t في كل من الانبيجيه الكهربائيه الثلاثه q_1 , q_2 , q_3

باستخدام قواعد كيرشوف ،
نصيغ ثلاث معادلات ، تربط المتغيرات الثلاثه هذه .

$$L\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_1 = 0 ,$$

$$M\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + L\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_3 + \frac{1}{C}q_2 = 0$$

$$M\ddot{q}_2 + L\ddot{q}_3 + L\ddot{q}_3 + \frac{1}{C}q_3 = 0$$



شكل 4.1

في الصياغة المصفوفية (الماتركسية) يمتلك
هذا النظام الهيئة التالية (لاحظ المعادله 4.7)

$$\begin{pmatrix} 2L & M & 0 \\ M & 2L & M \\ 0 & M & 2L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = 0$$

بالقسمة على $2L$ ، نكتب نظام المعادلات بهيئته
متحوله :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \frac{K}{2} \ddot{q}_2 + n^2 q_1 &= 0 , \\ \frac{K}{2} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{K}{2} \ddot{q}_3 + n^2 q_2 &= 0 , \\ \frac{K}{2} \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + n^2 q_3 &= 0 , \end{aligned}$$

حيث

$$n^2 = \frac{1}{2LC} , \quad K = \frac{M}{L}$$

نعوض في هذا النظام الحل من النوع :

$$q_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$q_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$q_3 = A_3 \cos(\omega t + \alpha).$$

في النتيجة نحصل بالنسبة للسمه A_L ($L = 1, 2, 3$)
نظام المعادلات الجبرية الخطية :

$$(-\omega^2 + n^2)A_1 - \omega^2 \frac{K}{2} A_2 + 0 \cdot A_3 = 0,$$

$$-\omega^2 \cdot \frac{K}{2} A_1 + (-\omega^2 + n^2)A_2 - \omega^2 \frac{K}{2} A_3 = 0 \quad (1)$$

$$0 \cdot A_1 - \omega^2 \frac{K}{2} A_2 + (-\omega^2 + n^2)A_3 = 0.$$

تساوي محدد هذا النظام بالصفر، نصيغ المعادله
الخصويه (4.16) او المميزه

$$(-\omega^2 + n^2) \left[(-\omega^2 + n^2)^2 - \omega^2 \frac{K^2}{2} \right] = 0,$$

من ذلك نحصل بالنسبة للترددات الناحيه القادير التاليه
 ω (بترتيب متصاعده) :

$$\omega_1 = n / \sqrt{1 + \frac{K}{2} \sqrt{2}}; \omega_2 = n; \omega_3 = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{K}{2} \sqrt{2}}} \quad (2)$$

بعد ذلك نحدد مركبات المتجهات المستتظمه للهيكل الخاصه $\mathcal{L}_{S\eta}$ (معاملات قسمة السعات) .

لاجل ذلك نكتب نظام المعادلات المتجانس (4.12)

$$-w_s^2 + n^2 - w_s^2 \frac{k}{2} \mathcal{L}_{S2} + 0 \cdot \mathcal{L}_{S3} = 0,$$

$$-w_s^2 \frac{k}{2} + (-w_s^2 + n^2) \mathcal{L}_{S2} - w_s^2 \frac{k}{2} \mathcal{L}_{S3} = 0.$$

هنا بَسَّطَ نظام المعادلات (4.9) .

$$\mathcal{L}_{S,2} = \frac{A_{S2}}{A_{S1}}, \quad \mathcal{L}_{S,3} = \frac{A_{S3}}{A_{S1}}, \quad \text{الكميات}$$

حيث $S=1,2,3$ رقم التردد الخاص .

نحل نظام المعادلات (4.12) بالنسبة لمعاملات

قسمة السعات او متجهات الهياكل الخاصه

$$\mathcal{L}_{S,2} = \frac{n^2 - w_s^2}{\frac{k}{2} w_s^2}, \quad \mathcal{L}_{S,3} = \frac{n^2 - w_s^2}{\frac{k}{2} w_s^2} \mathcal{L}_{S,2} - 1.$$

بالنسبة لكل تردد خاص نحصل

$$\mathcal{L}_{1,1}=1; \quad ; \mathcal{L}_{1,2}=\sqrt{2}; \mathcal{L}_{1,3}=1; w_1 \text{ بالنسبة لـ}$$

$$\mathcal{L}_{2,1}=1; \mathcal{L}_{2,2}=0; \mathcal{L}_{2,3}=-1; w_2 \text{ بالنسبة لـ}$$

$$\mathcal{L}_{3,1}=1; \mathcal{L}_{3,2}=-\sqrt{2}; \mathcal{L}_{3,3}=1; w_3 \text{ بالنسبة لـ}$$

الجواب : الترددات الخاصة ومتجهات النظام تساوى

$$\omega_1 = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{k\sqrt{2}}{2}}}, \quad \omega_2 = n, \quad \omega_3 = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{k\sqrt{2}}{2}}}.$$

$$\mathcal{L}_{1,1} \equiv \mathcal{L}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \mathcal{L}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \mathcal{L}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

مثال

(4.2) : سلكين صليدين كتليهما m وطوليهما l

ربطاً مفصلياً بصورة نموذجية وعلقاً

بثلاثة نوابض ، صلابة كل منهما C

(شكل 4.2) . حدد ترددات وهياكل

الذبذبات الشاقولية الخاصة في

مثل هذا النظام .

الحل :

نختار بهيئة احداثيات مستقلة الكميات

x_1, x_2, x_3 التي تمثل الازاحات

الشاقولية لنهايات السلكين عن

وضع التوازن الستاتيكي .

(ليس من السهولة كتابة معادلات الحركة

بهذه الاحداثيات مباشرة) .

يمكن جمع الطاقة الحركية للسلكين المتحركين
بمستوى شاقولي من طاقة الحركة الانتقالية
لمراكز الكتلة وطاقة الحركة الدورانية حول
المحورين المارين خلال مركزى الكتلة .

$$T = \frac{1}{2} m \dot{Z}_1^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{Z}_2^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_2^2 .$$

هنا $Z_{1,2}$ - إحداثيا مركزى كتلتى
السلكين .

$\theta_{1,2}$ - زاويتى دوران السلكين فى المستوى
الشاقولي .

I_o - عزم عطالة كل من السلكين بالنسبة
للمحور المار خلال مركز كتلته .
الطاقة الكامنة - طاقة النوايى الثلاثة المتشوهه
تساوى

$$U = \frac{1}{2} C X_1^2 + \frac{1}{2} C X_2^2 + \frac{1}{2} C X_3^2 .$$

حول الطاقة الحركية الى الاحداثيات :
 X_1 , X_2 , X_3 مستخدمين العلاقات
التاليه :

$$Z_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), \quad \theta_1 = \frac{1}{\ell}(X_1 - X_2);$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3); \quad \theta_2 = \frac{1}{\ell}(X_2 - X_3).$$

بحدود الطاقة الحركية نكتب

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \frac{(\dot{X}_1 + \dot{X}_2)^2}{4} + \frac{I_o}{2} \frac{(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)^2}{\ell^2} + \\ & + \frac{m}{2} \frac{(\dot{X}_2 + \dot{X}_3)^2}{4} + \frac{I_o}{2} \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_3)^2}{\ell^2}. \end{aligned}$$

الآن نصيغ معادلات الديناميكا (4.4) و (4.7)

$$\left(\frac{m}{4} + \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_2 + C X_1 = 0,$$

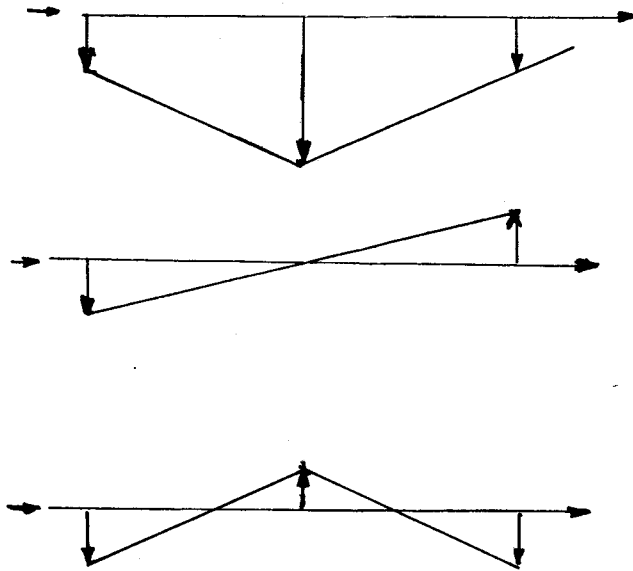
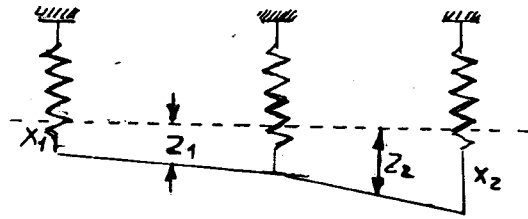
$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{4} - \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_1 + 2\left(\frac{m}{4} + \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_2 + \\ + \left(\frac{m}{4} - \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_3 + C X_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{m}{4} - \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_2 + \left(\frac{m}{4} + \frac{I_o}{\ell^2}\right)\ddot{X}_3 + C X_3 = 0.$$

بالنسبة للسلك

$$I_o = \frac{m\ell^2}{12}: \quad \frac{m}{4} + \frac{I_o}{\ell} = \frac{1}{3}m,$$

$$\frac{m}{4} - \frac{I_o}{\ell} = \frac{1}{6}m.$$



شکل ۴ . ۲

نظام المعادلات (4.7) بميئه متموله يكتب هكذا :

$$\ddot{X}_1 + \frac{1}{2} \ddot{X}_2 + n^2 \ddot{X}_1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{4} \ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \frac{1}{4} \ddot{X}_3 + \frac{1}{2} n^2 \ddot{X}_2 = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \ddot{X}_2 + \ddot{X}_3 + n^2 \ddot{X}_3 = 0 ,$$

$$n^2 = \frac{3c}{m} .$$

حيث

نعوض في نظام المعادلات (4.7) الحل الميئه (4.8) ،

بالنسبة للسعه (L = 1.2.3) على النظام المتجانس

(4.12) :

$$(-\omega^2 + n^2) A_1 - \frac{1}{2} \omega^2 A_2 + 0 \cdot A_3 = 0 ,$$

$$-\frac{1}{4} \omega^2 A_1 + (-\omega^2 + \frac{1}{2} n^2) A_2 - \frac{1}{4} \omega^2 A_3 = 0$$

$$0 \cdot A_1 - \frac{1}{2} \omega^2 A_2 + (-\omega^2 + n^2) A_3 = 0 .$$

من هذا نتج المعادله الخصوميه (4.10)

$$(n^2 - \omega^2) \left[(n^2 - \omega^2) \left(\frac{1}{2} n^2 - \omega^2 \right) - \frac{1}{4} \omega^4 \right] = 0 ,$$

الترددات الخاصة للنظام تساوي-

$$\omega_1 = n \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} ; \quad \omega_2 = n ,$$

$$\omega_3 = n \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} .$$

بإهمال الصف الأخير في النظام (4.13) نكتب بالنسبة لمعادلات قسمه السعات أو متجهات الميائل الخاصة بنظام المعادلات (4.14) الذي يحله نحصل على تعابير لمركبات المتجهات الخاصة

$$K_{S,n} \equiv \mathcal{L}_{S,n} , \quad \mathcal{L}_{S2} = \frac{n^2 - \omega^2}{\frac{1}{2} \omega_S^2} , \quad \mathcal{L}_{S3} = \frac{\frac{1}{2} n^2 - \omega_S^2}{\frac{1}{4} \omega_S^2} \mathcal{L}_{S2}^{-1} ,$$

. ($\mathcal{L}_{S1} = 1$)

نعوض في هذه المساويات على التوالي المقادير ω_1^2 ، ω_2^2 ، ω_3^2 ، التي حصلنا عليها سابقا ،
بحسب مركبات المتجهات الخاصة والمتجهات الخاصة نفسها

$$K_1 \equiv \mathcal{L}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,74 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \mathcal{L}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \quad \mathcal{L}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,73 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

بوضع رقم الاحداثيات $n = 1, 2, 3$ على المحاور الأفقي ومقادير معاملات قسمة السعات على المحاور الشاقولي ، يمكن بناء ميائل الذبذبات الخاصة ومن ثم نستطيع تصور وضع البليكين أثناء امتزازهما على كل نغمة خاصة (لاحظ الشكل 4.2) .

2- الاهتزازات الاضطرابية في الانظمة بدرجة n حريه

في الانظمة الخطيه بدرجة n حريه يصح قانون التركيب للاهتزازات .

لذلك فأن الممات او المسائل حيول الذبذبات الاضطرابيه تحت تاثير اية قوة دوريه تقودنا الى ايجاد الحركات ، الاضطرابيه للنظام بتأثير قوة توافقيه بتردد ω .

وفي الحالة العامة يمكن أن تؤثر القوة على كل احداثي ، وبهذا الشكل فان القوة الخارجيه تمثل نفسها كمتجه $F e^{i\omega t}$ ، اضافة الى ان مركبات هذه القوة تصف ساعاتها التي تؤثر على كـل احداثي .

فاذا كان النظام المبحوث نظام محافظ ، لذلك فأن معادلة ذبذبه بميئة متركبيه تأخذ الشكل التالي :

$$M \ddot{X} + K \dot{X} = F e^{i\omega t} \quad (4.23)$$

حل هذه المعادله كذبذبة اضطرابيه للنظام ، اي الذبذبة التي تحدث على تردد القوة الخارجيه يمكن ان يكتب بالميه

$$\dot{X} = A e^{i\omega t} \quad (4.24)$$

حيث A - متجه (Vector) ساعات الاهتزازات الاضطرابية

نعوض (4.24) في (4.23) نحصل على معادلة متجه السعة

$$(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) \vec{A} = \vec{F} \quad (4.25)$$

ومن هنا يكون لدينا

$$\vec{A} = (\hat{K} - \omega^2 \hat{M})^{-1} \vec{F}. \quad (4.26)$$

وبهذا الشكل فان بحث معادلة الذبذبة الاضطرابيه في الميئه الماتركسيه يتطلب بالضرورة ايجاد الماتركس، ومعكوس الماتركس.

وعلى اساس الحل العام للمعادلة (4.26) يمكن استخلاص بعض الاستنتاجات عن خصائص الذبذبات :-
الماتركس $(\hat{K} - \omega^2 \hat{M})$ عند التردد ω المساوي لاحد الترددات الخاصه للنظام يؤول الى المالاانمايه، لان محدد الماتركس (Determinant) يساوي صفراً. طبقاً للمعادلة (4.10) من البند السابق .

وبهذا الشكل فعندما يكون $\omega = \omega_s$ ففي النظام تحدث الاستجابة . ومن جانب آخر يمكن بحث الاهتزازات الاضطرابيه بطريقة اخرى يمكن في تحليل الحل المبحوث البس ذبذبة خاصه للنظام. ولأجل الغرض تحليل متجه السعة $\vec{A}$ الى متجه معامل قسمة السعات $\vec{K}_s$ للذبذبات الخاصه للنظام :

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^n B_s \vec{k}_s . \quad (4.27)$$

والآن نقودنا المهمة الى ايجاد المعاملات المجهولة B_s .
 لحل القوة الخارجيه الى متجهات قوى المرونة

$$\vec{F} = \sum_{s=1}^n f_s \hat{k} \vec{k}_s . \quad (4.28)$$

حيث f_s - معامل التحليل ، ويمكن ان يوجد باستخدام
 شرط تعامد المياكل الخاصه ومتجهات قوى المرونة

$$\vec{k}_s \hat{k} \vec{k}_s = 0 .$$

نضرب المعادله (4.28) قياسيا في $\vec{k}_s$ ونكتب المعامل
 f_s بالشكل التالي

$$f_s = \frac{\vec{F} \cdot \vec{k}_s}{k_s \hat{k} k_s} \quad (4.29)$$

نعوض المعادلتين (4.27) و (4.28) في المعادلة (4.25) نحصل

$$\sum_{s=1}^n \left[B_s \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \right) - f_s \right] \hat{k} \cdot \vec{k}_s = 0 \quad (4.30)$$

نستخدم الشرط الخاص بالتعامد ، من السهولة أن نحصل
 على المعادله الخاصه بالمعامل B_s حيث

$$B_s = \frac{f_s}{1 - \omega^2/\omega_s^2} . \quad (4.31)$$

ومن هنا فان سمات الامتزازات الاضطرابيه تساوي

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^n \frac{f_s \vec{k}_s}{1 - \omega^2/\omega_s^2} . \quad (4.32)$$

من المعادلة (4.32) يتضح بصورة مباشرة أنه عند $\omega \rightarrow \omega_s$ فإن سعات جميع الاحداثيات تؤول للملانهاية أي أنه يحدث الرنين أو النمو الرنيني . الرنين أو الاستجابة على التردد ω_s يحدث إذا كان اتجاه القوة الخارجيه عمودي على الذبذبه الخاصه S . بالتوافق مع المعادله (4.29) ، فإن المعامل f_s في هذه الحاله يساوي صفر .

في النظام بدرجة n من الحريه يمكن أن لا يحصل النمو الرنيني حتى تحت تأثير القوة الخارجيه الآ على احداثي واحد (l) فقط . هذا سون يكون في تلك الحاله : عندما تؤول $\omega_s l$ على تردد معين ω_s الى الصفر ، اي أن الاحداثي l يصبح عقدة للذبذبه S .

بمذا الشكل يكون تأثير القوة في نقطة العقدة للذبذبه المطابقه .

