التحليل العددي
وطرق حسابه العددية
Numerical Mathematics and Computing

تأليف

أ.د. محمد منصور صبح
كلية المعلمين – مكة المكرمة
قسم الرياضيات

د. صالح بن منيع الحربي
كلية المعلمين – مكة المكرمة
رئيس قسم الرياضيات

مكتبة الرشد

التحليل العددي وطُرُق حسابه العدديّة

Numerical Mathematics and Computing

منه ص١ ← ص٧

منه ص١٩١ ← للأخير
+ من ص١٠ ← ص١٧١

تأليف

د. محمد صبح
كلية المعلمين - مكة المكرمة
قسم الرياضيات

د. صالح منيع الحربي
كلية المعلمين - مكة المكرمة
رئيس قسم الرياضيات

مكتبة الرشد
ناشرون

بسم الله الرحمن الرحيم

الطبعة الأولى

١٤٢٧هـ ـ ٢٠٠٦م

مكتبة الرشد ـ ناشرون
المملكة العربية السعودية ـ الرياض
شارع الأمير عبد الله بن عبد الرحمن (طريق الحجاز)
ص.ب.: ١٧٥٢٢ الرياض ١١٤٩٤ ـ هاتف: ٤٥٩٣٤٥١ ـ فاكس: ٤٥٧٣٣٨١
E-mail: alrushd@alrushdryh.com
Website: www.rushd.com

فروع المكتبة داخل المملكة

- الرياض: فرع طريق الملك فهد: هاتف: ٢٠٥١٥٠٠ ـ فاكس: ٢٠٥٢٣٠١
- فرع مكة المكرمة: شارع الطائف: هاتف: ٥٥٨٥٤٠١ ـ فاكس: ٥٥٨٣٥٠٦
- فرع المدينة المنورة: شارع أبي ذر الغفاري: هاتف: ٨٣٤٠٦٠٠ ـ فاكس: ٨٣٨٣٤٢٧
- فرع جدة: ميدان الطائرة: هاتف: ٦٧٧٦٣٣١ ـ فاكس: ٦٧٧٦٣٥٤
- فرع القصيم: بريدة ـ طريق المدينة: هاتف: ٣٢٤٢٢١٤ ـ فاكس: ٣٢٤١٣٥٨
- فرع أبها: شارع الملك فيصل: تلفاكس: ٢٣١٧٣٠٧
- فرع الدمام: شارع الخزان: هاتف: ٨١٥٠٥٦٦ ـ فاكس: ٨٤١٨٤٧٣
- فرع حائل: هاتف: ٥٣٢٢٢٤٦ ـ فاكس: ٥٦٦٢٢٤٦

مكاتبنا بالخارج

- القاهرة: مدينة نصر: هاتف: ٢٧٤٤٦٠٥ ـ موبايل: ٠١٠١٦٢٢٦٥٣
- بيروت: بئر حسن: هاتف: ٠١/٨٥٨٥٠١ ـ موبايل: ٠٣/٥٥٤٣٥٣ ـ فاكس: ٠١/٨٥٨٥٠٢

بسم الله الرحمن الرحيم

مُقَدِّمَة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشـرف المرسـلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

يكتسب التحليل العددي جاذبية خاصة لدى العاملين فـي مجـال البحث العلمي ومن أسباب ذلك أنه في بعض الحـالات وبعـد التطـور الهائل الذي حصل في مجال المعلوماتية يصبح مـن السـهل اسـتخدام الطرق العددية ثم استخدام برامج وخوارزميات للحصول على الحلـول المطلوبة لأي مسائل تواجههم وبدقة وسرعة.

نعلم أن طلابنا يعانون من مشقة في دراسة العلوم بلغة غير اللغة العربية ونحن إذ نضع هذا الكتاب باللغة العربية بين يدي طلابنا نهـدف إلى تزويد المكتبة العربية بكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً ثـم نهـدف أيضاً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً في التحليل العددي لطلاب كليـات العلوم والهندسات ولطلاب كليات المعلمين ولطالبات كليات المعلمـات. إنطلاقاً من ذلك تم وضع هذا الكتاب ليغطي مقرر التحليل العـددي فـي هذه الكليات ، وقدمنا فيه عرض متماسك وشامل للمفـاهيم الأساسـية،

وحاولنا تقديم أسهل الطرق وأقصرها في إثبات النظريات وتتويجاً لـذلك وزيادة في فهم التحليل العددي اعتنينا بكثرة الأمثلة وتنويعها.

يتكون هذا الكتاب في سبعة فصول في الفصل الأول تم التعـرف على الأخطاء وأنواعها ومصادرها وطرق حسابها، وفي الفصل الثاني تم التعرف على الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية، وفي الفصـل الثالث تم التعرف على الطرق المباشرة والطرق غير المباشرة لحل نظم المعادلات الخطية، وفي الفصل الرابع تم التعرف على حساب الاستكمال وتقريب الدوال، وفي الفصل الخامس تم التعرف على التفاضل العـددي وفي الفصل السادس تم التعرف على التكامل العددي وفي الفصل السابع تم التعرف على الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية.

وفي كل فصل من فصول هذا الكتاب يوجد عدداً كبيراً من الأمثلة المحلولة لترسيخ الأفكار الأساسية وكذلك يوجد عدد من التمارين علـى كل فصل من أجل التدريب واكتساب المهارات.

ونتمنى أن نكون قد أسهمنا بمجهودنا المتواضع في إعـداد هـذا الكتاب في خدمة طالبي العلم في الأقسام العلمية المختلفة.

ونسأل الله عز وجل أن يوفقنا لما فيه الخير ويجعل هـذا العمـل خالصاً لوجهه الكريم والله الموفق والمستعان.

المؤلفان

الفهـــــرس والمحتويـــــات

الفصل الثالث

نظم المعادلات الخطية

الفصل الرابع

الاستيفاء الداخلي وجداول الفروق

الفصل الخامس

التفاضل العددي

الفصل السادس
التكامل العددي

الفصل السابع
الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

الفصل الأول
حساب الأخطاء

(1ـ1) مقدمة :

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات الهامة وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التـي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبية. بما أننا نحصل على نتيجة تقريبية أو حل تقريبي هذا يعني أنه يوجد خطـأ وعلينـا حسـاب الخطأ إلا أنه لو استطعنا إيجاد الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الفعلي (الحقيقي) الأمر الـذي يعني أن إيجاد الخطأ غير ممكن ونسعى بالتالي إلى إيجاد تقريب للخطأ أو حجم الخطأ أي تلك القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ. وتتلخص مهمة التحليل العددي فـي إيجـاد الحـل التقريبي لمسألة ما وتقويم الخطأ.

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ما تمثل أطوال . وقياسات أو قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبية. كذلك فإن الكثيـر من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها بعدد منته من الأرقام فمثلاً العـدد π يسـاوي تقريباً 3.14159 .

(1ـ2) تقدير الأخطاء :

تنشأ الأخطاء في التحليل العددي من أكثر من مصدر. فهناك أخطاء تنشـأ مـن استعمال الصيغ التقريبية ذاتها. وعادة ما تكون النظرية قد وضعت صيغة لهـذا الخطـأ. وهناك أخطاء ناشئة من استعمال هذه الصيغ فمثلاً نكتفي برقمين عشريين (بمنزلتين) بعد الفاصلة في الحسابات فينشأ خطأ التقريب وأحياناً نكتفي بعدد معين من حدود المتسلسـلة

اللانهائية فينشأ خطأ الاقتطاع وهكذا تنشأ العديد من الأخطاء سنكتفي بتعريف البعض منها.

(1—3) الخطأ المطلق والخطأ النسبي :

إذا كانت x القيمة الفعلية (التامة) لعدد ما و x_o القيمة التقريبية لهذا العدد فإن العدد :

$$\Delta x = x_o - x$$

هو الخطأ المرتكب في حساب x_o

تكون إشارة Δx موجبة أو سالبة لذلك نعرف ما يسمى بالخطأ المطلق.

تعريف (1—1) :

الخطأ المطلق المرتكب في العدد المقرب x_o هو القيمة المطلقة للفرق بينه وبين القيمة الفعلية x

$$\Delta = |\Delta x| = |x_o - x| = |x - x_o|$$

غالباً ما يكون العدد الفعلي x غير معلوم، عندئذ لا يمكن تعيين الخطأ المطلق من أجل ذلك نلجأ إلى إيجاد حد أعلى لهذا الخطأ مثل ε_x ويحقق المتباينة :

$$|\Delta x| = |x_o - x| \le \varepsilon_x$$

وهكذا نحصل على :

$$x_o - \varepsilon_x \le x \le x_o + \varepsilon_x$$

أي أن العدد الفعلي يقع بين العددين $x_o + \varepsilon_x$ و $x_o - \varepsilon_x$ حيث القيمة $x_o + \varepsilon_x$ تمثل تقريب العدد x بالزيادة والقيمة $x_o - \varepsilon_x$ تمثل تقريبه بالنقصان.

مثال (1—1) :

بفرض أعطي طول غرفة $a_1 = 5.43\ m$ وعرضها $b_1 = 3.82\ m$ بدقة تتراوح حتى 1cm ، أحسب الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حساب مساحة الغرفة.

الحل :

$$s_1 = a_1 \cdot b_1 = 20.7426\ m^2$$

وبما أن $\Delta b_1 = 0.01\ m \ ,\ \Delta a_1 = 0.01\ m$

فإن القيم الحدودية المحتملة للمساحة هي :

$$(a_1 + \Delta a_1)\ (b_1 + \Delta b_1) = (5.43+0.01)\ (3.82+0.01) = 20.8352\ m^2$$

$$(a_1 - \Delta a_1)\ (b_1 - \Delta b_1) = (5.43-0.01)\ (3.82-0.01) = 20.6502\ m^2$$

وبمقارنتها مع القيمة المحسوبة s_1 نحصل على :

$$20.7426 - 20.6502 \le s_1 - s \le 20.8352 - 20.7426$$

$$0.0914 \le s_1 - s \le 0.0926$$

ومنه نجد $|s_1 - s| \le 0.0926$

ملاحظة (1—1) :

الخطأ المطلق لا يكون كافياً لتمييز دقة التقريب أو الحساب لمقدار ما فإذا كان الخطأ المطلق في قياس طولين مختلفين هو نفسه فهذا لا يدل أن القياس له نفس الدقة في الحالتين.

تعريف (1—2) :

نعرف الخطأ النسبي R المرتكب في عدد ما تقريبي x_o بأنه نسبة الخطأ المطلق Δ المرتكب بهذا العدد إلى القيمة المطلقة للعدد الفعلي x $(x \ne 0)$ أي أن :

$$R = \frac{\Delta}{|x|}$$

وفي حالة عدم معرفة القيمة الفعلية x نلجأ إلى الحد الأعلى لهذا الخطأ

$$R \le \delta_x$$

أي أن

$$\frac{\Delta}{|x|} \le \delta_x$$

ومنه $\Delta \le |x|\,\delta_x$

لذلك يمكن اعتبار $\varepsilon_x = |x|\,\delta_x$

فيكون $\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}$

الحد الأعلى للخطأ النسبي المرتكب في العدد المقرب x_o

وبما أن $x \cong x_o$ فيمكن أن نكتب

$$\varepsilon_x \cong |x_o|\,\delta_x$$

مثال (1—2) :

لتكن $x=3.257$ ولتكن $x_o = 3.26$ قيمة تقريبية لـ x عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

الحل :

الخطأ المطلق
$$\Delta = |\Delta x| = |x_o - x| = |3.26 - 3.257| = 0.003$$

الخطأ النسبي
$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.003}{3.257} = 0.000921$$

تعريف (1—3) :

نعرف الخطأ المئوي والذي نرمز له بالرمز E بالعلاقة

$$E = R \times 100\%$$

مثال (1—3) :

إذا كانت $x = 0.00004$ ، $x_o = 0.00005$ قيمة تقريبية لـ x عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي والخطأ المئوي.

الحل :

الخطأ المطلق
$$\Delta = |x_o - x| = |0.00005 - 0.00004| = 0.00001$$

الخطأ النسبي
$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$$

الخطأ المئوي
$$E = R \times 100\% = 0.25 \times 100\% = 25\%$$

(1—4) أخطاء التدوير :

خطأ التدوير ينشأ من تدوير الأعداد وتقريبها أي الاكتفاء بعدد منته من الأرقام العشرية (الأرقام التي على يمين الفاصلة) وقاعدة التدوير تتم على الشكل التالي :

إذا كان لدينا العدد $x = 0.x_1\,x_2 \ldots x_{n-1}\,x_n$ وأردنا الاكتفاء بـ (n-1) رقم على يمين الفاصلة أي أن العدد المدور يكون كما يلي :

$$x_o = 0.\,x_1\,x_2 \ldots x_{n-2}\,\overline{x}_{n-1}$$

فإن $\overline{x}_{n-1}$ يتم تحديده بالشكل التالي :

إذا كان $x_n > 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

وإذا كان $x_n < 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$

أما إذا كان $x_n = 5$ فإننا ننظر إلى x_{n-1} ونميز حالتين

1— إذا كان x_{n-1} زوجياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$

2— إذا كان x_{n-1} فردياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

عندئذ يكون الخطأ المرتكب والناتج عن عملية التدوير هو :

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

مثـال (1ـــ4) :

دور العدد $x = 72535$ إلى ثلاث مراتب عشرية ثم إلى مرتبتين عشريتين ثم إلى مرتبة عشرية واحدة وما هو الخطأ المرتكب.

الحل :

$x_o = 7.254$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-4}

$x_o = 7.25$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-3}

$x_o = 7.2$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-2}

ولتمييز الأعداد المدورة نكتب عادة قيمة العدد زائداً أو ناقصاً نصف وحدة فـي المرتبـة العشرية المدورة فنكتب مثلاً

$$7.254 \mp \frac{0.5}{10^3}$$

أو

$$7.254 \mp \frac{5}{10^4}$$

أو

$$7.254 \mp 5 \times 10^{-4}$$

مثال (1ـ5) :

بفرض أن $x = 0.235$ عدد مدور عين الخطأ النسبي المرتكب.

الحل :

الخطأ المرتكب الناتج عن عملية التدوير هو

$$\Delta x \le 5 \times 10^{-4}$$

ومنه الخطأ النسبي $R = \frac{\Delta x}{x} = \frac{5 \times 10^{-4}}{0.235} = 0.0021276$

ملاحظة (1ـ2) :

عند تطبيق العمليات الحسابية فإن الأخطاء المرتكبة تتراكم وتكبر ويمكـن تقـدير الحـد الأعظمي لهذه الأخطاء.

(1ـ5) : الأخطاء في العمليات الحسابية :

1ـ الخطأ المطلق في حاصل جمع (طرح) عددين تقريبيين لايتجاوز مجمـوع الأخطـاء المطلقة لهذين العددين.

الإثبات :

لتكن x_o قيمة تقريبية لـ x

y_o قيمة تقريبية لـ y

ولنحسـب الخطأ المرتكب باعتبار $z_o = x_o + y_o$ قيمة تقريبية لـ $z = x + y$

$$\Delta z = z - z_o = (x + y) - (x_o + y_o) = (x - x_o) + (y - y_o)$$
$$= \Delta x + \Delta y$$
$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x + \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$$

وإذا كان $z_o = x_o - y_o$ قيمة تقريبية لـ $z = x - y$ فإن الخطأ المرتكب هو :

$$\Delta z = z - z_o = (x - y) - (x_o - y_o) = (x - x_o) - (y - y_o)$$
$$= \Delta x - \Delta y$$

ومنه

$$\Delta = |\Delta z| = |\Delta x - \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$$

مثال (1ـ6) :

لنفرض أن لدينا العددين $x = 3.221$ ، $y = 3.222$ أوجـد الخطـأ المطلـق والنسـبي للمقدارين $x + y$ ، $x - y$ باعتبارهما عددين مدورين.

الحل : $|\Delta x + \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$

ولدينا الخطأ المطلق المرتكب في تدوير العددين هو :

$$\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-4}$$

ومنه فإن الخطأ المطلق المرتكب للمقدارين $x + y$، $x - y$ يكون :

$$|\Delta x + \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$$
$$|\Delta x - \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y| = 0.001$$

ويكون الخطأ النسبي في حالة الجمع

$$R = \frac{|\Delta x + \Delta y|}{x + y} = \frac{0.001}{6.443} = 0.00015526$$

أما الخطأ النسبي في حالة الطرح

$$R = \frac{|\Delta x - \Delta y|}{|x - y|} = \frac{0.001}{0.001} = 1$$

2ـ الخطأ النسبي لجداء عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين.

الإثبات :

لتكن x_o قيمة تقريبية لـ x

و y_o قيمة تقريبية لـ y

وبفرض أن $z_o = x_o \cdot y_o$ قيمة تقريبية لـ $z = x \cdot y$

فإن
$$z = x \cdot y = (x_o + \Delta x)(y_o + \Delta y)$$
$$= x_o y_o + x_o \Delta y + y_o \Delta x + \Delta x \Delta y$$

وبإهمال الحد $\Delta x \Delta y$ الذي هو مقدار صغير فإن

$$\Delta z = z - z_o = x_o y_o + x_o \Delta y + y_o \Delta x - x_o y_o$$
$$= x_o \Delta y + y_o \Delta x$$

الخطأ المطلق
$$\Delta = |\Delta z| = |x_o \Delta y + y_o \Delta x|$$

الخطأ النسبي
$$R_{x \cdot y} = \frac{\Delta}{x_o y_o} = \frac{|x_o \Delta y + y_o \Delta x|}{x_o y_o}$$
$$\le \frac{|x_o \Delta y| + |y_o \Delta x|}{x_o y_o} = \frac{|\Delta y|}{y_o} + \frac{|\Delta x|}{x_o}$$

أي أن : $R_{x \cdot y} \le R_x + R_y$

مثال (1ـ7) :

عين الخطأ النسبي لحاصل ضرب العددين التقريبيين

$$x = 3.7148 \quad , \quad y = 0.281$$

الحل :

حاصل الضرب هو

$$x \cdot y = 1.0438588$$
$$|\Delta x| \le 5 \times 10^{-5} \quad , \quad |\Delta y| \le 5 \times 10^{-4}$$
$$R_{x \cdot y} \le R_x + R_y = \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y}$$
$$= \frac{0.00005}{3.7148} + \frac{0.0005}{0.281} = 0.0017929$$

ويمكن استنتاج الخطأ المطلق كما يلي :

$$R_{x \cdot y} = \frac{|\Delta (x \cdot y)|}{x \cdot y}$$

ومنه
$$|\Delta (x \cdot y)| = (x \cdot y) R_{x \cdot y}$$
$$= (1.0438588)\ (0.0017929)$$
$$= 0.0018715$$

وهي قيمة الخطأ المطلق.

3ـ الخطأ النسبي في حاصل قسمة عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين.

الإثبات :

لتكن x_o قيمة تقريبية لـ x

y_o قيمة تقريبية لـ y

بفرض أن $z_o = \frac{x_o}{y_o}$ $(y_o \neq 0)$ قيمة تقريبية لـ $z = \frac{x}{y}$

فإن :

$$\Delta z = \Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} - \frac{x_o}{y_o} = \frac{x_o + \Delta x}{y_o + \Delta y} - \frac{x_o}{y_o}$$

$$= \frac{x_o y_o + y_o \Delta x - x_o y_o - x_o \Delta y}{y_o (y_o + \Delta y)}$$

$$= \frac{y_o \Delta x - x_o \Delta y}{y_o (y_o + \Delta y)}$$

الخطأ المطلق

$$|\Delta z| = \left|\Delta\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \left|\frac{y_o \Delta x - x_o \Delta y}{y_o (y_o + \Delta y)}\right|$$

والخطأ النسبي

$$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\frac{y_o \Delta x - x_o \Delta y}{y_o (y_o + \Delta y)}\right|}{\frac{x_o}{y_o}} = \left|\frac{y_o \Delta x - x_o \Delta y}{x_o (y_o + \Delta y)}\right|$$

$$\le \left|\frac{\Delta x}{x_o}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right| = R_x + R_y$$

مثال (1—8) :

عين الخطأ التقريبي والخطأ المطلق المرتكب في ناتج قسمة العددين التقريبيين

$x_o = 12.4 \ , \ y_o = 1.25$

الحل :

$$\frac{x_o}{y_o} = \frac{12.4}{1.25} = 9.92$$

والخطأ المرتكب في x_o هو $\Delta x \le 5 \times 10^{-2} = 0.05$

والخطأ المرتكب في y_o هو $\Delta y \le 5 \times 10^{-3} = 0.005$

والخطأ النسبي المرتكب في حاصل القسمة هو

$$R_{\frac{x}{y}} \le R_x + R_y = \frac{0.05}{12.4} + \frac{0.005}{1.25}$$

$$= 0.004 + 0.004 = 0.008$$

والخطأ المطلق المرتكب في حاصل القسمة هو :

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x_o}{y_o}\right) R_{\frac{x}{y}}$$

$$= (9.92)\,(0.008) = 0.07936$$

مثال (1—9) :

لتكن لدينا الأعداد المدورة التالية :

$x = 3.219 \ , y = 2.73 \ , \ z = 1.842 \ \ , s = 8.7193$

احسب L واحسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق المرتكبين حيث

$$L = \frac{x + y \cdot z}{s}$$

الحل :

$$y \cdot z = (2.73)\ (1.842) = 5.02866$$

$$x + y \cdot z = 3.219 + 5.02866 = 8.24766$$

$$L = \frac{x + y \cdot z}{s} = \frac{8.24766}{8.7193} = 0.9459085$$

الخطأ النسبي لـ $y \cdot z$

$$R_{y \cdot z} = \frac{0.005}{2.73} + \frac{0.0005}{1.842} = 0.002130$$

الخطأ المطلق لـ $y \cdot z$

$$\Delta\,(y \cdot z) = (0.002130)\,(5.02866) = 0.010575$$

الخطأ المطلق لـ $x + y \cdot z$

$$\Delta\,(x + y \cdot z) \le 0.0005 + 0.01575 = 0.011075$$

الخطأ النسبي لـ $x + y \cdot z$ $\qquad R_{x+y.z} = \frac{0.011075}{8.24760} = 0.001343$

الخطأ النسبي لـ L $\qquad R_L \le 0.001343 + \frac{0.00005}{8.7193} = 0.001349$

الخطأ المطلق لـ L $\qquad \Delta(L) = (0.001349)(0.9459085) = 0.001276$

ملاحظة (1—3) :

إذا رمزنا للخطأ النسبي المركب في حساب القيمة التقريبية x_o بالرمز $\frac{\Delta x}{x_o}$ حيث $\Delta x = [x - x_o]$, x القيمة الحقيقية (الفعلية) فإنه يمكن أن نكتب

$$y = x^n \Rightarrow \frac{\Delta y}{y_o} = n\frac{\Delta x}{x_o}$$

وبشكل عام إذا كان لدينا $u = \frac{x^a \cdot y^b}{z^c}$ فإن الخطأ النسبي يعطى بالعلاقة

$$\frac{\Delta u}{u_o} = a\frac{\Delta x}{x_o} + b\frac{\Delta y}{y_o} + c\frac{\Delta z}{z_o}$$

مهما تكن قيم a، b، c صحيحة أو كسرية، موجبة أو سالبة على أن تؤخذ بقيمتها المطلقة.

ملاحظة (1—4) :

عندما نقول أن العدد x_o هو قيمة تقريبية للعدد x بخطأ لا يتجاوز 10^{-n} أو بدقة حتى 10^{-n} فإن هذا يعني أن :

$$[x - x_o] \le \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

مثال (1—10) :

احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب القيمة

$$u = \frac{x^2 \cdot y}{z}$$

حيث $\qquad x = 8 \mp 0.08\ ,\ y = 5 \mp 0.1\ ,\ z = 10 \mp 0.1$

الحل :

الخطأ النسبي هو

$$\frac{\Delta u}{u_o} = 2\frac{\Delta x}{x_o} + \frac{\Delta y}{y_o} + \frac{\Delta z}{z_o}$$

$$\frac{\Delta u}{u_o} = 2\frac{0.08}{8} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{10}$$

$$= \frac{2}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100}$$

ومنه الخطأ المطلق المرتكب

$$\Delta u = u_o\left(\frac{5}{100}\right) = \frac{x_o^2\, y_o}{z_o}\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$= \frac{(64)(5)}{10}\left(\frac{5}{100}\right) = 1.6$$

وبذلك يمكن أن نكتب :

$$u = \frac{(64)(5)}{10} \mp 1.6 = 32 \mp 1.6$$

مثال (1—11) :

احسب $y = \sqrt[3]{x^2}$ حيث $x = 8000 \mp 3$

الحل :

$$y_o = x_o^{\frac{2}{3}} = (8000)^{\frac{2}{3}} = 400$$

$$\frac{\Delta y}{y_o} = \frac{2}{3}\frac{\Delta x}{x_o} = \frac{2}{3}\frac{3}{8000} = \frac{1}{4000}$$

ومنه $\qquad \Delta y = (400)\frac{1}{4000} = \frac{1}{10} = 0.1$

إذن $\qquad y = 400 \mp 0.1$

تمارين

1ــ عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفرض x_0 قيمة تقريبية لـــ x
حيث $x_0 = 15.319$ ، $x = 15.31877$

2ــ عين الخطأ المطلق لمجموع وحاصل طرح العددين التقريبيين ثم عين الخطأ النسبي الموافق $y_0 = 8.214$ ، $x_0 = 21.17$

3ــ احسب الخطأ المرتكب في حساب المقدار $(5.1) . (17.12)$

4ــ احسب الخطأ المرتكب في حساب المقدار $\frac{18.3}{14.12}$

5ــ احسب الخطأ المرتكب في ناتج المقدار $\frac{(24.3)(12.16)}{14.1}$

6ــ إذا كان $x = 1.12$ عدد مدور احسب المقدار $y = x^2 + 3.12x + 2.71$ ثم عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين.

7- إذا كان $z = 20 \mp 0.01$, $y = 10 \mp 0.01$, $x = 2 \mp 0.005$ احسب المقدار $u = \frac{x^3 y^5}{z^2}$ واحسب الخطأ المرتكب.

الفصل الثاني
حل المعادلات ذات المتغير الواحد
Solution of Equations in one Variable

أولاً : حل المعادلات غير الخطية :
Solutions of Nonlinear Equations

(1ــ2) : مقدمة :

إن حل المشاكل الأساسية في الرياضيات تكمن في حل المعادلات غير الخطية في الشكل $f(x) = 0$ حيث $f(x)$ دالة حقيقية في متغير حقيقي واحد.

تعريف (1ــ2) :

تسمى القيمة ξ جذراً للمعادلة $f(x) = 0$ أو صفراً (zero) للدالة $f(x) = 0$ إذا تحقق الشرط $f(\xi) = 0$

إن معظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية تكون غير خطية وحل هذه المعادلات أو إيجاد الجذور لها ليس بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرائق العددية (Numerical Methods) لإيجاد هذه الجذور أو على الأقل قيم قريبة (Approximate) جداً لهذه الجذور وذلك بالبحث عن قيم x التي تجعل المقدار $|f(x)|$ أصغر ما يمكن أي البحث عن قيم x القريبة جداً من الجذر ξ للمعادلة.

عزل جذور معادلة :

لنفرض أن لدينا الدالة $y = f(x)$ القابلة للاشتقاق عدد من المرات في الفترة $[a, b]$ والتي نبحث فيها عن جذر المعادلة $f(x) = 0$ نقول أن الجذر ξ هو جذر معزول للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$ إذا كان $\xi \in [a, b]$ جذراً لهذه المعادلة وإذا كان الوحيد الذي ينتمي لهذه الفترة. ويمكن عزل الجذور بطريقتين :

1ـ الطريقة البيانية :

لتكن المعادلة $f(x)=0$ حيث $f(x)$ دالة متصلة، إن تعيين القيم التقريبية لجذور هذه المعادلة يتم بإعطاء قيم مختلفة للمتغير x نحصل منها على القيم المقابلة للدالة $f(x)$ التي نستطيع منها رسم الخط البياني (المنحنى البياني) للدالة $f(x)$ بشكل تقريبي يزداد دقة كلما ازداد عدد النقاط . وتمثل نقاط تقاطع المنحنى البياني مع المحور ox (محور السينات) قيم الجذور التقريبية للمعادلة $f(x)=0$

ولكن الرسم البياني غالباً ما يكون صعباً في هذه الحالات فإننا نستبدل المعادلة $f(x)=0$ بمعادلة مكافئة $\varphi(x)=g(x)$ بحيث تكون الدالتان $\varphi(x)$ و $g(x)$ أكثر بساطة من $f(x)$ وبرسم المنحنى البياني للدالتين $\varphi(x)$ و $g(x)$ تكون جذور المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنيين $\varphi(x)$ و $g(x)$.

مثال (2ـ1) :

أوجد بالطريقة البيانية جذور المعادلة

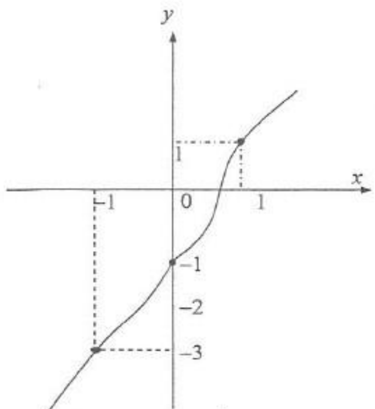
$$f(x)=x^3+x-1=0$$

الحل :

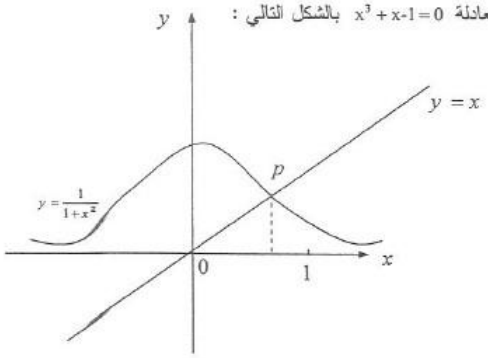
لنرسم منحنى الدالة $f(x)=x^3+x-1$

فنجد أن منحنى الدالة يقطع محور السينات في نقطة واحدة فاصلتها $0.5<\xi<1$

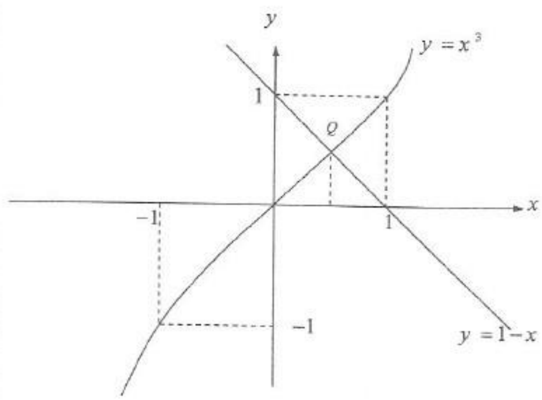
وهذا يدل على وجود جذر موجب بين 0.5 و 1 يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل



ولنرسم منحنى الدالتين $\varphi(x)=x$ و $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ نرى أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في نقطة p فاصلتها $0<\xi<1$ هي جذر تقريبي للمعادلة $x^3+x-1=0$ يمكن أيضاً كتابة المعادلة $x^3+x-1=0$ بالشكل التالي :



ويرسم منحنى الدالتين $\varphi(x) = x^3$ ، $g(x) = 1 - x$ نرى أن المنحنيين يتقاطعـــان مـــع بعضهما في نقطة Q فاصلها x $0 < \xi < 1$ هي جذر تقريبي للمعادلة $x^3 + x - 1 = 0$



مثال (2ـ2) :

أوجد بالطريقة البيانية جذور المعادلة

$$f(x) = 2.13\sin x - x = 0$$

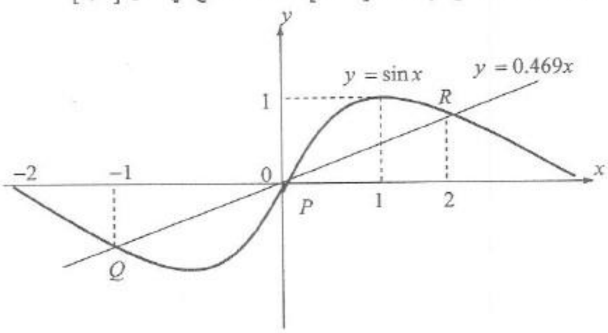
الحل :

نكتب المعادلة بالشكل التالي :

$$\sin x = \frac{1}{2.13}x = 0.469x$$

ثم نقوم برسم المنحنى البياني للدالتين $\varphi(x) = \sin x$ و $g(x) = 0.469x$

فنجد أن المنحنيين يتقاطعان مع بعضهما في النقاط P, Q, R حيث فاصلة P هي صـــفر $P(0, 0)$ وفاصلة Q تقع في الفترة [-2, -1] وفاصلة R تقع في الفترة [1, 2].



2ـ الطريقة التحليلية :

بالاعتماد على نظرية رول فإنه يوجد بين كل جذرين x_0 , x_1 متتالين لـــ $f'(x)$ جذر وحيد لـ $f(x)$ وذلك بشرط أن

$$f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$$

وبشكل عام إذا كان $f(a) \cdot f(b) < 0$ فهذا يعني أن لـ $f(x) = 0$ جـــذر واحد على الأقل في الفترة [a, b] ولـ $f(x) = 0$ جذر واحد فقط في الفتـــرة [a, b] إذا تحقق الشرط $f'(x) \neq 0$ في الفترة [a, b].

أما إذا كان $f(a) \cdot f(b) > 0$ فهذا يعني أنه ليس لـ $f(x) = 0$ جـــذر فـــي الفترة [a, b] أو لـ $f(x) = 0$ عدد زوجي من الجذور في الفترة [a, b]

مثال (2ـ3) :

عين جذور المعادلة $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$.

الحل :

لنشكل الجدول التالي

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	+	+	-	+	+

نستنتج أنه يوجد جذر في الفترة $[-3, -1]$

ويوجد جذر في الفترة $[0, 1]$

ويوجد جذر في الفترة $[1, 3]$

ولكي نعين جذر المعادلة وبالدقة التي نريدها. هناك عدة طرق لإيجاد الجذور التقريبية لمثل هذه المعادلات. سنتناول بإذن الله تعالى في هذا الفصل دراسة بعض هذه الطرق العددية والتي تسمى طرقاً تكريرية أو تكرارية (Iterative method) لحل المعادلات ولها مجال واسع من التطبيقات، وهي طرق تؤدي عادة إلى إيجاد جذور قريبة جداً من الجذور المضبوطة. وفي بعض الأحيان النادرة تؤدي إلى الجذور المضبوطة (Exact). هذه الطرق التكرارية تحتاج إلى فرضية قيمة تقريبية ابتدائية أو أكثر في بعض الطرق (Initial approximation) x_0 للجذر المضبوط ξ للمعادلة، ثم يُكرر استخدام صيغة الطريقة التكرارية عدة مرات للحصول على قيم متتابعة أقرب إلى الجذر المضبوط إلى أن نصل للدقة التي نريد (until satisfied).

واختيار طريقة معينة وتفضيلها على الأخرى يعتمد على عدة عوامل منها السرعة والدقة، وما إذا كانت الجذور حقيقية (real) أم مركبة ؟ (complex) بسيطة (simple) أم متعددة (multiple)، وما إذا كان لدينا قيم تقريبية ابتدائية (initial approximation) أم لا ... وهكذا.

أولاً : طريقة التصنيف المتكرر : The Bisection Method

لحل المعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ نفرض أن $f(a) . f(b) < 0$ ($f(a)$، $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان) نقسم الفترة $[a, b]$ إلى

نصفين فإذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ فإن $\xi = \frac{a+b}{2}$ هو جذر للمعادلة المعطاة، أما إذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ عندئذ نختار من الفترتين $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ، $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ الفترة التي تكون للدالة $f(x)$ على طرفيها إشارتان مختلفتان. نكرر هذا العمل مرة ثانية وثالثة وهكذا ...

فنحصل على متتالية من الفترات $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$

بحيث يكون $f(a_n) . f(b_n) < 0$ ، $n = 1, 2, \cdots$ و $(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$

وبما أن الأطراف اليسرى للفترات ... , $a_1, a_2, \dots, a_n$ تشكل متتالية محدودة وغير متناقصة ومطردة والأطراف اليمنى للفترات ... , $b_1, b_2, \dots, b_n$ تشكل متتالية محدودة وغير متزايدة ومطردة فإنه في المساواة أعلاه نحصل على

$$\xi = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

وبالانتقال إلى النهايات في المتباينة أعلاه نحصل على

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) . \lim_{n \to \infty} f(b_n) \le 0$$

ومنه فإن $0 \le [f(\xi)]^2$ أي أن $f(\xi) = 0$ وهذا يعني أن ξ هو جذر للمعادلة $f(x) = 0$

(2–1) خوارزمية طريقة التنصيف Bisection Algorithm

لإيجاد حل للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$ حيث $f(a), f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان. نفرض أن ε هو التسامح (tolerance TOL) المسموح به، وأن N هو أقصى عدد مسموح به لمرات التكرير.

الخطوة الأولى step 1 : ضع ; $i = 1$

الخطوة الثانية step 2 : طالما $i < N$ نفذ الخطوات (2-3)

الخطوة الثالثة step 3 : أجعل $p = a + (b-a) / 2$ (compute pi)

الخطوة الرابعة step 4 : إذا كـان $f(p) = 0$ أو $(b-a)/2 < TOL$ فـإن قيمـة الجذر التقريبية $= p$ توقف عن loop stop)
(procedure completed successfully)

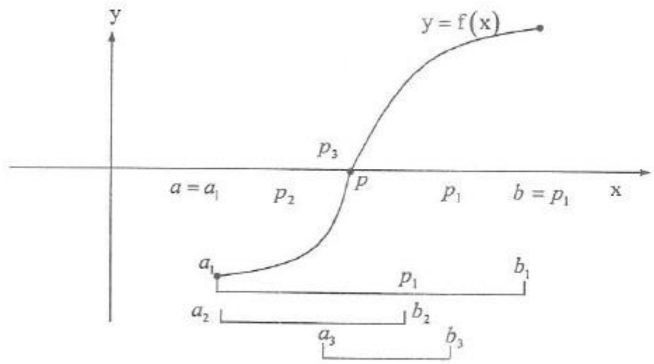
الخطوة الخامسة step 5 : ضع $i = i + 1$;

الخطوة السادسة step 6 : إذا كان $f(b) > 0\, f(a)$. ضع $a = p$ وإلا نضع $b = p$.

