

المعادلات التفاضلية

الجزء الثاني

تأليف

الأستاذ الدكتور

حسن مصطفى العويضي

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتورة

سناء علي زارع

رئيسة قسم الرياضيات

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور

عبد الوهاب عباس رجب

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

مكتبة الرشيد
ناشر

المحتويات

المحتويات

مقدمة.....	١١
الباب الأول : نظرية الوجود والحدودية.....	
١ - ١ مقدمة.....	١٥
١ - ٢ طريقة بيكارد للتقريب المتتالي.....	١٥
١ - ٣ استخدام طريقة بيكارد لإيجاد حلول نظام تفاضلي.....	٢٣
١ - ٤ وجود حل المجاملة التفاضلية ووحودية.....	٢٧
١ - ٥ شرط لبشتز.....	٢٨
١ - ٦ نظرية الوجود والحدودية.....	٢٨
١ - ٧ متباينة جرونوويل.....	٤٣
١ - ٨ اعتماد حل مسألة القيمة الابتدائية على الشرط الابتدائي.....	٤٦
تمارين.....	٤٩
الباب الثاني الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة.....	٥١
١ - الأنظمة من المعادلات التفاضلية.....	٥٣
٢ - الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة.....	٦٠
أ - القسم الذاتية حقيقة ومختلفة.....	٦٢
ب - القيم الذاتية أعداد مركبة.....	٧٠
ج - القيم الذاتية مكررة.....	٧٦
٢ - الأنظمة الخطية غير المتجانسة.....	٨٥
تمارين عامة.....	٩٠
الباب الثالث : معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة.....	٩٣
١ - طريقة تغيير الباراندات (الوسائط).....	٩٥
٢ - التحويل إلى الصورة القياسية.....	٩٨
٣ - طريقة تحليل المؤثر.....	١٠٢
٤ - استخدام صيغة آبل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية.....	١٠٣
أولاً : المعادلة المتجانسة.....	١٠٧
ثانياً : المعادلة غير المتجانسة.....	١٠٨
٥ - إستبدال المتغير المستقبل.....	١١٢

المحتويات

١١٧	٦ - المعادلة التامة	
١٢٠	٧ - المعادلة المزاملة	
١٢٣	٨ - إختزال الرتبة	
١٢٧	تمارين	

الباب الرابع : حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية باستخدام المتسلسلات اللانهائية بطريقة مرونينوس

١٣٣	١ - مقدمة	
١٣٨	٢ - طريقة مرونينوس	
١٤١	الحالة الأولى	
١٤٤	الحالة الثانية	
١٤٧	الحالة الثالثة	
١٥٦	حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة قوى x الكبيرة جداً	
١٦٩	تمارين	

الباب الخامس : معادلات لحبذر التفاضلية

١٧١	١ - مقدمة	
١٧٣	٢ - صيغة رودريج	
١٧٦	٣ - الصور المختلفة لكثيرة حدود لحبذر	
١٧٧	٤ - الدالة المولدة لكثيرات حدود الحبذر	
١٧٨	٥ - الخواص الاساسية لكثيرات الحدود	
١٧٩	٦ - العلاقة التكرارية لكثيرات حدود لحبذر	
١٨٤	٧ - تمارين	
١٩٥		

الباب السادس : معادلات بسل التفاضلية

١٩٩	١ - مقدمة	
٢٠٤	٢ - الدالة المولدة الدوال بسل	
٢٠٤	٣ - العلاقات التكرارية لدوال بسل	
٢٠٧	٤ - أمثلة	
٢١٨	٥ - تمارين	

المحتويات

٢٢٣	الباب السابع : المعادلات التفاضلية الجزئية	
٢٢٣	١- مقدمة	
٢٢٤	٢- أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية	
٢٢٤	٣- تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية	
٢٢٩	أولاً : حذف الثوابت الاختيارية	
٢٣٢	ثانياً : حذف الدوال الاختيارية	
٢٣٥	تمارين	
٢٣٦	٤- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى	
٢٣٦	أولاً : الحل التام	
٢٣٧	ثانياً : الحل العام	
٢٣٩	٥- أمثلة	
٢٤٨	تمارين	
٢٤٩	٦- تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية	
٢٤٩	١- فصل المتغيرات	
٢٥٤	٢- استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية	
٢٥٥	أ- معادلات الموجه	
٢٦٦	ب- معادلات سريان الحرارة (احادية) البعد	
٢٦٦	ج- معادلات لابلاس	
٢٦٧	د- معادلة البث	
٢٧١	تمارين	
٢٧٣	الباب الثامن : متسلسلة فوريير	
٢٧٥	١- مقدمة	
٢٧٥	٢- الدالة الدورية	
٢٧٥	٣- منحني الدالة الدورية	
٢٧٦	٤- تكامل الدالة الدورية	
٢٧٦	٥- تغيير الدورة	
٢٧٧	٦- أنواع خاصة من الدوال الدورية	
٢٧٧	أ- الدالة الزوجية	
٢٧٨	ب- الدالة الفردية	
٢٧٨	ج- دالة زوجية التوافق	
٢٧٩	د- دالة فردية التوافق	

المحتويات

٢٧٩	٧ - بعض التكاملات الخاصة
٢٨١	٨ - تبسيط معاملات فوريير
٢٨١	١ - دوال لها خاصية واحدة
٢٨١	(i) الدالة الزوجية
٢٨١	(ii) الدالة الفردية
٢٨١	(iii) دلالة زوجية التوافق
٢٨٢	(iv) دالة فردية التوافق
٢٨٢	ب - دوال لها خاصيتين
٢٨٢	(i) دالة زوجية وزوجية التوافق
٢٨٢	(ii) دالة زوجية وفردية التوافق
٢٨٣	(iii) دالة وفردية التوافق
٢٨٣	(iv) دالة فردية وفردية التوافق
٢٨٤	٨ - أمثلة
٢٩٥	تمارين
٢٩٥	الباب التاسع : مسائل شتراء ليوفيل
٢٩٧	١ - مقدمة
٢٩٧	٢ - أمثلة
٣٠٥	تمارين
٣٠٧	ملحق (دالة جاما - دالة بينتا)
٣١٢	المراجع

المقدمة

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية . وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقلل من البراهين النظرية والإكثار من الأمثلة دون الإخلال بالدقة العلمية حتى تكون المادة العلمية سهلة المآخذ .

فقد تعرضنا لدراسة وجود الحلول ووحديتها وإيجاد حلول الأنظمة الخطية ثم أتبعنا بدراسة المعادلات التفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدمين عدة طرائق . هذا بالإضافة إلى دراسة خواص دوال بسل ولبحندر . والحقنا بذلك دراسة مبسطة عن المعاملات التفاضلية الجزئية وأنهيا الكتاب بطريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية مستخدما طريقة فروبنوس .

الباب الأول

نظرية الوجود والوحدة Existence and Uniqueness Theorem

الباب الأول

نظرية الوجود والوحدة

Existence and Uniqueness Theorem

1- مقدمة

قد تقابلنا في المسائل الهندسية و الفيزيائية بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية التي يتعذر حلها بالطرق المعروفة و لذلك نلجأ لمعرفة وجود الحل من عدمه أو وجود أكثر من حل للمعادلة التفاضلية دون إيجاد الحل نفسه. وقد نلجأ أيضا للطرق العددية للحصول على حل تقريبي لهذه المعادلات.

وفي هذا الباب سوف نناقش طريقة بيكارد (Picard) للتقريب المتتالي لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيم الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

يسمى الشرط $y(x_0) = y_0$ بالشرط الابتدائي. وترمز $y(x_0) = y_0$ إلى قيمة y عند $x = x_0$

٢ - طريقة بيكارد للتقريب المتتالي Picard's approximation method

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

و بتكامل (1) على الفترة (x_0, x) نحصل على

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$

أى

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$

أى أن

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y) ds \quad (2)$$

وبالتالى فإن حل مسألة القيمة الابتدائية (1) يكون مكافئاً لإيجاد دالة $y(x)$ التى تحقق المعادلة (2) لأنه بتفاضل (2) نحصل على $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وبوضع $x = x_0$ فى (2) نحصل على $y(x_0) = y_0 + 0$ أى $y(x_0) = y_0$. وعلى العكس فقد حصلنا على (2) من (1) بالتكامل على الفترة (x_0, x) ومستخدمنا الشرط الابتدائى $y(x_0) = y_0$ وهذا يقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية (1):

أى حل لمسألة القيمة الابتدائية (1) يكون حلاً للمعادلة التكاملية (2) وعلى العكس أى حل يحقق المعادلة التكاملية (2) يكون حلاً لمسألة القيمة الابتدائية (1). وحيث إن التكامل فى الطرف الأيمن من (2) لا يمكن الحصول عليه لغياب أى معلومات عن y بدلالة x . وعلى ذلك سوف نلجأ إلى تقريب متتالى لحل المعادلة التكاملية (2) كما يلي.

كتقريب أولى نضع $y = y_0$ فى الدالة المكاملة فى (2) فنحصل على

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \quad (3)$$

حيث $y_1(x)$ هى قيمة $y(x)$ المناظرة وتسمى بالتقريب الأول وهى تقريب أفضل للحل $y(x)$ عند أى x . وللحصول على تقريب أكثر دقة نعوض عن y بالحل بالتقريب الأول y_1 فى الطرف الأيمن من (2) لنحصل على ما يسمى بالتقريب الثانى y_2

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds \quad (4)$$

ونستمر في هذه الطريقة حتى الحصول على التقريب النوني y_n وهو

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

وبذلك نحصل على متابعه من الحلول التقريبية

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x), \dots$$

مثال (1)

استخدم طريقه بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3, \quad y(0) = 2 \quad (1)$$

الحل

لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y = 2, \quad x = 0 \quad (2)$$

ونعرف أن التقريب النوني لحل مسألة القيمة الابتدائية هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \quad (3)$$

وحيث إن

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 3, \quad x_0 = 0, y_0 = 2 \quad (4)$$

ومن (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_0^x (2y_{n-1} - 2s^2 - 3) ds \quad (5)$$

التقريب الأول: بوضع $n=1$ في (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_0^x (2y_0 - 2s^2 - 3) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + \int_0^x (4 - 2s^2 - 3) ds \\
 &= 2 + \int_0^x (1 - 2s^2) ds \\
 &= 2 + \left[s - \frac{2s^3}{3} \right]_0^x = 2 + x - \frac{2x^3}{3} \quad (6)
 \end{aligned}$$

التقريب الثاني: بوضع $n=2$ في (5) نحصل على

$$\begin{aligned}
 y_2 &= 2 + \int_0^x (2y_1 - 2s^2 - 3) ds \\
 &= 2 + \int_0^x \left[2 \left\{ 2 + s - \frac{2s^3}{3} \right\} - 2s^2 - 3 \right] ds \\
 &= 2 + \int_0^x \left[1 + 2s - 2s^2 - \frac{4s^3}{3} \right] ds \\
 &= 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \quad (7)
 \end{aligned}$$

التقريب الثالث:

بوضع $n=3$ في (5) نحصل على

$$\begin{aligned}
 y_3 &= 2 + \int_0^x (2y_2 - 2s^2 - 3) ds = 2 + \int_0^x \left[2 \left\{ 2 + s + s^2 - \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3} \right\} - 2s^2 - 3 \right] ds \\
 &= 2 + \int_0^x \left[1 + 2s - \frac{4s^3}{3} - \frac{2}{3}s^4 \right] ds \\
 &= 2 + x + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{10}
 \end{aligned}$$

مثال (٢)

استخدم طريقة بيكارد للتقريب المتتالي لإيجاد التقريب الثالث لحل المسألة الابتدائية .

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$$

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0 \quad (1)$$

ونعرف أن التقريب النوني لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \quad (3)$$

بالمقارنة من (1) ، (2) نجد أن

$$f(x, y) = x + y^2, x_0 = 0, y_0 = 0 \quad (4)$$

ومن المعادلة (3) فإن

$$y_n = \int_0^x [s + y_{n-1}^2(s)] ds \quad (5)$$

التقريب الأول: بوضع $n=1$ في (5) فنحصل على

$$y_1 = \int_0^x [s + y_0^2] ds = \int_0^x s ds = \frac{1}{2} x^2 \quad (6)$$

التقريب الثاني: بوضع $n=2$ في (5) ونستخدم (6) فنحصل على

$$y_2 = \int_0^x [s + y_1^2] ds = \int_0^x [s + \frac{s^4}{4}] ds = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 \quad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ في ونستخدم (7) نحصل على

$$\begin{aligned} y_3 &= \int_0^x [s + y_2^2] ds \\ &= \int_0^x \left[s + \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{20}s^5 \right)^2 \right] ds = \int_0^x \left[s + \frac{s^4}{4} + \frac{s^{10}}{400} + \frac{1}{20}s^7 \right] ds \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4400}x^{11} + \frac{1}{160}x^8 \end{aligned}$$

مثال (٣)

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

باستخدام طريقة بيكاردي حيث $y(1) = 2$

الحل :

نعرف أن التقريب النوني y_n لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \quad (3)$$

بمقارنة من (1) ، (2) نجد أن

$$x_0 = 1, y_0 = 2, f(x, y) = 2 - \left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

من (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} y_{n-1} \right] ds \quad (5)$$

التقريب الأول: بوضع $n=1$ في (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_1^x \left[2 - \left(\frac{1}{s} \right) y_0 \right] ds = 2 + \int_1^x \left[2 - \left(\frac{2}{s} \right) \right] ds \quad (6)$$

$$= 2 + [2s - 2 \ln s]_1^x = 2 + 2x - 2 \ln x - 2 = 2x - 2 \ln x$$

التقريب الثاني: بوضع $n=2$ في (5) وباستخدام (6) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{y_1}{s} \right] ds = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} (2s - 2 \ln s) \right] ds \quad (7)$$

$$= 2 + 2 \int_1^x \ln s \cdot \frac{1}{s} ds = [2 + (\ln s)^2]_1^x = 2 + \ln^2 x$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ في (5) وباستخدام (7) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} y_2 \right] ds$$

$$= 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} \{ 2 + \ln^2 s \} \right] ds = 2 + 2x - 2 \ln x - (1/3) \ln^3 x - 2$$

$$= 2x - 2 \ln x - \frac{1}{3} \ln^3 x.$$

مثال (4)

إستخدم طريقه بيكارد لإيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 2$$

وأثبت أن الحل التقريبي يقترب من الحل التام (exact)

الحل

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 2 \quad (1)$$

ونعرف أن التقريب النوني لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \quad (3)$$

بمقارنة (1) ، (2) نجد أن

$$f(x, y) = y - x, x_0 = 0, y_0 = 2 \quad (4)$$

ومن (3) نجد أن

$$y_n = 2 + \int_0^x [y_{n-1} - s] ds \quad (5)$$

التقريب الأول: بوضع $n=1$ في (5) واستخدام (4) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_0^x [y_0 - s] ds = 2 + \int_0^x [2 - s] ds = 2 + 2x - \frac{1}{2}x^2 \quad (6)$$

التقريب الثاني: بوضع $n=2$ في (5) واستخدام (6) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_0^x [y_1 - s] ds = 2 + \int_0^x [2 + 2s - \frac{1}{2}s^2 - s] ds = 2 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \quad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ في (5) واستخدام (7) نحصل على

$$\begin{aligned}
 y_3 &= 2 + \int_0^x [y_2 - s] ds = 2 + \int_0^x [2 + 2s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 - s] ds \\
 &= 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}
 \end{aligned} \tag{8}$$

للحصول على الحل التام للمعادلة (1) حيث

$$\frac{dy}{dx} - y = -x \tag{9}$$

وهي معادلة خطية ويكون معامل التكامل هو e^{-x} وبالتالي يكون حلها هو

$$ye^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

أى

$$y = x + 1 + ce^x \tag{10}$$

وحيث أن $x = 0, y = 2$ وباستخدام (10) نجد أن $c = 1$ وبذلك يكون الحل التام

هو

$$y = x + 1 + e^x \tag{11}$$

ونعرف أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{12}$$

ومن (8)، (12)، نجد أن الحل التقريبي يزول إلى

$$y = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$y = 1 + x + e^x$$

٢ - استخدام طريقه بيكارد التقريبه لإيجاد حلول نظام تفاضلى:

ليكن لدينا

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

وكانت $y = y_0, z = z_0$ عندما $x = x_0$ والتقريب النوني (y_n, z_n) لمسألة القيمة الحدية (1) تعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}, z_{n-1}) ds \quad (2)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^x g(s, y_{n-1}, z_{n-1}) ds \quad (3)$$

مثال (د)

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0$$

مستخدماً طريقه بيكارد

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0 \quad (1)$$

ونعرف أن التقريب النوني (y_n, z_n) لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

وأن $y = y_0, z = z_0$ عندما $x = x_0$ يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}, z_{n-1}) ds \quad (3)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^x g(x, y_{n-1}, z_{n-1}) ds \quad (4)$$

وبمقارنه (1) ، (2) يكون لدينا

$$f(x, y, z) = z, g(x, y, z) = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0 \quad (5)$$

من (3) نجد أن

$$y_n = 1 + \int_0^x z_{n-1} ds \quad (6)$$

ومن (4) نجد أن

$$z_n = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_{n-1} + z_{n-1}) ds \quad (7)$$

التقريب الأول:

بوضع $n=1$ في (6) وباستخدام (5) نحصل على

$$y_1 = 1 + \int_0^x z_0 ds = 1 + \int_0^x \frac{1}{2} ds = 1 + \frac{1}{2}x \quad (8)$$

بوضع $n=1$ في (7) واستخدام (5) نحصل على

$$z_1 = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_0 + z_0) ds = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(1 + \frac{1}{2}) ds = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} \quad (9)$$

التقريب الثاني: بوضع $n=2$ في (6) واستخدام (9) نحصل على

$$y_2 = 1 + \int_0^x z_1 ds = 1 + \int_0^x (\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4) ds = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3x^5}{40} \quad (10)$$

وكذلك بوضع $n=2$ في (7) واستخدام (8) ، (9) نحصل على

$$z_2 = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 (y_1 + z_1) ds = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 \left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4\right) ds$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8 \quad (11)$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ في (6) واستخدام (11) نحصل على

$$y_3 = 1 + \int_0^x z_2 ds = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{3}{64}s^8\right) ds = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{192}x^9$$

وكذلك بوضع $n=3$ في (7) واستخدام (10)، (11) نحصل على

$$z_3 = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 (y_2 + z_2) ds = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 \left[1 + \frac{s}{2} + \frac{3s^5}{40} + \frac{1}{2} + \frac{3s^4}{8} + \frac{s^5}{10} + \frac{3s^8}{64}\right] ds$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8 + \frac{7}{360}x^9 + \frac{1}{256}x^{12}$$

مثال (٦)

أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 \left(y + \frac{dy}{dx}\right), y = 1, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}, x = 0$$

الحل :

لدينا

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 \left(y + \frac{dy}{dx}\right), y = 1, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}, x = 0 \quad (1)$$

وبوضع $z = \frac{dy}{dx}$ فيكون $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ وعلى ذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = x^3 (y + z), y = 1, z = \frac{1}{2}, x = 0 \quad (2)$$

وتؤول المسألة إلى المثال رقم (٥) السابق.

٤ - وجود حل المعادلة التفاضلية ووحديته :

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| + |y| = 0, y(0) = 1 \quad (1)$$

وليكن $y \neq 0$ وبالقسمة على $|y|$ وبالتكامل نحصل على تناقض وبالتالي فإن $y = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية ولكن هذا الحل لا يحقق الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ وبالتالي فإن مسألة القيمة الابتدائية (1) ليس لها حل على الإطلاق.

ونعتبر الآن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x, y(0) = 1 \quad (2)$$

وبالتكامل نحصل على حل لها وهو $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ حيث c ثابت إختياري وباستخدام الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ أى عندما $x = 0$ تكون $y = 1$ نحصل على $c = 1$ وبالتالي

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

وأخيرا اعتبر مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)}{x}, y(0) = 1 \quad (3)$$

الذى يكون حلها هو $y = 1 + xc$

وباستخدام الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ نرى أنه لا يمكن تحديد قيمة c وبالتالي فإن مسألة القيمة الابتدائية المعطاه لها عدد لانهاى من الحلول معطاه بالعلاقه

$$y - 1 = xc \text{ حيث } c \text{ ثابت إختياري}$$

هذا الجدل يقودنا إلى أن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

قد يكون لها حل وحيد ، أو أكثر من حل ، أولا يوجد لها حل على الإطلاق وهذا يقودنا إلى الأسئلة الأساسية التالية: -

أ - وجود الحل (existence): تحت أى الشروط يكون مسألة القيمة الابتدائية (4) لها حل واحد على الأقل؟

ب - وحدوية الحل (uniqueness) : تحت أى الشروط يكون مسألة القيمة الابتدائية (4) حل واحد؟

تسمى النظرية التى تحوى هذه الشروط بنظرية الوجود ونظرية الوحودية على الترتيب.

٥ - شرط لبشترز Lipschitz condition :

يقال أن الدالة $f(x, y)$ تحقق شرط لبشترز فى المنطقة D فى المستوى xy إذا وجد ثابت $K > 0$ بحيث إن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$$

حيث إن النقطتين $(x, y_2), (x, y_1)$ تقعان فى المنطقه D . ويسمى الثابت K بثابت لبشترز للدالة $f(x, y)$.

٦ - نظرية الوجود والوحودية

نظرية (٢)

لتكن دالة $f(x, y)$ متصلة فى النطاق D من المستوى xy ، وأن M ثابت بحيث

$$|f(x, y)| \leq M, (x, y) \in D \quad (1)$$

وبتحقق شرط لبشترز فى y أى

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (2)$$

حيث K ثابت لايعتمد على x, y_1, y_2 .

ليكن R هو المستطيل المعرف بالعلاقة

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \quad (3)$$

يقع في D حيث $Mh < b, h = \min(a, b/M)$ فإن المعادلة التفاضلية

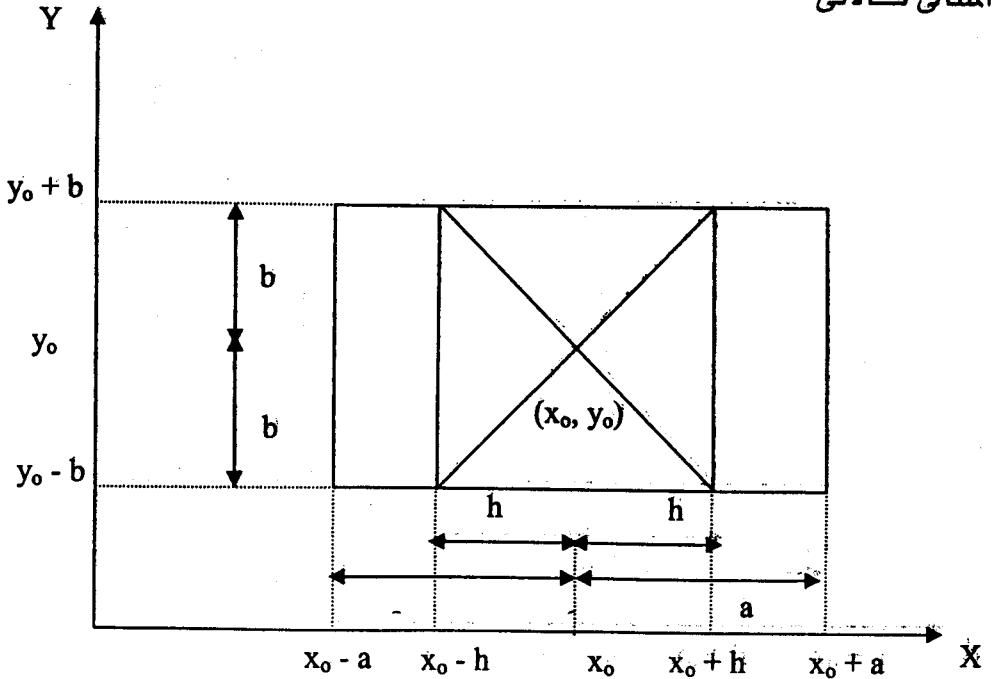
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ لها حل وحيد } y = y(x) \text{ حيث } y(x_0) = y_0 \text{ لكل } |x - x_0| \leq h.$$

البرهان:

سوف نثبت هذه النظرية باستخدام طريقه بيكارد للتقارب المتتالي. ليكن x بحيث

$|x - x_0| \leq h$. فإننا نعرف متابعه الدوال $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ وتسمى التقريب

المتتالي كالاتى



$$\left. \begin{aligned}
 y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \\
 y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1) ds \\
 \dots \\
 y_{n-1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-2}) ds \\
 y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}) ds
 \end{aligned} \right\} (4)$$

سوف نقسم البرهان إلى خمس خطوات رئيسية:

الخطوة الأولى:

سوف نثبت لكل $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ أن المنحنى $y = y_n(x)$ يقع داخل R أى أن

$$y_0 - b < y < y_0 + b \quad \text{والآن}$$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds$$

أى

$$|y_1 - y_0| \leq M |x - x_0| \leq Mh < b$$

باستخدام (1) . (3) ، هذا يبرهن النظرية عندما $n=1$

نفرض أن $y = y_{n-1}(x)$ تقع فى R وبالتالي تكون $f(x, y_{n-1}(x))$ معرفه ومتصله

وتحقق $|f(x, y_{n-1}(x))| \leq M$ على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$.

نحصل من (4) على

$$|y_n - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1})| ds \leq M |x - x_0| \leq Mh < b$$

كما سبق ، والتي تثبت أن $y_n(x)$ تقع فى R وبالتالى $f(x, y_n)$ معرفه ومتصله على $[x_0 - h, x_0 + h]$ وهذا يبين النتيجة المطلوبه محققه لكل n بالإستنتاج الرياضى

الخطوة الثانية:

سوف نثبت بالإستنتاج الرياضى أن

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (5)$$

سبق أن أثبتنا صحة (5) عندما $n=1$ فى الخطوه الأولى حيث أثبتنا

$|y_1 - y_0| \leq M |x - x_0|$. نفرض أن المتباينه (5) صحيحة عند $n-1$ بدلا من n ، أى أن

$$|y_{n-1} - y_{n-2}| \leq \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!} |x - x_0|^{n-1} \quad (6)$$

فيكون لدينا

$$|y_n - y_{n-1}| = \left| \int_{x_0}^x \{f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})\} ds \right|$$

أى

$$|y_n - y_{n-1}| = \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})| ds \quad (7)$$

و بإستخدام شرط ليبشتز (2) نجد أن

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \leq K |y_{n-1} - y_{n-2}| \quad (8)$$

ومن (7) ، (8) نحصل على

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \int_{x_0}^x K |y_{n-1} - y_{n-2}| dx \leq K \cdot \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{|x-x_0|^n}{n}$$

باستخدام (6)

وبذلك تكون المتابينة (5) صحيحة باستخدام الإستنتاج الرياضى.

الخطوة الثالثة:

سوف نثبت أن المتابعه $\{y_n\}$ تتقارب بانتظام إلى نهاية لكل $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$.
من الخطوة الثانية

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!},$$

لكل قيم n حيث $|x - x_0| \leq h$. وباستخدام ذلك فإن المتسلسله اللانهائيه

$$\begin{aligned} & y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \\ & \leq y_0 + Mh + \frac{1}{2!}MKh^2 + \dots + \frac{1}{n!}MK^{n-1}h^n + \dots \\ & \leq y_0 + \frac{M}{K}[e^{Kh} - 1] \end{aligned}$$

وهى تقاربيه لكل قيم M, h, K وبالتالي تكون المتسلسله (9) تقاربيه بانتظام على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$. وحيث إن الحدود فى (9) هى دوال متصله فى x ويكون مجموعها مساويا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) \quad (10)$$

$$[y_n = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})] \text{ (مثلا) لأن}$$

والذى يجب أن يكون متصلا

الخطوة الرابعة:

سوف نثبت أن $y = y(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وحيث إن $y_n(x)$

تؤول بانتظام إلى $y(x)$ في الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$

وباستخدام شرط لبشتز

$$|f(x, y) - f(x, y_n)| \leq K|y - y_n|$$

الذى يبين أن $f(x, y_n)$ تؤول بانتظام إلى $f(x, y(x))$

ويكون لدينا من (4)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

أو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

وحيث إن المتتابعه $\{f(x, y_n(x))\}$ ، والتي تتكون من دوال متصله على الفترة المعطاه

تتقارب بانتظام إلى $f(x, y(x))$ على نفس الفترة وباستخدام (10) نحصل على

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_{n-1}(x)) dx$$

أى

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (11)$$

والدالة المكاملة فى الطرف الأيمن من (11) دالة متصله فى x وبالتالى فإن

التكامل يكون له مشتقه. وعلى ذلك فإن دالة النهاية $y(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ على الفترة } [x_0 - h, x_0 + h] \text{ بحيث } y(x_0) = y_0.$$

وبذلك فإن الخطوات الأربع السابقة تثبت وجود حل مسألة القيمة الابتدائية.

الخطوة الخامسة:

سوف نثبت أن الحل $y = y(x)$ هو الحل الوحيد الذى يحقق $y(x_0) = y_0$.

نفرض أن $y = Y(x)$ مثلا حل آخر لمسألة القيمة الابتدائية المعطاة.

ليكن

$$|Y(x) - y(x)| \leq B, |x - x_0| \leq h \quad (12)$$

من (11) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(s, Y(s)) - f(s, y(s))] ds \right|$$

أى

$$|Y(x) - y(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, Y(s)) - f(s, y(s))| ds$$

أى

$$|Y(x) - y(x)| \leq K \int_{x_0}^x |Y(s) - y(s)| ds \quad (13)$$

أى باستخدام (12)

$$|Y(x) - y(x)| \leq KB|x - x_0| \quad (14)$$

من (13) ، (14) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| \leq K^2 B \int_{x_0}^x |s - x_0| dx \leq \frac{K^2 B |x - x_0|^2}{2!} \quad (15)$$

وكذلك بالتعويض مرة اخرى من (15) فى دالة المكاملة فى (13) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| \leq \frac{K^3 B}{2!} \int_{x_0}^x |s - x_0|^2 ds \leq \frac{K^3 B |x - x_0|^3}{3!}$$

وبتكرار هذه الطريقة نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| \leq \frac{K^n B |x - x_0|^n}{n!} \leq B \frac{(Kh)^n}{n!}$$

وحيث إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} B \frac{(Kh)^n}{n!}$ تتقارب وبالتالي يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B \frac{(Kh)^n}{n!} = 0$$

وعلى ذلك يمكن جعل $|Y(x) - y(x)|$ أصغر من أى عدد مهما كان صغيرا وبالتالي

فإن

$$Y(x) = y(x) \quad \text{أى} \quad Y(x) - y(x) = 0$$

وهذا يبين أن $y = y(x)$ دائما حل وحيد وبهذا يتم برهان النظرية.

ملحوظة: إذا كانت الدالة $f(x, y)$ تحقق الشرط

$$|\partial f / \partial y| \leq K \quad (i)$$

لكل قيم (x, y) فى النطاق المعطى فإن شرط لبشتز يتحقق لنفس الثابت K .

ولإثبات ذلك نرى من نظرية القيمة المتوسطة

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=\bar{y}}, \quad y_1 < \bar{y} < y_2 \quad (ii)$$

حيث كل من $(x, y_2), (x, y_1)$ يقع فى النطاق المعطى

ومن (i)، (ii) نجد أن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1| \quad (iii)$$

وهو شرط لبشتز. وهذا يبين أنه يمكن إستبدال شرط لبشتز (iii) بشرط أقوى (i).

نظرية ٢:

إذا كان S إما المستطيل $|y - y_0| \leq k, |x - x_0| \leq h$ أو الشريط $|y| < \infty, |x - x_0| \leq h$ ، دالة حقيقية معرفة على S بحيث إن $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودة ومتصلة على S وأن $(x, y) \in S, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ فإن $f(x, y)$ تحقق شرط لبشتز على S بثابت لبشتز K .

البرهان:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |dy| \leq K \int_{y_1}^{y_2} |dy|$$

وبالتالي فإن

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in S$$

وهذا يبين أن $f(x, y)$ تحقق شرط لبشتز بثابت K .

مثال (١)

أثبت أن $f(x, y) = xy^2$ تحقق شرط لبشتز على المستطيل $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ولكن لا تحقق شرط لبشتز على الشريحة $|x| \leq 1, |y| < \infty$.

الحل:

ليكن $(x, y_1), (x, y_2)$ نقطتين في المستطيل S فإن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |xy_2^2 - xy_1^2| = |x| |y_2 + y_1| |y_2 - y_1| \quad (1)$$

وعلى ذلك فإنه في المستطيل $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ فإن (١) تزول إلى

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 1.2. |y_2 - y_1|$$

وهذا يبين تحقق شرط لبشتز بثابت 2.

ولكن

$$|f(x, y_2) - f(x, 0)| = |x||y_2| \rightarrow \infty$$

عندما $|y_2| \rightarrow \infty$ إذا كان $|x| \neq a$ وهذا يبين أن شرط لبشتز غير متحقق على

الشريحة $|x| < 1, |y| < \infty$.

مثال (٢)

إذا كان S هو المستطيل $|x| \leq 0, |y| \leq b$ أثبت أن الدالة $f(x, y) = x^2 + y^2$ تحقق

شرط لبشتز ثم أوجد ثابت لبشتز

الحل :

ليكن $(x, y_1), (x, y_2)$ نقطتين في S فإن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |(x^2 + y_2^2) - (x^2 + y_1^2)| = |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1|$$

وبالتالي فإن

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 2b|y_2 - y_1|$$

وهذا يبين أنها تحقق شرط لبشتز بثابت $K = 2b$.

مثال (٣)

إثبت أن إتصال الدالة $f(x, y)$ ليس كافيا لضمان وحدوية حل مسألة القيمة

الإبتدائية $y(0) = 0, \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \sqrt{|y|}$ أوعبارة أخرى إثبت أن حل مسألة القيمة

الإبتدائية $y(x_0) = y_0, \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ يمكن أن يكون لها أكثر من حل بالرغم من

أن $f(x, y)$ دالة متصله.

الحل

نعتبر مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}, y(0) = 0$$

واضح أن $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ دالة متصلة لكل قيم y وأن المعادلة (1) لها الحلين

$$y \equiv 0, y = \begin{cases} x^2/4 & x \geq 0 \\ -x^2/4 & x < 0 \end{cases}$$

ف تثبت أن شرط ليبشتز

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{y_2 - y_1} \leq K$$

تحقق في أي منطقة تحتوي على الخط $y = 0$. فمثلا عندما $y_2, y_1 = 0$

إن

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{y_2 - y_1} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}} \quad (\because \sqrt{y_2} > 0)$$

بيننا أن المقدار في الطرف الأيسر يمكن جعله كبيرا كما نريد بإختيار y_2 صغيرة صفرا كافيا وهذا يتعارض مع (2) حيث إن المقدار في الطرف الأيسر لا يجب أن يتجاوز عدد ثابت K .

