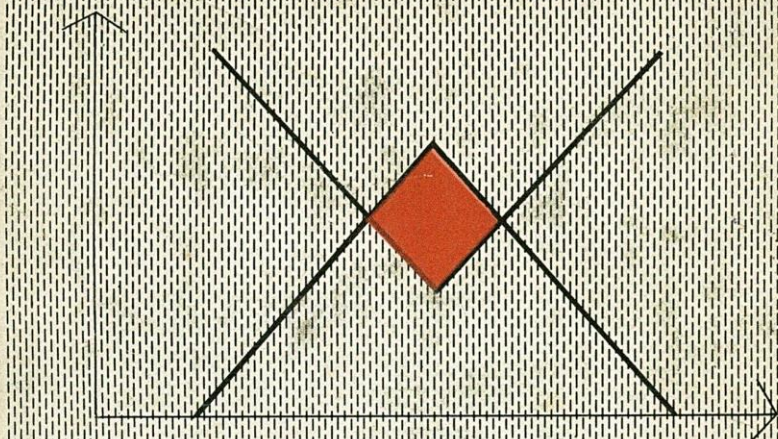




معادلات الفيزياء الرياضية



١. تيجونوف وا. ساماركي

يتناول هذا الكتاب دراسة مسائل
الفيزياء الرياضية التي تتّوّل إلى معادلات
بالمشتقات الجزئية . وقد قُسمت مادة الكتاب
إلى أبواب حسب أنماط هذه المعادلات .
يُعيث تبدأ دراسة كل نمط منها بعل أبسط
المسائل الفيزيائية التي تتّوّل إلى معادلة من
النمط موضع البحث . ونعصر المؤلفان على
مراعاة الدقة الرياضية في صياغة المسائل
وكذلك شمول التفسير الفيزيائي لمغزى النتائج
التي يعصل عليها . كما زود كل باب من
أبواب الكتاب بعدد من المسائل والأمثلة .
وقد تمّ تأليف الكتاب على أساس
محاضرات ألقيت بكلية الفيزياء للجامعة
موسكو .



دلر • مير • للطباعة والنشر

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I

Издательство «Наука»
Москва

١. تيخونوف وا. سمارسكي

معادلات الفيزياء الرياضية

١

ترجمة

الدكتور أحمد صادق القرماني

دار «مير» للطباعة والنشر

الاتحاد السوفيتي - موسكو

إلى القراء الأعزاء

تصدر دار « مير » للطباعة والنشر الكتب العلمية والتقنيّة المختارة من أفضل المراجع الجامعية وكذلك الكتب العلمية المبسطة .

ويمكانكم الحصول على أسماء هذه الكتب من الكتالوجات التي تنشرها الدار باللغات العربية والإنجليزية والفرنسية والإسبانية .

ويسرّ دلو « مير » أن تكتبوا إليها عن رأيكم في هذه الكتب ، حول مضمونها وترجمتها وتسلوينا ، وتكون شاكرة لكم لو أبديتم لها ملاحظاتكم وانطباعاتكم .

عنواننا : الاتحاد السوفيتي - موسكو ١١٠

بيري ريمسكي بيربولوك ٢

на арабском языке

© حقوق الترجمة إلى اللغة العربية محفوظة لدار « مير »

١٩٨٦

مقدمة

تقدم دار « مير » للطباعة والنشر هذا الكتاب في طرق الفيزياء الرياضية في جزأين وهو يعتبر مرجعاً موسعاً في هذا الموضوع لطلبة كليات الهندسة والعلوم وللمتخصصين في الفيزياء والرياضة التطبيقية والبحث والعلوم الهندسية .

إن موضوعات الفيزياء الرياضية لترتبط ارتباطاً وثيقاً بدراسة مختلف العمليات الفيزيائية كذلك التي تدرس في الهيدروديناميكا ونظرية المرونة والكهروديناميكا وغيرها . وتحتوى كل المسائل الرياضية الناشئة عند دراسة هذه العمليات على عناصر مشتركة كثيرة هي ما يشكل محتوى الفيزياء الرياضية ، مع توضيح الاختلافات بين كل عملية وأخرى التي توجد خاصة في مراحل بداية ونهاية العملية الفيزيائية . وتعتبر طرق البحث التي تميز هذا العلم طرقاً رياضية من حيث الجوهر .

وفي هذا الكتاب تدرس مسائل الفيزياء الرياضية التي تؤدي إلى معادلات تفاضلية جزئية . وقد رتبت أبواب الكتاب بحيث تناظر الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية وتبدأ دراسة كل نمط بالمسائل الفيزيائية المبسطة التي تؤدي إلى المعادلات من هذا النمط .

وهتم الكتاب بالصياغة الرياضية للمسائل والشرح الدقيق والوافي لحل المسائل وتفسير النتائج تفسيراً فيزيائياً .

والجزء الأول من الكتاب يحتوي على دراسة الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية والمسائل الفيزيائية المؤدية إليها وطرق حلها ويركز بشكل أساسي على المسائل المصاغة في بعد واحد أو بعدين (في المستوى) . وفي نهاية كل باب توجد مسائل تهدف إلى تمرين القارئ على اكتساب المهارة اللازمة لحل المسائل بنفسه ، كما توجد ملاحق تعطى فيها أمثلة على تطبيق الطرق المشروحة لحل مختلف مسائل الفيزياء والتكنيك .

الباب الأول

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

يؤدي الكثير من مسائل الفيزياء الرياضية إلى معادلات تفاضلية جزئية . وتصادفنا المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية أكثر من غيرها . وفي هذا الباب سندرس تصنيف هذه المعادلات .

بند ١ - تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

فقرة ١ : المعادلات التفاضلية في متغيرين مستقلين . نورد التعريفات اللازمة .
المعادلة في المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية في متغيرين مستقلين x, y هي العلاقة بين الدالة المجهولة $u(x, y)$ ومشتقاتها الجزئية حتى الرتبة الثانية بما في ذلك المشتقات من الرتبة الثانية نفسها * :

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

وبالمثل نكتب المعادلة في حالة عدد أكبر من المتغيرات المستقلة .
والمعادلة تسمى خطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا إذا كانت على الصورة :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

حيث a_{11}, a_{12}, a_{22} - دوال في x و y .

* نستخدم هنا الرموز التالية للمشتقات

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots$$

وإذا كانت المعاملات a_{11}, a_{12}, a_{22} تعتمد ليس فقط على x, y وإنما هي مثل F_1 دوال في x, y, u, u_x, u_y فإن مثل هذه المعادلة تسمى بمعادلة شبه خطية.

وتسمى المعادلة خطية إذا كانت خطية بالنسبة إلى المشتقات من الرتب العليا u_{xy}, u_{yx}, u_{yy} وبالنسبة إلى الدالة u ومشتقاتها الأولى u_x, u_y أيضاً :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \quad (2)$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - دوال فقط في x و y .

وإذا كانت معاملات المعادلة (2) لا تعتمد على x و y فإنها تكون عبارة عن معادلة خطية بمعاملات ثابتة. والمعادلة تسمى متجانسة إذا كانت $f(x, y) = 0$.

وبواسطة تحويل المتغيرات :

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

الذى يسمح بتحويل عكسي نحصل على معادلة جديدة تكافئ المعادلة الأصلية. ومن الطبعي أن نطرح السؤال التالى : كيف نختار ξ و η بحيث تصبح للمعادلة في هذين المتغيرين أبسط صورة ؟

في هذه الفقرة سنجيب على هذا السؤال للمعادلات الخطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا على الصورة (1) في المتغيرين المستقلين x و y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

وبتحويل المشتقات إلى المتغيرين الجديدين نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\xi\xi} \xi_{xx} + u_{\eta\xi} \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\xi\eta} \xi_{xy} + u_{\eta\xi} \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\xi\eta} \xi_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_{yy}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

وبالتعويض بقيم المشتقات من (3) في المعادلة (1) نحصل على :

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (4)$$

حيث

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \end{aligned}$$

أما الدالة $\bar{F}$ فلا تعتمد على المشتقات الثانية. ونشير إلى أنه إذا كانت المعادلة الأصلية خطية أى أن :

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

فإن $\bar{F}$ تكون على الصورة

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

أى تظل المعادلة خطية*

نختار المتغيرين ξ, η بحيث يصبح المعامل $\bar{a}_{11}$ مساوياً للصفر. ندرس المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى :

$$a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xx_y + a_{22}x_y^2 = 0. \quad (5)$$

نفرض أن $z = \varphi(x, y)$ حل خاص ما لهذه المعادلة. فإذا وضعنا $\xi = \varphi(x, y)$ فإنه من الواضح أن المعامل $\bar{a}_{11}$ يكون مساوياً للصفر. وبذلك ترتبط المسألة المذكورة أعلاه المتعلقة باختيار متغيرين مستقلين جديدين بمحل المعادلة (5).

نثبت المأخوذتين (lemmas) التاليتين :

١ - إذا كانت $z = \varphi(x, y)$ حلاً خاصاً للمعادلة

$$a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xx_y + a_{22}x_y^2 = 0,$$

* نشير إلى أنه إذا كان تحويل المتغيرات خطياً فإن $\bar{F} = F$ وذلك لأن المشتقات الثانية بالمتغيرين ξ و η في العلاقات (3) تكون في هذه الحالة مساوية للصفر ولا نحصل $\bar{F}$ على حدود إضافية من تحويل المشتقات الثانية.

فإن العلاقة $\varphi(x, y) = C$ تكون عبارة عن تكامل عام للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (6)$$

٢- إذا كانت $\varphi(x, y) = C$ تكاملاً عاماً للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

فإن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5).

نثبت المأخوذة الأولى. حيث إن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5) فإن المتساوية

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0 \quad (7)$$

تعتبر متطابقة : فهي تتحقق لجميع x, y في تلك المنطقة التي يعطى فيها الحل .
والعلاقة $\varphi(x, y) = C$ تعتبر تكاملاً عاماً للمعادلة (6) إذا كانت الدالة المحددة من
العلاقة الضمنية $\varphi(x, y) = C$ تحقق المعادلة (6) . نفرض أن

$$y = f(x, C)$$

هي هذه الدالة ، عندئذ يكون

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \right]_{y=f(x, C)} \quad (8)$$

حيث يشير القوسان والرمز $y = f(x, C)$ إلى أن المتغير y في الطرف الأيمن
للمتساوية (8) لا يعتبر متغيراً مستقلاً ، وإنما تكون له قيمة مساوية $f(x, C)$.
ومن هنا يتبع أن $y = f(x, C)$ تحقق المعادلة (6) لأن

$$\begin{aligned} a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} &= \\ &= \left[a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C)} = 0, \end{aligned}$$

وذلك لأن الصيغة في القوسين المربعين تساوى الصفر لجميع قيم x, y وليس فقط
عندما $y = f(x, C)$.

نثبت المأخوذة الثانية . نفرض أن $\varphi(x, y) = C$ هو التكامل العام للمعادلة (6) . نثبت أن

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (7')$$

لأية نقطة (x, y) . نفرض أن (x_0, y_0) نقطة ما معطاة . وإذا أثبتنا أن في هذه النقطة تتحقق المتساوية (7') فإنه سيستج من هنا وفقاً للطابع الاختياري للنقطة (x_0, y_0) ان المتساوية (7') هي متطابقة وان الدالة $\varphi(x, y)$ تعتبر حلاً للمعادلة (7') . نجد من النقطة (x_0, y_0) منحنى تكاملياً للمعادلة (6) وذلك بفرض $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ وبدراسة المنحنى $y = f(x, C_0)$. من الواضح أن $y_0 = f(x_0, C_0)$. ويكون لدينا لجميع نقط هذا المنحنى مايلي :

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \\ = \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C_0)} = 0.$$

وبفرض أن $x = x_0$ في المتساوية الأخيرة نحصل على :

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

وهو المطلوب إثباته * .

والمعادلة (6) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) ، ونسمى تكاملاتها بالمميزات .

وبفرض أن $\varphi(x, y) = \text{const}$ حيث $\varphi(x, y) = \text{const}$ هو التكامل العام للمعادلة (6) نجعل بذلك معامل $u_{\xi\xi}$ مساوياً للصفر . وإذا كان $\varphi(x, y) = \text{const}$ تكاملاً عاماً آخر للمعادلة (6) لا يعتمد على $\varphi(x, y)$ فإننا إذا فرضنا أن $\eta = \varphi(x, y)$ نجعل معامل $u_{\eta\eta}$ يساوى الصفر أيضاً .

* . الارتباط الثابت بين المعادلتين (5) و (6) يكافئ الارتباط المعروف بين المعادلة التفاضلية الخطية في المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى وبين مجموعة المعادلات التفاضلية العادية . ويمكن التأكد من ذلك بتحويل الطرف الأيسر للمعادلة (5) إلى حاصل ضرب صيغتين تفاضليتين خطيتين (انظر كتاب ستياكوف والمعادلات التفاضلية « طبعة دار «مير» »).

والمعادلة (6) تحلل إلى معادلتين :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (10)$$

وتحدد إشارة الصيغة تحت الجذر نوع المعادلة

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \quad (1)$$

ونسمى هذه المعادلة في النقطة M بالمعادلة من النمط الزائدى إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ في النقطة M ومن النمط الناقصى إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ في النقطة M ومن النمط المكافئ إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ في النقطة M .

وليس من الصعب التحقق من صحة العلاقة

$$D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2$$

التي تنتج منها لا متغيرة (ثبات) نوع المعادلة عند تحويل المتغيرات لأن المحدد الدالى (الجاكوبيان) D لتحويل المتغيرات لا يساوى الصفر. وقد تنمى المعادلة الواحدة إلى أعماط مختلفة في النقط المختلفة من منطقة تعريفها.

ندرس المنطقة G التي يكون للمعادلة في جميع نقطها نفس النمط الواحد. ويمر بكل نقطة من نقط المنطقة G ميزتان ، علماً بأن الميزتين للمعادلات من النمط الزائدى (الزائدية) تكون حقيقتين ومختلفتين ، أما للمعادلات من النمط الناقصى (الناقصة) فتكون الميزتان مركبتين ومختلفتين ، وللمعادلات من النمط المكافئ (المكافئة) فتكون الميزتان حقيقتين ومنطقتين على بعضها.

ندرس بالتفصيل كل حالة من هذه الحالات على انفراد.

١ - للمعادلة من النمط الزائدى يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ويكون الطرفان

• هذه للمصطلحات مستعارة من نظرية التحنيات من الرتبة الثانية.

الأيمنان للمعادلتين (9) و (10) حقيقيين ومختلفين. والتكاملان العامان لها
 $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$ بمقدان عائلتين حقيقتين من المميزات.
 بفرض أن

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (11)$$

نحول المعادلة (4) بعد القسمة على معامل $u_{\xi\eta}$ إلى الصورة :

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2a_{12}} \quad \text{حيث} \quad u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$$

وهذه هي ما يسمى بالصورة القياسية لمعادلات النمط الزائدي*

وكثيراً ما تستخدم صورة قياسية أخرى. نضع

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

أي أن

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

* لكي يصبح من الممكن إدخال المتغيرين الجديدين ξ, η بدلالة الدالتين φ, ψ يجب التأكد من استقلال هاتين الدالتين عن بعضهما. والشرط الكافي لذلك هو أن يساوى المحدد الدالي للمناظر صفراً. نفرض أن المحدد الدالي

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

يساوى الصفر في نقطة ما M . عنئذ يكون صحيحاً تناسب بين صفى هذا المحدد أى أن :

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

ولكن ذلك مستحيل لأن

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \\ (a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(وعند ذلك نحى أن نعتبر $a_{11} \neq 0$ وهو أمر لا يعد تعديلاً لعمومية المسألة). ومن ثم أثبتت استقلالية الدالتين φ, ψ عن بعضهما.

حيث α, β متغيران جديداً . عندئذ يكون

$$u_{\xi} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} + u_{\beta}), \quad u_{\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} - u_{\beta}), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

ونتيجة لذلك تأخذ المعادلة (4) الصورة :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

٢ - للمعادلات من النمط المكافئ يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ، وتنطبق المعادلتان (9) و (10) فنحصل على تكامل عام واحد للمعادلة (6) :

$$\varphi(x, y) = \text{const} \quad \text{نضع في هذه الحالة :}$$

$$\xi = \varphi(x, y) \quad , \quad \eta = \eta(x, y),$$

حيث $\eta(x, y)$ أية دالة لا تعتمد على φ . وعند ذلك الاختيار للمتغيرين يكون المعامل

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

وذلك لأن $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ ، ومن هنا يتبع أن

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

وبعد قسمة طرفي المعادلة (4) على معامل $u_{\eta\eta}$ نحصل على الصورة القياسية للمعادلة من النمط المكافئ

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

وإذا لم تدخل u_{ξ} في الطرف الأيمن فإن هذه المعادلة تصبح معادلة تفاضلية عادية تعتمد على ξ كبارامتر.

٣ - للمعادلة من النمط الناقصى يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ويكون الطرفان الأيمنان للمعادلتين (9) و (10) مركبين . نفرض أن

$$\varphi(x, y) = C$$

هو التكامل المركب للمعادلة (9) عندئذ يكون

$$\varphi^*(x, y) = C$$

حيث φ^* الدالة المرافقة للدالة φ ، وهى عبارة عن التكامل العام للمعادلة المرافقة (10) . ننتقل إلى المتغيرات المركبة بفرض

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

عندئذ تتحول المعادلة من النمط الناقصى إلى نفس الصورة التى تتحول إليها المعادلة الزائدية .

ولكى لا نتعامل مع المتغيرات المركبة ندخل متغيرين جديدين α, β يساويان :

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$$

ومن ثم يكون

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

وفى هذه الحالة يكون

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \\ = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \end{aligned}$$

أى أن

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

وتأخذ المعادلة (4) بعد قسمة طرفيها على معامل $u_{\alpha\alpha}$ الصورة*

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

* تعتبر مثل هذه التحويلات قانونية فقط فى تلك الحالة عندما تكون معاملات المعادلة (1) دوال تحليلية . بالفعل فإنما كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ فإن الطرفين الأيمنين للمعادلتين (9) و (10) مركبان . وبالتالي يجب أن تكون الدالة y قيم مركبة . ويمكن التحدث عن حل هذه المعادلات فقط عندما تكون المعاملات $a_{12}(x, y)$ معرفة لقيم y المركبة . وعند تحويل المعادلات الناقصى إلى الصورة القياسية سنكتفى بحالة المعاملات التحليلية .

وبذلك فوقاً لإشارة الصيغة $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ توجد الصور القياسية التالية للمعادلة (1) :

$$u_{xy} = \Phi \text{ أو } u_{xx} - u_{yy} = \Phi : (\text{النمط الزائدى}) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi : (\text{النمط الناقصى}) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

$$u_{xx} = \Phi : (\text{النمط المكافئ}) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

فقرة ٢ : تصنيف المعادلات من الرتبة الثانية فى عدة متغيرات مستقلة .
ندرس المعادلة الخطية ذات المعاملات الحقيقية :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (12)$$

حيث a, b, c, f هى دوال فى $x_1, x_2, \dots, x_n$. ندخل متغيرات مستقلة جديدة ξ_k . بفرض أن

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n).$$

عندئذ يكون

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

حيث

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات فى المعادلة الأصلية نحصل على :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0$$

حيث

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

ندرس الصورة التربيعية

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (13)$$

التي تساوى معاملاتها المعاملات a_{ii} للمعادلة الأصلية في نقطة ما $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$.
وبإجراء التحويل الخطي التالي للمتغير y :

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \eta_k,$$

نحصل للصورة التربيعية على صيغة جديدة :

$$\bar{a}_{ii}^0 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}^0 a_{il}^0 a_{ll}^0, \quad \text{حيث} \quad \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

وبذلك تتغير معاملات الجزء الرئيسى من المعادلة مثل تغير معاملات الصورة التربيعية عند التحويل الخطي .

وكما هو معلوم ، يمكن ، باختيار تحويل خطي مناسب ، تحويل المصفوفة (a_{ij}^0) للصورة التربيعية إلى الصورة القطرية التي يكون فيها

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 0 \quad \text{أو} \quad |\bar{a}_{ii}^0| = 1$$

$$\bar{a}_{ii}^0 = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n).$$

ووفقاً لقانون القصور يكون عدد المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ الموجبة والسالبة والمساوية للصفر في الشكل القياسى للصورة التربيعية عدداً لا متغيراً بالنسبة للتحويل الخطي .

والمعادلة (12) في النقطة M_0 تسمى بالمعادلة من النمط الناقصى إذا كانت كل المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ ذات إشارة واحدة ، وتسمى بالمعادلة من النمط الزائدى (أو النمط الزائدى الاعتيادى) إذا كان $n-1$ من المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ لها إشارة واحدة ومعامل واحد إشارته مضادة لها . وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط فوق الزائدى (ultra - hyperbolic) إذا كان من بين $\bar{a}_{ii}^0$ يوجد m معامل لها إشارة واحدة ، و $n-m$ معامل لها إشارة مضادة $(1 < m, n-m)$. وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط المكافئ إذا كان ولو معامل واحد من المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ مساوياً للصفر .

نختار المتغيرات المستقلة الجديدة ξ بحيث يكون في النقطة M_0 :

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = a_{ik}^0,$$

حيث α_{ik}^0 هي معاملات التحويل التي تحول الصورة التربيعية (13) إلى الصورة القياسية (على سبيل المثال بفرض أن $\xi_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}^{(0)} x_i$) فيتج أن المعادلة في النقطة M_0 وفقاً لنمطها تتحول إلى إحدى الصور القياسية التالية :

(النمط الناقص) $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} + \Phi = 0$

(النمط الزائدى) $u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_i x_i} + \Phi$

(النمط فوق الزائدى) $\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (m > 1, n - m > 1)$

(النمط المكافئ) $\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0)$

ولن ندرس هنا التقسيم الأكثر تفصيلاً للمعادلات من النمط المكافئ إلى معادلات ناقصة مكافئة ، وزائدية مكافئة والخ .

وهكذا ، فإذا كانت المعادلة (12) تنتمى في نقطة ما M إلى نمط معين فإنه يمكن تحويلها إلى الصورة القياسية المناظرة في هذه النقطة .

ندرس بتفصيل أكثر موضوع إمكانية تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية في جوار ما للنقطة M إذا كانت المعادلة في جميع نقط هذا الجوار تنتمى إلى نمط واحد .

إذا أردنا تحويل المعادلة في منطقة ما إلى الصورة القياسية اضطررنا إلى إخضاع الدوال $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$ إلى العلاقات التفاضلية $\bar{a}_{kl} = 0$ للقيم $k \neq l$ (أى يجب عندئذ أن تحقق الدوال ξ_i المعادلات التفاضلية $\bar{a}_{kl} = 0$ في حالة $k \neq l$) . وعدد هذه الشروط المساوى $n(n-1)/2$ يفوق العدد n للدوال التي ينبغي تعديدها ξ_i عندما يكون $n > 3$. وفي حالة $n = 3$ يمكن بوجه عام جعل العناصر غير القطرية في المصفوفة $(\bar{a}_{ik})$ مساوية للصفر غير أن العناصر القطرية قد تكون عند ذلك مختلفة فيما بينها .

وبالتالى فعند $n \geq 3$ لا يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية في جوار النقطة M . وعند $n = 2$ يمكن جعل المعامل غير القطرى الوحيد مساوياً للصفر وتحقيق شرط تساوى المعاملين القطريين لبعضها وهو ما تم إجراؤه في الفقرة ١ .

وإذا كانت معاملات المعادلة (12) ثابتة فإننا بتحويلنا هذه المعادلة (12) إلى الصورة القياسية في نقطة واحدة M نحصل على معادلة محولة إلى الصورة القياسية في كل منطقة تعريف المعادلة .

فقرة ٣ : الصورة القياسية للمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة . في حالة المتغيرين المستقلين تكون المعادلة الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة على الصورة :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

وتناظرها معادلة مميزة ذات معاملات ثابتة . ولذا فإن المميزين تكونان عبارة عن مستقيمين :

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2.$$

وبواسطة التحويل المناسب للمتغيرات تتحول المعادلة (14) إلى إحدى الصور البسيطة التالية :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad (\text{النمط الناقص}) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f &= 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f &= 0 \end{aligned} \right\} \text{أو} \quad (\text{النمط الزائدي}) \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad (\text{النمط المكافئ}) \quad (17)$$

ولتبسيط المعادلة أكثر من ذلك ندخل بدلاً من u دالة جديدة v :

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v$$

حيث λ و μ ثابتان لم يحددا بعد . عندئذ يكون

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v),$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v),$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات في المعادلة (15) واختصار $\mu\epsilon + \mu\eta$ نحصل على :

$$v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_{\epsilon} + (b_2 + 2\mu)v_{\eta} + \\ + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

ونختار البارامترين λ و μ بحيث يكون معاملان ، وليكونا مثلاً معاملي المشتقتين الأوليين ، مساويين للصفر ($\mu = -b_2/2$; $\lambda = -b_1/2$). ونتيجة لذلك نحصل على :

$$v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

حيث γ ثابت يعبر عنه بدلالة b_1, b_2, c و $f_1 = f e^{-(\lambda^2 + \mu^2)}$. وبإجراء عمليات مماثلة لحالتى (16) و (17) نحصل على الصور القياسية التالية للمعادلات ذات المعاملات الثابتة :

$$\left. \begin{aligned} v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & (\text{النمط الناقص}) \\ v_{\epsilon\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & (\text{النمط الزائدى}) \\ v_{\epsilon\epsilon} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & \text{أو} \\ v_{\epsilon\epsilon} + b_2 v_{\eta} + f_1 &= 0 & (\text{النمط المكافئ}) \end{aligned} \right\}$$

وكما ذكرنا فى الفقرة ٢ تحول المعادلة ذات المعاملات الثابتة فى حالة عدة متغيرات مستقلة

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

بواسطة التحويل الخطى للمتغيرات ، إلى الصورة القياسية لجميع نقاط تعريفها فى نفس الوقت . وبإدخال دالة جديدة v بدلاً من u

$$u = v e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

وباختيار λ_i بالطريقة اللازمة يمكننا تبسيط صورة المعادلة مما يوصلنا إلى صورة قياسية مشابهة لحالة $n = 2$.

مسائل على الباب الأول

١ - عين المناطق التي تكون فيها للمعادلة

$$u_{xx} + y u_{yy} = 0$$

من النمط الزائدي ومن النمط الناقصي ومن النمط المكافئ وحولها إلى الصورة القياسية في المنطقة التي تكون فيها زائدية .

٢ - حول إلى الصورة القياسية كلا من المعادلات :

- a) $u_{xx} + x y u_{yy} = 0$.
- b) $y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + y u_y = 0$.
- c) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$.
- d) $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$.
- e) $x u_{xx} + 2\sqrt{xy} u_{xy} + y u_{yy} - u_x = 0$.
- f) $(x-y) u_{xx} + (xy - y^2 - x + y) u_{xy} = 0$.
- g) $y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u_x = 0$.
- h) $\sin^2 y u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.
- i) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

٣ - حول إلى الصورة القياسية وبسط أكبر تبسيط ممكن المعادلة التالية :

$$a u_{xx} + 2a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0$$

حيث a, b, c ثوابت .

٤ - بإدخال البالة $v = u e^{\lambda x + \mu y}$ واختيار البارامترين λ, μ بالطريقة اللازمة بسط كلا من المعادلات التالية ذات المعاملات الثابتة :

- a) $u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + \gamma u = 0$.
- b) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_y + a u + b u_x$.
- c) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{yy} = a u_x + b u_y + \gamma u$.
- d) $u_{xy} = a u_x + b u_y$.

الباب الثاني

المعادلات من النمط الزائدى

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط الزائدى تصادفنا بكثرة فى المسائل الفيزيائية المتعلقة بالعمليات الذبذبية . والمعادلة من النمط الزائدى فى أبسط صورة لها

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

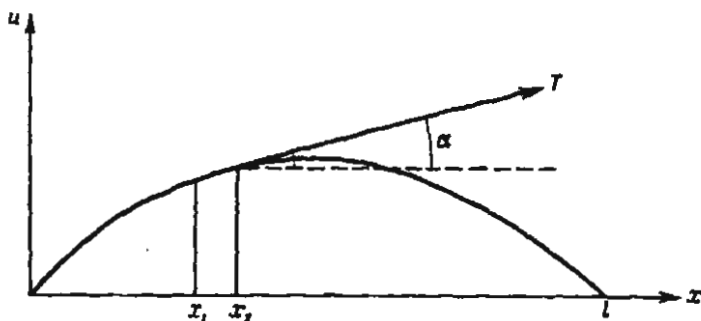
تسمى عادة بمعادلة ذبذبات الوتر . وفى هذا الباب ، كما فى الأبواب التالية ، سنكتفى بدراسة طائفة المعادلات الخطية .

بند ١ - أبسط المسائل المؤدية إلى معادلات من النمط الزائدى . صياغة المسائل الحدية

فقرة ١ : معادلة الذبذبات المتعرضة للصغيرة للوتر . يمكن تحديد كل نقطة من نقط وتر طوله ١ بقيمة إحداثيها الأفقى x . ويمكن وصف عملية ذبذبة الوتر بواسطة إعطاء مواضع نقط هذا الوتر فى مختلف اللحظات الزمنية . ويكفى لتعيين وضع الوتر فى اللحظة الزمنية t إعطاء مركبات متجه إزاحة النقطة x $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ فى اللحظة t .

سندرس أبسط أمثلة ذبذبات الوتر . فسنفترض أن إزاحات الوتر تقع فى مستوى واحد (x, u) وأن متجه الإزاحة u يكون عمودياً على المحور x فى أية لحظة زمنية . عندئذ يمكن وصف عملية الذبذبة بدالة واحدة $u(x, t)$ تميز الحركة الرأسية للوتر . وسنعتبر الوتر خيطاً مرناً قابلاً للانثناء . وتتلخص الصيغة الرياضية لمفهوم قابلية الوتر للانثناء فى أن الاجتهادات الناشئة فى الوتر تكون دائماً متجهة فى اتجاه المماس لمقطعه الجانبي اللحظى (شكل ١) . ويعبر هذا الشرط عن أن الوتر لا يقاوم الانثناء .

ويمكن حساب مقدار الشد الناشئ في الوتر نتيجة للمرونة وفقاً لقانون هوك .
وسندرس الذبذبات الصغيرة للوتر ونهمل مربع u_x بالمقارنة مع الواحد الصحيح .



شكل ١

نحسب بالاستعانة بهذا الشرط الاستطالة التي تحدث لجزء الوتر (x_1, x_2) .
وطول قوس هذا الجزء يساوى

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

وبذلك ففي حدود الدقة التي اصطالحنا عليها لا تحدث استطالة لأجزاء الوتر
خلال عملية الذبذبة . ومن هنا يتبع وفقاً لقانون هوك أن مقدار الشد T في كل
نقطة لا يتغير بتغير الزمن . نوضح كذلك أن الشد لا يعتمد على x ، أى أن

$$T(x) = T_0 = \text{const.}$$

نعين مسقطي الشد على المحورين u ، x (نرمز لها بالرمزين T_u ، T_x) :

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \tan \alpha = T(x) u_x,$$

حيث α هي زاوية ميل المماس للمنحنى $u(x, t)$ على المحور x . وعلى الجزء (x_1, x_2)
تؤثر قوى الشد والقوى الخارجية وقوى القصور . وبمجموع مساقط كل القوى على
المحور x يجب أن يكون مساوياً للصفر (نحن ندرس فقط الذبذبات المستعرضة) .

وحيث إن قوى القصور والقوى الخارجية تتجه وفقاً لافتراضنا على امتداد المحور u فإن

$$T(x_1) = T(x_2) \text{ أو } T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad (1)$$

ومن هنا وتبعاً لاختيارية x_1 و x_2 ينتج أن الشد لا يعتمد على x ، أى إنه لجميع قيم x و t يكون

$$T(x) = T_0. \quad (2)$$

وبعد هذه الملاحظات التمهيدية التى أوردناها نتقل إلى استنباط معادلة الذبذبات المستعرضة للوتر . نستعين بالقانون الثانى لنيوتن . إن مركبة كمية حركة جزء الوتر (x_1, x_2) على المحور u تساوى

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi,$$

حيث ρ الكثافة الخطية للوتر . تساوى التغير فى كمية الحركة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

بدفع القوى المؤثرة التى تتكون من الشد

$$T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$$

فى النقطتين x_1 و x_2 والقوى الخارجية التى سنعتبرها موزعة توزيعاً متصلاً بالكثافة (بالحمل) $F(x, t)$ المؤثرة على وحدة الأطوال . ونتيجة لذلك نحصل على معادلة الذبذبات المستعرضة لعنصر من الوتر ، فى صورة تكاملية :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفترض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة*
 $u(x, t)$. عندئذ تأخذ العلاقة (3) بعد تطبيق نظرية المتوسط مرتين الصورة :

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta t \Delta x,$$

حيث

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \quad a, t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

وباختصار $\Delta x \Delta t$ في الطرفين والانتقال إلى النهاية عندما $x_2 \rightarrow x_1, t_2 \rightarrow t_1$ نحصل
 على المعادلة التفاضلية للذبذبات المستعرضة للوتر :

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (4)$$

وفي حالة الكثافة الثابتة $\rho = \text{const}$ نكتب هذه المعادلة عادة على الصورة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right), \quad (5)$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (6)$$

هى كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتل . وفي حالة انعدام القوة الخارجية نحصل
 على معادلة متجانسة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

أو

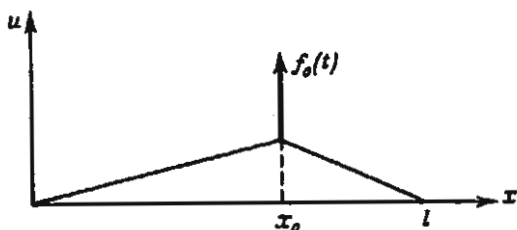
$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

تصف الذبذبات الحرة للوتر . وهذه المعادلة تعتبر أبسط مثال للمعادلة من النمط
 الزائدى .

* بافتراض قابلية الدالة للتفاضل مرتين نصلح فعليا على أننا سندرس فقط تلك الدوال التى لها هذه الخاصية . وبذلك يرتبط مثل هذا الافتراض بتحديد نطاق الظواهر الفيزيائية محل البحث ولكنه لا يحوى فى حد ذاته إقرارا بعدم وجود دوال تحقق المعادلة التكاملية للذبذبات دون أن يكون لها مشتقات ثانية . فمثل هذه الدوال توجد ولها أهمية عملية كبيرة . انظر تفصيل ذلك فى البند ٢ - فقرة ٧ .

وإذا أثرت في النقطة x_0 (حيث $x_1 < x_0 < x_2$) قوة مركزة $f_0(t)$ (شكل ٢) فإن المعادلة (3) تكتب في الصورة :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$



شكل ٢

وحيث إن سرعات نقط الوتر تكون محدودة فإن التكاملين في الطرف الأيسر لهذه المتساوية يؤولان إلى الصفر عندما $x_2 \rightarrow x_0$ و $x_1 \rightarrow x_0$ وتأخذ المتساوية (3) الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط واختصار Δt في طرفي المتساوية الناتجة والانتقال بعد ذلك إلى النهاية عندما $t_2 \rightarrow t_1$ نحصل على :

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

ومن هنا يتضح أن المشتقات الأولى يحدث لها انفصال في نقطة تأثير القوة المركزة ولا يكون للمعادلة التفاضلية معنى . وفي هذه النقطة يجب أن يتحقق شرطاً الترافق :

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= - \frac{1}{T_0} f_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

يعبر الشرط الأول منها عن اتصال الوتر ويعبر الثاني عن مقدار كسر الوتر في النقطة x_0 . والذي يعتمد على $f_0(t)$ والشد T_0 .

فقرة ٢ : معادلة الذبذبات الطولية للقضبان والأوتار . تكتب معادلات الذبذبات الطولية للوتر والقضيب والزنبرك في صورة واحدة . ندرس قضيبا يقع على الجزء $(0, l)$ من المحور x . ويمكن وصف عملية الذبذبات الطولية فيه بدالة واحدة $u(x, t)$ تعبر في اللحظة الزمنية t عن إزاحة النقطة التي كان إحداثيا الأفقي في وضع الاتزان هو x . وفي حالة الذبذبات الطولية تحدث هذه الإزاحة على امتداد القضيب . وسنفترض أثناء استنباط المعادلة ان الشد الناشئ خلال عملية الذبذبة يتبع قانون هوك .

نحسب الاستطالة النسبية لعنصر القضيب $(x, x + \Delta x)$ في اللحظة t . واحداثيا نهائى هذا العنصر في اللحظة t هما

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

والاستطالة النسبية تساوى

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t)$$

$$(0 \leq \theta \leq 1).$$

• يسمى المتغير الهندسى x المأخوذ هنا بمتغير لاجرانج . وفي حالة متغيرات لاجرانج تميز كل نقطة طبيعية للقضيب خلال كل العملية الفيزيائية بنفس الإحداثى الهندسى x . والنقطة الطبيعية التي كانت تشغل في اللحظة الابتدائية (في حالة الاتزان) الموضع x توجد في أية لحظة تالية t في النقطة ذات الإحداثى $X = x + u(x, t)$. وإذا ثبتنا نقطة هندسية ما A إحداثيا هو X فإن نقطة طبيعية مختلفة (ذات إحداثيات لاجرانج مختلفة x) ستوجد في هذه النقطة في اللحظات الزمنية المختلفة . وكثيرا ما تستخدم أيضا متغيرات أولير t و X حيث X الإحداثى الهندسى . فإذا كانت $U(X, t)$ إزاحة النقطة ذات إحداثى أولير X فإن إحداثى لاجرانج يكون موابيا

$$x = X - U(X, t).$$

ونورد مثلا لاستخدام إحداثيات أولير في الفقرة ٦ .

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نجد أن الاستطالة النسبية في النقطة x تتحدد بالدالة $u_x(x, t)$. ووفقاً لقانون هوك يكون الشد $T(x, t)$ مساوياً

$$T(x, t) = k(x) u_x(x, t), \quad (9)$$

حيث $k(x)$ معامل يونج (معامل المرونة) في النقطة x ($k(x) > 0$) . وبلاستعانة بالنظرية المتعلقة بالتغير في كمية الحركة نحصل على المعادلة التكاملية للذبذبات

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10) \end{aligned}$$

حيث $F(x, t)$ كثافة القوة الخارجية في وحدة الأطوال .

نفرض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. نطبق نظرية المتوسط ونجرب الانتقال إلى النهاية* عندما $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ و $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ فتوصل إلى المعادلة التفاضلية للذبذبات الطولية للقضيب**

$$[k(x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (11)$$

وإذا كان القضيب متجانساً ($k(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) فإن هذه المعادلة تكتب على الوجه التالي :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \right), \quad (12)$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (13)$$

* فيما بعد سنهمل التفاصيل المتعلقة بالانتقال إلى النهايات ، والتي سبق شرحها عند استنباط معادلة اللبذبات المستعرضة للوتر .

** يرتبط شرط صغر اللبذبات في هذه الحالة بمحدود صلاحية قانون هوك للتطبيق فقط . وفي الحالة العامة يكون $T = k(x, u_x) u_x$ فنحصل على معادلة شبه خطية

$$[k(x, u_x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

هى كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتلة .

فقرة ٣ : طاقة ذبذبات الوتر . نعين صيغة طاقة الذبذبات المستعرضة للوتر $E = K + U$ حيث K طاقة الحركة ، U طاقة الوضع . وعنصر الوتر dx الذى يتحرك بالسرعة $v = u_t$ يكون له طاقة حركة :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho(x)dx(u_t)^2 \quad (m = \rho dx).$$

وطاقة حركة الوتر كله تساوى

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (14)$$

وطاقة وضع الذبذبات المستعرضة للوتر ذى الشكل $u(x, t_0) = u_0(x)$ فى اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوى الشغل اللازم بذله لكى يتقل الوتر من وضع الاتزان إلى الوضع $u_0(x)$. نفرض أن الدالة $u(x, t)$ تعطى المقطع الجانبي للوتر فى اللحظة t علمًا بأن

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = T u_{xx} dx$$

يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t(x, t) dt$. والشغل الذى يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوى :

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt &= \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt. \end{aligned}$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى t من صفر حتى t_0 نحصل على

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt &= \\ = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt. \end{aligned}$$

ومن السهل توضيح معنى الحد الأخير من الطرف الأيمن لهذه المتساوية .
بالفعل فإن $T_0 u_x|_{x=0}$ هو مقدار الشد في طرف الوتر $x=0$ و $u_t(0,t)dt$ إزاحة
هذا الطرف ، والتكامل ،

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t|_{x=0} dt \quad (15)$$

هو عبارة عن الشغل اللازم بذله على إزاحة الطرف $x=0$. وللحد المناظر
للطرف $x=l$ معنى مماثل . وإذا كان طرفا الوتر مثبتين فإن الشغل على طرفي الوتر
يكون مساويا للصفر (عند ذلك يكون $u(0,t)=0$ و $u_t(0,t)=0$) . وبالتالي
لا يعتمد الشغل عند انتقال الوتر المثبت الطرفين من وضع الاتزان $u=0$ إلى
الوضع $u_0(x)$ على طريقة نقل الوتر إلى هذا الوضع ، ويكون مساويا :

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \quad (16)$$

أى لطاقة وضع الوتر في اللحظة $t=t_0$ بإشارة مضادة . وبذلك تكون الطاقة
الكلية للوتر مساوية

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \quad (17)$$

وبالمثل تماماً يمكن الحصول على صيغة طاقة الوضع للذبذبات الطولية لقضيب .
وجدير بالذكر أنه يمكن أيضاً الحصول عليها من صيغة طاقة وضع القضيب المرن

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l-l_0}{l_0} \right)^2 l_0$$

حيث l_0 الطول الابتدائي للقضيب ، و l طوله النهاى . ومن هنا ينتج مباشرة
أن

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

فقرة ٤ : استنباط معادلة الذبذبات الكهربائية في الموصلات . يتحدد مرور
التيار الكهربائى فى موصل ذى بارامترات موزعة ، بقوة التيار i ، والجهد v

الذين يعتبران دالتين في موضع النقطة x والزمن t . وبتطبيق قانون أوم على جزء طوله dx يمكن أن نكتب أن فرق الجهد في عنصر الموصل dx يساوى مجموع القوى الدافعة الكهربائية

$$-v_x dx = iR dx + l_t L dx, \quad (18)$$

حيث R و L هما المقاومة ومعامل الحث الذاتي لوحدة الأطوال . وكمية الكهرباء المارة في عنصر الموصل dx خلال الفترة الزمنية dt وهى :

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] dt = -i_x dx dt, \quad (19)$$

تساوى مجموع كمية الكهرباء اللازمة لشحن العنصر dx والكبيرة الفاقدة نتيجة عدم عزل الموصل عزلاً تاماً :

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)] dx + G dx \cdot v dt = (Cv_t + Gv) dx dt, \quad (20)$$

حيث G و C معامل السعة ومعامل التسرب لوحدة الأطوال ، علماً بأننا نعتبر كمية الفاقد متناسبة مع الجهد في نقطة الموصل المعنية .

ومن العلاقات (18) و (19) و (20) نحصل على مجموعة المعادلات :

$$\left. \begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Ll_t + Ri &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

التي تسمى بمجموعة المعادلات التلغرافية* .

وللحصول على معادلة واحدة نحدد الدالة t نفاضل المعادلة الأولى من (21) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى t مع ضربها في C . ويطرح ما ينتج مع افتراض ثبات المعاملات نحصل على :

$$l_{xx} + Gv_x - CLl_{tt} - CRi_t = 0.$$

* تعتبر هذه المعادلات تقريبية في إطار نظرية المجال الكهرومغناطيسى لأنها لا تأخذ في الاعتبار الدبلبات الكهرومغناطيسية في الوسط المحيط بالموصل .

وبالتعويض عن v_z بقيمتها من المعادلة الثانية من (21) نحصل على معادلة لقوة التيار

$$I_{xx} = CL I_H + (CR + GL) I_t + GRI. \quad (22)$$

وبالمثل تكون صورة المعادلة للجهد

$$v_{xx} = CL v_H + (CR + GL) v_t + GR v. \quad (23)$$

وتسمى المعادلة (22) أو (23) بالمعادلة التلغرافية. وإذا أمكن إهمال ما يفقد خلال العازل وإذا كانت المقاومة صغيرة جدًا ($G \approx R \approx 0$) فإننا نتوصل إلى معادلة الذبذبات المعروفة

$$v_H = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (24)$$

الفقرة ٥ : الذبذبات المستعرضة لغشاء. الغشاء (membrane) هو شريط مستو أو طبقة رقيقة مستوية لا تقاوم الثني والقص (shearing). لنأخذ غشاء مشدودًا على منحنى مستو C . وسندرس الذبذبات المستعرضة للغشاء التي عندها تكون الإزاحة عمودية على مستوى الغشاء.

نفرض أن ds هو عنصر قوس منحنى ما مأخوذ على سطح الغشاء وغير بالنقطة $M(x, y)$. ويؤثر على هذا العنصر شدة يساوي $\vec{T} ds$. ويقع المتجه T ، نتيجة لانعدام المقاومة للثني وللقص ، في المستوى المماس للسطح اللحظي للغشاء عموديًا على العنصر ds . ويمكن البرهان على أن انعدام المقاومة للقص يؤدي إلى أن مقدار الشد لن يكون معتمدًا على اتجاه العنصر ds ، ومن ثم يكون متجه الشد $T = T(x, y, z)$ دالة في x, y, z . وخواص المتجه T هذه تعتبر تعبيرًا رياضيًا عن انعدام المقاومة للثني وللقص.

وسندرس الذبذبات الصغيرة للغشاء ، بإهمال مربعات المشتقات الأولى u_x و u_y حيث تحدد الدالة $u(x, y, t)$ شكل الغشاء في اللحظة الزمنية t . ومن هذا الافتراض ينتج مباشرة أن $T_A(x, y, t)$ وهو مسقط الشد على المستوى (x, y) يساوي القيمة المطلقة للشد. بالقفل فعند أى وضع للقوس ds لا تفوق الزاوية

γ' بين المتجه T والمستوى (x, y) الزاوية γ المحصورة بين العمودى على سطح الغشاء فى النقطة (x, y) وبين المحور z . ولذا فإن :

$$\cos \gamma' \geq \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \approx 1,$$

أى أن $\cos \gamma' \approx 1$ ويكون

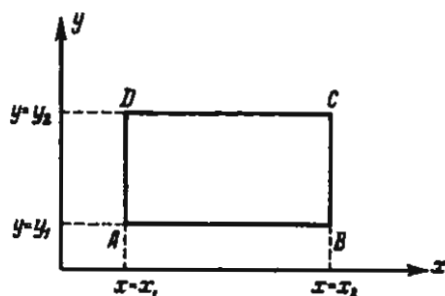
$$T_s(x, y, z, t) = T \cos \gamma' \approx T(x, y, z, t). \quad (25)$$

ومن الواضح أن المركبة الرأسية للشد تكون مساوية

$$T_s = T \frac{\partial u}{\partial n}.$$

نأخذ على سطح الغشاء عنصر مساحة مسطحة على المستوى (x, y) هو المستطيل $ABCD$ الذى تكون أضلاعه موازية لمحاور الإحداثيات (شكل ٣). وعلى هذا العنصر تؤثر قوة الشد التى تساوى :

$$T^* = \oint_{ABCD} T ds. \quad (26)$$



شكل ٣

ونتيجة لانعدام الحركة على امتداد المحورين x, y يكون مسقطا T^* على هذين المحورين مساويين للصفر :

$$\begin{aligned} T_x &= \int_B^C T(x_2, y, t) dy - \int_A^D T(x_1, y, t) dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\} dy = 0. \end{aligned}$$

وبالمثل

$$T_y = \int_{x_1}^{x_2} (T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)) dx = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وأخذ الطابع الاختياري للمساحة $ABCD$ في الاعتبار نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

أى أن الشد T لا يتغير عند تغير x, y ويمكن أن يعتمد فقط على t .

ومساحة أى عنصر في الغشاء في اللحظة الزمنية t تساوى في تقريرتنا :

$$\iint \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \approx \iint dx dy. \quad (28)$$

وبالتالى لا تحدث استطالة للغشاء خلال عملية الذبذبة ومن ثم يتبع وفقاً لقانون هوك أن الشد لا يعتمد على الزمن. وبذلك أثبتنا أن الشد لا يعتمد على المتغيرات x, y, t :

$$T(x, y, t) = \text{const} = T_0. \quad (29)$$

نتقل إلى استنباط معادلة ذبذبات الغشاء. نستعين بالنظرية المتعلقة بالتغير في كمية الحركة. نفرض أن S_1 مسقط جزء ما من الغشاء على المستوى (x, y) ، وأن C_1 هى حدود S_1 . وبمساواة التغير في كمية الحركة بدفع المركبات الرأسية لقوى الشد والقوة الخارجية المؤثرة بالكثافة $F(x, y, t)$ نحصل على معادلة ذبذبات الغشاء في الصورة التكاملية

$$\begin{aligned} \iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] \rho(x, y) dx dy = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} F dx dy dt, \end{aligned} \quad (30)$$

حيث $\rho(x, y)$ الكثافة السطحية للغشاء ، كثافة القوة الخارجية (في وحدة المساحات) .

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفرض أن للدالة $u(x, y, t)$ مشتقات ثانية متصلة . وبواسطة نظرية اوستروجرادسكى* يتحول التكامل المنحنى (على المنحنى) إلى تكامل سطحي (على السطح) :

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{S_1} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy,$$

ونتيجة لذلك تتحول المعادلة التكاملية للذبذبات إلى الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S_1} \{ \rho u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t) \} dx dy dt = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وبالطابع الاختياري للمساحة S_1 وللفترة الزمنية (t_1, t_2) نستنتج أن الصيغة داخل القوسين المزدوجين تطابق الصفر . وبذلك نصل إلى المعادلة التفاضلية للذبذبات الغشاء :

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \quad (31)$$

ويمكن كتابة معادلة ذبذبات الغشاء المتجانس في الصورة

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho} \right). \quad (32)$$

حيث $f(x, y, t)$ كثافة القوة في وحدة كتل الغشاء .

فقرة ٦ : معادلات الهيدروديناميكا والصوتيات . تستخدم الدوال $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$ وهي مركبات متجه السرعة v في النقطة (x, y, z) في اللحظة t (متغيرات أولير) بمثابة مميزات لحركة السائل . ونعتبر أيضاً الكثافة $\rho(x, y, z, t)$ والضغط $p(x, y, z, t)$ وكثافة القوى الخارجية $F(x, y, z, t)$ (إن وجدت) المنسوبة إلى وحدة الكتل ، مقادير مميزة لحركة السائل .

* انظر كتاب يسكونوف «التفاضل والتكامل» طبعة دار «مير» ، الجزء الثاني ، ص ٤٠٣ .

ندرس حجمًا ما T من السائل ونحسب القوى المؤثرة عليه . باهمال قوى الاحتكاك الناشئة من اللزوجة ، أى بدراسة سائل مثالي ، نحصل على صيغة لمحصلة قوى الضغط في صورة تكامل سطحي :

$$-\int_S p n dS, \quad (33)$$

حيث S سطح الحجم T ، n الوحدة الانبجائية للعمودى الخارجى . ونعطينا علاقة أوستروجرادسكى* :

$$-\int_S p n dS = -\int_T \int \text{grad } p d\tau. \quad (34)$$

وعند حساب عجلة نقطة ما من نقط السائل لا بد من الأخذ في الاعتبار حركة النقطة نفسها . نفرض أن $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ معادلة مسار هذه النقطة . نحسب مشتقة السرعة بالزمن

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v}{\partial z} v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v, \end{aligned}$$

حيث

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

وتسمى مثل هذه المشتقة بالزمن التى تأخذ في الاعتبار حركة جسيم الوسط (مادته) بالمشتقة المادية . وتعتبر معادلة حركة السائل عن الارتباط المعتاد بين عجلة الجسيمات والقوى المؤثرة عليها

$$\int_T \int \rho \frac{dv}{dt} d\tau = -\int_T \int \text{grad } p d\tau + \int_T \int \rho F d\tau, \quad (35)$$

* بالنظر حيث إن $p n = p \cos(n, x) i + p \cos(n, y) j + p \cos(n, z) k$ حيث i, j, k اتجاهات الوحدة في مجموعة الإحداثيات (x, y, z) لأن

$$\int_S p \cos(n, x) dS = \int_T \int \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

حيث التكامل الأخير هو عبارة عن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الحجم T . ومن هنا ووفقاً للطابع الاختياري للحجم T نحصل على معادلة حركة السائل المثالي في صورة أويلر :

$$v_t + (v \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + F. \quad (36)$$

نتقل إلى استنباط معادلة الاتصال . إذا لم يوجد داخل T أية منابع أو مصارف فإن التغير في وحدة الزمن لكمية السائل المحصورة داخل T يساوى التدفق خلال حدود S

$$\frac{d}{dt} \int_T \rho \, dt = - \int_S \rho v n \, dS. \quad (37)$$

ويعطى تحويل التكامل السطحي إلى حجمي :

$$\int_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v \right) d\tau = 0.$$

وحيث إن هذه المتساوية صحيحة لأيّة أحجام مهما كانت صغيرة فتستج من هنا معادلة الاتصال :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho v) = 0$$

أو

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = 0. \quad (38)$$

وينبغي إضافة معادلة الديناميكا الحرارية لحالة السائل إلى المعادلتين (36) و (38) ، وسنأخذها هنا في الصورة :

$$p = f(\rho).$$

وبالتالي نحصل على مجموعة من خمس معادلات في خمس دوال مجهولة v_x, v_y, v_z, p, ρ . وإذا كانت معادلة الحالة تحتوى على درجة الحرارة لكان يجب أيضاً إضافة معادلة الانتقال الحرارى (انظر الملحق الرابع). وبذلك تكون مجموعة المعادلات

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v &= F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho v) &= 0, \\ p &= f(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

عبارة عن مجموعة مغلقة لمعادلات الهيدروديناميكا .

نطبق معادلات الهيدروديناميكا على عملية انتشار الصوت في الغاز . نصطلح على الافتراضات التالية : ١ - تنعدم القوى الخارجية ؛ ٢ - عملية انتشار الصوت هي عملية ادياباتية ولذا فمعادلة الحالة هي عبارة عن معادلة بواسون الادياباتية

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right).$$

حيث p_0 و ρ_0 الكثافة الابتدائية والضغط الابتدائي ، c_p السعة الحرارية عند ثبات الضغط ، c_v السعة الحرارية عند ثبات الحجم ؛ ٣ - ذبذبات الغاز صغيرة فيمكن إهمال القوى العليا للسرعات وتدرجات (gradients) السرعات والتغيرات في الكثافة .

نسمى بتكثيف الغاز المقدار $s(x, y, z, t)$ الذى يساوى التغير النسبي في الكثافة

$$s(x, y, z, t) = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad (40)$$

ومنها

$$\rho = \rho_0 (1 + s). \quad (41)$$

ونأخذ معادلات الهيدروديناميكا بالافتراضات السابقة الصورة :

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \\ \rho_i + \rho_0 \text{div } v &= 0, \\ p &= p_0 (1 + s)^\gamma \approx p_0 (1 + \gamma s), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

وذلك لأن

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} (1 - s + \dots) \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \dots,$$

$$\text{div } \rho v = v \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = \rho_0 \text{div } v + \dots,$$

حيث ترمز النقط إلى الحدود من الرتبة الثانية أو أعلى في الصغر . وبالرمز إلى $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ نكتب المجموعة (42) في الصورة :

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -a^2 \text{grad } s, \\ s_i + \text{div } v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

وبالتأثير على المعادلة الأولى من (42') بمؤثر التباعد وتغيير ترتيب التفاضل نحصل على :

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

حيث

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

هو مؤثر لابلاس . وبالاستعانة بالمعادلة الثانية من (42') نحصل على معادلة الذبذبات

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt} \quad (43)$$

أو

$$a^2(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

ومن هنا ومن (40) نحصل على معادلة للكثافة

$$a^2(\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \quad (43')$$

والمعادلتان (43) و(43') هما معادلتان للذبذبات . والآن ندخل مفهوم جهد السرعات ونوضح أنه يحقق نفس معادلة الذبذبات (43) مثله مثل التكثيف . من المعادلة

$$\mathbf{v}_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

يتبع أن

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s \, dt \right). \quad (44)$$

حيث $\mathbf{v}(x, y, z, 0)$ التوزيع الابتدائي للسرعات . وإذا كان المجال السرعات في اللحظة الابتدائية الجهد

$$\mathbf{v}_{\text{مبدأ}} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \quad (45)$$

فتتحقق العلاقة التالية :

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s \, dt \right] = -\text{grad} U, \quad (46)$$

التي تعني وجود جهد السرعات $U(x, y, z, t)$. ومعرفة جهد السرعات يكون كافياً لوصف كل عملية الحركة*

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= -\text{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

وبالتعويض بهذه القيم في معادلة الاتصال

$$s_t + \text{div} \mathbf{v} = 0,$$

نحصل على معادلة الذبذبات للجهد

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

أو

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \quad (48)$$

ويمكن أيضاً الحصول على معادلة ذبذبات على الصورة (48) لكل من الضغط p والسرعة $\mathbf{v}$. والمعادلة (48) كثيراً ما تسمى بمعادلة الصوتيات .

ولحل المسائل في الحالة الثنائية الأبعاد (في المستوى) أو أحادية البعد يجب التعويض في المعادلة (48) عن مؤثر لابلاس بالمؤثر $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ أو $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ويكون للثابت $a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ مقياس السرعة ، ويكون كما سنوضح ذلك في البند ٢ هو عبارة عن سرعة انتشار الصوت .

* من العلاقة (46) يتضح أن الجهد U معرف بدقة حد يعتبر دالة اختيارية في t . ومن المعادلة $v_t = -a^2 \text{grad} s$ والمعادلة (48) يتبع أن $\left(s - \frac{1}{a^2} U_t \right) = 0$ أي أن $s = \frac{1}{a^2} U_t$ ، وذلك عند التقنين المناسب للجهد U .

نحسب سرعة الصوت في الهواء عند الضغط الجوي العادى . وفي هذه الحالة
 $p_0 = 1.033 \text{ kg/cm}^2$ ، $\rho_0 = 0.001293 \text{ g/cm}^3$ ، $\gamma = 7/5$ ، وبالتالي

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ m/s.}$$

وفي حالة ذبذبة الغاز في منطقة محدودة يجب أن تعطى على الحدود شروط
 حدية معينة . وإذا كانت الحدود عبارة عن جدار غير نفاذ صلب فإن المركبة
 العمودية للسرعة تكون مساوية للصفر مما يؤدي إلى الشرط :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_z = 0 \quad \text{أو} \quad \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_z = 0 \quad (49)$$

فقرة ٧ : الشروط الحدية والشروط الابتدائية . لا بد قبل أى شىء عند
 الوصف الرياضى للعملية الفيزيائية من صياغة المسألة أى صياغة الشروط الكافية
 لتحديد العملية تحديداً أحادى القيمة .

والمعادلات التفاضلية العادية وبالأولى الجزئية يكون لها بوجه عام مجمل
 لانهاى من الحلول . ولذا فعندما نتحول المسألة الفيزيائية إلى معادلة تفاضلية جزئية
 لا بد لتمييز العملية تمييزاً أحادى القيمة من إضافة شروط إضافية إلى المعادلة .

وفي حالة المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية يمكن تحديد المسألة
 بالشروط الابتدائية أى بإعطاء قيمتى الدالة ومشتقتها الأولى عند قيمة المتغير المستقل
 «الابتدائية» (مسألة كوشى) . كما تصادفنا صور أخرى للشروط الإضافية ، على
 سبيل المثال عندما تعطى قيمتا الدالة فى نقطتين (مسألة منحنى السلسلة) .
 وللمعادلة التفاضلية الجزئية يمكن أن توجد أيضاً صور مختلفة للشروط الإضافية .

ندرس فى البداية المسألة المبسطة عن الذبذبات المستعرضة لوتر مثبت الطرفين .
 فى هذه المسألة تعطى الدالة $u(x, t)$ انحراف الوتر عن المحور x . وإذا كان طرفا
 الوتر $0 \leq x \leq l$ مثبتين ، فيجب أن تتحقق «الشروط الحدية» :

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (50)$$

وحيث إن عملية ذبذبة الوتر تعتمد على صورته الابتدائية (شكله فى اللحظة

الابتدائية) وتوزيع السرعات في اللحظة الابتدائية فيجب إعطاء الشروط الابتدائية :

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

وبذلك تتكون الشروط الإضافية من الشروط الحدية والابتدائية حيث $\varphi(x), \psi(x)$ دوال في النقطة معطاة (أى دوال في إحداثى النقطة). وفيما بعد سنوضح أن هذه الشروط تحدد تمامًا حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{xx} = a^2 u_{tt}. \quad (52)$$

وإذا كان طرفا الوتر يتحركان بقانون حركة معطى فإن الشروط الحدية (50) تأخذ الصورة :

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (50')$$

حيث $\mu_1(t), \mu_2(t)$ دوال معطاة في الزمن t . وبالمثل تصاغ مسألة الذبذبات الطولية لوتر أو زنبرك.

وهناك أنواع أخرى محتملة للشروط الحدية. ندرس على سبيل المثال مسألة الذبذبات الطولية لزنبرك أحد طرفيه مثبت (نقطة التعليق)، وطرفه الآخر حر. وقانون حركة الطرف الحر غير معطى وكثيرًا ما يكون هو بعينه الدالة المطلوبة.

وفي نقطة التعليق $x = 0$ يكون الانحراف

$$u(0, t) = 0;$$

وفي الطرف الحر $x = l$ فإن الشد في الزنبرك

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (53)$$

يكون مساويًا للصفر (تتعدم القوى الخارجية)، ومن ثم تكون الصياغة الرياضية للشروط المفروضة بالنسبة إلى الطرف الحر على الصورة :

$$u_x(l, t) = 0.$$

وإذا كان الطرف $x = 0$ يتحرك بقانون معلوم $\mu(t)$ ، وعند $x = l$ معطاة القوة $\bar{v}(t)$ ، فإن

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = v(t), \quad \left(v(t) = \frac{1}{k} \bar{v}(t) \right).$$

ويعتبر شائعاً أيضاً شرط التثبيت المرن ، وليكن مثلاً للطرف $x = l$

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t)$$

أو

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k} \right), \quad (54)$$

وبوجود هذا الشرط يمكن أن يتحرك الطرف $x = l$ ولكن القوة المرنّة للتثبيت تسبب نشوء شد في هذا الطرف يحاول إعادة الطرف المزاح إلى وضعه الأول. وهذه القوة تكون وفقاً لقانون هوك متناسبة مع الإزاحة $u(l, t)$ ومعامل التناسب α يسمى بمعامل صلابة (كتراسة) التثبيت.

وإذا كانت النقطة (المجموعة) التي يتحقق فيها التثبيت المرن تتحرك ويعطى انحرافها عن الوضع الابتدائي بالدالة $\theta(t)$ فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \quad (55)$$

وشرط التثبيت المرن في الطرف الأيسر $x = 0$ يكون على الصورة

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(ويمكن ، شكلياً ، اعتبار أن (55) تتحقق أيضاً عندما $\theta = 0$ ولكن $h < 0$). وينبغي الإشارة إلى إنه في حالة التثبيت الصلب (α كبيرة) ، عندما تسبب الإزاحات حتى الصغيرة منها نشوء شد كبير ، يتحول الشرط الحدى (55) إلى الشرط ($\alpha = \infty$) $u(l, t) = \mu(t)$ عند $\mu(t) = \theta(t)$. وفي حالة التثبيت اللين (α صغيرة) عندما لا تسبب الإزاحات الكبيرة إلا في نشوء شد ضعيف يتحول الشرط الحدى إلى شرط الطرف الحر

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

وفيما سيلي سنتحدث عن ثلاثة أنواع أساسية من الشروط الحدية :

الشرط الحدى من النوع الأول $u(0, t) = \mu(t)$: نظام حركة معطى ،

الشرط الحدى من النوع الثانى $u_x(0, t) = v(t)$: قوة معطاة ،

الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$: تثبيت

مرن .

وبالمثل تعطى الشروط الحدية على الطرف الثانى $x = l$. وإذا كانت الدوال المعطاة فى الأطراف اليمنى $\mu(t)$ أو $v(t)$ أو $\theta(t)$ مساوية للصفر فإن الشروط الحدية تسمى متجانسة . وبالتالى الأنواع المختلفة المذكورة من الشروط الحدية نحصل على ستة أنواع من أبسط المسائل الحدية .

ويتحقق شرط حدى أكثر تعقيداً فى حالة التثبيت المرن الذى لا يخضع لقانون هوك عندما يكون الشد فى طرف الوتر دالة لاختطية فى الإزاحة $u(l, t)$ بحيث إن

$$u_x(l, t) = \frac{1}{h} F[u(l, t)]. \quad (56)$$

وهذا الشرط الحدى يعتبر بخلاف الشروط السابق دراستها شرطاً لاختطياً . وبعد ذلك فن المحتمل أيضاً وجود علاقات معينة بين الإزاحات والشد فى أطراف المجموعة المختلفة . فعلى سبيل المثال فى مسائل ذبذبة الحلقة عندما يكون $x = l$ و $x = 0$ هما عبارة عن نقطة فيزيائية واحدة تأخذ الشروط الحدية الصورة :

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad (57)$$

أى إنها تؤول إلى طلب اتصال u و u_x . ويمكن أيضاً أن تدخل المشتقات بالنسبة إلى t فى الشروط الحدية . وإذا كان طرف الزنبرك يعانى من مقاومة الوسط التى تتناسب مع سرعة حركته (ثبت فى طرف الزنبرك لوح مستواه عمودى على محور الزنبرك) فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t). \quad (58)$$

وإذا علق ثقل كتلته m فى طرف الزنبرك $x = l$ فإنه عند $x = l$ يجب أن يتحقق الشرط

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \quad (59)$$

وفي حالة الذبذبات المستعرضة للوتر تكتب جميع هذه الشروط الحدية على نفس الصورة مع التعويض عن k بـ T_0 .

وفي المستقبل سنكتفى بدراسة الثلاثة أنواع البسيطة من الشروط الحدية ، وذلك بإجراء العرض الأساسي على مثال النوع الأول من الشروط الحدية مع ذكر الخصائص المتعلقة بالشروط الثانية والثالثة .

نصنع المسألة الحدية الأولى للمعادلة (5) :

عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة في المنطقة $0 \leq x \leq l$ ، $t \geq 0$ والتي تحقق المعادلة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{لقيم } 0 < x < l, t > 0$$

والشروط الحدية

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad (t > 0) \quad (60')$$

والشروط الابتدائية

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (0 < x < l). \quad (60'')$$

وبالمثل تصاغ المسألة للمعادلة (11) .

وإذا أخذت على الطرفين الشروط الحدية من النوع الثاني أو الثالث فإن المسألتين المناظرتين تسميان بالمسألة الحدية الثانية والمسألة الحدية الثالثة . وإذا كانت الشروط الحدية عند $x=0$ و $x=l$ من نوعين مختلفين فإن مثل هذه المسائل تسمى بالمسائل الحدية المختلطة ، ولن نجرى لها تصنيفاً مفصلاً .

ونتقل الآن إلى دراسة الحالات النهائية للمسألة المصاغة . إن تأثير الشروط الحدية في النقطة M_0 البعيدة بعداً كافياً عن الحدود التي تعطى عليها هذه الشروط يحدث بعد فترة زمنية كبيرة كبراً كافياً .

وإذا كان ما يهمنا هو حدوث الظاهرة خلال فترة زمنية صغيرة عندما لا يكون

تأثير الحدود جوهرياً بعد فإنه يمكن بدلاً من المسألة الكاملة دراسة المسألة النهائية بالشروط الابتدائية لمنطقة لانهاية :

عين حل المعادلة

$$t > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

بالشروط الابتدائية

$$-\infty < x < \infty \quad \text{عندما} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (61)$$

وكثيراً ما تسمى هذه المسألة بمسألة كوشي .

أما إذا كنا ندرس الظاهرة قرب أحد الحدود ولا يكون لتأثير النظام الحدى على الحدود الأخرى قيمة جوهريّة خلال الفترة الزمنية التي تهتمنا فإننا نصل إلى صياغة للمسألة على مستقيم نصف محدود (نصف مستقيم لانهاية) $0 \leq x < \infty$ عندما تكون معطاة فضلاً عن المعادلة الشروط الإضافية التالية :

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x < \infty. \quad (62)$$

وطابع الظاهرة في اللحظات الزمنية البعيدة بشكل كاف عن اللحظة الابتدائية $t=0$ يتحدد تحديداً تاماً بالشروط الحدية لأن تأثير الشروط الابتدائية يضعف مع مرور الزمن بفضل الاحتكاك الموجود في أية مجموعة حقيقية* .

ويصادفنا مثل هذا النوع من المسائل بكثرة ، خاصة عندما تضطرب المجموعة بنظام حدى دورى يؤثر زمناً طويلاً . ومثل هذه المسائل « بدون شروط ابتدائية » (في نظام مستقر زمنياً) تصاغ على الوجه التالى :

* معادلة اللدببات مع الأخذ في الاعتبار الاحتكاك المتناسب مع السرعة تكون على الصورة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \quad (\alpha > 0).$$

انظر بالتفصيل صياغة المسألة بدون شروط ابتدائية عندما $\alpha = 0$ في فقرة ٧ ، بند ٣ .

عين حل المعادلة المدروسة للقيم $0 \leq x \leq l$ و $t > -\infty$ بالشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

وبالمثل تصاغ المسألة بلا شروط ابتدائية للمستقيم نصف الحدود.

وفيما بعد سندرس علاوة على المسائل الحدية الأساسية المسائل النهائية أيضاً :

١ - المسائل في المنطقة اللانهاية عندما يكون أحد الحدود أو كلاهما في المالا نهائية .

٢ - المسائل بلا شروط ابتدائية (في نظام مستقر زمنياً) عندما تدرس الحلول المعروفة خلال فترة زمنية لانهائية .

فقرة ٨ : اختصار المسألة العامة . عند حل مسألة معقدة يكون من الطبيعي

أن نحاول تحويل هذا الحل إلى حل مسائل أكثر سهولة . ولهذا الغرض نعتبر عن حل المسألة الحدية العامة في صورة مجموع حلول عدة مسائل حدية خاصة .

نفرض أن $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) دوال تحقق المعادلات

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \quad (64)$$

عندما $0 < x < l$ ، $t > 0$ ، وتحقق الشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} u_i(0, t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l, t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x, 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) &= \psi^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

ومن الواضح أنه يتحقق تراكم (superposition) الحلول أى أن الدالة

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(x, t) \quad (66)$$

تحقق معادلة مماثلة ذات طرف أيمن

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n f^i(x, t) \quad (67)$$

وتحقق الشروط الإضافية التي أطرافها اليمنى هي الدوال

$$\left. \begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_k^i(t) \quad (k=1, 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \varphi^i(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \psi^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

وواضح أن مبدأ التراكب المذكور لا يسرى فقط على المسألة المعطاة بل إنه يسرى أيضاً على أية معادلة خطية ذات شروط إضافية خطية. ونستعين بهذه الخاصية كثيراً في المستقبل.

وجل المسألة الحدودية العامة

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ (0 < x < l, t > 0); \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t); \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

يمكن التعبير عنه في صورة المجموع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \quad (70)$$

حيث u_1, u_2, u_3, u_4 حلول المسائل الحدودية الخاصة التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} \quad (l=1, 2, 3), \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, & u_2(0, t) &= \mu_1(t), & u_3(0, t) &= 0, & u_4(0, t) &= 0, \\ u_1(l, t) &= 0; & u_2(l, t) &= 0; & u_3(l, t) &= \mu_2(t); & u_4(l, t) &= 0; \\ u_1(x, 0) &= \varphi(x), & u_2(x, 0) &= 0, & u_3(x, 0) &= 0, & u_4(x, 0) &= 0, \\ u_{1,t}(x, 0) &= \psi(x), & u_{2,t}(x, 0) &= 0; & u_{3,t}(x, 0) &= 0; & u_{4,t}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

وسنكتفى هنا بهذا الاختصار الشكلي لكى نميز المسائل الحدية الخاصة التى تشكل المراحل الأساسية فى حل المسألة العامة . ويمكن إجراء اختصار مائل للحالات النهائية للمسألة الحدية العامة أيضاً .

فقرة ٩ : صياغة المسائل الحدية فى حالة تعدد المتغيرات . درسنا بالتفصيل صياغة المسائل الحدية فى حالة المتغير الهندسى المستقل الواحد x (والزمن t) . وإذا كان عدد المتغيرات الهندسية $n > 1$ (مثلاً $n = 3$) فإن المسألة الحدية الأولى تصاغ بطريقة مماثلة تماماً :

يطلب تعيين الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ المعرفة عند $t \geq 0$ داخل المنطقة المعطاة T بالحدود Σ ، والتي تحقق عند $t > 0$ داخل T المعادلة

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, t > 0), \quad (72)$$

ونحقق على Σ الشرط الحدى

$$u|_{\Sigma} = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, t \geq 0) \quad (73)$$

($\mu(x, y, z, t)$ دالة معطاة على Σ) ونحقق الشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned} \right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \quad (74)$$

ويجرى تحليل المسألة الحدية العامة إلى عدة مسائل بسيطة بطريقة مماثلة لما سبق . ونشير إلى أنه من الممكن أيضاً صياغة المسائل الحدية النهائية لمنطقة لانهاية أو لنصف الفراغ ، .. الخ .

فقرة ١٠ : نظرية الوجدانية . عند حل المسائل الحدية :

١ - ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية تكون كافية للحصول على حل أحادى القيمة ، ونوصل إلى ذلك بإثبات نظرية الوجدانية .

٢ - ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية لا تتجاوز تحديد المسألة أى التأكد من عدم وجود شروط غير متوافقة أو متناقضة فيما بينها ، ويتم التوصل إلى ذلك

بإثبات نظرية الوجود . وعادة يرتبط إثبات وجود الحل ارتباطاً وثيقاً بطريقة تعيين الحل .

وفي هذه الفقرة سنثبت نظرية الوجودية التالية :
 من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x, t)$ ، معرفة في المنطقة
 $0 \leq x \leq l$ ، $t \geq 0$ وتحقق المعادلة

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, k(x) > 0),$$

$$0 < x < l, \quad t > 0, \quad (75)$$

والشروط الابتدائية والحدية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

إذا تحققت الشروط :

١ - الدالة $u(x, t)$ والمشتقات التي تدخل في المعادلة (75) وكذلك المشتقة u_{xx} تكون دوال متصلة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ عندما $t \geq 0$ ؛

٢ - المعاملان $\rho(x)$ و $k(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$.

نفرض أنه يوجد حلان للمسألة المدروسة :

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

وندرس الفرق $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

ومن الواضح أن الدالة $v(x, t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (77)$$

والشروط الإضافية المتجانسة :

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= 0, & v(0, t) &= 0, \\ v_t(x, 0) &= 0; & v(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

وكذلك الشرط ١ من النظرية .

نثبت أن الدالة $v(x, t)$ تساوى الصفر بالتطابق .

ندرس الدالة

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\} dx \quad (79)$$

ونوضح أنها لا تعتمد على t . والمعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح : فهي الطاقة الكلية للوتر في اللحظة الزمنية t . نفاضل $E(t)$ بالنسبة إلى t ، بالقيام عند ذلك بعملية التفاضل تحت علامة التكامل *

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \{kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}\} dx.$$

ويتكامل الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة نحصل على :

$$\int_0^l kv_x v_{xt} dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx. \quad (80)$$

والتعويض بالنهايتين في الحد الأول من هذه المساواة يعطينا صفرًا (من $v(0, t) = 0$ يتبع أن $v_t(0, t) = 0$ وبالمثل في حالة $x = l$. ومن هنا يتبع أن

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x] dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx = 0,$$

أى أن $E(t) = \text{const}$. وبالأخذ في الاعتبار الشروط الابتدائية ، نحصل على :

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0} dx = 0, \quad (81)$$

لإجراء عملية التفاضل تحت علامة التكامل يكفي أن تكون الصيغة الكاملة الناتجة عند ذلك متصلة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ عند $t \geq 0$. وهذا الشرط يتحقق في حالتنا لأن الدالة $v(x, t)$ تحقق الشرط ١ من النظرية . و $k(x)$. $\rho(x)$ تحققان الشرط ٢ .

حيث إن

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

وبالاستعانة بالعلاقة (81) وكون k و p موجبين نستنتج أن :

$$v_x(x, t) = 0, \quad v_t(x, t) = 0,$$

ومن هنا نتيج المتطابقة

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \quad (82)$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

وبذلك أثبتنا أن

$$v(x, t) = 0. \quad (83)$$

وبالتالى فإذا وجدت دالتان $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ تحققان جميع شروط النظرية فإن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

وللمسألة الحدية الثانية الدالة $v = u_1 - u_2$ تحقق الشروط الحدية

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \quad (84)$$

والتعويض بالنهايتين فى الحد الأول من العلاقة (80) يعطينا أيضاً فى هذه الحالة صفراً. وبظل القسم الباقى من إثبات النظرية بلا تغير.

وللمسألة الحدية الثالثة يتطلب الإثبات بعض التغييرات. بدراسة حلين u_1 و u_2 كما سبق نحصل للفرق بينهما $v(x, t) = u_1 - u_2$ على المعادلة (77) والشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geq 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

نعر عن التعويض بالنهايتين في (80) في الصورة

$$[kv_x v_t]_0^t = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(t, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

وبتكامل بالنهايتين من صفر إلى t نحصل على :

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^t v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx dt - \\ - \frac{k}{2} \{h_2 [v^2(t, t) - v^2(t, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\},$$

ومن هنا يتبع وفقاً للمعادلة والشروط الابتدائية :

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(t, t) + h_1 v^2(0, t)] \leq 0. \quad (86)$$

وحيث إن $E(t) \geq 0$ نظرًا لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإنه

$$E(t) = 0, \quad (87)$$

وبالتالي فإنه

$$v(x, t) = 0. \quad (88)$$

وطريقة إثبات نظرية الوجدانية المعروضة هنا تستند على الاستعانة بصيغة الطاقة الكلية وهي شائعة التطبيق عند إثبات نظريات الوجدانية في مختلف فروع الفيزياء الرياضية، على سبيل المثال في نظرية المجالات الكهرومغناطيسية ونظرية المرونة والهيدروديناميكا.

وسيرد إثبات وجدانية المسائل الحدية الأخرى (مسألة كوشي والمسألة بلا شروط ابتدائية) فيما بعد كل في مكانه المناسب.

مسائل :

١- اثبت أن معادلة اللدببات الاكترالية الصغيرة لقضيب تكون على الصورة

$$\Theta_{tt} = a^2 \Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}}.$$

حيث θ هي زاوية دوران مقطع القضيب ذى الإحداثى الأفقى x - G معامل القص - I عزم القصور الذاتي القطبي للمقطع العرضى - k عزم القصور الذاتى لوحدة أطوال القضيب . وضع التفسير الفيزيائى للشروط الحدية من الأنواع الأول والثانى والثالث لهذه المعادلة .

٢ - سلك متجانس مطلق القابلة للامتداد مثبت عند أحد طرفيه وموجود فى وضع الاتزان الرأسى تحت تأثير وزنه . استنبط معادلة اللبذبات الصغيرة للسلك .

$$\text{الجواب : } a^2 = g \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

حيث $u(x, t)$ إزاحة النقطة - l طول السلك - g عجلة الجاذبية .

٣ - سلك متجانس ثقل طوله l مثبت عند طرفه العلوى ($x=0$) بمحور رأسى . ويدور السلك حول هذا المحور بسرعة زاوية ثابتة ω . استنبط معادلة اللبذبات الصغيرة للسلك حول وضع اتزانه الرأسى .

$$\text{الجواب : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \omega^2 u \quad , \quad \text{حيث } a^2 = g$$

٤ - استنبط معادلة اللبذبات للستروضة فى الوسط الذى تتناسب مقاومته مع الدرجة الأولى للسرعة .

$$\text{الجواب : } a^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad , \quad v_{tt} = a^2 v_{xx} - \eta^2 v_t$$

٥ - استنبط الشروط الحدية لمعادلة اللبذبات الطولية لقضيب مرن (زنبرك) فى تلك الحالة عندما يكون الطرف العلوى للقضيب مثبتاً تثبيتاً صلباً وبالطرف السفلى علق ثقل P ، إذا :

(أ) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب المجهدة تحت تأثير الثقل الثابت P المعلق بالطرف السفلى (الاضطالة الاستاتيكية) ،

(ب) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب غير المجهدة (على سبيل المثال - فى اللحظة الابتدائية يسحب من تحت الثقل المسند فيبدأ الثقل فى العمل على استطالة القضيب) .

٦ - اكتب المعادلة والشروط التى تحدد عملية اللبذبات الاتوائية لقضيب مثبت بكرتان فى طرفيه .

الجواب : عند $x=0$ و $x=l$ يجب أن تتحقق شروط حدية على الصورة

$$\Theta_{tt}(0, t) = a_1^2 \Theta_x(0, t), \quad \Theta_{tt}(l, t) = -a_2^2 \Theta_x(l, t).$$

٧ - علق ثقل كتلته M فى نقطة ما $x = x_0$ من وتر ($0 \leq x \leq l$) . استنبط شروط التوافق فى النقطة $x = x_0$.

٨ - اعلق ثقل كتلته M فى طرف قضيب مرن $x = l$ مثبت تثبيتاً مرناً عند طرفه $x=0$. اكتب المعادلة والشروط التى تحدد عملية اللبذبات الطولية للقضيب بافتراض أنه علاوة على ذلك تؤثر عليه قوة خارجية . ادرس حالتين :

(أ) القوة موزعة على طول القضيب بكثافة $F(x, t)$.

(ب) القوة مركزة في النقطة $x = x_0$ وتساوى $P_0(t)$.

٩ - ادرس عملية التذبذبات الصغيرة لغاز مثالي في أنبوبة أسطوانية . استنبط أولاً معادلات الهيدروديناميكا الأساسية ثم افرض أن العملية أدياباتيية . واستنبط المعادلة التفاضلية التي تحدد : (١) الكثافة ρ . (٢) الضغط p . (٣) جهد سرعة جسيمات الغاز U . (٤) السرعة v . (٥) إزاحة الجسيمات u . أورد أمثلة لتحقق الشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثاني والثالث لهذه المعادلات .
١٠ - أثبت علاقات التشابه بين عمليات التذبذبات الميكانيكية والصوتية والكهربائية (انظر الملحق السادس للباب الثاني) .

١١ - أورد أمثلة للشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثاني والثالث للمعادلات التفرافية .

١٢ - ادرس مسألة التذبذبات الطولية لقضيب غير متجانس ($k = k_1$ عندما $x < x_0$ و $k = k_2$ عندما $x > x_0$) واستنبط شروط التوافق في نقطة التماس الجزئين غير المتجانسين من القضيب (عند $x = x_0$) .

١٣ - وضع التعبير الفيزيائي للشرط الحدي

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

١٤ - أورد مثلاً لنموذج ميكانيكي يتحقق له المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

بند ٢ - طريقة الموجات المنتشرة

فقرة ١ : علاقة دالمبرت . سنبدأ دراسة طرق تكوين حلول المسائل الحدية للمعادلات من النمط الزائدى بالمسألة ذات الشروط الابتدائية لوتر لانهاى :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

نحول هذه المعادلة إلى الصورة القياسية التي تحتوى على مشتقة مختلطة (انظر الباب الأول) . معادلة المميزات :

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

تنقسم إلى معادلتين :

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

تكاملهما هما المستقيمان

$$x - at = C_1, \quad x + at = \bar{C}_2.$$

وبالاستعانة كالمعادلة بمتغيرين جديدين

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

نحول معادلة ذبذبات الوتر إلى الصورة :

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (3)$$

نعين التكامل العام للمعادلة الأخيرة . من الواضح أنه لأي حل للمعادلة (3) يكون

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

حيث $f^*(\eta)$ دالة ما في المتغير η . ويتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى η مع تثبيت ξ نحصل على :

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (4)$$

حيث f_1 و f_2 دالتان كل منهما في أحد المتغيرين ξ أو η فقط . وبالعكس فأيًا كانت الدالتان القابلتان للتفاضل مرتين f_1 و f_2 فإن الدالة $u(\xi, \eta)$ المحددة بالعلاقة (4) تكون هي عبارة عن حل للمعادلة (3) . وحيث إنه يمكن التعبير عن أي حل للمعادلة (3) في الصورة (4) عند الاختيار المناسب للدالتين f_1 و f_2 فإن العلاقة (4) تعتبر تكاملاً عاماً لهذه المعادلة . وبالتالي فالدالة

$$-u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (5)$$

هي التكامل العام للمعادلة (1) .

نفرض أن حل المسألة محل البحث موجود . وعندئذ يعطى هذا الحل بالعلاقة (5) . نعين الدالتين f_1 و f_2 بحيث تحققان الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u_x(x, 0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x). \quad (7)$$

وبتكامل المتساوية الثانية نحصل على :

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

حيث C , x_0 ثابتان . ومن المتساويتين

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

نعين

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

وبذلك حددنا الدالتين f_1 , f_2 بدلالة الدالتين المعطاتين φ , ψ . علماً بأن المتساويتين (8) يجب أن تتحققا لأية قيمة للمتغير المستقل * .

وبالتعويض في (5) بقيمتي f_1 , f_2 الناتجتين نحصل على :

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

* في العلاقة (5) حددت الدالتان f_1 , f_2 تحليلاً غير أحادي القيمة . فإذا طرحنا من f_1 . وأضافنا إلى f_2 ثابتاً ما C_1 . لن تغير u . وفي العلاقة (8) لا يتحدد الثابت C بدلالة φ , ψ . غير أنه يمكن حله دون أن يغير ذلك من قيمة u . وعند جمع f_1 , f_2 ينحصر الحدان $C/2$, $-C/2$.

في الاتجاه الموجب. ندرج مجموعة إحداثيات مثبتة مع الملاحظ بفرض $t' = t$ و $x' = x - at$. وفي هذه المجموعة المتحركة للإحداثيات تكون الدالة $u(x, t) = f(x - at)$ معرفة بالعلاقة $u = f(x')$ وسيرى الملاحظ طول الوقت نفس للقطع الجانبي الذي رآه في اللحظة الابتدائية. وبالتالي فالدالة $f(x - at) = u(x, t)$ تعبر عن للقطع الجانبي غير للتغير $f(x)$ الذي يتحرك إلى اليمين (في الاتجاه الموجب) بسرعة a (الموجة المنتشرة أو الجارية). ومن الواضح أن الدالة $f(x + at)$ تعبر عن الموجة المنتشرة إلى اليسار (في الاتجاه السالب للمحور x) بالسرعة a . وبذلك فالحل العام (9) لمسألة كوشي للوتر اللانهائي هو تراكب موجتين بنفس السرعة. وعند ذلك يكون

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \Psi(x - at),$$

حيث

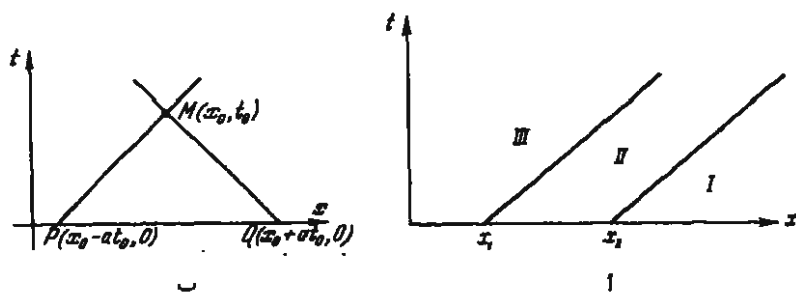
$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(a) da.$$

ولتوضيح طابع الحل (9) يكون من المناسب الاستعانة بمستوى الحالات (x, t) أو «المستوى الطوري». والمستقيمان $x - at = \text{const}$ ، $x + at = \text{const}$ هما عبارة عن مميزتي المعادلة (1) (المستقيمين المميزين). والدالة $u = f(x - at)$ تحتفظ بقيمة ثابتة على امتداد الميزة $x - at = \text{const}$. أما الدالة $u = f(x + at)$ فتكون ثابتة على امتداد الميزة $x + at = \text{const}$.

نفرض أن $f(x)$ مختلفة عن الصفر في الفترة (x_1, x_2) فقط وتساوى الصفر خارج هذه الفترة. نمد المميزتين $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$ من النقطتين $(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$. فتقسمان نصف المستوى $(x, t > 0)$ إلى ثلاث مناطق I, II, III (شكل 5، أ). والدالة $u = f(x - at)$ لا تساوى الصفر في المنطقة II فقط حيث $x_1 < x - at < x_2$. وتعتبر الميزتان $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$ الجبهتين الأمامية والخلفية للموجة المنتشرة إلى اليمين.

ندرس الآن نقطة ما مثبتة (x_0, t_0) ونجد منها الميزتين $x - at = x_0 - at_0$ و $x + at = x_0 + at_0$ و $x_1 = x_0 - at_0$, $t_1 = 0$ في النقطتين x المحور x فتقطعان المحور x في النقطتين $x_1 = x_0 - at_0$, $t_1 = 0$ و $x_2 = x_0 + at_0$, $t_2 = 0$ وقيمة الدالة $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ في النقطة (x_0, t_0) تساوى $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ أى تتحدد بقيمة الدالتين $f_1(x)$, $f_2(x)$ في النقطتين $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ اللتين تعتبران رأسين للمثلث MPQ (شكل ٥ . ب) المتكون بالميزتين والمحور x . وهذا المثلث يسمى بالمثلث المميز للنقطة (x_0, t_0) . ومن العلاقة (9) يتضح أن الانحراف $u(x_0, t_0)$ لنقطة الوتر في اللحظة t_0 يعتمد فقط على قيم الانحراف الابتدائي في الرأسين $P(x_0 - at_0, 0)$ و $Q(x_0 + at_0, 0)$ للمثلث المميز MPQ وعلى السرعة الابتدائية على الضلع PQ . ويتضح ذلك بجلاء إذا كتبنا العلاقة (9) على الصورة :

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (10)$$



شكل ٥ .

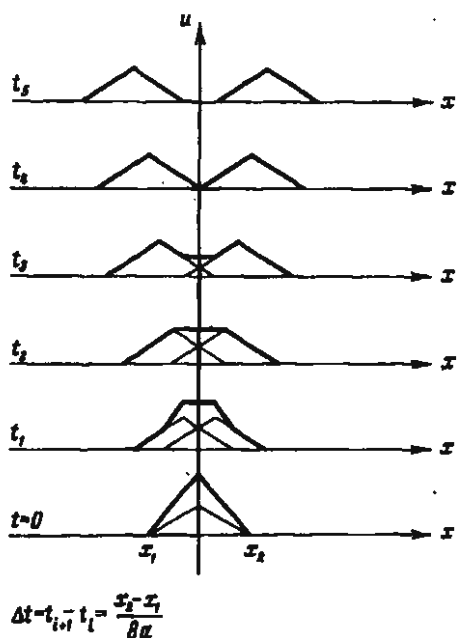
والمعطيات الابتدائية المعطاة خارج PQ لا تؤثر على قيمة $u(x, t)$ في النقطة $M(x_0, t_0)$. وإذا كانت الشروط الابتدائية معطاة لا على كل المستقيم اللانهاي وإنما على الجزء P_1Q_1 فإنها تحدد الحل تحديدًا أحادى القيمة داخل المثلث المميز الذى تكون قاعدته الجزء P_1Q_1 .

فقرة ٣ : أمثلة . يمكن التعبير عن الحل (9) فى صورة المجموع $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ حيث

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \quad (11)$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(a) da. \quad (12)$$

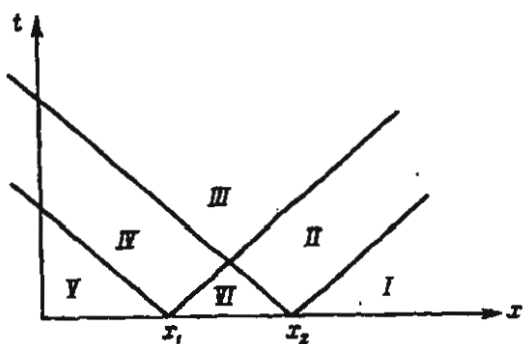
وإذا كانت السرعة الابتدائية مساوية للصفر ($\psi(x) = 0$) فإن الانحراف $u = u_1(x, t)$ يكون هو مجموع الموجتين الجاريتين اليسرى واليمنى ، علماً بأن الشكل الابتدائي لكل موجة يتحدد بالدالة $0.5\varphi(x)$ المساوية لنصف الانحراف الابتدائي . أما إذا كان $\varphi(x) = 0$ فإن $u = u_2(x, t)$ تكون عبارة عن اضطراب الوتر الناشئ عن السرعة الابتدائية .



شكل ٦

مثال ١ : ندرس انتشار الانحراف الابتدائي المعطى في صورة مثلث متساوى الساقين . ويمكن الحصول على هذا المقطع الجانبي الابتدائي إذا شد الوتر من منتصف الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$. وفي شكل ٦ بينت الأوضاع المتتالية للوتر بعد الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1) / 8a$.

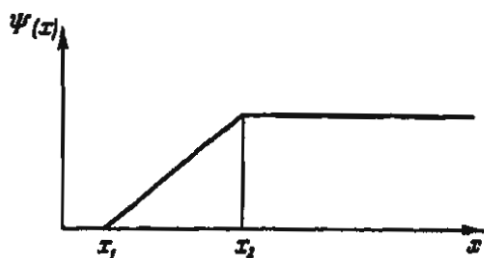
ويمكن الحصول على تصور واضح عن طابع عملية الانتشار بواسطة المستوى الطوري (x, t) . نعد الميزتين من كل من النقطتين $P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$ فتقسمان نصف المستوى $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ إلى ست مناطق (شكل ٧). والانحراف $u_1(x, t)$ في أية نقطة (x, t) يعطى بالعلاقة (II). ولذا فالانحراف في المناطق I, III, V يساوى الصفر لأن المثلث المميز لأية نقطة في هذه المناطق لا يكون له نقط مشتركة مع الجزء $[x_1, x_2]$ الذى أعطيت عليه الشروط الابتدائية. وفي المنطقة II يكون الحل هو «الموجة اليمنى» $u = 0.5 \varphi(x - at)$ ، وفي المنطقة IV يكون الحل هو «الموجة اليسرى» $u = 0.5 \varphi(x + at)$ ، ويكون الحل في المنطقة VI هو مجموع الموجتين «اليسرى» و«اليمنى» .



شكل ٧

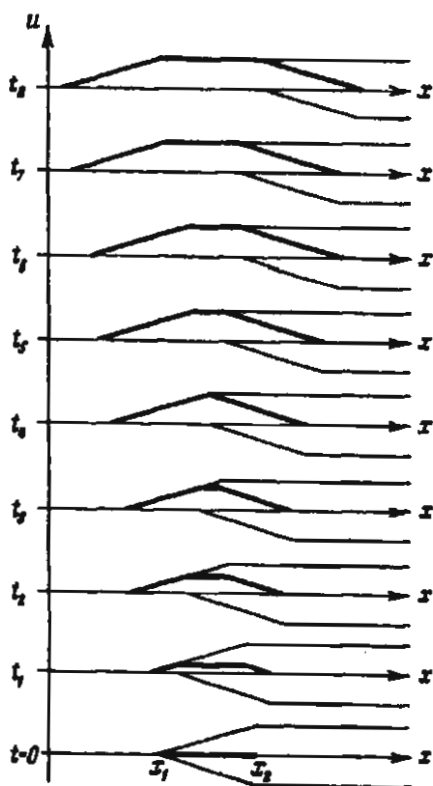
مثال ٢ : نفرض أن الانحراف الابتدائي $\varphi(x) = 0$ ، والسرعة الابتدائية تختلف عن الصفر في الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$ فقط ، حيث تأخذ فيها قيمة ثابتة $\psi(x) = \psi_0$ عندما $x_1 \leq x \leq x_2$ ، $\psi(x) = 0$ عندما $x < x_1$ و $x > x_2$. وفي هذه الحالة يكون الحل هو الدالة $u_2(x, t)$. نحسب الدالة $\Psi(x)$ ، مختارين عند ذلك $x_0 = 0$ (شكل ٨) :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad x < x_1, \\ (x - x_1)\psi_0/2a & , \quad x_1 \leq x \leq x_2, \\ (x_2 - x_1)\psi_0/2a & , \quad x > x_2. \end{cases} \quad (13)$$



شكل ٨

والحل $u_2(x, t)$ هو الفرق بين الموجتين اليمنى واليسرى بالمقطع الجانبي $\Psi(x)$. وينت
الأوضاع المتتالية لماتين الموجتين خلال الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$
في شكل ٩. والمقطع الجانبي للوتر عند $t \geq 4\Delta t$ يكون على شكل شبه منحرف



$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{x_2 - x_1}{8a}$$

شكل ٩

يتوسع بانتظام بمرور الزمن . وإذا لم تكن $\psi(x)$ ثابتة على $[x_1, x_2]$ فإن المقطع الجانبي $\Psi(x)$ هو فقط الذى سيتغير .

ولتوضيح طابع الحل نستعين بالمستوى الطورى (x, t) (شكل ٧) . نكتب صيغ $u(x, t)$ فى المناطق المختلفة للمستوى الطورى .