الخطوة السابعة step 7 : أطبع رسالة تشير إلى أن الطريقة لم تصل إلى الدقة المطلوبة بعد عدد N من التكرارات ثم اطلب توقف البرنامج

("Method failed after N_o iterations, N_o =', N_o)

انظر الشكل (2—1)



الشكل (2-1)

مثال (2—4) :

أوجد بطريقة التنصيف المتكرر جذر المعادلة

$$f(x) = x^3 - 4x - 9 = 0$$

الحل :

$$f(2) = -9 < 0$$

$$f(3) = 27 - 12 - 9 = 27 - 21 = 6 > 0$$

أي أن $f(2) \,.\, f(3) < 0$ هذا يعني أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2, 3]$

$$x_o = \frac{a + b}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

$$f(x_o) = f(2.5) = -3.375 < 0$$

ومنه $f(2.5) \cdot f(3) < 0$ أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.5, 3]$

$$x_1 = \frac{2.5 + 3}{2} = 2.75$$

$$f(x_1) = f(2.75) = 0.797 > 0$$

ومنه $f(2.5) \cdot f(2.75) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.5, 2.75]$

$$x_2 = \frac{2.5 + 2.75}{2} = 2.625$$

$$f(x_2) = f(2.625) = -1.412 < 0$$

ومنه $f(2.625) \cdot f(2.75) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.625, 2.75]$

$$x_3 = \frac{2.625 + 2.75}{2} = 2.6875$$

$$f(x_3) = f(2.6875) = -0.3391 < 0$$

ومنه $f(2.6875) \cdot f(2.75) < 0$

∴

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.6875, 2.75]$

$$x_4 = \frac{2.6875 + 2.75}{2} = 2.71875$$

$$f(x_4) = f(2.71875) = 0.2209 > 0$$

ومنه $f(2.6875) \cdot f(2.71875) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.6875, 2.71875]$

$$x_5 = \frac{2.6875 + 2.71895}{2} = 2.7031$$

$$f(x_5) = f(2.7031) = -0.0615 < 0$$

ومنه $f(2.7031) \cdot f(2.71875) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.7031, 2.71875]$

$$x_6 = \frac{2.7031 + 2.71875}{2} = 2.7109$$

$$f(x_6) = f(2.7109) = 0.07875 > 0$$

ومنه $f(2.7031) \cdot f(2.7109) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.7031, 2.7109]$.

$$x_7 = \frac{2.7031 + 2.7109}{2} = 2.707$$

$$f(x_7) = f(2.707) = 0.00847 > 0$$

ومنه $f(2.7031) \cdot f(2.707) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.7031, 2.707]$

$$x_8 = \frac{2.7031 + 2.707}{2} = 2.70505$$

$$f(x_8) = f(2.70505) = -0.02655 < 0$$

ومنه $f(2.70505) \cdot f(2.707) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.70505, 2.707]$

$$x_9 = \frac{2.70505 + 2.707}{2} = 2.7060$$

$$f(x_9) = f(2.7060) = -0.009488 < 0$$

ومنه $f(2.7060) \cdot f(2.707) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.7060, 2.707]$

نأخذ $\xi = \frac{2.7060 + 2.707}{2} = 2.7065$

مثال (2ـ5) :

باستخدام خوارزمية التنصيف المتكرر أوجد جذر الدالـة $f(x) = x^3 - 4x - 9$ داخـل الفترة $[1 , 2]$ عندما يتحقق التسامح tolerance TOL)

(صحيح لـ 4 أرقام معنوية) $\frac{b_n - a_n}{|a_n|} < 5 \times 10^{-3}$

أو (50) تكرارات أيهما يتحقق أولاً.

الحل :

بتحويل الخوارزمية (2ـ1) إلى برنامج (MATLAP 6.1) يمكن كتابة البرنامج كمـا يلي :

```
function [a, b, fail] = bisect (f, a, b, eps, N)
%
%    Applies the bisection method to the function f on [a, b],
%    f is assumed to be  continuous and f(a) * f(b) < 0.
%    Stops when | f(a) | < eps or | f(b) | < eps or | b - a | < eps.
%    Failure is reported (fail = 1) when the accuracy requirement
%   is not satisfied in N steps; otherwise fail = 0 on return.
%
%
%
```

```
% Example 1 :
% >> [a, b, fail] = bisect ('df', 1, 2, 0.00001, 50)
%
fprintf ('running the bisection method ... \n');
for i = 1 : N
        m = (a+b) / 2;
        fm = feval (f, m);
        if fm*feval (f, a) < 0
                b = m;
        else
                a = m;
        end;
      fprintf ('a = %f, b = %f, m = %f, f(m) = %f \n', a, b, m, fm);
        if (abs(fm) < eps) | ( (b - a) < eps )
                fail = 0 ;
                fprintf ('succeeded after %d steps \n', i);
                return
        end
end
fprintf('failed requirement after %f steps \n', N);
fail = 1;
function y = df (x)
y = x^3 + 4*x^2 - 10 ;
```

يمكن التوصل إلى النتائج التالية :

```
>> [a, b, fail] = bisect ('df', 1, 2, 0.0001, 50)
running the bisection method
  a = 1.000000,   b = 1.500000,  m = 1.500000, f(m) = 2.375000
  a = 1.250000,   b = 1.500000,  m = 1.250000, f(m) = -1.796875
  a = 1.250000,   b = 1.375000,  m = 1.375000, f(m) = 0.162109
  a = 1.312500,   b = 1.375000,  m = 1.312500, f(m) = -0.848389
a = 1.343750,   b = 1.375000,  m = 1.343750,  f(m) = -0.350983
a = 1.359375,   b = 1.375000,  m = 1.359375,  f(m) = -0.096409
a = 1.359375,   b = 1.367188,  m = 1.367188,  f(m) = 0.032356
```



```
a = 1.363281,  b = 1.367188,  m = 1.363281, f(m) = -0.03150
a = 1.363281,  b = 1.365234,  m = 1.365234, f(m) = 0.000072
a = 1.364258,  b = 1.365234,  m = 1.364258, f(m) = -0.016047
a = 1.364746,  b = 1.365234,  m = 1.364746, f(m) = -0.007989
a = 1.364990,  b = 1.365234,  m = 1.364990, f(m) = -0.003959
a = 1.365112,  b = 1.365234,  m = 1.365112, f(m) = -0.001944
a = 1.365173,  b = 1.365234,  m = 1.365173, f(m) = -0.000936
```

ملاحظـــة :

نلاحظ أن الجذر التقريبي $p_{13} = 0.000936$ ونلاحظ أن $p_{10} = 0.000072$ قريبه إلـــى p_{13}. لكن ليس هناك طريقة نلاحظ ذلك إلا إذا كنا نعرف القيمة الحقيقيـــة مســـبقاً وهـــي تعتبر من عيوب طريقة التنصيف المتكرر لأنه يمكن أن نقترب من الحل في تكرار معين ثم فجأة نبتعد أكثر وهكذا .... فهي طريقة بطيئة (slow) ولكن من محاسنها أنها دائماً تقترب من الحل.

ملاحظة:

إذا كانت الدقة تبلغ $\varepsilon = 10^{-3}$ فإن $N \geq 10$ بينمـــا قيمـــة $p_{10} = 2.174$ أي دقيقـــة فـــي حدود 10^{-4} فنلاحظ أن مثل هذه الصيغ السابقة تعطي فقط حداً لعدد التكـــرارات اللازمـــة (bound for the number of iteration) وفي معظم الأحيان يكون هذا الحد bound أكبر بكثير من العدد الفعلي المطلوب.

التقارب وتقييم الخطأ : Convergence of Bisection Method

إذا كانت الفترة $[a, b]$ تحوي جذراً واحداً للمعادلة $f(x) = 0$ فإنـــه يمكـــن توليد متتالية $x_0, x_1, x_2, \dots$ بطريقة التنصيف المتكرر نحصل عليهـــا بأخـــذ x_0 منتصـــف الفترة $[a, b]$

x_1 منتصف الفترة $[a_1, b_1]$

x_2 منتصف الفترة $[a_2 , b_2]$

وهكذا ... x_n منتصف الفترة $[a_n , b_n]$

فإذا رمزنا للخطأ المطلق بالرمز $|\xi - x_n| = |x_n - \xi| = e_n$ حيث ξ هو الحل فإن ξ يحقق العلاقة

$$|\xi - x_o| \le \frac{b-a}{2}$$

وبصورة عامة فإن :

$$|\xi - x_n| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \quad , n = 0, 1, 2, ...$$

ملاحظة :

إذا كان المطلوب إيجاد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ بخطأ لا يتجاوز 10^{-k} فيمكن تحديد n التي يجب أن نتوقف عندها أي يمكن تحديد عدد الخطوات التي نقوم بها للحصول على الجذر التقريبي x_n الذي يحقق

$$|\xi - x_n| < 10^{-k}$$

ويتحقق هذا الأمر عندما نعين n من المتباينة $\frac{b-a}{2^{n+1}} \le 10^{-k}$

التي نحصل بحلها على

$$n + 1 \ge \frac{\log(b-a) + k \log 10}{\log 2} = \frac{\log(b-a) + k}{\log 2}$$

مثال (2—6) : كم مرة يجب أن نكرر طريقة التنصيف المتكرر للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} في المثال (2—4).

الحل :

$$n + 1 \ge \frac{\log(3-2) + 3}{\log 2} = \frac{\log 1 + 3}{\log 2} = \frac{0 + 3}{0.3} = 10$$

وبالتالي للحصول على الجذر المطلوب بخطأ لا يتجاوز 10^{-3} نكرر طريقة التنصيف المتكرر تسع مرات.

حيث أن

$$|\xi - x_9| = |2.7065 - 2.060| = 0.0005 < 0.001 = 10^{-3}$$

تعريف (2—2) :

إذا كان $|x_{n+1} - x_n| < 0.5 \times 10^{-k}$ فإننا نقول أن x_n , x_{n+1} كتقريبين متتاليين لقيمة ξ متفقان في k في المنازل العشرية.

مثال (2—7):

إذا كانت $x_n = 1.549271$ وكانت $x_{n+1} = 1.553427$ نلاحظ أن هناك اتفاق في المنزلة العشرية الأولى أي $k = 1$ ولكن بالاعتماد على التعريف السابق نجد :

$$|x_{n+1} - x_n| = 0.004156 < 0.5 \times 10^{-2}$$

ومنه $k = 2$ أي أنهما متفقان بمنزلتين عشريتين.

مثال (2—8) :

استخدم طريقة التنصيف المتكرر لحل المعادلة $f(x) = x + \ln x = 0$ لمنزلتين عشريتين.

الحل :

$$f(0.5) = 0.5 + (-0.693)$$
$$= -0.193 < 0$$
$$f(0.6) = 0.6 + (-0.5)\ (-0.51083)$$
$$= 0.08917 > 0$$

ومنه $f(0.5)\ f(0.6) < 0$

أي يوجد جذر في الفترة $[0.5, 0.6]$

لنعين عدد مرات التكرار بالاعتماد على العلاقة

$$n + 1 \ge \frac{\log(b-a) + k}{\log 2}$$

فنجد

$$n + 1 \ge \frac{\log(0.1) + 2}{\log 2} = \frac{-1+2}{0.3010} = \frac{1}{0.3010}$$
$$= 3.33$$

ومنه نحتاج لتكرار طريقة التنصيف المتكرر ثلاث مرات أي $n = 3$.

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+0.6}{2} = 0.55$$
$$f(x_0) = f(0.55) = 0.55 + \ln(0.55)$$
$$0.55 + (0.5978)$$
$$= -0.0478 < 0$$

ومنه $f(0.55) \cdot f(0.6) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[0.55, 0.6]$

$$x_1 = \frac{0.55+0.6}{2} = 0.575$$
$$f(x_1) = f(0.575) = 0.575 + \ln(0.575)$$
$$= 0.575 + (-0.55338)$$
$$= 0.0216 > 0$$

ومنه $f(0.55) \cdot f(0.575) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[0.55, 0.575]$

$$x_2 = \frac{0.55+0.575}{2} = \frac{1.125}{2} = 0.5625$$

$$f(x_2) = f(0.5625) = 0.5625 + \ln(0.5625)$$
$$= 0.5625 + (-0.575364) = -0.01286 < 0$$

ومنه $f(0.5625) \cdot f(0.575) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[0.5625, 0.575]$

$$x_3 = \frac{0.5625+0.575}{2} = \frac{1.1375}{2} = 0.56875$$

مثال (2ـ9) :

استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد الجذر الموجب للمعادلة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ لثلاث منازل عشرية.

الحل :

$$f(2) = -1 < 0$$
$$f(3) = 9 > 0$$

ومنه $f(2) \cdot f(3) < 0$

وبالتالي يوجد جذر موجب ضمن الفترة $[2, 3]$

لنعين عدد مرات التكرار

$$n + 1 \ge \frac{\log(b-a) + k}{\log 2} = \frac{\log 1 + 3}{\log 2} = \frac{3}{0.3010} = 10$$

هذا يعني أنه يجب أن نكرر طريقة التنصيف المتكرر تسع مرات.

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$
$$f(x_0) = f(2.5) = 2.625 > 0$$

ومنه $f(2) \cdot f(2.5) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2, 2.5]$

$$x_1 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25$$
$$f(x_1) = 0.5156 > 0$$

ومنه $f(2) \cdot f(2.25) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2, 2.25]$

$x_2 = 2.125$

$f(x_2) = -0.13 < 0$

الجذر موجود ضمن الفترة $[2.125, 2.25]$

$x_3 = 2.188$

$f(x_3) = 0.088 > 0$

الجذر موجود ضمن الفترة $[2.125, 2.188]$

$x_4 = 2.1565$

$f(x_4) = -0.1157 < 0$

الجذر موجود ضمن الفترة $[2.1565, 2.188]$

$x_5 = 2.1772$

$f(x_5) = -0.0153 \Rightarrow [2.1722, 2.188]$

$x_6 = 2.1801$

$f(x_6) = 0.0361 \Rightarrow [2.1722, 2.1801]$

$x_7 = 2.1762$

$f(x_7) = 0.0106 > 0 \Rightarrow [2.1722, 2.1762]$

$x_8 = 2.1742$

$f(x_8) = -0.00233 < 0 \Rightarrow [2.1742, 2.1762]$

$x_9 = 2.1752$

$f(x_9) = 0.0042 > 0 \Rightarrow [2.1742, 2.1752]$

$x_{10} = 2.1747$

$f(x_{10}) = 0.00091 > 0 \Rightarrow [2.1742, 2.1747]$

$x_{11} = 2.1744$

$f(x_{11}) = -0.0010 < 0 \Rightarrow [2.1744, 2.1747]$

نأخذ $\xi = x_{11} = 2.1744$.

تمـــارين (2ـ1)

(1) وضح أن للدالة $f(x) = x^3 - x - 1$ حل داخل الفترة $[1, 2]$ ، ثم أوجد الحل التقريبي لجذر الدالة ضمن خطأ $E = 10^{-2}$ باستخدام طريقة التنصيف المتكرر؟

(2) استخدم طريقة التنصيف المتكرر (Bisection Method) لإيجـــاد الحـــل للمعادلـــة الآتية مع خطأ 10^{-2}

$x = \tan x$ في الفترة $[4, 4.5]$

(3) استخدم طريقـــة التنصـــيف المتكـــرر لإيجـــاد الحـــل الصـــحيح ضـــمن خطـــأ لا يتجاوز $E = 10^{-2}$ لـــ $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ في الفترات

(a) $[-2, -1]$ (b) $[0, 2]$

(c) $[2, 3]$ (d) $[-1, 0]$

(4) استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد الحل الصحيح إلى 10^{-5} لكلاً مـــن المســـائل الآتية

(a) $x - 2^{-x} = 0$ for $0 \le x \le 1$
(b) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6$ for $1 \le x \le 2$
(c) $e^{-x} - x^2 + 3x - 2 = 0$ for $0 \le x \le 1$
(d) $x^2 - 2 = 0$ for $1 \le x \le 2$
(e) $xe^x - 1$ for $0 \le x \le 1$

(5) كم تكراراً ــ تقريباً تلزم لحل المعادلـــة $f(x) = x^3 + x - 4 = 0$ بطريقـــة التنصـــيف المتكرر بحيث نصل إلى حل تبلغ دقته $E = 10^{-3}$ وذلك داخل الفترة $[1, 4]$.

(6) باستخدام خوارزمية طريقة التنصيف المتكرر (2−1) أوجد جذور المعادلة

$$\frac{4x - 7}{(x-2)^2} = 0$$

داخل الفترة $[1.2, 2.2]$ و $[1.5, 2.5]$ ثم اشرح النتائج بيانياً.

ثانياً : طريقة القواطع (طريقة الأوتار) Secant Method

إذا استطعنا عزل جذر واحد للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة $[a , b]$ وبفرض أن $f(x)$ دالة متصلة ضمن هذه الفترة ثم إذا رسمنا المنحنى البياني للدالة $y = f(x)$ ووصلنا بين النقطتين $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$ فإن النقطة x_0 نقطة التقاطع مع محور السينات هي التقريب الأول للجذر فإذا كان $f(x_0) = 0$ كانت x_0 هي الجذر المطلوب.

أما إذا كان $f(x_0) \neq 0$ فإن الجذر يكون في الفترة $[x_0, b]$

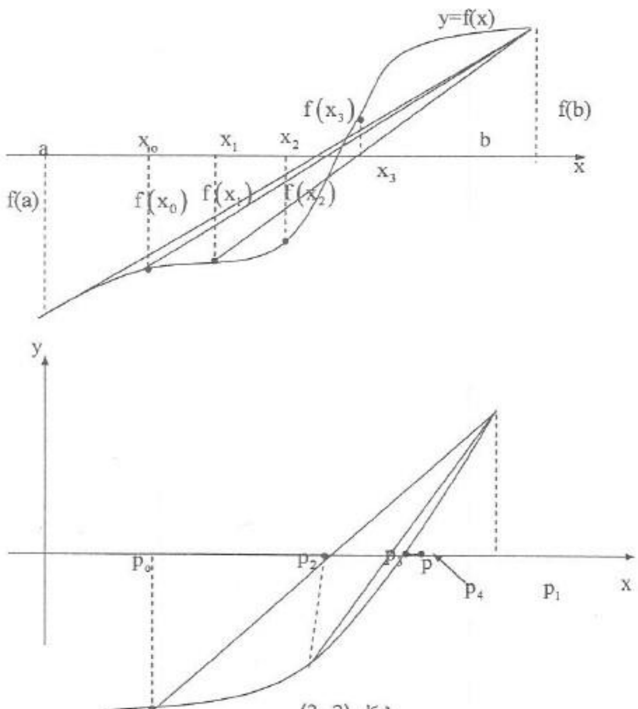
إذا كان $f(x_0) . f(b) < 0$ أو الجذر يكون في الفترة $[a, x_0]$

إذا كان $f(a) . f(x_0) < 0$ في الحالة الأولى مثلاً يكون الجذر المطلوب واقع في الفترة $[x_0, b]$ وفي هذه الحالة نصل من جديد بين النقطتين $(x_0, f(x_0))$ ، $(b, f(b))$ وتكون نقطة التقاطع مع محور السينات هي النقطة x_1 ثم نوجد $f(x_1)$ فإذا كان $f(x_1) = 0$ كانت x_1 هي الجذر المطلوب. أما إذا كان $f(x_1) \neq 0$ وإذا كان $f(x_0) . f(x_1) < 0$ فإن الجذر يقع في الفترة $[x_0, x_1]$ أو الجذر يقع في الفترة $[x_1, b]$ إذا كان

$$f(x_1) . f(b) < 0$$

وهكذا نتابع ... فنحصل على المتتالية $x_0 , x_1, x_2, ..., x_n$ فإذا تحقق الشرط $| x_{i+1} - x_i | < \varepsilon$ حيث ε مقدار صغير جداً فإننا نعتبر x_{i+1} هو الجذر التقريبي المطلوب.

ويمكن حساب النقاط x_i $i=0, 1, 2, ..., n$ الواقعة على محور السينات كما يلي :



شكل (2–2)

الشكل العام لمعادلة المستقيم هو $y = m x + d$

والمستقيم الواصل بين النقطتين $(a, f(a)), (b, f(b))$ يعطى :

$$f(a) = m a + d \qquad (1)$$

$$f(b) = m\,b + d \qquad (2)$$

بطرح (1) من (2) نجد :

$$f(b) - f(a) = m\,(b - a)$$

ومنه

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وبضرب المعادلة (1) بـــ b والثانية بـــ a نجد أن :

$$b\,f(a) = m\,a\,b + d\,b \qquad (3)$$

$$a\,f(b) = m\,a\,b + d\,a \qquad (4)$$

بطرح (3) من (4) نجد أن :

$$a\,f(b) - b\,f(a) = d\,(a - b)$$

ومنه

$$d = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{a - b}$$

وبما أن $y = 0$ عند نقطة التقاطع مع محور السينات فإن معادلة المستقيم تكتب بالشكل

$$m x_0 + d = 0$$

ومنه

$$x_0 = -\frac{d}{m}$$

وبالتعويض عن d، m بقيمها نجد :

$$x_0 = -\frac{\dfrac{a\,f(b) - b\,f(a)}{a - b}}{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

ثم نحسب $f(x_0)$ فإذا كان $f(x_0) \cdot f(b) < 0$ فإن الجذر يقع داخـــل الفتـــرة $[x_0 , b]$

نسمي $x_0 = a_1$ ، $b = b_1$ أي $[x_0 , b] = [a_1, b_1]$

ونطبق العلاقة السابقة لإيجاد x_1 أي

$$x_1 = \frac{a_1\,f(b_1) - b_1\,f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

وهكذا نتابع ... فنحصل على الصيغة العامة التالية :

$$x_n = \frac{a_n\,f(b_n) - b_n\,f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

في الفترة $[a_n , b_n]$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$

و $[a, b] = [a_0 , b_0]$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

$$x_n = b_n - \frac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}\,(b_n - a_n) \quad , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

مثال (2—10) :

أوجد جذر المعادلة $f(x) = 3x^3 - 5x - 7 = 0$ بطريقة القواطع (Secant method).

الحل :

$$f(0) = -7 < 0$$

$$f(1) = -9 < 0$$

$$f(2) = 7 > 0$$

إذن يوجد جذر للمعادلة داخل الفترة $[1, 2]$

لدينا

$$a = a_0 = 1$$

$$b = b_0 = 2$$

ومنه

$$x_0 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_0 = \frac{(1)\;(7) - 2\;(-9)}{7 - (-9)} = \frac{7 + 18}{16} = \frac{25}{16} = 1.5625$$

$$f(x_0) = -3.3684 < 0$$

ومنه

$$f(x_0) \cdot f(2) < 0$$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_1, b_1] = [1.5625 , 2]$

$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{(1.5625)(7) - 2(-3.3684)}{7 - (-3.3684)}$$

$$= \frac{17.6743}{10.3684} = 1.7046$$

$$f(x_1) = f(1.7046) = -0.6640$$

ومنه $f(x_1) \cdot f(2) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_2, b_2] = [1.7046 , 2]$

$$x_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{(1.7046)(7) - 2(-0.6640)}{7 - (-0.664)}$$

$$= \frac{13.2602}{7.664} = 1.7302$$

$$f(x_2) = f(1.7302) = -0.1124 < 0$$

ومنه $f(x_2) \cdot f(2) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_3 , b_3] = [1.7302 , 2]$

$$x_3 = \frac{a_3 f(b_3) - b_3 f(a_3)}{f(b_3) - f(a_3)} = \frac{(1.7302)(7) - 2(-0.1124)}{7 - (-0.1124)}$$

$$= \frac{12.3362}{7.1124} = 1.7344$$

$$|x_3 - x_2| = |1.7344 - 1.7302| = 0.0042 < 0.005$$

ومنه فإن $\xi = x_3 = 1.7344$ هو الجذر التقريبي.

مثال (2–11):

عين اعتماداً على طريقة القواطع الجذر التقريبي للمعادلة

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2} = 0$$

الحل :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 0.2146 > 0$$

$$f(\pi) = \sin \pi - \frac{\pi}{2} = -1.5708 < 0$$

ومنه $f\left(\frac{\pi}{2}\right) f(\pi) < 0$

إذن يوجد جذر للمعادلة داخل الفترة $[a, b] = [a_o, b_o] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$x_o = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\frac{\pi}{2}(-1.5708) - \pi(0.2146)}{-1.5708 - 0.2146}$$

$$x_o = \frac{3.1416}{1.7854} = 1.7596$$

$$f(x_o) = f(1.7596) = 0.10243 > 0$$

ومنه $f(x_o) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_1, b_1] = [1.7596, \pi = 3.1416]$

$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{(1.7596)(-1.5708) - \pi(0.10243)}{-1.5708 - 0.10243}$$

$$= \frac{3.0858}{1.67323} = 1.8442$$

$$f(x_1) = f(1.8442) = 0.0408 > 0$$

ومنه $f(x_1) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_2, b_2] = [1.8442, \pi = 3.1416]$

$$x_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{(1.8442)(-1.5708) - \pi(0.0408)}{-1.5708 - 0.0408}$$

$$= \frac{3.0250}{1.6116} = 1.877$$

$$f(x_2) = 0.0119 > 0$$

ومنه $f(x_2) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_3 , b_3] = [1.877 , \pi]$

$$x_3 = \frac{a_3 f(b_3) - b_3 f(a_3)}{f(b_3) - f(a_3)} = \frac{(1.877)\ (-1.5708) - \pi\ (0.0119)}{-1.5708 - 0.0119}$$

$$= \frac{2.9858}{1.5827} = 1.8865$$

$$f(x_3) = f(1.8865) = 0.00733 > 0$$

ومنه $f(x_3) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_4 , b_4] = [1.8865 , \pi]$

$$x_4 = \frac{a_4 f(b_4) - b_4 f(a_4)}{f(b_4) - f(a_4)} = \frac{(1.8865)\ (-1.5708) - \pi\ (0.00733)}{-1.5708 - 0.00733}$$

$$= \frac{2.9863}{1.5781} = 1.8924$$

$$f(x_4) = 0.00253 > 0$$

ومنه $f(x_4) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_5 , b_5] = [1.8924 , \pi]$

$$x_5 = \frac{a_5 f(b_5) - b_5 f(a_5)}{f(b_5) - f(a_5)} = \frac{(1.8924)\ (-1.5708) - \pi\ (0.00253)}{-1.5708 - 0.00253}$$

$$= \frac{2.9805}{1.57333} = 1.8944$$

$$f(x_5) = 0.000896 > 0$$

ومنه $f(x_5) \cdot f(\pi) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[a_6 , b_6] = [1.8944, \pi]$

$$x_6 = \frac{a_6 f(b_6) - b_6 f(a_6)}{f(b_6) - f(a_6)} = \frac{(1.8924)\ (-1.5708) - \pi\ (0.000896)}{-1.5708 - 0.000896}$$

$$= \frac{2.97854}{1.571696} = 1.8951$$

$$|x_6 - x_5| = |1.8951 - 1.8944| = 0.0007$$

ومنه فإن $\xi = x_6 = 1.8951$ هو الجذر التقريبي.

(2ـ2) خوارزمية طريقة القواطع Secant Algorithm

لإيجاد حل للمعادلة $f(x) = 0$ نُعطى أو نفرض قيم ابتدائية p_o , p_1 (initial approximation) وكذلك نفرض أن ε هو التسامح (tolerance, TOL) المسموح به وأن N_o هو أقصى عدد مسموح به لمرات التكرار.

الخطوة الأولى step 1 : ضع $i = 2$ ، $q_o = f(p_o) ; q_1 = f(p_1)$

الخطوة الثانية step 2 : طالما $i \le N_o$ نفذ الخطوات 3 ـ 6.

الخطوة الثالثة step 3 : ضع (compute p_i) $p = p_1 - q_1\ (p_1 - p_o) / (q_1 - q_o)$

الخطوة الرابعة step 4 : إذا كان $|p - p_1| < TOL$ فإن قيمة الجذر التقريبية $= p$ (توقف عن Loop) stop.

الخطوة الخامسة step 5 : ضع $i = i + 1$;

الخطوة السادسة step 6 : ضع (Update p_o, q_o, p_1, q_1) $p_o = p_1$

$q_o = q_1$; $p_1 = p$; $q_1 = f(p)$;

الخطوة السابعة step 7 : اطبع رسالة تشير إلى أن الطريقة لم تصل إلى الدقة المطلوبة بعد N_o من التكرارات ثم أطلب توقف البرنامج.

("Method failed after N_o iteration, N_o = ', N_o);
(Procedure completed successfully).
Stop

وبتحويل الخوارزمية (2ـ2) إلى برنامج (Matlap 6.1) كما في الخوارزمية (4 −1)

$$x = \cos x$$

$$f(x) = \cos x - x \qquad \begin{pmatrix} \text{I. p} \\ p_o = \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$p_o = \frac{\pi}{2} = 0.7853981635$$

$$p_o = 0.5 \quad , \quad p_1 = p_o$$

طريقة القواطع :

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841390
3	0.7390581394
4	0.7390851334

جدول (2)

ثالثاً : طريقة نيوتن ـ رافسون : The Newton - Raphson Method

إذا استطعنا عزل جذر واحد للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$ وبفرض أن الدالة $y = f(x)$ دالة متصلة ضمن هذه الفترة. ثم إذا رسمنا المنحنى البياني للدالة $y = f(x)$ عندئذ إذا أخذنا نقطة ما x_o في الفترة $[a , b]$ وأوجدنا $f(x_o)$ ورسمنا المماس للدالة $y = f(x)$ في النقطة $(x_o, f(x_o))$ حيث أن معادلة المستقيم المماس المار من النقطة $(x_o, f(x_o))$ وميله $m = f'(x_o)$ تعطى بالعلاقة التالية :

$$y - y_o = f(x) - f(x_o) = m(x - x_o) = f'(x_o)\,(x - x_o)$$

وبفرض أن هذا المماس يقطع محور السينات في نقطة ولتكن x_1

بما أن $(x_1 , 0)$ نقطة تقاطع هذا المماس مع محور السينات فإذا بدلنا كل x بـ x_1 وكل y بـ 0 نجد :

$$0 - f(x_o) = f'(x_o)\,(x_1 - x_o)$$

ومنه

$$x_1 - x_o = \frac{-f(x_o)}{f'(x_o)}$$

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

ثم نوجد $f(x_1)$ ونرسم المماس للدالة $y = f(x)$ في النقطة $(x_1, f(x_1))$ وميله $m = f'(x_1)$

فيقطع المماس الجديد محور السينات في نقطة ولتكن x_2 بكتابة معادلة هذا المماس المار من النقطة $(x_1, f(x_1))$ وميله $m = f'(x_1)$ نجد :

$$f(x) - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$$

بما أن $(x_2 , 0)$ نقطة تقاطع هذا المماس مع محور السينات فإذا بدلنا كل x بـ x_2 وكل $y = f(x)$ بـ 0 نجد :

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)\,(x_2 - x_1)$$

ومنه

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبتكرار هذه العملية عدداً من المرات نحصل على الصيغة العامة التالية:

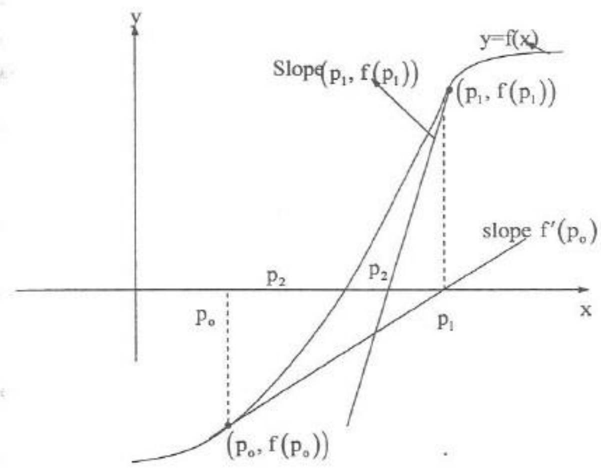
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

وهذه الصيغة تسمى بصيغة نيوتن ـ رافسون (Newton - Rapshon Method) أو اختصاراً تسمى طريقة نيوتن (Newton).

ويمكن اعتبار النقطة x_{n+1} جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ إذا تحقق الشرط:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

حيث ε عدد صغير جداً .



شكل (2—3)

ملاحظة :

في بعض الحالات فإن رسم المماس عند نقطة ما من منحنى الدالة يــؤدي إلـــى أن نقطة تقاطع هذا المماس مع محور السينات تقع خارج الفترة $[a, b]$ في هذه الحالات فإن طريقة نيوتن تكون غير عملية (المعنى الهندسي أن التفاضل الأول لا يمكن إيجاده).

(2—3) خوارزمية طريقة نيوتن — رافسون

Newton - Raphson Algorithm

لإيجاد حل للمعادلة $f(x) = 0$ عندما يعطي قيمة ابتدائية p_0

(an initial approximation)

وبفرض أن ε هو التسامح (tolerance, TOL) المسموح به وأن N_0 هو أقصى حد التكرار

الخطوة الأولى step 1 : ضع $i = 1;$

الخطوة الثانية step 2 : طالما $i < N_0$ نفذ الخطوات (3—6).

الخطوة الثالثة step 3 : ضع (compute p_1) $p = p_0 - f(p_0) / f'(p_0)$

الخطوة الرابعة step 4 : : $|p - p_0| < TOL$;

فإن قيمة الجذر التقريبية = p — توقف stop loop

(procedure completed successfully)
stop

الخطوة الخامسة step 5 : ضع $i = i + 1$;

الخطوة السادسة step 6 : ضع (Update p_0) $p_0 = p$;

الخطوة السابعة step 7 : أطبع رسالة تشير إلى أن الطريقة لم تصل إلى الدقة المطلوبة بعد عدد N_0 من التكرارات ثم أطلب توقف البرنامج.

("Method failed after N_0 iterations, N_0 = ', N_0)
stop .

يمكن تحويل الخوارزمية (2—3) إلى برنامج (Matlab 6.1) لحل المثال التالي كتمرين على الخوارزمية

مثال (2—12) :

استخدم خوارزمية طريقة نيوتن — رافسون (2—3) لإيجاد جذر المعادلة $x = e^{-x}$ مقرباً لرقمين عشريين ثم قارن نتائجك بالحل أدناه .

الحل :

لنكتب المعادلة بالشكل $f(x) = x - e^{-x} = 0$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 0.6321 > 0$$

ومنه $f(0) \cdot f(1) < 0$ أي أنه يوجد جذر للمعادلة ضمن الفترة $[0, 1]$

$$f'(x) = 1 + e^{-x}$$

نأخذ $x_0 = 0$ ونطبق صيغة نيوتن ـ رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فنجد

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}}$$

$$x_1 = 0 - \frac{0 - 1}{1 + 1} = 0.5$$

$$x_2 = 0.5 - \frac{0.5 - e^{-0.5}}{1 + e^{-0.5}}$$

$$= 0.5 - \frac{-0.1066}{1.6065} = 0.5 + 0.0622$$

$$= 0.5622$$

$$x_3 = 0.5622 - \frac{0.5622 - e^{-0.5622}}{1 + e^{-0.5622}}$$

$$= 0.5622 - \frac{-0.0078}{1.5670} = 0.5622 + 0.0048$$

$$= 0.567$$

$$x_4 = 0.567 - \frac{0.567 - e^{-0.567}}{1 + e^{-0.567}} = 0.567$$

ومنه فإن $\xi = x_4 = 0.567$ الجذر التقريبي للمعادلة.

المعنى الهندسي لطريقة نيوتن هو استبدال قوس صغير من منحنـى الدالـة $y = f(x)$ بالمماس المرسوم عند نقطة ما على المنحنى (أنظر شكل (2ـ3)).

وبحل نفس المثال في طريقة التنصيف المتكرر نجد أننا حصلنا على الحل هنـا بطريقـة أسرع تقريباً الضعف ... وهو ما يوضح أهمية وتفوق خوارزمية نيوتن ـ رافسون.

ملاحظة :

هذه الطريقة أفضل وأسرع وأكثر دقة مقارنة بطريقة التنصيف المتكرر.

ولذلك فإننا نثبت النظرية التالية :

نظرية (2ـ1) :

إذا كان $f(a) \cdot f(b) < 0$ وكان $f'(x)$ ، $f''(x)$ لا يساويان الصفر ويحافظان على إشارتيهما ضمن الفترة $[a, b]$ فمن التقريب الأول $x_0 \in [a, b]$ الذي يحقق المتباينة $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ يمكن بطريقة نيوتن حساب الجذر الوحيد ξ للمعادلة $f(x) = 0$ ولأي دقة مطلوبة.

الإثبات : بفرض أن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ و $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$ عندما $a \le x \le b$ (نعالج الأخرى بشكل مشابه)

من المتباينة $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ فإن $f(x_0) > 0$ (أو يمكن القول أن $x_0 = b$)

لنثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن جميع التقريبات

$$x_n > \xi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

وبالتالي فإن $f(x_n) > 0$

لدينا $\xi < x_0$ ولنفرض أن $x_n > \xi$ ولنكتب $\xi = x_n + (\xi - x_n)$

باستخدام نظرية تايلور نجد :

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2$$

حيث $\xi < c_n < x_n$

وبما أن $f''(x) > 0 \ , \ f(\xi) = 0$ فإن :

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0$$

إذن

$$\xi - x_n < \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ومنه $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi$

وبالتالي جميع التقريبات $x_n > \xi \quad n = 0, 1, 2, \dots$

بما أن $f'(x_n) > 0 ,\ f(x_n) > 0$

نجد من العلاقة $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ أن $x_{n+1} < x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$

أي أن التقريبات المتتالية $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ تشكل متتالية مطردة متناقصة ومحدودة.

إذن فالنهاية $\bar{\xi} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ موجودة

وبالانتقال إلى النهايات في العلاقة $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ نجد :

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}$$

أي أن $f(\bar{\xi}) = 0$ إذن $\xi = \bar{\xi}$ وهو المطلوب.

مثال (2ـ13) :

عين الجذر الموجب للمعادلة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ بطريقة نيوتن ـــ رافسون.

الحل :

$$f(2) = -1 < 0$$
$$f(3) = 9 > 0$$

أي أن $f(2) \cdot f(3) < 0$ هذا يعني أنه يوجد جذر ضمن الفترة $[2, 3]$ ويمكن تصغير هذه الفترة

$$f(2.1) = -0.459 < 0$$
$$f(2.2) = 0.168 > 0$$

أي أن $f(2.1) \cdot f(2.2) < 0$ هذا يعني أننا حصلنا على الفترة $[2.1, 2.2]$ وأن الجذر موجود ضمن هذه الفترة.

$$\forall x \in [2.1, 2.2] \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 > 0$$
$$\forall x \in [2.1, 2.2] \quad f''(x) = 6x - 4 > 0$$

ونختار $x_0 = 2.2$ لأن $f(2.2) \cdot f''(2.2) > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.2 - \frac{0.168}{6.72} = 2.175$$

$$f(x_1) = f(2.175) = 0.00286 > 0$$

ومنه $f(2.1) \cdot f(x_1) < 0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.1, 2.175]$

$$f''(2.175) = 9.05 > 0$$

ومنه $f(2.175) \cdot f''(2.175) > 0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.175 - \frac{0.00286}{6.4919} = 2.17456$$

$$|x_2 - x_1| = |2.17456 - 2.175| = 0.0004$$

ومنه فإن الجذر التقريبي للمعادلة هو $\xi = x_2 = 2.17456$

مثال (2ـ14) :

احسب بطريقة نيوتن رافسون الجذر السالب للمعادلة

$$f(x) = x^4 + x^3 + 75x - 10000 = 0$$

الحل :

$f(+10) = -1000 + 750 = -250 < 0$

$f(+11) = 4135 > 0$

$$f(-10) = \cancel{-1050} < 0$$
$$f(-11) = \cancel{3453} > 0 \quad 4135$$

ومنه $f(-11) \cdot f(-10) < 0$

أي أن الجذر السالب موجود ضمن الفترة $[-11, -10]$

$$f'(x) = x^3 - 6x + 75$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6$$

$$f''(-11) = 1446 > 0$$

$$\forall x \in [-11, -10] \quad f'(x) < 0$$

$$\forall x \in [-11, -10] \quad f''(x) > 0$$

وبما أن $f(-11)\, f''(-11) > 0$ نختار $x_0 = -11$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -11 - \frac{3453}{-5183} = -10.3338$$

$$f(x_1) = 308.1563$$

$$f'(x_1) = -4277.0767$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -10.3338 - \frac{308.1563}{-4277.0767}$$

$$= -10.3338 + 0.0720 = -10.2618$$

$$f(x_2) = 3.4974$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -10.2618 - \frac{3.4974}{-4185.8857}$$

$$= -10.2618 + 0.000836 = -10.26096$$

$$f(x_3) = -0.0183$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -10.26096 - \frac{-0.0183}{-4184.8293}$$

$$= -10.26096 - 0.000004373 = 10.26096$$

ومنه فإن الجذر التقريبي هو $\xi = x_4 = -10.26096$

استخدام طريقة نيوتن ـ رافسون في إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية :

يمكن استخدام طريقة نيوتن ـ رافسون في إيجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية وذلك كما يلي :

$\therefore$

إذا كان المطلوب هو تعيين الجذر البائي للعدد a

نفرض أن هذا الجذر هو x أي

$$x = \sqrt[p]{a} = (a)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه $x^p = a$ أي $f(x) = x^p - a = 0$

$$f'(x) = p\,x^{p-1}$$

بالتعويض في صيغة نيوتن ـ رافسون $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

نجد :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p\,x_n^{p-1}}$$

واعتماداً على هذه العلاقة يمكن تعيين جذور أي عدد حقيقي.

