



تطبيقات

النظرية الكهرومغناطيسية في الهندسة الكهربائية

تأليف

د. د. عبد بن محمد حمدان قاسم

أستاذ الفيزياء - جامعة القاهرة (سابقاً)
أستاذ الفيزياء - جامعة أبو القدر (سابقاً)



0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444
0-1-14744444

دار العلوم العربية للنشر والإعلام





تطبيقات
النظرية الكهرومغناطيسية
في الهندسة الكهربائية

تأليف

أ.د. عبد الهادي محمد حمدان البرغوثي

استاذ الفيزياء - جامعة القدس- فلسطين (سابقا)

استاذ الفيزياء - جامعة ام القرى- مكة المكرمة (سابقا)

الأهداء

الى الزوجة الغالية والبنت الحبيبة

المحتوى

مقدمة

الفصل الأول : تحليل المتجهات

(1.1) تعريف المتجه وجبر المتجهات

(1.2) تفاضل المتجهات

(1.3) النظم الإحداثية

(1.4) التكامل على المتجهات

(1.4.1) التكاملات الخطية

(1.4.2) التكاملات السطحية

(1.4.3) التكاملات الحجمية

(1.5) متطابقات المتجهات

تمارين

الفصل الثاني : المجال الكهربائي الساكن

(2.1) قانون كولوم

(2.2) المجال الكهربائي

(2.3) الجهد القياسي

(2.4) فرق الجهد الكهربائي

(2.5) كثافة الفيض الكهربائي

(2.6) قانون جاوس وتطبيقاته

تمارين

الفصل الثالث : المجال الكهربائي الساكن في العازلات الكهربائية

- (3.1) خصائص الوسط العازل
 - (3.2) الإستقطاب الكهربى
 - (3.3) الشروط الحدودية بين وسطين عازلين
 - (3.4) السعات الكهربائية
 - (3.5) الطاقة الكهربائية المخزونة فى السعات
 - (3.6) نظرية الإنتشار
 - (3.7) معادلات بويسون ولابلاس .
- تمارين

الفصل الرابع : المجال المغناطيسى الساكن الناتج من التيار الكهربى

- (4.1) مقدمة
 - (4.2) المجال المغناطيسى لموصل يحمل تيار كهربى
 - (4.3) قانون بيوت- سافارت
 - (4.4) العزم المغناطيسى
 - (4.5) نظرية التدوير
 - (4.6) الجهد المغناطيسى العددى والإتجاهى
- تمارين

الفصل الخامس : المجال المغناطيسى للمواد المغناطيسية

- (5.1) الحلقة الذرية المغناطيسية
- (5.2) القضيب المغناطيسى
- (5.3) الإستقطاب المغناطيسى
- (5.4) خواص المواد المغناطيسية
- (5.5) شدة المجال المغناطيسى الناتج عن قضيب مغناطيسى

(5.6) القابلية المغناطيسية والنفوذية النسبية للمواد المغناطيسية

(5.7) الشروط الحدودية للمجال المغناطيسي

(5.8) منحنيات التماثل

(5.9) الدوائر المغناطيسية

تمارين

الفصل السادس: المجالات الكهربائية والمغناطيسية المتغيرة زمنياً

(6.1) قانون فارادي

(6.2) حركة موصل في مجال مغناطيسي

(6.3) الحث الكهربائي

(6.4) نظرية ستوكس

(6.5) الحثية الذاتية والمتبادلة

(6.6) تيار الإزاحة

تمارين

الفصل السابع: الأمواج الكهرومغناطيسية

(7.1) المجال الكهربائي والمغناطيسي المتغير مع الزمن

(7.2) معادلات ماكسويل

(7.3) معادلة الموجة الكهرومغناطيسية

(7.4) الموجة المستوية

(7.4.1) انتشار الموجة المستوية في وسط عازل

(7.4.2) انتشار الموجة المستوية في وسط موصل

(7.5) طاقة الموجات الكهرومغناطيسية

(7.6) استقطاب الموجات الكهرومغناطيسية

(7.7) الحالة الحدودية

(7.8) انعكاس الموجات الكهرومغناطيسية .

الفصل الثامن : خطوط النقل الكهربائية

(8.1) مقدمة

(8.2) العلاقة بين نظرية الدائرة الكهربائية والمجال

(8.3) الدائرة المكافئة لخط النقل

(8.4) الممانعة المميزة

(8.5) خط النقل المحمل

(8.6) موجات الجهد الساكنة

(8.7) مخطط (خارطة) سميث

(8.8) استخدام خارطة سميث في دراسة نظريات خطوط النقل

(8.9) نظرية خط النقل الكهربائي: مثال تطبيقي

(8.10) توهين الأمواج في خط النقل

تمارين

الفصل التاسع : مرشحات الموجات الكهرومغناطيسية

(9.1) عملية مرشد الموجة الأساسية

(9.2) تحليل الموجة المستوية المنتشرة في مرشد موجي ذي لوحين متوازيين

(9.3) تحليل عملية مرشد الألواح المنوالية باستخدام معادلة الموجة

(9.4) مرشد الموجة المستطيل المقطع

(9.4.1) أنماط TE

(9.4.2) أنماط TM

(9.4.3) ثابت الانتشار

(9.4.4) كثافة الشحنات والتيارات السطحية عند جدران المرشد الموجي

(9.5) مرشد الموجة العازل

(9.5.1) نمط TM

(9.5.2) حلول TE

تمارين

الفصل العاشر: الهوائيات

(10.1) الجهد المعوق

(10.1.1) معادلات الموجة غير المتجانسة

(10.1.2) حلول معادلة الموجة

(10.2.2) طريقة بديلة للاشتقاق باستخدام دالة الجهد الكهربائي القياسي

(10.2.3) المجال المغناطيسي والكهربائي

(10.2.4) خطوط المجال الكهربائي

(10.2.5) مقاومة الإشعاع

(10.3) مصفوفات ثنائي القطب النقطي

(10.3.1) مصفوفة بسيطة من عنصرين

(10.4) هوائي ثنائي قطب طويل

(10.4.1) حل المجال البعيد

(10.4.2) التيار المنتظم

(10.4.3) مقاومة الإشعاع

تمارين

مقدمة

PREFACE

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله الكريم , وبعد .

نقدم هذا الكتاب ليكون مرجعا لطلبة المرحلة الجامعية الأولى, كمقرر لمادة للفيزياء في تخصص الهندسة الكهربائية والإلكترونية. وليتسنى للطلاب الفهم العميق للمفردات والمفاهيم العلمية فقد تم عرض المادة العلمية بإسلوب المحاضرات الصفية وبألغة عربية مع الحفاظ على المعادلات بالحروف اللاتينية وفق الترميز العلمي العالمي , وهذا يعطي الطالب فرصة لمتابعة المادة في المراجع العلمية المختلفة وحل المسائل العلمية ذات العلاقة .

ونظرا لأهمية دور النظرية الكهرومغناطيسية في هذا التخصص , فقد تناول هذا الكتاب شرحا لأساسيات هذه النظرية وقوانينها العلمية التي يحتاجها طالب الهندسة الكهربائية خلال الممارسة العملية لبناء الأجهزة وتصميم الدوائر الكهربائية , كما تعتمدنا في اشتقاق القوانين الابتعاد عن العمليات الرياضية المعقدة والتي تشتت تفكير الطالب وتجعله يبتعد عن الأفكار المهمة في المجالات الإبداعية .

تناول الفصل الأول تحليل وجبر المتجهات والتي تعتبر ضرورية لفهم القوانين المتعلقة بمفاهيم المجالات الكهربائية والمغناطيسية وكيفية الربط بين هذه المفاهيم والتعامل معها في حل المسائل العلمية التطبيقية للنظم الإحداثية المختلفة.

كما تم في الفصل الثاني والثالث من هذا الكتاب شرحا مبسطا لمفاهيم ونظريات المجال الكهربائي الساكن . كما تم تقديم خصائص هذا المجال في الأوساط المادية العازلة وتغير سلوك خطوط هذا المجال عند السطوح الفاصلة بين هذه الأوساط المختلفة .

بينما في الفصل الرابع , تناول هذا الكتاب دراسة التأثير المغناطيسي لتوزيعات تيارية كهربائية متنوعة, وتم عرض الطرق الرياضية اللازمة لحل المسائل المتعلقة بحساب هذا التأثير.

كما تناول الفصل الخامس الخصائص المغناطيسية للمواد وتفاعلها مع المجال المغناطيسي الخارجي, فيما يعرف بظاهرة الإستقطاب المغناطيسي , كما تم عرض سلوك خطوط المجال المغناطيسي داخل وخارج الأوساط المغناطيسية.

بينما ربط الفصل السادس بين المجالات الكهربائية والمغناطيسية والمتغيرة زمنيا , وتم تناول ظاهرة الحث الكهرومغناطيسي والتي هي اساس مبادئ عمل المحولات والمحركات الكهربائية وغيرها من التطبيقات العملية للنظرية الكهرومغناطيسية .

اما حيز الزاوية في النظرية الكهرومغناطيسية والمتمثل في معادلات ماكسويل , فقد تم عرضه في الفصل السابع من هذا الكتاب. كما تم تقديم المفاهيم الأساسية للموجات الكهرومغناطيسية وخصائص انتقالها في الفراغ والأوساط المادية المختلفة .

تناول الفصل الثامن المبادئ الأساسية لنقل الطاقة عبر خطوط النقل المتنوعة, كما تم توضيح المشابهة بين نظرية الدائرة الكهربائية ونظرية المجال. وقدم هذا الفصل مخطط (خارطة) سميث والتي هي اساس العمل لنظريات خطوط النقل الكهربائية , حيث يتم من خلال استخدامها تحديد جودة هذه الخطوط, ولا يمكن لطالب الهندسة الكهربائية الإستغناء عنها كأداة مهمة اثناء دراسته وفي عمله الميداني.

اما في الفصل التاسع , فقد تم تقديم المبادئ الأساسية لعمل مرشحات الأمواج الكهرومغناطيسية بأنواعها المختلفة , مرشحات الموجات معدنية الجدران ذات الألواح المتوازية ومرشحات الموجات العازلة . كما عرض هذا الفصل مدى سماحية هذه المرشحات لنقل هذه الموجات عبر محورها, وذلك بدراسة تردد القطع للأ نمط المختلفة من هذه الموجات .

في الفصل العاشر, تم تقديم و شرح مبدأ عمل الهوائيات في البث الإشعاعي , وتناول هذا الشرح الأنواع المختلفة من الهوائيات . وكمثال على ذلك : تم تناول كيفية

حساب القدرة المشعة من ثنائي القطب الكهربائي والمغناطيسي والناجمة عن مرور توزيعات تيارية متغيرة مع الزمن في موصل معدني قصير وطويل .

واخيرا , نرجو من الطلبة الأعزاء ارسال ملاحظاتهم وتقييمهم لهذا الكتاب وذلك لأخذها بعين الاعتبار وتفادي الأخطاء في الطبعات المستقبلية .

تم بعون الله بتاريخ 2014 /11/2

المؤلف

ا. د / عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

عابود/ رام الله - فلسطين

الفصل الأول

تحليل المتجهات

Vectors Analysis

يتناول هذا الفصل التعريفات الأساسية للعمليات الجبرية للمتجهات والتي هي ضرورية لفهم قوانين النظرية الكهرومغناطيسية وتطبيقاتها , ويعرض تدريبات رياضية على متطابقات هذه المتجهات. كما يتناول النظم الإحداثية وإستخدامها في حل مسائل الكهرومغناطيسية.

(1.1) تعريف المتجه وجبر المتجهات :

Vector definition and vectors algebra

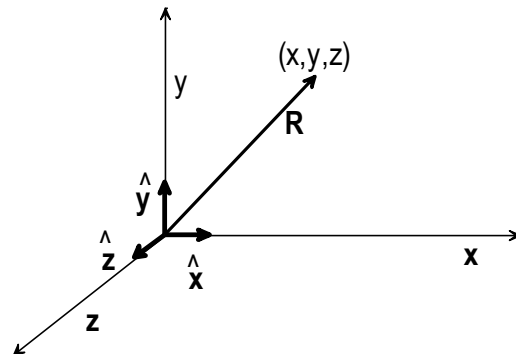
تصنف الكميات الفيزيائية الى نوعين: الكميات العددية (القياسية) *quantities scalar* وهي الكميات التي تحدد بالمقدار فقط مثل الكتلة, الحرارة , الزمن... , والكميات المتجهة *vector quantities* وهي الكميات التي تحدد بالمقدار والاتجاه معاً مثل القوة, السرعة, والمجال الكهربى والمغناطيسى ...

في فصول هذا الكتاب , يرمز للكميات المتجهة بالحروف **المغلظة** **Bold letters** تمييزاً لها عن الكميات العددية والتي تكتب بحروف عادية .

لنفرض ان احداثيات نقطة ما في الفراغ هي (x,y,z) , يمكن رياضياً رسم خط مستقيم بدايته نقطة الأصل (نقطة المرجع) ونهايته تلك النقطة ويسمى **متجه الموضع**, ونعبر عن ذلك كالتالي:

$$\mathbf{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

حيث $\mathbf{R}$ متجه الموقع , اما $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ تسمى متجهات الوحدة *unit vectors* , اي $\hat{x}$ يمثل سهماً طوله وحدة واحدة في اتجاه محور السينات (الشكل 1.1) , وهكذا ...



شكل (1.1) متجه الموقع في الفراغ.

اما طول السهم الممثل لمتجه الموقع (مقدار المتجه) يرمز له $|R|$, وهي كمية عددية, ويكون كالتالي:

$$|R| = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ويعرف متجه الوحدة على هذا السهم ($\hat{R}$) على النحو التالي:

$$\hat{R} = \frac{R}{R}$$

مثال (1)

جد متجه الموقع لنقطة احداثياتها المستطيلة (الكارتيذية) $(2, -3, 4)$, ثم جد متجه الوحدة عليه ؟

الحل:

$$R = 2\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}$$

$$|R| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\hat{R} = (2\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z})/\sqrt{29}$$

اما التعامل الجبري مع المتجهات يمكن عرضه بإيجاز كالتالي:

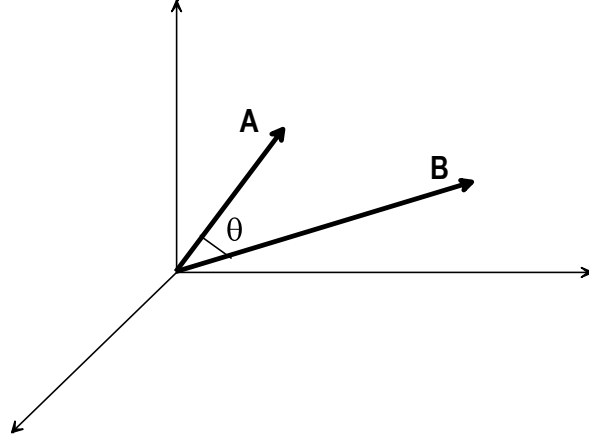
• الضرب العددي للمتجهات (scalar product)

لنفرض ان لدينا متجهان هما A, B , حيث مركباتهما $(A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z)$ على الترتيب, تعرف قاعدة الضرب العددي على النحو التالي:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين (الشكل 1.2)

ملاحظة: الضرب العددي لمتجهين عملية تبديلية , بمعنى: $A \cdot B = B \cdot A$



شكل (1.2) الضرب العددي لمتجهين.

مثال (2)

لنفرض ان المتجهين $\mathbf{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$, $\mathbf{B} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}$ جد $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ والزاوية بين هذين المتجهين؟

الحل:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(3) + (3)(-2) + (-1)(4) = -4$$

$$A = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$B = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{-4}{\sqrt{14 \times 29}} \Rightarrow \theta = 101.45^\circ$$

• الضرب الإتجاهي vector product

تعرف قاعدة الضرب الإتجاهي لمتجهين على الصورة التالية:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{C}$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

حيث

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

نلاحظ ان الضرب الإتجاهي يعطي متجها جديدا يكون متعامدا مع كلا المتجهين وبإتجاه تقدم البرغي عند لفه من ناحية المتجه الاول نحو المتجه الثاني . وعليه يكون الضرب الإتجاهي لمتجهات الوحدة على النحو التالي:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}, \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}, \quad \dots$$

ملاحظة: الضرب الإتجاهي عملية غير تبديلية , بمعنى : $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

مثال (3)

جد الضرب الإتجاهي للمتجهين المعرفين في المثال (2) ؟

الحل:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}[3 \times 4 - (-1)(-2)] + \hat{y}[(-1)(3) - 2 \times 4] \\ &\quad + \hat{z}[(2)(-2) - 3 \times 3] \\ &= 10\hat{x} + (-11)\hat{y} + (-13)\hat{z} \end{aligned}$$

(1.2) تفاضل المتجهات

نفرض ان متجها ما دالة للزمن (t) , ومكوناته دوال زمنية ايضا , اي

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\hat{x} + A_y(t)\hat{y} + A_z(t)\hat{z}$$

تكون المشتقة الزمنية لهذا المتجه كالتالي:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{x} + \frac{dA_y}{dt} \hat{y} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z}$$

• التحدّر (الإنحدار) The Gradient

يعرف تحدّر الدالة العددية (f) رياضيا "في الإحداثيات المستطيلة والذي يرمز له ∇f على النحو التالي:

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

اما العلاقة بين التغير في هذه الدالة df عبر المسافة المتناهية في الصغر $d\ell$, يعطى كالتالي:

$$df = \nabla f \cdot d\ell$$

$$d\ell = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

مثال(4)

جد تدر الدالة التالية: $f = x^2yz$ عند النقطة $(1,2,-3)$ ؟

الحل:

$$\nabla f = \hat{x}(2xyz) + \hat{y}(x^2z) + \hat{z}(x^2y)$$

بالتعويض بإحداثيات النقطة نجد ان:

$$\nabla f = \hat{x}(-12) + \hat{y}(-3) + \hat{z}(2)$$

• تباعد (انتشار) الدالة الإتجاهية Divergence of a vector function

لنفرض ان لدينا المتجه التالي:

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$$

يكون التعريف الرياضي لتباعد (انتشار) هذا المتجه , والذي يرمز له $\nabla \cdot \mathbf{B}$, في الإحداثيات المستطيلة على الصورة التالية:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

نلاحظ ان تباعد الدالة الإتجاهية يعطي دالة عددية.

مثال(5)

جد تباعد المتجه التالي عند النقطة $(1,-2,3)$,

$$\mathbf{B} = \hat{x}(xy) + \hat{y}(yz) + \hat{z}(xz)$$

الحل:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = y + z + x = (-2) + 3 + 1 = 2$$

• تدوير المتجه vector curl

يعرف تدوير المتجه في الإحداثيات المستطيلة على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

مثال (6)

جد تدوير المتجه التالي:

$$\mathbf{B} = \hat{x}(xy) + \hat{y}(yz) + \hat{z}(xz)$$

الحل:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = \hat{x}(0 - y) + \hat{y}(0 - z) + \hat{z}(0 - x) \\ &= -(\hat{x}y + \hat{y}z + \hat{z}x)\end{aligned}$$

• مؤثر لابلاس Laplacian operator

يسمى تباعد التحدرد الدالة العددية لابلاس هذه الدالة ويرمز له بالرمز ∇^2 , اي ان

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

وقد يعرف مؤثر لابلاس على المتجه كالتالي:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla^2 B_x + \nabla^2 B_y + \nabla^2 B_z$$

مثال (7)

إذا كانت $f = x^2y + y^2xz + z^2y$, جد $\nabla^2 f$ ؟

الحل:

$$\nabla^2 f = 2y + 2xz + 2y = 4y + 2xz$$

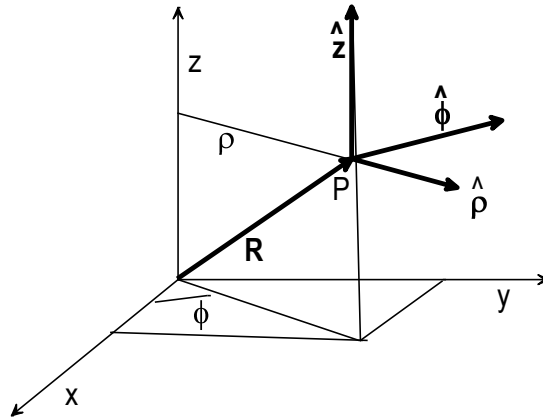
(1.3) النظم الإحداثية Coordinate Systems

في كثير من مسائل الكهرومغناطيسية , يكون من السهل التعامل وفقا لنظم إحداثية , غير نظام الإحداثيات المستطيلة , لحل هذه المسائل . ومن هذه النظم ما يلي:

• الإحداثيات الإسطوانية Cylindrical Coordinates

حيث في هذا النظام الإحداثي , يعبر عن موقع النقطة في الفراغ بثلاثة متغيرات هي: (ρ, ϕ, z) (الشكل 1.3) . كما يرمز لوحدات المتجه $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$, وعليه نعبر عن متجه موقع النقطة P بدلالة وحدات المتجه كالتالي:

$$\mathbf{R} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$



شكل (1.3) نظام الإحداثي الإسطواني.

يعطى التغير في متجه الموقع كالتالي:

$$d\mathbf{R} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

لتحويل المتغيرات من الإحداثيات الإسطوانية الى الإحداثيات المستطيلة وبالعكس , نستخدم العلاقات التالية:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

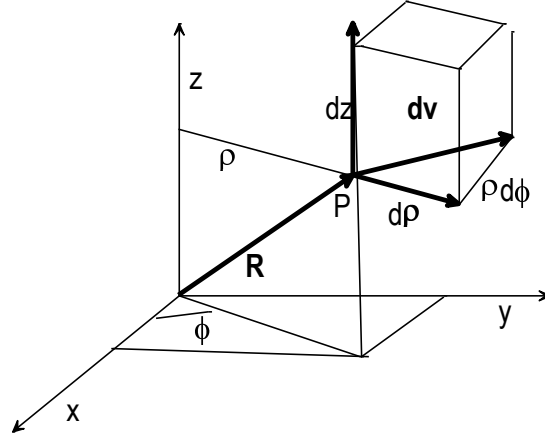
يكون التحويل بين متجهات الوحدة في الإحداثيات المستطيلة والإسطوانية كالتالي:

$$\hat{x} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad \hat{y} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad \hat{z} = \hat{z}$$

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad \hat{z} = \hat{z}$$

ويكون العنصر الحجمي الناتج من الزيادات المتناهية في إحداثيات النقطة P (الشكل 1.4) كالتالي:

$$dv = (d\rho)(\rho d\phi)(dz)$$



شكل (1.4) العنصر الحجمي في الإحداثيات الإسطوانية.

تكون الصيغة الرياضية لتحديد الدالة العددية في الإحداثيات الإسطوانية كالتالي:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

يكون تباعد المتجه في هذه الإحداثيات على النحو التالي:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

يكون تدوير المتجه في الإحداثيات الإسطوانية على الصورة التالية:

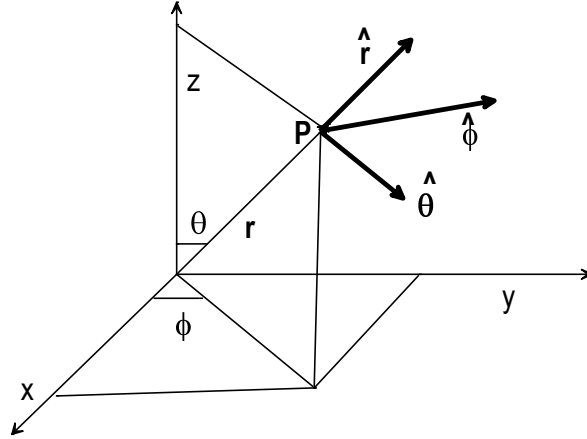
$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_{\rho} & \rho B_{\phi} & B_z \end{vmatrix}$$

تكون الصورة الرياضية للابلاس الدالة العددية في هذه الإحداثيات كالتالي:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

• الإحداثيات الكروية Spherical Coordinates

في الإحداثيات الكروية , يكون موقع النقطة في الفراغ بدلالة التغيرات التالية: (r, θ, ϕ) , ومتجهات الوحدة هي $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ كما في الشكل (1.5) .



شكل (1.5) الإحداثيات الكروية.

تكون العلاقة التحويلية بين الإحداثيات الكروية والمستطيلة على النحو التالي:

$$x = r \sin \theta \cos \phi , y = r \sin \theta \sin \phi , z = r \cos \theta$$

اما التحويلات بين متجهات الوحدة من الإحداثيات المستطيلة الى الإحداثيات الكروية وبالعكس تكون كالتالي:

$$\hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

ويكون التغير في متجه موقع النقطة كالتالي:

$$d\mathbf{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

اما العنصر الحجمي الناتج عن هذا التغير المتناهي في موقع النقطة فيعطى على الصيغة التالية :

$$dv = (dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)$$

تكون الصيغ الرياضية للتحدّر , التباعد , التدوير , ولا بلاس الدوال في هذه الإحداثيات على النحو التالي:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\phi r) \right\}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ B_r & r B_\theta & r \sin \theta B_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

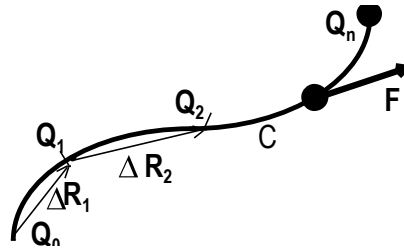
(1.4) التكامل على المتجهات Vectors Integration

في هذا البند سنقدم عمليات التكامل لمتجه المجال على منحنى ما في الفضاء.

