

الكهربية والمغناطيسية

تأليف

الدكتور محمد بن علي أحمد آل عيسى

الأستاذ بقسم الفيزياء

كلية العلوم - جامعة الملك سعود

النشر والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب. ٦٨٩٥٣ الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية



مقدمة الطبعة الرابعة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء وأشرف المرسلين سيدنا محمد النبي العربي الأمين .

بعون من الله وبتوفيق منه ، أقدم هذا الكتاب «الكهرية والمغناطيسية» للطلاب في علم الفيزياء في مختلف دراساتهم الجامعية ، وبصورة خاصة لطلاب المستوى الثاني ، آملاً أن يكون فيه ما ينفعهم ويعينهم على فهم القواعد الأساسية والمتقدمة في هذا العلم بلغتنا العربية الأصيلة .

ويحتوي هذا الكتاب على تسعة فصول . يتعلق الفصل الأول والثاني والثالث بدراسة الكهرباء الساكنة ، والرابع خاص بالتيار المستمر ، أما الخامس والسادس والسابع فتعالج الموضوعات المختلفة في المغناطيسية ، ويختص الفصل الثامن بدراسة التيار المتردد ودوائره المختلفة ، وأخيراً يختص الفصل التاسع بدراسة معادلات ماكسويل والموجات الكهرومغناطيسية . ولقد روعي في تأليف هذا الكتاب تقديم المادة العلمية المتكاملة في الموضوع ، واختير النظام العالمي (S.I.) للوحدات أساساً لاشتقاق وبرهنة المعادلات الرياضية المصاحبة لأي موضوع فيزيائي وارد في هذا الكتاب ، مع كتابة المعادلات النهائية بالنظام الجاوسي (C.G.S.) كلما أمكن ذلك . وكتبت المصطلحات العلمية باللغتين العربية والإنجليزية حفاظاً على المعنى وتيسيراً على الطالب لعملية الاطلاع في المراجع الأجنبية التي سيحتاج إليها في المراحل التعليمية المتقدمة . كما كتبت

جميع معادلات الكتاب بالحروف اللاتينية . وقد ورد في كل فصل من فصول الكتاب الكثير من التطبيقات والتمرينات المحلولة وغير المحلولة وروعي فيها أن تكون شاملة للعديد من الأفكار المختلفة . كما يحتوي الكتاب على شرح لبعض الأجهزة الفيزيائية القياسية المستعملة في المختبرات . وأضيف في نهاية الكتاب بعض الملاحق التي تحتوي على بعض الجداول الفيزيائية والرياضية المهمة التي يحتاجها الطالب في دراسته لهذا الموضوع .

لقد بدأت فكرة تأليف هذا الكتاب بعد أن قمت بتدريس هذه المادة سنتين كاملتين متتاليتين، ولمست الصعوبات التي تواجه الطلاب عند الرجوع إلى المراجع المكتوبة باللغة الإنجليزية في هذا المستوى من مراحلهم التعليمية، مع عدم وجود المراجع العربية الكافية الوافية في المكتبة، وكذلك عدم وجود كل الموضوعات التي أقرت في منهاج المقرر ٢٢١ فيز في كتاب واحد . وإلى جانب ذلك فإن التعليم باللغة العربية في كلية العلوم هو الأساس حسب النظام الذي أقر للجامعة، وليس معنى ذلك أننا لا نحتاج إلى المصادر الأخرى باللغات الأجنبية، فالعلوم التقنية لا تفرض لغة معينة للتأليف، لذلك يجب الاستفادة من الكتاب الجيد بلغته التي كتب بها أو مترجما إلى أي لغة أخرى، واللغة العربية ليست أقل جمالا أو أصالة أو امتلاء بالتراث من غيرها، لذلك يجب التأليف والترجمة بلغتنا حتى تصل المعرفة إلى كل عربي .

ولما كان شرح المادة باللغة العربية وكتابة المعادلات وحلول المسائل بالحروف اللاتينية والأرقام العربية، روعي أن يكون الكتاب امتدادا للمحاضرة، وفي هذا تمكين للطلاب من متابعة تفهم القواعد والنظريات دون الاصطدام بعقبة اللغة . وإضافة المصطلحات اللاتينية إلى جانب المصطلحات باللغة العربية تجعل الطالب بعد مرحلة التحصيل الأولى قادرا على متابعة الدراسة من الكتب الأجنبية إن شاء الله .

وتم في هذه الطبعة تصحيح الأخطاء المطبعية التي وردت في الطبعة الثالثة كما

ويسعدني أن أتوجه بالشكر والتقدير إلى إخواني الزملاء الأستاذ الدكتور محمد عبد الخالق محروس والأستاذ الدكتور عادل عباس محمد والأستاذ الدكتور عز الدين محمد محمد سيد الأعضاء السابقين بقسم الفيزياء، لمشاركتهم في قراءة الكتاب أثناء مراحلهم المختلفة وإبداء ملاحظاتهم ومناقشاتهم القيمة وآرائهم التي استفدت منها في تطوير الكتاب.

ويسعدني أن أتلقى ملاحظات وآراء الزملاء الأفاضل عما ورد في هذا الكتاب سواء بالتعديل أو الحذف أو الإضافة وذلك تحقيقاً لمبدأ التطوير نحو الأفضل.

المؤلف

والله ولي التوفيق ، ، ،

المحتويات

الصفحة

هـ	المقدمة
ط	المحتويات
	الفصل الأول: المجال الكهربائي
١	(١-١) مقدمة
٥	(٢-١٥) قانون كولوم ✓
١٤	(٣-١) المجال الكهربائي ✓
١٧	(٤-١) المجال الكهربائي لذوي القطبين
١٨	(١-٤-١) المجال عند نقطة ما على طول محور ذوي القطبين
	(٢-٤-١) المجال عند نقطة ما على العمود المنصف لمحور
١٨	ذوي القطبين
٢٠	(٣-٤-٣) المجال عند أي نقطة (الحالة العامة)
٢٦	(٥-١) كثافة الشحنة
٢٦	(١-٥-١) الكثافة الحجمية
٢٦	(٢-٥-١) الكثافة السطحية
٢٧	(٣-٥-١) الكثافة الطولية
٢٧	(٦-١) المجال الناتج عن توزيع مستمر للشحنة الكهربائية
٣٤	(٧-١) خطوط القوى الكهربائية
٤٠	(٨-١) قانون جاوس ✓

الصفحة

٤٦	تطبيقات على قانون جاوس	(٩-١)
٤٧	شدة المجال حول كرة مشحونة	(١-٩-١)
٤٧	المجال الناشئ عن سلك طويل مشحون	(٢-٩-١)
٤٨	المجال حول أسطوانة	(٣-٩-١)
	شدة المجال خارج موصل مستوي لا نهائي الأبعاد	(٤-٩-١)
٤٩	مشحون	
	المجال بين صفيحتين متوازيتين مشحونتين	(٥-٩-١)
٥٠	ومتقابلتين	
٥١	المجال والشحنة داخل وخارج موصل	(٦-٩-١)
٥٤	شكل المعادلة التفاضلية لقانون جاوس	(١٠-١)
٥٩	شحنة نقطية في مجال كهربائي	(١١-١)
	جسيم مشحون ينتقل في اتجاه خطوط قوى	(١-١١-١)
٥٩	المجال الكهربائي	
٦١	انحراف حزمة من الإلكترونات	(٢-١١-١)
٦٤	قياس شحنة الإلكترونات بطريقة ميليكان	(١٢-١)
٦٨	مسائل	(١٣-١)
	الفصل الثاني: الجهد الكهربائي	
٧٥	طاقة الوضع الكهربائية الاستاتيكية	(١-٢)
٨٠	الجهد الكهربائي	(٢-٢)
٨٨	العلاقة بين المجال والجهد الكهربائي	(٣-٢)
٩٠	الجهد وشدة المجال لنقطة مشحونة	(١-٣-٢)
٩١	الجهد وشدة المجال على محور حلقة مشحونة	(٢-٣-٢)
٩١	الجهد والمجال لذوي القطبين	(٣-٣-٢)
٩٥	الجهد الناتج عن موصل كروي مشحون	(٤-٢)
٩٨	تقاسم الشحنات بين الموصلات	(٥-٢)
١٠٢	السطوح متساوية الجهد	(٦-٢)

الصفحة

١٠٦	: معادلات بواسون ولا بلاس	(٧-٢)
١١٠	: طاقة الوضع والمجال الكهربى	(٨-٢)
١١٣	: ذو قطبين فى مجال كهربى خارجى منظم	(٩-٢)
١١٧	: مسائل	(١٠-٢)

الفصل الثالث: المكثفات والعوازل

١٢٣	: السعة	(١-٣)
١٢٥	: المكثفات	(٢-٣)
١٢٧	: أشكال المكثفات	(٣-٣)
١٢٧	: المكثف متوازى اللوحين	(١-٣-٣)
١٢٧	: المكثف الكروى	(٢-٣-٣)
١٣٠	: المكثف الأسطوانى	(٣-٣-٣)
١٣١	: المكثف ذو الحلقة الحارسة	(٤-٣-٣)
١٣٤	: توصيل المكثفات	(٤-٣)
١٣٤	: توصيل المكثفات على التوالى	(١-٤-٣)
١٣٥	: توصيل المكثفات على التوازى	(٢-٤-٣)
١٤٠	: طاقة مكثف مشحون	(٥-٣)
١٤٢	: القوة بين لوحى المكثفة المستوية	(٦-٣)
	: فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو	(٧-٣)
١٤٣	مكثفين	
١٤٨	: مقدمة عن المواد العازلة	(٨-٣)
١٥٣	: تأثير المجال الكهربى على المواد	(٩-٣)
١٥٩	: ثابت العزل	(١٠-٣)
١٦٢	: العوازل ونظرية جاوس	(١١-٣)
١٦٦	: الاستقطاب والإزاحة الكهربائية	(١٢-٣)
١٦٩	: التأثيرية الكهربائية	(١٣-٣)
١٧٢	: شدة (مقدرة) العزل	(١٤-٣)

الصفحة

١٧٦	: سعة مكثف مستوي وضع بين لوحيه عازلان مختلفان	(١٥-٣)
١٧٨	: الشروط الحدودية	(١٦-٣)
١٨٢	: معامل إزالة الاستقطاب	(١٧-٣)
١٨٣	: المواد العازلة تلقائية الاستقطاب (فروكهرية)	(١٨-٣)
١٨٦	: الإلكترومترات والقياسات الكهرية الساكنة	(١٩-٣)
١٨٧	: المكشاف الكهربي	(١-١٩-٣)
١٩٠	: الإلكترومتر المطلق أو ذو القرص المنجذب	(٢-١٩-٣)
١٩٢	: الإلكترومتر الربيعي	(٣-١٩-٣)
١٩٦	: استعمال الإلكترومتر الربيعي	(٤-١٩-٣)
١٩٨	: الفولتمترات الكهرية الساكنة	(٥-١٩-٣)
٢٠١	: المكشاف النابض (مكشاف ولف النابض)	(٦-١٩-٣)
٢٠٧	: مسائل	(٢٠-٣)

الفصل الرابع: التيار الكهربي المستقر

٢١٣	: التيار الكهربي	(١-٤)
٢١٨	: التوصيلية الكهرية والمقاومات	(٢-٤)
٢١٩	: المقاومة وقانون أوم	(١-٢-٤)
٢٢٥	: تغير المقاومة بتغير درجة الحرارة	(٢-٢-٤)
٢٢٨	: توصيل المقاومات	(٣-٢-٤)
٢٣٠	: مقاومة قرص دائري	(٤-٢-٤)
٢٣١	: الطاقة والقدرة وقانون جول في دوائر التيار المستمر	(٣-٤)
٢٣٤	: القوة الدافعة الكهرية والمقاومة الداخلية	(٤-٤)
٢٤١	: الدوائر الكهرية المركبة	(٥-٤)
٢٤١	: قاعدتا كيرشوف	(١-٥-٤)
٢٤٦	: طريقة ماكسويل	(٢-٥-٤)
٢٤٨	: نظرية التراكم	(٣-٥-٤)
٢٥٠	: نظرية ثيفنين	(٤-٥-٤)

الصفحة

٢٥٢	: تيارات الشحن والتفريغ للمكثف	(٦-٤)
٢٦١	: قنطرة ويتستون والقنطرة المترية	(٧-٤)
٢٦٣	: قنطرة كاري فوستر	(٨-٤)
٢٦٥	: قنطرة كلفين المزدوجة	(٩-٤)
٢٦٨	: مقياس فرق الجهد واستعمالاته	(١٠-٤)
٢٦٨	: مقياس فرق الجهد الأساسي	(١-١٠-٤)
٢٦٩	: استعمال مقياس فرق الجهد	(٢-١٠-٤)
٢٧٤	: القوة الدافعة الكهربائية الحرارية	(١١-٤)
٢٧٥	: ظاهرة «تأثير» سيبك	(١-١١-٤)
٢٧٧	: ظاهرة «تأثير» بلتير	(٢-١١-٤)
٢٧٨	: ظاهرة «تأثير» طومسون	(٣-١١-٤)
٢٨٠	: تأثيرات سيبك وبلتير وطومسون	(١٢-٤)
٢٨١	: القوة الدافعة الحرارية والديناميكا الحرارية	(١٣-٤)
٢٨٤	: الازدواج الحراري ودرجة الحرارة	(١٤-٤)
٢٩٤	: مسائل	(١٥-٤)

الفصل الخامس: المجالات المغناطيسية للتيار الكهربائي

٣٠٥	: مقدمة	(١-٥)
٣٠٨	: قانون بيوت وسافارت	(٢-٥)
٣١١	: التفريق الاتجاهي للحث المغناطيسي	(٣-٥)
٣١٣	: قانون أمبير الدوائري	(٤-٥)
٣١٨	: تطبيقات لحساب المجال المغناطيسي	(٥-٥)
	: المجال المغناطيسي الناتج عن تيار يمر	(١-٥-٥)

٣١٨	في موصل مستقيم	
٣٢٦	: المجال المغناطيسي لموصل دائري	(٢-٥-٥)
٣٣١	: المجال المغناطيسي لملف حلزوني	(٣-٥-٥)
٣٣٨	: المجال المغناطيسي لملف حلزوني حلقي	(٤-٥-٥)

الصفحة

٣٤٠	: الجهد المغناطيسي	(٦-٥)
٣٤١	: الجهد المغناطيسي العددي	(١-٦-٥)
٣٤٣	: الجهد المغناطيسي الاتجاهي	(٢-٦-٥)
٣٤٧	: القوة بين دائرتين كاملتين	(٧-٥)
٣٥٢	: القوة وعزم الازدواج على دائرة كهربية تحمل تيارا	(٨-٥)
٣٥٦	: جلفانومترا الظل وهيلمهولتز	(٩-٥)
٣٥٦	: جلفانومتر الظل	(١-٩-٥)
٣٥٨	: جلفانومتر هيلمهولتز	(٢-٩-٥)
٣٦٢	: الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية	(١٠-٥)
٣٦٢	: الشحنات النقطية المتحركة	(١-١٠-٥)
	: مدارات الجسيمات المشحونة في المجالات	(٢-١٠-٥)
٣٦٤	المغناطيسية	
٣٦٨	: تطبيقات على حركة الشحنة في مجال مغناطيسي	(١١-٥)
٣٦٨	: السيكلوترون	(١-١١-٥)
٣٧١	: قياس الشحنة إلى الكتلة (q/m) للإلكترون	(٢-١١-٥)
٣٧٥	: تأثير هول	(٣-١١-٥)
٣٨٠	: مطياف الكتلة	(٤-١١-٥)
٣٨٢	: مسائل	(١٢-٥)
	الفصل السادس: الحث الكهرومغناطيسي	
٣٨٩	: مقدمة	(١-٦)
٣٩٠	: حركة موصل في مجال مغناطيسي	(٢-٦)
٣٩٥	: قانون فاراداي	(٣-٦)
٤٠١	: قانون فاراداي والمجال الكهربي الحثي	(١-٣-٦)
٤٠٦	: المعادلة التفاضلية من قانون فاراداي	(٢-٣-٦)
٤٠٦	: الحث والحركة النسبية	(٤-٦)
٤١٢	: الحث الذاتي	(٥-٦)

الصفحة

٤١٤	: معامل الحث الذاتي للملف حلزوني طويل	(١-٥-٦)
٤١٥	: الحث المتبادل	(٦-٦)
٤١٩	: توصيل ملفات الحث	(٧-٦)
٤١٩	: على التوالي	(١-٧-٦)
٤٢٣	: على التوازي	(٢-٧-٦)
٤٢٤	: سريان التيار في دائرة حثية	(٨-٦)
٤٢٤	: نمو التيار	(١-٨-٦)
٤٢٩	: اضمحلال التيار	(٢-٨-٦)
٤٣١	: طاقة الحث	(٩-٦)
٤٣٢	: كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي	(١-٩-٦)
٤٣٥	: شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي	(١٠-٦)
٤٤٧	: المولدات	(١١-٦)
٤٤٧	: طريقة توليد جهد متردد	(١-١١-٦)
٤٥٢	: مولد التيار المستمر	(٢-١١-٦)
٤٥٤	: المحرك الكهربائي	(١٢-٦)
٤٥٤	: محرك التيار المستمر	(١-١٢-٦)
٤٥٧	: محرك التيار المتردد	(٢-١٢-٦)
٤٥٧	: المحول	(١٣-٦)
٤٦٠	: البيئاترون	(١٤-٦)
٤٦٢	: طريقة ملف الاستكشاف لقياس التدفق المغناطيسي	(١٥-٦)
٤٦٤	: مسائل	(١٦-٦)

الفصل السابع: الخواص المغناطيسية للمواد

٤٧٣	: مقدمة	(١-٧)
٤٧٤	: تصنيف المواد	(٢-٧)
٤٧٤	: مواد متسامتة التمعنط (بارامغناطيسية)	(١-٢-٧)
٤٧٥	: مواد دايامغناطيسية	(٢-٢-٧)

الصفحة

٤٧٩	: شدة التمغنط	(٣-٧)
٤٨٣	: التأثيرية المغناطيسية	(٤-٧)
	: العلاقة بين كمية الحركة الزاوية والعزم المغناطيسي	(٥-٧)
٤٨٩	المداري للإلكترون	
٤٩١	: الدايامغناطيسية	(٦-٧)
٤٩٦	: التمغنط المتسامت (البارامغناطيسية)	(٧-٧)
٥٠٤	: المواد الحديدية المغناطيسية	(٨-٧)
٥١٠	: دورة التخلف المغناطيسي	(٩-٧)
٥١٠	: مواد حديدية مغناطيسية صلبة	(١-٩-٧)
٥١٢	: مواد حديدية مغناطيسية رخوة (مطاويع)	(٢-٩-٧)
٥١٣	: الطاقة اللازمة لمغنطة المواد الحديدية المغناطيسية	(٣-٩-٧)
٥١٧	: الدوائر المغناطيسية	(١٠-٧)
٥٢٠	: المغناط الكهربية	(١١-٧)
٥٢٣	: القوة المغناطيسية للفجوة الهوائية	(١٢-٧)
٥٢٤	: قياس التأثيرية المغناطيسية الصغيرة	(١٣-٧)
٥٢٧	: الجلفانومتر ذو الملف المتحرك	(١٤-٧)
٥٣١	: قياس تيار كهربى كبير I	(١-١٤-٧)
٥٣٢	: قياس جهد كهربى كبير V	(٢-١٤-٧)
٥٣٢	: حساسية الجلفانومتر	(٣-١٤-٧)
٥٣٣	: التخمين (كبت)	(٤-١٤-٧)
٥٣٥	: الجلفانومتر القذفي	(١٥-٧)
٥٣٧	: مقياس التدفق المغناطيسي	(١٦-٧)
٥٤١	: مسائل	(١٧-٧)

الفصل الثامن التيارات المترددة

٥٤٧	: مقدمة	(١-٨)
٥٤٨	: مقاومة أومية في دائرة مترددة	(٢-٨)

٥٥٥	: مكثف في دائرة مترددة	(٣-٨)
٥٥٩	: ملف ذو حث ذاتي فقط في دائرة مترددة	(٤-٨)
٥٦٥	: التوصيل على التوالي في دائرة مترددة	(٥-٨)
٥٦٥	: مقاومة وملف متصلان على التوالي	(١-٥-٨)
٥٧١	: مقاومة ومكثف متصلان على التوالي	(٢-٥-٨)
٥٧٦	: مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي	(٣-٥-٨)
٥٨٤	: دائرة التيار المتردد المتوازية	(٦-٨)
٥٨٤	: مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوازي	(١-٦-٨)
	: قوة دافعة كهربية على التوازي مع مكثف وملف	(٢-٦-٨)
٥٨٨	: حثي ذو مقاومة أومية	
٥٩٤	: دوائر الرنين المتتالية والمتوازية ومعامل النوعية	(٧-٨)
٥٩٤	: دائرة الرنين المتتالية	(١-٧-٨)
٦٠٣	: دائرة الرنين المتوازية	(٢-٧-٨)
٦٠٨	: استخدام الأعداد المركبة وتطبيقات عامة	(٨-٨)
٦٠٨	: استخدام الأعداد المركبة في دوائر التيار المتردد	(١-٨-٨)
٦١٣	: تطبيقات على استعمال الأعداد المركبة	(٢-٨-٨)
٦٢٨	: قناطر التيار المتردد	(٩-٨)
٦٢٨	: قنطرة ويتستون العامة	(١-٩-٨)
٦٢٩	: قنطرة أوين	(٢-٩-٨)
٦٣٠	: قنطرة ماكسويل	(٣-٩-٨)
٦٣١	: قنطرة شيرنج	(٤-٩-٨)
٦٣٢	: قنطرة روبنسون المترددة	(٥-٩-٨)
٦٣٤	: قناطر الحث المتبادل	(٦-٩-٨)
٦٣٥	: مسائل	(١٠-٨)
	الفصل التاسع: معادلات ماكسويل	
٦٤٣	: مقدمة	(١-٩)

الصفحة

٦٤٤	: تيار الإزاحة	(٢-٩)
٦٥٠	: معادلات ماكسويل	(٣-٩)
٦٥٠	: في شكلها العام	(١-٣-٩)
٦٥٣	: في حالات خاصة	(٢-٣-٩)
٦٥٦	: الموجات الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ	(٤-٩)
٦٦٤	: الموجات المستوية في وسط عازل متماثل الخواص	(٥-٩)
٦٦٥	: طاقة الموجات الكهرومغناطيسية	(٦-٩)
	: امتصاص الموجات المستوية في الموصلات و التأثير	(٧-٩)
٦٦٩	السطحي	
٦٧٤	: طيف الموجات الكهرومغناطيسية	(٨-٩)
٦٧٧	: مسائل	(٩-٩)

الملاحق

	: الوحدات	ملحق (١)
٦٨١	: نظم الوحدات	(١-١)
٦٨٢	: النظام العالمي للوحدات	(٢-١)
٦٨٣	: الوحدات الكهروستاتيكية	(٣-١)
٦٨٤	: الوحدات الكهرومغناطيسية	(٤-١)
٦٨٥	: النظام الجاوسي	(٥-١)
٦٨٦	: الأبعاد	(٦-١)
٦٨٧	: الثوابت الفيزيائية	(٧-١)

	: المتجهات والأعداد المركبة	ملحق (٢)
٦٩٥	: المتجهات والكميات العددية	(١-٢)
٦٩٥	: متجهات الوحدة المتعامدة	(١-١-٢)
٦٩٥	: متجهات الوحدة	(٢-١-٢)
٦٩٦	: جمع أو محصلة المتجهات	(٣-١-٢)

المحتويات

ق

الصفحة

٦٩٧	: الضرب (٤-١-٢)
٦٩٩	: التدرج والتفرق والالتفاف (٥-١-٢)
٧٠٠	: العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانة (٦-١-٢)
٧٠٢	: العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والكروية (٧-١-٢)
٧٠٣	: العلاقات التكاملية (٨-١-٢)
٧٠٤	: الزاوية المجسمة (٩-١-٢)
٧٠٥	: مقدمة عن الأعداد المركبة (٢-٢)
	: معادلات رياضية ملحق (٣)
٧١٢	: أبعاد بعض الأشكال الهندسية (١-٣)
٧١٢	: الدائرة (١-١-٣)
٧١٢	: الأسطوانة والمخروط (٢-١-٣)
٧١٣	: الكرة (٣-١-٣)
٧١٤	: العلاقات اللوغاريتمية (٢-٣)
٧١٤	: العلاقات المثلثية (٣-٣)
٧١٤	: الدوال المثلثية (١-٣-٣)
٧١٥	: جمع وطرح زوايا الدوال المثلثية (٢-٣-٣)
٧١٥	: علاقات ضعف الزاوية (٣-٣-٣)
٧١٦	: علاقات حاصل ضرب دالتين (٤-٣-٣)
٧١٦	: علاقات حاصل جمع دالتين (٥-٣-٣)
٧١٦	: علاقات نصف الزاوية (٦-٣-٣)
٧١٦	: العلاقات للدوال ذات القوة (٧-٣-٣)
٧١٧	: العلاقات للدوال الأسية (٨-٣-٣)
٧١٧	: الدوال الزائدية (٤-٣)
٧١٨	: المعادلات التقريبية للكميات الصغيرة (٥-٣)
٧١٨	: المسلسلات (٦-٣)
٧١٨	: ذات الحدين (١-٦-٣)

الصفحة

٧١٨	 الدوال الأسية : (٢-٦-٣)
٧١٩	 الدوال المثلثية : (٣-٦-٣)
٧١٩	 الدوال الزائدية : (٤-٦-٣)
٧٢٠	 التفاضل «المشتقات» : (٧-٣)
٧٢٢	 التكامل : (٨-٣)

المراجع

٧٢٧	 أولاً: المراجع العربية
٧٢٨	 ثانياً: المراجعة الأجنبية

ثبت المصطلحات

٧٢٩	 أولاً: عربي إنجليزي
٧٣٧	 ثانياً: إنجليزي - عربي

٧٤٥	 كشف الموضوعات



المجال الكهربائي

Electrical Field

- مقدمة ● قانون كولوم ● المجال الكهربائي ● المجال الكهربائي ● كثافة الشحنة ● المجال الناتج عن توزيع مستمر للشحنة الكهربائية ● خطوط القوى الكهربائية ● قانون جاوس ● تطبيقات على قانون جاوس ● شكل المعادلة التفاضلية لقانون جاوس ● شحنة نقطية في مجال كهربائي ● قياس شحنة الإلكترونات بطريقة ميليكان ● مسائل.

(١-١) مقدمة

Introduction

عرفت الظواهر الطبيعية للكهرباء قبل القرن التاسع عشر مثل تكهرب الكهرمان (electrification of amber) والبرق (lightning) وصدمة ثعبان البحر (the shock of an electric eel). ففي عام ٦٠٠ قبل الميلاد اكتشفت ظاهرة جذب الكهرمان للأجسام الخفيفة كقطعة الورق بعد دلكها بقطعة من فرو الحيوانات. وبعد هذا الاكتشاف حتى ظهور كتاب العالم جلبرت (Sir W. Gilbert) عام ١٦٠٠م لم تكتشف ظواهر مهمة عن الكهرباء الساكنة حيث ثبت تجريبيا تكهرب معظم المواد بالاحتكاك وفي بداية القرن الثامن عشر توصل العلماء إلى صنع أجهزة لدراسة الظواهر الكهربائية مثل جهاز الإلكتروسكوب الورقي وميزان الالتواء (torsion balance) وفي هذا القرن أيضا تم فصل الكهرباء إلى قسمين أحدهما كهرباء ساكنة والأخرى كهرباء

تيارية لاختلافهما من حيث الاتجاه وطرق الحصول عليهما حيث تفسر الكهرباء الساكنة ظاهرة جذب الكهرمان بينما الكهرباء التيارية توضح طبيعة البرق والكهرباء الناتجة عن بعض الحيوانات .

وتفسير ظاهرة الكهرباء الساكنة يعود إلى التركيب الذري للمادة (atomic structure of matter) حيث تتألف المادة من جزيئات (molecules) وذرات (atoms) وكل ذرة تحتوي على نواة (nucleus) بها بروتونات (protons) ونيوترونات (neutrons) وتدور حول هذه النواة إلكترونات (electrons). أما نوع شحنات هذه الجسيمات، فالإلكترون يحمل شحنة سالبة (negative charge) ويرمز لها بالرمز $(-e)$ والبروتون يحمل شحنة موجبة (positive charge) ويرمز لها بالرمز $(+e)$ أما النيوترون فهو متعادل الشحنة (neutral charge). وذرة أي عنصر في حالتها الطبيعية متعادلة الشحنة ولذلك فإن عدد الإلكترونات التي تدور حول النواة يكون مساويا لعدد البروتونات داخل النواة ويسمى هذا العدد بالعدد الذري (atomic number) أما العدد الكلي لمجموع البروتونات والنيوترونات فيسمى بالعدد الكتلي (mass number). وبالتالي فإن المادة لا تكون مشحونة ولكن الشحنة تظهر فقط عليها إذا تمكنا من فصل أحد نوعي الشحنة في ذرات هذه المادة عن النوع الآخر. ويتم هذا الفصل بواسطة الاحتكاك أو الدلك أو تعرض هذه المواد لطاقة ضوئية أو حرارية أو إشعاع ذري .

ولقد كان للاحتكاك الفضل الأول في كشف نوعي الشحنات فالكهرمان المدلوك بفرو الحيوان يكتسب إلكترونات من الفرو فتصبح شحنته سالبة بينما يفقد الفرو بعض إلكتروناته فتصبح شحنته موجبة، ومعنى هذا أن بعض الإلكترونات انتقلت بالدلك من الفرو إلى الكهرمان، وقد وجد أيضا أن الزجاج المدلوك بالحرير يكتسب شحنة موجبة بينما يكتسب الحرير شحنة سالبة، أي أن بعض الإلكترونات انتقلت بالاحتكاك من الزجاج إلى الحرير، ولقد أثبتت التجارب العملية وجود قوى تجاذب وتنافر بين الأجسام المشحونة فالشحنة الموجبة تتجاذب مع الشحنة السالبة وتتنافر مع الشحنة الموجبة . حيث تتجاذب الشحنات المختلفة في النوع وتتنافر الشحنات المتشابهة .

ومن الحقائق المهمة أن الشحنة الكهربائية تظهر على هيئة أعداد صحيحة للشحنات الإلكترونية وأن شحنة الإلكترون هي أصغر شحنة سالبة موجودة في الطبيعة وشحنة البروتون هي أصغر شحنة موجبة وقيمتها هي :

$$(-e) = (+e) = 1.6029 \times 10^{-19} \text{ C}$$

وتكون شحنات الجسيمات الأولية إما صفرا مثل النيوترونات أو أعدادا صحيحة لشحنة الإلكترون. كذلك فإن شحنات الأيونات (ions) أو النويات الذرية (atomic nuclei) عبارة عن أعداد صحيحة إما لشحنة الإلكترون أو البروتون.

والجدول (١-١) يوضح بعض الجسيمات الأولية والمكتشفة عمليا مع قيمة الشحنة وكذلك كتلة الجسيم. علما بأن كتلتي الإلكترون والبروتون هما :

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$M_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

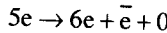
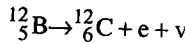
ومن الحقائق المهمة أيضا أن الشحنات لا تفنى (destroyed) ولا تستحدث (created) وقد اتضح ذلك مما تقدم ذكره وهو أن الشحنة تظهر على الدالك والمدلوك نتيجة لانتقال الإلكترونات من جسم إلى آخر، ويعرف هذا بقانون بقاء الشحنة (law of charge conservation) والذي ينص على أن :

«القيم الابتدائية والنهائية لمجموع الشحنة الكهربائية الداخلة في التفاعل يجب أن تكون واحدة» .

وهناك أمثلة أخرى منها

أ - انحلال البورون غير المستقر (unstable boron decay) إلى كربون مستقر

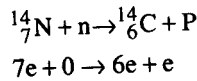
حسب المعادلة



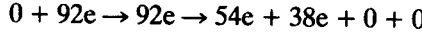
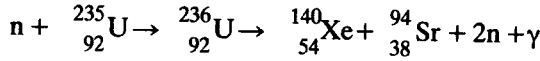
جدول (١-١): أسماء بعض الجسيمات الأولية مع قيمة كتلتها وشحنتها

الكتلة	الشحنة	الرمز	Particle name	اسم الجسيم
$1.000 \times M_p$	e	P	Proton	بروتون
1.001 "	0	n	Neutron	نيوترون
0.000545 "	-e	e^-	Electron	إلكترون
0.000545 "	e	e^+	Positron	بوزترون
0.1126 "	-e, +e	μ^-, μ^+	Muon	ميون
0.1438 "	+e, -e, 0	π^+, π^-, π^0	Pi-meson	باي ميزون
0 "	0	γ	Photon	فوتون
0 "	0	$\bar{\nu}$	Neutrino	نيوترينو
0 "	0	$\bar{\nu}$	Antineutrino	ضديد النيوترينو
1.189 "	0	Λ^0	Lambda	لامبدا
0.82 "	+e, 0, -e	ρ^+, ρ^0, ρ^-	Rho meson	روميسون
0.836 "	0	ω	Omega meson	اوميغا ميزون

ب - الحصول على كربون ١٤ (^{14}C) نتيجة لتصادم نيوترون مع ذرة نيتروجين



ج - الانحلال الإشعاعي لتصادم نيوترون مع اليورانيوم $^{235}_{92}\text{U}$ والذي ينتج عنه $^{236}_{92}\text{U}$ الذي ينشط (split) إلى زينون ($^{140}_{54}\text{Xe}$ xenon) وأسترونشيوم $^{94}_{38}\text{Sr}$ (strontium) ونيوترونات وفوتونات.



يدل العدد السفلى في المعادلات السابقة على العدد الذرى أى عدد البروتونات الموجودة في النواة. وأما العدد العلوي فيدل على الوزن الذرى (الكتلى). ويلاحظ أن مجموع الشحنات الداخلة في التفاعل تساوي مجموع الشحنات الخارجة منه، أى أن المجموع الجبرى للعدد الذرى قبل التفاعل يساوي المجموع الجبرى للعدد الذرى بعد التفاعل.

(٢-١) قانون كولوم

(Coulomb's Law)

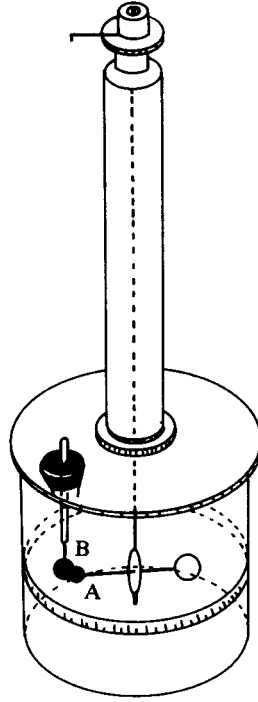
أجريت في نهاية القرن الثامن عشر كثير من التجارب العملية لمعرفة خواص الكهرباء الساكنة، وقد ساهم العلماء بيرنو (D. Berno) ١٧٦٠ وبرستلي (J. Priestly)، كيفندش (H. Cavendish) ١٧٧٠ ببعض التجارب المتقدمة، إلى أن جاء العالم الفرنسى كولوم (Charles Augustin de Coulomb) ١٧٨٤ الذى أنهى كل التجارب المتعلقة بالقوى الكهربائية الساكنة بين الشحنات باستعمال ميزان الالتواء الحساس (torsion balance) المبين في الشكل (١-١).

وقد استعمل كولوم شحنتين متشابهتين لدراسة القوى الناتجة بينهما على أساس:

أ - تغيير مقدار الشحنتين.

ب - تغيير المسافة بين الشحنتين.

إذا قربت الشحنة B، شكل (١-١)، إلى الشحنة المشابهة A وكتاهما حرة الحركة فإن A سوف تنافر B وتبتعد عنها مسافة معينة فإذا أعيدت التجربة مرة أخرى بجعل شحنة B نصف قيمة شحنتها السابقة «وذلك بجعل الكرة B تلامس كرة أخرى متعادلة الشحنة» فإن الشحنة A ستبتعد في هذه الحالة مسافة أقل من المسافة في الحالة الأولى



شكل (١-١): ميزان الالتواء لدراسة قانون كولوم

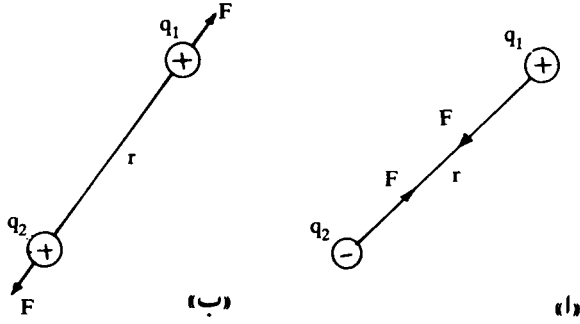
وهكذا . . . ونتيجة لإجراء سلسلة من هذه التجارب استنتج العالم كولوم القانون التالي المعروف باسمه :

«تناسب قوة التجاذب (attraction) أو التنافر (repulsion) التي يؤثر بها جسيم مشحون بشحنة q_1 على آخر شحنته q_2 طرديا مع حاصل ضرب شحنتي الجسيمين وعكسيا مع مربع المسافة التي تفصل بينهما r » كما في شكل (١-٢) .
أي أن :

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

أو :

$$F = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-١)$$



شكل (١-٢): أ - قوة التجاذب بين جسيمين مختلفين من نوع الشحنة
ب - قوة التنافر بين جسيمين لهما نوع الشحنة نفسها.

حيث K_e ثابت التناسب وقيمته تعتمد على نظم الوحدات المستعملة والوسط الفاصل بين الشحنتين. ونظم الوحدات المستخدمة في علم الكهرباء الساكنة كثيرة وأكثرها استخداما النظامان العالمى (S.I.) the international system of units والجاوسى Gaussian system (انظر الملحق ١).

ففى النظام العالمى تكون القوة مقدرة بالنيوتن والمسافة بالمتر والشحنة بالكولوم. أما قيمة ووحدة ثابت التناسب K_e فتكتب عادة بالصورة التالية:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad \dots\dots\dots (١-٢)$$

حيث تسمى ϵ_0 بسماحية الفراغ (permittivity of free space).
ونحصل من المعادلتين (١-١) و (١-٢) على:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \dots\dots\dots (١-٣)$$

وفى النظام الجاوسى تكون القوة مقدرة بالداين والمسافة بالسنتيمتر والشحنة باستات كولوم أما قيمة الثابت K_e فهو الواحد حيث:

$$K_e = (1) \frac{\text{dyne} \cdot \text{cm}^2}{(\text{stat.C})^2} \dots\dots\dots (١-٤)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (١-١) الصورة التالية :

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-٥)$$

وفي هذا النظام تعرف وحدة الشحنة الكهرواستاتيكية أو استات كولوم بأنها تلك الشحنة التي إذا وضعت على بعد ١ سم من شحنة مماثلة لها في النوع ومساوية لها في المقدار تنافرت معها بقوة قدرها ١ دايين .

والعلاقة بين النظام العالمي والنظام الجاوسي يبينها الملحق (١) .
أما بالنسبة للعلاقة بين النظامين لهذه المقادير فهي :

$$F = 1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne}$$

$$q = 1 \text{ C} = 2.998 \times 10^9 \text{ stat. C}$$

$$r = 1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$$

فإذا كان لدينا شحنتان متساويتان قيمة كل منهما كولوم واحد والمسافة بينهما متر واحد فإنه حسب المعادلة (١-٥) تكون قيمة القوة هي :

$$F = \frac{(2.998 \times 10^9) \times (2.998 \times 10^9)}{10^4} = 8.988 \times 10^{14} \text{ dyne} \\ = 8.988 \times 10^9 \text{ N}$$

ولذلك إذا استخدم النظام العالمي (S.I) في المعادلة (١-١) فإن القيمة العددية لثابت التناسب K_e لا بد أن تساوي المقدار 8.988×10^9 .
أي أن :

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (١-٦)$$

على ذلك فإن سماحية الفراغ ϵ_0 هي :
 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$ (ب-١)

والقوة الاستاتيكية بين الجسيمات هي كمية متجهة (vector quantity). فإذا كان لدينا جسيमान مشحونان فإن القوة المؤثرة على كل منهما تكون على الخط الواصل بينهما. فإذا فرضنا متجهاً لوحدة الأطوال رمزه $\vec{i}_r$ [حيث $\vec{r} = \vec{i}_r$ وذلك حسب المعادلة (ب-٢)]، الملحق (٢). فإن المعادلة (١-٣) تصبح كالتالى :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{i}_r \quad \text{أو}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad \dots\dots\dots (١-٧)$$

أما المعادلة (١-٥) فتصبح كالتالى :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{i}_r \quad \text{أو}$$

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad \dots\dots\dots (١-٨)$$

أما إذا كان لدينا شحنات كثيرة فإن محصلة القوى المؤثرة على شحنة ما هي المجموع الاتجاهي لكل القوى الواقعة على هذه الشحنة .

فإذا أثرت الشحنات q_1 ، q_2 و q_3 على الشحنة q بقوى قدرها F_1 ، F_2 و F_3 على الترتيب، كما في شكل (١-٣) فإنه حسب المعادلة (١-٨) يكون لدينا :

$$\vec{F}_1 = K_e \frac{q q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 ;$$

$$\vec{F}_2 = K_e \frac{q q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 , \quad \text{and}$$

$$\vec{F}_3 = K_e \frac{q q_3}{r_3^3} \vec{r}_3$$

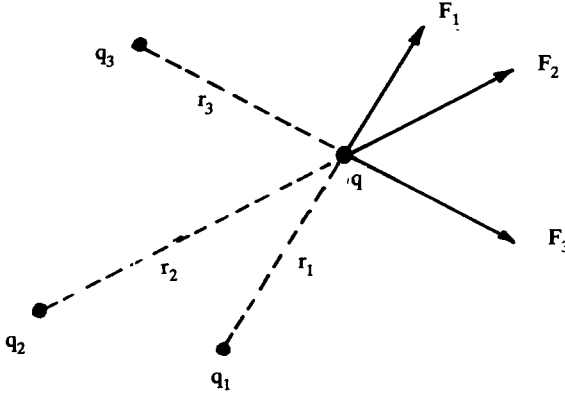
حيث r_1 ، r_2 و r_3 بعد q عن q_1 ، q_2 و q_3 على الترتيب .

وتكون القوة المحصلة هي المجموع الاتجاهي لهذه القوى أي أن :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = K_e q \left\{ \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^3} \vec{r}_3 \right\} \dots \dots (١-٩)$$

وبصورة عامة فإن :

$$F = K_e q \sum_n \frac{q_n}{r_n^3} \vec{r}_n \dots \dots \dots (١-١٠)$$



شكل (١-٣): القوى الناشئة عن مجموعة من الشحنات

مثال (١-١)

تتكون ذرة الهيدروجين من نواة تحتوي على بروتون واحد يدور حولها إلكترون واحد في مسار دائري نصف قطره 5.3×10^{-9} cm فإذا كان :

$$M_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} , m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \text{ و } (-e) = (+e) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

فاحسب :

- نسبة قوة الجذب الكهربي إلى قوة الجذب العام بين الإلكترون والبروتون .
- عدد مرات دوران الإلكترون حول النواة في الثانية الواحدة ، إذا علمت أن قوة الجذب الكهربي تساوي القوة الطاردة المركزية .

الحل

أ - طبقا لقانون كولوم فإن قوة الجذب الكهربى الساكن بين الإلكترون السالب والبروتون الموجب هي :

$$F_e = 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

وحسب قانون نيوتن للجذب العام بين كتلتين m_1 و m_2 المسافة بينهما r فإن قوة الجذب تعطى بالمعادلة

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \dots \dots \dots (١-١١)$$

حيث تعرف γ بثابت الجذب العام وقيمه $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

$$\therefore F_g = 6.67 \times 10^{-11} \frac{(9.1 \times 10^{-31}) \times (1.67 \times 10^{-27})}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.7 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$\therefore \frac{F_e}{F_g} = 2.216 \times 10^{39}$$

ويتضح من هذا المثال مدى الفرق الكبير بين قيمتي القوتين .

ب - من المعروف أنه لكي يتزن الإلكترون في مداره فلا بد أن تكون :

$$F_C = F_e = \text{قوة الطرد المركزي}$$

$$\therefore F_C = m_e \omega^2 r \dots \dots \dots (١-١٢)$$

فإذا فرض أن n هي عدد الدورات التي يعملها الإلكترون في الثانية الواحدة فإن

$$\omega = 2\pi n \text{ وبالتعويض في المعادلة (١-١٢) نحصل على :}$$

$$n = 6.5 \times 10^{15} \text{ turns / s}$$

مثال (١-٢)

يحتوي جرام واحد من الهيدروجين على 6×10^{23} من الإلكترونات والعدد نفسه من البروتونات، فإذا فصلت الإلكترونات عن البروتونات ووضعت البروتونات في

القطب الشمالي للأرض والإلكترونات في القطب الجنوبي، فاحسب القوة الكهرية الساكنة بينهما.

الحل

نحسب الشحنة الكلية للإلكترونات وذلك بمعرفة شحنة إلكترون واحد.

$$\therefore q = (6 \times 10^{23}) \times (1.6 \times 10^{-19}) = 9.6 \times 10^4 \text{ C}$$

وقطر الأرض القطبي يساوي

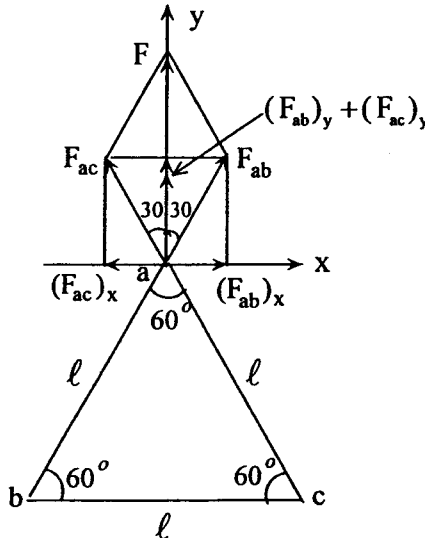
$$r = 2 R_E = 2 \times 6.4 \times 10^6 = 1.28 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\therefore F = 9 \times 10^9 \frac{(9.6 \times 10^4)^2}{(1.28 \times 10^7)^2} = 5.06 \times 10^5 \text{ N}$$

ويتضح من هذا المقدار أن القوة الكهرية هائلة جدا.

مثال (١-٣)

ثلاث شحنات متساوية قيمة كل منها $+q$ وضعت على رؤوس المثلث كما في الشكل التالي. فاحسب قيمة واتجاه محصلة القوى على الشحنة الواقعة في النقطة a .



الحل

تخضع الشحنة q عند النقطة a لقوتين F_{ab} ، F_{ac} قيمتهما

$$\therefore \vec{F}_{ab} = \frac{K_e}{l^2} q^2 \frac{\vec{r}_{ab}}{l}$$

$$\vec{F}_{ac} = \frac{K_e}{l^2} q^2 \frac{\vec{r}_{ac}}{l}$$

ومحصلتها $\vec{F} = \vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ac}$ ، ولكن من الأنسب تحليل $\vec{F}_{ab}$ ، $\vec{F}_{ac}$ إلى مركبتيهما على x و y ، وواضح أن مجموع المركبتين المحمولتين على x تساوي الصفر لأنها متعاكستان ومتساويتان ، وتبقى المركبتان على y .

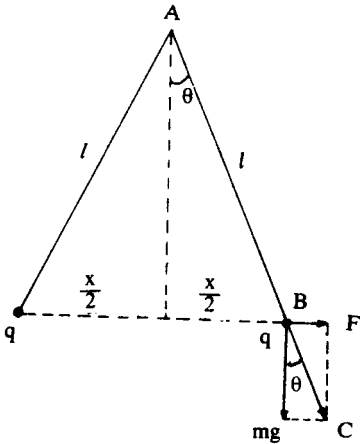
وبذلك تقع محصلة القوى على الجهة الموجبة لمحور y وقيمتها:

$$\therefore F = (F_{ab})_y + (F_{ac})_y$$

$$= \frac{K_e q^2}{l^3} (l \cos 30^\circ) + \frac{K_e q^2}{l^3} (l \cos 30^\circ) = 1.732 \frac{K_e q^2}{l^2}$$

مثال (١-٤)

كرتان تزن كل منها m جراما معلقتان بخيطين إلى نقطة واحدة طول كل منها l سم. ما هي الشحنة التي يجب أن تحملها بالتساوي كل من الكرتين لكي تبعدا عن بعضهما البعض مسافة قدرها x سم.



الحل

لكي تكون الكرتان في حالة اتزان يجب أن تكون المحصلة C (لكل من قوة التنافر F والثقل mg) على امتداد الخيط ويتحقق ذلك عندما تحقق الزاوية θ العلاقة

$$\tan \theta = \frac{F}{mg}$$

$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2 mg}$$

وإذا كانت θ صغيرة جدا بحيث يكون:

$$\tan \theta \cong \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{x}{2l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2 mg}$$

$$\therefore q = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 x^3 mg}{2l} \right)^{1/2}$$

يلاحظ أنه استخدمت قاعدة التجاذب والتنافر في تحديد اتجاه القوى الكهرية في جميع الأمثلة السابقة.

(٣-١) المجال الكهربي

Electric Field

يصاحب أي جسم مشحون مجال كهربي يحيط به ويؤثر على أية شحنة توضع عند أي نقطة قريبة منه بقوة تنافر أو قوة تجاذب حسب نوعية الشحنات. وهذا يشبه إلى حد كبير وجود جسم ما في مجال جاذبية الأرض حيث تجذبه إليها ما لم يخرج عن نطاق أو مجال جاذبية الأرض. ويمكن الكشف عن وجود مجال كهربي عند نقطة ما بوضع جسم مشحون بشحنة q_0 ، وتسمى شحنة اختبار (test charge)، فإذا تأثرت هذه الشحنة بقوة كهربية فيعني هذا وجود مجال كهربي عندها.

ولما كانت القوة كمية متجهة (أي ذات مقدار واتجاه) كان المجال الكهربي كمية متجهة أيضا له مقدار واتجاه. فإن كان المجال الكهربي ناتجا عن شحنة قدرها q فإنه يؤثر على شحنة اختبار q_0 ، تبعد عنها مسافة r ، بقوة قدرها F . وتسمى القيمة $\frac{F}{q_0}$ بشدة المجال الكهربي E (intensity of electric field) أي أن:

$$E = \frac{F}{q_0} \dots\dots\dots (١-١٣)$$

$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \dots\dots\dots (١-١٤)$$

أو

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{i}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \dots\dots (١-١٥)$$

حيث $\vec{i}_r$ متجه الوحدة (unit vector). ويتجه من الشحنة q ، الملحق ٢ - المعادلة (٢-٦)، ووحدات شدة المجال الكهربى في النظام العالمى (S.I.) والنظام الجاوسى

هي :

$$E = \text{Newton / Coulomb (N/C)} \quad (\text{S.I.})$$

$$E = \text{dyne / stat . C}$$

فإذا كان هناك عدد من الشحنات $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ على مسافات قدرها $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ من شحنة اختبار قدرها q_0 فإن كل شحنة من هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنة q_0 بقوة معينة وتكون محصلة القوى على هذه الشحنة هي المجموع الاتجاهى لهذه القوى وحسب المعادلة (١-٨) يكون لدينا :

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n^2} \vec{i}_r \dots\dots\dots (١-١٦)$$

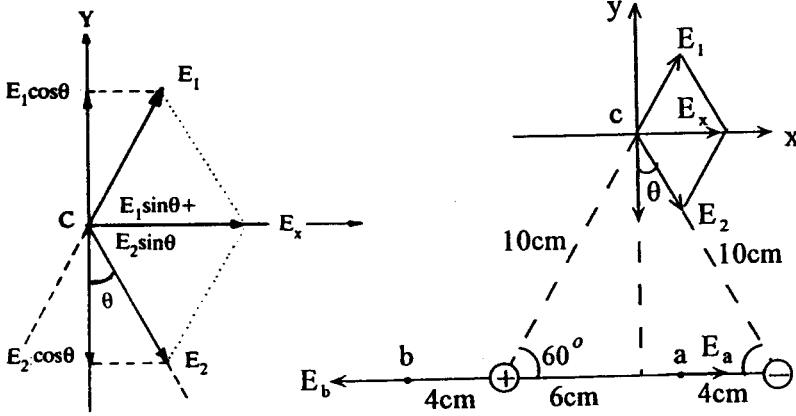
وتكون محصلة شدة المجال الكهربى عند هذه النقطة هي :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n^2} \vec{i}_r \dots\dots\dots (١-١٧)$$

مثال (١-٥)

شحنتان $12 \times 10^{-9} \text{ C}$ و $-12 \times 10^{-9} \text{ C}$ البعد بينهما 10cm كما في الشكل التالى .

احسب شدة المجال الناتج من هاتين الشحنتين عند النقاط a, b, c.



الحل

لحل هذه المسألة نستخدم المعادلة (١٧-١).

أ - بالنسبة لشدة المجال عند النقطة a : متجه مجال الشحنة الموجبة يتجه نحو اليمين وقيمته :

$$E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.06)^2} = 3.0 \times 10^4 \text{ N/C}$$

ومتجه مجال الشحنة السالبة يتجه أيضا نحو اليمين وقيمته :

$$E_2 = 6.75 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$\therefore E_a = E_1 + E_2 = (3.0 + 6.75) \times 10^4 = 9.75 \times 10^4 \text{ N/C}$$

ب - بالنسبة للنقطة b : فمتجه مجال الشحنة الموجبة يتجه نحو الشمال وقيمته :

$$E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.04)^2} = 6.75 \times 10^4 \text{ N/C}$$

ومتجه مجال الشحنة السالبة يتجه نحو اليمين وقيمته :

$$E_2 = 0.55 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$\therefore E_b = E_1 - E_2 = (6.75 - 0.55) \times 10^4 = 6.20 \times 10^4 \text{ N/C}$$

جـ - ولحساب محصلة المجال عند النقطة c سوف نتبع طريقة تحليل المتجهات

رأسيا وأفقيا ومنه نحصل على :

$$E_x = E_1 \sin \theta + E_2 \sin \theta \quad E_y = E_1 \cos \theta - E_2 \cos \theta$$

ونظرا لأن $E_1 = E_2$ وكذلك $\theta = 30^\circ$ فإن :

$$E_x = 2 E_1 \sin 30 = 2 \times \frac{1}{2} E_1 = E_1$$

$$\therefore E_x = 9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0.1)^2} = 1.08 \times 10^4 \text{ N/C}$$

أما محصلة E_y فهي :

$$E_y = 0$$

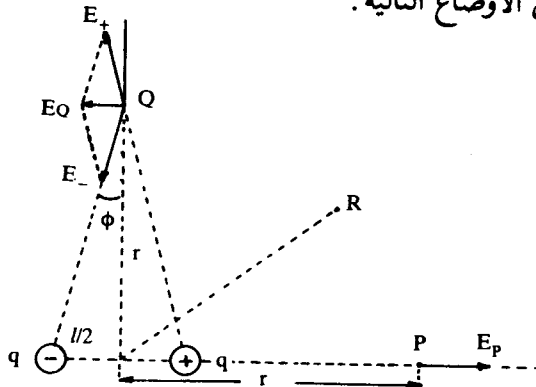
$$\therefore E_c = E_x = 1.08 \times 10^4 \text{ N/C}$$

حُدث اتجاهات المجالات الكهربائية في المثال باستخدام قاعدة اتجاه خطوط القوى الكهربائية للشحنات الموجبة والسالبة والذي سيرد شرحها في البند (١ - ٧).

(١-٤) المجال الكهربى لذى القطبين

Electric Field of a Dipole

يتكون ذو القطبين من شحنتين متساويتين مقدارا ومختلفتين في النوع أي أن إحداها شحنة موجبة والأخرى شحنة سالبة وتفصلهما مسافة معينة . وسيدرس المجال الناشئ عن ذي القطبين في الأوضاع التالية :



شكل (١-٤) : المجال الكهربى عند P على محور ذي القطبين و Q على العمودي على المحور

(١-٤-١) المجال عند نقطة ما على طول محور ذي القطبين

Field at any point on the prolonged axis of the dipole

يمثل شكل (١-٤) ذا قطبين شحنة كل من قطبية q والمسافة بينهما l . لإيجاد شدة المجال E_p عند النقطة p التي تقع على امتداد المحور وعلى بعد r من المنتصف تطبق المعادلة (١-١٧) فنجد أن :

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\begin{aligned} \therefore E_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(r - \frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r + \frac{l}{2})^2} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r + l/2)^2 - (r - l/2)^2}{(r^2 - l^2/4)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{(r^2 - l^2/4)^2} \dots \quad (١-١٨) \end{aligned}$$

فإذا كانت المسافة l صغيرة بالنسبة للمسافة r فإنه يمكن إهمال $\frac{l^2}{4}$ مقارنة مع قيمة r^2 وبذلك يمكن الحصول على :

$$\therefore E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{r^3} \dots \dots \dots (١-١٨ \text{ ب})$$

حيث

$$P = ql \dots \dots \dots (١-١٩)$$

ويعرف P بالعزم الكهربي لذي القطبين (electric dipole moment) وهو حاصل ضرب شحنة أحد القطبين في المسافة بينهما، وتقع P على محور ذي القطبين ويتجه من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

(٢-٤-١) المجال عند نقطة ما على العمود المنتصف لمحور ذي القطبين

Field at any point on the perpendicular bisector of the axis of the dipole

قيمة المجال الناتج عن كل من الشحنتين عند نقطة Q ، شكل (١-٤) ، تساوي

$$E = E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + l^2/4)} \dots\dots (١-٢٠)$$

وبتحليل E_+ و E_- في اتجاهين متعامدين فإن مركبتى المجالين على المحور العمودي لذى القطبين تلغى إحداها الأخرى. أما المركبتان الأفقيتان فكل منهما تساوي $E \sin \phi$ وتكون بذلك محصلة شدة المجال عند النقطة Q تساوي :

$$E_Q = 2 E \sin \phi$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}}$$

أي أن :

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{(r^2 + l^2/4)} \cdot \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}} \dots\dots (١-٢١)$$

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

فإن كانت المسافة r كبيرة بالنسبة للمسافة l أمكن إهمال $l^2/4$ ونجد أن :

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} \dots\dots (١-٢١ ب)$$

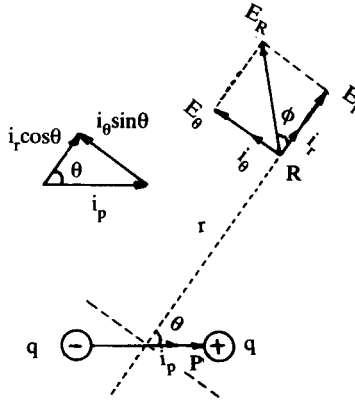
واضح من المعادلتين (١-١٨) و (١-٢١) أن شدة المجال الكهربى عند النقطتين P و Q تتناسب تناسبا طرديا مع العزم الكهربى لذى القطبين وعكسيا مع مكعب المسافة من منتصف ذى القطبين وذلك عندما تكون المسافة بعيدة بعدا كافيا لتبرير التقريبات المستخدمة.

(١ - ٤ - ٣) المجال عند أي نقطة (الحالة العامة)

Field at any point (general case)

إذا فُرض في هذه الحالة أن النقطة R تبعد مسافة r عن منتصف ذي القطبين ويصنع الخط الفاصل بينها وبين منتصف ذي القطبين زاوية مقدارها θ مع محور ذي القطبين، كما في الشكل (١-٥)، ولإيجاد شدة المجال نحلل العزم الكهربائي P لذي القطبين إلى مركبتين إحداها على استقامة r وتساوي $P \cos \theta$ والأخرى في الاتجاه العمودي على r وهي $P \sin \theta$ وشدة المجال E_r الناتج عن المركبة $P \cos \theta$ طبقاً للمعادلة المقربة (١-١٨) يساوي

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P \cos \theta}{r^3} \dots\dots\dots (١-٢٢)$$



شكل (١-٥): المجال الكهربائي عند R «الحالة العامة».

وبالمثل فإن شدة المجال E_θ الناتج عن المركبة $P \sin \theta$ طبقاً للمعادلة (١-٢١) هي

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \sin \theta}{r^3} \dots\dots\dots (١-٢٣)$$

فإذا فُرض أن $\vec{i}_r$ ، $\vec{i}_\theta$ ، $\vec{i}_p$ متجهات الوحدة لكل من E_r و E_θ و P على التوالي، وبلاستعانة بالشكل (١-٥) فإن:

$$\vec{E}_R = E_r \vec{i}_r + E_\theta \vec{i}_\theta \quad \dots \dots \dots (١-٢٤)$$

$$\vec{i}_p = \vec{i}_r \cos \theta - \vec{i}_\theta \sin \theta \quad \dots \dots \dots (١-٢٥)$$

وبالتعويض عن $\vec{E}_r$ و $\vec{E}_\theta$ من المعادلتين (١-٢٢) و (١-٢٣) يمكن الحصول على:

$$\vec{E}_R = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (١-٢٦)$$

وبالتعويض عن $\vec{i}_\theta$ في المعادلة (١-٢٦) من المعادلة (١-٢٥) يكون:

$$\vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3P \cos \theta \vec{i}_r - P \vec{i}_p]$$

$$\therefore \vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{P} \cdot \vec{i}_r) \vec{i}_r - \vec{P}] \quad \dots \quad (١-٢٧)$$

حيث:

$$\vec{P} \cdot \vec{i}_r = P \cos \theta$$

أما القيمة المطلقة لـ E_R فهي:

$$E_R = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

$$E_R = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad \dots \dots (١-٢٨)$$

ويصنع شدة المجال E_R زاوية قدرها ϕ مع اتجاه E_r وبذلك فإن:

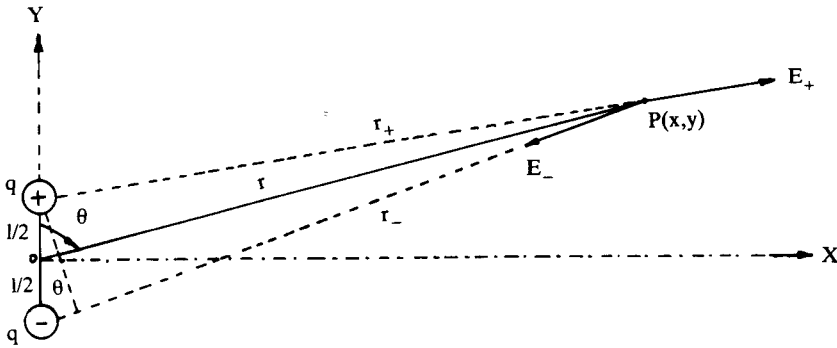
$$\tan \phi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{P \sin \theta}{2P \cos \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta \quad \dots \quad (١-٢٩)$$

ومن الواضح أن المعادلة (١-٢٨) تؤول إلى المعادلتين (١-١٨) و (١-٢١) عندما تقع النقطة R على المحور X أو المحور Y.

وهناك ملاحظة مهمة على المعادلة (١-٢٨) هو أن المجال الكهربائي لذي القطبين يتناسب مع $1/r^3$ بينما أن المجال الناتج عن شحنة مفردة يتناسب مع $1/r^2$ وهذا يعني أن المجال يتناقص بصورة أسرع في حالة ذي القطبين عنها لشحنة مفردة.

ويمكن الوصول إلى المعادلة (١-٢٨) باستخدام الإحداثيات الديكارتية وسوف تدرس الآن، رغم التطويل في المعاني الرياضية البحتة، لأهمية الموضوع وفهم المزيد عن ذي القطبين الذي يوجد بصورة طبيعية في كثير من الذرات أو الجزيئات التي لها شحنات سالبة وأخرى موجبة تفصلهما مسافة معينة، مثل جزيئات الماء، أو توجيه الشحنات السالبة والموجبة نتيجة لتأثير مجال كهربائي خارجي لبعض المواد العازلة أو ظاهرة الاستقطاب التلقائي (spontaneous polarization) للمواد العازلة الفروكهرية.

«هذا الموضوع سيشرح في الفصل الثالث».



شكل (١-٦): المجال الناتج عن ذي القطبين في الحالة العامة باستخدام الإحداثيات الديكارتية

نستنتج من الشكل (١-٦) أن المجال E عند النقطة P هو محصلة المجالين E_+ ، من الشحنة الموجبة $+q$ التي تبعد r_+ عن P ، و E_- ، من الشحنة السالبة $-q$ التي تبعد مسافة r_- عن النقطة P .

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = K \frac{q\vec{r}_+}{r_+^3} + K \frac{(-q)\vec{r}_-}{r_-^3} \quad \dots \quad (١-٣٠)$$

ويتحليل E_+ و E_- إلى مركبتين إحداهما E_x محمولة على x والأخرى E_y محمولة على y ، ومن الشكل (١-٦)، يمكن الحصول على:

$$\vec{r}_+ = x\vec{i} + (y - \frac{l}{2})\vec{j} \quad \& \quad \vec{r}_- = x\vec{i} + (y + \frac{l}{2})\vec{j} \quad \dots \quad (١-٣١)$$

$$\therefore r_+ = \left\{ (y - \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{1/2}, r_- = \left\{ (y + \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{1/2}$$

ومن المعادلتين (١-٣٠) و (١-٣١) ينتج:

$$E_x = K_e q \frac{x}{\left\{ (y - \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{3/2}} - K_e q \frac{x}{\left\{ (y + \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{3/2}} \quad \dots \quad (١-٣٢)$$

$$E_y = K_e q \frac{y - (l/2)}{\left\{ (y - \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{3/2}} - K_e q \frac{y + (l/2)}{\left\{ (y + \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{3/2}}$$

وإذا فرض أن l صغيرة جدا مقارنة بـ r فإن المركبتين E_x و E_y سوف تقترب قيمتهما من الصفر، وبصورة أخرى يمكن القول إنه إذا اقتربت الشحنة $+q$ من الشحنة $-q$ فإن المجالين الناتجين منها عند النقطة p سوف يتلاشيان ولذلك يمكن إهمال $l^2/4$ من مفكوك المعادلتين (١-٣٢) أي أن:

$$\frac{1}{\left\{ (y \pm \frac{l}{2})^2 + x^2 \right\}^{3/2}} \cong \frac{1}{[x^2 + y^2 \pm yl]^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2} \left(1 \pm \frac{yl}{x^2 + y^2} \right)^{3/2}}$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين (binomial expansion) على الحد الأخير، [انظر ملحق ٣ البند (٦-٣)].

$$(1 \pm b)^{3/2} = 1 \pm \left(-\frac{3}{2}b\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) b^2 + \dots$$

بحيث تبقى l وتهمل l^2 و l^3 ... أي أن:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2} \left(1 \pm \frac{yl}{x^2 + y^2}\right)^{3/2}} \cong \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left\{ 1 \mp \frac{3}{2} \frac{yl}{(x^2 + y^2)} \right\} \quad (1-33)$$

وبحصول من المعادلتين (1-33) و(1-32) على :

$$E_x = K_e q \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{yl}{(x^2 + y^2)} \right) - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{yl}{(x^2 + y^2)} \right) \right]$$

$$E_x = \frac{K_e P}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left[\frac{3xy}{x^2 + y^2} \right]$$

وبالطريقة نفسها يكون لدينا :

$$E_y = \frac{-K_e P}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3y^2}{x^2 + y^2} \right] \dots \dots (1-34)$$

وإذا أُستبدلت x و y بدلالة الإحداثيات θ و r فمن الشكل (1-6) يمكن الحصول على :

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos \theta = y/r \quad \text{and} \quad \sin \theta = x/r$$

$$\therefore E_x = \frac{K_e P}{r^3} (3 \cos \theta \sin \theta)$$

$$E_y = \frac{-K_e P}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \dots \dots \dots (1-35)$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

$$\therefore E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{K_e P}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

وهي المعادلة (1-28) نفسها.

مثال (٦ - ١)

وضعت أربع شحنات كهربية ومتساوية قيمة كل منها q عند أركان مكعب إحداثياتها $(0,0,0)$ و $(0,1,1)$ و $(1,0,1)$ و $(1,1,0)$. احسب:

(أ) شدة المجال الكهربى عند مركز المكعب.

(ب) شدة المجال الكهربى عند مركز المكعب إذا وضعت ثلاث شحنات كهربية أخرى من النوع نفسه عند بقية أركان المكعب ما عدا الركن f الذي إحداثياته $(1,0,0)$.

الحل

(أ) شدة المجال الكهربى عند النقطة

$C(1/2, 1/2, 1/2)$ ، مركز المكعب ،

يكتب بالصورة التالية :

$$\begin{aligned}\vec{E}_c &= \vec{E}_0 + \vec{E}_g + \vec{E}_b + \vec{E}_e \\ &= K_e \frac{q}{r^3} (\vec{oc} + \vec{gc} + \vec{bc} + \vec{ec}) A\end{aligned}$$

حيث

$$r = |\vec{oc}| = |\vec{bc}| = |\vec{gc}| = |\vec{ec}|$$

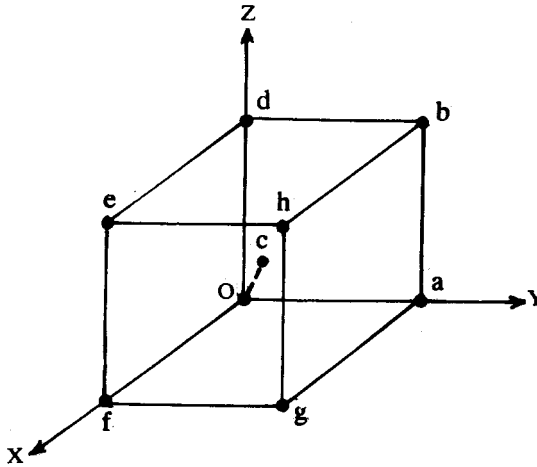
$$\vec{oc} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad \vec{bc} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{gc} = \frac{1}{2}(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \quad \vec{ec} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ إحداثيات الوحدة على المحاور الإحداثية x, y, z على الترتيب. بالتعويض في المعادلة A ثم جمع معاملات إحداثيات الوحدة، يحصل على :

$$E_c = K_e \frac{q}{r^3} (0) = 0$$

وهو المطلوب (أ). أما المطلوب (ب) فيمكن حساب شدة المجال الكهربى كالتالى :



$$\vec{dc} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}), \vec{ac} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}), \vec{hc} = \frac{1}{2}(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\therefore \vec{E}_c = K_e \frac{q}{r^3} (\vec{dc} + \vec{ac} + \vec{hc})$$

$$= \frac{4K_e q}{3\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

(٥-١) كثافة الشحنة

Charge Density

عرف من البنود السابقة أن الجسم المشحون يحمل شحنات هي مضاعفات صحيحة من شحنة الإلكترون فإذا اعتُبر الجسم المشحون يحمل عددا كبيرا جدا من الشحنات فإنه يمكن النظر إلى الشحنة الكهرية على أنها موزعة توزيعا مستمرا.

ويمكن بهذا تعريف ثلاثة أنواع من الكثافة الكهرية:

(١-٥-١) الكثافة الحجمية Volume charge density

ويرمز لها بالرمز ρ وتساوي:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \dots\dots\dots (١-٣٦)$$

حيث dq عنصر الشحنة المحصورة داخل الحجم dV الذي يحيط بالنقطة المراد تقدير ρ فيها ووحدة قياس الكثافة الحجمية هي C/m^3 .

(٢-٥-١) الكثافة السطحية Surface charge density

ويرمز لها بالرمز σ وهي تعبر عن توزيع الشحنة على سطح/بحيث يمكن إهمال

سمكه بالنسبة للأبعاد الأخرى.

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \dots\dots\dots (١-٣٧)$$

حيث dq الشحنة الموزعة على السطح dS المحيط بالنقطة المراد تقدير σ فيها ووحدة قياس الكثافة السطحية هي C/m^2 .

(٣-٥-١) الكثافة الطولية Linear charge density

ويرمز لها بالرمز λ وتمثل توزيع الشحنة على سلك مهمل المقطع بالقياس لأبعاده الأخرى.

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \dots\dots\dots (١-٣٨)$$

حيث dq الشحنة الموزعة على الطول dl المحيط بالنقطة المراد قياس λ فيها ووحدة قياس الكثافة الطولية هي C/m .

(٦-١) المجال الناتج عن توزيع مستمر للشحنة الكهربائية

Field due to a Continuous Distribution of Charge

سبق أن درس المجال الكهربى لشحنات كهربية ممثلة على هيئة نقطة أو نقط (point charges) ولدراسة المجال الناتج عن شحنات موزعة على أجسام ذات أحجام محدودة (finite size) فإن المعادلة (١-١٧) تصبح :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r} \dots\dots (١-٣٩)$$

حيث يجب حساب التكامل على كل الحجم أو السطح أو الطول الموزع عليه الشحنة، و $\vec{r}$ هي المسافة المتجهة من عنصر الشحنة dq إلى النقطة التي يحسب عندها المجال. ويجب الانتباه إلى أن هذا التكامل اتجاهي فهو عبارة عن مجموع عناصر لا متناهية في الصغر لكل منها كمية واتجاه مختلف.

وإحدى طرق تقدير مثل هذا التكامل يكون بالتعويض عن المتجهة $\vec{r}$ بمركباته الديكارتية، فتكتب، [ملحق ٢ بند (٢ - ٢)].

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ هي متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية x و y و z وتصبح المعادلة (١-٣٩) كالتالي:

$$\vec{E} = \frac{\vec{i}}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x}{r^3} dq + \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{y}{r^3} dq + \frac{\vec{k}}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{z}{r^3} dq \dots \quad (١-٤٠)$$

وبذلك أصبحت التكاملات غير متجهة لخروج متجهات الوحدة الثابتة المقدار والاتجاه خارج إشارة التكامل.

فإذا كان الجسم المشحون رفيعاً وطويلاً، طوله l ، وكانت λ كثافة الشحنة الطولية (شحنة وحدة الأطوال) فإن المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من عنصر الطول dl يمكن الحصول عليه من المعادلتين (١-٣٨) و (١-٣٩) أي أن:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r} \dots \dots \dots (١-٤١)$$

ويمكن الحصول على قيمة شدة المجال الكهربائي E عند النقطة p ، التي تبعد مسافة قدرها r من سلك طويل ورفيع يحمل شحنة موجبة وموزعة بانتظام على طوله،

بتقسيم السلك إلى أجزاء متناهية في الصغر طول كل جزء منها dl ويحمل شحنة قدرها dq كما في شكل (١-٧). وبذلك تحدد المعادلة (١-٤١) المجال الكهربى. وتحليل مركبتي هذا المجال على استقامة المحورين x و y يُحصل على:

$$dE_x = dE \sin \theta \quad \text{and} \quad dE_y = dE \cos \theta$$

ويمكن تطبيق ذلك على بقية الأجزاء المتناهية من السلك. ويكون المجال الكهربى عند النقطة p والنشء عن المركبات السينية يساوي المجموع الحسابى أو تكامل المجال الكهربى لجميع الأجزاء في اتجاه المحور x . ويعبر عن ذلك رياضيا بالمعادلة:

$$E_x = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} dE \sin \theta$$

وبالمثل فإن المجال الكهربى الناتج عن النقطة p من جميع الأجزاء في اتجاه Y :

$$E_y = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} dE \cos \theta$$

حيث θ_1 و θ_2 يحددان نهايتي السلك.

ويمكن الحصول من الشكل (١-٧) على:

$$a = r \sec \theta$$

$$l = r \tan \theta$$

$$\therefore dl = r \sec^2 \theta d\theta$$

$$\therefore dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{a^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{r}$$

$$\therefore E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

... (١-٤٢)

$$\therefore E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

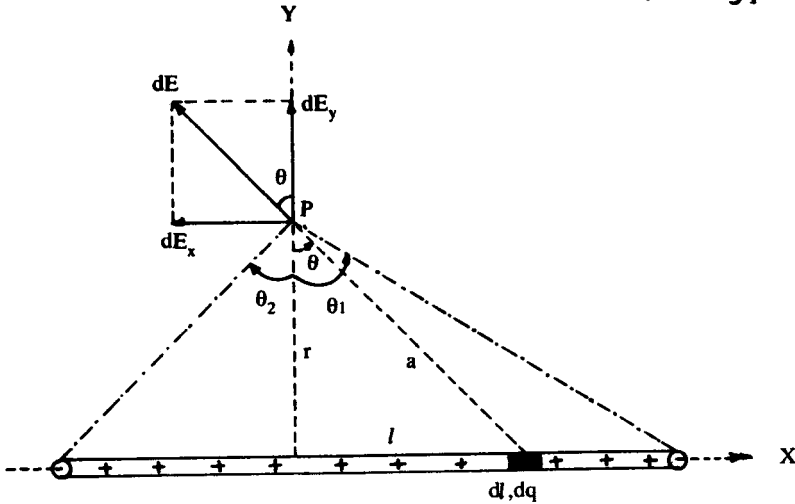
ويكون المجال المحصل عند النقطة p هو

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y \text{ or } E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$$

فإذا كان السلك لانهائي الطول فإن حدي التكامل يصبحان $(\pi/2, -\pi/2)$ وتصبح المعادلتان (١-٤٢) كالتالي:

$$\therefore E_x = \text{zero} , E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \dots \text{ (١-٤٢ ب)}$$

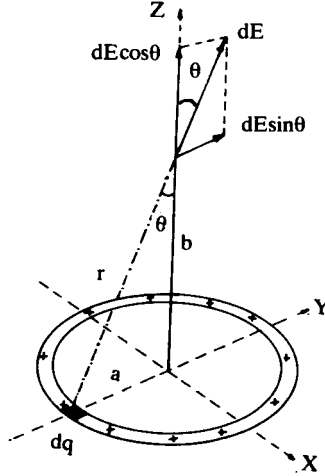
ومعنى ذلك تلاشي المركبة في الاتجاه السيني، وبقاء المركبة في الاتجاه الصادي. ونجد من المعادلة (١-٤٢ ب) أن المجال الكهربائي يتناسب عكسيا مع المسافة الواقعة بين النقطة p والسلك.



شكل (١-٧): المجال الكهربائي الناتج عن شحنة موزعة على موصل مستقيم طويل

وكمثال آخر سوف يدرس المجال الناتج عند النقطة p عن حلقة نصف قطرها a ومشحونة بشحنة موجبة قدرها q ، كما في الشكل (١-٨)، وتقع النقطة p على محور

الحلقة وتبعد مسافة b من مركز الحلقة.



شكل (١-٨): المجال الكهربى الناتج عن شحنة موزعة على حلقة دائرية

وبأخذ جزء صغير من الحلقة شحنته dq وعلى ذلك فإن شدة المجال الناشئة عن هذا العنصر عند النقطة p هو:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

وبتحليل dE إلى مركبتين إحداها في اتجاه المحور Z وقيمتها $dE \cos \theta$ والأخرى في الاتجاه العمودي وقدرها $dE \sin \theta$. المركبة الأخيرة سوف تلغى إذا أخذ في الاعتبار جميع أجزاء الحلقة. وبذلك تصبح شدة المجال في اتجاه المحور Z .

$$\therefore E = \int dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} \quad (١-٤٣)$$

ولكن نجد من الشكل أن:

$$\cos \theta = \frac{b}{r}, \quad r = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qb}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \dots\dots (١-٤٣)$$

ويتضح من المعادلة أن شدة المجال في مركز الحلقة ينتهي إلى الصفر، أي عندما تكون $b = 0$ ، أما إذا كانت $a \ll b$ فإنه يمكن إهمال a^2 وتصبح المعادلة (١-٤٣) كالتالي

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b^2} \dots\dots\dots (١-٤٣ج)$$

أي أنه عند مسافات كبيرة من مركز حلقة مشحونة يتساوى المجال الكهربائي مع المجال الناتج عن نقطة مشحونة بالشحنة نفسها.

أما إذا وُجد سطح مشحون مساحته S وكثافة الشحنة السطحية عليه σ (شحنة وحدة المساحة) فإنه يمكن الحصول على معادلة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من عنصر المساحة dS باستخدام المعادلتين (١-٣٧) و(١-٣٩) أي أن :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma dS}{r^3} \vec{r} \dots\dots\dots (١-٤٤)$$

ف لحساب المجال الكهربائي لقرص دائري رفيع مشحون نصف قطره a وكثافة الشحنة الكهرية عليه σ ، عند النقطة p الواقعة على محور القرص كما في الشكل (١-٩) يؤخذ على القرص شريط دائري نصف قطره r فتكون مساحته :

$$dS = 2\pi r dr$$

و بتطبيق المعادلة (١-٤٤) على هذا الشريط الدائري فإن المجال المحصل واقع على المحور x وقيمه هي :

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{2\pi r dr \sigma}{4\pi\epsilon_0 L^2} \cos \theta$$

ولكن من الشكل (١-٩) لدينا :

$$L^2 = b^2 + r^2 , \quad \cos \theta = \frac{b}{L}$$

$$\therefore dE_x = \frac{2r \, dr \, \sigma b}{4\epsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}}$$

وحتى يُحصل على المجال الناتج عن القرص كاملا يكامل هذا المقدار بالنسبة لـ r التي حدها 0 و a أما b فهي ثابتة.

$$\therefore E = \int_0^a \frac{2r \, dr \, \sigma b}{4\epsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{b\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2r \, dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}}$$

ويمكن إجراء هذا التكامل بإجراء تحويل المتغير بأن نعتبر أن :

$$u = b^2 + r^2$$

$$\therefore du = 2r \, dr$$

وبالتعويض نجد :

$$E = \frac{b\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a u^{-3/2} du$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{b\sigma}{2\epsilon_0 (b^2 + a^2)^{1/2}} \quad (١-٤٥)$$

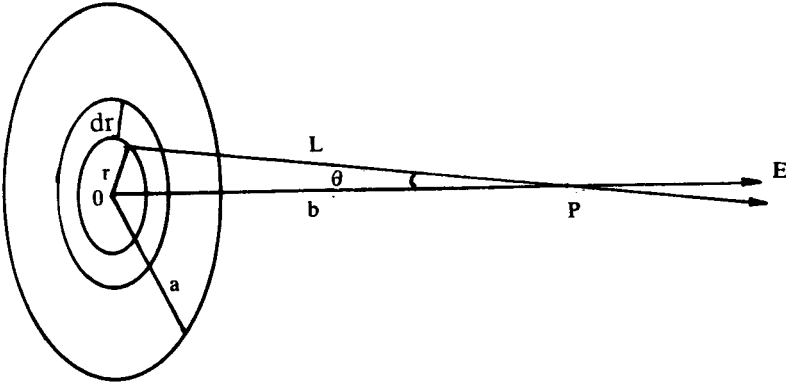
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [1 - \cos\theta]$$

وعندما يصبح القرص لانهائيا تكون عندها ($\theta = 90^\circ$) وينعدم بذلك الحد الثاني وتصبح المعادلة كالتالى :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \dots\dots\dots (١-٤٥ ب)$$

وأخيرا إذا كان الجسم المشحون له حجم قدره V وكانت ρ كثافته الحجمية (شحنة وحدة الحجم) فإنه يمكن الحصول على معادلة المجال الكهربى عند نقطة تبعد r من عنصر الحجم dV من المعادلتين (١-٣٦) و (١-٣٩) أي أن :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q dV}{r^3} \vec{r} \dots\dots\dots (١-٤٦)$$



شكل (١-٩): قرص دائري نصف قطره a ويحمل شحنة كهربية

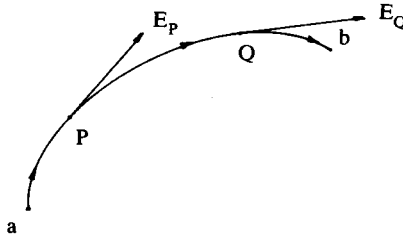
(٧-١) خطوط القوى الكهربية

Lines of Forces

يرجع أصل فكرة خطوط القوى إلى ميشيل فراي Michael Faraday (١٧٩١ - ١٨٦٧ م) وهي عبارة عن خطوط وهمية تستخدم لوصف المجال الكهربي مقداراً واتجهاً. ويبدأ خط القوى من الشحنة الموجبة وينتهي بالسالبة. وترسم هذه الخطوط عادة بحيث يتوفر فيها شرطان:

أ - أن يكون المماس لخط القوة الكهربي عند أي نقطة ممثلاً لاتجاه المجال عند هذه النقطة. ويوضح الشكل (١-١٠) المجال E_p للنقطة p و E_Q للنقطة Q الواقعتين على المسار ab.

ب - أن يكون عدد خطوط القوى التي تقطع وحدة المساحة المحيطة بنقطة ما، وتكون عمودية عليها، مساوياً عددياً شدة المجال عند هذه النقطة. وخط القوة الكهربي يمثل مسار وحدة الشحنة الموجبة داخل المجال الكهربي.



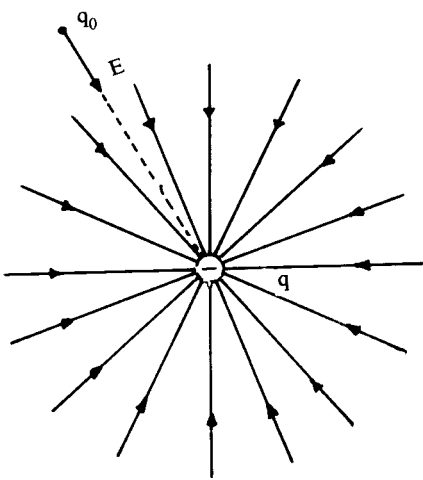
شكل (١٠-١): مسار خط قوة وقيمة المجال عند نقطتين مختلفتين عليه عند P و Q

يمثل الشكلان (١١أ - ١) و (١١ب - ١) بعض خطوط القوى حول شحنة موجبة وكذلك حول شحنة سالبة. وكما هو واضح تختلف قيمة المجال باختلاف بعد المسافة عن شحنة الاختبار q_0 ولكن للمجال قيمة واحدة عند أي نقطة حول q تقع على المسافة المعطاة نفسها. كما يبين الشكل (١١ج - ١) خطوط القوى لصفحة طويلة منتظمة الشكل مشحونة بشحنة موجبة وفي هذه الحالة تكون الخطوط متعامدة مع مستوى الصفحة وموازي بعضها بعضا وتكون قيم E واحدة لكل النقاط القريبة من الصفحة.

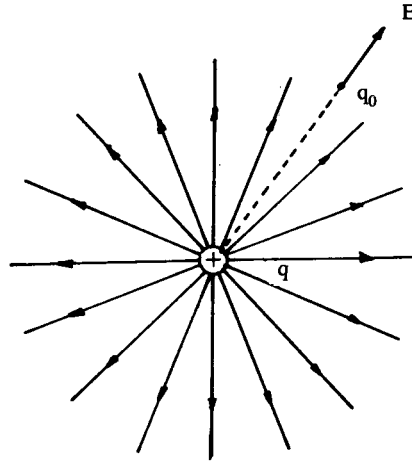
ويمثل شكل (١٢أ - ١) خطوط القوى في حالة شحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة. وفي هذه الحالة يمثل المجال عند أي نقطة محصلة المجالين الناشئين عن الشحنتين واتجاهه يمثل المماس لخط القوى الكهربى. والشكل يوضح أيضا المجال المحصل عند النقاط D و C و B و A كما يمثل شكل (١٢ب - ١) خطوط القوى حول شحنتين موجبتين.

وإذا حُدِدت بطريقة ما خطوط القوى فإنه يمكن استخدام هذه الخطوط للدلالة على شدة المجال فضلا عن اتجاهه. فإذا كانت E شدة المجال الكهربى - فإن عدد خطوط القوى في وحدة المساحة تكون متساوية على جميع نقط السطح العمودي على هذا المجال.

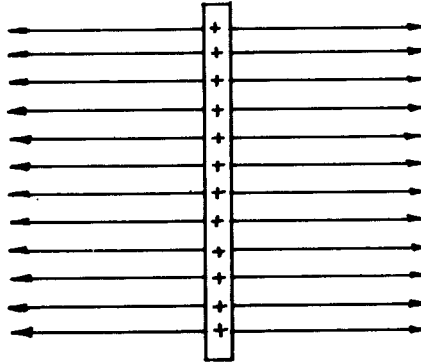
فإذا كانت مساحة السطح S، شكل (١٣-١)، فإن العدد الكلى لخطوط القوى المارة خلال هذا السطح هو:



«ب»

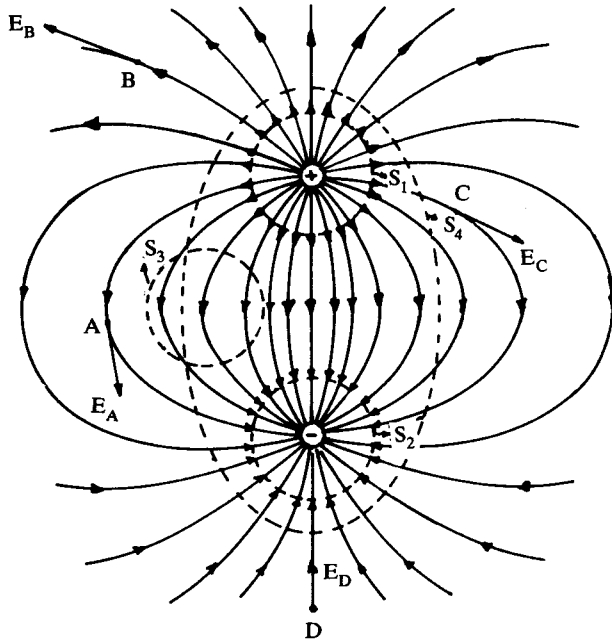


«أ»

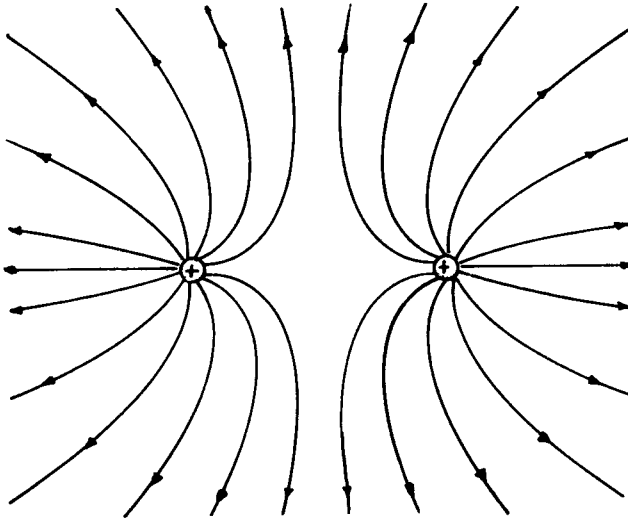


«ج»

شكل (١١-١): خطوط القوى الناتجة عن:
 أ - شحنة موجبة ، ب - شحنة سالبة
 ج - موصل مستقيم مشحون بشحنة موجبة.

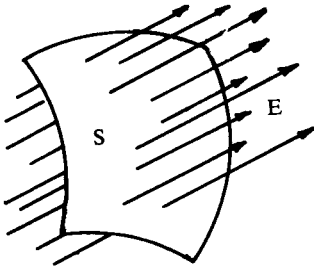


«ا»



«ب»

شكل (١٢-١): خطوط القوة الناتجة عن:
 ا - شحنتين مختلفتين في الإشارة ومتساويتين في القيمة.
 ب - شحنتين متساويتين موجبتين.



$$N = ES \quad \dots\dots\dots (١٤٧-١)$$

وبذلك يمكن القول بأن :

شدة المجال عند نقطة ما تمثل عدد خطوط

القوى الكهرية التي تقطع وحدة المساحة

عموديا عند هذه النقطة .

شكل (١٣-١) : حساب المجال الكهربي

بمعرفة خطوط القوى N

المارة من سطح مساحته S

وطبقا لهذا التعريف والاستعانة بشكل (١٤-١) فإن عدد الخطوط العمودية dN

التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع في مركزه شحنة

موجبة q تعطى بالمعادلة :

$$dN = E \cdot dS$$

حيث E شدة المجال عند أي نقطة على سطح الكرة ويعطى بالمعادلة :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

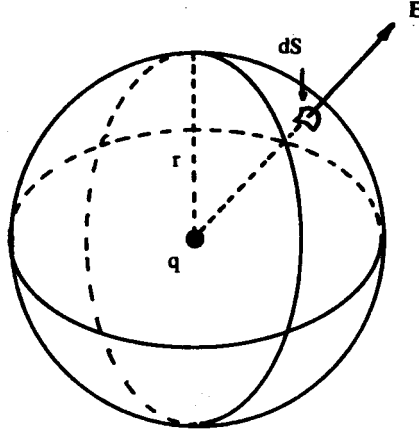
$$\therefore dN = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

∴ مجموع خطوط القوى N التي تقطع سطح الكرة كلها في اتجاه عمودي هي :

$$\therefore N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_0^{4\pi r^2} dS$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2)$$

$$\therefore N = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad \dots\dots\dots (١٤٧-ب)$$



شكل (١٤ - ١): عدد خطوط القوى dN التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع الشحنة q في مركزه.

(ومنها يتجه المجال عند أي مكان مبتعدا عن الشحنة في اتجاه نصف القطر أي عموديا على السطح الكروي).

وواضح أن عدد خطوط القوى لا تتوقف على نصف قطر الكرة مما يدل على تساوي عدد الخطوط المارة بجميع الكرات التي تقع في مركزها النقطة المشحونة.

وتعرف المعادلة (٤٧ ب - ١) بنظرية جاوس (Gauss's Law) وسيأتي شرحها في البند (٩-١) كما يعرف N بالفيض (التدفق) الكلي في اتجاه عمودي (total normal flux).

والتدفق «في صورته العامة» لأي مجال كهربى يقاس بعدد خطوط القوى التي تمر خلال سطح افتراضي (hypothetical surface) قد يكون مغلقا أو مفتوحا ويرمز له بالرمز Φ وهذا التدفق يكون موجبا إذا كانت خطوط القوى خارجة من السطح المقفل وسالبا إذا كانت خطوط القوى آتية إليه. يمثل الشكل (١٢ أ - ١) خطوط القوى لشحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة. وعندما تقطع الأسطح الافتراضية المحددة بالمنحنيات S_1, S_2, S_3, S_4 المغلقة فيكون التدفق موجبا بالنسبة للسطح S_1 وسالبا بالنسبة للسطح S_2 .

وتتضح نظرية التدفق فيما لو وضع سطح غير منتظم الشكل في مجال كهربى E بحيث تكون خطوط القوى غير عمودية على كل أجزائه . وفي هذه الحالة يقسم السطح إلى أسطح صغيرة مساحتها ΔS واتجاهها يحدد بمتجه الوحدة العمودي عليه ويعطى التدفق لكل سطح صغير بالعلاقة التالية :

$$\Delta \Phi = E \Delta S \cos \theta \quad \dots \quad (١-٤٨أ)$$

حيث θ هي الزاوية بين العمودي على السطح وبين اتجاه المجال E . ولما كانت $E \cos \theta$ هي المركبة العمودية للمجال (أي المركبة في اتجاه العمودي على السطح) فإن التدفق الكلي للسطح يساوي مجموع التدفق لكل الأسطح الصغيرة وبصورة تقريبية فإن :

$$\Phi = \Sigma E \Delta S \cos \theta \quad \dots \quad (١-٤٨ب)$$

والتعريف الدقيق للتدفق يمكن إيجاده في الصورة التفاضلية للمعادلة (١-٤٨ب) بحيث يستبدل المجموع Σ بالتكامل على السطح كله .

$$\Phi = \oint E dS \cos \theta$$

أو

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \dots \quad (١-٤٨ج)$$

هذا التكامل السطحي (surface integral) يحدد تقسيم السطح إلى عناصر متناهية في الصغر (infinitesimal elements) "dS" بحيث تعطى قيمة التدفق للعنصر بالعلاقة $E \cdot dS$.

وتشير الدائرة O المرسومة على علاقة التكامل أن السطح مغلق .

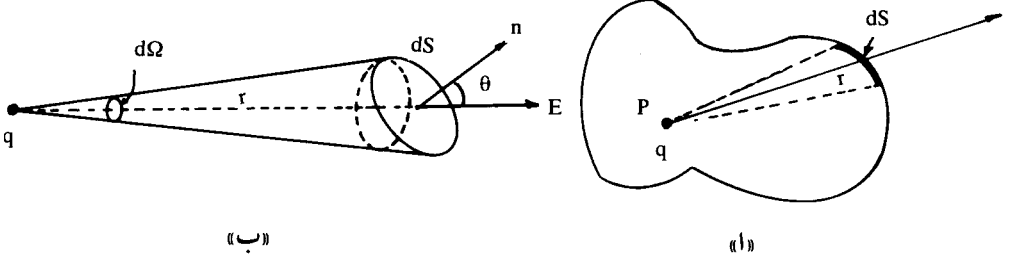
(٨-١) قانون جاوس

Gauss's Law

وجد في البند (٧-١) أن المعادلة (١-٤٨ج) تمثل مجموع خطوط القوى العمودية والتي تمر بكل سطح كروي تقع الشحنة q في مركزه .

ويعمم جاوس هذه النتيجة فهو يثبت أنه إذا تعرض أي سطح مقفل لمجال كهربى فإن عدد خطوط القوى التى تنفذ منه إلى الخارج تساوى $\frac{1}{\epsilon_0}$ مضروبا في المجموع الجبرى للشحنات المحصورة داخل هذا السطح بصرف النظر عن كيفية توزيع الشحنات داخل السطح . أو بقول آخر «يتناسب الفيض الكهربى على سطح مغلق (closed surface) مع المجموع الجبرى للشحنات داخل هذا السطح» .

ولإثبات هذه النظرية في الحالة العامة، يفترض وجود شحنة مقدارها q عند النقطة P . كما في شكل (١٥-أ)، داخل سطح مغلق غير منتظم الشكل. في هذه الحالة تكون شدة المجال مختلفة من نقطة إلى نقطة أخرى على السطح، وإذا لم يكن السطح في جميع نقطه عموديا على المجال فإنه يمكن حساب عدد خطوط القوى المارة بالسطح بالطريقة التالية :



شكل (١٥-١): أ - سطح مغلق غير منتظم الشكل توجد بداخله شحنة قدرها q
 ب - dS جزء صغير من السطح المغلق يمكننا من حساب الفيض الكهربى العمودى عليه ثم يعمم على السطح المغلق كاملا «قانون جاوس» .

يفترض أن سطحا صغيرا dS يمثل جزءا من السطح الكلى المحيط بالنقطة q حيث يبعد مسافة r عن q كما في شكل (١٥-ب). ولتكن n هي متجه الوحدة العمودى على dS و E شدة المجال وحسب المعادلة (٤٨-ج - ١) يكون الفيض العمودى خلال المساحة dS هو:

$$d\Phi = E dS \cos \theta \quad \dots \dots (١-٤٩)$$

حيث θ هي الزاوية بين العمود n على السطح dS واتجاه المجال E وبهذا فإن $E \cos \theta$ هي المركبة العمودية للمجال E وحيث إن :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (١-٤٩) يُحصل على :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} dS$$

ولكن من المعروف هندسيا أن الزاوية المجسمة $d\Omega$ (solid angle) المقابلة للسطح dS تعطى بالمعادلة ، [وذلك حسب المعادلة (٢-٤٧) الواردة في الملحق ٢].

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$\therefore d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

ويكون الفيض الكلي Φ العمودي خلال السطح المغلق والذي يسمى بسطح جاوس (Gaussian surface) (أي عدد خطوط القوى التي تخترق عموديا السطح المغلق كله) محددًا بالمعادلة :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \dots \dots (١-١٥٠)$$

حيث إن $\oint d\Omega = 4\pi$ هو قيمة الزاوية المجسمة التي يصنعها السطح المغلق كله حول P ، ويوضح ذلك الملحق ٢ البند (٩-٢).

وإذا كان هناك أكثر من شحنة داخل السطح المغلق فإنه بتطبيق المعادلة (١-١٥٠) على كل شحنة يمكن الحصول على :

$$\Phi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega_2 + \dots$$

$$\therefore \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n \dots (١-٥٠)$$

ومن المعادلتين (١-٤٩) و (١-٥٠) نجد أن :

$$\Phi = \oint E \cos \theta dS = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n \quad (١-٥١)$$

$$\Phi = \oint E \cos \theta dS = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_n q_n$$

وهذه هي معادلة جاوس في صورتها العامة وفي نظامي الوحدات العالمى والجاوسى على التوالى.

وإذا فرض أن E_n هي المركبة العمودية لشدة المجال على السطح dS بحيث يكون اتجاه العمود n إلى الخارج. فإن المعادلتين (١-٥١) تصبحان كالتالى :

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n \quad \dots \dots \dots (١-٥١)$$

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = 4\pi \sum_n q_n$$

ويمكن استبدال الـ $\sum q_n$ بإحدى التكاملات الخاصة $\int \rho dV$ أو $\int \rho dS$ أو $\int \lambda dl$ المختلفة باختلاف نوع توزيع الشحنة الحجمية أو السطحية أو الطولية، كما ورد في البند (٥-١).

ملاحظات

١ - إذا كان السطح ملتويا (convoluted surface) كما في شكل (١-١٦) وأخذ في الاعتبار الأسطح S_1 و S_2 و S_3 المقابلة للزاوية المجسمة $d\Omega$ فإنه من الواضح أن توزيع الفيض لهذه الأسطح هو:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

وإشارة ناقص هنا تدل على أن العمودي على السطح S_1 يعاكس العمودي على السطح S_2 .

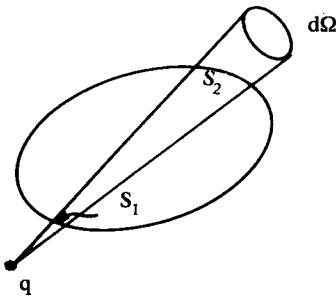
$$\therefore \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وهي المعادلة (١٥٠-١) نفسها التي تم الحصول عليها بالنسبة للسطح غير الملتوي.

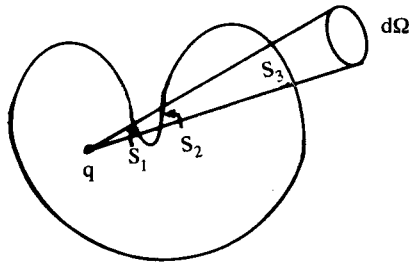
٢ - إذا كانت الشحنة q واقعة خارج سطح مغلق كما في شكل (١٦ ب - ١) فإن توزيع الفيض (the flux) بالنسبة للأسطح المقابلة للزاوية المجسمة $d\Omega$ هو:

$$d\Phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = 0$$

وهذه النتيجة تعني أن الفيض الكلي للسطح المغلق في وجود شحنة خارجة عنه يساوي صفر مهما كان شكله الهندسي.



«ب»



«١»

شكل (١٦-١): ١ - سطح مقفل متعرج بداخله شحنة قدرها q ثم تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربي من خلال الأسطح S_1 ، S_2 ، S_3 .

ب - سطح آخر مقفل بينها تقع الشحنة خارجة ومدى تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربي من خلال الأسطح S_1 ، S_2 .

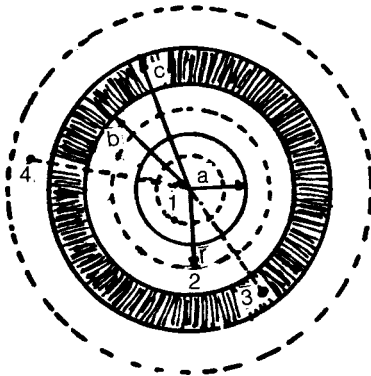
٣ - تتوقف سهولة حساب شدة المجال باستخدام قانون جاوس على حسن اختيار السطح المغلق المناسب لتوزيع الشحنات وشكل المجال. ويراعى في اختيار سطح جاوس ما يأتى:

- أ - أن يمر السطح المغلق بالنقطة المراد حساب شدة المجال عندها .
- ب - أن يكون السطح المغلق متلائماً مع توزيع الشحنات وأن يكون منتظماً على قدر الإمكان .
- ج - أن تسقط خطوط القوة عمودية على السطح أو موازية له أو تصنع معه زاوية ثابتة معلومة حتى يسهل حساب الفيض الكهربى .
- د - أن تكون شدة المجال ثابتة على أجزاء السطح المختلفة .

مثال (٧ - ١)

كرة موصلة ومصمتة نصف قطرها a وشحنتها $+2Q$ وتحيط بها كرة أخرى موصلة ومجوفة ومتحدة معها في المركز نصف قطرها الداخلى b والخارجى c وشحنتها $-Q$. استعمل قانون جاوس لحساب المجال الكهربى عند النقاط 1, 2, 3, 4 كما فى الشكل .

الحل



١ - بالنسبة للنقطة (1) التي توجد داخل الكرة المصمتة: نتصور سطحاً جاووسياً نصف قطره r ويمر بالنقطة (1) حيث $r < a$. لا توجد شحنات في هذه المنطقة كما وضح ذلك في البند السابق أي أن:

$$E_1 = 0$$

وهذا يعني أن الشحنة موزعة على السطح الخارجى للكرة الداخلية .

٢ - بالنسبة للنقطة (2): نتصور أيضاً سطحاً جاووسياً نصف قطره r حيث $a < r < b$

وبلاحظ أن الشحنة الموجودة داخل هذا السطح هي $2Q$ الخاصة بالكرة الداخلية المصمتة. وتنبعث خطوط القوى من سطح الكرة المشحونة في اتجاه عمودي على سطحها أي تتلاقى عند مركزها وتقطع سطح جاوس في اتجاه عمودي وقيمتها ثابتة عنده وتطبيق قانون جاوس يحصل على:

$$\int E_2 dS \cos \theta = E_2 S = E_2 (4\pi r^2) = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2K_e \frac{Q}{r^2}$$

٣ - بالنسبة للنقطة (3): تكون قيمة المجال الكهربائي في هذه المنطقة مساوية للصفر. لأنه إذا تصورنا سطحًا جاوسيًا في هذه المنطقة فإن محصلة الشحنات تساوي الصفر نتيجة لتكون شحنة حثية مقدارها $-2Q$ داخل سطح الكرة المجوفة مساوية للشحنة على سطح الكرة الداخلية المصمتة $+2Q$.

٤ - أما بالنسبة للنقطة (4): نتصور سطحًا جاوسيًا يمر بهذه النقطة حيث $r > c$ فإن هذا السطح سيحيط بنوعين من الشحنات على السطح للكرة المصمتة والسطح الخارجي للكرة المجوفة الخارجية أي أن:

$$q = 2Q + (-Q) = Q$$

$$\sum E_4 \times S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = K_e \frac{Q}{r^2}$$

(٩-١) تطبيقات على قانون جاوس

Applications of Gauss's Law

لكي نتضح فوائد قانون جاوس سوف يدرس فيما يلي شدة المجال الكهربائي في بعض الحالات المعروفة بواسطة المعادلة (١-٥١).

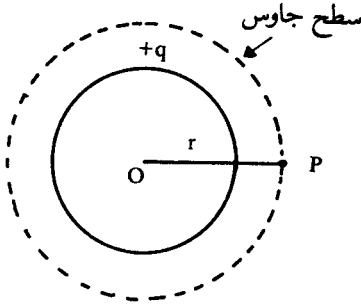
Electrical field around charged sphere شدة المجال حول كرة مشحونة (١-٩-١٨)

يمثل الشكل (١-١٧) كرة تحمل شحنة موجبة قدرها q . فلحساب شدة المجال عند النقطة P خارج الكرة. يُفرض وجود سطح جاوسي نصف قطره r ويمر بالنقطة P .

وحيث إن خطوط القوى تنبعث من سطح الكرة المشحونة في اتجاه عمودي على سطحها أي تتلاقى عند المركز. كما أنها تقطع سطح جاوس في الاتجاه العمودي.

فبتطبيق المعادلة (١-٥١) يكون :

$$E \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$



ولأن : $\cos \theta = 1$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

..... (١-٥٢)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

أو :

شكل (١-١٧) : تابع للتطبيق (١-٩-١)

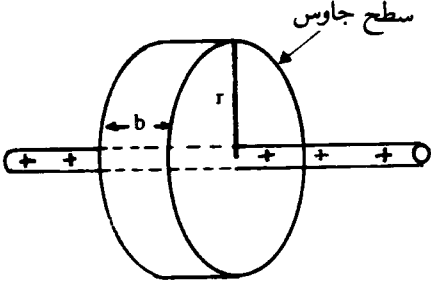
أي أن قيمة شدة المجال الكهربى عند النقطة P خارج كرة مشحونة هي نفسها كما لو كانت الشحنة عند المركز.

Field of a long charged wire المجال الناشئ عن سلك طويل مشحون (٢-٩-٩٩)

سبق وأن درست هذه المسألة في البند (٦-١) حيث تم حساب شدة المجال E

باستخدام المعادلة (١-٤٦) وستعالج المسألة نفسها بواسطة قانون جاوس.

لنتخيل سطحاً جاوسياً على هيئة غلاف أسطوانى طوله b ونصف قطره r ومتحد المحور مع السلك كما في شكل (١-١٨). فإذا كانت λ شحنة وحدة الطول فإن الطول b من الأسطوانة المذكورة يحمل شحنة قدرها λb . وحيث إن خطوط القوى عمودية على سطح جاوس وبتطبيق نظرية جاوس [المعادلة (١-٥١)] يمكن الحصول على:

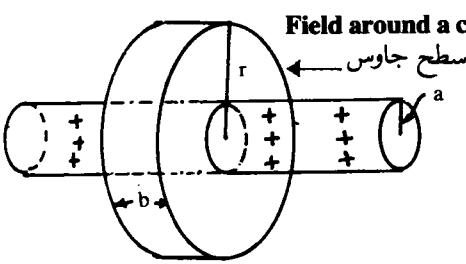


$$E \int_0^{2\pi r b} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda b$$

$$\therefore E \cdot 2\pi r b = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda b$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

وهي تمثل المعادلة (١-٤٢) نفسها. شكل (١-١٨): تابع للتطبيق (٢-٩-١)



يمثل شكل (١-١٩)

أسطوانة طولية نصف قطرها a .
نفرض أن الكثافة السطحية
لشحنتها منتظمة ومقدارها σ ،
ومعنى هذا أن الطول b يحمل شحنة
قدرها:

شكل (١-١٩): تابع للتطبيق (٣-٩-١)

$$q = 2\pi a b \sigma \quad \dots \dots \dots (١-٥٣)$$

ولإيجاد شدة المجال E خارج الأسطوانة وعلى بعد r من محورها نتخيل سطحاً جاوسياً على هيئة غلاف أسطوانى طوله b ونصف قطره r ومتحد المحور مع الأسطوانة.

وباعتبار أن خطوط القوى عمودية على جدران سطح جاوس الأسطوانى، وبتطبيق نظرية جاوس، نجد أن:

$$E \int_0^{2\pi r b} dS = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi a b \sigma$$

$$\therefore E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma a}{r}$$

فإذا فرض أن λ شحنة وحدة الأطوال ، فتكون الشحنة بالنسبة للطول b تساوي

$$q = \lambda b \quad \dots\dots\dots (١-٥٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلتين (١-٥٣) و (١-٥٤) على :

$$\lambda b = 2\pi a b \sigma$$

$$\therefore \sigma = \frac{\lambda}{2\pi a}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

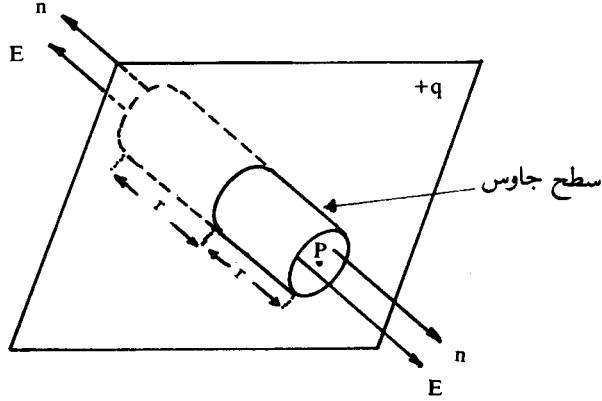
وهذا المجال هو المجال نفسه الناتج عن سلك طويل مشحون . أي أن المجال الكهربى حول أسطوانة مشحونة هو المجال نفسه الذي ينتج إذا تركزت شحنة الأسطوانة على طول محورها بصرف النظر عن نصف قطر الأسطوانة .

(١-٩-٤) شدة المجال خارج موصل مستوي لا نهائي الأبعاد مشحون

Field of an infinite plane sheet of charge

لتكن q شحنة موجبة موزعة على سطح مستوي غير محدود الأبعاد كما في الشكل (١-٢٠) ، ولنفرض أن σ كثافته السطحية . فلإيجاد قيمة المجال عند P التي تقع خارج السطح المستوي وعلى مسافة قدرها r من هذا السطح ، نتصور سطحاً جاوسياً ماراً بالنقطة P وعلى شكل غلاف أسطواني مساحة مقطعه S بحيث تمر إحدى قاعدتيه بالنقطة P بينما تظهر الأخرى في الجانب الآخر من الصفحة .

لما كانت خطوط القوى عمودية على سطح الصفحة كانت هذه الخطوط تخرج قاعدتي الغلاف الأسطواني .



شكل (١-٢٠): تابع للتطبيق (١-٩-٤)

وبتطبيق نظرية جاوس يكون:

$$ES + ES = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (١-٥٥)$$

حيث $q = \sigma S$ يمثل الشحنة الكلية عند سطح جاوس.

ويتضح من هذه المعادلة أن شدة المجال E لا تتوقف على المسافة r ولكنها تتوقف فقط على كثافة الشحنة σ على اللوح. ويسمى مثل هذا المجال بالمجال المنتظم وهو المجال الذي لا يتغير بتغير المسافة ويمثل بخطوط قوى متوازية.

(٥-٩-١) المجال بين صفيحتين متوازيتين مشحونتين ومتقابلتين

Field between oppositely charged parallel plates

يمثل الشكل (١-٢١) صفيحتين متوازيتين لهما الخواص نفسها من حيث الطول والمادة والسلك وأعطيت لكل منهما الشحنة نفسها ولكنها سالبة على إحداهما وموجبة على الأخرى. وباعتبار أن المسافة بين الشحنتين على سطحي الصفيحتين المتقابلتين مهملة بالنسبة لطولهما تكون شدة المجال في أي نقطة خارج أو داخل الصفيحتين عبارة عن محصلة مجالي الصفيحتين E_1 و E_2 .

فعند النقطتين a, c مثلا تكون المركبتان E_1 و E_2 متساويتين في المقدار ومتضادين في الاتجاه أي عند كل نقطة من هذه النقط الخارجية يكون $E = 0$.

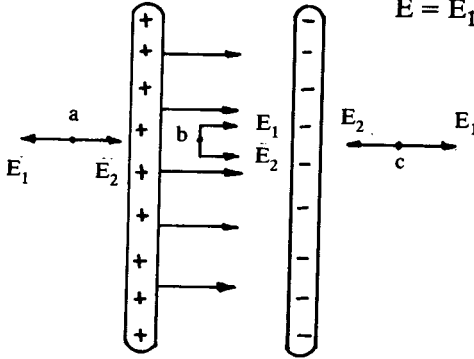
بينما عند نقطة ما بين الصفيحتين مثل b تكون المحصلة :

$$E = E_1 + E_2 \dots \dots \dots (١-٥٦)$$

ولكن من المعادلة (١-٥٥) نجد أن :

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dots \dots (١-٥٧)$$



شكل (١-٢١) : تابع للتطبيق (١-٩-١)

أي أن شدة المجال الكهربى عند أي نقطة بين الصفيحتين تعتمد على كثافة الشحنة σ فقط .

والمجال الكهربى بين الصفيحتين هو مجال منتظم (uniform) ولذلك يعرف بأنه ذلك المجال الذي تكون فيه خطوط القوى الكهربائية متوازية وعلى أبعاد متساوية من بعضها، أي أن شدة المجال ثابتة في أي مكان داخل المجال مقداراً واتجاهاً .

(١-٩-٦) المجال والشحنة داخل وخارج موصل

Field and charge within and without a conductor

إذا تعرضت الشحنات الحرة داخل موصل ما لمجال كهربى فإنها ستتحرك وإذا استمر المجال الكهربى بطريقة أو بأخرى داخل الموصل حدثت حركة مستمرة للشحنات الحرة (هذه الحركة تسمى تياراً) أما إذا لم يكن هناك مجال بداخل الموصل فلن تتحرك الشحنات الحرة وهذا يعني أنه إذا كانت الشحنات الحرة بداخل الموصل ساكنة، فإن المجال بداخل الموصل يجب أن يساوي صفراً .

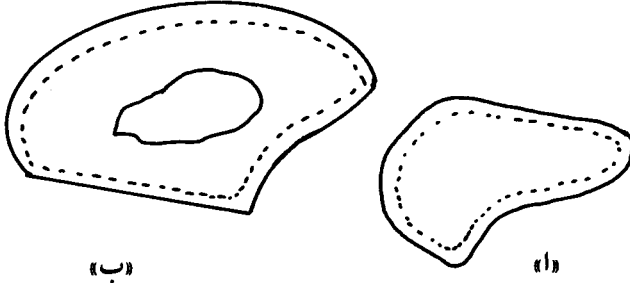
بالاستعانة بهذه النتيجة وقانون جاوس يمكن إثبات أنه إذا كان الموصل مشحونا، فإن الشحنة تتركز كلها على سطح الموصل سواء كان مصمتا أو أجوفا.

يمثل شكل (٢٢-١) موصلا مصمتا غير منتظم الشكل مشحونا بشحنة قدرها q ولنفرض أن بداخله سطحا جاوسيا (يمثله الخط المنقوط) ملاصق لسطح الموصل وطبقا لقانون جاوس فإن عدد خطوط القوى التي تخترق هذا السطح إلى الخارج تساوي $\frac{1}{\epsilon_0} q$. فإذا كانت الشحنات الموجودة بداخل الموصل ساكنة، فإن شدة المجال الكهربائي عند جميع النقاط داخل الموصل تساوي صفرا. ويكون عندئذ عدد خطوط القوى التي تنفذ من السطح المنقط تساوي صفرا.

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} q = 0$$

$$\therefore q = 0$$

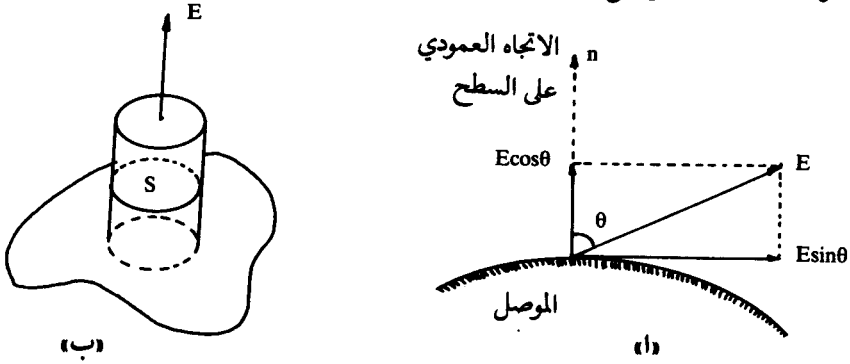
أي أن الشحنة داخل هذا السطح تساوي صفرا. وهذا يعني أن الشحنة توجد خارج السطح المنقوط لأن هذا السطح يقع على مسافة متناهية الصغر من سطح الموصل فإن كل الشحنة الزائدة الموجودة على الموصل توجد على السطح.



شكل (٢٢-١): أ - موصل مصمت غير منتظم الشكل.
ب - موصل أجوف غير منتظم الشكل.

وإذا لم يكن الموصل مصمتا بل أجوفا [شكل (٢٢-ب - ١)] فستظل النتيجة السابقة صحيحة. وبتطبيق قانون جاوس على السطح المنقوط في الشكل - ينتج أنه لا يمكن أن توجد شحنة ما بداخل السطح، من ثم لا يوجد مجال ولا توجد شحنة في التجويف ولذلك فإن ظاهرة تلاشي المجال داخل موصل مقفل هي أساس نتعارف على أنه

الاحتواء الكهربى أو التغليف الكهربى أو الحجب الكهربى (electrostatic shielding) ، وصمام الراديو والمكشاف الكهربى (electroscope) يمكن عزلها عن تأثير الشحنات الأخرى بإحاطتها بموصل .



شكل (٢٣-١): أ - تحليل المجال إلى مركبتيه $E \cos \theta$ و $E \sin \theta$ على سطح الموصل .
ب - سطح جاوس لحساب قيمة المجال E باستخدام قانون جاوس .

وقد أثبتت التجارب العملية لكل من فرانكلين (M. Franklin) ١٧٥٥م ، وبرستلي (J. Priestly) ١٧٦٧م ، وفراداي (M. Faraday) وكذلك هنري كافندش (H. Cavendish) ١٧٣١ - ١٨١٠م وأخيرا بلمتون ولوتون (Plimpton & Lawton) ١٩٣٦م صحة استقرار الشحنة على السطح الخارجى للموصل وليس داخله .

ويتجه المجال الكهربى عند النقط الخارجية عن الموصل مباشرة في الاتجاه العمودى على سطح الموصل إذا كانت الشحنات التى على الموصل ساكنة .

ولإثبات ذلك يفترض بأن المجال على سطح الموصل يميل بزاوية قدرها θ عن الاتجاه العمودى على السطح كما في شكل (٢٣-١) ، فبتحليل المجال إلى مركبتين إحدهما أفقية بالنسبة لسطح الموصل . وتحت تأثير المركبة الأفقية $E \sin \theta$ تتحرك الشحنات على سطح الموصل وهذا يتعارض مع الفرض بأن الشحنات ساكنة ولذلك يجب أن يتحقق الشرط ($E \sin \theta = 0$) وبذلك يكون المجال عموديا على السطح ولحساب قيمة هذا المجال نتبع ما يلي :

إذا شحن موصل غير منتظم الشكل [شكل (٢٣ ب - ١)] فإن كثافة الشحنة السطحية تكون غير منتظمة، فإذا كانت σ هي كثافة الشحنة السطحية للمنطقة المظللة من السطح وكانت S هي مساحتها فإنها ستحمل شحنة قدرها σS . وهذه المنطقة المظللة من السطح تقع داخل الأسطوانة التخيلية المثلثة لسطح جاوس والتي تظهر إحدى قاعدتيها مباشرة خارج الموصل بينما تكون القاعدة الأخرى داخله.

وكما شُرح أعلاه فإن شدة المجال داخل السطح تساوي صفراً وبذلك فإن خطوط القوى سوف تخرج من السطح متعامدة ومخرقة القاعدة العليا فقط من الأسطوانة التخيلية لسطح جاوس.

وبتطبيق قانون جاوس:

$$E \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

وهذه هي المعادلة (١٠٥٧) نفسها، مع ملاحظة أن شدة المجال في هذه الحالة سوف تتغير من نقطة إلى أخرى على سطح الموصل مادامت كثافة شحنته السطحية σ غير منتظمة كما أن شدة المجال سوف تقل كلما ابتعدنا عن سطح الموصل لأن خطوط القوى سيتباعد بعضها عن بعض تدريجياً.

(١٠-١) شكل المعادلة التفاضلية لقانون جاوس

Differential - Equation Form of Gauss's Law

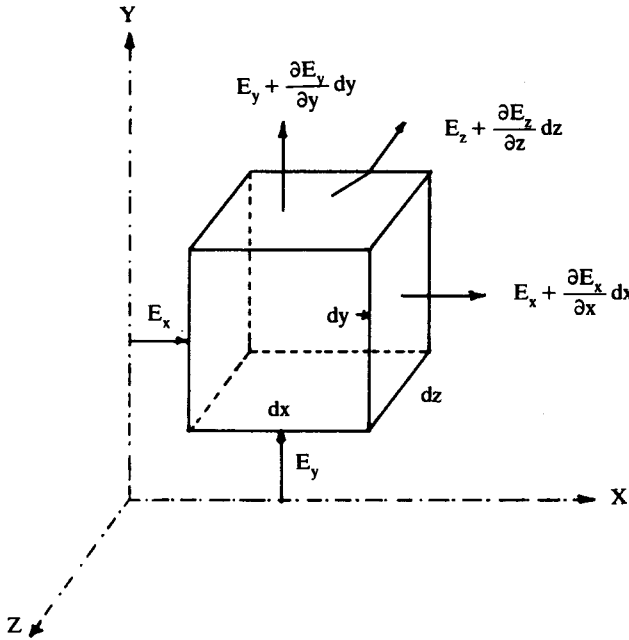
في حالة التوزيع الحجمي للشحنة يمكن تطبيق قانون جاوس على حجم غير متناهي في الصغر في حيز (space) معين. ثم الحصول على العلاقة بين التفاضل الجزئي لمركبات $\vec{E}$ بالنسبة للإحداثيات لنقطة تقع في ذلك الحجم وبين الكثافة الحجمية

لشحنة q عند النقطة نفسها مع ملاحظة أن مركبات $\vec{E}$ يمكن أن تتغير مع المحاور الثلاثة.

لنفترض وجود شحنة موزعة في منطقة (حين) بكثافة حجمية قدرها q على الإحداثيات X, Y, Z وليكن لدينا متوازي المستطيلات الذي أطوال جوانبه متناهية في الصغر dx, dy, dz وأوجهه متوازي سطوح الإحداثيات فيكون حجمه مساويا $dx \cdot dy \cdot dz$ [شكل (١-٢٤)].

ويتطبيق قانون جاوس يكون:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q \, dx \cdot dy \cdot dz \quad \dots \dots \dots (١-٥٨)$$



شكل (١-٢٤): متوازي مستطيلات

لحساب معادلات بواسون ولاپلاس

ويمكن تقدير التكامل $\oint E \, ds$ على dx, dy, dz بأخذ المركبات E_x, E_y, E_z للمجال E على السطوح الجانبية الستة للحجم ونحسب بذلك التدفق من خلال هذه السطوح .

تكون كثافة الشحنة للوجهين الموازيين للمستوي YZ ، تشبه هذه الحالة المهبط والمصعد في الصمامات المفرغة ، دالة لـ X فقط وبالمثل تتغير شدة المجال الكهربائي من نقطة إلى أخرى ولكنها تتوقف على المتغير X فإذا كانت dE_x/dx تمثل مقدار التغير في قيمة E_x بالنسبة إلى X فإن مقدار الزيادة في المجال عند قطع مسافة dx هو:

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

فإذا كانت E_x تمثل شدة المجال على جميع نقط الوجه الأيسر فإن شدة المجال عند الوجه الأيمن :

$$E_x + dE_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

ويكون التدفق من خلال الوجه الأيسر باعتبار مساحة سطحه $dy \cdot dz$ يساوي :

$$(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dydz$$

ومن خلال الوجه الأيمن يساوي $(-E_x dy dz)$ والسبب في الإشارة السالبة هو أن E تتجه إلى الداخل بالنسبة لهذا السطح وهكذا يكون مجموع التدفق العمودي على الوجهين يساوي :

$$\left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) - E_x \right] dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dydz$$

وإذا أجريت العملية نفسها على الوجوه الأخرى لمتوازي المستطيلات لوجد أن التدفق الكلي على أوجهه يساوي :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (١-٥٩)$$

وبموازنة هذه المعادلة بالمعادلة (١-٥٨) يُحصل على :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \dots \quad (١-٦٠)$$

أو

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \dots \dots \dots (١-٦١)$$

وتساوي هذه المعادلة الصفر إذا كانت المنطقة خالية من الشحنة أي أن $(\rho = 0)$ ومنه فإن :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \dots \dots \dots (١-٦٢)$$

وكذلك إذا كانت الشحنة موزعة بانتظام فإن مركبات المجال E_x و E_y و E_z تكون ثابتة وبذلك فإن تفاضلها يساوي الصفر أيضا.

وتمثل المعادلة التفاضلية (١-٦١) شكلا للمعادلة الأولى من معادلات ماكسويل المشهورة للإشعاع الكهرومغناطيسي (electromagnetic radiation) ويمكن من المعادلات (١-٤٨)، (١-٥٨) و (١-٥٩) الحصول على معادلة جديدة لقانون جاوس وهي :

$$\oint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi \dots \dots (١-٦٣)$$

أي أن

$$\oint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \dots \quad (١-٦٣ ب)$$

$$\therefore \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad \dots \dots \dots (١-٦٤)$$

حيث Q مجموع الشحنة المحصورة في الحجم dV والمحاطة بالسطح S .

ويمكن التعبير عن $\text{div } \vec{E}$ بدلالة الإحداثيات الأخرى الكروية (spherical) أو الأسطوانية (cylindrical). ويلزم لذلك معرفة العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الأخرى كما سيرد في الملحق (٢) البند (٢-٦).

مثال (١-٨)

إذا كانت لدينا شحنة نقطية أو كرة متماثلة مشحونة احسب $\text{div } \vec{E}$ ، عند نقطة تقع على مسافة قدرها r كما في شكل (١-١٧).

الحل

إن قيمة المجال الكهربائي $\vec{E}$ عند نقطة تقع على مسافة قدرها r من شحنة نقطية أو كرة مشحونة متماثلة، [(حسب ما ورد في البند (٩-١) التطبيق رقم ١]، يساوي :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

ومنه فإن مركبات المجال على المحاور الإحداثية x ، y ، z هي :

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} x, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} y, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} z$$

$$\because r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\therefore E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) \end{aligned}$$

وبالطريقة نفسها مع المركبتين E_z ، E_y نحصل على $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ و $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ ومنه فإن :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) \right\} = 0$$

$$\therefore \text{div} \vec{E} = 0$$

(١١-١) شحنة نقطية في مجال كهربى

A Point Charge in an Electric Field

إذا وضع جسم مشحون q في مجال كهربى فإنه سيتأثر بقوة قدرها [المعادلة (١١-١)]
 $(F = qE)$ تكون سببا في حركته بعجلة (بتسارع) قدرها:

$$a = \frac{F}{m}$$

حيث m كتلة الجسم وسوف تُدرس مثل هذه الحركة في الحالات التالية:

(١-١١-١) جسم مشحون ينتقل في اتجاه خطوط قوى المجال الكهربى

A charged particle moves with the direction of the electric field

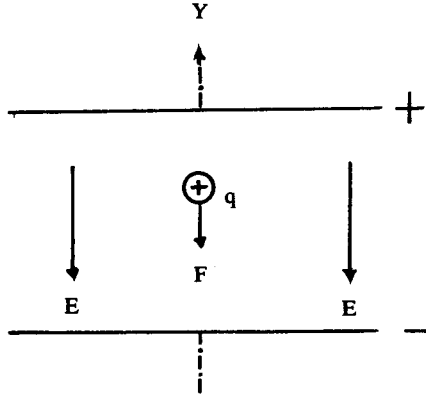
وضع جسم مشحون كتلته m وشحنته q [شكل (١-٢٥)] في مجال كهربى منتظم E يؤثر على الجسم بقوة قدرها $(F = qE)$ وتكون العجلة (التسارع) المكتسبة للجسم نتيجة تأثره بالمجال هي:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \dots\dots\dots (١-٦٥)$$

وحيث إن هذه العجلة تعطى بالمعادلة:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \therefore dv = a dt$$

$$\therefore \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \quad \therefore v - v_0 = at$$



شكل (١-٢٥): شحنة تتحرك من السكون في مجال كهربائي منتظم ناتج عن صفيحتين متوازيتين تحمل إحداهما شحنة موجبة والأخرى شحنة سالبة.

حيث v سرعة الجسيم عند الزمن t ، v_0 سرعته الابتدائية عندما $t = 0$ (في هذه الحالة $v_0 = 0$):

$$\therefore v = at = \frac{qEt}{m} \quad \dots\dots\dots (١-٦٦)$$

وتكون المسافة المقطوعة y في زمن قدره t تساوي:

$$y = \int_0^t v dt = \int_0^t at dt = \frac{1}{2} at^2 \quad \dots\dots (١-٦٧)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \quad \dots\dots\dots (١-٦٧ ب)$$

ونُحصل من المعادلتين (١-٦٦) و (١-٦٧) على:

$$v^2 = 2ay = \frac{2qE}{m} y \quad \dots\dots\dots (١-٦٨)$$

ويكون الشغل المبذول في نقل الجسيم مسافة y والذي قد تتحول إلى طاقة حركية (kinetic energy) هو:

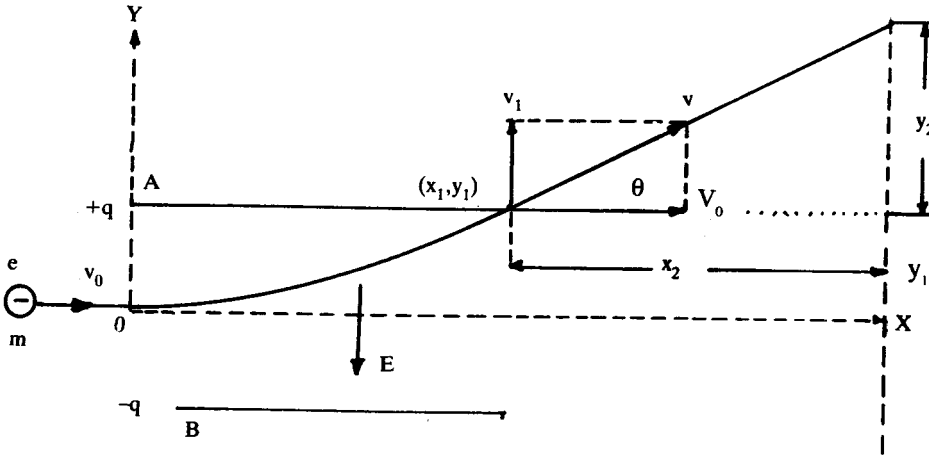
$$KE = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{2qE}{m} y = qEy \dots (١-٦٩)$$

(٢-١١-١) انحراف حزمة من الإلكترونات Deflection of an electron beam

يوضح شكل (١-٢٦) إلكترون كتلته m وشحنته e قُذِفَ بسرعة أفقية مقدارها v_0 ويدخل عند النقطة O في مجال كهربى منتظم E وذلك في اتجاه عمودي على اتجاه المجال. يكتسب الإلكترون عجلة رأسية a نظرا لتأثره بقوة قدرها $(F=eE)$ وذلك في اتجاه رأسى نتيجة وجوده في المجال الرأسى المنتظم حيث:

$$a = \frac{eE}{m}$$

أما في الاتجاه الأفقى فلن يتأثر الإلكترون لأن مركبة المجال الكهربى في الاتجاه الأفقى تساوى صفرا ولذلك سوف تظل السرعة الأفقية v_0 ثابتة ولن تتغير أثناء عبور الإلكترون داخل المجال الكهربى.



شكل (١-٢٦): حزمة من الإلكترونات تسقط في مجال منتظم عمودي على اتجاه الحزمة

ونتيجة لحركته الأفقية داخل المجال فإن المسافة الأفقية المقطوعة في الاتجاه x بعد

زمن قدره t هي:

$$x = v_0 t \quad \dots\dots\dots (١-٧٠)$$

وذلك نظرا لأن v_0 في الاتجاه الأفقي منتظمة. وفي أثناء الفترة الزمنية t تكون المسافة الرأسية المقطوعة في الاتجاه العمودي هي :

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

وبالتعويض عن t^2 من المعادلة (١-٧٠) يُحصل على :

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 \quad \dots\dots\dots (١-٧١)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ تعطي الإزاحة الرأسية y بدلالة x أي تحدد مسار الإلكترون أثناء العبور داخل المجال الكهربائي.

يتطبيق هذه المعادلة لحظة خروج الإلكترون من المجال أي عند النقطة (x_1, y_1) .

$$\therefore y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2 \quad \dots\dots\dots (١-٧٢)$$

حيث x_1 طول كل من اللوحين A و B.

وبعد الخروج من بين اللوحين يسير الإلكترون في خط مستقيم على صورة مماس للقطع المكافئ وذلك لعدم تأثره بالمجال الكهربائي حتى يصل إلى الشاشة C بسرعة رأسية قدرها :

$$v_1 = at \quad \dots\dots\dots (١-٧٣)$$

حيث t زمن قطع المسافة بين اللوحين وتساوي x_1/v_0 . وبالتعويض عن t و a في المعادلة (١-٧٣) يمكن الحصول على :

$$v_1 = \frac{eE}{m} \frac{x_1}{v_0} \quad \dots\dots\dots (١-٧٤)$$

ولذلك فإن الإلكترون يخرج من بين اللوحين بسرعة محصلة قدرها :

$$v = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$$

ويصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الأفقى بحيث يكون :

$$\tan \theta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{eE}{mv_0^2} x_1 \dots\dots\dots (1-75)$$

فإذا كانت x_2 هي المسافة التى قطعها الإلكترون حتى وصل إلى الشاشة فإن :

$$y_2 = x_2 \tan \theta$$

وبالتعويض عن $\tan \theta$ من المعادلة (1-75) يمكن الحصول على :

$$y_2 = \frac{eE x_1 x_2}{mv_0^2} \dots\dots\dots (1-76)$$

وتكون الإزاحة الكلية الرأسية للإلكترون عند وصوله إلى الشاشة هي :

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2 + \frac{eE x_1 x_2}{mv_0^2}$$

$$\therefore y = \frac{eE}{mv_0^2} \left(\frac{1}{2} x_1 + x_2 \right) x_1 \dots\dots\dots (1-77)$$

فإذا كانت الشاشة فلورية (fluorescent) وتعاقبت الإلكترونات في المسار نفسه فسوف يشاهد مكانها على الشاشة على هيئة نقطة مضيئة يتوقف موضعها على شدة هذا المجال الكهربى E وهذا هو مبدأ عمل ظاهرة الكهرباء الاستاتيكية في أنبوب راسم الذبذبات الكاثودي (cathode-ray oscilloscope).

مثال (1-9)

في أنبوب راسم الذبذبات الكاثودي كان المجال الكهربى $1.2 \times 10^4 \text{ N/C}$ فأوجد المسافة التى سينحرف بها الإلكترون عقب خروجه من المجال مباشرة . علماً بأن

الإلكترون يدخل المجال الجارف بطاقة حركة قدرها 2000 electron Volt (eV) وذلك في اتجاه عمودي على المجال. وأن طول اللوح الجارف 1.5 cm.

الحل

لحل هذه المسألة نطبق المعادلة (١-٧٢) وهي :

$$y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2} x_1^2$$

وحيث إن طاقة الحركة تعطى بالمعادلة : $KE = \frac{1}{2}mv_0^2 = 2000 \text{ eV}$

$$\therefore y_1 = \frac{eE}{4\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)} \cdot x_1^2 = \frac{eE}{4 \cdot KE} x_1^2$$

حيث KE طاقة الحركة .

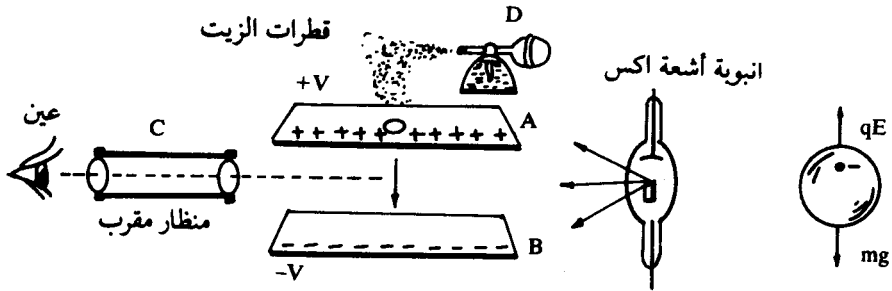
$$\therefore y_1 = \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times (1.2 \times 10^4)}{4(2000 \times 1.6 \times 10^{-19})} \times (0.015)^2 = 3.38 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(١٢-١) قياس شحنة الإلكترون بطريقة ميلكان (تجربة نقطة الزيت)

Measurement of Charge of Electron with Milikan Oil Drop Experiment

استخدم ميلكان عام ١٩٠٩ م مجالا كهربيا منتظما في تعيين شحنة الإلكترون (e) وذلك لأول مرة وهي التجربة المعروفة باسم تجربة قطرة الزيت .

ويتركب جهاز ميلكان [شكل (١-٢٧)] من لوحين معدنيين متوازيين A و B وتوجد في اللوح العلوي منها فتحة صغيرة تسمح بمرور قطرات دقيقة جدا من الزيت والتي يُحصل عليها باستخدام رذاذ خاص (atomizer). يُمرر شعاع ضوئي بين اللوحين المتوازيين ويُستخدم منظار مقرب في اتجاه عمودي على اتجاه الشعاع الضوئي بحيث يمكن رؤية قطرات الزيت الدقيقة وهي تتساقط بين اللوحين تحت تأثير الجاذبية الأرضية. وتظهر قطرات الزيت هذه في مجال رؤية المنظار على شكل نقاط صغيرة مضيئة .



شكل (١-٢٧): جهاز ميليكان المكون من لوحين متوازيين A و B وتلسكوب C ورذاذ D. وتكتسب قطرات الزيت الإلكترونات عن طريق أشعة أكس

تلتقط قطرات الزيت أثناء تساقطها بعض الإلكترونات الحرة الموجودة في الحيز بين اللوحين A و B ويمكن زيادة عدد هذه الإلكترونات بإمرار أشعة سينية (X-ray) في الوسط المادي بين اللوحين، إذ تؤدي الأشعة إلى تأين الهواء، فتزداد كثافة الإلكترونات الحرة التي يمكن أن تلتقطها قطرة الزيت وبذلك تصبح مشحونة بشحنة سالبة ولتكن (-q).

فإذا سُلط بعد ذلك مجال كهربى منتظم على الحيز الواقع بين اللوحين، بشحن اللوح العلوي بشحنة موجبة واللوح السفلي بشحنة سالبة، فسوف تكون القطرة المشحونة تحت تأثير ثلاثة قوى هي:

١ - القوة الكهروستاتيكية وتعمل إلى أعلى ومقدارها:

$$F_1 = qE \quad \dots \dots \dots (١-٧٨)$$

٢ - الوزن ويعمل رأسياً إلى أسفل ومقداره:

$$F_2 = mg = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \cdot g \quad \dots \dots \dots (١-٧٩)$$

٣ - الدفع إلى أعلى، وهو يمثل دفع الهواء للقطرة إلى أعلى أثناء السقوط وطبقاً لقاعدة أرشميدس يكون دفع الهواء للقطرة مساوياً لوزن حجم من الهواء حجمه يساوي حجم القطرة أي أن:

$$F_3 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho' \cdot g \quad \dots\dots (1-80)$$

حيث m كتلة قطرة الزيت، ρ كثافة الزيت، ρ' كثافة الهواء، g عجلة الجاذبية و a نصف قطر القطرة.

من المعادلتين (1-79) و (1-80) تكون القوة الفعلية المؤثرة إلى أسفل هي :

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho' g \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho - \rho') \quad \dots\dots\dots (1-81) \end{aligned}$$

ويمكن عن طريق التحكم في شدة المجال الكهربائي E تغيير القوة المؤثرة على قطرة الزيت المشحونة بحيث يكون اتجاه حركتها إلى أعلى في حالة $F_1 > F_4$ أو إلى أسفل في حالة $F_4 > F_1$ وعندما تتساوى القوتان F_4, F_1 تظل هذه القطرة بين اللوحين في حالة اتزان بين القوتين أي أن :

$$F_1 = F_4$$

$$\therefore qE = \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho - \rho') \quad \dots\dots\dots (1-82)$$

ولما كان نصف القطر a صغيرا جدا بحيث يصعب قياسه عمليا، استخدم ميليكان لتعيينه طريقة ستوك لقياس اللزوجة والتي تنص على أن :

والجسم الساقط في وسط لزج يكتسب سرعة نهائية منتظمة (*terminal velocity*) عندما تكون القوة الفعلية المؤثرة على الجسم إلى أسفل مساوية تماما قوة اللزوجة، أي أن :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho - \rho') = 6\pi\eta va \quad \dots\dots\dots (1-83)$$

حيث η معامل لزوجة الوسط و v سرعة الجسم

ولقياس سرعة السقوط الحر v للقطرة في الهواء بعد إزالة المجال الكهربى يستخدم خطان دقيقان متوازيان في مجال رؤية المنظار يحددان مسافة سقوط معلوم ويتسجيل زمن سقوط القطرة خلال هذه المسافة يمكن إيجاد سرعة السقوط الحر.

وبمعرفة كثافة الهواء (ρ') ومعامل لزوجته (η) وكثافة قطرة الزيت (ρ) يمكن حساب نصف القطر (a) للقطرة التى تحت التجربة وبالتالي يمكن حساب مقدار الشحنة q باستخدام المعادلة (٨٢-١) بعد معرفة شدة المجال الكهربى (E).

وقد وجد ميليكان أن الشحنة على القطرة q تكون دائئا مضاعفا صغيرا لكمية شحنة ثابتة e وهي شحنة الإلكترون.

مثال (١٠ - ١)

تحرك إلكترون في مجال كهربى شدته 10^4 N/C واتجاهه الى أعلى مسافة قدرها 1 cm من حالة السكون. احسب السرعة وطاقة الحركة التى اكتسبها وكذلك الزمن اللازم لقطع هذه المسافة.

الحل

بما أن القوة التى تؤثر على الإلكترون ثابتة فالتسارع (العجلة) ثابت ويساوي :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times 10^4}{9.1 \times 10^{-31}} = 1.8 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times (1.8 \times 10^{15}) \times 10^{-2}} = 6.0 \times 10^6 \text{ m/s}$$

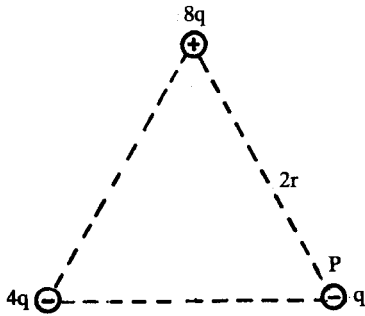
$$KE = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times (9.1 \times 10^{-31}) \times (6.0 \times 10^6)^2 = 16 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{6.0 \times 10^6}{1.8 \times 10^{15}} = 3.3 \times 10^{-9} \text{ s}$$

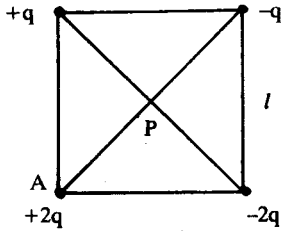
(١٣-١) مسائل

١- احسب أدنى قيمة لقوة التنافر بين بروتونين في نواة الكربون إذا علمت أن نصف قطر النواة يساوي 3.8×10^{-13} سم.

٢- شحنتان q_1 ، q_2 تحققان الشرط $(q_1 + q_2 = Q)$ ، حيث Q كمية ثابتة ، فإذا وصلت القوة بينهما قيمتها العظمى عند قيمة ثابتة للمسافة بينها فاحسب q_1 ، q_2 .



٣- يوضح الشكل ثلاث شحنت على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع $2r$ احسب القوة المؤثرة على الشحنة الواقعة عند النقطة P. وإذا كانت $r=2\text{mm}$ و $q=0.4\mu\text{C}$ احسب قيمة هذه القوة.



٤- في الشكل التالي احسب محصلة القوى عند النقطة A ، علما بأن قيمة الشحنة q تساوي 1.0×10^{-7} كولوم وطول ضلع المربع l يساوي 5.0 سم. ثم احسب E عند النقطة P.

٥- مكعب طول ضلعه l توجد على كل ركن من أركانه شحنة مقدارها $+q$ احسب وأثبت أن القوة المحصلة على كل شحنة تساوي :

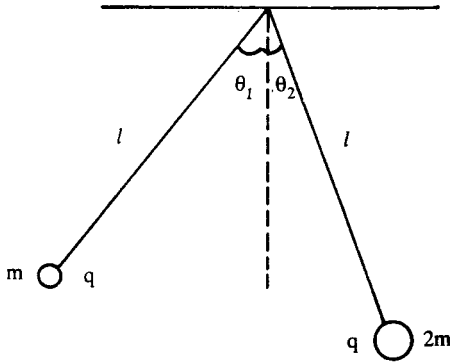
$$F = \frac{0.261q^2}{\epsilon_0 l^2}$$

٦- إذا فرض أن قانون كولوم يصلح لتقدير التأثيرات الكهرية الساكنة بين النويات

على مسافات صغيرة جدا فالمطلوب حساب القوة بين جسيمة α التي رقمها الذري (2) وبين نواة الذهب التي رقمها الذري (79) إذا كانت المسافة بينهما 3×10^{-12} سم مع العلم أن شحنة الإلكترون تساوي 1.6×10^{-19} كولوم .

٧- كرة صغيرة كتلتها 0.1 جم علق بـ خيط رفيع في مجال كهربى ثم شحنت بشحنة تعادل 10^{-9} كولوم فارتزت في وضع يصنع زاوية قدرها (20°) مع العمودي . احسب قيمة المجال الكهربى عند هذه النقطة إذا علمت أن المجال في تلك النقطة أفقى وأن عجلة الجاذبية الأرضية تساوي 980 سم/ثانية .

٨- كرتان صغيرتان متشابهتان كتلة كل منهما 10 جم علقنا بخيطين رفيعين من الحرير طول كل منهما 120 سم وشحنتا بشحنتين متساويتين q فانفجج الخيطان بحيث أصبحت الزاوية بين كل خيط والاتجاه الرأسى θ . فإذا فرض أن الزاوية θ صغيرة جدا بحيث يمكن اعتبار أن $\tan \theta = \sin \theta$ فاحسب قيمة q إذا كانت المسافة بينها 5.0 سم .



٩ - كرتان من نخاع البيلسان Pith كتلة الأولى m والأخرى $2m$ علقنا بخيطين من الحرير طول كل منهما l . شحنت كل كرة بشحنة قدرها q فانفججتا . أثبت أن المسافة بين الكرتين d تساوي $(3q^2 l / 8\pi \epsilon_0 m g)^{1/3}$ مع افتراض أن الزاويتين θ_1 و θ_2 صغيرتان .

١٠- ثلاث كرات كتلة كل منها 10 جرامات معلقة من نقطة مشتركة بثلاثة خيوط من الحرير طول كل منها متر واحد ثم شحنت الكرات بشحنات متساوية ومتشابهة فتنافرت بحيث أصبحت كل كرة عند ركن من أركان مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 0.1 متر . احسب الشحنة على كل كرة بالكولوم .

١١ - جسيم كتلته m وشحنته Q - يدور حول شحنة $+q$ موضوعة في مركز المسار. أثبت أن $R^3 = qQt^2 / 16\pi^3 \epsilon_0 m$ حيث R نصف قطر المدار، t زمن الدورة الواحدة بالثانية، ϵ_0 سماحية الفراغ وذلك بفرض إهمال قوة الجذب العام.

١٢ - شحنتان نقطيتان قيمتهما 4.0 ميكروكولوم و 6.0 ميكروكولوم على الترتيب. وضعت إحداها في مركز الإحداثيات والأخرى عند النقطة (0.5, 0) م في المستوى x, y . أوجد اتجاه وقيمة E عند النقاط (0.9 م، 0.5 م)، (1.0 م، 0) و (0.3 م، 1.0 م).

١٣ - احسب شدة المجال الكهربائي E عند نقطة في الهواء تقع بين شحنتين q_1 و q_2 قيمتهما 20×10^{-8} كولوم و 5×10^{-8} كولوم والمسافة بينهما 10 سم. ما هي مقدار القوة F على شحنة ثالثة q_3 قيمتها 4×10^{-8} كولوم واقعة في منتصف المسافة بين q_1 ، q_2 . وإذا كانت q_2 موجبة. فاحسب كلا من E و F مرة أخرى.

١٤ - احسب:

١ - شدة المجال الكهربائي E عند نقطة في الهواء تقع على بعد 30 سم من جسيم مشحون بشحنة تساوي 5×10^{-9} كولوم.
ب - القوة F المؤثرة على جسيم آخر مشحون بشحنة تساوي 4×10^{-10} كولوم ويقع على بعد 30 سم من الشحنة الأولى.

١٥ - يتكون ذو قطبين من بروتون وإلكترون تفصلهما مسافة قدرها 4×10^{-8} سم يقع منتصفه عند نقطة الأصل ومحوره على المحور x ويقع الإلكترون على يسار نقطة الأصل، احسب مبينا بالرسم مركبات شدة المجال E_θ ، E_r عند النقاط التالية:

$$\theta = 0, \quad r = 10^{-6} \text{ cm}$$

$$\theta = \pi/2, \quad r = 10^{-6} \text{ cm}$$

$$\theta = \pi/6, \quad r = 10^{-6} \text{ cm}$$

حيث r هو بعد النقطة عن منتصف ذي القطبين، θ هي الزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين النقطة والمنتصف.

- ١٦ - ثلاث شحنات كهربية $1\mu\text{C}$, $2\mu\text{C}$, $-1\mu\text{C}$ موضوعة عند النقط $(1,1,1)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$ على الترتيب. احسب شدة المجال الكهربى عند النقطة $(1,1,1)$ ثم احسب القوة المؤثرة على شحنة رابعة وضعت عند هذه النقطة وقيمتها $-2\mu\text{C}$.

- ١٧ - يوضح الشكل ثلاث شحنات

على رؤوس مثلث معلومة أبعاده

احسب:

- ١ - المجال الكهربى عند

النقطتين a و b.

- ب - محصلة القوة المؤثرة على

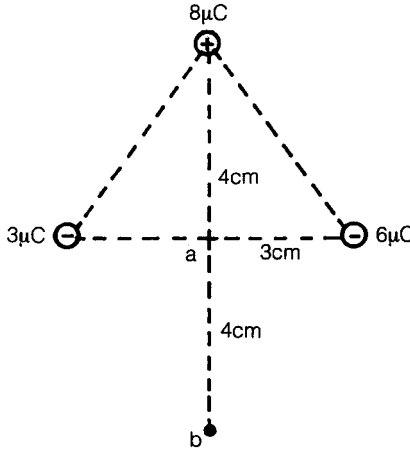
شحنة مقدارها $0.1\mu\text{C}$ إذا

وضعت عند النقطة a.

- ج - محصلة القوة المؤثرة على

شحنة مقدارها $-0.1\mu\text{C}$ إذا

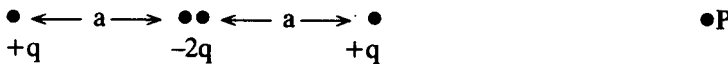
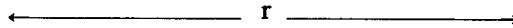
وضعت عند النقطة b.



- ١٨ - رباعي الأقطاب الكهربى (electric quadrupole)، يتألف من اثنين من ثنائي الأقطاب «ذى القطبين»، كما في الشكل، أثبت أن المجال الواقع على محور الرباعي عند النقطة p التي تبعد عن منتصفه بمقدار r، حيث $a \gg r$ ، يساوي:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

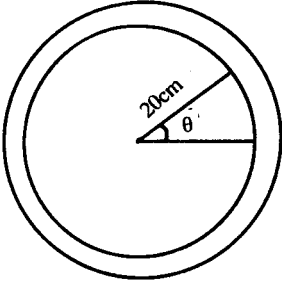
حيث $Q = 2qa^2$ ويسمى بعزم رباعي الأقطاب.



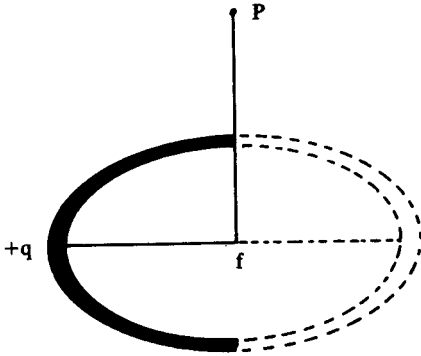
- ١٩ - حلقة دائرية نصف قطرها 5 سم ومشحونة بشحنة موجبة قدرها 100 استات كولوم. احسب:

١ - شدة المجال على محور الحلقة عند الأبعاد 10, 6, 4, 3, 2, 0 سم من المركز مستخدما الوحدات العلمية الكهروستاتيكية وحدد اتجاه المجال، ثم ارسم رسما بيانيا يوضح العلاقة بين شدة المجال والمسافة.

ب - من المعادلة المستخدمة . أوجد تعبيراً للمسافة التي تكون عندها شدة المجال لها نهاية عظمى . ثم وازن التعبير المذكور بالنتيجة التي تحصل عليها من الرسم البياني .



٢٠ - حلقة دائرية رقيقة نصف قطرها 20 سم وكثافة الشحنة الخطية تعطى بالمعادلة $\lambda = 10^{-6} \cos \theta$ كولوم / سم، كما في الشكل، احسب الشحنة الكلية على الحلقة.



٢١ - موصل على شكل نصف حلقة كما في الرسم «الجزء الأسود» شحنت بشحنة موجبة +q . احسب المجال الكهربائي عند النقطة P والنقطة f وإذا وضعت شحنة سالبة q - عند تلك النقطتين فما مقدار القوة على كل منهما.

٢٢ - احسب المجال الكهربائي عند نقطة تقع على محور قرص دائري مشحون نصف قطره 20 سم وتحمل شحنة كهربائية مقدارها 3×10^{-9} كولوم وتبعد مسافة قدرها 80 سم عن مركز القرص .

٢٣ - احسب المجال الكهربائي عند أي نقطة تقع داخل كرة نصف قطرها (r_0) إذا كان $q(r) = b r^2$ حيث b مقدار ثابت .

٢٤ - احسب كثافة الشحنة عند نقطة إحداثياتها (x, y, z) للمجالات الكهربائية المحددة

بالمعادلات التالية:

$$E = b_1 (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{ـ ا}$$

$$E = b_2 (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) / (x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{ـ ب}$$

حيث b_1, b_2 مقادير ثابتة.

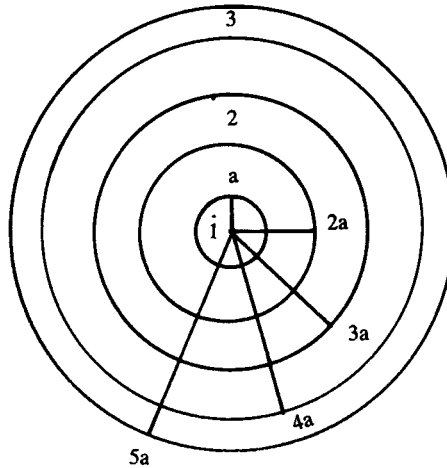
٢٥ - استخدم قانون جاوس لإيجاد قيمة المجال الكهربي الناتج عن كرة مشحونة بشحنة كثافتها الحجمية q ونصف قطرها R في نقطة تبعد مسافة r عن مركزها. ابحث في الحالتين $r < R$ و $r > R$.

٢٦ - يوضح الشكل: ثلاث كرات موصلات، الداخلية منها مصمتة ولها شحنة مقدارها Q :

ا - أوجد توزيع الشحنات على الكرتين الخارجيتين وكثافة الشحنة على سطحيهما.

ب - استخدم قانون جاوس للحصول على المجال الكهربي في مناطق الفراغ بين الكرات.

ج - ارسم العلاقة بين E و r من $r = 0$ إلى $r = \infty$.



٢٧ - قرص دائري نصف قطره 10 سم مشحون بشحنة قدرها 10^{-6} كولوم فإذا كانت الكثافة السطحية تتناسب تناسباً طردياً مع r من مركز القرص وكانت وحدات r بالسنتيمتر.

احسب قيمة ثابت التناسب وما هي قيمة الشحنة لدائرة نصف قطرها 5 سم .

٢٨ - يتحرك إلكترون بسرعة قدرها 5.0×10^8 سم / ثانية قذف باتجاه مواز لمجال كهربي شدته 1.0×10^3 نيوتن / كولوم فأعاق حركته .

ما هي أقصى مسافة يصل إليها الإلكترون قبل وقوفه وما هو الزمن اللازم لذلك .

٢٩ - اسطوانتان متحدتا المحور، نصف قطر الخارجية b وشحنتها موجبة والداخلية a وشحنتها سالبة، وكانت λ هي الشحنة لوحدة الأطوال لكل من الأسطوانتين . فإذا دارت رقيقة شحنتها موجبة q وكتلتها m في الحيز الموجود بين الأسطوانتين وذلك في مسار دائري نصف قطره r .

أثبت أن سرعة الرقيقة تساوي $v = (K \frac{2\lambda q}{m})^{1/2}$ حيث K ثابت الوحدات .
٣٠ - دخل إلكترون مجالا كهربيا بسرعة أفقية قدرها 10^9 سم / ثانية بحيث كان اتجاهه عموديا على اتجاه المجال الناشئ بين لوحين المسافة بينهما 10 سم وفرق الجهد بينهما 100 فولت .

فإذا كان طول كل لوح 2 سم ، فاحسب الزاوية التي ينحرف بها الإلكترون عن الأفقي عقب خروجه من بين اللوحين مباشرة .

٣١ - لوحان متوازيان ومشحونان بشحنتين متضادتين بينهما مجال كهربي منتظم فإذا تحرر إلكترون من اللوح المشحون بالسالب وبدأ حركته من السكون إلى أن اصطدم باللوح الآخر الذي يبعد مسافة قدرها 2 سم في زمن قدره 1.5×10^{-8} ثانية .

احسب : أ - شدة المجال الكهربي .

ب - سرعة الإلكترون عند اصطدامه باللوح الثاني .

٣٢ - تسقط قطرة زيت ، في تجربة ميليكان قدرها 1 سم في زمن قدره 27.4 ثانية في حالة عدم وجود مجال كهربي . وعند تسليط مجال قيمته 2.37×10^4 نيوتن / كولوم اتزنت القطرة وأصبحت معلقة وساكنة .

احسب عدد الإلكترونات الموجودة على قطرة الزيت . علما بأن كثافة الزيت تساوي 8.24 كيلوجرام / م^٣ وكثافة الهواء 1.29 كيلوجرام / م^٣ ومعامل اللزوجة للهواء 180×10^{-7} نيوتن . وثانية / م^٢ .



الجهود الكهربائية

Electrical Potential

- طاقة الوضع الكهربائية الاستاتيكية ● الجهد الكهربائي
- العلاقة بين المجال والجهد الكهربائي ● الجهد الناتج عن
- موصل كروي مشحون ● تقاسم الشحنات بين الموصلات
- السطوح متساوية الجهد ● معادلات بواسون ولاپلاس
- طاقة الوضع والمجال الكهربائي ● ذو قطبين في مجال كهربائي
- خارجي منتظم ● مسائل .

(١-٢) طاقة الوضع الكهربائية الاستاتيكية

Electrostatic Potential Energy

من المعروف أنه إذا رفع جسم عن سطح الأرض فإن شغلا سيبدل لرفعه حتى يمكن التغلب على قوة جذب الأرض ويكون الجسم في هذه الحالة قد اكتسب طاقة تعرف بطاقة الوضع (potential energy) التي تتحول إلى طاقة حركة إذا ترك الجسم يسقط حرا نحو الأرض عائدا إلى وضعه الأصلي .

وقياسا على ذلك فإن لكل جسم مشحون موجود في مجال كهربائي طاقة كهربائية تنتج عن الشغل المبذول واللازم لتحريك الجسم «كفصل شحنتين متجاذبتين وكتقريب شحنتين متنافرتين» في عكس اتجاه القوة الكهربائية وهذا الشغل يتحول إلى طاقة حركة لو ترك الجسم المشحون حرا .

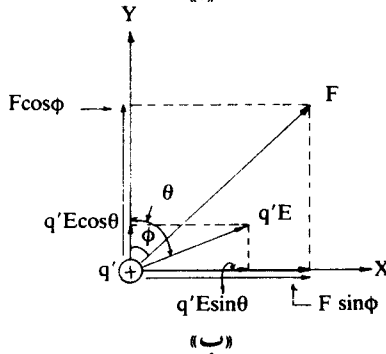
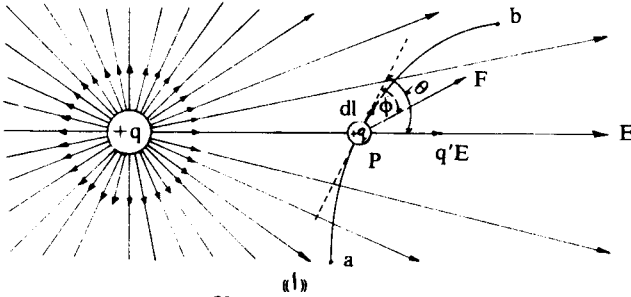
إذا وضعت شحنة موجبة قدرها $+q'$ في مجال كهربي شدته E ، كما في شكل (٢-١)، فإنها سوف تتحرك في اتجاه المجال تحت تأثير قوة كهربية قدرها $q'E$ ولكن إذا أثر على الشحنة بقوة أخرى خارجية F «غير كهربية» فإن الشحنة q' ستتحرك في اتجاه محصلة القوتين F و $q'E$. وحيث إن $q'E$ تختلف من نقطة لأخرى فإن الشحنة ستتخذ المنحنى ab مسارا لها (مثلا). فإذا كانت الزاوية بين $q'E$ والمماس لهذا المنحنى هي θ والزاوية بين F والمماس لها هي ϕ فإنه بتحليل هاتين القوتين في اتجاه عمودي وآخر مواز للمماس، كما هو موضح بشكل (٢-١)، يمكن الحصول على :

أ - المحصلة العمودية للقوى (resultant normal forces) :

$$\Sigma F_n = F \sin \phi + q'E \sin \theta \quad \dots \dots (٢-١)$$

ب - ومحصلة القوى المماسية (resultant tangential forces)

$$\Sigma F_t = F \cos \phi + q'E \cos \theta \quad \dots \dots (٢-٢)$$



شكل (٢-١): أ - q' وقعت في مجال شدته E ناتج عن الشحنة $+q$ فتأثرت بقوة قدرها $q'E$ ثم خضعت الشحنة q' لقوة أخرى خارجية F فتحركت الشحنة في اتجاه محصلة القوتين فالتحذت المسار ab .

ب - تحليل القوتين $q'E$ ، F إلى مركباتهما.

فالقوى العمودية على المسار عبارة عن قوى جذب مركزي تغير من اتجاه سرعة الشحنة ولكن لا تغير من مقدارها. بينما القوى التماسية تزيد في عجلة الشحنة على طول مسارها ويتحدد مقدارها من قانون نيوتن الثاني (Newton's second law) وبذلك تكون محصلة القوى التماسية المعطاة بالمعادلة (٢-١) بالصيغة التالية :

$$F \cos \phi + q'E \cos \theta = ma \quad \dots \dots (٢-٣)$$

حيث m كتلة الشحنة، أما العجلة a فتعطى بالعلاقة التالية :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dv}{dl} = v \frac{dv}{dl}$$

حيث v سرعة الشحنة و dl عنصر طولي على المسار.

وبالتعويض في المعادلة (٢-٣) يمكن الحصول على :

$$F \cos \phi + q'E \cos \theta = mv \frac{dv}{dl}$$

أو

$$F \cos \phi dl + q'E \cos \theta dl = mv dv$$

أو

$$F \cos \phi dl = mv dv - q'E \cos \theta dl \quad (٢-٤)$$

وتوضح أهمية الحدود الثلاثة في هذه المعادلة المناقشة التالية :

١ - يمثل الحد الموجود في الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة ($F \cos \phi dl$) الشغل الذي تبذله القوة الخارجية F لنقل الشحنة مسافة dl فإذا رمز لهذا الشغل بالرمز dW فإن :

$$dW = F \cos \phi dl \quad \dots \dots (٢-٥)$$

٢ - يمكن كتابة الحد الثاني ($mv dv$) على الصورة $d(\frac{1}{2} m v^2)$ وهو يمثل الزيادة في طاقة الحركة للشحنة $d(KE)$.

$$d(KE) = mv dv = d(\frac{1}{2} m v^2) \quad \dots \dots (٢-٦)$$

٣ - أما الحد الثالث $(-q'E \cos \theta dl)$ فهو الشغل المبذول ضد القوة $q'E$ التي تؤثر على الشحنة (الإشارة السالبة تعني أن الشغل يبذل ضد القوة الكهربية)، حيث إن الشغل الذي تبذله القوة $q'E$ يساوي $(+q'E \cos \theta dl)$ أي أن هذا الحد يمثل زيادة طاقة الوضع للشحنة $d(PE)$.

$$d(PE) = -q'E \cos \theta dl \dots\dots\dots (٢-٧)$$

لذلك فالمعادلة (٢-٤) تمثل العلاقة بين الشغل والطاقة لجسم مشحون يتحرك في مجال كهربائي والتي يمكن كتابتها كالتالي:

$$dW = d(KE) + d(PE)$$

وبمكاملة المعادلة (٢-٤) على طول المسار من النقطة a إلى النقطة b يُحصل على:

$$\int_a^b F \cos \phi dl = \int_{v_a}^v mvdv - \int_a^b q'E \cos \theta dl \dots\dots\dots (٢-٨)$$

ومن الواضح أن التكامل الأول يساوي الشغل الكلي W الذي تبذله القوة الخارجية F على الشحنة ويعرف بالتكامل الخطي (line integral) ومعناه أنه عند كل عنصر طولي dl على المسار يوجد حاصل ضرب $F \cos \theta$ و dl ثم تجمع حواصل الضرب لكل عناصر المسار بين النقطتين a و b . وتختلف معنى النهايتين a و b عن حدود التكامل المعتادة، إذ أنهما يدلان هنا فقط على نقطتين على المسار. ومن الواضح أن هذا التكامل لا يمكن حساب قيمته إلا إذا علم كيف تتغير القوة الخارجية مقدارا واتجاها.

$$\therefore W = \int_a^b F \cos \phi dl \dots\dots\dots (٢-٩)$$

أما التكامل الأول من اليمين في المعادلة (٢-٨) فمن الممكن حسابه بصرف النظر عن كيفية تغير القوى، وحدا هذا التكامل v_a و v_b هما سرعتا الشحنة عند النقطتين a و b أي أن:

$$\int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = KE_b - KE_a \dots (٢-١٠)$$

وهذا التكامل يمثل الزيادة الكلية في طاقة حركة الشحنة .

والتكامل الأخير تكامل خطي يمثل الشغل المبذول ضد القوة التي يؤثر بها المجال أو الزيادة الكلية في طاقة الوضع $PE_b - PE_a$

$$\therefore - \int_a^b q' E \cos \theta dl = PE_b - PE_a \dots (٢-١١)$$

وتمثل هذه النتيجة الفرق بين طاقتي الوضع للشحنة q' عند النقطتين a و b في مجال كهربائي استاتيكي . ولحساب طاقتي الوضع عند نقطة واحدة فقط فإنه يجب الاتفاق على نقطة الإسناد التي تكون عندها طاقة الوضع مساوية للصفر .

هذه النقطة غالباً تختار في ما لا نهاية ولذلك فإن طاقة وضع الشحنة تساوي صفراً إذا ما ابتعدت كثيراً عن الشحنات التي تنتج المجال . وإذا ما انتقلت الشحنة من ما لا نهاية إلى نقطة ما فإن الشغل المبذول ضد القوى المؤثرة عليها بواسطة المجال يساوي طاقة وضعها عند هذه النقطة ، فإذا فرض أن النقطة q' تقع في ما لا نهاية وفرض أن $PE_a = 0$ فإن المعادلة (٢-١١) تصبح :

$$PE = - \int_{\infty}^b q' E \cos \theta dl \dots (٢-١٢)$$

ولما كانت q' أي نقطة في المجال ، كان من الأنسب عدم كتابة حدود التكامل

$$PE = - \int q' E \cos \theta dl \dots (٢-١٣)$$

بحيث يفهم أن التكامل تكامل خطي على طول خط يصل من ما لا نهاية إلى النقطة تحت المناقشة .

وهكذا يمكننا تعريف طاقة الوضع عند نقطة ما في مجال كهربي بأنها الشغل الذي تبذله الشحنة q' ضد القوة الناتجة عندما تنتقل من ما لانهاية إلى هذه النقطة. ويرمز عادة لطاقة الوضع بالرمز U .

$$\therefore U = - \int q' E \cos \theta dl = -q' \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (٢-١٣)$$

(٢-٢) الجهد

Potential

عرف في البند السابق أنه إذا وضعت شحنة q' في مجال كهربي ناتج عن شحنة أخرى q ثم أزيحت الشحنة q' من a إلى b كما في شكل (٢-٢) في المجال نفسه فإن شغلا قدره $(-q'E \cos \theta dl)$ قد بذل ضد القوة $q'E$ وهو يمثل زيادة طاقة الوضع للشحنة $(PE_b - PE_a)$ وذلك حسب المعادلة (٢-١١).

وتعرف النسبة بين الزيادة في طاقة الوضع والشحنة q' التي تحركت من a إلى b بفرق الجهد (potential difference) (V_{ba}) بين هاتين النقطتين أي أن:

$$V_{ba} = V_b - V_a = \frac{PE_b - PE_a}{q'} = \frac{1}{q'} (U_b - U_a) \quad (٢-١٤)$$

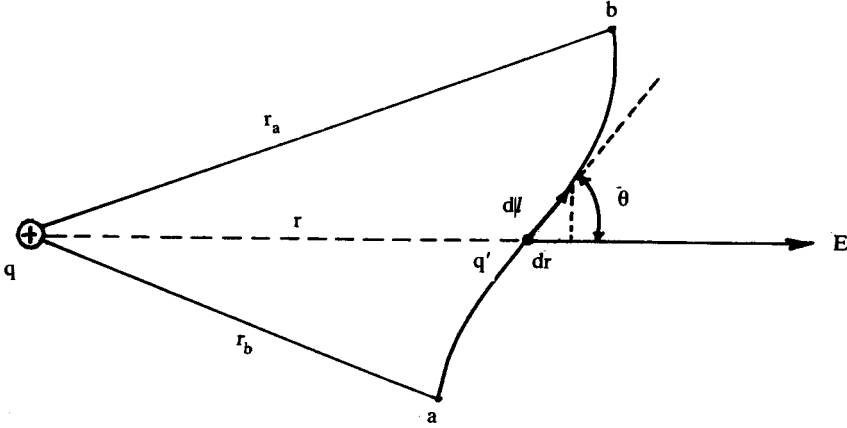
ولذلك يعرف فرق الجهد بين نقطتين بأنه الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة بين هاتين النقطتين ضد اتجاه المجال الكهربي.

وحسب المعادلة (٢-١٣) تصبح المعادلة (٢-١٤) كالتالي:

$$V_{ba} = - \int_a^b E \cos \theta dl = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \dots \quad (٢-١٥)$$

وإذا كانت r تمثل المسافة بين الشحنة q ونقطة ما على المسار بين النقطتين a و b ، فإن شدة المجال عند هذه النقطة تساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



شكل (٢-٢): مسار الشحنة q' في المجال الكهربائي E الناتج عن الشحنة q

فإذا كان قَطْع الشحنة q' مسافة قدرها dl يؤدي إلى زيادة المسافة r بمقدار dr فإنه يسهل من الشكل (٢-٢) إيجاد:

$$dr = dl \cos \theta$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-١٥) نجد أن:

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b}$$

$$\therefore V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right] \dots \dots \dots (٢-١٦)$$

حيث r_a ، r_b هما بعدا النقطتين a و b عن q .

إذا كانت النقطة a تقع في ما لا نهاية فإن الجهد عند b يعطى بالمعادلة:

$$V_b = \frac{U_b}{q'} \dots \dots \dots (٢-١٧)$$

ولما كانت الطاقة كمية غير متجهة فإن الجهد أيضا كمية غير متجهة، وله مقدار وليس له اتجاه وهو يختلف في هذا المعيار عن شدة المجال إذ أن الكمية الأخيرة متجهة. وبالتعويض عن طاقة الوضع من المعادلة (٢-١٣) في المعادلة (٢-١٧) يُحصل على:

$$\therefore V = - \int E \cos \theta \, dl = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \dots (٢-١٨)$$

وقد اصطلح على تعريف الجهد الكهربي عند نقطة ما في مجال معين كما يلي:
«الجهد الكهربي عند نقطة ما هو الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة من ما لا
نهاية إلى هذه النقطة ضد اتجاه المجال».

وبالتعويض عن $r_a = \infty$ في المعادلة (٢-١٦) يمكن الحصول على:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{أو} \quad V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_b} \quad \dots (٢-١٩)$$

ويعرف هذا الجهد بالجهد المطلق (absolute potential).

وإذا كان المجال عند نقطة معينة ناتج عن عدة شحنات $q_n, \dots, q_3, q_2, q_1$ وكانت المسافة
بين هذه الشحنات وهذه النقطة على التابع هي $r_n, \dots, r_3, r_2, r_1$ فإن الجهد عند هذه
النقطة يعطى بالمعادلة:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n} \right) \quad \text{أو} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} \quad \dots (٢-٢٠)$$

وإذا توزعت الشحنات على خط مستقيم أو سطح أو بداخل حجم فإن المعادلة
(٢-٢٠) تصبح:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad \dots (٢-٢١)$$

وإذا كانت λ و σ و ρ هي كثافة الشحنة الطولية والسطحية والحجمية على التوالي فإنه
حسب المعادلات (٢-٢١) و (١-٣٦) و (١-٣٧) و (١-٣٨) يكون لدينا:

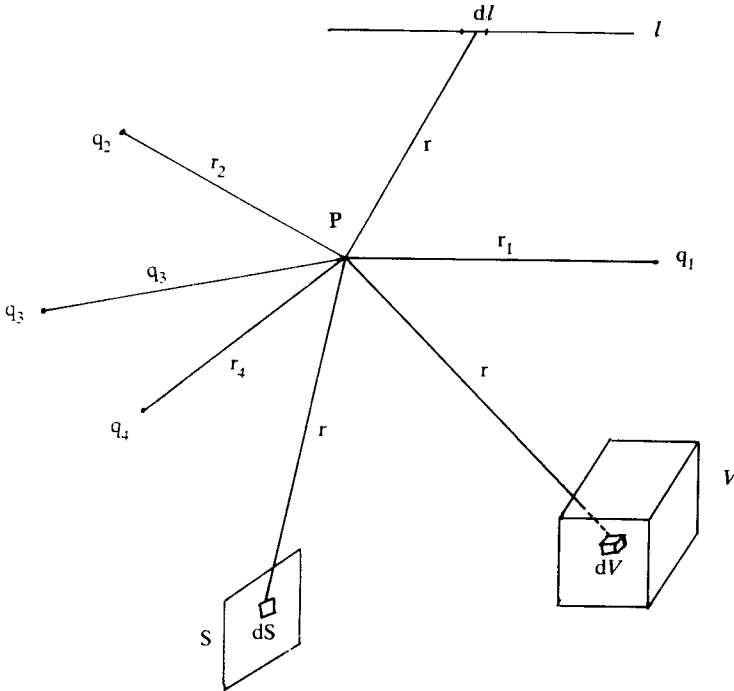
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} \quad \dots (٢-٢١ ب)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{odS}{r} \dots\dots (٢١-ج) \quad (٢١-٢)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{qdV}{r} \dots\dots (٢١-د) \quad (٢١-٣)$$

ولحساب الجهد الكهربى عند نقطة ما والنتائج عن نقطة مشحونة وخط مستقيم مشحون وسطح مشحون وحجم مشحون، الشكل (٢-٣)، تجمع الجهود جمعا جبريا لكل مصادر الجهد، وحسب المعادلات (٢-٢٠) و(٢-٢١) يكون:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + \int_l \frac{\lambda dl}{r} + \int_S \frac{odS}{r} + \int_V \frac{qdV}{r} \right\} \dots (٢-٢٢)$$



شكل (٢-٣): حساب الجهد عند النقطة P الناتج عن الشحنات النقطية وتوزيع الشحنات الطولية والسطحية والحجمية.

ويتضح من المعادلات (٢-١٦)، (٢-٢٠) و(٢-٢١) أن الجهد عند نقطة في مجال كهربائي استاتيكي يتوقف على مقدار الشحنات التي تنتج المجال وعلى أبعادها عن النقطة المختارة، ولكنه لا يتوقف على المسار الذي يتبع من ما لانهاية إلى النقطة أثناء حساب التكامل الخطي لشدة المجال، على ذلك فالمجال الكهربائي الاستاتيكي مجال محفوظ.

كما تدل المعادلة (٢-١٥) على التكامل الخطي لشدة المجال لمسار مغلق يساوي صفرا لأن طرفيه منطبق بعضهما على بعض ويتساوى جهد كل منها وعلى ذلك يساوي الفرق في الجهد بينهما الصفر.

أي أن:

$$V_{ba} = - \oint_a^b E \cos \theta \, dl = 0$$

أو

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \dots\dots\dots (٢-٢٣)$$

حيث تمثل C أي مسار مغلق.