مثال 4.3 : على الاحداثي x_1 في النظام المبين في المثال 4.2 (شكل 4.2) تؤثر قوة هرمونية او توافقية
$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$
 ، اوجد

سعة الذبذبه في كل احداثي .

الحل : نظام المعادلات (4.25) بالنسبة للحاله المبحوثه يحصل من نظام المعادلات (4.7) عند ازالة القوه الخارجيه الهرمونية الى المعادله الاولى في نظام معادلات المثال 4.2 .

$$\frac{m}{3} \ddot{X}_1 + \frac{m}{6} \ddot{X}_2 + C X_1 = F_0 \cos \omega t ,$$

$$\frac{m}{6} \ddot{X}_1 + 2 \frac{m}{3} \ddot{X}_2 + \frac{m}{6} \ddot{X}_3 + C X_3 = 0 ,$$

$$\frac{m}{6} \ddot{X}_2 + \frac{m}{3} \ddot{X}_3 + C X_3 = 0 .$$

أ. لحل هذا السؤال ستستخدم في البدايه طريقة السعة

المعقدة . لاجل هذا الخرفر نقترح :

$$F_0 \cos \omega t \rightarrow \tilde{F}_0 e^{j\omega t} ,$$

$$X_1 = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} ; X_2 = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} ; X_3 = \tilde{A}_3 e^{j\omega t} .$$

نعوض هذه الدوال في نظام المعادلات (4.23) ونعمل

التحويلات العاكسيه ، نحصل على نظام جبري (4.25)

بالنسبة للسعات المعقدة المبحوثه :

$$(-\omega^2 + n^2) \tilde{A}_1 - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{A}_2 + 0 \cdot \tilde{A}_3 = 3 \tilde{F}_0 / m ,$$

$$-\frac{1}{4} \omega^2 \tilde{A}_1 + (-\omega^2 + \frac{1}{2} n^2) \tilde{A}_2 - \frac{1}{4} \omega^2 \tilde{A}_3 = 0 ,$$

$$0 \cdot \tilde{A}_1 - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{A}_2 + (-\omega^2 + n^2) \tilde{A}_3 = 0 .$$

بحل هذا النظام نحصل على مقادير السعات :

$$\tilde{A}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m} \frac{(-\omega^2 + \frac{1}{2}n^2)(-\omega^2 + n^2) - \frac{1}{8}\omega^4}{\Delta}$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m} \frac{\frac{1}{4}\omega^2(-\omega^2 + n^2)}{\Delta}$$

$$\tilde{A}_3 = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m} \frac{\frac{1}{8}\omega^4}{\Delta}$$

حيث
 $n^2 = 3c/m$

نبحث سلوك السعات بالنسبة لجميع الاحداثيات بالاعتماد على تردد التأثير الخارجي ω ، وعنا نشير إلى الخصائص الامتزازية للنظام المبحوث في هذا المثال، لاجل هذا الغرض نفتح المحدد Δ :

$$\Delta = (-\omega^2 + n^2) \left[(-\omega^2 + n^2) \left(-\omega^2 + \frac{1}{2}n^2 \right) - \frac{1}{4}\omega^4 \right] =$$

$$= \frac{3}{4}(n^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_3'^2),$$

حيث

$$\omega_1'^2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,423 n^2,$$

$$\omega_3'^2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1,58 n^2;$$

جنوار المحدد - مربع ترددات الذبذبات الخاصة للنظام المبحوث (المثال 2 . 4) :

$$\Delta(0) = \frac{1}{2}n^6.$$

بعد ذلك، نجد اصفار البسط في تعبير الاحداثي الاول :

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{2}n^2\right)(-\omega^2 + n^2) - \frac{1}{8}\omega^4 =$$

$$= \frac{7}{8}\left(\omega^4 - 2\frac{6}{7}n^2\omega^2 + \frac{4}{7}n^4\right) =$$

$$= \frac{7}{8}(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2),$$

$$\omega_1'^2 = n^2 \frac{6 - \sqrt{8}}{7} = 0,454n^2; \omega_2'^2 = n^2 \frac{6 + \sqrt{8}}{7} = 1,26n^2.$$

في حدود المقادير الناهية بالسعات يمكن ان نكتب
الشكل التالي :

$$\tilde{A}_1 = \frac{7}{2} \frac{\tilde{F}_0}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2)}{(n^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_3'^2)},$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{\tilde{F}_0}{m} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_3'^2)},$$

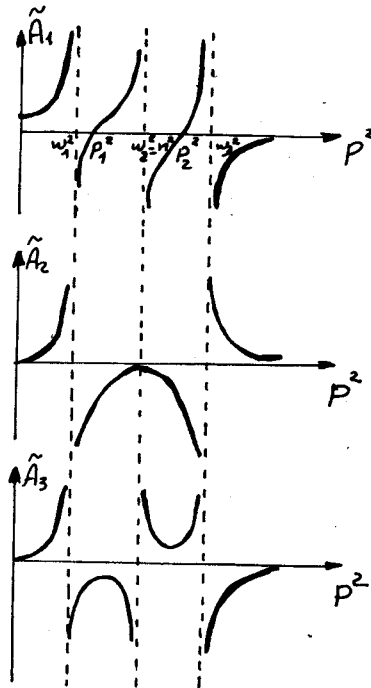
$$\tilde{A}_3 = \frac{\tilde{F}_0}{m} \frac{\omega^4}{(n^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_3'^2)}.$$

من هذا الوصف يمكن استنتاج مايلي :

- (1) الذبذبه بسعة $\tilde{A}_1$ تظهر مرتين على الترددات $\omega = \omega_1$ و $\omega = \omega_2$ وثلاث مرات تتناغم على الترددات الخاصة للنظام : $\omega = \omega_1'$ و $\omega = n = \omega_2'$ و $\omega = \omega_3'$ (لا يلاحظ) الرنين
- (2) السعة $\tilde{A}_2$ (تتناغم) تكون في حالة رنين فقط مرتين على الترددات الخاصة ω_1 و ω_3 ، (لا يلاحظ) الرنين في احداثيات اخرى على التردد الناهي الثاني $\omega_2 = n$.

3 (السعة $\tilde{A}_3$) (تتناغم) على جميع الترددات الخاصة ا الثلاثة .

اعتماد السعات $\tilde{A}_1$ ، $\tilde{A}_2$ ، $\tilde{A}_3$ على تردد القوة الخارجيه ω^2 وضّح على الشكل (4.3) (زيادة في التوضيح نعتبر التردد للقوة الخارجيه P والتردد الخاص للنظام ω)



شكل (4.3)

(2) نحل هذا المثال بطريقة التحليل الى الهياكل الخاصة .

الترددات الخاصة والمتجهات الخاصة لهذا النظام الاهتزازي التي وجدناها في المثال (4.2) تساوى :

$$\omega_1 = n \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} ; \quad \omega_2 = n = \sqrt{\frac{3C}{m}} ;$$

$$\omega_3 = n \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} ,$$

$$K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,47 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ,$$

$$K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,73 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

مصفوف الكتلة يساوى :

$$M = \begin{Bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} & 0 \\ \frac{m}{6} & \frac{2}{3}m & \frac{m}{6} \\ 0 & \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{Bmatrix}$$

متجه سعات القوى الخارجيه التوافقية :

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

متجهه ((قوى العطاله))

$$M_{K_S} \equiv M_{\mathcal{K}_S} = \begin{Bmatrix} \frac{m}{3} K_{S_1} + \frac{m}{6} K_{S_2} + 0 \\ \frac{m}{6} K_{S_1} + \frac{2}{3} m K_{S_2} + \frac{m}{6} K_{S_3} \\ 0 + \frac{m}{6} K_{S_2} + \frac{m}{3} K_{S_3} \end{Bmatrix}.$$

نحدد المعامل f_S في تحليل القوى : (4.29)

$$f_S = \frac{\vec{K}_S \cdot \vec{F}}{\vec{K}_S \cdot \vec{M}_{K_S}}.$$

النغمة الاولى (الطراز الاول) :

$$M_{K_1} = m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}, \quad f_1 = \frac{\{1; 2,74; 1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; 2,74; 1\} m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{7,5m}$$

النغمة الثانية او الطراز الثاني :

$$M_{K_1} = m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}, \quad f_2 = \frac{\{1; 0; -1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; 0; -1\} m \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{\frac{2}{3}m}$$

النغمة الثالثة او الطراز الثالث

$$M_{K_3} = m \begin{Bmatrix} 0,21 \\ -0,15 \\ 0,21 \end{Bmatrix}, \quad f_3 = \frac{\{1; -0,73; 1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; -0,73; 1\} m \begin{Bmatrix} 0,21 \\ -0,15 \\ 0,21 \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{9,54m}$$

بني الحل (4.31) ثم نستخدم المعادله (4.32) لايجاد
ساعات الاهتزازات الاضطرابيه :

$$\tilde{X}_g = \sum_{l=1}^N \frac{f_l \vec{k}_{sl}}{\omega_l^2 - \rho^2} :$$

$$\tilde{X}_1 = \tilde{A}_1 = \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{7,5(\omega_1^2 - \rho^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - \rho^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{0,54(\omega_3^2 - \rho^2)},$$

$$\tilde{X}_2 = \tilde{A}_2 = \frac{2,74 \frac{\tilde{F}_0}{m}}{7,5(\omega_1^2 - \rho^2)} + \frac{0 \cdot \frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - \rho^2)} + \frac{-0,73 \frac{\tilde{F}_0}{m}}{0,54(\omega_3^2 - \rho^2)},$$

$$\tilde{X}_3 = \tilde{A}_3 = \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{7,5(\omega_1^2 - \rho^2)} + \frac{-1 \cdot \frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - \rho^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{0,54(\omega_3^2 - \rho^2)}.$$

وهذه هي طريقة اخرى لحل المثال .

3. الاهتزازات في الانظمة المشتتة بدرجة n حرة

في حالة وجود الخمود فان حساب ذبذبات النظام بدرجة n حرة يصبح اكثر تعقيدا .
 فاذا كان الخمود يمتلك خصائص احتكاك لزج يمكن استخدام ماتركس تشتت الطاقة بالهيئة :

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} . \quad (4.33)$$

ثم نحل المعادله الماتركسيه التاليه :

$$\hat{m} \ddot{\vec{X}} + \hat{h} \dot{\vec{X}} + \hat{k} \vec{X} = 0 \quad (4.34)$$

او

$$\hat{m} \ddot{\vec{X}} + \hat{h} \dot{\vec{X}} + \hat{k} \vec{X} = \vec{F} e^{i\omega t} . \quad (4.35)$$

فلا اهتزازات الخاصه للنظام يمكن بحثها بالهيئة :

$$\vec{X}(t) = \vec{A} e^{\lambda t} . \quad (4.36)$$

نعوض المعادله (4.36) في المعادله (4.34) نحصل على

$$|\hat{m}\lambda^2 + \hat{h}\lambda + \hat{k}| = 0. \quad (4.37)$$

بما ان المعادله (4.37) تمتلك معاملات حقيقيه لذلك فان جميع جذورها المعقده سوف تكون مرافقات زوجيه ، اى ان

$$\lambda_s = -\delta_s + i\omega_s ; \quad \lambda_s^* = -\delta_s - i\omega_s. \quad (4.37)$$

حيث δ_s ، ω_s - اعداد حقيقيه .

يمكن ان نوضح انه بالنسبة للانظمه المشتته غير المحافظه والتي لا تحتوى على مصادر طاقه ، فان جميع

$$\delta_s < 0$$

اما الكميات λ_s فغالبا ما تسمى ترددات خاصه معقده للنظام .

نعوض λ_s في المعادله (4.36) من المعادله (4.37) ثم نحسب المعادله (4.34) نحصل على معادله لتحديد معامل قسمة السعات . في هذه الحاله سوف يكون معامل قسمة السعات معقدا .

الحل العام لنظام المعادلات (4.34) يمتلك الهيئه

$$\vec{X}(t) = \sum_{s=1}^n C_s e^{-\delta_s t} \vec{K}_s \cos(\omega_s t + \phi_s). \quad (4.37)$$

وهنا تكون مركبات المتجه $\vec{K}_s$ معقده ويمكن التعبير عنها بالصوره التاليه :

$$\mathcal{H}_{se} \exp[i \cdot \Phi_{se}] .$$

ذبذبة كل احداثي يمكن ان تمثل تركيب للذبذبات المتخامده ، اضافة الى ذلك ويسبب من ان معاملات قسمة السعات معقدة ، لذلك فان الذبذبات بترددات ω_s وعلى الاحداثيات المختلفه تكون مزاحه بالطور على مقدار Φ_{se} .

السعه C_s والطور Φ_s يتحددان عادة من الظروف الابتدائيه . عند بحث الذبذبات الاضطرابيه في الانظمه المشتمه بدرجه n حريه ، من الضروري حل المعادله (4.35) .

نحلل متجه السعات للذبذبات الاضطرابيه $\vec{A} e^{i\omega t}$ الى متجه قسمة السعات (متجه الهياكل الخاصه) $\vec{K}_s$ ، بحصل

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^n \frac{f_s \vec{K}_s}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} + i 2 \delta_s \omega / \omega_s^2} . \quad (4.38)$$

بهذا الشكل ، عند تطابق تردد القوه الخارجيه مع احد الترددات الخاصه للنظام ، عند ذلك يظهر الرنين في الانظمه المشتمه ، لكن سعة الاهتزازات الاضطرابيه (المقسره) في حالة الرنين تبقى محدوده .

تتخبط بهيئته أحداثيات مستقلة (q_l) الشحنة التي تمر حتى اللحظة t من الزمن خلال المقطع العرضي للطف المطابق ℓ .

نكتب في هذه الاحداثيات الطاقة المغناطيسية T_M والطاقة الكهربائية T_E للنظام المتكون من $N+1$ من العناصر

$$T_M = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} L \dot{q}_n^2 \quad (4.39)$$

$$T_E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{q_n^2}{C} + \frac{(q_n - q_{n-1})^2}{C_0}.$$

معادلة لاغرانج لهذه السلسلة بالطاقة المعبر عنها في المعادلة (4.39) تمتلك الصورة التالية :-

$$L \ddot{q}_n + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_0}\right) q_n - \frac{1}{C_0} (q_n - q_{n+1}). \quad (4.40)$$

المعادلة (4.40) صحيحة بالنسبة لاية حلقة من السلسلة ماعدا الاولى والاخيره . الشحنة في الحلقة الاولى وفي الحلقة الاخيره من السلسلة توجد بشروط محددة . بحيث نظام بدمايتين مفتوحتين اي ان

$$q_1 = 0; \quad q_{N+1} = 0 \quad (4.41)$$

الحل الخاص للنظام المعادلات (4.40) يبحثه بالمهية النايه:

$$q_n = Q_n e^{i\omega t}. \quad (4.42)$$

نحصل على العلاقات التي تربط سعات الذبذبات في عناصر السلسلة المتجاورة (بعد اشتقاق المعادلة (4.42) مرتين وتعويضها في المعادلة (4.40):

$$(\omega^2 - \omega_0^2)Q_n - \alpha(Q_{n-1} + Q_{n+1}) = 0, \quad (4.43)$$

$$n = 2, 3, \dots, N.$$

حيث $\omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_0}$ مربع التردد الثنائي
 $\alpha = \frac{1}{LC_0}$ معامل ارتباط .

حل نظام المعادلات (4.43) يمكن ان يكتب بالشكل التالي:

$$Q_n = A e^{jn\beta}. \quad (4.44)$$

بتعويض (4.44) في (4.43) نحصل

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \alpha(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) = 0. \quad (4.45)$$

ومن هنا

$$\cos \beta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}. \quad (4.46)$$

حيث يمثل المقدار (β) وطبقا للمعادلة (4.46) ازاحة الطور على عنصر واحد من عناصر السلسلة. ولذلك فالمعادلة (4.46) التي تربط تردد الذبذبة وازاحة الطور (β) ، تسمى معادلة تشتيت السلسلة.

أما المقادير الحقيقية لـ (β) فإنها تمتلك مكانا فقط بالشروط التالية :-

$$\frac{|v^2 - w^2|}{2\alpha} \leq 1 \quad ; \quad v^2 - 2\alpha \leq w^2 \leq v^2 + 2\alpha. \quad (4.47)$$

لكل مقدار من مقادير w في حدودها المبينة في المعادلة (4.47) يتطابق مع مقدارين لـ β متساويين بقيمتها المطلقة ومتضادين بأشارتهما. وبهذا الشكل فالحل العام للمعادلة (4.43) يمتلك الميثم التاليه :-

$$Q_n = A e^{j\beta n} + B e^{-j\beta n}. \quad (4.48)$$

ولايجاد الترددات الخاصة لاهتزازات السلسلة نستخدم الشروط المحددة في المعادلة (4.41)

$$A e^{j\beta} + B e^{-j\beta} = 0, \quad A e^{j\beta(N+1)} + B e^{-j\beta(N+1)} = 0. \quad (4.49)$$

هذا النظام للمعادلات (4.48) يكون مشتركا وشائعا إذا كان

$$\sin \beta N = 0, \quad \beta = \frac{2\pi}{N}. \quad (4.50)$$

وأن

$$\beta = -A e^{-2j\beta}.$$

وبأستخدام المعادله (4.46) نجد التردد الخاص

$$\omega_s = \omega^2 - 2\alpha \cos \frac{\pi s}{N} = \omega^2 - 2\alpha \cos \frac{\pi S}{N} . \quad (4.51)$$

وبما أن السلسلة بنمايتين مفتوحتين

$$q_1 = 0 \quad , \quad q_{N+1} = 0 ,$$

تمثل نظام بـ $(N-1)$ من درجات الحرية، لذلك فنحن نمتلك $(N-1)$ من الترددات المختلفة :

$$S = 1, 2, \dots, N-1 .$$

موجودة على شرط شفافية النظام (4.47).