مثال (4)

إعط مثلا تبين فيه أن الدالة المتصلة يمكن ألا تحقق شرط ليبشتز على مستطيل ما.

الحل :

نأخذ مثلا الدالة $f(x, y) = y^{2/3}$ على المستطيل

$$S: |x| \leq 1, |y| \leq 1 \quad (1)$$

من الواضح أن $f(x, y)$ متصله على S .

ولكن

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| = \left| \frac{2}{3y^{1/3}} \right| \rightarrow \infty \quad (2)$$

عندما $y \rightarrow 0$ وحيث إن $y = 0$ نقطة في S فإن المعادلة (2) تبين أن شرط لبشتز غير متحقق للدالة $f = y^{2/3}$ على S .

مثال (5)

لمسألة القيمة الابتدائية $y(0) = 0, \frac{dy}{dx} = e^y$ أوجد أكبر فترة $|x| \leq a$ التي يكون فيها لمسألة القيمة الابتدائية حل وحيد.

العل:

ليكن $|f(x, y)| \leq M$ وعلى ذلك فإن $|y - y_0| \leq Ma$

(انظر النظرية حيث a بدلا من h ووضعنا $y_0 = 0$)

أي $e^y \leq M, |y - 0| < Ma$

ليكن y_1, y_2 في نطاق $|y| \leq Ma$ ، فإنه بإستخدام نظرية القيمة المتوسطة

نجد أن

$$e^{y_2} - e^{y_1} = (y_2 - y_1) \left(\frac{\partial}{\partial y} e^y \right)_{y=\bar{y}}, \quad \bar{y} \in (y_1, y_2)$$

أي

$$e^{\bar{y}} < M \quad \text{لأن} \quad e^{y_2} - e^{y_1} \leq (y_2 - y_1)M$$

وهذا يبين أن e^y تحقق شرط لبشتز. وكذلك فإن المتباينة $e^y < M$ سوف تتحقق

لكل قيم y بحيث إن $|y| \leq Ma$ بشرط أن لكل $y = Ma$ فإن

$$e^{Ma} \leq M$$

أو

$$a \leq \ln M / M$$

باستخدام طرق إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة ما يمكن بسهولة أن نثبت أن الدالة $(\ln M)/M$ لها قيمة عظمى عندما $M = e = 2.718$. وبالتالي فإن نظرية الحدودية لمسألة القيمة الابتدائية تعطى $|x| \leq a$ عندما $a = 1/e = 0.308$ وبالتالي تكون أكبر فترة هي $|x| \leq 0.308$.

مثال (٦)

إثبت أنه في مسألة القيمة الابتدائية $y(0) = 1$ ، $y' = y$ ، يجب أن يكون الثابت

a في نظرية بيكارد أقل من الواحد.

العل

ليكن $|f(x, y)| < M$ ، فإن $|y - y_0| \leq Ma$ ،

(انظر مثال (5)) ، وعلى ذلك فإن $|y - 1| \leq Ma$ ،

حيث $|y| \leq M$

بإختيار $M \geq 1$. فإن شرط لبشتز يتحقق أيضا لأنه في هذه الحالة بأخذ الصورة

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 - y_1| \leq M |y_2 - y_1|, \quad M \geq 1$$

وكذلك

$$|y - 1| \leq Ma \Rightarrow |y| - 1 \leq Ma$$

ومن ذلك يلي أن الشرط $|y| \leq M$ سوف يتحقق لكل قيم $|y - 1| \leq Ma$ بحيث إن

$$|y| = 1 + Ma$$

$$1 + Ma \leq M \Rightarrow a < (M - 1)/M = 1 - \frac{1}{M} < 1$$

عندما $1 \leq M < \infty$.

ملحوظة: في الأمثلة السابقة لم نعين $h = \min(a, b/M)$ وهي الفترة $|x - x_0| \leq h$

التي يكون لمسألة القيمة الابتدائية حل حلا وحيدا وسنوضح ذلك في الأمثلة الآتية.

مثال (1):

أوجد التقريب الثاني لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$$

الحل :

نلاحظ أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ كثيرة حدود في x, y ومتصلة على المستطيل

$$R: |x| \leq a, |y| \leq b$$

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| \leq a^2 + b^2 = M$$

وعلى ذلك فإن

$$h = \min(a, b/M) = \min(a, b/a^2 + b^2)$$

أى أن h تعتمد على a, b فإذا كانت $a = 1, b = 1$ فإن $h = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ وعلىذلك يكون لمسألة القيمة الابتدائية المعطاة حل وحيد على الفترة $|x| \leq 1/2$.

باستخدام طريقه بيكارد للتقريب المتتالي ، حيث

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad y(0) = 0 \quad (1)$$

التقريب الأول:

نضع $n=1$ فى (1) نحصل على

$$y_1 = 0 + \int_0^x s^2 ds = x^3/3, y(0) = 0$$

التقريب الثانى:

بوضع $n=2$ فى (1) نحصل على

$$y_2(x) = \int_0^x (s^2 + \frac{s^6}{63}) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

مثال (٢) :

أوجد التقريب الثاني لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 1$$

على المستطيل $R : \{(x, y) : |x| \leq 1, |y-1| \leq 1\}$

الحل

نلاحظ أن $f = x^2 + y^2$ كثيرة الحدود ومتصلة على R ، وأن $a = 1, b = 2$ ،

وعليه فإن

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \leq 5$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 2y = 4 \text{ (الذي يمثل ثابت لبشتز)}$$

وعلى ذلك فإن

$$M = 5, h = \min(1, \frac{2}{5}) = 2/5$$

أي أن للمعادلة حلا على الفترة $|x| \leq 2/5$

ويكون الحل التقريبي النوني للمعادلة هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds, y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

التقريب الأول:

بوضع $n=1$ في (2) نحصل على

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s^2 + 1) ds = 1 + x + \frac{x^3}{3}$$

التقريب الثاني:

بوضع $n=2$ في (2) نحصل على

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[s^2 + \left(1 + s + \frac{s^3}{3} \right)^2 \right] ds = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

٧ - متباينة جرونويل Gronwall's inequality

هذه المتباينة لها أهميتها فى المعادلات التفاضلية.

نظرية؛

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين غير سالبتين ومتصلتين لكل $x \geq x_0$ ، K ثابت

موجب وأن

$$f(x) \leq K + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds, x \geq x_0$$

فإن

$$f(x) \leq K \exp\left(\int_{x_0}^x g(s)ds\right)$$

البرهان:

من الفرض

$$\frac{f(x)g(x)}{K + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds} \leq g(x)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x من x_0 إلى x نحصل على

$$\ln \left[K + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds \right] \leq \int_{x_0}^x g(s)ds$$

$$\ln \left[K + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds \right] - \ln k \leq \int_{x_0}^x g(s)ds$$

وبالتالى فإن

$$K + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds \leq K \exp \int_{x_0}^x g(s)ds$$

أى

$$f(x) \leq K \exp \int_{x_0}^x g(s)ds$$

وبذلك نثبت النظرية.

نتيجة (١):

إذا كان $f(x) \leq K \exp \int_{x_0}^x f(s)ds$ حيث $f(x), K$ كما فى النظرية السابقه فأن

$$f(x) \equiv 0$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ فإن

$$f(x) < \varepsilon + K \int_{x_0}^x f(s)ds$$

وباستخدام النظرية السابقه نجد أن

$$f(x) < \varepsilon \exp[k(x-x_0)], x \geq x_0$$

وبأخذ النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على

$$f(x) \equiv 0$$

وبهذا يثبت البرهان.

ملحوظة: يمكن إستخدام متباينه جرونويل فى إثبات وحدوية حل مسألة القيمة

الإبتدائية السابقة

ليكن لدينا مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

والتي تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (2)$$

إذا كان للمسألة (١) أو المعادلة المكافئة (٢) حلان y_1, y_2 يحققان الشرط

الابتدائي فإن

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s)) ds$$

ومن ذلك نجد أن

$$y_1 - y_2 = \int_{x_0}^x [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds$$

أى أن

$$|y_1 - y_2| = \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds$$

ويستخدم شرط ليبتز نحصل على

$$|y_1 - y_2| \leq K \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

وإستخدام متباينة جرونويل [مع ملاحظه عدم وجود ثابت قبل علامه التكامل]

نجد أن

$$|y_1 - y_2| \leq 0 \cdot \exp(k|x - x_0|) \leq 0$$

$$y_1(x) = y_2(x)$$

$$\text{وعليه فإن } |y_1 - y_2| = 0$$

وبهذا يثبت المطلوب.

٨ - اعتماد حل مسألة القيمة الابتدائية على الشرط الابتدائي:

سوف نستخدم متباينة جرونويل فى إثبات أن حل مسألة القيمة الابتدائية يعتمد تماما على الشرط الابتدائي

فإذا كان هما $z(x), y(x)$ حلين لمسألة القيمة الابتدائية (1) أى المعادلة التكاملية (2) ويحققان $z(x_0) = z_0, y(x_0) = y_0$ على الترتيب فإن

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x f(s, z(s)) ds$$

أى أن

$$|y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| + \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq |y_0 - z_0| + K \int_{x_0}^x |y(s) - z(s)| ds$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على

$$|y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| \exp(K|x - x_0|)$$

من هنا نرى أن حل مسألة القيمة الابتدائية يعتمد على الشرط الابتدائي.

مثال

إثبت أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + g(t, y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$$

حيث g دالة متصله فى منطقة ما D تحتوى $(0, y_0)$ تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t-s)g(s, y(s)) ds$$

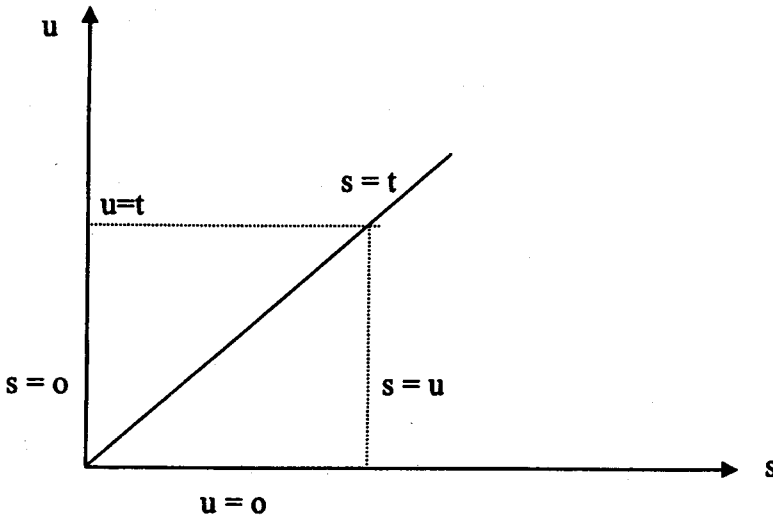
الحل

ليكن $\phi(t)$ هو حلا لمسألة القيمة الابتدائية أى أن

$$\phi'' + g(t, \phi(t)) = 0$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\phi(t) = - \int_0^t \left\{ \int_0^u g(s, \phi(s)) ds \right\} du + a + bt \quad (1)$$

وحيث أن $a = y_0, b = z_0$ فإن $\phi'(0) = z_0, \phi(0) = y_0$ والتكامل الثنائى ممتد على المنطقة فى المستوى uv كما هو مبين بالشكل.

وبعكس ترتيب التكامل نحصل على

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s, \phi(s)) ds \right\} du = \int_0^t \left\{ \int_s^t g(s, \phi(s)) ds \right\} du = \int_0^t (t-s) g(s, \phi(s)) ds \quad (2)$$

وبالتعويض من (٢) فى (١) نحصل على

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s)g(s, \phi(s))ds + y_0 + z_0 t$$

والآن نفرض أن ψ هو حلا للمعادلة التكاملية فإن $\psi(0) = y_0, \psi'(0) = z_0$ وبالتالي فإن $\psi(t)$ تحقق الشروط الابتدائية وبالاشتقاق مرتين واستخدام النظرية الأساسية في التفاضل نجد أن

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s, \psi(s))ds$$

$$\psi''(t) = -g(t, \psi(t))$$

وبالتالى فإن ψ هو حلا لمسألة القيمة الابتدائية.

ملحوظة: مسألة القيمة الابتدائية $y'' + g(t, y) = 0$ يمكن كتابتها على الصورة $y'' = -g(t, y)$ حيث $y'' = 0$ هي المعادلة التفاضلية المتجانسه المناظرة والذي حلها على الصورة $y = y_0 + z_0 t$.

تمارين

١ - أوجد التقريب الثالث لمسألة القيمة الحدية $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$ على المستطيل

$R = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ مستخدما طريقه بيكارد للتقريب.

٢ - أوجد المعادلة التكامليه المكافئه لمسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + \mu^2 y = g(x, y), y(0) = y_0, y'(0) = z_0, \mu > 0 \text{ (ثابت)}$$

٣ - أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الحدية:

(i) $\frac{dy}{dx} = 2xy, y(0) = 1,$

(ii) $\frac{dy}{dx} = 3e^x + 2y, y(0) = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = 1 + xy, y(0) = 2,$

(iv) $\frac{dy}{dx} = 2x - y^2, y(0) = 0$

(v) $\frac{dy}{dx} = x + z, \frac{dz}{dx} = x - y^2, y(0) = 2, z(0) = 1$

(vi) $\frac{dy}{dx} = 2x + z, \frac{dz}{dx} = 3xy - x^2z, y(0) = 2, z(0) = 0$

٤ - أثبت أن:

(أ) $|y'| + |y| = 0, y(0) = 1$ ليس لها حل.

(ب) $y' = x, y(0) = 1$ لها حل وحيد .

(ج) $y' = (y-1)/x, y(0) = 1$ لها عدد لانهاى من الحلول.

٥ - إذا كانت $f(x, y) = y^{2/3}$ إثبت أن شرط لبشتز غير متحقق فى منطقة تحتوى

نقطة الأصل وأن حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ويحقق الشرط $y(0) = 0$ ليس

وحيدا

٦ - إذا كان $S : |x| \leq a, |y| \leq b$ إثبت أن الدالة $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$

تحقق شرط لبشتز وأوجد ثابت لبشتز.

٧ - إدرس وجود ووحداوية حل المعادلة $y' = y^2, y(1) = -1$.

٨ - إذا كانت الدوال f, g, h معرفه ومتصله وغير سالبه على الفترة $I = [0, \infty)$ وأن

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^x g(s)f(s)ds, \quad x \geq x_0$$

فأثبت أن

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^x g(s)h(s)(\exp \int_{x_0}^s g(u)du)ds$$

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

Linear Systems with Constant Coefficients

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

Linear Systems with Constant Coefficients

١- الأنظمة من المعادلات التفاضلية:

ليكن أن x متغير مستقل وكلا من y_1, y_2, \dots, y_n متغيرات تابعة للمتغير x ،
ونفترض أن:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

.....

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

تلك المجموعة من المعادلات السابقة تسمى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. ويمكن كتابة النظام على الصورة

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad ; i = 1, 2, \dots, n.$$

وحيث إن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تستلزم وجود شرط ابتدائي واحد فإن النظام من المعادلات التي عددها n ، يستلزم وجود n شرط ابتدائي، وتكون الشروط الابتدائية $y_i(x_0) = y_{i0} \quad , i = 1, 2, \dots, n$

كما أن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى على ثابت إختياري واحد ، فإن حل نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى n من الثوابت الإختيارية

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

حيث عدد المتغيرات فى النظام n متغيريون حل النظام
 $y_i = \phi_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n), i = 1, 2, \dots, n$ حيث c_1, c_2, \dots, c_n ثوابت اختيارية.

مثال (1)

أوجد حل النظام

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \quad (2)$$

مع الشروط الابتدائية $y(0) = 1, z(0) = 0$ حيث x متغير مستقل.

الحل

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1 \dots \dots \dots (3)$$

بالتعويض من (1)، (2) في الطرف الأيمن للمعادلة (3) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \dots \dots \dots (4)$$

ثم نعوض عن z من (1) فى (4)

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left[\frac{dy}{dx} - y - x\right] + 3x + 1$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = 5x + 1;$$

$$D = \frac{d}{dx}$$

أى أن

ولحل المعادلة السابقة نوجد

الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة الباب الثاني

أولاً: حل المعادلة المتجانسة $(D^2 + 2D + 1)y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ والتي

جذورها $\lambda = -1, -1$

$$y_H = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

أى أن

ثانياً: الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2}(5x+1).$$

$$= (1 - 2D + 3D^2 - \dots)(5x+1) = 5x - 10 + 1 = 5x - 9$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 5x - 9$$

أى أن

بالتعويض عن y فى (1) والحل بالنسبة إلى z

$$\therefore z = -(c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_2 e^{-x} + 5 - (c_1 + c_2 x)e^{-x} - 5x + 9 - x$$

أى أن

$$z = (-2c_1 + c_2 - 2c_2 x)e^{-x} - 6x + 14$$

ومن الشروط الابتدائية $y(0) = 1, z(0) = 0$ نحصل على

$$c_2 = 20 - 14 = 6 \text{ أى } 0 = (-2c_1 + c_2) + 14, \quad c_1 = 10 \text{ أى } 1 = c_1 - 9$$

أى أن

$$z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14, \quad y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9$$

تحقق الشروط الابتدائية المعطاه

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx}{dt} = y + z \quad (1), \quad \frac{dy}{dt} = x + z \quad (2), \quad \frac{dz}{dt} = x + y \quad (3).$$

الحل

بتفاضل طرفي (1) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$

من (2)، (3) نجد أن

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + z + x + y, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + (y + z)$$

من (1) نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية

بفرض أن $\frac{d}{dx} = \Gamma$ فيكون

$$(D^2 - D - 2)x = 0$$

نفترض أن $x = e^{\lambda t}$ وتكون المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, -1$$

فنحصل على

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \quad (4)$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} = y + z$$

$$z = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - y \quad (5)$$

بالتعويض من (5)، (4) في (2) نحصل على

$$\frac{dy}{dt} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - y.$$

$$\frac{dy}{dt} + y = 3c_1 e^{2t} \quad \text{أى أن}$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون حلها هو

$$e^t y = 3c_1 \frac{e^{3t}}{3} + c_3 \quad \text{أى} \quad e^{\int dt} y = \int 3c_1 e^{\int dt} e^{2t} dt + c_3$$

أى أن

$$y = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \dots \quad (6)$$

بالتعويض من (6)، (4) فى (2) نجد أن

$$2c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + z.$$

$$z = c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t} - c_2 e^{-t}$$

أو

$$z = c_1 e^{2t} - c_4 e^{-t}$$

مثال (٣)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 3x - 4y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + x + y = 0 \quad \text{حل النظام}$$

الحل

نفترض أن $D = \frac{d}{dt}$ فيكون لدينا

$$(D^2 - 3)x - 4y = 0 \quad (1) \quad x + (D^2 + 1)y = 0 \quad (2)$$

بحذف y من المعادلتين (1)، (2) نحصل على

$$[(D^2 + 1)(D^2 - 3) + 4]x = 0 \quad \text{أى أن}$$

$$(D^2 - 1)^2 x = 0 \quad (3)$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلة (3) هو

$$x = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + c_4 t)e^{-t} \quad (4)$$

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

الباب الثاني

حيث $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ ثوابت إختيارية ونحصل من (4) على

$$\begin{aligned} Dx &= c_2 e^t + (c_1 + c_2 t) e^t + c_4 e^{-t} - (c_3 + c_4 t) e^{-t} \\ &= (c_1 + c_2 + c_2 t) e^t + (c_4 - c_3 - c_4 t) e^{-t} \end{aligned}$$

وكذلك

$$D^2 x = c_2 e^t + (c_1 + c_2 + c_2 t) e^t - c_4 e^{-t} - (c_4 - c_3 - c_4 t) e^{-t}$$

أى أن

$$D^2 x = (c_1 + 2c_2 + c_2 t) e^t - (2c_4 - c_3 - c_4 t) e^{-t} \quad (5)$$

ومن (1) نجد أن

$$4y = D^2 - 3x = \quad (6)$$

وباستخدام (5)، (6) نجد أن

$$y = \frac{1}{2} \{ (c_2 - c_1 - c_2 t) e^t - (c_4 + c_3 + c_4 t) e^{-t} \} \quad (7)$$

ويكون حل النظام هو (7)، (8).

مثال (4)

حل النظام

$$\frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^t \quad (1)$$

$$3 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 4e^{2t} \quad (2)$$

الحل

بضرب طرفى المعادلة (2) فى 2 فنحصل على

$$6 \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} + 4x + 2y = 8e^{2t} \quad (3)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على

$$5 \frac{dx}{dt} + 6x = 8e^{2t} - 3e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{6}{5}x = \frac{8}{5}e^{2t} - \frac{3}{5}e^t \quad (4)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$e^{\int \frac{6}{5} dt} = e^{\left(\frac{6}{5}\right)t}$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$xe^{\left(\frac{6}{5}\right)t} = \int \left[\frac{8}{5}e^{\left(\frac{16}{5}\right)t} - \frac{3}{5}e^{\left(\frac{11}{5}\right)t} \right] dt$$

$$= \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{16} e^{\left(\frac{16}{5}\right)t} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{11} e^{\left(\frac{11}{5}\right)t} + c_1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{11}e^t + c_1 e^{-(6/5)t} \quad (5)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في 3 نحصل على

$$3 \frac{dx}{dt} + 6 \frac{dy}{dt} - 6x + 6y = 9e^t \quad (6)$$

وبطرح (2) من (6) نحصل على

$$5 \frac{dy}{dt} - 8x + 5y = 9e^t - 4e^{-t}$$

$$5 \frac{dy}{dt} + 5y = 8x + 9e^t - 4e^{-t}$$

وبالتعويض عن قيمة x من (5) نحصل على

$$5 \frac{dy}{dt} + 5y = \frac{75}{11}e^t + 8c_1 e^{-(6/5)t}$$

أى

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{15}{11}e^t + \frac{8c_1}{5}e^{-(6/5)t} \quad (7)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون معامل التكامل هو $e^{dt} = e'$ ويكون

حل المعادلة (7) على الصورة

$$y = c_2 e^{-t} - 8c_1 e^{(-6/5)t} + \frac{15}{22} e' \quad (8)$$

ويكون حل النظام هو (5)، (8).

مثال (5)

حل النظام

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y &= 2 \cos t - 7 \sin t \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x &= 4 \cos t - 3 \sin t \end{aligned}$$

الحل

متروك للطلاب ويكون الحل هو

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 3 \cos t, \quad y = (\sqrt{2} + 1)c_1 e^{\sqrt{2}t} + (1 - \sqrt{2})c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 2 \sin t.$$

٢ - الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

النظام من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة يكون

على الصورة

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_i}{dt} &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث t متغير مستقل بينما x_1, x_2, \dots, x_n متغيرات تابعة، والمعاملات a_{ij} ثوابت حيث $i, j = 1, 2, \dots, n$

ويمكن وضع النظام على (1) الصورة المصفوفية

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad \text{أى} \quad \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \text{، والمتجه } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ حيث } A \text{ هي مصفوفة المعاملات.}$$

ولحل هذا النظام، نفرض الحل $X = Ce^{mt}$ حيث C متجه ثابت و m عدد نريد تحديده قيمته.

بالتعويض في النظام نجد أن

$$(AC - mC)e^{mt} = 0 \text{ أى } Cme^{mt} = ACe^{mt}$$

$$\text{ومنها } (A - mI)Ce^{mt} = 0 \text{ وحيث إن } e^{mt} \neq 0 \text{ فإن}$$

$$(A - mI)C = 0 \quad (1)$$

وتسمى المعادلة الذاتية. نختار المتجه $C \neq 0$ فيكون المحدد

$$|A - mI| = 0 \quad (2)$$

المعادلة (2) تسمى المعادلة المميزة (characteristic-equation) ونحصل منها على

قيم m (القيم الذاتية) eigen value ومنها نحصل على حل النظام

بعد تعيين قيم المتجه C المناظرة لقيم m وقد تكون قيم m حقيقية ومختلفة

أو بعضها مكرر أو بعضها أعدادا مركبه ويسمى المتجه C بالمتجه الذاتي (eigenvector)

أ - القيم الذاتية حقيقية ومختلفة

مثال (1)

أوجد حل النظام

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة $X' = AX$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

تكون المعادلة المساعدة

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$\therefore -3m + m^2 + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2$$

نلاحظ القيم الذاتية 1، 2 حقيقية ومختلفة. وحيث إنه لكل قيمة ذاتية يوجد متجه ذاتي فإن .

$m_1 = 1$ (i) نعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

ومنها نجد أن

$$-c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

وإذا اعتبرنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 1$ ويكون

يكون المتجه الذاتي المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ومنها

$$X_1 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

(ii) $m_2 = 2$ ، نعوض في المعادلة (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

وإذا إختارنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2$

أي أن المتجه الذاتى المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore X_2 = b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

نظرية (١): -

المجموعة المكونة من k متجه من القياس n $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ تكون مستقلة خطيا إذا كان

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_k X_k(t) = 0, a < t < b$$

فإن ذلك يستلزم $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$

نظرية (٢): -

إذا كان $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$ كل منها حل للنظام الخطى المتجانس $X' = AX$ فإن $c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_m X_m(t)$ حل لنفس النظام للثوابت الإختيارية c_1, c_2, \dots, c_m .

نظرية (٣): -

إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ من الأعداد الحقيقية وكانت $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ مجموعة الحلول المستقلة خطيا للنظام $X' = AX$ ، $a < t < b$ فإن الحل المكون من حلول هذه المجموعة كلها يكون وحيدا ويسمى الحل العام. ويسمى المحدد $|X_1(t) X_2(t) \dots X_n(t)|$ بالرونسكيان (Wronskian) لمجموعة متجهات الحل.

نظرية (٤): -

تكون مجموعة المتجهات الرأسية $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ مستقلة خطياً عند $t = t_0$ إذا وإذا كان فقط الرونسكيان لا يساوى الصفر عند أى نقطة ولتكن $t = t_0$ أى إذا كان

$$W\{X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)\} = |X_1(t_0) \dots X_n(t_0)| \neq 0.$$

نظرية (٥): -

إذا كانت $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ حلول مستقلة خطياً للنظام من المقياس n المتجانس $X' = AX$ فى الفترة $a < t < b$ وإذا كانت $X_p(t)$ أى حل للنظام غير المتجانس $X' = AX + B(t)$ المناظر فى نفس الفترة، فإن أى حل لذلك النظام يمكن كتابته على الصورة

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) + X_p(t)$$

حيث c_1, c_2, \dots, c_n ثوابت.

من المثال السابق، إذا اخترنا

$$b_1 = b_2 = 1$$

$$\therefore W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0$$

$\therefore X_1(t), X_2(t)$ مستقلة خطياً ويكون الحل العام للنظام

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X' = AX \text{ أى}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

حيث

وتكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 4-m & -1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - 8m + m^2 - 4 = 0$$

$$\therefore m^2 - 8m + 12 = 0 \Rightarrow (m-2)(m-6) = 0$$

و تكون القيم الذاتية هي $m_1 = 2, m_2 = 6$

(1) $m_1 = 2$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فيكون $c_2 = 2$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

على ذلك فإن

(2) $m_2 = 6$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = -2$ ، فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

و حيث أن الرونسكيان

$$W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = -4e^{8t} \neq 0$$

أى أن X_1, X_2 مستقلان خطيا

ويكون الحل العام

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

مثال (٣)

أوجد حل النظام $X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث

الحل

كما سبق تكون المعادلة المميزة هي

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة

الباب الثاني

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 0 & 1-m & 3 \\ 0 & 3 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-m)[(1-m)^2 - 9] = 0 \Rightarrow (1-m)(m^2 - 2m - 8) = 0$$

$$\therefore (m-1)(m-4)(m+2) = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = 4, m_3 = -2.$$

(1) $m_1 = 1$: بالتعويض في المعادلة الذاتية $(A - mI)c = 0$ نحصل على

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 = 0, c_3 = 0, c_2 = 0$$

$\therefore c_1$ فقط اختيارية

\therefore نختار $c_1 = 1$ فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

(2) $m_2 = 4$: بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore 3c_1 + c_2 + c_3 = 0, -c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_3 = c_2 \Rightarrow 3c_1 = -2c_2$$

نفرض $c_2 = 3 \Leftarrow c_3 = 3 \Leftarrow c_1 = -2$ فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

(٢) $m_3 = -2$: بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore 3c_1 - c_2 - c_3 = 0, c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_1 = 0$$

نختار $c_2 = 1 \Leftarrow c_3 = -1$ فيكون الحل هو

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

نوجد محدد رونسكيان عند $t = 0$

$$W\{X_1(0), X_2(0), X_3(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

∴ الحلول مستقلة خطياً ويكون الحل العام هو

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ للمصفوفة المعطاه

$$1) A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب - القيم الذاتية أعداد مركبة؛ -

في الجزء السابق نلاحظ أننا عرضنا للحالات التي تحتوي قيم ذاتية عبارة عن أعداد حقيقية فقط ولم نتعرض للقيم الذاتية المركبة، والآن نعرض للمثال التالي.

مثال (٤)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

نوجد المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 2 & -4-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$$m_1 = 1 + i \quad (1)$$

بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore (3-i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3-i}{5} c_1$$

بإختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3-i$ ويكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{-(1+i)t}$$

$$m_2 = 1 - i \quad (2)$$

بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3+i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3+i}{5} c_1$$

بإختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3+i$ ويكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1-i)t}$$

وبذلك نحصل على الحل العام

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)t}$$

لكننا نعلم أن $e^{(a+ib)t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$

ومن ذلك فإن

$$\begin{aligned} X &= c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos t + i \sin t) + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos t - i \sin t) \\ &= e^{-t} \left[(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 3 \sin t \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

بفرض $c_1 + c_2 = b_1, i(c_1 - c_2) = b_2$

$$\therefore X = e^{-t} \left[b_1 \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right\} + b_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t \right\} \right]$$

ملحوظة: الحل السابق يمثل الحل العام وذلك لأن $W \neq 0$ ، بوضع $t = 0$

$$\therefore W(0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

\therefore الحلان (معاملات b_1, b_2) مستقلان.

ملحوظات هامة على المثال :-

(١) إذا وجدت قيمة ذاتية عبارة عن عدد مركب فإنه توجد قيمة أخرى هي

العدد المرافق.

(٢) المتجهات الذاتية توجد أيضا على صورة أعداد مركبة ومرافقها.

(٣) المتجه الذاتي الأول

$$B = \begin{pmatrix} 5+i0 \\ 3-i1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i = \text{Re } B + i \text{Im } B$$

أى أن حل المثال السابق فى الصورة العامة

$$X = e^{-t} [b_1 \{ \operatorname{Re} B \cos t - \operatorname{Im} B \sin t \} + b_2 \{ \operatorname{Im} B \cos t + \operatorname{Re} B \sin t \}]$$

(٤) الرونسكيان في هذه الحالة عند $t = 0$ يعطى من العلاقة

$$.W(0) = |\operatorname{Re} B, \operatorname{Im} B|$$

مثال (٥)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

تكون المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -1 \\ -4 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore m^2 - 4m + 8 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = -4 \Rightarrow m = 2 \pm 2i$$

$$m_1 = 2 + 2i, m_2 = 2 - 2i$$

$$m_1 = 2 + 2i \quad (١)$$

بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2ic_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2ic_1$$

بإختيار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2i$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$$

فيكون

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ هو } t = 0$$

أى أن الحل العام

$$X = e^{2t} \left[b_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \right].$$

مثال (٦)

أوجد حل النظام $X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث

الحل

تكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m & 1 \\ 0 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-m)[(1-m)^2 + 1] = 0$$

$$\therefore (1-m)(m^2 - 2m + 2) = 0$$

$$\therefore m_1 = 1, m_2 = 1+i, m_3 = 1-i.$$

(١) $m_1 = 1$ ، بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_2 = c_3 = 0$$

نختار $c_1 = 1$

المتجه الذاتي المناظر يكون أي أن $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

(٢) بالتعويض في المعادلة الذاتية $m_2 = 1+i$

$$\begin{pmatrix} -i & 2 & -1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -ic_1 + 2c_2 - c_3 = 0$$

$$-ic_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = ic_2$$

$$-c_2 - ic_3 = 0$$

نختار $c_2 = i$ فإن $c_3 = -1$

$$\therefore -ic_1 + 2i + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 2 - i$$

المتجه الذاتي المناظر:

$$B = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ويتم حساب $W(0)$ كما يلي

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\therefore X = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + e^t \left[b_2 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right\} + b_3 \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right\} \right].$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ لكل مصفوفة A :

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ج - القيم الذاتية مكررة : -

الآن سوف نعرض مثالا بحيث تكون القيم الذاتية مكررة

مثال (٧)

أوجد حل النظام $X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

حيث

الحل

المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 2$$

(1) $m_1 = 2$ بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore -2c_1 + c_2 = 0$$

بإختيار $c_1 = 1$ نجد أن $c_2 = 2$ ، فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

حيث إن القيمة الذاتية $m = 2$ مكررة

∴ نفترض أن الحل الثانى المناظر يكون

$$X_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t e^{2t}$$

أو بفرض آخر

$$(A) \quad X_2 = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

حيث إن X_2 حل، فهو يحقق النظام، بالتعويض فى النظام، نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} 2e^{2t} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

أى أن

$$\therefore \left. \begin{aligned} c_1'(t) &= -2c_1(t) + c_2(t), \\ c_2'(t) &= -4c_1(t) + 2c_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

بالتكامل نحصل على

$$c_2(t) = 2c_1(t) + a \quad \text{حيث } a \text{ ثابت إختياري}$$

من (1) (المعادلة الأولى)

$$c_1'(t) = a \Rightarrow c_1(t) = at + b \quad \text{حيث } b \text{ ثابت إختياري}$$

$$\therefore c_2(t) = 2at + 2b + a.$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\begin{aligned} X_2 &= \begin{pmatrix} at + b \\ 2at + 2b + a \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} b e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{2t}. \end{aligned}$$

إذا إختارنا $a = 0, b = 1$ نحصل على الحل X_1

أما إذا إختارنا $a = 1, b = 0$ نحصل على

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

عند $t = 0$ نجد أن

$$W\{X_1(0), X_2(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

على ذلك فإن الحل العام للنظام يكون على الصورة

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

الأنظمة الفطية ذوات المعاملات الثابتة

الباب الثاني

بالنظر إلى المثال السابق وجدنا أننا فرضنا الحل الثانى X_2 على صورة المعادلة A ومن ذلك يمكننا من إيجاد الحل الثانى فى حالة وجود قيمة مكررة للقيمة الذاتية، الآن سنحاول من خلال المثال التالى والإستعانه بالمثال السابق من إستنتاج صيغة سهلة للحل الثانى X_2 .