فى المنطقة I $(x - at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}, \quad u(x, t) = 0.$$

فى المنطقة V $(x + at < x_1)$

$$\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0, \quad u(x, t) = 0.$$

فى المنطقة III $(x - at < x_1, x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة II $(x_1 < x - at < x_2, x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة IV $(x_1 < x + at < x_2, x - at < x_1)$

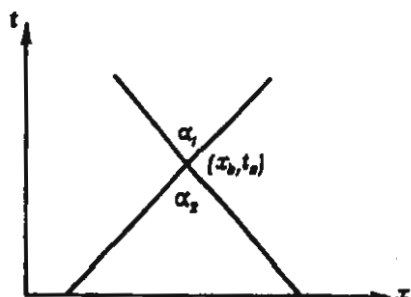
$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0, \quad \Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة VI $(x - at > x_1, x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = t \psi_0.$$

مثال ٣ : ندرس مسألة ذبذبة الوتر تحت تأثير دفع مركزى . وباكساب نقط الوتر $(x, x + \Delta x)$ سرعة ثابتة ψ_0 فى اللحظة الابتدائية (مثلاً بالدق على الوتر بمطرقة) تؤثر بذلك على هذا الجزء من الوتر بدفع I يساوى التغير فى كمية الحركة عند $t = 0$ ، ومن ثم فإن $I = \rho \Delta x \psi_0$ حيث ρ الكثافة الخطية للوتر . وبذلك فيجب علينا حل مسألة ذبذبة الوتر بانحراف ابتدائى يساوى صفراً وسرعة ابتدائية $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ فى الفترة $(x, x + \Delta x)$ ، و $\psi = 0$ خارج هذه الفترة ، وهنا $I_0 = I/\Delta x$ هو كثافة الدفع . وقد ورد تحليل لحل هذه المسألة عند حل المثال ٢ . والانحراف الذى يسببه الدفع الموزع على الفترة $(x, x + \Delta x)$ يكون عند $t > \Delta x/2a$ هو عبارة عن شبه منحرف قاعدته السفلى $2at + \Delta x$ وقاعدته العليا $2at - \Delta x$. وبالاتقال إلى النهاية



شكل ١٠

عندما $\Delta x \rightarrow 0, I_0 = \text{const}$ فنرى أن الانحراف يكون مساوياً للصفر خارج $(x - at, x + at)$ ومساوياً $I/2a\rho$ داخل هذه الفترة . ويمكن الاصطلاح على أن الانحرافات يسببها الدفع النقطى I (point impulse) .

ندرس المستوى الطورى (x, t) ونعتمد من النقطة (x_0, t_0) المميزتين :

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(شكل ١٠) فتحددان زاويتين α_1, α_2 تسميان بالزاويتين المميزتين العليا والسفلى على الترتيب للنقطة (x_0, t_0) .

ويسبب تأثير الدفع النقطى فى النقطة (x_0, t_0) انحرافاً مساوياً $\frac{1}{2a} \frac{I_0}{\rho}$ داخل الزاوية المميزة العليا ومساوياً الصفر خارجها .

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة . ندرس مسألة كوشى لمعادلة الذبذبات غير المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} u_{tt} &= u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

نفرض أن $w_f(x, t; \tau)$ حل مسألة كوشي المساعدة

$$\frac{1}{a^2} (w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau \quad (15)$$

$$w_f(x, \tau, \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau, \tau) = f(x, \tau), \quad t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

وتعطينا علاقة دالمبرت (9) :

$$w_f(x, t; \tau) = w_f(x, t - \tau; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (17)$$

نكتب علاقة دالمبرت (9) على الصورة

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0), \quad (18)$$

حيث

$$w_\psi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad w_\varphi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

هما حلا المسألة (16) ، (15) عند $\tau = 0$ و $f = \varphi(x)$ ، $f = \psi(x)$ على الترتيب لأن عملية التفاضل مباشرة توضح أن

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

نثبت أن المأخوذة التالية صحيحة :

يكون حل المعادلة غير المتجانسة (14) بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = 0 \text{ و } u_t(x, 0) = 0 \text{ على الصورة}$$

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_I(x, t; \tau) d\tau. \quad (19)$$

وبتفاضل الدالة (19) والأخذ في الاعتبار الشروط (16) للدالة $w_I(x, t; \tau)$

نحصل على :

$$u_t(x, t) = a^2 w_I(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_I}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_I}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 \frac{\partial w_I}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_I}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau = \\ &= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_I}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + a^2 f(x, t), \end{aligned}$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_I}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_I}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن الدالة (19) تحقق المعادلة (14). ومن العلاقتين (20) ، (19) ينتج مباشرة أنه يمكن التعبير عن حل المسألة (14) وفقاً للعلاقتين (18) و (19) على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\Psi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\Psi(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_I(x, t; \tau) d\tau. \quad (21)$$

وبالاستعانة بالصيغة (17) للدالة w_I نحصل على :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22) \end{aligned}$$

ويوضح التعويض المباشر بالعلاقة (22) في (14) أن الدالة (22) بالفعل تعبر

حلاً للمسألة (14) إذا وجدت المشتقات $\partial f / \partial x$ و $\psi'(x)$ و $\varphi''(x)$.

ويستج من العلاقة (17) أن الدالة w تحقق المعادلة عندما $t = \tau$ إذا كانت f قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x أى أن التعبير (21) يكون ممكناً عند تحقق نفس الشروط التي يوجد عندها حل مسألة كوشى.

وتوضح العلاقة (21) أن حل المسألة العامة (14) يمكن أن يكتب مباشرة إذا كان لدينا حل للمسألة المساعدة (16) - (15). وتتحقق علاقة ماثلة لمسألة كوشى في الفراغ اللانهائى (انظر الباب الأول من الجزء الثانى).

فقرة 5 : استقرار الحلول . حل المعادلة (1) يتحدد تحديداً أحادى القيمة بالشروط الابتدائية (2). نثبت أن هذا الحل يتغير باتصال فى حالة التغير المتصل للشروط الابتدائية.

أيما كانت الفترة الزمنية $[0, t_0]$ ، وأيما كانت درجة الدقة ε ، يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon, t_0)$ بحيث إن أى حلين للمعادلة (1): $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ سيختلفان عن بعضهما خلال الفترة الزمنية t_0 بأقل من ε :

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

بمجرد أن تختلف الشروط الابتدائية

$$\begin{cases} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases}$$

عن بعضها بأقل من δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

وإثبات هذه النظرية بسيط للغاية . الدالتان $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ ترتبط كل منهما بشروطها الابتدائية بالعلاقة (9) ومن ثم فإن

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

ومن هنا نحصل على

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leq \delta (1 + t_0),$$

كما يثبت فرض النظرية إذا وضعنا

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + t_0}.$$

إن أية عملية فيزيائية معينة تتطور بالزمن يجب أن تميز بدوال تعتمد اعتمادًا متصلًا على المعطيات الابتدائية. ولو لم يتحقق هذا الاعتماد المتصل لأصبح من الممكن للعمليات المختلفتين اختلافًا جوهريًا أن تناظرا مجموعتين من الشروط الابتدائية متشابهتين عمليًا (ينحصر الاختلاف بينهما في حدود دقة القياسات). ولا يمكن اعتبار العمليات من هذا النوع محددة «فيزيائيًا» بمثل هذه الشروط الابتدائية. ويتج من النظرية السابقة أن عملية ذبذبات الوتر ليست محددة رياضيًا فحسب وإنما تكون أيضًا محددة فيزيائيًا بالشروط الابتدائية.

وإذا كان حل المسألة الرياضية يعتمد اعتمادًا متصلًا على الشروط الإضافية (على المعطيات الابتدائية والحدية وعلى الطرف الأيمن للمعادلة أى على المعطيات الأصلية للمسألة) فإنه يقال بأن المسألة مستقرة.

ونظرًا لدراسة الظواهر الفيزيائية المحددة يستعان بمفهوم انضباط الصياغة (correctness). فيقال إن المسألة الرياضية مضبوطة الصياغة إذا كان: (١) حل المسألة موجودًا ، (٢) للمسألة حل وحيد ، (٣) حل المسألة يعتمد اعتمادًا متصلًا على المعطيات الأصلية ، أى يكون الحل مستقرًا.

ونشير إلى أن المسائل الرياضية غير مضبوطة الصياغة تقابلنا كثيرًا في التطبيقات ، وتنسب إلى عددها كثير من المسائل الرياضية المعروفة.

نورد مثالاً لمسألة غير مضبوطة الصياغة حلها غير مستقر.

الدالة $u(x, y)$ التي تعتبر حلاً لمعادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ لتحديد تحديدًا
أحادي القيمة بشروطها الابتدائية * $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$
ندرس الدالتين $u^{(1)}(x, y) = 0$, $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cdot \cosh \lambda y$ اللتين تحققان
معادلة لابلاس. وتعتمد الدالة $u^{(2)}(x, y)$ على λ كبارامتر. والقيم الابتدائية

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

تختلف عن بعضها اختلافًا طفيفًا للغاية (بأى مقدار صغير نريده) عند القيم الكبيرة
كبيرًا كافيًا للبارامتر λ . غير أن الحل $u^{(2)}(x, y)$ يمكن عند ذلك أن يصبح كبيرًا
ل للغاية (أى كبر نريده) مهما كانت قيمة y المثبتة. وبالتالي فالمسألة بالشروط
الابتدائية لمعادلة لابلاس تكون غير مضبوطة الصياغة.

ومن الطبيعي أن يتبادر إلى الذهن تساؤل عما إذا كانت المسائل غير مضبوطة الصياغة يمكن بوجه عام أن
تناظر مسائل تشكل أهمية ما للفيزياء. وأيضًا أية قيمة علمية يمكن أن يشكلها الحل التقريبي للمسائل غير
مضبوطة الصياغة فالأخطاء الصغيرة في شروط المسائل يمكن أن تناظرها أخطاء كبيرة في الحل؟

وتنشأ مثل هذه الشكوك نتيجة لأننا نقصد فيها ذكرنا أخطاءه أنه بمثابة الحل التقريبي للمسألة يؤخذ الحل
الدقيق للمسألة المناظرة للشروط للقرية.

نورد مثالاً لمسألة غير مضبوطة الصياغة ذات أهمية عملية كبيرة.

ندرس مسألة تعيين المشتقة $z(x) = \frac{df}{dx}$ بالقيم التقريبية المنتظمة للدالة $f(x)$. نفرض أن معيار الدقة
عند إعطاء $\bar{f}(x)$ وتعيين $\bar{z}(x)$ يحدد كما يلي:

$$\max |\bar{f}(x) - f(x)|, \quad \max |\bar{z}(x) - z(x)|.$$

ومن الواضح أن هذه المسألة وفقًا لمصطلحاتنا السابقة هي مسألة غير مستقرة (غير مضبوطة الصياغة).
بالفعل ε فإذا كان $\bar{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$ فإن $\max |\bar{f}(x) - f(x)| = \delta$ عند قيم δ
الصغيرة. غير أنه إذا اخترنا المشتقة الدقيقة للدالة $\bar{f}(x)$ بمثابة القيمة التقريبية $\bar{z}(x)$ حصلنا على

$$\bar{z}(x) = \bar{f}'(x) = \delta \omega \sin \omega x, \quad \max |\bar{z}(x) - z(x)| = \delta \omega;$$

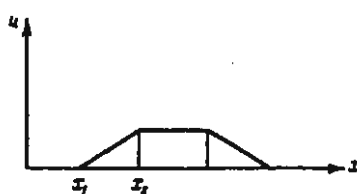
• هذه الشروط تحدد حل معادلة لا بلاس تحديدًا رياضيًا أحادي القيمة. بالفعل فإعطاء $u_y(x, 0)$
يكافئ $v(x, 0)$ حيث $v(x, y)$ دالة مرافقة توافقًا للدالة $u(x, y)$. وبهذا تتحدد تحديدًا أحادي القيمة.
بدقة ثابت فقط. الدالة التحليلية التي يكون قسمها الحقيقي هو الدالة $u(x, y)$ (انظر الباب الرابع. بند ١.
قوة ٥).

و δ يمكن عند قيمة δ المثبتة وقيم δ الكبيرة أن يصبح عدداً كبيراً أى كبير نريد . غير أنه من المعلوم جيداً أنه بمثابة القيمة التقريبية للمشتقة تؤخذ العلاقة الفرقية $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ التى تعبر عن المشتقة المطلوبة بخطأ صغير أى صغر نريد . عندما يكون h و δ/h صغيرين صغراً كافياً . ومن المفهوم عند ذلك أنه للحصول على تقرب جيد للمشتقة df/dx من القيمة التقريبية للدالة $F(x)$ يجب أن يكون الخطأ δ صغيراً صغراً كافياً .

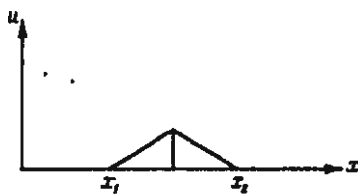
وهكذا فى المثال المعروض يمكن رغم عدم استقرار المسألة . ذكر طريقة للحصول على تقريبات ذات دقة عالية بأية درجة نريدها للحل المطلوب من الشروط التقريبية للمسألة ذات الدقة الكافية . ويعتبر مثل هذا الوضع نموذجياً لكثير من المسائل غير مضبوطة الصياغة .

والمسائل غير المضبوطة الصياغة كثيراً ما تقابلنا فى الفيزياء عند دراسة نماذج غير قابلة للبحث أو الفحص (القياس) بشكل مباشر . وفى هذه الحالات تضطر إلى عمل استنتاجات معينة عن مميزات «هذه» هذه النماذج وفقاً لظواهرها غير المباشرة (المحددة فيزيائياً) «هذه» والتى يمكن قياسها فى التجارب العملية . وهى ترتبط بالمميزات «هذه» بارتباط دالى على الصورة $A_1 = u$. ونتيجة لذلك نصل إلى مسألة معالجة نتائج التجارب التى تعتبر مسألة عكسية وتنحصر فى تعيين المميزات «هذه» للنماذج على البحث وفقاً لمعطيات التجارب «هذه» . وكثير من هذه المسائل ليست مضبوطة الصياغة . وكحالة خاصة فمسألة كوشى الصياغة أعلاه لمعادلة لابلاس يكون لها علاقة مباشرة بمسألة القياس الوزنى العكسية (تعيين شكل الجسم بما يسيه من تفاوت فى قياس مقدار قوة الجاذبية) . ويعتبر المثال الوارد أعلاه لحساب المشتقة وفقاً للقيم التقريبية للدالة مثلاً نموذجياً فى كثير من التجارب حيث تجرى القياسات بطريقة التراكم .

نشير الآن إلى الموضوع التالى . من الواضح أن الدالة $u(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (9) يمكن أن تكون حلاً للمعادلة (1) فقط فى تلك الحالة عندما تكون الدالة $\psi(x)$ قابلة للتفاضل ، والدالة $\varphi(x)$ قابلة للتفاضل مرتين . ويتضح مما ذكر أن الدالتين المبيتين فى شكل ١١ ، ١٢ لا يمكن اعتبارهما حلاً للمعادلة (1) ، لأنها ليستا



شكل ١٢



شكل ١١

قابلتين للتفاضل مرتين فى كل مكان . وعلاوة على ذلك يمكن القول بأن حل معادلة اللذبذبات الذى يحقق الشروط (2) لا يكون موجوداً إذا لم يكن للدالتين $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ المشتقات الضرورية . بالفعل فبتكرار التحليل الذى أوصلنا إلى العلاقة (9) يمكننا القول بأنه إذا وجد حل لمعادلة اللذبذبات فيجب التعبير عنه بالعلاقة (9) . أما إذا لم تكن الدالتان φ ، ψ قابلتين للتفاضل عدداً كافياً من المرات فإن

العلاقة (9) ستحدد دالة لا تحقق المعادلة (1) ، أى أنه لا يوجد حل لهذه المسألة .
غير أنه إذا تغيرت الشروط الابتدائية تغيراً طفيفاً بالتعويض عنها بدالتين قابلتين للتفاضل $\varphi(x)$, $\psi(x)$ فإن هذه الشروط الابتدائية سينظرها حل للمعادلة (1) .
وبالإضافة إلى ذلك نشير إلى أننا عند إثبات نظرية هذه الفقرة قد أثبتنا فعلياً أن الدوال المحددة بالعلاقة (9) تعتمد اعتماداً متصلاً على الدالتين الابتدائيتين φ , ψ (دون أن يتوقف ذلك على ما إذا كانت هاتان الدالتان قابلتين للتفاضل أم لا) .
وبذلك فإذا لم ينظر دالتين ما φ , ψ حل لمعادلة الذبذبات يحقق الشروط (2) فإن الدالة المحددة بالعلاقة (9) تكون هى عبارة عن نهاية حلول معادلة الذبذبات التى جعلت شروطها الابتدائية أكثر ملوسة (smoothness) . والدوال الناتجة من هذا الانتقال إلى النهاية تسمى بالحلول المعممة . ويلعب مفهوم الحلول المعممة دوراً مهماً فى الفيزياء وقد أدخله العالم السوفييتى س . سوبوليف .

فقرة ٦ : المستقيم نصف اللانهائى وطريقة الاستكمال . ندرس مسألة انتشار الموجات على مستقيم نصف لانهائى (نصف لا محدود) $x \geq 0$. وهذه المسألة ذات قيمة هامة خاصة عند دراسة عملية انعكاس الموجات عن طرف المستقيم وتصاغ بالطريقة التالية :

عين حل معادلة الذبذبات

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{عند} \quad t > 0, 0 < x < \infty$$

الذى يحقق الشرط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{أو} \quad (u_x(0, t) = v(t)) \quad (t \geq 0)$$

والشرطين الابتدائيين

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x < \infty).$$

ندرس فى البداية حالة الشرط الحدى المتجانس

$$u_x(0, t) = 0 \quad \text{أو} \quad u(0, t) = 0$$

أى مسألة انتشار الاضطراب الابتدائي في وتر ذى طرف مثبت $x = 0$ (أو طرف حر).

نذكر المأخوذتين التاليتين عن خواص حلول معادلات الذبذبات المعروفة على مستقيم لانهاى.

١- إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهاى (المسألة (2) - (1)) دوال فردية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن الحل المناظر في هذه النقطة يكون مساوياً للصفر.

٢- إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهاى (المسألة (2) - (1)) دوال زوجية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن مشتقة الحل المناظر في هذه النقطة بالمتغير x تكون مساوية للصفر.

ثبتت المأخوذة ١. نعتبر x_0 نقطة الأصل ، $x_0 = 0$. في هذه الحالة تكتب شروط فردية المعطيات الابتدائية على الصورة :

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

والدالة $u(x, t)$ المعروفة بالعلاقة (9) ، عند $x = 0$ ، $t > 0$ تساوى

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha) d\alpha = 0,$$

وذلك لأن الحد الأول يساوى صفراً وفقاً لفردية $\varphi(x)$ ، والحد الثانى يساوى صفراً لأن تكامل الدالة الفردية بالحددين المتماثلين بالنسبة لنقطة الأصل يساوى دائماً الصفر.

وبالمثل ثبتت المأخوذة الثانية ، فشرط زوجية المعطيات الابتدائية تأخذ الصورة :

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

ونشير إلى أن مشتقة الدالة الزوجية تكون دالة فردية :

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

ومن العلاقة (9) ينتج أن

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

لأن الحد الأول يساوى صفراً وفقاً لفردية $\varphi'(x)$ ، والحد الثاني يساوى صفراً وفقاً لزوجية $\psi(x)$.

وفعلياً يستند الإثبات الوارد أعلاه على علاقة دالمبرت ولا يرتبط بقابلية الدالة $u(x, t)$ للتفاضل مرتين . وبذلك أثبتنا أن المأخوذة الأولى صحيحة لأية دوال يمكن التعبير عنها بعلاقة دالمبرت . والمأخوذة الثانية صحيحة للدوال على نفس الصورة والدالة $\psi(x)$ القابلة للتفاضل أى للحلول المعممة للمسألة (2) — (1) .

وبمساعدة هاتين المأخوذتين يمكن حل المسائل التالية :

المطلوب تعيين حل المعادلة (1) ، الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 < x < \infty, \quad (2')$$

والشرط الحدى

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(المسألة الحدية الأولى) .

ندرس الدالتين $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تدخلان فى الشرط (2') :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x > 0, \\ -\varphi(-x) & , x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , x > 0, \\ -\psi(-x) & , x < 0. \end{cases}$$

هاتان المأخوذتان نتيجة لكون الدالة $u(x, t)$ المعرفة بعلاقة دالمبرت عند $t > 0$ زوجية (أو فردية) . إذا كانت المعطيات الابتدائية زوجية (أو فردية) (ونترك للقارئ إثبات ذلك بمفرده) . ومن الواضح هندسياً أن الدالة الفردية المنصبة ومشتقة الدالة الزوجية القابلة للتفاضل تساويان الصفر عند $x = 0$.

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

معرفة لجميع x و $t > 0$. ووفقاً للمأخوذة الأولى يكون

$$u(0, t) = 0.$$

وفضلاً عن ذلك فإن هذه الدالة عند $t = 0$ ، $x > 0$ تحقق الشروط الابتدائية :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned} \right\} x > 0.$$

وبذلك فدراسة الدالة الناتجة $u(x, t)$ فقط للقيم $x \geq 0$ ، $t \geq 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط المسألة المصاغة.

وبالعودة إلى الدوال الأولى يمكن كتابة :

$$u(x, t) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad , \quad t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \\ &\frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad , \quad t > \frac{x}{a}, \quad x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

وفي المنطقة $t < x/a$ لا يظهر تأثير الشروط الحدية وتنطبق صيغة $u(x, t)$ على الحل (9) لحالة المستقيم اللانهائي.

وبالمثل ، فإذا كان لدينا عند $x = 0$ طرف حر

$$u_x(0, t) = 0,$$

فياخذ الاستكمال الزوجي لكل من الدالتين $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x > 0, \\ \varphi(-x) & , \quad x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , \quad x > 0, \\ \psi(-x) & , \quad x < 0, \end{cases}$$

نحصل على حل معادلة الذبذبات :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

أو

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & , \quad t < \frac{x}{a}, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\} & , \quad t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$

الذى يحقق فى المنطقة $x \geq 0$ الشروط الابتدائية (2) والشرط الحدى $u_x(0, t) = 0$.

وفى المستقبل سنلجأ كثيراً عند حل مختلف المسائل إلى الاستعانة بطريقة استكمال المعطيات الابتدائية ، المحددة على جزء معين من المنطقة ، إلى المنطقة اللانهائية .

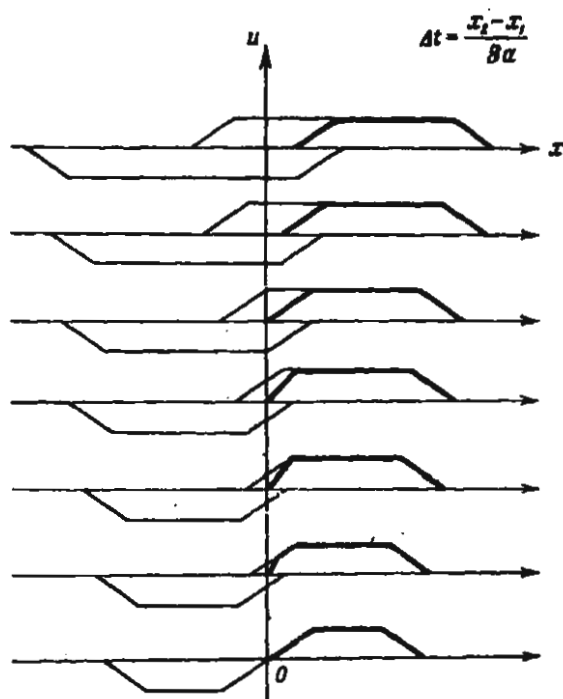
ولذا نصوغ مرة أخرى النتائج التى حصلنا عليها فى صورة قاعدتين :

لحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u(0, t) = 0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً فردياً .

ولحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u_x(0, t) = 0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً زوجياً .

لندرس مثالين . نفرض أن المعطيات الابتدائية على مستقيم نصف محدود مثبت

المثبت . وتبين هذه العملية بالتفصيل على الرسم في شكل ١٣ . فيتقاصر المقطع الجانبي للموجة المنعكسة وتحتنى الانحرافات ثم تظهر بإشارة عكسية . وأخيرًا يسير نصف الموجة المنعكس إلى اليمين وراء نصف الموجة الذى مر هناك بنفس السرعة . وهكذا فعند انعكاس الموجة عن الطرف المثبت للوتر يغير انحرافها إشارته .



شكل ١٤

ندرس المثال الثانى . نفرض أنه على المستقيم نصف اللانهاى $x \geq 0$ المثبت عند $x = 0$ يكون الانحراف الابتدائى مساويًا للصفر فى كل مكان ، أما السرعة الابتدائية $\psi(x)$ فتكون مختلفة عن الصفر فقط فى الفترة $(0 < x_1 < x_2)$ ، علمًا بأن $\psi(x) = \text{const}$ فى هذه الفترة . نستكمل المعطيات الابتدائية استكمالاً فرديًا . ومن كل فترة من الفترتين (x_1, x_2) و $(-x_1, -x_2)$ تنتشر انحرافات مشابهة لتلك المبينة فى شكل ١٤ . وكما يتضح من الرسم تحدث العملية فى المرحلة الأولى فى المنطقة $x > 0$ تمامًا كما تحدث على المستقيم اللانهاى . ثم يحدث انعكاس عن

الطرف المثبت وأخيرًا تتحرك الموجة التي يكون مقطعها الجانبي على شكل شبه منحرف متساوي الساقين إلى اليمين بسرعة ثابتة .

وتجرى دراسة الانعكاس عن الطرف الحر بطريقة مماثلة ، ولكن المعطيات الابتدائية يجب استكمالها زوجيًا ، ومن ثم يحدث انعكاس الموجة عن الطرف الحر لا بطور قد تغير وإنما بنفس الطور .

لقد درسنا مسائل بشروط حدية متجانسة

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

أو

$$u_x(0, t) = v(t) = 0.$$

وفي الحالة العامة للشروط الحدية غير المتجانسة يمثل الحل في صورة مجموع يحقق كل حد فيه شرطًا واحدًا فقط من شروط المسألة المصاغة (إما شرطًا حديًا وإما ابتدائيًا) .

ونتقل الآن إلى حل المعادلة عند الشروط الابتدائية الصفرية والشرط الحدي

المعطى

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0,$$

$$\bar{u}(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

من الواضح أن النظام الحدي يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a مما يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل :

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

نعين الدالة f من الشرط الحدي

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

ومنها

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right).$$

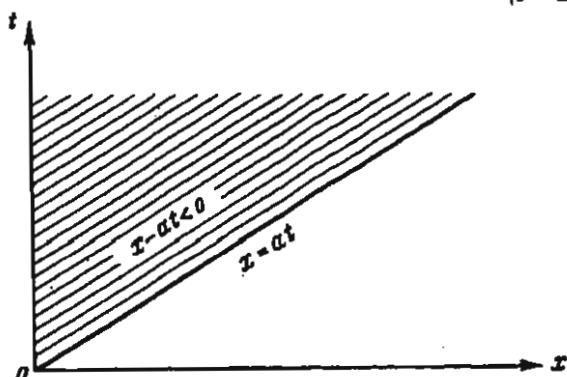
ومن ثم

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

غير أن هذه الدالة معرفة فقط في المنطقة $x - at \leq 0$ لأن $\mu(t)$ معرفة للقيم $t \geq 0$. وفي شكل ١٥ تمثل هذه المنطقة بالجزء المخطط من المستوى الطوري. ولتعيين $\bar{u}(x, t)$ لجميع قيم المتغيرين المستقلين نستكمل الدالة $\mu(t)$ إلى القيم السالبة للمتغير t ، بفرض $\mu(t) = 0$ للقيم $t < 0$. عندئذ تكون الدالة

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

معرفة لجميع قيم المتغيرين المستقلين وتحقق الشروط الابتدائية الصفرية.



شكل ١٥

وبمجموع هذه الدالة والدالة (23) المعرفة في بداية هذه الفقرة هو عبارة عن حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة الدبذبات المتجانسة. وللوتر نصف الحدود يكون :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t > \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (24)$$

وبالمثل يمكن تكوين حل المسألة الحدية الثانية . أما فيما يتعلق بالمسألة الحدية الثالثة فانظر الفقرة ٩ .

ونكتفي هنا بحل المسألة الحدية للمعادلة المتجانسة للذبذبات . وفيما يخص حل المعادلة غير المتجانسة انظر الفقرة ٩ .

فقرة ٧ : المسائل للفترة المغلقة المحدودة . ندرس المسائل الحدية للفترة المحدودة $(0, l)$. سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l.$$

ندرس في البداية حالة الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

سنبحث عن حل المسألة في هذه الحالة بطريقة الاستكمال بافتراض إمكانية التمثيل التالى :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha,$$

حيث Φ و Ψ دالتان ينبغي تعيينهما . والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

نعرف قيم Φ و Ψ فى الفترة $(0, l)$.

ولتحقيق الشروط الحدية الصفرية نتطلب أن تكون الدالتان $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ فرديتين بالنسبة للنقطتين $x=0, x=l$:

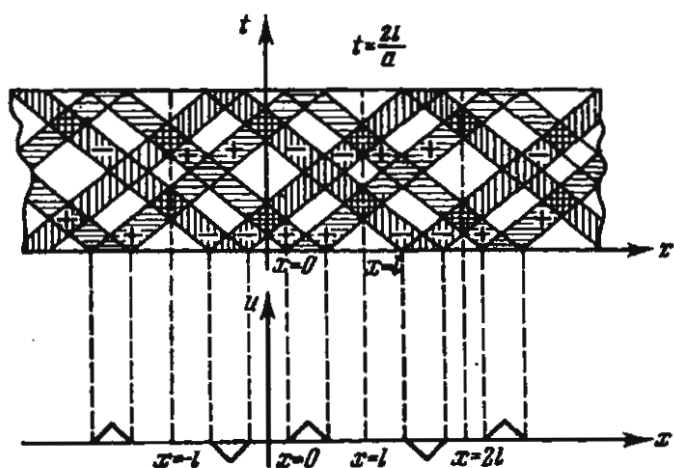
$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l-x), \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l-x).\end{aligned}$$

وبالمقارنة بين هذه المتساويات نحصل على

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

وبالمثل للدالة $\Psi(x)$ ، أى أن الدالتين Φ, Ψ تعتبران دالتين دوريتين بفترة $2l$.

وليس من الصعب ملاحظة أن شروط الفردية بالنسبة إلى نقطة الأصل وشروط الدورية تحدد استكمال $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ على المستقيم $-\infty < x < \infty$. بالتعويض بهما في العلاقة (9) نحصل على حل المسألة .



شكل ١٦

وفي شكل ١٦ رسم مع المستوى الطوري (x, t) والمستوى (x, u) حيث أعطى الانحراف الابتدائي وامتداده . وفي المستوى الطوري أبرزت الشروط التي يكون فيها الانحراف مختلفاً عن الصفر (انظر شكل ٧) فرسمت مهشرة . وتبين علامات الزائد

والناقص الموجودة في هذه الشروط إشارة (طور) الانحراف (على صورة مثلث متساوي الساقين) .

وبالاستعانة بهذا الرسم من السهل أن نتصور المقطع الجانبي للانحراف في أية لحظة t . فثلاً في اللحظة $t = 2l/a$ نحصل على انحرافات تنطبق على الانحرافات الابتدائية . وبذلك فالدالة $u(x, t)$ ستكون دالة دورية في المتغير t بفترة دورة $T = 2l/a$ (انظر بند ٣ ، فقرة ٣) .

ندرس الآن مسألة انتشار النظام الحدى . سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

والشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t > 0.$$

ومن نتائج الفقرة ٦ ينتج أنه عند $t < l/a$ يكون الحل هو الدالة

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

حيث

$$\bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

غير أن هذه الدالة لا تحقق الشرط الحدى

$$u(l, t) = 0 \quad \text{عندما } t > l/a.$$

ندرس الموجة «المنعكسة» المتجهة إلى اليسار والتي لها عند $x = l$ انحراف يساوي $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. وتعطى صيغتها التحليلية بالعلاقة

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

ومن السهل التحقق من أن الفرق بين الموجتين

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

هو حل المعادلة عند $t < 2l/a$.

وبالاستمرار في هذه العملية نحصل على الحل في صورة متسلسلة

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right), \quad (25)$$

تحتوى (لكل لحظة مثبتة t) على عدد محدود فقط من الحدود المختلفة عن الصفر لأنه مع كل انعكاس جديد ينقص التغير بمقدار $2l/a$ ، والدالة $\bar{\mu}(t) = 0$ في حالة $t < 0$. ويتم التأكد من تحقق الشروط الحدية مباشرة. بالفعل نضع $x = 0$ ونفصل من المجموع الأول الحد الأول عند $n = 0$ الذى يساوى $\mu(t)$ على انفراد. والحدود الأخرى من المجموع الأول والمجموع الثانى المناظرة لنفس قيم n الواحدة تختصر فيما بينها وهذا يوضح أن $u(0, t) = \mu(t)$.

وبإحلال $n-1$ مكان n وتغيير نهايتى المجموع نتيجة لذلك نحول المجموع الأول إلى الصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a}\right).$$

والآن بوضع $x = l$ ، نتأكد مباشرة من أن حدود المجموع الأول والمجموع الثانى تختصر فيما بينها*.

والعلاقة (25) لها معنى فيزيائى بسيط. فالدالة

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

* يتم التحقق من الشروط الابتدائية مباشرة أيضا وذلك لأن متغيرات كل الدوال سالبة عند $t = 0$ والصيغة (25) عند $t = 0$ تكون مساوية للصفر.

هى عبارة عن موجة ناشئة أو مثارة بالنظام الحدى عند $x = 0$ دون الاعتماد على تأثير الطرف $x = l$ كما لو كان الوتر لانهائياً ($0 < x < \infty$). والحدود التالية هى عبارة عن الانعكاسات المتتالية عن الطرف المثبت $x = l$ (المجموع الثانى) وعن الطرف $x = 0$ (المجموع الأول).

وبالمثل تعطى الدالة

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

حل المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ والشروط الحدية $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = \mu(t)$. ولن نتوقف عند إثبات وحدانية حل المسألة المعنية والاعتماد المتصل للحل على الشروط الابتدائية والحدية.

فقرة ٨ : تشتت الموجات. إن معادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ تسمح بحل على صورة موجة جارية $u = f(x \pm at)$ ذات شكل اختيارى. والمعادلة العامة من النمط الزائدى بمعاملات ثابتة

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + b_1 \bar{u}_t + b_2 \bar{u}_x + \bar{c} \bar{u} = 0 \quad (26)$$

تؤول بواسطة التعويض المذكور فى الباب الأول

$$\bar{u} = u e^{\lambda x + \mu t} \quad \text{حيث} \quad \mu = -0.5 b_1, \quad \lambda = -0.5 b_2 / a^2$$

إلى المعادلة

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \quad (27)$$

حيث $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. نوضح أن المعادلة (27) لا تسمح بحلول على صورة موجة اختيارية جارية عندما $c \neq 0$. بالفعل بالتعويض فى (27) عن $u = f(x - at)$ نحصل على $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$ ومن هنا نظرًا لأن a اختيارية يتبع أن $c = 0$.

والنبضة أو الإشارة من شكل اختيارى يمكن أن تكون هى التحليل فى تكامل

فوريه الممثل في صورة تراكب من الموجات التوافقية على الصورة

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

حيث ω التردد ، $k = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي ، λ طول الموجة .

والسرعة التي يتحرك بها في الفراغ طور الموجة $\omega t - kx = \alpha$ تسمى بالسرعة الطورية للموجة وتساوى كما هو واضح $v = \omega/k$. وإذا كانت السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد يقال إن الموجات تشتت . وفي هذه الحالة فإن المركبات التوافقية للإشارة تراح كل بالنسبة إلى الأخرى فينتج عن ذلك تشوه في المقطع الجانبي للإشارة .

ومن الواضح أنه إذا كانت المعادلة لا تسمح بحلول على صورة موجات من شكل اختياري فإن السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد أى يوجد تشتت .

نبين أنه للمعادلة (27) يتحقق التشتت عند $c \neq 0$. بالتعويض في (27) عن $u = e^{i(\omega t - kx)}$ نحصل على معادلة تربط بين ω و k :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

ومن هنا ينتج أن السرعة الطورية

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}} a$$

تعتمد على التردد . وعند الشرط $c = 0$ أى لمعادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ تكون $v = a$ غير معتمدة على التردد ، وينعدم التشتت . والشرط $c = 0$ يسمى أيضاً بشرط انعدام التشوه أو الاعوجاج (distortion) . ومثابة مثال ندرس المعادلة التلغرافية (انظر بند ١ ، فقرة ٤)

$$I_{xx} = CL I_H + (CR + LG) I_t + GRI.$$

يفرض $I = ue^{-\mu x}$ حيث $\mu = 0.5(CR + GL)/CL$ نحصل لـ u على المعادلة

$$u_{xx} = CL u_H + \bar{c} u,$$

حيث $CR \neq LG$ عندما يتضح أنه عند $CR = LG$. ومن هنا يتضح أنه عند $CR \neq LG$ تنتشر الإشارة في الكابل بشوه لأنه يوجد تشتت للموجات . والشرط

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \text{ أو } CR = LG$$

يسمى بشرط انعدام التشوه في الحظ . وفي هذه الحالة تسمح المعادلة التلغرافية بحل على صورة موجة متضائلة

$$l(x, t) = e^{-\gamma |x - at|}, \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

حيث f دالة اختيارية .

وانعدام تشوه أو اعوجاج الموجات عند انتشارها في الكابل له أهمية بالغة خاصة في الاتصالات التلغرافية والتلفونية على المسافات البعيدة .

فقرة ٩ : المعادلة التكاملية للذبذبات . عند استنباط المعادلة التفاضلية للذبذبات (5) في بند ١ انطلقنا من قانون حفظ كمية الحركة الذي أوصلنا إلى معادلة الذبذبات في الصورة التكاملية (3) . ولانتقال من المعادلة التكاملية إلى المعادلة التفاضلية افترضنا وجود المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. وكل افترض لتحديد فئة الدوال المدروسة بخاصية ما يعنى الامتناع عن دراسة الدوال التي لا تتميز بالخاصية المفترضة . وبذلك فبالانتقال من المعادلة التكاملية للذبذبات إلى المعادلة التفاضلية استثنينا من مجال دراستنا عمليات الذبذبات التي لا تحقق مطلب القابلية للتفاضل مرتين .

وسنوضح أن كل النظرية يمكن تطويرها في فئة الدوال المتصلة المقطعة القابلة للتفاضل (continuous piecewise differentiable functions) انطلاقاً من المعادلة التكاملية للذبذبات .

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_1} \right] \rho dx &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F dx d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

ويمكن إعطاء هذه المعادلة الصورة التالية . ندرس في المستوى (x, t) للمنطقة G المحدودة بالحنى المتقطع الملموسة (أو السلسة) (piecewise smooth) C . ونوضح أنه لهذه المنطقة تحقق العلاقة التكاملية

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_G F dx dt = 0. \quad (29)$$

وللوسط المتجانس نتخذ هذه العلاقة الصورة :

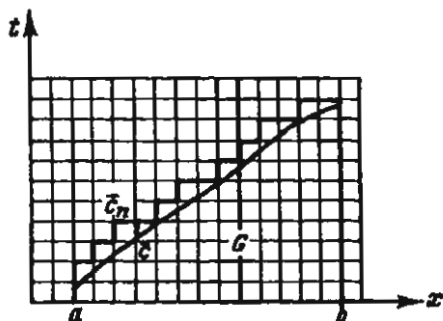
$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_0^T \int_a^b f dx dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho} \right). \quad (29)$$

وإذا كان المنحنى C هو عبارة عن محيط مستطيل أضلاعه موازية لمحورى الإحداثيات فإن العلاقة (29) تنطبق على المعادلة (28). وإذا كان المنحنى C يتكون من قطع موازية للمحورين فإن المنطقة G يمكن تصورها كمجموع مستطيلات. وبجميع التكاملات الحظية (على المحيطات) المناظرة للحدود لمجموع المستطيلات كل على انفراد نجد أن حدود المجموع للمناظرة للحدود الداخلية (المحيطات الداخلية) تختصر فيما بينها. لأن عملية التكامل تتم في اتجاهات متضادة وتعطى الحدود الباقية في المجموع العلاقة (29). نفرض بعد ذلك أن المنحنى C يحتوى الأقواس $\bar{C}$ غير الموازية للمحورين والتي لا تعتبر خطوط انفصال للدالة الكاملة. نأخذ شبكة أضلاعها توازى محورى الإحداثيات وندرس خلايا الشبكة المتقاطعة مع المنطقة G . نرمز بالرمز G^* إلى مجمل مثل هذه الخلايا وبالرمز G^* إلى حدود المنطقة G^* . تكون العلاقة (29) صحيحة بالنسبة للمنطقة G^* . وبالاتصال إلى النهاية مع تناقص أبعاد الشبكة ليس من العسير التأكد من صحة العلاقة (29) للمنحنى النهائي C .

بالفعل يتكون الحد الأول من العلاقة (29) في حالة تطبيقها على المنطقة G^* من الحدود على النمط

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dt \quad \text{أو} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dx$$

حيث $\Phi(x, t)$ دالة متصلة و $\bar{C}_n$ المحيط (الكنطور) G^* الذى يعتبر تقريباً (approximation) للقوس $\bar{C}$ (شكل ١٧).



شكل ١٧

نفرض أن $t_n(x) = t$ معادلة المنحنى $\bar{C}_n$ و $t = t(x)$ معادلة المنحنى $\bar{C}$. من الواضح أن $t_n(x)$ تقارب بانتظام إلى $t(x)$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi[x, t_n(x)] dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)] dx,$$

كما يثبت قانونية الانتقال إلى النهاية*.

* حيث إن $dx = 0$ على الأجزاء الرأسية للخط للتكسر $\bar{C}_n$ فإن $t = t_n(x)$ في هذه العلاقة تكون هي معادلة الأجزاء الأفقية للمنحنى $\bar{C}_n$.

وإذا كان المنحنى C يحتمل أن يكوناً متغيراً خطوط انفصال للدالة المكاملة فإن العلاقة (29) تحتفظ بصحتها إذا أخذنا بمثابة قيم الدالة المكاملة قيمها النهائية من الناحية الداخلية للمنطقة G . وبذلك أثبتنا صحة العلاقة (29).

ندرس المسألة التالية :

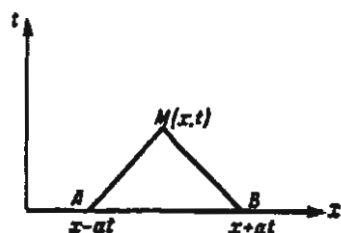
عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة والمتقطعة الملوثة في المنطقة $t \geq 0, -\infty < x < \infty$ والتي تحقق المعادلة :

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx dt = 0 \quad (29')$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$



شكل ١٨

حيث $\varphi(x)$ دالة متقطعة الملوثة و $f(x, t)$ و $\psi(x)$ دالتان متقطعتا الاتصال. وهنا C محيط (مكتور) متقطع الملوثة اختياري يقع في المنطقة $t \geq 0$. نوضح أن لهذه المسألة حلاً وحيداً يتحدد بعلاقة دالمبرت.

نفرض أن الدالة $u(x, t)$ هي حل مسألتنا. ندرس المثلث ABM (شكل ١٨) الملامس للمحور $t = 0$ ورأسه في المنطقة $M(x, t)$ وضلعاه يعتبران جزأين من

الميزتين $x - at = \text{const}$ و $x + at = \text{const}$ ونطبق عليه العلاقة (29'). على امتداد المستقيم AM تحقق المساواة $\frac{dx}{dt} = a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a du.$$

على امتداد المستقيم MB تحقق المساواة $\frac{dx}{dt} = -a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -a du.$$

وبالتالي فالصيغة المكاملة على امتداد الميزتين تعتبر تفاضلاً تاماً. وبإجراء التكامل على امتداد MA و BM نحصل على :

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = -a [u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = a [u(A) - u(M)].$$

ومن ثم تأخذ العلاقة (29) الصورة

$$u(M) = \frac{u(B) + u(A)}{2} + \frac{1}{2a} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{1}{2a} \iint_{ABM} f dx dt$$

أو

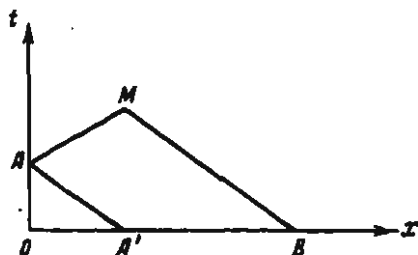
$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (30)$$

وبذلك فإذا وجد حل المسألة المصاغة فإنه يتحدد تحديداً أحادى القيمة بقيمه الابتدائية . وفي حالة المعادلة المتجانسة ($f=0$) تنطبق هذه العلاقة على علاقة دالمبيرت . ومن هنا نتج نظرية الوحداية للمسألة محل الدراسة .

وليس من الصعب التحقق بالتعويض المباشر من أن الدالة على النمط

$$u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi, \tau) d\xi,$$

حيث f_1, f_2 دالتان متقطعتا اللوثة . f_3 دالة متقطعة الاتصال . تحقق المعادلة (28) ومن ثم المعادلة (29) . وهذا يثبت نظرية الوجود . وحلول المسائل المدروسة في فقرة ٣ بمثابة أمثلة تعتبر دوال متقطعة للوثة وتشملها النظرية المشروحة .



شكل ١٩

وننتقل الآن إلى المسألة المحلية الأولى على المستقيم نصف اللانهائى . سنبحث عن حل

المعادلة (29) في نقطة ما $M(x, t)$ لحالة $t > x/a$ (شكل ١٩) لأنه في المنطقة $t < x/a$ (تحت الميزة $x=at$) لا يحدث تأثير الشروط المحلية ويتحدد الحل بالعلاقة (30) . نطبق العلاقة (29) على الشكل الرياى $MAA'B$ الذى فيه AA' , MB , MA أجزاء من الميزات . وباجراء التكامل على امتداد الميزات MA , AA' , BM نحصل على :

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{MAA'B} f dx dt.$$

وبالتعويض هنا عن إحداثيات النقط M, A, B, A' نحصل على :

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x+at, 0) - u(at-x, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} dx + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

أو

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \quad (31)$$

ومن (31) نتج مباشرة وحدانية حل المسألة محل الدراسة .

وعندما $f = 0$ تنطبق هذه العلاقة ، كما يسهل ملاحظة ذلك ، على العلاقة (24) بند ٢ ، قرة ٦ .
وتدرس بطريقة مماثلة المسألة الحدية الثانية أيضاً وكذلك المسائل للمستقيم المحدود .

وعند دراسة المسألة الحدية الأولى رأينا أن إعطاء الشرطين الابتدائيين

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

وشرط حدى واحد

$$u(0, t) = \mu(t)$$

يكفى للتمين التام للحل . ومن هنا يتبع أنه يجب أن توجد علاقة تربط بين الدوال φ, ψ, μ, ν حيث $\nu(t) = u_x(0, t)$. بفاضل العلاقة (31) بالنسبة إلى x ووضع $x = 0$ نحصل على :

$$\nu(t) = \frac{1}{a} [\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)]]_0 \quad (32)$$

حيث وضعنا للبساطة $f = 0$. وبالاستعانة بالعلاقة (32) يمكن مثلاً أن نجعل المسألة الحدية الثالثة تؤول إلى المسألة الحدية الأولى .

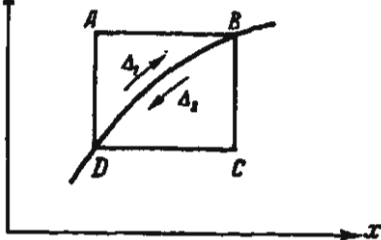
قوة ١٠ : انتشار الانفصالات على امتداد المميزات . نتقل إلى دراسة انفصالات مشتقات حلول المعادلة (29) . وستبين أن خطوط انفصال مشتقى الدالة $u(x, t)$ اللتين تحققتان المعادلة (29) يمكن أن تكون فقط هي خطوط عائلات المميزات

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

بالفعل - نفرض أن منحني ما قابلاً للتفاضل معرفاً بالمعادلة

$$x = x(t),$$

هو خط انفصال مشتق الدالة المتصلة المتقطعة القابلة للتفاضل $u(x, t)$. نفرض لتحديد أن دالة متزايدة. نطبق العلاقة (29) على المستطيل $ABCD$ (شكل ٢٠):



شكل ٢٠

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

وكذلك على المثلثين المحتين $\Delta_1 = BAD$, $\Delta_2 = BDC$

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 dt = 0,$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 dt = 0,$$

حيث الأقواس ${}_1, {}_2$ توضع أنه يجب أخذ القيم النهائية من داخل المثلثين Δ_1 أو Δ_2 . وبطرح المساواة السابقة من مجموع المساويتين الأخيرتين نحصل على:

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \right\} dt = 0$$

أو وقتاً لصغر القوس DB صفراً اختيارياً

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] x + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (33)$$

حيث نرمز كالمعاد لقيمة انفصال الدالة بالقوسين :

$$[f] = f_2 - f_1.$$

نأخذ المشقة بالنسبة إلى t لقيمة الدالة $u(x, t)$ على امتداد خط انفصال المشتقات :

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_t x + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_t \quad (t = 1, 2),$$

علماً بأنه بمثابة قيمة المشتقات يمكن أن نأخذ القيم النهائية سواء من Δ_1 أو من Δ_2 . والفرق بين الطرفين الأيمنين عند $i = 2 \cdot i = 1$ يعطى :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + x' \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

وبمقارنة هذه المساواة بالمساواة (33) وافترض أن أحد الانفصالين $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ ، $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$ على الأقل لا يساوى الصفر نرى أن هاتين المساويتين يمكن أن تتحققا في آن واحد إذا كان محدد هذه المجموعة مساوياً للصفر :

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

أو

$$x = \pm at + \text{const.}$$

وبذلك فإن خطوط انفصال مشتقى حل معادلة اللذببات هي للميزات .

مسائل :

١- ارسم المقطع الجانبي للوتر في لحظات مختلفة في الحالات التالية :

أ. الوتر اللانهائى $(-\infty < x < \infty)$.

(أ) السرعة الابتدائية تساوى صفراً

(ب) $\psi(x) = 0$ والمقطع الجانبي الابتدائى

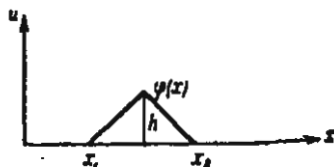
معطى على الصورة المبينة بشكل ٢١ .

(ب) الانحراف الابتدائى يساوى الصفر

والسرعة الابتدائية لها قيمة ثابتة

$u_t(x, 0) = \psi_0$ على جزء الوتر (x_1, x_2)

ومساوية للصفر خارج هذا الجزء .



شكل ٢١

(ج) الشروط الابتدائية على الصورة التالية :

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & (\text{عند } x < c) \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & (\text{عند } c < x < 2c) \\ 0 & (\text{عند } x > 2c) \end{cases}$$

II. الوتر نصف اللانهائى $(0 \leq x < \infty)$.

(د) السرعة الابتدائية تساوى صفراً $(\psi(x) = 0)$ والانحراف الابتدائى معطى في صورة المثلث المبين

بشكل ٢١ . طرف الوتر مثبت .

(هـ) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$.

(و) الشروط الابتدائية على الصورة

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < c) \\ \psi_0 = \text{const} & (c < x < 2c) \\ 0 & (x > 2c) \end{cases}$$

طرف الوتر $x = 0$ مثبت.

(ز) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$. ينبغي رسم المقطع الجانبي لجميع المسائل (أ) - (ز) في اللحظات الزمنية

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{c}{8a} k \quad (k = 1, 2, \dots, 8).$$

بين للمسائل (أ) - (ز) على المستوى الطورى (x, t) المناطق للناظرة للمراحل المختلفة للعملية.

٢- عين حل المسألة ١ (أ) لجميع قيم المتغيرين x, t (العلاقات التى تعبر عن الدالة $u(x, t)$ مختلفة لمناطق المستوى الطورى المختلفة).

٣- عين الانحراف فى نقطة ما t_0 بواسطة بالاستعانة بالمستوى الطورى (x, t) والمستوى (x, u) الذى (شكل ٢١) معطاة فيه الانحرافات الابتدائية ($\psi = 0$) سواء لحالة الوتر اللانهائى أو لحالة الوتر نصف اللانهائى ذى الطرف المثبت (أو الحر).

٤- فى بداية أنبوبة أسطوانية طويلة مملوءة بنغاز يوجد كباس يتحرك وفقاً لقانون اختياري $x = f(t)$ بسرعة $a < f'(t) = v$. الإزاحة الابتدائية والسرعة الابتدائية لجسيمات الغاز تساويان الصفر. عين إزاحة الغاز فى المقطع ذى الإحداثى الأفقى x . ادرس حالة حركة الكباس بسرعة ثابتة $a < c$. ماذا يمكن قوله عن حل المسألة إذا كانت سرعة الكباس $v > a$ ابتداء من لحظة معينة؟ (انظر الملحق ٥، للباب الثانى).

٥- نفرض أن فى وتر لانهائى تجرى الموجة $u(x, t) = f(x - at)$. اعتبر حالة الوتر فى اللحظة $t = 0$ هى الحالة الابتدائية وحل معادلة القذبات بالشروط الابتدائية للناظرة. قارن مع المسألة ١ (أ).

٦- قضيب لانهائى مرن ناتج باتصال قضيبين عند $x = 0$ بالمميزات

$$k_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1} \quad (x < 0) \text{ عند}$$

$$k_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2} \quad (x > 0) \text{ عند}$$

(أ) نفرض أنه من المنطقة $x < 0$ تجرى الموجة

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

حيث f دالة معطاة. عين معامل الانعكاس والانكسار للموجة عند مرورها بنقطة الالتحام ($x = 0$). بين عند أية شروط تنعدم الموجة المنعكسة.

(ب) حل المسألة المماثلة إذا أعطى الانحراف الابتدائي المحل

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & (\text{عند } x < x_1) \\ \varphi(x) & (x_1 < x < x_2 < 0) \\ 0 & (\text{عند } x > x_2) \end{cases}$$

وكانت السرعة الابتدائية تساوى الصفر.

٧- نفرض أنه في نقطة ما $x = x_0$ على الوتر معلق ثقل كتلته M . ومن المنطقة $x < 0$ تجرى الموجة

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

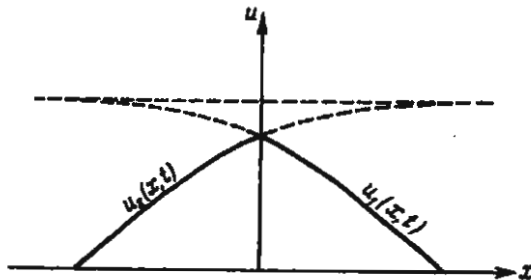
عinen الموجة المنكسرة والموجة المنعكسة.

٨- أنبوبة نصف لانهاية ($x > 0$) مملوءة بغاز مثالي يوجد على طرفها $x = 0$ كباس كتله M يتحرك بحرية. وفي اللحظة الزمنية $t = 0$ يكسب الكباس بواسطة صدمة سرعة ابتدائية v_0 . عمن عملية انتشار الموجة في الغاز إذا علم أن السرعة الابتدائية والانحراف الابتدائي لجسيمات الغاز يساويان الصفر.

إرشاد: ادرس حل معادلة اللذبذبات في المنطقة $x > 0$. استعن بالشروط الحدى

$$Mu_H(0, t) = S \rho_0 u_x(0, t)$$

(ρ_0 الضغط الابتدائي للغاز، S مساحة المقطع العرضي للأنبوبة، $\psi = \frac{cp}{c_0}$) والشروط الابتدائية على الحدود $u(0, 0) = 0, u_1(0, 0) = v_0$.



شكل ٢٢

٩- وتر لا نهائى ذو كتلة مركزة M عند $x = 0$ موجود في وضع الاتزان. وفي اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكسب الكتلة M بصدمة سرعة ابتدائية v_0 . أثبت أنه في اللحظة الزمنية $t > 0$ يكون اضطراب الوتر على الصورة المبينة بشكل ٢٢ حيث $u_0(x, t)$ ، $u_1(x, t)$ معرفتان بالعلاقين

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x-at)} \right] & (x-at < 0 \text{ عند}) \\ 0 & (x-at > 0 \text{ عند}) \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)} \right] & (x-at < 0 \text{ عند}) \\ 0 & (x-at > 0 \text{ عند}) \end{cases}$$

إرشاد : استعن بالشرط

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

١٠ - حل مسألة انتشار الفذبذبات الكهربائية في سلك لانهاى بالشرط

$$\frac{Q}{C} = \frac{R}{L}$$

وبشروط ابتدائية اختيارية .

١١ - عين حل المعادلة التكاملية للذبذبات للوتر نصف اللانهاى بشروط حدية من النوع الثالث (انظر فقرة ٩) .

١٢ - في الطرف $x = 0$ لقضيب نصف لانهاى ثبت غشاء يحدث مقاومة للذبذبات الطولية للقضيب تتناسب مع السرعة $u_t(0, t)$. عين عملية الذبذبة إذا أعطى الانحراف الابتدائى $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$ و

بند ٣ - طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : معادلة الذبذبات الحرة للوتر . إن طريقة فصل المتغيرات أو طريقة فورييه تعتبر واحدة من أكثر الطرق شيوعاً وانتشاراً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية . وسنشرح هذه الطريقة لمسألة تذبذبات الوتر المثبت من طرفيه . وحل المسألة المذكورة سندرسه بتفصيل تام وعند الشرح التالى للمنهج سوف نعلم على هذا البند ونشير إليه دون أن نكرر الإثباتات .

وهكذا سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

الذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

المعادلة (1) خطية ومتجانسة ولذا فإن مجموع الحلول الخاصة يعتبر أيضاً حلاً لهذه المعادلة. وبالحصول على عدد كبير بقدر كاف من الحلول الخاصة يمكن محاولة تعيين الحل المطلوب بتجميعها بمعاملات معينة.

نصيغ المسألة المساعدة الأساسية .

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق والذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

والقابل للتعبير عنه في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x فقط ، $T(t)$ دالة في المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (5) في المعادلة (1) نحصل على :

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

أو بعد القسمة على XT

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (6)$$

ولكى تكون الدالة (5) حلاً للمعادلة (1) يجب أن تتحقق المتساوية (6) بالتطابق ، أى تتحقق لجميع قيم المتغيرين المستقلين $0 < x < l, t > 0$. والطرف الأيمن للمتساوية (6) هى دالة فقط في المتغير t والطرف الأيمن دالة فقط في المتغير x . فثلاً بشييت x عند قيمة معينة وتغير t (أو بالعكس) نجد أن

الطرفين الأيمن والأيسر للمتساوية (6) يحتفظان عند تغيير متغيريهما بقيمة ثابتة

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (7)$$

حيث λ ثابت نأخذ له سهولة الاستنتاجات والتحليلات التالية بعد ذلك بإشارة سالبة دون أن نفترض شيئاً عند ذلك عن إشارته .

ومن العلاقة (7) نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين لتعيين $X(x)$ ، $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (8)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (9)$$

والشروط الحدية (4) تعطى

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0.$$

ومن هنا ينتج أن الدالة $X(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الإضافيين

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (10)$$

وإلا فقد كنا سنحصل على

$$T(t) \equiv 0, \quad u(x, t) \equiv 0,$$

في حين أن المسألة تنحصر في تعيين الحل غير التافه (غير الصفري) . ولا توجد أية شروط إضافية على الدالة $T(t)$ في المسألة المساعدة الأساسية .

وبذلك فنتيجة لتعيين الدالة $X(x)$ نصل إلى مسألة بسيطة هي مسألة القيم الذاتية (proper values) :

عين قيم البارامتر λ التي يوجد عندها حل غير تافه للمسألة :

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

وكذلك عين هذه الحلول . وهذه القيم للبارامتر λ تسمى بالقيم الذاتية، والحلول غير

التافهة المتناظرة لهذه القيم تسمى بالدوال الذاتية للمسألة (11) . والمسألة المصاغة بهذه الطريقة تسمى عادة بمسألة شتورم - ليوفيل .

ندرس على انفراد الحالات التي يكون فيها البارامتر λ سالبًا أو مساويًا للصفر أو موجبًا .

١ - عندما $\lambda < 0$ لا يوجد للمسألة حلول غير تافهة . بالفعل يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة :

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

وتعطي الشروط الحدية :

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l \sqrt{-\lambda}),$$

أى أن

$$C_1 = -C_2, \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

ولكن α في هذه الحالة التي ندرسها عدد حقيقى موجب ومن ثم فإن $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$ ولذا فإن

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

وبالتالى

$$X(x) = 0.$$

٢ - عندما $\lambda = 0$ أيضًا لا توجد حلول غير تافهة . وبالفعل ، في هذه الحالة يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

وتعطي الشروط الحدية :

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

أى أن $C_1 = 0, C_2 = 0$ وبالتالى

$$X(x) = 0.$$

٣- عندما $\lambda > 0$ يمكن كتابة الحل العام للمعادلة في الصورة :

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

والشروط الحدية تعطى :

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

وإذا كانت $X(x)$ لا تساوى الصفر بالتطابق فإن $D_2 \neq 0$ ولذا فإن

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \quad (12)$$

أو

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

حيث n أى عدد صحيح. وبالتالي فالحلول غير التافهة للمسألة (11) ممكنة الوجود فقط عند القيم

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

وهذه القيم الذاتية تناظرها الدوال الذاتية

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث D_n ثابت اختياري.

وهكذا فقط عند قيم λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2. \quad (13)$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية بالتطابق) للمسألة (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

محددة بدقة حتى معامل اختياري وضعناه يساوى الواحد الصحيح (في العلاقة

(14) . وهذه القيم λ_n تناظرها حلول للمعادلة (9) على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

حيث A_n , B_n ثوابت اختيارية .

وبالانتقال إلى المسائل (3) — (1) نستنتج أن الدوال

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (1) تحقق الشروط الحدية (4) وقابلة للتمثيل في صورة حاصل الضرب (5) لدالتين إحداهما دالة تعتمد فقط على x والأخرى تعتمد فقط على t . وهذه الحلول يمكن أن تحقق الشروط الابتدائية (3) لمسألتنا الأصلية فقط لحالات خاصة للدالتين $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

نتقل إلى حل المسألة (3) — (1) في الحالة العامة . وفقاً لحظية وتجانس المعادلة (1) فإن مجموع الحلول الخاصة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

يحقق أيضاً هذه المعادلة والشروط الحدية (2) . وستوقف عند هذا الموضوع فيما بعد (انظر الفقرة ٣ من هذا البند) . والشروط الابتدائية تكفل تعيين A_n و B_n .
وستطلب أن تحقق الدالة (17) الشروط (3) :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ومن نظرية متسلسلات فورييه نعلم أن الدالة الاختيارية $f(x)$ متقطعة الاتصال ومتقطعة القابلية للتفاضل المعرفة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ تحلل في متسلسلة فورييه

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (19)$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (20)$$

إذا كانت الدالتان $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ تحققان شروط التحليل في متسلسلة فورييه فإن :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (22)$$

ونبين مقارنة هاتين المتسلسلتين بالعلاقة (18) أنه لتحقق الشروط الابتدائية يجب وضع

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \quad (23)$$

• عادة تدرس الدوال الدورية ذات فترة الدورة $2l$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

وإذا كانت الدالة $F(x)$ دالة فردية فإن $a_n = 0$ ومن ثم فإن

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

وإذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة فقط في الفترة $(0, l)$ فإنه يمكن استكمالها فرديا وتكوين التحليل في الفترة من $-l$ إلى $+l$ مما يؤدي بنا إلى العلاقتين (19) و (20) (انظر كتاب يسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الثاني باللغة العربية طبعة دار « مير »).

مما يحدد تمامًا الدالة (17) التي تعطى حل المسألة المدروسة .

لقد عينا الحل في صورة متسلسلة لانهاية (17) . وإذا كانت المتسلسلة (17) تتباعد أو الدالة المعرفه بهذه المتسلسلة ليست قابلة للتفاضل فإن هذه المتسلسلة بالطبع لا يمكن أن تعتبر حلاً لمعادلتنا التفاضلية .

وفي هذه الفقرة نكتفي بالتكوين الشكلي (الصوري) للحل . أما توضيح الشروط التي بتحققها تتقارب المتسلسلة (17) وتعتبر حلاً للمعادلة فسنورده في الفقرة ٣ .

فقرة ٢ : تفسير الحل . نتقل الآن إلى تفسير الحل الناتج . الدالة $u_n(x, t)$ يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (24)$$

حيث *

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\arctan \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

وكل نقطة على الوتر x_0 تتذبذب ذبذبات توافقية

$$u_n(x_0, t) = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

بالسعة

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

وتسمى حركة الوتر على هذا النمط بالموجة المستقرة (أو الراهنة stationary wave). والنقط $x = m \frac{l}{n} (m = 1, 2, \dots, n-1)$ التي يكون فيها $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ تظل خلال كل العملية ثابتة وتسمى بمقد الموجة المستقرة $u_n(x, t)$. والنقط $x = \frac{2m+1}{2n} l (m = 0, 1, \dots, n-1)$ التي يكون فيها

* $\arctan \frac{B_n}{A_n}$ يرمز لها في بعض المراجع بالرمز $\tan^{-1} \frac{B_n}{A_n}$ (ملاحظة المترجم) .

الموجة (antinodes) وتسمى بيطون a_n تنذبذب بأكبر سعة $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ المستقرة .

والمقطع الجانبي للموجة المستقرة في أية لحظة زمنية يكون عبارة عن منحنى جيبي (سينوسويد)

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث

$$C_n(t) = a_n \cos \omega_n(t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

وفي اللحظات الزمنية t التي عندها يكون $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$ تصل الانحرافات إلى قيمها العظمى وسرعة الحركة تكون مساوية للصفر. وفي اللحظات الزمنية t التي عندها $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$ يكون الانحراف مساوياً للصفر وسرعة الحركة تصل إلى قيمتها العظمى. وترددات ذبذبات كل نقط الوتر متساوية وتساوى

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (26)$$

والترددات ω_n تسمى بالترددات الذاتية للذبذبات الوتر. وللذبذبات المستعرضة للوتر $a^2 = T/\rho$ وبالتالي فإن

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

وطاقة الموجة المستقرة الـ n (التوافقية الـ n) لحالة الذبذبات المستعرضة للوتر تساوى :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

وبالاستعانة بصيغتي α_n , ω_n وكذلك بالمتساوية $T = \sigma^2 \rho$ نحصل على :

$$E_n = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (29)$$

حيث $M = lp$ كتلة الوتر .

ونشعر نحن عادة بذبذبات الوتر من الصوت الصادر عن الوتر . ودون أن نتوقف عند عملية انتشار الذبذبات في الهواء والشعور بالذبذبات الصوتية في أذنا يمكن القول بأن صوت الوتر هو عبارة عن تراكب «النفثات البسيطة» المناظرة للموجات المستمرة التي تحلل إليها الذبذبات . وهذا التحليل للصوت إلى نفثات بسيطة لا يعتبر عملية ذات طابع رياضى فقط . فيمكن إبراز وفصل النفثات البسيطة في التجارب المعملية بواسطة جهاز المرنان (resonator) .

ويعتمد ارتفاع النغمة على تردد الذبذبات المناظرة لهذه النغمة . وتحدد قوة النغمة ب طاقتها وبالتالي بسعتها . وأكثر النفثات انخفاضاً التي يمكن أن تصدر عن الوتر تتحدد بأكثر الترددات الذاتية انخفاضاً $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ وتسمى بالنغمة الأساسية للوتر . والنفثات الأخرى المناظرة للترددات مضاعفات ω_1 تسمى بالنفثات المتوافقة (overtons) . ويعتمد جرس الصوت (timbre) على وجود النفثات المتوافقة بالإضافة إلى النغمة الأساسية وعلى توزيع الطاقة على التوافقيات . وتعتمد النغمة الأكثر انخفاضاً للوتر وجرسها على طريقة إثارة الذبذبات . بالفعل فطريقة إثارة الذبذبات تحدد الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

التي يتم التعبير بدالاتها عن المعاملات A_n , B_n . وإذا كان $A_1 = B_1 = 0$ فإن النغمة الأكثر انخفاضاً ستكون هي النغمة المناظرة للتردد ω_n حيث n هو أصغر عدد يكون عنده A_n أو B_n مختلفاً عن الصفر .

وعادة يصدر الوتر نفس النغمة الواحدة . بالفعل نحدث في الوتر ذبذبة بشده إلى ناحية وتركه بلا سرعة ابتدائية . وفي هذه الحالة يكون

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

و

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi d\xi > 0,$$

وذلك لأن

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

والمعاملات التالية تكون بوجه عام أصغر كثيراً من A_1 لأن الدالة $\sin \frac{n\pi}{l} \xi$ تكون متعاقبة الإشارة عندما $n \geq 2$. وكحالة خاصة إذا كانت $\varphi(x)$ متائلة بالنسبة إلى منتصف الفترة فإن $A_2 = 0$. وبذلك فإذا أحدثنا في الوتر ذبذبات بشده إلى ناحية ما ($\varphi(x) > 0$) فإن النغمة الأكثر انخفاضاً ستكون هي النغمة الأساسية للوتر التي طاقتها بوجه عام تكون أكبر من طاقة التوافقيات الأخرى .

ويمكن إحداث ذبذبات في الوتر بطرق أخرى أيضاً . فعلى سبيل المثال إذا كانت الدالة الابتدائية فردية بالنسبة إلى منتصف الوتر فإن

$$A_1 = 0$$

وتناظر النغمة الأكثر انخفاضاً التردد التالى :

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

وإذا لمسنا الوتر المصدر للصوت عند منتصفه بالضبط فإن صوته يتغير بحدة وتصدر جواباً (octave) على نغمتها . وهذه الطريقة لتغيير النغمة تستخدم كثيراً عند العزف على الكمان والقيثارة (الجيتار) والآلات الوترية الأخرى وتسمى الفلاجيوليت (flageolet) . وهذه الظاهرة واضحة تماماً من وجهة نظر نظرية ذبذبة الوتر ، ففي لحظة لمس منتصف الوتر نلغى الموجات المستقرة التي يكون لها في هذه النقطة بطون ونحفظ فقط بالتوافقيات التي لها في هذه النقطة عقد . وبذلك

تظل باقية التوافقيات الزوجية فقط . ويكون التردد الأكثر انخفاضاً هو

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$$

وإذا لمسنا الوتر عند نقطة تبعد عن طرفه بمسافة ثلث طوله فإن ارتفاع (علو) النغمة الأساسية يعلو ثلاث مرات لأنه عند ذلك تظل باقية تلك التوافقيات فقط التي لها عقد عند النقطة $x = l/3$.

والعلاقات

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} , \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}} , \quad (30)$$

اللتان تحددان على الترتيب التردد وفترة الدورة للذبذبة الأساسية تفسران القوانين التالية للذبذبة الوتر التي اكتشفت في البداية بالتجارب المعملية (قوانين ميرسين) :

١ - للأوتار المتشابهة في الكثافة والمشدودة بطريقة واحدة تتناسب فترة دورة ذبذبة الوتر مع طوله .

٢ - تغيير فترة الدورة عند الطول المعطى للوتر (عند ثبات الطول) متناسبة عكسياً مع الجذر التربيعي للشد .

٣ - عند الطول والشد المعطيين (عند ثبات الطول والشد) تتناسب فترة الدورة مع الجذر التربيعي للكثافة الخطية للوتر .

وهذه القواعد يمكن توضيحها عملياً بسهولة على الجهاز الوحيد الوتر .

وفي هذه الفقرة درسنا الموجات المستقرة الناشئة عند ذبذبة الوتر المثبت الطرفين . ومسألة وجود حل على الصورة

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

تكافئ مسألة وجود الموجات المستقرة لأن المقاطع الجانبية لهذا الحل في اللحظات الزمنية المختلفة تكون متناسبة .

فقرة ٣ : التعبير عن الذبذبات الاختيارية في صورة تراكب من الموجات المستقرة . في فقرة ١ درسنا مسألة الذبذبات الحرة للوتر المثبت الطرفين وأثبتنا وجود

حلول خاصة في صورة موجات مستقرة . وفي نفس الفقرة أعطينا صيغة شكلية لتمثيل الذبذبة الاختيارية في صورة مجموع لانهاى من الموجات المستقرة . وفي هذه الفقرة يعطى التبرير لإمكانية تمثيل الحل الاختيارى في صورة تراكب موجات مستقرة . وفي الدرجة الأولى ندرس تعميم مبدأ التراكب المعروف جيدًا للمجاميع النهائية على حالة المتسلسلات اللانهائية .

نفرض أن $L(u)$ مؤثر تفاضلى خطى بحيث إن $L(u)$ يكون مساويًا لمجموع بعض مشتقات الدالة (العادية أو الجزئية) بمعاملات هي عبارة عن دوال في المتغيرات المستقلة .

نثبت المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للتراكب) :

إذا كانت الدوال u_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L(u) = 0$ (التفاضلية العادية أو التفاضلية الجزئية) فإن المتسلسلة $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ تكون أيضًا حلًا لهذه المعادلة إذا أمكن حساب مشتقات u الموجودة في المعادلة $L(u) = 0$ بواسطة عملية تفاضل المتسلسلة حدًا حدًا .

بالفعل إذا كانت مشتقات u الموجودة في المعادلة $L(u) = 0$ يمكن حسابها بالتفاضل حدًا حدًا للمتسلسلة فإننا نحصل وفقًا لخطية المعادلة على :

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

وذلك لأنه يمكن جمع المتسلسلات المتقاربة حدًا حدًا . وبذلك أثبتنا أن الدالة u تحقق المعادلة . وبمطابقة الشرط الكافى لإمكانية التفاضل حدًا حدًا للمتسلسلة سنستعين باستمرار بشرط التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \quad (31)$$

الناجمة بعد عملية التفاضل .

ونعود الآن إلى مسألتنا الحدية . قبل أى شىء علينا التأكد من اتصال الدالة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

ومن اتصال هذه الدالة سيستج أن $u(x, t)$ تتقارب بالاتصال إلى قيمها الابتدائية والحدية . ولهذا الغرض يكفى إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة المعبرة عن الدالة $u(x, t)$ وذلك لأن الحد العام لهذه المتسلسلة هو دالة متصلة ، والمتسلسلة المتقاربة بانتظام - التى حدودها دوال متصلة - تعرف دالة متصلة . بالاستعانة بالثباتية :

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

نستنتج أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (33)$$

تعتبر هى المتسلسلة الحد الأعظم (majorant) للمتسلسلة (32) . وإذا كانت المتسلسلة الحد الأعظم (33) تتقارب فإن المتسلسلة (32) تتقارب بانتظام أى تكون الدالة $u(x, t)$ متصلة .

وللتأكد من أن $u_t(x, t)$ تتقارب بانتظام إلى قيمها الابتدائية يجب إثبات اتصال هذه الدالة ولهذا يكفى إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

أو تقارب المتسلسلة الحد الأعظم

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

وأخيرًا للتأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تحقق المعادلة أى أن المبدأ المعمم للترابك يكون قابلاً للتطبيق يكفى إثبات إمكانية إجراء عملية التفاضل مرتين للمتسلسلة المعبرة عن $u(x, t)$ حدًا حدًا ولهذا الغرض يكفى بدوره إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلتين :

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

التي تناظرهما بدقة أقصاها معامل التناسب المتسلسلة الحد الأعظم المشتركة لها :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \quad (36)$$

وبما أن

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi a} \psi_n,$$

حيث

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

فإن مسألتنا تحول إلى إثبات تقارب المتسلسلات

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ولهذا الغرض نستعين بالخواص المعروفة لمتسلسلات فورييه .

إذا كانت للدالة الدورية $F(x)$ بفترة دورة $2l$ مشتقات متصلة عددها k والمشتقة الـ $(k+1)$ لها متقطعة الاتصال فإن المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \quad (38)$$

حيث a_n و b_n معاملات فورييه ، تكون متسلسلة متقاربة . وإذا كنا نتحدث عن التحليل في متسلسلة للدالة $f(x)$ بـ $\sin \frac{\pi n}{l} x$ حيث الدالة $f(x)$ معطاة فقط في الفترة $(0, l)$ فإنه يجب أن تكون المطالب السابقة متحققة للدالة $F(x)$ الناتجة بالاستكمال الفردي للدالة $f(x)$. وبوجه خاص فلاتصال الدالة $F(x)$ يجب أن

يكون $f(0)=0$ وإلا فإنه يتج بالاستكمال الفردي انفصال عند النقطة $x=0$. وبالمثل في النقطة $x=l$ يجب أن تكون $f(l)=0$ لأن الدالة المستكاملة متصلة ودورية بفترة دورة $2l$. ويتج اتصال المشتقة الأولى عند $x=0, x=l$ مباشرة عند الاستكمال الفردي. وبوجه عام فلاتصال المشتقات من رتب زوجية للدالة المستكاملة يجب أن تتحقق المطالب

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0, 2, 4, \dots, 2n). \quad (39)$$

ويتحقق اتصال المشتقات من رتب فردية بدون أية مطالب إضافية.

وهكذا فلتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \varphi_n \quad (k=0, 1, 2)$$

يكفى أن نطلب أن يحقق الانحراف الابتدائي $\varphi(x)$ المطالب (الشروط) التالية :

١ - مشتقات الدالة $\varphi(x)$ حتى الرتبة الثانية بما في ذلك المشتقة من الرتبة الثانية نفسها تكون متصلة والمشتقة الثالثة متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0; \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \quad (40)$$

ولتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \psi_n \quad (k=-1, 0, 1)$$

يجب أن نشترط تحقق المطالب التالية للسرعة الابتدائية $\psi(x)$:

٢ - الدالة $\psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل ولها مشتقة ثانية متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \quad (41)$$

وبذلك فقد أثبتنا أن أية دذبذة $u(x, t)$ « بالذاتين الابتدائيتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تحققان الشروط (١) و (٢) يمكن التعبير عنها في صورة تراكب من الموجات المستقرة. والشروط (١) و (٢) تعتبر شروطاً كافية ترتبط بطريقة الإثبات المطبقة هنا.

وقد حلت مسألة مماثلة في فقرة ٥ بند ٢ بطريقة الموجات المشترة :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha, \quad (42)$$

حيث Φ , Ψ يعتبران استكمالين فرديين بالنسبة إلى l , 0 للدالتين الابتدائيتين $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ المعطاتين في الفترة $(0, l)$ والدالتان Φ , Ψ كما أوضحنا دوريتان بفترة دورة $2l$ ولذا يمكن التعبير عنها بالتسلسلين

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث φ_n , ψ_n معاملات فورييه للدالتين $\Phi(x)$, $\Psi(x)$. وبالتعويض بهاتين التسلسلين في العلاقة (42) والاستعانة بنظرية جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بين زاويتين نحصل على الصيغة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (43)$$

التي تنطبق بالصيغة الناتجة بطريقة فصل المتغيرات .

وبالتالي للعلاقة (43) تتحقق عند كل الافتراضات الخاصة بالعلاقة (42) (انظر فقرة ١ - بند ٣) التي نتجت بشرط أن تكون الدالة $\Phi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرتين والدالة $\Psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرة واحدة.

وبالانتقال إلى الدالتين $\varphi(x)$, $\psi(x)$ يجب أن نطلب علاوة على شروط القابلية للتفاضل تحقق الشروط التالية أيضاً :

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

وهكذا فالشروط (١) و (٢) التي تعتبر شروطاً كافية لتبرير أساس طريقة فصل المتغيرات تعتمد على طريقة الإثبات وتحتوى على شروط إضافية بالمقارنة مع الشروط التي تكفل وجود الحل .

وعند تبرير إمكانية التعبير عن الحل كنتيجة لتراكب الموجات المستقرة أوردنا الطريقة الأولى لإثبات تقارب للتسلسلات لأنها لا ترتبط بالصورة الخاصة (42) القابلة للتطبيق فقط على المعادلة المبسطة للذبذبات ولأن هذه الطريقة يمكن تعميمها بلا صعوبة على سلسلة من المسائل الأخرى رغم أنها تشترط مطالب أكثر على الدوال الابتدائية .

فقرة ٤ : المعادلات غير المتجانسة . ندرس المعادلة غير المتجانسة للذبذبات

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad (45)$$

بالشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l \quad (46)$$

والشروط الحدية المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} t > 0. \quad (47)$$

نبحث عن حل المسألة في صورة تحليل في متسلسلة فورييه بـ x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (48)$$

باعتبار t عند ذلك كبارامتر. ولتعيين $u(x, t)$ ينبغي تعيين الدالة $u_n(t)$. نعرعن الدالة $f(x, t)$ والشروط الابتدائية في صورة متسلسلات فورييه:

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

بالتعويض عن الصورة المفترضة للحل (48) في المعادلة الأصلية (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

نرى أنها ستتحقق إذا كانت كل معاملات التحليل مساوية للصفر أى إذا كان

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (50)$$

ولتعيين $u_n(t)$ حصلنا على معادلة تفاضلية عادية بمعاملات ثابتة. وتعطى الشروط الابتدائية:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

ومن هنا يتبع أن

$$\left. \begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

وهذان الشرطان الإضافيان يحددان تمامًا حل المعادلة (50). والدالة $u_n(t)$ يمكن التعبير عنها في الصورة

$$u_n(t) = u_n^{(I)}(t) + u_n^{(II)}(t),$$

حيث

$$u_n^{(I)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \cdot f_n(\tau) d\tau \quad (52)$$

هي حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية* و

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \quad (53)$$

هي المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية المعطاة. وبذلك يكتب الحل المطلوب في الصورة:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (54)$$

والمجموع الثاني هو عبارة عن حل مسألة الذبذبات الحرة للوتر بالشروط الابتدائية المعطاة وقد سبق بحثها بتفصيل كاف. وننتقل إلى دراسة المجموع الأول الذي يمثل الذبذبات القسرية للوتر تحت تأثير القوة الخارجية بشروط ابتدائية صفرية.

* يمكن التأكد من ذلك مباشرة. والملاحظة (52) يمكن الحصول عليها بطريقة تناير الثوابت. انظر كذلك نهاية هذه الفقرة.

وبالاستعانة بالصيغة (49) للدوال $f_n(t)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t) &= \\ &= \int_0^t \int_0^t \left\{ \frac{2}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{t} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{t} x \sin \frac{\pi n}{t} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (55) \end{aligned}$$

حيث

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{t} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{t} x \sin \frac{\pi n}{t} \xi. \quad (56)$$

نوضح المعنى الفيزيائي للحل الناتج . نفرض أن الدالة $f(\xi, \tau)$ مختلفة عن الصفر في جوار صغير صغراً كافياً للنقطة $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta \tau.$$

والدالة $\rho f(\xi, \tau)$ هي عبارة عن كثافة القوة المؤثرة ، والقوة المؤثرة على الجزء $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)$ تساوى

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi,$$

علمًا بأن

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} F(\tau) d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

هو دفع هذه القوة خلال الفترة الزمنية $\Delta \tau$. وإذا طبقنا نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

سنحصل على :

$$u(x, t) = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (57)$$

$$\xi_0 \leq \bar{\xi} \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \bar{\tau} \leq \tau_0 + \Delta \tau. \quad \text{حيث}$$

وبالانتقال في العلاقة (57) إلى النهاية عند $\Delta \xi \rightarrow 0$. $\Delta \tau \rightarrow 0$ نحصل على الدالة

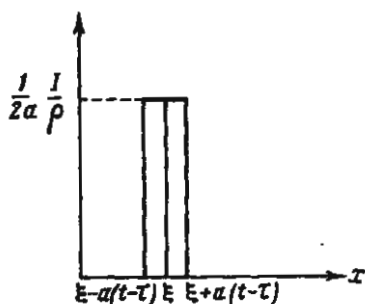
$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \frac{I}{\rho}, \quad (58)$$

التي يمكن تفسيرها على أنها تأثير الدفع اللحظي المركز ذى القدرة I .
وإذا علمت الدالة $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t - \tau)$ المعبرة عن تأثير وحدة الدفع المركز فإنه يتضح مباشرة أن تأثير القوة $f(x, t)$ الموزعة توزيعاً منتظماً يجب أن يمثل بالعلاقة

$$u(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (59)$$

التي تنطبق على العلاقة (55) الناتجة أعلاه .

ودالة تأثير الدفع المركز للمستقيم
اللانهاى درست في البند السابق .
ونذكر القارئ بأنها تكون دالة متقطعة
الشباب مساوية $\frac{1}{2a} \frac{I}{\rho}$ داخل الزاوية
المميزة العليا للنقطة (ξ, τ) وصفراً خارج
هذه الزاوية . ودالة تأثير الدفع المركز
للوتر المثبت $(0, l)$ يمكن أن تنتج من
دالة التأثير للوتر اللانهاى بواسطة
الاستكمال الفردى بالنسبة إلى النقطتين



شكل ٢٣

$$. x = 0, x = l$$

ندرس لحظة زمنية t قريبة قريباً كافياً من τ حينما لا يكون قد حدث بعد تأثير
الانعكاس عن الطرفين $x = 0, x = l$. وهذه اللحظة تمثل دالة التأثير بالرسم اللين
في شكل ٢٣ . نحلل هذه الدالة (بفرض $I = \rho$) في متسلسلة فورييه
ب $\sin \frac{\pi n}{l} x$. وتكون معاملات فورييه مساوية :

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(a, \xi, t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} a da = \frac{1}{a l} \int_{l-a(t-\tau)}^{l+a(t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} a da =$$

$$= \frac{1}{a\pi n} \left\{ \cos \frac{\pi n}{l} [\xi - a(t - \tau)] - \cos \frac{\pi n}{l} [\xi + a(t - \tau)] \right\} = \\ = \frac{2}{a\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau).$$

ومن هنا نحصل على العلاقة

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi, \quad (60)$$

التي تنطبق على العلاقة (56) التي حصلنا عليها بطريقة فصل المتغيرات .

ولقيم t التي عندها يبدأ تأثير الطرفين المتبئين في الحدوث يكون تكوين دالة التأثير بواسطة المميزات عملية مطولة ، أما التعبير عن هذه الدالة في صورة متسلسلة فورييه فيحتفظ بصحته في هذه الحالة أيضا .

وسنكتفي هنا بالتكوين الشكلي (الصوري) للحل دون توضيح لشروط قابلية العلاقة الناتجة للتطبيق .

ندرس المعادلة الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u^{(1)} + p_n u = f(t) \quad (1^*) \\ \left(u^{(l)} = \frac{d^l u}{dt^l} \right)$$

بالشروط الابتدائية

$$u^{(l)}(0) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2^*)$$

ويعطى حلها بالعلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3^*)$$

حيث $U(t)$ حل المعادلة المتجانسة

$$L(U) = 0$$

بالشروط الابتدائية

$$U^{(l)}(0) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, n-2), \quad U^{(n-1)}(0) = 1. \quad (4^*)$$

بالفعل - بحساب مشتقات $u(t)$ بتفاضل الأطراف اليمنى بالنسبة إلى t نجد أن

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U(0) f(t) & [U(0) &= 0], \\ u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(1)}(0) f(t) & [U^{(1)}(0) &= 0], \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) & [U^{(n-2)}(0) &= 0], \\ u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) & [U^{(n-1)}(0) &= 1]. \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

بالتمريض بهذه المشتقات في المعادلة (1*) نحصل على :

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau) d\tau + f(t) = f(t),$$

أي أن المعادلة تحقق. ومن الواضح أن الشروط الابتدائية (2*) تحقق أيضًا.

وليس من الصعب إعطاء تفسير فيزيائى واضح للدالة $U(t)$ وللعلاقة (3*). عادلة تمير الدالة $u(t)$ بإزاحة مجموعة ما - و $f(t)$ عن القوة للزئرة على هذه المجموعة. نفرض أنه ل $t < 0$ كانت مجموعتنا في حالة السكون ونتبع إزاحتها بالدالة $f_e(t) (\geq 0)$ التى تختلف عن الصفر فقط في الفترة الزمنية $0 < t < e$. ونرمز للدفع هذه القوة بالرمز

$$I = \int_0^e f_e(\tau) d\tau.$$

ونرمز بالرمز $u_e(t)$ للدالة للناظرة للدالة $f_e(t)$ معتمدين e بارامتر مع فرض $I = 1$. وليس من الصعب التأكد من أنه عندما $e \rightarrow 0$ نوجد $\lim_{e \rightarrow 0} u_e(t)$ دون اعتماد على طريقة اختيار $f_e(t)$ ومن أن هذه النهاية تساوى الدالة $U(t)$ للمرة أعلاه

$$U(t) = \lim_{e \rightarrow 0} u_e(t),$$

وذلك إذا وضعنا $U(t) = 0$ لحالة $t < 0$. وبذلك فإن الدالة $U(t)$ من الطيى أن تسمى بدالة تأثير الدفع اللحظى.

بالفعل - فدراسة العلاقة (3*) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نحصل على :

$$u_e(t) = U(t - \tau_e) \int_0^t f_e(\tau) d\tau = U(t - \tau_e) \quad (0 \leq \tau_e \leq e < t).$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نرى أنه توجد النهاية

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t - \tau_{\varepsilon}) = U(t),$$

كما يثبت متعلقنا .

وننتقل الآن إلى تمثيل حل المعادلة غير المتجانسة بواسطة $U(t)$ دالة تأثير الدفع اللحظي . بتقسيم الفترة $(0, t)$ بالنقط τ_i إلى أجزاء متساوية

$$\Delta \tau = \frac{t}{m},$$

نمبر عن الدالة $f(t)$ في الصورة

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t),$$

حيث

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{عند } t < \tau_i \text{ و } t \geq \tau_{i+1} \\ f(t) & \text{عند } \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \end{cases}$$

عندئذ نحصل على الدالة

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t),$$

حيث $u_i(t)$ هي حلول المعادلة $L(u_i) = f_i$ بمطيات ابتدائية صفرية .

وإذا كان m كبيراً بقدر كاف فإن الدالة $u_i(t)$ يمكن اعتبارها دالة تأثير الدفع اللحظي الذي شدته :

$$I = f_i(\tau_i) \Delta \tau = f(\tau_i) \Delta \tau,$$

ومن ثم فإن

$$u(t) = \sum_{i=1}^m U(t - \tau_i) f(\tau_i) \Delta \tau \xrightarrow{\Delta \tau \rightarrow 0} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

أى إننا توصل إلى العلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

التي تبين أن تأثير القوة المؤثرة باتصال يمكن التعبير عنه بترابك تأثيرات الدفع اللحظية .

وفي الحالة للدراسة أعلاه تحقق المعادلة (50) والشروط $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. ولذلك التأثير $U(t)$ نحصل على :

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = \frac{1}{a}$$

ومن ثم فإن

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a t.$$

ومن هنا ومن (3*) نحصل على العلاقة (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a (t-\tau) f_n(\tau) d\tau.$$

والتعبير التكاملي (3*) الناتج أعلاه لحل المعادلة التفاضلية العادية (1*) يحمل كما تأكدنا نفس المعنى الفيزيائي كالعلاقة (59) التي تعطي التعبير التكاملي لحل المعادلة غير المتجانسة للذبذبات.

فقرة 5 : المسألة العامة الحدية الأولى . ندرس المسألة العامة الحدية الأولى

لمعادلة الذبذبات :

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (45)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l; \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0. \quad (47)$$

نדרج دالة مجهولة جديدة $v(x, t)$ بفرض أن :

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

وبذلك فالدالة $v(x, t)$ هي عبارة عن انحراف الدالة $u(x, t)$ عن دالة ما معلومة $U(x, t)$.

وهذه الدالة $v(x, t)$ ستحدد كحل للمعادلة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

بالشروط الإضافية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v_t(x, 0) = \bar{\psi}(x); \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0);$$

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

نختار الدالة المساعدة $U(x, t)$ بحيث يكون

$$\bar{\mu}_1(t) = 0, \quad \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

ولهذا الغرض يكفي أن نضع

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

وبذلك فالمسألة العامة الحدية الأولى للدالة $u(x, t)$ قد آلت إلى المسألة الحدية للدالة $v(x, t)$ بشروط حدية صفرية. وطريقة حل هذه المسألة عرضناها فيما سبق (انظر فقرة ٤).

فقرة ٦ : المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً. إن المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً أى عندما لا تعتمد الشروط الحدية والطرف الأيمن للمعادلة على الزمن تعتبر فئة هامة للغاية من المسائل :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45')$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (47')$$

وفي هذه الحالة من الطبيعي البحث عن الحل في صورة المجموع

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ الحالة المستقرة (الانحناء الاستاتيكي) للوتر المعرفة بالشروط

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

$$\bar{u}(0) = u_1,$$

$$\bar{u}(l) = u_2,$$

و $v(x, t)$ الانحراف عن الحالة المستقرة. ولا يصعب ملاحظة أن الدالة $\bar{u}(x)$ تكون مساوية

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

وكحالة خاصة إذا كان $f_0 = \text{const}$ فإن

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2} (lx - x^2).$$

ومن الواضح أن الدالة $v(x, t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

بالشروط الحدية المتجانسة

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0$$

والشروط الابتدائية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

وبذلك فإن v هي حل المسألة الحدية المبسطة التي سبق لنا دراستها في فقرة ١ من هذا البند.

عند استنباطنا لمعادلة ذبذبات الوتر وفي حالات أخرى كثيرة لم نأخذ في اعتبارنا تأثير قوة الجاذبية. ومما سبق ذكره يتبع أنه بدلاً من الأخذ في الاعتبار صراحة قوة الجاذبية (وبوجه عام القوى التي لا تعتمد على الزمن) يمكن أن نأخذ في الاعتبار الانحراف عن الحالة المستقرة زمنياً.

نحل مسألة مبسطة من هذا النمط بشروط ابتدائية صفرية :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45'')$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (46')$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \quad (47'')$$

وفي هذه الحالة نحصل للدالة $v(x, t)$ على المسألة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ولا يصعب التأكد من أنه لحل هذه المسألة لا توجد ضرورة للاستعانة بالصيغة التحليلية الدقيقة للدالة $\bar{u}(x)$.
وصيغة $v(x, t)$ وفقاً للعلاقة (17) تكون على الصورة :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x), \quad \text{حيث}$$

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} \right)$$

هي الدالة الذاتية للمسألة الحدية التالية :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (10)$$

ومن الشروط الابتدائية يتبع أن

$$B_n = 0$$

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l u(x) X_n(x) dx.$$

ولحساب مثل هذا التكامل تعتبر الطريقة التالية سهلة للغاية :

بالاستعانة بالمعادلة (8) نجد أن :

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

نعرض بهذه الصيغة في العلاقة الخاصة بـ A_n ونجرب التكامل المكرر مرتين بالتجزئة فنحصل على

$$A_n = -\frac{2}{l\lambda_n} \int_0^l u(x) X_n''(x) dx = \frac{2}{l\lambda_n} \left\{ u X_n'(x) \Big|_0^l - u' X_n \Big|_0^l + \int_0^l u'' X_n(x) dx \right\}.$$

ومن هنا وبالأخذ في الاعتبار المعادلة والشروط الحدية للدالة $\bar{u}(x)$ نجد أن :

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \left[u_2 X_n'(l) - u_1 X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right]$$

أو

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left[u_2 (-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right].$$

وكحالة خاصة نحصل للمعادلة المتجانسة ($f_0(x) = 0$) على :

$$A_n = \frac{2}{\pi n} [u_2 (-1)^n - u_1].$$

وهذه الطريقة تكون مناسبة لحساب معاملات فورييه للشروط الحدية من النوع الثانى والثالث وكذلك فى حالة المسألة الحدية للوتر غير المتجانس

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] + \lambda p(x) X = 0,$$

إذا كانت الدوال الذاتية والقيم الذاتية معلومة .

فقرة ٧ : المسائل بدون الشروط الابتدائية . يمكن كما سبق أن أوضحنا أن نؤول مسألة ذبذبة الوتر بنظام حدى معطى إلى حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية .

غير أن مثل هذه الطريقة كثيرًا ما تعقد حل المسألة الذى يمكن إيجادها مباشرة . عند دراسة تأثير النظام الحدى من المهم تعيين حل خاص ما (للمعادلة المتجانسة) يحقق الشروط الحدية المعطاة وذلك لأن حساب الفرق الناتج من الشروط الابتدائية المعطاة (التصحیح) يؤول إلى حل نفس المعادلة بشروط حدية صفرية .

والمسائل بدون شروط ابتدائية تعتبر فئة هامة للغاية من مسائل انتشار النظام الحدى .

وإذا كان النظام الحدى يؤثر وقتًا طويلاً بقدر كاف فإنه بسبب الاحتكاك الذى تتصف به أى مجموعة فيزيائية حقيقية يضعف تأثير المعطيات الابتدائية مع مرور الزمن . وبذلك فإننا نصل بشكل طبعى إلى المسألة بدون شروط ابتدائية (I) :

$$\left. \begin{aligned} &\text{عين حل المعادلة} \\ &u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \quad (61) \\ &\text{بالشروط الحدية المعطاة :} \\ &u(0, t) = \mu_1(t), \\ &u(l, t) = \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (I_a)$$

وهذه المسألة نسميها المسألة (I₀) .

والحد u_t في الطرف الأيمن للمعادلة يناظر الاحتكاك ويتناسب مع السرعة .
ندرس أولاً مسألة انتشار النظام الحدى الدورى :

$$u(l, t) = B \sin \omega t \text{ أو } u(l, t) = A \cos \omega t \quad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (63)$$

وللمستقبل من المناسب لنا أن نكتب الشرط الحدى في الصورة المركبة (بمساعدة الدوال في المتغير المركب) :

$$u(l, t) = A e^{i\omega t}. \quad (64)$$

وإذا كانت الدالة

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + i u^{(2)}(x, t)$$

تحقق المعادلة (61) بالشروط الحدية (63) ، فإن (64) $u^{(1)}(x, t)$ و $u^{(2)}(x, t)$ هما جزءاها الحقيقي والتخيلي - يحققان كل على انفراد نفس المعادلة (نظراً لخطية المعادلة) وكذلك الشرط (63) والشروط الحدية عند $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

وهكذا نعين حل المسألة

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= A e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

بفرض

$$u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$$

وبالتعويض بهذه الصيغة في المعادلة نحصل للدالة $X(x)$ على المسألة التالية :

$$X'' + k^2 X = 0 \cdot \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2} \right), \quad (66)$$

$$X(0) = 0, \quad (67)$$

$$X(l) = A. \quad (68)$$

ومن المعادلة (66) والشرط الحدى (67) نعين :

$$X(x) = C \sin kx.$$

ويعطى الشرط عند $x=l$:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \quad (68)$$

ومن ثم

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (70)$$

حيث $X_1(x)$, $X_2(x)$ هما جزءا $X(x)$ الحقيقى والتخيلى .

ويمكن التعبير عن الحل المطلوب فى الصورة

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

حيث

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\alpha \rightarrow 0$ نجد أن

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k = \frac{\omega}{a} \quad (71)$$

وبالتالى فإن

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \quad (72)$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \quad (73)$$

ندرس المسألة التالية :

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > -\infty; \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & t > -\infty; \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (I_0)$$

وسنسميها بالمسألة (I₀) . ومن الواضح أن $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ و $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ يعتبران حلين

للمسألة (I₀) بالشروط الحدية :

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(1)}(0, t) &= 0, & \bar{u}^{(1)}(l, t) &= A \cos \omega t, \\ \bar{u}^{(2)}(0, t) &= 0, & \bar{u}^{(2)}(l, t) &= A \sin \omega t.\end{aligned}$$

وحل المسألة عند $\alpha = 0$ لا يوجد دائماً. فإذا كان تردد الذبذبات القسرية ω منطبقاً على التردد الذاتي ω_n للذبذبات الوتر المثبت الطرفين :

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

فإن مقام علاقتي $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$ يؤول إلى الصفر ولا يوجد حل للمسألة بدون الشروط الابتدائية .