مقادير $S=0$ و $S=N$ تعطي الترددات الحرجة :

في الحالة عندما $S > N$ فمن المعادلة (4.51) نحصل

نفس المقدار ω_s ، عندما $S < N$.

أما من المعادلة (4.48) آخذين بنظر

الاعتبار المعادلة (4.50) فيمكن أن نجد

تعبيراً للسعة Q_{ns} .

فالمعامل الأول لهذه السعة Q_{ns} (أي المعامل

n) ينسب إلى رقم الحلقة ، أما المعامل

الثاني (s) فينسب إلى رقم التردد الثاني .

$$Q_{ns} = A_s \exp\left(\frac{j\pi s n}{N}\right) + B_s \exp\left(-\frac{j\pi s n}{N}\right) . \quad (4.52)$$

فعندما $S=0$ و $S=N$ فإن $Q_{ns}=0$ وهذا يعني

أن سعات جميع الاحداثيات على التردد

الخرج تساوي صفر .

وبهذا الشكل فالذبذبه الخاصه للسلسلة

المكونة من $N + 1$ من العناصر

بنمايتين مفتوحتين توصف بالعمليه التاليه :-

$$q_n = \sum_{s=1}^{N-1} D_s \sin \frac{\pi(n-1)}{N} \cos (\omega_s^2 t + \phi_s) .$$

(4.53)

الكميات D_s ، ϕ_s تتحدد من الظروف الابتدائية .

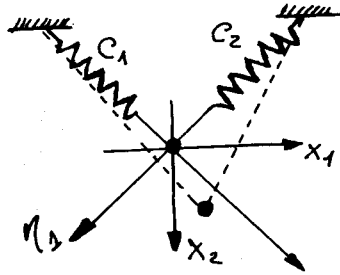
الذبذبه الخاصه للحلقة n من السلسلة

تمثل تركيب أو مجموع من N من الذبذبات

- الطبيعية .

اسئلة الفصل الرابع

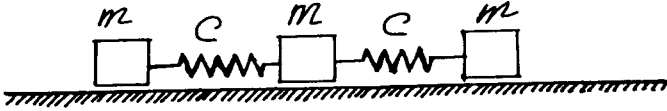
- 1 ((ثقل كتلته m علق بنابضين متكافئين الطول l ،
 صلابة النابضين C_1 و C_2 (شكل 4.5) .
 في حاله غير المشوه يترب النابضان بحيث تكون
 الزاويه بينهما 90° .
 جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه
 للذبذبات الصغيره للثقل في المستوى الشاقولي ،
 (تھمل قوة الجاذبيه) .



شكل 4.5

- 2 ((ثلاثة اجسام متكافئه الكتل m موجوده على سطح
 امس . ربطت هذه الاجسام بنوابض متكافئه صلابه
 كل منهم C شكل 4.6 .
 جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه .

واكتب الحل العام للمسألة .

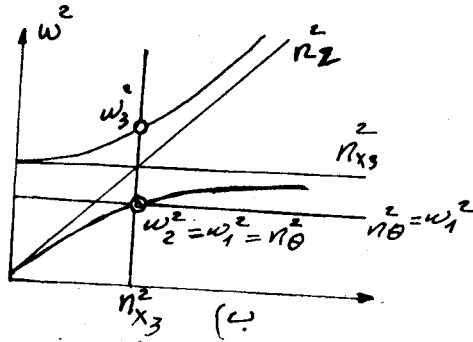
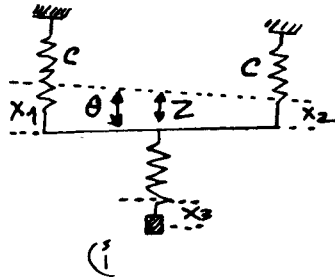


شكل 4.6

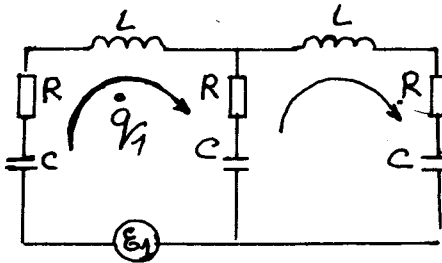
3.3) سلك صلب طوله l وكتلته m علق بنهايتي نابضين متكافئين صلابة كل منهما او مرونته C . في مركز كتلة السلك وعلى نابض آخر صلابته C علق ثقل كتلته $m_1 = \frac{1}{3} m$ (لاحظ الشكل (4.7) .

جد الترددات الخاصة ومتجهات الهياكل الخاصة واكتب الحل العام تحت شرط ، ان عزم عطالة السلك بالنسبة لمحور يمر خلال مركز كتلته يساوى :

$$I_0 = \alpha m l^2 = \frac{m l^2}{2(3-\sqrt{3})}.$$



شكل (4.7)



شكل (4.8)

4 ((جد الترددات الخاصة المعقدة ومتجهات الهياكل الخاصة لنظام كهربائي غير محافظ ومتماثل ، الموضح على الشكل 4.8

الفصل الخامس

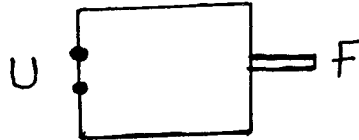
الفصل الخامس

الامتزازات الكهروميكانيكية والمماثلة الكهروميكانيكية

الامتزازات الكهروميكانيكية

§1. معلومات عامة

في بعض الأنظمة المادية تتحقق أو تحدث في ان واحد ذبذبات ميكانيكية وذبذبات كهربية . خلال هذا تتصاحب أو تترافق العمليات الاهتزازية بتحول أو انتقال معاد للطاقة من شكل لآخر . هذه الذبذبات تسمى بالذبذبات أو الامتزازات الكهروميكانيكية ، بينما الأنظمة التي تظهر فيها مثل هذه الامتزازات تسمى بالمبدلات . بالاعتماد على ترتيب أو بناء المبدلات فقد يحصل منها الكهروميكانيكية والميكانيكية-كهربية ، وعلى هذا الأساس تمثل المبدلات نفسها أنظمة مرتبطة ، كما يبدو ذلك من التخطيط المقدم لاحد هذه المبدلات ذو درجة حرية واحدة .



شكل 5.1 . تخطيط لمبدل بدرجة حرية واحدة .

ترتبط المقاييس الكهرائية (القوة الكهرائية المتحركة $E.D.C$ وقوة التيار الكهرائي I) مع المقاييس — الميكانيكية (القوة F والسرعة V) خلال المعادلات التالية :

$$\bar{Z}_e \cdot I + \bar{Z}_1 \cdot V = U . \quad (5.1)$$

$$\bar{Z}_2 \cdot I + \bar{Z}_m \cdot V = F . \quad (5.2)$$

حيث $\bar{Z}_e$ ترمز للممانعة الكهرائية
(لاحقا سوف نرمز تحت مفهوم الممانعة Z للمقاومة المركبة للنظام).

$\bar{Z}_m$ — تعني الممانعة الميكانيكية
اعتمادا على هيئة او نوع الممدل تحقق الممانعات الكهرائية
— الميكانيكية $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ العلاقات التالية :

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 \text{ أو } \bar{Z}_1 = -\bar{Z}_2 . \quad (5.3)$$

العلاقات الميكانيكية والكهروضوئية اعتمدت في تطويرها
بدرجة رئيسيه على المبدلات ، الامر الذي احتلت معه
دراسة هذه المبدلات اهمية كبيره للغاية . ولذا سوف
نتناول ببحثنا المحدد هذا دراسة الاهتزازات الكهروميكانيكية
التي تظهر في مكبر الصوت وفي الميكروفون وفي المبدلات ،
ذات القاعده الكهرائية .

2. مكبر الصوت الكهروضوئي

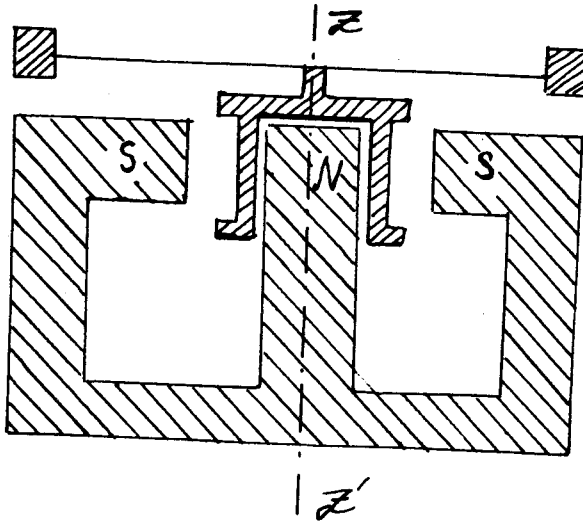
في الاخدود الحلقي للمغناطيس الاسطوانى الدائم NS

(شكل 5.2) يوضع باتجاه المحور z ملف اسطوانى .

يوجد الملف في مجال مغناطيسي قطري حثه B وفيه يجري تيار كهربائي قوته I . في هذه الظروف تؤثر على الملف قوة لبلاس موجهه باتجاه $(\text{المحور } z-z')$ (لاحظ الشكل 5.2).

$$F = B \ell I . \quad (5.4)$$

حيث ℓ - الطول الكلي للملف او الوشيعه .



شكل 5.2 . مكبر الصوت الكهروديناميكي .

حينذاك ، ستكون معادلة الحركة الاضطرابيه بالهيئه التاليه :

$$m \ddot{v} + r \dot{v} + k \int v \cdot dt = B \ell I . \quad (5.5)$$

من جانب اخر يصبح الملف او الوشيعه واقعا في مجال نمو القوه الكهربائيه المتحركه $\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{C}$ للحث او يمزاج فيه

$$U_i = B \ell v .$$

اتجاه U_i عكس اتجاه الجهد المطبق على الوشيعه U .
 حينذاك ستكون المعادله الكهرائية للسلسلة كالتالي :

$$L \cdot \dot{I} + R \cdot I = U - B \ell v . \quad (5.6)$$

في نظام الجيب والجيب تمام يصبح $\bar{U} = U_m e^{j\omega t}$.

يمكن تحديد U من المعادلة (5.6) بالشكل التالي :

$$\bar{U} = (R + j\omega L) \bar{I} + B \ell \bar{v} . \quad (5.7)$$

اما السرعة $\bar{v}$ فيمكن تحديدها من المعادلة (5.5) بالصورة التالية :

$$\bar{v} = \frac{B \ell \bar{I}}{Z + j(\omega m - K/\omega)} . \quad (5.8)$$

بتعويض المعادلة (5.8) في (5.7) نحصل على تعبير للجهد الكه
 الكهرائي $\bar{U}$ بالهيئة التالية :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= (R + j\omega L) \bar{I} + \frac{B^2 \ell^2 \bar{I}}{Z + j(\omega m - \frac{K}{\omega})} = \\ &= \left(\bar{Z}_e + \frac{B^2 \ell^2}{\bar{Z}_m} \right) \bar{I} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

حيث $\bar{Z}_e$ - الممانعه الكهرائية للمبدل عندما لا يكون الملف او
 الوشيعه متحركا . $\bar{Z}_m$ - الممانعه الميكانيكيه .

التعبير $\frac{B^2 \ell^2}{\bar{Z}_m} = \bar{Z}_c$ يسمى الممانعه النحريكيه

وتضاف الى $\bar{Z}_e$ عندما يكون البناء (المبدل) في حالة الحركه .

التعبير $\bar{Z} = \bar{Z}_e + \bar{Z}_c$ يسمى الممانعه الكهرائية الكامله

او مقاومة الدخول للنظام .

اما فيما يخص $\bar{Z}_e$ فيمكن تحليلها الى جزء حقيقي وجزء تخيلي :

$$\bar{Z}_c = R_c + j\omega L_c ; \quad (5.10)$$

$$R_c = \frac{B^2 \ell^2}{Z_m^2} ; L_c = -\frac{B^2 \ell^2 (m\omega - K/\omega)}{\omega Z_m^2} . \quad (5.11)$$

3. الميكروفون المكثفي او السعائي

المكثف المستوي الهوائي (5.3) المشحون بواسطة مولد

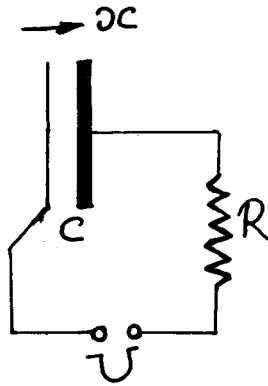
Generator قوة كهربائية متحركة ثابتة $\mathcal{E}_{P.C}$ خلال مقاومة واحدة .

من صفائحها R المتحركة بهيئة غشاء رقيق للغاية ، حيث

تستطيع هذه المكثف ان تجزأ زاحات صغيره عموديه على سطحها

تحت تأثير ضغط الموجات الصوتيه . حينذاك تتغير سعة وشحنة

المكثف Q مما يحولها الى مبدل



شكل 5.3 مكثف الميكروفون

نفرض ان $C_o = \frac{\epsilon_o S}{\alpha}$ تمثل نفسها سعة المكثف عندما يكون

الضغط متكافئا على جانبي الغشاء المرنق (او الصفيحه الخشائيه)

S-السطح العرضي للصفحة

d- المسافة بين صفيحتين في حالة التوازن (السكون)
عند الازاحة الصغيره $x \ll d$ ، تكون السعة :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d-x} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \frac{d}{d-x} = C_0 \frac{d-x+x}{d-x} = C_0 \left(1 + \frac{x}{d-x}\right)$$

$$C \approx C_0 (1 + x/d) . \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d-x}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} \cdot \frac{d-x}{d} \approx \frac{1}{C_0} \left(1 - \frac{x}{d}\right) . \quad (5.12)$$

في حالة التوازن (السكون) تكون الشحنة Q_0 مساوية لـ:

$$Q_0 = C_0 U$$

في حالة الحركه تصبح الشحنة Q مساوية لـ :

$$Q = Q_0 + q , \quad (q \ll Q)$$

بما ان الغشاء الرقيق في حالة حركه ، فان الشحنة q تتغير ، وهذا يصنع تيارا في السلسله الكهربائيه ، وبالتالي تصبح معادلة الذبذبات الكهربائيه للنظام

$$U = R \dot{q} + \frac{Q_0 + q}{C} : \text{ بالهيفه التاليه } \quad (5.13)$$

باستخدام المعادله (5.12) ، نحصل :

$$U \approx R \dot{q} + \frac{Q_0 + q}{C_0} \left(1 - \frac{x}{d}\right) . \quad (5.14)$$

او

$$(5.15)$$

$$R \dot{q} + \frac{q}{C_0} - \frac{U}{d} \cdot x = 0. \quad (5.15)$$

وذلك عند اهمالنا للتعبير $\frac{q}{C_0 d} \cdot x$ القوة التي تؤثر على الغشاء الرقيق (او الصفحه الغشائية) تساوى ، حاصل ضرب الشحنة Q $\times$ شدة المجال الكهروستاتيكي E

$$E \cdot Q = \frac{U}{d-x} \cdot Q = \frac{U}{d} Q \cdot \left(\frac{d}{d-x} \right) = \\ = \frac{UQ}{d} \left(\frac{d-x+x}{d-x} \right) =$$

$$= \frac{UQ}{d} \left(1 + \frac{x}{d-x} \right) \approx \frac{U}{d} \left(1 + \frac{x}{d} \right) (Q_0 + q). \quad (5.16)$$

اذا اهملنا التعبير $\frac{U}{d^2} \cdot q \cdot x$ ، فان الجزء المتغير للمعادلة (5.16) سوف يكون Uq/d . حينذاك تكتب معادلة الاهتزازات الميكانيكية للمبدل بالهيئة التالية :

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx - \frac{U}{d} \cdot q = 0. \quad (5.17)$$

٤. المبدل الكهربائي الضغطي او الكهروإجهادي

المبدل الكهربائي الضغطي يمثل نفسه صفيحة بلورية ذات جانبيين متوازيين ، لا تمتلك مركزا للمثالث ، خاضعة لضغط متجانس عموديا على جانبيها . في هذه الظروف تظهر عند الجانبين المتوازيين شحنات كهربائية متساوية وإشارات متعاكسة .

كمية هذه الشحنات Q تتناسب طردا مع القوة المؤثرة و تساوى :

$$Q = K \cdot F' \quad (5.18)$$

حيث K ثابت يعتمد على درجة الحرارة . هذه الظاهرة تظهر على سبيل المثال في حالة التأثير الميكانيكي على صفائح الكوارتز وفوسفات البوتاسيوم وغيرها . اذا كان سمك الصفيحة يخضع لتغيير الكمية x ، فان المعادلة الميكانيكية في هذه الحالة سوف تكون :

$$\mu \ddot{x} + 2 \dot{x} + K x = F + \frac{Q}{K} \quad (5.19)$$

حيث μ - معامل العطالة ،

C - معامل الاحتكاك الداخلي ،

K - معامل المرونة .

القوة F التي تؤثر على الصفيحة ، ترتبط مع x من خلال مقياس المرونة لمادة الصفيحة غير الكهربائية الضغطية .

في حالة الصفيحة الكهربائية الضغطية من الضروري اضافة القوة F' المحددة بالمعادلة (5.18) الى أومع القوة F .