مثال (٨)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \quad (1)$$

الحل

تكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix} 8-m & -1 \\ 4 & 12-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 - 20m + 100 = 0$$

$$\therefore (m-10)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 10$$

بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1 \Leftarrow c_2 = -2$ ، يكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t}$$

بالإستعانه بالمثال السابق فإن X_2 تأخذ الصورة

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t e^{10t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{10t} \dots \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1)

$$\dots \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} 10t e^{10t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} 10e^{10t} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t e^{10t} + \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{10t}$$

نجد أن الحدين المشتملين على $t e^{10t}$ يحذفان، وعلى ذلك

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2c_3 - c_4 = 1$$

نفرض $c_3 = 0$ فإن $c_4 = -1$

على ذلك فإن

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t e^{10t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{10t} \dots \quad (3)$$

يكون الحل الثاني للنظام . وعلى ذلك يكون الحل العام للنظام هو

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t} + c_2 e^{10t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

مثال (٩)

أوجد حل النظام

$$\left. \begin{aligned} D^2 y + (D-1)v &= 0, \\ (2D-1)y + (D-1)w &= 0, \\ (D+3)y + (D-4)v + 3w &= 0. \end{aligned} \right\} ; D = \frac{d}{dt}$$

الحل

نلاحظ من المعادلة الأولى في النظام أنها من الرتبة الثانية في y .
نحول المعادلات جميعها إلى الرتبة الأولى.

$$D^2 y = Du \Leftrightarrow Dy = u \quad \text{نفترض أن}$$

يصبح النظام على الصورة

$$Du = u - 3v + 3w + 3y,$$

$$Dv = -u + 4v - 3w - 3y,$$

$$Dw = -2u + w + y,$$

$$Dy = u$$

∴ المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 1-m & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4-m & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1-m & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = 0$$

أى أن

$$-[-3(-3+3-3m) - (4-m)(3-3+3m)] - m[-2(9-12+3m) + (1-m)(4-5m^2+m^2-3)] = 0$$

$$\therefore -[9m - (4-m)3m] - m[6(1-m) + (1-m)(m^2 - 5m + 1)] = 0$$

$$\therefore -3m[m-1] + m(m-1)[m^2 - 5m + 7] = 0$$

$$\therefore m(m-1)[m^2 - 5m + 4] = 0 \Rightarrow m(m-4)(m-1)^2 = 0.$$

∴ القيم الذاتية $m_1 = 0, m_2 = +4, m_3 = m_4 = 1$

(١) $m_1 = 0$: بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore c_1 = 0, c_3 + c_4 = 0, c_4 = 1, c_3 = -1.$$

$$c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 3c_4 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

و يكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$: m_2 = 4 \quad (\gamma)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$-c_1 - c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 \quad -3c_3 - 3c_4 = 0$$

$$-2c_1 \quad -3c_3 + c_4 = 0$$

$$c_1 \quad -4c_4 = 0$$

$$\therefore c_1 = 4c_4, 3c_3 = -7c_4, 3c_2 = -16c_4.$$

$$c_1 = 12, c_2 = -16, c_3 = -7 \Leftarrow c_4 = 3$$

بإختيار

$$\therefore X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

$$: m_3 = 1 \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 + 3[c_2 - c_3 - c_4] = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$-2c_1 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0.$$

ويكون الحل هو $c_3 = c_2 \Rightarrow c_2 = 1 = c_3$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

وحيث أن $m_3 = m_4 = 1$ جذر مكرر فنفرض أن

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^t.$$

بالتعويض في النظام نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e'$$

وأخيرا، فإن حل النظام هو

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e' + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te' + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e' \right] + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

تمارين

أوجد حل النظام $X' = AX$ حيث

$$\begin{array}{ll} 1. & A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \\ 2. & A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \\ 3. & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ 4. & A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 6. & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ حيث } X' = AX \text{ يفرض النظام } \gamma$$

(أ) إثبت أن المعادلة المميزة للمصفوفة A لها جذران مكرران فقط إذا كان

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

(ب) إثبت إذا كان $a \neq d$ وإذا كان $(a-d)^2 + 4bc = 0$ فإن حل النظام يكون

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(a+d)t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{\frac{1}{2}(a+d)t}$$

(ج) ناقش الحل في حالة $a = d$ و $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

٣ - الأنظمة الخطية غير المتجانسة:

نفترض أنه لدينا النظام

$$X' = AX + B \quad (1)$$

حيث A مصفوفة ثابتة $n \times n$ و B دالة متجه في t .

من نظرية سابقة ذكر أن حل النظام (1) يحتاج إلى حل خاص X_p بالإضافة إلى حل نظام المعادلات المتجانسة المناظر. سوف نستخدم طريقة تغيير البارامترات لحساب الحل الخاص X_p .

مثال (١)

أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

الحل

لقد سبق لنا في مثال متقدم إيجاد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

وكان

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_H = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (4)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان إختاريان

نفترض أن الحل الخاص للنظام (2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = a_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + a_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (5)$$

بالتعويض المباشر في (2) نحصل على

$$\begin{aligned} & a_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + 2a_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + a_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + a_2'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1(t) e^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a_2(t) e^{2t} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \dots \quad (6) \end{aligned}$$

وبالاختصار، نجد أن

$$a_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + a_2'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'(t) e^t \\ a_2'(t) e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

باستخدام قاعدة كرامر، نجد أن

$$a_1'(t) e^t = \frac{\begin{vmatrix} f(t) & 1 \\ g(t) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2f(t) - g(t).$$

$$a_2'(t) e^{2t} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(t) \\ 1 & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = g(t) - f(t).$$

$$\therefore a_1'(t) = [2f(t) - g(t)]e^{-t} \Rightarrow a_1(t) = \int [2f(t) - g(t)]e^{-t} dt$$

$$a_2'(t) = [g(t) - f(t)]e^{-2t} \Rightarrow a_2(t) = \int [g(t) - f(t)]e^{-2t} dt$$

وعلى سبيل المثال، بفرض $f(t) = e^t, g(t) = 1$

$$\therefore a_1(t) = \int [2e^t - 1]e^{-t} dt = 2t + e^{-t}$$

$$a_2(t) = \int [1 - e^t]e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}.$$

فيكون الحل الخاص

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = (2t + e^{-t}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

أو

$$X_p = (2te^t + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(e^t - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ويكون الحل العام هو

$$X = (a_1 e^t + 2te^t + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_2 e^{2t} + e^t - \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

مثال (٢)

أوجد حل النظام $X' = AX + B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

حيث

الحل

لقد سبق لنا الحصول على حل النظام المناظر

$$X' = AX$$

وكان

$$X_H = e^{2t} \left[b_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \right].$$

حيث b_1, b_2 ثابتان إختياريان

نفرض أن الحل الخاص هو

$$X_p = e^{2t} \left[b_1(t) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \right].$$

بالتعويض فى المعادلة عن X بالحل X_p المفروض، نجد أن

$$\begin{aligned} & e^{2t} \left[b_1(t) \left\{ -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t \right\} + b_2(t) \left\{ -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t \right\} \right] \\ & + b_1'(t) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2'(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \\ & + 2e^{2t} \left[b_1(t) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \right] \\ & = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} e^{2t} \left[b_1(t) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} \right] + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

وبالإختصار نجد أن

$$b_1'(t) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} + b_2'(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2 \sin 2t & 2 \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1'(t) \\ b_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$$

بالحل بالنسبة إلى $b_1'(t), b_2'(t)$ ، نجد أن

$$b_1'(t) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & \sin 2t \\ t & 2 \cos 2t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (6 \cos 2t - t \sin 2t),$$

بتكامل الحد الأول نحصل على

$$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \sin 2t$$

نفترض أن $I_1 = \int t \sin 2t dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \quad dv = \sin 2t dt \Rightarrow du = dt \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2t.$$

$$\therefore I_1 = -\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \frac{1}{2} \left[3 \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t \right] \\ &= \frac{1}{8} [11 \sin 2t + 2t \cos 2t]. \end{aligned}$$

$$b_2'(t) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2t & 3 \\ -3 \sin 2t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [t \cos 2t + 6 \sin 2t].$$

ليكن $I_2 = \int t \cos 2t dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \quad dv = \cos 2t dt \Rightarrow du = dt \quad v = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

$$\therefore I_2 = \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} b_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t - 3 \cos 2t \right] \\ &= \frac{1}{8} [2t \sin 2t - 11 \cos 2t]. \end{aligned}$$

إذن يكون الحل الخاص

$$\begin{aligned}
 X_p &= e^{2t} \begin{pmatrix} b_1(t) \cos 2t + b_2(t) \sin 2t \\ -2b_1(t) \sin 2t + 2b_2(t) \cos 2t \end{pmatrix} \\
 &= e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{8}[2t \cos 2t + 11 \sin 2t] \cos 2t + \frac{1}{8}[2t \sin 2t - 11 \cos 2t] \sin 2t \\ -2\left(\frac{1}{8}\right)[2t \cos 2t + 11 \sin 2t] \sin 2t + 2\left(\frac{1}{8}\right)[2t \sin 2t - 11 \cos 2t] \cos 2t \end{pmatrix} \\
 &= e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

أو

$$X_p = \frac{1}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن الحل العام

$$X = X_H + \frac{1}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}.$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من الأنظمة الآتية:

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}. \quad 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{ملحوظة إستخدم (3)}$$

$$5) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^t \quad 6) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} e^{6t}$$

$$7) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$9) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 10) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$11) \left. \begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= x - 2y \\ z' &= x + y - 5z \\ u' &= 5z \end{aligned} \right\} \quad 12) \left. \begin{aligned} x_1' &= -10x_1 + x_2 + 7x_3 \\ x_2' &= -9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ x_3' &= -17x_1 + x_2 + 12x_3 \\ x_1(0) &= 6, x_2(0) = 1, x_3(0) = 10 \end{aligned} \right\}$$

$$13) \left. \begin{aligned} x_1' &= x_2, x_2' = x_3, x_3' = x_1 \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad 14) \left. \begin{aligned} x_1' &= x_3 + 1, x_2' = x_3, x_3' = x_1 - 2 \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$15) \dot{x} = -2x + y, \quad \dot{y} = x - 2y, \quad \dot{z} = x + y - 5z, \quad \dot{u} = 5z$$

$$. x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = u(0) = 0$$

$$16) \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 3$$

$$17) x_1' = 7x_1 + 4x_2 - 4x_3, \quad x_2' = 4x_1 - 8x_2 - x_3, \quad x_3' = -4x_1 - x_2 - 8x_3$$

تحت الشروط الابتدائية

$$. x_3(0) = -1, \quad x_2(0) = 5, \quad x_1(0) = 3$$

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات

المعاملات المتغيرة

**Second Order Differential Equations with Variable
Coefficients**

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

تكون المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على

الصورة العامة

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \quad (1)$$

وهذه المعادلة تكون متجانسة عندما $r(x) = 0$ أما إذا كانت $r(x) \neq 0$ فإنها

تكون غير متجانسة.

وهناك العديد من الطرق لحل تلك المعادلة، وكل معادلة لها ما يناسبها من طريقة

لقد درسنا معادلة أويلر-كوشى ومعادلة لاجرانج في الجزء الأول من هذا الكتاب.

وسوف نعرض بعض الطرق البسيطة في التناول في هذا الباب.

١ - طريقة تغيير البارامترات (الوسائط) Variation of parameters

إذا علم أن الحلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هما $y_1(x), y_2(x)$

وبالتالي فإن

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث $y_1(x), y_2(x)$ حلان مستقلان، c_1, c_2 ثابتان إختياريان.

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_P = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

حيث $c_1(x), c_2(x)$ دالتان في x ، ويمكن إيجاد كل منهما (أنظر الجزء الأول)،

حيث:

$$c_1(x) = \int \frac{-y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} r(x) dx, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} r(x) dx.$$

وذلك بحل المعادلتين

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(2x+1)(x+1)y'' + 2xy' - 2y = (2x+1)^2 \dots \quad (1)$$

بعد إثبات أن كلا من $y = \frac{1}{x+1}$, $y = x$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة.

الحل

تكون المعادلة المتجانسة المناظرة على الصورة

$$(2x+1)(x+1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \dots \quad (2)$$

(أ) نثبت أن $y = x$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y' = 1, y'' = 0$$

أي الطرف الأيمن $= 2x - 2x = 0$ الطرف الأيسر

(ب) نثبت أن $y = \frac{1}{x+1}$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= (2x+1)(x+1) \frac{2}{(x+1)^3} + 2x \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{2(2x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2x}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{2(2x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = 0 \end{aligned}$$

الطرف الأيمن =

من (أ)، (ب) نجد أن $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x+1}$ حلان مستقلان للمعادلة (2).

المعادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة الباب الثالث

أى أن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

نضع المعادلة المعطاء على الصورة العامة:

$$y'' + \frac{2x}{(2x+1)(x+1)} y' - \frac{2}{(2x+1)(x+1)} y = \frac{2x+1}{x+1}$$

حيث $x \neq -1, -\frac{1}{2}$ ، بالمقارنة بالمعادلة العامة، نجد أن

$$r(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

و على ذلك فإن حل المعادلة المتجانسة يكون على الصورة

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x+1}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_P = c_1(x)x + c_2(x) \frac{1}{x+1}$$

حيث

$$c_1(x) = \int \frac{-y_2}{W\{y_1, y_2\}} r(x) dx, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1}{W\{y_1, y_2\}} r(x) dx.$$

وبالتى فإن

$$W\{y_1, y_2\} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x+1} \\ 1 & \frac{-1}{(x+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x-(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

فيكون

$$c_1(x) = \int \frac{1}{\frac{x+1}{-(2x+1)} \cdot \frac{2x+1}{x+1}} dx = \int dx = x$$

$$c_2(x) = \int \frac{x}{-(2x+1)} \cdot \frac{2x+1}{x+1} dx = - \int x(x+1) dx = \int [(x+1) - (x+1)^2] dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{3}(x+1)^3.$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو

$$y_p = x \cdot x + \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{3}(x+1)^3 \right] \frac{1}{x+1} = x^2 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{3}(x+1)^2$$

$$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x+1} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}.$$

٢ - التحويل إلى الصورة القياسية :

إذا كان لدينا المعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (1)$$

نستخدم التعويض $y = uv$ ، حيث u دالة إختيارية ، v دالة في x وعلى ذلك فإن

$$y' = uv' + u'v, y'' = uv'' + 2u'v' + u''v.$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = r \quad (2)$$

حيث u, v, p, q, r دوال في x .

$$2u' + pu = 0$$

نختار u بحيث تحقق

وبالتالى فإن

$$u = \exp\left[-\frac{1}{2} \int p dx\right]$$

$$u = e^{\frac{1}{2} \int p dx}$$

أى

ثم بالتعويض عن u, u', u'' فى المعادلة (2) ، تصبح المعادلة على الصورة

$$v'' + I(x)v = R(x) \dots \quad (3)$$

$$I(x) = q - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2, R(x) = \frac{r}{u} \quad \text{حيث}$$

المعادلة (3) تسمى الصورة القياسية للمعادلة (1) وهى تكون على صورة معادلة خطية ذات معاملات ثابتة أو على صورة معادلة أولر-كوشى ، وبحلها نحصل على الدالة v ، وبذلك نحصل على الحل العام $y = uv$.

مثال (٢)

بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \sec x \quad ; x > 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = x \sec x$$

نفرض $y = uv$ بحيث نختار $u = e^{\frac{1}{2} \int p dx}$

بالمقارنة بالمعادلة $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ نجد أن

$$p(x) = -\frac{2}{x}, q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}, r(x) = x \sec x$$

$$u = e^{\frac{1}{2} \int -\frac{2}{x} dx} = x$$

وبالتالى فإن

$$y = xv, y' = xv' + v, y'' = xv'' + 2v'$$

وعلى ذلك فإن

بالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$xv'' + 2v' - \frac{2}{x}(xv' + v) + (1 + \frac{2}{x^2})xv = x \sec x$$

$$\therefore v'' - \left[\frac{2}{x^2} - 1 - \frac{2}{x^2} \right] v = \sec x$$

$$v'' + v = \sec x$$

أى أن

وتلك هى الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية، وهى معادلة تفاضلية خطية ذات

معاملات ثابتة غير متجانسة ولحلها،

$$(D^2 + 1)v = 0$$

(1) نوجد حل المعادلة المتجانسة

$$v = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نجد أن

(2) نوجد الحل الخاص v_p بطريقة تغيير البارامترات وذلك بفرض

$$v_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

$$v_1 = \cos x, v_2 = \sin x$$

حيث

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore c_1(x) = \int \frac{-v_2}{W} f dx = \int -\sin x \cdot \sec x dx = \ln \cos x$$

$$c_2(x) = \int \frac{v_1}{W} f dx = \int \cos x \sec x dx = x.$$

$$\therefore v_p = (\ln \cos x) \cos x + x \sin x.$$

ومن ذلك فإن الحل العام للمعادلة القياسية

$$v = (c_1 + \ln \cos x) \cos x + (c_2 + x) \sin x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$y = x[(c_1 + \ln \cos x) \cos x + (c_2 + x) \sin x].$$

مثال (٣)

بالتحويل إلى الصورة القياسية، أوجد الحل العام للمعادلة

$$4x^2 y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad ; x > 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$$

بالمقارنة بالمعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

نجد أن

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int p(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

نختار

نستخدم التعويض $y = \frac{1}{\sqrt{x}} v$ للتحويل إلى الصورة القياسية فيكون

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{x}} v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}} v, \quad y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} v'' - \frac{1}{2x\sqrt{x}} v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}} v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} v \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} v'' - \frac{1}{x\sqrt{x}} v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} v. \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نجد أن

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

$$\frac{1}{\sqrt{x}}v'' - \frac{1}{x\sqrt{x}}v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v + \frac{1}{x\sqrt{x}}v' - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}v + \frac{1}{4\sqrt{x}}v - \frac{1}{4x^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}}v'' + \frac{1}{4\sqrt{x}}v = 0.$$

حي \sqrt{x}

$$v'' + \frac{1}{4}v = 0$$

دلة على الصورة القياسية

عون

$$v = c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x.$$

حل العام للمعادلة يكون:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right].$$

طريقة تحليل المؤثر:

وهي طريقة سهلة إذا كانت قابلة للتطبيق ، وهي طريقة تختزل المعادلة من الرتبة الثانية إلى معادلة من الرتبة الأولى .

إذا كان لدينا المعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

أو

$$(D^2 + p(x)D + q(x))y = r(x) \quad (1)$$

و أمكن تحليل المؤثر التفاضلي كما يأتي

$$[D^2 + p(x)D + q(x)]y = (D + p_1(x))(D + p_2(x))y$$

تصبح المعادلة على الصورة

$$(D + p_1(x))(D + p_2(x))y = r(x)$$

ثم نفترض أن

$$(D + p_2(x))y = z \quad (2)$$

و على ذلك فإن

$$(D + p_1(x))z = r(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + p_1(x)z = r(x) \quad \text{أو}$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ، وبحلها نحصل على قيمة z و

بالتعويض في (2) عن $z = z(x)$ تصبح (2) على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = z(x)$$

وهى أيضا معادلة خطية من الرتبة الأولى في y وبحلها نحصل على الحل العام y .

مثال (٤)

بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 2(x+2)^2 e^{2x}, \quad x \neq 2$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$[(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2]y = 2(x+2)^2 e^{2x} \quad (1)$$

$$D = \frac{d}{dx} \quad \text{حيث}$$

وبتحليل الطرف الايسر للمعادلة (1) تصبح على الصورة

$$((x+2)D - 1)(D - 2)y = 2(x+2)^2 e^{2x} \quad (2)$$

$$(D - 2)y = z \dots (3) \quad \text{نفترض أن}$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$$\therefore ((x+2)D-1)z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

أو

$$(x+2) \frac{dz}{dx} - z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

بالقسمة على $(x+2)$ ، تصبح

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x+2} z = 2(x+2) e^{2x} \quad \dots(4)$$

المعادلة (4) معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x+2} dx} = \frac{1}{x+2}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int \frac{1}{x+2} 2(x+2) e^{2x} dx = e^{2x}.$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$\frac{1}{x+2} z = e^{2x} + c_1$$

$$\therefore z = (x+2) e^{2x} + c_1(x+2) \quad \dots(5)$$

بالتعويض من (5) في (3)

$$\therefore (D-2)y = (x+2) e^{2x} + c_1(x+2)$$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = (x+2) e^{2x} + c_1(x+2) \quad \text{أو}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل μ هو

$$\mu = e^{-\int 2 dx} = e^{-2x} =$$

$$\mu = \int e^{-2x} [(x+2)e^{2x} + c_1(x+2)] dx$$

$$\mu = \frac{1}{2}(x+2)^2 + c_1 \left[\frac{e^{-2x}}{-2}(x+2) - \frac{e^{-2x}}{4} \right]$$

أى أن الحل العام يكون

$$e^{-2x} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2} c_1 e^{-2x}(x+2) - \frac{1}{4} c_1 e^{-2x} + c_2$$

أو

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 e^{2x} - \frac{1}{4} c_1 (2x+5) + c_2 e^{2x}.$$

مثال (٢)

$$xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2) \quad (أ) \text{ أثبت أن}$$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة

$$xy'' + (2x+3)y' + 4y = e^{2x}$$

بطريقة تحليل المؤثر.

الحل

$$(D+2)(xD+2)y = D(xD)y + D(2y) + 2xDy + 4y$$

$$= xD^2y + Dy + 2Dy + 2xDy + 4y \quad (أ)$$

$$= [xD^2 + (2x+3)D + 4]y.$$

$$xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2) \quad \text{أى أن}$$

(ب) لحل المعادلة، يمكن أن نضعها على الصورة

$$(D+2)(xD+2)y = e^{2x} \quad \dots(1)$$

$$(xD+2)y = z. \quad \text{نفترض أن (2)}$$

بالتعويض فى (1)

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

الباب الثالث

$$\therefore (D+2)z = e^{2x}$$

أو

$$\frac{dz}{dx} + 2z = e^{2x} \quad (3)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int e^{2x} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}.$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (3) هو

$$e^{2x} z = \frac{1}{4} e^{4x} + c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore z = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

بالتعويض عن z في (2) فيكون

$$(xD+2)y = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{c_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x} \quad \text{أو}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

وعلى ذلك فإن

$$\begin{aligned} \int x^2 \left[\frac{c_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x} \right] dx &= \int (c_1 x e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}) dx \\ &= c_1 \left[\frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right] \\ &= \frac{-1}{4} c_1 (2x+1) e^{-2x} + \frac{1}{16} (2x-1) e^{2x} \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة (1) يكون على الصورة

$$x^2 y = \frac{-1}{4} c_1 (2x+1) e^{-2x} + \frac{1}{16} (2x-1) e^{2x} + c_2$$

أو

$$y = \frac{-1}{4} c_1 \frac{(2x+1)}{x^2} e^{-2x} + c_2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{(2x-1)}{x^2} e^{2x}.$$

ملحوظة: عند إستخدام طريقة تحليل المؤثر (عموما) فإن

$$[D + p_1(x)][D + p_2(x)]y \neq [D + p_2(x)][D + p_1(x)]y.$$

٤ - إستخدام صيغة أبيل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

أولا: - المعادلة المتجانسة: -

إذا كان لدينا المعادلة $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ وكان $y_1(x), y_2(x)$ هما حلا

المعادلة، حيث $p(x), q(x)$ دالتين متصلتين في الفترة $a \leq x \leq b$

تمكن أبيل (Abel) من حساب قيمة $W\{y_1, y_2; x\}$ أو $W\{y_1(x), y_2(x)\}$

بالصيغة الآتية:

$$W\{y_1, y_2; x\} = W\{y_1, y_2; x_0\} e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$$

حيث $a \leq x_0 \leq x \leq b$.

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

الباب الثالث

وهذه الصيغة تعرف بإسم صيغة آبل، ونلاحظ أن $W\{y_1, y_2; x_0\}$ قيمة ثابتة لأنها عند نقطة معينة x_0 وتستخدم هذه الصيغة في إيجاد حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية إذا علم أحد الحلين، وليكن $y_1(x)$ فإن

$$y_2(x) = W\{y_1, y_2; x_0\} y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int p(z) dz}}{[y_1(s)]^2} ds$$

وحيث إن $W\{y_1, y_2; x_0\}$ مقدار ثابت فإننا نعتبره مساويا للوحدة، وبالتبسيط يمكن أن نكتب

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int p(z) dz}}{[y_1(s)]^2} ds$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{حيث يكون الحل العام}$$

ثانياً: - المعادلة غير المتجانسة: -

باستخدام صيغة آبل، أمكن حل المعادلة غير المتجانسة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

وذلك إذا علم $y_1(x)$ حل للمعادلة المتجانسة، فيكون الحل العام للمعادلة غير

المتجانسة على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int \frac{r(s)}{W\{y_1, y_2; s\}} \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

حيث $y_2(x)$ الحل الآخر للمعادلة المتجانسة، ونحصل على $W\{y_1, y_2; s\}$ باستخدام

صيغة آبل

$$W\{y_1, y_2; s\} = W\{y_1, y_2; x_0\} e^{-\int p(z) dz}$$

وباعتبار $W\{y_1, y_2; x_0\} = 1$

فإن الحل العام يكون على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_e^x \int^{p(z) dz} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

مثال (١)

إذا علم أن $y_1 = x \sin x$ حل للمعادلة المتجانسة
 $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$ فأوجد الحل العام للمعادلة
 $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \sec x; x > 0$ باستخدام صيغة آبل.

الحل

نتحقق أولاً أن $y_1 = x \sin x$ حل للمعادلة المتجانسة وعلى ذلك فإن

$$y' = x \cos x + \sin x, y'' = -x \sin x + 2 \cos x.$$

$$\text{الطرف الأيسر} = x^2 [-x \sin x + 2 \cos x] - 2x [x \cos x + \sin x] + (x^2 + 2)x \sin x$$

$$= \text{الطرف الأيمن} = 0$$

ثم نوجد باستخدام صيغة آبل

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

نضع المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 0$$

$$\therefore p(x) = \frac{-2}{x}$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore y_2 &= x \sin x \int \frac{x^2}{x^2 \sin^2 x} dx = x \sin x \int \operatorname{cosec}^2 x dx \\ &= -x \sin x \cot x = -x \cos x \end{aligned}$$

ثم نجد

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s \sin s & -s \cos s \\ x \sin x & -x \cos x \end{vmatrix} = -sx \sin s \cos x + sx \cos s \sin x$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int e^{\int p(s)ds} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds \\ &= c_1 x \sin x - c_2 x \cos x + \int e^{\int \frac{-2}{x} dx} s \operatorname{sec} s [-sx \sin s \cos x + sx \cos s \sin x] ds \\ &= c_1 x \sin x - c_2 x \cos x + x \int \operatorname{sec} s [-\sin s \cos x + \cos s \sin x] ds \\ y &= c_1 x \sin x - c_2 x \cos x + x [\cos x \ln \cos x + x \sin x]. \end{aligned}$$

مثال ٢

إذا علم أن $y_1(x) = x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x \neq 1$$

فأوجد الحل العام للمعادلة باستخدام صيغة أبيل

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

العل

نتحقق أولاً أن $y_1 = x$ حل للمعادلة، ثم نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

أى على الصورة

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

$$p(x) = -\frac{x}{x-1}$$

حيث

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx = \int \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= x + \ln(x-1).$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{x+\ln(x-1)} = (x-1)e^x.$$

وباستخدام صيغة أبيل

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

$$= x \int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx = x \int \left[\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x\right] dx.$$

نوجد $\int \frac{1}{x}e^x dx$ بالتجزئ

$$\text{let } u = \frac{1}{x} \quad dv = e^x dx \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \quad v = e^x.$$

$$\therefore \int \frac{1}{x}e^x dx = \frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx$$

$$y_2(x) = x\left[\frac{1}{x}e^x\right] = e^x.$$

ومن ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y(x) = c_1x + c_2e^x.$$

٥ - استبدال المتغير المستقل

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R \quad (1)$$

حيث P, Q, R دوال في x . وباستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z أي $z = f(x)$

مثلا فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$$

$$= \frac{dy}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \right) \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dz} \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + Qy = R$$

أو

$$\frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} \right) \frac{dy}{dz} + Qy = R$$

بالقسمة على $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1y = R_1 \quad (2)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\ Q_1 &= \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث P_1, Q_1, R_1 دوال فى x فقط (ويمكن تحويلهم إلى دوال فى z باستخدام التعويض $(z = f(x))$). إذا ساوينا Q_1 بالثابت فإن P_1 تصبح ثابتا أيضا وبالتالي يمكن حل المعادلة (2) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

ويمكن تلخيص خطوات الحل بهذه الطريقة على النحو التالى: -

(i) نجعل معامل y'' يساوى الوحدة أى تكون المعادلة على الصورة

$$y'' + Py' + Qy = R \quad (1)$$

(ii) نفرض أن $Q = \pm Kf(x)$ ثم نفرض العلاقة بين x, z على الصورة

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Kf(x) \quad \text{حيث } K \text{ ثابت ما.}$$

(iii) من الخطوة (ii) يكون

$$\frac{dz}{dx} = +\sqrt{Kf(x)} \quad \text{(مهملا الإشارة السالبة)} \quad (2)$$

ومنها

$$z = \int \sqrt{Kf(x)} dx \quad (3)$$

(iv) من العلاقة (3) بين x, z يمكن تحويل المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \quad (4)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (5)$$

من (2) نرى أن $Q_1 = \frac{\pm Kf(x)}{Kf(x)} = \pm 1$ ، ثابت ما. وبعد ذلك نحسب P_1 . فإذا كانت

تساوى ثابت فإنه يمكن حل المعادلة (4) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابتة. أما إذا لم تكن كذلك فتشمل هذه الطريقة

(v) بعد حل المعادلة (4) نعوض عن z بدلالة x فنحصل على الحل المطلوب.

مثال (1)

حل المعادلة

$$(\sin^2 x)y'' + \sin x \cos xy' + 4y = 0$$

العل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y'' + \cot xy' + 4 \operatorname{cosec}^2 xy = 0 \quad (1)$$

فيكون

$$P = \cot x, Q = 4 \operatorname{cosec}^2 x, R = 0 \quad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 4 \operatorname{cosec}^2 x \quad (3)$$

ومنها نحصل على

$$dz = 2 \cos ecx \Rightarrow z = 2 \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right) \quad (4)$$

وباستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z فنتحول المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \quad (5)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + P \left(\frac{dz}{dx} \right)}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} = \frac{-2 \cos ecx \cdot \cot x + \cot x (2 \cos ecx)}{4 \cos ec^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} = \frac{4 \cos ec^2 x}{4 \cos ec^2 x} = 1, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} = 0$$

وبالتعويض في (5) نحصل على

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + y = 0 \Rightarrow (D_1^2 + 1)y = 0; D_1 = \frac{d}{dz}$$

ويكون الحل على الصورة

$$y = c_1 \cos z + c_2 \sin z \\ = c_1 \cos \left\{ 2 \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right\} + c_2 \sin \left\{ 2 \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right\}.$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$(\cos x) y'' + y' \sin x - 2y \cos^3 x = 2 \cos^5 x$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y'' + y' \tan x - (2 \cos^2 x)y = 2 \cos^4 x \quad (1)$$

بالمقارنة مع

$$y'' + Py' + Qy = R$$

يكون لدينا

$$P = \tan x, Q = -2 \cos^2 x, R = 2 \cos^4 x \quad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2 \cos^2 x \quad \therefore \frac{dz}{dx} = \sqrt{2} \cdot \cos x$$

$$dz = \sqrt{2} \cdot \cos x dx \quad \therefore z = \sqrt{2} \sin x \quad (3)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \quad (4)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + P \left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2} \sin x + \tan x \cdot \sqrt{2} \cos x}{2 \cos^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -1, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{2 \cos^4 x}{2 \cos^2 x} = \cos^2 x$$

أى

$$R_1 = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{z^2}{2}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - y = 1 - \frac{z^2}{2}$$

$$(D_1^2 - 1)y = 1 - \frac{z^2}{2} \quad \text{أي}$$

ويكون حل الدالة المتممة هو

$$y_H = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_P = \frac{1}{D_1^2 - 1} \left[1 - \frac{1}{2} z^2 \right] = -1 + \frac{1}{2} (z^2 + 2) = \frac{z^2}{2}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} + \frac{1}{2} z^2 = c_1 e^{\sqrt{2} \sin x} + c_2 e^{-\sqrt{2} \sin x} + \sin^2 x.$$

٦- المعادلة التامة : Exact Equations

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1)$$

تامة إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هو المعادلة

(1) وبعبارة أخرى تكون المعادلة (1) تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة

تفاضلية من الرتبة الأولى. ومثال ذلك المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + 1)y'' + 3xy' + y = 3x^2$$

تامة لأنها تنتج من تفاضل المعادلة

$$(x^2 + 1)y' + xy' + xy = x^3$$

وسنسرر النظرية التالية بدون برهان

نظرية :

الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة (1) تامة هو

$$a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = 0$$

وبالتالي يكون التكامل الأول "First integral" للمعادلة (1) هو

$$a_2 y' + (a_1 - a_2') y = \int f(x) dx + c \quad (2)$$

مثال (1)

أثبت أن المعادلة $(\cos x)y'' + (2 \sin x)y' + (3 \cos x)y = \tan^2 x$ تامة

الحل

بالمقارنة بالمعادلة (1) نجد أن

$$a_2 = \cos x, a_1 = (2 \sin x), a_0 = 3 \cos x$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2' = -\sin x, a_2'' = -\cos x, a_1' = 2 \cos x, a_0 = 3 \cos x$$

ويتطبيق الشرط

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 0$$

نحصل على

$$-\cos x - 2 \cos x + 3 \cos x = 0$$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاة تامة

مثال (2)

أثبت أن المعادلة $(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 1+3x^2$ تامة ثم أوجد حلها.