مثال (2ـ15) :

باستخدام طريقة نيوتن ـ رافسون أوجد الجذر $\sqrt{11}$ مقرباً الجواب لثلاثة أرقام عشرية.

الحل :

بالاعتماد على العلاقة السابقة ولإيجاد $\sqrt{11}$ فإن $p = 2$ ، $a = 11$

ومنه

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 11}{2\,x_n^{2-1}} = x_n - \frac{x_n^2 - 11}{2\,x_n}$$

$$= x_n - \left[\frac{x_n^2}{2\,x_n} - \frac{11}{2\,x_n}\right]$$

$$= x_n - \left(\frac{x_n}{2} - \frac{11}{2\,x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{11}{2\,x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{11}{x_n}\right)$$

∴

نفرض أن $x_o = 3$ فنجد :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_o + \frac{11}{x_o}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{11}{3}\right) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3.3333$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{11}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + \frac{33}{10}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{199}{30}\right)$$

$$= \frac{199}{60} = 3.3166$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{199}{60} - \frac{660}{199}\right) = 3.3166$$

ومنه فإن الجذر المطلوب هو $3.3166 = \xi$

أي $\sqrt{11} = 3.3166$

مثال (2ـ16) :

أوجد القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[5]{12}$

ابدأ بالقيمة $x_o = 1.5$

الحل :

نفرض أن $\sqrt[5]{12} = x$ ومنه $x^5 = 12$

$$f(x) = x^5 - 12$$
$$f'(x) = 5x^4$$

بالتعويض في العلاقة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p\, x_n^{p-1}} = x_n - \frac{1}{p}\left(x_n - \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

نجد :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{5}\left(x_n - \frac{12}{x_n^4}\right)$$

لدينا $x_o = 1.5$

ومنه

$$x_1 = 1.5 - \frac{1}{5}\left(1.5 - \frac{12}{(1.5)^4}\right)$$

$$= 1.5 - \frac{1}{5}\left(1.5 - \frac{12}{5.0625}\right) = 1.5 + 1.741 = 1.6741$$

$$x_2 = 1.6741 - \frac{1}{5}\left(1.6741 - \frac{12}{(1.6741)^4}\right) = 1.6448$$

$$x_3 = 1.6448 - \frac{1}{5}\left(1.6448 - \frac{12}{(1.6448)^4}\right) = 1.6438$$

$$x_4 = 1.6438 - \frac{1}{5}\left(1.6438 - \frac{12}{(1.6438)^4}\right) = 1.6438$$

ومنه $\sqrt[5]{12} = 1.6438$

مثال (2ـ17) : عين بطريقة نيوتن ــ رافسون الجذر التقريبي للمعادلة

$$f(x) = \sin x - x\cos x = 0$$

الحل :

$$f(\pi) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi > 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} = -1 < 0$$

ومنه $f(\pi)\, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$

أي أن جذر المعادلة موجود ضمن الفترة $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

نوجد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$$
$$f''(x) = \sin x + x\cos x$$

من أجل $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ يكون $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$

∴

وإذا أخذنا $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ يكون $f(x_0) = -1 \; ; f''(x_0) = -1$

هذا يعني أن $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4.71239 - \frac{-1}{-4.71239}$$
$$= 4.71239 - 0.21221 = 4.5002$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4.5002 - \frac{-0.02983}{-4.39927}$$
$$= 4.5002 - 0.006781 = 4.49342$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 4.49342 - \frac{-0.00004624}{-4.38612}$$
$$= 4.49342 - 0.00001054 = 4.49341$$

ومنه فإن الجذر التقريبي هو $\xi = x_3 = 4.4934$

تمارين (3.2)

(1) باستخدام طريقة نيوتن ــ رافسون أوجد جذر تقريبي للمعادلة $\cos x - 2x = 0$ مقرباً الجواب لأقرب ثلاث منازل عشرية وذلك داخل الفترة $[0, 1]$.

(2) استخدم طريقة نيوتن ــ رافسون في إيجاد جذر تقريبي للمعادلة $x e^x - 1 = 0$ في الفترة $[0, 1]$ مقرباً لأقرب ثلاث منازل عشرية، ثم قارن النتيجة وعدد التكرارات عند استخدام طريقة التنصيف المتكرر لحل هذه المعادلة.

(3) استخدم طريقة نيوتن ــ رافسون في إيجاد جذر تقريبي إلى 10^{-4} لكلاً من المعادلات الآتية داخل الفترات المعطاة

(a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $[1, 4]$

(b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $[-4, 0]$

(c) $x - \cos x = 0$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(4) حل المعادلة $4\cos x = e^x$ بخطأ مقداره 10^{-4} باستخدام طريقة نيوتن ــ رافسون وبفرض أن $x_0 = 1$

(5) استخدم طريقة نيوتن ـــ رافسون في إيجاد الجذور التقريبية لكـــلاً مـــن المعـــادلات الآتية:

(a) $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$ (b) $3x^2 - e^x = 0$

(c) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$

(d) $x^2 + 10\cos x = 0$

(6) المعادلة $f(x) = \frac{(4x - 7)}{(x-2)}$ لها جذر $x = 1.75$ استخدم طريقة نيوتن ـــ رافسون مـــع القيم الابتدائية الاختيارية (initial approximation) الآتية :

(a) $x_0 = 1.625$ (b) $x_0 = 1.875$

(c) $x_0 = 1.5$ (d) $x_0 = 3$

(e) $x_0 = 1.95$ (f) $x_0 = 7$

اشرح الحل بالرسم إن أمكن؟

(7) أوجد الجذور الآتية وذلك باستخدام طريقة نيوتن ـــ رافسون

(a) $\sqrt[3]{5}$ (b) $\sqrt{4}$

(c) $\sqrt[4]{9}$ (d) $\sqrt{11}$

رابعاً : طريقة النقطة الثابتة للتكرير (الطريقة التكريرية للتقريبات المتتالية) - Fixed Point Iteration
(or Iterative method of successive approximations)

تستخدم هذه الطريقة التكريرية لحل المعادلات الغير خطية ذات المتغير الواحـــد، وتتميز بأنها لا تتطلب حساب قيم أي مشتقات، بينما طريقة نيـــوتن ـــ رافســـون تحتـــاج لحساب قيمة مشتقة الدالة f عند كل خطوة. ولحل معادلة مـــا بطريقـــة النقطـــة الثابتـــة (Fixed - point)نستبدل هذه المعادلة بمعادلة مكافئة على الصورة

$$x = g(x)$$

حيث g دالة جديدة في x نسميها الدالة التكرارية.

والملاحظ أنه يمكن وضع أي معادلة $f(x) = 0$ في هذه الصورة الخاصـــة المـــذكورة بعدد لانهائي من الطرق فعلى سبيل المثال المعادلة $x^3 - 2 = 0$ تكافئ أياً مـــن المعـــادلات التالية :

(i) $x = \frac{2}{x^2}$

(ii) $x = x^3 - 2 + x$

(iii) $x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5}$

أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تكافئ أي معادلة على الصورة

$$x = x + \alpha f(x)$$

حيث α أي ثابت لا يساوي صفراً.

ويتم اختيار طريقة وضع المعادلة المطلوب حلها من هذا العدد اللانهـــائي مـــن الطرق في الصورة الخاصة $x = g(x)$ بحيث يؤدي الحل في النهاية بطريقـــة النقطـــة الثابتة إلى تقارب (Convergence) نحو الجذر المطلوب، بينما قد يؤدي اختيار آخر إلى تباعد (Divergence) .

نفرض الآن أن لدينا المعادلة المكافئة في الشكل $x = g(x)$ حيث $g(x)$ دالـــة جديدة نسميها دالة التكرار ثم نختار x_0 تقريب أول للجذر وبالتعويض في الدالة الجديدة $g(x)$ نحصل على قيمة نسميها x_1

أي: $$x_1 = g(x_o)$$

ثم نعوض مرة أخرى في الدالة $g(x)$ بالقيمة x_1 فنحصل على قيمة نسميها x_2

أي: $$x_2 = g(x_1)$$

وهكذا نتابع فنحصل على المعادلة التكرارية التالية :

$$x_{n+1} = g(x_n) \; ; n = 0, 1, 2, \ldots$$

بالاعتماد على هذه المعادلة التكرارية نحصل على متتالية من الأعداد

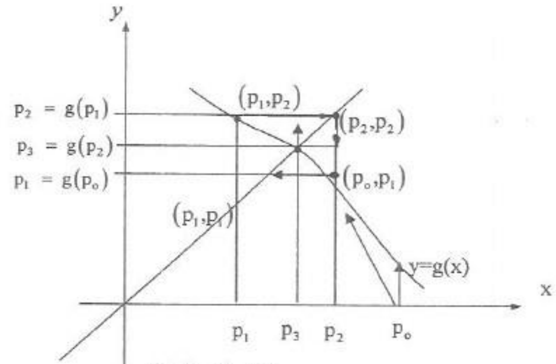
$$x_o , x_1, x_2 , \ldots , x_n , \ldots$$

فإذا تقاربت هذه المتتالية إلى القيمة ξ عندما تنتهي n إلى اللانهاية.

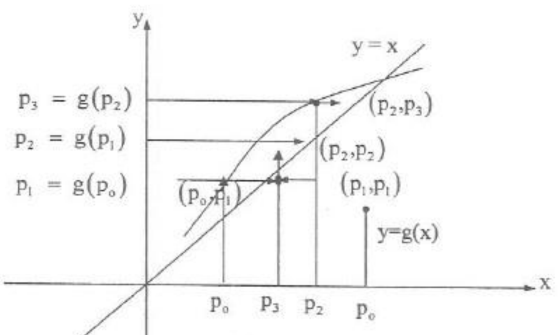
فإن الدالة $g(x_n)$ تنتهي إلى $g(\xi)$ أي أن $g(\xi) = \xi$ وبالتالي فإن ξ هي أحـــد جـــذور المعادلة $f(x)=0$.

هـذه الطريقـة تسـمى طريقـة النقطـة الثابتـة **fixed point** أو التقريبـات المتتاليـة **. functional iteration**

طريقة الحل يمكننا تفصيلها في الخوارزمية (2—4) وتوضيحها في الشكل (2—4).



شكل (2—4) (a)



(b)

مثال (2-18) : أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^2-5x+4$ بطريقة التقريبات المتتالية.

الحل :

$$f(0) = 4 > 0$$
$$f(2) = -10 < 0$$

ومنه $f(0) \, . \, f(2) < 0$

أي أن جذر المعادلة موجود في الفترة $[0, 2]$

نكتب المعادلة بالشكل المكافئ التالي :

$$x = g(x) = \frac{x^2+4}{5}$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n^2+4}{5}$$

نأخذ التقريب الأول $x_o = 2$ فنجد :

$$x_1 = \frac{x_o^2+4}{5} = \frac{2^2+4}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$x_2 = \frac{x_1^2+4}{5} = \frac{(1.6)^2+4}{5} = \frac{6.16}{5} = 1.312$$

$$x_3 = \frac{(1.312)^2+4}{5} = \frac{5.721}{5} = 1.144$$

$$x_4 = \frac{(1.144)^2+4}{5} = \frac{5.309}{5} = 1.062$$

$$x_5 = \frac{(1.062)^2+4}{5} = \frac{5.126}{5} = 1.025$$

$$x_6 = \frac{(1.025)^2+4}{5} = \frac{5.051}{5} = 1.010$$

$$x_7 = \frac{(1.010)^2+4}{5} = \frac{5.020}{5} = 1.004$$

$$x_8 = \frac{(1.004)^2+4}{5} = \frac{5.008}{5} = 1.0016$$

$$x_9 = \frac{(1.0016)^2+4}{5} = \frac{5.0032}{5} = 1.00064$$

$$x_{10} = 1.000256$$

نلاحظ أن متتالية الأعداد $x_o, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ تتقارب من الجـذر $x = 1$ للمعادلة المعطاة حيث أن الأجوبة مقربة لثلاثة أرقام عشرية.

لإيجاد الجذر الآخر للمعادلة نأخذ التقريب الأول $x_o = 5$ فنجد :

$$x_1 = \frac{x_o^2+4}{5} = \frac{(5)^2+4}{5} = \frac{29}{5} = 5.8$$

$$x_2 = \frac{x_1^2+4}{5} = \frac{(5.8)^2+4}{5} = \frac{37.64}{5} = 7.528$$

$$x_3 = \frac{x_2^2+4}{5} = \frac{(7.528)^2+4}{5} = \frac{60.6}{5} = 12.12$$

نلاحظ أن متتالية الأعداد x_1, x_2, x_3 تتباعد هذا يعني أن اختيار دالة التكرار $g(x)$ غيـر مناسب (غير موفق).

(2ـ4) خوارزمية طريقة النقطة الثابتة

Fixed - point Algorithm

لإيجاد حـل للمعادلـة $f(x) = 0$ عنـدما نسـتبدل بالمعادلـة المكافئـة $p=g(p)$، p_o قيمة ابتدائية (an initial approximation) ويفرض أن ε هو التسـامح (TOL) المسموح به وأن N_o هو أقصى حد للتكرار.

الخطوة الأولى step 1 : ضع $i = 1;$

الخطوة الثانية step 2 : طالما $i < N_o$ نفذ الخطوات (3ـ6).

الخطوة الثالثة step 3 : ضع $p = g(p_o)$ (Compute p_i)

الخطوة الرابعة step 4 : إذا كان $|p - p_o| < TOL$ فإن قيمة الجـذر التقريبيـة $= p$. توقف stop - loop وأطبع p.

(procedure completed successfully).
stop

الخطوة الخامسة step 5 : ضع ;$i = i + 1$

الخطوة السادسة step 6 : ضع $p_o = p$ (Update p_o)

الخطوة السابعة step 7 : أطبع رسالة تشير إلى أن الطريقة لم تصل إلى الدقة المطلوبة بعد عدد N_o من التكرارات. ثم أطلب توقف البرنامج

("Method failed after N_o iteration, No = ', N_o)

stop

ويمكن تحويل الخوارزمية إلى (2–4) برنامج (Matlab) لحل المثال التالي كتمرين على الخوارزمية مع وضع شرط للتقارب في الحالات أدناه (i) و (ii)

مثال (2—19) :

أوجد الجذر الحقيقي للمعادلة $x^3-2 = 0$ باستخدام خوارزمية طريقة النقطة الثابتة (Fixed - point). ثم قارن نتائجك بالحل أدناه .

الحل :

بوضع المعادلة في الصورة

(i) $x = x^3 - 2 + x$

(ii) $x = \dfrac{2 - x^3 + 5x}{5}$

وباختيار القيمة الابتدائية $x_o = 1.2$

(لاحظ أن القيمة الحقيقية للجذر هي $\xi = \sqrt[3]{2} = 1.259921$)

(كلما كان الاختيار والتخمين قريب من الحل كلما كان التقارب أسرع).

الحالة الأولى :

بأخذ $x_{n+1} = x_n^3 - 2 + x_n$

$x_o = 1.2$

$x_1 = (1.2)^3 - 2 + 1 = 0.928$

$x_2 = -0.273$

$x_3 = -2.293$

$x_4 = -16.349$

نلاحظ أنه لا يوجد تقارب.

الحالة الثانية :

بأخذ $x_{n+1} = \dfrac{2 - x_n^3 + 5x_n}{5}$

$x_o = 1.2$

$x_1 = 1.2544$

$x_2 = 1.2596$

$x_3 = 1.2549$

$x_4 = 1.25992$

نلاحظ هنا أن القيم المتتالية تتقارب من الحل الصحيح.

أما سبب تقارب المتتالية التي نحصل عليها عندما نطبق الصيغة (ii) وتباعد المتتالية في الصيغة (i) من الحل الصحيح سوف نشير إليها ونوضحها عند دراسة تقارب النقطة الثابتة.

(2—4—1) تقارب طريقة النقطة الثابتة :

Convergence of the fixed point method :

إن تعيين دالة التكرار $g(x)$ يمكن أن يتم بطرائق متعددة كما ذكرنا سابقاً ، ولكي يكون اختيار دالة التكرار $g(x)$ موفقاً سنبيِّن معيار التقارب لطريقة التقارب المتتالي :

نعلم أن نظرية القيمة الوسطى تنص على ما يلي :

إذا كانت الدالة $g(x)$ ومشتقتها $g'(x)$ متصلتين في الفترة $a \le x \le b$ عندئذ توجد قيمة واحدة على الأقل مثل ξ ، $a < \xi < b$

بحيث
$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

∴

سوف نطبق هذه النظرية على القيم التي نحصل عليها بطريقة التكرار

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_i = g(x_{i-1})$$
$$x_{i+1} = g(x_i)$$

بفرض أن $a = x_{i-1}$ ، $b = x_i$

بالتعويض في نظرية القيمة الوسطى نجد :

$$g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

حيث ξ_i تقع بين x_{i-1} و x_i ومنه فإن :

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

وبما أن $x_{i+1} = g(x_i)\ ,\ x_i = g(x_{i-1})$

فإنه باستخدام القيم المطلقة يمكن أن نكتب

$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(\xi_i)|\,|x_i - x_{i-1}|$$

من أجل $i = 1$ نجد :

$$|x_2 - x_1| = |g'(\xi_1)|\,|x_1 - x_0|$$

ومن أجل $i = 2$ نجد :

$$|x_3 - x_2| = |g'(\xi_2)|\,|x_2 - x_1|$$

وهكذا بالتتابع نجد:

$$\vdots$$
$$|x_i - x_{i-1}| = |g'(\xi_{i-1})|\,|x_{i-1} - x_{i-2}|$$
$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(\xi_i)|\,|x_i - x_{i-1}|$$

في كل من العلاقات السابقة فإن القيم $\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_{i-1} , \xi_i$ مختلفة لكن بفرض أن المشتقة $g'(x)$ محدودة على الفترة $[a, b]$ فإننا نستطيع أن نكتب $\forall\ i\ \ |g'(\xi_i)| \le M$

ومنه فإن

$$|x_2 - x_1| = M\,|x_1 - x_0|$$
$$|x_3 - x_2| = M\,|x_2 - x_1|$$
$$\vdots$$
$$|x_i - x_{i-1}| = M\,|x_{i-1} - x_{i-2}|$$
$$|x_{i+1} - x_i| = M\,|x_i - x_{i-1}|$$

بالاعتماد على المتباينات السابقة يمكن أن نكتب :

$$|x_3 - x_2| \le M\,|x_2 - x_1| \le M \, . \, M\,|x_1 - x_0|$$
$$|x_3 - x_2| \le M^2\,|x_1 - x_0|$$

وبنفس الطريقة نجد أن :

$$|x_4 - x_3| \le M^3\,|x_1 - x_0|$$

وبشكل عام فإن :

$$|x_{i+1} - x_i| \le M^i\,|x_1 - x_0|$$

لكي تكون طريقة التقريبات المتتالية متقاربة يجب أن يكون الطرف الأيسر في المتتاليـة السابقة صغير جداً من أجل قيمة كبيرة لـ i.

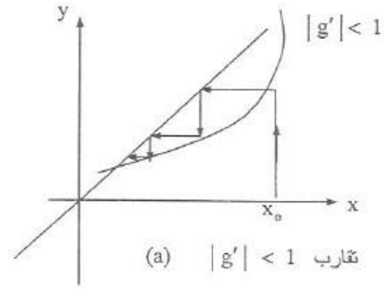
وهذا يتحقق بجعل $M < 1$ ومنه فإن M^i تنتهي إلى الصفر من أجل قيمة كبيرة لـ i. إذن شرط تقارب طريقة التكرار هو أن يتحقق

$$|g'(x)| \le M < 1$$

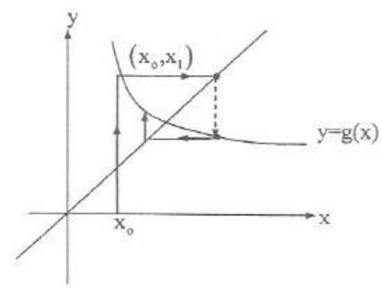
من أجل جميع قيم x المحصورة في الفترة $[a,b]$ (التي نهتم فيها بحـل المعادلـة) .

وإذا كان $g'(x)$ قريب من الصفر في الفترة $[a,b]$ فإن تقارب طريقة التكرار يكـون سريعاً .

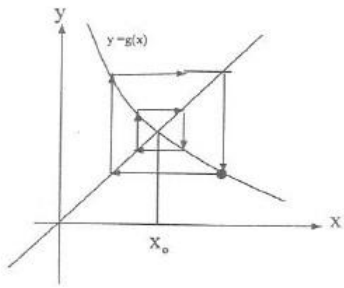
التفسير الهندسي لشرط التقارب :



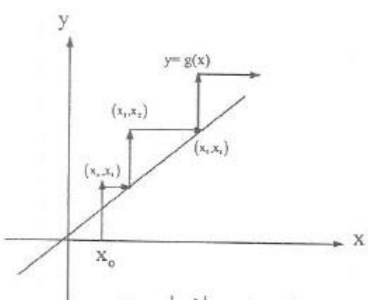
تقارب $|g'| < 1$ (a)



تقارب $|g'| < 1$ (b)



تقارب $|g'| < 1$ (b)



تباعد $|g'| > 1$ (C)

مثال (2—20) :

أوجد الجذر الموجب للمعادلة $f(x) = x^2-2x-8 = 0$ بطريقة التقريبات المتتالية.

الحل :

$$f(3) = -5 < 0$$
$$f(5) = 7 > 0$$

ومنه فإن $f(3) \,.\, f(5) < 0$

هذا يعني أن الجذر الموجب موجود في الفترة $[3, 5]$

نختار دالة التكرار بالشكل $x = g(x) = \sqrt{2x + 8}$

نلاحظ أن $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+8}}$

ومنه $|g'(x)| < 1$ وذلك $\forall x \in [3, 5]$

أي أن شرط تقارب طريقة التكرار محقق

نختار $x_o = 5$ ونطبق الصيغة $x_{n+1} = g(x_n)$ فنجد :

$$x_1 = g(x_o) = \sqrt{2x_o + 8} = \sqrt{2(5)+8} = \sqrt{18} = 4.243$$
$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{2(4.243)+8} = \sqrt{16.486} = 4.060$$
$$x_3 = g(x_2) = \sqrt{2(4.060)+8} = \sqrt{16.12} = 4.015$$
$$x_4 = g(x_3) = \sqrt{2(4.015)+8} = \sqrt{16.03} = 4.004$$
$$x_5 = g(x_4) = \sqrt{16.007} = 4.001$$
$$x_6 = g(x_5) = \sqrt{16.001} = 4.000$$

ثم نختار دالة التكرار بالشكل $x = g(x) = \dfrac{2x+8}{x}$

$$g'(x) = \frac{2x-2x-8}{x^2} = -\frac{8}{x^2}$$

نلاحظ أن $|g'(x)| = \dfrac{8}{x^2} < 1$ وذلك $\forall x \in [3, 5]$

أي أن شرط التقارب محقق.

نختار $x_o = 5$ فنجد :

$$x_1 = g(x_o) = \frac{2x_o + 8}{x_o} = \frac{2(5)+8}{5} = \frac{18}{5} = 3.600$$
$$x_2 = g(x_1) = \frac{2x_1 + 8}{x_1} = \frac{2(3.6)+8}{3.6} = \frac{15.2}{3.6} = 4.222$$
$$x_3 = g(x_3) = \frac{2(4.222)+8}{4.222} = 3.895$$
$$x_4 = g(x_3) = \frac{2(3.895)+8}{3.895} = 4.054$$
$$x_5 = g(x_4) = 3.973 \qquad x_6 = g(x_5) = 4.014$$
$$x_7 = g(x_6) = 3.998 \qquad x_8 = g(x_7) = 4.004$$
$$x_9 = g(x_8) = 3.998 \qquad x_{10} = g(x_9) = 4.001$$
$$x_{11} = g(x_{10}) = 4.000$$

ويمكن أن نختار دالة التكرار بالشكل $x = g(x) = \dfrac{x^2-8}{2}$

$$g'(x) = x$$

ومنه $|g'(x)| = |x| > 1$ وذلك $\forall x \in [3, 5]$

هذا يعني أن المتتالية التي نحصل عليها بتطبيق الصيغة $x_{n+1} = g(x_n)$ ستكون متباعـدة ويمكن التأكد من ذلك.

نختار $x_o = 5$ فنجد :

$$x_1 = g(x_o) = \frac{(5)^2-8}{2} = \frac{17}{2} = 8.500$$
$$x_2 = g(x_1) = \frac{(8.5)^2-8}{2} = \frac{64.25}{2} = 32.125$$
$$x_3 = g(x_2) = \frac{(32.125)^2-8}{2} = \frac{1024.0156}{2} = 512.008$$

مثال (2—21) :

أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = x\,e^x - 1$ حيث $\varepsilon = 0.005$

الحل :

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(1) = 1.7183 > 0$$

ومنه $f(0) \,.\, f(1) < 0$

أي أن الجذر للمعادلة موجود في الفترة $[0, 1]$

نختار دالة التكرار $x = g(x) = \frac{1}{e^{x}} = e^{-x}$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{e^{x}}\right| < 1 \quad \text{وذلك} \quad \forall\, x \in]0, 1]$$

نختار $x_0 = 1$ ونطبق الصيغة $x_{n+1} = g(x_n)$

$$x_1 = g(x_0) = e^{-x_0} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.36788$$
$$x_2 = g(x_1) = e^{-x_1} = e^{-0.36788} = 0.69220$$
$$x_3 = g(x_2) = e^{-x_2} = e^{-0.69220} = 0.50047$$
$$x_4 = g(x_3) = e^{-0.50047} = 0.60624$$
$$x_5 = g(x_4) = e^{-0.60624} = 0.54540$$
$$x_6 = g(x_5) = e^{-0.54540} = 0.57961$$
$$x_7 = g(x_6) = e^{-0.57961} = 0.56012$$
$$x_8 = g(x_7) = e^{-0.56012} = 0.57114$$
$$x_9 = g(x_8) = e^{-0.57114} = 0.56488$$
$$x_{10} = g(x_9) = e^{-0.56488} = 0.56843$$
$$|x_{10} - x_9| = |0.56843 - 0.56488| = 0.00355 < 0.005$$

إذن الجذر التقريبي للمعادلة هو $\xi = x_{10} = 0.56843$

تمرين (1—1) :

أوجد أكبر جذر موجب للمعادلة $x^3 + x = 1000$

الحل :

نكتب المعادلة بالشكل $f(x) = x^2 + x - 1000 = 0$

$$f(9) = -262 < 0$$
$$f(10) = 10 > 0$$

ومنه $f(9)\, f(10) < 0$

أي أن الجذر الموجب للمعادلة موجود ضمن الفترة $[9, 10]$

نختار دالة التكرار بالشكل $x = g(x) = 1000 - x^3$

$$g'(x) = -3x^2$$

$$|g'(x)| = 3x^2 > 1 \quad \text{وذلك} \quad \forall\, x \in [9, 10]$$

هذا يعني أن اختيار دالة التكرار غير موفق.

نختار دالة تكرار ثانية كما يلي :

$$x = g(x) = \sqrt[3]{100 - x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{3}(1000 - x)^{-\frac{2}{3}}(-1)$$
$$= \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$
$$|g'(x_0)| = |g'(10)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(990)^2}} \cong \frac{1}{300} < 1$$

أي أن شرط التقارب محقق

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{1000 - x_0} = \sqrt[3]{990} = 9.96655$$
$$x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{990.03345} = 9.96666$$
$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{990.0334} = 9.96667$$

ومنه فإن الجذر التقريبي هو $\xi = x_3 = 9.96667$

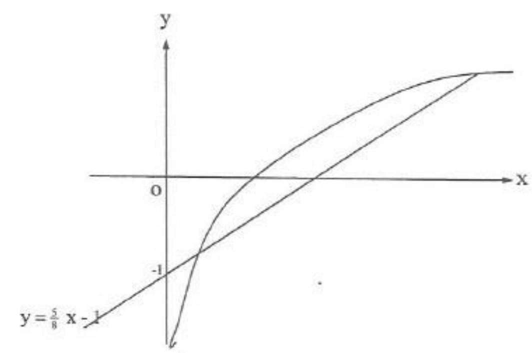
تمرين (1—2) :

حل المعادلة $5x - 8 \ln x = 8$ بطريقة التكرار.

الحل :

يمكن إيجاد الفترة التي يوجد فيها الجذر بالاعتماد على الطريقة البيانية فنكتب المعادلة بالشكل $\frac{5x}{8} - 1 = \ln x$

نرسم المنحنى البياني للدالة $y = \ln x$ والمنحنى البياني للدالة $y = \frac{5}{8}x - 1$



من الشكل نلاحظ أنه يوجد جذران تقريبيان :

الأول يقع في الفترة $[0,1]$

والثاني يقع في الفترة $[3,4]$

لإيجاد الجذر الأول نلاحظ أن

$$\forall x \in [0, 1] \quad \text{وذلك} \quad |g'(x)| = \frac{1.6}{x} > 1$$

لذلك فإن دالة التكرار السابقة غير مناسبة.

نختار دالة جديدة كما يلي :

نكتب المعادلة بالشكل :

$$8 \ln x = 5x - 8$$

$$\ln x = \frac{5}{8}x - 1 = 0.625x - 1$$

ومنه

$$x = g(x) = e^{0.625x - 1}$$

$$g'(x) = 0.625\, e^{0.625x - 1}$$

نختار $x_0 = 0.45$ فنجد :

$$|g'(x_0)| = |g'(0.45)| = \left|0.625\, e^{0.625(0.45) - 1}\right|$$

$$= 0.3046 < 1$$

هذا يعني أن اختيار دالة التكرار بالشكل $x = g(x) = e^{0.625x - 1}$ هو اختيار موفق.

$$x_1 = g(x_0) = g(0.45) = e^{0.625(0.45) - 1} = 0.487$$

$$x_2 = g(x_1) = g(0.487) = e^{0.625(0.487) - 1} = 0.4988$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.50245 \qquad x_4 = g(x_3) = 0.503601$$

$$x_5 = g(x_4) = 0.5039647 \qquad x_6 = g(x_5) = 0.50407909$$

$$x_7 = g(x_6) = 0.504126306 \qquad x_8 = 0.504130022$$

$$x_9 = 0.504131193$$

ومنه فإن الجذر التقريبي هو $\xi = x_9 = 0.50413$.

ثانياً : الحل العددي لنظام المعادلات الغير خطية

Numerical Solution of Nonlinear Systems of Equations :

ليكن لدينا نظام المعادلات غير الخطية في الصورة الآتية :

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

والمطلوب إيجاد قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي تحقق نظام المعادلات في آن واحد.

للسهولة نأخذ نظام المعادلتين بمجهولين :

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

حيث f، g دالتان قابلتان للاشتقاق.

يمكن حل هذه النظام بطريقتين الأولى طريقة نيوتن والثانية طريقة التكرار.

أولاً : طريقة نيوتن : Newton Method

لحل نظام المعادلتين ننشر كلاً من الدالتين f، g بجوار النقطة (x_n, y_n) حسب تايلور ولنحذف الحدود التي تحوي المتغيرات غير الخطية بالنسبة لـ x و y فنجد

$$f(x, y) = f(x_n, y_n) + f_x\,(x - x_n) + f_y\,(y - y_n) = 0$$
$$g(x, y) = g(x_n, y_n) + g_x\,(x - x_n) + g_y\,(y - y_n) = 0$$

يمكن كتابة هذا النظام كما يلي :

$$f_x\,(x - x_n) + f_y\,(y - y_n) = -f(x_n, y_n)$$
$$g_x\,(x - x_n) + g_y\,(y - y_n) = -g(x_n, y_n)$$

بحل هذا النظام بالاعتماد على طريقة كرامر (المحددات) نجد :

$$x - x_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}}{J}$$

حيث f_y , f_x , g_y , g_x المشتقات الجزئية لـ f ، g

$J = J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$ والذي يسمى بالمحدد الجاكوبي.

$$y - y_n = \frac{\begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & -g(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}}{J}$$

ومن أجل $J(x_n, y_n) \neq 0$ يمكن أن نكتب علاقات التكرار التالية :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$
$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

نتوقف عن الحساب عندما تتحقق المتباينتين

$$|y_{i+1} - y_i| < \varepsilon \quad , \quad |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

حيث ε مقدار صغير.

خوارزمية طريقة نيوتن لحل نظام المعادلات غير الخطية :

Newton's Method for Systems

المعطى Input

لإيجاد حل تقريبي للنظام الغير خطي من المعادلات $F(x) = 0$ عندما يعطى قيمة ابتدائية x (Initial approximation) وعدد المعادلات (n) وكذلك عدد المتغيرات (n) والقيمة الابتدائية; $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ ، التسامح TOL، وأعلى حد للتكرار N.

النتائج Output

قيمة تقريبية للحل $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ (Approximation Solution) أو رسالة بأنه توصل للحد الأعلى من التكرار (Number of iteration was exceeded)

الخطوة الأولى step 1 : ضع $k = 1$

الخطوة الثانية step 2 : طالما $(k \le N)$ نفذ الخطوات 3 — 7

الخطوة الثالثة step 3 : احسب $F(x)$، $J(x)$ حيث

$$J(x)_{i,j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \text{ for } 1 < i\ ,\ j \le n.$$

الخطوة الرابعة step 4 : حل النظام $n \times n$ التالي $J(x)\,y = -F(x)$

الخطوة الخامسة step 5 : ضع $x = x + y$

الخطوة السادسة step 6 : إذا كان $\|y\| < \text{TOL then output}(x)$

العملية تمت بنجاح ... توقف (Procedure completed successfully)

stop

الخطوة السابعة step 7 : ضع $k = k + 1$

الخطوة الثامنة step 8 :

output :
('Maximum number of iterations exceeded')
(Procedure completed unsuccessfully)
stop.