(1.4.1) التكاملات الخطية Line Integrals

لنفرض ان منحنيا ما في الفضاء C , ومعرفا عليه متجه ما مثل $\mathbf{F}$ عند كل نقطة عليه , ولنفرض اننا قسمنا هذا المنحنى الى عناصر متناهية الصغر من خلال اعتبار النقاط $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ (كما في الشكل 1.6) , حيث متجه الموقع لكل نقطة كالتالي: $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n$. اذا كانت $\mathbf{F}_k$ هي قيمة $\mathbf{F}$ عند النقطة Q_k , فإن التكامل الخطي على هذا المنحنى يعرف كالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{R}_k = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$



شكل (1.6) التكامل الخطي.

نلاحظ ان التكامل الخطي يعطي كمية عددية.

لنفرض ان

$$\mathbf{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

وحيث ان

$$d\mathbf{R} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

وعليه

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

لإجراء التكامل نستخدم وسيط متغير مثل t بحيث يحقق الشرط التالي :

$$t = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(y - y_0)}{(y_1 - y_0)} = \frac{(z - z_0)}{(z_1 - z_0)}$$

حيث (x_0, y_0, z_0) تمثل احداثيات نقطة البداية R_0 , بينما (x_1, y_1, z_1) تمثل احداثيات نقطة النهاية R_1 . كما يمكن اجراء التكامل الخطي مباشرة اذا عرفت معادلة المسار بدلالة المتغيرات (x, y, z) , وذلك بتحويل هذه المتغيرات الى متغير واحد واجراء التكامل عليه.

ملاحظة: يكون متجه المجال **محافظا** conservative Field اذا كانت قيمة التكامل الخطي لا تعتمد على المسار المتبع بين النقطتين (البداية والنهاية).

مثال(8)

اذا كانت $F = x^2\hat{x} + y\hat{y} + (xz - y)\hat{z}$, جد $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ من النقطة $(0,0,0)$ الى النقطة $(1,2,4)$ خلال الخط المستقيم الواصل بينهما مباشرة؟

الحل:

تكون مركبات متجه الموقع R كالتالي:

$$t = \frac{x - 0}{1 - 0} \rightarrow x = t ,$$

$$t = \frac{y - 0}{2 - 0} \rightarrow y = 2t ,$$

$$t = \frac{z - 0}{4 - 0} \rightarrow z = 4t.$$

اذن

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C x^2 dx + y dy + (xz - y) dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + (2t)(2dt) + (4t^2 - 2t)(4dt) = \int_0^1 (17t^2 - 4t) dt = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

مثال(9)

جد التكامل الخطي للمتجه $F = x\hat{x} + x^2\hat{y}$ من $(-1,0)$ الى $(1,0)$ عبر المسار نصف الدائري الذي معادلته $y = \sqrt{1 - x^2}$

الحل:

نستخدم الإحداثيات القطبية لدائرة الوحدة , اي $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ حيث تتغير $0 \leq \theta \leq \pi$

وعليه ,

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot dR &= \int_{\pi}^0 [(\cos \theta)(-\sin \theta d\theta) + (\cos^2 \theta)(\cos \theta d\theta)] \\ &= \int_{\pi}^0 (-\sin \theta \cos \theta + \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \left[-\frac{\sin^2 \theta}{2} + \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\pi}^0 = 0 \end{aligned}$$

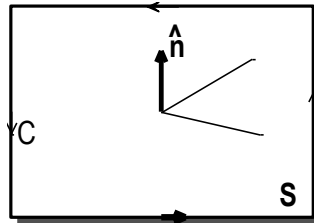
(1.4.2) التكاملات السطحية Surface Integrals

يكون السطح ناعما smooth اذا كان يوجد عند اي نقطة فيه متجه وحدة عموديا مثل $\hat{n}$ والذي يتغير بشكل متصل continuous على هذا السطح .

لنفرض ان معادلة سطح ما تعطى بالعلاقة التالية : $f(x, y, z) = 0$, فإن

$$\hat{n} = \pm \text{grad } f / |\text{grad } f|$$

والإشارة (+) تعني ان اتجاه متجه الوحدة الى اعلى , وهذا يتوقف على اتجاه الدوران على المنحنى المغلق والمحيط بالسطح , بمعنى ان الدوران ضد عقارب الساعة يعطي متجه وحدة الى اعلى والعكس صحيح (كما في الشكل 1.7).



شكل (1.7) متجه الوحدة العمودي على السطح.

مثال (10)

جد متجه الوحدة العمودي على السطح المعرف كالتالي:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x \geq 0$$

الحل:

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z}$$

$$|\nabla(x^2 + y^2 + z^2)| = \sqrt{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)}$$

$$\hat{n} = \frac{2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z}}{\sqrt{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)}}$$

هناك طريقة أخرى لإيجاد متجه الوحدة للعمودي على السطح اذا كانت معادلة هذا السطح معطاة بدلالة المعاملات البارامترية , وتتلخص هذه الطريقة بالتعبير عن الإحداثيات المستطيلة (x, y, z) بدلالة معاملين وسيطيين (u, v) , اي

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

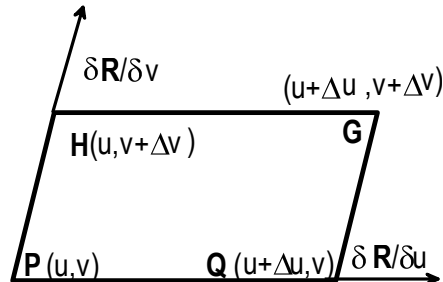
وعليه يكون متجه الموقع لنقطة ما على هذا السطح $\mathbf{R} = \mathbf{R}(u, v)$.

نعرف متجه المماس للمنحنى , $v = \text{constant}$, (الشكل 1.8) على النحو:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = \hat{x} \frac{\partial x}{\partial u} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial u} + \hat{z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

وكذلك يكون متجه المماس للمنحنى , $u = \text{constant}$, على الصورة:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = \hat{x} \frac{\partial x}{\partial v} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial v} + \hat{z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



الشكل (1.8) متجهات مماسات السطح.

يكون متجه الوحدة العمودي على السطح على الصورة التالية:

$$\hat{n} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$$

مثال (11)

جد العمودي على السطح المحدد بالمعادلات البارامترية التالية:

$$x = u^2, \quad y = uv, \quad z = v$$

عند النقطة $u = 1, v = 2$ ؟

الحل:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = 2u \hat{x} + v \hat{y} = 2\hat{x} + \hat{y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = u\hat{x} + \hat{z} = \hat{x} + \hat{z}$$

$$\hat{n} = (2\hat{x} + \hat{y}) \times (\hat{x} + \hat{z}) = 2\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$$

تعرف عنصر المساحة على السطح $d\mathbf{S}$ - متجه عموديا على هذا السطح- على النحو التالي:

$$d\mathbf{S} = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right| du dv$$

وعليه تكون مساحة السطح كالتالي:

$$S = \iint \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right| du dv$$

مثال (11)

جد مساحة السطح المعرف بالمعادلات التالية:

$$x = \cos u, y = \sin u, z = v$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$$

حيث

الحل:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = -\sin u \hat{x} + \cos u \hat{y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = \hat{z}$$

$$d\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} du dv$$

$$= (\cos u \hat{x} + \sin u \hat{y}) du dv$$

$$S = \iint |d\mathbf{S}| = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + \sin^2 u)^{1/2} du dv =$$

مثال (12)

جد عنصر المساحة على سطح كرة نصف قطرها a بدلالة الإحداثيات الكروية؟

الحل:

$$x = a \sin \phi \cos \theta, y = a \sin \phi \sin \theta, z = a \cos \phi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = a \cos \phi \cos \theta \hat{x} + a \cos \phi \sin \theta \hat{y} - a \sin \phi \hat{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = -a \sin \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \cos \theta \hat{y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \hat{x} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \hat{y} + a^2 \sin \phi \cos \phi \hat{z}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \right| = a^2 \sin \phi$$

$$dS = a^2 \sin \phi \, d\phi d\theta$$

لنفرض ان الدالة $f(x, y, z)$ معرفة ومتصلة على السطح S , اذا قسمنا هذا السطح الى عدد كبير من عناصر سطحية متناهية في الصغر δS_i , يكون تعريف التكامل السطحي لهذه الدالة على هذا السطح كالتالي:

$$\iint f(x, y, z) dS = \lim_{\delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i) \delta S_i$$

لنفرض ان المتجه $\mathbf{F}$, حيث $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, يكون التكامل السطحي لهذا المتجه كالتالي:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \, du dv$$

مثال (13)

جد التكامل السطحي للمتجه $\mathbf{F} = \hat{x} + xy \hat{y}$, حيث السطح المعرف كالتالي:

$$x = u + v, y = u - v, z = u^2; \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

الحل:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \, du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & u^2 - v^2 & 0 \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2u^3 - 2uv^2 + 2u) du dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v^2 + 1 \right) dv = 7/6 \end{aligned}$$

مثال (14)

جد التكامل السطحي للمتجه $\mathbf{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ على سطح كروي معادلته

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

الحل:

لنفرض ان مركز الكرة عند نقطة الأصل, حيث نصف قطرها 2 . يكون المتجه $\mathbf{F}$ باتجاه الشعاع الخارج من المركز نحو سطح الكرة , كما يكون متجه الوحدة $\hat{\mathbf{n}}$ في اتجاه هذا الشعاع , وعليه

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = |\mathbf{F}| |\hat{\mathbf{n}}| \cos 0 = |\mathbf{F}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 2$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 2 \oiint dS = 2(4\pi \times 2^2) = 32\pi$$

(1.4.3) التكاملات الحجمية Volume integrals

لنفرض ان لدينا حجما ما V , والدالة $f(x, y, z)$ معرفة متصلة عند جميع نقاط هذا الحجم . اذا قسمنا هذا الحجم الى عناصر حجمية δV_i , يمكن تعريف التكامل الحجمي للدالة على النحو التالي:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \delta V_i$$

من التطبيقات الهامة على التكاملات الحجمية ايجاد كتلة M , لحجم معين من المادة والتي تكون لها كثافة حجمية تتغير من نقطة لأخرى خلال هذا الحجم, اي ان الكثافة دالة للموقع, وعليه $\rho(x, y, z)$

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dV = M$$

مثال(15)

جد التكامل الحجمي للدالة $f(x, y, z) = x + yz$ على حجم صندوق محدد بالمستويات الإحداثية التالية:

$$x = 1, y = 2, z = 1 + x \quad ?$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\iiint f \, dz \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1+x} (x + yz) \, dz \, dx \, dy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 [xz + yz^2/2]_0^{1+x} \, dx \, dy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 (x + x^2 + y/2 + yx + yx^2/2) \, dx \, dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{5}{6} + \frac{7y}{6} \right) dy = 4
\end{aligned}$$

مثال (16)

جد التكامل الحجمي للدالة $f(x, y, z) = y$ على حجم كروي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ؟

الحل:

$$\begin{aligned}
\iiint f \, dV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} y \, dz \, dy \, dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)^{1/2} \, dy \, dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 0 \, dx = 0
\end{aligned}$$

هذا الجواب متوقع بسبب خاصية التماثل للكرة .

(1.5) متطابقات المتجهات Vectors Identities

- (1) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- (2) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$
- (3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- (4) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})\mathbf{A}$

$$(5) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

فيما يلي بعض متطابقات المتجهات المحتوية على مؤثرات تفاضلية

$$(1) \quad \nabla \varphi \psi = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$$

$$(2) \quad \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$(3) \quad \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$$

$$(4) \quad \nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$(7) \quad \nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F}$$

$$(8) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$(9) \quad \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

فيما يلي بعض المتطابقات التي تحوي على تكاملات للمتجهات:

$$(1) \quad \oint_S \varphi \hat{\mathbf{n}} \, da = \int_V \nabla \varphi \, dv$$

$$(2) \quad \oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} \, da = \int_V \nabla \times \mathbf{F} \, dv$$

$$(3) \quad \oint_C \varphi \, d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \varphi \, da$$

$$((4) \quad \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv$$

$$(5) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

تمارين

(1.1) برهن ان المتجهين التاليين متعامدان

$$A = \hat{x} + 4\hat{y} + 3\hat{z}, \quad B = 4\hat{x} + 2\hat{y} - 4\hat{z}$$

(1.2) اذا كان $A = B - C$, برهن صحة قانون جيب التمام ؟

(1.3) اذا كان A متجه ثابت وكان R متجه موقع النقطة (x, y, z) بالنسبة لنقطة الأصل . برهن ان : $(R - A) \cdot R = 0$ يمثل معادلة كرة ؟

(1.4) في السؤال (1.4) اثبت ان $\nabla(A \cdot R) = A$ ؟

(1.5) برهن ان $\nabla \cdot R = 3$, حيث R متجه الموقع للنقطة (x, y, z) من نقطة الأصل ؟

(1.6) اذا اكان B متجه ما برهن ان $(B \cdot \nabla)R = B$ ؟

(1.7) جد متجه الوحدة العمدي على السطح $x^2 + y^2 - z = 6$ عند النقطة $(2, 3, 7)$ ؟

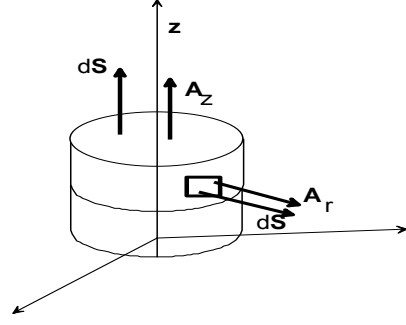
(1.8) جد $\nabla f(r)$, حيث $f(r) = \frac{1}{r}$, $r = |R|$ ؟

(1.9) جد التكامل الخطي للمتجه $F = x\hat{x} + x^2\hat{y}$, من النقطة $(-1, 0)$ الى $(1, 0)$ عبر مسار محور السينات ؟

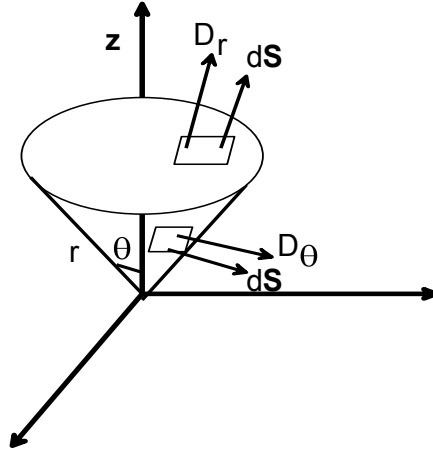
(1.10) برهن صحة المتطابقة التالية باستخدام اللاحداثيات الإسطوانية :

$$\oint A \cdot dS = \int_V \nabla \cdot A dv$$

حيث $A = 30e^{-\rho} \hat{\rho} - 2z\hat{z}$, والحجم المحصور بين $\rho = 2, z = 0, z = 5$ (كما في الشكل 1.9) ؟



(1.11) برهن صحة المتطابقة في سؤال (1.10) باستخدام الإحداثيات الكروية , علما ان
 والحجم محدود بالمستوى $\theta = \pi/4$, $r = 4\text{ m}$ ؟ $D = \frac{5r^2}{4} \hat{r}$



الفصل الثاني

المجال الكهربى الساكن

Static Electric Field

يتناول هذا الفصل مفهوم المجال الكهربى الناتج عن توزيعات مختلفة للشحنات الكهربائية بإعتماد على قانون كولوم . كما يقدم مفهوم الجهد الكهربى وفرق هذا الجهد بين نقطتين عبر المجال الكهربى . ويشرح مفهوم الفيض الكهربى وقانون جاوس وتطبيقاته في إيجاد شدة المجال الكهربى .

(2.1) قانون كولوم Coulomb's Law

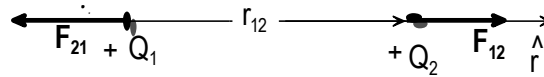
منذ عهد ارسطو طاليس عرف ان ذلك قضيب من الزجاج بقطعة من الحرير يكسب الزجاج خاصية جذب القطع الخفيفة من الورق والقش . وسميت هذه الظاهرة التكهرب بالدلك , وفيما بعد تم تفسير هذه الظاهرة باعتبار ان الطاقة الميكانيكية الناتجة من عملية الدلك تسبب في نقل جسيمات تحمل ما يسمى بالشحنات الكهربائية من الزجاج الى الحرير , وبعدها عرفت هذه الجسيمات بالالكترونات . في الطبيعة , تكون ذرات المواد متعادلة الشحنة الكهربائية , فإذا فقدت بعض من الكترونها الخارجية اصبحت موجبة الشحنة , بينما الذرات التي تكسب الكترونات تصبح سالبة الشحنة . والشحنة الكهربائية مفهوم اساسي لا يمكن تعريفه بدلالة كميات فيزيائية اخرى , ويكون مقدار الشحنة الكهربائية مكمما Quantized (اي يعادل عدد صحيح من شحنة الإلكترون) . وصنفت المواد في الطبيعة , وفقا لوجود الكترونات حرة الحركة في المدارات الأخيرة لهذه المواد , الى ثلاثة اصناف هي المواد الموصلة Conductors كالمواد المعدنية , والمواد العازلة Insulators مثل المواد البلاستيكية والخشب ... , والمواد شبه الموصلة semi-conductors.

في عام 1785 استطاع العالم الفرنسى شارلس كولوم بالتجربة العملية ان يستنتج علاقة رياضية تعطي القوة الكهربائية بين الشحنات النقطية point charges المنفصلة عن بعض بمسافة معينة , وعرفت فيما بعد بقانون كولوم والذي ينص على ان مقدار القوة المتبادلة بين شحنتين كهربيتين

تتناسب طرديا مع حاصل ضرب هاتين الشحنتين وعكسيا مع مربع البعد بينهما , وتكون على إمتداد الخط الواصل بين الشحنتين. حيث ان القوة المؤثرة من الشحنة الأولى على الشحنة الثانية , ويرمز لها F_{12} , وهي كمية متجهة . اما الصيغة الرياضية الإتجاهية لقانون كولوم فهي كالتالي:

$$F_{12} = \hat{r} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \quad (2.1)$$

حيث Q_1, Q_2 كمية الشحنة الأولى والثانية كما في الشكل (2.1) , $\hat{r}$ = وحدة متجه من الشحنة الأولى نحو الشحنة الثانية , r_{12} = المسافة من الشحنة الأولى الى الشحنة الثانية ϵ_0 .
 سماحية الهواء (الفراغ) ومقدارها 8.85×10^{-12} ووحدتها $\text{Nm}^2/\text{Coul}^2$. وعند تطبيق القانون يجب الإنتباه الى اشارة الشحنة , حيث نستخدم (+) للشحنة الموجبة و (-) للشحنة السالبة (كما سيرد شرحه في المثال التالي) , كما نستخدم وحدات النظام العالمي SI وهي نيوتن (N) للقوة , كولوم (C) للشحنة , المتر (m) للمسافة . وعند حل المسائل نعتبر المقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ لتسهيل العمليات الحسابية: وفقا لقانون كولوم تكون القوة الكهربائية بين الشحنتين متبادلة (اي متساوية مقدارا ومتعاكسة اتجاها) اي ان: $F_{12} = -F_{21}$



شكل (2.1) القوة المتبادلة بين شحنتين كهربيتين

مثال (2.1):

وضعت شحنة نقطية سالبة قدرها $1\mu\text{C}$ عند نقطة الأصل , بينما وضعت شحنة نقطية سالبة $100\mu\text{C}$ قدرها اخرى في الهواء على محور السينات الموجب وعلى بعد 500 mm من نقطة الأصل , جد مقدار واتجاه القوة المؤثرة على الشحنة الثانية؟

الحل:

نستخدم قانون كولوم:

$$F_{12} = \hat{x} \frac{(-10^{-6})(-10^{-4})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(500 \times 10^{-3})^2}$$

$$= 3.6 \hat{x} \text{ N}$$

ملاحظة: بما ان القوة متبادلة بين الشحنتين فإن الشحنة الثانية تؤثر على الشحنة الأولى بقوة $-3.6 \times 10^{-15} \text{ N}$, اي في اتجاه محور السينات السالب .

مثال (2.2) :

وضعت شحنتان لهما نفس الإشارة ومقدار كل منهما 1 C في الهواء , اذا كان البعد بينهما 1 mm جد مقدار قوة التنافر بين الشحنتين ؟

الحل:

نستخدم قانون كولوم

$$F = \frac{(1)(1)}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(10^{-3})^2} = 9 \times 10^{15} \text{ N}$$

ملاحظة : احسب الكتلة التي يمكن لهذه القوة الكهربائية ان ترفعها ضد جاذبية الأرض ؟

(2.2) شدة المجال الكهربائي: Electric Field Intensity

اذا وضعت شحنة نقطية موجبة قدرها Q_1 عند نقطة الأصل لنظام احداثي قطبي (r, θ) ثم وضعت شحنة اخرى موجبة صغيرة قدرها Q_2 في الفراغ المحيط بالشحنة الأولى , فان الشحنة الثانية تتأثر بقوة كهربائية بسبب وجودها في هذا المحيط وتزداد هذه القوة مع اقتراب الشحنة الثانية من الأولى . ويكون اتجاه قوة التنافر بين الشحنتين في اتجاه الشعاع المنطلق من الشحنة الأولى الى الخارج. وعليه نقول ان للشحنة الأولى مجالا يحيط بها, اي ان المجال Field هو المنطقة المحيطة بالشحنة والتي تظهر فيها الآثار الكهربائية . تسمى الشحنة الصغيرة Q_2 بالشحنة الاختبارية وتكون دائما موجبة . اما القوة الناتجة من الشحنة الأولى مقسومة على الشحنة الاختبارية تسمى شدة المجال الكهربائي للشحنة الأولى , ويرمز له E , ورياضيا يمكن التعبير عن ذلك كالتالي:

$$E = F_{12}/Q_2 = \hat{r} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.2)$$

حيث استخدمت معادلة (2.1) للتعويض بدل القوة F_{12} . والمسافة بين الشحنتين r (الشكل 2.2) . تكون وحدة شدة المجال الكهربائي في النظام العالمي للوحدات SI نيوتن/كولوم (N/C) . ويجب اعتبار مقدار الشحنة الاختبارية صغير جدا او متناهي الصغر وذلك حتى لا يكون لهذه الشحنة اي مجال كهربائي يسبب تشويشا Disturb على المجال الكهربائي للشحنة المطلوب ايجاد مجالها الكهربائي عند موضع الشحنة الاختبارية.

وررياضيا يمكن التعبير عن شدة المجال الكهربائي لشحنة ما كالتالي

$$E = \lim_{Q_2 \rightarrow 0} (F_{12}/Q_2)$$

ملاحظة: حيث ان شحنة الإلكترون اصغر شحنة موجودة في الذرة وهي محددة finite , , لذلك لا يمكن قياس شدة المجال الكهربى بدقة غير محددة unlimited accuracy ويكون هذا مهما في حالة القياسات الذرية ولكنه لا يعتبر مهما على المستوى العياني macroscopic , اي في المسائل العملية , وعليه نستخدم معادلة (2.2) لحساب شدة المجال الكهربى.

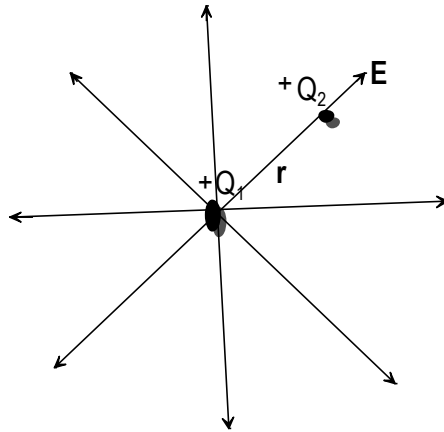
مثال (2.2):

شحنة نقطية ($-10nC$) موضوعة عند نقطة الأصل في الهواء , احسب شدة المجال الكهربى الناتج عن هذه الشحنة عند نقطة على محور السينات الموجب وتبعد مسافة 3m عن نقطة الأصل ؟

الحل:

نستخدم معادلة (2.2) :

$$E = \hat{x} \frac{(-10) \times 10^{-9}}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12})(3^2)} = -10\hat{x} \text{ N/C}$$

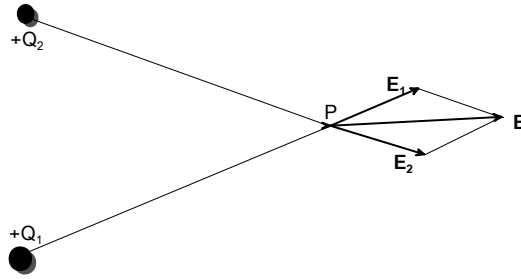


شكل (2.2) : اتجاه المجال الكهربى حول شحنة ما.