لكن يتحقق تاثير معاكس ايضا : فرق الكمون V' الموجود بين جانبي الصفيحة المتقابلين يصنع او يحدث تغييرا للكمية x التي تمثل سمك الصفيحة :

$$x = k' \cdot V' . \quad (5.20)$$

اذا وضعت الصفيحة في مكثفه (محققة بذلك دور موصل للمكثفه) ، لسلسله كهربائيه فالمعادلة الكهربائيه لهذه السلسله ستكون :

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_1 + \frac{x}{k'} . \quad (5.21)$$

حيث V_1 - ترمز للجهود (او الشده) التي تتوافق مع شحنة المكثفه ذات السعه C_0 (C_0 - سعة المكثفه في الفراغ ، ϵ - ثابت التوصيل الكهربائي النسبي للبطوره) .
 $\frac{x}{k'}$ - وهذه تعني الجهد او الشده التي تتوافق مع تغير سمك الصفيحة طبقا للمعادلة (5.20) .

تشغل المماثلة الكهروميكانيكية مكانا هامافى مجال بحث ذبذبات المهتزات الميكانيكية والكهرائية، الامر الذى يستلزم المماثلة ايضا بين الظواهر الميكانيكية والكهرائية قيد البحث .

لذلك غالبا ما يتم تصميم نماذج كهرائية للانظمة الميكانيكية المهتزة .

الافضليات الاساسيه لهذه النماذج الكهرائية هي ملائمة البناء او التركيب الكهرائى ، استقرار المركبات الكهرائية ودقة القياسات الكهرائية .

يوجد نوعان من المماثلة الكهروميكانيكية :

سوف نستخدم المماثلة الكهروميكانيكية ، التى تصبح فيها الكمية الاساسيه او القاعده هي عباره عن مفهوم الممانعه . فى هذه الحاله تتوافق القوه الميكانيكية مع الشده الكهرائية او الاجهاد ، بينما تتوافق السرعه مع قوة التيار الكهرائى .

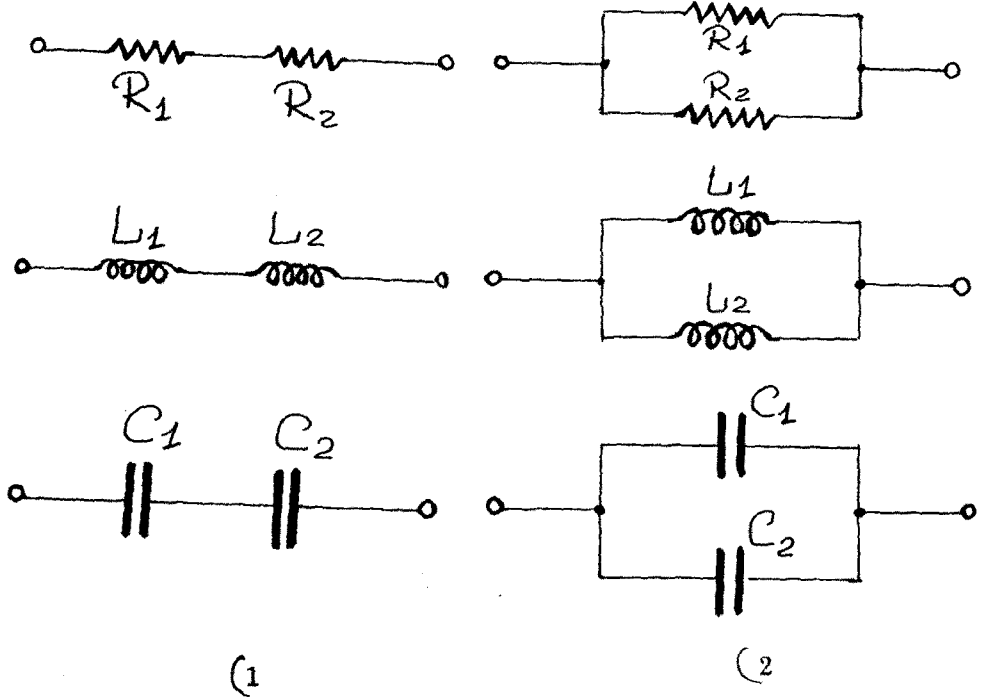
يمين الجدول رقم 1 التوافق بين الكميات الميكانيكية والكهرائية على اساس المماثلة الكهروميكانيكية .

جدول رقم 1 . المتكافئات الكهروميكانيكية

الكميات الكهربائية	الدوران	الانتقال او الحركة الانتقالية
الكمية الكهربائية q	زاوية الدوران ϕ	الازاحة x
قوة التيار $I = \dot{q}$	السرعة الزاوية $\dot{\phi}$	السرعة $\dot{x}$
	التسارع الزاوي $\ddot{\phi}$	التسارع $\ddot{x}$
الحثية L	عزم العطالة $J \equiv I_0$	الكتلة m
السعة C	صلابة الفتل C	معامل المرونة K
المقاومة الاومية R	اللزوجة (الاحتكاك الداخلي) γ	اللزوجة (الاحتكاك الداخلي) γ_0
الجهد الكهربائي V	العزم τ	القوة F

الكميات الكهربائية	الدوران	الانتقال او الحركة الانتقاليه
الطاقة الكهربائيه $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	الطاقة الكامنه $\frac{1}{2} C \alpha^2$	الطاقة الكامنه $\frac{1}{2} K x^2$
الطاقة الكهروحركيه $\frac{1}{2} L I^2$	الطاقة الحركيه $\frac{1}{2} J \omega^2$	الطاقة الحركيه $\frac{1}{2} m v^2$
دالة الخسران $\frac{1}{2} R I^2$	دالة الخسران $\frac{1}{2} \tau \omega^2$	دالة الخسران $\frac{1}{2} \gamma v^2$
الممانعه V/I	الممانعه τ/ω	الممانعه F/v
البناء او التركيب المتوالي	نفس زاوية الدوران الواحد	نفس الازاحه الواحد
البناء او التركيب المتوازي	نفس العزم الواحد	نفس القوه الواحد
الحث المتبادل M		

من نظرية السلاسل الكهربائية تعرف العلاقات التالية
(شكل 5.4)



شكل 5.4

ربط المقاومات ، الملفات (او الوشائع) والمكثفات

1 - ربط متوالي

2 - ربط متوازي .

المقاومه العامه

(1) السلسله المتواليه :

$$R = R_1 + R_2 . \quad (5.22)$$

(2) السلسله المتوازيه :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} . \quad (5.23)$$

الحثيه العامه

(3) السلسله المتواليه :

$$L = L_1 + L_2 . \quad (5.24)$$

(4) السلسله المتوازيه :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} . \quad (5.25)$$

السعه العامه

(5) السلسله المتواليه :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (5.26)$$

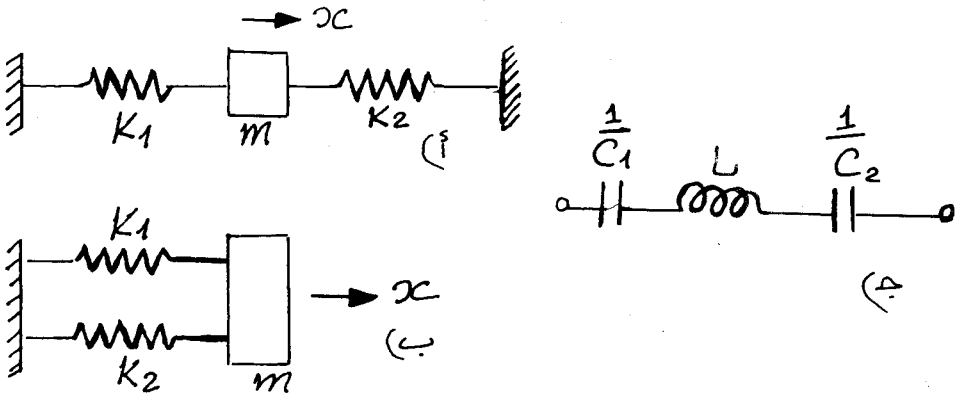
(6) السلسله المتوازيه :

$$C = C_1 + C_2 \quad (5.27)$$

طبقا لنظام المماثل المأخوذة تعتبر عناصر البناء الميكانيكي مرتبطة على التوالي اذا كانت فيها السرعة او الازاحة هي نفسها واذا كانت القوى المؤثرة عليها تجمع .

على العكس من ذلك : تعتبر عناصر التركيب الميكانيكي مرتبطة على التوازي اذا كانت القوى المؤثرة عليها هي نفسها واذا كانت سرع هذه العناصر تجمع .
امثله :

- 1 . النابضان المؤثران على الكتلة m (شكل 5.5 ، أ وب ومماثلته الكهربائي 5.5 ج) مرتبطان على التوالي لأن الازاحة x للكتلة m تصنع القوى التي تجمع $F_1 = K_1 x$ و $F_2 = K_2 x$ (هنا لا يُحدد تشكيل عناصر النظام طبيعة الربط ، بل السرعة هي التي تحدد ذلك)



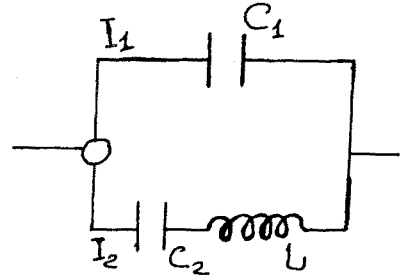
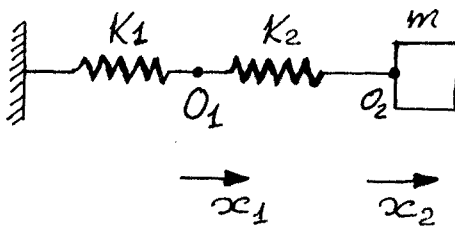
شكل 5.5 ج شكل 5.5 أ و ب
الربط المتوالي للتواض ومماثلته الكهربائي

في هذه الحالة سوف يكون معامل مرونة النابض المكافئ معبرا عنه بالهيئة التالية :

$$K = K_1 + K_2 . \quad (5.28)$$

2 . النابضان الموضحان على الشكل (5.6 أ) يعتبران مربوطان على التوازي ، لأن الأُزاحه x للكتله m تصبح مجموع الأُزاحتين x_1 للنقطة O_1 و x_2 للنقطة O_2 . التركيب الكهربائي المماثل للشكل (5.6 ب) وُضِعَ على

الشكل (5.6 ب) : $x_1 = \frac{F}{K_1} , \quad x_2 = \frac{F}{K_2}$



شكل 5.6 أ

شكل 5.6 ب

التركيب الميكانيكي المتوازي ومماثله الكهربائي

معامل المرونة (الصلابة) للنابض المكافئ يكون :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} . \quad (5.29)$$

من المعادلتين (5.28) و (5.29) ينتج أن $\frac{1}{K}$ يتوافق مع C (K - صلابة النابض و C - سعة الدائره الكهربائيه) .

النابض يحفظ طاقته (الكامنة) بفضل صلابته او مرونته ، بينما الدائره الكهربائيه تحفظ طاقتها بفضل سعتها :

$$U_M = \frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = U_E .$$

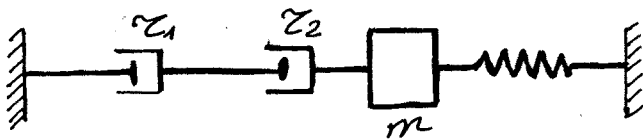
بحث امثله اخرى مشابهه ، متعلقه بمعاملات الاحتكاك الداخلي (اللزوجة) يعطي العلاقات التاليه :

الربط المتوالي (شكل 5.7 أ)

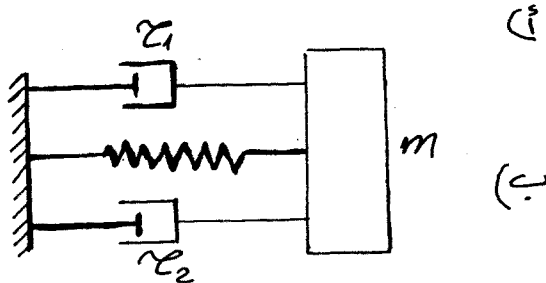
$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 \quad (5.30)$$

الربط المتوازي (شكل 5.7 ب)

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} . \quad (5.31)$$



شكل 5.7 أ



شكل 5.7 ب

شكل 5.7 . ربط مخمدات الاهتزازات او الصدمات

أ : ربط متوالي . ب : ربط متوازي

المعادلات التفاضلية التي تصف حركة النظام الميكانيكي
تحدد سرعة او ازاحة كل كتلة من كتل النظام وعددها
يساوى عدد هذه الكتل .

اما التخطيط او البناء الكهربائي المكافئ يمتلك عددا
من الحلقات (سلاسل او خلايا) مساويا لعدد الحثيات
(الملفات او الوشائع) التي تتوافق مع الكتل (الموافق
للكتل) الداخلة في تركيب النظام الميكانيكي .

ازاحات او سرع العنصر المرن الواحد لنظام ميكانيكي يمكن
ان تختلف من نهاية الى اخرى للعنصر الواحد نفسه .
في هذه الحالة يصبح من الضروري حساب وتقييم هذه
الازاحات او السرع في هاتين النقطتين المتقابلتين على
نهايتي العنصر موضوع البحث .

قوة رد الفعل المؤثرة بين عنصر متحرك واحد ونقطه
واحدة غير متحركه تمتلك من حيث المماثلة سعة
متوالية .

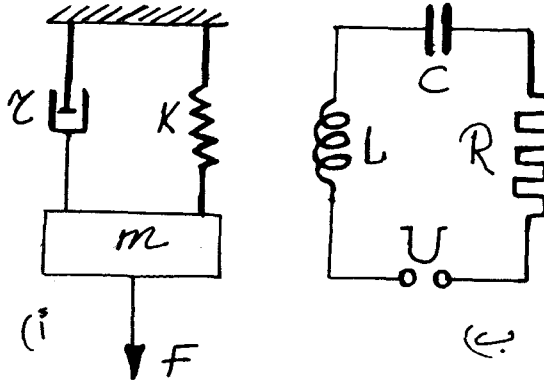
اما اذا اثرت هذه القوه بين عنصرين متحركين ،
فالمماثل في هذه الحالة سيكون سعة متوازيه .

امثله

_____ :

- 1 . في التركيب الموضح على الشكل (15.8) تخضع
الكتلة M لقوة تساوى مجموع القوه الثابته F والقوتين
المؤثرتين من قبل النابض ومخمّد الاهتزازات .
بما ان سرعة النابض والمخمّد تساوى سرعة الكتلة M ،
اي ان السرعه واحده للجميع لذلك ، فان السلسله

الكهربائية المكافئه سوف تتركب من عناصر مربوطه
على التوالي (شكل 5.8 ب)

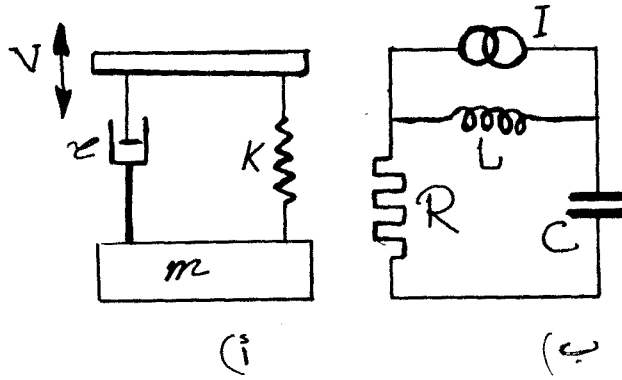


شكل 5.8 أ

شكل 5.8 ب

شكل 5.8 . التركيب الميكانيكي وتصميمه الكهربائي
المكافي *

تركيب العناصر الموضح على الشكل 5.9 أ .
هو نفسه المعروض على الشكل 5.8 أ ، لكن المسند S
(نقطتي الارتكاز او العارضه) هنا احدث ازاحه x
وسرعته v . تحصل الازاحه x في آن واحد لكل من
النابض والمخمّد ، المتوافقان مع السعته C والمقاومه R
في سلسله كهربائية متواليه .



شكل 5.9 أ

شكل 5.9 ب

شكل 5.9 . تركيب ميكانيكي وتصميمه الكهربائي المكافئ .

ازاحة الكتلة m تساوى الفرق بين ازاحة المسند S وبين ازاحتي النابض والمخممد ، وسرعتها هي عبارته عن فرق سرعة المسند وسرعتي النابض والمخممد . المولد في هذه الحالة موازى للحثيه L من جانب ومتوالي مع السلسله RC من الجانب الاخر .

الفصل السادس

الفصل السادس

الانظمة اللاخطيه البسيطة

1. - الانظمة اللاخطيه (معلومات عامه)

نظرية الذبذبات اللاخطيه او ما يسمونها احيانا ،
الميكانيكا اللاخطيه ، تُدرّس يبحث الحركات الاهتزازات
الدوريه ، الموصوفه ،
بمعادلات تفاضليه لاخطيه . الانظمة التي تجز مثل هذه
الحركات ، تسمى عادة انظمة لاخطيه (1) . بهذا الشكل تعني
الميكانيكا يبحث الحركات الدوريه للانظمة اللاخطيه .
بالمقارنة مع النظرية الخطيه تصبح الميكانيكا اللاخطيه تعميقا
لاحقا لمعارفنا بقوانين الحركة الميكانيكيه . بالتحري من
كثير من التصميمات الفنيه للنظرية الخطيه تعطى الميكانيكا
اللاخطيه كقاعده تصورات اكثر دقة وتكاملا عن صفات الحركات
الاهتزازيه للانظمة الميكانيكيه . جوهر الامر يكمن في ان
((الخطيه)) صفه نادراً ما تحصل او يظهرها النظام

(1) تعبير الانظمة اللاخطيه يستعمل لاحقا ايضا بمعنى
نظام المعادلات التي تحدد حركة النظام اللاخطي .