الحل

لدينا

$$a_2 = (1+x^2), a_1 = 3x, a_0 = 1$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2' = 2x, a_2'' = 2, a_1' = 3$$

ويستخدم شرط التمام

المعادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة الباب الثالث

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 3 + 1 = 0$$

∴ المعادلة المعطاه تامه. ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2) وهو

$$a_2 y' + (a_1 - a_2') y = \int f(x) dx + c$$

أى أن

$$(1+x^2)y' + (3x-2x)y = \int (1+3x^2) dx + c$$

$$(1+x^2)y' + xy = x + x^3 + c_1$$

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

أى أن

وهى معادلة خطية يكون عامل التكامل هو $e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

ويكون حلها هو

$$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c_1 \ln \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] + c_2$$

مثال (٢)

أثبت أن المعادلة $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = \sec^2 x$ تامه وأوجد حلها بحيث

$$y = 0, y' = 1 \text{ عندما } x = 0.$$

العل

$$a_2 = 1+x^2, a_1 = 4x, a_0 = 2$$

لدينا

$$a_2' = 2x, a_2'' = 2, a_1' = 4$$

ويستخدم شرط التمام

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

وعليه فإن المعادلة المعطاه تامه ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2)

$$a_2 y' + (a_1 - a_2') y = \int f(x) dx + c$$

هو

$$(1+x^2)y' + (4x-2x)y = \int \sec^2 x dx + c_1$$

أى أن

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\tan x}{1+x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وهى معادلة تفاضلية خطية ويكون عامل التكامل هو $(1+x^2)$ ويكون حلها هو

$$y(1+x^2) = \ln \sec x + c_1 \tan^{-1} x + c_2$$

وبوضع $x=0, y=0$ نحصل على $c_2 = 0$ ويتفاضل المعادلة الأخيرة نحصل على

$$(1+x^2)y' + 2xy = \tan x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وبوضع $x=0, y=0, y'=1$ فيها نحصل على $c_1 = 1$ وبذلك يكون الحل هو

$$(1+x^2)y = \ln \sec x + \tan^{-1} x.$$

٧- المعادلة المزامة Adjoint Equation:

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

تامه فإننا نبحث عن عامل تكامل $z(x)$ بحيث يكون $zL(y)$ تفاضل تام أى

يكون $zL(y) = \frac{d}{dx}L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلى من الرتبة الأولى. وبالتكامل

بالتجزئ أى $\int zL(y)dx = L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلى من الرتبة الأولى وعلى ذلك

فإن $zL(y)$ تصبح تفاضلا تاما إذا كان

$$\bar{L}(z) = (a_2(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_0(x)z = 0 \quad (2)$$

من ذلك نرى أن البحث عن عامل التكامل للمعادلة (1) قادنا إلى البحث عن حل

لمعادلة تفاضلية أخرى من الرتبة الثانية (2) تسمى المعادلة (2) بالمعادلة المزاملة للمعادلة

(1) كما يسمى \bar{L} بالمؤثر المزمامل Adjoint operator للمؤثر L . فإذا أمكننا إيجاد الحل z للمعادلة المزماملة (2) فإن z هي عامل التكامل للمعادلة (1) الذي يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها. هذا وقد لانستطيع حل المعادلة المزماملة (2). وتوجد حالات خاصة يسهل فيها حل المعادلة المزماملة (2).
ملحوظة: المعادلة المزماملة للمعادلة (2) هي المعادلة (1).

المعادلة المزماملة ذاتيا: Self adjoint equation

تعريف: يقال أن المعادلة (1) مزماملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزماملة (2) لها نفس صورة المعادلة الأصلية (1). أي تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا إذا كان

$$\bar{L}(y) = L(y)$$

مثال (1)

معادلة بسل من الرتبة صفر $xy'' + y' + xy = 0$ تكون المعادلة المزماملة لها هي

$$(xz)'' - z' + xz = 0 \Rightarrow xz'' + z' + xz = 0$$

وهي نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالي فهي متزاملة ذاتيا.

ملحوظة: إذا كتبنا المعادلة السابقة "بعد القسمة على x " على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

تكون المعادلة المزماملة لها هي

$$z'' - \left(\frac{1}{x}z\right)' + z = 0$$

$$z'' - \frac{1}{x}z + \frac{1}{x^2}z + z = 0$$

وليس نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالي فهي غير متزاملة ذاتيا
وسنسردها النظريات التالية بدون برهان

نظرية (١):

الشرط الضروري والكافى لى تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا هو

$$a_2'(x) = a_1(x)$$

نظرية (٢):

إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) متزاملة ذاتيا فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

نظرية (٣):

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية (على الصورة (١)) تصبح متزاملة ذاتيا إذا

ضربت فى العامل

$$\frac{1}{a_2(x)} \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right), \quad a_2(x) \neq 0$$

ملحوظة: من نظرية (3) يتضح أنه ليس هناك نقص فى التعميم إذا كتبنا المعادلة

المزاملة ذاتيا

$$L(y) = (a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

على الصورة

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

وتعرف المعادلة (3) بمعادلة "Sturm Liouville" وهى تلعب دورا كبيرا فى

مسائل القيم الحدية.

مثال (٢)

ضع معادلة بسل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

في الصورة المزاملة ذاتيا

الحل

$$\frac{1}{a_2} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_2} dx\right) = \frac{1}{x^2} \exp \int \frac{x}{x^2} dx = \frac{1}{x}$$

لدينا

ويضرب المعادلة المعطاة في $\frac{1}{x}$ نحصل على

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

أى

$$(xy')' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

وهي في الصورة المزاملة ذاتيا.

٨ - اختزال الرتبة : Reduction of order

ليكن $y_1 = u(x)$ هو حلا للمعادلة التفاضلية

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

ونستخدم التحويل $y_2 = y = uv$ للحصول على الحل الثاني

حيث $v = v(x)$ دالة مجهولة يراد تحديدها. وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = (u(x)v(x))' = u'v + uv' \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u''v + 2u'v' + uv'' \quad (3)$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$a_2(x)[u''v + 2u'v' + uv''] + a_1(x)[u'v + uv'] + a_0(x)uv = 0$$

أو

$$a_2uv'' + (2a_2u' + a_1u)v' + (a_2u'' + a_1u' + a_0u)v = 0$$

وبالتالى فإن

$$a_2u \frac{d^2v}{dx^2} + (2a_2u' + a_1u) \frac{dv}{dx} = 0$$

ويوضع $w = \frac{dv}{dx}$ نحصل على

$$a_2u \frac{dw}{dx} + (2a_2u' + a_1u)w = 0 \quad (4)$$

وهى معادلة خطية ومنها

$$\frac{dw}{w} = - \left[2 \frac{u'}{u} + \frac{a_1}{a_2} \right] dx$$

ويكون حلها هو

$$w = c \exp \left[- \int - \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right] / [u(x)]^2$$

أي أن

$$v = \int w dx = \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وباختبار $c = 1$ يكون الحل الثاني هو

$$y_2 = uv = y_1 \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1}{a_2} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$\begin{aligned} W(u, y_1) &= \begin{vmatrix} u & y_2 \\ u' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & uv \\ u' & uv' + u'v \end{vmatrix} = u^2(x)v' \\ &= \exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right] \neq 0 \end{aligned}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاه هو

$$y = c_1 u + c_2 y_2$$

مثال

إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا بطريقة إختزال الرتبة.

الحل

حيث أن $y = x$ تحقق المعادلة المعطاه نفرض أن الحل الآخر هو $y_2 = x \cdot v$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$x(x^2 + 1) \frac{d^2v}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} = 0$$

وبوضع $w = \frac{dv}{dx}$ نحصل على

$$x(x^2 + 1) \frac{dw}{dx} + 2w = 0$$

ويحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على

$$w = \frac{c(x^2 + 1)}{x^2}$$

وباختيار $c = 1$ وبالتكامل نحصل على

$$v = x - \frac{1}{x}$$

ويكون الحل الثانى هو

$$y_2 = x(x - \frac{1}{x}) = x^2 - 1$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$W(u, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 + 1 \\ = x^2 + 1 \neq 0.$$

ويكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1x + c_2(x^2 + 1)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان .

تمارين

(١) إثبت أن $y_1 = e^{x^2}, y_2 = e^{-x^2}$ حلان للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$xy'' - y' - 4x^3y = 24x^3e^{2x^2}$$

وباستخدام طريقة تغيير البارامترات أوجد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

(٢) تحقق من أن كلا من $y_1 = x, y_2 = e^x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = \frac{(x-1)^2}{x} \quad ; x \neq 1$$

(٣) بالتحويل إلى الصورة القياسية، أوجد الحل العام لكل من:

$$i) xy'' - 2(x-1)y' + 2(5x-1)y = 0 \quad ii) x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 3x^{3/2} \sin 3x$$

$$iii) x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad iv) y'' + 2xy' + x^2y = 0$$

$$v) x^2y'' + xy' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$$

(٤) باستخدام تحليل المؤثر، أوجد الحل العام لكل من:

$$i) [xD^2 - (x+2)D + 2]y = 0 \quad ii) [xD^2 - (x+2)D + 2]y = x-1$$

$$iii) [xD^2 - (3x+1)D + 3]y = 2(x-1)e^x$$

$$iv) [(x+1)D^2 - (3x+4)D + 3]y = (3x+2)e^{3x} \quad ; D = \frac{d}{dx}$$

$$xD^2 + (2-x)D - 1 = (D-1)(xD+1) \quad (5) \text{ أثبت أن}$$

$$xy'' + (2-x)y' - y = 2x - x^2 \quad \text{ثم أوجد الحل العام للمعادلة}$$

(6) إذا علم أن $y_1(x) = e^{2x}$ حل للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة $(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 2(x+2)^2 e^{2x}; x \neq -2$ ، فأوجد الحل العام لهذه المعادلة باستخدام صيغة آبل.

(7) تأكد من صحة أن $y_1(x) = \frac{1}{x}$ حل خاص للمعادلة $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ ، ثم أوجد الحل العام للمعادلة باستخدام صيغة آبل.

(8) تحويل المعادلة بإستبدال المتغير المستقل أوجد الحل العام

$$z = \sin x \quad xy'' + (\sin x)y' - 2y \cos^3 x = 2 \cos^5 x \quad (1)$$

$$xy'' - y' + 4x^3y = x^5 \quad (ب) \quad x^8y'' + 3x^7y' + x^2a^2y = 1 \quad (ج) \quad a \text{ ثابت}$$

$$xy'' + (2x^2 - 1)y' - 24x^3y = 4x^3 \sin x^2 \quad (د) \quad z = x^2$$

$$y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = 0 \quad (و) \quad y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x \quad (هـ)$$

(9) إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$x^2y'' + xy' - y = x^2e^x$$

إذا كان حل الدالة المتممة هو $(b/x) + ax$

(10) تأكد من أن x, e^x هما حلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}, \quad 0 < x < 1$$

ثم أوجد حلها العام

(١١) استخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$[(x-1)D^2 - xD + 1]y = (x-1)^2$$

إذا كان x, e^x هما حلان للمعادلة المتجانسة المناظرة.

(١٢) أوجد حل المعادلات التالية بتحويلها إلى الصورة القياسية

$$(i) y'' - (2 \tan x)y' + 5y = 0 \quad (ii) y'' - (2 \tan x)y' + 5y = \sec x.e^x$$

$$(iii) y'' - \frac{2}{x}y' + (n^2 + \frac{2}{x^2})y = 0 \quad (iv) x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + x^2 y = 0$$

$$(v) \frac{d}{dx} \left(\cos^2 x \frac{dy}{dx} \right) + y \cos^2 x = 0 \quad (vi) (y'' + y) \cot x + 2(y' + y \tan x) = \sec x.$$

(١٣) أوجد حل المعادلات التالية باستخدام المؤثرات

$$(i) [xD^2 + (1-x)D - 1]y = e^x \quad i.e. [(xD + 1)(D - 1)]y = e^x$$

$$(ii) [(x+2)D - 1](D - 2)y = (x+1)e^x \quad (iii) (xD - 2)(D + 1)y = x^3$$

$$(iv) (xD - 2)(D - 1)y = x^2 \quad (v) [(x+3)D - 1](D - 2)y = (x+3)^2 e^x$$

$$(vi) (xD - 1)(D + 1)y = x^2$$

(١٤) إثبت أن المعادلات التالية تامة وأوجد حلها

$$(i) x(1+x)y'' + (x-1)y' - y = x^2 \quad (ii) (1-x^2)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

$$(iii) xy'' + (3+2x)y' + 2y = 2 + e^{-2x} \quad (iv) y'' + \cos xy' - y \sin x + 2y \sin x = 0$$

$$(v) (\sin^2 x)y'' = 2y \quad (vi) xy'' + (1-x)y' - y = e^x$$

$$(vii) x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(١٥) أكتب المعادلة المزاملة لكل من

$$(i) y'' + 6xy' - 2y = 0, \quad (ii) xy'' + y' - 5y = 0$$

$$(iii) x^2 y'' + (5x+1)y' + 6y = 0, \quad (iv) y'' - \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{x})y = 0$$

(١٦) ضع المعادلات التالية في صورة المعادلات المتزاملة ذاتيا

$$(i) xy'' + y' + 3y = 0, \quad (ii) 4y'' + 2y' - 6y = 0$$

$$(iii) x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0, \quad (iv) y'' - y' \tan x + 2y \sec x = 0$$

(١٧) إذا كان $u(x), v(x)$ دالتين لها مشتقات متصلة حتى الرتبة الثانية

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y$$

وكان

أثبت أن

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} [p(uv' - u'v)]$$

تسمى هذه العلاقة بمتطابقه لاجرانج.

(١٨) إذا كان $u(x), v(x)$ حلين للمعادلة المتزاملة ذاتيا

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y = 0$$

فأثبت أن

$$p(x)[uv' - u'v] = k, \quad k = \text{ثابت}$$

تعرف هذه العلاقة بصيغة آبل (Abel's formula)

لتتوية يلاحظ أن المقدار داخل القوس هو الرونسيكان وأن كل من الحلين تحقق

المعادلة ثم ضرب الأولى في $-v$ والثانية في u والجمع وبالتكامل ينتج المطلوب

(١٩) إثبت أن الثابت k في صيغة أبيل السابقة يساوى صفرا إذا كان فقط
كان الحلان u, v لمعادلة ستيرم-ليوفيل مرتبطين خطيا.

(٢٠) إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة

$$(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا باختزال الرتبة.

(٢١) إذا كان $y = e^{2x}$ هو أحد حلول المعادلة

$$(2x + 1)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا وذلك باختزال الرتبة.

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية

المتجانسة من الرتبة الثانية

باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنوس)

Series Solutions of Second Order Differential
Equations (Frobenious Method)

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

بإستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنوس)

Series Solution of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

١ - مقدمة:

بعض الخواص على العلاقات التجمعية

$$\sum_{n=p}^k Q(n) = Q(p) + Q(p+1) + Q(p+2) + \dots + Q(k); \quad k > p \quad - 1$$

حيث k, p أعداد صحيحة.

$$\sum_{n=p}^{\infty} Q(n) a_n x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} Q(n-p) a_{n-p} x^n \quad - 2$$

ومثال ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n x^{n-2} + n a_n x^{n+5}) = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)^2 a_{n+2} x^n + \sum_{n=5}^{\infty} (n-5) a_{n-5} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad - 3 \text{ إذا كان}$$

فإن $a_n = b_n$ لجميع قيم n

وأيضاً

$$\sum (a_n - b_n) x^n = 0$$

إذا كان

فإن $a_n - b_n = 0$

ومثال ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^n = C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \dots + C_n x^{n+1}$$

إذا كان

$$\therefore C_1 = C_0, 2C_2 = C_1, 3C_3 = C_2, \dots, nC_n = C_{n-1},$$

فإن

$$\therefore C_1 = C_0, C_2 = \frac{C_0}{2!}, C_3 = \frac{C_0}{3!}, \dots, C_n = \frac{C_0}{n!}.$$

أي

تعريف: متسلسلة قوى حول $x = a$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$$

أما إذا كانت المتسلسلة حول $x = 0$ فإن

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

تعريف:

نفترض أن المعادلة

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

حيث كل من $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ دوال تحليلية في x (أي يمكن التعبير عن

كل منها بمتسلسلة قوى في x) فإن :

(١) $x = a$ تسمى بنقطة عادية Ordinary point إذا كان $p_0(a) \neq 0$

(٢) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة أو مفردة Singular point إذا كان $p_0(a) = 0$

(٣) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة منتظمة Regular Singular Point

إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة وكان

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x-a)^2$$

موجودتان

مثال

صنف النقط الشاذة في المعادلة

$$x(x-1)^2(x+2)y'' + x^2y' - (x^3 + 2x-1)y = 0$$

الحل

$$p_0(x) = x(x-1)^2(x+2), \quad p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = -(x^3 + 2x-1)$$

$$p_0(x) = 0 \text{ إذا كان } x=0, x=1, x=-2$$

نقط شاذة أما النقاط الأخرى فهي نقط عادية . وتدرس الآن النقاط الشاذة .

(i) $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_2(x)}{p_0(x)} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 + 2x - 1)}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$x = 0$: نقطة شاذة منتظمة.

(ii) $x = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} (x-1) = \infty$$

$x = 1$: نقطة شاذة غير منتظمة

(iii) $x = -2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} (x+2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x(x-1)^2} = \frac{-2}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{p_2(x)}{p_0(x)} (x+2)^2 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^3 + 2x - 1)(x+2)}{x(x-1)^2} = 0$$

$x = -2$: نقطة شاذة منتظمة

٢ - طريقة فروبنيوس:

لقد سبق دراسة حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية في صورة متسلسلة القوى في حالة إذا كانت $x = a$ نقطة عادية في الجزء الأول ، والآن سوف ندرس حالة إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة منتظمة ، وفي هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{n+r}$$

أما إذا كان الحل حول النقطة $x = 0$ الشاذة المنتظمة فإن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

ملحوظة:

إن لم تذكر النقطة فإننا نعتبر $x = 0$.
وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال الآتي

مثال (١)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x .

الحل

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x} = 0$$

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r+3)x^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل قوى x)

$$C_n(n+r)(2n+2r-1) + C_{n-1}(n+r+2) = 0 \quad (1)$$

نضع $n=0$ في المعادلة (1) فنحصل على

$$C_0 r(2r-1) + C_{-1}(r+2) = 0$$

حيث إن $C_{-1} = C_{-2} = \dots = 0$

$$C_0 r(2r-1) = 0$$

فإن

وباعتبار أن $C_0 \neq 0$ نحصل على

$$r(2r-1) = 0 \quad (2)$$

المعادلة (2) تسمى المعادلة الدليلية (indicial equation) ومنها نجد أن

$$r = 0, \quad r = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على العلاقة التكرارية (recurrence relation)

$$C_n = \frac{-(n+r+2)}{(n+r)(2n+2r-1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وسوف نوجد قيم C_n المختلفة بدلالة $C_0 \neq 0$ في حالتى جذرى المعادلة الدليلية (2)

$$: r = 0 \quad (1)$$

$$\therefore C_n = \frac{-(n+2)}{n(2n-1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-3}{1(1)} C_0 = -3C_0$$

$$C_2 = \frac{-4}{2(3)} C_1 = \frac{(-4)(-3)}{(2)(3)} C_0 = 2C_0$$

$$C_3 = \frac{-5}{(3)(5)} C_2 = \frac{(-5)(2)}{(3)(5)} C_0 = \frac{-2}{3} C_0, \dots$$

$$: r = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$C_n = \frac{-(n+5/2)}{(n+1/2)} C_{n-1}$$

$$\text{or } C_n = \frac{-(2n+5)}{2n(2n+1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-7}{2(3)} C_0 = \frac{-7}{6} C_0$$

$$C_2 = \frac{-9}{(4)(5)} C_1 = \frac{9(7)}{(4)(5)(6)} C_0 = \frac{21}{40} C_0$$

$$C_3 = \frac{-11}{(6)(7)} C_2 = \frac{(-11)(21)}{(6)(7)(40)} C_0 = \frac{-11}{80} C_0, \dots$$

وبفرض $C_0 = 1$ فإن الحل العام يكون

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2}$$

$$\therefore y = A_1 [1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots] + A_2 [1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \dots] x^{1/2}.$$

ملحوظة :

فى المثال السابق لاحظنا عند حل المعادلة الدليلية أن جذرى المعادلة

$r = 0$, $r = \frac{1}{2}$ أى أنهما مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى ، وسوف نلاحظ أن

هناك ثلاث حالات لجذرى المعادلة الدليلية ، كما يأتى

حالات جذرى المعادلة الدليلية :

- (١) مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى.
- (٢) متساويان.
- (٣) مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

الحالة الأولى :

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى.

لقد درسنا الحالة الأولى فى المثال السابق ، ونعرض مثالا آخر

مثال (٢)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

فى صورة متسلسلة قوى فى x .

الحل

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة وحيث أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)x}{2x(1-x)} = \frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x(1-x)} = 0$$

فإن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفى

$$\therefore 2C_n (n+r)(n+r-1) - 2C_{n-1} (n+r-1)(n+r-2) +$$

$$C_n (n+r) - C_{n-1} (n+r-1) + 3C_{n-1} = 0$$

$$\therefore (n+r)(2n+2r-1) - C_{n-1} [(n+r-1)(2n+2r-3) - 3] = 0$$

$$\therefore C_n (n+r)(2n+2r-1) - C_{n-1} [2(n+r)^2 - 5(n+r)] = 0$$

$$\therefore C_n (n+r)(2n+2r-1) - C_{n-1} (n+r)(2n+2r-5) = 0 \quad (1)$$

نضع $n=0$

$$\therefore C_0 r(2r-1) - C_{-1} r(2r-5) = 0$$

حيث $C_0 \neq 0$ و $C_{-1} = 0$ اختيارية

\therefore المعادلة الدليلية هي

$$r(2r-1) = 0$$

$$\therefore r = 0, \frac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore C_n = \frac{(n+r)(2n+2r-5)}{(n+r)(2n+2r-1)} C_{n-1} ; n \geq 1$$

بالتعويض عن جذرى المعادلة الدليلية

$$r = 0 \quad (1)$$

$$\therefore C_n = \frac{n(2n-5)}{n(2n-1)} C_{n-1} , n \geq 1$$

$$\therefore C_n = \frac{2n-5}{2n-1} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-3}{1} C_0 = -3C_0 , C_2 = \frac{-1}{3} C_1 = C_0 , C_3 = \frac{1}{5} C_2 = \frac{1}{5} C_0 , \dots$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = [1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \dots] C_0$$

$$r = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\therefore C_n = \frac{(n+\frac{1}{2})(2n-4)}{(n+\frac{1}{2})(2n)} C_{n-1} , n \geq 1$$

$$\therefore C_n = \frac{n-2}{n} C_{n-1} , n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-1}{1} C_0 = -C_0 , C_2 = 0 = C_3 = C_4 =$$

$$\therefore y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2} = [1-x] C_0 x^{1/2}$$

حيث إن C_0 اختيارية، نعتبر $C_0 = 1$

\therefore الحل العام يكون على الصورة

$$y = A[1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \dots] + B[1-x]\sqrt{x}$$

حيث A, B ثابتان إختياريان

الحالة الثانية:

الجذران متساويان

فى هذه الحالة نجد $r = r_1, r = r_2$ أى أن $r_1 = r_2$ ويكون

$y_1 = \sum C_n x^{n+1}$ وبذلك نحصل على حل واحد فقط ، لكن للحصول على الحل الثانى

المستقبل خطيا ، نفرض $y_1 = f(x, r_1)$ ؛ ولقد ثبت أن الحل الثانى يكون على الصورة

$$y_2 = \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان إختياريان ،

مثال (٣)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى في x .

الحل

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة وعلى ذلك فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)x^2}{x^2} = 1$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة .

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$\therefore y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نحصل على

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r} بالصفر (أقل أس)

$$\therefore C_n (n+r)(n+r-1) + 3C_n (n+r) + C_n - 2C_{n-1} = 0$$

$$\therefore C_n [(n+r)(n+r+2) + 1] = 2C_{n-1}$$

$$\therefore C_n (n+r+1)^2 = 2C_{n-1}$$

(1)

بوضع $n=0$

$$\therefore C_0 (r+1)^2 = 2C_{-1}$$

حيث $C_0 \neq 0$ ، $C_{-1} = 0$ اختيارية

$$\therefore r = -1, -1$$

أي أن جذرى المعادلة الدليلية متساويان

من (1) نحصل على العلاقة التكرارية :

$$C_n = \frac{2}{(n+r+1)^2} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

نوجد قيم C_1, C_2, C_3, \dots بدلالة r

الباب الرابع

$$\therefore C_1 = \frac{2}{(r+2)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{2}{(r+3)^2} C_1 = \frac{2^2}{[(r+2)(r+3)]^2} C_0$$

$$C_3 = \frac{2}{(r+4)^2} C_2 = \frac{2^3}{[(r+2)(r+3)(r+4)]^2} C_0$$

$$C_n = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)(r+4)\dots(r+n+1)]^2} C_0$$

وبافتراض $C_0 = 1$ حيث انها اختيارية ويكون الحل الأول كما يأتي

$$x > 0, \quad y_1(x, r) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r) x^{n+r}$$

حيث إن

$$C_n(r) = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)\dots(r+n+1)]^2}, \quad n \geq 1$$

$$y_1(x, r) = x^r \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} x + \frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)^2} x^2 + \frac{2^3}{(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2} x^3 + \dots \right]$$

$$y_1(x, -1) = x^{-1} \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9} x^3 + \dots \right]$$

كما أن

$$\frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} = x^r \ln x \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} x + \frac{2^2}{(r+2)^2 (r+3)^2} x^2 + \dots \right]$$

$$+ x^r \left[\frac{-4}{(r+2)^3} x - 4 \left[\frac{2^2}{(r+2)^3 (r+3)^2} + \frac{2}{(r+2)^2 (r+3)^3} \right] x^2 + \dots \right]$$

$$y_2(x, -1) = \frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=-1} = x^{-1} \ln x \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9} x^3 + \dots \right] +$$

$$x^{-1} \left[-4x - 4 \left[\frac{2}{4} + \frac{2}{8} \right] x^2 + \dots \right]$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore y = (A + B \ln x) x^{-1} \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9} x^3 + \dots \right] - B x^{-1} \left[4x + 3x^2 + \dots \right]$$

الحالة الثالثة :

الفرق بين جذرى المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلية r_1, r_2 حيث $r_2 > r_1$ فإن $r_2 - r_1$ يكون عدداً صحيحاً موجباً .

في هذه الحالة يعطى r_2 (أكبر الجذرين) حلاً ، وليكن y_2 في حين يعطى الجذر r_1 حلاً وقد لا يعطى ، في حالة إذا وجد الحل y_1 من r_1 فإن الحل العام يكون

$$y = A y_1 + B y_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

بينما في حالة أن r_1 لا يعطى حلاً فإننا نضع $C_0 = b_0(r - r_1)$ في الحل الناتج ،

وليكن الحل بعد التعويض ، على الصورة \bar{y} فإن الحل العام يكون

$$y = A \bar{y} \Big|_{r=r_1} + B \frac{\partial \bar{y}}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$$

حيث r_1 أصغر الجذرين.

مثال (٤)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x .

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة فإن

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x} = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض الحل على الصورة

$$\therefore y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر نحصل على

$$C_n (n+r)(n+r-4) + C_{n-2} = 0 \quad (1)$$

بوضع $n = 0$ ، تصبح (1) على الصورة

$$C_0 r(r-4) + C_{-2} = 0$$

وحيث إن $C_0 \neq 0$ ، $C_{-2} = 0$ اختيارية

∴ المعادلة الدليلية تكون على الصورة

$$r(r-4)=0 \text{ أي } r_1=0, r_2=4$$

نلاحظ أن $r_2 - r_1 = 4$ (عدد صحيح موجب)

وتكون العلاقة التكرارية من (1) هي

$$C_n = -\frac{1}{(n+r)(n+r-4)} C_{n-2}, \quad n \geq 2$$

واضح أن $C_1 = 0$ بوضع $n=1$ وبالتالي فإن $C_{2n+1} = 0$ أي أن جميع المعاملات

الفردية تتلاشى

$$C_2 = -\frac{1}{(r-2)(r+2)} C_0$$

$$C_4 = -\frac{1}{r(r+4)} C_2 = \frac{(-1)^2}{(r-2)r(r+2)(r+4)} C_0, \dots$$

$$C_6 = -\frac{1}{(r+6)(r+2)} C_4 = \frac{-1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)} C_0$$

وبالتالي فإن الحل بدلالة r يكون على الصورة

$$y(x, r, C_0) = C_0 x^r \left[1 - \frac{1}{(r-2)(r+2)} x^2 + \frac{1}{(r-2)r(r+2)(r+4)} x^4 - \frac{1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + \dots \right]$$

نلاحظ عند وضع $r=4$ فإن كل المعاملات تكون معرفه لكن عند وضع

$r=0$ فإن كل المعاملات بدءاً من معامل x^4 تكون غير معينة (غير محددة) لذلك

نضع $C_0 = b_0 r \Leftarrow C_0 = b_0 (r-0)$ نحصل على

$$\bar{y} = b_0 x^r \left[r - \frac{r}{(r-2)(r+2)} x^2 + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} x^4 - \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + \dots \right]$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = \bar{y}|_{r=0} = b_0 \left[-\frac{1}{16} x^4 + \frac{1}{(16)(12)} x^6 - \dots \right]$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = \bar{y} \ln x + b_0 x^r \left[1 - \left(\frac{1}{(r-2)(r+2)} - \frac{r}{(r-2)^2(r+2)} - \frac{r}{(r-2)(r+2)^2} \right) x^2 - \left(\frac{1}{(r-2)^2(r+2)(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)^2} \right) x^4 + \dots \right]$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial r} |_{r=0} = y_1 \ln x + b_0 \left[1 - \left(\frac{-1}{4} \right) x^2 - \left(\frac{1}{32} + \frac{-1}{32} + \frac{-1}{64} \right) x^4 + \dots \right] = y_1 \ln x + b_0 \left[1 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \dots \right]$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

على ذلك فإن

$$y = (A + B \ln x) \left(\frac{-x^4}{16} + \frac{x^6}{192} - \dots \right) + B \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

مثال (5)

أوجد حل المعادلة التالية في صورة متسلسلة لا نهائية

$$(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل

حيث إن نقطة شاذة $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x(1-x)} = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x(1-x)} = 0$$

$x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل أس في المعادلة) نجد أن

$$\begin{aligned} C_n (n+r)(n+r-1) - C_{n-1} (n+r-1)(n+r-2) - 3C_n (n+r) + 2C_{n-1} &= 0 \\ C_n (n+r)(n+r-4) - C_{n-1} (n+r)(n+r-3) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

بوضع $n = 0$ في (1) فنحصل على

$$\therefore C_0 r(r-4) - C_{-1} r(r-3) = 0$$

حيث $C_0 \neq 0$ و $C_{-1} = 0$ اختيارية

\therefore المعادلة الدليلية هي

$$r(r-4) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 4$$

أى أن الفرق بين جذرى المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب (الحالة الثالثة) وعلى

ذلك ومن (1) فإن العلاقة التكرارية

الباب الرابع

$$C_n = \frac{(n+r)(n+r-3)}{(n+r)(n+r-4)} C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{n+r-3}{n+r-4} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{r-2}{r-3} C_0$$

$$C_2 = \frac{r-1}{r-2} C_1 = \frac{r-1}{r-2} * \frac{r-2}{r-3} C_0 = \frac{r-1}{r-3} C_0$$

$$C_3 = \frac{r}{r-1} C_2 = \frac{r}{r-1} * \frac{r-1}{r-3} C_0 = \frac{r}{r-3} C_0$$

$$C_4 = \frac{r+1}{r-3} C_0, \quad C_5 = \frac{r+2}{r-3} C_0, \dots$$

نفترض أن $C_0 = 1$ نحصل على

$$y(x, r) = x^r \left[1 + \frac{r-2}{r-3} x + \frac{r-1}{r-3} x^2 + \frac{r}{r-3} x^3 + \frac{r+1}{r-3} x^4 + \frac{r+2}{r-3} x^5 + \dots \right]$$

حيث إن جميع المعاملات معرفة عند $r=0$ (الجذر الأصغر) على ذلك فإن

$$y_1 = y(x, 4) = x^4 [1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots]$$

ملحوظة يمكن كتابة الحل y_1 على الصورة

$$y_1 = \frac{x^4}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = y(x, 0) = \left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + 0 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{3}x^6 - \frac{4}{3}x^7 - \dots \right]$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y_1.$$

أى أن الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

$$y = Ay_1 + B\left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y_1\right]$$

$$y = Cx^4[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots] + B\left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2\right]$$

$$C = A - \frac{1}{3}B \quad \text{حيث}$$

مثال (٦)

أثبت أن حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' - y = 0$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A + B \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} - 2B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} H_n$$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \text{حيث } A, B \text{ ثابتان اختياريان}$$

العل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = 0$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر فنحصل على

$$\therefore C_n(n+r)(n+r) - C_{n-1} = 0 \quad (1)$$

نضع $n = 0$ في (1) نحصل على

$$\therefore C_0 r^2 - C_{-1} = 0$$

حيث إن $C_0 \neq 0$, $C_{-1} = 0$ اختيارية

\therefore وتكون المعادلة الدليلية

$$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0, 0$$

\therefore الجذران متساويان

من (1) ، نحصل على العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{1}{(n+r)^2} C_{n-1} \quad , n \geq 1$$

نوجد قيم C_1, C_2, C_3, \dots بدلالة r

$$\therefore C_1 = \frac{1}{(r+1)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{1}{(r+2)^2} C_1 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2} C_0$$

$$\therefore C_3 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2} C_0 \quad , \quad C_4 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2 (r+4)^2} C_0 \quad , \dots$$

وبافتراض أن $C_0 = 1$ ، يكون الحل الأول هو

$$y_1(x, r) = x^r \left[1 + \frac{1}{(r+1)^2} x + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2} x^2 + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} x^3 + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2} x^4 + \dots \right]$$

$$\therefore y_1 = y_1(x, r)|_{r=0} = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2(x, r) = \frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} = x^r \ln x \left[1 + \frac{1}{(r+1)^2} x + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2} x^2 + \dots \right]$$

$$+ x^r \left[\frac{-2}{(r+1)^3} x - 2 \left[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2} + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3} \right] x^2 - \right.$$

$$2 \left[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2} + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3} \right] x^3 \dots]$$

$$y_2(x, r) = y_1 \ln x - 2x^r \left[\frac{x}{(r+1)^2} \frac{1}{(r+1)} + \frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2} \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} \right) + \dots \right]$$

$$y_2 = y_2(x, r)|_{r=0} = y_1 \ln x - 2 \left[\frac{x}{(1!)^2} \frac{1}{1} + \frac{x^2}{(2!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^3}{(3!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right]$$

$$= y_1 \ln x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

أي أن

على ذلك فإن حل المعادلة يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A + B \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} - 2B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} H_n$$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} , \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان اختياريان ,}$$

ايجاد حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة القوى في حالة x كبيرة جداً

فيما سبق درسنا حل المعادلة التفاضلية

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

في حالة متسلسلة القوى بجوار $x = a$ ، ولتكن $x = 0$ أى لقيم محدود للمتغير x

وكانت $x = 0$ إما أن تكون نقطة عادية او نقطة مفردة منتظمة.