وتتوقف وحدة الجهد على نظام الوحدات المستخدم. ففي نظام الـ (S.I.) تكون وحدة الجهد هي الفولت Volt حيث:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J} / 1 \text{ C}$$

أما في النظام الجاوسي فإن وحدة الجهد هي الاستات فولت stat Volt حيث:

$$1 \text{ stat V} = 1 \text{ erg} / 1 \text{ stat C}$$

والعلاقة بين الفولت (Volt) والاستات فولت (stat Volt) هي:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\text{stat V}} &= \frac{J/C}{\text{erg/stat C}} \\ &= \frac{J}{\text{erg}} \times \frac{\text{stat C}}{C} \end{aligned}$$

$$= 10^7 \times (3 \times 10^9)^{-1} = \frac{1}{300}$$

$$\therefore 1 \text{ stat V} = 300 \text{ V}$$

مثال (٢-١):

نقطتان شحنتاهما $+12 \times 10^{-9} \text{ C}$ و $-12 \times 10^{-9} \text{ C}$ تفصل بينهما مسافة

قدرها 10cm احسب:

١ - الجهد عند النقاط a, b, c كما في

الشكل.

ب - طاقة الوضع لشحنة موجبة

قدرها $-4 \times 10^{-9} \text{ C}$ إذا كانت

موضوعة عند النقاط a, b, c.

ج - فرق الجهد بين النقطتين (b, a)

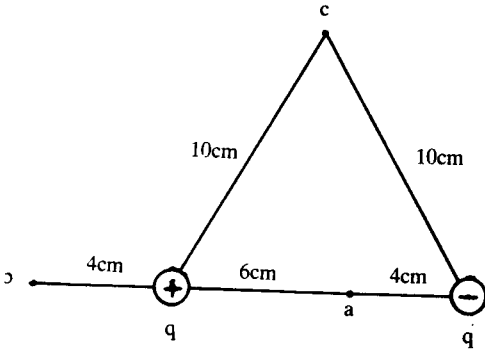
وكذلك بين (a و b) و (b و c) وما

مقدار الشغل اللازم لنقل نقطة

شحنتها $4 \times 10^{-9} \text{ C}$ وبدون زيادة

طاقة حركتها، من a إلى b ومن c

إلى a.



الحل

١ - حسب العلاقة (٢-٢٠) فإن الجهد الناتج عند النقطة (a) يعطى بالمعادلة:

$$V_a = 9 \times 10^9 \left[\frac{12 \times 10^{-9}}{0.06} - \frac{12 \times 10^{-9}}{0.04} \right] \approx -900 \text{ V}$$

وبالطريقة نفسها يكون الجهد عند النقطتين b, c:

$$V_b \approx 1930 \text{ V} \text{ and } V_c = 0$$

ب - طاقة الوضع لشحنة موضوعة في نقطة (a) تساوي:

$$PE = q V_a = (4 \times 10^{-9}) \times (-900) = -36 \times 10^{-7} \text{ J} = -36 \text{ ergs}$$

وفي نقطة (b) تساوي :

$$PE = q V_b = 4 \times 10^{-9} \times 1930 = 77 \times 10^{-7} \text{ J}$$

وفي نقطة (c) تساوي :

$$PE = q V_c = 4 \times 10^{-9} \times 0 = 0$$

جـ - نرمز لفرق الجهد بين النقطتين a و b بالرمز V_{ab} وللشغل اللازم لنقل الشحنة q من a إلى b بالرمز W_{ab} ومنه فإن :

$$V_{ab} = V_a - V_b = -900 - 1930 = -2830 \text{ V}$$

$$V_{ba} = V_b - V_a = 1930 - (-900) = 2830 \text{ V}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 1930 - 0 = 1930 \text{ V}$$

$$W_{ab} = q \times V_{ab} = (4 \times 10^{-9}) \times 2830 = 113 \times 10^{-7} \text{ J}$$

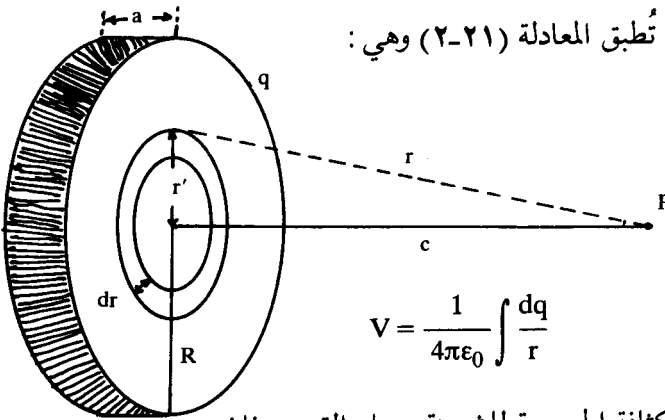
$$W_{ca} = q \times V_{ca} = (4 \times 10^{-9}) \times (-900) = -36 \times 10^{-7} \text{ J}$$

مثال (٢-٢)

احسب الجهد الناتج عن قرص دائري مشحون، بشحنة قدرها q ونصف قطره R وسمكه a عند نقطة تبعد مسافة قدرها c عن مركز القرص كما في الشكل المجاور.

الحل

حل هذه المسألة تُطبق المعادلة (٢-٢١) وهي :



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

فإذا فرض أن q هي الكثافة الحجمية للشحنة q على القرص فإن :

$$q = q\pi R^2a \quad \dots\dots\dots (A)$$

وإذا قُسم القرص الدائري إلى حلقات دائرية صغيرة وأخذت حلقة منها نصف قطرها r' وعرضها dr' وسمكها a فإن الجهد الناتج عنها عند النقطة p هو:

$$\therefore dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

حيث

$$r = (r'^2 + c^2)^{1/2}, \quad dq = 2\pi r' a dr' q$$

$$\therefore dV = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}} = \frac{qa}{2\epsilon_0} \frac{r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}}$$

وبذلك يكون الجهد الكلى الناتج عن القرص عند النقطة p هو:

$$V = \frac{qa}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + c^2)^{1/2}}$$

ولإجراء هذا التكامل يُفرض أن $u = r'^2 + c^2$ ومنه $du = 2r' dr'$ وبالتعويض عن q من المعادلة (A) يمكن الحصول على:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + c^2} - c \right]$$

ويلاحظ من هذه المعادلة ما يلي:

أ - إذا فرض أن q و R ثابتان فإن المعادلة تؤول إلى:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

عندما تكون $c = 0$ ، وتقل V كلما زادت قيمة c .

ب - وإذا فرض أن q و c ثابتان فإن قيمة V تنقص كلما زادت R وتقترب من الصفر إذا أصبحت R كبيرة جداً وذلك لأنه في هذه الحالة تقترب كثافة الشحنة من الصفر كما توضحه المعادلة (A).

(٣-٢) العلاقة بين المجال والجهد

The Relationship between Electric Field and Potential

إن التعبير العام لفرق الجهد بين نقطتين، المعادلة (٢-١٥)، هو:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cos \theta \, dl$$

فإذا كانت المسافة بين النقطتين متناهية الصغر فإن فرق الجهد يصبح dV وتصبح هذه المعادلة كالتالي:

$$dV = -E \cos \theta \, dl$$

$$\therefore E \cos \theta = \frac{-dV}{dl} \dots \dots \dots (٢-٢٤)$$

وتسمى النسبة $\frac{dV}{dl}$ بتدرج الجهد (potential gradient) وهي عبارة عن معدل تغير الجهد عند تغير المسافة في اتجاه dl . ولما كانت θ تساوي الزاوية بين شدة المجال E وعنصر المسافة dl ، فإن حاصل الضرب $E \cos \theta$ يساوي مركبة شدة المجال في الاتجاه dl ، فإذا كان الاتجاه dl هو اتجاه شدة المجال نفسه فإن الزاوية θ تساوي صفراً، ويجب تمامها $(\cos \theta)$ يساوي واحداً، ولذلك فإن شدة المجال الكهربائي عكس مدرج الجهد في اتجاه المجال.

$$\therefore E = - \frac{dV}{dl} \dots \dots \dots (٢-٢٥)$$

فإذا حددت النقطتان a و b بالإحداثيات الديكارتية (x, y, z) (cartesian coordinates) فإن شدة المجال E والتغير في الجهد dV والتغير في المسافة dl تعطى بالمعادلات التالية:

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z$$

$$d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

$$\therefore -dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

ومنه فإن :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \dots (٢-٢٦)$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ وحدة الأطوال على كل من X و Y و Z على التتابع .

ويمكن التعبير عن المعادلة (٢-٢٦) في التحليل الاتجاهى بالمعادلة :

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) (٢-٢٧)$$

وحسب المعادلة (٢-٢٣) الواردة في الملحق (٢) فإن :

$$\text{curl } \vec{E} = \text{curl grad } V = \nabla \times (\nabla V) = 0 \dots (٢-٢٨)$$

وتمثل هذه المعادلة الصيغة التفاضلية للمعادلة التكاملية (٢-٢٣) . وإذا كان

المسار المغلق C يحيط بسطح مغلق S فإنه حسب معادلة استوكس [٢-٤٥ ملحق ٢] يُحصل على :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{curl } \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_S \text{curl grad } V \cdot d\vec{S} = 0$$

وهي تمثل المعادلة (٢-٢٣) نفسها .

ولذلك فإن المعادلتين (٢-٢٣) و (٢-٢٨) تعبران عن حقيقة فيزيائية واحدة وهو

أن المجال الكهربى الاستاتيكي مجال محفوظ .

أما إذا حددت النقطتان a و b بالإحداثيات القطبية (r و θ) polar coordinate ،

كما سيرد في الملحق (٢) فإن مركبات المجال E_r و E_θ هي :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{و} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \dots (٢-٢٩)$$

وأما إذا حددت النقطتان بالإحداثيات الكروية (spherical coordinates (r, θ, ϕ)) كما سيرد في الملحق (٢)، فإن مركبات المجال الكهربائي في هذه الحالة تعطى بالمعادلات التالية :

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \dots \dots \dots (٢-٣٠)$$

$$E_\phi = \frac{-1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

وباستخدام المعادلات (٢-٢٦) و (٢-٣٠) يمكن حساب شدة المجال الكهربائي بطريقة أسهل من الطريقة العادية سابقة الذكر كما توضحه الأمثلة التالية .

(١-٣-٢) الجهد وشدة المجال لنقطة مشحونة

Potential and field for a point charge

حسب المعادلة (٢-١٩) فالجهد الكهربائي الناتج عن نقطة مشحونة q هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

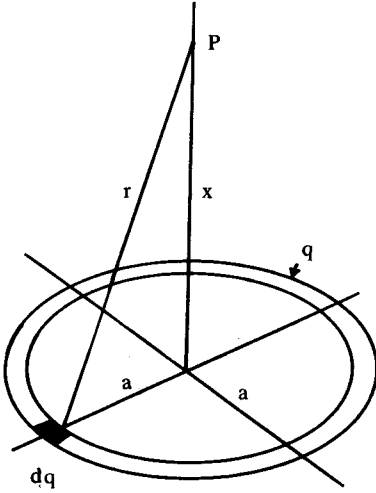
ومن التماثل ينتج أن مجال الشحنة مجال مركزي ومنه نجد أن :

$$E = - \frac{dV}{dl} = - \frac{dV}{dr} = - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

وهو التعبير نفسه المستنتج سابقا لشدة المجال الكهربائي الناتج عن نقطة مشحونة، المعادلة (١-١٤) .

(٢-٣-٢) الجهد وشدة المجال على محور حلقة مشحونة

Potential and field on the axis of a ring of charge



شكل (٢-٤): حلقة دائرية مشحونة
والمطلوب حساب E و V عند
النقطة p .

سبق حل هذه الحالة في الفصل
الأول، يلاحظ أنه على الرغم من أن
الشحنة موزعة بانتظام على طول الحلقة فإن
كل جزء من الشحنة يبعد بمقدار
 $(x^2 + a^2)^{1/2}$ عن النقطة P الواقعة على محور
الحلقة، شكل (٢-٤)، لهذا فإن الجهد V
عند النقطة P يساوي:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

ومن التناظر نجد أن المجال عند نقطة
محورية يتجه في اتجاه المحور، وعندئذ فإن
تدرج الجهد $\frac{dV}{dx}$ يساوي شدة المجال عند
هذه النقطة.

$$\therefore E = - \frac{dV}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right)$$

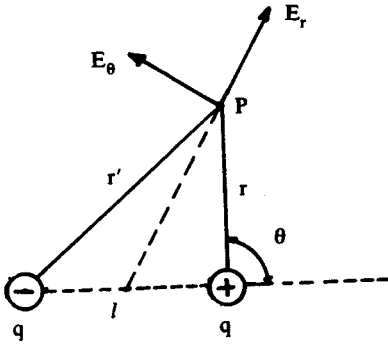
$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

وهي النتيجة نفسها التي حُصل عليها في الفصل الأول، معادلة (٣-٤١)، وإن
استنتجت بطريقة أكثر سهولة.

Potential and field of a dipole

(٣-٣-٢) الجهد والمجال لذى القطبين

يمثل الشكل (٢-٥) شحنتين متساويتين ومختلفتين في الإشارة إحداهما $+q$
والأخرى $-q$ والبعد بينهما l . فإذا كانت r هي المسافة بين $+q$ والنقطة P و r' هي



المسافة بين $-q$ و P فإن الجهد عند P ،
حسب المعادلة (٢-٢٠)، يعطى بالمعادلة :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (٢-٣١)$$

ويمكن الحصول من المثلث $(+q, -q, P)$ على:
شكل (٢-٥): حساب المجال لذي القطبين
عند النقطة P باستخدام
العلاقة بين المجال والجهد.

$$r'^2 = r^2 + l^2 + 2lr \cos \theta$$

$$r'^2 = r^2 \left(1 + \frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right)$$

$$\therefore r' = r \left(1 + \frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

وباستعمال نظرية ذات الحدين binomial theory ، ملحق (٦-٣) الفقرة (١) ، فإن :

$$\left(1 + \frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right) + \dots$$

ولما كانت $\frac{l}{r}$ صغيرة فإن $\frac{l^2}{r^2}$ يمكن إهمالها وحينئذ تصبح هذه المعادلة كالتالي :

$$\left(1 + \frac{2l}{r} \cos \theta + \frac{l^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{l}{r} \cos \theta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة يُحصل على :

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{r} \cos \theta \right) = \frac{1}{r} - \frac{l}{r^2} \cos \theta$$

وبالتعويض في علاقة الجهد (٢-٣١) نجد أن :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} + \frac{l}{r^2} \cos \theta \right)$$

$$\therefore V = \frac{q l \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \dots\dots\dots (٢-٣٢)$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية فإن عنصر المسافة dl في الاتجاه الإشعاعي هو dr بينما يكون عنصر المسافة dl في اتجاه عمودي على r هو $r d\theta$. وحسب المعادلة (٢-٢٩) فإن :

$$E_r = - \frac{dV}{dl} = - \frac{dV}{dr} , \quad E_\theta = - \frac{dV}{dl} = - \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta}$$

ويمكن الحصول من هاتين المعادلتين والمعادلة (٢-٣٢) على :

$$\therefore E_r = - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l \cos \theta}{r^2} \right)$$

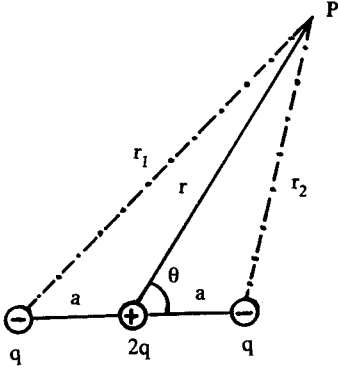
$$\therefore E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q l \cos \theta}{r^3} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^3} \dots (٢-٣٣)$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l \cos \theta}{r^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l \sin \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \sin \theta}{r^3} \quad (٢-٣٤)$$

وواضح أن المعادلتين (٢-٣٣) و(٢-٣٤) هما المعادلتان نفسهما اللتان حُصل عليهما في الفصل الأول وهما (١-٢٢) و(١-٢٣).

مثال (٢-٣)



يمثل الشكل المقابل شحنة قدرها $+2q$ في الوسط وشحنة سالبة قدرها $-q$ في جهة وشحنة أخرى سالبة أيضا قدرها $-q$ وتقع في الجهة الأخرى. وعلى البعد a نفسه. (يسمى مثل هذا النظام رباعي الأقطاب quadrupole) والمطلوب حساب الجهد عند النقطة P.

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} \right) + 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \quad (A)$$

$$\therefore r_1 = r \left[1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

$$r_2 = r \left[1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

وحيث إن $r \gg a$ فإنه باستعمال نظرية ذات الحدين يُحصل على قيمة $\frac{1}{r_1}$ و $\frac{1}{r_2}$ كالتالي:

$$\left[1 \pm \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{-1/2} = \left[1 \mp \frac{a}{r} \cos \theta + \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \frac{a^2}{r^2} + \dots \right]$$

وبإهمال الحد r^{-4} والتعويض في معادلة الجهد (A) يُحصل على:

$$V = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \frac{a^2}{r^2} \right. \\ \left. + 1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \frac{a^2}{r^2} \right]$$

$$\therefore V = -\frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad \dots \quad (٢-٣٥)$$

وهو المطلوب.

وحيث إن العزم الكهربي لذى القطبين يساوي :

$$P = qa$$

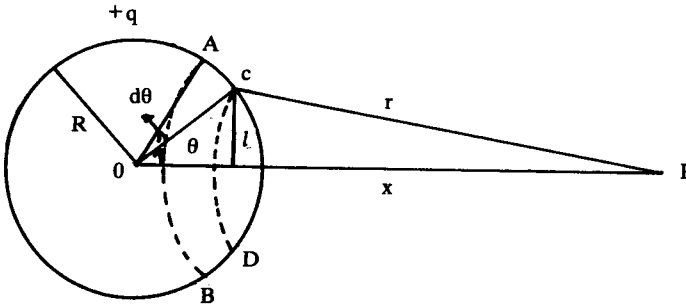
$$V = -\frac{Pa}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \dots\dots (٢-٣٦)$$

(٢-٤) الجهود الناتج عن موصل كروي مشحون

Potential Due to a Charged Spherical Conductor

إذا شحنت كرة بشحنة قدرها $+q$ ونصف قطرها R ، شكل (٢-٦) ، فإن الكثافة السطحية للشحنة σ هي :

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \dots\dots\dots (٢-٣٧)$$



شكل (٢-٦) : كرة نصف قطرها R مشحونة بشحنة قدرها $+q$ والمطلوب حساب الجهد عند النقطة P .

ولإيجاد قيمة الجهد عند النقطة P نأخذ حلقة دائرية $ABCD$ من الكرة ، شكل (٢-٦) . فيكون الجهد الناتج عن هذه الحلقة عند النقطة P .

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

حيث dq شحنة الحلقة . وإذا كانت مساحة سطح الشريحة يساوي $AC \times (2\pi l)$ كما في الشكل (٢-٦)، فإن :

$$dq = \sigma (2\pi l) AC = \sigma (2\pi R \sin \theta) R d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2}{r} \sin \theta d\theta \dots\dots (٢-٣٨)$$

ومن الرسم يتضح أن :

$$r^2 = R^2 + X^2 - 2RX \cos \theta$$

وحيث إن r, θ متغيران فبتفاضل هذا المقدار يُحصل على :

$$2rdr = 2RX \sin \theta d\theta$$

$$\therefore \sin \theta d\theta = \frac{rdr}{RX}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٣٨) يُحصل على :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma Rdr}{X}$$

وبذلك يكون الجهد الكلي الناتج عن الكرة المشحونة عند النقطة P هو :

$$V = \int_{X-R}^{X+R} \frac{2\pi\sigma Rdr}{4\pi\epsilon_0 X} = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 X} \left[r \right]_{X-R}^{X+R}$$

$$\therefore V = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 X} 2R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{X} \dots\dots (٢-٣٩)$$

ومن المعادلة (٢-٣٧) والمعادلة (٢-٣٩) يُحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{X} \dots\dots\dots (٢-٤٠)$$

أي أن الجهد عند أي نقطة خارج الكرة المشحونة يساوي قيمته كما لو كانت هذه الشحنة مركزة عند مركز الكرة وبذلك فالمعادلة (٢-٤٠) تمثل الجهد كما لو كان ناتجا عن نقطة مشحونة ويكون المجال الناتج عن هذه الكرة يساوي :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{X^2}$$

وإذا كانت $X = R$ فإن الجهد على سطح الكرة هو:

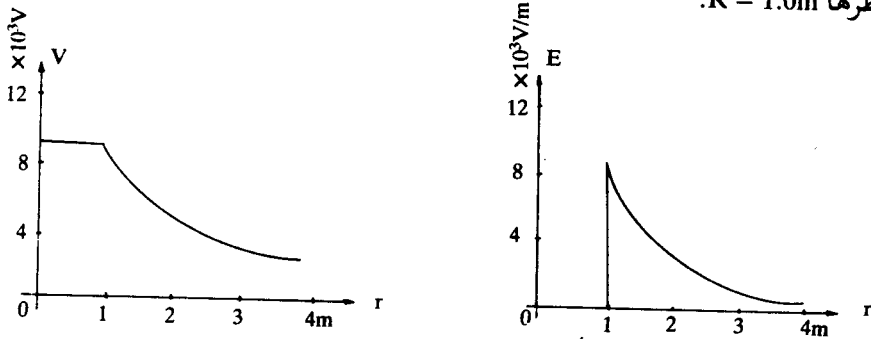
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

أما بالنسبة للجهد داخل الموصل فإن حدود التكامل للمعادلة السابقة يكون $(R+X)$ ، $(R-X)$ ومنه فإن :

$$V = \int_{R-X}^{R+X} \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 X} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \dots\dots (٢-٤١)$$

أي أن الجهد عند جميع النقاط داخل السطح ثابت ويساوي الجهد على السطح ومن ذلك يتضح أن المجال داخل الكرة يساوي صفرا.

ويمكن تمثيل سلوك المجال والجهد داخل وخارج الكرة المشحونة بيانيا، حيث يمثل ذلك الشكل (٢-٧) لكرة مشحونة بشحنة موجبة قدرها $1.0 \times 10^{-6} C$ ونصف قطرها $R = 1.0m$.



شكل (٢-٧): العلاقة بين r ، بعد النقطة P عن الكرة التي نصف قطرها R ، والمجال الكهربائي E عند هذه النقطة وكذلك الجهد الكهربائي للنقطة نفسها. علما بأن شحنة الكرة 1.0×10^{-6} كولوم و R تساوي 1.0 مترا واحدا.

(٢-٥) تقاسم الشحنات بين الموصلات

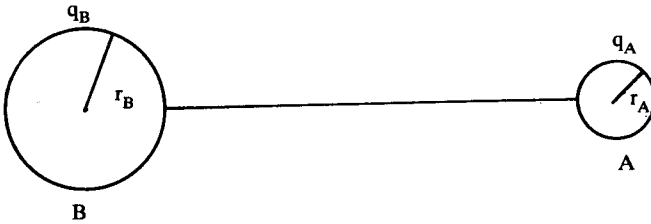
Sharing of Charge by Conductors

عندما يتصل موصل مشحون اتصالا كهربيا بموصل آخر غير مشحون فإن شحنة الموصل الأول تتوزع على الموصلين، ويحدث هذا التوزيع نتيجة لوجود قوى التنافر بين مركبات الشحنة الأصلية، ويتم التوزيع بحيث تصبح جميع نقاط كل من الموصلين واقعة تحت الجهد نفسه.

وتتضح كيفية توزيع الشحنات بين موصلين متلامسين كالتالي:
إذا وصل موصل كروي A ، نصف قطره r_A ويحمل شحنة قدرها q ، بموصل كروي آخر B ، نصف قطره r_B حيث $r_B > r_A$ كما في الشكل (٢-٨) ، بواسطة سلك رفيع ، فإن الجهد سوف يتساوي بالنسبة للكرتين ومنه فإنه :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{r_B}$$

$$\therefore \frac{q_A}{q_B} = \frac{r_A}{r_B} \dots\dots\dots (٢-٤٢)$$



شكل (٢-٨) : تقاسم الشحنات بين كرتين نصف قطر الأولى r_A والثانية r_B حيث $r_B > r_A$

حيث q_A و q_B شحنتا الكرتين بعد اتصاليهما .
وتكون كثافة الشحنة السطحية σ ، أي الشحنة لوحدة المساحة من سطح الكرة ، هي :

$$\sigma_A = \frac{q_A}{4\pi r_A^2} \quad \& \quad \sigma_B = \frac{q_B}{4\pi r_B^2}$$

$$\therefore \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{q_A r_B^2}{q_B r_A^2} \quad \dots\dots\dots (٢-٤٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٤٢) يُحصل على :

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{r_B}{r_A} \quad \dots\dots\dots (٢-٤٤)$$

أي أن كثافة الشحنة السطحية تتناسب عكسياً مع نصف القطر بمعنى أن σ تكون كبيرة عند الأسطح ذات نصف القطر الصغير (أي تحدبها كبير). وحيث إن شدة المجال بالقرب من أي موصل مشحون هي $E = \sigma/\epsilon_0$ فإن كثافة الشحنة وشدة المجال تكون أكبر ما يمكن عند الأجزاء المدببة وأقل ما يمكن عند الأجزاء المستوية للموصل.

وتستخدم خاصية الأطراف المدببة في مانعة الصواعق، ذلك لأنه لو شحن جسم له طرف مدبب فإن شدة المجال الكهربي الكبيرة بالقرب من الطرف تصبح قادرة على تأيين الهواء المجاور فتتجذب من الهواء إلى الجسم الأيونات ذات الشحنة المخالفة فيفقد الجسم شحنته وتنجذب الصواعق.

مثال (٢-٤)

في شكل (٢-٨) إذا كان نصف قطر الكرة A يساوي 1cm وشحنت بشحنة قدرها $10 \times 10^{-9}C$ ونصف قطر الكرة B يساوي 10cm وغير مشحونة. احسب شحنة كل منهما وجهدهما المشترك وكثافة الشحنة على كل منهما وذلك عند اتصاليهما بسلك رفيع علماً بأن المسافة بين مركزي الكرتين يساوي 50cm.

الحل

عندما توصل الكرتان بسلك رفيع نجد أن شحنة الكرة A يجب أن تتوزع بين الكرتين بحيث يصبح جهدهما متساويين فإذا كانت q_A, q_B شحنتي الكرتين بعد توصيلهما فإن الجهد عند مركز الكرة B (حسب المعادلة ٢-٢٠) يساوي

$$V_B = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5} \right)$$

وبالمثل فإن الجهد عند مركز الكرة A يساوي :

$$V_A = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5} \right)$$

وحيث إن $V_A = V_B$ نظرا لاتصال الكرتين بسلك توصيل فإن :

$$\frac{q_B}{0.1} + \frac{q_A}{0.5} = \frac{q_A}{0.01} + \frac{q_B}{0.5}$$

ولما كان مجموع الشحنتين يساوي الشحنة الأصلية :

$$q_A + q_B = 10 \times 10^{-9} \text{ C}$$

فإن :

$$q_B = 9.25 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_A = 0.75 \times 10^{-9} \text{ C}$$

وبالتعويض عن q_B , q_A يكون :

$$V = 845 \text{ V}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٤٣) يُحصل على كثافة الشحنة :

$$\sigma_B = \frac{9.25 \times 10^{-9}}{4\pi (0.1)^2} = 7.35 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_A = \frac{0.75 \times 10^{-9}}{4\pi (0.01)^2} = 59.7 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

مثال (٢-٥)

في المثال السابق إذا فُرض أن الكرة A عُلقت في مركز الكرة الكبيرة كما في شكل

(٢-٩) فإذا شحنت A بشحنة قدرها q_A و B بشحنة قدرها q_B فاحسب فرق الجهد بينهما في هذه الحالة .

الحل

جهد الكرة B يكون ناتجا عن شحنة
B نفسها q_B زائدا المجال الناتج عن الشحنة
 q_A

$$\therefore V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_B}{r_B} + \frac{q_A}{r_B} \right)$$

أما جهد الكرة A فيساوي :

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B} \right)$$

ويكون فرق الجهد بينهما :

$$V_A - V_B = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

شكل (٢-٩) : تقاسم الشحنات بين كرتين
نصف قطر الأولى r_A والثانية
 r_B حيث $r_B > r_A$ وتقع r_A داخل
الكرة r_B .

وبالتعويض عن r_A و r_B يُحصل على :

$$V_A - V_B = (9 \times 10^9) \times 90 q_A$$

فإذا فرض أن الشحنة q_A موجبة فإن جهد الكرة الداخلية A دائما أكبر من جهد الكرة
الخارجية B ، فإذا اتصلت الكرتان بسلك رفيع فإن الشحنة تسري من الكرة A إلى
الكرة B حتى يصبح فرق الجهد $(V_A - V_B = 0)$ وهذا لا يحدث إلا إذا كانت q_A تساوي
الصفر حسب المعادلة (٢-٤٥) . ومعنى ذلك أنه عند التوصيل سوف تنتقل الشحنة
 q_A كلها إلى الكرة الكبرى B وقد استغلت هذه الحقيقة في تصميم مولد فان دي جراف
(Van de Graaff generator) . وهذه الحقيقة تنطبق بصفة عامة على أي موصل مهما كان
شكله عندما يوضع داخل أي موصل أجوف حيث سيعطي الموصل الداخلي شحنته إلى
الموصل الخارجي عند الاتصال .

(٦-٢) السطوح متساوية الجهد

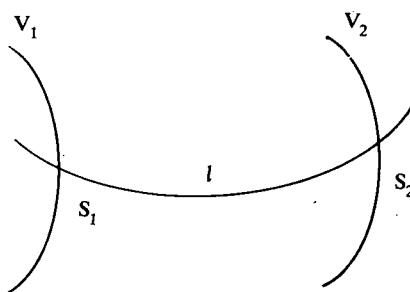
Equipotential Surface

يمكن تمثيل المجال الكهربي بمجموعة خطوط وهمية تنطبق على جهة المجال وتسمى بخطوط القوى الكهرية [بند (٧-١) الفصل الأول] كذلك يمكن تمثيل الجهد برسم سطوح تدعى سطوح تساوي الجهد وهذه السطوح يجب أن تحقق العلاقة:

$$V = f(X, Y, Z) = \text{constant}$$

وهذه السطوح تكون عمودية على خطوط القوى وذلك لأن السطح المتساوي الجهد في جميع نقطة معناه أن الشحنة الموجودة على هذا السطح لن تتحرك لعدم وجود فرق في الجهد بين أي نقطتين على السطح، ولو لم يكن ذلك صحيحا لكان لشدة المجال مركبة تمس هذا السطح مما يجعل الجسم المشحون يبذل شغلا ضد القوى الكهرية كي يتحرك على هذا السطح.

ولا يمكن لسطحين من سطوح تساوي الجهد أن يتقاطعا لأن نقطة التقاطع لا يمكن أن يكون لها أكثر من اتجاه. والبعد بين سطحين على امتداد خط معين من خطوط القوى الكهرية يتناسب تناسباً عكسياً مع متوسط قيمة المجال على هذا الخط بين السطحين. ولذلك فإنه عندما تكون سطوح تساوي الجهد متقاربة فهذا يدل على أن المجال شديد في هذه المنطقة وبالعكس عندما تكون متباعدة.

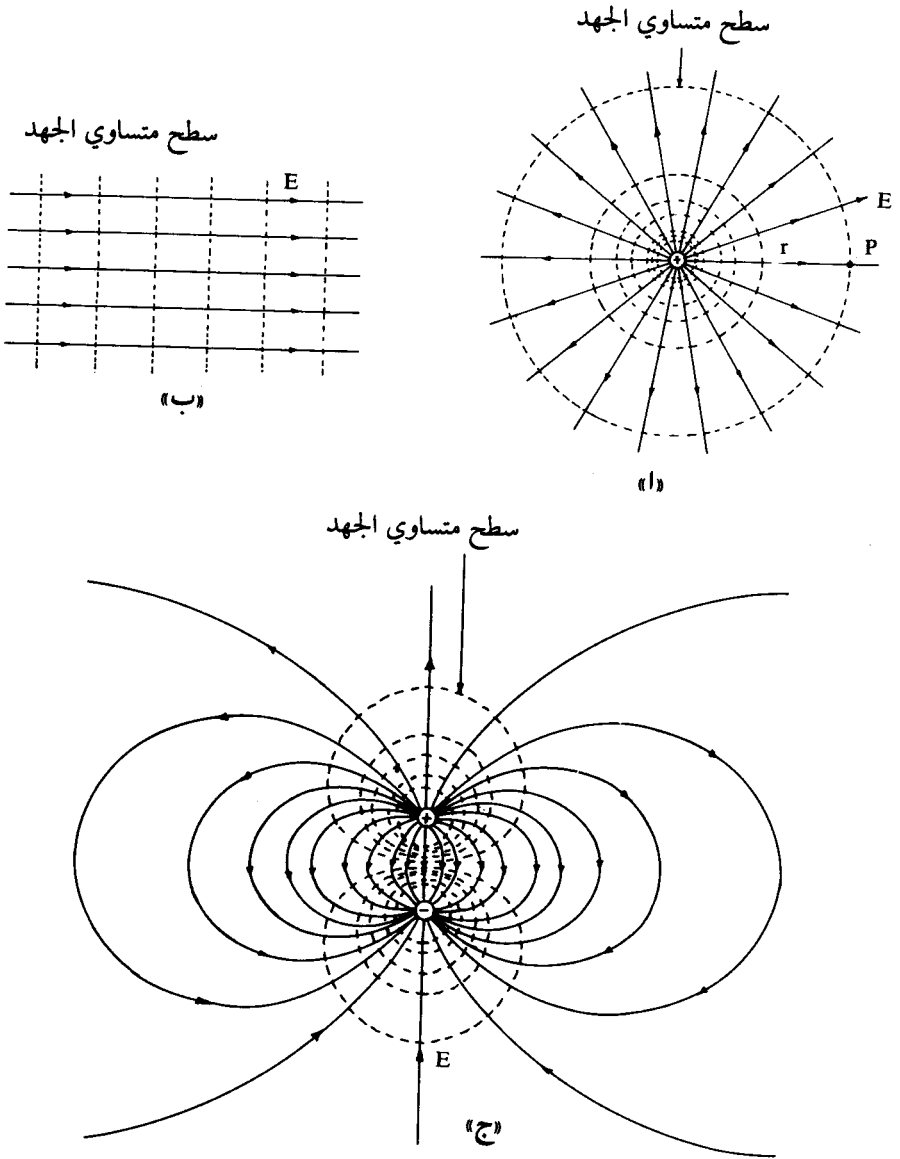


لتكن S إحداثي السطوح على طول خط القوة l [شكل (٢-١٠)] بين سطحين من سطوح تساوي الجهد V_1 و V_2 . وبما أن المجال منطبق على هذا الخط في كل نقطة فيكون فرق الجهد بين النقطتين S_1 ، S_2 حسب المعادلة (٢-١٥) هو:

$$V_2 - V_1 = - \int_{S_1}^{S_2} E \cdot dl \quad (٢-٤٦)$$

شكل (٢-١٠): سطوحان من سطوح تساوي الجهد الأول V_1 والثاني V_2 .

ولكن متوسط قيمة المجال E تعرف بالمعادلة:



شكل (٢-١١): سطوح تساوي الجهد.

«أ» حول نقطة كروية مشحونة بشحنة موجبة

«ب» مجال كهربائي منتظم

«ج» لذتي القطبين

سطوح تساوي الجهد

$$\bar{E} = \frac{1}{S_2 - S_1} \int_{S_1}^{S_2} E \cdot dl \quad \dots\dots\dots (٢-٤٧)$$

ومن المعادلتين (٢-٤٦) و (٢-٤٧) نجد أن :

$$\bar{E} (S_1 - S_2) = V_2 - V_1$$

$$\therefore S_1 - S_2 = \frac{V_2 - V_1}{\bar{E}} \quad \dots\dots\dots (٢-٤٨)$$

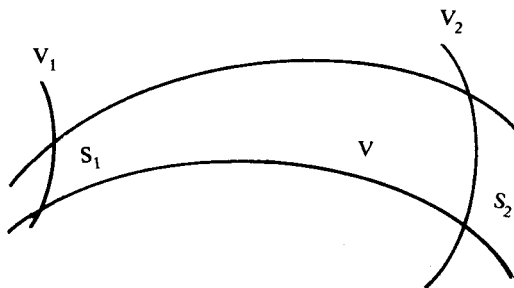
ويوضح شكل (٢-١١ أ) سطوح تساوي الجهد حول نقطة مشحونة كروية الشكل . وأما سطوح تساوي الجهد لمجال كهربي منتظم فتكون سطوح مستوية ومتوازية كما في شكل (٢-١١ ب). وأما سطوح تساوي الجهد لذي القطبين فتظهر بالشكل (٢-١١ ج). وفي جميع الأشكال تظهر خطوط القوى متعامدة على السطوح المتساوية الجهد مع ملاحظة أن هذه السطوح مرسومة بخطوط منقطة، وأن السطح المتساوي الجهد يختلف عن السابق له أو التالي له في الجهد كما أن سطوح تساوي الجهد تتزاحم حيث تتزاحم خطوط القوى في المجال القوي وتتباعدها حيث تتباعدها خطوط القوى في المجال الضعيف.

ويمكن تعريف أنبوب القوة (tubes of force) بأنه المنطقة المحصورة من الجوانب بسطح يحتوي على خطوط القوة ولكنه لا يقطعها. فإذا قطع هذا الأنبوب سطحين من سطوح تساوي الجهد V_1, V_2 بمساحتين S_1, S_2 شكل (٢-١٢)، كان حجم الأنبوب V خاليا من أي شحنة كهربية فإن التدفق يكون ناتجا عن التدفق الواقع فقط على السطحين S_2, S_1 .

ليكن E_1 متوسط قيمة المجال على السطح S_1 ، E_2 متوسط هذه القيمة على S_2 فيكون التدفق خلال S_1 هو $E_1 S_1$ لأن E_1 عمودي على السطح في جميع نقاطه وهذا التدفق يجب أن يساوي قيمة التدفق من خلال السطح S_2 ويكون :

$$E_1 S_1 = E_2 S_2 \quad \dots\dots\dots (٢-٤٩)$$

$$\therefore \frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_2} \dots\dots\dots (٢-٥٠)$$



شكل (٢-١٢): سطحان من سطوح تساوي الجهد يقطعها أنبوب القوة بمساحتين S_1 ، S_2 .

أي أن قيمة المجال المتوسطة تتناسب عكسيا مع سطح المساحة التي تقطعها أنبوب القوة على سطوح تساوي الجهد. فحيث يضيق الأنبوب تزداد شدة المجال وحيث يتسع الأنبوب يضعف المجال.

فإذا كانت لدينا شحنة نقطية موجبة q فإن الجهد عند النقطة p التي تبعد مسافة r عن هذه الشحنة، كما في الشكل (١١ - ٢)، هو:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

وتكون بذلك معادلة السطح المتساوي الجهد المار بالنقطة p هي :

$$r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V} = \text{constant}$$

وهذه هي معادلة كرة نصف قطرها r ومركزها الشحنة النقطية q . أي أن السطوح المتساوية الجهد هي سطوح كروية متحدة المركز وخطوط المجال الكهربائي هي خطوط نصف قطرية وعمودية على السطوح المتساوية الجهد.

(٧-٢) معادلات بواسون ولاپلاس

Poisson's and Laplace's Equations

لقد وردت طرق مختلفة لحل المسائل المتعلقة بالكهرية الساكنة . حيث أمكن حساب المجال الكهربي بتراكب superposing المجالات لنقط مشحونة [البند (١-٤)] أو باستعمال قانون جاوس [البند (١-٨)] أو حساب الجهد الكهربي ثم حساب التفاضل الجزئي له بالنسبة لـ z, y, x [البند (١-١١)] وكل هذه الطرق امتداد مباشر لقانون كولوم مقترنة بالقوى المحفوظة conservative والجهد الكهربي والفيض الكهربي .

وهناك طرق أخرى مهمة تبحث في حلول مسائل الكهرية الساكنة منها ما يسمى بمعادلة بواسون Poisson's equation وهي تربط بين كثافة الشحنة عند أي نقطة في منطقة تحتوي على شحنات كهربية ومع الجهد الكهربي عند تلك النقطة .

ويمكن تحقيق ذلك بربط المعادلة (١-٦٠) والمعادلة (٢-٢٦) والمعادلة (٢-٢١) الواردة بالملحق رقم ٢ حيث يكون لدينا:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وتكتب على الشكل :

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (٢-٥١ أ)$$

وهذه هي معادلة بواسون (Poisson's equation) في ثلاثة أبعاد . وإذا كانت الشحنة تساوي صفرا فإن $\rho = 0$ ومنه يُحصل على :

$$\nabla^2 V = 0 \dots \dots \dots (٢-٥١ ب)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لاپلاس (Laplace's equation).

ويمكن كتابة المقدار $\nabla^2 V$ باستخدام الإحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) وذلك حسب المعادلة (٢-٣٧) الواردة في البند (٢-٦) من الملحق رقم ٢ حيث يكون لدينا :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (٢-١٥٢)$$

أما بالنسبة للإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) فإن قيمة $\nabla^2 V$ هي :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

..... (٢-١٥٢ ب)

وذلك حسب المعادلة (٢-٤٣) الواردة في البند (٧-٢) من الملحق ٢ .

مثال (٢-٦)

إذا كان هناك شحنة كهربائية موزعة بكثافة قدرها $q(r)$ ومتناظرة بشكل كروي وكان الجهد دالة لـ r ، $V(r)$ ، فالمطلوب البرهان على أن معادلة بواسون تأخذ الشكل :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = - \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

استخدم العلاقة $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

الحل

إن معادلة بواسون في الإحداثيات الديكارتية هي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{q}{\epsilon_0} \quad \dots \dots \dots (A)$$

وذلك حسب المعادلة (٢-١٥١) .

لنحسب الآن كلا من المشتقات $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ بدلالة r .

بما أن التابع $V(r)$ متناظر بشكل كروي فقيمه تابعة لـ r ولا تتغير قيمته مع الزوايا ولذلك يمكن اعتبار $\frac{\partial V}{\partial r}$ هو المشتق الجزئي $\frac{dV}{dr}$ في هذه المسألة .

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\therefore r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore 2r \partial r = 2x \partial x$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

ويكون المشتق الثاني :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\therefore x = (r^2 - y^2 - z^2)^{1/2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left[\frac{d^2 V}{dr^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{dV}{dr} \frac{1}{x} - \frac{dV}{dr} \frac{x}{r^2} \right] \cdot \frac{x}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2 V}{dr^2} \cdot x^2 + r \frac{dV}{dr} - \frac{x^2}{r} \frac{dV}{dr} \right]$$

وبالمثل :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2 V}{dr^2} \cdot y^2 + r \frac{dV}{dr} - \frac{y^2}{r} \frac{dV}{dr} \right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2 V}{dr^2} \cdot z^2 + r \frac{dV}{dr} - \frac{z^2}{r} \frac{dV}{dr} \right]$$

وبالجمع يمكن الحصول على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2 V}{dr^2} (x^2 + y^2 + z^2) + 3r \frac{dV}{dr} - \frac{(z^2 + y^2 + z^2)}{r} \frac{dV}{dr} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + 3r \frac{dV}{dr} - r \frac{dV}{dr} \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + 2r \frac{dV}{dr} \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)
\end{aligned}$$

وبالرجوع إلى المعادلة (A) يكون :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وهو المطلوب إثباته .

مثال (٧-٢)

أثبت أن مجال الجهد $V = 20 r^2 \cos 2\theta$ يحقق معادلة لابلاس .

الحل

واضح من هذه المعادلة أن الإحداثيات المستعملة هي الإحداثيات الأسطوانية ولذلك فإنه لحل هذا المثال تستعمل المعادلة (٢-٥٢) وهي :

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\therefore \Delta^2 V = 80 \cos 2\theta - 80 \cos 2\theta + 0 = 0$$

$$\therefore \Delta^2 V = 0$$

وهذا تحقيق لمعادلة لابلاس .

(٢-٨) طاقة الوضع والمجال الكهربى

Potential Energy and Electric Field

إذا كانت r تمثل المسافة بين الشحنتين q و q' فإن الجهد عند النقطة q' تحدده المعادلة (٢-١٩)، فإذا عوض في المعادلة (٢-١٧) يُحصل على :

$$U = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r} \dots\dots\dots (٢-١٥٣)$$

هذه الطاقة تمثل الشغل المبذول لنقل q' من اللانهاية إلى مكانها الذي يبعد r عن q عند ثبوت q . وتمثل هذه المعادلة أيضا الشغل اللازم لنقل q من اللانهاية إلى مكانها الذي يبعد r عن q' عند ثبوت q' . ولذلك يقال في هذه الحالة إن طاقة الوضع تبادلية لنظام يحتوي على شحنتين .

أما إذا كان عدد الشحنات مقداره N وكانت المسافة بين شحنة وأخرى معلومة ومُميّز بين نوعين من الشحنات مثل q_i و q_j ، حيث i و j تأخذ الأعداد $1, 2, 3, \dots, N$ ، فإن الطاقة بين كل زوج منها تحدده المعادلة التالية، وذلك حسب المعادلة (٢-١٥٣).

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \dots\dots\dots (٢-١٥٣ \text{ ب})$$

وبذلك فإن طاقة الوضع الكلية هي :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (٢-١٥٤)$$

وتستبعد من هذا المجموع الحالة $i = j$.

وسبب كتابة النصف هو أن الطاقة حُسبت مرتين لكل زوج، فمثلا U_{34} تساوي

$$U_{43} \text{ لأن } r_{34} = r_{43} \text{ أي أن : } U_{34} + U_{43} = 2U_{34}$$

ويمكن كتابة المعادلة (٢-١٥٤) بالصورة التالية :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) \quad (٢-٥٤ ب)$$

وحسب المعادلة (٢-٢٠) فإن هذه المعادلة تصبح كالتالى:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad \dots\dots\dots (٢-٥٥)$$

وإذا كانت الشحنة موزعة بصورة مستمرة فإن المجموع يغير إلى تكامل وحسب المعادلات (١-٣٦)، (١-٣٧) و (١-٣٨) فإن طاقة الوضع لتوزيع الشحنة الطولية أو السطحية أو الحجمية تحددها المعادلات التالية:

$$U = \frac{1}{2} \int \lambda(r) V dl \quad \dots\dots\dots (٢-٥٦ أ)$$

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma(r) V dS \quad \dots\dots\dots (٢-٥٦ ب)$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(r) V dV \quad \dots\dots\dots (٢-٥٦ ج)$$

ومن المعادلتين (١-٦١) و (٢-٥٦ ج) يُحصل على:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int V(\nabla \cdot E) dV \quad \dots\dots\dots (٢-٥٧ أ)$$

وحسب المعادلتين (٢-٢٦) الواردة بالملحق ٢ و (٢-٢٦) فإن:

$$V(\nabla \cdot E) = -E \cdot (\nabla V) + \nabla \cdot (VE) = E^2 + \nabla \cdot (VE)$$

وبالتعويض في المعادلة (٢-٥٧ أ) يُحصل على:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (VE) dV \quad (٢-٥٧ ب)$$

وباستخدام المعادلة (٢-٤٦) الواردة بالملحق رقم ٢ يمكن كتابة الحد الثانى من

هذه المعادلة كتكامل سطحي بحيث تأخذ المعادلة الشكل التالى:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S (VE) dS$$

حيث S السطح المحيط بالمنطقة المعنية بالدراسة. فإذا احتوت كرة جميع الشحنات وكان نصف قطرها r فإنه حسب ما درس في البنود السابقة يكون

$$dS \propto R^2, V \propto R^{-1}, E \propto R^{-2}$$

ولذلك فالتكامل السطحي للمعادلة يتناسب مع $1/R$ الذي ينتهي عندما تقترب من اللانهاية.

$$\therefore \oint_S (VE) dS \propto \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

وتصبح بذلك معادلة طاقة الوضع هي :

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 dV \dots\dots\dots (٢-٥٨)$$

وهذه المعادلة تربط بين طاقة الوضع والمجال الكهربائي E . وهذا التكامل مأخوذ على كامل الفراغ (whole of space).

أما كثافة الطاقة energy density (طاقة وحدة الحجم) فتعطى بالمعادلة :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \dots\dots\dots (٢-٥٩)$$

$$\therefore U = \int_{\text{all space}} u dV \dots\dots\dots (٢-٦٠)$$

مثال (٢-٨)

احسب طاقة الوضع للكرة المشحونة الواردة في البند (٤-٢).

الحل

وجد بالبند (٤-٢) أن :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{at } r < R$$

$$E = 0 \quad \text{at } r < a$$

حيث R نصف قطرة الكرة و r بعد النقطة، المراد حساب المجال عندها، عن الكرة. وبالتعويض في المعادلة (٢-٥٩) يُحصل على كثافة الطاقة.

$$u = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \quad \text{at } r \geq R$$

$$u = 0 \quad \text{at } r < R$$

وهذا يعني أنه لا وجود للطاقة داخل حجم الكرة وأن الطاقة موزعة خارجها.

وباستخدام المعادلة (٢-٣٩) الواردة بالمحق رقم ٢ والتعويض في المعادلة (٢-٦٠) يُحصل على:

$$U = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

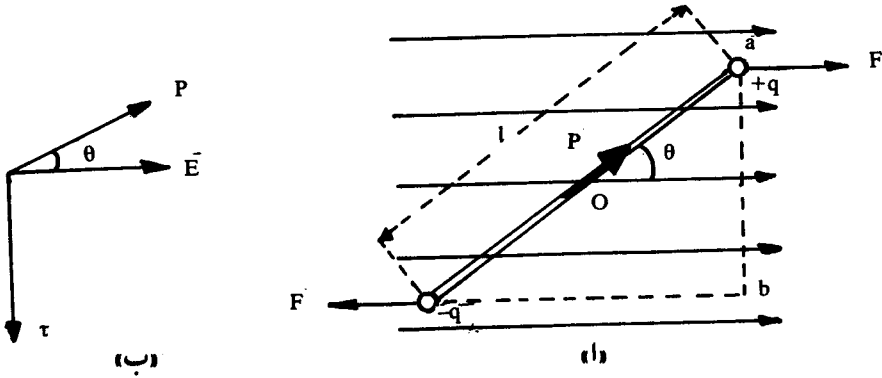
نظرا لأن تكامل الزوايا المجسمة يعطي 4π .

(٩-٢) ذو قطبين في مجال كهربى خارجى منتظم

A Dipole in a Uniform External Electric Field

يمكن عد العزم الكهربى لذى القطبي كمتجه $\vec{P}$ حيث تعطى قيمته بالمعادلة $P = lq$ ، انظر بند (٤-١)، ويتجه من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

يمثل شكل (٢-١٣ أ) ازدوجا كهربيا ناتجا عن الشحنتين $+q$ و $-q$ اللتين تفصلهما مسافة l موضوعا في مجال كهربى منتظم شدته E بحيث يصنع محوره زاوية قدرها



شكل (٢-١٣): أ - ذو قطبين في مجال كهربي خارجي
ب - التمثيل الاتجاهي للعزم الكهربي P وشدة المجال E والازدواج τ .

θ مع اتجاه المجال E ويلاحظ أن محصلة القوتين المتساويتين والمتضادتين في الاتجاه يساوي صفرا وكل منهما عبارة عن $(F = qE)$. ولكن محصلة عزم الازدواج (عزم الدوران) torque الناتج حول O والذي يعطى بالعلاقة:

عزم الازدواج $\tau =$ إحدى القوتين $\times$ البعد العمودي بينهما.

$$\tau = ab \times F = l F \sin \theta = l \cdot q \cdot E \sin \theta$$

$$\therefore \tau = P \cdot E \cdot \sin \theta \quad \dots \dots \dots (٢-٦١)$$

ويقوم عزم الازدواج بإدارة العزم الكهربي ليستقر ساكنا في اتجاه المجال المؤثر. ومن المعادلة (٢-٦١) يمكن تعريف العزم الكهربي P «بأنه عزم الازدواج اللازم لحفظ ذي القطبين عموديا على مجال كهربي شدته الوحدة».

وإذا أعيدت كتابة المعادلة (٢-٦١) على أساس المتجهات (vectors) فإنها تصبح:

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} \quad \dots \dots \dots (٢-٦٢)$$

والرسم الاتجاهي لهذه المعادلة يوضحه شكل (٢-١٣ ب).

وحتى يغير ذو القطبين اتجاهه في المجال الخارجى يجب بذل شغل work لإدارته من وضعه الابتدائي الذي يصنع زاوية قدرها θ_0 مع اتجاه المجال إلى الوضع النهائي والذي يصنع زاوية قدرها θ ، والشغل المبذول يعطى بالمعادلة :

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} P \cdot E \sin\theta d\theta$$

$$= P \cdot E \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta = P \cdot E (-\cos\theta)_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\therefore W = P \cdot E \cdot (\cos\theta_0 - \cos\theta) \quad \dots \dots (٢-٦٣)$$

وهذا الشغل المبذول يُحفظ على شكل طاقة وضع . ويرمز له بالرمز U حيث :

$$U = W = P \cdot E (\cos\theta_0 - \cos\theta) \quad \dots \dots (٢-٦٤)$$

ولما كان الهدف هو دراسة التغير في طاقة الوضع فيمكن اختيار الحالة الابتدائية والتي تكون فيها $\theta_0 = 90^\circ$ وتصبح المعادلة (٢-٦٤) على الصورة .

$$U = -P \cdot E \cos\theta \quad \dots \dots \dots (٢-٦٥)$$

وبوضع المعادلة (٢-٦٥) على صورة ضرب قياسي يُحصل على :

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E} \quad \dots \dots \dots (٢-٦٦)$$

وإذا وضع ثنائي أقطاب P_1 في مجال كهربى E_2 ناتج عن ثنائي أقطاب آخر P_2 فإن طاقة الوضع تساوي :

$$U = -\vec{P}_1 \cdot \vec{E}_2$$

وبالاستعانة بالمعادلة (١-٢٧) فإن متجه المجال E_2 هو :

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[3(\vec{P}_2 \cdot \vec{i}_r) \vec{i}_r - \vec{P}_2 \right]$$

$$\therefore U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - 3(\vec{P}_1 \cdot \vec{i}_r)(\vec{P}_2 \cdot \vec{i}_r) \right] \quad (٢-٦٧)$$

وتسمى الطاقة في هذه الحالة بتفاعل ثنائي - الثنائي (dipole - dipole interaction)

مثال (٢-٩)

يتألف ذو قطبين من شحنتين متساويتين ومختلفتين في النوع . شحنة كل من قطبيه $q = 1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ والمسافة بينهما $l = 2 \text{ cm}$ موضوعا في مجال كهربى خارجى منتظم شدته 10^5 N/C احسب :

- أ - أقصى عزم ازدواج يؤثر به المجال على الازدواج .
ب - الشغل المبذول لإدارة الازدواج بحيث يصبح القطب الموجب مكان السالب .

الحل

$$\tau = ql E \sin \theta = (1.0 \times 10^{-6}) (0.02) (1.0 \times 10^5) (\sin \theta) \quad \text{أ -}$$

ولما كان أقصى عزم للازدواج يحدث عندما تكون $\theta = 90^\circ$ فإن :

$$\tau = 2.0 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

ب - من المعلوم أن ذا القطبين يستقر في حالته الابتدائية في اتجاه المجال أي عندما $\theta_0 = 0$. ولكي نجعل القطب الموجب مكان السالب فإننا سنبدل شغلا لإدارة ذي القطبين 180° مقداره :

$$\therefore W = U_{180} - U_0 = (-PE \cos 180^\circ) - (-PE \cos 0)$$

$$\therefore W = 2PE = 2qlE$$

$$\therefore W = 2 \times (1.0 \times 10^{-6}) (0.02) \times (1.0 \times 10^5) = 4.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

(١٠-٢) مسائل

١ - شحنتان $q_1 = 5 \times 10^{-6}$ كولوم و $q_2 = -2 \times 10^{-6}$ كولوم تفصلهما مسافة قدرها 1.0 متر. احسب المجال والجهود عند نقطة تبعد 75 سم من q_1 و 25 سم من q_2 .

٢ - إذا افترض أن الجهد في المالا نهاية يساوي الصفر.
أ - ما هي قيمة الجهد الاستاتيكي عند نقطة تبعد 1.0 متر من شحنة نقطية مقدارها 1.0×10^{-6} كولوم.
ب - الجهد الاستاتيكي عند نقطة تبعد 0.10 متر من الشحنة نفسها.

ج - ما هي قيمة الشغل المبذول لنقل شحنة قدرها 2.5×10^{-7} كولوم من مسافة قدرها 1.0 متر إلى 0.1 متر من الشحنة نفسها.

٣ - احسب الجهد الكهربي عند النقطة a ، الشكل التابع للمسألة ١٧ الواردة في الفصل الأول، ثم الجهد الكهربي عند النقطة b. ثم احسب فرق الجهد بينهما. وإذا انتقلت شحنة مقدارها $0.5 \mu C$ من النقطة a إلى النقطة b احسب الشغل اللازم لذلك.

٤ - شحنة قيمتها 8×10^{-7} كولوم واقعة عند نقطة إحداثياتها $(x = 0.12m, y = 0.08m, z = 0)$ احسب فرق الجهد بين النقطتين $(x = 0.18m, y = z = 0)$ و $(x = 0.36m, y = z = 0)$.

٥ - ثنائي الأقطاب قيمة عزمه الكهربي 2.4×10^{-8} كولوم - مترويصنع زاوية قدرها 60° مع اتجاه مجال كهربي خارجي قيمته 3.0×10^4 نيوتن كولوم. احسب:

أ - عزم الازدواج المبذول على الثنائي نتيجة لتسليط المجال.

ب - ما هو الشغل المبذول حتى يصبح الثنائي موازيا لاتجاه المجال الخارجي.

٦ - جسيم صغير شحنته q_1 وكتلته m قذف مباشرة في اتجاه مركز نواة شحنتها q_2 فإذا كانت السرعة الابتدائية للقذيفة مقدارها v_0 وعلى بعد كبير من q_2 كما في الشكل.

أثبت أن أصغر مسافة يمكن الوصول إليها تعطى بالقيمة $D = 2Kq_1q/mv_0^2$



٧ - وضعت شحنة قدرها $q_1 = +10^{-3} \mu C$ في نقطة الأصل ووضعت أخرى قدرها

$q_2 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \mu C$ في نقطة إحداثياتها $x = 2m$ على محور x .

أ - أوجد تابع الجهد V للنقاط الواقعة على المحور x .

ب - أين تقع النقطة التي ينعدم فيها الجهد على محور x .

ج - أين تقع النقطة التي ينعدم فيها المجال الكهربائي على محور x .

٨ - أربع شحنات نقطية قيمة كل منها Q كولوم وضعت على رؤوس أركان مربع طول ضلعه l .

احسب الجهد الاستاتيكي في مركز المربع.

٩ - كرتان معدنيتان نصف قطر كل منها 10 سم، وضعتا بحيث تكون المسافة بين

مركزيهما مترا واحدا، فإذا شحنت إحدى الكرتين بشحنة موجبة قدرها

30×10^{-9} كولوم والكرة الأخرى بشحنة سالبة قدرها 60×10^{-9} كولوم.

احسب جهد كل من الكرتين وكذلك فرق الجهد بينهما.

١٠ - كرتان نصف قطرهما 1 سم و 2 سم على التوالي وشحنة كل منها 10^{-8} كولوم. فإذا

كان البعد بين مركزيهما 100 سم. فما هي الشحنة وجهد كل منها عندما يعلقان

بسلك رفيع.

١١ - إذا كان الجهد عند نقطة ما في مجال كهربائي يمكن تمثيله بالمعادلة:

$$V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

حيث r ، θ هما الإحداثيان القطبيان للنقطة. و a و b ثابتان.

احسب عند أي نقطة قيمة مركبتي المجال الكهربائي E_r ، E_θ .

١٢ - شحنة مقدارها Q وضعت في مركز الإحداثيات بينما وضعت شحنتان أخريان

قيمة كل منها $-\frac{Q}{2}$ على محور Z عند $Z = \pm a$.
اثبت أن الجهد الاستاتيكي عند أي نقطة في المستوى xy الناتج من هذا التوزيع
يساوي:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\frac{1}{r_0} \right) - \left(a^2 + r_0^2 \right)^{-1/2} \right\}$$

حيث r_0 المسافة بين المركز وأي نقطة من النقطتين.
١٣ - حسب المعادلة (٢-٤٠) وُجد أن الجهد عند أي نقطة خارج الكرة المشحونة يماثل
الجهد كما لو كان ناتجا عن نقطة مشحونة ويكون الجهد متناسبا مع $\frac{1}{r}$ حسب
قانون كولوم، أما إذا فرض أن الجهد لنقطة مشحونة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\beta r}}{r}$$

حيث β مقدار ثابت، q شحنة النقطة، r بعد المكان الذي يحسب فيه الجهد
عن النقطة المشحونة.

اثبت أن الجهد خارج كرة مشحونة يعطى بالمعادلة:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{\beta R} - e^{-\beta R}}{2\beta R}$$

حيث R نصف قطر الكرة المشحونة.

١٤ - أوجد بالتكامل المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة x عن المركز وواقعة على
محور قرص دائري مشحون نصف قطره a وكثافة الشحنة الكهربائية السطحية
عليه σ . استنتج منها المجال الناتج عن صفيحة لانهائية في نقطة غير واقعة عليها
وقارن هذه النتيجة فيما لو حسب المجال باستخدام قانون جاوس.

١٥ - صفيحة كبيرة دائرية وموصلة نصف قطرها R تحمل شحنة كثافتها السطحية غير
منتظمة خاضعة للعلاقة:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

حيث r المسافة من مركز الصفيحة .

احسب الجهد والمجال عند أي نقطة تقع على المحور المتعامد مع الصفيحة والمار بمركزها .

١٦ - اسطوانتان متحدتا المحور جهد الاسطوانة الداخلية (+400) فولت ونصف قطرها 0.01 متر وجهد الاسطوانة الخارجية (- 400) فولت ونصف قطرها 0.1 متر . احسب

أ - نصف قطر السطوح الاسطوانية المتساوية الجهد عند القيم (+200) وصفر و (- 200) فولت .

ب - شدة المجال عند هذه السطوح الثلاثة وكذلك عند سطحي كل من الاسطوانتين .

١٧ - من العلاقة القائلة بأن المجال الكهربي هو سالب تدرج الجهد . أوجد المجال الكهربي إذا كان الجهد معطى بالعلاقة :

$$V = K / (x^2 + a^2)^{1/2} , \quad V = K/r$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{حيث}$$

كذلك احسب معادلة السطوح المتساوية الجهد في كلتا الحالتين وارسم رسما تخطيطيا مبينا عليه خطوط المجال والسطوح المتساوية الجهد .

١٨ - أوجد معادلة السطوح المتساوية الجهد لخط لا نهائي البعد مشحون بانتظام بكثافة خطية «شحنة وحدة الطول» λ كولوم / متر .

١٩ - خط مستقيم مشحون ، λ وحدة شحنة الطول ، يعطي جهدا يتناسب مع $\ln r$ حيث r المسافة من هذا الخط .

احسب ثابت التناسب مستخدما المعادلة $E = -dV/dr$.

٢٠ - منطقة في الفراغ تعطي جهدا كهربيا حسب المعادلة :

$$V(r) = V_0 e^{\mu/r}$$

حيث μ مقدار ثابت .

احسب المجال الكهربي في هذه المنطقة مستخدما المعادلات :

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

٢١ - أي من معادلات الجهود التالية تحقق قانون بواسون :

a) $V = r \cos \theta + \Phi$

b) $V = r \cos \theta + 6$

c) $V = x^2 - y^2 - z^2$



المكثفات والعوازل

Condensers and Dielectrics

● السعة ● المكثفات ● أشكال المكثفات ● توصيل المكثفات ● طاقة مكثف مشحون ● القوة بين لوحين المكثفة المستوية ● فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو مكثفين ● مقدمة عن المواد العازلة ● تأثير المجال الكهربائي على المواد ● ثابت العزل ● العوازل ونظرية جاوس ● الاستقطاب والإزاحة الكهربائية ● التأثيرية الكهربائية ● شدة العزل ● سعة مكثف مستوي وضع بين لوحيه عازلان مختلفان ● الشروط الحدودية ● معامل إزالة الاستقطاب ● المواد العازلة تلقائية الاستقطاب (فروكهربية) ● الإلكترونات والقياسات الكهربائية الساكنة ● مسائل .

(١-٣) السعة

Capacitance

تتم دراسة ظواهر الكهرباء الساكنة كميًا (quantitatively) بمعرفة العلاقة بين الشحنات الواقعة على مجموعة من الموصلات والجهود الناتجة المعتمدة على الشكل الهندسي لهذه الموصلات.

فإذا أخذ موصل غير محدود الشكل ووضعت عليه شحنة معينة قدرها q فإن هذه الشحنة سوف توزع على سطح هذا الموصل بشكل متوازن (equilibrium). والجهود في أية نقطة في الحيز الذي يحيط بالموصل يمكن حسابه من المعادلة (٢١-٢) حيث:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r} \dots\dots\dots (٣-١)$$

حيث σ كثافة الشحنة السطحية و dS عنصر السطح من الموصل وإذا علمت كيفية توزيع الشحنة على الجسم أمكن حساب جهد ذلك الجسم . وحسب ما ورد في البند (٤-٢) فإن الجهد على سطح الموصل الكروي المشحون بشحنة قدرها q ونصف قطره R تحدده المعادلة (٢-٤١) حيث :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

أو

$$q = 4\pi\epsilon_0 R V = C V \dots\dots\dots (٣-٢)$$

حيث

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \dots\dots\dots (٣-٣)$$

وتسمى C بالسعة الكهرية للموصل (capacitance) وتتناسب تناسباً طردياً مع نصف القطر. أي أن C تعتمد على أبعاد وشكل الموصل . وواضح من المعادلة (٣-٢) أنه يمكن زيادة الشحنة الكهرية على أي موصل فيرتفع تبعاً لذلك جهده ولكن هذه الزيادة لا بد أن تقف عند حد معين وإلا ارتفع الجهد إلى الدرجة التي يحدث عندها التفريغ الكهربائي خلال الوسط المحيط بالموصل . ومن العوامل التي يمكن معها زيادة أو نقصان جهد موصل مشحون وجود جسم آخر بالقرب منه أو بعيداً عنه .

وحدات السعة هي الفاراد (farad) في نظام الـ (S.I.) حيث :

$$1 \text{ farad (F)} = 1 \text{ C / V}$$

أما في النظام الجاوسي فوحدات السعة هي استات فاراد stat . farad

$$1 \text{ stat . F} = 1 \text{ stat C / stat . V}$$

والفاراد وحدة كبيرة للسعة لذلك فإن وحدات أصغر قيمة تستعمل كثيراً وهي

الميكروفاراد والبيكوفاراد حيث

$$1 \mu\text{F (microfarad)} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$1 \text{ pF (picofarad)} = 10^{-12} \text{ F} = \mu\mu\text{F}$$

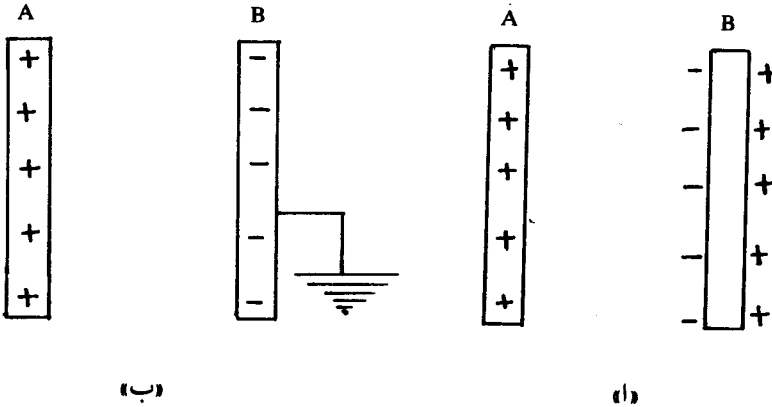
$$1 \text{ nF (nanofarad)} = 10^{-9} \text{ F}$$

(٢-٣) المكثفات

Condensers or Capacitors

إذا قرب موصلان مشحونان بعضهما من بعض فإن جهد كل موصل لا يتوقف فقط على الشحنة التي يحملها بل يتوقف أيضا على كمية الشحنة ونوعها الموجودة على الموصل المجاور وكذلك على شكل الموصل وحجمه ومكانه.

إذا فرض أن موصلا A معزولا وعليه شحنة موجبة فيكون جهد هذا اللوح هو الفرق في الجهد بينه وبين الأرض باعتبار الأرض موصلا للكهرباء، جهد الأرض يساوي الصفر، وإذا اقترب موصل آخر B معزول وغير مشحون من الموصل A فإن الموصل B يكتسب شحنة سالبة مقيدة على الوجه المقابل للموصل A وشحنة موجبة مطلقة على الوجه الآخر ونتيجة لذلك فإن جهد A يقل قليلا عن قيمته الأصلية وهذا يؤدي إلى زيادة سعته، أي أنه يحتاج إلى شحنة إضافية حتى يرتفع جهده إلى قيمته الأصلية.



شكل (٣-١): أ - الموصل A مشحون شحنة موجبة ثم اقترب منه موصل B غير مشحون فاكسب شحنة سالبة مقيدة على الوجه المقابل للموصل A وشحنة موجبة مطلقة على الوجه الآخر.
ب - ثم وصل الموصل B بالأرض فتعادت الشحنة الموجبة مع الأرضي.

وعند توصيل الموصل B بالأرض، شكل (١ب - ٣)، فإن إلكترونات تنتقل من الأرض لتعادل الشحنات الموجبة المطلقة على B وتكون النتيجة أن اللوح B يكتسب شحنة سالبة فقط وهذا يصبح جهد الموصل A أقل بكثير من جهده الأصلي منفردا وهذا تزداد سعته زيادة كبيرة ويحتاج بذلك إلى شحنة إضافية كبيرة حتى يعود الجهد إلى وضعه الأصلي وهذا يعني زيادة مقدرة الموصل A على تخزين الشحنات الكهربائية.

وتسمى المجموعة المكونة من موصل مشحون معزول وموصل آخر قريب متصل بالأرض بالمكثف ويصفة عامة فإن «أي مجموعة مكونة من موصلين مشحونين بشحنتين مختلفتين في النوع ومتساويتين في المقدار قريب بعضهما من بعض تسمى بالمكثف».

وتعرف سعة المكثف بالعلاقة التالية:

$$\text{سعة المكثف} = \frac{\text{شحنة أحد الموصلين}}{\text{فرق الجهد بينهما}}$$

$$C = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{q}{V_A - V_B} \quad \dots\dots\dots (٣-١٤)$$

حيث V_A جهد لوح المكثف A و V_B جهد لوح المكثف B و V_{AB} فرق الجهد بين لوحى المكثف، ولذلك عادة يسمى بجهد المكثف ويرمز له بالرمز V وبذلك تكتب المعادلة (٣-١٤) بالصورة التالية:

$$C = \frac{q}{V} \quad \dots\dots\dots (٣-١٤)$$

وتجدر الإشارة إلى أن المعادلة (٣-٢) تعتبر حالة خاصة للمعادلة (٣-١٤).

والمكثفات لها أهمية كبيرة في علم الفيزياء والهندسة الإلكترونية. فهي تستخدم كمخزن للطاقة الكهربية وكذلك في إحداث شرارة الاشتعال في السيارة وعملية التوليف أو الرنين في الراديو وتوليد الموجات الكهرومغناطيسية والتحكم الإلكتروني في الزمن وغير ذلك من التطبيقات العديدة.

(٣-٣) أشكال المكثفات

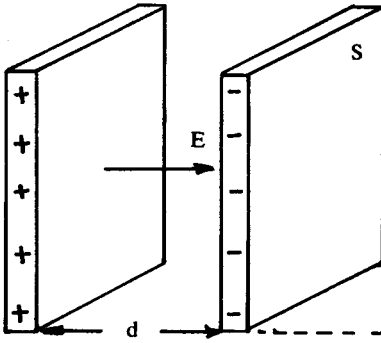
Forms of the Capacitors

Parallel plate capacitor المكثف متوازي اللوحين (١-٣-٣)

يتكون من لوحين موصلين متوازيين تفصلهما مسافة صغيرة بالنسبة لأبعادهما فإذا كانت S مساحة أي من السطحين و d المسافة بينهما و $+q$ مقدار الشحنة على أحد اللوحين و $-q$ الشحنة على اللوح الآخر [شكل (٣-٢)]. تكون قيمة شدة المجال E الذي يتجه من اللوح الموجب الشحنة إلى اللوح السالب الشحنة بين اللوحين [حسب المعادلة (١-٥٧)] هي :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

حيث σ الكثافة السطحية .



$$V = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\epsilon_0 S} \quad (٣-١٥)$$

وتكون سعة المكثف المستوى هي :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (٣-١٥ \text{ ب})$$

وواضح من هاتين المعادلتين أنه كلما

كانت المسافة بين لوحى المكثف صغيرة كان

الجهود صغيرا . وتزيد تبعا لذلك سعة

المكثف، كما تزيد السعة أيضا مع زيادة

مساحة لوحى المكثف المستوى .

شكل (٣-٢) : مكثف مكون من لوحين
موصلين متوازيين المسافة
بينهما d ومساحة كل منهما S

Spherical capacitor المكثف الكروي (٢-٣-٣)

يتكون من موصلين كرويين متحدتين في المركز نصف قطريهما a و b على الترتيب

[شكل (٣-٣)] فإذا كانت شحنة الكرة الداخلية موجبة $+q$ ووصلت الكرة الخارجية

بالأرض فإنه ينشأ عن هذا الترتيب شحنة تأثيرية على الكرة الخارجية $-q$ وهي مساوية تماماً للشحنة $+q$ بالقيمة المطلقة.

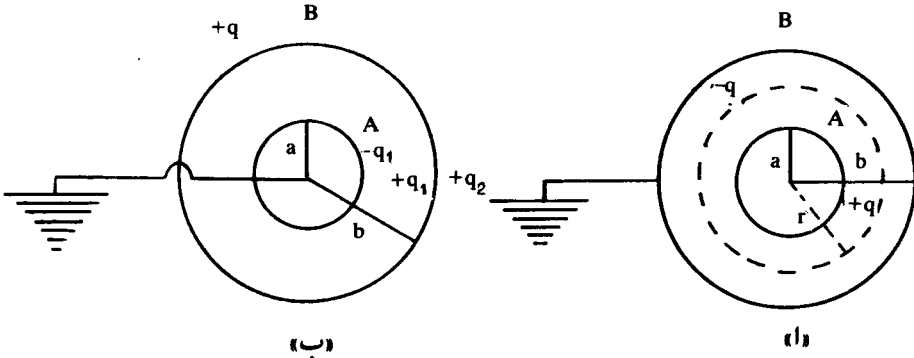
ويتطبيق قانون جاوس ، نتصور سطحاً جاوسياً نصف قطره r ($a < r < b$) فيكون :

$$\int E \cos \theta \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وحيث إن خطوط القوى في هذه الحالة متعامدة على سطح جاوس فإن هذه المعادلة تصبح :

$$\therefore E \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{or} \quad E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



شكل (٣-٣) : أ - كرتة خارجية متصلة بالأرضي .
ب - كرتة الداخلية متصلة بالأرضي .

ويكون فرق الجهد بين الكرتين هو :

$$V = - \int_a^b E \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

وتكون السعة لهذا المكثف هي :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)} \quad (٣-٦)$$

أما إذا كانت الشحنة على الكرة الخارجية $+q(B)$ والداخلية (A) متصلة بالأرض فإن الشحنة q تتوزع على كل من سطحي B . وإذا فُرض أن $+q_1$ هي الشحنة على السطح الداخلي للكرة B و q_2 بقية الشحنة على السطح الخارجي بحيث يكون: $q = q_1 + q_2$ ، كما في شكل (٣-ب) ، فإن الشحنة $+q_1$ الواقعة على السطح الداخلي من B تؤثر على السطح الخارجي من A بشحنة قدرها $-q_1$ والشحنة $+q_1$ تتسرب إلى الأرض. على هذا يتكون لدينا مكثفان أحدهما بين الكرة A والسطح الداخلي من B وسعته:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

والآخر بين السطح الخارجي من B والأرض وسعته حسب العلاقة (٣-٣) هي:

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 b$$

$$\therefore C = C_1 + C_2 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} + b \right) = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{b^2}{b-a} \right) \quad (٣-٧)$$

وهناك طريقة أخرى للوصول للنتيجة نفسها وهي: يُفرض أن شحنة الكرة الخارجية هي $+q$ وبذلك تتولد شحنة تأثيرية $-q'$ تظل مقيدة على سطح الكرة الداخلية وأما الشحنة التأثيرية المطلقة فتسرب إلى الأرض.

وحيث إن جهد الكرة الداخلية يساوي صفرا لاتصالها بالأرض.

$$\therefore \text{zero} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{q'}{a} \right)$$

$$\therefore q' = -q \frac{a}{b}$$

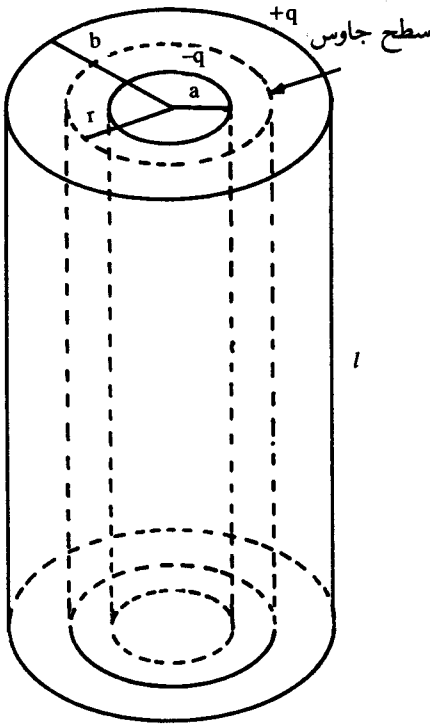
وجهد الكرة الخارجية هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{q'}{b} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} - \frac{qa}{b^2} \right)$$

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{b^2} \right)$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{b^2}{b-a} \right)$$

(٣-٣-٣) المكثف الاسطواني Cylindrical capacitor



يتكون من اسطوانتين متحدتي المركز نصفاً قطريهما a و b على الترتيب وطول كل منهما l ونفرض أن الشحنة على الاسطوانة الداخلية $-q$ وعلى الاسطوانة الخارجية $+q$ [شكل (٣-٤)]

ولنفرض سطحاً جاوسياً اسطوانياً نصف قطره r وطوله l ففي هذه الحالة يكون لدينا:

$$\int E \cos \theta \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وحيث إن خطوط القوى متعامدة على سطح جاوس فإنه يمكن كتابة هذه المعادلة كالتالي:

$$\therefore E \int_0^{2\pi r l} dS = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0}$$

شكل (٣-٤) : مكثف اسطواني.

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{l}$$

$$\therefore V = - \int_b^a E dr = \int_a^b E dr = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \ln \frac{b}{a}$$

وبذلك فإن سعة المكثف الاسطواني هي :

$$\therefore C = \frac{q}{V} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(b/a)} \dots\dots\dots (٣-٨)$$

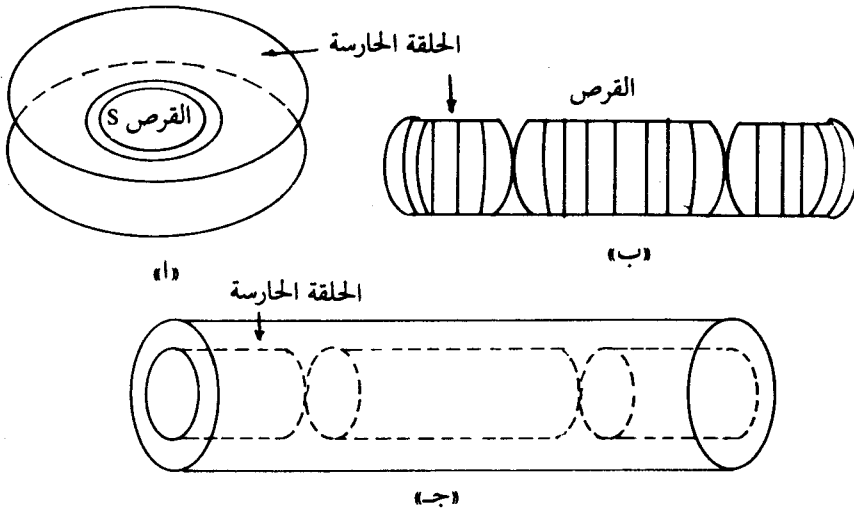
ونستنتج من المعادلات (٣-٥) ، (٣-٧) و (٣-٨) أن السعة الكهربية تعتمد على الشكل الهندسي لنوع المكثف .

(٣-٣-٤) المكثف ذو الحلقة الحارسة Guard ring capacitor

حسبت سعة المكثف المستوي السابق ذكره دون أن نأخذ بعين الاعتبار تأثير حواف المكثف على خطوط القوى وافترض أنها خطوط مستقيمة ومتوازية ولذلك فالمعادلات السابقة مقربة لأن خطوط القوى عند حواف المكثف غير منتظمة ولضمان انتظام المجال بين لوحى المكثف استعمل العالم لورد كلفن (Lord Kelvin) صفيحة دائرية على شكل قرص يحيط به حلقة دائرية تسمى بالحلقة الحارسة (guard ring) بحيث يكون مجموع مساحتيهما يساوي مساحة الصفيحة الدائرية الأخرى للمكثف [شكل (٣-٥ أ)] كما يوضح شكل (٣-٥ ب) مقطعا عرضيا لهذا المكثف .

ويشحن القرص والحلقة دائما بالجهد نفسه ويكون تفريغ القرص منفصلا عن الحلقة بحيث يمكن قياس شحنة القرص بصورة مستقلة ويوضح الشكل (٣-٥ ب) أن التهدب يصبح خارج حواف الحلقة الحارسة ويكون بذلك المجال E والكثافة

السطحية σ منتظمتين خلال مساحة القرص. كما تنطبق هذه الحالة على المكثف الاسطواني حيث يوضح الشكل (٥-ج-٣) الحلقة الحارسة لهذا المكثف.



شكل (٥-٣): أ و ب - مكثف مستوى دائري ذو حلقة حارسة.
ج - مكثف اسطواني ذو حلقة حارسة.

مثال (٣-١)

مكثف متوازي اللوحين مصنوع من مادة الألومنيوم، المسافة بين لوحيه 1mm ماذا يجب أن تكون مساحة (S) كل من اللوحين كي تكون سعته كالآتي:
1 farad و 1 μF و 1 pF.

الحل

$$\therefore S = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

$$\therefore S_1 = \frac{(10^{-12})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$S_2 = \frac{(10^{-6})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^2 \text{ m}^2$$

$$S_3 = \frac{(1)(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^8 \text{ m}^2$$

وواضح أن قيمة S_1 معقولة وحجم المكثف واقعيًا بينما قيمة S_2 كبيرة بحيث لو فرض أن المكثف على شكل مربع فإن قيمة طول ضلعه تساوي 10.6m أما في الحالة الثالثة فإن قيمة S_3 غير معقولة ومستحيلة التطبيق، حيث يبلغ طول ضلع المكثف [لو كان مربعًا] $1.06 \times 10^4 \text{ m}$ أي حوالي عشرة كيلومترات أي يمثل المسافة بين موقع جامعة الملك سعود الجديد والقديم. ولذلك فإن قيمة السعات دائمًا صغيرة وفي حدود الـ pF أو جزء من الـ μF .

مثال (٣-٢)

ما هي القيمة العظمى للشحنة الواقعة على مكثف سعته $0.002 \mu\text{F}$ ومساحة كل من لوحيه 100 cm^2 دون أن يحدث تأين للفراغ. علماً بأن التأين يحدث إذا زادت قيمة المجال الكهربائي عن 30000 V/cm .

الحل

إذا فرض أن q_{max} هي القيمة العظمى للشحنة و V_{max} هي الجهد المسلط بين طرفي المكثف الذي سعته C ومساحة كل من لوحيه S والمسافة بينهما d .

$$\therefore q_{\text{max}} = CV_{\text{max}}$$

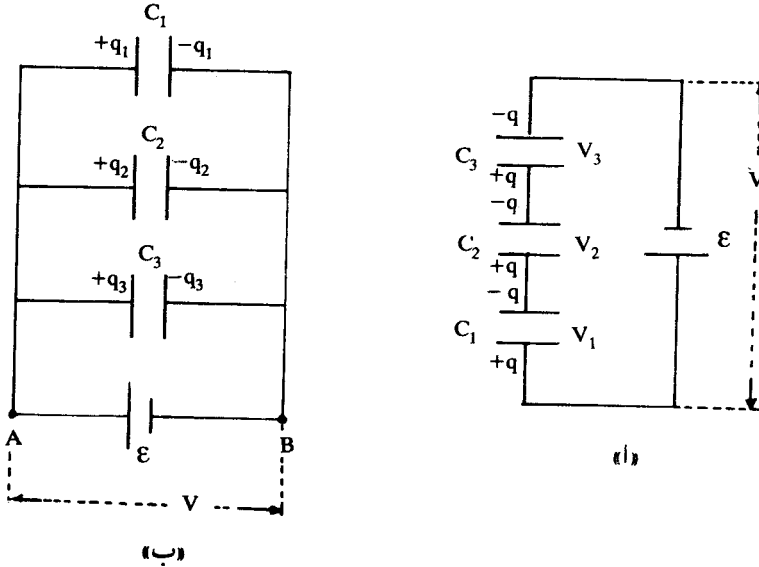
$$\therefore E_{\text{max}} = \frac{V_{\text{max}}}{d} \quad \& \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$\begin{aligned} \therefore q_{\text{max}} &= E_{\text{max}} \epsilon_0 S \\ &= (3 \times 10^6) (8.85 \times 10^{-12}) (1.0 \times 10^{-2}) \\ &= 2.66 \times 10^{-7} \text{ C} \end{aligned}$$

(٤-٣) توصيل المكثفات

Connection of Capacitors

يمكن توصيل المكثفات بعدة طرق مختلفة للحصول على سعات أكبر أو أصغر من القيم الأساسية لكل مكثف على حده. والقيمة الجديدة لسعة المكثفات المتصلة تمثل السعة المكافئة لها حسب نظام توصيل الدائرة.



شكل (٣-٦): ١- ثلاث مكثفات C_1 ، C_2 ، C_3 متصلة على التوالي.
ب- متصلة على التوازي.

(١-٤-٣) توصيل المكثفات على التوالي Capacitors in series

يوضح شكل (٦-٣) ثلاث مكثفات سعاتها C_1 ، C_2 ، C_3 متصلة على التوالي كما يوضح الشكل أيضا توزيع الشحنة نفسها q على ألواح المكثفات الثلاثة والجهود V_1 ، V_2 ، V_3 على التوالي.

فإذا كان فرق الجهد الكلي بين طرفي المجموعة بين النقطتين A و B هو V فإنه من الواضح أن:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

ولكن:

$$V = \frac{q}{C}, \quad V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}, \dots$$

حيث C هي السعة المكافئة للمجموعة.

$$\therefore \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots + \frac{q}{C_n}$$

$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (٣-٩)$$

ويلاحظ أن السعة الكلية دائما أقل من سعة أي من المكثفات المتصلة على التوالي.

(٣-٤-٢) توصيل المكثفات على التوازي Capacitors in parallel

وفي هذه الحالة فإن فرق الجهد بين لوحين كل من المكثفات له القيمة نفسها V . والشحنة الكلية q عند النقطتين A و B تساوي مجموع الشحنات التي على المكثفات.

فإذا كانت C هي السعة المكافئة و C_1 و C_2 و C_3 سعات المكثفات المتصلة على التوازي كما في شكل (٣-٦ ب) وكانت الشحنة على هذه المكثفات هي q_3, q_2, q_1 على الترتيب فإن:

$$q = CV, \quad q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V, \quad q_3 = C_3V$$

$$\therefore q = q_1 + q_2 + q_3$$

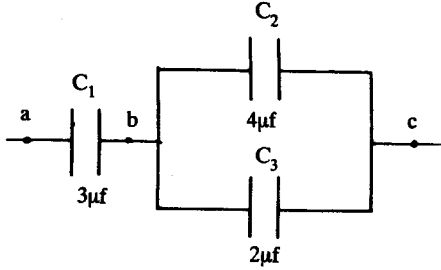
$$\therefore CV = C_1V + C_2V + C_3V = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (٣-١٠)$$

أي أنه إذا وصلت مجموعة من المكثفات على التوازي فإنه يمكن استبدالها بمكثف واحد سعته هي مجموع سعات مكثفات المجموعة.

مثال (٣-٣)

في الدائرة التالية احسب الشحنة على كل مكثف وكذلك احسب الجهد عند النقطة b علماً بأن الجهد عند a يساوي 1200 فولت بينما النقطة c متصلة بالأرض .



الحل

المكثفان C_2 و C_3 متصلان على التوازي :

التوازي :

$$\therefore C = C_2 + C_3 = 4 + 2 = 6 \mu F$$

هذه السعة المكافئة متصلة على التوالي مع C_1 وبذلك تكون السعة المكافئة للمجموعة C_0 هي كالتالي :

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore C_0 = 2 \mu F$$

وتكون الشحنة على هذه المكثفة المكافئة هي :

$$Q = C_0 V = 2 \times 10^{-6} \times 1200 = 2.4 \times 10^{-3} C$$

وهذه الشحنة Q تساوي الشحنة Q_1 على المكثف C_1 وتساوي أيضاً مجموع الشحنتين للمكثفين C_2 و C_3 .

$$\therefore V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 800 V$$

$$\therefore V_{ab} = V_a - V_b = 800 V, \quad \therefore V_a = 1200 V$$

$$\therefore V_b = 400 V$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 400 - 0 = 400 V$$

وبذلك فإن :

$$Q_2 = C_2 V_{bc} = 4 \times 10^{-6} \times 400 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q_3 = C_3 V_{bc} = 2 \times 10^{-6} \times 400 = 0.8 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$\therefore Q_2 + Q_3 = (1.6 + 0.8) \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ C}$$

مثال (٣-٤)

- ا) احسب السعة المكافئة لمجموعة المكثفات المتصلة والواردة في الشكل (أ).
 ب) احسب شحنة وجهد كل مكثف إذا كان فرق الجهد بين النقطتين a و b هو 10V.

الحل

$$C_{gh} = 3 + 5 = 8 \mu\text{F} \text{ \& } C_{ij} = 20 + 10 = 30 \mu\text{F}$$

وتصبح الدائرة كما في الشكل (ب)

$$\frac{1}{C_{eh}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8+4+3}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore C_{eh} = \frac{8}{5} = 1.6 \mu\text{C}$$

$$\frac{1}{C_{il}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1+3+6}{30} = \frac{10}{30}$$

$$\therefore C_{il} = \frac{30}{10} = 3 \mu\text{C}$$

وتصبح الدائرة كما في شكل (ج)

$$C_{ab} = C_{eh} + C_{il} = 1.6 + 3 = 4.6 \mu\text{F}$$

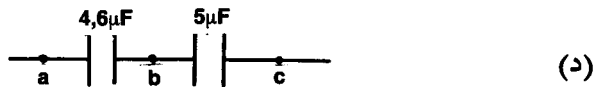
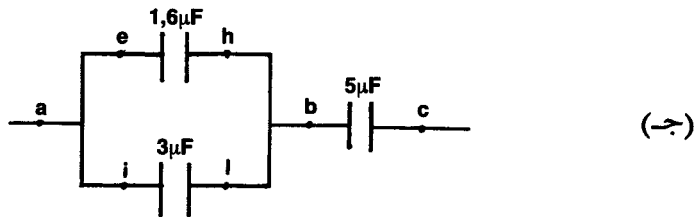
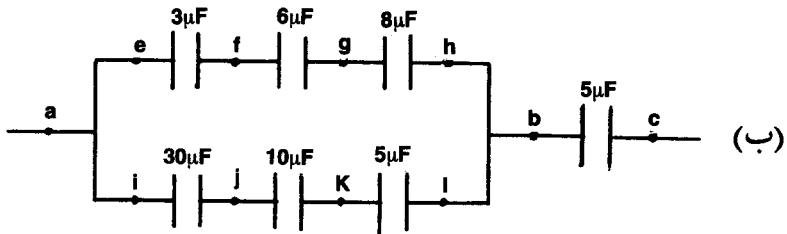
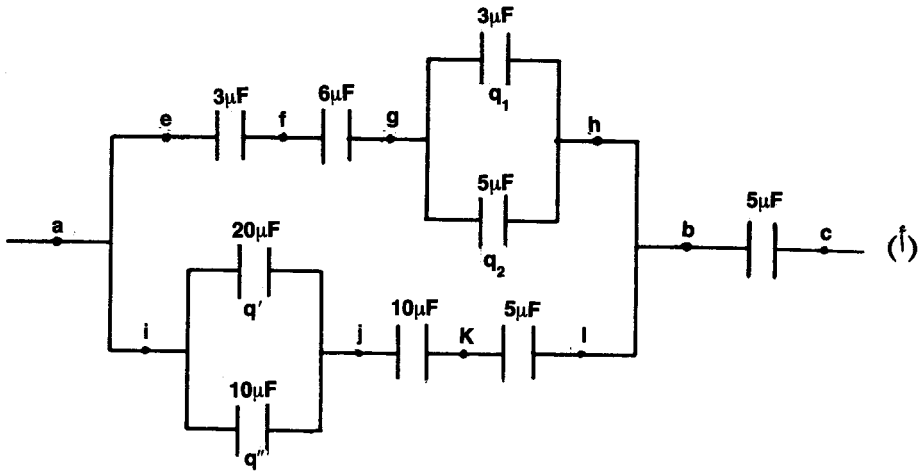
وتصبح الدائرة كما في شكل (د)

$$\frac{1}{C_{ac}} = \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5}$$

$$\therefore C_{ac} = 2.4 \mu\text{F}$$

وتمثل هذه القيمة السعة المكافئة للدائرة (أ)، وتصبح الدائرة كما شكل (هـ).

$$q_{ab} = C_{ab} \times V_{ab} = 4.6 \times 10^{-6} \times 10 = 4.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$



تابع للمثال (٣-٤)

وحسب خاصية التوصيل على التوالي فهذه الشحنة نفسها بين طرفي المكثف الواقع بين النقطتين b و c والمكثف المكافئ بين النقطتين a و c.

$$V_{bc} = \frac{q_{ab}}{C_{bc}}$$

$$V_{bc} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-6}} = 9.2 \text{ V}$$

$$V_{ac} = \frac{4.6 \times 10^{-5}}{2.4 \times 10^{-6}} = 19.2 \text{ V}$$

$$q_{eh} = C_{eh} \times V_{ab} = 1.6 \times 10^{-6} \times 10 = 1.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$q_{il} = C_{il} \times V_{ab} = 3 \times 10^{-6} \times 10 = 3 \times 10^{-5} \text{ C}$$

وواضح أن $q_{ab} = q_{eh} + q_{il}$ ، وشحنة كل مكثف متصل على التوالي في الفرع eh هي q_{eh} وكذلك شحنة كل مكثف متصل على التوالي في الفرع il هي q_{il} .

$$V_{ef} = \frac{1.6 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-6}} = \frac{16}{3} = 5.33 \text{ V}$$

$$V_{fg} = \frac{1.6 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{-6}} = \frac{16}{6} = 2.67 \text{ V}$$

$$V_{gh} = \frac{1.6 \times 10^{-5}}{8 \times 10^{-6}} = 2 \text{ V}$$

$$\therefore q_1 = 3 \times 10^{-6} \times 2 = 6 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\therefore q_2 = 5 \times 10^{-6} \times 2 = 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$V_{jk} = \frac{3 \times 10^{-5}}{10 \times 10^{-6}} = 3 \text{ V}$$

$$V_{kl} = \frac{3 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-6}} = 6 \text{ V}$$

$$V_{il} = \frac{3 \times 10^{-5}}{30 \times 10^{-6}} = 1 \text{ V}$$

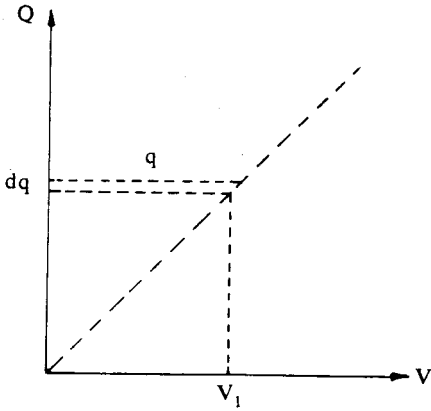
$$\therefore q' = 20 \times 10^{-6} \times 1 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\therefore q'' = 10 \times 10^{-6} \times 1 = 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

(٥-٣) طاقة مكثف مشحون

Energy of a Charged Capacitor

عند تقريب شحنات من بعضها يجب بذل شغل ضد قوى التنافر الحاصلة بين الشحنات وهذا الشغل يخزن على شكل جهد.



شكل (٣-٧) : العلاقة بين شحنة المكثف Q والجهد المسلط عليه.

وإذا فرض أن مكثفا ما قد اكتسب شحنة قدرها q عند توصيله ببطارية فإن هذه الشحنة يكتسبها عن طريق مرور الإلكترونات الحرة من الطرف الموجب إلى الطرف السالب للمكثف. وإذا افترض أن شحنة المكثف تتناسب طرديا مع فرق الجهد بين طرفيه، أي أن العلاقة بين q و V تكون خطا مستقيما كما في شكل (٣-٧) فإنه عند وصول الجهد بين طرفي المكثف إلى القيمة V_1 تكون شحنة المكثف قد وصلت إلى q_1 ... الخ وعلى هذا فإن مقدار الشغل المبذول لنقل شحنة قدرها dq من أحد الطرفين إلى الآخر يساوي :

$$dW = V_1 dq$$

وعند الشحنة q يحدد الجهد بالعلاقة :

$$q = C V_1$$

$$dW = \frac{1}{C} q dq \quad \therefore W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

وهذا الشغل المبذول يحفظ على شكل طاقة وضع U أي أن :

$$\therefore U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \dots\dots\dots (٣-١١)$$

$$\therefore V = \frac{Q}{C}$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} QV \text{ or } U = \frac{1}{2} CV^2 \dots\dots (٣-١٢)$$

وإذا كان المكثف متوازي اللوحين وكانت S مساحة اللوح و x المسافة بين اللوحين و σ الكثافة السطحية فإن: $\sigma = Q/S$ و $C = \epsilon_0 S/x$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 Sx}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\epsilon_0 S} \dots\dots (٣-١٣ أ)$$

وبما أن حجم الفراغ الذي فيه المجال الكهربائي هو $V = Sx$ فإن المعادلة (٣-١٣ أ) تصبح كالتالي:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V \dots\dots\dots (٣-١٣ ب)$$

والتي يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV \dots\dots\dots (٣-١٣ ج)$$

حيث dV عنصر الحجم، والتكامل على كل الفراغ.

وهذه المعادلة هي المعادلة نفسها (٢-٥٨). علماً بأن $\sigma = \epsilon_0 E$ أما الطاقة المخزنة في وحدة الحجم، حسب المعادلة (٣-١٣ ب) فهي:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \dots\dots (٣-١٤)$$

وهي المعادلة (٢-٥٩) نفسها.

(٣ - ٦) القوة بين لوحى المكثف المستوي

Force Between the Plates of a Capacitor

تجاذب الشحنات السالبة والموجبة الموجودة على لوحى مكثف بقوة من الممكن حسابها بتطبيق قانون كولوم على عنصري شحنتين صغيرتين على اللوحين المتقابلين ثم يجرى بعد ذلك تكاملان مزدوجان على كل من اللوحين، ويكون اللوحان في حالة توازن عندما تتعادل القوى الكهرية المحسوبة مع قوى ميكانيكية مصدرها القواعد المثبتة في حالة المكثف الهوائي، والعازل في حالة المكثف الورقي.

والقوة الكهرية بين الشحنات الموجودة على لوحى المكثف لا تتغير قيمتها إذا تغير نوع العازل بين اللوحين: فإذا كان بين اللوحين عازل فإن هذا العازل يجهد بواسطة المجال، وتعرف هذه الظاهرة بالانضغاط الكهربي (electrostriction) وينتج عن إجهاد العازل قوة ميكانيكية تؤثر على اللوحين اللذين يصبحان في حالة توازن نتيجة لتأثير عدة قوى بعضها كهرية والأخرى ميكانيكية.

فإذا كانت شحنة كل من اللوحين بعد شحنهما Q ، وكانت S مساحة كل من اللوحين و x المسافة بينهما، وكانت F القوة التي يؤثر بها كل من الحاملين على اللوح المناظر، فإن الشغل dW الذي يبذل عند زيادة ضئيلة للمسافة بين اللوحين قدرها dx يساوي:

$$dW = -Fdx \quad (٣-١٥)$$

وتعني الإشارة السالبة أن القوة التي سببت في زيادة المسافة بين اللوحين بمقدار dx تعاكس وتساوي القوة الكهرية بين اللوحين. وحيث إن الإزاحة dx تغير من قيمة الطاقة المخزنة بمقدار dU فإن القوة الكهربي يمكن معرفتها من المعادلة:

$$-Fdx = dU \quad (٣-١٦)$$

ومعروف من المعادلة (٣-١٣) أنه عندما تكون الألواح معزولة تكون Q ثابتة وتكون الطاقة المختزنة:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\epsilon_0 S}$$

والتغير الحادث نتيجة الانتقال مسافة صغيرة dx هو:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2 dx}{\epsilon_0 S} \dots\dots\dots (٣-١٧)$$

وبمساواة (٣-١٦) و (٣-١٧) يكون:

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \dots\dots\dots (٣-١٨)$$

(٧-٣) فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو مكثفين

Loss of Energy on Sharing of Charges between Two Conductors or Condensers

إذا فرض أن موصلاً، أو لوح مكثف شحنته موجبة، سعته C_1 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_1 وصل بموصل آخر، أو بلوح مكثف آخر شحنته موجبة، سعته C_2 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_2 فإنهما سوف يتقاسمان الشحنة بحيث تصبح جميع نقط كل من الموصلين واقعة تحت الجهد نفسه، [بند (٥-٢)]، فإذا كان $V_1 > V_2$ وكان V هو الجهد المشترك فإن:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = V(C_1 + C_2)$$

$$\therefore V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

وتكون الطاقة قبل التوصيل هي:

$$\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

والطاقة بعد التوصيل هي :

$$\frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2}$$

ولذلك فالفرق في الطاقة قبل وبعد التوصيل هي :

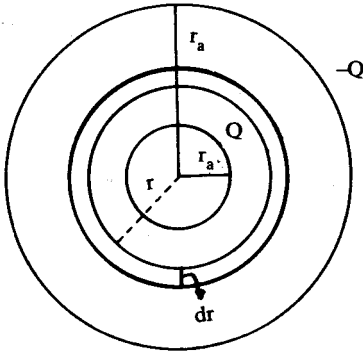
$$\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 C_2 (V_1 - V_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \quad (٣-١٩)$$

وهذه الكمية موجبة ما لم يكن $V_1 = V_2$ ولذلك فالطاقة الكلية قبل التوصيل أكبر من الطاقة بعد التوصيل .

وبتعبير آخر إنه إذا كان $V_1 \neq V_2$ فلا بد من فقد للطاقة نتيجة لتقاسم الشحنات . ويظهر هذا الفرق على هيئة شرارة أو ارتفاع في درجة حرارة الموصلين المتصلين أو المكثفين المتصلين .

مثال (٣-٥)

مكثف كروي يتألف من كرة داخلية نصف قطرها r_a وكرة خارجية نصف قطرها r_b كما في الشكل المجاور .



فإذا كان المكثف يحمل شحنة قدرها Q فاحسب الطاقة الكلية (total energy) بالطريقتين التاليتين :

أ - باستخدام المعادلة (٣-١١) .

ب - باستخدام المعادلة (٢-٥٨) .

الحل

تنص المعادلة (٣-١١) على : $U = \frac{1}{2C} Q^2$. ولكن من المعروف أن سعة المكثف المكثف الكروي تعطى بالمعادلة (٣-٦) .

$$\therefore U = \frac{Q^2(r_b - r_a)}{8\pi\epsilon_0 r_a r_b}$$

وهو المطلوب «أ». أما المعادلة (٢-٥٨) فتتص على :

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

حيث E هو قيمة المجال بين الكرتين وقيمتها هي [حسب ما ورد في البند (٢-١١ ب)] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q$ حيث يمثل r نصف قطر سطح جاوس .

أما dV فهو عنصر الحجم الذي قيمة المجال فيه هي E والتكامل على كل الفراغ بين الكرتين . فإذا أخذت شريحة كروية سمكها dr ونصف قطرها r فيكون حجمها : $dV = 4\pi r^2 dr$ وبالتعويض في المعادلة (٢-٥٨) يُحصل على :

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2 (r_b - r_a)}{8\pi\epsilon_0 r_a r_b}$$

مثال (٣-٦)

وصل مكثفان على التوازي أولهما (A) وسعته $20\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 1000 V والآخر (B) وسعته $10\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 100 V . احسب الطاقة الكلية قبل التوصيل . ومقدار فقدان الطاقة بعد التوصيل والجهد العام (common potential).

الحل

$$q_A = C_1 V_1 = \frac{20}{10^6} \times 1000 = 0.02\text{ C}$$

$$q_B = C_2 V_2 = \frac{10}{10^6} \times 100 = 0.001\text{ C}$$

أما السعة الكلية، C ، فهي :

$$C = \frac{30}{10^6}\text{ F}$$

وتكون الطاقة الكلية قبل التوصيل هي :

$$U_B = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

$$\therefore U_B = \frac{1}{2} \frac{20}{10^6} \times (1000)^2 + \frac{1}{2} \frac{10}{10^6} \times (100)^2 = 10.05 \text{ J}$$

أما الطاقة بعد التوصيل فهي :

$$U_A = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(0.021)^2}{30 \times 10^{-6}} = 7.55 \text{ J}$$

وبذلك فإن الفقد في الطاقة هو:

$$U = U_B - U_A = 2.7 \text{ J}$$

أما الجهد العام فهو:

$$V = \frac{q}{C}$$

$$\therefore V = \frac{0.021}{30 \times 10^{-6}} = 700 \text{ V}$$

مثال (٣-٧)

مكثفان متوازي اللوحين مساحة كل لوح للمكثف الأول 10cm^2 والثاني 20cm^2 والمسافة بين كل لوح لكل مكثف 1mm شحنا حتى أصبحت القوة بين لוחي كل مكثف 1gm. weight وصلا على التوازي .
ما هي الطاقة الحرارية المفقودة .

الحل

$$C_1 = \frac{10}{4\pi \times 0.1} = \frac{100}{4\pi} \text{ S.F} , C_2 = \frac{20}{4\pi \times 0.1} = \frac{200}{4\pi} \text{ S.F (C.G.S.)}$$

وإذا وصلا على التوازي يكون :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{300}{4\pi} S \cdot F$$

وتكون القوة بالنسبة للمكثف الأول حسب المعادلة (٣-١٨) هي :

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} (S.I.) \quad \text{or} \quad F = \frac{2\pi Q^2}{S} (C.G.S)$$

$$\therefore 980 = \frac{2\pi Q_1^2}{10} \quad \therefore Q_1 = \left(\frac{980 \times 10}{2\pi} \right)^{1/2}$$

وبالنسبة للمكثف الثاني :

$$\therefore 980 = \frac{2\pi Q_2^2}{20} \quad \therefore Q_2 = \left(\frac{980 \times 20}{2\pi} \right)^{1/2}$$

$$\therefore Q = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{980 \times 10}{2\pi} \right)^{1/2} (1 + \sqrt{2})$$

$\therefore$ الطاقة قبل التوصيل =

$$\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 196 \text{ ergs}$$

والطاقة بعد التوصيل =

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 190.4 \text{ ergs}$$

$\therefore$ الفقد في الطاقة =

$$196 - 190.4 = 5.6 \text{ ergs}$$

والتي تظهر على هيئة حرارة قيمتها :

$$\frac{W}{J} = \frac{5.6}{4.2 \times 10^7} = 1.33 \times 10^{-7} \text{ Calories}$$

حيث J ثابت جول .

(٨-٣) مقدمة عن المواد العازلة

Introduction of Dielectrics

تنقسم المواد من حيث توصيلها للكهرباء إلى ثلاثة أقسام هي :

أ - المواد الموصلة (conductors)

ب - المواد العازلة (insulators or dielectrics)

ج - المواد شبه الموصلة (semiconductors)

وجاء هذا التقسيم نتيجة لوضع الإلكترونات الخارجية التي تحتل القشرة الأخيرة لذرات المادة، والتي تسمى بالإلكترونات التكافؤ (valence electrons).

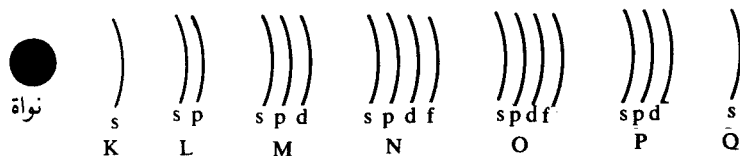
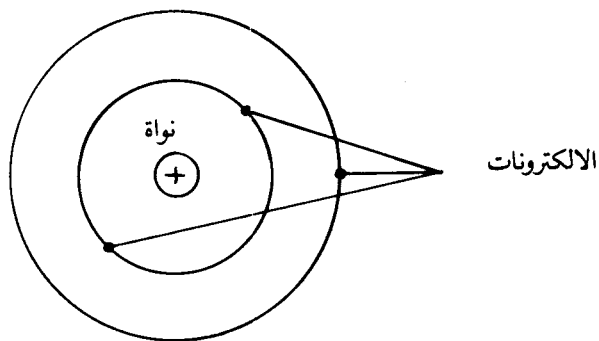
تتكون الذرة من نواة، تحتوي على بروتونات ونيوترونات، وإلكترونات تتحرك في قشر (shell) كروية معينة. تحتوي كل قشرة على عدد معين من الإلكترونات وأن كل قشرة تنقسم إلى قشيرات (subshell) كما في الشكل (٨-٣).

ويوضح الجدول (٣-١) توزيع الإلكترونات في الذرات حيث تحتوي كل ذرة على سبع قشر يرمز لها بالرموز K, L, M, N, O, P & Q وكل قشرة تنقسم إلى قشيرات يرمز لها بالرموز s, p, d & f فالقشرة K مثلاً تحتوي على قشرة s والقشرة L تحتوي على قشيتين هما s, p والقشرة M تحتوي على ثلاث قشيرات هي s, p, d وهكذا.

ويوضح الجدول أيضاً توزيع القشيرات لكل قشرة رئيسة وعدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشرة كما حددها العالم باولي (W. Pauli) الذي أوضح أن لكل قشرة عدداً معيناً من الإلكترونات التي تستطيع أن تشغلها ولا يمكن أن تزيد عليه. فالقشرة الأولى تشبع بالإلكترونين فقط والثانية بثمانية إلكترونات والثالثة بثمانية عشر إلكترونًا... الخ، كما يوضح الجدول (٣-١) التوزيعات المحتملة للإلكترونات حول النواة للعناصر.

جدول (٣-١): التوزيعات المحتملة للإلكترونات حول النواة

Q	P			O				N				M				L		K	رمز القشرة
s	d	p	s	f	d	p	s	f	d	p	s	d	p	s	p	s	s	رمز القشيرة	
2	10	6	2	14	10	6	2	14	10	6	2	10	6	2	6	2	2	عدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشيرة	
2	18			32				32				18				8		2	عدد الإلكترونات المسموح بها لكل قشرة



شكل (٣-٨): توزيع الإلكترونات حول النواة.

وحيث إن كل الإلكترونات في جميع الذرات متشابهة تماما في الكتلة والشحنة الكهرية وكذلك الحال بالنسبة للبروتونات وباقي محتويات الذرة فإن ما يميز عنصرا عن عنصر آخر هو العدد الذري .

وتعتبر الإلكترونات الخارجية التي تحتل القشرة الأخيرة في الذرة مسئولة عن الخواص الكهرية والكيميائية للمادة وذلك لأن هذه الإلكترونات تكون بعيدة عن سلطان النواة عليها ولذلك فهي واهية الترابط معها وبالتالي لديها الاستعداد لترك مكانها والشروء خارج ذرتها الأصلية والالتحاق بمكان آخر في ذرة أخرى . ولذلك فإن هذه الإلكترونات تعتبر حرة ومستعدة لترك ذراتها بسهولة . ومواد مثل هذه الذرات تكون موصلة للشحنات الكهرية . أما إذا كانت الإلكترونات مترابطة مع أنويتها ومن الصعب أن تترك مكانها فإن هذه المادة تصبح عازلة للكهرباء . وتتفاوت درجة التوصيل والعزل بتفاوت درجة ارتباط الإلكترونات الخارجية في الذرة مع أنويتها . وهنالك عناصر لا يمكن تصنيفها مع الموصلات لأنها رديئة التوصيل ولا يمكن في الوقت نفسه تصنيفها مع العوازل لأنه يمكن أن تنشط هذه المواد وتصبح موصلة تحت ظروف معينة مثل هذه المواد تسمى بأشباه الموصلات .

وتقبل الذرة دائما إلى الوصول إلى حالة الاستقرار ولا تصل إلى هذه الحالة إلا بملء مدارها الأخير إن كان ناقصا بعض الإلكترونات ، أو التخلي عن إلكترونات هذا المدار . فذرة الهيدروجين مثلا يدور في قشرتها الوحيدة إلكترون واحد ، بينما يلزم إلكترونان لإشباع هذا المدار . لذلك تعتبر ذرة الهيدروجين نشطة تسعى دائما لضم إلكترون آخر إلى مدارها أو التخلي عنه إلى ذرة أخرى . ويحدث أن تتحد ذرتان من الهيدروجين الواحدة مع الأخرى فيشارك إلكترون الذرة الأولى في الدوران حول الذرة الثانية . وكذلك يشترك إلكترون الذرة الثانية في الدوران حول الذرة الأولى ، وترتبط الذرتان على هذا الشكل ترابطا قويا مستقرا يسمى الترابط الإسهامي (covalent bonding) أو يسمى بالرابطة المشتركة .

وإذا أخذت ذرة الفلورين (Fluorine) حيث العدد الذري (atomic number) يساوي تسعة أي أن القشرة الأخيرة (I) تحوي سبعة إلكترونات في حين أن هذه القشرة

تستوعب ثمانية إلكترونات، لذلك تحتاج هذه القشرة إلى إلكترون واحد لكي يصل إلى حالة الإشباع والاستقرار وبالتالي فإن هذه الذرة تحاول دائما ضم إلكترون جديد إليها.

وإذا أخذت ذرة الليثيوم نجد أن عددها الذري ثلاثة: اثنان في القشرة الأولى والإلكترون الثالث في القشرة الثانية (L) التي تتسع لثمانية إلكترونات. لذلك فإن ذرة الليثيوم غير مستقرة ومن الصعب أن تصل إلى حالة الاستقرار بضم سبعة إلكترونات أخرى، ومن الأسهل أن تتخلص من الإلكترون الوحيد الذي يوجد في هذه القشرة.

فإذا أتيح لذرتي الفلورين والليثيوم، المذكورتين، الاتحاد فيتخلى الليثيوم عن الإلكترون الوحيد ويستولي عليه الفلورين الذي ينقصه إلكترون واحد في قشرته الثانية وترتبط الذرتان معا لتكونا فلور الليثيوم وتصلان إلى حالة الاستقرار، يسمى هذا الترابط بالترابط الأيوني (ionic bonding) وذلك لكسب الفلورين إلكترونات سالبا وأصبحت بذلك ذرته أيونا سالبا أما بالنسبة لليثيوم فأصبحت ذرته أيونا موجبا وذلك لفقد الذرة إلكترونات سالبا (Li^+F^-) ويسمى هذا الترابط أيضا برابطة التكافؤ الكهربي (electrovalent bond) وإيون الفلورين وإيون الليثيوم يكونان ما يسمى بجزيء (molecule) الفلور والليثيوم. والترابط نفسه يحصل بين ذرتي الصوديوم Na «عدده الذري 11» أي أن قشرته الأخيرة K تحتوي على إلكترون واحد والكلورين Cl «عدده الذري 17» أي أن قشرته الأخيرة (K) تحتوي على سبعة إلكترونات ليكونا جزيء كلوريد الصوديوم (Na^+Cl^-).

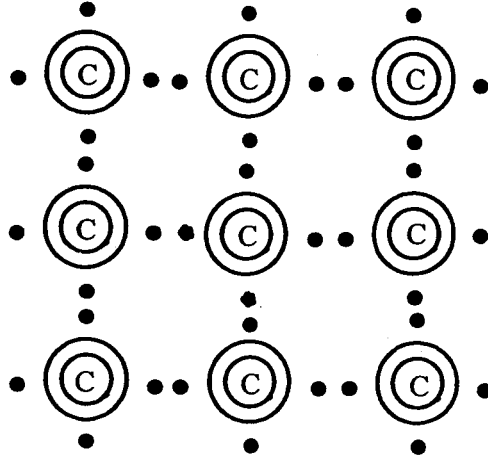
أما إذا اتحدت ذرتا البرومين (Bromine (Br) (عدده الذري 35، حيث 28 منها في القشر K, L, M والسبعة الباقية في القشرة الرابعة موزعة على القشيرتين s, p أي أن هذه الذرة تحتاج إلى إلكترون واحد لكي تصل إلى حالة الاستقرار) والكلورين Chlorine (Cl) (عدده الذري 17، عشرة منها في القشيرتين K, L والسبعة الباقية في القشرة الثالثة، أي أن هذه الذرة تحتاج أيضا إلى إلكترون واحد لكي تصل الذرة إلى حالة الاستقرار) فإن أحد إلكترونات ذرة البرومين سوف يشترك مع إلكترونات ذرة الكلورين وكذلك أحد إلكترونات ذرة الفلورين سوف يشترك مع إلكترونات ذرة البرومين أي أن الذرتين

سترتبطان ترابطا إسهاميا (covalent bond) ولكن هذا التقاسم للإلكترونين ليس متساويا لأن الإلكترونات السطحية لذرة البرومين تقع في القشرة الرابعة (N) بينما الإلكترونات السطحية لذرة الكلورين تقع في القشرة الثالثة (M). ولذلك فإن ذرة الكلورين تحتاج إلى طاقة عالية لتتخلّى عن أحد إلكتروناتها الخارجية أكبر من الطاقة اللازمة لكي يتخلّى البرومين عن أحد إلكتروناتها الخارجية ومن ثم فإن ذرة الكلورين ستكتسب أحد إلكترونات ذرة البرومين وتصبح أيونا سالبا، وتسمى هذه الظاهرة بخاصية اجتذاب الإلكترونات أو السالبية الكهرية (electronegativity)، ويصبح البرومين أيونا موجبا أي أنه سيحدث أيضا ترابطا أيونيا (ionic bonding) إلى جانب الترابط الإسهامي.

أما ذرة الكربون (C) Carbon فعددتها الذري ستة حيث تحتوي القشرة الثانية على أربعة إلكترونات وفي الحالة المستقرة (العازلة) ترتبط كل ذرة مع أربع ذرات أخرى مجاورة لها لتكون ترابطا إسهاميا فيما بينها، بحيث يشترك إلكترون من إلكترونات التكافؤ لذرة ما مع إلكترونات التكافؤ للذرة الأخرى، ليصبح في هذه القشرة ثمانية إلكترونات مما يؤدي بالذرة إلى حالة الاستقرار. والأمر نفسه يحصل تماما لذرات السليكون والجرمانيوم والسيلينيوم.

ولتوضيح ذلك اعتبر الشكل (٩-٣) يمثل خمس ذرات متجاورة من مادة الكربون حيث تمثل كل دائرة صغيرة نواة الذرة وتمثل الدائرة الكبيرة الحيز الذي يحيط بالنواة وتشغل الإلكترونات القريبة منها والتي تسمى بالإلكترونات المقيدة (bound electrons) أما النقط فتتمثل الإلكترونات الخارجية أو إلكترونات التكافؤ.

والحقيقة أن عنصري الجرمانيوم (Germanium) والسليكون (Silicon) يصبحان في حالة الاستقرار التام (عازلين جيدين للكهرباء) إذا استطيع إنقاص حرارة كل منهما إلى درجة الصفر المطلق وهي 273 - درجة مئوية أما إذا ارتفعت درجة حرارة كل منهما،



شكل (٩ - ٣) : يمثل الترابط التساهمي بين ذرات الكربون

أي إذا أعطي للإلكترون طاقة حركية (kinetic energy) ، فإن بعض هذه الإلكترونات ستكون لها حرية الحركة وتصبح هذه المادة موصلة ولذلك فعنصر الجرمانيوم والسيليكون أهم عناصر أشباه الموصلات .

وخلاصة ما ذكر أن المواد التي لها خاصية الترابط الأيوني أو الترابط الإسهامي أو الاثنين معا هي عادة إما مواد عازلة أو مواد شبه موصلة ، وبوجه عام فإن العوازل تميل لأن يكون الترابط الأيوني هو السائد بينما أشباه الموصلات تميل لأن يكون الترابط الإسهامي هو السائد .

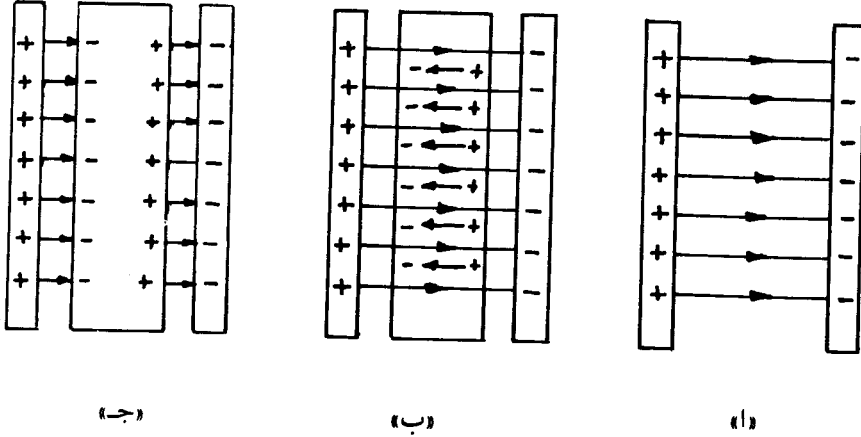
(٩-٣) تأثير المجال الكهربائي على المواد

Effect of the Electric Field on the Material

تتأثر جميع المواد إذا وضعت في مجال كهربائي . فإذا وضع موصل معدني في مجال كهربائي كما في شكل (١٠ - ٣) ، فإن الإلكترونات الحرة سوف تتأثر بهذا المجال وتتحرك ضد

اتجاه المجال حيث تترامك هذه الإلكترونات السالبة عند أحد طرفي الموصل بينما تبقى شحنات موجبة عند الطرف الآخر كما في شكل (١٠ب - ٣) :

ويستمر انتقال الإلكترونات تحت تأثير المجال الخارجي إلى أن تتساوى شدة المجال الناشئ بين الشحنتين السالبة والموجبة المتولدتين بالتأثير مع شدة المجال الخارجي المؤثر ويسمى انتقال الإلكترونات داخل الموصل بمجرد وجوده في المجال بتيار التوصيل conduction current ، كما أن محصلة المجال داخل الموصل تكون صفرا كما في شكل (١٠ج - ٣) .



«ج»

«ب»

«ا»

شكل (٣-١٠) : تأثير المجال الكهربائي على المواد الموصلة
أ - قبل وضع المادة .

ب - بعد وضع المادة الموصلة .

ج - تساوي المجال الناتج عن الشحنات التأثيرية مع المجال الخارجي .

أما المواد العازلة (dielectrics) فإن تأثير المجال الكهربائي الخارجي عليها يتوقف على نوع المادة العازلة ومدى الترابط الموجود في تركيب الذرات . وبصورة عامة يمكن القول إن المواد العازلة تنقسم من حيث تأثيرها بالمجال الكهربائي إلى نوعين هما :

أ - عوازل غير مستقطبة (متعادلة) Non polar (neutral) dielectric

جزيئات (molecules) هذه المادة يمكن تمثيلها على أنها نواة موجبة الشحنة +q

ومحاطة بتوزيع متماثل لسحابة من الإلكترونات سالبة الشحنة $-q$. وفي هذه الحالة ينطبق مركز ثقل (centre of gravity) توزيع الشحنات الموجبة على مركز ثقل توزيع الشحنات السالبة كما في شكل (١١١-٣) .

فإذا وضعت المادة في مجال كهربائي خارجي E فإن الشحنات السالبة والموجبة ستكون خاضعة لقوى كهربائية تسعى لإزاحتها قليلا (displaced) في اتجاه المجال الخارجي المؤثر مما يسبب انفصال مركز ثقل الشحنات السالبة عن مركز ثقل الشحنات الموجبة ونتيجة لذلك نحصل على عزوم كهربائية نتيجة لتكون ثنائيات القطب كما في شكل (١١١ب-٣) .

فإذا كانت المسافة بين الشحنتين لذي القطبين المستحث (induced dipole) (مركزي ثقل الشحنتين الموجبة والسالبة) هي dl ، فإن العزم يعطى بالمعادلة :

$$p_e = q_i dl \quad \dots \dots \dots (٢٠-٣)$$

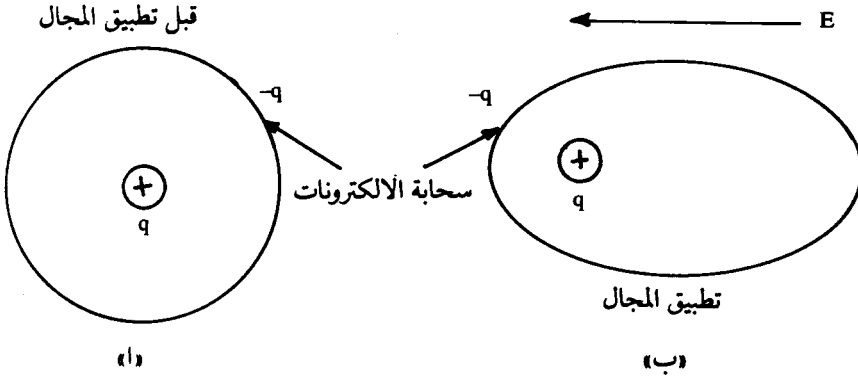
وتسمى هذه العزوم بالعزوم المستحثة (induced dipole moments) لأنها تنعدم وتعود إلى وضعها العادي بمجرد إزاحة المجال .

وتتوقف مقدار الإزاحة على شدة المجال الكهربائي E ، فإذا فرض للسهولة أن عزوم ذرات القطبين لجميع الذرات المستقطبة في العازل واحدة وأنه يوجد N جزيء مستقطب في وحدة الحجم (لها الاتجاه نفسه) فإن درجة استقطاب العازل يحددها حاصل ضرب كل جزيء في عدد الجزيئات في وحدة الحجم .

فإذا فرض أن ΔV عنصر الحجم فإن مجموع عزوم ذرات القطبين لهذا العنصر هي :

$$\sum_{i=1}^{N\Delta V} (p_e)_i = Np_e \Delta V = P \Delta V$$

$$\therefore P = Np_e \quad \dots \dots \dots (٢١-٣)$$



شكل (١١-٣): تأثير المجال الكهربائي على مادة عازلة غير مستقطبة
 أ - حالة المادة قبل وجود المجال.
 ب - أثناء وجود المجال.

وبصورة أخرى يمكن القول إنه إذا كان حجم المادة العازلة V فإن مجموع العزوم الموجودة في عنصر الحجم dV هي:

$$dp = P dV \quad \dots\dots\dots (٣-٢٢)$$

وبذلك فإن العزوم الكلية الموجودة داخل المادة التي حجمها V هي:

$$p = \int_V P dV \quad \dots\dots\dots (٣-٢٣)$$

حيث P مجموع العزوم لثنائيات القطبين في وحدة الحجم وتسمى بالاستقطاب الكهربائي (the electric polarization) أو الاستقطاب الإلكتروني الإزاحي (electronic displacement polarization). كما تسمى عملية الإزاحة بالتشوه (deformation) لأن الجزيئات تشوهت في المجال الكهربائي وتحولت إلى ذي القطبين.

ب - عوازل مستقطبة Polar (dipole) dielectric

جزيئات العوازل المستقطبة، تتألف عادة من ذرتين مختلفتين أو أكثر، لها عزوم لثنائيات القطبين (dipole moments) حتى في غياب المجال الكهربائي الخارجي وهذا يعني أن مراكز الثقل للشحنات السالبة والموجبة لا ينطبق بعضها على بعض. وهذه

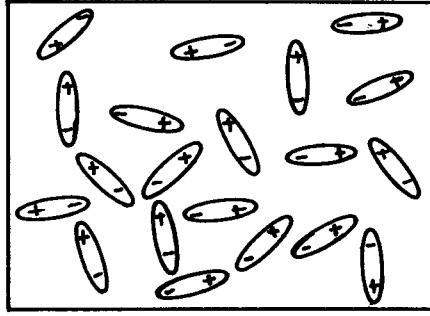
الجزئيات المستقطبة متجهة اتجاهها عشوائيا خلال المادة بسبب التهيج الحراري (thermal agitation) ولذلك فمتوسط العزوم لعنصر الحجم تساوي الصفر.

أما إذا وضع العازل في مجال كهربائي خارجي فإن الجزئيات المستقطبة تدور حول نفسها أو توجه نفسها (orientation) بحيث تصبح محاور الاستقطاب في اتجاه المجال الخارجي كما في شكل (١٢-٣) السابقة الذكر ويسمى الاستقطاب في هذه الحالة بالاستقطاب التوجيهي. في بعض المواد يمكن أن يحدث استقطاب تلقائي (عزوم لذي القطبين) حتى في غياب المجال الكهربائي الخارجي، مثل هذه المواد تسمى بالمواد العازلة تلقائية الاستقطاب.

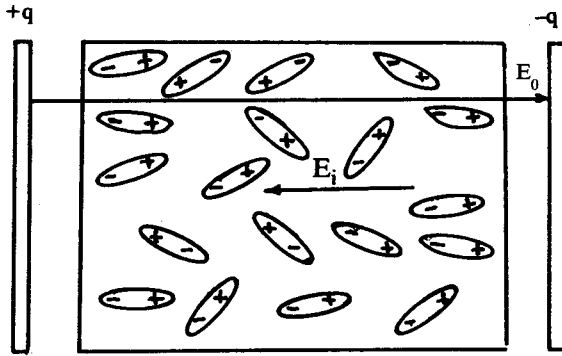
يتضح مما تقدم أن جزئيات العازل المستقطبة وغير المستقطبة ستصبح في النهاية مزدوجات قطبية محاورها في اتجاه المجال المؤثر. ونتيجة لهذا الترتيب تتولد شحنة تأثيرية على كل من طرفي العازل، ولن يختفي المجال داخل العازل كما هو الحال في الموصلات ولكنه سيقبل عن حالة الفراغ.

ويأتي تولد الشحنات التأثيرية نتيجة لتعادل الكهربائية المجاورة للجزئيات ويتبقى فقط الشحنات على الأطراف كما في شكل (١٢ ج - ٣). ويسمى التيار الناتج داخل العازل بتيار الإزاحة (displacement current) تميزا له عن تيار التوصيل. وسنورد بعض الأمثلة على المواد العازلة المستقطبة وغير المستقطبة كمايلي:

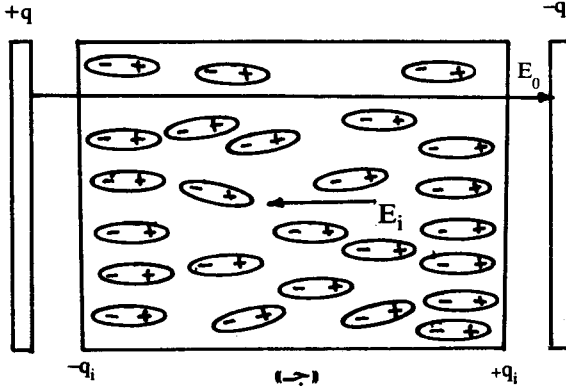
فالمواد التي جزئياتها أحادية الذرية monoatomic (He, Ne, Ar, Kr, Xe) وكذلك الجزئيات المولفة من ذرتين متماثلتين مترابطتين ترابطا متجانسا (تتوزع فيه الشحنات بالتساوي homopolar bond مثل $H_2, N_2, Cl_2 \dots$ etc) تعتبر مواد غير مستقطبة بينما المواد التي جزئياتها مؤلفة من ذرتين مختلفتين والمرتبطة فيما بينها ترابطا أيونيا مثل NaCl, KI هي مواد مستقطبة (وجد أن قيمة العزم الكهربائي لذي القطبين بالنسبة لـ K^+I^- يساوي $p = 23 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ ومتجه من الشحنة الموجبة لإيون البوتاسيوم K^+ إلى الشحنة السالبة لإيون اليود I^-).



(أ)



(ب)



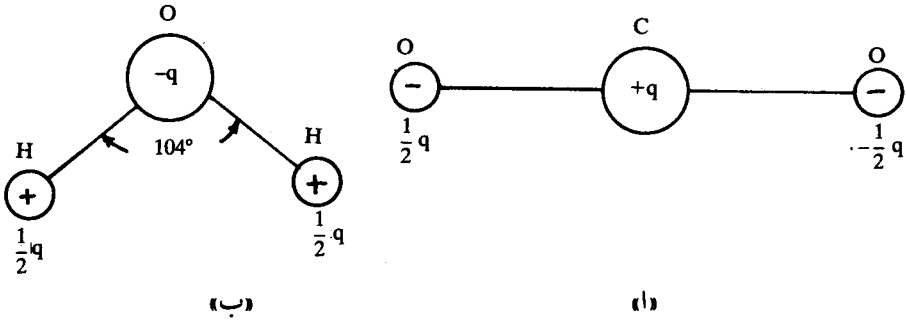
(ج)

شكل (٣-١٢): ١ - مادة عازلة مستقطبة في اتجاه عشوائي .

ب - وضعت هذه المادة في مجال كهربي E_0 ضعيف فاتجهت بعض الجزيئات مع المجال الكهربي فتكونت شحنات مستحثة (تأثيرية) q_i لها مجال كهربي تأثيري E_i يعاكس E_0 .

ج - أصبح المجال الخارجي E_0 كبيراً فزادت الجزيئات المتجهة مع المجال وزادت بذلك q_i ، E_i .

أما بالنسبة للمواد التي جزيئاتها مكونة من أكثر من ذرتين فإن نوع الاستقطاب يتوقف على تركيب (structure) الذرات وترتيب (arrangement) الشحنات . فمثلا ثاني أكسيد الكربون (CO_2 - carbon dioxide) تركيبه متماثل مع محور التماثل كما في شكل (١٣- أ) ولذلك نجد أن ذرة الكربون مشتركة مع ذرتين من الأكسجين مكونة بذلك اثنين من ذي القطبين عزمهما متعاكسان بحيث يلغى كل منهما الآخر. وبذلك فإن عزم جزيء CO_2 يساوي الصفر وبذلك يعتبر CO_2 مادة عازلة غير مستقطبة وثابت عزلها ضعيف بينما جزيء الماء H_2O فإن تركيبه غير متماثل على شكل مثلث متساوي الساقين (isosceles triangle) كما في شكل (١٣- ب) وبذلك فجزيء الماء له خاصية المواد العازلة المستقطبة وقيمة عزمه تساوي $p = 6.1 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$



شكل (١٣- أ) : يعتبر ثاني أكسيد الكربون CO_2 مادة عازلة غير مستقطبة لأن كل ذرة كربون تتحد مع ذرتين من الأكسجين مكونة بذلك عزمين متساويين ومعاكسين .
ب - جزيء الماء H_2O له خاصية المواد العازلة المستقطبة . لأن تركيبه غير متماثل على شكل مثلث متساوي الساقين .

ومن المواد غير المستقطبة والمستعملة مادة عازلة البوليثلين (ضرب من البلاستيك polyethylen-) والبرافين (paraffin) والمطاط (rubber) وزيت البترول .

(١٠-٣) ثابت العزل

Dielectric Constant

أول من فكر في دراسة المادة العازلة بين صفيحتي مكثف هو العالم ميخائيل فرادي (Michael Faraday) عام ١٨٨٧ ميلادي حيث استعمل مكثفين متماثلين في الخواص

والأبعاد ووضع بين صفيحتي أحدهما مادة عازلة وسلط عليهما الجهد نفسه فوجد أن السعة في حالة وجود المادة العازلة أكبر منها في الحالة الأخرى. فإذا كانت C_0 سعة المكثف في الفراغ و C سعته بعد وضع المادة العازلة فإن العامل :

$$K = \frac{C}{C_0} \quad \dots\dots\dots (٣-٢٤)$$

يعرف بثابت العزل للمادة وليست له وحدات .

وتفسير ذلك، حسب ما ورد في الفقرة السابقة (٣-٩)، هو أنه نتيجة للاستقطاب تتولد شحنات تأثيرية (induced charges) على سطحي المادة العازلة في مواجهة لوحَي المكثف وتعاكس نوع الشحنات على لوحَي المكثف [كما في شكل (١٢-ج-٣)]، وتسمى الشحنات التأثيرية بالشحنات المقيدة (bound charges) بينما تسمى الشحنات على لوحَي المكثف بالشحنات الحرة (free charges)، وينشأ عن الشحنات التأثيرية المقيدة مجال كهربي تأثيري E_i داخل المادة العازلة يعاكس اتجاه المجال الأصلي وتقلل من قيمته. فإذا فرض أن قيمة المجال قبل وضع المادة العازلة E_0 فإن قيمته بعد وضع المادة العازلة هي :

$$E = E_0 - E_i \quad \dots\dots\dots (٣-٢٥)$$

وواضح من هذه المعادلة أن E (محصلة المجالين المتعاكسين E_i, E_0) أصغر من E_0 . فإذا فرض أن المسافة بين لوحَي المكثف d فإن فرق الجهد بعد وضع المادة العازلة ($V=Ed$) وقبل وضع المادة العازلة ($V_0=E_0d$). وبما أن الشحنات الحرة على لوحَي المكثف لم تتغير فإن السعة قبل وضع المادة العازلة هي :

$$C_0 = \frac{q}{V_0} = \frac{q}{E_0 d} \quad \dots\dots\dots (٣-٢٦)$$

وبعد وضع المادة العازلة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{E d} \quad \dots\dots\dots (٣-٢٦ ب)$$

وبذلك يُحصل من المعادلتين (٣-٢٤) و (٣-٢٦) على :

$$\therefore \frac{C}{C_0} = \frac{E_0}{E} = K \quad \dots\dots\dots (٣-٢٧)$$

$$\therefore E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} , E = \frac{\sigma}{\epsilon} \dots \dots \dots (٣-٢٨)$$

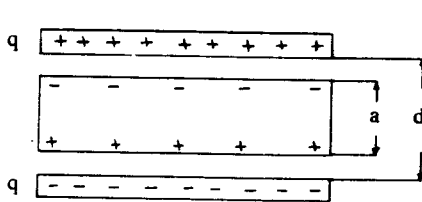
وذلك حسب المعادلة (١-٥٧).

$$\therefore K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (٣-٢٩)$$

حيث σ كثافة الشحنة على لوحى المكثف. ولذلك يسمى K أيضا بالسماحية النسبية (relative permittivity) ويرمز لها بالرمز ϵ_r .

$$\therefore \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (٣-٢٩ ب)$$

ويمكن قياس ثابت العزل K بالنسبة للغازات والسوائل بمعرفة السعة للمكثف في حالة الفراغ C_0 ووضع المكثف في السائل أو الغاز C ثم تطبيق المعادلة (٣-٢٧).



شكل (٣-١٤): وضع مادة عازلة صلبة بين لوحى مكثف مستوي.

أما بالنسبة للمواد العازلة الصلبة، فيمكن قياس الثابت K بمعرفة التغير في السعة للمكثف قبل وبعد وضع صفيحة المادة العازلة slab بين لوحيه حتى ولو كانت المادة العازلة لا تملأ الفراغ بين لوحى المكثف كما في شكل (٣-١٤).

وبتطبيق المعادلتين (٣-٢٦) و (٣-٢٨) على الشكل (٣-١٤) فإن فرق الجهد بين

الصفيحتين يعطى بالمعادلة:

$$V = E_0 (d - a) + Ea$$

حيث d المسافة الفاصلة بين لوحى المكثف و a سمك المادة العازلة.

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - a) + \frac{\sigma}{\epsilon} a = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - a) + \frac{\sigma}{K\epsilon_0} a$$

$$\therefore V = \frac{q}{\epsilon_0 S} \left[d - a \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = \frac{S\epsilon_0}{d-a(1-1/K)} \dots\dots (٣-٣٠)$$

وواضح أنه بدون المادة العازلة تكون $a=0$ و $K=1$ ، وتؤول المعادلة (٣-٣٠) إلى المعادلة (٣-٥).

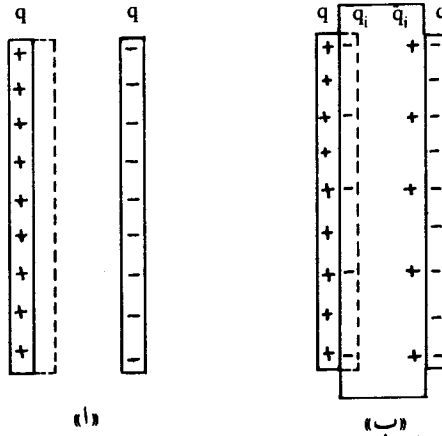
(١١-٣) العوازل ونظرية جاوس

Dielectrics and Gauss's Law

وجد فيما سبق دراسته في الفصل الأول أن خطوط القوى التي تنفذ إلى الخارج من أي سطح مغلق [الفيض الكهربي على سطح مغلق] يساوي $1/\epsilon_0$ في محصلة كمية الشحنة داخل السطح (قانون جاوس) وعُبر عن ذلك رياضياً بالمعادلة (١-٤٧).

$$\oint E \cos \theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q$$

يمثل الشكل (٣-١٥) مكثفا في وجود مادة عازلة وآخر في عدم وجود هذه المادة والخط المنقوط يمثل سطح جاوس في الحالتين:



«أ»

«ب»

شكل (٣-١٥): المواد العازلة وقانون جاوس:
 أ - مكثف قبل وضع المادة العازلة.
 ب - بعد وضعها.

فإذا كانت E_0 تمثل المجال في حالة عدم وجود المادة العازلة فإنه بتطبيق قانون جاوس يمكن الحصول على:

$$\oint E \cdot dS = E_0 S = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (3-31)$$

أما إذا كانت E هي شدة المجال في حالة وجود المادة العازلة، يحتوي (في هذه الحالة) سطح جاوس على نوعين من الشحنات هما q و q_i ، فإنه بتطبيق قانون جاوس على الشكل (١٥-ب-٣) يمكن الحصول على:

$$\oint E dS = ES = \frac{1}{\epsilon_0} (q - q_i)$$

أو

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} - \frac{q_i}{\epsilon_0 S} \dots \dots \dots (3-32)$$

حيث q الشحنات الحرة (free charges) و σ الكثافة السطحية لها. بينما q_i الشحنة السطحية التأثيرية (الحثية - induced surface charges) والتي تسبب في توليد مجال كهربائي تأثيري (حثي) يعاكس المجال الكهربائي الأصلي وتكون قيمته حسب المعادلة (٣-٣٢):

$$E_i = \frac{q_i}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (3-33)$$

حيث σ_i الكثافة السطحية للشحنة التأثيرية. وبالتعويض في المعادلة (٣-٣٢) من المعادلتين (٣-٣١) و (٣-٣٣) نحصل على المعادلة (٣-٢٥) وهي:

$$E = E_0 - E_i$$

ولذلك يقل المجال الكهربائي بين صفيحتي المكثف بعد وضع المادة العازلة وتزيد بذلك سعة المكثف.

ولكن من المعادلتين (٣-٢٨) و (٣-٢٩) يمكن الحصول على :

$$E = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{q}{K\epsilon_0 S} \dots\dots\dots (٣-٣٤)$$

ويكون من هذه المعادلة والمعادلة (٣-٣٢) المعادلة التالية :

$$\frac{q}{K\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S} - \frac{q_i}{\epsilon_0 S} \dots\dots\dots (٣-٣٥)$$

أو

$$q_i = q(1 - 1/K) \dots\dots\dots (٣-٣٦)$$

وتوضح هذه المعادلة أن q_i دائما أقل من q وتساوي صفرا في حالة عدم وجود المادة العازلة حيث $K = 1$.

ومما تقدم وحسب الشكل (٣-١٥) يمكن كتابة قانون جاوس في صورته العامة وفي وجود مادة عازلة K كالآتي :

$$\oint E \cos \theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q - q_i) \dots\dots\dots (٣-٣٧)$$

حيث تمثل $(q - q_i)$ محصلة الشحنات خلال سطح جاوس . وبالتعويض عن q_i من المعادلة (٣-٣٦) يُحصل على :

$$\oint K E \cos \theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} q \dots\dots\dots (٣-٣٨)$$

وهذه المعادلة عامة ومهمة لقانون جاوس في حالة وجود مادة عازلة ، وإن كانت اشتقت في حالة المكثف ذي اللوحين . ويلاحظ من هذه المعادلة ما يلي :

- ١ - يحتوي التكامل على المعامل K .
- ٢ - أن الشحنات التي يحتويها سطح جاوس أخذت على أنها الشحنات الحرة فقط

q ، وقد أهملت الشحنات السطحية المستحثة q_i من الجهة اليمنى للمعادلة وأخذت في الحسبان ضمن المعامل K في الجانب الأيسر للمعادلة. المعادلتان (٣-٣٧) و (٣-٣٨) متماثلتان تماما في الصياغة.

ويمكن كتابة المعادلة (٣-٣٨) بالصورة التالية :

$$\oint K \epsilon_0 E \cos \theta dS = q \quad \dots \dots \dots (٣-٣٩)$$

أو

$$\oint D \cos \theta dS = q \quad \dots \dots \dots (٣-٤٠)$$

أو

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

حيث

$$D = K \epsilon_0 E = \epsilon E \quad \dots \dots \dots (٣-٤١)$$

وتسمى D بالإزاحة الكهربائية (electric displacement) وهي كمية متجهة ويمكن تمثيلها بعدد من الخطوط كما هو الحال في المجال الكهربائي E والإزاحة بتعريفها هذا ليس لها مدلول طبيعي معين كما هو الحال في تعريف شدة المجال E التي تدل على القوة المؤثرة على وحدة الشحنات. والسبب الوحيد لإدخال هذه الكمية هو فائدتها في تبسيط المعادلات. ولا يمكن اعتبار D سوى كمية رياضية تؤدي هذا الغرض. وأول من استخدمها ماكسويل صاحب النظرية الكهرومغناطيسية.

وبمقارنة المعادلة (٣-٤١) مع المعادلة (٣-٣٤) يكون :

$$D = q/S \quad \therefore q = DS \quad \dots \dots \dots (٣-٤٢)$$

حيث DS تساوي عدد خطوط الإزاحة المارة خلال سطح جاوس.

وواضح أنه في حالة عدم وجود المادة العازلة يكون :

$$D = \epsilon_0 E \quad \dots \dots \dots (٣-٤٣)$$

ووحدة D في النظام العالمي (S.I) هو كولوم/متر^٢.

وبالتعويض عن D في المعادلة (١-٦٤) من المعادلة (٣-٤٣) يُحصل على :

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \oint_V \rho dV \quad \dots \dots \quad (٣-٤٤)$$

وحسب المعادلة (١-٦١) فإن المعادلة التفاضلية للمعادلة (٣-٤٠) هي :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \dots \dots \dots (٣-٤٤ \text{ ب})$$

وهذه المعادلة تمثل شكلاً آخر للمعادلة الأولى لماكسويل (١-٦١).

(٣-١٢) الاستقطاب والإزاحة الكهرية

Polarization and Electric Displacement

تُعد الشحنات المستحثة على سطح عازل موضوع في مجال كهربي إحدى مظاهر تأثير العازل بالمجال الكهربي، وتظهر هذه الشحنات نتيجة لاستقطاب أو توجيه جزيئات العازل (polarization or orientation of the molecules) لذلك فإن تكوين هذه الشحنات ليس بالظاهرة السطحية إنما هو ظاهرة حجمية كما ورد ذكر ذلك في البند (٣-٩). والمعادلة (٣-٢٠) تحدد عزم ذي القطبين لجزيء مستقطب، والمعادلة (٣-٢١) تحدد عزم ذي القطبين لوحدة الحجم P . ومن هاتين المعادلتين نحصل على :

$$P = Nq_i d / \quad \dots \dots \dots (٣-٤٥)$$

كما أنه يمكن التعبير عن P بطريقة أخرى .

فإذا فرض أن q_i هي الشحنات المستحثة على سطح شريحة مستقطبة من العازل مساحتها S وسمكها d واعتبرت الشريحة ذات قطبين كبيرين عزمه $q_i d$ فإن استقطاب العازل هو:

$$P = \frac{q_i d}{S d} = \frac{q_i}{S} = \sigma_i \quad \dots \dots \dots (٣-٤٦)$$

وهذا يعني أن الاستقطاب يساوي عدديا الكثافة السطحية للشحنات المقيدة على سطح المادة العازلة، ووحده تساو C/m^2 ، وفي الفراغ تساو صفرًا. ولكن من المعادلة (٣-٣٥) يكون:

$$\frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{q}{K \epsilon_0 S} + \frac{q_i}{\epsilon_0 S}$$

أو

$$\frac{q}{S} = \epsilon_0 \left(\frac{q}{K \epsilon_0 S} \right) + \frac{q_i}{S} \dots \dots \dots (٣-٤٧)$$

وبالتعويض من المعادلات (٣-٣٤)، (٣-٤٢) و (٣-٤٦) يُحصل على:

$$D = \epsilon_0 E + P \dots \dots \dots (٣-٤٨)$$

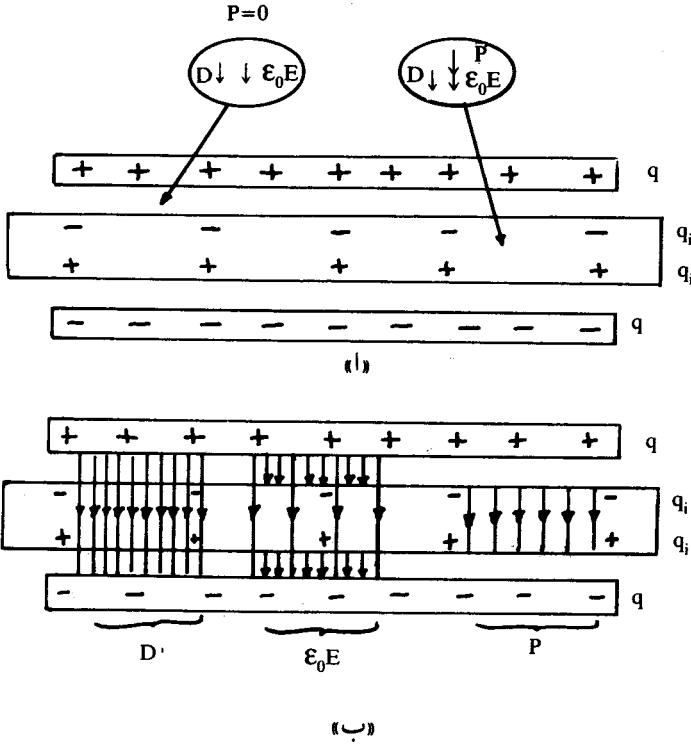
والشكل (٣-١٦) يوضح قيمة المتجهات الثلاثة P, D, E عند كل نقطة داخل المادة العازلة، وكذلك كل نقطة تقع في الفراغ.

من التعريفات السابقة نستنتج ما يلي:

- ١ - يتضح من المعادلة (٣-٤٢) أن D تختص بالشحنات الحرة q وخطوط قوى الإزاحة يمكن تمثيلها بخطوط تماثل خطوط القوى للمجال الكهربائي وكما يوضح ذلك الشكل (٣-١١٦) أن بداية ونهاية خطوط D هي الشحنات الحرة.
- ب - يتضح من المعادلة (٣-٤٦) أن P تختص بالشحنات المستحثة (المستقطبة) فقط. ويوضح الشكل (٣-١٦ ب) أن بداية ونهاية خطوط P هي الشحنات المستقطبة q_i .

ج - أما E فتختص بكل أنواع الشحنات سواء كانت حرة أو مستقطبة وخطوط القوى لـ E تمثل النوعين معا q و q_i كما يوضحه شكل (٣-١٦).

د - متجه $\vec{E}$ و $\vec{D}$ متوازيان إذا كان الوسط العازل منتظما أو متماثلا مناحيا (isotropic). أي لهذه المادة الخواص نفسها في كل الاتجاهات. بينما في المتباينة مناحيا (anisotropic) تختلف خواصها باختلاف اتجاه المحور كالمواد العازلة المتبلورة (crystalline) فإن اتجاه الإزاحة D قد يختلف عن اتجاه شدة المجال E .



شكل (٣-١٦): العلاقة بين المتجهات الثلاثة الاستقطاب p والمجال الكهربائي E والإزاحة D . عند كل نقطة تقع داخل المادة العازلة أو خارجها.

ولذلك فالمعادلة (٣-٤٨) هي تعريف عام للإزاحة عن المعادلة (٣-٤١).
وصحيحة في جميع الأحوال إذا اعتبرت علاقة بين متجهات، أي أن:

$$D_x = \epsilon_0 E_x + P_x$$

$$D_y = \epsilon_0 E_y + P_y \quad \dots \dots \dots (٣-٤٩)$$

$$D_z = \epsilon_0 E_z + P_z$$

هـ- تكتب المعادلة (٣-٢٧) في النظام الجاوسي على الشكل التالي:

$$D = E + 4\pi P \quad \dots \dots \dots (٣-٥٠)$$

(٣-١٣) التأثرية الكهربائية

Electric Susceptibility

يمكن كتابة المعادلة (٣-٤٨) بدلالة E فقط وذلك بالتعويض عن D من المعادلة (٣-٤١) فيُحصل على:

$$P = K\epsilon_0 E - \epsilon_0 E = \epsilon_0 (K-1)E \dots\dots (٣-٥١)$$

وواضح من هذه المعادلة أن العلاقة بين E و P علاقة خطية (linear) أي أن P تتناسب مع E ويسمى ثابت التناسب بالتأثرية الكهربائية ويرمز له بالرمز χ_e وبذلك يمكن كتابة المعادلة (٣-٥١) كالتالي:

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \dots\dots\dots (٣-٥٢)$$

ومن المعادلة (٣-٤٦) يمكن إيجاد تعريف آخر للتأثرية وهو:

$$\sigma_i = \epsilon_0 \chi_e E \dots\dots\dots (٣-٥٢)$$

أي أن التأثرية هي نسبة الكثافة السطحية للشحنة المستحثة إلى شدة المجال الكهربائي. ويُحصل من المعادلتين (٣-١٥٢) و (٣-٤٧) على:

$$D = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 K E = \epsilon_0 \epsilon_r E \dots\dots (٣-٥٣)$$

وينطبق التعريفان (٣-٥٢) و (٣-٥٣) في الحالة الخاصة التي يتخذ فيها العازل شكل شريحة رقيقة موضوعة في مجال كهربائي عمودي على وجهيها، حيث يتساوى الاستقطاب P والكثافة السطحية للشحنة المستحثة σ_i ، أما في الحالة العامة فإن الشحنات المستحثة لا تكون كلها على السطح العازل. عند ذلك تتغير قيمة الاستقطاب من نقطة إلى أخرى وتعرف التأثرية الكهربائية عند أي نقطة بأنها نسبة الاستقطاب إلى شدة المجال عند هذه النقطة.

من المعادلتين (٣-٥١) و (٣-٥٢) يُحصل على:

$$\chi_e = K - 1$$

$$\therefore K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \dots\dots\dots (٣-٥٤)$$

وهذه المعادلات الثلاث تربط بين التأثرية χ_e وثابت العزل K والمساحية (الإتاحتية) ϵ ، وبمعرفة إحداهما يمكن معرفة العوامل الأخرى أي يمكن تحديد الخواص الكهرية للعازل.

اشتقت المعادلات (٣-٥١) و (٣-٥٤) على أساس وحدات النظام العالمي (S.I) أما بالنسبة للنظام الجاوسي فتصبح كالتالي :

$$P = \left(\frac{K-1}{4\pi} \right) E$$

$$\chi_e = \frac{K-1}{4\pi} \dots\dots\dots (٣-٥٥)$$

$$P = \chi_e E$$

وتوضح المعادلة (٣-٥١) أن $P=0$ في حالة الفراغ (حيث $K=1$) ومنه $\chi_e=0$ أو عندما يكون $E=0$ ، وقد لا تكون هذه المعادلة صحيحة لبعض المواد العازلة مثل المواد تلقائية الاستقطاب التي تحتفظ باستقطاب شحناتها حتى ولو كانت $E=0$.

والجدول (٣-١) يوضح قيم ثابت العازل لبعض المواد العازلة .

وقد وجد ، بالنسبة للمواد العازلة المستقطبة ، أن الاستقطاب P يتناسب تناسباً عكسياً مع درجة الحرارة حسب العلاقة :

$$P = \frac{Np^2E}{3KT} \dots\dots\dots (٣-٥٦)$$

حيث N عدد الجزيئات لوحدة الحجم ، p عزم ذي القطبين ، T درجة الحرارة ، K ثابت يسمى ثابت بولتزمان (Boltzmann's constant).

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٣-٥٢) يُحصل على :

$$\chi_e = \frac{Np^2}{3\epsilon_0KT} \dots\dots\dots (٣-٥٧)$$

جدول (٣-١) : ثابت العزل لبعض المواد

المواد	درجة الحرارة	ثابت العزل	المواد	ثابت العزل
أ- غازات Gases		جـ- المواد الصلبة عند درجة حرارة الغرفة		
الفراغ	25°C	1.00000	زجاج 0010	6.68
الهواء	25°C	1.000536	زجاج 0080	8.30
أرقون	25°C	1.000517	بيركس 7050	4.88
ثاني أكسيد الكربون	25°C	1.000922	بيركس 7070	4.00
هيليوم	25°C	1.000065	زجاج رغوي	90.00
هيدروجين	25°C	1.000254	مرور منصهر	3.75 - 4.1
أوكسيجين	25°C	1.000495	نيترات الباريوم	5.9
بخار الماء	100°C	1.0126	ألماس	5.5
ب- السوائل Liquids		نيترات الرصاص		
الأمونيا	25°C	16.9	نفتالين	37.7
بنزين	20°C	2.284	ميكا	2.85
كحول أثيلي	20°C	24.3	نيوبرين «نوع من	2.5 - 70
جليسرو	25°C	42.5	المطاط الاصطناعي»	6.70
زيت الخروع	15°C	4.7	بوليستيرين	2.56
زيت بذور القطن	14°C	3.10	كهرمان	2.65
زيت محولات	25°C	2.22	شمع البرافين	2.10 - 2.5
ماء	25°C	78.54	ثاني أكسيد التيتانيوم	100.0

(١٤-٣) شدة (مقدرة) العزل

Dielectric Strength

لا يمكن زيادة المجال الكهربي في أي مادة عازلة بشكل غير محدود، لأنه عند زيادة المجال عن قيمة معينة فستحدث شرارة كهربية ويقال في هذه الحالة إن المادة العازلة انهارت (break - down). وإذا كان المجال الكهربي منتظماً تحصل الشرارة عندما يزيد المجال عن القيمة الحرجة (critical value) أما إذا كان المجال غير منتظم فيحصل أولاً التفريغ التوهجي (glowing discharge) أو التفريغ الهالي (corona discharge). والقيمة العظمى لشدة المجال التي يمكن للمادة العازلة تحملها دون أي انهيار لها تسمى بشدة (مقدرة) العزل. فإذا فرض أن فرق الجهد الذي يحدث عن الانهيار V_{br} و d عرض المادة العازلة (المسافة بين لوحى المكثف) فإن المجال الذي يحدث عنده الانهيار هو:

$$E_{br} = V_{br}/d \quad (٣-٥٨)$$

ولذلك من المهم عند تصنيع المكثفات معرفة أقصى قيمة للجهد الذي يتحمله المكثف بحيث يكون جهد التشغيل V_{op} أقل من جهد الانهيار V_{br} . وتسمى النسبة V_{br}/V_{op} بمعامل الأمان (safety factor) لشدة المجال في المادة العازلة. وقيمة E_{br} تعتمد على عوامل أخرى مثل درجة الحرارة، والرطوبة، وتردد الجهد وغير ذلك. والجدول التالي يوضح قيم E_{br} لبعض العوازل.

جدول (٣-٢): مجال الانهيار لبعض المواد العازلة

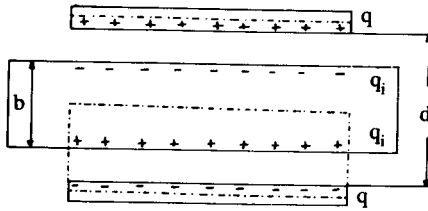
المواد	شدة العزل MV/m	المواد	شدة العزل MV/m
الهواء	3	خشب صناعي	25
الزيت	15	صفائح زجاج	30
ورق مشرب	15	شمع معدني	30
بروليستيرن	20	مرو	30
مطاط صلب	21	ميكا	200

مثال (٣-٨)

وضعت مادة عازلة على شكل شريحة سمكها b وثابت عزلها K بين صفيحتي مكثف متوازي اللوحين المسافة بينهما d ومساحة كل منها S كما في الشكل الآتي. فإذا كان فرق الجهد بينهما V_0 بدون وجود المادة العازلة وكانت:

$$V_0 = 100 \text{ V} , K = 7.0 , d = 1.0 \text{ cm} , b = 0.50 \text{ cm} , S = 100 \text{ cm}^2$$

فاحسب:



أ - سعة المكثف C_0 قبل إدخال المادة العازلة.

ب - الشحنات الحرة q

ج - المجال الكهربائي E_0 بين اللوحين.

د - المجال الكهربائي E بعد وضع المادة العازلة.

هـ - فرق الجهد بين اللوحين.

و - سعة المكثف بعد وضع المادة العازلة.

الحل

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{(8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(10^{-2} \text{ m}^2)}{10^{-2} \text{ m}} = 8.9 \mu\text{F} \quad \text{أ -}$$

$$q = C_0 V_0 = (8.9 \times 10^{-12} \text{ F})(100 \text{ V}) = 8.9 \times 10^{-10} \text{ C} \quad \text{ب -}$$

ج - بتطبيق قانون جاوس يكون:

$$\epsilon_0 \oint K \cos \theta \, dS = \epsilon_0 E_0 S = q$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{8.9 \times 10^{-10} \text{ C}}{(8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(10^{-2} \text{ m}^2)} = 1.0 \times 10^4 \text{ V/m}$$

وفي هذه الحالة $K = 1$ لأن المادة العازلة غير موجودة .
 د - بتطبيق قانون جاوس مرة أخرى في وجود المادة العازلة يكون :

$$\epsilon_0 K E S = q$$

$$\therefore E = \frac{q}{\epsilon_0 K S} = \frac{E_0}{K} = \frac{1.0 \times 10^4 \text{ V/m}}{7.0} = 0.143 \times 10^4 \text{ V/m}$$

هـ -

$$\begin{aligned} \therefore V &= - \int E \cdot dL = E_0 (d - b) + E b \\ &= (1.0 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-3}) + (0.14 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-3}) = 57 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{q}{V} = \frac{8.9 \times 10^{-10} \text{ C}}{57 \text{ V}} = 16 \mu\text{F}$$

واضح مما سبق أن الجهد نقص من 100 V إلى 75 V بعد إدخال المادة العازلة .
 أما السعة فارتفعت قيمتها من $8.9 \mu\text{F}$ إلى $16 \mu\text{F}$ بينما لو أن هذه المادة العازلة ملأت المكثف فإن السعة ستصبح $62 \mu\text{F}$ لأن $K = 7.0$.

مثال (٣-٩)

في المثال السابق احسب P و D في :

أ - وجود المادة العازلة .

ب - عدم وجود المادة العازلة .

الحل

$$\therefore D = K \epsilon_0 E$$

أ -

$$\therefore D = (7.0) (8.9 \times 10^{-12}) (1.43 \times 10^3) = 8.9 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$P = \epsilon_0 (K - 1) E$$

معروف أن :

$$\therefore P = (8.9 \times 10^{-12}) (7.0 - 1) 1.43 \times 10^3 = 7.6 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$D_0 = K \epsilon_0 E_0$$

ب -

$$\therefore D_0 = 1 \times 8.9 \times 10^{-12} \times 1.00 \times 10^4 = 8.9 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$P_0 = \epsilon_0 (K - 1) E_0 = 0$$

$$K = 1 \text{ لأن}$$

وواضح أن P تنعدم في عدم وجود المادة العازلة بينما D لها القيمة نفسها في وجود المادة العازلة أو عدم وجودها.

مثال (٣-١٠)

لوحان متوازيان مساحة كل منهما 1m^2 وشحنة كل منهما متساوية ومختلفة في النوع وقدرها $30\mu\text{C}$ وضعت بينها مادة عازلة سماحيتها $15 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ شغلت الفراغ الموجود بين اللوحين.
احسب:

- ا - شدة المجال المحصل من المادة العازلة.
- ب - الكثافة السطحية للشحنة المستحثة على أوجه المادة العازلة.
- ج - مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات الحرة.
- د - مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات المستحثة.

الحل

ا - الكثافة السطحية للشحنات الحرة هي :

$$\sigma = \frac{q}{S} = 30 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\therefore E = \frac{1}{K\epsilon_0} \frac{q}{S} = \frac{1}{\epsilon} \sigma = \frac{1}{15 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6} = 2 \times 10^6 \text{ V/m}$$

ب - الكثافة السطحية للشحنات المستحثة هي :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \epsilon_0 \chi_e E = (\epsilon - \epsilon_0) E \\ &= (15 \times 10^{-12} - 8.85 \times 10^{-12}) \times 2 \times 10^6 \\ &= 12.3 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

ج - مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات الحرة

$$E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6} = 3.39 \times 10^6 \text{ V/m}$$

د - مركبة شدة المجال المحصل الناتج عن الشحنات المستحثة .

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_i = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \times 12.3 \times 10^{-6}$$

$$= 1.39 \times 10^6 \text{ V/m}$$

واتجاهه عكس اتجاه E_0

نما سبق يمكن حساب شدة المجال المحصل :

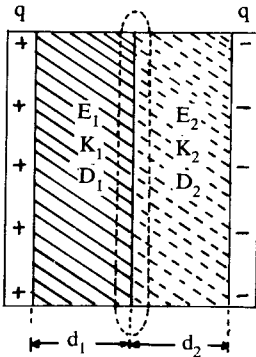
$$\therefore E = E_0 - E_i$$

$$\therefore E = 3.39 \times 10^6 - 1.39 \times 10^6 = 2 \times 10^6 \text{ V/m}$$

وهي النتيجة نفسها التي حصل عليها في الفقرة «ا» .

(١٥-٣) سعة مكثف مستوي وضع بين لوحيه عازلان مختلفان

Capacitance of a Parallel-Plate Capacitor Filled with Two Different Dielectrics



يمثل الشكل المجاور مكثف مستوي شحن لوحاه المتوازيان بشحنتين $+q$, $-q$ متساويتين في المقدار وملاً الفراغ بينهما بمادتين عازلتين سمكهما d_1 و d_2 وثابت عزلهما K_1 , K_2 فإذا كانت E_1 و E_2 شدتي المجال بداخل كل من العازلين فإن :

شكل (٣-١٧) : مكثف مستوي وضعت بين لوحيه مادتان عازلتان مختلفتان .

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = K_1 \epsilon_0 E_1$$

$$\therefore (٣-٥٩)$$

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 = K_2 \epsilon_0 E_2$$

ولنكون الآن سطحاً جاوسياً بالطريقة المبينة بالخط المنقط في الشكل فنلاحظ أنه لا يحتوي بداخله على شحنات حرة، ولما كانت D تتجه من اليسار إلى اليمين في كل من العازلين، فإننا نجد أن:

$$\oint D \cos \theta dS = -D_1 S + D_2 S = 0$$

$$\therefore D_1 = D_2 \quad \dots\dots\dots (٣-٦٠)$$

أي أن الإزاحة واحدة في كل من العازلين.

وبمقارنة المعادتين (٣-٥٩) و (٣-٦٠) نجد أن:

$$K_1 E_1 = K_2 E_2 \quad \therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{K_2}{K_1}$$

ولكن تعطى السعة بالمعادلة (٣-٤)، $C = q/V$ ، حيث:

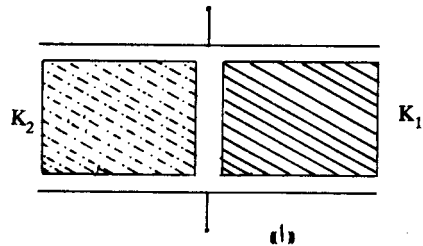
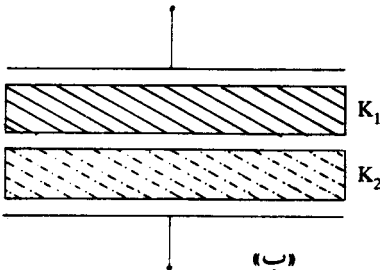
$$q = \sigma S, \quad V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad \& \quad \sigma = D$$

$$\therefore C = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}} = \epsilon_0 S \left(\frac{K_1 K_2}{K_2 d_1 + K_1 d_2} \right)$$

مثال (١١ - ٣)

قارن سعتي المكثفين المتشابهين مع اختلاف وضع المادتين العازلتين بينهما كما يظهر ذلك في الشكل المجاور التالي:



في الحالة (ا) يمكن عد المكثف مؤلفاً من مكثفين مساحة كل منهما $\frac{1}{2}S$ إذا كانت مساحة اللوح كله S متصلين على التوازي وعازلهما مختلف فيكون:

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{2} K_2}{d} \quad \text{والثاني} \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{2} K_1}{d} \quad \text{سعة المكثف الأول}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (K_1 + K_2)$$

أما في الحالة (ب) فالعازل K_1 سمكه $\frac{1}{2}d$ و K_2 سمكه $\frac{1}{2}d$ أيضاً وتكون بذلك سعة المكثف:

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d}{2K_1} + \frac{d}{2K_2}} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} \left\{ \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)} \right\} \therefore \frac{C'}{C} = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2}$$

(١٦-٣) الشروط الحدودية

Boundary Conditions

يمثل الشكل (١٧-٣) وسطين عازلين (1) و (2) يفصلهما سطح فاصل $Y Y'$ ومعامل السماح لهما هو ϵ_1 و ϵ_2 على الترتيب وثابت العزل لهما K_1 و K_2 وبإدخالهما في مجال كهربى خارجي تصبح شدة المجال في الوسط الأول E_1 وفي الوسط الثاني E_2 .

لقد وضح في البند (١٥-٣) أن الإزاحة الكهرية واحدة في عازلين مختلفين متجاورين وأن شدتي المجال وثابت عزلهما مرتبطان بالعلاقة:

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \quad , \quad K_1 E_1 = K_2 E_2$$

وفي هذه الحالة يتخذ المتجهان E, D الاتجاه العمودي على السطح الفاصل بين العازلين. أما في الحالة العامة فإن كلا من المتجهين D و E قد يصنع زاوية مع السطح الفاصل بين العازلين، ويكون تغيير مقدارى واتجاهى كل من E و D عبر الحدود بين العوازل تغييراً غير مستمر.

وباعتبار أن خطوط القوى في الوسط الأول ساقطة على السطح الفاصل بزاوية سقوط قدرها ϕ_1 ، وتنكسر خطوط القوى على هذا السطح ، فإن خطوط القوى تدخل إلى الوسط الثاني بزاوية قدرها ϕ_2 كما في شكل (١٧-٣) . وتحليل شدة المجال في كل من الوسطين إلى مركبتين متعامدتين يمكن الحصول على :

$E_1 \cos \phi_1$ و $E_2 \cos \phi_2$ في الاتجاه العمودي على السطح الفاصل و $E_1 \sin \phi_1$ و $E_2 \sin \phi_2$ في اتجاه السطح الفاصل .

ويتطبيق التحليل نفسه على الإزاحة D كما في شكل (١٧ ب-٣) وباستخدام التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي حول مسار مقفل حسب المعادلة (٢٣-٢) على مركبات E وقانون جاوس العام حسب المعادلة (٤٠-٣) على مركبات D فإنه يمكن معرفة العلاقة بين ثابتي العزل K_1 و K_2 وزاوية السقوط ϕ_1 وزاوية الانكسار ϕ_2 كما يلي :

إذا اعتبر المسار المغلق $abcd$ الذي يقع في مستوى الرسم ، فإن التكامل الخطي لشدة المجال الاستاتيكي حول مسار مقفل يساوي الصفر ، فإذا أهمل طول الضلعين cd و ab لصغرهما واعتبر طول كل من الضلعين bc و ad يساوي l بحيث يقع الضلع bc في الوسط العازل K_2 و ad في الوسط العازل K_1 ، فإن التكامل الخطي للضلع ad يساوي :

$$lE_{t1} = lE_1 \sin \phi_1$$

والتكامل الخطي للضلع bc يساوي :

$$lE_{t2} = -lE_2 \sin \phi_2$$

وبذلك فإن التكامل الخطي الكامل يساوي :

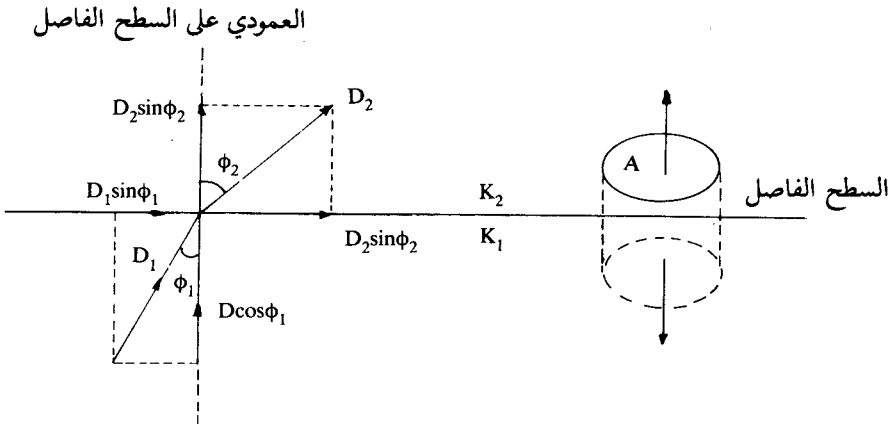
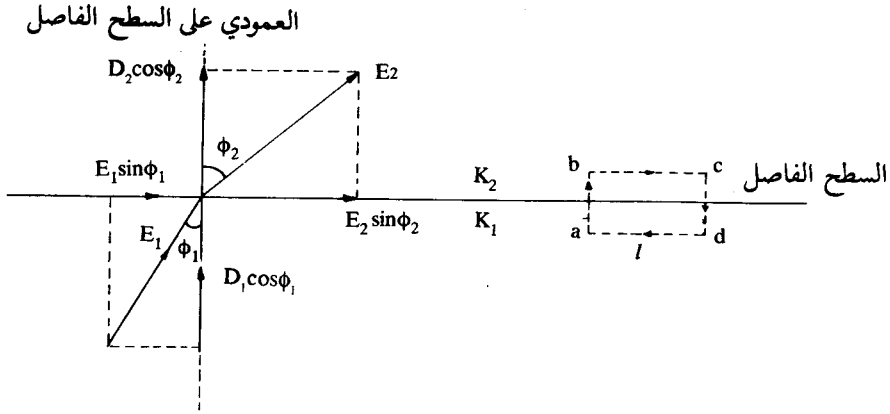
$$\oint E dl = lE_1 \sin \phi_1 - lE_2 \sin \phi_2 = 0$$

$$\therefore E_1 \sin \phi_1 = E_2 \sin \phi_2 \quad \dots \dots \dots (٣-٦١)$$

أي أن مركبة شدة المجال المماسية ($\text{tangential component}$) $E \sin \phi$ مستمرة عبر الحدود .

وإذا اعتبر السطح الأسطواني المقفل كما في شكل (١٧ ب-٣) ، مساحة كل من قاعدتيه تساوي S وأهمل طول الاسطوانة لقصرها ، وحيث إنه لا توجد شحنات حرة

داخل هذا السطح وإن كانت هناك شحنات تأثيرية مقيدة على سطحي العازلين الملامسين للسطح الفاصل نتيجة لاستقطاب العازلين بتأثير المجال الكهربائي، فإن التكامل السطحي لمركبة D العمودية على السطح يساوي صفراً.



شكل (١٧-٣): الشروط الحدودية

أ - لمادتين عازلتين مختلفتين. فإذا سقطت خطوط المجال على السطح الفاصل بزاوية معينة فإنها ستتكسر على هذا السطح وتدخل إلى الوسط الثاني بزاوية أخرى.

ب - وكذلك الحال بالنسبة للإزاحة D .

وبتطبيق قانون جاوس على السطح المقفل يُحصل على :

$$\oint D \cos \phi \, dS = SD_1 \cos \phi_1 - SD_2 \cos \phi_2 = 0$$

$$\therefore D_1 \cos \phi_1 = D_2 \cos \phi_2 \quad \dots \dots \dots (٣-٦٢)$$

وقد أهمل التكامل السطحي على جوانب السطح المقفل .

وتدل المعادلة (٣-٦٢) على أن مركبة الإزاحة العمودية ($D \cos \phi$) مستمرة عبر الحدود الفاصلة بين العازلين .

وبقسمة المعادلة (٣-٦١) على المعادلة (٣-٦٢) يمكن الحصول على :

$$\frac{E_1 \sin \phi_1}{D_1 \cos \phi_1} = \frac{E_2 \sin \phi_2}{D_2 \cos \phi_2}$$

ولما كانت العلاقة بين E و D هي :

$$D_1 = K_1 \epsilon_0 E_1 \quad , \quad D_2 = K_2 \epsilon_0 E_2$$

$$\therefore \frac{E_1}{D_1} \tan \phi_1 = \frac{E_2}{D_2} \tan \phi_2$$

$$\frac{1}{K_1} \tan \phi_1 = \frac{1}{K_2} \tan \phi_2$$

أو

$$\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad \dots \dots \dots (٣-٦٣)$$

وهذه المعادلة شبيهة بتعريف قانون سنل Snell's law لمعامل انكسار الضوء على الحد بين وسطين عازلين مختلفين لذلك تسمى المعادلة (٣-٦٣) بقانون انكسار خطوط القوى لمجال كهربائي في وسطين عازلين مختلفين .

وإذا فرض أن أحد الوسطين العازلين هو الفراغ حيث $K_2 = 1$ فإن المعادلة

(٣-٦٣) تصبح :

$$K_1 = \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \dots \dots \dots (٣-٦٤)$$

حيث ϕ_1 زاوية الانكسار في الفراغ.

(١٧-٣) معامل إزالة الاستقطاب

Depolarization Factor

عرف فيما سبق دراسته أنه إذا وضعت مادة عازلة، على هيئة صفيحة كما في شكل (١٥-ب-٣)، في مجال كهربى خارجى E_0 ينتج عنه مجال داخلى E_i نتيجة للشحنات المستحثة q_i ، يعاكسه في الاتجاه ويعمل على نقصان المجال المحصل داخل المادة العازلة.

ولهذا فالمجال المستحث يعاكس الاستقطاب P ولذلك يسمى E_i بمجال إزالة الاستقطاب وحسبها ورد في البند (١١-٣) فإن المجال المحصل داخل هذه المادة يساوي:

$$E = E_0 - E_i$$

وبالتعويض عن E_0 من المعادلة (٣-٢٧)، $E_0 = KE$ ، يُحصل على:

$$E = KE - E_i$$

أو

$$E_i = (K - 1) E \dots \dots \dots (٣-٦٥)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٣-٥١) يُحصل على:

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0} P \dots \dots \dots (٣-٦٦)$$

وتكتب هذه المعادلة في حالتها العامة، حيث لا يكون العازل صفيحة، بالصورة التالية:

$$E_i = - \frac{\beta}{\epsilon_0} P \dots \dots \dots (٣-٦٧)$$

حيث β معامل إزالة الاستقطاب أما الإشارة السالبة فتدل فقط على أن اتجاه E_i عكس اتجاه P . وتعتمد β على شكل المادة العازلة. فإذا كانت على شكل كرة كانت $\beta = \frac{1}{3}$ ، وإذا كانت على شكل قضيب طويل وكانت E توازي محوره فإن $\beta = 0$ أما إذا كانت متعامدة فإن $\beta = \frac{1}{2}$.

(١٨-٣) المواد العازلة تلقائية الاستقطاب (فروكهربية)

Spontaneous Polarization Dielectric Materials (Ferroelectric)

لبعض المواد العازلة خواص منفردة. فتكون لها عزوم كهربية نتيجة للكبس (الضغط compression) أو الشد (tension) أو القطع (shear) وبصورة أخرى يمكن القول إن لهذه المواد المتجه استقطاب P دون تسليط أي مجال كهربي، ناتج عن الانبعاج (عيب شكل deformation). مثل هذه المواد تسمى بالمواد ذات الانفعال الكهربي الاجهادي (piezoelectric) مثل بلورة الكوارتز.