نفسه سواء في بنائه او في طبيعته الفيزيائية .
في معظم الحالات تعني الخطية نتيجة تبسيط النظام الحقيقي
الذي يتحقق غالبا باهمال حدود الدرجة الثانية فما فوق من
معادلة الحركة بالنسبة للاحداثيات والسرعة . هكذا ، على
سبيل المثال تصاغ المعادلات الخطية للذبذبات الصغيرة للانظمة
المرونة حول اوضاع توازنها المستقرة .

استنادا على افتراض ان النظام الذي حصل على اثره
ابتدائيه صغيره الى ما فيه الكفايه في حركته المثاره
اللاحقه يحل في اقرب تقاطع للحاله غير المثاره (2) . في
تعامير الطاقه الحركيه والكامنه يتم الاحتفاظ فقط بحدود
الدرجة الدنيا ، مع اهمال جميع الحدود الاخرى ذات الترتيب
الاعلى والصغيره الى المالا نهائيه .
في النتيجة تقود مثل هذه العمليه الى المعادلات الخطيه
للحركه بمعاملات ثابتة .

دراسة الانظمة الخطيه المبنيه بمثل هذه الطريقه
الفنيه ، تعطي في الحقيقه امكانيه عمل خلاصه عن صفات
وخصائص اهتزازات هذه الانظمة ، ذات فوائد جمه في
كثير من الحسابات العمليه .

((1)) التي تؤخذ كبنية لحساب الاحداثيات
والطاقه الكامنه .

في احيان كثيرة ورغم ان خطية النظام تتحقق
 عن طريق اهمال تلك الكميات الصغيرة للغاية ،
 لكنها تعطي مجموعة تصورات مبسطة لعمليات
 حقيقيه ذات نتائج كميه ، يصعب الحصول
 عليها في حالات نادره حتى في الحسابات الموجهه
 والدقيقه .

في كل الاحوال فان ، الخطيه تحد من امكانية
 الكشف الكامل والمتعدد الجوانب ولجميع الصفات
 الاهتزازيه للانظمه .

غالبا ما تقود الخطيه الى استنتاجات خاطئه
 عن سلوك الانظمه وبالتالي تصبح هذه الخطيه غير
 مسموح بها .

هنا نذكر بعض الحقائق العامه المعروفة
 من هذا القبيل .

كما هو معروف ، مقاومة الوسط (في الغالب
 كما تسمى الاحتكاك اللزج) تعتمد على السرعة
 ومع نقصان هذه الاخيره يمكن ان تصبح المقاومه
 صغيره الى الحدود القصوى .

طبيعة مثل هذه المقاومه description

تمتلك هيئه المنحني على الشكل 6.1 ،

في نظام الاحداثيات ($\mathcal{V}$ و F) حيث F

قوة المقاومه ، $\mathcal{V}$ - السرعة .

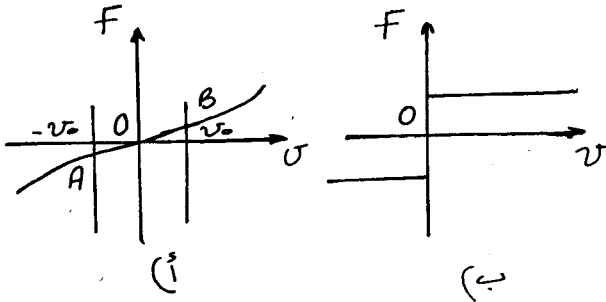
الاحتكاك اللزج) تعتمد على السرعة ومع نقصان هذه الاخيريه يمكن ان تصبح المقاومه صغيره الى الحدود القصوى .

طبيعة مثل هذه المقاومه description

تملك ميثه المنحني على الشكل 6.1 ، وفي

نظام الاحداثيات (F, v) ، حيث F -

قوة المقاومه ، v - السرعة .



شكل 6.1

بالنسبة للسرع غير الكبيره ، على سبيل المثال

بحدود $-v_0 \leq v \leq v_0$ ،

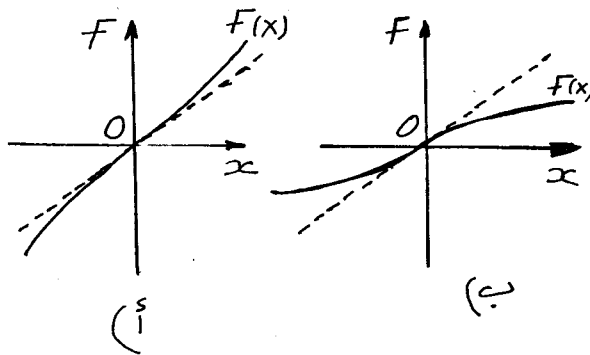
حيث لا يختلف المنحني تقريبا عن مستقيم خطيه

المقاومه ، أي مايلوب عن الجزء AB للمنحني

والذي يصبح تقريبا خطا مستقيما ، لان المستقيم

يظهر صفات المقاومة . العمل يصبح بصورة معاكسة في حالة الاحتكاك الجاف، الذي خصائصه البسيطة وُضّحت على الشكل 6.1 . خطية المعادلات في حالة الاحتكاك الجاف غير ممكنة ، بسبب القطع او الانفصال الصغير الكائن ، الذي تحدث من خلاله تغيرات السرعة قرب بداية الاحداثيات .

كثير جدا من المواد الضرورية في بناء الماكينات لا تخضع لقانون هوك *Hook's law* وللتشويهمات الصغيرة . خصائص التمدد او الانضغاط ، على سبيل المثال لمواد مثل الجلد ، المطاط ، الكونكريت الخ هذه المواد لا تمتلك اجزاء خطية مستقيمة . القيم المطلقة لمرونة هذه المواد تتغير مع كمية التشويه . على الشكل 6.2 عرضت خصائص التمدد (والانضغاط) لمثل هذه المواد



شكل 6.2

بالاعتماد على وضع النحوي $(F(x))$ بالاعتماد على
الخط المستقيم (الذي يمثل مع الخصائص الخاصة
فان الأساس لهذا النحوي في بداية الاحتمالات
○ (التخطيط على الشكل 5.2) يعني نظام
صلبا على الشكل (أ) 5.2، وعلى الشكل
(ب) 5.2، يعني نظاما رخوا. يمثل هذه النماذج
للمواد التي أشربا اليها صلبا، من الموائع مع
أنه لا يمكن حسابها بالنظريه الخطيه وزيادتها
هذه الصفات بالذات تمتلك احكاما مقاديرها
على سبيل المثال، عند حساب اهتزازات الرنين
والمعالمه الديناميكيه. تردد ذبذبات معادن
بعض الاجسام، المتضمنه لعناصر من تلك المعادن
التي نحن بصددها، تعتمد (الترددات) على ضغط
الذبذبات. في بعض الحالات تنمو الترددات مع
زيادة السعه (نظام صلبا) في حالات اخرى
على العكس تناقص (نظام رخوا).
وجود مثل هذه العناصر اللاخطيه للأنظمة
الاهتزازيه يمكن أن يضعف لدرجة كبيره احكامها
تأثيرات ونتائج الرنين. زيادة السعه
تغير التردد، وهذا الأخير يحمل على عاتقه
اخراج النظام أتموتيكيا من ظروف الرنين.
الحال الساطع للخطيه يمكن استخدام نظام المتغيره
الاقتصاديه ذات الحدود، التي تحدد إمكانية
الصفات الاهتزازيه المأمه للخطيه التي
على سبيل المثال حركة القل الساقط، المستقر

فيكون غير المتذبذبة الهندول يكتفي من أن إحصاءاً في الهندول
 فيكون في جميع المتوازن الشساقيسواني تباينير للفايعة .
 فيكون في هذه الذبذبيات الصغيرة الهندول فيكون
 فيكون في هذه إذا أنسب هذا الهندول اثاره ابتدائية
 فيكون في هذه الشساقيسواني (أنسب) في صغير . ١ .
 فيكون في هذه الشساقيسواني التاكيد فيكون الاثاره الابتدائية
 فيكون في هذه الهندول ، المتيرون لخصائص بعد ذلك أنه
 فيكون في هذه ذبذبات مضمدة بصفات متساقيسواني
 فيكون في هذه ، ظاهراً لم يتوقف بعد في الوضع الشاقي .
 فيكون في هذه الاثاره الابتدائية الصغيرة لا تعمل
 فيكون في هذه ، لأن بعد و تعويض الطاقه التي يصرفها
 الهندول في الجسم الساقط في مثل هذه الذبذبات
 فيكون في وجود .

فيكون في الشكل ، فإن نظام الساعه ذات الهندول
 لا يكون في إمكانية اثبات تلك الصفات ، التي تصبح
 فيكون في إمكانية لانظمة الساعات ، كأجزء
 فيكون في الزمن ؛ هذه الصفات تظهر فقط عند
 الاثاره الابتدائية الكبيره بما فيه التباينه ،
 فيكون في حالة الذبذبات ذات السعات النماثيه
 فيكون في هذه . عندما يحصل الهندول اثاره أكبر من
 فيكون في الحدود ، فإنه في حركته المستقبليه يقود
 فيكون في شكل يختلف بحدّة عن ما جرت طبيعه
 فيكون في النظرية الخطيه لسلوك النظام
 فيكون في وجود المقاومة . سعات ذبذبه الهندول
 فيكون في تنصو أو تنقص ، مقتربة بهذه الحماة أو تلك

الى مقدار خرج قياسي واحد ، الذي قد
 بلوغه تتوقف من التغير بعد ذلك ، بحيث
 ان البندول يلجز ذبذبات مستقره ذات ابعاد واحد ،
 محققة حسابات زمنية متكافئه الى حد ما .
 اكتشاف تحقق مثل هذه الحركة الدوريه
periodical Motion المستقره في النظام
 عند وجود المقاومه ، مع بقائهما محدود
 النظريه الموصوفه بواسطه الخصائص
 المذكوره اما للحركه ، ليس ممكنا بطبيعته
 الحال .

التفسير الخطي للمشكلات المتعلقة بذبذبات
 بندول الساعة يرتبط برفض بحث الصفات الاهتزازيه
 الاكثر أهمية من وجهة النظر العمليه ، للانظمه
 الاكثر خصوصيه من حيث دورها واستخداماتها
 كان ممكنا تقديم اطله اخرى ، حيث التفسير
 الخطي للمسائل المتعلقة بالاهتزازات ليس لايعطي
 فقط امكانية اكتشاف ومعرفة صفات اهتزازيه
 هامه كثيره في الانظمه ، بل حتى يضيّق
 من تلك الصفات التي تمت برهنتها واثباتها .
 صف الانظمه اللاخطيه واسم الى العالانمايه
 واكثر تنوعا من منطقه بناء الانظمه الخطيه
 الضيقه وكان من غير المعجد وغير النافع
 تعداد او محاوله حساب خصوصيات الانظمه
 اللاخطيه التي لم تشر اليها النظريه الخطيه ،
 لكن بعض الصفات العامه للانظمه اللاخطيه

المرتبطة بتحديد مهمات بحثها اللاحق، يمكن الإشارة إليهما الآن مبدئياً بحدود اختلافهما الخصوصي عن الأنظمة الخطية .
للك الصفات ينتسب مايلي :

1 . لاستخدم هذا التركيب الخطي *Linear Superposition* في الأنظمة اللاخطية، ذلك لان التركيب الخطي

Linear Superposition لحركتين اهتزازيتين أو أكثر لنظام لاخطي لن يكون ذهبة . يمكن القول ، بشكل آخر: من الحلول الخاصة المحصلة للمعادلات التفاضلية للأنظمة اللاخطية لا يمكن صياغة حل عام، مشابه لذلك الحل الذي يشكله الحل العام لنظام المعادلات الخطية .

إذا حلت القوى المؤثرة على النظام إلى مسلسل فورييه ، فإن تأثيرها على النظام اللاخطي سوف لن يكون مساوياً للمجموع الخطي لتأثيرات الحدود التوافقية في مسلسل فورييه كل على انفراد .

2 . الذبذبات الحرة للأنظمة الخطية دائماً متخامدة . هذه واحدة من الصفات الأساسية للذبذبات الخطية : في الظروف الحقيقية يكون تأثير مقاومته على النظام الخطي معبراً عنه بنقصان الحراف النظام عن وضع التوازن الذي يبدو بشكل ما، أنه حاله المستقره الوحيد لعل هذا النظام .

الذبذبات الدورية جداً (الصافية) في
الانظمة الخطية مكنة فقط ببيئة مايسمى
الذبذبات الاضطرابية ، الناتجة بتأثير الاثارات
الخارجية لقوى دورية .

في الانظمة اللاخطية وعند وجود المقاومة
يمكن أن تحصل الذبذبات الحرة المستقرة الصارمة
التكرار . نقصان الطاقة في بعض الانظمة
اللاخطية يمكن أحياناً أن يعمّوض أو توماتيكياً
بمعالجة هذه النقص من المصادر اللاخطية ، وعلى
شكل جرعات يتم تعيينها (تنظيمها) من حيث
الزمن والكمية من قبل النظام نفسه . هذا
يمتلك مكاناً في مثل بندول الساعة الذي
سبق الاشارة اليه ، كذلك في مايسمى الانظمة
الاتوماتيكية الاخرى .

3 . في الانظمة الخطية تحدث الذبذبات
الاضطرابية بتأثير القوى التوافقية العنيفة تحدث
هذه الذبذبات بتردد أو بدور القوه العنيفة . في
الانظمة اللاخطية يمكن أن تحدث الذبذبات
اضطرابية بتأثير القوه العنيفة المرمونية . تحدث
هذه الذبذبات ليس فقط بنفس دور القوه العنيفة
(نفس زمن ذبذبة الاثارة المرمونية الخارجية)
بل بازمان ذبذبة ، تساوي اعداد كامله لمضاعفات
متكررة لتردد الاثارة الخارجية . بالارتباط مع

ذلك ، في النظام اللاخطي المحوٲ بدرجٲة حرية واحدة ، الذي تؤثر عليه فقط قوه مثيره توافقية واحدة ، يمكن ان تحصل في هذا النظام بعض النغمات الرئيسية .

4 . في الانظمة الخطية لاتعتمد ابترددات الخاصة على الظروف الابتدائية ، وفي الغالب لاتعتمد هذه ابترددات على السعة . تغيير تردد ابذبذبات الخطية ممكن فقط عن طريق التغيير الجوهري لبناء النظام ، ولتوزيع الكتل والمرونة فيه . في الانظمة اللاخطية يعتمد التردد بصورة أكبر على سعة الذذبذبة .

هذا الاعتماد يمتلك مكاناً بشكل رئيسي في الأنظمة اللاخطية المحافظة . مثل هذه الانظمة تُظَمَر مجاميع كامله من الحركات الاهتزازية البديرية ذات ابترددات التغيير باستمرار والمحصلة من التغيير المستمر للظروف الابتدائية .

§2. طريقة ايزوكلاين أو الانحناء *IZOKLINO*

في التحليل اللاحق لنظرية الذبذبات اللاخطية سوف نتحدد بشكل رئيسي بالانظمة ذات درجة الحرية الواحدة ، مع الاشارة الى الخطوط العامة لبعض طرق النظرية العامة للانظمة اللاخطية ذات درجات الحرية الكثيره ، ففي هذا البلد سوف ندرس بصورة خاصة الانظمة اللاخطية البسيطة بدرجة حرية واحدة ،

موضحين | دراسة هذه الانظمة بطريقة المستوي الطوري العامة او طريقة ايزوكلاين . هذه احدى الطرق البيانيه لتكامل المعادلات التفاضليه من النوع

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) ,$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) .$$

كما هو معروف لدينا ، هذه المعادلات تحدد المجال المستقر للاتجاه ، حاملة كل نقطة لهذا المجال باتجاه مناسب للمسار الطوري المار خلاله الخطوط المارة عبر النقاط ذات الانحرافات العنسيه المتكافئه تسمى ايزوكلاين أو انحناءات

الانحناءات بالنسبة للمسارات الطوريه للنوع المبحوث ستكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \text{const} = k.$$

بتحديد سلسلة مقادير k ، القريبه من بعضا البعض بمافيه الكفايه ، نحصل على مجموعة او عائلة أحناءات التي بمساعدتها يمكن ، إذا لم تكن بدقة المسارات الطوريه ، فإنه في كل الاحوال يمكن تصورها بشكل تقريبي الطبيعي العامه لترتيب هذه المسارات ، الامر الذي يصبح احيانا كافيا للحل النوعي للمسائل الاخطيه . على الشكل 3.5 بني مجال الاتجاهات

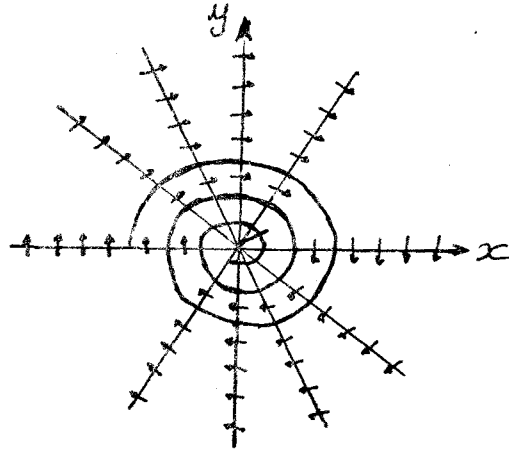
بالنسبة للمعادلات التالية :

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2by - k^2x ,$$

اي للمذبذب الخطي المتخامد .

$$x'' + 2bx' + k^2x = 0 .$$



شكل 3 . 6

من هذا الرسم يمكن في الحال ملاحظة
 أن المسارات الطورية تمتلك طبيعة حلزون
 Spiral ، فير تتأنيق ذاهب الى أو
 متحرك باتجاه البداية 0 ، التي تصبح
 بشكل ما ، نقطة خاصه من نوع البؤره .