مثال (2—22) :

عين حل نظام المعادلات $x^2 + y^2 = 1$

$$x\,y = 0$$

بطريقة نيوتن حيث $(x_0, y_0) = (0.5, 0.1)$

الحل :

لنكتب نظام المعادلات بالشكل

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$g(x, y) = x\,y = 0$$
$$f_x = 2x \qquad g_x = y$$
$$f_y = 2y \qquad g_y = x$$
$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2\left(x^2 - y^2\right)$$
$$J(x_0, y_0) = J(0.5, 0.1) = 2(0.25 - 0.01) = 0.48 \neq 0$$
$$J(x_0, y_0) = 0.48$$
$$f(x_0, y_0) = -0.74$$
$$g(x_0, y_0) = 0.05$$
$$f_x(x_0, y_0) = 1$$
$$f_y(x_0, y_0) = 0.2$$

$$g_x(x_0, y_0) = 0.1$$
$$g_y(x_0, y_0) = 0.5$$

بالتعويض في العلاقتين :

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$
$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

نجد :

$$x_1 = 0.5 - \frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} -0.74 & 0.2 \\ 0.05 & 0.5 \end{vmatrix} = 1.2917$$
$$y_1 = 0.1 - \frac{1}{0.48}\begin{vmatrix} 1 & -0.74 \\ 0.1 & 0.05 \end{vmatrix} = -0.1583$$

$x_1 = 1.2917$ $\quad J(x_1, y_1) = 3.2869$ $\quad f(x_1, y_1) = 0.6934$

$y_1 = -0.1583$ $\quad g(x_1, y_1) = 0.204$

$f_x = 2.5834$ $\quad f_y = -0.3166$ $\quad g_x = -0.1583$

$g_y = .1.2917$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$
$$= 1.2917 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 0.6934 & -0.3166 \\ 0.2045 & 1.2917 \end{vmatrix} = 0.9995$$
$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$
$$= -0.1583 - \frac{1}{3.2869}\begin{vmatrix} 2.5834 & 0.6934 \\ -0.1583 & 0.2045 \end{vmatrix} = -0.3524$$

$x_2 = 0.9995$ $\quad f(x_2, y_2) = 0.1232$

$g(x_2, y_2) = -0.3522$ $\quad y_2 = -0.3524$

$J(x_2, y_2) = 1.7496$ $\quad f_x = 1.999$

$f_y = -0.7048$ $\quad g_x = -0.3524$

$$g_y = 0.9995$$

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.9995 - \frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 0.1232 & -0.7048 \\ 1.7496 & 0.9995 \end{vmatrix} = 1.0710$$

$$y_3 = y_2 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= -0.352 - \frac{1}{1.7496}\begin{vmatrix} 1.999 & 0.1232 \\ -0.3524 & 1.7496 \end{vmatrix} = 0.0252$$

بنفس الأسلوب نجد :

$$x_4 = 1.0026 \qquad y_4 = 0.0016$$
$$x_5 = 1.00009 \qquad y_5 = 0.000008$$

نلاحظ أن الحل التقريبي هو $(1, 0)$

مثال (2ـ23) :

أوجد حل نظام المعادلتين

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0$$

حيث $(x_o, y_o) = (0.75, 0.75)$

الحل :

$$f_x = 2x \qquad f_y = 2y$$
$$g_x = 2x \qquad g_y = -2y$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy$$

$$J(x_o, y_o) = J(0.75)(0.75) = -4.5 \neq 0$$

$$f(x_o, y_o) = 0.125 \qquad f_x = 1.5 \qquad g_x = 1.5$$

$$g(x_o, y_o) = 0.5 \qquad f_y = 1.5 \qquad g_y = -1.5$$

$$x_1 = x_o - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.75 - \frac{1}{4.5}\begin{vmatrix} 0.125 & 1.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{vmatrix} = 0.5417$$

$$y_1 = y_o - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= 0.75 - \frac{1}{4.5}\begin{vmatrix} 1.5 & 0.125 \\ 1.5 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.875$$

$$f(x_1, y_1) = 0.0591 \qquad f_x = 1.0834 \qquad g_x = 1.0834$$
$$g(x_1, y_1) = 0.0278 \qquad f_y = 1.75 \qquad g_y = -1.75$$
$$J(x_1, y_1) = -3.7919$$

$$x_2 = 0.5417 - \frac{1}{-3.7919}\begin{vmatrix} 0.0591 & 1.75 \\ 0.0278 & -1.75 \end{vmatrix} = 0.5016$$

$$y_2 = 0.875 - \frac{1}{-3.7919}\begin{vmatrix} 1.0834 & 0.0591 \\ 1.0834 & 0.0278 \end{vmatrix} = 0.8660$$

$$f(x_2, y_2) = 0.0016 \qquad f_x = 1.0032 \qquad g_x = 1.0032$$
$$g(x_2, y_2) = 0.0016 \qquad f_y = 1.732 \quad g_y = -1.732$$
$$J(x_2, y_2) = -3.4751$$

$$x_3 = 0.5016 - \frac{1}{-3.475}\begin{vmatrix} 0.0016 & 1.732 \\ 0.0016 & -1.732 \end{vmatrix} = 0.5$$

$$y_3 = 0.8660 - \frac{1}{-3.475}\begin{vmatrix} 1.0032 & 0.0016 \\ 1.0032 & 0.0016 \end{vmatrix} = 0.866$$

$$f(x_3, y_3) = -0.000044$$
$$g(x_3, y_3) = 0.000044$$

نلاحظ أن قيمة كلاً من f، g عند النقطة (x_3, y_3) قريبة من الصفر وبالتالي فـإن الجـذر التقريبي هو $(0.5, 0.866)$

طريقة التكرار :

لتكن لدينا نظام المعادلتين غير الخطيتين

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

لحل هذا النظام نختار دالتي تكرار بالشكل

$$x = F(x, y) \qquad , \qquad y = G(x, y)$$

ثم نكتب علاقتي التكرار

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \qquad , \qquad y_{n+1} = G(x_n, y_n)$$

تتقارب المتتاليتان الناتجتان من تطبيق علاقتي التكرار إذا تحقق ما يلي :

$$|F_x| + |F_y| \le k < 1$$
$$|G_x| + |G_y| \le k < 1$$

مثال (2—24) :

أوجد بطريقة التكرار حل نظام المعادلتين

$$.\,x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

حيث $(x_o, y_o) = (0.5, 0.5)$

الحل :

نكتب المعادلتين بالشكل التالي :

$$x = F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2}$$
$$y = G(x, y)\ \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3}$$

$$F_x = \frac{x^2}{2} \qquad F_y = \frac{y^2}{2}$$
$$G_x = \frac{x^2}{2} \qquad G_y = -\frac{y^2}{2}$$

$$|F_x| + |F_y| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| = \left|\frac{x^2}{2}\right| + \left|\frac{-y^2}{2}\right| = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{0.25 + 0.25}{2} = \frac{0.5}{2}$$
$$= 0.25 < 1$$

إذن شرط التقارب محقق لنطبق العلاقتين التكراريتين

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(x_n^3 + y_n^3\right) + \frac{1}{2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6}\left(x_n^3 - y_n^3\right) + \frac{1}{3}$$

فنجد :

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(x_o^3 + y_o^3\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6}(0.125 + 0.125) + \frac{1}{2} = 0.542$$
$$y_1 = \frac{1}{6}\left(x_o^3 - y_o^3\right) + \frac{1}{3} = 0.333$$
$$x_2 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + y_1^3\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6}\left((0.542)^3 + (0.333)^2\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6}(0.159 + 0.037) + \frac{1}{2} = 0.533$$
$$y_2 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 - y_1^3\right) + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{6}\left((0.542)^2 - (0.333)^3\right) + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{6}(0.159 - 0.037) + \frac{1}{3} = 0.353$$
$$x_3 = \frac{1}{6}\left((0.533)^3 + (0.353)^3\right) + \frac{1}{2} = 0.532$$
$$y_3 = \frac{1}{6}\left((0.533)^3 - (0.353)^3\right) + \frac{1}{3} = 0.351$$

$\therefore$

$$x_4 = \frac{1}{6}\left((0.532)^3 + (0.351)^3\right) + \frac{1}{2} = 0.532$$

$$y_4 = \frac{1}{6}\left((0.532)^3 - (0.351)^3\right) + \frac{1}{3} = 0.531$$

إذن الجذر التقريبي هو $(0.532, 0.531)$

تمرين (2—3) : أوجد حل المعادلتين

$$x = \sin y$$
$$y = \cos x$$

بطريقتين مختلفتين حيث $(x_0, y_0) = (1, 1)$

الحل :

أولاً بطريقة التكرار :

$$x = F(x, y) = \sin y$$
$$y = G(x, y) = \cos x$$

ونطبق علاقتي التكرار

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) = \sin y_n$$
$$y_{n+1} = G(x_n, y_n) = \cos x_n$$

فنجد :

$$x_1 = \sin y_0 = \sin 1 = 0.8415$$
$$y_1 = \cos x_0 = \cos 1 = 0.5403$$
$$x_2 = \sin y_1 = \sin 0.5403 = 0.5144$$
$$y_2 = \cos x_1 = \cos 0.8415 = 0.6663$$
$$x_3 = \sin y_2 = \sin 0.6663 = 0.6181$$
$$y_3 = \cos x_2 = \cos 0.5144 = 0.8706$$
$$x_4 = \sin y_3 = \sin 0.8706 = 0.7647$$
$$y_4 = \cos x_3 = \cos 0.6181 = 0.8150$$

$$x_5 = \sin y_4 = \sin 0.8150 = 0.7277$$
$$y_5 = \cos x_4 = \cos 0.7647 = 0.7216$$
$$x_6 = \sin y_5 = \sin 0.7216 = 0.6606$$
$$y_6 = \cos x_5 = \cos 0.7277 = 0.7467$$
$$x_7 = \sin y_6 = \sin 0.7467 = 0.6792$$
$$y_7 = \cos x_6 = \cos 0.6606 = 0.7896$$
$$x_8 = \sin y_7 = \sin 0.7896 = 0.7101$$
$$y_8 = \cos x_7 = \cos 0.6792 = 0.7781$$
$$x_9 = \sin y_8 = \sin 0.7781 = 0.7019$$
$$y_9 = \cos x_8 = \cos 0.7101 = 0.7583$$
$$x_{10} = \sin y_9 = \sin 0.7583 = 0.6877$$
$$y_{10} = \cos x_9 = \cos 0.7019 = 0.7636$$
$$x_{11} = \sin y_{10} = \cos 0.7636 = 0.6915$$
$$y_{11} = \cos x_{10} = \sin 0.6877 = 0.7727$$

ثانياً : بطريقة نيوتن :

نكتب نظام المعادلتين بالشكل :

$$f(x, y) = \cos x - y = 0$$
$$g(x, y) = x - \sin y = 0$$

$$f_x = -\sin x \qquad g_x = 1$$
$$f_y = -1 \qquad g_y = -\cos y$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ 1 & -\cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos x + 1$$

$$J(x_o, y_o) = \sin 1 \cos 1 + 1$$

$$= (0.8415)(0.5403) + 1 = 1.4547 \neq 0$$

$$x_1 = x_o - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.4597 & -1 \\ 0.1585 & -0.5403 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.4069}{1.4547} = 1 - 0.2797 = 0.7203$$

$$y_1 = y_o - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{1}{1.4547}\begin{vmatrix} -0.8415 & -0.4597 \\ 1 & 0.1585 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{0.3263}{1.4547} = 1 - 0.2243 = 0.7757$$

$$J(x_1, y_1) = \sin 0.7203 \cos 0.7757 + 1$$

$$= (0.6596)(0.7139) + 1 = 1.4709$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

$$= 0.7203 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} -0.0241 & -1 \\ 0.0020 & -0.7139 \end{vmatrix}$$

$$= 0.7203 - \frac{0.0192}{1.4709} = 0.7203 - 0.0130 = 0.7073$$

$$y_2 = y_1 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}$$

$$y_2 = 0.7757 - \frac{1}{1.4709}\begin{vmatrix} -0.6596 & -0.0241 \\ 1 & 0.0020 \end{vmatrix}$$

$$= 0.7757 - \frac{0.0228}{1.4709} = 0.7757 - 0.0155 = 0.7602$$

تعيين الجذور الحقيقية للدالة غير الخطية :

تستخدم الحدوديات بشكل كبير في التحليل العددي وبخاصة في مجال البحث عن قيمة الحدودية عند قيمة معينة للمتغير x.

والحدودية من الدرجة n تكتب بالشكل

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o$$

لمعرفة عدد الأصفار (الجذور) الحقيقية لكثيرة الحدود $p_n(x)$ نذكر النظريتين الآتيتين :

1ـ نظرية ديكارت :

إن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة لكثيرة الحدود $p_n(x)$ يساوي عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية الأمثال $a_o, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أو ينقص عنه بعدد زوجي مع العلم أن الأمثال المعدومة لا تحسب. أما لتعيين عدد الأصفار الحقيقية السالبة فيكفي أن نعيد ما سبق من أجل كثيرة الحدود $p_n(-x)$.

مثال (2ـ25) :

لتكن لدينا الحدودية $p_3(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 35 = 0$ والمطلوب حدد عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة لهذه الحدودية.

الحل :

إن متتالية الأمثال لكثيرة الحدود $p_3(x)$ هي

$$-35 \quad 5 \quad -7 \quad 1$$

من الواضح أنها تغير إشارتها ثلاث مرات.

أي أن الجذور الحقيقية الموجبة هي إما 3 أو 1.

ولتحديد عدد الجذور السالبة نبدل في كثيرة الحدود $p_3(x)$ كل x بـ $-x$ فنحصل على الحدودية التالية :

$$p_3(-x) = -x^3 - 7x^2 - 5x - 35 = 0$$

متتالية الأمثال لكثيرة الحدود $p_4(-x)$ هي :

$$-35 \quad -5 \quad -7 \quad -1$$

ومن الواضح أنه لا يوجد تغيير في الإشارة أي لا يوجد جذر حقيقي سالب.

2ــ نظرية بودان : Broyden's Theorem

إذا كان $p_n^{(k)}(a)$ هو المشتقة من الرتبة k لكثيرة الحدود $p_n(x)$ في النقطــة a وإذا كان N_a هو عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية قيم المشتقات

$$p_n(a), p_n'(a), p_n''(a), p_n'''(a), \ldots, p_n^{(k)}(a), \ldots, p_n^{(n)}(a)$$

وليكن N_b هو عدد التغيرات في الإشارة لمتوالية قيم المشتقات التالية في النقطة b

$$p_n(b), p_n'(b), p_n''(b), p_n'''(b), \ldots, p_n^{(k)}(b), \ldots, p_n^{(n)}(b)$$

عندئذ يكون عدد الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود $p_n(x)$ الموجــودة فــي الفتــرة $[a, b]$ هو $|N_b - N_a|$ أو ينقص عنه بعدد زوجي.

مثال (2ــ26) :

لتكن لدينا كثيرة الحدود التالية

$$p_4(x) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$$

والمطلوب ما هو عدد الأصفار الحقيقية الموجودة في الفترة $[0, 5]$ ثم عين الفترات التي تحوي هذه الأصفار.

الحل :

$$p_4'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 64x - 38$$

$$p_4''(x) = 12x^2 - 60x + 64$$

$$p_4'''(x) = 24x - 60$$

$$p_4^{(4)}(x) = 24$$

ولنكتب جدول الإشارات الموافقة للقيم ضمن الفترة $[0, 5]$

x_i	$p_4(x_i)$	$p_4'(x_i)$	$p_4''(x_i)$	$p_4'''(x_i)$	$p_4^{(4)}(x_i)$	N_{x_i}
0	+	-	+	-	+	4
1	+	+	+	-	+	2
2	+	+	-	-	+	2
3	+	-	-	+	+	2
4	-	-	+	+	+	1
5	+	+	+	+	+	0

نلاحظ أن عدد الأصفار الحقيقية في الفترة $[0, 5]$ هو

$$|N_5 - N_0| = |0 - 4| = 4$$

أو جذرين أو لا يوجد جذور حقيقية.

وعدد الأصفار في الفترة $[0, 1]$ هو $2 = |N_1 - N_0|$

وعدد الأصفار في الفترة $[3, 4]$ هو $1 = |N_4 - N_3|$

وعدد الأصفار في الفترة $[4, 5]$ هو $1 = |N_5 - N_4|$

طريقة هورنر في إيجاد قيمة كثيرة حدود في نقطة محددة :

في كثير من الأحيان نجد صعوبة في إيجاد قيمة كثيرة حدود في نقطة محددة $x = a$ أو إيجاد قيمة المشتقة $p_n^{(k)}(a)$ بشكل مباشر.

الطريقة التالية والتي تسمى طريقة هورنر تساعدنا في مثل هذه الحالات.

لتكن لدينا كثيرة الحدود التالية :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$p_n(x) = ((\ldots((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \ldots + a_2) x + a_1) x + a_0$$

عندما نريد إيجاد قيمة كثيرة الحدود في النقطة $x = a$ نقوم بما يلي :

نكتب أمثال كثيرة الحدود مرتبة اعتباراً من a_n وحتى a_o في صف واحد بحيث نضع 0 مكان الأمثال المعدومة.

ونترك تحته صفاً فارغاً، ثم نضع خط تحت هذه المقادير ومقابل الصف الثاني الفارغ نكتب $x = a$ وفي الصف الثالث تحت الخط مباشرة نجري العمليات التالية :

نضع $q_n = a_n$ تحت a_n مباشرة، ثم نجري عملية الضرب $q_n \cdot a$ ونضع الناتج تحت a_{n-1} ونجمع نرمز لناتج الجمع بـ q_{n-1} ونجري عملية الضرب $q_{n-1} \cdot a$ ونضع الناتج تحت a_{n-2} ونجمع ونرمز لناتج الجمع بـ q_{n-2} ونجري عملية الضرب مرة ثالثة $q_{n-2} \cdot a$ ونضع الناتج تحت a_{n-3} وهكذا ... حتى نصل إلى q_1 ونجري عملية الضرب $q_1 \cdot a$ ونضع الناتج تحت a_o ونجمع فيكون الناتج q_o هو قيمة كثيرة الحدود $p_n(x)$ عند النقطة $x = a$.

ويمكن ترتيب ذلك بالجدول التالي والذي يسمى جدول هورنر

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_o
$x = a$		$q_n a$	$q_{n-1} a$	... $q_3 a$	$q_2 a$	$q_1 a$	
	q_n	q_{n-1}	q_{n-2}		q_2	q_1	$q_o = p_n(a)$

مثال (2–27) : أوجد قيمة كثيرة الحدود

$$p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

في النقطة $x = 3$ بطريقة هورنر.

الحل :

نكتب صف الأمثال ونطبق طريقة هورنر

	1	-6	8	8	4	-40
$x = 3$		3	-9	-3	15	57
	1	-3	-1	5	19	$17 = p(3)$

أي $p_5(3) = 17$

وحاصل القسمة (ناتج القسمة)

$$q(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 19$$

يمكن كتابة كثيرة الحدود بالشكل التالي :

$$p_n(x) = (x-a)\, q_1(x) + R$$

حيث R هو باقي القسمة وكما رأينا فإن $p_n(a) = R$ أما $q_1(x)$ فهو حاصل القسمة وهي كثيرة حدود من الدرجة (n-1).

نحسب مشتقة الحدودية $p_n(x) = (x-a)\, q_1(x) + R$

فنجد : $p_n'(x) = q_1(x) + (x-a)\, q_1'(x)$

بتعويض $x = a$ في هذه العلاقة نجد :

$$p_n'(a) = q_1(a)$$

وبما أن $q_1(b)$ هو حاصل قسمة $q_1(x)$ على $(x-a)$ والذي يمكن أن نرمز له بالرمز R_1

أي أن : $q_1(x) = (x-a)\, q_2(x) + R_1$

ومنه $p_n'(a) = R_1$

وبالتالي فإننا نستطيع حساب قيمة مشتقة $p_n(x)$ عند أية نقطة x دون إيجاد المشتقة $p'(x)$. ويمكننا تعيين بقيمة المشتقات كما يلي :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(a) + (x-a)\, q_1(x) \\ &= p_n(a) + (x-a)\left[\, q_1(a) + (x-a)\, q_2(x)\right] \\ &= p_n(a) + (x-a)\, q_1(a) + (x-a)^2\, q_2(x) \\ &= p_n(a) + (x-a)\, q_1(a) + (x-a)^2 \left[q_2(a) + (x-a)\, q_3(a)\,\right] \end{aligned}$$

وهكذا بالتتابع ... فنجد :

$$p_n(x) = p_n(a) + (x\text{-}a)\, q_1(a) + (x\text{-}a)^2\, q_2(a) + $$
$$+ (x\text{-}a)^3 \left[\, q_3(a) + (x\text{-}a)\, q_4(x) \right] + \dots$$

وبمقارنة هذه العلاقـة مع منشور تايلور للدالة $p_n(x)$ في جوار النقطة $x = a$ التالي :

$$p_n(x) = p_n(a) + \frac{x - a}{1\,!}\, p_n'(a) + \frac{(x\text{-}a)^2}{2!}\, p_n''(a) + \dots +$$
$$+ \frac{(x\text{-}a)^n}{n\,!}\, p_n^{(n)}(a) + \dots$$

نحصل على العلاقات التالية :

$$q_1(a) = \frac{p_n'(a)}{1\,!} = p_n'(a)$$
$$q_2(a) = \frac{p_n''(a)}{2\,!}$$
$$\vdots$$
$$q_n(a) = \frac{p_n^{(n)}(a)}{n\,!}$$

مثال (2ـ28) :

بتطبيق طريقة هورنر عين قيمة الحدودية التالية :

$$p_4(x) = x^4 - 5\,x^3 + 5\,x^2 + 5\,x - 7$$

عند النقطة $x = 3$. ثم عين قيم المشتقات المتتالية لهذه الحدودية عند النقطة $x = 3$.

الحل :

بتطبيق طريقة هورنر لتعيين قيمة الحدودية عند $x = 3$:

	1	-5	5	5	-7
x = 3		3	-6	-3	6
	1	-2	-1	2	$-1 = p_4(3)$

أي $p_4(3) = -1$

حاصل القسمة $q_1(x) = x^3 - 2\,x^2 - x + 2$

لإيجاد المشتق الأول نطبق طريقة هورنر

	1	-2	-1	2
x = 3		3	3	6
	1	1	+2	$8 = q_1(3)$

وبما أن $q_1(3) = q_1(a) = p'(3) = p_4'(3)$

فإن $p_4'(3) = 8$

حاصل القسمة الجديد $q_2(x) = x^2 + x + 2$

لإيجاد المشتق الثاني نكتب :

	1	1	2
x = 3		3	12
	1	4	$14 = q_2(3)$

وبما أن $q_2(3) = \dfrac{p_4''(3)}{2\,!}$

فإن $p_4''(3) = 2\,(14) = 28$

وحاصل القسمة $q_3(x) = x + 4$

ولإيجاد المشتق الثالث نكتب :

	1	4
x = 3		3
	1	$7 = q_3(a)$

وبما أن $q_3(3) = \dfrac{p_4'''(3)}{3\,!}$

فإن $p_4'''(3) = 6\,(7) = 42$

وحاصل القسمة $q_4(x) = 1$

وبما أن $q_4(3) = 1 = \dfrac{p_4^{(4)}(3)}{4\,!}$

فإن $p_4^{(4)}(3) = (1)\,(4\,!) = 24$

تمارين

(1) اعزل جذور المعادلة $f(x) = x^4 - 4x - 1 = 0$

(2) حل المعادلة التالية بالطريقة البيانية

$$x \ln x = 1$$

(3) حل بالطريقة البيانية المعادلة التالية :

$$x^3 + 2x + 7.8 = 0$$

(4) استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

(5) كم مرة يجب أن نكرر طريقة التنصيف المتكرر للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} في إيجاد جذر المعادلة $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

(6) عين الجذر الموجب للمعادلة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ بطريقة التنصيف المتكرر.

(7) عين جذراً للمعادلة $f(x) = x^3 + x - 1$ بطريقة القواطع.

(8) أوجد جذر المعادلة $f(x) = e^x - 3x = 0$ بطريقة القواطع.

(9) أوجد جذراً للمعادلة $f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$ بطريقة التنصيف المتكرر ثم بطريقة القواطع.

(10) أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ بطريقة نيوتن — رافسون.

(11) أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = x e^x - 1 = 0$ بطريقة نيوتن $\varepsilon = 0.05$.

(12) أوجد القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[3]{5}$ باستخدام طريقة نيوتن — رافسون.

(13) أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ بطريقة التنصيف المتكرر ثم بطريقة القواطع وأخيراً بطريقة نيوتن — رافسون.

(14) استخرج علاقة لإيجاد الجذر التقريبي التكعيبي لأي عدد $a \neq 0$ ثم عين أكبر جذر موجب للمعادلة $x^3 + x = 1000$ وبدقة 10^{-4} بطريقة التنصيف المتكرر.

(15) أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ بطريقة التقريبات المتتالية.

(16) أوجد جذور المعادلة $f(x) = x - 2\sin x$ بطريقة التقريبات المتتالية

(17) عين اعتماداً على طريقة التقريبات المتتالية أحد الجذور التقريبية للمعادلة $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ حيث $\varepsilon = 0.00008$

(18) حل المعادلة التالية $e^{-x} - \cos x = 0$ بطريقة التقريبات المتتالية.

(19) أوجد جذراً تقريبياً للمعادلة $e^x - 3x^2 = 0$ بطريقة التقريبات المتتالية.

(20) عين حل جملة المعادلتين بطريقة نيوتن

$$f(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$g(x, y) = xy^3 - y - 4 = 0$$

(21) أوجد حل جملة المعادلتين بطريقة نيوتن

$$f(x, y) = y - e^x + 2 = 0$$
$$g(x, y) = y - \ln(x+2) = 0$$

حيث $(x_o, y_o) = (1, 1)$

(22) عين حل جملة المعادلتين التاليتين بطريقة التكرار

$$f(x, y) = e^x - y = 0$$
$$g(x, y) = xy - e^x = 0$$

حيث $(x_o, y_o) = (1.5, 2)$

(23) لتكن لدينا الحدودية

$$p_4(x) = 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 2$$

والمطلوب أوجد عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة لهذه الحدودية

(24) لتكن لدينا كثيرة الحدود

$$p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

والمطلوب ما هو عدد الأصفار الحقيقية الموجودة في الفترة $[0, 5]$ ثم عين الفترات التي تحوي هذه الفترات.

(25) أوجد قيمة كثيرة الحدود

$$p_6(x) = x^6 - 2x^3 + x^2 + 5$$

في النقطة $x = 2$ بطريقة هورنر.

(26) بتطبيق طريقة هورنر عين قيمة الحدودية التالية :

$$p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$$

عند النقطة $x = 2$

ثم عين قيم المشتقات المتتالية لهذه الحدودية عند النقطة $x = 2$

الفصل الثالث

نظم المعادلات الخطية

Systems of Linear Equations

لتكن لدينا نظام المعادلات الخطية :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

حيث a_{ij} مقادير معلومة وتسمى الأمثال أو المعاملات

$$1 \le j \le n, \quad 1 \le i \le m$$

و b_i مقادير معلومة أيضاً $1 \le i \le n$

و x_j مقادير مجهولة $1 \le j \le n$ بتعيين هذه المقادير نحصل على حـل نظـام المعادلات التي هي مؤلفة من m من المعادلات الخطية و n مجهول.

يمكن كتابة النظام السابق بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وهذه الكتابة تكافئ $AX = B$

حيث A تسمى مصفوفة الأمثال (المعاملات)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

و X مصفوفة (متجه عمود) المجاهيل

و B مصفوفة (متجه عمود) الثوابت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

لحل النظام السابق بالاعتماد على المصفوفات نحتاج لبعض خواص المصـفوفات نـذكر منها :

منقول المصفوفة :

منقول المصفوفة A هي مصفوفة جديدة نرمز لها بالرمز A^T ونحصـل عليهـا بتبـديل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف في المصفوفة مع المحافظة على الترتيب أي :

إذا كانت المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

فإن منقول هذه المصفوفة هي $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$

مثال (3–1) :

إذا كانت المصفوفة A هي

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

فإن منقول المصفوفة A هي المصفوفة

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية :

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار أي $\forall\, i,j \quad a_{ij} = 0$

جمع المصفوفات :

إن حاصل جمع مصفوفتين $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ هو مصفوفة جديدة في الشكل $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ونكتب $A + B = C$

وعملية جمع المصفوفات هي عملية إبدالية ودامجة أي أن :

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

جداء مصفوفة بعدد ثابت :

إن جداء المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ بعدد ثابت λ هو مصفوفة جديدة $C = [c_{ij}]_{m\times n}$

حيث $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

أي أنه لضرب مصفوفة بعدد ثابت λ فإننا نضرب كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة بالعدد λ .

جداء (حاصل ضرب) المصفوفات :

جـــداء المصـــــفوفتين $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ هـــو مصـــــفوفة فـــي الشكل $C = [c_{ij}]_{m\times k}$

حيث $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj}$

أي أن عملية الجداء تكون معرفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B وعملية جداء المصفوفات هي عملية دامجة وتوزيعية بالنسبة لجمع المصفوفات وغير إبدالية بشكل عام أي

$$(A.B).C = A.(B.C)$$
$$(A + B).C = A.C + B.C$$
$$A.(B + C) = A.B + A.C$$
$$A.B \neq B.A$$

المصفوفة المربعة والمصفوفة المستطيلة :

نقول عن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ بأنها مصفوفة مربعة إذا كان عدد الصفوف فيهـا يساوي عدد الأعمدة أي $m = n$ ونرمز لها بالرمز $A = [a_{ij}]_n$

أما إذا كان $m \neq n$ أي عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة فإننا نقول عن المصـــفوفة A بأنها مصفوفة مستطيلة.

المصفوفة القطرية والمصفوفة الواحدية :

نقول عن المصفوفة $A = [a_{ij}]_n$ أنها مصفوفة قطرية إذا تحقق الشرط

$$a_{ij} = 0 \;, i \neq j$$
$$a_{ij} \neq 0 \;, i = j$$

إذا كانت جميع عناصر المصفوفة القطرية غير المعدومة تساوي الواحد الصـــحيح فإننـا نسمي المصفوفة في هذه الحالة بالمصفوفة الواحدية ونرمز لها بالرمز I_n .

المصفوفة المثلثية :

وهي مصفوفة مربعة تحقق الشرط التالي :

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$$

$a_{ij} \neq 0 \quad \forall\, i \le j$ وتسمى مصفوفة مثلثية عليا.

أما إذا كان

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$$

$a_{ij} \neq 0 \quad \forall\, i \ge j$ وتسمى مصفوفة مثلثية سفلى.

المصفوفة النظامية :

نقول عن المصفوفة المربعة $A = \left[a_{ij} \right]_n$ أنها مصفوفة نظامية إذا كان محددها لا يساوي الصفر أي $\det A \neq 0$ (أو $|A| \neq 0$)

ونقول عن المصفوفة المربعة A أنها شاذة إذا كان $\det A = 0$

المحددات من رتبة n :

يُعطى المحدد بالشكل

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث a_{ij} مقادير معلومة وذلك من أجل $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

نعرف A_{ij} بأنه صغير العنصر a_{ij} وهو محدد ينتج عن Δ وذلك بحذف الصف i والعمود j منه ومسبوقاً بالإشارة $(-1)^{i+j}$

ونكتب $A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|$

قيمة المحدد Δ عند نشره حسب عناصر الصف i تعطى بالعلاقة

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

كذلك قيمة المحدد Δ عند نشره حسب عناصر العمود j تعطى بالعلاقة

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

مثال (3ـ2) :

احسب قيمة المحدد التالية

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل :

بنشر هذا المحدد وفق الصف الأول مثلاً نجد

$$\Delta = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(40 - 7) + 0 + 3\,(28 - 10)$$

$$= 33 + 3\,(18) = 33 + 54 = 87$$

ثم لننشر هذا المحدد وفق العمود الثاني مثلاً فنجد :

$$\Delta = 0\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 5\,(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 7\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 5\,(8 - 6) - 7\,(1 - 12)$$

$$= 5\,(2) - 7\,(-11) = 10 + 77 = 87$$

خواص المحددات :

1ـ المحدد يرد إلى مجموع محددين إذا كان كل عنصر من عناصر أحد الأعمدة (الصفوف) يتألف من مجموع حدين.

2ـ لضرب محدد بعدد ما نضرب جميع عناصر أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بذلك العدد.

3ـ قيمة المحدد التي تحوي صفين (عمودين) متماثلين تساوي الصفر.

4ـ إذا بادلنا بين صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد تغير إشارتها.

5ـ إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) أصفاراً فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

6ـ لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف.

7ـ لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) عناصر صف آخر (عمود آخر) مضروبة بعدد ما.

مقلوب (معكوس) المصفوفة المربعة النظامية :

بفرض $A = [\,a_{ij}\,]_n$ مصفوفة مربعة و $\det A \neq 0$ نقول عن المصفوفة A^{-1} إنها مقلوب المصفوفة A إذا وإذا فقط تحقق الشرط التالي :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

ولحساب A^{-1} نقوم بالخطوات التالية :

1ـ نحسب محدد المصفوفة A

2ـ نحسب المصفوفة المساعدة (الملحقة) $\Gamma(A)$ والتي نحصل عليها كما يلي :

$$\Gamma(A) = [\,A_{ij}\,]^T = [\,A_{ji}\,]$$

حيث $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$ ونلاحظ أن المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$ هي منقول مصفوفة صغائر عناصر المحدد $|A|$.

3ـ نحسب A^{-1} بالاعتماد على العلاقة $A^{-1} = \dfrac{\Gamma(A)}{\det A} = \dfrac{\Gamma(A)}{|A|}$

مثال (3ـ3) :

احسب مقلوب المصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

وتأكد من صحة الناتج.

الحل :

1ـ $\det A = |A| = 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 3\,(-6+8) + 4\,(10-4) + 4\,(-10+3)$

$= 3\,(2) + 4\,(6) + 4\,(-7) = 6 + 24 - 28 = 2 \neq 0$

2ـ
$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 11 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 8 \\ -7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

3ـ
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & 8 \\ -7 & 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

لنتأكد من صحة النتائج

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة :

نسمي المحدد الأصغر لمصفوفة (صغير مصفوفة) محدد أي مصفوفة جزئية مربعة في هذه المصفوفة.

مثال (3ـ4) :

لتكن لدينا المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

إن صغائر هذه المصفوفة هي المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} ; \ldots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} ; \ldots$$

نقول عن العدد r إنه يمثل رتبة المصفوفة إذا حقق الشرطين التاليين :

1ـ يوجد على الأقل محدد أصغر واحد رتبته r لا يساوي الصفر.

2ـ كل محدد أصغر من الرتبة $(r+1)$ وما فوق يساوي الصفر.

نرمز لرتبة المصفوفة بالرمز $ran\,(A)$ ونكتب $ran\,(A) = r$ وإذا كانت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ فإن $ran\,(A) = r \leq \min(m, n)$

وتكون رتبة المصفوفة المربعة النظامية تساوي درجتها مرتبتها.

مثال (3ـ5) :

عين رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل :

لنحسب محدد هذه المصفوفة حيث أن هذه المصفوفة من المرتبة (الدرجة) الثالثة أي ثلاث صفوف وثلاث أعمدة

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 48 + 0 - (0 + 0 - 140)$$

$$= -27 + 140 = 113 \neq 0$$

هذا يعني أن المصفوفة نظامية وبالتالي $ran(A) = 3$.

مثال (3ـ6) :

عين رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل :

إن كل المحددات الممكن تشكيلها من المرتبة الثالثة في هذه المصفوفة تكون قيمها تساوي الصفر.

$\therefore$

وأن الصغير $-7 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ لا يساوي الصفر ومنه فإن $ran(A) = 2$

التحويلات الأولية (العمليات البسيطة) على المصفوفات :

هي العمليات الصفية التالية على المصفوفة A

1ـ المبادلة بين صفين على سبيل المثال $R_i \longleftrightarrow R_j$

2ـ ضرب عناصر أحد الصفوف بعدد أي $a R_i$ حيث $a \neq 0$

3ـ إضافة أحد الصفوف لصف آخر بعد ضربه بعدد اختياري $a \neq 0$

أي $a R_i \mp R_j$

تعريف :

تكون المصفوفتان A و B متكافئتين، إذا كانت إحداهما ناتجـة عـن الأخـرى بتطبيـق تحويلات أولية ونكتب $A \sim B$

وبالمثل هناك تحويلات أولية على أعمدة المصفوفة.

بالاعتماد على التحويلات الأولية يمكن تعيين رتبة المصفوفة، حيث تكون رتبة المصفوفة تمثل عدد الصفوف في هذه المصفوفة والمستقلة خطياً.

مثال (3ـ7) :

عين باستخدام التحويلات الأولية رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

نطبق التحويلات الأولية المناسبة لجعل عناصر العمود الأول أصفاراً عدا العنصـر الأول ثم نطبق التحويلات المناسبة لجعل عناصر العمود الثاني أصفاراً عدا العنصر الأول فـي الصف الثاني وهكذا ...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\overset{-R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_2+R_4}{\overset{-2R_2+R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الصغير $0 \neq -2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

هذا يعني أن رتبة المصفوفة هي $ran(A) = 2$

لأن الصغائر من مراتب أعلى تكون معدومة بسبب انعدام الصف الثالث والصف الرابع.

مقلوب مصفوفة نظامية باستخدام التحويلات الأولية :

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة النظاميـة $A = [a_{ij}]_n$ باسـتخدام التحـويلات الأولية وذلك بكتابة المصفوفة الموسعة $[A : I_n]$ ثم نجري التحـويلات الأوليـة علـى المصفوفة الموسعة فنحصل على المصفوفة $[I_n : A^{-1}]$.

مثال (3ـ8): باستخدام التحويلات الأولية أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

نكتب المصفوفة الموسعة ونجري التحويلات الأولية المناسبة :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{3}R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-R_1+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \tfrac{2}{3}R_2+R_1 \\ \tfrac{4}{3}R_2+R_3 \\ \sim \\ -R_2+R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-\tfrac{3}{5}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\tfrac{2}{3}R_3+R_1 \\ -R_3+R_2 \\ \sim \\ -R_3+R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-10R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] \overset{-10R_4}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right] \underset{\frac{2}{5}R_4+R_1}{\overset{\substack{-\frac{3}{5}R_4+R_3 \\ \frac{1}{10}R_4+R_2}}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right]$$

ومنه فإن مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

المعادلات الخطية المتجانسة :

نقول عن نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

بأنها نظام معادلات خطية متجانسة إذا كانت

$$B = [\,0\,] \text{ أي } b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$$

إن لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة دوماً الحل الصفري أي $X=[0]$. إذا كان المحدد $\det|A| \neq 0$ فإن للنظام المتجانسة $AX = 0$ الحل الصفري فقط

إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في نظام المعادلات الخطية المتجانسة فإن لهذا النظام حل غير الحل الصفري.

مثال (3ـ9) :

أوجد حل نظام المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

إن نظام المعادلات المعطاة هي نظام معادلات خطية متجانسة فنأخذ مصفوفة الأمثال ولنجري عليها تحويلات أولية

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$\therefore$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{5R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الصغير $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

ومنه فإن الرتبة $r = 3$ ولدينا عدد المجاهيل $n = 4$

$r < n$ هذا يعني أنه يوجد حل غير الحل الصفري.

ويمكن كتابة النظام بالشكل

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 12x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

لدينا ثلاث معادلات بأربع مجاهيل هذا يعني وجود مجهول اختياري وليكن مثلاً x_4 عندئذ

$$x_3 = \frac{9x_4}{12} = \frac{3}{4}x_4$$

$$x_2 = -2x_3 + x_4 = -2\left(\frac{3}{4}x_4\right) + x_4 = -\frac{x_4}{2}$$

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -2\left(-\frac{x_4}{2}\right) + \frac{3}{4}x_4 - x_4 = \frac{3}{4}x_4$$

وبالتالي فإن حل نظام المعادلات الخطية المتجانسة هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}x_4 \\ -\frac{x_4}{2} \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (3–10) : أوجد حل نظام المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 \quad &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 \quad + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

لنأخذ مصفوفة الأمثال ولنجري عليها تحويلات أولية

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \underset{-2R_1 + R_3}{\overset{-\frac{5}{3}R_1 + R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{-\frac{3}{17}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-8R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 0 & \frac{167}{17} \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة النظام بالشكل :

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 - \frac{6}{17}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\frac{167}{17}x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

ومنه

$$x_2 = \frac{6}{17}x_3 = \frac{6}{17}(0) = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}x_2 = \frac{4}{3}(0) = 0$$

وهذا يعني أن نظام المعادلات الخطية المتجانسة المعطاة لها الحل الصفري فقط.

طريقة ثانية إذا أخذنا مصفوفة الأمثال لنظام المعادلات الخطية المتجانسة

أي $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

وحسبنا المحدد لهذه المصفوفة نجد : $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 113 \neq 0$

ومنه فإن نظام المعادلات الخطية المتجانسة لها الحل الصفري أي $X = 0$

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام مقلوب (معكوس) مصفوفة :

لتكن لدينا نظام المعادلات الخطية $AX = B$

حيث $A = [a_{ij}]_n$ أي n معادلة خطية فيها n مجهول عندئذ إذا كانت A مصفوفة نظامية نوجد A^{-1} ثم نضرب طرفي $AX = B$ من اليسار بـ A^{-1} فنجد :

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

وبما أن $A^{-1}A = I_n$ فإن $X = A^{-1}.B$

وهذا يعني أنه لإيجاد حل نظام معادلات خطية باستخدام معكوس مصفوفة نحسب معكوس مصفوفة الأمثال A ثم نضرب هذا المعكوس بالمتجه B فنحصل على الحل المطلوب.

مثال (3–11) :

استخدم طريقة معكوس مصفوفة لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية التالية :

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

الحل :

نكتب نظام المعادلات الخطية بالشكل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لحساب معكوس مصفوفة الأمثال $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

نحسب أولاً المحدد لهذه المصفوفة

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 8 + 3 - (-20 - 4 - 6)$$

$$= -9 - (-30) = 30 - 9 = 21 \neq 0$$

ثم نحسب المصفوفة المساعدة :

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} -8 & 14 & -23 \\ 3 & 0 & 6 \\ 7 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 14 & 0 & -7 \\ -23 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

وأخيراً نحسب معكوس A فنجد :

$$A^{-1} = \frac{\Gamma(A)}{\det A} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 14 & 0 & -7 \\ -23 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على العلاقة $X = A^{-1} B$ نجد :

$$X = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 14 & 0 & -7 \\ -23 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 21 \\ -21 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن حل نظام المعادلات هو $x_1 = 1 \ , \ x_2 = -1 \ , x_3 = 2$

حل نظام المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

نعلم أن حل نظام المعادلات الخطية $A\ X = B$ بالاعتماد على معكوس مصفوفة يعطى بالعلاقة $X = A^{-1} B$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها كما يلي :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نرمز لمحدد مصفوفة الأمثال بالرمز Δ أي

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

ونرمز بـ Δ_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ للمحدد الناتج من Δ بتبديل عمود الثوابت B بالعمود i أي أن :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

عندئذ يمكن كتابة :

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \ldots + A_{n1} b_n\right) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$
$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\left(A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \ldots + A_{n2} b_n\right) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_n = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \ldots + A_{nn} b_n\right) = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

مثال (3ـ12) :

حل بطريقة كرامر نظام المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -3 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 4x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 0 - (-32 + 0 - 24)$$
$$= -8 - (-56) = 56 - 8 = 48 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2(-6 - 42) = 96$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 4 & 14 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 14 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 192$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{96}{48} = 2 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{48} = 3$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{192}{48} = 4$$

مثال (3ـ13) :

أوجد حل نظام المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

بطريقة كرامر

الحل :

نحسب محدد الأمثال

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{27} = -4$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1 \qquad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1$$

حل نظام المعادلات الخطية بطريقة غاوس :

تتلخص هذه الطريقة بتحويل مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى وذلك باستخدام التحويلات الأولية.