ولهذه الحقيقة معنى فيزيائى بسيط : فعند $\omega = \omega_n$ يحدث الرنين أى لا يوجد نظام مستقر. وتزداد السعة بلا حدود ابتداء من لحظة زمنية معينة $t = t_0$. وعند وجود احتكاك ($\alpha \neq 0$) يمكن وجود النظام المستقر لأى ω لأن $\sin kl \neq 0$ عندما يكون k عدداً مركباً.

وإذا كان $\mu_1(t) = 0$ وكانت $\mu_2(t)$ دالة دورية قابلة للتمثيل فى صورة متسلسلة :

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \quad (74)$$

حيث ω أصغر تردد ، A_n , B_n معاملات فورييه ، فإن حل المسألة لحالة $\alpha = 0$ يأخذ الصورة

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l}.$$

فقط ما لم ينطبق أحد الترددات ω_n على الترددات الذاتية للوتر المثبت .

أما إذا كانت $\mu_2(t)$ دالة غير دورية فإنه بتحليلها فى تكامل فورييه بطريقة مماثلة يمكن الحصول على الحل فى صورة تكاملية .

ونشير إلى أن حل المسألة بدون الشروط الابتدائية عندما $\alpha = 0$ معرف تعريفاً غير أحادى القيمة ما لم نفترض شروطاً إضافية ما . بالفعل إذا أضفنا إلى أى حل لهذه المسألة أية تركيبة من الموجات المستقرة

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث A_n, B_n ثوابت اختيارية ، نرى أن هذا المجموع سيحقق نفس المعادلة ونفس الشروط الحدية .

وللحصول على حل وحيد للمسألة (I_α) عندما $\alpha = 0$ نورد شرطاً إضافياً « للاحتكاك المتلاشي » :

حل المسألة (I_0) يسمى محققاً لشرط « الاحتكاك المتلاشي » إذا كان حلاً للمسألة (I_α) عندما $\alpha \rightarrow 0$.

وبالمثل نحل المسألة إذا كان الطرف $x = l$ مثبّطاً وعند $x = 0$ معطى نظام حدى .

وحل المسألة العامة بدون الشروط الابتدائية

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

يتحدد في صورة مجموع حدين ، لكل حد منهما يكون أحد الشرطين الحدين فقط غير متجانس .

نثبت وحدانية الحل المأمود للمسألة بدون الشروط الابتدائية للمعادلة (61). وعند ذلك فسنفرض اتصال الحل هو ومشتقاته حتى الرتبة الثانية بما في ذلك مشتقات الرتبة الثانية نفسها . في المنطقة $0 \leq x \leq l, -\infty < t < t_0$ إذا كانت القيم الحدية

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

معرفة في المنطقة $0 \leq x \leq l, -\infty < t < t_0$.

نفرض أن $u_1(x, t), u_2(x, t)$ حلان محمودان للمسألة المبروسة (I) .

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

حيث $M > 0$ عدد ما .

والفرق بين هاتين الدالتين

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

محمود ($|v| < 2M$) ونحقق المعادلة (61) والشروط الحدية المتجانسة

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ومعاملات فورييه للدالة v :

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

من الواضح أنها تحقق المعادلة :

$$v_n + av_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (*)$$

وذلك لأن المشتقات الثانية للدالة $v(x, t)$ متصلة في الفترة $0 \leq x \leq l$.

والحل العام للمعادلة (*) يكون على الصورة :

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t} \quad (**)$$

حيث $q_n^{(1)}, q_n^{(2)}$ جذرا المعادلة المميزة ويساويان

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

وحيث أن $\alpha > 0$ فإن $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$ وبالتالي فإن الحل (**) للمعادلة (*) يكون محدودا عندما

$t \rightarrow -\infty$ فقط عندما $A_n = 0, B_n = 0$ أي أن $v_n(t) = 0$ لأي n .
وبذلك فإن

$$v(x, t) = 0, \quad u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

فقرة ٨ : القوة المركزة. ندرس مسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير قوة مركزة مؤثرة في النقطة $x = x_0$. وإذا كانت القوة موزعة على جزء ما $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ فإن الحل يعين بالعلاقة (55). وبالاتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ يمكن الحصول على حل المسألة المطروحة.

ومن ناحية أخرى فقد رأينا عند استنباط معادلة الذبذبات (انظر (8) ، فقرة ١ ، بند ١) أنه في النقطة x_0 حيث تؤثر القوة المركزة يحدث انفصال للمشتقة الأولى وتظل الدالة نفسها متصلة. والحل $u(x, t)$ لمسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير القوة المركزة في النقطة x_0 يمكن التعبير عنه بدالتين مختلفتين :

$$\left. \begin{aligned} & 0 \leq x \leq x_0 \quad \text{عند} \quad u(x, t) = u_1(x, t) \\ & x_0 \leq x \leq l \quad \text{عند} \quad u(x, t) = u_2(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

وهاتان الدالتان يجب أن تحققا المعادلة

$$x \neq x_0 \text{ عند } u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (76)$$

والشروط الحدية الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_2(l, t) &= 0; \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

وشروط الترافق عند النقطة $x = x_0$ (انظر (8) ، بند ١) المتكونة من شرط اتصال الدالة $u(x, t)$:

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad (78)$$

ومن الشرط الذى يربط بين مقدار انفصال المشتقة وبين القوة $f(t)$ المركزة فى النقطة x_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \quad (79)$$

ولا توجد ضرورة للاهتمام بتحقيق الشروط الابتدائية . فإذا وجدنا حلاً خاصاً للمعادلة (76) يحقق الشروط الحدية من (77) وكذلك (78) و (79) فإننا بإضافة حل المعادلة المتجانسة للذبذبات إليه نستطيع دائماً تحقيق الشروط الابتدائية المعطاة .

ندرس حالة خاصة

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

ونعين الحل الذى يحقق فقط الشروط الحدية بافتراض أن الدالة تؤثر طول الوقت ابتداء من $t = -\infty$ (نظام مستقر) أى نحل المسألة بدون الشروط الابتدائية . نبحث عن الحل فى الصورة

$$\begin{aligned} & \text{عندما } 0 \leq x \leq x_0 \quad u_1(x, t) = X_1(x) \cos \omega t \\ & \text{عندما } x_0 \leq x \leq l \quad u_2(x, t) = X_2(x) \cos \omega t \end{aligned}$$

ومن المعادلة (76) ينتج :

$$\left. \begin{aligned} & \text{عندما } 0 \leq x \leq x_0 \quad X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 = 0 \\ & \text{عندما } x_0 \leq x \leq l \quad X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

والدالتان X_1 , X_2 علاوة على ذلك يجب أن تحققا الشرطين الحديين

$$X_1(0)=0, \quad X_2(l)=0, \quad (81)$$

الناجمين من (77) وكذلك يجب أن تحققا شرطى التوافق

$$X_1(x_0)=X_2(x_0), \quad X_1'(x_0)-X_2'(x_0)=\frac{A}{k}, \quad (82)$$

الناجمين من (79) , (78) .

ومن المعادلة (80) والشرطين (81) نحصل على :

$$X_1(x)=C \sin \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x)=D \sin \frac{\omega}{a} (l-x);$$

وشرطا التوافق (82) يعطيان

$$C \sin \frac{\omega}{a} x_0 - D \sin \frac{\omega}{a} (l-x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l-x_0) = \frac{A}{k}.$$

وبتعيين المعاملين C , D من هذه العلاقات نجد أن :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} (l-x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \cos \omega t & (0 \leq x \leq x_0 \text{ عند}) \\ u_2 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} (l-x) \cos \omega t & (x_0 \leq x \leq l \text{ عند}) \end{cases}$$

وبالمثل يكتب الحل عندما $f(t) = A \sin \omega t$.

وهكذا حصلنا على الحل لحالة $f(t) = A \cos \omega t$ أو $f(t) = A \sin \omega t$.
وإذا كانت الدالة $f(t)$ دورية وتساوى

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t)$$

(ω أصغر تردد) فن الواضح أن :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \sin \frac{\omega n}{a} (l - x_0)}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n x}{a} \times \right. \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ u_2 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \sin \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad x_0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (83)^c$$

وإذا كانت الدالة $f(t)$ غير دورية فإنه بالتعبير عنها في صورة تكامل فورييه يمكن بطريقة مماثلة الحصول على الحل في صورة تكاملية.

وإذا كان مقام الدالتين (83) يساوى الصفر

$$\sin \frac{\omega n l}{a} = 0,$$

$$\omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

أى إذا كانت فئة ترددات القوة الاضطرابية المؤثرة تحتوى على أحد الترددات الذاتية للذبذبات (الرنين) فإن النظام المستقر لن يوجد.

وإذا كانت نقطة تأثير القوة x_0 إحدى عقد الموجة المستقرة المناظرة للذبذبة الحرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

وعند ذلك فإن البسط في الحدود المناظرة في الدالة u يؤول إلى الصفر ولا تنشأ

• الحدان الأولان في هذين المجموعين يتاخران الانحناء المستقر (الاستاتيكي) المعروف وفقاً لمقدار القوة $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$ كما يسهل ملاحظة ذلك بالدالتين :

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) & (\text{عند } 0 \leq x \leq x_0) \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) & (\text{عند } x_0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

ظاهرة الرنين. أما إذا كانت نقطة تأثير القوة المؤثرة بتردد ω_m هي بطن الموجة المستقرة المناظرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin \frac{\omega_m}{\alpha} x_0 = 1,$$

وتنشأ ظاهرة الرنين بأكثر حدة ممكنة.

ومن هنا نتج قاعدة هي إنه لإحداث الرنين في الوتر عند التأثير عليه بقوة مركزة يجب أن يكون تردد القوة ω مساوياً لأحد الترددات الذاتية للوتر وأن تنطبق نقطة تأثير القوة على إحدى بطون الموجة المستقرة.

فقرة ٩ : الشكل العام لطريقة فصل المتغيرات. إن طريقة فصل المتغيرات قابلة للتطبيق ليس فقط على معادلة ذبذبات الوتر المتجانس وإنما أيضاً على معادلة ذبذبات الوتر غير المتجانس. لندرس المسألة التالية :

عين حل المعادلة

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (84)$$

الذى يحقق الشروط

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (85)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (86)$$

وهنا ρ, q, k دوال متصلة في الفترة $0 \leq x \leq l$ وموجبة ($k > 0$). $q \geq 0$ ($\rho > 0$). نجري حل هذه المسألة بطريقة فصل المتغيرات. وللبحث عن الحلول الخاصة نلجأ، كما سبق، إلى المسألة للمساعدة عن وجود الموجات للمستقرة :

عين الحل غير التافه للمعادلة (84) الذى يحقق الشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

. ندرس تلك الحالة عندما يؤول $k(x)$ إلى الصفر في بعض النقط دراسة مفصلة (انظر الملحق ٢).

وبقبل التمثيل في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

بالتعويض بالصيغة المفترضة للحل في المعادلة والاستعانة بالشروط الحدية ، نحصل بعد فصل المتغيرات على :

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

ولتعيين الدالة $X(x)$ نحصل على المسألة الحدية التالية للقيم الذاتية* :

عين تلك القيم للبارامتر λ التي يوجد عندها حلول غير تافهة للمسألة :

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \quad (87)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (88)$$

وكذلك عين هذه الحلول . وتسمى قيم البارامتر λ هذه بالقيم الذاتية وتسمى الحلول غير التافهة المناظرة لها بالدوال الذاتية للمسألة (88) - (87) . نصيغ الخصائص الأساسية للدوال الذاتية والقيم الذاتية للمسألة الحدية (87) و (88) اللازمة لشرحنا التالي .

١ - توجد فئة قابلة للعد (countable set) من القيم الذاتية $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ التي تناظرها حلول غير تافهة للمسألة هي الدوال الذاتية $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$.

٢ - عندما يكون $q \geq 0$ تكون كل القيم الذاتية لـ λ_n موجبة .

* عندما $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $k = k_0 = \text{const}$ نحصل على المسألة الحدية للذبذبات الذاتية للوتر المثبت الطرفين :

$$\begin{aligned} X'' + \mu X &= 0 & \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0} \lambda \right) \\ X(0) &= 0, & X(l) = 0, \end{aligned}$$

التي سبق بحثها في بند ٢ .

٣ - الدوال الذاتية $X_m(x)$. $X_n(x)$ تكون عند $m \neq n$ متعامدة فيما بينها بالوزن $\rho(x)$ في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (89)$$

٤ - (نظرية القابلية للتحليل - نظرية ف. ستيكلوف) . الدالة الاختيارية $F(x)$ القابلة للتفاضل باتصال مرتين والتي تحقق الشروط الحدية $F(0) = F(l) = 0$ تحلل في متسلسلة منتظمة ومطلقة التقارب بالدوال الذاتية $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad (90)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx.$$

ويبنى عادة إثبات المنطوقين ١ و ٤ على نظرية المعادلات التكاملية ولن نورده هنا . وفي هذه الفقرة سنثبت فقط الخاصيتين ٢ و ٣ .

وقبل أن نتقل إلى إثبات هذه الخواص نستنبط علاقة تسمى علاقة جرين . نفرض أن $u(x)$ و $v(x)$ دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين في الفترة $a < x < b$ ، والمشتقة الأولى لكل منهما موجودة ومتصلة في الفترة المغلقة $a \leq x \leq b$. لندرس الصيغة

$$uL[v] - vL[u] = u(kv') - v(ku') = [k(uv' - vu')]'$$

ويتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى x من a إلى b نحصل على علاقة جرين

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = k(uv' - vu') \Big|_a^b. \quad (91)$$

ثبت الخاصية ٣ . نفرض أن $X_m(x)$ ، $X_n(x)$ دالتان ذاتيتان تناظران القيمتين الذاتيتين λ_m ، λ_n . بفرض $u = X_m(x)$ ، $v = X_n(x)$ في العلاقة (91) مع

الأخذ في الاعتبار الشروط الحدية (88) نحصل على * :

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\} dx = 0 \quad (a=0, b=l),$$

ومن هنا وبلاستعانة بالمعادلة (87) نحصل على :

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

وبذلك فإذا كان $\lambda_n \neq \lambda_m$ فإنه يتحقق الشرط

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad (92)$$

الذى يعبر عن تعامد الدالتين الذاتيتين $X_m(x)$, $X_n(x)$ بالوزن $\rho(x)$.

ونثبت الآن أن كل قيمة ذاتية بناظرها بدقة أقصاها معامل ثابت دالة ذاتية واحدة فقط **. فبالفعل كل دالة ذاتية تتحدد تحديداً أحادى القيمة كحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بقيمة الدالة نفسها ومشتقتها الأولى عند $x=0$. وبافتراض وجود دالتين $\bar{X}$, $\bar{X}$ تناظران نفس القيمة λ وتؤولان إلى الصفر عندما $x=0$. ثم بأخذ الدالة

$$X^*(x) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(l)} \bar{X}(x),$$

للتفتان X'_m , X'_n متصلتان في كل نقطة من الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ بما في ذلك التفتان $x=0$ و $x=l$ وذلك لأن المعادلة (87) تنطبق

$$h(x) X'_m(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m dx + C.$$

ومن هنا ينتج وجود المشتقة X'_m عند $x=0$ و $x=l$.

•• إن الخاصية التي يتم اثباتها للمسألة الحدية الأولى مؤسسة على أن الحلين المستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لا يمكن أن يؤولا إلى الصفر في نفس النقطة الواحدة. وهذا المنطوق يتعلق بالمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفرية. وبشروط حدية أخرى (على سبيل المثال $X(0) = X(l)$) يمكن أن توجد دالتان ذاتيتان مختلفتان تناظران قيمة ذاتية واحدة

$$X'(0) = X'(l) \text{ يمكن أن توجد دالتان ذاتيتان مختلفتان تناظران قيمة ذاتية واحدة}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \text{ عندما } X_n^{(1)}(x) = \cos \frac{2\pi n}{l} x, \quad X_n^{(2)}(x) = \sin \frac{2\pi n}{l} x$$

نرى ان هذه الدالة تحقق نفس المعادلة من الرتبة الثانية (87) ونفس الشروط الابتدائية التي تحققها الدالة $\bar{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}'(0) = \bar{X}'(0).$$

وبذلك أثبتنا أن $X^*(x) = \bar{X}(x)$ وأن

$$\bar{X}(x) = A \bar{X}(x) \left(A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \right).$$

ونشير إلى أننا خلال عملية الإثبات استخدمنا الشرط $\bar{X}'(0) \neq 0$ الذى يتحقق حتماً لأن حل المعادلة الخطية (87) المحدد بالشرطين الابتدائيين

$$\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{X}'(0) = 0,$$

يساوى الصفر بالتطابق ومن ثم فلا يمكن أن يكون دالة ذاتية (انظر صفحة ١٣٤).

ووفقاً لخطية وتجانس المعادلة والشروط الحدية من الواضح أنه إذا كانت الدالة $X_n(x)$ دالة ذاتية عند القيمة الذاتية λ_n فإن الدالة $A_n X_n(x)$ (A_n ثابت اختياري) تعتبر أيضاً دالة ذاتية لنفس λ_n . وقد أثبتنا أعلاه أن فئة الدوال الذاتية تنتهى عند ذلك تماماً. ومن الواضح أن الدوال الذاتية التى تختلف عن بعضها بمعامل لن نعتبرها مختلفة اختلافاً جوهرياً. ولتجنب عدم التحديد في اختيار المعامل يمكن إخضاع الدوال الذاتية للمطلب «التوحيد» (normalization)

$$\|X_n\|^2 = \int_0^1 X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

وإذا لم تحقق دالة ما $\hat{X}_n(x)$ هذا المطلب فإنه يمكن «توحيدها» بضربها في المعامل A_n :

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|\hat{X}_n\|}.$$

وإذا أخضعنا الدوال الذاتية للمسألة (88) — (87) لشرط التوحيد ($\|X_n\| = 1$) فإنها تكون مجموعة متعامدة متوحدة

$$\int_0^1 X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

نتقل إلى إثبات الخاصية ٢. نثبت أن $\lambda > 0$ عندما $q \geq 0$. نفرض أن $X_n(x)$ دالة ذاتية متوحدة (normed) تناظر القيمة الذاتية λ_n ومن ثم

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

بضرب طرفي هذه المتساوية في $X_n(x)$ والتكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى l نحصل على :

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = - \int_0^l X_n(x) L[X_n] dx$$

أو

$$\lambda_n = - \int_0^l X_n \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX_n}{dx} \right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx,$$

وذلك لأن الدالة $X_n(x)$ يفترض أنها متوحدة. وبإجراء التكامل بالتجزئة والاستعانة بالشروط الحدية (88) نحصل على :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -X_n k X'_n \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx = \\ &= \int_0^l k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx, \quad (93) \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج أن

$$\lambda_n > 0,$$

لأن لدينا من الشرط $k(x) > 0$ و $q(x) \geq 0$.

وبترك إثبات نظرية القابلية للتحليل جانبًا نتوقف باختصار عند حساب معاملات التحليل.

ليس من الصعب ملاحظة أن

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx. \quad (94)$$

بالفعل ، بضرب طرفي المتساوية

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

في $\rho(x)X_n(x)$ وإجراء التكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى 1 مع الأخذ في الاعتبار تعامد الدوال الذاتية نحصل على الصيغة المكونة أعلاه للمعاملات F_n (معاملات فورييه) *.

ونعود الآن إلى المعادلة التفاضلية الجزئية. للدالة $T(t)$ لدينا المعادلة

$$T'' + \lambda_n T = 0 \quad (95)$$

بدون أية شروط إضافية. ووفقاً لكون λ_n موجبة كما أثبتنا أعلاه يكون حل هذه المعادلة على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t.$$

حيث A_n, B_n معاملان غير محددين. وبذلك يكون للمسألة المساعدة فئة لانهاية من الحلول على الصورة

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

وننتقل إلى حل المسألة بالشروط الابتدائية المعطاة. سنبحث عن الحل في الصورة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (96)$$

والشكل الصوري لتحقيق الشروط الابتدائية (86) يؤسس على نظرية القابلة للتحليل ٤ ويجرى تمامًا كما هو في حالة الوتر المتجانس. ومن التساويتين

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

نجد أن

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (97)$$

*. تتيج إمكانية إجراء التكامل حداً حداً للمتسلسلة من نظرية ستيفنسون عن التقارب المتظم للمتسلسلة.
(90).

حيث ψ_n , φ_n معاملات فورييه للدالتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$ عند التحليل بمجموعة الدوال المتعامدة $\{X_n(x)\}$ بالوزن $\rho(x)$.

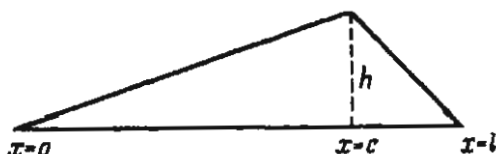
وبالاكتفاء بالشكل العام لطريقة فصل المتغيرات لن نورد شروط قابلية هذه الطريقة للتطبيق سواء المتعلقة منها بمعاملات المعادلة أو بالدوال الابتدائية .

ويعود الفضل في تأليف الأبحاث الأساسية الأولى لتبرير هذه الطريقة إلى ف. ستيكوف . وقد نشرت في عام ١٨٩٦ وفي عام ١٩٢٢ .

مسائل :

١ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت عند طرفيه المثارة (شكل ٢٤) بشد الوتر عند القطعة $x = c$ بمقدار h أى أن $u(c, 0) = h$ (انظر الملحق ١) . والسرعة الابتدائية تساوى الصفر .

٢ - وتر مثبت الطرفين يشد من النقطة $x = c$ بالقوة F_0 . عين ذبذبة الوتر إذا علم أن القوة في اللحظة الابتدائية تتوقف عن التأثير وأن السرعة الابتدائية تساوى صفراً .



شكل ٢٤

٣ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثارة بالدفع K الموزع على الجزء $(c - \delta, c + \delta)$: (أ) بانتظام - (ب) وفقاً للقانون $\cos \frac{x-c}{2\delta} \pi$ (انظر الملحق ١) إذا كان الانحراف الابتدائي يساوى صفراً .

٤ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثارة بالدفع K المؤثر عند النقطة $x = c$ (انظر الملحق ١) . الانحراف الابتدائي يساوى صفراً .

٥ - اثبت الخاصية الجمعية (additivity) لطاقة التوافقيات المنفردة لعملية الذبذبات بالشروط الحدية $u = 0, u_x = 0$. ادرس أيضاً الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x + hu = 0$ (افرض أن كل التسلسلات منتظمة التقارب) . احسب طاقة التوافقيات المنفردة في المسائل ١ - ٢ - ٣ - ٤ .

٦ - زنبرك مثبت عند أحد طرفيه عند النقطة $x = 0$ يشد بحمل كتلته M معلق عند النقطة $x = l$. عين ذبذبات الزنبرك إذا كان الثقل في اللحظة $t = 0$ يسقط ولا يؤثر بعد ذلك عند الطرف $x = l$ أية قوى على الإطلاق .

٧ - قضيب مثبت عند أحد طرفيه وعند الطرف الثانى تؤثر القوة F_0 . عين ذبذبات القضيب إذا علم أن القوة تتوقف عن التأثير في اللحظة الابتدائية .

٨- عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت عند أحد طرفيه وفي الطرف الآخر علق في اللحظة الابتدائية ثقل كتلته M . الشروط الابتدائية صفرية .

٩- ثبتت كتلة M عند النقطة $x = c$ على وتر مثبت الطرفين $x = 0$ - $x = l$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ إذا كان : (أ) في اللحظة الابتدائية شد الوتر عند النقطة $x = c$ بمقدار h عن وضع الاتزان ثم ترك دون اكتساب سرعة ابتدائية ، (ب) الانحراف الابتدائي والسرعة الابتدائية يساويان الصفر (انظر الملحق ٣) .

١٠- عين عملية ذبذبة زنبرك حر الطرفين إذا كان الشد الابتدائي متظا (ضع نموذجا لهذه المسألة) .

١١- عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت الطرفين بمرونة إذا كانت معاملات الكرازة (الصلابة) واحدة والشروط الابتدائية اختيارية .

ابحث الحل عند قيم h الصغيرة (تثبيت «لين») وعند قيم h الكبيرة (تثبيت «صلب») واحسب الفروق المناظرة للقيم الذاتية للوتر الحر الطرفين والوتر المثبت الطرفين .

١٢- عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر المثبت الطرفين بصلابة إذا كانت الذبذبات تحدث في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة ، والشروط الابتدائية اختيارية .

١٣- سلك كهربائي معزول طوله l بالميزات $L, R, C, G = 0$ مشحون حتى جهد معين ثابت v_0 . وفي اللحظة الابتدائية يوصل أحد طرفي السلك بالأرض ويبقى الطرف الثاني طول الوقت معزولا . عين توزيع الجهد في السلك .

١٤- يتذبذب وتر مثبت الطرفين تحت تأثير قوة توافقية موزعة بالكثافة $f(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$. عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر بشروط ابتدائية اختيارية . ابحث امكانية حدوث الرنين وعين الحل في حالة الرنين .

١٥- حل المسألة ١٤ بافتراض أن الذبذبة تحدث في وسط تتناسب مقاومته مع السرعة . عين الذبذبات المستقرة المكونة للجزء الأساسي من الحل عندما $t \rightarrow \infty$.

١٦- قضيب مرن طوله l وضع رأسيا وثبت بصلابة عند طرفه العلوي بمحصد يسقط سقوطا حرا وعندما تصل سرعته إلى السرعة v_0 يتوقف فورا . عين ذبذبة القضيب بافتراض أن الطرف الأسفل للقضيب يكون حرا .

$$17 - \text{ حل المعادلة } u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B$$

حيث B, A, b ثوابت .

١٨- حل المعادلة التفاضلية

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sinh x$$

بشروط ابتدائية صفرية والشروط الحدية :

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

حيث A, B, C ثوابت .

١٩ - على الوتر المتجانس المثبت الطرفين $x = l$. $x = 0$ بصلابة اثرت عند النقطة $x = c$ القوة التوافقية $(0 < c < l)$

$$F(t) = P_0 \sin \omega t,$$

التي تؤثر ابتداء من اللحظة $t = 0$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ بافتراض الشروط الابتدائية صفرية .

٢٠ - حل مسألة الذبذبات لقضيب غير متجانس طوله l مثبت الطرفين بصلابة ومكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c$ ($0 < c < l$) إذا كان الانحراف الابتدائي على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & (0 \leq x \leq c \text{ عند}) \\ \frac{h}{l-c} (l-x) & (c \leq x \leq l \text{ عند}) \end{cases}$$

والسرعتان الابتدائيتان تساويان الصفر .

٢١ - عين اللذبذبات المستمرة لزنبرك أحد طرفيه مثبت وعند الطرف الثاني تؤثر القوة

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

٢٢ - عين اللذبذبات المستمرة لقضيب غير متجانس مكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c$ إذا كان أحد طرفي القضيب مثبتا والطرف الآخر يتحرك وفقا للقانون

$$u(l, t) = A \sin \omega t.$$

بند ٤ - المسائل بالمعطيات على المميزات

فقرة ١ : صياغة المسألة . ندرس عدة مسائل تعتبر تطويراً للمسألة الحدية الأولى لمعادلة ذبذبات الوتر . وللتبسيط سندرس الظواهر الناشئة بالقرب من أحد طرفي الوتر معتبرين الطرف الآخر مبتعداً إلى ما لا نهاية أى أننا نأخذ بمثابة المسألة الأصلية مسألة المستقيم نصف اللانهائى .

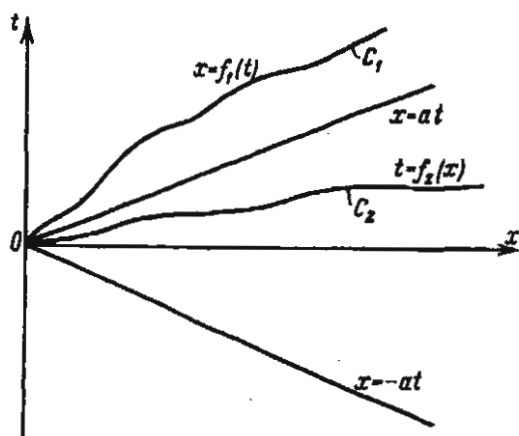
معادلة ذبذبات الوتر $u_{xx} = a^2 u_{tt}$ متماثلة بالنسبة للمتغيرين x , t إذا وضعنا $a^2 = 1$ أى غيرنا مقياس الزمن بإدراج متغير جديد $t = at'$. إلا أن الشروط الإضافية تدخل لانتماثل (asymmetry) فى التفسير الرياضى للمتغيرين x , t : فى الشروط الابتدائية (عندما $t = 0$) تعطى دالتان $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ فى حين أنه فى الشروط الحدية (عند $x = 0$) تعطى دالة واحدة فقط $u(0, t)$.

وكما سبق ذكره في بند ٢ ، فقرة ٩ يوجد بين الدوال ومشتقاتها العمودية عند $t = 0$, $x = 0$ العلاقة :

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

لأى قيمة اختيارية z . ومن هنا ينتج أنه عند $t = 0$ و $x = 0$ لا يمكن إعطاء كل هذه الدوال بشكل مستقل عن بعضها البعض . فالشروط التي تعتبر اختيارية هي فقط ثلاثة شروط مما يبين عدم إمكانية التعميض المتماثل في الشروط الإضافية .

والشروط الإضافية يمكن إعطاؤها إما على الخطوط المستقيمة $x = 0$, $t = 0$ (كنا نتعامل مع المسائل من هذا النوع حتى الآن) وإما على بعض المنحنيات في المستوى الطوري . فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء القيم الحدية على منحنى ما $C_1(x = R_1(t))$ غير أنه لكي تكون هذه المسألة قابلة للحل يجب أن يكون المنحنى C_1 فضلاً عن ملاسته بشكل كاف ، محققاً أيضاً لبعض الشروط الإضافية الأخرى .



شكل ٢٥

ندرس عملية ذبذبات غاز في أنبوبة ذات حدود متحركة (بكباس متحرك) . من الواضح أن سرعة حركة الحدود التي تتحرك وفقاً للقانون $x = f_1(t)$ لا يمكن اعتبارها اختيارية : فهي يجب ألا تفوق سرعة الصوت a ($\frac{df_1(t)}{dt} < a$) . والنتيجة الهندسية لذلك هي أن المنحنى $C_1(x = f_1(t))$ يجب أن يكون مفصلاً

عن الخط $t = 0$ الذى يحمل القيم الابتدائية بالمميزة (شكل ٢٥) : ولو وقعت نقطة واحدة على الأقل من نقط المنحنى C_1 أسفل المميزة $x = at$ لكانت قيمة الدالة $u(x, t)$ مستحدد تماماً بالشروط الابتدائية ولما كان يمكن إعطاء هذه القيمة بشكل اختياري. ويرتبط المعنى الفيزيائي لذلك بأنه عند حركة الغاز بسرعات تفوق سرعة الصوت تفقد معادلة الصوتيات معناها وصحتها وينبغي عندئذ استخدام المعادلات اللاخطية لديناميكا الغازات *.

والشروط الابتدائية يمكن إعطاؤها ليس فقط على المحور $t = 0$ وإنما أيضاً على منحنى ما $(t = f_2(x))$ C_2 الذى يجب أن يحقق الشرط $|f_2'(x)| < 1/a$ (عند ذلك تقع C_2 فى مجال تأثير المعطيات الابتدائية). والمسائل على هذا النمط يسهل حلها بواسطة المعادلة التكاملية للذبذبات (انظر بند ٢ ، فقرة ٩).

وحيث إننا لا نهدف إعطاء قائمة كاملة لجميع المسائل الحدية الممكنة فسندرس بالتفصيل مسألة تعيين الحل بالمعطيات على المميزات. وهذه المسألة الحدية تسمى عادة بمسألة جورس. وتشكل المسألة بالمعطيات على المميزات أهمية كبيرة من وجهة نظر التطبيقات الفيزيائية. فهي تصادفنا مثلاً عند دراسة عمليات انتشار (sorption) ومج (desorption) الغازات (انظر ملحق ٥) وعمليات التجفيف (انظر المسألة ١) وكثير من المسائل الأخرى.

فقرة ٢ : طريقة التقريبات المتتالية لمسألة جورس. ندرس المسألة المبسطة التالية بالمعطيات على المميزات :

$$\left. \begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

والشروط الإضافية معطاة على المستقيمين $x = 0$ و $y = 0$ اللذين يعتبران مميزتين للمعادلة (1). سنفرض أن الدالتين $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ قابلتان للتفاضل وتحققان شرط التوافق $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. بإجراء التكامل بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y

على التالى للمعادلة (1) نحصل على :

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi$$

أو

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

وبذلك فالمعادلة المبسطة التى لا تحتوى على المشتقات الأولى u_x , u_y والدالة المجهولة يتم التعبير عن الحل فى صورة تحليلية صريحة (2). ومن العلاقة (2) ينتج مباشرة وجود حل المسألة المصاغة ووحدانيته.

ننتقل لحل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + f(x, y) \quad (3)$$

بالشروط الإضافية التالية على للميزتين $x = 0$, $y = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \quad (3')$$

حيث $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ تحققان شروط القابلية للتفاضل والتوافق. وسنفترض أن للمعاملات a , b , c دوال متصلة فى المتغيرين x , y .

وتبين العلاقة (3) أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta + \\ &+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

ولحلها نستخدم طريقة التقريبات المتتالية. نختار بمثابة التقريب الصفري الدالة :

$$u_0(x, y) = 0.$$

وعندئذ تعطى المعادلة (4) الصيغة التالية للتقريبات المتتالية :

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ &\dots \dots \dots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ونشير إلى أن

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

نثبت التقارب المنتظم للمتتابعات

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

ولهذا الغرض ندرس الفروق

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \\ &= \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1}(x, \eta) \right] d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \\ &= \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1}(\xi, y) \right] d\xi. \end{aligned}$$

نفرض أن M هي الحد العلوى للقيم المطلقة للمعاملات $a(x, y)$ و $b(x, y)$ و $c(x, y)$ وأن H هي الحد العلوى للقيم المطلقة للدالة $z_0 = u_1(x, y)$ ومشتقاتها

$$|z_0| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < H$$

عند تغير x, y داخل مربع ما $(0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L)$. نكون التقديرات الحدية العظمى للدوال $z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}$ من الواضح أن

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

نفرض أنه تحقق التقديرات الدائرة (recurring) التالية :

$$|z_n| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

حيث $K > 0$ عدد ثابت ما سنحدد قيمته فيما بعد. وبالإستعانة بهذه التقديرات والعلاقة للتقريب $(n+1)$ نحصل بعد عدة اختصارات تقوى المتباينة على :

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

حيث

$$K = L + 2.$$

وفي الأطراف اليمنى لهذه المتباينات توجد بدقة حتى معاملات ثابتة الحدود العامة لمفكوك e^{2KLM} . وهذه التقديرات تبين أن متتابعة الدوال

$$\begin{aligned}u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\end{aligned}$$

تتقارب تقارباً منتظماً إلى النهايات الدوال التي سنرمز لها كما يلي :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \\ v(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y), \\ w(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

وبالانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل في العلاقات (6) ، (5) سنحصل على :

$$\left. \begin{aligned}u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u] d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u] d\xi.\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

والمساويتان الناتجتان من هنا

$$\begin{aligned}v &= u_x, \\ w &= u_y\end{aligned}$$

تكفلان التأكد من أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_x + b(\xi, \eta) u_y + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \quad (4)\end{aligned}$$

وكذلك تحقق المعادلة التفاضلية الأصلية (3) وذلك يتم التأكد منه مباشرة بتفاضل (4) بالنسبة إلى x , y . والدالة $u = u(x, y)$ تحقق أيضاً الشروط الإضافية كما يسهل التأكد من ذلك .

نثبت الآن وحدانية حل المسألة المدروسة (3')—(3) . بفرض وجود حلين $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ نحصل فوراً للفرق بينهما

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

على المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) dx dy.$$

نرمز بالرمز H_1 إلى الحد العلوى للقيم المطلقة :

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

عندما $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L$. وبتكرار التقديرات المجراة للدوال $z_n(x, y)$ نتأكد من صحة المتباينة :

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

لأية قيمة للعدد n . ومن هنا ينتج أن

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) \text{ أو } U(x, y) = 0$$

مما يثبت وحدانية حل المسألة بالمعطيات على المميزات .

وإذا كانت المعاملات a, b, c ثابتة فإن المعادلة (3) بواسطة التعويض

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

تؤول إلى الصورة

$$v_{xy} + C_1 v = f. \quad (8)$$

وعند $C_1 = 0$ نحصل على المسألة للمعادلة للبسطة (1) التي يعطى حلها بالعلاقة (2) .

وإذا كان $C_1 \neq 0$ فإن حل المسألة للمعادلة (8) يمكن أيضاً الحصول عليه في صورة تحليلية صريحة بالطريقة المشروحة في بند ٥ .

مسائل :

١- يدفع الهواء (بسرعة v) في أنبوبة ($x > 0$) مملوءة بمادة تحتوي على رطوبة (moisture) . نفرض أن $u(x, t)$ هي تركيز الرطوبة في المادة الممتصة . $u(x, t)$ تركيز الأبخرة الحرة . استنبط معادلة للدالتين $u(x, t)$. $v(x, t)$ نصف عملية التجفيف إذا كان : (١) لعملية بيزوثرمية (isothermal) . (٢) بيزوثرم التجفيف (خط ثبات درجة الحرارة) على الصورة $u = u^0$ حيث u^0 ثابت لايزوثرمية (ننظر أيضاً الملحق ٥) .

٢- يرماء ساخن بسرعة v في أنبوبة ($x > 0$) . نفرض أن u هي درجة حرارة الماء في الأنبوبة و v هي درجة حرارة جدران الأنبوبة . و u_0 هي درجة حرارة الوسط المحيط . استنبط للمعادلات للدالتين u . v بإهمال توزيع درجة الحرارة في مقطع الأنبوبة والجدران ومعتبراً أنه يوجد على حدود الماء - الجدار والجدار - الوسط المحيط هبوط وصعود في درجات الحرارة ويحدث تبادل حرارى وفقاً لقانون نيوتن (انظر الباب الثالث . بند ١) .

بند ٥ - حل المعادلات الخطية العامة من النمط الزائدى

فقرة ١ : المؤثرات التفاضلية المترافقة . ثبتت بعض العلاقات المساعدة التى تليقنا للتعبير عن حلول المسائل الحدية في الصورة التكاملية . نفرض أن

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u \quad (1)$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ دوال قابلة للتفاضل)

هو مؤثر تفاضلى خطى مناظر للمعادلة الخطية من النمط الزائدى . بضرب $\mathcal{L}[u]$ في دالة ما v نكتب الحدود على انفراد في الصورة

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, & vbu_y &= (bv u)_y - u(bv)_y, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, & vcu &= cvu. \\ vau_x &= (av u)_x - u(av)_x, \end{aligned}$$

وبتجميع الحدود المنفردة هذه نحصل على :

$$v\mathcal{L}[u] = u\mathcal{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (2)$$

حيث

$$\mathcal{M}(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = \quad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)v, \quad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = \quad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)v. \quad (5')$$

والمؤثران التفاضليان يسميان مترافقين إذا كان الفرق

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$$

مجموعا للمشتقات الجزئية بالنسبة إلى x, y لصيغتين H, K .

والمؤثران اللذان ندرسهما الآن $\mathcal{M}, \mathcal{L}$ من الواضح أنهما مترافقان.

وإذا كان $\mathcal{L}[u] = \mathcal{M}[u]$ فإن المؤثر $\mathcal{L}[u]$ يسمى بالمؤثر ذاتي الترافق

(self-conjugate).

والتكامل الثنائي للفرق $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$ على منطقة ما G محدودة بمنحنى

مقطع الملوحة C يساوى

$$\iint_G (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_C (H d\eta - K d\xi), \quad (6)$$

حيث u, v دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين (علاقة جرين الثنائية الأبعاد أى فى المستوى)*.

لفقرة ٢ : الصورة التكاملية للحل . نستعين بالعلاقة (6) لحل المسألة التالية :

عين حل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = -f(x, y), \quad (7)$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية على المنحنى C

$$u|_C = \varphi(x),$$

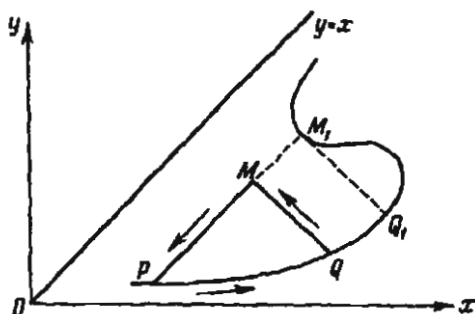
$$u_n|_C = \psi(x) \quad (7')$$

نظر كتاب يسكونوف «التفاضل والتكامل» الجزء الثانى طبعة دار «مير» باللغة العربية.

(٢٦) المشتقة في اتجاه العمودى على المنحنى C ووضوح تلك المنطقة التى يتحدد فيها الحل بالشروط (7').

المنحنى C معطى عند ذلك بالمعادلة

$$y = f(x),$$



شكل ٢٦

حيث $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل . نضع على المنحنى C شرط ألا يقطعه أكثر من مرة واحدة مستقيم مميز من العائلتين $y-x = \text{const}$ و $y+x = \text{const}$. والعلاقة (6) للمثلث المنحنى MPQ الحدود بالقوس PQ من المنحنى C ، وجزئى المميزتين MP ، MQ (شكل ٢٦) تعطى :

$$\begin{aligned} \iint_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \\ = \int_0^M (H d\eta - K d\xi) + \int_M^P (H d\eta - K d\xi) + \int_P^Q (H d\eta - K d\xi). \end{aligned}$$

نحول التكاملين الأول والثانى المأخوذين على الميزتين MP ، MQ . فبالأخذ في الاعتبار أن

$$\left(\begin{array}{l} ds \text{ عنصر طول القوس} \\ \text{على امتدادى } MP, MQ \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{على } QM \quad d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \\ \text{على } MP \quad d\xi = d\eta = +\frac{ds}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

والاستعانة بالعلاقين (5) . (4) نحصل على :

$$\begin{aligned} \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) &= - \int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds = \\ &= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\int_M^P (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}} v \right) u ds.$$

ومن هنا ومن العلاقة (6) يتبع أن

$$\begin{aligned} (uv)_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_P^Q (H d\eta - K d\xi) - \frac{1}{2} \iint_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta. \quad (8) \end{aligned}$$

وهذه العلاقة تعتبر متطابقة صحيحة لأى دالتين u . v . مساوين بدرجة كافية .

نفرض أن u حل المسألة المصاغة أعلاه بالشروط الابتدائية المذكورة ، والدالة v تعتمد على النقطة M كبارامتر وتحقق الشروط (المطالب) التالية :

$$\Delta MPQ \text{ داخل } \mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_{\xi} - (bv)_{\eta} + cv = 0 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{على الميزة } MP \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \\ & \text{على الميزة } MQ \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} v \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

ومن الشروط على المميزات والشرط الأخير نجد أن :

$$\text{على } MP \quad v = e^{\int_s^M \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds}$$

$$MQ \text{ على } v = e^{\int_{s_0}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds}$$

حيث s_0 قيمة s في النقطة M . وكما رأينا في البند ٤ فإن المعادلة (9) وقیم الدالة v على المميزين MP . MP تحدد هذه الدالة تماماً في المنطقة MPQ . وتسمى الدالة v عادة بدالة ريمان.

وبذلك فالعلاقة (8) للدالة التي تحقق المعادلة (7) تأخذ الصورة النهائية التالية :

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + uv(a d\eta - b d\xi)] + \frac{1}{2} \iint_{MPQ} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'} (d\sigma_{M'} = d\xi d\eta). \quad (10)$$

وهذه العلاقة تحل المسألة المطروحة لأن الصيغة تحت علامة التكامل المأخوذ على امتداد PQ تحتوي على دوال معلومة على القوس C . بالفعل عرفت الدالة v كما سبق ذكره أعلاه أما الدوال

$$\begin{aligned} u|_C &= \varphi(x), \\ u_x|_C &= u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{f' + (f'(x))^2}, \\ u_y|_C &= u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{f' + (f'(x))^2} \end{aligned}$$

فتحسب بواسطة المعطيات الابتدائية.

وتبين العلاقة (10) أنه إذا علمت المعطيات الابتدائية على القوس PQ فإنها تحدد تماماً الدالة في المثلث المميز PMQ إذا كانت الدالة $f(x, y)$ معلومة في هذه المنطقة.

إذا كانت القطعة تقطع المنحنى C في نقطتين M_1 و P (انظر شكل ٢٦) فإن قيمة $u(M_1)$ لا يمكن إعطاؤها اختيارياً وإنما تتحدد بالعلاقة (10) بشروط ابتدائية على القوس PQ . وقیم الدالة $f(x, y)$ في ΔPM_1Q_1 .

والعلاقة (10) الناتجة بافتراض وجود الحل نحدد الحل بدلالة المعطيات الابتدائية والطرف الأيمن للمعادلة (7) وبذلك فإنها تثبت من حيث الجوهر وحدانية الحل (قارن بعلاقة دالمبرت ، الباب الثاني ، بند ٢ ، ص ٥٨) .

ويمكن أن نوضح أن الدالة u المحددة بالعلاقة (10) تحقق شروط المسألة (7') - (7) . غير أننا لن نتوقف عند هذا الإثبات .

فقرة ٣ : التفسير الفيزيائي لدالة ريمان . نوضح المعنى الفيزيائي للدالة $v(M, M')$. ولهذا الغرض نعين حل المعادلة غير المتجانسة

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

بشروط ابتدائية صفرية على المنحنى C . وبالدخول إلى العلاقة (10) نرى أن الحل المطلوب يكون على الصورة

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'} \quad (11)$$

نفرض أن $f_1(M)$ هي الدالة المحلية (local function) للنقطة M_1 التي تساوى الصفر في كل مكان باستثناء جوار صغير S_ε للنقطة M_1 وتحقق شرط التوحيد

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = 1. \quad (12)$$

والعلاقة (11) في هذه الحالة تأخذ الصورة

$$u_\varepsilon(M) = \iint_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'} \quad (13)$$

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة يمكننا كتابة

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1) \iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = v(M, M_1),$$

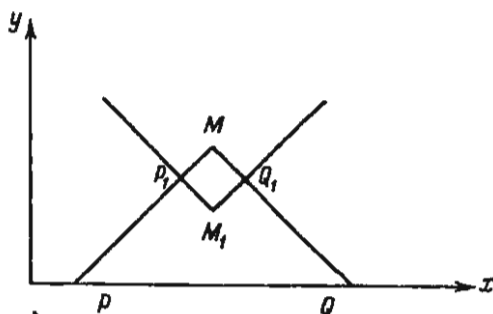
حيث M_1 نقطة ما من نقط المنطقة (الجوار) S_ε .

وبتطبيق $\varepsilon \rightarrow 0$ - الجوار S_ε إلى نقطة $M_1(\varepsilon \rightarrow 0)$ نجد أن :

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \quad (14)$$

والدالة f_1 كما رأينا في عدة أمثلة تعتبر عادة كثافة القوة والمتغير y يعتبر الزمن .
والصيغة

$$\iint_{S_0} f_1(M') d\sigma_{M'} = \iint_{S_0} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (15)$$



شكل ٢٧

هى عبارة عن دفع القوة . ومن هنا ووفقاً للعلاقة (11) نستنتج أن $v(M, M_1)$ هى عبارة عن دالة تأثير وحدة الدفع المؤثرة فى النقطة M_1 . والدالة $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ كانت معرفة على أساس أنها دالة فى البارامترات $M(x, y)$ تحقق بالإحداثيين ξ, η للنقطة M_1 المعادلة

$$\mathcal{M}(\xi, \eta)[v] = 0 \quad (16)$$

بالشروط الإضافية (9a) .

ندرس الدالة

$$u = u(M, M_1),$$

التي تعتبر دالة فى البارامترات $M_1(\xi, \eta)$ تحقق بالإحداثيين x, y للنقطة M المعادلة

$$\mathcal{L}_{(x, y)}[u] = 0 \quad (17)$$

بالشروط الإضافية (انظر شكل ٢٧)

$$\left. \begin{aligned} & \text{على الميزة } M_1Q_1 \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} u \\ & \text{على الميزة } M_1P_1 \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} u \\ & u(M_1, M_1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ومن هذين الشرطين نجد أن

$$u(M, M_1) = \left\{ \begin{array}{l} e^{\int_{a_0}^a \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \quad (M_1 Q_1 \text{ على}) \\ e^{\int_{a_0}^a \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \quad (M_1 P_1 \text{ على}) \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

والمعادلة (17) والشرطان (18) تحدد الدالة u تمامًا في الشكل الرابعي $MP_1M_1Q_1$ المحدود بأجزاء المميزتين $MP_1, MQ_1, M_1P_1, M_1Q_1$.
وبتطبيق العلاقة (6) على الشكل الرابعي $MP_1M_1Q_1$ نحصل على :

$$\int_{MP_1M_1Q_1} \int (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) + \int_{Q_1}^M + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

($R(\xi, \eta)$ نقطة التكامل للمتغيرة في $MP_1M_1Q_1$). وبلاستعانة بالعلاقيتين (4) ،
(5) للصيغتين H و K والشروط (9a) على للميزات للدالة v يسهل حساب التكاملين الأول والثاني في الطرف الأيمن

$$\int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^M (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

كما فعلنا عند استنباط العلاقة (10) .

وبالمثل ، بالاستعانة بالمتساويتين (5') ، (4') والشروط (19) للدالة $u(M, M_1)$ على الميزات نحصل على :

$$\int_P^{M_1} (H d\eta - K d\xi) =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi d\eta - (uv)_\eta d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v[(2u_\xi d\eta + 2u_\eta d\xi) + (au d\eta - bu d\xi)] =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u \right) v ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1},$$

$$\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H d\eta - K d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1}, \quad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right).$$

وينتجى كل هذه المتساويات الأربع نحصى على :

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

أو

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \quad (20)$$

وذلك لأن

$$(u)_{M_1} = (v)_{M_1} = 1.$$

وبذلك نرى أن دالة تأثير وحدة الدفع المركز فى النقطة M_1 يمكن تعيينها كحل للمعادلة

$$\mathcal{L}_{(x,y)}[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

بالشروط الإضافية (18).

فقرة ٤ : المعادلات ذات المعاملات الثابتة . ندرس بمثابة المثال الأول على تطبيق العلاقة (10) المسألة بالمعطيات الابتدائية لمعادلة ذبذبات الوتر :

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at, f_1 = \frac{1}{a^2} \right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \quad \left(\psi_1 = \frac{\Phi}{a} \right).$$

فى العلاقة (10) القوس PQ هو عبارة عن جزء من المحور $y = 0$.
المؤثر

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

ذاتي التوافق لأن

$$\mathcal{M}(u) = \mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

وحيث أن $a = 0$ ، $b = 0$ فإن الدالة v تساوى على المميزتين MP ، MQ الواحد الصحيح . ومن هنا ينتج أن

$$v(M, M') = 1$$

لأى نقطة M' داخل المثلث PMQ .

وبعد ذلك فبالأخذ بعين الاعتبار أنه في حالتنا يكون

$$PQ \text{ على } d\eta = 0$$

نحصل على :

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q u_{\eta} d\xi + \frac{1}{2} \iint_{PMQ} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

وملاحظة أن $P = P(x-y, 0)$ ، $Q = Q(x+y, 0)$ حيث x ، y إحداثيا النقطة $M = M(x, y)$ والاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \\ &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

وبالعودة إلى المتغيرين x ، t نحصل على علاقة دالمبرت

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

التي قابلناها قبل ذلك في فقرة ٩ ، بند ٢ (العلاقة (30)) .

ومثابة المثال الثاني ندرس المسألة بالمعطيات الابتدائية للمعادلة ذات المعاملات الثابتة :

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \quad (21)$$

، (أعداد ثابتة) a, b, c

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad (22)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \quad (23)$$

والتعويض

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \quad (24)$$

يكفل تحويل المعادلة (21) إلى صورة أبسط :

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (25)$$

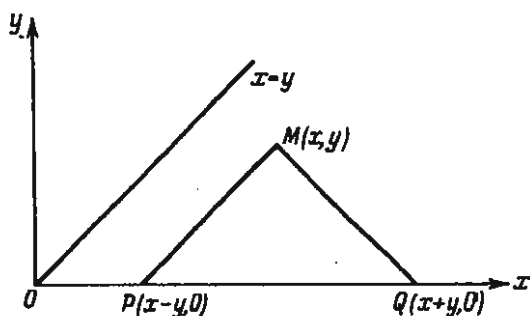
بالشروط الإضافية

$$U|_{y=0} = \varphi(x) e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (22')$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (23')$$

وذلك إذا اخترنا البارامترين λ, μ بطريقة مناسبة ، بفرض

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \quad (26)$$



شكل ٢٨

ويقول تعيين الدالة $U(x, y)$ بالمعطيات الابتدائية والمعادلة (25) إلى تكوين

دالة ريمان $v(x, y; \xi, \eta)$.

والدالة v يجب أن تحقق الشروط :

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \quad (27)$$

$$\left. \begin{array}{l} MP \text{ على الميزة } v=1 \\ MQ \text{ على للميزة } v=1 \end{array} \right\} \quad (28)$$

(شكل ٢٨)

ونبحث عن v في الصورة

$$v = v(z), \quad (29)$$

حيث

$$z^2 = (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 \text{ أو } z = \sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2} \quad (30)$$

وعلى الميزتين MP, MQ يؤول المتغير z إلى الصفر ومن ثم فإن $v(0) = 1$. وبعد ذلك فالطرف الأيسر للمعادلة (27) يتحول إلى ما يلي :

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

وبتفاضل صيغة z^2 مرتين بالنسبة إلى x و y نحصل على :

$$2z_x = x - \xi,$$

$$2z_y = -(y - \eta),$$

$$2z_{xx} + z_x^2 = 1,$$

$$2z_{yy} + z_y^2 = -1.$$

ومن هنا ومن العلاقة (30) نحصل على :

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

وتأخذ المعادلة للدالة v الصورة التالية :

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

بالشرط $v(0) = 1$. وحل هذه المعادلة هو دالة بيسال من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، القسم الأول ، بند ١)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

أو

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{c_1} [(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]) \quad (31)$$

ونستعين الآن لتعيين $U(x, y)$ بالعلاقة (10) التي تأخذ في حالتنا الصورة التالية :

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (v U_n d\xi - U v_n d\xi) \quad (d\eta = 0). \quad (32)$$

وفي البداية نحسب التكامل المأخوذ على الجزء المستقيم PQ ($\eta=0$) :

$$\int_P^Q (v U_n - U v_n) d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0(\sqrt{c_1}[(x-\xi)^2 - y^2]) U_n(\xi, 0) - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} y J'_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{c_1}[(x-\xi)^2 - y^2]} \right\} d\xi. \quad (33)$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية (22'), (23') نحصل على :

$$U(x, y) = \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \varphi_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}, \quad (34)$$

ومن هنا ووفقاً للعلاقات (23') و (22') و (24) نحصل على العلاقة

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) e^{-\frac{a-b}{2}y} + \varphi(x+y) e^{\frac{a+b}{2}y}}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) - \sqrt{c_1} y \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \right\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi, \quad (35)$$

التي تعطينا حل المسألة المطروحة.

ندرس الحالة الخاصة $a=0$, $b=0$ أى المعادلة

$$u_{xx} - y_{yy} + cu = 0.$$

من العلاقة (35) نحصل مباشرة على :

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (36)$$

وبفرض $y = at$. $c_1 = 0$ في هذه العلاقة نصل إلى علاقة دالمبرت

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi) d\xi, \quad (37)$$

التي تعطى حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

بالشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \bar{\psi}(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = a\psi(x) = au_y(y, 0).$$

مسائل على الباب الثاني

١ - حل المسألة ١ من بند ٤ بافتراض أنه في اللحظة الابتدائية يكون تركيز الرطوبة ثابتاً على امتداد كل الأنبوية وفي مدخلها يعطى دفق من الهواء الجاف .

٢ - حل المسألة ٢ من بند ٤ معتبراً أن درجة الحرارة الابتدائية للمجموعة تساوى u_0 . ويحتفظ طول الوقت بدرجة الحرارة في نهاية الأنبوية مساوية v_0 (حيث $v_0 > u_0$) .

٣ - حل مجموعة المعادلتين التلغرافيتين (انظر بند ١ . العلاقة (21)) :

$$l_x + C v_t + G v = 0,$$

$$v_x + L l_t + R l = 0$$

للخط اللانهائى بالشروط الابتدائية

$$l(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

إرشاد : حول مجموعة المعادلتين (بند ١ - العلاقة (21)) إلى معادلة من الرتبة الثانية لإحدى الدالتين $i(x, t)$ أو $v(x, t)$ مثلاً

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL) i_t + GRI$$

بالشروط الابتدائية $i(x, 0) = \varphi(x)$

$$\left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{t=0} = - \left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i \right)_{t=0} = - \frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

ثم استعن بعد ذلك بالعلاقة (35).

٤- اجت حل المعادلة التلغرافية الناتج (العلاقة (35)) لحالة R, G الصغرين . ادرس الحالة النهائية $G \rightarrow 0, R \rightarrow 0$ واحصل من العلاقة (35) على علاقة دالميرت لحل معادلة ذبذبات الوتر .

ملاحق الباب الثاني

ملحق ١ - حول ذبذبة أوتار الآلات الموسيقية

إن الوتر المتذبذب يثير ذبذبة للهواء تتقبلها أذن الانسان في صورة صوت صادر من الوتر . وتتميز قوة الصوت بطاقة أو سعة الذبذبات وتتميز النغمة بفترة دورة الذبذبات أما جرم الصوت فيتميز بالعلاقة بين طاقات النغمة الأساسية والنغمات المتوافقة . ودون أن نتوقف عند العمليات الفسيولوجية لتقبل الصوت وعند عملية انتقال الصوت في الهواء سنميز صوت الوتر بطاقته وفترة الدورة وتوزيع الطاقة على النغمات المتوافقة .

وفي الآلات الموسيقية تثار عادة الذبذبات المستعرضة للأوتار . وتقسم الآلات الوترية إلى ثلاثة أنماط : الآلات العودية (pizzicato) والآلات النقرية (percussion) والآلات القوسية (bow) . وفي الآلات النقرية (البيانو مثلاً) تثار الذبذبة بصدمة (بنقرة) تكسب الوتر سرعة ابتدائية بدون انحراف ابتدائي ، أما في الآلات العودية (على سبيل المثال في القيثارة أو الهارب) فتثار الذبذبات بإكساب الوتر انحرافاً ابتدائياً معيناً بدون سرعة ابتدائية .

والذبذبات الحرة للوتر المثارة بأية طريقة يمكن التعبير عنها في الصورة (انظر الباب الثاني - بند ٣) :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a).$$

وبمقابلة تمرين على بند ٣ اقترحنا حل المسألة ١ الموجودة في أساس النظرية المبسطة لإثارة أوتار الآلات العودية . ويوضح حل هذه المسألة أنه إذا كان الانحراف الابتدائي ممثلاً في صورة مثلث ارتفاعه h عند النقطة $x=c$ (شكل ٢٩) فإن

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c(l-c)} \sin \frac{\pi nc}{l}, \quad b_n = 0. \quad (1)$$

وطاقة التوافقية الـ n تساوى

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \sin^2 \frac{\pi nc}{l} \quad (M = \rho l) \quad (2)$$

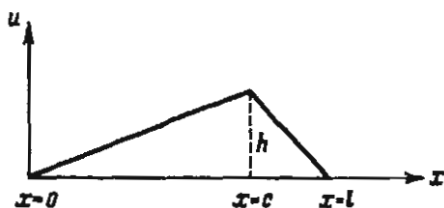
وتتناقص متناسبة عكسياً مع n^2 .

في المسألة ٤ من بند ٣ ندرس النظرية المبسطة للإثارة النقرية (الصدمية) للأوتار بواسطة صدمة مركزة عند النقطة c بدفع K . وحل المسألة يعبر عنه في الصورة

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi nc}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a). \quad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi nc}{l}. \quad (4)$$

وبذلك فنجد إثارة الوتر بصدمة مركزة على فترة غير كبيرة طولها δ تكون طاقات التوافقيات المختلفة (التي لها δ صغيرة بالمقارنة مع البعد بين عقدتين) مختلفة قليلاً فيما بينها ، والنغمة الصادرة عن الوتر المثار بهذه الطريقة تكون مشبعة بالنغمات المتوافقة . وهذا



شكل ٢٩

الاستنتاج يسهل التحقق منه بالتجربة العملية . فإذا صدم الوتر المشدود (على آلة أحادية الوتر) بحد السكينة فإن الوتر سير ، ويكون الصوت مشبعاً

بالنغمات المتوافقة . وفي البيانو يثار الوتر بصدمة من مطرقة لفت بالجلد . ومثل هذه

الإثارة للوتر يمكن التعبير عنها بواسطة الأشكال التالية .

- ١ - يثار الوتر بإعطاء سرعة ابتدائية ثابتة v_0 على الفترة $(c - \delta, c + \delta)$ وهذه الحالة تناظر مطرقة صلبة عرضها 2δ وتصدم الوتر عند النقطة c وعملية الذبذبات توصف بالدالة (انظر المسألة ٣ في بند ٣)

$$u(x, t) = \frac{4v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

وطاقات التوافقيات المنفردة تكون مساوية

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{\pi^2 \pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

- ٢ - يثار الوتر بالسرعة الابتدائية

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x-c| < \delta, \\ 0 & |x-c| > \delta. \end{cases}$$

وهذه الحالة تناظر مطرقة معدبة صلبة عرضها 2δ . ومثل هذه المطرقة تثير في مركز الفترة 2δ أكبر سرعة ابتدائية وهو ما يمكن التعبير عنه شكليا بالدالة الواردة أعلاه . والذبذبة المثيرة بهذه الطريقة تكون على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

وطاقات التوافقيات تساوى

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

- ٣ - المطرقة المثيرة للذبذبة الوتر لا تعتبر مثالية الصلابة . وفي هذه الحالة تتحدد الذبذبات لا بالسرعة الابتدائية وإنما بالقوة المتغيرة مع الزمن . وبذلك نصل إلى المعادلة غير المتجانسة ذات الطرف الأيمن

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau}, & |x-c| < \delta, \\ 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & |x-c| > \delta, \\ & t > \tau. \end{cases}$$

وحل هذه المعادلة لحالة $t > \tau$ يعبر عنه في الصورة :

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n \delta}{l} \cos \frac{\omega_n \tau}{2} \sin \frac{\pi n c}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\tau}{l}\right)^2\right]} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

وتوضح الأمثلة المدروسة أن عرض الفترة التي تحدث عليها الصدمة وطول الفترة الزمنية لاستمرار الصدمة لها تأثير جوهري جدا على مقدار طاقات النغمت التوافقية العالية . ونشير علاوة على ذلك أن وجود المعامل $\sin \frac{\pi n}{l} c$ يوضح أنه إذا كان مركز الصدمة بالمطرقة يقع على عقدة التوافقية الـ n فإن طاقة التوافقية المناظرة تكون مساوية للصفر .

وجود النغمت التوافقية العالية (ابتداء من السابعة) يخل بتوافق (تناغم) الصوت ويحدث شعورا بالتنافر^٢ (dissonance) أما وجود النغمت للتوافق المنخفضة فيؤدي على العكس إلى شعور بكمال الصوت . وفي البيانو يختار مكان صدمة المطرقة قريبا من نقطة تثبيت الوتر بين عقدتي النغمتين للتوافقتين السابعة والثامنة وذلك للتقليل من طاقتها . وبالتحكم في عرض المطرقة وصلابتها يمكن زيادة الطاقة النسبية للنغمت التوافقية المنخفضة (الثالثة والرابعة) . وفي آلات البيانو المصممة على النمط القديم التي كان صوتها حادا بل حتى رنانا بدرجة معينة كانت تستخدم مطارق أضيق وأكثر صلابة مما في الآلات الحديثة .

ملحق ٢ - حول ذبذبة القضبان

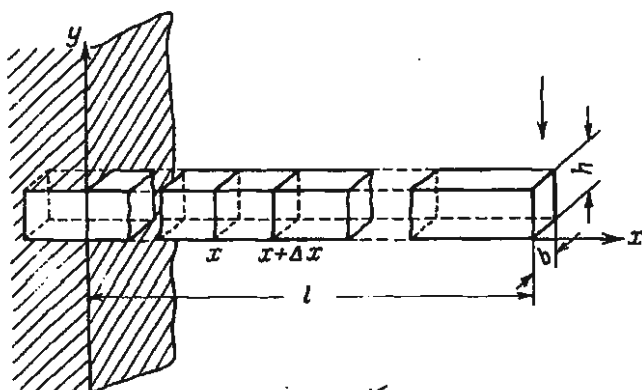
تشغل دراسة المعادلات من الرتبة الثانية عادة الحيز الأكبر في مناهج طرق الفيزياء الرياضية . إلا أن عددا كبيرا من مسائل ذبذبات القضبان والألواح وغيرها يؤدي إلى معادلات من رتب أعلى .

٥ - على سبيل المثال إذا كان العدد الأساسي (التوافقية الأولى) ٤٤٠ ذبذبة في الثانية بناظر ولاء من الثانية الأولى (الأوكتاوا الأولى) فإن العدد الأكبر سبع مرات سينظر « صول » في الأوكتاوا الرابعة . والفترة لا - صول التي تسمى بالسباعية الصغرى لها طابع غير مربع ومنفر للسمع .

وكمثال على المعادلة من الرتبة الرابعة ندرس مسألة الذبذبات الذاتية للشوكة الرنانة (tuning fork) وهي تكافئ مسألة ذبذبات قضيب رقيق مستطيل المقطع أحد طرفيه مزنوق زنقة صلبة في كتلة خرسانية . وتعيين شكل ذبذبات الشوكة الرنانة وتردداتها يؤول إلى حل « معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب »

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

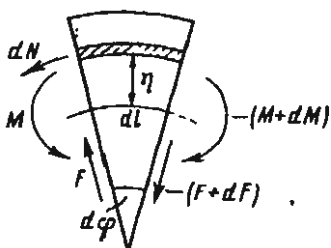
ونصل إلى مثل هذه المعادلة في كثير من المسائل المتعلقة بذبذبات القضبان وعند حساب استقرار الاسطوانات الدائرة وكذلك عند دراسة الاهتزازات في السفن .



شكل ٣٠

نورد الاستنباط الأول للمعادلة (1) . ندرس قضيبا مستطيل المقطع طوله l ($0 \leq x \leq l$) وارتفاعه h وعرضه b (شكل ٣٠) . نفصل عنصرا للطول dx . وبعد الانحناء تكون المقاطع الطرفية للعنصر المأخوذ التي يفترض أنها مستوية . زاوية $d\varphi$. وإذا كانت التشوهات (الانفعالات) صغيرة وطول محور القضيب عند الانحناء لا يتغير ($dl = dx$) فإن

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$



شكل ٣١

وطبقة المادة التي تبعد عن محور القضيب $y = 0$ بمسافة η يتغير طولها بمقدار $\eta d\varphi$

(شكل ٣١) . ووفقا لقانون هوك تكون قوة الشد المؤثرة على الطبقة مساوية :

$$dN = E \cdot b \, d\eta \cdot \frac{\eta \, dy}{dx} = - E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta \, d\eta,$$

حيث E معامل مرونة المادة المصنوع منها القضيب . وعزم الشئ الكامل للقوى المؤثرة في المقطع x يساوى

$$M = - E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = - E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \quad (2)$$

حيث

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

هو عزم القصور الذاتي للمقطع المستطيل حول المحور الأفقى . نرمز بالرمز $M(x)$ للعزم المؤثر على الجزء الأيمن للقضيب فى كل مقطع . وفى المقطع $x + dx$ من الواضح انه يؤثر عزم القوى المساوى $(M + dM)$. والعزم الاضافى $-dM$ يتزن بعزم القوى المماسية

$$dM = F \, dx.$$

ومن هنا ووفقا للمتساوية (2) نحصل على مقدار القوة المماسية

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = - EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (3)$$

وبمساواة القوة المحصلة للمؤثرة على العنصر

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \, dx = - EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \, dx$$

بمحصل ضرب كتلة العنصر فى السرعة

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, dx,$$

حيث ρ كثافة القضيب ، S مساحة المقطع العرضى (ونحن نهمل عند ذلك

الحركة الدورانية عند الثنى) ، نحصل على معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{EI}{\rho S} \right). \quad (1)$$

والشروط الحدية للطرف المزنوق $x=0$ هي ثبات القضيب وأفقية المماس

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

وعلى الطرف الحر يجب أن يساوى الصفر كل من عزم الثنى (2) والقوة المماسية

(3) ومن هنا يتبع أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

ولتعيين حركة القضيب تماما يجب إعطاء الشروط الابتدائية أيضا ، أى

الانحراف الابتدائي والسرعة الابتدائية

$$y|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (6)$$

وبذلك تتحول المسألة إلى حل المعادلة (1) بالشروط الحدية (4)، (5) والشروط

الابتدائية (6).

سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات بفرض ان

$$y = Y(x) T(t). \quad (7)$$

بالتفويض عن صورة الحل المقترحة في (1) نحصل على :

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = - \frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

وللدالة $Y(x)$ نحصل على مسألة القيم الذاتية :

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \quad (8)$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

والحل العام للمعادلة (8) يكون على الصورة

$$Y(x) = A \cosh \sqrt[4]{\lambda} x + B \sinh \sqrt[4]{\lambda} x + C \cos \sqrt[4]{\lambda} x + D \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

ومن الشرطين $Y(0)=0$, $Y'(0)=0$ نجد أن $C=-A$, $D=-B$ هنا ينتج أن

$$Y(x) = A(\cosh \sqrt{\lambda}x - \cos \sqrt{\lambda}x) + B(\sinh \sqrt{\lambda}x - \sin \sqrt{\lambda}x).$$

والشرطان $Y'''(l)=0$, $Y''(l)=0$ يعطيان

$$A(\cosh \sqrt{\lambda}l + \cos \sqrt{\lambda}l) + B(\sinh \sqrt{\lambda}l + \sin \sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$A(\sinh \sqrt{\lambda}l - \sin \sqrt{\lambda}l) + B(\cosh \sqrt{\lambda}l + \cos \sqrt{\lambda}l) = 0.$$

وهذه المجموعة المتجانسة يكون لها حلان غير تافهين A, B . إذا كان محدد المجموعة يساوى الصفر. وبمساواة هذا المحدد بالصفر نحصل على معادلة متساوية (transcendental) لحساب القيم الذاتية

$$\sinh^2 \sqrt{\lambda}l - \sin^2 \sqrt{\lambda}l = \cosh^2 \sqrt{\lambda}l + 2 \cosh \sqrt{\lambda}l \cos \sqrt{\lambda}l + \cos^2 \sqrt{\lambda}l.$$

وحيث أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ فإن هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$\cosh \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt{\lambda}l). \quad (10)$$

وجذور هذه المعادلة (10) يمكن حسابها بسهولة. وذلك مثلاً بالطريقة

البيانية :

$$\mu_1 = 1.875,$$

$$\mu_2 = 4.694,$$

$$\mu_3 = 7.854,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n > 3 \text{ عندما } \mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

والعلاقة الأخيرة تعطي قيمة μ_n بدقة حتى ثلاثة أرقام عشرية ابتداء من $n=3$

وبدقة حتى ستة أرقام عشرية لقيم $n \geq 7$.

ندرس الآن ترددات ذبذبات الشوكة الرنانة. المعادلة

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

تحققها الدوال المثلثية

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t$$

$$v_n = \frac{a \sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi I^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

والترددات v_n للذبذبات الذاتية تتناسب فيما بينها كمربعات μ_n . وحيث أن

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6.267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17.548,$$

فإن النغمة الذاتية الثانية أعلى من النغمة الأساسية بأكثر من اوكتافتين ونصف أى أعلى من التوافقية السادسة للوتر ذى نفس النغمة الأساسية. أما الذبذبة الذاتية الثالثة فأعلى من النغمة الأساسية بأكثر من أربعة اوكتافات. فعلى سبيل المثال إذا كانت النغمة الأساسية للشوكة الرنانة 440 ذبذبة فى الثانية (المعيار المصطلح عليه لـ «أ' النوتة «لا» من الأوكتافا الأولى) فإن التردد الذاتى التالى للشوكة الرنانة سيكون مساويا 2757.5 ذبذبة فى الثانية (بين $c''' = 2637.3$ و $f''' = 2794.0$) أى بين النوتتين «مى» و «فا» من الاوكتافا الرابعة فى السلم المنتظم الجرس) أما التردد الذاتى الثالث الذى يشكل 7721.1 ذبذبة فى الثانية فيخرج عن نطاق سلم الأصوات الموسيقية الذاتية.

وعند إثارة ذبذبات الشوكة الرنانة بصدمة (نقرة) توجد ليس فقط التوافقية الأولى بل والتوافقيات الأعلى أيضا وهذا ما يفسر الصوت المعدنى فى اللحظة الابتدائية. غير أنه مع مرور الزمن تخمد التوافقيات العليا بسرعة وتصدر الشوكة الرنانة الصوت النقي للنغمة الأساسية.

ملحق ٣ - ذبذبات الوتر المحمل

١ - صياغة المسألة. ندرس مسألة ذبذبات الوتر المثبت الطرفين. $(0, l)$ وضعت

عند عدة نقط من نقاطه $x = x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) الكتل المركزة M_i .

ويمكن الحصول على الشروط عند النقطة x_i بطريقتين. إذا أثرت فى النقطة

x_i ($i=1, 2, \dots, n$) قوة مركزة $F_i(t)$ فإنه يجب أن تتحقق العلاقتان

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1)$$

$$ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2)$$

وفي حالتنا هذه يجب فهم F_i على أنها قوة القصور . وبالتعويض في العلاقة (2) عن

$$F_i = -M_i u_{ii}(x_i, t),$$

نحصل على

$$M_i u_{ii}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} \quad (3)$$

ومن الممكن استنباط العلاقة (3) بطريقة أخرى . نوزع الكتلة M_i على المنطقة (الجوار) $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ بكثافة ثابتة δ_i ونستعين بمعادلة الذبذبات للوتر غير المتجانس

$$(\rho + \delta_i) u_{ii} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \quad (4)$$

حيث ρ كثافة الوتر . نفرض أن $u_\varepsilon(x, t)$ هي حل هذه المعادلة .

بتكامل المعادلة (4) بالنسبة إلى x في الحدود من $x_i - \varepsilon$ إلى $x_i + \varepsilon$ والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على الشرط (3) للدالة $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$. ولن نتوقف هنا عند تبرير الانتقال إلى النهاية .

نصوغ مسألتنا صياغة كاملة :

عين حل معادلة الذبذبات

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

وشروط الترافق في النقط $x = x_i$

$$\left. \begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{ii}(x_i, t) &= k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

حيث $\psi(x)$. $\varphi(x)$ دالتان معطتان .

٢ - الذبذبات الذاتية للوتر المحمل . نتوقف في البداية عند بحث الترددات الذاتية والمقاطع الجانبية للموجات المستقرة للوتر المحمل . ولهذا الغرض يجب تعيين حل المسألة المطروحة القابل للتعبير عنه في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (9)$$

بالتعويض بهذه الصيغة في المعادلة (5) والاستعانة بالشروط الحدية نحصل بعد فصل المتغيرات على

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X &= (kX')' + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\}$$

وتعطى شروط الترافق :

$$\begin{aligned} X(x_l - 0) &= X(x_l + 0), \\ M_l X(x_l) T'' &= kX' \Big|_{x_l-0}^{x_l+0} T. \end{aligned}$$

وبالأخذ في الاعتبار المعادلة (10) نكتب العلاقة الأخيرة في الصورة

$$kX' \Big|_{x_l-0}^{x_l+0} = -\lambda M_l X(x_l).$$

وبذلك نحصل للدالة $X(x)$ على مسألة القيم الذاتية التالية :

$$\frac{d}{dx} (kX') + \lambda \rho X = 0, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad (11)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} X(x_l - 0) &= X(x_l + 0) \quad (l = 1, 2, \dots, N), \\ kX'(x_l + 0) - kX'(x_l - 0) + \lambda M_l X(x_l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

والصفة المميزة للمسألة الحدية محل الدراسة هي أن البارامتر λ لا يدخل فقط في المعادلة وإنما يدخل أيضا في الشروط الإضافية .

ولن نتوقف هنا عند إثبات وجود فئة لانهاية من القيم الذاتية والدوال الذاتية وإيجابية القيم الذاتية ونظرية القابلية للتحليل . وهذه المسألة الحدية مثلها مثل

المسائل من النمط المعتاد التي درسناها في بند ٣ من الباب الثاني تؤول إلى معادلة تكاملية ما تعتبر في حالتنا هذه معادلة تكاملية محملة وتكافئ المعادلة التكاملية في تكاملات ستيلتيس .

ندرس بتفصيل أكبر استنباط شرط تعامد الدوال الذاتية

$$X_1(x), \quad X_2(x), \dots,$$

الذي يكون في حالتنا هذه مختلفا عن الشرط (92) بند ٣ ويسمى بشرط التعامد بالأحمال .

وكما وضعنا في الباب الثاني (انظر بند ٣) تكون الدوال الذاتية للمسألة المحدية

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

متعامدة بالوزن ρ في الفترة $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (14)$$

ويتوزع كل كتلة M_i بكثافة ثابتة δ_i على فترة ما $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد صغير ، نصل إلى مسألة الذبذبات الذاتية للوتر غير المتجانس بالكثافة $\rho_\varepsilon(x)$. نفرض أن $\{X_{en}(x)\}$ هي القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذه المسألة التي يجب أن يتحقق لها شرط التعامد

$$\int_0^l X_{em}(x) X_{en}(x) \rho_\varepsilon(x) dx = 0. \quad (15)$$

وبفصل التكاملات المأخوذة على الفترات $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ في المساوية (15) والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على العلاقة

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \quad (16)$$

التي تسمى بشرط التعامد بالأحمال .

ومرة أخرى نترك جانبا موضوع إمكانية هذا الانتقال إلى النهاية .

وشرط التعامد (16) يمكن الحصول عليه بطريقة شكلية بجثة من المعادلة والشروط (11)–(13). نفرض أن $X_m(x)$, $X_n(x)$ دالتان ذاتيتان للمسألة (11)–(13) تناظران القيمتين الذاتيتين λ_m , λ_n وتحققان المعادلتين

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_m}{dx} \right) + \lambda_m \rho X_m &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho X_n &= 0. \end{aligned}$$

نضرب المعادلة الأولى في $X_n(x)$ والثانية في $X_m(x)$ ونطرح الناتج الثاني من الأول. بتكامل المتساوية الناتجة بعد ذلك على الترتيب على المناطق $(0, x_1); (x_1, x_2); \dots; (x_N, l)$ وجمع التكاملات نحصل على

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx - \\ - \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X'_n - X_n k X'_m] dx = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

علما بأننا فرضنا $x_0=0$, $x_{N+1}=l$. وبإجراء التكامل لكل حد من حدود المجموع ثم تجميع الحدود المناظرة للتعويضين $x=x_i+0$, $x=x_i-0$ نحصل على مجموع الحدود على الصورة

$$A_i = (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i-0} - (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i+0}.$$

وعند ذلك فالتعويضين عند $x=0$, $x=l$ يؤولان إلى الصفر وفقا للشروط الحدية.

ولحساب A_i نستعين بشروط الترافق

$$\left. \begin{aligned} X_j(x_i-0) &= X_j(x_i+0), \\ kX'_j(x_i+0) - kX'_j(x_i-0) &= -M_i \lambda_j X_j(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (j=m, n). \quad (18)$$

وبكتابة A_i في الصورة

$$\begin{aligned} A_i &= X_m(x_i) [kX'_n(x_i-0) - kX'_n(x_i+0)] - \\ &\quad - X_n(x_i) [kX'_m(x_i-0) - kX'_m(x_i+0)] \end{aligned}$$

وبالاستعانة بالعلاقة (13') نجد أن

$$A_l = X_m(x_l) M_l \lambda_n X_n(x_l) - X_n(x_l) M_l \lambda_m X_m(x_l) = \\ = M_l X_m(x_l) X_n(x_l) (\lambda_n - \lambda_m).$$

والآن يمكن كتابة المساوية (17) في الصورة

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left\{ \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{l=1}^N M_l X_m(x_l) X_n(x_l) \right\} = 0.$$

وإذا كان $\lambda_m \neq \lambda_n$ فإنه ينتج من هنا مباشرة شرط التعامد بالأحمال (16).
ويتحدد معيار (norm) الدوال الذاتية $X_n(x)$ بالعلاقة

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx + \sum_{l=1}^N M_l X_n^2(x_l). \quad (18)$$

ومن الواضح أنه عند تحليل دالة ما $f(x)$ في المتسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

تحدد معاملات التحليل بالعلاقة

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{l=1}^N M_l f(x_l) X_n(x_l)}{\|X_n\|^2}. \quad (19)$$

والمسألة بالمعطيات الابتدائية المصاغة في فقرة ١ تحل بالطريقة المعتادة لفصل المتغيرات. وبالمثل تدرس مسألة ذبذبة القضيب (أو العارضة) عند وجود كتل مركزة.

ومسألة ذبذبات الوتر المحمل بكتل مركزة تجد تطبيقا واسع النطاق في الفيزياء والعلوم التكنيكية. لقد حل بواسون مسألة الحركة الطولية لثقل معلق بخيط مرن. ووضح أ. كريلوف أنه إلى هذه المسألة تؤول مسائل نظرية مبين المحرك البخاوي (steam engine indicator) ومسائل الذبذبات الدورانية (الالتوائية) للأسطوانة المثبت بطرفها حذافة (flywheel) والمسائل على مختلف أنواع الصمامات «الرعاشة» وغيرها.

ولنظرية العديد من أجهزة القياس يكون من المهم دراسة الذبذبات الدورانية
 نخط عقلت بطرفه كتلة (مرآة مثلا) . وقد اكتسبت المسائل من هذا النمط أهمية
 كبيرة خاصة نتيجة لدراسة استقرار اهتزازات أجنحة الطائرات . فلحل هذه
 المسألة لا بد من حساب الترددات الذاتية للجناح (عارضة متغيرة المقطع) المحمل
 بالكتل (الموتورات) . وعلاوة على ذلك فإن المسألة المدروسة هذه تقابلنا عند
 حساب الذبذبات الذاتية للهوائيات المحملة بالساعات المركزة وملفات الحث الذاتي
 المركزة (فما يتعلق بذلك انظر الملحق المخصص للتشابه بين الذبذبات الميكانيكية
 والكهرومغناطيسية) .

ولن نتوقف هنا عند الطرق التقريبية لتحديد القيم والدوال الذاتية للمسألة وهي
 الطرق المماثلة للطرق التقريبية لتحديد المقادير المناظرة للوتر غير المتجانس .

٣- وتربطرفه ثقل . تشكل أهمية عملية كبيرة مسألة ذبذبات الوتر المتجانس
 الذي يثبت أحد طرفيه ($x=0$) بلا حركة ويعلق بالطرف الآخر ($x=l$) ثقل
 كتلته M .

وفي هذه الحالة يأخذ الشرط عند $x=l$ الصورة

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

ولسعة الموجات المستقرة نحصل على المعادلة

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

بالشروط الحدية

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda_n X_n(l).$$

ومن هنا نجد أن

$$X_n(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\sin \sqrt{\lambda_n} l} ,$$

حيث λ_n تعين من المعادلة

$$\cot \sqrt{\lambda_n} l = \frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n} . \quad (20)$$

ويأخذ شرط تعامد الدوال $\{X_n(x)\}$ الصورة

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho dx + MX_n(l) X_m(l) = 0.$$

نحسب مربع المعيار

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho dx + MX_n^2(l).$$

وبالاستعانة بالمعادلة (20) نحصل على :

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

وتحل المسألة بالشروط الابتدائية بالطريقة المعتادة .

٤ - تصحيحات للقيم الذاتية . نحسب التصحيحات للترددات الذاتية في حالة الأحمال M الصغيرة والكبيرة . وللبساطة ندرس تلك الحالة عندما يكون الثقل معلقاً بطرف الوتر . وهناك حالتان نهائيتان محتملتان .

١ - $M=0$. الطرف $x=l$ حر . وتحدد القيم الذاتية من العلاقة

$$V_{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

٢ - $M=\infty$. الطرف $x=l$ مثبت بصلاية : $u(l, t) = 0$. والقيم الذاتية

تحدد من العلاقة

$$V_{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

وسنهتم بحالتي الأحمال M الصغيرة ($M \rightarrow 0$) والكبيرة ($M \rightarrow \infty$) .
(أ) M صغيرة . نعين التصحيح للقيمة الذاتية $\lambda_n^{(1)}$ بفرض

$$V_{\lambda_n} = V_{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \quad (21)$$

حيث ε عدد ما . بالتعويض بـ (21) في المعادلة (20) وإهمال M^2 وقوى M الأعلى نحصل على :

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l} \right). \quad (22)$$

أى أن الترددات الذاتية للوتر المحمل تتزايد عندما $M \rightarrow 0$ مقتربة من الترددات الذاتية للوتر الحر الطرف .

(ب) M كبيرة . باختيار $1/M$ بمثابة بارامتر الصغر نضع

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M} .$$

والمعادلة (20) تعطى :

$$\varepsilon = \frac{\rho}{V \lambda_n^{(2)l}} .$$

وعند ذلك أهملنا الحدود المحتوية على $1/M^2$ وقوى $1/M$ الأعلى .

وبذلك فإن

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{V \lambda_n^{(2)l}} \frac{\rho}{M} , \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{M \lambda_n^{(2)}} . \quad (23)$$

أى أنه بزيادة الأحمال تتناقص الترددات الذاتية مقتربة بانتظام إلى الترددات الذاتية للوتر المثبت الطرفين .

ملحق ٤ - معادلات ديناميكا الغازات ونظرية الموجات الصادمة (الانفجارات)

١ - معادلات ديناميكا الغازات . قانون حفظ الطاقة . نتجت معادلات

الصوتيات (انظر بند ١) بافتراض صغر سرعات حركة الغاز والتغيرات الصغيرة في الضغط مما سمح بتحويل معادلات الهيدروديناميكا إلى معادلات خطية .

وفي المسائل الناشئة عند دراسة طيران الصواريخ والطائرات السريعة وفي نظرية علم القذائف (ballistics) والموجات المفجرة .. الخ نضطر إلى مقابلة عمليات هيدروديناميكية تتميز بسرعات كبيرة وتدرجات (gradients) للضغط كبيرة . وفي هذه الحالة فإن التقريب الخطى للصوتيات يصبح غير صالح ولا بد من استخدام المعادلات اللاخطية للهيدروديناميكا . وحيث إن مثل هذه الحركات نقابلها في الحياة العملية في الغازات يصطلح على تسمية هيدروديناميكا السرعات الكبيرة بديناميكا الغازات .

ومعادلات ديناميكا الغازات في حالة حركة الغازات الأحادية البعد (في اتجاه المحور x) تكون على الصورة :

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (\text{معادلة الاتصال})$$

$$(2) \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{معادلة الحركة})$$

$$(3) \quad p = f(\rho, T) \quad (\text{معادلة الحالة})$$

وبذلك فمعادلات ديناميكا الغازات هي عبارة عن معادلات حركة سائل مثالي قابل للانضغاط (compressible) بانعدام القوى الخارجية .

نتقل الآن إلى استنباط قانون حفظ الطاقة . طاقة وحدة الحجم تساوى

$$(4) \quad \frac{\rho v^2}{2} + \rho e,$$

حيث الحد الأول هو طاقة الحركة والحد الثانى هو الطاقة الداخلية . ومن الواضح أن e هنا ترمز إلى الطاقة الداخلية لوحدة الكتل .

وللغاز المثالى $e = c_v T$ حيث c_v هي السعة الحرارية عند ثبات الحجم . T درجة الحرارة . نحسب تغير الطاقة في وحدة الزمن

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho e).$$

ويأجاء التفاضل في الحد الأول والاستعانة بالمعادلتين (1) . (2) نحصل على :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \frac{\partial p}{\partial x}.$$

ولحساب المشتقة $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)$ نلجأ إلى المبدأ الأول في الديناميكا الحرارية (الثرموديناميكا) الذى يعبر عن قانون حفظ الطاقة

$$(7) \quad dQ = de + p d\tau,$$

حيث dQ كمية الحرارة التى تكتسبها (أو تمنحها) المجموعة من الخارج . $p d\tau$ الشغل المبذول عند تغير الحجم بمقدار $d\tau$ ($\tau = 1/\rho$ الحجم النوعى) .

وإذا كانت العملية أدياباتيية (لا يوجد تبادل حرارى مع الوسط) فإن

$$dQ=0$$

$$ds = -pd\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (8)$$

وبالاستعانة بهذه المتساوية نجد أن

$$d(\rho s) = s d\rho + \rho ds = s d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = w d\rho, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) = w \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (10)$$

حيث

$$w = s + \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

هى الدالة الحرارية أو المحتوى الحرارى لوحدة الكتلة .
والمشتقة $\frac{\partial w}{\partial x}$ وفقا للعلاقتين (9) و (11) تحقق المعادلة

$$\rho v \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (12)$$

وبالأخذ فى الاعتبار المتساويات (2), (5), (6), (10), (12) نحصل على
قانون حفظ الطاقة فى الصورة التفاضلية :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right]. \quad (13)$$

ولتوضيح المعنى الفيزيائى لهذه العلاقة نكاملها على حجم ما (x_1, x_2) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) dx = - \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

وفى الطرف الأيسر يوجد تغير الطاقة فى وحدة الزمن على الفترة (x_1, x_2) وفى
الطرف الأيمن يوجد دفع الطاقة المتسربة خلال وحدة الزمن من الحجم المعنى .
وإذا لم يكن من الممكن إهمال ظاهرة التوصيل الحرارى فإن معادلة حفظ
الطاقة تأخذ الصورة

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - x \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (14)$$

حيث * معامل التوصيل الحرارى .

٢- الموجات الصادمة . شرط الاتصال الديناميكى . فى حالة السرعات الكبيرة من الممكن حدوث حركات تنشأ عندها على بعض السطوح المتحركة فى الفراغ انفصالات للاتصال فى توزيع الكيات الهيدروديناميكية (الضغط ، السرعة ، الكثافة .. الخ) . وهذه الانفصالات بصطلح على تسميتها بالموجات الصادمة أو الانفجارات (blast) .

وعلى سطح الانفصال (جبهة الموجة الصادمة) يجب أن تتحقق شروط اتصال دفع المادة ، والطاقة وكمية الحركة (شروط جيوجونيو) . تنتقل إلى استنباط هذه الشروط .

نحول المعادلة (2) إلى صورة مناسبة لهدفنا . نضرب (1) فى v ونجمع الناتج على (2) فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = - \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2). \quad (2')$$

نكتب الآن معادلات الاتصال والحركة وحفظ الطاقة فى الصورة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \quad (1')$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2), \quad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right) = - \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \quad (13)$$

ندرس على المستوى (x, t) المنحنى $x = \alpha(t)$ الذى يعتبر وأثناء لسطح الانفصال على المستوى (x, t) . نفرض أن AC قوس ما من خط الانفصال $x = \alpha(t)$ حيث C . نقطتان إحداثياتها $x_1 = x_1 + \Delta x$ ، $t_2 = t_1 + \Delta t$ على الترتيب . نكون المستطيل $ABCD$ الذى أضلاعه نوازى محورى الإحداثيات .

نكتب قانون حفظ المادة فى صورة تكاملية :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_t - (\rho)_i] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}] dt, \quad (15)$$

حيث فى الطرف الأيسر يوجد تغير الكتلة على الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية

(t_1, t_2) وفي الطرف الأيمن توجد كمية المادة المتسربة من الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) . وإذا كانت الدالتان $\rho, \rho v$ متصلتين وقابلتين للتفاضل في كل مكان داخل $ABCD$ فإن المعادلة (15) تكون مكافئة للمعادلة (1') . وفي الحالة محل الدراسة لا يتحقق ذلك .

نستعين بنظرية القيمة المتوسطة لكل حد على انفراد :

$$[(\rho)_{t=t_2, x=x_2} - (\rho)_{t=t_1, x=x_1}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{x=x_2, t=t_2} + (\rho v)_{x=x_1, t=t_1}$$

حيث x^*, t^*, x^{**}, t^{**} القيم المتوسطة للمتغيرين x, t .

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ ($x_2 \rightarrow x_1$) و $\Delta t \rightarrow 0$ ($t_2 \rightarrow t_1$) والرمز بالدليل 2 إلى قيم الدوال أعلى المنحنى $x = \alpha(t)$ (وراء جبهة الموجة الصادمة) وبالدليل 1 إلى قيم الدوال أسفل المنحنى (أمام الجبهة) نحصل على :

$$(\rho_2 - \rho_1) U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2 \quad (16)$$

حيث

$$U = \frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعة الموجة الصادمة .

وفي مجموعة الإحداثيات المتحركة مع الموجة الصادمة يرمز

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

لسرعة الجسيمات أمام وخلف جبهة الموجة الصادمة على الترتيب . والعلاقة (16) الناتجة فيما سبق يمكن كتابتها على الصورة

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (16')$$

وهذه المتساوية تعبر عن اتصال دفع المادة عبر جبهة الموجة الصادمة .

ويكتابة قانون حفظ كمية الحركة في الصورة التكاملية نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_2 - (\rho v)_1] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho v^2)_{x_1} - (p + \rho v^2)_{x_2}] dt$$

حيث في الطرف الأيمن يوجد مجموع دفع القوى المؤثرة (الضغوط) ودفق كمية الحركة . وبالتنقال إلى النهاية عندما $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, نحصل على قانون حفظ دفع كمية الحركة على الجبهة

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2 \quad \text{أو}$$

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (17)$$

وبالمثل نحصل أيضا على معادلة حفظ الطاقة على الجبهة :

$$\left(\frac{\rho v^3}{2} + \rho e\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^3}{2} + \rho e\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2$$

التي تأخذ بعد اختصارات بسيطة الصورة التالية :

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

أو وفقا للشرط (16) :

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (18)$$

وبذلك يجب أن تتحقق على جبهة الموجة الصادمة المعادلات (شروط الاتصال الديناميكي أو شروط جيوجونيو)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (16')$$

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (18)$$

ومن المعادلتين الأولى والثانية (17), (16') نعبر عن u_1 , u_2 بدلالة p , p :

$$u_1^2 = \frac{p_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_2}; \quad u_2^2 = \frac{p_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_2},$$

ومنها

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{p_1 + p_2}{\rho_1 \rho_2} (p_1 - p_2).$$

وبالتعويض بعد ذلك بهذه الصيغة في المعادلة (18) نحصل على العلاقة بين قيمتي الطاقة على ناحيتي الجبهة

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 - \rho_2)$$

و

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 + \rho_2).$$

ندرس الغاز المثالي الذي يكون له

$$p = R\rho T; \quad e = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

أي أن

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \quad (19)$$

وبالاستعانة بالعلاقة (19) نصل بعد بعض الاختصارات البسيطة إلى ما يسمى بمعادلة أديابات جيجونيو

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \quad (20)$$

أو

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 - (\gamma - 1) p_1}{(\gamma + 1) p_1 - (\gamma - 1) p_2}. \quad (21)$$

ويمكن من هذه العلاقة تعيين أحد المقادير p_1, ρ_1, p_2, ρ_2 إذا علمت المقادير الثلاثة الأخرى.

والموجة الصادمة تتحرك دائماً بالنسبة إلى الغاز من المناطق ذات الضغط الأكبر إلى المناطق ذات الضغط الأقل: $p_2 > p_1$ (نظرية تسيلن). ومن هنا يتبع أن كثافة الغاز وراء الجبهة أكبر من كثافته أمامها.

والعلاقة (20) تعبر عن العلاقة بين p_2, ρ_2 لقيمتي p_1, ρ_1 المعطتين. والدالة $p_2 = p_2(p_1)$ لقيمتي p_1, ρ_1 المعطتين هي عبارة عن دالة متزايدة باطراد تتحول إلى نهاية محدودة عند $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ (الموجة الصادمة ذات السعة الكبيرة):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (22)$$

وهذه العلاقة توضح أكبر قفزة تحدث للكثافة (التكثيف) والتي يمكن أن توجد على جبهة الموجة الصادمة. وللغاز الثنائي الذرات $\gamma = 7/5$ والتكثيف الأقصى (الأعظم) يساوى 6 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

وبالاستعانة بالتساويات (20)، (17)، (16') بفرض $p_1 = 0$ نعين :

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

وإذا كانت الموجة الصادمة تتحرك في غاز ساكن ($v_1 = 0$) فإن سرعة انتشار الموجة الصادمة تساوى

$$U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

أى أن هذه السرعة تتزايد متناسبة مع الجذر التربيعى لـ p_2 .

ندرس أبسط مسألة لنظرية الموجات الصادمة تسمح بحل تحليلي. في أنبوبة اسطوانية $x > 0$ لانهائية من أحد طرفيها ومقفولة بكباس عند الطرف الآخر ($x=0$) يوجد غاز ساكن ثابت الكثافة ρ_1 تحت ضغط ثابت p_1 . وفي اللحظة الابتدائية $t=0$ يبدأ الكباس في التحرك بسرعة ثابتة v في الاتجاه الموجب للمحور x . وتنشأ أمام الكباس موجة صادمة تنطبق في اللحظة الابتدائية على الكباس وبعد ذلك تتبعد عنه بسرعة $U > v$. وبين الكباس وجبهة الموجة الصادمة تنشأ المنطقة 2 حيث يتحرك فيها الغاز بسرعة تساوى سرعة الكباس. وأمام الجبهة (المنطقة 1) يوجد الغاز في حالة الاضطراب (اللاإثارة) :

$$\rho = \rho_1, \quad p = p_1 \quad (v = 0).$$

وبالاستعانة بالشروط على الجبهة (18)، (17)، (16) يسهل تعيين سرعة الجبهة وكذلك مقدار القفزة في الكثافة والضغط. نستعين بالمقادير اللاحقة التالية :

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}. \quad (23)$$

حيث $c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ سرعة الصوت أمام الجبهة (في المنطقة غير المضطربة 1).