(2.3) قاعدة تركيب المجالات الكهربائية. Superposition Principle

بما ان شدة المجال الكهربائي لشحنة نقطية هو دالة خطية لمقدار تلك الشحنة وهو كمية متجهة , لذلك يمكن ايجاد المجال الكلي لعدد من الشحنات الكهربائية عند نقطة ما بالإعتماد على مبدء التركيب superposition principle والذي ينص كما يلي: شدة المجال الكهربائي الكلي او المحصل عند نقطة ما يساوي المجموع الإتجاهي لشدة المجالات الناتجة عن كل شحنة كهربائية عند تلك النقطة. بمعنى لو فرضنا ان شدة المجال الناتج عن شحنات كهربائية Q_1 , Q_2 هي E_1 , E_2 عند النقطة P (كما في الشكل 2.3) , فان شدة المجال الكلي (المحصل) عند تلك النقطة يكون:

$$E_T = E_1 + E_2$$



شكل (2.3) المجال المحصل لمجالين من شحنتين كهربائيتين.

مثال (2.3)

وضعت شحنة نقطية موجبة Q_1 وقدرها $+1nC$ عند نقطة الأصل , كما وضعت شحنة نقطية Q_2 قدرها $-2nC$ عند النقطة $(0,1)$ على بعد $1m$ من نقطة الأصل , (كما في الشكل 2.4) . جد شدة المجال الكهربائي المحصل عند النقطة $p(2,0)$ وعلى بعد $2m$ من نقطة الأصل ؟.

الحل:

شدة المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة Q_1 عند p هو

$$E_1 = \hat{x} \frac{10^{-9}}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12})(2^2)} = 2.25\hat{x} \text{ N/C}$$

مقدار شدة المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة Q_2 عند النقطة p هو

$$E_2 = \frac{-2 \times 10^{-9}}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12})(2.24^2)} = -3.59 \text{ N/C}$$

اما متجه شدة المجال الكهربائي E_2 تعطى كالتالي:

$$E_2 = -\hat{x} 3.59 \cos \alpha + \hat{y} 3.59 \sin \alpha$$

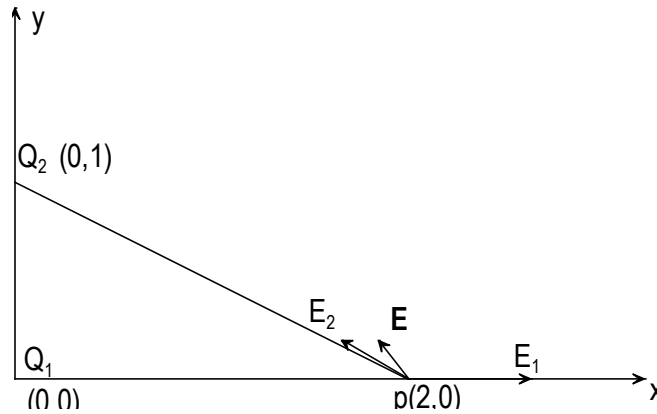
$$= -\hat{x} 3.59 \left(\frac{2}{2.24} \right) + \hat{y} 3.59 \left(\frac{1}{2.24} \right) = -\hat{x} 3.2 + \hat{y} 1.6 \text{ N/C}$$

تكون شدة المجال الكهربائي المحصل عند النقطة p المجمع الإتجاهي $E_1 + E_2$, او

$$E = \hat{x}(2.25 - 3.2) + \hat{y} 1.6 = -0.95\hat{x} + 1.6\hat{y}$$

اما مقدار شدة المجال المحصل $|E|$ هي $|E| = \sqrt{(1.6)^2 + (-0.95)^2} = 1.86 \text{ N/C}$

اما اتجاه هذا المجال هو : $\tan^{-1} (1.6/-0.95) = 120.7^\circ$



شكل (2.4): شدة المجال الكلي الناتج عن مجالين كهربائيين من شحنتين نقطيتين.

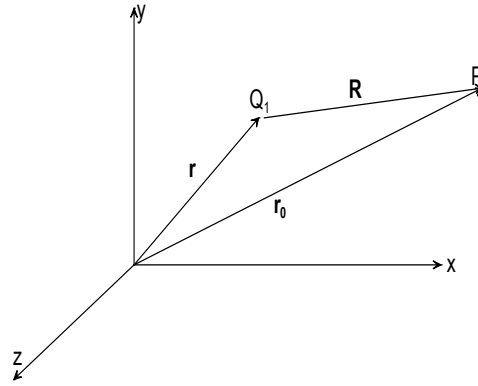
لحساب شدة المجال الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية ما عند نقطة في الفراغ , نعتبر ما يلي :
نفرض ان متجه الموقع للشحنة النقطية $\vec{r}$, حيث $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, وان متجه الموقع
للنقطة P التي نجد عندها المجال الكهربائي هو $\vec{r}_0$, حيث

$\vec{R} = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$, لنفرض ان متجه موقع هذه النقطة بالنسبة للشحنة هو $\vec{R}$
حيث $\vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{r}$ (كما في الشكل (2.5)). وهنا تصبح معادلة (2.2) على الصورة
التالية:

$$E = \hat{R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.3)$$

حيث:

$$\hat{R} = \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$



شكل (2.5) شدة المجال الكهربائي لشحنة نقطية في الفراغ

مثال (2.4):

حل المثال السابق (2.3) باستخدام متجه الموقع للشحنات الكهربائية والنقطة في الفراغ (باستخدام الإحداثيات الكارتيزية) ؟.

الحل:

المجال الناتج عن الشحنة الأولى Q_1

$$\vec{r}_0 = 2\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} ,$$

$$\vec{r}_1 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = 2\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$\hat{R}_1 = \frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|} = \hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$E_1 = \frac{(+1 \times 10^{-9})}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}) \times 2^2} (\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z})$$

$$\mathbf{E}_1 = 2.25\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

المجال الناتج عن الشحنة الثانية Q_2 :

$$\vec{r}_2 = 0\hat{x} + 1\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$\vec{R}_2 = \vec{r}_0 - \vec{r}_2 = 2\hat{x} - 1\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$\hat{R}_2 = \frac{\vec{R}_2}{|\vec{R}_2|} = (2\hat{x} - 1\hat{y} + 0\hat{z})/\sqrt{5}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{(-2 \times 10^{-9})}{(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}) \times 5\sqrt{5}} (2\hat{x} - 1\hat{y} + 0\hat{z})$$

$$\mathbf{E}_2 = -3.2\hat{x} + 1.61\hat{y} + 0\hat{z}$$

وعليه يكون المجال الكهربائي المحصل :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -0.95\hat{x} + 1.61\hat{y} + 0\hat{z}$$

(2.4) الجهد الكهربائي القياسي (العددي) : Electric Scalar Potential

نفرض ان مجالا كهربيا في اتجاه محور السينات الموجب شدته منتظمة $\mathbf{E}$, ولنفرض ان شحنة موجبة اختبارية q تم تحريكها من النقطة x_2 الى النقطة x_1 باتجاه معاكس للمجال الكهربائي (كما في الشكل (2.6) , وحيث ان القوة المؤثرة على هذه الشحنة تكون باتجاه المجال لذلك نحتاج الى بذل شغل لتحريك الشحنة ضد هذه القوة . ويكون مقدار هذا الشغل لكل وحدة شحنة مساويا لحاصل ضرب القوة لكل وحدة شحنة (شدة المجال الكهربائي) في المسافة التي تحركتها هذه الشحنة . لنفرض ان الشغل لكل وحدة شحنة متحركة هو w/q ويعطى كالتالي:

$$w/q = E (x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

تكون وحدات الطرف الأيسر في هذه المعادلة حسب النظام العالمي للوحدات هي $\text{Joule/Coul} (\text{JC}^-)$ ¹ . ويعرف الشغل (الطاقة) لكل وحدة شحنة واللازم لنقل الشحنة الإختبارية من النقطة x_2 الى النقطة x_1 في المجال الكهربائي بفرق الجهد الكهربائي بين هاتين النقطتين Electric Potential Difference (ΔV) . وتسمى وحدة فرق الجهد الكهربائي الفولت **Volt** , اي ان:

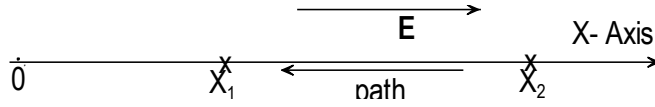
$$1 \text{ volt} = 1 \frac{\text{joule}}{\text{Coulomb}}$$

$$= 1 \text{ Newton.meter/Coulomb}$$

وبقسمة الطرفين على 1meter نجد ان

$$\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Volt}}{\text{meter}} = \text{Electric Field Intensity}$$

اي انه يمكن ان نعبر عن وحدة شدة المجال الكهربى بدلالة $\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$ او Vm^{-1}



شكل (2.6) مسار خطى في مجال كهربى.

مثال (2.5):

في الشكل (2.6) , اذا كانت شدة المجال الكهربى تساوى 10 V/m والبعد بينهما 100 mm, جد فرق الجهد الكهربى بين النقطتين ؟

الحل:

بإستخدام معادلة (2.6) نجد ان:

$$\Delta V = \left(\frac{10 \text{ volt}}{\text{meter}} \right) \times (100 \times 10^{-3} \text{ meter}) = 1 \text{ volt}$$

وهذا يعنى ان جهد النقطة x_1 اعلى من جهد النقطة x_2 بمقدار 1 فولت .

اما في حالة المجال الكهربى غير المنتظم (اى تتغير شدته من نقطة لأخرى في الفراغ) يمكن حساب فرق الجهد الكهربى بين نقطتين واقعتين في محيط شحنة موجبة Q كالتالى:

حيث ان المجال الكهربى للشحنة النقطية يكون شعاعيا (اتجاه نصف القطر الخارج من الشحنة) ويتناسب عكسيا مع مربع البعد عن هذه الشحنة , لذلك يكون الشغل لكل شحنة موجبة منقولة من النقطة r_2 الى النقطة r_1 عبر المسار الشعاعى (فرق الجهد الكهربى بين النقطتين) هو:

$$V_{21} = \int_{r_2}^{r_1} dV = - \int_{r_2}^{r_1} E dr$$

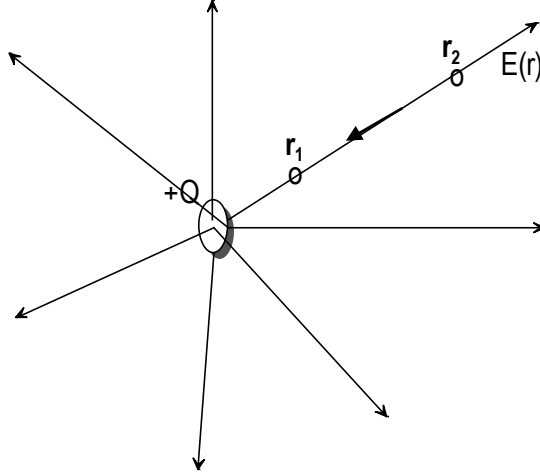
(2.7)

اما الإشارة السالبة في هذه المعادلة يعود الى ان اتجاه حركة الشحنة المنقولة يعاكس اتجاه المجال الكهربى. بدمج معادلتى (2.2) و (2.7) نحصل على:

$$V_{21} = V_1 - V_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.8)$$

حيث V_1 = الجهد الكهربائي عند النقطة r_1 , V_2 = الجهد الكهربائي عند النقطة r_2 .



شكل (2.7) : مسار خطي لنقل شحنة عبر مجال كهربائي غير منتظم .

يكون فرق الجهد بين النقطتين في المعادلة (2.8) **موجبا** لأنه يلزم بذل شغل لنقل الشحنة من النقطة (2) إلى النقطة (1) وعليه يكون الجهد الكهربائي عند (1) أعلى من الجهد عند (2) . أما إذا نقلت الشحنة من النقطة (1) إلى النقطة (2) , أي في اتجاه المجال والذي يقوم بالشغل في هذه الحالة , وعليه يكون فرق الجهد بين النقطتين **سالبا** ويكون جهد النقطة (1) أقل من جهد النقطة (2) .

إذا كانت النقطة r_2 عند المالانهاية : $r_2 \leftarrow \infty$, يمكن اعتبار أن شدة المجال الكهربائي تؤول إلى الصفر وعليه

يكون الجهد الكهربائي عند النقطة (2) يساوي صفرا , وتصبح معادلة (2.8) على النحو التالي:

$$V_{21} = V_1 - 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (\text{Volt})$$

ويسمى هذا الجهد الكهربائي **بالجهد المطلق** Absolute Potential , ويعرف بأنه الشغل لكل شحنة واللازم لنقل الشحنة الإختبارية الموجبة من المالانهاية إلى نقطة متجه الموقع لها r_1 وتقع في المجال الكهربائي .

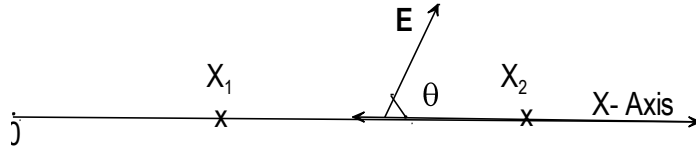
(2.5) الجهد الكهربائي القياسي بدلالة التكامل الخطي للمجال الكهربائي:

The Electric Scalar Potential as A Line Integral of Electric Field

بالرجوع الى الشكل (2.6) في البند السابق وجدنا العلاقة بين فرق الجهد بين نقطتين مع شدة المجال الكهربائي في حالة نقل شحنة موجبة إختبارية من النقطة (1) الى النقطة (2) عبر مسار موازي لإتجاه المجال الكهربائي (كما في الشكل 2.6). اما اذا كان مسار النقل للشحنة الإختبارية يصنع θ مع اتجاه المجال الكهربائي فيكون فرق الجهد بين النقطتين مساويا لحاصل ضرب طول المسار و مركبة المجال الكهربائي في اتجاه هذا المسار (كما في الشكل 2.8) , اي ان:

$$V_{21} = (x_2 - x_1)E \cos \theta \quad (2.9)$$

من هذه المعادلة نجد ان تحرك الشحنة الإختبارية في اتجاه عمودي على اتجاه المجال الكهربائي ($\theta = 90^\circ$) يجعل $V_{21} = 0$, وعليه تكون $V_1 = V_2$ ويسمى المسار في هذه الحالة خط تساوي الجهد equipotential line , ويعرف خط تساوي الجهد بأنه الخط الواصل بين جميع النقاط ذات الجهد الكهربائي المتساوي .



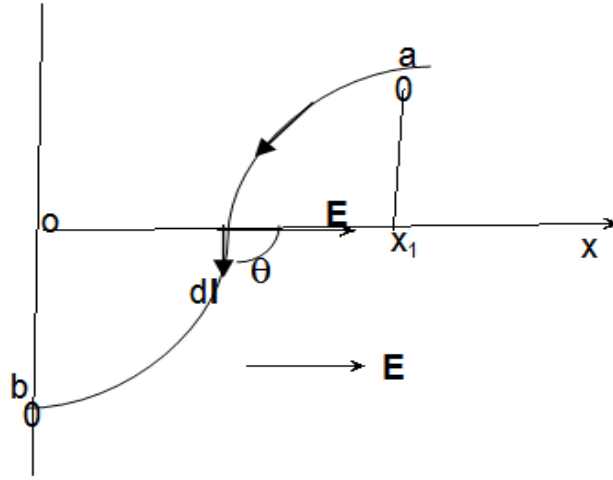
شكل (2.8): مسار خطي لشحنة إختبارية في مجال كهربائي منتظم

لنفرض ان مسار الشحنة الإختبارية بين نقطتين على صورة منحنى, ولإيجاد فرق الجهد الكهربائي بين هاتين النقطتين نعتبر عنصر طول على المسار $d\ell$ (كما في الشكل 2.9) , ويكون فرق الجهد الكهربائي بين طرفي هذا العنصر بإستخدام معادلة (2.9) كالتالي:

$$dV = -E \cos \theta \, d\ell = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.10)$$

بتكامل هذه المعادلة بين نقطتين a, b على المسار نحصل على فرق الجهد الكهربائي بينهما , أي

$$V_{ab} = \int_a^b dV = V_b - V_a = - \int_a^b E \cos \theta \, d\ell = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.11)$$



شكل (2.9) مسار منحنى للشحنة الإختبارية في مجال كهربى.

مثال (2.6):

إذا كانت شدة المجال الكهربى منتظمة $E = 10V/m$ وفى اتجاه محور السينات الموجب (شكل 2.9) , وكانت $x_1 = 1m$, $x_2 = 0$, جد V_{ab} ؟

الحل:

بإستخدام معادلة (2.11) ومن الشكل حيث: $dx = d\ell \cos \theta$, نجد ان

$$V_{ab} = - \int_{x_1}^0 E dx = Ex_1 = (10)(1) = 10 V$$

فى حالة حركة الشحنة الإختبارية على مسار منحنى وفى مجال كهربى غير منتظم (كما فى الشكل 2.10) الناتج عن شحنة نقطية $+Q$, لإيجاد فرق الجهد بين نقطتين على هذا المسار نستخدم معادلة (2.11) ونعوض بالتالى: $dr = \cos \theta d\ell$, حيث dr عنصر متناهى للمسافة الشعاعية , وعليه فإن:

$$V_{ab} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.12)$$

مثال (2.7) :

فى الشكل (2.10) , إذا كانت $Q = 223 \text{ pC}$, $a = 400 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$. جد الجهد الكهربى المطلق عند النقاط a , b وفرق الجهد الكهربى V_{ab} ؟

الحل:

$$V_a = \frac{223 \times 10^{-12}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 400 \times 10^{-3}} \approx 5 \text{ Volt}$$

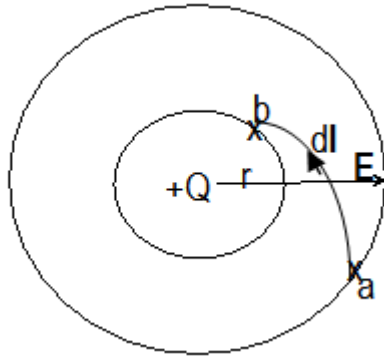
$$V_b = \frac{223 \times 10^{-12}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-3}} \approx 20 \text{ Volt}$$

$$V_{ab} = V_b - V_a = 15 \text{ Volt}$$

ملاحظة: يكون الشغل اللازم لنقل الشحنة الإختبارية على خط (سطح) تساوي الجهد يساوي صفرا وذلك لأن $\theta = 0$, ويكون الشغل اعظمي عندما ننقل هذه الشحنة في اتجاه عمودي على سطح تساوي الجهد (بإتجاه المجال الكهربائي). كما ان هذا الشغل يساوي صفرا حول **المسار المغلق closed path** لأن نقطة البداية هي نفس نقطة النهاية , أي ان التكامل الخطي للمجال الكهربائي حول اي مسار مغلق يساوي صفرا , هذا يعطي رياضيا ما يلي:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.13)$$

ويسمى المجال الكهربائي الذي يحقق معادلة (2.13) مجالا محافظا *conservative field*. وفي حالة المجال المحافظ لا يعتمد فرق الجهد الكهربائي بين اي نقطتين في هذا المجال على نوع المسار الواصل بينهما.



شكل (2.10) مسار منحنى لشحنة إختبارية تتحرك في مجال كهربائي غير منتظم .

(2.6) الجهد الكهربائي لتوزيع شحني: Electric Potential of Charge Distribution

نفرض ان شحنة كهربائية Q موزعة بشكل متصل على جسم ما حجمه v , لو اعتبرنا عنصر حجمي صغير Δv ذا شحنة ΔQ , تكون كثافة الشحنة الحجمية ρ_v معرفة كالتالي: $\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$, وتكون وحداتها $(C \cdot m^{-3})$. اما اذا كانت الشحنة Q موزعة بشكل متصل على سطح جسم ما مساحته s , نعتبر عنصر مساحة صغير Δs وتكون كثافة الشحنة

السطحية ρ_s معرفة كالتالي: $\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s}$, ووحداتها $(C m^{-2})$. اما في حالة توزيع هذه الشحنة بشكل متصل على جسم ما طوليا فإننا نعتبر عنصرا طوليا صغيرا $\Delta \ell$, ذا شحنة ΔQ وتكون كثافة الشحنة الطولية ρ_ℓ , حيث: $\rho_\ell = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \ell}$, ووحدتها $(C m^{-1})$.

لإيجاد الجهد الكهربائي القياسي عند نقطة معينة بوجود التوزيع الشحني نستخدم قاعدة التركيب الخطي والذي ينص على ان الجهد الكهربائي الكلي يساوي الجمع الجبري للجهود الكهربائية الناتجة عن العناصر الحجمية (السطحية او الطولية) للتوزيع الشحني عند تلك النقطة . ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$V_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_v}{r} dv ,$$

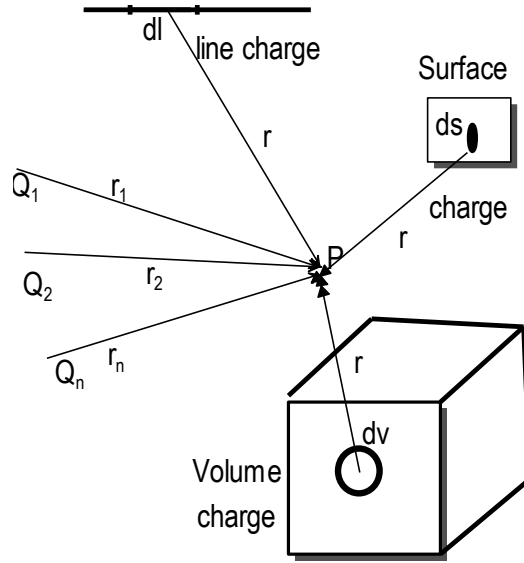
$$V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho_s}{r} ds ,$$

$$V_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_\ell}{r} dl \quad (2.14)$$

حيث r بعد العنصر عن النقطة المطلوب إيجاد الجهد الكهربائي عندها .

وبشكل عام , اذا كان لدينا مجموعة من الشحنات الكهربائية النقطية (كما في شكل 2.11) وتوزيع شحني متصل على حجم , سطح , او طول معين ونريد إيجاد الجهد الكهربائي القياسي الكلي عند نقطة ما مثل p , فإن قاعدة تركيب الجهود الكهربائية تعطي:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_1^n \frac{Q_n}{r_n} + \int \frac{\rho_\ell}{r} dl + \iint \frac{\rho_s}{r} ds + \iiint \frac{\rho_v}{r} dv \right) \quad (2.15)$$



شكل (2.11): الجهد الكلي لعدة شحنات نقطية وتوزيعات شحنية مختلفة

مثال (2.8):

جد الجهد الكهربائي الكلي عند مركز مربع طول ضلعه 1 m والناتج عن شحنتين نقطيتين :
 $Q_1 = +1\text{pC}$, $Q_2 = -10\text{pC}$ موضوعتين عند رأسي المربع في الطرف الأيمن (كما في الشكل (2.12)) , وعن توزيع خطي للشحنات منتظم على طول ضلع المربع الأيسر , حيث كثافة الشحنة الخطية $\rho = +10\text{pC}^{-1}$ ؟

الحل:

الجهد من الشحنات النقطية:

$$V_p = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \left(\frac{10^{-12}}{0.707} - \frac{10 \times 10^{-12}}{0.707} \right)$$

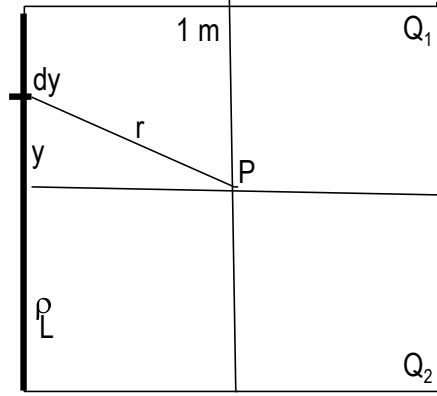
$$= -0.115\text{ V}$$

يكون الجهد الناتج عن التوزيع الشحني الخطي كالتالي:

$$V_l = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \int_{y=-0.5}^{y=0.5} \frac{10^{-11}}{\sqrt{(0.5)^2 + y^2}} dy = 0.158\text{ V}$$

الجهد الكهربائي الكلي عند المركز :

$$V = V_p + V_l = +43\text{ volt}$$



شكل (2.12): الجهد الكهربائي لشحنات نقطية وتوزيع شحنات خطي منتظم

(2.7) العلاقة الرياضية بين شدة المجال الكهربائي والجهد الكهربائي العددي:

يعرف التغير في قيمة أي دالة عددية لكل وحدة مسافة في اتجاه معين بانحدار *Gradient (grad)* تلك الدالة ويرمز له بالمتجه (∇) . لنفرض أن دالة الجهد الكهربائي V تتغير بمقدار ΔV خلال عنصر طولي صغير $\Delta \ell$, يكون مقدار انحدار (تدرج) هذه الدالة كما يلي:

$$|\text{grad}V| = |\nabla V| = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta \ell} = \frac{dV}{d\ell} \quad (2.16)$$

لإيجاد العلاقة بين شدة المجال الكهربائي وانحدار دالة الجهد الكهربائي: نفرض أن خطوط تساوي الجهد موزعة كما في الشكل (2.13) في المستوى xy ويكون اتجاه المجال الكهربائي متعامداً مع خط تساوي الجهد عند النقطة p وفي الاتجاه التناقصي لدالة الجهد الكهربائي. باستخدام مبادئ المشتقات الجزئية، وحيث أن دالة الجهد هي دالة في (x, y) نجد أن:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \quad (2.17)$$

باستخدام معادلة (2.10)، مع اعتبار أن متجه عنصر الطول بالإحداثيات الكارتيزية: $d\ell = \hat{x} dx + \hat{y} dy$ ، وأن متجه شدة المجال الكهربائي: $\mathbf{E} = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y$ ، نجد أن الضرب العددي في المعادلة يعطي:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = -E_x dx - E_y dy \quad (2.18)$$

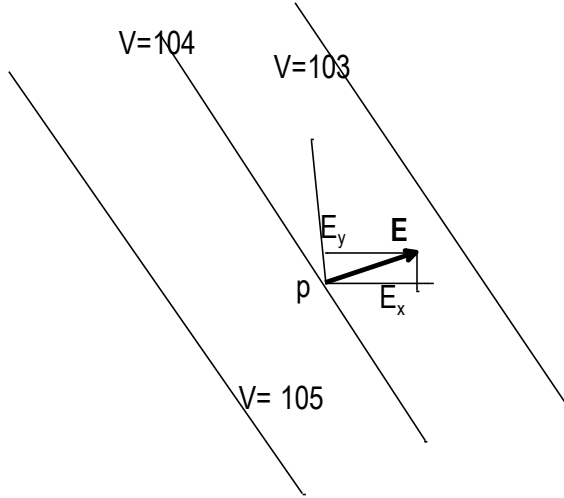
بمقارنة الحدود المتناظرة في طرفي هذه المعادلة، نجد أن:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -E_x$$

وبعبارة أخرى فإن

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y = -\left(\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.20)$$



شكل (2.13) خطوط تساوي الجهد الكهربائي ومركبات شدة المجال الكهربائي.