إن استخدام التحويلات الأولية على نظام معادلات خطية يؤدي إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مصفوفة مثلثية سفلى وذلك بأن نأخذ المصفوفة الموسعة [A : B] ونطبق عليها عدداً منتهياً من التحويلات الأولية والتي من خلالها نتمكن من تحويل المصفوفة A في [A : B] إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مصفوفة مثلثية سفلى كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \underset{\text{من التحويلات الأولية}}{\overset{\text{بعد عدد منته}}{\sim}} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \underset{\text{من التحويلات الأولية}}{\overset{\text{بعد عدد منته}}{\sim}} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

حيث إن الثوابت $c_{ij}\,;\,d_i\,,\,1 \le j \le n\,,\,1 \le i \le n$ هي الناتجة بعد إجراء التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[\,A : B\,]$ ثم بعد ذلك نكتب نظام المعادلات الخطية المقابلة للمصفوفات الناتجة والتي يكون حلها إما بطريقة التعويض التراجعي في حال المصفوفة المثلثية العليا أو بطريقة التعويض التقدمي في حالة المصفوفة المثلثية السفلى.

مثال (3ـ14) :

حل بطريقة غاوس نظام المعادلات الخطية :

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$2x_1 - 3x_2 = 10$$

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال أولاً إلى مصفوفة مثلثية عليا ثم لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية سفلى.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \overset{-2R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

نكتب النظام المقابل

$$x_1 - x_2 = 2$$
$$-x_2 = 6$$

ومنه

$$x_2 = -6$$
$$x_1 = 2 + x_2 = 2 - 6 = -4$$

أي الحل هو
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right] \overset{R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

نكتب النظام المقابل

$$\frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3}$$
$$-\frac{2}{3}x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}$$

ومنه

$$x_1 = -4$$
$$x_2 = -\frac{10}{3} + \frac{2}{3}x_1 = -\frac{10}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

أي الحل هو
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

مثال (3ـ14) :

حل بطريقة غاوس نظام المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_2 + 5x_3 = 3$$
$$x_1 + 3x_3 = 6$$

مستخدماً أسلوب الحل التقدمي.

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية سفلى

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{-\frac{5}{3}R_3 + R_2}{\overset{-R_3 + R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & 0 & -4 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\stackrel{-2R_2+R_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:c} \frac{10}{3} & 0 & 0 & 10 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

ثم نكتب النظام المقابل :

$$\frac{10}{3}x_1 = 10$$
$$-\frac{5}{3}x_1 + x_2 = -7$$
$$x_1 + 3x_3 = 6$$

ومنه $x_1 = 3$

$$x_2 = \frac{5}{3}x_1 - 7 = 5 - 7 = -2$$
$$3x_3 = 6 - x_1 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1$$

ومنه الحل هو :
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (3ـ15) :

أوجد حل نظام المعادلات التالي بطريقة غاوس

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$
$$7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32$$
$$6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33$$
$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31$$

الحل :

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 7 & 10 & 8 & 7 & 32 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 33 \\ 5 & 7 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{7}{5}R_1+R_2 \\ -\frac{6}{5}R_1+R_3 \\ \sim \\ -R_1+R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.4 & 2.8 & 3 & 5.4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim$$

$\therefore$

$$\stackrel{2R_2+R_3}{\sim}\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right] \stackrel{-\frac{3}{2}R_3+R_4}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right]$$

ثم نكتب النظام المقابل :

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$
$$0.2x_2 - 0.4x_3 = -0.2$$
$$2x_3 + 3x_4 = 5$$
$$0.5x_4 = 0.5$$

ومنه $x_4 = 1$

$$x_3 = \frac{5 - 3x_4}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{0.4x_3 - 0.2}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$
$$x_1 = \frac{23 - 7x_2 - 6x_3 - 5x_4}{5} = \frac{23-18}{5} = 1$$

ومنه حل النظام هو :
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حساب محدد باستخدام طريقة غاوس :

عندما يكون عدد معادلات النظام كبيراً فإن عملية نشر المحددات تكون عملية ليست سهلة لذلك يمكن بالاعتماد على طريقة غاوس أن نحول المصفوفة المربعة إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مصفوفة مثلثية سفلى عندئذ فإن قيمة المحدد تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي ويجب الانتباه إلى أنه عندما نستبدل صفاً بصف آخر أو عموداً بعمود آخر نضرب المحدد بـ -1- وعندما نضرب عناصر صف بعدد ثابت يجب ضرب المحدد بالعدد نفسه.

مثال (3ـ16) :

احسب باستخدام طريقة غاوس قيمة المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل :

بالاعتماد على طريقة غاوس نحذف عناصر العمود الأول ما عدا العنصر الأول منه فنحصل على المحدد المكافئ التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 2 & -10 & -14 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \end{vmatrix}$$

ثم نحذف العمود الثاني من هذا المحدد ماعدا العنصر الأول من الصف الثاني فنحصل على :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{39}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{81}{4} \end{vmatrix}$$

أخيراً نحذف العنصر الأخير من العمود الثالث فنحصل على محدد مثلثي الشكل كما يلي

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{39}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{vmatrix}$$

ومنه قيمة هذا المحدد تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي أي أن :

$$\Delta = 1\,(-4)\left(-\frac{27}{2}\right)(-17) = 2\,(27)\,(-17) = -918$$

إيجاد معكوس مصفوفة باستخدام طريقة غاوس :

عندما تكون المصفوفة المربعة النظامية من مراتب عليا فإن إيجاد معكوس هذه المصفوفة يصبح أمراً صعباً لذلك يفضل في مثل هذه الحالة استخدام طريقة غاوس لإيجاد المعكوس وذلك كما يلي :

نعلم أن $A \cdot A^{-1} = I_n$ وهذا يكافئ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ولتعيين $x_{11}, x_{12}, ..., x_{nn}$ عناصر المصفوفة A^{-1} نوجد أولاً عناصر العمود الأول $x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}$ من A^{-1} وذلك بحل النظام التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد عناصر العمود الثاني $x_{12}, x_{22}, ..., x_{n2}$ من A^{-1} بحل النظام

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا ... نعين عناصر بقية الأعمدة من A^{-1} حتى الحصول على عناصر العمود الأخير $x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{nn}$ من A^{-1} وذلك بحل النظام التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (3-17):

باستخدام طريقة غاوس أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

لتكن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

نوجد أولاً عناصر العمود الأول وذلك بحل نظام المعادلات الخطية التالي :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{3}R_1+R_3}{\overset{-\frac{5}{3}R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\frac{2}{11}R_2+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{6}{33} & -\frac{21}{33} \end{array}\right]$$

نكتب النظام المقابل

$$\begin{aligned} 3x_{11} - 4x_{21} + 4x_{31} &= 1 \\ \frac{11}{3}x_{21} - \frac{8}{3}x_{31} &= -\frac{5}{3} \\ \frac{6}{33}x_{31} &= -\frac{21}{33} \end{aligned}$$

ومنه $x_{31} = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}$

$$\frac{8}{3}x_{31} = \frac{11}{3}x_{21} + \frac{5}{3}$$

$$\frac{11}{3}x_{21} = \frac{8}{3}x_{31} - \frac{5}{3} = \frac{8}{3}\left(-\frac{7}{2}\right) - \frac{5}{3} = \frac{-56-10}{6}$$

$$x_{21} = \frac{-66}{6}\left(\frac{3}{11}\right) = -\frac{6\,(3)}{6} = -3$$

$$3x_{11} = 4x_{21} - 4x_{31} + 1$$

$$= 4(-3) - 4\left(-\frac{7}{2}\right) + 1 = -12 + 14 + 1 = 3$$

$$x_{11} = 1$$

ومنه

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

ثم نوجد عناصر العمود الثاني وذلك بحل النظام :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{33} & \frac{2}{12} \end{array}\right]$$

نكتب النظام المقابل

$$3x_{12} - 4x_{22} + 4x_{32} = 0$$

$$\frac{11}{3}x_{22} - \frac{8}{3}x_{32} = 1$$

$$\frac{6}{33}x_{32} = \frac{2}{11}$$

ومنه

$$x_{32} = \frac{2}{11}\left(\frac{33}{6}\right) = 1$$

$$x_{22} = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{11}\right)x_{32} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11} + \frac{3}{11} = 1$$

$$x_{12} = \frac{4x_{22} - 4x_{32}}{3} = \frac{4-4}{3} = 0$$

ومنه

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً نوجد عناصر العمود الثالث وذلك بحل النظام :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{33} & 1 \end{array}\right]$$

نكتب النظام المقابل

$$3x_{13} - 4x_{23} + 4x_{33} = 0$$

$$\frac{11}{3}x_{23} - \frac{8}{3}x_{33} = 0$$

$$\frac{6}{33}\, x_{33} = 1$$

ومنه

$$x_{33} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{11}{3}\, x_{23} = \frac{8}{3}\, x_{33} = \frac{8}{3}\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{88}{6}$$

$$x_{23} = \frac{88}{6}\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_{13} = \frac{4\, x_{23} - 4\, x_{33}}{3} = \frac{4\,(4) - 4\left(\frac{11}{2}\right)}{3} = \frac{16 - 22}{3} = -2$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن معكوس المصفوفة هو :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

طريقة غاوس ــ جوردان :

طريقة جوردان شبيهة بطريقة غاوس ولكن في هذه الطريقة نحول مصفوفة الأمثال إلـــى مصفوفة قطرية (أي مصفوفة مثلثية عليا وسفلى في آن واحد).

مثال (3ــ18) :

أوجد حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة غاوس ــ جوردان :

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 10$$

$$x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 = 7$$

$$2\,x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

الحل :

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية

لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية كما يلي :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{\substack{-R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{5R_2 + R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{1}{6}R_3 + R_2 \\ \frac{1}{10}R_3 + R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{-2R_2 + R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{bmatrix}$$

نكتب النظام المقابل فنجد :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$: أي أن الحل هو $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = 1$

مثال (3ــ19) :

أوجد حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة غاوس ــ جوردان :

$$2\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$4\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 6$$

$$8\,x_1 + 5\,x_2 - 3\,x_3 + 4\,x_4 = 12$$

$$3\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 + 2\,x_4 = 6$$

الحل : نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصـــفوفة الأمثـــال إلى مصفوفة قطرية كما يلي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}R_1 + R_4}{\overset{-2R_1 + R_2,\ -4R_1 + R_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{-3R_2 + R_3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{4}R_3 + R_4}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{-2R_4 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}R_3 + R_2}{\overset{-\frac{1}{2}R_3 + R_1}{\sim}}$$

$$\overset{2R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ومنه :

$$x_4 = -1$$
$$x_3 = -1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 1$$

أي الحل هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

طريقة كراوت :

تعتمد هذه الطريقة على تحليل مصفوفة الأمثال A إلى جداء مصفوفتين مثلثتين من الشكل $A = L \, . \, U$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلى و U مصفوفة مثلثية عليا عندئذ يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية $A \, . \, X = B$ كما يلي :

$$L \, . \, U \, . \, X = B$$

نفرض أن $U \, . \, X = Y$ فنجد $L \, . \, Y = B$

وبالتالي فإن حل جملة المعادلات الخطية $A \, . \, X = B$ يمكن إيجاده على مرحلتين في المرحلة الأولى نحل جملة المعادلات الخطية $L \, . \, Y = B$ وحل هذه الجملة سهل بطريقة التعويض التقدمي، وفي المرحلة الثانية نحل جملة المعادلات الخطية $U \, . \, X = Y$، وحل هذه الجملة سهل بطريقة التعويض التراجعي.

ولكن الأمر الأساسي هو كيفية تحليل مصفوفة الأمثال A إلى جداء مصفوفتين L و U يمكن تحليل مصفوفة الأمثال A إلى جداء مصفوفتين كما يلي :

نكتب $A = L \, . \, U$ بالشكل المفصل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots\cdots & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث كلاً من L و U تحوي $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ عنصراً مجهولاً ومجموعهما هو $n(n+1) = n^2 + n$ ولدينا n^2 علاقة لتعيين المجاهيل $n^2 + n$

هذا يعني أنه يمكننا إعطاء n من المجاهيل قيماً اختيارية يمكن اختيار هذه القيم كما يلي :

نفرض أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة السفلى L متساوية وتساوي الواحد الصحيح أي أن :

$$\ell_{11} = \ell_{22} = \cdots = \ell_{nn} = 1$$

أو نفرض أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة العليا U متساوية وتساوي الواحد أي أن :

$$u_{11} = u_{22} = \ldots = u_{nn} = 1$$

ويمكن اختيار n من العناصر بأشكال متعددة أخرى.

نفرض أننا اخترنا $u_{11} = u_{22} = \ldots = u_{nn} = 1$

عندئذ يمكن الحصول على العلاقات التي تعين عناصر المصفوفتين L و U كما يلي :

من أجل $j = 1$ فإن $\ell_{i1} = a_{i1} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

ومن أجل $i = 1$ فإن $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{\ell_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad j = 2, 3, \ldots, n$

$$i \geq j > 1 \quad \ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \, u_{kj}$$

$$i < j \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \, u_{kj}}{\ell_{ij}}$$

عناصر المتجه Y في العلاقة $L \, Y = B$ تتعين بطريقة التعويض التقدمي ويمكن كتابة العلاقات التي تعين تلك العناصر كما يلي :

$$y_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \, y_k}{\ell_{ii}} \quad , \quad i > 1$$

أما عناصر المتجه X التي هي حل جملة المعادلات الخطية المطلوبة فيمكن إيجادها بالاعتماد على العلاقات التالية :

$$x_n = y_n$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k \qquad i<n$$

مثال (3–20):

أوجد بطريقة كراوت حل جملة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{aligned} 50\,x_1 + 107\,x_2 + 36\,x_3 &= 2 \\ 25\,x_1 + 54\,x_2 + 20\,x_3 &= 1 \\ 31\,x_1 + 66\,x_2 + 21\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

الحل :

لنكتب مصفوفة الأمثال A بالشكل $A = L\,U$ أي :

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعين عناصر المصفوفتين L و U بالاعتماد على العلاقات السابقة

$$\ell_{11} = a_{11} = 50 \qquad \ell_{21} = a_{21} = 25 \qquad \ell_{31} = a_{31} = 31$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{\ell_{11}} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{36}{50} \qquad u_{12} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{107}{50}$$

$$\ell_{22} = a_{22} - \ell_{21}u_{12} = 54 - 25\left(\frac{107}{50}\right) = 54 - \frac{107}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\ell_{32} = a_{32} - \ell_{31}u_{12} = 66 - 31\left(\frac{107}{50}\right) = -\frac{17}{50}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \ell_{21}\, u_{13}}{\ell_{22}} = \frac{20 - 25\left(\frac{36}{50}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\ell_{33} = a_{33} - \ell_{31}\, u_{13} - \ell_{32}\, u_{23}$$

$$= 21 - (31)\left(\frac{36}{50}\right) - \left(-\frac{17}{50}\right)(4) = \frac{1}{25}$$

ومنه

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 25 & \frac{1}{2} & 0 \\ 31 & -\frac{17}{50} & \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{107}{50} & \frac{36}{50} \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب عناصر المتجه Y من العلاقة $L\,Y = B$ أي :

$$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 25 & \frac{1}{2} & 0 \\ 31 & -\frac{17}{50} & \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نكتب الجملة المقابلة

$$50\,y_1 = 2$$

$$25\,y_1 + \frac{1}{2}\,y_2 = 1$$

$$31\,y_1 - \frac{17}{50}\,y_2 + \frac{1}{25}\,y_3 = 1$$

ومنه $y_1 = \frac{1}{25}$

$$\frac{1}{2} y_2 = 1 - 25 y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$31 y_1 - \frac{17}{50} y_2 + \frac{1}{25} y_3 = 1$$

$$\frac{1}{25} y_3 = 1 - 31 y_1 + \frac{17}{50} y_2 = 1 - \frac{31}{25}$$

$$y_3 = 25 - 31 = -6$$

ومنه

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ثم نوجد حل الجملة X وذلك بحل الجملة $U X = Y$ أي

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{107}{50} & \frac{36}{50} \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

نكتب الجملة المقابلة :

$$x_1 + \frac{107}{50} x_2 + \frac{36}{50} x_3 = \frac{1}{25}$$
$$x_2 + 4 x_3 = 0$$
$$x_3 = -6$$

ومنه

$$x_3 = -6$$
$$x_2 = -4 x_3 = 24$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{25} - \frac{107}{50}(24) - \frac{36}{50}(-6) = -47$$

ومنه حل جملة المعادلات الخطية هو $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 \\ 24 \\ -6 \end{bmatrix}$

ملاحظة :

يمكن إيجاد معكوس مصفوفة نظامية بطريقة كراوت وذلك بحل جملة المعادلات الخطية

$$L U X = I_j$$

n مرة من أجل n طرفاً ثانياً

حيث I_j هي أعمدة المصفوفة الواحدية I_n $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

مثال (3ـ21) :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

بطريقة كراوت.

الحل :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{11} = a_{11} = 10 \qquad \ell_{21} = a_{21} = -3 \qquad \ell_{31} = a_{31} = 5$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{7}{10}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{\ell_{11}} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 0$$

$$\ell_{22} = a_{22} - \ell_{21}\, u_{12} = 2 + 3\left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{20}{10} - \frac{21}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$\ell_{32} = a_{32} - \ell_{31}\, u_{12} = -1 - 5\left(-\frac{7}{10}\right) = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \ell_{21}\, u_{13}}{\ell_{22}} = \frac{6 - (-3)\,0}{-\frac{1}{10}} = -60$$

$$\ell_{33} = a_{33} - \ell_{31}\, u_{13} - \ell_{32}\, u_{23}$$
$$= 5 - 5\,(0) - \frac{5}{2}\,(-60) = 5 + 150 = 155$$

ومنه

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{5}{2} & 155 \end{bmatrix}$$

نعين المصفوفة Y وذلك بحل الجمل التالية :

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{5}{2} & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نكتب الجمل المقابلة

$$10\, y_1 = 1$$

$$-3\, y_1 - \frac{1}{10}\, y_2 = 0$$

$$5\, y_1 + \frac{5}{2}\, y_2 + 155\, y_3 = 0$$

ومنه

$$y_1 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10}\, y_2 = 3\, y_1 = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad y_2 = 3$$

$$155\, y_3 = -5\, y_1 - \frac{5}{2}\, y_2 = -5\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{5}{2}\,(3)$$

$$y_3 = \left(-\frac{5}{10} - \frac{75}{10}\right) \frac{1}{155} = -\frac{80}{10}\left(\frac{1}{55}\right) = -\frac{8}{155}$$

أن العمود الأول في المصفوفة Y هو

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 3 \\ -\frac{8}{155} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{5}{2} & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$10\, y_1 = 0$$

$$-3\, y_1 - \frac{1}{10}\, y_2 = 1$$

$\therefore$

$$5\,y_1 + \frac{5}{2}\,y_2 + 155\,y_3 = 0$$

ومنه

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = -10$$

$$155\,y_3 = -\frac{5}{2}\,y_2 - 5\,y_1 = -\frac{5}{2}\,(-10) = 25 \Rightarrow y_3 = \frac{25}{155}$$

العمود الثاني للمصفوفة Y هو : $\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ \frac{25}{155} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 5 & \frac{5}{2} & 155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$10\,y_1 = 0$$

$$-3\,y_1 - \frac{1}{10}\,y_2 = 0$$

$$5\,y_1 + \frac{5}{2}\,y_2 + 155\,y_3 = 1$$

ومنه

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = \frac{1}{155}$$

العمود الثالث للمصفوفة Y هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{155} \end{bmatrix}$

المصفوفة Y هي $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 0 \\ -\frac{8}{155} & \frac{25}{155} & \frac{1}{155} \end{bmatrix}$

ثم نأخذ U X = Y ونحل الجمل التالية

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 3 \\ -\frac{8}{155} \end{bmatrix}$$

نكتب الجمل المقابلة

$$x_1 - \frac{7}{10}\,x_2 = \frac{1}{10}$$

$$x_2 - 60\,x_3 = 3$$

$$x_3 = -\frac{8}{155}$$

ومنه

$$x_3 = -\frac{8}{155}$$

$$x_2 = 3 + 60\,x_3 = 3 + 60\left(-\frac{8}{155}\right) = -\frac{15}{155}$$

$$x_1 = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}x_2 = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\left(-\frac{15}{155}\right) = \frac{5}{155}$$

ومنه العمود الأول للمصفوفة A^{-1} هو

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{155} \\ -\frac{15}{155} \\ -\frac{8}{155} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ \frac{25}{155} \end{bmatrix}$$

$$x_1 - \frac{7}{10}x_2 = 0$$

$$x_2 - 60x_3 = -10$$

$$x_3 = \frac{25}{155}$$

ومنه

$$x_3 = \frac{25}{155}$$

$$x_2 = 60x_3 - 10 = 60\left(\frac{25}{155}\right) - 10 = -\frac{50}{155}$$

$$x_1 = \frac{7}{10}x_2 = \frac{7}{10}\left(-\frac{50}{155}\right) = -\frac{35}{155}$$

العمود الثاني لـ A^{-1} هو

$$\begin{bmatrix} -\frac{35}{155} \\ -\frac{50}{155} \\ \frac{25}{155} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{155} \end{bmatrix}$$

$$x_1 - \frac{7}{10}x_2 = 0$$

$$x_2 - 60x_3 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{155}$$

ومنه

$$x_3 = \frac{1}{155}$$

$$x_2 = 60x_3 = \frac{60}{155}$$

$$x_1 = \frac{7}{10}x_2 = \frac{42}{155}$$

العمود الثالث لـ A^{-1} هو :

$$\begin{bmatrix} \frac{42}{155} \\ \frac{60}{155} \\ \frac{1}{155} \end{bmatrix}$$

وبالتالي المعكوس هو

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{155} & -\frac{35}{155} & \frac{42}{155} \\ -\frac{15}{155} & -\frac{50}{155} & \frac{60}{155} \\ -\frac{8}{155} & \frac{25}{155} & \frac{1}{155} \end{bmatrix} = \frac{1}{155}\begin{bmatrix} 5 & -35 & 42 \\ -15 & -50 & 60 \\ -8 & 25 & 1 \end{bmatrix}$$

الطرائق غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية :

الطرائق التي تعرفنا عليها تسمى طرائق مباشرة وتوجد طرائق أخرى تسمى الطرائق غير المباشرة حيث تعتمد الطرائق غير المباشرة على اختيار مسبق للتقريب المبدئي للحل.

نظيم مصفوفة :

نظيم المصفوفة $A = [a_{ij}]_n$ هو قيمة حقيقية ويرمز للنظيم بالرمز $\| A \|$ ويحقق الشروط التالية :

1- $\| A \| \geq 0$ و $\| A \| = 0$ إذا وإذا فقط كانت $A = 0$

2- $\| \lambda A \| = |\lambda| \, \| A \|$ حيث λ عدد حقيقي ويكون $\| -A \| = \| A \|$

3- $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$ حيث $B = [b_{ij}]_n$

4- $\| A.B \| \leq \| A \| . \| B \|$

ومن النظم المعروفة بالنسبة للمصفوفات

1- $$\| A \|_1 = \max_j \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة.

2- $$\| A \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الصفوف.

3- $$\| A \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

النظيم الإقليدي.

مثال (3—22) :

احسب $\| A \|_1 , \| A \|_\infty , \| A \|_2$ للمصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \left(\sum_{i=1}^{3} | a_{ij} | \right) = \max (18, 11, 8) = 18$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\sum_{j=1}^{3} | a_{ij} | \right) = \max (11, 8, 18) = 18$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2} = \sqrt{36+0+25+9+16+1+81+49+4}$$

$$= \sqrt{221} = 14.866$$

من أجل المصفوفات الخاصة التي تمثل متجهات

فإذا كان المتجه $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

فإن نظيم المتجه X يرمز له بالرمز $\|X\|$ ومن النظم المعروفة :

1– $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

مجموع القيمة المطلقة

2– $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} (|x_i|) = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$

نظيم القيم المطلقة العظمى.

3– $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

النظيم الإقليدي.

مثال (3–23) :

احسب $\|X\|_1$ ، $\|X\|_\infty$ ، $\|X\|_2$ للمتجه $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

الحل :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = |2| + |-3| + |0| + |4| = 9$$

∴

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} (|x_i|) = \max(2, 3, 0, 4) = 4$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = \sqrt{4+9+0+16} = \sqrt{29} = 5.385$$

وجدنا أنه لحل المعادلة $f(x) = 0$ نبحث عن دالة تكرار محققة للعلاقة $x = g(x)$ ثم نطبق علاقة التكرار

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ولكن في حال جملة معادلات خطية $A\,X = B$ فإننا نبحث عن مصفوفة تكرار بحيث تكون جملة المعادلات الخطية مكافئة لجملة جديدة من الشكل

$$X = \alpha X + \beta$$

وتكون علاقة التكرار

$$X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$$

حيث نبدأ من قيمة اختيارية X^0 ثم نحسب $X^1 = \alpha X^0 + \beta$

ثم نحسب $X^2 = \alpha X^1 + \beta$

وهكذا ... نحصل على التقريب ذي الرتبة (n+1) من التقريب ذي الرتبة n بالاعتماد على العلاقة :

$$X^{n+1} = \alpha X^n + \beta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

فإذا كانت المتتالية

$$X^0, X^1, X^2, \ldots, X^n, \ldots$$

متقاربة فلها نهاية أي $X = \lim\limits_{n\to\infty} X^n$

هذه النهاية هي حل للجملة $X = \alpha X + \beta$

وبالتالي هذه النهاية حل للجملة $A\,X = B$

وذلك لأن :

$$\lim_{n\to\infty} X^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha X^n + \beta)$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} X^n + \beta$$

ومنه $X = \alpha X + \beta$

من الطرائق غير المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية ندرس طريقة جاكوبي وطريقة غاوس ــ سيدل.

طريقة جاكوبي :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = B$ والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n
\end{aligned}$$

هذه الجملة يمكن كتابتها من جديد بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\
x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 - \dots - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}
\end{aligned}$$

وإذا رمزنا $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad , \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

$i = 1, 2, \dots, n, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \; i \neq j$

عندئذ يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة كما يلي :

$\therefore$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \dots + \alpha_{1n} x_n + \beta_1 \\
x_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \dots + \alpha_{2n} x_n + \beta_2 \\
x_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \dots + \alpha_{3n} x_n + \beta_3 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
x_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \dots + \alpha_{n\,n-1} x_{n-1} + \beta_n
\end{aligned}$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\alpha_{ii} = 0$

وهذه الجملة تكتب بالشكل المصفوفة التالي :

$$X = \alpha X + \beta$$

حيث

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots \alpha_{n\,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة العلاقة التكرارية بطريقة جاكوبي كما يلي :

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

حيث $\alpha_{ii} = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad , i = 1, 2, \dots, n$

أو بالشكل

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$$

شروط وجود الحل هي :

1ـ أن تكون $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

2ــ أن يتحقق $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$

أو أن يكون نظيم مصفوفة التكرار α أصغر من الواحد.

هذا يعني أن تكون مصفوفة الأمثال في جملة المعادلات الخطية مصفوفة مُهيمنة أي أن تكون عناصر القطر الرئيسي هي الأكبر في صفها وذلك بعد إعادة ترتيب المعادلات المعطاة.

مثال (3ــ24) :

المصفوفة التالية هي مصفوفة مُهيمنة

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 15 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

لأن

$$i=1 \quad |-7| = 7 > 2 + 1 = 3$$
$$i=2 \quad |25| = 25 > 15 + 3 = 18$$
$$i=3 \quad |10| = 10 > 2 + 4 = 6$$

نتوقف عن الحل إذا تحقق الشرط التالي :

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

مثال (2ــ25):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

حيث

$$\varepsilon = 0.09 \qquad X^\circ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

نعيد كتابة المعادلات بحيث تصبح مصفوفة الأمثال مصفوفة مهيمنة أي نجعل عناصر القطر الرئيسي أكبر ما يمكن

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

$$x_1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3$$
$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن نظيم مصفوفة التكرار α أصغر من الواحد أي أن

$$\max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} < 1$$

$$x_1^1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_1^\circ - \frac{1}{8}x_3^\circ = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1) - \frac{1}{8}(1) = 3$$
$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^\circ + \frac{1}{5}x_3^\circ = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1.4$$
$$x_3^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^\circ + \frac{1}{5}x_2^\circ = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1.4$$

ومنه
$$X^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.4 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}\, x_2^1 - \frac{1}{8}\, x_3^1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1.4) - \frac{1}{8}(1.4) = 2.9$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\, x_1^1 + \frac{1}{5}\, x_3^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}\,(1.4) = 1.08$$

$$x_3^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\, x_1^1 + \frac{1}{5}\, x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\,(3) + \frac{1}{5}(1.4) = 1.08$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.08 \\ 1.08 \end{bmatrix}$$

$$x_1^3 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}\, x_2^2 - \frac{1}{8}\, x_3^2 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1.08) - \frac{1}{8}(1.08) = 2.98$$

$$x_2^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\, x_1^2 + \frac{1}{5}\, x_3^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2.9) + \frac{1}{5}\,(1.08) = 1.036$$

$$x_3^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\, x_1^2 + \frac{1}{5}\, x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\,(2.9) + \frac{1}{5}(1.08) = 1.036$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 2.98 \\ 1.036 \\ 1.036 \end{bmatrix}$$

$$\left| x_1^3 - x_1^2 \right| = \left| 2.98 - 2.9 \right| = 0.08 < 0.09$$

$$\left| x_2^3 - x_2^2 \right| = \left| 1.08 - 1.036 \right| = 0.04 < 0.09$$

$$\left| x_3^3 - x_3^2 \right| = \left| 1.08 - 1.036 \right| = 0.04 < 0.09$$

إذن حل المعادلات هو
$$X = X^3 = \begin{bmatrix} 2.98 \\ 1.036 \\ 1.036 \end{bmatrix}$$

مثال (3ـ26) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي :

$$\begin{aligned}
12\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\
x_1 + 12\, x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\
x_1 + x_2 + 12\, x_3 + x_4 &= 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 12\, x_4 &= 15
\end{aligned}$$

حيث
$$\varepsilon = 0.09 \quad X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$x_1 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}\, x_2 - \frac{1}{12}\, x_3 - \frac{1}{12}\, x_4$$

$$x_2 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}\, x_1 - \frac{1}{12}\, x_3 - \frac{1}{12}\, x_4$$

$$x_3 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}\, x_1 - \frac{1}{12}\, x_2 - \frac{1}{12}\, x_4$$

$$x_4 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}\, x_1 - \frac{1}{12}\, x_2 - \frac{1}{12}\, x_3$$

$\therefore$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \end{bmatrix}$$

$$\max_{1\le i\le 4} \sum_{j=1}^{4} |\alpha_{ij}| = \max\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} < 1$$

$$x_1^1 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_2^0 - \frac{1}{12}x_3^0 - \frac{1}{12}x_4^0 = \frac{15}{12}$$

$$x_2^1 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_1^0 - \frac{1}{12}x_3^0 - \frac{1}{12}x_4^0 = \frac{15}{12}$$

$$x_3^1 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_1^0 - \frac{1}{12}x_2^0 - \frac{1}{12}x_4^0 = \frac{15}{12}$$

$$x_4^1 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_1^0 - \frac{1}{12}x_2^0 - \frac{1}{12}x_3^0 = \frac{15}{12}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \\ \frac{15}{12} \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_2^1 - \frac{1}{12}x_3^1 - \frac{1}{12}x_4^1$$

$$= \frac{15}{12} - \frac{1}{12}\left(\frac{15}{12}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{15}{12}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{15}{12}\right) = 0.937$$

$$x_2^2 = 0.937 \quad x_3^2 = 0.937 \quad x_4^2 = 0.937$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.937 \\ 0.937 \\ 0.937 \\ 0.937 \end{bmatrix}$$

$$x_1^3 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}x_2^2 - \frac{1}{12}x_3^2 - \frac{1}{12}x_4^2$$

$$x_1^3 = \frac{15}{12} - \frac{1}{12}(0.937) - \frac{1}{12}(0.937) - \frac{1}{12}(0.937) = 1.015$$

$$x_2^3 = 1.015 \qquad x_3^3 = 1.015 \qquad x_4^3 = 1.015$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1.015 \\ 1.015 \\ 1.015 \\ 1.015 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^3 - x_1^2| = |1.015 - 0.937| = 0.08 < 0.09$$

$$|x_2^3 - x_2^2| = 0.08 < 0.09$$

$$|x_3^3 - x_3^2| = 0.08 < 0.09$$

$$|x_4^3 - x_4^2| = 0.08 < 0.09$$

ومنه

$$X = X^3 = \begin{bmatrix} 1.015 \\ 1.015 \\ 1.015 \\ 1.015 \end{bmatrix}$$

هو حل المعادلات المطلوب.

طريقة غاوس ـــ سيدل :

تشترك طريقة غاوس ـــ سيدل مع طريقة جاكوبي في الخطوات الأولى أي نوجد مصفوفة التكرار

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots\alpha_{n\,n-1} & 0 \end{bmatrix} ,\quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

ونبدأ أولاً بإيجاد

$$x_1^1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^o - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^o - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^o$$

كما في طريقة جاكوبي

ثم نوجد :

$$x_2^1 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^o - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^o$$

هذا يعني أنه لإيجاد القيمة الثانية x_2^1 نستخدم القيمة التي حصلنا عليها x_1^1 بدلاً من x_1^o وبقيمة القيم $x_2^o, x_3^o, \ldots, x_n^o$ ثم نوجد :

$$x_3^1 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^1 - \frac{a_{34}}{a_{33}} x_4^o - \ldots - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n^o$$

هذا يعني أنه لإيجاد القيمة الثالثة x_3^1 نستخدم القيمتين x_1^1 و x_2^1 بدلاً من القيمتين x_1^o و x_2^o وبقية القيم $x_1^o, x_4^o, \ldots, x_n^o$ وهكذا ...

نوجد

$$x_n^1 = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^1 - \ldots - \frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^1$$

وبشكل عام بفرض أننا وصلنا إلى التقريب ذي الرتبة k أي وصلنا إلى

$$x^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

فإن إيجاد التقريب ذي الرتبة (k+1) حسب غاوس ـــ سيدل كما يلي :

$$x_1^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^k + \beta_1$$

$$x_2^{k+1} = \alpha_{21} x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k + \beta_2$$

$$\vdots$$

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{k+1} + \beta_n$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots$

مثال (3ـ27) :

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 &= 18 \\ 2x_1 + 12x_2 + x_3 - 4x_4 &= 13 \\ 3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 &= 29 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 31 \end{aligned}$$

بطريقة غاوس ـــ سيدل.

الحل :

$$x_1 = \frac{18}{13} - \frac{5}{13}x_2 + \frac{3}{13}x_3 - \frac{1}{13}x_4$$

$$x_2 = \frac{13}{12} - \frac{2}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_3 + \frac{4}{12}x_4$$

$$x_3 = \frac{29}{10} - \frac{3}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_4$$

$$x_4 = \frac{31}{9} - \frac{2}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{3}{9}x_3$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{3}{9} & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{29}{10} \\ \frac{31}{9} \end{bmatrix}$$

$$\max_{1 \le i \le 4} \sum_{j=1}^{4} |\alpha_{ij}| = \max\left(\frac{9}{13}, \frac{7}{12}, \frac{8}{10}, \frac{6}{9}\right) = 0.8 < 1$$

نختار

$$X^{\circ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{18}{13} - \frac{5}{13}x_2^{\circ} + \frac{3}{13}x_3^{\circ} - \frac{1}{13}x_4^{\circ} = \frac{18}{13} = 1.385$$

$$x_2^1 = \frac{13}{12} - \frac{2}{12}x_1^1 - \frac{1}{12}x_3^{\circ} + \frac{4}{12}x_4^{\circ} = \frac{13}{12} - \frac{2}{12}(1.385)$$

$$= \frac{10.23}{12} = 0.853$$

$$x_3^1 = \frac{29}{10} - \frac{3}{10}x_1^1 + \frac{4}{10}x_2^1 - \frac{1}{10}x_4^{\circ}$$

$$= \frac{29}{10} - \frac{3}{10}(1.385) + \frac{4}{10}(0.853) = \frac{28.257}{10} = 2.826$$

$$x_4^1 = \frac{31}{9} - \frac{2}{9}x_1^1 - \frac{1}{9}x_2^1 + \frac{3}{9}x_3^1$$

$$= \frac{31}{9} - \frac{2}{9}(1.385) - \frac{1}{9}(0.853) + \frac{3}{9}(2.826) = \frac{35.855}{9} = 3.984$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1.385 \\ 0.853 \\ 2.826 \\ 3.984 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{18}{13} - \frac{5}{13}x_2^1 + \frac{3}{13}x_3^1 - \frac{1}{13}x_4^1$$

$$= \frac{18}{13} - \frac{5}{13}(0.853) + \frac{3}{13}(2.826) - \frac{1}{13}(3.984) = \frac{18.229}{13} = 1.402$$

$$x_2^2 = \frac{13}{12} - \frac{2}{12}x_1^2 - \frac{1}{12}x_3^1 + \frac{4}{12}x_4^1$$

$$= \frac{13}{12} - \frac{2}{12}(1.402) - \frac{1}{12}(2.826) + \frac{4}{12}(3.984) = \frac{23.306}{12} = 1.942$$

$$x_3^2 = \frac{29}{10} - \frac{3}{10}x_1^2 + \frac{4}{10}x_2^2 - \frac{1}{10}x_4^1$$

$$= \frac{29}{10} - \frac{3}{10}(1.402) + \frac{4}{10}(1.942) - \frac{1}{10}(3.984) = \frac{28.578}{10} = 2.858$$

$$x_4^2 = \frac{31}{9} - \frac{2}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_2^2 + \frac{3}{9}x_3^2$$

$$= \frac{31}{9} - \frac{2}{9}(1.402) - \frac{1}{9}(1.942) + \frac{3}{9}(2.858) = \frac{34.828}{9} = 3.870$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1.402 \\ 1.942 \\ 2.858 \\ 3.870 \end{bmatrix}$$

وهكذا نتابع فنجد :

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.969 \\ 3.001 \\ 4.001 \end{bmatrix} \qquad X^4 = \begin{bmatrix} 1.012 \\ 1.999 \\ 2.996 \\ 3.996 \end{bmatrix} \qquad X^5 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.999 \\ 3.000 \\ 4.000 \end{bmatrix}$$

أي أن حل جملة المعادلات هو $X = X^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

شروط تقارب الحل ودراسة أخطاء الطرق غير المباشرة :

إذا كانت لدينا مجموعة من المعادلات الخطية $A\,X = B$

وكتبناها بالشكل $X = \alpha\,X + \beta$

إن تقارب الحل بالاعتماد على العلاقة التكرارية

$$X^{n+1} = \alpha\,X^n + \beta$$

يرتبط بقيم عناصر مصفوفة التكرار α

نظرية (3ـ1) :

إن متتاليـة التكـرار X^n التـي نحصـل عليهـا مـن تطبيـق العلاقـة التكراريـة

$$X^{n+1} = \alpha\,X^n + \beta$$

تتقارب من حل وحيد X لجملة المعادلات الخطية $A\,X = B$

إذا كان نظيم ما لمصفوفة التكرار α أقل مـن الواحـد وذلـك مهمـا كـان المتجـه الابتدائي X°.