وعندئذ تكتب معادلات الحفظ في الصورة التالية :

$$\bar{U} = \frac{\bar{v}}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \omega \bar{U} = \bar{U} - \bar{v} \quad (24)$$

$$\bar{p} = 1 + \gamma \frac{\bar{v}^2}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \bar{p} = 1 + \gamma \bar{U} \bar{v} \quad (25)$$

$$\bar{p}\omega = 1 + (\gamma - 1) \left(\bar{U} \bar{v} - \frac{1}{2} \bar{v}^2 \right). \quad (26)$$

وبحذف $\bar{U}$. $\bar{p}$ من هذه المعادلات نحصل على معادلة تربيعية لتعيين ω :

$$2\omega^2 - \omega[4 + (\gamma + 1)\bar{v}^2] + [2 + (\gamma - 1)\bar{v}^2] = 0. \quad (27)$$

وحيث أنه واضح من معنى ω أنها أصغر من الواحد الصحيح ($\rho_2 > \rho_1$) ; $\omega < 1$;
نختار الجذر الأصغر للمعادلة التربيعية

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma + 1)}{4} \bar{v}^2 - \bar{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}. \quad (28)$$

ومن المعادلتين (28) , (24) نجد أن

$$\bar{U} = \frac{(\gamma + 1)}{4} \bar{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}, \quad (29)$$

$$\bar{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \bar{v}^2 + \gamma \bar{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}. \quad (30)$$

وبالعودة إلى المقادير الأصلية نحصل على :

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} \cdot v^2}}{1 + \frac{(\gamma - 1)v^2}{2c_1^2}}. \quad (31)$$

$$U = \frac{\gamma + 1}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2}, \quad (32)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\}. \quad (33)$$

وحيث إن سرعة الموجة الصادمة ثابتة فنحصل لموضع الجبهة في اللحظة على :

$$x = a(t) = \left\{ \frac{(\gamma + 1)}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\} t. \quad (34)$$

وفي الحالة النهائية $1 \gg v/c_1$ (الموجة الصادمة ذات الشدة الكبيرة) نعين من العلاقات (33) — (31) العلاقات النهائية

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2} v; \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot \frac{v^2}{c_1^2},$$

التي حصلنا عليها فيما سبق .

وإذا كان $1 \ll v/c_1$ (الموجة ذات الشدة الصغيرة) فإنه يمكن إهمال الحدود : v^2/c_1^2

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4} v,$$

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right)$$

٣- الانفصالات الضعيفة . درسنا أعلاه حركة الموجة الصادمة التي يحدث على جبهتها للكميات ρ, p, v وغيرها قفزات . ومثل هذه الانفصالات تسمى انفصالات قوية .

ومن الممكن حدوث حركات ينشأ خلالها عند بعض السطوح قفزات للمشتقات الأولى للكميات ρ, p, v وغيرها في حين تظل الكميات نفسها متصلة . ومثل هذه الانفصالات تسمى بالانفصالات الضعيفة .

وفي بند ٢ ، فقرة ١٠ درسنا حركة الانفصالات من هذا النوع وأثبتنا أن هذه الانفصالات تنتشر على امتداد المميزات . وعند ذلك فقد كنا ننطلق من معادلة الصوتيات . إلا أن النتيجة الماثلة تكون أيضا صحيحة للمسائل اللاخطية لديناميكا الغازات .

وليس من الصعب التحقق من أن سطح الانفصال الضعيف ينتشر بالنسبة للغاز بسرعة تساوي سرعة الصوت المحلية . بالفعل نفصل جوارا (neighbourhood) صغيرا لسطح الانفصال الضعيف ونأخذ القيم للتوسطة للكميات الهيدروديناميكية في هذا الجوار . ومن الواضح أنه يمكن دراسة الانفصال الضعيف على القيم للتوسطة بوصفه اضطرابا صغيرا يحقق معادلة الصوتيات ويجب أن ينتشر بسرعة الصوت المحلية .

وكمثال ندرس انسياب الغاز في مكان مفرغ من الهواء (موجة الخلخلة).
نفرض أنه في اللحظة الابتدائية $t=0$ يسكن الغاز الذي يملأ نصف الفراغ $x > 0$ ويكون له قيمتان ثابتتان للكثافة ρ والضغط p_0 في كل المنطقة $x > 0$.
وعند $t=0$ يرفع الضغط الخارجى المؤثر على المستوى $x=0$ ويبدأ الغاز في الحركة. وعند ذلك ينشأ انفصال ضعيف (موجة خلخلة) ينتشر بسرعة الصوت c_0 في الاتجاه الموجب للمحور x . وعلى الجبهة الأمامية للغاز $x=x_1(t)$ عند $t=0$ نحصل على انفصال في الكثافة والضغط. غير أن هذا الانفصال يتلاشى فوراً بعد بداية الحركة.

بالفعل من شروط اتصال دفع المادة وكمية الحركة عندما $x=x_1(t)$

$$0 = \rho_1^- (v_1 - v_1^-) = \rho_1^+ (v_1 - v_1^+),$$

$$p_1^- + \rho_1^- (v_1 - v_1^-)^2 = p_1^+ + \rho_1^+ (v_1 - v_1^+)^2,$$

حيث p_1^- , p_1^+ , v_1^- , v_1^+ , $x_1(t)$ هي القيم من اليسار عند النقطة $x_1(t)$ هي القيم من اليمين عند النقطة $x_1(t)$. نحصل على:

$$p_1^+ = 0 \quad , \quad \rho_1^+ = 0,$$

لأن

$$p_1^- = p_1^+ = v_1^- = 0.$$

والعملية الأدياباتية تكون معادلة الحالة للغاز المثالى على الصورة

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (35)$$

وحل المسألة نبحث عنه في الصورة

$$\rho = \rho(\xi); \quad p = p(\xi); \quad v = v(\xi),$$

حيث $\xi = x/t$.

وبحساب المشتقات

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t} \xi \frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi},$$

حيث $l = \rho$ ، $l = v$ ، $l = \rho$. وبالتعويض عن النتائج هذه في معادلتين (1) ، (2) نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} (v - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho \frac{dv}{d\xi} , \\ (v - \xi) \rho \frac{dv}{d\xi} &= \frac{d\rho}{d\xi} . \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

بضرب المعادلة الأولى في $(v - \xi)$ وجمع النتائج على معادلة ثانية ينتج :

$$(v - \xi)^2 \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{d\rho}{d\xi}$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = (v - \xi)^2 .$$

ومن هنا نحصل على

$$v - \xi = \pm \sqrt{\frac{d\rho}{d\xi}} = \pm c ,$$

حيث c سرعة الصوت في العسية لأديباتية .

وحيث أننا ندرس حركة الانفصال الضعيف في الاتجاه الموجب لمحور x .
يجب أن نختار في العلاقة السابقة لإشارة سالبة أي أن

$$v - \xi = -c . \quad (37)$$

بالتعويض بهذا الحل في المعادلة (36) نحصل على :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \quad (38)$$

و (وهو نفس الشيء) :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho c} .$$

وبلاستعانة بمعادلة حالة (35) نجد أن

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

وبعد تكامل المعادلة (38) نحصل على

$$v = \frac{2}{\gamma-1} \cdot c_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]. \quad (39)$$

ومن العلاقة الأخيرة يمكن التعبير عن ρ بدلالة v :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (40)$$

وهنا

$$c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$$

ترمز لسرعة الصوت عندما $v=0$ (في الغاز الساكن) . ويمكن أيضا كتابة العلاقة (39) في الصورة التالية :

$$v = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0). \quad (41)$$

بالتعويض بالصيغة (40) الناتجة للكثافة ρ في معادلة الحالة (35) نجد أن :

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (42)$$

ومن المعادلتين (41) . (37) نحصل على العلاقة

$$v = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), \quad (43)$$

التي تعين ارتباط v بالمتغيرين x , t . وبالتعويض بالصيغة (43) الناتجة للسرعة v في العلاقتين (42) , (40) نحصل على ارتباط p , ρ بالمتغيرين x , t في صورة صريحة . وكل الكميات يتضح أنها تعتمد على x/t . وإذا تم قياس المسافات في وحدات تناسب مع t فلن تتغير صورة الحركة . ومثل هذه الحركة تسمى أتوماتية الطراز (automodel) .

نعين سرعة حركة الجبهة الأمامية $v_1(t)$. بفرض $p=0$ في المساوية (42) سنحصل على :

$$v_1 = - \frac{2}{\gamma-1} c_0. \quad (44)$$

ومن هنا يتبع أن سرعة انسياب الغاز إلى الفراغ محدودة . وللغازات الثنائية الذرات $\gamma = 7/5$ و

$$v_1 = -5c_0.$$

والصيغة (44) لسرعة الجبهة اليسرى $x = x_1(t)$ يمكن الحصول عليها أيضا من معادلة التوازن في المادة

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \quad (45)$$

وبالاستعانة بالمتغير $\xi = x/t$ نحصل على

$$\int_{v_1}^{v_2} \rho d\xi = \rho_0 c_0.$$

وبالتعويض بعد ذلك بصيغة ρ من (40) وفرض

$$1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

نحصل على :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}} d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (46)$$

حيث

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

وبعد حساب التكامل (46) نحصل على

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

أى أن

$$\lambda_1 = 0,$$

ومن هنا يتبع أن

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

وهكذا حلت مسألة انسياب الغاز إلى المكان المفرغ .

ولقد اكتفينا فيما سبق بدراسة أبسط مسائل ديناميكا الغازات فقط . وللتعرف بشكل أكثر تفصيلا على الموضوعات الملموسة هنا على الطالب أن يرجع إلى المراجع المتخصصة .

ملحق ٥ - ديناميكا امتصاص الغازات

١ - المعادلات التي تصف عملية امتصاص الغازات . ندرس مسألة امتصاص الغاز (sorption) . نفرض أن خليطا من الغاز والهواء يمر في أنبوبة (سنعتبر محورها هو المحور الإحداثي x) مملوءة بمادة ماصة . نرمز بالرمز $a(x, t)$ لكمية الغاز الممتص في وحدة حجم للمادة الماصة وبالرمز $u(x, t)$ لتركيز الغاز الموجود في مسام المادة للمادة في الطبقة x .

نكتب معادلة توازن المادة بافتراض أن سرعة الغاز v كبيرة بشكل كاف وعملية الانتشار (diffusion) لا تلعب أى دور في انتقال الغاز . ندرس طبقة من المادة الماصة من x_1 إلى x_2 خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 . ومن الواضح أنه يمكن أن نكتب لهذه الطبقة معادلة توازن المادة

$$[vu]_{x_1} - [vu]_{x_2}] S \Delta t = [(a + u)_{t_2} - (a + u)_{t_1}] S \Delta x, \quad (1)$$

التي تتحول بعد اختصار $\Delta x \Delta t$ والانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ إلى الصورة

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (a + u). \quad (2)$$

والطرف الأيسر لهذه المعادلة هو عبارة عن كمية الغاز المتراكمة نتيجة للانتقال محسوبة في وحدة الطول والزمن . والطرف الأيمن هو كمية الغاز المستهلك في رفع تركيز الغاز الممتص والغاز الموجود في المسام . وإلى معادلة التوازن هذه يجب إضافة معادلة كينيتيكا الامتصاص

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - y), \quad (3)$$

حيث β هو ما يسمى بالمعامل الكينيتيكي ، y تركيز الغاز الموجود في «اتزان» مع

كمية الغاز الممتصة . والكيتان y . a ترتبطان ببعضهما بالمعادلة

$$a = f(y), \quad (4)$$

التي تعتبر مميزة للمادة الممتصة . والمنحنى $a = f(y)$ يسمى ايزوثرم الامتصاص . وإذا كان

$$f(y) = \frac{yu_0}{v(a_0 + py)},$$

فإن الايزوثرم يسمى بايزوثرم لينجميور . وأبسط صورة للدالة f تناظر ما يسمى بايزوثرم هنرى الذى يكون صحيحا في منطقة التركيزات الصغيرة

$$a = \frac{1}{v} y, \quad (5)$$

حيث $1/v$ معامل هنرى . وفي هذه الحالة نصل إلى المسألة التالية :

عين الدالتين $u(x, t)$. $a(x, t)$ من المعادلتين

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \quad (6)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u(0, t) = u_0. \quad (8)$$

حيث u_0 تركيز الغاز عند الدخول (في الأنبوبة) .

ويإهمال المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ التي تعبر عن استهلاك الغاز لرفع التركيز الحر في مسام المادة الماصة بالمقارنة مع المشتقة $\frac{\partial a}{\partial t}$ التي تعبر عن استهلاك الغاز على زيادة كمية الغاز الممتصة نحصل على * :

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a), \quad (6)$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

* . لمجموعة المعادلتين (6) . (2') يكنى شرط ابتدائي واحد فقط لأن المحور $t = 0$ في هذه الحالة يصبح

مميزة . انظر تفصيل ذلك في هامش الصفحة ١٩٧ .

نحذف الدالة $a(x, t)$ ، بتفاضل المعادلة بالنسبة إلى t والاستعانة بالمعادلة الثانية ، نحصل على :

$$-vu_{xt} = \beta u_t - \beta \gamma a_t = \beta u_t + \beta \gamma v u_x$$

أو

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0.$$

نعين الشرط الابتدائي للدالة u بوضع $t = 0$ في المعادلة الأولى

$$-vu_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0,$$

ومن هنا نجد أن

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}.$$

ومسألة تعيين الدالة $u(x, t)$ آلت إلى تكامل المعادلة

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0 \quad (9)$$

بالشروط الإضافية

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}, \quad (10)$$

$$u(0, t) = u_0. \quad (8)$$

ومميزتا هذه المعادلة هما المنحنيان

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

والشروط الإضافية في هذه المسألة هي عبارة عن قيم الدالة المطلوب تعيينها $u(x, t)$ على للميزات . وبالمثل تصاغ للمسألة للدالة $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{v} a_t + \beta \gamma a_x = 0, \quad (11)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad (7)$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{v} (1 - e^{-\beta \gamma t}). \quad (12)$$

وينبغي الإشارة إلى أن مثل هذه المسألة تقابلنا عند دراسة عديد من الموضوعات الأخرى (على سبيل المثال عملية التجفيف بدفق هوائى أو تسخين أنبوية بدفق مائى .. والخ *).

وحل المعادلة (9) يمكن الحصول عليه فى صورة صريحة بالطريقة المشروحة فى بند ٥ ، ويعطى بالعلاقة

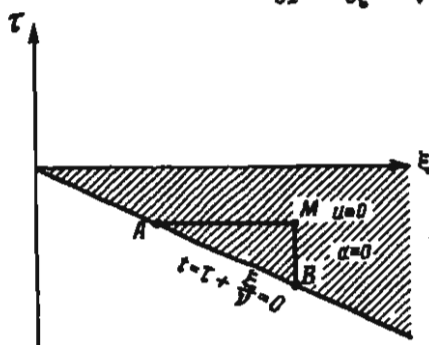
$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1} \left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau}) d\tau \right], \quad (13)$$

* بالانتقال إلى المعادلة (2') أمهلنا الحد u_0 . غير أنه ليس من الصعب أن نوضح أننا نتصل إلى نفس المعادلة إذا أدخلنا التغيرات الجديدة

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \quad t = \tau + \frac{x}{v}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(شكل ٣٢) حيث يبدأ حساب الزمن عند النقطة x ابتداء من اللحظة $t_0 = x/v$ وهى لحظة وصول الخليط الغازى للهوائى إلى هذه النقطة . بالفعل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$



شكل ٣٢

وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$-v \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \quad (6)$$

والشروط الابتدائية (7) والمعادلتان (6), (2') تعطى :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_\tau(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

وفى المنطقة بين المستقيم $t = 0$ ومحور ξ نحصل على مسألة تعيين الدالة u بالشروط الابتدائية (7') (مسألة كوشى). ومن الواضح أنه فى هذه المنطقة تكون $u(x, t) = 0$ (وكذلك $a = 0$). ومن المعادلتين (6), (2') يتضح أنه عندما $\tau = 0$ يحدث للدالة $u(x, t)$ انفصال فى حين تظل الدالة $a(x, t)$ متصلة . وبذلك فعند $\tau = 0$ تعين الدالة u كما أوضحنا فيما سبق من المعادلة (2') عندما $a(x, 0) = 0$. وتعيين القيم $a(0, t)$. $u(x, 0)$ كما فعلنا ذلك فى الصفحة السابقة (انظر العلاقات (12), (10)). نحصل للدالتين $a(x, t)$, $u(x, t)$ على مسألتين بالمعطيات على الميزات .

حيث $x_1 = \frac{\beta x}{\gamma}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ متغيران بلا أبعاد (dimensionless) ، I_0 دالة يسيل من النوع الأول من الرتبة الصفريّة في المتغير التخيلي . وبالإستعانة بالعلاقات التقاربية (asymptotical) للدالة I_0 يسهل الحصول على الصيغة التقاربية للحل لقيم المتغيرات الكبيرة .

٢- الحل التقاربي (asymptotical solution) . درسنا أعلاه عملية امتصاص الغاز الخاضع لايزوترم هنرى للأمتصاص الذى يربط بين كمية المادة للمتصة a والتركيز الموزن (balanced) y بارتباط خطى

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

ندرس ايزوترم الامتصاص فى الصورة العامة :

$$a = f(y).$$

وإذا أدخلنا متغيرات بلا أبعاد :

$$x_1 = \frac{x\beta}{\gamma}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

فإن المجموعة (8)، (7)، (6)، (2') تأخذ الصورة

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \quad (15)$$

بالشروط الإضافية

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \quad (16)$$

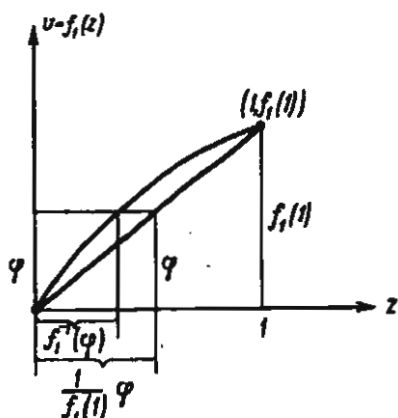
$$v(x_1, 0) = 0. \quad (17)$$

وسنمّ بالسلوك التقاربي للدوال المعيرة عن حل المجموعة (14) .

بالنسبة إلى الدالة $f_1(z)$ سنفترض ما يلى :

(١) $f_1(z)$ دالة متزايدة و $f_1(0) = 0$ ؛

(٢) $f_1(z)$ لها مشتقة متصلة لجميع قيم z حيث $0 \leq z \leq 1$ ؛



شكل ٣٣

(٣) الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ يقع أسفل المنحنى $f_1(z)$ في الفترة $0 \leq z \leq 1$ (شكل ٣٣) وهو ما يتحقق كحالة خاصة للايزوثرم المحذب .

وبالرمز للدالة العكسية

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

سنبحث عن الحل التقاربي للمسألة المصاغة في صورة موجة متشرة*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \psi(\xi), & \xi &= x - \sigma t, \\ \bar{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \quad (18)$$

حيث σ سرعة انتشار الموجة وينبغي تعيينها .

وهذا يعني أنه على المسافات الكبيرة (عند $x \rightarrow \infty$) أو بعد فترة زمنية طويلة ($t \rightarrow \infty$) يكون

$$v(x, t) = \bar{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \bar{u} = \psi(x - \sigma t).$$

والتركيزان v , $\bar{u}$ يجب عند $x = \infty$ أو $t = \infty$ أن يحققا شرط الاتزان

$$v = f_1(\bar{u}) \text{ أو } \bar{u} = F(v)$$

ومن الشرط (16) ينتج عندئذ أن

$$\bar{u}|_{t=-\infty} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v|_{t=-\infty} = f_1(1). \quad (19)$$

ومن الشرط (17) ينتج أن

$$v|_{t=0} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}|_{t=0} = F(0) = 0. \quad (20)$$

* لتسهيل الكتابة سنكتب x_0, t_0 بدلا من x_1, t_1 .

والشرط (19) يعنى أنه عندما $l \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$) يجب أن يحدث التشبع في كل مكان .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (14) نحصل على :

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \quad (21)$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \quad (22)$$

ومن (21) . (20) نستنتج أن

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \quad (23)$$

ومن المعادلتين (19) ينتج عندئذ أن

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} \Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \quad (24)$$

أو في الكميات البعدية (dimensional)

$$\sigma = \gamma \frac{\mu_0}{a_0}, \quad a_0 = f(\mu_0). \quad (24')$$

ومن (22) و (23) نحصل على

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \quad (25)$$

وبعد التكامل سنحصل على

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \quad (26)$$

حيث $\omega(\varphi)$ تكامل ما للطرف الأيسر . ξ_0 ثابت التكامل . ومن هنا فالدالة المطلوب تعيينها $\varphi(\xi)$ تعين بدقة حتى ثابت مجهول ξ_0 :

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \quad (27)$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \quad (28)$$

نوضح هل يمكن تعيين الدالة ω^{-1} وهل تحقق الدالتان ψ . φ الشروط المطروحة عند $\xi \rightarrow -\infty$. $\xi \rightarrow \infty$. نبين أن المشتقة

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \quad (29)$$

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

هى دالة متناقصة باطراد فى الدالة φ . بالفعل ، المقام فى (29) يساوى

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)} \varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

الحد الأول هو الإحداثى الأفقى المناظر للإحداثى الرأسى φ للنقطة الواقعة على الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ (شكل ٣٣) . وحيث إننا اصطلاحنا على أن المنحنى $\varphi = f_1(z)$ يقع أعلى هذا الشعاع فإن

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)} \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq f_1(1))$$

وبالتالى فإن

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

وعلاوة على ذلك

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0$$

عندما $\varphi = 0$ و $\varphi = f_1(1)$. ومن هنا يتبع أن

$$\varphi = 0 \quad \text{عند} \quad \xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty$$

$$\varphi = f_1(1) \quad \text{عند} \quad \xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty$$

وللدالة العكسية نحصل على :

$$\varphi = -\infty \quad \text{عندما} \quad \varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1)$$

$$\varphi = \infty \quad \text{عندما} \quad \varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0$$

وبعد ذلك فوفقا للمساوية (29) نحصل على :

$$\varphi = -\infty \quad \text{عند} \quad \psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)} \varphi = 1$$

$$\varphi = \infty \quad \text{عند} \quad \psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)} \varphi = 0$$

وهكذا فإن الشرطين (20) ، (19) يتحققان ، وبذلك أثبتنا أن مجموعة المعادلات لها حل في صورة موجة متشعبة تحتوي على ثابت غير محدد ξ_0 .
ولتعيين ξ_0 نكامل المعادلة الأولى بالنسبة إلى t_1 بالحدود من 0 إلى t_0 وبالنسبة إلى x بالحدود من 0 إلى x_0 :

$$\left[\int_0^{x_0} u(x_0, \tau) d\tau - \int_0^{x_0} u(0, \tau) d\tau \right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0) dx - \int_0^{x_0} v(x, 0) dx \right] = 0. \quad (30)$$

والتساوية الناتجة تعبر عن قانون حفظ المادة . وبالاتقال إلى النهاية عندما $x_0 \rightarrow \infty$ والاستعانة بالشروط الابتدائية للدالتين u ، v نحصل على :

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx = \int_0^{t_0} u(0, \tau) d\tau = t_0.$$

نفرض أنه لقيم t الكبيرة يقترب حل مسائلتنا إلى الدالتين u ، v المعيتين أعلاه كموجتين متشعبتين .

وإذا عينا ξ_0 من الشرط

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty), \quad (31)$$

فإنها ستكون هي قيمة ξ_0 تلك التي تناظر الدالتين $u(x, t)$ ، $v(x, t)$ نحول تكاملنا

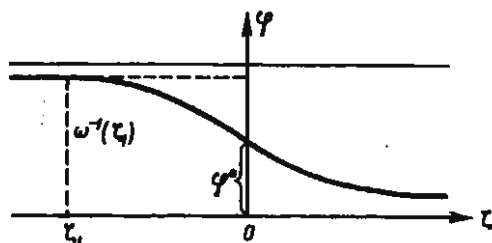
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v(x, t_0) dx &= \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0) dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0) dx = \\ &= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi \quad \left(\begin{array}{l} \xi = x - \sigma t_0 - \xi_0 \\ \xi_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

نرمز بالرمز φ^* إلى قيمة $\omega^{-1}(\xi)$ عند $\xi = 0$:

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$

وليس من الصعب أن نرى أنه إذا كانت $\varphi = \omega^{-1}(\xi)$ هي الدالة العكسية للدالة $\xi = \omega(\varphi)$ (شكل ٣٤) فإن

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^0 \omega^{-1}(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \\ &= \left[-\xi_1 \omega^{-1}(\xi_1) + \int_{\varphi_1}^{\omega^{-1}(\xi_1)} \omega(\varphi) d\varphi + \int_0^{\infty} \omega(\varphi) d\varphi \right]. \quad (32) \end{aligned}$$



شكل ٣٤

ومن هنا يتج أن بدلاً من المتساوية النهائية (31) يمكن كتابة

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi - t_0 &= \\ &= \left\{ (\sigma t_0 + \xi_0) \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \int_0^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi) d\varphi \right\} - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (32')$$

وبالانتقال إلى النهاية عند $t_0 \rightarrow \infty$ نحصل عندئذ على :

$$\sigma \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) \rightarrow \sigma \varphi(-\infty) = \sigma f_1(1) = 1. \quad (32'')$$

ولحساب نهاية الصيغة

$$\sigma t_0 \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

نستعين بالمعادلة (25) . بفك $f_1^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ في متسلسلة بجوار النقطة $\varphi_0 = f_1(1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \sigma \varphi - F(\varphi) &= \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) = \\ &= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] = [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots, \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج أن

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots} = d\xi, \quad (33)$$

حيث رمزنا بالنقط إلى الحدود من قوى أعلى بالنسبة إلى $(\varphi - \varphi_0)$.
ومن الشرط (٣) للدالة f_1 ينتج أن

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

ومن المعادلة (33) نعين درجة تزايد φ عندما $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\varphi = Ae^{k\xi} + \varphi_0, \quad (34)$$

حيث $k > 0$, A ثابتان ما.

وينتج من (34) أن

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 [\sigma \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 A \sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \quad (32'')$$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (32') عندما $t_0 \rightarrow \infty$ مع أخذ العلاقتين (32'') و (32''') في عين الاعتبار نحصل على:

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi) d\varphi. \quad (35)$$

وبذلك فالمقاطع الجانبية للموجة $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ تكون قد حددت تماما.

وتشكل حالة ايزوثرم لينجميور أهمية خاصة. نعين الحل التقاربي لعملية

الامتصاص الخاضعة لايزوثرم لينجميور.

المعادلة (25) تأخذ الصورة

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \frac{\varphi}{1-p\varphi}} = d\xi, \quad (36)$$

حيث $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ سرعة الموجة. ومن (36) نجد أن:

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

حيث

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1-p\varphi) d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1-p\varphi)} + A =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln(\sigma-1-p\sigma\varphi) - \ln \varphi \right] + A.$$

من الواضح أنه عندما تتغير φ من الصفر إلى $f_1(1)$ فإن $\omega(\varphi)$ تتغير من $+\infty$ إلى $-\infty$. نختار A بحيث يكون

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

أي بحيث يكون

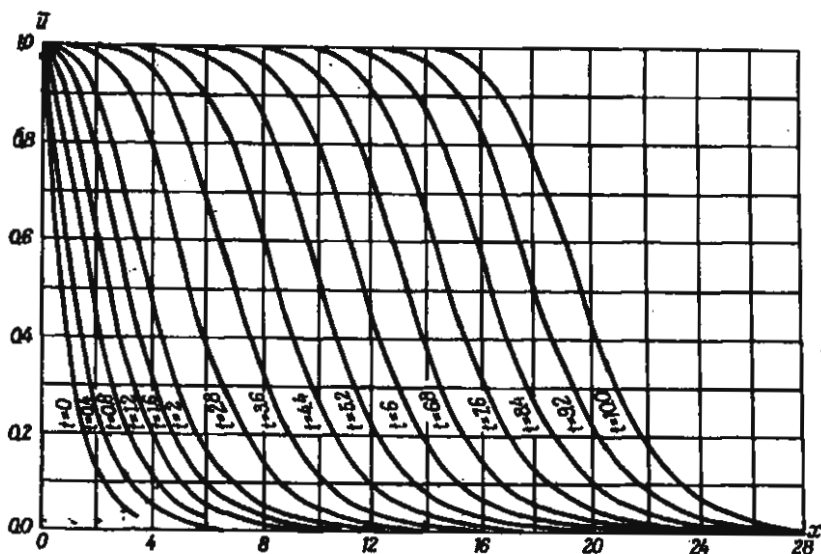
$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+p} \text{ عندما } \omega(\varphi^*) = 0$$

وعند هذا الشرط يكون

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{1}{2} p\right) - \ln\left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+p}\right) \right]$$

و

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln 2(1-\sigma\varphi) - \ln 2(1+p)\varphi \right].$$



شكل ٣٠

وقيمة ξ_0 تتحدد بالعلاقة

$$\xi_0 = -\frac{1}{h(1)} \int_0^{h(1)} \omega(\varphi) d\varphi = \ln 2 - 1$$

ولا تعتمد على $p = u/y$ أى على التركيز المعطى .

والحل التقاربى المطلوب يكون على الصورة :

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \bar{u}(x, t) &= \sigma \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \quad (37)$$

حيث $\omega^{-1}(\xi)$ الدالة العكسية للدالة $\omega(\varphi)$.

وفى شكل ٣٥ بينت نتائج عملية التكامل العددي للمعادلات (14) لايروثرم لينجسميور بطريقة الفروق المحدودة . وهذه المنحنيات معطاة للقيم $0 < t \leq t_1 = 10$ وعند $t = t_1$ تنطبق نتائج التكامل العددي على الحل التقاربى بدقة حتى 1% . وللقيم $t > t_1$ يمكن الاستعانة بالعلاقات التقاربية .

ملحق ٦ - التشابهات الفيزيائية

عند دراسة الظواهر فى مختلف مجالات علم الفيزياء كثيرا ما نكتشف ملامح مشتركة فى هذه الظواهر . ويؤدى ذلك إلى الحصول عند الصياغة الرياضية للمسائل على معادلات واحدة تصف الظواهر الفيزيائية المختلفة . وأبسط مثال على هذه المعادلات يمكن أن تكون المعادلة

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0,$$

التي تصف عمليات ذبذبية مختلفة للمجموعات البسيطة : البندول الرياضى ، ذبذبة ثقل نحت تأثير قوة مرونة الزنبرك ، الذبذبات الكهربائية فى دائرة بسيطة بملف حث ذاتى وسعة .. الخ . وعمومية المعادلات للعمليات الفيزيائية المختلفة تكفل على أساس دراسة خواص إحدى الظواهر الخروج باستنتاجات عن خواص ظاهرة أخرى قد تكون قد درست أقل من الأولى . فعلى سبيل المثال يمكن تسهيل

دراسة مختلف الظواهر الصوتية إلى حد كبير بالدراسة المسبقة للدوائر الكهربائية
المناظرة .

وانتشار الذبذبات الكهربائية في المجموعات ذات الثوابت الموزعة يوصف كما
هو معلوم بالمعادلات التلغرافية

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث C, G, L, R السعة والتسرب والحث الذاتي والمقاومة الموزعة للمجموعة .
وإذا أمكن إهمال المقاومة وتسرب التيار نحصل للدالتين V, I على معادلتين
موجبتين عاديتين :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

والمعادلتان (1) تأخذ الصورة

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

وعند حل مسألة انتشار الصوت في اتجاه ما وعلى سبيل المثال عند دراسة حركة
الهواء في الأنابيب نصل إلى المعادلتين

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث v سرعة الجسيمات المتذبذبة ، ρ الكثافة ، p الضغط ، $\tau = \rho v$ معامل
مرونة الهواء .

ويكفل التشابه بين المعادلتين (3) ، (2) توضيح التناظر بين الكميات الصوتية والكهربائية . ففرق الجهد يناظر الضغط ، والتيار يناظر سرعة حركة الجسيمات ، والكثافة التي تحدد الخواص القصورية للغاز تناظر الحث الذاتي للدائرة الكهربائية ، وسعة الدائرة الكهربائية تناظر $1/\epsilon$ أى مقلوب معامل المرونة . ونفس هذه التناظرات يمكن تعيينها من صيغ طاقات الوضع والحركة للمجموعتين الكهربائية والصوتية .

وبالعودة إلى المعادلتين (1) يمكننا أن نعين التناظرين الصوتيين للمقاومة والتسرب . ونضطر لأخذ مقدار المقاومة الصوتية في الاعتبار في تلك الحالات عندما يكون احتكاك الغاز بحدران الوعاء جوهريا في دراسة حركة الغاز . وبالتناظر مع المقاومة الكهربائية التي تحدد كنسبة الجهد إلى التيار يمكن تعريف المقاومة الصوتية بوصفها نسبة الضغط إلى التيار في الوسط والذي يتناسب مع سرعة حركة جسيمات الغاز ، $R_A = p/uv$. وفي تلك الحالات عندما تدرس حركة الغاز في وسط مسامي نضطر إلى إدخال مقدار مماثل للتسرب في الدوائر الكهربائية . وهذا المقدار الذي يرمز له بالحرف P يسمى بالمسامية (porosity) ويتحدد بالجزء من حجم المادة الذي يكون مملوا بالهواء .

والتناظر الميكانيكى للمعادلة التلغرافية هو معادلة الذبذبات الطولية للقضيب التي يمكن كتابتها مثل المعادلتين (2) على الصورة :

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} = p \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

حيث T شد القضيب ، σ سرعة النقط المتذبذبة ، p الكثافة ، h معامل مرونة القضيب .

وبمقارنة هاتين المعادلتين بالمعادلة (2) يمكننا تعيين التناظر بين الكميات الميكانيكية والكهربائية . فتعيين التناظر بين الجهد الكهربائى وشد الوتر ، والتيار وسرعة حركة الجسيمات ، نحصل على أن مقلوب معامل المرونة يناظر السعة ، والكثافة تناظر الحث الذاتي . وبذلك فإن دراسة المسائل الديناميكية المتشابهة

تؤدي إلى تعيين التناظر بين عدة كميات كهربائية وصوتية وميكانيكية . وهذا التناظر يمكن توضيحه بالجدول التالي :

المجموعة الميكانيكية	المجموعة الصوتية	المجموعة الكهربائية	
T الشد (القوة) x سرعة الحركة x الإزاحة	p الضغط v سرعة الجسيمات u الإزاحة	V الجهد I التيار q الشحنة	المتغيرات
ρ_m كثافة الكتلة $C_M = 1/k$ اللبونة R_M المقاومة الميكانيكية	ρ القصور (الكثافة) ϵ السعة الصوتية $C_A = 1/\epsilon$ R_A المقاومة الصوتية	L الحث C السعة R للمقاومة	البارامترات

وهذه التصورات المطورة أعلاه تكفل في كثير من المسائل الصوتية الحصول على بعض المعلومات عن طبيعة الظواهر قبل حل المسائل .
 فمثلاً مسائل حركة الهواء في المسام للموجات التوافقية البسيطة تؤدي إلى المعادلتين

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\text{grad } p,$$

$$\Delta p + i \frac{\gamma P \omega}{\rho c^2} (r - i\omega\rho_m) p = 0,$$

حيث u السرعة الحجمية للهواء خلال المسام ، p الضغط ، ρ الكثافة ، ρ_m الكثافة الفعالة للهواء في المسام التي قد تكون أكبر من ρ لأنه في المسام يمكن أن تتذبذب مع الهواء جسيمات المادة أيضاً . و p المسامية ، ω ، c سرعة وتردد الصوت ، r مقاومة التيار التي تميز هبوط الضغط في المادة . ويوضع $r = R_A$ ، $\rho_m = L_A$ ، $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$ نحصل على معادلتين في الصورة :

$$L_A \frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\text{grad } p,$$

$$C_A L_A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

وهاتان المعادلتان تشبهان معادلتى انتشار الذبذبات الكهربائية فى الخط (الموصل) .
ولذا فالتناظر مع المقاومة الموجية للخط

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

يمكننا فوراً أن نكتب صيغة المقاومة التى تسمى بالمعاوقة (impedance) المميزة
للمادة المسامية :

$$Z = c \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{\rho - i \frac{r}{\omega}}{\gamma \rho}}$$

باعتبار $G = 0$. عند ذلك . وتشير صيغة المعاوقة المميزة إلى تخميد الموجات المنتشرة
فى المادة المسامية .

والتناظر المعين بين الظواهر الكهربائية والصوتية يكفل استبدال دراسة عديد
من المسائل الصوتية بدراسة الدوائر الكهربائية المناظرة .

وقد وجدت طريقة التشابه فى الآونة الأخيرة تطبيقاً على نطاق واسع فى
الأجهزة الحاسبة الألكترونية للنمذجة . فلحل معادلة تناظر عملية فيزيائية ما تكون
فى هذه الآلات الدائرة الكهربائية المكافئة .

الباب الثالث

المعادلات من النمط المكافئ

إن المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط المكافئ تقابلنا أكثر ما يمكن عند دراسة عمليات التوصيل الحرارى والانتشار. وأبسط معادلة من النمط المكافئ وهى

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

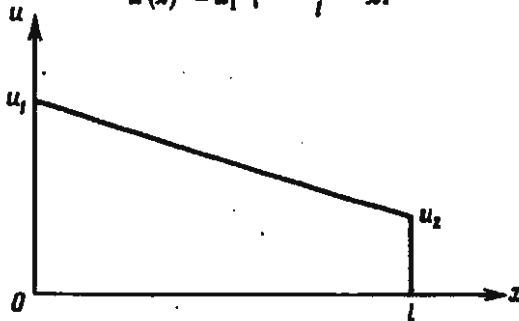
تسمى عادة بمعادلة التوصيل الحرارى.

بند ١ - المسائل المبسطة التى تؤدى إلى معادلات

من النمط المكافئ. صياغة المسائل المحدية

فقرة ١ : المسألة الخطية لانتشار الحرارة. ندرس قضيباً متجانساً طوله l معزولاً حرارياً من الجوانب ورقيقاً بشكل كاف لكى يمكن فى أية لحظة زمنية اعتبار درجة الحرارة واحدة فى جميع نقاط المقطع العرضى. وإذا احتفظنا بطرفى القضيب عند درجتى حرارة ثابتتين u_1, u_2 فإنه كما نعلم جيداً يحدث على امتداد القضيب توزيع خطى لدرجة الحرارة (شكل ٣٦)

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (1)$$



شكل ٣٦

وعند ذلك تسرى الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة .
وكمية الحرارة السارية خلال مقطع القضيب الذى مساحته S فى وحدة الزمن
تعطى بالقانون التجريبي (الناتج من التجارب العملية) :

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (2)$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى الذى يعتمد على مادة القضيب .
ويعتبر مقدار التدفق الحرارى موجباً إذا كانت الحرارة تسرى فى ناحية
تزايد x .

ندرس عملية انتشار الحرارة فى القضيب . وهذه العملية يمكن وصفها بالدالة
 $u(x, t)$ المعبرة عن درجة الحرارة فى المقطع x فى اللحظة الزمنية t . نعين المعادلة
التي يجب أن تحققها الدالة $u(x, t)$. ولهذا الغرض نصيغ القوانين الفيزيائية التى
تحدد العمليات المرتبطة بانتشار الحرارة .

١ - قانون فورييه . إذا كانت درجة حرارة الجسم غير منتظمة فإنه ينشأ فيه
دفع حرارية متجهة من الأماكن ذات درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن ذات
درجات الحرارة الأكثر انخفاضاً .

وكمية الحرارة السارية فى المقطع x خلال الفترة الزمنية $(t, t + dt)$ تساوى

$$dQ = qS dt, \quad (9)$$

حيث

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

هى كثافة التدفق الحرارى المساوية لكمية الحرارة السارية فى وحدة الزمن خلال
مساحة قدرها 1 cm^2 . وهذا القانون هو عبارة عن تعميم للعلاقة (2) . ويمكن
أيضاً إعطاؤه صورة تكاملية :

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt, \quad (5)$$

حيث Q كمية الحرارة السارية فى الفترة الزمنية (t_1, t_2) خلال المقطع x . وإذا
كان القضيب غير متجانس فإن k تكون دالة فى x .

٢- كمية الحرارة التي يجب إكسابها للجسم المتجانس لرفع درجة حرارته بمقدار Δu تساوى

$$Q = cm \Delta u = cpV \Delta u, \quad (6)$$

حيث c السعة الحرارية النوعية ، m كتلة الجسم ، ρ كثافته ، V الحجم .
وإذا كان تغير درجة الحرارة ذا قيمة مختلفة في المناطق المختلفة للقضيب أو إذا كان القضيب غير متجانس فإن

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} cpS \Delta u(x) dx. \quad (7)$$

٣- داخل القضيب يمكن أن تنشأ أو تمتص الحرارة (على سبيل المثال عند مرور تيار أو نتيجة لتفاعلات كيميائية .. الخ) . ويمكن تمييز انبعاث الحرارة بكثافة المصادر الحرارية $F(x, t)$ في النقطة x في اللحظة t . ونتيجة لتأثير هذه المصادر تنبعث على منطقة القضيب $(x, x + dx)$ خلال الفترة الزمنية $(t, t + dt)$ كمية حرارة تساوى

$$dQ = SF(x, t) dx dt \quad (8)$$

أو في الصورة التكاملية

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (9)$$

حيث Q كمية الحرارة المنبعثة على جزء القضيب (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) .

وننتج معادلة التوصيل الحرارى بحساب توازن الحرارة في جزء ما (x_1, x_2) خلال فترة زمنية ما (t_1, t_2) . وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والاستعانة بالعلاقات (9) ، (7) ، (5) يمكن كتابة المساوية

• إذا كانت الحرارة تنبعث مثلاً نتيجة مرور تيار كهربائى قوته I في القضيب الذى مقاومته في وحدة الطول تساوى R فإن $F = 0.24 \cdot I^2 R$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi, \quad (10)$$

التي تعتبر معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التكاملية .

وللحصول على معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التفاضلية نفرض أن الدالة $u(x, t)$ لها المشتقتان المتصلتان u_x, u_t .

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة نحصل على المساواة

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = [c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]]_{\xi=x_1}^{\xi=x_2} \Delta x, \quad (11)$$

التي يمكن تحويلها بواسطة نظرية التغيرات المحدودة إلى الصورة

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \Delta x \Delta t, \quad (12)$$

حيث x_3, x_4, t_3, t_4 نقط وسطية فى الفترتين $(x_1, x_2), (t_1, t_2)$.

ومن هنا نحصل بعد اختصار $\Delta x \Delta t$ على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} + F(x, t) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \quad (13)$$

وكل هذه التحليلات تتعلق بفترتين اختياريتين $(t_1, t_2), (x_1, x_2)$. وبالاتقال إلى النهاية عندما $x_1, x_2 \rightarrow x, t_1, t_2 \rightarrow t$ نحصل على المعادلة

• باشتراط قابلية الدالة $u(x, t)$ للتفاضل يمكن بوجه عام أن نفقد عدة حلول ممكنة تحقق المعادلة التكاملية ولكنها لا تحقق المعادلة التفاضلية . غير أنه فى حالة معادلة التوصيل الحرارى لن نفقد باشتراط قابلية الحيل للتفاضل أية حلول ممكنة لأنه يمكن إثبات أنه إذا كانت الدالة تحقق المعادلة (10) فهي حتماً تكون قابلة للتفاضل .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

التي تسمى معادلة التوصيل الحرارى .

ندرس عدة حالات خاصة .

١ - إذا كان القضيب متجانساً فإنه يمكن اعتبار k, c, ρ ثوابت وتكتب المعادلة عادة على الصورة :

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

حيث a^2 ثابت يسمى بمعامل توصيل درجة الحرارة . وإذا انعدمت مصادر الحرارة أى كانت $F(x, t) = 0$ فإن معادلة التوصيل الحرارى تأخذ الصورة البسيطة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (14')$$

٢ - كثافة المصادر الحرارية قد تعتمد على درجة الحرارة . وفي حالة التبادل الحرارى مع الوسط المحيط الذى ينخفض لقانون نيوتن تكون كمية الحرارة التى يفقدها القضيب* فى وحدة الأطوال ووحدة الزمن مساوية

$$F_0 = h(u - \theta),$$

حيث $\theta(x, t)$ درجة حرارة الوسط المحيط ، h معامل التبادل الحرارى . وبذلك فإن كثافة المصادر الحرارية فى النقطة x فى اللحظة الزمنية t تساوى

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \quad (15)$$

حيث $F_1(x, t)$ هى كثافة المصادر الحرارية الأخرى .

وإذا كان القضيب متجانساً فإن معادلة التوصيل الحرارى مع التبادل الحرارى الجانبي تكون على الصورة التالية :

* حيث إن توزيع درجات الحرارة فى اللقط لا يؤثر فى الاحبار فى تقريبنا فإن تأثير المصادر السطحية يكافئ تأثير مصادر الحرارة الحجمية .

$$u_t = a^2 u_{xx} - au + f(x, t),$$

حيث $a = \frac{h}{cp}$ و $f(x, t) = a\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{cp}$ دالة معلومة .

٣- المعاملان c و k يعتبران كقاعدة دالتين تتغيران ببطء بتغير درجة الحرارة . ولذا فإن الافتراض السابق بثبات هذين المعاملين يكون ممكناً فقط بشرط دراسة فترات غير كبيرة من فترات تغير درجة الحرارة . ودراسة العمليات الحرارية في فترة كبيرة لتغير درجة الحرارة تؤدي إلى معادلة شبه خطية (quasi-linear) للتوصيل الحراري تكتب للوسط غير المتجانس في الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t}$$

(انظر الملحق ٣) .

فقرة ٢ : معادلة انتشار الغازات (diffusion of gases) . إذا كان الوسط مملوءاً بالغاز بصورة غير منتظمة فإنه تتحقق ظاهرة انتشاره من المكان حيث تركيز الغاز أكبر إلى الأماكن حيث التركيز أقل . وهذه الظاهرة تتحقق أيضاً للمحاليل إذا كان تركيز المادة المذابة في الحجم غير ثابت .

ندرس عملية الانتشار في أنبوبة مجوفة أو في أنبوبة مملوءة بمادة مسامية مع افتراض أن تركيز الغاز (المحلول) في مقطع الأنبوبة في أي لحظة زمنية واحد . وعندئذ فإن عملية الانتشار يمكن وصفها بالدالة $u(x, t)$ التي تعبر عن التركيز في المقطع x في اللحظة الزمنية t .

ووفقاً لقانون نرنست تكون كتلة الغاز المتسرب خلال المقطع x في الفترة الزمنية $(t, t + \Delta t)$ مساوية

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S dt = W S dt ,$$

$$W = -D \frac{\partial u}{\partial x} , \quad (16)$$

حيث D معامل الانتشار - S مساحة مقطع الأنبوبة - $W(x, t)$ كثافة التدفق الانتشاري المساوية لكتلة الغاز المتسرب في وحدة الزمن خلال وحدة المساحة .

ووفقاً لتعريف التركيز فإن كمية الغاز في الحجم V تكون مساوية :

$$Q = uV ;$$

ومن هنا نحصل على أن تغير كتلة الغاز في منطقة الأنبوبة (x_1, x_2) عند تغير التركيز بمقدار Δu يساوى :

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta u \cdot S dx,$$

حيث $c(x)$ معامل المسامية °.

نكون معادلة توازن كتلة الغاز في المنطقة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau = \\ = S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi. \end{aligned}$$

ومن هنا وكما في الفقرة ١ نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (17)$$

التي تعتبر معادلة الانتشار. وهي مماثلة تمامًا لمعادلة التوصيل الحرارى. وعند استنباط هذه المعادلة اعتبرنا أنه لا توجد في الأنبوبة مصادر للمادة وينعدم الانتشار خلال جدران الأنبوبة. ويؤدى الأخذ في الاعتبار لهذه الظواهر إلى معادلتين مشابهتين للمعادلتين (15)، (14) (انظر الكتاب الثانى، الباب الثانى، بند ٢، فقرة ٣).

وإذا كان معامل الانتشار ثابتًا تأخذ معادلة الانتشار الصورة التالية :

$$a^2 = D/c \quad \text{حيث} \quad u_t = a^2 u_{xx}$$

وإذا كان معامل المسامية $c = 1$ وكان معامل الانتشار ثابتًا فإن معادلة الانتشار تأخذ الصورة

$$u_t = Du_{xx}.$$

فقرة ٣ : انتشار الحرارة في الفراغ. إن عملية انتشار الحرارة في الفراغ يمكن

تعديدها بدرجة الحرارة $u(x, y, z, t)$ التي تعتبر دالة في x, y, z, t .

• إن معامل المسامية هو نسبة حجم البياض إلى الحجم الكلى V_0 الذى يساوى في حالتنا $S dx$.

وإذا كانت درجة الحرارة غير ثابتة فإنه تنشأ دفق حرارية تتجه من الأماكن حيث درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن حيث درجة الحرارة المنخفضة .

نفرض أن $d\sigma$ مساحة صغيرة ما تحيط بالنقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ والعمودى عليها n . وكمية الحرارة المارة خلال $d\sigma$ فى وحدة الزمن تساوى وفقاً لقانون فورييه :

$$W_n d\sigma = (Wn) d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى ، $\partial u / \partial n$ المشتقة فى اتجاه العمودى n على $d\sigma$ التى تساوى

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = (\text{grad } u, n).$$

وكثيراً ما يكتب قانون فورييه فى الصورة :

$$W = -k \text{ grad } u,$$

حيث W متجه كثافة الدفق الحرارى .

وإذا كان الوسط ايزوتروپياً (متشابهاً isotropic) فإن k يكون كمية مقياسية (scalar) . وفى حالة الوسط الانيزوتروپى يكون k ممتداً (tensor) ويكون متجه الدفق الحرارى W هو عبارة عن حاصل ضرب الممتد k فى المتجه $\text{grad } u$. - وسندرس فقط الأوساط الايزوتروپية .

نتقل إلى استنباط معادلة التوصيل الحرارى فى الفراغ .

ندرس حجماً ما V محدوداً بالسطح S . وتكون معادلة توازن الحرارة للحجم V خلال الفترة الزمنية $t_1 = t_1 - t_2$ على الصورة :

$$\begin{aligned} \int_V \int_{t_1}^{t_2} \rho p [u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_p = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S W_n d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_V F(P, t) dV_p \right). \quad (18) \end{aligned}$$

حيث $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطة التكامل ، $dV_p = d\xi d\eta d\zeta$ ، عنصر الحجم ، ρp السعة الحرارية لوحدة الحجم ، W_n المركبة العمودية لكثافة الدفق الحرارى .

وهذه المعادلة تعبر عن قانون حفظ الحرارة في الحجم V خلال الفترة الزمنية Δt :
تغير كمية الحرارة في الحجم V خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ (الطرف الأيسر في (18)) يتبع بسبب دفق الحرارة خلال السطح الحدي S (الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة (18)) وكذلك بكمية الحرارة المنبعثة في الحجم V خلال الفترة الزمنية Δt نتيجة لتأثير المصادر الحرارية .

ولانتقال من المعادلة التكاملية للتوازن إلى المعادلة التفاضلية ، نفرض أن الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ قابلة للتفاضل مرتين بالنسبة إلى x, y, z ومرة واحدة بالنسبة إلى t وأن هذه المشتقات تكون متصلة في المنطقة محل الدراسة . وعندئذ يمكن الاستعانة بعلاقة وستروجرادسكى :

$$\iint_S W_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} W dV$$

وتحويل معادلة التوازن إلى الصورة :

$$\begin{aligned} \iiint_V cp[u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_P &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \operatorname{div} W dV_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(P, t) dV_P dt. \end{aligned}$$

(سنفرض أن $F(P, t)$ دالة متصلة في متغيراتها) .

وينطبق نظرية القيمة المتوسطة ونظرية التغيرات المحدودة للدوال في عدة متغيرات نحصل على :

$$cp \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{P=P_1}^{P=P_2} \Delta t \cdot V = - \operatorname{div} W \bigg|_{P=P_1}^{P=P_2} \Delta t \cdot V + F \bigg|_{P=P_1}^{P=P_2} \Delta t \cdot V,$$

حيث t_1, t_2, t_3 نقاط وسطية في الفترة Δt ، P_1, P_2, P_3 نقاط في الحجم V .
نثبت نقطة ما $M(x, y, z)$ داخل الحجم V ونضغط (نجمع) الحجم V في هذه النقطة ونجعل Δt تتحول إلى الصفر . وبعد اختصار $\Delta t V$ والانتقال إلى النهاية كما ذكرنا نحصل على :

$$cp \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = - \operatorname{div} W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

وبالتعويض عن ∇ من العلاقة $\nabla = -k \text{ grad } u$ نحصل على المعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$cp u_t = \text{div} (k \text{ grad } u) + F$$

أو

$$cp u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F.$$

وإذا كان الوسط متجانساً فإن هذه المعادلة تكتب عادة في الصورة

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{cp},$$

حيث $a^2 = k/cp$ معامل توصيل درجة الحرارة ، أو

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{cp} \right),$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ مؤثر لابلاس .

فقرة ٤ : صياغة المسائل الحدية . للحصول على حل وحيد لمعادلة التوصيل الحرارى يلزم أن نضيف إلى المعادلة الشروط الابتدائية والشروط الحدية .

والشرط الابتدائى ، على خلاف المعادلة على النقط الزائدى ، ينحصر فقط في إعطاء قيم الدالة $u(x, t)$ في اللحظة الابتدائية t_0 . والشروط الحدية يمكن أن تختلف وفقاً للنظام الحرارى على الحدود . وتدرس ثلاثة أنماط أساسية للشروط الحدية .

١- في نهاية القضيب $x = 0$ معطاة درجة الحرارة

$$u(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة في فترة ما $t_0 \leq t \leq T$ علماً بأن T هى الفترة الزمنية التى خلالها تم دراسة العملية .

٢- في نهاية القضيب $x = l$ معطاة قيمة المشتقة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t).$$

ونصل إلى هذا الشرط ، إذا أعطى مقدار التدفق الحرارى $Q(l, t)$ السارى خلال المقطع الطرفى للقضيب

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

ومن هنا $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$ ، حيث $v(t)$ دالة معلومة يعبر عنها بدلالة التدفق المعطى $Q(l, t)$ بالعلاقة

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

٣- فى الطرف $x = l$ معطاة علاقة خطية بين المشتقة والدالة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)].$$

وهذا الشرط الحدى يناظر التبادل الحرارى وفقاً لقانون نيوتن على سطح الجسم مع الوسط المحيط الذى تكون درجة حرارته θ معلومة . وبلاستعانة بصيغتي التدفق الحرارى السارى خلال المقطع $x = l$

$$Q = h(u - \theta)$$

و

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

نحصل على الصياغة الرياضية للشرط الحدى الثالث فى الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)],$$

حيث $\lambda = h/k$ معامل التبادل الحرارى ، $\theta(t)$ دالة ما معطاة . وللطرف $x = 0$ من القضيب $(0, t)$ يكون الشرط الحدى الثالث على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

والشروط الحدية عند $x = 0$ ، $x = l$ يمكن أن تكون من أنماط مختلفة ومن ثم فعدد المسائل المختلفة يكون كبيراً .

والمسألة الحدية الأولى تنحصر فى تعيين الحل $u = u(x, t)$ لمعادلة التوصيل الحرارى

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad \text{عند} \quad u_t = a^2 u_{xx}$$

الذى يحقق الشروط

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

حيث $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ دوال معطاة .

وبالمثل نصاغ المسائل الحدية الأخرى بتركيبات مختلفة من الشروط الحدية عند $x = 0$, $x = l$ ومن الممكن وجود شروط حدية من نمط أكثر تعقيداً من الأنماط التى سبق بحثها .

نفرض على سبيل المثال أنه وضعت عند الطرف $x = 0$ للقضيب سعة حرارية مركزة C_1 (على سبيل المثال جسم ذو توصيل حرارى كبير ، حيث يمكن اعتبار درجة الحرارة فى كل الجسم ثابتة) وأنه يحدث تبادل حرارى مع الوسط الخارجى وفقاً لقانون نيوتن . عندئذ يكون الشرط الحدى عند $x = 0$ (الذى يعبر عن معادلة التوازن الحرارى) على الصورة :

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

حيث u_0 درجة حرارة الوسط الخارجى . وهذا الشرط يحتوى على المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ (أو $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ إذا أخذنا فى الاعتبار أن $u_t = a^2 u_{xx}$).

وإذا كان الوسط غير متجانس ومعاملات المعادلة عبارة عن دوال منفصلة فإن الفترة $(0, l)$ حيث يبحث عن الحل ، تقسم بنقط انفصال المعاملات إلى عدة أجزاء داخلها تحقق الدالة u معادلة التوصيل الحرارى وعلى حلودها تحقق شروط الترافق .

وفى الحالة المبسطة تنحصر هذه الشروط فى اتصال درجة الحرارة واتصال الدفق الحرارى

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

حيث x_i نقط انفصال المعاملات .

وعلاوة على المسائل المذكورة هنا كثيراً ما تقابلنا الحالات النهائية لهذه المسائل . ندرس عملية التوصيل الحرارى فى قضيب طويل للغاية . وفى خلال فترة زمنية غير كبيرة يكون تأثير نظام درجة الحرارة المعطى على الحدود (على طرفى القضيب) تأثيراً ضعيفاً للغاية فى الجزء الأوسط للقضيب فدرجة الحرارة فى هذا الجزء تتحدد أساساً بالتوزيع الابتدائى لدرجة الحرارة فقط . وفى هذه الحالة فإن الحساب الدقيق لطول القضيب لا يكون له قيمة ، لأن تغير طول القضيب لا يحدث تأثيراً جوهرياً على درجة الحرارة فى المنطقة التى تهتمنا . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب لانهاى الطول . وهذا الشكل تطرح المسألة بالشروط الابتدائية (مسألة كوشى) عن توزيع درجة الحرارة على مستقيم لانهاى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $-\infty < x < \infty$. $t \geq t_0$ ، الذى يحقق الشرط

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

حيث $\varphi(x)$ دالة معطاة .

وبالمثل ، إذا كان جزء القضيب الذى نهتم بدرجة حرارته يوجد بالقرب من أحد طرفى القضيب بعيداً عن الطرف الآخر فإن درجة الحرارة فى هذه الحالة تتحدد عملياً بنظام درجة حرارة الطرف الأقرب والشروط الابتدائية . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب عادة نصف لانهاى والإحداثى المحسوب ابتداء من طرف القضيب يتغير فى الحدود $0 \leq x < \infty$. نورد كمثال صياغة المسألة الحدية للقضيب نصف اللانهاى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x < \infty$. $t \geq t_0$ الذى يحقق الشرطين :

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x) & (0 < x < \infty), \\ u(0, t) &= \mu(t) & (t \geq t_0), \end{aligned} \right\}$$

حيث $\varphi(x)$ ، $\mu(t)$ دالتان معطاتان .

والمسائل الواردة أعلاه هي عبارة عن حالة نهائية (انحلال degeneration) للمسائل الحدية الأساسية. ومن الممكن وجود حالات نهائية للمسألة الحدية من نمط آخر عندما يهمل الحساب الدقيق للشروط الابتدائية. فتأثير الشروط الابتدائية عند انتشار الحرارة في القضيب يضعف بمرور الوقت. فإذا كانت اللحظة التي نهما بعيدة بقدر كاف عن اللحظة الابتدائية فإن درجة الحرارة تتحدد عملياً بالشروط الحدية لأن تغير الشروط الابتدائية لن يغير حالة درجة الحرارة في القضيب في حدود دقة الملاحظة. وفي هذه الحالة يمكن عملياً أن نعتبر أن التجربة تستمر زمناً طويلاً لانهايا ومن ثم نسقط الحاجة إلى الشروط الابتدائية.

وبذلك نتوصل إلى المسائل الحدية بدون شروط ابتدائية عندما يبحث عن حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $0 \leq x \leq l$ و $-\infty < t$ الذى يحقق الشرطين

$$\mu(0, t) = \mu_1(t),$$

$$\mu(l, t) = \mu_2(t).$$

ووفقاً لطبيعة النظام الحدى من الممكن صياغة صور أخرى من المسائل بدون شروط ابتدائية.

وتعتبر هامة على وجه الخصوص المسألة بلا شروط ابتدائية للقضيب نصف اللانهائى ($l = \infty$) ، عندما يطلب تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $-\infty < t < \infty$ و $0 < x < \infty$ الذى يحقق الشرط

$$\mu(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة.

وأكثر المسائل بلا شروط ابتدائية التى تقابلنا هي عند إعطاء نظام حدى دورى

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(انظر الملحق ١ بالباب الثالث).

ومن الطبيعى أن نعتبر أنه بمرور فترة زمنية طويلة تتغير درجة حرارة القضيب عملياً بنفس القانون الدورى بنفس التردد. غير أننا إذا أردنا الأخذ فى الاعتبار الشروط الابتدائية بدقة فإننا شكلياً لن نحصل أبداً على حل دورى لأن تأثير

الشروط الابتدائية لن يؤدي إلى الصفر رغم أنه يضعف بمرور الزمن . ولا معنى لأخذ هذا التأثير في عين الاعتبار نظراً للأخطاء الموجودة في عملية الملاحظة . وبدراسة الحل الدوري نحن نهمل تأثير المعطيات الابتدائية .

إن صياغة المسائل الحدية الواردة فيما سبق لا تتعلق فقط بالمعادلة بمعاملات ثابتة . فنحن نقصد بجملة «معادلة التوصيل الحراري» أية معادلة من معادلات الفقرات السابقة .

وعلاوة على المسائل الحدية الخطية المذكورة أعلاه تصاغ أيضاً مسائل بشروط حدية لاختية ، على سبيل المثال على الصورة :

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)].$$

وهذا الشرط الحدي يتناظر الإشعاع (الحراري) وفقاً لقانون ستيفان - بولتزمان من الطرف $x = 0$ في وسط حرارته $\theta(t)$. ونتوقف بتفصيل أكبر عند صياغة المسائل الحدية . ندرس المسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة .

إن حل المسألة الحدية الأولى هو تلك الدالة $u(x, t)$ التي تتميز بالخواص التالية :

١ - $u(x, t)$ معرفة ومتصلة في المنطقة المغلقة

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

٢ - $u(x, t)$ تحقق معادلة التوصيل الحراري في المنطقة المفتوحة

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

٣ - $u(x, t)$ تحقق الشرط الابتدائي والشرطين الحديين أي

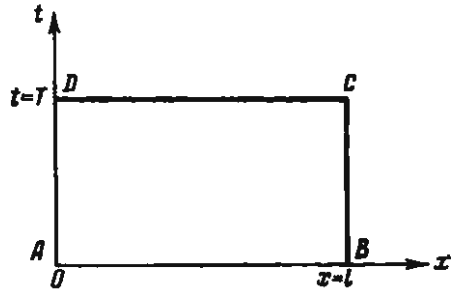
$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

حيث $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ دوال متصلة تحقق شروط التوافق

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) [= u(0, t_0)], \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) [= u(l, t_0)],$$

الضرورية لاتصال $u(x, t)$ في المنطقة المغلقة .

ندرس مستوى الحالات الطورية (x, t) (شكل ٣٧) . وفي مسألتنا نبحث عن الدالة $u(x, t)$ المعرفة داخل المستطيل $ABCD$. وهذه المنطقة تعرف من صياغة المسألة نفسها لأنه يتم بحث عملية انتشار الحرارة في القضيب $0 \leq x \leq l$ خلال الفترة الزمنية $t_0 \leq t \leq T$ حيث نعلم خلال هذه الفترة النظام الحرارى في الطرفين . نفرض أن $t_0 = 0$. ونفترض أن $u(x, t)$ تحقق المعادلة فقط عند $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ولكن ليس عندما $t = 0$ (الضلع AB) وليس عندما $x = 0, x = l$ (الضلعان AD, BC) حيث تعطى الشروط الابتدائية والحدية مباشرة بقيم هذه الدالة . وإذا طلبنا أن تتحقق المعادلة على سبيل المثال عندما $t = 0$ فإننا بذلك نكون كما لو أننا طلبنا وجود المشتقة $\varphi'' = u_{xx}(x, 0)$ التى تدخل في المعادلة . وبهذا المطلب كنا سنضيق مجال الظواهر الفيزيائية المدروسة بأن نستثنى من دراستنا تلك الدوال التى لا يتحقق لها هذا المطلب . ودون



شكل ٣٧

افترض اتصال $u(x, t)$ في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ (أى في المستطيل المغلق $ABCD$) أو بدون شرط آخر يحل محل هذا : لافتراض كان الشرط (٣) سيفقد معناه* . وبالفعل ندرس الدالة $v(x, t)$ المعرفة بالطريقة التالية :

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= C & (0 < x < l, 0 < t \leq T), \\ v(x, 0) &= \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \\ v(0, t) &= \mu_1(t), \\ v(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq T),$$

حيث C ثابت اختياري . والدالة $v(x, t)$ كما هو واضح ، تحقق الشرط (٢) وكذلك الشروط الحدية . غير أن هذه الدالة لا تعبر عن عملية انتشار درجة الحرارة في القضيب عند درجة الحرارة الابتدائية $C \neq \varphi(x)$ ودرجات الحرارة

* سندرس فيما بعد المسائل الحدية بشروط حدية وابتدائية مفصلة . ولله المسائل سيتم تدقيق المعنى المقصود به تحقيق الشروط الحدية .

الحدية $\mu_1(t) \neq C$ ، $\mu_2(t) \neq C$ لأنها منفصلة عندما $x=0, x=l$ و $t=0$.

إن اتصال الدالة $u(x, t)$ عندما $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ينتج من أن هذه الدالة تحقق المعادلة . وبذلك فطلب اتصال $u(x, t)$ عندما $0 \leq x \leq l$ و $0 \leq t \leq T$ يتعلق من حيث الجوهر فقط بتلك النقاط حيث تعطى القيم الحدية والابتدائية . وفيما سيلي بعد ذلك سنقصد بعبارة « حل المعادلة الذى يحقق الشروط الحدية » تلك الدالة التى تحقق الشروط (١) و (٢) و (٣) دون النص صراحة فى كل مرة على هذه الشروط إذا لم تستدع لذلك ضرورة خاصة .

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الأخرى بما فى ذلك المسائل على القضيب اللانهائى والمسائل بدون شروط ابتدائية .

وللمسائل فى عدة متغيرات هندسية مستقلة يحتفظ بصحته كل ما سبق ذكره . وفى هذه المسائل تعطى عندما $t = t_0$ درجة الحرارة الابتدائية وتعطى الشروط الحدية على سطح الجسم . ويمكن أيضاً دراسة مسائل للمناطق اللانهائية .

وبالنسبة إلى كل مسألة من المسائل المصاغة تنشأ الأسئلة التالية :

(١) وحدانية حل المسألة المصاغة .

(٢) وجود الحل .

(٣) اعتماد الحل اعتماداً متصلاً على الشروط الإضافية .

وإذا كان للمسألة المصاغة عدة حلول فإن عبارة « حل المعادلة » لا تكون ذات معنى محدد . ولذا فقبل التحدث عن حل المسألة يلزم إثبات وحدانيته . وللتطبيق العملى يكون السؤال الثانى هو السؤال الأكثر جوهرية لأنه عند إثبات وجود الحل تعطى عادة طريقة حساب الحل أيضاً .

وكما ذكرنا فيما سبق (الباب الثانى ، بند ٢ ، فقرة ٥) تسمى العملية عملية محددة فيزيائياً إذا تغير حل المعادلة تغيراً طفيفاً عندما تتغير الشروط الابتدائية

والحدية للمسألة تغيراً طفيفاً أيضاً . وفي المستقبل ستثبت أن عملية انتشار الحرارة تتحدد فيزيائياً بشروطها الابتدائية والحدية ، أى أن التغير الطفيف للشروط الحدية والابتدائية يناظره تغير طفيف للحل نفسه .

فقرة ٥ : مبدأ القيمة العظمى . فيما سيلي سندرس المعادلة ذات المعاملات

الثابتة

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

وكما رأينا تقول هذه المعادلة بالتعويض

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u$$

عندما

$$\mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

إلى الصورة

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

نثبت الخاصة التالية لحل هذه المعادلة والتي نسميها بمبدأ القيمة العظمى :

إذا كانت الدالة $u(x, t)$ المعرفة والمتصلة في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l$ ،

$0 \leq t \leq T$ تحقق معادلة الاتصال الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (19)$$

في نقط المنطقة $0 < x < l, 0 < t \leq T$ فإن الدالة $u(x, t)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى إما في اللحظة الابتدائية وإما في نقطتي الحدود $x = 0$ أو $x = l$.

والدالة $u(x, t) = \text{const.}$ تحقق ، كما هو واضح ، معادلة التوصيل الحرارى وتصل إلى قيمتها العظمى (الصغرى) في أية نقطة . غير أن هذا لا يتناقض مع النظرية لأن من شرطها يتبع أنه إذا وصلت الدالة إلى قيمها العظمى (الصغرى) داخل المنطقة فإنها أيضاً (وليس فقط) ينبغي أن تصل إلى هذه القيمة العظمى (الصغرى) إما عندما $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$.

والمعنى الهندسى لهذه النظرية واضح : إذا كانت درجة الحرارة على الحدود وفي اللحظة الابتدائية لا تفوق قيمة معينة M فإنه مع انعدام المصادر الحرارية

لا يمكن أن تنشأ داخل الجسم درجة حرارة أكبر من M . وتوقف أولاً عند إثبات النظرية في حالة القيمة العظمى .

يتم إثبات هذه النظرية بافتراض تحقق العكس (الإثبات بالعكس) . نرمز بالحرف M للقيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ عندما $u(x, t)$ $0 \leq x \leq l$ أو عندما $x=0$ أو $x=l$ $0 \leq t \leq T$ ونفرض أن الدالة $u(x, t)$ تصل في نقطة ما (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T)$ إلى قيمتها العظمى المساوية

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

نقارن بين طرفي المعادلة (19) الأيمن والأيسر عند النقطة (x_0, t_0) . حيث إن الدالة تصل عند النقطة (x_0, t_0) إلى قيمتها العظمى فإنه من الضروري يجب أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (20)$$

• إذا لم نفرض اتصال الدالة $u(x, t)$ في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ فإن الدالة $u(x, t)$ كان من الممكن ألا تصل إلى قيمتها العظمى في أية نقطة وكانت التحليلات التالية تصبح غير قابلة للتطبيق . ووفقاً للنظرية التي تنص على أن أية دالة متصلة تصل إلى قيمتها العظمى في المنطقة المغلقة يمكننا أن نكون واثقين من الآتي : (١) الدالة $u(x, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى على الضلع الأسفل أو الضلعين الجانبيين للمستطيل وهذه القيمة العظمى قد رمزنا إليها بالحرف M . (٢) إذا كانت الدالة $u(x, t)$ أكبر من M ولو في نقطة واحدة فإنه توجد النقطة (x_0, t_0) حيث تصل الدالة $u(x, t)$ إلى قيمتها العظمى التي تكون أكبر من M :

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

علماً بأن

$$0 < x_0 < l, \quad 0 < t_0 \leq T.$$

•• بالفعل فكما نعلم من التحليل الرياضي تكون الشروط الكافية لكي تصل الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 الواقعة داخل الفترة $(0, l)$ إلى نهايتها الصغرى النسبية هي الشروط التالية : $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$

وبذلك فإذا كانت الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 لها نهاية عظمى فإن : (١)

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad (٢) \quad \text{لا يمكن أن يكون } f''(x_0) > 0 \text{ أي أن } f''(x_0) \leq 0.$$

وبعد ذلك فحيث إن $u(x_0, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى عند $t = t_0$ فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0. \quad (21)$$

وبمقارنة الإشارة في طرفي المعادلة (19) نرى أن إشارتي الطرفين مختلفتان. غير أن هذا التحليل لا يثبت بعد النظرية لأن الطرف الأيمن والطرف الأيسر يمكن أن يكون كل منهما مساوياً للصفر مما لا يؤدي ما سبق ذكره من اختلاف الإشارتين إلى تناقض. وقد أوردنا هذا التحليل لإبراز الفكرة الأساسية في الإثبات. وللإثبات الكامل نعين النقطة (x_1, t_1) التي فيها $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$. ولهذا الغرض ندرس الدالة المساعدة

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (22)$$

حيث k عدد ثابت ما. ومن الواضح أن

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

وأن

$$k(t_0 - t) \leq kT.$$

نختار $k > 0$ بحيث يكون kT أصغر من $\varepsilon/2$ أي $k < \varepsilon/2T$. عندئذ فإن القيمة العظمى للدالة $v(x, t)$ عندما $t = 0$ أو $x = 0$ أو $x = l$ لن تفوق $M + \frac{\varepsilon}{2}$. أي أن

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{عندما } t = 0 \text{ أو } x = 0 \text{ أو } x = l). \quad (23)$$

وذلك لأنه لهذه المتغيرات لا يفوق الحد الأول من العلاقة (22) المقدار M ولا يفوق الحد الثاني المقدار $\varepsilon/2$.

ووفقاً لاتصال الدالة $v(x, t)$ يجب أن تصل في نقطة ما (x_1, t_1) إلى قيمتها العظمى. ومن الواضح أن

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

ولذا فإن $0 < x_1 < l$, $t_1 > 0$ لأنه عندما $t = 0$ أو $x = 0$ أو $x = l$ تحقق

عند ذلك يتضح أنه إذا كان $t_0 < T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. أما إذا كان $t_0 = T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

المتباينة (23). وفي النقطة (x_1, t_1) بالتناظر مع (20) و (21) يجب أن يكون
 $v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, v_t(x_1, t_1) \geq 0$ وبالأخذ في الاعتبار (22) نجد أن

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_1, t_1) &= v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \\ u_t(x_1, t_1) &= v_t(x_1, t_1) + k \geq k > 0. \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج أن

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geq k > 0,$$

أى أن المعادلة (19) في النقطة الداخلية (x_1, t_1) لا تتحقق. وبذلك أثبتنا أن
 الدالة $u(x, t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى (19) لا يمكن أن تصل داخل المنطقة
 إلى قيم تفوق القيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ على الحدود (أى عند $x=0, x=l$ و $t=0$).

بالفعل وبالمثل يمكن إثبات الجزء الثانى من النظرية المتعلق بالقيمة الصغرى.
 ولا يتطلب ذلك إثباتاً خاصاً لأن الدالة $u_1 = -u$ لها قيمة عظمى حيث يكون
 للدالة u قيمة صغرى.

فقرة ٦ : نظرية الوحدةانية. إذا كانت الدالتان $u_1(x, t), u_2(x, t)$ المرفتان
 والمتصلتان في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ تحققان معادلة التوصيل
 الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (24) \quad (0 < x < l, t > 0)$$

ونفس الشروط الحدية والابتدائية

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

$$* \quad u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

لإثبات هذه النظرية ندرس الدالة

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

* في فقرة ٣، بند ٢ سيتم تشديد هذه النظرية وحذف مطلب الاتصال عند $t=0$.

وحيث إن الدالتين $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ متصلتان عند

$$0 \leq x \leq l,$$

$$0 \leq t \leq T,$$

فإن الدالة $v(x, t)$ التي تساوى الفرق بينهما تكون أيضاً دالة متصلة في نفس هذه المنطقة. وبوصفها الفرق بين حلين لمعادلة التوصيل الحرارى في المنطقة $0 < x < l, t > 0$ تكون الدالة $v(x, t)$ حلاً لمعادلة التوصيل الحرارى المتجانسة في هذه المنطقة. وبذلك فإن مبدأ القيمة العظمى قابل للتطبيق على هذه الدالة ، أى أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما عند $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$. غير أنه لدينا من الشرط

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) = 0,$$

أى أن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

ومن هنا يتبع أن حل المسألة الحدية الأولى يكون وحيداً.

ثبت أيضاً عدة نتائج مباشرة لمبدأ القيمة العظمى. وعند ذلك ستقول ببساطة «حل معادلة التوصيل الحرارى» بدلاً من ذكر خواص الدوال التي تحقق فضلاً عن معادلة التوصيل الحرارى الشروط الابتدائية والحدية تفصيلاً.

١ - إذا حقق حلان لمعادلة التوصيل الحرارى $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ الشروط :

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0),$$

$$u_1(0, t) \leq u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leq u_2(l, t),$$

فإن

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$$

لجميع قيم $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$.

بالفعل ، الفرق $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ يحقق الشروط التي أثبتنا بها مبدأ القيمة العظمى ، وعلاوة على ذلك

$$v(x, 0) \geq 0, \quad v(0, t) \geq 0, \quad v(l, t) \geq 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) \geq 0$$

للمنطقة $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ، وإلا فالدالة $v(x, t)$ كان سيصبح لها قيمة صغرى سالبة في المنطقة

$$0 < x < l, 0 < t \leq T.$$

٢ - إذا حققت ثلاثة حلول لمعادلة التوصيل الحرارى

$$u(x, t), \underline{u}(x, t), \bar{u}(x, t)$$

الشروط

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$$

عند

$$t=0, x=0, x=l,$$

فإن هذه المتباينات مستحققة بالتطابق أى لجميع x, t عندما $0 \leq x \leq l$.
 $0 \leq t \leq T$

وهذا المنطوق يعتبر تطبيقاً للنتيجة ١ على زوجى الدوال .

$$\underline{u}(x, t), u(x, t), \bar{u}(x, t)$$

٣ - إذا تحققت لحلين من حلول معادلة التوصيل الحرارى $u_1(x, t), u_2(x, t)$ المتباينة

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

للقيم

$$t=0, x=0, x=l,$$

فإن

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

بالتطابق أى تتحقق هذه المتباينة لجميع x, t من

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T.$$

وهذا المنطوق يتبع من النتيجة ٢ إذا طبقناها على حلول معادلة التوصيل الحرارى

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

والنتيجة ٣ تكفل إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على القيمة الابتدائية والقيم الحدية. فإذا أخذنا في مسألة فيزيائية ما بدلاً من حل معادلة التوصيل الحراري المناظر للشرط الابتدائي والشرطين الحديين

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

الحل $u(x, t)$ المناظر لقيمة ابتدائية أخرى وقيمتين حديتين أخريين معرفة بالدوال $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$ التي لا تختلف في حدود درجة الدقة المعطاة ε عن الدوال $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leq \varepsilon, \quad |\mu_2(t) - \mu_2^*(t)| \leq \varepsilon,$$

فإن الدالة $u_1(x, t)$ ستختلف عن الدالة $u(x, t)$ في حدود نفس درجة الدقة ε

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leq \varepsilon.$$

وفي ذلك ينحصر مبدأ التحديد الفيزيائي للمسألة.

ولقد أوردنا بالتفصيل موضوع وحدانية الحل والتحديد الفيزيائي للمسألة على مثال المسألة الحدية الأولى لمستقيم محدود. ونظرية الوحدانية للمسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة في الفراغ الثنائي أو الثلاثي الأبعاد يمكن أن تثبت بالتكرار الحرفي لنفس التحليلات السابقة.

وتنشأ موضوعات ومشاكل مشابهة عند دراسة المسائل الأخرى التي تمت صياغة عدد منها في الفقرات السابقة. وهذه المسائل تتطلب بعض التغييرات في شكل طريقة الإثبات. ووحدانية حل المسألة للمنطقة غير المحدودة (انظر فقرة ٧) أو للمسائل بلا شروط ابتدائية تكون صحيحة عند فرض بعض الشروط الإضافية على الدوال محل الدراسة.

فقرة ٧: نظرية الوحدانية للمستقيم اللانهائي. عند حل المسألة على مستقيم لانهائي يعتبر جوهرياً مطلب محدودية الدالة المطلوب تعيينها في كل

المنطقة . أى مطلب وجود ذلك العدد M بحيث يكون $|u(x, t)| < M$ لجميع $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq 0$.

إذا كانت الدالتان $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ المتصلتان والمحدودتان في كل منطقة تغير المتغيرين (x, t) تحققان معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (19)$$

والشرط

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

فإن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0).$$

ندرس كالمعتاد الدالة

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

الدالة $v(x, t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى ومحدودة في كل المنطقة

$$|v(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$$

وتحقق الشرط

$$v(x, 0) = 0.$$

ومبدأ القيمة العظمى الذى استخدمناه في إثبات وحدانية حل المسألة للمستقيم المحدود غير قابل للتطبيق هنا لأن الدالة $v(x, t)$ في المنطقة اللامحدودة يمكن أن تصل أبداً إلى أية قيم عظمى . وللاستعانة بهذا المبدأ ندرس المنطقة :

$$|x| \leq L,$$

حيث L عدد مساعد سنقوم فيما بعد بزيادته زيادة لانهائية . وندرس أيضاً الدالة

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (25)$$

والدالة $V(x, t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى وهو ما يمكن التأكد منه مباشرة بإجراء عملية التفاضل . وفضلاً عن ذلك تتميز هذه الدالة بالخاصيتين التاليتين :

$$\begin{aligned} V(x, 0) &\geq |v(x, 0)| = 0, \\ V(\pm L, t) &\geq 2M \geq |v(\pm L, t)|. \end{aligned} \quad (26)$$

والمنطقة المحدودة $|x| \leq L, 0 \leq t \leq T$ يكون مبدأ القيمة العظمى صحيحاً. ويتطبيق النتيجة ٢ من الفقرة السابقة على الدوال $u = -V(x, t)$. $u = v(x, t)$. $V(x, t) = 0$ وأخذ العلاقة (26) بعين الاعتبار نحصل على :

$$-\frac{4M}{L^3} \left(\frac{x^3}{2} + a^2 t \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^3} \left(\frac{x^3}{2} + a^2 t \right).$$

وبتثبيت قيمة معينة (x, t) والاستعانة بالطابع الاختياري لاختيار L سنقوم بزيادته زيادة لانهائية. بالانتقال إلى النهاية عند $L \rightarrow \infty$ نحصل على

$$v(x, t) = 0,$$

مما يثبت النظرية .

بند ٢ - طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : المسألة الحدية المتجانسة . ننتقل إلى حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة توصيل الحرارى على المستقيم المحدود

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1)$$

بالشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

وبالشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

ونبدأ دراسة المسألة الحدية الأولى العامة بحل المسألة المبسطة التالية I :

عن الحل المتصل في المنطقة المغلقة $(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$ للمعادلة المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

الذى يحقق الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

والشرطين الحديين المتجانسين

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

ولحل هذه المسألة ندرس أولاً ، كما هو متبع في طريقة فصل المتغيرات ،
المسألة الأساسية المساعدة التالية :

عين حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق وبحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (5)$$

ويمكن التعبير عنه في الصورة

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (6)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x فقط . $T(t)$ دالة في المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (6) في المعادلة (4) وقسمة طرفي المتساوية
على $a^2 XT$ نحصل على :

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (7)$$

حيث $\lambda = \text{const}$ لأن الطرف الأيسر للمتساوية يعتمد فقط على t والطرف
الأيمن يعتمد فقط على x .

ومن هنا يتبع أن

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad (8')$$

وتعطى الشروط الحدية (5) :

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

وبذلك فلتعين الدالة $X(x)$ حصلنا على مسألة القيم الذاتية (مسألة شتورم -
ليوفيل)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (10)$$

التي بحثناها عند حل معادلة الذبذبات في الباب الثاني (انظر بند ٣ ، فقرة ١) .
وعندئذ أوضحنا أنه فقط لقيم البارامتر λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية) للمعادلة (8) تساوى :

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12)$$

وهذه القيم λ_n تناظرها حلول المعادلة (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-\sigma^2 \lambda_n t}, \quad (13)$$

حيث C_n معاملات قابلة للتحديد .

وبالعودة الى المسألة المساعدة الأساسية نرى أن الدوال :

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-\sigma^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (4) تحقق الشروط الحدية الصفرية .

نعود الآن إلى حل المسألة (I) . نكوّن شكلياً المتسلسلة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sigma^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (15)$$

الدالة $u(x, t)$ تحقق الشروط الحدية لأن كل حدود المتسلسلة تحققها . وإذا طلبنا
تحقق الشروط الابتدائية نحصل على :

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (16)$$

أى أن C_n تعتبر معاملات فورييه للدالة $\varphi(x)$ عند تحليلها في متسلسلة الجيوب في
الفترة $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \quad (17)$$

ندرس الآن المتسلسلة (15) بالمعاملات C_n المحددة بالعلاقة (17) ونوضح أن
هذه المتسلسلة تحقق كل شروط المسألة (I) . ولهذا الغرض يجب إثبات أن الدالة

$u(x, t)$ المعرفة بالمتسلسلة (15) قابلة للتفاضل وتحقق المعادلة في المنطقة $0 < x < l, t > 0$ ومتصلة في نقط حدود هذه المنطقة (عند $t = 0$ و $x = 0$ و $x = l$).

وحيث إن المعادلة (4) خطية فإنه وفقاً لمبدأ التراكب تكون المتسلسلة المكونة من الحلول الخاصة حلاً أيضاً إذا كانت متقاربة وكان يمكن تفاضلها حداً حداً مرتين بالنسبة إلى x ومرة بالنسبة إلى t (انظر المأخوذة بالباب الثاني - بند ٣ - فقرة ٣). نوضح أنه عند $t \geq \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ أى عدد مساعد) تتقارب بانتظام متسلسلتا المشتقات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$$

بالفعل

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}$$

وفيما بعد ستصاغ الشروط الإضافية التي يجب أن تحققها الدالة $\varphi(x)$. نفرض في البداية أن $\varphi(x)$ دالة محدودة $|\varphi(x)| < M$. عندئذ يكون

$$|C_n| = \left| \frac{2}{l} \right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right| < 2M,$$

ومن هنا ينتج أن :

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad , \quad t \geq \bar{t}$$

وبالمثل

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad , \quad t \geq \bar{t}.$$

وبوجه عام

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad , \quad t \geq \bar{t}.$$

نبحث تقارب متسلسلة الحد الأعظم (majorant) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث

$$a_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2} \quad (15')$$

وتبعاً لاختبار دالمبرت تتقارب هذه المتسلسلة لأن

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2 + 2n + 1) l}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 l}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1) l} = 0. \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج إمكانية تفاضل المتسلسلة (15) حدًا حدًا أى عدد من المرات في المنطقة $t \geq \bar{t} > 0$. وبعد ذلك فبالاستعانة بمبدأ التراكب نستنتج أن الدالة المعرفة بهذه المتسلسلة تحقق المعادلة (4). ووفقاً للطابع الاختياري للعدد $\bar{t}$ يسرى ذلك لجميع $t > 0$. وبذلك أثبتنا أنه عند $t > 0$ تعبر المتسلسلة (15) عن دالة قابلة للتفاضل عدد المرات اللازم وتحقق المعادلة (4)*.

وإذا كانت الدالة $\varphi(x)$ متصلة ولها مشتقة متقطعة الاتصال وتحقق الشرطين $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$ فإن المتسلسلة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (15)$$

تعرف دالة متصلة عند $t \geq 0$. بالفعل من المتبينة :

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$$

ينتج مباشرة التقارب المنتظم للمتسلسلة (15) عند $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$. مما يثبت صحة المنطوق السابق إذا ما أخذنا في الاعتبار أنه للدالة $\varphi(x)$ المتصلة والمتقطعة الملوسة (piecewise smooth) تتقارب المتسلسلة المتكونة من القيم المطلقة لمعاملات فورييه إذا كان $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ **.

* عند إثبات أن المتسلسلة (15) تحقق المعادلة $u_t = a^2 u_{xx}$ عند $t > 0$ استخدمنا فقط كون معاملات فورييه C_n محدودة وهذا صحيح كحالة خاصة لأية دالة محدودة $\varphi(x)$.
 ** انظر الباب الثاني ، بند ٣ ، فقرة ٣.

وهكذا تم بالكامل حل مسألة تعيين حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية والشرط الابتدائي المتصل والمتقطع الملوثة .

فقرة ٢ : دالة المصدر . نحول الحل الناتج (15) بالتعويض عن C_n بقيمتها :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

وتغير ترتيب عمليتي التجميع والتكامل صحيح دائماً عند $t > 0$ نظراً لأن المتسلسلة بين القوسين تتقارب بانتظام بالنسبة إلى ξ عند $t > 0$.

نستعين بالرمز

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (18)$$

وبالاستعانة بالدالة $G(x, \xi, t)$ يمكن التعبير عن الدالة $u(x, t)$ في الصورة

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

والدالة $G(x, \xi, t)$ تسمى بدالة المصدر اللحظي النقطة أو بتفصيل أكبر دالة التأثير الحرارى لمصدر حرارى لحظى نقطى .

نبين أن دالة المصدر $G(x, \xi, t)$ تمثل باعتبارها دالة في x توزيع درجات الحرارة في القضيب $0 \leq x \leq l$ في اللحظة الزمنية t إذا كانت درجة الحرارة في اللحظة الابتدائية $t = 0$ مساوية للصفر وفي هذه اللحظة تنبعث عند النقطة $\xi = x$ لحظياً كمية حرارة (سنحدد مقدارها فيما بعد) ، وعند طرفي القضيب يحتفظ باستمرار بدرجة حرارة صفرية .

• المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ حيث α_n تُحدد بالملاحظة (18) تنبهر عند $\alpha = 0$ متسلسلة الحد الاعظم للمتسلسلة بين القوسين .

والصيغة «كمية الحرارة Q المنبعثة في النقطة ξ » تعني كالمعتاد أن لدينا حرارة منبعثة على فترة «غير كبيرة» حول النقطة ξ محل الدراسة. وتغير درجة الحرارة $\varphi_e(\xi)$ الناتج من ظهور حرارة حول النقطة يكون كما هو واضح مساوياً للصفر خارج الفترة $(\xi - e, \xi + e)$ التي تنبعث عليها الحرارة، وداخل هذه الفترة يمكن اعتبار $\varphi_e(\xi)$ دالة موجبة ومتصلة وقابلة للتفاضل يكون. لها

$$cp \int_{\xi-e}^{\xi+e} \varphi_e(\xi) d\xi = Q, \quad (20)$$

لأن الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل أيضاً كمية الحرارة المؤدية إلى تغير درجة الحرارة بمقدار $\varphi_e(\xi)$. وعملية انتشار درجة الحرارة في هذه الحالة تتحدد بالعلاقة (19):

$$u_e(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \varphi_e(\xi) d\xi. \quad (21)$$

والآن نتقل إلى النهاية عندما $e \rightarrow 0$. بأخذ اتصال G عندما $t > 0$ في الاعتبار وكذلك المتساوية (20) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة عند قيمتين ثابتتين لـ x, t نحصل على:

$$\begin{aligned} u_e(x, t) &= \int_{\xi-e}^{\xi+e} G(x, \xi, t) \varphi_e(\xi) d\xi = \\ &= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-e}^{\xi+e} \varphi_e(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{cp}, \end{aligned} \quad (21')$$

حيث ξ^* نقطة ما متوسطة في الفترة $(\xi - e, \xi + e)$. ووفقاً لاتصال الدالة $G(x, \xi, t)$ بالنسبة إلى ξ عند $t > 0$ نحصل على:

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0} u_e(x, t) &= \frac{Q}{cp} G(x, \xi, t) = \\ &= \frac{Q}{cp} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 ct} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \end{aligned} \quad (22)$$

ومن هنا يتبع أن $G(x, \xi, t)$ تمثل درجة الحرارة في النقطة x في اللحظة t الناتجة بسبب المصدر اللحظي النقطة الذي قدرته $Q = cp$ والموضوع في اللحظة $t = 0$ عند النقطة ξ من نقط الفترة $(0, l)$.

ونشير إلى الخاصية التالية للدالة $G(x, \xi, t)$: الدالة $G(x, \xi, t) \geq 0$ لأي x, ξ و $t > 0$. بالفعل ندرس الدالة الابتدائية $\Phi_0(x)$ التي تتميز بالخواص المذكورة أعلاه والحل المناظر لها (21'). فن عدم سلبية الشروط الابتدائية والحدية ينتج وفقاً لمبدأ القيمة العظمى أن

$$u_0(x, t) \geq 0$$

لجميع $0 \leq x \leq l$ و $t > 0$. ومن هنا بالاستعانة بالعلاقة (21') يكون لدينا :

$$u_0(x, t) = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{cp} \geq 0 \quad (t > 0 \text{ عند}) \quad (21'')$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل من (21') على المتباينة

$$G(x, \xi, t) \geq 0, \quad 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad t > 0,$$

وهو المطلوب إثباته .

ولهذه النتيجة معنى فيزيائي بسيط . غير أنه يصعب توضيحه من العلاقة (19) مباشرة لأن $G(x, \xi, t)$ إنما يعبر عنها بمتسلسلة متعاقبة الإشارات .

فقرة ٣ : المسائل الحدية بشروط ابتدائية منفصلة . تتعلق النظرية الواردة أعلاه بالحلول المتصلة لمعادلة التوصيل الحراري في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l$ ، $0 \leq t \leq T$. وتعتبر شروط الاتصال هذه مقيدة ومحددة للغاية . فبالفعل ندرس المسألة المبسطة لتبريد قضيب مسخن بانتظام عندما تكون درجة الحرارة عند طرفيه مساوية للصفر . والشروط الإضافية تكون على الصورة :

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

وإذا كانت $u_0 \neq 0$ فإن حل هذه المسألة يجب أن يكون منفصلاً في النقطتين $(0, 0)$ ، $(l, 0)$. وبوضح هذا المثال أن شروط اتصال القيمة الابتدائية وشروط ترافقها مع القيم الحدية تستبعد من الدراسة حالات هامة من الناحية العملية . غير أن العلاقة (19) تعطي حل المسألة الحدية في هذه الحالة أيضاً .

وفي التطبيقات كثيراً ما يستعان بعلاقات تخرج عن حدود شروط تطبيقها وأحياناً لا يطرح مطلقاً موضوع شروط تطبيق هذه العلاقات . والتبرير المنطقي والسليم لأساس جميع العلاقات كان سيصبح عملية مطولة للغاية مما كان سيصرف

اهتمام الباحث عن جوانب الظاهرة الكمية والكيفية المميزة للجوهر الفيزيائي للعملية .

غير أننا نرى أنه من الضروري - ولو للأمثلة المبسطة على الأقل - إعطاء التبرير لأساس الجهاز الرياضى الكافى لحل المسائل الأساسية .

ندرس المسائل الحدية بدوال ابتدائية متقطعة الاتصال دون أن نفترض أن الدالة الابتدائية متوافقة مع الشروط الحدية . إن هذه المجموعة من الشروط الإضافية تعتبر عامة بشكل كافٍ بالنسبة لمتطلبات التطبيقات العملية وبسيطة بشكل يكفى لعرض النظرية . إن هدفنا هو إثبات أن نفس العلاقة (19) تعطى حل المسألة المطروحة . نجرى بحث هذه المسألة على عدة مراحل . نثبت مسبقاً النظرية التالية :

حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \quad t > 0), \quad (4)$$

المتصل فى المنطقة المغلقة $(0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T)$ والذى يحقق الشروط

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

حيث $\varphi(x)$ دالة متصلة اختيارية تؤول إلى الصفر عند $x=0, x=l$. يكون محددًا تحديدًا أحادى القيمة ويعبر عنه بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

وهذه النظرية أثبتت أعلاه بافتراض تحقق شرط إضافى هو قابلية التفاضل المتقطع الاتصال للدالة $\varphi(\xi)$.

لتحرر من هذا الشرط . ندرس متتابعة من الدوال المتصلة والمتقطعة القابلة للتفاضل $(\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0)$ $\varphi_n(\xi)$ تتقارب بانتظام إلى $\varphi(x)$. (بمثابة $\varphi_n(x)$) يمكن على سبيل المثال أخذ الدوال المتمثلة بخطوط منكسرة منطبقة على $\varphi(x)$ عند النقط $\frac{l \cdot k}{n}$ حيث $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$. والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (19) بدلالة $\varphi_n(x)$ تحقق كل شروط النظرية لأن $\varphi_n(x)$ تحقق شروط قابلية

التفاضل المتقطع . وهذه الدوال تتقارب بانتظام وتعرف في النهاية دالة متصلة $u(x, t)$. بالفعل ، لأي ε يمكن تعيين $n(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$n_1, n_2 \geq n(\varepsilon) \text{ إذا كان } |\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l)$$

وذلك لأن هذه الدوال تتقارب بانتظام تبعاً للفرض . ومن هنا ووفقاً لمبدأ القيم العظمى ينتج أيضاً أن

$$n_1, n_2 \geq n(\varepsilon) \text{ إذا كان } |u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$$

مما يثبت التقارب المنتظم لمتابعة الدوال $u_n(x, t)$ إلى دالة متصلة ما $u(x, t)$. وإذا ثبتنا النقطة (x, t) وانتقلنا إلى النهاية تحت علامة التكامل فإننا سنحصل على أن الدالة

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

متصلة في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ وتحقق الشرط الابتدائي (2) . ووفقاً للهامش الملحق بالصفحة ٢٤٠ لا يصعب التأكد من أن هذه الدالة تحقق أيضاً المعادلة (4) عند $t > 0$. وهكذا انتهى إثبات النظرية . والعلاقة (19) تعطي الحل المتصل الوحيد للمسألة محل البحث .

ننتقل إلى إثبات نظرية الوحدةية لحالة الدالة الابتدائية للتعطلة الاتصال $\varphi(x)$ دون افتراض أن هذه الحالة متوافقة مع الشروط الحدية . نثبت أن الدالة للتصلة في المنطقة $t > 0$ التي تحقق معادلة التوصيل الحراري

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (4)$$

في المنطقة $0 < x < l, t > 0$ والشروط الحدية الصفرية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5)$$

والشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

تكون محددة تحديداً أحادي القيمة إذا كانت :

١ - متصلة في نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$ و

٢ - محدودة في المنطقة للخلقة $0 \leq t \leq \bar{t}, 0 \leq x \leq l$ حيث $\bar{t}$ عدد اختياري موجب .

نفرض أن هذه الدالة موجودة . من الواضح أنه وفقاً للنظرية السابقة يمكن التعبير عنها في المنطقة $t > \bar{t}$ بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^{\bar{t}} G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) d\xi \quad (t > \bar{t} > 0) \quad (19)$$

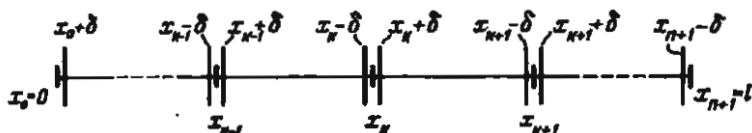
لأى $\bar{t}$ حيث $\bar{t}$ قيمة مساعدة ،

$$0 < \bar{t} \leq t, \quad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

نجرى عملية الانتقال إلى النهاية في هذه العلاقة عندما $\bar{t} \rightarrow 0$ مع الاحتفاظ بـ x و t ثابتين . نوضح^{*} أن الانتقال إلى النهاية ممكن تحت علامة التكامل . وبالتالي فالدالة $u(x, t)$ يمكن التعبير عنها في صورة التكامل

$$u(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \quad (19)$$

الذى يحددها تحديداً أحادى القيمة .