مثال (2.9):

إذا كان الجهد الكهربائي ينقص في الاتجاه السيني (الشكل 2.13) بمعدل $2 V m^{-1}$ وينقص في الاتجاه الصادي بمعدل $1 V m^{-1}$, جد شدة المجال الكهربائي؟

الحل:

$$\text{grad } V = -2\hat{x} - 1\hat{y}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = 2\hat{x} + 1\hat{y} = 2.24 V m^{-1}, \angle 26.6^\circ$$

(2.9) ثنائي القطب الكهربائي Electric Dipole

ثنائي القطب الكهربائي عبارة عن شحنتين كهربائيتين متساويتين مقداراً ومختلفة في الإشارة وتفصلهما مسافة صغيرة إلى درجة ما بحيث يندمج المجال الكهربائي بينهما (كما في الشكل 2.14). إذا كان مقدار الشحنة Q والمسافة بينهما l فإن الكمية الفيزيائية Ql تسمى **عزم ثنائي القطب الكهربائي electric dipole moment**. وعزم ثنائي القطب كمية متجهة من موقع الشحنة السالبة نحو موقع الشحنة الموجبة.

نجد الجهد الكهربى عند نقطة مثل P (كما فى الشكل 2.14) كالتالى:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad : \text{ يكون الجهد الكهربى للشحنة الموجبة كالتالى :}$$

$$V_2 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad : \text{ بينما يكون الجهد الكهربى للشحنة السالبة كالتالى :}$$

وعليه يكون الجهد الكهربى الكلى عند النقطة P مساويا للمجموع الجبرى للجهدين الناتجين عن هاتين الشحنتين :

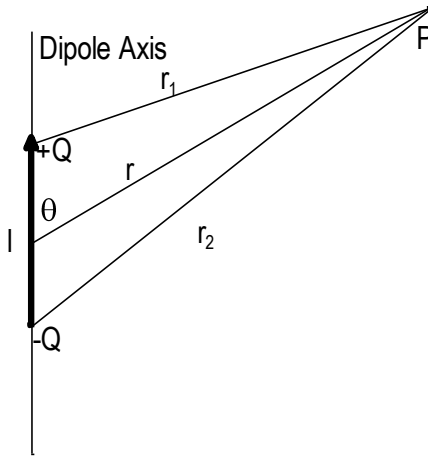
$$V_P = V_1 + V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.21)$$

إذا كان بعد النقطة P عن مركز ثنائى القطب كبيرا جدا بالنسبة للمسافة بين الشحنتين ($r \gg l$) فإنه يمكن اعتبار الخطوط الشعاعية r_1, r_2, r متوازية تقريبا" , وعليه يمكن استخدام التقريب التالى :

$$r_1 \approx r - \left(\frac{l}{2}\right) \cos \theta \quad , \quad r_2 \approx r + \left(\frac{l}{2}\right) \cos \theta$$

بالتعويض فى معادلة (2.21) نجد ان :

$$V = \frac{Ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.22)$$

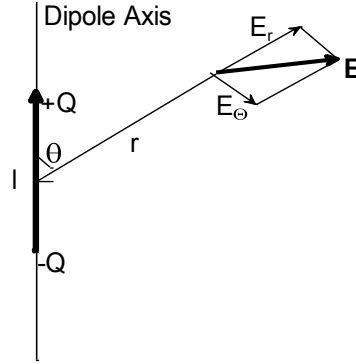


شكل (2.14) الجهد الكهربى لثنائى القطب الكهربى.

اما لإيجاد شدة المجال الكهربائي عند نقطة ما , نستخدم انحدار دالة الجهد الكهربائي عند تلك النقطة كالتالي:

$$\mathbf{E} = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \hat{r} \frac{Q\ell \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} + \hat{\theta} \frac{Q\ell \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.23)$$

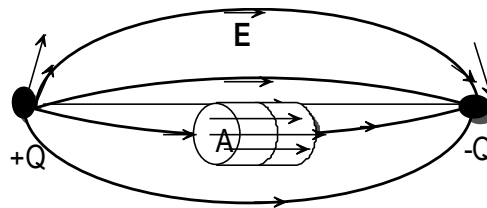
اي ان للمجال الكهربائي مركبتين : احدهما شعاعية باتجاه $\hat{r}$ واخرى زاوية باتجاه $\hat{\theta}$ (كما في شكل (2.15)



شكل (2.15) المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي

(2.11) الفيض الكهربائي Electric Flux

في عام 1855 استخدم فارادي فكرة خطوط القوى الكهربائية *lines of force* لتمثيل المجال الكهربائي الناتج عن توزيع شحني , فإذا فرضنا وجود شحنة نقطية موجبة بالقرب من شحنة نقطية سالبة فإن يمكن رسم عدد لانتهائي من الخطوط تبدأ من موقع الشحنة الموجبة وتنتهي بموقع الشحنة السالبة وتسمى هذه الخطوط الوهمية بخطوط القوى الكهربائية , ويمثل خط القوة مسار الشحنة الإختبارية عند وضعها في المجال الكهربائي بين الشحنتين , ويكون اتجاه المماس لخط القوة عند نقطة معينة ممثلاً لإتجاه المجال الكهربائي المحصل, وتزداد كثافة هذه الخطوط بالقرب من الشحنتين وتنقص الكثافة مع الإبتعاد عن هذه الشحنتين. (كما في الشكل (2.16))



شكل (2.16) خطوط القوى الكهربائية بين شحنتين نقطيتين .

لنفرض ان اسطوانة ذات مقطع دائري مساحته A موضوعة في المجال الكهربائي (كما في الشكل 2.16) حيث تخترق خطوط القوى الكهربائي مقطع هذه الاسطوانة عموديا , ولنفرض ان العدد الكلي لخطوط القوى المخترقة لهذا المقطع ψ ويسمى هذا العدد **الفيض الكهربائي Electric Flux** . بينما نسمي كمية الفيض الكهربائي لكل وحدة مساحة (ψ / A) **كثافة الفيض flux density** (D) , وهذه الكمية تتناسب مع شدة المجال الكهربائي E , اي ان: $\psi = D A$.

وبصورة عامة , لنفرض ان خطوط القوى الكهربائية تخترق سطحا ما بشكل مائل فيمكن ان نجد الفيض الكهربائي بإعتبار عنصر مساحة صغير ds واجراء التكامل السطحي لكثافة الفيض الكهربائي كالتالي:

$$\psi = \iint D \cdot \hat{n} ds = \iint D_n ds \quad (2.24)$$

حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي على السطح D_n , المركبة العمودية لكثافة الفيض الكهربائي.

(2.12) قانون جاوس وتطبيقاته Gauss' Law and its Applications

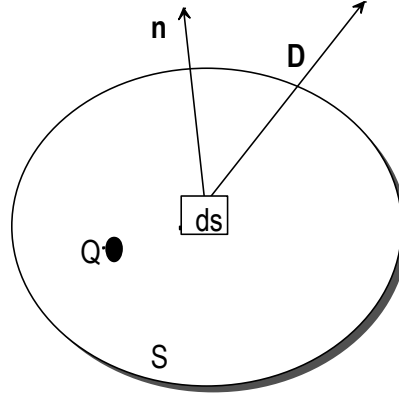
في عام 1813 وضع كارل جاوس Karl Gauss قانونا عرف باسمه ويعتبر الأساس للنظرية الإلكتروستاتيكية , وينص هذا القانون على ما يلي:

الفيض الكهربائي خلال أي سطح مغلق يساوي صافي الشحنات الكهربائية التي يحيط بها هذا السطح.
اما الصيغة الرياضية لهذا القانون هي:

$$\psi = \oiint D \cdot \hat{n} ds = Q_{enclosed} \quad (2.25)$$

توضح معادلة (2.25) ان وحدات الفيض الكهربائي الكلي هي كولوم (C) , اما وحدة كثافة الفيض الكهربائي $C \cdot m^{-2}$.

لنفرض ان سطحا مغلقا مثل S (كما في الشكل 2.17) يحتوي على عدة شحنات كهربائية نقطية (موجبة او سالبة) , عندها تكون $Q_{enclosed}$ مساوية للمجموع الجبري لهذه الشحنات الكهربائية المحتواة داخل هذا السطح.



شكل (2.17) الفيض الكهربائي خلال سطح ما مغلق يحيط بشحنة كهربائية نقطية.

اما في حالة توزيع شحني مقداره Q على حجم V والمغلف بسطح مغلق مقداره S , فإذا كانت كثافة الشحنة الحجمية للتوزيع ρ فإن الصورة الرياضية التكاملية لقانون جاوس تصبح كالتالي:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \rho dv = Q \quad (2.26)$$

ويستخدم قانون جاوس لإيجاد كثافة الفيض الكهربائي (التي تتناسب مع شدة المجال الكهربائي كما سيوضح في المثال التالي) في حالة التوزيعات الشحنية الحجمية المتمثلة (كرة , اسطوانة.....)

اما الصورة التفاضلية لقانون جاوس نجدها بإستخدام نظرية التباعد كالتالي:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

وعليه فإن معادلة (2.26) تعطي ما يلي

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.27)$$

وهذه المعادلة (2.27) هي من إحدى معادلات ماكسويل الأربعة والتي سيرد شرحها في الفصول اللاحقة في هذا الكتاب .

مثال (2.9):

باستخدام قانون جاوس جد كثافة الفيض الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية Q عند نقطة تبعد مسافة r عن الشحنة ؟

الحل:

نتصور ان سطحا كرويا مركزه موقع الشحنة ونصف قطره r (كما في شكل 2.18) ويسمى سطح جاوس , بحيث تخترق خطوط المجال (القوى) الكهربائية هذا السطح . وحيث ان اتجاه المجال

الكهربي شعاعيا فإن خطوط القوى الكهربائية تكون في اتجاه الشعاع الخارج من المركز (متعامدة مع السطح الكروي) ويكون مقدار D متساوي لجميع النقاط المتساوية البعد عن المركز , وعليه يصبح قانون جاوس على الصورة التالية :

$$\oiint D \hat{r} \cdot \hat{r} ds = D \oiint ds = Q$$

بما ان السطح كرويا فإن التكامل المغلق على هذا السطح يساوي مساحة سطح الكرة , اي $4\pi r^2$, اذن :

$$D(4\pi r^2) = Q$$

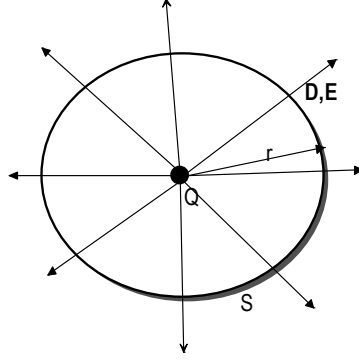
$$\mathbf{D} = \hat{r} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حيث شدة المجال الكهربي عند نقطة تبعد مسافة r عن شحنة نقطية Q موضوعة في الفراغ تعطى كالتالي (معادلة 2.2) :

$$\mathbf{E} = \hat{r} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

, فإنه يمكن إيجاد العلاقة بين كثافة الفيض وشدة المجال الكهربي في حالة الشحنة الموضوعة في الفراغ على النحو التالي:

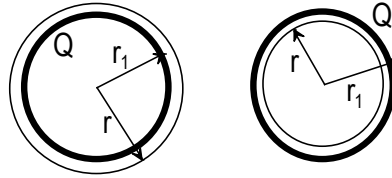
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.28)$$



شكل (2.18) : كثافة الفيض الكهربائي حول شحنة نقطية.

مثال (2.10):

تتوزع شحنة موجبة بانتظام على قشرة كروية رقيقة نصف قطرها r_1 , موضوعة في الهواء , جد باستخدام قانون جاوس شدة المجال الكهربائي والجهد الكهربائي داخل وخارج القشرة (الشكل 2.19) ؟



داخل القشرة خارج القشرة

شكل (2.19): المجال والجهد الكهربائي لقشرة كروية مشحونة .

الحل:

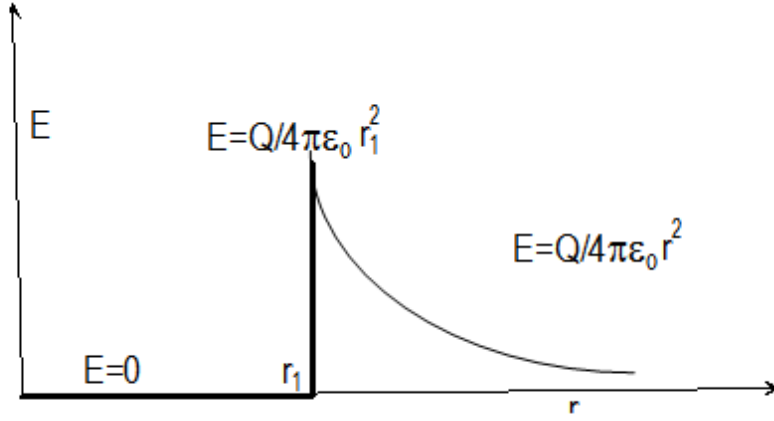
- داخل القشرة : نرسم سطح جاوس داخل القشرة بنصف قطر r : $r < r_1$, بما انه لا يوجد اي شحنة داخل هذا السطح , يصبح قانون جاوس كالتالي:

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, ds = 0$$

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = 0 \rightarrow E = 0$$

- خارج القشرة : نرسم سطح جاوس خارج القشرة بنصف قطر r : $r > r_1$, تكون كل الشحنة Q محاطة بهذا السطح وعليه يصبح قانون جاوس على النحو التالي:

$$\epsilon_0 \oint_s \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, ds = \epsilon_0 E (4\pi r^2) = Q \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



شكل (2.20): شدة المجال الكهربائي كدالة للمسافة عن مركز القشرة.

لإيجاد الجهد الكهربائي المطلق الناتج عن هذه القشرة نستخدم معادلة (2.7) على النحو التالي:

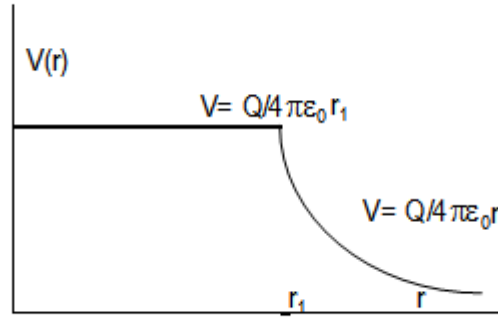
- خارج القشرة: $V(r) = - \int_{\infty}^r E \, dr$, حيث: $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$V(r) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- اما عند سطح القشرة , حيث $r = r_1$ نستخدم هذه النتيجة ونحصل على ان الجهد الكهربائي المطلق كما يلي

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

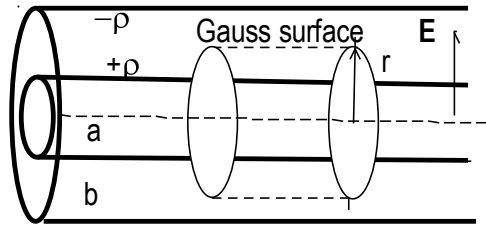
- داخل القشرة: بما ان شدة المجال الكهربائي داخل القشرة تساوي صفرا , لذلك لا يلزم بذل شغل لنقل الشحنة الإختبارية من سطح القشرة الى داخلها وعليه يكون الجهد الكهربائي المطلق عند اي نقطة داخل هذه القشرة يساوي الجهد الكهربائي المطلق عند سطح القشرة , اي ان الجهد الكهربائي المطلق في داخل الكرة يكون مقدار ثابت ويساوي $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$, (لاحظ الشكل 2.21).



شكل (2.21) الجهد الكهربائي المطلق داخل وخارج سطح قشرة كروية مشحونة.

مثال (2.11)

قشرتان اسطوانيتان معدنيتان ، ومتحدتان في المركز ، حيث نصف قطر الأسطوانة الداخلية a ونصف قطر الأسطوانة الخارجية b ، اذا كانت كثافة شحنة الطولية على الأسطوانة الداخلية ρ_ℓ بينما كثافة الشحنة الطولية على الأسطوانة الخارجية $-\rho_\ell$. استخدم قانون جاوس لإيجاد شدة المجال الكهربائي بين الأسطوانتين عند نقطة تبعد مسافة r عن المركز ، حيث $a < r < b$ ، ثم جد فرق الجهد الكهربائي بين القشرتين علما ان الوسط بين القشرتين هواء ؟



شكل (2.22) : شدة المجال الكهربائي وفرق الجهد لقشرتين متحدتين في المركز.

نفترض ان سطح جاوس المغلق على شكل اسطوانة دائرية قائمة ومتحدة المركز مع الإسطوانتين ونصف قطرها r ، حيث $a < r < b$ وطولها ℓ ، (كما في الشكل 2.22). ويتكون هذا السطح من المساحة الجانبية للإسطوانة ووجهي القاعدة الدائرية . تكون الشحنة المحاطة بهذا السطح المغلق تساوي $Q = \rho_\ell \ell$ (الشحنة الموجودة على للقشرة الداخلية). بما ان اتجاه $\mathbf{E}$ شعاعيا (في اتجاه عمودي على محور

الأسطوانة), لذلك تكون التكاملات السطحية على وجهي الأسطوانة تساوي صفرا, ولا يبقى الا التكامل على المساحة الجانبية للأسطوانة عند تطبيق قانون جاوس . ويكون مقدار كثافة الفيض الكهربائي متساوية لجميع النقاط ذات البعد المتساوي عن المحور. وحيث $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ فإن قانون جاوس يصبح كالتالي:

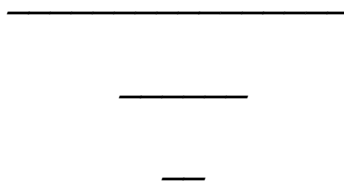
$$\epsilon_0 \oint E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} ds$$

وعليه تكون شدة المجال الكهربائي بين القشرتين وخارجهما على النحو التالي:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\hat{r} \rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} & , r > a \\ 0, & r < a \end{cases} .$$

نجد فرق الجهد الكهربائي بين القشرتين باستخدام معادلة (2.7) كالتالي:

$$V_{ba} = V_a - V_b = - \int_b^a E dr = - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$



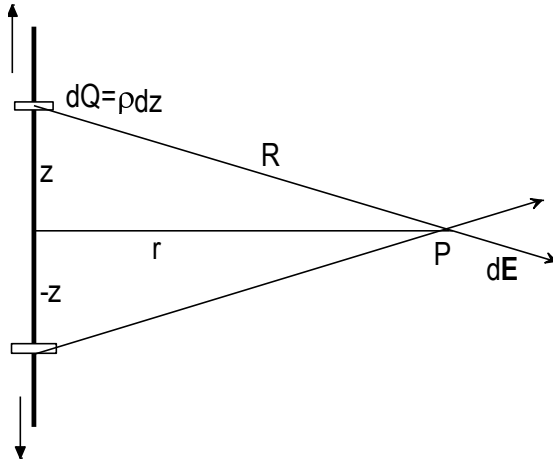
تمارين

(2.1) شحنتان نقطيتان $Q_1 = 50\mu C$, $Q_2 = 10\mu C$ موضوعتان عند $(-1, 1, -3)$, $(3, 1, 0)$ على الترتيب . جد القوة المؤثرة على الشحنة Q_1 ؟

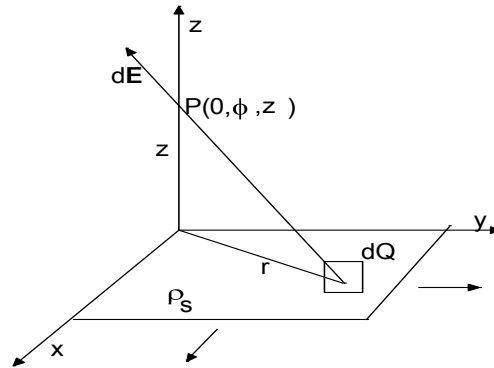
(2.2) جد القوة الكهربائية المؤثرة على شحنة نقطية $50 \mu C$ عند النقطة $(0,0,5)m$ والناتجة عن قرص دائري مشحون بانتظام بشحنة $500\pi \mu C$ ونصف قطره $r = 5 m$ موضوع في مستوى xy ؟

(2.2) جد شدة المجال الكهربائي عند النقطة $(0,0,5)$ الناتج عن الشحنة $Q_1 = 0.35 \mu C$ الموضوعه عند النقطة $(0,4,0)$ والشحنة $Q_2 = -0.55 \mu C$ الموضوعه عند $(3,0,0)$ ؟

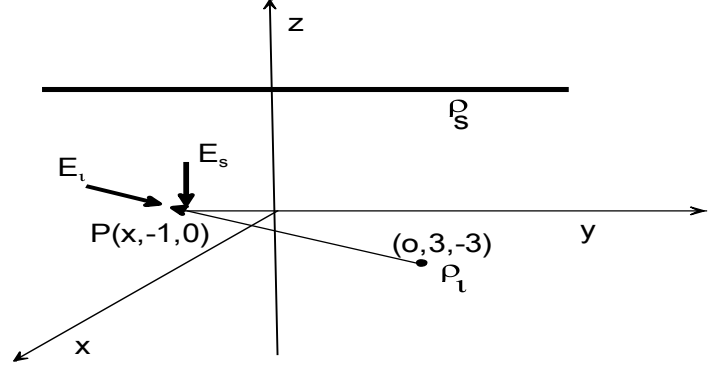
(2.3) وزعت شحنة بانتظام على سلك مستقيم لانهاضي الطول بكثافة طولية ρ_l (كما في الشكل ادناه) . جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة p الواقعة على بعد r عموديا من منتصف السلك ؟



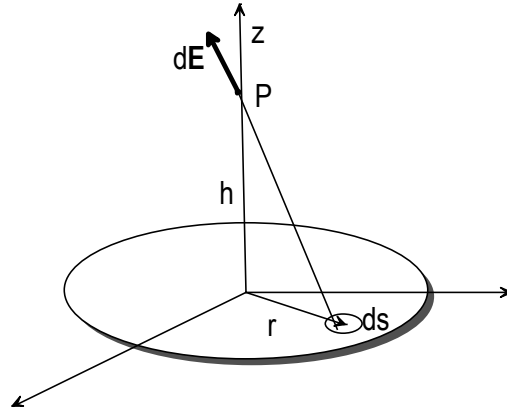
(2.4) وزعت شحنة كهربائية بانتظام على سطح مستوي لانهاضي موضوع في مستوى xy (كما في الشكل) بكثافة سطحية ρ_s , جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة على محور z ؟



(2.5) صفيحة منتظمة الشحنة $\rho_s = \frac{1}{(3\pi)} \text{ nC/m}^2$ موضوعة عند $z=5$, كما يوجد خط شحني منتظم عند $z=-3, y=3$ حيث كثافة الشحنة الطولية $\rho_\ell = \left(-\frac{25}{9}\right) \text{ nC/m}$. جد شدة المجال الكهربائي عند النقطة $(x,-1,0)$ ؟



(2.6) جد شدة المجال الكهربائي الناتج عن قرص مشحون بانتظام ρ_s عند نقطة على محور القرص وتبعد عن مركزه مسافة h اذا كان نصف قطره a ؟



(2.7) جد الشحنة الكلية الموزعة على حجم ما اذا كانت كثافة الشحنة الحجمية كالتالي:

$$\rho = \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4}$$

حيث $1 \leq r \leq 2$ ؟

(2.8) جد صافي الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق S والذي يحتوي على مجموعة الشحنات الكهربائية التالية:

$$Q_1 = +30 \text{ nC}, Q_2 = 150 \text{ nC}, Q_3 = -70 \text{ nC}$$

(2.9) قرص دائري نصف قطره 4m وكثافة شحنته السطحية تتبع العلاقة التالية:

$$\rho_s = 12 \sin \phi$$

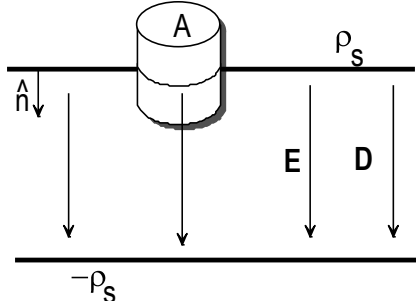
جد صافي الفيض الكهربائي الذي يخترق سطح مغلق والمحيط بالسلك ؟