الإثبات :

نفرض أن $X^{\circ}, X^1, X^2, \ldots$ هي متتالية التكرار التي نحصل عليها من تطبيق العلاقة التكراريـة $X^{n+1} = \alpha\,X^n + \beta$ ولنفـرض أن $\|\alpha\| < 1$ ولنثبـت أن للمعادلة $X = \alpha\,X + \beta$ حل وحيد مـن أجـل ذلـك يكفـي أن نثبـت أن للمعادلـة المتجانسة $X = \alpha\,X$ الحل الصفري فقط.

إذا كان X حلاً للمعادلة $X = \alpha\,X$ فإن :

$$0 \le \|X\| \le \|\alpha\|\,\|X\|$$

وبما أن $\|\alpha\| < 1$ فإن العلاقة الأخيرة لا تتحقق إلا إذا كان $\|X\| = 0$ أي إذا كـان $X=0$ هذا يعني أن للمعادلة $X = \alpha\,X$ الحل الصفري فقط.

لنثبت أن المتتالية X^n تتقارب من الحل الوحيد X

من أجل ذلك يمكن أن نكتب :

$$\forall\ n \quad X - X^n = (\alpha\,X + \beta) - \left(\alpha\,X^{n-1} + \beta\right) = \alpha\left(X - X^{n-1}\right)$$

$$X - X^n = (\alpha\,X + \beta) - \left(\alpha\,X^{n-2} + \beta\right) = \alpha\left(X - X^{n-2}\right)$$

وبالتالي :

$$X - X^n = \alpha\left(X - X^{n-1}\right) = \alpha\left[\alpha\left(X - X^{n-2}\right)\right] = \alpha^2\left(X - X^{n-2}\right)$$

وهكذا بالاستمرار نجد :

$$X - X^n = \alpha^n\left(X - X^{\circ}\right)$$

نأخذ نظيم الطرفين فنجد :

$$\left\|X - X^n\right\| = \left\|\alpha^n\left(X - X^{\circ}\right)\right\| \le \left\|\alpha^n\right\|\left\|X - X^{\circ}\right\|$$

∴

$$\leq \|\alpha\|^{n} \|X - X^{\circ}\|$$

وبما أن $\|\alpha\| < 1$ فإن $\|\alpha\|^{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ومنه فإن $\|X - X^{n}\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

وهذا يعني أن متتالية التكرار X^{n} تتقارب من الحل الوحيدX.

يمكن تقدير الخطأ المرتكب بتطبيق الطرق غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية كما يلي :

نفرض أن كلاً من X^{n-1} , X^{n} حلاً تقريبياً لمجموعة المعادلات الخطية

$$X = \alpha X + \beta$$

من أجل $k \geq 1$ يمكن أن نكتب :

$$\|X^{n+k} - X^{n}\| = \|X^{n+k} - X^{n+k-1} + X^{n+k-1} - \dots + X^{n+1} - X^{n}\|$$

$$\leq \|X^{n+k} - X^{n+k-1}\| + \|X^{n+k-1} - X^{n+k-2}\| + \dots + \|X^{n+1} - X^{n}\|$$

ولكن

$$X^{n+2} - X^{n+1} = \left(\alpha X^{n+1} + \beta\right) - \left(\alpha X^{n} + \beta\right)$$

$$= \alpha \left(X^{n+1} - X^{n}\right)$$

ومنه

$$\|X^{n+2} - X^{n+1}\| \leq \|\alpha\| \|X^{n+1} - X^{n}\|$$

$$\|X^{n+3} - X^{n+2}\| \leq \|\alpha\|^{2} \|X^{n+1} - X^{n}\|$$

$$\vdots$$

$$\|X^{n+k} - X^{n+k-1}\| \leq \|\alpha\|^{k-1} \|X^{n+1} - X^{n}\|$$

وبالتالي فإن :

$$\|X^{n+k} - X^{n}\| \leq \|X^{n+1} - X^{n}\| \|1 + \alpha + \alpha^{2} + \dots\|$$

وبما أن $1 \leq \|\alpha\|$ هو شرط تقارب متتالية التكرار حسب النظرية السابقة فإن :

$$1 + \alpha + \alpha^{2} + \dots = \frac{1}{1 - \|\alpha\|}$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $k \to \infty$ نجد أن :

$$\lim_{n \to \infty} X^{n+k} = X$$

وبالتالي يكون :

$$\|X - X^{n}\| \leq \frac{\|X^{n+1} - X^{n}\|}{1 - \|\alpha\|}$$

حيث أن X هو الحل الحقيقي أو الفعلي (المضبوط) لجملة المعادلات الخطية و X^{n} هو الحل التقريبي.

ونعلم أن $\|X^{n+1} - X^{n}\| \leq \|\alpha\| \|X^{n} - X^{n-1}\|$

ومنه $\|X^{n} - X^{n-1}\| \leq \|\alpha\|^{n} \|X^{1} - X^{\circ}\|$

بالتعويض في العلاقة $\|X - X^{n}\| \leq \dfrac{\|X^{n+1} - X^{n}\|}{1 - \|\alpha\|}$

نجد :

$$\|X - X^{n}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{n}}{1 - \|\alpha\|} \|X^{1} - X^{\circ}\|$$

وإذا فرضنا أن $X^{\circ} = \beta$ فإن :

$$\|X^{1} - X^{\circ}\| = \|\alpha X^{\circ} + \beta - \beta\|$$

$$= \|\alpha X^{\circ}\| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

وبالتالي فإن :

$$\|X - X^{n}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\|$$

وهي قيمة الخطأ المرتكب.

مثال (3ـ28) :

عين عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد حل جملة المعادلات التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-3}

$$\begin{aligned} 20\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 &= 25 \\ 2\,x_1 + 13\,x_2 - 2\,x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 + 4\,x_3 &= 2 \end{aligned}$$

الحل :

$$x_1 = \frac{25}{20} - \frac{2}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3$$

$$x_2 = \frac{30}{13} - \frac{2}{13}x_1 + \frac{2}{13}x_3$$

$$x_3 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{2}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{25}{20} \\ \frac{30}{13} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

نأخذ النظيم المتعلق بالأعمدة فنجد :

$$\|\alpha\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max(0.4038\,,\,0.35\,,\,0.2038) = 0.4038$$

$$\|\beta\|_1 = 4.0577$$

ومنه بالاعتماد على العلاقة :

$$\|X - X^n\| \le \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1-\|\alpha\|}\,\|\beta\| = \frac{(0.4038)^{n+1}}{1-(0.4038)}(4.0577)$$

$$= \frac{(0.4038)^{n+1}}{0.5962}(4.0577) \le 10^{-3}$$

ومنه

$$(0.4038)^{n+1} \le \frac{0.5962}{(4.0577)\,10^3}$$

نأخذ اللوغاريتم العشري للطرفين فنجد :

$$\begin{aligned} (n+1)(-0.3938) &\le \log(0.5962) - \log(4.0577) - 3 \\ -0.3938\,(n+1) &\le -0.2246 - 0.6083 - 3 \\ -0.3938\,(n+1) &\le -3.8329 \end{aligned}$$

$$n+1 > \frac{3.8329}{0.3938} = 9.7$$

ومنه $n \ge 9$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

لتكن $A = [\,a_{ij}\,]_n$ مصفوفة مربعة نقول عن العدد الحقيقي (المركب) λ أنــه قيمــة ذاتية للمصفوفة A إذا تحقق الشرط $AX = \lambda X$

حيث X متجه لا يساوي المتجه الصفري.

المتجه X يسمى بالمتجه الذاتي للمصفوفة A الموافق للقيمة الذاتية λ

يمكن كتابة العلاقة $AX = \lambda X$ بالشكل

$$(A - \lambda I)\,X = 0$$

حيث I المصفوفة الواحدية.

والمعادلة $(A-\lambda I)\,X = 0$ (I) تسمى بالمعادلة المتجانسة المميزة وهي تمثل n معادلة خطية متجانسة بـــ n مجهولاً أي أن :

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}\,x_2 + (a_{33}-\lambda)\,x_3 + \dots + a_{3n}\,x_n &= 0 \\ &\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n &= 0 \end{aligned}$$

لكي يكون لهذه الجملة حل غير الحل الصفري يجب أن تكون قيمة محدد الأمثال تساوي الصفر. أي أن :

$$|A - \lambda I| = 0$$

وهذا يكافئ :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المحدد نحصل على كثيرة الحدود المميزة التي تكتب على الشكل التالي :

$$p_n(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n$$

حيث أن

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

وهو مجموع كل المحددات الصغرى القطرية في المرتبة الأولى للمصفوفة A

$$p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

مجموع كل المحددات الصغرى القطرية في المرتبة الثانية

$$p_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

مجموع كل المحددات الصغرى القطرية في المرتبة الثالثة

وهكذا ... فإن p_n هو محدد المصفوفة A أي أن :

$$p_n = |A|$$

مثال (3—29) :

إذا كانت مصفوفة الأمثال من المرتبة الثالثة والمطلوب أوجد كثيرة الحدود المميزة.

الحل :

لتكن المصفوفة في المرتبة الثالثة هي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

إن كثيرة الحدود المميزة هي :

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda - p_3 = 0$$

$$= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

إن عدد المحددات الصغرى القطرية من المرتبة k للمصفوفة A يساوي

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \; ; \; k = 1, 2, \dots, n$$

وعدد كل المحددات من مختلف المراتب يساوي

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

إذا كان $0 \neq \alpha \in R$ و X متجهاً ذاتياً للمصفوفة A والذي يقابل القيمة الذاتية λ فإن أي متجه ذاتي Y من الشكل $Y = \alpha X$ هو متجه ذاتي للمصفوفة A أيضاً بالنسبة للقيمة الذاتية λ وذلك لأن :

$$AY = A(\alpha X) = \alpha(A\ X) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X) = \lambda Y$$

مثال (3—30) :

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A حيث

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

الحل :

كثيرة الحدود المميزة تعطى بالعلاقة :

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - p_1 \lambda + p_2$$
$$= \lambda^2 - (4+1)\lambda + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد : $(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 3$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة A.

لنوجد المتجهات الذاتية :

$$A X = \lambda X$$
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$4x_1 - x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

وهذه الجملة تكتب كما يلي :

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

من أجل $\lambda_1 = 2$ نجد :

$\therefore$

$$2x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

ومنه $x_2 = 2x_1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على المتجه الذاتي $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

ومن أجل $\lambda_2 = 3$ نجد :

$$(4-3)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-3)x_2 = 0$$

ومنه

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

أي أن $x_1 = x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على المتجه الذاتي $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$

مثال (3—31) :

عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها وذلك للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

كثيرة الحدود المميزة هي :

$$\begin{aligned} p_3(\lambda) &= \lambda^3 - p_1\,\lambda^2 + p_2\,\lambda - p_3 \\ &= \lambda^3 - 6\,\lambda^2 + (4+3+4)\,\lambda - 6 = 0 \\ &= \lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6 = 0 \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلة نجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2 \quad , \lambda_3 = 3$$

لنوجد المتجهات الذاتية :

$$A\ X = \lambda\ X$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{aligned} (2-\lambda)\,x_1 &= 0 \\ 2\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

من أجل $\lambda_1 = 1$ نجد :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$x_1 = 0$$
$$x_3 = -x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نختار $x_2 = 1$ فنحصل على $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ المتجه الذاتي الأول المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$.

من أجل $\lambda_2 = 2$ نجد :

$$\begin{aligned} 0\,x_1 &= 0 \\ 2\,x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$x_3 = -2\,x_1$$
$$x_2 = -x_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -2\,x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

نختار $x_1 = 1$ فنحصل على $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ المتجه الذاتي الثاني المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$

ومن أجل $\lambda_3 = 3$ نجد :

$$\begin{aligned} -x_1 &= 0 \\ 2\,x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$x_1 = 0$$
$$x_3 = x_2$$

∴

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\x_2\\x_2\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

نختار $x_2 = 1$ فنحصل على المتجه الذاتي الثالث المقابل $X_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

للقيمة $\lambda_3 = 3$.

مثال (3ـ32) :

احسب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\-2 & 2 & 2\\-4 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

ثم احسب $T^{-1}AT$ حيث T هي المصفوفة المكونة من المتجهات الذاتية لـ A كأعمدة.

الحل :

$$p_3(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على القيم الذاتية للمصفوفة A

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 10$$

لنوجد المتجهات الذاتية

من العلاقة $AX = \lambda X$ نجد :

$$\begin{aligned}(5-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0\\ -2x_1 + (2-\lambda)x_2 + 2x_3 &= 0\\ -4x_1 + 2x_2 + (5-\lambda)x_3 &= 0\end{aligned}$$

من أجل $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ نجد :

$$\begin{aligned}4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0\\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0\\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}$$

ومنه $x_2 = 2x_1 - 2x_3$

نختار $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ نجد $x_2 = 2$ ومنه

المتجه الذاتي الأول $X_1 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

ثم نختار $x_2 = 0$ فنجد $x_1 = x_3$ ومنه

$$X_2 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\0\\x_1\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

المتجه الذاتي الثاني حيث $x_1 = 1$

من أجل $\lambda_3 = 10$ نجد :

$$\begin{aligned}-5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0\\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 0\\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

هذه جملة معادلات خطية متجانسة نحلها بطريقة غاوس مثلاً نجد :

$$\begin{bmatrix}-2 & -8 & 2\\-5 & -2 & -4\\-4 & 2 & -5\end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\-5 & -2 & -4\\-4 & 2 & -5\end{bmatrix} \overset{\substack{5R_1+R_2\\4R_1+R_3}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & 18 & -9\\0 & 18 & -9\end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & 18 & -9\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

نكتب الجملة المقابلة

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$18x_2 - 9x_3 = 0$$

ومنه $x_3 = 2x_2$

$$x_1 = x_3 - 4x_2 = -2x_2$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

المتجه الذاتي الثالث حيث $x_2 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نوجد معكوس هذه المصفوفة $T^{-1} = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

وبإجراء عملية الضرب نجد :

$$T^{-1} A T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

طريقة التكرار لتعيين أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المرتبط بها :

في بعض الأحيان نحتاج لتعيين أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المقابل لها والطريقة التالية تساعدنا في ذلك.

إذا كانت $A = \left[a_{ij} \right]_n$ مصفوفة مربعة معرفة على الحقل R وإذا فرضنا أن القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ للمصفوفة A أعداد حقيقية فقط وأن المتجهات الذاتية المقابلة لها $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة خطياً.

بفرض Y_o متجهاً اختيارياً يمكن كتابته على الشكل

$$Y_o = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

لنحسب $Y_1 = A\,Y_o$

$$Y_1 = A\,Y_o = C_1 A X_1 + C_2 A X_2 + \ldots + C_n A X_n$$

وبما أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي متجهات ذاتية للمصفوفة A فإن

$$A X_i = \lambda X_i \ , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ومنه

$$Y_1 = C_1 \lambda_1 X_1 + C_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + C_n \lambda_n X_n$$

نحسب كذلك على الترتيب :

$$Y_2 = A\,Y_1 \ , \ Y_3 = A\,Y_2 \ , \ldots , Y_{i+1} = A\,Y_i$$

نجد كما في حساب Y_1 أن :

$$Y_2 = C_1 \lambda_1^2 X_1 + C_2 \lambda_2^2 X_2 + \ldots + C_n \lambda_n^2 X_n$$
$$\vdots$$
$$Y_i = C_1 \lambda_1^i X_1 + C_2 \lambda_2^i X_2 + \ldots + C_n \lambda_n^i X_n$$

لنفرض أن القيم الذاتية للمصفوفة A مرتبة حسب قيمها المطلقة كما يلي :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

في هذه الحالة يمكن أن نكتب

$$Y_i = \lambda_1^i \left[C_1 X_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i X_2 + \ldots + C_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^i X_n \right]$$

وبالتالي يكون لدينا من أجل قيم كبيرة لـ i

$$Y_i = C_1 \lambda_1^i X_1$$

$$Y_{i+1} = C_1 \lambda_1^{i+1} X_1 = \lambda_1 \left(C_1 \lambda_1^{i} X_1\right) = \lambda_1 Y_i$$

نستنتج إذن أن مركبات المتجهين Y_i , Y_{i+1} تصبح تقريباً متناسبة ونسبتها تساوي تقريباً λ_1 أي القيم الذاتية للمصفوفة A وذات أكبر قيمة مطلقة وبالتالي إنطلاقاً من متجه اختياري Y_0 نحسب على التوالي :

$$Y_1 = A Y_0 \;, Y_2 = A Y_1 \;, \ldots, Y_{i+1} = A \; Y_i$$

حتى الحصول على متجهين Y_i , Y_{i+1} بحيث تصبح مركباتهما متناسبة فعندها تكون النسبة هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة وبتقسيم هذه النسبة على مركبات المتجه Y_{i+1} هذه نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية التي أوجدناها.

ونلاحظ أن :

$$\begin{aligned} Y_1 &= A\, Y_0 \\ Y_2 &= A^2\, Y_0 \\ &\vdots \\ Y_{i+1} &= A^i\, Y_0 \end{aligned}$$

ولذلك ندعو طريقة التكرار هذه بطريقة القوى.

مثال (3ـ33) :

عين أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المقابل لها بطريقة التكرار للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$

الحل :

نأخذ المتجه الاختياري $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ولنحسب المتجهات $Y_1 , Y_2 , \cdots\cdots$

$$Y_1 = A\,Y_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{bmatrix}$$

نستخدم المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{bmatrix}$ كمتجه تقريبي جديد لحساب Y_2 أي :

$$Y_2 = A\,Y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{113}{3} \end{bmatrix} = \frac{38}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{264}{19} \\ \frac{1538}{38} \end{bmatrix} = 13.8947\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{bmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.6516 \\ 40.8677 \end{bmatrix} = 13.6516\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9936 \end{bmatrix}$$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9936 \end{bmatrix} = 13.9744\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9995 \end{bmatrix}$$

$$Y_6 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2.9995 \end{bmatrix} = 13.998\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 13.998$ والمتجه الذاتي المقابل لها هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

نلاحظ أنه عند استخدام طريقة التكرار فإننا نحصل على القيمة الذاتية ونحصل على المتجه الذاتي المقابل لهذه القيمة مباشرة بينما سابقاً كنا نحتاج لحل المعادلة $p_n(\lambda) = 0$ لإيجاد القيم الذاتية ونحتاج لعمليات منفصلة (حل جملة معادلات خطية متجانسة) لإيجاد المتجهات الذاتية.

طريقة التكرار لتعيين أصغر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المرتبط بها :

يمكن تطبيق طريقة التكرار لتعيين أصغر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المقابل لها، فمن أجل المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]_n$ و X متجهاً ذاتياً لـ A مقابلاً للقيمة الذاتية λ يكون لدينا $AX=\lambda X$ نضرب طرفي هذه العلاقة بـ A^{-1} فنجد :

$$A^{-1}.AX=\lambda A^{-1}X$$

$$X=\lambda A^{-1}X$$

أو

$$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$$

يتضح من هذه العلاقة أن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لـ A^{-1} وبالتالي إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة A فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لـ A^{-1}

هذا يعني أنه إذا طبقنا طريقة التكرار السابقة على المصفوفة A^{-1} لإيجاد أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المقابل لها فإننا نحصل على قيمة ذاتية λ' أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} وبالتالي يكون مقلوبها $\frac{1}{\lambda'}$ أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A.

مثال (3–34):

عين أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{bmatrix}$ والمتجه المقابل لها.

الحل :

نعين معكوس A أي

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}13 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}$$

نختار $Y_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ فنجد :

$$Y_1=A^{-1}Y_0=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6425\\ -0.9714\end{bmatrix}$$

$$=0.6425\begin{bmatrix}1\\ -0.1111\end{bmatrix}$$

$$Y_2=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.1111\end{bmatrix}=0.9599\begin{bmatrix}1\\ -0.2398\end{bmatrix}$$

$$Y_3=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.2398\end{bmatrix}=0.9967\begin{bmatrix}1\\ -0.2494\end{bmatrix}$$

$$Y_4=\begin{bmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.2494\end{bmatrix}=0.9995\begin{bmatrix}1\\ -0.2500\end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن الفرق بين المركبتين في عمليتي تكرار متتاليتين أصبح 0.0006 فإذا اكتفينا بهذه الدقة تكون أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي

$$\frac{1}{0.9995}=1.0095$$

والمتجه الذاتي المقابل لهذه القيمة هو $\begin{bmatrix}1\\ -0.25\end{bmatrix}$

تمارين

(1) احسب مقلوب المصفوفة التالية : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) عين مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(3) عين رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

(4) عين رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$

(5) حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية :

$$x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 0$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

(6) استخدم طريقة معكوس مصفوفة لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 17$$

(7) حل بطريقة كرامر جملة المعادلات الخطية التالية :

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

(8) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 12$$
$$3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 38$$

بطريقة كرامر.

(9) استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

(10) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$
$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3$$

بطريقة غاوس

(11) احسب باستخدام طريقة غاوس قيمة المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(12) أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ بطريقة غاوس.

(13) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

بطريقة غاوس ـــ جوردان.

(14) باستخدام طريقة غاوس ـــ جوردان حل مجموعة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_2 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(15) أوجد بطريقة كراوت حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(16) باستخدام طريقة كراوت أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(17) اعتماداً على طريقة جاكوبي أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \end{aligned}$$

(18) أوجد بطريقة جاكوبي حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 &= 18 \\ 2x_1 + 12x_2 + x_3 - 4x_4 &= 13 \\ 3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 &= 29 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 31 \end{aligned}$$

(19) عين عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-3}

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(20) حدد عدد الخطوات الواجب إجراؤها لإيجاد جذور الجملة التالية وبخطأ لا يتجاوز 10^{-4}

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15 \end{aligned}$$

(21) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

بطريقة جاكوبي ثم بطريقة غاوس ـــ سيدل.

(22) عين القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(23) عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

(24) عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(25) عين أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ثم أوجد المتجه الذاتي الموافق.

(26) عين أكبر قيمة ذاتية وأصغر قيمة ذاتية والمتجهين المرتبطين بهما للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

الاستيفاء الداخلي وجداول الفروق

غالباً ما نحصل على قيم نتيجة تجربة ما فإذا كانت هذه القيم معطاة بجدول كما يلي :

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

وهذا ما نسميه الطريقة الجدولية لتعيين الدالة.

قد نحتاج الحصول على قيمة الدالة $f(x)$ من أجل أي قيمة للمتغير x تقع بين النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ أو خارجها

بحيث $x \neq x_i \; , \; i = 0, 1, 2, \dots, n$

إن العملية تكون سهلة فيما لو كانت صيغة الدالة $f(x)$ معلومة ولكن في حالة صيغة الدالة $f(x)$ غير معلومة، فإننا نقوم اعتماداً على الجدول المعطى بتشكيل دالة تقريبية $p(x)$ والتي تكون قريبة إلى الدالة $f(x)$ وغالباً ما تكون الدالة التقريبية $p(x)$ حدودية وبالاعتماد على الحدودية $p(x)$ نستطيع تعيين تقريب للدالة المطلوبة بحيث يكون $f(x) \cong p(x)$.

الطريقة المتبعة في تعيين الحدودية $p(x)$ تعتمد على تطابق قيم الدالة التجريبية $f(x)$ والحدودية $p(x)$ في النقاط $x_i ; i = 0, 1, 2, \dots, n$

أي أن $p(x_0) = f(x_0) \; , p(x_1) = f(x_1) \; , \dots, p(x_n) = f(x_n)$

إن مسألة تعيين الحدودية $p(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم الدالة $f(x)$ عند نقاط واقعة بين النقط $x_0, x_1, \dots, x_n$ تسمى بالاستيفاء الداخلي (الاستكمال) وتسمى الحدودية $p(x)$ بحدودية الاستيفاء كما تسمى النقط $x_0, x_1, \dots, x_n$ بنقط الارتكاز.

ويمكن التفريق بين نوعين من الاستيفاء

إذا كانت النقطة المطلوب تعيين قيمة الدالة عندها واقعة داخل النقط $x_0, x_1, \dots, x_n$ فإن الاستيفاء يسمى بالاستيفاء الداخلي.

أما إذا كانت النقطة المطلوب تعيين قيمة الدالة عندها واقعة خارج النقاط $x_o, x_1, \ldots, x_n$ فإن الاستيفاء يسمى بالاستيفاء الخارجي.

مثال (4–1) :

في تجربة معملية في معمل الحرارة سجلت القراءات التالية لدرجات الحرارة x وطول السلك y من المعدن.

x	0	10	20
y	150	151	155

أوجد علاقة خطية بين x و y ثم أوجد طول السلك المعدني عند $x=15^\circ$ ثم عند $x = 50^\circ$ ثم أوجد x المناظرة لـ $y = 153$ cm

الحل :

العلاقة العامة للخط المستقيم $y = a x + b$

ولتعيين a و b نختار النقطتين (0, 150)، (20, 155) من أجل أن نغطي الفترة [0, 20]

ومنه نحصل على المعادلتين

$$150 = b$$
$$155 = 20a + b$$

بحل المعادلتين نجد :

$$b = 150 \quad , a = \frac{1}{4}$$

وبالتالي نحصل على العلاقة الخطية بين x و y

$$y = \frac{1}{4}x + 150$$

هذه العلاقة تسمى حدودية الاستيفاء

عند النقطة $x = 15^\circ$ فإن الاستيفاء داخلي (لأن $x \in [0, 20]$) وطول السلك المعدني يساوي:

$$y = \frac{1}{4}(15) + 150 = 153.75 \text{ cm}$$

وعند النقطة $x = 50^\circ$ فإن الاستيفاء خارجي وطول السلك المعدني يساوي

$$y = \frac{1}{4}(50) + 150 = 162.5 \text{ cm}$$

لإيجاد x فإن الاستيفاء عكسي

ومنه

$$153 = \frac{1}{4}x + 150$$
$$x = 12^\circ C$$

توجد طرائق كثيرة لتعيين حدودية الاستيفاء وسوف نتعرف على أهم هذه الطرائق.

الطريقة العامة في الاستيفاء الداخلي :

لتكن الدالة $y = f(x)$ والمعرفة بالجدول التالي :

x	x_o	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$y = f(x)$	y_o	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

ولتعيين الحدودية $p_n(x)$ من الدرجة n والتي تأخذ قيم الدالة $y = f(x)$ نفسها عند نقط الارتكاز $x_i \; ; i = 0, 1, 2, \ldots, n$

لنفرض أن الحدودية $p_n(x)$ هي من الشكل :

$$p_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

حيث $a_i \; i=0, 1, 2, \ldots, n$ ثوابت يمكن تعيينها من حل جملة المعادلات الخطية التالية والناتجة من تعويض $(x_i, y_i) \; ; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ في الحدودية $p_n(x)$

$$a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + \ldots + a_n x_o^n = y_o$$

$$a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_o + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

يمكن حل هذه الجملة بطريقة كرامر مثلاً.

نحسب محدد الأمثال

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن هذا المحدد هو محدد فاندرموند حيث منشوره يكون من الشكل:

$$\Delta = (x_1-x_o)(x_2-x_o)\dots(x_n-x_o)(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots$$
$$(x_n-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)(x_4-x_3)\dots(x_n-x_3)\dots(x_n-x_{n-1})$$

ثم نعين المحددات $\Delta_n ,\dots, \Delta_2 , \Delta_1 , \Delta_o$ والتي نحصل عليها من المحدد Δ وذلك

باستبدال عمود الثوابت $\begin{bmatrix} y_o \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ بالعمود الأول ثم العمود الثاني وهكذا حتى العمود الأخير

فنحصل على الثوابت $a_i \,;\, i = 0, 1, 2, \dots, n$ من العلاقات :

$$a_o = \frac{\Delta_o}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

والحدودية الملائمة (المناسبة) هي $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta} x^i$

مثال (4—2) :

أوجد باستخدام الطريقة العامة حدودية الاستيفاء الداخلي الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	2
y = f(x)	-1	2	7

الحل :

حدودية الاستيفاء الملائمة في الشكل

$$p_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

وجملة المعادلات الخطية الموافقة هي :

$$a_o + a_1(0) + a_2(0) = -1$$
$$a_o + a_1(1) + a_2(1) = 2$$
$$a_o + a_1(2) + a_2(4) = 7$$

ومنه

$$a_o = -1$$
$$a_o + a_1 + a_2 = 2$$
$$a_o + 2a_1 + 4a_2 = 7$$

نحل هذه الجملة بطريقة كرامر.

نحسب محدد الأمثال Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (1-0)(2-0)(2-1) = 2 \neq 0$$

ثم نحسب المحددات $\Delta_2 , \Delta_1 , \Delta_o$

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4-2) = -2$$

$\therefore$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

ومنه

$$a_o = \frac{\Delta_o}{\Delta} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتعويض بالحدودية نجد :

$$p_2(x) = -1 + 2x + x^2 = x^2 + 2x - 1$$

طريقة لاغرانج في الاستيفاء الداخلي :

لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	x_o	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	$y_o = f(x_o)$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

إن صيغة لاغرانج العامة لإيجاد الحدودية الملائمة للدالة $f(x)$ تعطى بالشكل التالي

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, f(x_j) \\ &= L_o(x)\, f(x_o) + L_1(x)\, f(x_1) + \ldots + L_n(x)\, f(x_n) \\ &= L_o(x)\, y_o + L_1(x)\, y_1 + \ldots + L_n(x)\, y_n \end{aligned}$$

حيث $L_j(x)$ حدوديات من الدرجة n وتسمى حدوديات لاغرانج وتعطى كما يلي :

$$\begin{aligned} L_j(x) &= \frac{(x-x_o)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})\,(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_o)\,(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})\,(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \quad ; j = 0, 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج تحقق العلاقة :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

إن قيمة الحدودية $p_n(x)$ عند أي نقطة من نقط الارتكاز x_i $i=0,1,2,\ldots,n$ تساوي قيمة الدالة $f(x)$ أي أن :

$$\begin{aligned} p_n(x_i) &= \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i)\, f(x_j) \\ &= L_o(x_i)\, f(x_o) + L_1(x_i)\, f(x_1) + \ldots + L_i(x_i)\, f(x_i) + \ldots \\ &\quad + L_n(x_i)\, f(x_n) = f(x_i) \end{aligned}$$

هذا يعني أن الحدودية $p_n(x)$ (حدودية لاغرانج) هي حدودية ملائمة للدالة $f(x)$.

مثال (4-3) : باستخدام صيغة لاغرانج عين الحدودية الملائمة للدالة $f(x)$ والمعرفة بالجدول

x	1	3
$y=f(x)$	4	-2

الحل :

$$x_o = 1, \quad x_1 = 3$$

$$f(x_o) = 4, \quad f(x_1) = -2$$

∴ ومنه

$$L_o(x) = \frac{x - x_1}{x_o - x_1} = \frac{x - 3}{1 - 3} = -\frac{1}{2}(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$p_1(x) = L_o(x) f(x_o) + L_1(x) f(x_1)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 3)(4) - \frac{1}{2}(x - 1)(-2)$$

$$= -2(x - 3) - (x - 1) = -3x + 7$$

مثال (4ـــ4) :

باستخدام صيغة لاغرانج عين الحدودية الملائمة للدالة f(x) المعرفة بالجدول:

x	-1	0	2
y = f(x)	2	-1	5

ثم أوجد القيمة التقريبية لـــ f(1)

الحل :

$$L_o(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)} = \frac{x(x-2)}{(-1)(-3)} = \frac{1}{3}x(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1)(-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{(2+1)(2)} = \frac{1}{6}x(x+1)$$

$$p_2(x) = L_o(x) f(x_o) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$= \frac{1}{3}x(x-2)(2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(-1) + \frac{1}{6}x(x+1)(5)$$

$$= \frac{4(x^2 - 2x) + 3(x^2 - x - 2) + 5(x^2 + x)}{6}$$

$$= \frac{12x^2 - 6x - 6}{6} = 2x^2 - x - 1$$

$$p_2(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$p_2(1) = 2(1)^2 - (1) - 1 = 0$$

ملاحظة :

إذا كانت نقط الارتكاز $x_o, x_1, \ldots, x_n$ متساوية البعد فيما بينها أي أن :

$$x_1 - x_o = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$$

أو

$$\forall\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ x_{i+1} - x_i = h$$

وبفرض أن $s = \frac{x - x_o}{h}$ أو $x = x_o + hs$

فإن :

$$x_1 = x_o + h,\ x_2 = x_o + 2h,\ \ldots,\ x_i = x_o + ih,\ x_j = x_o + jh$$

$$x - x_i = x_o + hs - (x_o + ih) = h(s - i)$$

$$x_j - x_i = x_o + jh - (x_o + ih) = h(j - i)$$

بالتعويض في حدوديات لاغرانج نجد :

$$L_j(s) = \frac{h^n s(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{h^n j(j-1)(j-2)\ldots(j-n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(s - i)}{(j - i)}$$

وتصبح حدودية لاغرانج في هذه الحالة من الشكل :

$$p_n(s) = \sum_{j=0}^{n} L_j(s) f_j$$

أوجد الحدودية الملائمة لهذه الدالة بطريقة لاغرانج

مثال (4–5) :

لتكن الدالة $f(x) = 3^x$ المعرفة عند النقط التالية

$$x_0 = -1 \;,\; x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1$$

الحل :

نلاحظ أن نقط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها وأن $h = 1$، $n=2$

$$f_0 = f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{3}$$
$$f_1 = f(x_1) = f(0) = 1$$
$$f_2 = f(x_2) = f(1) = 3$$

نوجد كثيرات حدود لاغرانج :

$$L_0(s) = \prod_{i=0}^{2} \frac{(s-i)}{(j-i)} = \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$
$$L_1(s) = \frac{s(s-2)}{(1)(-1)} = -s(s-2)$$
$$L_2(s) = \frac{s(s-1)}{2(1)} = \frac{s(s-1)}{2}$$

ومنه الحدودية الملائمة

$$p_2(s) = L_0(s) f_0 + L_1(s) f_1 + L_2(s) f_2$$
$$= \frac{(s-1)(s-2)}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \left[-s(s-2)\right](1) + \frac{s(s-1)}{2}(3)$$

ولدينا
$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-(-1)}{1} = x + 1$$

بالتعويض نجد :

$$p_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1) - (x+1)(x-1) + \frac{3}{2}x(x+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^2-x\right) - \left(x^2-1\right) + \frac{3}{2}\left(x^2+x\right)$$
$$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة لاغرانج في الاستيفاء الداخلي :

يمكن في حالة استخدام صيغة لاغرانج في الاستيفاء الداخلي تقدير الخطأ المرتكب عند حساب قيمة الدالة في نقطة ما.

نظرية (4–1) :

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة وبفرض أن النقطة $x = \overline{x}$ واقعة داخل الفترة التي تحوي النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ بحيث أن $\overline{x} \neq x_i \;;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية :

$$e(\overline{x}) = f(\overline{x}) - p_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\mu) - w(\overline{x})}{(n+1)!}$$

حيث
$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

و $p_n(x)$ كثيرة الحدود الملائمة للدالة $f(x)$ في النقط $x_i,\ i = 0,1,2,\ldots,n$

الإثبات : بفرض أن $p_n(\overline{x})$ قيمة تقريبية لـ $f(\overline{x})$

ولنوجد الفرق $f(\overline{x}) - p_n(\overline{x})$ من أجل ذلك نأخذ الدالة المساعدة التالية :

$$\varphi(x) = f(x) - p_n(x) - R\,w(x)$$

ونعين الثابت R من الشرط $\varphi(\overline{x}) = 0$ ثم نقدر الخطأ في النقطة $x = \overline{x}$ التي تنعدم فيها الدالة $\varphi(x)$ بالاعتماد على الدالة المساعدة نجد :

$$R = \frac{f(\overline{x}) - p_n(\overline{x})}{w(\overline{x})} \qquad (1)$$

نلاحظ أن الدالة $\varphi(x)$. تنعدم عند (n+2) نقطة هي :

$$I = \left[\, x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x} \,\right]$$

وبالاعتماد على نظرية رول فإن المشتق $\varphi^{(n+1)}(x)$ ينعدم في نقطة μ في الفترة I أي أن :

$$\varphi^{(n+1)}(\mu) = 0$$

باشتقاق الدالة المساعدة (n+1) مرة نجد :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - R\,(n+1)\,!$$

حيث $p_n^{(n+1)}(x) = 0$ لأن $p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n والحدودية w(x) من الدرجة (n+1)

بفرض $\mu = x$ نجد :

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\mu) = f^{(n+1)}(\mu) - R\,(n+1)\,!$$

ومنه

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)\,!} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)\, w(\bar{x})}{(n+1)\,!}$$

إذا رمزنا بالرمز $M = \max_{x_o \le \mu \le x_n} \left| f^{(n+1)}(\mu) \right|$

فإن : $\left| e(\bar{x}) \right| \le \frac{M}{(n+1)\,!} \left| w(\bar{x}) \right|$

مثال (4ـ6) :

أوجد الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x) = \frac{1}{x}$ والمعرفة بالجدول التالي

x	2	2.5	4
y = f(x)	0.5	0.4	0.25

ثم أوجد القيمة التقريبية لـــ f(3) واحسب الخطأ المرتكب.

الحل :

$$L_o(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_o-x_1)\,(x_o-x_2)} = \frac{(x\text{-}2.5)\,(x\text{-}4)}{(2\text{-}2.5)\,(2\text{-}4)} = x^2 - 6.5\,x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_o)\,(x-x_2)}{(x_1-x_o)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x\text{-}2)\,(x\text{-}4)}{(2.5\text{-}2)\,(2.5\text{-}4)} = -\frac{4}{3}\left(x^2 - 6x + 8\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_o)\,(x-x_1)}{(x_2-x_o)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x\text{-}2)\,(x\text{-}2.5)}{(4\text{-}2)\,(4\text{-}2.5)} = \frac{1}{3}\left(x^2 - 4.5\,x + 5\right)$$

الحدودية الملائمة هي :

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_o(x)\, f(x_o) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2) \\ &= \left(x^2 - 6.5\,x + 10\right)(0.5) - \frac{4}{3}\left(x^2 - 6\,x + 8\right)(0.4) + \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(x^2 - 4.5\,x + 5\right)(0.25) \\ &= 0.05\,x^2 - 0.425\,x + 1.15 \end{aligned}$$

القيمة التقريبية لـــ f(3) هي

$$f(3) = p_2(3) = 0.05\,(3)^2 - 0.425\,(3) + 1.15 = 0.325$$

لنحسب الخطأ المرتكب

لدينا n = 2 ومنه

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(n+1)}(\mu) = f'''(\mu) = -\frac{6}{\mu^2}$$

∴

وكون $4 > \mu > 2$ فإن $\frac{1}{4^4} < \frac{1}{\mu^4} < \frac{1}{2^4}$

أي أن : $\frac{1}{256} < \frac{1}{\mu^2} < \frac{1}{16}$

$$w(3) = (3-2)\,(3-2.5)\,(3-4) = -\,0.5$$

وبالتالي فإن الخطأ هو :

$$|\,e(3)\,| \le \frac{\frac{6}{16}}{3\,!}\,|-0.5| = 0.031$$

مثال (4—7) :

لتكن الدالة $y = \ln x$ معرفة بالجدول التالي :

x	0.40	0.50	0.70	0.8
y = f(x)	-0.916291	-0.693147	-0.386675	-0.223144

أوجد $\ln(0.60)$ ثم عين الخطأ المرتكب.