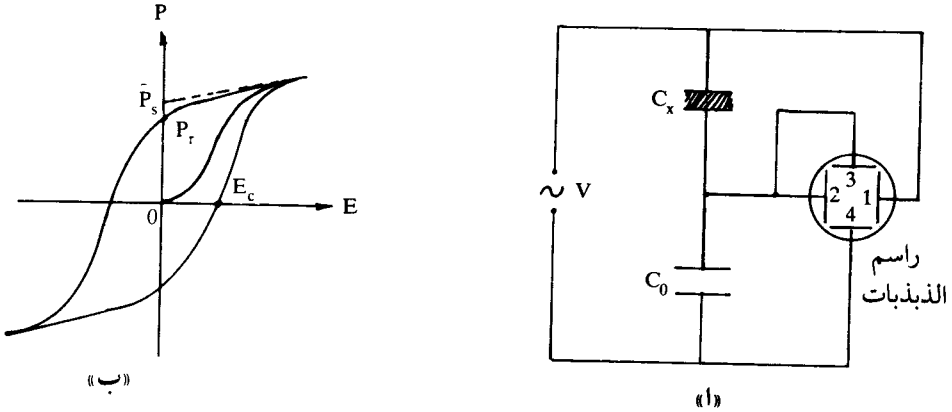
وتكون لبعض المواد متجه استقطاب P في غياب المجال الكهربي الخارجي E_0 وغياب الانبعاج مثل هذه المواد تعرف بالمواد الفروكهربية العازلة أو بالمواد العازلة تلقائية (عفوية) الاستقطاب.

وتتنتمي هذه المواد إلى أسرة المواد الكهربية الحرارية (pyro-electric family) ويمكن فيها عكس اتجاه الاستقطاب التلقائي بالمجال الكهربي أو اختلاف قيمته مع درجة الحرارة. والطريقة المتبعة للكشف عما إذا كانت المادة من المواد العازلة تلقائية الاستقطاب أو غيرها هي ما يلي:

إذا كانت المادة على هيئة بلورة (crystal) فتقطع منها شريحة رقيقة بصورة عمودية على أحد اتجاهات محاورها الثلاثة المتبادلة، أما إذا كانت المادة على هيئة مسحوق فإنه يمكن ضغطها على شكل أقراص ويثبت على جانبيها قطبي اتصال وذلك بطلي الجانبين بطلاء معدني مثل الذهب أو الفضة بالطريقة العادية أو بطريقة الرش الكاثودي

(sputtering). وهذه الطريقة فهي تماثل مكثفا مستويا به مادة عازلة سعته C_x ثم توصل بالدائرة البسيطة المبينة في شكل (١٨ - ٣) حيث C_0 مكثف مقارنة، و V منبع جهد متردد. ويكون V_x عبر المكثف C_x مساويا للجهد الواقع بين طرفي راسم الذبذبات 1 و 2 (الاسيلوسكوب oscilloscope).

ولما كانت سعة أقطاب راسم الذبذبات صغيرة كانت الشحنات المخزونة في C_x و C_0 متساوية. فإذا فرض أن q هي مقدار الشحنة فإن الجهد بين القطبين 3 و 4 هو q/C_0 على ذلك فإن الشكل الذي يظهر على الشاشة هو عبارة عن العلاقة بين q/C_0 و V .



شكل (٣-١٨): أ - دائرة كهربية تستخدم لرسم دورة التخلف الكهربي على راسم الذبذبات - الاسيلوسكوب.
ب - شكل دورة التخلف الكهربي لمادة عازلة عفوية الاستقطاب.

فإذا كانت المادة العازلة للمكثف C_x تعطى شكلا كما في شكل (١٨ - ب - ٣) والذي يسمى بدورة التخلف (hysteresis loop) الكهربي، [وهي تماثل تماما دورة التخلف المغناطيسي للمواد الفرومغناطيسية الذي سيشرح في الفصل السابع]، فإن المادة تسمى بالمادة العازلة لتلقائية الاستقطاب. وتناسب الشحنة q المشار إليها سابقا مع الإزاحة الكهربية D في المادة. وكما هو معروف فإن العلاقة بين D و E و P تحدد بالمعادلة (٣-٤٨).

وفي كثير من الحالات التي يلاحظ فيها دورة التخلف تكون قيمة P أكبر كثيرا من E ، ولذلك يمكن عد q/C_0 متناسبة مع P . ولذلك فإن العلاقة بين q/C_0 و V على راسم الذبذبات يمكن عدها علاقة بين P و E كما في شكل (١٨ ب - ٣) والذي اصطلح على تسميته بمنحنى الاستقطاب. وفي هذا المنحنى تسمى P_r ، عندما تكون $E = 0$ ، بالاستقطاب التخلفي (المتبقي - remanence polarization) و P_s الاستقطاب التلقائي و E_c [عندما تكون $P = 0$] يسمى بالمجال القهري (coercive field).

وينقص عادة الاستقطاب التلقائي مع ارتفاع درجة الحرارة حتى يتلاشى تماما عند درجة حرارة معينة T_C وتسمى درجة التحول هذه بنقطة كيوري (Curie point) فإذا كانت درجة الحرارة أقل من T_C تكون المادة في طور الفروكهربية (ferroelectric phase) أما إذا كانت أعلى فتكون المادة في طور الكهربية المتسامية (الباراكهربية) (paraelectric phase) ويكون ثابت عزل هذه المواد كبيرا يتراوح بين 10^2 و 10^5 إذا كانت درجة الحرارة قريبة من T_C . وقد وجد في هذه الحالة أن ثابت عزل المادة K يتبع القانون المعروف بقانون كيوري وفيس (Curie - Weiss law) لدرجات الحرارة الأعلى من نقطة كيوري :

$$K = B + \frac{C}{T - T_0} \dots\dots\dots (٣-٦٨)$$

حيث C ثابت كيوري وفيس و T درجة الحرارة و T_0 نقطة كيوري لطور النفاذية الكهربية ، كما تسمى باستقراء (extrapolation) نقطة كيوري (درجة حرارة كيوري وفيس). وقد تمثل عمليا بدرجة التحول T_C وتسمى في هذه الحالة بدرجة حرارة كيوري للمواد عفوية الاستقطاب و B مقدار ثابت وقيمته صغيرة جدا مقارنة بقيمة K ولذلك يمكن إهماله وتصبح المعادلة (٣-٦٨) كالتالي :

$$K = \frac{C}{T - T_0} \dots\dots\dots (٣-٦٩)$$

والدراسة التفصيلية للمواد العازلة عفوية الاستقطاب صعبة ولا مجال لشرحها في هذا الكتاب. وقد أعطيت نبذة مبسطة عنها في هذا الفصل لإعطاء الدارس فكرة

عنها كممثل للمواد العازلة غير الخطية (non-linear) للتمييز بينها وبين المواد العازلة الخطية (linear) السابق دراستها.

(١٩-٣) الإلكترومتري والقياسات الكهرية الساكنة

Electrometers & Electrostatic Measurements

إن العمل الأساسي لجهاز الإلكترومتر هو قياس فروق الجهد ويمكن استعماله أيضا في قياس الشحنات الكهرية وكذلك التيارات الضعيفة (feeble currents). ويتناسب انحراف الجزء المتحرك (في أي جهاز من الأجهزة) θ مع فرق الجهد المسلط V .

أي أن $(\theta = ZV)$ حيث Z ثابت الجهاز تحت الشروط المعطاة.

ومن ثم فنسبة الانحراف لفرق الجهد (Z) يعطينا الحساسية الجهدية (potential sensitivity) لهذا الجهاز.

ومع ذلك فإن كانت Q هي الشحنة المعطاة للإلكترومتر سعته C فإن:

$$\theta = ZV = Z \frac{Q}{C} = Z'Q \quad \dots\dots\dots (٣-٧٠)$$

فإذا كانت $Q = 1$ فإن Z' تعطينا حساسية الجهاز في قياس الكمية الكهرية. وإذا كانت الشحنة متغيرة فسيستج عن ذلك تيار تعطى قيمته بالعلاقة:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \frac{C}{Z} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

∴ معدل تغير الانحراف هو:

$$\frac{Z}{C} I = \frac{d\theta}{dt} \quad \dots\dots\dots (٣-٧١)$$

أو

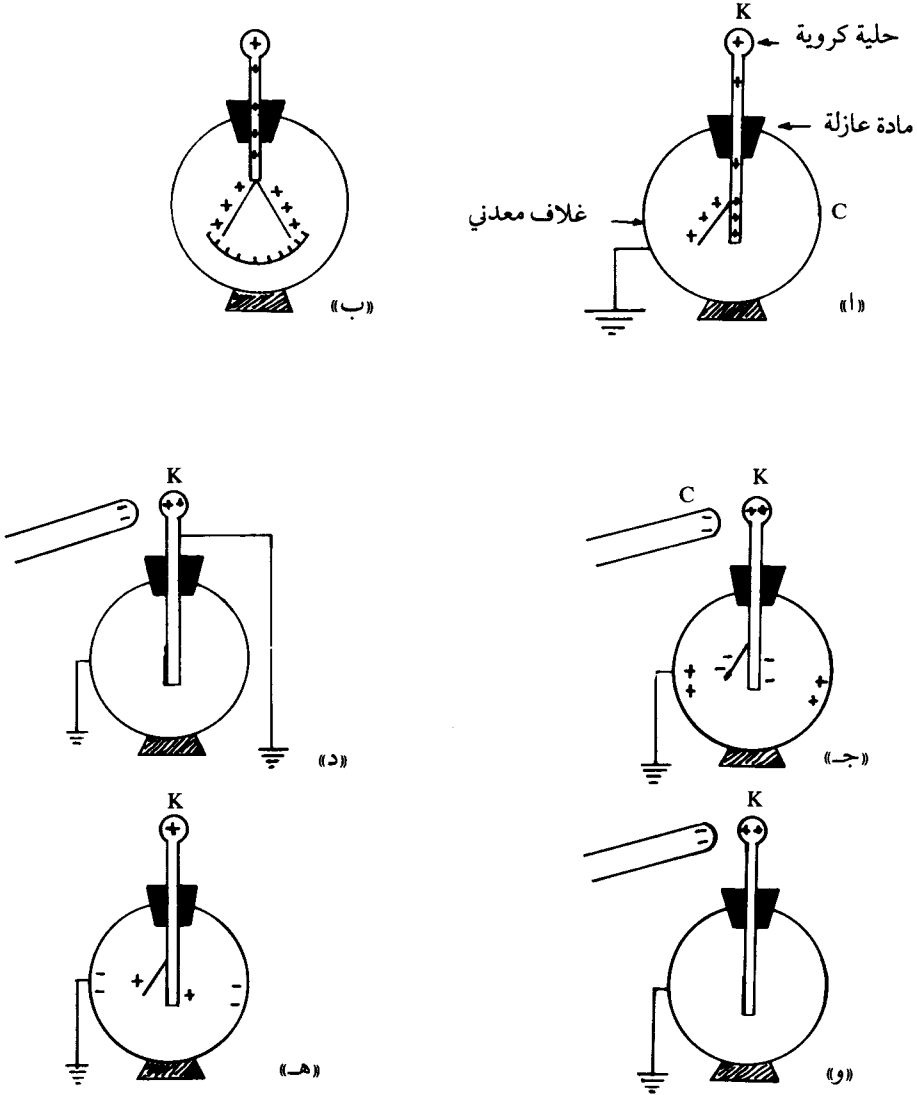
$$Z'I = \frac{d\theta}{dt}$$

حيث Z' هي حساسية الجهاز في قياس التيار الكهربائي (current sensitivity) وستدرس الآن الأنواع المختلفة لأجهزة الإلكترومتيرات وكيفية استعمالها لقياس الجهد وكمية الشحنة والتيارات الكهربائية الضعيفة جدا.

(١٩-٣) المكشاف الكهربائي Electroscope

وهو أبسط أنواع الإلكترومتيرات ويسمى المكشاف ذو الورقة الذهبية gold leaf electroscope [شكل (١٩-٣)] وتم تركيب أول مكشاف عام ١٧٨٧ ميلادية بواسطة العالم بينيت (A. Bennett) ويتكون من قضيب موصل R متصل به شريحة رقيقة من الذهب / والقضيب والشريحة موضوعان داخل غلاف معدني اسطواني C يوجد على جوانبه زجاج شفاف، ويتصل هذا الغلاف بالأرض عن طريق مواسير الماء. والأرض عبارة عن موصل كبير تمتص أو تعطى كمية غير محدودة من الشحنة دون تغيير جهدها الكهربائي. وأي موصل يتصل بالأرض يقال عنه أرضي (grounding). ونقطة التوصيل بالأرض تسمى نقطة اتصال الموصل بالأرض، والقضيب مثبت بحلية صغيرة كروية K توجد في أعلى الجهاز لتخفيض إلى الحد الأدنى من عملية التسرب (leakage) وكلها معزولة عن الغلاف المعدني بقطعة من مادة الكهرمان (amber) أو مادة الكبريت. وهناك مكشاف آخر مماثل يستعمل فيه شريحتان ذهبيتان رقيقتان (two thin strips of gold) كما في شكل (١٩-ب - ٣).

ويستعمل هذا الجهاز لقياس الشحنات والجهد الكهربائي ولكنه أكثر حساسية للشحنات لأن سعته صغيرة وفي حدود ميكروميكروفاراد $\mu\mu f$. فإذا أعطيت الشحنة للقضيب مباشرة يحدث تنافر بين الشحنات المتماثلة على كل من القضيب والشريحة الذهبية مما يسبب انحراف هذه الشريحة عن القضيب ويزداد أو ينقص هذا الانحراف بناء على مقدار الشحنة ونوعية الشحنات المتعاقبة.

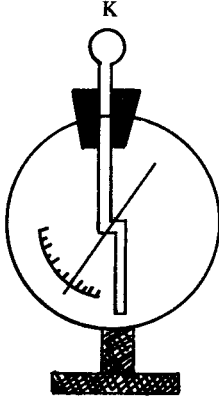


شكل (١٩-٣): أ - مكشاف كهربى ذو ورقة ذهبية.
 ب - مكشاف كهربى ذو ورقتين ذهبيتين رقيقتين.
 ج، د، هـ، و - يوضح كيفية التحكم في كمية الشحنة التي يتلقاها
 المكشاف ذو الورقة الذهبية عن طريق شحنة بالطريقة الحثية.

وهذا الانحراف يمكن قياسه باستعمال التدرج S المرسوم أمام الشريحة ومنه يمكن معرفة مقدار الشحنة أو قيمة الجهد المجهول وذلك بعد معايرة انحراف الشريحة بشحنة معروفة أو جهد معروف .

ولما كانت الشريحة الذهبية رقيقة جدا لذلك من المحتمل أن يصيبها بعض التلف نتيجة تتابع الشحنات الكهربائية عليها ولتفادي مثل هذا التأثير يتم التحكم في كمية الشحنة التي يتلقاها الجهاز عن طريق شحنه بالطريقة الحثية (induction) وهي عبارة عن شحن موصل ما نتيجة لتقريب موصل آخر مشحون منه دون أن يتلامسا وتوجد هذه الطريقة فيما يلي :

إذا ذلك قضيب من المطاط الصلد بقطعة من الصوف فإنه يكتسب شحنة سالبة فإذا قرب هذا القضيب من الحلية K للمكشاف [شكل (١٩ ج - ٣)] تولدت شحنة موجبة على الحلية K القريبة من قضيب المطاط (وتسمى بالشحنات المقيدة bound charges) وشحنات مماثلة سالبة على القضيب المتصل بالحلية والشريحة الذهبية (وتسمى بالشحنات المتنافرة repelled charges) تسبب انفراج الشريحة الذهبية، فإذا أزيح القضيب المطاط فإن الوضع سيعود لحالته الأولى، أما إذا وصل قضيب المكشاف بالأرض مع بقاء المطاط قريبا من الحلية K فإن الشحنات المتنافرة سوف تتعادل مع الأرض (إذا كانت الشحنات المتنافرة موجبة فإن الإلكترونات تندفع من الأرض إلى القضيب، أما إذا كانت سالبة فإن الإلكترونات تندفع من القضيب إلى الأرض) وينتهي انفراج الشريحة كما في شكل (١٩ د - ٣). فإذا أزيح القضيب المطاط فإن الشحنات المستحثة على K ستتعاود مع الأرض. ولمنع حدوث ذلك يجب إزالة الاتصال الأرضي كما في شكل (١٩ هـ - ٣). فإذا أبعد القضيب المطاط كما في شكل (١٩ و - ٣) فإن الشحنات المستحثة المقيدة تحبس وتتوزع في الحلية K والقضيب تحت تأثير التنافر المتبادل للشحنات المتشابهة وتنفرج الشريحة الذهبية وبذلك أمكن شحن المكشاف بشحنة موجبة بطريقة أكثر فعالية ودقة عن طريقة الاتصال المباشر.



شكل (٣-٢٠): مكشاف برون

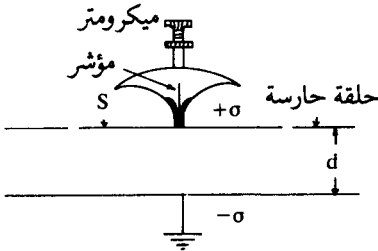
ويوجد مكشاف آخر يسمى بمكشاف برون (Broun) وفيه تستخدم إبرة خفيفة من مادة الألومنيوم مرتكزة على محور على القضيب يمكنها من الدوران بسهولة في مستوى أفقي بدلا من الشريحة الذهبية كما في شكل (٣-٢٠) ويستعمل مثل هذا النوع لقياس الجهد الكهربائي بحيث يسلط الجهد بين الحلية K والغلاف المعدني. ونتيجة للتنافر بين الإبرة والطرف السفلي للقضيب المعدني يمكن تعيين الانحراف للإبرة بواسطة تدريج معين معاير وبواسطته يمكن معرفة الجهد المطبق.

ويمكن لهذا الجهاز أن يقيس فرق الجهد في حدود المئات إلى بضعة آلاف من الفولتات لا يزيد على عشرة آلاف فولت.

(٣-١٩-٢) الإلكترومتر المطلق أو ذو القرص المنجذب

Absolute or attracted disc electrometer

ويتكون أساسا من مكثف متوازي اللوحين ذي الحلقة الحارسة، الذي شرح في البند (٣-٣)، إلى جانب بعض الأجهزة الميكانيكية لقياس قوة التجاذب بين اللوحين عند شحنهما.



شكل (٣-٢١): أ - الإلكترومتر المطلق أو ذو القرص المنجذب.

إذا كانت σ [شكل (٣-٢١)] تمثل كثافة الشحنة السطحية على اللوحين فإن القوة على القرص الذي مساحته S هي:

$$F = S \sigma^2 / 2 \epsilon_0 \quad \dots (٣-٧٢)$$

وذلك حسب العلاقة (٣-١٨).

فإذا كان فرق الجهد بين اللوحين V

فإن :

$$V = \frac{Q}{C} = \sigma s \times \frac{d}{\epsilon_0 S}$$

حيث d المسافة بين اللوحين . وقيمة السعة C مأخوذة من المعادلة (٣-٥) :

$$\therefore V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

أو

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{d}$$

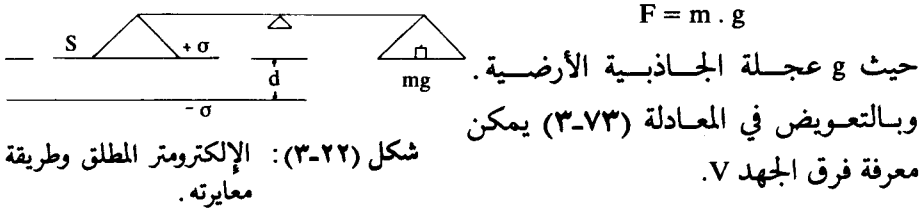
وبالتعويض في المعادلة (٣-٧٢) يمكن الحصول على :

$$\therefore F = S \frac{\epsilon_0^2 V^2}{d^2} \times \frac{1}{2\epsilon_0} = \frac{S\epsilon_0 V^2}{2d^2} \dots\dots\dots (٣-٧٣)$$

هذه القوة يمكن قياسها باستعمال النظام الزنبركي (spring system) كما هو مرسوم بالشكل (٣-٢١) . قبل تسليط الجهد الكهربائي بين اللوحين يجب أن يكون وضع القرص صحيحا في مستوى الحلقة الحارسة ويتم ذلك باستخدام الميكرومتر اللولبي وبالملاحظة من خلال المنظار المقرب ذي الشعرتين المتقاطعتين . فإذا سلط جهد بين صفيحتي المكثف فإنه سوف يسبب في انخفاض القرص عن مستواه . بإرجاع القرص إلى وضعه السابق باستخدام الميكرومتر اللولبي والملاحظة من خلال منظار مقرب مرة أخرى فإن التغير بين قراءتي الميكرومتر يمثل القوة بين الصفيحتين . وباستخدام المعادلة (٣-٧٣) يمكن قياس فرق الجهد .

ويمكن معايرة النظام وذلك بإضافة بعض الأوزان إلى القرص وإرجاع القرص في كل مرة إلى وضعه السابق لمعرفة القوة المطابقة لكل تغير في قراءة الميكرومتر .

ويمكن استخدام نظام آخر لمعرفة القوة F وذلك بأن يثبت القرص في كفة ميزان كما في شكل (٣-٢٢) . فإذا انجذب القرص بمجرد تسليط فرق الجهد فإنه يمكن إعادته إلى الوضع السابق بإضافته أثقال كتلتها m في الكفة الأخرى للميزان كما يبينها الشكل (٣-٢٢) وعند هذا الوضع يكون لدينا :

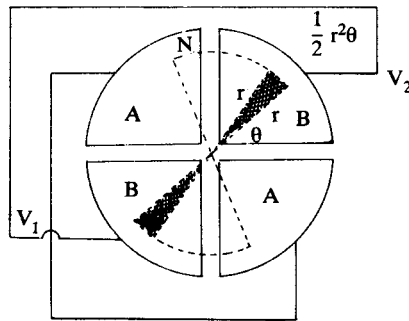
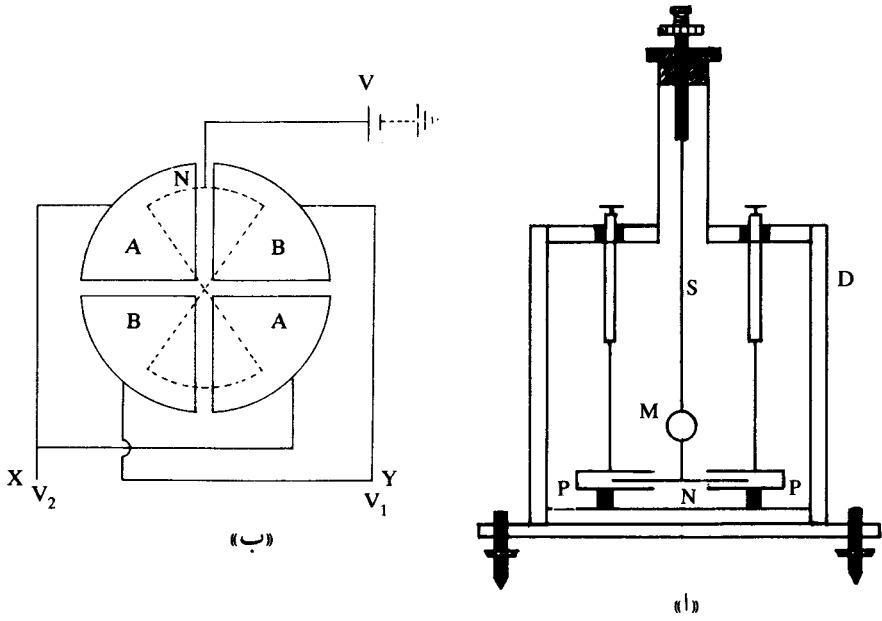


(٣-١٩-٣) الإلكترومتر الربعي Quadrant electrometer

يستخدم جهاز الإلكترومتر الربعي لقياس القوى الدافعة الكهربائية أو فروق الجهد دون سحب أي تيار كهربائي من مصدر الجهد وهو أكثر دقة من الإلكترومترات السابق ذكرها وأول من شيده اللورد كلفن (Lord Kelvin) عام ١٨٦٠ ميلادية ثم جاء من بعده دوليزاليك (Dolezalek) وأجرى عليه بعض التحسينات، ويوضح الشكل (٣-٢٣) تركيب الجهاز الذي يتألف من قرص أسطواني أجوف مقسم إلى أربعة أقسام متساوية، وكل ربع مثبت على عمود من الكهرمان "P" أو أي عازل جيد الغزل. وينفصل كل ربع عن الآخر بمسافة واحد ملليمتر تقريبا ويتصل كل ربعين متقابلين AA و BB بسلك موصل. وداخل تجويف القرص المقسم تتدلى إبرة كبيرة رفيعة مسطحة N من مادة الألومنيوم، أو ورقة فضية، تتصل بها مرآة صغيرة M متصلة بسلك رفيع من البرونز الفوسفوري (phosphor bronze) أو من ألياف من المرو المطلية بالفضة (s. fiber of quartz) ويوجد هذا النظام داخل غلاف أسطواني معدني D يتصل بالأرض. والغرض من ذلك هو حجب النظام الداخلي من أي مجال كهربائي خارجي.

ويكون عادة جهد الإبرة N عاليا عن جهد الأرض وليكن V . فعند وجود فرق في الجهد بين النقطتين X و Y، المبينة في شكل (٣-٢٣) ب، المتصلتين بـ AA و BB فإن الإبرة ستتحرف بزاوية معينة θ تعتمد على قيمة ذلك الفرق في الجهد. ويقاس الانحراف باستعمال ضوء يسقط على المرآة N ثم ينعكس على تدريج طويل أو باستعمال منظار مقرب وتدرج مناسب بحيث يمكن رؤيته بواسطة المنظار من خلال المرآة.

فإذا فرض أن جهد الإبرة V وجهد الربعين AA هو V_1 و BB هو V_2 ، وذلك بالنسبة للأرض، تكون الإبرة والربعان AA مكثفا مستويا فرق الجهد بينهما $(V - V_1)$.



«ج»

شكل (٢٣-٣): أ- مكونات جهاز الإلكترومتر الرباعي.
 ب، ج- طريقة استخدام الجهاز وملاحظة انحراف الإبرة N.

كذلك تكون الإبرة مع الربعين الآخرين مكثفا مستويا آخرا فرق الجهد بينهما $(V - V_2)$. فإذا كان انحراف الإبرة في اتجاه BB كما في شكل (٣٣ ج - ٣) فإن المساحة العامة بين الإبرة BB سوف تزداد بمقدار $(S = 2 \times \frac{1}{2} r^2 d\theta)$ [حيث r نصف قطر الإبرة]. وفي اللحظة نفسها ستنقص المساحة العامة بين الإبرة و AA بمقدار:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

ويكون التغير في السعة بين الإبرة و BB حسب المعادلة (٣-٥) هو:

$$\delta C = 2 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 2 \frac{\epsilon_0 r^2 d\theta}{d} \dots \dots \dots (٣-٧٤)$$

حيث d هي المسافة بين الإبرة و AA ، والعدد 2 ناتج عن أخذ السعة بين الإبرة والسطح العلوي والسفلي لـ AA.

وتكون الزيادة في الطاقة U_1 بعد دوران الإبرة بالنسبة لـ AA هي :

$$U_1 = \frac{1}{2} \delta C (V - V_2)^2$$

ويكون النقص في الطاقة U_2 بعد دوران الإبرة بالنسبة لـ BB هي [بند (٣-٥)]:

$$U_2 = \frac{1}{2} \delta C (V - V_1)^2$$

وبذلك يكون مجموع الزيادة في الطاقة هو:

$$\begin{aligned} U = U_1 - U_2 &= \frac{1}{2} \delta C \left\{ (V - V_2)^2 - (V - V_1)^2 \right\} \\ &= \delta C (V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\} \quad (٣-٧٥) \end{aligned}$$

إلى جانب هذه الطاقة الكهربائية توجد طاقة أخرى تعمل على لي السلك فإذا كانت τ ثابت اللي الخاص بالسلك عند له درجة واحدة فإن الشغل الذي يبذل في لي السلك يساوي $\tau \theta d\theta$.

∴ مجموع الطاقة المكتسبة تساوي :

$$U + \tau \theta d\theta \dots\dots\dots (٣-٧٦)$$

هذه الطاقة تعطى من المصدر لإمداد الفرق في الجهد بين AA و BB وحيث إن التغير في السعة يصحبه تغير في سريان الشحنة من المصدر. وإذا تأملنا المكثف NBB فإن الزيادة في δC يصحبها زيادة في الشحنة قدرها $[\delta Q = \delta C (V - V_2)]$ وبذلك فالطاقة المستمدة من المصدر هي $\delta C (V - V_2)^2$. وكذلك فالنقص في السعة δC للمكثف NAA يتسبب في تخزين كمية من الطاقة للمصدر قدرها $\delta C (V - V_1)^2$ وتكون محصلة الطاقة الصادرة من المصدر تساوي :

$$\delta C \{ (V - V_2)^2 - (V - V_1)^2 \} =$$

$$2\delta C (V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\} \dots\dots (٣-٧٧)$$

وبالمقارنة مع المعادلة (٣-٧٥) فإن هذه المعادلة تساوي $2U$ وحيث إن هذه الطاقة تساوي الطاقة المكتسبة من المصدر

$$\therefore 2U = \tau \theta d\theta + U$$

أو

$$\tau \theta d\theta = \delta C (V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\}$$

وبالتعويض عن δC من المعادلة (٣-٧٤) وبعد الاختصار يُحصل على :

$$\therefore \theta = \frac{2\varepsilon_0 r^2}{\tau d} (V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\}$$

أو

$$\theta = C_q (V_1 - V_2) \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\} \dots\dots (٣-٧٨)$$

حيث C_q ثابت يعتمد على الثوابت الهندسية للإلكترومتر.

(٣-١٩-٤) استعمال الإلكترومتر الرباعي Use of quadrant electrometer

عند استعمال الجهاز يجب أولاً توصيل الربيعين AA والربيعين BB وكذلك الإبرة بالأرض وعندها يجب أن تكون القراءة على التدرج تساوي صفراً ثم يسقط جهد قدره (100 - 200) فولت على الإبرة وعندها يجب أيضاً أن تكون القراءة ثابتة عند الصفر وإذا حصل انحراف معين فمعنى ذلك أن الإبرة ليست في مكانها الصحيح ولذلك يجب إعادة وضعها وذلك بتغيير مربوط السلك المتصل بالإبرة وكذلك مستوى قاعدة الإلكترومتر عن طريق المسامير اللولبية المثبتة أسفل القاعدة. ثم يتكرر شحن الإبرة من جديد حتى يمكن الحصول على ثبات الإبرة وعندها يكون الجهاز جاهزاً للقياس.

وتحدد العلاقة بين قراءة التدرج المستعمل مع الإلكترومتر الرباعي وفرق الجهد المطابق المسلط على الجهاز باستعمال الدائرة المبينة في شكل (١٢٤-٣). وتتصل مقاومة متغيرة على التوازي مع بطارية، جهدها يساوي 80 فولت، لاختيار الجهد المسلط على الأرباع AA و BB، والذي يقاس بمقياس الجهد V_m . وتتصل الإبرة المتحركة بالبطارية من خلال نقطة الاتصال D وبذلك يظل جهدها أعلى من جهد غلاف الإلكترومتر. وتستعمل المقاومة العالية HR لمنع أي تلف ينتج عن تلامس الإبرة مع الأرباع AA و BB.

هذا النوع من التوصيل يسمى بالتوصيل الهتروستاتيكي (heterostatic) لأن الجهود عند التوصيلات A و B و D مختلفة القيمة، أما إذا وصلت الإبرة بأحد الأرباع AA أو BB بدلاً من البطارية فيسمى بتوصيل أيديوستاتيكي (idiostatic) لأن الإبرة لها جهد أحد الأرباع نفسه.

وُحُصِّل على منحني المعايرة باستخدام قيم معينة للجهد مقروءة من خلال مقياس الجهد V_m وقراءة الانحراف θ المقابل له على التدرج. ويمثل الشكل (٢٤ب-٣) ذلك. ومن الواضح أنه بالنسبة للجهود الصغيرة تكون العلاقة بين الانحراف والجهد علاقة خط مستقيم ثم ينحرف قليلاً عند الجهود العالية.

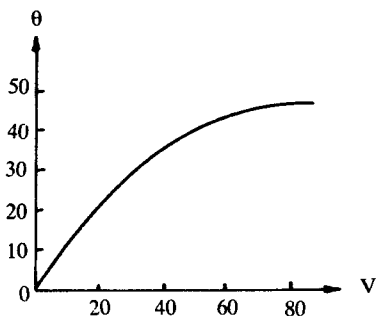
ويستعمل جهاز الإلكترومتر الرباعي فيما يلي :

١ - قياس فرق جهد صغير مستمر *Steady potential*

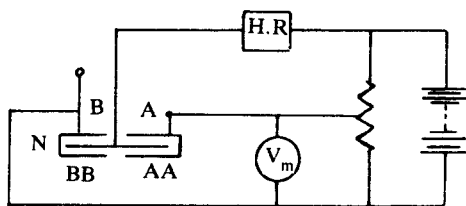
تصل النقطة الأولى بالربعين AA والنقطة الثانية بالربعين BB كما في شكل (٢٤-ج) ويحدد الانحراف المشاهد θ من المعادلة (٣-٧٨) ولما كان جهد الإبرة في حدود مائة فولت أي أن $V_1 \gg V$ فإنه يمكن إهمال المقدار $(V_1 + V_2)$ ومنه فإن :

$$\theta = C_q V (V_1 - V_2) \dots \dots \dots (٣-٧٩)$$

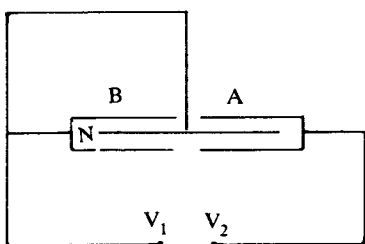
وحيث إن V و C_q مقداران ثابتان فإن θ تتناسب طرديا مع الفرق في الجهد بين AA ،



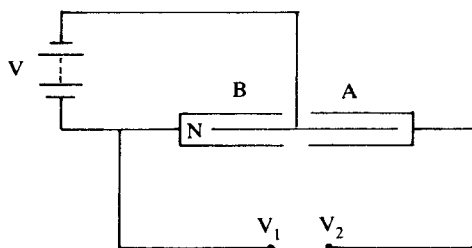
«ب»



«أ»



«د»



«ج»

شكل (٢٤-٣) : ١ - دائرة معايرة جهاز الإلكترومتر الرباعي .

ب - العلاقة بين الانحراف θ والجهد المطابق لهذا الانحراف .

ج - كيفية استخدام الجهاز لقياس فرق جهد صغيرة مستمر .

د - كيفية استخدام الجهاز لقياس فرق جهد متغير .

BB. أما إذا وصل الربعان BB بالأرض (أي أن $V_2 = \text{zero}$) فإن :

$$\theta = C_q V V_1 \dots\dots\dots (٣-٨٠)$$

وفي هذه الحالة يمكن معرفة V_1 مباشرة.

ب - قياس فرق جهد متغير (R.M.S.) *Alternating potential*

ويستعان في هذه الحالة بتوصيل الإبرة بأحد الربعين وليكن الربعان AA كما في شكل (٣-٢٤) ومعنى ذلك أن $V = V_1$ وبالتعويض في المعادلة (٣-٧٩) يُحصل على :

$$\theta = C_q (V_1 - V_2)^2 \dots\dots\dots (٣-٨١)$$

أو

$$\theta = C_q (V - V_2)^2 \dots\dots\dots (٣-٨١ ب)$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الانحراف يتناسب طرديا مع مربع فرق الجهد بين الربعين BB والإبرة.

وإذا وصل الربعان BB بالأرض فإن $V_2 = 0$ ومنه فإن :

$$\theta = C_q V_1^2 = C_q V^2 \dots\dots\dots (٣-٨٢)$$

وواضح من هذه المعادلة أن الانحراف يتناسب مع مربع الجهد على الربعين AA. كما يلاحظ أنه عندما يتغير الجهد على الربعين AA حيث يكون موجبا مرة وسالبا مرة أخرى. ولا يؤثر هذا التغير على الانحراف ويأخذ دائما اتجاها واحدا وفي هذه الحالة وعند معايرة الجهاز (calibrated) فإنه يماثل مقياس الجهد العام (universal voltmeter). وبهذا الأسلوب من التوصيل يمكن أن يستعمل الجهاز لقياس V_1 أو V_2 أو الفرق بينهما إذا كان الجهد المراد قياسه كبيرا.

(٣-١٩-٥) الفولتمترات الكهرية الساكنة *Electrostatic voltmeters*

يستعمل هذا النوع من الأجهزة لقياس الجهود ذات القيم المتوسطة (medium voltage) وبين الشكل (٣-١٢٥) مخطط الجهاز المؤلف من شريحة معدنية خفيفة صلبة N ملتصقة بمحور الدوران المثبت به مؤشر P والشريحة موضوعة جزئيا

داخل قطاع ربعي معدني أجوف A. فإذا شحنت الشريحة N والقطاع الربعي A بشحنتين مختلفتين نتيجة لاتصالهما بفرق الجهد المراد قياسه فإن الشريحة تنجذب داخل القطاع مسببة دوران المحور S وبالتالي المؤشر P.

وعزم الدوران الناتج عن هذا الانحراف لهذا الجهاز صغير جدا (إلا إذا كان الجهد عاليا جدا) ولكن يمكن مضاعفته باستعمال قطاعين ربعيين متقابلين وشريحة مزدوجة كما في شكل (٢٥-ب - ٣) وقد تتعدد هذه القطاعات والشرائح كما في شكل (٢٥-ج - ٣) ويسمى الفولتметр في هذه الحالة باسم فولتметр متعدد الريش (multi-cellular).

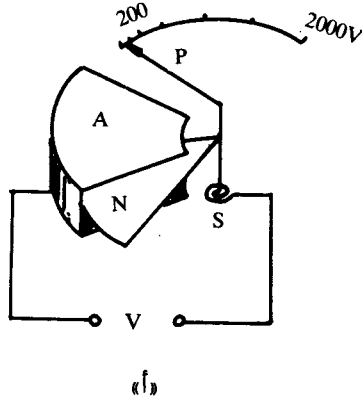
وينظم عزم الدوران في هذه الأجهزة باستعمال زنبرك حلزوني أو الجاذبية إلى جانب محور الارتكاز وقد يستعمل سلك للتعليق من مادة البرونز الفوسفوري وقد يضاف بعض الأثقال مثل m_1, m_2 أسفل الشريحة المتحركة كما في شكل (٢٥-ب - ٣)، وفي حالة الفولتметр متعدد الريش يثبت في أسفل الجهاز مروحة (vane) توضع في داخل وعاء مملوء بالزيت لتقليل الحركة أو لمنع الاهتزازات.

إذا سلط جهد قدره V بين القطاع الربعي A والشريحة N وتسبب في انحراف الشريحة زاوية قدرها θ ، وكانت C السعة بينها بعد الانحراف، فإن مقدار الشحنة q تساوي CV.

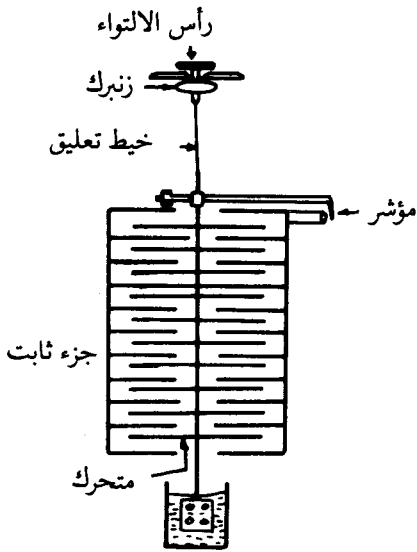
وإذا زاد الجهد بمقدار dV فإن السعة تزداد بمقدار dC وعندها تكون الزيادة في الطاقة المخزونة للمجال الكهربائي الاستاتيكي هي:

$$\delta \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{1}{2} V^2 \delta C + CV \delta V$$

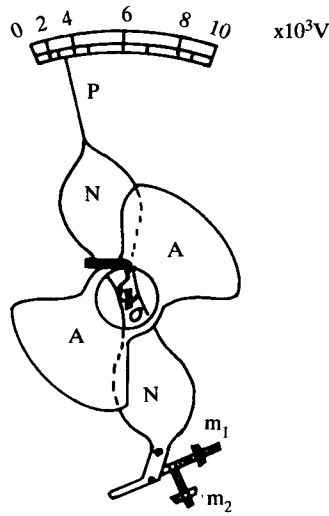
إلى جانب هذه الطاقة هناك طاقة أخرى نتيجة للأجهزة المنظمة لعزم الدوران قدرها $\tau \theta d\theta$ حيث τ ثابت الي أي أن الطاقة المخزونة هي:



«أ»



«ج»



«ب»

شكل (٢٥-٣): توضيح تركيب ومكونات الفولتمتر الكهربي الساكن.

$$\tau \theta d\theta + \frac{1}{2} V^2 \delta C + CV \delta V$$

خلال هذا التغير يمد المصدر الكهربائي الجهاز بشحنة قدرها dq وتكون الطاقة الصادرة من المصدر هي :

$$Vdq = V\delta(CV) = V^2 \delta C + CV \delta V$$

وحيث إن الطاقين السابقتين متساويتان فإن :

$$\tau \theta d\theta + \frac{1}{2} V^2 \delta C + CV \delta V = V^2 \delta C + CV \delta V$$

أو

$$\tau \theta d\theta = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$\therefore \theta = C_v V^2 \frac{dC}{d\theta} \quad \dots \dots \dots (٣-٨٣)$$

حيث C_v ثابت الجهاز (instrumental constant) وواضح من هذه المعادلة أن مقدار الانحراف θ يتناسب مع مربع الجهد V^2 ، لأن $\frac{dC}{d\theta}$ مقدار ثابت ، وهذا يعني أن الجهاز يمكن استخدامه لقياس الجهد المستمر وكذلك الجهد المتردد .

ويعاير الجهاز بتسليط قيم مختلفة لجهد معلوم ويدير التدرج بناء على ذلك بحيث يمكن بواسطة الجهاز قراءة قيمة الجهد مباشرة ، مع العلم أنه في حالة الجهد المتردد تكون القراءة للقيمة الفعالة للجهد .

(٣-١٩-٦) المكشاف النابض (مكشاف وولف النابض)

Pulse electroscop (Wulf pulse electroscop)

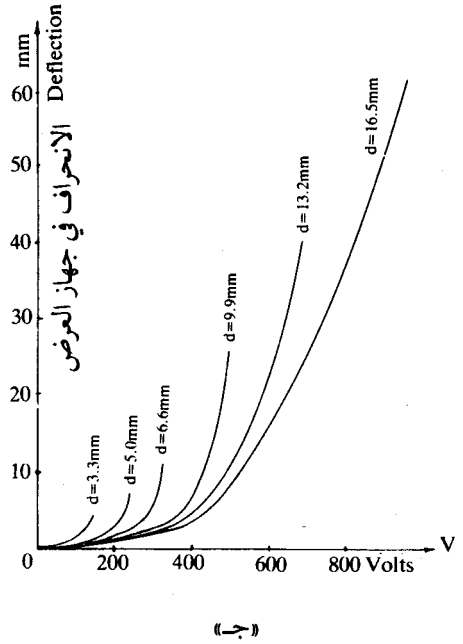
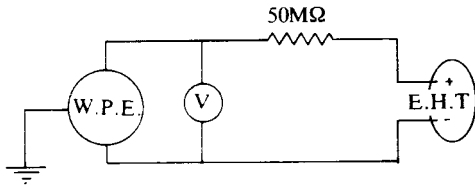
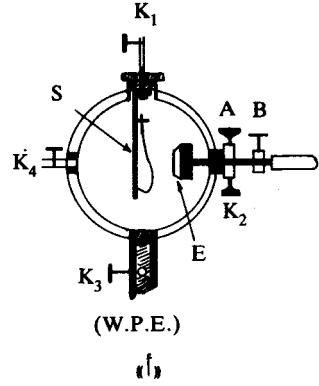
مكشاف وولف عبارة عن جهاز استاتيكي يستعمل لتعيين الشحنات والجهد وكذلك لقياس التيارات الكهربائية ، وقد طور من المكشاف ذو الورقة الذهبية وهو أكثر حساسية منه . ويوضح الشكل (٣-١٢٦) مكونات هذا الجهاز ويتألف من غلاف معدني يتصل بالأرض ومثبت في جهتيه الأمامية والخلفية صفيحتان زجاجيتان شفافتان

وفي أعلاه توجد فتحة مثبت فيها مادة عازلة ويمر من خلالها ساق معدني صلب "S". ويوجد بهذه الساق صفيحة رقيقة من الألومنيوم أحد طرفيها مثبت بالجزء العلوي للساق أما النهاية الأخرى فهي مربوطة بالساق بحلقة من زجاج الكوارتز المرن (elastic quartz glass ring). ويسمى هذا الجزء من الجهاز بالنظام الحساس (sensitive system) وهناك فتحة جانبية تمر خلالها صفيحة من الكربون تسمى بالقطب العداد (E. counter electrode). وهي معزولة عن الغلاف المعدني ويمكن تغيير موضع القطب أو تثبيته بواسطة المسارين اللولبيين A و B. أما الفتحتان K_1 و K_2 فيمكن استعمالهما لربط المكشاف بالدائرة الخارجية ويمكن وصل الغلاف المعدني بالأرض عن طريق الفتحتين K_3 و K_4 .

فإذا وصل جهد كهربي بين النظام الحساس والقطب العداد فإن شريحة الألومنيوم سوف تنحرف تدريجياً متجهة نحو القطب، وتعتمد درجة الانحراف على الجهد وعلى بعد المسافة بين الشريحة والقطب d. وبين الشكل (٢٦ ب - ٣) بعض مراحل تغيير موضع الشريحة كما يوضح الشكل (٢٦ ج - ٣) العلاقة بين الانحراف والجهد والمسافة d. فإذا تزايد انحراف الشريحة حتى وصل إلى موضع تكون فيه قوة كولوم بين الشريحة والقطب أكبر من قوة استعادة حلقة الكوارتز تقفز الشريحة عبر الفراغ بينها وبين القطب، كما في شكل (٢٦ ب - ٣)، ثم تعود مرة أخرى بعد تفريغ شحنتها في القضيب عند تلامسه. فإذا كان الجهد كافياً لجعل الشريحة تنبض ضد القطب العداد فإن هذه العملية سوف تتكرر على فترات زمنية معينة. ومن هذه النبضات يمكن تقدير تيار التفريغ (discharge current).

ويجب أن يكون التيار المار خلال الشريحة عند تلامسها مع القطب محدوداً لمنع تلف الشريحة ويتم ذلك بإضافة مقاومة قدرها $50M\Omega$ في الدائرة الكهربية.

وبين الشكل (٢٦ د - ٣) الدائرة الكهربية لدراسة التيار بواسطة التفريغ المفرد (single discharge) فإذا فرض أن الجهد المسلط بين قطب العداد والشريحة عبر المقاومة R هو V_0 ، وكانت سعة المكشاف C والتي يمكن عدها ثابتة بصورة تقريبية فإن الجهد



شكل (٣-٢٦): أ - مكونات المكشاف النابض.

ب - مراحل تغيير الشريحة أثناء الاستعمال.

ج - العلاقة بين الانحراف والجهد عند قيم مختلفة للمسافة d الواقعة بين الشريحة والقطب.

د - توضح هذه الدائرة التوصيلة الكهربائية لدراسة التيار بواسطة التفريغ المفرد.

$V(t)$ عند أي لحظة t يمكن حسابه من العلاقة (٤-٤٨) [التي سترد في البند (٦-٤)]
الفصل الرابع] وهي :

$$V(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots \dots \quad (٣-٨٤)$$

وعندها تكون قيمة الشحنة هي :

$$q(t) = CV(t) = CV_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots \dots \quad (٣-٨٥)$$

فإذا فَرَّغَت الشريحة شحنتها عند الجهد V' بعد مضي زمن قدره t' فإن الشحنة المفقودة
المفرغة q' عند الملامسة الأولى بين الشريحة والقطب تعطى بالمعادلة :

$$q'(t') = CV' CV_0 (1 - e^{-t'/RC}) \quad \dots \dots \quad (٣-٨٦)$$

ولإعادة شحن الورقة حتى تنبض مرة أخرى ضد القطب نحتاج لزمن قدرها t أيضا.
ويكون التيار المار في الدائرة تيارا مستمرا نابضا (pulsating D.C.).

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad \dots \dots \quad (٣-٨٧)$$

فإذا تكررت عملية التفريغ كل t' من الثانية فإن متوسط تيار التفريغ هو:

$$I_{av} = \frac{1}{t'} \int_0^{t'} I dt = \frac{q'}{t'} = \frac{CV_0}{t'} (1 - e^{-t'/RC}) \quad (٣-٨٨)$$

وتمثل هذه العلاقات بيانيا في الشكل (٣-١٢٧). وعند لحظة الانحراف تكون القيمة
للتيار هي :

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

وبإهمال مدة التفريغ. فإن التيار يشحن النظام خلال انحلاله أسياً
(exponentially decaying) حتى إذا انقضى زمن قدره t تقوم الشريحة بتفريغ شحنتها
مرة أخرى. ويعتمد هذا الزمن على معدل الجهد الموصل V_0 إلى جهد التفريغ V' حيث
يكون لدينا من المعادلة (٣-٨٦) :

$$V' = V_0 (1 - e^{-t'/RC})$$

أو

$$t' = RC \ln \frac{V_0}{V_0 - V'} \quad \dots\dots\dots (٣-٨٩)$$

وبالتعويض في المعادلة (٣-٨٨) عن t' يُحصل على :

$$I_{av} = \frac{V_0}{R} \frac{V'}{V_0 \ln \frac{V_0}{V_0 - V'}} = \frac{V_0}{R} f \left(\frac{V'}{V_0} \right) \quad \dots\dots\dots (٣-٩٠)$$

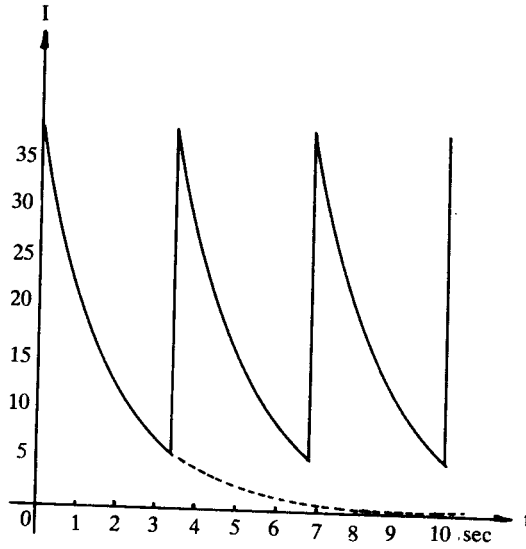
وتبين المعادلة (٣-٨٨) أن القيم المتوسطة للتيار I_{av} تتناسب مع $\frac{1}{t'}$ مادامت q المحمولة بواسطة الشريحة ثابتة وهذا يعني أنه لا حاجة لمعرفة كل من السعة C والمقاومة R .

ويمكن الاستفادة من تناسب I_{av} مع $\frac{1}{t'}$ ($I_{av} \propto \frac{1}{t'}$) في مقارنة المقاومات عالية القيمة، وذلك باستخدام العلاقة (٣-٩٠)، إذا لم تتغير قيمة الجهد V' ولا V_0 أي أن $f \left(\frac{V'}{V_0} \right)$ تبقى ثابتة ففي هذه الحالة يكون معدل تغير أزمنة التفريغ t_{av} متناسبا مع معدل تغير المقاومات.

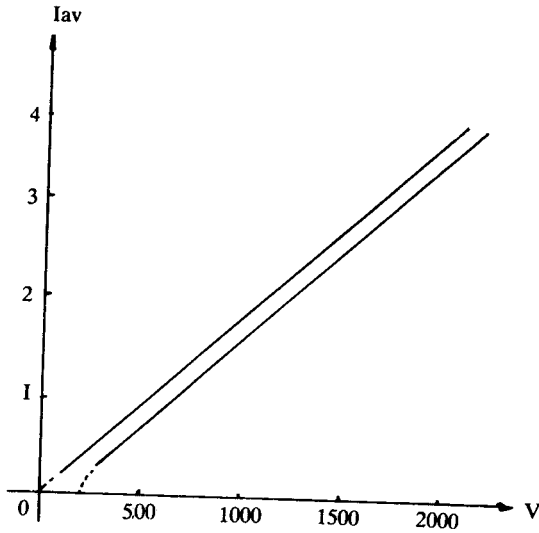
ويوضح الشكل (٣-٢٧ ب) العلاقة بين $I_{av} \propto \frac{1}{t'}$ و V_0 عند $R = 3 \times 10^{11} \Omega$. وتحسب R إن كانت مجهولة بأخذ الميل بين V_0 ، I_{av} المتناسبة مع $\frac{1}{t'}$ مع ضرب I_{av} بمعامل التصحيح (correction factor) وهو $1/f \left(\frac{V'}{V_0} \right)$.

وكما هو واضح من الشكل (٣-٢٧ ب) فإنه يمكن استخدام المكشاف لتحقيق قانون أوم. وإذا وصل مكثف خارجي C_s على التوالي مع مكثف المكشاف C فإنه يمكن حساب أحدهما بمعرفة الآخر. فإذا فرض أن V_1' هو مقدار الجهد الذي سبب انحراف الشريحة قبل توصيل C_s وكانت V_2' بعد توصيلها فإن :

$$CV_1' = C_s (V_2' - V_1') \quad \dots\dots\dots (٣-٩١)$$



(أ)



(ب)

شكل (٢٧-٣): ١ - العلاقة بين الزمن t ومتوسطة تيار التفريغ I_{ab}
 ب - العلاقة بين الجهد المسلط من القطب العداد
 والشريحة عبر المقاومة R و $I_{av} \propto t^{1/2}$

ملاحظات

١ - للطريقة السابقة «طريقة النبض pulse method» دور مهم في قياس تيار التشبع في غرفة التأين (saturation current in an ionization chamber) والبحث عن مدى جسيمات ألفا (range of Alpha particles) وقياس نصف عمر الثورون (half life of thoron) التي لا مجال لذكرها في هذا الكتاب وتجدر الإشارة أن القوانين السابق ذكرها أعلاه لا تكون صالحة في هذه الحالات لأن المقاومة غير ثابتة وتعتمد على الجهد.

٢ - ترصد حركات الشريحة على شاشة عرض وذلك لسهولة العد وقياس المسافة التي تتحركها الشريحة وذلك باستعمال عدسات إضافية وإضاءة كافية أو يكون مع المكشاف جهاز عرض خاص به.

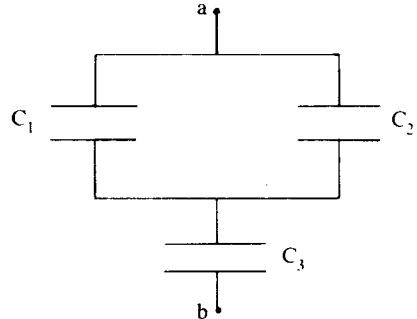
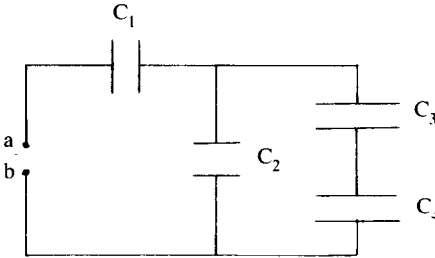
مسائل (٢٠-٣)

١ - أوجد سعة مكثف مؤلف من اسطوانتين معدنيتين متحدتين في المركز نصفاً قطريهما a ، b وطولهما l والاسطوانة الخارجية متصلة بالأرض.

٢ - أوجد السعة المكافئة لمجموع المكثفات الموصلة كما في الشكلين المبينين إذا كان:

$$(أ) \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$$

(ب) $C_1 = 12\mu F$, $C_2 = 2\mu F$, $C_3 = 3\mu F$, $C_4 = 6\mu F$. وإذا كان فرق بين النقطتين a و b هو $12V$ فاحسب جهد وشحنة كل مكثف.

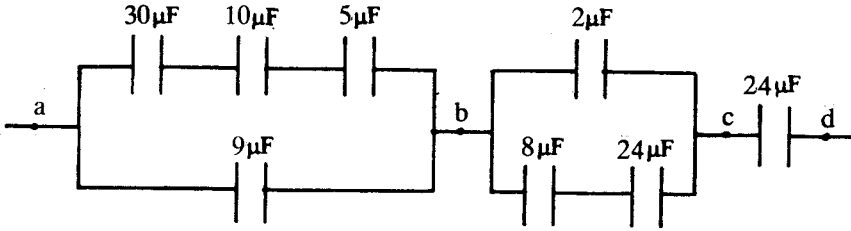


٣ - يوضح الشكل التالي مجموعة من المكثفات متصلة على التوالي والتوازي :

ا) احسب السعة المكافئة .

ب) احسب جهد وشحنة كل مكثف إذا كان فرق الجهد بين الطرفين a و b يساوي 12V .

جـ) إذا كان المكثف بين النقطتين c و d ومكثفا مستويا ، المسافة بين لوحيه 1.77mm ، احسب مساحة كل من لوحي المكثف إذا كان المكثف مملوء بمادة عازلة ثابت عزلها 100 .



٤ - مكثف مستو سعته C_1 والبعد الفاصل بين لوحيه d ومساحة كل من لوحيه S . أدخلنا بين هذين اللوحين صفيحة معدنية معزولة سمكها a . احسب سعتها الجديدة .

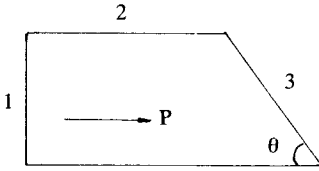
٥ - مكثفان سعاتهما 2 ميكروفاراد و 6 ميكروفاراد موصلان على التوالي سلط عليهما فرق جهد قدرها 200 فولت .

احسب فرق الجهد بين لوحي كل مكثف وشحنة كل منهما . ثم احسب طاقة التخزين لكل مكثف وكذلك للمكثف المكافئ وعلق على النتيجة .

٦ - كرة موصلة معزولة نصف قطرها R وشحنتها Q ما هي الطاقة الكلية المخزونة فيها وما هو نصف القطر r للحجم الذي يخزن نصف هذه الطاقة .

٧ - مكثفان أحدهما مشحون والآخر غير مشحون وصلا على التوالي . برهن أن الشحنة تتوزع عليهما بحيث تحوي كل منهما جزءا من الشحنة الأصلية بنسبة

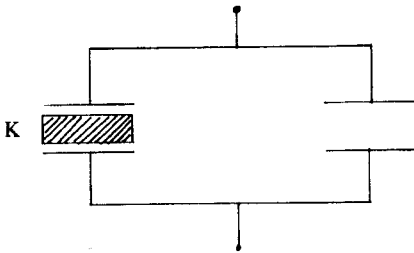
و برهن أن الطاقة الجديدة للجزمة أقل من الطاقة الابتدائية . ثم أوجد علاقة لحساب فرق الطاقة هذا بدلالة الشحنة الأولية وسعة كل من المكثفين .



٨ - جسم عازل له الشكل المرسوم جانباً وهو مستقطب بشكل منتظم ومتجه الاستقطاب P . أوجد الكثافة الكهربائية السطحية σ_p على كل من وجوهه الثلاثة 1 و 2 و 3.

٩ - مكثف مستوٍ فرق الجهد بين لوحيه V_1 . وضع بين هذين اللوحين صفيحة من مادة عازلة تملأ الفراغ بينهما ثابت عزلها K_1 .

- احسب فرق الجهد V_2 الجديد بين لوحيه بعد وضع العازل .
- قارن بين قيمتين الطاقة المخزنة فيها قبل وضع العازلة وبعده .
- استنتج من مقارنة قيمتي الطاقة أي مثل المكثف لجذب الصفيحة العازلة بين لوحيه أم لدفعها ومعاكسة إدخالها؟
- وإذا فرض أن المكثف قد وصل ببطارية تجعله في جهد ثابت لا يتغير قبل وضع الصفيحة وبعده . وازن بين قيمتي الطاقة المخزنة في هذه الشروط .



١٠ - مكثفان متساويان في السعة كل منهما سعته C ، موصلان على التوازي ، وفرق جهد قدره V . فصلا عن المصدر وأدخل بين لوحيه أحدهما مادة عازلة ثابت عزلها K ملأت الفراغ بين اللوحين كاملاً .

احسب الشحنة الكهربائية التي انتقلت من أحد المكثفين إلى الآخر واحسب كذلك فرق الجهد النهائي V_2 بعد إدخال العازل .

١١ - وضعت شحنة قدرها 30×10^{-6} كولوم على مكثف متوازي اللوحين فإذا كانت مساحة كل من لوحيه 5 سم^٢ احسب المجال الكهربائي بينهما.

١٢ - إذا كانت الشحنة على مكثف تساوي 2.5×10^{-6} كولوم عندما يكون الجهد بين طرفيه يساوي 125 فولت ما هي سعة هذا المكثف؟

١٣ - زادت شحنة مكثف بمقدار 6.0×10^{-6} كولوم عندما تغير الجهد بين طرفيه من 100 إلى 200 فولت ما هي سعة هذا المكثف.

١٤ - إذا كانت سعة مكثف متوازي اللوحين في الهواء تساوي 0.0025 ميكروفاراد (μF) وكانت مساحة كل من لوحيه تساوي 0.80 متر^٢.

١ - ما هي المسافة بين اللوحين؟

ب - ما هي أكبر قيمة للجهد يمكن وضعها بين طرفي المكثف إذا علمت أن الهواء بين الصفيحتين يتحمل مجالا كهربيا قدرها 3.0×10^6 فولت/متر قبل حدوث تأين له أو تفريغ للشحنة؟

١٥ - مكثف اسطواناني يتألف من اسطوانتين متحدتي المركز فإذا كان نصف القطر الخارجي للأسطوانة الداخلة (r_a) يساوي 9.0 سم ونصف القطر الداخلي للأسطوانة الخارجية (r_b) 10.0 سم.

ما هي قيمة سعة هذا المكثف. وأعلى قيمة للجهد الذي يتحملة هذا المكثف إذا علمت أن تأين الفراغ أو حدوث الشرارة لا يحصل إلا إذا زاد المجال الكهربائي بين طرفي الاسطوانتين عن 3.0×10^6 فولت/متر.

ماذا تكون الاجابة لو كانت $r_b = r_a$ ؟

١٦ - مكثفان C_1 ، C_2 فإذا وصلا على التوالي كانت قيمة المحصلة تساوي $C_1 \frac{1}{3}$ وإذا وصلا على التوازي كانت المحصلة 3 ميكروفاراد (μf).

ما قيمة C_1 ، C_2 ؟

١٧ - مكثفان قيمة كل منهما $3\mu F$ وصلا على التوالي ثم وصل بين طرفيهما جهد قدره 10 فولت .
احسب الطاقة المخزونة لهما ولكل منهما على حده . ما قيمة الطاقة لو وصلا على التوازي ؟ فسر النتائج .

١٨ - مكثف كروي مكون من كرة داخلية نصف قطرها r_a وخارجية نصف قطرها r_b متحدتا المركز فإذا كان المكثف يحمل شحنة قدرها Q .
فاحسب الطاقة الكلية
ا - باستخدام المعادلة (١٣ - ٣) .
ب - بإجراء التكامل الوارد في المعادلة (١٣ ب - ٣) .

١٩ - مكثف مستوي مكون من صفيحتين متماثلتين . فإذا كانت المسافة بينهما 2 مم وسعته في الفراغ 10^{-12} فاراد فإذا فرض أن الجهد بين طرفيه يساوي 200 فولت ثم أدخلت مادة عازلة ثابت عزلها 49 فاحسب :
أ - القيمة الجديدة للسعة بعد وضع المادة العازلة .
ب - ما هي قيمة الشحنة المستحثة على سطحي المادة العازلة ؟
ج - الاستقطاب p للمادة العازلة .
د - ما هي قيمة الازاحة والمجال داخل المادة العازلة .

٢٠ - مكثف مستوي مكون من صفيحتين متماثلتين المسافة بينهما 5 مم وسعته في الفراغ 2×10^{-12} فاراد . شحن المكثف حتى بلغ الجهد بين طرفيه 50 فولت ثم أدخلت مادة عازلة سمكها 2mm في وسط الفراغ بين الصفيحتين . فإذا كانت القابلية الكهربائية للمادة العازلة تساوي 15 فاحسب :
ا - المجال الكهربائي داخل المادة العازلة وخارجها وكذلك الازاحة .
ب - الاستقطاب p .
ج - الشحنة المستحثة على سطحي المادة العازلة .
د - سعة المكثف .

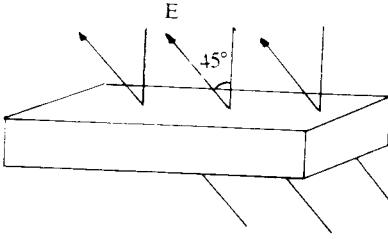
٢١ - مائتا مكثف وصلت على التوازي فإذا كانت هذه المكثفات متماثلة وسعة كل منها $10\mu F$ وشحنت حتى بلغ الجهد 30,000 فولت . فإذا كانت قيمة الكيلووات - ساعة 3 قروش ، فاحسب المبلغ الذي يمكن توفيره لخزن الطاقة فيما لو وصلت هذه المكثفات على التوالي .

٢٢ - موصل كروي نصف قطره r وشحنته Q مؤلف من جزئين نصف كرويين منفصلين . برهن أن القوة المطلوبة لتماصهما تساوي $\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2}$

٢٣ - قطعة من الكوارتز ثابت عزلها 3.8

وضعت في مجال كهربائي قيمته 20.000 فولت/متر (كما في الشكل) .

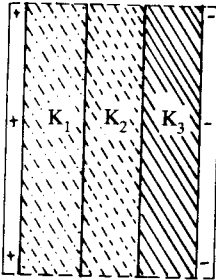
بحيث يعمل متجه المجال الكهربائي زاوية قدرها 45° مع أعلى وأسفل القطعة بينما يكون موازيا لأمام القطعة وخلفها .



احسب كثافة الشحنة على كل أوجه القطعة .

٢٤ - مادة عازلة تحتوي على ثنائيات أقطاب كهربائية ذرية دائمة قيمة عزم كل منها 3×10^{-26} كولوم - متر وكثافة الذرات 10^{20} ذرة/متر^٣ فإذا كان المجال 10^4 فولت/متر يسبب في توجيه 25% من هذه الثنائيات مع اتجاه المجال .

فاحسب قابلية (التأثرية) هذه المادة العازلة .



٢٥ - مكثف متوازي اللوحين وضعت بين لوحيه ثلاث مواد عازلة K_1 و K_2 و K_3 فإذا كانت سعة المكثف قبل وضعها C_0 . فاثبت أن سعة المكثف بعد وضع المادة العازلة تساوي :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right)$$



التيار الكهربائي المستمر

Steady Electric Current

● التيار الكهربائي ● التوصيل الكهربائي والمقاومات ● الطاقة والقدرة وقانون جول في دوائر التيار المستمر ● القوة الدافعة الكهربائية والمقاومة الداخلية ● الدوائر الكهربائية المركبة ● تيارات الشحن والتفريغ للمكثف ● قنطرة ويتستون والقنطرة المترية ● قنطرة كاري فوستر ● قنطرة كلفين المزدوجة ● مقياس فرق الجهد واستعمالاته ● القوة الدافعة الكهربائية الحرارية ● تأثيرات سيبك وبلتير وطومسون ● القوة الدافعة الحرارية والديناميكا الحرارية ● الازدواج الحراري ودرجة الحرارة ● مسائل .

(١-٤) التيار الكهربائي

Electric Current

من المعروف أن الموصلات مواد بداخلها شحنات حرة تتحرك حركة عشوائية غير منتظمة ولكنها عند خضوعها لمجال كهربائي تتحرك حركة منتظمة في اتجاه معين مكونة ما يسمى بالتيار الكهربائي. والشحنات الحرة في حالة الموصلات المعدنية عبارة عن إلكترونات حرة (free electrons) أما في الموصلات السائلة والغازية فهي أيونات موجبة وإيونات سالبة.

وتعرف شدة التيار الكهربائي I (ويرمز لها أيضا بالرمز i) بكمية الشحنة التي تمر خلال مقطع سلك في الثانية الواحدة. فلو مرت شحنة قدرها dq في زمن قدره dt خلال مقطع السلك فإن شدة التيار تعطى بالمعادلة:

$$I = \frac{dq}{dt} \dots \dots \dots (٤ - ١١)$$

ووحدة التيار الأمبير (Ampere) في النظام العالمي (S.I) حيث :

$$1 \text{ A} = \text{C} / \text{s}$$

أما في النظام الكهرومغناطيسي (CGSemu) فيسمى بالأمبير المطلق (abAmpere) حيث :

$$1 \text{ ab. A} = 10 \text{ A}$$

وفي النظام الكهروستاتيكي (CGSesu) فيسمى بالاستات أمبير (state Ampere) حيث :

$$1 \text{ stat. A} = 3.335 \times 10^{-10} \text{ A}$$

وأخيرا في النظام الجاوسي فيستعمل عادة النظام الكهرواستاتيكي للتعبير عن وحدة التيار وقليل ما يستعمل النظام الكهرومغناطيسي (انظر الملحق ١).

ويعبر عن التيارات الصغيرة بالملي أمبير (m.A) ويساوي 10^{-3} A وبالميكرو أمبير ويساوي 10^{-6} A واتجاه التيار المصطلح هو عكس اتجاه تحرك الشحنات السالبة في الموصلات. وإذا أخذ اتجاه التيار وعلاقته باتجاه هذه الشحنات فإن المعادلة (٤ - ١١) يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$I = - \frac{dq}{dt} \dots \dots \dots (٤ - \text{ب} ١)$$

إذا تعرضت قطعة من سلك موصل منتظم الشكل [شكل (٤-١)] لمجال كهربائي شدته E وامتجه إلى اليسار فإن الإلكترونات ستتحرك إلى اليمين. فإذا فرض أن كل إلكترون يسير بسرعة ثابتة مقدارها v فإنه سيقطع مسافة قدرها $v dt$ في زمن قدره dt . فإذا كانت مساحة مقطع السلك S وكانت n عدد الإلكترونات الحرة في وحدة الحجم، فإن عدد الإلكترونات التي تمر من مقطع السلك في الزمن dt تساوي $nSvdt$. فإذا كانت e تمثل شحنة الإلكترون فإن الشحنة الكلية التي تمر في هذه المسافة في الزمن dt هي :

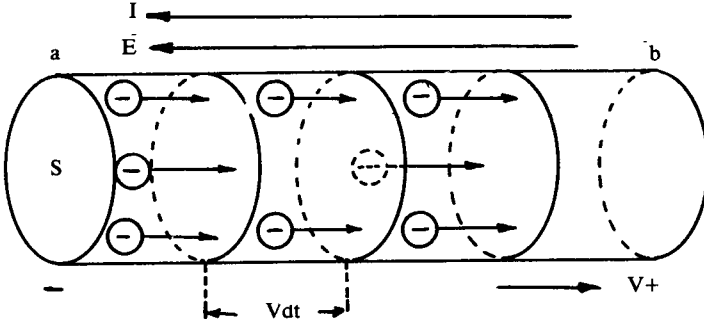
$$dq = nevSdt \dots \dots \dots (٤ - ١٢)$$

$$\therefore I = \frac{dq}{dt} = nevS \quad \dots\dots\dots (٢-٤)$$

وتعرف كثافة التيار لموصل ما (current density) بأنها خارج قسمة التيار على مساحة مقطع الموصل أي أن:

$$J = \frac{I}{S} = nev \quad \dots\dots\dots (٢-٤)$$

وتسمى سرعة الإلكترون v بالسرعة الانسيابية ويرمز لها بالرمز $\bar{v}$ وسوف يأتي شرحها في البند (٤-٢-١).



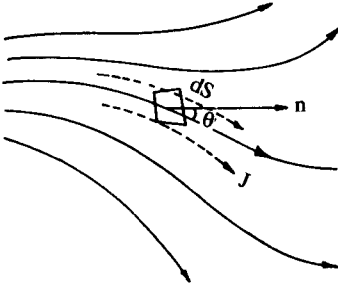
شكل (٤-١): قطعة من سلك موصل منتظم الشكل مساحة مقطعه S يمر به تيار I يتجه إلى اليسار فتتحرك الإلكترونات إلى اليمين، لدراسة كثافة التيار وعلاقته بالإلكترونات المتحركة.

وتحدد المعادلة (٢-٤) متوسط كثافة التيار في المساحة S . فإذا لم يكن التيار موزعاً بانتظام فإنه يمكن اعتبار مرور التيار خلال مساحة متناهية في الصغر مقدارها dS وبذلك يمكن كتابة كثافة التيار بالصيغة التالية:

$$J = \frac{dI}{dS} \quad \dots\dots\dots (٣-٤)$$

أي أن كثافة التيار عبارة عن التيار خلال وحدة المساحة العمودية على اتجاه سريان الشحنة. ووحدة كثافة التيار أمبير/متر^٢ (A/m^2).

أما إذا كانت هناك زاوية قدرها θ بين J والعمودي n على dS فإن المساحة المتعامدة مع J كما في شكل (٢-٤) هي:



$$dS' = dS \cos \theta$$

$$\therefore dI = J \cos \theta dS$$

$$I = \int J \cos \theta dS$$

$$\therefore I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \dots (٤-٣ \text{ ب})$$

شكل (٤-٢): الموصل غير منتظم
الشكل، حيث θ زاوية بين كثافة التيار J
والعمودي على عنصر المساحة dS .

حيث يكون التكامل على كامل
السطح S وهذه هي العلاقة العامة التي
تربط بين التيار وكثافة التيار.

وإذا فرض أن q هي الكثافة الحجمية للشحنة ($q = ne$) و V الحجم التي تتحرك
فيه الشحنة ($dV = vSdt$) فإن المعادلة (٤-٢) تصبح:

$$dq = qdV \quad \therefore q = \int_V qdV$$

$$\therefore I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V qdV = \int -\frac{\partial q}{\partial t} dV \dots (٤-٤)$$

وسبب تغير التفاضل $\frac{d}{dt}$ إلى $\frac{\partial}{\partial t}$ هو أن q تابعة لكل من المكان والزمن وفي هذه الحالة
هي تابعة للزمن فقط. وإذا أخذنا حجما V محاطا بسطح ثابت S فإن التيار يمثل التغير
في الشحنة بالنسبة للحجم V عبر مقطع المساحة S وحسب قانون حفظ الشحنة فإن
معدل نقصان الشحنة داخل حجم يساوي التيار الكلي المتدفق خارج السطح المحيط
بالحجم.

وباستخدام المعادلتين (٤-٣ ب) و (٤-٤) يُحصل على:

$$\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV \dots \dots \dots (٤-١٥)$$

وحسب المعادلة (٢-٤٦) ملحق ٢ تصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$\int_V (\text{div } \vec{J}) dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \dots \quad (٤-٥)$$

وحيث إن هذه المعادلة صحيحة لأي حجم .

$$\therefore \text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (٤-٦)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة الاستمرارية (equation of continuity).

مثال (٤-١)

مادة من الفضة كثافتها تساوي 10.50 gm/cm^3 والكتلة الذرية (atomic mass) لها تساوي 107.9 gm/mole ، ذات مقطع دائري منتظم نصف قطره 0.05 cm فإذا كانت هذه المادة تحمل تيارا منتظما قدره 1.0 A .

فاحسب كثافة الشحنة وسرعة الشحنات المتحركة داخل الموصل مع افتراض أن ذرة الفضة تعطي إلكترون واحدًا طليقا (حرا).

الحل

كثافة التيار في هذه الحالة لها القيمة نفسها عند أي نقطة . وبذلك تستعمل المعادلة (٤-٦) حيث :

$$S = \pi r^2 = (3.1416) (0.05)^2 = 0.00785 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{I}{S} = 1.0 / 0.00785 = 127.40 \text{ A/cm}^2$$

$$= 1.274 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

وحيث إن الجزيء الجرامي (mole) لمادة الفضة (107.9 grams) يحتوي على $6.023 \times 10^{23} \text{ atoms}$ وكثافة الفضة 10.50 gm/cm^3 فإن الجزيء الجرامي يشمل حجما قدرة :

$$107.9 / 10.50 = 10.28 \text{ cm}^3$$

أي أن كل سم^٣ من الفضة يحتوي على :

$$\frac{6.023 \times 10^{23}}{10.28} = 5.86 \times 10^{22} \text{ atoms/cm}^3$$

وحيث إن كل ذرة تعطي إلكترونًا طليقا واحدا فإن عدد الإلكترونات لوحدة الحجم تساوي :

$$n = 5.86 \times 10^{22} \text{ electrons / cm}^3$$

$$= 5.86 \times 10^{28} \text{ electrons / m}^3$$

وباستخدام المعادلة (٢-٤) يُحصل على :

$$v = \frac{J}{ne} = \frac{1.274 \times 10^6}{(5.86 \times 10^{28})(1.602 \times 10^{-19})}$$

$$= 1.357 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

(٢-٤) التوصيلية الكهرية والمقاومات

Electrical Conductivity and Resistances

تختلف المواد الموصلة بعضها عن بعض في مقدار كثافة التيار الذي يتكون نتيجة لمجال كهربي E. وتسمى نسبة كثافة التيار إلى شدة المجال بالتوصيل الكهربي للمادة ويرمز له بالرمز σ أي أن :

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad \therefore J = \sigma E \quad \dots \dots \dots (٤-٧)$$

وكلما زادت توصيلية مادة ما زادت كثافة التيار لها عند قيمة معينة لشدة المجال الكهربي E. ووحدات σ هي أمبير/فولت . متر (A / V . m) وتبلغ قيمتها بالنسبة للموصلات في حدود 10^8 A / V . m أما بالنسبة للعوازل الجيدة في حدود $10^{-13} \text{ A / V . m}$ أو أقل من ذلك .

ويسمى مقلوب توصيلية المادة بالمقاومة النوعية للمادة (resistivity) ويرمز لها بالرمز ρ أي أن :

$$q = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad \therefore q = \frac{ES}{I} \quad \dots \quad (٤-٨)$$

ووحدها فولت . متر / أمبير (V . m / A) في النظام العالمى .

(٤-٢-١) المقاومة وقانون أوم Resistance and Ohm's law

ينتج التيار عن حركة الشحنات في الموصل (الإلكترونات في المعادن) . فإذا كان لدينا موصلاً اسطوانياً معدنياً كما في شكل (٤-١) وفرض أن n عدد الإلكترونات في وحدة الحجم من هذا الموصل وإن e شحنة الإلكترون فإن كل إلكترون يتأثر بقوة نتيجة لتسليط المجال E قدرها:

$$F = e \cdot E = am \quad \dots \quad (٤-٩)$$

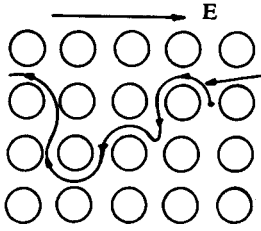
حيث a تسارع (عجلة) الإلكترون و m كتلته .

ويتسارع الإلكترون نتيجة لتسليط المجال E ويفقد سرعته عند تصادمه بإيونات الموصل وبعد كل تصادم يبدأ الإلكترون حركته من وضع السكون ويتسارع مرة أخرى وتكون لدينا نتيجة لذلك سرعة يطلق عليها السرعة الانسيابية (drift velocity) وتزداد متوسط السرعات الانسيابية للإلكترونات الحرة المشتركة في سريان التيار طردياً مع زيادة المجال الكهربى E أي أن:

$$\bar{v} \propto E \quad \therefore \bar{v} = \mu E \quad \dots \quad (٤-١٠)$$

وتسمى μ بحركية الإلكترونات (mobility of the electrons) وهي خاصية من خواص المواد وتكون كبيرة بالنسبة للموصلات الجيدة التوصيل وصغيرة بالنسبة للموصلات ضعيفة التوصيل . وتختلف السرعة $\bar{v}$ عن السرعة العشوائية التي يتحرك بها الإلكترون داخل الموصل قبل تأثره بالمجال الكهربى .

ويمثل الشكل (٤-٣) مسارا لأحد الإلكترونات الحرة لموصل معدني .



ويسمى متوسط الزمن بين اصطدامين متتابعين بمتوسط الزمن الحر (mean free time). ويسمى متوسط المسافة بين اصطدامين بمتوسط المسار الحر (mean free path).

شكل (٤-٣): مسار أحد الإلكترونات داخل موصل معدني.

ويعتبر هذا التصادم بمثابة قوة تعوق حركة الإلكترونات ينتج عنها ما يسمى بمقاومة الموصل (resistance).

فإذا كان الموصل منتظماً، طوله l ومساحة مقطعه S ، وكان فرق الجهد بين طرفيه a و b ، كما في شكل (٤-١)، هو V_{ab} والتيار المار هو I فإنه حسب المعادلتين (٢-٢٥) و(٤-٨) يكون:

$$q = -\frac{S}{I} \frac{dV}{dx} \quad \therefore I dx = -\frac{S}{q} dV$$

$$\therefore I \int_0^l dx = -\frac{S}{q} \int_{V_a}^{V_b} dV$$

أو

$$Il = -\frac{S}{q} (V_b - V_a) = \frac{S}{q} (V_a - V_b) = \frac{S}{q} V_{ab}$$

$$\therefore I = \frac{V_{ab}}{lq/S} \quad \dots \dots \dots (٤-١١)$$

ويسمى المقدار lq/S بالمقاومة ويرمز لها بـ R .

$$\therefore I = \frac{V_{ab}}{R} \quad \dots \dots \dots (٤-١٢)$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \dots\dots\dots (١٢-٤)$$

وقد استنتج العالم الألماني جيورج سيمون أوم (١٧٨٩ - ١٨٥٤م) العلاقة (١٢-٤) ولذلك فهي تعرف بقانون أوم. ووحدة المقاومة في نظام (S.I) هي فولت/ أمبير (V/A) وتسمى بالأوم Ω ، وهكذا نرى أن مقاومة موصل ما تساوي أوما واحدا عندما يكون فرق الجهد بين طرفيه فولتا واحدا إذا مر به تيار مقداره أمبير واحد.

وواضح من المعادلة (١٢-٤) أن R تعتمد على شكل الجسم الموصل فهي تتناسب طرديا مع طوله وعكسيا مع مساحة مقطعه بينما تعتمد المقاومة النوعية ρ على عدد الإلكترونات المتنقلة وسلوكها ولمعرفة ذلك يُتبع ما يلي:

نرمز للزمن المتوسط بين اصطدامين متتابعين بالرمز 2τ فتكون السرعة في أول الحركة صفرا وفي نهاية الزمن تمثلها المعادلة التالية:

$$v_1 = v_0 + a(2\tau) = a(2\tau) \quad \dots\dots\dots (١٣-٤)$$

وبالتعويض عن a من المعادلة (٩-٤) يمكن الحصول على:

$$v_1 = \frac{eE}{m} 2\tau \quad \dots\dots\dots (١٤-٤)$$

تسمى τ بزمن التراخي (relaxation time) ومتوسط هذه السرعة خلال الزمن 2τ هو:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} 2\tau = \frac{eE}{m} \tau \quad \dots\dots\dots (١٥-٤)$$

وحيث إن:

$$I = ne\bar{v}S \quad \& \quad E = V_{ab}/l$$

$$\therefore I = \frac{\tau ne^2 S}{ml} V_{ab} \quad \dots\dots\dots (١٦-٤)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (١١-٤) يُحصل على:

$$R = \frac{mI}{ne^2 S \tau} \dots\dots\dots (٤-١٧)$$

ثم مقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٤-١٢) يُحصل على :

$$\rho = \frac{m}{ne^2 \tau} \dots\dots\dots (٤-١٨)$$

أو

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m} \dots\dots\dots (٤-١٨ \text{ ب})$$

وتتراوح قيمة τ بين 10^{-12} و 10^{-14} ثانية. فمثلا إذا أخذت مادة النحاس (copper) عند درجة حرارة الغرفة حيث $(\sigma = 5.91 \times 10^7 \text{ A/V.m})$ ، $(e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C})$ ، $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $n = 8.47 \times 10^{28} \text{ electrons/m}^3$ وعوض في المعادلة (٤-١٨) يُحصل على : $\tau = 2.475 \times 10^{-14} \text{ s}$

وواضح من المعادلتين (٤-١٨) و (٤-١٨ ب) أن σ ، ρ لا تعتمدان على شكل الموصل.

ويوضح الجدول (٤-١) قيم ρ ، α لبعض الموصلات حيث α المعامل الحراري للمقاومة وسيأتي شرحه في البند (٤-٢-٢).

ويمكن حساب قابلية التحرك للإلكترونات μ (حركية الإلكترونات - mobility) من المعادلات (٤-١٠) ، (٤-١٥) و (٤-١٨) فيُحصل على :

$$\mu = \frac{\sigma}{ne} = \frac{1}{ne\tau} \dots\dots\dots (٤-١٩)$$

مثال (٤-٢)

احسب قابلية التحرك للإلكترونات الحرة داخل معدن النحاس ، الذي مقاومته النوعية $1.7 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ ووزنه الذري 63.6 وكثافته مادته 8.9 gm/cm^3 .

جدول (٤-١): المقاومة النوعية ρ والمعامل الحراري α لبعض المواد

α	$\rho(\Omega.m)$	المواد
0.0039	0.282×10^{-7}	ألومنيوم
0.004	12.5×10^{-7}	بيزموث
0.002	0.719×10^{-7}	نحاس أصفر
-0.0005	349.65×10^{-7}	كربون 0°
-0.0005	270.3×10^{-7}	كربون 500°
0.00001	4.9×10^{-7}	كونستانتان
0.00393	0.172×10^{-7}	نحاس ملدن
0.00382	0.176×10^{-7}	نحاس صلب مسحوب
0.005	1.0×10^{-7}	حديد نقي 99.98%
0.004	2.22×10^{-7}	رصاص
0.000002	4.35×10^{-7}	منفتين (Cu84%, Mn12%, Ni4%)
0.00089	9.62×10^{-7}	زئبق
0.0004	10.00×10^{-7}	نيكروم
0.0038	0.162×10^{-7}	فضة
0.0044	0.43×10^{-7}	صوديوم «صلب» 0°
0.0033	1.02×10^{-7}	صوديوم «سائل» 1161°
0.0008	6.21×10^{-7}	فولاذ
0.0045	0.552×10^{-7}	ولفرام «تنجستن»
0.0037	0.58×10^{-7}	زنك
	5.0×10^{14}	كهرمان
	8.0×10^{13}	شمع الختم
	$2 \times 10^{13} - 1 \times 10^{16}$	مطاط صلب
	9×10^{11}	زجاج عادي
	4×10^{11}	خشب المهاقوني
	2×10^{11}	صفائح زجاج تجاري
	3×10^8	خشب الاسفندان
	5×10^7	ألياف حمراء
	1×10^5	رخام
	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^{14}$	باكليت
	1×10^{14}	زيت اليرافين
	3×10^3	إيثايل الكحول
	5×10^3	ماء مقطر
	8.33×10^{-2}	محلول كلوريد الصوديوم
	2.94×10^{-3}	كلوريد الصوديوم المنصهر

الحل

حل هذه المسألة نطبق المعادلة (٤-١٩) حيث يمكن حساب عدد الإلكترونات من المعادلة:

$$n = \frac{\text{كثافة المعدن} \times \text{عدد أفوجادرو}}{\text{الوزن الذري}}$$

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 8.9}{63.6} = 8.42 \times 10^{22} \text{ electrons/cm}^3$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{8.42 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.7 \times 10^{-8}} = 43 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{C} \cdot \Omega$$

مثال (٤-٣)

ملف من النحاس عدد لفاته 381 لفة وقطر مقطع السلك 0.0254 cm ومتوسط قطر الملف 1.0 cm فإذا كانت مقاومته النوعية عند درجة 20°C تساوي $1.692 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ فاحسب مقاومة الملف عند درجة الحرارة نفسها. وإذا كان فرق الجهد بين طرفي السلك 20V فاحسب التيار الكهربائي وكثافة التيار والمجال الكهربائي والسرعة الانسيابية للإلكترونات.

الحل

$$l = 2 \pi r' n = 2 \times (3.1416) (0.5) (381) = 1197 \text{ cm}$$

$$S = \pi r^2 = (3.1416) (0.0127)^2 = 5.067 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$$

حيث n عدد لفات الملف، r' نصف قطر الملف، r نصف قطر مقطع السلك

$$\therefore R = \rho \frac{l}{S} \quad \therefore R = 3.997 \Omega$$

$$I = \frac{20}{3.997} = 5 \text{ A}, J = \frac{I}{S} = \frac{5}{5.067 \times 10^{-4}} = 10^4 \text{ A/m}^2$$

$$E = \frac{V}{l} = \frac{20}{11.97} = 1.67 \text{ V/m}$$

أما السرعة الانسيابية فيمكن حسابها من المعادلة (٢-٤ - ٤) حيث :

$$\bar{v} = \frac{I}{n e S} = \frac{5}{8.42 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 5.067 \times 10^{-8}} = 7.32 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

هذه السرعة اكتسبها الإلكترون نتيجة لتطبيق المجال الكهربى E ، ولالإلكترون سرعة أخرى تسمى بالسرعة الحرارية العشوائية random thermal velocity ، v_r ، وقيمتها أكبر كثيرا من السرعة $\bar{v}$. للمقارنة بين سرعتين ، حيث قيمة السرعة v للنحاس كما وردت في المثال تساوي $7.32 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ بينما قيمة السرعة v_r تساوي $1.6 \times 10^6 \text{ m/s}$ ، فإن الفرق بينهما كبيرا جدا في حدود 2.2×10^8 ولذلك فإن :

$$v_r + \bar{v} = v_r$$

ولذلك إذا رمز للمسار الحر بالرمز λ فإن :

$$\lambda = v_r \times \tau$$

وإذا استعملت قيم τ و v_r الخاصة بالنحاس فإن قيمة المسار الحر λ تساوي :

$$\lambda = 1.6 \times 10^6 \times 2.475 \times 10^{-14} = 3.96 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 40 \text{ nm}$$

أي أن المسافة بين كل تصادمين تكون 200 مرة أكبر من المسافة الذرية atomic spacing ، إذا فرض أن المسافة الذرية بين ذرتين تساوي 0.2nm ، ومعنى ذلك أن الإلكترون سوف يسير 200 مرة قدر المسافة الذرية حتى يصطدم بأي ذرة أخرى. ونتيجة لهذا التباين في النتائج فإنه يمكن معالجتها بصورة أكثر دقة باستخدام النظرية الكمية quantum theory الخارجة عن نطاق هذا الكتاب.

(٢-٢-٤) تغير المقاومة بتغير درجة الحرارة Resistance varies with temperature

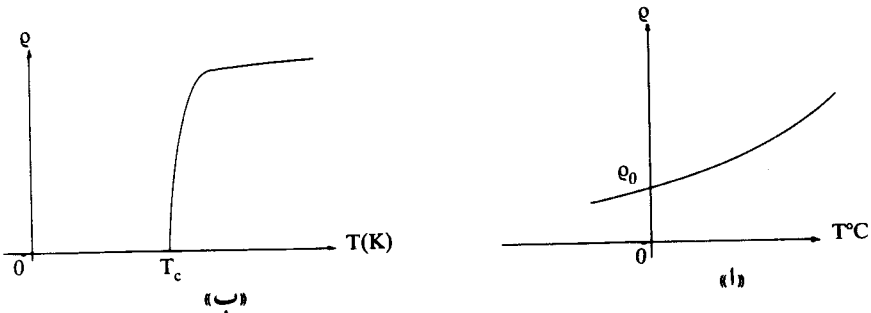
تعتبر المعادلة (١٢-٤) عن مقاومة موصل منتظم وهي تتناسب طرديا مع طول الموصل وعكسيا مع مساحة مقطعة ، فإذا كان طول الموصل هو الوحدة وكانت مساحة مقطعه هي الوحدة أيضا ، كانت مقاومته تساوي عدديا مقاومته النوعية .

ومن الواضح من تعريف المقاومة النوعية أن الموصل ذا المقاومة النوعية الكبيرة موصل رديء وعازل جيد وبالعكس فإن الموصل ذا المقاومة النوعية الصغيرة موصل جيد.

ولكل مادة نقية عند درجة حرارة معينة قيمة ثابتة للمقاومة النوعية. فإذا تغيرت هذه الحالة نتيجة لمعاملة المادة حرارياً أو لسحبها أو طرقتها أو إذا أضيفت إليها شوائب فإنها تتغير بدرجة ملحوظة. كذلك تتغير المقاومة النوعية لجميع الموصلات بتغير درجة الحرارة، لأن المقاومة النوعية تتوقف على قابلية تحريك الإلكترونات الحرة μ (mobility) للموصلات كما ورد ذلك في المعادلة (٤-١٨) حيث إن μ تقل بارتفاع درجة الحرارة نظراً لزيادة فرص التصادم بسبب اتساع سعة اهتزاز الأيونات الموجبة للموصل. وبذلك تؤدي زيادة درجة الحرارة إلى زيادة المقاومة النوعية. ويمثل شكل (٤-٤) تغير المقاومة النوعية لموصل معدني بتغير درجة حرارته، ويمكن التعبير عن هذا المنحنى بالمعادلة الآتية:

$$\rho = \rho_0 + aT + bT^2 + cT^3 + \dots$$

حيث ρ_0 ترمز للمقاومة النوعية للموصل عند درجة حرارة الصفر و a و b و c ثوابت تختلف قيمتها باختلاف الموصل و T درجة الحرارة بالتدرج المئوي وعند درجات الحرارة العالية جداً، يمكننا إهمال الحدود التي تتناسب مع T^3 ، T^2 إلخ... والاكتفاء بالحددين الأولين أي أن:



شكل (٤-٤): ١ - العلاقة بين المقاومة النوعية ρ ودرجة الحرارة T للموصلات.
ب - العلاقة بين المقاومة النوعية ρ ودرجة الحرارة للمواد فائقة التوصيل.

$$\rho = \rho_0 + \alpha T \quad \dots\dots\dots (٤-١٢٠)$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{\rho_0} \alpha T$$

أو

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \alpha T = \rho_0 (1 + \alpha T) \quad \dots (٤-٢٠ ب)$$

حيث

$$\alpha = \frac{a}{\rho_0} \quad \dots\dots\dots (٤-٢١)$$

حيث تسمى α بمعامل الحرارة للمقاومة النوعية (temperature coefficient of resistivity)

ووحده $\frac{1}{\text{درجة الحرارة}}$.

ولما كانت المقاومة R لموصل ما تتناسب مع ρ ، وذلك حسب المعادلة (٤-١٢)، فإنه يمكن كتابة المعادلة (٤-٢٠) كالتالي:

$$R = R_0 (1 + \alpha T) \quad \dots\dots\dots (٤-٢٢)$$

حيث R_0 هي قيمة المقاومة عند درجة حرارة الصفر المئوي ، و R هي قيمة المقاومة عند درجة الحرارة T .

وهذه العلاقة تصلح فقط للمعادن وأما في حالة السوائل الموصلة فإن المقاومة تنخفض بارتفاع درجة الحرارة نتيجة انخفاض لزوجة المحلول بارتفاع الحرارة مما يؤدي إلى زيادة سرعة حركة الأيونات ، ولهذا فإن معامل الحرارة للمقاومة يكون سالبا . وفي حالة أشباه الموصلات تقل المقاومة بارتفاع درجة الحرارة بسبب زيادة عدد الإلكترونات الحرة . ويلاحظ أن هناك طائفة من المعادن تسمى بالموصلات فائقة (مفرطة) التوصيل (super-conductor) والتي فيها تختفي المقاومة تماما عند درجات حرارة أقل من 10 درجات مطلقة . وقد تم الحصول خلال العام الماضي ١٤٠٧ هـ على مواد تختفي مقاومتها عند درجة حرارة ١٠٠ درجة مطلقة (T_c) شكل (٤ ب - ٤) ولذلك سميت بالمواد فائقة التوصيل مرتفعة الحرارة وصنعت هذه المواد من مواد خزفية ceramic materials.

مثال (٤-٤)

مقاومة سلك في درجة 20° مئوية 5.4 أوم ومقاومته في درجة 100° مئوية 7 أوم .
احسب مقاومته في درجة الصفر وكذلك معامل الحرارة للمقاومة ودرجة الحرارة التي
تصل فيها مقاومته إلى 8.6 أوم .

الحل

نفرض أن R_1 هي مقاومة السلك في درجة T_1 ، R_2 مقاومته في درجة T_2 ، R_0 ،
مقاومته في درجة الصفر وبتطبيق العلاقة : $R = R_0 (1 + \alpha T)$ يكون :

$$R_1 = R_0 (1 + \alpha T_1)$$

و

$$R_2 = R_0 (1 + \alpha T_2)$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2} \quad \text{or} \quad \frac{5.4}{7} = \frac{1 + 20\alpha}{1 + 100\alpha}$$

$$\therefore \alpha = 0.004 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى عن α يكون :

$$5.4 = R_0 (1 + 20 \times 0.004) \quad \therefore R_0 = 5 \text{ } \Omega$$

ويتطبيق العلاقة نفسها لإيجاد درجة الحرارة المجهولة T أي أن :

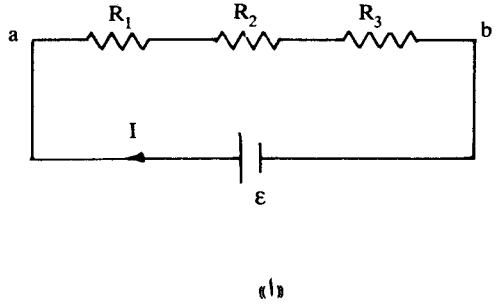
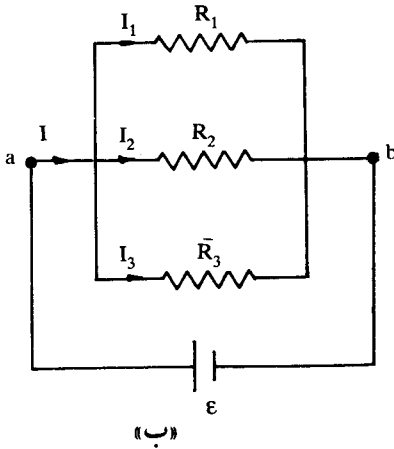
$$8.6 = 5 (1 + 0.004T) \quad \therefore T = 180^\circ \text{C}$$

(٣-٢-٤) توصيل المقاومات Connection of resistors

١ - توصيل المقاومات على التوالي Series connection of resistors

وصلت المقاومات ($R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$) على التوالي كما في شكل (١٥ - ٤) فإذا
كان فرق الجهد بين طرفي كل مقاومة $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ على الترتيب يكون فرق الجهد
الكلي بين a, b هو :

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \dots \dots (٤-٢٣)$$



شكل (٤-٥): ١ - توصيل ثلاث مقاومات R_1 و R_2 و R_3 على التوالي .
ب - توصيلها على التوازي .

ولكن حسب قانون أوم فإن :

$$V_1 = IR_1, V_2 = IR_2, \dots, V_n = IR_n$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٢٣) يُحصل على :

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_n \\ = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad \dots \quad (٤-٢٤)$$

أي أن المقاومة الكلية للمقاومات الموصلة على التوالي تساوي المجموع الكلي لها .

ب - توصيل المقاومات على التوازي *Parallel connection of resistors*

إذا وصلت المقاومات على التوازي كما في شكل (٥ب - ٤)، وفرض أن تياراً كهربياً قد مر بها نتيجة لتوصيل البطارية ϵ ، فإن الجهد الكهربى بين طرفي المقاومات يكون مشتركاً لجميع المقاومات أي أن كل مقاومة عليها الجهد نفسه .
يتجزأ التيار الكلي (I) على المقاومات عند الطرف الموجب ثم يجمع مرة أخرى عند الطرف السالب أي أن :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

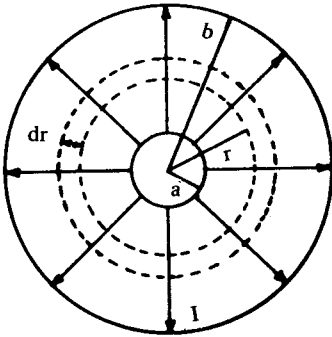
حيث $I_1, I_2, \dots, I_n$ التيارات المارة بالمقاومات $R_1, R_2, \dots, R_n$ على الترتيب. إذا فرض أن الجهد على كل مقاومة قيمته V_{ab} فإنه بتطبيق قانون أوم على كل قيمة للتيار نحصل على:

$$\frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \dots + \frac{V_{ab}}{R_n}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad \dots \dots (٤-٢٥)$$

أي أن معكوس المقاومة الكلية يساوي مجموع معكوس المقاومات الموصلة على التوازي. ويلاحظ أن المقاومة الكلية أقل من أصغر مقاومة في المجموعة.

(٤-٢-٤) مقاومة قرص دائري Resistance of a round disc



شكل (٤-٦): مقاومة قرص دائري سمكه t ونصف قطره b يمر به تيار كهربى I .

فيما سبق حسبنا مقاومة موصل منتظم المقطع حيث تكون كثافة التيار متساوية في مختلف المقاطع ووجد أن $R = \rho \frac{l}{A}$ ولكن عندما يصبح الموصل غير ثابت المقطع ويختلف سطح مقطعه من نقطة إلى أخرى على طول الموصل فإن كثافة التيار تصبح كذلك مختلفة ويصبح الحساب معقداً.

ويمكن في حالات خاصة تقدير مقاومة موصل ما. مثلاً لو أخذ قرص معدني دائري سمكه d وتوصيلته σ ونصف قطره b كما في شكل (٤-٦)، فإذا كان هناك تيار كهربى يجري فيه في اتجاه أنصاف الأقطار - من محيط دائرة فيه نصف قطرها a إلى الجوانب حتى b .

فلهساب مقاومة هذا القرص نتصور مقطعا دائريا عنصريا فيه نصف قطره r وعرضه dr فيكون محيطه $2\pi r$ ويكون سطحه العمودي على التيار $2\pi r dr$ وتكون قيمة التيار هي :

$$I = JS = \sigma ES = -\sigma 2\pi r dr \frac{dV}{dr}$$

$$\therefore dV = -\frac{I}{2\pi d\sigma} \frac{dr}{r}$$

يمكن الحصول على فرق الجهد بين a و b بتكامل طرفي هذه المعادلة أي أن :

$$\int_a^b dV = V_b - V_a = -\frac{I}{2\pi d\sigma} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi d\sigma} \ln \frac{a}{b} \quad (٢٦-٤)$$

وتكون مقاومة الموصل هي :

$$R = \frac{V_b - V_a}{I} = \frac{1}{2\pi d\sigma} \ln \frac{a}{b} \quad \dots \quad (٢٦-ب-٤)$$

ولقد اختير عنصر السطح عموديا على التيار ولذلك استعملنا $I = JS$ ولكن في الحالات الأخرى التي لا يكون فيها عنصر السطح عموديا على التيار يجب استعمال المعادلة الاتجاهية (٣-ب-٤).

(٣-٤) الطاقة والقدرة وقانون جول في دوائر التيار المستمر

Energy, Power and Joule's Law in D.C. Circuit

عند مرور تيار كهربى قدره I في موصل مقاومته R فإن طاقة كهربية تتحول إلى طاقة حرارية تعمل على رفع درجة حرارة المقاومة. فإذا كان الجهد بين طرفي هذا الموصل هو V فإن شحنة قدرها dq تمر في زمن قدره dt تعطى بالمعادلة :

$$dq = Idt$$

وتكون الطاقة التي تكتسبها هذه الشحنة، طبقا للمعادلة (٢٤-٢)، هي :

$$dU = Vdq = IVdt \quad \dots\dots\dots (٤-٢٧)$$

$$\therefore U = IVt$$

وتكون النسبة بين الطاقة إلى الزمن وهي القدرة (الاستطاعة - power) تساوي :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{IVdt}{dt} = IV \quad \dots\dots\dots (٤-٢٨)$$

أي أن القدرة الكهرية P تعطى قيمتها من شدة التيار وفرق الجهد . وإذا كانت I بالأمبير و V بالفولت فتكون P بالجول في الثانية أي :

$$P = IV = A \cdot V = \frac{C}{s} \times \frac{J}{C} = \frac{J}{s} = W$$

$$\therefore V = IR \quad \therefore P = I^2R \quad \dots\dots\dots (٤-٢٩)$$

وهذه المعادلات تطبق في حالة انطباق قانون أوم فالطاقة التي تكسبها الإلكترونات بالتسارع تفقدها بالاصطدام مع ذرات الموصل وتزداد بذلك طاقة اهتزاز الذرات وترتفع درجة حرارة الموصل وهذه الحرارة تمثل تحول الطاقة الكهرية إلى طاقة حرارية وترتبطان فيما بينهما بالمعادلة التالية :

$$P = \frac{dH}{dt} \quad \dots\dots\dots (٤-٣٠)$$

حيث dH هي الطاقة الحرارية الناتجة في زمن قدره dt. وبمساواة المعادلتين (٤-٢٩) و(٤-٣٠) يُحصل على :

$$\frac{dH}{dt} = I^2R$$

$$\therefore dH = I^2R dt \quad \dots\dots\dots (٤-٣١)$$

$$\therefore H = I^2Rt$$

فإذا كانت R ثابتة فيكون معدل تغير الحرارة الناتجة في زمن قدره dt متناسبا طرديا مع مربع التيار . وهذه العلاقة اكتشفها العالم جول (Joule) ولذلك فالمعادلة (٤-٣١) تعرف بقانون جول .

ووحدة الطاقة الحرارية حسب المعادلة (٤-٣١) هي الجول . والمعروف أن كمية الحرارة تقاس بالسعر ولذلك يمكن كتابة كمية الحرارة بالصورة التالية :

$$dh = \frac{1}{J} I^2 R dt = \frac{dU}{J} \quad \dots \quad (٣١-٤)$$

$$\therefore h = \frac{1}{J} I^2 R t = \frac{U}{J}$$

حيث تمثل h كمية الحرارة. ويسمى J بثابت جول ووحدته جول / سعر (Joule/calorie) وقيمتيه ٢, ٤ تقريبا. وتتحول كل الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية إذا كان الموصل عبارة عن كاوية كهربية أو سخانة كهربية وخلافه. أما إذا كان الموصل عبارة عن موتور كهربى فإن معظم الطاقة المستمدة من مصدر الجهد تتحول إلى طاقة ميكانيكية ويتحول الجزء الباقي إلى حرارة في الموتور حسب قانون حفظ الطاقة.

مثال (٤-٥)

وصلت سخانة كهربية بمصدر كهربى فكان التيار المار بها 5 A فإذا كانت مقاومتها 20Ω فاحسب القدرة الكهربائية، وبعد مضي نصف شهر من التوصيل احسب الطاقة الكهربائية وكمية الحرارة وما تكاليف هذه الحرارة إذا كان الثمن 9 هللة / KW.hr.

الحل

تحسب القدرة الكهربائية من المعادلة:

$$P = I^2 R = 5^2 \times 20 = 500 \text{ W}$$

أما الطاقة الكهربائية فتحسب من المعادلة:

$$U = Pt = 500 \times 15 \times 24 \times 60 \times 60 = 6.48 \times 10^8 \text{ J}$$

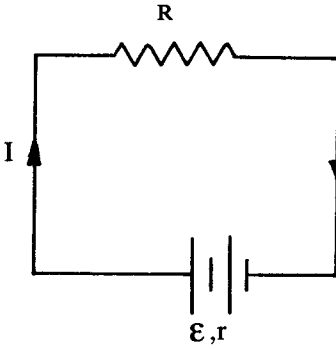
$$h = \frac{U}{J} = \frac{6.48 \times 10^8}{4.186} = 1.55 \times 10^8 \text{ Cal}$$

$$\text{Cost} = 6.48 \times 10^8 \times \frac{1 \text{ KW.hr}}{10^3 \times 60 \times 60} \times \frac{9 \text{ Halalah}}{\text{KW.hr}}$$

$$= 1620 \text{ Halalah} = 16.20 \text{ Riyal} \quad \text{ريال}$$

(٤-٤) القوة الدافعة الكهرية والمقاومة الداخلية

Electromotive Force (E.M.F.) and Internal Resistance



شكل (٤-٧): بطارية مقاومتها الداخلية r وقوتها الدافعة الكهرية E متصلة بين طرفي مقاومة خارجية R .

يستمد التيار المار في دائرة طاقته من منبع للطاقة الكهرية. وتنتج هذه الطاقة عن تحول الطاقة المختلفة كالكيميائية أو الميكانيكية أو الحرارية أو غيرها إلى طاقة كهرية فقد يكون المصدر الكهربي على شكل بطارية مكونة من أعمدة كهرية (تحويل الطاقة الكيميائية إلى طاقة كهرية) أو مولد كهربي (تحويل الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهرية) أو ازدواج حراري (thermocouple) (تحويل الطاقة الحرارية إلى طاقة كهرية).

وهذا المصدر يعطي قوة دافعة كهرية E تعطى بالمعادلة:

$$P = \frac{dU}{dt} = EI = E \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore E = \frac{dU}{dq} = J/C = V \dots\dots\dots (٤-٣٢)$$

أي أن القوة الدافعة الكهرية للمصدر هي الطاقة التي تزود بها كل وحدة شحنات تخرج من هذا المصدر وفي حالة دائرة مؤلفة من بطارية قوتها الدافعة E ومن مقاومة خارجية R يمكن تقسيم الجهد الكهربي الكلي الذي تمثله القوى الدافعة الكهرية إلى قسمين:

١- الجهد الخارجي: وهو جزء الجهد الكهربي الكلي الذي يدفع التيار في الأجهزة الخارجية المتمثلة في المقاومة R وتضيع طاقة قدرها I^2R في هذا الجزء من الدائرة.

ب - الجهد الداخلى: وهو جزء الجهد الكهربى الكلى الذى يدفع التيار داخل المصدر الكهربى نفسه وهو المتمثل فى المقاومة الداخلية r . ولذلك يضع جزء آخر من الطاقة قدره I^2r داخل المصدر ذاته.

وتكون الطاقة الكلية المتولدة من المصدر مساوية للطاقة الكلية المفقودة (المبددة) خارجه وداخله .

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$$

$$\therefore \mathcal{E} = IR + Ir \quad \dots\dots\dots (٤-٣٣)$$

حيث $V = IR$ تمثل فرق الجهد بين قطبي المصدر أى أن :

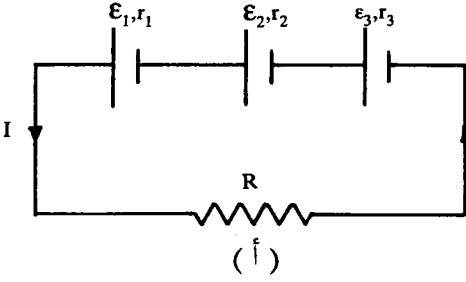
$$V = \mathcal{E} - Ir \quad \dots\dots\dots (٤-٣٤)$$

وفى بعض الحالات يمكن إهمال قيمة r بالنسبة لـ R ويكون $V = \mathcal{E}$.

ويمثل المصدر الكهربى فى حالة التيار المستمر بطرفين، يرمز لأحدهما بالعلامة السالبة (-)، ويعتبر جهده صفرا ويرمز للآخر بالعلامة الموجبة (+) ويعتبر جهده مساويا للقوة الدافعة الكهربائية للمصدر. ويكون مرور التيار فى الدائرة الخارجية من الطرف عالى الجهد إلى الطرف منخفض الجهد، كما أن مروره داخل المصدر (لكي يكمل المسار الدائرى) فى الاتجاه المضاد أى من الطرف منخفض الجهد إلى الطرف عالى الجهد. وإذا وصلت عدة بطاريات جهودها $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots, \mathcal{E}_n$ على التوالي كما فى شكل (٨ - ٤) فإن القوة الدافعة للمجموعة وكذلك المقاومة الداخلية تساوي :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \dots + \mathcal{E}_n \quad \dots\dots\dots (٤-٣٥)$$

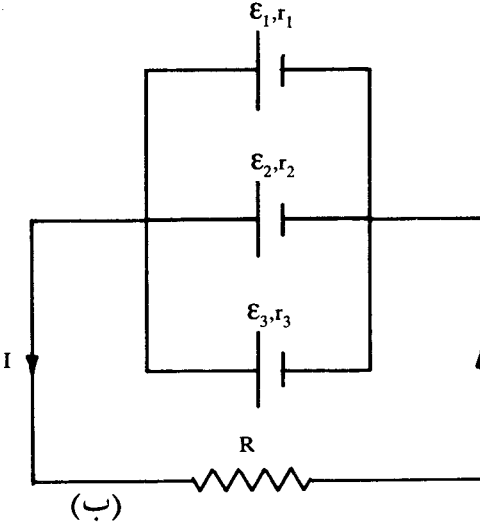
$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$



أما إذا كانت البطاريات متساوية الجهد فإن مجموعها يساوي $n\varepsilon$ ومقاومتها الداخلية الكلية تساوي nr . وإذا كان I هو مقدار التيار المار في الدائرة فإن

$$n\varepsilon_1 = IR + Inr$$

$$\therefore I = \frac{n\varepsilon_1}{R + nr} \quad \dots (٤-٣٦)$$



أما إذا وصلت البطاريات المختلفة القيمة على التوازي فإن حساب محصلة الجهود وجمع المقاومات الداخلية فيه قليل من الصعوبة ولكن إذا كانت البطاريات متساوية الجهد ε فإن القوة الدافعة الكهرية للمجموعة تساوي القوة الدافعة لأي عمود ε . وإذا كانت r هي المقاومة الداخلية لأي من البطاريات فإن المقاومة الداخلية للمجموعة تساوي $\frac{r}{n}$ حيث n عدد البطاريات ومنه يكون:

$$\varepsilon = IR + I \frac{r}{n} \quad \therefore I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}} \quad \dots (٤-٣٧)$$

مثال (٤-٦)

لتكن الدائرة الممثلة في شكل (٤-١٩) احسب التيار الكلي I وكذلك التيارات

$$I_3, I_2, I_1$$

شكل (٤-٨): أ - توصيل ثلاث قوى دافعة كهرية $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ و ε_1 على التوالي.
ب - توصيلها على التوازي.

الحل

المقاومات $2.5\Omega, 3\Omega, 0.5\Omega$ متصلة على التوالي، الفرع cd ، فيكون مجموعها

هو:

$$2.5 + 3 + 0.5 = 6\Omega$$

ويصبح بذلك شكل الفرع cd كما في شكل (٩ب - ٤) ، وهذه المقاومة متصلة على التوازي مع المقاومة 1.5Ω أي أن

$$\frac{1}{6} + \frac{10}{15} = \frac{5}{6} \quad \therefore R_{cd} = \frac{6}{5} = 1.2\Omega$$

كما يوضحه الشكل (٩ج - ٤) الفرع cd.

المقاومتان $5\Omega, 4\Omega$ متصلتان على التوازي ، الفرع bc ، أي أن :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \quad \therefore R_{ef} = \frac{20}{9} = 2.222\Omega$$

هذه المقاومة متصلة على التوالي مع المقاومة 2Ω فتصبح مقاومة هذا الفرع 4.222Ω وهذه المقاومة متصلة على التوازي مع $6\Omega, 4\Omega$ كما في شكل (٩ب - ٤) .

$$\therefore \frac{1}{4.222} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = 0.654 \quad \therefore R_{bc} = 1.53\Omega$$

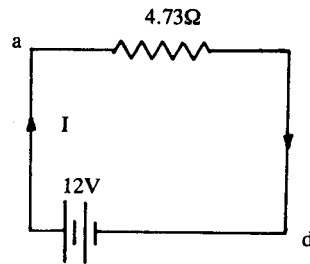
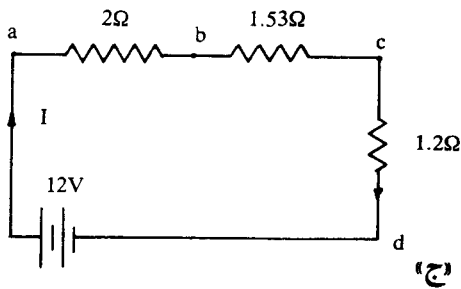
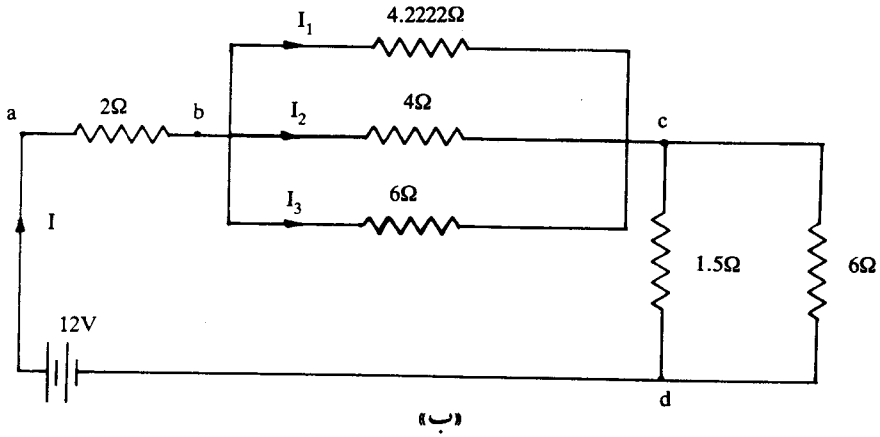
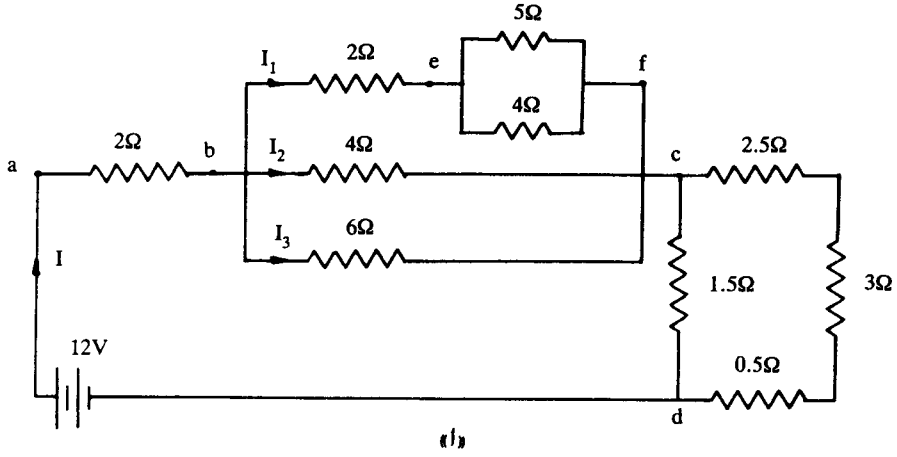
ويوضح الشكل (٩ج - ٤) المقاومات R_{cd}, R_{bc}, R_{ab} المتصلة على التوالي أي أن المقاومة الكلية المكافئة لجميع المقاومات تساوي :

$$R = R_{ab} + R_{bc} + R_{cd}$$

$$R = 2 + 1.53 + 1.2 = 4.73\Omega$$

إذن التيار الكلي المار في الدائرة المكافئة ، شكل (٩د - ٤) ، يساوي :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{4.73} = 2.54 \text{ A}$$



شكل (٩-٤): دائرة بسيطة تحتوي على بطارية وسلسلة من المقاومات متصلة على التوالي وعلى التوازي [تابعة لمثال (٥-٤)].

أما بالنسبة للتيارات I_3 ، I_2 ، I_1 فيمكن حسابها كالتالي :

$$V_{bc} = I R_{bc} = 2.54 \times 1.53 = 3.886 \text{ V}$$

$$\therefore I_1 = \frac{V_{bc}}{4.222} = \frac{3.886}{4.222} = 0.920 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_{bc}}{4} = \frac{3.886}{4} = 0.972 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_{bc}}{6} = \frac{3.886}{6} = 0.648 \text{ A}$$

مثال (٤-٧)

احسب عدد الالكترونات التي تمر في الدقيقة الواحدة بمقطع فتيلة مصباح كهربائي قدرته 100 W وفرق الجهد بين طرفيه 220 V علماً بأن شحنة الالكترون تساوي $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

الحل

$$\therefore P = IV$$

$$\therefore I = \frac{P}{V} = \frac{100}{220} = 0.455 \text{ A}$$

$$dq = I dt = 0.455 \times 60 = 27.27 \text{ C}$$

$$\therefore n \text{ (عدد الإلكترونات)} = \frac{27.27}{1.6 \times 10^{-19}} = 17 \times 10^{19} \text{ electrons}$$

مثال (٤-٨)

احسب مقاومة فتيلة مصباح قدرته 60W والجهد بين طرفيه 117V ثم احسب التيار المار في الفتيلة. وإذا استعمل المصباح لمدة شهر كامل بصورة مستمرة فاحسب الطاقة الكهربائية المستنفذة مقدرة بالجول J و KW.hr.

الحل

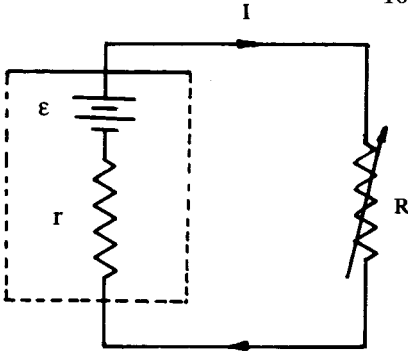
$$\therefore P = \frac{V^2}{R} \quad \therefore R = \frac{V^2}{P} = \frac{(117)^2}{60} = 228.2 \Omega$$

وللحصول على التيار I نطبق قانون أوم :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{117}{228.2} = 0.513 \text{ A}$$

$$U = Pt = 60 \times 30 \times 24 \times 60 \times 60 = 1.56 \times 10^8 \text{ J}$$

$$= \frac{60 \times 30 \times 24}{10^3} = 43.2 \text{ KW.hr}$$



مثال (٤-٩)

ما هي قيمة R التي تعطينا أكبر قيمة
للقدر المبددة فيها وما هي قيمة هذه القدرة
العظمى في الدائرة (شكل ١١٠ - ٤).

الحل

يمكن من المعادلة (٤-٣٣) كتابة

ما يلي:

$$I = \frac{\epsilon}{R + r} \dots\dots\dots (A)$$

شكل (١١٠ - ٤): دائرة بسيطة تحتوي على
مقاومة متغير R وبطارية لها مقاومة داخلية r

أما القدرة المتحولة إلى حرارة في المقاومة الخارجية R فهي:

$$P = I^2 R = \frac{\epsilon^2 R}{(R + r)^2} \dots\dots\dots (B)$$

وللحصول على قيمة R التي تعطينا أعلى قيمة لـ P لابد من تفاضل المعادلة بالنسبة
لـ R ثم مساواة النتيجة بالصفر فيحصل على:

$$\frac{dP}{dR} = \epsilon^2 \left[\frac{1}{(R + r)^2} - \frac{2R}{(R + r)^3} \right] = \epsilon^2 \frac{r - R}{(R + r)^3} = \text{zero}$$

$$\therefore R = r$$

أي أنه يمكن الحصول على أكبر قيمة للقدرة المبددة (dissipated) عندما تكون المقاومة
الخارجية مساوية للمقاومة الداخلية للبطارية (r) وإذا عوض في المعادلة B يُحصل على:

$$P_{\max} = \epsilon^2 / 4r \dots\dots\dots (C)$$

أما الجهد بين طرفي المقاومة R عند هذا الوضع، حسب المعادلة (٤-٣٧)

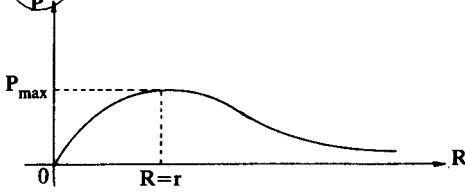
هو:

$$\epsilon = IR + Ir = IR + IR = 2IR = 2V$$

$$\therefore V = \frac{\epsilon}{2}$$

٢٤١

التيار الكهربى المستقر



وهو يمثل نصف جهد البطارية
والنصف الآخر يكون بين طرفي المقاومة
الداخلية r ويوضح الشكل (١٠-٤)
العلاقة بين P و R حسب العلاقة B

شكل (١٠-٤): العلاقة بين المقاومة والقدرة

(٥-٤) الدوائر الكهربائية المركبة

Complicated Electric Circuits

يستخدم قانون أوم عادة في حل الدوائر البسيطة، وهي الدوائر التي تحتوي على مصدر كهربى واحد ومجموعة المقامات والتي يمكن اختزالها في النهاية إلى الدائرة المبينة في شكل (٩-٤) أما في حالة الدوائر المركبة، والتي تسمى بالشبكات الكهربائية وتتكون من مجموعة من الدوائر البسيطة المحتوية في العادة على أكثر من مصدر كهربى واحد، فتستخدم عدة قوانين أهمها:

(١٠-٤) قاعدتا كيرشوف Kirchhoff's rules

١- القاعدة الأولى

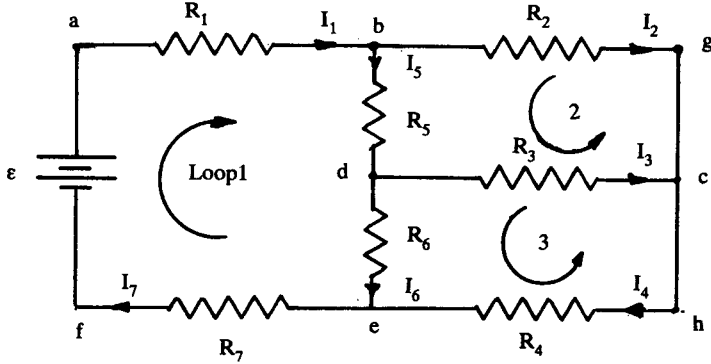
في حالة الشبكات الكهربائية يكون مجموع التيارات الداخلة لنقطة (junction point) وتسمى بالعقدة (node) مساويا لمجموع التيارات الخارجة منها. أي أن المجموع الجبرى للتيارات الكهربائية عند أي عقدة ما يساوي صفرا.

$$\Sigma I_{in} = \Sigma I_{out} \quad \dots \dots \dots (٤-٣٨)$$

$$\text{or } \Sigma I_{in} - \Sigma I_{out} = \text{zero}$$

ففي الشكل (١١-٤) يمكن تطبيق القاعدة الأولى كالتالي:

$I_5 = I_3 + I_6$	: العقدة d	$I_1 = I_2 + I_5$	: العقدة b
$I_4 + I_6 = I_7 = I_1$	: العقدة e	$I_2 + I_3 = I_4$	: العقدة c



شكل (٤-١١): دائرة مركبة من عدد من المقاومات ومتصلة بقوة دافعة كهربية لدراسة قانونا كيرشوف المتعلقة بتوزيع الجهد والتيار.

ب - القاعدة الثانية

في أي دائرة مغلقة (loop) يكون المجموع الجبري للقوى الدافعة الكهربية مساويا للمجموع الجبري لحاصل ضرب التيار في المقاومة في جميع أجزاء الدائرة المغلقة.

$$\therefore \sum \mathcal{E} = \sum IR \quad \dots \dots \dots (٤-٣٩)$$

و بتطبيق القاعدة الثانية على الدوائر المغلقة للدائرة المركبة (٤-١١) يُحصل على :

١ - بالنسبة للدائرة المغلقة abefa إذا بدأنا من a ، ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{abefa}$ يُحصل على :

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_6 R_6 + I_7 R_7$$

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_6 R_6 - I_7 R_7 = \text{zero}$$

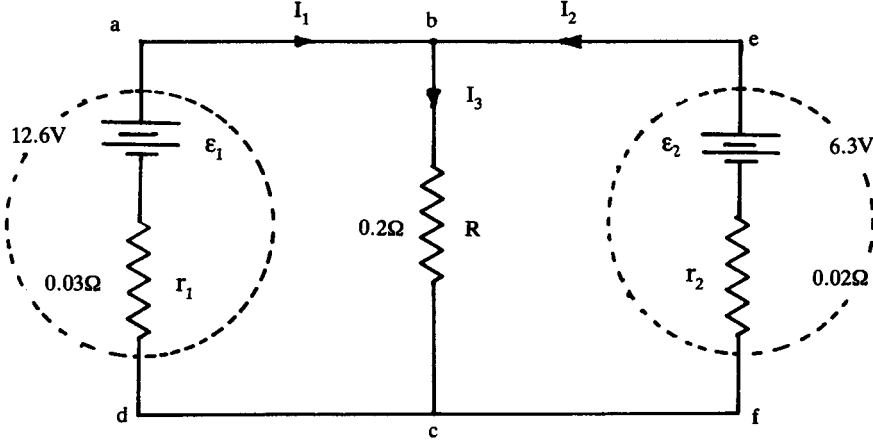
ب - وبالطريقة نفسها يُحصل من الدائرتين المغلقتين bgcdh و dched على :

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_5 R_5 = \text{zero}$$

$$-I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_6 R_6 = \text{zero}$$

وتسمى القاعدتان باسم كيرشوف نسبة إلى العالم الفيزيائي الألماني جوستاف كيرشوف (Gustaf Kirchhoff) الذي بنى نظريته على أساس بقاء (conservation) الشحنة والتيار، وعلى الحقيقة الثابتة عن الجهد بأنه دائما يعود إلى قيمته الأصلية بعد اكتمال دورته لأي مسار مغلق.

مثال (١٠-٤)

في الدائرة التالية احسب I_1, I_2, I_3 

الحل

إن اتجاه التيارات I_1, I_2, I_3 الموضحة على الدائرة هو اتجاه فرضي قد يكون اتجاهها صحيحا أو خاطئا. وعند الحصول على قيمة سالبة للتيار في النهاية فإن هذا معناه أن التيار الفعلي يسري في الاتجاه المعاكس غير المفروض.

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرتين $abcd$, $befc$ نحصل على:

أ - بالنسبة للدائرة $abcd$ إذا بدأنا من النقطة a ، ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{abcd}$ نحصل على المعادلة:

$$12.6 = 0.2 I_3 + 0.03 I_1 \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\therefore 12.6 - 0.2 I_3 - 0.03 I_1 = 0$$

ب - بالنسبة للدائرة $befc$ إذا بدأنا من النقطة b ومررنا على الدائرة في الاتجاه $\overrightarrow{befc}$ نحصل على المعادلة:

$$-6.3 = -0.02 I_2 - 0.2 I_3 \quad \dots\dots\dots (B)$$

$$\therefore -6.3 + 0.02 I_2 + 0.2 I_3 = 0$$

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الأولى على النقطة "b" أو النقطة "c" نحصل على معادلة ثالثة للمجاهيل I_1, I_2, I_3 بحيث يمكن حسابها بحل المعادلات الثلاث.

$$I_1 + I_2 = I_3 \dots\dots\dots (C)$$

بحل المعادلات الثلاث (A)، (B) و (C) نحصل على قيم التيارات I_1, I_2 و I_3 وهي:

$$I_1 = 142.64 \text{ A}$$

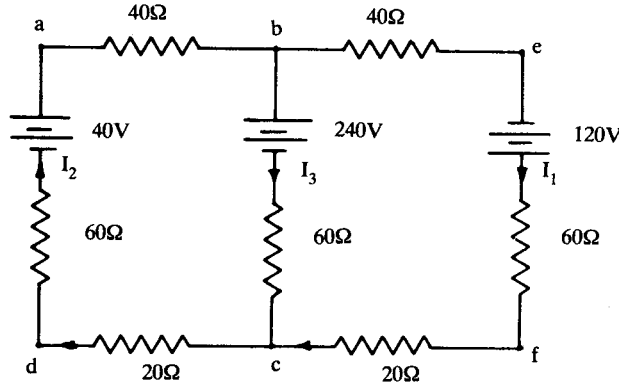
$$I_2 = -101.0 \text{ A}$$

$$I_3 = 41.62 \text{ A}$$

والإشارة السالبة للتيار I_2 تعني أن الاتجاه المفروض غير صحيح ولذلك فالاتجاه الصحيح للتيار هو عكس الاتجاه المفروض أي من b إلى e. مع العلم أن r_1, r_2 تمثل المقاومتين الداخليتين لـ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ على الترتيب.

مثال (١١-٤)

احسب I_1, I_2, I_3 في الدائرة التالية:



الحل

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{abcda}} \quad -240 + 40 &= 40 I_2 + 60 I_3 + 20 I_2 + 60 I_2 \\ \therefore 10 + 6 I_2 + 3 I_3 &= 0 \dots\dots\dots (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{befcb}} \quad 120 + 240 &= 40 I_1 + 60 I_1 + 20 I_1 - 60 I_3 \\ 360 &= 120 I_1 - 60 I_3 \\ \therefore 6 - 2 I_1 + I_3 &= 0 \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

وبتطبيق القاعدة الأولى على العقدة b أو c يُحصل على :

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \dots\dots\dots (C)$$

وبحل المعادلات (A) ، (B) و (C) نحصل على قيم التيارات I_1 ، I_2 و I_3 التالية :

$$I_1 = 1 \frac{5}{6} \text{ A}$$

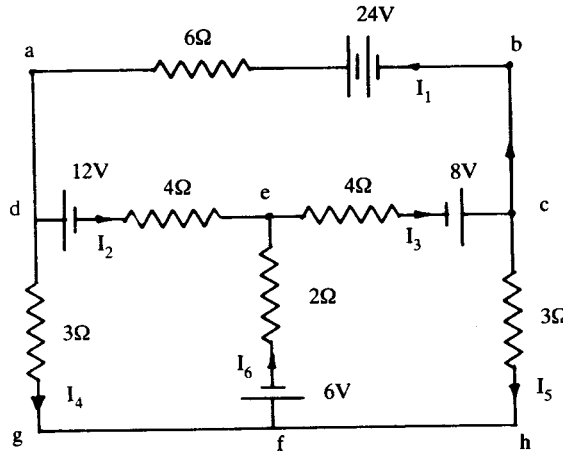
$$I_2 = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

$$I_3 = -2 \frac{1}{3} \text{ A}$$

ويتضح من هذه القيم أن الاتجاه الصحيح للتيار I_2 والتيار I_3 هو الاتجاه المعاكس للاتجاه المفروض .

مثال (١٢-٤)

في الدائرة التالية احسب I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 ، I_6



الحل

بتطبيق القاعدة الثانية نحصل على :

$$\overrightarrow{abcd}: -24 - 8 + 12 = -6 I_1 - 4 I_3 - 4 I_2$$

$$-20 = -6 I_1 - 4 I_3 - 4 I_2$$

$$\therefore 10 = 3 I_1 + 2 I_3 + 2 I_2 \dots\dots\dots (A)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{defgd}}: \quad -12 + 6 &= 4 I_2 - 2 I_6 - 3 I_4 \\ \therefore -6 &= 4 I_2 - 2 I_6 - 3 I_4 \quad \dots\dots (B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{echfe}}: \quad 8 - 6 &= 4 I_3 + 3 I_5 + 2 I_6 \\ \therefore 2 &= 4 I_3 + 3 I_5 + 2 I_6 \quad \dots\dots (C) \end{aligned}$$

و بتطبيق القاعدة الأولى على العقد c , e , d نحصل على :

$$d: \quad I_1 = I_2 + I_4 \quad \therefore I_1 - I_2 - I_4 = 0 \quad \dots (D)$$

$$e: \quad I_3 = I_2 + I_6 \quad \therefore I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad \dots (E)$$

$$c: \quad I_3 = I_1 + I_5 \quad \therefore I_3 - I_1 - I_5 = 0 \quad \dots (F)$$

بحل المعادلات الست نحصل على قيمة التيارات المطلوبة وهي :

$$I_1 = \frac{26}{11} A, \quad I_2 = \frac{4}{11} A, \quad I_3 = \frac{12}{11} A$$

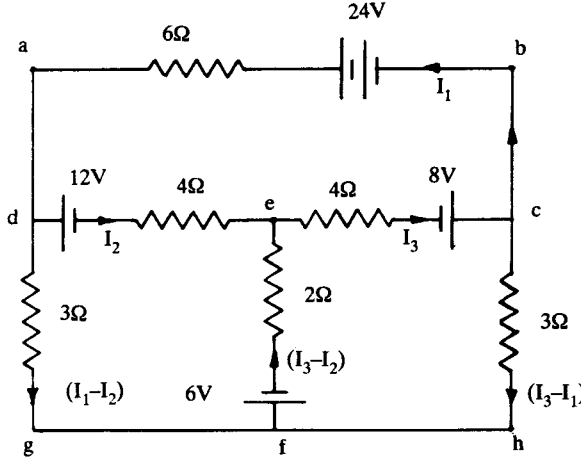
$$I_4 = 2 A, \quad I_5 = -\frac{14}{11} A, \quad I_6 = \frac{8}{11} A$$

(٢-٥-٤) طريقة ماكسويل Maxwell's method

وهذه طريقة أخرى لاختصار الحل عن طريق الاستغناء عن المعادلة الناشئة عن تطبيق قاعدة كيرشوف الأولى ، وذلك بعدم فرض تيارات جديدة في بعض الفروع ووضعها بدلالة التيارات المفترضة في الفروع الأخرى ، وهذا يؤدي إلى تقليل عدد المجاهيل ، وبالتالي عدد المعادلات اللازمة للحصول على قيم هذه المجاهيل ، مما يؤدي بها إلى تبسيط الحل الرياضي في نهاية الأمر ويمكن توضيح هذه الطريقة بحل المثال السابق بطريقة ماكسويل كالآتي :

ففي دائرة المثال (٤-١١) نجد أن التيار I_1 يتفرع عند النقطة d إلى فرعين أحدهما I_2 والثاني I_4 ولذلك يمكن استبدال I_4 بـ $(I_1 - I_2)$ وكذلك التيار I_3 عند النقطة c يتفرع

إلى I_1 ، I_5 وتستبدل I_5 بالتيار $(I_3 - I_1)$ وكذلك يستبدل I_6 بـ $(I_3 - I_2)$. وتصبح الدائرة كالشكل التالي.



وواضح أن عدد المجاهيل أصبحت ثلاثة وهي I_1 ، I_2 ، I_3 وبذلك يكتفى بثلاث معادلات لتحديد ثلاثة مجاهيل بينما يحتاج الوضع الأول في المثال السابق إلى ست معادلات لمعرفة ستة مجاهيل .
وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية نحصل على :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{abcd}: \quad & -24 - 8 + 12 = -6 I_1 - 4 I_2 - 4 I_3 \\ \therefore 10 &= 3 I_1 + 2 I_3 + 2 I_2 \quad \dots\dots\dots (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{defg}: \quad & -12 + 6 = 4 I_2 - 2 (I_3 - I_2) - 3 (I_1 - I_2) \\ \therefore -6 &= 9 I_2 - 2 I_3 - 3 I_1 \quad \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{echf}: \quad & 8 - 6 = 4 I_3 + 3 (I_3 - I_1) + 2 (I_3 - I_2) \\ \therefore 2 &= 9 I_3 - 3 I_1 - 2 I_2 \quad \dots\dots\dots (C) \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات الثلاث (1) ، (2) ، (3) نحصل على

$$I_1 = \frac{26}{11} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{4}{11} \text{ A}, \quad I_3 = \frac{12}{11} \text{ A}$$

وبعد معرفة هذه التيارات يمكن معرفة بقية التيارات في الأفرع الأخرى.

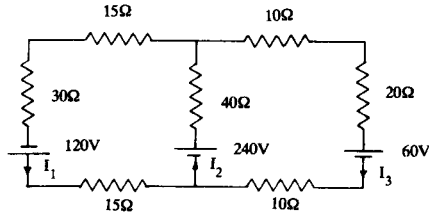
(٣-٥-٤) نظرية التراكم Super-position theorem

هذه طريقة أخرى لحل الدوائر الكهرية المركبة وتتم بحساب تأثير كل مصدر كهربي على حدة، مع حذف المصادر الكهربية الأخرى في الدائرة، ثم جمع النتائج معا جبريا للحصول على النتيجة النهائية.

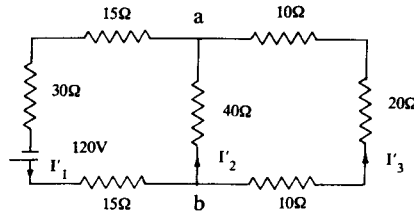
مثال (١٣-٤)

أوجد التيار الذي يمر في كل بطارية من البطاريات الموجودة في الشكل التالي:

الحل



لحل هذه المسألة بطريقة التراكم نفرض وجود مصدر كهربي واحد ونحذف المصدرين الآخرين ونحسب التيارات في الفروع المختلفة. وبعد تكرار هذه العملية لكل مصدر نقوم بجمع التيارات الناتجة في كل فرع للحصول على التيارات المطلوبة: ١ - المصدر الكهربي (120 V) كما في



«١»

شكل (١).

لحساب I'_1 نحسب المقاومة الكلية للدائرة

$$R' = 10 + 20 + 10 = 40\Omega$$

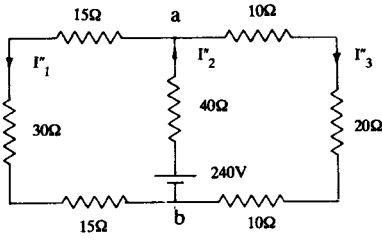
وهذه المقاومة متصلة مع المقاومة الأخرى

$$\therefore \frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} \therefore R_{ab} = 20\Omega$$

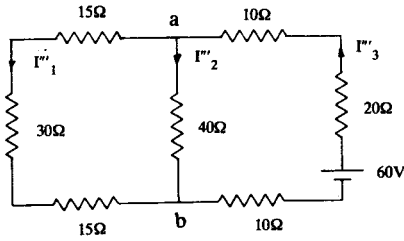
وتكون المقاومة الكلية هي:

$$R = 20 + 15 + 15 + 30 = 80\Omega$$

$$\therefore I'_1 = 120/80 = 1.5 \text{ A}$$



(ب)



(ج)

ولحساب I'_2 ، I'_3 نحسب فرق الجهد بين الطرفين a ، b .

$$V_{ab} = I'_1 \times R_{ab} = 1.5 \times 20 = 30 \text{ V}$$

$$I'_2 = 30/40 = 0.75 \text{ A}$$

$$I'_3 = 30/40 = 0.75 \text{ A}$$

ب - المصدر الكهربى (240V) فى

شكل (ب) باتباع الطريقة السابقة نفسها نحصل على :

$$I'_1 = 1.5 \text{ A} , I'_2 = 3.75 \text{ A} , I'_3 = 2.25 \text{ A}$$

ج - المصدر الكهربى (60 V) كما فى

شكل (ج) باتباع الطريقة نفسها نحصل على :

$$I''_1 = 0.375 \text{ A} , I''_2 = 0.562 \text{ A} , I''_3 = 0.937 \text{ A}$$

للحصول على التيارات فى الفروع الثلاثة يجب جمع التيارات الجزئية الثلاثة فى كل فرع جمعا جبريا .

$$\therefore I_1 = I'_1 + I''_1 + I'''_1 = 1.5 + 1.5 + 0.375 = 3.375 \text{ A}$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 + I'''_2 = 0.75 + 3.75 - 0.562 = 3.938 \text{ A}$$

يلاحظ أن I'''_2 أُعتبر سالبا لأنه فى عكس اتجاه التيارين I'_2 و I''_2 اللذين اعتبرنا موجبين ، كما أن التيار الكلى I_2 فى اتجاه التيارين I'_2 و I''_2

$$I_3 = I'_3 + I''_3 + I'''_3 = -0.75 + 2.25 - 0.937 = +0.563 \text{ A}$$

ولما كانت القيمة التى حصل عليها للتيار I_3 سالبة ، كان معنى هذا أنه فى اتجاه الجزء الذى اعتبر سالبا وهو I'_3 .

(٤-٥-٤) نظرية ثيفينين Thevenin theorem

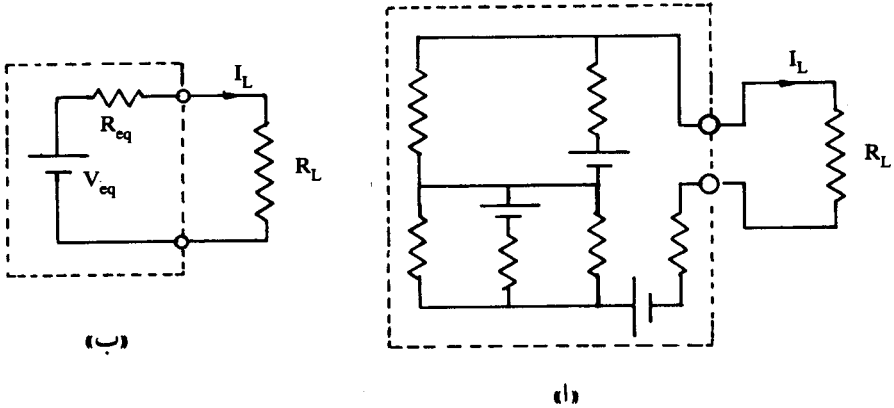
يسهل تحليل بعض الدوائر الكهرية باستبدال الشبكة الكهرية المعقدة (network) التي تحتوي على مجموعة من مصادر الجهد وعلى مجموعة من المقاومات بدائرة مكافئة (equivalent circuit) لها المميزات الأصلية نفسها.

ومن أشهر الدوائر المكافئة الدائرة المستنتجة من نظرية ثيفينين والتي تنص على أن:
«أي شبكة كهرية مكونة من عدة مقاومات وبطاريات يمكن استبدالها بمقاومة واحدة وبطارية مكافئة متصلتين على التوالي».

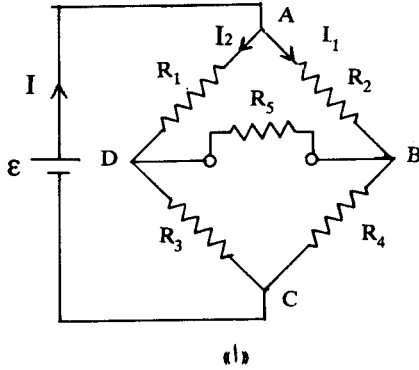
وبناء على ذلك فإن الدائرة المكافئة للدائرة المعقدة [شكل (٤-١٢)] يمثلها الشكل (٤-١٢) ب- ويتضح من هذا الشكل أن:

$$V_{eq} = (R_L + R_{eq}) I_L \dots\dots\dots (٤-٤٠)$$

ولمعرفة نظرية ثيفينين نتابع المثال التالي:



شكل (٤-١٢): أ- شبكة كهرية لها طرفان.
ب- الدائرة المكافئة للشبكة أ.



مثال (١٤-٤)

احسب التيار المار في المقاومة R_5 في الدائرة التالية :

الحل

حل هذه المسألة نتبع الخطوات التالية :

- ١ - انزع المقاومة R_5 بين الطرفين D و B.
- ٢ - يعد الفرعان ABC و ADC متصلين على التوازي مع البطارية ε وبذلك فإن التيار في كل فرع هو :

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3}$$

ويكون هبوط الجهد عبر المقاومة R_2 هو :

$$V_2 = I_1 R_2 = \frac{\varepsilon R_1}{R_2 + R_4}$$

أما هبوط الجهد عبر المقاومة R_1 هو :

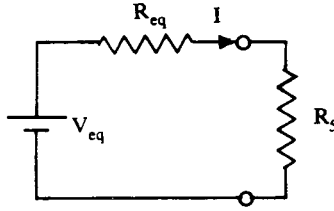
$$V_1 = I_2 R_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_3}$$

وبذلك فإن الجهد المكافئ V_{eq} يمثل الجهد عبر النقطتين D ، B وقيمه هي :

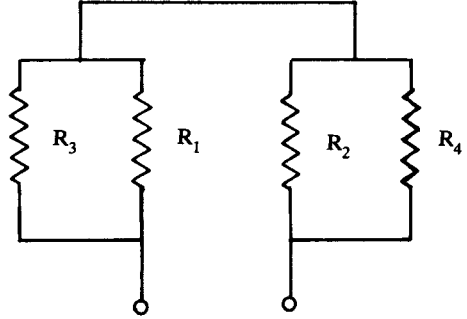
$$V_{eq} = \frac{\varepsilon R_2}{R_2 + R_4} - \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_3}$$

- ٣ - للحصول على المقاومة المكافئة بين النقطتين D ، B نقصر البطارية ، حيث عدت مقاومتها الداخلية صغيرة ، فنحصل على الشكل (ب) الذي يعطينا المقاومة المكافئة أي أن :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$



«ج»



«ب»

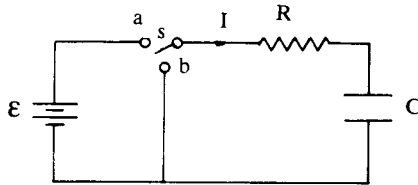
وبذلك فإن الدائرة المكافئة للدائرة (ا) يمثلها الشكل (ج) ومنها نحصل على التيار المار في المقاومة (R_5) حيث:

$$I = V_{eq} / (R_{eq} + R_5)$$

(٦-٤) تيارات الشحن والتفريغ للمكثف

Charge and Discharge Currents of a Capacitor

سبق أن نوقشت الدوائر الكهرية المحتوية على بطاريات ومقاومات أو مكثفات فقط. يتضمن هذا البند دراسة دوائر كهرية تحتوي على مكثف سعته C ومقاومة مقدارها R متصلة على التوالي، خلال مفتاح S ، ببطارية قوتها الدافعة الكهرية ثابتة ومقدارها $\mathcal{E}$ كما في الشكل (١٣-٤).



شكل (١٣-٤): دائرة كهرية تحتوي على مكثف سعته C ومقاومة قدرها R متصلة ببطارية قوتها الدافعة الكهرية $\mathcal{E}$

بعد غلق الدائرة وانقضاء زمن قدره t تكون قيمة شدة التيار المار في المقاومة I ، مثلاً، وقيمة الشحنة على المكثف q . وعندها تصبح قيمتا الجهد بين طرفي المقاومة وطرفي المكثف كالآتي:

$$V_R = IR \quad \text{و} \quad V_C = \frac{q}{C}$$

وتكتب معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصيغة التالية:

$$\varepsilon = V_R + V_C = IR + (q/C) \dots \dots \dots (٤-٤١)$$

بضرب طرفي المعادلة في Idt ينتج أن :

$$\varepsilon Idt = RI^2 dt + (q/C) Idt$$

$$\because I = dq/dt$$

$$\therefore \varepsilon Idt = RI^2 dt + (q/C) dq \dots \dots \dots (٤-٤٢)$$

حيث يمثل المقدار εIdt الطاقة المستمدة من البطارية بعد زمن قدره dt ويمثل المقدار $RI^2 dt$ الطاقة المبذورة على شكل طاقة حرارية في الدائرة أما المقدار $\frac{q}{C} dq$ فيمثل الطاقة المستخدمة في تخزين الشحنات على المكثف.

ويستمر شحن المكثف حتى يأخذ شحنته العظمى ، q_0 ، بعد انقضاء زمن معين تعتمد قيمته على قيمتي السعة C والمقاومة R ، عندها يقف التيار تماما وتؤول قيمته إلى الصفر وتصبح المعادلة (٤-٤١) كالتالي :

$$\varepsilon = \frac{q_0}{C} \dots \dots \dots (٤-٤٣)$$

لمعرفة قيمة الشحنة على المكثف عند أي لحظة t خلال فترة شحن المكثف يتبع ما يلي :

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٤-٤١) لتصبح :

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

أو

$$CR \frac{dq}{dt} = \varepsilon C - q$$

هذه معادلة تفاضلية يفترض حلها أن يكون $y = \varepsilon C - q$ وبذلك تصبح كالتالي :

$$-CR \frac{dy}{dt} = y \therefore \frac{dy}{y} = -\frac{1}{CR} dt$$

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{CR} \int dt \therefore \ln y = -\frac{t}{RC} + \text{constant}$$

$$\therefore \ln(\epsilon C - q) = -\frac{t}{RC} + \text{constant}$$

ويمكن معرفة قيمة ثابت التكامل من الشروط الابتدائية حيث تكون قيمة $q = 0$ عندما $t = 0$ أي عند ابتداء الشحن. وبذلك فإن قيمة الثابت تساوي: $\ln \epsilon C$.

$$\therefore \ln(\epsilon C - q) = -\frac{t}{RC} + \ln \epsilon C$$

$$\therefore q = \epsilon C (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots \dots (١٤٤ - ٤)$$

وعندما يتم الشحن سوف يمتنع سريان التيار وتصبح النهاية العظمى للشحنة q_0 وحسب المعادلة (٤-٤٣) فإن المعادلة (٤-١٤٤) تصبح:

$$q = q_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots \dots (٤٤ ب - ٤)$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن $q = q_0$ في زمن قدره ما لا نهاية أي عند $t = \infty$ ، أما من الناحية التجريبية فإن الشحنة تبلغ قيمتها العظمى بعد زمن قصير جداً.

يمكن الحصول على التيار الكهربائي المار في الدارة بمفاضلة المعادلة (٤-٤٤) أي أن:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

أو

$$I = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad \dots \dots (٤-٤٥)$$

حيث تمثل I_0 القيمة العظمى للتيار التي يتم الحصول عليها عند لحظة غلق الدائرة. ويلاحظ من المعادلتين (٤-٤٤) و(٤-٤٥) أن الشحنة والتيار يسلكان طريقين متعاكسين حيث تتزايد الشحنة، من الصفر إلى قيمتها العظمى، ويتناقص التيار، من قيمته العظمى إلى الصفر، ويوضح الشكل (٤-١٤) بيانياً ما ورد في المعادلتين (٤-٤٤) و(٤-٤٥).

والمقدار RC له وحدات الزمن لأن:

$$RC = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = \frac{C \cdot s}{C} = s$$

ولهذا يسمى المقدار RC بثابت الزمن (time constant) فإذا وضع $t = RC$ وعوض عنه في المعادلة (٤-٤) يكون:

$$q = q_0 (1 - e^{-1})$$

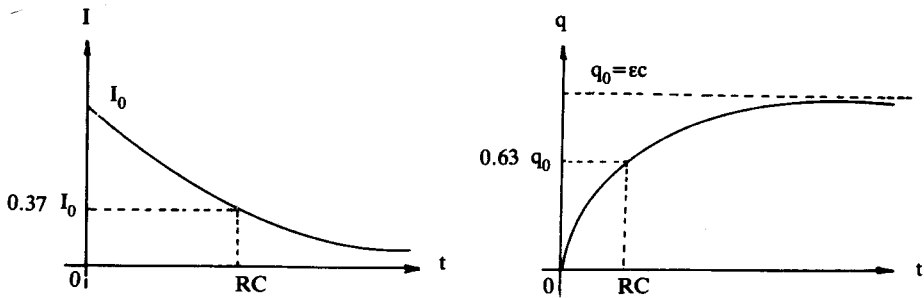
$$q = q_0 (1 - 0.37) = 0.63 q_0$$

أي أن ثابت الزمن RC هو الزمن اللازم لنمو الشحنة على المكثف من الصفر إلى 0.63 من قيمتها العظمى q_0 .

وإذا عوض عن $t = RC$ في المعادلة (٤-٤٥) يكون:

$$I = I_0 e^{-1} = 0.37 I_0$$

ولذلك فهناك تعريف آخر لثابت الزمن "RC" بأنه الزمن اللازم لكي يصل تيار الشحن إلى 0.37 من قيمته I_0 .



شكل (٤-١٤): العلاقة بين التيار I المار في الدائرة الواردة في شكل (٤-١٣) وعلاقتها بالزمن t وكذلك العلاقة بين الشحنة الواقعة على المكثف وعلاقتها بالزمن t ، في حالة شحن المكثف.

وعلى ذلك فإن ثابت الزمن لدائرة تحتوي على مقاومة قدرها $R = 1 \text{ megaOhm}$ ومكثف سعته $C = 1 \mu F$ هو:

$$\therefore RC = 10^6 \times 10^{-6} = 1 \text{ s}$$

ومعنى هذا أن المكثف في هذه الدائرة يحتاج لزمن قدره 1 ثانية لتصل شحنته إلى 0.63 من شحنته النهائية أو بمعنى آخر ليصل تيار الشحن في الدائرة إلى 0.37 من قيمته الابتدائية .

أما إذا فرغ المكثف بعد شحنه، أي بتوصيل المفتاح S بالطرف b. فإن المكثف الذي سعته C وشحنته الابتدائية q_0 سوف يبدأ في تفريغ شحنته خلال المقاومة R. وبفرض أنه بعد زمن t من بدء التفريغ أصبحت الشحنة على المكثف q وتيار التفريغ I وتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية مع ملاحظة عدم وجود بطارية نجد أن :

$$RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$\therefore R \frac{dq}{dt} = - \frac{q}{C}$$

وبالتكامل يُحصل على :

$$\int \frac{dq}{q} = - \frac{1}{RC} \int dt$$

$$\therefore \ln q = - \frac{t}{RC} + \text{constant}$$

ولكن عند $t = 0$ يكون $q = q_0$

$$\therefore \ln q_0 = \text{constant}$$

$$\therefore \ln q - \ln q_0 = - \frac{t}{RC}$$

$$\therefore q = q_0 e^{-t/RC} \dots \dots \dots (٤-٤٦)$$

فإذا كانت $t = RC$ فإن $q = q_0 e^{-1}$ أي أن $q = 0.37 q_0$ أما قيمة التيار خلال التفريغ فيمكن حسابه من اشتقاق المعادلة (٤-٤٦) أي أن :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

$$\therefore I = -I_0 e^{-t/RC} \dots\dots\dots (٤-٤٧)$$

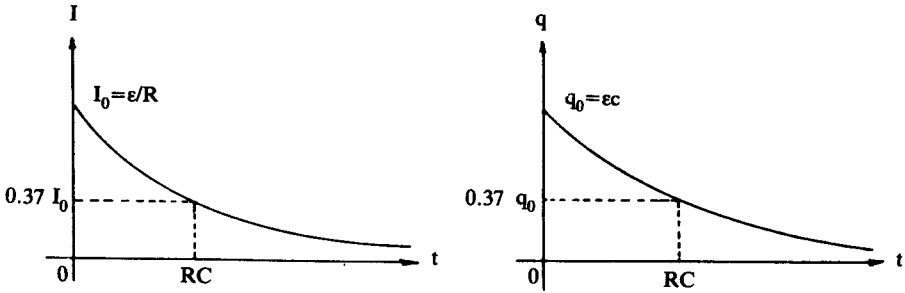
والإشارة السالبة تدل على أن تيار التفريغ ضد اتجاه تيار الشحن. مع ملاحظة أن فرق الجهد عند الشحن، من العلاقة (٤-٤٤)، هو:

$$V = \frac{1}{C} q = \varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \dots\dots\dots (٤-٤٨)$$

وفي حالة التفريغ يكون فرق الجهد من المعادلة (٤-٤٦) هو:

$$V = \frac{1}{C} q = \varepsilon e^{-t/RC} \dots\dots\dots (٤-٤٩)$$

ويوضح الشكل (٤-١٥) العلاقة بين t , q حسب المعادلة (٤-٤٦) كذلك العلاقة بين I و t حسب المعادلة (٤-٤٧).



شكل (٤-١٥): العلاقة بين التيار I المار في الدائرة الواردة في شكل (٤-١٣) وعلاقتها بالزمن t وكذلك العلاقة بين الشحنة الواقعة على المكثف وعلاقتها بالزمن t في حالة تفريغ المكثف.

وبواسطة الدائرة (٤-١٣) يمكن حساب المقاومات عالية القيمة (100 M) وذلك عند تفريغ شحنة المكثف خلال المقاومة. فباستخدام العلاقة (٤-٤٩) يمكن الحصول على:

$$\frac{t}{RC} = \ln(\mathcal{E}/V)$$

$$\therefore R = t / [C \ln(\mathcal{E}/V)] \quad \dots\dots\dots (٤-٥٠)$$

مثال (٤-١٥)

بعد كم من الزمن يمكن للمكثف المبين في الشكل (٤-١٣) أن يحتفظ بطاقة تساوي نصف قيمته العظمى للطاقة؛ علماً بأن $C = 0.2 \mu F$, $R = 100 M\Omega$

الحل

$$\therefore U = \frac{1}{2C} q^2$$

وبالتعويض عن q من المعادلة (٤-٤٤) يُحصل على :

$$U = \frac{1}{2C} (q_0^2) (1 - e^{-t/RC})^2 = U_0 (1 - e^{-t/RC})^2$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} U_0 \quad \therefore \frac{1}{2} = (1 - e^{-t/RC})^2$$

وبحل هذه المعادلة يُحصل على :

$$t = 1.22 RC = 1.22 \times 100 \times 10^6 \times 0.2 \times 10^{-6} = 24.4 \text{ s}$$

مثال (٤-١٦)

بطارية قوتها الدافعة $\mathcal{E}$ تتصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي فإذا اتصل مصباح نيون على التوازي بالمكثف وكان جهد إضاءة المصباح V_2 وجهد انطفائه V_1 . فاثبت أن الزمن الذي يمضي بين ومضتين متتاليتين لهذا المصباح هو :

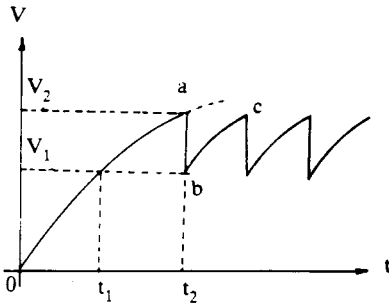
$$T = RC \ln \frac{\mathcal{E} - V_1}{\mathcal{E} - V_2}$$

الحل

$$\therefore q = q_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots\dots\dots (١)$$

بالقسمة على C

$$V = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}) \quad \dots\dots\dots (٢)$$



وعند تمثيل الجهد V مع الزمن كما في الشكل المقابل نجد أن V يزداد حتى يصل قيمته عند النقطة a إلى جهد الإضاءة V_2 وعندئذ يضيء المصباح وتفرغ شحنة المكثف في هذا المصباح وينخفض الجهد حتى يصل إلى النقطة b وتصل قيمته إلى جهد الانطفاء V_1 فينطفئ المصباح ويبدأ الشحن من النقطة

الأخيرة إلى أن يصل إلى نقطة c حيث يضيء المصباح مرة أخرى وتتكرر العملية. وبالتعويض في المعادلة (2) مرتين يُحصل على

$$\mathcal{E} - V_1 = \mathcal{E}e^{-t_1/RC} \quad \text{أو} \quad V_1 = \mathcal{E}(1 - e^{-t_1/RC})$$

وكذلك :

$$\mathcal{E} - V_2 = \mathcal{E}e^{-t_2/RC} \quad \text{أو} \quad V_2 = \mathcal{E}(1 - e^{-t_2/RC})$$

وبالقسمة يُحصل على :

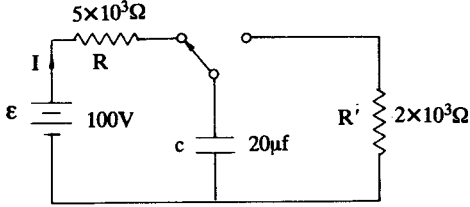
$$\frac{\mathcal{E} - V_1}{\mathcal{E} - V_2} = e^{(t_2 - t_1)/RC} = e^{T/RC}$$

حيث $T = t_2 - t_1$ وهو الزمن الذي يمضي بين ومضتين متتاليتين.

$$\therefore T = RC \ln \left(\frac{\mathcal{E} - V_1}{\mathcal{E} - V_2} \right)$$

وتستخدم هذه الطريقة فيما يسمى بالقاعدة الزمنية (time base) التي تطبق في مصابيح الإعلانات والأجهزة الإلكترونية.

مثال (٤-١٧)



في الدائرة المقابلة احسب الزمن
اللازم لشحن المكثف $C = 20 \mu F$ من خلال
المقاومة $R = 5 \times 10^3 \Omega$ حتى يصل الجهد
بين طرفيه إلى 99% من جهد البطارية.
وإذا فرغ المكثف في المقاومة
 $R' = 2 \times 10^3 \Omega$ ما هي قيمة التيار بعد مرور
زمن قدره 0.15 ثانية.

الحل

يعطى فرق الجهد بين طرفي المكثف أثناء الشحن من المعادلة (٤-٤٣) حيث:

$$V = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad \therefore \frac{V_c}{\varepsilon} = 1 - e^{-t/RC}$$

وحيث إن الجهد بين طرفين C يساوي 99% من ε .

$$\therefore \frac{99}{100} = 1 - e^{-t/RC}$$

$$\therefore 0.01 = e^{-t/RC}$$

$$\therefore t = -RC \ln 0.01 = 0.461 \text{ s}$$

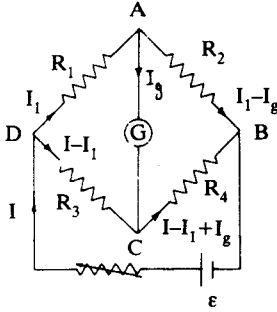
وهو المطلوب، أما حساب التيار أثناء التفريغ في المقاومة R' فيمكن حساب قيمته من
المعادلة (٤-٤٥) حيث:

$$I' = I_0 e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R'} e^{-t/RC}$$

$$\therefore I' = \frac{100}{2 \times 10^3} e^{-0.15/2 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-6}} = 1.18 \times 10^{-3} \text{ A}$$

(٧-٤) قنطرة ويتستون والقنطرة المترية

Wheatston's Bridge and the Metre Bridge



يمثل شكل (٤-١٦) قنطرة ويتستون ومبين عليها اتجاه التيارات في فروع القنطرة وإذا فرض أن R_g هي مقاومة الجلفانومتر G فإنه بتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرة المغلقة $ACDA$ يُحصل على :

$$I_1 R_1 + I_g R_g - (I - I_1) R_3 = 0$$

أو

شكل (٤-١٦) : قنطرة ويتستون

$$I_1 (R_1 + R_3) + I_g R_g - IR_3 = 0 \quad (٤-٥١)$$

وبصورة مماثلة بالنسبة للدائرة المغلقة $ABCA$ يُحصل على :

$$(I_1 - I_g) R_2 - (I - I_1 + I_g) R_4 - I_g R_g = 0$$

أو

$$I_1 (R_2 + R_4) - I_g (R_g + R_2 + R_4) - IR_4 = 0 \quad (٤-٥٢)$$

وبضرب المعادلة (٤-٥١) بمقدار $(R_2 + R_4)$ والمعادلة (٤-٥٢) بمقدار $(R_1 + R_3)$ ثم الطرح يُحصل على :

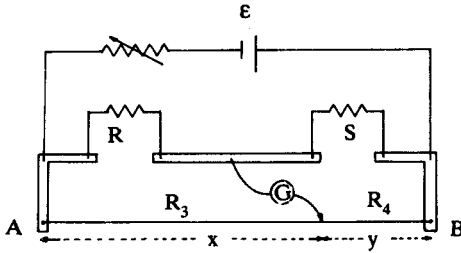
$$\begin{aligned} & I_g [R_g (R_2 + R_4) + (R_1 + R_3) (R_g + R_2 + R_4)] \\ & + I [R_4 (R_1 + R_3) - R_3 (R_2 + R_4)] = 0 \\ \therefore \frac{I_g}{I} &= \frac{R_3 R_2 - R_4 R_1}{R_g (R_2 + R_4) + (R_1 + R_3) (R_g + R_2 + R_4)} \end{aligned}$$

وفي هذه الحالة يكون $I_g = 0$ عندما يكون $R_3 R_2 = R_4 R_1$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (٤-٥٣)$$

وبهذه الشروط تكون القنطرة متزنة وينعدم مرور تيار خلال الجلفانومتر. هذه القنطرة تستخدم لقياس المقاومات ذات القيم المتوسطة أو للمقارنة بينها وقد استخدمها لأول مرة العالم شارل ويتستون في عام ١٨٤٣ ميلادية ولذلك عرفت باسمه.

والقنطرة المترية هي صورة أخرى لقنطرة ويتستون. حيث يستعمل عوضاً عن المقاومتين R_3 و R_4 سلك معدني يمكن تغيير طول جزئيه، وبذلك تتغير قيمة كل من R_3 و R_4 تبعاً لطول جزئي السلك.



شكل (٤-١٧): القنطرة المترية

فإذا فرض أن الدائرة [شكل (٤-١٧)] في حالة اتزان وكانت مقاومة الطول x هي R_3 ومقاومة الطول y هي R_4 فإن:

$$\frac{R}{S} = \frac{R_3}{R_4} \quad \dots (٤-٥٤)$$

وحسب المعادلة (٤-١٢) نجد أن:

$$R_3 = \rho \frac{x}{S} \quad , \quad R_4 = \rho \frac{y}{S}$$

حيث ρ هي المقاومة النوعية لمادة السلك، وهو عادة من مادة المنقنين أو الكونستانتان، و S مساحة مقطع السلك. وبالتعويض في المعادلة (٤-٥٤) يُحصل على:

$$\frac{R}{S} = \frac{x}{y} \quad \dots (٤-٥٥)$$

أي أنه بقياس الطولين x و y «علماً بأن $x + y = 100 \text{ cm}$ » يمكن تعيين قيمة المقاومة المجهولة R إذا علمت S .

ويمكن الوصول إلى العلاقة (٤-٥٥) بطريقة أخرى وهي:

إذا فرض أن r هي مقاومة وحدة الأطوال فإن:

$$R_3 = rx \quad , \quad R_4 = ry$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٥٤) نحصل على المعادلة (٤-٥٥).

وللقنطرة المترية خطأ واحد يعرف بالخطأ الطرفي (end correction) والذي ينتج عن جزء السلك الملتحم مع مساري التوصيل A و B والذي أهمل حسابه عند قياس كل من الطولين x و y وهذا الخطأ يتطلب معرفته في حالة دقة قياس مقاومة مجهولة.

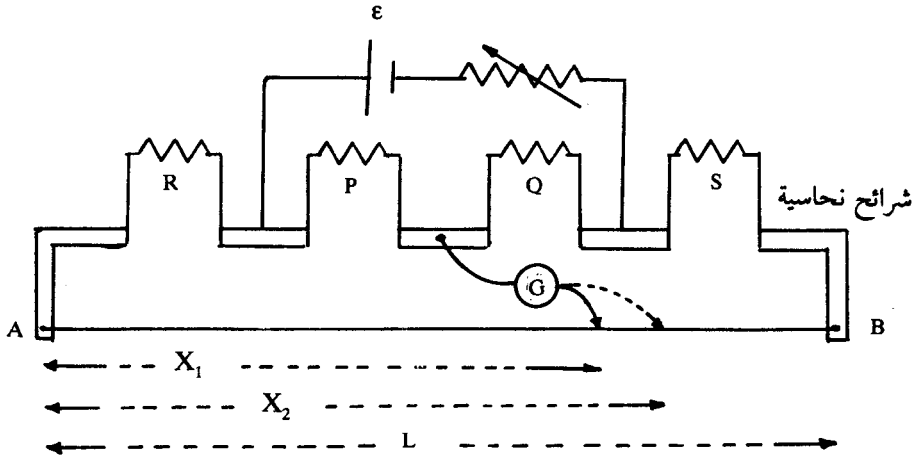
لنفرض أن هذا الخطأ عند مسار التوصيل A مقداره α أوم وعند مسار التوصيل B هو β أوم فعند توفر شرط الاتزان نجد أن:

$$\frac{R}{S} = \frac{rx \pm \alpha}{ry \pm \beta} \dots\dots\dots (٤-٥٦)$$

ويلزم في حالة القياس الدقيق تعيين كل من α و β ويستخدم لذلك جهاز يعرف بقنطرة كاري فوستر.

(٨-٤) قنطرة كاري فوستر

The Carey - Foster Bridge



شكل (٤-١٨): قنطرة كاري فوستر.

يمثل شكل (٤-١٨) قنطرة كاري فوستر، وهي تعديل لقنطرة ويتستون حيث إنه بواسطتها يمكن تعيين أو تلافي الخطأ الطرفي، حيث P ، Q مقاومتان متساويتان في

القيمة تقريبا ولا حاجة لمعرفة قيمتها الفعلية . R و S مقاومتان أخريان «تكونان بمثابة ازدياد الطول لسلك القنطرة L مما يزيد حساسيتها للمقاومة بين المقاومات المتقاربة» وقيمتها أيضا متقاربة ويجب معرفة القيمة الفعلية للمقاومة S .

فإذا فرض أن الخطأ الطرفى عند A و B هما α و β أوم على التوالي فإنه عند حالة الاتزان يكون :

$$\frac{P}{Q} = \frac{R + rx_1 + \alpha}{S + r + (L - x_1) + \beta}$$

أو

$$\frac{P}{P + Q} = \frac{R + rx_2 + \alpha}{R + S + rL + \alpha + \beta} \dots\dots (٤-٥٧)$$

حيث r مقاومة وحدة الأطوال للسلك .

وإذا استبدلت المقاومتان R و S كل مكان الأخرى فإنه عند حالة الاتزان يُحصل على :

$$\frac{P}{Q} = \frac{S + rx_2 + \alpha}{R + r + (L - x_2) + \beta}$$

أو

$$\frac{P}{P + Q} = \frac{S + rx_2 + \alpha}{R + S + rL + \alpha + \beta} \dots\dots (٤-٥٨)$$

وبمساواة المعادلتين (٤-٥٧) و (٤-٥٨) ينتج أن :

$$R + rx_1 + \alpha = S + rx_2 + \alpha$$

$$\therefore R - S = r(x_2 - x_1) \dots\dots\dots (٤-٥٩)$$

ومن هذه المعادلة يمكن حساب الفرق بين المقاومتين المتقاربتين . وذلك بمعرفة r التي يمكن تعيينها بتجربة أخرى وذلك باستبدال S بمقاومة معلومة ولكن S' بحيث

$S' < Lr$ وجعل $R = 0$ وبعد إعادة الخطوات السابقة يُحصل على :

$$S' = r(x'_1 - x'_2) \dots \dots \dots (٤-٦٠)$$

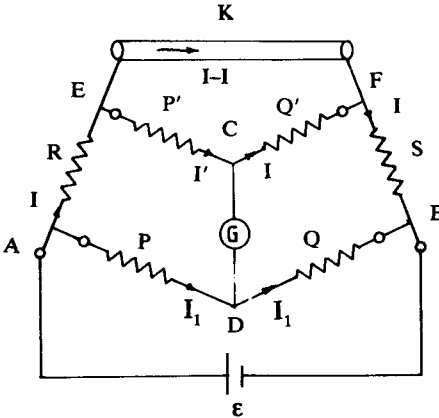
وبمعرفة مقاومة وحدة الأطوال r للسلك وبأخذ مقاومات معلومة في القنطرة يمكن استخدام المعادلتين (٤-٥٧) و(٤-٥٨) لحساب الخطأ الطرفي α و β .

(٩-٤) قنطرة كلفين المزدوجة

The Kelvin Double Bridge

لا تصلح قنطرة ويستون السابق شرحها [بند (٤-٧)] لإيجاد المقاومات ذات القيم الصغيرة $0.001 \Omega \approx$ مثل القضيب المعدني (metal rod) بسبب مقاومة التوصيل ومقاومة أسلاك التوصيل والتي تعد مقوماتها أكبر من المقاومة الصغيرة التي يراد قياسها لذلك استخدمت قنطرة كلفين المزدوجة لهذا الغرض كما يبينها شكل (٤-١٩) . حيث R هي

المقاومة الصغيرة غير المعروفة القيمة و S مقاومة صغيرة عيارية وقيمتها تقارب قيمة R والمقاومات Q, P, Q', P' , مقاومات معلومة ذات قيم عادية و K مقاومة صغيرة متصلة بحيث يمكن حذفها بسهولة .



وفي حالة اتزان الدائرة (التيار المار في الجلفانومتر يساوي الصفر) تتخذ التيارات المارة في أفرع الدائرة الاتجاهات الموضحة في شكل (٤-١٩) وبتطبيق قاعدة كيرشوف الأولى على الدوائر المغلقة في الشكل (٤-١٩) يُحصل على :

شكل (٤-١٩) : قنطرة كلفين المزدوجة

$$EKFC : I'Q' + I'P' - (I - I') K = 0 \dots \dots \dots (٤-٦١)$$

$$AECDA : I'P' + IR - I_1P = 0 \quad \dots\dots\dots (٤-٦٢)$$

$$CFBDC : IS + I'Q' - I_1Q = 0 \quad \dots\dots\dots (٤-٦٣)$$

من المعادلتين (٤-٦٢) و (٤-٦٣) يُحصل على :

$$\frac{I'P' + IR}{I'Q' + IS} = \frac{I_1P}{I_1Q} = \frac{P}{Q}$$

$$\therefore Q(I'P' + IR) = P(I'Q' + IS)$$

أو

$$I' (P'Q - Q'P) = I(PS - QR) \quad \dots\dots\dots (٤-٦٤)$$

ويمكن كتابة المعادلة (٤-٦١) لتصبح :

$$I = [I' (P' + Q') / K] + I'$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٦٤) يُحصل على :

$$I' (P'Q - Q'P) = I' [((P' + Q') / K) + 1] (PS - QR) \quad (٤-٦٥)$$

وهذه المعادلة تمثل شرطا يجب أن يكون صحيحا عند حالة الاتزان .

وإذا كان الاتزان لا يعتمد على المقاومة K (أي إذا حذفت K وبقيت الدائرة متزنة) فإن :

$$P'Q - Q'P = 0$$

$$PS - QR = 0$$

وفي هذه الحالة يكون شرطا الاتزان هما :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \quad \dots\dots\dots (٤-٦٦)$$

ونحصل على وضع الاتزان كالتالي :

١ - اختر قيا مناسبة للمقاومتين P و Q.

ب - احذف المقاومة K وابحث عن وضع الاتزان وفي هذه الحالة يتحقق الشرط

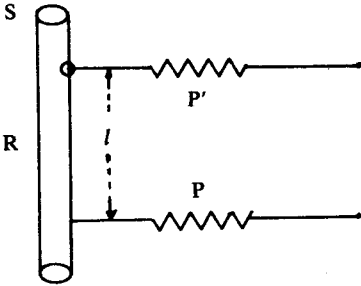
$$P/Q = P'/Q' \text{ (تمل كل من R و S لأنها متصلة على التوالي مع P' و Q').}$$

ج - أعد المقاومة K إلى وضعها الأول فإذا كان $P/Q = R/S$ فإن القنطرة ستبقى متزنة، وإذا كان الأمر غير ذلك احذف K مرة أخرى وكرر العملية.

(عند حالة الاتزان وفي وضع عدم الاعتماد على K فإن $P/Q = R/S$ وبذلك يكون معدل المقاومات الصغيرة معطى بدلالة المقاومات الكبيرة التي يمكن أخذها من صندوق المقاومات ويمكن معرفة S المجهولة القيمة بمعرفة R).

ملاحظة (١)

يطلب غالباً قياس التوصيل الكهربى (electrical conductivity) لمعدن على شكل قضيب أو سلك. ويمكن عمل ذلك بتوصيل القضيب المعدني أو السلك بقنطرة كلفين المزدوجة كما في شكل (٢٠-٤) حيث يكون أحد طرفيه مثبتاً والآخر وصلته متحركة «منزلة» بحيث يمكن تغيير طوله بسهولة والفائدة من ذلك هو سهولة الوصول إلى وضع الاتزان الذي نحصل عليه كما يلي:



١ - تتبع الخطوتان ١، ب كما ورد ذكره أعلاه.

٢ - أعد المقاومة K واحصل على وضع الاتزان مرة أخرى وذلك بتغيير طول القضيب عن طريق الطرف المتحرك (وهذا بالطبع يغير قيمة المقاومة R وحينئذ يكون لدينا $P/Q = R/s$ فإذا كانت S معلومة أمكن معرفة R. وإذا كان طول القضيب أو السلك المقابل لـ R هو l ومساحة مقطعة S

شكل (٢٠-٤): توصيل القضيب المعدني أو السلك الذي مقاومته R لقنطرة كلفين المزدوجة.

فإنه حسب العلاقتين (٨-٤) و(١٢-٤) يمكن معرفة التوصيل الكهربى σ حيث:

$$\sigma = \frac{l}{RS}$$

ملاحظة (٢)

إذا كانت المقاومة K في موضعها فإن التيار المار خلال المقاومتين R و S يمكن أن يكون في حدود بضع أمبيرات وهذا أمر ضروري لتكون الحساسية جيدة ولذلك يجب استعمال البطاريات المشحونة حديثا في قنطرة كلفين المزدوجة.