(2.10) خط شحني منتظم بكثافة خطية ρ_ℓ موضوع على محور اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها a وكثافة شحنتها السطحية ρ_s ، على فرض ان التوزيعات الشحنية غير متناهية ، جد باستخدام قانون جاوس كثافة الفيض الكهربائي في جميع المناطق ؟

(2.11) قشرة اسطوانية دائرية قائمة ونصف قطرها الداخلي والخارجي هما a, b على الترتيب ، اذا كانت مشحونة بانتظام بكثافة ρ جد كثافة الفيض الكهربائي في جميع المناطق باستخدام قانون جاوس؟

(2.12) توزيع شحني كروي منتظم بكثافة حجمية ρ ، جد كثافة الفيض الكهربائي داخل وخارج التوزيع اذا كان نصف قطر الكرة a ؟

(2.13) مكثف كهربائي ذو لوحين متوازيين (كما في الشكل ادناه) ، اذا كانت كثافة الشحنة السطحية للوحين هي $\pm \rho_s$ ، جد كثافة الفيض الكهربائي بين لوح المكثف وكذلك شدة المجال الكهربائي اذا كان الوسط بينهما هواء؟



(2.14) جد تباعد شدة المجال الكهربائي الناتج عن خط شحني منتظم كثافته الطولية ρ_ℓ ؟

(2.15) اثبت ان تباعد كثافة الفيض الكهربائي اناج عن شحنة نقطية Q يساوي صفرا ؟

(2.16) جد الكثافة الحجمية لتوزيع شحني حجمي اذا كانت كثافة الفيض الكهربائي هي:

$$\mathbf{D} = \frac{Q(1 - \cos 3r)}{\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

(2.17) جد الشغل اللازم لنقل شحنة نقطية $Q = -20 \text{ nC}$ من نقطة الأصل الى النقطة $(4,0,0)$ خلال مجال

$$\text{كهربي شدته : } \mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right) \hat{x} + 2xy \hat{y}$$

(2.18) جد فرق الجهد الكهربي بين النقطة $A(4, \frac{\pi}{2}, 0)$ والنقطة $B(4, \pi, 5)$ خلال المجال الكهربي الناتج عن

$$\text{خط شحني كثافة شحنته } \rho_\ell = 10^{-9}/2 \text{ موضوع على محور } z\text{-؟}$$

(2.19) جد الجهد الكهربي عند نقطة على محور حلقة تحمل شحنة $Q = (40/3) \text{ nC}$ موزعة بانتظام على

محيطها , علما بان نصف قطر الحلقة 2 m والنقطة تبعد عن المركز مسافة 5 m ؟

(2.20) اذا كان الجهد الكهربي لقشرة موصلة كروية نصف قطرها a يعطى بالعلاقة

$$V = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ \frac{V_0 a}{r}, & r > a \end{cases}$$

, جد شدة المجال الكهربي داخل وخارج القشرة ؟

الفصل الثالث المجال الكهربائي الساكن في العازلات الكهربائية

Static Electric Field in Dielectrics

يتناول هذا الفصل دراسة المجال الكهربائي خلال الوسط العازل وشرح سلوك خطوط الفيض الكهربائي عند انتشار المجال على السطح الفاصل بين وسطين عازلين , وهذا ما يعرف بالشروط الحدودية على خطوط المجال الكهربائي من حيث كونها مستمرة أم منفصلة . كما نتناول ظاهرة الإستقطاب في العوازل بفعل المجال الكهربائي الخارجي والمسلط على جزيئات العازل . ويقدم شرحا لأثر العوازل على الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثفات الكهربائية . كما يتناول وصفا رياضيا لحل معادلات بويسون ولابلاس .

(3.1) خصائص الوسط العازل Dielectric Medium Properties

تعتبر المادة عازلة كهربيا اذا كانت الإلكترونات في المدار الأخير للذرات غير حرة الحركة (مقيدة الحركة) كالمواد البلاستيكية... , ويكون الوسط العازل متجانسا **homogeneous** اذا كانت خصائصه الفيزيائية (الكثافة المادية , بناء الجزيئات) لا تتغير من نقطة لأخرى في هذا الوسط. ويكون الوسط خطي **Linear** بالنسبة للمجال الكهربائي الخارجي اذا كانت كثافة الفيض الكهربائي تتناسب طرديا مع شدة المجال الكهربائي $(D = \epsilon E)$, ويسمى المعامل ϵ سماحية الوسط وقد يكون هذا المعامل غير ثابت وعندها يقال ان الوسط ليس خطيا **nonlinear** . اما اذا كانت خصائص الوسط العازل لا تعتمد على اتجاه ما في ذلك الوسط , يقال ان الوسط متماثل **Isotropic** . وعموما تكون المواد ذات التركيب الجزيئي العشوائي الرتيب متماثلة , بينما المواد البلورية والأوساط البلازمية والتي تعتمد خصائصها على الاتجاه غير متماثلة **Anisotropic**.

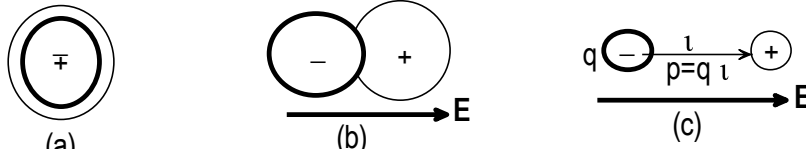
سنتناول في هذا الكتاب فقط الأوساط العازلة التي هي: متجانسة , خطية , ومتماثلة. ويعرف معامل السماحية النسبي **Relative permittivity** للوسط العازل كالتالي:

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$$

وقد قيمة معامل السماحية النسبي تكون دائما اكبر من 1 , وهناك جداول تعطي قيم هذا المعامل للمواد المختلفة , وعلى سبيل المثال : يكون للمطاط 5 , للماكا 8 , للماء المقطر 81 , ولتايتينات الباريوم 10^4 (**BiTiO3**) الخ.....

(3.2) Electric Polarization الأستقطاب الكهربائي

في الحالة الطبيعية تكون ذرات او جزيئات المادة العازلة بحيث تنطبق مراكز الشحنات الموجبة على مراكز الشحنات السالبة (شكل 3.1 a) وعندها يقال ان المادة غير مستقطبة (unpolarized) . اما عند تسليط مجال كهربائي خارجي على هذه الجزيئات (كما في الشكل 3.1b), يحدث انزياح ضئيل لمراكز الشحنات السالبة والموجبة في ذرات او جزيئات هذا العازل وتصبح **كثائيات قطب كهربائي Electric Dipoles** (شكل 3.1 c) , وعندها يقال ان العازل في حالة **استقطاب** او **مستقطب Polarized** , وفي معظم المواد العازلة تزول هذه الحالة للذرات او الجزيئات بمجرد ازالة المجال الكهربائي الخارجي.



شكل (3.1): جزيئات عازل في مجال كهربائي.

لنفرض ان ذرات المادة في حالة الإستقطاب , تكون كل ذرة مكافئة لثنائي قطب عزمه *dipole moment* يساوي $p = q \ell$. ويعرف الإستقطاب P بأنه عزم ثنائيات الأقطاب لكل وحدة حجم , او

$$P = \frac{n}{v} q \ell = Q \ell / v \quad (3.1)$$

حيث n = عدد ثنائيات الأقطاب في الحجم v , $Q = nq$ تمثل شحنة جميع ثنائيات الأقطاب , اما المقدار $Q \ell$ يمثل صافي عزم ثنائيات الأقطاب في الحجم v .

لنفرض ان شريحة من عازل مستطيلة الشكل سمكها L , ومساحة سطحها A , يكون حجمها $v = AL$, وعليه فإن معادلة (3.1) تصبح كالتالي

$$P = \frac{QL}{AL} = \frac{Q}{A} = \rho_{sp} \quad (3.2)$$

لنفرض ان كثافة الشحنة السطحية الإستقطابية والتي تظهر على وجهي الشريحة الموضوعة في المجال الكهربائي الخارجي المسلط على الشريحة ρ_{sp} , وعلى فرض ان توزيع ثنائيات القطب في الشريحة العازلة متصل (الإستقطاب مستمر بدون انقطاع داخل العازل) , عندها يمكن تعريف الإستقطاب باعتبار عنصر حجمي متناهي الصغر Δv كالتالي

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q \ell}{\Delta v} \quad (3.3)$$

لنفرض ان المجال الخارجي المؤثر على الشريحة (الشكل 3.1) ناتجا عن شحنات لوحتي مكثف كهربائي , حيث المسافة بين هاتين اللوحتين d وفرق الجهد بينهما V . وعليه تكون شدة المجال الكهربائي $E = \frac{V}{d}$. وعلى فرض ان جزء من الوسط بين اللوحتين فراغا بينما الجزء الآخر توجد فيه الشريحة العازلة (كما في شكل 3.2) , لذلك تكون كثافة الفيض الكهربائي في الجزء الفارغ كالتالي :

$$D_0 = \epsilon_0 E \quad (3.4)$$

اما في الجزء الذي يحوي الوسط العازل فإنه بسبب استقطاب العازل تتولد شحنات استقطابية مقيدة كثافتها السطحية ρ_{sp} على وجهي الشريحة العازلة , وتكون مخالفة في الإشارة للشحنات الحرة على اللوحتين , وهذه الشحنات المقيدة تولد بالحث شحنات حرة مخالفة في الإشارة على لوحتي المكثف (كما في شكل 3.2). وكننتيجة تزداد كثافة الشحنات الحرة السطحية المتواجدة على اللوحتين بمقدار ρ_{sp} , وعليه فإن كثافة الفيض الكهربى في العازل تصبح كالتالى:

$$D_d = \epsilon_0 E + \rho_{sp} \quad (3.5)$$

بدمج معادلتى (3.2) و (3.5) نجد ان

$$D_d = \epsilon_0 E + P \quad (3.6)$$

يمكن صياغة العلاقة بين كثافة الفيض وشدة المجال الكهربى في داخل العازل كالتالى

$$D_d = \epsilon E \quad (3.7)$$

بدمج معادلتى (3.6) و (3.7) معا , نحصل على ما يلى

$$\epsilon E = \epsilon_0 E + P \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} \Rightarrow \frac{P}{E} = \epsilon - \epsilon_0 \quad (3.8)$$

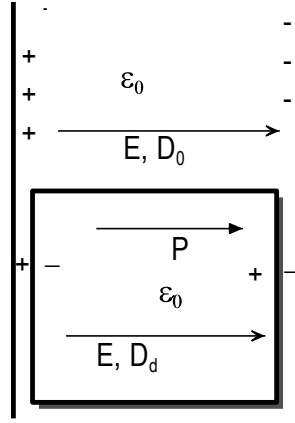
وبقسمة طرفى معادلة (3.8) على ϵ_0 نجد ان

$$\frac{P}{\epsilon_0 E} = \epsilon_r - 1 \quad (3.9)$$

وتسمى الكمية $(\epsilon_r - 1)$ بالقابلية الإستقطابية الكهربائية susceptibility , ويمز لها χ اي ان :

$$\chi = \epsilon_r - 1 = P/\epsilon_0 E \quad (3.10)$$

ملاحظة: تكون هذه القابلية للفراغ (الهواء) تساوي الصفر , اي $\chi = 0$



شكل (3.2): استقطاب العازل بفعل المجال الكهربى.

مثال (3.1)

إذا كان استقطاب مادة عازلة حيث $\epsilon_r = 2.8$, $D = 3.0 \times 10^{-7} \hat{u} \text{ C/m}^2$, حيث $\hat{u}$ متجه الوحدة , جد استقطاب العازل على فرض ان هذا الوسط **متجانس** ومتماثل؟
الحل:

$$\begin{aligned} P &= \chi \epsilon_0 E \\ D &= \epsilon_0 \epsilon_r E \quad , \chi = \epsilon_r - 1 \quad , \Rightarrow P = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) D \\ &= \left(\frac{2.8 - 1}{2.8} \right) \times 3.0 \times 10^{-7} \hat{u} \\ &= 1.93 \times 10^{-7} \hat{u} \end{aligned}$$

(3.3) العلاقات الحدودية Boundary Relations

المقصود بالعلاقات الحدودية للمجال الكهربائي هو العلاقات الرياضية التي تبين التغير في مكونات شدة المجال الكهربائي عند اختراق خطوط الفيض الكهربائي لسطح فاصل بين وسطين عازلين مختلفين في معامل السماحية. لنفرض وجود وسطين عازلين لهما معاملات سماحية ϵ_1 and ϵ_2 ويفصل بينهما مستوى حدودي Boundary (كما في شكل 3.3) , والمطلوب دراسة التغير في مركبات E, D عند هذا المستوى الحدودي في الاتجاه المماسي للسطح والاتجاه العمودي عليه.

• الاتجاه المماسي للمستوى الحدودي:

نفرض مساراً مستطيلاً نصفه في الوسط العازل الأول والنصف الآخر في الوسط الثاني وبطول Δx , ويكون موازياً للمستوى الحدودي وبعرض Δy وعمودياً على هذا المستوى (كما في شكل 3.3). نفرض ان مركبتي شدة المجال الكهربائي المماسية للمستوى الحدودي في الوسطين هما E_{t1}, E_{t2} على الترتيب. وكما سبق ذكره , فإن الشغل اللازم لنقل شحنة اختبارية عبر هذا المسار المغلق يساوي صفراً , $(\oint E \cdot d\ell = 0)$, وعلى فرض ان $\Delta y \rightarrow 0$ فإن التكامل الخطي المغلق يصبح كالتالي:

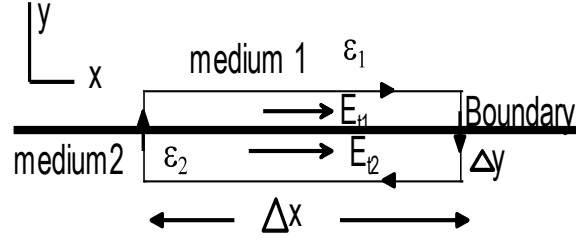
$$E_{t1} \Delta x - E_{t2} \Delta x = 0 \quad (3.11)$$

إذن

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (3.12)$$

هذه النتيجة تعني ان المركبات المماسية لشدة المجال الكهربائي تكون متساوية على جانبي المستوى الحدودي الفاصل بين الوسطين العازلين او بعبارة اخرى تكون المركبة المماسية لشدة المجال الكهربائي متصلة عبر المستوى الحدودي.

ملاحظة هامة: اذا كان الوسط العازل الثاني موصلًا تكون $E_{t2} = 0$ (حيث لا يوجد مجال كهربائي داخل الموصل) وعليه فإن معادلة (3.12) تعطي : $E_{t1} = 0$.



شكل (3.3) : مركبات المجال المماسية عند المستوى الحدودي

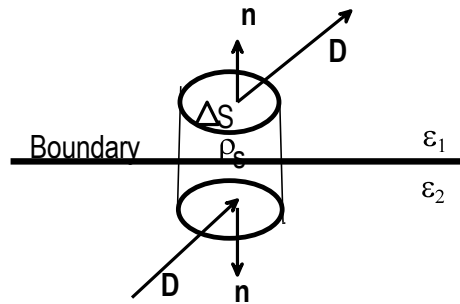
● في الإتجاه العمودي للمستوى الحدودي :

لنفرض وجود وسطين عازلين بسماحية ϵ_1 and ϵ_2 ويفصلهما مستوى حدودي مشحون . ولنعتبر علبة اسطوانية دائرية قائمة مساحة وجهها ΔS وبطول صغير جدا , بحيث يقع نصفها العلوي في الوسط 1 بينما يقع النصف الآخر في الوسط 2 (كما في الشكل 3.4). ولنفرض ان مركبتي كثافة الفيض الكهربائي العمودية على الوجه العلوي والسفلي للعلبة في الوسطين هما D_{n1} , D_{n2} على الترتيب. وبتطبيق قانون جاوس ($\oint \mathbf{D} \cdot \hat{n} ds = Q_{enc}$) مع ملاحظة ان للعلبة ثلاثة سطوح (العلوي والسفلي والجانبى) , وباعتبار ان طولها صغيرة جدا فإنه من الممكن اهمال التكاملات السطحية على جانب العلبة واعتبار فقط التكاملات السطحية على الوجهين العلوي والسفلي فقط . كما يمكن اعتبار ان الشحنة الحرة التي تحتويها العلبة هي المتواجدة على المستوى الحدودي بكثافة سطحية حرة ρ_s , ومع مراعاة اتجاه وحدة المتجه العمودي على السطوح ($\hat{n}$) , لذلك تكون اشارة D_{n1} موجبة بينما اشارة D_{n2} سالبة , وعليه يعطي قانون جاوس التالي:

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_s \Delta S$$

اذن

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (3.13)$$



شكل (3.4) كثافة الفيض الكهربائي في وسطين عازلين

نتيجة هامة:

المركبات العمودية لكثافة الفيض الكهربائي تتغير عند المستوى الحدودي المشحون بين وسطين بمقدار كثافة الشحنة السطحية الحرة .

اما اذا كان المستوى الحدودي بين الوسطين العازلين غير مشحون ($\rho_s = 0$) فان :

$$D_{n1} = D_{n2}$$

اي ان المركبات العمودية لكثافة الفيض الكهربائي على المستوى الحدودي غير المشحون بشحنات حرة تكون متصلة . اما اذا كان الوسط الثاني موصلا فإن $D_{n2} = 0$ فإن: $D_{n1} = \rho_s$.

بنفس الطريقة نجد العلاقة الحدودية للإستقطاب الكهربائي ولكن مع اعتبار الشحنات الإستقطابية المقيدة عند سطوح الوسطين العازلين, اي

$$P_{n1} - P_{n2} = -\rho_{sp} \quad (3.14)$$

والإشارة السالبة في الطرف الأيمن من معادلة (3.14) نتيجة لكون الإستقطاب نحو الداخل بينما العمودي على السطح يكون نحو الخارج .

اذا كان الوسط الثاني فراغا حرا (*free space*) فإن معادلة (3.14) تؤؤل الى:

$$P_{n1} = -\rho_{sp}$$

مثال (3.2)

في الشكل (3.5) اذا كان مستوى حدودي غير مشحون ويفصل بين وسطين عازلين متماثلين وسماحيتهما ϵ_1, ϵ_2 , فإذا كانت خطوط المجال الكهربائي او كثافة الفيض تصنع مع العمودي على المستوى الحدودي الزوايا α_1, α_2 على الترتيب . جد العلاقة الرياضية بين هاتين الزاويتين ؟

الحل :

$$D_{n1} = D_{n2} , \quad E_{t1} = E_{t2} \quad (3.15)$$

من الشكل (3.5) نجد ان

$$D_{n1} = D_1 \cos \alpha_1 , \quad D_{n2} = D_2 \cos \alpha_2$$

$$E_{t1} = E_1 \sin \alpha_1 , \quad E_{t2} = E_2 \sin \alpha_2$$

بالتعويض في معادلة (3.15) وبقسمة المعادلات الناتجة نحصل على :

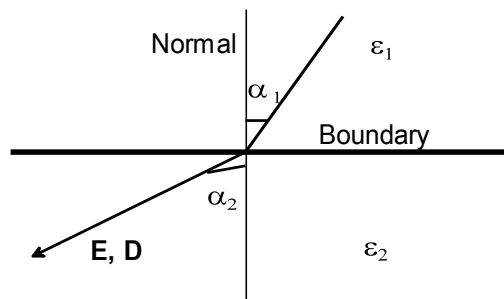
$$D_1 \cos \alpha_1 / E_1 \sin \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2 / E_2 \sin \alpha_2 \quad (3.16)$$

وحيث ان

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2$$

إذن بالتعويض في معادلة (3.16) نجد ان

$$\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$$



شكل (3.5): خطوط المجال بين وسطين عازلين.

مثال (3.3)

في المثال (3.2) , اذا كان الوسط الثاني موصلا , جد α_1 ؟

الحل:

في الوسط الثاني: $D_2 = E_2 = 0$, ومن العلاقات الحدودية :

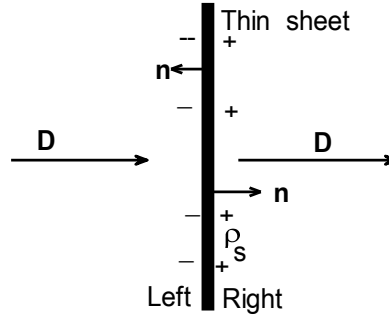
$$D_{n1} = \rho_s \rightarrow E_{n1} = \rho_s / \varepsilon_1$$

كما ان $E_{t1} = 0$, وعليه: $\alpha_1 = \tan^{-1}(E_{t1}/E_{n1}) = \tan^{-1} 0 = 0$ ونستنتج من ذلك ان خطوط المجال عند المستوى الحدودي بين موصل - عازل تكون دائما عمودية على سطح الموصل.

اذا وضعت صفيحة موصلة رقيقة عموديا مع مجال كهربائي (كما في شكل 3.6) فإنه تتولد شحنات تأثيرية على وجهي الصفيحة بحيث تكون قيمة كثافة الشحنة السطحية التأثيرية ρ_s مساوية لكثافة الفيض الكهربائي D . اما العلاقة بينهما تكون كالتالي:

$$D = -\hat{n} \rho_s \quad \text{على الوجه الأيسر للصفيحة:}$$

$$D = +\hat{n} \rho_s \quad \text{على الوجه الأيمن للصفيحة:}$$



شكل (3.6) : صفيحة رقيقة في مجال كهربائي متعامد معها .

(3.4) الكثافات الكهربائية والسعات Capacitors And Capacitance

يتكون المكثف الكهربائي من موصلين يفصلهما وسط عازل. وتعرف سعة المكثف بأنها النسبة بين الشحنة الموجودة على أحد الموصلين إلى فرق الجهد بينهما، وتعطى هذه السعة (C) رياضياً كالتالي :

$$C = Q/V \quad (3.17)$$

وتقاس السعة في النظام العالمي للوحدات بدلالة الفاراد ($Farad$) , وعبر عن الفاراد (F) كالتالي

$$1F = 1 \text{ Coul. volt}^{-1}$$

وبما أن وحدة الفاراد كمية كبيرة جداً من الناحية العملية , لذلك تستخدم وحدات أصغر منها : ميكروفاراد (μF) , و بيكوفاراد (pF).

مثال (3.4)

مكثف كهربائي ذو لوحين مستويين ومتوازيين ومساحة اللوح A والمسافة بينهما d (كما في الشكل 3.7) , فإذا كان سماحية الوسط العازل بينهما ϵ . جد سعة المكثف ؟

الحل:

لنفرض أن فرق الجهد بين اللوحين V , وبدلالة شدة المجال الكهربائي بين اللوحين يكون فرق الجهد كالتالي:

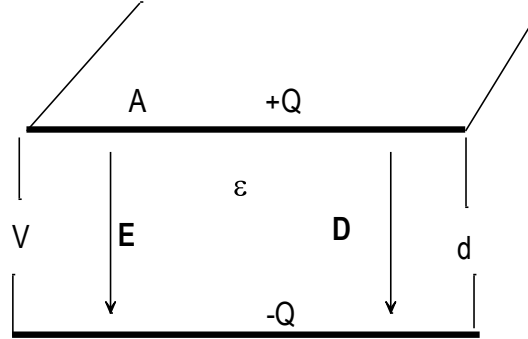
$$V = E d$$

لنفرض أن مقدار شحنة كل لوح هي Q , والتي تعطى بدلالة كثافة الفيض الكهربائي بين اللوحين كالتالي:

$$Q = D A$$

ومن تعريف سعة المكثف نجد ان:

$$C = Q/V = \epsilon EA/Ed = \epsilon A/d \quad \text{Farad}$$



شكل (3.7) مكثف كهربائي ذو لوحين متوازيين .

مثال (3.5)

مكثف ذو لوحين متوازيين مربعي الشكل بطول ضلع 500 mm, والمسافة بينهما 10 mm . اذا وضعت شريحة من العازل ($\epsilon_r = 4$) سمكها 6 mm بحيث تلامس اللوح السفلي وتترك هواء بينها وبين اللوح العلوي بمسافة 4 mm (الشكل 3.8) . جد سعة هذا المكثف؟

الحل:

عمليا يمكن ان نتصور ان صفيحة معدنية رقيقة جدا موضوعة على الوجه العلوي للعازل وكما مر معنا سابقا تتولد شحنات تأثيرية على وجهي هذه الصفيحة وذلك بسبب وجودها في مجال كهربائي متعامد عليها . ولذلك يمكن ان نتصور ان هذا النظام مكون من مكثفين كهربائيين متصلين على التوالي (مكثف به هواء وسعته C_a وآخر به عازل وسعته C_s), حيث :

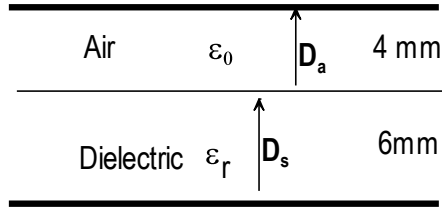
$$C_a = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{(0.5)^2}{0.004} = 553 \text{ pF}$$

$$C_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 4 \times (0.5)^2}{0.006} = 1457 \text{ pF}$$

وعليه , تكون السعة الكلية في حالة توصيل مكثفين على التوالي كالتالي:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_s}$$

$$C_T = \frac{C_a C_s}{C_s + C_a} = \frac{553 \times 1457}{553 + 1457} = 402 \text{ pF}$$



شكل (3.8) : مكثف مكون من عازل وهواء.