شكل ٢٨

نفرض أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقط انفصال الدالة $\varphi(x)$. بفرض $x_0 = 0, x_{n+1} = l$ (شكل ٢٨) وأخذ الفترات المغلقة $I_k (x_k + \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) حيث δ عدد ما ثبت وصغير بشكل كاف . لا يكون من الصعب التأكد من أن الدالة للمكاملة في (١٩) تتقارب بانتظام إلى الدالة للمكاملة في (١٩) في أية فترة مغلقة I_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) . وفى الفترات للفترة $\bar{I}_k (x_k - \delta \leq x \leq x_k + \delta)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) ، $\bar{I}_{n+1} (x_{n+1} - \delta \leq x \leq x_{n+1})$ ، $\bar{I}_0 (x_0 \leq x \leq x_0 + \delta)$ تكون الصيغتان للمكاملتان في

• النظرية المثبتة فيما سبلى تعتبر حالة خاصة لنظرية ليسيج حول إمكانية الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل إذا كانت متتابعة الدوال $F_n(x)$ تتقارب - تقريباً في كل مكان - إلى الدالة المجموع النهائية $F(x)$ وإذا كانت هذه المتتابعة محدودة بالدالة المجموع . وهذا الإثبات نورده لتجنب استخدام مفاهيم نظرية الفئات . وإذا استخدمنا مفاهيم نظرية الفئات فإنه يمكن بالمثل تماماً إثبات النظرية التى تنص على أن حل معادلة التوصيل الحرارى $u(x, t)$ الذى يحقق الشروط الحدية الصفرية يكون معرفاً تقريباً أحادى القيمة :

(١) إذا كانت $u(x, t) \leq F(x)$ حيث $F(x)$ دالة مجموع ما و

(٢) إذا كان تقريباً في كل مكان

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

حيث $\varphi(x)$ الدالة المجموع الابتدائية للمطاة .

(19') (19) محدودتين بعدد ما N عند أي $\bar{t}$ ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0$) وذلك نظرا لتحديد الدالة $u(x, t)$ الفترض ونظرا لاتصال $G(x, \xi, t)$ عند $0 \leq \xi \leq l$, $t > 0$. ويتقسم الفرق بين التكاملين (19) و (19') إلى $2n+3$ تكامل مأخوذة على I_k ($k=0, 1, \dots, n$) و $\bar{I}_k$ ($k=0, 1, \dots, n+1$) نرى أن هذا الفرق يمكن جملة أقل من أي عدد معطى مسبقا ε إذا كان

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2n+3} \frac{1}{4N}.$$

ومن ثم فإن :

$$\left| \int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_f(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n+3}.$$

وإذا كان t قد اختير صغيرا للدرجة أن

$$|G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_f(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)| < \frac{1}{t} \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لأي $t \leq \bar{t}$ على I_k ($k=0, 1, \dots, n$) ومن ثم يكون

$$\int_{I_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_f(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi < \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لـ $t \leq \bar{t}$ ($k=0, 1, \dots, n$)

ومن هنا نتج المتباينة

$$\left| \int_0^{\bar{t}} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_f(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| < \varepsilon$$

لـ $t \leq \bar{t}$. التي تثبت قانونية الانتقال إلى النهاية عندما $\bar{t} \rightarrow 0$ تحت علامة التكامل. وبذلك فإذا وجدت الدالة $u(x, t)$ التي تحقق شروط النظرية فإنها قابلة للتعبير عنها في الصورة (19) مما يثبت وحدانية هذه الدالة.

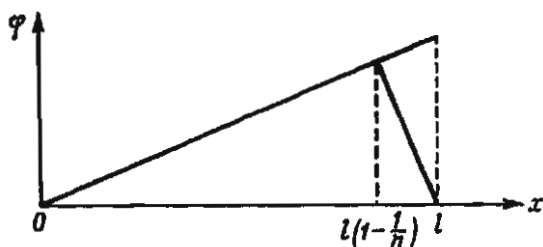
نثبت الآن أن العلاقة (19) هي عبارة عن الحل المحدود للمعادلة (4) الذي يحقق الشروط (2) لأي دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$ ويكون متصلاً في كل نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$.

ومستبث هذه النظرية على مرحلتين. نثبت أنها صحيحة إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ دالة خطية :

$$\varphi(x) = cx. \quad (2'')$$

ندرس متتابعة الدوال المساعدة المتصلة (شكل ٣٩)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ a(l-x), & l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq x \leq l, \quad a = (n-1)c. \end{cases}$$



شكل ٣٩

والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بواسطة العلاقة (19) للدوال $\varphi_n(x)$ تعتبر حلولاً متصلة لمعادلة التوصيل الحراري بالشروط الحدية الصفرية والشروط الابتدائية

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

وحيث إن :

$$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

فإنه وفقاً لمبدأ القيم العظمى يكون :

$$u_n(x, t) \leq u_{n+1}(x, t).$$

والدالة $U_0(x) = cx$ تعتبر حلاً متصلاً لمعادلة التوصيل الحراري . ووفقاً لمبدأ القيم العظمى يكون

$$u_n(x, t) \leq U_0(x),$$

لأن هذه المتباينة تكون صحيحة عندما $x=0$, $x=l$, $t=0$. وبذلك فإن $u_n(x, t)$ هي متتابعة غير متناقصة باطراد محدودة من أعلى بالدالة $U_0(x)$. ومن هنا يتبع أن هذه المتتابعة متقاربة . ولا يصعب ملاحظة أن

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \leq U_0(x). \end{aligned}$$

لأن الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل قانوني . ووفقاً لهامش الصفحة ٢٤٠ فإن هذه الدالة تحقق المعادلة والشروط الحدية الصغرية عند $t > 0$. ثبت أن هذه الدالة متصلة عند $t = 0$ في الفترة $0 \leq x < l$. نفرض أن $x_0 < l$. نختار n بحيث يكون $x_0 < l \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. في هذه الحالة $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. وبالأخذ في الاعتبار أن

$$u_n(x, t) \leq u(x, t) \leq U_0(x)$$

وأن

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} U_0(x) = \varphi(x_0).$$

نستنتج وجود النهاية

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

التي لا تعتمد على طرق الاقتراب $x \rightarrow x_0$ ، $t \rightarrow 0$. ومن هنا يتبع اتصال $u(x, t)$ في النقطة $(x_0, 0)$. وهذه الدالة محدودة لأنها لا تفوق $U_0(x)$. وهكذا أثبتت النظرية للدالة $\varphi(x) = cx$.

وبالتعويض عن x بـ $l - x$ نتأكد من أن النظرية صحيحة للدالة

$$\varphi(x) = b(l - x). \quad (2'')$$

ومن هنا يتبع أنها صحيحة لأية دالة على الصورة

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

لأن مثل هذه الدالة يمكن الحصول عليها بجمع $(2')$ و $(2'')$. وبعد ذلك فإنه يتبع من هنا أيضاً أن النظرية صحيحة لأي دالة متصلة بدون الافتراض بأن $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. بالفعل يمكن التعبير عن أية دالة $\varphi(x)$ من هذا النمط في الصورة

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l} (\varphi(l) - \varphi(0)) \right] + \psi(x),$$

حيث الحد بين القوسين المربعين دالة خطية و $\psi(x)$ دالة متصلة تتحول إلى الصفر عند طرفي الفترة : $\psi(0) = \psi(l) = 0$. وحيث إننا تأكدنا بالفعل من أن النظرية

قابلة للتطبيق على كل حد فإنه يتبع من هنا أن النظرية صحيحة أيضاً للدالة $\varphi(x)$.

وننتقل الآن إلى إثبات النظرية لآية دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$. العلاقة (19) في هذه الحالة أيضاً تحدد الحل الذي يحقق المعادلة والشروط الحدية الصفرية.

نفرض أن النقطة x_0 نقطة ما من نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$. ثبت أنه لأي ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ إذا كان $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ و $t < \delta(\varepsilon)$. ووفقاً لاتصال الدالة $\varphi(x)$ في النقطة x_0 يوجد $\eta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ للقيم } |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن هنا

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ للقيم } \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (23)$$

نكون الدالتين المساعدةتين القابلتين للتفاضل $\bar{\varphi}(x)$, $\underline{\varphi}(x)$:

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \bar{\varphi}(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (a)$$

$$|x - x_0| > \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \bar{\varphi}(x) \geq \varphi(x)$$

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \underline{\varphi}(x) = \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (b)$$

$$|x - x_0| > \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

في الفترة $|x - x_0| > \eta(\varepsilon)$ تحقق الدالتان $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ الشروط (a), (b) فقط، أما فيما عدا ذلك فهي اختياريتان. ووفقاً للمتباعدة (23) يكون

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}(x). \quad (24)$$

ندرس الدالتين

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \bar{\varphi}(\xi) d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \underline{\varphi}(\xi) d\xi.$$

ووفقاً لاتصال $\bar{\varphi}(x)$, $\underline{\varphi}(x)$ تكون الدالتان $\bar{u}(x, t)$, $\underline{u}(x, t)$ متصلتين في النقطة x_0 , أى يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}(x, t) - \bar{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

ومن هنا

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, t) \leq \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon \\ \underline{u}(x, t) \geq \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{array} \right.$$

ووفقاً لعدم سلبية الدالة $G(x, \varepsilon, t)$ يتبع من العلاقة (24) أن

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t). \quad (25)$$

ومن هنا نحصل على المتباينة

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$$

أو

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad |u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب إثباته . ومحدودية الدالة $|u(x, t)|$ تتبع من العلاقة (25) ومن محدودية الدالتين $\bar{u}(x, t)$, $\underline{u}(x, t)$. وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية .

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = 0 \quad (26)$$

والشرطين الحديين

$$\begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{array} \quad (5)$$

سنبحث عن حل هذه المسألة $u(x, t)$ في صورة متسلسلة فورييه بالدوال الذاتية (11) أى بالدوال $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (27)$$

معتبرين t عند ذلك بارامترا. لتعيين الدالة $u(x, t)$ يجب تعيين الدوال $u_n(t)$. تمثل الدالة $f(x, t)$ في صورة المتسلسلة:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (28)$$

وبالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة الأصلية (1) سنحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

وستحقق هذه المعادلة إذا كانت كل معاملات المفكوك مساوية للصفر أى إذا كان

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (29)$$

بالاستعانة بالشرط الابتدائي للدالة $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

نحصل على الشرط الابتدائي للدوال $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \quad (30)$$

وبحل المعادلة التفاضلية العادية (29) بالشرط الابتدائي الصفري (30) نجد أن:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (31)$$

• انظر نهاية فقرة 4 - بند 3 من الباب الثاني.

وبالتعويض بالصيغة (31) للدوال $u_n(t)$ في العلاقة (27) نحصل على حل المسألة الأصلية في الصورة.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (32)$$

وبالاستعانة بالصيغة (28) للدوال $f_n(\tau)$ وتحويل الحل الناتج (32) نحصل على

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (33) \end{aligned}$$

حيث

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad (34)$$

تنطبق على دالة المصدر المعرفة بالعلاقة (18).

نوضح المعنى الفيزيائي للحل الناتج

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (33)$$

نفرض أن الدالة $f(\xi, \tau)$ تختلف عن الصفر فقط في جوار صغير بقدر كاف للنقطة

$$: M_0(\xi_0, \tau_0)$$

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau.$$

والدالة $F(\xi, \tau) = \text{cpf}(\xi, \tau)$ هي عبارة عن كثافة المصادر الحرارية. والكمية الكلية للحرارة المنبعثة على الفترة $(0, l)$ خلال كل فترة تأثير المصدر (أى خلال $\Delta\tau$) تساوى

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} \text{cpf}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (35)$$

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t),$$

حيث

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta \tau.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta \xi \rightarrow 0$, $\Delta \tau \rightarrow 0$ نحصل على الدالة

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \tau \rightarrow 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0), \quad (36)$$

التي يمكن تفسيرها على أنها دالة تأثير المصدر اللحظي للحرارة المركز في النقطة ξ_0 في اللحظة τ_0 .

وإذا علمت الدالة $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t - \tau)$ التي تمثل تأثير وحدة المصدر اللحظي المركز فإن تأثير المصادر الموزعة باتصال بالكثافة $F(x, t) = c\rho f(x, t)$ يجب أن يعبر عنه بالعلاقة (33) كما يتج ذلك مباشرة من المعنى الفيزيائي للدالة $G(x, \xi, t - \tau)$.

وهكذا فإن تأثير المصادر الحرارية المؤثرة في المنطقة $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)$ و $(\tau_0, \tau_0 + \Delta \tau)$ على درجات الحرارة يعطى بالصيغة :

$$G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \right).$$

وإذا كانت المصادر موزعة باتصال فإنه بتجميع التأثيرات الحرارية للمصادر المؤثرة في كل المنطقة $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$ نحصل بعد الانتقال إلى النهاية عندما $\Delta \xi \rightarrow 0$, $\Delta \tau \rightarrow 0$ على :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

وبذلك فانطلاقاً من المعنى الفيزيائي لدالة المصدر $G(x, \xi, t)$ كان من الممكن أن نكتب مباشرة الصيغة (33) للدالة المعبرة عن حل المعادلة غير المتجانسة.

وإذا كانت لدينا العلاقة أو الصورة التي يجب أن يعبر بها عن حل المسألة فإنه يمكن بحث شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة للدالة $f(x, t)$. ولن نقوم بهذا البحث هنا.

لقد درسنا هنا المعادلات غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية. وإذا كانت الشروط الابتدائية مختلفة عن الصفر فإنه يجب أن نضيف إلى هذا الحل حل المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائي المعطى $u(x, 0) = \varphi(x)$ وهو الذي حصلنا عليه في فقرة ٩.

فقرة ٥ : المسألة المحدية الأولى العامة. ندرس المسألة العامة المحدية الأولى لمعادلة التوصيل الحرارى :

عين حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

بالشروط الإضافية

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ندخل دالة مجهولة جديدة $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad (37)$$

التي تمثل الانحراف عن دالة ما معلومة $U(x, t)$.

وهذه الدالة $v(x, t)$ ستعرف بأنها حل المعادلة

$$\begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= \bar{f}(x, t), \\ \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}] \end{aligned}$$

بالشروط الإضافية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

نختار الدالة المساعدة $U(x, t)$ بحيث يكون

$$\bar{\mu}_1(t) = 0, \quad \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

ولهذا الغرض يكفي وضع *

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

وبذلك فإن تعيين الدالة $u(x, t)$ التي تعطى حل المسألة الحدية العامة يؤول إلى تعيين الدالة $v(x, t)$ التي تعطى حل المسألة الحدية بشروط حدية صفرية. وطريقة تعيين الدالة $v(x, t)$ معطاة في فقرة ٤.

وهذه الصورة الشكلية الواردة أعلاه لحل المسائل عند وجود عدم تجانس في المعادلة والشروط الحدية، لا تكون دائماً مناسبة للتعبير عن الدالة المجهولة $u(x, t)$. وتعتمد المصاعب الناشئة عند تعيين الدالة المساعدة $v(x, t)$ على الدالة $U(x, t)$ التي يبحث عن الانحراف عنها.

وكحلالة خاصة للمسائل ذات عدم التجانس للمستقر (stationary non-homogeneity) يكون من المناسب فصل الحل للمستقر زمنياً والبحث عن الانحراف عن هذا الحل **.

ندرس على سبيل المثال مسألة القضيب المحدود $(0, l)$ الذي يحتفظ بدرجتي حرارة ثابتتين u_0, u_1 عند طرفيه :

$$u_l = a^2 u_{xx},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(0, t) = u_0,$$

$$u(l, t) = u_1.$$

نبحث عن الحل في صورة المجموع

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ درجة الحرارة المستقرة زمنياً، $v(x, t)$ الانحراف عن درجة الحرارة المستقرة زمنياً.

• انظر الباب الثاني، بند ٣، فقرة ٥.

•• انظر الباب الثاني، بند ٣، فقرة ٦.

للدالتين $v(x, t)$, $u(x)$ سنحصل على الشروط

$$\begin{aligned} \bar{u}'' &= 0, & v_t &= a^2 v_{xx}; \\ u(0) &= u_0, & v(x, 0) &= \varphi(x) - u(x) = \varphi_1(x); \\ u(l) &= u_1, & v(0, t) &= 0, \\ & & v(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

ومن هنا نعين

$$u(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

أما الدالة $v(x, t)$ المعرفة بالشروط الابتدائي والشروط الحدية المتجانسة فتعين بلا صعوبة بطريقة فصل المتغيرات .

مسائل :

١ - استنبط معادلة لعملية تسخين سلك رفيع متجانس بواسطة تيار كهربائي إذا كان يحدث على سطح السلك جادل حراري مع الوسط المحيط .

٢ - استنبط معادلة الانتشار في وسط يتحرك بانتظام في اتجاه المحور x بسرعة w . ادرس حالة التغير المسائل الواحد .

٣ - انطلاقاً من معادلات ماكسويل مع افتراض أن $E_z = E_y = 0$, $H_z = 0$ وإهمال تيارات الإزاحة (displacement current) وضع أنه في الوسط للتجانس الموصل تحقق مركبة المجال الكهرومغناطيسي E_y للمعادلة

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

حيث σ موصلية الوسط . c سرعة الضوء . استنبط المعادلة لـ H_x .

٤ - اشرح المعنى الفيزيائي للشروط الحدية التالية لمسائل التوصيل الحراري والانتشار :

$$\begin{aligned} \text{a) } u(0, t) &= 0, & \text{b) } u_x(0, t) &= 0, \\ \text{c) } u_x(0, t) - h u(0, t) &= 0, \\ u_x(l, t) + h u(l, t) &= 0 & (h > 0). \end{aligned}$$

٥ - حل مسألة تبريد قضيب متجانس منتظم التسخين عندما تكون درجة الحرارة في طرفيه صفراً مع الافتراض انعدام التبادل الحراري على السطح الجانبي .

٦ - درجة الحرارة الابتدائية لقضيب هي $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ عند $0 < x < l$ ويحفظ بتدرج حرارة ثابتة عند طرفيه $u(0, t) = u_1$, $u(l, t) = u_2$ عندما $0 < t < \infty$. عين درجة حرارة القضيب إذا كان التبادل الحراري على السطح الجانبي غير موجود . عين درجة الحرارة المستقرة زمنياً .

٧ - حل المسألة ٦ بالشروط الحدية التالية : على أحد الطرفين يحفظ بدرجة حرارة ثابتة والطرف الآخر معزول حراريا .

٨ - حل مسألة تسخين سلك رفيع متجانس بتيار كهربائي ثابت إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية ودرجة الحرارة الحدية وكذلك درجة حرارة الوسط المحيط تساوى الصفر .

٩ - أسطوانة طولها l مملوءة بهواء درجة حرارته وضغطه هما درجة حرارة وضغط الوسط المحيط . تفتح الأسطوانة من أحد طرفيها في اللحظة الابتدائية ، ومن الجو المحيط حيث يكون تركيز غازي معين مساويا u_0 يبدأ انتشار الغاز في الأسطوانة . عين كمية الغاز المنتشر في الأسطوانة خلال الفترة الزمنية t إذا كان التركيز الابتدائي للغاز في الأسطوانة يساوى الصفر .

١٠ - حل المسألة ٩ بافتراض أن الطرف الأيسر للأسطوانة مغلق بحاجز شبه منفذ (semipermeable) .

١١ - حل مسألة تبريد قضيب متجانس ذي سطح جانبي معزول حراريا إذا كانت درجة حرارة الابتدائية $\varphi(x, 0) = \varphi(x)$ وعند طرفيه يحدث تبادل حراري مع الوسط المحيط ذي درجة الحرارة الصفرية . ادرس كذلك الحالة الخاصة $u_0 = \varphi(x)$.

١٢ - حل المسألة ١١ بافتراض أن درجة حرارة الوسط المحيط تساوى U_0

١٣ - حل المسألة ١١ معتبرا أنه يحدث على السطح الجانبي تبادل حراري مع الوسط المحيط الذي درجة حرارته :

(أ) تساوى الصفر (ب) ثابتة وتساوى u_0 .

١٤ - عين درجة الحرارة المستقرة زمنيا للقضيب مهلا التبادل الحراري على السطح الجانبي ومعتبرا أن أحد طرفيه معزول حراريا وبالطرف الثاني موصل دقق حراري يتغير بقانون توافقي مع الزمن .

١٥ - حل للمسألة ١٤ معتبرا أن أحد طرفي القضيب تكون درجة حرارته صفرا ودرجة حرارة الطرف الثاني تتغير بقانون توافقي مع الزمن .

١٦ - القضيب $(0, l)$ مكون من قطعتين متجانستين ذواتي مقطع عرضي واحد متلامستين عند النقطة $x = x_0$ وبميزاتها a_1, a_2, a_3 و a_4 على الترتيب . عين درجة الحرارة المستقرة في مثل هذا القضيب (للوجات الحرارية) إذا كان أحد طرفي القضيب $(x = 0)$ يوجد عند درجة حرارة صفرية ودرجة حرارة الطرف الآخر تتغير بقانون جيبى مع الزمن .

١٧ - الطرف الأيسر للقضيب المركب من مسألة ١٦ يوجد عند درجة حرارة صفرية والطرف الأيمن يوجد عند درجة حرارة $u_1(t, l) = u_1(t, 0)$. ودرجة الحرارة الابتدائية للقضيب تساوى الصفر . عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب في النظام المستظم (الحل الأول من المفكوك) .

١٨ - عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب الذي تكون درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر والشروط الحدية تكون على الصورة :

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

حيث $A, B, \alpha > 0$ ثوابت .

بند ٣ - مسائل على المستقيم اللانهائى

فقرة ١ : انتشار الحرارة على مستقيم لانهائى . دالة المصدر لمنطقة لانهائية .

ندرس على مستقيم لانهائى المسألة بالمعطيات الابتدائية التالية (مسألة كوشى) :

عين الدالة المحدودة $u(x, t)$ المعرفة فى المنطقة $-\infty < x < \infty, t \geq 0$ التى

تحقق معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

والشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

وإذا كانت $\varphi(x)$ دالة متصلة فإن تحقق الشرط الابتدائى سنفهمه بمعنى أن

$u(x, t)$ تكون متصلة عند $t = 0$ أى أن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

وكما رأينا فى فقرة ٧ ، بند ١ يكون حل معادلة التوصيل الحرارى معرّفاً أحادى القيمة بشروطه الابتدائية إذا كان هذا الحل محدوداً (نهائياً) . ولذا يدخل شرط المحدودية فى صياغة النظريات .

نعطى فى البداية الصورة الشكلية لحل المسألة المصاغة ، المبنية على فصل

المتغيرات .

سنبحث عن الحل المحدود وغير التافه (غير الصفري) للمعادلة (١) القابل

للتعبير عنه فى الصورة :

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3)$$

بالتعويض بالصيغة (3) فى (1) نحصل على :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

حيث λ^2 بارامتر الفصل . ومن هنا نحصل على :

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (4)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (5)$$

وبحل المعادلتين (5) ، (4) نعين الحلول الخاصة للمعادلة (1) على الصورة

$$u_2(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 \alpha^2 t \pm i \lambda x}, \quad (6)$$

التي تحقق شرط المحدودية . وهنا λ أى عدد حقيقى $-\infty < \lambda < \infty$ ، ولذا ففى العلاقة (6) نأخذ الإشارة الموجبة ونكوّن الدالة

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-\alpha^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda. \quad (7)$$

وإذا أمكن حساب المشتقات الداخلة فى المعادلة (1) بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل (7) فإن الدالة (7) كما هو واضح ستحقق المعادلة (1) بوصفها تراكباً للحلول الخاصة لهذه المعادلة .

ويطلب تحقق الشرط الابتدائى عند $t = 0$ نحصل على :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda. \quad (8)$$

ونستعين الآن بعلاقة التحويل العكسى لتكامل فورييه

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i \lambda \xi} d\xi. \quad (9)$$

بالتعويض بالعلاقة (9) فى (7) وتغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i \lambda \xi} d\xi \right) e^{-\alpha^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

والتكامل الداخلى فى (10) يساوى * :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha^2 t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4\alpha^2 t}}. \quad (11)$$

* انظر كتاب يسكونوف «التفاضل والتكامل» الجزء الثانى طبعة دار «مير» باللغة العربية .

بالتعويض بالعلاقة (11) في (10) نصل إلى التعبير التكاملي عن الحل المطلوب :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (12)$$

حيث

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (13)$$

الدالة $G(x, \xi, t)$ المعرفة بالعلاقة (13) كثيرا ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة التوصيل الحرارى .

ويمكن التأكد مباشرة من أن الدالة

$$G(x, \xi; t - t_0) = \frac{Q}{cp2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t - t_0)}} \quad (13')$$

تعبّر عن درجة الحرارة عند النقطة x في اللحظة الزمنية t إذا كان في اللحظة الابتدائية $t = t_0$ في النقطة ξ تنبعث كمية حرارة $Q = cp$.

الدالة $G(x, \xi, t - t_0)$ تحقق معادلة التوصيل الحرارى بالمتغيرين (x, t) وهو ما يمكن التحقق منه بعملية التفاضل المباشر.

وكمية الحرارة الموجودة على المحور x في اللحظة $t > t_0$ تساوى

$$\begin{aligned} cp \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx &= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t - t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2 (t - t_0)}} = \\ &= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = cp, \end{aligned}$$

• بالتعليل

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x - \xi}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

أى أن

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

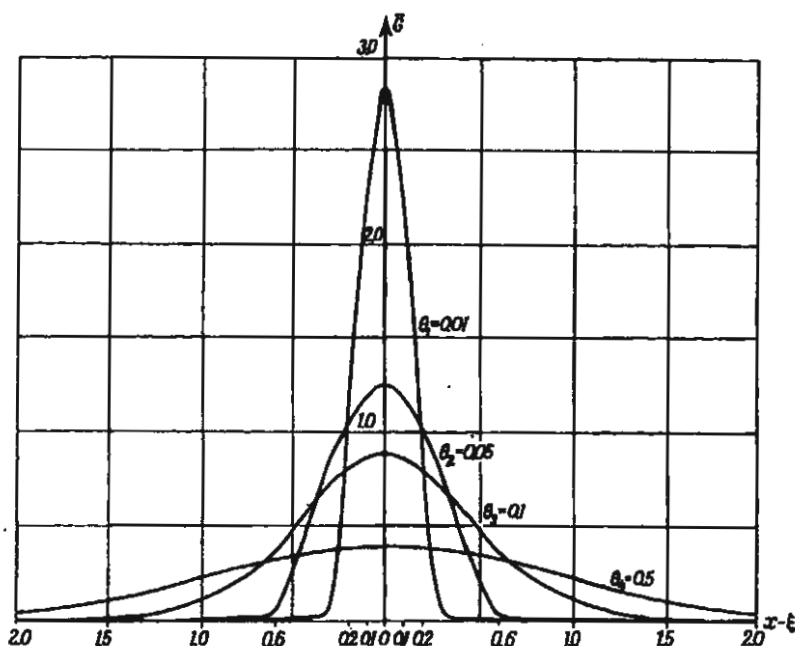
لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da = \sqrt{\pi}$$

$$\left(a = \frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad da = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right).$$

وبذلك فإن كمية الحرارة على المستقيم محل البحث لا تتغير مع مرور الزمن .
والدالة $G(x, \xi, t-t_0)$ تعتمد على الزمن من خلال المتغير $\theta = a^2(t-t_0)$ فقط
ومن ثم فهذه الدالة يمكن كتابتها في الصورة :

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \quad (13'')$$



شكل ٤٠

وفي شكل ٤٠ مبين منحنى الدالة G في اعتمادها على x لقيم θ المختلفة . وتقع
تقريبا كل المساحة المحدودة بهذا المنحنى فوق الفترة

$$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon).$$

حيث θ عدد صغير للغاية إذا كان $\theta = \alpha^2(t - t_0)$ عددا صغيرا بشكل كافٍ . ومقدار هذه المساحة مضروبا في $c\rho$ يساوى كمية الحرارة الواصلة في اللحظة الابتدائية . وبذلك فلقيم $t - t_0 > 0$ الصغيرة تكون الحرارة كلها تقريبا مركزة في جوار صغير للنقطة ξ . ومما سبق ذكره يتبع أنه في اللحظة t_0 تكون كل كمية الحرارة مركزة في النقطة ξ .

وبدراسة تغير درجة الحرارة في نقطة مثبتة $x = \xi + h$ مع مرور الزمن عندما $h = 0$ أى عندما $x = \xi$ نحصل على :

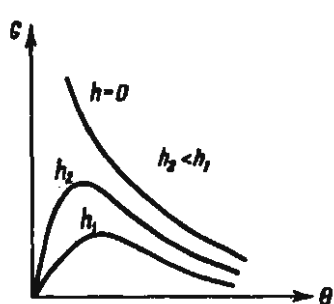
$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} .$$

وبذلك فإن درجة الحرارة في هذه النقطة حيث تنبعث الحرارة تكون كبيرة (عالية) بلا حدود لقيم θ الصغيرة .

وإذا كانت $x \neq \xi$ أى $h \neq 0$ فإن الدالة G تمثل في صورة حاصل ضرب عاملين

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-h^2/\theta} .$$

والعامل الثانى في حاصل الضرب هذا أصغر من الواحد الصحيح : وعند قيم θ الكبيرة يكون ≈ 1 ، أما لقيم θ الصغيرة فيكون ≈ 0 . ومن هنا يتبع أن



شكل ٤١

$G_{x \neq \xi} = G_{x=\xi}$ لقيم θ الكبيرة ، وكلما $G_{x \neq \xi} \ll G_{x=\xi}$ لقيم θ الصغيرة . وكلما كان h صغيرا ، أى كلما كانت x أقرب إلى ξ ، كلما كان العامل الثانى أكبر . ومنحنيا الدالتين $G_{x=\xi}$ ، $G_{x \neq \xi}$ عندما $h_2 < h_1$ مبيان على الرسم في شكل ٤١ .

وليس من الصعب ملاحظة أن

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G_{x \neq \xi} = 0 .$$

بفك عدم التحديد نعين (باستخدام قاعدة هويثال) :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{h^2/\theta}} = 0 .$$

وتوضح العلاقة (13') أنه في أية نقطة x تكون درجة الحرارة ، الناتجة بالمصدر اللحظى النقطى المؤثر في اللحظة الابتدائية $t = 0$ ، مختلفة عن الصفر في أية لحظات زمنية مهما كانت صغيرة . وكان من الممكن تفسير هذه الحقيقة بأنها نتيجة لانتشار درجة الحرارة بسرعة لانهاية . غير أن ذلك يتناقض مع التصور الجزيئى الكينيتى لطبيعة الحرارة . وهذا التناقض ينتج نتيجة أننا استعنا عند استنباط معادلة التوصيل الحرارى الوارد أعلاه بالتصور الظواهرى (phenomenal) لانتشار الحرارة الذى لا يأخذ في الاعتبار قصورية عملية حركة الجزيئات .

والآن نوضح شروط قابلية العلاقة (12) للتطبيق .

نثبت أن العلاقة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad (12')$$

التي تسمى بتكامل بواسون تمثل لأية دالة محدودة $|\varphi(\xi)| < M$ عند $t > 0$ الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى الملامس باتصال عند $t = 0$ للدالة $\varphi(x)$ في كل نقط اتصال هذه الدالة .

نثبت في البداية المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للترابك) :

إذا كانت الدالة $U(x, t, \alpha)$ تحقق بالتغيرين (x, t) المعادلة التفاضلية الخطية

$$L(U) = 0$$

لأى قيمة مثبتة للبارامتر α فإن التكامل

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

يكون أيضا حلا لنفس المعادلة $L(u) = 0$ إذا كانت المشتقات الداخلة في المؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ يمكن حسابها بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل .

وإثبات المأخوذة هذه بسيط للغاية . فالمؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ هو عبارة عن مجموع مشتقات الدالة U بمعاملات ما تعتمد على x و t . وعملية تفاضل الدالة u يمكن إجراؤها حسب الفرض تحت علامة التكامل . والمعاملات أيضا

يمكن إدخالها تحت علامة التكامل. ومن هنا ينتج أن

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha)) \varphi(\alpha) d\alpha = 0,$$

أى أن الدالة $u(x, t)$ تحقق المعادلة $L(u) = 0$.

ونذكر القارئ بالشروط الكافية لقابلية التفاضل تحت علامة التكامل المعتمد على بارامتر.

الدالة

$$F(x) = \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha$$

تكون لقيم الحدين a, b النهائية قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ يعتبر دالة متصلة في المتغيرين x, α في منطقة تغيرهما (انظر كتاب يسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الأول والثاني باللغة العربية طبعة دار مير »).

وليس من الصعب أيضا أن نلاحظ أن الدالة

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

لقيم الحدين a, b النهائية تكون قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل بنفس الشروط المفروضة على الدالة $f(x, \alpha)$ ولأية دالة محدودة (وحتى قابلة للتكامل مطلقا) $\varphi(\alpha)$. وإذا كان حدا التكامل لانهايين فإن هذه الحالة تتطلب ضرورة التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد تفاضل الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامتر (انظر المرجع السابق).

وهذه الملاحظات تسرى أيضا على التكاملات المكررة المعتمدة على البارامترات.

وللمعادلات الخطية $L(u) = 0$ يتحقق مبدأ التراكب الذى ينحصر فى أن الدالة

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i u_i(x, t),$$

للمثلة فى صورة مجموع عدد محدود من الحلول الخاصة ، تعتبر أيضا حلا للمعادلة .

وإذا كان لدينا الحل $u(x, t, \alpha)$ المعتمد على البارامتر فإن المجموع التكامل

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \quad (C_n = \varphi(\alpha_n) \Delta \alpha) \quad (14)$$

يعتبر أيضا حلا للمعادلة $L(u) = 0$. والمأخوذة المثبتة مثلها مثل المأخوذة المثبتة في صفحة ١٠٨ تؤكد الشروط التي عندها تعتبر نهاية المجموع (14) وهي في حالتنا تساوى

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

حلا للمعادلة $L(u) = 0$ أيضا. ومن جهة النظر هذه من الطبيعي أن تسمى المأخوذة المثبتة كالمأخوذة التي في صفحة ١٠٨ بالمبدأ المعمم للتراكم.

نعود إلى دراسة التكامل (12'). ثبت أولا أنه إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ محدودة $|\varphi(x)| < M$. فإن التكامل (12') يتقارب ويعبر عن دالة محدودة بالفعل

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &< M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \\ &= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

وبعد ذلك ثبت أن التكامل (12') يحقق معادلة التوصيل الحرارى عند $t > 0$. ولهذا الغرض يكفي إثبات أن مشتقات هذا التكامل عند $t > 0$ يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل.

وفي حالة حدود التكامل المحدودة (النهائية) يكون ذلك قانونيا لأن كل مشتقات الدالة

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

عندما $t > 0$ تكون متصلة. ولإمكانية إجراء التفاضل تحت علامة التكامل في حالة حدود التكامل اللانهائية يكفي التأكد من التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد

إجراء التفاضل تحت علامة التكامل . نجرى هذا البحث على مثال المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

وهكذا فلائبات قابلية تفاضل الدالة (12) بالنسبة إلى x وكذلك المتساوية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (G(x, \xi, t)) \varphi(\xi) d\xi$$

يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل في الطرف الأيمن للمتساوية السابقة . وعند ذلك فلائبات قابلية التفاضل في النقطة (x_0, t_0) . يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل في منطقة ما من مناطق قيم المتغيرات تحتوى القيمتين محل البحث (x_0, t_0) . على سبيل المثال في المنطقة

$$t_1 \leq t_0 \leq t_2, |x| \leq \bar{x}.$$

والشرط الكافي للتقارب المنتظم للتكامل (مثل اختبار التقارب المنتظم للمتسلسلة) يعتبر هو وجود الدالة الموجبة $F(\xi)$ التي لا تعتمد على البارامترين (x, t) والتي تحد من أعلى الدالة

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \right| \leq F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \quad (15)$$

ويتقارب تكاملاها :

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi) d\xi < \infty. \quad (15')$$

ويرمز المقدار x_1 إلى عدد ما تتحقق ابتداء منه المتباينة (15) .

نعين التقدير من أعلى للقيمة المطلقة المكاملة في علاقة $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t) \right| \cdot |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi) \end{aligned} \quad (16)$$

لقيم $\xi < \bar{x}$ ولأى $t_1 \leq t \leq t_2, |x| \leq \bar{x}$. لا يصعب التأكد من تقارب التكامل $F(\xi)$ للدالة (15') . فالتكامل

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_1}} d\xi = \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_1}} d\xi_1$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

يتقارب لأنه يوجد تحت علامة التكامل عامل على الصورة $e^{-a\xi^2} (a\xi + b)$. ومن هنا نستنتج أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

وبالمثل تماماً يتم إثبات إمكانية حساب كل المشتقات الباقية بالتفاضل تحت علامة التكامل . وبذلك أثبتنا أن الدالة (12') تحقق معادلة التوصيل الحرارى .
وننتقل الآن إلى الخاصية الأساسية للتكامل (12') وبالذات نثبت أن

$$t \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{عندما} \quad u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0)$$

في جميع نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$.
وهكذا نفرض أن $\varphi(x)$ دالة متصلة في نقطة ما x_0 . يجب أن نثبت أن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

أى مهما كان العدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

عندما

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

ووفقا للاتصال المفترض للدالة $\varphi(x)$ فى النقطة x_0 ، يوجد ذلك العدد $\eta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (17)$$

عندما

$$|x - x_0| < \eta.$$

ونقسم فترة التكامل إلى أجزاء نعتبر عن $u(x, t)$ في صورة مجموع ثلاثة حدود :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \dots d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_2}^{\infty} \dots d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \quad (18)$$

حيث

$$x_1 = x_0 - \eta, \quad x_2 = x_0 + \eta.$$

والحد الأساسي في هذا المجموع u_2 يمكن التعبير عنه في الصورة :

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi = I_1 + I_2.$$

والتكامل I_1 يجب مباشرة :

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

حيث

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}}. \quad (19)$$

وبمجرد أن يصبح $|x - x_0| < \eta$ يصبح الحد العلوي للتكامل موجبا والحد السفلي سالبا . وعندما $t \rightarrow 0$ يزول الحد العلوي إلى $+\infty$ والسفلي إلى $-\infty$. ومن هنا ينتج أن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

وبذلك يمكن تعيين ذلك العدد δ_1 بحيث إن

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\delta}{6}. \quad (20)$$

عندما يكون فقط

$$|x - x_0| < \delta_1, \quad |t| < \delta_1.$$

نوضح أن التكاملات I_2 , u_1 , u_3 صغيرة. نقدر قبل كل شيء التكامل I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

ومن المتساوية (18) يتضح أنه عندما

$$x_1 < \xi < x_2$$

تتحقق المتباينة

$$|\xi - x_0| < \eta.$$

وبالاستعانة بالمتباينة (17) وكذلك بأن

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-a^2} da < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-a^2} da = 1,$$

مها كان العدان x' , x'' نحصل على:

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-a^2} da < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (21)$$

حيث يعرف المتغير الجديد a بالعلاقة (19). نقدر

$$\begin{aligned} |u_3(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_1}^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ &< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^\infty e^{-a^2} da \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \quad (22) \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ &< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-a^2} da \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0, \end{matrix} \quad (23) \end{aligned}$$

وحيث إنه عندما $x \rightarrow x_0$ فإن $x_2 - x > 0$ و $x_1 - x < 0$ وعندما $t \rightarrow 0$ فإنه في الحدين الأخيرين في (23)، (22) تتحول النهاية السفلى للتكامل والنهاية العليا له على الترتيب إلى $-\infty$ ، $+\infty$. وبالتالي يمكن تعيين ذلك العدد δ_2 بحيث إن

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (24)$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta_2, \quad |t| < \delta_2.$$

وبالاستعانة بالتقديرين الناتجين أعلاه (23)، (22) نحصل على :

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| \leq \\ \leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad (25)$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta, \quad |t| < \delta,$$

حيث δ يساوي أصغر العددين δ_1 ، δ_2 .

وبذلك أثبتنا أن الدالة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \quad (12')$$

محدودة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الابتدائى .

وإذا أعطيت القيمة الابتدائية ليس عند $t = 0$ وإنما عند $t = t_0$ فإن صيغة $u(x, t)$ تأخذ الشكل :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (12'')$$

ووحداية الحل الناتج للدالة المتصلة $\varphi(x)$ تتج من النظرية المثبتة في بند ٢.

فقرة ٣. وإذا كانت الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ لها عدد محدود من نقاط الانفصال فإن التكامل (12'') يمثل الحل المحدود للمعادلة (1) المتصل في كل النقط فيما عدا نقاط انفصال الدالة $\varphi(x)$.

• بالاستعانة بالطريقة المشرحة في بند ٢ و ٣ يمكن التأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تتحدد بالشروط المذكورة تحديداً أحادى القيمة.

ندرس كمثال المسألة التالية :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية (عند $t = t_0 = 0$) لها قيمتان ثابتتان ولكنها مختلفتان عند $x < 0$ و $x > 0$ أى

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , \quad x > 0, \\ T_2 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

بالاستعانة بالعلاقة (12) نحصل على حل المسألة فى الصورة :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (26) \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

وكحالة خاصة إذا كان

$$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \right) \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right).$$

إن المقطع الجانبي لدرجة الحرارة في اللحظة t يعطى بالمنحنى

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

حيث z هي الإحداثى الأفقى للنقطة التى تحدد عندها درجة الحرارة إذا أخذنا كوحدة الطول فى ارتباطها بالزمن t القيمة $2\sqrt{a^2t}$. وتكوين (رسم) هذا المنحنى لا يشكل صعوبة لأن التكامل

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

الذى يسمى عادة بتكامل الأخطاء يقابلنا كثيرا فى نظرية الاحتمالات ويوجد له جداول مفصلة*

ويمكن كتابة العلاقة (26) لأية قيمتين اختياريين T_1 , T_2 على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

ومن هنا يتضح أنه فى النقطة $x=0$ تكون درجة الحرارة طول الوقت ثابتة ومساوية لنصف مجموع قيمتى درجة الحرارة الابتدائيتين على اليسار وعلى اليمين وذلك لأن $\Phi(0) = 0$.

وحل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = 0,$$

من الواضح انه يجب التعبير عنه بالعلاقة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (27)$$

كما ينتج ذلك من معنى الدالة $G(x, \xi, t)$ (انظر فقرة ٤ . بند ٢). ولن نقوم

* انظر الجدول فى نهاية الجزء الثانى من الكتاب.

بدراسة هذه العلاقة بالتفصيل وكذلك شروط تطبيقها التي يجب أن تحققها الدالة $f(x, t)$.

فقرة ٢ : المسائل الحدية للمستقيم نصف اللانهائي . كما سبق أن ذكرنا في بند ١ ، فقرة ٤ ، عندما يهنا توزيع درجات الحرارة بالقرب من أحد طرفي القضيب ويكون تأثير الطرف الآخر غير جوهري فإننا نعتبر أن هذا الطرف (الثاني) موجود في المالا نهاية . وهذا يؤدي إلى مسألة تعيين حل معادلة التوصيل الحراري

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

على المستقيم نصف اللانهائي $x > 0$ لقيم $t > 0$ التي تحقق الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

والشرط الحدي الذي يؤخذ وفقا لطبيعة النظام الحدي المعطى على إحدى الصور التالية :

$$(المسألة الحدية الأولى) \quad u(0, t) = \mu(t)$$

$$(المسألة الحدية الثانية) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = v(t)$$

أو

$$(المسألة الحدية الثالثة) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)]$$

وفي المستقبل سنكتفى بالبحث التفصيل للمسألة الحدية الأولى فقط التي تنحصر في تعيين حل معادلة التوصيل الحراري بالشروط الإضافية التالية :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \quad (28)$$

ولكي نحدد شروط المسألة حلا وحيدا لا بد من إضافة بعض الشروط الأخرى في المالا نهاية . نتطلب بمثابة الشرط الإضافي أن تكون الدالة $u(x, t)$ محدودة في كل مكان :

$$|u(x, t)| < M, \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0,$$

حيث M ثابت ما . ومن هنا يتبع أن الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ يجب أيضا أن تحقق شرط المحدودية $|\varphi(x)| < M$.

وحل المسألة المصاغة يمكن التعبير عنه في صورة المجموع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

حيث $u_1(x, t)$ تعبر فقط عن تأثير الشروط الابتدائية و $u_2(x, t)$ تعبر عن تأثير الشرط الحدى فقط . ويمكن تعيين هاتين الدالتين كحليين للمعادلة (1) بحققان الشروط التالية :

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0, \quad (28')$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \quad (28'')$$

ومن الواضح أن مجموع هاتين الدالتين سيحقق الشرطين (28) . نشبت في البداية مأخوذتين متعلقتين بالدالة $u(x, t)$ المعرفة بتكامل بواسون

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi. \quad (29)$$

١ - إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة فردية أى أن

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

فإن الدالة (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

تؤول إلى الصفر عندما $x = 0$:

$$u(0, t) = 0.$$

وعند ذلك يفترض بالطبع أن التكامل المعرف للدالة $u(x, t)$ مقارب . وذلك يتحقق إذا كانت $\psi(x)$ محدودة . والدالة المكاملة في التكامل

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

دالة فردية بالنسبة إلى ξ لأنها تعتبر حاصل ضرب دالة فردية في دالة زوجية . والتكامل المأخوذ لدالة فردية بمجدي تكامل متماثلين بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوى الصفر وبالتالي فإن

$$u(0, t) = 0,$$

وهو ما يثبت المأخوذة .

٢ - إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة زوجية أى أن

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

فإن مشتقة الدالة $u(x, t)$ من العلاقة (29) تكون مساوية للصفر عندما $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

لجميع قيم $t > 0$.

بالفعل

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \psi(\xi) d\xi \Big|_{x=0} = 0,$$

لأنه عند $x = 0$ تكون الدالة المكاملة دالة فردية إذا كانت $\psi(\xi)$ دالة زوجية .

وننتقل الآن الى تكوين الدالة $u_1(x, t)$ التى تحقق الشروط (28') .

نדרج دالة مساعدة $U(x, t)$ معرفة على المستقيم اللانهائى $-\infty < x < \infty$ وتحقق المعادلة وكذلك الشروط

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad x > 0.$$

وهذه الدالة يمكن بمساعدة المأخوذة تعريفها بواسطة الدالة الابتدائية $\Psi(x)$ التى تنطبق على $\varphi(x)$ فى حالة $x > 0$ وتعتبر امتدادا فرديا للدالة $\varphi(x)$ لقيم $x < 0$ أى

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0, \\ -\varphi(-x) & x < 0, \end{cases}$$

ومن ثم فإن :

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi) d\xi.$$

وبدراسة قيم الدالة $U(x, t)$ فقط فى المنطقة التى تهتما $x \geq 0$ نحصل على :

$$u(x, t) = U(x, t) \quad , \quad x \geq 0.$$

وبالاستعانة بتعريف الدالة $\Psi(x)$ سنحصل على :

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

علما بأننا أجرينا في التكامل الأول التعويض $\xi = -\xi'$ واستعنا بالتساوية

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

ويتجميع التكاملين معا نحصل على الدالة المطلوبة

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi \quad (30)$$

في صورة لا تحتوى على الدوال المساعدة. ونشير إلى أنه عندما $x=0$ تتوَل الصيغة بين القوسين الكبيرين إلى الصفر ويكون $u_1(0, t) = 0$.

وبالاستعانة بالمأخوذة ٢ لا يصعب التأكد من أن حل معادلة التوصيل الحرارى بالشرط الحدى المتجانس من النوع الثانى $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$ والشرط الابتدائى $\bar{u}_1(x, 0) = \varphi(x)$ يعبر عنه على الصورة :

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (30')$$

نطبق العلاقة الناتجة لحل مسألة تبريد قضيب مسخن بانتظام يحفظ على حدوده بدرجة حرارة ثابتة نعتبرها مساوية للصفر. وتنحصر المسألة في تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرطين

$$v_1(x, t_0) = T, \quad v_1(0, t) = 0.$$

والأخذ في الاعتبار أن الشرط الابتدائى معطى لا عندما $t=0$ وإنما عندما $t=t_0$ نحصل بدلا من العلاقة (30) على :

$$v_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \quad (31)$$

ويُقسم التكامل إلى حدين وإدخال المتغيرين

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

نحصل على

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \quad (31')$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

هو تكامل الأخطاء .

وننتقل الآن إلى البحث عن الدالة $u_2(x, t)$ التي تمثل الجزء الثاني من حل المسألة الحدية الأولى .

نفرض أن

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const.}$$

والدالة

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \quad (32)$$

تعتبر حلاً لمعادلة التوصيل الحراري يحقق الشرطين

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

ومن هنا ينتج أن الدالة

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \right] \quad (33)$$

تعتبر هي الدالة المطلوب تعيينها لأنها تحقق نفس المعادلة والشرطين

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0), \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

نمبر عن $v(x, t)$ في الصورة

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

حيث

$$U(x, t - t_0) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (34)$$

ووفقا للتعريف يكون للدالة $U(x, t - t_0)$ معنى فقط عندما $t \geq t_0$. نكتب

تعريف هذه الدالة بفرض

ومن الواضح أن هذا التعريف يتفق مع قيمة الدالة $U(x, t)$ عندما $t = 0$ والدالة المعروفة بهذه الطريقة مستحق معادلة التوصيل الحراري لجميع قيم t عندما $x > 0$. والقيمة الحدية لهذه الدالة (عندما $x = 0$) تعتبر دالة متدرجة (step function) تساوي الصفر عندما $t < t_0$ وتساوي الواحد الصحيح عندما $t > t_0$. والدالة $U(x, t)$ تقابلنا كثيرا في التطبيقات وتعتبر حلقة مساعدة لتعيين الدالة $u_2(x, t)$.

$$v(x, t_0) = 0, \quad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & , \quad t_0 < t < t_1, \\ 0 & , \quad t > t_1. \end{cases}$$
$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$
$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, & t_0 < t \leq t_1, \\ \mu_1, & t_1 < t \leq t_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \mu_{n-1}, & t_{n-1} < t \leq t_n. \end{cases}$$
$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i [U(x, t - t_i) - U(x, t - t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}). \quad (35)$$

YV9

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{n-2} \mu_l \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t} \Big|_{\tau_l} \Delta \tau + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) \quad (36)$$

لقيم $t_l \leq \tau_l \leq t_{l+1}$

نتقل الآن إلى مسألة تعيين $u(x, t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى بالشرط الابتدائى الصفرى والشرط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

حيث $\mu(t)$ أية دالة متقطعة الاتصال . والحل التقريبي لهذه المسألة يسهل الحصول عليه فى الصورة (36) إذا استبدلنا الدالة $\mu(t)$ بدالة متقطعة الثبات . وبالاتقال إلى النهاية عند تناقص فترات ثبات الدالة المساعدة نجد أن نهاية المجموع (36) تكون مساوية :

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau,$$

وذلك لأنه عندما $x > 0$ يكون

$$\lim_{t-t_{n-1} \rightarrow 0} \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) = 0.$$

ومن الواضح أن الحل المطلوب $u_2(x, t)$ للمسألة الثانية يجب أن يساوى

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (37)$$

ولن نتوقف عند تفصيل قانونية الانتقال إلى النهاية وتوضيح شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة إلى الدالة $\mu(\tau)$.

ولا يصعب التأكد من أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^{\frac{1}{2}} x}{[a^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4at}} = \\ &= -2a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^{\frac{1}{2}} t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^{\frac{1}{2}} t}} \right). \end{aligned}$$

وبذلك فالحل المطلوب تعيينه في حالة الدالة الاختيارية $\mu(t)$ يمكن التعبير عنه على الصورة

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau) d\tau$$

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (38)$$

ونشير إلى أنه في خلال عملية الحصول على العلاقة (38) لم نستخدم في أى مكان الخواص لمعادلة التوصيل الحرارى فيما عدا خطيتها. كما أننا لم نستخدم أيضا العلاقة التحليلية للدالة $U(x, t)$ وإنما استخدمنا فقط أنها تحقق الشروط الحدية والابتدائية :

$$U(0, t) = 1 \quad , \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0$$

أو

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

ومن الواضح أنه إذا كنا نريد حل أية معادلة تفاضلية خطية بالشروط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

والشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية الإضافية الصفرية إن وجدت (مثلا عند $x=l$) فإن حل مثل هذه المسألة يمكن التعبير عنه في الصورة

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \xi}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (39)$$

حيث $U(x, t)$ حل المسألة الحدية المماثلة عندما

$$U(0, t) = 1.$$

• هذا التعبير عن حل المسألة الحدية الأولى بالشروط الابتدائية الصفرية معطى هنا لسهولة المقارنة مع حل نفس هذه المسألة الناتج في الباب الثانى من الكتاب الثانى • بند 4 بطريقة أخرى.

والمبدأ المصاغ هنا يسمى بمبدأ دوهاميل ويوضح أن الصعوبة الأساسية عند حل المسائل الحدية يشكلها ثبات القيمة الحدية . وإذا حلت المسألة الحدية بالقيمة الحدية الثابتة فإن حل المسألة الحدية بالقيمة الحدية المتغيرة يعطى بالعلاقة (39) . وكثيرا ما يستخدم هذا المبدأ عند حل كثير من المسائل الحدية بتحويل الحل إلى الحل للشرط الحدى الثابت فقط دون ذكر أن حل المسألة الحدية بالشرط المتغير $\mu(t)$ يعطى بالعلاقة (39) .

ومجموع الدالتين

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى للمستقيم نصف اللانهائى للمعادلة المتجانسة . وبالاستعانة بالعلاقة (27) فقرة ١ ، بند ٣ ومبدأ الاستكمال غير الزوجى لا يصعب التأكد من أن حل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty, t > 0)$$

للشرط الابتدائى الصفوى والشرط الحدى الصفوى ($u(0, t) = 0$) يعطى بالعلاقة

$$u_3(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (40)$$

والمجموع

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

بند ٤ - المسائل بدون شروط ابتدائية

إذا كانت عملية التوصيل الحرارى تدرس فى لحظة بعيدة بعدا كافيا عن اللحظة الابتدائية فإن تأثير الشروط الابتدائية لا ينعكس على توزيع درجة الحرارة فى اللحظة التى تم فيها ملاحظة ودراسة العملية . وفى هذه الحالة تطرح مسألة

تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشروط الحدية من أحد الأنواع الثلاثة المعطاة لجميع قيم $t > -\infty$. وإذا كان القضيبي محدودا تعطى الشروط الحدية على طرفيه الاثنى. وللقضيبي نصف اللانهاى يعطى شرط حدى واحد فقط.

ندرس المسألة الحدية الأولى للقضيبي نصف اللانهاى :
عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $x > 0$ الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (1)$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة. ويفترض أن الدالتين $\mu(t)$, $u(x, t)$ محدودتان فى كل مكان أى أن

$$|u(x, t)| < M, \\ |\mu(t)| < M.$$

وكما سنوضح فيما بعد تعرف الدالة $u(x, t)$ تعريفاً أحادى القيمة. نأخذ حالة الشرط الحدى الأكثر ذبوعاً :

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

وقد بحث هذه المسألة فوريه وطبقت لأول مرة لتعيين اللذبذبات الحرارية للتربة*.

نكتب الشرط الحدى على الصورة

$$\mu(t) = A e^{i\omega t}. \quad (2')$$

ومن خطية معادلة التوصيل الحرارى ينتج أن الجزء الحقيقى والجزء التخيلى لحل مركب ما لمعادلة التوصيل الحرارى يحقق كل منها على حدة نفس هذه المعادلة.

وإذا عين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرط (2') فإن جزؤه الحقيقى يحقق الشرط (2) والجزء التخيلى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A \sin \omega t.$$

* انظر الملحق ١.

وهكذا ندرس المسألة :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

وسنبحث عن حلها في الصورة :

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \quad (4)$$

حيث α, β ثابتان لم يحددا بعد .

بالتعويض عن الصيغة (4) في المعادلة (3) والشرط الحدى نجد أن

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2} \beta, \quad \beta = i\omega, \quad \text{ومن هنا}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right]. \end{aligned}$$

واللدالة $u(x, t)$ لدينا

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right)}. \quad (5)$$

والجزء الحقيقى لهذا الحل

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right) \quad (6)$$

بحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الحدى (2) . والعلاقة (6) وفقا لاختيار الإشارة لا تحدد دالة واحدة فقط وإنما تحدد دالتين ، ولكن الدالة المناظرة للإشارة السالبة هي فقط التى تحقق شرط المحدودية . وبذلك فحل المسألة المطروحة نحصل عليه في الصورة :

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right). \quad (7)$$

وبالمثل تحل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم المحدود :

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A \cos \omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

وبإعادة كتابة الشرط الحدى في الصورة :

$$u(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad u(l, t) = 0,$$

نبحث عن الحل في الصورة :

$$u(x, t) = X(x)e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة في المعادلة (8) نحصل للدالة $X(x)$ على المعادلة

$$X'' + \gamma^2 X = 0 \quad \text{أو} \quad X'' + \frac{i\omega}{a^2} X = 0$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} (1 + i) \quad (10)$$

والشروط الإضافية

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

ومن هنا نحصل للدالة $X(x)$ على

$$X(x) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (12)$$

حيث X_1, X_2 الجزءان الحقيقي والتخيلي للدالة $X(x)$. وللدالة $u(x, t)$ نحصل على الصيغة

$$u(x, t) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} e^{-i\omega t}. \quad (13)$$

وبفصل الجزء الحقيقي للدالة $u(x, t)$ نعين حل المسألة الأصلية بدون شروط ابتدائية في الصورة :

$$u(x, t) = X_1(x) \cos \omega t + X_2(x) \sin \omega t. \quad (14)$$

ولا نعطي هنا الصيغة الصريحة لكل من الدالتين X_1, X_2 رغم أن ذلك لا يصعب عمله.

وإذا كانت الدالة الحدية عبارة عن تركيبة من التوافقيات ذات الترددات المختلفة فإن حل هذه المسألة يمكن الحصول عليه بوصفه تراكبا للحلول المناظرة للتوافقيات كل على حدة.

نثبت وحدانية حل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم نصف اللانهائى . سننتقل من العلاقة

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} u(0, \tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} u(\xi, t_0) d\xi = I_1 + I_2 \quad (15)$$

($t \geq t_0$),

التي تعبر عن أى حل محدود لمعادلة التوصيل الحرارى بدلالة قيمته الابتدائية $u(x, t_0)$ وقيمته الحدية $u(0, t) = \mu(t)$ في المنطقة $x \geq 0, t \geq t_0$.

نوضح أن

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} I_2(x, t) = 0, \quad (16)$$

إذا كان فقط

$$|u(x, t)| < M$$

لأى t بالفعل .

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\int_x^\infty e^{-a_1^2} da_1}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} - \frac{\int_x^\infty e^{-a_2^2} da_2}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right\} = \\ = \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-a^2} da,$$

حيث

$$a_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad a_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

ومن هنا نتج العلاقة (16) لأن x, t مشتتان و $t_0 \rightarrow -\infty$. وإذا ثبتنا x, t في العلاقة (15) وجعلنا $t_0 \rightarrow -\infty$ فإن $u(x, t)$ ستكون مساوية لنهاية الحد الأول فقط ونحصل على العلاقة

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \quad (17)$$

التي تثبت أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين لمسائلتنا . ويمكن أيضا إثبات أنه لأية دالة متقطعة الاتصال $\mu(t)$ تعبر العلاقة (17) عن حل المسألة الصالحة

وبالمثل يمكن بحث المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم المحدود ($0 \leq x \leq l$). وهذه المسألة بدون شرط الحدودية. يكون لها حل متعدد القيم لأن الدوال

$$u_n(x, t) = C e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

لأي n تعبر عن حل هذه المسألة بالقيم الحدية الصفرية . غير أن مثل هذا الحل يكون عندما $t \rightarrow \infty$ غير محدد . ولا يشكل إثبات وحدانية الحل المحدود للمسألة المصاغة أية صعوبة .

مسائل على الباب الثالث

١ - عين دالة تأثير المصدر الحرارى اللحظى النقطى للفضيب :

- (أ) للفضيب نصف اللانهاى بالشروط الحدية من النوع الأول والنوع الثانى وعند انعدام التبادل الحرارى على السطح الجانبي .
 (ب) للفضيب اللانهاى عند وجود تبادل الحرارى على السطح الجانبي .
 (ج) للفضيب نصف اللانهاى عند وجود تبادل حرارى على السطح الجانبي وبالشروط الحدية من النوع الأول والثانى .

٢ - عين دالة تأثير المصدر الحرارى اللحظى النقطى للفضيب نصف اللانهاى ذى السطح الجانبي المعزول حراريا للمسألة الحدية الثالثة (بالشرط الحدى على الصورة $f(t)$) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = hu(0, t) = f(t) \right)$.

٣ - حل معادلة التوصيل الحرارى للحالات (أ) . (ب) . (ج) فى المسألة ١ إذا كان :

(١) فى النقطة $x = x_0$ يؤثر مصدر الحرارة $Q = Q(t)$ وكحالة خاصة : $Q = Q_0 = \text{const}$.

(٢) معطى توزيع درجة الحرارة الابتدائى $u(x, 0) = \varphi(x)$ وكحالة خاصة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{خارج } (0, l) \end{cases}$$

(٣) وزعت مصادر حرارية بالكثافة $f(x, t)$ على كل الفضيب ودرجة الحرارة الابتدائية تساوى الصفر .
 درس كمالة خاصة حالة $f = q_0 = \text{const}$ (مصادر مستقرة) .

٤ - فضيب نصف لانهاى ذو سطح جانبي معزول حراريا سخن بانتظام حتى درجة الحرارة

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} (x > 0).$$

ويستفظ بطرف الفضيب منذ اللحظة $t = 0$ عند درجة حرارة تساوى الصفر .

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

عين درجة حرارة الفضيب $u(x, t)$. وبالإستعانة بحدول تكامل الأخطاء

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

رسم لمنحنيات بالتغير x فى الفترة $0 \leq x \leq l$ للدالة $u(x, t)$ عندما $t = l^2/a^2$ ، $t = l^2/2a^2$ ، $t = l^2/16a^2$.

إرشاد : من الأنسب الاستعانة بالمتغيرات بلا أبعاد

$$x' = x/L, \theta = \alpha^2/\beta^2, \nu = \alpha/\alpha_0$$

٥- يفتح طرف أسطوانة نصف لانهاية في اللحظة الابتدائية $t = 0$ في الجو حيث يكون تركيز غاز ما u_0 . عين تركيز الغاز في الأسطوانة $u(x, t)$ لقيم $x > 0, t > 0$ إذا كان التركيز الابتدائي $u(x, 0) = 0$. وبلااستعانة بمداول تكامل الأخطاء بين بعد أية فترة زمنية يصل تركيز الغاز في الطبقة التي تبعد بمسافة x عن طرف الأسطوانة إلى 7.9% من التركيز الخارجى . عين قانون حركة جبهة التركيز الثابت .

٦- يصل دفق حرارى $q(t) = k u_x(0, t)$ إلى طرف قضيب نصف لانهاى كانت درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر . عين درجة حرارة القضيب $u(x, t)$ إذا كان :

(أ) القضيب معزول حراريا من جوانبه .

(ب) يحدث تبادل حرارى على السطح الجانبي للقضيب (بقانون نيوتن) مع الوسط المحيط ذى درجة الحرارة الصفرية .

ادرس الحالة الخاصة $q = q_0 = \text{const}$.

٧- يحتفظ بطرف قضيب نصف لانهاى عند درجة حرارة ثابتة u_0 ويحدث على السطح الجانبي للقضيب تبادل حرارى مع وسط درجة حرارته ثابتة وتساوى u_1 . ودرجة حرارة القضيب الابتدائية تساوى الصفر . عين $u(x, t)$ درجة حرارة القضيب .

٨- حل للمسألتين ٦ - (أ) ، ٦ - (ب) متغيرا أن $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

٩- عين درجة الحرارة المستقرة على امتداد قضيب نصف لانهاى ذى سطح جانبي معزول حراريا ، وعلى طرفه :

(أ) مطاة درجة الحرارة $u(0, t) = A \cos \omega t$ ،

(ب) معطى دفق حرارى $Q(t) = B \sin \omega t$ ،

(ج) يحدث تبادل حرارى وفقا لقانون نيوتن مع وسط تتغير درجة حرارته وفقا للقانون $\theta(t) = C \sin \omega t$.

١٠- بالاستعانة بطريقة الانكاس كَوْن دالة تأثير المصدر اللحظى التقطى للقضيب المحدود ذى السطح الجانبي المعزول حراريا بالشروط الحدية من النوع الأول والثانى .

١١- قضيب لانهاى يتكون من قضيبين متجانسين يتلاسان عند النقطة $x = 0$ ويميزاتها $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ على الترتيب . ودرجة الحرارة الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , x < 0, \\ T_2 & , x > 0. \end{cases}$$

عين درجة الحرارة $u(x, t)$ في القضيب عندما يكون سطحه الجانبي معزولا حراريا .

ملاحق الباب الثالث

ملحق ١ - موجات درجة الحرارة

تعتبر مسألة انتشار موجات درجة الحرارة في التربة من أول أمثلة تطبيقات النظرية الرياضية للتوصيل الحرارى - التى طورها فورييه - على دراسة ظواهر الطبيعة .

إن درجة الحرارة على سطح الأرض تحمل كما هو معلوم طبيعة دورية ظاهرة سنوية ويومية . نلجأ إلى مسألة انتشار اللذبذبات الحرارية الدورية في التربة التى سنعتبرها نصف فراغ متجانس $0 \leq x < \infty$. وهذه المسألة تعتبر مسألة مميزة للمسائل بلا شروط ابتدائية ، وذلك لأنه عند التكرار الكثير لسلوك درجة الحرارة على السطح يكون تأثير درجة الحرارة الابتدائية أقل من تأثير العوامل الأخرى التى نهملها (على سبيل المثال عدم تجانس التربة) . وبذلك نصل إلى المسألة التالية :

عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < \infty, -\infty < t), \quad (1)$$

الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

وهذه المسألة درست في الباب الثالث . وحلها يكون على الصورة (انظر

الباب الثالث ، بند ٤ ، معادلة (7) :

$$u(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x - \omega t\right). \quad (3)$$

وعلى أساس هذا الحل الناتج يمكن إعطاء الصورة المميزة التالية لعملية انتشار

موجة درجة الحرارة في التربة . اذا كانت درجة حرارة السطح تتغير دوريا لمدة زمنية طويلة فإنه يحدث في التربة أيضا ذبذبات لدرجة الحرارة بنفس الفترة علما بأن :

١ - سعة الذبذبات تتناقص بقانون أسى مع العمق

$$A(x) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x},$$

أى إذا زادت الأعماق تبعاً لمتوالية حساية فإن السعة تتناقص تبعاً لمتوالية هندسية (قانون فورييه الأول) .

٢- تحدث ذبذبات درجة الحرارة فى الأرض بانزياح للطور . فالزمن δ لتأخير القيم العظمى (الصغرى) لدرجة الحرارة فى التربة عن اللحظات المناظرة على السطح يتناسب مع العمق

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega\sigma^2}} x$$

(قانون فورييه الثانى) .

٣- عمق تغلغل الحرارة فى التربة يعتمد على فترة ذبذبات درجة الحرارة على السطح . والتغير النسبى لسعة درجة الحرارة يساوى

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\sigma^2}} x}$$

وهذه العلاقة توضح أنه كلما صغرت فترة النبوة كلما قل عمق تغلغل درجة الحرارة . ولذبذبات درجة الحرارة بالفترتين (الزمنين الدوريين) T_2 - T_1 يرتبط العمقان x_2 . x_1 اللذان يحدث عندهما تغير نسبى واحد لدرجة الحرارة بالعلاقة التالية :

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} x_1$$

(قانون فورييه الثالث) . فعلى سبيل المثال ، بمقارنة الذبذبات اليومية بالسوية التى لها $T_2 = 365 T_1$ يتضح أن

$$x_2 = \sqrt{365} x_1 = 19.1 x_1$$

أى أن عمق تغلغل الذبذبات السنوية عندما تكون السعة على السطح واحدة فى الحالتين كان سيصبح أكبر من عمق تغلغل الذبذبات اليومية بـ ١٩,١ مرة .
وبمثابة مثال نورد نتائج ملاحظات ذبذبات درجة الحرارة السنوية فى محطة جوش الواقعة على نهر آمور بسيبيريا :

1	2	8	4
11.5	6.8	4.2	2.6

العمق (بالمتر)
السعة (°م)

وهذه المعطيات توضح أن سعة الذبذبات السنوية على عمق ٤ أمتار تناقصت إلى حوالى ١٣,٣٪ من قيمتها على السطح التى تساوى ١٩,٥°. وعلى أساس هذه المعطيات يمكن تعيين معامل توصيل درجة الحرارة للتربة

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^2}} x, \quad \alpha^2 = \frac{\pi x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}}.$$

ومن هنا نجد أن معامل توصيل درجة الحرارة للتربة يساوى

$$\alpha^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$$

وزمن تأخير درجة الحرارة العظمى على عمق ٤ أمتار يصل إلى أربعة أشهر .

غير أنه يجب الأخذ فى الاعتبار أن النظرية المشروحة هنا تتعلق بانتشار الحرارة فى التربة الجافة أو الصخر . فوجود الرطوبة يعقد من الظواهر الحرارية فى التربة ، ويحدث عند التجمد ابتعاث حرارى كامن لا يؤخذ فى الاعتبار فى هذه النظرية .

إن معامل توصيل درجة الحرارة يعتبر أحد مميزات الجسم الهامة للدراسة خواصه الفيزيائية وكذلك للحسابات التكنيكية المختلفة . وتؤسس إحدى الطرق العملية لتعيين معامل توصيل درجة الحرارة على دراسة انتشار موجات درجة الحرارة فى القضبان .

نفرض أنه يحتفظ بأحد طرفى قضيب طويل بشكل كاف عند درجة حرارة دورية $u(t)$ بالتعبير عن هذه الدالة بمتسلسلة فورييه

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right], \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}, \end{aligned}$$

حيث T الزمن الدورى (الفترة) ، وبأخذ موجات درجة حرارة تناظر كل حد ، نجد أن درجة الحرارة $u(x, t)$ لأى x تكون دالة دورية فى الزمن وتكون توافقيتها رقم n مساوية

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= a_n(x) \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n(x) \sin \frac{2\pi n}{T} t = \\
 &= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{T\sigma^2}} x} \cos \left[\sqrt{\frac{\pi n}{T\sigma^2}} x - \frac{2\pi n}{T} t + \frac{2\pi n}{T} \delta_n^0 \right] \\
 \text{أو} \\
 \frac{\sqrt{a_n^2(x_1) + b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2) + b_n^2(x_2)}} &= e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{T\sigma^2}} (x_1 - x_2)}
 \end{aligned}$$

وهذه العلاقة توضح أنه إذا أجرينا قياس درجة الحرارة في نقطتين ما x_1, x_2 خلال فترة زمن دورى كاملة فإننا بتعييننا للمعاملات $a_n(x_1), b_n(x_1), a_n(x_2), b_n(x_2)$ بواسطة طرق التحليل التوافقي يمكن أن نعين معامل توصيل درجة الحرارة للقضيب σ .

ويمكن إحداث الذبذبات الدورية لدرجة الحرارة في القضيب بالطريقة التالية مثلاً: نضع أحد طرفي القضيب في فرن كهربائي وبعد فترات زمنية متساوية نقوم بقطع وتوصيل التيار. ونتيجة لعملية التسخين الدورية هذه يحدث في القضيب بعد بعض الوقت ذبذبات دورية لدرجة الحرارة. وبقياس درجتى الحرارة $u(x_1, t), u(x_2, t)$ بواسطة جهاز القياس بالمزدوجة الحرارية (thermocouple) في أية نقطتين x_1, x_2 خلال فترة زمن دورى كاملة لتغير النظام الحدى ثم معالجة u_1, u_2 على النحو للموضع أعلاه يمكن تعيين σ - معامل توصيل درجة الحرارة للمادة للصنوع منها القضيب. ومن الطبيعي أنه لقابلية النظرية الواردة أعلاه للتطبيق ينبغى أن يكون السطح الجانبي للقضيب معزولاً حرارياً وكذلك ينبغى مراقبة درجة حرارة الطرف الآخر للقضيب لكي يمكن الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة في القضيب نصف اللانهائى.

ولإمكانية الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة في القضيب نصف اللانهائى يجب التأكد من أن درجة الحرارة عند الطرف الحر للقضيب ثابتة. ويتم مراقبة ذلك بواسطة جهاز قياس إضافى.

ملحق ٢ - تأثير الانقسام الإشعاعى على درجة حرارة القشرة الأرضية

ليس لدينا للحكم على الحالة الحرارية الداخلية للأرض إلا معلومات قليلة حصلنا عليها من الملاحظات على سطح الأرض. إن المعلومات الأساسية عن

المجال الحرارى للقشرة الأرضية تنحصر فيما يلى . إن الذبذبات اليومية والسوية فى درجة الحرارة تحدث فى طبقة رقيقة نسبيا من السطح (حوالى ١٠ - ٢٠ مترا للذبذبات السوية) . وأسفل هذه الطبقة تتغير درجة الحرارة مع تغير الزمن ببطء شديد .

وتبين الملاحظات التي نحصل عليها في المناجم والأنفاق والمتعلقة بالطبقة العليا من القشرة الأرضية التي عمقها لا يزيد عن ٢ إلى ٣ كيلومترات ، أن درجة الحرارة ترتفع كلما تعمقنا داخل الأرض بمعدل ٣ درجات مئوية كل ١٠٠ متر .

وتعود المحاولات الأولى للتفسير النظرى لتدرج درجة الحرارة الأرضية الملاحظ إلى نهاية القرن الماضى ولكنها اصطدمت بمصاعب لم يمكن التغلب عليها فى ذلك الوقت . وقد انطلقت هذه المحاولات من تصور تبريد الأرض التى كانت محترقة ومنصهرة فى الماضى . ودرجة الحرارة الابتدائية التى تميز عملية التبريد هذه هى حوالى $T_0 = 1200^{\circ}\text{C}$ (درجة حرارة انصهار الصخور الجبلية) ودرجة الحرارة السطحية هى حوالى 0°C ولا يمكن أن تنحرف انحرافا كبيرا عن هذه القيمة (أكثر من 100°) خلال كل فترة وجود الأرض . وتؤدى النظرية الكمية المبسطة لعملية تبريد الأرض إلى حل معادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

في نصف الفراغ $0 < z < \infty$ بالشروط الابتدائية والحدية التالية :

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = 0.$$

وقد درسنا حل هذه المسألة في بند ٣ من هذا الباب ويعطى بالعلاقة

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

وتدرج (gradient) هذه الدالة عند $z = 0$ يساوي

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 l}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 l}} \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 l}}.$$

وبالتعويض هنا بالقيم المعلومة لتدرج درجة الحرارة الأرضية $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ grad/cm}$ و $T_0 = 1200^\circ \text{C}$ وكذلك بقيمة

$\alpha = 0.006 \text{ cm}^2/\text{s}$ الناظرة للقيمة المتوسطة المعينة بالتجربة العملية لمعامل توصيل درجة الحرارة للجرانيت والبازلت نحصل لمدة عملية التبريد على القيمة :

$$t = 0.85 \cdot 10^{15} \text{ s} = 27\,000\,000 \text{ years.}$$

ولكن هذا التصور عن عمر الأرض لا يتفق بأى شكل مع المعطيات الجيولوجية . والطابع التقرىبي لهذه النظرية (إهمال انحناء الأرض وعدم ثبات معامل درجة الحرارة وتقريب قيمة T_0) لا يمكن بالطبع أن يؤدي إلى هذا التغير الكبير فى رتبة القيمة الناتجة لعمر الأرض وهو الذى يقدر وفقا للمعلومات الحديثة بحوالى $2 \cdot 10^9$ سنة تقريبا .

إن الشكل الفيزيائى لنظام درجة حرارة الأرض قد خضع إلى إعادة نظر جوهرية بعد اكتشاف الانقسام الإشعاعى . إن العناصر المشعة المنتشرة فى القشرة الأرضية يحدث عن انقسامها (انحلالها) تسخين لهذه القشرة الأرضية ، ولذا فإن معادلة التوصيل الحرارى يجب أن تكون على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{cp}\right).$$

حيث A هى الكثافة الحجمية للمصادر الحرارية . وعلى أساس القياسات المتعددة لإشعاعية الصخور وقدرتها على البعث الحرارى تؤخذ القيمة

$$A = 1.3 \cdot 10^{-12} \text{ cal/cm}^3\text{s.}$$

وهذه القيمة تأخذ فى الاعتبار الحرارة التى يبعثها اليورانيوم والثوريوم والبوتاسيوم ومنتجات انقسامها .

نفرض أن كثافة المصادر المشعة داخل الكرة الأرضية ثابتة وتساوى قيمة A . المعينة للطبقات العليا من القشرة الأرضية . وفى هذه الحالة فإن كمية الحرارة المنبعثة فى كل الكرة الأرضية خلال وحدة الزمن تكون مساوية :

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

نفرض فرضاً ثانياً وهو أن الأرض لا تسخن بجمرة الإشعاع . وفى هذه الحالة فإن دفع الحرارة خلال وحدة مساحة السطح

$$q = k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

حيث $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}$, k هما معامل التوصيل الحرارى وتدرج درجة الحرارة الأرضية عند سطح الأرض . ومن هنا نعين للقيمة $\frac{\partial u}{\partial z}$ عندما $z=0$ القيمة

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq \frac{AR}{3k} \approx 6.3 \cdot 10^{-2} \text{ grad/cm}$$

حيث $R = 6.3 \cdot 10^3 \text{ km}$ هو نصف قطر الأرض ، $k = 0.004$ القيمة المتوسطة لمعامل التوصيل الحرارى للصخور المترتبة .

وبذلك فتدرج درجة الحرارة الأرضية المحسوب بفرض أن توزيع العناصر المشعة فى الأرض ثابت وأن الأرض لا تسخن نتيجة الانقسام الإشعاعى يزيد برتبتين القيمة الملاحظة للمعامل

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ grad/cm} .$$

وبفرض فرضية ثبات توزيع العناصر المشعة نفرض أن العناصر المشعة موزعة فى طبقة عمقها H على سطح الأرض . وبإهمال انحناء الأرض نحصل لتعيين درجة الحرارة المستقرة على المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & , \quad 0 \leq z \leq H, \\ 0 & , \quad z > H \end{cases}$$

بالشروط

$$u(0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

ومن الواضح أن حل المسألة المطروحة هو

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k} \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right), & 0 \leq z \leq H, \\ \frac{A}{k} \frac{H^2}{2}, & z \geq H, \end{cases}$$

وذلك لأن هذه الدالة متصلة هى ومشتقتها الأولى عند $z = H$ وتحقق شروط المسألة .

وبتعيين قيمة تدرج هذه الدالة عند $z = 0$ المساوى

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{AH}{k} .$$

ومقارنتها بالقيمة الملاحظة $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm نجد أن

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ cm} = 10 \text{ km.}$$

نقدر تأثير فرضية استقرار درجة الحرارة على مقدار تدرج درجة الحرارة الأرضية. ندرس لهذا الغرض حل معادلة التوصيل الحراري.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leq z \leq H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والحدية

$$w(z, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0.$$

وحل هذه المسألة يعبر عنه كما رأينا في بند ٣ بالتكامل

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \zeta; t - \tau) f(\zeta) d\tau d\zeta,$$

حيث G دالة المصدر للمستقيم نصف اللانهائي وتساوي

$$G(z, \zeta; t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - \tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z - \zeta)^2}{4a^2(t - \tau)}} - e^{-\frac{(z + \zeta)^2}{4a^2(t - \tau)}} \right\}.$$

نحسب قيمة التدرج عند $z = 0$ بالأخذ في الاعتبار قيمة الدالة f :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\zeta}{V[a^2(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t - \tau)}} d\zeta d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2(t - \tau)} \int_0^{H^2} e^{-u} du d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2 \theta} [1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 \theta}}] d\theta, \quad \theta = t - \tau.$$

وبذلك فإن

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int_0^\infty e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^3} \right\}$$

حيث

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \frac{d\sigma}{d\sigma^2} = -\frac{a^2}{H} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 t}}.$$

نحسب التكامل

$$\int_{\sigma_1}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma} \Big|_{\sigma_1}^{\infty} - 2 \int_{\sigma_1}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{e^{-\sigma_1^2}}{\sigma_1} - 2 \int_{\sigma_1}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

ومن هنا نجد أن :

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{c\rho a^2} \left\{ \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 t}} \right] + H \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma \right\}. \quad (1)$$

ونشير إلى أن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H,$$

وذلك لأن $c\rho a^2 = k$ ونهاية الحد الأول داخل القوسين تساوى الصفر ونهاية الحد الثاني تساوى H .

نحسب انحراف $\frac{\partial w}{\partial z}$ عن قيمته النهائية عند

$$t = 2 \cdot 10^9 \text{ years} = 6 \cdot 10^{16} \text{ s.}$$

قيمة σ_0 صغيرة :

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^4}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \approx 0.025.$$

وبفك الدوال الداخلة في العلاقة (1) في متسلسلات نحصل على :

$$\frac{A}{k} H - \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\pi} \sigma_0} [\sigma_0^2 + \dots] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \approx \frac{A}{k} H \cdot 0.014,$$

أى أن $\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}$ يختلف عن قيمته الابتدائية بمقدار ١,٤ %.

وليس من العسير حساب الدالة $w(z, t)$ للقيم $z > 0$ والتأكد من أنه لأى $z \geq H$ لا تصل $w(z, t)$ بعد إلى قيمتها النهائية عند t المساوى لعمر الأرض (رغم أن التدرج عن السطح يساوى عملياً كما رأينا قيمته النهائية).

والتحليلات الواردة تحمل بالطبع طابعا تقديريا فقط . غير أنه بالأخذ في الاعتبار الاستقرار الكبير لسرعة الانقسام الإشعاعي التي لا تتغير تحت تأثير درجات الحرارة والضغط المتاحة يجب أن نصل إلى نتيجة تنحصر في أن تركيز العناصر المشعة يجب أن يتناقص بسرعة مع ازدياد العمق إذا ما بنينا تحليلاتنا على أساس القيمة A للطبقات العليا من القشرة الأرضية ، الناتجة من القياسات المتعددة . ولا يوجد حتى الآن تفسير فيزيائي يكفل توضيح قانون تناقص تركيز العناصر المشعة بازدياد العمق .

ملحق ٣ - طريقة التشابه في نظرية التوصيل الحرارى

إن طريقة التشابه تكون مفيدة للغاية لحل عديد من مسائل التوصيل الحرارى . وبمثابة أمثلة ندرس مسألتين :

١ - دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . إن معادلة التوصيل الحرارى ، كما يسهل التحقق من ذلك ، تظل دون تغير عند تحول المتغيرات

$$x' = kx, \quad t' = kt, \quad (1)$$

أى أنه إذا تغير مقياس الطول بمقدار k مرة فإن مقياس الزمن يجب أن يتغير بمقدار k^2 مرة .

سنبحث أولا عن حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (2)$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

وعند التغير المذكور فى المقاييس بظل الشرط الابتدائى (3) دون تغير ، ولذا فللدالة $u(x, t)$ يجب أن تتحقق المتساوية

$$u(x, t) = u(kx, kt^2) \quad (4)$$

لأية قيم x, t, k .

بفرض أن

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}. \quad (5)$$

نحصل على

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (6)$$

وبذلك تعتمد u فقط على المتغير

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \quad (7)$$

وبحساب مشتقات u من العلاقة (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz}.$$

وبالتعويض في معادلة التوصيل الحرارى (2) بهذه القيم للمشتقات واختصار $u_0/4t$ نحصل على :

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \quad (8)$$

بالشروط الإضافية

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad (9)$$

المنظرة للشروط الابتدائى للدالة u .

بتكامل المعادلة (8) سنحصل على :

$$a^2 \frac{f'}{f} = -2z, \quad f' = C e^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

وقد اخترنا النهاية السفلى هنا بحيث يتحقق الشرط الأول من (9). ولكى يتحقق الشرط الثانى من (9) يجب أن نضع

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (10)$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(تكمال الأخطاء) . وإذا كان الشرط الابتدائي على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & , \quad x > \bar{x}, \\ 0 & , \quad x < \bar{x}, \end{cases} \quad (11)$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (12)$$

ونتقل الآن إلى حل المسألة للمساعدة الثانية حيث تعطى القيم الابتدائية في الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad x_2 < x, \\ u_0 & , \quad x_1 < x < x_2, \\ 0 & , \quad x < x_1. \end{cases} \quad (13)$$

وفي هذه الحالة فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right].$$

ودرجة الحرارة الابتدائية u_0 تناظر كمية الحرارة :

$$Q = cp(x_2 - x_1)u_0.$$

وإذا كان

$$Q = cp,$$

فإن

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (14)$$

ودالة تأثير المصدر المركز في النقطة هي عبارة عن نهاية الدالة $u(x, t)$ عندما

$$x_2 - x_1 \rightarrow 0$$

والانتقال إلى النهاية في العلاقة (14) يعطى :

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right]_{\xi=x_1} \quad (15)$$

وذلك لأنه في الطرف الأيمن للعلاقة (14) يوجد فرق نهايته عبارة عن المشتقة في (15).

وبإجراء التفاضل نجد أن :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}}, \quad (16)$$

أى أن $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ وهى دالة المصدر اللحظى النقطى .

٢ - المسائل الحدية للمعادلة شبه الخطية للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة

شبه الخطية للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17)$$

بمعامل التوصيل الحرارى المعتمد على درجة الحرارة .

نعين حل هذه المعادلة الذى يحقق الشرط الحدى والشرط الابتدائى التالين :

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \quad (18)$$

وفى هذه الحالة فإن التحويل (1) أيضا لا يغير المعادلة (17) ولا يغير الشروط الإضافية (18) . ومن هنا ينتج أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (19)$$

وبالاستعانة بهذه الصيغة نحصل للدالة f على :

$$\frac{d}{dz} \left[k(f) \frac{df}{dz} \right] = -2c\rho z \frac{df}{dz} \quad (20)$$

بالشروط الإضافية

$$f(0) = u_1, \quad f(\infty) = u_2. \quad (21)$$

والدالة f في تلك الحالات التي لا يمكن فيها تعيينها تحليليا يمكن تعيينها بواسطة عملية التكامل العددي.

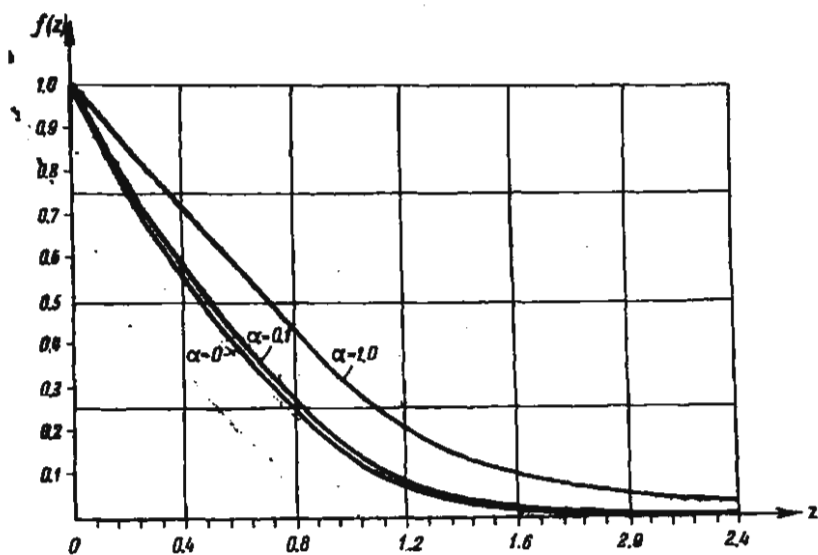
وللمعادلة (20) بافتراضات عامة للغاية بخصوص الدالتين cp ، k لها حل وحيد يحقق الشروط (21)... غير أننا لن نتوقف عند إثبات هذه الحقيقة.

ندرس كمثال المعادلة (17) حيث $k(u) = k_0 + k_1 u$ دالة خطية و cp مقدار ثابت. بتغيير مقياس الزمن وتدرج قيم u نحصل للدالة المحولة على المعادلة $\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$ بالشرطين الابتدائي والحدى $u(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = 1$ بفرضي

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

نحصل للدالة f على المعادلة

$$\frac{d}{dz} \left[(1 + \alpha f) \frac{df}{dz} \right] = -2z \frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (22)$$



شكل ٤٢

وإذا كان معامل التوصيل الحراري $k(u)$ دالة قوى في درجة الحرارة $k(u) = k_0 u^\sigma$ حيث $k_0 = \text{const} > 0$, $\sigma > 0$ وبدلاً من (18) معطاة الشروط

نفسه $u(0, t) = 0$ ، $n > 0$ ، $u(x, 0) = 0$ فإن للمعادلة (17) عندما $cp = 1$ يكون لها حل على الصورة $u(x, t) = t^{-n/2} f(x)$ حيث $x = x/ct$ ، $m = (1 + n\sigma)/2$ ، $c = \text{const} > 0$ وكحاله خاصة عندما $n = \sigma$ نحصل على حل على نمط «موجة درجة الحرارة» المنتشرة بسرعة محدودة c :
 $u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ عندما $x \leq ct$ ، $u(x, t) = 0$ عندما $x \geq ct$.
 (انظر الباب الرابع من الكتاب الثاني ، شكل ١٦) . وفي شكل ٤٢ ترد نتائج عملية التكامل العددي للمعادلة (22) لقيم σ المختلفة .

ملحق ٤ - مسألة على الانتقال الطوري

قد يحدث عند تغير درجة حرارة الجسم تغير في حالته الفيزيائية : كحالة خاصة ، عند مرور درجة الحرارة منطقة الانصهار أى الانتقال من الطور السائل الى الصلب (أو العكس) . وعلى سطح الانتقال الطوري تظل درجة الحرارة طول الوقت ثابتة . وعند حركة سطح الانتقال الطوري يحدث انبعاث للحرارة الكامنة للتجمد (أو الانصهار) . نصيغ تلك الشروط الإضافية التي يجب أن تتحقق على سطح التجمد (التصلب) .

ندرس المسألة المستوية عندما يكون السطح الفاصل عبارة عن المستوى $x = \xi(t)$. وخلال الفترة الزمنية t ، $t + \Delta t$ تتحرك الحدود $x = \xi$ من النقطة $x_1 = \xi$ إلى النقطة $x_2 = x_1 + \Delta \xi$. وعند ذلك تتجمد الكتلة $\rho \Delta \xi$ (أو تنصهر إذا كان $\Delta \xi < 0$) وتنبعث كمية حرارة متناظرة هي $\lambda \rho \Delta \xi$.

ولتحقق التوازن الحرارى يجب أن تكون كمية الحرارة هذه مساوية للفرق بين كميتي الحرارة المارتين خلال الحدود $x_1 = \xi$ ، $x_2 = \xi$ أى يجب أن يتحقق الشرط

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]_{x_1} - \left[k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right]_{x_2} \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi .$$

حيث k_1 ، k_2 معامل التوصيل الحرارى للطورين الأول والثانى و λ هي الحرارة الكامنة للانصهار .

وبالانتقال إلى النهاية عند $\Delta t \rightarrow 0$ نحصل على الشرط الإيفاء على الحدود الفاصلة على الصورة التالية :

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}.$$

ويتحقق هذا الشرط لعملية التجمد (عندما $\frac{d\xi}{dt} > 0$, $\Delta\xi > 0$) ولعملية الانصهار (عندما $\frac{d\xi}{dt} < 0$, $\Delta\xi < 0$) على السواء. ويتحدد اتجاه العملية بإشارة الطرف الأيسر.

ندرس عملية تجمد الماء التي تكون فيها درجة حرارة الانتقال الطوري مساوية للصفر. سندرس كتلة ماء $x \geq 0$ محدودة من ناحية وإحدة بالمستوى $x = 0$. وفي اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكون للماء درجة حرارة ثابتة $c > 0$. وإذا احتفظ على السطح $x = 0$ طول الوقت بدرجة حرارة ثابتة $c_1 < 0$ فإن حدود التجمد $x = \xi$ ستعتمد مع مرور الزمن داخل السائل.

ومسألة توزيع درجة الحرارة عند وجود الانتقال الطوري وسرعة حركة الحدود الفاصلة بين الطورين (على سبيل المثال داخل الماء أثناء تجمده) تقود إلى حل المعادلتين

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & , & \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & , & \quad \xi < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} , \quad x=0 \quad \text{عندما} \quad u_1 &= c_1 \\ , \quad t=0 \quad \text{عندما} \quad u_2 &= c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

والشروط على حدود التجمد

$$, \quad x=\xi \quad \text{عندما} \quad u_1 = u_2 = 0 \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}, \quad (4)$$

حيث a_1^2 , k_1 , a_2^2 , k_2 معاملات التوصيل الحرارى وتوصيل درجة الحرارة للطورين الصلب والسائل على التوالى. وكثيرا ما تسمى المسألة (4) - (1) بمسألة ستيفان، مسألة الانتقال الطوري أو مسألة التجمد.

نبحث عن حل المسألة في الصورة :

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right).$$

حيث A_1, B_1, A_2, B_2 معاملات غير محددة حتى الآن ، و Φ تكامل الأخطاء

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

ونتحقق الشروط (3) ، (2) نحصل على

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

من الشرط (2) ، ونحصل على

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1 \sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2 \sqrt{t}}\right) = 0$$

من الشرط (3) . والشروط الأخيران يجب أن يتحققا لأي t . وهذا ممكن فقط عند تحقق العلاقة

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \quad (5)$$

حيث α ثابت ما . والعلاقة (5) تحدد قانون حركة حدود التجمد . وللثوابت A_1, B_1, A_2, B_2 و α نتج الصيغ :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ولتعيين الثابت α نستعين بالعلاقة (4)

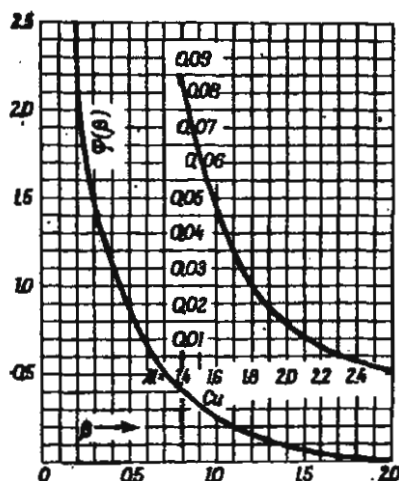
$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7)$$

ويعطى حل هذه المعادلة المتسامية قيمة α . ووجود ولو حل واحد لهذه المعادلة عندما $c > 0$, $c_1 < 0$ إنما يتبع من أنه عند تغير α من الصفر إلى ∞ يتغير الطرف الأيسر للمعادلة من $-\infty$ إلى $+\infty$. والطرف الأيمن يتغير من الصفر إلى $-\infty$. وفي تلك الحالة عندما تكون c

مساوية لدرجة حرارة الانصهار $(c=0)$ فإن الصيغتين (6) ، (7) لتعيين للمعاملات تأخذان صورتين أبسط :

$$A_2 = B_2 = 0, \\ A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \quad (6')$$

$$\frac{\frac{e^{-\beta}}{a_1^2}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7')$$



شكل ٤٣

وبوضع $\alpha/2a_1 = \beta$ يمكننا كتابة المعادلة (7') في الصورة :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

حيث يتحدد الثابت D بالصيغة

$$D = \frac{\lambda \rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

وبالاستعانة بمنحنى الدالة $\Phi(\beta) = \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\pi} \Phi(\beta)}$ الوارد في شكل ٤٣ يمكن بسهولة تعيين قيمة α بيانياً .

إن حل مسألة التجمد (مسألة ستيفان) يمكن الحصول عليه أيضاً بواسطة طريقة التشابه الواردة في الملحق ٣ بهذا الباب . فمسألة التجمد تعتبر بمعنى معين حالة نهائية للمسائل الحدية اللاخطية التي درست في الملحق ٣ . بالفعل فمعاملات التوصيل الحراري والسعة الحرارية في مسألة التجمد تعتبر دوال متقطعة الثبات

* انظر التمثيل التقاربي للدالة $1 - \Phi(z)$ عندما $z \rightarrow \infty$ في الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، قسم ٤ .

وعلاوة على ذلك فنحن $u = 0$ تكون للسعة الحرارية قيمة كبيرة كبرا لانهايتيا . وهذه الحالة يمكن الحصول عليها كحالة نهائية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ وعندما لا تنبعث الحرارة الكامنة انبعاثا لحظيا ولكن تنبعث في خلال فترة ما $-\varepsilon, +\varepsilon$ علما بأنه ينبغي أن يتحقق الشرط

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u) du = \lambda.$$

إلا أن هذه المسألة يمكن حلها مباشرة أيضا بالاستعانة بطريقة التشابه . وليس من الصعب التحقق من أن كل شروط للمسألة ستظل دون تغير إذا ازداد مقياس الطول k مرة وازداد مقياس الزمن k^2 مرة . وهذا يعنى أن حل المسألة يعتمد على المتغير $\frac{x}{\sqrt{t}}$ أى أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

ومن هنا كحالة خاصة ينتج أن حركة الايزوثرم الصغرى توصف بالمعادلة $\xi = \alpha \sqrt{t}$ حيث α قيمة المتغير التى عندها تكون $f(\alpha) = 0$. ولتعيين الدالة f لدينا الشروط التالية :

$$\alpha_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad , \quad 0 < z < \alpha,$$

$$\alpha_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad , \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda \rho \frac{\alpha}{2}.$$

ولذا فالدالة $f(z)$ تكون على الصورة

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2\alpha_1}\right), & 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2\alpha_2}\right), & \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

ولتعيين الثوابت A_1, B_1, A_2, B_2 يجب أن نستعين بالشروط (3) , (2) التى تنتج منها العلاقة (6) . ولتعيين α ينتج الشرط (7) . وبذلك فالجزء التحليلي من الحل واحد في الطريقتين .