الحل :

$$L_o(0.60) = \frac{(0.60\text{-}0.50)\,(0.60\text{-}0.70)\,(0.60\text{-}0.80)}{(0.40\text{-}0.50)\,(0.40\text{-}0.70)\,(0.40\text{-}0.80)} = -0.166$$

$$L_1(0.60) = \frac{(0.60\text{-}0.40)\,(0.60\text{-}0.70)\,(0.60\text{-}0.80)}{(0.50\text{-}0.40)\,(0.50\text{-}0.70)\,(0.50\text{-}0.80)} = 0.666$$

$$L_2(0.60) = \frac{(0.60\text{-}0.40)\,(0.60\text{-}0.50)\,(0.60\text{-}0.80)}{(0.70\text{-}0.40)\,(0.70\text{-}0.50)\,(0.70\text{-}0.80)} = 0.666$$

$$L_3(0.60) = \frac{(0.60\text{-}0.40)\,(0.60\text{-}0.50)\,(0.60\text{-}0.70)}{(0.80\text{-}0.40)\,(0.80\text{-}0.50)\,(0.80\text{-}0.70)} = -0.166$$

$$p_3(0.60) = L_o(0.60)\,f(x_o) + L_1(0.60)\,f(x_1) + \frac{1}{2}L_2\,f(x_2) + $$
$$+ L_3\,(0.60)\,f(x_3)$$

$$= -0.166\,(-0.916291) + 0.666\,(-0.693147) +$$
$$+ 0.666\,(-0.356675) - 0.166\,(-0.223144)$$
$$p_3(0.60) = -0.5100354$$

لتعيين الخطأ

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad , \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M = \max_{x_o \le \mu \le x_n} \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{6}{(0.4)^4} = 234.175$$

$$w(0.60) = (0.60\text{-}0.4)\,(0.60\text{-}0.50)(0.60\text{-}0.70)\,(0.60\text{-}0.80)$$
$$= 0.0004$$

$$e(0.60) \le \frac{M}{4\,!}\,w(0.60) = \frac{234.375}{24}\,(0.0004)$$
$$= 0.0039$$

الفروق المنتهية وأنواعها :

يعرف المؤثر التفاضلي Δ في الدالة $y = f(x)$ بالعلاقة التالية :

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \text{و} \quad i = 0, 1, 2, \ldots ;\ f_i = f(x_i)$$

فمثلاً $\Delta f_o = f_1 - f_o\ ,\ \Delta f_1 = f_2 - f_1$ وهكذا ...

والتي تسمى بالفروق التقدمية الأولى للدالة $y = f(x)$ وهذه الفروق يمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

ويمكن إيجاد الفروق التقدمية الثانية للدالية $f(x)$ كما يلي :

$$\Delta^2 f_o = \Delta(\Delta f_o) = \Delta(f_1 - f_o) = \Delta f_1 - \Delta f_o$$
$$= f_2 - f_1 - (f_1 - f_o) = f_2 - 2 f_1 + f_o$$
$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i$$

∴

وهكذا يمكن إيجاد الفروق التقدمية الثالثة والرابعة للدالة f(x)

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3 f_{i+2} + 3 f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^4 f = f_{i+4} - 4 f_{i+3} + 6 f_{i+2} - 4 f_{i+1} + f_i$$

وبالشكل العام يمكن أن نكتب :

$$\Delta^n f_i = f_{i+n} - n f_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{i+n-2} + \dots + (-1)^n f_i$$

أو

$$\Delta^n f_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_{i+n-k}$$

ويمكن كتابة جدول الفروق التقدمية كما يلي :

x	$y = f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
x_0	f_0						
		Δf_0					
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$				
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$		
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$		$\Delta^6 f_0$
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$	
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$		
		Δf_4		$\Delta^3 f_3$			
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$				
		Δf_5					
x_6	f_6						

وتسمى هذه الفروق بالفروق المنتهية (المحدودة) .

مثال (4ـــ8):

عين جدول الفروق للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6
y = f(x)	0	1	16	81	256	625	1296

الحل :

الجدول المطلوب هو كما يلي :

x	y = f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
0	0						
		1					
1	1		14				
		15		36			
2	16		50		24		
		65		60		0	
3	81		110		24		0
		175		84		0	
4	256		194		24		
		369		108			
5	625		302				
		671					
6	1296						

بالإضافة إلى الفروق التقدمية أو الأمامية يوجد نوع آخر من الفروق ويسمى بالفروق التراجعية أو الخلفية.

الفروق التراجعية الأولى للدالة $y = f(x)$ تعطى كما يلي :

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \qquad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\nabla y_1 = y_1 - y_o$$

الفروق التراجعية الثانية للدالة $f(x)$

$$\nabla^2 y_n = \nabla(\nabla y_n) = \nabla(y_n - y_{n-1}) = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$$

$$= y_n - y_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2}) = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} - y_{i-2}$$

$$\nabla^2 y_2 = y_2 - 2y_1 + y_o$$

الفروق التراجعية الثالثة للدالة $y = f(x)$

$$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1}$$

$$\nabla^3 y_i = \nabla^2 y_i - \nabla^2 y_{i-1}$$

$$\nabla^3 y_3 = \nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2$$

ويمكن كتابة جدول الفروق التراجعية كما يلي :

x	$y=f(x)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
x_0	$y_0=f_0$			
		∇y_1	$\nabla^2 y_2$	$\nabla^3 y_3$
x_1	y_1			
		∇y_2	$\nabla^2 y_3$	
x_2	y_2			
		∇y_3		
x_3	y_3			
$\vdots$				
x_{n-4}	y_{n-4}			
		∇y_{n-3}	$\nabla^2 y_{n-2}$	$\nabla^3 y_{n-1}$
x_{n-3}	y_{n-3}			
		∇y_{n-2}	$\nabla^2 y_{n-1}$	$\nabla^3 y_n$
x_{n-2}	y_{n-2}			
		∇y_{n-1}	∇y_n	
x_{n-1}	y_{n-1}			
		∇y_n		
x_n	y_n			

طريقة نيوتن التقدمية (الأمامية):

تعطي حدودية نيوتن التقدمية الملائمة للدالة $y = f(x)$ كما يلي :

$$p_n(\alpha) = y_o + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_o + $$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n y_o$$

حيث $h = x_i - x_{i-1} \quad , \quad \alpha = \dfrac{x - x_o}{h}$

من أجل $\alpha = 0$ أي من أجل $x = x_o$ فإن $p_n(0) = y_o$

ومن أجل $\alpha = 1$ أي من أجل $x = x_1$ فإن

$$p_n(1) = y_o + \Delta y_o = y_o + (y_1 - y_o) = y_1$$

ومن أجل $\alpha = 2$ أي من أجل $x = x_2$ فإن

$$p_n(2) = y_o + 2\Delta y_o + \Delta^2 y_o = y_2$$

وهكذا ...

$$p_n(n) = y_n$$

أي أن قيمة الحدودية $p_n(\alpha)$ عند النقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ تساوي قيمة الدالـــة $y = f(x)$ عند هذه النقاط..

مثال (4ـ9) :

أوجد قيمة الدالة y عند النقطة $x = 0$ حيث الدالة $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	-1	1	3	5
y = f(x)	3	2	5	-7

الحل :

الفروق بين قيم المتغير x متساوية و $h = 2$ و $x_o = -1$

نشكل جدول الفروق التقدمية :

x	y = f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	3			
		-1		
1	2		4	
		3		-19
3	5		-15	
		-12		
5	-7			

$$\alpha = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x+1}{2}$$

$$p_3(\alpha) = y_o + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_o$$

$$= 3 + \left(\frac{x+1}{2}\right)(-1) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)}{2}(4) +$$

$$+ \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)}{6}(-19)$$

$$p_3(x) = 3 - \frac{1}{2}(x+1) + 2\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{19}{6}\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$p_3(0) = 3 - \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{19}{6}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= 0.8125$$

∴

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن التقدمية :

إن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن التقدمية يقدّر بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنـــده في حساب $p_k(x)$ أو $p_k(\alpha)$

أي الخطأ يعطى كما يلي :

$$e = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!}\Delta^{k+1} y_o$$

مثال (4ـ10) :

لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	3.50	3.55	3.60	3.653.70	
y = f(x)	33.115	34.813	36.593	38.475	40.447

والمطلوب : 1ـ أوجد جدول الفروق

2ـ أوجد كثيرة الحدود $p_3(x)$

3ـ أوجد قيمة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = 3.67$

4ـ احسب الخطأ المرتكب.

الحل : 1ـ جدول الفروق المطلوب هو :

x	y = f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
3.50	33.115				
		1.698			
3.55	34.813		0.082		
		1.780		0.02	
3.60	36.593		0.102		-0.032
		1.882		-0.012	
3.65	38.475		0.09		
		1.972			
3.70	40.447				

٢- $$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 3.50}{0.05} = 20x - 70$$

$$p_3(\alpha) = y_0 + \alpha\,\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\nabla^3 y_0$$

$$= 33.115 + (2x-70)(1.698) + \frac{(20x-70)(20x-71)}{6}(0.082)$$

$$+ \frac{(20x-70)(20x-71)(20x-72)}{6}(0.02)$$

$$p_3(x) = 26.4x^3 - 264.76x^2 + 916.392x - 1062.847$$

٣- $$p_3(3.67) = 26.4(3.67)^3 - 264.76(3.67)^2 + {} + 916.392(3.67) - 1062.847$$

$$= 39.261$$

٤- $$\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\nabla^4 y_0$$

$$= \frac{3.4(2.4)(1.4)(0.4)}{24}(-0.032)$$

$$= -0.006$$

طريقة نيوتن التراجعية (الخلفية) :

تعطى حدودية نيوتن التراجعية الملائمة للدالة $y = f(x)$ كما يلي :

$$p_n(s) = y_n + s\,\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_n + {} + \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)}{k!}\nabla^k y_n + \dots$$

حيث $s = \dfrac{x - x_n}{h}$ و $h = x_{i+1} - x_i$

من أجل $x = x_0$ أي عندما $s = 0$ فإن :

$$p_n(0) = p_n(x_n) = y_n$$

ومن اجل $x = x_{n-1}$ فإن:

$$s = \frac{x_{n-1} - x_n}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ومنه

$$p_n(x_{n-1}) = y_n + (-1)\nabla y_n$$

$$= y_n - \nabla y_n = y_n - (y_n - y_{n-1}) = y_{n-1}$$

ومن أجل $x = x_{n-2}$ فإن

$$s = \frac{x_{n-2} - x_n}{h} = \frac{x_{n-2} - x_{n-1} - x_n}{h} = -1$$

$$= \frac{-h-h}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$$

ومنه

$$p_n(x_{n-2}) = y_n - 2\nabla y_n + \frac{(-2)(-1)}{2}\nabla^2 y_n$$

$$= y_n - 2(y_n - y_{n-1}) + (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})$$

$$= y_{n-2}$$

وهكذا ....

$$p_n(x_2) = y_2$$

$$p_n(x_1) = y_1$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن التراجعية:

إن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن التراجعية يقدر بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنده في حساب $p_k(s)$ أي الخطأ يعطى بالعلاقة:

$$e = \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+k)}{(k+1)!}\nabla^{k+1}y_n$$

مثال (٤-١١) :

لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10
$y = f(x)$	1.0000	1.0066	1.0132	1.0196	1.0260	1.0323

والمطلوب :

١- أوجد جدول الفروق .
٢- أوجد كثيرة الحدود $p_3(x)$.
٣- أوجد قيمة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = 1.05$.
٤- أحسب الخطأ المرتكب .

الحل:

١- أوجد جدول الفروق

x	$y=f(x)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
1.0	1.0000					
		0.0066				
1.02	1.0066		0.0000			
		0.0066		− 0.0002		
1.04	1.0132		-0.0002		0.0004	
		0.0064		0.0002		- 0.0007
1.06	1.0196		0.0000		- 0.0003	
		0.0064		- 0.0001		
1.08	1.0260		- 0.0001			
		0.0063				
1.10	1.0332					

٢-

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - 1.10}{0.02} = 50x - 55$$

$$\therefore \quad p_3(s) = y_n + s\,\nabla y_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_n$$

$$= 1.0323 + (50x-55)(0.0063) + \frac{(50x-55)(50x-54)}{2}(-0.0001)$$

$$+ \frac{(50x-55)(50x-54)(50x-53)}{6}(-0.0001)$$

$$p_3(x) = -2x^3 + 6.355x^2 - 6.410x + 3.0568$$

-٣ $$p_3(1.05) = -2(1.05)^3 + 6.355(1.05)^2 - 6.410(1.05) + 3.0568$$

$$= 1.0174$$

-٤ $$s = 50x - 55$$

$$= 50(1.05) - 55 = -2.5$$

$$e = p_3(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\nabla^4 y_n$$

$$= \frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)(1.5)}{24}(-0.0003)$$

$$= 0.000011$$

طريقة الفروق المقسومة :

تعتمد طريقة الفروق المقسومة على نوع جديد من الفروق تسمى الفروق المقسومة أي أنها فروق مقسومة على فروق مقسومة أخرى وتعرف كما يلي:

بفرض أن $y = f(x)$ دالة معرفة بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	....	x_n
$y=f(x)$	$y_0=f(x_0)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	....	$y_n=f(x_n)$

الفروق المقسومة الأولى تعطى كما يلي:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f[x_{n-1},x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$$

الفروق المقسومة الثانية تعطى كما يلي:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] = \frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$$

الفروق المقسومة الثالثة تعطى كما يلي:

$$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,x_3\right]-f\left[x_0,x_1,x_2\right]}{x_3-x_0}$$

$$f\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]=\frac{f\left[x_2,x_3,x_4\right]-f\left[x_1,x_2,x_3\right]}{x_4-x_1}$$

$$f\left[x_2,x_3,x_4,x_5\right]=\frac{f\left[x_3,x_4,x_5\right]-f\left[x_2,x_3,x_4\right]}{x_5-x_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f\left[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n\right]=\frac{f\left[x_{n-2},x_{n-1},x_n\right]-f\left[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}\right]}{x_n-x_{n-3}}$$

وهكذا الفروق المقسومة النونية (من المرتبة n) تعطى كما يلي:

$$f\left[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]-f\left[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right]}{x_n-x_0}$$

ويمكن ترتيب هذه الفروق في الجدول التالي والذي يسمى جدول الفروق المقسومة .

x	$f(x)$				
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$		
		$f[x_4, x_5]$			
x_5	$f[x_5]$				

مثال (4ـــ12) :

اكتب جدول الفروق المقسومة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	2	4
$y = f(x)$	1	1	2	5

الحل :

الجدول المطلوب هو :

x	f(x)			
	1			
		0		
1	1		$\frac{1}{2}$	
		1		$-\frac{1}{12}$
2	2		$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
4	5			

تعطى كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة بالصيغة التالية

$$p_n(x) = f[x_o] + f[x_o, x_1]\,(x - x_o) + f[x_o, x_1, x_2]\,(x-x_o)\,(x-x_1) + \dots$$
$$+ \dots + f[x_o, x_1, x_2, \dots, x_k]\,(x-x_o)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\dots(x-x_{k-1}) +$$
$$+ \dots + f[x_o, x_1, x_2, \dots, x_n]\,(x-x_o)\,(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

إن قيم هذه الحدودية تساوي قيم الدالة عند نقاط الارتكاز

$$x_i;\ i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$\therefore$

أي أن :

$$p_n(x_o) = f[x_o] = f(x_o)$$
$$p_n(x_1) = f[x_o] + f[x_o, x_1]\,(x_1 - x_o) + 0$$
$$= f[x_o] + \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}\,(x_1 - x_o)$$
$$= f[x_o] + f[x_1] - f[x_o] = f[x_1]$$
$$p_n(x_2) = f[x_o] + f[x_o, x_1]\,(x_2 - x_o) +$$
$$+ f[x_o, x_1, x_2]\,(x_2 - x_o)(x_2 - x_1) + 0$$
$$= f[x_o] + \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}\,(x_2 - x_o) +$$
$$+ \frac{f[x_1, x_2] - f[x_o, x_1]}{x_2 - x_o}\,(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)$$
$$= f[x_o] + \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}\,(x_2 - x_o) +$$
$$+ \left(\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}\right)(x_2 - x_1)$$
$$= f[x_o] - x_o\frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o} + f[x_2] - f[x_1] + x_1\,\frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}$$
$$= f[x_o] + \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o}\,(x_1 - x_o) + f[x_2] - f[x_1]$$
$$= f[x_o] + f[x_1] - f[x_o] + f[x_2] - f[x_1] = f[x_2]$$

وهكذا ... $p_n(x_n) = f[x_n]$

مثال (4ـــ13) :

أوجد باستخدام الفروق المقسومة كثيرة الحدود الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	2	3	5	6
y = f(x)	1	3	2	5	6

الحل :

نشكل جدول الفروق المقسومة

x	y = f(x)				
0	1				
		1			
2	3		$-\frac{2}{3}$		
		-1		0.3	
3	2		$\frac{5}{6}$		$-\frac{0.55}{6}$
		$\frac{3}{2}$		-0.25	
5	5		$-\frac{1}{6}$		
		1			
6	6				

كثيرة الحدود الملائمة هي :

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = {} & f[x_o] + f[x_o, x_1]\,(x - x_o) + f[x_o, x_1, x_2]\,(x-x_o)\,(x-x_1) \\
& + f[x_o, x_1, x_2, x_3]\,(x-x_o)\,(x-x_1)\,(x-x_2) + \\
& + f[x_o, x_1, x_2, x_3, x_4]\,(x-x_o)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = {} & 1 + (1)\,(x-0) + \left(-\frac{2}{3}\right)(x-0)\,(x-2) + \\
& +(0.3)\,(x-0)\,(x-2)\,(x-3) + \left(-\frac{0.55}{6}\right)(x-0)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-5) \\
= {} & -0.091667\,x^4 + 1.216667\,x^3 - 5.008333\,x^2 + 6.88333\,x + 1
\end{aligned}
$$

خواص الفروق المقسومة :

1ــ

$$f[x_o, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o} = \frac{f[x_o] - f[x_1]}{x_o - x_1} = f[x_1, x_o]$$

$$
\begin{aligned}
f[x_o, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_o, x_1]}{x_2 - x_o} \\
&= \frac{f[x_o, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_o - x_2} = f[x_2, x_1, x_o]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_o, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_o, x_1, x_2]}{x_3 - x_o} \\
&= \frac{f[x_o, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_o - x_3} \\
&= \frac{f[x_2, x_1, x_o] - f[x_3, x_2, x_1]}{x_o - x_3} \\
&= f[x_3, x_2, x_1, x_o]
\end{aligned}
$$

أي أن الدوال المقسومة هي دوال متناسقة بالنسبة لمتغيراتها.

2ــ إذا كانت $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاط متساوية البعد فيما بينها وطول الخطوة h حيث $h>0$

و $x_{i+1} - x_i = h \quad \forall\ i = 0, 1, 2, \ldots$

فإن :

$$f[x_o, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_o} = \frac{y_1 - y_o}{h} = \frac{\Delta y_o}{h} = \frac{1}{1!\,h}\Delta y_o$$

$$f[x_o, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_o, x_1]}{x_1 - x_o} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}}{x_2 - x_o}$$

$$= \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_o}{h}}{2h} = \frac{\frac{y_2 - y_1 - y_1 + y_o}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\Delta^2 y_o}{2h^2} = \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 y_o$$

$$f[x_o, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_o, x_1, x_2]}{x_3 - x_o} = \frac{\frac{\Delta^2 y_1}{2h^2} - \frac{\Delta^2 y_o}{2h^2}}{2h}$$

$$= \frac{\frac{y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_o)}{2h^2}}{3h}$$

$$= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o}{6h^3} = \frac{1}{3!h^3} \Delta^3 y_o$$

ومنه نستنتج

$$f[x_o, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{1}{n!h^n} \Delta^n y_o$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة :

الخطأ المرتكب بطريقة الفروق المقسومة يُعطى بالعلاقة التالية :

$$e(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\, f[x_o, x_1, x_2, ..., x_n]$$

مثال (4–14) :

لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	0.00	0.20	0.30
y = f(x)	0.00000	0.20134	0.30452

عين $f(0.23)$ بالاعتماد على طريقة الفروق المقسمة ثم عين الخطأ المرتكب في حســـاب هذه القيمة.

الحل :

نشكل جدول الفروق المقسومة

x	y = f(x)		
0.00	0.00000		
		1.0067	
0.20	0.20134		0.08367
		1.0318	
0.30	0.30452		

$$p_2(x) = f[x_o] + f[x_o, x_1](x-x_o) + f[x_o, x_1, x_2](x-x_o)(x-x_1)$$

$$= 0.0000 + (1.0067)(x-0) + (0.08367)(x-0)(x-0.2)$$

$$= 0.08367x^2 + 0.98997x$$

$$f(0.23) = p_2(0.23) = 0.2321$$

الخطأ المرتكب

$$e(x) = (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\, f[x_o, x_1, x_2]$$

$$= x(x-0.2)(x-0.3)(0.08367)$$

$$e(0.23) = (0.23)(0.23-0.2)(0.23-0.3)(0.08367)$$

$$e(0.23) = (0.23)(0.03)(-0.07)(0.08367) = -0.0000404$$

تمارين

(1) أوجد باستخدام الطريقة العامة حدودية الاستيفاء الداخلي الملائمة للدالة $f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	30	60	90
y = f(x)	0	0.5	0.866	1

(2) أوجد الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	2
y = f(x)	-1	2	7

بالطريقة العامة.

(3) باستخدام طريقة لاغرانج عين الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	2	4
y = f(x)	-3	1	2	7

(4) لتكن الدالة $y = f(x) = (2.5)^x$ المعرفة عند النقط التالية :

$x_o = -1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1$

أوجد الحدودية الملائمة لهذه الدالة بطريقة لاغرانج.

(5) لتكن الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$ معرفة بالجدول التالي :

x	100	121	144
y = f(x)	10	11	12

أوجد الحدودية الملائمة باستخدام طريقة لاغرانج.

ثم أوجد قيمة الدالة في النقطة $x = 115$ واحسب الخطأ المرتكب.

(6) لتكن الدالة $y = f(x) = \cos x$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0.3	0.4	0.5	0.6
y = f(x)	0.9553	0.9211	0.8776	0.8253

والمطلوب : 1ـ أوجد جدول الفروق.

2ـ أوجد كثيرة الحدود $p_3(x)$ بطريقة نيوتن التقدمية.

3ـ عين قيمة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = 0.44$

(7) لتكن الدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y = f(x)	0.61	1.09	1.58	2.09

والمطلوب أوجد الحدودية الملائمة لهذه الدالة $p_2(x)$ بطريقة نيوتن التقدمية ثم أوجد قيمة الدالة عند النقطة 2.33 واحسب الخطأ المرتكب.

(8) لتكن الدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y = f(x)	0.000	0.203	0.423	0.684	1.030	1.557

المطلوب بطريقة نيوتن التراجعية عين قيمة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = 0.73$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

(9) لتكن الدالة $y = f(x) = \sin x$ والمعرفة بالجدول التالي :

x	30	35	40	45	50	55	60
y = f(x)	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

1ـ احسب $\sin 29$ بطريقة نيوتن التقدمية.

2ـ احسب $\sin 61$ بطريقة نيوتن التراجعية.

(10) أوجد باستخدام الفروق المقسومة الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1
y = f(x)	1	3

(11) أوجد باستخدام الفروق المقسومة كثيرة الحدود الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	3
y = f(x)	-1	-2	8

(12) لتكن الدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول التالي :

x	0	1	2	3
y = f(x)	1	2	4	8

عين الحدودية الملائمة لهذه الدالة وذلك باستخدام الفروق المقسومة.

∴

الفصل الخامس

التفاضل العددي

الهدف الرئيسي من التفاضل العددي هو إيجاد قيم التفاضلات التي يصعب الحصول عليها بالطرق التحليلية.

بفرض أن $y = f(x)$ دالة معطاة قيمها في جدول كما يلي :

x	x_o	x_1	x_2	...	x_n
y = f(x)	$y_o = f(x_o)$	f_1	f_2	...	f_n

و $\quad x_{i+1} - x_i = h \quad \forall\ i = 0, 1, 2, \ldots$

كيف نحسب قيمة مشتقة الدالة $y = f(x)$. من أجل ذلك نميز حالتين :

1ـ إذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق الدالة $y = f(x)$ عند إحدى النقط x_i ، $i = 0, 1, 2, \ldots$; فإن المسألة هي مسألة تفاضل.

2ـ إذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق الدالة $y = f(x)$ عند نقطة واقعة بين النقط x_i ، $i = 0, 1, 2, \ldots$; فإن المسألة هي مزيجاً من التفاضل والاستكمال.

صيغ عددية للمشتقات عند نقط الجدول :

سوف نتعرف على بعض الصيغ العددية التي تُعطي قيم تقريبية للمشتقة الأولى f' عند إحدى نقط الجدول.

بفرض $y = f(x)$ دالة تحليلية عندئذ نعلم أن متسلسلة تايلور تعطى بالصيغة التالية :

$$f(x_o + h) = f(x_o) + \frac{h}{1!} f'(x_o) + \frac{h^2}{2!} f''(x_o) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_o) + \ldots \quad (1)$$

$$f(x_o - h) = f(x_o) - \frac{h}{1\,!} f'(x_o) + \frac{h^2}{2\,!} f''(x_o) - \frac{h^3}{3\,!} f'''(x_o) + \dots \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد :

$$f(x_o + h) - f(x_o - h) = 2\,h\,f'(x_o) + \frac{h^3}{3} f'''(x_o) + \dots \qquad (3)$$

من هذه العلاقة وبإهمال $\frac{h^3}{3} f'''(x_o)$ لأن h مقدار صغير نحصل على الصيغة التالية :

$$f'(x_o) = \frac{f(x_o + h) - f(x_o - h)}{2\,h}$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة الفروق المركزية أو قاعدة النقطة الوسطى.

من (1) يمكن الحصول على الصيغة البسيطة للمشتقة f' التالية :

$$f'(x_o) \equiv \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \frac{\Delta f(x_o)}{h}$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة الفروق التقدمية (الأمامية).

ومن (2) يمكن الحصول على الصيغة البسيطة للمشتقة f' التالية :

$$f'(x_o) \equiv \frac{f(x_o) - f(x_o - h)}{h} = \frac{\nabla f(x_o)}{h}$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة الفروق التراجعية (الخلفية).

مثال (5ـ1):

بفرض $y = f(x) = \sin x$ دالة حيث $x \in [0.7, 1.3]$ احسب مشتق الدالة $y = \sin x$ عند النقطة $x = 1$ مستخدماً الصيغ الثلاث السابقة ثم احسب الخطأ المرتكب في كل صيغة وأيهما أفضل.

الحل :

يمكن الحصول على الجدول التالي لقيم الدالة $y = f(x)$ عند النقط x_i

x	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
y=f(x)	0.644217	0.717356	0.783327	0.841471	0.891207	0.932039	0.963558

لنحسب قيمة مشتق الدالة $y = \sin x$ عند النقطة $x = 0$

1ـ باستخدام صيغة الفروق المركزية :

$$f'(1) = \frac{f(1.1) - f(0.9)}{2\,(0.1)} = \frac{0.891207 - 0.783327}{0.2} = 0.539402$$

2ـ باستخدام صيغة الفروق التقدمية :

$$f'(1) = \frac{f(1.1) - f(1.0)}{(0.1)} = \frac{0.891207 - 0.841471}{0.1} = 0.497364$$

3ـ باستخدام صيغة الفروق التراجعية :

$$f'(1) = \frac{f(1.0) - f(0.9)}{0.1} = \frac{0.841471 - 0.783327}{0.1} = 0.58144$$

لحساب الخطأ المرتكب نوجد مشتق الدالة $y = \sin x$ أي $y' = \cos x$

ومنه القيمة الفعلية لمشتق y' عند النقطة $x = 1$ هي

$$y'(1) = \cos(1) = 0.540302$$

ومنه الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق المركزية هو

$$e_1 = |\,0.539402 - 0.540302\,| = 0.000902$$

والخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق التقدمية هو

$$e_2 = |\,0.497364 - 0.540302\,| = 0.042938$$

والخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق التراجعية هو

$$e_3 = |\,0.58144 - 0.540302\,| = 0.041138$$

نلاحظ أن الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق المركزية أقل من الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق التقدمية وكذلك أقل من الخطأ المرتكب باستخدام صيغة الفروق التراجعية. هذا يعني أن صيغة الفروق المركزية أفضل من صيغة الفروق التقدمية وصيغة الفروق التراجعية.

حصلنا على بعض العلاقات التي تعطي قيماً عددية لمشتق الدالة $y = f(x)$ عند نقط الارتكاز (أي عند النقط الموجودة في الجدول).

للحصول على بعض العلاقات أو الصيغ التي تمكننا من إيجاد قيم المشتقات عند نقط غير موجودة في الجدول سوف نعتمد على صيغ الاستكمال التي حصلنا عليها في الفصل السابق.

صيغ عددية للمشتقات عند نقط ليست موجودة في جدول البيانات :

نعلم أن كثيرة حدود الاستيفاء لنيوتن التقدمية تعطى بالصيغة التالية :

$$p_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

حيث $\alpha = \frac{x - x_0}{h}$ ومنه $x = x_0 + h$

بمفاضلة الطرفين نجد :

$$dx = h\, d\alpha$$

ومنه $\frac{dx}{d\alpha} = h$ أو $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{h}$

$$f'(x) \cong p_n'(x) = \frac{d}{dx} p_n(x) = \frac{d}{d\alpha}\left[p_n(\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}\left[p_n(\alpha)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{d\alpha}\Big[y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2!}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha}{3!}\right)\Delta^3 y_0 + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-6\alpha}{4!}\right)\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 + \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(3\alpha^2-6\alpha+2\right)\Delta^3 y_0 + \frac{1}{12}\left(2\alpha^3-9\alpha^2+11\alpha-3\right)\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

بمفاضلة هذه العلاقة نجد :

$$f''(x) = \frac{d f'(x)}{dx} = \frac{d}{d\alpha}\left[f'(\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{d}{d\alpha}\Big[\Delta y_0 + \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(3\alpha^2-6\alpha+2\right)\Delta^3 y_0 + \frac{1}{12}\left(2\alpha^3-9\alpha^2+11\alpha-3\right)\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 y_0 + (\alpha-1)\Delta^3 y_0 + \frac{1}{12}\left(6\alpha^2-18\alpha+11\right)\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

وبمفاضلة هذه العلاقة نجد :

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 y_0 + \frac{2\alpha-3}{2}\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

وبمفاضلة هذه العلاقة نجد :

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{h^4}\Big[\Delta^4 y_0 + \dots\Big]$$

يمكن بالاعتماد على الصيغ السابقة إيجاد مشتق الدالة $y = f(x)$ عند نقط جدول البيانات (أي عند نقط الارتكاز) فمثلاً عند النقطة $x = x_0$ فإن $\alpha = 0$ ومنه

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \dots\Big]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots\Big]$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \dots\Big]$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4}\Big[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \dots\Big]$$

الخطأ المرتكب في حساب قيمة مشتق الدالة في نقطة بطريقة نيوتن التقدمية :

يمكن تقدير الخطأ المرتكب في حساب مشتق دالة في نقطة كما يلي:

بفرض أن $p_n(x)$ هي كثيرة الحدود الملائمة للدالة $y = f(x)$ فالخطـــأ المرتكـــب يعطـــى بالعلاقة :

$$e(x) = f(x) - p_n(x)$$

ومنه

$$e'(x) = f'(x) - p'_n(x)$$

$$e'(x) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(x)$$

حيث $x \in [x_0, x_n]$

أو

$$e'(x) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \max_{x_0 \le x \le x_n} f^{(n+1)}(x)$$

مثال (5ـــ2) :

بفرض أن $y = f(x)$ معرفة بالجدول التالي :

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	-6	-1	16	51	110

أوجد $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ عند النقطة $x = 1$.

الحل :

نشكل جدول الفروق التقدمية

x	y = f(x)	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	-6				
		5			
2	-1		12		
		17		6	
3	16		18		0
		35		6	
4	51		24		
		59			
5	110				

$$h = 1 \ , \ \alpha = 0 \ , \ x_0 = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \dots\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[5 - \frac{1}{2}(12) + \frac{1}{3}(6) + 0\right]$$

$$= 5 - 6 + 2 = 1$$

$$f''(1) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \dots\right] = \frac{1}{1}[12 - 6] = 6$$

$$f'''(1) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \dots\right] = \frac{1}{1}[6] = 6$$

مثال (5ـــ3) :

بفرض $y = f(x)$ دالة معرفة بالجدول التالي :

x	4	6	8	10
y = f(x)	1	3	8	20

أوجد $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ عند النقطة $x = 4.5$

الحل :

نشكل جدول الفروق التقدمية

x	y = f(x)	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		112		
10	20			

نلاحظ أن النقطة $x = 4.5$ ليست موجودة في الجدول

لذلك نوجد α حيث $\alpha = \frac{x - x_o}{h} = \frac{4.5 - 4}{2} = \frac{1}{4}$

ثم نطبق العلاقات

$$f'(4.5) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}\left(3\alpha^2 - 6\alpha + 2\right)\Delta^3 y_o + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)3 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{16} - \frac{6}{4} + 2\right)4\right] = \frac{41}{48}$$

$$f''(4.5) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o + (\alpha - 1)\Delta^3 y_o + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)4\right] = 0$$

$$f'''(4.5) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_o + \ldots\right] = \frac{1}{8}(4) = \frac{1}{2}$$

ملاحظة :

لمعرفة القيمة العددية للمشتق في أي نقطة من نقط الارتكاز نعتبر أن هذه النقطة هي نقطة البداية x_o والقيمة المقابلة لها تصبح y_o .

مثال (5—4) :

لتكن الدالة $y = f(x) = x \ln x$ معرفة على الفترة $[1, 2]$ $h = 0.2$ أوجد $f'(x)$ في النقطتين $x = 1.1$ و $x = 1.4$ ثم احسب الخطأ المرتكب مستخدماً $p_3(x)$

الحل :

الدالة $y = x \ln x$ تأخذ القيم التالية :

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y = f(x)	0	0.2187858	0.4710611	0.7570058	1.058016	1.3862944

نشكل جدول الفروق التقدمية :

x	y = f(x)	Δy_o	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$	$\Delta^4 y_o$
1	0				
		0.2187858			
1.2	0.2187858		0.0334895		
		0.2522753		-0.0048201	
1.4	0.4710611		0.0286694		0.001216
		0.2809447		-0.0036039	
1.6	0.7520058		0.0250655		0.0008066
		0.3060102		-0.0027973	
1.8	1.058016		0.0222682		
		0.3282784			
2	1.3862944				

أولاً : نوجد مشتق الدالة $y = x \ln x$ عند النقطة $x = 1.1$

$$h = 0.2 \quad , \; x_o = 1$$

$$\alpha = \frac{x - x_o}{h} = \frac{1.1 - 1}{0.2} = 0.5$$

$$f'(1.1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}\left(3\alpha^2 - 6\alpha + 2\right)\Delta^3 y_o + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[0.2187858 + 0.0002\right] = 1.094929$$

ثانياً : نوجد مشتق الدالة عند النقطة $x = 1.4$ وهذه النقطة هي إحدى نقط الارتكاز لـذلك نعتبر $x_o = 1.4$ أي $y_o = 0.471061$

$$\Delta y_o = 0.2809447$$

$$\Delta^2 y_o = 0.0250655$$

$$\Delta^3 y_o = -0.0027973$$

$$f'(1.4) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{1}{2}\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\Delta^3 y_o + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[0.2809447 - \frac{1}{2}(0.0250655) + \frac{1}{3}(-0.0027973)\right]$$
$$= 1.337393$$

لإيجاد الخطأ المرتكب في حساب قيم المشتقات $f'(1.1)$ و $f'(1.4)$

الدالة $y = x \ln x$ ومنه $f'(x) = \ln x + 1$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{x_o \le x \le x_n} f^{(4)}(x) = \frac{2}{(1)^3} = 2$$

$$e'(x) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \max_{x_o \le x \le x_n} f^{(n+1)}(x)$$

$$e'(x) \le (-1)^3 \frac{(0.2)^3}{4}(2) = -\frac{0.008}{4}(2) = -0.004$$

ملاحظة:

إذا كان إيجاد مشتق الدالة $y = f(x)$ حتى المرتبة $(n+1)$ صعباً أو كانت الدالة معرفة في جدول فيمكن استخدام الصيغة التالية :

نعلم أن : $$f^{(n+1)}(x) \cong \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}}$$

ومنه $$e'(x) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}}$$

$$e'(x) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h(n+1)}$$

مثال (5–5) :

لتكـن الدالـة $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ معرفة على الفترة [0, 1]، $h = 0.2$ أوجد المشتق الأول للدالة $y = f(x)$ في النقطة $x = 0.2$ مستخدماً $p_3(x)$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل :

الدالة $y = \frac{1}{1+e^x}$ تأخذ القيم التالية :

x	0	0.2	0.4	0.6	0:8	1
y-f(x)	0.5	0.450166	0.4013123	0.3543436	0.3100255	0.269414

نشكل جدول الفروق التقدمية :

x	y=f(x)	Δy_o	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$	$\Delta^4 y_o$	$\Delta^5 y_o$
0	0.5					
		-0.049834				
0.2	0.450166		0.0009803			
		-0.0488537		0.0009047		
0.4	0.4013123		0.0018550		-0.0001391	
		-0.0469687		0.0007656		-0.0000431
0.6	0.3543436		0.0026506		-0.0002822	
		-0.0443181		0.0005834		
0.8	0.3100255		0.00324			
		-0.0410841				
1	0.2689414					

$$f'(0.2) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{1}{2}\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\Delta^3 y_o\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[-0.0488537 - \frac{1}{2}(0.001885) + \frac{1}{3}(0.0007656)\right]$$

$$= -0.245153$$

$$e'(x) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h(n+1)}$$

$$= (-1)^3 \frac{\Delta^4 y_o}{(0.2)(4)} = -\frac{-0.0001822}{0.8}$$

$$= 0.00022775$$

تمارين

(1) بفرض $y = f(x)$ دالة معرفة بالجدول التالي :

x	4	6	8	10
y = f)x)	1	3	8	20

أوجد $f'''(x) , f''(x) , f'(x)$ عند النقطة $x = 4$.