مثال (3.6)

إذا كان فرق الجهد الكهربائي بين لوحين المكثف في المثال (3.5) يساوي 100 Volt , جد شدة المجال الكهربائي وكثافة الفيض الكهربائي في الفجوة الهوائية وفي العازل , ثم جد الجهد الكهربائي عبر الفجوة الهوائية وعبر شريحة العازل. ؟

الحل:

بما أن D متصلة عبر المستوى الفاصل بين الهواء والعازل , إذن

$$D_a = D_s \Rightarrow \epsilon_0 E_a = \epsilon E_s$$

$$E_a = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_s = \epsilon_r E_s = 4E_s$$

فرق الجهد بين لوحين المكثف = فرق الجهد عبر المكثف ذي العازل + فرق الجهد عبر المكثف ذي الهواء , أي

$$V = E_a d_a + E_s d_s = \epsilon_r E_s d_a + E_s d_s$$

$$V = (\epsilon_r d_a + d_s) E_s$$

وعليه ,

$$E_s = \frac{V}{\epsilon_r d_a + d_s} \quad \text{and} \quad E_a = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r d_a + d_s}$$

بتعويض القيم الحسابية نجد أن :

$$E_s = \frac{100}{4 \times 0.004 + 0.006} = 4545 \text{ Vm}^{-1}$$

$$E_a = 4 \times E_s = 18182 \text{ Vm}^{-1}$$

$$V_a = E_a d_a = 72.7 \text{ Volt}$$

$$V_s = E_s d_s = 27.3 \text{ Volt}$$

$$D_a = D_s = \epsilon_0 E_a = \epsilon_r \epsilon_0 E_s = 161 \text{ nCm}^{-2}$$

(3.5) طاقة المكثف الكهربائي Energy in Electric Capacitor

بما انه يلزم بذل شغل لشحن المكثف الكهربائي , ومن مبدا حفظ الطاقة فإن هذا الشغل يخزن على صورة طاقة كهربائية في المكثف . ولإيجاد مقدار هذه الطاقة نفرض ان مكثف ما سعته C شحن بمقدار q حتى اصبح فرق الجهد بين لوحيه V , ومن تعريف سعة المكثف نجد ان: $q = CV$, ومن تعريف الجهد الكهربائي نجد ان: $V = \frac{dW}{dq}$, وبدمج هاتين العلاقتين معا نحصل على:

$$dW = \frac{q}{C} dq \quad (3.18)$$

وبتكامل معادلة (3.18) على المتغير q , باعتبار عملية الشحن مستمرة من البداية (حيث الشحنة الابتدائية صفرا) وحتى تصبح الشحنة النهائية Q , نحصل على ما يلي

$$W = 1/C \int_0^Q q dq = Q^2/2C$$

باستخدام العلاقة بين Q, V , and C يمكن الحصول على الصور الرياضية لطاقة المكثف كالتالي:

$$W = Q^2/2C = CV^2/2 = QV/2 \quad (3.19)$$

أين يتم خزن الطاقة الكهربائية في المكثف ؟ الجواب هو ان هذه الطاقة تخزن في المجال الكهربائي بين لوحتي المكثف . ولبيان ذلك نفرض ان عنصر حجمي على شكل مكعب ضلعه $(\Delta \ell)$, موضوعا بين اللوحين بشكل موازي لهما ومتعامدا مع اتجاه المجال الكهربائي , ويمكن ان نعتبر هذا العنصر مكثف صغير عند وضع طبقة رقيقة معدنية على وجهيه العلوي والسفلي , تكون سعة هذا المكثف كالتالي

$$\Delta C = \frac{\epsilon \Delta \ell^2}{\Delta \ell} = \epsilon \Delta \ell$$

اما فرق الجهد بين سطحي الرقيقة يعطى كالتالي:

$$\Delta V = E \Delta \ell$$

تكون الطاقة في العنصر الحجمي وفقا لمعادلة (3.19) كالتالي

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta C \Delta V^2 \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Delta v$$

وتعرف كثافة الطاقة الحجمية (w) *Energy Density* كالتالي:

$$w = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta v} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad Jm^{-3} \quad (3.20)$$

في حالة وجود عازل بين لوحتي المكثف فإن كمية الطاقة في المكثف تزداد بتناسب مع سماحية العازل وذلك بسبب استقطاب العازل , اي

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + PE) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (3.21)$$

حيث يمثل الحد الأول في معادلة (3.21) كثافة الطاقة في الفراغ , بينما يمثل الحد الثاني في هذه المعادلة كثافة الطاقة في العازل . كما يمكن ان نعبر عن كثافة الطاقة بدلالة كثافة الفيض الكهربائي في حالة الوسط العازل غير المتماثل كالتالي : $w = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$

مثال (3.7)

إذا كانت شدة المجال الكهربائي بين موصلين اسطوانيين ومتحدين في المركز هي

$$\mathbf{E} = (10^5/r) \hat{r} , \text{ جد الطاقة الكهربائية المخزونة بين الموصلين في المنطقة}$$

$$0.01 \leq r \leq 0.05 \text{ m و بطول } 0.5 \text{ m} ?$$

الحل:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{0.5} \int_0^{2\pi} \int_{0.01}^{0.05} \left(\frac{10}{r}\right)^2 r dr d\phi dz = 0.224 \text{ J}$$

مثال (3.8):

جد الطاقة الكهربائية المخزونة في النظام المكون من شحنتين نقطيتين :

$$Q_1 = 3nC , Q_2 = -3nC , \text{ وتفصلهما مسافة } d = 0.2 \text{ m}$$

الحل:

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 = Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \right)$$

$$W_E = Q_1 Q_2 / 4\pi\epsilon_0 d = - \frac{9 \times 10^9 (3 \times 10^{-9})^2}{0.2} = -405 \text{ J}$$

(3.6) نظرية الإنتشار (التباعد) لكثافة الفيض الكهربى

Divergence Theorem of Flux Density

يمكن عند تطبيق قانون جاوس باعتبار ان السطح المغلق يحيط بحجم متناهي في الصغر *infinitesimal volume* , وهذا الإعتبار يقود الى علاقة ذات معنى فيزيائي مهم تعرف بنظرية الإنتشار (او التباعد) *Divergence Theorem* . ولتوضيح هذه النظرية , نفرض ان هذا الحجم Δv يغلف شحنة ΔQ موزعة عليه بانتظام وبكثافة حجمية ρ , فإذا كانت المركبة العمودية لكثافة الفيض الكهربى D_n على السطح المغلف لهذا الحجم فإن قانون جاوس يصبح كالتالي

$$\oint_s D_n ds = \Delta Q = \rho \Delta v$$

ومن هذه المعادلة , نجد ان

$$\oint_s D_n ds / \Delta v = \rho$$

إذا كانت كثافة الشحنة غير منتظمة خلال الحجم نتعامل مع نهاية الطرف الأيسر عندما تقترب قيمة الحجم من الصفر , وعليه

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \oint_s D_n ds / \Delta v = \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (3.22)$$

حيث $\text{div } \mathbf{D}$ يمثل الصورة الرياضية لإنتشار او تباعد كثافة الفيض الكهربى , ويرمز له $\nabla \cdot \mathbf{D}$ وفيزيائيا يعطي مقدار الشحنة الحرة عند نقطة ما.

إذا كان متجه كثافة الفيض الكهربى على الصورة: $\mathbf{D} = \hat{x}D_x + \hat{y}D_y + \hat{z}D_z$ فإن

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (3.23)$$

* برهان معادلة (3.23)

نفرض وجود حجم صغير $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ على هيئة صندوق موضوع في مجال كهربائي ذي كثافة فيض D (كما في الشكل 3.9), ولنفرض ان مركبة كثافة الفيض العمودية والخارجة من الوجه الخلفي للصندوق $(-D_x)$ (حيث المجال الى الداخل), اذا كانت شدة المجال يتغير من الوجه الخلفي نحو الوجه الأمامي فإن المركبة العمودية لهذا الفيض على الوجه الامامي $(\Delta y \Delta z)$, فإنها تنتشر بمفكوك تايلور **Taylor** على النحو التالي:

$$D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \approx D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x$$

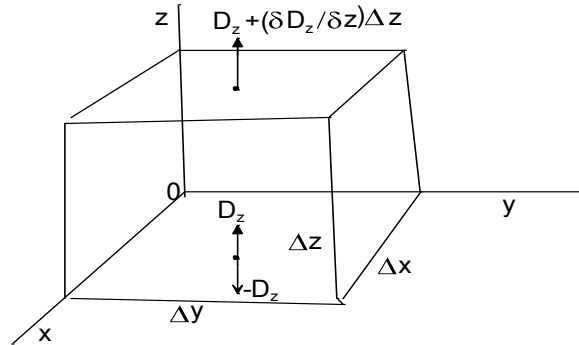
بنفس الطريقة نجد ان المركبة العمودية لكثافة الفيض على الوجه الأيسر للصندوق $(-D_y)$ وعلى الوجه الأيمن $(\Delta x \Delta z)$ تنتشر كالتالي $D_y + \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta y$, والمركبة العمودية للفيض على السطح السفلي $(\Delta x \Delta y)$ للصندوق هي $-D_z$, وعلى السطح العلوي $D_z + \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta z$.

اما الفيض الخارج من الوجه الخلفي $-D_x \Delta y \Delta z$, بينما الفيض الداخل على الوجه الأمامي

$$(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x)(\Delta y \Delta z)$$

وهكذا لباقي الوجوه في الصندوق , ويكون الفيض الكلي الخارج من كل الحجم كالتالي:

$$\Delta \psi = \left(-D_x + D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + \left(-D_y + D_y + \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z + \left(-D_z + D_z + \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y \Delta x$$



شكل (3.9) صافي تباعد كثافة الفيض الكهربائي خلال عنصر حجمي.

وبتبسيط المعادلة نحصل على:

$$\Delta\psi = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

بالرجوع الى قانون جاوس نجد ان

$$\Delta\psi = \oint_s D_n ds = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v = \int_v \rho dv$$

بقسمة طرفي المعادلة على Δv واخذ النهاية للمقدار عندما تقترب Δv من الصفر نحصل على ما يلي:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \oint_s D_n ds / \Delta v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

اي ان

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

(3.7) نظرية الانتشار (التباعد) Divergence Theorem

بالرجوع الى قانون جاوس , حيث $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$, بالتعويض بدل ρ بدلالة تباعد كثافة الفيض الكهربائي , نجد ان

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho dv \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.24)$$

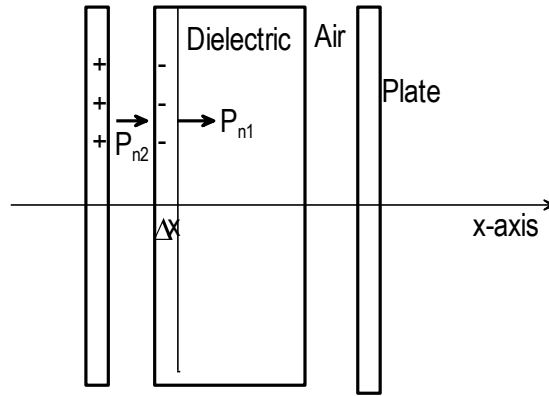
وتتنص هذه النظرية على ما يلي :

التكامل الحجمي لتباعد لتباعد كثافة الفيض الكهربائي تساوي الشحنة التي يغلفها ذلك الحجم

(3.8) الجهد الكهربى الناتج عن استقطاب العازل
Electric Potential due to the Dielectric Polarization

نفرض ان شريحة من مادة عازلة (البرافين) تملأ جزئيا الفراغ بين لوحين متوازيين (شكل 3.10) لمكثف مشحون بانتظام حيث كثافة الشحنة السطحية الحرة هي ρ_s . ولنفرض ان كثافة الشحنة السطحية الإستقطابية المتواجدة على سطح العازل هي ρ_{sp} . تطبيق الشوط الحدودية على المركبات العمودية للأستقطاب عند المستوى الفاصل بين الفراغ والعازل يعطى:

$$P_{n1} - P_{n2} = -\rho_{sp}$$



شكل (3.10) مكثف كهربى مشحون بداخله عازل مستقطب.

حيث P_{n1} = المركبة العمودية للإستقطاب في العازل, P_{n2} = المركبة العمودية للإستقطاب خلال الهواء ويساوي صفر تقريبا. لنفرض ان طبقة رقيقة خلال العازل سمكها Δx تتوزع عليها بانتظام هذه الشحنة الإستقطابية, ويكون التغير في الإستقطاب من جانب لأخر خلال هذه الطبقة العازلة كالتالى

$$\Delta P_n = \Delta P_x = -\rho_{sp}$$

ويعطى هذا التغير في اتجاه محور x كالتالى:

$$\Delta P_x = \frac{dP_x}{dx} \Delta x \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -\frac{\rho_{sp}}{\Delta x} = -\rho_p$$

حيث $\rho_p =$ كثافة شحنة الإستقطاب الحجمية خلال العازل . بما ان اتجاه الإستقطاب هو باتجاه محور السينات , لذلك يكون تباعد الإستقطاب كالتالي:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{dP_x}{dx} = -\rho_p$$

فيزيائيا , هذا يعني ان التغير في الإستقطاب خلال طبقة من العازل يساوي تباعد الإستقطاب ويساوي كثافة الشحنة الإستقطابية الحجمية . وكما مر سابقا ان تباعد كثافة الفيض الكهربى يعطى مصدرا للمجال الكهربى , فإن تباعد الإستقطاب يعطى مصدرا للمجال الإستقطابى *Polarization Field*. ويكون الجهد الكهربى الناتج عن التوزيع الإستقطابى عند نقطة ما خارج مادة العازل التى تبعد مسافة r عن عنصر حجمى كالتالى:

$$V_p = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{r} dv$$

ويكون الجهد الكهربى الكلى الناتج عن توزيع مستمر لشحنات حرة واستقطابية عند نقطة تبعد مسافة r عن عنصر حجمى كالتالى:

$$V_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho}{r} dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{r} dv$$

(3.9) معادلات لابلاس وبويسون *Poisson and Laplace Equations*

نستخدم معادلة (3.22) لإشتقاق هذه المعادلات على النحو التالى :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

وحيث كثافة الفيض الكهربى وشدة المجال الكهربى تعطى كما يلي:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} , \quad \mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{D} = -\epsilon \nabla V$$

وعليه تصبح معادلة (3.22) على الصورة التالية:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho$$

إذا كان الوسط متماثل المناحي (ϵ لا تعتمد على احداثيات الوسط) , لذلك تؤول هذه المعادلة الى الصورة التالية:

$$\nabla \cdot \nabla V = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

ويسمى تباعد التحدّر في الرياضيات مؤثر لابلاس (Laplace Operator) ويرمز له ∇^2 ويقرأ *del squared*

وعليه تكون معادلة لابلاس على الصورة التالية:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.25)$$

إذا كانت $\rho = 0$, فإن معادلة (3.25) تؤول الى

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.26)$$

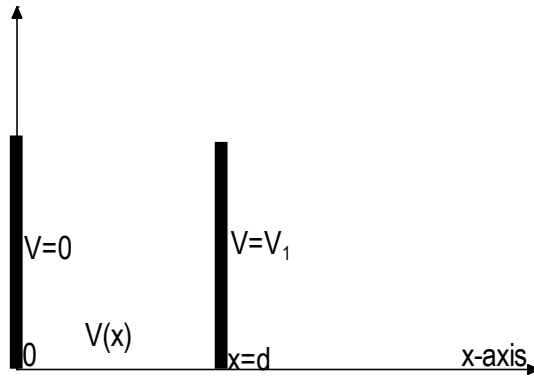
وتسمى هذه المعادلة **معادلة لابلاس** , ويعطي حل هذه المعادلة دالة الجهد الكهربى التي تحقق الشروط الحدودية. تكون الصورة الرياضية لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الكارتيزية على النحو التالى:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.27)$$

مثال (3.9)

بإستخدام معادلة لابلاس جد دالة الجهد الكهربى بين لوحتي مكثف كهربى متوازيين (شكل 3.11) , إذا كانت المسافة بينهما d وكان جهد اللوحتين كالتالى:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ V_1 & x = d \end{cases}$$



شكل(3.11): مكثف كهربى ذو لوحتين متوازيين.

الحل:

بما ان دالة الجهد الكهربى لا تتغير فى اتجاه محوري y, z , لذلك تكون معادلة لابلاس على الصورة التالية:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

بالتكامل المباشر لهذه المعادلة التفاضلية مرتين نجد ما يلى:

$$V(x) = c_1x + c_2$$

حيث نجد الثوابت c_2, c_1 باستخدام الشروط الحدودية كالتالى:

$$V(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{الشرط الأول:}$$

$$V(d) = V_1 \Rightarrow c_1 = V_1/d \quad \text{الشرط الثانى:}$$

وعليه تكون دالة الجهد الكهربى بين لوحتي المكثف كالتالى:

$$V(x) = (V_1/d) x$$

بمقارنة هذا الحل مع معادلة (2.9) نجد ان :

$$E = V_1/d$$

وهذا يعنى ان شدة المجال الكهربى بين لوحتي المكثف يكون ثابتا (منتظم).

تمارين

(3.1) جد شدة المجال الكهربائي في وسط عازل قابليته الكهربائية تساوي 3.5 اذا كان

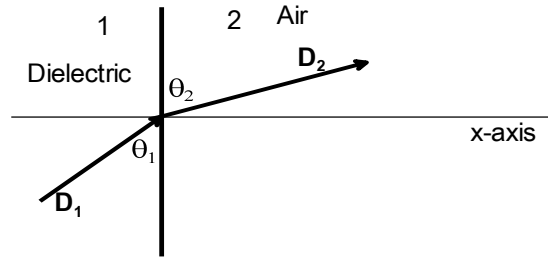
$$\text{الإستقطاب } \mathbf{P} = 2.3 \times 10^{-7} \hat{u} \text{ } Cm^{-2} \text{ ؟}$$

(3.2) في الشكل (3.12) المنطقة 1 حيث $(x < 0)$ منطقة فراغ , بينما المنطقة 2 حيث

$(x > 0)$, يوجد وسط عازل $(\epsilon_r = 2.4)$. اذا كان

$$\mathbf{D}_1 = 3\hat{x} - 4\hat{y} + 6\hat{z}$$

جد $\mathbf{E}_2, \theta_1, \theta_2$ ؟



شكل (3.12) مستوى فاصل بين عازل وهواء.

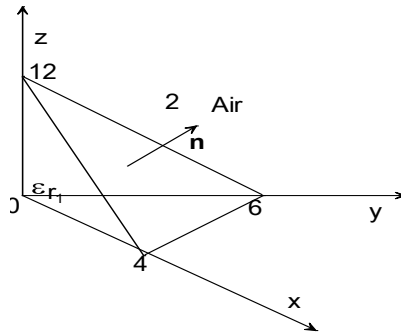
(3.3) اذا كانت معادلة المستوى الفاصل بين منطقتي عازل- هواء (شكل 3.13) معطاة

كالتالي:

$$3x + 2y + z = 12$$

وكانت السماحية النسبية للعازل عند نقطة الأصل (منطقة 1) تساوي 3.0 , وكان المجال الكهربائي

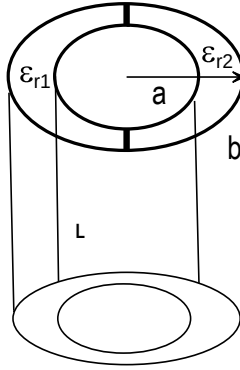
معطى كالتالي $\mathbf{E}_1 = 2\hat{x} + 5\hat{z}$, جد $\mathbf{E}_2$ ؟



شكل (3.13) مستوى فاصل بين عازل وهواء.

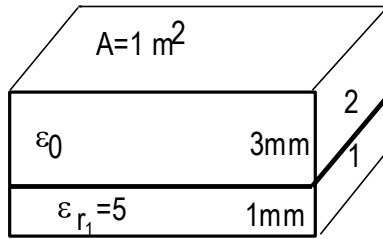
(3.4) جد سعة المكثف المكون من اسطوانتين متحدثتين في المركز وبينهما عازل و طول كل منهما L ونصف قطر الإسطوانة الداخلية والخارجية a, b على الترتيب, و كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلي ρ_s ؟

(3.5) في السؤال (3.4) جد سعة المكثف اذا ملئ نصف الفراغ بين الأسطوانتين بمادة عازلة لها سماحية نسبية ϵ_{r1} بينما ملئ النصف الآخر بمادة عازلة لها سماحية نسبية ϵ_{r2} ؟



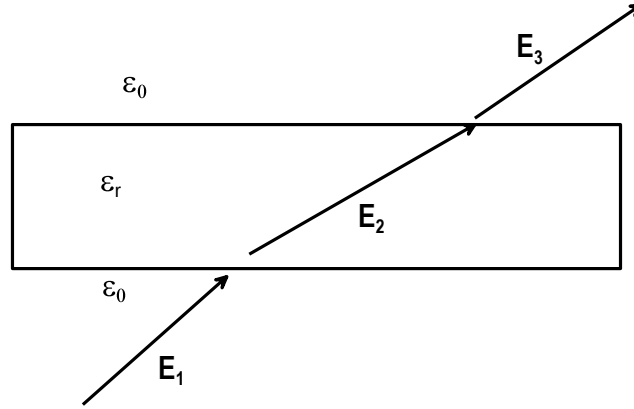
شكل (3.14) مكثف ذو لوحتين اسطوانيتين بينهما عوازل.

(3.6) جد فرق الجهد عبر كل عازل في المكثف المبين في الشكل (3.15) اذا كان فرق الجهد الكلي بين لوحتي المكثف 200 فولت ؟



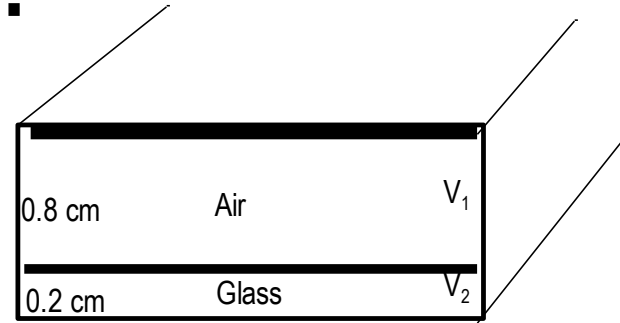
شكل (3.15) مكثف كهربائي من طبقة عازل وهواء .

(3.7) اثبت ان شدة المجال الكهربائي الساقط على احد اوجه شريحة عازلة ينفذ من الوجه المقابل



شكل (3.16) مجال كهربائي يسقط على وجه شريحة من عازل.

(3.8) مكثف ذو لوحين متوازيين تفصلهما مسافة $d = 1.0 \text{ cm}$ والعازل بينهما هواء , اذا كان فرق الجهد بين اللوحين $29 \times 10^3 \text{ volt}$. على فرض ان قوة العزل للهواء (اقصى مقدار شدة المجال بين اللوحين حتى يتأين العازل ويصبح موصلا) $30 \times 10^3 \text{ V/cm}$, برهن اذا وضعت شريحة من الزجاج ($\epsilon_r = 6.5$) الذي له قوة عزل $29 \times 10^3 \text{ V/cm}$ وبسلك قدره $d_2 = 0.20 \text{ cm}$ بين اللوحين , فإن الهواء في الجزء المتبقي بين اللوحين يفقد قدرته على العزل؟



شكل (3.17) مكثف كهربائي يحتوي على عازل وهواء .

(3.9) اذا كانت المنطقة بين اسطوانتين متحدتين مركزيا تحوي على كثافة شحنة حجمية منتظمة ρ , جد باستخدام معادلة بويسون مقدار الجهد بين الاسطوانتين ؟

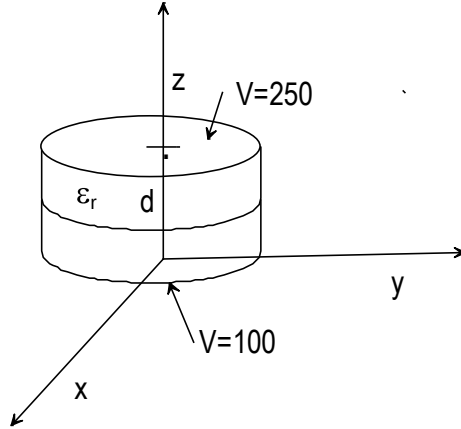
(3.10) جد دالة الجهد وشدة المجال الكهربائي في المنطقة المحصورة بين اسطوانتين دائريتين ومتحدتين في المركز باستخدام معادلة لابلاس , علما ان الجهد الكهربائي عند نقطة ما يعطى كالتالي

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{at } r = 1 \text{ mm} \\ 150, & \text{at } r = 20 \text{ mm} \end{cases}$$

(3.11) استخدم صورة الإحداثيات الكروية لمعادلة لابلاس لإيجاد $E, D, \text{ and } \rho_s$ في المنطقة بين قشرتين موصلتين ومتحدتين في المركز وبينهما الفراغ , علما ان دالة الجهد الكهربى معطاة كالتالى:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{at } r = 0.1 \text{ m} \\ 150, & \text{at } r = 2.0 \text{ m} \end{cases}$$

(3.12) قرصان رقيقان موصلان ومتوازيان, اذا كانت المسافة بينهما 5 mm , ويوجد بينهما عازل سماحيته النسبية $\epsilon_r = 2.2$, اذا كان الجهد الكهربى على القرص السفلى والعلوى هو $V = 100, 250 \text{ volt}$ على الترتيب , جد بإستخدام معادلة لابلاس كثافة الشحنة السطحية على كل منهما؟



شكل(3.18) قرصان موصلان رقيقان بينهما عازل.