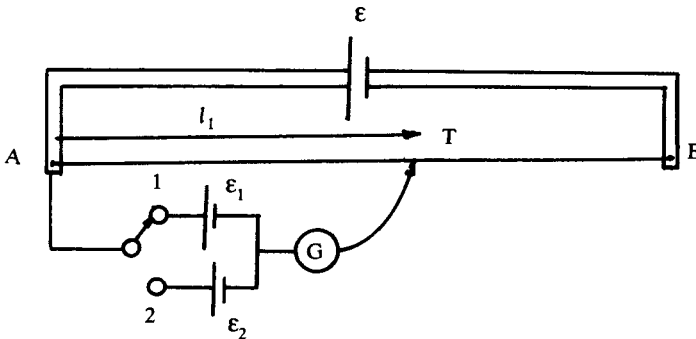
(٤-١٠) مقياس الجهد واستعمالاته

The Potentiometer and Its Uses

يعتبر مقياس فرق الجهد من أهم الوسائل الدقيقة لقياس فرق الجهد لعناصر الدوائر الكهرية ولمصادر القوى الدافعة الكهرية (E. M. F.).

(٤-١٠-١) مقياس فرق الجهد الأساسي The basic potentiometer

يتكون مقياس فرق الجهد في أبسط صورة له من سلك منتظم المقطع AB مصنوع من مادة ذات مقاومة نوعية عالية ومعامل مقاومته الحراري صغير كما في شكل (٤-٢١) حيث تعطى البطارية $\mathcal{E}$ تيارا ثابتا I خلال السلك AB الذي يكون طوله في العادة مترا واحدا فإذا فرض أن r هي مقاومة وحدة الأطوال للسلك يكون فرق الجهد



شكل (٤-٢١): مقياس فرق الجهد الأساسي.

عبر الجزء AT هو rI_1I وتتعدل نقطة الاتصال T ، ويتبع ذلك I_1 ، حتى يتساوى rI_1I مع $\mathcal{E}_1$ (القوة الدافعة للخلية 1)، ويحدث ذلك عندما لا يكون هناك فرق للجهد عبر

الجللفانومتر (G) أي لا يمر تيار وعندئذ يكون :

$$\mathcal{E}_1 = r l_1 I \quad \dots\dots\dots (٤-٦٧)$$

تستبدل الخلية 1 بالخلية 2 في الدائرة ويتبع ذلك تغيير موضع النقطة T بحيث يكون $AT = l_2$ عندما لا يمر تيار في الجللفانومتر وعندها يكون :

$$\mathcal{E}_2 = r l_2 I \quad \dots\dots\dots (٤-٦٨)$$

من المعادلتين (٤-٦٧) و (٤-٦٨) يُحصل على :

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \dots\dots\dots (٤-٦٩)$$

ملاحظات

- ١ - للحصول على انعدام التيار خلال الجللفانومتر مع الخليتين يجب أن يكون :
 - اتصال قطبي الخليتين اتصالاً صحيحاً بحيث يوصل القطب الموجب لكل من البطارية $\mathcal{E}$ و الخليتين $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ بالنقطة A.
 - فرق الجهد $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ أقل من فرق الجهد الأساسي عبر السلك AB.
- ٢ - جرت العادة أن تكون الخلية 1 خلية الكادميوم العيارية (standard cadmium cell) والتي قوتها الدافعة الكهربائية تساوي 1.01864 V عند 20°C وبمعرفتها يمكن معرفة $\mathcal{E}_2$.
- ٣ - قد يكون هناك خطأ طرفي عند نقطة الاتصال A وليكن α متر من طول السلك وفي هذه الحالة يجب إضافته لتصبح المعادلة (٤-٦٩) كما يلي :

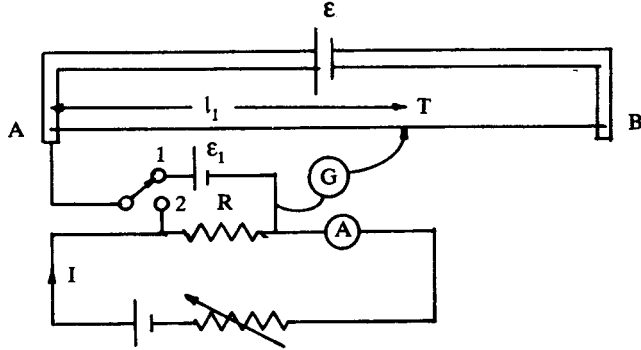
$$\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_2 = (\alpha + l_1) / (\alpha + l_2) \quad \dots\dots\dots (٤-٧٠)$$
 وعادة تكون α صغيرة ولذلك يمكن إهمالها .
- ٤ - لحماية الجللفانومتر يجب توصيل مجزئ للتيار (shunt) إلا في حالة التيارات الصغيرة.

(٤-١٠-٢) استعمالات مقياس فرق الجهد Uses of the potentiometer

١ - قياس شدة التيار The measurement of current

إذا كانت شدة التيار I الذي يمر خلال المقاومة R فإن فرق الجهد عبر هذه المقاومة هو IR والذي يمكن قياسه بواسطة مقياس فرق الجهد كما يبينه شكل (٤-٢٢)

وذلك بدون سحب للتيار، وعند معرفة قيمة R يمكن معرفة I .



شكل (٤-٢٢): استخدام مقياس الجهد في قياس شدة التيار I

وباتباع الخطوات السابق ذكرها في الفقرة (٤-١٠-١) يُحصل على:

$$l_1/l_2 = \varepsilon_1/IR$$

أو

$$I = l_2 \varepsilon_1 / l_1 R \quad \dots \dots \dots (٤-٧١)$$

حيث ε_1 خلية عيارية معلومة القيمة.

مع ملاحظة أن الدائرة في شكل (٤-٢٢) تستعمل أيضا لمعايرة الأمبير «جهاز لقياس شدة التيار الكهربائي بطريقة مباشرة». ويمكن استخدام المعادلة (٤-٧١) لحساب R إذا كانت I معلومة.

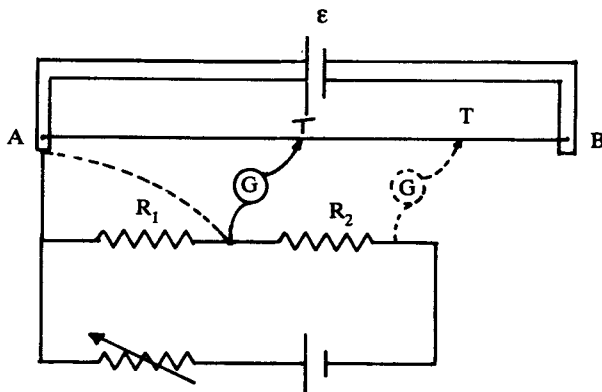
ب - مقارنة المقاومة The comparison of resistance

لتكن R_1 و R_2 مقاومتان متصلتان على التوالي يمر بهما تيار شدته I فيكون الجهد عبرهما V_1 و V_2 وللمقارنة بينهما يستعمل مقياس فرق الجهد كما يوضحه شكل (٤-٢٣).

وبتطبيق الخطوات السابق ذكرها في الفقرة (٤-١٠-١) يُحصل على:

$$l_1/l_2 = IR_1/IR_2 = R_1/R_2 \quad \dots \dots \dots (٤-٧٢)$$

ولذلك إذا عرفت إحداها عرفت الأخرى.



شكل (٤-٢٣): كيفية استخدام مقياس الجهد للمقارنة بين المقاومات.

وبلاحظ مما تقدم أنه يمكن استعمال هذه الطريقة لمعرفة الخطأ الطرفي الذي تحدثنا عنه في الفقرة (٤-١٠). حيث نقيس I_1 و I_2 وكذلك I_3 المطابق لقياس فرق الجهد عبر المقاومتين مجتمعتين. ولذلك فالخطأ الطرفي لابد أن يضاف للأطوال الثلاثة. ومعروف أن:

$$V_{R_1 R_2} = V_{R_1} + V_{R_2}$$

وحسب المعادلة (٤-٦٤) يكون:

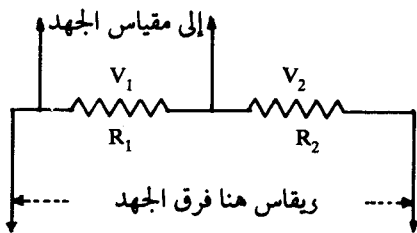
$$rI(\alpha + I_3) = rI(\alpha + I_1) + rI(\alpha + I_2)$$

$$\therefore \alpha + I_3 = \alpha + I_1 + \alpha + I_2$$

$$\therefore \alpha = I_3 - I_2 - I_1 \quad \dots (٤-٧٣)$$

حيث r مقاومة وحدة الأطوال.

ج - قياس فرق الجهد العالي The measurement of a large P.D.



شكل (٤-٢٤): استخدام مقياس الجهد لقياس فرق الجهد العالي.

إذا كان فرق الجهد أو القوة الدافعة الكهربائية التي يراد قياسها يساوي أو أكبر من جهد البطارية ϵ الموصلة بين طرفي AB سلك مقياس فرق الجهد فلا بد من استعمال موزع للجهد (potential divider) كما يبينه شكل (٤-٢٤).

فإذا كان الجهد الذي يراد قياسه هو V فإن $V = V_1 + V_2$. وبقياس V_1 بواسطة مقياس الجهد يمكن معرفة V من العلاقة:

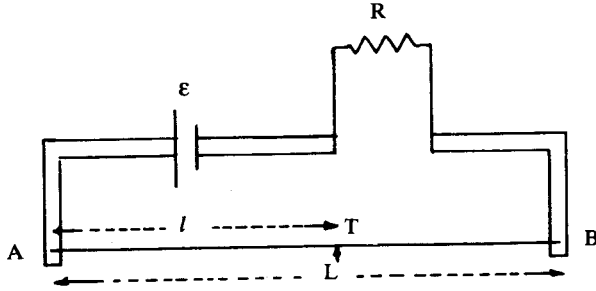
$$V/V_1 = (R_1 + R_2) / R_1$$

$$\therefore V = V_1 (R_1 + R_2) / R_1 \dots\dots\dots (٤-٧٤)$$

موزع الجهد المعبر عنه بالمقاومتين R_1 ، R_2 يوجد غالبا في صندوق مقفل يصمم بحيث يعطى قويا ثابتة صحيحة لفرق الجهد V_1 مقارنة بفرق الجهد V بحيث تكون قيم V_1 $\frac{1}{10}$ أو $\frac{1}{100}$ أو $\frac{1}{1000}$ من قيمة V . ولذلك يسمى هذا الصندوق بصندوق الجهد مع ملاحظة أنه يجب أن تكون قيمة $(R_1 + R_2)$ كبيرة لدرجة كافية بحيث لا تكون قيمة التيار المار من خلالها كافية للتأثير على قيمة الجهد V .

د - مقارنة فروق الجهود الصغيرة The comparison of small P.D.

إذا استعمل مقياس فرق الجهد للمقارنة بين فرقي جهد صغيرين فإنه باتباع الطريقة السابقة للمقارنة في الفقرة (ا) يكون l_1 ، l_2 صغيرين جدا بالنسبة لطول السلك AB وتكون تبعا لذلك الدقة في عملية المقارنة ضعيفة جدا. وإذا أضيف للدائرة الأساسية لمقياس فرق الجهد مقاومة قدرها R كما في شكل (٤-٢٥) فإنها سوف تنقص



شكل (٤-٢٥): استخدام مقياس الجهد لمقارنة فروق الجهد الصغيرة.

من قيمة فرق الجهد عبر السلك ويكون التيار المار في هذه الدائرة ممثلا بالمعادلة التالية:

$$I = \epsilon / (R + rL) \dots\dots\dots (٤-٧٥)$$

حيث L طول السلك AB و r مقاومة وحدة الأطوال.

ويمكن تغيير قيمة المقاومة R حتى نحصل على قيم معقولة من الطولين l_1 ، l_2 وتكون بذلك عملية المقارنة أكثر دقة من الوضع الأول.

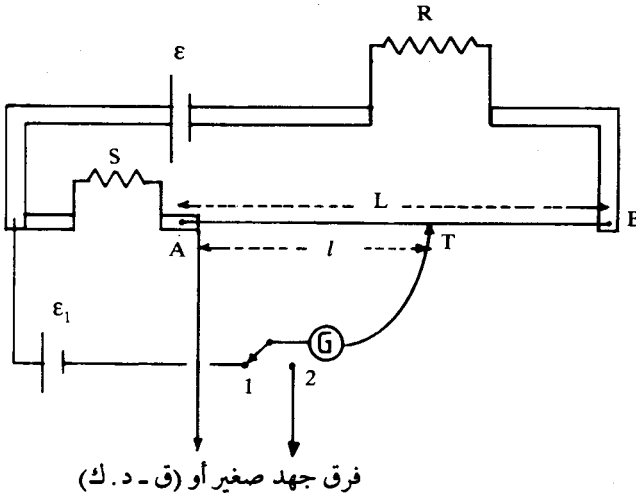
وفي أبسط عمليات المقارنة يمكن تغيير قيمة المقاومة R لكي نحصل على قيمة مثل l الموضحة في شكل (٤-٢٥)، لأعلى فرق جهد صغير يراد قياسه بهذه الطريقة.

هـ- قياس فرق جهد صغير *The measurement of a small P.D.*

عند قياس فرق جهد صغير أو قوة دافعة كهربية صغيرة مباشرة كطريقة أفضل من عملية المقارنة السابق ذكرها فإنه لا بد من استعمال خلية عيارية معروفة القيمة قدرها $\mathcal{E}_1$ فإذا كان الجهد المراد قياسه أصغر من $\mathcal{E}_1$ فإن مقياس فرق الجهد الأساسي يجب تغييره ليصبح كالوضع المبين في شكل (٤-٢٦) ويكون التيار I المار في الدائرة الأساسية هو:

$$I = \mathcal{E} / (R + S + rL) \dots \dots \dots (٤-٧٦)$$

تتغير قيمة التيار مع تغيير المقاومتين R و S . ويمكن تغيير قيمته حتى يصبح فرق الجهد بين طرفي السلك AB يساوي 1 mV أو 10 mV . . . الخ .



شكل (٤-٢٦): استخدام مقياس الجهد لقياس فرق جهد صغير.

وتوضع قيمة S للمقاومة بحيث يكون فرق الجهد بين طرفيها الناتج عن مرور التيار I مساويا لجهد الخلية العيارية $\mathcal{E}_1$ وفي هذه الحالة تكون نقطة الاتصال T ملائمة للطرف A من السلك، ويمكن تغيير المقاومة R حتى يصبح التيار المار في الجلفانومتر مساويا للصفر. وهذه الطريقة يكون:

$$\mathcal{E}_1 = IS \quad \therefore I = \mathcal{E}_1/S$$

ويكون فرق الجهد لوحدة الأطوال للسلك AB هو:

$$Ir = (\mathcal{E}_1/S)r$$

ومن ثم يمكن إدخال الجهد الصغير المراد قياسه V في الدائرة كالمشبع سابقا فإذا كانت l هي الطول المقابل لهذا الجهد، في حالة الاتزان أي انعدام تيار الجلفانومتر يكون:

$$V = Ir l = (\mathcal{E}_1/S)rl \quad \dots\dots\dots (٤-٧٧)$$

ويلاحظ أنه إذا كان جهد السلك AB الذي يساوي طوله مترا واحدا هو 1 mV أو 10 mV فإنه يمكن قراءة مقياس فرق الجهد مباشرة لقيمة الجهد المجهول. كذلك قد يزيد طول السلك عن متر واحد ويصل إلى أحد عشر مترا.

مقياس الجهد البسيط وبعض تطبيقاته لا تستعمل الآن إلا في الأغراض التعليمية والتدريبية لمعرفة القواعد الأساسية الفيزيائية والرياضية فقط وذلك بسبب كبر حجمه غير المناسب مقارنة بمقياس الجهد العادي (voltmeter) إلى جانب عدم الدقة في قياساته لذلك صممت أجهزة قياس للجهد أكثر ملاءمة ودقة وفعالية.

(١١-٤) القوة الدافعة الكهرية الحرارية

Thermal Electromotive Force

ذكر في البند (٤-٤) أن أحد مصادر القوة الدافعة الكهرية (E.M.F) هو تحويل الطاقة الحرارية إلى طاقة كهربية (thermoelectric) وقد توالى عدة نظريات لشرح وتفسير هذه الظاهرة وهي كما يلي:

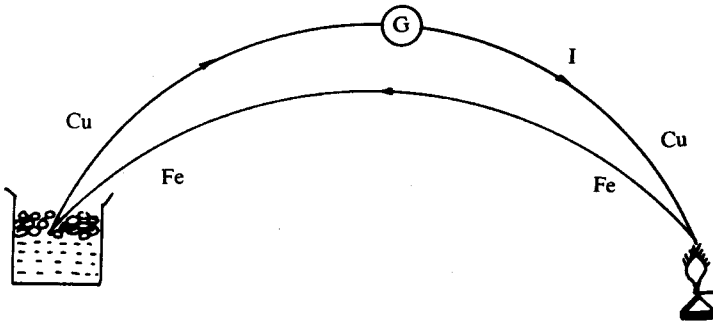
(٤-١١-١) ظاهرة «تأثير» سيبك Seebeck effect

اكتشف سيبك عام ١٨٢١ م طريقة لتوليد قوة دافعة كهربية بالحرارة فقط . حيث وجد أنه عند توصيل معدنين مختلفين على التوالي بجلفانومتر حساس كما في شكل (٤-٢٧) فإن تيارا يمر في الجلفانومتر بدون وجود قوة دافعة كهربية خارجية في الدائرة ويحتاج الأمر فقط لرفع درجة حرارة أحد موضعي الاتصال عن درجة حرارة موضع الاتصال الآخر. ويسمى هذا التيار الناتج عن اختلاف درجة الحرارة بالتيار الكهربى الحرارى (thermoelectric current) والقوة الدافعة التي نشأ عنها هذا التيار بالقوة الكهربية الحرارية (thermoelectric force) وتتوقف القوة الدافعة الكهربية الحرارية على:

١- نوعي المعدنين .

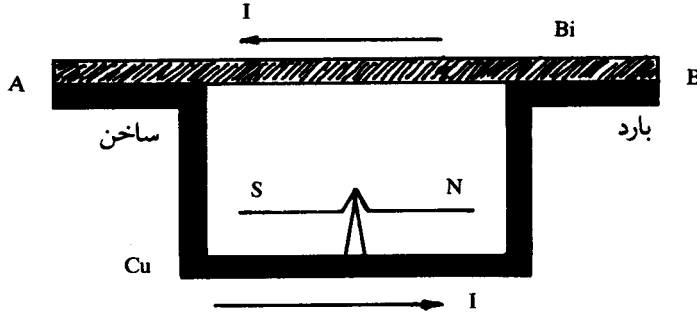
ب - درجة حرارة طرفي اتصال المعدنين .

وتسمى الدائرة الميئة في الشكل (٤-٢٧) بالازدواج الحرارى (thermocouple) ويوضح الشكل (٤-٢٨) كيفية تعيين اتجاه التيار وعلاقته بدرجة الحرارة ونوعى المادتين المستعملتين .



شكل (٤-٢٧): توصيل معدنين مختلفين "Fe, Cu" على التوالي بجلفانومتر حساس G ووضع وصلي الاتصال أحدهما في الثلج والثانية فوق موقد بنزن لتوليد قوة دافعة كهربية .

يبين الشكل (٤-٢٨) اتصال قضيبين من مادتين النحاس Cu والبزمث Bi وفي المنتصف توجد إبرة مغناطيسية . فإذا سخن الطرف A فإن القطب الشمالى N للإبرة



شكل (٢٨-٤): اتصال قضيبين من مادتين النحاس Cu والبزمث Bi لتبين اتجاه التيار وعلاقته بدرجة الحرارة باستخدام إبرة مغناطيسية S ، N.

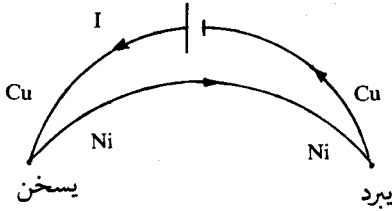
المغناطيسية سيتحرك إلى الشرق وهذا يعني أن التيار يسري من النحاس إلى البزمث خلال الوصلة الباردة B والعكس خلال الوصلة الساخنة A. وبعد تجارب عديدة على أنواع مختلفة من المعادن أمكن ترتيب بعض منها بحيث إذا تكون ازدواج حراري من اثنين منها فإن التيار يمر من المعدن إلى المعدن الذي يليه في الترتيب عند الطرف الساخن وتزداد القوة الدافعة الكهربية الحرارية كلما بعد المعدن عن الآخر في الترتيب مثل المجموعة التالية على الترتيب.

بزمث Bi ← نيكل Ni ← كوبلت Co ← بلاديوم Pd ← بلاتين Pt
 نحاس Cu ← مانجنيز Mn ← تيتانيوم Ti ← زئبق Hg ← رصاص Pb
 قصدير Sn ← كروميوم Cr ← موليبدنم Mo ← روديوم Rh ← ايريديوم Ir
 ذهب Au ← فضة Ag ← زنك Zn ← تنجستن W ← كادميوم Cd
 حديد Fe ← انتيمون Sb

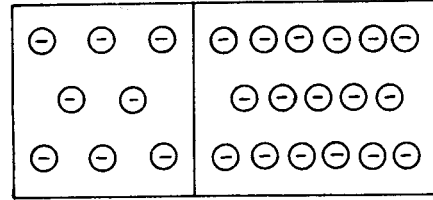
وتستخدم ظاهرة سيبك لقياس درجة الحرارة، حيث يترك أحد موضعي الاتصال معرضاً للجو أو يوضع في جليد نقي آخذ في الانصهار (درجة الصفر المئوي) أو في سائل النيتروجين بحيث تظل درجة حرارته ثابتة وتسمى بدرجة حرارة الاسناد (reference temperature) في حين يعرض موضع الاتصال الآخر للشيء المراد قياس درجة حرارته وبقياس التيار الناتج يمكن الاستدلال على درجة الحرارة المجهولة.

(٢-١١-٤) ظاهرة «تأثير» بلتير The Peltier effect

إذا اتصل معدنان مختلفان فسوف يتولد عند موضع تلامسهما قوة دافعة كهربية تسمى بالقوة الدافعة البلتيرية نسبة إلى جان بلتير (Jean Peltier ١٨٣٤م). وتتوقف قيمة القوة الدافعة الكهربية المتولدة على نوع المعدنين المتلامسين ودرجة الحرارة المطلقة لموضع الاتصال. وسبب هذه القوة الدافعة الكهربية هو انتشار (diffusion) الإلكترونات الحرة من أحد الموصلين إلى الموصل الآخر طالما كان ضغط الغاز الإلكتروني (electron gas) أكثر تركيزاً في أحد الموصلين عن الآخر كما في شكل (٢٩-٤).



«ب»



«أ»

شكل (٢٩-٤): أ - انتشار الإلكترونات الحرة من أحد الموصلين إلى الآخر مادام ضغط الغاز أكثر تركيزاً في أحدها.
ب - تبريد أحد وصلة الازدواج الحراري وتسخين الأخرى وذلك بمرور تيار كهربى I.

وعند مرور تيار كهربى قدره I في دائرة تتكون من سلكين من معدنين مختلفين كالححاس Cu والنيكل Ni مثلاً متصلين كما في شكل (٢٩ ب - ٤) فإن أحد موضعي الاتصال بين المعدنين ترتفع درجة حرارته في حين تنخفض درجة حرارة موضع الاتصال الآخر، وسبب ذلك أن التيار يعزز القوة الدافعة البلتيرية الناتجة عند أحد موضعي الاتصال وفي هذه الحالة تنخفض الطاقة الكهربية مسببة برودة هذا الموضع، بينما في الموضع الآخر يعاكس التيار الكهربى I القوة الدافعة البلتيرية مسبباً ارتفاع درجة حرارته.

وإذا عُدت مقاومة الموصلين مهملة فإن الطاقة الحرارية الممتصة (heat absorbed) والمتحررة (heat liberated) عند أي من الموضعين نتيجة لمرور التيار I في زمن قدره t هي :

$$H' = \pi It \quad \dots\dots\dots (٤-٧٨)$$

حيث π هو معامل بلتير (Peltier coefficient) أو ما يسمى بقوة دافعة بلتير ووحدتها الفولت.

أما إذا كان للموصلين مقاومة قدرها R فإنه نتيجة لمرور التيار خلال المقاومة ستولد طاقة حرارية تتسبب في ارتفاع درجة الحرارة عند كل من موضعي الاتصال. ولكن نتيجة لوجود القوة الدافعة البلتيرية يحدث انخفاض في درجة حرارة أحد الموضعين وارتفاع في درجة حرارة الموضع الآخر وفي هذه الحالة تعطى كمية الحرارة في زمن قدره t بالمعادلة :

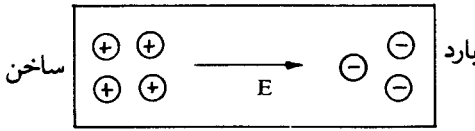
$$JH = I^2 Rt \pm \pi It \quad \dots\dots\dots (٤-٧٩)$$

حيث J ثابت جول (المكافئ الميكانيك لجول).

ويلاحظ أن ظاهرة بلتير ظاهرة انعكاسية أي إذا عكس اتجاه التيار يصبح موضع الاتصال البارد ساخن والعكس بالعكس مقارنة بالوضع الأول السابق ذكره. كما أن قيمة القوة الدافعة البلتيرية لا تزيد عن عدة ملّي فولت mV . واكتشفت ظاهرة بلتير عام ١٨٣٤ م.

(٣-١١-٤) ظاهرة «تأثير» طومسون Thomson effect

أثبت العالم وليام طومسون (S. W. Thomson) بالتجربة أنه إذا كانت هناك نقطتان على قضيب معدني تختلف درجتا حرارتهما، بحيث يكون الفرق بينهما dT ، تنشأ قوة دافعة كهربية بينهما تتناسب مع الفرق في درجة الحرارة dT .



إذا سخن أحد طرفي قضيب معدني ويرد الطرف الآخر كما في شكل (٤-٣٠)

بحيث يتوفر في القضيب تدرج حراري

معين فإنه ينشأ في القضيب مجال كهربائي E

نتيجة لتراكم الإلكترونات الحرة في أحد

طرفي القضيب وهو الطرف البارد وقلت

شكل (٤-٣٠): التدرج الحراري لموصل سخن أحد طرفيه بينما الطرف الآخر بارد.

كشافتها عند الطرف الساخن. وفي هذه الحالة يصبح جهد الطرف البارد سالبا وجهد الطرف الساخن موجبا.

وقد وجد أن هذا المجال يتناسب طرديا مع التدرج الحراري

(temperature gradient) «معدل تغير درجة الحرارة dT بالنسبة للمسافة dx على طول

القضيب المعدني» أي أن:

$$E \propto \frac{dT}{dx} \quad \therefore E = \sigma \frac{dT}{dx} \quad \dots \dots \dots (٤-٨٠)$$

$$\therefore E = \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

$$\therefore d\mathcal{E} = \sigma dT$$

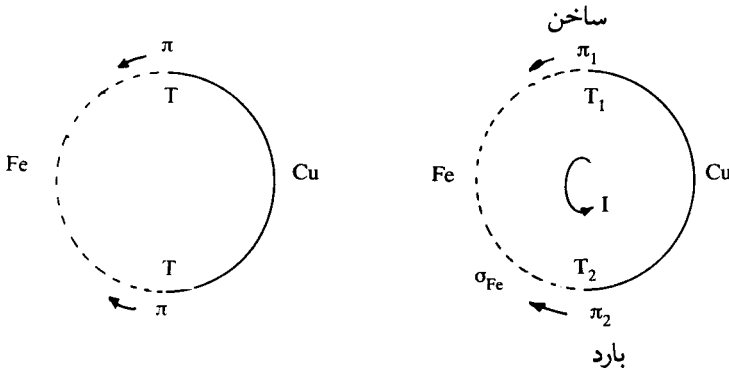
$$\therefore \mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \sigma dT \quad \dots \dots \dots (٤-٨١)$$

حيث T_1 و T_2 درجتا الحرارة عند طرفي الموصل، وتسمى σ بمعامل طومسون (Thomson coefficient)، بينما تسمى القوة الدافعة الكهربائية الحرارية بالقوة الدافعة الطومسونية (Thomson E.M.F.) ومن الملاحظ أن القوة الدافعة الكهربائية الحرارية لطومسون لا تبلغ قيا كبيرة بل إن قيمتها لا تزيد على بعض كسور الألف من الفولت.

(١٢-٤) تأثيرات سيبك وبلتير وطومسون

The Seebeck, Peltier and Thomson Effects

مما تقدم يتضح أن ظاهرة سيبك تجمع بين ظاهرتي بلتير وطومسون فإذا أخذ مثلاً معدني الحديد Fe والنحاس Cu ووصلا كما في شكل (٤-٣١) وكانت درجة حرارة الطرفين متساوية فإنه عند نقطة تلامس المعدنين (عند كل طرف) تنشأ قوة دافعة بلتيرية تساوي تلك الناشئة عند الطرف الآخر. أما إذا اختلفت درجة حرارة الطرفين، ولتكن T_1 ، T_2 ، بحيث كانت $T_1 > T_2$ فإنه ينتج في كل منهما تدرج حراري تنشأ عنه قوة دافعة كهربية طومسونية في الموصلين إلى جانب القوة الدافعة البلتيرية عند كل من نقطتي التلامس. ولما كانت نقطتا التلامس تحت درجتين مختلفتين فإن القوة الدافعة البلتيرية التي تنشأ عند النقطة الأولى لا تساوي القوة الدافعة الناشئة عند النقطة الثانية.



شكل (٤-٣١): ازدواج حراري من مادتي النحاس والحديد لتفسير ظاهرتي بلتير وطومسون.

أي أن القوة الدافعة المتولدة (المحصلة) في هذه الحالة هي مجموع زوج من القوة الدافعة البلتيرية وزوج من القوة الدافعة الطومسونية ويتولد في الدائرة تيار كهربائي I تختلف قيمته باختلاف درجة الحرارة ونوع المعدنين.

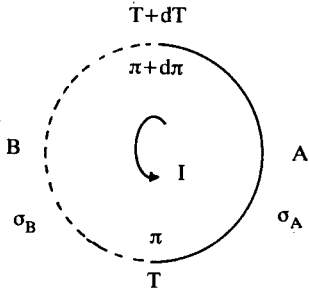
$$\therefore \mathcal{E} = \pi_2 - \pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{\text{Cu}} dT - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{\text{Fe}} dT \quad \dots \quad (٤-٨٢)$$

وإذا فرض أن درجة حرارة الوصلتين (الطرفين) T و $T + dT$ بدلا من T_1 و T_2 فإن جهدي بلتير يصبحان π و $\pi + d\pi$. أي أنه لأي تغيير بسيط في درجة حرارة الطرفين يكون:

$$d\mathcal{E} = d\pi + (\sigma_{cu} - \sigma_{Fe}) dT \dots \dots \dots (٤-٨٣)$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{d\pi}{dT} + (\sigma_{cu} - \sigma_{Fe})$$

حيث $\frac{d\mathcal{E}}{dT}$ هو مقدار التغير في القوة الدافعة الكهربائية الحرارية مع درجة الحرارة ويسمى بالطاقة الكهربائية الحرارية (thermoelectric power) ويرمز لها بالرمز P كما يسمى بمعامل سيبك النسبي (relative Seebeck coefficient). المعادلتان (٤-٨٢) و (٤-٨٣) صحيحتان لأي معدنين وصلا بالطريقة نفسها. ولذلك يمكن إعادة كتابتهما بافتراض أن المعدنين هما A ، B ، كما في شكل (٤-٣٢)، بالصورة التالية:



$$\mathcal{E} = \pi_2 - \pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B dT \quad (٤-٨٤)$$

أو

$$d\mathcal{E} = d\pi + (\sigma_A - \sigma_B) dT$$

شكل (٤-٣٢): ازدواج حراري من مادتين مختلفتين A ، B وظاهري بلتير.

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{d\pi}{dT} + (\sigma_A - \sigma_B) \quad (٤-٨٥)$$

(٤-١٣) القوة الدافعة الحرارية والديناميكا الحرارية

Thermoelectric and Thermodynamic

يمثل الشكل (٤-٣٢) ازدواجاً حرارياً لمعدنين A ، B فإذا كانت درجة حرارة الطرفين البارد والساخن هما T و $T + dT$ على التوالي فإن معامل بلتير عند الطرف البارد π والطرف الساخن $\pi + d\pi$ وكذلك معامل طومسون للمعدن A هو σ_A وللمعدن B هو

σ_B . فإذا فرض أنه نتيجة لذلك نتج تيار كهربى شدته وحدة كهرومغناطيسية لمدة ثانية واحدة فإنه حسب المعادلة (٧٨-٤) يكون:

$$\pi + d\pi = \text{كمية الحرارة الممتصة عند الطرف الساخن بتأثير بلتير}$$

$$\pi = \text{كمية الحرارة المنبعثة عند الطرف البارد بتأثير بلتير}$$

$$\sigma_A dT = \text{كمية الحرارة الممتصة في الموصل A بتأثير طومسون}$$

$$\sigma_B dT = \text{كمية الحرارة المنبعثة في الموصل B بتأثير طومسون}$$

ولما كان تأثير بلتير وطومسون معكوسين، يمكن تبديل درجة حرارة الطرفين. فإنه يمكن عد الازدواج الحرارى كآلة انعكاسية وتبعاً للديناميكا الحرارية تنص نظرية كارنوت (Carnot) على:

«النسبة بين كمية الحرارة الممتصة أو المنبعثة ودرجة الحرارة المطلقة ثابتة».

أي أن:

$$\frac{\text{كمية الحرارة الممتصة}}{\text{درجة الحرارة المطلقة عند الطرف الذي يحصل فيه الامتصاص}} = \frac{\text{كمية الحرارة المنبعثة}}{\text{درجة الحرارة المطلقة عند الطرف الذي يحصل فيه الانبعاث}}$$

$$\frac{\pi + d\pi}{T + dT} + \frac{\sigma_A dT}{T} = \frac{\pi}{T} + \frac{\sigma_B dT}{T}$$

أو

$$\frac{\pi + d\pi}{T + dT} - \frac{\pi}{T} + \frac{\sigma_A dT}{T} - \frac{\sigma_B dT}{T} = 0$$

أو

$$d\left(\frac{\pi}{T}\right) + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{T}\right) dT = \frac{d}{dT}\left(\frac{\pi}{T}\right) + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{T}\right) dT = 0$$

أو

$$\frac{1}{T} \frac{d\pi}{dT} - \frac{1}{T^2} \pi + \frac{\sigma_A - \sigma_B}{T} = 0$$

$$\therefore \frac{d\pi}{dT} - \frac{\pi}{T} + (\sigma_A - \sigma_B) = 0 \quad \dots \dots (٨٦-٤)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٤-٨٥) يُحصل على :

$$\pi = T \frac{d\varepsilon}{dT} \dots\dots\dots (٤-٨٧)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٨٦) يُحصل على :

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{\pi}{T} - \frac{d\pi}{dT} = \frac{d\varepsilon}{dT} - \frac{d}{dT} \left(T \frac{d\varepsilon}{dT} \right)$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{d\varepsilon}{dT} - \left(\frac{d\varepsilon}{dT} + T \frac{d^2\varepsilon}{dT^2} \right)$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -T \frac{d^2\varepsilon}{dT^2} \dots\dots\dots (٤-٨٨)$$

ولكن يمكن الحصول من المعادلة (٤-٨٧) على :

$$P = \frac{\pi}{T}$$

$$\therefore \frac{\pi}{T} - \frac{d\pi}{dT} = T \frac{dP}{dT} = \sigma_A - \sigma_B$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$\frac{dP_{AB}}{dT} = \frac{1}{T} (\sigma_A - \sigma_B) \dots\dots\dots (٤-٨٩)$$

ويتضح من هذه المعادلة أن P_{AB} تمثل المعدنين معا بينما في الطرف الآخر كل حد يمثل معدنا بعينه .

$$P_{AB} = P_A - P_B = \int_0^T \frac{\sigma_A}{T} dT - \int_0^T \frac{\sigma_B}{T} dT \dots\dots (٤-٩٠)$$

حيث يسمى P_A بمعامل سيبك المطلق (absolute Seebeck coefficient) ، وكذلك الحال بالنسبة لـ P_B . ويرمز له عادة بالرمز α .

(١٤-٤) الازدواج الحراري ودرجة الحرارة

The Thermocouple and Temperature

ذكر في البند (١١-٤) أن الازدواج الحراري شكل (٤-٢٧) يستخدم لقياس درجة الحرارة غير المعروفة بحيث يوضع أحد الطرفين عند درجة حرارة ثابتة بينما يوضع الطرف الآخر في درجات حرارة مختلفة.

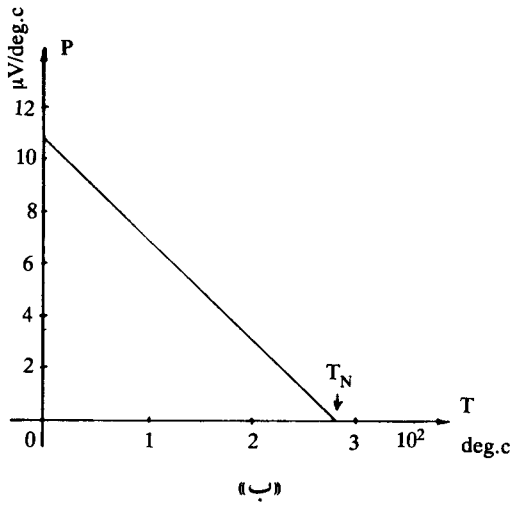
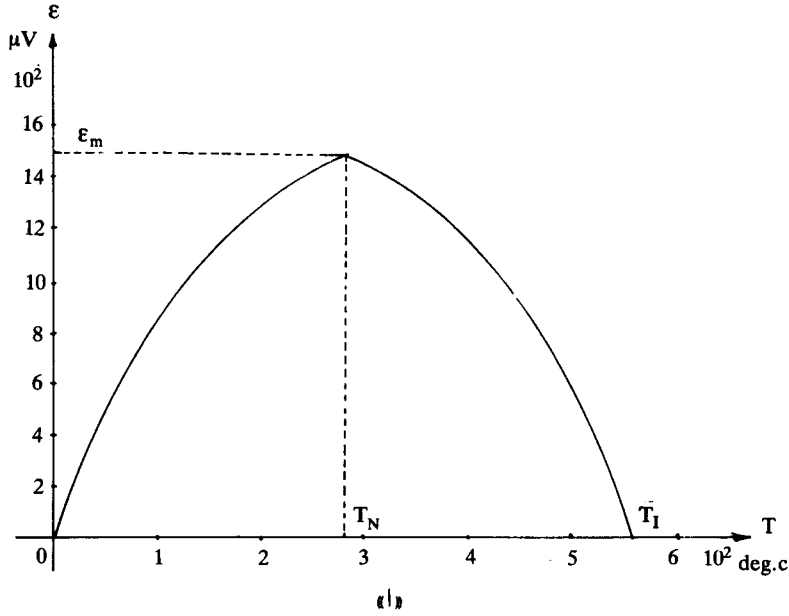
وقد وُجد أن العلاقة بين القوة الدافعة الكهرية الحرارية والفرق بين درجتي حرارة الوصلتين للازدواج الحراري ليست علاقة خطية وإنما على شكل قطع مكافئ (parabola) كما يمثله شكل (٤-٣٣).

وقد أخذت نتائج الشكل (٤-٣٣) لازدواج حراري لمعدني الحديد والنحاس بحيث وضع أحد الطرفين في درجة الصفر المئوي وقيست القوة الدافعة الكهرية $\mathcal{E}$ بوضع الطرف الآخر في درجات حرارة مختلفة. وواضح أنه كلما ارتفعت درجة الحرارة زادت القوة الدافعة الكهرية $\mathcal{E}$ حتى تصل إلى أعلى قيمة عند درجة الحرارة 280°C وتعرف هذه النقطة بالنقطة المحايدة ((neutral point (T_N)) وبعد هذه النقطة تتناقص قيمة القوة الدافعة الكهرية رغم الارتفاع في درجة الحرارة حتى تنعدم تماماً عند درجة الحرارة 560°C وتسمى هذه النقطة بنقطة الانقلاب ((inversion point (T_I)). وإذا تغيرت درجة حرارة الإسناد فإن النقطة المحايدة (T_N) لن تتغير بينما تتغير نقطة الانقلاب. ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى الحراري الكهربي (thermoelectric curve).

وبصورة عامة إذا فرض أن الازدواج الحراري يتألف من معدنين A ، B فإن المنحنى الحراري الكهربي يمكن تمثيله بالمعادلة الافتراضية التالية:

$$\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T - T_0) + \frac{1}{2} \beta_{AB}(T - T_0)^2 \dots \quad (٤-٩١)$$

حيث T_0 درجة حرارة الإسناد لأحد طرفي الازدواج، و T درجة حرارة الطرف الآخر المتغيرة، α_{AB} ، β_{AB} ثوابت تعتمد على مميزات المعدنين A ، B والجدول (٤-٢) يمثل



شكل (٤-٣٣): ١ - العلاقة بين القوة الدافعة الكهربائية الحرارية ودرجة الحرارة لازدواج حراري .
 ب - العلاقة بين القدرة P ودرجة الحرارة لازدواج نفسه .

قيما لهذين الثابتين لبعض العناصر على أساس أن مادة Pb هي العنصر الثاني للازدواج حيث:

$$\alpha_{AB} = \alpha_{A.Pb} - \alpha_{B-Pb} \quad \dots \dots \dots (٤-٩٢)$$

$$\beta_{AB} = \beta_{A.Pb} - \beta_{B-Pb}$$

ويمكن الحصول على الطاقة الحرارية الكهرية بتفاضل المعادلة (٤-٩١) حيث:

$$P_{AB} = \frac{d\varepsilon_{AB}}{dT} = \alpha_{AB} + \beta_{AB}(T - T_0) \quad \dots \quad (٤-٩٣)$$

جدول (٤-٢): ثوابت الازدواج الحراري β, α Thermocouple const.

Metal	المعدن	$\alpha(\mu V/deg\ C)$	$\beta(\mu V/deg^2.C)$
Antimony Sb	أنثيمون	35.58	0.146
Bismuth Bi	البزموت	- 74.42	0.032
Cadmium Cd	كادميوم	3.06	0.029
Copper Cu	نحاس	2.76	0.012
Gold Au	ذهب	2.90	0.009
Iron (Soft) Fe	حديد	16.65	- 0.030
Mercury Hg	زئبق	- 8.81	- 0.033
Molybdenum Mo	موليبدينوم	5.89	0.043
Nickel Ni	نيكل	16.30	- 0.027
Platinum Pt	بلاتين	- 3.04	- 0.033
Silver Ag	فضة	3.34	0.008
Tin Sn	قصدير	0.23	- 0.001
Tungsten W	ولفرام	1.59	0.034
Zinc Zn	زنك	3.10	- 0.032
Constantan	سبيكة من النحاس والنيكل	- 37.76	- 0.079
	سبيكة من النحاس		
Manganin	والمنجيز والنيكل	1.37	0.001
	سبيكة من بلاتين 90% وروديوم 10%	7.00	0.0064
Pt(90%) - Rh(10%)			

والشكل (٤-٣٣) يوضح العلاقة بين P_{AB} و T . وإذا فرض أن $T = 0$ فإن :

$$\epsilon_{AB} = \alpha_{AB} T + \frac{1}{2} \beta_{AB} T^2 \quad \& \quad P_{AB} = \alpha_{AB} + \beta_{AB} T . \quad (٤-٩٤)$$

وتبلغ ϵ_{AB} قيمتها العظمى ϵ_m ، كما في شكل (٤-٣٣) ، عند الدرجة المحايدة T_N وعندها تكون قيمة P_{AB} تساوي الصفر أى أن :

$$P_{AB} = \alpha_{AB} + \beta_{AB} T_N = 0$$

$$\therefore \beta_{AB} = - \frac{\alpha_{AB}}{T_N}$$

$$\therefore T_N = - \frac{\alpha_{AB}}{\beta_{AB}} \quad \dots \dots \dots (٤-٩٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٩٤) عند هذه الدرجة يُحصل على :

$$\epsilon_m = \alpha_{AB} T_N + \frac{1}{2} \beta_{AB} T_N^2 = \frac{1}{2} \alpha_{AB} T_N$$

$$\therefore \alpha_{AB} = \frac{2\epsilon_m}{T_N} \quad \& \quad \beta_{AB} = - \frac{2\epsilon_m}{T_N^2} \quad \dots \quad (٤-٩٦)$$

وتنعلم ϵ_{AB} عند درجة الانقلاب T_I أي :

$$\epsilon_{AB} = \alpha_{AB} T_I + \frac{1}{2} \beta_{AB} T_I^2 = 0$$

$$\therefore \alpha_{AB} = - \frac{1}{2} \beta_{AB} T_I$$

$$\therefore T_I = - \frac{2\alpha_{AB}}{\beta_{AB}} = 2T_N \quad \dots \dots \dots (٤-٩٧)$$

ويتضح مما تقدم أن لكل ازدواج حراري مجال محدد لقياس درجة الحرارة يختلف باختلاف الفلزين المكونين للازدواج وكذلك درجة الإسناد. ويبين الجدول (٤-٣) بعض الازدواجات الحرارية المستعملة وأدنى وأقصى درجة حرارة يمكن قياسها وأدنى وأقصى جهد مقابل لذلك.

وإذا كان لدينا ازدواج حراري مكون من ثلاثة عناصر M, B, A كما في شكل (٤-٣٤) متصلة بحيث يكون طرفان منهم عند درجة حرارة T_1 والطرف الثالث درجة حرارته T_2 بحيث $T_2 > T_1$ وحسب المعادلة (٤-٨٤) يكون:

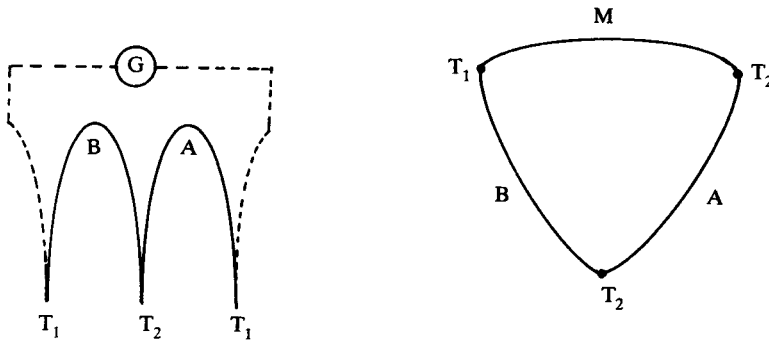
$$\begin{aligned} \epsilon_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_B dT + [\pi_{BM}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_1} \sigma_M dT \\ + [\pi_{MA}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A dT \quad \dots \dots \quad (٤-٩٨) \end{aligned}$$

ومن المعروف أن $\int_{T_1}^{T_2} \sigma_M dT = 0$ وبذلك تصبح المعادلة (٤-٩٨) كالتالي:

$$\epsilon_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} + [\pi_{BM} + \pi_{MA}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) dT \quad \dots \quad (٤-٩٩)$$

جدول (٤-٣): بعض أنواع الازدواجات الحرارية المستعملة

Thermo-couple الازدواج الحراري	T°C مجال قياس درجة الحرارة	in millivolts مليفولت mV	R.T. درجة حرارة الإسناد
(Au 0.2% Fe) / Cu	(- 273) → (- 193)	0.684 → (0.017)	- 196°C (77K)
Cu / Constantan	(- 200) → 600	(- 5.70) → 34.31	0°C
(Ni-chrome)/const.	(- 200) → 1000	(- 8.71) → 76.45	0°C
Fe / Const.	(- 200) → 900	(- 8.15) → 53.14	0°C
(Ni-chrome) / Ni	0 → 1300	0.00 → 52.40	0°C
(Pt 10% Rh) / Pt	0 → 1600	0.000 → 16.716	0°C
(Pt 13% Rh) / Pt	0 → 1700	0.000 → 20.090	0°C
(Pt 30% Rh) / (Pt 6% Rh)	0 → 1800	0.000 → 13.583	0°C



شكل (٤-٣٤): ازدواج حراري مكون من ثلاثة عناصر

وهذه المعادلة صحيحة لأي درجة حرارة فإذا افترض أنه في لحظة ما يكون $(T_1 = T_2)$ ففي هذه الحالة يصبح الحد الأخير من المعادلة مساويا للصفر وكذلك $(\mathcal{E}_{ABM} = 0)$ أي:

$$\pi_{AB} + \pi_{BM} + \pi_{MA} = 0$$

أو

$$\pi_{AB} = \pi_{AM} + \pi_{MB} \dots \dots \dots (٤-١٠٠)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-٩٩) يُحصل على:

$$\mathcal{E}_{ABM} = [\pi_{AB}]_{T_2} - [\pi_{AB}]_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) dT \dots (٤-١٠١)$$

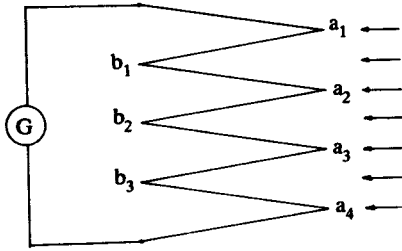
وهذه المعادلة تماثل تماما المعادلة (٤-٨٤) والخاصة بالازدواج الحراري للمعدنين B, A ومعنى ذلك أن:

$$\mathcal{E}_{ABM} = \mathcal{E}_{AB} \dots \dots \dots (٤-١٠٢)$$

ويستنتج من ذلك أن إضافة معدن وسيط M (intermediate metal) بحيث يقع بين معدنين آخرين A, B، وتكون نهايتا الوسيط واقعة عند الدرجة نفسها، لا يؤثر على القوة الدافعة الكهربائية للازدواج الحراري.

وهذه النتيجة مهمة جدا لأنها تمكننا من استعمال أي عدد من التوصيلات والأجهزة الكهرية مهما كان عددها مع الازدواج الحراري دون أن تؤثر على القوة الدافعة الكهرية بشرط أن تكون نهايات هذه التوصيلات والأجهزة الكهرية في درجة الحرارة نفسها.

وللحصول على حساسية أكبر لتغيرات صغيرة في درجات الحرارة الناتجة عن الإشعاعات الحرارية أو الإشعاعات ذات الأمواج الطويلة (long wavelength radiations) تُوصَل مجموعة من الازدواجات «كل مزدوج مكون من فلزي الأنثيمون والبيزموث» معا على التوالي لتكون ما يسمى بعمود الحرارة أو ثرموبيل (thermopile) حيث تغطي الوصلات a_1, a_2, a_3, a_4 بطبقة من السناج



وتعرض للإشعاع المراد قياس درجة حرارته بينما تعزل الوصلات b_1, b_2, b_3 لتبقى باردة. وتوصل نهايتا الثرموبيل بجلفانومتر حساس كما في شكل (٤-٣٥).

شكل (٤-٣٥): مجموعة من الازدواجات كل ازدواج مكون من فلزي الأنثيمون والبيزموث متصلة على التوالي «عمود الحرارة، ثرموبيل».

ويراعى أن تكون مقاومة الثرموبيل مساوية لمقاومة الجلفانومتر لنحصل على أكبر قدرة وبالتالي على أكبر تيار كهروحراري والذي تتناسب قيمته مع شدة الإشعاع الحراري المراد قياسه. وبواسطة هذه المجموعة من الازدواجات يمكن قياس تغير في درجة الحرارة قدره 0.001 بسهولة.

مثال (١٨ - ٤)

ازدواج حراري من مادتي الحديد والنحاس وضع أحد طرفيه عند درجة الصفر المئوي. احسب نقطة التعادل (T_N) ونقطة الانقلاب (T_I)، والقوة الدافعة الكهرية عندما تكون درجة حرارة الطرف الثاني تساوي 200°C مستعملا الجدول (٤-٢).

الحل

$$\alpha_{\text{Fe-Cu}} = \alpha_{\text{Fe-Pb}} - \alpha_{\text{Cu-Pd}} = 16.7 - 2.71 = 14.0 \mu\text{V/deg}^\circ\text{C}$$

$$\beta_{\text{Fe-Cu}} = \beta_{\text{Fe-Pb}} - \beta_{\text{Cu-Pd}} = -0.0297 - 0.0079 = -0.0376 \mu\text{V/deg}^\circ\text{C}$$

$$\therefore T_N = -\frac{14.0}{-0.0376} = 372^\circ\text{C} \quad \&$$

$$T_1 = 2T_N = 2 \times 372 = 744^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon_{\text{Fe-Cu}} &= \alpha_{\text{Fe-Cu}} (T - T_0) + \frac{1}{2} \beta_{\text{Fe-Cu}} (T^2 - T_0^2) \\ &= 14.0 (200 - 0) - \frac{1}{2} \times 0.0376 [(200)^2 - 0] = 2.05 \text{ mV} \end{aligned}$$

وحيث إن قيمة ε_{AB} موجبه فهذا يعني أن اتجاه التيار من الحديد إلى النحاس عند الوصلة الساخنة .

مثال (٤-١٩)

احسب معامل بلتير ومعامل طومسون للازدواج الحراري من مادتي الحديد والنحاس عندما يكون طرفا الاتصال عند 0°C , 200°C .

الحل

في حالة درجات الحرارة بالدرجات المثوية تصبح العلاقة (٤-٨٧) بالشكل التالي:

$$\therefore \pi_{\text{Fe-Cu}} = (T + 273) \frac{d\varepsilon_{\text{Fe-Cu}}}{dT} = (T + 273) (\alpha_{\text{Fe-Cu}} + \beta_{\text{Fe-Cu}} T)$$

$$\therefore (\pi_{\text{Fe-Cu}})_{200^\circ\text{C}} = (200 + 273) (14.0 - 0.0376 \times 200) = 3070 \mu\text{V}$$

$$\therefore (\pi_{\text{Fe-Cu}})_{0^\circ\text{C}} = (0 + 273) (14.0 - 0.0376 \times 0) = 3820 \mu\text{V}$$

أما معامل طومسون فيمكن حسابه كالتالي :

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dT^2} = \frac{d}{dT} (a + bT) = b$$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_{Fe} - \sigma_{Cu}) dT = \int_{T_1}^{T_2} -T \frac{d^2\mathcal{E}_{Fe-Cu}}{dT^2} dT$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} -bT dT = -\frac{1}{2} b(T_1^2 - T_2^2)$$

$$= -\frac{0.0376}{2} [(273 + 0)^2 - (273 + 200)^2] = 2800 \mu V$$

وبذلك تكون المحصلة «قوة دافعة سيلك»

$$\mathcal{E}_{Fe-Cu} = 3070 - 3820 + 2800 = 2050 \mu V$$

وهذه النتيجة متفقة مع القيمة التي حصل عليها في المثال السابق.

مثال (٤-٢٠)

احسب π_{Bi-Ag} وكذلك $\sigma_{Bi}-\sigma_{Ag}$ لازدواج حراري لمادتي البزموت والفضة عند درجة حرارة الصفر المئوي مستعملا الجدول (٤-٢)

الحل

$$\mathcal{E}_{Pb-Bi} = [-74.42 T + \frac{1}{2} (0.032 T^2)]$$

$$\mathcal{E}_{Pb-Ag} = [3.34 T + \frac{1}{2} (0.008 T^2)]$$

$$\therefore \mathcal{E}_{Bi-Ag} = \mathcal{E}_{Bi-Pb} - \mathcal{E}_{Ag-Pb} = \mathcal{E}_{Pb-Ag} - \mathcal{E}_{Pb-Bi}$$

$$\therefore \mathcal{E}_{Bi-Ag} = [77.76 T - \frac{1}{2} (0.024 T^2)] \mu V$$

وحسب المعادلة (٤-٩٣) يكون :

$$\frac{d\varepsilon_{\text{Bi-Ag}}}{dT} = 77.76 - 0.024 T$$

$$\begin{aligned} \therefore [\pi_{\text{Bi-Ag}}]_{T=273} &= 273 \left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right)_{T=0} = (273 \times 77.76) \mu\text{V} \\ &= 2.12 \cdot 10^{-2} \text{V} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{Bi}} - \sigma_{\text{Ag}} = -(\sigma_{\text{Pb}} - \sigma_{\text{Bi}}) + (\sigma_{\text{Pb}} - \sigma_{\text{Ag}})$$

$$= T \left[\frac{d^2 \varepsilon_{\text{Pb-Cu}}}{dT^2} - \frac{d^2 \varepsilon_{\text{Pb-Ag}}}{dT^2} \right]$$

$$\therefore \sigma_{\text{Bi}} - \sigma_{\text{Ag}} = 273 (0.032 - 0.008) = 6.6 \mu\text{V/deg}^\circ\text{C}$$

مثال (٤-٢١)

ازدواج حراري معين، وضع أحد طرفيه عند درجة الصفر المئوي ويعبر عن القوة الدافعة الكهربائية لهذا الازدواج بالمعادلة

$$\varepsilon = [87.276 T - 14.527 \{1 - \exp(-0.00253 T)\}] \mu\text{V}$$

بين أن الفرق بين معاملي طومسون ثابت في نطاق صغير لدرجة الحرارة قريب من درجة الحرارة ١٢٢ درجة مئوية ثم احسب معامل بلتير عند درجة حرارة الصفر المئوي .

الحل

$$\sigma_A - \sigma_B = -(273 + T) \frac{d^2 \varepsilon}{dT^2}$$

حيث إن :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dT^2} = [14.527 (0.00253)^2 \exp(-0.00253 T)]$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -(273 + T) [14.527 (0.00253)^2 \exp(-0.00253 T)]$$

$$\therefore \sigma_A - \sigma_B = -(273 + T) C \exp(-0.00253 T) \text{ say}$$

$$\therefore \frac{d}{dT} (\sigma_A - \sigma_B) = -C \exp(-0.00253 T) [1 - 0.00253 (273 + T)]$$

وهذه المعادلة تساوي الصفر، تناظر القيمة الثابتة لـ $(\sigma_A - \sigma_B)$ إذا كان :

$$1 - (273 + T) (0.00253) = 0 \quad \therefore T = 122^\circ\text{C}$$

$$[\pi]_{T=0} = \left\{ (273 + T) \frac{d\varepsilon}{dT} \right\} = 273 [87.276 - 14.527 \times 0.00253 \exp(0)]$$

$$\therefore [\pi]_{T=0} = 273 [87.28 - 36.76] = 1.38 \times 10^{-2} \text{V}$$

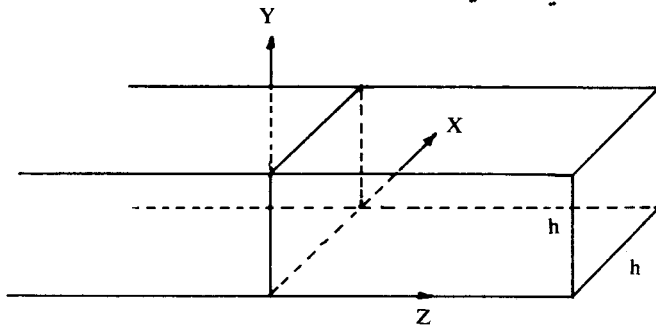
وقد ورد هذا المثال على أساس أنه قد تكون هناك صيغة أخرى تربط العلاقة بين درجة الحرارة T والقوة الدافعة الحرارية لبعض الازدواجات الحرارية الأخرى غير التي وردت في هذا الفصل.

(١٥-٤) مسائل

١ - قضيب من مادة شبه موصلة متبلورة مثل مادة الجرمانيوم منتظم الشكل كما في الشكل التالي مقطعه العرضي رباعي الشكل طول ضلعه 0.1 سم . نتيجة للخواص شبه الموصلة لهذه المادة فإن كثافة التيار J ليست منتظمة عبر مقطعه العرضي للمادة ولكنه يختلف من نقطة إلى أخرى حسب المعادلة :

$$J = J_0 \left(\sin \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} \right) \vec{i}_z$$

احسب التيار الكلي المار في المادة.



٢ - كثافة النحاس تساوي 9.0 جم/سم^٣ وللمادة إلكترون واحد موصل لكل ذرة فإذا مر تيار قدره 50 أمبيراً في سلك مقطعه الدائري منتظم قطره 0.1 سم .
ما هي كثافة التيار وكذلك السرعة المتوسطة للإلكترونات؟

٣ - المقاومة النوعية لمادة النحاس تساوي 1.7×10^{-8} أوم - متر عند درجة حرارة 20 درجة مئوية .

ما هي مقاومة سلك طوله 5 متر وكان مقطعه الدائري منتظم قطره 0.1 سم؟

٤ - كثافة التيار I لسلك طويل مقطعه الدائري منتظم ونصف قطره R ، تتغير مع المسافة من مركز السلك حسب العلاقة $J = \lambda r$ حيث λ ثابت التناسب .
برهن أن التيار المار خلال السلك هو $I = 2\pi\lambda R^3/3$

٥ - إذا كان التيار المار خلال سلك يتغير مع الزمن t حسب المعادلة التالية :

$$I = 4 + 2t^2$$

احسب الشحنة المارة عبر الموصل خلال الفترة الزمنية الواقعة بين $t=10s$ و $t=55s$ وكذلك $t=0$ و $t=20s$.

٦ - إذا فرض أن التيار المار خلال موصل يتغير مع الزمن t تبعا للمعادلة :

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

حيث τ مقدار ثابت ووحدته وحدة الزمن ، I_0 قيمة التيار الكهربى عندما تكون $t=0$. احسب الشحنة الكهربائية المارة خلال نقطة معينة في الفترات الزمنية التالية :

$$a - t = 0 \text{ و } t = \tau$$

$$b - t = \tau \text{ و } t = 10\tau$$

$$c - t = 0 \text{ و } t = \infty$$

٧ - قضيب حديدي مساحة مقطعه 30 سم^٢ فإذا كانت المقاومة النوعية لمادة

الحديد (steel) 6.0×10^{-7} أوم - متر.

احسب مقاومة قضيب طوله 6 كيلومتر.

٨ - قضيب من الفضة طوله 12 مترا يحتوي على 5.86×10^{28} electrons/m³ فإذا كان التيار المار في القضيب يساوي 10 أمبير ما هي سرعة الانسياب (drift velocity) للإلكترونات إذا كان فرق الجهد بين طرفيه 2V.

٩ - كثافة مادة الألومنيوم تساوي 2.7 جم/سم³ والكتلة الذرية له 27 جم/جزء. هذه المادة ثلاثة إلكترونات موصلة لكل ذرة.

احسب عدد إلكترونات التوصيل لكل سم³. وإذا كان التيار المار في سلك منتظم مساحة مقطعه 1 سم² هو 10^{-3} أمبير ما هي سرعة الانسياب (drift) للإلكترونات؟

١٠ - سطح موصل مساحة مقطعه 1 مم² يخترقه تيار شدته 10 أمبير والمطلوب حساب سرعة انتقال الشحنات الكهربائية فيه إذا علمت أن عدد الشحنات الحرة المتنقلة في وحدة الحجم هو 10^{27} .

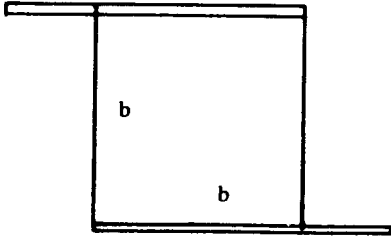
١١ - سلك منتظم المقطع طوله 5 أمتار ومقاومته 2 أوم فإذا كانت المقاومة النوعية له 1.6×10^{-6} أوم - متر ما هي مساحة المقطع؟

١٢ - احسب مقاومة متوازي مستطيلات من النحاس طوله 20 سم و سطح مقطعه 2 سم² وناقليته «موصليته» تساوي $(\Omega \cdot m)^{-1} 0.59 \times 10^{+8}$.

١٣ - قضيب من الكربون ذو مقطع دائري منتظم نصف قطره 1.5mm. سلط بين طرفيه جهد كهربى قيمته 15V فكان التيار المار فيه 5×10^{-3} A احسب مقاومته وطوله.

١٤ - أسطوانة مجوفة نصف قطرها الداخلي r_A والخارجي r_B وطولها L ومقاومتها النوعية

٩. وصل طرفيها بمصدر جهد كهربى فمر بها تيار كهربى مواز لمحورها. احسب قيمة مقاومة الأسطوانة بدلالة أبعادها ومقاومتها النوعية. وإذا كان $\rho = 3.5 \times 10^5 \Omega \cdot m$ و $r_B = 12mm$, $L = 10cm$, $r_A = 6mm$ فما قيمة المقاومة.



١٥ - صفيحة رقيقة مربعة الشكل من مادة متجانسة لحمت من جانبيها بموصلين، مقاومتها منخفضة. كما يظهر في الشكل المجاور. عندما يكون طول ضلع الصفيحة 10 سم تكون مقاومتها واحد أوم والمطلوب حساب مقاومة هذه الصفيحة إذا أصبح طول ضلعها 20 سم.

١٦ - إذا كانت المقاومة النوعية وكذلك المعامل الحرارى لمادة النحاس والفضة عند درجة حرارة 20 درجة مئوية هي :

$$\rho_{cu} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\alpha_{cu} = 3.9 \times 10^{-3} C^{-1}$$

$$\rho_{Ag} = 1.6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\alpha_{Ag} = 3.8 \times 10^{-3} C^{-1}$$

١ - احسب درجة حرارة الفضة إذا كانت مقاومته النوعية تساوي مقاومة النحاس النوعية.

ب - وإذا كان قضيب نحاسي مقاومته 12.00 أوم عند درجة حرارة 40 درجة مئوية. ما هي قيمة مقاومته عند درجة حرارة 100 درجة مئوية مع إهمال أي تمدد طولي للقضيب؟

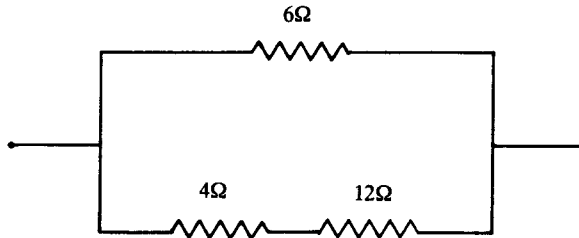
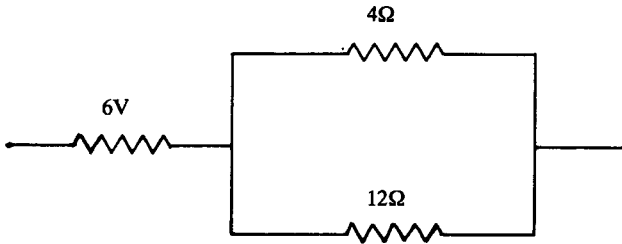
١٧ - مقاومة سلك من البلاتين 1Ω عند درجة حرارة $20^\circ C$ ، غمر السلك في سائل النيتروجين الذي درجة حرارته $77K$ ($-196^\circ C$) ماذا تكون قيمة المقاومة عند هذه الدرجة، علما بأن المعامل الحرارى للبلاتين هو: $\alpha = 3.5 \times 10^{-3} / ^\circ C$

١٨ - مصباح قدرته 100 وات وصل بجهد قدره 110 فولت .
احسب التيار المار في الفتيلة وكذلك مقاومة الفتيلة .

١٩ - مجفف كهربى قدرته 5KW فإذا وصل بمصدر كهربى جهده 220V احسب :

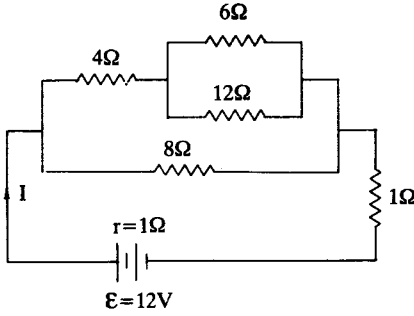
- ١ - التيار الكهربى المار فى المجفف ومقاومته .
- ب - الطاقة الكهربائية المستنفدة مقدرة بالجول والـ KW.hr إذا استعمل المجفف لمدة عشر ساعات .
- ج - كمية الحرارة الناتجة عن هذا الاستعمال .
- د - تكاليف هذا الاستعمال إذا فرض أن ثمن الـ KW.hr عشر هللات .

٢٠ - فى الدائرتين التاليتين احسب المقاومة الكلية لكل دائرة :



٢١ - لدينا الدائرة المبينة في الشكل

المجاور:



١ - احسب التيار المار في البطارية.

ب - احسب التيار المار في كل مقاومة.

ج - احسب القدرة «الاستطاعة» الضائعة في كل مقاومة.

د - احسب الاستطاعة المتولدة عن القوى الكيميائية داخل المولد.

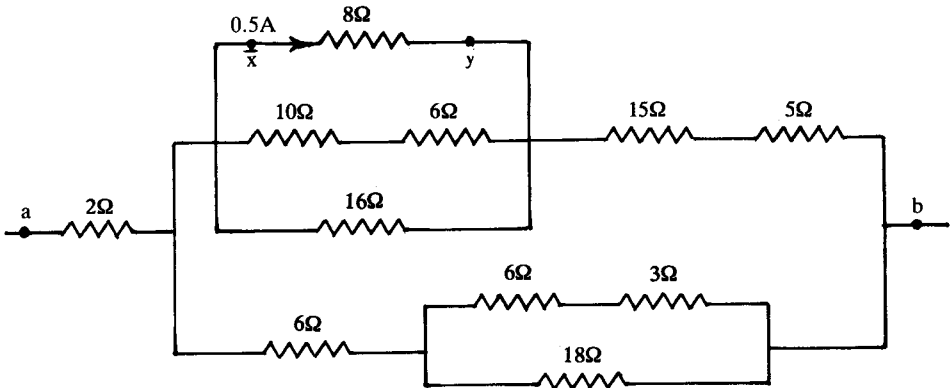
هـ - احسب فرق الجهد بين قطبي المولد.

٢٢ - احسب في الدائرة التالية ما يلي:

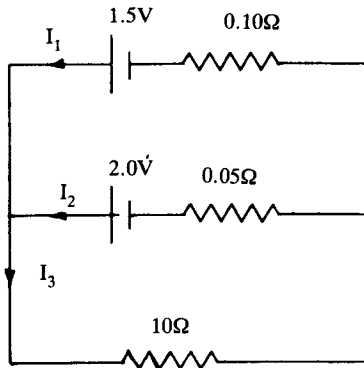
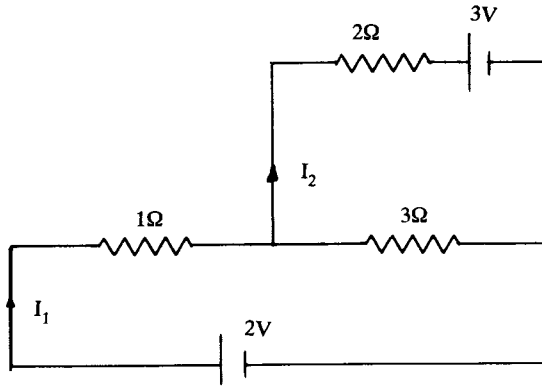
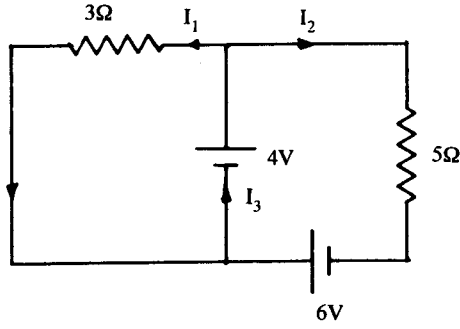
١ - المقاومة المكافئة. ب - فرق الجهد بين طرفي كل مقاومة إذا كان لتيار المار خلال المقاومة الواقعة بين x و y يساوي 0.5A.

ج - فرق الجهد بين لنقطتين a و b.

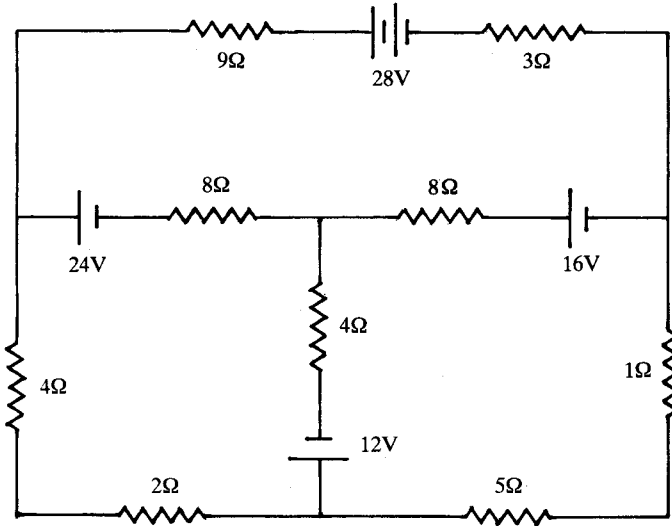
د - إذا كان مصدر الجهد بين النقطتين a و b بطارية مقاومتها الداخلية 0.5Ω فما قيمة القوة الدافعة الكهربائية للبطارية.



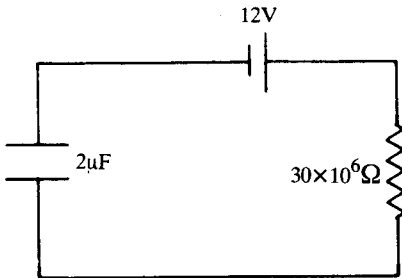
٢٣ - احسب I_1 ، I_2 ، I_3 في الدوائر التالية :



٢٤ - احسب بطريقتين مختلفتين تيارات أفرع الدائرة الكهربائية التالية:

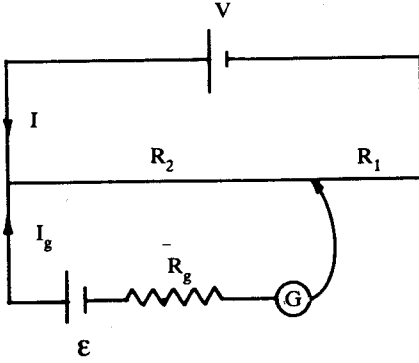


٢٥ - مكثف سعته C شحنت حتى وصل جهده V ثم وصل طرفاه عند $t = 0$ بمقاومة قدرها R فكانت قيمة الشحنة على المكثف هي $q = q_0 e^{-t/RC}$. احسب القدرة الكلية (total power) المبذورة في المقاومة وبرهن أنها تساوي القدرة الأولى المخزونة بواسطة المكثف.



٢٦ - في الدائرة التالية احسب:

- ١ - ثابت الزمن.
- ب - ما هي قيمة شحنة المكثف إذا بلغت قيمتها نصف القيمة العظمى؟



٢٧ - يراد قياس ق. د. ك مجهولة بمقياس الجهد فتوصلت الدائرة المبينة بالشكل جانبا. برهن أنه عندما تكون الدائرة غير متزنة تكون شدة التيار المارة خلال الجلفانومتر هي :

$$I_g = \frac{\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V - \varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2}$$

٢٨ - ازدواج حراري من مادتي النحاس وكنستنتان. حفظت إحدى وصلتيه في 20 درجة مئوية.

احسب نقطة التعادل T_N ونقطة الانقلاب T_I . وإذا حفظت الوصلة الثانية في درجة 300 درجة مئوية فاحسب القوة الدافعة الكهروحرارية المتولدة. هل تظل القوة نفسها كما هي لو حفظت إحدى الوصلتين في 120° والأخرى في 400 درجة مئوية، مستعملا الجدول (٤-١).

٢٩ - وصلة من مادتي البلاتين Pt وسيكة (Pt90 - Rh10) احسب $\pi_{Pt, Pt90 - Rh10}$ وكذلك $\sigma_{Pt} - \sigma_{Pt90 - Rh10}$ عند درجة الصفر المئوي و 100 و 1000 درجة مئوية.

٣٠ - إذا كان لدينا ازدواج حراري من مادتي Pt و (Pt90 - Rh10) احسب نقطة التعادل T_N ونقطة الانقلاب مستعملا الجدول (٤-١). وإذا حفظت إحدى وصلتيه عند درجة الصفر المئوي فما هي قيمة القوة الدافعة الكهروحرارية عند وضع الوصلة الثانية في درجات الحرارة المختلفة التالية 100 درجة مئوية، 200 درجة مئوية، 500 درجة مئوية، 1000 درجة مئوية.

٣١ - وصلة من مادتي الأنثيمون Sb والبزموت Bi.

١ - احسب القوة الدافعة البلتيرية عندما تكون درجة حرارة الوصلة تساوي 20 درجة مئوية.

ب - إذا مر تيار شدته 20 أمبير خلال هذه الوصلة احسب معدل تحول الطاقة الحرارية إلى طاقة كهربائية وبالعكس . وما هو اتجاه التيار عند هذه الوصلة حتى يحدث التبريد .

٣٢ - إذا كانت القوة الدافعة الكهروحرارية لازدواج حراري تعطى بالمعادلة :

$$\varepsilon = \alpha \theta + \frac{1}{2} \beta \theta^2 \quad \dots (٤-٨٦)$$

حيث $\theta = T - T_0$ درجة حرارة الإسناد و T درجة حرارة متغيرة وكانت العلاقة بين θ و ε يحددها الجدول :

$\theta^\circ\text{C}$	10	30	60	100
$\varepsilon(\mu\text{V})$	98	282	528	800

فاحسب β و α .



المجالات المغناطيسية للتيار الكهربائي

Magnetic Fields of Electric Current

● مقدمة ● قانون بيوت وسافارت ● التفرق الاتجاهي
● للحث المغناطيسي ● قانون أمبير الدوائري ● تطبيقات
● حساب المجال المغناطيسي ● الجهد المغناطيسي ● القوة بين
● دائرتين كاملتين ● القوة وعزم الازدواج على دائرة كهربية
● تحمل تيارا ● جلفانومترا الظل وهيلمهولتز ● الجسيمات
● المشحونة في المجالات المغناطيسية ● مسائل .

(١-٥) مقدمة

Introduction

بالرغم من أن نظريات المجال المغناطيسي لم تتطور حتى نهاية القرن الثامن عشر وخلال القرن التاسع عشر إلا أن الظاهرة المغناطيسية اكتشفت منذ أمد بعيد حيث اكتشف علماء الاغريق الحجر المغناطيسي (lodestones) أو ما يسمى بالمغناطيس الطبيعي (natural magnet) في مدينة مغنيسيا في آسيا الصغرى والذي كان يتميز بجذب القطع الصغيرة من الحديد الصلب إليه . وأول دراسة للخواص المغناطيسية للمواد تمت بذلك قضيب من الحديد بقطعة من المغناطيس الطبيعي حيث اكتسب القضيب الخاصية المغناطيسية وسمي المغناطيس في هذه الحالة بالمغناطيس الصناعي الدائم .

كانت الظاهرة المغناطيسية تدرس على أنها مستقلة عن التأثيرات الكهربائية وأنها من الخواص التي تتمتع بها بعض المواد كالحديد . وقد استطاع العالم الدانماركي هانز

أورستد (Hans C. Oersted) عام ١٨١٩م أن يلاحظ علاقة بين الكهرباء والمغناطيسية بعد أن اكتشف أن الإبرة المغناطيسية (magnetic needle) تنحرف إذا ما اقتربت من سلك يمر به تيار كهربائي.

بعد هذا الاكتشاف تم معرفة أن المجالات المغناطيسية تحدث نتيجة لسريان التيار الكهربائي حتى بالنسبة للمغناطيس الدائم لأن مغناطيسيته نتجت عن تيارات صغيرة سببها حركة داخل ذرات المادة، وسيشرح هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل السابع.

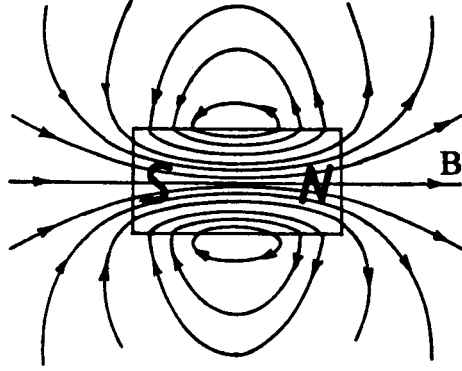
يمكن فهم الخواص المغناطيسية بنظرية المجال الكهربائي التي درست في الفصول السابقة حيث تعد المنطقة التي تحيط بالمغناطيس أو الأسلاك أو الدوائر التي تمر فيها تيارات كهربائية منطقة مجال مغناطيسي (magnetic field) ويمكن تخطيط المجال المغناطيسي كما في شكل (٥-١) بواسطة خطوط تأثير مغناطيسي (induction lines) تشبه خطوط القوى الكهربائية ويدل اتجاه المماس لخط التأثير المغناطيسي على اتجاه المجال عند نقطة التماس - كما تتخذ كثافة خطوط التأثير المغناطيسي دلالة على شدة المجال H (magnetic field intensity) أو كثافة الفيض المغناطيسي (الحث المغناطيسي) B (magnetic induction) تسمى عدد خطوط الفيض التي تنفذ من خلال سطح dS بالتدفق المغناطيسي Φ (magnetic flux) وهو العدد الكلي لخطوط التأثير (القوى) التي تخترق سطحاً ما أي أن:

$$\Phi = \int B \cdot \cos \theta \, dS = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \dots \dots (٥-١١)$$

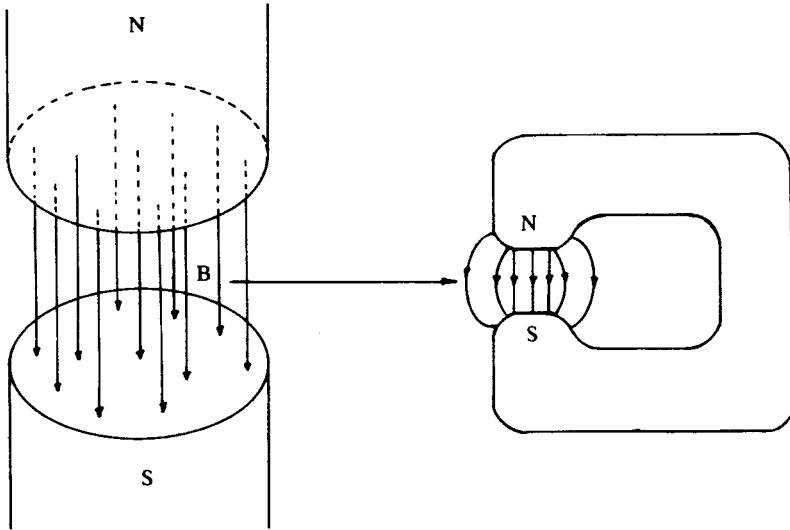
حيث θ هي الزاوية بين العمودي على dS وخطوط القوى، وإذا كان الحث المغناطيسي B منتظماً وعمودياً على سطح مساحته S فإن:

$$\Phi = B \cdot S \quad \dots (٥-١٢)$$

ويكون الحث المغناطيسي منتظماً إذا ثني المغناطيس الدائم ليصبح على الشكل (٥-٢) بحيث يكون القطبان N و S متقابلين.



شكل (٥-١): خطوط التأثير (القوى) للمغناطيسية لمغناطيس دائم (permanent magnet).



شكل (٥-٢): ثني مغناطيس دائم حتى تقابل قطبه الشمالي N مع قطبه الجنوبي S ولذلك يكون المجال المغناطيسي بينها منتظما.

والعلاقة بين H و B في الفراغ تحدد بالمعادلة التالية :

$$B = \mu_0 H \quad \dots (٥-٢)$$

حيث μ_0 نفاذية الفراغ Permeability of free space.

وحدات هذه المعاملات في النظامين العالمي (S.I) والجاوسي (C.G.S) هي :

الكمية	النظام العالمي (S.I)	النظام الجاوسي (C.G.S)
B	ويبر/متر ^٢ = تسلا	جاسوس
H	أمبير/متر	آب أمبير/سم = أورستد
Φ	ويبر	ماكسويل
μ_0	ويبر/أمبير متر	جاسوس/أورستد
	$Wb/m^2 = T$	Gauss
	A/m	Oersted
	Wb	Maxwell
	$Wb/A \cdot m$	Gauss/Oersted

حيث ويبر/متر^٢ = ١٠^٩ جاسوس .

أو ويبر/١٠ سم^٢ = ١٠^٩ جاسوس ومنه فإن :

ويبر = ١٠^٩ جاسوس . سم^٢

وكذلك ١٠ أورستد = ١ آب أمبير/٤ π . سم ومنه فإن :

$\therefore$ ١٠ أورستد = ٧٩.٦ أمبير/متر

ويوضح الملحق (١) العلاقة بين النظامين العالمي (S.I) والجاوسي (C.G.S) لوحدة بعض الكميات الفيزيائية physical quantities.

(٥-٢) قانون بيوت وسافارت

The Biot - Savart Law

إذا كان dl تمثل عنصرا طوليا متناهيا في الصغر (infinitesimal) من سلك يحمل تيارا كهربيا قدره I فإن عنصر الحث المغناطيسي dB عند النقطة P ، كما في شكل (٥-٣) التي تبعد مسافة r من dl ، يتناسب تناسبا طرديا مع التيار I وعنصر الطول dl و $\sin\theta$ وعكسيا مع مربع المسافة الواقعة بين dl والنقطة P التي يراد قياس الحث المغناطيسي عندها أي أن :

$$dB \propto \frac{Id \sin \theta}{r^2}$$

أو

$$dB = K_m \frac{Id \sin \theta}{r^2} = K_m \frac{Id \vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \dots\dots (٥-٣)$$

حيث تمثل θ الزاوية بين dl و r .

وقد استنتجت هذه المعادلة نتيجة للتجارب والقياسات العملية التي قام بها العالمان بيوت Jean Baptiste Biot وسافارت Felix Savart عام ١٨٢٠م ولذلك سميت باسميهما، قانون بيوت وسافارت، أما K_m فهو ثابت التناسب وتعتمد قيمته على اختيار وحدات القياس وقيمته في النظام العالمي (S.I.) هو:

$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m} \dots\dots\dots (٥-٤)$$

$$\therefore \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

ويُحصل من المعادلتين (٥-٣) و (٥-٤) على:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id \vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \dots\dots\dots (٥-٥)$$

وتكتب هذه المعادلة في النظام الجاوسي بالصورة التالية:

$$\vec{dB} = \frac{1}{c} \frac{Id \vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

c سرعة الضوء (انظر الملحق ا)

ولكي يحسب الحث المغناطيسي B الكلي لدائرة مغلقة C عند نقطة P يؤخذ تكامل المقدار dB لكامل الدائرة المغلقة، كما في الشكل (٥-٣).

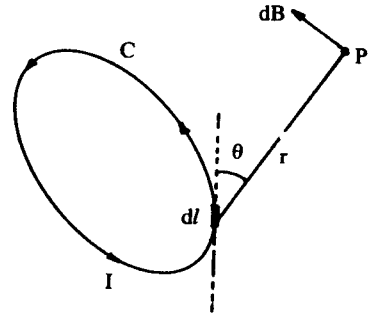
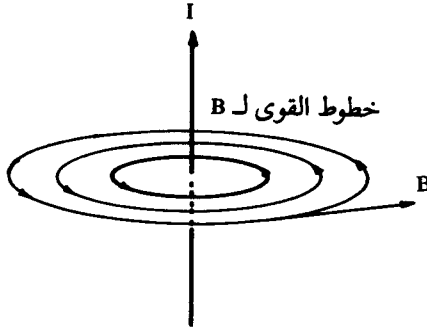
$$\therefore B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id \vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \dots\dots\dots (٥-٦)$$

ويمكن التعبير عن الحث المغناطيسي B بدلالة كثافة التيار J. فحسب المعادلة (٤-٤) يكون:

$$Idl = JSdl = JdV \quad \dots (٥-٧)$$

حيث S مساحة مقطع السلك و dV الحجم . وبالتعويض في المعادلة (٥-٦) يُحصل على :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad \dots (٥-٨)$$

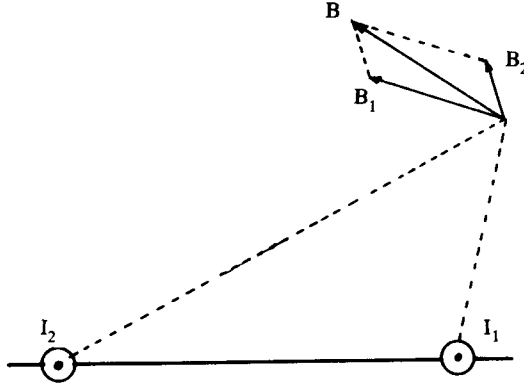


شكل (٥-٤) : موصل مستقيم يمر به تيار شدته I فينشأ عنه مجال مغناطيسي تكون خطوط القوى له عبارة عن دوائر مغلقة مركزها الموصل .

شكل (٥-٣) : تابع لقانون بيوت وسافارت .

وبدراسة المجال المغناطيسي حول موصل مستقيم يمر به تيار كهربائي I بواسطة إبرة مغناطيسية صغيرة نجد أن خطوط القوى المحيطة بالموصل عبارة عن دوائر مغلقة مركزها الموصل وفي مستوى عمودي عليه واتجاهها يعين بقاعدة اليد اليمنى ، بحيث يشير الإبهام إلى اتجاه التيار ويشير الأصابع الأخرى حول السلك إلى اتجاه خطوط القوى المغناطيسية ، كما في شكل (٥-٤) ، بينما يمثل المماس عند أي نقطة على خط القوة اتجاه الحث المغناطيسي B .

إذا كان هناك مجالات مغناطيسية ناتجة عن مصادر تيارية (current sources) فإنه يمكن جمعها جميعاً باتجاهياً للحصول على محصلة المجالات ، كما حصل ذلك بالنسبة للمجال الكهربائي الناتج عن شحنات مختلفة كما ورد في البند (٤-١) .



شكل (٥-٥): مستقيمان موصلان يمر في أحدهما تيار قيمته I_1 وفي الآخر I_2 فنحصل على مجالين مغناطيسيين حثهما B_1 ، B_2 ومحصلتها B بحيث يكون $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

ولذلك إذا كان لدينا دوائر مغلقة تمر بها التيارات $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ بحيث تعطى كل دائرة مجالا مغناطيسيا قيمها على التوالي $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ فإن محصلة هذه المجالات، كما في شكل (٥-٥)، هي:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \quad \dots (٥-٩)$$

وحسب المعادلة (٥-٦) فإن:

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \int \frac{d\vec{l}_i \times \vec{r}_i}{r_i^3} \quad \dots \dots \dots (٥-١٠)$$

(٣-٥) التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي B

Divergence of Magnetic Induction B

يشكل الحث المغناطيسي B مجالا متجهيا (vector field) له تفرق اتجاهي يمكن حسابه كالتالي:

حسب المعادلة (٢-١٨)، ملحق ٢، يمكن كتابة المعادلة (٥-٦) بالصورة

التالية:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int -Id \vec{l} \times \text{grad} (1/r)$$

وباستخدام المعادلة (٢-٢٧)، ملحق ٢، يُحصل على:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int [I \text{curl} (dl/r) - I \text{curl} (dl)] \dots (٥-١١)$$

الحد الثاني يساوي الصفر لأن dl دالة لـ r ولا تعتمد على إحداثيات الحث المغناطيسي وبذلك تصبح المعادلة (٥-١١) كالتالي:

$$\vec{B} = \text{curl} \left(\oint \frac{\mu_0 Id \vec{l}}{4\pi r} \right) \dots (٥-١٢)$$

وُحُصِّل من المعادلتين (٥-٧) و(٥-١٢) على:

$$\vec{B} = \text{curl} \left(\oint_V \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi r} dV \right) \dots (٥-١٣)$$

وبذلك فإن التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي يساوي:

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \text{curl} \left(\int_V \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi r} dV \right)$$

وحسب المعادلة (٢-٢٣) في الملحق ٢، فإن $\text{div} \text{curl}$ دائماً يساوي الصفر.

$$\therefore \text{div} \vec{B} = 0 \dots (٥-١٤)$$

هذه المعادلة مهمة وهي إحدى معادلات ماكسويل (Maxwell's equation) وبمقارنتها بالمعادلة (١-٦١)، وهي $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ الخاصة بالمجال الكهربائي E ، نجد أن ρ تمثل كثافة الشحنة الكهربائية لشحنة منفردة سواء كانت موجبة أو سالبة وهذا الوضع لا يمكن حدوثه في المغناطيسية لأنه لا يمكن الحصول على وحدات منفردة لشحنة مغناطيسية تماثل الشحنة الكهربائية. مثل هذه الشحنات المغناطيسية تسمى بالمغناطيس أحادي

القطب (magnetic monopoles). والأبحاث التجريبية لم تنجح بعد في إثبات وجوده ولذلك ستبقى $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ما لم يتم اكتشاف مغناطيسي أحادي القطب.

يستنتج من المعادلتين (٥-١)، (٥-١٤) والمعادلة (٤-٢) الملحق ٢، أن الفيض المغناطيسي خلال أي سطح مقفل "S" يساوي الصفر أي أن:

$$\Phi = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \dots\dots\dots (٥-١٥)$$

أي أن عدد خطوط القوى المغناطيسية الداخلة إلى السطح S يساوي عدد الخطوط الخارجة منه. وتناظر المعادلة (٥-١٥) معادلة جاوس (١-١٥١) ولذلك تسمى باسمه، وهي تمثل المعادلة الثانية من معادلات ماكسويل.

(٥-٤) قانون أمبير الدائري

Ampere's Circuital Law

ينص هذا القانون على أن التكامل الخطي (line integral) للحث المغناطيسي حول مسار مغلق اختياري يساوي مجموع التيارات داخل هذا المسار مضروباً في معامل نفاذية الفراغ μ_0 أي أن:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cos \theta \, dl = \mu_0 \Sigma I \dots\dots\dots (٥-١٦)$$

وصيغة هذه المعادلة في النظام الجاوسي هي:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \Sigma I$$

حيث dl عنصر الطول من المسار المغلق C و θ الزاوية بين dl و $\mathbf{B}$.

ولإثبات هذا القانون تتبع مايلي:

نفرض أن الحث المغناطيسي $\mathbf{B}$ ناتج عن تيار I مار في دائرة مغلقة C' ، كما في شكل (٥-٦)، وحسب المعادلة (٥-٦) فإن قيمة $\mathbf{B}$ هي:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

ويضرب طرفي المعادلة في $d\vec{l}$ يُحصل على :

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{(d\vec{l}' \times \vec{r}) \cdot d\vec{l}}{r^3} \dots (٥-١٧)$$

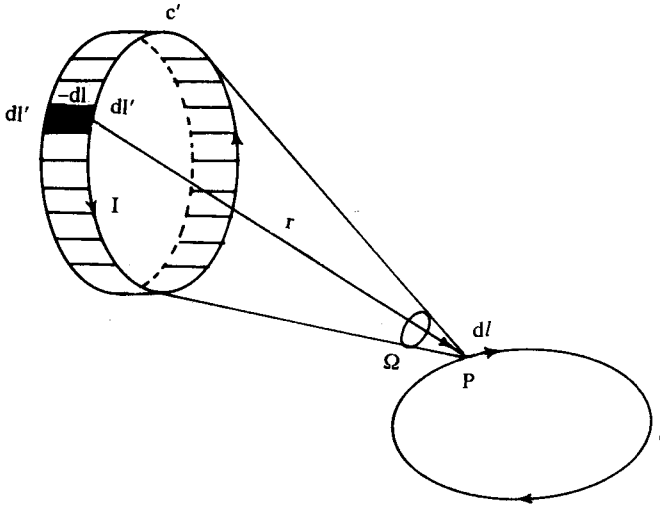
حيث $d\vec{l}$ عنصر من مسار اختياري C كما في الشكل (٥-٦). وبإجراء التكامل حول المسار C ، وإجراء التبديل بين $d\vec{l}$ و $d\vec{l}'$ و $\vec{r}$ ، حسب المعادلة (٢-١٦) ملحق ٢، يُحصل على :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\vec{l}' \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} \dots (٥-١٨)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} \dots (٥-١٩)$$

وحسب ما ورد في البند (٣-٢) ملحق ٢ فإن $d\vec{l}' \times d\vec{l}$ تمثل مساحة متوازي مستطيلات، إضافة إلى ما ورد في البند (٩-٢) ملحق ٢، فإنه يمكن معالجة المعادلة (٥-١٩) على أساس الزوايا المجسمة.

إذا فرض أن النقطة P ، شكل (٥-٦)، تقع على المسار المغلق C ، فإن مسار دائرة المصدر C' (source circuit) ستقابله (subtend) زاوية مجسمة عند تلك النقطة فإذا أجرى التكامل على المسار C فإن النقطة P ستحصل على مجموعة متتالية من الإزاحات، كل إزاحة تساوي $d\vec{l}$ ، فإذا أزيحت P مسافة قدرها $d\vec{l}$ فإن مسار الدائرة C' ستكون له مناور (aspects) مختلفة حسب الرؤية عند النقطة P ولذلك فإن الزاوية المجسمة المقابلة لـ C' عند وضع جديد لـ P ستغير إلى قيمة جديدة قدرها $d\Omega$ ولذلك فإن $d\Omega$ تمثل التغير في قيمة الزاوية المجسمة المقابلة لـ C' عند النقطة P الناتج عن إزاحة النقطة P بـ $d\vec{l}$.



شكل (٥-٦): حساب التغير في الزاوية المجسمة المقابلة عند النقطة الناتجة عن إزاحة الدائرة C'.

يمكن الحصول على التغير نفسه إذا تخيل أن النقطة P ثابتة وأزاحت كل نقطة من مسار الدائرة C' مسافة قدرها $-dl$ - ولذلك يمكن القول إن $d\Omega$ تمثل التغير في قيمة الزاوية المجسمة الناتج عن ثبوت النقطة P وإزاحة كل نقطة من C' بـ $-dl$ - وبالرجوع إلى الشكل (٥-٦) نجد أن الجزء المخطط يمثل مساحة قدرها:

$$dS = -d\vec{l} \times d\vec{l}'$$

وحسب ما ورد في البند (٩-٢)، ملحق ٢، فإن المقدار الموجود تحت التكامل في المعادلة (٥-١٩) يمثل زاوية مجسمة مقدارها $\vec{r} / r^3$. $d\vec{S}$ مقابلة للمساحة dS عند النقطة P وتساوي التغير في الزاوية المجسمة عند النقطة P الناتجة عن إزاحة dl' مسافة قدرها $-dl$ - ولذلك إذا أجرى التكامل على المسار C' في المعادلة (٥-١٩) فالنتيجة تمثل مجموع توزيع dl' للمسار C' كاملاً ومنه فإن:

$$d\Omega = \oint_{C'} \frac{(-d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{r}}{r^3} = \oint \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (٥-٢٠)$$

وذلك حسب تعريف الزاوية المجسمة بالمعادلة (٢-٤٧) ملحق ٢.

وبالتعويض في المعادلة (٥-١٩) من المعادلة (٥-٢٠) يُحصل على :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\Omega \quad \dots\dots\dots (٥-٢١)$$

وحسب المعادلة (٢-٥٠) ملحق ٢ ، فإن قيمة هذا التكامل ، للزاوية المجسمة ، يساوي 4π .

وبذلك تصبح المعادلة (٥-٢١) بالصورة التالية :

$$\therefore \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \dots\dots\dots (٥-٢٢)$$

تسمى المعادلة (٥-٢٢) بقانون أمبير الدوائري أو بقانون أمبير . والاشارة السالبة أو الموجبة التي تسبق $\mu_0 I$ تعتمد على اتجاه المسار والتيار I المار بالدائرة C . فإذا اختير اتجاه التكامل للمسار C بحيث يمثل العمودي عليه n الاتجاه الموجب كما في الشكل (٥-٧) وكان اتجاه التيار في الدائرة C مع اتجاه n فإن قيمة $\mu_0 I$ موجبة . أما إذا كان ضده فإن قيمة $\mu_0 I$ سالبة .

إذا كان هناك أكثر من تيار داخل المسار المغلق C فإن المعادلة (٥-٢٢) تصبح :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I \quad \dots\dots\dots (٥-٢٢ ب)$$

وهو المطلوب .

ويمكن التعويض عن I بدلالة كثافة التيار J حسب المعادلة (٤-٤) فنحصل على :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \dots\dots\dots (٥-٢٣)$$

وحسب المعادلة (٢-٤٥) ملحق ٢ ، فإن :

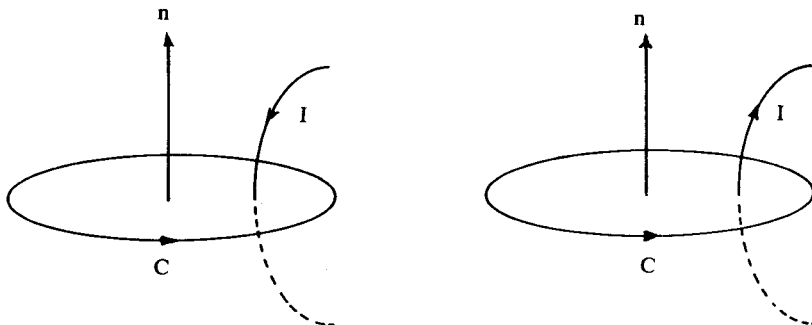
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad \dots \dots \dots (٥-٢٤)$$

حيث S المساحة المحاطة بالمسار المغلق C.

ونُحصل من المعادلة (٥-٢٣) و (٥-٢٤) على :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \dots \dots \dots (٥-٢٥)$$

وهذه المعادلة تدل على أن الحث المغناطيسي ليس مجالاً محافظاً (conservative) لأن $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ لا تساوي دائماً الصفر وهذه النتيجة تخالف حالة المجال الكهربائي الساكن.



شكل (٥-٧): الاتجاه المصطلح للتيار وعلاقته بالتكامل حول المسار C حسب قانون أمبير الدائري.

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٥-٢١) بالصيغة التالية :

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \quad \dots \dots \dots (٥-٢٦)$$

وباستعمال المعادلة (٢-٢٩) ملحق ٢ ، يُحصل على :

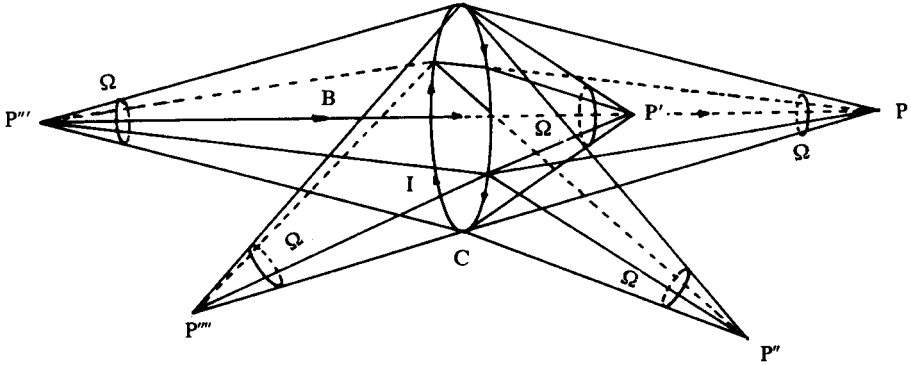
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \cdot d\vec{l} \quad \dots \dots \dots (٥-٢٧)$$

وحيث إن هذه المعادلة صحيحة لكل قيم $d\vec{l}$ ، $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ ، فإن B تتناسب مع $\nabla \Omega$ أي أن :

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \quad \dots\dots\dots (٥-٢٨)$$

يمكن باستخدام هذه المعادلة حساب الحث المغناطيسي B بدلالة الدالة العددية Ω عند النقطة P والناتج عن مرور تيار كهربى قدره I في دائرة كهربية كما في شكل (٥-٨).

الإشارة السالبة تدل على أن موضع النقطة P بالنسبة للدائرة التي يمر بها التيار تقع في الجهة الموجبة للدائرة وذلك حسب اتجاه التيار فيها. ويوضح الشكل (٥-٨) بعض المواضع المختلفة لـ P فتكون الزاوية المجسمة Ω موجبة للنقاط P و P' و P'' بينما تكون سالبة للنقاط P''' و P'''' .



شكل (٥-٨): مواضع مختلفة للزاوية المجسمة Ω حول دائرة كهربية C يمر بها تيار قدره I

(٥-٥) تطبيقات لحساب المجال المغناطيسي

Applications of Magnetic Field

(١-٥-٥) المجال المغناطيسي الناتج عن تيار يمر في موصل مستقيم

Magnetic field due to a current in a straight conductor

يتضح من البنود السابقة أن الحث المغناطيسي B يمكن حسابه بطرق مختلفة ستطبق لبعض الدوائر الكهربية البسيطة كلما كان ذلك ممكناً.

لحساب الحث المغناطيسي B الناتج عن مرور تيار كهربائي I في سلك رفيع مستقيم عند نقطة تقع خارجه مثل النقطة P شكل (٥-٩) نتبع ما يلي:

١ - باستعمال قانون بيوت وسافارت

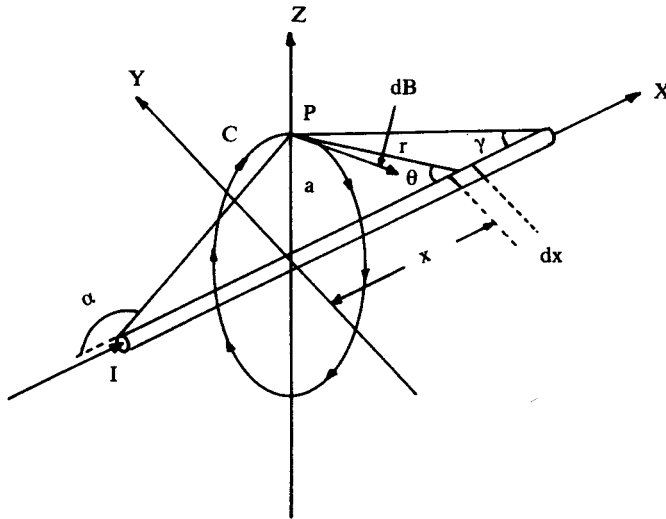
يقسم السلك إلى أجزاء صغيرة طول كل جزء dx فيكون الحث المغناطيسي عند النقطة P الناتج عن مرور التيار I في هذا الجزء هو dB ويعطى بالمعادلة (٥-٣) حيث:

$$dB = K_m \frac{Idx \sin \theta}{r^2}$$

ويكون الحث الناتج عن كامل السلك هو:

$$B = K_m \int \frac{Idx \sin \theta}{r^2} \quad \dots\dots\dots (٥-٢٩)$$

حيث r المسافة بين dx و P ، θ الزاوية بين dx و r ، كما في الشكل (٥-٩).



شكل (٥-٩): حساب الحث المغناطيسي B ، عند النقطة P الناتج عن مرور تيار كهربائي I في موصل مستقيم ، باستخدام قانون بيوت وسافارت .

فإذا استعملت المحاور الديكارتية لتحديد اتجاه عنصر الحث المغناطيسي dB بحيث يقع التيار I على محور x ويأخذ الاتجاه الوارد في الشكل (٥-٩) وتقع P على محور z فإن dB يقع في المستوى yz ويتخذ الاتجاه العمودي على المستوى xz ، الذي يقع فيه كل من r و dx ، ومماس لخط القوة C.

ولتسهيل حساب التكامل يُستبدل المتغير x بالزاوية θ ، وبالعودة إلى الشكل (٥-٩) يمكن الحصول على:

$$r = a \csc \theta , \quad x = a \cot \theta$$

$$\therefore dx = -a \csc^2 \theta d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٢٩) يكون:

$$B = -K_m \frac{I}{a} \int_{\alpha}^{\gamma} \sin \theta d\theta = K_m \frac{I}{a} [\cos \theta]_{\alpha}^{\gamma}$$

$$\therefore B = K_m \frac{I}{a} (\cos \gamma - \cos \alpha) \dots \dots (٥-٣٠)$$

فإذا كان السلك طويلا جدا بالمقارنة إلى المسافة a ، ولم تكن النقطة P قريبة من أي من طرفي السلك فإن:

$$\gamma = 0 , \quad \alpha = \pi$$

$$\therefore B = 2K_m \frac{I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \dots \dots (٥-٣١)$$

يمكن الوصول إلى النتيجة (٥-٣١) ، وذلك بإجراء التكامل في المعادلة (٥-٢٩) باستبدال الزاوية θ بالمتغير x كالتالي:

من الرسم يمكن الحصول على:

$$r = (x^2 + a^2)^{1/2} , \quad \sin \theta = \frac{a}{r}$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٢٩) يُحصل على:

$$B = K_m I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{adx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

هذا النوع من التكامل خاص ويمكن إجراؤه بتطبيق المعادلة (٢٥) بند (٨-٣) ملحق ٣.

$$\therefore B = K_m \frac{I}{a} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2K_m \frac{I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}$$

ب - باستعمال قانون أمبير الدوائري

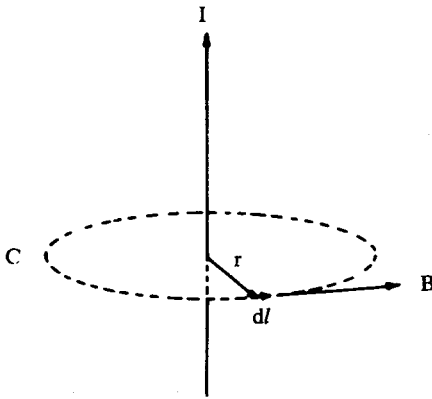
إذا مر تيار كهربى I في موصل مستقيم فإن خطوط القوى المغناطيسية حول الموصل عبارة عن دوائر مركزها الموصل نفسه. فإذا اعتبر أن إحدى هذه الدوائر تمثل مساراً مغلقاً حول التيار وكان نصف قطر هذا المدار r ، كما في الشكل (٥-١٠)، فإن اتجاه $\vec{B}$ هو اتجاه $d\vec{l}$ نفسه، مماس لخطوط القوى. وبتطبيق المعادلة (٥-٢٢) يُحصل على:

$$B \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I$$

$$\therefore B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

وهي المعادلة (٥-٣١) نفسها.



إذا كان للسلك سمك نصف قطره

a وكانت كثافة التيار J منتظمة خلال مقطعه

الداخلي فإن التيار داخل الأسطوانة (حيث

$$r < a), \text{ سيكون } \pi r^2 J = I (\pi r^2 / \pi a^2).$$

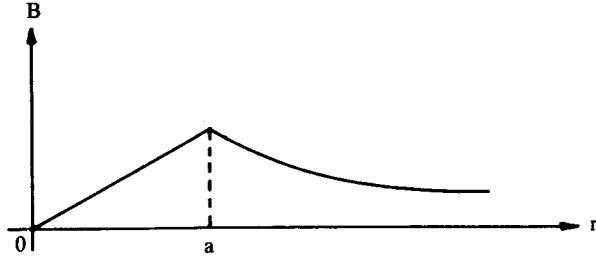
شكل (٥-١٠): حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربى في سلك مستقيم باستخدام قانون أمبير.

وبتطبيق قانون أمبير داخل الاسطوانة يُحصل على:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} , \quad r \leq a \quad \dots\dots (٥-٣٢)$$

ويوضح الشكل (٥-١١) العلاقة بين B ، r داخل الاسطوانة وخارجها.



شكل (٥-١١) : العلاقة بين B و r داخل الاسطوانة وخارجها.

مثال (٥-١)

يمر تيار كهربي I في سلك رفيع وطويل نتج عنه مجال مغناطيسي قيمة حثه $10^{-4}T$ عند نقطة تبعد 5cm من منتصف السلك :

١ - ما قيمة هذا التيار.

ب - بقيمة التيار نفسها الواردة في الفقرة (١) ماذا تكون قيمة الحث المغناطيسي عند النقطتين 0.1m و 0.2m.

ج - ما قيمة شدة المجال المغناطيسي في الحالات السابقة .

د - إذا كانت قيمة التيار 10A ما هو بعد النقطة التي يكون عندها الحث المغناطيسي مساوياً لـ $10^{-4}Wb/m^2$.

الحل

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi r B}{\mu_0} = \frac{2 \times \pi \times 5 \times 10^{-2} \times 10^{-4}}{4 \times \pi \times 10^{-7}} = 25 \text{ A}$$

$$B_1 = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7}}{2 \times \pi} \frac{25}{0.1} = 5 \times 10^{-5} T$$

$$B_2 = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 25}{2 \times \pi \times 0.2} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{5 \times 10^{-5}}{4 \times \pi \times 10^{-7}} = 39.79 \text{ A/m}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{2.5 \times 10^{-5}}{4 \times \pi \times 10^{-7}} = 19.89 \text{ A/m}$$

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 10}{2 \times \pi \times 10^{-4}} = 0.02 \text{ m}$$

مثال (٥-٢)

سلكان طويلان ومتوازيان يمر بكل منهما تيار كهربائي قيمته I فإذا كانت المسافة بينهما $2a$ احسب متجه الحث المغناطيسي B في منتصف المسافة بينهما في الحالات التالية:

١- للتيارين الاتجاه نفسه. ب - التياران متعاكسان في الاتجاه.

ج- السلكان متعامدان. د - السلكان متعامدان وقيمة التيارين مختلفتان I_1 و I_2 .

الحل

تطبق المعادلة (٥-٩) لحل هذا المثال وهي:

$$B_T = B_1 + B_2$$

حيث B_1 و B_2 متجهتا الحث الناتج عن مرور التيارين I_1 و I_2 في السلكين كل على حده. ففي الحالات الثلاث الأولى أ و ب و ج يكون $B_1 = B_2 = B$ لأن النقطة التي يراد حساب الحث المغناطيسي عندها تقع في منتصف المسافة بين السلكين وكذلك $I_1 = I_2 = I$. وحسب المعادلة (٥-٣١) فإن قيمة B عند هذه النقطة لأي من السلكين هي:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

ويمكن تحديد اتجاه المجال المغناطيسي باستخدام قاعدة اليد اليمنى.

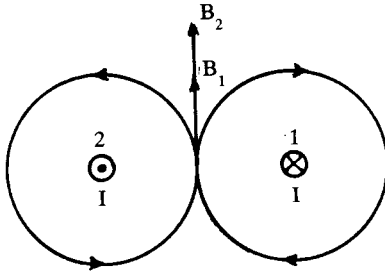
١- المتجهان B_1 و B_2 متعاكسان في الاتجاه، شكل (أ)، ومتساويان في المقدار أي أن

$$B_T = B - B = 0$$

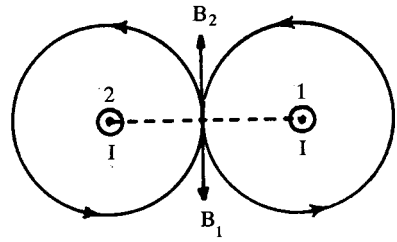
ب - نتيجة لتعاكس التيارين فإن الحث المغناطيسي للسلكين لها الاتجاه نفسه، شكل (ب)، ولهما أيضا القيمة نفسها:

$$B_T = B_1 + B_2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$



شكل (ب)



شكل (أ)

ج - المتجهان B_1 و B_2 متعامدان، شكل (ج)، ومتساويان في المقدار أي أن:

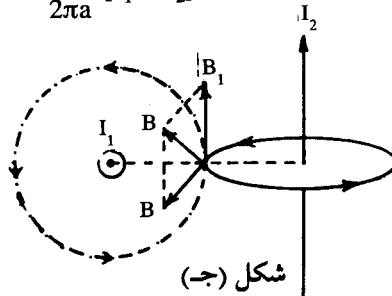
$$B = (B_1^2 + B_2^2)^{1/2} = \sqrt{2} B = \sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

د - المتجهان B_1 و B_2 متعامدان، شكل (ج)، وغير متساويين في المقدار أي أن:

$$B = \{B_1^2 + B_2^2\}^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi a} [I_1^2 + I_2^2]^{1/2}$$



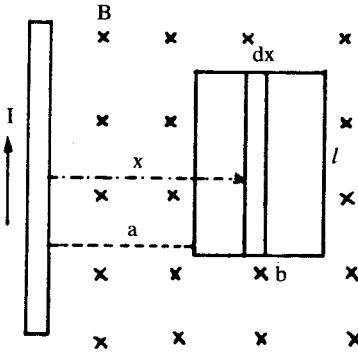
شكل (ج)

مثال (٥-٣)

حلقة مستطيلة الشكل، طولها l وعرضها b ، وضعت موازية لسلك طويل يمر به تيار كهربى مقداره I . احسب التدفق المغناطيسى خلال هذه الحلقة.

الحل

الحث المغناطيسى عند نقطة تبعد مسافة مقدارها x عن سلك طويل يمر به تيار كهربى تحدد المعادلة (٥-٣١) حيث:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

هذا الحث يتجه حسب قاعدة اليد إلى الداخل، كما في الشكل، وقيمته تختلف من نقطة إلى أخرى حسب قيمة x أى أن المجال المغناطيسى غير منتظم ولذلك فقيمة التدفق المغناطيسى يمكن حسابه باستعمال المعادلة (٥-١١) بالصورة التالية:

$$\Phi = \int B \, dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \, dS$$

$$\therefore dS = l \, dx$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln x]_a^{a+b}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \{ \ln(a+b) - \ln(a) \}$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \left\{ \frac{a+b}{a} \right\}$$

(٢-٥-٥) المجال المغناطيسي لموصل دائري

Magnetic field of circular conductor

يمثل الشكل (٥-١٢) حلقة دائرية من سلك نصف قطرها a ويمر بها تيار كهربائي I . ولحساب الحث المغناطيسي B عند النقطة P نتبع ما يلي :

١ - باستعمال قانون بيوت وسافارت

تقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة طول كل عنصر dl ، وتوضع النقطة P على محور الحلقة المحمول على محور x ، بحيث تكون x المسافة بين مركز الحلقة و P ، r المسافة بين dl و P ويتضح من الشكل (٥-١٢) ما يلي :

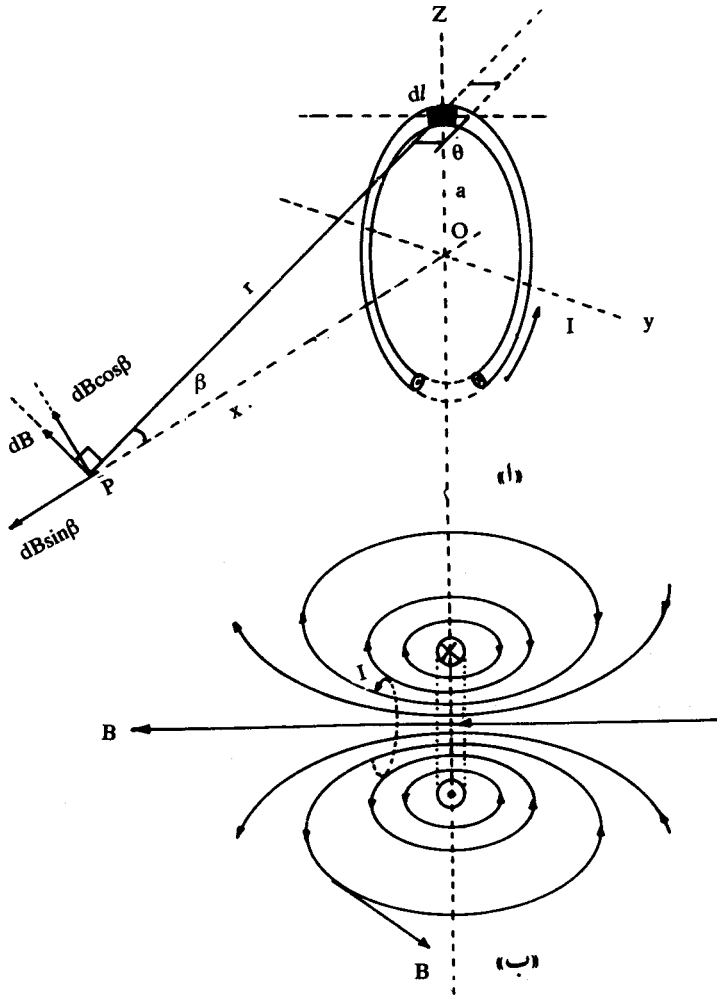
تقع الحلقة في المستوى yz بينما يقع الخطان r و x في المستوى xz العمودي على محور العنصر الطولي dl وكذلك المستوى yz فتكون الزاوية θ المحصورة بين محور dl والمسافة r تساوي 90° .

وطبقا للرموز المستخدمة في الشكل فإن الحث المغناطيسي dB عند النقطة P تحدده المعادلة (٥-٣) بعد وضع $\theta = 90^\circ$ بحيث يكون :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \dots\dots\dots (٥-٣٣)$$

ويكون اتجاه المجال المغناطيسي عند النقطة P عموديا على r وفي المستوى xz . وتحليل dB إلى مركبتين متعامدتين إحداها رأسية على امتداد المحور z وقيمتها $dB \cos\beta$ والأخرى أفقية على امتداد المحور x وقيمتها $dB \sin\beta$ فإن المركبات الرأسية العمودية على محور الملف والناتجة عن جميع عناصر الملف يلغى بعضها بعضا لأن لكل عنصر نظيرا مضادا يقابله في الطرف الآخر من الملف أي أن $\int dB \cos\beta = 0$.

وبذلك فإن كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن مرور التيار في الملف كله تكون على استقامة المحور x وتساوي :



شكل (٥-١٢): ١- موصل دائري يحمل تياراً قدره I فينشأ عنه مجال مغناطيسي حثه B المطلوب حسابه عند النقطة P .
ب- توضيح خطوط القوى المغناطيسية للموصل نفسه.

$$B = \int dB \sin \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \beta \int_0^{2\pi a} dl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \sin \beta$$

ويكتب من الشكل (٥-١٢) ما يلي :

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad , \quad \sin \beta = \frac{a}{r}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (٥-٣٤)$$

وبوضع $x = 0$ في المعادلة (٥-٣٤) يُحصل على قيمة الحث المغناطيسي في مركز الملف :

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{a} \quad \dots\dots\dots (٥-٣٥)$$

ويكون اتجاه B واقع على محور x .

يلاحظ من المعادلة (٥-٣٤) أن الحث المغناطيسي عند النقطة P يقل كلما بعدت النقطة عن مركز الموصل الدائري ، وينعدم عندما تكون $x = \infty$.

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بالمنحنى المبين في شكل (٥-١٣) والذي يمثل العلاقة بين x و B ويتضح من هذا المنحنى أن معدل تغير المجال مع المسافة يكاد يكون خطياً. أي يمثل خط مستقيم ، في المنطقة $x = a/2$ وفيها يكون :

$$\therefore dB/dx = \text{constant} \quad \dots\dots\dots (٥-٣٦)$$

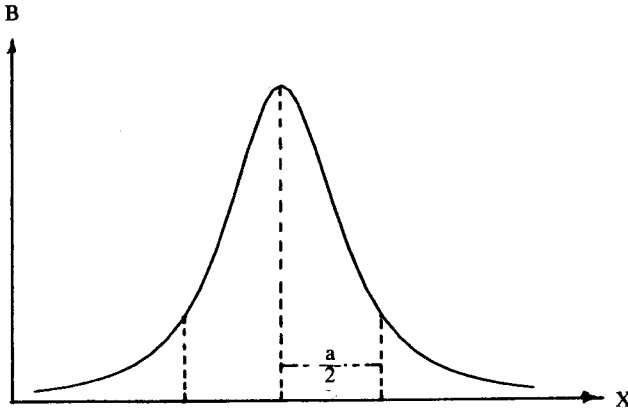
$$\therefore \frac{d^2B}{dx^2} = 0$$

وبتفاضل المعادلة (٥-٣٤) مرتين يحصل على $x = \frac{a}{2}$.

وإذا كان الموصل الدائري مكوناً من عدد N من اللفات لها نصف القطر نفسه متلاصق بعضها ببعض فإن المعادلتين (٥-٣٤) و (٥-٣٥) تصبحان :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (٥-٣٧)$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2 a} \quad \dots\dots\dots (٥-٣٨)$$



شكل (٥-١٣): العلاقة بين الحث المغناطيسي B وبعد النقطة P ، على المحور x ، عن مركز الحلقة الدائرية في الشكل (٥-١٢).

ب - باستعمال الزاوية المجسمة

يقسم السطح S المحاط بالحلقة C إلى حلقات صغيرة مساحة كل حلقة dS ، فإذا أخذت حلقة نصف قطرها R كما في الشكل (٥-١٤) وسمكها dR .

فحسب المعادلة (٢-٤٧) ملحق ٢، فإن الزاوية المجسمة المقابلة لهذا السطح dS عند النقطة P هي :

$$d\Omega = -\frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

وحيث إن $d\Omega$ واقعة على محور x فإن :

$$d\Omega = -\frac{xdS}{r^3}$$

ويُحصل من الشكل (٥-١٤) على :

$$dS = 2\pi R dR \quad , \quad r^2 = R^2 + x^2$$

$$\therefore d\Omega = -\frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R dR$$

$$\therefore \Omega = -2\pi x \int_0^x \frac{R dR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

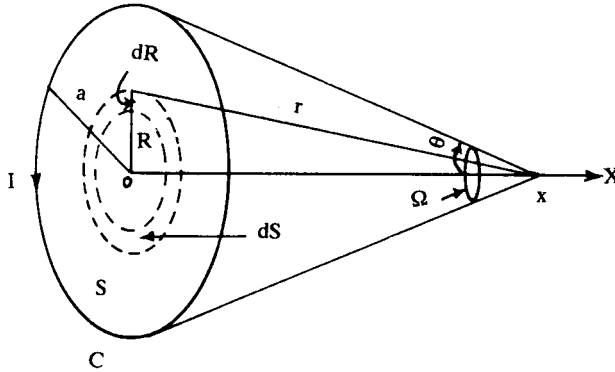
وحسب المعادلة (٢٤) البند (٨-٣) من الملحق ٣، يُحصل على :

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right) = 2\pi (1 - \cos \theta) \dots (٥-٣٩)$$

وباستخدام المعادلة (٥-٢٨) وتطبيقها على محور x فقط يُحصل على :

$$\begin{aligned} B_x = B &= \frac{-\mu_0}{4\pi} NI \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dots \dots \dots (٥-٤٠) \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

وهي المعادلة (٥-٣٧) نفسها.



شكل (٥-١٤): حساب B بمعرفة الزاوية المجسمة Ω لحلقة دائرية

مثال (٥-٤)

ملف دائري عدد لفاته 200 لفة ومتوسط نصف قطره 20cm ويمر به تيار كهربائي قيمته 3.5A احسب :

- ا - شدة المجال المغناطيسي والحث المغناطيسي والعزم المغناطيسي في مركز الملف .
ب - الحث المغناطيسي على بعد 8cm من مركز الملف .

الحل

$$H = \frac{NI}{2a} = \frac{200 \times 3.5}{2 \times 20 \times 10^{-2}} = 1.75 \times 10^3 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_0 H = 4\pi \times 10^{-7} \times 1.75 \times 10^3 = 2.2 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

$$P_m = N\pi a^2 I = 200\pi (20 \times 10^{-2})^2 \times 3.5 = 88 \text{ Am}^2$$

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 3.5 \times (20 \times 10^{-2})^2}{2 \times \{(20 \times 10^{-2})^2 + (8 \times 10^{-2})^2\}^{3/2}}$$

$$\therefore B = 1.78 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

(٣-٥-٥) المجال المغناطيسي لملف حلزوني Magnetic field of a solenoid

ا - استعمال بيوت وسافارت

يسمى التيار المار في سلك ملفوف لفا متلاصقا حول اسطوانة بالتيار الحلزوني .
ويبين شكل (٥-١١٥) ملفا حلزونيا يمر به تيار كهربائي حيث يعمل الملف كما لو كان مغناطيسا له قطبان أحدهما قطب شمالي N والآخر قطب جنوبي S. ويتوقف نوع القطب واتجاه المجال على اتجاه التيار في الملف ، ويمثل الشكل (٥-١٥ ب) مرور التيار في سلك ملفوف لفا مفكوكا «غير متلاصق» .

لإيجاد قيمة الحث المغناطيسي عند النقطة P كما في شكل (٥-١٥ ج) يفرض

أن الملف يمر به تيار شدته I وطوله l وعدد لفاته N فتكون عدد اللفات في وحدة الأطوال $\frac{N}{l}$ وبذلك فإن عدد اللفات في عنصر الطول dx هي :

$$n = \frac{N}{l} dx$$

بالعودة إلى المعادلة (٥-٣٧) فإن قيمة الحث الناتج عن التيار I المار لعنصر الطول dx ، والذي يمثل ملفا دائريا نصف قطره a وعدد لفاته n ، عند النقطة P هو :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

وباستبدال ϕ بالمتغير x ، وبالعودة إلى شكل (٥-١٥ ج - ٥) ، يكون :

$$x = a \cot \phi \quad , \quad dx = -a \operatorname{cosec}^2 \phi d\phi$$

$$\therefore dB = \frac{-\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \frac{a^3 \operatorname{cosec}^2 \phi d\phi}{(a^2 + a^2 \cot^2 \phi)^{3/2}} = - \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{l} \sin \phi d\phi$$

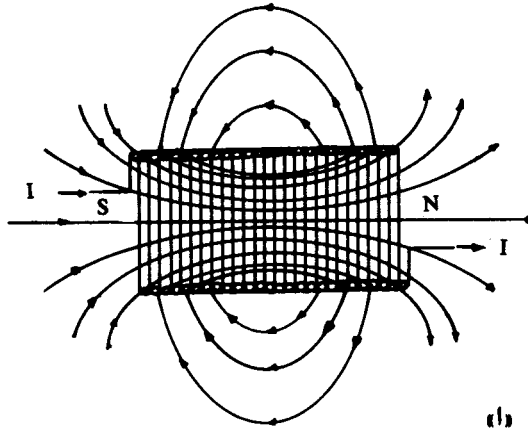
تكون قيمة الحث المغناطيسي B الناتج عن التيار المار في الملف الحلزوني عند النقطة P تساوي مجموع قيمة الحث المغناطيسي dB الناتجة عن كل لفة من لفات الملف عند هذه النقطة أي أن :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 IN}{2l} \int_{\beta}^{\alpha} \sin \phi d\phi$$

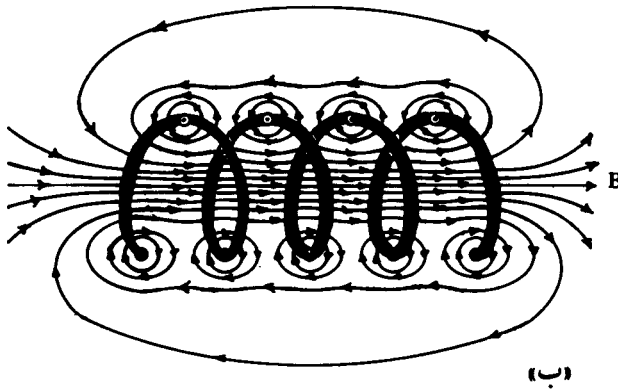
$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta) \quad \dots \dots (٥-٤١)$$

وهذه هي المعادلة العامة لشدة المجال عند أية نقطة على محور الحلزوني سواء أكانت بداخله أم بخارجه .

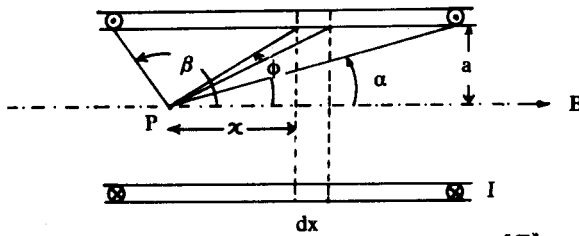
إذا كان الملف الحلزوني طويلا وكانت النقطة P بعيدة عن أي من الطرفين فإن



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (٥-١٥): ١- ملف حلزوني ملفوف لفا متلاصقا يمر به تيار كهربائي I بحيث يعمل كما لو كان مغناطيسا له قطبان شمالي N وجنوبي S .

ب- ملف حلزوني ملفوف لفا مفكوكا «غير ملاصق» ويمر به تيار كهربائي I .

ج- كيفية حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور التيار الكهربائي I في الملف الحلزوني عند نقطة مثل P .

الزاويتين $\beta = 180^\circ$ و $\alpha = 0^\circ$. عندئذ تصبح B عند هذه النقطة مساوية للقيمة التالية :

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} \dots\dots\dots (٥-٤٢)$$

وإذا كانت النقطة P تقع عند أحد أطرافه وكان الحيزون طويلا فإن $\alpha = 0^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ وتصبح B :

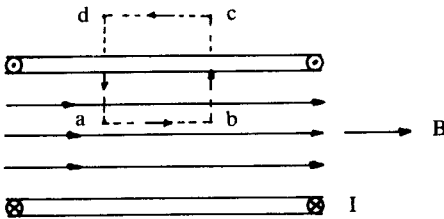
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{l} \dots\dots\dots (٥-٤٣)$$

بسم - باستعمال قانون أمبير الدائري

يرسم مسار مغلق على هيئة مستطيل كما في الشكل (٥-١٦) الخط المنقوط، بحيث يكون ضلعه ab ، الذي طوله l ، منطبقا على محور الملف ويكون الضلع dc بعيدا عن تأثير الملف . أما الضلعان ad و cb فهما متعامدان على المجال أي أن $\theta = 90^\circ$ وبتطبيق قانون أمبير على الأضلاع الأربعة يمكن الحصول على :

$$\begin{aligned} \int_a^b B \cos 0^\circ dl + \int_b^c B \cos (90^\circ) dl + \int_c^d B \cos (180^\circ) dl + \int_d^a B \cos (90^\circ) dl \\ = \int_a^b B \cdot dl - \int_c^d B \cdot dl = \mu_0 \cdot \Sigma I \end{aligned}$$

وحيث إن قيمة التكامل $\int_c^d B \cdot dl$ صغيرة جدا :



$$\therefore \int_a^b B dl = B \int_0^l dl = \mu_0 \Sigma I$$

أو

شكل (٥-١٦) : حساب المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربائي في ملف حلزوني باستخدام قانون أمبير.

$$B l = \mu_0 n I$$

$$\therefore B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

وهي المعادلة (٤٢ - ٥) نفسها.

حيث n/l هو مجموع التيارات الكهربائية داخل المسار لأن n هي عدد اللفات لوحدة الأطوال من الحلزون. وتظهر اللفات على هيئة دوائر صغيرة على أن التيار يدخل عموديا على مستوى الشكل إلى الداخل $\otimes$ ويخرج عموديا على مستوى الشكل إلى الخارج $\odot$.

جـ - استعمال الزاوية المجسمة

يُحصل من المعادلتين (٤٠-٥) و (٤١-٥) والشكل (١٧-٥) على:

$$dB = dB_x = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{N}{l} dx \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

ويمثل المقدار $(\frac{d\Omega}{dx} dx)$ الفرق بين الزوايا المجسمة المقابلة للجانبين الأمامي والخلفي لمجموعة اللفات المحصورة في عنصر الطول dx .

وإذا فرض أن Ω_1 و Ω_2 تحددان طول الملف l المحتوي على اللفات N فإن قيمة الحث المغناطيسي لطول الملف عند النقطة P هو:

$$B = - \frac{\mu_0 IN}{4\pi l} \int_{\Omega_2}^{\Omega_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx$$

$$\therefore B = - \frac{\mu_0 IN}{4\pi l} (\Omega_1 - \Omega_2) \dots \dots \dots (٤٦-٥)$$

إذا فرض أن الملف طويل ورفيع والنقطة P واقعة في المنتصف داخل الملف فإن Ω_1 تساوي تقريبا الصفر و Ω_2 تساوي 4π وبالتعويض في المعادلة (٤٦-٥) يمكن الحصول على المعادلة التالية:

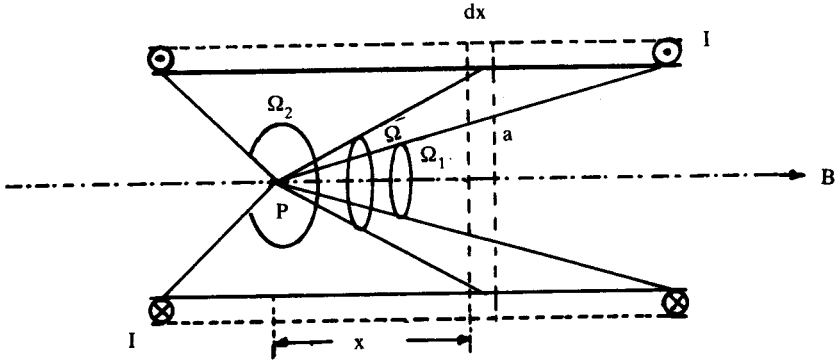
$$B = \frac{\mu_0 IN}{l}$$

وهي المعادلة (٤٢ - ٥) نفسها.

أما إذا كانت النقطة P واقعة عند أحد الأطراف بحيث كان $\Omega_1 = 2\pi$ و $\Omega_2 = 4\pi$ فإن المعادلة (٥-٤٦) تصبح كما يلي :

$$B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I N}{l}$$

وهي المعادلة (٥ - ٤٣) نفسها.



شكل (٥-١٧): حساب B للملف حلزوني طويل باستخدام الزاوية المجسمة Ω

وحسب المعادلة (٥-٣٩) فإن :

$$\Omega_1 = 2\pi (1 - \cos \alpha) \quad , \quad \Omega_2 = 2\pi (1 - \cos \beta)$$

$$\therefore \Omega_1 - \Omega_2 = 2\pi (\cos \beta - \cos \alpha) \quad \dots \quad (٥-٤٧)$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٤٦) يُحصل على المعادلة (٥-٤١) وهي :

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

مثال (٥-٥)

ملف حلزوني طوله 50cm ونصف قطره 3cm يحتوي على 1000 لفه/ متر يمر به تيار كهربائي قيمته 5A. احسب الحث المغناطيسي في منتصفه وعند حافته وعند نقطة تقع على محور الملف على 20cm من منتصفه .

الحل

الحث المغناطيسي في منتصف الملف يساوي :

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 5 = 6.283 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2 (\text{T})$$

أما عند حافته فالحث المغناطيسي يساوي نصف قيمته عند منتصفه أي أن :

$$B = \frac{6.283 \times 10^{-3}}{2} = 3.142 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

وبحسب المجال عند P باستعمال المعادلة (٥-٤١) وهي :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

والزاويتان α و β فيمكن حسابهما من الشكل (٥-١٥) حيث :

$$\tan \alpha = \frac{3}{45} \quad \therefore \alpha = 3.814^\circ$$

$$\tan (180 - \beta) = \frac{3}{5} \quad \therefore \beta = 149.04^\circ$$

$$\therefore B = 2\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 5 (\cos 3.814 - \cos 149.04)$$

$$= 3.142 \times 10^{-3} \{0.998 - (-0.858)\} = 5.828 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

(٤٥-٥) المجال المغناطيسي للملف حلزوني حلقي Magnetic field of a toriod

إذا مر تيار كهربي I في ملف حلزوني حلقي عدد لفاته في وحدة الأطوال n وطول محيطه l ، كما في الشكل (٥-١٨) يمكن حساب الحث المغناطيسي باستخدام قانون أمبير كالآتي:

إذا فرض أن الطول l هو طول المسار المغلق رقم (١)، المبين في الشكل (٥-١٨)، الذي يمثل خط قوة على هيئة دائرة مغلقة في محور الملف فإنه بتطبيق قانون أمبير الدوائري على هذا المسار يُحصل على:

$$\int B dl = \mu_0 \Sigma I$$

$$\therefore B l = \mu_0 n I \quad \therefore B = \mu_0 n I \quad \dots \quad (٥-٤٨ \text{ أ})$$

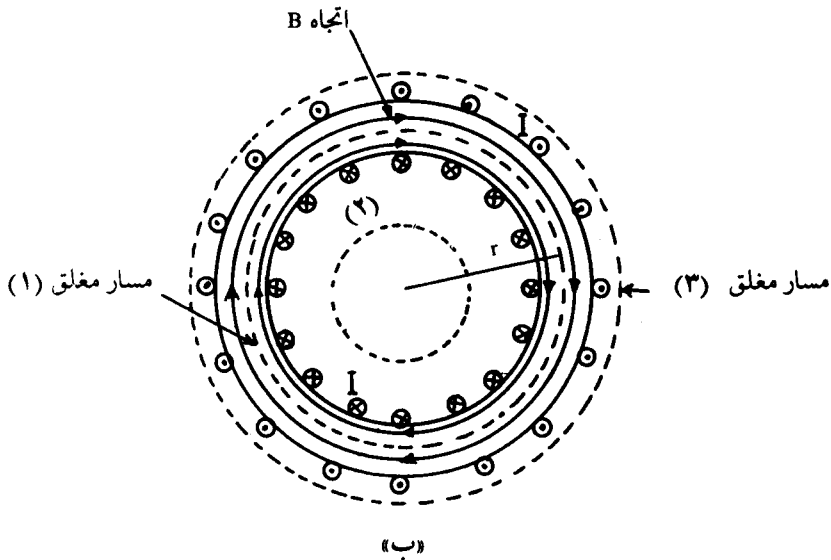
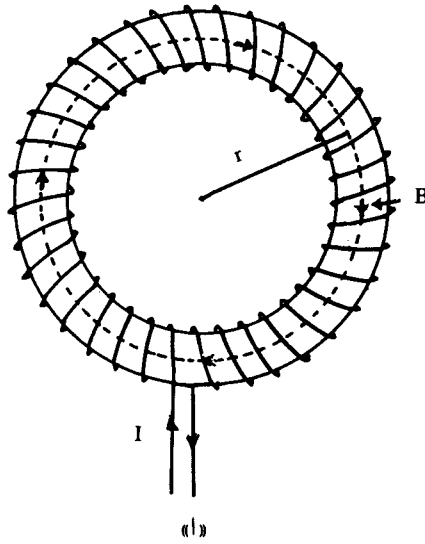
فإذا فرض أن N عدد لفات الملف و r نصف قطره فإن:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{N}{2\pi r}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad \dots \dots \dots (٥-٤٨ \text{ ب})$$

إذا عُد المسار رقم (٢) فإنه يلاحظ عدم وجود تيارات داخل هذا المسار المغلق أي أن $\Sigma I = 0$ ويستنتج من ذلك أنه طبقا لقانون أمبير فإن: $B = 0$.

أما بالنسبة للمسار (٣) فإنه يلاحظ وجود تيارات داخل هذا المسار المغلق إلا أن مجموعها يساوي صفرا لأن كل لفة تمر داخل هذا المسار مرتين مرة إلى الداخل ومرة إلى الخارج وفي كل مرة تحمل اللفة تيارا متساويا وله اتجاهان متعاكسان وبهذا فإن $B = 0$ على طول هذا المسار. ومعنى هذا أن المجال لمثل هذا الملف الحلزوني الحلقي يوجد فقط في داخل المنطقة الملفوف عليها الملف.



شكل (٥-١٨): أ - ملف حلزوني حلقي نصف قطره r ويمر به تيار شدته I .
 ب - كيفية حساب المجال المغناطيسي لهذا الملف باستخدام قانون أمبير.

مثال (٥-٦)

ملف حلزوني حلقي عدد لفاته 1500 لفة ونصف قطره الداخلي والخارجي 5cm و 10cm على الترتيب ويمر به تيار كهربى قيمته 5A. احسب الحث المغناطيسى في وسطه وعند حافته الداخلية والخارجية .

الحل

إذا فرض أن r الواردة في المعادلة (٨ب - ٥) تمثل متوسط نصف قطر الملف :

$$\therefore r = \frac{1}{2} (10 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-2}) = 7.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 5}{2\pi \times 7.5 \times 10^{-2}} = 20 \times 10^{-3} \text{ (T)}$$

أما إذا كانت r تمثل نصف القطر الداخلى للملف فإن الحث المغناطيسى على هذا المسار:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 5}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = 30 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

وإذا كانت r تمثل نصف القطر الخارجى للملف فإن B على هذا المسار:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 5}{2\pi \times 10 \times 10^{-2}} = 15 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

٦-٥) الجهد المغناطيسى

Magnetic Potential

أحد مظاهر الاختلاف بين المجال المغناطيسى وبين المجال الكهربى يكمن في وجود شكلين مختلفين تماما للجهد المغناطيسى وهما:

(١-٦-٥) الجهد المغناطيسي العددي Magnetic scalar potential

تبين المعادلة (٥-٢٨) أنه يمكن حساب الحث المغناطيسي B بدلالة الزاوية المجسمة Ω وهي دالة عددية، وهذه الحالة تماثل حساب المجال الكهربى E بمعرفة دالة عددية وهي الجهد الكهربى V حسب المعادلة (٢-٢٧). ولذلك وبصورة مماثلة للمجال الكهربى يمكن أن يكتب الحث المغناطيسي B في النظام العالمى (S.I) بدلالة دالة جديدة V_m بالصورة التالية:

$$B = -\mu_0 \text{grad } V_m = -\mu_0 \nabla V_m \quad \dots (٥-٤٩)$$

حيث V_m تسمى بالجهد المغناطيسي العددي وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٥-٢٨) يُحصل على:

$$V_m = \frac{I\Omega}{4\pi} \dots \dots \dots (٥-٥٠)$$

وحدة الجهد المغناطيسي العددي V_m في النظام العالمى هو الأمبير. ويمكن كتابة المعادلة (٥-٥٠) بالصورة التالية:

$$\therefore dV_m = \frac{1}{4\pi} Id\Omega \dots \dots \dots (٥-٥١)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٥-٢٦) يُحصل على:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 dV_m \dots \dots \dots (٥-٥٢)$$

$$\therefore V_m = - \frac{1}{\mu_0} \int_{\infty}^P \vec{B} \cdot d\vec{l} \dots \dots \dots (٥-٥٣)$$

قيمة V_m ليست واحدة، كما هو الحال بالنسبة للجهد الاستاتيكي، بل له قيم مختلفة فإذا ابتعدت P عن الحلقة شكل (٥-٨)، إلى ما لا نهاية (∞) في الجانب الموجب تغيرت Ω من قيمة موجبة أقل من 2π إلى الصفر، وتصبح قيمتها 2π إذا كانت P داخل الحلقة، فإذا مرت P داخل الحلقة واستمرت إلى الجانب الآخر فإن Ω ستصل قيمتها إلى 4π عندما تصل P إلى (∞).

أما إذا تحركت P حول الحلقة كما في الشكل (٥-٨) فستكون لـ Ω قيم سالبة وقيم موجبة ولذلك يمكن القول إنه إذا تحركت P في الجانب الآخر للحلقة ستصل قيمة Ω إلى الصفر عندما تكون P في اللانهاية وتصبح قيمتها (-2π) إذا كانت داخل الحلقة وهذا يعني أن لـ Ω قيم متعددة وتبعاً لذلك تكون لـ V_m قيم متعددة أيضاً. ويسمى الجهد المغناطيسي العددي بالجهد المغناطيسي الاستاتيكي (magnetostatic potential).

فإذا مر تيار كهربي I في حلقة دائرية صغيرة فإن الجهد المغناطيسي عند النقطة P كما في الشكل (٥-١٩) يحسب كالتالي:

قيمة الزاوية المحسمة Ω عند النقطة P المقابلة للسطح S المحاط بالحلقة الدائرية تحدده المعادلة (٥-٤٧) ملحق ٢، حيث:

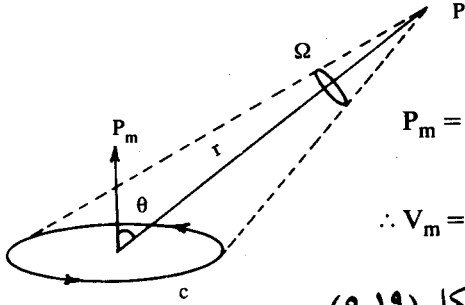
$$\Omega = \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \dots \dots \dots (٥-٥٤)$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٥٠) يُحصل على:

$$V_m = \frac{I \vec{S} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \dots \dots \dots (٥-٥٥)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٢-٣٢) الخاصة بالجهد الاستاتيكي يمكن القول إن المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة قدرها r من تيار حلقي (current loop) صغير يماثل رياضياً المجال الكهربي الناتج عن ذي القطبين لأن كلا منهما تدرج للجهد الذي له التغير نفسه في الفراغ.

والمقدار I.S في المعادلة (٥-٥٥) يسمى بالعزم المغناطيسى للتيار الحلقى ويرمز له بالرمز P_m حيث:



$$P_m = IS \quad \dots \dots \dots (٥-٥٦)$$

$$\therefore V_m = \frac{\vec{P}_m \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{P_m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad \dots \quad (٥-٥٧)$$

حيث θ هي الزاوية بين P_m و r كما في الشكل (٥-١٩).
وبالتعويض في المعادلة (٥-٤٩) يُحصل على:
شكل (٥-١٩): حساب V_m عند النقطة P التي تبعد مسافة r من حلقة صغيرة يمر بها تيار كهربى.

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \frac{P_m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad \dots \quad (٥-٥٨)$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية حسب المعادلة (٢-٣٤) ملحق ٢، يُحصل على:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{r}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad \dots \quad (٥-٥٩)$$

(٢-٦-٥) الجهد المغناطيسى الاتجاهى Magnetic vector potential

المعادلة (٥-١٤) صحيحة لكل المجالات المستقرة (steady fields) ولذلك يمكن التعبير عن B بالمعادلة التالية:

$$B = \text{curl } A = \nabla \times A \quad \dots \dots \dots (٥-٦٠)$$

حيث A يسمى بالجهد المغناطيسى الاتجاهى ولموازنة هذه المعادلة بالمعادلتين (٥-١٢) و(٥-١٣) يُحصل على:

$$A = \oint \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r} \quad \dots \dots \dots (٥-٦١)$$

$$A = \oint \frac{\mu_0 J}{4\pi r} dV \quad \dots \dots \dots (٥-٦٢)$$

ولو أن المعادلتين (٥-٦١) و(٥-٦٢) تمكن من حساب A إذا عرف توزيع التيار إلا أنه من المفيد أن يحصل على المعادلة التفاضلية التي تحقق A ويتم ذلك كما يلي :

بالاستعانة بالمعادلة (٢-٢٦) ملحق ٢ ، يمكن كتابة $\nabla \cdot A$ للمعادلة (٥-٦١) بالصورة التالية :

$$\nabla \cdot A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla \cdot \left(\frac{dl}{r} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left[dl \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} (\nabla \cdot dl) \right]$$

والحد الأخير يساوي الصفر.

أما تكامل الحد الثاني فيمكن كتابته كالتالي :

$$-\oint_c \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dl = -\oint_s \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS = 0$$

وذلك حسب المعادلتين (٢-٣٢) و(٢-٤٥) ملحق ٢ .

$$\therefore \nabla \cdot A = 0 \dots\dots\dots (٥-٦٣)$$

ويمكن كتابة المعادلة (٥-٦٠) بالصورة التالية :

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A)$$

وحسب المعادلة (٢-٢٤) الملحق ٢ ، يُحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \dots\dots (٥-٦٤)$$

ويُحصل من المعادلات (٥-٦٠) ، (٥-٦٣) ، (٥-٦٤) و(٥-٢٥) على :

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J \dots\dots\dots (٥-٦٥)$$

وإذا استخدمت الاحداثيات الديكارتية (x, y, z) فإن مركبات هذه المعادلة هي :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \text{ و } \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y , \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \dots\dots (٥-٦٦)$$

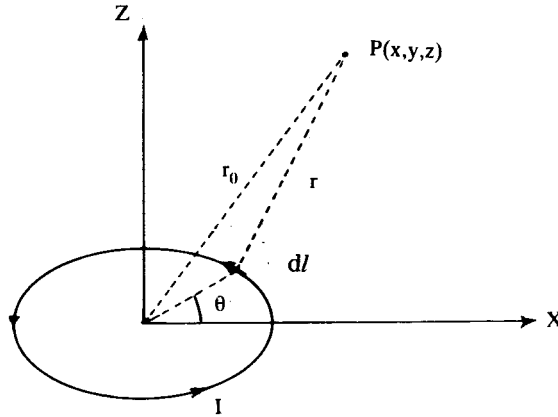
بمقارنة هذه المعادلة بمعادلة بواسون (٢-٥١) الخاصة بالجهد الكهربي نجد أن

أيًا من المعادلات (٥-٦٦) تحقق معادلة بواسون .

إذا مر تيار كهربائي (I) في حلقة دائرية نصف قطرها a فإنه بتطبيق المعادلة (٥-٦١) يمكن حساب الجهد المغناطيسي الاتجاهي A عند النقطة P كالآتي :

نفرض أن $r_0(x, y, z)$ هي المسافة بين نقطة الأصل (مركز الحلقة) والنقطة P ، المسافة بين العنصر dl و P وبمعرفة الزاوية θ كما في الشكل (٥-٢٠) فإن مركبات dl هي :

$$(-ad\theta \sin\theta, ad\theta \cos\theta, 0)$$



شكل (٥-٢٠) : حساب الجهد المغناطيسي الاتجاهي A عند النقطة P.

وحيث إن :

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - a \cos \theta)^2 + (y - a \sin \theta)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ \therefore r^2 &= r_0^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore a \ll r$$

$$\therefore r^2 = r_0^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta$$

$$\therefore r^2 = r_0^2 \left\{ 1 - \frac{(2ax \cos \theta + 2ay \sin \theta)}{r_0^2} \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left\{ 1 - \frac{(2ax \cos \theta + 2ay \sin \theta)}{r_0^2} \right\}^{-1/2}$$

ويتطبيق نظرية ذات الحدين (٣) البند (٦-٣) محلق ٣ يُحصل على :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{ax \cos \theta + ay \sin \theta}{r_0^3}$$

وبالتعويض في المعادلة (٥-٦١) يُحصل على :

$$\begin{aligned} A_x &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \theta d\theta}{r} \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{ax \cos \theta + ay \sin \theta}{r_0^3} \right) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\therefore A_x = \frac{\mu_0 (\pi a^2 I)}{4\pi} \left(\frac{y}{r_0^3} \right)$$

وبالمثل يكون :

$$A_y = \frac{\mu_0 (\pi a^2 I)}{4\pi} \left(\frac{x}{r_0^3} \right) \dots \dots \dots (٥-٦٧)$$

$$A_z = 0$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi r_0^3} (-y\vec{i} + x\vec{j}) \dots (٥-٦٨)$$

وحيث إن πa^2 مساحة الجزء المحاط بالمسار الدائري وحسب تعريف العزم المغناطيسي

بالمعادلة (٥-٥٦) يكون :

$$P_m = \pi a^2 I$$

$$\therefore \vec{P}_m = \pi a^2 I \vec{k} \dots \dots \dots (٥-٦٩)$$

حيث يتجه m مع محور z .

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{P}_m \times \vec{r} \quad \dots\dots\dots (٥-٧٠)$$

أما الحث المغناطيسي فيمكن حسابه باستخدام المعادلات (٥-٦٠) و (٥-٦٧) ومعادلة (٢-٢٠) ملحق ٢، حيث نحصل على:

$$B_x = \frac{3\mu_0 P_m}{4\pi} \frac{z}{r^5} x$$

$$B_y = \frac{3\mu_0 P_m}{4\pi} \frac{z}{r^5} y \quad \dots\dots\dots (٥-٧١)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

كذلك يمكن كتابة قيم B باستخدام الاحداثيات القطبية.

(٧-٥) القوة بين دائرتين كاملتين

The Force between Two Complete Circuits

إذا مر تياران كهربيان I و I' في دائرتين كهربيتين كاملتين C و C' على التوالي كما في الشكل (٥-٢١) فإن القانون الأساسي التجريبي الذي يعطي القوة على الدائرة C الناتج عن الدائرة C' يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$F_m = F_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{CC'} \frac{I dl \times (I' dl' \times \vec{r})}{r^3} \quad \dots (٥-٧٢)$$

حيث Idl و $I'dl'$ عنصري التيار في الدائرتين C و C' على التوالي و r هي المسافة بين الدائرتين، وتسمى هذه المعادلة بقانون أمبير Ampere's law وهي تناظر قانون كولوم (٥-١) الخاص بالقوة بين شحنتين الوارد في الفصل الأول.

إذا كان هناك أكثر من دائرة تؤثر على الدائرة C فإن القوة على C تساوي المجموع الاتجاهي لكل القوى المؤثرة على الدائرة C أي أن:

$$F_C = F_{1 \rightarrow C} + F_{2 \rightarrow C} + \dots + F_{n \rightarrow C} = \sum_{C'=1}^n F_{C' \rightarrow C} . \quad (٥-٧٣)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (٥-٧٢) لتصبح :

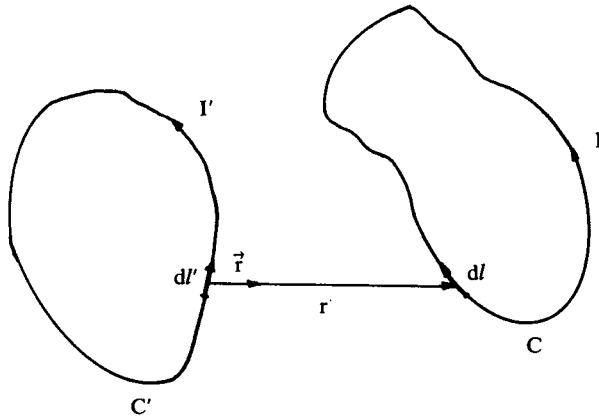
$$F_{C' \rightarrow C} = \oint_C Idl \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' dl' \times \vec{r}}{r^3} \right) . \dots \quad (٥-٧٤)$$

وبمقارنة الحد الأخير، الموجود بين القوسين، بالمعادلة (٥-٦) فإن المعادلة (٥-٧٤) تصبح :

$$F_{C' \rightarrow C} = \oint_C Idl \times B \dots \dots \dots (٥-٧٥)$$

حيث B الحث المغناطيسي الناتج عن الدائرة C' . وتمثل المعادلة (٥-٧٥) القوة على كامل الدائرة C الناتجة عن تأثير الحث المغناطيسي B للدائرة C' ، ويرمز عادة للقوة المغناطيسية بالرمز F_m . وإذا أخذ بالاعتبار التأثير على العنصر الطولي dl فإن القوة عليه هي :

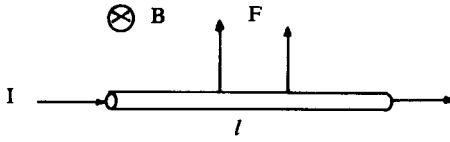
$$dF_m = Idl \times B \dots \dots (٥-٧٦)$$



شكل (٥-٢١): دائرتان كهربيتان C و C' تحملان تيارين كهربيين I و I' على التوالي.

وإذا وضع موصل طويل طوله l يمر

به تيار I في مجال مغناطيسي حثه B كما في الشكل (٥-٢٢) فإن المعادلة (٥-٧٥) تصبح:



$$F_m = I l \times B = I l B \sin \phi \quad (٥-٧٧)$$

حيث ϕ الزاوية بين اتجاه B والموصل، وإذا كان الموصل عموديا على المجال فإن المعادلة (٥-٧٧) تصبح:

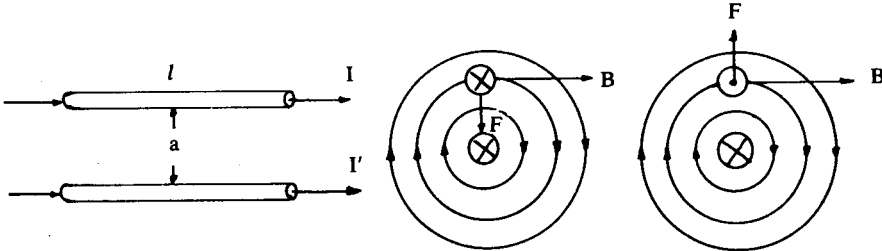
شكل (٥-٢٢): موصل معدني طوله l يمر به تيار I وواقع تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي حثه B الذي أكسبه قوة قدرها F تسببت في حركته.

$$F_m = I l B \quad (٥-٧٨)$$

ويحدد اتجاه هذه القوة التي يتعرض لها الموصل باستعمال قاعدة اليد اليسرى، (الابهام والسبابة والوسطى متعامدة مع بعضها البعض كتمثيل المحاور الاحداثية المتعامدة x, y, z)، حيث تشير السبابة إلى اتجاه المجال المغناطيسي والوسطى إلى اتجاه التيار أما الإبهام فتشير إلى اتجاه القوة.

وعند حساب القوة المؤثرة بين موصلين متوازيين يتبع ما يلي:

يبين شكل (٥-٢٣) جزءا من موصلين طويلين مستقيمين ومتوازيين تفصل بينهما المسافة a ويمر بهما التياران I ، I' في الاتجاه نفسه فلما كان كل من الموصلين يقع في المجال المغناطيسي للموصل الآخر فإن التيار المار بأحد السلكين يحدث مجالا يؤثر بقوة ما على السلك الآخر.



شكل (٥-٢٣): تمثيل للقوة المؤثرة بين موصلين مستقيمين متوازيين يمر بكل منهما تيار شدته I و I' .

وبين الشكل (٥-٢٣) أيضا بعض خطوط القوى للموصل السفلي، ولما كان الحث المغناطيسي B عند السلك العلوي، حسب المعادلة (٥-٣١)، يساوي :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}$$

تكون القوة على السلك العلوي الذي طوله l نتيجة وجوده في مجال السلك السفلي هي :

$$F = I'B/l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{a} l \dots\dots\dots (٥-٧٩)$$

وذلك حسب المعادلة (٥-٧٨) وتكون القوة المؤثرة على وحدة الأطوال هي :

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi a} II' \dots\dots\dots (٥-٨٠)$$

وبالمثل يمكن إثبات صحة المعادلتين الأخيرتين بالنسبة للقوة المؤثرة على السلك السفلي نتيجة وجوده في مجال السلك العلوي ولهذا فإن القوة الناتجة قوة متبادلة بين السلكين وتكون قوة تجاذب إذا كان التيار يمر في السلكين في اتجاه واحد أما إذا اختلف اتجاه التيار في السلكين فإن القوة لها القيمة نفسها ولكنها قوة تنافر.

طبقا للمعادلة (٥-٨٠) فقد تم تعريف الأمبير في نظام (S.I) كالآتي :
(هو شدة ذلك التيار الذي إذا مر في سلكين متوازيين طوليين المسافة بينهما متر واحد حدثت قوة متبادلة قدرها 2×10^{-7} نيوتن لكل متر طولي من كل من السلكين) لأن القوة المؤثرة على وحدة الأطوال من كل منها هي :

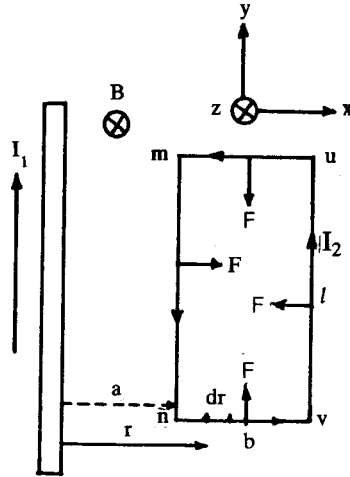
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} II' = 2 \times 10^{-7} \times 1 \times 1 = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$$

مثال (٥-٧)

حلقة موصلة ومستطيلة، طولها l وعرضها b، ويمر بها تيار كهربائي قيمته I_2 .
ما هي محصلة القوى المؤثرة عليها نتيجة وجودها قرب سلك طويل يمر به تيار كهربائي مقداره I_1 وواقع في مستواه كما في الشكل التالي.

الحل

استخدمت قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه المجال المغناطيسي B ، كما استخدمت قاعدة اليد اليسرى لتحديد اتجاه القوى المغناطيسية على أطوال الحلقة كما في الشكل .



لحساب القوة المؤثرة على الضلعين vu و mn نطبق المعادلة (٥-٧٨) وهي :

$$F = I l B$$

وتكون القوة بالنسبة للضلع mn على الصورة التالية :

$$\vec{F}_{mn} = I_2 l B_{mn} \vec{i} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{i} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}$$

أما بالنسبة للضلع vu فتكون :

$$\vec{F}_{vu} = I_2 l B_{vu} (-\vec{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(a+b)} (-\vec{i})$$

أما القوة المؤثرة على الضلع nv فلحسابها يُقسم هذا الضلع إلى أجزاء صغيرة طول كل جزء dr فتكون القوة المؤثرة على هذا الجزء :

$$dF = I_2 dr B$$

$$\therefore \vec{F} = \int_a^{a+b} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{c} \vec{j}$$

وبالطريقة نفسها يمكن حساب F_{um} أي أن :

$$\vec{F}_{um} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{c} (-\vec{j})$$

وبذلك فإن محصلة القوى المؤثرة المطلوبة هي :

$$\vec{F} = (\vec{F}_{mn} + \vec{F}_{vu}) + (\vec{F}_{nv} + \vec{F}_{um})$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a(a+b)} \vec{i}$$

(٨-٥) القوة وعزم الازدواج على دائرة كهربية تحمل تيارا «ذو القطبين المغناطيسي»

Force and Torque on a Current Circuit (Magnetic Dipole)

إذا مر تيار كهربي قيمته I في لفة دائرية نصف قطرها a ، كما في الشكل (١٢٤ - ٥) ، بحيث تقع الحلقة في المستوى x, z وسلط عليها مجال مغناطيسي حثه B في اتجاه المحور x فإن القوة المؤثرة على العنصر dl هي :

$$dF_m = Idl B \sin \phi$$

وتكون في الاتجاه العمودي على الصفحة في اتجاه القارئ :

$$\therefore dl = ad\phi$$

$$\therefore dF_m = IBa \sin \phi \, d\phi \quad \dots \dots \dots (٥-٨١)$$

وتبين الأسهم في شكل (٥ - ٢٤ ب) كيفية تغير القوى المؤثرة على عناصر الطول dl من نقطة إلى أخرى على اللفة .

ويبلغ عزم الدوران حول المحور z نتيجة لتأثير القوة dF المقدار التالى :

$$d\tau = dFa \sin \phi = IBa^2 \sin^2 \phi \, d\phi$$

ويكون العزم الإجمالى :

$$\tau = \int d\tau = IBa^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi$$

وهذا التكامل الخاص بحسب باستخدام المعادلة (٣-٣٧) البند (٧-٣) الملحق ٣ ، أي أن :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\therefore \tau = IB\pi a^2 = ISB \quad \dots \dots \dots (٥-٨٢)$$

لأن مساحة الإطار هي $S = \pi a^2$.

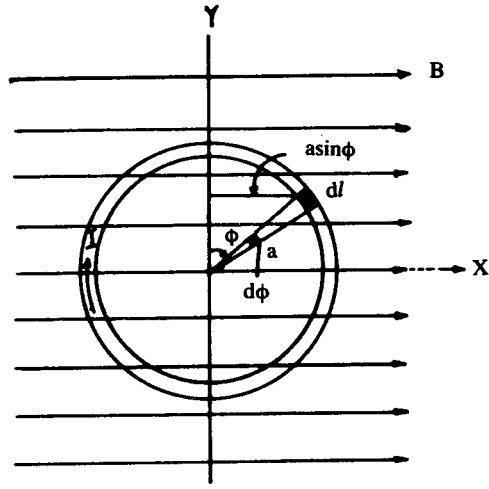
وهذه العلاقة صحيحة مهما كان شكل الإطار ومادام مستويا وموازيا لكثافة التدفق المغناطيسي . أما إذا كان العمودي على الإطار يصنع زاوية قدرها θ مع المجال فإن المعادلة (٥-٨٢) تصبح كالتالى :

$$\tau = ISB \sin \theta = IS \times B \quad \dots \dots (٥-٨٢ ب)$$

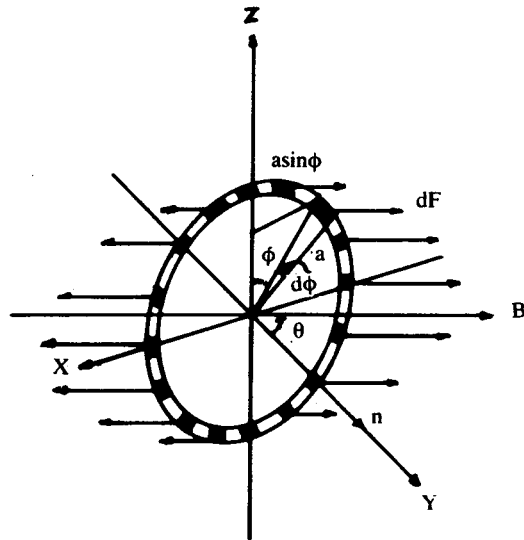
وهذا الازدواج يحرك أو يدير الملف .

وحسب المعادلة (٥-٥٦) فإن IS يسمى بالعزم المغناطيسي (magnetic moment)

للتيار I وبذلك يمكن كتابة المعادلة (٥-٨٢ ب) كالتالى :



(أ)



«ب»

شكل (٥-٢٤): أ - لفة دائرية نصف قطرها a ويمر بها تيار شدته I يقع في المستوى XZ موضوعة في مجال مغناطيسي خارجي منتظم حثه B يتجه مع محور Z .
 ب - تأثير المجال على الحلقة.

$$\tau = P_m B \sin \theta = P_m \times B \quad \dots (٥ - ٨٢)$$

وهذه المعادلة تناظر المعادلة (٢-٦٢) المتعلقة بعزم الازدواج لذي القطبين في مجال كهربي خارجي منتظم E .

كما يمكن بصورة مماثلة حساب طاقة الوضع من المعادلة (٥ - ٨٢) فيكون:

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} P_m B \sin \theta d\theta = P_m B (\cos \theta_0 - \cos \theta) \dots (٥ - ٨٣)$$

وحيث إن طاقة الوضع تساوي الصفر عندما تكون $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ نجد أن:

$$U = -P_m B \cos \theta = -\vec{P}_m \cdot \vec{B} \quad \dots (٥ - ٨٣)$$

وهي تناظر المعادلة (٢-٦٦) في حالة المجال الكهربي.

ويستنتج من المعادلتين (٥ - ٨٢) و (٥ - ٨٣) أن حركة الملف تعتمد على العزم المغناطيسي P_m وعلى المجال المغناطيسي الخارجى الذي حثه B .

فإذا فرض أن P_m ثابتة، أي أن التيار I ثابت، وحدثت إزاحة صغيرة للملف قدرها dr فإن الشغل اللازم لهذه الإزاحة هو:

$$dU = Fdr$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (٥ - ٨٣) يُحصل على:

$$Fdr = d(\vec{P}_m \cdot \vec{B}) \dots \dots \dots (٥ - ٨٤)$$

وإذا استخدمت الاحداثيات الديكارتية للتعبير عن الإزاحة فإن:

$$dr = idx + jdy + kdz$$

$$Fdr = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\therefore d(\vec{P}_m \cdot \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x} (P_m \cdot B) dx + \frac{\partial}{\partial y} (P_m \cdot B) dy + \frac{\partial}{\partial z} (P_m \cdot B) dz$$

ونحصل من هذه المعادلة والمعادلة (٥-٨٤) على :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (P_m \cdot B) = P_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + P_{my} \frac{\partial B_y}{\partial x} + P_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (٥-٨٥)$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} (P_m \cdot B) = P_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial y} + P_{my} \frac{\partial B_y}{\partial y} + P_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad (٥-٨٥ ب)$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (P_m \cdot B) = P_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial z} + P_{my} \frac{\partial B_y}{\partial z} + P_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (٥-٨٥ ج)$$

(٩-٥) جلفانومتر الظل وهيلمهولتز

Tangent and Helmholtz Galvanometers

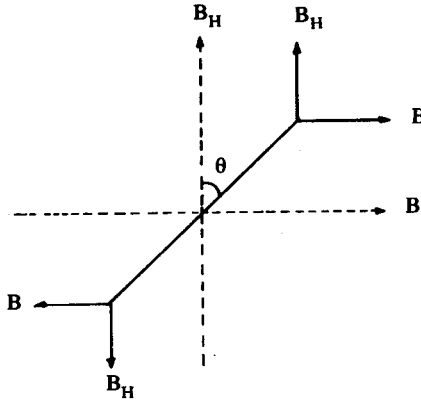
(٩-٥-١) جلفانومتر الظل Tangent galvanometer

يستخدم جهاز جلفانومتر الظل لقياس شدة التيار الكهربي . ويقوم أساس عمله على التأثير المغناطيسي للتيار الكهربي . ويتركب من ملف دائري من مادة النحاس المعزول عدد لفاته N لفة وإبرة مغناطيسية قصيرة في منتصف الملف، تركز على محور بحيث تتحرك أفقياً بسهولة في مستوى عمودي على مستوى الملف . ومثبت بالإبرة مؤشر خفيف من الألومنيوم عمودي على الإبرة وبلغ طوله من ثلاثة إلى أربعة أمثال طول الإبرة المغناطيسية ويتحرك طرفه على تدريج دائري لقياس زوايا الانحراف ويوجد المؤشر داخل علبة أفقية تشبه علبة مغناطومتر الانحراف .

وتقوم نظرية الجلفانومتر على أساس أن كثافة الفيض المغناطيسي B الناتج عن مرور التيار I في الملف تكون منتظمة في حيز صغير جداً حول مركز الملف ولذلك يجب أن تكون الإبرة المغناطيسية صغيرة ما أمكن حيث يشملها المجال المنتظم .

وقبل استعمال الجلفانومتر يجب أن

يوجه مستوي ملفه رأسيا في اتجاه الزوال المغناطيسي أي في اتجاه الإبرة التي تخضع لتأثير المركبة الأفقية لمجال الأرض B_H كما في شكل (٥-٢٥).



شكل (٥-٢٥): طريقة عمل جلفانومتر الظل.

وعند إمرار التيار I تصبح الإبرة

خاضعة لمجالين متعامدين أحدهما المجال الأرضي B_H والآخر المجال B الناتج عن التيار فتتحرف الإبرة بزاوية قدرها θ كما في شكل (٥-٢٥) وطبقا لقانون الظل يكون ويستنتج من الشكل (٥-٢٥) ما يلي:

$$B = B_H \tan \theta \quad \dots \dots \dots (٥-٨٦)$$

وبالتعويض عن B من المعادلة (٥-٣٨) يُحصل على:

$$\frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{a} = B_H \tan \theta$$

$$\therefore I = \frac{2a B_H}{\mu_0 N} \tan \theta$$

$$I = C_g \tan \theta \quad \dots \dots \dots (٥-٨٧)$$

حيث C_g ثابت يعرف بمعامل اختزال الجلفانومتر (reduction factor) ويتوقف على تركيب الجلفانومتر والمكان المستخدم فيه. ونتيجة لظهور $\tan \theta$ في المعادلات السابقة سُمي الجلفانومتر بجلفانومتر الظل.

ويزود الجلفانومتر عادة بعدد من الملفات وهي غالبا ما تكون لفتين أو ٥٠ لفة أو

٥٠٠ لفة ونهاياتها متصلة بمسامير توصيل مثبتة في قاعدة الجلفانومتر.

- ويستعمل مع الجلفانومتر مفتاح عاكس ليعكس اتجاه التيار بحيث يمكن قياس انحراف الإبرة المغناطيسية θ مرتين وفي اتجاهين مختلفين لكل قيمة واحدة للتيار والغرض من ذلك هو تفادي الأخطاء في زاوية الانحراف التي قد تنشأ عن:
- عدم انطباق مركز الإبرة على مركز المؤشر أو مركز التدريج .
 - عدم انطباق مستوى الملف على مستوى الزوال المغناطيسي تماما .
 - وجود أي احتكاك عند نقطة ارتكاز الإبرة .

وحيث إن تقدير قيمة التيار تعتمد على مقدار زاوية الانحراف فإنه يراعى أن تكون قيمة θ في حدود 45° لأن الخطأ في $\tan \theta$ يكون كبيراً نتيجة أي خطأ صغير في زاوية الانحراف عندما تكون θ أكبر من 70° .

ويقدر الخطأ النسبي بتفاضل المعادلة (٥-٨٧) فيحصل على :

$$dI = C_g \sec^2 \theta d\theta$$

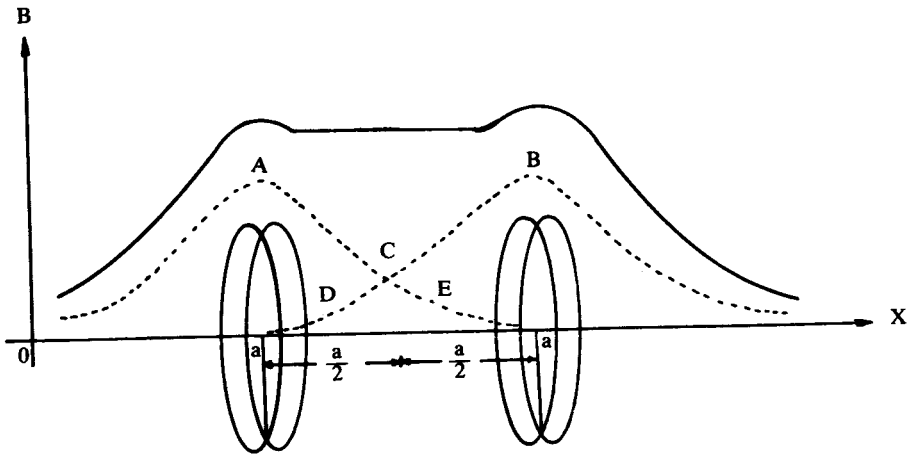
$$\therefore \frac{dI}{I} = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan \theta} = \frac{2 d\theta}{\sin 2\theta} \quad \dots \dots (٥-٨٨)$$

ويكون الخطأ النسبي $\frac{dI}{I}$ أصغر ما يمكن عندما يكون $\frac{2 d\theta}{\sin 2\theta}$ أصغر ما يمكن ، أي عندما يكون $\sin 2\theta = 1$ ومن ذلك نجد أن :

$$2\theta = 90^\circ \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

(٥-٩-٢) جلفانومتر هيلمهولتز Helmholtz galvanometer

يتكون من ملفين متشابهين ومتساويين في نصف القطر وعدد اللفات ومتوازيين والمسافة بين مركزيهما تساوي نصف قطر أي منهما . توضع إبرة الجلفانومتر المغناطيسية عند منتصف المسافة بين المركزين حيث تقع في المنطقة التي يكون فيها المجال المغناطيسي منتظماً . ويتصل سلكا الملفين على التوالي لكي يكون مرور التيار فيهما في اتجاه واحد وبذلك تكون محصلة مجالهما عند الإبرة مساوية ضعف التأثير الناتج عن الملف الواحد .



شكل (٥-٢٦): ملفا هيلمهولتز وثبوت المجال المغناطيسي بينهما

وحسب المعادلة (٥-٣٧) فإن الحث المغناطيسي عند نقطة تبعد x من مركز ملف دائري نصف قطره a وعدد لفاته N ويمر به تيار I يعطى بالمعادلة:

$$B = \frac{\mu_0}{2} N \cdot I \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots \dots (٥-٨٩)$$

وقد وجد أن المنطقة التي يكون عندها معدل تغير المجال المغناطيسي بالنسبة للمسافة على امتداد المحور الأساسي للملف ثابتا هي $x = \frac{a}{2}$ وفي هذه المنطقة لا بد وأن يكون:

$$\frac{dB}{dx} = \text{constant} \quad \& \quad \frac{d^2B}{dx^2} = 0 \quad \dots \dots (٥-٩٠)$$

وبتفاضل المعادلة (٥-٨٩) مرتين يُحصل على:

$$\frac{dB}{dx} = K \frac{d}{dx} (a^2 + x^2)^{-3/2} = K \left\{ -\frac{3}{2} (a^2 + x^2)^{-5/2} 2x \right\}$$

$$\therefore \frac{dB}{dx} = -3Kx (a^2 + x^2)^{-5/2} = \text{constant}$$

حيث:

$$K = \frac{1}{2} \mu_0 N I a^2$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -3K \frac{d}{dx} \left\{ x (a^2 + x^2)^{-5/2} \right\} = 0$$

$$-3K \left\{ (a^2 + x^2)^{-5/2} - 5x^2 (a^2 + x^2)^{-7/2} \right\} = 0$$

ومنه يُحصل على:

$$\therefore 5x^2 = a^2 + x^2$$

$$\therefore x = \pm \frac{a}{2} \dots\dots\dots (٥-٩١)$$

وبذلك يكون المجال المغناطيسي منتظما عند منتصف المسافة بين الملفين.

ويتضح من الشكل (٥-٢٦) أنه عند النقطة C التي تبعد مسافة $\frac{a}{2}$ من مستوى الملف يكون معدل تغير المجال على امتداد المحور الأساسي ثابتا ويعرض نقص المجال بالنسبة لأحد الملفين على صورة زيادة في المجال بالنسبة للملف الآخر حيث يمثل ACE المجال بالنسبة للملف A ويمثل BCD المجال بالنسبة للملف B كما يمثل المنحنى المستمر محصلة المجال المغناطيسي في الحيز بين الملفين ويشير الجزء المستقيم إلى انتظام المجال فوق منطقة كبيرة نسبيا.