§3 . الانظمة الاخطيه المحافظه بدرجة حرية واحده .

الانظمة الاخطيه المحافظه تمثل نفسها حاله خاصه لصف انظمة ليابونوف
LEAPONOV

ودراستها تدخل في إطار الطرق العامه المبنيه
لأنظمة ليابونوف ، لكن حالة الانظمة المحافظه
بدرجة حرية واحده تسمح بتفسير هندسي
هام لطبيعه تركيب هذه الانظمة ، ولذلك بدون
الاعتماد على النظرية العامه لانظمة
ليابونوف مبدئيا يصبح بحث هذه الحالة
الخاصه يمتلك معنى ، اولا كمقدمه أولية في
نظرية الذبذبات الاخطيه بشكل عام وثانيا
كطريقة بسيطة للتعرف على النظرية الاساسيه
النوميه لانظمة الاخطيه - للتعرف على
طريقة المستوي الطوري .

معادلات الانظمة الاخطيه المحافظه يمكن أن تعرض
بهيئة

$$\ddot{X} + f(X) = 0 , \quad (6.1)$$

حيث $f(X)$ يمكن ان تبحث كوحدة كتل لقوة
الاستقامه (القوة التي تصبح بغضلها الذبذبات
مستقامه) . سوف نفترض ، ان الداله $f(X)$ يمكن
تطويرها الى سلسل بدرجات X ، كما على سبيل
المثال ، هذا يمتلك مكاناً في معادلة ذبذبة
المتحول المبرمضي .

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$$

حيث دور الدالة $f(x)$ تلعبه الدالة $\frac{g}{L} \sin x$ ،

$$\frac{g}{L} \sin x = \frac{g}{L} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \quad \text{المحللة في سلسله}$$

في المسائل البسيطة تعني الدالة $f(x)$ - متعدد

حدود من x لدرجة غير عاليه ، اضافة الى ذلك ،

وهذا ما ينطبق على تعبير القوة المقومه ، ان متعدد

الحدود هذا يغير اشارته عند تغير اشارة x .

المعادلة (6.1) تتكامل تربيعيا . في الغالب هي

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x f(x) dx \quad \text{تمتلك التكامل الاول}$$

تكاميل حفظ الطاقة ، الذي نضعه بالصورة :

$$U(x) = \int_0^x f(x) dx \quad ,$$

سوف نكتب الشكل التالي :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = h \quad (6.2)$$

الثابت h يتحدد من الانحراف الابتدائي ومن السرعة

الابتدائية ، اى من الاحتياطي الابتدائي للطاقه

الكامله .

على المستوى الطوري مع المعادلة (6.1) سوف

تتوافق معادلتين لحركة النقطة المصوّرة :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

وخلال هذا يتحول التكامل الاول (6.2) فـ في المعادله النمايه للمسارات الطوريه :

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = h \quad (6.4)$$

بهذه المعادلات تُحل بصورة كاملة جميع الاسئلة عن حركة النظام اللاخطي المحوث، وخاصة تلك الاسئلة المتعلقة بالحلول الدورية، تحققها واستقرارها . وبفهم الوقت تقدم بحثا للحركات المحدده بالمعادلات (6.1)، (6.3) و (6.4) كذلك بطريقة المستوي الطوري بالتصور المعروف سابقا . الجزء الاكبر من الداله $f(x)$ - الخاصيه اللاخطيه للمرونه - تتحدد بيانياً . في هذه الحالة حتى الداله $U(x)$ توجد بالتكامل البياني . المعني $Z=U(x)$ الذي يصور اعتماد الطاقة الكامله على الانحراف x ، سوف نسميه منحنى التوازن الطاقي . لاحقاً ينبغي هذا المنحنى على نفس المستوي الطوري

الذى توزعت عليه المسارات الطورية في نظام الاحداثيات (X, Z) ، حيث يتطابق محور Z مع محور y للمستوي الطوري ، بينما محور X يوازي محور OX ، للمستوي الطوري. ومساعدة منحني التوازن الطاقى من السهولة ان تبني المسارات الطورية للنظام المبحث . بالانتقال الى وصف مثل هذه الابنية ، نشير في البداية الى بعض الصفات العامة لهذه المسارات الناتجة من المعادلتين (6.3) و (6.4) .

(1) المعادلة (6.4) لا تتغير عند تغيير اشارة y ، بالتالي فان المسارات الطورية للنظام (6.3) تصبح متماثلة بالنسبة للمحور OX .

(2) نقاط المحور OX ، التي يكون فيها في ان واحد $f(x) = 0$ و $y = 0$.

اي ان نقاط المحور OX مع الافق ، التي تساوى جذور المعادلة $f(x) = 0$ ، تحقق مع حالة التوازن للنظام ، لان في هذه النقاط

$$\frac{dx}{dt} = 0 , \quad \frac{dy}{dt} = 0 .$$

هذه النقاط تظهر ايضا ، اضافة الى ذلك ، الصفات التالية

$$U'(x) = 0 ,$$

اي ان الطاقة الكامنه تمتلك قيمه مستقره تبلغ في الغالب حداها الاعظم او الاصغر ، الامر الذى يحدد كما هو معروف طبيعة استقرار حالة التوازن الموافقه . في النهايه ، تصبح هذه النقاط ، نقاطا خصوصيه للمسارات الطورية لان في هذه النقاط يصبح المعامل الزاوى

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{y}$$

العمودي للمماس المار خلال هذه النقطة ، يصبح غير محدد .

(3) في النقاط الاعتيادية يكون تقاطع المسارات الطوريه مع محور $0 \times$ مماس للمسارات الطوريه العمودي على محور $0 \times$ ، ذلك لان هنا وعند $f(x) = 0$ تكون y مساويه للصفر ، وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \infty .$$

عندما يكتسب النظام بعض اثاره ابتدائيه مع الاحتياطي الابتدائي لطاقته الكامله h ، حينذاك يمكن بناء منحنى التوازن الطاقى في النظام (Z, X) منحنى التوازن الطاقى

$$Z = U(X)$$

والمستقيم

$$Z = h .$$

اما الفرق

$$h - U(X)$$

فانه يحدد قيم الترتيب على الاحداثيات الديكارتية بالاتجاه الشاقولي او مايسمى Ordinate المسار الطوري وذلك بالمعادله التاليه :

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{h - U(X)} \quad (6.5)$$

هذه المقادير الشاقوليه الترتيب بالاحداثيات الديكارتية تكون حقيقه على الاجزاء ، حيث

$$h - U(x) \geq 0$$

وعلى الاجزاء ، حيث

$$h - U(x) < 0$$

تغيب المسارات الطورية .

لفرض تبسيط البناء سوف نرتب على المستوي الطوري القيم الشاقولية الترتيب للمسارات الطورية ، المتناقصه بـ $\sqrt{2}$ من المرات ، مما لا يمكن القول اي شئ عن هيئة المنحنيات ، بل فقط كونها تَقْطَع على مقياس مقاييسها شاقوليا .

نبحث هيئة المسارات الطورية ، التي تتوافق مع الاجزاء الانفراديه لمنحني التوازن الطاقى .

(1) جزء منحني التوازن الطاقى ، حيث المنحني $Z=U(x)$ يقطع المستقيم $Z=h$ (شكل 6.4) .

بالتوافق مع هذا يقطع المحور x 0 قَطْع (او جزء) المسار الطوري في النقطة الاعتيادية A (1) .

حيث يصبح المماس للمسار الطوري عموديا على محور x OX . الى اليمين من النقطة A ليست هناك فروعاً

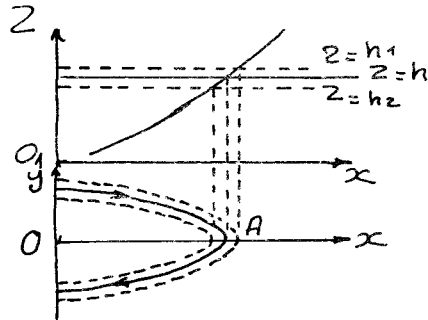
حقيقية للمسار الطوري ، لان هنا

$$h - U(x) < 0 .$$

حركة النقطة المصنَّوره على المسار الطوري تكون متجهه الى

(11) لان في هذه النقطة $U'(x) = -f(x) \neq 0$.

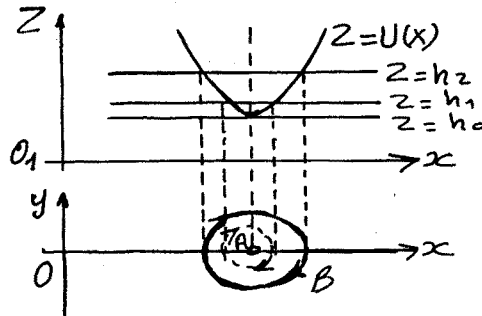
اعلى نصف المستوي من اليسار الى اليمين ، لانه
هنا $y = \frac{dx}{dt} > 0$ ، بينما في الاسفل - من اليمين الى
اليسار ، لانه عندما $y < 0$ ، فان $\frac{dx}{dt} < 0$ كذلك .



شكل 6.4

عند التغيير غير الكبير لمقادير h ، لا تتغير الطبيعة العامة
للمسار الطوري ، أي خارطة النوعية تبقى كالسابق
(لاحظ الخطوط المنقطه على المستوي الطوري
. ($z = h_2$ و $z = h_1$ بالنسبة لـ (x, y))

(ب) جزء منحنى التوازن الطاقى بقيمة صغرى واحده منعزله
(لاحظ الشكل 6.5) .



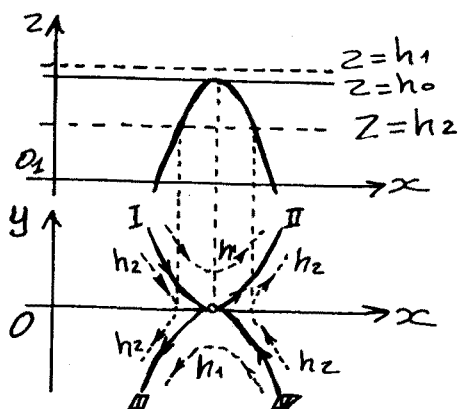
شكل 6.5

- افرض ان هذه القيمة الصغرى *minimum* تساوي h_0 .
- اذا كان المقدار الابتدائي للطاقة الكاطه كذلك
- h_0 ، فان المسار الطوري ، المطابق لهذه المينيموم ،
- يشطر في النقطة الخائضه A على محور Ox .
- الذي يصور حالة التوازن للنظام ، لانه هنا $U = 0$.

$$y = 0 \quad \text{و} \quad U'(x) = f(x) = 0 .$$

المسارات الطوريه عند h ، اكبر من h_0 ، ولكنما قريبه منها بما فيه الكفايه ، هذه المسارات تصوّر منحنيات مغلقة ، تحيط بالنقطه A . النقطة A تصبح نقطه خاصه من نوع المركز للحالة المصوره (حالة التوازن المستقره للنظام) .

حـ ا جزء محني طاقة التوازن بقيمة عظمى
 معزله واحده . القيمة العظمى $U(x)$
 المساويه لـ h_0 تتوافق كما نلاحظ
 من (الشكل 6.6) مع اربعة فروع للمسار الطوري
 متفرعه في نقطة A (وتسمى بالشوارب) :



شكل 6.6

الفرعان I و II والمائلين لهما III و IV، يقسمان
 المستوى الطوري قرب النقطة A الى اربعة اجزاء .
 عند العقادير $h > h_0$ ، فان المسارات الطورية
 سوف تقع في الاجزاء العليا والسفلى .
 عند $h < h_0$ ، المسارات الطورية سوف تقع في
 الاجزاء اليسرى واليمنى . عند وقوع النقطه

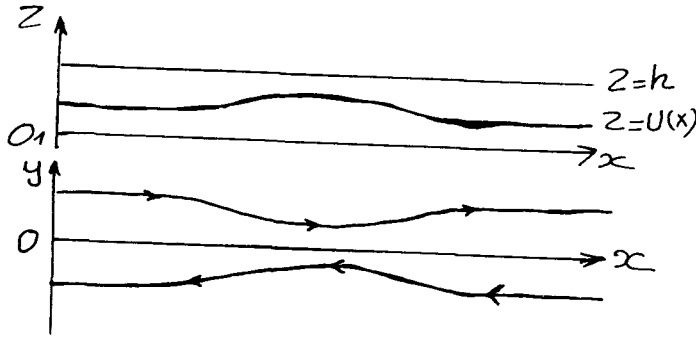
المصوره على واحد من هذه المسارات (ما عدا الفرعين I و II) فانها مع الزمن تهتدع على النقطة A . في مثل هذا الترتيب تسمى المسارات الطوريه قرب النقطة الخاصه بالسرج Saddle . مع هذه النقطة تتوافق حالة التوازن غير المستقره النقطة المصوّره عند وقوعها على المسارات I و II فانها تقترب من A . لكن هذا لا يتناقض مع التأكيد أن النقطة A تصور حالة التوازن غير المستقره . اولاً -

نحن لاستطيع في الحالة المبحوثه ان نشير الى المنطقه القريبه من A ، التي لوقعت فيمما النقطة المصوره فلا يمكنها أن تتقل في حركتها الثاره اللاحقه الى ما وراء حدودها . احتمالية البحث في الفرعين I و II المسميان «الشاربين» I و II ، اي تحديد الظروف الابتدائيه ، التي تتطابق تماما مع وضع النقطة على الشوارب صغيره الى الملائميه .

ثانياً : عند وقوع النقطة المصوره في بدايه اللحظه الزمنيه على واحد من «الشاربين» I و II ، فانها لا تبلغ النقطة A في اي وقت من الاوقات ، لان ذلك سوف يتطلب فاصل زمني لانمائي .

ج) المسارات الراكضه . اذا المستقيم $Z=h$ لا يقطع في أي مكان منحنى التوازن الطاقى $Z=U(x)$ ولا يماس معه في اية نقطة واذا وقع خلال ذلك ، المستقيم $Z=h$ تحت المنحنى $Z=U(x)$ ، فان حركة النظام لا تحقق .

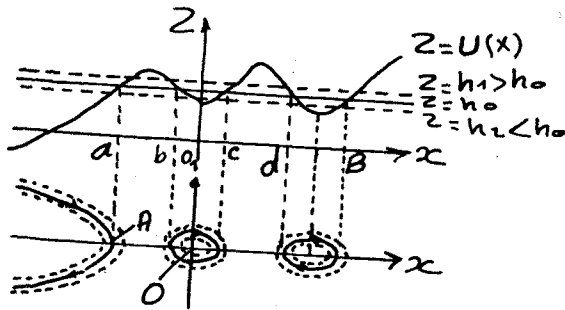
إذا المنحني $Z=U(x)$ يقع بكل نقاطه تحت المستقيم $Z=h$ ، فان المسار الطوري سوف يتكون من فرعين متماثلين بالنسبة للمحور OX ، ذا هذين بكلا الجانبين الى المالا نهائه (لاحظ الشكل 6.7) .



شكل 6.7

النقطة المصوّره سوف تتحرك بذلك المسار والذي لا يتوقف ، باتجاه واحد الى المالا نهائه .
مثل هذه الحركة للنقطة المصوّره تسمى بالحركة الراكضه ، اما المسارات الطوريه الموافقه فتسمى بالمسارات الراكضه .

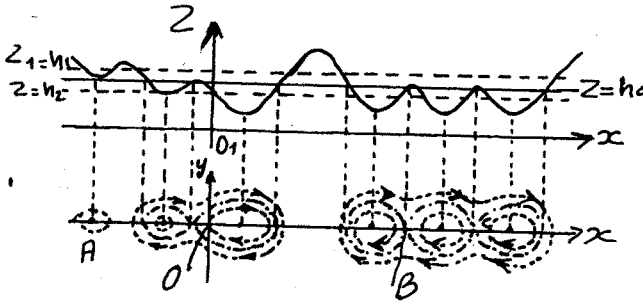
(د) المسارات الطورية عند كل المستوى الطوري .
 في البدء نبحث الحالة ، عندما $Z = h_0$ المستقيم ، ولا يتطس
 يقطع في بعض النقاط المنحني $Z = U(x)$ ، ولا يتطس
 معه في اي مكان (شكل 6.8) .
 لعقادير x تلك التي بالنسبة لها $U(x) > h_0$ ، تغيب
 المسارات الطورية (الاجزاء ab و cd) على
 الاجزاء الاخرى ، عرضت المسارات الطورية او المنحنيات المغلقة
 (الاجزاء bc و de) التي تصوّر الحركات الدورية
 الممكنة في النظام ، أو الرائضه باتجاه واحد ،
 بهيئة تماثل الهيئه الموضحة على الشكل (6.4) عند
 النقطة A على الشكل (6.8) . لعقادير h ،
 القريبه الى h_0 ، لا تتغير صبيعة ترتيب المسارات
 الطورية بصورة جوهريه .



شكل 6.8

نفترض الآن ، أن المستقيم $Z = h_0$ يقطع المعنوي $Z = U(x)$ ويتماس معه في بعض النقاط
(شكل 6.9) .

المسارات الطورية في حالة واحدة سوف تكون نقاطاً منعزلة ، تتوافق مع القيم الصغرى للدالة $U(x)$ ، التي تصور حالته المتوازن المستقر للنظام (النقطة A) .



شكل 6.9

عند زيادة h ، حول تلك النقطة ، مثل A ، تنتج مسارات مغلقه والتي تصور الحركه المنتظمه للنظام (الحركه الدوريه) .
في حالة أخرى ، على الأجزاء المنماثيه المنعزله سوف تتكون المسارات الطورية المغلقه

التي تتوافق مع الحركة الدوريه ، او منحنيات مغلقة من نوع خاص - منحنيات بمقاطع عرضيه ذاتيه (في النقطتين B و C) - التي تسمى فاصلات .