الفصل الرابع

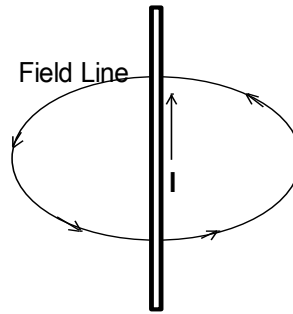
المجال المغناطيسي الساكن الناتج من التيار الكهربى

Static Magnetic Field of Electric Current

يتناول هذا الفصل وصفا للمجال المغناطيسي الناتج عن مرور تيار كهربى فى موصل , كما يعرض قانون بيوت - سافارت الذى يعطى العلاقة الرياضية لإيجاد هذا المجال عند نقطة ما فى الوسط المحيط بتوزيعات تيارية مختلفة (سلك موصل طويل , مربع من الأسلاك الموصلة , حلقة ...) . كما يشرح مفهوم العزم المغناطيسى ونظرية التدوير للمجال المغناطيسى . كما يوضح مفاهيم الجهد ومتجه المجال المغناطيسى وعلاقتها مع شدة هذا المجال .

(4.1) مقدمة

تناولت الفصول السابقة من هذا الكتاب المجال الكهربى والذى ينتج عن التوزيع الشحنى الساكن. فى عام 1891 اكتشف هانس أورستد Hans Oersted ان وضع بوصلة فى مستوى عمودى على سلك يمر به تيار مستمر يؤدي الى انحراف ابرة البوصلة . وفسر ذلك بأنه ينتج عن مرور التيار فى السلك مجالا مغناطيسيا , ويكون اتجاه هذا المجال نحو اتجاه انحراف البوصلة ويمكن تخطيطه بتحريك البوصلة فى هذا المستوى العمودى. كما وجد بالتجربة ان خطوط المجال المغناطيسى عبارة عن دوائر مغلقة مركزها السلك الحامل للتيار وتتسع هذه الدوائر كلما ابتعدنا عن مركز السلك . والعلاقة بين اتجاه المجال المغناطيسى واتجاه التيار يمكن ان تحدد وفقا لقاعدة اليد اليمنى والتي تبين انه عند قبض السلك باليد اليمنى , بحيث يشير اصبع الإبهام الى اتجاه التيار الكهربى , فإن اتجاه لفة اصابع هذه اليد يكون باتجاه المجال المغناطيسى او ما يعرف باتجاه خطوط الفيض المغناطيسى (كما فى شكل 4.1).



شكل (4.1) المجال المغناطيسى حول سلك به تيار كهربى.

وبعد هذا الإكتشاف أصبح من الممكن الحصول على مجال مغناطيسي اما بإستخدام المغناطيس الدائم (حجر المغناطيسي الطبيعي) او بواسطة الموصل الذي يحمل تيارا مستمرا Direct current (ثابت الشدة والإتجاه), كما سنتاول في الفصول اللاحقة من هذا الكتاب طريقة الحصول على هذا المجال بإستخدام التيار المتردد Alternating Current (المتغير في الشدة والإتجاه)

(4.2) قانون بايوت - سافارت Biot- Savart Law

في عام 1820 وضع بايوت وسافارت قانونا لإيجاد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة ما في محيط موصل يحمل تيارا مستمر. لنفرض ان عنصر طولي تفاضلي من الموصل dL بإتجاه التيار I , فتكون شدة المجال المغناطيسي dH عند النقطة P (كما في شكل 4.2) التي تبعد عن هذا العنصر R وفقا لهذا القانون كالتالي:

$$dH = \frac{IdL \times \hat{R}}{4\pi R^2} \quad (4.1)$$

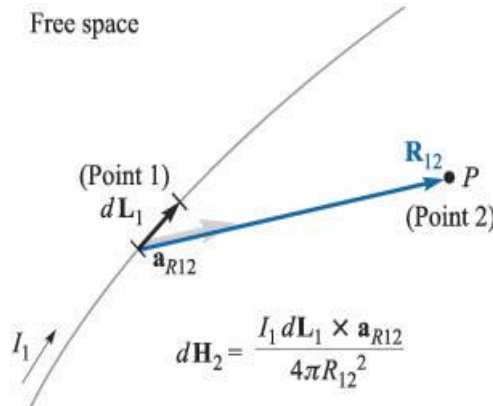
وتكون وحدة شدة المال المغناطيسي في النظام العالمي للوحدات أمبير/ متر (A/m). اذا اعتبرنا موقع العنصر التفاضلي النقطة 1 , بينما موقع النقطة المراد إيجاد المجال المغناطيسي عندها النقطة 2 , فإن الصورة الرياضية لهذا القانون تصبح كالتالي:

$$dH_2 = \frac{IdL_1 \times a_{R12}}{4\pi R_{12}^2} = \frac{IdL_1 \times R_{12}}{4\pi R_{12}^3} \quad (4.2)$$

حيث متجه الوحدة a_{R12} يكون متجها من العنصر التفاضلي الى موقع النقطة ويعرف رياضيا كالتالي:

$$a_{R12} = \frac{R_{12}}{|R_{12}|}$$

ونلاحظ التشابه في الصورة الرياضية بين قانون كولوم وقانون بيوت - سافارت من حيث ان كلايهما يعتبران من قوانين التربيع العكسي للمسافة بين المصدر ونقطة الملاحظة.



شكل (4.2) : شدة المجال المغناطيسي الناتج عن عنصر تفاضلي يمر به تيار كهربائي.

تطبيقات على قانون بايوت- سافارت:

مثال (4.1) المجال المغناطيسي الناتج عن سلك موصل لانتهائي الطول

لإيجاد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة ρ عن سلك لانتهائي الطول ويحمل تياراً شدته I (كما في شكل 4.3) , نستخدم الإحداثيات الأسطوانية حيث متجهات الوحدة كالتالي:

$$a_\rho = \hat{\rho}, \quad a_z = \hat{z}, \quad a_\phi = \hat{\phi}$$

من الشكل (4.3) نجد ان

$$\mathbf{R}_{12} = \rho\hat{\rho} - z\hat{z}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \hat{R}_{12} = (\rho\hat{\rho} - z\hat{z})/(\rho^2 + z^2)^{3/2}$$

$$dH_2 = \frac{Idz\hat{z} \times (\rho\hat{\rho} - z\hat{z})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

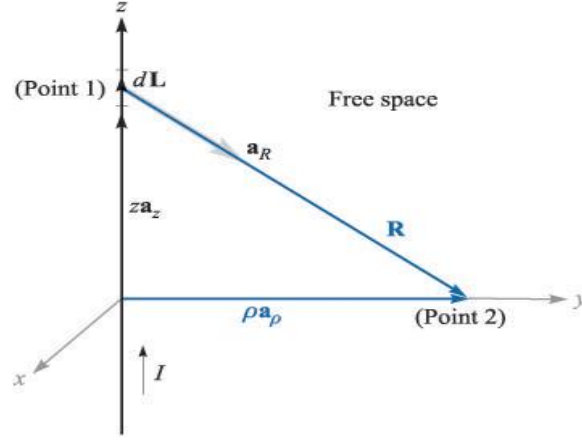
الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة يعطي ما يلي:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi}$$

باستخدام جداول التكامل نحصل على:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{z}{\rho^2 \sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

من هذه النتيجة نلاحظ ان شدة المجال المغناطيسي الناتج عن سلك لانتهائي الطول تتناسب عكسياً مع البعد العمودي عن محور السلك وتكون خطوط الفيض المغناطيسي على شكل دوائر يقع مركزها على محور السلك ويكون اتجاه المجال المغناطيسي باتجاه $\hat{\phi}$.



شكل (4.3) المجال المغناطيسي الناتج عن سلك لانهائي الطول ويحمل تيارك كهربى.

مثال (4.2) المجال المغناطيسي الناتج عن سلك محدد الطول يحمل تيار كهربى

نجد شدة المجال المغناطيسي بتطبيق قانون بايوت- سافارت مع تغيير حدود التكامل في معادلة (4.2) بحيث تكون من الطرف السفلي للسلك حيث $z = z_1$ الى الطرف العلوي للسلك حيث $z = z_2$ (لاحظ الشكل 4.4). اي ان

$$\mathbf{H}_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{Id\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{R}}_{12}}{R_{12}^2} = \int_{\rho \tan \alpha_1}^{\rho \tan \alpha_2} \frac{Idz \hat{\mathbf{z}} \times (\rho \hat{\mathbf{p}} - z \hat{\mathbf{z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

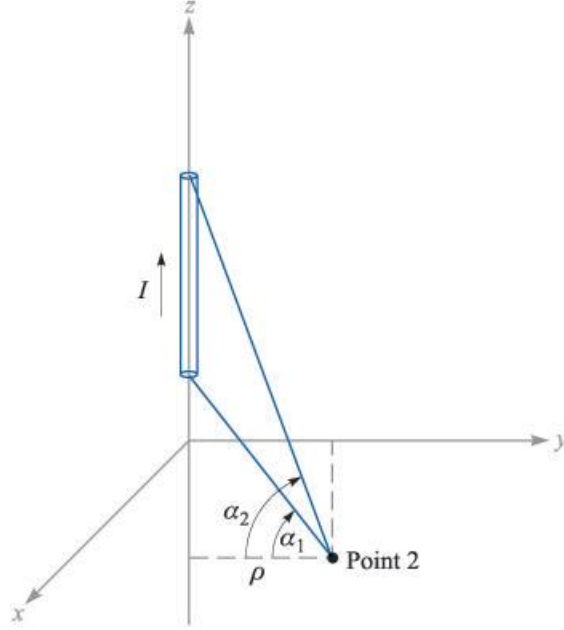
$$\mathbf{H}_2 = \int_{\rho \tan \alpha_1}^{\rho \tan \alpha_2} \frac{I \rho dz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi}$$

بإستخدام جداول التكامل نجد ان:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{Iz}{4\pi\rho} \left[\frac{z}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right]_{-\rho \tan \alpha_1}^{\rho \tan \alpha_2} \hat{\phi}$$

$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I}{4\pi\rho} \left[\frac{\tan \alpha_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_2}} - \frac{\tan \alpha_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1}} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\phi} \quad (4.3)$$



شكل (4.4) المجال المغناطيسي لسلك محدد الطول يحل تيارا كهربيا.

مثال (4.3)

جد شدة المجال المغناطيسي عند النقطة $P(0.4, 0.3, 0)$ الناتج عن سلكين نصف لانهايين semi-infinite , احدهما موضوعا على محور السينات والآخر موضوعا على محور الصادات (الشكل 4.5) , علما ان كليهما يحملان تيارا كهربيا شدته 8 امبير .

الحل:

• السلك على محور السينات:

$$\alpha_{1(x)} = -90^0, \alpha_{2(x)} = \tan^{-1} \left(\frac{0.4}{0.3} \right) = 53.1^0, \rho_x = 0.3,$$

$$\mathbf{H}_{2(x)} = \frac{8}{4\pi(0.3)} (\sin 53.1 + 1)(-\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{12}{\pi} \hat{\mathbf{z}}$$

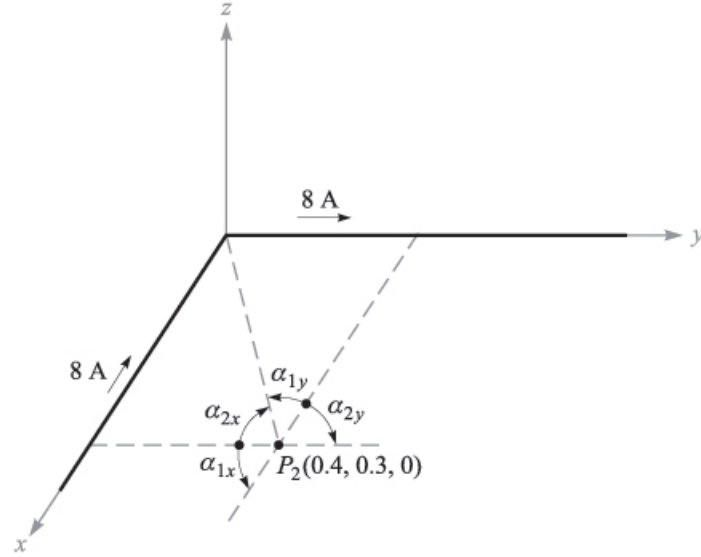
• السلك على محور الصادات:

$$\alpha_{1(y)} = -\tan^{-1} \left(\frac{0.3}{0.4} \right) = -36.9^0, \alpha_{2(y)} = 90^0, \rho_y = 0.4$$

$$\mathbf{H}_{2(y)} = \frac{8}{4\pi(0.4)} (1 + \sin 36.9^0) \hat{\mathbf{z}} = (-8/\pi) \hat{\mathbf{z}}$$

وعليه تكون شدة المجال الكلي الناتج عن السلكين كالتالي

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2(x)} + \mathbf{H}_{2(y)} = -\frac{20}{\pi} \hat{\mathbf{z}}$$



شكل (4.5): المجال المغناطيسي الناتج عن سلكين نصف لانهايين ومتعامدين.

مثال (4.4)

جد شدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي يمر في لفة دائرية نصف قطرها a عند نقطة تقع على محورها وعلى بعد Z من مركزها (كما في الشكل 4.6)؟

الحل

بسبب تماثل عنصر التيار التفاضلي في اللفة , فإن مركبات متجه شدة المجال المغناطيسي تتلاشى خلال التكامل على طول اللفة ما عدا تلك المركبات التي في اتجاه محور z , أي ان شدة المجال المغناطيسي المحصل والناتج عن تجميع هذه المركبات يكون كالتالي:

$$\mathbf{H} = H \hat{\mathbf{z}}$$

باستخدام قانون بيوت- سافارت (معادلة 4.2) نحصل على التالي:

$$d\mathbf{H}_z = \left[\frac{1}{4\pi} \frac{Id\mathbf{L} \times \mathbf{R}_{12}}{R^3} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

حيث

$$d\mathbf{L} = ad\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} , \mathbf{R}_{12} = z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad R = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{L} \times \mathbf{R}_{12} \cdot \hat{\mathbf{z}} = a d\phi \{ (\hat{\boldsymbol{\phi}} \times z\hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\mathbf{z}} - (\hat{\boldsymbol{\phi}} \times a\hat{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \} = a d\phi \{ 0 + a \} \\ = a^2 d\phi$$

اذن

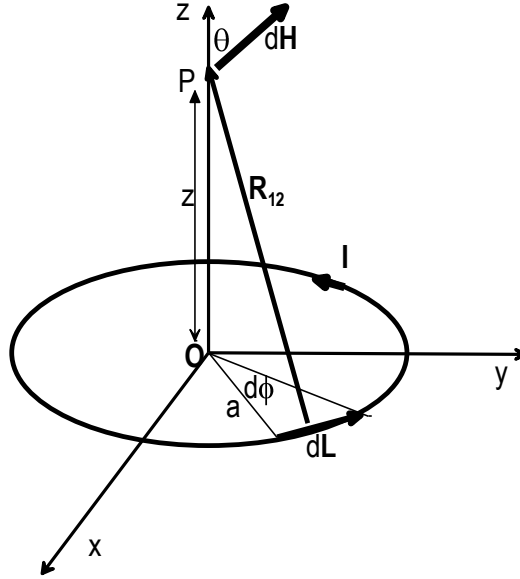
$$dH_z = \frac{Ia^2 d\phi}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$H = \int dH_z = \frac{Ia^2}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}} H_z = \hat{\mathbf{z}} \frac{Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.4)$$

هذه النتيجة تعطي شدة المجال المغناطيسي عند مركز اللفة , حيث

$$z = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}} \frac{I}{2a}$$



شكل (4.6) : شدة المجال المغناطيسي الناتج عن لفة دائرية تحمل تيار كهربائي.

مثال (4.5) المجال الغناطيسي على محور ملف حلزوني دائري يحمل تيارا كهربائيا.

لنفرض ان ملفا حازونيا دائريا عدد لفاته في وحدة الطول n_l ونصف قطر اللفة a , اذا كانت شدة التيار المار في اللفة I فإن شدة التيار المار في وحدة الطول تساوي K , حيث $K = n_l I$ (كما في الشكل 4.6). اذا اعتبرنا عنصر طولي من الملف dz فإن تيار هذا العنصر يساوي $K dz$.

نستخدم معادلة (4.3) لإيجاد شدة المجال المغناطيسي الناتج من عنصر التيار عند نقطة ما على محوره وخارج الملف وعلى بعد z من هذا العنصر كالتالي:

$$dH = dH_z = \frac{K dz}{2} \frac{a^2}{R^3}$$

من الشكل (4.6) نجد ان

$$\tan \theta = a/z \Rightarrow dz = -a d\theta / \sin^2 \theta$$

كما ان $R = a / \sin \theta$. وعليه تكون شدة المجال الناتج من العنصر كالتالي :

$$dH = -\frac{K}{2} \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^3 \theta}{a} = -\frac{K}{2} \sin \theta d\theta$$

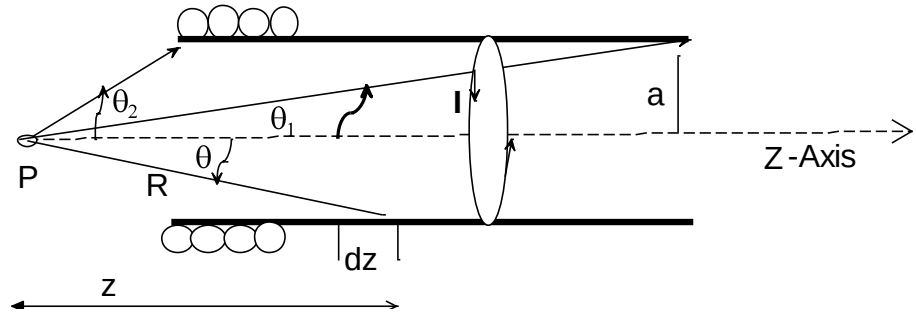
بالتكامل نحصل على

$$H = \int_{\theta_2}^{\theta_1} dH = \frac{K}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \hat{z}$$

* اذا كانت النقطة السابقة تقع عند مركز الملف الحلزوني (المنتصف) ،

$$\theta_2 = \pi - \theta_1, \cos \theta_2 = -\cos \theta_1 \rightarrow H = K \cos \theta_1 = n_l I \cos \theta_1$$

* اذا كان الملف طويل جدا فإن: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow H = K = n_l I$



شكل (4.6) ملف حلزوني دائري يحمل تيار كهربائي.

(4.3) الفيض المغناطيسي وكثافة الفيض المغناطيسي

Magnetic Flux and Magnetic Flux density .

افترض فارادي في دراسة للكهربية الساكنة ان خطوط المجال الكهربائي هي خطوط وهمية تبدأ من الشحنة الموجبة وتنتهي بالشحنة السالبة , فإنه يمكن تعميم ذلك على المجال

المغناطيسي واعتبار ان خطوط المجال المغناطيسي (الفيض المغناطيسي) بين قطبي المغناطيس الدائم تبدأ من القطب الشمالي وتنتهي بالقطب الجنوبي. وتعرف كثافة الفيض المغناطيسي (**B**) بأنها عدد خطوط المجال المغناطيسي التي تخترق وحدة المساحة العمودية مع هذا المجال (الشكل 4.7).

لنفرض ان مساحة A موضوعة في مجال مغناطيسي منتظم وبشكل متعامد مع خطوط المجال المغناطيسي , فإن عدد الخطوط الكلي (الفيض المغناطيسي) المخترقة لهذه المساحة تكون كالتالي:

$$\psi_m = BA$$

وتكون وحدة الفيض المغناطيسي في النظام العالمي للوحدات ويبر (**Wb**) , اما وحدة كثافة الفيض المغناطيسي هي ويبر/متر² (**Wb m⁻²**) او ما يعرف تسلا **Tesla** .

بينما نجد ان شدة المجال المغناطيسي (H) تعتمد على حركة الشحنات (التيار الكهربى في الموصل) ولا تعتمد على الوسط المحيط بها , ونلاحظ ان كثافة الفيض المغناطيسي (**B**) تعتمد على الوسط الذي تنتشر فيه خطوط المجال المغناطيسي , وعليه يمكن تعريف كثافة الفيض المغناطيسي بدلالة شدة المجال المغناطيسي على النحو التالي:

$$B = \mu H$$

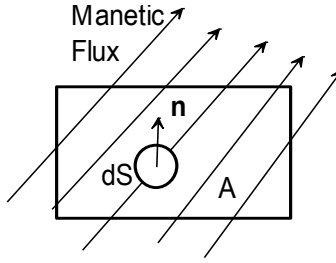
حيث μ تسمى النفوذية المغناطيسية للوسط . اذا كان الوسط فراغا" نرمز للنفوذية ب μ_0 ومقدارها $4\pi \times 10^{-7}$, ووحدتها هنري/متر (Henry/m) , حيث :

$$1 \text{ هنري} = 1 \text{ ويبر/متر}.$$

اما اذا كان المجال المغناطيسي غير منتظم, فإن الفيض المغناطيسي المخترق للمساحة يعطى كالتالي:

$$\psi_m = \iint B \cdot \hat{n} dS$$

حيث dS هو عنصر مساحة على السطح A , $\hat{n}$ متجه الوحدة العمودي على المساحة والخارج من السطح.



شكل (4.7) خطوط الفيض المغناطيسي خلال مساحة ما.

من خصائص الفيض المغناطيسي ان انابيب tubes انسياب خطوط الفيض المغناطيسي تكون متصلة Continuous بمعنى ان ليس لها بداية ونهاية (على العكس من خطوط الفيض الكهربائي التي تبدأ وتنتهي بالشحنات الكهربائية). وهذه الخاصية للفيض المغناطيسي تجعل من كثافة الفيض المغناطيسي تتخذ الشكل اللولبي solenoidal , بمعنى عدد انابيب الجريان التي تدخل حجما ما تساوي عددها المغادر لهذا الحجم. وعليه فإن

$$\oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

وتعتبر هذه العلاقة بمثابة قانون جاوس في المغناطيسية الساكنة , وتؤدي بإستخدام نظرية التباعد الى :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

وهذه العلاقة هي احدى معادلات ماكسويل التي سيرد تناولها لاحقا .

مثال (4.6)

جد الفيض المغناطيسي المخترق للسطح المحدد بالإحداثيات الإسطوانية التالية:

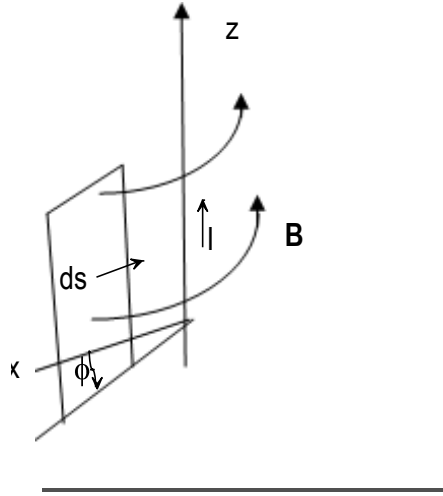
$\phi = \frac{\pi}{4}, 0.01 < r < 0.05 \text{ m}, 0 < z < 2 \text{ m}$, اذا كان المجال المغناطيسي ناتجا عن تيار كهربائي مارا في سلك باتجاه محور z وشدته 2.50 A ؟

الحل:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 I / 2\pi r \hat{\mathbf{z}}$$

$$dS = dr dz \hat{\phi}$$

$$\psi = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot dr dz \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{0.05}{0.01} = 1.61 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$



شكل (4.8) الفيض المغناطيسي حول سلك يمر به تيار كهربائي.

(4.4) التأثير الميكانيكي للمجال المغناطيسي على موصل يحمل تيار كهربائي.