بوضع $x = \frac{a}{2}$ في المعادلة (٥-٨٩) يُحصل على محصلة كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن الملفين أي أن:

$$B = 2 \cdot \frac{\mu_0}{2} N I \frac{a^2}{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\therefore B = \mu_0 \frac{8NI}{5\sqrt{5}a} \dots\dots\dots (٥-٩٢)$$

ولقياس شدة التيار يوجه مستوى الملفين في اتجاه الزوال المغناطيسي وعندئذ يمر التيار فيهما فتتحرك الإبرة زاوية قدرها θ ويكون:

$$B = B_H \tan \theta \quad \dots (٥-٩٣)$$

حيث B_H المركبة الأفقية للمجال المغناطيسي للأرض ويتساوي المعادلتين (٥-٩٢)، (٥-٩٣) يُحصل على:

$$B_H \tan \theta = \mu_0 \frac{8NI}{5\sqrt{5}a}$$

$$I = \frac{5\sqrt{5}a B_H}{8\mu_0 N} \cdot \tan \theta = C_g \tan \theta \quad \dots (٥-٩٤)$$

حيث C_g ثابت يعرف بمعامل اختزال الجلفانومتر ويتوقف على تركيب وأبعاد الملفين المتماثلين وعلى المكان المستخدم فيه.

ويفضل جلفانومتر هلمهولتز عن جلفانومتر الظل للأسباب التالية:

- ١ - كثافة الفيض المغناطيسي عند إبرة جلفانومتر هلمهولتز تفوق كثيرا نظيرتها عند إبرة جلفانومتر الظل.
- ٢ - يغطى المجال المنتظم مسافة أكبر في جلفانومتر هلمهولتز عنها في جلفانومتر الظل ولذلك لا يستوجب استخدام إبرة مغناطيسية صغيرة.

مثال (٥-٨)

يحتوي كل ملف في جلفانومتر هلمهولتز على 50 لفة نصف قطرها في المتوسط 16 سم . فإذا مر تيار شدته 0.1 أمبير في الجلفانومتر انحرفت الإبرة 45° أوجد قيمة B_H .

الحل

$$I = \frac{5\sqrt{5}a}{8\mu_0 N} B_H \tan \theta$$

$$0.1 = \frac{5\sqrt{5} \times 8 \times 10^{-2} \times 7}{8 \times 4 \times 22 \times 10^{-7} \times 50} B_H \tan 45^\circ$$

$$B_H = 2.81 \times 10^{-5} \text{ Wb / m}^2$$

(١٠-٥) الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية

Charged Particles in Magnetic Fields

(١٠-٥-١) الشحنات النقطية المتحركة Moving point charges

ذكر في البند (١-٤) أنه يمكن التعبير عن التيار الكهربائي بدلالة الشحنات المتحركة داخل الموصل. فإذا كانت n عدد الشحنات المتحركة في وحدة الحجم و q شحنة كل منها و v سرعتها فإن:

$$I = n q v S$$

حيث S مساحة مقطع الموصل. فإذا كان dl عنصر الطول من الموصل فإن:

$$Idl = n q v S dl = vQ \quad \dots (٥-٩٥)$$

حيث Q الشحنة الكلية المتحركة داخل الموصل. وبالتعويض في المعادلة (٥-٦) نحصل على:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \frac{Q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \frac{Qv \sin\theta}{r^2} \quad \dots (٥-٩٦)$$

حيث θ الزاوية بين v و r . أما B فيتجه في الاتجاه العمودي على المستوى المحدد بالكميتين v و r .

وتسمى هذه المعادلة بقاعدة بيوت (Biots rule) وهي تعد أحيانا نقطة البداية في دراسة المجال المغناطيسي الناتج حول الشحنات المتحركة (التيار) ويمكن اتخاذها وسيلة لتعريف الحث المغناطيسي بدلا من المعادلة (٥-٦).

ولنفترض الآن أن شحنتين Q و Q' تتحركان بالسرعتين v ، v' وتفصل بينهما

المسافة r عندئذ يبلغ المجال الناتج عن الشحنة Q عند النقطة التي تشغلها الشحنة Q' المقدار:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \dots\dots\dots (٥-٩٧)$$

أما القوة على الشحنة Q' فيمكن حسابها من المعادلتين (٥-٧٥) و (٥-٩٥) حيث:

$$F_m = [Q' \vec{v}] \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \right] \dots\dots (٥-٩٨)$$

ويُحصل من المعادلتين (٥-٩٧) و (٥-٩٨) على:

$$F_m = Q' \vec{v} \times \vec{B} = Q' v B \sin \phi \dots\dots (٥-٩٩)$$

حيث ϕ الزاوية بين v و B' أما القوة المغناطيسية F_m فتتجه في المستوى العمودي على المستوى الذي يحتوي على v و B . ومركبات F_m على المحاور الديكارتية هي:

$$F_{mx} = Q' (v_y B_z - v_z B_y)$$

$$F_{my} = Q' (v_z B_x - v_x B_z) \dots\dots (٥-١٠٠)$$

$$F_{mz} = Q' (v_x B_y - v_y B_x)$$

ويمكن مقارنة المعادلة (٥-٩٨) بقانون كولوم الذي يعبر عن القوى الكهربائية بين الشحنتين Q و Q' حيث نجد من المعادلتين (٥-١٠) و (٥-١١) أن:

$$F_e = [Q'] \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \vec{r}}{r^3} \right] = Q'E \dots\dots (٥-١٠١)$$

فالقوس الأول في المعادلتين (٥-١٠١) و (٥-٩٨) يمثل الشحنة Q' بينما يمثل القوس الثاني المجال الناتج عن الشحنة Q .

ولذلك إذا وجدت شحنة في مجال كهربائي E فإنها ستتحرك متأثرة بقوة استاتيكية مقدارها F_e ، حسب المعادلة (٥-١٠١). وإذا تحركت في مجال مغناطيسي فإنها تتأثر بقوة

مغناطيسية مقدارها F_m ، حسب المعادلة (٥-٩٩). أما إذا وجدت في مجالين كهربي ومغناطيسي فإن القوى المؤثرة عليها تساوي محصلة القوة الكهرية والقوة المغناطيسية أي أن:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q'E + Q'vB \sin \theta = Q'[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (٥-١٠٢)$$

أما في النظام الجاوسي فإن المعادلة (٥-١٠٢) يمكن كتابتها كالتالي:

$$F = Q' \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \dots\dots (٥-١٠٣)$$

هذه المعادلة مهمة وتسمى بقوة لورنتز (Lorentz force).

(٥-١٠-٢) مدارات الجسيمات المشحونة في المجالات المغناطيسية

Orbits of charged particles in magnetic fields

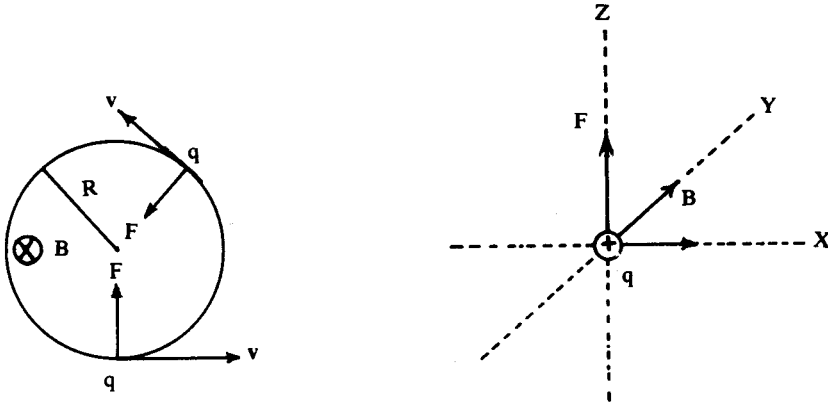
إذا وضع جسيم مشحون بشحنة موجبة (+q) في مجال مغناطيسي منتظم B وكانت سرعته v في اتجاه عمودي على المجال ، كما في شكل (٥-٢٥) ، فإنه سيتأثر بقوة ، حسب المعادلة (٥-٩٩) ، مقدارها:

$$F = qvB \dots\dots\dots (٥-١٠٤)$$

ويكون اتجاهها إلى أعلى طبقاً لقاعدة اليد اليسرى. ولما كانت القوة عمودية على السرعة فإنها لا تغير من مقدار هذه السرعة ولكنها تغير من اتجاهها فيتغير موضع الجسيم واتجاه القوة المؤثرة عليه بينما تظل بمقادير الكميات q ، v ، B ثابتة.

وهكذا فإن الجسيم يتحرك بتأثير قوة ثابتة المقدار وتتجه دائماً في الاتجاه العمودي على اتجاه السرعة. ولذا فإن مسار هذا الجسيم يكون على شكل دائرة نصف قطرها R. ونتيجة لهذه الحركة الدورانية تخضع الشحنة q لقوتين متعاكستين إحداها القوة المغناطيسية F متجهة إلى مركز الدوران. والأخرى قوة طرد مركزية F' مقدارها:

$$F = ma = m \frac{v^2}{R} \dots\dots\dots (٥-١٠٥)$$



شكل (٥-٢٧): شحنة موجبة q متحركة سرعتها v وضعت في مجال مغناطيسي منتظم حثه B بحيث كان اتجاه v عمودي على اتجاه B .

وتبقى الشحنة q متحركة في مسارها الدائري إذا تساوت F و F' ولذلك يُحصل من المعادلتين (٥-١٠٤) و (٥-١٠٥) على:

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{Bq} \quad \dots\dots\dots (٥-١٠٦)$$

$$\therefore v = \omega R$$

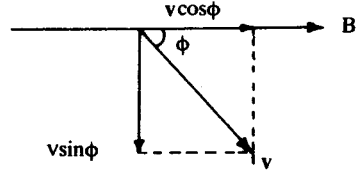
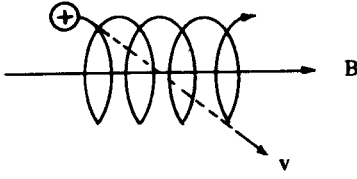
$$\therefore \omega = \frac{qB}{m} \quad \dots\dots\dots (٥-١٠٧)$$

حيث m كتلة الجسيم و ω سرعته الزاوية (angular velocity).

وإذا كان اتجاه السرعة غير متعامد على اتجاه المجال ولكنه يصنع زاوية ϕ فإن هذا سيؤدي إلى دوران الشحنة في مسار حلزوني محوره متفق مع اتجاه المجال كما في شكل (٥-٢٨) ويكون نصف قطر مقطع الحلزون:

$$R = \frac{mv \sin \phi}{Bq} \quad \dots\dots\dots (٥-١٠٨)$$

حيث $v \sin \phi$ تمثل المركبة العمودية للسرعة والتي تؤدي إلى المسار الدائري أما المركبة الأخرى $v \cos \phi$ فلن تتأثر بهذا المجال ويظل اتجاهها ثابتا في اتجاه المجال أي في اتجاه المحور الحلزوني. وهذه المركبة هي التي تؤدي إلى جعل شكل المسار حلزونيا.



شكل (٥-٢٨): يمثّل الشكل (٥-٢٧) عدا أن اتجاه السرعة v ليس متعامداً على اتجاه المجال ولكنه يصنع زاوية قدرها ϕ

مثال (٥-٩)

- يتحرك إلكترون على المحور x بسرعة قدرها $1.00 \times 10^7 \text{ m/s}$ سلط مجال مغناطيسي قيمة حثه B تساوي $2.50 \times 10^{-4} \text{ N/A} \cdot \text{m}$ في اتجاه المحور z .
- احسب قيمة واتجاه القوة المغناطيسية على الإلكترون وما هي قيمة المجال الاستاتيكي الذي تحتاجه للحصول على قوة استاتيكية مساوية للقيمة نفسها.
 - احسب نصف قطر المدار.
 - احسب السرعة الزاوية.

الحل

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = q (v_x \vec{i} \times B_z \vec{k}) = q v_x B_z (\vec{i} \times \vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = -q v_x B_z \vec{j}$$

$$\vec{F}_m = -(-1.602 \times 10^{-19}) (1.00 \times 10^7) (2.5 \times 10^{-4}) \vec{j} = (4.0 \times 10^{-16} \text{ N}) \vec{j}$$

ومعنى ذلك أن قيمة القوى تساوي 4.0×10^{-16} نيوتن واتجاهها على محور y وفي الاتجاه الموجب. أما المجال الكهربائي الناتج عن مقدار القوة نفسه فهو:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{4 \times 10^{-16}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.50 \times 10^3 \text{ V/m}$$

$$R = \frac{mv^2}{F_m} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 10^{14}}{4 \times 10^{-16}} = 2.28 \times 10^{-1} \text{ m} = 0.228 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{1.602 \times 10^{-19} \times 2.5 \times 10^{-4}}{9.11 \times 10^{-31}} = 4.4 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

مثال (٥-١٠)

جسم مشحون بشحنة قيمتها $q = 3.00 \times 10^{-8} \text{ C}$ يسير بسرعة v مركباتها هي $v_x = 20 \text{ m/s}$ و $v_y = 50 \text{ m/s}$ ، $v_z = 0$ وفي مجال مغناطيسي منتظم B فكانت مركبات القوة F المصاحبة لذلك هي $F_x = 37.5 \times 10^{-8} \text{ N}$ ، $F_y = -15.0 \times 10^{-8} \text{ N}$ و $F_z = -60.0 \times 10^{-8} \text{ N}$. أما إذا وضعت هذه الشحنة في المجال نفسه وبسرعة v' مركباتها $v'_x = 10 \text{ m/s}$ ، $v'_y = 30 \text{ m/s}$ و $v'_z = 0$ وكانت مركبات القوة F' هي $F'_x = 22.5 \times 10^{-8} \text{ N}$ ، $F'_y = 7.5 \times 10^{-8} \text{ N}$ و $F'_z = 36.0 \times 10^{-8} \text{ N}$. احسب قيمة المجال المغناطيسي واتجاهه .

الحل

$$F_x = q v_y B_z \quad F'_x = q v'_y B_z \quad (١)$$

$$F_y = -q v_x B_z \quad F'_y = -q v'_x B_z \quad (٢)$$

$$F_z = q (v_x B_y - v_y B_x) ; \quad F'_z = q (v'_x B_y - v'_y B_x) \quad (٣)$$

وواضح من هذه المعادلات أنه يمكن حساب B_z من المعادلات ١ و ٢ أما المركبتين B_x ، B_y فيمكن حسابهما من المعادلتين (٣) .

$$\therefore B_z = \frac{F_x}{q v_y} = \frac{37.5 \times 10^{-8}}{(3.0 \times 10^{-8}) (50)} = 0.25 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

وكذلك :

$$20 B_y - 50 B_x = -20$$

$$10 B_y - 30 B_x = -12$$

$$\therefore B_x = 0.4 \text{ N/A} \cdot \text{m} \quad \& \quad B_y = 0$$

$$\therefore B = (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} = \{(0.4)^2 + (0.25)^2\}^{1/2} = 0.472 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

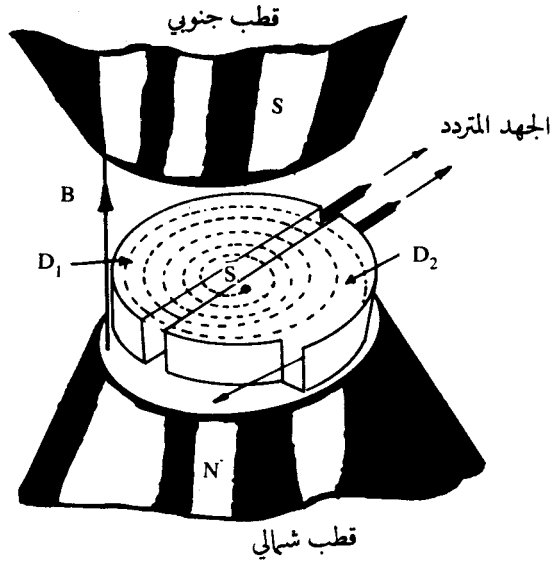
(١١-٥) تطبيقات على حركة الشحنة في مجال مغناطيسي

(١-١١-٥) السيكلوترون Cyclotron

جهاز السيكلوترون يعتبر من الوسائل المستخدمة لكي تكتسب الجسيمات المشحونة سرعة عالية جدا وبالتالي طاقة عالية جدا يستفاد منها في قذف الذرة لإجراء تفاعلات نووية صناعية. وتم صنعه لأول مرة عام ١٩٣١ م صنعه كل من الدكتور ارنست لورنس (Ernest O. Lawrence) والدكتور استانلي لفنجستون (Stanley Livingston) في جامعة كاليفورنيا. وتقوم نظريته على تعجيل البروتونات بواسطة مجال كهربائي قوي وجعل مسارها في شكل دائري بواسطة مجال مغناطيسي منتظم شديد.

ويتركب هذا الجهاز من حجرتين منفصلتين معدنيتين D_1 و D_2 على شكل حرف D ، شكل (٥-٢٩)، يسلط بينهما فرق جهد متردد V ويوضع منبع الجسيمات المشحونة S في مركز الجهاز وهذه الجسيمات عبارة عن أيونات موجبة مثل البرتون والديوترون (deuterons) ويسلط مجال مغناطيسي، حثه المغناطيسي B، عموديا على مستوي الرسم فتبدأ الأيونات الموجبة في السير (بتأثير المجال المذكور) في مسار دائري نصف قطره R ، فإذا فرض أن m كتلة الأيون الموجب الذي شحنته q وسرعته v ، فإن R تحدد من المعادلة (٥-١٠٦).

ويضبط تردد مصدر الجهد V بحيث ينعكس اتجاهه في اللحظة التي ينتقل فيها الأيون الموجب من D_1 إلى D_2 وبالعكس. ومعنى هذا أنه لو كان D_1 سالب الجهد، D_2 موجب الجهد فإن الأيون الموجب الشحنة سيتجه أثناء دورانه إلى D_1 وحينما يتم نصف دورة داخل D_1 يدخل إلى D_2 التي يتغير جهدها عند هذه اللحظة إلى جهد سالب وهذا يظل الأيون في دورانه منطلقا بسرعة أكبر، وهكذا يتم تعجيل الأيون بواسطة فرق الجهد V بين الحجرتين وذلك في كل مرة ينتقل فيها الأيون بين الحجرتين وهذا تزداد السرعة v تدريجيا وبالتالي يزداد نصف قطر المسار R ، طبقا للعلاقة السابقة، تدريجيا حتى يخرج الأيون في النهاية بطاقة عالية جدا قد تصل إلى عشرة ملايين إلكترون فولت أو أكثر رغم أن فرق الجهد المسلط لا يتعدى عشرة كيلوفولت.



شكل (٥-٢٩): السيكلوترون

والسرعة الزاوية للإيون الموجب داخل جهاز السيكلوترون طبقا للمعادلة (٥-١٠٧) هي :

$$\omega = B \frac{q}{m}$$

ويلاحظ هنا أن السرعة الزاوية التي يتحرك بها الإيون الموجب لا تعتمد على كل من نصف قطر المسار R وسرعة v ولكن تعتمد فقط على الحث المغناطيسي B والنسبة بين شحنة الإيون وكتلته q/m .

بفرض أن أقصى سرعة وصل إليها الإيون الموجب عندما كان بالقرب من حافة نصف العلبة D_1 وقبل خروجه من الفتحة الجانبية المخصصة لذلك هي $v_{\max}$. وطبقا للعلاقة (٥-١٠٦) نجد أن هذه السرعة القصوى تعطى بالمعادلة :

$$v_{\max} = BR' \frac{q}{m} \dots\dots\dots (٥ - ١٠٩)$$

حيث R' في هذه الحالة تساوي نصف قطر D_1 .
ولكن متوسط الطاقة الحركية للإيون الموجب تعطى بالعلاقة :

$$W_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

وبالتعويض من المعادلة (٥-١٠٩) عن $v_{\max}$ يُحصل على :

$$W_{\max} = \frac{1}{2} m \left(\frac{q}{m} \right)^2 B^2 R'^2$$

ولكن هذه الطاقة الحركية القصوى يمكن معادلتها بالطاقة المكتسبة للإيون الموجب نتيجة لعملية التعجيل .
أي أن :

$$\therefore W_{\max} = qV$$

$$\therefore V = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B^2 \cdot R'^2 \dots\dots\dots (٥-١١٠)$$

وهذا هو فرق الجهد المطلوب لإنتاج طاقة الحركة نفسها في دفعة واحدة . فإذا كانت الإيونات عبارة عن بروتونات فإن :

$$\frac{q}{m} = 9.6 \times 10^7 \text{ C/kg}$$

وكانت قيمة الحث المغناطيسي B ونصف القطر هما :

$$B = 1.3 \text{ Wb/m}^2$$

$$R' = 0.48 \text{ m}$$

فبالتعويض في المعادلة (٥-١١٠) يُحصل على الجهد التالي :

$$V = \frac{1}{2} \times 9.6 \times 10^7 \times (1.3)^2 \times (0.48)^2$$

$$\therefore V = 19 \times 10^6 \text{ V} , \quad \text{or} \quad 19 \text{ million V}$$

وهذا يبين أنه يلزم لتعجيل الأيونات للحصول على الطاقة الحركية نفسها للإيونات المندفعة خارج الجهاز فرق جهد يساوي تسعة عشر مليوناً من الفولت وهذا الجهد العالي لا يمكن الحصول عليه إلا بواسطة بعض الأجهزة الحديثة مثل جهاز فان دي جراف (Van de Graaf generator) الذي يمكنه توليد جهد يصل إلى حوالي ١٠ مليون فولت فقط .

ملحوظة

حيث إن الأيون لا بد وأن تكون سرعته الزاوية ثابتة حتى يصل الأيون إلى مدخل كل حجرة في اللحظة نفسها التي ينعكس عندها جهد الحجرتين . فإن معنى هذا أن تظل m, q, B حسب العلاقة (١٠٧-٥) ثابتة ولكن m سوف تزداد بازدياد السرعة (v) أثناء التعجيل المتواصل ، طبقاً للنظرية النسبية لأينشتاين مما يؤدي إلى التعارض مع نظرية عمل الجهاز .

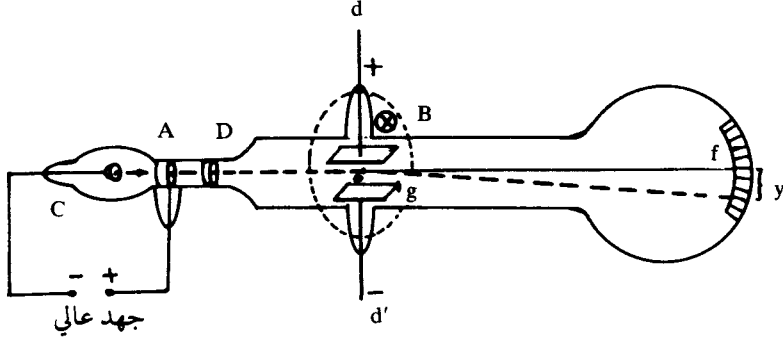
وهذا التغير في الكتلة يكون واضحاً في حالة الإلكترونات ولهذا لا يستخدم الجهاز في تعجيل الإلكترونات .

(١١-٥) قياس الشحنة إلى الكتلة (q/m) للإلكترون

Measurement of (q/m) of the electron

السير طومسون (Sir J. J. Thomson) عام ١٨٩٧م اكتشف الإلكترون أثناء دراسة لأشعة المهبط واستخدم الجهاز المبين بالشكل (٣٠-٥) لتحديد نسبة الشحنة إلى الكتلة للإلكترون . ويتركب هذا الجهاز من أنبوبة مفرغة تحتوي على مهبط C ومصعد مثقوب A مسلط بينهما فرق جهد V يصل إلى بضعة آلاف فولت . وبهذا تتجه الأيونات الموجبة (المتكونة في الغاز المتبقي في الأنبوبة بفعل الأشعة الكونية أو تأثير عامل مشع) إلى المهبط A بسرعة كبيرة لتأثرها بالمجال الكهربى المسلط بين المهبط والمصعد ، وحينما تصطدم هذه الأيونات الموجبة بالمهبط فإنها سوف تعمل على تحرير الإلكترونات من مادة المهبط وهذه الإلكترونات تنطلق متجهة إلى المصعد A بسرعة عالية نتيجة تأثرها بالمجال الناشئ عن فرق الجهد V وتنفذ من المصعد إلى قرص آخر D مثقوب وبذلك تسير على

هيئة شعاع إلكتروني مستقيم (يطلق عليه شعاع المهبط cathode ray). وهذه العملية الميكانيكية لتحرير الإلكترونات من سطح المهبط تسمى بالانبعاث الثانوي (secondary emission) وهذا الشعاع يمر خلال لوحين d, d' مسلط بينهما مجال كهربائي رأسي شدته E يؤدي إلى انحراف الشعاع إلى أسفل.



شكل (٥-٣٠): جهاز طومسون لتحديد النسبة q/m للإلكترون.

وبتسليط مجال آخر مغناطيسي منتظم كثافة فيضه B في الاتجاه الممين بالشكل (٥-٣٠) فإن الشعاع سينحرف إلى أعلى.

فإذا أمكن التحكم في قيمة المجالين الكهربائي والمغناطيسي بحيث لا ينحرف الشعاع الإلكتروني أثناء مروره في منطقة نفوذ المجالين بين اللوحين d, d' فإن الشعاع سوف يسير مستقيماً دون أي انحراف متجهها إلى شاشة ومضية حيث يصطدم بها عند النقطة f وفي هذه الحالة تكون:

$$F_e = F_m$$

$$qE = qvB \quad \dots \dots \dots (٥-١١١)$$

$$\therefore v = \frac{E'}{B}$$

وبهذا تحسب سرعة الإلكترونات v وهي السرعة التي خرج بها من ثقب المصعد ودخل بها في منطقة النفوذ بين اللوحين.

وإذا حذف الآن المجال الكهربى E وترك المجال المغناطيسى B فقط يؤثر وحده على الشعاع الإلكتروني فإن هذا الشعاع ينحرف إلى أعلى متخذاً مساراً على هيئة قوس من دائرة نصف قطرها R تعطى قيمته من المعادلة (٥-١٠٦).

وبالتعويض عن v من المعادلة (٥-١١١) في المعادلة (٥-١٠٦) يُحصل على :

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2} \dots\dots\dots (٥-١١٢)$$

حيث E, B معلومتان أما R فيمكن معرفته من المعادلة التالية :

$$R = \frac{(l/2 + l')l}{y}$$

حيث $gf=l', og=l/2$ و y مقدار الإزاحة على الشاشة كما في شكل (٥-٣٠) وبهذا يمكن حساب R . وبالتعويض بقيمتها في المعادلة (٥-١١٢) تحسب النسبة بين شحنة الإلكترون وكتلته (e/m) . وطبقاً لأحدث التجارب لايجاد هذه النسبة بطريقة طومسون وجد أن هذه النسب تساوي :

$$\frac{e}{m} = 1.7592 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

حيث غالباً يرمز لشحنة الإلكترون بالرمز e .

ملاحظات على تجربة طومسون

١- يمكن حذف المجال المغناطيسى «بعد الانتهاء من تعيين v » بدلاً من حذف المجال الكهربى ولهذا فإن الشعاع الإلكتروني سوف يتأثر فقط بالمجال الكهربى E وينحرف إلى أسفل بمسافة معينة تعطى بالعلاقة (١-٧٧) حيث :

$$y = \frac{e}{m} \frac{El}{v^2} \left(\frac{1}{2} l + l' \right) \dots\dots\dots (٥-١١٣)$$

وبالتعويض عن v يمكن حساب $\frac{e}{m}$.

ب - يمكن اعتبار أن الشغل المبذول على الإلكترونات بواسطة تسليط فرق الجهد V بين المهبط والمصعد يتحول كله إلى طاقة حركة يصل بها الإلكترون إلى ثقب المصعد بسرعة v .

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 \therefore \frac{e}{m} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{V} \dots (١١٤-٥)$$

ج - لقد تم تطوير أنبوبة أشعة المهبط لتأخذ شكلا حديثا يستخدم في أجهزة التلفزيون ورأسم الذبذبات الكاثودي (cathode ray oscillograph) وتتميز عن أنبوبة طومسون بأن الإلكترونات تنبعث بتسخين المهبط لدرجة حرارة عالية وهذا الانبعاث يسمى بالانبعاث الحراري (thermo-ionic emission).

ويمثل الشكل (٣١-٥) طريقة جديدة لقياس e/m وباتباع طريقة طومسون نفسها ولكن باستعمال صمام إلكتروني ثلاثي والذي يحتوي على مدفع إلكترونات (electron gun) يتكون من :

١ - مهبط (C) cathode يعمل على انبعاث الإلكترونات بطريقة تسخين الفتيلة (F).

٢ - الشبكة (G) grid جهدها موجب صغير وتعمل على تركيز شعاع الإلكترونات.

٣ - المصعد (P) plate جهده موجب عالٍ مقداره V ، يعمل على تسارع الإلكترونات.

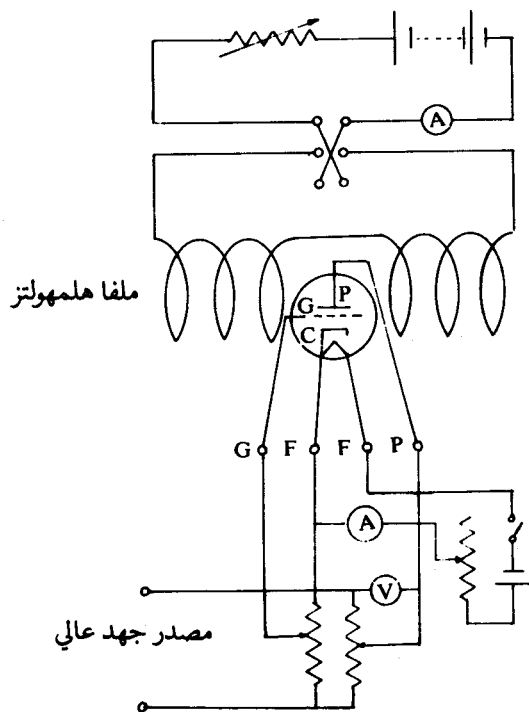
يوجد أعلى المدفع قرص دائري مثبت أفقيا يخرج من خلال ثقب في منتصفه شعاع الإلكترونات بشكل عمودي على القرص . وفي السطح العلوي للقرص توجد حول الثقب أربع دوائر مركزها الثقب وأنصاف أقطارها $R=0.5cm, 1.0cm, 1.5cm$ and $2.0cm$ ويحتوي الصمام على غاز خامل يسبب رؤية شعاع الإلكترونات.

ويوجد حول الصمام ملفا هلمهولتز لتوليد مجال مغناطيسي حثه B تتوقف قيمته

على شدة التيار I ، بند (٢-٥)، يعمل على ثني شعاع الإلكترونات ليكون نصف دائرة نصف قطرها R وتكون قيمته إحدى القيم الأربع السابقة الذكر. (يعتمد مقدار انحناء شعاع الإلكترونات على قيمة B و V).

يمكن حساب e/m بتطبيق العلاقتين (٥-١٠٦) و (٥-١١٤) حيث يُحصل على:

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2 R^2} \dots\dots\dots (٥-١١٥)$$



شكل (٥-٣١): صمام إلكتروني ثلاثي وملفا هلمهولتز لتعيين النسبة e/m .

(٣-١١-٥) تأثير هول Hall effect

يستخدم تأثير هول في تعيين درجة تركيز الإلكترونات الحرة (free electrons) في المعادن وأشباه الموصلات.

صفحة معدنية رقيقة سمكها d وعرضها a يمر بها تيار شدته I في اتجاه x كما في شكل (٥-٣٢). فإذا قيس الجهد V في الاتجاه y فإنه يكون صفرا ولكن إذا سلط مجال مغناطيسي حثه B في الاتجاه z ينشأ فرق جهد في الاتجاه y يسمى جهد هول (Hall vol- tage) وذلك لأن الإلكترونات التي تتحرك بسرعة انسيابية v ستأثر بالمجال B بقوة قدرها $F_m = qvB$ في الاتجاه y فتتحرف وتتراكم على أحد جوانب الصفحة الذي يصبح سالبا بينما يصبح الجانب المقابل له موجبا وينشأ فرق جهد بينهما V_H يطلق عليه جهد هول يؤدي إلى تولد مجال كهربائي E_y في الاتجاه y [شكل (٥-٣٢)].

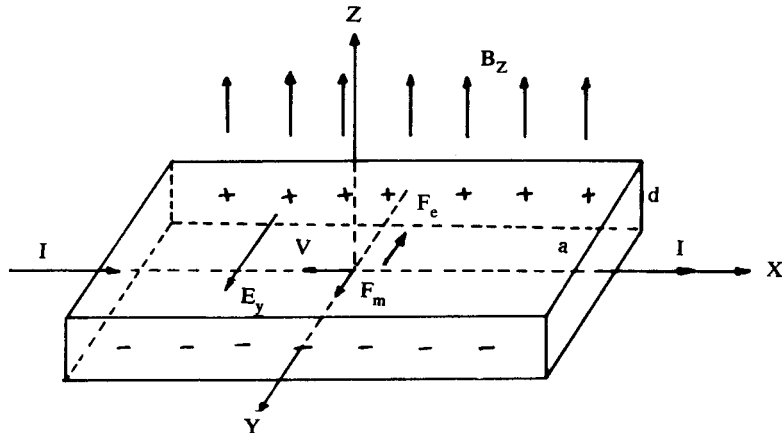
ويقف تراكم الإلكترونات في الجانب المذكور عندما تصبح القوة F_m المؤثرة على الإلكترونات بواسطة المجال المغناطيسي B مساوية ومضادة للقوة F_e المؤثرة على الإلكترونات بواسطة المجال الكهربائي الجديد E_y الناشئ عن تولد فرق جهد هول وفي هذه الحالة المتزنة يكون:

$$qvB = -qE_y$$

$$\therefore v = -E_y/B \quad \dots\dots\dots (٥-١١٦)$$

$$\therefore V_H = -a E_y = a v B \quad \dots\dots\dots (٥-١١٧)$$

والإشارة السالبة في المعادلة (٥-١١٦) تدل على تعاكس القوتين F_m و F_e في الاتجاه.



شكل (٥-٣٢): صفحة معدنية سمكها d وعرضها a يمر بها تيار I في اتجاه محدد x وضعت في مجال مغناطيسي حثه B «تحقيق تأثير هول».

إذا فرض أن معدن الصفیحة ىحتوى على n إلكترون حر (free electron) فى وحدة الحجم، ومساحة مقطع الصفیحة S فإن التيار المار فى الصفیحة [بند (٤-١)] هو:

$$I = nevS$$

وبالتعویض عن v فى المعادلة (٥-١١٧) نحصل على :

$$V_H = \frac{aBI}{n.e.S} = \frac{IB}{n.e.d} \dots\dots\dots (٥-١١٨)$$

حيث $S = ad$ والمقدار $\frac{1}{ne}$ ىسمى بمعامل هول (Hall coefficient) ويرمز له بالرمز R_H

$$\therefore V_H = \frac{1}{d} IB R_H \dots\dots\dots (٥-١١٩)$$

ويمكن تعیین تركيز الإلكترونات الحرة n عمليا، ويمكن مقارنتها نظريا فى حالة المعادن من المعادلة :

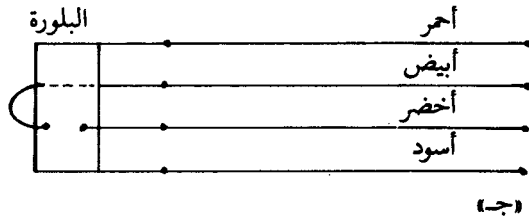
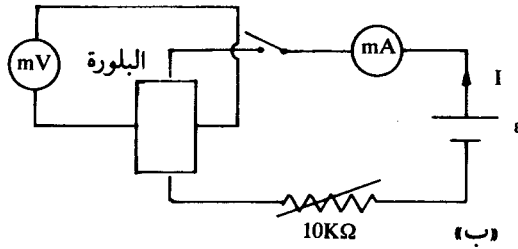
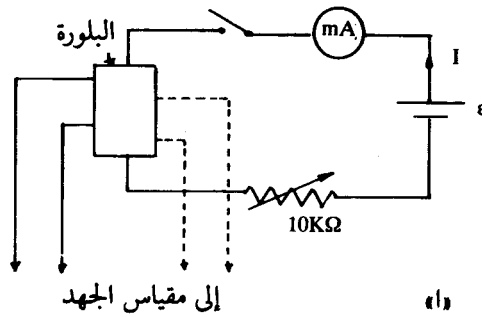
$$n = \frac{\text{كثافة المعدن} \times \text{عدد أفوجادرو}}{\text{(الوزن الذري)}} \dots\dots\dots (٥-١٢٠)$$

فإذا كانت n كبيرة بالنسبة لموصل ما، فإن معامل هول R_H يكون صغيرا جدا ويصعب قياسه ولذلك فإن مادة الصفیحة غالبا تكون مادة شبه موصلة مثل الجرمانيوم حيث n صغيرة، وليس معنى هذا أن الأمر مقتصر فقط على أشباه الموصلات فقد ىستعمل النحاس والحديد والبزموت ولكن ىشترط لذلك أن تكون سماكة الصفیحة فى حدود 0.00038 cm للنحاس والحديد وفى حدود 0.00005 cm للبزموت، كما يجب استعمال أجهزة حساسة لقياس الجهد ومجال مغناطیسي عالٍ .

وئحصل من المعادلتين (٤-٧) و(٥-١١٩) على :

$$R_H = \frac{E_y}{B \sigma E} \dots\dots\dots (٥-١٢١)$$

وئحصل من المعادلتين (٤-١٠) و(٥-١١٧) على :



شكل (٥-٣٣): (أ، ب) الدوائر المستخدمة لقياس جهد هول.
ج- مجس هول، وهو عبارة عن بلورة معدنية
ووضع توصيل الأسلاك لجهاتها الأربع.

$$\mu = \frac{E_y}{BE} \dots \dots \dots (٥-١٢٢)$$

حيث E المجال الكهربي للتيار I ، ومن المعادلتين (٥-١٢١) و (٥-١٢٢) يُحصل على :

$$\mu = \sigma R_H = \frac{\sigma}{ne} \dots \dots \dots (٥-١٢٣)$$

وهذه المعادلة هي المعادلة (٤-١٩) نفسها.

ويمكن قياس التوصيلية للمادة بإمرار تيار كهربى I بين طرفي الصفيحة وقياس فرق الجهد لأى نقطتين على جانب المادة كما في شكل (١٣٣ - ٥)، قبل تسليط المجال المغناطيسي الذي حثه B، باستخدام مقياس الجهد.

كما يمكن حساب معامل هول R_H إذا عرفت B بصورة دقيقة وقيست V_H كما في شكل (٣٣ - ٥) وكذلك I.

إذا عرفت R_H لهذه المادة فإنه يمكن استعمالها بعد ذلك لمعرفة شدة أي مجال مغناطيسي مجهول. وتجهز المادة «على شكل صفيحة رقيقة جداً» مع توصيل الأسلاك الموصلة لجهاتها الأربع، كما في شكل (٣٣ - ج - ٥)، وتسمى بمجس هول (Hall probe).

مثال (١١-٥)

استعمل مجس هول لقياس مجال مغناطيسي، صمم هذا الجهاز على أساس أنه إذا مر به تيار كهربى قيمته 120 mA ووضع في مجال مغناطيسي معلوم قيمة حثه 0.08 Wb/m^2 كان جهد هول $0.7 \mu\text{V}$
 أ - وضع هذا المجس في مجال مغناطيسي مجهول فكانت قيمة جهد $0.33 \mu\text{V}$ ما قيمة حث هذا المجال المغناطيسي.

ب - احسب تركيز الإلكترونات الحرة، n، لمادة المجس إذا كان سمك المادة 2mm.

الحل

$$V_H = 0.70 \mu\text{V} \rightarrow B = 0.08\text{T}$$

$$V'_H = 0.33 \mu\text{V} \rightarrow B' = ?$$

$$B' = \frac{0.33 \times 0.08}{0.70} = 0.0377 \text{ T}$$

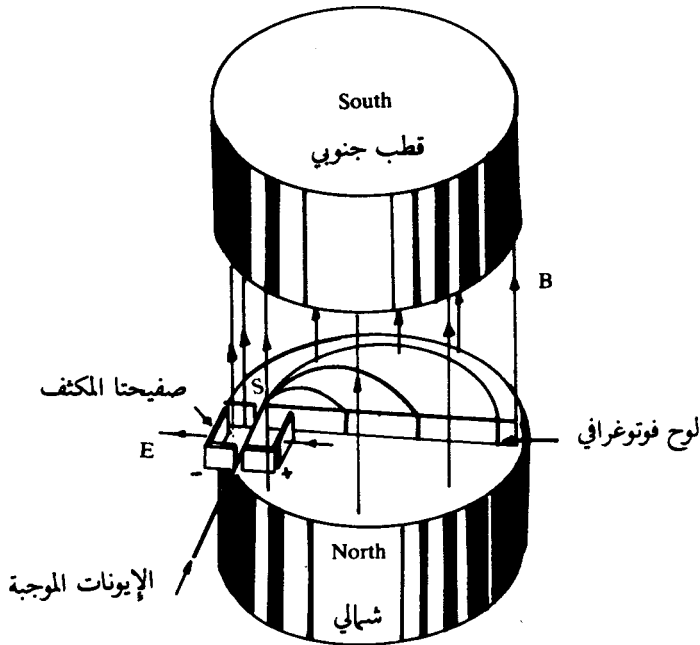
$$R_H = \frac{V_H d}{I B} = \frac{0.7 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3}}{120 \times 10^{-3} \times 0.08} = 1.458 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{C}$$

$$n = \frac{1}{eR_H} = \frac{1}{1.602 \times 10^{-19} \times 1.458 \times 10^{-7}}$$

$$\therefore n = 4.281 \times 10^{25} \text{ electrons / m}^3$$

(٤-١١-٥) مطياف الكتلة Mass spectrograph

يستعمل مطياف الكتلة لقياس الكتل الذرية (atomic masses) بدرجة كبيرة من الدقة ويوضح الشكل (٥-٣٤) مكوناته . ويعمل كالآتي :



شكل (٥-٣٤) : مطياف الكتلة .

تمر الذرات المتأينة (ionic atoms) من مصدرها وتمر بمنتهي السرعة (selectors velocity) والمكون من لوحين مكثف مسلط بينهما مجال كهربائي E ومجال مغناطيسي B متعامد مع E. وبعد الخروج من الفتحة S تدخل الأيونات في حجرة تقع تحت تأثير مجال مغناطيسي منتظم فقط قد يختلف عن B وقد يساويه .

ففي منطقة نفوذ المجالين B و E يمكن التحكم في قيمة E بحيث لا تنحرف الأيونات وتسير في خط مستقيم وبذلك يمكن معرفة سرعتها حسب المعادلة (٥-١١٦) أي أن:

$$v = E/B$$

ثم تؤثر القوى المغناطيسية على الجسيمات ذات السرعات المحدودة v العمودية على المجال مما يجعل حركة الأيونات في مسار دائري نصف قطره R . وبعد إتمام نصف دورة كاملة (180°) تصل الأيونات إلى الكاشف (detector) وهو عبارة عن فيلم فوتوغرافي أو وسائل أخرى. فإذا كانت q هي شحنة الأيون المتحرك في المجال B بسرعة قدرها v فإن القوة المؤثرة عليه هي:

$$F = q v B$$

وهذه القوى تساوي القوة الطاردة المركزية أي أن:

$$q v B = m \frac{v^2}{R}$$

$$m = q B R / v \dots\dots\dots (٥-١٢٤)$$

وحيث إن q , B , v معروفة فإنه بمعرفة R يمكن معرفة m للإيون، وقد وجد بالتجربة أنه إذا كانت سرعة الذرات أحادية التأين (singly ionized atoms) تساوي 2.1×10^5 m/s في مجال مغناطيسي قدره 0.13 Tesla فإن نصف القطر الملاحظ يساوي 0.2 m ومنه نجد أن:

$$\frac{q}{m} = \frac{2.1 \times 10^5 \text{ m/s}}{(1.3 \times 10^{-1} \text{ T})(2 \times 10^{-1} \text{ m})} = 8 \times 10^6 \text{ C/kg}$$

وإذا كانت شحنة الأيون هي:

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تكون كتلته هي:

$$m = 2.0 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

ويستخدم مطياف الكتلة أيضا للكشف عن النظائر، وهي تلك النويات التي لها العدد نفسه من البروتونات ولكن تختلف في عدد النيوترونات.

مسائل (١٢-٥)

١ - مجال مغناطيسي حثه B يساوي ٢ وبر/متر^٢ وينتجه مع المحور z . احسب كثافة التدفق Φ المار خلال سطح مربع مساحته ٢ متر^٢ إذا كان مستوى السطح يعمل زاوية قدرها ١٥° مع المحور z .

٢ - مجال مغناطيسي ينتجه مع المحور z وتتغير قيمته ، B ، مع اتجاه x حسب العلاقة :

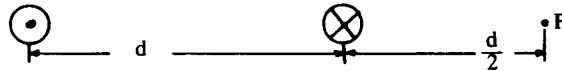
$$B = B_0 \{1 + (z/x_0)^2\}$$

حيث B_0 ، x_0 ثابتان . (لا تتغير B مع y أو z)
أثبت أن كثافة التدفق Φ المارة خلال مستطيل يقع في المستوى xy طوله a وعرضه b ومركزه يقع في النقطة $x=c$ و $y=0$ تساوي :

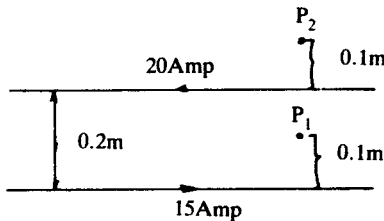
$$\Phi = AB(c) + AB_0 b^2/12x_0^2$$

حيث $B(c)$ قيمة الحث عند مركز المستطيل . افترض أن جهة المستطيل التي طولها b توازي محور x .

٣ - سلكان طويلان متوازيان يحمل كل منهما تيارا قدره I في اتجاهين متعاكسين كما في الشكل . احسب قيمة المجال عند النقطة P .

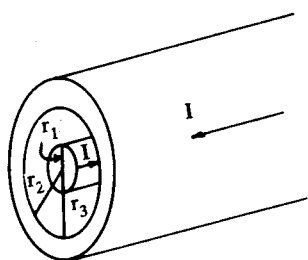


٤ - سلكان طويلان متوازيان المسافة بينهما ٢ ، ٠ متر يحمل أحدهما تيارا قدره ٢٠ أمبير والآخر ١٥ أمبير كما في الرسم . احسب المجال المغناطيسي عند النقطتين P_1 ، P_2 .

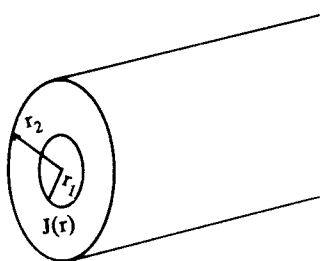


٥ - سلك طوله l يمر به تيار قدره I ، هذا السلك سهل الثني يمكن أن يأخذ الشكل الدائري أو المربع أو المستطيل أي هذه الأشكال يكون المجال المغناطيسي في مركزه أكبر.

٦ - كابل ذو موصلين متحدى المحور (coaxial cable) طويل نصف قطر الموصل الداخلي r_1 أما الموصل الخارجي فنصف قطره الخارجى r_3 والداخلي r_2 كما في الشكل . يحمل أحد الموصلين تيارا



كهربيا قيمته I ويحمل الموصل الثاني التيار نفسه ولكنه في اتجاه معاكس كثافة التيار للموصلين منتظم . ضع تعبيرا رياضيا يوضح العلاقة بين B و r حيث تأخذ r قيمتها من $r=0$ إلى $r=\infty$ وارسم علاقة بين B و r .



٧ - موصل اسطواني أجوف نصف قطره الداخلي r_1 والخارجى r_2 ويحمل تيارا قدره I وكثافة التيار J غير منتظمة على الموصل احسب المجال المغناطيسي B عندما تكون $r_1 < r < r_2$ و $r < r_1$ و $r > r_2$ في الحالات التالية :

١ - تتغير J خطيا (linearly) مع المسافة في المنطقة الواقعة بين r_1 و r_2 ،

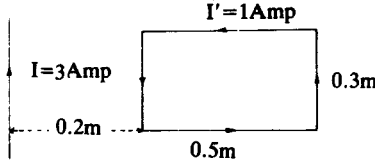
حيث $J(r) = \alpha r$ مع α مقدار ثابت .

ب - تتغير J مع المسافة في المنطقة نفسها حسب المعادلة $J(r) = \beta r^2$

ج - ما قيمة α و β .

٨ - يحمل ملف دائري تيارا شدته I فإذا كانت N عدد لفاته و r نصف قطره فاحسب الشغل المبذول لإدارة الملف في مجال مغناطيسي كثافة فيضه «حثة المغناطيسي

« B ، وذلك من الوضع الذي تكون فيه $\theta_0 = 0$ إلى $\theta = 180^\circ$ حيث θ هي الزاوية بين اتجاه المجال المغناطيسي المؤثر والعمود على مستوى الملف فإذا كان $I = 0.1$ أمبير ، $N = 100$ لفة ، $r = 5\text{cm}$ ، $B = 1.5$ وبر / متر^٢ فاحسب الشغل .



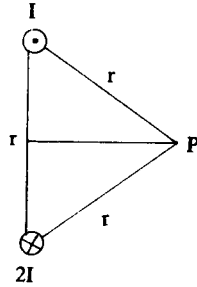
٩ - ملف مستطيل يحمل تيارا قدره

أمبير واقع قرب سلك طويل

كما في الشكل يحمل تيارا قدره

٣ أمبير احسب مقدار واتجاه

القوة المؤثرة على الملف .



١٠ - ليكن لدينا سلكان طويلان المسافة

بينهما r يجري في أحدهما تيار مقداره

I والأخرى ضعف I ولكن يضاده في

الاتجاه . احسب كثافة الفيض

المغناطيسي عند النقطة P .

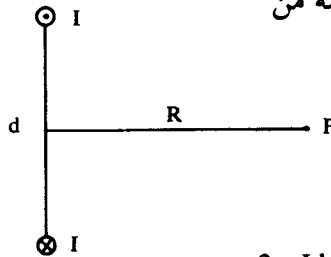
١١ - باستخدام قانون أمبير لكثافة الفيض المغناطيسي احسب كثافة الفيض المغناطيسي لسلك يمر به تيار I عند نقطة تبعد r من السلك .

١٢ - ليكن لدينا سلكان طويلان المسافة بينهما d ويجري في أحدهما تيار مقداره I

والآخر التيار نفسه ولكن يضاده في الاتجاه . أثبت أن كثافة الفيض B عند النقطة

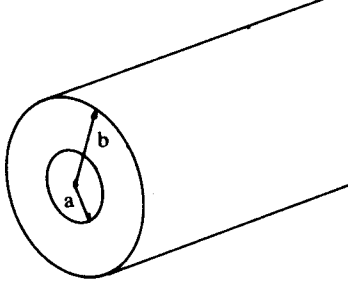
P التي تكون على البعد نفسه من

السلكين هي :



$$B = \frac{2\mu_0 Id}{\pi(4R^2 + d^2)}$$

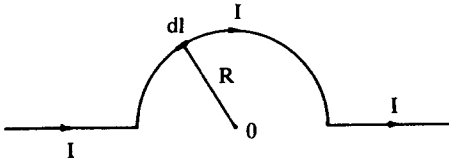
١٣ - بتطبيق قانون أمبير احسب كثافة الفيض المغناطيسي على مسافة r من مركز



موصل اسطواني أجوف نصف قطره
الداخلي a والخارجي b وشدة التيار
المر فيه I . علما بأن التيار موزع
بانتظام خلال سطح الموصل.

١٤ - يصنع سلك طويل تحديدا

نصف دائري ويمر به تيار
كهربائي مقداره I . احسب
الحث المغناطيسي في مركز
نصف الدائرة.



١٥ - قرص دائري معزول نصف قطره a مشحون بشكل منتظم بكثافة سطحية σ وهو

يدور حول مركزه بسرعة زاوية (ω) والمطلوب :

أ - إيجاد المجال المغناطيسي الناتج عند مركز القرص .

ب - إيجاد المجال المغناطيسي عند نقطة تقع على محوره وتبعد عن مركزه بمقدار
 b حيث $b \gg a$.

١٦ - صفيحة طويلة ورقيقة جدا «مهملة السماكة» من مادة النحاس عرضها a .

احسب المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة R من مركز الصفيحة والمتعامد
معها.

١٧ - ملف طويل يتألف من عدد من اللفات الدائرية المتلاصقة ، نصف قطر الملف

3.0 سم ويحمل تيارا قدره 1.0 أمبير فإذا كان الحث المغناطيسي B عند مركز الملف
يساوي 1.4×10^{-4} وبر/متر^٢ . فاحسب عدد لفات الملف .

١٨ - سلك طويل يحمل تيارا شدته 50 أمبيراً . وضع في مجال مغناطيسي منتظم قيمة حثه

$B = 0.200$ بر/متر^٢ ويصنع السلك زاوية قدرها 30° مع اتجاه المجال .
احسب القوة الواقعة على وحدة الأطوال للسلك .

١٩ - ملف مستطيل الشكل طوله 0.12 مترا وعرضه 0.18 مترا يتألف من 240 لفه من سلك رفيع ما هو عزم ثنائي القطب (dipole moment) لهذا الملف حينما يحمل تيارا قيمته 60 أمبيراً، عزم الازدواج إذا وضع المستطيل في مجال مغناطيسي منتظم قيمة حثه $B = 0.24$ وبر/متر^٢ ويصنع زاوية قدرها 30° مع مستوى الملف .

٢٠ - شحنة نقطية مقدارها 1.8×10^{-6} كولوم تتحرك في اتجاه محور السينات بسرعة قدرها 800 متر/ثانية . يوجد مجال مغناطيسي في المستوى yz ويعمل زاوية قدرها 45° مع محور y فإذا كان الحث المغناطيسي B يساوي 0.72 نيوتن/أمبير - متر فاحسب قيمة القوة المغناطيسية على الشحنة وحدد اتجاهها .

٢١ - مجال كهربي قيمته 200 فولت/متر ومجال مغناطيسي قيمة حثه 0.80 نيوتن/أمبير - متر يؤثران على إلكترون فكانت محصلتهما تساوي الصفر . فإذا كان المجالان متعامدين ما هي قيمة سرعة الإلكترون؟ وما هو اتجاهها؟

٢٢ - ديوترون deuteron (كتلته $2M_p$ وشحنته $+e$) سورع من حالة السكون خلال جهد كهربي قيمته 500 فولت فاكسب سرعة قدرها v ، ما هو نصف قطر مداره إذا وضع في مجال مغناطيسي قدره 0.5 وبر/متر^٢؟

٢٣ - شحنة قيمتها 6×10^{-6} كولوم تتحرك بسرعة قدرها 1500 متر/ثانية في اتجاه محور x وفي مجال مغناطيسي قدره 80 نيوتن/أمبير - متر واقع في المستوى xy ويصنع زاوية قدرها 30° مع x
احسب قيمة واتجاه القوة المؤثرة على هذه الشحنة .

٢٤ - جسيم α يسير في مسار دائري نصف قطره 0.45 متر وذلك في مجال مغناطيسي

كثافة الفيض 1.2 وبر/متر². احسب:

ا - سرعة الجسيم .

ب - زمن الدورة الواحدة .

ج - طاقة الحركة بالإلكترون فولت .

د - فرق الجهد اللازم لإكسابه هذه الطاقة .

٢٥ - تستعمل ظاهرة هول لحساب عدد الشحنات الحرة لوحدة الحجم (n) للمواد .

فإذا كانت المادة عبارة عن شريحة سمكها 15mm ويمر بها تيار كهربائي مقداره 12A

ثم وضعت في مجال مغناطيسي حثه 1.8 Wb/m^2 فكان مقدار جهد هول $0.122 \mu\text{V}$

ما قيمة n لهذه المادة .

٢٦ - إذا كانت سرعة إلكترون تساوي 10^7 متر/ثانية وكان اتجاه السرعة متعامدا مع

مجال مغناطيسي، ما هي شدة هذا المجال إذا كان قطر مدار الإلكترون يساوي

مترا واحدا؟

٢٧ - بروتون وديوترون ودقيقة α تم تعجيلها جميعا بواسطة جهد معين ثم أدخلت في

مجال مغناطيسي منتظم عمودي على اتجاه حركتها . قارن بين طاقة حركتها . وإذا

كان نصف قطر مدار البروتون 10cm فاحسب أنصاف أقطار مداري الديوترون

ودقيقة α .

٢٨ - في مطياف الكتلة كانت شدة المجال الكهربائي E بين لوحى المكثف 150

فولت/سم والحث المغناطيسي B لكل من المجالين المغناطيسيين 0.5 وبر/متر² .

فإذا كانت الايونات الداخلة للجهاز هي النظائر الثلاثة للمغنسيوم

^{24}Mg ، ^{25}Mg ، ^{26}Mg وشحنة كل منهم موجبة ومساوية لشحنة الإلكترون .

فأوجد المسافة بين الخطوط المتكونة على اللوح الفوتوغرافي بواسطة النظائر

الثلاثة مع اعتبار أن الوزن الذري لكل نظير يساوي عدده الكتلي مضروبا في

وزن ذرة الهيدروجين وهو $(1.673 \times 10^{-24} \text{ gm})$.



الحث الكهرومغناطيسي

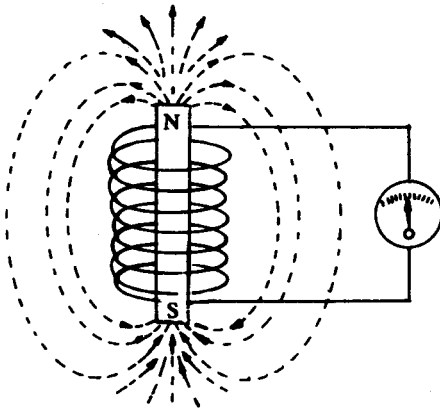
Electromagnetic Induction

- مقدمة ● حركة موصل في مجال مغناطيسي ● قانون فاراداي ● الحث والحركة النسبية ● الحث الذاتي ● الحث المتبادل ● توصيل ملفات الحث ● سريان التيار في دائرة حثية ● طاقة الحث ● شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي ● المولدات ● المحرك الكهربائي ● المحول ● البيتا ترون ● طريقة ملف الاستكشاف لقياس التدفق المغناطيسي ● مسائل .

(١-٦) مقدمة

Introduction

اكتشف العالم أمير وعلماء آخرون، مثل أراغو (F. Arago) وبيوت (J. B. Biot)، خلال العشر سنوات التي تلت عام ١٨٢٠م، اكتشافات عديدة ومهمة حول المجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربائي في الموصلات كما ورد في الفصل الخامس. وأعقب ذلك دراسة للقوى بين موصلين يحملان تيارين كهربائيين وكذلك بين المغناطيسات (magnets) والموصلات التي تمر بها تيارات كهربائية. وفي خلال العامين ١٨٣٠م و١٨٣١م اكتشف العالم فاراداي (M. Faraday) من بريطانيا وهنري (J. Henry) من الولايات المتحدة ولنز (H. Lenz) من روسيا إمكانية الحصول على تيار كهربائي باستعمال المجالات المغناطيسية وكان للعالم فاراداي الأسبقية في اكتشاف الحقائق عن هذه الظاهرة.



يمثل الشكل (٦-١) تجربة فاراداي وهو عبارة عن ملف يتصل طرفاه بجلفانومتر، لقياس شدة التيار، وقضيب مغناطيسي فإذا كان الملف والقضيب المغناطيسي مستقرين فلا يمر تيار في الجلفانومتر أما إذا تحرك أحدهما فإنه سيمر تيار كهربائي حثي، ناتج عن قوة دافعة كهربية حثية، يتحدد اتجاهه حسب اتجاه الحركة.

شكل (٦-١): ملف يتصل طرفاه بجلفانومتر وقضيب مغناطيسي بداخله، لتحقيق قانون فاراداي الكهرومغناطيسي عند حركة الملف أو المغناطيس.

وكان لاكتشاف فاراداي أهمية كبرى في الحياة العملية فهو الأساس في تشغيل كل مولدات الكهرباء التي تمد بالقوة الكهربية. ولقد تحقق فاراداي من أهمية اكتشافه فركب مولدا ينتج تيارا صغيرا وكان لا يتجاوز عمله المختبرات فقط. وتطورت وسائل تشييد المولدات حتى أنتج أول مولد كهربائي تجاري في عام ١٨٨٠ ميلادية.

ويضيف هذا الاكتشاف لونا جديدا ومهما لإنتاج الطاقة وهو تحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربية.

(٦-٢) حركة موصل في مجال مغناطيسي

Motion of a Conductor in a Magnetic Field

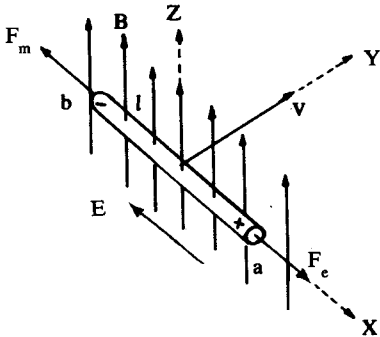
لقد درس في الفصل الخامس بند (٧-٥) حركة موصل طوله l موضوع في مجال مغناطيسي حثه B ويمر به تيار كهربائي I ووجد أن القوة الواقعة عليه تتناسب طرديا مع طوله l ومع التيار المار به I وكذلك الحث المغناطيسي B حسب المعادلة (٧٨-٥) وهي:

$$F_m = I l B \dots\dots\dots (٦-١)$$

إذا تحرك قضيب موصل طوله l بسرعة قدرها v في الاتجاه العمودي على B في مجال مغناطيسي منتظم حثه B واتجاهه عمودي على كل من l و v كما في الشكل (٦-٢)، وحيث إن الموصل يحتوي على إلكترونات حرة، فإنه حسب البند (٥-١٠) تكون هذه الإلكترونات خاضعة لقوة قدرها:

$$F_m = q v B \quad (٦-٢)$$

نتيجة تحركها بسرعة v في اتجاه عمودي على B . ويكون اتجاه هذه القوة واقع على امتداد السلك ab صوب الطرف b . ونتيجة لذلك فإن الإلكترونات الحرة q ستندفع وتتراكم عند الطرف b الذي يصبح سالبا وفي الوقت نفسه يصبح الطرف a موجبا وينشأ بذلك مجال كهربائي يتجه من a إلى b . ويستمر تراكم الإلكترونات الحرة حتى تتعادل القوة الكهربائية مع القوة المغناطيسية وعند ذلك يتوقف تراكم الإلكترونات.



وحسب المعادلة (٦-٢) تكون قيمة المجال الكهربائي الحثي هو:

$$E' = \frac{F}{q} = vB \quad (٦-٣)$$

أما إذا كان المجال غير متعامد مع السرعة فإن:

شكل (٦-٢): قضيب موصل طوله l يتحرك في مجال مغناطيسي منتظم يتجه عموديا مع سرعة القضيب v .

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \quad (٦-٣)$$

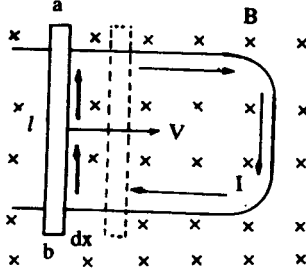
وتكون القوة الدافعة الكهربائية الحثية بين طرفي الموصل الذي طوله l هي:

$$\varepsilon = E' l = B l v \quad (٦-٤)$$

وبذلك يعد الموصل مصدرا لقوة دافعة كهربائية تعرف بالقوة الدافعة التأثيرية ε تؤدي إلى مرور تيار كهربائي I . وإذا وصلت الدائرة المبينة في الشكل (٦-٣) والذي ينزلق فيها الموصل ab دون احتكاك على ضلعي سلك آخر ثابت يتخذ شكل الحرف U قاطعا خطوط القوى للمجال المغناطيسي العمودي على الورقة إلى الداخل تتولد ق. د. ك.

ولحساب القوة الدافعة التأثيرية

المتولدة بين طرفي السلك ab نتبع ما يلي :



تؤدي حركة السلك إلى اليمين إلى مرور تيار تأثيري I من a إلى b خارج السلك ومن b إلى a داخل السلك شكل (٦-٣). وطبقا لقاعدة فلمنج لليد اليسرى فإن السلك ab (الذي أصبح يمر به تيار تأثيري

I نتيجة حركته إلى اليمين) سوف يتأثر بقوة قدرها F إلى اليسار أي في اتجاه مضاد لاتجاه حركته طبقا للمعادلة (٦-١).

شكل (٦-٣): ينزلق قضيب موصل طوله l على قضيب آخر يتخذ شكل الحرف U في مجال مغناطيسي.

ولهذا فإنه لا بد أن يبذل شغل ضد هذه القوة لكي يحافظ على استمرار الحركة إلى اليمين أي على استمرار تولد القوة الدافعة التأثيرية والتيار التأثيري. فإذا فرض أن السلك سيتحرك مسافة قدرها dx في زمن قدرها dt بسرعة v فإن عنصر الشغل المبذول في تحريك السلك هو:

$$dW = Fdx$$

$$\therefore dx = vdt$$

$$\therefore dW = Fvdt$$

وبالتعويض عن F من المعادلة (٦-١) يُحصل على :

$$dW = Il/Bvdt$$

ولما كان المقدار $I \cdot dt$ هو الشحنة التأثيرية التي تحركت في الزمن dt فإن :

$$dW = B/vdq$$

وقد سبق أن عرف أن القوة الدافعة الكهربائية لمصدر بأنها النسبة بين الشغل المبذول لتحريك الشحنة وبين كمية هذه الشحنة.

$$\therefore \mathcal{E} = \frac{dW}{dq} = B/v \quad \dots\dots\dots (٦-٥)$$

وهي تمثل المعادلة (٦-٤) نفسها.

وإذا كانت R مقاومة السلك فإنه ينشأ عن هذه القوة الدافعة المستحثة تيار تأثيري قيمته:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B/v}{R} \quad \dots\dots\dots (٦-٦)$$

ولقد ورد في الفصل الرابع بند (٣-٤) أن القدرة الضائعة في المقاومة R هي:

$$P = \mathcal{E}I = B^2 l^2 v^2 / R \quad (W) \quad \dots\dots\dots (٦-٧)$$

وقد بذلت مقابل ذلك طاقة ميكانيكية لتحريك القضيب الخاضع لقوة F تعطى بالعلاقة (٦-١) وتكون القدرة المبذولة هي:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = Fv = B/vI$$

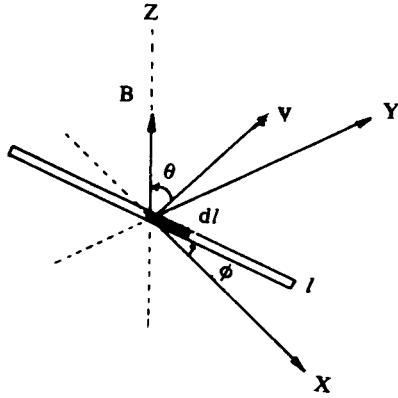
وبالتعويض من المعادلة (٦-٦) عن I يُحصل على:

$$P = \frac{dW}{dt} = B^2 l^2 v^2 / R$$

وهي القيمة نفسها السابقة للقدرة الضائعة [معادلة (٦-٧)] بشكل كهربائي مما يدل على أن الطاقة المتولدة قد صرف مقابلها طاقة ميكانيكية مساوية لها.

فإذا قيس B بوحدات (ويبر/متر^٢ Wb/m^2)، l بالمتر و v (بالمتر/ثانية m/s) فإن القوة الدافعة الكهربائية [(ق. د. ك) (E.M.F.)] تقاس بوحدات (جول/كولوم J/C أو الفولت V ...).

وقد استنتجت المعادلة (٦-٥) للحالة الخاصة التي يكون فيها المجال منتظماً (uniform) والتي يكون فيها طول القضيب وسرعته واتجاه المجال متعامدة، أما في الحالة العامة فإن:



شكل (٦-٤): يتحرك عنصر الطول dl من موصل طويل، بسرعة v في مجال مغناطيسي B ، بحيث تكون v و dl و B غير متعامدة (الحالة العامة).

$$d\mathcal{E} = Bvd\mathbf{l} \sin\theta \cos\phi \dots (٦-٨)$$

$$\therefore d\vec{\mathcal{E}} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \vec{\mathcal{E}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (٦-٨ \text{ ب})$$

وحسب المعادلة (٦-٨ ب) يكون:

$$\mathcal{E} = \int E' \cdot d\mathbf{l} \dots (٦-٩)$$

حيث dl عنصر الطول من الموصل الذي طوله l والذي يتحرك بسرعة v في مجال مغناطيسي حثه B . و θ الزاوية بين v و B . و ϕ الزاوية بين l والعمود على المستوى المحدد بوساطة v و B كما في شكل (٦-٤).

مثال (٦-١)

إذا كان الحث B في المنطقة ما بين قطبي مغناطيس كهربي يساوي 0.5 Wb/m^2 فاحسب القوة الدافعة الكهربية المستحثة في موصل مستقيم طوله 10 cm وعمودي على B ويتحرك في الاتجاه العمودي على طوله وعلى B بسرعة 1 m/s .

الحل

القوة الدافعة الكهربية المستحثة تعطى بالمعادلة:

$$\mathcal{E} = Blv \sin\theta \cos\phi$$

$$\therefore \theta = 90^\circ, \quad \phi = 0$$

$$B = 0.5 \text{ Wb/m}^2, \quad l = 0.1 \text{ m}, \quad v = 1 \text{ m/s}$$

$$\therefore \mathcal{E} = 0.5 \times 0.1 \times 1 = 0.05 \text{ V}$$

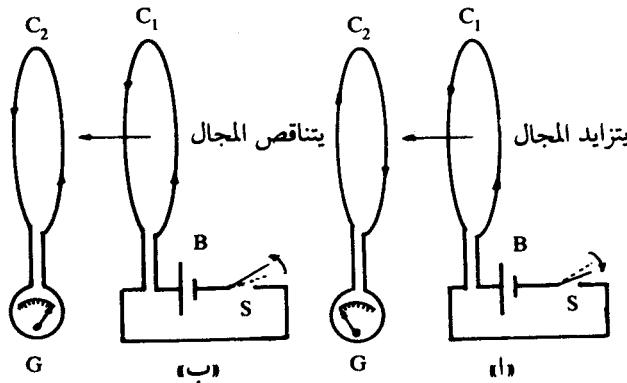
(٣-٦) قانون فاراداي

Faraday's Law

تابع فاراداي تجاربه، إلى جانب تجربته التي ذكرت في البند (١-٦)، حيث استبدل المغناطيس بدائرة كهربية مكونة من ملف ابتدائي C_1 وبطارية B ومقاومة متغيرة ومفتاح S كما في الشكل (٦-٥) بينما أبقى على الدائرة الأخرى المكونة من ملف ثانوي C_2 يتصل طرفاه بجلفانومتر G.

فإذا مر تيار في الملف الابتدائي C_1 فإنه لا يصحبه مرور تيار في الملف الثانوي C_2 لأنه لا توجد حركة نسبية (relative motion) ولكن عند لحظة غلق الدائرة وفتحها يحدث تيار مفاجئ في الملف C_2 وفي هذه الحالة تتكون الحركة النسبية من نمو أو اضمحلال (growth or decay) للمجال المغناطيسي الناتج عن التيار المار في الملف C_1 .

ويمثل الشكل (٦-١٥) وضع غلق الدائرة الابتدائية، فنمو التيار في الملف C_1 ينتج زيادة في المجال المغناطيسي من اليمين إلى الشمال داخل الملفين، فكلما زاد الفيض المغناطيسي الناتج من الملف C_1 يتولد تيار ينتج مجالا مغناطيسيا في الملف C_2 يعاكس اتجاه المجال المغناطيسي في الملف C_1 وحيث إن اتجاه المجالين متعاكسان فإن اتجاه التيارين متعاكسان.



شكل (٦-٥): ملفان أحدهما يتصل ببطارية والآخر بجلفانومتر:

أ - غلق دائرة الملف الابتدائي .

ب - فتح دائرة الملف الابتدائي .

بينما يمثل الشكل (٥ب - ٦) وضع فتح الدائرة الابتدائية فكلما تناقص التيار في C_1 يصحبه تناقص في الفيض المغناطيسي ويصحب ذلك مرور تيار حثي في الملف C_2 بحيث يمنع (prevents) اتجاهاه تقليل المجال المغناطيسي أي أنه سينتج مجالا مغناطيسيا في الملف C_2 له الاتجاه نفسه وهذا يعني أن اتجاه التيار الحثي في الملف C_2 له اتجاه التيار نفسه في C_1 .

وتحدث ظواهر مماثلة عند بقاء الدائرة الابتدائية مغلقة وزيادة شدة التيار في الملف C_1 أو انقاصه بواسطة المقاومة المتغيرة أو تحريك أحد الملفين بالنسبة للآخر.

ويمكن تلخيص اتجاه التيار التأثيري في الملف الثانوي كالتالي :

يكون اتجاه التيار التأثيري عكس اتجاه التيار الابتدائي في حالة الاقتراب أو ازدياد التيار الابتدائي أو غلق الدائرة الابتدائية . بينما يكون اتجاه التيار التأثيري في اتجاه التيار الابتدائي في حالة الابتعاد أو نقص شدة التيار الابتدائي أو فتح الدائرة الابتدائية .

لقد استنتج فاراداي من مجموع تجاربه أن التغير في الفيض المغناطيسي Φ الذي يخترق الملف C_2 هو العامل المؤثر في إنتاج القوة الدافعة الكهرية الحثية «التأثيرية» بغض النظر عن كون هذا التغير يحدث بواسطة مغناطيس أو بواسطة ملف آخر متحرك أو ثابت.

ولذلك ففانون فاراداي ينص علي :

«تناسب القوة الدافعة الكهرية التأثيرية $\mathcal{E}$ المتولدة في دائرة مغلقة مع معدل التغير في الفيض المغناطيسي $d\phi/dt$ خلال هذه الدائرة» .

ولاثبات ذلك فعند تحريك السلك ab ، شكل (٣-٦) ، مسافة قدرها dx إلى اليمين فإن مساحة المقطع $abdc$ للدائرة المغلقة سوف تنقص بمقدار :

$$dS = ldx$$

عند ذلك يتغير التدفق المغناطيسي خلال الدائرة بالمقدار:

$$d\Phi = B dS = B dx$$

بقسمة طرفي المعادلة على dt نجد أن:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dx}{dt} = Bv \dots\dots\dots (٦-١٠)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (٦-٥) يُحصل على قيمة القوة الدافعة الحثية $\mathcal{E}$:

$$\therefore \mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (٦-١١)$$

أما اتجاه التيار الحثي والقوة الدافعة الكهربية الحثية فيحدداهما قانون لينز (Lenz's law) الذي ينص على:

«يكون للتيار الحثي اتجاه بحيث يعطي فيضا مغناطيسيا له اتجاه يعاكس التغير في الفيض المغناطيسي الأصلي المسبب له».

أي أن القوة الدافعة الكهربية الحثية $\mathcal{E}$ عكسية بحيث تكون موجبة عندما تكون $d\Phi/dt$ سالبة وتكون سالبة عندما تكون $d\Phi/dt$ موجبة.

وتصبح المعادلة (٦-١١) كالتالي:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (٦-١١ \text{ ب})$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٥-١) في الفصل الخامس، فإن التدفق المغناطيسي يعطى بالمعادلة:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \dots\dots (٦-١١ \text{ ج})$$

وإذا كانت $\mathcal{E}$ ناتجة عن حركة ملف، عدد لفاته N ، في مجال مغناطيسي فإن:

$$\mathcal{E} = - \frac{d(N\Phi)}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

وإذا كانت R هي مقاومة الملف، فإن قيمة التيار التأثيري المار فيه يعطى بالمعادلة:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (٦-١٣)$$

أما الشحنة التأثيرية فتعطى من المعادلة التالية:

$$dq = Idt = - \frac{N}{R} d\Phi \dots\dots (٦-١٣ ب)$$

مثال (٦-٢)

ملف حلزوني طويل عدد لفاته 200 لفة في السنتيمتر. يحمل تيارا شدته 1.5 A وقطر الملف 2cm وضع عند مركزه ملف مكون من عشر لفات بحيث يكون المجال المغناطيسي موازيا لمحور الملف الأخير، فإذا انقص التيار في الملف الحلزوني إلى الصفر ثم زيد في الاتجاه المضاد ليصل إلى 1.5 A بمعدل مرة كل 0.05 من الثانية، فما مقدار القوة الدافعة الكهرية التأثيرية في الملف الصغير أثناء تغير التيار؟

الحل

تحتسب أولا قيمة الحث المغناطيسي داخل الملف الحلزوني B .

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = 4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 10^2 \times 1.5 = 3.8 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2$$

ثم تحتسب مساحة مقطع الملف الصغير وهي تساوي مساحة مقطع الملف الكبير S .

$$S = \pi r^2 = \pi (1.0 \times 10^{-2})^2 = 3.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Phi = BS = 3.8 \times 10^{-2} \times 3.1 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

هذا الفيض يتغير إلى $1.2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$ - في خلال $\frac{5}{100}$ من الثانية

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{(-1.2 \times 10^{-5}) - (1.2 \times 10^{-5})}{0.05} = -4.8 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{E} &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -10 \times (-4.8 \times 10^{-4}) \\ &= 4.8 \times 10^{-3} \text{ V}\end{aligned}$$

ويلاحظ أن $\mathcal{E}$ موجبة في حين أن $d\Phi/dt$ سالبة.

مثال (٦-٣)

ملف عدد لفاته 1000 لفة ومقاومته 400Ω ملفوف على عصا خشبية نصف قطرها 1.0 سم فإذا وضع الملف في مجال مغناطيسي قيمته 9000 أمبير لفة/متر وكان موازيا لطول العصا ثم انخفض المجال فجأة إلى الصفر فاحسب مقدار الشحنة المارة خلال جلفانومتر قذفي مقاومته 200 أوم متصل مع الملف، وما قيمة الشحنة لو انخفض المجال إلى النصف.

الحل

حسب المعادلتين (٦-١٣) و (٦-١٣ب) يُحصل على:

$$\begin{aligned}IR &= N \frac{\Phi}{t} = N \frac{BS}{t} = N \frac{\mu_0 HS}{t} \\ \therefore q &= It = \frac{N}{R} \mu_0 HS\end{aligned}$$

حيث S مساحة الملف، N عدد لفاته و R المقاومة الكلية للدائرة.

$$\therefore q = \frac{1000}{(200 + 400)} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 9000 \times \pi (0.01)^2 = 5.92 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$dq = - \frac{N}{R} d\Phi$$

$$\therefore q = - \frac{N}{R} \int d\Phi = - \frac{N}{R} \int_{H_2}^{H_1} \mu_0 S dH = \frac{N}{R} \mu_0 S (H_2 - H_1)$$

$$\therefore q = \frac{1000}{600} \times 4\pi \times 10^{-7} (0.01)^2 \pi (9000 - 4500) = 2.96 \times 10^{-6} \text{ C}$$

مثال (٦-٤)

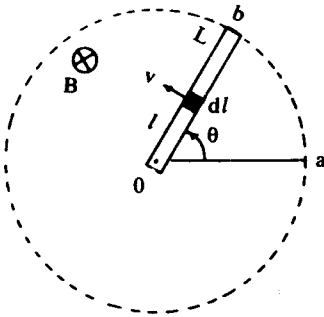
قضيب من النحاس طوله l يدور بسرعة زاوية قدرها ω في مجال مغناطيسي منتظم حثه B كما في الشكل التالي. احسب القوة الدافعة الكهرية المتولدة بين طرفي القضيب.

الحل

إذا تحرك عنصر صغير طوله dl من القضيب بسرعة قدرها v عمودية على المجال المغناطيسي فإن القوة الدافعة الكهرية حسب المعادلة (٦-٨) هي :

$$d\mathcal{E} = Bvd\mathbf{l}$$

وبذلك تكون القوة الدافعة بين طرفي القضيب هي :



$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^L Bvd\mathbf{l} \\ &= \int_0^L B(\omega l) d\mathbf{l}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{E} = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

وهناك طريقة أخرى للحل

فإذا فرض أنه عند لحظة ما كان الفيض المحاط بالقطاع aob يعطى بالمعادلة :

$$\Phi = BS = B \left(\frac{1}{2} L^2 \theta \right)$$

حيث θ مساحة القطاع $\frac{1}{2} L^2 \theta$.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

وهذه قيمة $\mathcal{E}$ محققة بذلك قانون فاراداي .

(١-٣-٦) قانون فاراداي والمجال الكهربائي الحثي

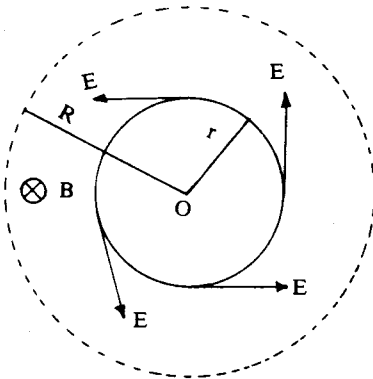
Faraday's law and induced - electric field

لقد وجد في البند السابق (٣-٦)، وحسب الشكل (٦-٥)، أن التغير في الفيض المغناطيسي للملف الأول بالنسبة للزمن $\frac{d\Phi}{dt}$ تصحبه قوة دافعة كهربية في الملف الثاني. ولذلك إذا وضعت حلقة دائرية (loop) في مجال مغناطيسي متغير بالنسبة للزمن تنشأ قوة دافعة كهربية حثية نتيجة لتكون شحنات ناقلة (carrier) متحركة تعطي تيارا حثيا.

وبصورة أخرى يمكن القول إن التغير في الحث المغناطيسي B ولّد مجالا كهربيا حثيا يختلف من نقطة إلى أخرى على الحلقة. هذا المجال الكهربائي الحثي يشبه المجالات الكهربائية الحقيقية الناتجة عن شحنات ساكنة حيث يمكن أن يؤثر على شحنة اختبار q_0 بقوة قدرها $F = q_0 E'$ ولذلك ينص قانون فاراداي في هذه الحالة على:

«المجال المغناطيسي المتغير ينتج مجالا كهربيا»

(A changing magnetic field produces an electric field)



يمثل الشكل (٦-٦) حلقة دائرية نصف قطرها r وضعت في مجال مغناطيسي منتظم B تتزايد قيمته بنسبة ثابتة، أي:

$$\left(\frac{dB}{dt} = \text{constant} \right)$$

عند كل نقطة. ولذلك تنشأ قوة دافعة كهربية حثية قيمتها، حسب المعادلة (١١-٦)، هي:

شكل (٦-٦): حلقة دائرية نصف قطرها r وضعت في مجال مغناطيسي منتظم تتزايد قيمته بنسبة ثابتة.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

وإذا فرض أن شحنة اختبار q_0 تتحرك حول الحلقة فإن الشغل الواقع على هذه الشحنة لكل دورة يساوي ϵq_0 . وبصورة أخرى إذا كانت القوة على الشحنة q_0 هي $q_0 E'$ والطول الذي يقع عليه تأثير القوة هو $2\pi r$ فإن الشغل يساوي $q_0 E' 2\pi r$ وبمساواة المقدارين يُحصل على:

$$q_0 \epsilon = E' q_0 2\pi r$$

$$\therefore \epsilon = E' 2\pi r$$

وبصورة عامة يمكن أن تُكتب هذه المعادلة بالصورة:

$$\epsilon = \oint E' \cdot dl \quad \dots\dots\dots (٦-١٤ أ)$$

$$\oint E' \cdot dl = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \dots\dots\dots (٦-١٤ ب)$$

$$\oint E' \cdot dl = - \int_s \frac{dB}{dt} \cdot dS \quad \dots\dots\dots (٦-١٥)$$

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه المجال الكهربائي يعاكس اتجاه الحث المغناطيسي B . وذلك حسب المعادلة (٦-١١).

وتسمى المعادلة (٦-١٥) التكاملية بمعادلة ماكسويل (Maxwell equation) المشتقة من معادلة فاراداي.

أما إذا حُرِّكت الحلقة بسرعة قدرها v بينما كان الحث المغناطيسي B ثابتاً فإن القوة الدافعة الكهربية الحثية تعطى بالمعادلة التالية:

$$\epsilon = \oint (v \times B) \cdot dl \quad \dots\dots\dots (٦-١٦)$$

وذلك حسب المعادلة (٦-٨).

ولذلك فالمعادلة (٦-١٥) تمثل القوة الدافعة الحثية في دائرة مغلقة نتيجة لتغير الحث المغناطيسي بالنسبة للزمن بينما تمثل المعادلة (٦-١٦) القوة الدافعة الكهربية الحثية في دائرة مغلقة تتحرك في مجال مغناطيسي ثابت "B" بسرعة قدرها v . وإذا حصل

التغيران بشكل متتابعي بحيث يتغير B مع الزمن وتحرك الدائرة المغلقة بسرعة قدرها v ، فإن القوة الدافعة الكهربائية تعطى في هذه الحالة بالمعادلة :

$$\varepsilon = \oint (v \times B) \cdot dl - \int \frac{dB}{dt} dS \dots\dots (٦-١٧)$$

وهذه هي الحالة العامة .

ويمكن الحصول على المعادلة (٦-١٥) عند ثبوت B (أي $\frac{dB}{dt} = 0$) بينما يمكن الحصول على المعادلة (٦-١٦) بثبوت الحلقة المغلقة (أي $v = 0$) .

المجال الكهربائي الحثي الناتج عن عملية الحث له علاقة بمعدل تغير المجال المغناطيسي وليست له علاقة بالشحنات . وعلى الرغم من أن لكل منهما تأثير على الشحنات إلا أنه توجد بينهما فوارق .

خطوط القوى الكهربائية الناتجة عن الحث المغناطيسي يمكن أن تكون على شكل حلقة مغلقة كما في شكل (٦-٦) بينما خطوط القوى للمجال الناتج عن الشحنات الساكنة دائماً ترسم لتبدأ من شحنة موجبة وتنتهي بشحنة سالبة .

سبق أن وجد في الفصل الثاني أن فرق الجهد بين نقطتين يعطى بالمعادلة :

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cdot dl \dots\dots (٦-١٨)$$

فإذا انطبقت a على b فمعنى ذلك أن المسار مغلق ويكون فرق الجهد مساوياً للصفر أي أن :

$$\oint E \cdot dl = \text{zero} \dots\dots (٦-١٨)$$

ولكن في حالة المجال الحثي الناتج عن تغير المجال المغناطيسي فالحال غير ذلك حيث إن المقدار $\oint E \cdot dl$ لا يساوي الصفر بينما يساوي $d\Phi/dt$ وذلك حسب المعادلة (٦-١٤) .

ولذلك فالمجال الكهربي الناتج عن الشحنات المستقرة يكون محفوظا (conservative) بينما المجال الحثي الآخر غير محفوظ (non conservative) ولذلك فالجهد الكهربي الذي يعرف فقط بالقوة المحفوظة (conservative force) ليس له معنى بالنسبة للمجالات الكهربية الناتجة عن الحث المغناطيسي.

مثال (٦-٥)

إذا فرض أن الحث المغناطيسي B يتزايد بمعدل $\frac{dB}{dt}$ فإذا كانت R نصف قطر الدائرة المحيطة بالمجال المغناطيسي الكلي، ما هي قيمة المجال الكهربي الحثي عند أي قيمة لنصف القطر r ؟ كما في شكل (٦-٦) مع افتراض أن:

$$R = 10 \text{ cm} , \quad \frac{dB}{dt} = 0.1 \text{ Wb/m}^2 \cdot \text{s}$$

الحل

إذا كان $r < R$ فإن الفيض المغناطيسي Φ خلال الحلقة هو:

$$\Phi = B (\pi r^2)$$

$$\therefore \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (A)$$

$$\therefore E (2\pi r) = - \frac{d\Phi}{dB} \cdot \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} (5 \times 10^{-2}) (0.1) = 2.5 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

بافتراض أن $r = 5 \text{ cm}$

أما إذا كان $r \geq R$ فإن الفيض المغناطيسي في هذه الحالة يساوي:

$$\Phi = \int B dl = B (\pi R^2)$$

وبتطبيق المعادلة (A) يُحصل على:

$$(E) (2\pi r) = - \frac{d\Phi}{dB} \cdot \frac{dB}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{r} \cdot \frac{dB}{dt} \dots\dots\dots (B)$$

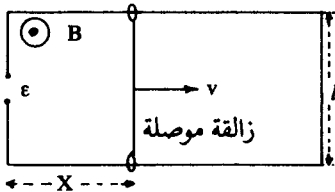
وهذه المعادلة تؤول إلى المعادلة (A) بوضع $r = R$ ، أما إذا كان $r > R$ فإن $\oint B dl = \text{zero}$ لأن الحلقة في هذه الحالة خارج نطاق المجال المغناطيسي .

مثال (٦-٦)

حلقة مستطيلة الشكل عرضها l وطولها x يتغير بانتظام مع الزمن باستخدام زالقة موصلة تتحرك بسرعة منتظمة قدرها v . فإذا كان الحث المغناطيسي عموديا على مستوى الحلقة ومنتظم وقيمته تتغير توافقيا (vary harmonically) مع الزمن ويعطى بالمعادلة .

$$B = B_0 \cos \omega t$$

احسب القوة الدافعة الكهربائية الحثية الكلية.



الحل

لحل هذه المسألة نطبق المعادلة (٦-١٥) ، فالقوة الدافعة الكهربائية الحثية الناتجة عن تغير B هي :

$$\mathcal{E}_m = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vBl = v/B_0 \cos \omega t$$

والقوة الدافعة الكهربائية الحثية الناتجة عن تغير v هي :

$$\mathcal{E}_t = - \int_S \frac{dB}{dt} \cdot dS = \omega \times l B_0 \sin \omega t$$

وبذلك فإن القوة الدافعة الكهربائية الحثية الكلية هي :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_t = v/B_0 \cos \omega t + \omega l B_0 \sin \omega t$$

(٢-٣-٦) المعادلة التفاضلية من قانون فاراداي

Differential equation from Faraday's law

حسب قاعدة استوكس (٢-٤٥) ملحق ٢، فإن المعادلة (٦-١٤) تصبح :

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{S}$$

حيث S سطح مقفل محاط بمسار مقفل C.

وبمساواة هذه المعادلة مع المعادلة (٦-١٥) يُحصل على :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{dB}{dt} \cdot d\mathbf{S} \dots \dots (٦-١٩)$$

أو

$$\nabla \times \mathbf{E}' = - \frac{dB}{dt} \dots \dots \dots (٦-٢٠)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التفاضلية المشتقة من قانون فاراداي .

(٤-٦) الحث والحركة النسبية

Induction and Relative Motion

يعطي قانون فاراداي ($\mathcal{E} = - d\Phi / dt$) قيمة صحيحة للقوة الدافعة الكهرية التأثيرية مهما كان سبب حدوثها سواء أكان التغير في Φ ناتج عن حركة الملف أو حركة المغناطيس أو التغير في قوة المجال المغناطيسي أو تغير شكل الحلقة الموصلة أو أي طريقة أخرى . ومع ذلك فالراصدون (observers) الذين يتابعون الحركة النسبية لكل منها سيعطون أوصافا ميكروسكوبية (microscopic) مختلفة لعملية الحث .

يوضح الشكل (٦-١٧) حلقة مستطيلة مقفلة تسير بسرعة قدرها v بالنسبة لمغناطيس يعطي مجالا مغناطيسيا منتظما "B". ويعتبر المراقب S مستقرا بالنسبة

للمغناطيس الذي يعطي المجال . القوة الدافعة الحثية تسمى في هذه الحالة بالقوة الدافعة الحركية (motional E.M.F.) لأن الحلقة الموصلة تتحرك بالنسبة للمراقب S.

وتكون الشحنة الموجبة الناقلة q والواقعة في منتصف الجهة اليسرى مجبرة على الحركة إلى اليمين مع الحلقة التي تسير بسرعة V وفي المجال B أي أن الشحنة ستكون خاضعة لقوة مغناطيسية جارفة قدرها $(\vec{F} = q \times \vec{B})$. هذه القوة أيضا تكون سببا في تحريك الشحنة إلى أعلى الحلقة بسرعة v_d تسمى بسرعة الانسياب (drift velocity) وبذلك تكون الشحنة خاضعة لسرعة قدرها v تساوي المجموع الاتجاهي لـ v ، v_d كما في شكل (٧ - ٦) وبذلك فإن القوة المغناطيسية الجارفة F_m (deflecting) هي $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$. وتحليل هذه القوة إلى مركبتين إحداها $F_m \cos \theta$ والأخرى $F_m \sin \theta$ كما في شكل (٧ - ٦) فإن المركبة $F_m \cos \theta$ تتلاشى مع القوة الناتجة عن الشحنات المتحركة إلى أعلى في مجال مغناطيسي B وتبقى المركبة العمودية F_n التي تساوي $F_m \sin \theta$. وبذلك فإن الشغل اللازم لنقل الشحنات خلال زمن قدره dt:

$$dW = F_n (v dt)$$

حيث v dt المسافة التي قطعها الحلقة المستطيلة (والشحنات) في زمن قدره dt.

$$\therefore dW = F_m \sin \theta . (v . dt)$$

$$\therefore dW = (q v B) (v_d/v) (v dt)$$

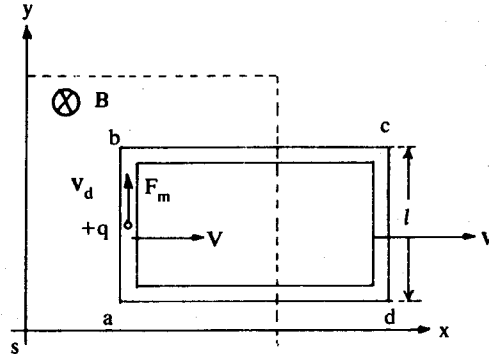
$$\therefore dW = (q B v) (v_d dt) = qBv dl$$

حيث dl المسافة التي قطعها الشحنات المتنقلة على طول الموصل في زمن قدره dt.

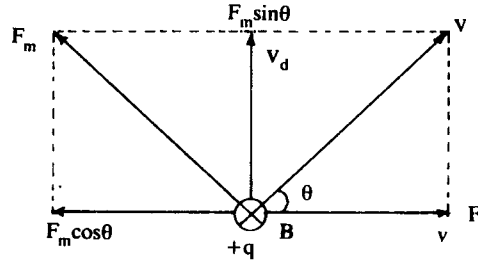
وبذلك فإن الشغل اللازم لنقل الشحنات خلال الحلقة المستطيلة كاملة تساوي :

$$W = \oint dW = qBvl$$

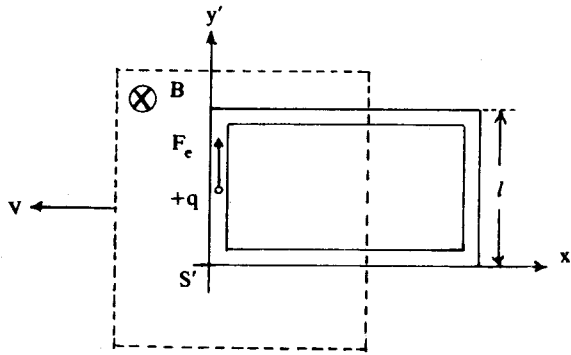
حيث l هو الطول ab. أما محصلة الشغل على الطولين da ، bc فهي تساوي الصفر لتعاكسهما. أما بالنسبة للطول cd فهو خارج عن المجال المغناطيسي.



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (٦-٧): ١- حلقة على شكل مستطيل تتحرك بسرعة v في مجال مغناطيسي حثه B متعامد مع السرعة.

ب- تحليل القوى الواقعة على شحنة من شحنات الحلقة المستطيلة.

ج- حركة المجال المغناطيسي وثبوت الحلقة.

وبذلك فإن القوة الدافعة الكهربائية هي :

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = Bvl$$

وهي المعادلة (٦-١٠) نفسها التي حصل عليها من تعريف فاراداي مباشرة.

أما الشكل (٧ج-٦) فإن المراقب S' الذي يعتبر مستقرا بالنسبة للحلقة المستطيلة يتحرك المغناطيس بالنسبة له من اليسار إلى اليمين ويلاحظ أن الشحنات تنحرف باتجاه عقرب الساعة حول الحلقة. ويمكن إجراء حساباته على أساس افتراض أن المجال الكهربائي E' المستحث في الحلقة يكون نتيجة لحركة المغناطيس ويؤثر على الشحنات q بقوة قدرها $F_e = qE'$.

هذا المجال الحثي E' يرتبط بالقوة الدافعة الكهربائية الحثية $\mathcal{E}$ وكذلك التيار المتولد في الحلقة المقفلة حيث إن :

$$\mathcal{E} = El \dots \dots \dots (٦-٢١)$$

هذه المعادلة ماثلة للمعادلة (٦-١٤) لأنها ناتجتان عن الحركة النسبية للحلقة والمغناطيس المتأثرين وفي هذه الحالة يكون :

$$E'l = Blv$$

أو

$$E' = vB$$

أو

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \dots \dots \dots (٦-٢٢)$$

وقد يأتي مراقب ثالث S'' يرى حركة المغناطيس والحلقة المستطيلة معا والقوة الماثلة على الشحنات لا هي كهربية فقط ولا مغناطيسية فقط وإنما الاثنان معا وبذلك يكون :

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B} \dots \dots \dots (٦-٢٣)$$

مثال (٦-٧)

في الشكل (٦-٧) إذا فرض أن $B = 2.0 \text{ Wb/m}^2$ و $l = 10 \text{ cm}$ و $v = 1.0 \text{ m/s}$.

احسب:

١ - المجال الكهربي الحثي بالنسبة للمراقب S' .

ب - القوة الدافعة الكهربية الحثية في الحلقة المستطيلة.

الحل

١ - بالنسبة للمراقب S' يكون لدينا:

$$E' = vB = (1.0)(2.0) = 2.0 \text{ V/m}$$

ب - القوة الدافعة الكهربية الحثية بالنسبة لـ S

$$\mathcal{E} = Blv = 2.0 \times 1.0 \times 10^{-1} \times 1.0 = 0.20 \text{ V}$$

وبالنسبة لـ S'

$$\mathcal{E} = E'l = 2.0 \times 1.0 \times 10^{-1} = 0.20 \text{ V}$$

مثال (٦-٨)

في الشكل الوارد في المثال (٦-٤) احسب المجال الكهربي الناتج عن حركة القضيب في المجال المغناطيسي B وإذا كانت نهاية الطرف الخارجي تنزلق على قضيب دائري ووصل الطرف المركزي بسلك مع القضيب كما في الشكل التالي فاحسب القوة الدافعة الكهربية للدائرة.

الحل

محصلة القوى على الشحنات حسب

المعادلة (٦-٢٣) هي:

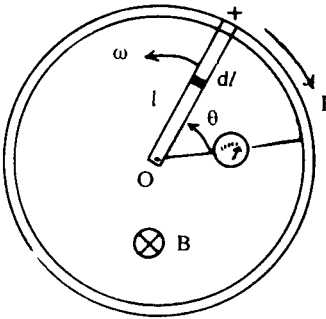
$$\vec{F} = qE + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{..... (A)}$$

وإذا أخذ عنصر الطول dl وكانت كتلته m

ويسير بسرعة قدرها v وعلى بعد l من مركز

الدوران فإن محصلة القوى في هذه الحال

عبارة عن قوة جاذبية مركزية (centripetal force).



$$\therefore F = qE + q\omega B = -m\omega^2 \dots\dots\dots (B)$$

$$\therefore E' = -\omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right)$$

وبتطبيق المعادلة (١١٤-٦) فإن القوة الدافعة الكهربائية بين طرفي القضيب تساوي :

$$\varepsilon = \int_0^L E' dl = \int_0^L \omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) dl = \omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) \frac{L^2}{2}$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{2} B \omega L^2 + \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 L^2}{q} \dots\dots\dots (C)$$

حيث L طول القضيب كاملاً .

$$\therefore \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

وإذا قورنت هذه النتيجة بالمعادلة (A) في المثال (٤-٦) فإن الفرق بينهما هو المقدار:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 L^2}{q}$$

وهذا المقدار صغير جداً بالمقارنة بالمقدار ε_1 . وتتضح هذه الموازنة إذا عوض عن الرموز الواردة في قيمتي ε_1 و ε_2 بقيم حسابية ، فإذا فرض أن :

$$\omega = 6280 \text{ radians / s } , \quad q = 1.60^2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$L = 0.3\text{m} \quad , \quad B = 0.5 \times 10^{-4} \text{ Wb / m}^2$$

$$\therefore \varepsilon_1 = \frac{1}{2} B \omega L^2 = (0.5) (0.5 \times 10^{-4}) (6.28 \times 10^3) (9 \times 10^{-2})$$

$$= 1.41 \times 10^{-2} \text{ V}$$

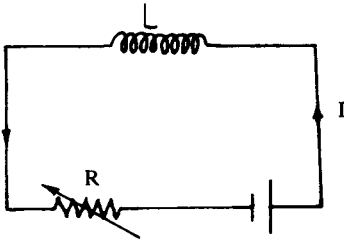
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 L^2}{q} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}) (6.28 \times 10^3)^2 (9 \times 10^{-2})}{(2) (-1.602 \times 10^{-19})}$$

$$= -1.01 \times 10^{-5} \text{ V}$$

(٥-٦) الحث الذاتي

Self Inductance

يمر تيار شدته I في ملف عدد لفاته N لفة. فإذا كان التيار ثابتا ثم تغيرت شدته بواسطة مقاومة متغيرة، شكل (٦-٨)، فإن هذا التغير في التيار يؤدي إلى تغير الفيض المغناطيسي Φ داخل هذا الملف نفسه وبهذا تتولد في الملف ذاته قوة دافعة تأثيرية عكسية ذاتية $\mathcal{E}$ تقاوم التغير المسبب لها طبقا لقاعدة لنز، فإذا زاد التيار الأصلي I فإن $\mathcal{E}$ الذاتية تتولد في اتجاه مضاد له وإذا نقص التيار الأصلي فإن $\mathcal{E}$ الذاتية تتولد في اتجاهه نفسه.



شكل (٦-٨): مرور تيار في ملف عدد لفاته N ، أما R فهي عبارة عن مقاومة متغيرة «ريوستات» وضعت لتغيير قيمة التيار.

ويتوقف عدد خطوط الحث المتصلة بالدائرة والناجمة عن التيار المار بهذه الدائرة على الخواص الهندسية للدائرة، أي على شكلها ومساحتها وعدد لفاتها... الخ، ولكن بصرف النظر عن هندسة الدائرة فإن كثافة التدفق عند أي نقطة تتناسب طرديا مع التيار الذي يتجه، ولذا فإن التدفق أيضا يتناسب مع التيار.

$$\Phi \propto I$$

$$\therefore \Phi = KI \quad \dots \dots \dots (٦-٢٤)$$

حيث K ثابت يتوقف على العوامل الهندسية للدائرة إذا كانت N عدد لفات الملف فإن القوة الدافعة التأثيرية تعطى بالعلاقة التالية المعروفة بقانون فاراداي:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} \left(KI \right) = -NK \frac{dI}{dt} \quad (٦-٢٥)$$

فإذا رمز لحاصل الضرب NK برمز واحد وليكن L فإن:

$$\therefore \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \dots\dots\dots (٦-٢٦)$$

ويسمى الثابت L معامل الحث الذاتي (coefficient of self inductance) أو باختصار الحث الذاتي (self inductance).

ويعرف الحث الذاتي أنه «القوة الدافعة التأثيرية الذاتية المتولدة في ملف عندما تتغير شدة التيار في الملف نفسه بمعدل وحدة شدة التيار في الثانية». ومن المعادلة (٦-٢٦) يتضح أن الوحدات في النظام العالمي (S.I.) للحث الذاتي هي ($L = V/(A/s)$) أو ما يسمى بالهنري (Henry) وهو الوحدة الخاصة بمعامل الحث الذاتي لدائرة تتولد فيها قوة دافعة تأثيرية ذاتية قدرها 1 فولت عندما تتغير شدة التيار في الدائرة بمعدل 1 أمبير/ثانية.

من المعادلتين (٦-٢٥) و(٦-٢٦) يمكن أن يوجد تعبير آخر لمعامل الحث الذاتي. حيث يلاحظ أن:

$$N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

ويتكامل الطرفين:

$$N \int d\Phi = L \int dI$$

$$N\Phi = LI + \text{constant}$$

وبما أن Φ تساوي صفراً عندما يتلاشى التيار، فإن ثابت التكامل يساوي صفراً.

$$\therefore L = \frac{N\Phi}{I} \dots\dots\dots (٦-٢٧)$$

ويسهل فهم معنى الحث الذاتي إذا فهم أن كل لفة من لفات الملف تعمل بمثابة ملف ثانوي بالنسبة للفة التي تجاورها فينتج في هذه اللفة تيار مضاد عند غلق الدائرة. فزيادة شدة التيار يعمل على تأخير الوقت الذي ينمو فيه التيار حتى يبلغ قيمته الثابتة

«أو العظمى». وبالمثل إذا نقصت شدة التيار أو انقطع التيار فإن كل لفة في الملف تتولد فيها قوة دافعة كهربية حثية تعمل على تأخير اضمحلال التيار ووصوله إلى قيمته الثابتة «الصغرى أو الصفر».

(٦-٥-١) معامل الحث الذاتي لملف حلزوني طويل

Self inductance of a long solenoid

إذا مر تيار كهربي شدته I في ملف حلزوني لفاته متقاربة وعددها n وطوله l ومساحة مقطعه S تكون قيمة الحث المغناطيسي B في داخل الملف الحلزوني، حسب المعادلة (٥-٤٤)، هي:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \text{ Wb/m}^2 \dots\dots\dots (٦-١٢٨)$$

وإذا لف الملف على مادة نفاذيتها المغناطيسية μ فإن المعادلة (٦-١٢٨) تصبح كالتالي:

$$B = \mu \frac{nI}{l} \text{ Wb/m}^2$$

ويكون الفيض المغناطيسي Φ الناتج عن التيار I هو:

$$\Phi = BS = \frac{\mu n I S}{l}$$

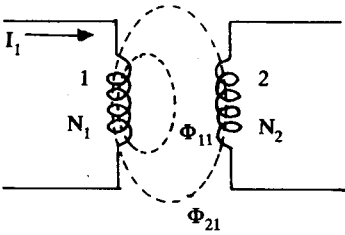
وبالتعويض في المعادلة (٦-٢٧) يمكن الحصول على:

$$L = \frac{\mu \cdot n^2 S}{l} \dots\dots\dots (٦-٢٨)$$

وهذه المعادلة تبين مدى تأثير نفاذية الوسط μ على مقدار معامل الحث الذاتي L في الدائرة إذ باستخدام مادة مثل الحديد يمكن الحصول على ملف ذي حث ذاتي كبير.

(٦-٦) الحث المتبادل

Mutual Inductance



شكل (٦-٩): دراسة الحث المتبادل بين ملفين.

إذا فرض كما في شكل (٦-٩) أن الملف رقم (1) ملف ابتدائي عدد لفاته N_1 ويمر به تيار شدته I_1 ، وأن الملف رقم (2) ملف ثانوي مجاور عدد لفاته N_2 . إذا تغيرت شدة التيار الابتدائي I_1 فإنه تتولد في الملف الثانوي قوة دافعة تأثيرية $\mathcal{E}_2$ يتوقف مقدارها طبقاً لقانون فاراداي على معدل تغير الفيض Φ_{2-1} المخترق للملف (2) نتيجة تغير التيار في الملف (1) :

$$\therefore \Phi_{2-1} \propto I_1 \quad \therefore \Phi_{2-1} = KI_1$$

وطبقاً لقانون فاراداي فإن :

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dI_1} \times \frac{dI_1}{dt} \quad \dots \quad (٦-٢٩)$$

$$\therefore \mathcal{E}_2 = -N_2 K \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \dots \dots \quad (٦-٣٠)$$

حيث M ثابت يسمى معامل الحث المتبادل (coefficient of mutual inductance) أو باختصار الحث المتبادل (mutual inductance) ويعرف بأنه «القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في دائرة ما عندما يتغير التيار في دائرة مجاورة بمعدل وحدة شدة التيار في الثانية» ووحدته الهنري (H) (Henry) ، أي وحدات الحث الذاتي نفسها.

ويمكن استنتاج تعبير آخر للحث المتبادل كما يلي :

من المعادلتين (٦-٢٩) و (٦-٣٠) يكون :

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{2-1}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \dots\dots (٦-٣١)$$

بحذف dt وإجراء التكامل يُحصل على :

$$N_2 \Phi_{2-1} = MI_1 + \text{const.}$$

وحيث إن $\Phi_{2-1} = 0$ عندما $I_1 = 0$.

$$\therefore N_2 \Phi_{2-1} = MI_1 \quad \therefore M = \frac{N_2 \Phi_{2-1}}{I_1} \dots\dots (٦-٣٢)$$

وبالمثل عندما يمر تيار I_2 في الملف (2) فإنه سيؤثر بدوره في الملف رقم (1) وبهذا فإن المعادلتين (٦-٣١) و(٦-٣٢) يمكن كتابتهما كما يلي :

$$M = \frac{N_1 \Phi_{1-2}}{I_2} \dots\dots\dots (٦-٣٣)$$

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{1-2}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \dots\dots (٦-٣٤)$$

وإذا فرض أن الحث الذاتي لكل من الملفين هما L_1 و L_2 فإن المعادلتين (٦-٣١) و(٦-٣٤) تصبحان :

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \dots\dots (٦-١٣٥)$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \dots\dots (٦-٣٥ ب)$$

والإشارة التي تسبق M قد تكون موجبة أو سالبة فهي تعتمد على اتجاه التيار المار في الملفين فقد يؤدي التيار في أحد الملفين إلى زيادة أو نقص الفيض المغناطيسي خلال الملف الآخر.

وبأسلوب آخر تعتمد الإشارة قبل M على محصلة المجالين المغناطيسيين الناتجين عن الملفين فقد تكون ناتجة عن جمعها أو الفرق بينهما.

وحيث إن $M = \sqrt{L_1 L_2}$ وذلك حسب المعادلة (٦-٤٢) [سيأتي برهان ذلك].

$$\therefore \varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt} \dots (٦-١٣٦)$$

$$\therefore \varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} \dots (٦-٣٦ ب)$$

وإذا حسبنا dI_1 / dt من المعادلة الأولى (٦-١٣٦) وعوض في المعادلة الثانية (٦-٣٦ ب) يمكن الحصول على :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (٦-٣٧)$$

مثال (٦-٩)

احسب معامل الحث الذاتي للملف حلزوني بداخله هواء طوله l متر ومساحة مقطعه 6×10^{-4} متر^٢ وعدد لفاته 1000 لفة ثم أوجد معامل حثه الذاتي إذا لف على قضيب من الحديد نفاذيته النسبية 500 ، ثم احسب القوة الدافعة الذاتية المتولدة فيه إذا تغير التيار الأصلي المار فيه بمعدل 15 أمبير/ثانية .

الحل

من العلاقة (٦-٢٣) يكون :

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l}$$

$$\therefore L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^6 \times 6 \times 10^{-4}}{1} = 75.4 \times 10^{-5} \text{ H}$$

وفي حالة لف الملف الحلزوني على قضيب من الحديد :

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

$$\therefore L = 500 \times 4\pi \times 10^{-7} \frac{10^6 \times 6 \times 10^{-4}}{1} = 0.377 \text{ H}$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} = 0.377 \times 15 = 5.655 \text{ V}$$

مثال (١٠-٦)

ملف حلزوني طويل طوله l ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N_1 التف حول منتصفه ملف آخر صغير عدد لفاته N_2 كما في الشكل . احسب :

١ - الحث المتبادل بين الملفين إذا كان $N_1 = 10^3$ turns ، $N_2 = 20$ turns ، و $S = 10 \text{ cm}^2$ ، $l = 1 \text{ m}$

٢ - ما قيمة القوة الدافعة الحثية في الدائرة الثانية نتيجة تغيير التيار في الدائرة (1) بمقدار ١٠ أمبير/ثانية .

الحل

١ - في الملف (1) تكون كثافة الفيض المغناطيسي في اتجاه محوره نتيجة مرور تيار قيمته I

$$B = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \text{ Wb/m}^2$$

عندئذ يساوي التدفق المار بالمقطع المركزي المقدار:

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N_1 I S}{l}$$

ولما كان هذا التدفق يتصل بالملف (2) فإن معامل الحث المتبادل:

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I} = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S}{l}$$

$$\therefore M = \frac{12.57 \times 10^{-7} \times 10^{-3} \times 10^3 \times 20}{1} = 25.1 \mu\text{H}$$

٢ - القوة الدافعة الحثية في الدائرة (2) تعطى بالمعادلة :

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\therefore \mathcal{E}_2 = -25.1 \times 10^{-6} \times 10 = -251 \mu\text{V}$$

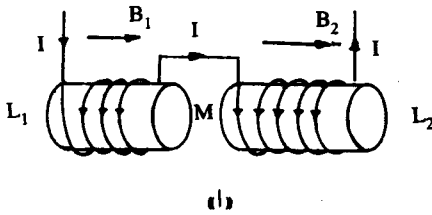
(٧-٦) توصيل ملفات الحث

Inductors Connection

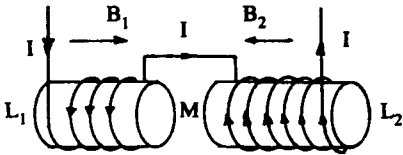
(١-٧-٦) على التوالي Inductors in series

توصيل ملفات الحث، كما توصل غيرها من عناصر الدوائر الكهربائية، إما على التوالي أو التوازي أو في شبكات أكثر تعقيدا. ولكي نستطيع مناقشة توصيل الملفات نبدأ بتعريف الحث الذاتي المكافئ كما يلي:

والحث الذاتي المكافئ للشبكة هو نسبة $\frac{d\Phi}{dI}$ الكلية (ذاتية وتبادلية) المستحثة بين طرفي الشبكة إلى معدل تغير التيار المسبب لتوليد هذه $\frac{d\Phi}{dI}$ ك.



(أ)



(ب)

إذا فرض كما في شكل (٦-١٠) وجود ملفين أحدهما حثه الذاتي L_1 والثاني حثه الذاتي L_2 ومعامل الحث المتبادل M واتصل هذان الملفان على التوالي ومر بهما التيار I بحيث تكون كثافة الفيض المغناطيسي لهما B_1 و B_2 في اتجاه واحد كما في شكل (٦-١١٠).

إذا تغيرت شدة التيار المار فيهما فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية الذاتية والمتبادلة في كل من الملفين تكون في اتجاه واحد أيضا.

وتكون القوة الدافعة التأثيرية المتولدة

في الملف (1) تساوي:

شكل (٦-١٠): توصيل الملفات على التوالي:

أ - ينتج عن توصيلهما ومرور

التيار فيهما مجالان

مغناطيسيان لهما الاتجاه

نفسه.

ب - متعاكسان في الاتجاه.

$$\varepsilon_1 = L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

أما الق.د.ك. المتولدة في الملف (2) فتساوي :

$$\varepsilon_2 = L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

وبذلك تكون القوة الدافعة التأثيرية الكلية :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \varepsilon = L' \frac{dI}{dt}$$

وهكذا فإن الحث الذاتي المكافئ L' يساوي :

$$L' = L_1 + L_2 + 2M \dots \dots \dots (٦-٣٨)$$

وإذا مر التيار I بحيث يؤدي إلى أن تكون B_1 و B_2 في اتجاه مضاد كما هو موضح بالشكل (١٠ب - ٦) فإن محصلة القوة الدافعة التأثيرية الذاتية والمتبادلة المتولدة (نتيجة تغير شدة التيار) في الملفين هي :

$$\varepsilon = \left(L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} \right) + \left(L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} \right)$$

$$\varepsilon = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt} = L'' \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore L'' = L_1 + L_2 - 2M \dots \dots \dots (٦-٣٩)$$

ملاحظات مهمة

- ١ - إذا كان الفيض الناشئ في أحد الملفين لا يقطع الملف الآخر نظرا لابتعاد بعضهما عن بعض فإن $M = 0$ ويكون الحث الذاتي المكافئ طبقا للمعادلتين (٦-٣٨) و (٦-٣٩) :

$$L = L_1 + L_2 \quad \dots\dots\dots (٦-٤٠)$$

٢ - بطرح المعادلة (٦-٣٩) من المعادلة (٦-٣٨) ينتج أن الحث المتبادل بين الملفين هو:

$$M = \frac{1}{4} (L' - L'') \quad \dots\dots\dots (٦-٤١)$$

٣ - أما إذا كان الملفان ملفوفين على قلب حديدي، كما هو الحال في محول التيار، أو إذا كان الملفان متلاصقين فإن التدفق الناتج عن أحد الملفين يتصل كله (عمليا) بالملف الآخر، عندئذ يمكن الحصول من تعريف الحث الذاتي، معادلة (٦-٢٧)، والحث المتبادل، معادلة (٦-٣٢) والمعادلة (٦-٣٣)، على ما يلي:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}, \quad L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2}$$

$$M = \frac{N_1 \Phi_2}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1}$$

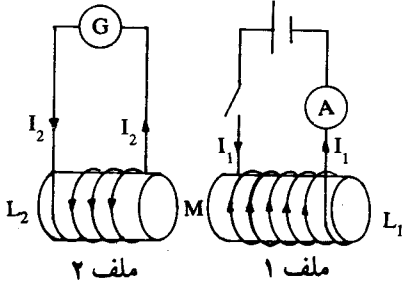
$$\therefore M^2 = \frac{N_1 \Phi_2 \times N_2 \Phi_1}{I_2 \times I_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \times \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = L_1 \times L_2$$

أي أن:

$$\therefore M = \sqrt{L_1 \times L_2} = (L_1 \times L_2)^{1/2} \quad (٦-٤٢)$$

أي أن الحث المتبادل بين ملفين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب حثهما الذاتي وذلك عند تلاصق الملفين.

٤ - يقاس الحث الذاتي والحث المتبادل عمليا باستخدام دوائر التيار المتردد كما سيأتي بعد. وذلك باستخدام قنطرة ويتسون المحورة (modified wheatstone bridge). ولكن يمكن أيضا قياسهما باستخدام التيار المستمر. وسيشرح كيفية تعيين الحث المتبادل بين ملفين باستخدام جلفانومتر قذفي (ballistic galvanometer) بطريقة مبسطة كما يلي:



شكل (٦-١١): ملفان متجاوران حثهما الذاتي L_1 ، L_2 والمتبادل بينهما M ودراسة تأثير أحدهما على الآخر.

إذا فرض كما في شكل (٦-١١) أن الملف الابتدائي (1) متصل بمفتاح وبطارية وأمبيرومتر وبجواره ملف ثانوي (2) متصل بجلفانومتر قذفي. عند غلق المفتاح سوف يمر التيار في (1) مبتدئاً بالصفر ويزداد بسرعة إلى قيمته المستمرة I_1 التي يسجلها الأمبيرومتر A. وأثناء نمو هذا التيار تتولد قوة دافعة تأثيرية ε_2 في الملف (2) وبهذا يمر فيه تيار تأثيري قمته في أية لحظة هو:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2}$$

حيث R_2 مقاومة الدائرة (2) أي مقاومة الملف الثانوي والجلفانومتر.

$$\therefore \varepsilon_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$\therefore I_2 = \frac{N_2}{R_2} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{M}{R_2} \frac{dI_1}{dt} + \frac{L_2}{R_2} \frac{dI_2}{dt}$$

أو

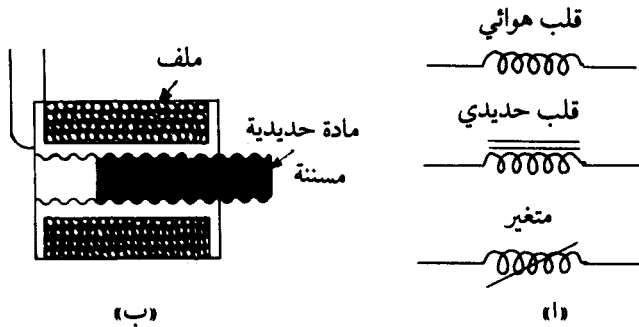
$$I_2 dt = \frac{N_2}{R_2} d\Phi = \frac{M}{R_2} dI_1 + \frac{L_2}{R_2} dI_2$$

$$q = \int_0^\infty I_2 dt = \frac{N_2}{R_2} \int_0^{\Phi_{21}} d\Phi = \frac{M}{R_2} \int_0^{I_1} dI_1 + \frac{L_2}{R_2} \int_0^0 dI_2$$

$$\therefore q = \frac{N_2}{R_2} \Phi_{21} = \frac{M}{R_2} \cdot I_1 \dots \dots (٦-٤٢ ب)$$

حيث Φ_{21} هو التدفق الذي يتصل بالدائرة (2) عندما يصل التيار I_1 إلى نهايته العظمى I_1 . وقد اختيرت كل من نهايتي التكامل الأخير لتساوي صفرا لأن التيار الابتدائي والتيار النهائي في الدائرة (2) يساويان الصفر. وهكذا فبمعرفة النهاية العظمى لزاوية انحراف الجلفانومتر يمكن حساب كل من M و Φ_{21} .

يمثل الشكل (١٢-٦) الرموز المستعملة في الدوائر الكهربائية للدلالة على نوع الملف المستخدم. ويتم تغيير المحاثة (inductance) إما بتغيير عدد لفات الملف أو بتحريك كتلة من مادة فرومغناطيسية (ferromagnetic) إلى داخل الملف أو إلى خارجه كما يوضحه شكل (١٢-٦).



شكل (١٢-٦): ١- الرموز المستعملة للدلالة على نوع الملف المستخدم.
ب - ملف بداخله مادة حديد ومغناطيسية.

(٦-٧-٢) Inductors in parallel على التوازي

إذا فرض أن الملفين، شكل (٦-١٠)، متصلان على التوازي ففي هذه الحالة يتفرع التيار I بين الملفين ويكون التيار الكلي مساويا إلى:

$$I = I_1 + I_2 \quad (٦-٤٣)$$

حيث I_1 التيار المار في الملف الذي حثه L_1 و I_2 التيار المار في الملف الذي حثه L_2 .

ويكون معدل تغير التيار الكلي بالنسبة للزمن مساويا لمجموع معدل التغير لكل من I_1 ، I_2 ويتم ذلك بتفاضل المعادلة (٦-٤٣) بالنسبة للزمن:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \dots\dots\dots (٦-٤٤)$$

ولكن من المعادلة (٦-٢٦) يكون:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{L} , \quad \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_1}{L_1} , \quad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_2}{L_2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٤٤)، مع ملاحظة أن $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ نجد أن:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

وإذا كان هناك عدد من الملفات n يزيد على اثنين فإن العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \dots\dots\dots (٦-٤٥)$$

ويتم هذا على شرط أن تقوم باتخاذ احتياطات معينة تمنع تأثير المجالات المغناطيسية هذه الملفات بعضها على بعض حتى لا يحدث ارتباط مغناطيسي بينها نتيجة للتأثير المتبادل.

(٨-٦) سريان التيار في دائرة حثية

Current in an Inductive Circuit

(٨-٦-١) نمو التيار Growth of current

عند توصيل مصدر كهربائي جهده ثابت ومقداره V فولت إلى دائرة بها مقاومة R أوم وليس لها حث ذاتي (بمعنى أن أجزاء الدائرة المختلفة لا تنتج أي مجال مغناطيسي) فإن قيمة التيار الذي يمر بالدائرة ينحصر لقانون أوم أي أن:

$$I = \frac{V}{R}$$

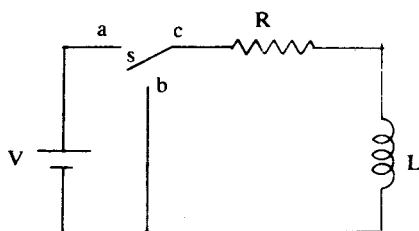
وبلغ التيار هذه القيمة في اللحظة نفسها التي تقفل فيها الدائرة، أي أنه لا يستغرق أي وقت في نموه، وذلك لعدم وجود أي عائق يعوق هذا النمو.

أما إذا كانت الدائرة تحتوي على ملف، له حث ذاتي L ، ومقاومة R فإن المجال المغناطيسي الذي ينشأ في الملف، شكل (٦-١٣)، ينمو مع التيار ومن ثم تتولد قوة دافعة كهربية مضادة تتوقف قيمتها على معامل الحث الذاتي L ومعدل نمو التيار $\frac{dI}{dt}$ حيث I هي قيمة التيار المار في الدائرة عند اللحظة t اعتباراً من وقت قفل الدائرة. ويجب أن يكون للجهد V في هذه الحالة مركبتان، إحداها للتغلب على هبوط الجهد IR في المقاومة والأخرى لموازنة القوة الدافعة الكهربية المضادة $L \frac{dI}{dt}$. ومن ثم فإن معادلة توزيع الجهد هي:

$$V = IR + L \frac{dI}{dt} \quad \dots \dots \dots (٦-٤٦)$$

وبضرب طرفي المعادلة في Idt يمكن الحصول على:

$$VI dt = I^2 R dt + L Idt \left(\frac{dI}{dt} \right) \quad \dots \dots \dots (٦-٤٧)$$



شكل (٦-١٣): مصدر كهربي ثابت متصل بمقاومة R وملف L .

يمثل المقدار $VI dt$ كمية الطاقة (energy) التي تأخذها الدائرة الكهربية من المصدر في الزمن dt ، ويمثل $I^2 R dt$ الطاقة التي تبدد في الدائرة على شكل طاقة حرارية في المقاومة R ، كما أن الحد $L Idt \left(\frac{dI}{dt} \right)$ يمثل الطاقة التي تستخدم في بناء المجال المغناطيسي في الزمن dt وتحتزن فيه. وتظل الأمور تسير على هذا النحو حتى يبلغ التيار قيمته النهائية فيقف نموه عند قيمة ثابتة

($I_{\max}$) وتصبح قيمة $\frac{dI}{dt}$ مساوية للصفر عندئذ يقف نمو المجال المغناطيسي وتصبح الطاقة التي يعطيها المصدر الكهربي للدائرة كلها مساوية للطاقة الحرارية التي تتبدد في المقاومة وتخضع الدائرة لقانون أوم أي أن:

$$V = I_{\max} R$$

$$V I_{\max} dt = I_{\max}^2 R dt$$

ويحل المعادلة التفاضلية (٦-٤٦) يُحصل على قيمة التيار I عند أية لحظة t خلال فترة نموه بعد قفل الدائرة، اتصال s بـ a ، شكل (٦-١٣)، ويتم ذلك كما يلي:

يمكن إعادة كتابة المعادلة (٦-٤٦) على الصورة التالية:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} + \left(I - \frac{V}{R} \right) = 0 \quad \dots \dots \quad (٦-٤٨)$$

وبوضع $y = I - \frac{V}{R}$ يمكن الحصول على:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٤٨) يكون:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = - \frac{R}{L} dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\ln y = - \frac{R}{L} t + \text{constant}$$

$$\therefore \ln \left(I - \frac{V}{R} \right) = - \frac{R}{L} t + \text{constant}$$

وبحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية :
فعند البداية يكون $I = 0$ عندما $t = 0$ ومن ذلك يمكن الحصول على :

$$\ln\left(-\frac{V}{R}\right) = \text{constant}$$

$$\therefore \ln\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L} t + \ln\left(-\frac{V}{R}\right)$$

أو

$$\ln\left(\frac{I - \frac{V}{R}}{-\frac{V}{R}}\right) = -\frac{R}{L} t$$

أو

$$\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\therefore I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \quad \dots\dots\dots (٦-٤٩)$$

أو

$$I = I_{\max} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \quad \dots\dots\dots (٦-٥٠)$$

حيث $I_{\max}$ هي القيمة النهائية الثابتة للتيار الذي يمر في الدائرة . ويبين شكل (٦-١٤) المنحنى الذي يربط I بـ t طبقا للمعادلة (٦-٥٠) . ويلاحظ أنه من الناحية النظرية البحتة تصبح $I = I_{\max}$ في زمن مقداره ما لا نهاية أي $t = \infty$ أما من الناحية العملية فإن التيار يبلغ قيمته النهائية بعد زمن قصير.

بمفاضلة المعادلة (٦-٥٠) بالنسبة للزمن للحصول على معدل تغير التيار يمكن الحصول على :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \dots\dots\dots (٦-٥١)$$

ويكون معدل تغير التيار لحظة قفل الدائرة أي عند $t = 0$ هو:

$$\left(\frac{dI}{dt} \right)_0 = \frac{V}{L}$$

وهذا هو أكبر معدل لتغير التيار ويكون الجهد على الجزء الحثي في الدائرة عند لحظة قفل الدائرة هو:

$$V = L \left(\frac{dI}{dt} \right)_0$$

أي أن الجهد على المقاومة في هذه اللحظة يساوي صفر.

ويلاحظ أن المقدار $\frac{L}{R}$ له أبعاد الزمن لأن:

$$\frac{L}{R} = \frac{H}{\Omega} = \frac{V/(A/s)}{V/A} = s$$

وإذا عوض في المعادلة (٦-٥٠) بالقيمة $\frac{L}{R} = t$ يُحصل على قيمة التيار بعد زمن مقداره $\frac{L}{R}$ ثانية، ويرمز إليه بالرمز T كما يطلق عليه اسم ثابت الزمن (time constant) وتكون قيمة التيار المطلوبة هي:

$$I = I_{\max} (1 - e^{-1}) = 0.632 I_{\max}$$

ويعرف ثابت الزمن عندئذ بأنه الزمن الذي يستغرقه التيار لكي يصل إلى 0.632 من قيمته النهائية الثابتة.

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (٦-٥١) على الصورة التالية:

$$L \frac{dI}{dt} = V e^{-\frac{R}{L}t}$$

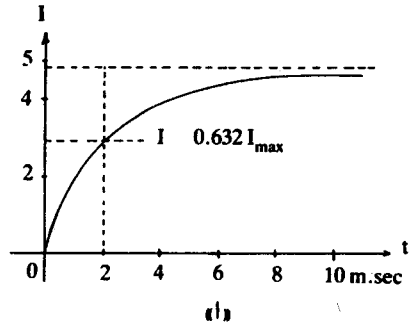
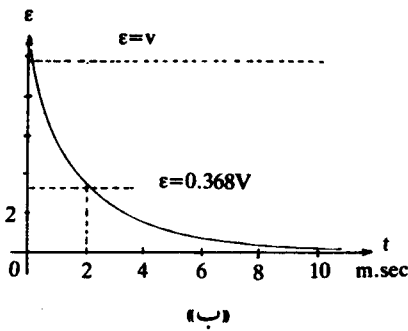
أو

$$\mathcal{E} = V e^{-\frac{R}{L}t} \dots\dots\dots (٦-٥٢)$$

حيث $\mathcal{E}$ القوة الدافعة المستحدثة .

والشكل (٦-١٤) يوضح تغير التيار I بالنسبة للزمن t حسب العلاقة (٦-٥٠) والشكل (٦-١٤) ب يوضح تغير $\mathcal{E}$ مع t وقد أخذت هذه النتائج عندما $V=10\text{Volt}$ ، $R = 2000\Omega$ ، $L = 4 \text{ Henrys}$ ومن ثم يكون ثابت الزمن :

$$T = \frac{L}{R} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ sec.}$$



شكل (٦-١٤) : ١ - العلاقة بين التيار المار في الدائرة (٦-١٣) والزمن حسب المعادلة (٦-٥٠) .
ب - العلاقة بين الجهد $\mathcal{E}$ والزمن t حسب المعادلة (٦-٥٢) .

(٢-٨-٦) اضمحلال التيار Decay of the current

بفرض أنه بعد وصول التيار إلى قيمته الثابتة النهائية ($I_{\max}$) فُتح المفتاح s كما في شكل (٦-١٣) من النقطة a ووصل بالنقطة b ، أي أن القوى الدافعة V للبطارية أصبحت مستبعدة وبذلك تؤول المعادلة (٦-٤٦) إلى :

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0 \dots\dots\dots (٦-٥٣)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

ويتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على :

$$\therefore \ln I = -\frac{R}{L} t + \text{constant} \dots\dots\dots (٦-٥٤)$$

ويحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية :

فعندما $t = 0$ ، $I = I_{\max}$ ، أي لحظة بدء انقطاع التيار :

$$\therefore \ln I_{\max} = \text{constant}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٥٤) يُحصل على :

$$\therefore I = I_{\max} e^{-\frac{R}{L} t} \dots\dots\dots (٦-٥٤ \text{ ب})$$

وهذه هي معادلة اضمحلال التيار في دائرة حث ومقاومة ويسمى المقدار $\frac{L}{R}$ بثابت الزمن كما ذكر سابقا وإذا عوض عن $t = \frac{L}{R}$ في المعادلة (٦-٥٤) فإن :

$$I = I_{\max} e^{-1} = 0.368 I_{\max}$$

وبهذا يمكن تعريف ثابت الزمن بأنه (الزمن اللازم لوصول التيار إلى 0.37 من قيمته الأصلية).

ويضرب طرفي المعادلة (٦-٥٣) في Idt نحصل على معادلة الطاقة :

$$L I \left(\frac{dI}{dt} \right) dt + I^2 R dt = 0$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الطاقة التي تبددها المقاومة على شكل طاقة حرارية مستمدة من الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسي ، ولذلك فإن الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسي تكون قد استنفذت عن آخرها وتصبح قيمتها صفرا عندما تصبح قيمة التيار صفرا.

(٦-٩) طاقة الحث

Energy Associated with a Inductor

تتحول الطاقة المبذولة بواسطة البطارية، في حالة بناء التيار في الدائرة المبينة في الشكل (٦-١٣) المذكورة في البند (٦-٨)، إلى:

- ١ - طاقة يمتزنها الملف وتظهر فيه على هيئة مجال مغناطيسي.
- ب - طاقة تستهلك في المقاومة R وتظهر على هيئة حرارة.

بضرب طرفي المعادلة (٦-٤٦) بشدة التيار يمكن الحصول على:

$$IV = I^2 R + L I \frac{dI}{dt}$$

حيث IV يمثل معدل بذل الطاقة «أي القدرة.... power» بواسطة البطارية و $I^2 R$ يمثل معدل تولد الطاقة الحرارية أي القدرة المستهلكة في المقاومة و $LI \frac{dI}{dt}$ يمثل القدرة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي للملف التي تمثل معدل بذل الطاقة لبناء المجال فترة نمو التيار، وعندما يصل التيار إلى قيمته النهائية (I) فإن $\frac{dI}{dt} = 0$ ويقف إمداد الملف بالطاقة التي سنرمز لها بالرمز "W".

ويكون معدل بذل الطاقة (القدرة) لبناء التيار أي لبناء المجال المغناطيسي هي:

$$P = \frac{dW}{dt} = L I \frac{dI}{dt}$$

$$\therefore dW = L I dI$$

وَمُحْصَل على الشغل الكلي لبناء التيار من الصفر إلى I بتكامل هذه المعادلة:

$$\therefore W = \int dW = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2 \dots (٦-١٥٥)$$

وهذه الطاقة تحتزن في الملف على هيئة مجال مغناطيسي ويرمز لها عادة بالرمز U.

هذا وقد افترض أن الملف والمقاومة هما عنصران منفصلان في الدائرة المبينة في شكل (٦-١٣) ولكن القوانين التي استنتجت صحيحة أيضاً في الحالة التي يمر فيها التيار في ملف له مقاومة R وحث ذاتي L .

وإذا كانت لدينا دائرتان، كما في شكل (٦-٩)، فإن الطاقة المطلوبة لبناء التيارين I_1 و I_2 يمكن الحصول عليها من المعادلة (٦-٣٥) حيث:

$$dU = L_1 I_1 dI_1 \pm M I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 \pm M I_2 dI_1$$

$$\therefore d(M I_1 I_2) = M I_1 dI_2 + M I_2 dI_1$$

$$\therefore dU = L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 \pm d(M I_1 I_2)$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2 \quad (٦-٥٥)$$

(٦-٩-١) كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي Energy density of a magnetic field

توضح المعادلة (٦-١٥٥) الطاقة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي في ملف. فإذا فرض أن طول الملف l ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N وكان الملف طويلاً بحيث يمكن إهمال المجال المغناطيسي خارجه واعتباراً أن الفيض المغناطيسي كله يخترق بانتظام محور الملف فإن الطاقة كلها ستكون مخزونة في حجم يساوي (Sl) وتكون الطاقة في وحدة الحجم، كثافة الطاقة (energy density)، هي:

$$u = \frac{L I^2}{2 l S} \quad (٦-٥٦)$$

ومعروف من المعادلتين (٦-٢٨) و (٥-٤٢) أن:

$$B = \frac{\mu_0 N \cdot I}{l} \quad \text{و} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٥٦) عن L ، I يمكن الحصول على:

$$u = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 \dots\dots\dots (٦-٥٧)$$

وحيث إن $B = \mu_0 H$ (H شدة المجال المغناطيسي).

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH \dots\dots\dots (٦-٥٨)$$

وإذا كان الملف ملفوفا حول مادة معامل نفاذيتها μ_r $\mu = \mu_0 \mu_r$ حيث μ_r معامل النفاذية النسبية.

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 \dots\dots\dots (٦-٥٩)$$

تعتبر المعادلة (٦-٥٨) معادلة عامة وتعطى كثافة الطاقة أي الطاقة لوحدة الحجم في أي مجال مغناطيسي مهما كان شكل هذا المجال ومصدره.

مثال (٦-١١)

ملف حثه الذاتي 3 هنري ومقاومته 6 أوم متصل على التوالي ببطارية قوتها الدافعة 12 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة.
احسب:

- أ - معدل نمو التيار بمجرد غلق الدائرة.
- ب - معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى 1 أمبير.
- ج - شدة التيار بعد انقضاء زمن قدره 0.2 ثانية على غلق الدائرة.
- د - الطاقة المخزونة في هذا الملف بعد وصول التيار إلى قيمته المستقرة.

الحل

يمكن كتابة المعادلة (٦-٤٦) بالصورة التالية:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} I$$

ولايجاد المطلوب «أ» فإنه بمجرد غلق الدائرة يكون $I = \text{zero}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A/s}$$

ولايجاد المطلوب «ب» فإن :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} - \frac{6}{3} \times 1 = 2 \text{ A/s}$$

ولايجاد المطلوب «ج» تطبق المعادلة :

$$I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$I = \frac{12}{6} \left(1 - e^{-\frac{6}{3} \times 0.2} \right) = 0.65 \text{ A}$$

ولايجاد المطلوب «د» تطبق المعادلة :

$$U = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{12}{6} \right)^2 = 6 \text{ J}$$

مثال (١٢-٦)

ملف حثه الذاتي 3 هنري يتصل على التوالي بمقاومة 10 أوم وبطارية قوتها الدافعة 3 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة والمطلوب حساب ما يلي بعد انقضاء زمن قدره 0.3 ثانية على غلق هذه الدائرة .

ا - القدرة المبذولة من البطارية .

ب - القدرة المستهلكة في المقاومة .

ج - القدرة اللازمة لبناء التيار في الملف .

الحل

$$\therefore I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \dots\dots\dots (A)$$

$$\therefore I = \frac{3}{10} \left(1 - e^{-\frac{10}{3} \times 0.3} \right) = 0.189 \text{ A}$$

من المعادلة التالية :

$$IV = I^2 R + L I \frac{dI}{dt}$$

يكون :

$$P = P_R + P_L$$

حيث P القدرة المبذولة من البطارية «المطلوب أ» .

$$P = IV = 0.189 \times 3 = 0.567 \text{ W}$$

و P_R القدرة المستهلكة في المقاومة R على هيئة حرارة «المطلوب ب» .

$$P_R = I^2 R = (0.189)^2 \times 10 = 0.357 \text{ W}$$

و P_L القدرة المبذولة في الملف «المطلوب ج» .

$$P_L = L I \frac{dI}{dt}$$

ولمعرفة P_L يتطلب حساب $\frac{dI}{dt}$ باشتقاق المعادلة A نحصل على :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{3}{10} e^{-1} = 0.37 \text{ A/s}$$

$$\therefore P_L = 3 \times 0.189 \times 0.37 = 0.21 \text{ W}$$

ويلاحظ أنه يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بمعلومية P ، P_R حيث :

$$P_L = P - P_R = 0.567 - 0.357 = 0.21 \text{ W}$$

(٦-١٠) شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي

Charging and Discharging a Capacitor Through Inductive Coil

يمثل الشكل (٦-١٥) دائرة مكونة من ملف L ومقاومة R ومكثف C وبطارية جهدها V متصلة فيما بينها على التوالي . فيتم الشحن بتوصيل الدائرة (١٥-٦) ويتم التفريغ بتوصيل الدائرة (١٥-ب-٦) بعد شحن المكثف .

بتطبيق قانون كيرشوف الخاص بتوزيع الجهد على الدائرتين يُحصل على:
١ - في حالة الشحن يكون توزيع الجهد كالتالي:

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad \dots \quad (٦-١٦٠)$$

$$\therefore I = \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L} \quad (٦-٦٠ ب)$$

٢ - أما في حالة التفريغ فيحذف جهد البطارية من المعادلة (٦-٦٠) ومنه فإن:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \dots \quad (٦-٦١)$$

وواضح أن المعادلتين (٦-٦٠) و(٦-٦١) معادلتان تفاضليتان تحتاجان إلى حل مناسب لمعرفة سلوك الشحنة مع الزمن وكذلك التيار وسنبداً أولاً بحل المعادلة (٦-٦١) في حالة التفريغ.

أولاً: التفريغ

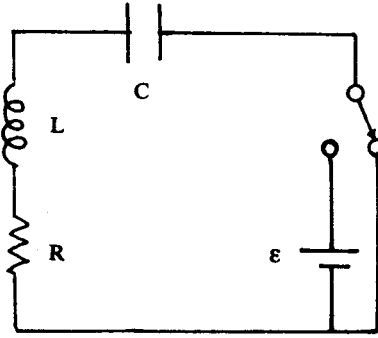
تحل المعادلة (٦-٦١) بافتراض حل خاص لها «بنى هذا الافتراض على ما سبقت دراسته في البندين (٦ - ٨ - ١) و(٦ - ٨ - ٢) في هذا الفصل وكذلك البند (٤ - ٦) في الفصل الرابع» وهو:

$$q = Ae^{\lambda t} \quad \dots \quad (٦-٦٢)$$

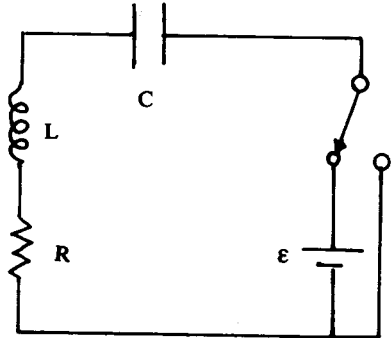
$$\therefore \frac{dq}{dt} = \lambda Ae^{\lambda t} \quad \& \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٦١) يُحصل على:

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \frac{R}{L} \lambda Ae^{\lambda t} + \frac{1}{LC} Ae^{\lambda t} = 0$$



(ب)



(ا)

شكل (٦-١٥): دائرة تحتوي على مكثف C وملف L ومقاومة R متصلة على التوالي ببطارية
أ - حالة الشحن ب - حالة التفريغ.

$$\therefore \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \dots \dots \dots (٦-٦٣)$$

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية، والمعاملان $\alpha = \frac{R}{L}$ و $\beta = \frac{1}{LC}$ يعرفان بثابتي التوهين (attenuation constants)، وجذرا هذه المعادلة هما:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\alpha - (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \quad (٤-٦٤)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن الحل للمعادلة (٦-٦١) يكون على الشكل التالي:

$$q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots (٦-١٦٥)$$

و

$$I = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots (٦٥ - ب)$$

أما الشكل النهائي لقيمة الشحنة اللحظية وكذلك التيار فإنه يعتمد على قيمة المقدار الذي يقع تحت الجذر فقد يكون موجبا أو صفرا أو سالبا أي $R^2 > = < 4 \frac{L}{C}$ وسنميز كلا منها كالتالي:

$$R^2 > \frac{4L}{C} \text{ أن بافترض } ١ -$$

في هذه الحالة تكون قيم λ_1 ، λ_2 حقيقية .

ويمكن معرفة A_1 ، A_2 من الشروط الابتدائية حيث :

$$t = 0 , I = 0 \text{ \& } q = q_0$$

وبالتعويض في المعادلتين (٦-٦٥) يُحصل على :

$$A_1 + A_2 = q_0$$

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$$

$$\therefore A_1 = \frac{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} q_0 , \text{ و } A_2 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} q_0 \quad (٦-٦٦)$$

وبالتعويض عن A_1 في المعادلة (٦-١٦٥) والمعادلة (٦-٦٥) بـ (٦-٦٦) يُحصل على :

$$q = \frac{\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2}}{2 \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2}} q_0 e^{\frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2} \right\} t}$$

$$+ \frac{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2}}{2 \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2}} q_0 e^{\frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2} \right\} t}$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C} \right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \left\{ e^{\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2} t} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2} t} \right\} \quad (٦-٦٧)$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C} \right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \cosh \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \right)^{1/2} t \dots \dots (٦-٦٨)$$

$$R^2 = \frac{4L}{C} \text{ أن بافتراض } \text{ب -}$$

ويكون الجذران في هذه الحالة متساويين أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2} \alpha = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} \dots \dots (٦-٦٩)$$

ومع ذلك سيفترض أن الجذرين غير متساويين بحيث تكون قيمتهما $\lambda + h$ و λ حيث $h \rightarrow 0$ وبذلك يمكن أن يكون الحل للمعادلة (٦-٦١) على الصورة:

$$q = (A + Bt) e^{\lambda t} \quad \text{و}$$

$$I = (A + Bt) \lambda e^{\lambda t} + B e^{\lambda t}$$

ويتطبيق الشروط الابتدائية يُحصل على قيمتي A و B حيث:

$$A = q_0 \quad , \quad B = \frac{1}{2} \alpha q_0$$

$$\therefore q = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right) q_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \dots \dots (٦-١٧٠)$$

و

$$I = \frac{R^2 t}{4L^2} e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \dots \dots (٦-٧٠ \text{ ب -})$$

$$R^2 < \frac{4L}{C} \text{ أن بافتراض } \text{ج -}$$

تكون في هذه الحالة R صغيرة وبذلك يكون كل جذر λ_1 ، λ_2 عبارة عن عدد مركب. الجزء الأول حقيقي والجزء الذي تحت الجذر التربيعي عدد تخيلي، الملحق ٢، وبذلك تصبح المعادلة (٦-٦٤) كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + i \sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - i \sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \quad (٦-٧١)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$

وبذلك تصبح المعادلة (٦-١٦٥) بعد التعويض عن λ_1 و λ_2 من المعادلتين (٦-٧١) كالآتي:

$$\therefore q = A_1 e^{\frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t}$$

أو

$$q = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[A_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}t} + A_2 e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}t} \right]$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$q = Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}t - \Phi\right)$$

$$q = Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega t - \Phi) \dots\dots\dots (٦-٧٢)$$

حيث

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}, \quad \alpha = \frac{R}{L}$$

أما التيار فيحسب بتفاضل المعادلة (٦-٧٢) أي :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha Ae^{-\frac{1}{2}\alpha t} \cos(\omega t - \Phi) - \omega \sin(\omega t - \Phi) Ae^{-\frac{1}{2}\alpha t}$$

$$\therefore I = -Ae^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[\frac{1}{2}\alpha \cos(\omega t - \Phi) + \omega \sin(\omega t - \Phi) \right] \quad (٦-٧٣)$$

ويمكن معرفة الثابتين A و Φ من الشروط الابتدائية ، فعندما تكون $t = 0$ يكون :

$$q = q_0, I = 0$$

وبالتعويض في المعادلتين (٦-٧٢) و (٦-٧٣) يُحصل على :

$$q_0 = A \cos \Phi \dots\dots\dots (٦-١٧٤)$$

و

$$\frac{1}{2}\alpha \cos \Phi + \omega \sin \Phi = 0$$

أو

$$\tan \Phi = \frac{\alpha}{2\omega} \quad \dots\dots\dots (٦٧٤-ب)$$

ومنه فإن :

$$\sin \phi = \frac{\alpha}{2r} \quad , \quad \cos \phi = \frac{\omega}{r} \quad (٦٧٤-ج)$$

حيث :

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \dots\dots (٦٧٤-د)$$

من المعادلتين (٦٧٤-ا) و (٦٧٤-ج) يُحصل على :

$$A = \frac{r q_0}{\omega}$$

وبالتعويض في المعادلتين (٦٧٢) و (٦٧٣) يُحصل على :

$$q = q_0 \frac{r}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega t - \Phi)$$

وكذلك :

$$I = -A r e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \sin \omega t = -q_0 \frac{r^2}{\omega} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \omega t$$

والإشارة السالبة تدل على أن التيار في اتجاه معاكس لاتجاه التيار أثناء الشحن .

وأخيرا بالتعويض عن α ، r ، ω يُحصل على :

$$q = q_0 \frac{(1/\sqrt{LC})}{\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} e^{(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}t - \Phi\right) \quad (٦٧٥-ا)$$

$$I = \frac{(V/L)}{\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} e^{(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}t\right) \quad (٦٧٥-ب)$$

وهذه العلاقة علاقة تذبذبية سعتها متناقصة على النمط الأسي وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة (٦-١٧٥) كما في شكل (١٦ج-٦). والتردد الطبيعي (natural frequency) للدائرة يعطى من العلاقة التالية :

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \dots (٦-١٧٦)$$

أما إذا كانت المقاومة R صغيرة جدا فإن المعادلة (٦-١٧٦) تصبح :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \dots \dots \dots (٦-١٧٦ ب)$$

حيث تسمى f_0 بتردد الذبذبات الحرة (free oscillation) فإذا فرض أن q_1 ، q_2 هي أعلى قيمتين متتاليتين خلال فترة زمنية قدرها T فإن :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{e^{-\frac{1}{2}\alpha(t+T)}} = e^{\frac{1}{2}\alpha T}$$

و

$$\ln \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}\alpha T = \frac{2\pi \left(\frac{R}{2L}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \dots (٦-٧٧)$$

ويرمز للمقدار $\ln \frac{q_1}{q_2}$ بالرمز δ ويعرف بالتناقص اللوغاريتمي لكل دورة للدائرة (logarithmic decrement per cycle) وإذا كانت مقاومة الدائرة صغيرة فإن :

$$\delta = \frac{\pi R}{L} \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{L \omega_0} = \pi \frac{R}{\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)} (٦-٧٨)$$

أي أن δ تساوي π مضروباً في النسبة بين المقاومة R والمفاعلة الحثية (inductive reactance) أو المفاعلة السعوية (capacitive reactance) للدائرة في حالة الرنين.

والشكل (٦-١٦) يوضح طبيعة التفريغ الحادث لثلاث قيم لمقاومة الدائرة عندما يكون $C = 1\mu f$ و $L = 1H$ أما الجهد فيمثل عددا بسيطا من الفولت.

ثانيا: الشحن

يمكن كتابة المعادلة (٦-٦٠) بالصورة التالية:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad \dots\dots (٦-٧٩)$$

وحسب ما شرح في «أولا» فإن حل هذه المعادلة التفاضلية يمكن أن يكون على الشكل التالي:

$$I = A_1 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \cos(\omega' t - \Phi_1) \quad \dots\dots (٦-٨٠)$$

حيث Φ_1 ، A_1 ثوابت يمكن معرفتها من الشروط الابتدائية حيث:

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ فإن } I = 0 \text{ ومنه } t = 0 \text{ يكون}$$

$$\therefore I = A_1 e^{\left(\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (٦-٨١)$$

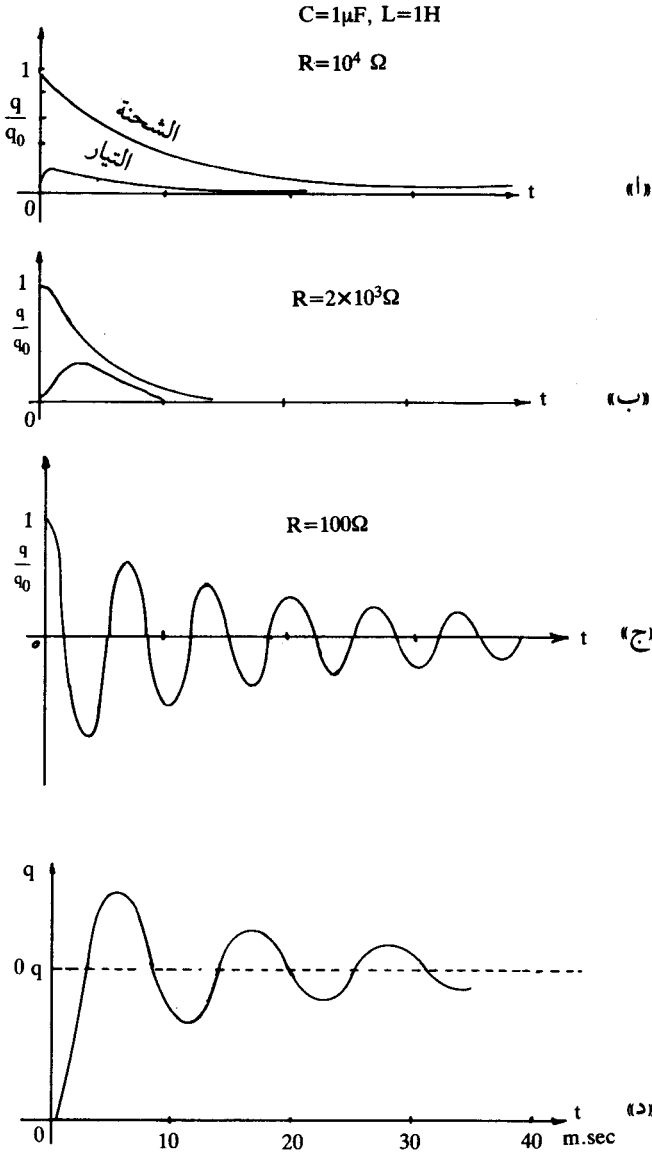
$$t = 0 \text{ تكون } q = 0$$

يمكن الحصول من المعادلة (٦-٦٠) على:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V}{L}$$

وبمفاضلة المعادلة (٦-٨١) يُحصل على:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = A_1 \omega' = A_1 \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



- شكل (١٦-٦): أ، ب، جـ - تفريغ مكثف سعته $1\mu f$ خلال ملف له حث، فقط، ذاتي قيمته $1H$ لقيم مختلفة لـ R ($10^4 \Omega$ و $2 \times 10^3 \Omega$ و 100Ω).
- د - تغير الشحنة q على مكثف أثناء عملية الشحن، خلال ملف L بحيث إن قيم C, L, R تجعل العلاقة متذبذبة، مع الزمن t .

و بمساواة المعادلتين السابقتين يُحصل على :

$$A_1 = \frac{V}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$\therefore I = \frac{V}{\sqrt{(L/C) - (R^2/4)}} e^{(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t)} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} t\right) \quad (٦-١٨٢)$$

..... (٦-١٨٢ ب)

$$q = q_0 \left[1 - \frac{(1/\sqrt{LC})}{\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} e^{(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t)} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} t - \Phi\right) \right]$$

فإذا كانت $R^2 = \frac{4L}{C}$ فإن :

$$I = \frac{V}{L} t e^{(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t)} \quad \dots\dots (٦-١٨٣)$$

أما إذا كانت $R^2 > \frac{4L}{C}$ فإن :

$$I = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}} e^{(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t)} \sinh \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} t \quad (٦-١٨٣ ب)$$

والشكل (٦-١٦ د) يوضح تغير الشحنة بالنسبة للزمن أثناء شحن المكثف وقد وضعت قيم ثوابت الدائرة L و C بحيث يكون الشكل متذبذبا.

ومن الملاحظ أن القيمة العظمى للشحنة، عند لحظة البداية، تكون أكبر كثيرا من قيمة الشحنة النهائية على المكثف. ولذلك إذا شحن المكثف من مصدر جهد عال خلال مقاومة صغيرة ومحاثه كبيرة فإن عزل المكثف سيحدث وميضاً ولمنع حدوث ذلك لابد أن يتم شحن المكثف من خلال مقاومة كبيرة.

ثالثا: حل خاص

إذا رُجع مرة أخرى إلى الحل المفترض (٦-٦٢) لحل المعادلة (٦٠ ب - ٦) واعتبر أن $A = A_1 = A_2$ في الحل (٦٥ - ٦) فإن:

$$q = A (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية فإنه عندما تكون $t = 0$ تكون $q = q_0$ ومنه فإن:

$$A = \frac{1}{2} q_0$$

(٦-١٨٤)

$$\therefore q = \frac{1}{2} q_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \left\{ e^{\sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)} t} + e^{\sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)} t} \right\}$$

فإذا كان $\frac{R^2}{4L} > \frac{1}{LC}$

فإن المقدار تحت الجذر موجب ومنه فإن:

$$q = q_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \cosh \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} t$$

أما إذا كان $\frac{R^2}{4L} = \frac{1}{LC}$ فإن:

$$q = q_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \quad \text{..... (٦-٨٤ ب - ٦)}$$

وأخيرا إذا كان $\frac{R^2}{4L} < \frac{1}{LC}$ فإن:

يكون المقدار تحت الجذر تخيليا ومنه فإن:

$$q = \frac{1}{2} q_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \left(e^{i\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)} t} + e^{-i\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)} t} \right) \quad \text{أو}$$

$$q = q_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t\right)} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \quad \text{..... (٦-٨٥)}$$

وهي المعادلات السابقة نفسها مع اختلاف في مقدار الثوابت.

(١١-٦) المولدات

Generators

(١١-٦-١) طريقة توليد جهد متردد Generation of alternating voltage

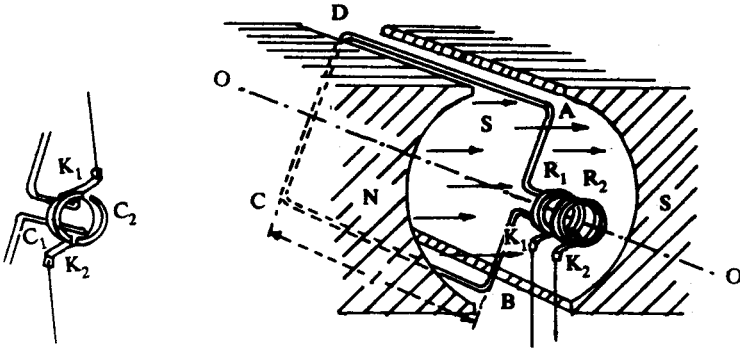
إشارة لما درس في البنود السابقة من هذا الفصل فإن كل جهاز يولد تيارا كهربيا نتيجة لحركة نسبية بين الموصل والمجال المغناطيسي يسمى مولدا (generator). وأنواع المولدات كثيرة يتألف الشائع منها من ملف معدني يدور في مجال مغناطيسي ناتج عن قطبي مغناطيس كهربى (electromagnet) ويسمى هذا المولد بالدينامو (dynamo) بينما يسمى المولد ذو المغناطيس الدائم (parmanent magnet) بالمغنيط (magneto).

فالأجزاء الرئيسة للمولد هي:

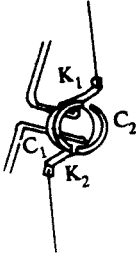
- ١ - مجال مغناطيسي ناتج عن مغناطيس كهربى أو دائم.
- ٢ - ملف دوار (rotating coil) وهو عضو الانتاج الكهربى (armature).
- ٣ - جهاز لتوصيل الملف الدوار بالدوائر الخارجية مثل الحلقات الزالقة (slip rings) أو مبدل (عاكس للتيار commutator) ويلف الملف الدائر بصورة عملية حول قلب حديدي (iron core) للحصول على مجال منتظم قوى.

وبين الشكل (١٧-٦) طريقة عمل الدينامو، فهو يتكون من ملف مستطيل الشكل ABCD عدد لفاته N ومساحة وجهه S يدور حول محوره O-O في مجال مغناطيسي منتظم كثافة فيضه B ويتصل طرفا الملف بحلقتين زالقتين R_1 ، R_2 بحيث يمر محور الدوران بمركز هاتين الحلقتين، وتدور الحلقتان بدوران الملف ويمس محيط كل حلقة فرشاة (K_1 , K_2 وهاتان الفرشأتان تصلان الملف بالدائرة الخارجية، وتعدان مصدرين للقوة الدافعة الكهربائية التأثيرية $\mathcal{E}$ التي ستولد بين طرفي الملف عند الدوران.

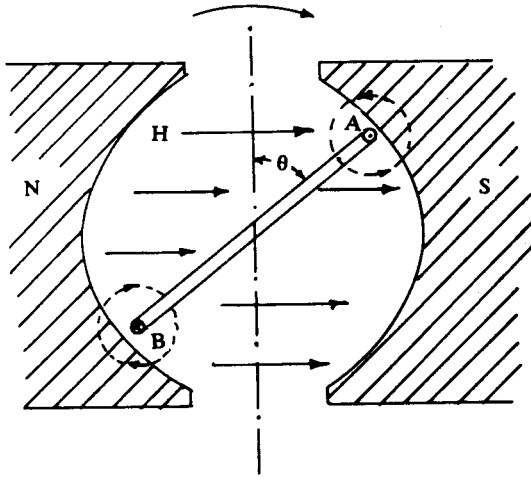
وتستخدم الآلات الحرارية أو التوربينات المائية (hydraulic turbines) مثلا لإدارة الملف سالف الذكر.



(أ)



(ب)



(ج)

- شكل (١٧-٦): ١- ملف مستطيل يتحرك في مجال مغناطيسي (طريقة عمل الدينامو) يتصل طرفاه بحلقتين زالقتين R_1 ، R_2 ويمس محيط كل حلقة فرشاه K_1 ، K_2 .
- ب- استخدام معدلين C_1 ، C_2 بدلا من الحلقتين R_1 ، R_2 للحصول على تيار أحادي الاتجاه.
- ج- منظر خلفي للشكل ١ يوضح طريقة لحساب القوة الدافعة الكهربية الحثية «التأثيرية» الناتجة عن حركة الملف في المجال المغناطيسي.

ومن الشكل (١٧-ج-٦) والذي يمثل المنظر الخلفي للشكل (١١٧-٦) يمكن حساب القوة الدافعة التأثيرية $\mathcal{E}$ الناتجة كما يلي:

إذا فرض أنه في لحظة ما أثناء الدوران كان مستوى الملف يصنع مع العمودي على المجال B زاوية قدرها θ كما في شكل (١٧-ج-٦).

∴ الفيض المغناطيسي الكلي Φ العمودي المخترق للملف يساوي:

$$\Phi = NSB \cos \theta$$

حيث $B \cos \theta$ هي مركبة B العمودية على مستوى الملف الذي عدد لفاته N ، ومساحة وجهه S .

وحسب المعادلة (١١١-٦) تكون القوة الدافعة الكهربائية المستحثة في الملف هي:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -NSB \frac{d}{dt} \cos \theta$$

$$\therefore \mathcal{E} = -NSB \frac{d}{d\theta} \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= NSB \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \dots \dots \dots (٦-٨٦)$$

وإذا كانت ω هي السرعة الزاوية (angular velocity) للملف فإن الزاوية θ التي دارها الملف في زمن قدره t هي:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad , \quad \theta = \omega t$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٨٦) يُحصل على:

$$\mathcal{E} = NSB \omega \sin (\omega t) \quad \dots \dots \dots (٦-٨٧)$$

وحسب هذه المعادلة فإن $\sin(\omega t)$ يتغير من (+1) عندما تكون $\theta = \omega t = 90^\circ$ إلى (-1) عندما تكون $\theta = \omega t = 270^\circ$ وبهذا فإنه في خلال دورة كاملة تتغير القوة الدافعة التأثيرية المتولدة $\mathcal{E}$ كما يلي:

١ - تكون $\mathcal{E} = 0$ عندما $\theta = \omega t = 0$

٢ - تزداد $\mathcal{E}$ بازدياد θ إلى أن تصبح $\theta = 90^\circ$ وعندها تكون $\mathcal{E}$ نهاية عظمى $\mathcal{E}_{\max}$
حيث $\mathcal{E}_{\max} = NSB\omega$

٣ - تقل $\mathcal{E}$ إلى أن تصل إلى الصفر عند $\theta = 180^\circ$

٤ - تزداد $\mathcal{E}$ في الاتجاه المعاكس إلى أن تصل θ إلى 270° وعندها تكون نهاية عظمى $\mathcal{E}_{\max}$
حيث $\mathcal{E}_{\max} = -NSB\omega$

٥ - تقل $\mathcal{E}$ إلى أن تعود إلى الصفر مرة أخرى عند $\theta = 360^\circ$

وبالتعويض عن النهاية العظمى للقوة الدافعة الكهربائية في المعادلة (٦-٨٧) يُحصل على:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t. \dots\dots\dots (٦-٨٨)$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة منحنى الجيب (sine curve) أو معادلة الحركة التوافقية البسيطة (simple harmonic motion) وهذه القوة الدافعة الحثية هي الواقعة بين طرفي الفرشاتين K_1 ، K_2

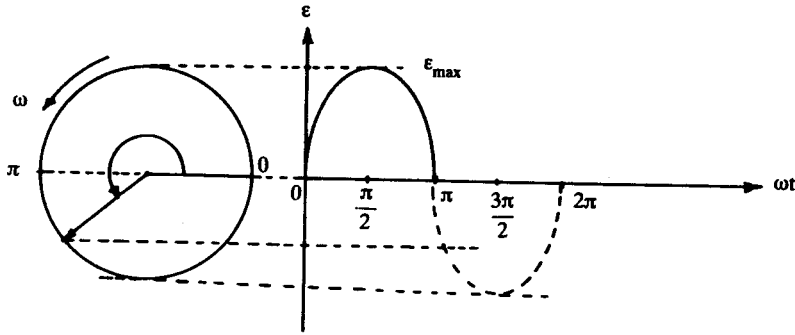
وإذا كانت T تمثل الزمن بالثانية لدورة كاملة للملف حول محوره $O-O$ وتعرف بزمَن الدورة، f عدد الدورات الكاملة للملف في الثانية وتعرف بالتردد (frequency) فيمكن التعبير عن السرعة الزاوية ω بالمعادلة:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ rad/s}$$

$$\therefore \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin 2\pi f t \dots\dots\dots (٦-٨٩)$$

ويمكن تمثيل منحنى الجيب بيانياً للقوة الدافعة الحثية، المعادلة (٦-٨٨)، كما هو مبين بالشكل (٦-١٨).

وبلاحظ من الشكل (٦-١٨) أن قيمتها تتغير من لحظة إلى أخرى وتكون موجبة في النصف الأول للدورة وسالبة في النصف الثاني للدورة أي أنها قوة دافعة مترددة (alternating E.M.F.).



شكل (٦-١٨): منحني جيبي يمثل العلاقة بين القوة الدافعة الحثية والزاوية $\theta = \omega t$ الناتجة عن حركة الملف كما في شكل (٦-١٧).

ولذلك فالجهود المتردد هو جهد يتغير مقداره تغيرا دوريا مع الزمن ويتغير اتجاهه بانتظام كل زمن معين.

مثال (٦-٩)

يدور ملف لمولد كهربائي (A.C.) ، بسرعة ثابتة وبمعدل 1800 دورة في الدقيقة في مجال مغناطيسي منتظم كثافته فيضيه 0.85 وبير لكل متر مربع فإذا كانت مساحة الملف 0.06 مترا مربعا ، احسب :

- ١ - أقصى قيمة للقوة الدافعة الحثية المتولدة في الملف المحتوي على 25 لفه .
- ب - القوة الدافعة الكهربائية اللحظية المتولدة في الملف عند دوران زواوية قدرها 30° من وضعه الرأسي .

الحل

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi \times 1800}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 60\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\therefore \mathcal{E}_{\max} = n.S.B.\omega = 25 \times 0.06 \times 0.85 \times 60 \times \pi = 240 \text{ V}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cdot \sin(30^\circ) = 240 \times 0.5 = 120 \text{ V}$$

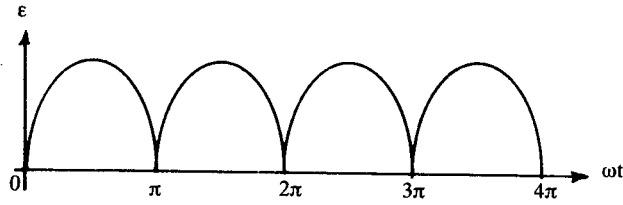
(٦-١١-٢) مولد التيار المستمر D. C. generator

يتضح من البند السابق (٦-١١-١) أن القوة الدافعة الكهربائية في الملف تعكس اتجاهها مرتين كل دورة كاملة كما في شكل (١٧ ب - ٦) إذا كانت أطراف الملف متصلة بالدائرة الخارجية من خلال الحلقتين المنزلقتين R_1 ، R_2 والفرشتين K_1 ، K_2 ويسمى الدينامو في هذه الحالة بدينامو التيار المتردد (A.C. dynamo).

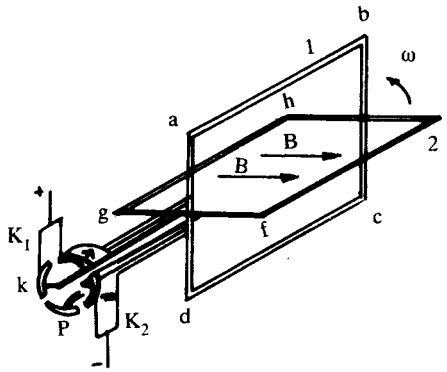
ولكن استبدال الحلقتين المنزلقتين بمبدلين C_1 ، C_2 عاكسين للتيار المبين في شكل (١٧ ب - ٦) يمكن من الحصول على تيار أحادي الاتجاه (unidirectional current) والمبدل هو عبارة عن حلقة من النحاس منقسمة إلى نصفين بينهما مادة عازلة.

يتصل المبدلان C_1 ، C_2 بطرفي الملف «كل طرف بمبدل» وتتلامس الفرشتان K_1 ، K_2 معهما بحيث يمر كل مبدل من فرشاة إلى الأخرى عند لحظة انعكاس القوة الدافعة الكهربائية في الملف أي عندما يكون مستوى الملف متعامدا مع المجال. وبذلك يكون اتجاه القوة الدافعة الكهربائية بين طرفي الملف متغيرا بينما تكون في الدائرة الخارجية أحادية الاتجاه ويتكون من مجموعة من نبضات (series of pulses) كما في شكل (١٩ أ - ٦). مثل هذا المولد يسمى بمولد التيار المستمر (D.C. generator) ويلاحظ من الشكل (١٩ أ - ٦) أن القوة الدافعة رغم أنها أصبحت في اتجاه واحد إلا أنها ليست ثابتة القيمة أي أنها تبدأ من الصفر ثم تزداد إلى قيمتها العظمى ثم تتناقص إلى الصفر وتبدأ مرة أخرى وهكذا.

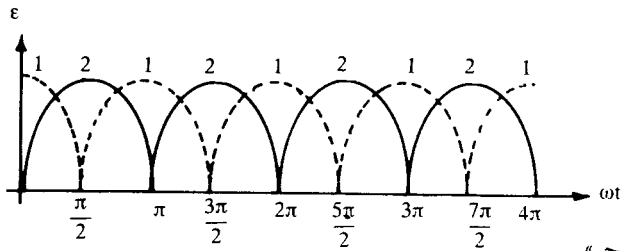
ويمكن الحصول على قوة دافعة ثابتة باستعمال بضعة ملفات وتقسيم المبدلين إلى عدة قطاعات بحيث يتصل كل قطاعين بطرفي ملف. وتوضع الملفات حول محور الدوران المشترك بحيث يحدث اتصال الفرشتين K_1 ، K_2 مع طرفي كل ملف حينما تكون القوة الدافعة الكهربائية بين طرفيه نهاية عظمى. وفي هذه الحالة فإن محصلة القوة



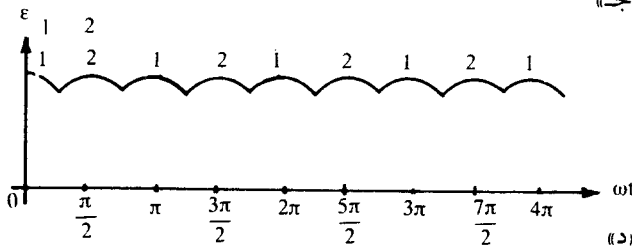
«أ»



«ب»



«ج»



«د»

- شكل (٦-١٩): ١- العلاقة بين القوة الدافعة الكهربائية الحثية أحادية الاتجاه مع ωt الناتجة عن استخدام مبدلين مع الملف المتحرك في المجال المغناطيسي كما في شكل (٦-١٧).
- ب- حركة ملفين في مجال مغناطيسي.
- ج- د- العلاقة بين القوة الدافعة الكهربائية الحثية و ωt الناتجة عن حركة الملفين.

الدافعة الكهرية المتولدة بين طرفي الفرشيتين تكون في اتجاه واحد تقريبا والشكل (١٩ب-٦) يمثل دائرة القوة الدافعة الكهرية نتيجة استخدام ملفين (أحدهما abcd والآخر متعامد عليه ghid وينقسم المبدلان إلى أربعة أجزاء k,m,n,p يتصل كل اثنين بملف ويلاحظ أن الفرشة K_1 تتصل بالجزئين k,n المتصلة بالملفين بينما تتصل K_2 بالجزء m المتصل بالملف ghid فقط) حيث نحصل على منحنيين كما في شكل (١٩ج-٦) متداخل بعضهما ببعض لتعطي قوة دافعة ثابتة القيمة كما في شكل (١٩د-٦). وكلما زادت عدد الملفات زاد معها ثبوت (استمرار) القوة الدافعة الكهرية الناتجة.

(١٢-٦) المحرك الكهري

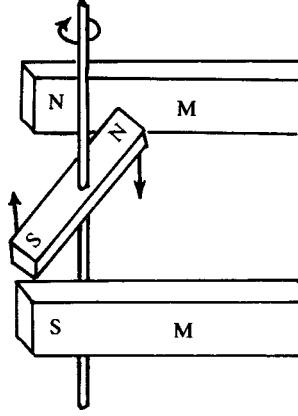
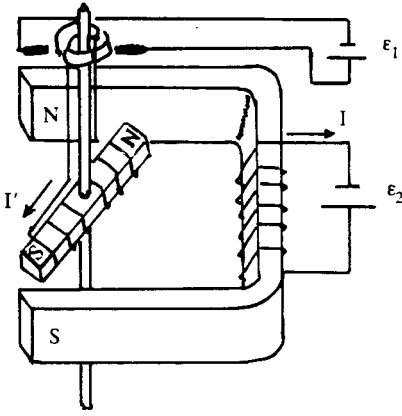
Electric Motor

تتحول الطاقة الكهرية في المحرك الكهري إلى طاقة ميكانيكية بينما تتحول الطاقة الحركية في المولد إلى طاقة كهرية مع العلم أن مكوناتها الأساسية واحدة حيث يتألف المحرك الكهري من مجال مغناطيسي وعضو الإنتاج الكهري والفرش وجهاز التوصيل الخارجي. وتنقسم المحركات إلى نوعين هما:

(١٢-٦-١) محرك التيار المستمر D.C. motors

إذا وضع قضيب مغناطيسي معلق بين قطبي مغناطيس كما في شكل (٢٠-٦) فإن قوة التنافر والتجاذب بين الأقطاب المختلفة ستحدث عزمًا ازدواجيًا يكون سببًا في إدارة المغناطيس المعلق 180° درجة تقريبا ويستقر المغناطيس عندما يكون وضع الأقطاب N - S , N - S.

وبين الشكل (٢١-٦) محرك التيار المستمر وتعتمد نظرية عمله على النظرية السابقة الذكر حيث قد استبدل المغناطيس الدائم بمغناطيس كهري يتصل بالبطارية E_2 والقضيب المغناطيسي بعضو الإنتاج الكهري المتصل بالبطارية E_1 التي تمد الملف بالتيار الكهري من خلال المبدل والفرش. فإذا كان عضو الإنتاج الكهري في موضع كما في شكل (٢١-٦) فإن قوة المجال المغناطيسي ستحدث عزمًا ازدواجيًا تسبب في



شكل (٦-٢٠): حركة قضيب مغناطيسي معلق بين قطبي مغناطيس.
شكل (٦-٢١): استبدال المغناطيس الطبيعية «الدائمة» كما في شكل (٦-١٢) بمغناطيس كهربية.

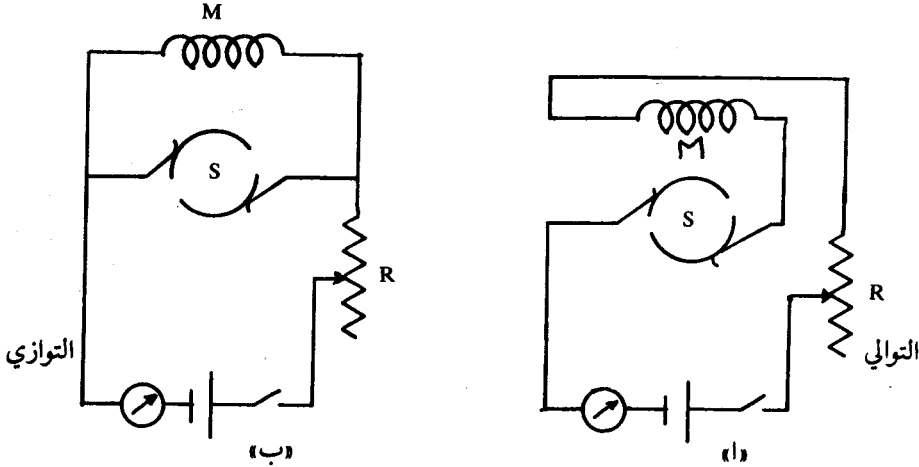
دورانه نصف دورة كاملة. فإذا انعكس اتجاه التيار فإن الملف سيعود إلى الوضع الابتدائي وسوف تؤثر القوى المغناطيسية على دورانه ليكمل الدورة وعندها ينعكس اتجاه التيار ويبدأ الدوران من جديد وهكذا يستمر دوران الملف، وكما هو معروف أن عملية انعكاس التيار تحدث بسبب وجود المبدل.

ويلاحظ من الشكل (٦-٢١) أن مصدر تيار الملف الدوار E_1 يختلف عن مصدر تيار المجال المغناطيسي E_2 . ولكن في العادة يكون المصدر واحدا وقد يكون التوصيل بين الملف الدوار وملف المجال المغناطيسي على التوالي ويسمى المحرك في هذه الحالة محرك بلفائف متوالية التوصيل (series-wound motor) كما في شكل (٦-١٢٢) أو على التوازي ويسمى محرك بلفائف موصلة على التوازي (shunt-wound motor) كما في شكل (٦-٢٢ب).

وجدير بالملاحظة أيضا أن دوران الملف الدوار نفسه في المجال المغناطيسي تنشأ عنه قوة دافعة تأثيرية تعاكس اتجاه المسبب للحركة «حسب قاعدة لنز» وهذه القوة تعمل على إبطاء حركة الملف. فإذا فرض أن E القوة الدافعة الكهربائية المستخدمة في الدائرة

الخارجية للمحرك و $\mathcal{E}'$ القوة الدافعة التأثيرية وكانت R هي مقاومة الملف والمقاومة الداخلية للبطارية فإن التيار المار في الدائرة يعطى بالمعادلة :

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R} \dots\dots\dots (٦-٩٠)$$



شكل (٦-٢٢) : المغناطيس الكهربي المتحرك والمغناطيس الكهربي الثابت متصلان
 ا - على التوالي .
 ب - على التوازي .

وحسب المعادلة (٦-٨١) من الفصل الخامس فإن عزم الدوران يصبح :

$$\tau = I S B N \sin \alpha$$

$$\therefore \tau = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R} S B N \sin \alpha \dots\dots\dots (٦-٩١)$$

حيث S مساحة وجه الملف و B كثافة الفيض المغناطيسي و α الزاوية بين العمود على مستوى الملف واتجاه المجال المغناطيسي و N عدد لفات الملف .

وواضح من المعادلة (٦-٩١) أن القوة الدافعة الكهرية للبطارية $\mathcal{E}_1$ يجب أن تكون أكبر من القوة الدافعة التأثيرية $\mathcal{E}'$ الناتجة في الملف الدوار .

(٦-١٢) محرك التيار المتردد A.C. motor

عندما يكون مصدر التيار المتردد مُوصل بين طرفي الملف الدوار. أي استبدال البطارية $\mathcal{E}_1$ بمصدر تيار متردد. فإن انقلاب التيار ينتج عنه تغيير القطبين N و S بطرفي قلب الملف الدوار. وفي هذه الحالة تستعمل الحلقات الزايقة بدلا من المبدل. وواضح أن سرعة الدوران لا بد أن تتزامن (synchronize) مع سرعة انقلاب مصدر التيار المتردد حتى يكون عزم الدوران مستمرا في اتجاه ذلك الدوران نفسه.