نقاط المقاطع العرضيه تتوافق مع القيم العظمى للطاقة وتصبح نقاطا خصوصية من نوع (السرج $Saddle$) المصوره بحالات التوازن غير المستقر . هذه الفاصلات تجزئ مناطق المستوي الطوري الى مسارات طوريه للنوع . وهي بذاتها ليست منحنيات مصوره بحركات حقيقيه . الحركات الحقيقيه تحرف دائما عن الفاصلات اما بجانب المسارات المغلقة ، المحصوره بداخل عقد الفاصلات او بجانب المسارات الراكضه ، واما بجانب المسارات المغلقة التي تضم في الحال بعضا من العقد المجاوره للفاصل . تصبح هذه الفاصلات فقط منحنيات حدوديه تفصل نوعي المسارات المشار اليهما ولذلك سموا بهذا الاسم ، اي ((العازلات)) .

كما يلاحظ من الشكل (6.9) ، النقاط الخصوصيه من نوع المركز والسرج تتبادل المواضع على المحور الديكارتي الافقي . هذا التبادل يصبح نتيجه بسيطه لتبادل القيم العظمى والصغرى للداله $U(x)$. زياده على ذلك ، داخل المسارات الطوريه المغلقة توجد دائما اعداد غير زوجيه للنقاط ، بالاضافه الى ان عدد المراكز في الوحدة اكبر من عدد السروج .

افرض على سبيل المثال، على المستوى الطوري
يوجد مسار طوري مغلق واحد، يتقاطع مع
محور $x = 0$ في النقطتين α و β . في هذه
النقاط تكون الدالة $U(x) - h$ الى الصفر.
بالتالي، بين α و β تقع على الاقل نقطة
واحدة (او عدداً فردياً من مثل هذه النقاط)،
التي تكون فيما $U(x)$ الى الصفر.
من التصور الهندسي يتضح، انه اذا كان داخل
المنحنى المغلق نقطة واحدة، لذلك فإلما ستكون
بالضرورة (مركزاً) يتوافق مع القيم الصغرى
المعزلة للطاقة الكاملة .

§4. الحركة الدورانية للنظام اللاخطية المحافظه .

المسارات الطورية المغلقة ، التي تصور الحركة الدورانية او (الذبذبات اللاخطية)

للأنظمة المحافظه ، تشكل على المستوى الطوري بناءات كاملة ، ملوّه باجزاء نهائية ، اضافية الى ان المسارات الطورية المغلقة الواحد يلتصق الآخر ، الذي لا يتقاطع معه (المسارات كما لو انها رتيبة الواحد في الآخر . لذلك ، اذا تحقق في النظام المحافظ حركة دورانية واحدة ، معنى ذلك انه يمكن ان تحصل بالتغيير المستمر للظروف الابتدائية بحدود بعض المناطق المحدده مجموعه لانتهائيه من هذه المسارات داخل النظام ساعات وأزمان (ادوار) الذبذبات اللاخطية للأنظمة المحافظه تعتمد على الظروف الابتدائية على h_0 الابتدائية . دور ذبذبة النظام يمكن أن يحسب بالشكل التالي : من المعادله

$$\frac{dx}{dt} = y$$

نجد ان

$$dt = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{2[h - U(x)]}}$$

اذا كان الجزء الديكارتي الافقي للنقاط المقطع العرضي للمسار الطوري المغلق مع محور x 0 يرمز لما خلال α و β (شكل 6.5) ، لذلك بالنسبة لـ T لذبذبة كاملة نجد التعبير .

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2[h - U(x)]}} . \quad (6.6)$$

يجب ان نلاحظ ، ان الذبذبات الصغيرة الحركة للنظام المحافظ الخطي كذلك تُصَوَّر على المستوى الطوري ببناء آت للمسارات الطورية المغلقة التي تحيط بنقطة وضع التوازن المستقر للنظام .

سعات ذبذبات الانظمة الخطية حالما كمال الانظمة اللاخطية المحافظه ، تعتمد على الظروف الابتدائية ، لكن دور ذبذبه النظام الخطي تعني كميته ثابتة لا تعتمد على الظروف الابتدائية ولا على الدُخْلِيَّات الابتدائية لطاقة النظام ، الامر اندي يمكن التاكيد منه ، عند تعويض القادير المطابقه لـ $U(x)$ و h ، في المعادله (6.6) .

بما أنَّ اُزْمان ذبذبات النظام اللاخطي المحافظ المصوَّره على المستوى الطوري بمسارات مغلقة ، ليست واحده ولا هي نفسها ، بل تعتمد على الظروف الابتدائية ، لذلك فان نقطتين مصوَّرتين ، ابتدأتا حركتهما على سبيل المثال من المحور OV ، بوقت واحد بمسارين متقاربين ، مع مرور الزمن يبتعدان الواحد عن الاخرى على مسافة نهائيه ، بـنتيجه ذلك لا يمكن القول ، ان الحركات الدوريه للانظمة المحافظه تعتبر مستقره . لكن هذه الحركات تظهر ما يسمى استقراراً مدارياً ، معبراً عنه ، بكون أنه عند

التغير الصغير للغاية للظروف الابتدائية
تنتقل حركة الاثارة الدوريه للنقاط المصوّره
على مسارات اخرى قريبه الى أبعد حد من
المسارات الابتدائية (غير المثاره) .

مثال 1 . ذبذبة بندول رياضي بسعة لمائيه
نرمز لطول البندول عبر l وعبر θ زاويته
الانحراف عن الشاقول ، من قانون تغير زخم
كمية الحركه نحصل المعادله :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 .$$

معادلات حركة النقاط المصوّره على المستوى
الطوري OXY سوف تمتلك الميثل

$$\frac{dx}{dt} = y ,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x .$$

$$x = \theta , \quad y = \dot{\theta} . \quad \text{حيث}$$

هذه المعادلات تمتلك التكامل الاول

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l} \cos x = h$$

و

$$\frac{y^2}{2} - \frac{g}{l} (\cos x - \cos x_0) . \quad (6.7)$$

حيث x_0 - الانحراف الابتدائي عن الشاقول .
الداله $U(x)$ والثابت h هنا يساويان :

$$U(x) = -\frac{g}{\ell} \cos x, \quad h = -\frac{g}{\ell} \cos x_0.$$

معادلة المسارات الطورية، الممثل بالمثال بالتكامل (5.7) يمكن تحويلها الى مايلي:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2g}{\ell} \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right). \quad (6.8)$$

دور الذبذبه اللامنه T نجده من المعادله (6.6)، واضعين فيما

$$h = -\frac{g}{\ell} \cos x_0, \quad \alpha = -x_0, \quad \beta = x_0$$

$$U(x) = -\frac{g}{\ell} \cos x.$$

بما أن الداله تحت التكامل زوجيه، لذلك

$$T = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)}}. \quad (6.9)$$

تكامل الالبس هذا، الذي يمتلك الاوضاع

$$\sin \frac{x}{2} = u \sin \frac{x_0}{2} = ku$$

يمكن ان يتحول الى الميئه القياسيه

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

في النظرية الخطية لذبذبة البندول، بأخذنا

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} \approx \frac{x^2}{4},$$

نحصل من المعادله (6.9) على التعبير العام المعروف بالنسبة للدور

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

دور الذبذبات الخطية لا يعتمد على x_0 أي لا يعتمد على سعة الذبذبة (أو الظروف الابتدائية). في النظرية اللاخطية يعتمد الدور بشكل جوهري على السعة. هذا الاعتماد يمكن أن يعبر عنه بصورة واضحة، بتعويض التكامل الالبي في المعادله (6.9) بتحليله المعروف بالدرجات k :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

أو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{x_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{x_0}{2} + \dots \right] \quad (6.10)$$

تعدد بهذا التحليل بالحدين الأولين ونضع

$$\sin^2 \frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4},$$

نحصل على معادلة دقيقة ومقربة للدور

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{x_0^2}{16} \right).$$

تأثير هذا التقريب ليس كبيراً جداً .

إذا كان $x_0 = 30^\circ$ ، لذلك نحصل من المعادلة الأخيرة

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} (1 + 0.014) = 1.014 T_0 .$$

لكي نحصل على الخارطة الطورية (شكل 6.10) .
الذبذبة البندول ، نبنى ، طبقاً للنظرية العامة
على المستوي (x, Z) منحنى التوازن الطاقى .

$$Z = -\frac{g}{\ell} \cos x .$$

هذا سيكون جيب تمام يقسم صغرى *Minimum* منفرد .
في النقاط :

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

و بقمم مضي maximum في انقاط :

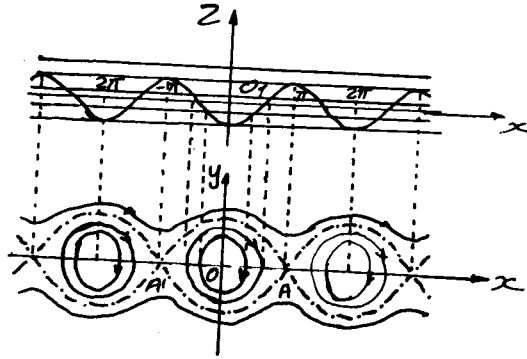
$$x = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$$

الاحتياطي الابتدائي للطاقة الكامنة يتحدد بالانحراف الابتدائي ويساوي

$$h_0 = -\frac{g}{L} \cos x_0.$$

عندما $0 < |x_0| < \pi$ وبالتالي، $|\cos x_0| < 1$ ،

و $|h_0| < \frac{g}{L}$ ، لذلك يلجز البندول ذبذبات دوريه مستوره. بمنحنيات مغلقه داخل مقد الفاصلات او الخطوط الانفصاليه أو المقاطع الانفصاليه.



شكل 5.10

هذه المنحنيات تحيط بالنقاط الخاصه، التي تتوافق مع أوضاع التوازن المستقر للبندول .

المنحنيات المغلقه، الموجوده داخل الجزء $(-\pi, +\pi)$ تحدد الخارطة الطوريه الكامنه لمركبة

البندول . العقد الأخرى تكثر ببساطة هذه الصورة ،
 لأن مقادير x التي تساوي :

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

تتوافق مع نفس وضع التوازن المستقر الواحد
 للبندول أو النواس

عندما $\frac{g}{l} > h_0$ ، هذا يمتلك مكاناً فقط ، إذا ففي
 اللحظة الابتدائية يكتسب البندول مع الانحراف x_0 ،
 سرعة ابتدائية v_0 كبيرة إلى ماغيه
 الكفايه ، أي إذا :

$$h_0 = -\frac{g}{l} \cos x_0 + \frac{v_0^2}{2} ,$$

لذلك ، فإن الفرق

$$h_0 - U(x) = \frac{v^2}{2}$$

سوف يكون أكبر من صفر تحت شرط

$$\frac{v_0^2}{2} > \frac{g}{l} (1 + \cos x_0) ,$$

المسارات الطورية التي تتوافق مع هذه الحالة
 سوف لن تقطع المحور OX ؛ هذه سوف تكون
 مسارات راكضه .

سوف يدور البندول حول محور التعليق فـي
 مستوي شاقولي كل الزمن بنفس الاتجاه الواحد .

عندما

$$h_0 = \frac{g}{l} , x_0 = \pm \pi , \pm 3\pi$$

$$h_0 - U(x) = \frac{g}{l} (1 + \cos x) ,$$

فإنه على المستوي الطوري يحصل المقطع المنفرد $\bar{A}A$ و الفاصل $\bar{A}A$. كما أشير سابقا ، حركة النقطة المصوّره على الانفصالي أو الفاصل عليها غير ممكنة ، رغم أن ذلك ممكن نظريا . النقطة المصوّره الواقعه على الانفصالي أو الفاصل بقوة الاختيار الملائم للظروف الابتدائية ، هذه النقطة المصوّره سوف تتحرك على الفاصل الى وضع التوازن غير المستقر ، لكن لا تبلغ في أي وقت من الاوقات وضع التوازن هذا . بنفس الوقت ، نفترض ، أن البدول الموجود سالكاً في وضع التوازن المستقر ($x = 0$) ، يحصل على سرعة ابتدائية ، كافيه لبلوغ وضع التوازن الشاقولي غير المستقر ($x = \pi$) . الوقت الذي يلزم لاجل ذلك ربع زمن الذبذبه ، نجد باستخدام صيغة ، مماثله للعلاقه (6.9)

$$t\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x_0}{2}}} ,$$

حيث الآن
 $x_0 = \pi$

$$t\sqrt{\frac{g}{L}} = \int_0^{\pi} \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos \frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \right) .$$

وبالتالي ،
من العلاقه الاخيره ، يتضح ، انه عند اقتراب x الى π ، فان t تنمو بدون حدود .

البدول ، الذي حصل على السرعه الابتدائية التي تبخى ، سوف يقترب الى وضع التوازن المستقر ، لكن لا يبلغه في أي وقت من الاوقات .

اجره مصطلحات

س 4 -

$$x(t) = 0,1 \sin 0,5\pi t \text{ m.}$$

س 5 -

$$x(t) = 50 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ mm.} \quad (1)$$

$$x_1(t) = 35,2 \text{ mm}; \quad x_2(t) = 0 \quad (2)$$

س 6 -

$$x(t) = 5 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm.}$$

س 8 -

$$t = \frac{1}{6}\pi$$

س 9 - خلال (1) ثانية واحدة

س 10 -

$$V_{\max} = 7,85 \cdot 10^{-2} \text{ m/sec.}$$

$$a_{\max} = 12,3 \cdot 10^{-2} \text{ m/sec}^2.$$

- 11
س

4 sec. (1)

$3,14 \cdot 10^2 \text{ M/sec.}$ (2)

$4,93 \cdot 10^2 \text{ M/sec.}$ (3)

- 13
س

$V = 0,136 \text{ M/sec.}$

- 14
س

$x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(\pi t + \frac{\pi}{6}) \text{ M.}$

- 15
س

$A = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ M,}$

$T = 4,1 \text{ sec.}$

- 17
س

$\frac{T}{U} = 3$: (1)

$\frac{T}{U} = 1$: (2)

$\frac{T}{U} = \frac{1}{3}$: (3)

- 18
س

$\frac{T}{U} = 3$

(2) • $\frac{T}{U} = 15$ (1)

$\frac{T}{U} = 0$ (3)

س 19 -

$$x(t) = 0.04 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ م.}$$

س 21 -

$$0.78 \text{ Sec.}$$

س 22 - يقل الدور بمرتين .

س 23 - يقل الدور بـ 8 و 1 مرة .

س 24 - لدينا

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

او

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

بعد اضافة الثقل Δm سوف نملك

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m + \Delta m}{K}} \quad (1)$$

او

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m + \Delta m}{K} \quad (2)$$

نطرح (1) من (2) نحصل

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{K}$$

لكن

$$K = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\Delta m g}{\Delta l}$$

حيث F - القوة التي تسبب الاستطالة

$$\Delta l = \frac{9}{4\pi^2} (\pi_2^2 - \pi_1^2) = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ M} = 2,7 \text{ cm.}$$

س 25 -

$$x(t) = 3,7 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ M.} \quad (1)$$

$$A = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ M}; \quad \varphi = 62^\circ 46' \quad (ب)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \quad \text{س 26 -}$$

س 27 -

$$A = 5 \text{ cm}; \quad \varphi = 36^\circ 52' \quad (1)$$

$$\cong 0,2\pi.$$

$$x(t) = 5 \sin(\pi t + 0,2\pi) \text{ cm.} \quad (2)$$

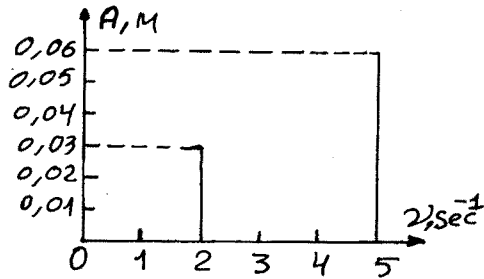
س 28 -

(1) معادلات الاهتزازات ستكون بالصورة التالية

$$x_1 = 0,03 \sin 0,4\pi t \text{ M,}$$

$$x_2 = 0,02 \sin \pi t \text{ M,}$$

$$x_3 = 0,01 \sin 2\pi t \text{ M.}$$



س³⁰ - يمكن ان تحلل الذبذبه قيد البحث الى ثلاث
ذبذبات توافقية بترددات :

$$\nu_1, (\nu_1 - \nu_2) \text{ و } (\nu_1 + \nu_2)$$

وسعات A_0 ، $\frac{A_0}{2}$ و $\frac{A_0}{2}$ ايضاً.

س³¹ - في حالة جمع ذبذبتين متعامدتين متكافئتا
الدور ، تكون معادلة مسار الذبذبه المحصله
باليهيه التاليه

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1)$$

بما ان لدينا $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ ، فان المعادله (1)
تأخذ الصوره :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

أو

من ذلك ينتج أن $y = \frac{A_1}{A_2} x$ - معادلة خط مستقيم .
 بهذا الشكل ، سوف تحدث محصلة الذبذبه بخط
 مستقيم .