ماذا عن الحل إذا كانت $x = 0$ ، نقطة مفردة غير منتظمة ، نبحث عن الحل عندما

تكون x كبيرة جداً ، نفرض أن $w = \frac{1}{x}$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية إذا

كانت $w = 0$ نقطة عادية او مفردة منتظمة فإن x عند اللانهاية تكون نقطة عادية

او مفردة منتظمة وتحل المعادلة ، بالطرق السابقة ، حيث نلاحظ أن w صغيرة جداً ،

تعنى أن x كبيرة جداً ، ونقول إذا كانت $w = 0$ نقطة عادية (مفردة منتظمة)

للمعادلة المحولة من (1) فإن المعادلة (1) لها نقطة عادية (مفردة منتظمة) في

اللانهاية.

مثال (٧)

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية التي تحقق لقيم x الكبيرة جداً

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \quad (1)$$

الحل

حيث إن $x=0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)x}{x^2} = -\infty$$

أى أن $x=0$ نقطة شاذة غير منتظمة.

لايجاد الحلول بدلالة قيم x كبيرة جداً

نضع

$$w = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dw} \left[-w^2 \frac{dy}{dw} \right] \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \left[-w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - 2w \frac{dy}{dw} \right] = w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\therefore \frac{1}{w^2} \left[w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \right] + \left[\frac{3}{w} - 1 \right] \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) + y = 0$$

أو

$$w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - w(1-w) \frac{dy}{dw} + y = 0 \quad (2)$$

وعلى ذلك فإن $w=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (2)

وبالتالى فإن النقطة عند اللانهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1)

$$\therefore \text{نفترض أن } y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r} \text{ حلاً للمعادلة (2)}$$

بالتعويض فى (2) فنحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1)w^{n+r} - \sum C_n (n+r)w^{n+r} + \sum C_n (n+r)w^{n+r+1} + \sum C_n w^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات w^{n+r} بالصفر (أقل أس في المعادلة)

$$C_n (n+r)(n+r-1) - C_n (n+r) + C_n + C_{n-1} (n+r-1) = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 + C_{n-1} (n+r-1) = 0 \quad (3)$$

نضع $n=0$

$$\therefore C_0 (r-1)^2 + C_{-1} (r-1) = 0$$

وحيث $C_0 \neq 0$ ، $C_{-1} = 0$ اختيارية

$$(r-1)^2 = 0$$

\therefore تكون المعادلة الدليلية

$$\therefore r = 1, 1$$

من المعادلة (3)، تنتج العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{-1}{n+r-1} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-1}{r} C_0$$

$$C_2 = \frac{-1}{r+1} C_1 = \frac{(-1)^2}{r(r+1)} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{r+2} C_2 = \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)} C_0, \dots$$

بإختيار $C_0 = 1$ ومن ذلك، فإن

$$y_1(w, r) = w^r \left[1 - \frac{1}{r} w + \frac{(-1)^2}{r(r+1)} w^2 + \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)} w^3 + \dots \right]$$

$$y_1 = y_1(w, 1) = w \left[1 - w + \frac{(-1)^2 w^2}{2!} + \frac{(-1)^3 w^3}{3!} + \dots \right]$$

$$= w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^n$$

للحصول على الحل الثاني توجد :

$$\frac{\partial y_1(w, r)}{\partial r} = y_1(w, r) \ln w + w^r \left[\frac{1}{r^2} w - \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} \right) w^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{r(r+1)(r+2)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} \right) w^3 \dots \right]$$

$$\frac{\partial y_1(w, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} = y_1 \ln w + w \left[w - \frac{w^2}{2!} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{w^3}{3!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right].$$

$$\text{فإن } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

وباعتبار

$$y_2 = y_1 \ln w + w^2 \left[H_1 - \frac{w}{2!} H_2 + \frac{w^2}{3!} H_3 - \dots \right]$$

$$= y_1 \ln w + w^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^{n-1}}{n!} H_n$$

أي أن حل المعادلة (2) هو

$$y = (A + B \ln w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^{n+1} - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} H_n w^{n+1}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان اختياريان}$$

أي أن حل المعادلة (1) هو

$$y = \left[A + B \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n-1}}{n!} - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n x^{-n-1}}{n!}$$

مثال (٨)

$$4x^3y'' + 6x^2y' + y = 0$$

حل المعادلة

لقيم x الكبيرة جداً

الحل

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة ، وعلى ذلك فإن .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{4x^3} x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1(x-0)^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4x} = \infty$$

أي أن $x = 0$ نقطة شاذة غير منتظمة

لذلك نضع

$$x = \frac{1}{w} \text{ ومنها } w = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dw} \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \left(-w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - 2w \frac{dy}{dw} \right)$$

$$= w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\therefore \frac{4}{w^3} \left(w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \right) + \frac{6}{w^2} \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) + y = 0$$

$$4w \frac{d^2y}{dw^2} + 2 \frac{dy}{dw} + y = 0$$

وحيث نلاحظ أن $w = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r}, \quad C_n \neq 0$$

$$y' = \sum C_n (n+r) w^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-2}$$

$$\therefore 4 \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-1} + 2 \sum C_n (n+r) w^{n+r-1} + \sum C_n w^{n+r} = 0$$

$$\therefore C_n [4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)] + C_{n-1} = 0$$

$$C_n (n+r)(4n+4r-2) + C_{n-1} = 0$$

(1)

حيث $n=0$ بوضع ، $C_0 \neq 0$ ، $C_{-1} = 0$

$$C_0(r)(4r-2) = 0 \Rightarrow r=0, r=\frac{1}{2}$$

من العلاقة الرجعية (1) نحصل على

$$C_n = \frac{-1}{(n+r)(4n+4r-2)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وبالتعويض في العلاقة التكرارية

(i) $r=0$

$$C_n = \frac{-1}{n(4n-2)} C_{n-1} = \frac{-1}{2n(2n-1)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-1}{2 \cdot 1} C_0, \quad C_2 = \frac{-1}{3 \cdot 4} C_1 = \frac{(-1)^2}{4!} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{6 \cdot 5} C_2 = \frac{(-1)^3}{6 \cdot 5 \cdot 4!} C_0, \dots$$

ويكون الحل الأول هو

الباب الرابع

$$y_1(w, 0) = C_0 \left[1 - \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{4!} - \frac{w^3}{6!} + \dots \right]$$

$$(ii) r = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{-1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)(4n + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$= \frac{-1}{(2n+1)(2n)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-1}{2 \cdot 3} C_0, \quad C_2 = \frac{-1}{4 \cdot 5} C_1 = \frac{(-1)^2}{5!} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{6 \cdot 7} C_2 = \frac{(-1)^3}{7!} C_0$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = C_0 w^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots \right]$$

وبأخذ $C_0 = 1$ يكون حل المعادلة الأصلية هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= A \left[1 - \frac{x^{-1}}{2!} + \frac{x^{-2}}{4!} - \frac{x^{-3}}{6!} + \dots \right] + Bx^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x^{-1}}{3!} + \frac{x^{-2}}{5!} - \frac{x^{-3}}{7!} + \dots \right]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثال (٩)

إثبت أن $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$$

(1)

العل

$$(2) \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ومنها} \quad t = 1/x \quad \text{أى} \quad x = 1/t$$

وبذلك يكون

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$y'' = \left(-t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt}\right)(-t^2) = t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \quad (4)$$

وبذلك تول المعادلة (1) إلى

$$\frac{1}{t^2} \left[t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \right] + \frac{4}{t} \left[-t^2 \frac{dy}{dt} \right] + 2y = 0$$

أو

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (5)$$

وفيها نرى أن $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة وعلى ذلك فإن $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة.

مثال (١٠)

أوجد حل المعادلة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

في صورة متسلسلة القوى حول $x = \infty$

العل

لدينا

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad (1)$$

بوضع

الباب الرابع

$$x = \frac{1}{t} \quad \therefore t = \frac{1}{x}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = t^2 \left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right) \quad (4)$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$t^2(t^2 - 1) \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} + 6y = 0 \quad (5)$$

نرى أن $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟) ، وعلى ذلك نفترض أن حل

المعادلة (5) على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+r}, \quad C_0 \neq 0 \quad (6)$$

بالتعويض في المعادلة ومساواة معامل أقل قوى t بالصفر نحصل على العلاقة

التكرارية

$$(n+r-3)(n+r+2)C_n - (n+r-2)(n+r-1)C_{n-2} = 0$$

وبوضع $n = 0$ نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(r-3)(r+2) = 0$$

$$\therefore r = 3, \quad r = -2$$

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

من العلاقة التكرارية نجد أن

$$C_n = \frac{(n+r-2)(n+r-1)}{(n+r-3)(n+r+2)} C_{n-2}, \quad n \geq 2$$

من ذلك نرى أن

$$C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$$

$$C_2 = \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} C_0$$

$$C_4 = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+1)(r+4)(r+6)} C_0$$

$$= \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} C_0,$$

وهكذا، وبذلك يكون الحل على الصورة

$$y = t^r C_0 \left[1 + \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} t^2 + \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} t^4 + \dots \right] \quad (7)$$

بوضع $r = 3$ في (7)، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الأول

$$y_1 = t^3 \left[1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 + \dots \right]$$

وبوضع $r = -2$ في (7)، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الثاني

$$y_2 = t^{-2} \left[1 - \frac{t^2}{3} \right]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (5) هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= At^3 \left[1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 \right] + \frac{B}{t^2} \left[1 - \frac{t^2}{3} \right]$$

أى أن

$$y = \frac{A}{x^3} \left[1 + \frac{3.4}{2.7} \frac{1}{x^2} + \frac{3.5.6}{2.7.9} \frac{1}{x^4} \right] + Bx^2 \left(1 - \frac{1}{3x^2} \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

حوظة: قد تكون المعادلة التفاضلية في صورة معادلة أولير. ولذلك بعد التعويض
حل في شكل متسلسلة نجد أن قوى x في جميع الحدود متساوية والتي ينتج
ن $C_n = 0, n \geq 1$ و الطريقة تتضح في المثال الآتي:

(١١)

نخدم طريقة فروبنيوس لإيجاد الحل بالقرب من $x = 0$ للمعادلة التفاضلية
 $x^2 y'' - xy' + y = 0$

ن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك).

نرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore y' = \sum C_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة المغطاة نحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum C_n (n+r) x^{n+r} + \sum C_n x^{n+r} = 0$$

نلاحظ هنا أن قوى x متساوية. وبمساواة معامل أقل قوى للمتغير x بالصفري، نجد

أن

$$C_n [(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1] = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 = 0 \quad (1)$$

وبوضع $n=0$ في (1) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0 (r-1)^2 = 0, \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore r = 1, 1$$

الجذران متساويان. وبوضع $r = 1$ في (1) نجد أن

$$C_n n^2 = 0$$

والتي تؤدي إلى أن $C_n = 0$ لكل $n \geq 1$ وبالتالي يكون الحل على صورة

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^r [C_0 + 0] = x^r, \quad C_0 = 1$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = y(x, r)|_{r=1} = x$$

$$y_2 = \left. \frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \right|_{r=1} = x^r \ln x \quad r = 1 = x \ln x$$

ويكون الحل الثاني هو

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax + Bx \ln x$$

حيث B, A ثابتان اختياريان.

ملاحظات : يمكن استخدام العلاقة :

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}}{y_1^2} dx$$

في إيجاد الحل الثاني في هذه الحالة ولذلك ففي المثال السابق يكون

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-x}{x^2} ds}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln x$$

حيث $a_2(x) = -x^2$ ، $a_1(x) = -x$ هما ما يلي المعادلة التفاضلية

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + y = 0$$

٢ - عند استخدام طريقة فروبنيوس فإنه في بعض الأحيان يتطلب أن نوجد فترة التقارب للمتغير x التي تكون فيها المسلسلة اللانهائية تقاربيه . ولا اختبار تقارب المتسلسلة $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ نستخدم اختبار النسبة الذي ينص على

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}/u_n| < 1 \text{ تكون تقاربيه إذا كان } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

تمارين

(أ) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية في صورة متسلسلة قوى

لانهاية:

$$1) 2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0;$$

$$2) 2x(x+1)y'' + 3(x+1)y' - y = 0;$$

$$3) 4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0;$$

$$4) x^2y'' - x(x+1)y' + y = 0;$$

$$5) 4x^2y'' + (1-2x)y = 0;$$

$$6) xy'' + y' + xy = 0;$$

$$7) x^2y'' + 2x(x-2)y' + 2(2-3x)y = 0;$$

$$8) xy'' + (x-1)y' - y = 0;$$

$$9) xy'' - (3+x)y' + 2y = 0;$$

(ب) أوجد حل كل من المعادلات التالية التي تحقق في حالة x كبيرة جداً في

صورة متسلسلة لانهاية:

$$a) x^4y'' + x(1+2x^2)y' + 5y = 0;$$

$$b) 2x^2(x-1)y'' + x(5x-3) + (x+1)y = 0;$$

$$c) 4x^3y'' + 6xy' + y = 0;$$

(ج) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية في صورة متسلسلة لانهاية .

$$1) 4x^2y'' + 4xy' - y = 0 ;$$

$$2) 2x^2y'' + 11xy' + 4y = 0 ;$$

$$3) x^2y'' - 6xy' = 0 ;$$

$$4) x^2y'' + 2y = 0 ;$$

$$5) x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 ;$$

$$6) 4x^2y'' + 4xy' - y = 0 .$$

$$7) y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{16x^2} y$$

$$8) x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4} y \right) = 0$$

$$9) x^2 y'' - (x + 2) y = 0$$

$$10) (x - 1)^2 y'' - (x^2 - x) y' + y = 0 \quad \text{حول النقطة الشاذة المنتظمة } x_0 = 1$$

$$11) x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0$$

$$12) y'' - 2x^2 y' + 8y = 0, y(0) = 0, y''(0) = 1$$

الباب الخامس

معادلتة لجند والتفاضلية

Legendre Differential Equation

الباب الخامس

معادلة لجندر التفاضلية

Legendre Differential Equation

١ - المقدمة :

تسمى المعادلة على الصورة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية. والحل العام للمعادلة (1) يعطى بالعلاقة

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \quad \text{و} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

حيث $P_n(x)$ كثيرات حدود تسمى كثيرات حدود لجندر من النوع الأول

بينما $Q_n(x)$ تسمى دوال لجندر من النوع الثانى وهى غير محدودة عندما $x = \pm 1$

وهما حلان مستقلان للمعادلة (1)

ولحل المعادلة (1) فى صورة متسلسلة، نجد أن :

$x = 0$ نقطة عادية لذلك نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ويكون لدينا

$$\therefore y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}$$

بالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1) a_k x^k = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{k-2} بالصفر، نحصل على

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}(k-2)(k-3) - 2a_{k-2}(k-2) + n(n+1)a_{k-2} = 0$$

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}[(k-2)(k-1) - n(n+1)] = 0$$

$$\therefore a_k k(k-1) = -a_{k-2}[n^2 + n - (k-2)(k-1)]$$

العلاقة التكرارية

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)} a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

ومن هذه العلاقة، وباعتبار $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ إختياريتين يمكن حساب جميع

المعاملات بدلالة كل من a_0, a_1 .

(١) $a_0 \neq 0$ إختيارية

$$\therefore a_2 = -\frac{n(n+1)}{(2)(1)} a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{(4)(3)} a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{(6)(5)} a_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \dots$$

(٢) $a_1 \neq 0$ إختيارية

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{(3)(2)} a_1 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{(5)(4)} a_3 = \frac{(n-3)(n+1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

$$a_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{(7)(6)} a_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1, \dots$$

على ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y = a_0 \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} x^6 + \dots \right\} + a_1 \left\{ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} x^7 + \dots \right\}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

من الواضح إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن إحدى المتسلسلتين $y_1(x), y_2(x)$ سوف تنتهي (أي تكون محدودة) بمعنى أن تكون كثيرة حدود من درجة n ويرمز لها بالرمز $P_n(x)$ بينما المتسلسلة الأخرى تكون لانهائية ويرمز لها بالرمز $Q_n(x)$.

فإذا كانت n عدداً زوجياً، فإن $y_1(x) = P_n(x)$ وتكون $P_n(x)$ دالة كثيرة حدود زوجية بينما $y_2(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية

أما إذا كانت n عدداً فردياً فإن $y_1(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية بينما $y_2(x) = P_n(x)$ دالة كثيرة حدود فردية.

ويكون الحل العام

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

إذا كانت n عدداً صحيحاً.

وإذا اخترنا $a_0 = a_1 = 1$ بحيث يكون معامل x^n هو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

فإن

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

حيث $M = \frac{n}{2}$ إذا كان n عدداً زوجياً

$M = \frac{n-1}{2}$ إذا كان n عدداً فردياً.

٢ - صيغة رودريج: Rodrigue

يمكن التعبير عن كثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ بالصيغة التالية وتسمى صيغة رودريج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

الاثبات:

نفرض أن $z = (x^2 - 1)^n$

$$\therefore z' = n(x^2 - 1)^{n-1} (2x) \Rightarrow (x^2 - 1)z' = 2nxz \quad (1)$$

بتطبيق صيغة ليبنز وهي

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + n f^{(n-1)} \cdot g' + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)} \cdot g'' + \dots + f \cdot g^{(n)}.$$

بتفاضل طرفي (1) مرة نحصل على

$$(x^2 - 1)z^{(n+2)} + (n+1)(2x)z^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2!} 2z^{(n)} = 2n[xz^{(n+1)} + (n+1)z^{(n)}]$$

$$\therefore (x^2 - 1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n)} = 0$$

وبافتراض أن

$$y = \frac{d^n z}{dx^n} = z^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

أي أن y تحقق معادلة لجندر التفاضلية ، كما أن ky تكون حلاً أيضاً للمعادلة (1).

الآن نحاول إيجاد k .

$$k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = P_n(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

بمساواة معامل x^n في الطرفين نجد أن

$$k \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-n+1)n!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2^n n!}$$

وبالتالي فإن

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

٢ - الصور المختلفة لكثيرة حدود لجندر

بوضع $n = 0$ في صيغة رودريج نحصل على

$$1) P_0(x) = 1$$

بوضع $n = 1$ نجد أن

$$2) P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} (2x) = x$$

بوضع $n = 2$

$$3) P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} [4x^3 - 4x] = \frac{4}{8} (3x^2 - 1) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

بوضع $n = 3$

$$4) P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{48} \frac{d^2}{dx^2} [6x^5 - 12x^3 + 6x]$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} [5x^4 - 6x^2 + 1] = \frac{1}{8} (20x^3 - 12x)$$

$$\therefore P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

ويمكن إثبات أن

$$5) P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$6) P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

نلاحظ أن الدوال $P_0(x), P_2(x), P_4(x), \dots$ زوجية ، بينما الدوال $P_1(x), P_3(x), P_5(x), \dots$ فردية.

٤ - الدالة المولدة لكثيرات حدود لجنر $P_n(x)$: $P_n(x)$ Generating Function for

تكون الدالة المولدة لكثيرات حدود لجنر على الصورة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n$$

الإثبات:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = [1-2xh+h^2]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} h(2x-h) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!} h^2(2x-h)^2 + \dots$$

$$= 1 + xh + \frac{1}{2} (3x^2 - 1) h^2 + \dots$$

$$= P_0(x) + P_1(x)h + P_2(x)h^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n$$

٥ - الخواص الأساسية لكثيرات الحدود $P_n(x)$

$$1) P_n(1) = 1$$

الاثبات :-

نفرض $x = 1$ في الدالة المولدة

$$\therefore (1 - 2h + h^2)^{-1/2} = \sum P_n(1)h^n$$

$$\therefore (1 - h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n$$

لكن

$$\frac{1}{1-h} = (1-h)^{-1} = 1 + h + h^2 + h^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)h^n = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \quad \text{اي ان } P_n(1) = 1$$

$$2) P_n(-1) = (-1)^n$$

الاثبات :

نضع $x = -1$ في الدالة المولدة

$$\therefore (1 + 2h + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)h^n$$

$$\therefore (1 + h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)h^n$$

لكن

$$(1 + h)^{-1} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots + (-1)^n h^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)h^n$$

$$\therefore P_n(-1) = (-1)^n$$

وبالمثل نستطيع اثبات أن

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

وذلك بوضع $-x$ بدلاً من x في الدالة المولدة

n odd (فردية)

$n = 2m$ even (زوجية)

$$3) P_n(0) = \begin{cases} 0 \\ \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \end{cases}$$

الاثبات:

بوضع $x = 0$ في الدالة المولدة فنحصل على

$$\therefore (1+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n &= 1 + \frac{(-1)}{2}h^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}h^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}h^6 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^2 + (-1)^2 \frac{1.3}{2^2 2!}h^4 + (-1)^3 \frac{1.3.5}{2^3 3!}h^6 + \dots \end{aligned}$$

من الواضح إذا كانت n فردية فإن $P_n(0) = 0$ ، أما إذا كانت $n = 2m$

زوجية فإن

$$\begin{aligned} P_n(0) = P_{2m}(0) &= (-1)^m \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m m!} = (-1)^m \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m m!} \cdot \frac{2.4 \dots 2m}{2.4 \dots 2m} \\ &= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \end{aligned}$$

n odd (فردية)

$$\therefore P_n(0) = \begin{cases} 0 \\ \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \end{cases}$$

$n = 2m$ even (زوجية)

نظرية (1) :-

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1) f^{(n)}(x) dx$$

البرهان :-

من صيغة رودريج وبالتكامل بالتجزئ n من المرات .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} [f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

نتيجة :-

$$1) \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$2) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

وتسمى خاصة التعامد (orthogonality)

قبل إثبات هذه النتيجة سنحتاج إلى هذه التمهيدية

تمهيدية :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

البرهان :-

حيث إن

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \theta \sin^{2m-1} \theta d\theta$$

وعليه فإن

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta(\ell, s) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\ell-1} \theta \sin^{2s-1} \theta d\theta$$

$$2\ell = 2(n+1) \Rightarrow \ell = n+1, \quad 2s-1=0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta(n+1, 1/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{n!\Gamma(1/2)}{2(n+1/2)(n-1/2)\dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

برهان النتيجة (١)

من النظرية السابقة، بوضع

$$f(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$\therefore f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$$

حيث إن الدالة المكاملة زوجية

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

نفترض أن

$$x = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$$

$$x: 0 \rightarrow 1$$

$$\theta: 0 \rightarrow \pi/2$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta \\ &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

برهان النتيجة (٢)

باعتبار $m < n$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) dx = 0$$

باعتبار $n < m$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) dx = 0$$

مثال (١)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^1 x^4 P_2(x) dx$$

الحل

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 P_2(x) dx &= \frac{(-1)^2}{2^2 2!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 \frac{d^2}{dx^2} x^4 dx = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 12x^2 (x^2 - 1)^2 dx \\ &= 3 \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx = 3 \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= 3 \left[\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right] = \frac{87}{105} = \frac{29}{35} \end{aligned}$$

مثال (٢)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^1 x^4 P_3(x) dx$$

الحل

$$\int_{-1}^1 x^4 P_3(x) dx = 0$$

لماذا... ؟ لأن $P_3(x)$ دالة فردية

٢ - العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجنر Recurrence Relations Formulae

$$1) P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$$2) P_n(x) + 2x P_n'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

$$3) P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1) P_n(x)$$

$$4) x P_n'(x) = P_{n-1}'(x) + n P_n(x)$$

الاثبات :-

العلاقة الأولى :

حيث إن الدالة المولدة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$$

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى h فنحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2x+2h) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore (x-h)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = (1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)h^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2xnP_n(x)h^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n+1}$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين فنحصل على

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$\therefore P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

العلاقة الثانية :

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى x .

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n$$

$$\therefore h \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = (1-2xh+h^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xP_n'(x)h^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^{n+2}$$

بمساواة معامل h^{n+1} في الطرفين نحصل على

$$\therefore P_n(x) = P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x)$$

$$\therefore P_n(x) + 2xP_n'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

العلاقة الثالثة :

بتفاضل طرفي العلاقة (1) بالنسبة ل x فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}'(x) = \frac{2n+1}{n+1} [xP_n'(x) + P_n'(x)] - \frac{n}{n+1} P_{n-1}'(x)$$

من العلاقة الثانية والتعويض عن

$$xP_n'(x) = \frac{1}{2} [P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x)]$$

فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}'(x) = \frac{2n+1}{n+1} \left[\frac{1}{2} (P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x)) + P_n'(x) \right] - \frac{n}{n+1} P_{n-1}'(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x) = \frac{2n+1}{2(n+1)} P_{n+1}'(x) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P_{n-1}'(x) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P_n'(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}'(x)$$

وبالتالي فإن

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} P_{n+1}'(x) = \frac{1}{2(n+1)} P_{n-1}'(x) + \frac{2n+1}{2(n+1)} P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x) = P_{n-1}'(x) + (2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$$

العلاقة الرابعة

بجمع (2), (3) نحصل على

$$\therefore P_n(x) + 2xP_n'(x) + P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) + (2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore 2xP_n'(x) = 2P_{n-1}'(x) + 2nP_n(x)$$

$$\therefore xP_n'(x) = P_{n-1}'(x) + nP_n(x)$$

٧ - أمثلة :

مثال (١)

باستخدام العلاقات التكرارية، أوجد $P_2(x), P_3(x)$ ، مع العلم أن

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

الحل

من العلاقة (١) نرى أن

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} xP_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$$

نضع $n = 1$ فتحصل على

$$\therefore P_2 = \frac{3}{2} xP_1 - \frac{1}{2} P_0 = \frac{1}{2} \{3x^2 - 1\}$$

نضع $n = 2$ فتحصل على

$$P_3 = \frac{5}{3}xP_2 - \frac{2}{3}P_1 = \frac{5}{3}x \frac{1}{2}(3x^2 - 1) - \frac{2}{3}x$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x \\ &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

مثال (٢)

باستخدام العلاقات التكرارية لدالة لجنر أثبت أن :-

$$P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1$$

العل

من (3) نرى أن

$$P_{n+1}'(x) = (2n+1)P_n(x) + P_{n-1}'(x)$$

نضع $n = 5$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + P_4'$$

نضع $n = 3$ نحصل على

$$\therefore P_4' = 11P_3 + 7P_2'$$

نضع $n = 1$ نحصل على

$$\therefore P_2' = 11P_1 + 3P_0'$$

ولكن ، حيث

$$P_0' = 0 \text{ فإن } P_0 = 1$$

ملحوظة :-

يمكن إثبات أن :-

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \dots + 3P_1 \text{ في حالة } n \text{ زوجي}$$

أما في حالة n فردى

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \dots + 5P_2 + 1$$

مثال (٣)

أوجد قيمة

$$\int_0^1 P_n(x) dx$$

العل

من العلاقة

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

ليكون

$$\therefore \int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\}_0^1$$

وحيث نعلم ان $P_n(1) = 1$ فإن

$$\therefore \int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]$$

من الواضح إذا كانت n عدداً زوجياً فإن $\int_0^1 P_n(x) dx = 0$ لكن إذا كانت عدداً

فردياً فإن

$$\int_0^1 P_n(x) dx \neq 0$$

مثال (٤)

إثبت أن

$$\int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx = \frac{2n}{4n^2 - 1}$$

الحل

من العلاقة

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

نجد أن

$$\therefore x P_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x).$$

بالتعويض في الدالة المكاملة

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(x) \right] dx$$

ومن خاصية التعامد نرى أن

$$I = \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx = \frac{n}{(2n+1)[2(n-1)+1]} = \frac{2n}{4n^2 - 1}$$

مثال (٥)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx$$

الحل

نعلم أن

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

أي أن

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \right] P_n(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P_2(x) P_n(x) dx + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 2, n \neq 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} & , n = 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} & n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال (٦)

عبر عن الدالة $F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ بدلالة كثيرات حدود لجنر

العل

نعلم أن

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \quad \text{وعلى ذلك فإن :}$$

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \quad \text{وعلى ذلك فإن :}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 3P_1(x) + P_0(x) \\ &= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{18}{5}P_1(x) + \frac{5}{3}P_0(x) \end{aligned}$$

نظرية (٢) : - إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة n فإن

$$f(x) = \sum_{r=0}^n c_r P_r(x)$$

$$c_r = (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x) P_r(x) dx$$

حيث

مثال (٧)

فك $f(x) = x^2$ في متسلسلة على الصورة $\sum c_r P_r(x)$

الحل

حيث أن $f(x) = x^2$ كثيرة حدود من درجة 2 ومن متسلسلة ليجنر

$$x^2 = \sum_{r=0}^2 c_r P_r(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) \quad (1)$$

حيث

$$c_r = (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 x^2 P_r(x) dx \quad (2)$$

ولكن

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (3)$$

بوضع $r = 0, 1, 2$ في (2) وباستخدام (3) فيكون لدينا

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 (3x^2 - 1) dx = \frac{5}{4} \left[3 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$x^2 = \frac{1}{2}p_0(x) + \frac{2}{3}p_2(x)$$

مثال (8)

فك $x^4 - 3x^2 + x$ في متسلسلة على الصورة $\sum c_r p_r(x)$

الحل

كما في المثال السابق نحصل على

$$x^4 - 3x^2 + x = \frac{-4}{5}p_0(x) + p_1(x) - \frac{10}{7}p_2(x) + \frac{8}{35}p_4(x).$$

مثال (9)

فك $f(x)$ في الصورة $\sum_{r=0}^{\infty} c_r p_r(x)$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -1 < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

الحل

نفترض أن

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r p_r(x) \quad (2)$$

حيث

$$\begin{aligned} c_r &= (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x) p_r(x) dx \\ &= \frac{2r+1}{2} \left[\int_{-1}^0 f(x) p_r(x) dx + \int_0^1 f(x) p_r(x) dx \right] \\ &= \frac{2r+1}{2} \int_0^1 p_r(x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

بوضع $r = 0, 1, 2, \dots$ في (3) نحصل على

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 p_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 p_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 p_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{2} dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_0^1 p_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{5x^3 - 3x}{2} dx = -\frac{7}{16}$$

وهكذا وبتعويض هذه القيم في (2) نحصل على

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) - \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \dots$$

تمارين

$$(1) \text{ إذا كان } -1 < x < 1 \text{ و } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$$

فأثبت أن

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx$$

(2) أوجد مفكوك

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

في متسلسلة على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

وأكتب الحدود الأربعة الأولى غير الصفرية في هذا المفكوك.

(3) أثبت إن

$$(i) \int_{-1}^1 x P_n^2(x) dx = 0$$

$$(ii) \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx = 0$$

$$(iii) \int_{-1}^1 x P_n(x) dx = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

(4) أثبت إن

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{\sqrt{(1/2)} \sqrt{(n+1)}}{2^n \sqrt{(n+3/2)}}$$

$$= \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{2n+1} \end{cases}$$

(٥) برهن خاصيته التعامد

$$m = n$$

$$m \neq n$$

وذلك باستخدام أن كل من $P_n(x)$, $P_m(x)$ حل لمعادلة لجندر التفاضلية .

الباب السادس

معادلتا بيسل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

الباب السادس

معادلة بسل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

١ - مقدمة

نكون معادلة بسل التفاضلية التفاضلية على الصورة

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

حيث n مقدار ثابت.

ولإيجاد حل المعادلة في صورة متسلسلة لانهاية حيث $x = 0$ نقطة شاذة وأن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x x'}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} x^2 = -n^2$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة لذلك نستخدم طريقة فروبنيوس.

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum a_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum a_k (k+r)x^{k+r} + \sum a_k x^{k+r+2} - \sum a_k n^2 x^{k+r} = 0$$

بمساواة معامل x^{k+r} بالصفر فنجد أن

$$\therefore a_k (k+r)(k+r-1) + a_k (k+r) + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

$$a_k [(k+r)^2 - n^2] = -a_{k-2} \quad (1)$$

بوضع $k = 0$ في (1) فإن المعادلة الدليلية فنحصل على

$$r^2 - n^2 = 0, \quad a_{-2} = 0, \quad a_0 \neq 0;$$

$$\therefore r = n, -n.$$

أى أن الجذرين حقيقيان و الفرق بينهما $2n$.