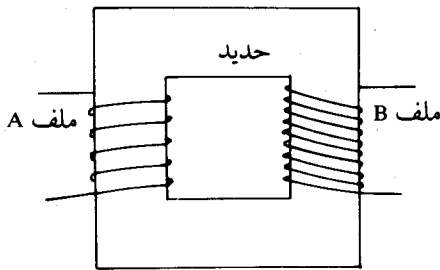
ويمكن استبدال البطارتين $\mathcal{E}_1$ ، $\mathcal{E}_2$ بمصدر واحد للتيار المتردد وفي هذه الحالة تتغير القطبية (polarity) لكل من الملف الدوار والمجال المغناطيسي في الوقت نفسه.

ومحركات التوصيل على التوازي هي المستعملة بصورة تجارية. ويسمى المحرك بالمحرك الشامل (universal motor) إذا كان يعمل بالتيار المستمر والمتردد.

(٦-١٣) المحول

Transformer

تعتمد دراسة المحولات على العلاقات التبادلية بين الكهرباء والمغناطيسية التي درست في الفصل الخامس وفي هذا الفصل ومن أهمها ما أثبتته العالم هانز أورشيد (Oersted) من أن المجال المغناطيسي يحيط دائما بالتيار المحمول في الموصلات وكذلك اكتشاف فاراداي المشهور في الحث الكهرومغناطيسي الذي يبين بصورة عملية أنه إذا تغيرت خطوط القوى المغناطيسية الواصلة إلى ملف معدني تتولد فيه قوة دافعة كهربية حثية.



شكل (٦-٢٣): محول كهربائي

والمحول ذو القلب الحديدي

(iron-core transformer) المبين في شكل

(٦-٢٣) يستخدم في دوائر التيار المتردد، ونظرية عمله تعتمد على ما ذكر أعلاه، بحيث يمكن بواسطته تغيير الجهد والتيار من قيم منخفضة إلى قيم مرتفعة أو العكس. ويعتبر التحويل في كلتا الحالتين

في غاية الأهمية فيحياتنا العملية . ويتكون المحلول أساسا من ملفين A و B ملفوفين على قلب حديدي يعمل على توجيه المجال المغناطيسي الناتج عن التيار المار في الملف الابتدائي A إلى الملف الثانوي B.

فتغير التدفق المغناطيسي خلال الملف B يولد قوة دافعة كهربية مترددة فيه لها تردد المصدر نفسه الموصل للملف A.

وحسب المعادلة (٦-١٢) تكون القوة الدافعة الحثية $\mathcal{E}_p$ المتولدة في الملف الابتدائي نتيجة لمرور التيار المتردد I_p هي :

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (٦-٩٢)$$

حيث N_p عدد لفات الملف الابتدائي و $\frac{d\Phi}{dt}$ معدل تغير الفيض المغناطيسي الذي تسبب في حدوث قوة دافعة كهربية $\mathcal{E}_s$ بين طرفي الملف الثانوي تساوي :

$$\mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (٦-٩٣)$$

يُحصل من المعادلتين (٦-٩٢) و (٦-٩٣) على :

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p} \dots\dots\dots (٦-٩٤)$$

وهذه المعادلة صحيحة لأي تردد . وحيث إن القيمة الفعالة للجهد V تتناسب مع القيمة العظمى للقوة الدافعة الكهربية حسب المعادلة (١٠ - ٨) :

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \dots\dots\dots (٦-٩٥)$$

فهذه المعادلة تدل على أنه إذا كانت عدد لفات الملف الابتدائي قليلة بالنسبة لعدد لفات الملف الثانوي فإن فرق الجهد بين طرفي الملف الثانوي سيكون أكبر من الجهد الداخل للملف الابتدائي بمعدل المقدار N_s/N_p ويسمى المحول في هذه الحالة باسم

المحول الرافع (step-up transformer) أما إذا كان عدد لفات الملف الابتدائي أكبر من عدد لفات الملف الثانوي فإن الجهد بين طرفي الثانوي سيكون أقل من الجهد الداخل في الملف الابتدائي ويسمى المحول بالمحول الخافض (step-down transformer).

ويكون فقد الطاقة للمحول المثالي (ideal transformer) مساويا للصفر وبذلك فإن الطاقة الكهربائية للملف الابتدائي تساوي الطاقة الكهربائية للملف الثانوي أي :

$$P_p = P_s$$

أو

$$V_p I_p \cos \theta_p = V_s I_s \cos \theta_s$$

حيث θ هي زاوية الطور بين I و V ، وسيأتي شرح ذلك في الفصل الثامن ، وحيث إن $\theta_s = \theta_p$

$$\therefore V_p I_p = V_s I_s$$

أو

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{V_s}{V_p} \quad \dots\dots\dots (٦-٩٦)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٦-٩٥) يُحصل على :

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p} \quad \dots\dots\dots (٦-٩٧)$$

وهذا يعني أن معدل التغير في التيار يتناسب عكسيا مع معدل عدد لفات الملفين . ولما كان الفقد الحراري نتيجة لمقاومة الأسلاك يتناسب مع مربع التيار حسب المعادلة ($I^2 R$) لذلك فمن الأفضل عند نقل الطاقة الكهربائية استعمال الجهد العالي والتيار المنخفض . ومن أجل ذلك توجد محولات ضخمة لرفع الجهد وخفض شدة التيار في أماكن توليد الطاقة عند استخراجها من المولد وقبل نقلها إلى أماكن استعمالها .

والمحولات التجارية تعاني من فقد الطاقة إذ أن الطاقة المستمدة من الملف الثانوي أقل من الطاقة الداخلة في الملف الابتدائي بمقدار لا يزيد عن 5% حيث تعطى فعالية (efficiency) المحول بالمعادلة :

$$\text{Eff} = \frac{\text{output power}}{\text{input power}} = \frac{P_s}{P_p} \dots \dots (٦-٩٨)$$

وهذا الفقد في الطاقة كان نتيجة للعوامل التالية :

١ - مقاومة أسلاك الملفين الابتدائي والثانوي بحيث يعطي الفقد الحراري من العلاقة $I_p^2 R_p + I_s^2 R_s$. فكلما زاد الحمل الخارجي زادت قيمة التيار ومن ثم تزيد الطاقة الحرارية وتقل فعالية المحول. وهذا النوع من الفقد يسمى بالطاقة المفقودة في النحاس (copper loss).

ب - التيارات الدوامية (eddy currents) في قلب المحول. ويحدث ذلك بسبب تغيير الفيض المغناطيسي الذي يؤدي إلى حدوث قوة دافعة كهربية حثية والذي يعطي تيارات كهربية تعتمد على مقاومة القلب. ويمكن تقليل هذا النوع من الفقد بوجود شرائح الحديد المعزولة.

ج - كما يوجد فقد في الطاقة يستهلك في مغنطة الحديد، وهو ما يسمى بالفقد التخلفي (hysteresis loss)، وهذا النوع من الفقد يرتبط بالشغل المبذول في تكرار تمغنط أو إزالة تمغنط القلب الحديدي ويمكن التقليل من هذا الفقد باختيار أنواع معينة من الحديد يصنع منها قلب المحول وتكون القلوب المستخدمة في المحولات التجارية عادة مصنوعة من فولاذ السليكون (silicon steel).

(٦-١٤) البيتاترون

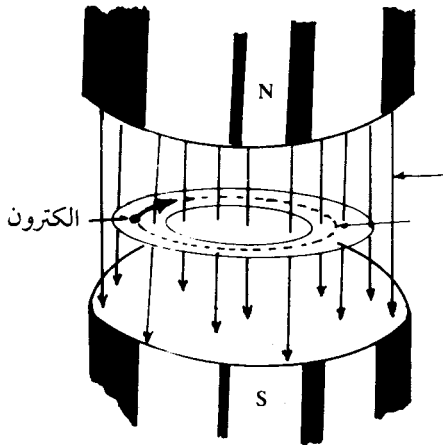
Betatron

يستعمل البيتاترون لتعجيل إلكترونات بسرعات فائقة حيث تصل طاقتها إلى مائة مليون إلكترون فولت (Mev) ويعتمد في عمله على الحث المغناطيسي ولذلك يسمى بمسارع الحث المغناطيسي (magnetic induction accelerator). ويتكون كما في شكل (٦-٢٤) من أنبوب على هيئة حلقة مفرغة (an evacuated toroidal tube) تدفع إليها

إلكترونات من مدفع إلكتروني (electron gun) ، بطاقة ابتدائية حوالي 50000 فولت ، ويوضع هذا الأنبوب بين قطبي مغناطيس كهربائي ويسير في مسار دائري نظرا لتأثيرها بمجال مغناطيسي عمودي على مستوى الأنبوب . وحيث إن هذا المجال المغناطيسي متغير فإن الأنبوب يعمل كما لو كان ملفا ثانويا لمحول يتولد فيه قوة دافعة تأثيرية قدرها :

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt}$$

حيث N هنا عدد دورات الإلكترون ، S مساحة مقطع المدار ، $\frac{dB}{dt}$ معدل تغير كثافة الفيض المغناطيسي ، $\mathcal{E}$ القوة الدافعة التأثيرية التي تقوم بتعجيل «تسارع» الإلكترونات فتكسبها الطاقة النهائية بعد دورانها N مرة .



شكل (٦-٢٤) : البيتا ترون

ونظرا لتغير السرعة عقب كل دورة فلا بد أن يتغير المجال المغناطيسي بالمعدل نفسه حتى يظل نصف قطر المدار ثابتا ، حسب العلاقة المذكورة في الفصل الثالث ، $R = \frac{mv}{Be}$ حيث R نصف قطر المدار ، v سرعة الإلكترون ، m كتلته ، e شحنته . ويخرج الإلكترون في النهاية بطاقة هائلة تستخدم في توليد أشعة إكس X-Rays ذات الموجات القصيرة والنفاذية العالية والتي تستخدم في الصناعات والأبحاث وعلاج السرطان .

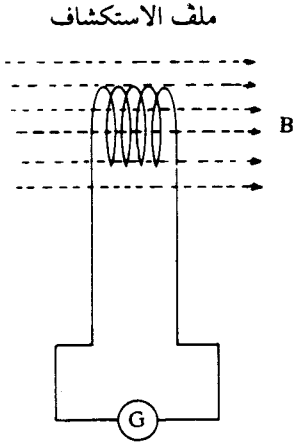
ويلاحظ أن الإلكترون يدور حوالي 250,000 دورة (لكي يحصل على طاقة قدرها 100 إلكترون فولت) في زمن يساوي الزمن اللازم لكي تتغير كثافة الفيض المغناطيسي من صفر إلى نهاية عظمى . وبذلك ينتهي التعجيل قبل أن يعكس الفيض المغناطيسي اتجاهه . وبهذا فإن مشكلة تغير كتلة الإلكترون بازدياد سرعته لا أثر لها هنا بعكس جهاز السيكلوترون .

(٦-١٥) طريقة ملف الاستكشاف لقياس التدفق المغناطيسي

Search Coil Method of Measuring Magnetic Flux

تقاس كثافة التدفق عند أي نقطة في مجال مغناطيسي بواسطة جهاز مكون من جلفانومتر قذفي (ballistic galvanometer) موصل بواسطة أسلاك قابلة للانثناء بطرفي ملف صغير كثيف يسمى ملف استكشاف (search coil). إذا وضع ملف الاستكشاف في مجال مغناطيسي حثه B وكان مستواه متعامدا على هذا المجال كما في شكل (٦-٢٥) فإن التدفق خلال هذا الملف تحدده المعادلة (١ ب - ٥) حيث:

$$\Phi = BS$$



حيث S مساحة وجه الملف. فإذا دار الملف ربع دورة وبسرعة حول أحد أقطاره بحيث يصبح مستواه موازيا للمجال، فإن التدفق يتناقص بسرعة تتغير من BS إلى الصفر، وفي الوقت الذي يتناقص فيه التدفق تنشأ ق. د. ك. قصيرة الأجل (لحظية) تسبب حركة الجلفانومتر القذفي. ولما كان تيار الجلفانومتر في أي لحظة يساوي:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

شكل (٦-٢٥): ملف الاستكشاف

حيث R المقاومة الكلية للجلفانومتر وملف الاستكشاف و $\mathcal{E}$ هي الق. د. ك. اللحظية المحددة بالمعادلة:

$$\mathcal{E} = -N d\Phi / dt$$

و I التيار الذي يمكن تحديده من المعادلة:

$$\therefore I = -\frac{N d\Phi}{R dt}$$

ويمكن بذلك الحصول على:

$$q = \int_0^t I dt = - \frac{N}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{N\Phi}{R}$$

أو:

$$\Phi = \frac{R}{N} q \quad \dots\dots\dots (٦-٩٩)$$

وكذلك:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{Rq}{NS} \quad \dots\dots\dots (٦-١٠٠)$$

حيث R ، S ، N معلومة وبذلك يمكن تعيين قيمة B بمعرفة q التي تعطي انحرافا في الجلفانومتر.

مثال (٦-١٣)

يتكون ملف استكشاف من 200 لفة نصف قطرها المتوسط 0.5 سم ويتصل الملف بجلفانومتر قذفي حساسيته 5 أقسام للميكروكولوم وقد وضع الملف بين قطبي مغناطيس كهربائي قوي بحيث كان مستواه عموديا على المجال ثم قذف الملف بعيدا عن المجال فسجل الجلفانومتر 314 قسما فإذا كانت المقاومة الكلية في دائرة الملف 1000 أوم فاحسب كثافة الفيض لهذا المجال.

الحل

بإهمال التخمين في الجلفانومتر فإن الشحنة المارة هي :

$$q = \frac{314}{5} = 62.8 \times 10^{-6} \text{ C}$$

وهذه الشحنة تأثيرية ومتولدة في الملف الباحث نتيجة تغير الفيض خلال مقطعه عند إبعاده فجأة عن المجال . وبتطبيق المعادلة (٦-١٠٠) يكون :

$$B = \frac{R.q}{N.S} = \frac{1000 \times 6.2 \times 10^{-6}}{200 \times 3.14 (0.005)^2}$$

$$B = 4 \text{ Wb / m}^2$$

(١٦-٦) مسائل

١ - يدور قضيب موصل طوله L بسرعة زاوية ω حول إحدى نهايتيه في مجال مغناطيسي منتظم متعامد عليه شدته B .

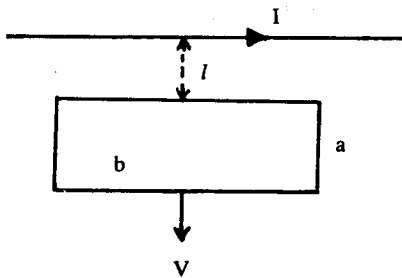
احسب القوة الدافعة الكهرية الحثية في القضيب باستخدام قانون فاراداي ومن ثم بالطريقة المباشرة من حركة القوة.

٢ - سلك مثني على شكل نصف دائرة نصف قطرها b وهو قابل للدوران بذراع خاصة وموصول بدائرة فيها مقياس للتيار مقاومته R تعادل 1000Ω . فإذا دار السلك بحيث يكون عدد دوراته f دورة في الثانية وكانت الدائرة في مجال مغناطيسي منتظم B فالمطلوب حساب:

١ - القوة الدافعة الحثية العظمى التي تتولد في الدائرة.

ب - قيمة التيار العظمى الذي يمر فيها.

ج - تردد القوة الدافعة الحثية الناتجة.



٣ - دائرة على شكل مستطيل ضلعه a و b

موضوعة موازية لسلك يمر به تيار

شدته I . تحرك المستطيل باتجاه عمودي

على ضلعه b بسرعة منتظمة v فإذا كان

ضلعه الأقرب إلى السلك يبعد عن

السلك عند بدء الحركة بمسافة l

فالمطلوب حساب القوة الدافعة الحثية

المتولدة في المستطيل.

٤ - كتلة من النحاس قدرها m سحبت وصنعت بشكل سلك نصف قطره r ثم ثني

هذا السلك حتى أصبح بشكل دائرة نصف قطرها R . وضعت عمودية في مجال

مغناطيسي يتغير بشكل منتظم ومستمر بحيث تكون $\frac{dB}{dt}$ ثابتة.

برهن أن التيار المستحدث في الدائرة لا يتوقف على أبعاد السلك والدائرة وإنما يتوقف فقط على الكتلة ويعطى بالمعادلة :

$$I = \frac{m}{4\pi q \delta} \frac{dB}{dt}$$

حيث q المقاومة النوعية للنحاس ، δ كثافته .

٥ - موصل طوله 50 سم ينزلق دون احتكاك على ضلعي سلك آخر ثابت يتخذ شكل الحرف U كما في شكل (٣-٦) بسرعة قدرها 400 سم/ث ، قاطعا مجالا مغناطيسيا عموديا قيمة B تساوي 500 ملي وبر/متر^٣ .
احسب :

- ١ - القوة الدافعة التأثيرية $\mathcal{E}$ المتولدة في الموصل .
- ب - القوة الميكانيكية اللازمة لتحريك السلك بفرض أن مقاومة الدائرة المغلقة ثابتة وقدرها 0.2 أوم .
- ج - معدل بذل الشغل الميكانيكي اللازم لتحريك السلك ومعدل تولد الحرارة في الدائرة وقارن بين هاتين القدرتين .
- د - القوة الدافعة التأثيرية $\mathcal{E}$ في الموصل إذا جعل المجال المغناطيسي يميل على مستوى الدائرة بزاوية قدرها 60° .

٦ - شُكِّل سلك على شكل مستطيل طوله 12.0 سم وعرضه 8.0 سم وضع بين قطبي مغناطيس كهربى بحيث يكون المجال المغناطيسي في المنطقة التي وضع فيها السلك منتظما .

عند البداية كان المجال المغناطيسي صفرا ثم تزايد بصورة منتظمة حتى وصلت قيمته 1.25 وبر/متر^٣ في زمن قدره 0.15 ثانية .

١ - ما هي قيمة القوة الدافعة الكهربائية الحثية «التأثيرية» المتولدة خلال هذه الفترة .

ب - إذا استبدل السلك المستطيل بملف مستطيل عدد لفاته 250 لفة لها الأبعاد نفسها. ما هي القوة الدافعة المتولدة في الملف؟

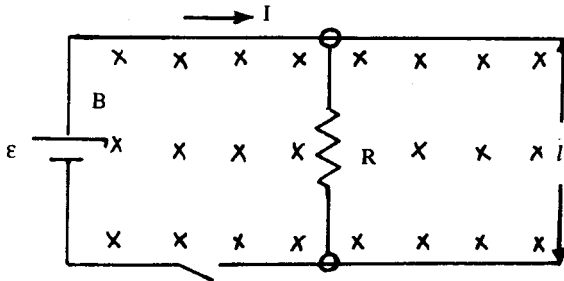
٧ - قضيب نحاسي طوله 20 سم متعامد مع مجال مغناطيسي منتظم حثه 0.5 وبر/متر² حرك هذا القضيب فأعطى قوة دافعة حثية بين طرفيه قيمتها 0.10 فولت. ما هي سرعة هذا القضيب؟

٨ - سلك طوله 100 سم مثبت أفقياً في سيارة تسير في طريق أفقي مستقيم بسرعة 60 كيومتر في الساعة. لوحظ أنه إذا اتصل طرفا السلك بجلفانومتر مقاومته 95 أوم يمر به تيار تأثيري شدته 3 ميكروأمبير.
احسب كثافة الفيض المغناطيسي للمركبة الرأسية لمجال الأرض علماً بأن مقاومة السلك 5 أوم واتجاهه عمودي على اتجاه السيارة.

٩ - دائرة كهربية تتألف من بطارية $\mathcal{E}$ ومقاومة R طولها l وكتلتها m حرة الحركة (كما في الشكل). وضعت الدائرة في مجال مغناطيسي منتظم حثه B فإذا أغلقت الدائرة برهن أنه في زمن قصير قدره t تكون قيمة التيار الحثي هي :

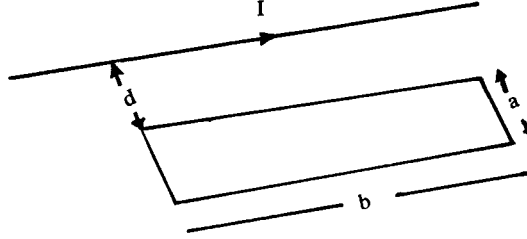
$$I = \mathcal{E} l^2 B^2 t / (m R^2)$$

علماً بأن التيار الكهربي الناتج عن البطارية قيمته $\frac{\mathcal{E}}{R}$ عندما $t = 0$.



١٠ - لفة واحدة من سلك على هيئة مستطيل وضعت بالقرب من سلك مستقيم طويل يمر به تيار يتغير مع الزمن حسب المعادلة $I = \alpha t$ ، كما في الشكل :

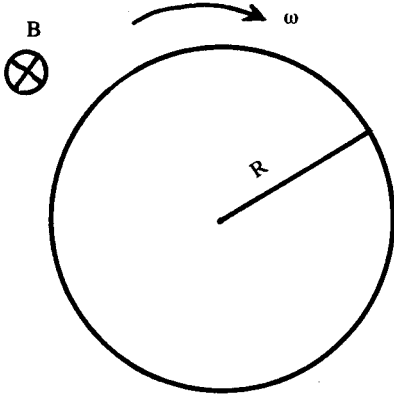
- ١ - احسب الفيض المغناطيسي خلال الحلقة .
 ب - القوة الدافعة الكهربائية الحثية الناتجة في الحلقة .



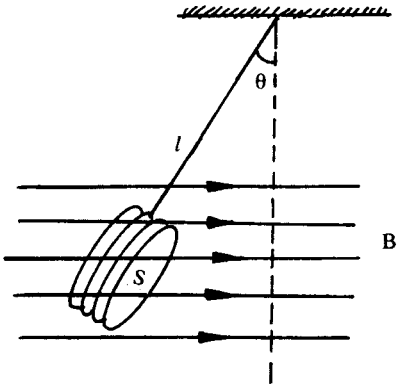
- ١١ - ملف حلزوني طويل عدد لفاته 500 لفة لكل متر. مساحة مقطعه 0.05 م^2 ويحمل تيارا قدره 2 أمبير. لُفَّ عليه ملف ثانوي مقاومته 4 أوم. وُجد أنه إذا عكس التيار المسار في الملف الحلزوني الابتدائي كل 0.05 ثانية فإن القوة الدافعة الحثية بين طرفي الملف الثانوي تساوي 4 فولتات .
 أ - ما هو عدد لفات الملف الثانوي ؟
 ب - ما هي قيمة الشحنة في الملف الثانوي أثناء عكس التيار في الملف الابتدائي ؟

- ١٢ - ملف باحث عدد لفاته 100 لفة ومساحة مقطعه 3 سم^2 ومقاومة الملف الكلية تساوي 40 أوما وموصل بجلفانومتر قذفي، وضع الملف في مجال مغناطيسي متعامد مع مستوى الملف ثم أدير الملف فأعطى شحنة قدرها 2×10^{-5} كولوما ما قيمة المجال المغناطيسي ؟

- ١٣ - ملف حلزوني ابتدائي عدد لفاته 500 لفة وطوله 0.5 متر ونصف قطره 4 سم . يوجد ملف ثانوي حول منتصفه، عدد لفاته 20 لفة ومقاومته 2 أوم ومتصل بجلفانومتر قذفي مقاومته 23 أوما .
 احسب الشحنة المارة في الجلفانومتر عندما يتغير التيار فجأة في الملف الابتدائي من 3 أمبير إلى 1 أمبير .



- ١٤ - قرص معدني رفيع نصف قطره 20 سم يدور حول محوره بسرعة قدرها 50 دورة في الثانية وذلك في مجال مغناطيسي قيمته B تساوي 0.5 وبر/متر² ومتجه مع اتجاه المحور. احسب فرق الجهد المتولد بين مركز القرص ومحيطه.



- ١٥ - ملف عدد لفاته N ومساحة مقطعه S ، عومل كما يعامل البندول البسيط كما في الشكل، حيث يتذبذب الملف بحركة توافقية بسيطة $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ في مجال مغناطيسي كما في الشكل. أوجد تعبيراً رياضياً يوضح العلاقة بين القوة الدافعة الكهرية الحثية $\mathcal{E}$ والزمن t .

- ١٦ - إذا علم أن الحث الذاتي لملف صغير عدد لفاته 400 لفة هو 8 ملي هنري. فاحسب B للملف عندما يمر به تيار شدته 5×10^{-3} أمبير.

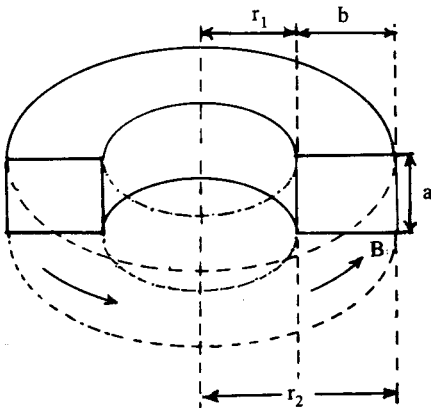
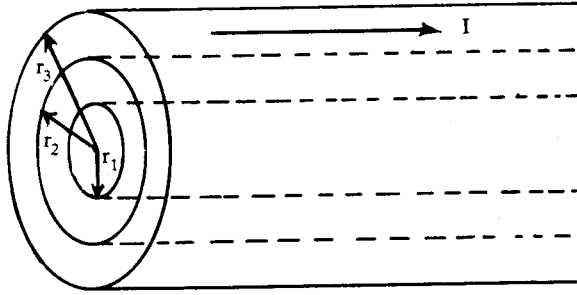
- ١٧ - ملف حلزني طويل طوله 50 سم عدد لفاته 500 لفة ومساحة مقطعه 10 سم². احسب الحث الذاتي للملف.

وإذا تناقص تيار الملف من 10 أمبير إلى الصفر خلال زمن قدره 0.1 ثانية ما هي القيمة المتوسطة للقوة الدافعة الكهرية الحثية خلال هذه الفترة الزمنية.

١٨ - كابل ذو موصلين متحدي المحور (coaxial cable) الموصل الداخلي أسطواني الشكل نصف قطره r_1 والموصل الخارجي أسطواني الشكل أجوف نصف قطره الداخلي r_2 والخارجي r_3 كما في الشكل .
برهن على أن الحث الذاتي لوحدة الأطوال للكابل تعطى بالمعادلة :

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

ثم احسب الفيض الكلي المار خلال الشكل المستطيل المنقط (كما في الشكل) إذا مر في الاسطوانتين تياران متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه قيمة كل منها I.



١٩ - ملف حلزوني حلقي (toroid)

مقطعه مستطيل الشكل، كما في

الشكل، نصف القطر الداخلي r_1

والخارجي r_2 وعرض كل حلقة a.

وعدد اللفات N.

أوجد تعبيرا رياضيا للحث الذاتي L

لهذا الملف ثم احسب قيمته إذا

كانت $r_1 =$ ، $a = 2\text{cm}$ ، $N = 800$

$r_2 = 8\text{cm}$ ، 4cm

٢٠ - ملف حلزوني مقاومته 40 أوما وثابت الزمن (time constant) له 0.08 ثانية ما قيمة الحث الذاتي L .

٢١ - ملف مقاومته 65 أوما وحثه الذاتي 25 هنريا وصل ببطارية جهدها 50 فولتا . ما هو الزمن اللازم لكي يصل التيار في الملف إلى نصف قيمته العظمى ، وما هو معدل تغير التيار بالنسبة للزمن خلال هذه الفترة .

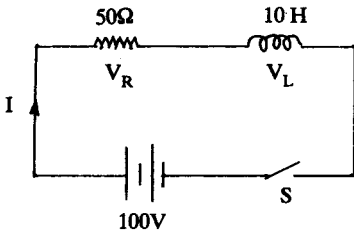
٢٢ - ملف حثه الذاتي 20 هنريا ومقاومته 150 أوما ، عند $t = 0$ ، وصل جهد قيمته 30 فولتا بين طرفي الملف .
احسب :

١ - ثابت الزمن للملف .

ب - شدة التيار المستقر الذي يجري في وضع متزن بعد مضي فترة طويلة من الزمن .

ج - الزمن اللازم للوصول إلى 95% من قيمة التيار العظمى .

د - معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى نصف قيمته العظمى .



٢٣ - دائرة تحتوي على $R = 50\Omega$ ،

$L = 10H$ وصلا بجهد ثابت

قيمته 100 فولت عند $t = 0$.

١ - اكتب المعادلة التي تربط

بين V_L ، V_R ، I

ب - ما هي قيمة التيار بعد مضي 0.5 ثانية .

ج - الزمن الذي تكون فيه $V_R = V_L$.

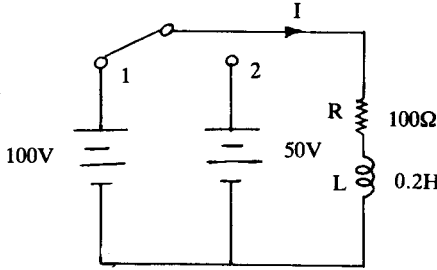
د - احسب القدرة P_R ، P_L وكذلك المحصلة .

هـ - برهن أن الطاقة التي اكتسبها الملف أثناء زيادة التيار تستنفد في

بناء مجال مغناطيسي .

- ٢٤ - ملف نصف قطره 5 سم يتكون من لفه واحدة ويحمل تيارا شدته 100 أمبير.
احسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي عند مركز الملف.

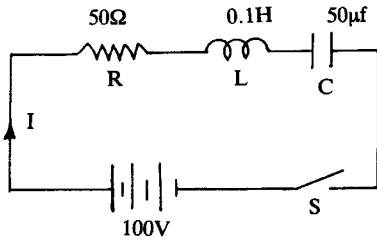
٢٥ - في الدائرة التالية :



- عند $t = 0$ وصلت RL عند الطرف 1
ببطارية جهدها 100 فولت وعند
 $t = 500\mu s$ وصل RL بالطرف 2
ببطارية جهدها 50 فولتا.
ما هي قيمة التيار في الحالتين؟

- ٢٦ - وإذا عكس الأمر في السؤال السابق بحيث وصلت RL عند $t = 0$ بالطرف 2
وعند $t = 500\mu s$ بالطرف 1.
ما هي قيمة التيار في الحالتين في هذا الوضع؟

٢٧ - في الدائرة التالية :



- عند $t = 0$ وصلت الدائرة عن طريق
المفتاح S. احسب قيمة التيار المار في
الدائرة مفترضاً أن الشحنة الابتدائية
على المكثف تساوي الصفر.

- ٢٨ - ملفان حلزونيان حثهما الذاتي $L_1 = 5 \times 10^{-6} H$ ، $L_2 = 8 \times 10^{-6} H$ منفصل
بعضهما عن بعض.

- احسب محصلة الحث عند توصيلهما على التوالي مرة وعلى التوازي مرة
أخرى. وإذا كانت مقاومتها $R_1 = 50\Omega$ ، $R_2 = 100\Omega$ ، فاحسب ثابت الزمن
في الحالتين السابقتين.



الخواص المغناطيسية للمواد

Magnetic Properties of Materials

● مقدمة ● تصنيف المواد ● شدة التمغنط ● التأثيرية
المغناطيسية ● كمية الحركة الزاوية والعزم المغناطيسي
للإلكترون ● الدايامغناطيسية ● البارامغناطيسية ● المواد
الحديدية المغناطيسية ● دورة التخلف المغناطيسي ● الدوائر
المغناطيسية ● المغناط الكهربية ● القوة المغناطيسية للفجوة
الهوائية ● قياس التأثيرية المغناطيسية الصغيرة ● الجلفانومتر
ذو الملف المتحرك ● الجلفانومتر القذفي ● مقياس التدفق
المغناطيسي ● مسائل .

(١-٧) مقدمة

Introduction

تعرض الفصلان الخامس والسادس للمجالات المغناطيسية التي تولدها الشحنات المتحركة أو التيارات المارة في الموصلات عندما تكون الشحنة أو تلك الموصلات موجودة في الفراغ كما ذكرت أيضا بعض الأجهزة الكهربية مثل المحولات والمحركات والمولدات التي تعتمد على المجالات المغناطيسية المتولدة بالتيارات الكهربية والتي كانت تحتوي دوما على الحديد أو أحد مركباته في داخل بنيتها وكانت أهمية ذلك زيادة التدفق المغناطيسي وحصره في المنطقة المطلوبة .

جميع المواد على اختلاف أنواعها سواء الغازات أو السوائل أو المواد الصلبة لها خواص مغناطيسية ، نتيجة لتأثرها بالمجال المغناطيسي ، ولكن بدرجات متفاوتة فبعض

المواد لها خواص مغناطيسية ضعيفة وبعضها متوسطة وبعضها قوية. كما أن لدرجة الحرارة أثرا كبيرا على هذه الخواص كذلك توجد مواد أخرى لها خواص مغناطيسية عكسية أي أن اتجاه المجال فيها يعاكس المجال المسبب.

ونظرا لاستعمال المواد المغناطيسية في كثير من الأجهزة، مثل الميكروفونات والسماعات ووسائل الاتصالات اللاسلكية وكذلك استعمالها في ذاكرات الحاسبات الآلية (computer memory) والدوائر المنطقية (logic circuitry) وتطبيقات الفتح والقطع عالي السرعة للدوائر (high speed switching application) أصبح مهما دراسة بعض القواعد الأساسية لهذه المواد. وقد أجريت دراسات كثيرة لمعرفة الخواص المغناطيسية للمواد وفُهمت بصورة تفصيلية سواء أكانت نظرية أم تجريبية وتعتمد بعض هذه الدراسات على نظرية الكم الميكانيكي (quantum mechanics) وهذا خارج عن نطاق هذا الكتاب ولذلك سنتعرض للمواضيع بصورة مبسطة.

(٧-٢) تصنيف المواد

Classification of Materials

ذكر في البند السابق أن المواد على اختلاف أنواعها تتأثر بالمجال المغناطيسي الخارجي ولكن بدرجات متفاوتة وللتبسيط يمكن أن نقسم هذه المواد من حيث خواصها المغناطيسية إلى قسمين رئيسين هما:

(٧-٢-١) مواد متسامتة التمغنت (بارامغناطيسية) Paramagnetic

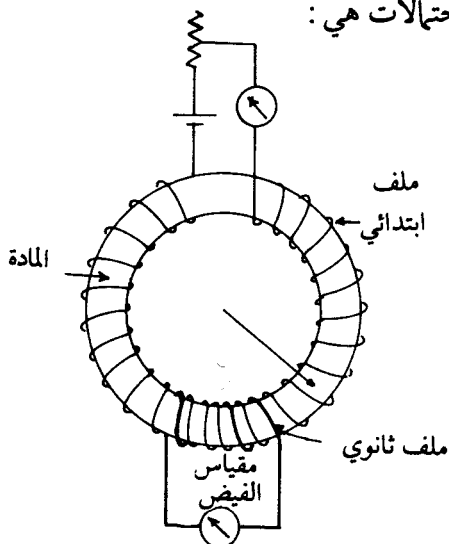
هذه تميل للحركة من المناطق الضعيفة في المجال المغناطيسي إلى المناطق القوية وبمعنى آخر فإنها تنجذب نحو المغناطيس، وإذا كانت حرة الدوران اتجهت أطوالها اتجاهها يوازي المجال. ومن هذه المواد الألومنيوم والتيتانيوم والأكسجين (O, Ti, Al) وأما الحديد والنيكل والكوبالت (Ni, Co, Fe) وسبائكها ومركباتها فإنها مواد بارامغناطيسية قوية جدا لهذا يطلق عليها المواد الحديدومغناطيسية (Ferromagnetic) التي تتميز بكبر معامل النفاذية، والتأثيرية المغناطيسية لها موجبة.

(٧-٢-٢) مواد دايامغناطيسية Diamagnetic

وهذه تميل إلى الابتعاد عن المجال المغناطيسي مهما كان اتجاهه، وإذا أتيحت لها حرية الدوران فإنها تجعل أطوال محاورها متعامدة على خطوط القوى. ومن هذه المواد البزموت والنحاس وتتميز بأن معامل نفاذيتها أقل من الواحد والقابلية المغناطيسية لها سالبة.

وللتمييز بين هذه المواد يمرر تيار كهربائي في ملف حلقة رولاند (Rowland ring) [حلقة رولاند ملف حلقي (toroidal coil) بداخله مادة مغناطيسية، كما في شكل (٧-١)]. وتقاس كثافة الفيض المغناطيسي، الحث المغناطيسي، B باستخدام ملف ثانوي باحث (search coil) متصل بجلفانومتر قذفي في محور جسم الحلقة الذي يكون فراغا أو هواء.

ثم تتغير مادة جسم حلقة رولاند أي يستبدل الهواء بهاء ما وتقاس كثافة الفيض المغناطيسي B الحديد، فنجد أن هناك ثلاثة احتمالات هي:



١ - تزداد قيمة B زيادة كبيرة في حالة

المواد الحديد ومغناطيسية.

٢ - تزداد قيمة B زيادة طفيفة جدا

في حالة المواد البارامغناطيسية.

٣ - تقل قيمة B في حالة المواد

الدايامغناطيسية.

ويرجع تغير كثافة الفيض بتغير مادة

المحور إلى ما يلي:

تتألف جميع المواد من ذرات بها نواة

موجبة الشحنة تدور حولها إلكترونات سالبة

الشحنة فحركة هذه الشحنات السالبة

شكل (٧-١): حلقة رولاند للدراسة
الخواص المغناطيسية للمواد
المختلفة.

تُكوّن تيارات كهربية صغيرة (microscopic electric current) مما يتسبب في إحداث مجال مغناطيسي ذري (atomic magnetic current) له عزم مغناطيسي ذري (atomic magnetic moment).

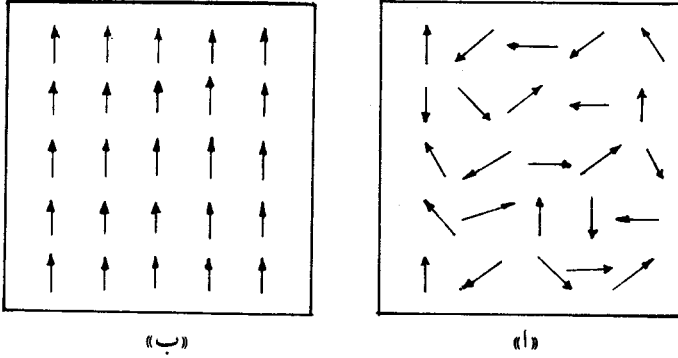
ففي حالة عدم وجود أي مجال مغناطيسي خارجي تكون التيارات الصغيرة في اتجاهات مختلفة عشوائية (random orientation) كما في شكل (٧-٢) مما يسبب في إحداث مجالات مغناطيسية ذرية محددة في حجم الذرة ومحصلة التيارات والعزوم المغناطيسية (magnetic moments) في المادة تلغي بعضها بعضا وبذلك لا يظهر أي أثر للمجال المغناطيسي. ويشذ عن هذه الحالة المغناطيس الدائم (permanent magnet).

أما إذا وضعت المادة في مجال مغناطيسي خارجي (external magnetic field)، حثه B، فإن القوة المغناطيسية المؤثرة على الشحنات المتحركة تغير من اتجاه مدار الإلكترونات في الذرات ومسار التيار للإلكترونات الحرة في المعادن ولذلك يتولد مجال مغناطيسي يكون اتجاهه مع اتجاه المجال الخارجي كما في حالة المواد البارامغناطيسية كما في شكل (٧-٢ب) أو عكس اتجاه المجال الخارجي كما في حالة المواد الدايامغناطيسية.

والمجالات المغناطيسية الذرية في محيط الذرة تحدث لسببين هما:

(١) الحركة المدارية (orbital motion) للإلكترون حول النواة تسبب تيارا له عزم مغناطيسي.

(٢) للإلكترون عزم مغناطيسي ذاتي (intrinsic magnetic moment) مقترن بالعزم الحركي الزاوي الذاتي (intrinsic angular moment) وهو ما يسمى بغزل الإلكترون (electron spin) حيث يدور الإلكترون حول نفسه كما تدور الأرض حول محورها. وحركة هذه الإلكترونات تشبه حركة تيار كهربي في ملف، وفي هذه الحالة يكون الملف على هيئة مغناطيس ذي قطب شمالي في جهة وقطب جنوبي في جهة أخرى.



شكل (٧-٢): ١ - العزوم المغناطيسية في اتجاهات مختلفة عشوائية وذلك قبل وضعها في المجال المغناطيسي الخارجي.
ب - العزوم بعد وضعها في المجال الخارجي.

وقد وجد أن قيمة العزم المغناطيسي الذاتي يساوي $9.204 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ كما سيأتي حسابه في ما بعد، والعزم الناتج عن دورانه حول النواة يأخذ القيمة نفسها أيضا.

وكما هو معروف من البند (٨-٣) تدور الإلكترونات في الذرات في قشرات معينة (shells) لها أقطار مختلفة، ففي معظم العناصر كل الإلكترونات، ما عدا إلكترونات التكافؤ تكون قشرات مملوءة حيث تتوزع الإلكترونات على القشرة حسب العلاقة $2n^2$ (حيث $n = 1, 2, 3, 4, \dots$) وبالتالي فالقشرة الأولى تأخذ إلكترونين فقط. ويسمى (K-shell) والثانية تأخذ ثمانية إلكترونات وتسمى (L-shell) . . . وهكذا كما يبينه الجدول (٣-١) وأن كل قشرة تنقسم إلى قشيرات (subshell) فإذا أخذت القشرة كل إلكتروناتها المسموح بها أصبحت مملوءة ويكون بذلك المجموع الاتجاهي للعزوم المغناطيسية للإلكترونات مساويا للصفر وبذلك فمحصلة المجال المغناطيسي الذري تساوي صفراً ولا تتأثر هذه الإلكترونات بأي مجال مغناطيسي خارجي. وقد فسر باولي (Pauli) ذلك بأن كل قشرة مملوءة تحتوي على عدد زوجي من الإلكترونات لها حركتها الدورانية والمغزلية. وأنه لا يجوز لاثنتين من الإلكترونات في الذرة أن يوجدوا بالحالة نفسها (وهذه القاعدة معروفة بقاعدة باولي للاستبعاد Pauli's exclusion principle) أي

أن كل إلكترونين متفاعلين يكون لكل واحد منهما حركة تعاكس حركة الآخر وبذلك فمحصلة العزوم المغناطيسية تساوي صفرا. وهذا يعني أن إلكترونات التكافؤ هي التي تتأثر بأي مجال مغناطيسي خارجي فتغير اتجاهها مسببة مجالا مغناطيسيا ذريا.

ولكن في الحالة الصلبة والسائلة فإلكترونات التكافؤ تلعب دورا مهما في الرابطة التماسكية (cohesive binding) لتماسك ذرات المادة وبالتالي لا تساهم كثيرا في إنتاج مجال مغناطيسي كبير. وفي المعادن فهذه الإلكترونات حرة تنتقل من ذرة إلى ذرة أخرى وبذلك فليس لها أي دوران حول النواة ومنه فإن العزم المغناطيسي المداري يساوي صفرا أما العزوم المغناطيسية الغزلية الناتجة عن دوران الإلكترونات حول نفسها ستكون محصلتها صفرا وذلك حسب مبدأ باولي ولذلك فإنه عند تسليط أي مجال مغناطيسي خارجي يحدث تأثير بسيط لإلكترونات التكافؤ ليعطي بارامغناطيسية (paramagnetism) صغيرة أو دايامغناطيسية (diamagnetism). إذن كيف يمكن الحصول على الفرومغناطيسية (ferromagnetism) إذا لم يمكن الحصول عليها من إلكترونات التكافؤ أو من القشرة المملوءة بالإلكترونات فهذا يعني أنه لا بد أن تكون هناك إلكترونات أخرى تختلف عن النوعين السابقين. مثل هذه الإلكترونات توجد في عناصر الأرض النادرة (rare earth elements) حيث القشرة (4f) غير الكاملة محجوبة (screened) بواسطة القشيرتين (5s) ، (5p) أما العناصر الانتقالية (transition elements) فتتميز بوجود قشيرتين غير كاملتين الداخليتين منها لا تساهم في الرابطة التماسكية ولذلك فهي المسؤولة عن التأثيرات المغناطيسية.

والجدول (٧-١) يوضح التوزيع الإلكتروني للحديد (Fe) والكوبلت (Co) والنيكل (Ni). وحسب قاعدة باولي فإن إلكترونات القشيرتين (p,s) المملوءة لا تعطي أي خاصية مغناطيسية لأنه في القشرة s يتحرك إلكترونان في وضعين متعاكسين ولذلك تكون محصلة العزم المغناطيسي صفرا. أما بالنسبة للقشرة p فإن كل ثلاثة إلكترونات تتحرك في اتجاه يخالف اتجاه حركة الإلكترونات الثلاثة الأخرى ولذلك فمحصلة العزم المغناطيسي تساوي صفرا. أما القشرة d من المدار M فعدد الإلكترونات المسموح بها 10 إلكترونات خمسة منها تتحرك عكس اتجاه الإلكترونات الخمسة الأخرى. ولكن في

مادة الحديد (Fe) توجد ستة إلكترونات فقط في القشرة (d) وتوجد 4 إلكترونات غير معادلة (uncompensated spins) ولذلك فهذه القشرة هي المسؤولة عن التغيرات المغناطيسية وينطبق الشيء نفسه على حالة الكوبلت (Co) والنيكل (Ni).

جدول (٧-١) التوزيع الإلكتروني لـ Ni, Co, Fe

رمز غزل الإلكترون ↑ أو ↓ Symbol for the spin of the electron							
Shell قشرة	K	L	M			N	
Subshell قشرة	s	s p	s	p	d	s	
(26) Iron (Fe) حديد	↑↓	↑↓ ↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↑↑↑	↑↓	
(27) Cobalt (Co) كوبلت	↑↓	↑↓ ↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↓↑↑↑	↑↓	
(28) Nickel (Ni) نيكل	↑↓	↑↓ ↑↓↑↓↑↓	↑↓	↑↓↑↓↑↓	↑↓↑↓↑↓↑↑	↑↓	

(٧-٣) شدة التمثغظ

Magnetization

يمكن أن نعتبر المواد القابلة للتمغظ مصدرا من مصادر المجالات المغناطيسية لأن لذرات هذه المادة عزوم مغناطيسية، وكما ذكر في البند السابق أن هذه العزوم المغناطيسية الذرية كانت نتيجة لتيارات دائرية نتجت عن حركتي الإلكترون الدائرية والمغزلية فإذا أخذت مادة ممغنطة فإن التيارات الإلكترونية (electronic current) الداخلية سيلاشي بعضها بعضا وتبقى التيارات السطحية.

ويسمى التيار في هذه الحالة بمحصلة التيار المغناطيسي السطحي ويرمز له بالرمز "I_m" (net surface magnetization current) ويسري حول سطح المادة في الاتجاه المين

في الشكل (٧-١٣) ويعد هذا التيار مصدر المجال المغناطيسي للمادة وكأن المجال ناتج عن عزم مغناطيسي لذي القطبين (dipole magnetic moment) P_m حيث

$$P_m = I_m S \quad \dots\dots\dots (٧-١)$$

حيث S هو مساحة مقطع المادة.

وكما وجد في الفصل الثالث أن شدة المجال الكهربي للمواد العازلة المستقطبة يمكن تمثيلها بمتجه الاستقطاب (polarization vector) الذي يمثل العزوم الكهربية لذي القطبين بالنسبة لوحدة الحجم، فإنه بصورة مماثلة يمكن تمثيل المجال المغناطيسي للمادة الممغنطة بمتجه يسمى بمتجه التمغنط (magnetization vector) ويرمز له بالرمز M حيث:

$$M = \frac{P_m}{V} \text{ or } M = \frac{dP_m}{dV} \quad \dots\dots\dots (٧-٢)$$

حيث V هو حجم المادة الممغنطة و dV عنصر الحجم للمادة الممغنطة.

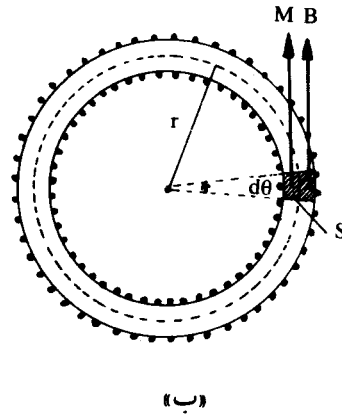
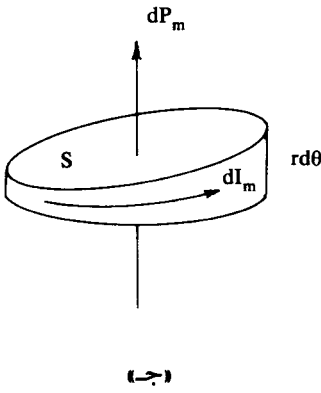
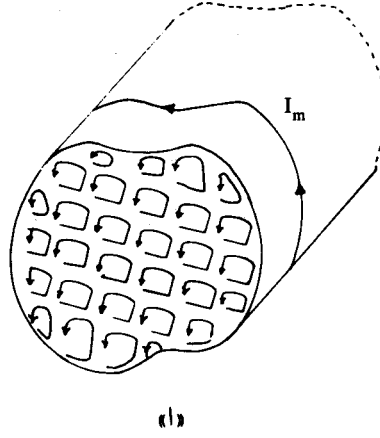
فإذا مر تيار I في ملف حلقة رولاند، كما في شكل (٣ب - ٧) وكان عدد لفات الملف N ونصف قطر الحلقة r وكانت المادة داخل الملف من مادة بارامغناطيسية، فإن التيار السطحي I_m الناتج يؤدي إلى مغنطة المادة.

فإذا أخذ جزء من الحلقة مساحة مقطعه S وسمكه $rd\theta$ كما في شكل (٣ج - ٧)، حيث $d\theta$ الزاوية المركزية، فإن متجه التمغنط M هو:

$$M = \frac{dP_m}{dV} = \frac{SdI_m}{S(rd\theta)} = \frac{dI_m}{rd\theta} \quad \dots\dots\dots (٧-٣)$$

حيث dI_m هو جزء من التيار السطحي I_m وحيث إن أعلى قيمة لـ $d\theta$ هو 2π فإنه يمكن أن نكتب ما يلي:

$$dI_m = I_m \frac{d\theta}{2\pi}$$



شكل (٧-٣): أ - التيارات الالكترونية «الذرية» الداخلية تتلاشى وتبقى التيارات السطحية التي تعطي تيارا سطحيا I_m حول السطح الخارجي للمادة.
 ب - العلاقة بين التيار المار في الملف وشدة التمغنط M والحث المغناطيسي B لمادة ممغنطة داخل حلقة رولاند.
 ج - مقطع الجزء القاتم في الشكل ب.

وبالتعويض في المعادلة (٧-٣) يُحصل على :

$$M = I_m \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{rd\theta} = \frac{I_m}{2\pi r}$$

أو

$$I_m = 2\pi r M \dots\dots\dots (٧-٤)$$

وواضح من المعادلة (٧-٢) أن M لها اتجاه dP_m نفسه وأنه دائها مماس للمنحنى الدائري كما في شكل (٧-٣ ب) [كما هو الحال بالنسبة لـ B]. ويمكن الوصول إلى النتيجة (٧-٤) بتكامل المقدار $M \cdot dl$ حول المسار المغلق C فنحصل على :

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \oint M \cdot dl = M \oint_0^{2\pi r} dl = 2\pi r M$$

وبذلك يمكن أن نكتب بصورة عامة أن :

$$I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \dots\dots\dots (٧-٥)$$

وبالرجوع إلى الفصل الخامس وطبقا لقانون أمبير، المعادلة (٢٢ ب - ٥)، فإن :

$$\oint B \cos \theta dl = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I \dots\dots\dots (٧-١٦)$$

وفي حالة وجود مادة مغناطيسية فإن المعادلة (٧-١٦) تصبح :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (NI + I_m) = \mu_0 NI + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (٧-٦ \text{ ب})$$

أو

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI \dots\dots\dots (٧-٧)$$

أو

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

وهذه هي معادلة أمبير في وجود مادة مغناطيسية والمقدار $(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})$ يمثل شدة المجال المغناطيسي H أي أن:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (S.I) \quad \dots \quad (V-8)$$

وهذه المعادلة صحيحة بين B و M لأي وسط مادي وهي تماثل المعادلة (٣-٢٦) التي تربط بين الإزاحة D وشدة المجال الكهربائي E $[E = \frac{1}{\epsilon_0} (D - P)]$ حيث E تناظر B و D تناظر H .

أما في النظام الجاوسي فإن العلاقة (٧-٨) تصبح:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad \dots \dots \dots (V-9)$$

وواضح مما سبق ذكره أن B لها علاقة بالتيار الحقيقي I إضافة إلى التيارات الذرية السطحية I_m بينما H لها علاقة بـ I فقط. إذا قورنت هذه الحالة بما وجد بالنسبة للكهرباء الاستاتيكية فإن شدة المجال الكهربائي E كان نتيجة لتوزيع كل الشحنات المستقطبة الناتجة عن استقطاب المواد العازلة وكذلك الشحنات الحرة بينما الإزاحة D تختص فقط بالشحنات الحرة كما ورد في البند (٥-٣).

(٧-٤) التأثيرية المغناطيسية

Magnetic Susceptibility

يتناسب متجه شدة التمهظ M مع شدة المجال المغناطيسي H تناسبا طرديا في معظم المواد حسب المعادلة:

$$M = \chi_m H \quad \dots \dots \dots (V-10)$$

ويسمى معامل التناسب χ_m بالتأثرية المغناطيسية، وهي تمثل أحد العوامل الرئيسة المميزة للمادة المدروسة وكلما كانت قيمة χ_m كبيرة كانت المادة أكثر قابلية للتمغنط في أي مجال مغناطيسي خارجي. وهذا التناسب واضح في المواد الدايمغناطيسية وكذلك البارامغناطيسية ما لم يكن المجال المغناطيسي الخارجي كبيرا ودرجة الحرارة منخفضة، كما سيرد في البند (٧-٧). أما المواد الحديد ومغناطيسية فليس هناك تناسب طردي بين M و H كما سيرد ذلك في البند (٧-٨). ويكون اتجاه M هو اتجاه H نفسه في المواد المتجانسة.

ومن المعادلتين (٧-٨) و (٧-١٠) يمكن الحصول على:

$$B = \mu_0 (H + \chi_m H) = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad \dots (٧-١١)$$

أو

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad \dots (٧-١٢)$$

حيث

$$\therefore \mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad \dots (٧-١٢ \text{ ب})$$

$$\therefore \mu_r = \mu / \mu_0$$

$$\therefore \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \dots (٧-١٣)$$

حيث μ_r النفاذية المغناطيسية النسبية (relative magnetic permeability) و μ نفاذية الوسط و μ_0 نفاذية الفراغ.

أما في النظام الجاوسي فتصبح المعادلتان (٧-٩) و (٧-١٠) بالصورة التالية:

$$B = H + 4\pi \chi_m H = (1 + 4\pi \chi_m) H = \mu H \quad \dots (٧-١٤)$$

حيث

$$\therefore \mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad \dots (٧-١٥)$$

$$\therefore \chi_m = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1) \quad \dots (٧-١٥ \text{ ب})$$

والقيمة التقريبية لـ μ في الفراغ تساوي الواحد ومنه $\chi_m = 0$ و $M = 0$

والجدول (٧-٢) يبين بعض قيم χ_m . والاشارة السالبة التي تسبق بعض قيم χ_m ، تدل على أن المادة دايامغناطيسية لأنه كما هو معروف أن التمغنط لهذه المواد يعاكس المجال المغناطيسي الخارجي . ولذلك يمكن القول (إنه بحسب إشارة التأثيرية المغناطيسية وقيمتها يمكن تصنيف الأنواع المختلفة للمواد الممغنطة) .

وحسب المعادلة (٧-١٣) فإن χ_m لا وحدات لها وبذلك فإن وحدات M هي وحدات H نفسها أي أن وحدات M هي :

$$M = A / m$$

وفي النظام الجاوسي :

$$M = 10^{-3} \text{ Oe}$$

أما μ_0 أو μ فإنه حسب المعادلة (٧-١٢) تكون وحداتها .

$$\begin{aligned} \mu \text{ or } \mu_0 &= \frac{B}{H} = \frac{Wb}{m^2} \div \frac{A}{m} = \frac{Wb}{A \cdot m} \\ &= H / m \end{aligned}$$

$$\therefore \mu_0 = \frac{10^4 G}{4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe}} = \frac{1}{4\pi} \times 10^7 G / \text{Oe}$$

وإذا كانت

$$B = 1 \cdot G = 10^{-4} \text{ tesla (T)}$$

$$H = \frac{1}{4\pi \times 10^{-3}} A / m$$

$$\therefore \mu_0 = 10^{-4} \times 4\pi \times 10^{-3} = 4\pi \times 10^{-7} H / m$$

ويوضح الملحق (١) العلاقة بين أنظمة الوحدات المختلفة للمقادير المغناطيسية .

جدول (٧-٢) بعض قيم التأثيرية المغناطيسية لبعض المواد.

المادة Substance	التأثيرية المغناطيسية χ_m
ألومنيوم Al	2.3×10^{-5}
بزموت Bi	-1.7×10^{-4}
نحاس Cu	-1.0×10^{-5}
ذهب Au	-3.6×10^{-5}
رصاص Pb	-1.7×10^{-5}
ماغنيسيوم Mg	-1.2×10^{-4}
بلاتين Pt	2.9×10^{-4}
فضة Ag	-2.6×10^{-5}
ماء H ₂ O	-0.88×10^{-5}
فلوريد المنجنيز MnF ₂	4.59×10^{-4}
كلوريد الكوبالت Co Cl ₂	3.38×10^{-4}
كلوريد الحديدك Fe Cl ₂	3.10×10^{-4}
كلوريد الحديدوز Fe Cl ₃	2.40×10^{-9}
كلوريد النيكل Ni Cl ₂	1.71×10^{-4}
حديد مطاوع Fe - (soft)	5000.
جرمانيوم Ge	-1.5×10^{-5}
تنجستن W	$+6.8 \times 10^{-5}$
زجاج Glass	-1.1×10^{-4}
كوارتز منصهر Fused Quartz	-6.2×10^{-5}
كلوريد الصوديوم Na Cl	-1.38×10^{-5}
كبريتات البوتاسيوم والكروميوم Cr K(SO ₄) ₂ .12H ₂ O	2.32×10^{-5}
كبريتات النحاس Cu (SO ₄).5H ₂ O	1.43×10^{-5}
كبريتات القادولينيوم Gd ₂ (SO ₄) ₃ .8H ₂ O	2.21×10^{-4}

مثال (٧-١)

ملف حلقي رفيع (thin toroidal coil) متوسط نصف قطره 10 cm ومساحة مقطعه 30 cm^2 وعدد لفاته 3412 لفة (بحيث يكون 50 لفة لكل سم) فإذا لُف حول مادة بارامغناطيسية تأثيريتها تساوي 4.59×10^{-4} والتيار المار في الملف يساوي 3.5 أمبير.

احسب:

- ا - شدة المجال H داخل الملف .
 ب - شدة التماغنط M .
 ج - الحث المغناطيسي B .
 د - مجموع التيار المغناطيسي السطحي I_m .
 هـ - ما هي قيمة B في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية .
 و - ما هي قيمة B إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بإداة حديد ومغناطيسية
 قيمة التأثيرية المغناطيسية لها تساوي 1200 ، علما بأن سلوك المغناطيسية
 خطية .

الحل

- ا - يمكن الحصول على H وذلك بتطبيق قانون أمبير المعادلة (٧-٧) .

$$\int H dl = H \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r H = NI$$

$$\therefore H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{(3412)(3.5)}{(2\pi)(0.1)} = 1.9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

- ب - شدة التماغنط يمكن حسابها من المعادلة

$$M = \chi_m H = (4.59 \times 10^{-4})(1.9 \times 10^4) = 8.721 \text{ A/m}$$

- ج - أما B فيمكن حسابها من

$$B = \mu H = \mu_0 (1 + \chi_m) H = (4\pi \times 10^{-7})(1.000459)(1.9 \times 10^4) \\ = 0.0238871 \text{ W/m}^2$$

- كما يمكن حساب B من المعادلة (٦ ب - ٧) .

- د - نحسب I_m من المعادلة (٧-٢) حيث :

$$M = \frac{P_m}{V} = \frac{I_m S}{Sl} = \frac{I_m}{l}$$

$$\therefore I_m = MI = 2\pi rM$$

$$\therefore I_m = (2\pi) (0.1) (8.71) = 5.48 \text{ A}$$

وهذا المقدار صغير جدا مقارنة بالحد NI ولذلك يمكن إهماله من المعادلة

(٦-٧)

$$\therefore B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = 0.0238761 \text{ Wb/m}^2$$

وهذه القيمة تساوي القيمة الواردة في الفقرة (ج).

هـ - يكون قيمة المجال في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية مساويا تقريبا لقيمته في حالة وجودها لأن النفاذية النسبية تساوي تقريبا الواحد أي :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m = 1.000459$$

و- في حالة استبدال المادة البارامغناطيسية بحديد ومغناطيسية خطية فإن :

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 1200 - 1 = 1199$$

وهي القيمة نفسها

$$H = 19000 \text{ A/m}$$

$$M = \chi_m H = (1199) (19000) = 2.28 \times 10^7 \text{ A/m}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = (4\pi \times 10^{-7}) (1200) = 1.508 \times 10^{-3} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

$$B = \mu H = (1.508 \times 10^{-3}) (19000) = 28.7 \text{ Wb/m}^2$$

$$I_m = 2\pi rM = (2\pi) (0.1) (2.28 \times 10^7) = 1.43 \times 10^7 \text{ A}$$

وهذا المقدار كبير جدا ويزيد من قيمة B إلى جانب زيادة في قيمة حثائية الملف في حالة وجود المادة الحديدية المغناطيسية عنها في الفراغ. وجدير بالملاحظة أن سلوك التمعنط لبعض المواد الحديدية المغناطيسية لا يمكن (وحتى ولو بصورة تقريبية) أن يخضع للمعادلة الخطية (١٠-٧) التي افترض تطبيقها في هذه المسألة، وافترضنا في هذه المسألة هو لتوضيح الفرق لبعض القيم في حالتي البارامغناطيسية والفرومغناطيسية.

(٥-٧) العلاقة بين كمية الحركة الزاوية والعزم المغناطيسي المداري للإلكترون

The Relation between the Angular Momentum and the Orbital Magnetic Moment of the Electron

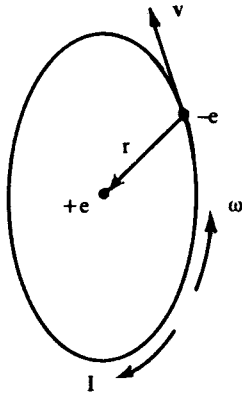
إذا فرض أن إلكترونًا واحدًا يدور حول نواة تحتوي على بروتون واحد ونيوترون بسرعة زاوية قدرها ω وعلى بعد قدره r ، كما في حالة ذرة الهيدروجين [كما في شكل (٧-٤)]، ولكي يبقى الإلكترون في مداره لا بد أن تكون القوة الطاردة المركزية (centrifugal force) الناتجة عن الحركة الدائرية تساوي قوة الجذب الاستاتيكي المركزي لكولوم الناتجة من تجاذب الإلكترون الذي شحنته $(-e)$ مع البروتون والذي شحنته $(+e)$.

$$\therefore \text{electrostatic attraction force} = \text{centrifugal}$$

القوة الطاردة المركزية = (قوة الجذب الاستاتيكي)

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m r \omega^2$$

$$\therefore \omega = \frac{e}{(4\pi\epsilon_0 m r^3)^{1/2}} \dots \dots \dots (٧-١٦)$$



حيث m كتلة الإلكترون و ϵ_0 سماحية الفراغ وبما أن دوران الإلكترون ينتج عنه تيار شدته I وهو عبارة عن معدل مرور الشحنة e في الثانية الواحدة:

$$\therefore I = \frac{e}{T} = e \cdot f = e \frac{\omega}{2\pi} \dots \dots \dots (٧-١٧)$$

حيث f هو التردد ويمثل عدد الدورات في الثانية الواحدة وبالتعويض عن ω من المعادلة (٧-١٦) يُحصل على:

$$I = \frac{e^2}{2\pi(4\pi\epsilon_0 m r^3)^{1/2}} \dots \dots \dots (٧-١٨)$$

شكل (٧-٤): حركة إلكترون حول نواة تحتوي على بروتون واحد ونيوترون بسرعة زاوية قدرها ω .

وإذا اعتبرت الحركة الدائرية للإلكترون تماثل مرور تيار في لفة دائرية مساحة مقطعها S ونصف قطرها r فإن العزم المغناطيسي الدائري للذرة يساوي، حسب المعادلة (٥-٥٦):

$$P_m = IS = I\pi r^2 = \frac{e^2}{4} \left(\frac{r}{\pi \epsilon_0 m} \right)^{1/2} \dots \dots (٧-١٩)$$

وبالتعويض عن m و e و ϵ_0 بقيمها المعروفة، وعن r بالقيمة $5.28 \times 10^{-11} \text{ m}$ كما في ذرة الهيدروجين في حالتها الطبيعية يُحصل على:

$$P_m = \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{4} \left\{ \frac{5.28 \times 10^{-11}}{\pi(8.853 \times 10^{-12})(9.11 \times 10^{-31})} \right\}^{1/2}$$

$$\therefore P_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \dots \dots (٧-٢٠)$$

وهذه القيمة تمثل أقل عزم للإلكترون في مداره، ويسمى هذا الثابت بمغنيون بوهر (Bohr-magneton) وهي وحدة العزم المغناطيسي للإلكترون. ويرمز له بالرمز μ_B .

والعزم الحركي الزاوي المداري للإلكترون يعطى بالمعادلة:

$$L = mvr = mr^2\omega \dots \dots \dots (٧-٢١)$$

ولكن من المعادلتين (٧-١٧) و (٧-١٩) يُحصل على:

$$P_m = IS = \frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} e\omega r^2 \dots \dots \dots (٧-٢٢)$$

من هذه المعادلة والمعادلة (٧-٢١) يُحصل على:

$$P_m = L \frac{e}{2m} \dots \dots \dots (٧-٢٣)$$

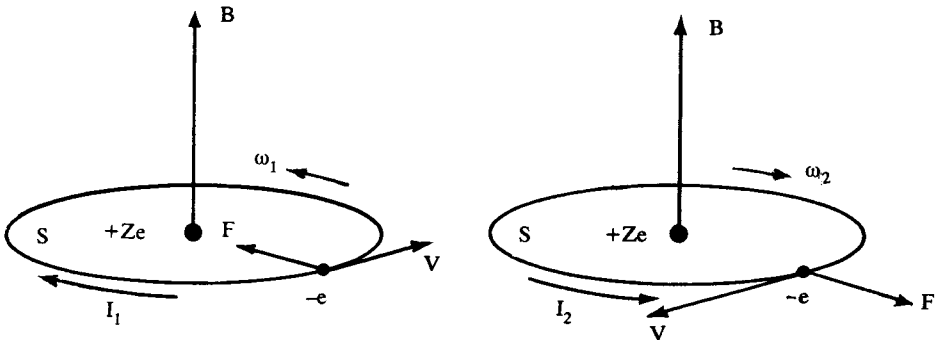
وواضح أن العزم المغناطيسي المداري P_m يتناسب تناسباً طردياً مع كمية الحركة الزاوية L وثابت التناسب هو النسبة بين شحنة الإلكترون ($-e$) إلى كتلته (m).

(٦-٧) الدايامغناطيسية

Diamagnetism

اكتشف ميخائيل فاراداي ، في عام ١٨٤٦م ، أن مادة البزمث (Bi) bismuth تتنافر إذا وضعت في مجال مغناطيسي قوي وسمى هذه المادة باسم الدايامغناطيسية ، وهي ظاهرة توجد في كل المواد بتأثير ضعيف وتختفي تقريبا في المواد التي تتميز ذراتها بعزم مغناطيسية كمعادن البارامغناطيسية والفرومغناطيسية .

وظاهرة الدايامغناطيسية الضعيفة الناتجة عن التيارات الإلكترونية الدائرية تعرف بظاهرة لارمر (Larmor diamagnetism) نسبة لمكتشفها السير جوزف لارمر (Sir Joseph Larmor) العالم الانجليزي . ويوضح الشكل (٧-٥) الطريقة التي اتبعها لارمر لحساب الدايامغناطيسية . نجد في هذا الشكل إلكترونين يدور كل منهما في مسار دائري ثابت نصف قطره r حول نواة شحنتها $+Ze$ حيث Z عدد صحيح ، وبسرعة قدرها v ، وسرعة زاوية قدرها ω ومتعاكسين في الاتجاه .



شكل (٧-٥) : إلكترونات يتحركان في اتجاهين متعاكسين ومسلط عليهما مجال مغناطيسي حثه B .

فإذا لم يسلب مجال مغناطيسي خارجي عليهما فإن حركة كل منهما تخضع للمعادلة (٧-١٦) في البند (٥-٧) أي أن :

$$-mr\omega_0^2 = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{or} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{mr^3} \quad (٧-٢٤)$$

وحسب المعادلة (٧-١٩) يكون العزم المغناطيسي لكل منهما:

$$P_{m1}(0) = \frac{(-e)\omega_0}{2\pi}(\pi r^2) = -\frac{1}{2}e\omega_0 r^2 \dots (٧-١٢٥)$$

$$P_{m2}(0) = \frac{(-e)(-\omega_0)}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}e\omega_0 r^2 \dots (٧-٢٥ ب)$$

والإشارة السالبة التي تسبق ω_0 تعني أن الاتجاه للإلكترون الثاني يعاكس الاتجاه للإلكترون الأول. وواضح من هاتين المعادلتين أن محصلة العزم المغناطيسي في غياب المجال الخارجي يساوي الصفر، ويمكن بصورة مماثلة افتراض أن العزوم المغناطيسية الناتجة عن الغزل الإلكتروني للإلكترونين متعاكسين وتكون المحصلة مساوية للصفر. ولا تظهر أية صفة مغناطيسية للمادة.

أما إذا سُلط مجال مغناطيسي خارجي B ، كما في شكل (٧-٥)، فإن الإلكترونين سوف يتأثران بقوة مغناطيسية قدرها $(-e(v \times B) = F_m)$ [كما ورد في البند (١٠-٥-١) الفصل الخامس] ويوضح الشكل (٧-٥) اتجاه هذه القوة لكل من الإلكترونين.

وتضاف هذه القوة إلى القوة الاستاتيكية بين الإلكترون والنواة بالنسبة للإلكترون الأول، شكل (٧-١٥)، وتزداد معها القوة الطاردة المركزية بحيث تزداد السرعة الزاوية للإلكترون لتصبح ω_1 ، بينما يحصل العكس من ذلك بالنسبة للإلكترون الثاني، شكل (٧-٥ ب)، بحيث تضعف القوة المغناطيسية القوة الاستاتيكية وتنقص تبعا لذلك القوة الطاردة المركزية بحيث تنقص السرعة الزاوية لتصبح ω_2 .
∴ معادلة القوة الواقعة على الإلكترون الأول هي:

$$-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - evB = -m r \omega_1^2$$

وحيث إن $v = r\omega_1$ وحسب المعادلة (٧-٢٤) يكون:

$$-m r \omega_0^2 - e r \omega_1 B = -m r \omega_1^2 \dots (٧-١٢٦)$$

وبصورة مماثلة تكون معادلة القوى الواقعة على الإلكترون الثاني هي :

$$-mr\omega_0^2 + er\omega_2 B = -mr\omega_2^2 \dots (٧-٢٦)$$

ويقسمة طرفي المعادلتين (٧-١٢٦) و (٧-٢٦) على mr يُحصل على :

$$-\omega_0^2 - 2\omega_1 \frac{eB}{2m} = -\omega_1^2 \dots (٧-٢٧)$$

$$\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_L - \omega_0^2 = 0 \dots (٧-٢٧)$$

$$\omega_2^2 + 2\omega_2 \omega_L - \omega_0^2 = 0 \dots (٧-٢٨)$$

حيث

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}$$

وتسمى ω_L بتردد لارمر (Larmor frequency)

وإذا أضيف لطرفي المعادلتين (٧-١٢٧) و (٧-٢٧) ω_L^2 يُحصل على :

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega_L)^2 &= \omega_0^2 + \omega_L^2 \\ (\omega_2 + \omega_L)^2 &= \omega_0^2 + \omega_L^2 \end{aligned} \dots (٧-٢٩)$$

وواضح من المعادلتين (٧-٢٤) و (٧-٢٨) أن قيمة ω_L صغيرة جدا بالنسبة لـ

ω_0 مهما كبرت قيمة B ولذلك يمكن إهمال ω_L^2 مقارنة بـ ω_0^2 ، وبذلك يحصل على :

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_L \dots (٧-٣٠)$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \omega_L \dots (٧-٣٠)$$

وبذلك يكون العزم المغناطيسي لكل من الإلكترونين في وجود مجال مغناطيسي B هو :

$$P_{m1}(B) = I_1 S = \frac{-e\omega_1}{2\pi} (\pi r^2) = -\frac{er^2}{2} (\omega_0 + \omega_L) \quad (٧-٣١)$$

$$P_{m2}(B) = I_2 S = \frac{-e(-\omega_2)}{2\pi} (\pi r^2) = \frac{er^2}{2} (\omega_0 - \omega_L) \quad (٧-٣١)$$

ومحصلتهما تساوي :

$$P_m(B) = P_{m1}(B) + P_{m2}(B)$$

$$P_m(B) = -\frac{1}{2} er^2 (\omega_0 + \omega_L) + \frac{1}{2} er^2 (\omega_0 - \omega_L)$$

$$\therefore P_m(B) = -er^2 \omega_L = -er^2 \frac{eB}{2m} = -\frac{e^2 r^2 B}{2m} \dots \dots (V-32)$$

أي أن المحصلة في حالة وجود مجال مغناطيسي خارجي B لا تساوي الصفر والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه محصلة العزم تعاكس اتجاه المجال B ، وبهذا يقل الفيض المغناطيسي عند تسليطه على مواد دايامغناطيسية وأصبح واضحاً سبب تنافر المواد الدايامغناطيسية في وجود مجال خارجي B .

وحيث إن العزم المغناطيسي لوحدة الحجم (شدة التماغنط M) هو عبارة عن العزم المغناطيسي للذرة مضروباً في عدد الذرات في وحدة الحجم N أي أن

$$M = N P_m$$

$$\therefore \chi_m = \frac{M}{H} \quad \& \quad H = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\therefore \chi_m = \frac{\mu_0}{B} N P_m \dots \dots \dots (V-33)$$

وبالتعويض عن P_m من المعادلة (V-32) يُحصل على :

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 N e^2 r^2}{2m} \dots \dots \dots (V-33 \text{ ب})$$

وإذا أخذت ذرة نموذجية يتفق تركيبها مع الافتراضات السابقة لحساب χ_m حسب المعادلة (V-33 ب) وكان $r = 1.3 \times 10^{-10} \text{ m}$ و $N = 6 \times 10^{28} \text{ per m}^3$ فإن قيمة χ_m تساوي :

$$\chi_m = -\frac{(4\pi \times 10^{-7}) (6.0 \times 10^{28}) (1.6 \times 10^{-19})^2 (1.3 \times 10^{-10})^2}{2(9.11 \times 10^{-31})} = -1.8 \times 10^{-5}$$

وهذه القيمة ضعيفة ولكنه يمكن قياسها وهي في حدود القيم الواردة في الجدول (V-2) لمواد دايامغناطيسية نموذجية ، كما توضح المعادلة (V-33) أن χ_m مستقلة (independent) لا تعتمد على درجة الحرارة وهذا يتفق مع النتائج التجريبية لهذه المواد.

ويلاحظ أنه افترض في النموذج السابق أن الإلكترونات تدور في مدارات دائرية بحيث يكون الإلكترون دائما على البعد نفسه من النواة ولكن الواقع أن الإلكترونات لا تدور كذلك وليست دائما على البعد نفسه .

ولذلك إذا أخذ إلكترون واحد فإنه حسب المعادلة (٧-٣٢) يكون العزم المغناطيسي مساويا

$$P_m = -\frac{e^2 r^2}{4m} B \quad \dots\dots\dots (٧-١٣٤)$$

وإذا أخذت ذرة عددها الذري Z (atomic number) فتكون عدد إلكتروناتها Z . ويكون لهذه الإلكترونات مدارات مختلفة في أنصاف أقطارها وفي اتجاهها أيضا ويكون تأثير المجال المغناطيسي مختلفا من مدار إلى مدار آخر. فإذا أخذ متوسط توزيعات كل الإلكترونات فإن محصلة العزوم لكل ذرة وجدت مساوية لـ:

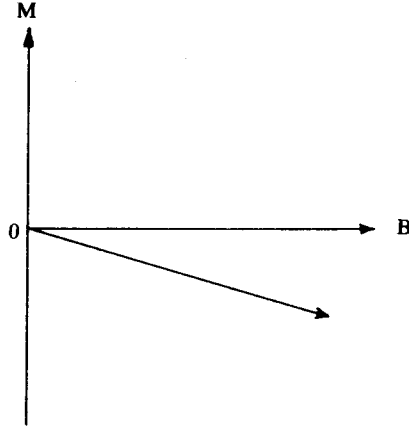
$$\bar{P}_m = -\frac{e^2}{6m} Z r_0^2 B \quad \dots\dots\dots (٧-٣٤ب)$$

حيث r_0^2 متوسط مربع أنصاف الأقطار (mean square radius) لمدارات الإلكترونات، وبذلك فإن قيمة M بالنسبة للمواد الدايمغناطيسية هي

$$M = N \bar{P}_m = -\frac{Ne^2}{6m} Z r_0^2 B \quad \dots\dots\dots (٧-١٣٥)$$

$$\therefore \chi_m = \frac{\mu_0 M}{B} = -\frac{\mu_0 N e^2}{6m} Z r_0^2 \quad \dots\dots\dots (٧-٣٥ب)$$

وواضح أن M و χ_m لا تعتمدان على درجة الحرارة ويوضح الشكل (٧-٦) العلاقة بين M و B للمواد الدايمغناطيسية .



شكل (٧-٦): العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمغنط M للمواد الدايمغناطيسية

(٧-٧) التمغنط المتسامت (البارامغناطيسية)

Paramagnetism

هناك بعض الذرات والجزيئات لها عزوم مغناطيسية دائمة تكون موزعة عشوائيا وعند تسليط مجال مغناطيسي خارجي توجه هذه العزوم لتكون في وضع مواز للمجال المغناطيسي ويعطي ما يسمى بالظاهرة البارامغناطيسية (paramagnetic effect) وتسمى المواد بالمواد البارامغناطيسية.

وقد ينتهي هذا التوجيه للعزوم بسبب تأثير الطاقة الحرارية العشوائية للذرات ويكون لدينا بذلك عزوم ذرية عشوائية (مرتبة بشكل فوضوي - disordered arrangement). ففي الغازات ترتبط الطاقة الحرارية غالبا بالطاقة الحركية (kinetic energy) ويحدث التوزيع الفوضوي للعزوم نتيجة للتصادم بين الجزيئات. أما في الحالة الصلبة فإن الطاقة الحرارية تظهر على شكل طاقة اهتزازية (vibrational energy) للنظام التشابكي البلوري (crystal lattice) وهذه الطاقة مسؤولة عن التوزيع الفوضوي للعزوم أما في حالة السوائل فقد يحدث التأثيران معا.

وفي كل الحالات هناك تنافس بين التأثير الاتجاهي للمجال المغناطيسي الخارجي وبين التوزيع العشوائي للعزوم الناتج عن الطاقة الحرارية. ويتج عن ذلك توجيه جزئي (partial alignment) للعزوم الذي يعتمد على شدة المجال المغناطيسي وعلى درجة الحرارة.

فإذا استعملت الاحداثيات الديكارتية فإن محصلة العزوم المتجهة مع محور Z مثلا تساوي الصفر في حالة عدم تسليط أي مجال مغناطيسي خارجي. أما إذا سلط المجال المغناطيسي الذي حثه B بحيث يكون اتجاهه مع محور Z فإن العزوم المغناطيسية ستتجه مع اتجاه المجال بزوايا مختلفة وسيكون لمعظمها مركبات مع محور Z في الاتجاه الموجب.

فإذا أخذ العزم المغناطيسي P_m بحيث تكون مركبته على المحور Z [كما في شكل (١٧-٧)] هي :

$$P_{mz} = P_m \cos \theta \quad \dots \dots \dots (٧-١٣٦)$$

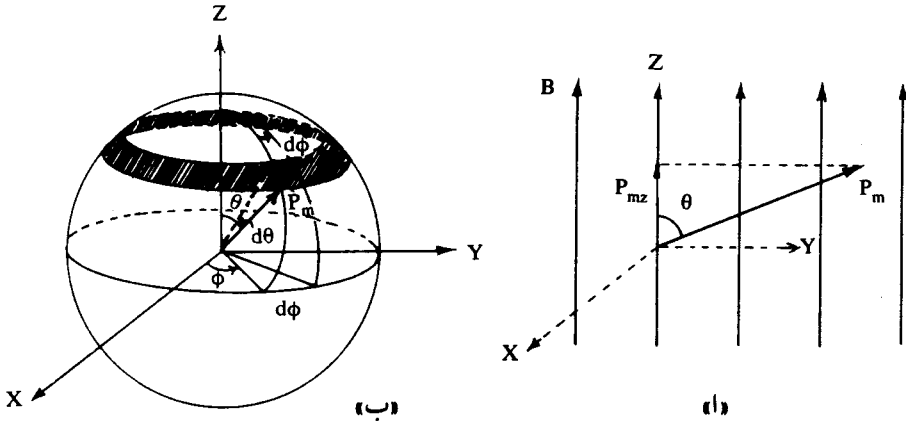
وحسب ما ورد في البند (٥-٨) فإن طاقة الوضع المغناطيسي لهذا العزم هي :

$$W = P_m B \cos \theta \quad \dots \dots \dots (٧-٣٦ ب)$$

حيث θ هي الزاوية بين P_m و B.

ولحساب الشدة المغناطيسية للمواد البارامغناطيسية نفرض أن N هي عدد الذرات الموجودة بوحدة الحجم لمادة بارامغناطيسية، وضعت في مجال مغناطيسي حثه B وعند درجة حرارة قدرها T. فإذا فرض أن dn عدد العزوم المغناطيسية في وحدة الحجم والواقعة بين θ و $\theta + d\theta$ مع اتجاه المجال B والموضحة بالشريط المخطط كما في شكل (٧-٣٦ ب). فتكون الزاوية المجسمة المقابلة للشريط هي :

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad \dots \dots \dots (٧-٣٧)$$



شكل (٧-٧): أ - عزم مغناطيسي P_m في مجال مغناطيسي خارجي.
 ب - غلاف كروي لحساب العزوم المغناطيسية المختلفة المتأثرة بالمجال المغناطيسي الخارجي.

وحسب قانون ماكسويل وبولتزمان للاحتتمالات النسبية لتوزيع الطاقة
 (relative probability of Maxwell - Boltzman energy distribution law) فإن التوزيع
 $dn/d\Omega$ يعطى بالمعادلة:

$$\frac{dn}{d\Omega} = N_0 e^{(-W/KT)} \dots \dots \dots (٧-١٣٨)$$

حيث N_0 ثابت التناسب ويمثل عدد الجزيئات (molecules) لوحدة الزاوية المجسمة
 (solid angle) عندما تكون $W = 0$ أي أن:

$$\cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

وبالتعويض عن W من المعادلة (٧-٣٦) في المعادلة (٧-١٣٨) نحصل

على:

$$\frac{dn}{d\Omega} = N_0 e^{\{(-P_m B \cos \theta)/KT\}}$$

أو

$$dn = N_0 e^{\{(-P_m B \cos \theta)/KT\}} d\Omega \dots \dots (٧-٣٨)$$

وبالتعويض عن $d\Omega$ من المعادلة (٧-٣٧) ووضع $P_m B/KT = a$ يُحصل على :

$$dn = N_0 e^{-a \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta \dots (٧-١٣٩)$$

$$\therefore n = \int dn = 2\pi N_0 \int_0^\pi e^{-a \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$\therefore n = (4\pi N_0/a) \sinh a \dots (٧-٣٩ ب)$$

ويكون مجموع العزوم ضمن الشريط المخطط داخل الزاوية المجسمة $d\Omega$ هو:

$$dM = P_{mz} \cdot dn$$

وحسب المعادلة (٧-٣٥) والمعادلة (٧-١٣٩) فإن :

$$\therefore dM' = P_m \cos \theta dn = P_m \cos \theta 2\pi N_0 e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$\therefore M' = 2\pi P_m N_0 \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\therefore M' = (4\pi N_0 P_m/a^2) \{a \coth(a) - \sinh(a)\} (٧-٤٠)$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (٧-٣٩ ب) تكون قيمة العزم المغناطيسي المتوسط لكل جزيء والمتجهة مع اتجاه المجال المغناطيسي على محور Z هي :

$$\therefore \bar{P}_{mz} = \frac{M'}{n} = P_m \left\{ \coth(a) - \frac{1}{a} \right\}$$

وبذلك فإن قيمة الشدة المغناطيسية M (magnetization) هي :

$$M = N \bar{P}_{mz}$$

حيث N عدد الذرات لوحدة الحجم .

$$M = N P_m \left\{ \coth(a) - \frac{1}{a} \right\} = N P_m L(a) \dots (٧-٤١)$$

حيث

$$L(a) = \coth(a) - \frac{1}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \dots (٧-٤٢)$$

وتكون قيمة التأثيرية المغناطيسية هي :

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 N P_m L(a)}{B} \quad \dots \quad (٤-٤٣)$$

والمقدار $L(a)$ يعرف بتابع لانقفن (Langevin function) والشكل (٧-٨) يمثل العلاقة بين a و $L(a)$. وواضح أنه بالنسبة للقيم الصغيرة لـ a حينها يكون المجال المغناطيسي صغيرا نسبيا أو درجة الحرارة مرتفعة نسبيا، فإن الدالة تكون دالة خطية بالنسبة للمتغير a ولها ميل قيمته $\frac{1}{3}$. وهذا ليس واضح مباشرة من المعادلة (٧-٤٢) ولكن من مفكوك الدالة $L(a)$ نحصل على

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots \dots \dots (٧-٤٤)$$

وحيث إن a صغيرة جدا فإنه يمكن إهمال الحد الثاني وما بعده.

وبالتعويض عن الدالة $L(a)$ في المعادلتين (٧-٤١) و (٧-٤٢)، يُحصل على :

$$M = \frac{N P_m^2 B}{3KT} \quad \dots \dots \dots (٧-١٤٥)$$

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 N P_m^2}{3KT} \quad \dots \quad (٧-١٤٥)$$

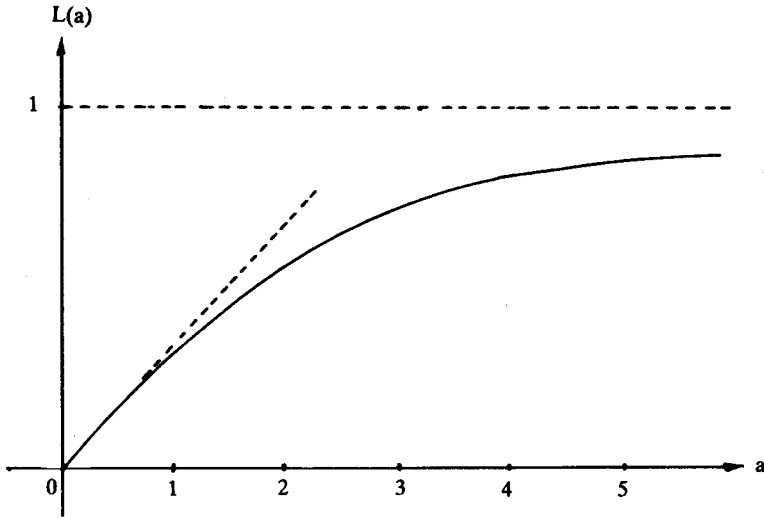
أو

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \dots \dots \dots (٧-١٤٦)$$

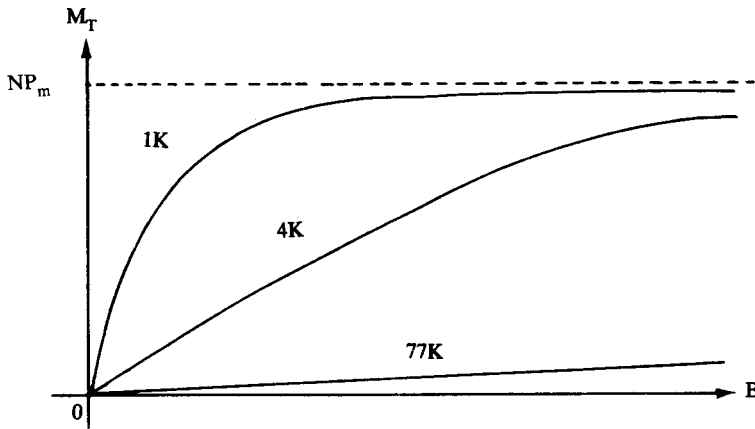
حيث

$$C = \frac{\mu_0 N P_m^2}{3K} \quad \dots \dots \dots (٧-١٤٦ \text{ ب})$$

ويسمى C بثابت كيوري (Curie) والمعادلة (٧-١٤٦) تسمى بمعادلة كيوري. وتحت هذه الظروف فإن التأثيرية المغناطيسية لا تعتمد على المجال المغناطيسي ولكنها تتناسب



(ا)



(ب)

شكل (٧-٨) : ١ - العلاقة بين a ($a = \frac{P_m B}{KT}$) وتابع لانقفن . حسب المعادلة (٧-٣٤) .
 ب - العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمعنط اللحظي M_T ، عند درجات الحرارة 1K, 4K, 77K حسب المعادلة (٧-١٤٥) .

عكسيا مع درجة الحرارة، وسبب هذا الاعتماد أنه كلما زادت درجة الحرارة كلما زادت الطاقة الحرارية الداخلية العشوائية للذرات أو الجزيئات التي تكون سببا في نقصان درجة التوجيه للعزوم الذرية عند أي قيمة للمجال المغناطيسي.

ومن الملاحظ أن الطاقة الحرارية أكبر من طاقة الوضع. فإذا حسبنا طاقة الوضع لعزم مغناطيسي قيمته وحدة العزم المغناطيسي، حسب المعادلتين (٧-٣٩) و(٧-٢٠)، وضع في مجال مغناطيسي قيمة حثه 10 T وكانت العزوم متجهة مع المجال، وبتطبيق المعادلة (٧-٣٦) نحصل على:

$$W = P_m B = 9.273 \times 10^{-24} \times 10$$

$$W = P_m B = 9.273 \times 10^{-23} \text{ J} = 5.796 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

بينما تكون قيمة الطاقة الحرارية عند درجة حرارة الغرفة تساوي:

$$KT = 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$KT = 2.588 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٧-٤١) والشكل (٧-٨) نجد أن شدة التمثغظ M تصل إلى قيمتها العظمى $N P_m$ عندما تكون قيمة L(a) الوحدة تقريبا، وعندما تكون كل العزوم متجهة مع المجال المغناطيسي، أي أن المعادلة (٧-٤١) يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$M_T = M_s L(a) \dots \dots \dots (٧-٤٧)$$

حيث M_T شدة التمثغظ عند درجة الحرارة T و M_s القيمة العظمى «التشبع» لشدة التمثغظ (saturation value). ويوضح الشكل (٧-٨ ب) العلاقة بين الحث المغناطيسي B وشدة التمثغظ عند قيم مختلفة لدرجة الحرارة. وإذا عوض بقيم نموذجية في المعادلة (٧-٤٥) بحيث كان $N = 6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ و $P_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ و $T = 300 \text{ K}$ فإنه يمكن الحصول على:

$$\chi_m = 5.2 \times 10^{-4}$$

وهذه القيمة متفقة مع قيم χ_m الواردة في الجدول (٧-٢) للمواد البارامغناطيسية.

مثال (٧-٢)

ما هي قيمة B التي تمكن من الحصول على العزم المغناطيسي في حالة التشبع لمادة بارامغناطيسية يكون أقصى حد لها لشدة التمثغط M_T هو 80% من قيمة $N P_m$ عندما تكون $T = 1.0K$ ، $T = 77K$ و $T = 300K$ علما بأن $P_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

الحل

واضح من المعادلة (٧-٤٦) أن M_T تتناسب مع $L(a)$. كما هو واضح أيضا من الشكل (٧-١٨) أن قيمة $L(a)$ تصل الوحدة عندما تكون a كبيرة جدا وحسب المعادلة (٧-٢٤) فإن في هذه الحالة تكون e^a كبيرة جدا بينما e^{-a} صغيرة جدا. ولذلك فإن المعادلة (٧-٢٤) يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$L(a) \cong 1 - \frac{1}{a}$$

$$\therefore L(a) = \frac{M_T}{M_S} = 0.80 \quad , \quad \therefore 0.80 = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\therefore a = 5$$

وحيث إن

$$a = \frac{P_m B}{KT}$$

$$B = a \frac{KT}{P_m} = 5 \frac{KT}{P_m}$$

فعندما تكون $T = 1.0 K$

$$\therefore B = 5 \frac{(1.38 \times 10^{-23})(1.0)}{(9.27 \times 10^{-24})} = 7.44 \text{ Wb/m}^2$$

وهذا المجال كبير ولكن يمكن الحصول عليه في المختبرات بسهولة.

وعندما تكون $T = 77K$ يكون $B = 572.88 \text{ Wb/m}^2$

وعندما تكون $T = 300 K$ يكون $B = 2232 \text{ Wb/m}^2$

ومعنى ذلك أن نحتاج إلى مجال مغناطيسي حثه 572.88 Wb/m للحصول على حالة التشبع نفسها في درجة 77°K وكذلك نحتاج مجالا مغناطيسيا حثه 2232 Wb/m^2 للحصول على حالة التشبع نفسها عند درجة حرارة 300°K وهذا مستحيل ويصعب تحقيقه تجريبيا ولذلك لا يمكن أن نصل إلى حالة التشبع عندما تكون درجة الحرارة 77°K أو أعلى ولذلك يمكن عد التناسب خطيا لمنحنى شدة التمهغن عندما تكون $a \ll 1$.

ومن هذا المثال وما ورد في البند (٧-٧) يلاحظ أن العلاقة بين M و H للمواد البارامغناطيسية علاقة خط مستقيم ميله يمثل التأثيرية المغناطيسية χ_m وذلك حسب المعادلة (٧-٤٥). كما تناقص χ_m مع درجة الحرارة ويمكن تمثيل مقلوبها بخط مستقيم كما في شكل (٧-١٩).

(٧-٨) المواد الحديدية المغناطيسية

Ferromagnetic Material

يوجد في المواد الحديدية المغناطيسية مثل الحديد (Fe) والنيكل (Ni) والكوبالت (Co) تفاعل (interaction) قوي بين العزوم المغناطيسية للذرات المتجاورة فيما بينها بحيث يمكن للعزوم الذرية من توجيه نفسها بصورة متوازية تحت تسليط مجال مغناطيسي خارجي بسيط أو بدونه. ولذلك فالمواد الحديدية المغناطيسية لها نفاذية مغناطيسية كبيرة جدا ويمكن أن تتمغنط بصورة دائمة. وطالما أن العزوم المغناطيسية تكون جميعها تقريبا في اتجاه واحد بمجرد تسليط مجال خارجي بسيط فإن قيمة التشبع يمكن الوصول إليها عند قيم صغيرة للشدة المغناطيسية وفي هذه الحالة فإن العلاقة بين التمهغن M والمجال الخارجى H ليست علاقة خطية. وبالتالي فإن التأثيرية المغناطيسية χ_m للمواد الحديدية المغناطيسية ليست ثابتة ولكنها تتغير مع شدة المجال الخارجى H .

ويمكن القول كمحاولة أولى لتفسير هذه الظاهرة إن القوى التي أعطت التوجيه المغناطيسي للمواد الحديدية المغناطيسية هي تأثير القوى المغناطيسية الثنائية للمغانط

الذرية الأحادية بعضها على بعض ولكن هذه القوى ليست أكبر في المواد الحديدية المغناطيسية منها في المواد البارامغناطيسية وكما وُجد سابقا فهي ضعيفة حتى إنها غير قادرة على مقاومة التأثيرات العشوائية الناشئة على حركات الجزيئات أو الذرات المثارة حراريا «التهيج الحراري»، ولذلك تكون العزوم الذرية في المواد الحديدية المغناطيسية ضعيفة جدا وغير قادرة على توجيه نفسها.

في عام ١٩٠٧م افترض العالم بيير فايس (Pierre Weiss) أن التفاعل القوي للعزوم المغناطيسية في المواد الحديدية المغناطيسية المذكور أعلاه يعطي مجالا مغناطيسيا داخليا قويا سماه المجال الجزيئي (molecular field) وأنه يتناسب مع شدة التمعنط M . فإذا فرض أن H_m قيمة المجال المغناطيسي الجزيئي عند درجة الحرارة T فإن:

$$H_m \propto M \quad \therefore H_m = \lambda M$$

حيث λ ثابت التناسب ويسمى بمعامل المجال الجزيئي (molecular field factor) وإذا فرض أن المجال المغناطيسي الخارجي شدته H فإن المجال المغناطيسي الفعال هو:

$$H' = H + \lambda M \quad \dots\dots\dots (٧-٤٩)$$

وإذا فرض أن λ صغيرة بحيث يمكن اعتبار أن شدة التمعنط مازالت تتناسب مع شدة المجال المغناطيسي الفعال فإنه يمكن كتابة المعادلة (٧ - ١٠) بالصورة التالية:

$$M = \chi_m (H + \lambda M)$$

$$\therefore M = \frac{\chi_m H}{1 - \lambda \chi_m}$$

وبالتعويض عن χ_m من المعادلة (٧-٤٥) يُحصل على:

$$M_T = \frac{\mu_0 N P_m^2 H}{3K \left(T - \frac{\lambda \mu_0 N P_m^2}{3K} \right)}$$

أو

$$M_T = \frac{\mu_0 N P_m^2 H}{3K (T - T_C)} \quad \dots\dots\dots (٧-٥٠)$$

$$M_T = \frac{CH}{T - T_C} \quad \dots\dots\dots (٧-٥٠)$$

وحيث إن M تتغير مع درجة الحرارة T فإنها تكتب عادة M_T ، وتصبح التأثيرية المغناطيسية في هذه الحالة كالتالي :

$$\chi_m = \frac{M_T}{H} = \frac{C}{T - T_C} \dots\dots\dots (V-51)$$

حيث C ثابت كيوري وذلك حسب المعادلة (٤٦ ب - ٧) ، أما T_C فتسمى بدرجة كيوري (Curie temperature) وقيمتها هي :

$$T_C = \frac{\lambda \mu_0 N P_m^2}{3K} \dots\dots\dots (V-52)$$

أما المعادلة (٧-٥١) فتسمى بقانون كيوري وفايس (Curie-Weiss law) ويُحصل من المعادلتين (٤٦ ب - ٧) و (٧-٥٢) على :

$$\lambda = \frac{T_C}{C} \dots\dots\dots (V-53)$$

وبالرغم من أن نظرية فايس تشرح منشأ وأساس (origin) المجال الجزيئي إلا أنها توضح علاقة التمعط M مع درجة الحرارة وكذلك تغير التأثيرية المغناطيسية χ_m مع درجة الحرارة T . وتسمى درجة حرارة كيوري بدرجة حرارة التحول (transition temperature) لأن المادة الحديدية المغناطيسية تفقد خواصها الحديدية المغناطيسية وتتحول إلى خواص المواد البارامغناطيسية.

وقد وجد أنه عند قيمة معينة لـ B ، قد تكون صغيرة جداً ، فإن المادة الحديدية المغناطيسية تكون ممغنطة مادامت درجة الحرارة أقل من درجة التحول T_C وفي هذه الحالة فإن النتائج التجريبية بين M_T و T للمواد الحديدية المغناطيسية تحققها المعادلة :

$$M_T \propto (T_C - T)^\beta \dots\dots\dots (V-54)$$

حيث تتراوح قيمة β بين 0.33 و 0.37 ، أما إذا كانت $T > T_C$ فإن المادة تصبح بارامغناطيسية ويمكن تطبيق المعادلة (١٤٥ - ٧) بين M_T و T .

أما التأثيرية المغناطيسية χ_m فإن النتائج التجريبية لها مع درجة الحرارة T تحقق المعادلة:

$$\chi_m \propto (T - T_c)^{-\alpha} \dots \dots \dots (٧-٥٥)$$

إذا كانت $T < T_c$ ، حيث تتراوح قيمة α بين 1.3 و 1.4.

أما إذا كانت $T > T_c$ فإن χ_m تتناسب عكسيا مع T حسب المعادلة (٧-٤٧).

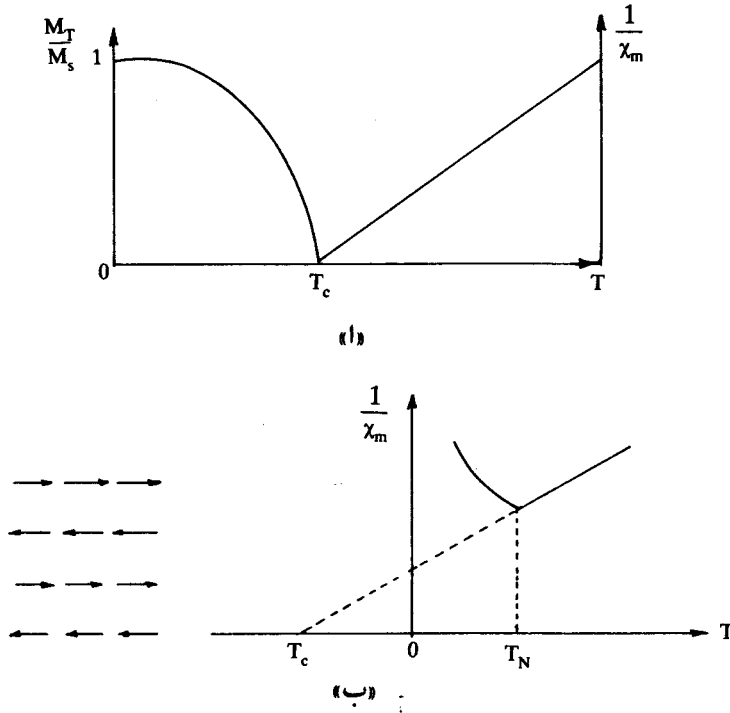
والجدول (٧-٣) يعطي قيم α و β لبعض المواد.

جدول (٧-٣) قيم α و β لبعض المواد الحديدية المغناطيسية

المادة	α	β
Fe حديد	1.33 ± 0.015	0.34 ± 0.04
Co كوبالت	1.21 ± 0.04	---
Ni نيكيل	1.35 ± 0.02	0.42 ± 0.07
Gd جادولينيوم	1.3 ± 0.1	---
CrO ₂	1.63 ± 0.02	---
CrBr ₃	1.215 ± 0.02	0.368 ± 0.005
EuS	---	0.33 ± 0.015

ويوضح الشكل (٧-١٩) تغير شدة التمغنط مع درجة الحرارة حيث تتناقص قيمته مع زيادة درجة الحرارة T ، وكذلك بالنسبة للعلاقة بين مقلوب التأثيرية ودرجة الحرارة في حالة البارامغناطيسية أي عندما تكون $T > T_c$.

وهناك نظريات أخرى وضعت لشرح وتفسير ظاهرة التمغنط القوي في المواد الحديدية المغناطيسية وتعتمد جميعها على قواعد النظرية الكمية (quantum) وهو خارج عن نطاق الكتاب. وسيدكر هنا تفسير واحد من التفسيرات المهمة دون اللجوء إلى المعادلات الرياضية وهو:



شكل (٧-٩): ١ - العلاقة بين $\frac{M_T}{M_s}$ شدة التغمط اللحظي، M_s القيمة العظمى «التشبع» (للتغمط) ودرجة الحرارة وكذلك مقلوب التآثرية $\frac{1}{\chi_m}$ مع درجة أما T_c فهي درجة حرارة كيوري لمادة حديدية ومغناطيسية.
 ب - $\frac{1}{\chi_m}$ مع درجة الحرارة T لمادة ضد الحديدية المغناطيسية، T_N درجة حرارة نييل.

يوجد في المواد الحديدية المغناطيسية تفاعل خاص يسمى بالتقارن التبادلي، الترابط التبادلي، (exchange coupling) بين الذرات المتجاورة (adjacent atoms) يكون سببا في توجيه العزوم المغناطيسية بصورة متوازية (parallel) بعضها بعضا وأنه ذو طبيعة كمية. وقد يؤدي هذا الترابط إلى توازن متضاد في الاتجاه (antiparallel) للعزوم وتسمى المواد في هذه الحالة باسم ضد الحديدية المغناطيسية (antiferromagnetic material). وهي مواد ضعيفة التغمط وتماثل البارامغناطيسية من حيث إظهار تأثيرية مغناطيسية صغيرة موجبة. والعلاقة بين درجة الحرارة T والتآثرية χ_m تتميز بوجود التواء (kink) في

المنحنى كما في شكل (٧-٩) وعنده تسمى درجة الحرارة بدرجة نيل (Neel temperature) ويرمز لها بالرمز T_N وسبب ذلك أنه قبل هذه الدرجة تكون العزوم المغناطيسية، الناتجة عن غزل (spin) الإلكترونات، المتوازية والمتضادة في الاتجاه مع نفسها بحيث تلغي العزوم الموجبة العزوم السالبة تماماً كما في شكل (٧-٩) ونتيجة لهذا الترتيب الضد الحديدية المغناطيسية بين العزوم فإن اتجاه التمغنط بواسطة المجال الخارجي سيعاكس بمجال ناتج عن التفاعل القوي بين العزوم الموجبة والسالبة، ومنه تتناقص التأثيرية المغناطيسية مع نقصان درجة الحرارة وهذا السلوك يتناقض مع سلوك البارامغناطيسية، وفوق درجة حرارة نيل T_N ترتب العزوم نفسها عشوائياً وعندها تتناقص القابلية مع زيادة درجة الحرارة.

ويعطي الجدول (٧-٤) قيم درجة حرارة كيوري T_c وشدة التمغنط في حالة التشبع M_s وكذلك العزم المغناطيسي P_m لبعض المواد الحديدية المغناطيسية.

جدول (٧-٤)

T_c و P_m و M_s لبعض المواد الحديدية المغناطيسية

Material المواد	T_c (K°)	P_m (μ_B)	M_s (O°K) Gauss
Fe	1043	2.22	1752
Co	1388	1.72	1446
Ni	622	0.606	510
Gd	293	7.10	1980
Tb	218	9.00	----
Dy	85	10.00	3000
CrBr ₃	37	----	270
Au ₂ MnAl	200	----	323
Cu ₂ MnAl	630	4.0	726
Cu ₂ MnIn	500	----	613
EuO	77	6.8	1910
EuS	16.5	----	1184
MnAs	318	3.4	870
MnBi	620	3.52	675
GdCl ₃	2.2	----	650

(٧-٩) دورة التخلف المغناطيسي

Hysteresis Loop

من دراسة البنود السابقة يمكن القول إنه إذا وضعت مادة في مجال مغناطيسي خارجي فإن شدة التمعنط M تتوقف قيمتها على نوع المادة وشدة المجال المغناطيسي H وكذلك درجة الحرارة T .

وتنقسم المواد الحديدية المغناطيسية من حيث تأثير المجال المغناطيسي الخارجي عليها إلى قسمين رئيسين نستعرضهما فيما يلي:

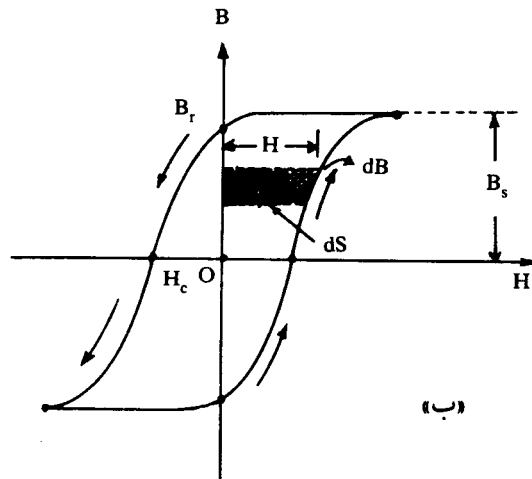
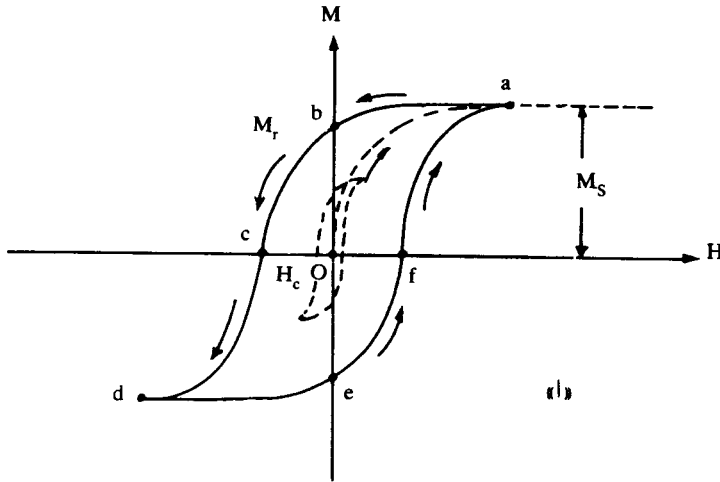
(٧-٩-١) مواد حديدية مغناطيسية صلبة **Hard ferromagnetic material**

وهي نوع من أنواع الفولاذ (steel) فإذا سلط عليها مجال مغناطيسي خارجي فإنها تحتفظ ببعض مغناطيسيتها حتى بعد زوال المجال الخارجي .

فإذا وضعت مادة حديدية مغناطيسية صلبة في مجال مغناطيسي H ، كما في شكل (٧-١)، ناتج عن تيار كهربائي مار في ملف حلقي (teroidal coil) فإن العلاقة بين شدة التمعنط M للمادة والمجال المغناطيسي H المسلط عليها يوضحها الشكل (١١٠ - ٧). ويتتبع سلوك التمعنط من البداية حيث تكون $M = 0$ عندما $H = 0$ نجد أنه إذا زاد المجال المغناطيسي فإن العزوم الذرية ستوجه نفسها مع المجال المغناطيسي وتزداد هذه العزوم مع زيادة H ويزداد تبعاً لذلك شدة التمعنط M حتى نصل إلى قيمة معينة لـ H عند النقطة (a) حيث تصبح كل العزوم متجهة مع المجال المغناطيسي ولا يمكن بعدها زيادة M بزيادة H وتسمى هذه الحالة بالتشبع المغناطيسي (saturation magnetization) حيث $M_s = N P_m$.

فإذا نقصت H فإن M تنقص ولكن على خط عودة آخر. فإذا أصبحت $H = 0$ نجد أن هناك مغنطة متبقية ممثلة بالنقطة b. أي أنه رغم زوال المجال المغناطيسي فإن المادة مازالت ممغنطة بمغناطيسيتها وهذا يعني أن بعض العزوم الذرية مازالت باقية على

اتجاهها، ويتولد ما نسميه بالمغناط الدائمة (permanent magnets) وتسمى شدة المغنطة في هذه الحالة بالمغنطة المتبقية «التخلف» M_r (remanent magnetization). ولإزالته يجب تسليط مجال مغناطيسي معاكس حتى تصل إلى النقطة c وعندما تنعدم المغنطة M رغم وجود مجال مغناطيسي يسمى المجال في هذه الحالة بالمجال القاهر



شكل (١٠-٧): أ - دورة مغنطة كاملة بين H و M «دورة التخلف المغناطيسي» لمادة حديدية مغناطيسية صلبة.

ب - دورة تخلف كاملة بين H و B.

" H_c " (coercive field) الذي يزيل المغنطة . وبزيادة المجال المغناطيسي الخارجي H في الاتجاه المعاكس يمكن الوصول إلى حالة الشبع d وإذا عكس المجال مرة أخرى فإنه يمكن الحصول على النقطتين e و f المناظرتين لـ b و c ثم إلى النقطة a مرة أخرى .

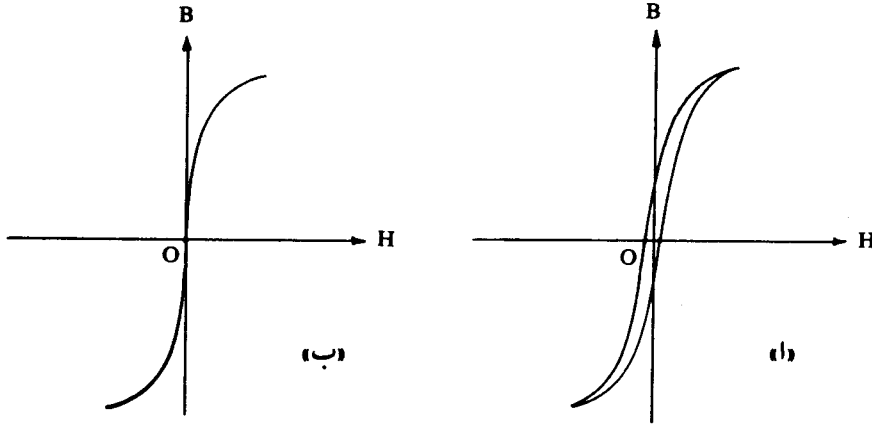
وتسمى هذه الظاهرة بالتخلف المغناطيسي (magnetic hysteresis) وتسمى الدورة الكاملة المغلقة بدورة التخلف المغناطيسي (hysteresis loop) ويعتمد حجمها على نوع المادة وشكلها والقيمة العظمى للمجال المغناطيسي كأن تختار قيمة لـ H بحيث يعطينا الدورة الكاملة الصغيرة المغنطة المبينة في شكل (٧-١١٠) .

أما إذا درست العلاقة بين B و H فإن دورة التخلف المغناطيسي ستكون مماثلة للدورة السابقة بين M و H وسبب ذلك أن B تابعة للتيار الحقيقي I المار في الملف وكذلك التيارات الذرية I_m حسب ما ورد في المعادلة (٧-٨) . وكما ورد في المثال (٧-١) المعادلة (٧-٨) الصورة: $B \cong \mu_0 M$ ، أي أن الفرق بين الشكلين (٧-١١٠) الخاص بـ H و M و (٧-١٠ب) الخاص بـ H و B هو المعامل الثابت μ_0 . وقد تكون لبعض المواد الحديدية المغناطيسية الصلبة دورة مغناطيسية ضيقة كما في شكل (٧-١١١) .

(٧-٩-٢) مواد حديدية مغناطيسية رخوة (مطاوع) Soft Ferromagnetic material

مثل الحديد المطاوع (soft iron) ، وهذه المواد تتمغنط بسهولة في المجال المغناطيسي الخارجي ولكنها تفقده بسهولة عند زواله أي لا تبقى أي أثر للمغناطيسية بعد زوال السبب .

أما المواد الحديدية المغناطيسية الرخوة، مطاوعة، فإن السلوك المثالي للدورة المغناطيسية يمثلها الشكل (٧-١١ب) ولكن لا يمكن الحصول على ذلك بصورة عملية ولكن يمكن القول إن دورة التخلف المغناطيسية للمواد الحديدية المغناطيسية الرخوة تكون ضيقة جدا .



شكل (٧-١١): ١ - دورة تخلف مغناطيسية لمادة حديد ومغناطيسية صلبة تختلف عن المادة التي وردت دورة تخلفها في الشكل (٧-١٠).
ب - دورة التخلف لمادة حديد ومغناطيسية رخوة مثالية.

(٧-٩-٣) الطاقة اللازمة لمغنطة المواد الحديدية المغناطيسية

لحساب الطاقة (energy) اللازمة لمغنطة المواد الحديدية المغناطيسية نفرض أن طول الملف l ومساحة مقطعه S وأن التيار المار به I فإنه حسب المعادلة (٧-٤٢) يكون:

$$H = \frac{nI}{l} \dots\dots\dots (٧-٥٦)$$

حيث n عدد لفات الملف.

فإذا زاد التيار زيادة مقدارها dI في زمن قدره dt فإن المجال يزيد مقداراً قدره dH وكذلك الحث المغناطيسي dB وبذلك تكون الزيادة في الفيض المغناطيسي (flux) هي:

$$d\Phi = SdB \dots\dots\dots (٧-٥٧)$$

وحيث إن التغير في الفيض يصحبه قوة دافعة كهربية حثية تكون قيمتها حسب المعادلة (٦-١٢) هي:

$$\mathcal{E} = -n \frac{d\Phi}{dt}$$

وبالتعويض عن $d\Phi$ من المعادلة (٧-٥٧) يُحصل على :

$$\therefore \mathcal{E} = -nS \frac{dB}{dt} \dots\dots\dots (٧-٥٨)$$

وتكون الطاقة المغناطيسية المبذوة (dissipated) في زمن قدره dt هي ، حسب قانون حفظ الطاقة :

$$dU + \mathcal{E}I dt = 0$$

أو

$$dU = -\mathcal{E}I dt \dots\dots\dots (٧-٥٩)$$

ومن المعادلتين (٧-٥٨) و(٧-٥٩) يُحصل على :

$$dU = nSI dB$$

وبالتعويض عن nI من المعادلة (٧-٥٦) يُحصل على :

$$dU = S/H dB$$

$$dU = VH dB$$

حيث $V = SI$ حجم الملف .

$$\frac{U}{V} = \int H dB \dots\dots\dots (٧-٦٠)$$

والتكامل في المعادلة (٧-٦٠) يمثل التغير في الطاقة المغناطيسية (magnetic energy) لوحدة الحجم داخل المادة الممغنطة الناتج عن أي تغير في مغناطيسيتها . وواضح من الشكل (١٠ ب - ٧) أن التكامل (٧-٦٠) يمثل المساحة الموجودة داخل نطاق دورة التخلف المغناطيسية بين H و B وهذه الطاقة تختزن جزئيا كطاقة وضع (potential energy) والجزء الآخر يتبدد طاقة حرارية تتولد داخل المادة الممغنطة .

وتتحول الطاقة كاملة إلى حرارة إذا أخذت الدورة كاملة بحيث تشمل المساحة الكلية داخل دورة التمهبط . وفي هذه الحالة تكتب المعادلة (٧-٦٠) بالصورة التالية :

$$\frac{U_h}{V} = \oint H dB$$

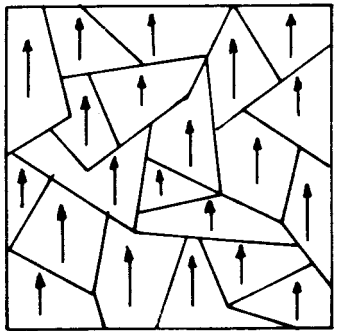
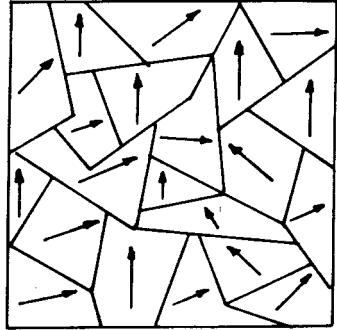
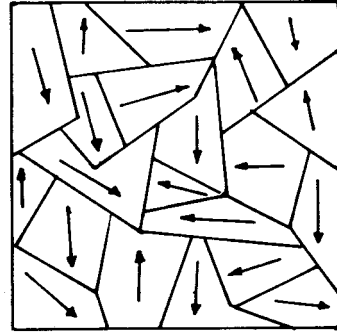
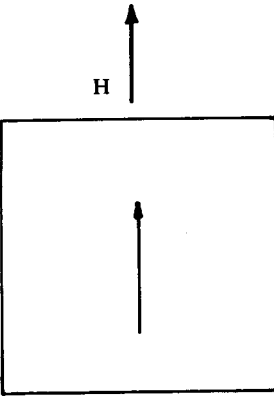
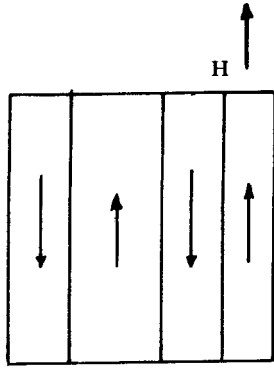
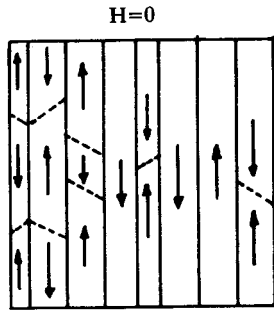
حيث U_h الطاقة الحرارية. وبذلك يمكن القول إن:

الحرارة لوحدة الحجم لدورة كاملة = المساحة الكلية داخل دورة المغنطة.

لذلك نجد أن المواد التي تستخدم في قلب المحولات والمولدات هي من المواد الحديدية المغناطيسية الرخوة (soft) لأن نفاذيتها عالية والمجال القاهر H_c صغير وفقدان الطاقة الناتج عن دورة التخلف (الطاقة الحرارية) صغيرة (small hysteresis loss). أما المواد الحديدية المغناطيسية الصلبة فتستعمل كمغناط دائمة في أجهزة القياسات الكهربائية والسماعات وأجهزة أخرى تتطلب مجالا قاهرا كبيرا ومغناطيسية متبقية عالية (high remanence) وفقدانا في الطاقة كبيرا.

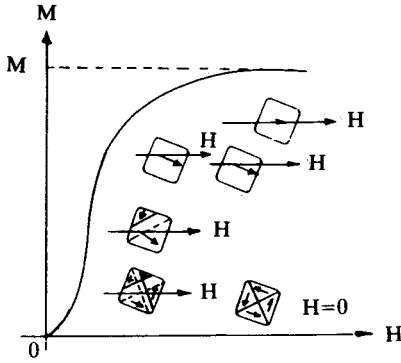
وتوجد ظاهرة أخرى مهمة في المواد الحديدية المغناطيسية تسمى بمناطق التكوين (domain formation) وهي مناطق متباينة (discrete regions or domain) داخل المادة بحيث تكون عزوم كل منطقة لها الاتجاه نفسه أي تكون في حالة تشبع مغناطيسي بصورة منعزلة أي يمكن تمثيل مجموعة العزوم لكل منطقة بمتجه واحد. وتكون هذه المتجهات «العزوم» لكل المناطق في حالة عشوائية، أي أن محصلتها تساوي الصفر، إذا كانت المادة غير ممغنطة كما في شكل (١١٢ - ٧).

وقد تحدث تغيرات مختلفة للمناطق عندما توضع العينة في مجال مغناطيسي خارجي فإذا كان المجال ضعيفا فإن التغير ينحصر في دوران اتجاهات تمغنط المناطق بحيث تتخذ الاتجاه الأقرب إلى اتجاه المجال كما في (١٢ ب - ٧) ويزداد هذا الاتجاه كلما زاد المجال الخارجي كما في شكل (١٢ ج - ٧). وقد يتضمن التغير في تحرك حدود المناطق (domain boundaries)، وتسمى أيضا بجدر المناطق (domain walls)، فتكبر المناطق التي يكاد اتجاه تمغنطها يوازي المجال الخارجي على حساب المناطق الأخرى كما في شكل (١٣ - ٧).



شكل (٧-١٣): تغير حدود المناطق بحيث تكبر الجدر كلما زاد المجال المغناطيسي.

شكل (٧-١٢): تغير اتجاهات تمغنط المناطق مع زيادة المجال المغناطيسي.



وتختلف أحجام المناطق بحيث تكون أبعادها تتراوح بين 10^{-4} سم إلى حدود المليمترات بل أحيانا إلى السنتيمترات. ويوضح الشكل (٧-١٤) العلاقة بين توجيه المناطق وشدة التمهظ M مع تغيير المجال المغناطيسي الخارجي.

شكل (٧-١٤): العلاقة بين توجيه المناطق وشدة التمهظ M كلما زاد المجال المغناطيسي.

(١٠-٧) الدوائر المغناطيسية

Magnetic Circuit

فكرة الدوائر المغناطيسية تماثل الدوائر الكهربائية (electric circuit) المعروفة. فقد وجد في الفصل الخامس، بند (٥-٩-٢) أن خطوط القوى المغناطيسية داخل الملف الحلقي تمثل بمسار مغلق، يشبه تماما مرور تيار كهربائي في دائرة مغلقة، وأنه بتطبيق قانون أمبير على هذا المسار فإن الحث المغناطيسي B داخل الملف الحلقي، حسب المعادلة (٦-٤٨)، يساوي:

$$B = \mu_0 NI/l$$

حيث N عدد لفات الملف و l طول المسار و I التيار المار في الملف و μ_0 نفاذية الفراغ. وإذا وضعت مادة قابلة للتمهظ فإن:

$$B = \mu NI/l$$

وإذا فرض أن S مساحة مقطع الملف الحلقي فإن التدفق المغناطيسي العمودي على S يعطى، حسب المعادلة (٥-٢)، كالتالي:

$$\Phi = BS$$

$$\therefore \Phi = \mu NIS/l$$

أو

$$\Phi = \frac{NI}{l/\mu S} \dots \dots \dots (٧-٦١)$$

وبمناظرة هذه المعادلة مع معادلة قانون أوم (٤-١١) والخاصة بالدوائر الكهرية وهي :

$$I = \frac{V}{l\rho/S}$$

حيث l سلك المقاومة و ρ المقاومة النوعية و S مساحة مقطع السلك ؛ نجد تشابها كبيرا بينهما حيث يلاحظ أن المقدار NI يقابل القوة الدافعة الكهرية والمقدار $l\rho/S$ يقابل المقاومة $l\rho/S$ ولهذا السبب فإن المقدار NI يسمى بالقوة الدافعة المغناطيسية (magneto-motive force) ويسمى المقدار $l\rho/S$ بالممانعة (نفور) المغناطيسية (reluctance) وتسمى المعادلة (٧-٦١) بمعادلة الدائرة المغناطيسية .

وإذا رمز للممانعة المغناطيسية بالرمز $\mathcal{R}$ حيث :

$$\mathcal{R} = l\rho/S \quad \dots\dots\dots (٧-٦٢)$$

فإن المعادلة (٧-٦١) تصبح :

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}} \quad \dots\dots\dots (٧-٦٣)$$

وإذا فرض أن الدائرة المغناطيسية تحتوي على أجزاء مختلفة الانفاذية والطول والمساحة فإن الممانعة المكافئة تساوي مجموع الممانعات وتحسب بالطريقة نفسها التي تجمع المقاومة الأومية فإذا كانت الممانعات متصلة على التوالي فإن :

$$\therefore \Phi = \frac{NI}{\Sigma \mathcal{R}_n} = \frac{NI}{\Sigma l_n / \mu_n S_n} \quad \dots\dots\dots (٧-٦٤)$$

$$\frac{1}{\text{هنري (H)}} = \frac{\text{أمبير}}{\text{ويبر}} = \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

ووحدة الممانعة هي

مثال (٧-٣)

إذا كان طول المسار المغلق المتوسط لحلقة رولاند يساوي 50 سم ومساحة مقطع الحلقة 4 سم² .

فاحسب الممانعة المغناطيسية وكذلك القوة الدافعة المغناطيسية لتكوين فيض قدره 4.1×10^{-4} ويبر داخل الحلقة المصنوعة من الحديد.

وما هي شدة التيار اللازم لإمراره في ملف الحلقة إذا كان عدد لفاته 200 لفة علما بأن نفاذية الحديد عند كثافة الفيض المطلوب 65×10^{-4} هنري / متر.

الحل

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} = \frac{0.5}{65 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-4}} = 1.92 \times 10^5 \text{ A/Wb}$$

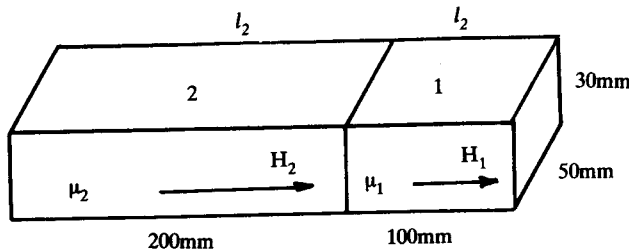
$$\therefore \text{m.m.f} = \mathcal{R}\Phi = (1.92 \times 10^5) \times (4.1 \times 10^{-4}) = 78.72 \text{ A}$$

$$\therefore \text{m.m.f} = NI$$

$$\therefore I = \frac{\text{m.m.f}}{N} = \frac{78.72}{200} = 0.3936 \text{ A}$$

مثال (٧-٤)

احسب الممانعة المغناطيسية بين نهايتي مستطيلين متصلين على التوالي كما في الشكل التالي. إذا فرض أن B منتظم خلالها وعمودي على نهايتيهما وكذلك النفاذية منتظمة لكل مستطيل حيث $\mu_1 = 500\mu_0$ ، $\mu_2 = 2000\mu_0$



الحل

بالنسبة للمستطيل 1 فإن :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = \frac{0.1}{500 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4}} = 1.06 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

بالنسبة للمستطيل 2 فإن :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{L_2}{\mu_2 S_2} = \frac{0.2}{2000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4}} = 0.53 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

∴ الممانعة الكلية تساوي مجموع الممانعتين .

$$\therefore \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = (1.06 + 0.53) \times 10^5 = 1.59 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

(٧-١١) المغناط الكهرية

Electromagnets

معظم المغناط الكهرية عبارة عن دوائر مغناطيسية لمواد حديدية مغناطيسية رخوة (مطواع) بها ثغرة (فجوة) هوائية (air gap) كما في الشكل (٧-١٥) . وسندرس للسهولة أبسط أنواع المغناط الكهرية وهو حلقة رولاند بها فجوة هوائية عرضها، g ، وبذلك فإن الممانعة الكلية لهذه الدائرة المغناطيسية عبارة عن مجموع ممانعة الحلقة وممانعة الثغرة لاتصالهما على التوالي :

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 S} , \quad \mathcal{R}_i = \frac{l-g}{\mu S}$$

حيث $\mathcal{R}_g$ ممانعة الثغرة ، $\mathcal{R}_i$ ممانعة بقية حلقة رولاند ولنفرض بأن طول المسار للحلقة الكاملة l ، مساحة مقطع الحلقة .

$$\therefore \mathcal{R} = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_g = \frac{l-g}{\mu S} + \frac{g}{\mu_0 S}$$

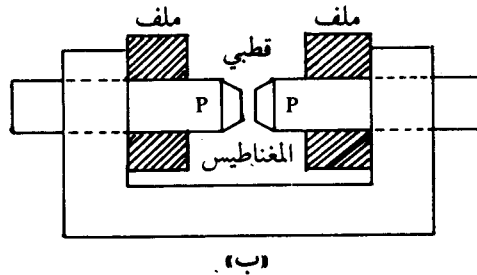
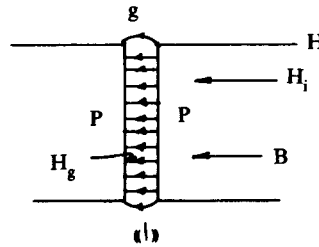
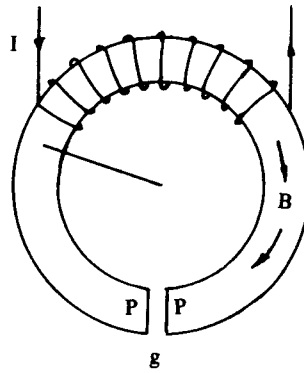
$$\therefore \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\therefore \mathcal{R} = \frac{1}{\mu S} \{ (l-g) + \mu_r g \} \dots\dots\dots (V-65)$$

وبتطبيق المعادلة (٧-٦٤) يُحصل على :

$$\Phi = \frac{NI \mu S}{\{ (l-g) + \mu_r g \}}$$

$$\therefore B = \frac{\Phi}{S} = \frac{NI \mu}{\{ (l-g) + \mu_r g \}} \dots\dots\dots (V-66)$$



شكل (٧-١٥) : ١- حلقة رولاند بها فجوة.

ب- رسم توضيحي لمغناطيس كهربائي.

وقيمة B في هذه الحالة واحدة داخل الحلقة أو في الفجوة ومع ذلك فإن شدة المجال داخل الحلقة وفي الفجوة تساوي ، كما في الشكل (٧-١٤) .

$$H_g = \frac{B}{\mu_0} = \mu_r \frac{NI}{\{(l-g) + \mu_r g\}} \dots\dots (٧-٦٧)$$

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{NI}{\{(l-g) + \mu_r g\}} \dots\dots (٧-٦٨)$$

من المعادلتين (٧-٦٧) و(٧-٦٨) يُحصل على :

$$H_g = \mu_r H_i \dots\dots\dots (٧-٦٩)$$

والمغانط الكهرية شائعة الاستعمال تأخذ الشكل (٧-١٥) حيث يمكن تغيير g لتناسب ظروف التجربة فيكون قطبا المغناطيس "P,P" على شكل مخروطي لتركيز الفيض على مساحة صغيرة .

مثال (٧-٥)

حلقة حديدية مساحة مقطعها S يساوي 1000 مم² وعرض الفجوة g يساوي 2 مم وطول المسار l يساوي 600 مم بما في ذلك الفجوة الهوائية . احسب NI التي تعطي مجالا مغناطيسيا حثه B يساوي 1 تسلا .

الحل

من المعروف أن النفاذية النسبية μ_r لحلقة الحديد عندما يكون $B = 1T$ تساوي 795 .

من المعادلة (٧-٦٦) يكون :

$$NI = \frac{B}{\mu} \{(l-g) + \mu_r g\}$$

$$NI = \frac{1}{795 \times 4\pi \times 10^{-7}} \{(0.6 - 0.002) + 795 \times 0.002\}$$

$$NI = 2188 \text{ A.turns}$$

(٧-١٢) القوة المغناطيسية للفجوة الهوائية

Magnetic Air Gap Force

تتجاذب أقطاب المغناط الكهربية الشمالية والجنوبية على جانبي الفجوة الهوائية بقوة قد تقفل هذه الفجوة. ويكون القطبان في حالة توازن عندما تتعادل القوى المغناطيسية مع القوى الميكانيكية الناتجة من تثبيت هذين القطبين.

وجد في الفصل السادس البند (٦-٩-١) أن كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي تحدد بالمعادلة (٧-٥٧) وهي:

$$\text{Energy density} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 \text{ J/m}^3$$

فإذا وُجد مجال مغناطيسي في فجوة هوائية صغيرة حثه B ، فإن الطاقة الكلية المخزونة في الفجوة تساوي:

$$U_m = \text{energy density} \times \text{volume}$$

$$\therefore U_m = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 \times S g \dots\dots\dots (٧-٧٠)$$

حيث S مساحة الفجوة و g اتساع الفجوة.

فإذا فرض أن مادة الحديد للحلقة الواردة في شكل (١١٥-٧) مرنة فحتى تبقى الفجوة ثابتة الاتساع لابد من إعطاء قوة معاكسة تعاكس القوة المغناطيسية وتساويها، فإذا زادت هذه القوة بحيث سببت في زيادة اتساع الفجوة بمقدار dg فإنه يجب زيادة تيار ملف الحلقة حتى تبقى B ثابتة. وبذلك تزداد الطاقة المغناطيسية المخزونة في الفجوة زيادة قدرها:

$$dU = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S dg \dots\dots\dots (٧-٧١)$$

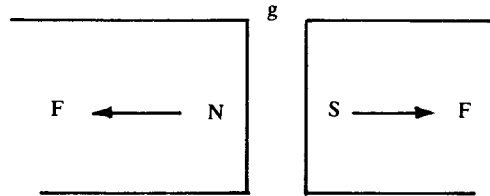
وكما هو معروف أن هذه الطاقة يمكن التعبير عنها بضرب القوة في المسافة حيث:

$$dU = Fdg \quad \dots\dots\dots (٧١-٧)$$

حيث F قوة التجاذب بين قطبي المغناطيس وبمساواة المعادلتين السابقتين [كما في الشكل (٧-١٦)] يُحصل على:

$$Fdg = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S dg$$

$$\therefore F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad \dots\dots\dots (٧٢-٧)$$



شكل (٧-١٦): القوى الواقعة على الفجوة.

وتلعب القوة المغناطيسية دورا مهما في كثير من الأجهزة الميكانيكية الكهرية التي لها أثر كبير في حياتنا اليومية مثل الجرس الكهربائي وغيره.

(١٣-٧) قياس التأثيرية المغناطيسية الصغيرة

Measurement of a Small Susceptibility

تعتمد وسائل قياس التأثيرية المغناطيسية للمواد المغناطيسية على قياس القوة المسلطة على هذه المواد في مجال مغناطيسي غير منتظم (non-uniform).

فإذا أخذت قطعة صغيرة من مادة قابلة للتمغنط حجمها ΔV وتأثيريتها المغناطيسية χ_m ووضعت في مجال مغناطيسي غير منتظم فإن عزوما مغناطيسية سوف تستحدث داخل المادة P_m خاضعة لقوة سببها المجال المغناطيسي تعطى من المعادلة (١٨٥ - ٥) [كما ورد ذلك في الفصل الخامس] قيمتها:

$$F_x = P_m \frac{\partial B}{\partial x}$$

وبصورة عامة إذا فرض أن P_{mx} و P_{my} و P_{mz} وكذلك B_x و B_y و B_z مركبات العزوم والحث المغناطيسي على المحاور x و y و z فإن:

$$F_x = P_{mx} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + P_{my} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + P_{mz} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

وحسب المعادلتين (٧-٢)، (٧-١٠) فإن:

$$P_{mx} = \Delta V \chi_m B_x / \mu_0$$

$$P_{my} = \Delta V \chi_m B_y / \mu_0$$

$$P_{mz} = \Delta V \chi_m B_z / \mu_0$$

$$F_x = \frac{\Delta V \chi_m}{\mu_0} \left[B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right]$$

أو

$$F_x = \frac{\Delta V \chi_m}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (٧-٧٣)$$

يمكن من هذه المعادلة حساب F_x باستخدام ميزان دقيق (micro-balance) تتصل به العينة كما في شكل (٧-١١٧). كما يستخدم مغناطيس كهربي بحيث يكون شكل قطبيه مناسباً لتكون $B \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$ ثابتاً ومعلومًا وبذلك يمكن حساب χ_m .

وهناك طريقة أخرى تعتمد على قياس القوة لعينة اسطوانية الشكل طويلة (0.1m) بحيث يقع أحد طرفيها بين قطبي مغناطيس والآخر بعيداً عنه بحيث يكون المجال المغناطيسي ضعيفاً. وفي هذه الحالة يكون تمغنط المادة غير منتظم. فإذا أخذ عنصر صغير من هذه الأسطوانة طوله dx ومساحة مقطعه S فإن:

$$dF_x = \frac{S dx \chi_m}{\mu_0} \left[B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right]$$

$$\therefore B_x = B_z = 0$$

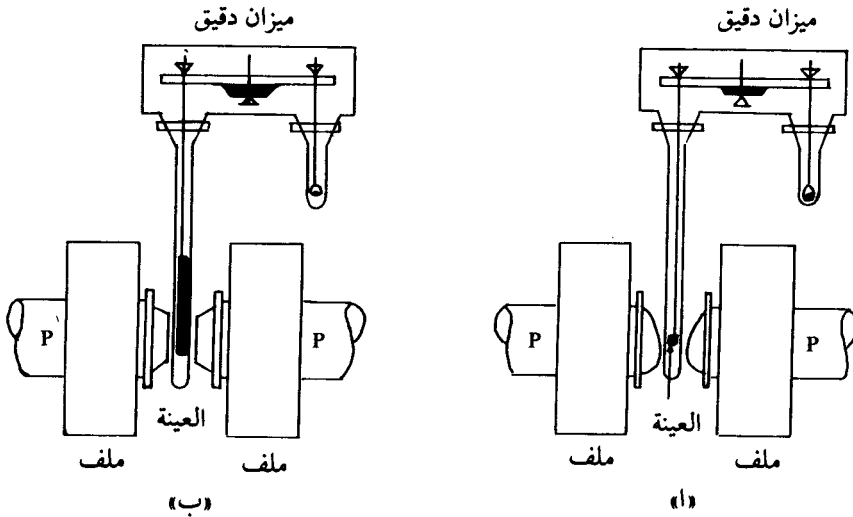
$$\therefore dF_x = \frac{S dx \chi_m}{\mu_0} \left[B_y \left(\frac{dB_y}{dx} \right) \right]$$

$$\therefore dF_x = \frac{S \chi_m}{\mu_0} \cdot B_y dB_y$$

$$\therefore F_x = \frac{S \chi_m}{\mu_0} \int_{B_2}^{B_1} B_y dB_y = \frac{S \chi_m}{2\mu_0} \left[B_y^2 \right]_{B_2}^{B_1}$$

$$\therefore F_x = \frac{S \chi_m}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2) \quad \dots \dots \dots (٧-٧٤)$$

وبصورة عملية فإن $B_1^2 \gg B_2^2$ ولذلك يمكن إهمال B_2 ، وبمعرفة مساحة مقطع العينة S والمجال المغناطيسي المسلط على العينة وكذلك القوة F باستخدام ميزان دقيق كما في الشكل (١٧ ب - ٧) يمكن معرفة القابلية المغناطيسية .



شكل (٧-١٧) : قياس التأثرية المغناطيسية .

١ - طريقة فاراداي .

ب - طريقة قوى .

فالطريقة الأولى، المعادلة (٧-٧٣)، تسمى بطريقة فاراداي (Faraday method) وهي تصلح لقياس التأثيرية المغناطيسية للمواد الحديدية المغناطيسية بينما الطريقة الثانية، المعادلة (٧-٧٤)، تسمى بطريقة قوى (Gouy method) وهي تصلح لقياس المواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية كما تصلح أيضا لقياس المواد السائلة البارامغناطيسية والدايامغناطيسية، ويوضح ذلك الشكل (١٧-ج-٧)، فإذا كان مستوى السائل في الذراع الواقع بين قطبي المغناطيس يتغير مسافة قدرها Δx عند تسليط المجال أو حذفه فإن القوة تساوي وزن عمود السائل Δx أي أن:

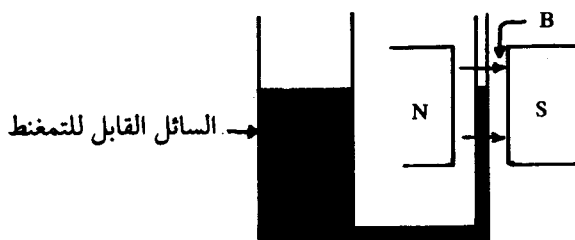
$$F_x = \rho g \Delta x S \dots\dots\dots (٧-٧٥)$$

حيث ρ كثافة السائل، g الجاذبية الأرضية، $\Delta x S$ حجم العينة وبذلك تصبح المعادلة (٧-٧٤)، بعد حذف B_2 وبعد التعويض عن F_x من المعادلة (٧-٧٥) كالتالي:

$$\frac{S \chi_m}{2\mu_0} B^2 = \rho g \Delta x S$$

أو

$$\chi_m = 2\mu_0 \rho g \Delta x / B^2 \dots\dots\dots (٧-٧٦)$$



شكل (١٧-ج-٧): قياس التأثيرية لسائل قابل للتمغنط

(٧-١٤) الجلفانومتر ذو الملف المتحرك

Moving Coil Galvanometer

يتركب، كما في شكل (٧-١٨)، من ملف على شكل مستطيل مكون من عدد من اللفات N من سلك نحاسي رفيع معزول، يلتف حول مادة مصنوعة من الخشب أو

البلاستيك، يلتحم طرفه العلوي بسلك مرن (elastic) رفيع من مادة البرونز الفوسفوري (phosphor bronze) ويتصل طرفه الآخر بزنبك حلزوني من مادة السلك المرن نفسه. ويتدلى الملف بين قطبي مغناطيس قوي NS على شكل نعل الفرس. كما توجد اسطوانة من الحديد المطاوع (soft iron) مثبتة داخل الملف.

يبنى عمل الجهاز على أنه إذا مر تيار كهربي I في ملف موجود في مجال مغناطيسي فإن الملف سيكون خاضعا لازدواج يعمل على دورانه حول محور ثابت يتناسب مع شدة التيار ولقد بحث هذا الموضوع في البند (٥ - ٨) حيث وجد أنه إذا وضع ملف دائري في مجال مغناطيسي حثه B وكان يمر به تيار قدره I فإن عزم الدوران هو «حسب المعادلة (٥-٨١)».

$$\tau_1 = I S B N \sin \theta \quad \dots \dots \dots (٧-٧٧)$$

حيث S مساحة الملف الدائري، θ هي الزاوية بين العمودي على الملف واتجاه المجال. وهذه المعادلة صحيحة مهما كان شكل الملف طالما كان مستويا موازيا لكثافة التدفق المغناطيسي ويمكن برهنة صحته بالنسبة للملف المستطيل كالتالي:

يوضح الشكل (٧ - ١١٨) ملفا طوله l وعرضه b وعدد لفاته N يمر به تيار I واقع في مجال مغناطيسي حثه B فعند حالة الاتزان نجد أن الضلعين الذين طول كل منهما l يكون كل منهما خاضعا لقوة قدرها، حسب المعادلة (٥-٧٨):

$$F = N I B l$$

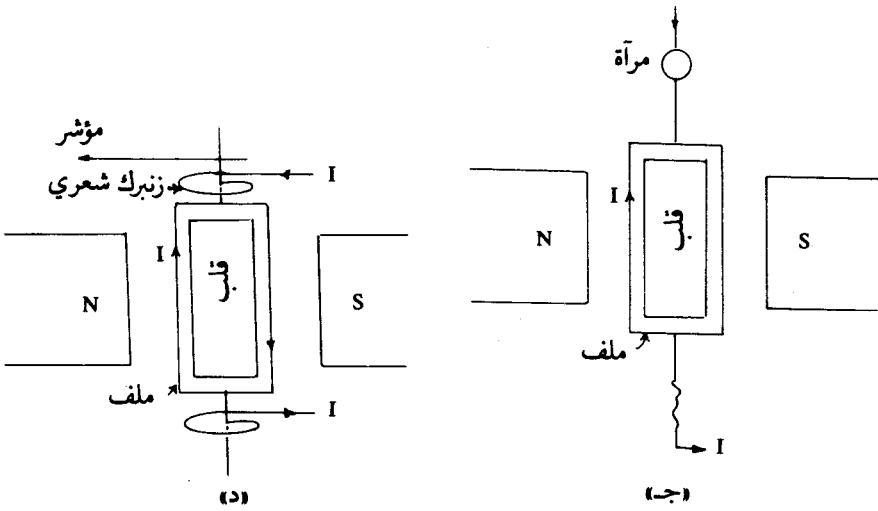
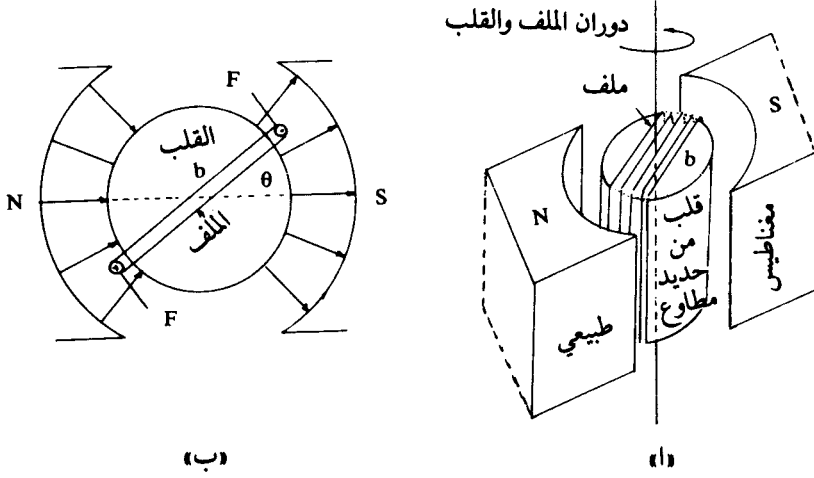
أما الضلعان الآخران فمحصلتهما تساوي صفرا.

وحسب الشكل (٧ - ١٨ ب) فإن عزم الازدواج يساوي:

$$\tau_1 = F \cdot b \sin \theta = N I B l \cdot b \sin \theta = N I B S \sin \theta$$

وهي المعادلة (٧-٧٧) نفسها.

هذا الدوران الناتج عن هذا الازدواج يعاكس ازدواج اللي الناتج عن سلك التعليق المرن وكذلك الزنبك ومعنى ذلك أنه عند مرور تيار في الملف فإنه يخضع لازدواجين



- شكل (١٨-٧): ١- ملف لجلفانومتر متحرك ومعلق بين قطبي مغناطيس طبيعي .
 ب - مقطع يوضح تأثير القوة المغناطيسية على الملف .
 ج - استخدام المرآة لتبين انحراف الملف عند مرور التيار .
 د - استخدام المؤشر للقراءة .

أحدهما ناتج عن مرور التيار الذي يسبب تحريكه . والآخر الازدواج المرن الناتج عن سلك التعليق والزنبرك ويحاول إرجاع الملف فإذا تساوت قيمة الازدواجين استقر الملف .

وطبقا لقوانين المرونة فإن عزم الازدواج المرن يتناسب طرديا مع زاوية الانحراف ولتكن ϕ أي أن :

$$\tau_2 \propto \phi$$

$$\therefore \tau_2 = -C\phi \quad \dots\dots\dots (V-78)$$

حيث C ثابت يسمى بثابت اللي (torsional constant) وتدل الإشارة السالبة على أن τ_2 تعاكس حركة الملف . ويبقى الملف مستقرا إذا كان :

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 = 0$$

$$\therefore NIBS \sin \theta - C\phi = 0$$

$$\therefore I = \frac{C\phi}{NBS \sin \theta} = \frac{C_g}{\sin \theta} \cdot \phi \quad \dots\dots\dots (V-79)$$

حيث C_g ثابت الجلفانومتر وتساوي :

$$C_g = \frac{C}{NBS} \quad \dots\dots\dots (V-80)$$

ويلاحظ أن التيار لا يتناسب مع الانحراف ϕ بل مع معامل آخر وهو $\sin \theta$ ولذلك اختير أن يكون سطحاً قطبي المغناطيس NS اسطوانى الشكل . لذلك وضعت اسطوانة الحديد المطاوع داخل الملف بحيث تجعل التأثير المغناطيسي «خطوط القوى» في اتجاه أنصاف الأقطار ومستوى الملف في أي وضع مواز للمجال أي أن $\theta = 90^\circ$ دائما أينما كان وضع الملف أثناء الدوران .

$$\therefore \sin \theta = \sin 90^\circ = 1$$

وبذلك تصبح المعادلتان (V-77) و (V-79) كالتالي :

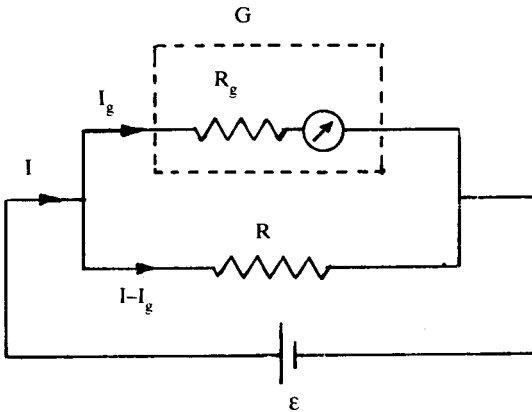
$$\tau_1 = NBSI = aI \quad \dots\dots\dots (V-81)$$

$$I = C_g \phi \quad \dots\dots\dots (V-82)$$

ويمكن ملاحظة الدوران الناتج عن مرور التيار I باستخدام مصباح مثبت مع الملف أو انعكاس شعاع ضوئي من خلال مرآة مثبتة في الملف أيضا وقد يستخدم مؤشر مثبت مع الملف ويقرأ الانحراف مباشرة من خلال تدريج بصاحب المؤشر كما في الشكلين (١٨-ج) و (١٨-د).

(٧-١٤) قياس تيار كهربائي كبير I Measurement of large current

يمكن استخدام الجلفانومتر ذي الملف المتحرك لقياس تيارات عالية الشدة ويستخدم لذلك مقاومة R (shunt) توصل بنهايتي الجلفانومتر كما في شكل (٧-١٩)، ويتوقف قيمة R على النهاية العظمى للتيار الذي يمكن أن يمر بالجلفانومتر I_g ويمكن أن تُكتب النهاية العظمى للتيار المراد قياسه كالتالي :



$$R(I - I_g) = I_g R_g$$

$$\therefore R = R_g \frac{I_g}{(I - I_g)}$$

$$\therefore I = I_g \left(1 + \frac{R_g}{R} \right) \quad (٧-٨٣)$$

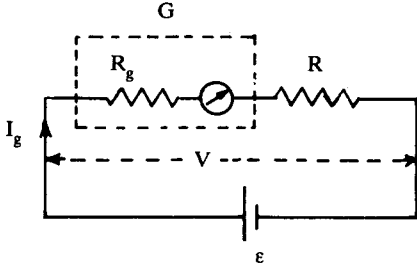
شكل (٧-١٩): استخدام الجلفانومتر لقياس تيار كهربائي كبير

وواضح أن R تتوقف على قيمة I لأن I_g ، R_g قيمتان ثابتتان لأي جلفانومتر معين ، فإذا كان الجلفانومتر يقيس في حالة الانحراف الكلي 100 ميكروأمبير وكان $R_g = 100 \Omega$ ويراد أن يحول الجهاز لقياس 1 Amp لكامل التدريج فإن :

$$R = 100 \left(\frac{100 \times 10^{-6}}{1 - 100 \times 10^{-6}} \right) \approx 10^{-2} \Omega$$

وفي هذه الحالة يستخدم الجلفانومتر كجهاز لقياس التيار (ammeter).

Measurement of large V قياس جهد كهربى كبير (٧-١٤-٢)



توصل في هذه الحالة مقاومة كبيرة R على التوالي مع الجلفانومتر الذي مقاومة R_g كما في شكل (٧-٢٠). فإذا كانت I_g القيمة العظمى للتيار المار في الجلفانومتر، حتى يتسنى لنا قياس القيمة العظمى لفرق جهد قدره V فولت، فإن:

$$\therefore V = I_g (R + R_g) \quad (٧-٨٤)$$

شكل (٧-٢٠): استخدام الجلفانومتر لقياس جهد كهربى كبير

وواضح أن قيمة R تتوقف على V فإذا استخدم الجلفانومتر نفسه الوارد في الفقرة (٧-١٤-١) وأردنا قياس 100 فولت «لكامل التدرج» فإن:

$$100 = 100 \times 10^{-6} (R + 100)$$

$$\therefore R = 1 \text{ M } \Omega$$

ولذلك يمكن استخدام الجلفانومتر مقياسا للجهد (voltmeter).

Galvanometer sensitivity حساسية الجلفانومتر (٧-١٤-٣)

تعرف حساسية الجلفانومتر بالزاوية التي ينحرفها ϕ عندما يمر به تيار شدته الوحدة، فإذا رمز للحساسية بـ β فإن:

$$\beta = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{C_g} = \frac{NBS}{C} \quad (٧-٨٥)$$

كما تعرف الحساسية عمليا بأنها قيمة التيار الذي يمر في الملف حين تنحرف البقعة الضوئية، المنعكسة من المرآة مسافة قدرها مترا واحدا. فإذا كان انحراف البقعة مساويا d مم وبعد التدرج مساويا l مم فإن:

$$\frac{d}{l} = \tan \phi \approx 2\phi$$

وبالتعويض عن ϕ في المعادلة (٧-٨٢) فإن :

$$I = C_g \frac{d}{2l} = C_g \frac{d}{2000} = C'_g d \quad \dots \dots (٧-٨٦)$$

ويسمى C'_g بمعامل الجدارة (figure of merit).

(٧-١٤-٤) التخميد (كبت) Damping

إذا مر تيار في ملف الجلفانومتر فإنه سينحرف بزاوية معينة تتناسب مع I ولقد لوحظ أن الملف يظل يتذبذب فترة من الزمن عند نقطة الانحراف حتى يستقر. كذلك إذا سحب التيار فإن الملف يتذبذب أيضا حول نقطة الصفر حتى يستقر بعد قضاء فترة من الزمن وحيث إن هذا يسبب إزعاجا عند إجراء التجارب لذلك يجب التقليل من هذه الذبذبات وهو ما يسمى بالتخميد أو الكبت وهو ناتج عن :

١ - تولد قوة دافعة كهربية حثية في الملف نتيجة حركته في المجال المغناطيسي وحسب المعادلة (٧-٨٦) فإن قيمة $\mathcal{E}'$ تساوي :

$$\mathcal{E}' = N S B \sin \theta \frac{d\phi}{dt} = N S B \frac{d\phi}{dt} \quad \dots (٧-٨٧)$$

حيث ϕ زاوية الانحراف و θ الزاوية بين مستوى الملف والعمودي على اتجاه المجال.

٢ - تولد تيارات دوامية (eddy currents) في الحديد المطاوع تعمل بدوره على توقف الحركة التذبذبية للملف تبعا لقاعدة لنز.

٣ - مقاومة الهواء (air resistance) للملف يعطي تأثيرا ملموسا لإعاقة الملف من التذبذب أيضا.

وقد وجد أن العزم الناتج عن قوة التخميد تتناسب مع السرعة الزاوية للملف أي أن :

$$\tau_3 \propto \frac{d\phi}{dt} \quad \therefore \tau_3 = - b \frac{d\phi}{dt} \quad \dots \dots (٧-٨٨)$$

حيث يسمى الثابت b بمعامل التخميد (damping coefficient) وحسب قانون نيوتن الثاني فإن العزم الكلي الناتج عن حركة الملف يساوي :

$$\tau = J \frac{d^2\phi}{dt^2} \dots\dots\dots (٧-٨٩)$$

حيث يعرف J عزم القصور الذاتي (the moment of inertia) للملف .
وحيث إن مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة إلى محور التعليق يساوي العزم الكلي فإن معادلة حركة الملف هي :

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau$$

أو

$$aI - C\phi - b \frac{d\phi}{dt} = J \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

أو

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + b \frac{d\phi}{dt} + C\phi = aI \dots\dots\dots (٧-٩٠)$$

وعند وضع الاتزان تكون قيمة ϕ ثابتة وتؤول هذه المعادلة إلى المعادلة (٧-٨٢) أما إذا فرض أن معامل التخميد b يساوي الصفر وأن القوة الدافعة الكهرية الخارجية أزيلت من الدائرة بعد انحراف الجلفانومتر فإن الجلفانومتر سيتذبذب حول الصفر وأن معادلة الحركة هي :

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + C\phi = 0 \dots\dots\dots (٧-٩١)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة ويكون الحل الذي يحقق هذه المعادلة هو :

$$\phi = \phi_0 \sin \left[\left(\frac{C}{J} \right)^{1/2} t + \psi \right] \dots\dots\dots (٧-٩٢)$$

حيث ψ و ϕ_0 ثابتان يتم تعيينهما من الشروط الابتدائية . أما زمن دورة الحركة فتعطى قيمته من المعادلة التالية :

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{J}{C} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (٧-٩٣)$$

أما السرعة الزاوية ω_0 للحركة فهي :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\frac{C}{J} \right)^{1/2} \dots\dots (٧-٩٤)$$

ولذلك إذا لم يوجد تخميد وليست هناك قوة دافعة كهربية خارجية، فإن حركة الملف سوف تستمر في التذبذب بزمن دوري قدره T_0 .

(١٥-٧) الجلفانومتر القذفي

The Ballistic Galvanometer

يستخدم الجلفانومتر العادي، السابق دراسته في البند (٩-٥)، في قياس التيار المستمر في حين يستخدم الجلفانومتر القذفي في قياس الشحنة الكلية التي تمر خلاله في زمن معين وتقاس هذه الشحنة ليست كتيار مستمر بل كتفريغ شحنة مفاجيء أشبه بتفريغ مكثف أو الشحنات التأثيرية الكهرومغناطيسية.

ولذلك يجب أن تتوفر في الجلفانومتر القذفي ما يلي :

أ - يجب أن تكون حركة الملف بالنسبة لموضع سكونه محدودة في الفترة التي يتم فيها تفريغ الشحنة خلال الملف ويترتب على ذلك أن يهيم الملف بحيث يكون زمن ذبذبه T_0 ، المعادلة (٧-٩٣)، ولذلك يجب أن يكون عزم القصور الذاتي J للملف كبيرا و C صغيرا.

ب - يعاني الملف انحرافا من جراء الدفع عند مرور الشحنة بأكملها وفي هذه الحالة تكون قراءة المؤشر عند أول انحراف للملف. ويتناسب الانحراف مع الشحنة المارة في الملف ولذلك يراعى عند تصميم الجهاز أن يكون الكبت صغيرا جدا ولكي يتحقق ذلك يجب أن يكون الاطار الذي يلف حول الملف غير معدني ويستخدم لذلك إطار من العاج أو الأبونيت وكذلك عدم استخدام الاسطوانة من الحديد المطاوع داخل الملف التي تعتبر عاملا من عوامل الكبت كما ذكر ذلك في البند السابق.

إذا فرض أن الملف يتألف من N عدد من اللفات ومساحة وجهه S ، B الحث المغناطيسي للمجال الذي يوجد فيه الملف وأن I التيار المار عند لحظة ما ، فإنه طبقا للمعادلة (٧-٨١) يكون عزم الازدواج الذي يؤثر على الملف يساوي :

$$\tau = N I B S$$

وإذا فرض أن هذا الازدواج سيؤثر على الملف لمدة قدرها dt وهو زمن مرور التيار الذي أدى إلى مرور عنصر الشحنة dq «حيث $dq = Idt$ » فإن الدفع الزاوي (angular impulse) الذي يمنحه التيار يساوي :

$$\int \tau dt = NBS \int Idt = NBSq$$

ولما كان الدفع الزاوي يساوي كمية التحرك الزاوي :

$$\therefore NBSq = J\omega_0 \quad \dots\dots\dots (٧-٩٥)$$

حيث ω_0 السرعة الزاوية لدوران الملف ، وتكون طاقة الحركة (kinetic energy) المطابقة لذلك هي $\frac{1}{2} J\omega_0^2$ والتي استخدمت في ليّ سلك التعليق زاوية قدرها ϕ (زاوية انحراف الملف). ويكون بذلك عزم الازدواج الناتج عن ليّ السلك هذه الزاوية يساوي $C\phi$.
 $\therefore$ عنصر الشغل المبذول لإحداث زيادة في الانحراف قدره $d\phi$ يساوي $C\phi d\phi$ والشغل الكلي المبذول في ليّ التعليق من صفر إلى ϕ يساوي :

$$\int_0^\phi C\phi d\phi = \frac{1}{2} C\phi^2$$

وهذا الشغل يساوي طاقة الحركة الدورانية .

$$\therefore \frac{1}{2} C\phi^2 = \frac{1}{2} J\omega_0^2$$

من هذه المعادلة والمعادلتين (٧-٩٤) و(٧-٩٥) يُحصل على :

$$q = \frac{CT_0}{2\pi NBS} \phi = C_g \phi \quad \dots\dots\dots (٧-٩٦)$$

حيث :

$$C_g = \frac{CT_0}{2\pi NBS} \quad \dots\dots\dots (٧-٩٧)$$

حيث C_g ثابت الجلفانومتر المستخدم .
أي أن الشحنة تتناسب طرديا مع الانحراف ϕ . مع ملاحظة أن الانحراف ϕ هو أقصى انحراف يصل إليه الملف عقب انتهاء تفريغ الشحنة .

وإذا أخذ في الاعتبار تخميد الملف فإنه يجب تصحيح مقدار الانحراف بحيث تصبح المعادلة (٧-٩٦) كالتالي :

$$q = C_g \phi \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \dots \dots \dots (٧-٩٨)$$

حيث δ تسمى بالتناقص اللوغاريتمي لكل دورة (logarithmic decrement per cycle)
فإذا فرض أن ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 هي الانحرافات الحادثة في نهاية الاندفاعات المتعاقبة في جهة واحدة من صفر التدريج فإن :

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\phi_2}{\phi_3} = e$$

حيث e مقدار ثابت .

$$\therefore \ln \phi_1 - \ln \phi_2 = \ln e = \delta$$

$$\therefore \delta = \ln (\phi_1/\phi_2) \quad \therefore \frac{\phi_1}{\phi_2} = e^\delta \quad \dots \dots (٧-٩٩)$$

وبصورة عملية فإن δ صغيرة جدا .

(١٦-٧) مقياس التدفق المغناطيسي

Fluxemeter

جهاز يستعمل لقياس التدفق المغناطيسي (magnetic flux) المكتشف بواسطة ملف الاستكشاف . والدائرة المستخدمة معه تشابه الدائرة (٦-٢٥) الواردة في البند (١٥-٦) . ووجه الاختلاف ينحصر في استخدام ملف آخر بدلا من الجلفانومتر

القذفي . وهذا الملف يشبه إلى حد كبير جلفانومتر الملف المتحرك ذا المؤشر كما في الشكل (١٨-٧) مع استبدال الزنبرك الشعري (hair springs) الذي يستخدم لتوصيل التيار وكذلك الحصول على عزم الليّ المرجع (restoring torque) للملف المتحرك ، بموصل آخر للتيار بحيث يعطي أدنى قيمة لعزم الليّ المرجع ، كذلك يلف الملف على إطار غير موصل .

والغرض من هذا التغيير عدم عودة الملف بعد انحرافه إلى موضع الصفر وهذا لا يحصل إلا إذا كان عزم الليّ المرجع يساوي الصفر وهذا لن يكون مطلقا ولذلك يحصل انحراف بسيط في اتجاه البداية ، ولسهولة الحساب سيفترض أن عزم الليّ يساوي الصفر .

ملف جهاز مقياس التدفق والملف الباحث مقاومتها منخفضة ولذلك فالملف المتحرك شديد التخامد (heavily damped) ويقف مباشرة بعد انتهاء التغير في الفيض في الملف الباحث وحتى يعود الملف إلى موضع الصفر لابد من إمرار تيار كهربي من بطارية إضافية خارجة عن دائرة القياس حيث يستفاد منها فقط في إرجاع الملف . والدائرة المستعملة لذلك يمثلها الشكل (١٨-٧) ومنها تحسب كيفية عمل الجهاز .

تتكون الدائرة من ملفي الاستكشاف ومقياس التدفق و R ، وهي المقاومة الكلية لعناصر الدائرة ، أما I فهو التيار المار في الدائرة نتيجة لتغير الفيض المغناطيسي على الملف الباحث على افتراض أن Φ_0 الفيض الابتدائي و Φ_1 الفيض النهائي .

ونتيجة لذلك تكون لدينا ثلاث قوى دافعة كهربية وهي :

١ - القوة الدافعة الكهربية المتولدة في ملف الاستكشاف وقيمتها تساوي ، حسب

المعادلة (١٢-٦) :

$$\mathcal{E}_{sc} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

N عدد لفات الملف .

ب - القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في ملف مقياس الفيض نتيجة لحركته، بسبب مرور التيار I ، في المجال المغناطيسي المحيط به B وقيمتها تساوي، حسب المعادلة (٧-٨٧).

$$\varepsilon_F = N' S B \omega = N' S B \frac{d\theta}{dt} \dots \dots (٧-١٠٠)$$

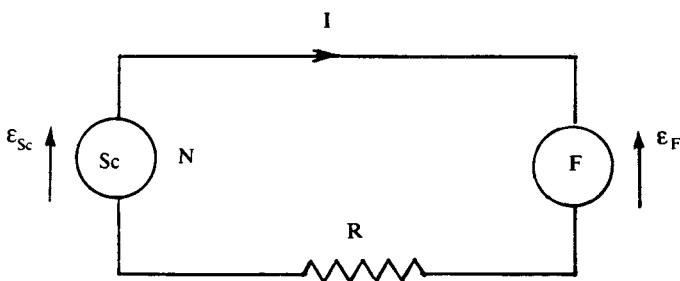
حيث N' عدد لفات الملف و S مساحته، θ انحراف الملف.

ج - القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في ملف مقياس الفيض نتيجة لحثه الذاتي L وقيمتها تساوي، حسب المعادلة (٦-٢٦):

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt}$$

وبتطبيق قانون كيرشوف لتوزيع الجهد على هذه الدائرة يُحصل على:

$$N \frac{d\phi}{dt} - L \frac{dI}{dt} - N' S B \frac{d\theta}{dt} = IR \dots \dots (٧-١٠١)$$



شكل (٧-٢١): دائرة توضح عمل مقياس الفيض المغناطيسي "F" وعلاقته بملف الاستكشاف (sc).

ولكن عزم الليّ اللحظي τ على ملف مقياس الفيض نتيجة لمرور التيار I تساوي، حسب المعادلة (٧-٨١):

$$\tau = N' I B S$$

$$I = \frac{\tau}{N' B S}$$

أو

وبالتعويض عن I في المعادلة (٧-١٠١) يُحصل على :

$$\tau = \frac{N'SB}{R} \left\{ N \frac{d\Phi}{dt} - L \frac{dI}{dt} - N'SB \frac{d\theta}{dt} \right\}$$

ولكن كما هو معروف أنه حسب قوانين الميكانيكا فإن عزم الدوران للملف، ملف مقياس الفيض، نتيجة لحركته الدورانية حول محوره تساوي :

$$\tau = J d\omega / dt$$

حيث J عزم القصور الذاتي و ω السرعة الزاوية، بمساواة المعادلتين السابقتين يُحصل على :

$$N'SB(Nd\phi - L dI - N'SB d\theta) = Jd\omega$$

وبتكامل هذا المقدار يُحصل على :

$$N'SB \left\{ N \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi - L \int_0^0 dI - N'SB \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \right\} = J \int_0^0 d\omega$$

حيث $\omega=0$ لأنه كما أوضحنا أن حركة الملف متخامدة، $I=0$ عند البداية أو النهاية.

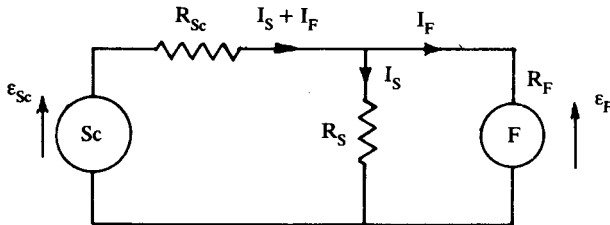
$$\therefore N(\Phi_1 - \Phi_0) = N'SB(\theta_1 - \theta_0) \dots \dots (٧-١٠٢)$$

وهذه هي معادلة عمل مقياس التدفق المغناطيسي، وتعني أن التغير في الانحراف يتناسب طردياً مع التغير في قيمتي الفيض المغناطيسي.

وقد يكون الجهاز متعدد التدرج (multirange) ولذلك تستخدم مقاومة إضافية تسمى بمقاومة مجزء التيار وتتصل على التوازي كما في الشكل (٧-٢٢) وتصبح معادلة المقياس كالتالي :

$$N(\Phi_1 - \Phi_0) = N'SB(1 + (R_{sc}/R_s))(\theta_1 - \theta_0) \dots (٧-١٠٣)$$

حيث R_{sc} مقاومة الملف الباحث، R_s المقاومة الإضافية.



شكل (٧-٢٢) : دائرة ملف مقياس الفيض مع استعمال مقاومة مجزئة للتيار.

(٧-١٧) مسائل

١ - مادة قابلة للتمغنط صغيرة الحجم على شكل مكعب طول ضلعه 1.0 مم والعزم المغناطيسي لها 1.0×10^{-3} أمبير/متر^٢.

احسب:

- ١ - شدة التمكنط M للمادة على افتراض أنها منتظمة الشكل.
- ب - التيار السطحي مفترضا أن متجه العزم المغناطيسي عمود على أحد أوجه المكعب.

٢ - مادة مغناطيسية منتظمة الشكل تأثيرتها 2.4×10^{-4} .

احسب:

- ١ - نفاذيتها المغناطيسية.
- ب - النفاذية النسبية.

٣ - قضيب مغناطيسي طوله 20 سم وقطره 6 مم مصنوع من مادة حديدية تأثيرتها 5000 . الحث المغناطيسي يساوي 0.85 وبير/متر عند مركز القضيب، إذا افترض انتظام التمكنط للحديد فاحسب:

- ١ - شدة المجال المغناطيسي للقضيب عند المركز.
- ب - العزم المغناطيسي للقضيب.
- ج - ما هو عدد الإلكترونات المطلوبة للحصول على العزم الوارد في الفقرة (ب) إذا كان عزم كل إلكترون يعطي القيمة الواردة في المعادلة (٢٠-٧)؟

٤ - ملف حلزوني ملفوف حول مادة حديدية تأثيرتها المغناطيسية 200 ، فإذا كان عدد لفات الملف 750 لفة لكل متر والتيار المار 2 أمبير.

فاحسب :

- ١ - شدة المجال المغناطيسي H داخل الملف الحلزوني.

- ب - الحث المغناطيسي B .
- ج - شدة التمكنط M .
- د - العزم المغناطيسي لوحدة الأطوال على افتراض أن مساحة المقطع 8 سم² عند الحل يفترض أن التمكنط منتظم وكذلك الحث المغناطيسي.
- ٥ - حلقة رولاند لفت حول مادة بارامغناطيسية تأثيرتها تساوي 3.10×10^{-4} فإذا كان نصف القطر الداخلي للحلقة 8 سم ونصف القطر الخارجي 12 سم وعدد لفاتها 2500 لفة والتيار المار في ملف الحلقة يساوي 3.5 أمبير. فاحسب:
- ا - شدة المجال H داخل الملف.
- ب - شدة التمكنط M .
- ج - الحث المغناطيسي B .
- د - مجموع التيار المغناطيسي السطحي I_m .
- هـ - ما هي قيمة B في حالة عدم وجود المادة البارامغناطيسية؟
- ٦ - أعد الحسابات الواردة في السؤال (٥) إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بمادة ديامغناطيسية تأثيرتها 1.0×10^{-5} .
- ٧ - أعد الحسابات الواردة في السؤال (٥) إذا استبدلت المادة البارامغناطيسية بمادة فرومغناطيسية تأثيرتها 5000.
- ٨ - الحث المغناطيسي B داخل ملف حلزوني ملفوف حول مادة حديدية يساوي 0.28 ويبر/متر² عندها كانت شدة المجال المغناطيسي 205 أمبير/متر. ما هي نفاذية المادة الحديدية. على افتراض أن التمكنط خطيا وأن شدة التمكنط والحث المغناطيسي منتظم داخل المادة؟

٩ - ما قيمة شدة التـمغنـط M للمواد في الحالات التالية :

- ١ - كل ذرة لها عزم مغناطيسي 1.7×10^{-33} أمبير/متر^٢ وعددها 9.4×10^{28} ذرة/م^٣ والعزوم متوازية تبادليا (mutually parallel) ؟
 ب - التأثيرية المغناطيسية χ_m تساوي 3×10^{-6} و B يساوي 3.6×10^{-5} ويبر/م^٢ ؟

ج - H تساوي 0.40 أمبير/متر والنفاذية النسبية تساوي 1.00041 ؟

- ١٠ - جزيئات بارامغناطيسية عزمها المغناطيسي يساوي 5.0×10^{-24} أمبير/متر^٢ وضعت هذه المادة في مجال مغناطيسي قيمة حثه 3.6 ويبر/متر^٢ عند درجة حرارة قدرها 4.0 كلفينات .

- ١ - ما هو متوسط الزاوية بين العزوم المغناطيسية للمادة ومتجه الحث المغناطيسي B ؟
 ب - ماذا يكون الجواب في الفقرة (١) عندما تكون درجة الحرارة 40°K ،
 ؟ 400°K

- ١١ - لو كان لدينا 7.2×10^{28} جزيء/متر^٣ في المسألة (١٠) فاحسب التأثيرية المغناطيسية في الفقرتين ا، ب .

- ١٢ - مادة بارامغناطيسية نموذجية تكون شدة التـمغنـط لها M عند درجة حرارة 2°K مساوية 75% من القيمة العظمى لشدة التـمغنـط .
 ما قيمة الحث المغناطيسي لها إذا كان $P_m = 9.27 \times 10^{-29}$ A . m²

- ١٣ - التأثيرية المغناطيسية لمادة بارامغناطيسية تساوي 4.5×10^{-4} عند درجة حرارة 300°K . فإذا كان عدد الذرات لوحدة الحجم 5.5×10^{28} ذرة لكل م³ .
 احسب العزوم المغناطيسية المتوسطة لكل ذرة .

- ١٤ - تعطى التأثيرية المغناطيسية لأحد المركبات وزنه الجزيئي 400 وكثافته 2×10^3 كيلوجرام/م^٣ بالمعادلة :

$$\chi = \frac{7.3 \times 10^{-2}}{T}$$

حيث T درجة الحرارة المطلقة .

احسب العزم المغناطيسية المتحدة مع كل جزيء .

- ١٥ - النيكل مادة حديدية مغناطيسية عند درجات الحرارة العادية، وتصل مغناطيسيته إلى حالة التشبع إذا وضعت في مجال مغناطيسي H قيمته 5×10^5 أمبير/متر، والحث المغناطيسي B له 1.25 تسلا .
احسب العزم المغناطيسي للنيكل مستخدماً وحدات مغنيتون بوهر، علماً بأن كثافة النيكل 9×10^3 كيلوجرام/متر^٣ .

- ١٦ - الحديد مادة حديدية مغناطيسية فإذا كان العزم المغناطيسي يساوي $P_m = 2.2\mu_B$ وعدد الذرات لوحدة الحجم تساوي 8.54×10^{28} /متر^٣ ودرجة حرارة كيوري تساوي 1063°K .
فاحسب :

- أ - ثابت كيوري .
ب - معامل المجال الجزيئي .
ج - المجال الجزيئي .

- ١٧ - حلقة حديدية منتظمة الشكل مساحة مقطعها 150 سم^٢ ومتوسطة نصف قطرها 200 مم، الحلقة بها فجوة هوائية اتساعها 1.0 مم .
احسب NI المطلوبة للحصول على $B = 0.5T$ في الفجوة الهوائية « حيث I التيار المار في الملف حول الحلقة والذي عدد لفاته N »، علماً بأنه عندما تكون $B = 0.5T$ للحديد يكون $\mu_r = 250$.

١٨ - حلقة مساحة مقطعها 200 مم² ومتوسط طول مسارها 350 مم مكونة من مادتين بحيث يكون $\frac{2}{3}$ من طول مسار الحلقة من مادة الحديد الختام (ferrite) ($\mu_r = 1000$) والثلث الباقي من الحديد الطري (mild steel).
احسب الفيض المغناطيسي في الحلقة إذا لُفَّت بملف عدد لفاته 750 لفة ويحمل تيارا قدره 100 ملي أمبير. علما بأن الفراغات بين التحام المادتين يكافئ فجوة هوائية اتساعها 100 ميكرومتر.

١٩ - حلقة حديدية مغناطيسية مساحة مقطعها 0.02 سم² ونصف قطرها 300 مم بها فجوة هوائية اتساعها 1 سم وعدد لفات الملف 1200 لفة، فإذا كان تيار الملف 6 أمبيرات.
ما هو مقدار القوة التي تحاول في قفل الفجوة علما بأن $\mu_r = 1000$ للحديد.



التيارات المترددة

Alternating Currents

- مقدمة ● مقاومة أومية في دائرة مترددة ● مكثف في دائرة مترددة ● ملف ذو حث ذاتي فقط في دائرة مترددة ● التوصيل على التوالي في دائرة مترددة ● دائرة التيار المتردد المتوازية ● دوائر الرنين ● استخدام الأعداد المركبة وتطبيقات عليه ● قناطر التيار المتردد ● مسائل .