أما زاوية انحراف المستقيم فيمكن ايجادها بالمعادله

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 26^\circ 34'$$

دور الذبذبه المحصله يساوى دور الذبذبتين
 المجموعتين ، بينما سعتها

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,112 \text{ M.}$$

بالتالي ، معادله الذبذبه المحصله تمتلك
 الصوره

$$S = 0,112 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{3}) \text{ M.}$$

32
 -س

7 cm . : (1)

5 cm . : (2)

33 - معادلة مسار الحركة :

$$2y^2 - x = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{س}^{34} - \text{معادلة المسار}$$

وهي معادله دائره بنصف قطر 2,0 متر

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{س}^{35} - \text{معادلة المسار}$$

وهي معادلة البس

$$y = -0,75x \quad \text{س}^{36} -$$

وهي معادلة خط مستقيم .

اجوبة الفصل الثاني

س1-

$$x(t) = A e^{-Bt} \sin(\omega t + \phi),$$

2 - لبناء المنحني، نجد اللحظات الزمنية $t_1, t_2, \dots$ التي تتوافق مع القيم العظمى للازاحة x .

$$t_1 = 0,842 \text{ sec}; \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{2} =$$

$$t_2 = 2,842 \text{ sec.},$$

$$t_3 = t_1 + T = 4,842 \text{ sec.}$$

$$t_4 = t_1 + \frac{3T}{2} = 6,842 \text{ sec.}$$

بعدها نجد x_1, x_2, x_3 ثم نرسم المنحني.

س2 - لاحظ حل السؤال السابق.

$$v_1 = 7,85 \text{ M/sec}, \quad v_2 = 2,88 \text{ M/sec.} \quad \text{س3-}$$

$$v_3 = 1,06 \text{ M/sec}, \quad v_4 = 0,3914 \text{ M/sec}$$

$$v_5 = 0,14 \text{ M/sec.}$$

س4 - تنقص بـ 1,22 مرة.

س 5 - $\lambda = 0,023$

س 6 -

(1) : 120 sec.

(2) : $1,22 \text{ sec.}$

س 7 - تقص بـ 8 مرات .

س 8 -

(1) $\lambda = 0,46 \text{ sec}^{-1}$

(2) $\lambda = 10 \text{ sec}^{-1}$

(3)
$$\lambda = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta \omega_0^2}{\sqrt{4\pi^2 + \beta^2}}$$

$$= 6,9 \text{ sec}^{-1}$$

س 9 - معادلة الذبذبات الخاصة تمتلك الهيئة

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$$

اما معادلة القوة المجهرة فهي

$$F = F_0 \sin \omega t$$

$$F_0 = A m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

بالتالي بعد التعويض نجد

$$F = 7,2 \cdot 10^{-2} \sin 10\pi t \text{ N.}$$

س¹⁰ - سعة الاهتزازات a تساوي

$$a = \frac{H\omega^2}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega^4}}$$

س¹¹ - معادلة الحركة الاهتزازية للجسم هي :

$$x(t) = \frac{F}{m(a^2 + \omega_0^2)} \cdot \left(e^{-at} + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right).$$

س¹² - الدور الذي يحصل عنده الرنين T_{Res} يساوي

$$T_{Res} = \frac{2\pi}{\omega_{Res}} \cong \frac{1}{0,94} T_0 \cong 1,07 T_0$$

$$\cong 1,07 \cdot 0,63$$

$$\cong 0,67 \text{ sec.}$$

س¹³ - معادلة حركة الثقل التفاضلية هي

$$y(t) = \frac{F(t)/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

نعوض عن $F(t)$ في كل حاله ومن ثم نجد y المتوافقه معها ، على فرض ان $F(t)$ لكل حاله

تكون متغيره توافقيا .

س 14 -

(1) معادلة الاهتزازات الاضطرابيه (القشريه) لمركز الكره B هي:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \arctg \frac{4,3 \cdot 18,85}{447 - (18,85)^2} =$$

$$\varphi = 0,7217 \text{ rad}$$

$$x(t) = 24,018 \cos(18,85t - 0,7217)$$

(2) اكبر تمدد للنابض يساوي

$$ad = 0,15 \text{ cm}$$

(3) القيمه العظمى للقوه

$$F_{\max} = C \cdot ad$$

حيث C - معامل المرونه

ad - الاستطاله

$$F_{\max} = 120 \cdot 0,15 = 18 \text{ N}$$

(N - نيوتن) .

المعادله التفاضليه لحركة النقطه الماديه
في الشكل (2.21) هي:

$$m \ddot{x} = F_{xe} + S_x \quad (1)$$

حيث

$F_x = -Cx$ - قوة المرونه وتساوى
 S_x - القيه المثيره ، نحصل عليها باستخدام
مسلسل فورييه

$$S_x = \frac{4H}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \frac{1}{7} \sin 7 \omega t \right)$$

نعوض عن F_x و S_x في المعادله (1) نجد

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \frac{1}{7} \sin 7 \omega t \right)$$

حيث

$$\omega_0^2 = \frac{C}{m} \quad ; \quad h = \frac{4H}{\pi m}$$

اجهة الفصل الثالث

س¹ - التوازن سوف يكون مستقرا عندما

- 1

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} > 0 ; \sin \alpha < \cos \beta . \quad (1)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) < \cos \beta . \quad (2)$$

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} . \quad (3)$$

إذا تحقق الشرط (3) فذلك يعني ان β تقع على يسار β_0 .

س² -

$$C_2 > P_2 l_2$$

$$C_1 > (P_1 + P_2) l_1 + \frac{P_2 l_2 C_2}{C_2 - P_2 l_2} .$$

س³ -

$$i_2(t) = i_2(0) e^{-Bt} \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= n \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{n^2}{RC} t} \cos(\omega t + \varphi)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_2 C} - \frac{n^4}{4RC}} .$$

اجهة الفصل الرابع

س¹ : الترددات الخاصة او الطبيعيه للاهتزازات

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \quad \text{و} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$$

بينما المتجهات الخاصه لأجل الاحداثيات الطبيعيه

$$K_1 \equiv x_{e1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad x_{e2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

س² (الترددات الخاصه والمتجهات الخاصه

$$\omega_1^2 = 0 ; \quad K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \omega_2 = n, \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ;$$

$$\omega_3 = n\sqrt{3} , \quad K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

س³ (الترددات الخاصه

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m} \frac{1}{2\alpha} = \frac{c}{m} (3 - \sqrt{3}) .$$

$$\omega_{2,3} = \frac{c}{m} (3 \pm \sqrt{3}) ; \quad \begin{Bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} A_{13} \cos(\omega_3 t + \phi)$$

س⁴ (الترددات الخاصه المعقده λ_1 و λ_2 و λ_3 تساوى

$$\lambda_1 = -\delta_1 + i\omega_1 ,$$

$$\lambda_3 = -\delta_2 + i\omega_2 ,$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -\delta_1 - i\omega_1$$

$$\lambda_4 = \lambda_3^* = -\delta_2 - i\omega_2$$

$$\delta_1 = \delta = \frac{R}{2L} ,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0 ,$$

$$\delta_2 = 3\delta = \frac{3R}{2L} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{3\omega_0^2 - (3\delta)^2} \approx \omega_0\sqrt{3} ,$$

اما المتجهات الخاصه فتساوى

$$K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \quad K_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} .$$

المصطلحات

"A"

Amplitude	السعة
Angular momentum	العزم الحركي (او الزاوى)
Angular frequency	التردد او التواتر الزاوى
Approximation	تقريب
Asymptotic behaviour	السلوك المقارب
Average value	القيمة الوسطى
Acceleration	التسارع
Automatic oscilation	ذبذبات اتوماتيكية
Antiphase	طور مضاد

"B"

Basis	قاعده
Boundary conditions	الشروط الحديه
Parabula	القطع الناقص
Beats	الضربات او النهضات

"C"

Centre of mass	مركز الكتله
Central force	قوه مركزيه
Closed system	نظام معزول او مغلق

Complet description	وصف كامل
Complex function	داله معقده
Conserved system	نظام محافظ
Conservation	انحفاظ
Conservation of energy	انحفاظ الطاقة
Conservation laws	قوانين الانحفاظ
Conservation of conditions	شروط الانحفاظ
Cartesian coordinates	الاحداثيات الديكارتية
Circular hall.....	الاخدود الحلقي
Canacity	السعة الكهسريائية
Complex numbers	الاعداد المعقده
Coil	ملف او وشيعه
Complex impedance	المقاومه
	العقدية او المركبه
Capacitive microphone	الميكروفون السعساتي

" D"

Descripted equation	المعادله الخصوصيه او المميزه
Displacement	الازاحه
Degree of freedom	درجة الحرية

Damped oscillations اهتزازات متخامده
 "Dionile" integration تكامل ديوميل

"E"

Energy طاقة
 Equation of motion معادله الحركة
 Energy dispersion التشتت الطاقي
 Electrical vibrations ذبذبات كهربائية
 Elastic force قوة المرونة
 Ellipse البس ، قطع ناقص
 Elastic coefficient معامل المرونة
 Equilibrium position موضع التوازن
 Electrical impedance الممانعة الكهربائية
 Electromechanical المماثلة الكهروميكانيكية
 equivalence.
 Electromechanical vibrations اهتزازات كهروميكانيكية
 Established vibrations ذبذبات مستقامة

"F"

Free motion	حرکه حره
Free oscillations	اهتزازات حره
Force oscillations	اهتزازات اضطراريه او قسريه
Force of reconstruction	قوة الاعاده
Forced forces	القوى المجبره او الاضطراريه
Fourier series	سلسلة فورييه
Functions	دوال
Functions complex	دوال معقده

"G"

General solution	حل عام
Gradient	اشتقاق او تفاضل جزئي متجهي
Generator	مولد
Generator or alternation current	مولد تيار متغير

"H"

Harmonic oscillator	الهزاز التوافقي
Harmonic oscillations	اهتزازات توافقية
Harmonics	توافقيات

" H "

Harmonic force	قوة توافقية
Horizontal line	خط مستقيم
Horizontal plane.....	مستوى افقي
Horizontal component	مركبه افقيه

" I "

Infinite	غير منتهي
Infinite small transformations	تحويلات غير متناهية في الصغر

Intensity	الشده
Initial phase	الطور الابتدائي
Initial conditions.....	الشروط الابتدائية
Induced electromotive force	القوة الكهربائية المحثه

..... " J "

" K "

Kirchoff's law	قانون كرشوف

" L "

Lagrange's equation	معادلة لاغرانج
Laplacian	اللابلاسيان

Laplace transformations تحويلات لابلاس
 Linear systems أنظمة خطية
 Logarithmic decrement, ... المحدد اللوغاريتمي للخمود أو للذبذبه
 amplitude.

" V "

Matrix representation التمثيل المصفوفي
 Maximum value القيمة العظمى
 Minimum value? زخم أو دفع
 Mechanical vibrations اهتزازات ميكانيكية
 Mechanical impedance الممانعة الميكانيكية

" N "

Normal conditions ظروف طبيعية
 N degree of freedom N درجة حرية
 Non linear system نظام لا خطي

One dimensional motion حركة في بعد واحد

Orthogonal vibrations ذبذبات متعامده

Oscillator هزاز

Outphase خارج الطور

" p "

Principle of superposition مبدأ التراكب

Period زمن الذبذبه او الدور

Perpendicular vibrations ذبذبات متعامده

PERIODIC دوري

Pendulum البندول او التواس

Periodical motion حركة دوريه

Periodical vibrations ذبذبات دوريه

Phase الطور

Position موضع

Potential energy طاقه كامنه

Potential جهد او كمون

Piezoelectric الكهرواجهاده

Phase angle زاوية الطور

" Q "

Quality factor جودة النظام
Quartz الكوارتز

" R "

Radial قطري
Representation تمثيل
Rotation دوران
Resultant amplitude محصلة السعة

" S "

Superposition تركيب او تراكم
Symmetry تناظر
System نظام او جملته
Small oscillations ذبذبات صغيره
Sinephase في الطور

" T "

Time - dependent تابع للزمن
Time - independent مستقل عن الزمن
Total angular momentum العزم الحركي الكلي
Total mass الكتله الكليه
Transformation تحويل
Transducer مبدل

Vibrations in paralel planes ذبذبات باتجاه متكافئ

Velocity السرعة

Vibrational motion حركة اهتزازيه

المراجع الرئيسيه للكتاب

((1 م . ي . رابينوفيتش و د . ي . ترهيتسيكوف
مقدمه في نظرية الاهتزازات والأمواج
دار العلم موسكو 1984

((2 ف . ت . غرينجينكو و ف . ف . ميليشكو
الذبذبات والأمواج في الأجسام المرنة
كييف دار العلوم ((دوكة)) 1981

((3 ي . ف . سافيليف
سلسله محاضرات في الفيزياء العامه
الجزء الاول . دار مير للنشر موسكو 1977

((4 ف . ف . بيتكيفج
الميكانيك النظرى
دار مير للنشر موسكو 1981

((5 ي . م . باباكوف
نظرية الاهتزازات
دار مير للنشر موسكو 1965

((6) ف . افدوكيموف
اسس الكهريائيه
دار مير للنشر موسكو 1977

((7) م . ي . آيزرمان
الميكانيك الكلاسيكي
دار مير للنشر موسكو 1980

((8) ل . ف . پوست نيكوفا وي . ف . ي . كاروليفا
مسائل في النظرية الاهتزازيه
دار مير للنشر موسكو 1978

((9) ا . ي . ايرودوف
مسائل في الفيزياء العامه
دار مير للنشر موسكو 1981

((10) ف . ا . بلاش
مسائل في الفيزياء وطرق حلها
دار مير للنشر موسكو 1983

((11) ف . س . فولكينشتاين
مسائل في الفيزياء العامة
دار مير للنشر موسكو 1976

((12) ف . ب . كانديدوف وآخرون
حلول وتحليل مسائل النظرية الخطية للامتزازات
اصدار جامعة موسكو 1976

((13) ف . غ . زهوف و ف . ب . شالوف
مسائل في الفيزياء
دار مير للنشر موسكو 1972

((14) ا . ي . بوتيكوف وآخرون
الفيزياء في الأمثلة والمسائل
دار مير للنشر موسكو 1979

((15) تشارلز كيتيل وآخرون
مقرر بيركلي في الفيزياء الميكانيكا
المجلد الأول ماكرومل 1982

الفهرست

3	المقدمة
9	الفصل الاول
	الحركات الاهتزازيه ومعادلاتها الرياضيه .
11	11 - جوهر الحركة الاهتزازيه
11	2 - الذبذبات الصغيره
19	3 - الاعداد المعقده
23	4 - المعادلات التفاضليه الخطيه
28	5 - الاهتزازات التوافقيه (الذبذبات الهرمويه)
36	6 - المندول او النواس
40	7 - التخطيط او البناء الاتجاهي
44	8 - التناغم
47	9 - جمع ذبذبتان متعامدتان
53	امثله وتماثلين
71	الفصل الثاني
	الاهتزازات الحره بدرجة حريره واحده في
	الأنظمه الخطيه
	1 - الاهتزازات الحره بدرجة حريره واحده
	في الأنظمه الخطيه المحافظه (نظريه المحافظه)
77	2 - طريقه المستوى الطوري
	3 - حركه الأنظمه المزاحه عن وضع توازنها
80	الدائم
	4 - الاهتزازات الحره بدرجة حريره واحده في

82	الأنظمة غير المحفوظة
5	طرق تحليل الحركة الاهتزازية في الأنظمة
90	الخطية المختلفة
92	6 - الذبذبات التوافقية المتخامدة (أو المضمحلة)
100	7 - اهتزازات الدوائر الكهربائية
106	8 - الذبذبات الاضطرابية أو القسرية
9	العمليات الاثنائية والذبذبات المستقامة
139	في الأنظمة بدرجة حرية واحدة
1	طريقة التحليل التوافقي (الهرموني)
140	لفورييه
142	2 - طريقة السعة المعقدة
145	3 - تحويلات لابلاس
162	اسئلة الفصل
168	الفصل الثالث
	الاهتزازات الحرة في الأنظمة الخطية بدرجة حرية
	حرية
	1 - معلومات عامة
	2 - العلاقة بين الترددات الطبيعية والثنائيه
180	للتواسين المرتبطتين
	3 - الذبذبات الاضطرابية في الأنظمة
194	بدرجتين حرة
	4 - الاهتزازات الاضطرابية في الأنظمة المشتقة
200	بدرجتين حرة

5 -	خصائص الذبذبات القسريه في النظام ذو
205	الدائرتين الكهربائيتين
209	اسئلة الفصل
211	الفصل الرابع
	الامتزازات في الأنظمه الخطيه بدرجة من الحريره
	1 - الامتزازات الخاصه في الأنظمه المحافظه ..
221	تحديد الترددات الخاصه والمتجهات الخاصه ..
	2 - الامتزازات الاضطرابيه في الأنظمه بدرجة
231	حريره
	3 - الامتزازات في الأنظمه المشتته بدرجة
243	حريره
	4 - الذبذبات في السلاسل الكهربائيه
246	المتجانسه
252	اسئلة الفصل
255	الفصل الخامس
	الامتزازات الكهروميكانيكيه والمماثله الكهروميكانيكيه
	اولا - الامتزازات الكهروميكانيكيه
256	1 - معلومات عامه
256	2 - مكبر الصوت الكهروديناميكي
259	3 - الميكروفون السمعاتي
262	4 - المبدل الكهربائي الضغطي
264	ثانيا - المماثله الكهروميكانيكيه

275	الفصل السادس
	الأنظمة اللاخطية
275	1 - معلومات عامة
286	2 - طريقة الأنحاء أو طريقة أيزوكلين
	3 - الأنظمة اللاخطية المحافظة بدرجة حرية
289	واحدة
	4 - الحركة الدورية للأنظمة اللاخطية
304	المحافظة
313	اجهة الفصل الأول
320	اجهة الفصل الثاني
325	اجهة الفصل الثالث
326	اجهة الفصل الرابع
327	المصطلحات
331	المصادر