حيث أن الفرق بين الجذرين عدداً كسرياً أو عدداً صحيحاً موجباً. ويساوي $2n$ من (1) نرى أن

$$a_k = \frac{-1}{(k+r)^2 - n^2} a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

من هذه العلاقة نحصل على

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1}{(r+2)^2 - n^2} a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{(r+4)^2 - n^2} a_2 = \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} a_0, \dots$$

ويكون الحل هو

$$\therefore y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

فتحصل على

$$= a_0 x^r \left[1 - \frac{1}{(r+2)^2 - n^2} x^2 + \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} x^4 + \dots \right]$$

بوضع $r = n$

أي أن

$$\therefore y = a_0 x^n \left[1 - \frac{1}{2^2(n+1)} x^2 + \frac{(-1)^2}{2^4(n+2)(n+1)2!} x^4 + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{(-1)^k}{2^{2k}(n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)k!} x^{2k} + \dots \right]$$

$$= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

بإختيار

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

ويكون الحل على الصورة $J_n(x)$ ، حيث

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1) \cdot k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

وتسمى دالة بيسل من النوع الأول،

وإذا وضعنا $r = -n$ نحصل على الحل

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1) \cdot k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

ويكون الحل العام

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

حيث n عدد غير صحيح ، A, B ثابتان اختياريان

مثال (١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجب، فأثبت أن

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل

نعلم من التعريف أن

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1) \cdot k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

بوضع $-n+k=r$ أي $k=n+r$ فنحصل على

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(r+1) \cdot (n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2n+2r}$$

$$= \sum_{r=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(n+r+1) \cdot \Gamma(r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$\Gamma(-n+1) = \infty, \quad -n+1 \leq 0 \Rightarrow \Gamma(r+1) = \infty, \quad -n \leq r \leq -1$$

$$\therefore J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1) \cdot r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} = (-1)^n J_n(x).$$

مثال (٢)

إذا علم أن

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

فأثبت أن

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x), \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$$

العل

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

حيث أن

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

فإن

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1} (2k)(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{k!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!}{k!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
 \therefore J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).
 \end{aligned}$$

وبالمثل $-\frac{1}{2} + 2k$

$$\begin{aligned}
 J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(\frac{-1}{2} + k + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\
 &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum \frac{(-1)^k}{k!(k-1/2)(k-3/2)\dots 3/2 \cdot 1/2 \cdot \Gamma(1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^2}{k!(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^k (2k)(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{k!(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k} k!}{k!(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)
 \end{aligned}$$

مثال (٢)

أثبت أن

$$J_{\frac{1}{2}}^2(x) + J_{-\frac{1}{2}}^2(x) = \frac{2}{\pi x}$$

العل

باستخدام المثال السابق نجد أن

$$J_{\frac{1}{2}}^2(x) + J_{-\frac{1}{2}}^2(x) = \frac{2}{\pi x} \sin^2(x) + \frac{2}{\pi x} \cos^2(x) = \frac{2}{\pi x} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \frac{2}{\pi x}$$

٢ - الدالة المولدة لدوال بسل $J_n(x)$ Generating Function for $J_n(x)$

تسمى الدالة

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

بالدلة المولدة لدوال بسل، حيث n عدد صحيح، ونستطيع استنتاج بعض العلاقات

التكرارية لدوال بسل كما يلي :

٣ - العلاقات التكرارية لدوال بسل $J_n(x)$ Recurrence Relations for $J_n(x)$

$$1) J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$2) J_n'(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

$$3) \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(n)$$

$$4) \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

الإثبات:

(١) بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى t

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

بمساواة معامل t^{n-1} فى الطرفين نحصل على

$$\therefore \frac{x}{2} J_{n-1}(x) + \frac{x}{2} J_{n+1}(x) = n J_n(x)$$

$$\therefore J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad \text{i}$$

(٢) بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى x فنجد أن

$$\therefore \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum J_n'(x) t^n$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \sum J_n(x) t^n = \sum J_n'(x) t^n$$

بمساواة معامل t^n فى الطرفين فنحصل على

$$J_n'(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad \text{ii}$$

(٣) من العلاقة (ii) ، فإن

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - 2J_n'(x) \quad \text{(I)}$$

ب طرح (I) من العلاقة (i) نجد أن فنحصل على

$$\therefore 0 = \frac{2n}{x} J_n(x) - 2J_{n-1}(x) + 2J_n'(x)$$

$$\therefore nJ_n(x) + xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x)$$

بضرب طرفى المعادلة فى x^{n-1} فنجد أن

$$\therefore nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

أى أن

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

iii

(٤) بجمع العلاقتين (I) و (i) فنحصل على

$$\therefore 2J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - 2J_n'(x)$$

$$\therefore xJ_n'(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x)$$

بضرب طرفى المعادلة فى x^{-n-1} فنحصل على

$$\therefore x^{-n} J_n'(x) - nx^{-n-1} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

ملحوظة: يمكن إثبات العلاقتين (iii) ، (iv) دون إستخدام العلاقتين (i) ، (ii).

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

حيث أن

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} x^{2n+2k}$$

فإن

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \left(\frac{x^n}{2}\right)$$

وحيث أن

$$\Gamma(n+k+1) = (n+k)\Gamma(n+k) = (n+k)\Gamma(n-1+k+1) \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n-1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k}$$

فإن

$$= x^n J_{n-1}(x).$$

كذلك بالمثل نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} x^{2k-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k}$$

بوضع $k-1=r$ أي $k=r+1$ فنحصل على

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] &= x^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+1+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2r} \\ &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

أمثله :

مثال (١)

أثبت أن

$$1) J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

$$2) J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x} \right)$$

العل

من العلاقة (1)

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

بوضع $n = \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

ولدينا من المثال (٢)

$$\therefore J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

فإن

$$\begin{aligned} \therefore J_{3/2}(x) &= \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right) \end{aligned}$$

بوضع $n = -\frac{1}{2}$ في العلاقة (1) فنحصل على

$$J_{1/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{-3/2}(x).$$

$$\begin{aligned} J_{-3/2}(x) &= -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{x} \right) \end{aligned}$$

مثال (٢)

أثبت أن

$$1) \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C$$

$$2) \int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) + C$$

الأثبات: من العلاقة (3)

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C$$

كما أن من العلاقة (4)

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^n J_{n+1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) + C$$

مثال (٣)

أوجد قيمة

$$\int x^4 J_1(x) dx$$

الحل

$$\int x^4 J_1(x) dx = \int x^2 (x^2 J_1(x) dx)$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = x^2 \quad dv = x^2 J_1(x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = x^2 J_2(x).$$

$$\therefore I = x^4 J_2(x) - 2 \int x^3 J_2(x) dx$$

$$= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C.$$

مثال (٤)

أثبت أن

$$(i) J_0' = -J_1 \quad , \quad (ii) J_2 - J_0 = 2J_0''$$

الاثبات

(i) من العلاقة التكرارية

$$xJ'_n = -nJ_n - xJ_{n+1}$$

بوضع $n = 0$ نحصل على

$$xJ'_0 = -xJ_1 \Rightarrow J'_0 = -J_1 \quad (2)$$

(ii) من العلاقة التكرارية

$$2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$$

بالتفاضل نحصل على

$$2J''_n = J'_{n-1} - J'_{n+1} \quad (3)$$

بوضع $n-1, n-1$ بدلاً من n نحصل على

$$2J'_{n-1} = J_{n-2} - J_n \quad (4)$$

$$2J'_{n+1} = J_n - J_{n+2} \quad (5)$$

بالتعويض من (4)، (5) في (3) نحصل على

$$2J''_n = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})$$

$$4J''_n = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2} \quad (6)$$

بوضع $n = 0$ في (6) نحصل على

$$4J''_0 = J_{-2} - 2J_0 + J_2$$

$$= (-1)^2 J_2 - 2J_0 + J_2$$

$$4J''_0 = 2(J_2 - J_0) \Rightarrow 2J''_0 = J_2 - J_0$$

مثال (5)

أستخدم العلاقة التكرارية

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

في التعبير عن J_4 بدلالة J_0, J_1 .

العل

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

حيث أن

بوضع $n = 3$ نحصل على

$$J_4 = \frac{6}{x} J_3 - J_2$$

بوضع $n = 2$ نحصل على

$$J_3 = \frac{4}{x} J_2 - J_1$$

$$\begin{aligned} \therefore J_4 &= \frac{6}{x} \left[\frac{4}{x} J_2 - J_1 \right] - J_2 \\ &= \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) J_2 - \frac{6}{x} J_1 \end{aligned}$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$

$$\begin{aligned} \therefore J_4 &= \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{2}{x} J_1 - J_0 \right) - \frac{6}{x} J_1 \\ &= \left(\frac{48}{x^2} - \frac{8}{x} \right) J_1 - \left(\frac{24}{x^2} - 1 \right) J_0 \end{aligned}$$

مثال (٦)

باستخدام

$$(i) \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}$$

$$(ii) \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n+1}$$

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(J_n^2 + J_{n+1}^2) = 2\left(\frac{n}{x}J_n^2 - \frac{n+1}{x}J_{n+1}^2\right)$$

العل

من (i) ; (ii) نحصل على

$$J_n' = \frac{-n}{x}J_n + J_{n-1} \quad (1)$$

$$J_n' = \frac{n}{x}J_n - J_{n+1} \quad (2)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (1) نحصل على

$$J_{n+1}' = \frac{-(n+1)}{x}J_{n+1} + J_n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx}[J_n^2 + J_{n+1}^2] &= 2J_n J_n' + 2J_{n+1} J_{n+1}' \\ &= 2J_n \left[\frac{n}{x}J_n - J_{n+1}\right] + 2J_{n+1} \left[-\frac{n+1}{x}J_{n+1} + J_n\right] \\ &= 2\left(\frac{n}{x}J_n^2 - \frac{n+1}{x}J_{n+1}^2\right) \end{aligned}$$

مثال (٧)

باستخدام المعطيات (ii) , (i) في المثال السابق أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[xJ_n J_{n-1}] = x[J_n^2 - J_{n+1}^2]$$

العل

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xJ_n J_{n+1}] &= J_n J_{n+1} + x(J_n' J_{n+1} + J_n J_{n+1}') \\ &= J_n J_{n+1} + J_{n+1}(xJ_n') + J_0(xJ_{n+1}') \end{aligned} \quad (1)$$

ومن العلاقتين (i) ، (ii) نجد أن

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} \quad (2)$$

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1} \quad (3)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (3) نحصل على

$$xJ_{n+1}' = -(n+1)J_{n+1} + xJ_n \quad (4)$$

باستخدام xJ_{n+1}' ، xJ_n' من (2) ، (4) في (1) نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xJ_n J_{n+1}] &= J_n J_{n+1} + J_{n+1}(nJ_n - xJ_{n+1}) + J_n(-nJ_n + xJ_{n+1}) \\ &= x[J_n^2 - J_{n+1}^2]. \end{aligned}$$

مثال (٨)

إذا كان $n > -1$ أثبت أن

$$\int_0^x x^{n+1} J_n(x) dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

الحل

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (1)$$

حيث أن

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} J_{n+1}(x)) = x^{n+1} J_n(x) \quad (2)$$

بالتكامل من صفر إلى x نحصل على

$$\int x^{n+1} J_n(x) dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

مثال (٩)

أثبت أن

$$(i) \frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$$

$$(ii) \int_0^b xJ_0(ax) dx = \frac{b}{a} J_1(ab)$$

العل :

حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (1)$$

بوضع $n=1$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}(xJ_1) = xJ_0$$

بوضع $ax = t$ أي $adx = dt$ فنجد أن

$$\int_a^b xJ_0(ax) dx = \frac{1}{a^2} \int_a^{ab} tJ_0(t) dt$$

وباستخدام الجزء (1) نحصل على

$$\int_a^b xJ_0(ax) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{ab} \frac{d}{dt}(tJ_1) dt = \frac{1}{a^2} [tJ_1]_0^{ab} = \frac{1}{a^2} (abJ_1(ab) - 0)$$

$$\therefore \int_0^b xJ_0(ax) dx = \frac{b}{a} J_1(ab)$$

وحيث $J_1(0) = 0$

مثال (١٠)

أثبت أن

$$(i) \frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x)$$

$$(ii) \int_a^b J_0 J_1 dx = \frac{1}{2} [J_0^2(a) - J_0^2(b)]$$

العل

الجزء (i) : حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^n J_{n+1}(x) \quad (1)$$

بوضع $n = 0$

$$\frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x) \quad (2)$$

الجزء (ii) باستخدام مثال (٧) نحصل على

$$\int_a^b J_0(x) J_1(x) dx = - \int_a^b J_0(x) J_0'(x) dx = \left[\frac{J_0^2(x)}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} [J_0^2(b) - J_0^2(a)]$$

مثال (١١) :

عبر عن $\int J_3(x) dx$ بدلالة $J_1(x), J_2(x)$.

العل

بإستخدام العلاقة

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}$$

بالتكامل نحصل على

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) \quad (1)$$

$$\int J_3(x) dx = \int x^2 (x^{-2} J_3(x)) dx = x^2 (-x^{-2} J_2(x)) - \int 2x (-x^2 J_2(x)) dx$$

بالتكامل بالتجزئ و باستخدام (1) ، $n = 2$ نحصل على

$$\int J_3(x) dx = -J_2(x) + \int x^{-1} J_2(x) dx = -J_2(x) + 2(-x^{-1} J_1(x)) + C$$

ومن العلاقة التكرارية

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (3)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$\frac{2}{x} J_1(x) = J_0(x) + J_2(x)$$

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x) \quad (4)$$

باستخدام (4) في (2) فنجد أن

$$\begin{aligned} \int J_3(x) dx &= -\left(\frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)\right) - 2\frac{J_2(x)}{x} + C \\ &= J_0(x) - \frac{4J_1(x)}{x} + C \end{aligned}$$

حيث C ثابت إختياري

مثال (١٢) :

أثبت أن

$$a) \cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\theta + 2J_4(x) \cos 4\theta + \dots$$

$$b) \sin(x \sin \theta) = 2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin 3\theta + 2J_5(x) \sin 5\theta + \dots$$

الحل

نفرض أن $t = e^{i\theta}$ وبالتعويض في الدالة المولدة نحصل على

$$e^{\frac{1}{2}x(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) = \{J_0(x) + [J_{-1}(x) + J_1(x)] \cos \theta + [J_{-2}(x) + J_2(x)] \cos 2\theta + \dots\} \\ + i \{[J_1(x) - J_{-1}(x)] \sin \theta + [J_2(x) - J_{-2}(x)] \sin 2\theta + \dots\}$$

وحيث أن $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ فنحصل على

$$\cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) = \{J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\theta + \dots\} \\ + i \{2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin 3\theta + \dots\}$$

وبمساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي ينتج المطلوب.

تمارين

(١) أوجد قيمة كل من

i) $J_{5/2}(x)$ ii) $J_{-5/2}(x)$

بدلالة دالتى الجيب وجيب التمام.

(٢) أوجد قيمة $J_3(x)$ بدلالة $J_0(x), J_1(x)$.

(٣) أثبت أن

i) $J_n''(x) = \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) - J_n(x) + J_{n+2}(x)]$

ii) $J_n'''(x) = \frac{1}{8}[J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)]$

باستخدام العلاقات التكرارية، ثم عمم تلك النتائج.

(٤) أوجد قيمة كلا من

i) $\int x^3 J_2(x) dx$,

ii) $\int_0^1 x^3 J_0(x) dx$,

iii) $\int x^2 J_0(x) dx$.

(٥) أثبت أن

i) $J_0'(x) = -J_1(x)$,

ii) $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$.

(٦) باستخدام العلاقة

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

أثبت أن

$$(i) 1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots$$

$$(ii) J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \dots = \sin x$$

(٧) أثبت أن

$$x = 2 J_0 J_1 + 6 J_1 J_2 + \dots + 2(2n + 1) J_n J_{n+1} + \dots$$

[تنويه : استخدم المثل (١٠)]

(٨) أثبت أن

$$(i) J_0' = J_1$$

$$(ii) J_2 - J_0 = 2 J_0''$$

$$(iii) J_2 = J_0' - \left(\frac{1}{x}\right) J_0$$

$$(iv) J_2 + 3J_0' + 4J_0''' = \infty$$

(٩) عبر عن $J_4(x)$ بدلالة J_0, J_1

(١٠) أثبت أن

$$\int_0^x t \cdot J_n^2(t) dt = \frac{1}{2} x^2 [J_n^2(x) - J_{n-1}(x) J_{n+1}(x)]$$

مستخدماً العلاقات التكرارية

الباب السابع

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

الباب السابع

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تفاضلية تحوي مشتقه جزئية أو أكثر وهي بذلك تتضمن على متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل ومشتقات المتغير التابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة أي إنها على الصورة

$$f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}, \dots) = 0$$

حيث z هنا المتغير التابع ، x, y متغيران مستقلان ، ونلاحظ هنا أن

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ونود ان نلفت الانتباه اننا سوف نستخدم الرموز الآتية في دراستنا

$$z_x = p, z_y = q, z_{xx} = r, z_{xy} = s, z_{yy} = t.$$

ومن أمثلة المعادلات التفاضلية الجزئية:

$$z_{xy} + 2z_x + 3z_y + 5z = 2x + \cos(x - y)$$

$$z_x + 3z_y = 5z + \tan(3x - 2y)$$

$$z_{xx} + z_{yy} = x^2 y^2$$

٢ - أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى تصنيفات مختلفة ، وهذا التصنيف له مفهوم هام لأن النظرية العامة وطرق الحل تطبق فقط على كل معادلة مصنفة والتصنيفات الأساسية هي :

(١) رتبة المعادلة التفاضلية (Order) :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة

أمثلة

$$\text{من الرتبة الثانية} \quad z_t = z_{xx}$$

$$\text{من الرتبة الاولى} \quad z_t = z_x$$

$$\text{من الرتبة الثالثة} \quad z_t = z_{xxx} + \sin x$$

(٢) عدد المتغيرات :

هو عدد المتغيرات المستقلة فمثلا

$$\text{متغيران هما } x, t \quad z_t = z_{xx}$$

$$\text{المتغيرات هي } r, t, \theta \quad u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_{\theta\theta}$$

(٣) الخطية :

قد تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية أو غير خطية. ففي المعادلات التفاضلية الخطية يكون المتغير التابع u (مثلا) وكل مشتقاته الجزئية تظهر في الصورة الخطية (أي إنها غير مضروبة في بعضها أو مرفوعة لأس خلاف الواحد الصحيح).

وبإيجاز فإن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

في متغيرين لها الصورة الآتية:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G إما أن تكون ثوابت أو دوال متصلة في المتغيرين x, y

فمثلا

$$\text{خطية} \quad u_{tt} = e^{-t} u_{xx} + \sin t$$

$$\text{غير خطية} \quad uu_{xx} + u_t = 0$$

$$\text{غير خطية} \quad uu_x + yu_y + u^2 = 0$$

$$\text{خطية} \quad u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

٤) التجانس:

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة إذا كانت $G(x, y) = 0$ ، وتسمى غير

متجانسة إذا كانت $G(x, y) \neq 0$.

٥) أنواع المعاملات:

إذا كانت المعاملات A, B, C, D, E, F, G في المعادلة (1) ثوابت فإن المعادلة

(1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات ثابتة وأما إذا كان واحد من

المعاملات أو أكثر دالة في x أو y أو كلاهما فإنها تكون ذات معاملات متغيرة.

٦) الأنواع الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية:

المعادلات التفاضلية الخطية التي على الصورة (1) لها ثلاثة أنواع:

أولا: النوع المكافئ Parabolic إذا كانت

$$B^2 - 4AC = 0$$

ثانياً: النوع التزايدى Hyperbolic إذا كانت

$$B^2 - 4AC > 0$$

ثالثاً: النوع التناقصى Elliptic إذا كانت

$$B^2 - 4AC < 0$$

ومن أمثلة ذلك

(i) $u_t = u_{xx}$

نجد أن $C = 0, A = 1, B = 0$

$$\therefore B^2 - 4AC = 0$$

أي أنها Parabolic

(ii) $u_{tt} = u_{xx}$

نجد أن $B = 0, A = -C = 1$

$$\therefore B^2 - 4AC = 4 > 0$$

أي أنها Hyperbolic

(iii) $u_{xy} = 0$

نجد أن $B = 1, A = C = 0$

$$\therefore B^2 - 4AC = 1 > 0$$

أي أنها Hyperbolic

(iv) $\alpha u_{xx} + u_{yy} = 0$

نجد أن $C = 1, A = \alpha, B = 0$

$$\therefore B^2 - 4AC = -4\alpha$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الباب السابع

فتكون من النوع الناقصي إذا كان $\alpha > 0$ ومن النوع المكافئ إذا كان $\alpha = 0$ ومن النوع الزائدي إذا كان $\alpha < 0$

ويجب ملاحظة أنه في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات المتغيرة فإن نوع المعادلة قد يتغير من نقطة إلى أخرى.

تمرين:

أكتب التصنيف الكامل للمعادلات التفاضلية الجزئية الآتية:

(i) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$

(ii) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

(iii) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$

(iv) $u_{tt} = uu_{xxx} + e^{-t}$

الآن: ماذا نعني بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) ؟

نعني بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) هو دالة حقيقية g حيث $z = g(x, y)$ معرفة على المجموعة S للمناطق في المستوى xy وتحقق المعادلة (1).

مثال (1)

إثبت أن $u = x^2 - y^2$ حل للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

الحل

$u_x = 2x$, $u_{xx} = 2$, $u_y = -2y$, $u_{yy} = -2$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

ونطاق u هو كل المستوى xy .

تمرين: إثبت أن $u = \ln(x^2 + y^2)$ حل للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية

$$z_x = 2xy$$

حيث $z = f(x, y)$

العل

نكامل بالنسبة إلى x (باعتبار y ثابت) فنحصل على الحل

$$z = x^2 y + \phi(y)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية في y (الدالة الاختيارية $\phi(y)$ هنا بدلا من ثابت التكامل

$$\text{لأن } \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

ملاحظة: حلول المعادلات التفاضلية الجزئية تحتوى على دوال اختيارية بينما حلول المعادلات التفاضلية العادية تحتوى على ثوابت اختيارية.

تمرين:

حل المعادلة $z_{yx} = 0$ حيث $z = f(x, y)$

نظرية: إذا كان $u_1 = u_1(x, y)$ ، $u_2 = u_2(x, y)$ حلين لمعادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة في المنطقة R من المستوى xy فإن أى تركيبة خطية على الصورة $u(x, y) = c_1 u_1 + c_2 u_2$ هي حل أيضاً لتلك المعادلة حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

٣ - تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية

تتكون المعادلة التفاضلية الجزئية إما

(١) بحذف الثوابت الإختيارية أو

(٢) بحذف الدوال الإختيارية

أولاً: حذف الثوابت الإختيارية

مثال (٣)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax + (1-a)y + b$$

الحل

$$z_x = a = p, \quad z_y = 1-a = q$$

$$\therefore p + q = 1$$

$$z_x + z_y = 1$$

أي أن

مثال (٤)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2, \quad ab > 0$$

الحل

$$z_x = 2ax, \quad z_y = 2by$$

$$\therefore z = \frac{z_x}{2x} x^2 + \frac{z_y}{2y} y^2$$

$$xz_x + yz_y = 2z$$

أي أن

مثال (٥)

إحذف الثوابت a, b من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2 + ab$$

الحل

$$z_x = 2ax \rightarrow a = \frac{p}{2x}$$

$$z_y = 2by \rightarrow b = \frac{q}{2y}$$

$$\therefore z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{pq}{4xy}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2yx^2p + 2xy^2q &= 4xyz \\ yx^2p + xy^2q &= 2xyz \end{aligned}$$

أي أن

مثال (٦)

احذف a من المعادلة

$$z = a(x + y)$$

الحل

$$z_x = a = p \rightarrow z = p(x + y)$$

أو

$$z_y = a = q \rightarrow z = q(x + y).$$

ملاحظة: إذا كان عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة فإن رتبة المعادلة (أو المعادلات) التفاضلية الجزئية الناتجة أعلى من الرتبة الأولى كما يتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٧)

احذف الثوابت c, b, a من المعادلة

$$z = ax + by + cxy$$

الحل

$$z_x = p = a + cy, \quad z_y = q = b + cx$$

ولكن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت وبذلك نشق p بالنسبة إلى x ، فنحصل على معادلة من الرتبة الثانية

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ويمكن اشتقاق q بالنسبة إلى y لنحصل على

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

أيضاً يمكن اشتقاق p بالنسبة إلى y أو q بالنسبة إلى x لنحصل على

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = c$$

وعليه يكون

$$b = q - xs, \quad a = p - ys$$

وبالتعويض عن a, b, c في المعادلة المفروضة نجد أن

$$\begin{aligned} z &= (p - sy)x + (q - sx)y + xys \\ &= xp + yq - xys \end{aligned}$$

وعليه يكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية وهي

$$r = 0, \quad t = 0, \quad z = xp + yq - xys$$

وهي معادلات من الرتبة الثانية .

مثال (٨)

احذف b, a من المعادلة

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b)$$

الحل

$$z_x = p = 2x(y^2 + b), \quad z_y = q = 2y(x^2 + a)$$

$$y^2 + b = p/2x, \quad (x^2 + a^2) = q/2y$$

أي أن

$$\therefore z = \frac{pq}{4x} \quad \text{i.e.} : pq = 4xyz$$

مثال (٩)

أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة كرات نصف قطرها 5 وحدة طول ومركزها في

المستوى $x = y$.

الحل

معادلة مجموعة الكرات

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - b)^2 = 25$$

حيث a, b ثوابت إختيارية بالإشتقاق جزئياً بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نجد أن

$$x - a + (z - b)p = 0 \rightarrow x - a = mp$$

$$y - a + (z - b)q = 0 \rightarrow y - a = mq$$

$$\text{حيث } -m = z - b$$

بالتعويض نجد أن

$$m^2(p^2 + q^2 + 1) = 25$$

ولكن

$$x - y = m(p - q)$$

وبالتعويض عن m نجد إن

$$(x - y)^2(p^2 + q^2 + 1) = 25(p - q)^2$$

مثال (١٠)

برهن أن المعادلة التفاضلية الجزئية الناتجة من حذف الثوابت a, b من المعادلة

$$z = ax + by + f(a, b)$$

هي معادلة كليرو الموسعة.

الحل

$$p = z_x = a, \quad q = z_y = b$$

وعليه يكون

$$z = px + qy + f(p, q)$$

وهي معادلة كليرو الموسعة.

ثانياً: حذف الدوال الإختيارية

مثال (١١)

إحذف الدالة الإختيارية في المعادلة

$$z = f(x - y)$$

العل

نضع $z = f(u)$ ، أي أن $x - y = u$ فإن

$$\therefore z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} = p$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df}{du} = q$$

$$\therefore p + q = 0$$

$$z_x + z_y = 0 \text{ أو}$$

مثال (١٢)

إذا كانت معادله أي مخروط رأسه (x_0, y_0, z_0) تكون على الصورة

$$f\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$$

فأوجد المعادلة التفاضلية.

العل

بالإشتقاق جزئياً بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y ونضع

$$u = \frac{x-x_0}{z-z_0}, \quad v = \frac{y-y_0}{z-z_0}$$

نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial u} \left[\frac{1}{z-z_0} - p \frac{x-x_0}{(z-z_0)^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial v} \left[-p \frac{y-y_0}{(z-z_0)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \left[-q \frac{x-x_0}{(z-z_0)^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial v} \left[\frac{1}{z-z_0} - q \frac{y-y_0}{(z-z_0)^2} \right] = 0$$

بحذف $\frac{\partial f}{\partial v}$ ، $\frac{\partial f}{\partial u}$ من المعادلتين نحصل على

$$pq = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(z-z_0)^4} = \left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2} \right] \left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2} \right]$$

$$\therefore \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{(z-z_0)} \left[\frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2} + \frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2} \right] = 0$$

$$(x-x_0)p + (y-y_0)q = (z-z_0)$$

أى أن

مثال (١٣)

أوجد المعادلة التفاضلية التي تنشأ عن

$$f(x+y+z, x^2+y^2-z^2) = 0$$

الحل

نضع $u = x+y+z$ ، $v = x^2+y^2-z^2$ وعليه فإن $f(u, v) = 0$

والإشتقاق بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+p) + \frac{\partial f}{\partial v}(2x-2zp) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+q) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y-2zq) = 0$$

ويحذف $\frac{\partial f}{\partial v}$ ، $\frac{\partial f}{\partial u}$ نجد أن

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x-2zp \\ 1+q & 2y-2zq \end{vmatrix} = 0$$

وعليه يكون

$$2(y-x) + 2(z+y)p - 2(z+x)q = 0$$

مثال (١٤)

إحذف الدوال الاختيارية من المعادلة

$$y = f(x-ct) + g(x+ct)$$

العل

بالتفاضل مرتين بالنسبة إلى x ، ثم بالنسبة إلى t نجد أن

$$y_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$y_{tt} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\therefore y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

تمارين

احذف الثوابت الإختيارية من كل من المعادلات الآتية:

1) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

2) $z = axy + b$

3) $ax + by + cz = 1$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

5) $z = a e^{bx} \sin bx$

6) $z = ax + by + a^2 + b^2$

7) $z = (x-a^2) + (y-b)^2$

8) $ax + b = a^2 x + y$

احذف الدوال الإختيارية من كل من المعادلات الآتية:

1) $f\left(\frac{z}{x^2}, x-y\right) = 0$

2) $z = x^2 f(x-y)$

3) $z = f(x+y)$

4) $z = f(x) + e^y g(x)$

5) $x = f(z) + g(y)$

6) $z' = f(xy)$

7) $z = f(x+iy) + g(x-iy)$

8) $z = xy + f(x^2 + y^2)$

9) $z = f\left(\frac{xy}{z}\right)$

10) $z = e^{ax+by} f(ax-by)$

11) $lx + my + nz = Q(x^2 + y^2 + z^2)$

12) $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$

٤ - المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى

سوف نقصر دراستنا هنا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى حيث Z متغير تابع بينما x, y متغيرين مستقلين وسوف نستخدم

$$p = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية (P.D.E) الصورة

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

ويوجد نوعان من الدوال تحقق هذه المعادلة وكل منها يحتوى على عدد لا نهائى من الحلول

النوع الأول: حل يحتوى على ثابتين اختياريين يسمى بالحل التام Complete Solution او بالتكامل التام (Complete Integral).

النوع الثانى: حل يحتوى على دالة اختيارية يسمى بالحل العام (General Solution) او بالتكامل التام (Complete Integral).

أولاً: الحل التام

نفترض أن لدينا المعادلة

$$F(x, y, z, A, B) = 0 \quad (2)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x ، إلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0 \quad (4)$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الباب السابع

بحذف الثابتين A, B من المعادلات (2),(3),(4) نحصل على المعادلة التفاضلية (1) وعليه تكون معادلة (2) تكاملاً تاماً للمعادلة (1).

ثانياً: الحل العام

ليكن

$$u = u(x, y, z) \quad , \quad v = v(x, y, z)$$

بحيث

$$\phi(u, v) = 0 \tag{5}$$

حيث ϕ دالة اختيارية، بالإشتقاق بالنسبة إلى x وإلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p \right] + \frac{\partial \phi}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right] = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q \right] + \frac{\partial \phi}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right] = 0 \tag{7}$$

بحذف $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$ من (6),(7) نجد أن

$$\begin{aligned} (u_x + u_z p)(v_y + v_z q) - (v_x + v_z p)(u_y + u_z q) &= 0 \\ \therefore u_x v_y + u_x v_z q + u_y v_x + u_y v_z p + u_z v_x p q - u_x v_y - u_x v_z q - u_y v_x - u_y v_z p - u_z v_x p q &= 0 \\ \therefore (u_x v_x - u_x v_x) p + (u_x v_x - u_x v_x) q = u_x v_y - u_x v_x & \\ Fp + Qq = R & \end{aligned} \tag{8}$$

حيث

$$P = u_x v_y - u_x v_x, \quad Q = u_x v_x - u_x v_x, \quad R = u_x v_y - u_x v_x$$

∴ العلاقة (5) هي حل للمعادلة (8) مهما كانت الدالة ϕ والمعادلة (8) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى.

الآن اعتبر المنحنى (الناتج من تقاطع سطحين)

$$u = a, \quad v = b$$

حيث a, b ثابتان وبلاشتقاق بالنسبة إلى x إلى y على الترتيب نحصل على

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0 \quad (9)$$

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \quad (10)$$

بحل (9), (10) نجد أن

$$\frac{dx}{u_x v_x - u_x v_x} = \frac{dy}{u_y v_x - u_x v_y} = \frac{dz}{u_z v_x - u_x v_z}$$

أي أن

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (12)$$

أي أن $u = a, v = b$ هما حل للمعادلة (12)، وبذلك يكون الحل العام للمعادلة

$$Pp + Qq = R$$

هو $\phi(u, v) = 0$ حيث ϕ دالة اختيارية، بينما u, v هما حل للمعادلة $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

والتي تسمى بمجموعة لاجرانج المساعدة (Lagrange's auxiliary or subsidiary equation) وهي معادلات تفاضلية عادية

ولحل هذه المعادلات المساعدة توجد أربع طرق :

(أ) إذا كان أحد المتغيرات غير موجود أو يمكن حذفه من أي كسرين من المعادلات فإنه يمكن إجراء عملية التكامل والحصول على تكامل (حل) أول $u = c$ وبتكرار هذه العملية نحصل على تكامل ثان $u = c_2$ ويكون الحل العام $\theta(u, v) = 0$ والأمثلة (1), (2), (9) توضح ذلك.

(ب) نفترض أننا حصلنا على تكامل أول باستخدام (أ) ولكن لا يمكن الحصول على تكامل ثان بنفس الطريقة . ففي هذه الحالة يمكن استخدام التكامل

الأول في إيجاد التكامل الثاني مع مراعاة في التكامل الثاني بحذف ثابت التكامل في الأول المثال (5) يوضح ذلك .

(ج) من مبادئ الجبر فإن إحدى النسب $\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ تساوي

فإذا كان المقام يساوي صفرا فإن البسط يكون $\frac{P_1 dx + G_1 dy + R_1 dz}{P_1 P + Q_1 Q + R_1 R}$

والذي يعطي الحل $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$ ويمكن

تكرار هذه العملية باختيار آخر للدوال

$P_1(x, y, z), Q_1(x, y, z), R_1(x, y, z)$ تسمى بالمضاريب

(multipliers) وقد تحصل تكامل أول بهذه الطريقة وتكامل ثان إما باستخدام

(أ) أو (ب) والأمثلة (3), (4), (6), (7) توضح ذلك .

(د) إذا اختبرت الدوال Z_1, G_1, P_1 وهي دوال في x, y, z بحيث يكون

ساديا لأحد الكسور وسكون البسط تفاضل المقام $\frac{P_1 dx + G_1 dy + R_1 dz}{P_1 P + Q_1 Q + R_1 R}$

وقد تستخدم دوال آخر P_2, Q_2, R_2 للحصول على تكامل ثان أو تستخدم

(أ), (ب), أو (ج) والأمثلة (8), (10) .

٥ - أمثلة :

مثال (١)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$2p + 3q = 1$$

الحل

معادلات لأجرائك المساعدة هي

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{1}$$

$$3x - 2y = b$$

$$x - 2z = a$$

حيث $R = 1$, $Q = 3$, $P = 2$

ونجد أن $\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3}$ تعطى

و $\frac{dx}{2} = \frac{dz}{1}$ تعطى

إذن الحل العام هو

$$\phi(x - 2z, 3x - 2y) = 0$$

نلاحظ هنا أن الحل التام هو

$$x - 2z = \alpha(3x - 2y) + \beta$$

وهو جزء من الحل العام ، حيث x , B ثابتان .