(١-٨) مقدمة

Introduction

سبق أن ذكر في الفصل السادس، البند (٦-١١-١)، كيفية توليد القوة الدافعة الكهربائية المترددة، الجهد المتردد، وحسب المعادلة (٦-٨٨) فإن قيمته تساوي :

$$V = V_m \sin(\omega t) = V_m \sin(2\pi f t) \dots\dots\dots (٨-١)$$

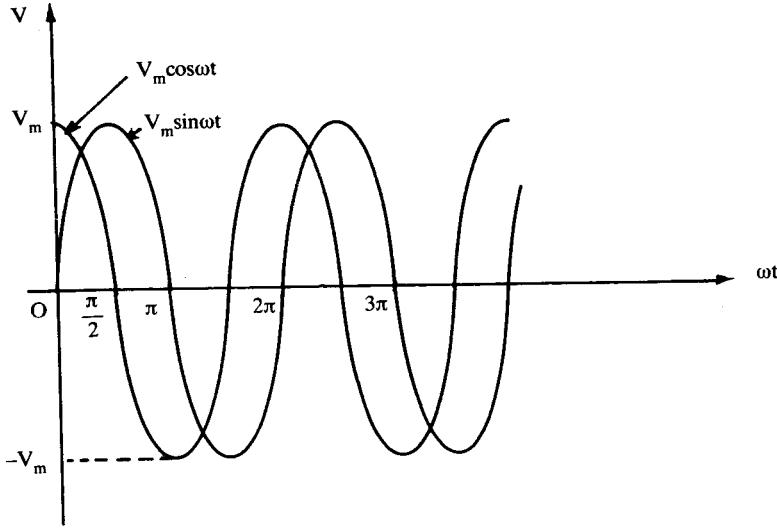
حيث V فرق جهد جيبي يتغير مع الزمن t ويسمى فرق الجهد اللحظي و V_m قيمته العظمى و f التردد الذي يتراوح ما بين ٥٠ و ٦٠ دورة في الثانية بالنسبة لمعظم المولدات الاقتصادية. ويقاس التردد بعدد الذبذبات لكل ثانية وهو ما يسمى بالهيرتز (Hertz) نسبة للعالم الفيزيائي هيرتز حيث :

$$1 \text{ Hertz} = 1\text{Hz} = 1 \text{ cycle per second}$$

كما يمكن التعبير عن الجهد المتردد بالمعادلة التالية :

$$V = V_m \cos(\omega t) \dots\dots\dots (٨-٢)$$

وهذه المعادلة تمثل أيضا موجة جيبية . ولما كان $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ فإن موجة $\cos(\omega t)$ الـ تماثل موجة الـ $\sin(\omega t)$ مع إزاحة مقدارها $\frac{\pi}{2}$ كما في شكل (٨-١) .



شكل (٨-١) : العلاقة بين $\sin(\omega t)$ و $\cos(\omega t)$ حسب المعادلتين (٨-١) و (٨-٢) .

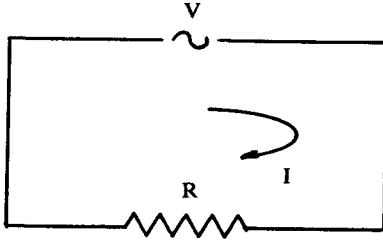
وتعالج نظرية التيار المتردد (alternating current) أو باختصار A.C. ، الجهود والتيارات الناتجة في دوائر كهربية تحتوي على مقاومات وملفات ومكثفات ومحولات وأي دوائر أخرى كهربية عند تسليط قوة دافعة كهربية مترددة .

وسنقتصر في دراسة هذا الموضوع فقط على تأثير تسليط قوة دافعة كهربية مترددة على الدوائر الكهربية المختلفة المكونة من مقاومات، ومكثفات وملفات فقط .

(٢-٨) مقاومة أومية في دائرة مترددة

Resistance in A.C. Circuit

يمثل الشكل (٨-٢) قوة دافعة مترددة V متصلة بمقاومة أومية ، أي ليس لها حث ، فإذا كانت المعادلة (٨-١) تمثل V فإنه حسب قانون أوم نكون القيمة اللحظية للتيار الكهربي المار في الدائرة هي :



شكل (٨-٢): دائرة تيار متردد تحتوي على مقاومة أومية فقط .

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) \dots (٨-٣)$$

$$\therefore I = I_m \sin(\omega t)$$

حيث:

$$I_m = V_m / R \dots \dots \dots (٨-٤)$$

وتمثل I_m القيمة العظمى للتيار عندما يأخذ V قيمته العظمى V_m .

ويستنتج من المعادلات (٨-١)، (٨-٣) و (٨-٤) ما يلي:

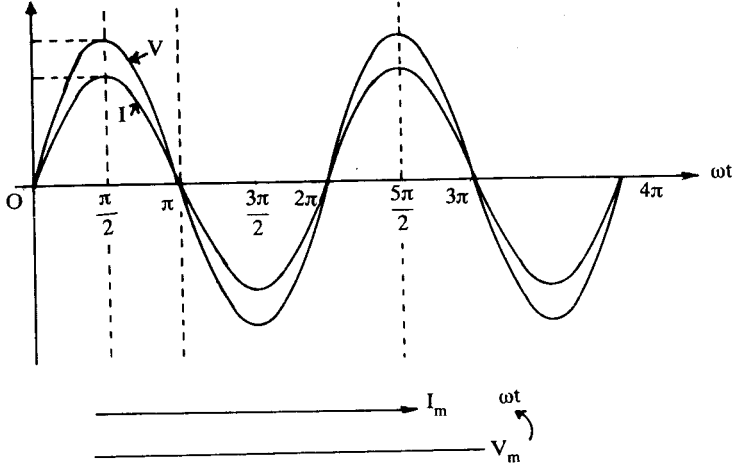
١ - تتناسب قيمة التيار، المعادلة (٨-٣)، مع قيمة الجهد الكهربائي، المعادلة (٨-١)، بمعامل ثابت هو $1/R$. لذلك يلاحظ من الشكل (٨-٣) أن منحنى التيار هو منحنى جيبى يماثل تماما المنحنى الجيبى لفرق الجهد، أي أنها يمران بنقطة الصفر معا كما أنها يمران بقيمتي النهاية العظمى في كل من الجهتين الموجبة والسالبة معا، ولذلك يقال إن فرق الجهد والتيار متفقان في الطور In phase وتتوقف قيمة النهاية العظمى للتيار I_m على قيمة المقاومة R .

٢ - إذا مثل كل من التيار وفرق الجهد بمتجهين كما في شكل (٨-٣) فإنهما ينطبقان معا ويدوران بالزاوية نفسها. يسمى هذا التمثيل بمخطط ضابط الطور (phasor diagram) أو بمخطط المتجهات (vector diagram) وهو يمثل الجهد والتيار عند لحظة معينة والغرض من ذلك هو معرفة الفرق في الطور (phase difference) بينهما.

٣ - حسب تعريف القدرة الكهربائية الواردة في الفصل الرابع، البند (٣-٤)، فإن القيمة اللحظية للقدرة P (instant power) عند أي لحظة t هي:

$$P = IV = I^2 R = I_m^2 R \sin^2 \omega t \dots (٨-٥)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \cos 2\omega t)$$



شكل (٨-٣): ١- العلاقة بين فرق الجهد المسلط V و ωt وكذلك التيار المار في الدائرة I و ωt حسب المعادلتين (٨-١) و (٨-٣).
 ب - مخطط ضابط الطور بين V و I للدائرة (٨-٢).

$$\therefore P = \frac{1}{2} V_m I_m - \frac{1}{2} V_m I_m \cos 2\omega t = P_1 + P_2 \quad (٨-٦)$$

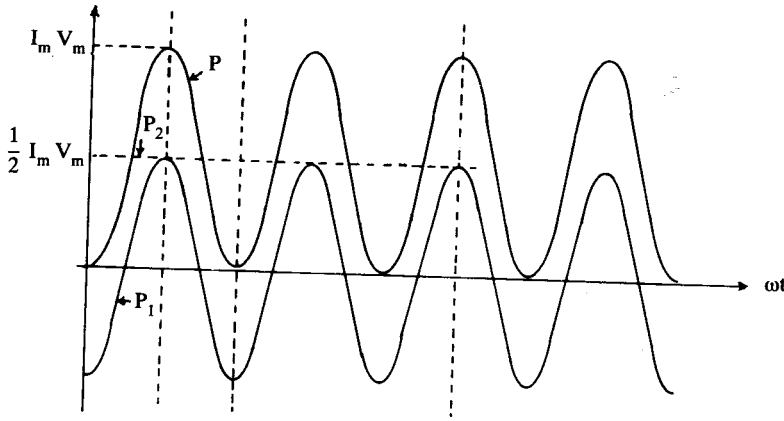
تدل المعادلة (٨-٥) على أن القدرة اللحظية P دائما موجبة عندما تكون V و I معا موجبتين أو سالبتين وهذا يعني أن الطاقة تعطى للمقاومة عند أي لحظة مهما كان اتجاه التيار.

كما يتضح من المعادلة (٨-٦) أن القدرة اللحظية P تتكون من حدين هما:
 ١ - حد ثابت P_1 ، يكن كتابته بالصورة التالية:

$$P_1 = \frac{1}{2} V_m I_m = (V_m / \sqrt{2}) \times (I_m / \sqrt{2}) = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \quad (٨-٧)$$

تمثل هذه المعادلة تماما المعادلة (٤-٢٨) الخاصة بالقدرة في حالة التيار المباشر (D.C). تسمى V_{eff} بالجهد الفعّال و I_{eff} بالتيار الفعّال وهما مقياس للجهد المباشر المكافئ أو التيار المباشر (المستمر) الذي يسبب الحرارة نفسها في المقاومة.

ب - حد يتغير مع الزمن t بضعف التردد للجهد والتيار (2ω بدلا من ω). وبين الشكل (٨-٤) العلاقة بين ωt والقدرة اللحظية P حسب المعادلة (٨-٥) كما يبين أيضا حديّ المعادلة (٨-٦)، حيث يمثل الحد الأول بخط مستقيم مع المحور الأفقي بينما يمثل الحد الثاني بالمنحنى الجيبي الذي قيمة ذروته $\frac{1}{2} V_m I_m$. واضح من الشكل أن القدرة اللحظية هي مجموع هذين الحدين.



شكل (٨-٤): العلاقة بين القدرة اللحظية P و ωt حسب المعادلتين (٨-٥) و (٨-٦) للدائرة (٨-٢).

٤ - تعني المعادلة (٨-٥) أن معدل إنتاج الطاقة الحرارية في المقاومة R يكون متغيرا نظرا لتغير P . ولكن يمكن الحصول في خلال فترة زمنية T على معدل متوسط لإنتاج الحرارة يمكن مساواته بالمعدل الناشئ عن تيار مستمر مكافئ. وتكون قيمة هذا التيار المستمر المكافئ هي القيمة الفعالة للتيار المتردد (effective value) وتعرف بأنها قيمة ذلك التيار المستمر الذي يولد معدل الحرارة نفسها في مقاومة معينة.

إذا كانت الطاقة الحرارية المتولدة في مقاومة R نتيجة لمرور تيار متردد I لفترة زمنية متناهية في الصغر dt هي ($dU = Pdt$)، فإن الطاقة المتولدة خلال دورة

كاملة T هي :

$$U = \int_0^T dU = \int_0^T I^2 R dt$$

وإذا كانت شدة التيار المستمر الذي يعطي الطاقة الحرارية نفسها في الفترة T هو I' فإن القدرة المفقودة $P = I'^2 R$ وهي ثابتة لا تعتمد على الزمن. إذن فالطاقة الحرارية نتيجة التيار المستمر هي $I'^2 RT$. ومن تعريف القيمة الفعالة للتيار ينتج أن:

$$I'^2 RT = \int_0^T I^2 R dt \quad \therefore I'^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt$$

$\therefore$ القيمة الفعالة للتيار المتردد I' ، ويرمز لها غالباً بالرمز $I_{r.m.s}$ وأحياناً I_{eff} حيث $r.m.s$ هي (root mean square) جذر متوسط مربع التيار، هي:

$$I_{r.m.s} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt \right]^{1/2} \dots \dots \dots (٨-٨)$$

وبالتعويض عن I من المعادلة (٨-٣) يُحصل على:

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt \right]^{1/2}$$

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right]^{1/2} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \right]^{1/2}$$

$$\therefore I_{r.m.s} = \left[\frac{I_m^2}{2\pi} \times \pi \right]^{1/2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \quad (٨-٩)$$

ولذلك فالقيمة الفعالة لأي موجة جيبية هي 0.707 من القيمة العظمى وهذه قيمة التيار الفعال I_{eff} التي وردت في المعادلة (٨-٧).

وتستخدم هذه القيمة الفعالة للتيار المتردد في أية حسابات وهي التي تقبسها أجهزة القياس العادية مثل (ammeter) آلة قياس التيار المتردد. كذلك بالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن القيمة الفعالة للجهد المتردد تعطى بالمعادلة:

$$V_{r.m.s} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707 V_m \quad \dots \quad (٨-١٠)$$

ولذلك حينما يقال إن الجهد الكهربائي المتردد في المنزل 127V فهذه القيمة تمثل V_{rms} وهذا يعني أن القيمة العظمى لهذا الجهد 170V ولذلك صنعت أجهزة القياس لقراءة V_{rms} مباشرة.

وبذلك يمكن كتابة المعادلات (٨-١)، (٨-٣) و (٨-٦) بالصورة التالية :

$$V = \sqrt{2} V_{r.m.s} \sin \omega t \quad \dots (٨-١١)$$

$$I = \sqrt{2} I_{r.m.s} \sin \omega t \quad \dots (٨-١٢)$$

$$P = V_{r.m.s} I_{r.m.s} - V_{r.m.s} I_{r.m.s} \cos 2\omega t \quad (٨-١٣)$$

٥ - القيمة المتوسطة (average value) للتيار المتردد خلال دورة كاملة يساوي صفرا وذلك بسبب القيمة الموجبة والسالبة للتيار أما القيمة المتوسطة للتيار خلال نصف دورة يمكن حسابها كما يلي :

$$I_{av} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I dt$$

وبالتعويض عن I من المعادلة (٨-٣) يمكن الحصول على :

$$I_{av} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$\therefore I_{av} = (2/\pi) I_m = 0.637 I_m \quad \dots (٨-١٤)$$

وبالطريقة نفسها يمكن حساب القيمة المتوسطة للجهد خلال نصف دورة أي أن :

$$V_{av} = \frac{2}{\pi} V_m = 0.637 V_m \quad \dots (٨-١٥)$$

أما القيمة المتوسطة للقوة خلال دورة كاملة في زمن قدره T فيمكن الحصول عليها من المعادلة :

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$

وبالتعويض عن P من المعادلة (٨-١٣) يمكن الحصول على

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_{r.m.s} I_{r.m.s} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{V_{r.m.s} I_{r.m.s}}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{V_{r.m.s} I_{r.m.s}}{\pi} \left[\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$P_{av} = V_{r.m.s} I_{r.m.s} = I_{r.m.s}^2 R = \frac{V_{r.m.s}^2}{R} \quad \dots \quad (٨-١٦)$$

حيث

$$V_{r.m.s} = I_{r.m.s} R$$

ويستفاد من هذه المعادلة أن القيمة المتوسطة للقدرة تساوي مقداراً ثابتاً وهو $V_{r.m.s} I_{r.m.s}$. أي أن القدرة المتوسطة المفقودة في مقاومة R تساوي حاصل ضرب القيمة الفعالة للجهد في القيمة الفعالة للتيار الكهربي. تماثل هذه المعادلة المعادلة (٨-٧).

وحدات المقادير الفيزيائية الواردة في هذا البند وردت في الفصول السابقة.

مثال (٨-١)

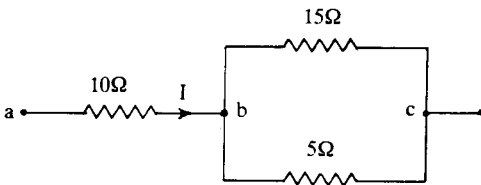
إذا كان قيمة التيار المار في المقاومة 5Ω من الدائرة التالية يعطى بالمعادلة:

$$I = 6 \sin \omega t$$

١ - احسب التيار المار في المقاومتين 10Ω

و 15Ω وفرق الجهد بين ab و bc

ب - احسب القدرة اللحظية والمتوسطة في كل مقاومة.



الحل

١ - فرق الجهد

فرق الجهد V_{bc} عبر المقاومة 5Ω يساوي فرق الجهد عبر المقاومة 15Ω

$$V_{bc} = I_5 R_5 = 6 \sin \omega t \times 5 = 30 \sin \omega t \text{ V}$$

$$I_{15} = V_{bc}/R_{15} = 2 \sin \omega t \text{ \& } I_{10} = I_{15} + I_5 = 8 \sin \omega t \text{ A}$$

$$V_{ab} = I_{10} R_{10} = 80 \sin \omega t \text{ V}$$

ب - القدرة اللحظية

$$P_5 = I_5 V_5 = 6 \sin \omega t \times 30 \sin \omega t = 180 \sin^2 \omega t \text{ W}$$

$$P_{15} = I_{15} V_{15} = 2 \sin \omega t \times 30 \sin \omega t = 60 \sin^2 \omega t \text{ W}$$

$$P_{10} = I_{10} V_{10} = 8 \sin \omega t \times 80 \sin \omega t = 640 \sin^2 \omega t \text{ W}$$

أما القدرة المتوسطة فهي:

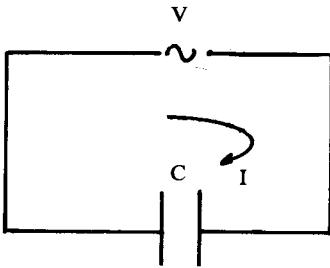
$$P_{av}^5 = \frac{I_m^2 \times V_m^2}{2} = \frac{6 \times 30}{2} = 90 \text{ W}$$

$$P_{av}^{15} = \frac{I_m^{15} \times V_m^{15}}{2} = \frac{2 \times 30}{2} = 30 \text{ W}$$

$$P_{av}^{10} = \frac{I_m^{10} \times V_m^{10}}{2} = \frac{8 \times 80}{2} = 320 \text{ W}$$

(٨-٣) مكثف في دائرة مترددة

Capacitance in A.C. Circuit



شكل (٨-٥): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف سعته C فقط.

يمثل شكل (٨-٥) قوة دافعة كهربية

مترددة، $V = V_m \sin \omega t$ ، متصلة بدائرة

تحتوي على مكثف سعته C فاراد. فإذا كان

التيار المار في الدائرة عند أي لحظة هو I

أمبير فإن الشحنة على المكثف عند اللحظة

t هي q كولوم قيمتها:

$$q = CV = C V_m \sin \omega t$$

حيث V الجهد بين طرفي المكثف عند أي لحظة ويساوي جهد المصدر عند تلك اللحظة.

$$\therefore I = \frac{dq}{dt} = C\omega V_m \cos \omega t = \left(\frac{V_m}{X_C}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore I = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots (٨-١٧)$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \dots\dots (٨-١٨)$$

ويستتبع من المعادلات (٨-١)، (٨-١٧) و(٨-١٨) ما يلي :

١ - يسمى المقدار X_C بالرد السعوي (capacitive reactance) أو المفاعلة السعوية ووحدته الأوم ويمثل مقاومة المكثف للتيار المتردد.

٢ - يتضح من المعادلتين (٨-١) و(٨-١٧) ومن الشكل (٨-٦) أن منحنى التيار غير متفق في الطور مع منحنى الجهد وإنما يتقدم عنه بزاوية مقدارها $\pi/2$ ويقال في هذه الحالة إن التيار يتقدم الجهد بزاوية مقدارها $\pi/2$. أي أن كل نقطة (ωt) على منحنى الجهد تناظرها $(\omega t + \frac{\pi}{2})$ على منحنى التيار.

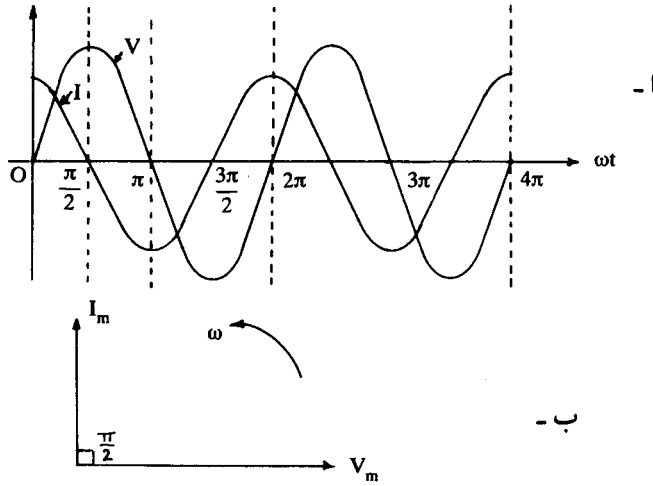
٣ - يوضح رسم مخطط ضابط الطور بين V_m و I_m أن التيار I_m متقدم بزاوية مقدارها $\pi/2$ على الجهد V_m ، شكل (٨-٦).

٤ - يتناسب الرد السعوي X_C عكسياً مع تردد التيار f وذلك حسب المعادلة (٨-١٨) ولهذا فإن مقاومة المكثف للتيار المستمر (DC) تساوي مالاً نهاية عندما يكون التردد مساوياً للصفر، أي أن المكثف لا يمرر التيار المستمر.

٥ - تكون القدرة P التي يعطيها المصدر عند أية لحظة هي :

$$P = IV = V_m \sin \omega t \cdot C\omega V_m \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} V_m^2 C\omega \sin 2\omega t \dots\dots\dots (٨-١٩)$$



شكل (٨-٦): ١ - العلاقة بين الجهد V و ωt وكذلك العلاقة بين التيار I و ωt حسب المعادلتين (٨-١) و (٨-١٧).
 ب - مخطط ضابط الطور بين الجهد V والتيار I للدائرة (٨-٥).

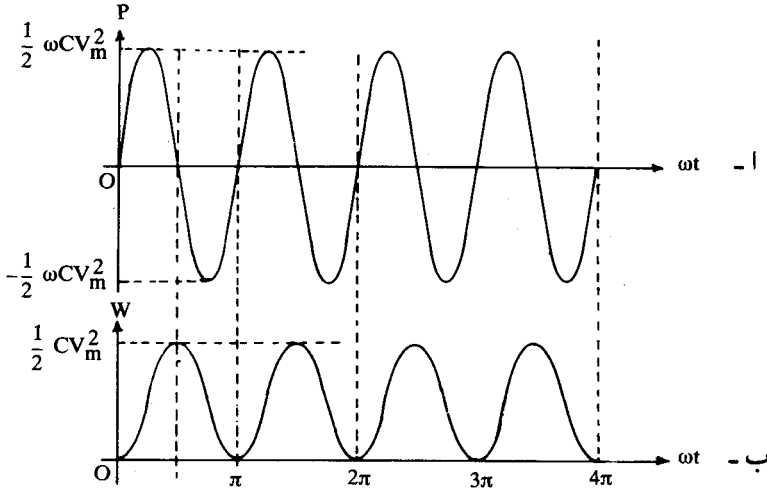
ويتضح من المعادلة (٨-١٩) أن منحني القدرة مع الزمن هو منحني جيبي تردده ضعف تردد التيار والجهد.

وتحدد الطاقة (energy) بين المكثف والمصدر من العلاقة :

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^t P dt = \int_0^t \frac{1}{2} V_m^2 C \omega \sin(2\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{4} C V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) \\
 &= \frac{1}{2} C V_m^2 \sin^2 \omega t \quad \dots \dots \dots (٨-٢٠)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} C V^2 \quad \dots \dots \dots (٨-٢١)$$

يتضح من المعادلتين (٨-١٩) و (٨-٢٠) والتمثيل البياني لهما، شكل (٨-٧)، أن الطاقة المختزنة في المكثف تزداد مع زيادة الجهد خلال الربع الأول للذبذبة وتكون القدرة في هذه الحالة موجبة أي أن المكثف يأخذ طاقة من المصدر الكهربائي.



شكل (٨-٧): أ - العلاقة بين القدرة P و ωt حسب المعادلة (٨-١٩).
 ب - العلاقة بين الطاقة W و ωt حسب المعادلة (٨-٢٠).

أما خلال الربع الثاني فإن الجهد يتناقص وتتناقص تبعاً لذلك الطاقة حتى تصل قيمتها الصفر. وتكون القدرة سالبة أي أن المكثف يعيد الطاقة المخزنة ثانية إلى المصدر وهكذا. ويقال إن الطاقة تتأرجح ذهاباً وإياباً بين المصدر والمكثف. ومعنى هذا أن القدرة التي تتمص في الدائرة تساوي صفراً لعدم وجود مقاومة أومية تبدد فيها القدرة أثناء تبادل الطاقة بين المصدر والمكثف. وتبلغ الطاقة قيمتها العظمى $\frac{1}{2} CV_m^2$ مرتين في كل دورة للمنحنى الجيبي للجهد.

مثال (٨-٢):

إذا كانت سعة المكثف في الدائرة المبينة بالشكل (٨-٥) تساوي ٢ ميكروفاراد وكانت قيمة الجهد بين طرفي المكثف تحدده المعادلة التالية:

$$V = 100 \sin 1000 t$$

فاحسب الرد السعوي والقيمة اللحظية لكل من التيار والشحنة والقدرة.

الحل

$$X_C = 1/\omega C = 1/(10^3 \times 2 \times 10^{-6}) = 5 \times 10^2 \Omega$$

$$I_m = V_m/X_C = 10^2/(5 \times 10^2) = 0.2 \text{ A}$$

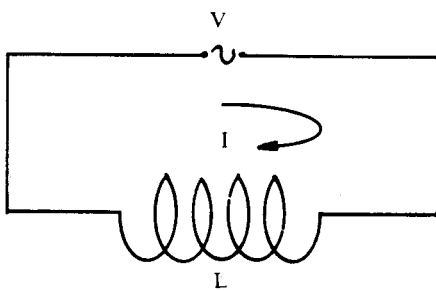
$$\therefore I = 0.2 \sin (1000t + \pi/2) \text{ A}$$

$$q = CV_m \sin 1000t = 2 \times 10^{-4} \sin 1000t \text{ C}$$

$$P = \frac{1}{2} V_m^2 C \omega \sin 2\omega t = 10 \sin 2000t \text{ W}$$

(٨-٤) ملف ذو حث ذاتي فقط في دائرة مترددة

Inductance in A.C. Circuit



شكل (٨-٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف حثي L فقط.

يمثل الشكل (٨-٨) قوة دافعة كهربية مترددة V ، حسب المعادلة (٨-١) ، متصلة بملف حثي ذاتي L ومقاومته الأومية مهملة . فإذا كان التيار المار في الدائرة عند أي لحظة هو I أمبير فإن الفيض المغناطيسي المتردد الناتج عن مرور هذا التيار ينتج قوة دافعة كهربية تأثيرية عكسية ، المعادلة (٢٦ - ٦) ، مقدارها:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

وينطبق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرة (٨-٨) يجب أن يكون $V + \mathcal{E} = 0$

$$\therefore V - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \dots \dots \dots (٨-٢٢)$$

وبالتعويض عن V من المعادلة (٨-١) يمكن الحصول على :

$$dI = (V_m/L) \sin \omega t \, dt$$

ويمكاملة الطرفين يمكن الحصول على :

$$\therefore I = \frac{V_m}{L} \int \sin \omega t \, dt = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t + C$$

ويعتبر ثابت التكامل C مساويا للصفر وذلك لأنه يمثل جزء التيار الذي يظهر في حالة الزوال (transient condition).

$$\therefore I = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t = -\frac{V_m}{\omega L} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) = \frac{V_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore I = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (٨-٢٣)$$

$$I_m = V_m / \omega L = V_m / X_L \dots \dots \dots (٨-٢٤)$$

$$X_L = \omega L \dots \dots \dots (٨-٢٥)$$

يستنتج من المعادلات (٨-١)، (٨-٢٣) و(٨-٢٤) ما يلي :

١ - تمثل X_L معاوقة الملف للتيار المتردد وهي تختلف عن المقاومة الأومية رغم أن وحدتهما الأوم ويسمى بالرد الحثي (inductive reactance) أو المفاعلة الحثية .

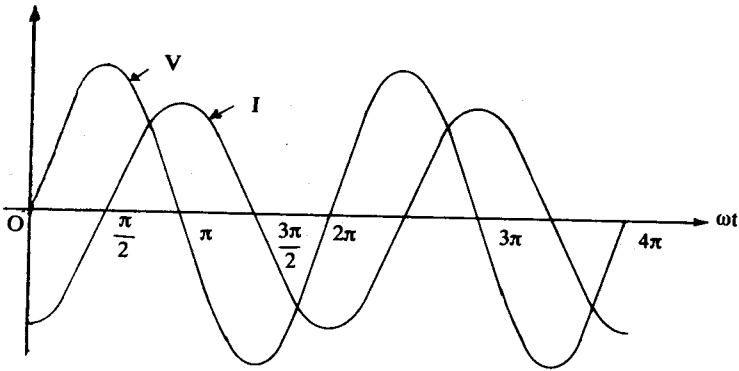
٢ - يتضح من المعادلتين (٨-١) و(٨-٢٣) ومن الشكل (٨-٩) أن منحنى التيار غير متفق في الطور مع منحنى فرق الجهد وإنما يتأخر عنه بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ أي أن كل نقطة لـ (ωt) على منحنى الجهد تناظرها $(\omega t - \pi/2)$ على منحنى التيار ويقال في هذه الحالة إن التيار متأخر عن الجهد بزاوية مقدارها $\pi/2$.

٣ - يوضح رسم مخطط ضابط الطور بين I_m و V_m ، شكل (٨-٩) ، أن هناك زاوية بين متجهي الجهد والتيار مقدارها $\pi/2$ وأن التيار متأخر عن الجهد بمقدار هذه الزاوية .

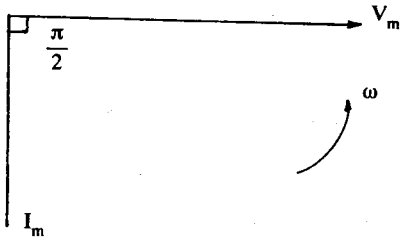
٤ - إذا أعطي التيار بالمعادلة :

$$I = I_m \sin \omega t \dots \dots \dots (٨-٢٦)$$

واستعملت المعادلة (٨-٢٢) لحساب الجهد فإنه يمكن الحصول على :



- ا



ب -

شكل (٨-٩): ا- العلاقة بين الجهد V و ωt وكذلك العلاقة بين التيار I و ωt حسب المعادلتين (٨-١) و (٨-٢٣).
 ب - مخطط ضابط الطور بين الجهد والتيار للدائرة (٨-٨).

$$V = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin (\omega t + \pi/2)$$

$$\therefore V = V_m \sin (\omega t + \pi/2) \quad \dots \dots \dots (٨-٢٧)$$

ويقال في هذه الحالة إن الجهد يتقدم التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$.
 هـ - يمكن الحصول على القدرة اللحظية P كما يلي:

$$P = VI = V_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$P = -\frac{V_m I_m}{2} \sin 2\omega t = -\frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin 2\omega t$$

$$\therefore P = -V_{rms} I_{rms} \sin 2\omega t \quad \dots \dots (٨-٢٨)$$

يتضح من هذه المعادلة أن منحنى القدرة هو أيضا منحنى جيبي تردده ضعف تردد الجهد والتيار واتساعه عبارة عن $\frac{1}{2} V_m I_m$ ولذلك فإن القيمة المتوسطة لمنحنى القدرة تساوي الصفر.

أما الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي للملف الحثي للفترة الزمنية t فيمكن حسابها كالتالي:

$$U = \int_0^t P dt = -\frac{1}{2} V_m I_m \int_0^t \sin 2\omega t dt$$

$$U = -\frac{1}{2} V_m I_m \left[-\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t \right]_0^t = \frac{1}{4\omega} V_m I_m (\cos 2\omega t - 1)$$

$$U = \frac{-1}{2\omega} V_m I_m \sin^2 \omega t$$

$$\therefore U = -\frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t = -\frac{1}{2} L I^2 \quad \dots (٨-٢٩)$$

وردت الإشارة السالبة في معادلتى القدرة والطاقة بسبب ورودها في المعادلة (٨-٢٣) للدلالة على تأخر التيار على الجهد.

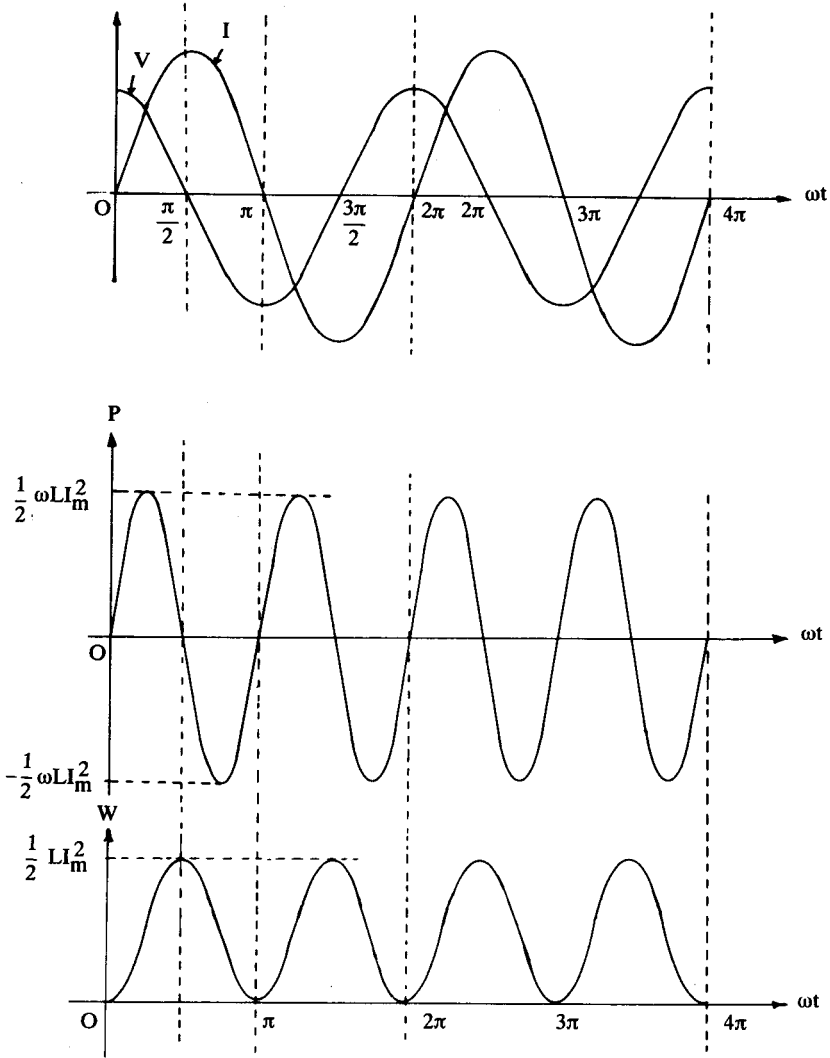
إذا حسبت القدرة والطاقة باستخدام المعادلتين (٨-٢٦) و(٨-٢٧) فيمكن الحصول على:

$$P = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin 2\omega t \quad \dots \dots (٨-٣٠)$$

$$U = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L I^2 \quad \dots \dots (٨-٣١)$$

وهما تمثلان المعادلتين (٨-٢٨) و(٨-٢٩) نفسيهما بدون الإشارة السالبة.

يمثل الشكل (٨-١٠) منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨-٢٦)، (٨-٢٧)، (٨-٣٠) و(٨-٣١).



شكل (٨-١٠): منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨-٢٦)، (٨-٢٧)، (٨-٣٠) و(٨-٣١).

ويستتج من ذلك أنه إذا كانت القدرة P موجبة فسيريان الطاقة يكون متجها إلى الملف من المصدر وتزداد بذلك طاقة التخزين المغناطيسية، أما إذا كانت القدرة سالبة فإن الطاقة ستعود من المجال المغناطيسي في الملف إلى المصدر الكهربي. إذا كان الملف نقيا، أي مقاومته الأومية مهملة، فإن الطاقة لا تتبدد (consume) خلال تبادل الطاقة بين المصدر الكهربي والمجال المغناطيسي.

يتم هذا التبادل خلال نصف الدورة للتيار الكهربي أي بين $\omega t = 0$ و $\omega t = \pi$ وتتكرر العملية نفسها خلال النصف الثاني السالب أي بين $\omega t = \pi$ و $\omega t = 2\pi$ وبذلك تصل الطاقة إلى نهايتها العظمى مرتين بقيمة قدرها $\frac{1}{2} LI_m^2$ خلال كل دورة عندما تكون $\omega t = \pi/2$ و $\omega t = \frac{3}{2}\pi$. وهكذا تستمر العملية.

مثال (٨-٣)

سلطت قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = 150 \sin 1000 t$ على ملف حثه $L = 0.02 \text{ H}$ في الدائرة المبينة في شكل (٨-٢٣).

- ١ - احسب شدة التيار I وكذلك القدرة اللحظية P والمتوسطة P_{av}
- ب - إذا فرض أن الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي (stored energy in magnetic field) تساوي الصفر عند $t = 0$. احسب قيمة هذه الطاقة بعد زمن قدره t ثانية.

الحل

من العلاقة (٨-١٣) يكون:

$$I = \frac{V}{X_L} = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t = -7.5 \cos (1000t) \text{ A}$$

$$P = V \cdot I = 150 \sin 1000 t \times [-7.5 \cos (1000t)]$$

$$= -1125 \times \frac{1}{2} \sin 2000 t$$

$$= -562.5 \sin 2000 t$$

أما بالنسبة للقيمة المتوسطة فواضح أن قيمتها تساوي الصفر.
ب - تحسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي بالطريقة التالية:

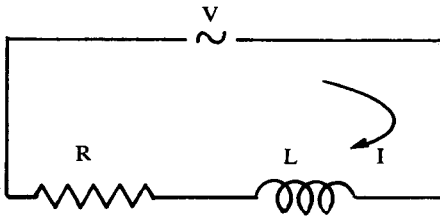
$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^t p \, dt = - \int_0^t 562.5 \sin 2000 t \, dt \\
 &= 562.5 \left[\frac{\cos 2000 t}{2000} \right]_0^t \\
 &= 0.28 (\cos 2000 t - 1) \quad J \\
 &= -0.28 \times 2 \sin^2 1000 t \quad J \\
 \therefore U &= -0.56 \sin^2 1000 t \quad J
 \end{aligned}$$

(٥-٨) التوصيل على التوالي في دائرة مترددة

Conduction in Series in A.C. Circuit

Resistance and inductance in series

(١-٥-٨) مقاومة وملف متصلان على التوالي



شكل (٨-١١): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومقاومة R على التوالي.

يمثل الشكل (٨-١١) قوة دافعة مترددة V يتصل بها على التوالي ملف حثه الذاتي L ومقاومة أومية R (هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية للملف أو تكون مقاومة مستقلة إذا كان الملف مقاومته مهملة).

وهناك ثلاث طرق لدراسة هذه الدائرة والدوائر المماثلة التي ستأتي فيما بعد

وهي:

أولاً: طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها.

ثانياً: طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات).

ثالثاً: طريقة الحساب باستخدام الأعداد المركبة، وسوف يخصص البند (٨-٨)

لهذه الدراسة.

أولاً : طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة
تكتب معادلة الدائرة بالصورة التالية :

$$V = L \frac{dI}{dt} + IR \dots\dots\dots (٨-٣٢)$$

فإذا فرض أن جهد المصدر V تمثله المعادلة (٨-١) فإن التيار I في هذه الدائرة سوف يكون متخلفاً عن الجهد V بزاوية مقدارها α حيث :

$$I = I_m \sin(\omega t - \alpha) \dots\dots\dots (٨-٣٣)$$

تسمى α بزاوية الطور وتتراوح قيمتها بين الصفر و $\frac{\pi}{2}$ ، كما هو معروف من دراسة البندين (٨-٢) و (٨-٤) فإن قيمتها تساوي الصفر في حالة المقاومة فقط و $\frac{\pi}{2}$ في حالة الملف فقط .

بالتعويض عن قيمتي V و I من المعادلتين (٨-١) و (٨-٣٣) في المعادلة (٨-٣٢) يمكن الحصول على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + L I_m \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \{ \sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \cdot \sin \alpha \} + L I_m \omega \{ \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha \}$$

أو :

$$\sin \omega t \{ I_m R \cos \alpha + L I_m \omega \sin \alpha - V_m \} +$$

$$\cos \omega t \{ L I_m \omega \cos \alpha - I_m R \sin \alpha \} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt) .

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون

$$\cos \omega t = 1 , \sin \omega t = 0$$

عندما تكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$\cos \omega t = 0 , \sin \omega t = 1$$

و بتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$L \omega \cos \alpha = R \sin \alpha \dots\dots\dots (٨-٣٤)$$

$$V_m = I_m R \cos \alpha + L I_m \omega \sin \alpha \quad \dots (٨-٣٥)$$

فمن المعادلة (٨-٣٤) يمكن الحصول على زاوية الطور أي أن :

$$\tan \alpha = \frac{\omega L}{R} \quad \therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad \dots (٨-٣٦)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨-٣٦) على :

$$\sin \alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \& \quad \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٣٥) يمكن الحصول على :

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \dots \dots \dots (٨-٣٧)$$

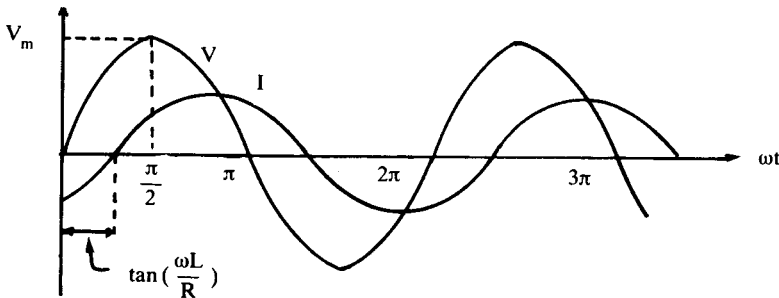
$$V_m = I_m Z$$

حيث :

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad \dots \dots \dots (٨-٣٨)$$

حيث يعرف المقدار Z بالممانعة الحثية (inductive impedance) وهي تقاس بالأوم أيضا، وتمثل نوعا من أنواع المقاومة في الدائرة.

وبين الشكل (٨-١٢) العلاقة بين الجهد V والتيار I وزاوية الطور α .



شكل (٨-١٢) : العلاقة بين V ، I و ωt حسب المعادلتين (٨-١) و (٨-٣٣) ويوضح الشكل قيمة α بين V و I .

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور

يمكن استخدام مخطط ضابط الطور لحساب الممانعة الحثية Z وزاوية الطور α كما

يلي:

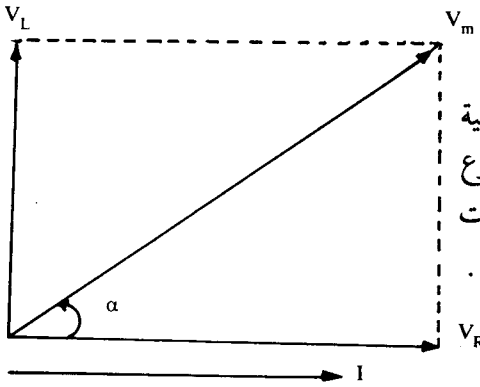
لكي يمر التيار الكهربي في الدائرة الموضحة بالشكل (٨-١١) يجب أن يكون للقوة الدافعة الكهربية V_m مركبتان هما:

١ - جهد المقاومة V_R ومقداره $I_m R$ وهو لازم لتمرير التيار في المقاومة R وكما هو معروف من دراسة البند (٨-٢) أن هذا الجهد متفق في الطور مع التيار.

ب - جهد الملف الحثي V_L ومقداره $I_m \omega L$ وهو لازم لتمرير التيار في الملف ذي الحث الذاتي L وهذا الجهد متقدم على التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$ ، البند (٨-٤).

وبذلك يمكن رسم مخطط ضابط الطور كما في شكل (٨-١٣) حيث أخذ التيار I_m

كخط إسناد لأنه مشترك بين R و L .



وتكون بذلك القوة الدافعة الكهربية V_m اللازمة لتمرير التيار I_m هي مجموع الجهدين V_R و V_L نظرا لأن الكميات الداخلة في الحساب كلها كميات متجهة.

$$\therefore \vec{V}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

أو

شكل (٨-١٣): مخطط ضابط الطور للدائرة

(٨-١١) يوضح اتجاه V_R و

V_L والمحصلة V_m وعلاقتها

ب I_m وزاوية الطور α .

$$V_m = (V_R^2 + V_L^2)^{1/2}$$

$$V_m = [I_m^2 R^2 + I_m^2 (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$V_m = I_m (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} = I_m Z$$

$$\therefore Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨-٣٨) نفسها. يمكن الحصول على زاوية الطور α من الشكل

(٨-١٣)، وواضح أنها موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر ($\omega L = 0$) و $\frac{\pi}{2}$ ($R = 0$) ،

حيث:

$$\tan \alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_m \omega L}{I_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

وهي المعادلة (٨-٣٦) نفسها.

وبهذا يتضح صحة وسهولة فكرة مخطط ضابط الطور في دوائر التيار المتردد.

لإيجاد متوسط القدرة خلال دورة كاملة في هذه الدائرة نتبع ما يلي :

$$P = IV = I_m \sin (\omega t - \alpha) V_m \sin \omega t$$

$$P = I_m V_m \sin (\omega t - \alpha) \sin \omega t$$

$$p = \frac{1}{2} I_m V_m \{ \cos \alpha - \cos (2\omega t - \alpha) \}$$

$$\therefore P = I_{rms} V_{rms} \cos \alpha - I_{rms} V_{rms} \cos (2\omega t - \alpha) \quad (٨-٣٩)$$

أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين أحدهما $I_{rms} V_{rms} \cos \alpha$ وهو ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعالة في الدائرة، والحد الثاني $I_{rms} V_{rms} \cos (2\omega t - \alpha)$ وهو كمية مترددة بقيمتها المتوسطة خلال دورة كاملة تساوي صفراً. وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة، وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة، هي :

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (٨-٤٠)$$

وهذا القانون عام لجميع دوائر التيار المتردد، ويسمى المقدار $\cos \alpha$ بمعامل القدرة (power factor) إذ أنه يمثل المعامل الذي تتوقف عليه قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة. فإذا كانت الدائرة تحتوي على مقاومة فقط فإن $\alpha = 0$ وتكون $\cos \alpha = 1$ ومنه $P = I_{rms} V_{rms}$ وهي المعادلة (٨-١٦)، وإذا اشتملت الدائرة على مقاومة وحث ذاتي فإن قيمة α تقع بين الصفر، $\pi/2$ ، كما أن معامل القدرة يتراوح بين الوحدة والصفر، وكلما ازدادت قيمة الحث الذاتي بالنسبة للمقاومة قلت قيمة معامل القدرة حتى يصبح صفراً: وعندها تكون $(\alpha = \pi/2)$ وذلك عندما تحتوي الدائرة حثاً ذاتياً فقط.

مثال (٨-٤)

يتصل جهد متردد قيمته العظمى 100 V وتردده 25 Hz على التوالي بمقاومة قيمتها 1.5Ω وملف حثه الذاتي 0.01 H. احسب تيار الدائرة وزاوية فرق الطور وفرق الجهد بين طرفي كل من المقاومة والملف.

الحل

$$\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 25 = 157 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 157 \times 0.01 = 1.57 \Omega$$

$$Z = \{ (1.5)^2 + (1.57)^2 \}^{1/2} = (4.71)^{1/2} = 2.17 \Omega$$

$$I_m = \frac{100}{2.17} = 46 \text{ A}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{X_L}{R} = \tan^{-1} \frac{1.57}{1.5} = 44^\circ 19'$$

$$V_R = I_m R = 46 \times 1.5 = 69 \text{ V}$$

$$V_L = I_m \omega L = 46 \times 1.57 = 72 \text{ V}$$

واضح أن الجمع الجبري للمقدارين V_L و V_R يساوي 141 فولت وهي أكبر من القيمة الأصلية والتي تساوي 100 فولت ولهذا فلا بد وأن يكون:

$$V_m^2 = V_L^2 + V_R^2$$

مثال (٨-٥)

تتألف دائرة من عنصرين أساسيين متصلين على التوالي وكان الجهد بين طرفيهما هو $V = 150 \sin(500t + 10)$ V والتيار المار هو $I = 13.42 \sin(500t - 53.4)$ A. تعرف على هذين العنصرين.

الحل

واضح أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $53.4 + 10 = 63.4^\circ$

وهذا يعني أن الدائرة يجب أن تحتوي على مقاومة R وملف L. ولمعرفة كل منهما نتبع ما يلي:

$$\tan \alpha = \tan 63.4 = 2 = \omega L/R$$

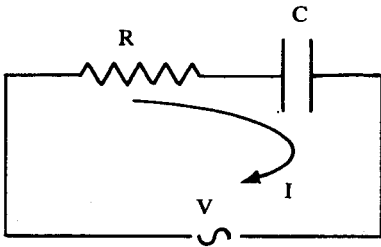
$$V_m/I_m = \{(R^2 + (\omega L)^2)\}^{1/2}$$

$$150/13.42 = \{R^2 + (2R)^2\}^{1/2} = \sqrt{5R}$$

$$\therefore R = 5\Omega \text{ \& } L = \frac{2R}{\omega} = \frac{2 \times 5}{500} = 0.02 \text{ H}$$

(٨-٥-٢) مقاومة ومكثف متصلان على التوالي

Resistance and capacitance in series



شكل (٨-١٤): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف ومقاومة متصلين على التوالي.

يمثل الشكل (٨-١٤) دائرة مترددة تحتوي على مصدر متردد V متصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي. فإذا مثل جهد المصدر بالمعادلة (٨-١) فإن التيار يسبق الجهد، في هذه الحالة، بزاوية طور قدرها α أي أن:

$$I = I_m \sin(\omega t + \alpha) \quad \dots \quad (٨-٤١)$$

أولاً: كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

يمكن كتابة معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصورة التالية:

$$V = IR + \frac{q}{C}$$

حيث q شحنة المكثف و C سعته و R قيمة المقاومة و I و V القيم اللحظية لكل من التيار وجهد المصدر ويمكن كتابة المعادلة (٨-٤١) على الصورة

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$q = I_m \int \sin(\omega t + \alpha) dt$$

$$q = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + C$$

وقيمة الثابت C في هذه الحالة تساوي الصفر لأن التيار متردد منتظم أي أن :

$$q = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) \dots\dots\dots (٨-٤٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٤٢) عن I و V و q يُحصل على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t + \alpha) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\therefore V_m \sin \omega t = I_m R \{ \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha \}$$

$$- \frac{I_m}{\omega C} \{ \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha \}$$

$$\therefore \cos \omega t \{ I_m R \sin \alpha - \frac{I_m}{\omega C} \cos \alpha \}$$

$$+ \sin \omega t \{ I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C} \sin \alpha - V_m \} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt) .

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون $\cos \omega t = 1$, $\sin \omega t = 0$

وعندما يكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون $\cos \omega t = 0$, $\sin \omega t = 1$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$R \sin \alpha = \frac{1}{\omega C} \cos \alpha \dots\dots\dots (٨-١٤٤)$$

$$V_m = I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C} \sin \alpha \dots\dots (٨-١٤٤ ب)$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-١٤٤) على زاوية الطور حيث :

$$\tan \alpha = \frac{1}{\omega C R} = \frac{X_c}{R} \therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\omega C R} \dots\dots (٨-٤٥)$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-٤٥) على :

$$\sin \alpha = \frac{X_C}{\left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}}, \quad \cos \alpha = \frac{R}{\left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٤٤) يُحصل على :

$$V_m = I_m \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} = I_m Z$$

حيث :

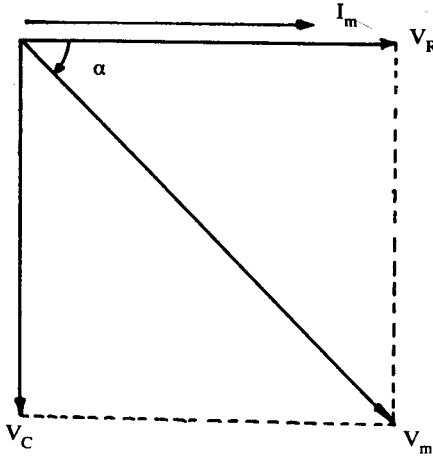
$$Z = \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (٨-٤٦)$$

حيث Z هي الممانعة السعوية (capacitive impedance) وتقاس بالأوم .

ثانياً : رسم مخطط ضابط الطور

ويمكن الحصول على معادلتى الممانعة السعوية (٨-٤٧) وزاوية الطور (٨-٤٦)

بطريقة رسم مخطط ضابط الطور، شكل (٨-١٥)، كالتالى :



يلاحظ أن للجهد V_m مركبتين هما :

أ - المركبة V_R وهي التي تعمل على تمرير التيار I_m في المقاومة R وقيمة هذه المركبة $I_m R$ وهي متفقة في الطور مع التيار.

ب - المركبة V_C وهي التي تعمل على تمرير التيار في المكثف C وقيمة هذه المركبة

$$V_C = I_m X_C = I_m / \omega C$$

وهي مختلفة في الطور مع التيار بزاوية

مقدارها $\pi/2$.

بجمع هاتين المركبتين جمعا اتجاهيا

يمكن الحصول على قيمة الجهد أي

أن :

شكل (٨-١٥) : رسم مخطط ضابط

الطور بين V_C و V_R

والمحصلة V_m وعلاقتها بـ

I_m وزاوية الطور α التي

تتراوح قيمتها بين 0 و $\pi/2$

$$\begin{aligned}
 V_m &= (V_R^2 + V_C^2)^{1/2} \\
 &= \left\{ I_m^2 R^2 + I_m^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
 &= I_m \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
 \therefore Z &= \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

وهي المعادلة (٨-٤٧) نفسها. كما يمكن حساب زاوية الطور من الشكل (٨-١٥) حيث:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$$

وهي المعادلة (٨-٤٦) نفسها.

والقيمة اللحظية للقدرة في الدائرة هي:

$$P = VI$$

$$P = V_m \sin \omega t I_m \sin (\omega t + \alpha)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos \alpha - \cos (2\omega t + \alpha))$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos \alpha - V_{rms} I_{rms} \cos (2\omega t + \alpha) \quad (٨-٤٧)$$

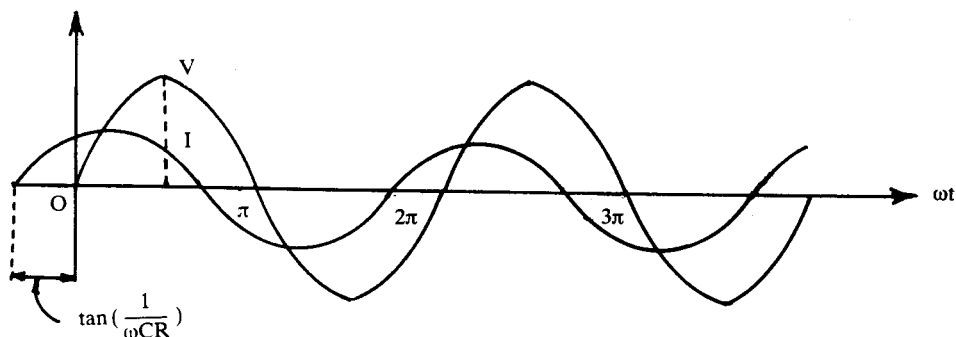
أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين، الحد الأول منها ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعالة في الدائرة، والحد الثاني كمية مترددة وقيمتها المتوسطة صفر.

وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة هي:

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos \alpha$$

وهي المعادلة (٨-٤٠) نفسها.

ويبين شكل (٨-١٦) منحني التيار والجهد في دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف

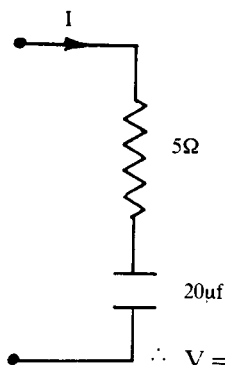


شكل (٨-١٦): العلاقة بين V ، حسب المعادلة (٨-١) و I ، حسب المعادلة (٨-٤١) ويوضح الشكل قيمة α بين V ، I .

مثال (٨-٦)

يمر في الدائرة التالية تيار قيمته $I = 2 \cos 5000t$ A احسب الجهد V المسلط عليها.

الحل



$$V = V_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore V = \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} I_m \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$V = 22.4 \cos(5000 t - 63.4) \text{ V}$$

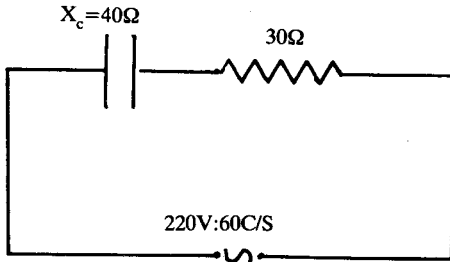
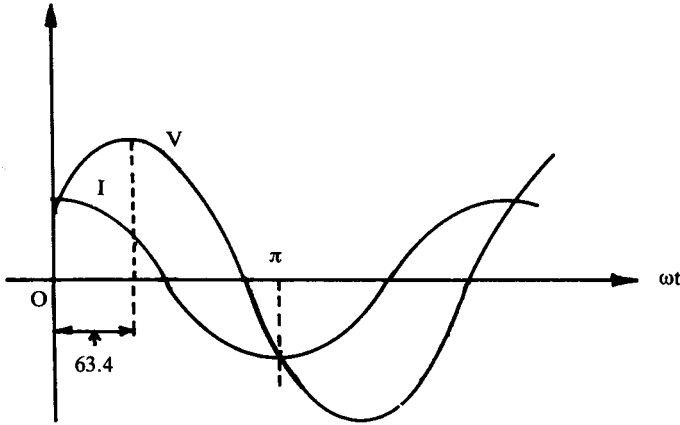
حيث

$$R = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}} = 10\Omega$$

$$\& \quad \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega CR} \right) = \tan^{-1} \frac{10}{5} = 63.4^\circ \quad , \quad I_m = 2 \text{ A}$$

$$Z = 11.18 \Omega$$

ويسبق التيار الجهد بزاوية طور مقدارها 63.4° .
والشكل التالي يوضح منحني التيار والجهد لهذه الدائرة.



مثال (٨-٧)

في الدائرة التالية احسب:

أ - التيار المار في الدائرة.

ب - زاوية الطور بين التيار والجهد.

ج - معامل القدرة.

الحل

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50\Omega$$

أ -

$$I_m = V_m / Z = 220 / 50 = 4.4 \text{ A}$$

$$\tan \alpha = X_c / R = -40 / 30 = -1.33$$

ب -

$$\therefore \alpha = -53^\circ$$

والإشارة السالبة تعني أن الجهد يتأخر عن التيار بزاوية قدرها 53° .

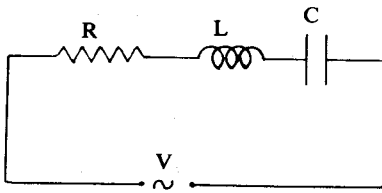
$$\cos \alpha = \cos (-53^\circ) = \cos 53 = 0.60$$

ج -

(٨-٥-٣) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي R. L. C. in series

يبين الشكل (٨-١٧) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$

موصلة في دائرة تحتوي على مقاومة (R)، هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية



شكل (٨-١٧): دائرة مترددة تحتوي على مقاومة | ولف ومكثف متصلة على التوالي.

للملف أو مجموع المقاومات الموجودة في الدائرة، ورد حثي ($X_L = \omega L$) وسعوي ($X_C = \frac{1}{\omega C}$) موصلة معا على التوالي، فإذا كانت القيمة العظمى للتيار المار في الدائرة هو I_m أمبير يلزم ثلاث مركبات للجهد لإمرار التيار في الدائرة هي:

- ١- المركبة $V_R = I_m R$ لتمرير التيار في المقاومة وتكون في اتفاق طوري مع التيار.
 - ب- المركبة $V_L = I_m \omega L$ لتمرير التيار في الملف وتكون متقدمة على التيار بزاوية $\pi/2$.
 - ج- المركبة $V_C = \frac{I_m}{\omega C}$ لتمرير التيار في المكثف وتكون متخلفة على التيار بزاوية $\pi/2$.
- والمجموع الاتجاهي لهذه المركبات الثلاثة تعطى الجهد V_m كما في شكل (٨-١١٨).
- $$\therefore V_m = \{V_R^2 + (V_L - V_C)^2\}^{1/2}$$

$$V_m = I_m \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots (٨-٤٨)$$

حيث

$$V_m = I_m Z$$

$$Z = \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots (٨-٤٩)$$

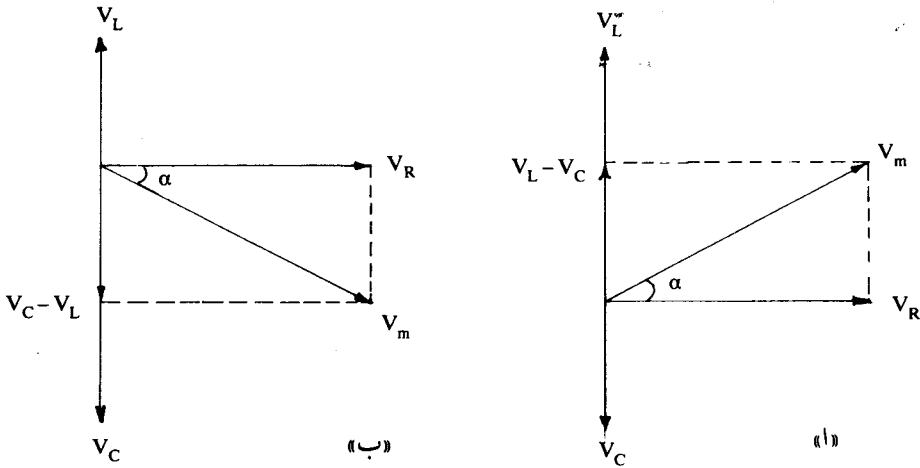
وكما هو واضح من الشكل (٨-١١٨) أن زاوية الطور تساوي:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \dots \dots (٨-٥٠)$$

توجد ثلاث حالات مختلفة بالنسبة للنتيجة التي نحصل عليها من كل من المعادلتين (٨-٤٨) و (٨-٥٠) وهي:

١ - عندما يكون الرد الحثي X_L أكبر من الرد السعوي X_C ($\omega L > \frac{1}{\omega C}$) يكون التيار متأخرا عن الجهد، ويقال للدائرة إنها ذات معاوقة حثية. ويمكن أن تعد ممانعة مكافئة فقط في الدائرة مقدارها $(X_L - X_C)$ مع اختفاء X_C ويتضح ذلك من شكل (١٨-أ).

ب - عندما يكون الرد السعوي X_C أكبر من الرد الحثي X_L أي أن $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ يكون التيار متقدما على الجهد، ويتضح ذلك من الشكل (١٨-ب)، ويقال في هذه الحالة إن الدائرة ذات معاوقة سعوية ويمكن أن تعتبر وجود ممانعة سعوية مكافئة مقدارها $(X_C - X_L)$ مع اختفاء X_L من الدائرة.



شكل (١٨-١): مخطط المتجهات بين V_L و V_C و V_R عندما $V_L > V_C$

ب - $V_L > V_C$ وفي كلتا الحالتين يوضح الشكل علاقتها مع المحصلة V_m وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (١٧-٨).

ج - عندما تتساوى كل من X_L ، X_C تكون المقاومة في هذه الحالة أصغر ما يمكن $(X_C - X_L = 0)$ ، وتكون قيمتها مساوية لقيمة المقاومة R فقط. وتكون قيمة التيار الذي ينتج في الدائرة أكبر ما يمكن $I = \frac{V}{R}$ كما أن التيار يصبح متفقا في الطور مع الجهد ($\alpha = \tan^{-1} 0 = \text{zero}$)، ويقال للدائرة في هذه الحالة إنها في

حالة رنين (resonance) ، وتكون القدرة الفعالة في الدائرة أكبر ما يمكن وذلك لأن قيمة التيار أكبر ما يمكن كما أن معامل القدرة $\cos \alpha$ يساوي الوحدة، وهذه هي قيمة النهاية العظمى له وتكون قيمة القدرة غير الفعالة مساوية للصفر.

وبلاحظ أن هبوط الجهد على الملف ($I_m X_L$) يساوي الهبوط على المكثف ($I_m X_C$) بينما هبوط الجهد على المقاومة يكون ($I_m R$) مساويا لجهد المصدر V_m . ونظرا لأن الجهد على طرفي الملف ($I_m X_L$) يساوي الجهد على المكثف ($I_m X_C$) ويضاده في الاتجاه، فإن كلا منهما يلاشي الآخر، وقد تكون قيمة كل منهما في هذه الحالة كبيرة جدا بالنسبة لجهد المصدر.

وتستخدم هذه الطريقة في دوائر الراديو للحصول على جهود كبيرة على أطراف الملفات والمكثفات باستخدام مصادر ذات جهود محدودة القيمة.

كما سبق يتضح أن شرط الرنين لابد أن يكون:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \dots\dots\dots (٨٥١)$$

وتعرف f_r هنا بالتردد الذاتي (self frequency) للدائرة وتستخدم خاصية الرنين في عملية التوليف (tuning process) في أجهزة الاستقبال حيث تتكون دائرة الايريال من ملف ومكثف على التوالي وتتولد في هذه الدائرة قوى دافعة بواسطة الموجات المنتشرة من محطات الإذاعة المختلفة وحينما نغير سعة المكثف C حتى يصبح التردد f_r مساويا لتردد الإذاعة المطلوب سماعها فإن التيار التأثيري المتولد يكون أكبر ما يمكن بالنسبة لهذا التردد دون غيره ونتمكن بذلك من سماع الإذاعة المطلوبة.

ويمكن تحقيق الشرط الوارد في المعادلة (٨٥١) بتغير قيمة التردد للمصدر، أو بتغير قيمة كل من L أو C أو كليهما معا.

ويمكن أن نحقق العلاقتين (٨٤٩) و (٨٥٠) رياضيا كالتالي:
بتطبيق قانون كيرشوف على الدائرة (٨١٧) فإن القوة الدافعة المترددة في أية لحظة هي :

$$V = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \dots \dots \dots (٨٥٢)$$

حيث $V = V_m \sin(\omega t)$ ، q الشحنة اللحظية للمكثف ، $I = I_m \sin(\omega t \pm \alpha)$ حيث α فرق الطور وبالتعويض في العلاقة (٨٥٢) يُحصل على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m \omega L \cos(\omega t - \alpha) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \left\{ \sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha \right\} + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \times \{ \cos \omega t \cos \alpha + \sin \alpha \sin \omega t \}$$

$$\therefore \sin \omega t \left\{ I_m R \cos \alpha + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \alpha - V_m \right\} + \cos \omega t \left\{ I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \alpha - I_m R \sin \alpha \right\} = 0$$

وهي صحيحة لكل قيم (ωt) وبذلك :

$$\sin \omega t = 0 , \cos \omega t = 1 \text{ فإن } \omega t = 0 \text{ عندما}$$

$$\sin \omega t = 1 , \cos \omega t = 0 \text{ فإن } \omega t = \frac{\pi}{2} \text{ عندما}$$

ومن هذين الشرطين يُحصل على :

$$V_m = I_m R \cos \alpha + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \alpha \dots (٨٥٣)$$

$$\& \quad I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \alpha = I_m R \sin \alpha \quad \dots \quad (٨-٥٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨-٥٣) على زاوية الطور حيث:

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{or} \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R}$$

وهي المعادلة (٨-٥٠) نفسها ومنها يمكن الحصول على:

$$\sin \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{\left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad \dots \quad (٨-٥٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٥٤) يمكن الحصول على الممانعة الكلية Z حيث:

$$V_m = I_m \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \therefore Z = \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨-٤٩) نفسها.

وأما متوسط القدرة فتخضع للعلاقة (٨-٤٠) نفسها حيث:

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos \alpha$$

وأخيرا نستطيع القول إنه يمكن استنتاج معادلات جميع الحالات التي سبق

دراستها من المعادلات (٨-٤٨)، (٨-٤٩) و (٨-٥٠).

مثال (٨-٨)

وصلت مقاومة مقدارها 30Ω وملف حثه الذاتي $0.5 H$ ومكثف سعته $30 \mu F$ على

التوالي بمصدر متردد جهده الفعال $220V$ وتردده $50 c/s$.

احسب الممانعة الكلية للدائرة والتيار المار ومعامل القدرة ومتوسط القدرة المستهلكة.

الحل

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.5 = 157 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 30 \times 10^{-6}} = 106 \Omega$$

وطبقا للمعادلة (٨-٤٨) فإن الممانعة الكلية :

$$Z = \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} = [30^2 + (156 - 106)^2]^{1/2} = 58.3 \Omega$$

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{220}{58.3} = 3.74 \text{ A}$$

مع ملاحظة أن القيمة المعطاة للجهد والقيمة الناتجة للتيار هي القيمة الفعالة .
وحسب المعادلة (٨-٥٥) فإن :

$$\cos \alpha = \frac{R}{Z} = \frac{30}{58.3} = 0.514$$

متوسط القدرة الفعالة

$$P_{av} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cos \alpha = I_{rms} V_{rms} \cos \alpha$$

$$P_{av} = 3.74 \times 220 \times 0.514 = 422.9 \text{ W}$$

مثال (٨-٩)

في الدائرة التالية احسب :

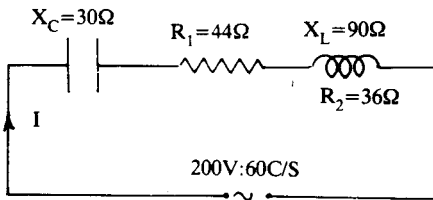
١ - التيار المار في الدائرة .

ب - فرق الجهد بين طرفي كل من

المكثف والمقاومة والملف .

ج - معامل القدرة للدائرة .

د - القدرة الممتصة بواسطة الدائرة .



الحل

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$Z = \sqrt{(44 + 36)^2 + (90 - 30)^2} = 100 \Omega$$

$$\therefore I_m = V_m / Z = 200 / 100 = 2 \text{ A}$$

- ا

$$V_C = I_m X_C = 2 \times 30 = 60 \text{ V}$$

- ب

$$V_{R1} = I_m R_1 = 2 \times 44 = 88 \text{ V}$$

$$V_L = I_m \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 2 \times 97 = 194 \text{ V}$$

$$\cos \alpha = R / Z = 80 / 100 = 0.8$$

- ج

$$P_{av} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \alpha = \frac{200 \times 2 \times 0.8}{2} = 160 \text{ W}$$

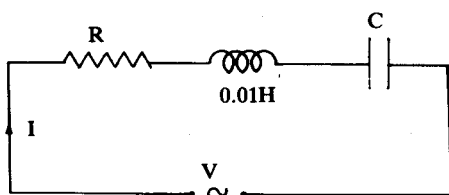
- د

مثال (٨-١٠)

احسب R و C في الدائرة التالية إذا كان :

$$V = 353.5 \cos(3000t - 10) \text{ V}$$

$$I = 12.5 \cos(3000t - 55) \text{ A}$$



الحل

التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها :

$$55 - 10 = 45^\circ$$

$$\therefore \tan 45 = 1 = (\omega L - 1/\omega C) / R \quad \therefore (\omega L - 1/\omega C) = R$$

$$\& V_m / I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{2R^2} = 353.5 / 12.5$$

$$\therefore R = 20 \Omega$$

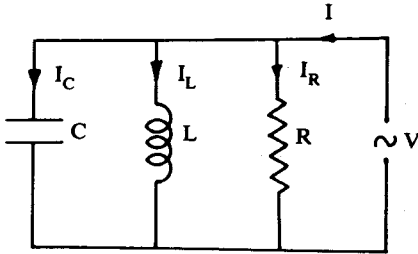
ومن المعادلة $(\omega L - 1/\omega C) = R$ يمكن معرفة C حيث :

$$C = 3.33 \times 10^{-5} \text{ F} = 33.3 \mu\text{F}$$

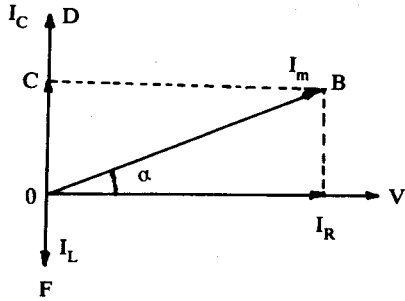
(٦-٨) دائرة التيار المتردد المتوازية «أو المتفرعة»

Parallel or Branched A.C. Circuit

(١-٦-٨) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوازي R, C and L in Parallel



شكل (٨-١٩): دائرة تيار متردد تحتوي على مقاومة R وملف L ومكثف C متصلة على التوازي.



شكل (٨-٢٠): مخطط المتجهات بين I_R ، I_L و I_C وعلاقتها بالحصلة I وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (٨-١٩).

في دوائر التيار المتردد السابقة الذكر كانت المقاومة والملف والمكثف متصلة على التوالي وكان التيار له القيمة نفسها في جميع نقاط الدائرة ولكنها إذا وصلت على التوازي فإن كل تيار يمر بفرع معين يتوقف على قيمة المقاومة أو الممانعة بهذا الفرع والمجموع الاتجاهي (vector sum) لكل التيارات المارة بكل فرع يساوي التيار الكلي للدائرة.

توجد في الدائرة شكل (٨-١٩) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$ موصلة إلى دائرة تحتوي على مقاومة R أوم ورد حتي قيمته $X_L = \omega L$ أوم ورد سعوي قيمته $X_C = \frac{1}{\omega C}$ أوم موصلة معا على التوازي. فإذا كان I هو التيار الكلي فإن:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad \dots \quad (٨-٥٦)$$

بإهمال المقاومة الأومية لكل من L ، C يمكن الحصول على:

$$I_R = \frac{V}{R}, \quad I_L = \frac{V}{\omega L}, \quad I_C = V C \omega \quad (٨-٥٧)$$

ويتضح من الشكل (٨-٢٠) أن I_L متخلف (lags) عن V بزاوية قدرها $\pi/2$ و I_C متقدم (leads) عن V بزاوية قدرها $\pi/2$.

كذلك يوضح الشكل نفسه أن التيار المار في الملف يسري في عكس اتجاه التيار المار في المكثف C وأن التيار المار في المقاومة R متفق في الطور مع V. فإذا كان OD يمثل التيار خلال C و OF يمثل التيار خلال L فإن محصلتها يمثلها OC وهذه المحصلة مع I_R تعطي المحصلة I_m والمثلة بالمتجه OB ومما تقدم نجد أن:

$$I_m = \left\{ I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \right\}^{1/2}$$

$$I_m = V \left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots (٨-٥٨)$$

ومن تعريف الممانعة (impedance) يصبح :

$$Z = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2}} \dots \dots (٨-٥٩)$$

ومقلوب Z يسمى بالقبولية (admittance) ويرمز لها بالرمز Y حيث :

$$Y = \frac{1}{Z} = \left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots (٨-٦٠)$$

ويسمى المقدار $(\omega C - 1/\omega L)$ بالتأثرية (susceptance) وهو معكوس الممانعة .

ويسبق التيار الجهد أو يتخلف عنه بزاوية قدرها α حيث :

$$\tan \alpha = \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

$$\tan \alpha = \frac{V\omega C - \frac{V}{\omega L}}{\frac{V}{R}} = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \dots \dots (٨-٦١)$$

ومن المعادلات (٨-٥٨)، (٨-٥٩) و(٨-٦١) يمكن استنتاج الحالات الآتية:

١ - إذا كان التيار $I_L = 0$

أي أن الدائرة تحتوي على مقاومة ومكثف فقط، فإن تيار الدائرة يعطى، حسب المعادلة (٨-٥٨)، بالمعادلة التالية:

$$I_m = \left(I_R^2 + I_C^2 \right)^{1/2} = V \left\{ \frac{1}{R^2} + (\omega C)^2 \right\}^{1/2} \dots (٨-٦٢)$$

حيث تصبح الممانعة:

$$Z = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{R^2} + (\omega C)^2 \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right\}^{1/2} (٨-٦٣)$$

وزاوية الطور:

$$\tan \alpha = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = R\omega C \dots\dots (٨-٦٤)$$

ب - إذا كان التيار $I_C = 0$

أي أن الدائرة تحتوي مقاومة وملف، فإن تيار الدائرة، حسب المعادلة (٨-٥٨)، يأخذ القيمة التالية:

$$I_m = \left(I_R^2 + I_L^2 \right)^{1/2} = V \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right\}^{1/2} \dots (٨-٦٥)$$

حيث تصبح الممانعة:

$$Z = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{R^2 \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \right\}^{1/2} \dots (٨-٦٦)$$

وزاوية الطور:

$$\tan \alpha = -\frac{R}{\omega L} \dots\dots\dots (٨-٦٧)$$

والإشارة السالبة هنا تدل على أن التيار المحصل متخلف عن الجهد V .

جـ - إذا كان التيار $I_R = 0$

أي أن الدائرة تحتوي على مكثف وملف فقط كما في الشكل (٨-٢١)، فإنه حسب مخطط المتجهات الواردة في الشكل (٨-٢٢) يكون التيار I_L متخلفاً عن الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ بينما يتقدم التيار I_C الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ وتكون قيمة التيار المحصل:

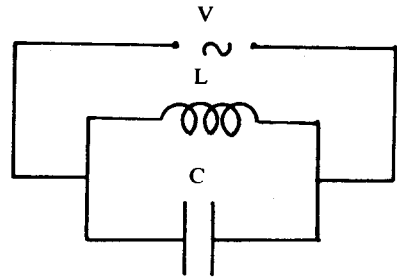
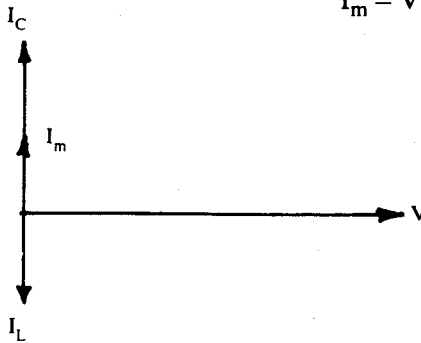
$$I_L > I_C \quad \text{إذا كان} \quad I_m = I_L - I_C$$

أو

$$I_C > I_L \quad \text{إذا كان} \quad I_m = I_C - I_L$$

وإذا أخذ في الاعتبار الحالة الأخيرة فإن شدة التيار المحصل:

$$I_m = V \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \dots\dots\dots (٨-٦٨)$$



شكل (٨-٢٢): مخطط المتجهات بين I_C و I_L للدائرة الواردة في شكل (٨-٢١) وعلاقتها بالمحصلة I

شكل (٨-٢١): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومكثف C متصلة على التوازي.

وهذا التيار يتقدم الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$. ويتضح من المعادلة (٨-٦٨) أن ممانعة هذه الدائرة هي :

$$Z = \frac{1}{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\omega L}{\omega^2 CL - 1} \dots\dots (٨-٦٩)$$

وواضح من المعادلتين (٨-٦٨) ، (٨-٦٩) أن التيار الكلي يصبح صفرا والممانعة تصبح لانهائية وذلك عند توفر شرط الرنين أي أن :

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L} \quad \therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL}$$

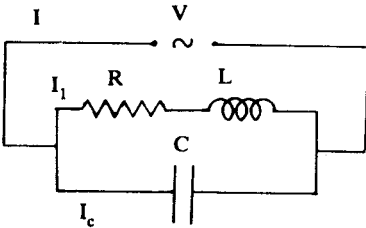
$$\therefore \omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \therefore f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}} \dots (٨-٧٠)$$

حيث f_r هو تردد الرنين الذاتي للدائرة والذي عنده يكون التيار المحصل صفرا والمقاومة الكلية ما لانهاية وتعرف الدائرة في هذه الحالة بالدائرة الخانقة (rejector circuit) تميزها لها عن دائرة رنين التوالي التي يكون فيها التيار نهاية عظمى والتي تسمى بالدائرة القابلة (acceptor circuit).

ويلاحظ أن التيار المحصل ينحفي في حالة رنين الدائرة الخانقة بينما لا ينحفي I_C ، I_L ويستفاد بالدائرة الخانقة في استبعاد الإشارة غير المرغوب فيها في الاستقبال اللاسلكي .

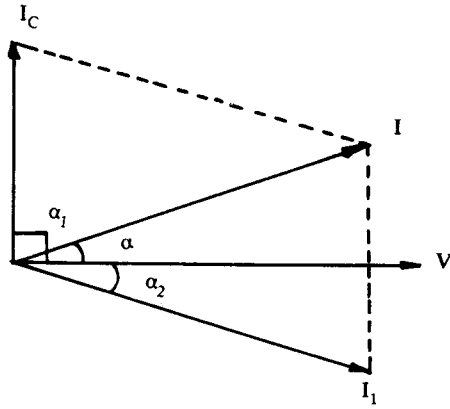
(٨-٦-٢) قوة دافعة كهربية على التوازي مع مكثف وملف حتي ذو مقاومة أومية

R L and C in Parallel

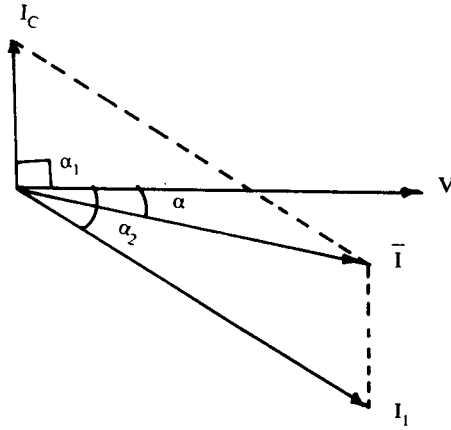


شكل (٨-٢٣) : دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L له مقاومة R يتصل على التوازي مع مكثف C

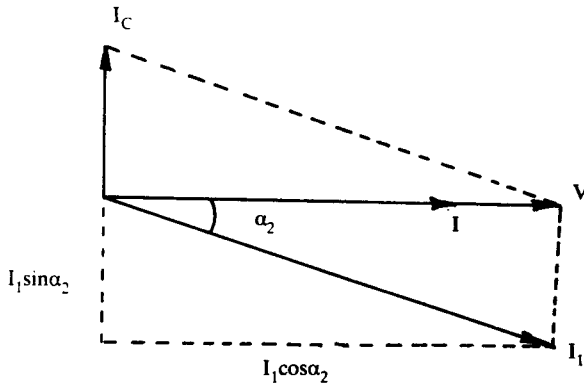
بالنظر إلى الدائرة (٨-٢٣) وإلى رسم مخطط المتجهات (٨-٢٤) يمكن القول بأن : التيار I_1 المار في الملف الذي حثه L ومقاومته R يتخلف عن الجهد بزاوية قدرها α_2 كما درس من قبل ، في الشكل (٨-١١) ، وأما التيار I_C المار في المكثف



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (٨-٢٤): خطط المتجهات بين I_c ، I_1 و V للدائرة (٨-٢٢).

الذي سعته C فيكون متقدما عن الجهد بزاوية $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ حيث :

$$I_C = V\omega C \quad \dots \quad (٨-٧١)$$

وطبقا للمعادلة (٨-٣٧) يكون :

$$I_1 = \frac{V}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} , \tan \alpha_2 = \frac{\omega L}{R} \quad \dots \quad (٨-٧٢)$$

ويكون التيار المحصل :

$$I = \{I_C^2 + I_1^2 + 2 I_C I_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2)\}^{1/2} \dots \quad (٨-٧٣)$$

وهو متقدم أو متخلف عن الجهد بزاوية α حيث :

$$\tan \alpha = \frac{I_1 \sin \alpha_2 - I_C}{I_1 \cos \alpha_2} \quad \dots \quad (٨-٧٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨-٧٢) على :

$$\sin \alpha_2 = \frac{\omega L}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}} , \cos \alpha_2 = \frac{R}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}}$$

وبالتعويض عن I_C ، I_1 من المعادلتين (٨-٧١) و (٨-٧٢) وكذلك عن $\sin \alpha_1$ ، $\cos \alpha_2$ في المعادلة (٨-٧٤) يمكن الحصول على :

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \quad \dots \quad (٨-٧٥)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٨-٧٣) يكون :

$$\begin{aligned} \cos (\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha_2 - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha_2 = -\sin \alpha_2 \end{aligned}$$

وبالتعويض عن هذه القيمة و I_1 ، I_C في المعادلة (٨-٧٣) يمكن الحصول على :

$$I_m = V \left\{ \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 CL}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2}$$

$$I_m = V \left\{ \frac{\omega^2 C^2 (R^2 + \omega^2 L^2) - 2\omega^2 CL + 1}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2}$$

$$I_m = V \left\{ \frac{\omega^2 C^2 \left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2}$$

$$I = V \left\{ \frac{\omega^2 C^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2} \dots (\text{٨-٧٦})$$

وبذلك تكون قيمة الممانعة الكلية :

$$Z = \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2} \dots (\text{٨-٧٧})$$

وبالرجوع إلى الرسم الاتجاهي شكل (٨-٢٤ ج - ٨) نجد أنه عندما يكون

$$I_C = I_1 \sin \alpha_2 \text{ فإن :}$$

$$I = I_1 \cos \alpha_2 = \frac{VR}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \dots (\text{٨-٧٨})$$

وذلك حسب المعادلة (٨-٧٣).

وهذا هو أقل تيار ممكن بالنسبة لهذه الدائرة في حالة الرنين الخائق ويصبح التيار

المحصل متفقا في الطور مع الجهد V أي أن :

$$\alpha = 0, \quad \tan \alpha = 0$$

وبالرجوع إلى معادلة (٨-٧٥) فإنه في حالة الرنين نجد أن :

$$L - C(R^2 + \omega^2 L^2) = 0$$

أو

$$L - CR^2 - C\omega_r^2 L^2 = 0$$

أو

$$-C\omega_r^2 L^2 = CR^2 - L$$

$$\therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2} \dots\dots\dots (٨٧٩)$$

وبالتعويض من (٨٧٩) في معادلة (٨٧٨) يُحصل على :

$$I = \frac{V \times RC}{L} \dots\dots\dots (٨٨٠)$$

أي أن الممانعة تصبح في هذه الحالة مكافئة لمقاومة أومية قدرها :

$$Z_r = \frac{L}{RC} \dots\dots\dots (٨٨١)$$

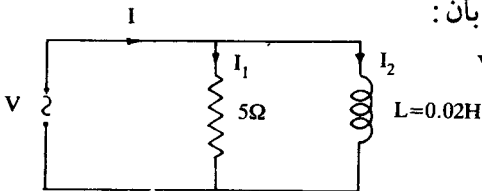
وتكون الدائرة في حالة رنين وخانقة أيضا.

وتعرف ممانعة الدائرة عند الرنين، المعادلة (٨٨١)، بالمقاومة الديناميكية (dynamic resistance) للدائرة. وتكون ممانعة الدائرة حثية عند تردد أقل من تردد الرنين وقيمتها أقل من L/RC ، في حين عند تردد أكبر من تردد الرنين تصبح الممانعة سعوية وقيمتها أقل من L/RC أيضا.

مثال (٨١١)

في الدائرة المجاورة احسب I علما بأن :

$$V = 100 \sin(1000t + 50^\circ)$$



الحل

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R} + \frac{1}{L} \int V dt$$

$$I = 20 \sin(1000t + 50^\circ) - 5 \cos(1000t + 50^\circ) \quad \dots - (ا)$$

أو

$$I = A' \sin(1000t + 50^\circ) \cos \alpha + A' \cos(1000t + 50^\circ) \sin \alpha \quad \dots - (ب)$$

من المعادلتين (ا) و (ب) يُحصل على:

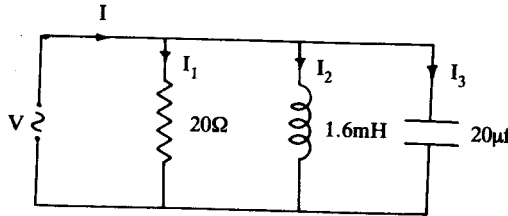
$$20 = A' \cos \alpha \quad \text{و} \quad -5 = A' \sin \alpha$$

$$\therefore \tan \alpha = -0.25 \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}(-0.25) = -14.04^\circ$$

$$\& \quad A' = \frac{20}{\cos \alpha} = 20.6$$

وبالتعويض في المعادلة (ب) يُحصل على:

$$I = 20.6 \sin(1000t + 50^\circ - 14.05^\circ) = 20.6 \sin(1000t + 35.95^\circ) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها 14.05° .

مثال (٨-١٢)

في الدائرة المجاورة احسب

I علماً بأن:

$$V = 50 \sin(5000t + 45^\circ)$$

الحل

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{V}{R} + \frac{1}{L} \int V dt + C \frac{dV}{dt}$$

$$I = 2.5 \sin(5000t + 45^\circ) - 6.25 \cos(5000t + 45^\circ)$$

$$+ 5 \cos(5000t + 45^\circ)$$

$$\therefore I = 2.5 \sin(5000t + 45^\circ) - 1.25 \cos(5000t + 45^\circ)$$

وباتباع الطريقة السابقة نفسها في المثال (٨-١١) يُحصل على:

$$I = 2.8 \sin(5000t + 18.4^\circ) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها:

$$45^\circ - 18.4^\circ = 26.6^\circ$$

(٧-٨) دوائر الرنين المتوالية والمتوازية ومعامل النوعية

Series, Parallel Resonance and Quality Factor

Series resonance (١-٧-٨) دائرة الرنين المتوالية

وجد في البند (٣-٥-٨) أن الدائرة الكهرية المكونة من مقاومة ومكثف وملف والمتصلة على التوالي كما في شكل (٨-١٧) تكون في حالة رنين عندما يكون التيار والجهد في توافق طوري وأن قيمة الممانعة الكلية تساوي قيمة المقاومة R فقط ومنه فإن:

$$V_m = I_m R$$

$$X_L = X_C \quad \text{or} \quad \omega_r = 1 / \sqrt{LC}$$

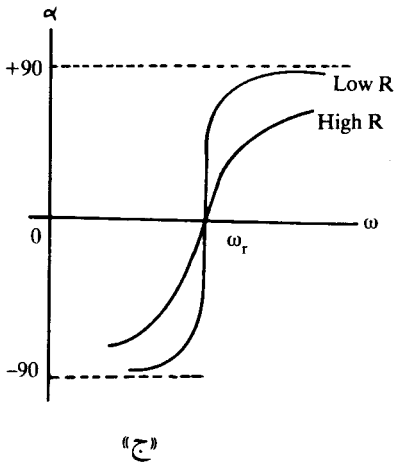
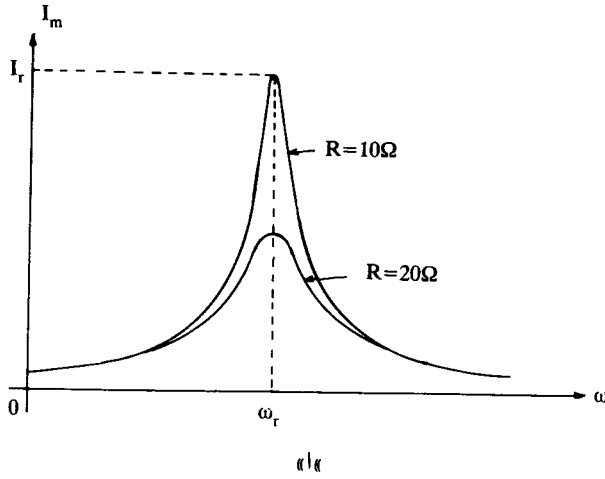
وحيث إن $\omega = 2\pi f$ فإن قيمة التردد الرنيني في هذه الحالة تعطى بالمعادلة (٨-٥١) أي أن:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \dots\dots\dots (٨-٨٢)$$

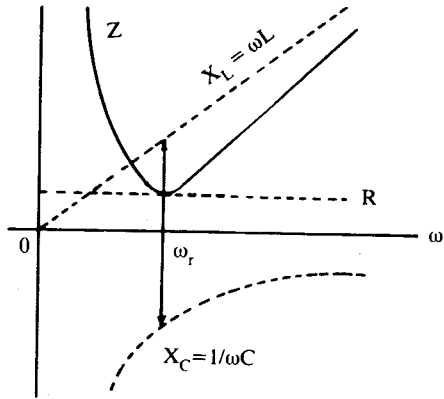
وحسب المعادلة (٨-٤٨) فإن العلاقة البيانية بين التيار المار في الدائرة I_m وتردد مصدر الجهد ω يمثلها المنحنى المبين في الشكل (٨-١٢٥) والذي يسمى بمنحنى الرنين (resonance curve) للدائرة. وتؤخذ حدة (sharpness) منحنى الرنين كمقياس للدائرة على اختيار إحدى الإشارات الموجية التي يتساوى ترددها مع التردد الذاتي f_r للدائرة. ويلاحظ من الشكل (٨-١٢٥) أن الدائرة التي تحتوي على مقاومة صغيرة تكون أكثر قدرة على الاختيار من الدائرة التي تحتوي على مقاومة كبيرة.

وبين الشكل (٨-٢٥ ب) العلاقة بين القيمة المطلقة للممانعة Z ومركباتها X_C , X_L , R وبين تردد مصدر الجهد ω ويلاحظ أنه عندما $\omega = \omega_r$ تتساوى الرادة السعوية مع الحثية.

والعلاقة بين زاوية الطور α وتردد المصدر يمثلها الشكل (٨-٢٥ ج) وواضح أنه إذا كان التردد ω أقل من التردد الرنيني ω_r فإن الرادة السعوية تكون أكبر من الرادة



«ج»



«ب»

شكل (٨-٢٥): ١ - العلاقة بين التيار I_m والسرعة الزاوية ω للدائرة المتوالية RCL الواردة في الشكل

(٨-١٧) لقيمتين مختلفتين لـ R ولتوضيح حالة الرنين ω_r .

ب - العلاقة بين القيمة المطلقة للممانعة Z ومركباتها R و X_L و X_C وبين السرعة الزاوية ω لتردد المصدر.

ج - العلاقة بين زاوية الطور وتردد المصدر.

الحثية، وزاوية الطور للممانعة تكون سالبة، وكلما اقتربت ω إلى الصفر كلما اقتربت الزاوية α إلى 90° . أما إذا كانت ω أكبر من ω_r فإن الرادة الحثية تكون أكبر من الرادة السعوية وزاوية الطور موجبة وتقترب α من 90° كلما كانت $\omega_r \gg \omega$.

ويعرف معامل النوعية (quality factor) للملفات والمكثفات والدوائر بالمعادلة:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energy stored in circuit (الطاقة المخزنة في الدائرة)}}{\text{energy dissipated per cycle (الطاقة المبددة لكل دورة)}} \quad (٨٨٣)$$

فالطاقة المبددة لكل دورة في الدائرتين الكهرييتين (٨١١) و(٨١٤) تمثل حاصل ضرب متوسط القدرة للمقاومة $(I_m / \sqrt{2})^2 R$ في زمن الدورة وقدره T أو $1/f$. وتكون الطاقة المخزنة، في الدائرة المكونة من ملف ومقاومة متصلين على التوالي، تساوي $\frac{1}{2} L I_m^2$ وبذلك فإن معامل النوعية يساوي:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{(I_m^2/2) R(1/f)} = \frac{2\pi f L}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad \dots (٨٨٤)$$

أما بالنسبة للدائرة المكونة من مكثف ومقاومة متصلين على التوالي فإن الطاقة المخزنة تساوي $\frac{1}{2} C V_m^2$ أو $\frac{1}{2} I_m^2 / \omega^2 C$ وبذلك فإن معامل النوعية يساوي:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} I_m^2 / \omega^2 C}{(I_m^2/2) R(1/f)} = \frac{1}{\omega C R} \quad \dots (٨٨٥)$$

أما في الدائرة RLC المتوالية وفي حالة الرنين يكون:

$$\frac{1}{2} C V_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$$

ومنه يُحصل على:

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} \quad \dots (٨٨٦)$$

وكما هو واضح أن حدة الرنين، لمنحنى الرنين، تعتمد على R فهي أيضا تعتمد على Q_r ويعطى فرق الجهد بين طرفي الملف والمكثف من المعادلتين التاليتين:

$$V_C = \frac{I_m}{\omega_r C} \quad , \quad V_L = I_m \omega_r L$$

$$V_C = \frac{I_m R}{\omega_r C R} \quad , \quad V_L = I_m R \frac{\omega_r L}{R} \quad \dots \quad (٨٨٧)$$

وبالتعويض من المعادلتين (٨٨٤) و (٨٨٥) في المعادلتين (٨٨٧) يمكن الحصول على:

$$V_C = Q_r V_m \quad \text{و} \quad V_L = Q_r V_m \quad \dots \quad (٨٨٨)$$

وتبين هاتان المعادلتان أن الجهد V_C و V_L أكبر من القيمة العظمى لجهد المصدر V_m وهذا يفسر تعريف الكمية Q_r بالتكبير (magnification). وبالتعويض في إحدى المعادلتين (٨٨٨) من العلاقتين (٨٨٤) و (٨٨٥) يُحصل على:

$$V_L = \frac{\omega_r L}{R} V_m = \frac{L}{R \sqrt{LC}} V_m = \frac{V_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (٨٨٩)$$

وتبين هذه المعادلة أن فرق الجهد بين طرفي الملف عند الرنين ولقيمة معينة لجهد المصدر يمكن زيادته إما بإنقاص R أو بزيادة النسبة L/C .

كذلك يستخدم المعامل Q للتعبير عن ترددين عندهما يقل التيار إلى $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من قيمته عند الرنين ويعرف هذان الترددان بنقطتي نصف القوة (half-power points) ويعطى التيار عند أي تردد، حسب المعادلة (٨٤٨)، بالمعادلة:

$$I_m = \frac{V_m}{\left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}} = \frac{V_m}{R} \frac{1}{\left\{ 1 + \left(\frac{\omega_r L}{R} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

حيث $\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$. وباعتبار أن تيار الدائرة عند الرنين يساوي $I_r = V_m/R$ فإن معادلة التيار السابقة تصبح:

$$I_m = \frac{I_r}{\left\{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right\}^{1/2}} \dots\dots (٨-٩٠)$$

وتمثل هذه المعادلة تيار الدائرة عند أي قيمة للتردد والذي يعرف بالتيار البعيد عن الرنين (off-resonance) ويستخدم بعض التقريب الذي ينطبق في الحالات العملية يمكن اعتبار أن:

$$\omega \approx \omega_r$$

$$\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \cdot \frac{\omega + \omega_r}{\omega}$$

واعتبار أن:

$$\frac{\omega + \omega_r}{\omega} \approx 2$$

وبالتالي تؤول معادلة تيار الدائرة إلى الصيغة:

$$I_m \approx \frac{I_r}{\left\{1 + (2Q)^2 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

وبوضع:

$$\omega - \omega_r = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

حيث:

$$\frac{I_m}{I_r} = 1 / \left\{1 + (2Q)^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\frac{I_m}{I_r} = 1 / \left\{1 + (2Q)^2 \left(\frac{\Delta f}{f_r} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots\dots (٨-٩١)$$

فإذا وضعت النسبة $\Delta f/f_r$ مساوية إلى $(\frac{1}{2Q})$ فإنه يمكن الحصول على:

$$\frac{I_m}{I_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (٨-٩٢)$$

وبالتالي تعطى نقطتا نصف القوة على المنحنى الرنيني بالمعادلة:

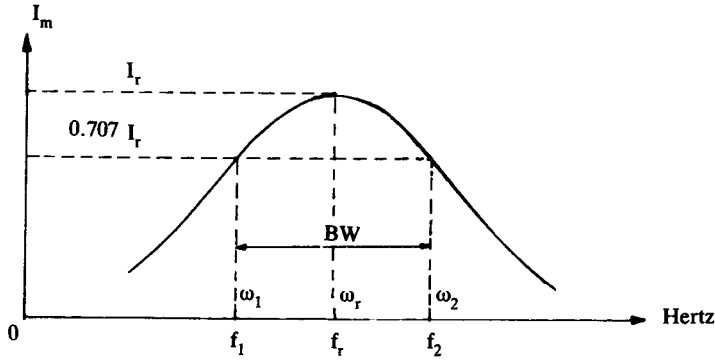
$$\frac{\Delta f}{f_r} = \pm \frac{1}{2Q} \dots\dots\dots (٨-٩٣)$$

ويبين الشكل (٨-٢٦) مدى التردد بين نقطتي نصف القوة $2\Delta f$ والذي يعرف بالاتساع الشريطي (band width - BW) ويعطى بالمعادلة :

$$BW = f_2 - f_1 = 2\Delta f = f_r / Q \dots\dots (٨-٩٤)$$

من ذلك فإن العلاقة بين التكبير Q والاتساع الشريطي تعطى بالمعادلة :

$$\frac{1}{Q} = \frac{f_2 - f_1}{f_r} \dots\dots\dots (٨-٩٥)$$



شكل (٨-٢٦) : العلاقة بين التيار I_m وتردد المصدر لتوضيح التردد الرنيني f_r للدائرة RCL المتوالية ولمعرفة الاتساع الشريطي $2\Delta f$ ونقطتي نصف القوة f_1 و f_2 .

وتعرف f_1 ، f_2 بنقطتي نصف القوة على منحنى الاستجابة . وتمثل f_1 التردد الأدنى لتردد نصف القوة (lower half-power frequency) وتمثل f_2 التردد الأعلى لتردد نصف القوة (upper half-power frequency).

ويمكن معرفة قيمة كل من f_2 ، f_1 من المعادلتين (٨-٤٨) و (٨-٩٢) كالتالي :

١ - بالنسبة للتردد f_2

يكون $X_L > X_C$ وتصبح المعادلة (٨-٤٨) كالتالي :

$$\frac{V_m}{R} = I_m \left\{ 1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2} \right\}^{1/2}$$

أو

$$\frac{I_r}{I_m} = \left\{ 1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2} \right\}^{1/2}$$

حيث $I_r = \frac{V_m}{R}$. وحسب المعادلة (٨-٩٢) تصبح هذه المعادلة كالتالي:

$$2 = 1 + \frac{(X_L - X_C)^2}{R^2}$$

أو

$$\therefore R = X_L - X_C = 2\pi f_2 L - \frac{1}{2\pi f_2 C} \quad \dots \quad (٨-٩٦)$$

ومنه فإن:

$$f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \dots \dots \quad (٨-٩٧)$$

٢ - بالنسبة للتردد f_1

يكون $X_C > X_L$ وتصبح المعادلة (٨-٩٨) كالتالي:

$$\frac{V_m}{R} = I_m \left\{ 1 + \frac{(X_C - X_L)^2}{R^2} \right\}^{1/2}$$

وباتباع الطريقة السابقة نفسها يمكن الحصول على:

$$R = X_C - X_L = \frac{1}{2\pi f_1 C} - 2\pi f_1 L \quad \dots \quad (٨-٩٨)$$

ومنه فإن:

$$f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \dots \dots \quad (٨-٩٩)$$

ومن المعادلتين (٨-٩٧) و (٨-٩٩) يمكن الحصول على:

$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} = 2\Delta f \quad \dots \dots \quad (٨-١٠٠)$$

كما هو واضح من الشكل (٨-٢٦) والمعادلة (٨-١٠٠) فإن :

$$\Delta f = f_r - f_1$$

$$\Delta f = f_2 - f_r \dots \dots \dots (٨-١٠١)$$

$$\therefore R = 4\pi(f_r - f_1)L = 4\pi(f_2 - f_r)L \dots (٨-١٠٢)$$

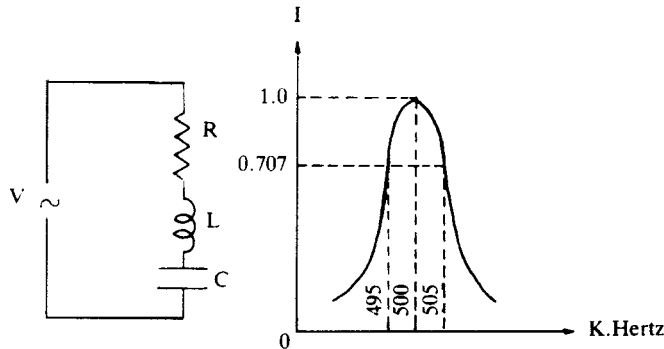
وجدير بالذكر أن R تمثل المقاومة الكلية لدائرة الرنين المتصلة على التوالي بما فيها المقاومة الداخلية لمصدر الجهد إن وجد في الدائرة .

مما تقدم أمكن الحصول على حالة الرنين بتغيير تردد المصدر مع بقاء قيم R ، C ، L ثابتة ويسمى المنحنى ، شكل (٨-٢٦) ، بين تيار الدائرة وتردد المصدر بمنحنى الرنين (resonance curve) .

كذلك يمكن الحصول على حالة الرنين بتغيير قيم L أو قيم C (عادة تتغير قيم C) مع بقاء تردد المصدر ثابت عند قيمة معينة ويسمى المنحنى بين تيار الدائرة وقيم C بمنحنى الاستجابة (response curve) .

مثال (٨-١٣)

يبين الشكل دائرة تحتوي على مكثف C وملف L له مقاومة أومية R متصلة على التوالي بمصدر جهد متغير التردد حيث جهده الفعال $3 V_{rms}$ ويرسم منحنى الرنين للدائرة وجد أنه ينطبق على المنحنى المبين بالشكل .



احسب قيمة كل من الحث الذاتي للملف وسعة المكثف والمقاومة وكذلك الجهد الواقع على طرفي هذه المكونات الثلاثة عند تردد 500 kc/s.

الحل

حيث إن الاتساع الشريطي للدائرة يساوي

$$f_r / Q = 505000 - 495000 = 10000$$

$$Q = \frac{500000}{10000} = 50$$

وحيث إن التيار عند الرنين يساوي 1A وجهد المصدر يساوي 3V

$$R = \frac{V}{I_r} = 3 \Omega$$

وباستخدام معادلة عامل النوعية حيث:

$$Q = 2\pi f_r L / R$$

يمكن إيجاد معامل الحث الذاتي للملف L. أي أن:

$$L = QR / 2\pi f_r = (50 \times 3) / (6.28 \times 500000)$$

$$L = 47.77 \times 10^{-6} \text{ H} = 47.77 \mu\text{H}$$

وحيث إن:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 L} = \frac{1}{(6.28 \times 500000)^2 \times 47.77 \times 10^{-6}}$$

$$C = 0.00212 \mu\text{F} = 2120 \text{ pF}$$

عند الرنين يُحصل على:

$$\text{Voltage across } R = I_r R = 1 \times 3 = 3\text{V}$$

$$\text{Voltage across } L = Q_r V = 50 \times 3 = 150 \text{ V}$$

$$\text{Voltage across } C = Q_r V = 150 \text{ V}$$

مثال (٨-١٤)

احسب معامل النوعية Q_r لدائرة متوالية تحتوي على :

$$C = 1\mu f , L = 0.05H , R = 20\Omega$$

مستعملا الصيغ التالية :

$$Q_r = \omega_r L/R = 1/\omega_r CR = f_r / BW$$

الحل

$$\omega_r = 1 / \sqrt{LC} = 1 / \sqrt{0.05 \times 10^{-6}} = 4470 \text{ rad/s}$$

$$\therefore f_r = \omega_r / 2\pi = 712 \text{ Hz}$$

$$\therefore Q_r = \omega_r L/R = 4470 (0.05) / 20 = 11.2$$

$$Q_r = 1 / \omega_r CR = 1 / (4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11.2$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi f_1 C} - 2\pi f_1 L = R$$

$$\& 2\pi f_2 L - \frac{1}{2\pi f_2 C} = R$$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين عن L, C, R نحصل على :

$$f_1 = 681 \text{ Hz} \& f_2 = 745 \text{ Hz}$$

$$\therefore BW = (745 - 681) \text{ Hz} = 64 \text{ Hz}$$

$$\therefore Q_r = \frac{f_r}{BW} = \frac{712}{64} = 11.1 \text{ Hz}$$

(٨-٧-٢) دائرة الرنين المتوازية Parallel resonance

إذا كان L, C, R ثابتة في الدائرة المبينة في شكل (٨-١٩) وكان جهد المصدر ثابتا وتردده متغيرا فإن العلاقة بين التيار الكلي، المعادلة (٨-٥٨)، وتردد المصدر يمثلها الشكل (٨-١٢٧).

ويتضح من هذا الشكل ما يلي :

١ - يكون التيار أقل ما يمكن عند حالة الرنين وفيه تكون الرادة السعوية تساوي الرادة الحثية، $X_C = X_L$ ويلغى التيار I_C المار في المكثف التيار المار في الملف I_L والمختلف معه في الطور ولا يبقى إلا التيار المار في المقاومة فقط ولذلك تعتمد قيمة التيار على

قيمة المقاومة R ، فإذا كانت R كبيرة يكون التيار صغيرا والعكس إذا كانت R صغيرة يكون التيار كبيرا.

ويمكن الحصول من المعادلة (٨-٥٨) على :

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L}$$

أو

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \dots\dots\dots (٨-١٠٣)$$

و

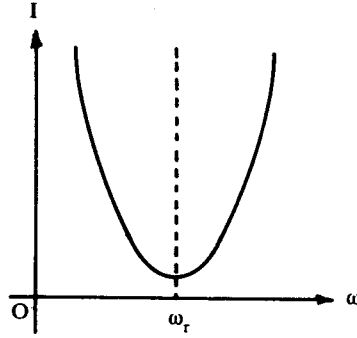
$$\therefore I_r = \frac{V_r}{R} \dots\dots\dots (٨-١٠٤)$$

٢ - إذا كان التردد أقل من التردد الرنيني يكون التيار المار في الملف L أكبر من التيار المكثف C وذلك بسبب أن الرادة الحثية تكون صغيرة في حالة التردد المنخفض بينما تكون الرادة السعوية كبيرة ويحصل في هذه الحالة إلغاء جزئي بين I_C و I_L ويكون التيار الكلي أكبر منه في حالة الرنين.

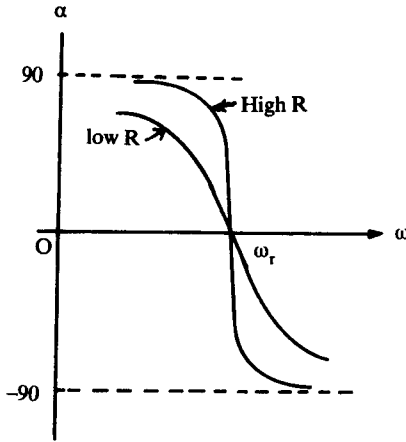
٣ - إذا كان التردد أعلى من التردد الرنيني تكون الحالة عكسية حيث يكون التيار I_C أكبر من I_L ويزداد بذلك التيار الكلي. ويدراسة مماثلة لدائرة الرنين المتوالية فإن التيار البعيد عن الرنين وعلاقته بـ ω يمكن الحصول عليه من المعادلة (٨-٥٨) حيث يكون :

$$I = I_r / \left\{ 1 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (٨-١٠٥)$$

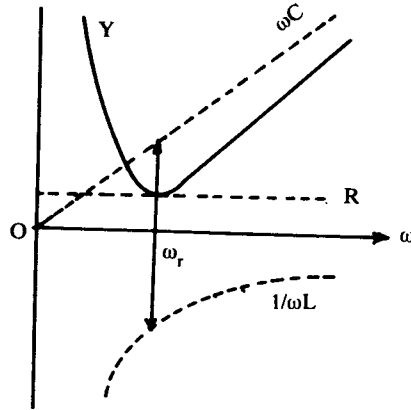
ويوضح الشكل (٢٧ ب - ٨) العلاقة بين Y وبين ω نللمصدر كما يوضح الشكل (٢٧ ج - ٨) العلاقة بين زاوية الطور α و ω وذلك حسب المعادلتين (٨-٦٠) و (٨-٦١).



(أ)



(جـ)



(بـ)

شكل (٨-٢٧): ١ - العلاقة بين التيار I للدائرة المتوازية RCL الواردة في الشكل (٨-١٩)

وتردد المصدر f حيث $\omega = 2\pi f$ لتوضيح حدوث الرنين ω_r

ب - العلاقة بين السحاحة Y ومركباتها R ، X_L و X_C وبين تردد المصدر.

ج - العلاقة بين زاوية الطور α وتردد المصدر أيضا.

وإذا درست الدائرة الواردة في الشكل (٨-٢٣) وكانت المقاومة الأومية (R) للملف أقل كثيرا من الممانعة الحثية ($X_L = \omega L$) ، فإن المعادلة (٨-٧٩) تؤول إلى الصيغة التقريبية التالية :

$$\omega_r^2 = 1 / LC$$

$$\therefore f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \dots\dots\dots (٨-١٠٦)$$

حيث f_r يمثل تردد الرنين الخائق المقابل للممانعة L/CR . وفي هذه الحالة يمكن صياغة المعادلة (٨-٨١) لتصبح على الصورة :

$$Z_r = \frac{L}{CR} = \frac{\omega_r L}{\omega_r CR} = \frac{Q}{\omega_r C} = Q \omega_r L \dots\dots (٨-١٠٧)$$

حيث عامل النوعية :

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR}$$

وذلك عند حالة الرنين الخائق .

ويمكن استنتاج نقطتي نصف القوة بطريقة مماثلة للدائرة المتصلة على التوالي وذلك باعتبار الممانعة البعيدة عن الرنين (off-resonance) المثلة بالمعادلة (٨-٧٧) حيث

$$Z = \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$Z = \frac{L}{RC} \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 \left[1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$Z = \frac{L}{RC} \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 \left[1 + \frac{\omega_r^2 L^2}{R^2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

وباعتبار أن: $\omega \approx \omega_r$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \cdot \frac{\omega + \omega_r}{\omega}$$

و

$$\frac{\omega + \omega_r}{\omega_r} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore Z &= \frac{L}{RC} \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 \left[1 + (2Q)^2 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{L}{RC} \left\{ \frac{(1/Q^2) + 1}{1 + (2Q)^2 \left(\frac{\Delta f}{f_r} \right)^2} \right\}^{1/2} \dots (\text{٨-١٠٨}) \end{aligned}$$

حيث اعتبر أن:

$$\omega - \omega_r = \Delta \omega = 2\pi \Delta f$$

و

$$\omega_r = 2\pi f_r$$

وحيث إنه فرض مسبقاً أن $R \ll X_L$ فإن: $\frac{1}{Q_r} \ll 1$

$$Z = Z_r \frac{1}{\left\{ 1 + (2Q)^2 \left(\frac{\Delta f}{f_r} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\frac{Z}{Z_r} = 1 / \left\{ 1 + (2Q)^2 \left(\frac{\Delta f}{f_r} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots (\text{٨-١٠٩})$$

فإذا كانت النسبة $\Delta f/f_r$ تساوي $\frac{1}{2Q}$ فإن النسبة بين الممانعة البعيدة عن الرنين إلى الممانعة عند الرنين تؤول إلى الصيغة:

$$\frac{Z}{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots (\text{٨-١١٠})$$

وتكون نقطتا نصف القوة لهذه الدائرة ممثلتين لحالة دائرة متصلة على التوالي
ولذلك فإن :

$$\frac{\Delta f}{f_r} = \pm \frac{1}{2Q}$$

أي أن الاتساع الشريطي للدائرة يعطى بالمعادلة :

$$f_2 - f_1 = 2\Delta f = \frac{f_r}{Q} \dots\dots\dots (٨-١١١)$$

حيث f_1 ، f_2 هما نقطتا نصف القوة على العلاقة البيانية بين ممانعة الدائرة والتردد .

(٨-٨) استخدام الأعداد المركبة وتطبيقات عامة

Complex Numbers Usage

(٨-٨-١) استخدام الأعداد المركبة في دوائر التيار المتردد

Complex numbers in A.C. circuits

طريقة التحليل هذه لدوائر التيار المتردد تعرف بمتجه الطور الجبري (phasor algebra) أو في بعض الأحيان بالمتجه الجبري (vector algebra) أو بالجبر المركب (complex algebra) أو الأعداد المركبة .

وتستخدم هذه الطريقة في حالة الدوائر المركبة التي تحتوي على مصادر جهد متردد وممانعات ثابتة تعمل تحت ظروف مستقرة ، بمعنى أن التغير في الجهد والتيار يتكرر بانتظام مثل التغير الدوري الحادث للأشكال الموجبة الجيبية .

لقد درس في البنود السابقة حساب الممانعة الكلية وزاوية الطور لدوائر التيار المتردد بطريقتين إحداهما طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها والثانية طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات) . ويصعب استعمال هاتين الطريقتين كلما تعقدت الدائرة الكهرية المراد دراستها . وقد وجد أنه باستعمال طريقة

الأعداد المركبة يمكن دراسة دوائر التيار المتردد المعقدة بسهولة كما يمكن دراسة الدوائر التي درست في البنود السابقة بسهولة أكثر من الطريقتين السابقتين .

يتكون العدد المركب، كما هو معروف، من معادلة رياضية تشتمل على كميات حقيقية وكميات تخيلية، سيرد تفصيل ذلك في الملحق (٢)، ويكتب بالصورة التالية:

$$Z = x + iy ; i = \sqrt{-1} \dots \dots (٨-١١٢)$$

ويمكن تمثيل هذا العدد بيانيا كما في الشكل (٨-٢٨) حيث يمثل المحور x الجزء الحقيقي (real part) بينما يمثل المحور y الجزء التخيلي (imaginary part) .

إذا مثلت المقاومة الأومية R والرّد الحثي $X_L = \omega L$ والرّد السعوي $X_C = 1/\omega C$ بيانيا، مع أخذ التيار I_m كخط إسناد، كما في الشكل (٨-٢٩) ووُزن بالشكل (٨-٢٨) فإنه يمكن القول إن R تمثل الجزء الحقيقي بينما X_L تمثل الجزء التخيلي الموجب و X_C تمثل الجزء التخيلي السالب .

لذلك إذا احتوت الدائرة الكهربائية على مقاومات أومية وملفات ومكثفات متصلة على التوالي فإن الممانعة الكلية المركبة يمكن حسابها بجمع المقاومات الأومية، تمثل الجزء الحقيقي، وجمع الرّدود الحثية X_L والرّدود السعوية X_C ، تمثل الجزء التخيلي بحيث تصبح معادلة الممانعة الكلية المركبة Z كالتالي:

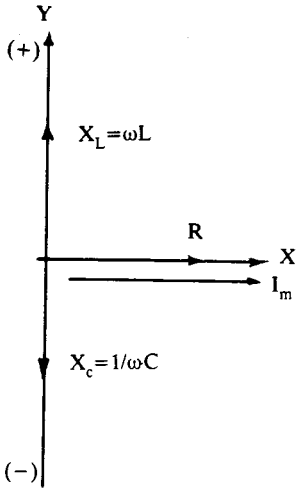
$$Z = (\text{العدد الحقيقي} = \text{مقاومات}) + i \{ (\text{الرّدود السعوية} - \text{الرّدود الحثية}) \} \quad (٨-١١٣)$$

فإذا كانت نتيجة الجزء التخيلي موجبة يمكن القول بأن الممانعة المركبة تكافئ دائرة مكونة من مقاومة وملف وتكون القيمة المطلقة للممانعة هي:

$$Z = \{ (\text{العدد الحقيقي})^2 + (\text{العدد التخيلي})^2 \}^{1/2} \dots \dots (٨-١١٤)$$

ويصنع اتجاهها مع الاتجاه الحقيقي الموجب زاوية α ، تسمى بزاوية الطور، مقدارها

$$\tan \alpha = \frac{\text{التخيلي}}{\text{الحقيقي}} \dots \dots (٨-١١٥)$$



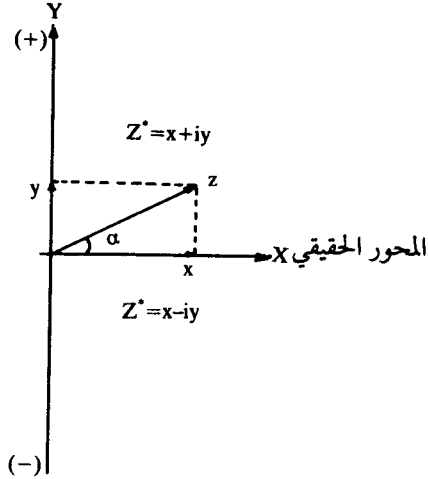
شكل (٨-٢٩): تمثيل المقاومة الأومية R

«كجزء حقيقي» والرد

الحثي X_L «كجزء تخيليموجب» والرد السعوي X_C

«كجزء تخيلي سالب».

المحور التخيلي



شكل (٨-٢٨): تمثيل العدد المركب Z على

محوري X «الحقيقي» و Y

«التخيلي».

أما إذا كانت نتيجة الجزء التخيلي سالبة فإن الممانعة المركبة تكافئ ممانعة دائرة مكونة من مقاومة ومكثف. قيمتها المطلقة وزاوية الطور في هذه الحالة تماثل الحالة السابقة.

فإذا احتوت الدائرة الكهرية على فروع مختلفة وكل فرع يحتوي على مقاومات وملفات ومكثفات فإن الممانعة الكلية المركبة تحسب بحساب ممانعة كل فرع ثم تجمع ممانعات الفروع حسب الطريقة المتبعة لجمع المقاومات الأومية المعروفة على التوازي والتوالي.

بعد حساب الممانعة الكلية المركبة يمكن حساب زاوية الفرق في الطور باستعمال المعادلة (٨-١١٥).

كما يمكن معرفة أن المقاومة الأومية R تمثل الجزء الحقيقي والرد الحثي يمثل الجزء التخيلي الموجب والرد السعوي يمثل الجزء التخيلي السالب مما يلي:

١ - ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف على التوالي
نفرض أن مصدرا مترددا قوته الدافعة الكهربائية V حيث :

$$V = V_m e^{i\omega t} \dots\dots\dots (٨-١١٦)$$

يدفع تيارا مترددا قدره I في مقاومة R وملف حثه الذاتي L متصلة على التوالي كما في شكل (٨-١١). كما هو واضح من المعادلتين (٢-٥٥) و (٢-٥٦) ملحق ٢ أن الدالة $e^{i\omega t}$ تشمل $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$. وبتطبيق قاعدة كيرشوف لتوزيع الجهد على الدائرة المبينة بالشكل (٨-١١) يمكن الحصول على :

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V_m e^{i\omega t} \dots\dots\dots (٨-١١٧)$$

وهذه هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها هو أن يكون $I = Ke^{i\omega t}$ وبالتعويض في المعادلة (٨-١١٧) يُحصل على :

$$RKe^{i\omega t} + i\omega L Ke^{i\omega t} = V_m e^{i\omega t}$$

ويمكن الحصول من هذه المعادلة على :

$$K = \frac{V_m}{R + i\omega L} \quad \therefore I = \frac{V_m}{R + i\omega L} e^{i\omega t}$$

$$\therefore Z = \frac{V}{I} = \frac{V_m e^{i\omega t}}{\frac{V_m}{R + i\omega L} e^{i\omega t}} = R + i\omega L \quad . \quad (٨-١١٨)$$

وبذلك فالممانعة المركبة لهذه الدائرة تحتوي على جزء حقيقي R وتخيلي $i\omega L$.

ب - ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف على التوالي

نفرض أن المصدر نفسه متصل على التوالي مع مقاومة R ومكثف سعته C وبتطبيق قاعدة كيرشوف على الدائرة شكل (٨-١٤) نكتب معادلتها بالصورة التالية :

$$RI + \frac{1}{C} \int Idt = V_m e^{i\omega t}$$

وإذا فرض أن $I = Ke^{i\omega t}$ وبالتعويض في هذه المعادلة يكون :

$$R K e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C} K e^{i\omega t} = V_m e^{i\omega t}$$

ويمكن الحصول من هذه المعادلة على :

$$K = \frac{V_m}{R + (1/i\omega C)} = \frac{V_m}{R - i(1/\omega C)}$$

$$\therefore I = \frac{V_m}{R - i(1/\omega C)} e^{i\omega t}$$

$$\therefore Z = \frac{V_m e^{i\omega t}}{\frac{V_m}{R - i(1/\omega C)} e^{i\omega t}} = R - i(1/\omega C) \quad (٨-١١٩)$$

وهذه الممانعة تحتوي على جزء حقيقي R وتخييلي $-i(1/\omega C)$.

من المعادلتين (٨-١١٨) و (٨-١١٩) يتضح أنه عند حساب ممانعة أي دائرة مترددة أن الممانعة عدد مركب Z يحتوي على جزء حقيقي R إذا كانت هناك مقاومات وجزء تخيلي $i\omega L$ للملف و $-i(1/\omega C)$ للمكثف.

ومن المعادلة (٨-١١٨) والمعادلتين (٢-٥٣) و (٢-٥٤) ملحق ٢ تكون القيمة المطلقة للممانعة للدائرة [شكل (٨-١١)] هي :

$$|Z| = \left\{ (R^2 + (\omega L)^2) \right\}^{1/2}$$

وزاوية فرق الطور هي :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

وهما المعادلتان (٨-٣٦) و (٨-٣٨) نفسيهما اللتان تم الحصول عليهما في البند (٨-١٥). ويمكن بالطريقة نفسها الحصول من المعادلة (٨-١١٩) على قيمتي الممانعة وزاوية الطور والمائلة للمعادلتين (٨-٤٦) و (٨-٤٧) أي أن :

$$|Z| = \left\{ (R^2 + (1/\omega C)^2) \right\}^{1/2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\omega CR} \right)$$

والإشارة السالبة تدل على تأخر الجهد عن التيار بزاوية طور مقدارها α .

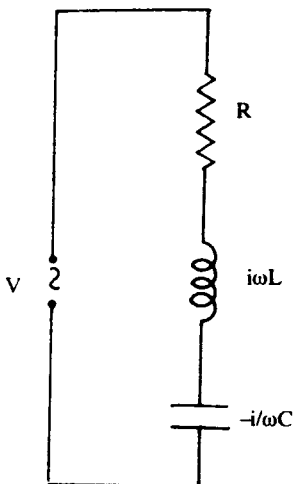
كما سبق دراسته في هذا البند وما سيرد في الملحق ٢ عن خواص الأعداد المركبة يمكن بسهولة دراسة الدوائر الكهربائية المترددة ويتضح ذلك من التطبيقات والأمثلة المحلولة التالية.

(٨-٣٠) تطبيقات على استعمال الأعداد المركبة

١ - ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف ومكثف على التوالي

تعطى ممانعة الدائرة المبينة في شكل

(٨-٣٠)، البند (٨-٣٠) بالمعادلة:



$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

$$= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

وقيمة هذه الممانعة هي:

$$\therefore |Z| = \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨-٤٩) نفسها.

فيما تعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة: شكل (٨-٣٠): الدائرة المتوالية RCL

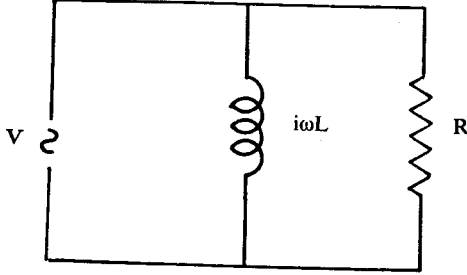
باستخدام رموز الأعداد
المركبة لممانعة عناصر
الدائرة.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

ب - ممانعة دائرة تحتوي على مقاومة وملف على التوازي

تعطى قبولية هذه الدائرة المبينة في

شكل (٨-٣١) بالمعادلة:



$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}$$

وتكون الممانعة الكلية للدائرة هي:

$$Z = \frac{iR\omega L}{R + i\omega L}$$

شكل (٨-٣١): الدائرة المتوازية R و L والأعداد المركبة.

وبضرب البسط والمقام بالمرافق نحصل على:

$$Z = \frac{iR\omega L}{R + i\omega L} \times \frac{R - i\omega L}{R - i\omega L}$$

$$\therefore Z = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

وتكون قيمة الممانعة هي:

$$\therefore |Z| = \left\{ \frac{\omega^4 L^4 R^2 + \omega^2 R^4 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\omega^2 L^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨-٦٦) نفسها.

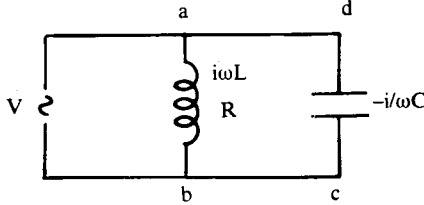
وتعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$$

وهذه هي المعادلة (٨-٦٨) نفسها.

ج - ممانعة دائرة تحتوي على ملف حثي ذي مقاومة أومية ومتصل على التوازي

بمكثف



يمثل هذه الحالة الشكل (٨-٣٢)

بفرض أن ممانعة الفرع ab هي Z_1 والفرع cb هي Z_2 فتكون القبولية الكلية للفرعين

هي :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

شكل (٨-٣٢) : الدائرة المتوازية (L و R) و C والأعداد المركبة.

أي أن ممانعة الدائرة هي :

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\therefore Z_1 = R + i\omega L, \quad Z_2 = \frac{-i}{\omega C}$$

$$\therefore Z = \frac{(R + i\omega L) \left(-\frac{i}{\omega C} \right)}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

وبضرب بسط ومقام هذه المعادلة في المرافق $\{R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C})\}$ نحصل على الممانعة الكلية للدائرة على الصورة :

$$Z = \frac{\left(\frac{RL}{C} - \frac{R}{\omega C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) - i \left(\frac{R^2}{\omega C} + \frac{L}{C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

وتكون قيمة هذه الممانعة هي :

$$|Z| = \left\{ \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}} \right\}^{1/2}$$

وتعطى زاوية الفرق في الطور بالمعادلة :

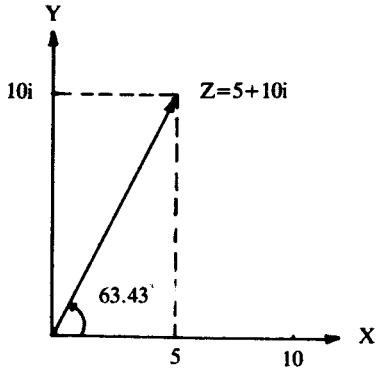
$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \right\}$$

وهما المعادلتان (٨-٧٥) و(٨-٧٦) نفسيهما.

مثال (٨-١٤)

دائرة مكونة من ملف حثه الذاتي $L = 2\text{mH}$ ومقاومة قدرها 5Ω متصلة على التوالي ويتصل بهما قوة دافعة كهربية مترددة قدرها $V = 150 \sin 5000t$. احسب الممانعة المركبة Z وزاوية الطور.

الحل



$$X_L = \omega L = 5000 \times 2 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

$$Z = 5 + 10i$$

والقيمة المطلقة لهذا العدد المركب هو:

$$|Z| = \sqrt{25 + 100} = 11.18\Omega$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{10}{5} = 63.43^\circ$$

وباستخدام النموذج القطبي، معادلة

(٢-٥٧) ملحق ٢ يكون:

$$Z = 11.18 \angle 63.43^\circ \Omega$$

مثال (٨-١٥)

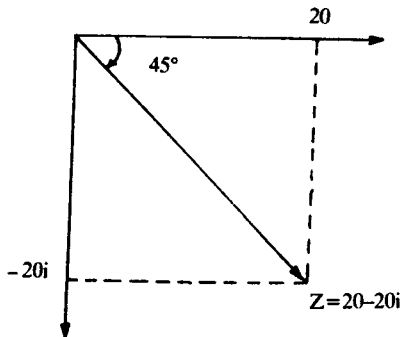
دائرة مكونة من مكثف سعته

$C = 5\mu\text{F}$ ومقاومة قدرها $R = 20\Omega$ متصلة

على التوالي ويتصل بهما قوة دافعة كهربية

مترددة قدرها $V = 150 \cos 10,000t$ احسب

الممانعة المركبة وزاوية الطور.



الحل

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10,000 \times 5 \times 10^{-6}} = 20 \Omega$$

$$Z = 20 - i20$$

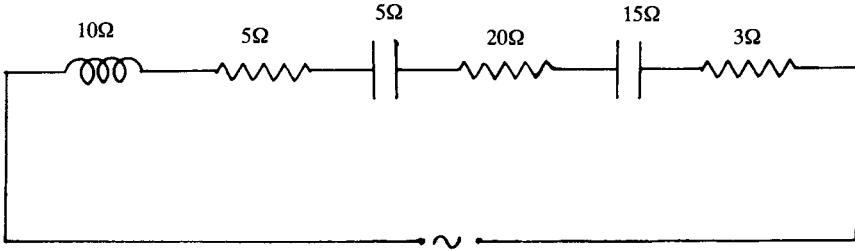
$$\therefore |Z| = \sqrt{400 + 400} = 28.28 \Omega$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{-20}{20} = -45^\circ$$

وباستخدام النموذج القطبي يكون لدينا $Z = 28.28 \angle -45^\circ$

مثال (٨-١٦)

احسب الممانعة الكلية وقيمة الجهد V ومعامل القدرة في الدائرة المبينة بالشكل (المجاور) علماً بأن المقاومات والممانعات الحثية والسعوية معطاة بالأوم وأن التيار المار بالدائرة تساوي قيمته العظمى 7 A .



الحل

يمكن كتابة الممانعة الكلية للدائرة على الصورة التالية :

$$Z = 10i + 5 - 5i + 20 - 15i + 3 = 28 - 10i$$

أي أن الممانعة الكلية تكافئ مقاومة أومية قدرها 28Ω ومكثف رده السعوي قدره 10Ω متصلان على التوالي .

$$\therefore |Z| = \{(28)^2 + (10)^2\}^{1/2} = 29.7 \Omega$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{10}{28} \quad \therefore V = IZ$$

$$\therefore V = 7 \times 29.7 = 207.9 \text{ V}$$

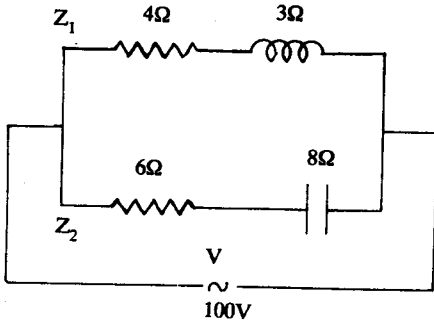
ولو اعتبر التيار ممثلاً على الجهة الموجبة للمحور الحقيقي فإن الجهد سوف يتخلف عنه بزاوية ظلها $\frac{10}{38}$. وبهذا فإن معامل القدرة

$$\cos \alpha = \frac{28}{29.7} = 0.943$$

مثال (٨-١٧)

احسب الممانعة الكلية للدائرة المبينة بالشكل (المجاور) ثم احسب التيار الكلي وكذلك القدرة المعطاة للدائرة علماً بأن الرد الحثي والسعوي والمقاومات مكتوبة بالأوم.

الحل



$$\therefore \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\therefore Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z = \frac{(4 + 3i)(6 - 8i)}{(4 + 3i) + (6 - 8i)} = \frac{48 - 14i}{10 - 5i}$$

وبالضرب في المرافق يُحصل على:

$$\therefore Z = \frac{(48 - 14i)(10 + 5i)}{(10 - 5i)(10 + 5i)} = 4.4 + 0.8i$$

أي أن الممانعة الكلية للدائرة تكافئ ممانعة متكونة من مقاومة أومية قدرها 4.4 أوم وملف رده الحثي قدره 0.8 أوم.

$$|Z| = \{(4.4)^2 + (0.8)^2\}^{1/2} = 4.47 \Omega$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{0.8}{4.4} \quad \& \quad \cos \alpha = 0.984 \quad \therefore \alpha = 10.3^\circ$$

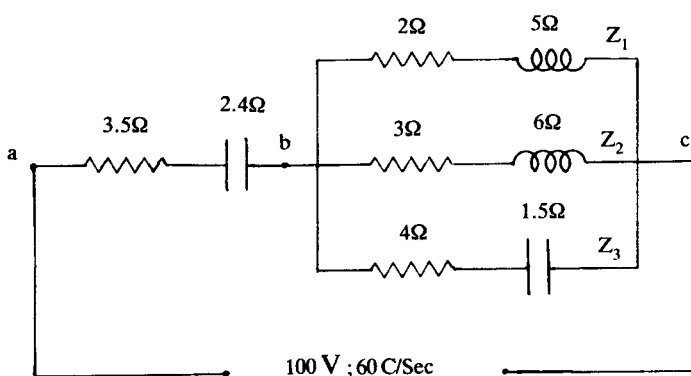
$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{4.46} = 22.4 \text{ A}$$

ويتخلف هذا التيار عن الجهد بمقدار الزاوية α وتكون القدرة:

$$\therefore P = IV \cos \alpha = 22.4 \times 100 \times 0.984 = 2204 \text{ W}$$

مثال (٨-١٨)

احسب الممانعة الكلية والتيار المار في كل فرع وفرق الجهد بين ab وكذلك القدرة الكلية للدائرة المبينة بالشكل (الآتي) علماً بأن الرد الحثي والرد السعوي والمقاومات معطاة بالأوم.



الحل

ممانعة المقاومة والمكثف بين النقطتين a و b تعطى بالمعادلة:

$$Z_{ab} = 3.5 - 2.4i$$

أما قبولية كل فرع من الفروع المتوازية فهي كالتالي:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2 + 5i} \times \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = 0.069 - 0.172i$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{3 + 6i} \times \frac{3 - 6i}{3 - 6i} = 0.0667 - 0.134i$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{4 - 1.5i} \times \frac{4 + 1.5i}{4 + 1.5i} = 0.22 + 0.082i$$

$$\therefore Y_{bc} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.356 - 0.224i$$

$$\therefore Z_{bc} = \frac{1}{0.356 - 0.224i} = 2.01 + 1.27i$$

وبذلك فإن الممانعة المركبة الكلية تساوي :

$$Z_{ac} = Z_{ab} + Z_{bc} = 3.5 - 2.4i + 2.01 + 1.27i = 5.51 - 1.13i$$

وقيمتها المطلقة هي :

$$|Z| = \{(5.51)^2 + (1.13)^2\}^{1/2} = 5.62 \Omega$$

وإذا فرض أن الجهد الكلي V يمثله على الجانب الموجب لمحور الكميات الحقيقية علما

بأن هذا التمثيل اختياري

$$\therefore V = 100 + \text{zero} \times i$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{5.51 - 1.13i} = 17.4 + 3.56i$$

$$\begin{aligned} V_{bc} &= I Z_{bc} = (17.4 + 3.56i)(2.01 + 1.27i) \\ &= (30.5 + 29.3i) \end{aligned}$$

$$\therefore I_1 = (30.5 + 29.3i)(0.069 - 0.172i)$$

$$\therefore I_1 = 7.15 - 3.22i$$

وبالمثل فإن

$$I_2 = 5.97 - 2.14i$$

$$I_3 = 4.29 + 8.95i$$

وللتأكد من صحة الجواب فلا بد أن يكون

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

وهذا إثبات لقاعدة كيرشوف الأولى بشرط التعبير بالأعداد المركبة .

$$\begin{aligned} V_{ab} &= I Z_{ab} = (17.4 + 3.56i)(3.5 - 2.4i) \\ &= 69.5 - 29.3i \end{aligned}$$

وللتأكد من صحة الجواب فلا بد أن يكون الجهد الكلي :

$$V = V_{ab} + V_{bc}$$

وهذا إثبات لقاعدة كيرشوف الثانية بشرط التعبير بالأعداد المركبة . ولذلك فإن القيم المطلقة لفروق الجهد والتيار هي :

$$|V_{ab}| = \{(69.5)^2 + (29.3)^2\}^{1/2} = 75.4V$$

$$|V_{bc}| = \{(30.5)^2 + (29.3)^2\}^{1/2} = 42.3 V$$

$$|I_1| = \{(7.15)^2 + (3.22)^2\}^{1/2} = 7.84 A$$

$$|I_2| = \{(5.97)^2 + (2.14)^2\}^{1/2} = 6.35 A$$

$$|I_3| = \{(4.29)^2 + (8.95)^2\}^{1/2} = 9.92 A$$

$$|I| = \{(17.4)^2 + (3.56)^2\}^{1/2} = 17.7 A$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{3.56}{17.4} \quad \& \quad \cos \alpha = \frac{17.4}{17.7} = 0.983$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ 15'$$

وهي الزاوية التي يسبق التيار بها الجهد .

وأما القدرة فهي :

$$P = I V \cos \alpha$$

$$\therefore P = 17.7 \times 100 \times 0.980 = 1740 W$$

ويمكن حسابها أيضا بطريقة أخرى كما يلي :

$$\therefore Z_{ac} = 5.51 - 1.13i$$

ومعنى هذا أن المقاومة الأومية المكافئة للدائرة كلها 5.62Ω وهذه هي التي تستهلك القدرة على هيئة حرارة وأما المكثفات والملفات بالدائرة فلا تستهلك شيئا .

$$\therefore P = Z I^2 = 5.62 \times (17.76)^2 = 1740W$$

مثال (٨١٩)

باستخدام ضابط الطور (phasor) الوارد في المعادلة (٢-٥٧) ملحق ٢ .

احسب :

١ - التيار المار في دائرة تحتوي على $R = 10\Omega$ و $C = 4\mu f$ متصلة على التوالي وعليها

جهد قدره $V = 500 \cos (250t - 20)V$ ، كما في شكل (١٤ - ٨) .

ب - التيار المار في دائرة تحتوي على $R = 8\Omega$ و $L = 0.02H$ متصلة على التوالي وعليها

جهد قدره $V = 283 \sin(300t + 90)$ ، كما في شكل (١١ - ٨) .

ج - الممانعة الكلية لدائرة الجهد عليها والتيار المار فيها تحدده المعادلتان :

$$V = 150 \sin(500t + 45) \quad V$$

$$I = 3 \sin(500t - 15) \quad V$$

وما هي مكونات الدائرة؟

الحل

$$X_C = 1/\omega C = 1/(2500)(40 \times 10^{-6}) = 10 \Omega$$

- ا

$$Z = 10 - i10 = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

$$V = 500 \angle -20$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{500 \angle -20}{10\sqrt{2} \angle -45} = 25\sqrt{2} \angle 25 \text{ A}$$

$$\therefore I = 25\sqrt{2} \cos(2500t + 25^\circ) \text{ A}$$

$$X_L = \omega L = 300(0.02) = 6 \Omega$$

- ب

$$\therefore Z = 8 + i6 = 10 \angle 36.9 \Omega$$

$$V = 283 \angle 90$$

$$\therefore I = \frac{283 \angle 90}{10 \angle 36.9} = 28.3 \angle 53.1$$

$$\therefore I = 28.3 \sin(300t + 53.1) \text{ A}$$

$$V = 150 \angle 45 \text{ V} , I = 3 \angle -15 \text{ A}$$

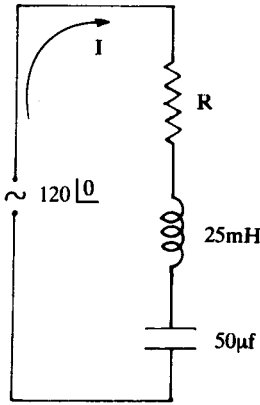
- ج

$$\therefore Z = \frac{V}{I} = \frac{150 \angle 45}{3 \angle -15} = 50 \angle 60 = 25 + i43.3 \Omega$$

مثال (٨-٢٠)

في الدائرة التالية احسب R والجهد على كل عنصر علماً بأن السرعة الزاوية $\omega = 400 \text{ rad/s}$ والتيار يتقدم الجهد بزاوية قدرها 63.4° .

الحل



$$X_L = \omega L = 400 (25 \times 10^{-3}) = 10 \Omega$$

$$X_C = 1/\omega C = 1/400 (50 \times 10^{-6}) = 50 \Omega$$

$$Z = R + i(X_L - X_C) = R - 40i$$

$$\therefore Z = |Z| \angle -63.4$$

$$\tan(-63.4) = R/(X_L - X_C)$$

$$\therefore R = -40 \tan(-63.4) = 20 \Omega$$

$$\therefore Z = 20 - i40 = 44.7 \angle -63.4 \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120 \angle 0}{44.7 \angle -63.4} = 2.68 \angle 63.4 \text{ A}$$

$$\therefore V_R = 53.6 \angle 63.4 \text{ V}$$

$$V_L = 26.8 \angle 153.4^\circ \text{ V}$$

$$V_C = 134 \angle -26.6^\circ \text{ V}$$

مثال (٨-٢١)

دائرة على التوالي مكونة من RLC حيث $R = 100 \Omega$ و $L = 0.5 \text{ H}$ و $C = 40 \mu\text{f}$. احسب التردد عند وضع الرنين والتردد الأدنى والأعلى لتردد نصف القوة.

الحل

$$\omega_r = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.5 (40 \times 10^{-6})} = 224 \text{ rad/s}$$

$$\therefore f_r = \omega_r/2\pi = 35.7 \text{ Hz}$$

عند تردد نصف القوة الأدنى ω المفاعلة السعوية تزيد عن المفاعلة الحثية وكذلك التيار يساوي 0.707 قيمته عند وضع الرنين ولما كان $I = \frac{V}{Z}$ فإن $|Z|$ يساوي 1.414 ضرب قيمته عند وضع الرنين وحيث إن $Z = 100\Omega$ عند وضع الرنين فإن $|Z|$ عند ω_1 تساوي :

$$|Z| = 1.414 \times 100 = 141.4\Omega$$

$$\therefore Z = 100 - i(X_C - X_L) = 141.4 \angle \theta$$

$$\therefore \cos \theta = R/Z = 100/141.4 \quad \therefore \theta = -45^\circ$$

$$\therefore X_C - X_L = R \quad \text{or} \quad \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R$$

وبالتعويض في هذه المعادلة يحصل على :

$$\omega_1 = 145 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f = 145/2\pi = 23.1 \text{ Hz}$$

أما بالنسبة لتردد نصف القوة الأعلى ω_2 فإن $|Z| = 141.4$ أيضا و $\theta = 45^\circ$ وبالتعويض في المعادلة :

$$X_L - X_C = R \quad \text{or} \quad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$$

يحصل على :

$$\omega_2 = 345 \text{ rad/s} \quad \text{or} \quad f_2 = 345/2\pi = 55 \text{ Hz}$$

وبمعرفة ω_1 ، ω_2 يمكن أيضا معرفة ω_0 حيث :

$$\omega_0 = (\omega_1 \omega_2)^{1/2} = (145 \times 345)^{1/2} = 224 \text{ rad/s}$$

مثال (٨-٢٢)

احسب قيمة L في الدائرة التالية عند حالة الرنين الذي يحدث عندما تكون

$$\omega = 5000 \text{ rad/s}$$

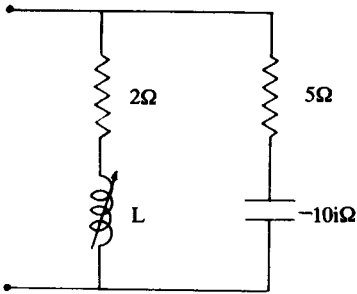
الحل

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2 + iX_L} + \frac{1}{5 - 10i} \text{ Siemens}$$

(سيمن : اسم لوحدة القبولية «المعروفة بالموء»)

$$\therefore Y = \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125} \right) + i \left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2} \right)$$

بوضع الجزء التخيلي مساويا للصفر عند وضع الرنين .



$$\therefore \frac{10}{125} = \frac{X_L}{(4 + X_L^2)}$$

$$\text{or } X_L^2 - 12.5 X_L + 4 = 0$$

$$\therefore X_L = 12.17 \Omega \quad \text{or} \quad X_L = 0.33 \Omega$$

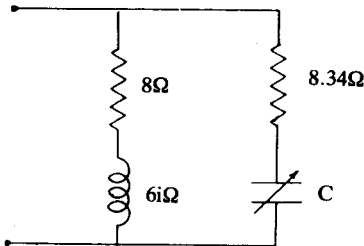
$$\therefore X_L = 2\pi f_L$$

$$\therefore L = 2.43 \text{ mH} \quad \text{or} \quad L = 0.066 \text{ mH}$$

مثال (٨-٢٣)

احسب C في الدائرة التالية عند وضع الرنين الذي يحدث إذا

كانت $\omega = 5000 \text{ rad/s}$



الحل

$$Y = \frac{1}{8 + 6i} + \frac{1}{8.34 - iX_C} \text{ Siemens}$$

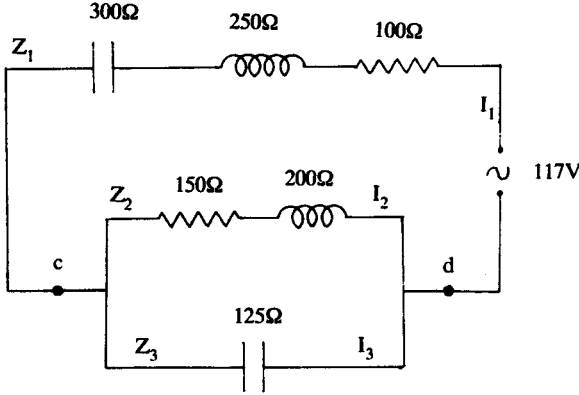
$$Y = \left(\frac{8}{100} + \frac{8.34}{69.5 + X_C^2} \right) + i \left(\frac{X_C}{69.5 + X_C^2} - \frac{6}{100} \right)$$

عند وضع الرنين فإن القبولية المركبة تمثل العدد الحقيقي .

$$\therefore \frac{X_C}{69.5 + X_C^2} - \frac{6}{100} = 0$$

$$X_C^2 - 16.7 X_C + 69.5 = 0 \quad \therefore X_C = 8.35 \Omega$$

$$\therefore X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \therefore C = 24 \mu f$$



مثال (٨-٢٤)

في الدائرة المبينة بالشكل

الآتي احسب:

ا - الممانعة الكلية للدائرة.

ب - شدة التيار الكلي.

ج - شدة التيار في كل فرع.

الحل

$$Z_1 = 100 + i(250 - 300) = 100 - 50i$$

$$\therefore |Z_1| = \{(100)^2 + (50)^2\}^{1/2} = 10 \sqrt{125} = 112$$

وباستخدام معادلة (٢-٥٦) ملحق ٢ كطريقة أخرى للتعبير في حل هذه المسألة:

$$Z_1 = |Z_1| e^{i\alpha} = 112 e^{-26.6^\circ i}$$

حيث:

$$\tan \alpha = \frac{50}{100} \quad \therefore \alpha = 26.6^\circ$$

وبالمثل:

$$Z_2 = 150 + 200i = 250 e^{53.1^\circ i}$$

و

$$Z_3 = -125i = 125 e^{-90^\circ i}$$

وحيث إن:

$$\frac{1}{Z_{cd}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{150 + 200i} - \frac{1}{125i}$$

$$\frac{1}{Z_{cd}} = \frac{150 - 200i}{(150)^2 + (200)^2} + \frac{i}{125} = 0.0024 - 0.0032i + 0.008i$$

$$\therefore \frac{1}{Z_{cd}} = 0.0024 + 0.0048i$$

$$\therefore Z_{cd} = \frac{0.0024 - 0.0048i}{(0.0024)^2 + (0.0048)^2}$$

$$\therefore Z_{cd} = 83.3 - 167i = 186 e^{-63.4^\circ i}$$

مقاومة الفرعين الثاني والثالث هي 186 أوم وتتخلف بزاوية قدرها 63.4° .
 $\therefore$ الممانعة الكلية :

$$Z = Z_{cd} + Z_1 = 183.3 - 217i = 284 e^{-49.8^\circ i}$$

أي أن الممانعة الكلية للدائرة $Z = 284$ أوم وتتخلف بزاوية قدرها 49.8° ولإيجاد شدة التيار الكلي I فإنه يفرض أن الجهد الكلي ممثل على الجانب الموجب للمحور الحقيقي .

$$\therefore V = 117 e^{zero i}$$

$$\therefore I = \frac{V}{Z} = \frac{117}{284} e^{49.8i} = 0.412 e^{49.8i}$$

$\therefore$ التيار $I = 0.412$ أمبير ويسبق الجهد بزاوية قدرها 49.8° وبهذا فإن معامل القدرة

$$\cos 49.8 = 0.645$$

$$\therefore P = 117 \times 0.412 \times 0.645 = 31.1 \text{ W}$$

ويمكن إيجاد فرق الجهد بين النقطتين d و c.

$$\therefore V_{cd} = Z_{cd} I = 186 e^{-63.4^\circ i} \times 0.412 e^{49.8^\circ i}$$

$$\therefore V_{cd} = 76.6 e^{-13.6^\circ i}$$

أي أن فرق الجهد $V_{cd} = 76.6$ فولت ويتخلف عن الجهد الأصلي بزاوية قدرها 13.6° .

$$\therefore I_2 = \frac{V_{cd}}{Z_2} = 0.37 e^{-66.7i}$$

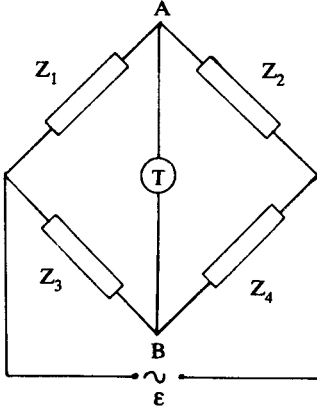
$\therefore I_2 = 0.37$ أمبير ويتخلف عن الجهد الأصلي بزاوية قدرها 66.7° .

$$I_3 = 0.613 e^{76.4i}$$

ومنه $I_3 = 0.613$ أمبير ويسبق الجهد الأصلي بزاوية قدرها 76.4° .

A.C. Bridges (٩-٨) قناطر التيار المتردد

The generalized Wheatston bridge العامة ويتستون (١-٩-٨)



شكل (٨-٣٣): قنطرة ويتستون

سبق أن درست قنطرة ويتستون في الفصل الرابع بند (٧-٤) في حالة تعيين مقاومة مجهولة بمعلومية المقاومات الأخرى في الدائرة وباستعمال جهد ثابت . ولكن عند استعمال الجهد المتردد فلا بد من تعديل هذه القنطرة بحيث تحتوي أذرع القنطرة على ممانعات وتيارات مركبة كما في شكل (٨-٣٣).

وللكشف عن وضع الاتزان يستخدم كاشف تليفوني (telephone detector) مثل وحدة سماع أذن عالية المقاومة (high resistance ear-phone unit) إذا كان تردد مصدر الجهد المتردد في حدود 100 C/S إلى 1000 C/S أما إذا كان تردد المصدر عاليا فتستخدم أجهزة إلكترونية كاشفة لمعرفة وضع الاتزان ومنها جهاز راسم الذبذبات الكاثودي (cathode ray oscilloscope).

ويحدث الاتزان إذا كان الجهد عند النقطتين A و B له قيمة واحدة أي أن السعة (amplitude) والطور (phase) للجهد المتردد عند A و B يجب أن تكون متساوية وفي هذه الحالة يكون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \dots\dots\dots (٨-١٢٠)$$

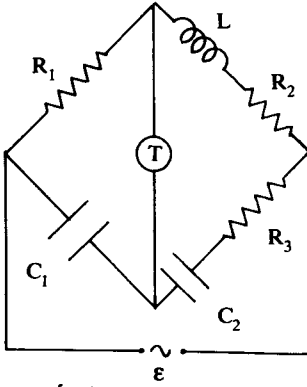
للقيم التخيلية والحقيقية منفصلة . وتستخدم مثل هذه القنطرة لقياس الحث الذاتي والسعة والتردد.

(٨-٩-٢) قنطرة أوين Owen bridge

تستخدم قنطرة أوين لقياس الحث الذاتي بمعرفة السعات العيارية (standard capacitance) ويمثل الشكل (٨-٣٤) هذه القنطرة التي تتألف من مصدر متردد، تردده حوالي 1000 دورة في الثانية، وملف حثي، يراد قياس حثه الذاتي L ، ومكثفان عياريان C_1 و C_2 وثلاث مقاومات أومية R_1 ، R_2 و R_3 ثابتة القيمة و R_2 ، R_3 متغيرة القيمة.

وبمقارنة هذه الدائرة مع الشكل (٨-٣٣) يمكن الحصول على:

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = i\omega L + R_2, \quad Z_3 = \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_4 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_2}$$



شكل (٨-٣٤): قنطرة أوين

وعند وضع الاتزان يكون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

أو

$$\frac{R_1}{R_2 + i\omega L} = \frac{1/i\omega C_1}{R_3 + (1/i\omega C_2)}$$

$$\therefore R_1 i\omega C_1 = \frac{R_2 + i\omega L}{R_3 + (1/i\omega C_2)} = \frac{R_2 i\omega C_2 + \omega^2 L C_2}{R_3 i\omega C_2 + 1}$$

$$\therefore R_1 i\omega C_1 [R_3 i\omega C_2 + 1] = R_2 i\omega C_2 - \omega^2 L C_2$$

أو

$$R_1 i\omega C_1 - R_1 R_3 \omega^2 C_1 C_2 = R_2 i\omega C_2 - \omega^2 L C_2$$

وحيث إنه إذا تساوى عددان مركبان تناسوى المقادير الحقيقية للعددين وتساوى المقادير التخيلية لها:

$$\therefore R_1 R_3 \omega^2 C_1 C_2 = \omega^2 L C_2$$

أو

$$L = R_1 R_3 C_1 \dots\dots\dots (٨-١٢١)$$

وكذلك

$$R_1 \omega C_1 = R_2 \omega C_2$$

$$\therefore \frac{C_1}{C_2} = \frac{R_2}{R_1} \dots\dots\dots (٨-١٢٢)$$

وتمثل المعادلتان (٨-١٢١) و(٨-١٢٢) شرطا الاتزان المطلوب للقنطرة «وعندها ينعدم الصوت في السماع» والذي يتحقق بتغير المقاومتين R_2 و R_3 ويجب ملاحظة ما يلي في هذه القنطرة:

١ - كل المقاومات يجب أن لا يكون لها حث ذاتي، وهذا هو الحال في كل قناطر التيار المتردد.

٢ - لا تعتمد حالات الاتزان على تردد المصدر في قنطرة أوين.

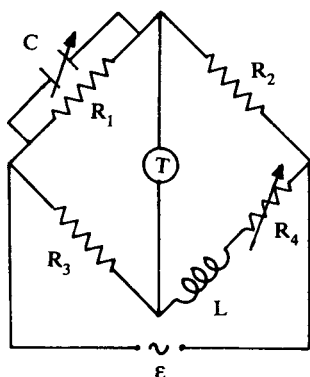
٣ - تشمل المقاومة R_2 مقاومة الملف المجهول ولذلك فإذا عرفت المقاومة الخارجية وحسبت من المعادلة (٨-١٢٢) أمكن حساب مقاومة الملف.

(٨-٩-٣) قنطرة ماكسويل Maxwell bridge

تبين الدائرة المبينة بالشكل (٨-٣٥) قنطرة ماكسويل والتي تستعمل لقياس الحث الذاتي L أيضا. وتتكون من مصدر متردد $\mathcal{E}$ تردده حوالي 1000 دورة في الثانية وملف حثي L «المراد قياس حثه الذاتي L » ومكثف متغير من مادة الميكا C يتصل على التوازي مع مقاومة متغيرة R_1 ومقاومتين ثابتتي القيمة «كل المقاومات R_1 ، R_2 ، R_3 و R_4 أومية لا حثية لها».

وبالمقارنة بالدائرة (٨-٣٣) يكون:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_3 = R_3, \quad Z_4 = i\omega L + R_4$$



شكل (٨-٣٥): قنطرة ماكسويل

وعند الاتزان يكون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad \text{or} \quad \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

$$\therefore R_2 \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C \right) = (i\omega L + R_4) / R_3$$

$$\therefore (R_2/R_1) + i\omega CR_2 = (R_4/R_3) + i\omega LR_3$$

وبمساواة المقادير الحقيقية والمقادير التخيلية

يمكن الحصول على:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \quad \dots \dots \dots (٨-١٢٣)$$

$$\omega CR_2 = \frac{\omega L}{R_3}$$

أو

$$L = CR_2 R_3 \quad \dots \dots \dots (٨-١٢٤)$$

ويمكن الوصول لحالة الاتزان بتغيير كل من C و R_4 وبذلك يمكن حساب L . ويلاحظ في هذه القنطرة أن الاتزان لا يعتمد على التردد كذلك يمكن معرفة مقاومة الملف كما حُسبت في قنطرة أوين.

(٨-٩-٤) قنطرة شيرنج Shering bridge

هذه القنطرة من أحسن القناطر التي صممت لقياس سعة مكثف مجهول C ، كما في شكل (٨-٣٦)، وكذلك معامل القدرة له والفكرة من قران معامل القدرة بنتائج المكثف أتت من حقيقة فقدان الطاقة (energy losses) في المواد العازلة نتيجة لسريان التيار المتردد خلال المكثف والذي كان سببا في أن التيار لا يتقدم الجهد بزاوية الطور $\pi/2$ تماما كما بيناه في البنود السابقة. ونتيجة لهذا الفقد يمكن أن نقول إن المكثف يكافئ مكثفا نقيًا متصلا على التوالي مع مقاومة قدرها r .

وتعطى زاوية الطور (α) بين التيار والجهد من معامل القدرة القيمة التالية :

$$\cos \alpha = r / \{r^2 + (1 / \omega^2 C^2)\}^{1/2} \dots \dots (٨-١٢٥)$$

وإذا كان $1 / \omega^2 C^2 \ll r^2$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى :

$$\cos \alpha = \omega C r$$

وهذه القنطرة يمكن أن تستعمل لقياس

r و C . وباتباع الطرق السابقة نفسها يكون :

$$Z_1 = r + \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_2 = R_1$$

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C_2}, \quad \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_2} + i\omega C_2$$

وعند الاتزان ومساواة القيم الحقيقية والتخيلية يحصل على :

$$C_1 / C_2 = R_2 / R_1, \quad C_2 r = C_3 R_1 \dots \dots (٨-١٢٦)$$

وبمعرفة r و C_1 يمكن حساب معامل القدرة أي أن :

$$\cos \alpha = \omega C_1 r = \omega (R_2 C_2 / R_1) (C_3 R_1 / C_2)$$

$$\cos \alpha = \omega R_2 C_3 \dots \dots \dots (٨-١٢٧)$$

(٨-٩-٥) قنطرة روبنسون المتردد The Robinson frequency bridge

وبين الشكل (٨-٣٧) هذه القنطرة. وشروط الاتزان لهذه القنطرة يعتمد على

تردد المصدر ويمكن استعمال هذه القنطرة لتعيينه.

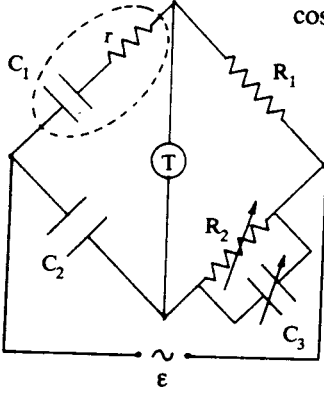
وعند الاتزان يكون :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

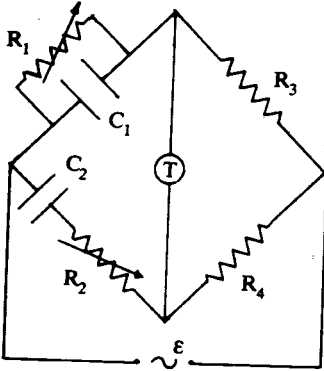
حيث :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1, \quad Z_2 = R_3,$$

شكل (٨-٣٧) : قنطرة روبنسون المتردد



شكل (٨-٣٦) : قنطرة شيرنج



شكل (٨-٣٧) : قنطرة روبنسون المتردد

$$Z_3 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \quad \text{and} \quad Z_4 = R_4$$

$$\therefore \frac{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right)^{-1}}{\left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right)} = \frac{R_3}{R_4}$$

أو

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right)} = \frac{R_3}{R_4}$$

أو

$$\frac{R_2 R_3}{R_1} + i\omega C_1 R_2 R_3 + \frac{R_3}{i\omega C_2 R_1} + \frac{C_1}{C_2} R_3 = R_4$$

ویمساواة القيم الحقيقية وكذلك القيم التخيلية يمكن الحصول على :

$$\frac{R_2 R_3}{R_1} + R_3 \frac{C_1}{C_2} = R_4 \quad \dots\dots\dots (٨-١٢٨)$$

و

$$iR_2 R_3 C_1 \omega = -\frac{R_3}{iR_1 C_2 \omega}$$

أو

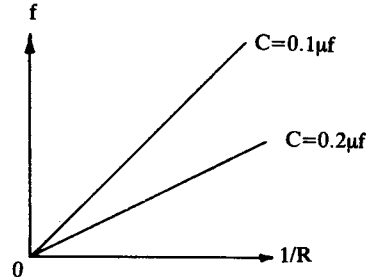
$$\omega^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \quad \dots\dots\dots (٨-١٢٩)$$

وتمثل المعادلتان (٨-١٢٨) و (٨-١٢٩) شرطي الاتزان. وحینما نستعمل هذه القنطرة نضع عادة $C_1 = C_2 = C$ وكذلك $R_1 = R_2 = R$ وهذا الوضع يتطلب أن يكون $R_4 = 2R_3$ وهذا وضع خاص من المعادلة (٨-١٢٩) والتي تصبح كالتالي :

$$\omega = \frac{1}{CR} \dots\dots\dots (٨-١٣٠)$$

وبذلك يمكن الحصول على وضع الاتزان بتغيير R_1 و R_2 ومساواتها دائما . ويعطى تردد الدائرة من المعادلة :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi CR}$$

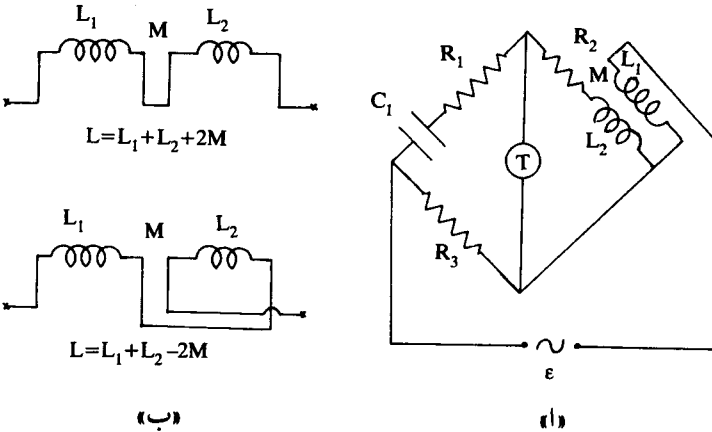


وواضح من هذه المعادلة أنه عند أي قيمة لـ C فإن f تتغير مع R ويبين الشكل (٨-٣٨) العلاقة بين f و $1/R$ لقيمتين مختلفتين لـ C ومن هذا الرسم يمكن معرفة أي تردد مجهول بمعرفة R .

شكل (٨-٣٨) : العلاقة بين التردد f ومقلوب المقاومة $1/R$ للدائرة (٨-٣٧) لقيمتين مختلفتين لـ C .

(٨-٩-٦) قناطر الحث المتبادل Mutual inductance bridges

يمكن قياس الحث المتبادل M بما يسمى بقنطرة كاري فوستر (Carey-Foster bridge) كما في شكل (٨-١٣٩) .



شكل (٨-٣٩) : ١- قنطرة الحث المتبادل M وتسمى بقنطرة كاري فوستر.

ب - الملفان متصلان على التوالي .

ج - الملفان متصلان على التوازي .

وباتباع الخطوات السابقة نفسها يكون شرطاً الاتزان هما:

$$M = R_2 R_3 C_1 \quad \dots\dots\dots (٨-١٣١)$$

$$L_2 = M(R_1 + R_3) / R_3 \quad \dots\dots\dots (٨-١٣٢)$$

ويمكن قياس الحث المتبادل بالطرق العادية لحساب الحث الذاتي L بقنطرة ماكسويل وأوين إذا كانت الملفات متصلة على التوالي كما في شكل (٨-٣٩ ب) وشكل (٨-٣٩ ج).

ففي الحالة الأولى يكون الحث الذاتي الفعلي للملفين معا [معادلة (٦-٣٨)] هو:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

حيث L_1 و L_2 الحث لكل من الملفين على انفراد و M الحث المتبادل بينهما.

وفي الحالة الثانية يكون [معادلة (٨-٣٩)]:

$$L' = L_1 + L_2 - 2M$$

فإذا حسبت L و L' بقنطرة مناسبة أمكن حساب M حيث:

$$L - L' = 4M \quad \dots\dots\dots (٨-١٣٣)$$

(٨-١٠) مسائل

١ - ملف حثه الذاتي 0.10 هنري ومقاومته 12Ω وصل بجهد متردد قيمته 110 فولت وتردده 60c/s. احسب:

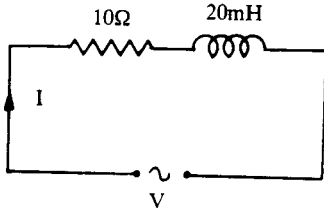
ا - الرد (reactance) الحثي للملف.

ب - الممانعة (impedance) الحثية للملف.

ج - التيار المار في الملف.

د - زاوية الطور بين التيار والجهد.

هـ - معامل القدرة.



٢ - في الدائرة التالية احسب الجهد الكلي المطبق على هذه الدائرة علماً بأن :

$$I = 2 \sin 500 t$$

٣ - مكثف سعته $10\mu f$ وصل على التوالي بمقاومة قدرها 40Ω وصلاً بجهد متردد قدره 110 فولت وتردده $60c/s$.

احسب :

- ا - الرد السعوي للمكثف .
- ب - ممانعة الدائرة .
- ج - التيار المار بالدائرة .
- د - زاوية الطور بين التيار والجهد .
- هـ - معامل القدرة .

٤ - دائرة تحتوي على مقاومة 9.0Ω وملف رده 28Ω ومكثف رده 16Ω متصلة على التوالي ثم وصلت بجهد متردد قيمته 110 فولت .

احسب :

- ا - ممانعة الدائرة .
- ب - التيار المار بالدائرة .
- ج - زاوية الطور بين التيار والجهد .
- د - معامل القدرة .

٥ - مقاومة قدرها 11Ω ، ملف رده الحثي 120Ω ومكثف رده السعوي 120Ω وصلت على التوالي ووصلت بجهد متردد قيمته 110 فولت .

احسب الجهد بين طرفي كل عنصر من عناصر الدائرة .

٦ - دائرة RL متصلة على التوالي حيث $L = 0.02H$ وقيمة ممانعة الدائرة 17.85Ω وصلت بجهد متردد وكان التيار متأخرا عن الجهد بزاوية قدرها 63.4° . احسب السرعة الزاوية ω والمقاومة R .

٧ - تتكون دائرة من $L = 0.06H$ و $R = 5\Omega$ متصلة على التوالي ووصلت بجهد متردد قدره V فإذا كان الجهد بين طرفي الملف يساوي:

$$V_L = 15 \sin 200 t$$

فاحسب الجهد الكلي V وزاوية الطور بين التيار المار في الدائرة و V . وكذلك قيمة الممانعة الكلية.

٨ - السؤال السابق نفسه عدا أن الجهد بين طرفي المقاومة معلوم ويساوي:

$$V_R = 15 \sin 200 t$$

٩ - دائرة تتكون من عنصرين ووصلت بجهد متردد قدره:

$$V = 2.55 \sin (300 t + 45) V$$

$$I = 8.5 \sin (300 t + 15) A$$

احسب قيمة العنصرين، وما قيمتهما لو كان لدينا:

$$V = 150 \cos (200t - 30)$$

$$I = 4.48 \cos (200t - 56.6)$$

١٠ - مقاومة قيمتها $R = 27.5\Omega$ ومكثف سعته $C = 66.7\mu f$ وصلت على التوالي ووصلا

بجهد متردد فكان الجهد بين طرفي السعة يساوي:

$$V_C = 50 \cos 1500t$$

احسب قيمة الجهد الكلي وكذلك الممانعة.

١١ - دائرة تتكون من RLC متصلة على التوالي فإذا كان التيار المار في الدائرة متأخر عن الجهد بـ 30° وكان أقصى قيمة للجهد بين طرفي الملف تساوي ضعف

القيمة العظمى للجهد بين طرفي المكثف فإذا كان :

$$V_L = 10 \sin 1000t \text{ V}$$

وكانت $R = 20\Omega$.

احسب قيمة كل من L و C .

١٢ - دائرة تتكون من $R = 5\Omega$ و $L = 0.02H$ و $C = 80\mu f$ متصلة على التوالي ومتصلة بجهد متردد .

احسب قيمة السرعة الزاوية ω في الحالات الآتية :

أ - إذا كان التيار يسبق الجهد بزاوية قدرها 45° .

ب - إذا كان التيار والجهد متفقين في الطور .

ج - إذا كان التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها 45° .

١٣ - ملف حثه الذاتي $L = 0.05H$ متصل على التوازي مع مكثف سعته $C = 0.667\mu F$ متصلان على التوازي مع جهد قدره $V = 100 \sin 5000t$. احسب التيار الكلي للدائرة .

١٤ - ملف حثه $L = 0.005H$ متصل على التوازي مع مقاومة قدرها $R = 10\Omega$ ومع جهد متردد، فإذا كان التيار المار في الملف يساوي :

$$I_2 = 5 \sin (2000t - 45^\circ) \text{ A}$$

احسب التيار الكلي وزاوية الطور بينه وبين الجهد .

١٥ - مقاومة $R = 5\Omega$ متصلة على التوازي مع عنصر مجهول وجهد متردد . ما هو هذا العنصر وما قيمته إذا كان قيمة الجهد والتيار المار بالدائرة هما :

$$V = 10 \cos (50t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$I = 5.38 \cos (50t - 8.23^\circ) \text{ A}$$

١٦ - دائرة RLC متصلة على التوازي حيث $R = 300\Omega$ ، $L = 0.5H$ و $C = 10\mu F$ متصلة

مع جهد متردد قيمته :

$$V = 200 \sin 1000t \text{ V}$$

احسب :

١ - الممانعة الكلية .

ب - زاوية الطور بين التيار والجهد .

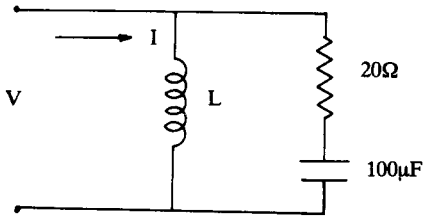
ج - التيار الكلي .

١٧ - في الدائرة التالية احسب قيمة L علما

بأن :

$$V = 100 \sin 500t \text{ V}$$

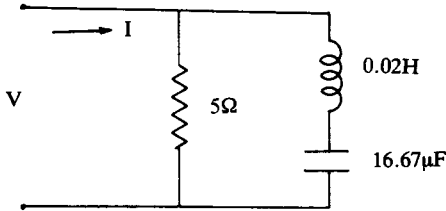
$$I = 2.5 \sin 500t \text{ A}$$



١٨ - في الدائرة التالية احسب قيمة التيار

الكلي علما بأن :

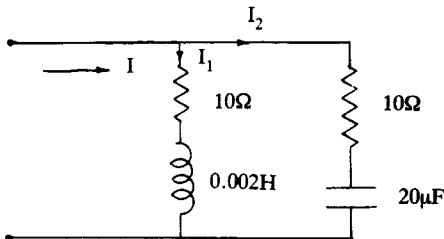
$$V = 50 \sin (2000t - 90) \text{ V}$$



١٩ - في الدائرة التالية احسب I ، I_1 ، I_2

علما بأن :

$$V = 100 \sin 5000t \text{ V}$$



٢٠ - وضع بالرسم العلاقة بين X_L و ω وكذلك X_C و ω إذا تغيرت ω بين 400 و 4000

راديان لكل ثانية علما بأن :

$$C = 25\mu F \quad \text{و} \quad L = 400 \text{ nH}$$

٢١ - باستخدام ضابط الطور (phasor) الوارد في المعادلة (٦٤-٢)، الملحق ٢ .
احسب الممانعة الكلية وكذلك مكونات الدوائر التي يكون الجهد عليها
والتيار المار فيها تحدده المعادلات التالية :

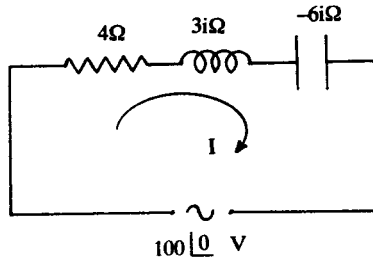
a: $V = 50 \sin(2000t - 25^\circ) \text{ V}$, $I = 8 \sin(2000t + 5^\circ) \text{ A}$

b: $V = 80 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$, $I = 8 \sin(1000t - 90^\circ) \text{ A}$

c: $V = 424 \cos(2000t + 30^\circ) \text{ V}$, $I = 28.3 \cos(2000t + 83.2^\circ) \text{ A}$

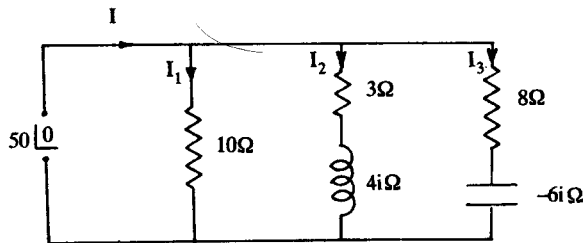
d: $V = 283 \cos(800t + 150^\circ) \text{ V}$, $I = 11.3 \cos(800t + 140^\circ) \text{ A}$

٢٢ - مقاومة $R = 8 \Omega$ متصلة على التوازي مع مكثف سعته $C = 30 \mu\text{f}$ ما هو التردد
اللازم لكي يتقدم التيار عن الجهد بزاوية قدرها 30° .

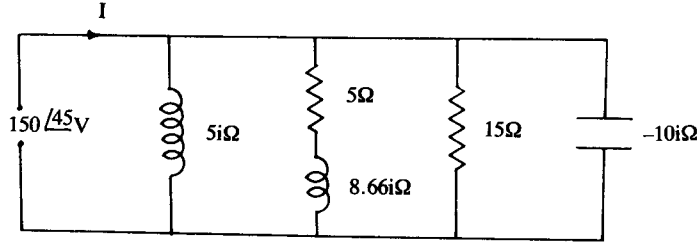


٢٣ - في الدائرة المجاورة أثبت أن مجموع
الجهد على كل عنصر يساوي الجهد
المسلط المطور (phasor voltage)

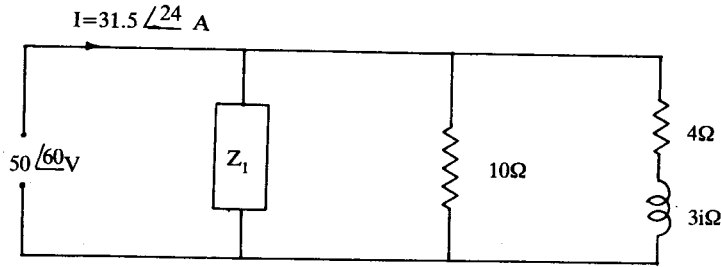
٢٤ - في الدائرة التالية احسب التيار الكلي وكذلك الممانعة الكلية ثم ارسم الدائرة
المكافئة



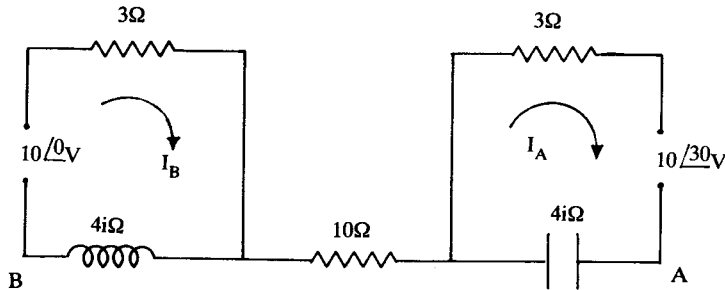
٢٥ - في الدائرة التالية احسب التيار الكلي والممانعة الكلية.



٢٦ - في الدائرة التالية احسب Z_1 .



٢٧ - في الدائرة التالية احسب الجهد بين A ، B.



٢٨ - دائرة على التوالي مكونة من RLC حيث $R = 10\Omega$

و $C = 2.0\mu\text{f}$ ، $L = 0.15\text{H}$

احسب التردد عند وضع الرنين والتردد الأدنى والأعلى لتردد نصف القوة.

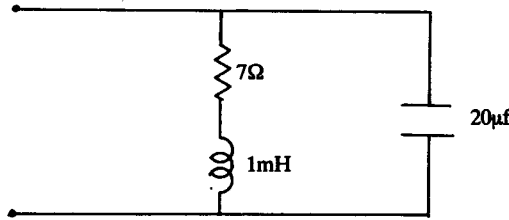
٢٩ - دائرة متوالية RLC حيث $L = 0.5H$ والجهد عليها والتيار المار فيها تحددهما المعادلتان التاليتان :

$$V = 70.7 \sin(500t + 30^\circ) \text{ V}$$

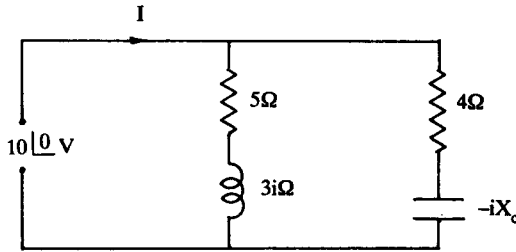
$$I = 1.5 \sin 500t \text{ A}$$

احسب قيمة C ، R وما قيمة ω_r ثم احسب معامل النوعية Q و Q_r .

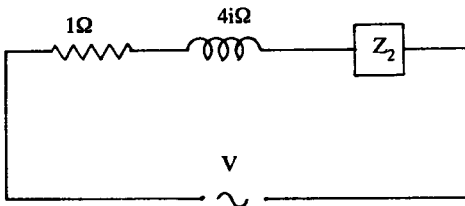
٣٠ - في الدائرة التالية احسب التردد الرنيني f_r .