وتوضح التصورات الواردة أن مسألة التجمد يمكن حلها أيضا في تلك الحالات عندما تنبعث الحرارة الكامنة خلال فترة معينة من فترات تغير درجة الحرارة وليس فقط عند درجة حرارة معينة مثبتة. وبنفس الطريقة يمكن حل المسألة عندما توجد عدة درجات حرارة حرجية وليس درجة حرارة حرجية واحدة ، وهو ما نقابله في التحولات الطورية في عملية الانتقال من تركيب بلورى معين الى آخر ، على سبيل المثال عند إعادة تبلور الصلب. وأكثر طرق الحل العددي فعالية في حل مسائل الانتقال الطورى هي طريقة الفروق المحدودة التى يمكن تطبيقها في حالة متغيرين أو ثلاثة متغيرات فراغية عند وجود عدة انتقالات طورية (انظر الباب الرابع من الكتاب الثانى ، بند ٤).

ملحق ٥ - معادلة اينشتين - كولموجوروف

تتحرك الجسيمات الميكروسكوبية الموجودة في الوسط في الحالة الحرة المعلقة حركة عشوائية تسمى بالحركة البراونية : نرمز لاحتمال وجود الجسيم الخارج من عند النقطة M_0 في اللحظة t_0 في الجوار الصغير ΔV للنقطة M في اللحظة t بالدالة

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \quad (1)$$

وفهم الاحتمال هنا بمعنى أنه إذا كان يخرج خلال فترة زمنية صغيرة $t_0 + \Delta t$ من النقطة M_0 كمية كبيرة N من الجسيمات (علما بأن التأثير المتبادل فيما بينها ضئيل لدرجة يمكن فيها إهماله) فإن تركيز هذه الجسيمات عندما $\Delta t \rightarrow 0$ عند النقطة M في اللحظة t يكون مساويا $W(M, t; M_0, t_0)$ وذلك إذا اعتبرنا وحدة الكتلة هي كل كتلة الجسيمات الخارجة من النقطة M_0 .

ونقابل مثل هذه الظواهر عند انتشار الغازات الناتج في وسط ما (وسط هوائى مثلا). والدالة $W(M, t; M_0, t_0)$ تمثل دالة المصدر النقطى المناظر لوحدة الكتلة

ومن الواضح أن

$$\int W(M, t; M_0, t_0) dV_M = 1 \quad (t > t_0) \quad (2)$$

وأنه إذا كان التركيز الابتدائى للجسيمات في لحظة زمنية ما t_0 مساويا $\varphi(M)$ فإن التركيز $u(M, t)$ لهذه الجسيمات في اللحظة $t > t_0$ سيكون مساويا

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_P, \quad (3)$$

حيث يؤخذ التكامل على كل الفراغ.

ومن المتساوية الأخيرة نتج المعادلة

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0) dV_P \quad (4)$$

$$(t_0 < \theta < t),$$

التي تتحقق لأية قيمة $t_0 < \theta < t$. وهذه المعادلة الأخيرة تسمى معادلة اينشتين - كولوجوروف.

نوضح أنه عند شروط معينة مفروضة على الدالة $W(M, t; M_0, t_0)$ يحقق حل معادلة اينشتين - كولوجوروف معادلة ما تفاضلية جزئية من النمط المكافئ. ندرس تلك الحالة عندما يتحدد وضع النقطة M بإحداثي واحد x ، ونفرض أن الدالة $W(x, t; x_0, t_0)$ تحقق الشروط التالية:

1°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x - \xi}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi) W(x, t + \tau; \xi, t) dx = A(\xi, t). \quad (5)$$

وإذا انتقل الجسم خلال الزمن τ من الوضع ξ إلى الوضع x فإن $\frac{x - \xi}{\tau}$ تعتبر السرعة المتوسطة للجسم. وبذلك يعنى الشرط الأول مطلب وجود سرعة محدودة للحركة المنتظمة للجسم.

2°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(x - \xi)^2}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 2B(\xi, t). \quad (6)$$

والمقدار $(x - \xi)^2$ لا يعتمد على اتجاه ازاحة النقطة x بالنسبة إلى النقطة ξ . والقيمة المتوسطة لمربع الانحراف خلال الزمن τ :

$$\overline{(x - \xi)^2} = \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx$$

تعتبر عادة مقياساً لعدم انتظام الحركة خلال هذه الفترة الزمنية. ويعنى المطلب 2° افتراض الارتباط الخطي للمتوسط التربيعي بالزمن لقيم τ الصغيرة.

3°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(x - \xi)^3}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 0. \quad (7)$$

والدالة $W(x, t + \tau; \xi, t)$ وهي دالة المصدر النقطي لقيم τ الصغيرة يجب أن تتناقص بسرعة عندما $|x - \xi| \rightarrow \infty$ وتزايد عندما يكون $|x - \xi|$ صغيراً .

وللحصول على معادلة اينشتين - كولموجوروف التفاضلية نضرب طرفي المعادلة (4) في دالة اختيارية $\psi(x)$ نؤول إلى الصفر هي ومشتقتها على حدود منطقة التكامل وتكامل الناتج. على كل هذه المنطقة :

$$\int W(x, t + \tau; x_0, t_0) \psi(x) dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi \int W(x, t + \tau; \xi, t) \psi(x) dx.$$

وبفك الدالة $\psi(x)$ في الطرف الأيمن بمتسلسلة تيلور بقوى $x - \xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}(x - \xi)^3,$$

حيث ξ^0 قيمة متوسطة محصورة بين x و ξ وبالقسمة على τ نحصل بعد اختصارات بسيطة على :

$$\int \psi(x) \frac{W(x, t + \tau; x_0, t_0) - W(x, t; x_0, t_0)}{\tau} dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) \left[\psi'(\xi) \frac{x - \xi}{\tau} + \psi''(\xi) \frac{(x - \xi)^2}{2\tau} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{3! \tau} \int \int \psi'''(\xi^0)(x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx.$$

وبفرض أن $\psi'''(x)$ محدودة

$$|\psi'''(x)| < A$$

مع الأخذ في الاعتبار أن

$$\int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi = 1,$$

نحصل على

$$\left| \frac{1}{\tau} \int \int \psi'''(\xi^0)(x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx \right| \leq \\ \leq \frac{A}{\tau} \int |x - \xi|^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = \frac{A|x - \xi|^3}{\tau}.$$

ومن الشرط 3° ينتج أن هذه الصيغة تؤول إلى الصفر عندما $\tau \rightarrow 0$. ولذا فبالانتقال إلى النهاية عندما $\tau \rightarrow 0$ والاستعانة بالشرطين 1°، 2° نحصل على :

$$\int \psi(x) \frac{\partial W(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} dx = \int W(\xi, t; x_0, t_0) [\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)] d\xi.$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئة للطرف الأيمن والأخذ في الاعتبار أن الدالة ψ تتحول إلى الصفر هي ومشتقتها على حدود منطقة التكامل . نحصل على :

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

وحيث إن هذه العلاقة يجب أن تتحقق لأية دالة اختيارية $\psi(x)$ فإننا نحصل لدالة الاحتمالات $W(x, t; x_0, t_0)$ على معادلة اينشتين - كولموجوروف التفاضلية

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial (AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}. \quad (8)$$

وهذه المعادلة الناتجة هي معادلة من النمط المكافئ مثل معادلة التوصيل الحرارى ويمكن أن تكتب على الصورة :

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x} (BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \quad (9)$$

حيث

$$\alpha = -A + B_{xx}, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

ويتضح من المعادلة (9) أن المقدار B له معنى فيزيائى وهو معامل الانتشار . وإذا كانت العملية محل الدراسة متجانسة فى الفراغ والزمن أى أن الدالة W تعتمد فقط على الفرقين $\xi = x - x_0$, $\theta = t - t_0$ فإن المعاملين A , B لا يعتمدان على x , t ويكونان ثابتين . والمعادلة (8) فى هذه الحالة تصبح معادلة بمعاملات ثابتة

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (10)$$

وإذا اعتمدت الدالة W على $|x - \xi|$ فقط أى أن احتمالى الإزاحة إلى اليمين وإلى اليسار بمسافتين متساويتين من النقطة ξ متساويان . فإنه من الواضح أن A يجب أن يكون مساوياً للصفر . ويتبع ذلك تحليلاً من العلاقة (5) نظراً لأن الدالة المكاملة دالة فردية .

وفى هذه الحالة تكون المعادلة (8) هي المعادلة المبسطة للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (11)$$

ملحق ٦ - دالة دلتا

فقرة ١ : تعريف دالة دلتا . بالإضافة إلى المقادير الموزعة باتصال (الكتلة ، الشحنة ، المصادر الحرارية ، الدفع الميكانيكى وغير ذلك) كثيراً ما نضطر إلى التعامل مع المقادير المركزة (الكتلة النقطية ، الشحنة النقطية ، المصدر الحرارى النقطى ، الدفع المركز .. الخ) . ولا يجب أن ننسى أن هذه المفاهيم هى عبارة عن «نماذج نهائية» ويمكن تحديدها بواسطة مفهوم «الدوال المعممة» .

وبالأخذ فى الاعتبار المعنى الفيزيائى للمسألة ندرس الجهد (potential) فى النقطة M (انظر الباب الرابع ، بند ٥) لوحدة الكتلة المركزة داخل حجم ما T فى جوار النقطة M_0 . نأخذ متتابعة ما للدوال $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$) وكل دالة من هذه الدوال تساوى الصفر خارج الكرة $S_{\epsilon_n}^{M_0}$ التى نصف قطرها ϵ_n ومركزها فى النقطة M_0 . حيث $\epsilon_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ ويكون لها ابتداء من عدد m : n

$$\int_T \int \rho_n(P) d\tau_P = \int_{S_{\epsilon_n}^{M_0}} \int \rho_n(P) d\tau_P = 1. \quad (1)$$

وبدراسة متتابعة الدوال

$$u_n = \int_T \int \frac{\rho_n}{r} d\tau,$$

التي تعتبر جهوداً للكثل الموزعة بالكثافات ρ_n . والانتقال إلى النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ نحصل على :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0 M}}. \quad (2)$$

وهذه النتيجة ، كما هو واضح ، لا تعتمد على اختيار المتتابعة $\{\rho_n\}$. ورغم أن المتتابعة $\{u_n\}$ تتقارب إلى $1/r$ فالمتتابعة $\{\rho_n\}$ ليس لها نهاية فى فئة الدوال متقطعة القابلية للتفاضل محل الدراسة . و «النموذج النهائى» المناظر للمتتابعة $\{\rho_n\}$ يسمى بدالة دلتا $\delta(M, M_0)$.

والصفة الأساسية المميزة لدالة دلتا هى العلاقة المؤثرية الشكلية التالية :

$$\int_T \int \delta(M_0, M) f(M) d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & M_0 \in T, \\ 0, & M_0 \notin T, \end{cases} \quad (3)$$

حيث $f(M)$ دالة اختيارية متصلة في النقطة M . وبالأخذ في الاعتبار أنه عند $n \rightarrow \infty$ تتحول الدوال p_n بانتظام إلى الصفر في أية منطقة لا تحتوي على M_0 وتزداد بلا حدود في الجوار $S_n^{M_0}$ للنقطة M_0 ، تعرف دالة دلنا أحياناً بواسطة العلاقات

$$\left. \begin{aligned} \delta(M, M_0) &= 0 & , & & M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) &= \infty & , & & M = M_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

و

$$\int_T \int_T \delta(M, M_0) d\tau_M = \begin{cases} 1 & , & M_0 \in T, \\ 0 & , & M_0 \notin T. \end{cases} \quad (5)$$

والتساوية (5) تعتبر نتيجة واضحة للعلاقة (3) عندما $f = 1$.

وعند دراسة متتابعات الدوال في مختلف المسائل نضطر إلى التعامل مع تعريفات مختلفة للتقارب.

فيقال إن متتابعة الدوال

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (6)$$

تتقارب بانتظام في الفترة (a, b) إذا أمكن لأي $\varepsilon > 0$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث أنه عندما $n, m > N$ يتحقق لأي x من (a, b) الشرط

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{عند } n, m > N.$$

ويقال إن للمتتابعة (6) تتقارب في المتوسط في الفترة (a, b) إذا أمكن لأي $\varepsilon > 0$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث أنه عندما $n, m > N$ يكون

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^p dx < \varepsilon.$$

ويقال إن المتتابعة (6) تتقارب بضعف في الفترة (a, b) إذا وجدت لأية دالة متصلة f النهاية التالية :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

وعند دراسة المتتابعات المتقاربة تدرج عادة العناصر (الحدود) النهائية للمتتابعات. تدرس فئة الدوال المتصلة في الفترة (a, b) . في حالة التقارب المنتظم يكون العنصر (الحد) النهائي متميماً إلى نفس فئة الدوال وهذا ما لا يتحقق دائماً للتقارب في المتوسط وللتقارب الضعيف.

وإذا كان العنصر النهائي لا ينتمي إلى فئة الدوال المدروسة فإن العناصر النهائية يتم إدراجها بحيث نوسع بذلك الفئة الأصلية. وعند ذلك نقصد بالتوسيع مجمل العناصر الأصلية والنهائية. ونقابل مفهوم التوسيع في نظرية الأعداد الحقيقية عندما تدرج الأعداد غير المنطقية (irrational numbers) كعناصر نهائية معرفة بفئة المتتابعات المتكافئة.

وعندما نتحدث عن العناصر النهائية في معنى التقارب الضعيف سنقول إن متابعتين $\{u_n\}$. $\{v_n\}$ هما نفس العنصر النهائي إذا كانت المتابعتان متكافئتين أي إذا كانت المتابعة $\{u_n - v_n\}$ تقارب بضعف إلى الصفر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

وتسمى متتابعة الدوال غير السالبة $\{\delta_n\}$ متتابعة متوحددة محلية للنقطة x_0 (local normalized sequence) إذا كانت الدالة δ_n مساوية للصفر خارج الفترة $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ و

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

ومن الواضح أن المتابعة $\{\delta_n\}$ تقارب بضعف. والعنصر النهائي للمتابعة $\{\delta_n\}$ يسمى عادة بدالة δ للنقطة x_0 .

وفي تلك الحالة عندما يخرج العنصر النهائي u . بمعنى التقارب الضعيف للمتابعة $\{u_n\}$. من فئة الدوال u_n فإن تكامل حاصل ضرب دالة ما $f(x)$ في العنصر u يعرف بوصفه النهاية

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx = \int_a^b f(x) u dx.$$

ومن الواضح أنه لدالة دلتا للنقطة x_0 تتحقق المتساوية

$$\int_a^b f(x) \delta(x_0, x) dx = f(x_0).$$

وهذه العلاقة كثيرًا ما تعتبر تعريفًا لدالة دلتا.

فقرة ٢ : تحليل دالة دلتا في متسلسلة فورييه . يمكن أيضًا تعريف دالة دلتا بوصفها نموذجًا نهائيًا لمتتابعات أخرى متكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x)$ من الدوال المحلية الموحدة في الدالة x_0 .

ندرس متتابعة الدوال

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n(x_0, x) &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{m\pi}{l} x_0 \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x + \sin \frac{m\pi}{l} x_0 \sin \frac{m\pi}{l} x \right) = \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \cos \frac{m\pi}{l} (x - x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

أو في الصورة المركبة

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l} \sum_{-n}^n e^{im \frac{\pi}{l} (x - x_0)}, \quad (7')$$

المعرفة في الفترة $(-l, l)$.

ومن الواضح أنه لأية دالة $g(x)$ قابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تتحقق المتساوية النهائية التالية :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \bar{\delta}_n(x_0, x) g(x) dx = g(x_0), \quad (8)$$

التي تبين أنه في فئة الدوال $\{g(x)\}$ القابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تكون المتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x_0, x)$ مكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\bar{\delta}_n(x_0, x)$ ، أي أن

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{l} (x_0 - x), \quad (9)$$

وذلك إذا ما فهمنا هذه المتساوية على أساس وجهة نظر التقارب الضعيف الواردة أعلاه .

ومن وجهة النظر هذه تتحقق المتساوية

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(x_0), \quad (10)$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ مجموعة كاملة ومتعامدة ومتوحددة من الدوال معرفة في فترة ما (a, b) . وكذلك تتحقق المتساوية :

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0-x)} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x_0-x) dk. \quad (11)$$

نبين أنه عند حساب التكاملات المحتوية على دالة دلتا يمكن الاستعانة بالمتسلسلة (9) بإجراء التكامل حدًا حدًا للدالة المكاملة .

ندرس دالة ما $g(x)$ قابلة للتحليل في متسلسلة فورييه ، والتكامل

$$\int_{-l}^l g(x) \delta(x_0, x) dx.$$

بالتعويض هنا عن $\delta(x_0, x)$ بصيغتها من العلاقة (9) نجرى عملية التكامل حدًا حدًا للمتسلسلة الموجودة تحت علامة التكامل . فنحصل في النهاية على :

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos \frac{\pi m}{l} x + \bar{g}_m \sin \frac{\pi m}{l} x \right), \quad (11')$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \cos \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \sin \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

وتبين مقارنة العلاقة (11) بالتساوية

$$\int_{-l}^l \delta(x, x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (-l < x_0 < l)$$

أن عملية التكامل حدًا حدًا التي أجريناها أعلاه لمتسلسلة دالة دلتا تؤدي إلى نتيجة صحيحة.

وبذلك ففي فئة الدوال القابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تكون متتابعة المجاميع الجزئية :

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-h}^h e^{i \frac{\pi n}{l} (x-x')}$$

مكافئة للمتتابعة المحلية المتوحدة $\{\delta_n\}$.

والصور الأخرى لتمثيل دالة دلتا مبنية أيضًا على الاستعانة ببعض المتتابعات الدالية المكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\{\delta_n\}$.

فقرة ٣ : تطبيق دالة دلتا لتكوين دالة المصدر. ندرس المسألة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (15)$$

والدالة المعطاة $\varphi(x)$ يناظرها حل وحيد للمسألة

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)].$$

نفرض أن المؤثر $\mathcal{L}$ يمكن التعبير عنه في الصورة :

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

حيث $G(x, \xi, t)$ نواة المؤثر $\mathcal{L}$.

ولتعيين النواة $G(x, \xi, t)$ نضع

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (14')$$

وباستبدال $\varphi(x)$ بدالة دلتا في العلاقة (16) نحصل على :

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \quad (17)$$

أى أن $G(x, x_0, t)$ تعتبر حلاً للمسألة (13) بالشرط الابتدائى (14').

نمبر عن دالة دلتا بمتسلسلة فورييه

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

ومن الواضح أن النواة G يجب البحث عنها في صورة المجموع :

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (18)$$

الذى يجب أن يحقق كل حد من حدوده معادلة التوصيل الحرارى . ومن هنا يتبع أن

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

ومن الشرط الابتدائى نحصل مباشرة على

$$B_n = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

وبذلك حصلنا شكلياً للنواة G على الصيغة :

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0, \quad (19)$$

التي تنطبق على تمثيل دالة المصدر الذى نبحثاه في بند ٣ . ويعطى حل المسألة (15) - (13) بالعلاقة (16) حيث $G(x, x_0, t)$ دالة معرفة بالعلاقة (19) .

وبنفس الطريقة يمكن تعيين صيغة دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . فاندالة G في هذه الحالة ستعرف بالشروط

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (21)$$

وبالأخذ في الاعتبار مفكوك دالة دلنا في تكامل فورييه

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda,$$

سنبحث عن $G(x, x_0, t)$ في الصورة

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_{\lambda}(t) \cos \lambda (x - x_0) d\lambda. \quad (22)$$

ومن المعادلة (20) نعين

$$A_{\lambda}(t) = A_{\lambda}^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (23)$$

وبوضع $t = 0$ ومقارنة العلاقتين (21) - (23) نجد أن

$$A_{\lambda}^{(0)} = 1.$$

وبذلك

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda.$$

ويعطى حساب هذا التكامل :

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

ومن هنا ينتج أن حل مسألة انتشار درجة الحرارة الابتدائية على المستقيم اللانهائي يجب التعبير عنه بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

ويتطلب توضيح حدود قابلية العلاقات الناتجة بطريقة دالة دلنا للتطبيق بحثاً خاصاً.

بمثابة مثال ندرس الآن المعادلة اللامتجانسة :

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}. \quad (25)$$

حيث $F(x, t)$ كثافة المصادر الحرارية الموزعة. وإذا وضع عند النقطة $x = \xi$ في اللحظة $t = t_0$ مصدر حراري لحظي قدرته Q_0 فإن

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi) \delta(t - t_0). \quad (26)$$

نعين حل المعادلة اللامتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho} \delta(x - \xi) \delta(t - t_0) \quad (t_0 > 0) \quad (27)$$

بالشرط الابتدائي الصفري

$$u(x, 0) = 0.$$

وبالأخذ في الاعتبار التمثيل التكامل

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (x - \xi) d\lambda,$$

سنبحث عن الدالة $u(x, t)$ في الصورة :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(t) \cos \lambda (x - \xi) d\lambda.$$

بالتعويض بهذه الصيغة في المعادلة (27) نحصل على معادلة للدالة $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2 \lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \delta(t - t_0)$$

بالشرط الابتدائي

$$u_\lambda(0) = 0.$$

وكما هو معلوم يكون حل المعادلة اللاخطية

$$\dot{u} + a^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

على الصورة :

$$u(t) = \int_0^t e^{-a^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

وفي حالتنا

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0 & , t < t_0 \\ \frac{Q_0}{c\rho} e^{-a^2 \lambda^2 (t-t_0)} & , t > t_0 \end{cases} \quad (29)$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\lambda^2(t-t_0)} \cos \lambda(x-\xi) d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho} G(x, \xi, t-t_0),$$

حيث

$$G(x, \xi, t-t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

هي دالة تأثير المصدر اللحظي النقطة .

ومثل هذه الطريقة لتكوين دالة التأثير تستخدم كثيرًا في الفيزياء النظرية .

الباب الرابع

المعادلات من النمط الناقصى

عند بحث العمليات المستقرة . مهما اختلفت الطبيعة الفيزيائية لكل عملية (ذبذبات . توصيل حرارى . انتشار .. الخ) . نصل عادة إلى معادلات على النمط الناقصى . وأكثر المعادلات على هذا النمط انتشارا هى معادلة لابلاس :

$$\Delta u = 0.$$

والدالة u تسمى دالة توافقية فى المنطقة T إذا كانت متصلة فى هذه المنطقة هى ومشتقاتها حتى الرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس .

وخلال دراسة خواص الدوال التوافقية عولجت ودرست طرق رياضية اتضحت فائدتها وفعاليتها أيضا عند التطبيق على المعادلات على النمطين الزائدى والمكافئ .

بند ١ - المسائل التى تؤدى إلى معادلة لابلاس

فقرة ١ : المجال الحرارى المستقر . صياغة المسائل الحدية . ندرس مجالا حراريا مستقرا . فى الباب الثالث أوضحنا أن درجة الحرارة فى المجال الحرارى غير المستقر تحقق للمعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right).$$

وإذا كانت العملية مستقرة (لا تعتمد على الزمن) فإنه يوجد توزيع لدرجة الحرارة $u(x, y, z)$ لا يتغير مع مرور الزمن وبالتالي يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

وعند وجود مصادر حرارية نحصل على المعادلة

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{P}{k}. \quad (2)$$

حيث F كثافة المصادر الحرارية . k معامل التوصيل الحرارى . ومعادلة لابلاس اللامتجانسة (2) تسمى عادة بمعادلة بواسون .

ندرس حجما ما T محدودا بالسطح Σ . ومسألة توزيع درجة الحرارة $u(x, y, z)$ داخل الجسم T تصاغ على الوجه التالى :

عين الدالة $u(x, y, z)$ التى تحقق داخل T المعادلة

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (2)$$

والشرط الحدى الذى يمكن أخذه على إحدى الصور التالية :

(١) للمألة الحدية الأولى : $u = f_1$ على السطح Σ .

(٢) للمألة الحدية الثانية : $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ على السطح Σ .

(٣) للمألة الحدية الثالثة : $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ على سطح Σ .

حيث f_1, f_2, f_3, h دوال معطاة . $\frac{\partial u}{\partial n}$ المشتقة بالنسبة إلى العمودى الخارجى على السطح Σ .

وللمنى الفيزيائى لهذه الشروط الحدية واضح (انظر الهاب الثالث . بند ١) . وكثيرا ما تسمى للمسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس بمسألة ديريشليت والمسألة الثانية تسمى بمسألة نيان .

وإذا كان يبحث عن الحل فى المنطقة T_0 الداخلية (أو الخارجية) بالنسبة إلى السطح Σ فإن المسألة المناظرة تسمى بالمسألة الحدية الداخلية (أو الخارجية) .

فقرة ٢ : التيار الجهدى للسائل (potential flow) . جهد التيار المستقر والمجال الكهروستاتيكي . ندرس بمثابة المثال الثانى التيار الجهدى للسائل بدون مصادر . نفرض أنه يوجد داخل حجم ما T حدوده Σ تيار مستقر لسائل لا منضغط

• من الواضح أن التوزيع للاستقر لدرجة الحرارة يمكن أن يحدث فقط بشرط أن يساوى الصفر للدفع الإجمالى للحرارة خلال حدود المنطقة . ومن هنا يتبع أن الدالة f_3 يجب أن تحقق شرطا إضافيا وهو :

$$\int_{\Sigma} f_3 d\sigma = 0.$$

(الكثافة $\rho = \text{const}$) يميز بالسرعة $v(x, y, z)$. إذا كان تيار السائل غير دردورى (no vortices) فإن السرعة v تعتبر متجهها جهديا (محافظا) أى

$$v = - \text{grad } \phi, \quad (3)$$

حيث ϕ دالة مقياسية (scalar) تسمى بجهد السرعة . وإذا انعدمت المصادر فإن

$$\text{div } v = 0. \quad (4)$$

بالتعويض هنا بالصيغة (3) للسرعة v نحصل على :

$$\text{div grad } \phi = 0$$

أو

$$\Delta \phi = 0, \quad (5)$$

أى أن جهد السرعة يحقق معادلة لابلاس .

نفرض أنه فى وسط متجانس موصل يوجد تيار مستقر (كهربائى) ذو كثافة حجمية $j(x, y, z)$. وإذا انعدمت المصادر الحجمية للتيار فى الوسط فإن

$$\text{div } j = 0. \quad (6)$$

والجال الكهربائى E يتحدد بواسطة كثافة التيار من قانون أوم التفاضلى

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (7)$$

حيث λ موصلية الوسط . وحيث إن العملية مستقرة فإن الجال الكهربائى يعتبر غير دردورى أو يعتبر مجالا جهديا (محافظا) * . أى توجد تلك الدالة القياسية $\phi(x, y, z)$ بحيث يكون لها

$$E = - \text{grad } \phi \quad (j = - \lambda \text{ grad } \phi). \quad (8)$$

* من معادلة ماكسويل الثانية $\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = - \text{rot } E$ يتبع أن $\text{rot } E = 0$.

ومن هنا وعلى أساس العلاقتين (7) , (6) نستنتج أن

$$\Delta\varphi=0, \quad (9)$$

أى أن جهد المجال الكهربائى للتيار المستقر يحقق معادلة لابلاس .

ندرس المجال الكهربائى للشحنات المستقرة . ويتبع من استقرار العملية أن

$$\text{rot } E=0, \quad (10)$$

أى أن المجال جهدى (محافظ) و

$$E=-\text{grad } \varphi. \quad (8)$$

نفرض أن $\rho(x,y,z)$ هى الكثافة الحجمية للشحنات الموجودة فى الوسط المميز بمعامل العازل (dielectric coefficient) $\epsilon = 1$. وانطلاقا من القانون الأساسى للكهروديناميكا

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \int_T \int \int \rho d\tau, \quad (11)$$

حيث T حجم ما . S السطح الذى يحده . $\sum e_i$ مجموع كل الشحنات داخل T . وبلاستعانة بنظرية اوستروجرادسكى

$$\iint_S E_n dS = \int_T \int \int \text{div } E d\tau, \quad (12)$$

نحصل على :

$$\text{div } E = 4\pi\rho.$$

بالتعويض هنا بالصيغة (8) بدلا من E نحصل على :

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (13)$$

أى إن الجهد الكهروستاتيكى φ يحقق معادلة بواسون . وإذا انعدمت الشحنات الحجمية ($\rho=0$) فإن الجهد φ يجب أن يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi=0.$$

والمسائل الحدية الأساسية للعمليات السابق دراستها تنتمي إلى الأنواع الثلاثة الواردة أعلاه . ولن نتوقف هنا عند بعض المسائل الحدية الأخرى التي تميز مختلف العمليات الفيزيائية . وبعض هذه المسائل سنورده في الملاحق .

فقرة ٣ : معادلة لابلاس في مجموعة الإحداثيات المنحنية . نستنبط صيغة مؤثر لابلاس في مجموعة الإحداثيات المتعامدة المنحنية . نفرض أنه مدرجة في الفراغ مجموعة الإحداثيات المنحنية q_1, q_2, q_3 - بدلا من مجموعة الإحداثيات الكرتيزية x, y, z بالعلاقات

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (14)$$

وبحلها بالنسبة إلى x, y, z يمكن أن نكتب :

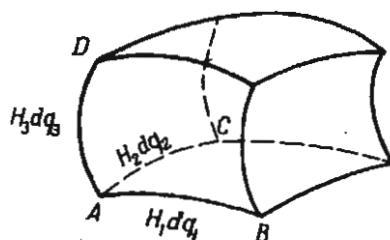
$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \quad (15)$$

بوضع $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$ حيث C_1, C_2, C_3 ثوابت . نحصل على ثلاث عائلات من السطوح الإحداثية :

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

$$f_3(x, y, z) = C_3. \quad (16)$$

ندرس عنصر الحجم في الإحداثيات الجديدة المحدود بثلاثة أزواج من السطوح الإحداثية (شكل ٤٤) . وعلى الضلع



شكل ٤٤

AB يكون $q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}$. وعلى الضلع AD يكون $q_1 = \text{const}$. $q_2 = \text{const}$. وعلى الضلع AC يكون $q_1 = \text{const}, q_3 = \text{const}$. وجوب التمام الاتجاهية لمساحات الأضلاع AB, AC, AD متناسبة على الترتيب مع

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}.$$

وشرط تعامد الأضلاع سيكون على الصورة :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \quad (17)$$

نحسب عنصر الطول في الإحداثيات الجديدة

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3 \right)^2. \quad (18)$$

وبفك الأقواس مع أخذ شرط التعامد (17) في الاعتبار نحصل على :

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (19)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

وعلى امتداد كل ضلع من عنصر الحجم يتغير إحداثي واحد فقط ولذا نحصل لأطوال هذه الأضلاع وفقا للعلاقة (19) على :

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3, \quad (21)$$

ومن ثم فعنصر الحجم يكون مساويا

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (22)$$

ندرس الآن مجالا اتجاهيا ما $A(x, y, z)$. نحسب $\text{div } A$ الذي يعرف بالعلاقة المعروفة من علم التحليل الاتجاهي :

$$\text{div } A = \lim_{v_M \rightarrow 0} \frac{\iint_S A_n dS}{v_M}, \quad (23)$$

حيث S السطح الذي يحد حجما ما v_M يحتوي النقطة محل الدراسة M . نطبق هذه العلاقة على عنصر الحجم dv المبين بشكل ٤٤.

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة يمكن التعبير عن الفرق بين دفق المنتج A خلال وجهي الحجم للتقابلين ، على سبيل المثال خلال الوجهين الأيمن والأيسر .
على الصورة :

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3|_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3|_{q_1}.$$

وبالأخذ في الاعتبار العلاقات (21) نحصل على :

$$Q_1 = [H_2 H_3 A_1|_{q_1+dq_1} - H_2 H_3 A_1|_{q_1}] dq_2 dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (24)$$

وبالمثل بحسب الفرقان الآخرين للدفوق خلال الأوجه للتقابلة :

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (25)$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (26)$$

بالتعويض في العلاقة (23) بقيمة $\int \int A_n ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$ والاستعانة بالعلاقة (22) نحصل على صيغة التباعد (div) في الإحداثيات للتعامدة للثنائية :

$$\text{div } A = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) \right]. \quad (27)$$

نفرض أن المجال A جهدي (محافظ) أي أن

$$A = \text{grad } u. \quad (28)$$

وعندئذ يكون

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (29)$$

بالتعويض في (27) بصيغ A_1, A_2, A_3 من (29) نحصل على صيغة مؤثر لابلاس

$$\Delta u = \text{div grad } u = \\ = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (30)$$

وبذلك فعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات المتعامدة المنحنية q_1, q_2, q_3 تكتب على الصورة التالية :

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right] = 0. \quad (31)$$

ندرس حالتين خاصتين :

١ - الإحداثيات الكروية (القطبية الفراغية) . في هذه الحالة $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ وتأخذ علاقات التحويل (15) الصورة التالية :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

نحسب ds^2 :

$$ds^2 = (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2;$$

وبعد فك الأقواس والاختصارات نحصل على

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

أي أن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

بالتعويض عن قيم H_1, H_2, H_3 في العلاقة (31) نحصل على معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية :

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

أو نهائيا نحصل على :

$$\Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (32)$$

٢ - الإحداثيات الاسطوانية . في هذه الحالة لدينا $q_1 = \rho$

$$q_3 = z, \quad q_2 = \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

ومن ثم فإن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

ومعادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية تأخذ الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (33)$$

وإذا كانت الدالة المجهولة u لا تعتمد على z فإن المعادلة (33) تأخذ صورة مبسطة* :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (34)$$

فقرة ٤ : بعض الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس . تشكل حلول معادلة لابلاس ذات التماثل الكروي أو الأسطواني . أى تلك الحلول التى تعتمد فقط على متغير واحد r أو ρ ، أهمية خاصة .

فحل معادلة لابلاس $u = U(r)$ ذو التماثل الكروي سيتحدد من المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

وبتكامل هذه المعادلة نجد أن

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

حيث C_1, C_2 ثابتان اختياريان . بوضع مثلاً $C_1 = 1, C_2 = 0$ نحصل على الدالة

* ونكتب أيضاً الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

(ملاحظة للترجم) .

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (35)$$

التي كثيراً ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في الفراغ .
وبالمثل بفرض

$$u = U(\rho)$$

وبالاستعانة بالمعادلة (33) أو (34) نعين الحل ذا التماثل الأسطواني أو التماثل
الدائري (في حالة المتغيرين المستقلين) على الصورة

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

وباختيار $C_1 = -1$ و $C_2 = 0$ منجد أن

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (36)$$

والدالة $U_0(\rho)$ كثيراً ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في المستوى
(للمتغيرين المستقلين).

والدالة $U_0 = \frac{1}{r}$ تحقق المعادلة $\Delta u = 0$ في كل مكان إلا النقطة $r = 0$
حيث تتوول فيها إلى المالا نهاية . وبدقة حتى معامل تناسب تنطبق هذه الدالة على
مجال الشحنة النقطية e الموجودة في نقطة أصل الإحداثيات . وجهد هنا المجال
يساوى

$$u = \frac{e}{r}.$$

وبالمثل فالدالة $\ln \frac{1}{\rho}$ تحقق معادلة لابلاس في كل مكان إلا النقطة $\rho = 0$
حيث تتوول فيها إلى المالا نهاية (الموجبة) وبدقة حتى معامل ثابت تنطبق هذه الدالة
على مجال الخط المشحون (انظر تفصيل هنا الموضوع في بند 9 - فقرة ٢) الذي
جهده يساوى

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

حيث e_1 كثافة الشحنة في وحدة الطول . وهاتان الدالتان لها أهمية كبيرة في نظرية
الدوال التوافقية .

فقرة ٥ : الدوال العنقودية والدوال التحليلية في المتغير المركب . تعتبر طريقة استخدام الدوال في المتغير المركب لحل معادلة لابلاس في حالة المسائل الثنائية الأبعاد (في المستوى) طريقة عامة ومنتشرة للغاية .

نفرض أن

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

دالة ما في المتغير المركب $z = x + iy$. علماً بأن u, v تعتبران دالتين حقيقيتين في المتغيرين x, y . وتشكل أهمية بالغة ما يسمى بالدوال التحليلية التي توجد لها المشتقة :

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

والتغير $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ من الواضح أنه يمكن أن يؤدي إلى الصفر بطرق كثيرة . ولكل طريقة من طرق اقتراب Δz إلى الصفر يمكن بوجه عام أن ينتج قيمة معينة للنهية . غير أنه إذا كانت الدالة $w = f(z)$ تحليلية فإن النهاية $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$ لا تعتمد على اختيار طريق الاقتراب إلى الصفر .

والشروط اللازمة والكافية لتحليلية الدالة هي ما يسمى بشروط كوشي - ريمان التالية :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ويمكن الحصول على هذين الشرطين على سبيل المثال بالطريقة التالية :

نفرض أن $w = u + iv = f(z)$ دالة تحليلية . وحساب المشتقات :

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz}$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w}{\partial z} z_y = i \frac{dw}{dz}$$

ويطلب تساوى قيمتي $\frac{dw}{dz}$ المحدتين بهاتين العلاقتين نحصل على :

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz}.$$

ومن هنا نتج شروط كوشي - ريمان . ولن نتوقف عند إثبات كفاية هذين الشرطين .

وفي نظرية الدوال في المتغير المركب يتم إثبات أن الدالة التحليلية في منطقة ما G في المستوى $z = x + iy$ يكون لها في هذه المنطقة مشتقات من جميع الرتب ويمكن تحليلها في متسلسلة قوى . وكحالة خاصة يوجد لمثل هذه الدالة الدالتان $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ولهما مشتقات متصلة من الرتبة الثانية في x و y .

وبتفاضل المتساوية الأولى من العلاقتين (37) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى y نحصل على :

$$\Delta_2 u = 0 \quad \text{أو} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وبنفس الطريقة بتغيير ترتيب عملية التفاضل نحصل على :

$$\Delta_2 v = 0 \quad \text{أو} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

وبذلك فإن كلا من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة التحليلية يحقق معادلة لابلاس . ويقال عادة إن الدالتين u و v اللتين تحققان شرطي كوشي - ريمان تعتبران دالتين توافقيتين مترافقتين .

ندرس التحويل

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), & u &= u(x, y), \\ y &= y(u, v), & v &= v(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

الذى يعكس انعكاساً متبادلاً أحادى القيم منطقة ما G من المستوى (x, y) في منطقة G' من المستوى (u, v) بحيث إن كل نقطة من نقط المنطقة G تناظرها نقطة معينة في المنطقة G' . وبالعكس كل نقطة من نقط المنطقة G' تناظرها نقطة معينة في المنطقة G .

نفرض أن

$$U = U(x, y)$$

دالة ما حقيقية قابلة مرتين للتفاضل باتصال ومعرفة داخل المنطقة G .

نوضح كيف يتغير عند هذا التحويل مؤثر لابلاس على الدالة
 $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \bar{U}(u, v)$

نحسب مشتقات الدالة

$$\begin{aligned} U_x &= \bar{U}_u u_x + \bar{U}_v v_x, & U_y &= \bar{U}_u u_y + \bar{U}_v v_y, \\ U_{xx} &= \bar{U}_{uu} u_x^2 + \bar{U}_{vv} v_x^2 + 2\bar{U}_{uv} u_x v_x + \bar{U}_{uu} u_{xx} + \bar{U}_{vv} v_{xx}, \\ U_{yy} &= \bar{U}_{uu} u_y^2 + \bar{U}_{vv} v_y^2 + 2\bar{U}_{uv} u_y v_y + \bar{U}_{uu} u_{yy} + \bar{U}_{vv} v_{yy}, \end{aligned}$$

ومن هنا نحصل على :

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \bar{U}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \bar{U}_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + \\ &+ 2\bar{U}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \bar{U}_{uu} (u_{xx} + u_{yy}) + \bar{U}_{vv} (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \quad (39)$$

وإذا كانت الدالتان u, v توافقتين مترافقتين فإن التحويل (38) يكافئ التحويل المتحقق بالدالة التحليلية

$$w = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (40)$$

وفي هذه الحالة ووفقاً لشرطي كوشي - ريمان (37) يجب أن تتحقق للدالتين u, v العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned}$$

وتأخذ العلاقة (39) الصورة :

$$U_{xx} + U_{yy} = (\bar{U}_{uu} + \bar{U}_{vv}) |f'(z)|^2 \quad (41)$$

أو

$$\Delta_{uv} \bar{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_{x,y} U. \quad (41')$$

ومن هنا ينتج أنه بعد التحويل (40) تحول الدالة $U(x, y)$ التوافقية في المنطقة G إلى الدالة $\bar{U} = U(u, v)$ التوافقية في المنطقة G' فقط إذا كان $|f'(z)|^2 \neq 0$.

فقرة ٦ : تحويل مقلوبات متجهات الموضع * . عند دراسة الدوال التوافقية كثيراً ما يستخدم تحويل مقلوبات متجهات الموضع . إن تحويل مقلوبات متجهات الموضع في الكرة التي نصف قطرها a هو ذلك التحويل الذي يضع أية نقطة M في تناظر مع النقطة M' الواقعة على نفس الشعاع الخارج من نقطة الأصل . الذي تقع عليه النقطة M . ويرتبط متجه موضعها r' بمتجه الموضع r للنقطة M بالعلاقة :

$$(42) \quad r' r = a^2 \text{ أو } r' = \frac{a^2}{r}$$

وفي المستقبل سنعتبر أن $a = 1$ وهو ما يمكن التوصل إليه دائماً بتغيير مقياس رسم الأطوال .

نوضح أن الدالة التوافقية في متغيرين مستقلين $u(\rho, \varphi)$ تتحول بتحويل مقلوبات متجهات الموضع إلى دالة توافقية :

$$(43) \quad u(\rho, \varphi) = v(\rho', \varphi) \quad \text{حيث} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}$$

بالفعل الدالة $u(\rho, \varphi)$ وبالتالي الدالة $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ كالتين في المتغيرين ρ, φ تحققان الشروط :

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

و

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

وبالانتقال إلى المتغيرين ρ', φ نحصل على :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'}$$

ومن هنا ينتج أن $v(\rho', \varphi)$ تحقق المعادلة $\Delta_{\rho', \varphi} v = 0$ وذلك لأن

$$\rho'^2 \Delta_{\rho', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

* vector position ويسمى في الراجع السفيينة بنصف القطر للوجه radius - vector (للترجم).

وبالانتقال إلى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نوضح أن الدالة

$$r = \frac{1}{r'} \quad \text{حيث} \quad v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi) \quad (44)$$

تتحقق معادلة لابلاس $\Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0$ إذا كانت الدالة $u(r, \theta, \varphi)$ دالة توافقية في متغيراتها $\Delta_{r, \theta, \varphi} u = 0$.

ويسمى عادة التحويل (44) بتحويل كلفن .

ومن السهل التحقق بواسطة عملية التفاضل المباشر من أن الحد الأول في مؤثر لابلاس (32) يتحول إلى الصورة :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad (45)$$

ومن ثم فإن

$$r \Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

أو

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

وملاحظة أن

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial r} = -r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'},$$

نجد أن v تحقق المعادلة $\Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0$ وذلك لأن

$$r'^3 \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^3 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) + r'^3 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

أو

$$r'^4 \Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0.$$

بند ٢ - الخواص العامة للدوال التوافقية

في هذا البند نورد التمثيل التكاملي للدوال التوافقية الذى يعتبر جهازاً أساسياً لدراسة الخواص العامة للدوال التوافقية . ويعتبر مبدأ القيمة العظمى ، الذى

سنستخدمه كثيراً في المستقبل سواء عند إثبات نظرية الوجدانية أو عند حل المسائل الحدية ، إحدى النتائج الهامة للعلاقة التكاملية . وهنا أيضاً سنعطى الصياغة الرياضية للمسائل الحدية الداخلية والخارجية لمعادلة لابلاس وستتبع وحدانية واستقرار حلول هذه المسائل .

فقرة ١ : علاقات جرين . التمثيل التكاملي للحل . عند دراسة المعادلات على النمط الناقص سنستعين كثيراً بعلاقات جرين التي تعتبر نتيجة مباشرة من علاقة أوستروجرادسكي .

وتكون علاقة أوستروجرادسكي في أبسط حالة على الصورة :

$$\int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_\Sigma R \cos \gamma d\sigma, \quad (1)$$

حيث T حجم ما محدود بسطح أملس بدرجة كافية Σ ، و $R(x, y, z)$ دالة اختيارية متصلة داخل $T + \Sigma$ ولها مشتقات متصلة داخل T . و γ الزاوية بين اتجاه المحور z والعمودى الخارجى على Σ . وليس من الصعب التأكد من صحة هذه العلاقة بإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى z .

وتكتب علاقة أوستروجرادسكي عادة على الصورة :

$$\int_V \int \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \int_\Sigma \{ P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma \} d\sigma, \quad (2)$$

حيث $d\tau = dx dy dz$ عنصر الحجم ، و $\alpha = (\hat{nx})$ ، $\beta = (\hat{ny})$ ، $\gamma = (\hat{nz})$ الزوايا بين العمودى الخارجى n على السطح Σ والمحاور الإحداثية و P, Q, R دوال اختيارية قابلة للتفاضل * .

وإذا اعتبرنا P, Q, R مركبات متجه ما $A = Pi + Qj + Rk$ فإن علاقة أوستروجرادسكي (2) يمكن كتابتها في الصورة التالية :

* في المستقبل سنفترض أن علاقة أوستروجرادسكي قابلة للتطبيق على تلك المناطق التي ستعامل معها . ومثل هذه المطوح هي على سبيل المثال المطوح ذات الانحناء للقطع الاتصال وكذلك سطوح ليايبنوف (انظر بند ٥) .

$$\int_T \int \operatorname{div} A \, d\tau = \int_{\Sigma} A_n \, d\sigma, \quad (2')$$

حيث

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

و

$$A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

مركبة المتجه A على امتداد العمودى الخارجى.

وننتقل الآن إلى استنباط علاقات جرين.

نفرض أن $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ حالتان متصلتان هما ومشتقاتهما الأولى داخل $T + \Sigma$ ولها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة داخل T .

بفرض أن

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

والاستعانة بعلاقة اوستروجرادسكى (2') نصل إلى ما يسمى بعلاقة جرين الأولى :

$$\int_T \int \int u \Delta v \, d\tau = \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \int_T \int \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau, \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{حيث مؤثر لابلاس}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{المشتقة باتجاه العمودى الخارجى.}$$

وإذا أخذنا في الاعتبار العلاقة *

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

* الرمز ∇ يسمى «نابلا». والعلاقة المذكورة يسهل فهمها كحاصل ضرب قياسي لتجهين إذا علمنا أن

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

ويسمى ∇ أحيانا بمؤثر هاميلتون (ملاحظة للترجم).

فإن علاقة جرين يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$\int_T \int_T \int_T u \Delta v \, d\tau = - \int_T \int_T \nabla u \nabla v \, d\tau + \int_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma. \quad (3')$$

وبتغيير دورى اللاتين u , v نحصل على :

$$\int_T \int_T \int_T v \Delta u \, d\tau = - \int_T \int_T \nabla v \nabla u \, d\tau + \int_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \quad (4)$$

وبطرح المتساوية (4) من المتساوية (3') نحصل على علاقة جرين الثانية

$$\int_T \int_T \int_T (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5)$$

والمنطقة T^2 يمكن أن تكون محدودة بعدة سطوح . وعلاقات جرين قابلة للتطبيق في هذه الحالة أيضًا علمًا بأن التكاملات السطحية يجب أخذها على كل السطوح التي تحده المنطقة T^2 .

ولللاتين $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ في المتغيرين المستقلين تتحقق علاقات جرين الماثلة للسابقة . فعلاقة جرين الثانية في المنطقة S التي حدودها C تكون على الصورة :

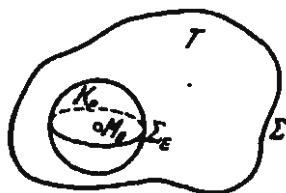
$$\int_S \int_S (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) \, dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

حيث $dS = dx dy$, و ds عنصر طول القوس على امتداد C , و $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$, و $\frac{\partial}{\partial n}$ للشتقة باتجاه العمودى الخارجى n على المنحنى C .

وكما رأينا (بند ١ ، فقرة ٤) فإن اللالة $U_0(M) = \frac{1}{R}$ حيث $M(x, y, z)$ البعد بين النقطتين $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ و $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تحقق معادلة لابلاس عندما $M \neq M_0$.

نفرض أن $u(M)$ حالة توافقية متصلة هي ومشتقاتها الأولى في المنطقة $T + \Sigma$ ولها مشتقات من الرتبة الثانية في T . ندرس اللالة $v = 1/R_{M_0}$ حيث M_0

نقطة داخلية ما في المنطقة T . وحيث إن هذه الدالة لها داخل T انفصال عند النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فإنه لا يمكن تطبيق علاقة جرين الثانية تطبيقاً مباشراً في المنطقة T على الدالتين u, v . غير أن الدالة $v = 1/R_{MM_0}$ محدودة في المنطقة $T - K_\varepsilon$ ذات الحدود $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$ حيث K_ε كرة نصف قطرها ε ومركزها في النقطة M_0 وسطحها Σ_ε (شكل ٤٥) .



شكل ٤٥

بتطبيق علاقة جرين الثانية (5) على الدالتين $u, v = 1/R$ في المنطقة $T - K_\varepsilon$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau = \\ = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (6) \end{aligned}$$

وفي الطرف الأيمن لهذه المتساوية يعتمد التكاملان الثاني والثالث فقط على ε (التكامل الأول لا يعتمد على ε) . وبحساب المشتقة بالعمودى الخارجى للمنطقة $T - K_\varepsilon$ على Σ_ε نجد أن :

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{r=\varepsilon} = - \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

ومن هنا

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*. \quad (7)$$

حيث u^* القيمة المتوسطة للدالة $u(M)$ على السطح Σ_ε . نختصر التكامل الثالث

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*. \quad (8)$$

حيث $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$ القيمة المتوسطة للمشتقة العمودية على السطح الكروي Σ_ε . بالتعويض بالصيغتين (8) , (7) في العلاقة (6) والأخذ في الاعتبار أن

$T - K_s$ في $\Delta(1/R) = 0$ نحصل على :

$$\iiint_{T-K_s} \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi s \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* . \quad (9)$$

ويجعل نصف القطر s يؤول إلى الصفر نحصل على :

١ - $\lim_{s \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$ وذلك لأن $u(M)$ دالة متصلة و u^* هي قيمتها المتوسطة على السطح الكروي ذي نصف القطر s ومركزه في النقطة M_0 ؛

٢ - $\lim_{s \rightarrow 0} 4\pi s \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$ لأنه ينتج من اتصال المشتقات الأولى للدالة $u(M)$ داخل T محدودية المشتقة العمودية

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

في جوار النقطة M_0 ؛

٣ - وفقاً لتعريف التكامل المعتل (improper integral) يكون

$$\lim_{s \rightarrow 0} \iiint_{T-K_s} \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau = \iiint_T \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau .$$

ونتيجة للانتقال إلى النهاية المذكور $s \rightarrow 0$ نتوصل إلى علاقة جرين التكاملية الأساسية :

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \iint_T \int \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau , \quad (10)$$

حيث $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطة ذات إحداثيات ξ, η, ζ واقعة على السطح Σ . وإذا كانت النقطة M_0 تقع خارج للمنطقة T فإن $\sigma = 1/R_{M_0 P}$ متصلة وتوافقية في جميع نقط للمنطقة T ، ولذا نحصل في الطرف الأيسر من العلاقة (10) على صفر .

ندرس الحالة عندما M_0 تنتمي إلى السطح Σ ، نفرض أن Σ له عند M_0 مستوى مماسي مبيوله متصلة . والسطح الكروي Σ_s الذي نصف قطره s ومركزه

M_0 يقطع السطح Σ ويقسمه إلى جزأين Σ_1 , Σ_2 والجزء Σ_1 يقع داخل الكرة K_0 . نطبق علاقة جرين (5) على u و $v = 1/R$ في المنطقة $T - T_1$ حيث T_1 المنطقة المحدودة بالسطح Σ_1 ويحده السطح الكروي Σ_2 الواقع داخل T . والشكل العام للتحليلات التي أدت إلى العلاقة (9) يظل هنا دون تغير. وعند ذلك ينبغي فقط الأخذ في الاعتبار أن التكامل على $\Sigma_1 + \Sigma_2'$ يؤول إلى $2\pi u(M_0)$ وإدخال التغيرات للنظرة في (7), (8), (9). وفي النهاية نتوصل إلى علاقة تنتج من (10) بوضع 2π بدلاً من 4π .

وتوحيد هذه الحالات نكتب علاقة جرين الأساسية على الصورة

$$\Omega \cdot u(M_0) = - \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_P - \int_T \int_{\Sigma} \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\tau_P, \quad (10')$$

حيث Ω تأخذ القيم التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع داخل } T \\ 2\pi \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ على الحدود } \Sigma \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع خارج } T \end{array} \right\} = \Omega$$

ونشير إلى أنه إذا كانت النقطة M_0 هي عبارة عن رأس مخروطي للسطح Σ فإن $\Omega = \alpha$ حيث α الزاوية المحسمة (solid angle) بين مماسات السطح Σ عند النقطة M_0 .

وللالة التوافقية حيث $\Delta u = 0$ تأخذ العلاقة (10) الصورة :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_P \quad (11)$$

(M_0 داخل T)

وبذلك فإن قيمة الدالة التوافقية في أية نقطة داخلية في المنطقة يعبر عنها بدلالة قيمة هذه الدالة ومشتقتها العمودية على سطح المنطقة. وعند ذلك يفترض اتصال

الدالة u ومشتقاتها الأولى في المنطقة وعلى الحدود . ونشير فوراً إلى أن كل تكامل من التكاملين

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P \quad , \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P \quad (12)$$

حيث v , μ دالتان متصلتان ، يعتبر دالة توافقية خارج السطح Σ . بالفعل فحيث إن الدالتين المكاملتين وكل مشتقاتها متصلة خارج السطح Σ فإن مشتقات الدالتين (12) من أية رتبة يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل . وعلاوة على ذلك ، حيث إن الدالتين

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{MP}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_P + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_P \end{aligned}$$

تحققان معادلة لابلاس بالمتغيرات $M(x, y, z)$ ، فإنه وفقاً للمبدأ المعمم للترابك (انظر المأخوذة صفحة ٢٦٤) تحقق الدالتان (12) أيضاً معادلة لابلاس بالمتغيرات x, y, z

ومن هنا تنتج نتيجة هامة : أية دالة توافقية داخل منطقة توافقيتها تكون قابلة للتفاضل عدداً لانهائياً من المرات $^{\circ}$. ونشير أيضاً إلى أن الدالة التوافقية تحليلية (تحلل في متسلسلة قوى) في أية نقطة M_0 من نقاط المنطقة T . ويمكن التأكد من ذلك بواسطة تحليلات مبنية على أساس نفس هذا التمثيل التكاملى (11) . وتتحقق علاقات مماثلة أيضاً للدوال التوافقية في متغيرين اثنين مستقلين . نفرض أن S منطقة ما في المستوى (x, y) محدودة بالمنحنى C ، و n هو اتجاه العمودى على هذا المنحنى ، الخارجى بالنسبة إلى المنطقة S .

بالفرض في علاقة جرين الثانية أن $\sigma = \ln(1/R_{MP})$. حيث

• إذا لم يتحقق للدالة u التوافقية داخل T شرط اتصالها بمشتقاتها الأولى على السطح Σ فإن النظرية تحتفظ مع ذلك بصحتها وهو ما يمكن التأكد منه بإحاطة النقطة M بمنطقة واقعة في وحدودها داخل T .

$R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ هو بعد النقطة $P(x, y)$ عن نقطة مثبتة $M_0(x_0, y_0)$ ، وبإجراء تحليلات وخطوات مشابهة لتلك التي أجريناها لحالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نحصل على علاقة جرين الأساسية في المستوى :

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P - \int_S \int \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} ds_P,$$

حيث

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع داخل } S \\ \pi \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع على } C \\ 0 \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع خارج } S \end{array} \right\} = \Omega$$

وإذا كانت $u(M)$ دالة توافقية داخل S وكانت النقطة M_0 تقع داخل S فإن :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P.$$

فقرة ٢ : بعض الخواص الأساسية للدوال التوافقية . ثبت بعض الخواص الهامة للدوال التوافقية :

١ - إذا كانت v دالة توافقية في المنطقة T المحدودة بالسطح Σ فإن

$$\int_S \int \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (13)$$

حيث S أى سطح مغلق يقع كلية في المنطقة T .

بالفعل فبالتعويض في علاقة جرين الأولى (3) بدالة ما توافقية ($\Delta v = 0$) وبالدالة $u = 1$ نحصل فوراً على العلاقة (13) . ومن العلاقة (13) ينتج أن المسألة الحدية الثانية ($\Delta u = 0$ في T و $\frac{\partial u}{\partial n} = f|_{\Sigma}$) يمكن أن يكون لها حل فقط بشرط أن

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = 0.$$

وخاصية الدوال التوافقية هذه يمكن تفسيرها بوصفها شرطاً لانعدام المصادر داخل المنطقة T

٢- إذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية في منطقة ما T وكانت M_0 نقطة ما تقع داخل T فإن العلاقة التالية تتحقق :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (14)$$

حيث Σ_a سطح كروي نصف قطره a ومركزه في النقطة M_0 ويقع كلية في المنطقة T (نظرية القيمة المتوسطة).

وتؤكد هذه النظرية أن قيمة الدالة التوافقية في نقطة ما M_0 تساوي القيمة للمتوسطة لهذه الدالة على أى سطح كروي Σ_a مركزه في M_0 إذا كان هذا السطح الكروي Σ_a لا يخرج خارج منطقة توافقية الدالة $u(M)$.

نطبق العلاقة (11) على الكرة K_a التي مركزها في النقطة M_0 وسطحها Σ_a :

$$4\pi u(M_0) = - \int_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

وبالأخذ في الاعتبار أن $\frac{1}{R} = \frac{1}{a}$ على Σ_a وأن

$$\int_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(ينطبق اتجاه العمودى الخارجى على Σ_a مع اتجاه نصف القطر) نحصل فوراً على

(14) *

• عند إثبات هذه النظرية استعنا بالمتساوية (13) التي تفترض وجود المشتقات على سطح الكرة. وإذا كانت الدالة $u(M)$ متصلة في المنطقة للعلاقة $T + \Sigma$ ونحقق للمادة $\Delta u = 0$ فقط في القطر الداخلية من T فإن الاستنتاج السابق للسطح الكروي Σ_a الذى يمس Σ سيكون غير مبرر. إلا أن النظرية صحيحة لأى $a < a_0$ وبالتنقل إلى النهاية عندما $a \rightarrow a_0$ نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \int_{\Sigma_{a_0}} u(M) d\sigma.$$

وبكتابة (14) على الصورة :

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \int_{\Sigma_p} u(P) d\sigma_p$$

وإجراء التكامل بالنسبة إلى ρ من 0 إلى a نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \int_{K_a} u d\tau_p, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

أى أن $u(M_0)$ هى القيمة المتوسطة فى حجم الكرة K_a ذات الحدود Σ_a .
ولحالة المتغيرين المستقلين تكون نظرية القيمة المتوسطة الماثلة صحيحة أيضاً :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u ds, \quad (15)$$

حيث C_a محيط دائرة نصف قطرها a ومركزها فى النقطة M_0 ، ويقع فى منطقة توافقية u .

٣- إذا كانت الدالة $u(M)$ معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ وتحقق المعادلة $\Delta u = 0$ داخل T فإن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى على السطح Σ (مبدأ القيمة العظمى).

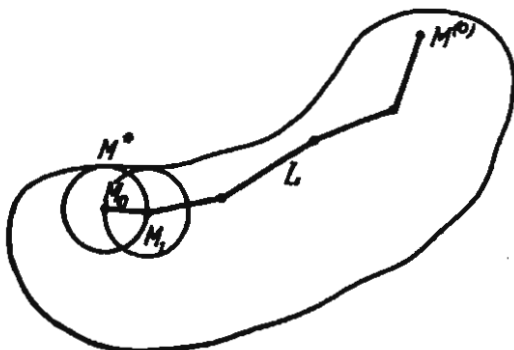
نفرض أن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمتها العظمى فى نقطة داخلية ما M_0 من نقط المنطقة T ، ومن ثم فإن $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$ حيث M أية نقطة فى المنطقة T . نحيط النقطة M_0 بسطح كروى Σ_ρ نصف قطره ρ ويقع بأكمله داخل المنطقة T . وحيث إن $u(M_0)$ هى حسب الفرض أكبر قيمة للدالة $u(M)$ فى $T + \Sigma$ فإن $u|_{\Sigma} \leq u(M_0)$. وبلاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة (14) ووضع $u(M_0)$ بدلاً من $u(M)$ تحت علامة التكامل نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_M \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0). \quad (16)$$

وإذا افترضنا أنه $u(M) < u(M_0)$. ولو فى نقطة واحدة M من نقط السطح الكروى Σ_ρ فمن الواضح أنه سيكون لدينا العلامة $<$ بدلاً من العلامة $\leq$ مما

يؤدي إلى تناقض . وبذلك فعلى كل السطح Σ_0 يكون $u(M) = u(M_0)$.

وإذا كانت ρ_0^* هي أصغر بعد من M_0 إلى السطح Σ فإن $u(M) = u(M_0)$ لجميع النقط الواقعة داخل $\Sigma_{\rho_0^*}$. ومن هنا يتبع أنه في النقط M^* المنتمية إلى الأجزاء المشتركة بين Σ و $\Sigma_{\rho_0^*}$ يكون وفقاً للاتصال $u(M^*) = u(M_0)$. وهذا يثبت النظرية نظراً لأننا نأكدنا أن القيمة العظمى $u(M_0)$ تصلها الدالة في نقط الحدود M^* .



شكل ٤٦

وليس من الصعب التأكد من أنه إذا كانت للمنطقة T منطقة متصلة وكانت الدالة تصل إلى قيمتها العظمى ولو في نقطة واحدة داخلية M_0 فإن $u(M) = u(M_0)$ في كل المنطقة . نفرض أن $M^{(0)}$ نقطة ما أخرى من نقط المنطقة T . نوصل النقطة $M^{(0)}$ بالنقطة M_0 بالخط المنكسر L (شكل ٤٦) الذي نرمز لطوله بالحرف l . نفرض أن M_1 هي النقطة الأخيرة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_0^*}$. وفي هذه النقطة $u(M_1) = u(M_0)$. نرمم حول هذه النقطة سطحاً كروياً $\Sigma_{\rho_1^*}$ نصف قطره ρ_1^* (مركزه في M_1) ويمس Σ ونفرض أن M_2 هي آخر نقطة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_1^*}$. وفي هذه النقطة $u(M_2) = u(M_0)$. وبلاستمرار في هذه العملية نحصل على أنه ليس بعد أكثر من $p = l/\rho^{(0)}$ خطوة ، حيث $\rho^{(0)}$ أصغر بعد بين الخط L و Σ ، سيحيط أحد السطوح الكروية بالنقطة $M^{(0)}$ ومنها يتبع أن $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. ووفقاً للطابع الاختياري للنقطة $M^{(0)}$ واتصال $u(M)$ في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ نستنتج أن $u(M) = u(M_0)$ في كل مكان بما

في ذلك نقط الحدود . وبذلك فن بين جميع الدوال التوافقية تصل الدالة الثابتة فقط إلى نهايتها العظمى في النقط الداخلية للمنطقة .

ويمكن إثبات نظرية مماثلة للقيمة الصغرى .

نتيجة ١ . إذا كانت الدالتان U , u متصلتين في المنطقة $T + \Sigma$ وتوافقيتين في T وكان

$$u \leq U \text{ على } \Sigma ,$$

فإن

$$u \leq U \text{ في كل مكان داخل } T .$$

بالفعل فالدالة $U - u$ متصلة في $T + \Sigma$ وتوافقية في T و

$$U - u \geq 0 \text{ على } \Sigma .$$

ووفقاً لمبدأ القيمة العظمى يكون

$$U - u \geq 0 \text{ في كل مكان داخل } T .$$

ومن هنا تنتج صحة منطوقنا .

نتيجة ٢ . إذا كانت الدالتان U , u متصلتين في المنطقة $T + \Sigma$ وتوافقيتين في T وكان

$$|u| \leq U \text{ على } \Sigma ,$$

فإن

$$|u| \leq U \text{ في كل مكان داخل } T .$$

ومن شروط النظرية يتبع أن الدوال التوافقية الثلاث $(U, u, -U)$ تحقق الشروط

$$-U \leq u \leq U \text{ على } \Sigma .$$

وبتطبيق النتيجة ١ مرتين نحصل على :

$$-U \leq u \leq U \text{ في كل مكان داخل } T ,$$

$$|u| \leq U \text{ داخل } T.$$

نتيجة ٣. للدالة $u(M)$ التوافقية في T والمتصلة في $T + \Sigma$ تتحقق المتباينة $|u| \leq \max |u|_z$ في كل مكان داخل T . ولايثبات ذلك نضع $U = \max |u|_z$ ونستعين بالنتيجة ٢.

ورغم أن الشرح ورد لحالة الفراغ الثلاثي الأبعاد إلا أن النتائج تعمم على حالة الدوال التوافقية في أى عدد من المتغيرات.

فقرة ٣: وحدانية واستقرار المسألة الحدية الأولى. نفرض أنه معطاة المنطقة T المحدودة بالسطح المغلق Σ المعطى عليه دالة ما f . وفي الحالة المبسطة عندما تكون الدالة الحدية f متصلة تصاغ عادة المسألة الحدية الداخلية الأولى (مسألة ديريشليت الداخلية) لمعادلة لابلاس على الوجه التالي:

المطلوب تعيين الدالة u التي

(أ) تكون معرفة ومتصلة في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ بما في ذلك الحدود؛

(ب) تحقق داخل المنطقة T المعادلة $\Delta u = 0$ ؛

(ج) تأخذ على حدود Σ قيم f المعطاة.

وفي الشرط (أ) يفترض توافقية الدالة داخل المنطقة T . وطلب التوافقية على الحدود يعتبر مطلباً زائداً عن الحاجة لأنه كان سيؤدي إلى تقييد إضافي للقيم الحدية.

وشرط اتصال u في المنطقة المغلقة (أو أى شرط آخر يوضح معنى أن الدالة u تأخذ على الحدود القيم المعطاة) هو شرط ضروري لوحداية الحل. وإذا رفضنا هذا الشرط فإن أية دالة مساوية للثابت C داخل T وللدالة المعطاة f على Σ يمكن اعتبارها حلاً للمسألة لأنها تحقق الشرطين (ب) و (ج).

نثبت نظرية الوحداية:

المسألة الحدية الداخلية الأولى لمعادلة لابلاس لا يمكن أن يكون لها حلان مختلفان.

نفرض أنه توجد دالتان مختلفتان u_1, u_2 تعتبران حلين للمسألة أى أنها دالتان متصلتان في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ تحققان داخل المنطقة معادلة لابلاس وتأخذان على السطح Σ نفس قيم الدالة f . والفرق بين الدالتين $u = u_1 - u_2$ له الخواص التالية :

$$1 - \Delta u = 0 \text{ داخل المنطقة } T$$

$$2 - u \text{ دالة متصلة في المنطقة المغلقة } T + \Sigma$$

$$3 - u|_{\Sigma} = 0$$

وهكذا فالدالة $u(M)$ متصلة وتوافقية في المنطقة T وتساوى الصفر على الحدود. وكما هو معلوم فإن أية دالة متصلة تصل في المنطقة المغلقة إلى قيمتها العظمى. ولتأكد من أن $u \equiv 0$. إذا كانت الدالة $u \neq 0$ وكانت ولو في نقطة واحدة $u > 0$ فإنها يجب أن تصل إلى قيمتها العظمى الموجبة داخل المنطقة وهو ما لا يمكن حدوثه. وبالمثل تماماً نثبت أن الدالة u لا يمكن أن تأخذ داخل T قيمة سالبة. ومن هنا ينتج أن

$$u \equiv 0.$$

ونتقل الآن إلى إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على المعطيات الحدية. ونذكر القارئ بأن المسألة تسمى بالمسألة المحددة فيزيائياً إذا كان التغير الصغير في الشروط التي تحدد الحل ، وهي في حالتنا الشروط الحدية ، يناظره تغير صغير في الحل نفسه .

نفرض أن u_1, u_2 دالتان متصلتان في $T + \Sigma$ وتوافقيتان داخل T وتحقق لهما المتباينة $|u_1 - u_2| \leq \epsilon$ على Σ . عندئذ تتحقق هذه المتباينة داخل T .

وهذه الحقيقة تنتج مباشرة من النتيجة ٢ صفحة ٣٤٨ ، وذلك نظراً لأن $U \equiv \epsilon$ تعتبر دالة توافقية .

وبذلك أثبتنا الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية ووحداية المسألة الحدية الداخلية الأولى .

فقرقة ٤ : المسائل ذات الشروط الحدية المنفصلة . كثيراً ما تقابلنا أيضاً المسألة الحدية الأولى بشروط حدية منفصلة . والدالة المتصلة في المنطقة المغلقة لا يمكن أن تكون حلاً لهذه المسألة . ولذا فإنه يلزم تدقيقاً لصياغة المسألة الحدية الأولى أن نأخذ في الاعتبار هذه الحالة محل البحث .

نفرض أنه على المنحنى C الذي يحده المنطقة S في المستوى (x, y) معطاة دالة متقطعة الاتصال $f(P)$. والمطلوب تعيين الدالة $u(M)$: (١) التوافقية داخل المنطقة S ، (٢) التي تؤول باتصال إلى القيم الحدية في نقط اتصال الأخيرة ، (٣) المحدودة في المنطقة المغلقة $S + C$.
ونشير إلى أن المطلب الإضافي للتحديد يتعلق عملياً بجوارات نقط انفصال الدالة $f(P)$.

نثبت النظرية التالية :

حل المسألة الحدية الأولى بالقيم الحدية المتقطعة الاتصال هو حل وحيد .

نفرض أن u_1 ، u_2 حلان للمسألة المصاغة . والفرق

$$v = u_1 - u_2$$

١ - يكون دالة توافقية داخل S ؛

٢ - يؤول باتصال إلى القيم الحدية الصفرية على الحدود فيما عدا نقط انفصال $f(P)$ حيث يمكن أن يكون لهذا الفرق انفصالات ؛

٣ - يكون محدوداً في $S + C$: $|v| < A$.

نكون الدالة التوافقية التالية :

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^n \ln \frac{D}{r_i} ,$$

حيث ε عدد اختياري موجب ، D قطر المنطقة ، r_i بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P_i رقم i . الدالة $U(M)$ موجبة لأن كل الحدود أكبر من الصفر .

نرسم في كل نقطة انفصال P_i دائرة K_i نصف قطرها δ باختيار δ بحيث يكون كل حد

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

على محيط الدائرة المناظرة C_i أكبر (أو يساوي) من A أى بحيث يكون $S - \sum_{i=1}^n K_i = S'$ والمنطقة المغلقة v متصلة في المنطقة المغلقة S و $|\varepsilon| \leq U$ على حدود هذه المنطقة.

ولنا فوفقاً لمبدأ القيمة العظمى تكون U حداً أعظم (majorant) للدالة u :

$$|v(M)| \leq U(M).$$

وبتثبيت نقطة اختيارية M من المنطقة S وجعل $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0;$$

وبالتالي

$$v(M) = 0$$

لأن v لا تعتمد على ε أو

$$u_1 = u_2,$$

وهو المطلوب إثباته.

فقرة ٥: النقط المنفردة المعزولة (isolated singular points). ندرس النقط المنفردة للدالة التوافقية. نفرض أن P هي نقطة منفردة معزولة تقع داخل منطقة توافقية الدالة u . وتوجد خالتان محتملتان:

١ - الدالة التوافقية محدودة في جوار النقطة P ;

٢ - الدالة التوافقية ليست محدودة في جوار النقطة P . وقد قابلنا فيما سبق لنقط المنفردة من النوع الثاني (على سبيل المثال $\ln(1/r)$). وتبين النظرية التالية أن النوع الأول من النقط المنفردة لا يمكن تحقيقه.

إذا كانت الدالة المحدودة $u(M)$ توافقية داخل المنطقة S فيما عدا النقطة P فإنه يمكن تعريف $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية في كل مكان داخل S .

نأخذ دائرة K_α نصف قطرها α ومركزها في النقطة P ، وتقع بأكملها داخل S ، وندرس داخلها الدالة التوافقية v التي تنطبق على الدالة u على محيط C_α - محيط الدائرة K_α *.

نكون الفرق

$$w = u - v,$$

الذي يكون :

١ - توافقياً في كل مكان داخل K_α عدا النقطة P حيث لا يكون w معرفاً ؛

٢ - يؤول باتصال إلى الشروط الحدية الصغرية على C_α ؛

٣ - محدوداً في المنطقة المغلقة $K_\alpha + C_\alpha (|w| < A)$.

وبالمثل كما في إثبات النظرية السابقة (فقرة ٤) ، تكون الدالة التوافقية غير السالبة

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r}.$$

وهنا ε عدد اختياري موجب ، α نصف قطر الدائرة K_α ، r بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P .

نرسم دائرة K_δ مركزها في النقطة P باختيار نصف قطرها δ بحيث تكون قيمة U على محيط هذه الدائرة أكبر (أو تساوى) A وندرس المنطقة $K_\alpha - K_\delta$ والدالة w متصلة في المنطقة المغلقة $\alpha \leq r \leq \delta$ ، وعلى حدود هذه المنطقة تتحقق المتباينة $|w| \leq U$. ووفقاً لمبدأ القيمة العظمى تعتبر الدالة غير السالبة U حداً أعظم (majorant) للدالة w :

$$|w| \leq U(M) \text{ في المنطقة } \alpha \leq r \leq \delta.$$

• سيتم إثبات وجود مثل هذه الدالة في بند ٣ ولا تترس طريقة تكوينها على النظرية الحالية .

وبتثبيت نقطة اختيارية M من المنطقة K_α وغير منطقة على P والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0,$$

وبالتالى ففى كل مكان ، ربما فيها عنا النقطة P ، يكون

$$w = 0$$

وبذلك فالالة u فى كل مكان فى المنطقة S فيها عنا النقطة P تنطبق على الالة v . وبفرض أن $u(P) = v(P)$ نحصل على الالة $u = v$ التوافقية فى كل مكان داخل المنطقة S . وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية .

وبالمثل يتم إثبات النظرية لحالة الفراغ الثلاثى الأبعاد حيث يمكن أن تؤخذ الدالة : $U(M) = \varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$ بمثابة الالة - الحد الأعظم .

لقد افترضنا عند إثبات نظريات هذه الفقرة أن الالة u محدودة فى جوار النقطة P . غير أن نفس هذه التحليلات تحتفظ بصحتها إذا ما افترضنا أن الدالة u فى جوار النقطة P تحقق المتباينة

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \quad (17)$$

حيث $\varepsilon(r)$ دالة اختيارية تتوول إلى الصفر عندما $r \rightarrow 0$ ، أى أنه فى جوار النقطة P تزايد الالة $u(M)$ أبطأ من $\log(1/r_{PM})$.

وهكذا إذا كانت الالة $u(M)$ دالة توافقية داخل المنطقة S فيها عنا النقطة P حيث تزايد فى جوار هذه النقطة P أبطأ من $\log(1/r_{MP})$ عندما $M \rightarrow P$ ، فإن هذه الالة تكون محدودة فى جوار النقطة P ، ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الالة u دالة توافقية فى كل المنطقة S .

وبالمثل فى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة : إذا كانت الالة التوافقية $u(M)$ فى جوار النقطة المنفردة المعزولة P تزايد أبطأ من $1/r$ ،

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \left(\begin{matrix} \varepsilon(r) \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0 \end{matrix} \right), \quad (18)$$

فإنها تكون محدودة في جوار هذه النقطة ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية في النقطة P أيضا .

فقرة ٦ : انتظام الدالة التوافقية في ثلاثة متغيرات في المالا نهاية . الدالة التوافقية في ثلاثة متغيرات $u(x, y, z)$ تسمى دالة منتظمة (regular) في المالا نهاية إذا كان

$$|u| < \frac{A}{r}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{A}{r^2} \quad (19)$$

عند قيم r الكبيرة كبرا كافيا $r \geq r_0$.

نثبت أنه إذا كانت الدالة $u(x, y, z)$ توافقية خارج سطح ما مغلق Σ وتؤول بانتظام إلى الصفر في المالا نهاية فإنها تكون منتظمة (regular) في المالا نهاية .

وشرط التقارب المنتظم إلى الصفر في المالا نهاية يعنى أنه توجد تلك الدالة $\varepsilon^*(r)$ بحيث إن

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \quad (20) \quad \text{عندما } r \rightarrow \infty \text{ و } \varepsilon^*(r) \rightarrow 0$$

حيث r متجه موضع النقطة M .

وبإجراء تحويل كلفن

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi),$$

حيث

$$r' = \frac{1}{r},$$

نجد أن الدالة v توافقية في كل مكان داخل السطح Σ' ، الذي يتحول إليه السطح Σ عند تحويل مقلوبات متجهات الموضع ، فيما عدا نقطة الأصل حيث يكون لهذه الدالة نقطة منفردة معزولة .

ومن الشرط (20) يتبع أنه في جوار نقطة الأصل تتحقق للدالة v المتباينة

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leq \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \frac{1}{r'} = \varepsilon(r) \frac{1}{r}.$$

حيث

$$s(r') = s^*\left(\frac{1}{r'}\right) \rightarrow 0 \text{ عندما } r' \rightarrow 0.$$

وعلى أساس النظرية الأخيرة من فقرة ٥ تكون $v(r', \theta, \varphi)$ حالة محدودة وتوافقية عندما $r' \leq r_0$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leq A \text{ عندما } r' \leq r_0 \quad (21)$$

ومن هنا يتبع أن

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leq \frac{A}{r} \text{ عندما } r \geq r_0 = \frac{1}{r_0}$$

ووفقا لتوافقية الحالة v عند $r' = 0$ يمكننا أن نكتب :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z') \right) = \\ &= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

حيث

$$x' = \frac{x}{r} r', \quad y' = \frac{y}{r} r', \quad z' = \frac{z}{r} r'.$$

ومن هنا بحساب المشتقات $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}$ والأخذ في الاعتبار محدودية المشتقات الأولى للحالة v في جوار النقطة $r' = 0$ نحصل على :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{r^2} \text{ عندما } r \rightarrow \infty$$

وتكون التقديرات المماثلة صحيحة أيضا للمشتقين $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

فقرة ٧ : المسائل الحدية الخارجية. وحدانية الحل للمسائل الثلاثية والثلاثية الأبعاد. تختلف صياغة المسائل الحدية الخارجية في حالة المتغيرين المستقلين عنها في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة.

ندرس في البداية حالة المتغيرات الثلاثة. نفرض أن T هي المنطقة الخارجية بالنسبة إلى سطح ما مغلق Σ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى (مسألة ديريشليت الخارجية) تنحصر في الآتي :

المطلوب تعيين الدالة $u(x, y, z)$ التي تحقق الشروط :

$$1 - \Delta u = 0 \text{ في المنطقة اللاحدودة } T$$

$$2 - u \text{ متصلة في كل مكان بما في ذلك السطح } \Sigma$$

$$3 - u|_{\Sigma} = f(x, y, z) \text{ حيث } f \text{ دالة معطاة على السطح } \Sigma$$

$$4 - u(M) \rightarrow 0 \text{ عندما } M \rightarrow \infty$$

والشرط الأخير يعتبر شرطاً جوهرياً لوحداية الحل وذلك يمكن التأكد منه على مثال بسيط . نفرض أن المطلوب حل المسألة الحدية الخارجية الأولى للسطح الكروي S_R الذي نصف قطره R بالشرط الحدى الثابت

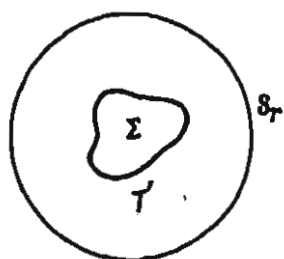
$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0.$$

وبإهمال الشرط (٤) نرى أن حلول المسألة يمكن أن تكون الدالتان $u_1 = f_0$, $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$ وكذلك أية دالة

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \text{ حيث } \alpha + \beta = 1$$

نثبت أن

المسألة الحدية الخارجية الأولى للدوال التوافقية في متغيرات ثلاثة مستقلة لها



شكل ٤٧

حل وحيد . بفرض وجود حلين u_1 , u_2 يحققان الشروط (١) - (٤) نرى أن الفرق $u = u_1 - u_2$ هو عبارة عن حل للمسألة بالشروط الحدية الصفرية . وحيث إن الشرط (٤) يتحقق أيضاً للدالة u فإنه لأي $\epsilon > 0$ يمكن تعيين R^* بحيث إن

$$|u(M)| < \epsilon \text{ عندما } r \geq R^*.$$

وإذا كانت النقطة M تقع داخل المنطقة T (شكل ٤٧) المحصورة داخل السطح Σ والسطح الكروي S_r ($r \geq R^*$) فإن $|u(M)| < \epsilon$ كما يتبع من مبدأ القيمة العظمى مطبقاً على المنطقة T . ووفقاً للطابع الاختياري للبارامتر ϵ

نستنتج أن $u = 0$ في المنطقة T' وكذلك في كل المنطقة T مما يثبت وحدانية حل المسألة الحدية الأولى الخارجية في الفراغ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى في المستوى تصاغ على الوجه التالي :

المطلوب تعيين الدالة u التي تحقق الشروط :

١- $\Delta u = 0$ في المنطقة اللانهائية Σ المحدودة بالمنحنى C ؛

٢- الدالة u متصلة في كل مكان بما في ذلك على C ؛

٣- $u|_C = f(x, y)$ حيث f دالة معطاة على C ؛

٤- $u(M)$ محدودة في المالا نهاية أى يوجد ذلك العدد N بحيث يكون

$$|u(M)| \leq N$$

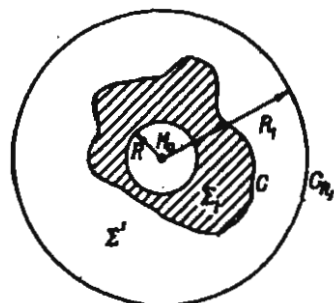
ويتضح أن مطلب أن يؤول الحل إلى الصفر في المالا نهاية يعتبر هنا أيضا كافيا لإثبات أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين ، ولكن هنا المطلب يعتبر قويا للغاية لأن المسألة به قد تصبح غير قابلة للحل عامة .

ثبت أن المسألة الحدية الخارجية الأولى للدالة في متغيرين لها حل وحيد .

نفرض وجود حلين مختلفين u_1 , u_2 وبدراسة الفرق بينهما $u = u_1 - u_2$ الذى يعتبر حلاً للمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفرية سيكون لدينا وفقا للشرط (٤) ما يلى :

$$|u| \leq N = N_1 + N_2,$$

حيث N_1 , N_2 هما عددان بحيث إن $|u_1| \leq N_1$, $|u_2| \leq N_2$. نرمز بالرمز Σ_1 للمنطقة الواقعة داخل C والتي تعتبر مكملة للمنطقة Σ بحيث يكون $\Sigma + \Sigma_1$ هى كل المستوى . نأخذ النقطة M_0 داخل Σ_1 ودائرة نصف قطرها R ومركزها في النقطة M_0 تقع داخل Σ_1 (شكل ٤٨) . والدالة التوافقية $\ln(1/R_{MM_0})$ ليس لها نقط منفردة في المنطقة Σ ، والدالة $\ln(R_{MM_0}/R)$ موجبة في كل المنطقة Σ بما في ذلك C . نفرض أن C_{R_1} محيط دائرة نصف قطرها R_1 ومركزها في M_0 ، تحتوى



شكل ٤٨

كلية للمنحنى C ، و Σ' للمنطقة المحدودة بالمنحنيين C, C_{R_1} . الدالة u_{R_1} المعرفة بالتساوية

$$u_{R_1} = N \frac{\ln(R_{MM_0}/R)}{\ln(R_1/R)} \quad (23)$$

هى دالة توافقية تساوى N على محيط الدائرة التى نصف قطرها R_1 وموجبة على C ؛ ومن مبدأ القيمة العظمى ينتج أن u_{R_1} تكون حداً أعظم للقيمة المطلقة للدالة $u(M)$ فى المنطقة Σ ؛

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

نثبت النقطة M ونجعل R_1 يتزايد بلا حدود. من الواضح أن $u_{R_1}(M) \rightarrow 0$ عندما $R_1 \rightarrow \infty$ ، ومن هنا ينتج أن

$$u(M) = 0.$$

وبذلك فوفقاً للطابع الاختيارى للنقطة M أثبتنا وحدانية حل المسألة المصاغة. ووحدانية حل هذه المسألة يمكن أيضاً إثباته بالاستعانة بتحويل مقلوبات متجهات الموضع الذى يحول المنطقة الخارجية بالنسبة إلى المنحنى C إلى منطقة داخلية بالنسبة إلى المنحنى C' الذى يتحول إليه المنحنى C .

وعند ذلك تتحول النقطة البعيدة بعداً لانهائياً إلى نقطة منفردة معزولة تكون الدالة v فى جوارها محدودة . ومن نظريات الفقرة ٥ تنتج توافقية الدالة v فى نقطة الأصل ومن ثم وحدانية الحل .

ومن هذه التصورات الواردة ينتج أن الدالة التوافقية فى متغيرين $u(M)$ المحدودة فى المالا نهائية تتحول إلى نهاية معينة عندما تتحول M إلى المالا نهائية .

ويمكن توضيح الاختلاف فى صياغة المسألة الحدية الخارجية الأولى فى حالة المتغيرين والثلاثة متغيرات على المثال الفيزيائى التالى : نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R يحفظ على سطحها بدرجة حرارة u_0 ثابتة والمطلوب تعيين التوزيع المستقر لدرجة الحرارة فى الفراغ الخارجى . الدالة $u = u_0(R/r)$ تمثل حل المسألة الذى يتحول إلى الصفر فى المالا نهائية .

ندرس الآن المسألة الثانية الأبعاد ونفرض أنه على محيط دائرة نصف قطرها R معطاة القيمة الحدية الثابتة

$$u|_z = f_0 = \text{const.}$$

وفي هذه الحالة فإن $u = f_0$ هو الحل المحدود الوحيد للمسألة ولا يوجد أى حل آخر يؤول إلى الصفر فى المالاىهىة. وقد سبق أن قابلنا الطابع المختلف اختلافاً جوهرياً بين سلوك الدوال التوافقية فى المالاىهىة فى حالتى المتغيرين والثلاثة متغيرات مستقلة (على سبيل المثال سلوك $1/r$ و $\ln 1/r$ فى المالاىهىة).

والمناطق اللامحدودة الفراغية والمستوية يتحقق مبدأ القيمة العظمى. ولا يصعب التأكد من ذلك بواسطة إجراء تحليلات مماثلة لتلك التى استعنا بها عند إثبات نظريات الوحداىهىة. ومن هنا ينتج بدوره الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية.

فقرة ٨ : المسألة الحدية الثانية. نظرية الوحداىهىة. إن حل المسألة الحدية الثانية هو الدالة u المتصلة فى $T + \Sigma$ والتى تحقق على السطح Σ الشرط

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_z = f(M).$$

ثبت أن حل المسألة الحدية الداخلىة الثانية (مسألة نيان الداخلىة) يتحدد بدقة أقصاها ثابت اختيارى.

نجرى الإثبات بفرض إضافى هو أن الدالة u لها مشتقات أولى متصلة فى المنطقة $T + \Sigma$.

نفرض أن u_1 , u_2 دالتان قابلتان للتفاضل باتصال فى $T + \Sigma$ تحققان المعادلة $\Delta u = 0$ فى T والشرط $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_z = f(M)$ على Σ . للدالة $u = u_1 - u_2$ سنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_z = 0.$$

• الفرض للتحقق باتصال المشتقات الأولى فى $T + \Sigma$ فرض تبسيط الإثبات. وإثبات الوحداىهىة بفروض أكثر صرامة قام به العالمان السوفيتيان م. كلديش وم. لافريتييف عام ١٩٣٧.

وبوضع $v = u$ في علاقة جرين الأولى (3) والأخذ في الاعتبار العلاقتين

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$

نحصل على :

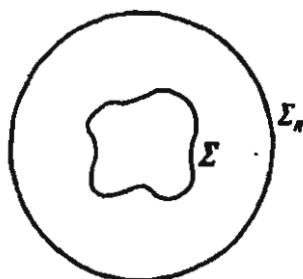
$$\iiint_{\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

ومن هنا ووفقا لاتصال البالة u ومشتقاتها الأولى يتبع أن

$$u = \text{const} \quad \text{أي أن} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

وهو المطلوب إثباته .

وطريقة الإثبات الواردة هنا يمكن تطبيقها أيضا في حالة المنطقة اللامحدودة للدوال التي تحقق شروط الانتظام في المالا نهاية .



شكل ٤٩

نوضح أنه في حالة المنطقة اللامحدودة الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق تكون علاقة جرين (3) قابلة للتطبيق على الدوال المنتظمة (regular) في المالا نهاية .

ندرس للمنطقة T الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق Σ . نأخذ سطحاً كروياً Σ_R ذا نصف قطر كبير بحيث يقع Σ داخل Σ_R . نرمز بالرمز T_R إلى المنطقة المحدودة

بالسطحين Σ , Σ_R (شكل ٤٩) . وتطبيق علاقة جرين في المنطقة T_R على الدالتين v , u المنتظمتين في المالا نهاية نحصل على :

$$\begin{aligned} \iiint_{T_R} u \Delta v d\tau = & - \iiint_{T_R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau + \\ & + \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \int_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (24) \end{aligned}$$

نقدر التكامل المأخوذ على Σ_R بالاستعانة بخاصية انتظام الدالتين v , u :

$$\left| \iint_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right| = \left| \iint_{\Sigma_R} u (v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma) d\sigma \right| \leq \\ \leq \left| \iint_{\Sigma_R} \frac{A}{R} \cdot \frac{3A}{R^2} d\sigma \right| \leq \frac{3A^2}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

ومن هنا نرى أن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0.$$

والتكامل في الطرف الايمن من (24) المأخوذ على T_R يؤول إلى التكامل المأخوذ على كل المنطقة T عندما $R \rightarrow \infty$. وهنا التكامل موجود لأن الصيغة المكاملة تتلاشى مثل $1/R^4$ في المالا نهائية وذلك نظرا لانتظام الدالتين u , v . وبالتالي توجد النهاية

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iiint_{T_R} u \Delta v d\tau = \iiint_T u \Delta v d\tau.$$

ونتيجة لذلك نتوصل إلى العلاقة

$$\iiint_T u \Delta v d\tau = \\ = - \iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau + \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (25)$$

وبذلك أثبتنا قابلية تطبيق علاقة جرين الأولى ومن ثم الثانية للمناطق اللامحدودة على الدوال المنتظمة في المالا نهائية.

نبين الآن أن المسألة الحدية الخارجية الثانية (مسألة نيان الخارجية) لها حل وحيد متظم في المالا نهائية:

بوضع $v = u = u_1 - u_2$ في العلاقة (25) والأخذ في الاعتبار أن $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$, $\Delta u = 0$ نحصل على:

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau = 0.$$

ومن هنا ووفقاً لاتصال مشتقات الدالة u ينتج أن

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad u = \text{const.}$$

وحيث إن $u = 0$ في المالا نهاية فإن

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ أى أن } u = 0$$

وهو المطلوب إثباته .

ومن الطبيعي أن ينشأ هنا سؤال : هل يمكن إثبات وحلانية حل المسألة الحدية الأولى بهذه الطريقة أيضاً ؟

نفرض أن u_1, u_2 حلان مختلفان للمسألة الحدية الأولى (الداخلية) . نطبق العلاقة (3) على الدالتين $u = u_1 - u_2$ و $v = u$ في المنطقة T المحدودة بالسطح Σ :

$$\iiint_T u \Delta u \, d\tau = - \iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

ومن هنا وبأخذ الشروط

$$\Delta u = 0, \quad u|_z = 0$$

في الاعتبار نحصل على :

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau = 0$$

وبالتالى

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad u = \text{const.}$$

وعلى السطح Σ الدالة u تساوى الصفر ولذا يمكننا أن نؤكد أن

$$u_1 = u_2, \quad u = 0$$

غير أن هذا الإثبات غير دقيق لأنه خلال عملية الإثبات افترضنا وجود مشتقات الدالة المجهولة على السطح Σ وهو ما لا تنص عليه صياغة المسألة . ويحلو إثبات الوحلانية المؤسس على مبدأ القيمة العظمى من هذا العيب .

بند ٣ - حل المسائل الحدية للمناطق البسيطة

بطريقة فصل المتغيرات

يمكن تعيين حل المسائل الحدية لمعادلات لابلاس بواسطة طريقة فصل المتغيرات في حالة بعض المناطق البسيطة (دائرة ، مستطيل ، كرة ، اسطوانة وغيرها) . ومسائل القيم اللاتية الناتجة عند ذلك (مسائل شتورم - ليوفيل) تؤدي إلى فصول مختلفة من الدوال الخاصة . وفي هذا البند سندرس مسائل ديريشليت (الداخلية والخارجية) التي يستعان عند حلها بالدوال المثلثية فقط . وفيما بعد ، عند دراسة الدوال الخاصة ، سندرس مسائل ديريشليت للكرة والاسطوانة .

فقرة ١ : المسألة الحدية الأولى للدائرة . نحل المسألة الحدية الأولى للدائرة :

عين الدالة u التي تحقق المعادلة :

$$\Delta u = 0 \quad \text{داخل الدائرة} \quad (1)$$

والشرط الحدي

$$u = f \quad \text{على حدود الدائرة (على المحيط)} \quad (2)$$

حيث f دالة معطاة .

سنفرض أولاً أن الدالة f متصلة وقابلة للتفاضل وأن الحل $u(M)$ متصل في المنطقة المغلقة . وفيما بعد سنترك شروط القابلية للتفاضل وحتى اتصال الدالة f (قارن مع فقرة ٤ ، بند ٢) . وبالإضافة إلى المسألة الحدية الداخلية سندرس أيضاً المسألة الحدية الخارجية (انظر بند ٢ ، فقرة ٧) .

ندرج مجموعة قطبية للإحداثيات (ρ, φ) نقطة أصلها في مركز الدائرة . والمعادلة (1) في الإحداثيات القطبية تكون على الصورة :

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3)$$

(انظر العلاقة (34) بند ١) . سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات أى سنبحث عن الحل الخاص للمعادلة (1) في الصورة

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0.$$

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

حيث $\lambda = \text{const}$. ومن هنا نحصل على المعادلتين :

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \neq 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda R = 0, \quad R \neq 0. \quad (5)$$

والمعادلة الأولى من هاتين المعادلتين تعطينا :

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

ونشير إلى أنه عند تغير الزاوية φ بمقدار 2π يجب أن تعود الدالة لأحادية القيمة $u(\rho, \varphi)$ إلى قيمتها الأصلية

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$$

(شرط الدورية). ومن هنا ينتج أن $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ ، أى أن $\Phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية في الزاوية φ بفترة دورة 2π . وهنا يكون ممكناً فقط إذا كان $\sqrt{\lambda} = n$ حيث n عدد صحيح و

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

والدالة $R(\rho)$ سنبحث عنها في الصورة $R(\rho) = \rho^\mu$. بالتعويض في المعادلة (5) واختصار ρ^μ نجد أن

$$n^2 = \mu^2 \quad \text{أو} \quad \mu = \pm n \quad (n > 0)$$

وبالتالى

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

حيث C, D ثابتان.

ولحل المسألة اللاخالية يجب أن نضع $R = C\rho^n$ ($\mu = n$) وذلك لأنه إذا كان $D \neq 0$ فإن الدالة $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ تتحول إلى المالا نهاية عند $\rho = 0$ ولا تعتبر دالة توافقية داخل الدائرة. ولحل المسألة الخارجية يجب على العكس أن نأخذ

في المالا نهائية . $R = D\rho^{-n}$ ($\mu = -n$) ، لأن حل المسألة الخارجية يجب أن يكون محدودًا

وهكذا فالحلول الخاصة لمسألتنا قد عينت * :

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \leq a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \geq a.$$

ومجموعا هذه الحلول

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{للمسألة الخارجية}$$

يكونان عند التقارب الجيد بدرجة كافية دالتين توافقيتين أيضًا .

ولتعيين المعاملات A_n , B_n نستعين بالشروط الحدية

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \quad (6)$$

وباعتبار أن f معطاة كدالة في الزاوية φ نأخذ مفكوكها في متسلسلة فورييه

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (7)$$

* . نفقد صيغة مؤثر لا بلاس في الإحداثيات القطبية (3) معانما عند $\rho = 0$. ثبت أن $\Delta u_n = 0$ أيضا معانما $\rho = 0$. ولإثبات ذلك لن نستعين الآن بمجموعة الإحداثيات القطبية ، فننتقل إلى الإحداثيات الكرتيزية . الحلول الخاصة

$$\rho^n \cos n\varphi \quad \text{و} \quad \rho^n \sin n\varphi$$

يوصفها الجزئين الحقيقي والتخيلي للدالة

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n.$$

تعتبر كميات حدود في x و y . ومن الواضح أن كثيرة الحدود التي تحقق معادلة لا بلاس $\Delta u = 0$ معانما $\rho > 0$ تحقق هذه للمعادلة وقضا لاتصال للشقتان الثانية معانما $\rho = 0$ أيضا .

حيث

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

وبمقارنة المتسلسلتين (6) , (7) نحصل على :

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \quad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \quad \text{للمسألة الخارجية}$$

وبذلك حصلنا على الحل الشكلي للمسألة الحدية الداخلية للنائرة في صورة متسلسلة :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (8)$$

وعلى حل المسألة الخارجية في الصورة :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (9)$$

وللتأكد من أن الدوال الناتجة هي بالفعل الحلول المطلوبة يجب التأكد من قابلية تطبيق مبدأ التراكب ، ولهذا الغرض يجب إثبات تقارب المتسلسلات وإمكانية تفاضلها حلاً حلاً وكذلك إثبات اتصال هذه الدوال على حدود النائرة . وكلتا المتسلسلتين يمكن التعبير عنها بعلاقة واحدة :

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

حيث

$$t = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leq 1 & , (\rho \leq a) \text{ للمسألة الداخلية} \\ \frac{a}{\rho} \leq 1 & , (\rho \geq a) \text{ للمسألة الخارجية} \end{cases}$$

و α_n, β_n معاملات فورييه للدالة $f(\varphi)$.