مثال (٢)

حل المعادلة

$$xp + yq = z$$

العل

نلاحظ أن

$$P = x \quad , \quad Q = y \quad , \quad R = z$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة وهي

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{x}{z} = a \quad \text{أى} \quad \ln x = \ln z + \ln a$$

$$\frac{y}{z} = b \quad \text{أى} \quad \ln y = \ln z + \ln b$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{تؤدي إلى}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{و تؤدي إلى}$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$zp = -x$$

الحل

$$P = z, \quad Q = 0, \quad R = -x$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\therefore \frac{dx}{z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-x}$$

$$\therefore dy = 0 \quad \therefore y = a$$

$$\therefore \frac{dx}{z} = \frac{-dz}{x}$$

$$\therefore x^2 + z^2 = b$$

ويكون الحل العام هو

مثال (٣)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(y - z)p + (x - y)q = z - x$$

الحل

$$P = y - z, \quad Q = x - y, \quad R = z - x$$

نلاحظ أن

$$P + Q + R = 0$$

من المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

حيث أن مجموع المقدمات على مجموع التوالى = إحدى النسب فإن

$$\therefore dx + dy + dz = 0$$

$$\therefore x + y + z = a$$

$$xP + zQ + yR = 0$$

$$\therefore xdx + zdy + ydz = d\left(\frac{x^2}{2} + yz\right) = 0$$

أي أن

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + yz = C$$

حيث C عدد ثابت

أي أن

$$x^2 + 2yz = b, \quad b = 2C$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(x + y + z, x^2 + 2yz) = 0$$

ونلاحظ أن الحل التام

$$x^2 + 2yz = \alpha(x + y + z) + \beta$$

مثال (٤)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$$

الحل

$$P = x^2 - y^2 - z^2, \quad Q = 2xy, \quad R = 2xz$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي :

$$\therefore \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

من الكسرين الثاني والثالث

$$\therefore \ln y = \ln z + \ln a$$

نحصل على

$$\therefore \frac{y}{z} = a$$

نحصل على

$$\therefore \frac{xdx}{x(x^2 - y^2 - z^2)} = \frac{ydy}{2xy^2} = \frac{zdz}{2xz^2} \quad \text{ويأخذ } (x, y, z) \text{ كمضارب نحصل على}$$

$$\therefore \frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2z^2)} = \frac{zdz}{2xz^2}$$

أي أن

$$\therefore \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{zdz}{z^2}$$

أي أن

$$\therefore \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln z + \ln b$$

$$\therefore \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = b$$

أي أن

∴ الحل العام هو

$$\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$$

ويكون الحل التام هو

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha y + \beta z$$

مثال (5)

حل المعادلة

$$p - 2q = 3x^2 \sin(y + 2x)$$

الحل :

تكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{3x^2 \sin(y+2x)}$$

$$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2}$$

من الكسرين الأول والثاني

$$\therefore y + 2x = a$$

من الكسرين الأول والثالث

$$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dz}{3x^2 \sin(a)}$$

وكذلك نجد أن

$$\therefore z = x^3 \sin a + b$$

$$\therefore z - x^3 \sin(y+2x) = b$$

مثال (٦)

حل المعادلة المساعدة الآتية

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

العل

بأخذ (l, m, n) كمضاريب نحصل على :

$$\frac{l dx}{l(mz - ny)} = \frac{m dy}{m(nx - lz)} = \frac{n dz}{n(ly - mx)}$$

حيث أن

$$\therefore \frac{l dx}{mxz - nxy} = \frac{m dy}{nxy - lzy} = \frac{n dz}{lyz - mxz}$$

فإن

$$\therefore l dx + m dy + n dz = 0$$

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

$$\therefore lx + my + nz = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b$$

ويكون حل المعادلة المساعدة هو

مثال (٧)

حل المعادلة

$$(x + y) z p + z (n - y) q = x^2 + y^2$$

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

بأخذ (x, y, z) كمضاريب نحصل على

$$(i) \frac{xdx}{xz(x+y)} = \frac{ydy}{yz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2 + y^2)}$$

حيث أن

$$(ii) \frac{ydx}{yz(x+y)} = \frac{xdy}{xz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2 + y^2)}$$

وكذلك بأخذ (y, x, z) كمضاريب نحصل

$$\therefore xdx - ydy - zdz = 0$$

$$\therefore ydx + xdy - zdz = 0$$

$$\therefore x^2 - y^2 - z^2 = a$$

$$\therefore 2xy - z^2 = b$$

فإن من (i) نجد أن

وأن من (ii) نجد أن

فتحصل على

وعلى

ملحوظة: يمكن أخذ $(x, -y, z)$, (y, x, z) كمضاريب ونحصل على نفس

الحل.

مثال (٨)

$$(1 + y) p + (1 - x) q = z$$

حل المعادلة

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة:

$$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}$$

من مبادئ الجبر نجد أن

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx+dy}{2+x+y} = \frac{dx-dy}{y-x}$$

$$\therefore \ln z = \ln(2+x+y) + \ln a$$

$$\ln z = -\ln(y-x) + \ln b$$

$$\therefore \frac{z}{(2+x+y)} = a$$

$$\frac{z}{(y-x)} = b$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على

من الكسرين الثاني والثالث نحصل على

أي أن

وأن

مثال (٩)

مثال حل المعادلة

$$c_1 p + c_2 q + c_3 z = 0$$

$$P = c_1, \quad Q = c_2, \quad R = -c_3 z$$

$$\therefore \frac{dx}{c_1} = \frac{dy}{c_2} = \frac{dz}{-c_3 z}$$

$$\therefore \frac{dx}{c_1} = \frac{dy}{c_2}$$

$$\therefore c_1 y - c_2 x = a$$

$$\therefore \frac{dx}{c_1} = \frac{dz}{-c_3 z}$$

الحل

حيث أن

فإن

أي

أي

كذلك

$$\therefore \ln z = \frac{-c_3}{c_1} x + \ln b$$

أي أن

ومنها

$$\therefore z = be^{\frac{-c_3 x}{c_1}}$$

∴ ويكون الحل العام

$$z = e^{\frac{-c_3 x}{c_1}} \phi(c_1 y - c_2 x)$$

مثال (١٠)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^2 (x-y) p + x^2 (x-y) q = z (x^2 + y^2)$$

الحل:

معادلات لاجرانج المساعدة

$$\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)} \quad (1)$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على $x^3 + y^3 = c_1$

وبأخذ المضاريب (1, -1, 0) فإن كل كسر يساوي .

$$= \frac{dx - dy}{y^2(x-y) + x^2(x-y)} = \frac{dx - dy}{(x-y)(x^2 + y^2)} \quad (2)$$

من الكسر الثالث في (1) مع الكسر في (2) نحصل على

$$\frac{dz}{z(x^2 + y^2)} = \frac{dx - dy}{(x-y)(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx - dy}{x - y}$$

$$\ln z - \ln(x - y) = \ln c_2 \quad \text{وبالتالي}$$

$$z / (x - y) = c_2$$

$$Q(x^3 + y^3, \frac{z}{x-y}) = 0 \quad \text{ويكون الحل هو}$$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

1) $p + q = z$

2) $3p + 4q = 2$

3) $yq - xp = z$

4) $xzp + yzq = xy$

5) $x^2 p + y^2 q = z^2$

6) $zp + yq = x$

7) $zq + py = xz$

8) $p + q = x$

9) $P + q = y$

10) $y^2 p - xyq = x/(z-2y)$

11) $xz p + yz q = xy$

12) $(z^2 - 2yz - y^2) p + (xy + xz) q = xy - xz$

13) $p + q = 1$

14) $p \tan x + q \tan y = \tan z$

15) $P + q = x + y + z$

16) $z(p-q) = z^2 + (x+y)^2$

17) $xyp + y^2 q = zxy - 2x^2$

18) $p + 3q = 5z - \tan(y - 3x)$

19) $py + qx = xyz^2 (x^2 - y^2)$

20) $z p = -x$

21) $z(xp - yq) = y^2 - x^2$

22) $(x-y)p + (x+y)q = 2xz$

٦ - تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية

أولاً طريقة فصل المتغيرات:

ليكن $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ حلاً وحيداً لمسألة القيمة الحدية.
 $f(u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, \dots, u_{x_1x_1x_1}) = 0$

فإن طريقة فصل المتغيرات تفترض أن الحل u يمكن كتابته على الصورة
 $u = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \dots f_n(x_n)$

بالتعويض عن هذا الحل بالصورة السابقة في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه نجد أن الدوال الحقيقية $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3), \dots, f_n(x_n)$ تحقق معادلات تفاضلية عادية يمكن حلها وتحقق الشروط الحدية المعطاه ، والامثلة الاتية توضح لنا ذلك.

مثال (١)

حل المعادلة

$$u_x - 3u_y = 0 \tag{1}$$

حيث

$$u(0, y) = \frac{1}{2} e^{-2y}, \quad x > 0$$

العل

نفرض أن الحل يمكن وضعه على الصورة
ومن ذلك نجد أن

$$u = f_1(x) f_2(y)$$

$$\therefore u_x = f_1' f_2, \quad u_y = f_1 f_2'$$

$$\therefore f_1' f_2 - 3f_1 f_2' = 0$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\therefore \frac{f_1'}{3f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = k \quad (\text{مثلاً})$$

وعلى ذلك فإن

وحيث أن الطرف الأيمن دالة في y والطرف الأيسر دالة x ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت .

$$f_1 = Ae^{3kx} \quad \text{أي} \quad \frac{f_1'}{3f_1} = k$$

$$f_2 = Be^{ky} \quad \text{أي} \quad \frac{f_2'}{f_2} = k \quad \text{وكذلك}$$

$$\therefore u = ce^{k(3x+y)}$$

ويكون الحل

$$\therefore u(0, y) = ce^{ky} = \frac{1}{2} e^{-2y}$$

وينطبق الشرط المعطى

$$\therefore c = \frac{1}{2} , \quad k = -2$$

$$\therefore u(x, y) = \frac{1}{2} e^{-6x-2y}$$

ويكون الحل على الصورة

مثال (٢)

حل معادلة لابلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ويكون الحل على الصورة

الحل

نفترض أن

$$u(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

$$\therefore u_{xx} = f_1'' f_2 , \quad u_{yy} = f_1 f_2''$$

وعلى ذلك فإن

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1 f_2$ نحصل على

$$\therefore f_1'' f_2 + f_1 f_2'' = 0 \Rightarrow \frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_2''}{f_2} = 0$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ، ولكي تتحقق المعادلة

لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{f_1} = k \quad , \quad \therefore \frac{f_2''}{f_2} = -k$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k

i) $k > 0$, ii) $k = 0$, iii) $k < 0$

i) $k > 0 \Rightarrow k = \lambda^2$

$$\therefore f_1'' - \lambda^2 f_1 = 0 \quad , \quad f_2'' + \lambda^2 f_2 = 0$$

ويحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1 = A_1 e^{\lambda x} + B_1 e^{-\lambda x} \quad , \quad f_2 = A_2 \cos(\lambda y) + B_2 \sin(\lambda y)$$

وبذلك يكون الحل

$$\therefore u(x, y) = (A_1 e^{\lambda x} + B_1 e^{-\lambda x})(A_2 \cos(\lambda y) + B_2 \sin(\lambda y))$$

ii) $k = 0$

ويحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1 = A_1 x + B_1 \quad , \quad f_2 = A_2 y + B_2$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x, y) = (A_1 x + B_1)(A_2 y + B_2)$$

iii) $k < 0 \quad \therefore k = -\alpha^2$

$$\therefore f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0 \quad , \quad f_2'' - \alpha^2 f_2 = 0$$

ويحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1 = A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \sin(\alpha x)$$

$$\therefore f_2 = A_2 e^{\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y}$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x, y) = (A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \sin(\alpha x))(A_2 e^{\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y})$$

ملحوظة : لإختبار الحل المناسب لا بد من استخدام الشروط المعطاه في المسألة

مثال (٣)

حل المعادلة

$$u_t = u_{xx}$$

تحت الشروط

$$u(0, t) - 0 = u(\pi, t)$$

$$u(x, 0) = 4 \sin 3x$$

الحل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x, t) = f(x)g(t)$$

$$\therefore u_{xx} = f''g, \quad u_t = fg'$$

وعلى ذلك فإن

$$fg' = f''g \Rightarrow \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g} = c$$

لدينا هنا أيضا ثلاث حالات للثابت c

$$i) c > 0, \quad ii) c = 0, \quad iii) c < 0$$

$$i) c > 0 \Rightarrow c = \lambda^2$$

فتحصل على

$$\therefore \frac{g'}{g} = \lambda^2 \Rightarrow g = Ae^{\lambda^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f} = \lambda^2 \Rightarrow f = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x}$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x, y) = e^{\lambda^2 t} (A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x})$$

وهذا مستحيل لأنه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x, 0) = 4 \sin 3x$$

$$ii) c = 0$$

فتحصل على

$$\frac{g'}{g} = 0 \quad \therefore g = A$$

$$\frac{f''}{f} = 0 \quad \therefore f = B_1 x + B_2$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x, t) = A_1 x + A_2$$

وهذا مستحيل لانه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x, 0) = 4 \sin 3x$$

$$iii) c < 0 \quad \therefore c = -\alpha^2$$

فتحصل على

$$\frac{g'}{g} = -\alpha^2 \quad \Rightarrow g = A e^{-\alpha^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f} = -\alpha^2 \quad \Rightarrow f = B_1 \cos(\alpha x) + B_2 \sin(\alpha x)$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x, t) = e^{-\alpha^2 t} [A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x)]$$

وباستخدام الشروط المعطاه نجد أن

$$u(0, t) = 0 \quad \Rightarrow A_1 = 0$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad \Rightarrow A_2 \sin(\alpha \pi) = 0$$

إما $A_2 = 0$ (وهذا مستحيل) أو

$$\therefore \sin(\alpha \pi) = 0$$

وهذا يعنى أن α عدد صحيح

$$\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore u(x, t) = A_2 e^{-\alpha^2 t} \sin(\alpha x)$$

وباستخدام الشروط المعطى نجد أن

$$u(x, 0) = A_2 \sin(\alpha x) = 4 \sin(3x)$$

وهذا يعنى

$$\alpha = 3, A_2 = 4$$

وبذلك يكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,t) = 4e^{-9t} \sin(3x)$$

وهذا هو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الحدية.

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

$$1) u_x + u = u_y, \quad u(x,0) = 4e^{-3x}$$

$$2) u_t = 4u_{xx}, \quad u(0,t) = 0 = u(4,t), \quad u(x,0) = 5 \sin(\pi x)$$

$$3) u_x = 4u_t, \quad u(0,0) = 10, \quad u(0,4) = 200$$

أوجد جميع الحلول للمعادلة

$$u_{xx} = 2u_{yy} - 12u_y + 4u$$

ثانياً : استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عادة في المسائل التطبيقية التالية

(١) معادلة الموجة Wave Equation

$$\text{أحادية البعد} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{ثانية البعد} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(٢) معادلة سريان الحرارة Heat flow equation

$$\text{أحادية البعد} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{k}\right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\text{ثانية البعد} \quad \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

(٢) معادلة لابلاس Laplace equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(٤) معادلة بواسون Poisson equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(٥) معادلة البث Radio Equation

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$-\frac{I}{x} = c \frac{\partial V}{\partial t}$$

حيث V هو الجهد ، I التيار L (معامل الحث)

وسوف نستعرض تلك الحالات ببعض الأمثلة

(أ) معادلة الموجة

مثال (١)

إذا شد خيط وثبت من نقطتين المسافة بينهما l وحدثت إزاحة للخيط على الصورة $y = k(lx - x^2)$ عند $t = 0$ ، أوجد الإزاحة عند أى لحظة.

الحل

معادلة الموجة هي

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(1)

وحيث أن نهايتي الخيط مثبتة لكل قيم t فإن

$$y(0, t) = 0 \quad , \quad y(t, 0) = 0$$

(2)

وحيث أن السرعة العرضية (Transverse) للخيط عن أى نقطة تكون صفراً أى أن

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (3)$$

كذلك معطى لنا

$$y(x, 0) = k(lx - x^2) \quad (4)$$

وعليه تكون المعادلات (2), (3), (4) هي الشروط الحدية للمعادلة (1).

الآن نفترض أن

$$y = f_1(x) \cdot f_2(t)$$

$$\therefore y_{tt} = f_1 \cdot f_2'' \quad , \quad y_{xx} = f_1'' \cdot f_2$$

فيكون

بالتعويض في (1) نجد ان

$$f_1 f_2'' = c^2 f_1'' f_2$$

بالقسمة على $f_1 f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1} = \frac{f_2''}{c^2 f_2} = -\alpha^2$$

حيث α^2 ثابت ومنها نحصل على

$$\therefore f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0$$

$$f_2'' + \alpha^2 c^2 f_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1 = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$f_2 = c_3 \cos \alpha c t + c_4 \sin \alpha c t$$

وبالتالي يكون الحل هو

$$\therefore y = (c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x)(c_3 \cos \alpha c t + c_4 \sin \alpha c t)$$

$$\therefore y(0, t) = 0$$

باستخدام الشرط

$$\therefore c_1(c_3 \cos \alpha c t + c_4 \sin \alpha c t) = 0$$

$$\therefore c_1 = 0$$

فإن

$$\therefore y = c_2 \sin \alpha x (c_3 \cos \alpha c t + c_4 \sin \alpha c t)$$

وبالتالي فإن

$$\therefore \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

ويكون الحل هو

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c_2 \sin \alpha x (c_3 c \alpha \sin \alpha c t + c_4 c \alpha \cos \alpha c t)$$

باستخدام الشرط

فإن

$$\therefore c_2 \sin(\alpha x)(c_3 c \alpha) = 0$$

عندما $t = 0$ نجد أن

ولكن $c_2 \neq 0$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore c_4 = 0$$

$$\therefore y = c_2 c_3 \sin(\alpha x) \cos(\alpha c x)$$

$$i.e: y = A \sin(\alpha x) \cos(\alpha c x)$$

حيث $A = c_2 c_3$

وباستخدام الشرط

نجد أن

$$\therefore y(l, t) = 0$$

$$\therefore A \sin(\alpha l) \cos(\alpha c l) = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = n\pi, n = 1, 2, \dots$$

$$\therefore \alpha = \frac{n\pi}{l}$$

$$\therefore y(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)$$

وبالتالي يكون لدينا عدد من الحلول وذلك باخذ قيم n المختلفة وعليه يكون الحل هو مجموع لتلك الحلول.

$$\therefore y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)$$

$$\therefore y(x, 0) = k(lx - x^2)$$

$$\therefore (lx - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

وحيث أن

فإن

حيث $A_n = kB_n$

وباستخدام متسلسلة فوريير (Fourier) نجد أن

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l (lx - x^2) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

ولكن

$$\int x \sin(mx) dx = -\frac{1}{m}x \cos(mx) + \frac{1}{m^2} \sin(mx)$$

فإن

$$\int x^2 \sin(mx) dx = -\frac{1}{m}x^2 \cos(mx) + \frac{2x}{m^2} \sin(mx) + \frac{2}{m^3} \cos(mx)$$

$$\therefore B_n = \frac{2}{\ell} \left\{ (\ell x - x^2) \left(-\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \left(\frac{\ell}{n\pi}\right) + (\ell - 2x) \left(\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right) \left(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \left(\frac{\ell^3}{n^3\pi^3}\right) \right\}$$

$$= -2 \frac{\ell^3}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] \left(\frac{2}{\ell}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{8\ell^3}{n^3\pi^3} & , n \text{ فردية} \\ 0 & , n \text{ زوجية} \end{cases}$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\ell^3}{n^3\pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t\right)$$

حيث n عدد فردي .

مثال (٢)

خيط طوله ℓ مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل وأعلى لمسافتين متساويتين من نقطتين على بعد متساوي من الطرفين كما في الشكل. أستنتج تعبير عن إزاحة الخيط عند أي زمن t وأثبت ان الإزاحة صفر عند نقطة المنتصف.

الحل

الإزاحة $y(x, t)$ عند أي نقطة تحقق المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

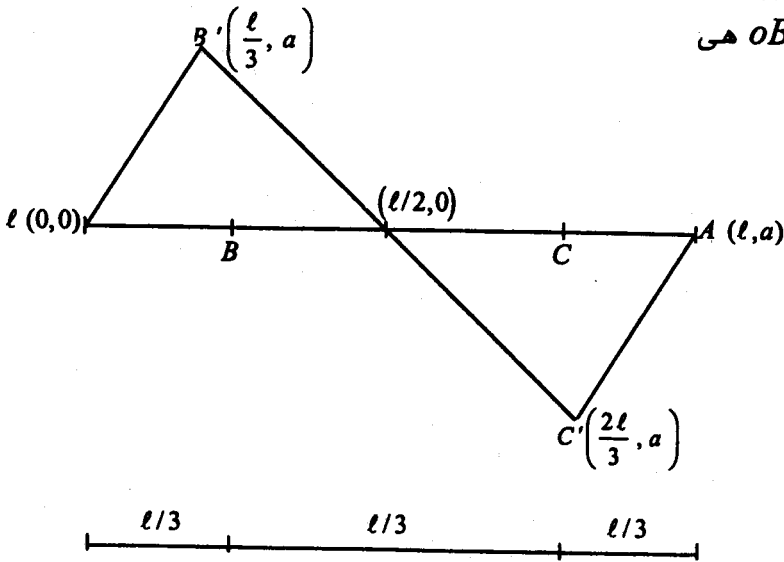
والشروط الحدية هي :

$$y(0,t) = 0 , y(l,t) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} \quad (3)$$

(لاحظ الشروط الحدية في المثال السابق)

باقي الشروط عند $t = 0$ يكون الخيط كما هو مبين بالشكل $B'C'A$ معادلة OB' هي



$$y = \frac{3a}{l}x$$

معادلة $B'C'$ هي

$$\frac{y-a}{x-\frac{l}{3}} = \frac{a-(-a)}{\frac{l}{3}-\frac{2l}{3}}$$

أى أن

$$y = \frac{3a}{l}(\ell - 2x)$$

معادلة $C^1 A$ هي

$$\frac{y-0}{x-\ell} = \frac{0-(-a)}{\ell-\frac{2\ell}{3}}$$

أى أن

$$y = \frac{3a}{\ell}(x-\ell)$$

وعليه يكون

$$y(x,0) = \frac{3a}{\ell} \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{3} \\ (\ell - 2x) & \frac{1}{3}\ell \leq x \leq \frac{2}{3}\ell \\ (x - \ell) & \frac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (4)$$

حل المعادلة (1) تحت الشروط الحدية (2), (3) هي (انظر المثال السابق)

$$y(x,t) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t\right)$$

$$\therefore y(x,0) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وباستخدام متسلسلة فورية نحصل على

$$\therefore B_n = \frac{2}{\ell} \left\{ \int_0^{\frac{\ell}{3}} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} (\ell - 2x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx + \int_{\frac{2\ell}{3}}^{\ell} (x - \ell) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \right\} \left(\frac{3a}{\ell}\right)$$

تلاحظ ان

$$\int x \sin(mx) dx = -\frac{1}{m} x \cos(mx) + \frac{1}{m^2} \sin(mx)$$

$$\int (\ell - 2x) \sin(mx) dx = -\frac{1}{m} (\ell - 2x) \cos(mx) - \frac{2}{m^2} \sin(mx)$$

$$\int (x - \ell) \sin(mx) dx = \frac{1}{m^2} \sin(mx) - \frac{1}{m} (x - \ell) \cos(mx)$$

وعلى ذلك فإن

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\ell^2}{6a} B_n &= \left\{ \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) - \frac{\ell}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right\}_0^{\ell/3} \\ &+ \left\{ \frac{-2\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) - \frac{\ell}{n\pi} (\ell - 2x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right\}_{\ell/3}^{2\ell/3} + \\ &\quad \left\{ \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) - \frac{\ell}{n\pi} (x - \ell) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right\}_{2\ell/3}^{\ell} \\ &= \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right\} - \\ &\quad \frac{\ell}{n\pi} \left\{ \frac{\ell}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\ell}{3} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{\ell}{3} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\ell}{3} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore B_n &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{18a}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) [1 + (-1)^n] \end{aligned}$$

$$\therefore B_n = \begin{cases} \frac{36a}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & , n \text{ زوجية} \\ 0 & , n \text{ فردية} \end{cases}$$

$$\therefore y(x,t) = \sum_{n=2,4,\dots} \frac{36a}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t\right)$$

بأخذ $n = 2m$ حيث $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\therefore y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9a}{m^2\pi^2} \sin\left(\frac{2m\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2m\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{2m\pi c}{\ell}t\right)$$

بوضع $x = \frac{1}{2}\ell$ نجد أن

$$y(x,t) = 0 \Rightarrow y\left(\frac{1}{2}\ell, t\right) = 0$$

(ب) معادلة سريان الحرارة (احادية البعد)

مثال (١)

قضيب طوله ℓ معزول (Insulated) الجوانب ومنتظم الحرارة ابتدائياً. إذا برد طرفيه لدرجة الصفر وثبت عندهما ، أثبت ان حالة الحرارة $u(x,t)$ تعطى من العلاقة

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left\{-\frac{n^2 c^2 \pi^2}{\ell^2} t\right\}$$

حيث b_n تعطى من العلاقة

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

العل

لتكن معادلة سريان الحرارة هي

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x,t) = f_1(x) \cdot f_2(t)$$

$$\therefore u_t = f_1 \cdot f_2' \quad , \quad u_{xx} = f_1'' \cdot f_2$$

$$\therefore f_1 f_2' = c^2 f_1'' f_2$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1} = \frac{f_2'}{c^2 f_2} = -\alpha^2 \quad \text{مثلا}$$

وبالنسبة $f_1 f_2$ نحصل على

ومن ذلك نجد أن

$$f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0 \rightarrow f_1 = c_2 \cos(\alpha x) + c_3 \sin(\alpha x)$$

$$f_2' = -\alpha^2 c^2 f_2$$

$$\therefore f_2 = c_1 e^{-\alpha^2 c^2 t}$$

$$\therefore u = e^{-\alpha^2 c^2 t} (A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))$$

حيث

$$A = c_1 c_2 \quad , \quad B = c_1 c_3$$

$$\therefore A = 0$$

وباستخدام الشرط $u(\ell, t) = 0$ نجد أن

$$\sin \alpha \ell = 0 \Rightarrow \alpha \ell = n \pi$$

$$\therefore u(x,t) = B_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

(كما سبق) يكون الحل على الصورة

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

من الشروط الابتدائية $u(x, 0) = u_0$ نجد أن

$$\therefore u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

مثال (٢)

إذا كانت A, B هما نهايتى قضيب طوله 20cm ودرجتى حرارتهما 30°C ، 80° على الترتيب حتى تسود حالة التوازن Steady إذا غيرت درجتى حرارة الطرفين إلى $60^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}$ على الترتيب. أوجد توزيع الحرارة عند الزمن t .

العل

توزيع الحرارة الابتدائى هو

$$u = 30 + \frac{80-30}{\ell}x = 30 + \frac{5}{2}x$$

والتوزيع النهائى هو

$$u = 40 + \frac{60-40}{\ell}x = 40 + x$$

حيث $\ell = 20$ (طول القضيب)

نفترض أن توزيع الحرارة يعطى من

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x)$$

حيث $u_2(x)$ هو توزيع الحرارة فى حالة الاتزان، أى أن $u_2(x) = 40 + x$ ، $u_1(x,t)$ هو توزيع الحرارة الانتقالى والذى يؤول الى الصفر عند زيادة t وتحقق

المعادلة

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

فيكون الحل (كما فى المثال السابق)

$$\therefore u(x,t) = \sum B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{20}\right)^2 c^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{20}x\right)$$

وعليه يكون

المعادلات التفاضلية الجزئية الباب السابع

$$u(x, t) = 40 + x + \sum B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{20}\right)^2 c^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right)$$

ولكن عند $t = 0$ فإن

$$u = 30 + \frac{5}{2}x$$

بالتالي يكون لدينا

$$\therefore 30 + \frac{5}{2}x = 40 + x + \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right)$$

$$\therefore \frac{3}{2}x - 10 = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right)$$

كما سبق في أمثلة سابقة ، فإن (باستخدام متمسسه فوريير) نجد أن :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{20} \int_0^{20} \left(\frac{3}{2}x - 10\right) \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right) dx \\ &= \frac{1}{10} \left\{ \frac{3}{2} \left[\frac{400}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right) - \frac{20}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{20} x\right) \right]_0^{20} + \right. \\ &\quad \left. \frac{200}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{20} x\right) \right\}_0^{20} \\ &= \frac{1}{10} \left\{ -\frac{400}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{200}{n\pi} [\cos n\pi - 1] \right\} \\ &= \frac{1}{10} \left\{ -\frac{400}{n\pi} \cos n\pi - \frac{200}{n\pi} \right\} \\ \therefore B_n &= \frac{-20}{n\pi} (2 \cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore u(x, t) = 40 + x - \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cos n\pi + 1}{n} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{20}\right)^2 c^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{20} x\right)$$

ج) معادلة لابلاس

مثال (١)

حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

التي تحقق الشروط الآتية

$$u(0, y) = u(\ell, y) = u(x, 0) = 0 ,$$

$$u(x, a) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

العل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u = f_1(x)f_2(y)$$

$$\therefore u_{xx} = f_1'' f_2 , \quad u_{yy} = f_1 f_2''$$

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_2''}{f_2} = 0$$

بالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1 f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1} = -\frac{f_2''}{f_2} = -\alpha^2 \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0$$

$$\therefore f_1 = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

$$f_2'' - \alpha^2 f_2 = 0$$

$$f_2 = c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}$$

$$\therefore u(x, y) = (c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))(c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y})$$

فتحصل على

ويكون حلها هو

وكذلك

ويكون حلها

ويكون الحل العام هو

الآن نستخدم الشروط المعطاه ليجاد c_1, c_2, c_3, c_4

$$u(0, y) = 0 \rightarrow c_1(c_3 e^{ay} + c_4 e^{-ay}) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\therefore u(x, y) = (Ae^{ay} + Be^{-ay}) \sin ax$$

وبالتالي فإن

$$A = c_2 c_3, \quad B = c_2 c_4 \quad \text{حيث}$$

وكذلك حيث أن

$$u(\ell, 0) = 0 \rightarrow \sin(a\ell) = 0 \rightarrow a\ell = n\pi \rightarrow a = \frac{n\pi}{\ell}$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x, y) = (Ae^{\frac{n\pi}{\ell}y} + Be^{-\frac{n\pi}{\ell}y}) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وحيث أن

$$u(x, 0) = 0 \rightarrow (A + B) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = 0$$

$$\therefore A = -B = C \quad \text{مثلا}$$

فيكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x, y) = C(e^{\frac{n\pi}{\ell}y} - e^{-\frac{n\pi}{\ell}y}) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ومنها

$$\therefore u(x, y) = 2C \sinh\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

باستخدام الشرط المعطى نجد أن .

$$u(x, a) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = 2C \sinh\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$\therefore C = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)}$$

ويكون الحل النهائي على الصورة

$$\therefore u(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)}$$

(د) معادلات البث

مثال (١)

حل المعادلات الآتية

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t}$$

والتي تحقق الشروط الآتية

$$I(x, 0) = I_0, \quad V(x, 0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

العل

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x والمعادلة (2) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} = -c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

منها نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Lc \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

نفترض أن

$$V = f_1(x)f_2(t)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f_1'' f_2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f_1 f_2''$$

$$\therefore f_1'' f_2 = Lc f_1 f_2''$$

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1} = Lc \frac{f_2''}{f_2} = -\alpha^2 \quad \text{مثلا}$$

فيكون

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

وبالقسمة على $f_1 f_2$ نجد أن

(وكما سبق) نجد أن

$$f_1 = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

$$f_2 = c_3 \cos\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right) + c_4 \sin\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right)$$

$$\therefore V(x, t) = (c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)) \left(c_3 \cos\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right) + c_4 \sin\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right) \right)$$

ويكون الحل هو

$$V(x, 0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

ومن الشرط

$$\therefore V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = c_3 (c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))$$

نحصل على

$$\therefore c_1 c_3 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

ومنها نجد أن

$$c_2 c_3 = V_0, \quad \alpha = \frac{\pi}{\ell}$$

ويكون الحل $v(x, t)$ على الصورة

$$\therefore V(x, t) = \left[V_0 \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) + A \sin\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

حيث $A = c_2 c_4$

وباستخدام الشروط المعطاة أي عندما $t = 0$ فإن

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad V(x, 0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad I = I_0 =$$

ثابت

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \left[-V_0 \frac{\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \sin\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) + \frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) \right]$$

$$\therefore 0 = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \left[\frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \right] \rightarrow A = 0$$

وعندما $t = 0$ نجد أن

$$\therefore V(x, t) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right).$$

ولايجاد $I(x, t)$ نتبع التالي

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{V_0 \pi}{L \ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right)$$

$$\therefore I = -\frac{V_0 \pi}{\ell L} \cdot \frac{\ell \sqrt{Lc}}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right) + f(x)$$

$$\therefore I(x, t) = -V_0 \sqrt{\frac{c}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right) + f(x)$$

حيث $f(x)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى t)
ايضا

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t} = cV_0 \frac{\pi}{\ell \sqrt{Lc}} \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$\therefore I = \frac{cV_0 \pi}{\ell \sqrt{Lc}} \cdot \frac{\ell}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right) + F(t)$$

$$\therefore I(x, t) = V_0 \sqrt{\frac{c}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right) + F(t)$$

حيث $F(t)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى x)
وحيث ان $I = I_0$ عند $t = 0$

$$I(x, t) = I_0 - V_0 \sqrt{\frac{c}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{\ell \sqrt{Lc}}\right).$$

تمارين

(١) حل المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

في الحالات الآتية

(أ) $u = 0$ عندما $x = 0$, $x = l$ لجميع قيم t .

(ب) $u = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ عندما $t = 0$ لجميع قيم x حيث $0 < x < l$

(٢) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

التي تحقق الشروط

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 , u(x,0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \phi(x)$$

(٣) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

التي تحقق الشروط الآتية

$$y(0,t) = y(l,t) = 0$$

$$y(x,0) = \phi(x) , \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

(٤) أوجد حل المعادلة $\frac{\partial y}{\partial t} = 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ تحت الشرط

$$u(0,t) = 2, 2(1,t) = 3, u(x,0) = x(1-x)$$

$$t > 0, 0 \leq x \leq 1$$

(٥) أوجد الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$ تحت الشروط

$$u(0,1) = 0, u(a, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(x, 0) = g(x)$$

(٦) أوجد الحل العام للمعادلة : $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(0, t) = 0, u(2, 0) = 0, t > 0, 0 < x < 2$$

$$u(x, 0) = x, 0 < x < 2$$

الباب الثامن

متسلسلة فوريير

Fourier Series

الباب الثامن

متسلسلة فوريير

Fourier Series

-١ مقدمة :

لقد أثبت فوريير أنه يمكن التعبير عن دالة ما وحيدة القيمة على مدى محدود على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (1)$$

حيث $a_0, a_i, b_i, \dots, i = 1, 2, 3, \dots$ ثوابت.

تسمى هذه العملية بالتحليل التوافقي harmonic analysis. وتسمى المتسلسلة (١) بمتسلسلة فوريير للدالة $f(x)$. كما نلاحظ أنه إذا تغيرت x بالمقدار 2π أو أى من مضاعفاتها الموجبة أو السالبة ، فإن كل حد من الطرف الأيمن فى (١) لا يتغير أى أن منحنى الدالة يكرر نفسه كل فترة 2π .