٣١ - يحدث الرنين في الدائرة التالية عند $X_C = 9.68\Omega$ أو $X_C = 1.65\Omega$ احسب التيار المطور (phasor current) عند هاتين القيمتين.



٣٢ - احسب قيمة الممانعة Z_2 في الدائرة التالية إذا كان :



$$V = 50 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$I = 11.2 \sin(\omega t + 108.4^\circ) \text{ A}$$

معادلات ماكسويل والموجات الكهرومغناطيسية

Maxwell's Equations and Electromagnetic Waves

● مقدمة ● تيار الإزاحة ● معادلات ماكسويل ● الموجات
الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ ● الموجات المستوية في
وسط عازل متماثل الخواص ● طاقة الموجات
الكهرومغناطيسية ● امتصاص الموجات المستوية في الموصلات
والتأثير السطحي ● طيف الموجات الكهرومغناطيسية ● مسائل .

(١-٩) مقدمة

Introduction

دُرست في الفصول السابقة الحقائق الأساسية عن الكهربية والمغناطيسية وستدرس في هذا الفصل نظريات جيمس ماكسويل (James C. Maxwell) الذي ربط بين هذين الموضوعين .

دُرس في الفصل السادس اكتشاف فرايدي للمجال الكهربائي الحثي الناتج عن تغيير المجال المغناطيسي وكان تفسيره في حدود خطوط القوى الذي لم يكن مرضيا بصورة كافية لمعاصريه بينما نجح ماكسويل في وضع معادلة رياضية مشتقة من قانون فرايدي

الحيثي لتفسير ذلك إلى جانب التنبؤ بالحصول على مجال مغناطيسي حثي نتيجة لتغير المجال الكهربي مع الزمن وذلك باكتشافه لتيار الإزاحة (displacement current) الذي ربط بين النظريات الكهربية والنظريات المغناطيسية.

ربط ماكسويل هذه النظريات بأربع معادلات رياضية تشتمل على المجالات الكهربية والمجالات المغناطيسية وتوزيع الشحنات وكثافة التيار والتي يشار إليها بمعادلات ماكسويل.

كما تنبأ ماكسويل نظريا بوجود الموجات الكهرومغناطيسية ووجد بين موضوعي الضوء والكهرومغناطيسية حيث أوضح أن الموجات الكهرومغناطيسية تسير بسرعة تساوي تقريبا سرعة الضوء وأن الضوء موجات كهرومغناطيسية.

ثم جاء هيرتز (H. Hertz) الذي استطاع أن يثبت نظريات ماكسويل باكتشافه عمليا توليد واستقبال الموجات الكهرومغناطيسية.

(٢-٩) تيار الإزاحة

Displacement current

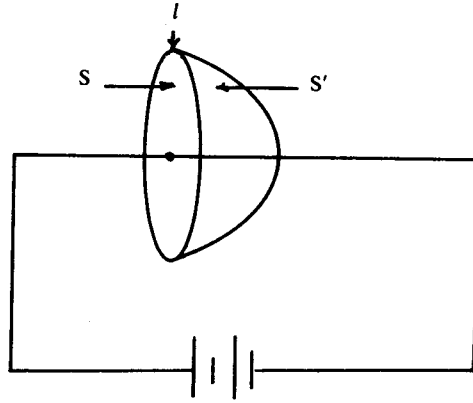
ينتج عن حركة الشحنات الحرة في أي موصل مجال مغناطيسي يظهر أثره في المنطقة المحيطة بالموصل كما ورد ذلك في الفصل الخامس، تسمى الشحنات المتحركة بالكثرونات التوصيل (conduction electrons) والتيار الذي يظهر نتيجة للحركة يسمى بتيار التوصيل وسيرمز له في هذا البند بالرمز I_c . وبحسب الحث المغناطيسي بمعرفة تيار التوصيل باستعمال قانون أمبير الدوائري، معادلة (٢٢-٥)، وهو:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} \quad \dots \dots (٩-١)$$

حيث إن التكامل الخطي مأخوذ حول مسار مغلق وأن التكامل السطحي مأخوذ على أي سطح يحاط بمسار التكامل الخطي. والتكامل السطحي لكثافة التيار $\mathbf{J}$ هو عبارة عن مجموع التيار المار خلال المسار للتكامل الخطي. فإذا اختير المسار فإن قيمة الحث

المغناطيسي B يكون ثابتا ويتجه موازيا للمسار. وقد عرف استخدام قانون أمبير لحساب الحث المغناطيسي في البند (٥-٥).

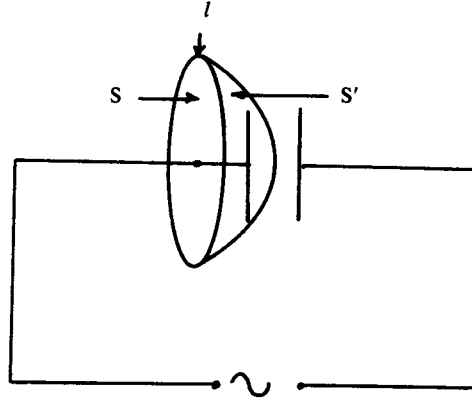
يوضح الشكل (٩-١) أن أي سطح محاط بمسار مغلق للتكامل الخطي يعطي النتيجة نفسها حيث إن المستويين السطحي S أو نصف الكروي S' محاطان بالمسار المغلق نفسه.



شكل (٩-١): مساحتان S و S' محاطتان بخط مغلق I . والتكامل $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ له القيمة نفسها على أي مساحة محاطة بالخط نفسه.

وإذا استبدلت البطارية بمصدر جهد متردد ووضع مكثف مستوي في الدائرة كما في الشكل (٩-٢) فإن التيار المتردد سيمر خلال المكثف دون انتقال للشحنات بين صفيحتي المكثف. وقد اختار ماكسويل السطحين الواردين في الشكل (٩-٢) والسبب في ذلك هو أنه بالنسبة للسطح المستوي S يمكن تطبيق المعادلة (٩-١) ولكن بالنسبة للسطح نصف الكروي S' فإن قيمة التكامل تساوي الصفر. وعالج ماكسويل هذا التناقض فافترض وجود حد آخر في المعادلة (٩-١) بحيث أن التغير في المجال الكهربائي الحاصل في المكثف ينتج عنه تيار حقيقي يعطي مجالا مغناطيسيا.

إضافة لتغير الصيغة الرياضية فإن افتراض ماكسويل يوضح أنه إذا تغير المجال الكهربائي مع الزمن في أي منطقة ينتج عن ذلك مجال مغناطيسي هذا الافتراض لا يعطي



شكل (٩-٢): استبدلت البطارية الواردة في الشكل (٩-١) بمصدر جهد متردد كما أضيف للشكل مكثف مستو. التكامل $\oint B \cdot dl$ للسطح S يساوي I بينما للسطح نصف الكروي S' يساوي الصفر ما لم يؤخذ في الحسبان تيار الإزاحة.

فقط المعنى المزدوج للمعادلة (٩-١) في حالة التيار المتردد بل إنه يقترح مصدرا آخر جديدا للحصول على مجال مغناطيسي.

التيار المار خلال المكثف المستوي الذي سعته C ومساحة كل من لوحيه S هو:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\because q = S\sigma, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\therefore I = S\epsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad \dots \dots \dots (٩-٢)$$

هذا المقدار هو الذي يمكن إضافته للمعادلة (٩-١) ويسمى بتيار الإزاحة ويرمز له بالرمز I_d وبذلك فإن كثافة تيار الإزاحة هو:

$$J_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad \dots \dots \dots (٩-٣)$$

وكثافة التيار الكلية هي :

$$J = J_d + J_c \quad \dots \dots \dots (٩-٤)$$

$$\therefore \oint B \cdot dl = \mu_0 \int (J_d + J_c) \cdot dS$$

$$= \mu_0 \int J_d \cdot dS + \mu_0 \int J_c \cdot dS$$

$$\therefore \oint B \cdot dl = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{dE}{dt} \cdot dS + \mu_0 \int J_c \cdot dS \quad \dots (٩-٥)$$

وحسب المعادلة (٣-٤٣) فإن قيمة الإزاحة هي :

$$D = \epsilon_0 E$$

$$\therefore \oint B \cdot dl = \mu_0 \int \frac{dD}{dt} \cdot dS + \mu_0 \int J_c \cdot dS \quad \dots (٩-٦)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل للحث المغناطيسي .

ويمكن كتابة المعادلة (٩-٦) بدلالة المجال المغناطيسي H والازاحة D حيث :

$$\oint H \cdot dl = \int \frac{dD}{dt} \cdot dS + \int J \cdot dS \quad \dots \dots (٩-٧)$$

وحسب المعادلة (٥-٢٥) فإن المعادلتين التفاضليتين للمعادلتين (٩-٦) و(٩-٧) هما :

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} + \mu_0 J \quad \dots \dots (٩-١٨)$$

$$\nabla \times H = \frac{dD}{dt} + J \quad \dots \dots (٩-ب٨)$$

ويحذف غالبا حرف c الدالة على تيار التوصيل بحيث يعرف ضمنا أن J يقصد بها تيار التوصيل .

مثال (٩-١)

إذا كانت الشحنة المعطاة على مكثف مستو دائري تمثلها المعادلة:

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

حيث C سعة المكثف، R مقاومة خارجية في الدائرة وكانت r_0 نصف قطر القرص الدائري فاحسب:

١ - مجموع تيار الإزاحة بين صفيحتي المكثف إذا فرض أن المجال الكهربي بينهما منتظما.

ب - الحث المغناطيسي بين الصفيحتين כתابع للمسافة في المحور المركزي الذي يوصل بينهما.

ج - علاقة التغير الحيزي للمجال المغناطيسي مع التغير الزماني للمجال الكهربي.

الحل

مجموع تيار الإزاحة يعطى من المعادلة:

$$I_d = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

لحساب المجال المغناطيسي بين الصفيحتين نستعمل المعادلة (٩-٥) مع اعتبار $J_c = 0$ وكذلك اعتبار نصف قطر المسار المغلق r الذي يحسب عنده المجال:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{d\mathbf{E}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I_d'$$

$$\therefore 2\pi r B = \mu_0 I_d'$$

حيث I_d' هو مقدار تيار الإزاحة المار خلال المسار المغلق الذي نصف قطره r والعلاقة التي تربط بين I_d و I_d' هي:

$$I_d' = I_d \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \frac{r^2}{r_0^2} \left(-\frac{q_0}{RC} \right) e^{-t/RC} \quad (١)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \left(-\frac{q_0}{RC} \right) e^{-t/RC} \quad (٢)$$

وتدل المعادلة السالبة على اتجاه B كما في الشكل (٣ - ٩) .

إذا فرض أن المجال الكهربائي يتجه مع محور Z فإن تيار الإزاحة يمكن التعبير عنه بالمعادلة (٩-٢) حيث :

$$I_d = \epsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (٣)$$

وبمقارنة المعادلتين (١) و(٣) يُحصل على :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \left(-\frac{q}{RC} \right) e^{-t/RC} \quad (٤)$$

ويمكن الحصول على علامة التغير الحيزي للقيمة B باشتقاقه بالنسبة لـ r وباستعمال المركبات الديكارتية للحث المغناطيسي . فالشكل (٣ - ٩) يوضح اتجاه E وكذلك B فإذا نقصت E فإن اتجاه B يكون معاكسا لحركة عقرب الساعة .

وتصبح قيمة B الواردة في المعادلة (٢) كالتالي :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{r_0^2} \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (٥)$$

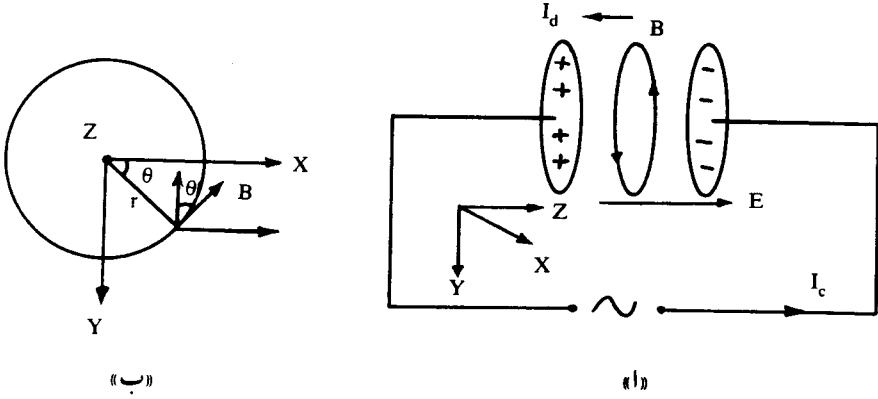
أما مركبات B فهي :

$$\begin{aligned} B_x &= B \sin \theta = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{r_0^2} \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \right] \frac{y}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi r_0^2} \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (٦)$$

$$B_y = -B \cos \theta = -\frac{\mu_0 x}{2\pi r_0^2} \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (٧)$$

من المعادلات (٤) و(٦) و(٧) يحصل على :

$$B_x = -\frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} y \frac{\partial E_x}{\partial t} , \quad B_y = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} x \frac{\partial E_z}{\partial t}$$



شكل (٩-٣): تابع للمثال (٩-١) ويوضح المجال المغناطيسي الذي حثه B والذي نتج عن تغير المجال الكهربي بين صفيحتي المكثف الدائري.

وحيث إن E_z وكذلك $\partial E_z / \partial t$ ليست تابعة للمكان فإن:

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (٨)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (٩)$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (١٠)$$

وهذه النتيجة تبين أنه عند أي نقطة في الفراغ إذا تغير المجال الكهربي مع الزمن فإن تغيراً حيزياً يحدث للمجال المغناطيسي عند تلك النقطة.

(٣-٩) معادلات ماكسويل

Maxwell's Equations

(١-٣-٩) معادلات ماكسويل في شكلها العام

لقد أشير إلى معادلات ماكسويل في أماكن مختلفة في هذا الكتاب وستظهر مجتمعة في هذا البند. تتألف معادلات ماكسويل من أربع معادلات رياضية مشتقة من

قانون أمبير الدوائي وقانون فاراداي وقانون جاوس . هذه المعادلات مهمة وتمثل القواعد الأساسية لتحليل معظم مسائل الكهرومغناطيسية .

١ - المعادلات التكاملية :

هي عبارة عن المعادلات (١٤٤-٣) ، (١٥-٥) ، (١٥-٦) و (٧-٩) التي وردت في البنود (٣-١١) ، (٥-٣) ، (٦-٣-١) و (٩-٢) على الترتيب . وهذه المعادلات هي :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \dots\dots\dots (٩-١٠)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال الكهربائي المشتقة من قانون جاوس .

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \dots\dots\dots (٩-١١)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية للمجال المغناطيسي المشتقة من قانون جاوس .

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \dots\dots\dots (٩-١٢)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون فاراداي .

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \dots\dots\dots (٩-١٣)$$

وتسمى بمعادلة ماكسويل التكاملية المشتقة من قانون أمبير الدوائي .

٢ - المعادلات التفاضلية

وهي تمثل الصيغ التفاضلية للمعادلات السابقة الذكر . وهي عبارة عن المعادلات (٤٤ب-٣) ، (٤٤-٥) ، (٢٠-٦) و (٨-٩) التي وردت في البنود (٣-١١) و (٥-٣) و (٦-٣-١) و (٩-٢) على الترتيب . وهذه المعادلات هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \dots\dots\dots (٩-١٤)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \dots\dots\dots (٩-١٥)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (٩-١٦)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (٩-١٧)$$

٣ - معادلات مكملية (إضافية)

تحتاج معادلات ماكسويل إلى معادلات أخرى (وردت في الكتاب) تعتبر مهمة لحل مشكلات الكهرومغناطيسية منها:

● المعادلة (٤-٧) وهي :

$$J = \sigma E \quad \dots\dots\dots (٩-١٨)$$

● معادلة الاستمرارية (٤-٦) وهي :

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (٩-١٩)$$

● معادلات القوى (١-١٣)، (٥-١٠٢) و (٥-٧٦) وهي :

$$F = qE \quad \dots\dots\dots (٩-٢٠)$$

$$F = qE + qv \times B \quad \dots\dots\dots (٩-٢١)$$

$$dF = (I \times B) \cdot dl \quad \dots\dots\dots (٩-٢٢)$$

● المعادلة (٣-٤٨) التي تربط بين المجال الكهربائي E والإزاحة D وكذلك المعادلة

(٧-٨) التي تربط بين الحث المغناطيسي B والمجال المغناطيسي H .

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P \quad \dots\dots (٩-٢٣)$$

$$B = \mu H = \mu_0 (H + M) \quad \dots\dots (٩-٢٤)$$

(٩-٣-٢) معادلات ماكسويل في حالات خاصة

Maxwell's equation in special cases

١ - معادلات ماكسويل في الحيز الفارغ Free space

وردت معادلات ماكسويل في البند السابق في شكلها العام، أما بالنسبة لقيمتها في الحيز الفارغ، أي عندما تكون كثافة التيار J وكثافة الشحنة الحجمية ρ تساوي الصفر فإن معادلات ماكسويل تصبح كالتالي:

١ - المعادلات التكاملية

$$\oint_S D \cdot dS = 0 \quad \dots\dots\dots (٩-٢٥)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad \dots\dots\dots (٩-٢٦)$$

$$\oint_C E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad \dots\dots\dots (٩-٢٧)$$

$$\oint_C H \cdot dl = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS \quad \dots\dots\dots (٩-٢٨)$$

٢ - المعادلات التفاضلية

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \dots\dots\dots (٩-٢٩)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \dots\dots\dots (٩-٣٠)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (٩-٣١)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (٩-٣٢)$$

ب - معادلات ماكسويل والزمن Maxwell's equation and the time

إذا كانت المجالات الكهربائية والمغناطيسية لا تتغير مع الزمن فإن معادلات ماكسويل تؤول إلى المعادلات الاستاتيكية (الساكنة) للكهرباء والكهرومغناطيسية التي سبق دراستها في الفصول السابقة. هذه المعادلات هي:

١ - المعادلات التكاملية

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad , \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (٩-٣٣)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad , \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

٢ - المعادلات التفاضلية

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \dots \dots (٩-٣٤)$$

أما إذا كان التغير بطيئا جدا فيمكن إهمال تيار الإزاحة وتعرف هذه الحالة باسم شبه الاستاتيكية (quasi-static) والمعادلات تشبه المعادلات السابقة ما عدا المعادلة الرابعة فإنه يستبدل بها قانون فاراداي أي أن:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \dots \dots (٩-٣٥)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots \dots (٩-٣٥)$$

أما إذا كان التغير كبيرا مع الزمن (عندما يزيد التردد على 100 كيلوهيرتز) فإنه لابد من الأخذ بعين الاعتبار تيار الإزاحة وهذا يعطي حلا لمعادلات ماكسويل بالنسبة للإشعاعات الكهرومغناطيسية.

وأبسط مثال لتكوين الأمواج الكهرومغناطيسية المنبعثة من المصادر المختلفة هو حدوث الوميض (spark) الحادث بين كرتين مشحونتين. فالتيار العالي التردد، ذو الزمن القصير يولد مجالا مغناطيسيا مترددا ينتج عنه مجال كهربي متردد قرب الكرتين. ولكن هذا المجال الكهربي ينتج عنه تيار يسمى بتيار الإزاحة الذي بدوره ينتج مجالا مغناطيسيا جديدا. وقبل معرفة تيار الإزاحة، الذي أضيف إلى المعادلة (٩-١٧)، يمكن الاعتقاد بأن المجال الكهربي والمجال المغناطيسي يؤولان إلى الصفر.

وبتكرار هذه العملية بصورة مستمرة تتكون الأمواج الكهرومغناطيسية من مجال كهربي متردد ومجال مغناطيسي متردد أيضا ينتشران في الفراغ بعيدا عن الكرتين بسرعة، يمكن تحديد قيمتها من المعادلتين (٩-١٤) و(٩-١٧)، في اتجاه متعامد على كل منهما.

وأول مكتشف للإشعاع الكهرومغناطيسي الناتج عن الكرتين المشحونتين هو هيرتز (١٨٨٧م) وذلك بمحاثة مجال كهربي في دائرة كهربية تبعد مسافة معينة عن الكرتين ووجد أن سرعة هذه الموجات تساوي 3×10^8 متر/ثانية ولها خواص الضوء المرئي مثل الانعكاس والانكسار والاستقطاب.

مثال (٩-٢)

إذا فرض أن المجالات الكهربية والمغناطيسية تتغير توافيقا مع الزمن. ما هي صيغ معادلات ماكسويل إذا كان:

$$D = D_0 e^{i\omega t}$$

الحل

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i\omega D_0 e^{i\omega t} = i\omega D$$

وتكون بذلك معادلات ماكسويل هي:

$$\oint H \cdot dl = (\sigma + j\omega\epsilon) \int E \cdot dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times H = (\sigma + j\omega\epsilon) E$$

$$\oint E \cdot dl = -j\omega\mu \int H \cdot dS \quad \text{أو} \quad \nabla \times E = -j\omega\mu H$$

$$\oint D \cdot dS = \int_V \rho \cdot dV \quad \text{أو} \quad \nabla \cdot D = \rho$$

$$\oint B \cdot dS = 0 \quad \text{أو} \quad \nabla \cdot B = 0$$

(٩-٤) الموجات الكهرومغناطيسية في الحيز الفارغ

Electromagnetic Waves in Free Space

ذكر في البند السابق طريقة لتوليد الموجات الكهرومغناطيسية باستخدام التفريغ الوميضي . وبصورة عملية فإن المجالات المشعة الناتجة عن التيارات المتغيرة لا تكون مهمة ما لم يكن التردد أعلى من 100 كيلوهيرتز وهو أقل تردد مستخدم في أجهزة النقل الاقتصادية .

وسيتناول هذا البند الصيغ الرياضية لحلول معادلات ماكسويل للموجات الكهرومغناطيسية التي تسير بسرعة الضوء c في الفراغ .

فأي مجال كهرومغناطيسي يجب أن يحقق جميع معادلات ماكسويل . لنفترض وجود شحنة متغيرة وتوزيع للتيار في منطقة معينة في الفراغ ، ولنتأمل المجالات الناتجة عن هذا المصدر الإشعاعي ، خارج هذه المنطقة وفي الفراغ ، تكون الشحنة وكثافات التيار مساوية للصفر في أي مكان وبذلك فإن العلاقات التي تربط بين E و D وبين B و H هي :

$$D = \epsilon_0 E \quad \text{و} \quad H = B/\mu_0$$

وتصبح معادلات ماكسويل (٩-١٤) ، (٩-١٥) ، (٩-١٦) و (٩-١٧) كالتالي :

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{أو} \quad \nabla \times B = E_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (٩-١٣٦)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad \dots \quad (٩-٣٦ \text{ ب})$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \text{أو} \quad \nabla \cdot E = 0 \dots \quad (٩-٣٦ \text{ ج})$$

$$\nabla \cdot B = 0 \dots \dots \dots (٩-٣٦ \text{ د})$$

ويمكن الحصول من المعادلتين (٩-١٣٦) و (٩-٣٦ ب) على معادلات تحتوي على المجالين E و B بصورة منفصلة ويتم ذلك كالتالي .

يمكن كتابة طرفي المعادلة (٩-١٣٦ أ) كالتالي :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

وحيث إن المعامل ∇ لا تشمل التغير في الزمن فإنه يمكن كتابة $\nabla \times (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ بالصورة

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\therefore \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

وبالتعويض عن $\nabla \times \mathbf{E}$ من المعادلة (٩-٣٦ ب) يحصل على:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (٩-٣٧)$$

وحسب المعادلة (٩-٢٤) الواردة في الملحق ٢ فإن:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

وحسب المعادلة (٩-٣٦ د) فإن المعادلة (٩-٣٧) تصبح كالتالي:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (٩-٣٨)$$

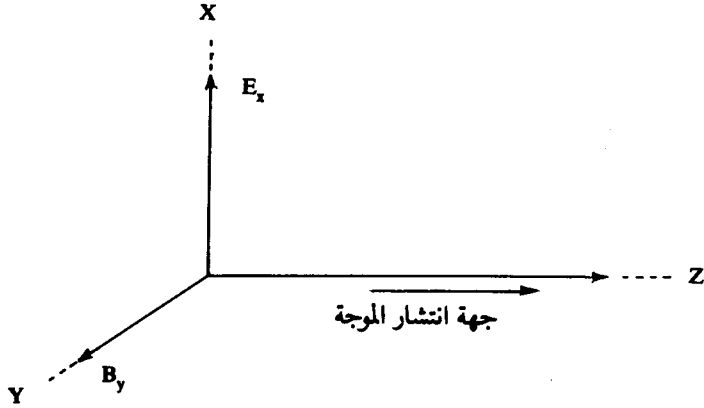
ويمثل المجال المغناطيسي الذي حثه (B) لهذه المعادلة في أي مكان في الحيز الفارغ حيث الشحنة وكثافات التيار تساوي الصفر.

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (٩-٣٩)$$

صحيحة في أي مكان في الحيز الفارغ حيث لا شحنة ولا تيار.

وتسمى المعادلتان (٩-٣٨) و(٩-٣٩) بمعادلتَي الموجة (wave equations) للمجالين الكهربائي والمغناطيسي.



شكل (٩-٤): مركبتا المجال الكهربي والمجال المغناطيسي لموجة مستوية وعلاقتها بالاحداثيات الديكارتية.

فإذا فرض أنه من الممكن توليد موجات كهرومغناطيسية بحيث يكون لمركبة المجال الكهربي اتجاه واحد فقط في اتجاه محور x ومنتظمة في المستوى xy وكذلك للمجال الكهربي اتجاه واحد فقط في اتجاه محور y ويكون منتظما أيضا في المستوى xy . فهذا يعني أن المجالين E و B يعتمدان فقط على الزمن t و z ولا يتغيران مع الاتجاهين x و y أي أن:

$$E(x, y, z, t) = E(z, t) \vec{i} \quad \dots \quad (٩-٤٠ أ)$$

$$B(x, y, z, t) = B(z, t) \vec{j} \quad \dots \quad (٩-٤٠ ب)$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتا الوحدة على المحورين x و y . ويوضح الشكل (٩-٤) المجالين ووجهة انتشارهما.

وتصبح المعادلتان (٩-٣٨) و (٩-٣٩) كالتالي:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad \dots \quad (٩-٤١ أ)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \dots \quad (٩-٤١ ب)$$

وتسمى المعادلة (٩-٤١) بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد للمجال المغناطيسي وتتضمن أن المجال المغناطيسي $B(z,t)$ ينتشر كموجة ذات بعد واحد بسرعة قدرها

$$v = c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots \dots \dots (٩-٤٢)$$

كما تسمى المعادلة (٩-٤١) بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد للمجال الكهربائي وتتضمن أن المجال الكهربائي $E(z,t)$ ينتشر كموجة ذات بعد واحد بسرعة المجال المغناطيسي نفسها.

وقد اتضح في الملحق ١، البند (١-أ) أن هذه القيمة تماثل قيمة سرعة الضوء في الفراغ c .

وقبل اكتشاف ماكسويل كان الفيزيائيون يفصلون الضوء عن الكهرباء والمغناطيسية ولكن إنجازات ماكسويل تتضمن حقيقة انتشار الضوء التي لا يمكن شرحها إلا على أساس أن الضوء عبارة عن موجات كهرومغناطيسية. كذلك أوضح ماكسويل أن الموجات الكهرومغناطيسية تتولد لمجرد تسارع شحنات كهربية أو تشع من أي دائرة كهربية تحتوي على مصدر تيار متردد ذي ذبذبات عالية التردد. وهذه نتيجة بسيطة للحقيقة التي تنص على أن الشحنات الحرة في الموصلات في دوائر التيار المتردد تصدر حركة توافقية بسيطة ذات تسارع مستمر.

وعند انتشار موجة كهرومغناطيسية، تعطي مركبتا المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي بالمعادلتين (٩-٤٠) و (٩-٤١) وتكون منتظمة في المستوى xy وتعتمد فقط على z و t بحيث تقود إلى المعادلتين (٩-٤١) و (٩-٤٢) وتحت هذه الشروط يسمى هذا النوع من الموجات بالموجات الكهرومغناطيسية المستوية (plane wave). وليست كل الموجات الكهرومغناطيسية مستوية ولكن الاختيار وقع على هذا النوع لبساطة فهمه من الناحية الرياضية والفيزيائية.

وتنتشر الموجات الكهرومغناطيسية المستوية بحيث يكون مجالها الكهربي والمغناطيسي دائما متعامدين (perpendicular) أو مستعرضين (transverse) مع اتجاه الانتشار.

وحل المعادلة (٩-٤١) يمكن كتابته على الصورة التالية :

$$E_x = E_0 f(z - ct) \quad \dots \quad (٩-٤٣)$$

حيث E_0 مقدار ثابت و f أي دالة أما قيمة c فتمثلها المعادلة (٩-٤٢).

وتمثل المعادلة (٩-٤٣) موجة متحركة بسرعة قدرها c في الاتجاه z وتتغير مع الزمن t ولا تتغير مع الاتجاهين x و y . أما إذا كانت الحركة في الاتجاه السالب للمحور z فإن الحل سيكون كالتالي :

$$E_x = E_0 f(z + ct) \quad \dots \quad (٩-٤٣)$$

وقد تنتشر طاقة كهرومغناطيسية بحيث تنتقل موجاتها بصورة عشوائية في حين يكون مجالها الكهربي والمغناطيسي دائما في مستوى عمودي على اتجاه الانتشار يقال لهذا النوع من الموجات غير المستقطبة (unpolarized) بينما يقال للموجات أحادية التغير السابق ذكرها بالموجات المستقطبة خطيا (linearly polarized).

فإذا تذبذبت موجة كهرومغناطيسية مستوية جيئية باستمرار بحيث تكون قيمة ذروتها (amplitude) ثابتة وبسرعة زاوية ثابتة ω ، مثل هذه الموجات تسمى بالموجات أحادية الطول الموجي (monochromatic) يعبر عنها بالمعادلتين التاليتين :

$$E_x = E_0 \cos(Kz - \omega t) \quad \dots \quad (٩-٤٤)$$

$$B_x = B_0 \cos(Kz - \omega t) \quad \dots \quad (٩-٤٤)$$

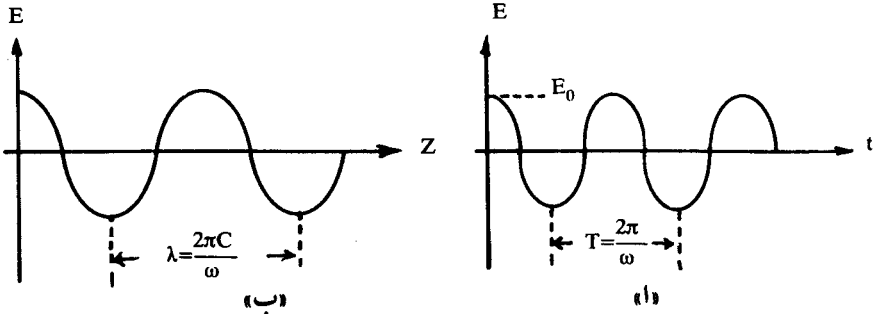
حيث E_0 و B_0 القيم العظمى لكل من المجال الكهربي والمجال المغناطيسي وهما ثابتان . ويعتبران حلين للمعادلتين (٩-٤١) و (٩-٤١) أما سرعة الانتشار للموجة فهي :

$$c = \frac{\omega}{K} \quad \dots\dots\dots (٩-٤٤ \text{ ج-})$$

حيث تسمى K بالعدد الموجي (wave number) ووحدته ١/متر.

ويوضح الشكل (٩-٥ أ) تغير المجال مع الزمن عند ثبوت z (z = 0). كما يوضح الشكل (٩-٥ ب) تغير المجال مع الموقع عند ثبوت الزمن (t = 0). واضح أن التغير مع المسافة جيبى والمسافة بين نقطتين متكافئتين لنبضتين متتابعين تسمى بالطول الموجي ويرمز له بالرمز λ حيث:

$$\lambda = 2\pi/K \quad \dots\dots\dots (٩-٤٥)$$



شكل (٩-٥): أ - يمثل مركبة المجال الكهربائي التابع للمعادلة (٩-٤٣ أ) وتغيرها مع الزمن عندما تكون z = 0.
ب - يمثل التغير للتابع نفسه مع z عند t = 0.

وبحصول من المعادلتين (٩-٤٤) و(٩-٤٥) على:

$$\lambda = 2\pi c/\omega \quad \because \omega = 2\pi f$$

$$\therefore \lambda = c/f \quad \dots\dots\dots (٩-٤٦)$$

وبالتعويض عن هذه المقادير في المعادلتين (٩-٤٤) و(٩-٤٥) يحصل

على:

$$E_x = E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \quad \dots\dots\dots (٩-٤٧ \text{ أ-})$$

$$B_x = B_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \quad \dots \quad (٩-٤٧)$$

وباشتقاقهما يُحصل على :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{2\pi}{\lambda} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \quad \dots \quad (٩-٤٨ أ)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{2\pi c}{\lambda} B_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \right) \quad (٩-٤٨ ب)$$

وحيث إن المعادلة (٩-٣٦) يمكن كتابتها بالنسبة للإحداثيات الديكارتية كالتالي :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \quad \dots \quad (٩-٤٩ أ) \end{aligned}$$

وحيث إن المجالين المتغيرين هما E_y و E_x تابعا لـ z و t فإن هذه المعادلة تصبح :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (٩-٤٩ ب)$$

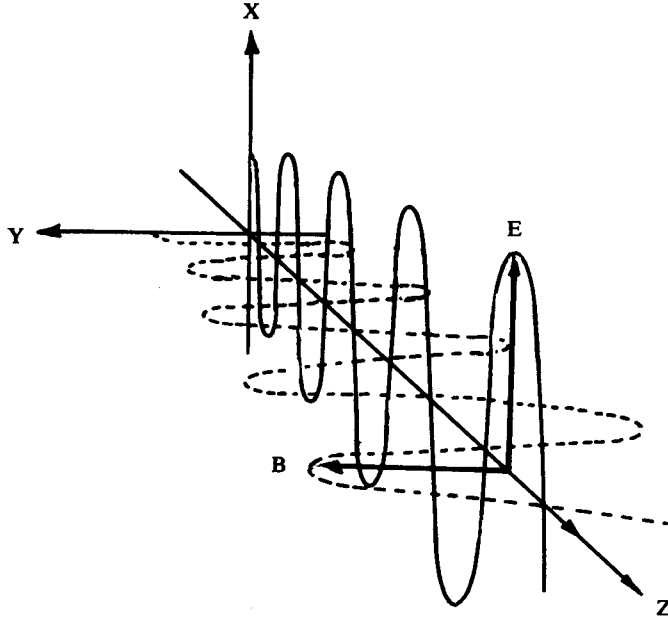
من المعادلات (٩-٤٨ أ)، (٩-٤٨ ب)، و (٩-٤٩ ب) يُحصل على :

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad \dots \dots \dots (٩-٥٠)$$

ومن الملاحظات المهمة أن المجالين الكهربي والمغناطيسي يتذبذبان بالطور نفسه (inphase). ويوضح الشكل (٩-٦) انتشار موجة كهرومغناطيسية مستوية في اتجاه z موضحا عليها اتجاه المجال الكهربي E والمجال المغناطيسي B .

والتعبير العام لحل الموجة المستوية المستقطبة خطيا للمعادلة (٩-٣٩) يكون على الصورة التالية :

$$E = E_0 \exp i (\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \dots \dots (٩-٥١)$$



شكل (٩-٦): التناسب الاتجاهي للمجالين الكهربائي والمغناطيسي لموجة مستوية مستقطبة خطياً. ويتذبذب متجه المجال الكهربائي على محور x بينما يتذبذب المجال المغناطيسي على محور y ومتحد في الطور مع المجال الكهربائي. وتنتشر الموجة في اتجاه محور z .

حيث يمثل $\vec{K}$ اتجاه انتشار الموجة الكهرومغناطيسية ويكون المتجه E_0 عمودياً على $\vec{K}$. وتكون العلاقة بين E و B للموجة المستوية في هذه الحالة وعلى ضوء المعادلة (٩-٥٠) هي:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{K} \wedge \vec{E}) \dots \dots \dots (٩-٥٢)$$

ويمثل الحل الوارد بالمعادلة (٩-١٤٤) الجزء الحقيقي في المعادلة (٩-٥١) وفي اتجاه Z .

وقيمة المجال المغناطيسي B_0 من الموجات المستوية في الفراغ تكون عادة صغيرة حيث تبلغ نسبة المجال الكهربائي E_0 إلى المجال المغناطيسي B_0 ، كما هو واضح من المعادلة (٩-٥٠)، سرعة الضوء فإذا فرض أن E_0 تساوي ٠.١ فولت/متر. فإن قيمة B_0 تساوي 3.3×10^{-10} تسلا.

(٩-٥) الموجات المستوية في وسط عازل متماثل الخواص

Plane Waves in Isotropic Insulating Media

إذا تحركت موجة في وسط عازل سماحيته النسبية ϵ_r ونفاذيته النسبية μ_r فإن معادلاتي الموجة للمجالين الكهربائي والمغناطيسي E و B يمكن اشتقاقهما من معادلات ماكسويل بالطرق السابقة نفسها مع الأخذ في الحسبان ϵ_r و μ_r حيث تصبح المعادلتان (٩-٣٨) و (٩-٣٩) كالتالي:

$$\nabla^2 B = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \dots \quad (٩-٥٣)$$

$$\nabla^2 E = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \dots \quad (٩-٥٤)$$

وحل هاتين المعادلتين يمثل موجات تنتقل بسرعة قدرها:

$$v = (\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0)^{-1/2} = (\epsilon \mu)^{-1/2} \quad \dots \quad (٩-٥٥)$$

حيث ϵ , μ نفاذية وسماحية الوسط.

ويمكن أن يكون الحل ممثلاً بالمعادلتين (٩-١٤٣) و (٩-٤٣ ب) الأحادية الطول الموجي كما حصل ذلك في الفراغ مع الأخذ بالحسبان أن العدد الموجي K تمثله المعادلة:

$$K = \omega/v \quad \dots \quad (٩-٥٦)$$

بدلاً من $K = \omega/c$ وكذلك الطول الموجي يعبر عنه بالمعادلة:

$$\lambda = v/f \quad \dots \quad (٩-٥٧)$$

حيث إن الطول الموجي لموجات ثابتة التردد تختلف قيمته إن تحركت الموجة في الوسط أو في الفراغ. فإذا كان حاصل ضرب ϵ_r و μ_r للوسط أكبر من الوحدة فإن السرعة v للموجة في الوسط أقل من السرعة c في الفراغ. ويقل بذلك الطول الموجي λ .

أما العلاقة بين B و E ومنتجه الوحدة K فتحدده المعادلة (٩-٥٢) مع استبدال سرعة الضوء c بسرعة الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط أي أن:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\vec{K} \wedge \vec{E}) \dots\dots\dots (٩-٥٨)$$

والنسبة بين سرعة الموجات الكهرومغناطيسية المتنقلة في الفراغ إلى سرعتها في الوسط يسمى بمعامل الانكسار (refractive index) ويرمز له بالرمز n حيث:

$$n = \frac{c}{v} = (\epsilon_r \mu_r)^{1/2} \dots\dots\dots (٩-٥٩)$$

ولذلك فإن معامل الانكسار يتغير مع التردد كما يتغير ϵ_r و μ_r مع التردد وذلك حسب المعادلة (٩-٥٣). والتغير في التردد نتيجة لمعامل الانكسار لمنشور (prism) من الزجاج يعطى ما يسمى بالتشتت (dispersion).

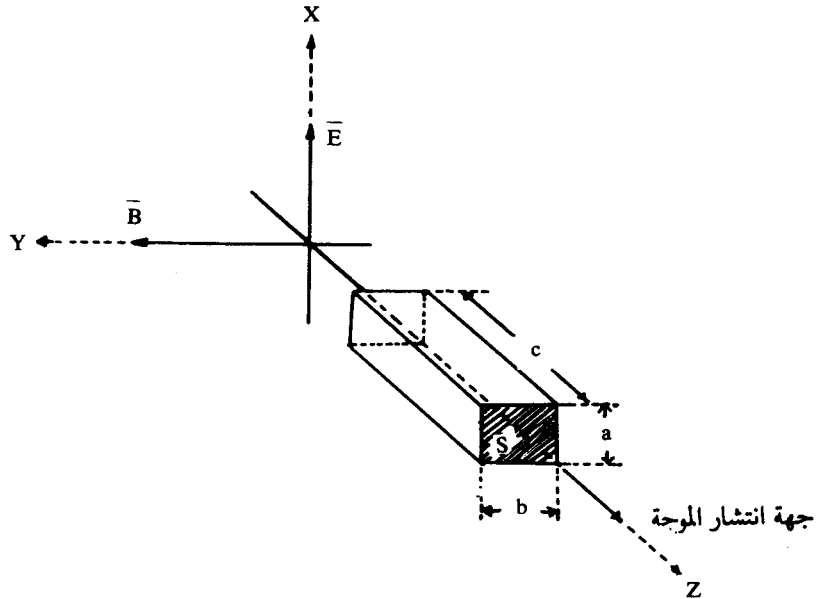
(٦-٩) طاقة الموجات الكهرومغناطيسية

Energy in Electromagnetic Waves

الموجات أحادية الطول الموجي غير موجودة في الطبيعة ولقد اعتمد عليها في دراسة البند السابق لسهولة معالجتها الرياضية ولفهم الكثير عن الخواص المهمة عن انتشار الموجات الكهرومغناطيسية. والواقع أن الموجات الموجودة فعلاً تتكون من موجات ذات ترددات متعددة وتشكل ما يسمى بالمجموعة الموجية (wave group). ويقال عن مجموعة موجية إنها تقريباً أحادية الطول الموجي إذا كانت الترددات في المجموعة متقاربة في منطقة ضيقة حول تردد أساسي. إذا انتقلت مجموعة موجية في وسط مشتمل فإن كل تردد سينتقل بسرعة مختلفة قليلاً عن الآخر حيث تعطى السرعة وعلاقتها بالتردد الزاوي والعدد الموجي من المعادلتين (٩-٥٥) و (٩-٥٦) وتسمى هذه السرعة بالسرعة الموجية (wave velocity) أو سرعة الطور (phase velocity). وطاقة المجموعة الموجية تنتقل بسرعة تسمى سرعة المجموعة (group velocity).

أما بالنسبة للفراغ فلا وجود للتشتت وتكون للسرعات الموجية لكل مركبات التردد المختلفة القيمة نفسها وتساوي سرعة الضوء c . وكذلك الحال بالنسبة لسرعة مجموعة الأمواج والطاقة المتحددة مع أي مركبة لتردد موجة متحركة مع اتجاه الموجة تتحرك أيضا بالسرعة نفسها. وسنحسب معدل تدفق الطاقة عبر وحدة المساحة المرتبطة مع مركبة التردد الزاوي ω . إذا تحركت الموجة مع اتجاه المحور فإن الطاقة المتدفقة تكون في اتجاه المحور z ولها القيمة نفسها على كل نقاط المحور z . وحيث إن المجالين الكهربائي والمغناطيسي يتذبذبان آتيا فإن الطاقة المتدفقة اللحظية تتذبذب أيضا. ومع ذلك فإن متوسط الطاقة المتدفقة اللحظية لفترة زمنية تذبذبية كاملة للمجالين لها قيمة ثابتة.

ويوضح الشكل (٧-٩) صندوقا مستطيل الشكل طوله c موضوعا في اتجاه المحور z وأطوال مساحة مقطعه a و b . والطاقة المحتواة في الصندوق هي الطاقة التي تخترق المساحة S في الثانية، وحيث إن الموجات تنتقل بسرعة الضوء c .



شكل (٧-٩): حينما تنتشر موجة مستوية في الاتجاه z في الفراغ فإن متوسط الطاقة التي تعبر المساحة S في الثانية تساوي متوسط الطاقة المخزونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي خلال صندوق طوله يساوي سرعة الضوء c .

وطبقا للمعادلة (٩-٥٩) فإن كثافة الطاقة في المجال الكهربائي هي :

$$\mu_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \dots\dots\dots (٩-٦٠)$$

وطبقا للمعادلة (٩-٥٨) فإن كثافة الطاقة في المجال المغناطيسي هي :

$$\mu_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \dots\dots\dots (٩-٦٠ ب)$$

وحيث إن كثافة الطاقة هنا هي الطاقة لوحدة الحجم فإن الطاقة الكهرومغناطيسية لأي حجم معطى [حجم الصندوق الوارد في الشكل (٩-٧) ، عند الزمن t] هي

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \dots\dots (٩-٦١)$$

فإذا فرض أن قيمتي المجالين هما :

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kz - \omega t) \hat{i} \quad \text{و} \quad B = B_0 \cos(Kz - \omega t)$$

وَعُوض في المعادلة (٩-٦١) فإن مجموع الطاقة داخل الصندوق عند زمن قدره

t هي :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left[\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) \right] dz dy dx$$

أما متوسط الطاقة في الصندوق فهي :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2T} \int_0^T \int_0^c \left[\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(Kz - \omega t) \right] dz dt$$

حيث T زمن دورة التذبذب وتساوي $2\pi/\omega$ ومنه فإن :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2} \int_0^c \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \right) dz$$

$$\bar{U} = \frac{ab}{4} c (\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2) \dots\dots\dots (٩-٦٢)$$

وباستعمال المعادلتين (٩-٥٠) و ($B = \mu_0 H$) تصبح هذه المعادلة كالتالي :

$$\bar{U} = \frac{ab}{2} c \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0 ab$$

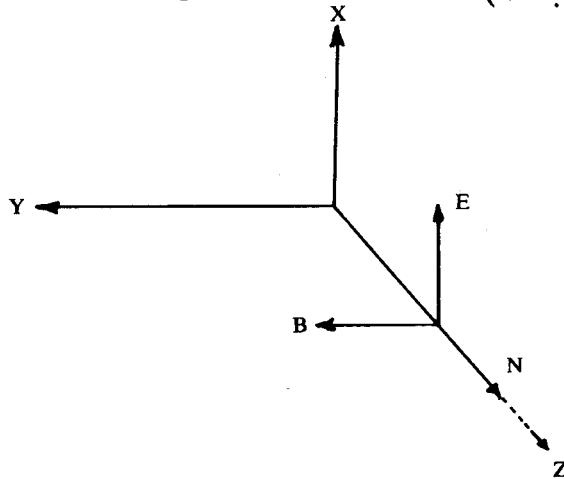
وبذلك فإن متوسط الطاقة المارة على وحدة المساحة في وحدة الزمن عند أي نقطة في السطح الموجي هي $\frac{1}{2} E_0 H_0$ واتجاهها مع محور z. ويسمى هذا المقدار المقدار بمتجه بوينتج (Poyting vector) وسنرمز له بالرمز N حيث

$$N = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{K} \dots\dots\dots (٩-٦٣)$$

وهذه النتيجة يمكن الحصول عليها إذا كانت القيمة اللحظية لانتقال الطاقة بواسطة الموجة الكهرومغناطيسية خلال وحدة المساحة العمودية على اتجاه الانتشار أي إذا كانت قيمة متجه بوينتج يساوي

$$N = E H \vec{K} \dots\dots\dots (٩-٦٤ أ)$$

$$\therefore N = E \wedge H \dots\dots\dots (٩-٦٤ ب)$$



شكل (٩-٨) : العلاقة بين متجه بوينتج والمجال الكهربائي E والحث المغناطيسي B حسب المعادلة (٩-٦٥).

ويوضح الشكل (٩-٨) العلاقة بين هذه المعاملات الثلاثة.

فإذا تحركت موجة مستوية في اتجاه متجه الوحدة $\vec{k}$ في وسط متجانس الخواص سمحيته النسبية ϵ_r ونفاذيته النسبية μ_r فإن متجه بوينتنج يصبح كالتالي:

$$N = E \wedge H = E \wedge \frac{B}{\mu_r \mu_0} = E \wedge \frac{B}{\mu} \quad \dots \quad (٩-٦٥)$$

وحسب المعادلات (٩-٥٥)، (٩-٥٨) و (٩-٦٥) يُحصل على:

$$N = E \wedge (K \wedge E) \frac{(\epsilon \mu)^{1/2}}{\mu}$$

$$N = KE^2 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (٩-٦٦)$$

و

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \vec{K} E_0^2 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (٩-٦٧)$$

(٧-٩) امتصاص الموجات المستوية في الموصلات والتأثير
السطحي «الجلدي»

Absorption of Plane Waves in Conductors and the Skin Effect

إذا انتشرت موجة كهرومغناطيسية في وسط موصل فإن المجال الكهربائي المتذبذب في الموجة سيولد تيارات كهربائية نتيجة لبذل شغل من أجل توليدها، وبعض من طاقة الموجات تتبدد كحرارة في ذلك الوسط وهذا يعني توهين الموجة المستوية خلال مرورها في وسط موصل.

لنتأمل المواد الموصلة التي كثافة التيار لها J وتتناسب مع المجال الكهربائي E أي

أن:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \dots \dots \dots (٩-٦٨)$$

حيث σ يمكن عدّه مساويا للتوصيلية الكهرية للتيار المستقر. هذه العلاقة صحيحة تقريبا لمعظم المواد التي تخضع لقانون أوم للتيارات المباشرة وللتيارات عالية التردد حيث يمكن تطبيق النظريات الكلاسيكية أما إذا كان التيار الكهربي يتغير بسرعة عالية فإن هذا التقريب قد لا يكون مناسباً.

وباستعمال معادلات ماكسويل لاشتقاق المعادلات التي تمثل الموجات الكهرومغناطيسية التي تنتشر في وسط موصل واعتماد المعادلة (٩-٦٨) فإنه يُحصل من المعادلات (٩-١٧)، (٩-٢٣) و (٩-٦٨) على :

$$\frac{1}{\mu_r \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad \dots \quad (٩-٦٩)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (٩-٧٠)$$

حيث ϵ_r و μ_r السماحية النسبية والنفاذية النسبية على التوالي ويمكن الحصول من هاتين المعادلتين على معادلة يحتوي طرفاها على المجال الكهربي فقط بصورة مماثلة لم اتبع في حالة الموجات في الفراغ.

فحسب المعادلة (٢-٢٤) الواردة في الملحق (٢) فإن :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

وحيث إن الموجة تنتشر خلال وسط لموصل فإن كثافة الشحنة ρ ستبقى صفرا في أي مكان ولذلك فإن $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ تساوي الصفر.

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

يمكن كتابة المعادلة (٩-٧٠) على الصورة التالية :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\therefore \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

وحسب المعادلة (٩-٦٩) فإن هذه المعادلة تصبح كالتالي :

$$\nabla^2 E = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} \quad (٩-٧١)$$

وبصورة مماثلة يمكن إيجاد مركبة المجال المغناطيسي .

فإذا انتقلت موجة كهرومغناطيسية مع الاتجاه z وكانت مركبة المجال الكهربائي تتغير مع الزمن t وتتجه مع الاتجاه z ومحمولة على x ، أي $E_x = E(z,t)i$ فإن المعادلة التفاضلية (٩-٧١) تصبح كالتالي :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \dots \dots (٩-٧٢)$$

وإذا فرض أن حل هذه المعادلة يكون على الشكل التالي :

$$E_x = E_0 \exp i(Kz - \omega t) \quad \dots \dots (٩-٧٣)$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} = i K E_0 \exp i(Kz - \omega t) = i K E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i K \frac{\partial E_x}{\partial z} = -K^2 E_x$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial t} = -i \omega E_0 \exp i(Kz - \omega t) = -i \omega E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -i \omega \frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega^2 E_x$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٧٢) فإن العلاقة بين K و ω تربطها علاقة التشتت

التالية :

$$K^2 = j\omega\mu\sigma - \epsilon_0 \mu \omega^2 \quad \dots \dots (٩-٧٤)$$

وحيث إن الطرف الثاني لهذه المعادلة يحتوي على عدد حقيقي وعدد تخيلي وهذا لن يتأتى إلا إذا كان الطرف الأول على الصورة التالية :

$$K = \pm (\beta + j\alpha) \quad \dots\dots\dots (٩-٧٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٧٤) يمكن الحصول على :

$$\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta = j\omega\mu\sigma - \epsilon\mu\omega^2$$

ومنه فإن :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \epsilon_0 \mu \omega^2 \quad \dots\dots (٩-٧٦ أ)$$

$$2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \quad \dots\dots (٩-٧٦ ب)$$

حيث α و β عدنان حقيقيان وموجبان . وإذا عُوض عن K من المعادلة (٩-٧٥) في المعادلة (٩-٧٣) فإنه يُحصل على :

$$E_x = E_0 \exp i(\beta z - \omega t) \exp (-\alpha z) \quad \dots (٩-٧٧)$$

وتسمى مثل هذه الدالة بالموجات المسافرة المتخامدة (damped travelling wave) حيث تتناقص ذروتها مع المسافة، ليست ثابتة، في اتجاه انتشار الموجة وذلك بسبب المعامل $\exp(-\alpha z)$ الذي جاء نتيجة للتوصيلية الكهرية التي لها علاقة بفقد في طاقة الموجة بسبب تبدد الطاقة المقاومة إلى حرارة.

وبالنسبة لمعظم المواد الموصلة يكون المقدار $\omega\epsilon_0$ الوارد في المعادلة (٩-٧٦ أ) صغيرا جدا بالنسبة لقيمة التوصيلية الكهرية σ الواردة في المعادلة (٩-٧٦ ب) ولذلك يمكن إهمال المقدار $\epsilon_0 \mu \omega^2$ ، ويُحصل من ذلك على أن :

$$\alpha = \beta = (\omega\mu\sigma/2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (٩-٧٨)$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٧٧) يمكن الحصول على :

$$E_x = E_0 \exp i[(\omega\mu\sigma/2)^{1/2} z - \omega t] \exp [-(\omega\mu\sigma/2)^{1/2} z] \quad \dots (٩-٧٩)$$

ويمكن بالطريقة نفسها حساب مركبة المجال المغناطيسي B_y . كما يمكن إيجاد العلاقة بين المجالين B_y و E_x باستخدام المعادلة (٩-٧٠) والحصول على نتيجة تماثل المعادلات (٩-٥٠)، (٩-٥٢) و (٩-٥٨) حيث يكون :

$$B_y = \frac{E_x}{v'} \quad \dots\dots\dots (٩-٨٠)$$

حيث v' سرعة الموجة داخل المادة الموصلة.

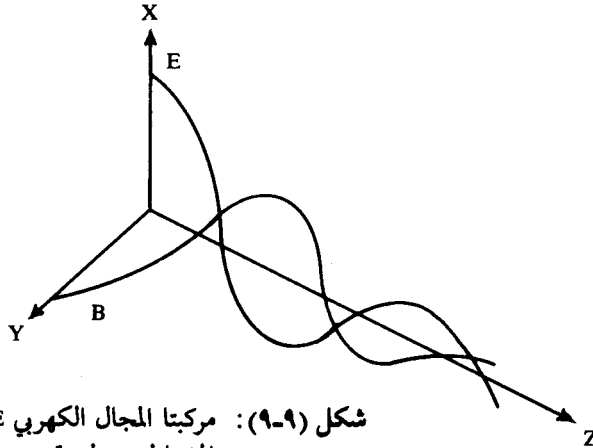
وقد وجد أنه إذا سقطت موجة كهرومغناطيسية مستوية على سطح موصل فإن معظم الموجة ستنعكس وأن الموجة التي تدخل عند حدود السطح تكون صغيرة جدا. ولذلك فالمقدار $\exp [-(\omega\mu\sigma/2)^{1/2}]$ يجعل E_x تتناقص أسيا مع العمق داخل الموصل. ويمثل الشكل (٩-٩) المجالين الكهربائي والمغناطيسي لموجة موهنة داخل موصل وعند زمن معين. ويسمى المقدار $(2/\mu\omega\sigma)^{1/2}$ بعمق الاختراق «الجلد» (skin depth) أو بمسافة التوهين (attenuation distance) ويرمز له بالرمز δ حيث:

$$\delta = (2/\mu\omega\sigma)^{1/2} \quad \dots \dots (٩-٨١ \text{ أ})$$

$$\delta = (2/\mu_r \mu_0 \omega\sigma)^{1/2} \quad \dots \dots (٩-٨١ \text{ ب})$$

وقيمة δ للنحاس مثلا عند التردد 50Hz هي :

$$\delta = (2/4\pi \times 10^{-7} \times 5.9 \times 10^7 \times 100\pi)^{1/2} \approx 1\text{cm}$$



شكل (٩-٩): مركبتا المجال الكهربائي E والمجال المغناطيسي لموجة مستوية موهنة داخل موصل عند زمن معين.

بينما قيمة δ للنحاس أيضا عند التردد 50MHz تساوي تقريبا 10^{-3} ، علما بأن قيمة μ_r تساوي تقريبا الواحد. أي أنه كلما زادت ω نقصت قيمة عمق الاختراق δ .

ولذلك فإن التيار الكهربي عالي التردد يجري خلال الطبقة الرقيقة الخارجية للموصل وتسمى هذه الظاهرة بالظاهرة القشرية «الجلدية» (skin effect).

وإذا كان لدينا موصل مقاومته R عند الترددات العالية وكانت أطواله أكبر من عمق الاختراق δ وكان الموصل اسطوانى الشكل طوله l ونصف قطر مقطعه r فإن قيمة المقاومة R تساوي تقريبا المقدار التالي:

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot 2\pi r \delta} = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2} \dots \dots (٩-٨٢)$$

وإذا فرض R_0 مقاومة الموصل في حالة التيار المستمر فإن

$$R = r R_0 / 2\delta \dots \dots \dots (٩-٨٣)$$

ومن المعروف أن مقاومة سلك النحاس التي نصف قطر مقطعه 5 سم تساوي 8×10^{-4} أوم لكل متر بينما قيمة مقاومته تساوي 0.1 أوم لكل متر إذا كان التيار مترددا بتردد قدره 50mHz.

(٩-٨) طيف الموجات الكهرومغناطيسية

The Electromagnetic Spectrum

تطبق نظريات ماكسويل على كل أنواع الموجات الكهرومغناطيسية الموجودة عند أي تردد أو عند أي طول موجي .

يوضح الشكل (٩-١٠) موجات الطيف المدروسة والمستخدمة قبل عام ١٨٠٠م كانت الموجات المرئية هي المعروفة والمدروسة فقط وخلال القرن التاسع عشر اتسع الطيف في الاتجاهين التردد العالي والتردد المنخفض وتمت أول دراسة على الطيفين فوق البنفسجي (ultraviolet) وتحت الأحمر (infrared).

واكتشفت الأشعة السينية (X-ray) عام ١٨٩٥م بواسطة العالم رونتنجن (Rentgen) بعد عدد من التجارب لدراسة احتمال اختراق (penetration) الإلكترونات المعجلة خلال الجدار الزجاجي لأنبوبة أشعة المهبط .

والإشعاعات ذات الترددات المنخفضة عن تردد الضوء المرئي لها مدلول تكنولوجي مهم وخصوصا في مجال الهندسة الكهربائية. أما الموجات الطويلة والقصيرة فلها استخدامات واسعة في مجال الاتصالات اللاسلكية. ويستخدم الرادار (موجات لا يتعدى طولها بضع سنتيمترات وقد اكتشف عام ١٩٤٠م) للكشف عن الطائرات والسفن والسيارات حيث يحدد مكانها وسرعتها بانعكاس موجاته عن هذه الأجسام. والاستخدام المكثف لموجات الراديو والرائي والأمواج الدقيقة والرادار يعكس أهمية اكتشاف ماكسويل وهيرتز.

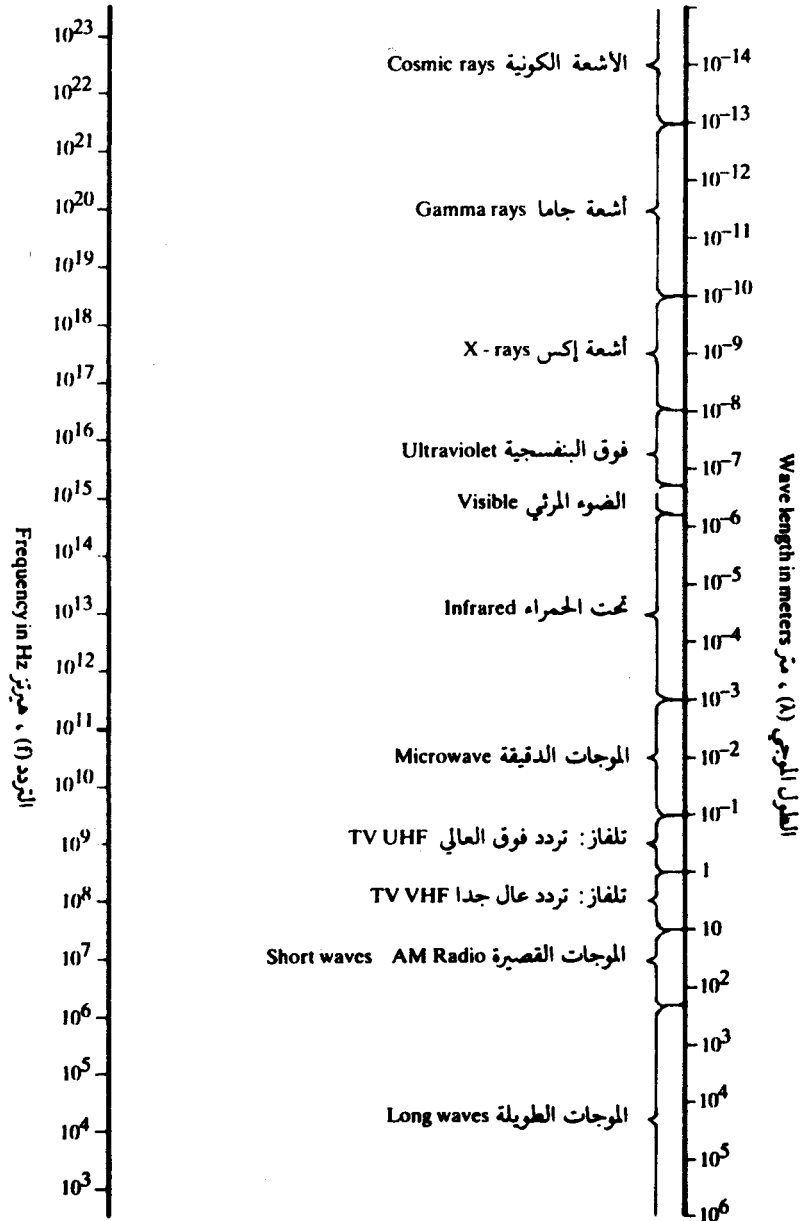
وطيف الموجات الكهرومغناطيسية ليست محدودة من الناحية النظرية ولكن بالنسبة للناحية العملية فهي محدودة بالنسبة للترددات سواء أكان ذلك بالنسبة لتردد المصدر أو الكاشف لهذه الموجات.

توجد مصادر للموجات الكهرومغناطيسية حيث جزيئات مشحونة متسارعة ينتج عنها طاقة مشعة ويرتبط غالبا الطول الموجي لهذه الإشعاعات مع الحجم المميز للنظام المشع. فالطول الموجي لأشعة جاما (gamma) يتراوح بين 10^{-10} إلى 10^{-13} متر ومنشأه نواة الذرة. والأشعة السينية، والفوق بنفسجية والضوء المرئي وتحت الحمراء والموجات الدقيقة يمكن أن تنبعث من الذرات أو الجزيئات التي تفقد بعض طاقتها أثناء توليدها.

ويمكن الحصول على الموجات اللاسلكية بتسارع الإلكترونات من دوائر التيار المتردد، فهوائي الإرسال يشع الموجات التي تتراوح أطوالها في حدود أبعاد الهوائي نفسها، ويتم ذلك بإنتاج تيار متردد بين الأرض والهوائي بتردد مناسب.

وحيث إن الموجات الكهرومغناطيسية تتألف من مجالين كهربائي ومغناطيسي فإن أجهزة الكشف ينبغي عملها على أساس أن المجالين المتذبذبين يقومان بدورهما بتسارع الشحنات التي تنتج مرة أخرى تيارات متذبذبة يمكن عن طريقها معرفة الموجات

أنواع الموجات الكهرومغناطيسية



شكل (١٠-٩): طيف الموجات الكهرومغناطيسية

الأصلية . وأجهزة الكشف أصبحت متنوعة وكثيرة حسب تعدد الموجات المشعة ونوع مصادرها وأخيرا يمكن القول :

هناك طرق مختلفة وعديدة لإنتاج وكشف الموجات الكهرومغناطيسية . والأساليب التقنية التي تستعمل في كل الحالات تعتمد على نوع تردد هذه الموجات . وفي كل الأحوال فإن مصدر الموجات الكهرومغناطيسية هو تسارع الشحنات ، فيتذبذب المجالان الكهربائي والمغناطيسي ويتحركان بعيدا عن الشحنات بسرعة تساوي سرعة الضوء ويتم كشفها بملاحظة استجابة شحنات أخرى .

(٩-٩) مسائل

١ - مكثف متوازي اللوحين مساحة كل من لوحيه الدائريين 0.25 متر^2 . إذا كان التغير في المجال الكهربائي بين لوحيه يتغير بمعدل (dE/dt) , 2×10^{11} فولت/متر-ثانية . احسب تيار الإزاحة على افتراض أن المنطقة بين لوحيه المكثف تحتوي على هواء .

٢ - مكثف متوازي اللوحين مساحة كل من لوحيه 0.6 متر^2 والمسافة بينهما 0.12 مم . فإذا وضعت بين طرفي المكثف قوة دافعة كهربائية جيبية قيمة ذروتها 360 فولت وترددها 400 هيرتز . احسب :

ا - قيمة تيار التوصيل .

ب - معدل تغير قيمة المجال مع الزمن داخل المكثف .

ج - كثافة تيار الإزاحة .

د - تيار الإزاحة الكلي .

٣ - مكثف كروي متصل بجهد متردد قيمته $V = V_0 \cos \omega t$. أثبت وجود تيار إزاحة قدره $I_d = -C \omega V_0 \sin \omega t$ بين قطبيه حيث C سعة المكثف .

٤ - بين أن $E(z,t) = E(z+ct)\vec{i}$ حل للمعادلة الموجبة ذات البعد الواحد وفيها يكون متجه المجال ينتقل في الجهة السالبة لـ z .

٥ - إذا كان متجه المجال لموجة كهرومغناطيسية تنتشر في الجهة الموجبة لمحور z ويعطي القيمة التالية :

$$E = E_0 \cos 5000 [z - (3 \times 10^{10})t] \vec{i}$$

حيث أعطيت الأرقام بوحدات الـ (سم . جم . ثانية) . احسب الطول الموجي وتردد الموجة . وما هي مركبة الحث المغناطيسي $B(z,t)$.

٦ - تذيع محطة إرسال بتردد قدره 750,000 هيرتز . احسب الطول الموجي للموجات الكهرومغناطيسية المرسلة .

٧ - موجة كهرومغناطيسية تنتشر في الفضاء بطول موجي قدره 25×10^{-6} متر وشدها 4.24 وات/م² . مركبة المجال الكهربائي تتجه مع محور z بينما مركبة المجال المغناطيسي مع محور y .

- ١ - احسب قيمة المجال الكهربائي الناتج عن هذه الموجة .
- ب - اكتب المعادلة الرياضية لقيمة المجال الكهربائي اللحظي المتجه مع الموجة عند أي نقطة من الفراغ وفي أي زمن .
- ج - ما قيمة متجه بونتج .

٨ - إذا كانت كثافة الطاقة لموجة كهرومغناطيسية معينة لتردد واحد هي 10^{-7} جول/متر² ما هي قيمة المجالين الكهربائي والمغناطيسي .

٩ - موجات كهرومغناطيسية سطحية سقطت عمودية على سطح الأرض . افترض أن قيمة E_0 هي 500 فولت/متر .

١ - ما قيمة B_0 .

ب - احسب القيمة المتوسطة لمتجه بوينتج .

١٠ - موجة كهرومغناطيسية لوحظت لتبني مجال مغناطيسي قيمته 2.5×10^{-8} ويبر/متر^٢ (القيمة الفعالة RMS).

١ - ما قيمة الطاقة لوحدة الزمن التي تنتشر عبر مساحة قدرها ١ متر^٢ عمودية على اتجاه الانتشار.

ب - ما هي القيمة الفعالة لشدة المجال الكهربى .

ج - ما هي كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية .

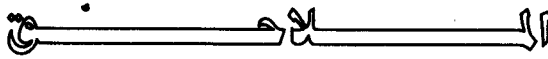
١١ - إذا علم أن متوسط القدرة الصادرة من محطة إذاعة 10 كيلووات فإذا فرض أن المحطة توزع إشعاعها للموجات بانتظام على سطح غلاف تخيلي نصف كروي تكون المحطة في مركزه .

احسب :

١ - قيمة متجه بوينتج عند السطح التخيلي إذا كان نصف القطر 10 كم .

ب - النهاية العظمى لكل من المجالين الكهربى والمغناطيسى على السطح المذكور .

١٢ - التوصيلية الكهربائية لماء البحر تساوي تقريبا 4 (1 / أوم متر) . ما هي قيمة عمق الاختراق لموجات كهرومغناطيسية ذات تردد منخفض طولها الموجى 3000 متر .



Appendices

- ملحق (١): الوحدات
- ملحق (٢): المتجهات والأعداد المركبة
- ملحق (٣): معادلات رياضية

الملحق (١): الوحدات

Appendix (1): Units

(١ - ١) نظم الوحدات

Systems of Units

يستخدم المؤلفون في الكتب الحديثة لعلم الكهرباء والمغناطيسية بصورة واسعة النظام العالمي وكذلك النظام الجاوسي الناشئ من نظامي الوحدات الكهرومغناطيسية والوحدات الكهروستاتيكية.

واستخدم النظام العالمي بصورة رئيسة في صيغ واشتقاق المعادلات الرياضية الواردة في هذا الكتاب مع إعادة كتابة بعض المعادلات الأساسية والنهائية بالنظام الجاوسي.

وتختلف الأنظمة في ما بينها باختلاف ثابتي التناسب K_m و K_e الواردين في المعادلة (١-١) الخاصة بقانون كولوم للقوى بين شحنتين q_1 و q_2 تفصلهما مسافة

قدرها r والمعادلة (٨٠-٥) الخاصة بقانون القوى بين موصلين طويلين متوازيين طول كل منها l ويمر بأحدهما تيار قيمته I_1 وبالأخر تيار قيمته I_2 وبينهما مسافة قدرها r . وهاتان المعادلتان هما:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-١)$$

$$F_m = K_m \frac{2I_1 I_2}{r} l \dots\dots\dots (١-٢)$$

وحيث إن K_e ارتبط بالشحنة q و K_m ارتبط بالتيار الكهربائي I المرتبطين في ما بينهما بالمعادلة (١-٤) $[I = dq/dt]$ فإن L ارتبط بـ K_m تحدد النسبة بينها وهي:

$$\frac{K_e}{K_m} = c^2 \dots\dots\dots (١-٣)$$

حيث (c) مقدار ثابت ووحدته المسافة / الزمن وهي وحدة السرعة. وقد حسبت هذه النسبة عدة مرات، وكذلك النتائج التجريبية، فوجد أن قيمتها تساوي:

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

وهي تماثل سرعة الضوء في الفراغ وأحسن قيمة لـ c هي:

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(١ - ٢) النظام العالمي للوحدات

The International System of Units

يكتب باختصار (S.I) وهذه التسمية وردت من (système international) ويعتمد بصورة عامة على سبع وحدات أساسية بينها الجدول (١ - ١) ويمثل نظام الوحدات المنطقية (rationalized system of units) المعتمد على المتر والكيلوجرام والثانية والأمبير للتعبير عن الطول والكتلة والزمن والتيار (م . كجم . ثانية . أمبير) (MKSA). وقيمتا K_e و K_m في هذا النظام هما:

$$K_e = 1/4\pi\epsilon_0 \dots\dots\dots (١-٤)$$

$$K_m = \mu_0/4\pi \dots\dots\dots (١-٥)$$

جدول (١ - ١) : الوحدات الأساسية للنظام العالمي

الكمية	Quantity	الوحدة	Unit	الرمز Symbol
الطول	length	متر	metre	m
الكتلة	mass	كيلوجرام	kilogram	kg
الزمن	time	ثانية	second	s
التيار الكهربائي	electric current	أمبير	ampere	A
درجة الحرارة	temperature	كلفين	kelvin	K
شدة الإضاءة	luminous intensity	شمعة	candela	cd
كمية المادة	amount of substance	جزيء جرامي	mole	mol

وبالتعويض في المعادلة (١-٣) يُحصل على :

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2 \dots\dots\dots (١-٦)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-١) و(١-٢) على الصورة التالية :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-٧)$$

و

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{r} l \dots\dots\dots (١-٨)$$

وحدات المقادير الفيزيائية في هذا النظام واردة في الجدولين (١-٢) و(١-٣).

(١ - ٣) الوحدات الكهروستاتيكية

Electrostatic (e.s) Units

يعرف هذا النظام بإعطاء الثابت K_e الوارد في المعادلة (١ - ١) القيمة (١) في الفراغ .

وحسب المعادلات (١-٤)، (١-٥) و(١-٦) يكون :

$$\epsilon_0 = 1/4\pi \quad \text{و} \quad \mu_0 = 4\pi/c^2 \dots\dots\dots (١-٩)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-٧) و(١-٨) على النحو التالي :

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-١٠)$$

$$F_m = \frac{1}{c^2} \frac{2 I_1 I_2}{r} l \dots\dots\dots (١-١١)$$

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى النظام الكهرواستاتيكي (e.s.u.) تستبدل بقيمتي ϵ_0 و μ_0 حيثما وردتا في النظام العالمي قيمتهما الواردتان في المعادلتين (١-٩).

كما يعرف النظام (e.s.u) بـ (C.G.S.esu) لاعتماده على النظام الميكانيكي (سم . جم . ثانية) (CGS) في الطول والكتلة والزمن حيث تكون وحدة الطول السنتيمتر ووحدة الكتلة الجرام ووحدة الزمن الثانية . والجدول (١-٢) يمثل الوحدات الميكانيكية في النظامين العالمي والـ (سم . جرام . ثانية) .

ووحدة الشحنة q استات كولوم (stat Coul) والتيار استات أمبير (stat Amp.) وهكذا بالنسبة لبقية الكميات الأخرى حسب الجدول (١-٣) .

(١ - ٤) الوحدات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic (e.m) Units

يعرف هذا النظام بإعطاء الثابت K_m القيمة (١) في الفراغ . وحسب المعادلات (١-٤) ، (١-٥) و(١-٦) يكون لدينا :

$$\mu_0 = 4\pi \quad \text{و} \quad \epsilon_0 = 1/4\pi c^2 \dots\dots\dots (١-١٢)$$

وتصبح بذلك المعادلتان (١-٧) و(١-٨) على النحو التالي :

$$F_e = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots\dots\dots (١-١٣)$$

$$F_m = 2 \frac{I_1 I_2}{r} l \dots\dots\dots (١-١٤)$$

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى نظام الوحدات الكهرومغناطيسية (e.m.u.) تستبدل بقيمتي ϵ_0 و μ_0 حيثما وردتا في النظام العالمي قيمتهما الواردتان في المعادلة (١-١٢).

وتكون وحدات التيار I آب أمبير (abAmpere) وتعني القيمة المطلقة (absolute) للتيار والشحنة q آب كولوم وهكذا بالنسبة لبقية الكميات الأخرى حسب الجدول (١-٣).

كما يعرف هذا النظام أيضا بـ (CGSemu) لاعتماده على النظام الميكانيكي (سم . جرام . ثانية).

(١ - ٥) النظام الجاوسي

The Gaussian System

يجمع بين النظامين الكهروستاتيكي (CGSesu) والكهرومغناطيسي (CGSemu) بحيث يستعمل النظام الكهروستاتيكي للكميات الكهربائية والنظام الكهرومغناطيسي للكميات المغناطيسية.

وللتحول من النظام العالمي (S.I) إلى النظام الجاوسي تستبدل رموز الكميات الكهربائية والمغناطيسية في معادلات النظام العالمي بما يقابلها في النظام الجاوسي حسب الجدول (١-٤).

ويستعمل النظام الكهروستاتيكي للتعبير عن وحدة التيار الكهربائي في النظام الجاوسي بحيث تكون وحدته استات أمبير وكذلك وحدة الشحنة استات كولوم وقليلًا ما يعبر عن وحدة التيار بالنظام الكهرومغناطيسي الذي وحدته الأب أمبير مع بقاء وحدة الشحنة باستات كولوم في النظام الجاوسي. وإذا عمل هذا التغيير فإنه في هذه الحالة يجب استبدال cI في النظام الجاوسي بالتيار I في النظام العالمي وكذلك cJ بـ J.

فمثلا معادلة ماكسويل (٩-١٧) ومعادلة الاستمرارية (٤-٦) تصبحان كتالي :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \dots\dots (١٥-١)$$

و

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots\dots (١٥-ب١)$$

وأخيرا يوجد نظام آخر يسمى بنظام هيفيسايد لورنتز (Heaviside - Lorentz) وهو يماثل النظام الجاوسي المنطق أي تحذف 4π حيثما وجدت في المعادلات بحيث تصبح قيمتها الواحد في هذا النظام .

ويمثل الجدول (١-٥) بعض المعادلات التي وردت في الكتاب مكتوبة بصيغ مختلفة حسب نوع نظام الوحدات المستخدم والتي وردت في البنود السابقة .

(١ - ٦) الأبعاد

Dimensions

وحتى نعطي فكرة مبسطة عن العمود الأخير في الجدولين (١-٢) و(١-٣) والخاص بالأبعاد نتبع ما يلي :

يعتمد النظام العالمي في دراسة الكهربية والمغناطيسية على أربع وحدات أساسية هي الطول (L) والكتلة (M) والزمن (T) والتيار (I). ولذلك فأبعاد أي كمية فيزيائية أخرى تدخل في إطار هذه الكميات الأربع فمثلا :

$$v = \frac{L}{T} \quad \text{السرعة = الطول / الزمن}$$

$$F = \frac{ML}{T^2} \quad \text{والقوة = الكتلة } \times \text{ العجلة}$$

$$W = (MLT^{-2})L \quad \text{والشغل} = \text{القوة} \times \text{المسافة}$$

$$W = ML^2T^{-2}$$

$$Q = IT \quad \text{والشحنة} = \text{التيار} \times \text{الزمن}$$

$$V = W/Q = ML^2T^{-2}/IT \quad \text{والجهد} = \text{الشغل} / \text{الشحنة}$$

$$V = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

أما الفيض المغناطيسي Φ فحسب تعريف القوة الدافعة الكهربائية يساوي :

$$\Phi = VT = (ML^2T^{-3}I^{-1})T = ML^2T^{-2}I^{-1}$$

والحث المغناطيسي يساوي :

$$B = \Phi/A = ML^2T^{-2}I^{-1}/L^2 = MT^{-2}I^{-1}$$

وهكذا بالنسبة لبقية الكميات .

(١ - ٧) الثوابت الفيزيائية

Physical Constants

يوضح الجدول (١-٦) الثوابت الأساسية لبعض المقادير الفيزيائية في نظامي الوحدة العالمي والجاووسي .

الكمية الفيزيائية Physical quantity	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	الوحدة الكهر و ستاتيكية (C.G.S.e.m.u.) unit	الوحدة الكهرومغناطيسية (C.G.S.e.m.u.)	الأبعاد Dimensions
المساحية	كولوم / نيوتن . متر ² N . m ² / C ²	$\frac{1}{4\pi \times 10^{-11} \text{ دالين}^2 \times \text{استات كولوم}^2}$	$4\pi \times 10^{-11} \text{ دالين}^2 \times \text{استات كولوم}^2$	I ² T ⁴ /ML ³
الإزاحة	كولوم / متر ² C/m ²	$\frac{1}{4\pi \times 10^{-5} \text{ دالين}^2 \times \text{استات كولوم}^2}$	$4\pi \times 10^{-5} \text{ دالين}^2 \times \text{استات كولوم}^2$	IT/L ²
المقاومة	Ω = فولت / أمبير/Ω = V/A	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	ML ² /I ² T ³
الانعة	Ω = فولت / أمبير/Ω = V/A	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	ML ² /I ² T ³
الرد	Reactance (X _C ,X _L)	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	I ² T ³ /ML ²
المواصلة	Conductance (G)	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	I ² T ³ /ML ²
المساحعة	Admittance (y)	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	I ² T ³ /ML ²
المقاومة النوعية	Resistivity (ρ)	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	ML ³ /I ² T ³
التوصيلية	Conductivity (σ)	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	ML ³ /I ² T ³
العزم المغناطيسي	Magnetic moment(Pm)	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	$\frac{10^{11} \text{ استات أوم}^2}{\text{استات أوم}}$	I ² T ³ /ML ³
الفيض المغناطيسي	Magnetic fluxΦ	$\frac{10^8 \text{ استات فولت} \cdot \text{ثانية}}{\text{استات كولوم}}$	$\frac{10^8 \text{ استات فولت} \cdot \text{ثانية}}{\text{استات كولوم}}$	IL ²
الحث المغناطيسي	Magnetic induction (B)	$\frac{10^4 \text{ دالين} \cdot \text{استات أمبير} \cdot \text{سم}}{\text{استات كولوم}}$	$\frac{10^4 \text{ دالين} \cdot \text{استات أمبير} \cdot \text{سم}}{\text{استات كولوم}}$	ML ² /IT ²
شدة المجال المغناطيسي (H)	Magnetic field intensity	$\frac{10^9 \text{ استات أمبير/سم}}{\text{استات أمبير/سم}}$	$\frac{10^9 \text{ استات أمبير/سم}}{\text{استات أمبير/سم}}$	M/IT ²
شدة التسمغنط	Magnetization (M)	$\frac{10^3 \text{ استات أمبير/سم}}{\text{استات أمبير/سم}}$	$\frac{10^3 \text{ استات أمبير/سم}}{\text{استات أمبير/سم}}$	IL

تابع جدول (١-٣)

الأبعاد Dimensions	الوحدة الكهر ومغناطيسية (C.G.S.e.m.u.)	الوحدة الكهر وستاتيكية (C.G.S.e.m.u.) unit	وحدة النظام العالمي (S.I) unit	الكمية الفيزيائية Physical quantity
ML^2/T^2	10^9 ماكسويل / آب أمبير * $10^7/4\pi$ جساوس / أورستد *	$10^9/c^2$ استات فولت . ثانية / استات أمبير 10^{-4} دالين / استات أمبير ^٢	H = Wb/a هنري = ويبر / أمبير ويبر / أمبير . متر = نيوتن / أمبير ^٢ $N/m^2 = Wb/A.m^2$	الحث Inductance (L,M)
ML/T^2	أورستد *	$10^6/c$ استات فولت . ثانية / سم $10^{10}/c$ استات أمبير	ويبر / متر Wb/m أمبير (أمبير . دورة) A(A.turn)	النفاذية Permeability (μ_0, μ)
ML/IT^2	10^6 جاونس . سم $4\pi \times 10^{-1}$ أورستد . سم (جلبرت) *		ويبر / متر Wb/m أمبير (أمبير . دورة) A(A.turn)	الجهد الموجه (A) الجهـد المغناطيسي العددي (V_m) Magnetic scalar potential

٣٦

جدول (٤-١): تحويل رموز الكميات الكهربائية والمغناطيسية في المعادلات من النظام العالمي إلى النظام الجاوسي

الكمية الفيزيائية	النظام العالمي	النظام الجاوسي
الشحنة	q	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}q$
التيار	I	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}I$
كثافة الشحنة	$\rho(\sigma, \lambda)$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\rho(\sigma, \lambda)$
كثافة التيار	J	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}J$
شدة المجال الكهربائي	E	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2}E$
السعة	C	$4\pi\epsilon_0 C$
العزم الكهربائي	P_e	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}P_e$
الاستقطاب	P	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}P$
القابلية	$\chi_e(\chi_m)$	$4\pi\chi_e(\chi_m)$
الإزاحة	D	$(\epsilon_0/4\pi)D$
المقاومة	R	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}R$
المقاومة النوعية	ρ	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}\rho$
الموصلية	σ	$4\pi\epsilon_0\sigma$
العزم المغناطيسي	P_m	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}P_m$
الفيض المغناطيسي	Φ	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}\Phi$
الحث المغناطيسي	B	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}B$
المجال المغناطيسي	H	$(4\pi\mu_0)^{-1/2}H$
شدة التمهغن	M	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}M$
الحث	L	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}L$
الجهد الموجه	A	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}A$
الجهد العددي	V_m	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2}V_m$

جدول (٥-١) : صيغ بعض المعادلات التي وردت في الكتاب مكتوبة بأنظمة الوحدات المختلفة

الأنظمة Systems	هيفسايد لورنتز Heaviside-L.	إلجاروسي Gaussian	الكهر ومناطيسي (CGSemu)	الكهر واستاتيكي (CGSesu)	العالمي (S.I.)
(٩-٢٩)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(٩-٢٩)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
(٩-١٢)	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
(٩-٢١)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
(٩-٢٤)	$\vec{F}/q = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$
(٩-٢٧)	$\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$
(٩-٢٦)	$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

جدول (١-٦): الثوابت الفيزيائية

الكمية Quantity	القيمة Value	الجاوسي	(S.I)
Electron charge شحنة الإلكترون	1.60219 x	-	10^{-19} coul.
Electron rest mass (m_e) كتلة الإلكترون الثابتة	4.80324 x	10^{-10} esu	10^{-31} kg
Proton rest mass (M_p) كتلة البروتون الثابتة	9.1095 x	10^{-28} gm	10^{-27} kg
e/m	1.6726 x	10^{-24} gm	10^{11} C/kg
M_p/m_e	1.7589 x	10^{17} esu/gm	10^3
Speed of light سرعة الضوء	5.2728 x	10^3	10^8 m/s
Avogadro's constant N ثابت أفوجادرو	2.997925 x	10^{10} cm/s	10^{23} mol $^{-1}$
Plank's constant ثابت بلانك	6.022 x	10^{23} mol $^{-1}$	10^{-34} J.s
Boltzmann's constant ثابت بلتزمان	6.6262 x	10^{-27} erg sec	10^{-23} J.K $^{-1}$
Electron volt (eV) إلكترون فولط	1.3807 x	10^{-16} erg. K $^{-1}$	10^{-19} J.eV $^{-1}$
Bohr magneton بور ماجنتون	1.60219 x	10^{-12} erg.eV $^{-1}$	10^{-24} J.T $^{-1}$
	9.2741 x	10^{-21} erg.G $^{-1}$	

الملاحق (٢) : المتجهات والأعداد المركبة

Appendix (2): Vectors and Complex Numbers

يحتوي هذا الملحق على موضوعين مهمين أولهما المتجهات والكميات العددية وثانيهما الأعداد المركبة.

(١-٢) المتجهات والكميات العددية

Vectors and Scalars

تميز بعض المقادير الفيزيائية بقيمتها واتجاهها معا مثل الإزاحة والسرعة والمجال والقوة. وبذلك يستعمل مبدأ المتجهات لوصف مثل هذه المقادير وهناك كميات أخرى فيزيائية تميز بقيمتها فقط مثل الكتلة والزمن وتسمى بالكميات العددية.

(١-١-٢) متجهات الوحدة المتعامدة Rectangular unit vectors

يرمز لها بالرموز $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ وهي تمثل متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية المتعامدة x و y و z على الترتيب.

(٢-١-٢) Unit vectors متجهات الوحدة

تُمثل متجهات طولها الوحدة، فإذا كانت قيمة المتجه $\vec{A}$ هو A فإن $\vec{A}/A$ يسمى بمتجه الوحدة ويرمز له بالرمز $\vec{i}_A$ وله اتجاه $\vec{A}$ حيث:

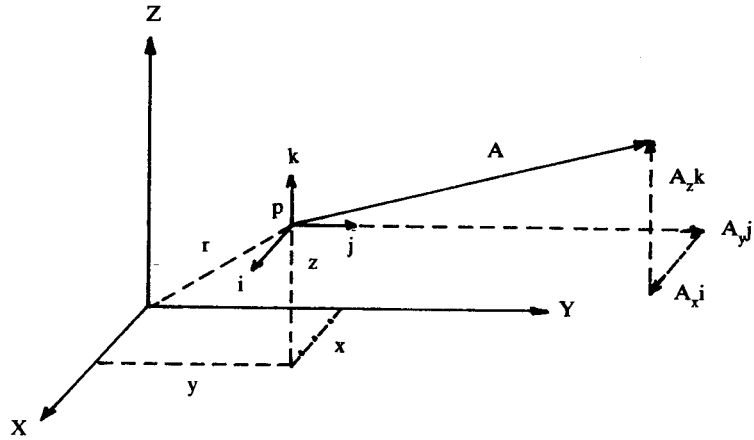
$$\vec{i}_A = \frac{\vec{A}}{A} \dots\dots\dots (٢-١)$$

وإذا كانت A_x ، A_y و A_z مركبات A على المحاور x ، y ، z فإن:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \dots\dots\dots (٢-٢)$$

$$\vec{i}_A = (A_x/A) \vec{i} + (A_y/A) \vec{j} + (A_z/A) \vec{k} \dots\dots (٢-٣)$$

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \dots\dots (٢-٤)$$



شكل (٢-١)

وأبسط أنواع المتجهات هو المتجه الذي يبدأ من نقطة الأصل للإحداثيات إلى أي نقطة معطاة، مثل P كما في الشكل (٢-١)، ويسمى بالبعد القطبي أو الشعاع الموجه (radius vector) ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ أو $\vec{R}$ وفي هذه الحالة فإن:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \dots\dots\dots (٢-٥)$$

$$\therefore \vec{i}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} \quad \dots\dots (٢-٦)$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (٢-٧)$$

حيث $\vec{i}_r$ متجه الوحدة.

(٣-١-٢) جمع أو محصلة المتجهات The sum or resultant of vectors

إذا كانت $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاثة متجهات و m و n كميتين عدديتين فإن:

- (1)- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- (2)- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
- (3)- $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A} = n(m\vec{A})$
- (4)- $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$
- (5)- $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

Product (٢-١-٤) الضرب

أ - الضرب العددي *scalar product*

الضرب العددي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ينتج عنه كمية عددية أي أن:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \dots (٢-٩)$$

حيث θ الزاوية بينهما.

والقواعد التالية صحيحة في حالة الضرب العددي:

$$(1) - \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$(2) - \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$(3) - m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) \quad \dots (٢-١٠)$$

$$(4) - \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad \text{إذا كانت}$$

فإن:

$$(1) - \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$(2) - \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \dots (٢-١١)$$

$$(3) - \vec{B} \cdot \vec{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

ب - الضرب المتجهي *vector product*

إذا كان لدينا المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فإن حاصل الضرب المتجهي لهما هو:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \quad \dots (٢-١٢)$$

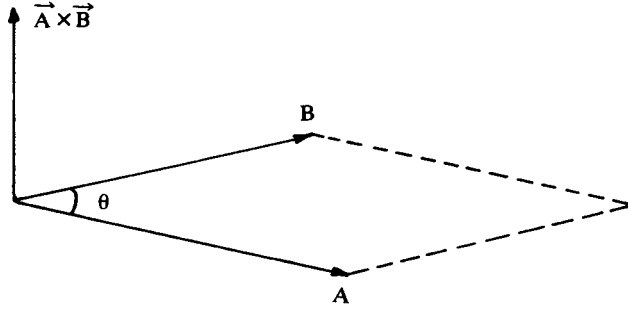
واتجاه حاصل الضرب للمتجهين هو الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي على

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ ولذلك يوضع عادة متجه الوحدة بجانب مقدار حاصل الضرب مثل $\vec{T}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \vec{T} \quad \dots (٢-١٣)$$

وواضح من الشكل (٢-٢) أن الضرب الاتجاهي يساوي مساحة متوازي المستطيلات

حيث تمثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ جانبيه.



شكل (٢-٢)

والقواعد التالية صحيحة في حالة الضرب المتجهي :

- (1)- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
 (2)- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
 (3)- $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$ (٢-١٤)
 (4)- $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$$(5)- \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \quad \dots \dots \dots (٢-١٥)$$

وإذا كان $\vec{A}$ يوازي $\vec{B}$ فإن :

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$

$$(6)- \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad \dots \dots \dots (٢-١٦)$$

$$(7)- \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

(٢-١-٥) التدرج والتفرق والالتفاف Gradient, divergence & curl

هذه المقادير تمثل أنواع أخرى من معاملات الاشتقاق ويمكن الحصول على قيمتها باستعمال المعامل الاتجاهي ∇ (vector operator) (del. المشتق من delta) وقيمتها في المحاور الديكارتية تساوي :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \dots\dots (٢-١٧)$$

فإذا فرض أن $u(x,y,z)$ و $v(x,y,z)$ دالتان عدديتان و $\vec{A}(x,y,z)$ و $B(x,y,z)$ متجهان فإن :

$$\begin{aligned} (1) - \text{grad } u &= \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \dots\dots\dots (٢-١٨) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - \text{div } \vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dots\dots\dots (٢-١٩) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) - \text{curl } \vec{A} &= \nabla \times \vec{A} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \dots\dots\dots (٢-٢٠) \end{aligned}$$

$$(4) - \text{div grad } u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (٢-٢١)$$

وتسمى بلابلاس ∇^2 والمعامل ∇^2 بمعامل لابلاس (Laplacian operator)

حيث:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots (٢-٢٢)$$

$$(5)- \text{curl grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0 \dots\dots\dots (٢-٢٣)$$

$$(6)- \text{div curl } \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$(7)- \text{curl curl } \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \dots\dots (٢-٢٤)$$

$$(8)- \text{grad } uv = \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \dots\dots (٢-٢٥)$$

$$(9)- \text{div } u \vec{A} = \nabla \cdot u \vec{A} = u \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla u \dots\dots (٢-٢٦)$$

$$(10)- \text{curl } u \vec{A} = \nabla \times u \vec{A} = u \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla u \dots\dots (٢-٢٧)$$

$$(11)- \text{div } (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \dots\dots (٢-٢٨)$$

وإذا أزيحت $u(x,y,z)$ مسافة قدرها dl من النقطة (x,y,z) إلى النقطة $(x+dx, y+dy, z+dz)$ فإن قيمتها ستكون $(u+du)$ وحسب المعادلة (٢-١٨) فإن:

$$du = \nabla u \cdot dl \dots\dots\dots (٢-٢٩)$$

(٦-١-٢) العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية والأسطوانية

The relation between the cartesian & cylindrical coordinates

الاحداثيات الأسطوانية هي (r, θ, z) وحسب الشكل (٢-٣) فإن العلاقة بينها

وبين الاحداثيات الديكارتية هي (x,y,z) هي:

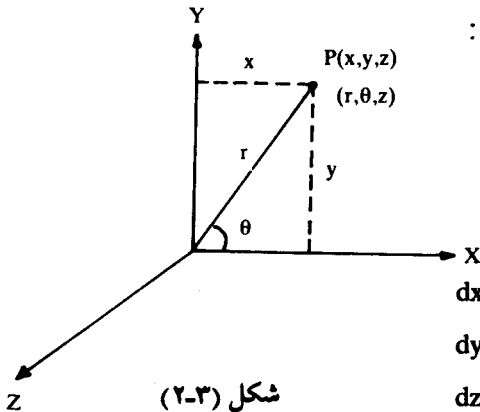
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

وبتفاضل هذه المقادير يُحصل على:

$$dx = -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr$$

$$dy = r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr$$

$$dz = dz$$



شكل (٢-٣)

أما عنصر الطول dl فتحدده المعادلة :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \dots \quad (٢-٣٠)$$

وبالتعويض عن dx ، dy و dz من المعادلات السابقة يُحصل على قيمة dl بالاحداثيات الاسطوانية وهي :

$$dl^2 = dr^2 + r(d\theta)^2 + dz^2 \quad \dots \quad (٢-٣١)$$

فكأن dx تناظرها dr و dy تناظرها $r d\theta$.

أما عنصر الحجم في الاحداثيات الديكارتية فهو :

$$dV = dx dy dz \quad \dots \quad (٢-٣٢)$$

أما الاحداثيات الأسطوانية فإن عنصر الحجم هو :

$$dV = r dr d\theta dz \quad \dots \quad (٢-٣٣)$$

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad \dots \quad (٢-٣٤)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{A}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z} \quad \dots \quad (٢-٣٥)$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{i}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} \quad \dots \quad (٢-٣٦) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots \quad (٢-٣٧) \end{aligned}$$

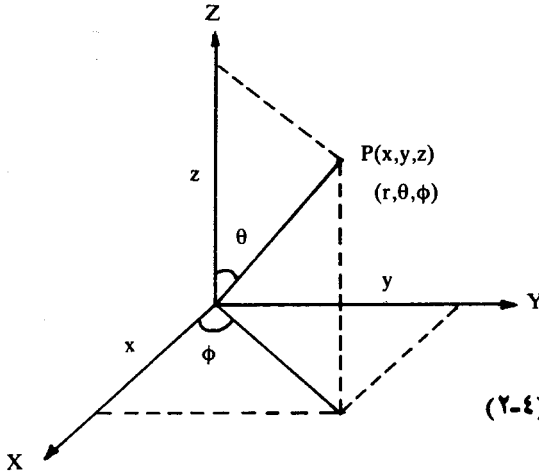
حيث $\vec{i}_r$ و $\vec{i}_\theta$ و $\vec{k}$ متجهات الوحدة على الاحداثيات الأسطوانية و (A_r, A_θ, A_z) إحداثيات المتجه $\vec{A}$ على هذه المحاور.

وإذا كانت $z = 0$ فإن الاحداثيات تسمى بالاحداثيات القطبية (polar coordinates).

(٧-١-٢) العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية والكروية

The relation between the cartesian and spherical coordinates

الاحداثيات الكروية هي (r, θ, ϕ) وحسب الشكل (٢-٤) فإن العلاقة بينها وبين الاحداثيات الديكارتية (z, y, x) هي



شكل (٢-٤)

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\therefore dx = -r \sin \theta \sin \phi d\phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi dr$$

$$dy = r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \sin \phi dr$$

$$dz = -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr$$

أما عنصر الطول dl فتحده المعادلة (٢-٣٠)، وبالتعويض عن dx ، dy و dz من المعادلات السابقة يُحصل على متجه dl بالاحداثيات الكروية:

$$dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad \dots \quad (٢-٣٨)$$

فكان dx تناظرها dr ، dy تناظرها $r d\theta$ ، dz تناظرها $r \sin \theta d\phi$ أما عنصر الحجم فهو:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \dots \dots \dots (٢-٣٩)$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{i}_\phi \quad \dots \quad (٢-٤٠)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (٢-٤١)$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right\} \vec{i}_r \\ & + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right\} \vec{i}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \vec{i}_\phi \quad (٢-٤٢) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (٢-٤٣)$$

حيث $\vec{i}_r$ و $\vec{i}_\theta$ و $\vec{i}_\phi$ متجهات الوحدة على الاحداثيات الكروية. أما A_θ ، A_ϕ ، A_r فهي إحداثيات المتجه $\vec{A}$ على هذه المحاور.

(٢-١-٢) العلاقات التكاملية Integral relations

لو فرض أن المسار C يبدأ بنقطة اختيارية ابتدائية $P_i(x_i, y_i, z_i)$ وينتهي بنقطة $P_f(x_f, y_f, z_f)$ كما في الشكل (٢-٥)، وكان $\vec{A}(x, y, z)$ متجه على نقاط هذا المسار فإن:

$$\int_i^f A \cos \theta \, dl = \int_C A \cos \theta \, dl = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \dots \quad (٢-٤٤)$$

حيث dl عنصر الطول من المسار.

وإذا فرض أن سطحاً مقفلاً S. محاطاً بمسار مقفل C فإن:

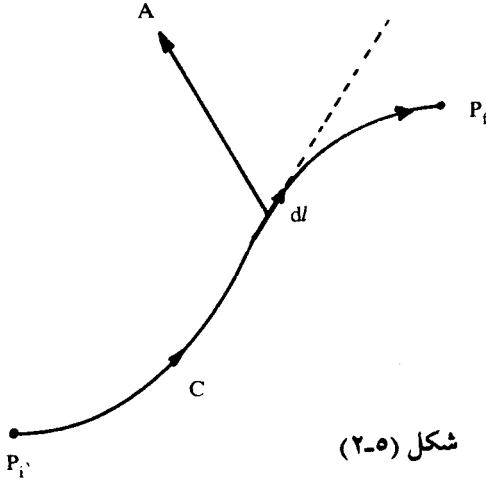
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\text{curl } \vec{A}) \cdot d\vec{S} \dots \quad (٢-٤٥)$$

وتعرف هذه المعادلة بنظرية استوكس (Stokes's theory) حيث $d\vec{S}$ عنصر المساحة من مساحة السطح S.

وإذا كان لدينا حجم V ، محاطا بسطح S فإن :

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_V \text{div } \vec{A} dV \dots (٢-٤٦)$$

حيث dV عنصر الحجم .



شكل (٢-٥)

(٩-١-٢) الزاوية المجسمة Solid angle

هي الزاوية المقابلة للسطح dS والواقعة في نقطة الأصل كما في شكل (٢-٦) أو هي زاوية الجزء المخروطي الذي قمته تقع في نقطة الأصل وقاعدته المساحة dS ويرمز لها بالرمز $d\Omega$ حيث :

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \dots \dots \dots (٢-٤٧)$$

حيث θ هي الزاوية بين اتجاه r والعمودي على dS ، وإذا كانت dS جزء من كرة نصف قطرها r فإن :

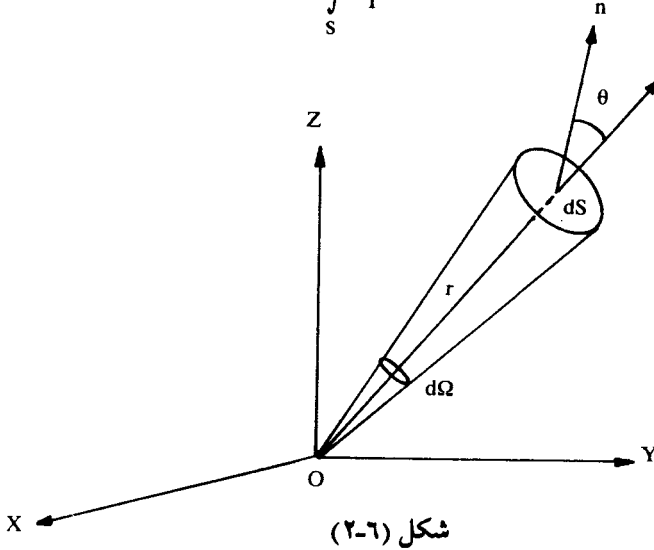
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \dots \dots \dots (٢-٤٨)$$

وتكون الزاوية المقابلة للسطح الكروي هي :

$$\Omega = \oint d\Omega = \frac{1}{r^2} \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \dots (٢-٤٩)$$

وبصورة عامة يمكن القول إن الزاوية المجسمة لأي سطح مقفل حول أي نقطة بداخله تساوي 4π ومنه فإن :

$$\oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = 4\pi \dots\dots\dots (٢-٥٠)$$



(٢-٢) مقدمة عن الأعداد المركبة

Introduction to Complex Numbers

يتكون العدد المركب، كما هو معروف، من معادلات رياضية تشتمل على كميات حقيقية وكميات تخيلية (imaginary). ولعرفة السبب في اختيار هذين اللفظين، لنستعرض ذلك باختصار.

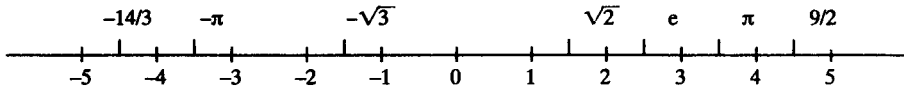
يبين الشكل (٢-٧) كيفية تمثيل الأعداد الصحيحة والكسور والكميات غير المألوفة مثل π ، $\sqrt{2}$ عند وضعها على استقامة خط مستقيم في حين وضعت الأعداد السالبة على الخط المستقيم نفسه عند امتداده على يسار نقطة الأصل (0) ويطلق على أي عدد يمكن وضعه على هذا الخط، سواء أكان موجبا أو سالبا، بأنه عدد حقيقي.

وفي القرن الثامن عشر حاول الرياضيون الحصول على حل للمعادلة

$$x^2 + 1 = 0$$

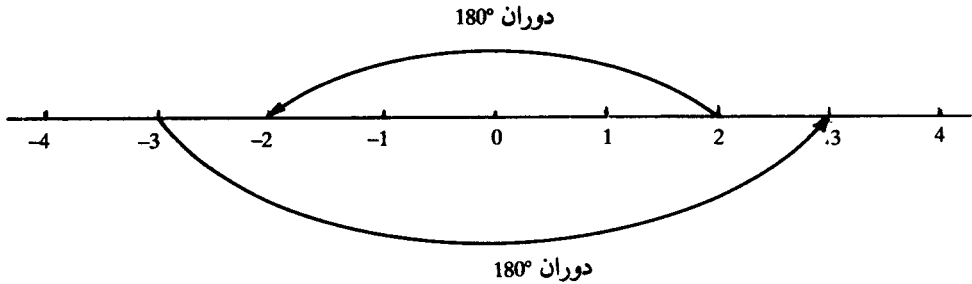
وبالرغم من أن الحل يمكن التعبير عنه بالمعادلة $x = \sqrt{-1}$ إلا أن هذا العدد لا يمكن تمثيله على الخط المبين في الشكل (٧-٢) لذلك أطلق على هذا العدد لفظ «تخيلي» لأنه لا يتلاءم مع الأعداد الحقيقية. ومن هنا جاء لفظي «حقيقي»، و«تخيلي» للتمييز بين الأعداد المختلفة ويعبر الرياضيون عن الكمية $\sqrt{-1}$ بالحرف i حيث:

$$i = \sqrt{-1} \quad \dots\dots\dots (٢-٥١)$$



شكل (٧-٢): تمثيل الأعداد الحقيقية على استقامة خط مستقيم.

وبالإشارة إلى خط الأعداد الحقيقية، المبين في الشكل (٨-٢) نجد أن ضرب الرقم $(+2) \times (-1)$ ينتج الرقم (-2) وهو يمثل دوران الرقم $(+2)$ بزاوية مقدارها 180° حول نقطة الأصل (0) .



شكل (٨-٢): دوران الأعداد الحقيقية زاوية قدرها 180° حول نقطة الأصل 0 إذا ضرب العدد بـ -1 .

والمثل $-3 = (+3)$ ، 180° ليساوي (-3) أي أن:

$$+2(-1) = -2 \quad \text{and} \quad (-3)(-1) = +3$$

وبأخذ الدوران الزاوي (angular rotation) في الاعتبار، تؤول المعادلة السابقة إلى

الصيغة التالية :

$$+2 \mid 180^\circ = -2 \text{ and } -3 \mid 180^\circ = +3$$

ويمكن التعبير عن المعادلة السابقة، بدلالة العامل i كما هي :

$$+2 (\sqrt{-1}) (\sqrt{-1}) = -2 \text{ و } -3 (\sqrt{-1}) (\sqrt{-1}) = +3$$

$$+2 (i) (i) = -2 \text{ و } -3 (i) (i) = +3 \text{ أو}$$

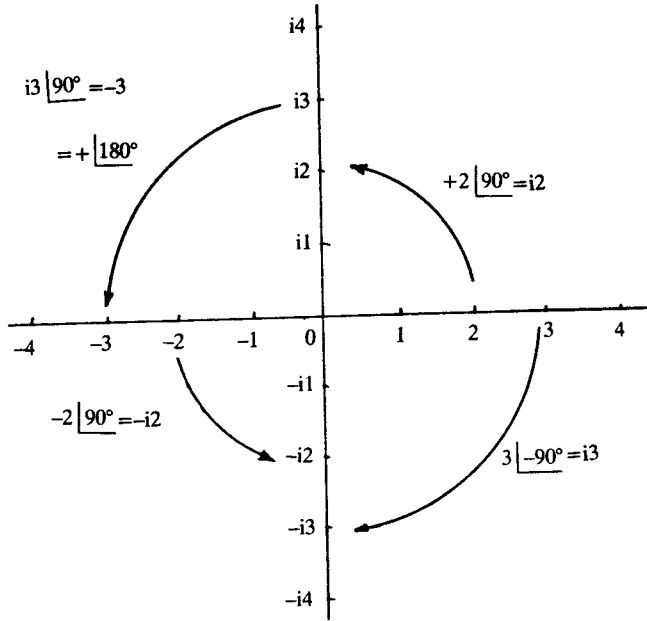
وحيث إن الدوران خلال 180° يستدعي الضرب مرتين بالعامل i ، فإننا نستنتج من ذلك أنه بضرب كمية بالعامل i مرة واحدة، يعني دوران الكمية خلال زاوية مقدارها 90° . وبضرب الكمية مرة أخرى بالعامل i ، يعني استكمال زاوية الدوران إلى 180° ويكتابة هذا المفهوم باختصار، يُحصل على :

$$+2 (i) (i) = (+2 \mid 90^\circ) \times (+1 \mid 90^\circ) = +2 \mid 180^\circ = -2$$

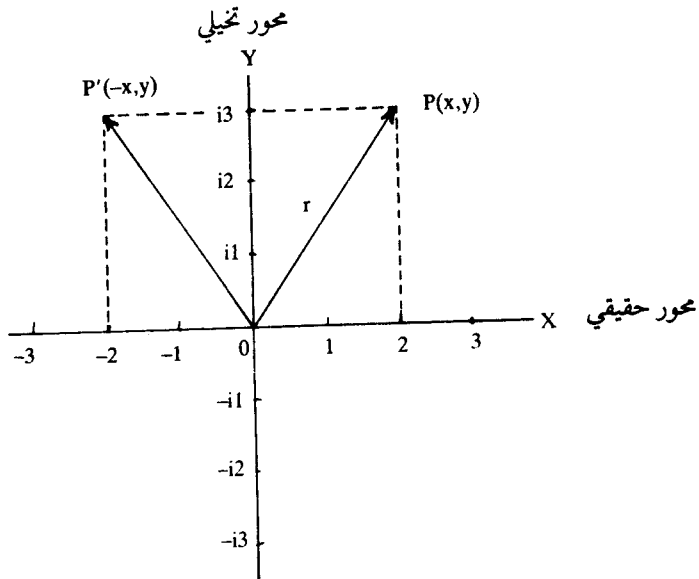
حيث المقدار $90^\circ \mid +1$ يمثل العامل i . يتضح من ذلك أن أي عدد حقيقي يتم تشغيله بالعامل (i) ، فإنه يدور حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها 90° وبالمثل أي عدد تخيلي يتم تشغيله بالعامل (i) ، فإنه يدور أيضا بزاوية مقدارها 90° ليصبح عددا حقيقيا ويبين الشكل (٩-٢) الدوران بواسطة العامل i ، حيث المحور الرأسي للعامل i يقطع خط الأعداد الحقيقية عند مروره بنقطة الأصل (O).

وحيث إن الأرقام الحقيقية تدور بزاوية مقدارها 90° لتصبح أرقاما تخيلية ، فمن الأفضل تمثيل كل من الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية بيانيا كما هو مبين في الشكل (١٠-٢) حيث يُكوّن المحوران المتقاطعان مستوى تكون الأعداد الحقيقية فيه على استقامة المحور الأفقي والأعداد التخيلية على المستوى الرأسي. ويعرف مثل هذا المستوى بالمستوى المركب (complex plane) للأعداد .

وتعرف أي نقطة داخل هذا المستوى بدلالة كميتين، إحداها حقيقية والأخرى تخيلية .



شكل (٢-٩): الدوران كل 90° إذا ضرب العدد $i = \sqrt{-1}$



شكل (٢-١٠): مستويات تمثيل الأعداد المركبة «الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية».

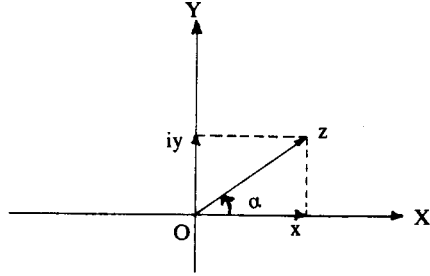
ونستنتج من ذلك أن العدد المركب z يأخذ الشكل الرياضي التالي :

$$z = x + iy \quad \dots \quad (٢-٥٢)$$

حيث يمثل x الجزء الحقيقي و iy الجزء التخيلي وتكون القيمة المطلقة (absolute value) لهذا العدد وهي :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z| \quad (٢-٥٣)$$

ويصنع اتجاهه مع الاتجاه الحقيقي الموجب زاوية α كما في شكل (٢-١١) حيث :



شكل (٢-١١) : تمثيل العدد المركب $z = x + iy$ بيانياً على المستوى xy .

$$\tan \alpha = \frac{\text{Imaginary}}{\text{Real}} = \frac{\text{التخيلي}}{\text{الحقيقي}} = \frac{y}{x} \quad \dots \quad (٢-٥٤)$$

ويمكن تحليل z إلى مقدار حقيقي قيمته $x = r \cos \alpha$ ومقدار تخيلي قدره $iy = ir \sin \alpha$.

وبهذا يكتب العدد المركب في هذه الحالة على الصورة :

$$z = x + iy = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \dots \quad (٢-٥٥)$$

ويسمى هذا النموذج للعدد المركب بالنموذج المثلثي (trigonometric form) وإذا فاضلنا المعادلة (٢-٥٥) بالنسبة للزاوية α فإن :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\alpha} &= r(-\sin \alpha + i \cos \alpha) = r(i^2 \sin \alpha + i \cos \alpha) \\ &= ir(i \sin \alpha + \cos \alpha) = iz \end{aligned}$$

أو

$$\frac{dz}{z} = i d\alpha$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على :

$$\ln z = i\alpha + C$$

$$z = e^{i\alpha + c} = e^{i\alpha} \cdot e^c$$

ولكن من المعادلة (٢-٥٥) نجد أنه إذا كانت $\alpha = 0$ فإن $z = r$

$$z = re^{i\alpha} \dots\dots\dots (٢-٥٦)$$

ويسمى هذا النموذج بالنموذج الأسّي (exponential form) وهناك نموذج آخر للعدد المركب تحدثنا عنه في بداية هذا البند ويسمى نموذج استينميتر (Steinmetz form) أو النموذج القطبي (polar form) ويأخذ الشكل :

$$z = r \angle \theta \dots\dots\dots (٢-٥٧)$$

وهناك أسس جبرية تراعى عند تداول الأعداد المركبة نوجزها فيما يلي :

١ - تتساوى الأعداد المركبة إذا تساوت مقاديرها الحقيقية وتساوت مقاديرها التخيلية فإذا كان لدينا العدد المركب $z_1 = a + ib$ والعدد المركب $z_2 = c + id$ فإن $z_1 = z_2$ إذا كان $a = c, b = d$

٢ - إذا كان لدينا $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \dots\dots\dots (٢-٥٨)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \dots\dots\dots (٢-٥٩)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \dots\dots (٢-٦٠)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \dots\dots (٢-٦١)$$

٣ - إذا كان لدينا $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ فإن :

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \dots\dots (٢-٦٢)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \dots (٢-٦٣)$$

٤ - إذا كان $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ و $z_2 = r_2 \angle \theta_2$

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1) (r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \dots (٢-٦٤)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \dots (٢-٦٥)$$

٥ - العدد المرافق (conjugate) للعدد المركب z هو z^* حيث :

$$z = x + iy \quad \& \quad z^* = x - iy$$

$$z = r \angle \theta \quad \& \quad z^* = r \angle -\theta \dots (٢-٦٦)$$

$$z = r e^{i\theta} \quad \& \quad z^* = r e^{-i\theta}$$

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \quad \& \quad z^* = r(\cos\theta - i \sin\theta)$$

٦ - جذور الأعداد المركبة (roots of complex number): يمكن كتابة العدد المركب

$z = r e^{i\theta}$ بالصورة $z = r e^{i(\theta + 2\pi n)}$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ وبصورة مماثلة يمكن

كتابة العدد المركب $z = r \angle \theta$ بالصورة $z = r \angle (\theta + n 360^\circ)$ ومنه فإن :

$$z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2\pi n)} \dots (٢-٦٧)$$

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r} e^{i(\theta + 2\pi n)/K} \dots (٢-٦٨)$$

$$z = r \angle \theta = r \angle (\theta + n 360^\circ) \dots (٢-٦٩)$$

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r} \angle (\theta + n 360^\circ)/K \dots (٢-٧٠)$$

٧ - لوغاريثم الأعداد المركبة

$$\ln z = \ln r e^{i(\theta + 2\pi n)} \dots (٢-٧١)$$

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi n)$$

الملاحق (٣): معادلات رياضية

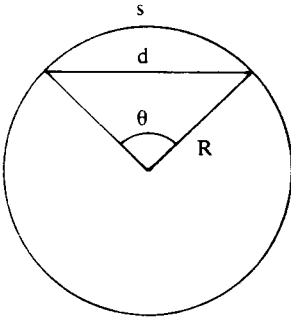
Appendix (3): Mathematical Formulae

لقد استخدمت في هذا الكتاب بعض المعادلات والقوانين الرياضية والأشكال الهندسية أو العلاقات المثلثية أو التفاضل والتكامل وغيرها لبرهنة القوانين الفيزيائية أو لحل بعض الأمثلة والمسائل التي وردت خلال كل فصل. لذلك سترد بعض هذه المعادلات والقوانين المهمة التي يحتاج إليها كل دارس فيزيائي، في هذا الملاحق.

(١-٣) أبعاد بعض الأشكال الهندسية (الدائرة، الأسطوانة والمخروط والكرة)

(١-١-٣) الدائرة (circle)

إذا فرض أن R نصف القطر، D القطر، C المحيط، S المساحة، d طول وتر في دائرة و s طول القوس المقابل لهذا الوتر.
فإن:



$$C = 2\pi R = \pi D$$

$$S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$$

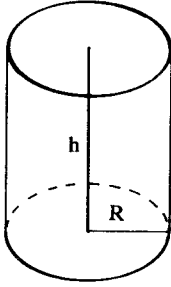
$$C = 2\sqrt{\pi S} = 2S/R$$

$$S = C^2/4\pi = \frac{1}{2}CR$$

$$d = 2R \sin \frac{\theta}{2}, \quad s = R\theta$$

(٢-١-٣) الأسطوانة والمخروط (Cylinder and Cone)

إذا فرض أن h طول الأسطوانة، S السطح الجانبي، T السطح الكلي، V الحجم، R نصف قطر القاعدة:

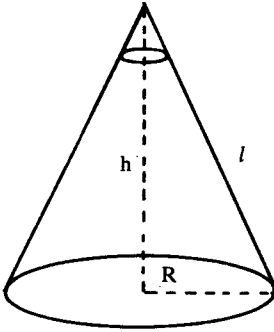


$$S = 2\pi R h$$

$$T = 2\pi R (R + h)$$

$$V = \pi R^2 h$$

وإذا فرض أن l الارتفاع الجانبي للمخروط فإن:



$$l = (R^2 + h^2)^{1/2}$$

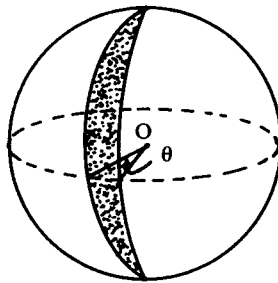
$$S = \pi R l = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$T = \pi R (R + l) = \pi R (R + \sqrt{R^2 + h^2})$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

(Sphere) الكرة (٣-١-٣)

إذا فرض أن R نصف قطر الكرة، D القطر، S مساحة السطح، V الحجم فإن:



$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$$

ومساحة الجزء المخطط.

$$S = 2R^2\theta \quad (\theta: \text{in radian})$$

(٢-٣) العلاقات اللوغاريتمية

Logarithmic Relations

$$y = \log_a x \quad \text{فإن} \quad x = a^y \quad \text{إذا كان}$$

بعض قوانين اللوغاريتمات

$$(1) - \log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$$

$$(2) - \log_a(x/z) = \log_a x - \log_a z$$

$$(3) - \log_a x^n = n \log_a x$$

$$(4) - \log_a x = \log_b x / \log_b a = (\log_b x) \cdot (\log_a b)$$

$$(5) - \log_{10} x = \log_e x / \log_e 10 = (\log_{10} e) (\log_e x) = 0.4329 \log_e x$$

أو:

$$\log_{10} x = 0.4329 \ln x$$

$$(6) - \log_e x = \log_{10} x / \log_{10} e = (\log_e 10) (\log_{10} x) = 2.3026 \log_{10} x$$

أو:

$$\ln x = 2.3026 \log_{10} x$$

وتسمى $\log_{10} x$ باللوغاريتم العشري .

وتسمى $\log_e x$ باللوغاريتم الطبيعي ويكتب عادة $\ln x$

(٣-٣) العلاقات المثلثية

Trigonometric relations

(١-٣-٣) الدوال المثلثية

$$(1) - \sin \alpha = \sin \alpha$$

جيب الزاوية α (جا α)

$$(2) - \cos \alpha = \cos \alpha$$

جيب التمام α (جتا α)

$$(3) - \tan \alpha = \tan \alpha$$

مماس - ظل الزاوية α (ظا α)

(4)- cosecant $\alpha = \csc \alpha$

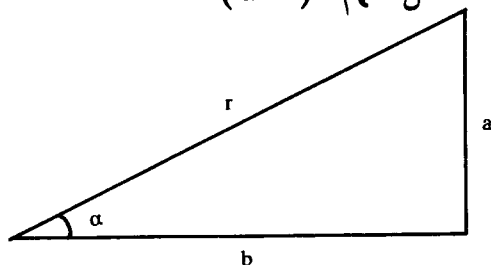
(5)- secant $\alpha = \sec \alpha$

(6)- cotangent $\alpha = \cot \alpha$

(7) $\sin \alpha = \frac{a}{r} = \frac{1}{\csc \alpha}$

(8) $\cos \alpha = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sec \alpha}$

(9) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$



(10)- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(11)- $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

(12)- $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

(13)- $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin (180^\circ - \alpha)$

(14)- $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha) = -\cos (180^\circ - \alpha)$

(15)- $\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha) = -\tan (180^\circ - \alpha)$

(16)- $\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha) = -\cot (180^\circ - \alpha)$

(17) $\csc \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha$

(٢-٣-٣) جمع وطرح زوايا الدوال المثلثية

(18)- $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

(19)- $\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

(20) $\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$, $\cot (\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

(٣-٣-٣) علاقات ضعف الزاوية

(21) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

(22) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

(23) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$(24) \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

(٤-٣-٣) علاقات حاصل ضرب دالتين

$$(25) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$(26) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$(27) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$$

$$(28) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$$

(٥-٣-٣) علاقات حاصل جمع دالتين

$$(29) \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha \mp \beta)$$

$$(30) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$(31) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$(32) \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

(٦-٣-٣) علاقات نصف الزاوية

$$(33) \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$(34) \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$(35) \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

(٧-٣-٣) العلاقات للدوال ذوات القوة

$$(36) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha), \quad \sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$(37) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \quad , \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

(٨-٣-٣) العلاقات للدوال الأسية

$$(38) e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{where} \quad i = \sqrt{-1}$$

$$(39) \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$(40) \tan \alpha = -i \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}} \right) = -i \left(\frac{e^{2i\alpha} - 1}{e^{2i\alpha} + 1} \right)$$

(٤-٣) الدوال الزائدية

Hyperbolic Functions

$$(1) \sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$(2) \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$(3) \tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}$$

$$(4) \coth \alpha = \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} = \frac{1}{\tanh \alpha}$$

$$(5) \sinh (\alpha \pm i\beta) = \sinh \alpha \cos \beta \pm i \cosh \alpha \sin \beta$$

$$(6) \cosh (\alpha \pm i\beta) = \cosh \alpha \cos \beta \pm i \sinh \alpha \sin \beta$$

$$(7) \cosh (i\alpha) = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \cos \alpha$$

$$(8) \sinh (i\alpha) = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = i \sin \alpha$$

$$(9) e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

$$(10) e^{\pm \alpha} = \cosh \alpha \pm \sinh \alpha$$

$$(11) \cosh \alpha = \cos i\alpha \quad , \quad i \sinh \alpha = \sin i\alpha$$

$$(12) \tanh(\alpha \pm i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta} \pm i \frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$(13) \coth(\alpha \pm i\beta) = \frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta} \pm i \frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}$$

(٥-٣) المعادلات التقريبية للكميات الصغيرة

Approximation Formulae for Small Quantities

إذا فرض أن δ كمية صغيرة موازنة بالوحدة فإن :

$$(1) (1 \pm \delta)^2 = 1 \pm 2\delta, \quad (1 \pm \delta)^n = 1 \pm n\delta$$

$$(2) (1 + \delta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\delta, \quad (1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta$$

$$(3) e^\delta = 1 + \delta, \quad \ln(1 + \delta) = \delta$$

(٦-٣) المسلسلات Series

(١-٦-٣) ذات الحدين Binomial

$$(1) (x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots; (y^2 < x^2)$$

$$(2) (1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots; \quad (x^2 < 1)$$

$$(3) (1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \dots; \quad (x^2 < 1)$$

(٢-٦-٣) الدوال الأسية Exponential

$$(4) e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$(5) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(6) e^{\pm ix} = 1 \pm ix - \frac{x^2}{2!} \mp \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm i \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Trigonometric الدوال المثلثية (٣-٦-٣)

$$(7) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(8) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(9) \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

$$(10) \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

$$(11) \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$$

$$(12) \csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \dots$$

Hyperbolic الدوال الزائدية (٤-٦-٣)

$$(13) \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(14) \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(15) \tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

$$(16) \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$$

$$(17) \operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \dots$$

$$(18) \operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 + \dots$$

(٧-٣) التفاضل «المشتقات»

Derivatives

في المعادلات التالية u, v, w تمثل دوال ثابتة لـ x و a, b, c, n تمثل أعدادا ثابتة حقيقية.

$$(1) \frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$(2) \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$(3) \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$(4) \frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

$$(5) \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} ; \quad \frac{d}{dx}(u^n v^m) = u^{n-1} v^{m-1} \left(nv \frac{du}{dx} + mu \frac{dv}{dx} \right)$$

$$(6) \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$(7) \frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

$$(8) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u^n}{v^m}\right) = \frac{u^{n-1}}{v^{m+1}} \left(nv \frac{du}{dx} - mu \frac{dv}{dx} \right)$$

$$(9) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{dx} ; \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u^n} \right) = -\frac{n}{u^{n+1}} \frac{du}{dx}$$

$$(10) \frac{d}{dx} (\log_a u) = (\log_a e) \frac{1}{u} \frac{du}{dx} ; \frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$(11) \frac{d}{dx} (a^u) = a^u (\ln a) \frac{du}{dx}$$

$$(12) \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$(13) \frac{d}{dx} (u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + (\ln u) u^v \frac{dv}{dx}$$

$$(14) \frac{d}{dx} (\sin u) = (\cos u) \frac{du}{dx}$$

$$(15) \frac{d}{dx} (\cos u) = -(\sin u) \frac{du}{dx}$$

$$(16) \frac{d}{dx} (\tan u) = (\sec^2 u) \frac{du}{dx}$$

$$(17) \frac{d}{dx} (\cot u) = -(\csc^2 u) \frac{du}{dx}$$

$$(18) \frac{d}{dx} (\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$(19) \frac{d}{dx} (\csc u) = \csc u \cdot \cot u \frac{du}{dx}$$

$$(20) \frac{d}{dx} (\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$(21) \frac{d}{dx} (\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$(22) \frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$(23) \frac{d}{dx}(\cot^{-1}u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$(24) \frac{d}{dx}(\sec^{-1}u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$(25) \frac{d}{dx}(\csc^{-1}u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integrals التكامل (٨-٣)

في المعادلات التالية u, v, w تمثل دوال ثابتة لـ x و a, b, c, m, n, p تمثل أعدادا ثابتة حقيقية.

$$(1) \int a dx = ax$$

$$(2) \int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$(3) \int u dv = u \int dv - \int v du = uv - \int v du$$

$$(4) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$(5) \int \frac{dx}{x} = \log_e x = \ln x$$

$$(6) \int e^x dx = e^x ; \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$(7) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$(8) \int x e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$(9) \int x^m e^{ax} dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax} dx$$

$$(10) \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$(11) \int \frac{dx}{a + b e^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a + b e^{cx})$$

$$(12) \int \frac{e^{ax}}{b + c e^{ax}} dx = \frac{1}{ac} \ln(b + c e^{ax})$$

$$(13) \int \frac{x e^{ax}}{(1 + ax)^2} dx = \frac{e^{ax}}{a^2 (1 + ax)}$$

$$(14) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} \text{ or } -\cos^{-1} \frac{x}{a} \quad ; (a^2 > x^2)$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$(16) \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(17) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$(18) \int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)b}$$

$$(19) \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{an(p+1)} [-x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1} + (m+1+np+n) \int x^m (a + bx^n)^{p+1} dx]$$

$$(20) \int \frac{dx}{c^2 + x^2} = \frac{1}{c} \tan^{-1} \frac{x}{c}$$

$$(21) \int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \ln \frac{c+x}{c-x} \quad (c^2 > x^2)$$

$$(22) \int \frac{xdx}{c^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln (c^2 \pm x^2)$$

$$(23) \int \frac{xdx}{(c^2 \pm x^2)^{n+1}} = \mp \frac{1}{2n(c^2 \pm x^2)^n}$$

$$(24) \int \frac{dx}{(c^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)} \left[\frac{x}{(c^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(c^2 \pm x^2)^{n-1}} \right]$$

$$(25) \int \frac{dx}{(x^2 - c^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)} \left[-\frac{x}{(x^2 - c^2)^{n-1}} - (2n-3) \int \frac{dx}{(x^2 - c^2)^{n-1}} \right]$$

$$(26) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$(27) \int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$(28) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$(29) \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$(30) \int (\sin ax) dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$(31) \int (\cos ax) dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$(32) \int (\tan ax) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax = \frac{1}{a} \ln \sec ax$$

$$(33) \int (\cot ax) dx = \frac{1}{a} \ln \sin ax = -\frac{1}{a} \ln \csc ax$$

$$(34) \int (\sec ax) dx = \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right)$$

$$(35) \int (\csc ax) dx = \frac{1}{a} \ln (\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

$$(36) \int (\sin^2 ax) dx = -\frac{1}{2a} \cos ax \sin ax + \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$(37) \int (\sin^n ax) dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int (\sin^{n-2} ax) dx$$

$$(38) \int (\cos^2 ax) dx = \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$(39) \int (\cos^n ax) dx = \frac{1}{na} \cos^{n-1} ax \sin ax + \frac{n-1}{n} \int (\cos^{n-2} ax) dx$$

$$(40) \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \int (\csc^2 ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax$$

$$(41) \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \int (\sec^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax$$

$$(42) \int (\tan^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$$

$$(43) \int (\cot^2 ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$$

$$(44) \int (\tan^n ax) dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int (\tan^{n-2} ax) dx$$

$$(45) \int (\cot^n ax) dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int (\cot^{n-2} ax) dx$$

$$(46) \int (\sin^{-1} ax) dx = x \sin^{-1} ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$(47) \int (\cos^{-1} ax) dx = x \cos^{-1} ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$(48) \int (\tan^{-1} ax) dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1+a^2x^2)$$

$$(49) \int (\cot^{-1} ax) dx = x \cot^{-1} ax + \frac{1}{2a} \ln(1+a^2x^2)$$

$$(50) \int (\sec^{-1} ax) dx = x \sec^{-1} ax - \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2-1})$$

$$(51) \int (\csc^{-1} ax) dx = x \csc^{-1} ax + \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2-1})$$

المراجع

References

أولاً: المراجع العربية

- أبوطالب، نعيم مصطفى؛ زكي، أسر علي والبدوي، السيد عبدالمعطي. أسس الهندسية الكهربائية (الجزء الأول). منشأة المعارف، الاسكندرية (١٩٧٥).
- أحمد، ناظم حسون والراشد، راشد عبدالرزاق. الكهرباء والمغناطيسية (الجزء الأول). مطابع جامعة البصرة، البصرة بالعراق (١٩٧٨).
- حسب النبي، منصور محمد. الكهرباء والمغناطيسية. مكتبة النهضة المصرية، القاهرة (١٩٧٢).
- داخل، عقيل عزيز. مقدمة في الكهربائية والمغناطيسية. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر (١٩٨٥م).
- قمر، محمد أحمد. هندسة الآلات الكهربائية. منشأة المعارف، الاسكندرية (١٩٧٢).
- النادي، محمد وأبوالمجد، عادل (مترجمين). الكهرباء والمغناطيسية لسيرز. دار النهضة العربية، القاهرة (١٩٧٠).

ثانياً: المراجع الأجنبية

- Chikazumi, S. and Charap, S.H.** *Physics of Magnetism*. John Wiley, New York (1964).
- Duffin, W.J.** *Advanced Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill, London (1980).
- Edminister, J.A.** *Electric Circuits*. McGraw-Hill, New York (1972).
- Gillam, E. and King, R.M.** *College Physics*. MacDonald and Evans, London (1971).
- Grant, I.S. and Phillips, W.R.** *Electromagnetism*. John Wiley, New York (1975).
- Kraus, J.D. and Carver, K.R.** *Electromagnetics*. McGraw-Hill, New York (1973).
- Lnman, F.W. and Miller, C.** *Contemporary Physics*. MacMillan, New York, London (1975).
- Mackelvey, J. and Grotch, H.** *Physics for Science and Engineering*. Harper & Row, New York (1978).
- Mitsui, T.; Tatsuraki, L. and Nakamura, E.** *An Introduction to the Physics of Ferroelectric*. Gordon and Breach, New York, London (1976).
- Peck, E.R.** *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill, New York (1953).
- Raymond, A. Serway.** *Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics*. Savnders, London (1992).
- Resnick, R. and Halliday, D.** *Physics*. John Wiley, New York (1978).
- Romanowitz, H.A. and Pukett, R.E.** *Introduction to Electronic*. John Wiley, New York (1976).
- Scott, W.T.** *The Physics of Electricity and Magnetism*. John Wiley, New York (1959).
- Sears, F.W.** *Electricity and Magnetism*. Addison Wesley, London (1974).
- Selby, S.M.** *Standard Mathematical Table*. The Chemical Rubber Co., Ohio (1969).
- Smith, C.J.** *Electricity and Magnetism*. Edward Annold Ltd., London (1963).
- Tareev, B.** *Physics of Dielectric Material*. Mir, Moscow (1975).
- Wangness, R.K.** *Electromagnetic Fields*. John Wiley, New York (1979).
- Winch, R.P.** *Electricity and Magnetism*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963).
- Zilberman, G.** *Electricity and Magnetism*. Mir, Moscow (1973).

ثبت المصطلحات العلمية

أولاً: عربي - إنجليزي

Kink	التواء
Electrometer	الكترومتر (مقياس الكهرباء)
Quadrant electrometer	رباعي
Electron	الالكترون
Conduction electrons	الالكترونات التوصيل
Bound electrons	مقيدة
Safety	أمان
Ampere	أمبير (وحدة التيار الكهربائي)
Absorption	امتصاص
diffusion	انتشار
Gradient	انحدار «تدرج»
deflection	انحراف (انعطاف)
Conservation	الحفاظ، حفظ
decay	انحلال (اضمحلال - تناقص)
drift	انسياق (انجراف)
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار
Break down	انهيار

ب

Paraelectric	باراكهربائي (متسامت الكهربائية)
Paramagnetic	بارامغناطيسي (متسامت المغناطيسية)
Proton	بروتون
Dimension	بعد
Crystal	بلورة

ل

Band width	اتساع شريطي
	أحادي الطول الموجي،
Monochromatic	(أحادي اللون)
Probability	احتمال
Cylindrical coordinates	إحداثيات اسطوانية
Cartesian coordinates	ديكارتية
Spherical coordinates	كروية
Phase difference	اختلاف في الطور
Relaxation	ارتخاء
displacement	إزاحة
depolarization	إزالة الاستقطاب
demagnetization	التمغنط
Thermocouple	ازدواج حراري
Response	استجابة
Polarization	استقطاب
Spontaneous polarization	عفوي (تلقائي)
Continuity	استمرارية
Exponential	أسّي
Radiation	إشعاع
Rays	أشعة
X-rays	سينية
Complex numbers	أعداد مركبة
Curl	التفاف (نوع من أنواع الاشتقاق)

Magnetization	تمغنط (مغنطة)	Compass	بوصلة
Repulsion	تنافر	Betatron	بيتاترون
Logarithmic decrement	تناقص لوغاريتمي		
Thermal agitation	تهيج حراري		
Parallel	تواز (مواز أو متوازي)	Susceptibility	تأثرية
Antiparallel	توازي متضاد في الاتجاه	Electric susceptibility	كهربية
Harmonic	توافقي	Magnetic susceptibility	مغناطيسية
Series	توالي (متسلسل)	Effect	تأثير (فعالية)
Tension	توتر (شد)	Skin effect	سطحي (قشري، جلدي)
Distribution	توزيع	Dissipation	تبديد
Earthing	توصيل أرضي	Attraction	تجاذب
Connection of capacitor	المكثفات	Induction	تحريض (حث أو تأثير)
Electrical conductivity	توصيلية كهربية	Conversion	تحويل (تبديل)
Attenuation	توهين	Hysteresis	تحلف
Current	تيار	Magnetic flux	تدفق مغناطيسي (فيض)
Eddy current	تيارات دوامية	Covalent bonding	ترابط إسهامي
Conduction current	تيار التوصيل	Ionic bonding	أيوني
Feeble current	ضعيف	Homopolar bond	متجانس القطبية
Effective current	فعال	Alignment	ترافص في اتجاه واحد (توجيه)
Steady current	مستقر	Configuration	ترتيب
Direct current	مستمر	Frequency	تردد
		Structure	تركيب (بنية)
		Atomic structure	ذري
		Acceleration	تسارع (عجلة)
Constant	ثابت	Leakage	تسرب
Boltzmann's constant	بولتزمان	Saturation	تشبع
Time constant	الزمن	Dispersion	تشتت
Eel	ثعبان البحر	Interaction	تفاعل
Air gap	ثغرة هوائية (فجوة)	Divergence	تفرق (تباعد)
Physical constant	ثوابت فيزيائية	Glowing discharge	تفريغ توهجي
		Discharge	الشحنة
		Sharing of charge	تقاسم الشحنة
Domain wall	جدر المناطق	Electrostriction	تقبض كهربي (انضغاط كهربي)
Magnetic attraction	جذب مغناطيسي		تغير أبعاد العازل بتأثير المجال الكهربي
Square root	جذر تربيعي	Valence	تكافؤ
Root mean square	متوسط المربع	Line integral	تكامل خطي
Imaginary part	جزء تخيلي	Electrification	تكهرب
Molecule	جزيء		

Hyperbolic function	دالة زائدية	Particle	جسيم
Diamagnetic	دايامغناطيسية	Galvanometer	جلفانومتر
Reference temperature	درجة حرارة الاسناد	Tangent galvanometer	الظل
Angular impulse	دفع زاوي	Ballistic galvanometer	قذفي
Circular	دوائري		جهاز راسم الذبذبات المهيطي
Rotation	دوران	Cathode-ray oscilloscope	
Angular rotation	زاوي	Potential	جهد (كمون)
		Magnetic potential	مغناطيسي
Damped oscillation	ذبذبة متخامدة		
Adjacent atoms	ذرات متجاورة	Self inductance	حث ذاتي
Atom	ذرة	Mutual inductance	متبادل
Peak	ذروة (قمة)	Magnetic induction	مغناطيسي
Binomial	ذو حدين (ثنائي الحد)	Lodestone	حجر مغناطيسي
Dipole	ذو قطبين (ثنائي القطب)	Sharpness	حدة
		Domain boundary	حدود المناطق
Binding	رابطة	Soft iron	حديد مطاوع
Electrovalent bond	التكافؤ الكهربائي	Heat	حرارة
Cohesive binding	تماسكية	Heat librated	مفقودة
Oscillograph	راسم الذبذبات	Heat absorbed	ممتصة
Quadrupole	رباعي الأقطاب	Induce	حرّض (حث، أثر)
Reactance	رد (مفاعلة)	Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Atomizer	رذاذ	Orbital motion	مدارية
Resonance	رنين	Mobility	حركية
		Guard ring	حلقة حارسة
		Load	حمل
Synchronize	زامن (تزامن)		
Angular	زاوي	Out of phase	خارج عن الطور
Angle	زاوية	Lines of forces	خطوط القوى
Phase angle	الطور		
Solid angle	مجسمة		
Cycle time	زمن دوري	Circle	دائرة
Spring	زنبرك	Rejector circuit	خائقة (رافضة)
		Circuit	كهربية
Static	ساكن	Equivalent circuit	كهربية مكافئة
Electronegativity	سالية كهربية	Magnetic circuit	مغناطيسية
		Open circuit	مفتوحة

	ط		Velocity	سرعة
Energy		طاقة	Drift velocity	انسيابية
Vibrational energy		اهتزازية	Angular velocity	زاوية
Kinetic energy		الحركة	Terminal velocity	نهائية منتظمة
Potential energy		الوضع (طاقة الكمون)	Surface	سطح
Phase		طور	Hypothetical surface	افتراضي
Anti-phase		عكسي	Convolut surface	ملتو
Wave length		طول الموجة	Equipotential surface	سطوح متساوية الجهد
Spectrum		طيف	Amplitude	سعة (ذروة)
			Capacitance	كهربية للمكثف
			Calorie	سعر
			Permittivity	ساحية
Transient		عابر، مؤقت	Cyclotron	سيكلوترون
Dielectric (insulator)		عازل كهربائي		
Atomic number		عدد ذري		
Conjugate		مرافق	Network (electric)	شبكة كهربية
Wave number		موجي	Quasi - static	شبه ساكن
Moment		عزم	Semi conduction	موصل
Electric moment		كهربي	Free charges	شحنات حرة
Torque		اللي (عزم الدوران، عزم الازدواج)	Charge	شحنة
Restoring torque		اللي المرجع	Test charge	اختبار
Magnetic moment		مغناطيسي	Electronic charge	الكترونية
Armature		عضو الإنتاج الكهربائي	Induced charge	تأثيرية (مستحثة)
Node		عقدة	Negative charge	سالبة
Trigonometric relations		علاقات مثلثية	Bound charge	مقيدة
Dynamic		علم الحركة (ديناميكا)	Positive charge	موجبة
Skin depth		عمق قشري (عمق الاختراق)	Intensity	شدة
Thermopile		عمود كهروحراري	Magnetic field strength	المجال المغناطيسي
Perpendicular		عمودي (متعامد)	Heavily damped	شديد التخماد
Rare earth elements		عناصر الأرض النادرة	Boundary conditions	شروط حدودية
Transition elements		انتقالية	Work	شغل
Standard		عيار (قياسي)		
Deformation		عيب (تشوه)		
			Lamina	صفيفة رقيقة
Spin		غزل (لف)		
Unstable		غير مستقر	Phasor	ضابط الطور (مطاور)
Unpolarized		مستقطب	Antiferromagnetic	ضد المغناطيسية الحديدية

Charge density	الشحنة	فائق التوصيل (فوق التوصيل، مفرط التوصيل)	فائق التوصيل
Volume charge density	الشحنة الحجمية	Super conductor	فجوة
Surface charge density	الشحنة السطحية	Gap	فرق الجهد
Linear charge density	الشحنة الطولية	Potential difference	فضاء (حيز، فراغ)
Sphere	كرة (جسم كروي)	Space	فقد
Efficiency	فعالية	Loss	فوق البنفسجي
Quantitative	كمي (مقداري)	Ultraviolet	فيض (تدفق)
Angular momentum	كمية الحركة الزاوية	Flux	
Electric	كهربي		
Piezoelectric	كهربية إجهادية		
Electrostatic	ساكنة		
Amber	كهرمان		
Thermoelectric	كهروحراري		
		Acceptor	قابل
		Admittance	قبولية (مساحة)
Effective	مؤثر (فعال)	Power	قدرة (استطاعة)
Indicator	مؤشر (دليل)	Instant power	لحظية
Substance	مادة	Dissipated power	مبددة (ضائعة)
Commutator	مبدّل	Shell	قشرة
Anisotropic	متباين الخواص (الناحي)	Polar	قطبي
Remanence	متبقي (متخلف)	Shear	قطع (قص)
Crystalline	متبلور	Bridge	قنطرة
Vector	متجه	Force	قوة
Alternating	متردد (متناوب)	Electromotive force (E.M.F)	دافعة كهربية
Neutral	متعادل (محايد)		دافعة مغناطيسية
Mean free path	متوسط المسار الحر	Magnetomotive force (M.M.F)	
Triangle of force	مثلث القوى	Centrifugal force	طاردة مركزية
Field	مجال	Critical value	قيمة حرجة
Earth's field	أرضي	Average current	متوسطة للتيار
Molecular field	جزيئي	Average power	متوسطة للقدرة
Coercive field	قهري		
Shunt	جزء التيار (مفرع التيار)	Oscilloscope	كاشف الذبذبات
Screened	محجوب (مستور)	Whole	كامل (تام)
Motor	محرك	Mass	كتلة
Resultant	محصلة	Atomic mass	ذرية
Transformer	محول	Density	كثافة
Step-down transformer	خافض	Current density	التيار

Resistivity	نوعية	Step-up transformer	رافع
Fluxmeter	مقياس التدفق المغناطيسي	Cone	مخروط
Ammeter	التيار الكهربى	Vector diagram	مخطط المتجهات
Voltmeter	الجهد	Damped	مخمّد (متخامد، متضائل)
Capacitor (condensor)	مكثف	Orbit	مدار
Condensers in parallel	مكثفات على التوازي	Observer	مراقب (راصد)
Condensers in series	على التوالي	Tangential component	مركبة مماسية
Electroscope	مكشاف كهربى	Centre of gravity	مركز الثقل
Coil	ملف	Elastic	مرن
Primary coil	ابتدائي	Couple	مزدوج (ازدواج)
Search coil	استكشاف	Path	مسار
Secondary coil	ثانوي	Accelerator	مسرّع (معجل)
Solenoidal coil	حلزوني	Absolute	مطلق
Toroidal coil	حلقي	Mass spectrograph	مطياف كتلي
Rotating coil	دوار	Differential equation	معادلة تفاضلية
Impedance	ممانعة	Coefficient	معامل
Capacitive impedance	سعوية	Refractive index	الانكسار
Reluctance	مغناطيسية (نفور، إحجام)	Damping coefficient	التخميد
Domains	مناطق (مقاطعات)	Correction factor	التصحيح
Domains formation	التكوين	Power factor	القدرة
Uniform	منتظم	Quality factor	النوعية
Conservation	منحفظ (محافظ)	Intermediate metal	معدن وسيط
Bisector	منصف زوايا أو أضلاع	Rational	معقول، منطقي
Ferromagnetic materials	مواد حديدومغناطيسية	Suspended	معلق (متدلي)
	عازلة تلقائية الاستقطاب	Magnet	مغناطيس
Ferroelectric materials		Magnetic dipole	ثنائي القطب
Damped waves	موجات مخمدة (متضائلة)	Permanent magnet	دائم
Wave	موجة	Natural magnet	طبيعي
Sine wave, sinusoidal wave	جيبية	Magnetism	مغناطيسية
Electromagnetic wave	كهرومغناطيسية	Remanent magnetism	متبقية (متخلفة)
Transverse wave	مستعرضة		تلقائية (عفوية)
Plane wave	مستوية	Spontaneous magnetism	
Isotropic	موحد الخواص الاتجاهي (متماثل المناحي)	Reactance	مفاعلة (رد)
Conductor	موصل (ناقل)	Inductive reactance	حثية (رد حثي)
Generator	مولد	Capacitive reactance	سعوية (رد سعوي)
D.C. generator	التيار المستمر	Resistance	مقاومة
Dynamo	كهربى	Rheostat	متغيرة

		Torsion balance	ميزان الالتواء (اللي)
Corona		هالة	
		Conductance	ناقلية
Units		Relative	نسبي
Unidirectional		Radius	نصف قطر
Insulating media		Superposition theorem	نظرية التراكم
Thermo-junction		Permeability	نفاذية
Spark		Half power points	نقطتا نصف القوة
		Inversion point	نقطة انقلاب
		Curie point	كيوري
		Growth	نمو
Lag		Qualitative	نوعي (كيفي)
Lead		Atomic nuclei	نويات ذرية

ثانيًا: إنجليزي عربي

A			
Absolute	مطلق	Anti-parallel	توازي متضاد في الاتجاه
Absorption	امتصاص	Armature	عنصر الانتاج الكهربى
Acceleration	تسارع	Atom	ذرة
Accelerator	مسرّع، معجل	Atomic mass	الكتلة الذرية
Acceptor	قابل	nuclei	النويات الذرية
Adjacent atoms	ذرات متجاورة	number	العدد الذرى
Admittance	قبولية، مساحه	structure	التركيب الذري
Air gap	ثغرة هوائية (فجوة)	Atomizer	رذاذ
Alignment	تراسف في اتجاه واحد «توجيه»	Attenuation	توهين
Alternating	متردد - متناوب	Attraction	تجاذب
Amber	كهرمان - كهرب	Average current	القيمة المتوسطة للتيار
Ammeter	مقياس للتيار الكهربى	power	القدرة المتوسطة
Ampere	العالمى	B	
Amplitude	سعة، ذروة	Ballistic galvanometer	الجلفانومتر القذفى
Angle	زاوية	Band width	الاتساع الشريطى
Angular	زاوي	Betatron	بيتاترون
impulse	الدفع الزاوي	Binding	رابطة
momentum	كمية الحركة الزاوية	Binomial	ذو حدين، ثنائى الحد
rotation	الدوران الزاوي	Bisector	منصف زوايا أو «أصلاع»
velocity	السرعة الزاوية	Boltzmann's constant	ثابت بولتزمان
Anisotropic	متباين الخواص «المناحي»	Boundary conditions	الشروط الحدية
Anti-ferromagnetic	ضديد المغناطيسية الحديدية	Bound electrons	الكترونات مقيدة
		charges	شحنات مقيدة
		Break down	انهيار
		Bridge	قنطرة

C

Calorie	سعر
Capacitance	سعة
capacitive impedance	الممانعة السعرية
reactance	المفاعلة أو الرد، السعري
Capacitor	مكثفة
Cartesian coordinates	الاحداثيات الديكارتية
	جهاز راسم الذبذبات
Cathode-ray oscilloscope	الكاثودي «المهبطي»
Centre of gravity	مركز الثقل
Centrifugal force	قوة طاردة مركزية
Charge	شحنة
density	كثافة الشحن
Circle	دائرة
Circuit	دائرة كهربية
Circular	دائري
Coefficient	معامل
Coercive field	المجال القهري
Cohesive binding	رابطة تماسكية
Coil	ملف
Commutator	مبدل
Compass	بوصلة
Complex numbers	الأعداد المركبة
Condensers (capacitors)	مكثفات
in parallel	مكثفات على التوازي
in series	مكثفات على التوالي
Conductance	ناقلية، موصلة
Conduction current	تيار التوصيل
electrons	الالكترونات التوصيل
Conductivity	الناقلية النوعية، التوصيلية الكهربائية
Conductor	موصل، ناقل
Cone	مخروط
Configuration	توزيع
Conjugate	العدد المرافق
Connection of capacitors	توصيل المكثفات
Conservation	انحفاظ، حفظ

Conservative	منحفظ
Constant	ثابت
Continuity	استمرارية
Conversion	تحويل، تبديل
Convolved	سطح ملتو
Corona	هالة
Correction factor	معامل التصحيح
Couple	مزدوج، ازدواج
Covalent bonding	الترابط الإسهامي
Critical value	قيمة حرجة
Crystal	مبلورة
Crystalline	متبلور
Curie point	نقطة كيوري
Curl	الانحناء «نوع من أنواع الاشتقاق»
Current	تيار
density	كثافة التيار
Cycle time	زمن دورة
Cyclotron	سيكلوترون
Cylindrical coordinates	إحداثيات اسطوانية

D

Damped	مخمد، متخامد، متضائل
oscillation	ذبذبة متخامدة
waves	موجات مخمدة أو متضائلة
Damping coefficient	معامل التخميد
D.C. generator	مولد التيار المستمر
Decay	انحلال، اضمحلال، تناقص
Deflection	انحراف، انعطاف
Deformation	عيب، تشوه
Demagnetization	إزالة التمثغط
Density	كثافة
Depolarization	إزالة الاستقطاب
Diamagnetic	دايا مغناطيسية
Dielectric	عازل
Differential equation	معادلة تفاضلية
Diffusion	انتشار
Dimension (s)	بُعد (أبعاد)

[illegible]

Heavily damped	شديد التخماد	Load	حل
Homopolar bond	ترابط متجانس القطبية	Lodestone	الحجر المغناطيسي
Hyperbolic function	دالة زائدية	Logarithmic decrement	التناقص اللوغاريتمي
Hypothetical surface	سطح افتراضي	Loss	فقد
Hysteresis	تخلف		

I

Imaginary part	الجزء التخيلي
Impedance	ممانعة
	معامل الانكسار، أو قرينة
Index of refraction	الانكسار
Indicator	مؤشر، دليل
Induce	حرض، حث، أثر
Induced charge	شحنة تأثرية، شحنة مستحثة
Induction	تحريض، حث، تأثير
Inductive reactance	مفاعلة حثية أو رد حثي
Instant power	القدرة اللحظية
Insulating media	وسط عازل
Insulator	عازل
Intensity	شدة
Interaction	تفاعل
Intermediate metal	معدن وسيط
Inversion point	نقطة الانقلاب
Ionic bonding	الترابط الأيوني
Isotropic	موحد الخواص الاتجاهية، متماثل المناحي

K

Kinetic energy	طاقة الحركة
Kink	التواء

L

Lag	يتباطأ
Lamina	صفحة رقيقة
Lead	يتقدم
Leakage	تسرب
Linear charge density	كثافة الشحنة الطولية
Line integral	تكامل خطي
Lines of forces	خطوط القوى

M

Magnet	مغناطيس
Magnetic attraction	جذب مغناطيسي
circuit	دائرة مغناطيسية
dipole	مغناطيس ثنائي القطب
field strength	شدة المجال المغناطيسي
flux	التدفق المغناطيسي
force	القوة المغناطيسية
induction	الحث المغناطيسي
moment	العزم المغناطيسي
potential	الجهد المغناطيسي
susceptibility	التأثرية المغناطيسية

Magnetism	المغناطيسية
Magnetization	تمغنط، مغنطة
Magnetomotive force	القوة الدافعة المغناطيسية
Mass spectrograph	المطياف الكتلي
Mean free path	متوسط المسار الحر
Mobility	حركية
Molecular field	المجال الجزيئي
Molecule	جزيئي
Moment	عزم

أحادي الطول الموجي، أحادي

Monochromatic	اللون
Motor	محرك
Mutual inductance	حث متبادل

N

Natural magnet	مغناطيس طبيعي
Negative charge	شحنة سالبة
Network (electric)	شبكة كهربائية
Neutral	متعادل، محايد
Node	عقدة
Nucleus	نواة

O

Observer	مراقب، راصد
Open circuit	دائرة مفتوحة
Orbit	مدار
Orbital motion	حركة مدارية
Oscillograph	راسم الذبذبات
Oscilloscope	كاشف الذبذبات
Cut of phase	خارج عن الطور

P

Paraelectric	باراكهربية، متسامت الكهربية
Parallel	تواز، مواز، متواز
Paramagnetic	بارامغناطيس، متسامت المغناطيسية
Paramagnetism	بارامغناطيسية، المغناطيسية
Paramagnetism	المتسامتة
Particle	جسيم
Path	مسار، مسير
Peak	ذروة، قمة
Permanent magnet	مغناطيس دائم
Permeability	نفاذية
Permittivity	ساحية
Perpendicular	عمودي، متعامد
Phase angle	زاوية الطور
Difference	الاختلاف في الطور
Phasor	ضابط الطور، مطاور
Physical constants	ثوابت فيزيائية
Piezoelectric	الكهربية الاجهادية
Plane wave	مرجة مستوية
Polar	قطبي
Polarizability	الاستقطابية «قابلية الاستقطاب»
Polarization	استقطاب
Positive charge	شحنة موجبة
Potential	جهد، كمون
difference	فرق الجهد، فرق الكمون
energy	طاقة الكمون، طاقة الوضع

Power factor

Primary coil
Probability

قدرة، استطاعة
معامل القدرة
ملف ابتدائي
احتمال

Q

Quadrant electrometer	الكترومتر ربعي
Quadrupole	رباعي الأقطاب
Qualitative	نوعي - كيفي
Quality factor	معامل النوعية
Quantitative	كمي - مقداري
Quasi-static	شبه ساكن «شبه استاتيكي»

R

Radiation	إشعاع
Radius	نصف قطر
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرة
Rational	معقول، منطقي
Rays	أشعة
Reactance	مفاعلة، رد
Reaction	تفاعل
Reactor	مفاعل
Real part	الجزء الحقيقي
Reference temperature	درجة حرارة الإسناد
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار
Refractive index	معامل الانكسار
Rejector circuit	الدائرة الخالفة «الرافضة»
Relative	نسبي
Relaxation	ارتخاء
Reluctance	ممانعة، نفور، إحجام
Remanence	متبقي، متخلف
Remanent magnetization	المغناطيسية المتبقية
Repulsion	«المتخلفة»
Resistance	تنافر
Resistivity	مقاومة
	مقاومة نوعية

Resonance	رنين	Spontaneous magnetization	مغطة تلقائية «عفوية»
Response	استجابة	polarization	استقطاب عفوي «تلقائي»
Restoring torque	عزم الي المرجع	Spring	زنبرك
Resultant	محصلة	Square root	جذر تربيعي
Rheostat	مقاومة متغيرة	Standard	عيارى، قياسى
Root mean square (r.m.s.)	جذر متوسط المربع	Static	ساكن
Rotating coil	الملف الدوار	Steady current	تيار مستقر
Rotation	دوران	Step-down transformer	محول خافض
		Step-up transformer	محول رافع
		Structure	تركيب، بنية
		Substance	مادة

S

Safety	أمان	فائق التوصيل ، فوق التوصيل ،	
Saturation	تشبع	Superconductor	مفرط التوصيل
Screened	محجوب ، مستور	Superposition theorem	نظرية التراكم
Search coil	ملف الاستكشاف «الباحث»	Surface charge density	كثافة الشحنة السطحية
Secondary coil	ملف ثانوي	Susceptibility	التأثرية الكهربائية
Self inductance	الحث الذاتي، محاثه الذاتيه	Suspended	معلق، متدلي
Semi-conductor	شبه موصل	Synchronize	زامن، تزامن
Series	توالي، متسلسل		
Sharing of charge	تقاسم الشحنة		

T

Tangent galvanometer	جلفانومتر الظل
Tangential component	مركبة مماسية
Temperature	حرارة
Tension	توتر، شد
Terminal velocity	سرعة نهائية منتظمة
Test charge	شحنة اختبار
Thermal agitation	التهيج الحراري
Thermocouple	ازدواج حراري
Thermo-electric	كهروحراري
-junction	وصلة حرارية، ملتحق حراري
Thermopile	عمود كهروحراري
Time constant	ثابت الزمن
Toroidal coil	ملف حلقي
Torque	عزم الي، عزم الدوران، عزم الازدواج
Torsion balance	ميزان الالتواء «الي»
Transformer	محول
Transient	عابر، مؤقت

كشاف الموضوعات

ب

- باراكهربية ١٨٥
- بازامغناطيسية ٤٧٤، ٤٧٨، ٤٩٦
- البروتون ٢
- البطاريات ٢٣٤، ٢٣٦
- توصيلها على التوازي والتوالي ٢٣٦
- مقاومتها الداخلية ٢٣٥
- بيتاترون ٤٦٠

ت

- تابع لانقزن ٥٠٠
- التأثيرية الكهربية ١٦٩
- المغناطيسية ٥٨٩
- تأثير (ظاهرة) بلتير ٢٧٧، ٢٨٠
- تومسون ٢٧٨، ٢٨٠
- سبيك ٢٧٥، ٢٨٠، ٢٨٣
- هول ٣٧٥
- تخطيط المجال المغناطيسي ٣٠٦
- التخلف الكهربي ١٨٤
- التخلف المغناطيسي ٥١٠
- التدرج الحراري ٢٧٩
- التدفق (الفيض) المغناطيسي ٣٠٦
- تردد ٤٤٧، ٥٤٧، ٥٩٨
- ذاتي (الرنيني) ٥٧٩، ٥٨٨، ٦٠٤
- طبيعي ٤٤٢
- لارمر ٤٩٣

ل

- أحادي الذرة ١٥٧
- الإزاحة الكهربية ١٥٥، ١٦٥، ١٦٦، ١٧٧
- الازدواج الحراري ٢٣٤، ٢٧٥، ٢٨١، ٢٨٤
- ٢٨٨
- الاستقطاب الإلكتروني الإزاحي ١٥٦
- التخلفي ١٨٥
- العفوي (التلقائي) ٢٢، ١٨٣، ١٨٥
- الكهربي ١٥٦، ١٦٦
- المعكس ١٨٢
- الأعداد المركبة في دوائر التيار المتردد ٦٠٨، ٦١٣، ٧٠٥
- الإلكترومترات ١٨٦
- الإلكترومتر الربيعي واستعمالاته ١٩٢، ١٩٦
- المطلق أو ذو القرص المنجذب ١٩٠
- الإلكترون ٢
- حركته المدارية والمغزلية ٤٧٦
- شحنته ٢، ٢١٤
- كتلته ٣
- إلكترونات
- انحرافها في مجال كهربي ٦١
- التكافؤ ١٤٨
- توزيعها حول النواة ١٤٨، ٤٧٧
- التوصيل ٢١٣، ٦٤٤
- حركتها ٢١٦، ٢٢١
- حرارة ١٦٠، ٢١٩، ٢١٣
- مقيدة ١٦٠

- عزمه الكهربي ١٨، ١٥٦
- في مجال كهربي ١١٣
- مجاله الكهربي ١٧
- ثنائي القطب (ذو القطبين) المغناطيسي ٣٥٢
- عزمه المغناطيسي ٣٥٣، ٣٥٥، ٣٤٦
- الثوابت الفيزيائية ٦٨٩

ج

- الجزئيات ٢، ١٥٠، ١٦٦، ٤٣٨، ٤٩٤
- جلفانومتر ذو ملف متحرك ٥٢٧
- تحميده ٥٣٣
- حساسيته ٥٣٢
- الظل ٣٥٦
- قذفي ٤٢١، ٤٦٢، ٥٣٥
- هيلمهولتز ٣٥٨
- الجهد الكهربي ٧٥، ٨٠
- تدرجه ٨٨، ٣٤٢
- وعلاقته بالمجال الكهربي ٨٨
- وقانون أوم ٢٢١
- الجهد الكهربي المتردد ٤٥١، ٥٤٧
- توليده ٤٤٧
- جذر متوسط مربعة ٥٥٢، ٥٦٢، ٥٦٩
- قيمته العظمى ٤٥٠، ٥٤٩
- قيمته الفعالة ٥٥٠
- قيمه المتوسطة ٥٥٤
- الجهد المطلق ٨٢
- المغناطيسي الاتجاهي والعدي ٣٤١، ٣٤٣

د

- الحث الذاتي (L) ٤١٢، ٤١٣
- ملف حلزوني ٤١٤
- الكهرومغناطيسي ٣٨٩، ٤٢١
- المبادل (M) ٤١٥
- المغناطيسي (B) ٣٠٦

- نصف القوة ٥٩٩، ٦٠٨
- التركيب الذري ٢
- التشبع المغناطيسي ٥٠٢
- التشتت ٦٦٥
- التفرق الاتجاهي للحث المغناطيسي ٣١١
- التفريغ التوهجي ١٧٢
- تقاسم الشحنات بين الموصلات ٩٨
- التمغنط المتبقي «المتخلف» ٥١١
- المعاكس ٥١١
- التناقص اللوغاريتمي لكل دورة ٤٤٢
- التوصيل الكهربي «التوصيلية» ٢١٨، ٢٦٧
- تيار الإزاحة ١٥٧، ٦٤٣، ٦٤٤، ٦٥٤
- التشبع ٢٠٧
- التفريغ ٢٠٢، ٢٥٢، ٢٥٦
- التوصيل ١٥٤
- حلقي ٣٤٢
- دوامي ٤٦٠
- الشحن ٢٥٢
- التيار الكهربي الحراري ٢٧٥
- الفعال ٥٥٢
- المتردد ٥٤٧
- المستقر (المستمر) ٢١٣
- جذر متوسط مربعة ٥٥٢، ٥٦٢، ٥٦٩
- قيمته المتوسطة ٥٥٣
- قنطرة ٦٢٨
- قيمته العظمى ٥٤٩
- نموه واضمحلاله في دائرة حثية ٤٢٤، ٤٢٩، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٤٣، ٤٤٦

ث

- ثابت التوهين ٤٣٧
- الزمن ٢٥٥، ٤٢٨
- العزل ١٥٩
- ثنائي القطب (ذو القطبين) الكهربي ١٧
- تفاعله مع ثنائي آخر ١١٦

كيوري ١٨٥، ٥٠٦
 نيل ٥٠٩
 الدفع الزاوي ٥٣٦
 دوائر التيار المتردد (A.C.) المتوازية
 - مقاومة وملف RL ٥٨٦، ٦١٤
 - مقاومة وملف ومكثف RCL ٥٨٤، ٥٨٨
 - ملف ومكثف LC ٥٨٧، ٦١٥
 دوائر التيار المتردد (A.C.) المتوالية
 - مقاومة ومكثف RC ٥٧١، ٦١١
 - مقاومة وملف RL ٥٦٥، ٦١١
 - مقاومة وملف ومكثف RCL ٥٧٦، ٦١٣
 دوائر التيار المستمر
 - مقاومة ومكثف RC على التوالي ٢٥٢
 - مقاومة وملف RL على التوالي ٤٢٥
 - مقاومة وملف ومكثف RCL على التوالي
 ٤٣٥
 دوائر الرنين المتوازية ٦٠٣
 المتوالية ٥٩٤
 الدوائر الكهربائية المركبة ٢٤١
 الدوائر المغناطيسية ٥١٧
 دورة التخلف الكهربائي ٢٨٤
 المغناطيسي ٥١٠



الذبذبات الحرة ٤٤٢
 ذرة ٢، ٢١٧، ٤٧٧



راسم الذبذبات ٦٣، ١٤٨
 رذاذ ٦٤
 الرنين في دوائر التيار المتردد ٥٩٤، ٦٠٤



زاوية مجسمة ٤٢، ٣١٥، ٣١٨، ٤٩٧، ٧٠٥
 زمن التراخي ٢٢١

ملف حلزوني ٣٣١
 ملف حلزوني حلقي ٣٣٨
 لموصل دائري ٣٢٦
 لموصل مستقيم يمر به تيار ٣١٨
 وتفرقه الاتجاهي ٣١١
 والزاوية المجسمة ٣١٥، ٣١٨
 ٣٣٥، ٣٢٩
 وقانون أمبير الدائري ٣١٣، ٣٢١
 ٣٣٤
 وقانون بيوت وسافارت ٣٠٨، ٣١٩
 ٣٣١، ٣٢٦
 الحجر المغناطيسي ٣٠٥
 حديد ومغناطيسية (فرومغناطيسية) ٤٧٤، ٥٠٤
 ٥١٠، ٥١٢، ٥١٣
 حركة زاوية ٤٨٩
 مدارية ٤٧٦
 موصل في مجال مغناطيسي ٣٩٠
 حركية الالكترونات ٢١٩، ٢٢٢
 الحساسية الجهدية ١٨٦
 حلقة رولاند ٤٧٥، ٥٢٠



الخطأ الطرفي ٢٦٣
 خطوط القوى الكهربائية ٣٤، ٤٠٣
 الخواص الكهروحرارية للمعادن ٢٧٦
 المغناطيسية للمواد ٤٧٣



الدائرة الخائفة «الرافضة» ٥٨٨، ٦٠٦
 الدائرة الكهربائية القابلة ٥٨٨
 الدائرة المكافئة ٢٥٠
 دايا مغناطيسية ٤٧٥، ٤٧٨، ٤٩١
 لارمر ٤٩٣
 درجة حرارة الإسناد ٢٧٦، ٢٨٤، ٢٨٨
 التحول ١٨٥، ٥٠٦

ط

- طاقة اهتزازية ٤٩٦
- حرارية ٤٩٦، ٥١٤، ٥١٥، ٥٥١
- الحركة ٦٠، ٧٥، ٧٧، ١٥٣، ٥١٢، ٤٩٦
- المبددة ٢٣٥، ٥١٤
- المختزنة في المكثف ١٤٠، ٥٥٧
- في الملف ٤٣١، ٥٦٢
- المغناطيسية ٥١٤
- طاقة الوضع ٧٥، ٨٠، ١١٠، ٥١٤
- والمجال الكهربى ١١٠

الطـور

- زاويته ٥٤٩، ٥٥٦، ٥٦٠، ٥٦٦، ٥٧١، ٥٧٧، ٥٨١، ٥٨٥، ٥٨٦، ٥٩١، ٦٠٤
- سرعته ٦٦٥
- غير متفق فيه ٥٥٦، ٥٦٠
- متجهه الجبرى ٦٠٨
- متفق فيه ٥٤٩، ٥٧٨
- مخطط ضابطه ٥٤٩، ٥٥٦، ٥٦٠، ٥٦٨، ٥٧٣، ٥٧٨، ٥٨٤، ٦٠٨
- طور الفروكهربية ١٨٣
- طيف الموجات الكهرومغناطيسية ٦٧٤

ع

- العدد الذرى ٢، ١٥١
- عزم الازدواج (عزم الدوران) ١١٤، ٣٥٢، ٥٣٠
- حركى زاوي ذاتى ٤٧٦
- كهبرى لثنائى القطب ١٥٦
- الى المرجع ٥٣٨
- مغناطيسى ذاتى ٤٧٦
- ذرى ٤٧٦
- مدارى ٤٨٩
- عمود الحرارة ٢٩٠

لس

- سرعة انسيابية ٢١٩
- زاوية ٣٦٥، ٤٨٩
- الطور ٦٦٥
- الموجات الكهرومغناطيسية ٦٦٥
- سطح جاوس ٤٢
- السطوح متساوية الجهد ١٠٢
- ساحية الفراغ ٩
- الساحية النسبية ١٦١
- السيكلوترون ٣٦٨

ش

- الشحنات الحرة ١٦٠، ١٦٣
- الشحنة «التأثرية» ٣٩٨
- الشحنة «السطحية» ١٦٣
- المقيدة ١٦٠، ١٨٩
- الشحنات النقطية
- جهدها الكهربى ٨١
- مجالها الكهربى ١٧
- الشحنة
- انحرافها في مجال مغناطيسى ٣٦٢
- أنواعها ٢، ٣
- في مجال كهبرى ٥٩
- شدة التمعنط ٤٧٩
- شدة المجال الكهربى ١٤
- المغناطيسى ٣٠٦
- شرط الرنين ٥٧٩، ٥٨٨، ٥٩٦، ٦٠٤
- الشروط الحدودية ١٧٨
- الشغل ٧٧

ض

- ضديد الحديد ومغناطيسية ٥٠٨
- النيوترينو ٤

كولوم ٥، ٦
 لنز ٣٩٧
 ماكسويل وبلتزمان لتوزيع الطاقة ٤٩٨
 القبولية ٥٨٥
 القدرة الكهربية ٢٣٢، ٥٤٩
 - اللحظية ٥٤٩، ٥٥٦، ٥٦١، ٥٦٩
 - المتوسطة ٥٥٣، ٥٦٩، ٥٧٤، ٥٨١
 - معاملها ٥٦٩، ٥٧٤، ٥٨١
 قطرة الزيت (تجربة ميليكان) ٦٤
 قناطر التيار المتردد ٦٢٨
 المستقر ٢٦١، ٢٦٣، ٢٦٥
 القوة بين دائرتين كاملتين ٣٤٧
 بين لوحين المكثف ١٤٢
 بين موصلين متوازيين ٣٤٩
 المغناطيسية للفجوة الهوائية ٥٢٣
 قوة التجاذب الكهربي ٦، ٩، ٤٨٩
 دافعة كهربية (ق. د. ك.) ٣٩٣، ٤٤٩
 - تأثيرية ٣٩٦
 - الحرارية ٢٨١
 - المترددة ٤٤٧، ٤٥١
 دافعة مغناطيسية ٥١٨
 طاردة مركزية ٤٨٩
 قوة لورنتز ٣٦٤
 قياس q/m للإلكترون ٣٧١

ك

كتلة الإلكترون والبروتون ٣
 الكتلة الذرية ٢١٧
 كثافة التيار ٢١٥، ٢٢٠، ٦٥٣، ٦٦٩
 الشحنة الحجمية ٢٦، ٥٧، ٦٥٣
 السطحية ٢٦، ١٦١، ١٦٩
 الطولية ٢٧، ٢٨، ٤٨
 الطاقة لمجال كهربي ١١٢
 لمجال مغناطيسي ٤٣٢، ٦٦٧
 كرة مشحونة ٤٦، ١٢٤

العوازل ١٤٨، ١٥٤

غير مستقطبة ١٥٤
 متباينة المناحي ١٦٧
 متماثلة المناحي ١٦٧
 مستقطبة ١٥٦

ف

فائقة التوصيل ٢٢٧
 فجوة هوائية ٥٢٣
 فرق الجهد الكهربي ٨١
 الفروكهربية ١٨٣، ١٨٥
 الفرومغناطيسية ٤٧٤، ٥٠٤
 الفولتمترات الكهربية الساكنة ١٩٨
 الفيض الكهربي (تدفق) ٣٩
 المغناطيسي «تدفق» ٣٠٦، ٣٩٦، ٤١٢
 ٤١٥، ٤٤٩، ٥٣٧
 - قياسه ٥٣٧

ق

قاعدتا كيرتشفوف ٢٤١، ٦١١
 اليد اليسرى ٣٤٩، ٣٦٤
 اليمنى ٣١٠
 قانون أمبير ٣٤٧
 الدوائر ٣١٣، ٦٤٤، ٦٥١
 - استعمالاته ٣٢١، ٣٣٤، ٣٣٨
 قانون أوم ٢٢١
 قانون بيوت وسافارت ٣٠٨، ٣١٩، ٣٢٦، ٣٣١
 قانون جاوس ٤٠، ٤١، ٦٥١
 - تطبيقاته ٤٦
 - معادلاته التفاضلية ٥٤
 - والعوازل الكهربية ١٦٢
 جول ٢٣١
 سنل ١٨١
 فاراداي ٣٩٥، ٣٩٦، ٤٠١، ٦٥١
 - معادلاته التفاضلية ٤٠٦

- الكهرباء الساكنة ١، ٤٨٩
الكهربية الإجهادية ١٨٣
الحرارية ١٨٣
كهرومان ١
- المتجهات ٦٩٥
متجه الإزاحة ١٦٥، ١٦٧
الاستقطاب ١٦٦
بوينتينج ٦٦٨
التمغنط ٤٧٩
متوسط الزمن الحر ٢٢٠، ٢٢٥
مربع أنصاف الأقطار ٤٩٥
المجال الجزئي ٥٠٥
المجال القاهر ١٨٥، ٥١١
المجال الكهربائي ١، ١٤
- والاستقطاب والإزاحة ١٦٦
- وتأثيره على المواد ١٥٣
- والتوصيلية الكهربائية ٢١٨
- المجال الكهربائي الحثي ٣٩١، ٤٠٩
- وحركة شحنة نقطية فيه ٥٩
- وخطوط القوى ٣٤، ٣٩
- لذتي القطبين ١٧
- وطاقة الوضع ١١٠
- وعلاقته بالجهد الكهربائي ٨٠، ٨٨، ١٠٦
- وعلاقته بقانون فاراداي ٤٠١
- وقانون جاوس ٣٩، ٥٤
- القاهر ١٨٥
- الناتج عن توزيع مستمر للشحنة ٢٧
المجال المغناطيسي ٣٠٦، ٤٢٥
الذري ٤٧٥
للأرض ٣٥٧، ٣٦١
- للتيار الكهربائي ٣٩١
- وتأثيره على المواد ٤٨٣، ٤٧٤، ٥١٠
- وحركة الموصل ٣٩٠
- والشحنات النقطية المتحركة ٣٦٢، ٣٦٤، ٣٤٨
- مجس هول ٣٧٩
المحرك الكهربائي ٤٥٤
المحولات وأنواعها ٤٥٧
المراجع ٧٠٣
مركز الثقل ١٥٥
مطياف الكتلة ٣٨٠
معادلات رياضية ٧١٢
ماكسويل ٣١٣، ٦٤٣، ٦٥٠، ٦٥٣
معادلة الاستمرارية ٢١٧
بواسون ١٠٦
لابلاس ١٠٦
معامل الانكسار ١٨١
تغيير المقاومة مع درجة الحرارة ٢٢٥، ٢٢٧
القدرة ٥٦٩، ٥٧٤، ٥٨١
النوعية ٥٩٦، ٥٩٩، ٦٠٦
مغناطيس أحادي القطب ٣١٣
دائم ٣٠٥، ٤٧٥، ٥١١
طبيعي ٣٠٥
كهربائي ٥٢٠
مغنتون بوهر ٤٩٠
المفاعلة الحثية «الرد» ٤٤٢، ٥٦٠
السعوية «الرد» ٤٤٢، ٥٥٦
المقاومات ٢٢٨
- توصيلها على التوازي ٢٢٩
- توصيلها على التوالي ٢٢٨
المقاومة ٢٢٠
الداخلية للبطارية ٢٣٤
في دائرة مترددة ٥٦٥، ٥٧١، ٥٧٧
٥٨٤، ٦١١، ٦١٣
لقرص دائري ٢٣٠
المكافئة ٢٥٠
وتغيرها مع درجة الحرارة ٢٢٥
وقانون أوم ٢٢١
النوعية «المقاومية» ٢١٨
مقياس الجهد «الفولتميترات» ٢٦٨، ٥٣٢
المكثفات ١٢٥
- أشكالها ١٢٧

- توصيلها على التوازي ١٣٥
- توصيلها على التوالي ١٣٤
- طاقتها ١٤٠
- فقدان الطاقة ١٤٣
- في دوائر تيار متردد ٥٥٥، ٥٧١، ٥٧٧
- ٥٨٤، ٥٨٨، ٦١١، ٦١٣
- في دوائر تيار مستقر ٢٥٢، ٤٣٧
- المكثف ذو اللوحين المتوازيين ١٢٧
- سعته ١٢٧
- طاقته ١٤٠
- وثابت العزل ١٦١
- المكثف وضع بين لوحيه عازلان ١٧٦
- القوة بين لوحيه ١٤٢
- المكشاف ذو الورقة الذهبية ١٨٧
- الكهربي ٥٣
- الناضب ٢٠١
- الملفات
- توصيلها على التوازي ٤٢٣
- توصيلها على التوالي ٤١٩
- الحث الذاتي لها ٤١٢
- الحث المتبادل لها ٤١٥
- طاقة الحث ٤٣١
- في دوائر تيار متردد ٥٥٩، ٥٦٥، ٥٧٧
- في دوائر تيار مستقر ٤٢٤، ٤٣٥
- ملف الاستكشاف ٤٦٢، ٥٣٨
- الممانعة الحثية ٥٦٧
- السعوية ٥٧٣
- المغناطيسية ٥١٨
- مناطق التكوين المغناطيسية ٥١٥
- جذرها ٥١٥
- حدودها ٥١٥
- منحنى الاستجابة ٥٩٩، ٦٠١
- التخلف ١٨٤، ٥١٠
- الرنين ٤٩٤، ٤٩٨
- كهربي حراري ٢٨٤
- الموجات الكهرومغناطيسية ٥٧، ٦٤٣، ٦٥٤
- ٦٧٤، ٦٦٥، ٦٥٦
- الموصلات ٩٥، ٩٨، ١٤٨، ٦٧٠
- المولدات الكهربية ٤٤٧، ٤٥٢



- نظام الوحدات ٦٨١
- الجاوسي ٦٨٥
- العالمي ٦٨٢
- الكهروستاتيكي ٦٨٣
- الكهرومغناطيسي ٦٦٤
- المنطقية ٦٨٢
- هيفيسايد - لورنز ٦٨٦
- نظرية التراكم للدوائر المركبة ٢٤٨
- ثفينين للدوائر الكهربية ٢٥٠
- النفاذية ٣٠٩، ٤٨٤، ٤٨٥
- النسبية ٤٨٤
- نقطة الانقلاب ٢٤٨
- النواة ١، ١٤٨، ٤٧٦
- النويات الذرية ٣
- النيوترون ٢، ٣

انتهى الكتاب

فله الحمد والشكر والثناء وأسأله أن ينفع به المسلمين