(2) بفرض أن $y = f(x)$ دالة معرفة بالجدول التالي :

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
y = f(x)	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110

أوجد $f''(x) , f'(x)$ عند كل من النقطتين $x = 0$ و $x = 0.1$

الفصل السادس
التكامل العددي
Numerical Integration (Quadrature)

لإيجاد قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نوجد الدالة الأصلية $F(x)$ للدالة المكاملة $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ثم نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,d x = F(b)-F(a)$$

ولكن في بعض الحالات توجد صعوبة في إيجاد الدالة الأصلية وفي بعض الحالات تكون الدالة $f(x)$ معطاة في جدول في مثل هذه الحالات فإن قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يمكن إيجادها بالطرق العددية . ومن هذه الطرق العددية :

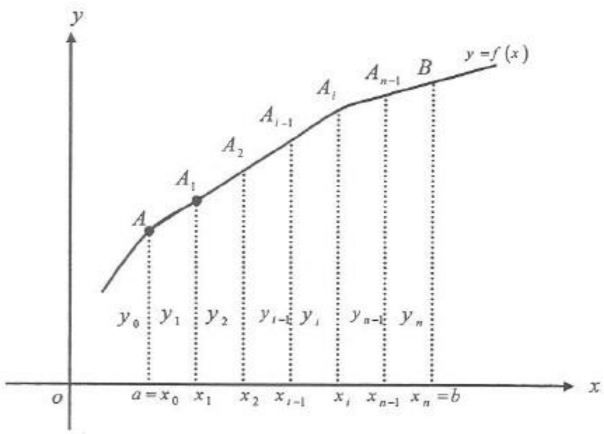
أولاً : طريقة أشباه المنحرفات :

لحساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نقسم الفترة $[a,b]$ إلى n جزءاً متساوياً

$$a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b$$

وبحيث يكون طول كل جزء

$$\hbar=\frac{b-a}{n}=\Delta x$$



ولتكن $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ تراتيب النقط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ عندئذ فإن مساحة الشكل المطلوب aABb تكون مجموع مساحات أشباه المنحرفات القائمة والمحددة من الأعلى بالأقواس

$$AA_1\ ,\ A_1A_2\ ,\dots,A_{n-1}A_n$$

حيث إن مساحة شبه المنحرف الأول هي $h\,.\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right)$ (لأنه كما نعلم فإن مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع)

ومساحة شبه المنحرف الثاني هي $h\,.\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

وهكذا ... مساحة شبه المنحرف الأخير هي $h\,.\left(\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$

ومجموع هذه المساحات هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{y_o + y_1}{2}\right).h + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right).h + \ldots + \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right).h$$

$$= \frac{h}{2}\left(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

وهي صيغة أشباه المنحرفات لحساب التكامل المحدود.

ملاحظة :

نلاحظ أنه عند استخدام أشباه المنحرفات نستبدل في كل مجال جزئي منحنى الدالـــة $y = f(x)$ بقطعة مستقيمة، أي أننا استكملنا هذا الجزء من المنحنى بدالة من الدرجة الأولـــى. هذا يعني أن طريقة أشباه المنحرفات هي عملية استيفاء خطي نستبدل فيهـــا المنحنيـــات بحدوديات من الدرجة الأولى لذلك نستطيع أن نستخدم طريقة نيوتن التقدمية في الاستيفاء الداخلي.

نعلم أن حدودية نيوتن التقدمية تُعطى بالعلاقة التالية :

$$p_n(\alpha) = f_0 + \alpha \Delta f_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_o + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_o + \ldots$$

فإذا اكتفينا بالحدين الأول والثاني فإن :

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x_o+h} f(x)\,dx = \int_0^1 (f_o + \alpha \Delta f_o)\,h\,d\alpha$$

وذلك لأن $\alpha = \frac{x - x_o}{h}$ ومنه $dx = h\,d\alpha$

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx = h\left[f_o\,\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f_o\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{12}\hbar \Delta^2 f_0$$

$$= h\left[f_o + \frac{1}{2}\Delta f_o\right]$$

$$= h\left[f_o + \frac{1}{2}(f_1 - f_o)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_o\right] = \frac{h}{2}\left[f_o + f_1\right]$$

والخطأ المرتكب في الفترة $[x_o, x_1]$ يكون

$$e = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_o\,h\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}h\Delta^2 f_o\left[\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2}\right]_0^1$$

وبما أن $f'' \cong \frac{\Delta^2 f}{h}$ فإن $\Delta^2 f_o = h^2 f''(x)$ حيث $x_o < x < x_1$

ومنه فإن $e = -\frac{1}{12}h^3 f''(x)$

والآن إذا أخذنا التكامل على الفترة $[a, b]$ فإننا نجد :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_o + f_1\right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] + \ldots + \frac{h}{2}\left[f_{n-1} + f_n\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_o + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

أو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right]$$

وهي صيغة أشباه المنحرفات.

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات :

وجدنا أن الخطأ في الخطوة الواحدة هو

$$x_o < x < x_1 \;;\; e = -\frac{1}{12}h^3 f''(x)$$

إذن الخطأ من أجل خطوة (فترة جزئية) هو

$$e = -\frac{n\,h^3}{12} f''(x) \quad ; \; x \in [x_o, x_n] = [a, b]$$

ولكن $n\,h = b - a$ ومنه فإن الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات يعطـــى بالعلاقـــة التالية :

$$E = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x) \quad , \; x \in [a, b]$$

مثال (6-1) :

احسب التكامل $\int_0^1 \frac{d\,x}{1 + x^2}$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $n = 4$ ثم احســب الخطــأ المرتكب.

الحل :

نوجد طول الخطوة الواحدة (طول المجال الجزئي)

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

ومنه

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y = f(x)	1	0.94	0.8	0.64	0.5

$$\int_0^1 \frac{d\,u}{1 + x^2} = \frac{h}{2}\left[y_o + 2\,y_1 + 2y_2 + 2\,y_3 + y_4\right]$$

$$= \frac{0.25}{2}\left[1 + 2(0.94 + 0.8 + 0.64) + 0.5\right]$$

$$= 0.7875$$

$\therefore$

ومنه $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ $\quad f'(x) = \frac{-2\,x}{\left(1 + x^2\right)^2}$

$$f''(x) = \frac{6\,x^2 - 2}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

الخطأ المرتكب

$$E = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x)$$

$$E \le -\frac{(1-0)}{12} (0.25)^2 \max_{0 \le x \le 1} f''(x)$$

$$= \frac{-(0.25)^2}{12}(-2) = 0.0104$$

مثال (6-2) :

احسب التكامل $\int_{0.5}^{1} x\,e^x\,d\,x$ حيث $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل :

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y = f(x)	0.8244	1.0933	1.4096	1.7804	2.2136	2.7183

$$\int_{0.5}^{1} x\,e^x\,d\,x = \frac{h}{2}\left[y_o + 2\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5\right]$$

$$= \frac{0.1}{2}[0.8244 + 2\,(1.0933+1.4096+1.7804+2.2136) + 2.7183]$$

$$= \frac{1.65356}{2} = 0.8268$$

ومنه

$$f(x) = x e^x$$
$$f'(x) = e^x + x e^x$$
$$f''(x) = e^x (2+x)$$
$$\max_{0.5 \le x \le 1} f''(x) = f''(1) = e(3) = 8.1548$$

الخطأ المرتكب

$$E \le -\frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{0.5 \le x \le 1} f''(x)$$
$$= -\frac{(1-0.5)}{12} (0.1)^2 (8.1548)$$
$$= 0.003398$$

ثانياً : طريقة سيمبسون :

تتلخص طريقة سيمبسون بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية متساوية الطول عددها n فيكون طول كل فترة جزئية

$$h = \frac{b-a}{h} = \Delta x$$

ولحساب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ نبدأ بحساب التكامل من x_o إلى $x_2 = x_o + 2h$ حيث

$$\alpha = \frac{x - x_o}{h} \quad , \quad x_1 = x_o + h$$

ونستبدل الدالة المكاملة $f(x)$ بحدودية نيوتن التقدمية من الدرجة الثانية الملائمة للدالة $f(x)$ فنجد :

$$\int_{x_o}^{x_o+2h} f(x)\,dx = \int_0^2 \left[f_o + \alpha \Delta f_o + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \Delta^2 f_o \right] h\,d\alpha$$
$$= h\left[f_o\,\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \Delta f_o + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right) \Delta^2 f_o \right]_0^2$$
$$= h\left[2 f_o + 2 \Delta f_o + \frac{1}{3} \Delta^2 f_o \right]$$
$$= \frac{h}{3}\left[f_o + 4 f_1 + f_2 \right]$$

ولحساب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ على كل الفترة $[a, b]$ نكامل من x_o إلى $x_2 = x_o + 2h$ ثم نكامل من x_2 إلى x_4 ثم نكامل من x_4 إلى x_6 وهكذا ... نكامل من x_{n-2} إلى x_n فنحصل على :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_o}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)\,dx + \ldots +$$
$$+ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_o + 4 f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4 f_3 + f_4\right] +$$
$$+ \frac{h}{3}\left[f_4 + 4 f_5 + f_6\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n\right]$$
$$\int_{a=x_o}^{b} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_o + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + 4 f_5 + 2 f_6 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \; 2 f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n \right]$$

وهذه الصيغة تسمى صيغة سيمبسون لحساب التكامل المحدود.

مثال (6-3) :

احسب التكامل $\int_0^1 e^x \, dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = \frac{1}{6}$

الحل :

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{6}} = 6$$

هذا يعني أن عدد الفترات زوجي لذلك يمكن تطبيق طريقة سيمبسون

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
y = f(x)	1	1.1814	1.3956	1.6487	1.9477	2.3010	2.7183

$$\int_0^1 e^x \, dx = \frac{h}{3}\left[y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right]$$

$$= \frac{1}{18}[1+4(1.1814+1.6487+2.3010)+2(1.3956+1.9477)$$
$$+ 2.7183] = 1.7183$$

القيمة الفعلية للتكامل هي :

$$\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = 2.7183 - 1$$
$$= 1.7183$$

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة سيمبسون :

إن الخطأ المرتكب في الفترة الجزئية $[x_o, x_2]$ وحيث استبدلنا الدالة المكاملة بحدودية من الدرجة الثانية يكون من مرتبة الحد الذي يليه أي :

$$e = h\int_0^2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_o \, d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_o}{6}\int_0^2 \left(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha\right) d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_o}{6}\left[\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^3 + \alpha^2\right]_0^2$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_o}{6}\left[\frac{16}{4} - 8 + 4\right] = 0$$

وبالتالي الخطأ من مرتبة الحد الذي يليه أي أن :

$$e = h\int_0^2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 f_o \, d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^4 f_o}{24}\int_0^2 \left(\alpha^4 - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha\right) d\alpha$$

$$= \frac{h\Delta^4 f_o}{24}\left[\frac{\alpha^5}{5} - \frac{6\alpha^4}{4} + \frac{11\alpha^3}{3} - 3\alpha^2\right]_0^2$$

$$= \frac{h\Delta^4 f_o}{24}\left(-\frac{4}{15}\right)$$

$$e = \frac{-4h\Delta^4 f_o}{360} = \frac{h\Delta^4 f_o}{90}$$

وبما أن $f^{(4)}(x) \cong \frac{\Delta^4 f_o}{h^4}$ فإن

$e = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$ حيث $x \in [x_o, x_2]$

والخطأ الكلي المرتكب بطريقة سيمبسون هو

$$E = -\frac{h^5}{90}\left(\frac{n}{2}\right) f^{(4)}(x) \quad ; x \in [a, b]$$

$$E = -\frac{nh}{180} h^4 f^{(4)}(x) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(x)$$

مثال (6-4) :

احسب التكامل $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.25$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل :

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-(-1)}{0.25} = \frac{2}{0.25} = 8$$

هذا يعني أن n عدد زوجي.

x	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y=f(x)	0.731	0.679	0.622	0.562	0.5	0.437	0.377	0.321	0.268

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+e^x} = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1+y_3+y_5+y_7\right) + 2\left(y_2+y_4+y_6\right) + y_8\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}[0.731+4(0.679+0.562+0.437+0.321) +$$
$$+ 2(0.622+0.5+0.377) + 0.268]$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+e^x} = 0.999$$

$f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \left(1+e^x\right)^{-1}$ ومنه $f'(x) = -\left(1+e^x\right)^{-2} e^x$

$$f''(x) = 2\left(1+e^x\right)^{-3} e^{2x} - \left(1+e^x\right)^{-2} e^x$$

$$f'''(x) = -6\left(1+e^x\right)^{-4} e^{3x} + 6\left(1+e^x\right)^{-3} e^{2x} - \left(1+e^x\right)^{-2} e^x$$

$$f^{(4)}(x) = 24\left(1+e^x\right)^{-5} e^{4x} - 36\left(1+e^x\right)^{-4} e^{3x} + 14\left(1+e^x\right)^{-3} e^{2x} -$$
$$-\left(1+e^x\right)^{-2} e^x$$

أكبر قيمة للمشتق في الفترة [1 ,1-] هي

$$\max\left|f^{(4)}(x)\right| = 0.1235068$$

الخطأ المرتكب هو

$$E \le \frac{-(b-a)}{180}(0.25)^4(0.1235068)$$
$$= -\frac{2}{180}(0.25)^4(0.1235068)$$
$$= -0.000002196$$

ملاحظة :

إذا كان عدد الفترات فردي فإننا نطبق طريقة سيمبسون على أكبر عدد زوجي في الفترات الجزئية ثم نطبق طريقة أشباه المنحرفات على الفترة الأخيرة.

مثال (6-5) :

احسب التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$ بطريقة سيمبسون ، حيث $h = 0.2$

الحل:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.2} = 5$$

نلاحظ أن عدد الفترات فردي

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y = f(x)	1.000	0.961	0.852	0.698	0.527	0.368

بما أن عدد الفترات خمسة نطبق طريقة سيمبسون على أربع فترات جزئية ثم نطبق طريقة أشباه المنحرفات على الفترة الأخيرة كما يلي :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \frac{h}{3}\left[f_o + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \frac{h}{2}\left[f_4 + f_5\right]$$

$$= \frac{0.2}{3}\left[1 + 4\,(0.961+0.698) + 2\,(0.852) + 0.527)\right] +$$

$$+ \frac{0.2}{2}\left[0.527 + 0.368\right]$$

$$= 0.6578 + 0.0895 = 0.7473$$

تطبيق : احسب التكامل $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ بطريقة سيمبسون وبخطأ مطلق لا يتجاوز 10^{-3} .

الحل :

لنعين أولاً h من أجل الخطأ المفروض ، نعلم أن الخطأ بطريقة سيمبسون يُعطى بالعلاقة

$$E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(x) \quad , x \in [0, 1]$$

والمطلوب أن هذا الخطأ يحقق ما يلي :

$$\left| -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(x) \right| \le 10^{-3} \qquad (*)$$

ومنه $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$$

$$f'''(x) = -3x\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -3x\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right] = \frac{-3x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$$

$$f^{(4)}(x) = -3\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2x) +$$

$$+ 9x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \frac{15}{2}x^3\left(1+x^2\right)^{-\frac{7}{2}}(2x)$$

$$= \frac{-3\left(1+x^2\right)^2 + 18x^2\left(1+x^2\right) - 15x^4}{\left(1+x^2\right)^{\frac{7}{2}}} = \frac{12x^2 - 3}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^{\frac{7}{2}}}}$$

$$f^{(4)}(0) = -3$$

بالتعويض في (*) نجد :

$$\left| -\frac{(1-0)}{180} h^4 (-3) \right| \le 0.001$$

ومنه $h^4 \le 0.06$

$$h = \sqrt[4]{0.06} \cong 0.4949 \cong 0.5$$

وبالتالي نقسم الفترة [0, 1] إلى فترتين متساويتين

x	0	0.5	1
y = f(x)	1.000	1.1180	1.4142

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{h}{3}\left[f_o + 4f_1 + f_2\right]$$

$$= \frac{0.5}{3}\left[1 + 4\,(1.1180) + 1.4142\right] = 1.1477$$

تمارين

(1) احسب التكامل $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

(2) احسب التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $n = 10$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

(3) احسب التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

(4) احسب التكامل $\int_{0}^{0.8}\frac{dx}{1+x}$ بطريقة سيمبسون حيث $h = 0.1$

(5) احسب التكامل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx$ بطريقة سيمبسون حيث $n = 4$ واحسب الخطأ المرتكب.

الفصل السابع

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

يوجد عدد كبير من المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها بالطرق التحليلية أي من الصعب إيجاد دالة $y(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية ويمكن بالاعتماد على الطرق العددية إيجاد حل تقريبي لمثل هذه المعادلات.

1ـ طريقة تايلور : متسلسلة تايلور هي في الشكل :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x) + \dots$$

حيث h مقدار صغير

ولحل المعادلة التفاضلية $y(x_o) = y_o \;\; ; y' = f(x, y)$

نوجد المشتقات المتتالية للدالة التحليلية $f(x, y)$ بالنسبة للمتغيرين x، y

وإذا كان $x_{i+1} - x_i = h \;\; ; \; \forall\, i = 0, 1, 2, \dots$ ، نعوض في متسلسلة تايلور فنجد :

$$y_1 = y(x_1) = y(x_o) + \frac{h}{1!}y'(x_o) + \frac{h^2}{2!}y''(x_o) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_o) + \dots$$

والذي يسمى النشر بجوار النقطة x_o ، ثم ننشر بجوار النقطة x_1 فنجد :

$$y_2 = y(x_2) = y(x_1) + \frac{h}{1!}y'(x_1) + \frac{h^2}{2!}y''(x_1) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_1) + \dots$$

وهكذا نتابع حتى الحصول على الحل التقريبي $y_{n+1}(x)$ للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال (7-1) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y) = x \, . \, y$ حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ في النقطة $x = 0.2$ مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور.

الحل :

$y' = x \, . \, y$ ومنه $\quad y'(0) = (0)(1) = 0$

$$y''(x) = y + x\,y' \Rightarrow y''(0) = 1 + (0) = 1$$
$$y'''(x) = y' + y' + x\,y'' = 2\,y'' + x\,y''$$
$$\Rightarrow y'''(0) = 2(0) + (0)(1) = 0$$
$$y^{(4)}(x) = 2\,y'' + y'' + x\,y''' = 3\,y'' + x\,y'''$$
$$\Rightarrow y^{(4)}(0) = 3(1) + (0)(0) = 3$$

نعوض في منشور تايلور فنجد :

$$y_1 = y(x_1) = y(x_o) + \frac{h}{1\,!}\,y'(x_o) + \frac{h^2}{2\,!}\,y''(x_o) + \frac{h^3}{3\,!}\,y'''(x_o) + $$
$$+ \frac{h^4}{4\,!}\,y^{(4)}\,(x_o)$$

$$y_1 = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(0) + \frac{(0.1)^4}{24}(3)$$
$$y_1 = 1.005 = y(0.1)$$

ثم نحسب

$$y'(x_1) = y'(0.1) = x_1\,y_1 = (0.1)(1.005) = 0.1005$$
$$y''(x_1) = y_1 + x_1\,y_1' = (1.005) + (0.1)(0.1005) = 1.015$$
$$y'''(x_1) = 2y_1' + x_1\,y_1'' = 2\,(0.1005) + (0.1)\,(1.015) = 0.3025$$
$$y^{(4)}(x_1) = 3\,y_1'' + x_1\,y_1''' = 3\,(1.015) + (0.1)\,(0.3025)$$
$$= 3.07521$$

نعوض في منشور تايلور فنجد :

$$y_2 = y(x_2) = y(x_1) + \frac{h}{1\,!}\,y'(x_1) + \frac{h^2}{2\,!}\,y''(x_1) + \frac{h^3}{3\,!}\,y'''(x_1) + \ldots$$

$$y_2 = 1.005 + (0.1)\,(0.1005) + \frac{(0.1)^2}{2}\,(1.015) +$$
$$+ \frac{(0.1)^2}{6}\,(0.3025) + \frac{(0.1)^4}{24}(3.0752)$$
$$y_2 = 1.020188$$

لنوجد الحل التحليلي للمعادلة المعطاة

$$y' = x\,.\,y \Rightarrow \frac{d\,y}{d\,x} = x\,.\,y$$ ومنه $$\frac{d\,y}{y} = x\,d\,x$$

بالتكامل نجد :

$$\int_{y=1}^{y} \frac{d\,y}{y} = \int_{x=0}^{x} x\,d\,x$$
$$[\,\ln y\,]_1^y = \left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]_0^x$$
$$\ln y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

نعوض $x = 0.2$ فنجد :

$$y = e^{\frac{(0.2)^2}{2}} = e^{0.02} = 1.0202$$

وهي نفس النتيجة تقريباً التي حصلنا عليها باستخدام إحدى الطرق العددية وهي طريقة تايلور.

تقدير الخطأ المرتكب في حل المعادلة التفاضلية عددياً :

عند الاكتفاء بـــ k حد من حدود متسلسلة تايلور فإن الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية :

$$e(x) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,y^{(k+1)}\,(x) \qquad ; \; x_n \le x \le x_n + h$$

مثال (7ـــ2) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y$ ، حيث $y(2) = 2$ و $h = 0.02$ وذلك في النقطة $x = 2.04$ ، ثم احسب الخطأ المرتكب مستخدماً أربعة حدود من منشور تايلور.

الحل :

لدينا $y(x_o) = y_o$ ولنوجد $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$

$$y' = 2 - 2 = 0$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y'' = 1 - 0 = 1$$
$$y''' = -y'' \Rightarrow y''' = -1$$
$$y^{(4)} = -y''' \Rightarrow y^{(1)} = 1$$

نعوض في منشور تايلور

$$y_1 = y(2.02) = y_o + h\,y'_o + \frac{h^2}{2\,!}\,y''_o + \frac{h^3}{3\,!}\,y'''_o$$

فنجد :

$$y_1 = 2 + (0.02)(0) + \frac{(0.02)^2}{2}(1) + \frac{(0.02)^2}{6}(-1) = 2.0001987$$

ثم نحسب

$$y' = 2.02 - 2.0001987 = 0.01980$$
$$y'' = 1 - 0.01980 = 0.9802$$
$$y''' = -0.9802$$

نعوض في منشور تايلور

$$y_2 = y(2.04) = y_1 + h\,y'_1 + \frac{h^2}{2\,!}\,y''_1 + \frac{h^3}{3\,!}\,y'''_1$$

فنجد :

$$y_2 = 2.0001987 + (0.02)(0.01980) + \frac{(0.02)^2}{2}(0.9802) + \frac{(0.02)^3}{6}(-0.9802)$$
$$y_2 = 2.000789$$

لنحسب الخطأ المرتكب لدينا

$$y^{(4)} = -y''' = 0.9802$$

و $k = 3$ بالتعويض في العلاقة

$$e(x) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)\,!}\,y^{(k+1)}(x)$$

نجد :

$\therefore$

$$e = \frac{(0.02)^4}{24}(0.9802) = 0.00000001$$

مثال (7—3) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2 + 1$ حيث $y(0) = 0$ و $h = 0.1$ في النقطة $x = 0.2$ ثم احسب الخطأ المرتكب مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور.

الحل :

لدينا $y(x_o) = y_o$ ولنوجد $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$

$$y' = y^2 + 1 \Rightarrow y' = 0 + 1 = 1$$
$$y'' = 2\,y\,y' \Rightarrow y'' = 2\,(0)\,(1) = 0$$
$$y''' = 2\,y'^2 + 2\,y\,y'' \Rightarrow y''' = 2\,(1)^2 + 2\,(0) = 2$$
$$y^{(4)} = 4\,y'y'' + 2\,y'y'' + 2\,y\,y''' = 6\,y'y'' + 2yy''' \Rightarrow y^{(4)} = 0$$

نعوض في منشور تايلور فنجد :

$$y_1 = y(x_1) = y(0.1)$$
$$= y(x_0) + h\,y'(x_o) + \frac{h^2}{2\,!}\,y''(x_o) + \frac{h^3}{3\,!}\,y'''(x_o) + \frac{h^4}{4\,!}\,y^{(4)}(x_o)$$
$$y = 0 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2\,!}(0) + \frac{(0.1)^3}{3\,!}(2) + \frac{(0.1)^4}{4\,!}(0)$$
$$y = 0.1 + \frac{(0.1)^3}{6} = 0.100333$$

ثم نحسب

$$y' = (0.100333)^2 + 1 = 1.0100667$$
$$y'' = 2\,(0.100333)\,(1.0100667) = 0.20269$$
$$y''' = 2\,(1.0100667)^2 + 2\,(0.20269)\,(0.100333) = 2.0811$$
$$y^{(4)} = 6\,(1.0100667)\,(0.20269) + 2\,(0.100333)\,(2.0811)$$
$$y^{(4)} = 1.64599$$

∴

نعوض في منشور تايلور فنجد :

$$y_2 = y(0.2)$$
$$= y(x_1) + h\,y'(x_1) + \frac{h^2}{2\,!}y''(x_1) + \frac{h^3}{3\,!}y'''(x_1) + \frac{h^4}{4\,!}y^{(4)}(x_1)$$
$$= 0.100333 + (0.1)(1.0100667) + \frac{(0.1)^2}{2}(0.20269) +$$
$$+\frac{(0.1)^3}{3\,!}(2.0811) + \frac{(0.1)^4}{4\,!}(1.64599)$$
$$y_2 = 0.2027$$

لنحسب الخطأ المرتكب

من أجل حساب الخطأ نحتاج لإيجاد $y^{(5)}$

$$y^{(5)} = 6\,y''^2 + 6\,y'\,y''' + 2\,y'\,y''' + 2\,y\,y^{(4)}$$
$$= 6\,y''^2 + 8\,y'\,y''' + 2\,y\,y^{(4)}$$
$$y^{(5)} = 6\,(0.20269)^2 + 8\,(1.0100667)\,(2.0811) +$$
$$+ 2\,(0.2027)\,(1.64599)$$
$$y^{(5)} = 18.6998$$

بالتعويض في العلاقة $k = 4$

$$e(x) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)\,!}\,y^{(k+1)}\,(x)$$

نجد :

$$e = \frac{(0.1)^5}{5\,!}(18.6998) = 0.000001558$$

ملاحظة :

يمكن تطبيق طريقة تايلور لحل معادلات تفاضلية من مراتب أعلى ولكن يصبح حساب المشتقات المتتالية أكثر صعوبة.

مثال (7ـ4) :

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 4\,x^2\,y = -\,2\,e^{-x^2}$$

بطريقة تايلور حيث $y(0) = 1$ و $y'(0) = e$ و $h = 1$ عند $x = 1$

الحل :

$$y'' = -\,4\,x^2\,y\;-2\,e^{-x^2}$$
$$y''' = 8\,x\,y + 4\,x^2\,y' + 4\,x\,e^{-x^2}$$
$$y^{(4)} = 8\,y + 8\,x\,y' + 8\,x\,y' + 4\,x^2\,y'' + 4\,e^{-x^2} - 8\,x^2\,e^{-x^2}$$
$$y^{(4)} = 8\,y + 16\,x\,y' + 4\,x^2\,y'' + 4\,e^{-x^2} - 8\,x^2\,e^{-x^2}$$
$$y''(0) = 4\,(0)\,(1) - 2\,e^{-0} = -2$$
$$y'''(0) = 8\,(0)\,(1) + 4\,(0)\,e + 4\,(0)\,e^{-0} = 0$$
$$y^{(4)}(0) = 8\,(1) + 16\,(0)\,e + 4\,(0)\,(0) + 4\,e^{-0} - 8(0)\,e^{-0}$$
$$y^{(4)}(0) = 8 + 4 = 12$$

نعوض في منشور تايلور

$$y_1 = y(x_1) = y(1)$$
$$= y(x_o) + h\,y'(x_o) + \frac{h^2}{2\,!}y''(x_o) + \frac{h^3}{3\,!}y'''(x_o) + \frac{h^4}{4\,!}y^{(4)}\,(x_o)$$
$$y_1 = 1 + (1)\,e + \frac{(1)^2}{2!}(-2) + \frac{(1)^3}{6}(0) + \frac{(1)^4}{24}(12) = 3.218$$

2ـ طريقة أولر :

نعلم أن مشتق الدالة $y = f(x)$ يعطى بالعلاقة : $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ولحل المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ حيث $y(x_o) = y_o$ نفرض أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقريب لـ y' أي

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad و \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i = h$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

ومن العلاقة $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ يمكن أن نكتب $y'_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x}$

ومنه $\Delta y_k = \Delta x \, y'_k = h \, y'_k = h \, f(x_k, y_k)$

وبالتالي فإن

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(y_k, y_k) \; ; k = 0, 1, 2, \ldots$$

وهي علاقة أول (صيغة أولر).

مثال (7ـ5) :

حل المعادلة التفاضلية $y' = x \cdot y$ بطريقة أولر

حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ في النقطة $x = 0.4$

الحل :

$$y_{k+1} = y_k + h\, x_k \cdot y_k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_1 = 0.1 \quad ; \quad y_o = 1 \quad , \quad x_o = 0$$

$$y_1 = y(0.1) = y_o + h\, x_o\, y_o = 1 + (0.1)(1) = 1$$

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + h\, x_1 \cdot y_1$$

$$= 1 + (0.1)(0.1)(1) = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$y_3 = y(0.3) = y_2 + h\, x_2 \cdot y_2$$

$$= 1.01 + (0.1)(0.2)(1.01) = 1.0302$$

$$y_4 = y(0.4) = 1.0302 + (0)(0.3)(1.0302) = 1.0611$$

تقدير الخطأ المرتكب باستخدام طريقة أولر :

يعطى الخطأ المرتكب بطريقة أولر بالعلاقة التالية :

$$e(x) = \frac{1}{2} h^2 y''(x)$$

مثال (7ـ6) :

حل بطريقة أولر المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x-y}{2}$ على الفترة $[0, 3]$ حيث $y(0) = 1$ و $h = 1$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل :

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{x_k - y_k}{2} \quad ; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_1 = y_o + h \frac{x_o - y_o}{2}$$

$$= 1 + (1) \frac{0-1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

$$y_2 = y_1 + h \frac{x_1 - y_1}{2}$$

$$= 0.5 + (1) \frac{1 - 0.5}{2} = 0.5 + \frac{0.5}{2} = 0.75$$

$$y_3 = y_2 + h \frac{x_2 - y_2}{2}$$

$$= 0.75 + (1) \frac{2 - 0.75}{2} = 0.75 + \frac{1.25}{2} = 1.375$$

لنحسب الخطأ المرتكب

$$y'' = \frac{1}{2}(1 - y') = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-y)$$

$$y'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(3 - 1.375)$$

$$= 0.5 - 0.40625 = 0.09375$$

نعوض في العلاقة $e = \frac{1}{2} h^2 y''$

فنجد :

$$e = \frac{1}{2}(1)^2(0.009375)$$
$$e = 0.046875$$

3ــ طريقة رانج ــ كوتا

لقد حصل العالمان رانج – كوتا على عدة صيغ لحل المعادلـــة التفاضـــلية $y' = f(x, y)$ حيث $y(x_o) = y_0$

ومن أشهر هذه الصيغ الصيغة التالية :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

و h ثابت اختياري صغير.

مثال (7ــ7) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x y^{\frac{1}{3}}$ بطريقة رانج ــ كوتا حيث $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 1.1$ مقرباً النتائج إلى خمسة أرقام عشرية ثم قارن النتيجة التي تحصـــل عليها مع الحل التحليلي.

الحل :

$$k_1 = h f(x_o, y_o)$$

$$k_1 = (0.1)\left(x_o\, y_o^{\frac{1}{3}}\right) = (0.1)\left[(1)(1)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$k_1 = 0.1$$
$$k_2 = h f\left(x_o + \frac{1}{2}h, y_o + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$= (0.1) f(1 + 0.05, 1 + 0.05)$$
$$= (0.1) f(1.05, 1.05)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$k_2 = 0.10672$$
$$k_3 = h f\left(x_o + \frac{1}{2}h, y_o + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$= (0.1) f(1 + 0.05, 1 + 0.05336)$$
$$= (0.1) f(1.05, 1.05336)$$
$$= (0.1)\left[(1.05)(1.05336)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$k_3 = 0.10684$$
$$k_4 = h f(x_o + h, y_o + k_3)$$
$$= (0.1) f(1 + 0.1, 1 + 0.10684)$$
$$= (0.1) f(1.1, 1.10684)$$
$$= (0.1)\left[(1.1)(1.10684)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$k_4 = 0.11379$$

نعوض في العلاقة

$$y_1 = y_o + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

فنجد :

$$y_1 = y(1.1) = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.10672) + 2(0.10684) + 0.11379]$$
$$y(1.1) = 1.10682$$

لنوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية $y' = x y^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = x y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = x\,dx$$

بالتكامل نجد :

$$\int_{y=1}^{y} y^{-\frac{1}{3}}\,dy = \int_{x=1}^{x} x\,dx$$

$$\left[\frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_1^y = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^x$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[x^2 - 1\right]$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

نضرب الطرفين بـــ $\frac{2}{3}$ فنجد :

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

ومنه

$$y = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

عند النقطة $x = 1.1$ فإن الحل التحليلي

$$y(1.1) = \left[\frac{1}{3}(1.1)^2 + \frac{2}{3}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$y(1.1) = 1.10682$$

نلاحظ أن الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية $y' = x\,y^{\frac{1}{3}}$ عند النقطة $x = 1.1$ يطابق الحــل العددي بطريقة رانج ــ كوتا.

تمارين

(1) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = -x\,y^2$ حيــث $y(0) = 2$ و $h = 0.1$ فــي النقطة $x = 0.1$ مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور، ثم قارن النتيجة مــع الحل التحليلي عند النقطة $x = 0.1$

(2) أوجد حل المعادلة التفاضــلية $y' = x^2 + y$ حيــث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ فــي النقطة $x = 0.4$ مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور.

(3) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x\,y^{\frac{1}{3}}$ حيث $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور.

(4) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' = y^2 e^x - y'$ بطريقة تايلور حيث $y(0) = 0$ و $y'(0) = -1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.2$

(5) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ بطريقة أولر حيــث $y(0) = 0$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 1$

(6) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y - \frac{2x}{y}$ بطريقة أولر حيــث $y(0) = 1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.6$

(7) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y$ بطريقة رانج ــ كوتا حيث $y(0) = 2$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 0.6$

(8) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y - \frac{2x}{y}$ بطريقة رانج ــ كوتا حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.2$ عند النقطة $x = 0.4$

الرموز والمصطلحات العلمية

Algorithm	خوارزمية
Absolutely Convergent	متقارب مطلقاً
Analysis	تحليل
Bowneded	محدود
Bowneded Function	دالة محدودة
Closed interval	فترة مغلقة
Condition	شرط
Constant	ثابت
Continuity	استمرارية
Convergense	تقارب
Coordinate	إحداثي
Definiens	معرّف
Definite	محدد

Definition	تعريف
Derivative	اشتقاق
Derivative	مشتق
Difference	فرق
Difference Table	جدول الفروق
Differentable	قابلة للتفاضل
Divided differences	الفروق المقسومة
Element	عنصر
Equation	عادلة
Error	خطأ
Absolute error	الخطأ المطلق
Error bound	حد الخطأ
Accuracy	دقة
Euler's method	طريقة أويلر

Exponent	أس
Exponential	أسي
Factor	عامل
Finite	منته
Fixed Point	نقطة ثابتة
Fixed value	قيمة ثابتة
Function	دالة
Function approximation	تقريب الدالة
Function of iteration	دالة التكرار
Formula	صيغة
Gauss – Seidel method	طريقة غاوس – سيدل
Growth of error	نمو الخطأ
Infinite	غير منته
Infinitely small	متناهي في الصغر

Infinity	لا نهاية
Integrable	قابلة للمكاملة
Integral	تكامل
Integration	مكاملة
Interpolation	إستكمال
Iteration	تكرار
Jacobian Method	طريقة جاكوبي
Linear	خطي
Linear system	نظام خطي
Matrix	مصفوفة
Maximum	قيمة عظمى
Mean value	قيمة صغرى
Minimum	قيمة صغرى
Multiplication	ضرب

Necessary condition	شرط لازم
Numerical	عددي
Newton Method	طريقة نيوتن
Norm	معيار
Non linear	غير خطي
Open interval	فترة مفتوحة
Polynomial	كثيرة حدود
Product	ضرب
Proof	برهان
Quadrat	مربع
Quadratic	تربيعي
Real	حقيقي
Real number	عدد حقيقي

Region	منطقة
Relation	علاقة
Series	متسلسلة
Set	مجموعة
Sign	إشارة
Solution	حل
Space	فضاء
Subtraction	طرح
Substitution	التعويض
Sum	جمع
Symbol	رمز
Symmetric	متناظر
Stable	الاستقراء
Theorem	نظرية

Transformation	تحويل
Transpose	تحويل
Unique	وحيد
Unique Solution	حل وحيد
Value	قيمة
Variable	متغير
Vector	متجه
Vector Space	فضاء متجهي
Zero	صفر
Zero Function	دالة صفرية
Zero Solution	حل صفري

المراجع

المراجع العربية:-

(١) د. أبوبكر أحمد السيد .
التحليل العددي – جامعة الكويت – دار القلم – الطبعة الأولى ١٤٠٩ هـ – ١٩٨٨ م .

(٢) د. نضال حسن – د. حامد عباس .
التحليل العددي – منشورات جامعة البعث – كلية العلوم – ١٩٩٧ م – ١٩٩٨ م .

(٣) د. مجدي عبدالعاطي الطويل .
مقدمة في علم التحليل العددي – جامعة القاهرة – كلية الهندسة – ١٤١٦ هـ .

(٤) د. وعد الحسيني – د. محمد صبح
الأسس العامة للتحليل العددي – جامعة دمشق – ١٩٨٥ م – ١٩٨٦ م

(٥) د. هاشم عبدللي .
التحليل العددي – جامعة حلب – ١٩٩١ م – ١٩٩٢ م .

(٦) د. محمود شاهين .
الأسس العامة للتحليل العددي – جامعة تشرين – ١٩٨٦ م – ١٩٨٧ م

(٧) أيان جاكس – كولن جد .

مترجم عن الإنجليزية– د.علي محمد ابراهيم ود.محمد ماهر النجار.

التحليل العددي – جامعة الفاتح – الجماهيرية الليبية – ١٩٩٢ م – ١٩٩٣ م .

(٨) فرانسيس شيد .

التحليل العددي – الدار الدولية للنشر والتوزيع – الطبعة العربية – القاهرة – مصر – ١٩٩٧ م .

(٩) د. فتحي بن حسن قاضي .

مبادئ أساسية في التحليل العددي – دار الأندلس للنشر والتوزيع – حائل – الطبعة الأولى ١٤٢٦ هـ – ٢٠٠٥ م .

المراجع الأجنبية :-

(1) Burden , R. L. and Faires , J. D. ; Numerical Analysis , 3rd edition , PWS Publishers , Boston , 1985 .

(2) Carnahan , B. , Luther , H. A. and Wilkes , J. O. ; Applied Numerical methods , John Wiley & Sons , Inc. , New York , 1969 .

(3) Conte , S. D. and de Boor , C. ; Elementary Numerical Analysis , An Algorithmic Approach , 3rd edition , Mc Graw – Hill , London , 1980 .

(4) Dahlquist , G. , Björck , A. , (Translated by Anderson , N.) Numerical Methods , Prentic – Hall , Inc. , Englewood , Cliffs , N. J. , 1974 .

(5) El- Tarazi , M. N. ; Numerical Analysis , An Introductory Course , Dar Al-Qualam , Kuwait , 1987 .

(6) Fröberg , C. E. ; Introduction to Numerical Analysis 3rd edition , Addison – Wesley Pub. Co. , Reading , Massachusetts , 1973 .

(7) Harnbeck , R. W. ; Numerical Methods , Quantum Publishers , Inc. , New York , 1975 .

(8) Johnson , L. G. and Riess , R. D. ; Numberical Analysis , 2nd edition , Addison – Wesley Pub. Co. , Reading , Mass. , 1982 .

(9) Kellison , S. G. ; Fundamentals of Numerical Analysis , Richard D. Irwin , Inc. , Homewood , IIlinois , 1975 .

(10) Maron , M. ; Numerical Analysis , A Practical , MacMillan Pub. Co. , New York , 1982 .

(11) Emst Hairer , Introduction al'analyse Numerique , Universite de , Geneve , October 2001 .

(12) Rephale Herbin , cours d'Analyse Numerique , Universite Aix marreille , 2004 .