نثبت أن المتسلسلتين (9), (8) يمكن تفاضلها عندما $t < 1$ أى عدد من المرات. نفرض أن

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

نحسب المشتقة رقم k للدالة u_n بالنسبة إلى φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) + \beta_n \sin \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

ومن هنا نحصل على التقدير

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n n^k 2M,$$

حيث رمزنا بالحرف M إلى النهاية العظمى للقيمة المطلقة لمعاملات فورييه α_n, β_n :

$$|\alpha_n| < M, \quad |\beta_n| < M. \quad (10)$$

وبتثبيت قيمة معينة $a < \rho_0$ (للمسألة الداخلية) أو $\rho_1 = a^2/\rho_0 > a$ (للمسألة الخارجية)، وعند ذلك يكون $t_0 = \rho_0/a < 1$ ، ندرس المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \quad (t \leq t_0),$$

ففى أنها تتقارب بانتظام عند $t \leq t_0 < 1$ لأى k . ولذا يمكن تفاضل المتسلسلتين (9), (8) بالنسبة إلى φ فى أية نقطة داخل (أو خارج) الدائرة أى عدد من المرات. وبالمثل يتم إثبات أنه يمكن أيضاً تفاضل المتسلسلتين (8), (9) بالنسبة إلى ρ داخل (خارج) الدائرة التى نصف قطرها $\rho_0 < a$ ($\rho_1 > a$) أى عدد مطلوب من المرات.

ووفقاً للطابع الاختيارى للقيمة ρ_0 نستنتج أن المتسلسلتين (9), (8) قابلتان للتفاضل حداً حداً فى كل نقطة داخلية (خارجية) من نقط الدائرة. ومن إمكانية

التفاضل حداً حداً نتج قلبية تطبيق مبدأ التراكب . وبذلك أثبتنا أن الدالتين (9) , (8) تحققان المعادلة $\Delta u = 0$.

وفي هذا الإثبات استعنا فقط بخاصية الدالة $f(\varphi)$ التي تنحصر في أن معاملات فورييه لها محدودة (العلاقة (10)) . ويتحقق هنا لأية حالة محدودة (وحتى لأية حالة قابلة للتكامل مطلقاً) . وبذلك فالمسلسلتين (9) , (8) المناظرتين لأية حالة محدودة تعرفان دوال تحقق المعادلة

$$\Delta u = 0 \quad , \quad t < 1.$$

ونسنعين بهذه الملاحظة فيما بعد عند تعميم النتائج التي نحصل عليها في هذه الفقرة .

وننتقل الآن إلى إثبات اتصال الدالة في المنطقة المغلقة $(t \leq 1)$ ، ومن الواضح أنه لا يمكن إجراء ذلك بدون معلومات أكثر تفصيلاً عن خواص الدالة $f(\varphi)$.

من فرض اتصال وقابلية تفاضل الدالة $f(\varphi)$ ينتج إمكانية تحليلها في متسلسلة فورييه وكذلك تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \quad (11)$$

ومن ناحية أخرى لدينا

$$|t^n \alpha_n \cos n\varphi| \leq |\alpha_n|, \quad |t^n \beta_n \sin n\varphi| \leq |\beta_n|.$$

ولذا فالمسلسلتين (9) , (8) تقاربان بانتظام عندما $t \leq 1$ وبالتالي فإن الدالتين المثلثتين بهما متصلتان على حدود الدائرة . ومن العلاقة (11) يتضح أن الدالة (9) الناتجة للمسألة الخارجية محدودة في الملائمة .

• وهذا للنظر يتحقق أيضاً عندما $p = 0$. بالفعل بالتعبير عن المشتقات بالإحداثيات الكرتية بدلالة المشتقات بالإحداثيات القطبية لا يصعب التأكد من أن الدالتين (9) , (8) عند $t \leq 1$ يمكن تفاضلها بالنسبة إلى φ . نرى عدد من المرات . ووفقاً للهامش السابق يتج من هذا أن

$$\Delta u = 0 \quad \text{عندما} \quad p = 0$$

وبذلك أثبتنا أن المتسلسلتين (9) ، (8) تحققان كل شروط المسائل محل البحث .

فقرة ٢ : تكامل بواسون . نحول الآن العلاقتين (9) ، (8) إلى صورة أبسط .
للتحديد ندرس المسألة الداخلية ثم نكتب النتيجة للمسألة الخارجية بالمثل .

بالتعويض بصيغ معاملات فورييه في العلاقة (8) وتغيير ترتيب الجمع والتكامل سنحصل على :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \quad (12)$$

نجرى التحويلات المتطابقة التالية :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}] = \\ = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(te^{i(\varphi - \psi)})^n + (te^{-i(\varphi - \psi)})^n] \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{i(\varphi - \psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{-i(\varphi - \psi)}} \right] = \\ = \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\varphi - \psi) + t^2} \quad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1 \right).$$

بالتعويض بهذه النتيجة في المساواة (12) نحصل على :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi. \quad (13)$$

والعلاقة الناتجة التي تعطي حل المسألة الحدية الأولى داخل الدائرة تسمى بتكامل بواسون ، والصيغة المكاملة

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

تسمى بنواة بواسون . ونشير إلى أن $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$ عندما $\rho < a$ وذلك لأن $2a\rho < a^2 + \rho^2$ إذا كان $\rho \neq a$.

وقد استنبط تكامل بواسون بفرض أن $p < a$ ، وعندما $p = a$ تفقد الصورة (13) معناها . إلا أن

$$\lim_{\substack{p \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(p, \varphi) = f(\varphi_0),$$

وذلك لأن المتسلسلة التي حصلنا منها على تكامل بواسون تعتبر حالة متصلة في المنطقة المغلقة .

والدالة المعروفة بالعلاقة

$$u(p, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - p^2}{p^2 - 2ap \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & , \quad p < a, \\ f(\varphi) & , \quad p = a, \end{cases} \quad (13')$$

نحقق المعادلة $\Delta u = 0$ عندما $p < a$ وتكون متصلة في المنطقة المغلقة بما في ذلك المحيط $p = a$.

ومن الواضح أن حل المسألة الحدية الخارجية يكون على الصورة :

$$u(p, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{p^2 - a^2}{p^2 - 2ap \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & , \quad p > a, \\ f(\varphi) & , \quad p = a. \end{cases} \quad (14)$$

وفي البداية افترضنا أن الدالة $f(\varphi)$ متصلة وقابلة للتفاضل ، وبلاستعانة بذلك أثبتنا أن حل المسألة يمكن التعبير عنه بمتسلسلة لانهاية . وبعد ذلك توصلنا بواسطة التحولات المتطابقة من المتسلسلة إلى تكامل بواسون .

ثبت الآن أن تكامل بواسون يعطى حل المسألة الحدية الأولى أيضاً عندما تكون الدالة $f(\varphi)$ متصلة فقط .

إن تكامل بواسون يعبر عن حل معادلة لابلاس عندما $p < a$ ($t < 1$) لأية حالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$. بالفعل فعندما $p < a$ ($t < 1$) يكون تكامل بواسون متطابقاً مع المتسلسلة (8) ووفقاً للملاحظة في صفحة ٣٦٩ يحقق المعادلة $\Delta u = 0$ لأية حالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$.

وبذلك يتبقى علينا أن نثبت أن الدالة u في حالتنا تتوَلد باتصال إلى القيم الحدية . نختار متتابعة ما من الدوال المتصلة القابلة للتفاضل

$$f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_k(\varphi), \dots,$$

تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(\varphi)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

ومتابعة الدوال الحدية ستناظرها متتابعة من الدوال التوافقية $u_k(\rho, \varphi)$ المعرفة بالعلاقة (13) أو (8) . والتقارب المنتظم للمتتابعة $\{f_k(\varphi)\}$ إنما يعنى أنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $k_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{عندما } l > 0, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

وللدوال $u_k(\rho, \varphi)$ التى تمثل حلول المسألة الحدية الأولى سنحصل وفقاً لمبدأ القيمة العظمى على :

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$

عندما $\rho \leq \rho_0$ إذا كان $k > k_0(\varepsilon)$ ، $l > 0$. وبذلك تتقارب المتتابعة $\{u_k\}$ بانتظام إلى دالة ما $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$. والدالة النهائية $u(\rho, \varphi)$ متصلة في المنطقة المغلقة نظراً لأن كل الدوال u_k المثلة بالتكاملات

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} f_k(\psi) d\psi,$$

هى دوال متصلة في المنطقة المغلقة. ومن الواضح أن

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\rho, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi) d\psi & , \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & , \quad \rho = a, \end{cases}$$

• لن نتوقف هنا عند كيفية تحقيق ذلك . فكل هذه للتأنيه يمكن اختيارها بطرق عديدة .

لك لأن المتابعة (f_n) تتقارب بانتظام إلى f ولنا يكون الانتقال إلى النهاية
ت علامة التكامل قانونياً .
وبذلك فالدالة

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi) d\psi$$

لأية دالة اختيارية متصلة $f(\varphi)$ تكون حلاً لمعادلة لابلاس وتؤول باتصال إلى القيم
المعطاة على حدود الدائرة .

فقرة ٣ : حالة القيم الحدية المنفصلة . ثبت أن العلاقتين (13') ، (14)
تعطيان حل المسألة الحدية لأية دالة اختيارية متقطعة الاتصال $f(\varphi)$ أى أن هذا
الحل محدود في كل المنطقة ويؤول باتصال إلى القيم الحدية عند نقط اتصال الدالة
 $f(\varphi)$ ويكون بذلك هو الحل الوحيد الذى يتمتع بهذه الخاصية (قارن مع بند ٢ ،
فقرة ٤) . نفرض أن φ_0 هى نقطة ما من نقط اتصال الدالة $f(\varphi)$. ويجب إثبات
أنه مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon, \quad \text{إذا كان}$$

$$|\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \text{ و } |\rho - a| < \delta(\varepsilon)$$

ووفقاً لاتصال الدالة $f(\varphi)$ يوجد $\delta_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{إذا كان } |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon)$$

ندرس حالتين مساعدتين متصلتين وقابلتين للتفاضل $f(\varphi)$ ، $\overline{f(\varphi)}$ تحققان الشروط
التالية :

$$| \varphi - \varphi_0 | < \delta_0(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad \overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| \varphi - \varphi_0 | > \delta_0(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad \overline{f(\varphi)} \geq f(\varphi)$$

و

$$| \varphi - \varphi_0 | < \delta_0(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad \underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| \varphi - \varphi_0 | > \delta_0(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad \underline{f(\varphi)} \leq f(\varphi)$$

وفيما عدا ذلك تكون الدالتان هاتان اختياريتين . وإذا عينا بواسطة العلاقة (13) للدالتين $\underline{f}$, $\bar{f}$ الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$, $\bar{u}(\rho, \varphi)$ فإنها ستكونان دالتين توافقيتين تؤولان باتصال إلى $\underline{f}(\varphi)$, $\bar{f}(\varphi)$.

ونظراً لأن نواة بواسون موجبة ، نحصل على

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leq u(\rho, \varphi) \leq \bar{u}(\rho, \varphi), \quad \text{وذلك لأن}$$

$$\underline{f}(\varphi) \leq f(\varphi) \leq \bar{f}(\varphi).$$

ومن اتصال الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$, $\bar{u}(\rho, \varphi)$ على الحدود عند $\varphi = \varphi_0$ ينتج وجود $\delta_1(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad |\bar{u}(\rho, \varphi) - \bar{f}(\varphi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad |\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن هذه المتباينات نجد أن :

$$\begin{array}{l} |\rho - a| < \delta(\varepsilon) \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \end{array} \quad \text{عندما} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\rho, \varphi) \leq \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon = \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{u}(\rho, \varphi) \end{array} \right.$$

حيث $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

وبمقارنة المتباينات الناتجة نجد أن

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leq \underline{u}(\rho, \varphi) \leq u(\rho, \varphi) \leq \bar{u}(\rho, \varphi) \leq f(\varphi_0) + \varepsilon$$

أو

$$\begin{array}{l} |a - \rho| < \delta(\varepsilon) \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \end{array} \quad \text{عندما} \quad |u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت اتصال $u(\rho, \varphi)$ في النقطة (a, φ_0) .

وتنتج محدودية $u(\rho, \varphi)$ من أنه وفقاً لأن نواة بواسون موجبة يكون

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi = M,$$

إذا كانت $|f(\varphi)| < M$. أما قيمة التكامل

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) d\psi}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} = 1,$$

وذلك لأنه وفقاً لما سبق أن أثبتناه يكون الطرف الأيسر عبارة عن دالة توافقية تتحول باتصال إلى قيمها الحدية $f = 1$ ، ومثل هذه الدالة تساوى الواحد الصحيح بالتطابق. وبالمثل $u(\rho, \varphi) > M_1$ إذا كانت $f > M_1$ مما يثبت محدودية القيمة المطلقة للدالة $u(\rho, \varphi)$.

بند ٤ - دالة المصدر

تعطى طريقة دالة المصدر جهازاً مناسباً للتعبير التحليلي لحل المسائل الحدية. وفي هذا البند سنورد تعريف وأهم خواص دالة المصدر لمعادلة لابلاس وكذلك سنكون دوال المصدر لعدة مناطق بسيطة (الناثرة، الكرة، نصف الفراغ). وهنا التكوين سيتم بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية.

فقرة ١: دالة المصدر للمعادلة $\Delta u = 0$ وخواصها الأساسية. لأية دالة u متصلة هي ومشتقاتها الأولى في منطقة مغلقة T محدودة بسطح أملس بدرجة كافية Σ ولها مشتقات ثانية داخل T يتحقق كما سبق أن أوضحنا في بند ٢، فقرة ١ التمثيل التكامل:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P - \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \quad (1)$$

وإذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية فإن التكامل الحجمي (الثلاثي) يكون مساوياً للصفر. أما إذا كانت الدالة $u(M)$ تحقق معادلة بواسون فإن هذا التكامل الحجمي يكون دالة معلومة.

نفرض أن $v(M)$ حالة توافقية ما متصلة في $T + \Sigma$ هي ومشتقاتها الأولى وليس لها نقط منفردة في أى مكان . وعلاقة جرين الثانية

$$\int_F \int (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

تعطى :

$$0 = \int_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma - \int_F \int v \Delta u d\tau. \quad (2)$$

وبجمع (2) , (1) نحصل على :

$$u(M_0) = \int_{\Sigma} \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \int_F \int \Delta u \cdot G d\tau, \quad (3)$$

حيث

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \quad (3')$$

حالة في النقطتين $M(x, y, z)$, $M_0(\xi, \eta, \zeta)$. والنقطة M_0 مثبتة ولذا تؤدي x, y, z دور البارامترات .

وتحتوى العلاقة (3) على $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$, $u|_{\Sigma}$, بينما تعطى فقط $u|_{\Sigma}$ عند حل المسألة الحدية الأولى وعند حل المسألة الحدية الثانية تعطى فقط قيمة $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$.
وتختار الحالة v بحيث يكون $G|_{\Sigma=0}$ للمسألة الحدية الأولى ($\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Sigma}=0$)
للمسألة الحدية الثانية) . نعين الحالة $G(M, P)$ بواسطة الشروط :

1 - $G(M, P)$ بوصفها حالة في النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ عند ثبات $M(x, y, z)$.
نحقق معادلة لابلاس

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

في كل النقط P في المنطقة T إلا في النقطة $P = M$.

2 - $G(M, P)$ عند انطباق متغيريها ($M = P$) تتحول إلى مالانهاية ويمكن

التعبير عنها في الصورة (3') حيث $v = v(M, P)$ دالة توافقية في كل مكان في T .

٣ - $G(M, P)$ تتحول إلى الصفر على الحدود :

$$P \in \Sigma, \text{ إذا كانت } G(M, P) = 0$$

ويمكن تحقيق هذا الشرط إذا طلبنا أن تكون

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

والدالة G المعرفة بهذه الطريقة تسمى دالة المصدر النقطي للمسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وتكفل دالة المصدر إعطاء تعبير صريح لحل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. بالفعل تعطى العلاقة (3) :

$$u(M_0) = - \int_{\Sigma} \int u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = - \int_{\Sigma} \int f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (f = u|_{\Sigma}). \quad (4)$$

وينبغي الأخذ في الاعتبار أن العلاقة (4) قد نتجت بواسطة علاقة جرين التي يفترض فيها تحقق شروط معينة تتعلق بالدالتين G , u والسطح Σ . وفي العلاقة (4) تدخل الصيغة $\frac{\partial G}{\partial n}$ التي لا يتبع وجودها على السطح Σ مباشرة من تعريف الدالة G .

وعند الحصول على العلاقة (4) انطلقنا من وجود دالة توافقية u تأخذ على السطح Σ قيمة f . وبذلك فتحى لتلك المناطق التي توجد لها دالة مصدر تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق تعطى العلاقة (4) تعبيراً صريحاً فقط لحلول المسألة الحدية الأولى u تلك التي تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق (بإثبات وحداثة هذا الفصل من حلول المسألة الحدية الأولى).

وقد أوضح البحث التفصيلي للعلاقة (4) الذي أجراه عالم الرياضيات الروسي أ. ليابونوف أنه لفصل واسع من السطوح التي تسمى سطوح ليابونوف (انظر بند ٥) تعبر هذه العلاقة عن حل المسألة الحدية الأولى بشروط عامة للغاية.

نتوقف مرة أخرى عند تعريف الدالة G . تعرف الدالة G بواسطة الدالة v التي تعتبر حلاً للمسألة الحدية الأولى للمعادلة

$$\Delta v = 0$$

بالقيم الحدية

$$v|_z = -\frac{1}{4\pi R}.$$

وقد ينشأ انطباع أن لدينا حلقة مفرغة . فلتعين الدالة u حل المسألة الحدية الأولى يلزم تعيين الدالة v حل نفس هذه المسألة . وفي واقع الأمر لا توجد حلقة مفرغة وذلك لأن معرفة دالة المصدر تكفل حل المسألة الحدية الأولى بقيم حدية اختيارية ($u|_z = f$) في حين أنه لتعين الدالة G نفسها يكفي حل المسألة الحدية بقيم حدية خاصة معينة ($v|_z = -1/4\pi R$) وهو كما سنرى على عدة أمثلة أسهل بدرجة ملحوظة .

وعند التفسير الكهروستاتيكي تعبر دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

عن الجهد في النقطة M للشحنة النقطية الموضوعة في النقطة M_0 داخل سطح موصل Σ متصل بالأرض . والحد الأول $1/4\pi R$ من الواضح أنه جهد الشحنة النقطية في الفراغ الحر ، أما الحد الثاني v فيعني جهد مجال الشحنات المستحثة (induced) على السطح الموصل Σ . وبذلك فإن تكوين دالة المصدر يؤول إلى تعيين المجال المستحث*.

نتوقف عند بعض خواص دالة المصدر . وعندئذ سنفترض أن المناطق محل الدراسة هي بحيث توجد لها دوال مصدر ذات مشتقات عمودية على السطح Σ وتحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق .

* عند التفسير الحراري تعرف درجة الحرارة المستقرة (التي لا تعتمد على الزمن) للمصدر الحراري النقطي التي شدته q بالعلاقة

$$q/4\pi k r,$$

حيث k معامل التوصيل الحراري . وبذلك فالدالة $G(M, M_0)$ هي عبارة عن درجة الحرارة في النقطة M إذا كانت درجة حرارة سطح الجسم مساوية للصفر ووضع عند النقطة M_0 مصدر حراري شدته $q = k$.

وإذا اختير مقياس رسم الأطوال بحيث يكون $k = 1$ فإن الدالة G تناظر مصدرا شدته تساوى الواحد الصحيح .

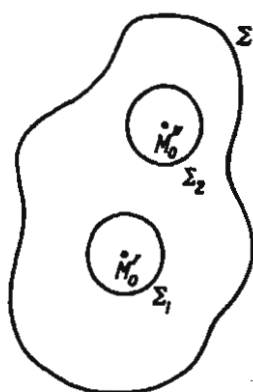
١ - دالة المصدر موجبة في كل مكان داخل T . بالفعل ، الدالة G تتحول إلى الصفر على حدود المنطقة Σ وتكون موجبة على سطح كرة صغيرة صفرًا كافيًا مرسومة حول القطب . ومن هنا ينتج وفقًا لمبدأ القيمة العظمى أن G موجبة في كل المنطقة . ونشير أيضًا إلى أن

$$\left. \frac{dG}{dn} \right|_{\Sigma} \leq 0.$$

هو ما ينتج مباشرة من أن G موجبة ومن الشرط $G|_{\Sigma} = 0$.

٢ - دالة المصدر متماثلة بالنسبة إلى متغيرها إلى $M_0(x, y, z)$, $M(\xi, \eta, \zeta)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$



شكل ٥٠

رض أن M_0'' , M_0' نقطتان مثبتتان من نقط
 طقة T . نكوّن السطحين الكرويين
 Σ_1 , Σ_2 ونصف قطر كل منها ϵ ومركزهما
 النقطتين M_0'' , M_0' (شكل ٥٠) .
 س أن

$$u(M) = G(M, M_0'),$$

$$v(M) = G(M, M_0'')$$

ن علاقة جرين

$$\iiint_{T_\epsilon} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

نطقة T_ϵ المحدودة بالسطوح Σ , Σ_1 , Σ_2 سنحصل على :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_1} \left[G(M, M_0) \frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'') \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} \right] d\sigma_M + \\ & + \iint_{\Sigma_2} \left[G(M, M_0) \frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n} - G(M, M_0') \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} \right] d\sigma_M \end{aligned}$$

ن الطرف الأيسر للمعادلة (٥) يساوى الصفر لأن $\Delta G = 0$ والتكامل

المأخوذ على السطح Σ يساوى الصفر وفقاً للشروط الحدية . وبالاتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ والاستعانة بخواص دالة المصدر نحصل على * :

$$G(M'_0, M'_0) = G(M''_0, M'_0)$$

أو

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

والتماثل المثبت للدالة المصدر يعتبر هو الصيغة الرياضية لمبدأ التبادل في الفيزياء (reciprocity law) : المصدر الموضوع في النقطة M_0 يحدث عند النقطة M نفس التأثير الذي يحدثه عند النقطة M_0 للمصدر الموضوع في النقطة M . ويحمل مبدأ التبادل طابعاً عاماً للغاية ويسرى على كثير من المجالات الفيزيائية (الكهرومغناطيسى ، مجال المرونة ** .. الخ) .

ونشير كحالة خاصة إلى أنه من خواص التماثل ينتج أن الدالة $u(M_0) = G(M, M_0)$ بوصفها دالة في المتغيرات x, y, z للنقطة M_0 عند ثبات M تتمتع بنفس خاصية الدالة $v(M) = G(M, M_0)$ في المتغيرات ξ, η, ζ للنقطة M عند ثبات M_0 ، أى أن $\Delta M_0 G = 0$ عندما $M \neq M_0$ و $G = 0$ عندما $M_0 \in \Sigma$

ودالة المصدر $G(M, M_0)$ لحالة الفراغ الثنائي الأبعاد (المستوى) ستحدد بالشروط :

١ - $\Delta G = 0$ في كل مكان في المنطقة محل البحث S إلا في النقطة $M = M_0$.

٢ - في النقطة $M = M_0$ يكون للدالة G نقطة منفردة على الصورة

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} .$$

• هذه النظرية التي لا يبرنوف لفصل من السطح تسمى بسطح لا يبرنوف .

• في علم المرونة يسمى مبدأ التبادل بنظرية بين التبادل وتنص على أن الشغل الذي تبذله مجموعة قوى في إزالة حادثة من تأثير مجموعة قوى أخرى يساوى الشغل الذي تبذله مجموعة القوى الثانية في الإزالة للحادثة بتأثير مجموعة القوى الأولى (ملاحظة للترجم) .

٣- $G|_C = 0$ حيث C حدود المنطقة S (مخيطها). وفي هذه الحالة تكون دالة المصدر على الصورة :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

حيث v دالة متصلة وتوافقية في كل مكان وتحقق على الحدود الشرط

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

وحل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u = 0$ يعطى عندئذ بالعلاقة :

$$u(M_0) = - \int_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (f = u|_C).$$

فقرة ٢ : طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية ودالة المصدر للكرة . تعتبر طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية أكثر الطرق شيوعاً لتكوين دالة المصدر . وتنحصر فكرة هذه الطريقة في أنه عند تكوين دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

يكون المجال المسنح v هو عبارة عن مجال الشحنات الواقعة خارج السطح Σ والمختارة بحيث يتحقق الشرط

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

وهذه الشحنات تسمى بالتمثيلات الكهروستاتيكية لوحدة الشحنة الموضوعة في النقطة M_0 والتي تكون عند عدم وجود السطح Σ جهلاً بمقداره $1/4\pi R$. وفي كثير من الحالات لا يشكل اختيار مثل هذه الشحنات أية صعوبة . وسنورد فيما بعد أمثلة على تكوين دالة المصدر بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية .

ومن صيغ دوال المصدر الناتجة في كل هذه الأمثلة يتضح بشكل مباشر اتصال المشتقات الأولى للدوال G على السطح Σ .

وبمثابة المثال الأول ندرس دالة المصدر للكرة .

نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R مركزها في النقطة O والمطلوب تعيين دالة المصدر لها .

حيث $r_0 = |\vec{M_0P}|$, $r_1 = |\vec{M_1P}|$ ومن التناسب (7) نحصل على

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$$

لجميع نقط السطح الكروي . ولذا فإن الدالة التوافقية $v = -\frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1}$ تأخذ على السطح الكروي نفس القيمة التي تأخذها الدالة $1/r_0$ - وهي تعبر كما هو واضح عن جهد الشحنة التي مقدارها R/ρ_0 - والموضوعة في النقطة M_1 .

وبذلك فالدالة

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right) \quad (8)$$

تعتبر هي دالة المصدر المطلوب تعيينها للكرة لأنها دالة توافقية لها عند النقطة M_0 انفراد على الصورة $1/4\pi r_0$ وتؤول إلى الصفر على سطح الكرة .

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة (4) .

نحسب المشتقة

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{R}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right], \quad (9)$$

حيث n العمودى الخارجى ، $r_1 = |\vec{M_1M}|$ ، M بوجه عام لا تقع على السطح (الكروي) .

ومشتقتا $1/r_0$ ، $1/r_1$ باتجاه العمودى n تساويان

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2} \cos(\widehat{r_0, n}), \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2} \cos(\widehat{r_1, n}), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

لأن

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos(\widehat{r_0, n}), \quad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\widehat{r_1, n}). \quad (11)$$

ولا يصعب تعيين مقدارى $\cos(\widehat{r_0, n})$ ، $\cos(\widehat{r_1, n})$:

$$\cos(\widehat{r_0, n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}, \quad (11')$$

$$\cos(\widehat{r_1, n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \quad (11'')$$

وبالاستعانة بالنسب (7) نحصل على :

$$\cos(\widehat{r_1, n})|_z = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} r_0^2 - \frac{R^2}{\rho_0^2}}{2R \frac{R}{\rho_0} r_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

ذلك لأن $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$ وفقاً لتحريف النقطة M_1 و $r_1 = \frac{R}{\rho_0} r_0$ على السطح الكروي Σ بالاستعانة بالعلاقات (10) وكذلك بالصيغ (11'), (11'') نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_z &= \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_0^2} \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^3 r_0^2} \frac{R}{\rho_0} \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}. \end{aligned}$$

وبذلك فإن الدالة $u(M_0)$ وفقاً للعلاقة (4) تكون مساوية :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} \int f(P) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3} d\sigma_P. \quad (12)$$

ندرج مجموعة إحداثيات كروية نقطة أصلها في مركز الكرة. نفرض أن (R, θ, φ) هي إحداثيات النقطة P ، $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ إحداثيات النقطة M_0 ، γ هي الزاوية بين متجهي الموضع $\vec{OP}$ ، $\vec{OM}_0$. عندئذ يمكن كتابة العلاقة (12) في الصورة :

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma + \rho_0^2)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (12')$$

حيث

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (13)$$

وهذه العلاقة تسمى بتكامل بواسون للكرة* .
وبنفس الطريقة يمكن تكوين دالة المصدر للمنطقة الخارجية بالنسبة إلى الكرة :

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right), \quad (14)$$

حيث $r_1 = MM_1$ البعد عن نقطة مثبتة M_1 تقع خارج الكرة ، $r_0 = MM_0$ البعد عن النقطة M_0 المترافقة مع النقطة M_1 ، ρ_1 بعد M_1 عن نقطة الأصل ، R نصف قطر الكرة .

ويأخذ الاختلاف في اتجاهي العمودين للمسألتين الداخلية والخارجية نحصل على :

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_1^2 - R^2}{[R^2 - 2\rho_1 R \cos \gamma + \rho_1^2]^{3/2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

حيث يعطى $\cos \gamma$ بالعلاقة (13) (يجب تغيير الدليل 0 بالدليل 1) .

فقرة ٣ : دالة المصدر للدائرة . يمكن الحصول على دالة المصدر للدائرة بنفس الطريقة كدالة المصدر للكرة . وفي هذه الحالة يجب البحث عن الدالة في الصورة :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v. \quad (15)$$

وبتكرار التحليلات التي أجريتها في الفقرة السابقة ابتداء من العلاقة (6) حتى الحصول على العلاقة (8) نعين الدالة G في الصورة :

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right], \quad (16)$$

حيث $\rho_0 = OM_0$ ، $r_0 = M_0P$ ، $r_1 = M_1P$ ، $R = OP$ نصف قطر الدائرة

* بالفعل . جيب تمام الاتجاهية للمتجهين $\vec{OM}_0$ ، $\vec{OP}$ تساوى على الترتيب

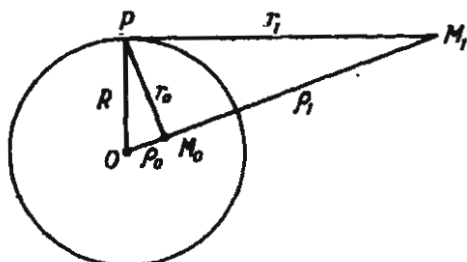
$$(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \cdot (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0).$$

(شكل ٥٢). وليس من الصعب التحقق من أن الدالة التوافقية المعرفة بهذه الطريقة تتحول إلى الصفر على الحدود: $G|_C = 0$.

ولحل المسألة الحدية الأولى يجب حساب قيمة $\frac{\partial G}{\partial n}$ على المحيط C . ويتم هذا الحساب بالمثل كما أجريناه في حالة الكرة، ويعطى

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_C = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$



شكل ٥٢

نفرض أن (ρ, θ) هما الإحداثيان القطبيان للنقطة P الواقعة على المحيط، (ρ_0, θ_0) إحداثيا النقطة M_0 . عندئذ فإن

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0).$$

بالتعويض في العلاقة

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(P) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2} \frac{ds}{R}$$

بصيغة r_0 السابقة والأخذ في الاعتبار أن

$$u(P)|_C = f(\theta), \quad ds = R d\theta$$

نصل إلى صيغة الدالة $u(M_0)$ التالية :

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} f(\theta) d\theta, \quad (17)$$

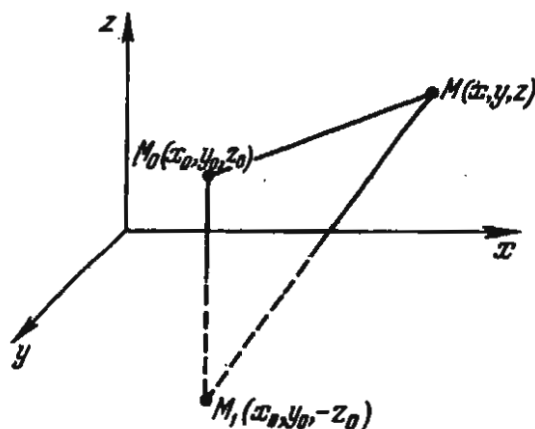
التي تسمى تكامل بواسون للمائرة (انظر صفحة ٣٧٠، العلاقة (13)). وهذه العلاقة تعطي بدقة حتى الإشارة حل المسألة الخارجية أيضاً.

فقرة ٤ : دالة المصدر لنصف الفراغ. يسرى مفهوم دالة المصدر والعلاقة (4) للفراغ اللانهائي أيضاً إذا درست الدوال المنتظمة (regular) في المالا نهاية (انظر بند ٢، فقرة ٦). نعين دالة المصدر لنصف الفراغ $z > 0$. نضع في النقطة

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ وحدة شحنة تكوّن في الفراغ اللانهائي مجالاً جهده يعرف بالدالة

$$R_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad \text{حيث} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{M_0M}}$$

ولا يصعب ملاحظة أن المجال المستحث σ يعتبر مجالاً لوحدة الشحنة السالبة



شكل ٥٣

الموضوعة في النقطة $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ التي تعتبر انعكاساً مرآوياً للنقطة M_0 في المستوى $z=0$ (شكل ٥٣). والدالة G التي تساوي

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1},$$

حيث

$$R_0 = |\vec{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$R_1 = |\vec{M_1M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}.$$

تؤول إلى الصفر عند $z=0$ ولها الانفراد المطلوب عند M_0 .

نحسب $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{M_0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{M_0}$ من الواضح أن

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{z-z_0}{R_0^3} + \frac{z+z_0}{R_1^3} \right].$$

بوضع $z=0$ نحصل على

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} \frac{z_0}{R_{M_0 P}^3} f(P) d\sigma_P,$$

حيث Σ_0 هو المستوى $z=0$ و $f(P) = u|_{z=0}$ أو

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} f(x, y) dx dy. \quad (18)$$

بند ٥ - نظرية الجهد

الدالة $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ التى تعبر عن جهد مجال وحدة الكتل (الشحنة) الموضوعة فى النقطة $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ تعتبر خلافاً لمعادلة لابلاس يعتمد على البارامترات ξ, η, ζ . وتكاملات هذه الدالة بالبارامترات تسمى بالجهد ولها أهمية جوهرية فى التطبيقات المباشرة للفيزياء وكذلك من وجهة نظر تطور طرق حل المسائل الحدية.

فقرة ١ : الجهد الحجمى . نفرض أن كتلة m_0 موضوعة فى النقطة $M_0(\xi, \eta, \zeta)$. وحسب قانون الجذب العام تؤثر على الكتلة m الموضوعة فى النقطة $M(x, y, z)$ قوة الجذب

$$F = -\gamma \frac{mm_0}{R^2} r, \quad (1)$$

حيث $r = R/R$ متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{M_0M}$ ($R = \vec{M_0M}$) ، و γ ثابت الجاذبية . وباختيار مجموعة وحدات القياس بحيث يكون $\gamma = 1$ وفرض أن $m = 1$ نحصل على :

$$F = - \frac{m_0}{R^2} r.$$

ومساقط هذه القوة على المحاور الإحداثية تساوى

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha = -\frac{m_0}{R^3} (x - \xi), \\ Y &= F \cos \beta = -\frac{m_0}{R^3} (y - \eta), \\ Z &= F \cos \gamma = -\frac{m_0}{R^3} (z - \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

حيث α, β, γ الزوايا التي يكونها المتجه F مع المحاور الإحداثية.

ندرج في دراستنا الدالة u التي تسمى بجهد مجال القوى* والمعروفة بالتساوية

$$F = \text{grad } u$$

أو

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

وفي حالتنا

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

وجهد المجال لعدد n من النقط المادية سيعبر عنه وفقاً لتراكب مجالات القوى بالعلاقة :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i}.$$

نتقل إلى حالة التوزيع المتصل للكتل. نفرض أن لدينا جسماً T كثافته $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. نعين جهد هذا الجسم في النقطة $M(x, y, z)$. ولهذا الغرض نقسم الجسم T إلى أجزاء صغيرة صغيراً كافياً $\Delta \tau$. ونفرض فرضاً طبعياً يمكن في أن تأثير العنصر $\Delta \tau$ مكافئ لتأثير كتلته المركزة في نقطة ما «متوسطة»** في الحجم

* يجب عدم الخلط بين الجهد وطاقة وضع مجال القوى. لمصطلح الجهد يستخدم هنا بنفس معنى دالة القوى في الميكانيكا.

** وبصورة أكثر دقة يفترض عندئذ أن تأثير حجم ما T كتلته m على نقطة واقعة خارج الحجم المذهب $\bar{T}$ الذي يحتوي هذا الجسم، يمكن استبداله بتأثير مركز لغال ما له نفس الكتلة m ويقع داخل $\bar{T}$.

$\Delta \tau$ ، وعندئذ لمركبة القوة المؤثرة على النقطة M نحصل على الصيغة التالية :

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad \text{حيث} \quad \Delta X = -\frac{\rho \Delta \tau}{R^3} (x - \xi)$$

ويعطى التكامل المأخوذ على كل الحجم T مركبة القوة الكاملة لجذب النقطة M بالجسم T

$$X = - \int_T \int \int \rho \frac{x - \xi}{R^3} d\tau. \quad (3)$$

والجهد في النقطة M سيتحدد بالعلاقة

$$u(M) = \int_T \int \int \rho \frac{1}{R} d\tau. \quad (4)$$

وإذا كانت النقطة M تقع خارج الجسم فإن ذلك يمكن التحقق منه بالتفاضل مباشرة تحت علامة التكامل*. وبالمثل نحسب أيضا المشتقات من الرتب العليا. ومن الواضح أن الجهد $u(M)$ خارج الجسم T يحقق معادلة لابلاس (انظر تفصيل ذلك صفحة ٤٠٢). وفي المستقبل سنستعين بالخواص المذكورة أعلاه للجهود ، دون أن نحاول تكوين النظرية بالشروط الأكثر عمومية ، كما سنصوغ عدة نظريات بشرط أن يكون ρ دالة محدودة (يفترض أنها قابلة للتكامل).

إذا كانت النقطة M تقع داخل المنطقة T فلا يمكن التأكيد بأن $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ بدون بحث إضافي ستقوم به فيما سيلي.

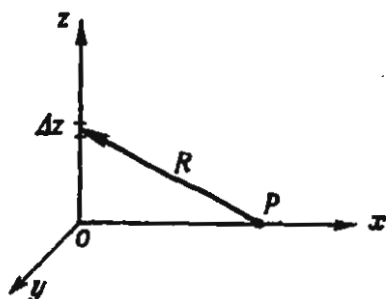
فقرة ٧ : المسألة المستوية . الجهد اللوغاريتمي . ندرس توزيع الكتل في الفراغ المعتمد فقط على إحداثيين (x, y) . في أى مستوى $z = \text{const}$ كما هو

• لإمكانية تفاضل التكامل المحدود على الصورة

$$I(M) = \int_T F(M, P) \varphi(P) d\tau_P$$

بالنسبة إلى البارامتر تحت علامة التكامل يكتفى اتصال مشتقة الدالة $F(M, P)$ بالبارامتر وقابلية التكامل مطلقا للدالة $\varphi(P)$. وعادة تصاغ هذه النظرية عندما $\varphi(P) = 1$ ولا يختلف إثباتها في حالتنا عن الحالة العادية .

واضح ، يأخذ الجهد نفس القيمة ولذا يكفي بحث جهد النقطة (x, y) الواقعة في المستوى $z = 0$.



شكل ٥٤

نعين جهد المستقيم المتجانس اللانهائي L . نمد المحور z على امتداد هذا للمستقيم . نفرض أن كتلة وحدة الطول تساوي μ . قوة جذب النقطة $P(x, 0)$ بالعنصر Δz (شكل ٥٤) ومركبتها على المحور x يساويان على الترتيب :

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \Delta z}{(x^2 + z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos \alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}.$$

ومن هنا

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

($z/x = \tan \alpha$).

وإذا كانت النقطة $P(x, y)$ نقطة اختبارية فإن قوة جذب هذه النقطة بالمستقيم L ستكون متجهة على امتداد $\overline{OP}$ ومساوية في المقدار :

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

حيث

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

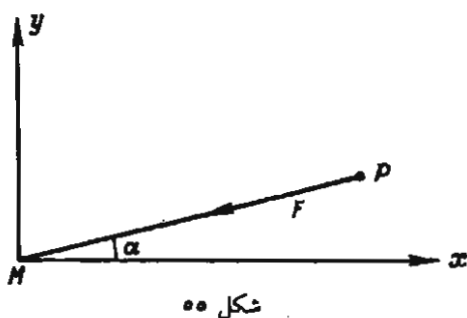
وجهد هذه القوة يسمى بالجهد اللوغاريتمي ويساوي

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \quad (5)$$

وهو ما يسهل التأكد منه بالتفاضل مباشرة .

والجهد اللوغاريتمي هو حل معادلة لابلاس في متغيرين مستقلين ، وهذا الحل له تماثل دائري حول القطب في النقطة $\rho=0$ حيث يؤول فيها إلى المالا نهاية ..

وبذلك فإن جهد المستقيم المتجانس يعطى مجالاً مستوياً ويعبر عنه بالعلاقة (5) . والتعبير عن الجهد في صورة تكامل قد سبق أن حصلنا عليه للحجوم المحدودة* . ونشير إلى أنه على خلاف الجهد الحجمي لا يؤول الجهد اللوغاريتمي

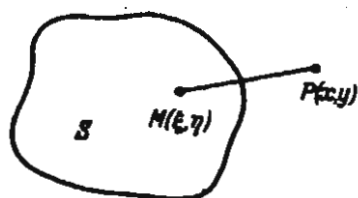


إلى الصفر في المالا نهاية وإنما يكون له هناك انفراد لوغاريتمي .

نحسب الآن مركبات قوة الجذب للنقطة P (شكل ٥٥) :

$$X = F \cos \alpha = -2\mu \frac{x}{\rho^2} \quad \left(\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \right),$$

$$Y = F \sin \alpha = -2\mu \frac{y}{\rho^2} \quad \left(\sin \alpha = \frac{y}{\rho} \right).$$



شكل ٥٦

وإذا وجدت عدة نقط (أو عدة مستقيبات لانهائية بكثلة موزعة على امتدادها) فإن جهود النقط (المستقيبات) يتم جمعها . وذلك وفقاً لمبدأ تراكم مجالات القوى .

* عند حساب جهد المستقيم اللانهائي لم يكن من الممكن تكامل جهود العناصر المنفرجة بشكل مباشر لأنه في هذه الحالة كان سيتبع تكامل متباعد . بالفعل . جهد العنصر Δz يساوي

$$\Delta z = \mu \frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

وتعطي عملية التكامل الشكلي تكاملاً متباعداً

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

في حالة المنطقة S ذات الكثافة الموزعة باتصال $\mu(\xi, \eta)$ (شكل ٥٦) يعبر عن مركبتى قوة جذب النقطة P بتكاملين ثنائيين :

$$\left. \begin{aligned} X &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta, \\ Y &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ويكون الجهد مساويا

$$u(x, y) = 2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \quad (7)$$

وهو ما لا يصعب التحقق منه بإجراء عملية التفاضل للنقط الواقعة خارج S .
أما إذا كانت النقطة P تقع في المنطقة S فمن الضروري إجراء بحث إضافي.

فقرة ٣ : التكاملات المعتلة. تمثل الجهود ومركبات قوى الجذب بواسطة التكاملات حيث تؤول الدوال المكاملة لهذه التكاملات إلى المالا نهاية إذا ما درسنا قيمها في النقط الواقعة في المنطقة التى تحتوى على كل جاذبة.

وكما نعلم ، إذا كانت الدالة المكاملة تؤول عند نقطة معينة من نقط منطقة التكامل إلى المالا نهاية فإن التكامل لا يمكن تعريفه كنهاية مجموع . بالفعل فى هذه الحالة لا يكون للمجموع التكاملى نهاية ، لأن الحد المتعلق بذلك الحجم الأول (عنصر الحجم) المحتوى على النقطة المنفردة يمكن أن يغير بأى قدر حاد مقدار المجموع وفقاً لاختيار النقطة الوسطية . وتسمى التكاملات المأخوذة لمثل هذه الدوال بالتكاملات المعتلة (improper integrals) .

نفرض أنه في المنطقة T معطاة الدالة $F(x, y, z)$ التى تؤول إلى المالا نهاية عند نقطة معينة $M_0(x_0, y_0, z_0)$. ندرس التكامل المحدود المأخوذ على المنطقة $T - K_\epsilon$ حيث K_ϵ جوار ما للنقطة M_0 قطره لا يفوق ϵ .

• هذا يناظر في الفراغ أسطوانة ذات رواسم موازية للمحور z ومقطعها S في المستوى (x, y) بكثافة حجمية $\mu(\xi, \eta)$ لا تعتمد على z .

وإذا كانت متتابعة التكاملات

$$I_n = \int_{T-K_{e_n}} \int F d\tau \quad (e_n \rightarrow 0)$$

عند التضييق الاختياري للمنطقة K_{e_n} حتى تتحول إلى النقطة M_0 لها نهاية لا تعتمد على اختيار المناطق K_{e_n} فإن هذه النهاية تسمى بالتكامل المعتل للدالة $F(x, y, z)$ على المنطقة T ويرمز له كالعادة بالرمز

$$\int_T \int F d\tau.$$

وإذا وجدت ولو متتابعة واحدة من المناطق $\bar{K}_{e_n}$ بحيث إنه عندما $e_n \rightarrow 0$ توجد النهاية I وللمتتابعات الأخرى K_{e_n} يكون لهذه النهاية قيم أخرى ، أو لا توجد هذه النهاية على الإطلاق ، فإن النهاية I تسمى بالتكامل المعتل المتقارب شرطياً. ومن الواضح أنه عند دراسة التكامل المعتل المتقارب شرطياً I يجب تعيين تلك المتتابعة للمناطق $\bar{K}_{e_n}$ التي يعرف وفقاً لها هذا التكامل.

وسنكتفي هنا بدراسة تلك الحالة عندما يكون للدالة المكاملة انفراد في نقطة معزولة. نبحث تقارب التكامل على الصورة :

$$\int_T \int \int \frac{C}{R^\alpha} d\tau_M, \quad (8)$$

حيث $\alpha > 0$, C ثابتان ،

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2},$$

M_0 - نقطة من نقط المنطقة T . وبدون تحديد للعمومية يمكن اعتبار أن T عبارة عن كرة نصف قطرها R ومركزها في النقطة M_0 . نأخذ بمثابة المنطقة K_{e_n} كرة نصف قطرها e_n ومركزها في النقطة M_0 ونبحث عن نهاية متتابعة التكاملات

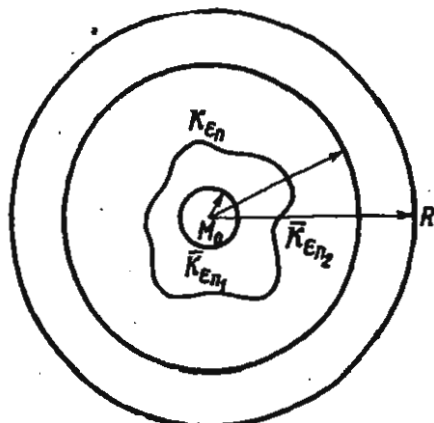
$$\begin{aligned} \int_{T-K_{e_n}} \int \int \frac{C}{R^\alpha} d\tau &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{e_n}^R \frac{C}{r^{\alpha-2}} dr = 2\pi \cdot 2C \int_{e_n}^R \frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \\ &= \begin{cases} 4\pi C \left[\frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \right]_{e_n}^R, & \alpha \neq 3, \\ 4\pi C [\ln r]_{e_n}^R, & \alpha = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما ϵ_n يتحول إلى الصفر يتضح أنه عندما $\alpha < 3$ توجد نهاية ، وعندما $\alpha \geq 3$ لا توجد نهاية .

نوضح أنه إذا كانت الدالة $F(x, y, z)$ غير سالبة وتوجد النهاية

$$I_n = \iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_n}} F d\tau \quad (\epsilon_n \rightarrow 0),$$

حيث $\bar{K}_{\epsilon_n}$ كرة نصف قطرها ϵ_n ومركزها في النقطة M_0 فإنه توجد نهاية



شكل ٥٧

للتكاملات I عند أي اختيار للمتتابعات K_{ϵ_n} المضمحلة إلى النقطة M ، وقيمة هذه النهاية لا تعتمد على شكل المنطقة K_{ϵ_n} . وأية منطقة K_{ϵ_n} يمكن حصرها بين سطحين كرويين $\bar{K}_{\epsilon_{n_1}}$ ، $\bar{K}_{\epsilon_{n_2}}$ نصف قطرها ϵ_{n_1} ، ϵ_{n_2} يتحولان إلى الصفر مع ϵ_n (شكل ٥٧) . ووفقاً لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإن

$$\iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_{n_1}}} F d\tau \geq \iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_n}} F d\tau \geq \iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_{n_2}}} F d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_n}} F d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T-\bar{K}_{\epsilon_n}} F d\tau = I,$$

وذلك لأن نهايتي التكاملين الأول والثالث موجودتان وتساويان هذا العدد .

وبذلك ففي حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة يكون التكامل المعتل

$$\iiint_T \frac{C}{R^\alpha} d\tau \quad (8)$$

موجوداً إذا كان $\alpha < 3$ وغير موجود إذا كانت $\alpha \geq 3$.

وفي حالة عدد آخر من المتغيرات المستقلة تكون القيمة الحرجة للبارامتر α ،
التي نحدد حدود تقارب التكاملات على الصورة (8) ، مساوية لعدد الأبعاد
(عدد المتغيرات المستقلة) فمثلاً في حالة المتغيرين المستقلين يكون التكامل

$$\begin{aligned} & \text{متقارباً عند } \alpha < 2 , \\ & \text{متباعداً عند } \alpha \geq 2 . \end{aligned} \quad \iint_S \frac{C}{\rho^\alpha} d\sigma$$

ونتوقف عند اختبار تقارب التكاملات المعتلة . ثبت أنه :

لتقارب التكامل المعتل

$$\iiint_T F(x, y, z) dx dy dz \quad (9)$$

يكن أن توجد تلك الدالة $\bar{F}(x, y, z)$ التي يتقارب التكامل المعتل لها المأخوذ
على المنطقة T وتحقق لها المتباينة

$$|F(x, y, z)| < \bar{F}(x, y, z). \quad (10)$$

ندرس متتابعة ما من المناطق K_n التي تحتوى النقطة المنفردة M_0 . ووفقاً
لتقارب متتابعة التكاملات $\bar{I}_n$ للدالة $\bar{F}$ فإنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد ذلك
 $N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\bar{I}_{n_1} - \bar{I}_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{n_1} - K_{n_2}} \bar{F} d\tau \right| < \varepsilon ,$$

بمجرد أن يكون $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. وحيث أن $\bar{F}$ تعتبر حالة الحد الأعظم
(majorant) للدالة $F(x, y, z)$ فإنه يمكن كتابة :

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{n_1} - K_{n_2}} F d\tau \right| \leq \left| \iiint_{K_{n_1} - K_{n_2}} \bar{F} d\tau \right| \leq \iiint_{K_{n_1} - K_{n_2}} \bar{F} d\tau < \varepsilon , \quad (10')$$

إذا كان $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. وتحقق الشرط (10') وفقاً لاختبار كوشي للتقارب يعتبر كافياً لتقارب المتابعة

$$I_n = \int_{T-K_{n_n}} \int \int F d\tau$$

إلى نهاية معينة

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_T \int \int F d\tau.$$

ولا يصعب أن نرى أن هذه النهاية لن تعتمد على شكل المناطق K_{n_n} . وبذلك فإن وجود التكامل المعتل (9) قد أثبت.

وإذا أمكن للدالة $F(x, y, z)$ تعيين تلك الدالة الموجبة $P(x, y, z)$ بحيث إن $F(x, y, z) > P$ وكان التكامل المعتل للدالة P على المنطقة T متباعداً فإن التكامل (9) سيكون متباعداً كما هو واضح.

نتيجة: إذا تحققت للدالة $F(M, P)$ تقول إلى المالا نهاية عند $P = M$ المتباينة

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^\alpha}, \quad \alpha = \text{const} < 3, \\ C = \text{const} < \infty,$$

فإن التكامل المعتل على المنطقة T المحتوية على النقطة M

$$\int_T \int \int F(M, P) d\tau_P$$

يتقارب.

ومن نظرية التكاملات اللامعتلة المعتمدة على البارامترات نعلم أن اتصال الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامترات والمتغيرات المستقلة يعتبر شرطاً كافياً لاتصال التكامل نفسه كدالة في البارامترات*. وفي حالة التكاملات المعتلة لا يتحقق اتصال الدالة المكاملة ولذلك فالمعيار المشار إليه غير قابل للتطبيق. ثبت معيار اتصال التكاملات المعتلة المعتمدة على بارامترات.

* انظر كتاب يسكونوف «التكامل والتفاضل» الجزء الثاني طبعة دار «مير» باللغة العربية.

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P) d\tau_P, \quad (11)$$

حيث $F(P, M)$ دالة تتحول إلى المالا نهاية عند انطباق متغيرها ومتصلة بالنسبة إلى M و $f(P)$ دالة محدودة.

يسمى التكامل (11) تكاملاً مقارباً بانتظام في النقطة M_0 إذا أمكن لأي عدد $\epsilon > 0$ تعيين $\delta(\epsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|V_{\delta(\epsilon)}(M)| = \left| \int_{T_{\delta(\epsilon)}} F(P, M) f(P) d\tau_P \right| \leq \epsilon$$

لأية نقطة M بعدها عن M_0 أصغر من $\delta(\epsilon)$ ولأية منطقة $T_{\delta(\epsilon)}$ تحتوى النقطة M_0 وقطرها $d \leq \delta(\epsilon)$.

نثبت أن التكامل

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P) d\tau_P,$$

المنتظم التقارب في النقطة M_0 هو دالة متصلة في هذه النقطة. ويجب علينا أن نثبت أنه لأي ϵ يمكن تعيين $\delta(\epsilon)$ بحيث يكون

$$|V(M_0) - V(M)| < \epsilon$$

عندما

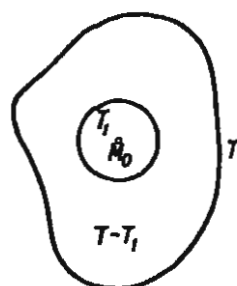
$$|\vec{MM}_0| < \delta(\epsilon).$$

نختار داخل المنطقة T منطقة ما

T_1 تحتوى النقطة M_0 (شكل ٥٨)

ونقسم التكامل إلى حدين

$$V = V_1 + V_2,$$



شكل ٥٨

حيث V_1 يؤخذ على المنطقة T_1 و V_2 يؤخذ على المنطقة $T_2 = T - T_1$. وفي المستقبل سنعرّف بدقة أكثر مقياس المنطقة T_1 . ندرس المتباينة

$$|V(M_0) - V(M)| \leq |V_2(M_0) - V_2(M)| + |V_1(M_0)| + |V_1(M)|$$

ونبين أنه يمكن جعل كل حد من حدود الطرف الأيمن أصغر من $\varepsilon/3$ عند $|\vec{M}_0\vec{M}|$ الصغير صغراً كافياً. باختيار المنطقة T_1 داخل كرة نصف قطرها $\delta(\varepsilon/3)$ سنحصل على :

$$|V_1(M_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} , |V_1(M)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

إذا كان $|\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta'(\frac{\varepsilon}{3})$.

ويستج وجود δ' هنا من شرط التقارب المنتظم للتكامل (11) في النقطة M_0 . واختيار المنطقة T_1 يحدد المنطقة T_2 .

وحيث إن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 فإن التكامل V_2 يعتبر دالة متصلة في هذه النقطة.

ومن هنا ينتج وجود $\delta''(\varepsilon/3)$ بحيث إن

$$|\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta''(\frac{\varepsilon}{3}) \text{ عندما } |V_2(M_0) - V_2(M)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

وبفرض أن

$$\delta(\varepsilon) = \min [\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)],$$

نحصل على

$$, |\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta \text{ عندما } |V(M) - V(M_0)| \leq \varepsilon$$

مما يعني اتصال التكامل المنتظم التقارب.

ونشير إلى أن النتائج التي حصلنا عليها صحيحة ليس للتكاملات المأخوذة على الحجم فحسب وإنما هي صحيحة أيضاً للتكاملات على السطوح والمنحنيات. وهذا الموضوع سنستخدمه في المستقبل.

ندرس التكامل

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P \quad (12)$$

ومركبات قوة الجذب :

$$\left. \begin{aligned} X(M) &= - \int \int \int_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (x - \xi) d\tau_P; \\ Y(M) &= - \int \int \int_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (y - \eta) d\tau_P; \\ Z(M) &= - \int \int \int_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (z - \zeta) d\tau_P \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

في النقط الواقعة داخل الجسم الجاذب T . تكون التكاملات المعتلة (12) .
(13) متقاربة إذا كانت الكثافة $\rho(M)$ محدودة . $|\rho(M)| < C$. وللجهد $V(M)$ يكون ذلك واضحاً لأن

$$\frac{|\rho|}{R} < \frac{C}{R^2} \quad (\alpha = 1 < 3).$$

ولمركبات قوة الجذب يتج ذلك من المتباينة

$$\frac{|\rho|}{R^2} \frac{|x - \xi|}{R} < \frac{C}{R^2} \quad (\alpha = 2 < 3),$$

لأن $|x - \xi| < R$.

ولتوضيح مفهوم التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة نبين أن التكاملات (13) و (12) تعتبر دوال متصلة .

ولهذا الغرض يجب إثبات أن التكاملات (13) . (12) منتظمة التقارب في كل نقطة M_0 .

نحسب القيمة المطلقة للتكامل *

$$\left| \int \int \int_{T_0} \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P \right| \leq C \int \int \int_{K_0^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

حيث $K_0^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها في النقطة M_0 وتحتوى المنطقة T_0 .
غير أن حساب هذا التكامل على المنطقة $K_0^{M_0}$ التي مركزها في النقطة M_0 لا يكون

* . نشير إلى أن التكامل (12) يتج من التكامل (11) عند $f(P) = \rho(P)$ ، $F(M, P) = 1/R_{MP}$.

مربعاً. فله حساب التكامل الأخير يكون من الأنسب الانتقال إلى مجموعة الإحداثيات الكروية التي نقطة أصلها في النقطة M . ومن الواضح أن

$$\left| C \int \int \int_{K_0^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_{20}^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| = C 8\pi\delta^3,$$

حيث K_{20}^M كرة نصف قطرها 2δ ومركزها في النقطة M . وإذا أعطينا عدداً ما $\varepsilon > 0$ واخترنا

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

فإننا سنتأكد من التقارب المنتظم للتكامل V .
وبتكرار نفس التحليل السابق للتكامل:

$$X(M) = - \int \int \int_T \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P,$$

نحصل على:

$$\left| \int \int \int_T \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_0^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^3} \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_{20}^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^3} \right| = 8\pi\delta C \leq \varepsilon,$$

إذا كان

$$\delta \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

وبذلك فإن الجهد V ومركبات قوة الجذب X, Y, Z تكون دوال متصلة في كل الفراغ*.

فقرة ٤: المشتقات الأولى للجهد الحجمي. إن الدوال تحت علامة التكاملات

$$X(M) = - \int \int \int_T \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P, \quad Y(M), \quad Z(M),$$

هي عبارة عن المشتقات بالمتغيرات المناظرة للنالة تحت علامة التكامل

* إن التقارب للتكاملين $V(M), X(M)$ أثبت بفرض محدودية الكثافة $C > |\rho|$. وبالتالي فإن هذين التكاملين متصلان أيضاً عند نقط انفصال المادة ρ . على سبيل المثال على حدود المنطقة المملوءة بالكل.

$$V(M) = \int_T \int \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P.$$

وإذا كانت عملية التفاضل تحت علامة التكامل قانونية للدالة V فإن

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (14)$$

أى أن V يعتبر جهداً للمجال الذى مركباته تساوى X, Y, Z .

وإذا وقعت النقطة M خارج المنطقة T فإن الدالة :

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_{MP}}$$

تكون متصلة بالنسبة إلى المتغيرين $P(\xi, \eta, \xi)$, $M(x, y, z)$. وبالتالي ففى هذه الحالة يكون التفاضل تحت علامة التكامل V قانونياً .

والمشتقات من رتب أعلى يمكن حسابها أيضاً بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل فى كل مكان خارج T . ومن هنا ووفقاً للمأخوذة الواردة فى الباب الثالث ، بند ٣ ينتج أن الجهد خارج الكتل الجاذبة يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad \text{خارج } T.$$

نثبت أن حساب مشتقات الجهد V يمكن إجراؤه بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل أيضاً عندما تكون النقطة M واقعة داخل الجسم T .

وعند الإثبات سنستعين فقط بكون الدالة $\rho(x, y, z)$ محدودة ($|\rho(x, y, z)| < C$) دون افتراض اتصالها ، ومن هنا سينتج أن الدالة $V(x, y, z)$ قابلة للتفاضل فى نقط الحدود التى يمكن اعتبارها نقطاً لانفصال الدالة $\rho(x, y, z)$ المساوية للصفر خارج الجسم .

نوضح أنه لأى ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon,$$

إذا كان

$$|\Delta x| < \delta(\epsilon).$$

نحصر النقطة M_0 في كرة صغيرة بدرجة كافية $K_0^{M_0}$ سنلق مقاييسها فيما بعد ، ونقسم V إلى حدين :

$$V = V_1 + V_2,$$

حيث V_1, V_2 يناظران عملية التكامل على الحجم $T_1 = K_0^{M_0}$ وعلى الحجم الإضافي $T_2 = T - K_0^{M_0}$. وعندئذ فإن :

$$\begin{aligned} \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} &= \\ &= \frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

ولأى مقاييس مثبتة للمنطقة T_1 يكون

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2 = \iiint_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau,$$

وذلك لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 .

بوضع $X = X_1 + X_2$ نقدر المقدار

$$\begin{aligned} \left| X - \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right| &\leq \\ &\leq \left| X_2 - \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + |X_1| + \\ &\quad + \left| \frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| \end{aligned}$$

ونوضح أنه يمكن جعل كل حد أصغر من $\epsilon/3$. بالفعل

$$|X_1| = \left| \iiint_{T_1} \rho \frac{x - \xi}{R^3} d\tau \right| < C \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^3 \sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi dr = 4\pi C R < \frac{\epsilon}{3}, \quad (15)$$

وذلك لأن $|\rho| < C$ ، $|\frac{x-\xi}{R}| < 1$ ندرس الحد الأخير

$$|S| = \left| \frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| = \\ = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) d\tau \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \frac{R - R_1}{RR_1} d\tau \right|,$$

حيث

$$R_1 = \sqrt{[(x + \Delta x) - \xi]^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2};$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

وأضلاع المثلث MM_0MM_1 تساوى $|\Delta x|$ ، r ، r_1 . ومن هنا يتبع أن

$$|R - R_1| \leq |\Delta x|.$$

ولذا فإن

$$|S| \leq C \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{RR_1} \leq C \frac{1}{2} \left\{ \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} \right\}.$$

وذلك لأنه لأى عددين a ، b يكون

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

وعند ذلك فإن

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \quad , \quad \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \leq \iiint_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

حيث $K_{2\delta'}^{M_1}$ كرة نصف قطرها $2\delta'$ ومركزها فى النقطة M_1 .

وبالاختيار المناسب للعدد δ' يمكن أن نكفل تحقق المتباينة

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\epsilon}{3}. \quad (16)$$

باختيار δ' من الشرط (16) نحقق المتباينتين (15) و (16). والآن نقوم بتثبيت

المنطقة $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ ومن ثم المنطقة $T_2 = T - T_1$

المساوية (14) مطبقة على المنطقة المختارة T_2 تعنى أنه لأي ε يمكن تعيين δ'' بحيث أن

$$\left| \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

بمجرد أن يكون $|\Delta x| < \delta''$. وأخيراً باختيار $\delta' = \min[\delta', \delta'']$ نحصل على :

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon,$$

إذا كان $|\Delta x| < \delta$. وبذلك أثبتنا وجود المشتقة $\frac{\partial V}{\partial x}$ التي تساوي

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \quad (17)$$

ولا تتطلب العلاقاتان

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

إثباتاً خاصاً.

وهكذا أثبتنا أن التفاضل تحت علامة التكامل قانوني وأن مركبات مجال القوى X, Y, Z هي مركبات $\text{grad } V$.

فقرة ٥ : المشتقات الثانية للجهد الحجمي . إن التكامل المعتل

$$\int_T \int_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\tau_P = - \int_T \int_T \rho \left(\frac{1}{R^3} - 3 \frac{(x-\xi)^2}{R^5} \right) d\tau \quad (18)$$

لا يتقارب تقارباً مطلقاً للنقط الداخلية P في الجسم T . وفي هذه الحالة تكون الدالة الحد الأعظم (majorant) للدالة المكاملة على الصورة

$$\frac{C}{R^3} \text{ عندما } \alpha = 3.$$

نثبت علاقات تحسب بها داخل T المشتقات الثانية للجهد V بافتراض الاتصال وقابلية التفاضل باتصال للكثافة $\rho(x, y, z)$ في جوار النقط محل البحث. وكحالة خاصة لا يكون البحث المجرى فيما سيلي قابلاً للتطبيق على النقط

الحدية حيث توجد - كقاعدة - للكثافة انفصالات .

نعتبر عن الجهد V في صورة مجموع حدين

$$V = V_1 + V_2,$$

يتعلقان بالمنطقتين T_1 , T_2 حيث $T_1 = K_0^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها في النقطة محل الدراسة M_0 وداخل هذه الكرة تكون الدالة ρ قابلة للتفاضل .

ويمكن حساب المشتقة الثانية للجهد V_2 بالتفاضل تحت علامة التكامل لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 :

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) = \int \int \int_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau.$$

والمشتقة الأولى للدالة V_1 بالنسبة إلى x تساوى

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau, \quad (19)$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right).$$

نحول التكامل (19) بالاستعانة بعلاقة أوستروجرادسكى

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} &= - \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \int \int \int_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] d\tau = \\ &= - \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \frac{\rho}{R} \cos \alpha d\sigma + \int \int \int_{T_1} \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau, \end{aligned}$$

حيث $\Sigma_0^{M_0}$ سطح الكرة الذى يحده الحجم T_1 ، α الزاوية بين العمودى الخارجى على السطح $\Sigma_0^{M_0}$ والمحور x . والحد الأول عبارة عن دالة قابلة للتفاضل في النقطة M_0 لأن M_0 تقع خارج $\Sigma_0^{M_0}$. والحد الثانى في جوار النقطة M_0 يعتبر أيضاً دالة قابلة للتفاضل لأن الدالة ρ لها مشتقة في T_1 . ومن هنا

يتبع أنه في النقطة M_0 توجد مشتقة ثانية للدالة V_1 . نتقل إلى حسابها :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = - \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma + \int \int \int_{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \, d\tau.$$

وللحد الثاني يتحقق في النقطة M_0 التقدير التالي :

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right| < C_1 \text{ إذا كان } \left| \int \int \int_{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \, d\tau \right| < C_1 \int \int \int_{T_1} \frac{d\tau}{R^3} = C_1 4\pi\delta \quad (20)$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على التكامل السطحي نحصل على :

$$- \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma = - \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\cos^2 \alpha}{R^3} \, d\sigma = - \rho^* \frac{4\pi}{3},$$

حيث ρ^* هنا هو قيمة الكثافة في نقطة ما من نقط $\Sigma_0^{M_0}$,

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{x - \xi}{R^3} = - \frac{1}{R^2} \cos \alpha$$

وعلاوة على ذلك فإن

$$\int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \frac{\cos^2 \alpha}{R^3} \, d\sigma = \frac{1}{3} \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \frac{1}{R^3} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi.$$

ويعطى الانتقال إلى النهاية عندما $\delta \rightarrow 0$ ما يلي :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma \right] = - \frac{4\pi}{3} \rho(M_0). \quad (21)$$

والمساوية

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

صحيحة لأي δ وطرفها الأيسر لا يعتمد على δ ولذا فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} \right) = - \frac{4\pi}{3} \rho(M) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) \, d\tau. \quad (22)$$

ومن وجود المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ المثبت فيما سبق يتبع وجود

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = \overline{\int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau}. \quad (23)$$

والتكامل الأخير حصلنا عليه بطريقة خاصة للانتقال النهائي عندما تكون المناطق المضمحلة إلى النقطة M_0 كرات * ، وذلك ما أشرنا إليه بنقط فوق علامة التكامل في العلاقة (23) . وتغير أشكال هذه المناطق بوجه عام يمكن أن يغير قيمة النهاية . ويجب اعتبار التكامل (23) بمثابة تكامل متقارب شرطيا . وبذلك فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (M_0) = \overline{\int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau} - \frac{4\pi}{3} \rho (M_0). \quad (24)$$

ومن هنا يتضح أن حساب المشتقات الثانية للجهد بواسطة التفاضل الشكلي تحت علامة التكامل كان سيؤدي بنا إلى نتيجة خاطئة .

وتتبع للمشتقتين $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ صيغتان مائلتان . بالتعويض بقيم المشتقات الثلاث في صيغة مؤثر لابلاس نجد أن

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= \overline{\int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \int_{\tau}^{\tau} \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau} - 4\pi\rho (M_0) = \\ &= -4\pi\rho (M_0), \quad (25) \end{aligned}$$

وذلك لأن $1/R$ حالة توافقية * * .

وبذلك يحقق الجهد الحجمي معادلة بواسون

$$\Delta V = -4\pi\rho \text{ داخل الجسم ،}$$

* تسمى النهاية (23) عادة بالقيمة الأساسية للتكامل .

* * حصلنا على العلاقة (25) بفرض قابلية الدالة ρ للتفاضل وهو ما يعتبر شرطاً كافياً ويمكن استبداله بشروط أقل قوة أو أقل تعقيداً . غير أن شروط اتصال الدالة $\rho(M)$ ليست كافية لصحة العلاقة (25) لأنه توجد أمثلة للدوال متصلة $\rho(M)$ لا يوجد لجهداها الحجمي مشتقات ثانية .

ومعادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad \text{خارج الجسم .}$$

والمعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u = -f \quad (25')$$

بشرط قابلية الدالة f للتفاضل داخل منطقة ما T ، لها حل خاص

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{f d\tau}{R}.$$

ومن هنا ينتج على وجه الخصوص أن حل المسألة الحدية للمعادلة اللامتجانسة (25') يمكن أن يؤول إلى حل مسألة حدية ماثلة لمعادلة لابلاس $\Delta v = 0$ إذا

$$u = u_0 + v \quad \text{عبارة عن الصورة المجموع}$$

فقرة ٦ : الجهود السطحية . كما تبين علاقة جرين الأساسية

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P,$$

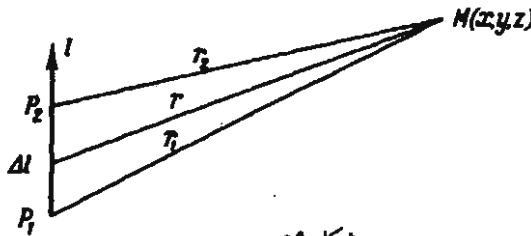
يمكن التعبير عن أية دالة توافقية بواسطة تكاملات تعتبر جهوداً سطحية .

ندرس مجالاً متكوناً بكتل موزعة على السطح Σ ، ونعين جهد هذا المجال . والكثافة السطحية $\mu(P)$ في النقطة P من نقط السطح Σ هي عبارة عن نهاية نسبة الكتلة الموجودة على عنصر سطح ما $d\sigma$ من السطح Σ يحتوى على النقطة P إلى مساحته عندما يضمحل $d\sigma$ ويؤول إلى النقطة P . وجهد هذه الكتل يعبر عنه بالتكامل السطحي

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P, \quad (26)$$

• إذا كانت الكتل ذات الكثافة الحجمية ρ واقعة في طبقة ما سمكها h قرب السطح Σ وكان المجال يدرس على المسافات الكبيرة بالمقارنة مع h ($h/R \ll 1$) فلا يكون هناك معنى بوجه عام لأخذ السمك في الاعتبار . فبدلاً من الجهد الحجمي ذي الكثافة ρ من المناسب دراية الجهد السطحي ذي الكثافة السطحية $\mu = \rho h$

الذى يسمى بجهد الطبقة البسيطة أو طبقة الشحن (layer of charge) .
ويعتبر جهد الطبقة الثنائية (double layer) نوعاً آخر من أنواع الجهد
السطحي . نتقل إلى تعريفه .



شكل ٥٩

ندرس ذا القطبين* المتكون من الكتلتين $+m$ ، $-m$ الواقعتين في النقطتين P_1 ، P_2 على بعد Δl (شكل ٥٩) . وحاصل الضرب $m \cdot \Delta l = N$ يسمى بعزم ذى القطبين . وجهد ذى القطبين في نقطة ما $M(x, y, z)$ يساوى

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = N \frac{1}{\Delta l} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

حيث r_1 ، r_2 بعدا النقطة M عن النقطتين P_1 ، P_2 .
وإذا كان Δl صغيراً بالمقارنة مع البعد عن النقطة M ($\Delta l/r_1 \ll 1$) فإننا
بالاستعانة بنظرية التغيرات المحدودة (نظرية لاجرانج) يمكننا أن نكتب :

$$V = N \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{R} \right), \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

حيث تؤخذ المشتقة بالاتجاه من الكتلة النافرة (الطاردة) إلى الكتلة الجاذبة ، R
بعد النقطة $M(x, y, z)$ عن نقطة ما وسطية $P(\xi, \eta, \zeta)$ على الجزء
للسقيم Δl .

• dipole : يعرف ذو القطبين بأنه مجموعة من شحنتين كهربائيتين أو من قطبين مغناطيسيين متساويين
للقدار ومختلفي الإشارة ، يكون البعد بينها (الزراع) صغيراً بالمقارنة مع بعد مركز ذى القطبين عن نقط المجال
عمل الدراسة (ملاحظة للترجم) .

نحسب المشتقة بالاتجاه l :

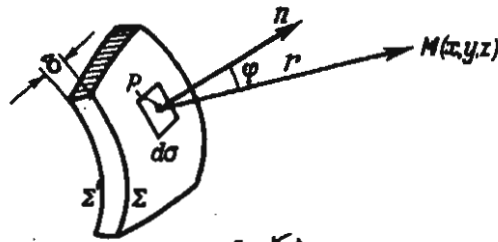
$$\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \cos(r, l) = \frac{\cos \varphi}{R^2}$$

حيث المتجه r يتجه من ذى القطبين إلى النقطة المثبتة M ، φ هي الزاوية بين المتجه l والمتجه r . وبذلك فجهود ذى القطبين يساوى

$$V(M) = N \frac{\cos \varphi}{R^2}, \quad (27)$$

حيث N عزم ذى القطبين .

نفرض أنه على السطحين Σ , Σ' (شكل ٦٠) اللذين يبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة δ قد وزعت كتل بحيث إن كتلة كل عنصر من عناصر السطح Σ'



شكل ٦٠

تكون مساوية في المقدار ومختلفة في الإشارة مع كتلة عنصر السطح المناظر من عناصر السطح Σ . نرمز بالرمز n إلى العمودى المشترك على السطحين Σ , Σ' المتجه من الكتل النافرة (الطاردة) إلى الجاذبة . وبالاتقال إلى النهاية عندما $\delta \rightarrow 0$ نحصل على الطبقة الثنائية كمجمل الطبقتين البسيطتين ذاتى الكثافتين المتضادتين اللتين تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة . وإذا كانت v هي الكثافة السطحية للعزم فإن عزم عنصر السطح $d\sigma_P$ سيكون مساوياً :

$$dN = v d\sigma_P;$$

ولجهود العنصر $d\sigma$ فى النقطة $M(x, y, z)$ منحصل على :

$$v \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = v(P) \frac{\cos \varphi_1}{R_{MP}^2} d\sigma_P,$$

حيث $\varphi_1 = (\vec{n}, \vec{PM})$

نسمى التكامل

$$W(M) = - \int_{\Sigma} \int \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P \quad (28)$$

يجهد الطبقة الثنائية . ومن الواضح أن هذا التعريف يناظر تلك الحالة عندما تكون الناحية الخارجية للسطح نافرة والناحية الداخلية جاذبة .

ومن الواضح أن

$$W = \int_{\Sigma} \int \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P,$$

حيث φ الزاوية بين العمودى الداخلى والاتجاه من نقطة السطح P إلى النقطة المثبتة M . وإذا كان السطح غير مغلق فيجب أن نعتبره ذا ناحيتين لأن جهد الطبقة الثنائية يتحدد فقط لمثل هذه السطوح .

وجهدا الطبقتين البسيطة والثنائية في حالة المتغيرين يكونان على الصورة :

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} ds, \quad (29)$$

$$W = - \int_C v(P) \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) ds = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds, \quad (30)$$

حيث C منحنى ما ، μ الكثافة الخطية للطبقة البسيطة ، v كثافة عزم الطبقة الثنائية الخطية ، φ هي الزاوية بين العمودى الداخلى على المنحنى C والاتجاه إلى النقطة المثبتة .

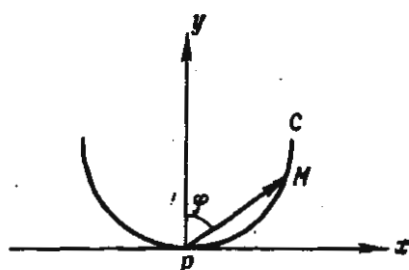
وإذا كانت نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ موجودة خارج السطح (خارج الكل الجاذبة) فإن الدوال المكاملة ومشتقاتها بالنسبة إلى x, y, z من أية رتبة في العلاقات :

$$V(M) = \int_{\Sigma} \int \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P, \quad W(M) = - \int_{\Sigma} \int v(P) \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$$

تكون دوال متصلة في المتغيرات x, y, z . ولذا ففي النقط الواقعة خارج السطح Σ ، يمكن حساب مشتقات الجهود السطحية بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل. ومن هنا ووفقاً لمبدأ التراكب يتبع أن الجهود السطحية تحقق معادلة لابلاس في كل مكان خارج الكتل الجاذبة. ومن الواضح أن الدالتين (30) و(29) تحققان معادلة لابلاس في المتغيرين المستقلين.

والجهود السطحية في نقط السطح Σ يعبر عنها بتكاملات معتلة. نوضح أنه إذا كان للسطح إنحناء (تقوس) متصل فإن جهد الطبقة الثنائية في نقط هذا السطح يكون موجوداً. نجرى الإثبات لحالة المتغيرين المستقلين :

$$W = \int_G \frac{\cos \varphi}{R} v ds.$$



شكل ٦١

ندرس منحنى على المستوى (x, y) ونختار نقطة الأصل في النقطة P ونمد المحور x على امتداد المماس والمحور y على امتداد العمودي في هذه النقطة (شكل ٦١). ومعادلة المنحنى في جوار ما للنقطة P تكعب على الصورة :

$$y = y(x).$$

وللمنحنى وفقاً للتعريف إنحناء متصل أى أن $y(x)$ لها مشتقة ثانية متصلة. ولذا فإن

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

ومن هنا ونتيجة لاختيار مجوزى الإحداثيات نجد أن

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\theta x).$$

ومن هنا نحصل على :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\theta x)}{2 \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2}}$$

$$\frac{\cos \varphi}{R} = \frac{y''(\theta x)}{2 \left\{ 1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2 \right\}}.$$

ومن صيغة الانحناء $K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ ينتج أن $y''(0) = K(P)$ ولذا فإن

$$\lim_{MP \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi}{R} = \frac{1}{2} K(P),$$

كما يثبت اتصال $\frac{\cos \varphi}{R}$ على امتداد القوس ومن ثم وجود جهد الطبقة الثنائية في نقط المنحنى C للدالة المحدودة v .

وجهد الطبقة الثنائية في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة أيضاً يكون موجوداً في نقط السطح ذات الانحناء المحدود لأن الدالة $\frac{\cos \varphi}{R^2}$ لها انفراد قابل للتكامل من الرتبة $1/R$. ولا يثير وجود جهد الطبقة البسيطة أية شكوك.

لمرة ٧ : سطوح ومنحنيات ليايرونوف. يتضح أن اشتراط محدوبة الانحناء لوجود الجهد السطحية يكون زائفاً عن الحاجة.

إن جهدي الطبقتين الثنائية والبسيطة في نقط السطح Σ يخيران تكاملين متعلقين. نبين أن هذين التكاملين يتقاربان لفصل معين من السطوح تسمى بسطوح ليايرونوف. إذا كانت كثافة الجهد دالة محدودة $|v(P)| < C$ حيث C ثابت ما.

ويسى السطح بسطح ليايرونوف إذا تحققت الشروط التالية :

- ١- في كل نقطة من نقط السطح Σ يوجد عمودى معرف (مستوى تماس).
- ٢- يوجد ذلك العدد $d > 0$ بحيث إن المستويات الموازية للعمودى على السطح Σ في نقطة معينة P لا تقطع أكثر من مرة واحدة الجزء Σ_d من السطح Σ الواقع داخل كرة نصف قطرها d ومركزها في P . وأجزاء السطح هذه Σ_d تسمى بجوارات ليايرونوف.
- ٣- الزاوية $\varphi(P, P') = (\widehat{\pi_{P'} \pi_P})$ المتكونة بين العموديين في النقطتين P, P' تحقق الشرط التالي :

$$\varphi(P, P') < A r^\theta, \quad (31)$$

حيث r البعد بين النقطتين P, P' ، A ثابت ما و $0 < \theta \leq 1$.

نفرض أن P_0 نقطة ما من نقط السطح Σ . نختار مجموعة الإحداثيات المتعامدة بوضع نقطة الأصل عند النقطة P_0 وتوجيه المحور z في اتجاه العمودى الخارجى. ونطبق المستوى (x, y) عندئذ على المستوى المماس. وتبعاً للشرط ٢ يوجد ρ_0 بحيث إن معادلة السطح Σ يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$z = f(x, y) \quad (32)$$

الحالة

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0 \quad (33)$$

نرمز بالرمز $\Sigma_{P_0}^0$ لجوار النقطة P_0 على السطح Σ وللفرف بالشرطين (32) و (33). نثبت بعض التقديرات للدالة $f(x, y)$ ومشتقاتها.

من وجود العمودى في كل نقطة من نقاط السطح (الشرط 1) نتج قابلية الدالة $f(x, y)$ للتفاضل. وجوب التمام الاتجاهية للعمودى (الخارجى) تعطى بالصيغ:

$$\cos \alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \beta = \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

وتبعاً لاختيار مجموعة إحداثياتنا يكون $z_x(P_0) = 0$, $z_y(P_0) = 0$. وسنعتبر أن السطح $\Sigma_{P_0}^0$ صغير (بنفس درجة صغر ρ_0) للدرجة أن

$$1 \geq \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

نرمز بالرمز M_P^0 إلى مسقط المتجه M_P على المستوى (x, y) وبالرمزين α' , β' إلى الزاويتين اللتين يصنعها المتجه M_P^0 مع المحورين x , y . من الواضح أن

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \alpha', \quad \cos \beta = \sin \gamma \sin \alpha'.$$

وحيث إن $\sin \gamma < \gamma$ فإنه وفقاً للشرط 3 يكون

$$\sin \gamma < Ar_{PP_0}^0$$

وبالتالى

$$|\cos \alpha| < Ar_{PP_0}^0, \quad |\cos \beta| < Ar_{PP_0}^0 \quad (35)$$

وحيث إن $\frac{1}{\cos \gamma} < 2$ علماً بأن $z_x = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$, $z_y = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$ فإن

$$|z_x| < 2Ar_{PP_0}^0, \quad |z_y| < 2Ar_{PP_0}^0.$$

نشير إلى أنه إذا كانت للدالة $f(x, y)$ مشتقات ثانية متصلة في جوار النقطة P_0 فإن السطح $z = f(x, y)$ يحقق شروط ليابونوف. وبذلك فإن السطوح ذات الانحناء للتصل تكون سطوح ليابونوف.

وبالاستعانة بملاحة (مفكوك) ليلور للنالة $z = f(x, y)$ في جوار النقطة $P_0(0, 0)$ نحصل على :

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(x, y) + yz_y(x, y),$$

حيث $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq y \leq y_0$. ومن هنا يتبع أن

$$|z(x, y)| < 4Ar_{PP_0}^{1+\delta}. \quad (36)$$

والتقديران الناتجان (36)، (34) يكفلان إثبات أن جهد الطبقة الثانية

$$W(M) = \int_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P \quad (28)$$

في النقط الواقعة على السطح Σ يكون تكاملاً معتلاً متقارباً إذا كان Σ سطح ليايبنوف. نفرض أن $M = P_0$ نقطة من نقط السطح Σ . باختيار مجموعة الإحداثيات كما سبق نعبّر عن معادلة السطح Σ في جوار النقطة P_0 على الصورة :

$$z = f(x, y).$$

النالة $f(x, y)$ تحقق الشرطين (26)، (34). نحسب $\cos \varphi$ حيث φ الزاوية بين اتجاه العمودى الداخلى في النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ واتجاه $\overrightarrow{PP_0}$. وليس من الصعب ملاحظة أن :

$$|\cos \varphi| = \left| \frac{\xi}{R} \cos \alpha + \frac{\eta}{R} \cos \beta + \frac{\zeta}{R} \cos \gamma \right| \leq |\cos \alpha| + |\cos \beta| + \frac{|\zeta|}{R} \leq AR_{PP_0}^{\delta} + AR_{PP_0}^{\delta} + 4AR_{PP_0}^{\delta} = 6AR_{PP_0}^{\delta}$$

وأن

$$\left| \frac{\cos \varphi}{R^2} \right| \leq 6A \frac{1}{R^{2-\delta}} \quad (0 < \delta \leq 1). \quad (37)$$

نعبّر عن W في صورة مجموع تكاملين

$$W = W_1 + W_2$$

حيث W_1 تكامل مأخوذ على السطح Σ_{P_0} الذى يحتوى النقطة المفردة P_0 والتكامل W_2 يؤخذ على الجزء الباقى من السطح $\Sigma - \Sigma_{P_0}$. وحيث إن النالة المكاملة في التكامل W_2 لا تقبل إلى المالا نهاية فإنه لتقارب التكامل W يكفى التأكد من تقارب التكامل W_1 . وحيث إن

$$d\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma} = \frac{\rho d\rho d\theta}{\cos \gamma},$$

حيث $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ، θ الإحداثيان القطبيان في المستوى (x, y) فإن تحويل المتغيرات في هذا التكامل يعطى :

$$W_1 = \int_{\Sigma_{P_0}} \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}^3} v(P) d\sigma_P = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}^3} v(P) \frac{1}{\cos \varphi} \rho d\rho d\theta.$$

وللملة المكاملة نحصل وفقاً للتقديرات (37) ، (36) ، (34) عل :

$$\left| v(P) \frac{\cos \varphi}{R^3} \frac{1}{\cos \varphi} \right| \leq \bar{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}}.$$

لأن $\rho < R$.

وهذه الصورة لدالة الحد الأعظم $\bar{F}$ تكفل تقارب التكامل للمتل في حالة التغيرين المتغيرين (انظر مقالة ٣).

وليس من الصعب إثبات أنه لسطح لايونوف يتقارب أيضاً جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P \quad (28)$$

في نقط السطح. وينبغي الإشارة إلى أن هذا التقارب يتحقق أيضاً لسطوح من فصيلة أوسع.

وفي حالة التغيرين المتغيرين يتقارب جهدا الطبقتين الثنائية والبسيطة في نقط للنحن (انظر الملاحظات (30) ، (29) إذا كان هذان الجهدان يؤخذان على منحنيات لايونوف للمرة بشروط مشابهة للشروط ١-٣ التي تعرف لسطوح لايونوف.

مقالة ٨ : انفصال جهد الطبقة الثنائية. نوضح أن جهد الطبقة الثنائية في

نقطة ما P_0 واقعة على السطح Σ تكون دالة منفصلة تتحقق لها العلاقاتان

$$\left. \begin{aligned} W_1(P_0) &= W(P_0) + 2\pi v(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - 2\pi v(P_0), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

حيث $W_1(P_0)$ القيمة النهائية (the limiting value) لجهد الطبقة الثنائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية ، $W_e(P_0)$ القيمة النهائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الخارجية* .

• إذا كان السطح Σ غير مغلق فإن الناحية الداخلية يمكن أن تعرف اصطلاحياً بالاتفاق على أى عمودى بالذات على السطح في النقطة P_0 يعتبر «داخلياً» وأى عمودى يعتبر «خارجياً» . ويجب الأخذ في الاعتبار أنه في حالة السطح غير المغلق يعرف جهد الطبقة التالية فقط للسطوح ذات الناحيتين.

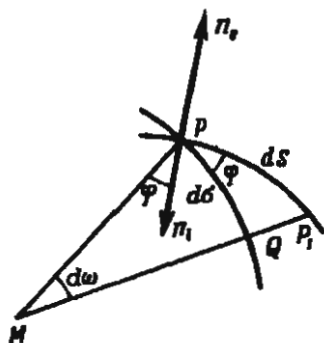
وفي حالة المتغيرين المستقلين يكون للعلاقتين المناظرتين الصورة :

$$\left. \begin{aligned} W_i(P_0) &= W(P_0) + \pi v(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - \pi v(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

وجهد الطبقة الثنائية للمتغيرين المستقلين يعبر عنه بالتكامل

$$W(M) = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds_P.$$

ندرس عنصرًا ما من عناصر طول
القوس ds نهايتهما النقطتان P ،
 P_1 . عند قوسًا دائريًا نصف قطره
يمر بالنقطة P ومركزه في النقطة
 M . حتى يتقاطع مع المستقيم
في النقطة Q . عندئذ يمكننا كتابة -
بدقة الكميات الصغيرة صفرًا لانهائيًا من
الرتب العليا - أن (شكل ٦٢) :



شكل ٦٢

$$ds \cos \varphi = d\sigma, \quad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \quad (40)$$

حيث $ds = \overline{PP_1}$ ، $d\sigma = \overline{PQ}$ ، زاوية المشاهدة التي يرى بها القوس
من النقطة M . وإشارة $d\omega$ تنطبق على إشارة $\cos \varphi$ بحيث إن :
 $d\omega > 0$ إذا كانت φ (الزاوية بين العمودى الداخلى في النقطة P والمتجه
 $\overrightarrow{PM}$) أقل من $\pi/2$ و $d\omega < 0$ إذا كانت $\varphi > \pi/2$. وإذا كانت $d\omega > 0$
أى $\varphi < \pi/2$ فإن الناحية الداخلية للمنحنى M هي التي تشاهد من
النقطة C ، وعندما $d\omega < 0$ ($\varphi > \pi/2$) تشاهد من النقطة M الناحية
الخارجية للمنحنى .

ومن هنا ينتج أن زاوية المشاهدة لقوس ما $\overline{P_1P_2}$ تساوى الزاوية P_1MP_2 التي
يرسمها الشعاع MP عندما تتحرك P على القوس P_1P_2 من P_1 إلى P_2 .

ندرس جهد الطبقة الثنائية W^0 على المنحنى المغلق C ذي الكثافة الثابتة
 $v = v_0 = \text{const}$. والشعاع MP يرسم الزاوية :

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C \\ \pi \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C \end{array} \right\} = \Omega$$

عندما تتحرك النقطة P على كل المنحنى C . ومن هنا فالجهد $\mathcal{W}^0$ نحصل على :

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C \\ \pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C \end{array} \right\} = v_0 \Omega = \mathcal{W}^0$$

وبذلك فإن الجهد بالكثافة الثابتة يعتبر حالة متقطعة الثبات علمًا بأن

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{W}_1^0 = \mathcal{W}_0^0 + \pi v_0 \\ \mathcal{W}_2^0 = \mathcal{W}_0^0 - \pi v_0 \end{array} \right\} \quad (41)$$

حيث $\mathcal{W}_1^0$ ، $\mathcal{W}_0^0$ ، $\mathcal{W}_2^0$ قيم الجهد داخل وعلى وخارج C .
وبالمثل في حالة المتغيرات الثلاثة سنحصل على :

$$\frac{d\sigma \cos \varphi}{R^3} = d\omega, \quad (42)$$

حيث $d\omega$ الزاوية المجسمة التي يرى بها العنصر $d\sigma$ من عناصر السطح Σ .
نفرض أن $d\sigma'$ عنصر السطح الكروي الناتج بتقاطع الكرة التي نصف قطرها MP المرسومة حول M مع المخروط الذي رأسه في النقطة M والمركّز على عنصر السطح $d\sigma$. وعنصر السطح $d\sigma' = d\sigma \cos \varphi$. ومن هنا نتج العلاقة (42). وتسرى الملاحظة الواردة أعلاه المتعلقة بإشارة $d\omega$ تحتفظ بصحتها في هذه الحالة أيضًا مما يؤدي إلى العلاقات :

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل السطح } \Sigma \\ 2\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على السطح } \Sigma \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج السطح } \Sigma \end{array} \right\} = v_0 \Omega = \mathcal{W}^0$$

وهذه العلاقات تميز الدالة W^0 المتقطعة الثبات . وكذلك نتوصل إلى العلاقاتين

$$\left. \begin{aligned} W_1^0 &= W_2^0 + 2\pi v_0 \\ W_2^0 &= W_2^0 - 2\pi v_0 \end{aligned} \right\} \quad (41')$$

حيث W_1^0 . W_2^0 قيمتا الجهد W^0 داخل وخارج السطح Σ ، W_2^0 قيمة W^0 على Σ .

ندرس الآن جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة المتغيرة وثبت أنه في نقط اتصال الكثافة تتحقق علاقات مشابهة للعلاقات (41) ، (41') .

نفرض أن P_0 نقطة من نقط السطح Σ حيث تكون فيها الدالة $v(P)$ متصلة . نأخذ جهد الطبقة الثنائية W^0 ذات الكثافة الثابتة $v_0 = v(P_0)$ وندرس الدالة

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_{\Sigma} [v(P) - v_0] \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P$$

نثبت أن الدالة I متصلة في النقطة P_0 . ولها الغرض يكفي إثبات التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ في النقطة P_0 . نضع أماناً عدداً ما $\varepsilon > 0$. من اتصال الدالة $v(P)$ في النقطة P_0 يتبع أنه لأي عدد معطى مسبقاً $\eta > 0$ يمكن تعيين Σ_1 - جوار للنقطة P_0 على السطح Σ - بحيث أن

$$|v(P) - v(P_0)| < \eta$$

إذا كان $P \in \Sigma_1$. نعبّر عن التكامل I في صورة المجموع

$$I = I_1 + I_2$$

حيث التكامل I_1 يؤخذ على السطح Σ_1 و I_2 يؤخذ على $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. من تعريف Σ_1 يتبع أن

$$|I_1| < \eta B_2$$

حيث B_2 ثابت يحدد بالشرط :

$$\iint_{\Sigma} \frac{|\cos \varphi|}{R_{MP}^2} d\sigma_P \leq B_2 \quad (43)$$

عند كل الأوضاع المحتملة للنقطة M ولا يعتمد على اختيار السطح Σ_1 . وسوف نورد تفاصيل أكثر حول هذا الثابت فيما بعد .

باختيار $\eta = \varepsilon/Bz$ نتأكد من أنه لأي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين Σ_1 الذي يحتوي P_0 بحيث يكون

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

لأي وضع للنقطة M . ومن هنا ينتج التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ في النقطة P_0 وكذلك اتصاله في هذه النقطة .

وإذا كان $W_i(P_0)$ و $W_e(P_0)$ نهايتي الجهد $W(M)$ عندما $M \rightarrow P_0$ من الناحيتين الداخلية والخارجية للسطح Σ فإن :

$$W_i(P_0) = W^0_i(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi v_0 = W(P_0) + 2\pi v(P_0)$$

وبالمثل

$$W_e(P_0) = W(P_0) - 2\pi v(P_0).$$

وهكذا أثبتنا صحة العلاقتين (38) .

والإثبات الوارد أعلاه صحيح للسطوح التي تحقق شرط المحدودية (43) . وللسطح المحدب الذي لا يقطعه أى شعاع خارج من النقطة M أكثر من مرتين يكون $Bz \leq 8\pi$ ، وللسطوح للتيكون من عدد محدود من الأجزاء المحدبة يكون Bz محدودًا أيضًا . وبذلك فإن إثباتنا يتعلق بفصل واسع للغاية من السطوح . وكل التحليلات المجرأة فيما سبق تحتفظ بصحتها في حالة المتغيرين المستقلين . وفي هذه الحالة تأخذ العلاقتان (41) الصورة :

$$W_i(P_0) = W(P_0) + \pi v(P_0),$$

$$W_e(P_0) = W(P_0) - \pi v(P_0).$$

لمرة ٩ : خواص جهد الطبقة البسيطة . إن جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P \quad (26)$$

على خلاف جهد الطبقة الثنائية ، يكون متصلاً في كل نقط السطح Σ .
ولتأكد من ذلك لحالة السطح الأملس Σ . ولها الغرض يكفى إثبات التقارب
المنتظم للتكامل $V(M)$ في نقط السطح Σ .

بالفعل . نفرض أن P_0 نقطة ما من السطح Σ ونعبر عن الجهد V في
صورة المجموع :

$$V = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P = V_1 + V_2$$

حيث Σ_1 جزء صغير بدرجة كافية من السطح Σ يحتوي سطح كروي نصف
قطره δ ومركزه في النقطة P_0 . وسنعرف المقدار δ بدقة أكثر فيما بعد .

ندرس مجموعة الإحداثيات التي نقطة أصلها في النقطة P_0 والمحور z فيها
يتجه في اتجاه العمودى الخارجى عند P_0 . نفرض أن $M(x, y, z)$ نقطة
اختيارية تبعد عن $P_0(0, 0, 0)$ بمسافة $MP_0 < \delta$. نرمز بالرمز Σ'_1 إلى مسقط
 Σ_1 على المستوى (x, y) وبالرمز $K_{2\delta}^M$ إلى اللائرة التي نصف قطرها 2δ ومركزها
في النقطة $M'(x, y, 0)$ والتي تحتوى كلية على المنطقة Σ'_1 . وبفرض محدودية
الدالة

$$|\mu(P)| < A$$

والأخذ في الاعتبار أن

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos \gamma} = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma}$$

و

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

نحصل على :

$$\begin{aligned} |V_1(M)| &< A \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A \iint_{\Sigma'_1} \frac{d\sigma'/\cos \gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \leq \\ &\leq 2A \iint_{\Sigma'_1} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leq 2A \iint_{K_{2\delta}^M} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} . \end{aligned}$$

إذا كان δ صغيراً لدرجة أن $\cos \gamma > 1/2$.