-٢ الدالة الدورية Periodic Function

يقال أن الدالة $f(x)$ دالة دورية ولها الدورة T إذا كان

$$f(x+T) = f(x)$$

حيث T عدد ثابت.

نلاحظ أن $\sin x, \cos x, \tan x, \sin 3x, \cos \frac{x}{5}, \tan(\frac{4}{3}x)$ لهم الدورة

$$2\pi, 2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, 10\pi, \frac{3}{4}\pi \text{ على الترتيب.}$$

-٢ معنى الدالة الدورية

يكفى للدالة الدورية $f(x)$ التى لها الدورة T أن نرسمها على الفترة $[0, T]$ مثلا ، ثم نكرر منحنائها على كل فترة أخرى طولها T .

٤- نظرية تكامل الدالة الدورية

ليكن $f(x)$ دالة دورية لها الدورة T فإن

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

البرهان

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

ولكن

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(x_1 + T) dx_1 = \int_0^a f(x_1) dx_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

ونلاحظ أن

$$\int_{-T}^0 f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_T^{2T} f(x) dx = \int_{2T}^{3T} f(x) dx.$$

٥- تغير الدورة

نعرف أنه ليست كل الدوال لها الدورة 2π ولذلك سنلجأ إلى تغير دورة الدالة 2π .

ليكن $f(x)$ لها الدورة T ، أي أن $f(x+T) = f(x)$ لكل قيم x . ونفرض أن

$x = ku$ حيث k ثابت موجب. وعلى ذلك فإن

$$f(ku + T) = f(ku)$$

وليكن $f_1(u) = f(ku)$ وعلى ذلك فإن

$$f(ku + T) = f\left(k\left(u + \frac{T}{k}\right)\right) = f_1\left(u + \frac{T}{k}\right)$$

$$\therefore f_1\left(u + \frac{T}{k}\right) = f_1(u)$$

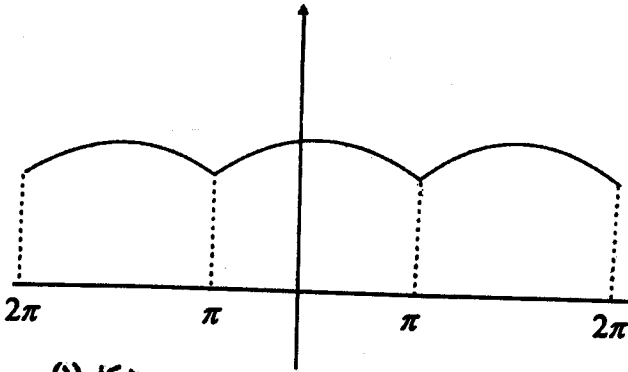
وعلى ذلك فإن $f_1(u)$ دالة دورية لها الدورة $\frac{T}{k}$ ، نختار k بحيث أن $\frac{T}{k} = 2\pi$ وعلى ذلك فإن $k = \frac{T}{2\pi}$. ومن ذلك نرى أن التحويل $x = \frac{T}{2\pi}u$ يحول الدالة $f(x)$ إلى الدالة $f_1(u)$ والتي لها الدورة 2π .

٦- أنواع خاصة من الدوال الدورية

يوجد أربعة أنواع من الدوال الدورية والتي تتميز بصفة التماثل (بدرجة ما) ويمكن التمييز فيما بينهم بمجرد النظر إلى منحنياتها.

(١) الدالة الزوجية Even function

هي دالة دورية لها الدورة 2π ولها الخاصية $f(x) = f(-x)$ وفيها $f(\pi+x) = f(\pi-x)$ كما في شكل (١) .



شكل (١)

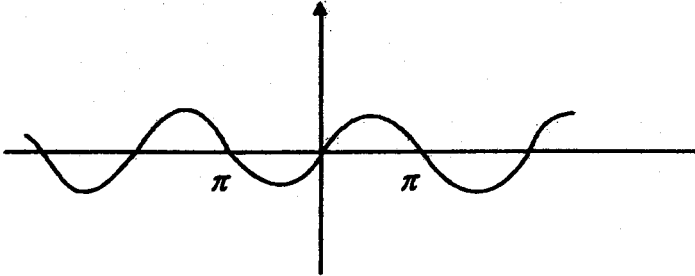
وذلك لأن

$$f(\pi+x) = f(-\pi-x) = f(2\pi-\pi-x) = f(\pi-x)$$

تبين العلاقة $f(x) = f(-x)$ أن منحنى الدالة متماثل حول المحور y ، بينما تبين

العلاقة $f(\pi+x) = f(\pi-x)$ أن المنحنى متماثل حول المستقيم $x = \pi$.

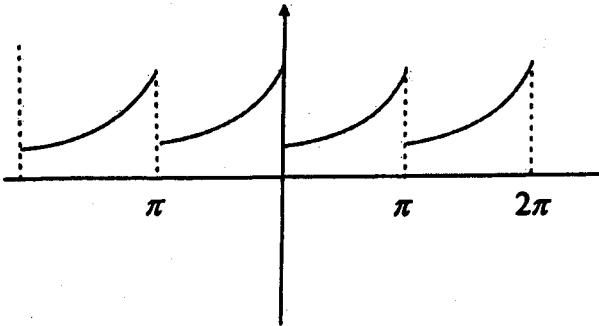
(ب) الدالة الفردية Odd function

لها الخاصية $f(x) = -f(-x)$ كما في شكل (٢)

شكل (٢)

ونلاحظ أن $f(\pi+x) = -f(\pi-x)$, $f(0) = 0$
 وأن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

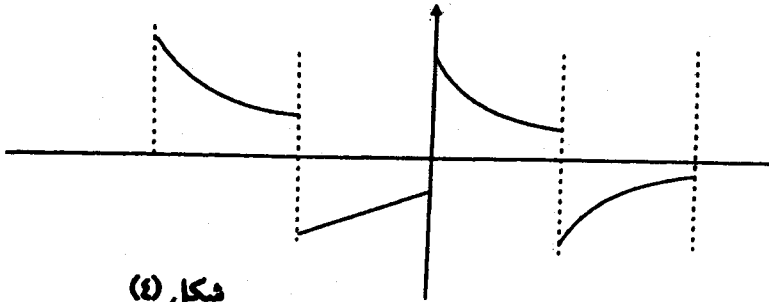
(ج) دالة زوجية التوافق Even harmonic function

ولها الخاصية $f(\pi+x) = f(x)$ كما في شكل (٣)

شكل (٣)

(د) دالة فردية التوافق Odd harmonic function

ولها الخاصية $f(\pi + x) = -f(x)$ كما في شكل (٤)



شكل (٤)

(٧) بعض التكاملات الخاصة

سوف نحتاج إلى بعض التكاملات المحدودة في دراستنا لمتسلسلة فورييه وهي

$$i) \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$$

وحيث n عدد صحيح موجب

$$ii) \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad m \neq n$$

$$iii) \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$$

n عدد صحيح

نظرية: أي دالة دورية، وحيدة القيمة ولها الدورة 2π يمكن التعبير عنها بالمتسلسلة

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (1)$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

البرهان

بتكامل المتسلسلة (١) بالنسبة إلى x من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2} a_0 2\pi = \pi a_0$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

وبضرب طرفي (١) في $\cos(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 + a_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = 0 + a_n \pi$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

وبالمثل بضرب طرفي (١) في $\sin(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

قد استخدمنا في البرهان نتائج التكاملات المحدودة الخاصة السابق ذكرها.

٨- تبسيط معاملات فوريير

سوف نعطي بعض التبسيط لمعاملات متسلسلة فوريير للدالة الدورية $f(x)$ ولها الدورة 2λ (عموماً).

(أ) دوال دورية لها خاصية واحدة

(i) الدالة الزوجية

ولها الخاصية $f(-x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فوريير لها هي

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda}x\right)$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\lambda}x\right) dx, \quad b_n = 0$$

(ii) الدالة الفردية

ولها الخاصية $f(-x) = -f(x)$ وتكون متسلسلة فوريير لها هي

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\lambda}x\right)$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\lambda}x\right) dx, \quad a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

(iii) دالة زوجية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda + x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فوريير لها على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2m} \cos\left(\frac{2m\pi}{\lambda}x\right) + b_{2m} \sin\left(\frac{2m\pi}{\lambda}x\right)$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx, \quad a_{2m} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos\left(\frac{2m\pi}{\lambda}x\right) dx$$

$$b_{2m} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin\left(\frac{2m\pi}{\lambda}x\right) dx$$

(iv) دالة فردية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda + x) = -f(x)$ وتكون متسلسلة فوريير لها على الصورة

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1} \cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x + b_{2m+1} \sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$a_{2m+1} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x dx$$

$$b_{2m+1} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x dx$$

(ب) دوال دورية لها خاصيتين:

(I) دالة زوجية وزوجية التوافق

لها الخاصية $f(-x) = f(x)$, $f(\lambda + x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فوريير لها

على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos(2m)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$a_0 = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) dx, \quad a_{2m} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \cos(2m)\frac{\pi}{\lambda}x dx$$

(ii) دالة زوجية وفردية التوافق :

لها الخاصية $f(-x) = f(x)$, $f(\lambda + x) = -f(x)$

وتكون متسلسلة فوريير لها على الصورة

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \cos(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x$$

حيث أن

$$a_{2m+1} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \cos(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x dx$$

(iii) دالة فردية وزوجية التوافق :

$$f(-x) = -f(x) , f(\lambda+x) = f(x)$$

وتكون متسلسلة فوريير لها على الصورة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \sin(2n) \frac{\pi}{\lambda} x$$

حيث

$$b_{2n} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \sin(2n) \frac{\pi}{\lambda} x ds$$

(iv) دالة فردية وفردية التوافق

$$f(-x) = -f(x) , f(\lambda+x) = -f(x)$$

وتكون متسلسلة فوريير لها على الصورة

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \sin(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x$$

حيث أن

$$b_{2m+1} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \sin(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x dx$$

ملحوظة: إذا كانت الدالة $f(x)$ لها الدورة 2π فإننا نضع في العلاقات السابقة 2π بدلاً من $2l$ ونحصل على علاقات بسيطة.

(أ) أمثلة:

مثال (١)

أوجد متسلسلة فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq \pi \\ \pi & , \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

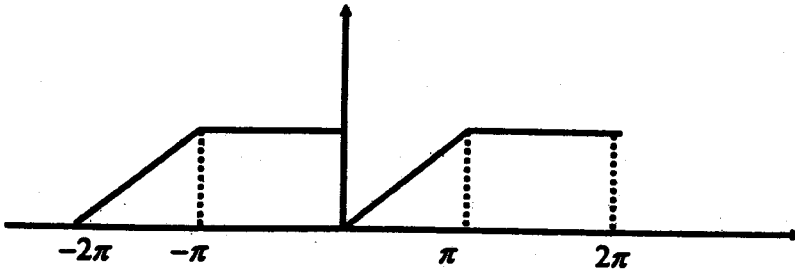
الحل

الدالة المعطاة لها الدورة 2π . ومن الشكل نرى أنها لا تحقق أى من الخواص الأربعة

وهي

$$f(-x) = \pm f(x), \quad f(\lambda + x) = \pm f(x)$$

وبذلك نستخدم الصيغة العامة



شكل

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi dx \right\} = \frac{3}{2} \pi$$

$$\therefore \frac{1}{2} a_0 = \frac{3}{4} \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} + 0 \right] = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \sin(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi}{n} (\cos(n\pi) - 1) \right] = \frac{-1}{n} \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \cos(nx) - \frac{1}{n} \sin(nx)$$

مثال (٢)

أوجد متسلسلة فورييه للدالة

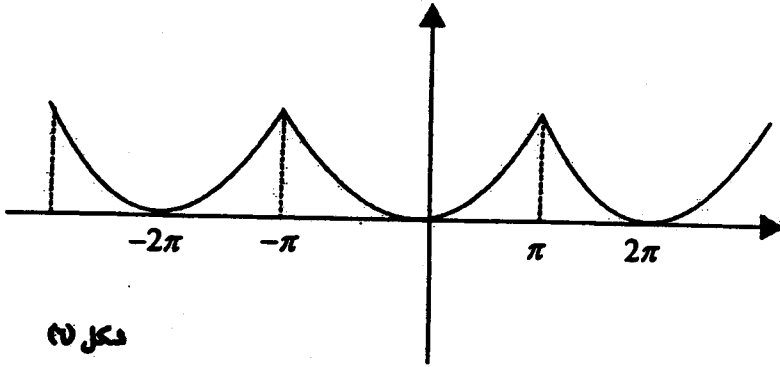
$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

وأثبت أن

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

الحل

الدالة لها الدورة 2π ومن الشكل نرى أنها دالة زوجية أى أن $f(x) = f(-x)$ و على ذلك فإن $b_n = 0$ وتكون



شكل ٢٧

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(n\pi) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

وبذلك يكون

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4(-1)^n \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} \quad (1)$$

بوضع $x = 0$ نحصل على

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right] \quad (2)$$

وبوضع $x = \pi$ في (١) نحصل على

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots \right]$$



$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (3)$$

من (٢) ، (٣) نحصل على

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣)

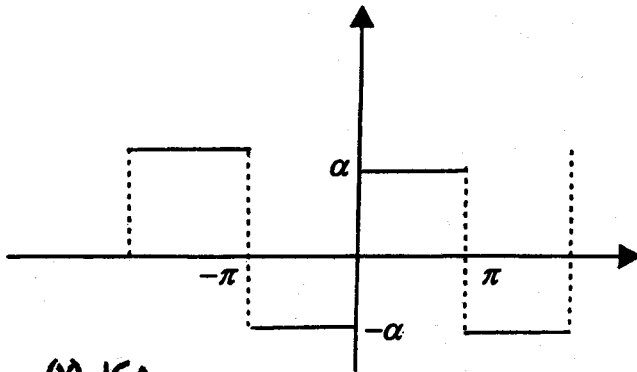
عبر عن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} a & , 0 < x < \pi \\ -a & , \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

في صورة متسلسلة فوريير.

الحل

من الشكل نرى أن $f(x) = -f(-x)$ ، $f(x + \pi) = -f(x)$ أي أن الدالة فردية ولها خاصية فردية التوافق وتكون متسلسلة فوريير على الصورة



شكل (٧)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \sin(2m+1)x$$

حيث أن

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2m+1)x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin(2m+1)x dx \\ &= \frac{4a}{\pi(2m+1)} \end{aligned}$$

وبذلك يكون

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$$

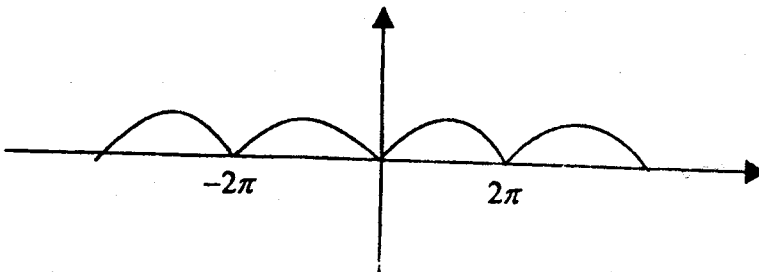
مثال (٤)

عبر عن الدالة $f(x) = |\sin x|$ ، $0 < x < 2\pi$ بدلالة متسلسلة فوريير.

الحل

نرى من الشكل أن الدالة زوجية وكذلك لها خاصية زوجية تتوافق أي أن

$$f(x) = f(-x) , \quad f(x + \pi) = f(\pi)$$



شكل (٧)

وبذلك تكون متسلسلة فوريير على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos(2mx)$$

حيث

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_{2m} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2mx) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2mx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(1+2m)(1-2m)}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2m)(1-2m)} \cos(2mx) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4m^2)} \cos 2mx$$

مثال (5)

أوجد متسلسلة الجيب ومتسلسلة جيب التمام للدالة

$$f(x) = 2x - 4, \quad 0 < x < 4$$

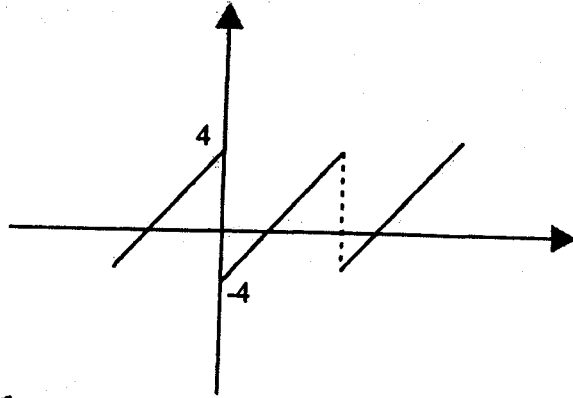
حيث الدالة $f(x)$ دالة دورية لها الدورة $2\lambda = 8$.

الحل

(أ) متسلسلة الجيب:

حيث أن $f(x) = -f(-x)$ ونرى من الشكل أيضاً $f(x + \lambda) = f(x)$

وبذلك تكون متسلسلة فوريير على الصورة



شكل (٧)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin(2m) \frac{\pi}{\lambda} x = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) x$$

حيث أن

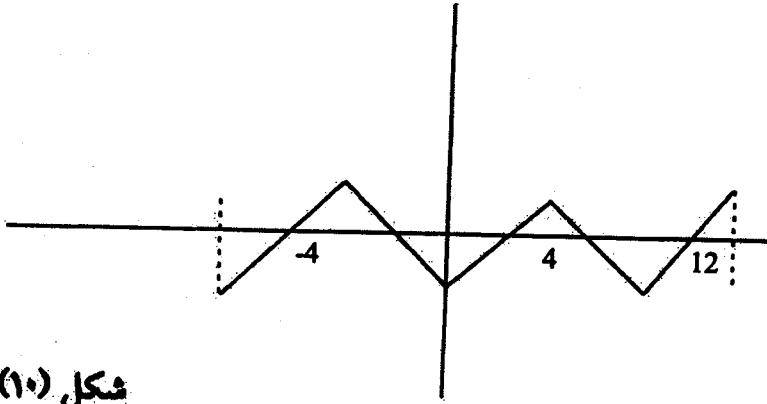
$$b_{2m} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \sin(2m) \frac{\pi}{\lambda} x dx = \frac{4}{4} \int_0^2 (2x - 4) \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = \frac{-8}{m\pi}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{-8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

ب) متسلسلة جيب التمام:

أى أن $f(-x) = f(x)$ ومن الشكل نرى أن $f(x + \lambda) = -f(x)$ ، وبذلك تكون متسلسلة فوريير كما في الشكل



شكل (١٠)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \cos(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \cos(2m+1) \frac{\pi}{4} x$$

حيث أن

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x) \cos(2m+1) \frac{\pi}{\lambda} x dx = \frac{4}{4} \int_0^2 (2x-4) \cos(2m+1) \frac{\pi}{4} dx \\ &= \frac{-16}{(2m+1)^2 \pi^2} \end{aligned}$$

وبذلك تكون متسلسلة فوريير هي

$$f(x) = \frac{-16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1) \frac{\pi}{4} x.$$

تمارين

١- أوجد متسلسلة فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x & , 0 < x < a \\ \frac{b}{\pi - a}(\pi - x) & , a < x < \pi \end{cases}$$

٢- أوجد متسلسلة فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , 0 < x < \pi \\ -e^{-(x+\pi)} & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

٣- عبر عن الدالة $f(x) = 1 - \sin x$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ في صورة متسلسلة فوريير فردية وزوجية الترافق .

٤- فك الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -6 \leq x \leq -3 \\ x + 3 & , -3 \leq x \leq 0 \\ 3 - x & , 0 < x \leq 3 \\ 0 & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

في صورة متسلسلة فوريير.

٥- أوجد متسلسلة فوريير للدوال

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & , 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} + x & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x & , \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

وأستنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{32}.$$

٦- فك الدالة $f(x) = \begin{cases} 0 & ..\pi < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ في صورة متسلسلة فوريير على
الـ $[-\pi, \pi]$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

وأثبت أن

٧- أوجد متسلسلة فوريير للدالة $f(x) = |x|$ على الفترة $[-b, b]$

٨- أوجد متسلسلة فوريير للدالة $f(x) = \begin{cases} -2x & ..\pi < x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

٩ - أوجد متسلسلة فوريير للدوال التالية :

$$(i) f(x) = x|x| \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$(ii) f(x) = e^x \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$(iii) f(x) = |x \sin x| \quad -6 \leq x \leq 6$$

$$(iv) f(x) = 2x + 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(v) f(x) = \begin{cases} 0 & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$(vi) f(x) = \begin{cases} 0 & -4 \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

الباب التاسع

مسائل شترم ليوفيل

Liouville - Sturm Problem

الباب التاسع
مسائل شترم ليوفيل
Sturm-Liouville Problem

١- مقدمة :

نعتبر مسألة القيمة الحدية التالية :

١- معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية على الصورة :

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (1)$$

حيث p و q و r دوال حقيقية بحيث p لها مشتقة متصلة و q و r دالتان متصلتان و $p > 0$ و $r > 0$ لكل قيم x على الفترة $a \leq x \leq b$ و λ بارامتر لا يعتمد على x .

١- شرطان حديان

$$\left. \begin{aligned} A_1 y(a) + A_2 y'(a) &= 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

حيث A_1 و A_2 و B_1 و B_2 ثوابت بحيث إن A_1 و A_2 لا يتلاشيان معاً وكذلك B_1 و B_2 لا يتلاشيان معاً.

تسمى هذه المسألة بمسألة شترم - ليوفيل أو نظام شترم - ليوفيل.

٢- أمثلة

مثال (١):

لنفترض الآن مسألة القيمة الحدية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (3)$$

$$y(0) = 0, y'(\pi) = 0 \quad (4)$$

وهي مسألة شترم - ليوفيل، ويمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة .

$$\frac{d}{dx} \left(1 \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \left(0 + \lambda \cdot 1 \frac{dy}{dx} \right) y = 0$$

أي أن $p = 1$ و $q = 0$ و $r = 1$ والشروط الحدية (4) حالة خاصة من الشروط (2).

مثال (2) :

ليكن لدينا مسألة شترم - ليوفيل :

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + (2x^2 + \lambda x^3) y = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 3y(1) + 4y'(1) &= 0 \\ 5y(2) - 3y'(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

حيث $p = x$ و $q = 2x^2$ و $r = x^3$ و $a = 1$ و $b = 2$ و $A_1 = 3$ و $A_2 = 4$ و $B_1 = 5$ و $B_2 = -3$ ، ومن الواضح أن الحل البديهي $y = 0$ يحقق المعادلة والشروط المعطاة، لذلك نبحث عن الحل غير البديهي (غير الصفري) الذي يحقق المعادلة والشروط المعطاة ويلاحظ أن هذا الحل يعتمد على λ .

مثال (3) :

أوجد الحلول غير البديهية لمسألة شترم ليوفيل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (3)$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0 \quad (4)$$

الحل :

سندرس ثلاث حالات منفصلة وهي $\lambda > 0$ و $\lambda < 0$ ، $\lambda = 0$ (i) في هذه الحالة نؤول المعادلة التفاضلية (3) إلى

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

ويكون حلها هو
(7)

$$y = c_1 + c_2 x$$

وباستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = c_1 = 0, y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0$$

وهذا يؤدي إلى $c_1 = c_2 = 0$ وبذلك نحصل على الحل الصفري أي نرفض هذا الحل.
(ii) $\lambda < 0$ ، في هذه الحالة تكون المعادلة المساعدة $m^2 + \lambda = 0$ و جذراها هما $\pm \sqrt{-\lambda}$ ، وحيث إن $\lambda < 0$ ، فإن هذين الجذرين حقيقيان وغير متساويين وبوضع $\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ، فيكون الحل هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \quad (8)$$

و باستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0,$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\alpha \pi} + c_2 e^{-\alpha \pi} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ ، وهذا يؤدي إلى الحل الصفري ونرفض هذا الحل أيضاً .

(iii) $\lambda > 0$ ، في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة المساعدة هما $\pm \sqrt{\lambda}i$ ويكون الحل على الصورة .

$$y = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x \quad (9)$$

باستخدام الشرط $y(0) = 0$ نحصل على $c_2 = 0$ ، وباستخدام الشرط $y(\pi) = 0$ فنحصل على $c_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ في هذه الحالة لا نأخذ $c_1 = 0$ و إلا حصلنا على الحل الصفري، وهو غير مطلوب ولذلك نضع $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ ، فإذا كان $n > 0$ ، فإن $\sin n\pi = 0$ فقط إذا كان n عدد صحيح $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $\sqrt{\lambda} = n, n = 1, 2, 3, \dots$ وعلى ذلك

$$\lambda = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

تسمى هذه القيمة بالقيم الذاتية (Characteristic values) ويسمى الحل غير الصفري المناظر بالدوال الذاتية (المميزة) (Characteristic functions). وبذلك تكون الدوال الذاتية $y = c_n \sin nx, n = 1, 2, 3, \dots$ حيث $c_n, n = 1, 2, 3, \dots$ ثوابت اختيارية غير صفرية.

مثال (٤):

إوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية لمسألة شترم - ليوفيل

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\lambda}{x} y = 0 \quad (11)$$

$$y'(1) = 0, \quad y'(e^{2x}) = 0 \quad (12)$$

حيث λ بارامتر غير سالب.

الحل:

سوف ندرس الحالتين $\lambda = 0$ و $\lambda > 0$.

إذا كانت $\lambda = 0$ ، فإن المعادلة التفاضلية (11) تؤول إلى $\frac{d}{dx}(x \frac{dy}{dx}) = 0$ ، ويكون حلها العام هو

$$y = c \ln|x| + c.$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان. إذا طبقنا الشروط (12) لهذا الحل نجد أن في كليهما $c = 0$ ولكن أي منها لم يضع أي قيود على c ، وبالتالي $\lambda = 0$ تعطي الحل $y = c_1$ ، حيث c_1 ثابت اختياري. وعلى ذلك يكون $\lambda = 0$ القيمة الذاتية والدالة الذاتية المناظرة هي $y = c_1$.

أما إذا كانت $\lambda > 0$ ، فإننا نرى أنه عندما تكون $x \neq 0$ ، فإن المعادلة تؤول إلى معادلة كوشى - أويلر

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (13)$$

وباستخدام التعويض $x = e^t$ فإن المعادلة (13) تؤول إلى

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda y = 0 \quad (14)$$

وحيث إن $\lambda > 0$ فإن الحل العام للمعادلة (14) يكون

$$y = c_1 \sin \sqrt{\lambda} t + c_2 \cos \sqrt{\lambda} t$$

وبالتالي عندما $\lambda > 0$ و $x > 0$ ، يمكن كتابة حل المعادلة (11) على الصورة

$$y = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) \quad (15)$$

والآن باستخدام الشروط الحدية (12)، فإننا من (15) نجد أن

$$y = \frac{c_1 \sqrt{\lambda}}{x} \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) - \frac{c_2 \sqrt{\lambda}}{x} \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) \quad (16)$$

حيث $x > 0$ باستخدام الشرط $y'(1) = 0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \ln 1) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \ln 1) = 0$$

أي $c_1 \sqrt{\lambda} = 0$ (لأن $\ln 1 = 0$)، لذلك يجب أن نأخذ

$$c_1 = 0 \quad (17)$$

وباستخدام الشرط الثاني $y'(e^{2\pi}) = 0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1 \sqrt{\lambda} e^{-2\pi} \cos(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}) - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-2\pi} \sin(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}) = 0$$

حيث إن $c_1 = 0$ من (17) وإن $\ln e^{2\pi} = 2\pi$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى

$$c_2 \sqrt{\lambda} e^{-2\pi} \sin(2\pi \sqrt{\lambda}) = 0$$

وحيث إن $c_1 = 0$ ، فإن اختيار $c_2 = 0$ يؤدي إلى الحل الصفري، لذلك نأخذ $\sin(2\pi \sqrt{\lambda}) = 0$ وبالتالي $2\pi \sqrt{\lambda} = n\pi$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$ وعلى ذلك

لتحقيق الشرط الثاني يجب أن يكون

$$\lambda = \frac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

وطبقاً لقيمة λ هذه و $x > 0$ فإن الحلول غير الصفرية

$$y = c_n \cos\left(\frac{n \ln x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

حيث $c_n, n = 1, 2, 3, \dots$ ثوابت اختيارية، وعلى ذلك فإن قيم $\lambda = 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, \dots$ معطاة بالعلاقة (18)، $n \geq 0$ هي القيم الذاتية للمسألة المعطاة، وأن الدوال $c_0, c_1 \cos\left(\frac{\ln x}{2}\right), c_2 \cos(\ln x), c_3 \cos\left(\frac{3 \ln x}{2}\right), \dots$ المعطاة بالمعادلة بالعلاقة (19)، $n \geq 0$ حيث $c_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ثوابت اختيارية غير صفرية هي الدوال الذاتية المناظرة.

في كل مسائل شترم - ليوفيل المعطاة بالأمثلة السابقة وجدنا عدداً لا نهائي من القيم الذاتية ونلاحظ أن في كل مثال يمكن ترتيب القيم الذاتية في صورة متتابعة تزايدية مطردة $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ بحيث $\lambda_n \rightarrow +\infty$ عندما $n \rightarrow +\infty$. وهذا الجدل يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية :

في مسائل شترم - ليوفيل (1) و (2) يكون لدينا:
(I) يوجد عدد لا نهائي من القيم الذاتية $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ للمسألة المعطاة، ويمكن ترتيبها على شكل متتابعة تزايدية مطردة

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

بحيث إن $\lambda_n \rightarrow +\infty$ عندما $n \rightarrow +\infty$

(II) طبقاً لكل قيمة $n = 1, 2, 3, \dots$ يوجد عائلة بارامتر واحد للدوال المميزة Φ_n . وكل من هذه الدوال المميزة معرفة على $a \leq x \leq b$ ، وأن أي دالتين مميزتين مناظرة لنفس القيمة الذاتية تكون إحداها مضاعفة للأخرى.

(III) كل دالة ذاتية Φ_n مناظرة للقيم الذاتية λ_n و $n = 1, 2, 3, \dots$ لها أصفار عددها $(n-1)$ في الفترة $a < x < b$.

ملحوظة: في المثال (٢) نلاحظ تحقق النتيجتين (I) و (II). من النظرية والقيم الذاتية اللانهائية $\lambda_n = n^2$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ يمكن ترتيبها في متتابعة تزايدية مطردة لا نهائية أي $1 < 4 < 9 < 16 < 25 < \dots$

وأن الدوال الذاتية المناظرة $c_n \sin(nx)$ و $c_n \neq 0$ المناظرة لقيم $\lambda_n = n^2$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ لها الخاصية المشار إليها.

وفي النتيجة (III) من النظرية نجد أن كل دالة ذاتية $c_n \sin(n\pi)$ ، $c_n \neq 0$ مناظرة إلى $\lambda_n = n^2$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ لها بالتمام $(n-1)$ صفر في الفترة $0 < x < \pi$ ، ونعرف أن $\sin(nx) = 0$ إذا وفقط إذا كان $nx = k\pi$ حيث k عدد صحيح وبالتالي أصفار $c_n \sin(nx)$ هي

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (20)$$

$$x = \frac{k\pi}{n}$$

والأصفار في (٢٠) التي تقع في الفترة المفتوحة $0 < x < \pi$ هي المناظرة لقيم $(n-1)$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ وهذا يؤكد النتيجة (III) من النظرية أي أن كل دالة ذاتية $c_n \sin(nx)$ لها $(n-1)$ صفر في الفترة المفتوحة.

تمارين

إوجد القيم والدوال الذاتية لمسائل شترم - ليوفيل التالية :

$$i) \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$ii) \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad L > 0$$

$$iii) \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

$$iv) \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

$$v) \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^x) = 0$$

$$vi) \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(e^x) = 0$$

$$vii) \frac{d}{dx} \left[(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{x^2 + 1} y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

[تتويه: ضع $x = \tan t$]

ملحق

ملحق

أولاً : دالة جاما Gamma Function

تعرف هذه الدالة بالتكامل

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1)$$

حيث x عدد حقيقي (وقد يكون عدد مركب ويحقق $\text{Rez} > 0$)

وعندما $x = 1$ تؤول المعادلة (1) إلى

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2)$$

وبإجراء تكامل المعادلة (1) بالتجزئي تحصل على

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

ومنها نجد أن

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (3)$$

ويوضع $n = 1, 2, 3, \dots$ في المعادلة (3) نحصل على

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3! \quad (4)$$

.....

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وهكذا

حيث n عدد صحيح

أما إذا كانت n عدد غير صحيح فإننا نستخدم (3) مع العلم بأن $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ومن ذلك يمكن حساب .

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

والعملية العكسية أيضاً :

$$\Gamma(1/2) = \frac{\Gamma(3/2)}{1/2} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{1/2} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2 + 1)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-3/2 + 1)}{-3/2} = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-3/2} = \frac{4}{3} \sqrt{\pi}$$

وهكذا

ومن السهولة التأكد من أن

$$\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \dots = \Gamma(-n) = \infty$$

حيث n عدد صحيح .

وترتبط دالة جاما بالعلاقات التالية

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi / \sin(\pi x)$$

$$\Gamma(x) \Gamma(x + 1/2) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2x)$$

ثانياً : دالة بيتا : Beta Function :

تعرف هذه بالتكامل

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0) \quad (5)$$

وترتبط بالعلاقات التالية

$$(i) B(p, q) = B(q, p)$$

$$(ii) B(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p+q)$$

$$(iii) B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1)$$

وإذا وضعنا $x = \sin^2 \theta$ في (5) نحصل على

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$$

المراجع

المراجع

أولاً : المراجع الأجنبية :

- (1) M.D. Raisinghania : Advanced Differential Equations. S. Chand and Company Ltd, India 1991.
- (2) E.D Rainville and P. Bedient : Elementary Differential Equations. Macmillan Pub. Co. New York, 1980.
- (3) M. Rao: Ordinary Differential Equations John Wiley and Sons. N.Y 1989.
- (4) S. Ross : Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons. N.Y 1990.

ثانياً : المراجع العربية :

- (٥) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم) الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د. حسن العويضي ، د. عبد الوهاب عباس (٢٠٠١) القاهرة .
- (٦) نظريات المعادلات التفاضلية د. رحمة عبد الكريم ، مطبوعات جامعة الملك سعود ، ١٤٠٨ هـ .
- (٧) نظريات وسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم) فرانك أيرز ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ١٩٩٧ م .
- (٨) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الأول : د. حسن العويضي - د. عبد الوهاب عباس ، د. سناء علي زارع ، دار الرشيد ، ٢٠٠٥ .



مدونة ملحوظة