ندرج في المستوى (x, y) مجموعة الإحداثيات القطبية (ρ, φ) التي نقطة أصلها عند النقطة M' . عندئذ يمكننا أن نكتب :

$$|V_1(M)| < 2A \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = 2A \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

وباختيار $\delta = \epsilon/8\pi A$ سنحصل على :

$$|V_1(M)| < \epsilon.$$

إذا كان $\delta < MP_0$. وبالتالي فإن $V(M)$ يتقارب بانتظام في أية نقطة $P_0 \in \Sigma$ ويعتبر حالة متصلة في هذه النقطة.

نتقل الآن إلى دراسة سلوك المشتقات العمودية لجهد الطبقة البسيطة على السطح. نبين أنه يكون لها على Σ انفصال من نفس نوع انفصال جهد الطبقة الثنائية.

المشتقتان العمودية الخارجية والداخلية (بالعموديين الخارجى والداخلى) للالة V وهما $\frac{dV}{dn_1}$ و $\frac{dV}{dn_2}$ تعينان كما يلى. نفرض أن P_0 نقطة ما على السطح Σ . من النقطة P_0 نمد المحور z الذى يمكن توجيهه إما في اتجاه العمودى الخارجى أو في اتجاه العمودى الداخلى.

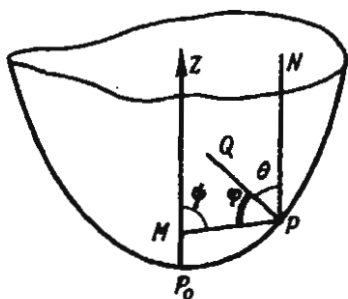
ندرس المشتقة $\frac{dV}{dz}$ في نقطة ما M على المحور z . نرمز بالرمزين $\left(\frac{dV}{dz}\right)_+$ إلى نهاية المشتقة $\frac{dV}{dz}$ عندما تؤول النقطة M إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية أو الخارجية للسطح Σ . وإذا كان المحور z متجهاً في اتجاه العمودى الخارجى (الداخلى) فإن هاتين القيمتين تسميان بالقيمتين النهائيين الداخلية والخارجية للمشتقة بالعمودى الخارجى (الداخلى) في النقطة P_0 *.

* نهاية النسبة الفرقية $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ عندما $M \rightarrow P_0$ تساوى النهاية من الخارج للمشتقة بالعمودى الخارجى أو النهاية من الداخل للمشتقة بالعمودى الداخلى وفقاً للناحية التي تقرب منها النقطة M إلى النقطة P_0 .

نبحث انفصالات المشتقة العمودية الداخلية لجهد الطبقة البسيطة على Σ .
المشتقة $\frac{dV}{dz}$ في النقطة M على المحور z المتجه في اتجاه العمودى الداخلى
تساوى :

$$\frac{dV}{dz}(M) = \int_{\Sigma} \int \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \int_{\Sigma} \int \frac{\cos \psi}{R_{MP}^3} \mu(P) d\sigma_P, \quad (44)$$

حيث ψ الزاوية بين المحور z وللتجه $\vec{MP}$. نمد من النقطة P (شكل ٦٣) العمودى PQ والمستقيم PN للوازى للمحور z (العمودى في النقطة P_0) ونرمز بالحرف θ إلى الزاوية NPQ المساوية للزاوية بين العمودين في النقطتين P, P_0 .
وصيغة جهد الطبقة الثابتة $W(M)$



شكل ٦٣

تحتوى على المعامل $\frac{\cos \psi}{R^3}$ حيث $\angle MPQ = \phi$. وحيث إن الزاوية MPN تساوى $\pi - \psi$ فإن

$$\cos(\pi - \psi) = \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta \cos \Omega = -\cos \psi,$$

حيث Ω الزاوية الزوجية (زاوية للمستويين dihedral angle) ذات الضلع PQ . ومن هنا يتبع أن

من الواضح أن θ و $\sin \theta$ يتولان إلى الصفر عندما $P \rightarrow P_0$. وإذا كان للسطح انحناء محدود في جوار النقطة P_0 أى يمكن التعبير عن معادلته في الصورة $z = f(x, y)$ حيث $f(x, y)$ لما مشتقات ثانية. فإن $\sin \theta$ تكون دالة قابلة للتفاضل بالتغيرين x, y وبالتالي يكون

$$\sin \theta < Ar$$

(لسطوح ليايونوف $\sin \theta < Ar^{\frac{1}{2}}$).

•• إذا اعتبرنا اتجاه PQ هم محور مجموعة إحداثيات كروية جديدة فإن هذه العلاقة ستطبق على العلاقة (١٩) صفحة ٣٨٤.

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = - \int_{\Sigma} \int (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^3} d\sigma - \int_{\Sigma} \int \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^3} d\sigma =$$

$$= -W_1 - I(M), \quad (45)$$

حيث $W_1(M)$ - جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة $\mu_1 = \mu \cos \theta$ الذى له انفصال على السطح Σ . ومن الواضح أن التكامل $I(M)$ يعتبر دالة متصلة فى النقطة P_0 لأن $I(M)$ يتقارب بانتظام فى هذه النقطة .
وبالعودة إلى العلاقة (45) نرى أن

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_i &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_e &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ندرج الرمز :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) =$$

$$= \left[- \int_{\Sigma} \int (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^3} d\sigma - \int_{\Sigma} \int \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^3} d\sigma \right]_{M=P_0} =$$

$$= \int_{\Sigma} \int \mu \frac{\cos \varphi_0}{R_{P_0P}^3} d\sigma,$$

حيث φ_0 الزاوية بين المحور z والمتجه $\vec{P_0P}$.

وبملاحظة أن $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$ نجد أن :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} \right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} \right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

وذلك لأن المحور z يتجه وفقاً للفرض فى اتجاه العمودى الداخلى . وإذا اتجه المحور z فى اتجاه العمودى الخارجى فإن $\cos \varphi$ يغير إشارته ونحصل على :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ولحالة المتغيرين تكون صحيحة علاقات مماثلة مع تغيير 2π إلى π .

فقرة ١٠ : تطبيق الجهود السطحية لحل المسائل الحدية . تكفل طريقة فصل المتغيرات وطريقة دالة المصدر الحصول على صيغة صريحة لحل المسائل الحدية فقط في حالة المناطق البسيطة الشكل . إن تحويل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس (أوبواسون) بواسطة الجهود السطحية إلى معادلات تكاملية هو من ناحية يكون مناسباً للبحث النظري لمسألة قابلية حل ووحداية المسائل الحدية ، ومن ناحية أخرى يعطى إمكانية الحل العددي الفعال للمسائل الحدية في حالة المناطق ذات الشكل المعقد . ندرس المسائل الحدية الداخلية لمنحنى ما C :

عين الدالة u التوافقية في المنطقة T المحدودة بالمنحنى C بحيث تحقق على C الشروط الحدية

$$u|_C = f \quad (\text{المسألة الحدية الأولى})$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = f \quad (\text{المسألة الحدية الثانية}).$$

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الخارجية* .

سنبحث عن حل المسألة الحدية الداخلية الأولى في صورة جهد الطبقة الثابتة

$$W(M) = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds_P = - \int_C \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) ds_P.$$

عند أى اختيار للدالة $v(P)$ تحقق الدالة $W(M)$ معادلة لابلاس داخل C . والدالة $W(M)$ منفصلة على المنحنى C . ولتحقق الشرط الحدى من الواضح أنه يجب أن يكون

$$W_i(P_0) = f(P_0).$$

بالأخذ في الاعتبار العلاقة (39) نحصل على معادلة لتعيين الدالة $v(P)$:

$$\pi v(P_0) + \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{P_0 P}} v(P) ds_P = f(P_0). \quad (49)$$

* في صياغة المسألة الحدية الثانية سواء الداخلية أو الخارجية سنعتبر العمودى . في الشروط الحدية ، داخلياً.

وإذا رمزنا بالرمزين s , s_0 إلى قوسى المنحنى C المناظرين للنقطتين P , P_0 فإن المعادلة (49) يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0), \quad (50)$$

حيث L طول المحيط C و

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_p} \left(\ln \frac{1}{R_{PP_1}} \right) = \frac{\cos \varphi}{R_{PP_1}} \quad (51)$$

نواة هذه المعادلة التكاملية التى تعتبر معادلة تكاملية من نمط معادلة فريد هولم التكاملية من النوع الثانى * . وللمسألة الخارجية تنتج معادلة مماثلة

$$-\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0), \quad (52)$$

وللمسألة الحيدية الثانية تنتج المعادلتان :

$$-\pi \mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu(s) ds = f(s_0) \quad (\text{المسألة الداخلية}) \quad (53)$$

$$\pi \mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu(s) ds = f(s_0) \quad (\text{المسألة الخارجية}) \quad (54)$$

حيث **

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_1}} \left(\ln \frac{1}{R_{PP_1}} \right) = \frac{\cos \varphi_2}{R_{PP_1}} \quad (55)$$

• المعادلات التكاملية التى نحتوى على تكاملات ذات حدود ثابتة تسمى معادلات فريد هولم :

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad \text{من النوع الأول}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad \text{من النوع الثانى}$$

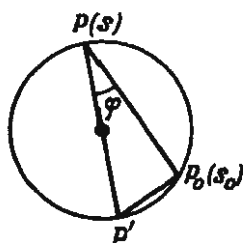
• لا يصعب ملاحظة أن $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$ ومثل هذه النوى تسمى مترافقة وللمعادلات المناظرة لها تسمى بالمعادلات التكاملية المترافقة .

إذا كنا نبحث عن حلها في صورة جهد الطبقة البسيطة :

$$u(M) = \int_C \ln \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) ds_P.$$

والمسائل المتعلقة بقابلية هذه المعادلات للحل سندرسها في فقرة ١١ من هذا البند .

ندرس المسائل الحدية لبعض المناطق البسيطة الشكل التي توجد لها معادلات تكاملية قابلة للحل بسهولة .



شكل ٦٤

١ - للمسألة الحدية الأولى للدائرة . إذا كان للنحنى C عبارة عن دائرة نصف قطرها R فإن العمودى الداخلى في النقطة P يتجه في اتجاه القطر ويكون

$$\frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}} = \frac{1}{2R}.$$

لأن φ هي الزاوية POP_0 (شكل ٦٤) . والمعادلة التكاملية للدالة v تأخذ الصورة :

$$v(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} v(s) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0). \quad (56)$$

ولا يصعب التحقق من أن حلها هو الدالة

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + A, \quad (57)$$

حيث A ثابت ما سنعينه فيما بعد . بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (56) نحصل على :

$$\frac{1}{\pi} f(s_0) + A + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\pi} f(s) + A \right) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0).$$

ومن هنا نعين للثابت A صيغة بدلالة الدالة المعطاة :

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds.$$

وبذلك فإن

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds \quad (58)$$

هو حل المعادلة التكاملية (56).

وجهد الطبقة الثنائية المناظر يساوى

$$W(M) = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds_P = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} \left[\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds \right] ds.$$

نحول الطرف الأيمن للعلاقة السابقة بفرض أن M تقع داخل C :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds \right) \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds \right) \cdot 2\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos \varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} \right) f(s) ds. \end{aligned} \quad (59)$$

ومن المثلث $\triangle OPM$ (شكل ٦٥) يتضح أن

$$\begin{aligned} K &= \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} = \frac{2R \cos \varphi - R_{MP}}{2RR_{MP}} = \frac{2RR_{MP} \cos \varphi - R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2} = \\ &= \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)]}. \end{aligned} \quad (60)$$

وبذلك لأن

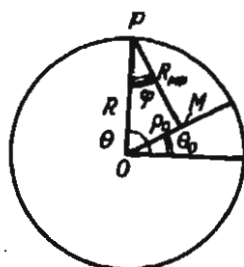
$$\rho_0^2 = R^2 + R_{MP}^2 - 2RR_{MP} \cos \varphi.$$

بالتعويض بالصيغة (60) الناتجة للنواة K في العلاقة (59) نحصل على تكامل بواسون

$$u = W(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta) d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (61)$$

الذى يعطى حل للمسألة الحدية الأولى للدائرة .

والتحليلات الواردة في هذه الفقرة
توضح أنه بأية دالة متصلة f تعرف
العلاقة (61) دالة توافقية تؤول باتصال
إلى القيم الحدية لـ f .



شكل ٦٥

وإذا كانت الدالة f دالة متقطعة
الاتصال فإنه وفقاً لخاصية جهد الطبقة
الثانية تكون الدالة W أيضاً متصلة في
جميع نقط اتصال f . ومن محدودية
الدالة f ،

$$|f| < C$$

نتج محدودية الدالة (61) :

$$|W(\rho_0, \theta_0)| < C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = C,$$

وذلك لأن*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = 1. \quad (62)$$

٢ - الدالة الحدية الأولى لنصف الفراغ . عين الدالة التوافقية المتصلة في كل
مكان في $z \geq 0$ والتي تأخذ على الحدود $z = 0$ القيمة المعطاة $f(x, y)$.

سنبحث عن حل هذه المسألة في صورة جهد الطبقة الثنائية

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \varphi}{R^3} v(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2.$$

وفي هذه الحالة يكون

$$\frac{\cos \varphi}{R^3} = \frac{z}{R^3} \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

* . نتج للتساوية (62) من أن الطرف الأيسر هو عبارة عن حل للمسألة الحدية الأولى عندما $f = 1$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{R^2} \right)_{z=0} = 0.$$

وبذلك فإن كثافة جهد الطبقة الثابتة هي

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} f(P)$$

والدالة المطلوب تعيينها تساوى

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

ولا يصعب توضيح أن $u(x, y, z)$ تتحول بانتظام إلى الصفر عندما $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ إذا كانت الدالة f تتمتع بهذه الخاصية.

فقرة ١١ : المعادلات التكاملية المناظرة للمسائل الحدية . عند حل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس بواسطة جهدي الطبقتين البسيطة والثابتة توصلنا إلى معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الثانى (50).

وشروط قابلية حل معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الثانى ذات النواة المتصلة والطرف الأيمن المحدود (القابل للتكامل) مشابهة لشروط قابلية حل مجموعات المعادلات الجبرية الخطية (التي تتحول إليها المعادلات التكاملية إذا ما استبدل التكامل بالمجموع التكامل). وتنحصر نظرية فريد هولم الأولى فيما يلى :
المعادلة التكاملية اللامتجانسة من النوع الثانى لها حل وحيد إذا كان للمعادلة المتجانسة المناظرة حل صفري فقط* .

* تكون نظرية فريد هولم للمنحنيات ذات الانحناء المحدود قابلة للتطبيق مباشرة لأن نواة المعادلة التكاملية (50) تكون متصلة .

ونظرية فريد هولم قابلة للتطبيق أيضا عندما تكون متصلة إحدى النوى المكررة (الثابتة)

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2) = \int_{\Sigma} K^{(1)}(P_1, M) K^{(n)}(M, P_2) d\sigma_M, \quad K^{(1)}(P, M) = K(P, M).$$

ثبت أنه إذا كان Σ سطح لياپونوف فإن النوى للمكررة لمعادلتنا تكون ابتداء من رقم معين

نثبت اعتمادًا على النظرية المصاغة أن المعادلة التكاملية (50) لها حل وحيد .
نكتفي بدراسة المنحنيات المحدبة التي لا تحتوى على أجزاء مستقيمة من الحدود .

مصلة . وكما رأينا تتحقق لسطوح ليايونوف التالية

$$\left| \frac{\cos \varphi}{r^2} \right| < \frac{C}{r^2 - a^2}.$$

ويمكن التعبير عن النوى المكررة في الصورة

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \int \int_{\Sigma} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2) d\sigma_M$$

نوضح أنه إذا كان $|K_l| < \frac{C_l}{r_l^2 - a_l^2}$ ($r_l = P_l M$; $a_l > 0$; $l = 1, 2$) فإن

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^2 - a_1 - a_2} \quad \text{إذا كان } r = P_1 P_2, \quad a_1 + a_2 < 2.$$

ومن الواضح أنه يكفي إثبات هذا التقدير لتلك الحالة عندما تكون النقطة P_2 واقعة في جوار ليايونوف Σ_0 للنقطة P_1 علما بأنه بدلا من التكامل على Σ_0 يمكن دراسة التكامل على المسقط S_0 لهذا الجوار على المستوى المماس في النقطة P_1 وذلك وفقا لأن

$$1 \geq \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geq B > 0$$

(حيث $\rho(P, M)$ البعد بين مقطعي النقطتين

P, M على المستوى المماس B ثابت ما).

وكذلك وفقا للعلاقة بين عنصر السطح $d\sigma$ ومسقطه

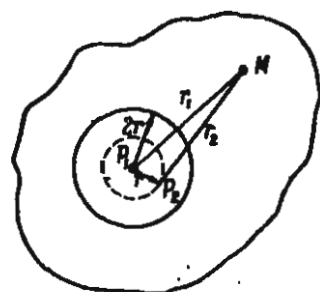
dS : $d\sigma = dS / \cos \gamma$. حيث γ تبعا للعلاقة

$$\cos \gamma > 1/2 \quad (34)$$

للمنطقة المستوية تكون صحيحة للأخوذة

التالية : إذا كان $|K_l| < \frac{C_l}{r_l^2 - a_l^2}$ فإن

$$|I| = \left| \int \int_{S_0} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2) dx dy \right| < \frac{C}{r^2 - a_1 - a_2}.$$



شكل ٦٦

نرمز بالحرف R إلى قطر المنطقة S_0 . نقسم التكامل I إلى تكاملين : I_1 المأخوذ على الدائرة G_1 التي نصف قطرها $2r$ ومركزها في النقطة P_1 و I_2 المأخوذ على المنطقة الباقية G_2 (شكل ٦٦) . وحيث إنه للنقط

وفي هذه الحالة تكون نواة المعادلة (50) : $K(P_0, P)$ غير سالبة لأن

$$K(P_0, P) ds_P = d\omega,$$

حيث $d\omega$ هي زاوية مشاهدة القوس ds_P من النقطة P_0 .

ندرس قبل أى شيء المسألة الحدية الأولى للمنطقة الداخلية. المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (50) تكون على الصورة :

$$\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = 0. \quad (63)$$

M الواقعة في G_2 يكون

$$2 \geq \frac{r_1}{r_2} \geq \frac{2}{3} \quad \left(r_1 < r_2 + r < 2r_2, \right. \\ \left. r_2 < r_1 + r < r_1 + \frac{r_1}{2} = \frac{3r_1}{2} \right),$$

لأننا نحصل للتكامل I_2 على التقدير

$$|I_2| < 4C_1 C_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r_1^{2-a_1-a_2}} r_1 dr_1 d\varphi \right| < \begin{cases} \frac{C_2}{r^{2-a_1-a_2}}, & a_1 + a_2 < 2, \\ C_2 R^{a_1+a_2-1}, & a_1 + a_2 > 2. \end{cases}$$

ويأجراه التعويض بالتغيرات $x = rx'$, $y = ry'$ في التكامل للأخذ على G_1 نحصل على :

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-a_1-a_2}} \int_{G_1} \frac{C_1 C_2}{r_1^{2-a_1} r_2^{2-a_2}} dx' dy' \right|.$$

وفي التكامل الأخير للأخذ على الدائرة G_1' التي نصف قطرها $2r$ يكون r_1' هو البعد عن المركز r_2' هو البعد عن منتصف نصف القطر. ومن ثم فإن هذا التكامل يتقارب علما بأنه لا يعتمد على موضع النقطة P_2 أى على r . ومن هنا

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-a_1-a_2}}.$$

بوضع $C_3 + C_4 = C$ نحصل على النتيجة المطلوبة

$$|I| < \begin{cases} \frac{C}{r^{2-a_1-a_2}}, & a_1 + a_2 < 2, \\ CR^{a_1+a_2-2}, & a_1 + a_2 > 2. \end{cases}$$

ومن هنا يتبع أنه ابتداء من رقم معين تكون التكاملات المكونة للنوى للكررة محدودة وتتقارب بانتظام أى تعتبر دوال متصلة في متغيراتها.

وكما رأينا (انظر فقرة ٨) ، تتحقق المتساوية

$$\int_0^L K(s_0, s) ds = \pi,$$

التي يمكن بالاستعانة بها كتابة المعادلة المتجانسة (63) في الصورة :

$$\int_0^L [v(s_0) + v(s)] K(s_0, s) ds = 0. \quad (64)$$

نفرض أن $P_0^*(s_0^*)$ نقطة على المحيط C تصل عندها الدالة $|v(s)|$ إلى قيمتها العظمى . ومن هنا يتبع أن المجموع $v(s_0^*) + v(s)$ يحتفظ بإشارة ثابتة . وعندئذ بوضع $s_0 = s_0^*$ في (64) والاستعانة بأن $K(s_0, s) \geq 0$ نحصل على المتساوية

$$v(s_0^*) + v(s) = 0$$

أو

$$v(s) = -v(s_0^*),$$

التي تتناقض مع الاتصال في النقطة s_0^* إذا كان فقط $v(s_0^*) \neq 0$.

وبالتالي فالمعادلة المتجانسة (63) يكون لها حل صفري فقط . وبذلك فالمعادلة اللامتجانسة يكون لها حل وحيد عند أية حالة f^* .

والمسألة الحدية الثانية الخارجية كما رأينا (انظر فقرة ١٠) تؤول إلى المعادلة التكاملية

$$\pi \mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu(s) ds = f(s_0), \quad (54)$$

التي تكون نواتها $K_1(s_0, s)$ مترافقة مع النواة $K(s_0, s)$ أى أن

$$K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$$

ونظرية فريدهولم الثانية تنحصر فيما يلي :

* عند وجود أجزاء مستقيمة في الحدود تصعب التحليلات بغض الشئ إلا أن توصيلها إلى النهاية لا يشكل أية صعوبة .

عدد الحلول المستقلة خطياً لمعادلة تكاملية متجانسة ما يساوى عدد الحلول المستقلة خطياً للمعادلة المترافقة معها .

وينتج من هذه النظرية أن حل المعادلة (54) محدد تحديداً أحادى القيمة .
والمسألة الحدية الأولى الخارجية تناظرها المعادلة

$$-\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0). \quad (52)$$

والمعادلة المتجانسة ($f=0$) وفقاً لما سبق يمكن أن تتحول إلى الصورة :

$$\int_0^L [v(s_0) - v(s)] K(s_0, s) ds = 0. \quad (65)$$

نرمز بالرمز s_0^* إلى النقطة التي فيها $|v(s)|$ تصل إلى قيمتها العظمى فنحصل من (65) على :

$$v(s^*) = v(s).$$

ومن هنا ينتج أنه فقط يكون

$$v(s) = \text{const} = v_0$$

هو حل المعادلة المتجانسة . ووفقاً لنظرية فريدهولم الثانية يكون للمعادلة المتجانسة المترافقة حل وحيد .

وشرط قابلية حل المعادلة اللامتجانسة تعطيه نظرية فريدهولم الثالثة :

إذا كان لمعادلة تكاملية متجانسة ما

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

k من الحلول المستقلة خطياً $\varphi_i(x) (i=1, 2, \dots, k)$ فإن المعادلة اللامتجانسة المترافقة معها

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x) \psi(s) ds + f(x)$$

يكون لها حل إذا كان $\int_a^b f(x) \varphi_l(x) dx = 0$ $l = 1, 2, \dots, k$

وبتطبيق نظرية فريد هولم الثالثة على المعادلة (53) المناظرة للمسألة الحدية الثانية الداخلية نحصل على شرط قابلية حل هذه المسألة :

$$\int_0^L f(s) ds = 0, \quad (66)$$

الذى سبق أن قابلناه فى بند ١ .

وشرط قابلية حل المسألة الحدية الأولى الخارجية يكون على الصورة :

$$\int_0^L f(s) h(s) ds = 0, \quad (67)$$

حيث $h(s)$ حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (53) . ولا يصعب توضيح المعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

نفرض أن موصلًا أسطوانيًا مقطعه هو الشكل S . مشحون حتى جهد معين V_0 . وفى الموصل توجد كل الشحنة على السطح . نرمز بالرمز $\bar{h}(s)$ إلى كثافة الشحنات السطحية . والجهد المكون بهذه الشحنات السطحية يعتبر جهدًا للطبقة البسيطة ذات الكثافة $\bar{h}(s)$. ويعبر عنه بالعلاقة (29) . والمشتقات العمودية له من الداخل تساوى الصفر وذلك لأن داخل الموصل يكون $V = \text{const}$. ولذا فإن الدالة $\bar{h}(s)$ تحقق للمعادلة المتجانسة (53) وتناسب مع الدالة $h(s)$ المعروفة فيما سبق ، وهو ما يوضح المعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

وبذلك فإن المعادلات التكاملية التى تتحول إليها المسائل الحدية تكون دائماً قابلة للحل للمسألة الحدية الأولى الداخلية والمسألة الحدية الثانية الخارجية وقابلة للحل بالشرطين (67) . (66) للمسألة الحدية الثانية الداخلية والمسألة الحدية الأولى الخارجية .

مسائل على الباب الرابع

١- عين الدالة u التوافقية داخل دائرة نصف قطرها a والتي تأخذ على محيطها C القيم :

$$(أ) \quad u|_C = A \cos \varphi, \quad (ب) \quad u|_C = A + B \ln \varphi.$$

٢- حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ داخل المستطيل $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ بالشروط الحدية

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

أثبت أن العلاقة الناتجة عند ذلك تعطى حل المسألة لأية دالة متقطعة الاتصال معطاة على الحدود.
حل المسألة في الحالة الخاصة :

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B \cos \frac{\pi}{2a} x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

٣- حل المعادلة $\Delta u = 1$ للدائرة نصف قطرها a بالشروط الحدى $u|_{r=a} = 0$.

٤- حل المعادلة $\Delta u = Axy$ للدائرة نصف قطرها a ومركزها في النقطة $(0,0)$ بالشروط الحدى

$$u|_{r=a} = 0.$$

٥- حل المعادلة $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ في الحلقة $a \leq \rho \leq b$ إذا كان

$$u|_{\rho=a} = A_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0.$$

نقطة الأصل توجد في مركز الحلقة.

٦- كَوِّن دالة المصدر لمعادلة لابلاس (المسألة الحدية الأولى) :

(أ) لتصف دائرة . (ب) حلقة . (ج) للبطقة $(0 \leq x \leq l)$.

٧- عين الدالة التوافقية داخل الحلقة $a \leq \rho \leq b$ والتي تحقق الشروط الحدية التالية :

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

٨- عين حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في نصف المستوى $y \geq 0$ بالشروط الحدية

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ u_0 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

٩- عين الدالة $u(\rho, \varphi)$ التوافقية داخل القطاع الدائري $0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \rho \leq a$ بالشروط

الحدية :

$$u|_{\varphi=0} = q_1, \quad u|_{\varphi=\varphi_0} = q_1, \quad u|_{\varphi=\varphi_2} = q_2, \quad (أ)$$

حيث q_1 و q_2 ثابتان ،

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad u|_{\varphi=\varphi_2} = f(\varphi). \quad (ب)$$

١٠- بطريقة الفروق المحدودة حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u = 0$ داخل المستطيل $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$. بتقسيم كل ضلع من أضلاعه إلى ثمانية أجزاء متساوية إذا كانت الشروط الحدية على الصورة :

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad u|_{x=a} = \frac{x}{a} \sin \frac{\pi}{a} x, \quad u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0.$$

قارن مع الحل التحليلي (انظر الكتاب الثاني ، الباب الرابع ، بند ٣) .

١١- عين الجهد الحجمي للكرة عند ثبات الكثافة $\rho = \rho_0$.

إرشاد : حل المعادلة $\Delta u = 0$ خارج الكرة والمعادلة $\Delta u = 4\pi\rho_0$ داخل الكرة وحقق شروط التوافق للحل على سطح الكرة .

١٢- عين جهد الطبقة البسيطة الموزعة بكثافة ثابتة $v = v_0$ على سطح كرة .

إرشاد : ابحث عن حل المعادلة $\Delta u = 0$ خارج وداخل الكرة واستعن لتوافق الحل بشروط انفصال مشتقة جهد الطبقة البسيطة .

١٣- حل المسألة الحدية الأولى للأسطوانة اللائزية المحدودة ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq \rho \leq a$) :

(أ) على قاعدتي الأسطوانة معطاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول أو الثاني) . وعلى السطح الجانبي $u|_{\rho=a} = f(x)$.

(ب) على السطح الجانبي وعلى إحدى قاعدتي الأسطوانة معطاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول والثاني) وعلى القاعدة الأخرى للأسطوانة $u = f(\rho)$. على سبيل المثال $f(\rho) = A\rho \left(1 - \frac{\rho}{a}\right)$.

١٤- حل المعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u = -f$$

في المنطقة الأسطوانية اللامحدودة بالشروط الحدية الصفرية (من النوع الأول أو الثاني) وتكون دالة المصدر .

١٥- عين الدالة التوافقية داخل الكرة . المساوية u على إحدى نصف السطح الكروي و u_0 على النصف الثاني .

١٦- اكتب المفكوك بالدوال الكروية لكثافة الشحنات السطحية المنتجة على كرة موصلة بشحنة نقطية .

١٧- حل مسألة استقطاب كرة عازلة كهربائياً في مجال الشحنة النقطية .

١٨ - احسب جهد الجاذبية لقرص مستو . قارن مع التمثيل التقاربي للجهد الجاذبية على مسافات كبيرة

١٩ - احسب الجهد المغناطيسي لتيار دائري .

٢٠ - حل مسألة اضطراب مجال كهربائي مستو مواز بكرة موصلة توصيلاً مثاليًا . حل المسألة لكرة غير موصلة مطلقاً .

ملاحق الباب الرابع

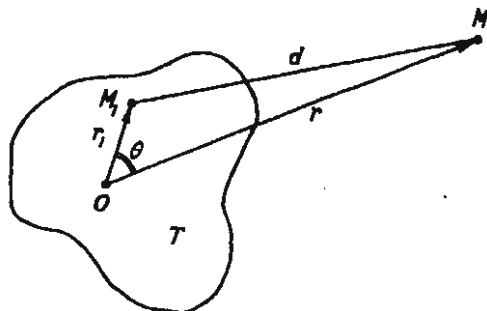
ملحق ١ - الصيغة التقاربية للجهد الحجمي

عند دراسة الجهد الحجمي

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P) d\tau_P}{d}, \quad d = R_{MP} \quad (1)$$

على مسافات بعيدة عن الجسم عادة تؤخذ قيم الجهد المساوية m/R ، حيث m كتلة الجسم T . R بعد مركز ثقله عن نقطة الملاحظة . لتبسط صيغة تقاربية أكثر دقة للجهد V .

نفرض أن Σ سطح كروي مركزه في نقطة الأصل ، يحتوي كلية الجسم T . وخارج هذا السطح الكروي يكون الجهد حالة توافقية .



شكل ٦٧

وبعد نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ عن النقطة المتغيرة داخل الجسم $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (شكل ٦٧) التي يتم بالنسبة إليها التكامل يساوي

$$d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta} \quad (r = OM, r_1 = OM_1), \quad (2)$$

ومن هنا

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\mu}}; \quad \alpha = r_1/r; \quad \mu = \cos \theta. \quad (3)$$

وحيث إن $r_1 < r$ فإن $\alpha < 1$ ولذا يكون صحيحاً للمفكوك (انظر الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، قسم ٢ - بند ١)

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu), \quad (4)$$

حيث $P_n(\mu)$ كثيرة حدود ليجاندر من الرتبة n (النونية) . بالتعويض بهذه الصيغة في العلاقة (١) والأخذ في الاعتبار أن $1/r$ لا تعتمد على متغيرات التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{r} \int \int \int \rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu) d\tau = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = \\ &= \frac{1}{r} \int \int \int \rho d\tau + \frac{1}{r^3} \int \int \int \rho r_1 P_1(\mu) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{r^5} \int \int \int \rho r_1^2 P_2(\mu) d\tau + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

والحد الأول يساوى m/r حيث m كتلة كل الجسم . ويعطينا التقريب الأول لحساب الجهد لقيم r الكبيرة .

ننتقل إلى حساب الحدود الأخرى للمفكوك (5) . الدالة المكاملة في الحد الثاني تساوى

$$\rho P_1(\mu) r_1 = \rho \mu r_1 = \rho r_1 \cos \theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

والمقادير x, y, z, r لا تعتمد على متغيرات التكامل ويمكن إخراجها خارج علامة التكامل . وبعد ذلك يأخذ الحد الثاني لمفكوك الجهد الصورة التالية :

$$\frac{1}{r^3} \int \int \int \rho r_1 P_1(\mu) d\tau = \frac{1}{r^3} (M_1 x + M_2 y + M_3 z) = \frac{M}{r^3} (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

$$M_1 = \int \int \int \rho x_1 d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \int \int \int \rho y_1 d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \int \int \int \rho z_1 d\tau = M\bar{z}$$

هي العزوم الأولى . $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ إحداثيات مركز الثقل . وبذلك يتناقص الحد الثاني مثل $1/r^3$. وإذا أخذنا نقطة الأصل في مركز الثقل ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$) فإن $V_2 = 0$.

ندرس الحد الثالث للمفكوك . نحول الصيغة المكاملة

$$\begin{aligned} \rho r_1^2 P_2(\mu) &= \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - r_1^2}{2r_1^3} = \\ &= \frac{\rho}{2r^3} [3(x_1x + y_1y + z_1z)^2 - r_1^2 r^2]. \end{aligned}$$

وبالاصطلاح على الرمز التالي :

$$M_{111} = \int \int \int \rho x_1 x_1 x_1 d\tau \quad (x = x_1; y = x_2; z = x_3),$$

نصل إلى الصيغة التالية للحد الثالث V_3 :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{r^3} \int \int \int \rho r_1^2 P_2(\mu) d\tau = \\ &= \frac{1}{2r^3} \{x^2 [3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + \\ &+ y^2 [3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + z^2 [3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + \\ &+ 2 \cdot 3xyM_{12} + 2 \cdot 3xzM_{13} + 2 \cdot 3yzM_{23}\}. \end{aligned}$$

وكثيرة الحدود بين القوسين الخارجيين تعتبر كثيرة حدود توافقية وذلك لأنه يمكن كتابتها في الصورة :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2r^3} \{ (x^2 - y^2) [M_{11} - M_{22}] - (z^2 - x^2) [M_{11} - M_{33}] + \\ &+ (y^2 - z^2) [M_{22} - M_{33}] + 6[xyM_{12} + xzM_{13} + yzM_{23}] \}, \end{aligned}$$

حيث يحقق كل حد معادلة لابلاس . والمعاملات داخل الأقواس المربعة تصاغ بدلالة عزوم القصور الذاتي . إن عزم القصور الذاتي للجسم T بالنسبة إلى المحور x يساوى كما نعلم :

$$A = \iiint_T \rho (y^2 + z^2) d\tau = M_{22} + M_{33}.$$

وبالمثل عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحورين y , z يساويان :

$$B = M_{33} + M_{11}; \quad C = M_{11} + M_{22}.$$

ومن هنا ينتج أن

$$M_{11} - M_{22} = B - A; \quad M_{11} - M_{33} = C - A; \quad M_{22} - M_{33} = C - B.$$

ونتيجة لذلك نصل إلى الصيغة التقاربية للجهد

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{m}{r^3} (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2r^5} \{ (x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) + 6(xyM_{12} + yzM_{23} + zxM_{31}) \}, \quad (6)$$

الصحيحة بدقة حتى الحدود من الرتبة $1/r^5$.

وتبسط الصيغة (6) إذا اخترنا نقطة الأصل في مركز الثقل ومددنا محاور الإحداثيات في اتجاه محاور القصور الرئيسية :

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{1}{2r^5} \{ (x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) \}. \quad (7)$$

والتمثيل التقاربي للجهد الذى حصلنا عليه يكفل الإجابة على عديد من الأسئلة المتعلقة بالسألة العكسية لنظرية الجهد والمنحصرة في تعيين مميزات الجسم وفقاً لجده (أو بأية مشتقة من مشتقاته).

بالفعل فتعيين معاملات المفكوك (6) يمكن تعيين الكتلة وإحداثيات مركز الثقل وعزوم القصور للجسم .

ملحق ٢ - مسائل الكهروستاتيكا

في مسائل الكهروستاتيكا يؤول حل معادلات ماكسويل إلى البحث عن دالة مقياسية (scalar) - ألا وهى الجهد φ - ترتبط بشدة المجال بالعلاقة

$$E = - \text{grad } \varphi.$$

بالاستعانة بمعادلة ماكسويل

$$\text{div } E = - 4\pi\rho,$$

نحصل على

$$\Delta\varphi = - 4\pi\rho.$$

وبذلك يتحقق الجهد معادلة بواسون في نقاط الفراغ حيث توجد الشحنات الكهروستاتيكية ويتحقق معادلة لابلاس في النقاط حيث لا توجد شحنات.

١- المسألة الأساسية في الكهروستاتيكا هى مسألة البحث عن المجال الناشئ بمجموعة شحنات على الموصلات المعطاة. وعند ذلك هناك صياغتان محتملتان لهذه المسألة :

(أ) تعطى جهود الموصلات ويطلب تعيين المجال خارج الموصلات وكثافة الشحنات على الموصلات. وتنحصر الصياغة الرياضية للمسألة فيما يلى :

المطلوب تعيين الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس $\Delta\varphi = 0$ في كل مكان خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر فى اللانهاية وتأخذ القيم المعطاة φ_i على سطوح الموصلات S_i :

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i, \quad \varphi_i = \text{const.}$$

وبذلك نصل فى هذه الحالة إلى المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس. وتنتج وحداية حلها من النظرية العامة.

(ب) الصياغة العكسية للمسألة محتملة أيضاً. على الموصلات تعطى شحنات كاملة. والمطلوب تعيين جهود الموصلات وتوزيع الشحنات على سطوح الموصلات والمجال خارجها. وحل هذه المسألة يؤول إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi=0$$

خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر في المالا نهاية وتأخذ على سطوح الموصلات قيماً ثابتة ما معطاة :

$$\varphi|_{S_i} = \text{const}$$

وتحقق العلاقة التكاملية على سطوح الموصلات

$$\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i,$$

حيث e_i الشحنة الكاملة للموصل رقم i .

٢- وحلانية حل المسألة الحدية الثانية لا تنتج من النظرية العامة . ولكن يمكن إثباتها بسهولة .

نفرض أنه يوجد حلان φ_1 . φ_2 للمسألة (ب). عندئذ يحقق الفرق بينهما

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

المعادلة

$$\Delta\varphi' = 0$$

والشروط

$$\varphi'|_{S_i} = \text{const}, \quad \oint_{S_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \varphi'|_{\infty} = 0.$$

نحصر كل الموصلات المعطاة داخل السطح الكروي Σ_R ذي نصف القطر الكبير بدرجة كافية R ونطبق على الدالة φ' علاقة جرين الأولى في المنطقة T_R . والمحدودة بالسطح الكروي Σ_R وسطوح الموصلات S_i :

$$\int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma.$$

وتبعاً للشروط في المالا نهاية* وعلى السطوح نحصل على :

* من الشرط $\varphi'|_{\infty} = 0$ ينتج انتظام (regularity) لدالة φ' في المالا نهاية (انظر صفحة ٣٥٥) .
ووفقاً لذلك يكون

$$\text{عندما } R \rightarrow \infty \quad \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma \rightarrow 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{T_R} (\nabla \varphi')^2 d\tau = 0,$$

ومن هنا ونظرًا لأن الصيغة الكاملة غير سالبة ينتج أن

$$\varphi' = \text{const} \quad \text{أو} \quad \nabla \varphi' = 0$$

في كل مكان في المنطقة محل الدراسة . وبأخذ الشرط في المالا نهاية $\varphi'|_{\infty} = 0$ في الاعتبار نحصل على :

$$\varphi' = 0,$$

مما يثبت وحداية المسألة المصاغة .

٣- من وحداية حل المسألة الحدية لمعادلة لابلاس ينتج أن جهد الموصل الواحد على أفراد يتناسب طرديًا مع الشحنة للكسبة :

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

بالفعل ، إذا وضعنا على موصل واحد الشحنتين e ، e' فإن الجهدين المناظرين φ ، φ' يجب أن يحققا المعادلتين

$$\Delta \varphi = 0; \quad \Delta \varphi' = 0$$

والشروط الحدية

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = e; \quad -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = e',$$

ومن هنا ينتج أن $\varphi' - m\varphi = 0$ أى أن $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e}$.

وعلى سطح الموصل الواحد المنفرد نحصل على :

$$\frac{e'}{\varphi} = \frac{e}{\varphi} = C = \text{const.}$$

وهذا الثابت C يسمى بسعة الموصل المنفرد ، وهي لا تعتمد على شحنة الموصل . وإنما تتحدد بشكل ومقاييس هذا الموصل . وبذلك فللموصل المنفرد تتحقق العلاقة

$$e = C\varphi, \quad C = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

وسعة الموصل المنفرد تساوى عددياً الشحنة التى عند إكسابها للموصل يكتب الموصل جهلاً يساوى الواحد الصحيح . وإذا لم يكن الموصل منفرداً فإن جهده يعتمد اعتماداً جوهرياً على أشكال ومواقع الموصلات الأخرى . وللمجموعة الموصلات تتحقق العلاقات :

$$\begin{aligned} e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1), \\ e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2), \\ &\vdots \\ e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \dots + C_{nn}\varphi_n. \end{aligned}$$

حيث φ_i , e_i شحنة وجهد الموصل رقم i . والمقدار C_{ik} له معنى السعة المتبادلة للموصل رقم i بالنسبة إلى الموصل رقم k . وهي يمكن تعريفها بوصفها تلك الشحنة التي يجب إكسابها للموصل رقم i لكي يكون لكل الموصلات فيها عدا الموصل رقم k جهد صفري ، أما الموصل رقم k فيكون له جهد يساوى الواحد الصحيح .

٤- من السهل أن نبين أن مصفوفة المعادلات C_M تكون مصفوفة متماثلة أي تتحقق العلاقة

$$C_{tt} = C_{tt},$$

وللتحديد ندرس حالة الموصلين رغم أنه في حالة الموصلات التي عددها n يظل الإثبات كما هو.

نفرض أنه معطى موصلان a , b . عندئذ يقول لتحديد للعاملين C_{ab} , C_{ba} إلى تعيين الدالتين $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ اللتين تحققان المعادلتين $\Delta u^{(1)} = 0$, $\Delta u^{(2)} = 0$ والشروط الحدية :

$$u^{(1)}|_{s_a} = 0; \quad u^{(1)}|_{s_b} = 1; \quad u^{(1)}|_{s_\infty} = 0, \\ -\frac{1}{4\pi} \oint_{s_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a} = 1; \quad u^{(2)}|_{S_b} = 0; \quad u^{(2)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} d\sigma = e_b^{(2)} = C_{ba}.$$

نرسم سطحاً كروياً نصف قطره R كبير بدرجة كافية ويحتوى هذا السطح الكروى الموصلين a , b , ونطبق علاقة جرين على اللاتين $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ فى المنطقة بين السطح Σ_R وسطحي الوصلين S_a , S_b :

$$\int_{\Sigma_R} (u^{(1)} \Delta u^{(2)} - u^{(2)} \Delta u^{(1)}) d\tau = \int_{S_R + S_a + S_b} \left(u^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} - u^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} \right) d\sigma.$$

والتكامل فى الطرف الأيسر لهذه المتساوية يساوى الصفر . بالاستعانة بالشروط الحدية والشروط على المالا نهاية نحصل على :

$$\int_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} d\sigma - \int_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} d\sigma = 0$$

أو

$$C_{ab} = C_{ba},$$

وهو المطلوب إثباته .

٥ - ننتقل إلى أمثلة محددة .

ندرس مسألة مجال الكرة المشحونة . نفرض أنه أعطى على سطح كرة موصلة نصف قطرها a الجهد φ_0 . وبحل للمسألة (أ) يسهل توضيح أن مجال وكثافة الشحنات على سطح الكرة فى هذه الحالة سيتحددان بالصيغتين

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r} a, \quad \sigma = \frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

وإذا كانت الشحنة الكاملة e_0 التى تكتسبها الكرة هى المعطاة على سطح الكرة بدلاً من الجهد φ_0 فإن

$$\varphi_0 = \frac{e_0}{a}, \quad \sigma = \frac{e_0}{4\pi a^2}, \quad \varphi = \frac{e_0}{r} \quad (r > a).$$

وعند ذلك تكون سعة الكرة هي

$$C = a,$$

أى فى وحدات القياس المطلقة تكون سعة الكرة المنفردة مساوية عددياً لنصف قطرها .

وبمثابة المثال التالى ندرس مسألة المكثف الكروى (مجموعة من سطحين كرويين موصلين متحدى المركز) .

نفرض أن الكرة الداخلية ونصف قطرها r_1 على جهد معطى V_0 . والكرة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض . عندئذ يؤول تحديد المجال داخل المكثف إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق المعادلة

$$\Delta\varphi = 0$$

والشرطين

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \quad \varphi|_{r_2} = 0.$$

ومن السهل أن نوضح أنه فى هذه الحالة يكون

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right),$$

وسعة المكثف الكروى تكون مساوية

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

وتعتبر مسألة تعيين جهد السطح الكروى عند وجود سطح كروى آخر غير متحد المركز مع الأول مسألة أعقد . وهذه المسألة تحل بطريقة الانعكاسات . والحل التحليلى لها طويل ومعقد ولن نورده هنا .

٦ - نتقل إلى المسائل فى بعدين (ثنائية الأبعاد) .

بمثابة مثال ندرس المكثف الأسطوانى المتكون بأسطوانتين لانهائيتى الطول متحذتى المحور ، على إحداها توزعت بانتظام الشحنة الكهربائية . ومن الواضح أن حل المسألة واحد فى كل المستويات الموازية لمستوى المقطع العمودى

للأسطوانة . ولذا يمكن اعتبار المسألة مستوية وبدلاً من الشحنة الكاملة إعطاء الشحنة على وحدة الطول $\times$.

وإذا كانت الأسطوانة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض وعلى الأسطوانة الداخلية ونصف قطرها r_1 معطاة الشحنة $\times$ فإن جهد المجال في المكثف يتحدد بالصيغة

$$\varphi = 2\pi \ln \frac{r_2}{r_1} \times$$

وسعة وحدة طول المكثف الأسطوانى تساوى

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \times$$

والمثال المدروس هنا يكفل حل المسألة الأعقد لتعيين سعة سلك موصل يقع فوق مستوى موصل . نفرض أنه يوجد سلك موصل لانهاى الطول نصف قطره ρ فوق مستوى لانهاى وعلى بعد l منه . وعلى السلك موزعة شحنة كثافتها $\times$ (شحنة وحدة الطول) . من الواضح أن هذه المسألة يمكن حلها كمسألة مستوية (في بعدين) .

ملحق ٣ - المسألة الأساسية للاستكشاف الكهربائى

لدراسة لانتجانس القشرة الأرضية بهدف اكتشاف الخامات تطبق على نطاق واسع الطرق الكهربائية . وينحصر الشكل الأساسى فى طريقة الاستكشاف الكهربائى بتيار مستمر فيما يلى : يمر التيار من بطارية إلى الأرض بواسطة أقطاب كهربائية (ألكترودات) موصلة بالأرض ، ويقاس على سطح الأرض جهد مجال التيار المستمر للتكون بهذه الطريقة . وبواسطة الملاحظات على السطح يتم تحديد تركيب ما تحت الأرض . وتؤسس طرق تحديد التركيب تحت الأرضى (تفسير الملاحظات) على الحل الرياضى لمسائل مناظرة .

إن جهد مجال التيار المستمر فى الوسط المتجانس يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \quad (1)$$

بالشرط الإضافي

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

الذى يعنى أن المركبة الرأسية لكثافة التيار على السطح (الظاهر) $z = 0$ تساوى الصفر لأن نصف الفراغ $z < 0$ (الهواء) غير موصل .

ندرس ألكتروناتاً نقطياً على حدود نصف الفراغ عند النقطة A . ومن الواضح أن جهد المجال سيكون مساوياً .

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \quad (3)$$

حيث R البعد عن المصدر A ، ρ المقاومة النوعية للوسط ، I شدة التيار . وهذه الدالة تختلف عن حالة المصدر في الفراغ اللانهائى بالمعامل 2 وذلك وفقاً للشرط (2) .

وبقياس فرق الجهد في كل من النقطتين N ، M الواقعتين على مستقيم واحد مع A بواسطة دائرة قياس نحصل على

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r,$$

حيث Δr البعد بين النقطتين N ، M .

وبفرض أن النقطتين N ، M قريبتان كل من الأخرى بدرجة كافية نحصل

على :

$$\frac{V(M) - V(N)}{\Delta r} \cong \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \cong \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

حيث r بعد النقطة O (مركز الدائرة MN) عن الألكترونات للغدى . وشدة التيار I في الدائرة المغذية معلومة لأنها تسجل أثناء سير العمل . ومن هنا نحصل لمقاومة نصف الفراغ المتجانس على :

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|. \quad (4)$$

وإذا كان الوسط غير متجانس فإن المقدار ρ المعروف بالعلاقة (4) يسمى بالمقاومة الظاهرية (apparent resistance) ويرمز لها بالرمز ρ_a . و ρ_a لن تكون كمية ثابتة .

ندرس مسألة الاستكشاف الكهربائي الرأسى عندما تقع طبقات القشرة الأرضية أفقيًا وتكون مقاومتها معتمدة فقط على العمق :

$$\rho = \rho(z).$$

وفى هذه الحالة تكون المقاومة الظاهرية دالة فى المسافة $AO = r$. وتنحصر مسألة تفسير نتائج الاستكشافات الكهربائية الرأسية فى تعيين الدالة $\rho(z)$ التى تعطى المقطع الكهربائى للوسط وفقاً لقيم $\rho_0(r)$ المعروفة.

لندرس بالتفصيل مسألة الوسط الثانى الطبقة عندما تقع طبقة متجانسة سمكها l ومقاومتها ρ_0 على وسط متجانس ذى مقاومة ρ_1 .

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & , \quad 0 \leq z < l, \\ \rho_1 & , \quad l < z. \end{cases}$$

ومن الواضح أن المقاومة الظاهرية ρ_0 على الأبعاد غير الكبيرة $r \ll l$ تكون مساوية ρ_0 لأن الوسط التحتى سيكون تأثيره طفيفاً. وللمسافات البعيدة ($r \gg l$) تكون ρ_0 مساوية ρ_1 .

وبذلك تتحول المسألة إلى تعيين حل معادلة لابلاس V_0 فى الطبقة $0 < z < l$ وفى نصف الفراغ $z > l$. وعندما $z = l$ يجب أن تتحقق شروط اتصال الجهد

$$V_0|_{z=l} = V_1|_{z=l} \quad (5)$$

واتصال المركبات العمودية لكثافة التيار

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial V_0}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=l}. \quad (6)$$

وعندما $z = 0$ فإن الجهد V_0 يجب أن يحقق الشرط (2). وفى النقطة A التى سنختارها نقطة أصل لمجموعة الإحداثيات الأسطوانية (r, φ, z) يجب أن يكون للجهد V_0 انفراد على الصورة (3)

$$V_0 = \frac{\rho_0 l}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0 \quad (7)$$

حيث v_0 دالة محدودة .

والدالة V_1 يجب أن تكون محدودة في المالا نهاية . وتحقق اللتان V_1 , v_0 المعادلة (1) التي تأخذ نظراً لمتائل المسألة الأسطوانى الصورة

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

وتعطى طريقة فصل المتغيرات نوعين من الحلول المحدودة عند $r=0$ للدالة V :

$$e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r),$$

حيث J_0 دالة بيسل من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ١) ، λ بارامتر الفصل بين المتغيرات . نبحث عن الحل فى الصورة :

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^\infty (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

حيث A_0, B_0, A_1, B_1 ثوابت ما . والشرط (2) يعطى العلاقة بين A_0, B_0 نحسب

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 l}{2\pi} \cdot \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} + \int_0^\infty (-\lambda A_0 e^{-\lambda z} + \lambda B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda.$$

والشرط (2) يأخذ الصورة

$$\int_0^\infty (B_0 - A_0) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0$$

لأى r . ومن هنا يكون

$$B_0 = A_0.$$

ومن شرط محدودية V_1 عندما $z \rightarrow \infty$ يتبع أن

$$B_1 = 0.$$

وبذلك فإن

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$V_0(r, z) = \int_0^{\infty} [q e^{-\lambda z} + A_0 (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_0(\lambda r) d\lambda;$$

وعندئذ استخدمننا العلاقة

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (8)$$

(انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ٥) ورمزنا بالرمز $q = \frac{\rho_0 l}{2\pi}$.

والثابتان الباقيان A_0 ، A_1 يعرفان من الشرطين (6) ، (5) فى حالة $z = l$ اللذين يؤولان إلى مجموعة من المعادلات الجبرية :

$$A_0 (e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -q e^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0 (e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

ومن هنا نعين المعامل

$$A_0 = q \frac{(\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}},$$

والحل V_0 للطبقة العليا يعطى بالعلاقة

$$V_0(r, z) = \frac{l \rho_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + \frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (9)$$

حيث وضعنا

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

نجرى بعض التحويلات للصيغة الناتجة . حيث إن $|k| < 1$ فإننا يمكن أن نكتب :

$$\frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

$$V_0(r, z) =$$

$$= \frac{l \rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda (2nl + z)} J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{l \rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda (2nl - z)} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (9')$$

ومن هنا نحصل بالاستعانة بالعلاقة (8) على :

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 2nl)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nl)^2}} \right). \quad (10)$$

ويمكن الحصول مباشرة على هذه الصيغة للحل (9) إذا حلت المسألة بطريقة الانعكاسات. بوضع $z = 0$ نحصل على توزيع الجهد على سطح الأرض :

$$V_0(r, 0) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nl)^2}} \right], \quad (11)$$

ومن هنا

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r}{[r^2 + (2nl)^2]^{3/2}} \right].$$

ونحصل لـ ρ_k وفقاً للعلاقة (4) على :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r^2}{[r^2 + (2nl)^2]^{3/2}} \right] = \\ &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + n^2\right]^{3/2}} \right] = \rho_0 f(\xi), \quad (12) \end{aligned}$$

حيث $\xi = r/2$. وقرمز $f(\xi)$ إلى الصيغة بين القوسين المربعين. وعندما $r \ll l$ نحصل على

$$\rho_k \approx \rho_0.$$

ولتقدير سلوك ρ_k عند قيم r الكبيرة نعمل $r \rightarrow \infty$ (عندما $\xi \rightarrow \infty$) في العلاقة (12). ونهاية الحد التوفى للجموع ستكون مساوية k^n . ومن هنا ينتج أن

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_k &= \rho_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right) = \\ &= \rho_0 \frac{1+k}{1-k} = \rho_0 \frac{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0)} = \rho_1. \end{aligned}$$

وبمقارنة المنحنى التجريبي (الناتج بالتجربة العملية) مع المنحنى المحدد بالعلاقة (12) يمكننا تعيين ρ_0 بقيم ρ_k عند قيم r الصغيرة وتعيين ρ_1 بقيم ρ_k لقيم r

الكبيرة . وسمك الطبقة العليا الموصلة l يحدد بالتجربة فهو يساوى قيمة l التي عندها يكون المنحنى التجريبي بوصفه الدالة $p(\xi) = p(r/l)$ أقرب ما يمكن للمنحنى المحسوب بالعلاقة (12). ولن نتوقف هنا عند العملية التكنيكية لتحديد l بالتجربة بواسطة مقاييس الرسم اللوغاريتمية المزدوجة .

وفي حالة المقاطع المتعددة الطبقات بحسب منحنيات p_n بنفس الطريقة السابقة . وتحدد طبيعة المقطع الكهربائي للوسط بواسطة اختيار المنحنى النظرى الأقرب انطباقاً على المنحنى التجريبي . وعند ازدياد عدد الطبقات تتعقد عملية التفسير لأن عدد المنحنيات النظرية المساعدة يزداد كثيراً .

ونشير إلى أنه عند المقاطع الكهربائية المختلفة $p_1(z) \neq p_2(z)$ تكون المقاومات الظاهرية المناظرة مختلفة أيضاً :

$$p_k^{(1)}(r) \neq p_k^{(2)}(r);$$

وبالتالى فمسألة تعيين المقطع الكهربائي بقيم المقاومة الظاهرية يكون لها من وجهة النظر الرياضية حل وحيد .

وتقابلنا فى مختلف مجالات الفيزياء والعلوم التكنيكية مسائل مماثلة لمسألة الاستكشاف الكهربائى .

فقابل للمسائل الكهروستاتيكية عند تصميم مختلف الأجهزة الإلكترونية وتقابل المسائل الحرارية والهيدروديناميكية فى عديد من مجالات التكنيك (الانتقال الحرارى للمباني ، ترشيح المياه وراء السدود .. الخ) .

ومسائل تعيين المجال المغناطيسى فى وسط لا متجانس تقابلنا على سبيل المثال فى عملية الاكتشاف المغناطيسى للعيوب والنواقص فى الصناعة . فلتعيين العيب فى قطعة مصنعة ، على سبيل المثال وجود فراغات تحت السطح ، توضع القطعة المعدنية بين قطبي مغناطيس ويقاس المجال المغناطيسى على سطحها . وبدلالة اضطراب المجال المغناطيسى يطلب تعيين وجود العيب وكذلك إذا أمكن أبعاده وعمق امتداده وغير ذلك .

ولحل المسائل يستعان بطرق النمذجة المؤسسة على تشابه المجالات الجهدية ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة .

بالفعل لندرس المجالات الجهدية في الأوساط اللامتجانسة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة (على سبيل المثال مجال درجات الحرارة المستقر، المجال المغناطيسي في وسط لامتجانس، المجال الكهروستاتيكي، مجال سرعات السائل عند عملية الترشيع). والدوال الجهدية لهذه المجالات $u(x, y, z)$ في كل منطقة متجانسة تحقق معادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وعلى حدود المنطقتين G_1, G_2 بمعامل التوصيل الحرارى المختلفين أو بمعامل النفاذية المغناطيسية المختلفين وهكذا، يتحقق الشرط

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

حيث k_1, k_2 الثابتان الفيزيائيان المناظران.

نفرض أنه على حدود المناطق الهندسية المتساوية معطاة قيم الجهود المتساوية عددياً - أو قيم مشتقاتها العمودية المتساوية عددياً - للمجالات الفيزيائية المختلفة. نفرض أن اللامتجانسات الفيزيائية لهذه المناطق متساوية هندسياً وموزعة بطريقة واحدة وأن النسب بين الثابتين الفيزيائيين (معامل التوصيل الحرارى، النفاذية المغناطيسية...) لأى زوج من اللامتجانسات المناظرة تكون متساوية. عندئذ تكون القيم العددية لجهود هذه المجالات في النقط الداخلة المناظرة أيضاً متساوية لأنها تعتبر حلاً لنفس المسألة الرياضية التى لها حل وحيد.

ملحق ٤ - تعيين المجالات الاتجاهية

في كثير من مسائل الكهروديناميكا والهيدروديناميكا نقابلنا كثيراً بالإضافة إلى المسائل المقياسية مسائل تعيين المجال الاتجاهى بدلالة دوران وتباعد هذا المجال. نثبت أن المجال الاتجاهى A معرف تعريفاً أحادى القيمة داخل منطقة ما G محدودة بسطح مغلق S إذا أعطى دوران وتباعد المجال داخل G :

$$\text{rot } A = B, \quad (1)$$

$$\text{div } A = C, \quad (2)$$

وعلى الحدود S معطاة المركبة العمودية للمتجه A

$$A_n|_S = f(M). \quad (3)$$

ونشير إلى أن الدوال f, B, C لا يمكن إعطاؤها اختياريًا فيجب تحقق العلاقاتين :

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (4)$$

$$\int_S \int f(M) dS = \int_G \int \int C d\tau. \quad (5)$$

وسنعتبر الدالة f متصلة على السطح S ، والدالتين B, C متصلتين في G هما ومشتقاتهما ونعتبر السطح S سطحًا تكون له المسألة الحدية الداخلية بالقيم الحدية المتصلة قابلة للحل .

نحل المسألة المصاغة على عدة مراحل . نعين المتجه A_1 الذى يحقق الشروط

$$\operatorname{rot} A_1 = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} A_1 = C. \quad (7)$$

ومن العلاقة (6) يتبع أن

$$A_1 = \operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

ويأخذ الدالة φ على الصورة

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \int \int \frac{C(Q)}{R_{PQ}} d\tau_Q. \quad (9)$$

نحقق المعادلة (7) أيضًا . والآن نعين المتجه A_2 بحيث يكون :

$$\operatorname{rot} A_2 = B, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} A_2 = 0. \quad (11)$$

وبفرض أن

$$A_2 = \operatorname{rot} \psi, \quad (12)$$

نحقق الشرط (11) . بالتعويض بالفرض (12) في (10) نحصل على

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi - \Delta \psi = B. \quad (13)$$

ونطلب أن يكون

$$\operatorname{div} \psi = 0. \quad (14)$$

عندئذ تكون المعادلة (13) للمتجه ψ على الصورة :

$$\Delta\psi = -B. \quad (15)$$

ندرس المنطقة G_1 المحتوية كلية المنطقة G والمحدودة بالسطح S_1 .

نستكمل المتجه B في المنطقة $G_1 - G$ ونطلب تحقق الشروط :

١ - المركبة العمودية B_n للمتجه B على حدود S متصلة (المتجه B نفسه يكون على وجه العموم منفصلاً) ، $B_{n1} = B_{n2}$ ،

$$، S_1 \text{ على } B_n = 0 \quad ٢ - \quad (14)$$

$$، G_1 - G \text{ في } \operatorname{div} B = 0 \quad ٣ - \quad (16)$$

ونبين كيفية تنفيذ استكمال B بهذه الصورة في المنطقة $G_1 - G$. نضع

$$، G_1 - G \text{ في } B = \operatorname{grad} \chi$$

والشرط $\operatorname{div} B = 0$ يعطى

$$، G_1 - G \text{ في } \Delta\chi = 0 \quad (17)$$

والشروط الحدية وفقاً للمطلبين ١ ، ٢ تكون على الصورة :

$$، S \text{ على } \frac{\partial\chi}{\partial n} = B_{n1} \quad (17')$$

$$، S_1 \text{ على } \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad (17'')$$

حيث B_{n1} القيمة النهائية للمركبة B_n على الناحية الداخلية للسطح S . وحصلنا للدالة χ على للسؤال الثانية (17'') - (17). والشرط اللازم لقابلية هذه للسؤال للحل وهو

$$\int_{S+S_1} \int \frac{\partial\chi}{\partial n} dS = \int_S \int B_n dS = 0$$

يتحقق لأن

$$\int_S \int B_n dS = \int \int \int \operatorname{div} B d\tau = 0.$$

وبوضع

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1} \frac{B(Q)}{R_{PQ}} d\tau_Q.$$

$$P = P(x, y, z), Q = Q(\xi, \eta, \zeta), R_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

نحقق كما هو واضح المعادلة (15).

ولا يصعب التأكد من أن الشرط (14) يتحقق أيضاً. فبالفعل نحسب

المشتقات

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z}.$$

وبالتعبير عن التكامل المأخوذ على المنطقة G_1 في صورة مجموع تكاملين مأخوذين على G وعلى $G_1 - G$ والأخذ في الاعتبار العلاقة

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint B_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \iiint B_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau,$$

نحصل بعد التكامل بالتجزئة على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_G \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint_G \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau - \int_S B_{x1} \frac{\cos \alpha}{R} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G_1-G} \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint_{G_1-G} \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau + \int_S B_{x2} \frac{\cos \alpha}{R} dS - \int_{S_1} B_x \frac{\cos \alpha_1}{R} dS,$$

حيث $\cos \alpha = \cos(n, x)$ و $\cos \alpha_1 = \cos(n, x)$ اتجاه العمودى الخارجى على السطح.

ونحصل للمشتقة $\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$ على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_1} \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{B_{x2} - B_{x1}}{R} \cos \alpha dS - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} B_x \frac{\cos \alpha_1}{R} dS. \end{aligned}$$

وتحقق صيغتان مائلتان للمشتقتين

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z}.$$

ومن هنا يتبع أن :

$$\operatorname{div} \psi = \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{\sigma_1} \frac{\operatorname{div} B}{R} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_1} \frac{B_n}{R} dS + \frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{B_{ne} - B_{nI}}{R} dS.$$

ووفقاً للشروط (16)، (4')، (4)، وكذلك شرط اتصال المركبات العمودية للمتجه B على S ($B_{nI} = B_{ne}$) فإن المتجه A_2 المعروف بالعلاقة (12) سيحقق المعادلة (10) إذا كان المتجه ψ يحقق الشرطين (15)، (14).

ومن الواضح أن المتجه $A_1 + A_2$ يحقق الشرطين :

$$\operatorname{rot} (A_1 + A_2) = B, \quad (18)$$

$$\operatorname{div} (A_1 + A_2) = C. \quad (19)$$

ولتعيين المتجه A يتبقى أن نحقق الشرط (3). ولهذا الغرض نعين المتجه A_3 الذى يحقق داخل G الشروط :

$$\operatorname{rot} A_3 = 0, \quad (20)$$

$$\operatorname{div} A_3 = 0, \quad (21)$$

وعلى S

$$A_{3nI} = f(M) - A_{1nI} - A_{2nI} = f^*(M). \quad (22)$$

ومن الواضح أن الدالة $f^*(M)$ معرفة تعريفاً أحادى القيمة. ومن المعادلة (20) يتبع أن

$$A_3 = \operatorname{grad} \theta.$$

بالتعويض بقيمة A_3 هذه فى المعادلة (21) نحصل داخل G على :

$$\Delta \theta = 0; \quad (23)$$

ويعطى الشرط (22) أن

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_S = f^*(M). \quad (24)$$

أى لتعيين الدالة θ نحصل على المسألة الحدية الثانية. ولذا يتحدد المتجه A_3 تحديداً أحادى القيمة.

وبذلك أثبتنا أن المسألة (3) - (1) لها حل وحيد

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

ملحق ٥ - تطبيق طريقة التحويلات المطابقة في الكهروستاتيكا

١ - لحل مسائل الكهروستاتيكا الثنائية الأبعاد كثيراً ما يستعان بنظرية الدوال في المتغير المركب . ندرس على سبيل المثال مسألة الكهروستاتيكا التالية :

عين المجال الكهربائي لعدة موصلات مشحونة جهودها تساوى $u_1, u_2, \dots$. وتؤول مثل هذه المسألة كما نعلم (انظر الملحق ٢) إلى المعادلة :

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

بالشروط الحدية

$$u|_{\Gamma_i} = u_i, \quad (2)$$

حيث S_i ترمز إلى سطح الموصل رقم i . وإذا أمكن اعتبار المجال مستويًا لا يتغير على سبيل المثال على امتداد المحور z فإن المعادلة (1) والشروط الحدية تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{\Gamma_i} = u_i, \quad (4)$$

حيث C_i المحيط الذى يحده المنطقة S_i .

سنبحث عن الجهد u بوصفه الجزء التخيلي لدالة تحليلية ما

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \quad (z = x + iy), \quad (5)$$

علمًا بأنه وفقًا لشروط كوشي - ريمان يكون :

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x \quad (6)$$

و

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \quad (7)$$

ومن الشرط الحدى (4) ينتج أن الدالة $f(z)$ لها جزء تخيلي ثابت على المنحنيات C ،
التي تحد الموصلات محل الدرامنة .

وبالاجزاء إلى الشرط (6) نلاحظ أن

$$v(x, y) = \text{const} \quad (8)$$

هى عبارة عن عائلة خطوط (منحنيات) القوى* فى حين أن المعادلة

$$u(x, y) = \text{const} \quad (9)$$

تحدد وفقاً للشرط (7) عائلة الخطوط المتساوية الجهد (equipotential lines) .

وبذلك فلحل المسألة المصوغة يكفى تعيين التحويل المطابق (أوالتشاكلى)

(conformal transformation)

$$w = f(z),$$

الذى يحول مستوى المتغير المركب

$$z = x + iy$$

إلى المستوى

$$w = v + iu,$$

وبواسطته تتحول حدود الموصلات إلى المستقيمت

$$u = \text{const}$$

أو

$$\text{Im } w = \text{const}.$$

وإذا عكست مثل هذه الدالة $w = f(z)$ فإن الجهد المطلوب تعيينه يعين

بالعلاقة :

$$u = u(x, y) = \text{Im } f(z).$$

* بالفعل لمعادلة خطوط القوى تكون على الصورة $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. وبالتعويض عن u_x , u_y من

الشرط (6) بالقيمتين v_x , v_y - نحصل على $v_x dx + v_y dy = dv = 0$ أو $v(x, y) = \text{const}$.

وبمعرفة الجهد يمكن حساب المجال الكهربائي

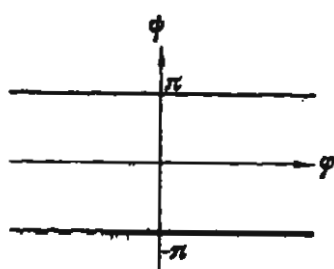
$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

وكثافة الشحنات السطحية في وحدة الطول على المحور z :

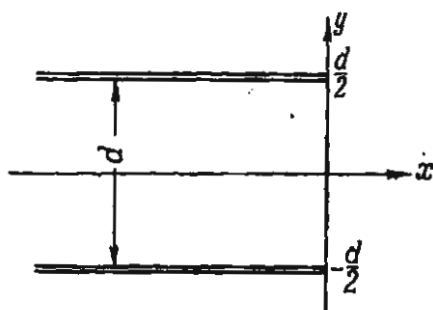
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

التي تكون وفقاً لشروط كوشي - ريمان مساوية

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} |f'(z)|. \quad (11)$$



شكل ٦٩



شكل ٦٨

٢ - مجال المكثف المستوى نصف اللانهائي . نعين مجال المكثف المتكون من لوحين معدنيين $y = d/2$, $y = -d/2$ سمك كل منهما متناه في الصغر ويمتدان في المنطقة $x < 0$. ودون أن نتوقف عند استنباط التحويل المطابق الذي يحول المنطقة المبينة على الرسم بشكل ٦٨ إلى الطبقة $|\operatorname{Im} w| \leq \pi$ سنطبق مباشرة على حل المسألة المذكورة .

التحويل

$$z = \frac{d}{2\pi} (w + e^w) \quad (w = \varphi + i\psi) \quad (12)$$

يحول المستوى $z = x + iy$ بالقطع $(y = \pm d/2, x < 0)$ إلى الطبقة $|\psi| \leq \pi$ (الشريط) على المستوى $w = \varphi + i\psi$ (شكل ٦٩) . وبمناخلة الجهد المركب نختار الحالة

$$\frac{u_0}{2\pi} w,$$

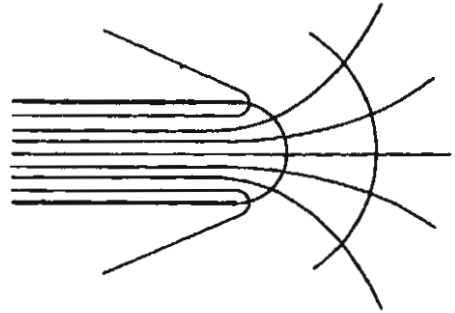
(13)

حيث u_0 ترمز إلى فرق الجهد بين لوحى المكثف ، ومن ثم فإن جهد المجال الكهربائى يعبر عنه بالمالة

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi} \psi, \quad (14)$$

حيث ψ ترتبط بالمتغيرين x, y بالعلاقين

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi} (\varphi + e^{\psi} \cos \psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi} (\psi + e^{\psi} \sin \psi). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



شكل ٧٠

وتبين على شكل ٧٠ خطوط القوى وخطوط تساوى الجهد للمكثف المستوى نصف اللانهائى .

نتقل إلى بحث المجال بالقرب من حافة المكثف .

يتضح من العلاقة (15) أنه عندما $\varphi \rightarrow -\infty$ يكون

$$x \approx \frac{d}{2\pi} \varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi} \psi, \quad (16)$$

أى أن المجال داخل المكثف بعيداً عن حوافه يكون مستويًا . وعندما $\varphi \rightarrow \infty$ يكون

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi} e^{\psi}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \approx \psi, \quad (17)$$

أى أن خطوط تساوى الجهد تكون خارج المكثف على مسافات كبيرة من حوافه عبارة عن دوائر .

وإذا أخذنا بدلاً من w الجهد المركب $f = \frac{u_0}{2\pi} w$ بحيث إن $f = \frac{2\pi}{u_0} w$ فإن العلاقة بين z و $f(z)$ ستعطى بالمعادلة

$$z = d \left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2\pi f}{u_0}} \right),$$

ومن هنا ينتج :

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0} \left(1 + e^{\frac{2\pi i}{u_0}} \right),$$

وعندما $f = \frac{u_0}{2\pi} (\varphi \pm \pi i)$ نحصل على :

$$f'(z) = \frac{u_0}{d(1 - e^\varphi)} \quad \text{أو} \quad \frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0} (1 - e^\varphi)$$

بوضع $u_0 = 1$ نحصل لكثافة الشحنات σ وفقاً للعلاقة (11) على القيمة التالية :

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{4\pi} = \frac{1}{4\pi d |1 - e^\varphi|}. \quad (18)$$

ومن هنا ينتج أنه عندما $\varphi \rightarrow -\infty$ يكون $\sigma \approx 1/4\pi d$ ، وعندما $\varphi \rightarrow +\infty$ يكون $\sigma \approx 1/4\pi d e^\varphi$ أى أنه في هذه الحالة تتناقص كثافة الشحنات على الناحية الخارجية للألواح مثل $1/\rho$.

ومن العلاقة (18) ينضغ أنه عندما $\varphi = 0$ (على حافة المكثف) فإن $\sigma = \infty$. بالفعل يكون لحافة اللوح المستوى انحناء لانهاى ، ولشحنها حتى جهد ما من الضروري أن نضع عليها شحنة لانهاية.

إن دائرة المسائل التى يمكن حلها بطريقة التحويلات المطابقة (أو الانعكاسات المطابقة conformal mapping) واسعة للغاية . فبواسطة هذه الطريقة يمكن بنجاح حل مسألة تأثير حافة الجدار السميك للمكثف المستوى وكثير من المسائل المتعلقة بتأثير الثنى فى المكثف وغيرها . ويمكن أيضاً تطبيق التحويلات المطابقة لحساب المسائل الديناميكية. وعيب هذه الطريقة هو أن التحويلات المطابقة تستخدم أساساً للمسائل المستوية فقط التى تتحول إلى معادلة لابلاس الثنائية الأبعاد $\Delta u = 0$.

ملحق ٦ - تطبيق طريقة التحويلات المطابقة فى الهيدروديناميكا

١ - عند حل مسائل حركة الجسم الجاسئ فى سائل تلعب الشروط الحدية على سطح الجسم دوراً جوهرياً .

وفي حالة السائل المثالي يكون الشرط الحدي منحصراً في أن v_n - مسقط سرعة السائل على اتجاه العمودى على سطح الجسم - يجب أن تكون مساوية للمركبة العمودية لسرعة حركة الجسم .

وإذا كان الجسم غير متحرك فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة المبسطة التالية :

$$v_n = 0$$

على سطح الجسم .

وإذا كانت الحركة جهدية (potential) (المجال محافظ) أى أن :

$$v = \text{grad } \varphi,$$

فإن الشروط الحدية تأخذ الصورة التالية :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = 0 \quad \text{في حالة الجسم غير المتحرك ,}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = u_n \quad \text{في حالة الجسم المتحرك بسرعة } u_n .$$

وكما نعلم من الهيدروديناميكا فإن جهد السرعات للسائل اللانضغظ (incompressible liquid) يحقق للمعادلة

$$\Delta \varphi = 0.$$

وبذلك فإن مسألة الانسياب الجهدى للجسم الجاسى بدفق سائل مثالي لامنضغظ تؤول إلى حل معادلة لابلاس

$$\Delta \varphi = 0$$

بالشروط الحدية الإضافية على سطح الجسم الانسيابي

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = u_n.$$

أى إلى حل المسألة الحدية الثانية لمعادلة لابلاس .

وإذا كانت الحركة محل الدراسة مستوية فإن حل المسألة يمكن الحصول عليه بواسطة نظرية الدوال في المتغير المركب .

في حالة الحركة المستوية للسائل اللامنضغظ تعطى معادلة الاتصال ما يلي :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial (-v_y)}{\partial y}. \quad (1)$$

نكتب معادلة خطوط التيار

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

على الصورة

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (2)$$

ونستعين بالدالة ψ المعرفة بالعلاقين

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

وعندئذ ينتج من المعادلة (1) أن الطرف الأيسر للصيغة (2) يكون تفاضلاً تاماً للدالة ψ :

$$v_x dy - v_y dx = d\psi.$$

وعائلة للمنحنيات الأحادية البارامتر

$$\psi(x, y) = C$$

هى عبارة عن خطوط التيار للسائل اللامنضغط:

وإذا وجد جهد السرعات فإن المساوية $\text{rot } v = 0$ تكون مكافئة للمعادلة

$$\Delta \psi = 0.$$

ومن صيغتي v_x, v_y ينتج أن:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

أى أن الدالتين ψ, φ تحققان شروط كوشي - ريمان. وبالتالي فإن الدالة فى المتغير المركب

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

تكون دالة تحليلية.

وهكذا فكل حركة مستوية جهدية للسائل تناظرها دالة تحليلية معينة فى المتغير المركب وبالعكس كل دالة تحليلية ترتبط بصورة كينماتيكية معينة لحركة السائل (بدقة أكثر ترتبط بصورتين لأنه يمكن استبدال دورى الدالتين φ, ψ)

ندرس أمثلة معينة على تطبيق نظرية الدوال التحليلية لحل مسائل انسياب الأجسام في دفق مستو لسائل .

٢ - انسياب أسطوانة دائرية . نفرض أنه على أسطوانة دائرية نصف قطرها $r = a$ ينساب دفق مستو لسائل له في المالا نهاية سرعة ثابتة u . وفي حالة الحركة المستقرة يمكن قلب المسألة ودراسة حركة الأسطوانة ذات السرعة الثابتة u بالنسبة إلى السائل .

نربط بالأسطوانة مجموعة إحداثيات غير متحركة ونمد المحور Ox موازياً لـ سرعة حركة الأسطوانة ..

وعلى سطح الجسم المتحرك في السائل يتحقق الشرط الحدى :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = u \frac{\partial y}{\partial s},$$

حيث ds عنصر طول القوس على المنحنى الذى يحده الجسم .

وفي حالة الحركة الانتقالية بالسرعة u يمكن تكامل هذا الشرط على سطح الجسم . ونحصل على :

$$\psi = uy + C$$

على سطح الجسم .

وهكذا آلت مسألتنا إلى دراسة المعادلة

$$\Delta \psi = 0$$

بالشروط الحدية :

$$١ - \psi = uy + C \text{ على سطح الأسطوانة ;}$$

$$٢ - \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ و } \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ تتوولان إلى الصفر في المالا نهاية .}$$

والشرط الأخير يعنى أن الدالة

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y$$

تكون خارج الدائرة C دالة تحليلية أحادية القيمة تتحول إلى الصفر في النقطة البعيدة بعداً لانهاًئياً . وهذا يكفل التعبير عن الدالة w في الصورة

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \dots$$

بوضع

$$C_k = A_k + iB_k,$$

نعين الثوابت A_k, B_k من الشرط الحدى :

$$\psi = ua \sin \theta + C,$$

وذلك بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية $z = ae^{i\theta}$.

ونحصل للثوابت على الصيغ التالية :

$$A_1 = 0; \quad A_2 = ua^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

ومن هنا

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u \frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - u \cos \theta \frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + u \sin \theta \frac{a^2}{r}.$$

والحد الأول في صيغة w يعبر عن دوران (circulation) الشدة Γ حول الأسطوانة . وفي الحالة المبسطة عند انعدام الدوران نحصل على

$$w = -u \frac{a^2}{z}.$$

والجهد للمركب للدفق الذى ينساب حول أسطوانة غير متحركة وسرعته في المالاهاية u يكون على الصورة :

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

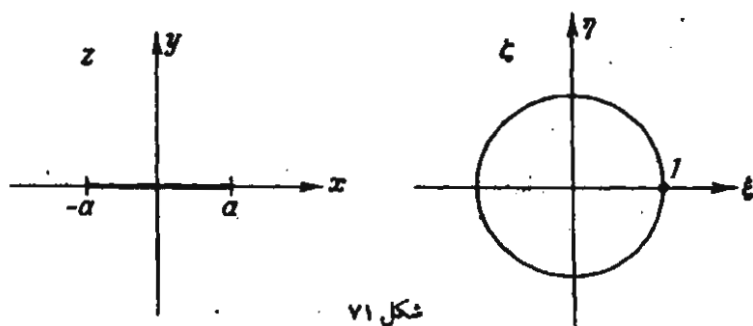
٣- انسياب اللوح . تكفل النتائج التى حصلنا عليها لانسياب الأسطوانة الدائرية حل مسألة انسياب أية محيطات اختيارية . وعند ذلك تطبق طريقة

التحويلات المطابقة. ندرس تطبيق هذه الطريقة على مثال محدد هو انسياب اللوح.

نفرض أنه على لوح متناهي الطول عرضه $2a$ وواقع على المحور Ox (شكل ٧١) بنسب دق مستو ثابت سرعته في المالا نهاية لها المركبتان u , v بواسطة الدالة التحليلية

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = f(\zeta)$$

يمكن إحداث التناظر الأحادي القيمة المتبادل بين المنطقة خارج اللوح على



شكل ٧١

المستوى z والمنطقة خارج دائرة نصف قطرها الواحد الصحيح على المستوى ζ . وعند ذلك فالتقطة $z = \infty$ تناظر النقطة $\zeta = \infty$ و

$$\text{عندما } \zeta = \infty \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0$$

لتركيب بتغير الشرط في المالا نهاية. للجهد المركب

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

يكون لدينا

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{\infty} = u - iv = v_{\infty}$$

وهي القيمة المرافقة للسرعة المركبة.

نعين قيمة السرعة المركبة للتيار اللاحق (التصوري) على المستوى ζ :

$$w(\zeta) = w[f^{-1}(z)]; \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = k\bar{v}_{\infty} \quad \left(k = \frac{a}{2}\right).$$

وهكذا فالتيار اللاحق هو عبارة عن انسياب أسطوانة نصف قطرها الواحد الصحيح بدفق له في المالا نهاية سرعة مركبة $k\bar{v}_{\infty}$. وهذه الحركة يكون الجهد المركب على الصورة :

$$w(z) = k\bar{v}_{\infty}z + \frac{k\bar{v}_{\infty}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

ومن العلاقة $z = f(\zeta)$ ينتج أن

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

وبالاستعانة بهذه العلاقات نحصل للجهد المركب للسائل المنساب حول اللوح على الصيغة :

$$w(z) = uz - i\bar{v} \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right).$$

وفي حالة انعدام الدوران تأخذ هذه الصيغة الصورة :

$$w(z) = uz - i\bar{v} \sqrt{z^2 - a^2}.$$

ويتضح من العلاقات الناتجة أن السرعة على أطراف اللوح تصل إلى قيم كبيرة كبراً لانهائياً. ولا يتحقق ذلك بالطبع في الظروف الحقيقية. وتفسر نتائجنا بأننا نعتبر السائل مثاليًا. وبتطبيق نظرية برنولي يمكن تعيين صيغة القوة المؤثرة على الجسم الذي ينساب حوله السائل.

وتهم نظرية الجناح في الديناميكا الهوائية بدراسة القوى التي يؤثر بها الهواء على جناح الطائرة المتحركة فيه. وفي تطوير هذه النظرية قام بالدور الأكبر العلماء الروسون والهوفيت وبالدوجة الأولى ن. چوكوفسكى ومن. تشابليجين. وفي الحالة المبسطة عند الانسياب اللادوراني للأسطوانة بواسطة دفق مستو لسائل ما نحصل على نتيجة غير متوقعة وهي أن الدفق لا يؤثر بأي تأثير على الأسطوانة. وفي حالة تراكم دوران السرعة حول الأسطوانة على الدفق الانتقال تنشأ قوة تؤثر

على الأسطوانة عمودياً على اتجاه سرعة الدفع في المالا نهاية .

ونظرية الدوال التحليلية يمكن أن تستخدم في حالة الحركة المستوية فقط . وفي حالة الفراغ الثلاثي الأبعاد تضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى لحل مسائل انسياب السائل حول الجسم الجاسئ . وفي الحالة العامة يكون حل المسألة على جانب كبير من الصعوبة . لندرس حالة مبسطة هي حركة كرة بسرعة ثابتة في سائل ساكن لا محدود . وتنحصر المسألة في حل المعادلة

$$\Delta \varphi = 0$$

خارج الكرة بالشروط الحدى

$$\text{على سطح الكرة} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=a} = u \cos \theta$$

$$\text{في المالا نهاية} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

نبحث عن الحل في الصورة

$$\varphi = A \frac{\cos \theta}{r^3}.$$

وبالاستعانة بالشروط الحدى نحصل على :

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^3} \cos \theta,$$

وهو ما يعطى حل المسألة المصاغة .

وفي كل الحالات التي درسناها اعتبرنا السائل مثاليًا . وللسائل اللزج تتغير الشروط الحدية . فعلى سطح الجسم يجب تحقق شرط الالتصاق وهو على وجه التحديد أنه في نقط الحدود الصلبة تكون سرعة السائل منطبقاً في المقدار والاتجاه على سرعة النقطة المناظرة للحدود .

وتؤدي مسائل انسياب الأجسام بالسائل اللزج إلى صعوبات رياضية جمة . وقد لعبت نظريات الطبقة المتاخمة دوراً كبيراً في تطوير هذا الفرع من الهيدروديناميكا .

ملحق ٧ - المعادلة المزدوجة التوافقية

حصلنا في الملحق ٢ بالباب الثاني على معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

ومسألة ذبذبات لوح رقيق حر من الأحمال ومثبت عند طرفيه تتحول أيضاً إلى معادلة مشابهة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

والشرطين الحديين

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{على الحدود.} \quad (3)$$

وعلاوة على ذلك فإن الحالة u يجب أن تحقق الشرطين الابتدائيين :

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \quad (4)$$

وإذا أثرت على اللوح قوة خارجية موزعة بالكثافة $f(x, y)$ فإن الانحناء الاستاتيكي للوح المثبت عند طرفيه سيتحدد بالمعادلة

$$\Delta \Delta u = f \quad (5)$$

بالشرطين الحديين

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{و} \quad u = 0 \quad (3)$$

والمعادلة

$$\Delta \Delta u = 0 \quad (5')$$

تسمى بالمعادلة المزدوجة التوافقية (biharmonic equation) وحلولها التي لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة بما في ذلك مشتقات الرتبة الرابعة تسمى بالدوال المزدوجة التوافقية (biharmonic functions) .

والمسألة الحدية الأساسية للمعادلة المزدوجة التوافقية تصاغ كما يلي :

عين الدالة $u(x, y)$ المتصلة هي ومشتقتها الأولى في المنطقة المغلقة $S + C$ والتي لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة في S وتحقق المعادلة (5) أو (5') داخل S والشروط الحدية على C

$$u|_C = g(s); \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_C = h(s), \quad (6)$$

حيث $g(s)$, $h(s)$ دالتان متصلتان في طول القوس s .

وعند حل المسألة السابق صياغتها (4) - (2) بالشروط الابتدائية بطريقة فصل المتغيرات يعرض كالعادة أن

$$u(x, y, t) = \bar{v}(x, y) T(t). \quad (7)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة في المعادلة (2) وفصل المتغيرات نصل إلى مسألة البحث عن القيم الذاتية للمعادلة

$$\Delta \Delta v - \lambda v = 0 \quad (8)$$

بالشروط الحدية

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{على } C. \quad (9)$$

١ - وجدانية الحل. نثبت أن المعادلة المزدوجة التوافقية

$$\Delta \Delta u = 0$$

بالشروط الحدية

$$u|_C = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_C = h(s). \quad (3')$$

يكون لها حل وحيد.

نفرض أنه يوجد حلان u_1 , u_2 . ندرس الفرق بينهما

$$v = u_1 - u_2.$$

والدالة v تحقق المعادلة المزدوجة التوافقية (5') والشروط الحدية المتجانسة

$$v|_C = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_C = 0.$$

ويتطابق علاقة جرين

$$\int_0 (\Delta \varphi \cdot \psi - \varphi \Delta \psi) dS = \int_0 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds.$$

على اللاتين $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$ نحصل على :

$$\int_0 (\Delta v)^2 dS = 0,$$

ومن هنا

$$\Delta v = 0.$$

وبالأخذ في الاعتبار أن $v|_c = 0$ نحصل على

$$v = 0, \quad u_1 = u_2.$$

وبالتالي فالدالة المزدوجة التوافقية تتحدد تحديداً أحادى القيمة بالشروط الحدية (3').

٢- التعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية بدلالة الدوال التوافقية. ثبت النظرية التالية :

إذا كانت u_1, u_2 دالتين توافقيتين في منطقة ما G فإن الدالة $u = xu_1 + u_2$ تكون دالة مزدوجة التوافقية في المنطقة G .

للإثبات نستعين بالمتطابقة

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \quad (10)$$

بفرض

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

نعين

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (11)$$

وبتطبيق المؤثر Δ (مؤثر لابلاس) مرة أخرى والأخذ في الاعتبار أن $\Delta\Delta u_2 = 0$ نحصل على :

$$\Delta \Delta (xu_1 + u_2) = 0.$$

وإذا كانت المنطقة G هي بحيث لا يقطع حدودها أى مستقيم مواز للمحور x في أكثر من نقطتين فإن النظرية العكسية تكون صحيحة :
لأية دالة مزدوجة التوافقية معطاة في المنطقة G توجد الدالتان التوافقيتان u_1, u_2 بحيث يكون

$$u = xu_1 + u_2.$$

ومن الواضح أنه يكفي لإثبات هذه النظرية أن تثبت إمكانية اختيار الدالة u_1 التي تحقق الشرطين :

$$\Delta u_1 = 0, \quad (12)$$

$$\Delta (u - xu_1) = 0. \quad (13)$$

ومن الشرط (13) والعلاقة (11) ينتج أن

$$\Delta u = \Delta (xu_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (14)$$

وتحقق المعادلة (14) الدالة

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{1}{2} \Delta u(\xi, y) d\xi.$$

وحيث إن

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

فإن $\Delta \bar{u}_1$ تعتمد فقط على y :

$$\Delta \bar{u}_1 = v(y).$$

نعرّف الدالة $\bar{\bar{u}}_1(y)$ بحيث يكون

$$\Delta \bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

ونضع $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$. وهذه الدالة - كما هو واضح - ستحقق الشرطين (12) و (13).

لندرس صورة أخرى للتعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية . نفرض أن نقطة أصل الإحداثيات قد اختيرت داخل المنطقة G وأن أى شعاع خارج من نقطة الأصل يقطع حدود المنطقة G في نقطة واحدة فقط . عندئذ يمكن التعبير عن أية دالة مزدوجة التوافقية u في G بواسطة الدالتين التوافقيتين u_1 . u_2 في الصورة :

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2. \quad (15)$$

وهنا $r^2 = x^2 + y^2$. r_0 ثابت معطى .

وهذه النظرية تثبت كالنظرية السابقة بواسطة المتطابقة (10) والعلاقتين

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

٣- حل المعادلة المزدوجة التوافقية للدائرة . ندرس دائرة نصف قطرها r_0 ومركزها في نقطة الأصل . ونبحث عن الدالة المزدوجة التوافقية التي تحقق عند $r = r_0$ الشروط الحدية (6) . وكما أسلفنا يمكن التعبير عن الدالة المطلوب تعيينها في صورة المجموع

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2, \quad (15)$$

حيث u_1 . u_2 دالتان توافقيتان . ومن الشروط الحدية نجد أن

$$u_2|_{r=r_0} = g. \quad (16)$$

ومن هنا يتضح أن u_2 هي حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس ويمكن التعبير عنها بواسطة تكامل بواسون

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) g \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (17)$$

ومن الشرط الحدى الثانى نحصل على

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = h. \quad (18)$$

ولا يصعب التأكد بعملية التفاضل مباشرة من أن الدالة

$$2r_0\mu_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial \mu_2}{\partial r} \quad (19)$$

تحقق معادلة لابلاس ولذا يمكن التعبير عنها بتكامل بواسون :

$$2r_0\mu_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial \mu_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (20)$$

وبتفاضل (17) بالنسبة إلى r والتعويض بقيمة $\frac{\partial \mu_2}{\partial r}$ في العلاقة (20) نعين μ_1 .
وبالتعويض في العلاقة (15) بصيغتي μ_1 ، μ_2 الناتجتين نحصل على :

$$\mu = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{g [r_0 - r \cos(\alpha - \theta)] d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)]^2} \right].$$

المحتويات

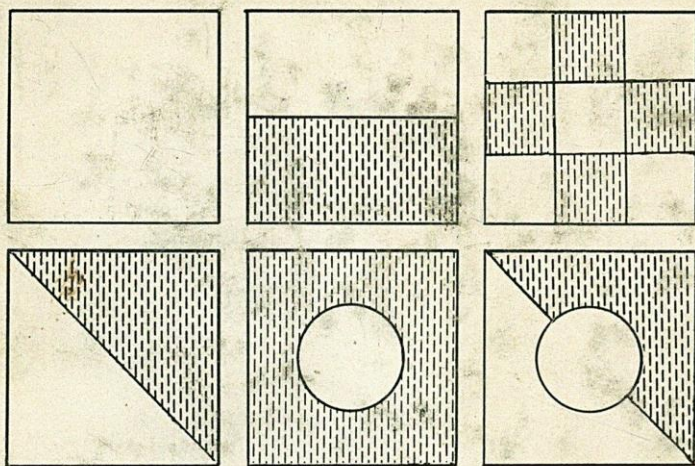
٥	مقدمة
٧	الباب الأول : تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية
٧	بند ١ - تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية
٢١	مسائل على الباب الأول
٢٢	الباب الثاني : المعادلات من النمط الزائدى
٢٢	بند ١ - أبسط المسائل المؤدية إلى معادلات من النمط الزائدى . صياغة المسائل الحديثة
٥٥	بند ٢ - طريقة للموجات المنتشرة
٩٦	بند ٣ - طريقة فصل للتغيرات
١٤٢	بند ٤ - للمسائل بالمعطيات على المميزات
١٥٠	بند ٥ - حل المعادلات الخطية العامة من النمط الزائدى
١٦٣	مسائل على الباب الثاني
	ملاحق الباب الثاني
١٦٤	ملحق ١ - حول ذبذبة أوتار الآلات للموسيقى
١٦٧	ملحق ٢ - حول ذبذبة القنضبان
١٧٢	ملحق ٣ - ذبذبات الوتر المحمل
١٨٠	ملحق ٤ - معادلات ديناميكا الغازات ونظرية للموجات الصادمة (الانفجارات)
١٩٤	ملحق ٥ - ديناميكا امتصاص الغازات
٢٠٦	ملحق ٦ - التشابهات الفيزيائية
٢١١	الباب الثالث : المعادلات من النمط للكافى
٢١١	بند ١ - للمسائل المبسطة التى تؤدى إلى معادلات من النمط للكافى . صياغة للمسائل الحديثة ..
٢٣٦	بند ٢ - طريقة فصل للتغيرات
٢٥٩	بند ٣ - مسائل على المستقيم اللانهائى
٢٨٢	بند ٤ - المسائل بدون شروط ابتدائية
٢٨٧	مسائل على الباب الثالث
	ملاحق الباب الثالث
٢٨٩	ملحق ١ - موجات درجة الحرارة
٢٩٢	ملحق ٢ - تأثير الانقسام الإشعاعى على درجة حرارة القشرة الأرضية

٢٩٨	ملحق ٣ - طريقة التشابه في نظرية التوصيل الحرارى
٣٠٣	ملحق ٤ - مسألة على الانتقال الطورى
٣٠٨	ملحق ٥ - معادلة اينشتين - كولوجوروف
٣١٢	ملحق ٦ - دالة دلتا
٣٢٢	الباب الرابع : المعادلات على النمط الناقص
٣٢٢	بند ١ - المسائل التى تودى إلى معادلة لابلاس
٣٣٦	بند ٢ - الخواص العامة للدوال التوافقية
٣٦٤	بند ٣ - حل للمسائل الحديثة للمناطق البسيطة بطريقة فصل للتغيرات
٣٧٥	بند ٤ - دالة المصدر
٣٨٨	بند ٥ - نظرية الجهد
٤٣٧	مسائل على الباب الرابع
	ملاحق الباب الرابع
٤٣٩	ملحق ١ - الصيغة التقاربية للجهد الحجمى
٤٤٣	ملحق ٢ - مسائل الكهروستاتيكا
٤٤٩	ملحق ٣ - للمسألة الأساسية للاستكشاف الكهربائى
٤٥٦	ملحق ٤ - تعيين المجالات الانجامية
٤٦١	ملحق ٥ - تطبيق طريقة التحويلات للطابقة فى الكهروستاتيكا
٤٦٥	ملحق ٦ - تطبيق طريقة التحويلات للطابقة فى الهيدروديناميكا
٤٧٣	ملحق ٧ - للمعادلة للزدوجة التوافقية

الأكاديمي أ. تيمونوف عالم سوفيتي بارز في مجال الرياضيات والفيزياء. وإلى جانب نشاطه التعليمي بجامعة موسكو قام بدراسات وأبحاث علمية هامة ساهم بها في تطوير نظرية الفئات وبعض أقسام الفيزياء الرياضية. وله كذلك أعمال في الفيزياء وخاصة في نظرية انتشار المجالات الكهرومغناطيسية وتطبيقها على استكشاف مكامن الثروات الطبيعية.

الأكاديمي أ. سامارسكي رئيس قسم بمعهد الرياضيات التطبيقية التابع لأكاديمية العلوم السوفيتية. وكان على مدى سنين يقوم بالقاء محاضرات في الرياضيات بجامعة موسكو حيث تولى على يده عدد من الباحثين العلميين الشباب. وله أكثر من ٢٠٠ بحث في الرياضيات النظرية والتطبيقية.

وقد منح كل من المؤلفين بعض الجوائز الحكومية تقديرا لأفضالهما في تطوير العلم.



محتويات الكتاب الأول

- تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية
- المعادلات من النمط الزائدى . ذبذبة الأوتار والقضبان . نظرية الموجات الصادمة .
- ديناميكا امتصاص الغازات
- المعادلات من النمط المكافئ . موجات درجة الحرارة . دالة دلتا
- المعادلات من النمط الناقصى . مسائل الكهروستاتيكا . المعادلة المزدوجة الـ

Bibliotheca Alexandrina



0642892