وجد لورنتز Lorentz بالتجربة العملية انه اذا تحرك عنصر شحني dQ بسرعة $\mathbf{v}$ في منطقة مجال مغناطيسي منتظم , حيث كثافة الفيض المغناطيسي $\mathbf{B}$, فإن القوة المؤثرة عليه تعطى كالتالي:

$$d\mathbf{F} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

لنفرض ان الكثافة الحجمية للشحنة ρ_v , فإن :

$$dQ = \rho_v dv$$

وعليه تصبح القوة المؤثرة على العنصر الشحني كالتالي:

$$d\mathbf{F} = \rho_v dv \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.5)$$

حيث تعرف شدة التيار الكهربائي على انها المعدل الزمني لحركة الشحنة المارة خلال مستوى معين , نعبر عن ذلك رياضيا كما يلي

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

وعند الإهتمام بحركة الشحنة اثناء مرورها بنقطة ما فإننا نتعامل مع مفهوم كثافة التيار Current density ($\mathbf{J}$) وهي كمية متجهة وتكون باتجاه مرور التيار في الموصل, وتعرف رياضيا كالتالي:

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S$$

حيث ΔI عنصر التيار التفاضلي المار خلال عنصر مساحة ΔS عموديا على اتجاه مروره . وبالتكامل نجد ان شدة التيار المار في الموصل كالتالي

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

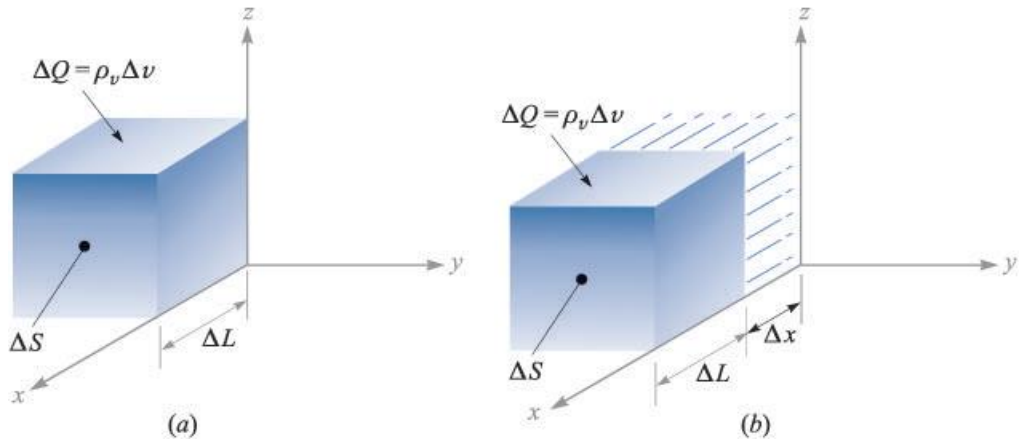
كما يمكن تعريف كثافة التيار بدلالة سرعة كثافة الشحنة الحجمية , كما يلي

حيث ان

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta S \Delta L$$

وعلى فرض ان عنصر الشحنة يتحرك في اتجاه محور السينات مسافة Δx عبر المستوى العمودي $(\Delta y \Delta z)$ في فترة زمنية Δt (الشكل 4.9) فإن

$$\Delta I = \Delta Q / \Delta t = \rho_v \Delta S (\Delta x / \Delta t) = \rho_v \Delta S v_x$$



شكل (4.9) حركة شحنة كهربائية خلال موصل .

بمقارنة معدتي عنصر التيار نجد ان كثافة التيار العمودية على عنصر السطح هي

$$J_N = \rho_v v_x$$

اما اذا تحركت الشحنات بسرعة $\mathbf{v}$ خلال الموصل فإن:

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

باستخدام هذه العلاقة نكتب معادلة (4.4) بدلالة كثافة الشحنة السطحية كالتالي:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv$$

$$Jdv = \mathbf{J}(\Delta S)(\Delta L) = I d\mathbf{L} \quad \text{وحيث ان:}$$

وعليه تصبح القوة المؤثرة على عنصر طولي من موصل يحمل تيارا كهربيا على الصورة التالية:

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}}$$

وبالتكامل نجد ان مقدار القوة المؤثرة على سلك طوله L ويحمل تيار كهربى شدته I اذا وضع في منطقة ذات كثافة فيض مغناطيسي $\mathbf{B}$ تكون كالتالي:

$$F = BIL \sin \theta$$

θ = الزاوية بين متجه كثافة الفيض المغناطيسي واتجاه مرور التيار في الموصل .

مثال (4.7)

جد القوة المؤثرة على لفة سلك مربعة الشكل تحمل تيارا كهربيا شدته 2 mA (كما في شكل 4.10) وموضوعة في المستوى $z=0$, اذا كان المجال المغناطيسي المخترق للفة ناتجا عن سلك يمر به تيار كهربى شدته 15 A في اتجاه محور y ؟
الحل:

$$H = I/2\pi x \hat{z} = 15/2\pi x \hat{z}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = (4\pi \times 10^{-7}) \mathbf{H} = 3 \times 10^{-6} / x \hat{z}$$

باستخدام قانون القوة , مع تبديل المتجهات في الضرب الاتجاهي للتسهيل فقط , و نبدا على المسار المغلق من جهة اليسار كما في الشكل المبين لنحصل على ما يلي:

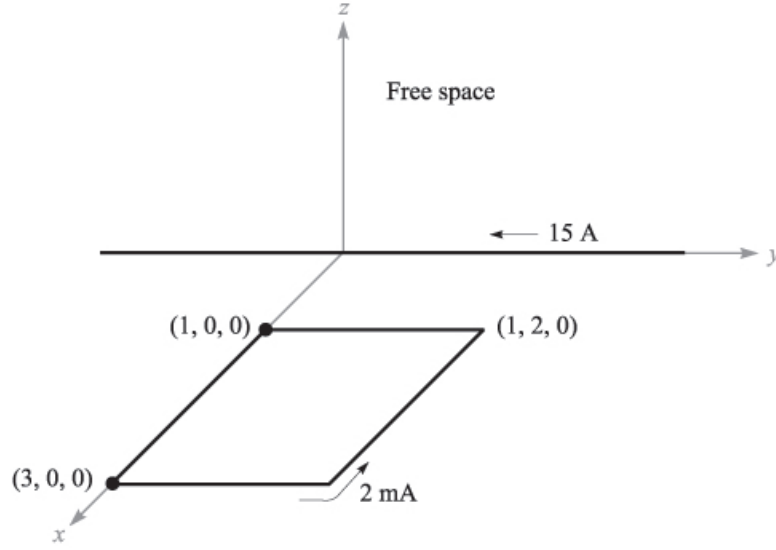
$$F = I \oint d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

$$F = -2 \times 10 \times 3 \times 10 [\int_{x=1}^3 \frac{\hat{z}}{x} \times \hat{x} dx + \int_{y=0}^2 \frac{\hat{z}}{3} \times \hat{y} dy$$

$$+ \int_{x=3}^1 \frac{\hat{z}}{x} \times \hat{x} dx + \int_{y=2}^0 \frac{\hat{z}}{1} \times \hat{y} dy]$$

$$= -6 \times 10^{-9} [\ln x|_1^3 \hat{y} + \left(\frac{1}{3}\right) y|_0^2 + \ln x|_3^1 \hat{y} + (-\hat{x}) y|_2^0]$$

$$\mathbf{F} = -8 \times 10^{-9} \hat{x} \text{ N}$$



شكل (4.10) لفة مربعة تحمل تيار كهربائي موضوعة في مجال مغناطيسي.

(4.5) العزم المغناطيسي *Magnetic Moment*

في البند السابق، وجدنا القوة المؤثرة على عنصر تيار تفاضلي، فإذا كان هذا العنصر جزء من دائرة كهربائية مغلقة، فإننا يمكن التعبير عن هذه القوة كالتالي:

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

إذا كانت كثافة الفيض المغناطيسي المخترق للدائرة منتظمة فإنه يمكن اخراج $\mathbf{B}$ من تحت إشارة التكامل لتصبح هذه القوة على النحو التالي:

$$\mathbf{F} = -I \mathbf{B} \times \oint d\mathbf{L} = 0$$

ويعزى تلاشي القوة المؤثرة على الدائرة المغلقة الى ان محصلة الجمع الإتجاهي لعناصر التيار يساوي صفراً ($\oint d\mathbf{L} = 0$).

المعروف في علم الميكانيكا انه قد تكون محصلة القوى المؤثرة على جسم ما صفراً ولكن محصلة العزم (*Moment or Torque*) المؤثر عليه لا تساوي الصفر. اذا فرضنا ان الدائرة صلبة (*Rigid*) ومثبتة عند المركز (كما في الشكل 4.11) فإن عزوم القوى تعمل على تدوير هذه الدائرة.

لنفرض ان كثافة الفيض المغناطيسي عند مركز الدائرة B_0 وتقع في المستوى yz , تكون القوة المؤثرة على الجانب 1 كالتالي:

$$d\mathbf{F}_1 = Idx(\hat{x} \times \mathbf{B}_0) = Idx[B_{0y}\hat{z} - B_{0z}\hat{y}]$$

وحيث متجه الموقع لعنصر التيار عند منتصف الضلع 1 هو $\mathbf{R}_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) dy \hat{y}$, فإن عزم القوة حول المركز هو

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) dy \hat{y} \times Idx[B_{0y}\hat{z} - B_{0z}\hat{y}] \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) dx dy IB_{0y} \hat{x} \end{aligned}$$

وبالمثل يكون العزم المغناطيسي على الجانب المقابل (3) هو

$$d\mathbf{T}_3 = \left(-\frac{1}{2}\right) dx dy IB_{0y} \hat{x}$$

وعليه تكون محصلة العزمين على هذين الجانبين

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -dx dy IB_{0y} \hat{x}$$

وبنفس الطريقة نجد ان محلة العزمين على الجانبين (2,4) كالتالي:

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = dx dy IB_{0x} \hat{y}$$

اذن يكون العزم الكلي المؤثر على الدائرة حول المركز كالتالي:

$$d\mathbf{T} = Idx dy [B_{0x}\hat{y} - B_{0y}\hat{x}] = Idx dy (\hat{z} \times \mathbf{B}_0)$$

وحيث ان عنصر المساحة في الدائرة الكهربية $dS = dx dy$ والعمودي على السطح $\hat{n} = \hat{z}$, لذلك يمكن كتابة العزم المؤثر على تيار العنصر كالتالي

$$d\mathbf{T} = Id\mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

حبث $\mathbf{B} =$ كثافة الفيض المغناطيسي عند مركز الدائرة.

تعريف: يسمى حاصل ضرب شدة تيار العنصر (تيار الدائرة الكهربية) في عنصر المساحة الإتجاهي بعزم ثنائي القطب المغناطيسي magnetic dipole moment , ورمزه $\mathbf{dm}$, اي

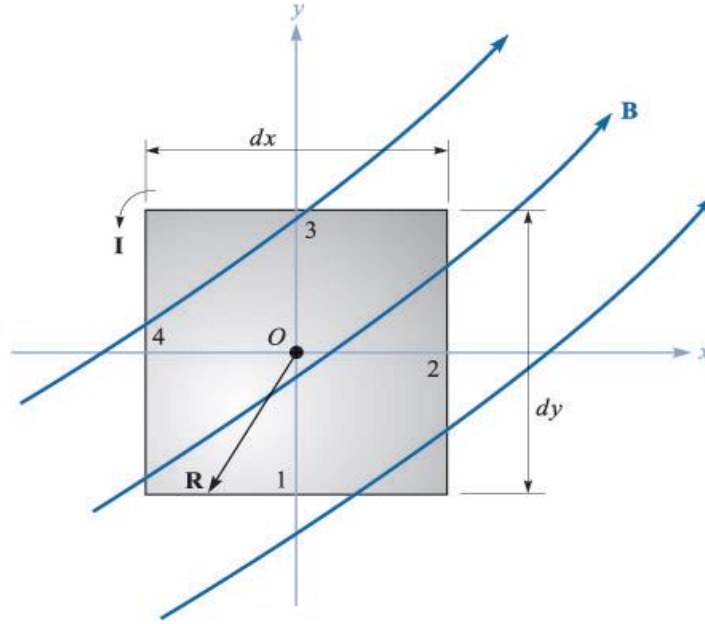
$$d\mathbf{m} = I d\mathbf{S} = I dS \hat{n}$$

وعليه ,

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

إذا كانت كثافة الفيض المغناطيسي المخترق للدائرة منتظمة , فإن التكامل على الدائرة يعطي محصلة العزم المؤثر على هذه الدائرة الكهربية على النحو التالي

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.5)$$



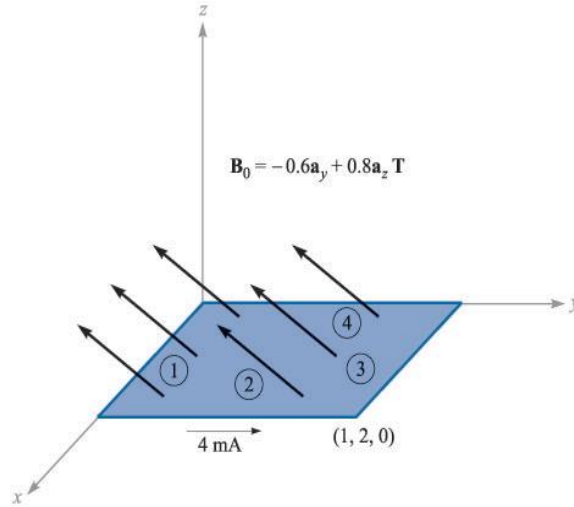
شكل (4.11): لفة مستطيلة تحمل تيارا في مجال مغناطيسي.

مثال (4.8)

وضعت لفة مستطيلة الشكل ابعادها (1 X 2) في مجال مغناطيسي منتظم) كما في الشكل (4.11) كثافة فيضه عند مركز اللفة كالتالي:

$$\mathbf{B}_0 = -0.6\hat{y} + 0.8\hat{z} \text{ Tesla}$$

فإذا كانت اللفة تحمل تيارا كهربيا شدته 4 mA , بحيث لا يعطي مجالا يؤثر على المجال المغناطيسي عند المركز . جد العزم المغناطيسي المؤثر على هذه اللفة؟



شكل (4.12): العزم المغناطيسي على لفة مستطيلة.

الحل:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= I \mathbf{S} \times \mathbf{B}_0 = 4 \times 10^{-3} [(2)\hat{\mathbf{z}} \times (-0.6\hat{\mathbf{y}} + 0.8\hat{\mathbf{z}})] \\ &= 4.8 \times 10^{-3} \hat{\mathbf{x}} \text{ N.m} \end{aligned}$$

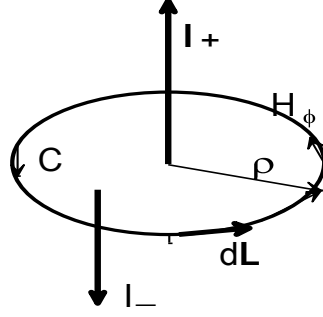
(4.6) قانون أمبير الدائري Ampere's Circital Law

استطاع أمبير ان يضع قانونا رياضيا لإيجاد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة معينة والناتج عن التوزيعات التيارية المتماثلة (سلك طويل, اسطوانة دائرية قائمة, كوابل محورية.....), وهذا القانون يماثل قانون جاوس والمستخدم لإيجاد شدة المجال الكهربائي للتوزيعات الشحنية المتماثلة.

وينص قانو أمبير على ما يلي: التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي عند نقطة ما حول مسار مغلق يمر بهذه النقطة يساوي المجموع الجبري للتيارات المخترقة لهذا المسار. وتكون الصيغة الرياضية لقانون أمبير كالتالي:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{enclosed}} \quad (4.6)$$

عند تطبيق هذا القانون نعتبر الحركة على المسار المغلق باتجاه ضد عقارب الساعة, وتكون اشارة التيار الكهربائي المخترق للسطح المحاط بالمسار موجبة (او سالبة) اذا كان اتجاه التيار موازيا (او معاكسا) لإتجاه تقدم البرغي الملفوف باتجاه الحركة على المسار. (كما في شكل 4.13).



شكل (4.13) قانون امبير الدائري

لنفرض ان تيارا كهربيا يمر في سلك موصل باتجاه محور z , فيكون اتجاه شدة المجال المغناطيسي في اتجاه $\hat{\phi}$, ويعتمد فقط على ρ , ونعتبر العنصر الطولي على المسار في اتجاه $\hat{\phi}$ وعليه يعطي هذا القانون ما يلي:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_{\phi} \rho d\phi = H_{\phi} \rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\rho H_{\phi} = I$$

او

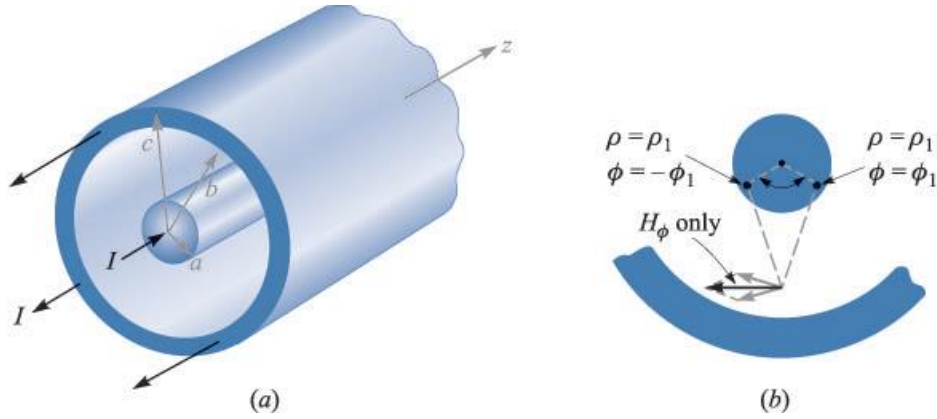
$$H_{\phi} = I/2\pi\rho$$

وهذه العلاقة تفسر النتائج العملية التي توصل اليها امبير عند دراسته لشدة المجال المغناطيسي لسلك يمر به تيار كهربى وهي نفس العلاقة السابقة التي حصلنا عليها باستخدام قانون بيوت- سافارت .

مثال (4.9)

خط كابلي محوري لا نهائي مكون من اسطوانة داخلية نصف قطرها a واسطوانة خارجية سمكة نصف قطرها الداخلي والخارجي c , b على الترتيب (كما في الشكل 4.15) حيث : $(a < b < c)$, اذا كانت شدة التيار الكهربى المار في الاسطوانة الداخلية I وفي الاسطوانة الخارجية $(-I)$ وكان التيار منتظما , جد باستخدام قانون امبير شدة المجال المغناطيسي في المناطق التالية:

$$(1) \rho < a , (2) a < \rho < b , (3) b < \rho < c , (4) \rho > c$$



شكل (4.15) : كابل محوري يمر به تيار كهربائي.

الحل:

بسبب التماثل في الأسطوانة تتلشى مركبات شدة المجال المغناطيسي في اتجاه محور Z ,
وتبقى فقط المركبات في اتجاه $\hat{\phi}$ (H_ϕ).

$$(1) \quad \rho < a :$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \Rightarrow (2\pi\rho)H_\phi = I\rho^2/a^2 \Rightarrow H_\phi = I\rho/2\pi a^2$$

$$(2) \quad a < \rho < b :$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \Rightarrow (2\pi\rho)H_\phi = I \Rightarrow H_\phi = I/2\pi\rho$$

$$(3) \quad b < \rho < c :$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{enc} \Rightarrow (2\pi\rho)H_\phi = I - I(\rho^2 - b^2)/(c^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow H_\phi = (I/2\pi\rho) \left[\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right]$$

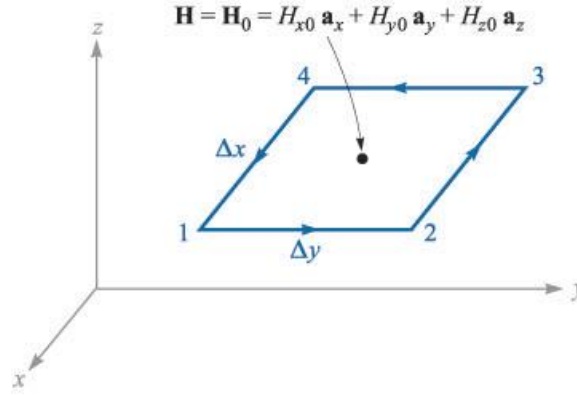
$$(4) \quad \rho > c :$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{enc} = I - I = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$$

(4.7) التدوير Curl

لنفرض مساراً مغلقاً في المستوى xy على شكل مستطيل صغير بأبعاد $\Delta x, \Delta y$ (كما في الشكل 4.16) , ولنفرض ان شدة المجال المغناطيسي عند مركز المستطيل H_0 , حيث

$$\mathbf{H} = H_{x0}\hat{x} + H_{y0}\hat{y} + H_{z0}\hat{z} :$$



شكل (4.16) التكامل الخطي على مسار مغلق.

لإيجاد التكامل الخطي على المسار المغلق , نعتبر ان هذا التكامل هو تجميع لحاصل ضرب شدة المجال المغناطيسي في عناصر التيار الطولي على كل اضلاع المستطيل الأربعة , اي:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = (\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} + (\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{2-3} + (\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{3-4} + (\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{4-1}$$

حيث :

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y$$

نستخدم مفكوك تايلور لإيجاد شدة المجال المغناطيسي عند منتصف الضلع كالتالي:

$$H_{y,1-2} \approx H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \Delta x \right)$$

اذن

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = (H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x) \Delta y$$

وبنفس الطريقة نجد مساهمة الضلع 2-3 وتكون على النحو التالي:

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{2-3} = -(H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y) \Delta x$$

وهكذا نجد مساهمة باقي اضلاع المستطيل , وبعد تجميع الحدود نحصل على الصورة التالية للتكامل الخطي:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y$$

اذا فرضنا ان شدة التيار المختركة لهذا المستطيل باتجاه محور z , حيث

$$I = J_z (\Delta x \Delta y)$$

باستخدام قانون امبير الدائري , نجد ان:

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] = J_z$$

بتصغير مساحة المسار المغلق الى درجة متناهية بحيث يمكن اعتبار نهاية المقدار كالتالي:

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] = J_z$$

وهذه العلاقة تبين ان نهاية التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي على المسار المغلق لكل وحدة مساحة عمودية على مستوى هذا المسار تساوي شدة التيار المخترق للمسار لوحدة المساحة العمودية.

اما في حالة كون مستوى المسار yz او zx , فإن

$$\lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta y} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right] = J_x$$

$$\lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] = J_y$$

وهذه العلاقات تعبر رياضيا عن ما يسمى تدوير المتجه Curl of Vector , وهي تمثل خارج قسمة التكامل الخطي للمتجه حول مسار متناهي في الصغر في المستوى العمودي على هذه المركبة على المساحة المحصورة بهذا المسار.

ويعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$(\text{curl } \mathbf{H})_N = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_N}$$

في الإحداثيات الديكارتية , الصورة الرياضية لتدوير $\mathbf{H}$ هي:

$$\text{curl } \mathbf{H} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right] \hat{x} + \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \hat{y} + \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] \hat{z}$$

والرمز الرياضي للتدوير اي متجه هو: $\text{curl } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H}$

ويعبر عن تدوير المتجه بدلالة المحدد كالتالي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

مما سبق نجد ان تدوير $\mathbf{H}$ يساوي كثافة التيار السطحية , اي

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.7)$$

هذه المعادلة تعرف بإسم **قانون أمبير التفاضلي** عند نقطة ما , وفيما بعد عرفت هذه المعادلة بإحدى معادلات ماكسويل (المعادلة الثانية من معادلات ماكسويل).

مثال(4.10):

إذا كانت شدة المجال المغناطيسي كالتالي:

$$\mathbf{H} = x^2 z \hat{y} - y^2 x \hat{z}$$

جد كثافة التيار عند النقطة $P(2,3,4)$ ؟

الحل:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 z & -y^2 x \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(-2yx - x^2) - y^2(-\hat{y}) + \hat{z}(2xz)$$

$$= \hat{x}(-16) + 9\hat{y} + 16\hat{z}$$

(4.8) الجهد المغناطيسي العددي و الإتجاهي

The Scalar and Vector Magnetic Potential

• الجهد المغناطيسي العددي :

وجدنا في الفصول السابقة انه من الممكن حل كثير من المسائل الكهروستاتيكية باستخدام دالة الجهد الكهربائي , فهل من الممكن تعريف دالة عددية في حالة التوزيعات للتيار الكهربائي المولدة للمجالات المغناطيسية ؟

من معادلة (4.6) نجد انه تحت شرط $(J = 0)$ فإن $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, من نظريات المتجهات (إذا كان تدوير أي متجه مساويا للصفر فإن ذلك المتجه يعبر عنه بسالب تحدر دالة عددية) . وعليه

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (J = 0) \quad (4.7)$$

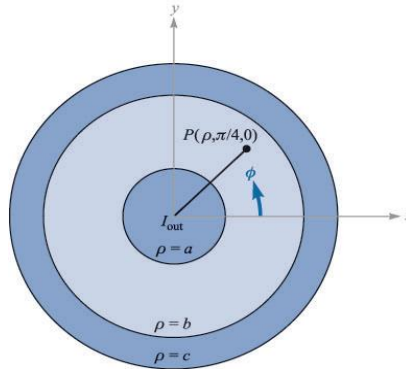
حيث V_m تسمى دالة الجهد المغناطيسي العددي .

وبناء عليه , في حالة المسائل المغناطيسية التي تحوي على موصلات ذات تيارات كهربائية متناهية في الصغر , يمكن استخدام معادلة (4.7). وتحت الشرط المذكور تحقق دالة الجهد المغناطيسي العددي معادلة لابلاس , أي

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V_m = 0$$

مثال (4.11)

جد دالة الجهد المغناطيسي العددي عند نقطة ما بين قشريتي كابل محوري متحدتين في المركز ونصف القطر الداخلي والخارجي لهما a, b على الترتيب حيث $(b > a)$ كما في الشكل (4.17) ؟



شكل (4.17): الجهد المغناطيسي العددي بين قشريتي كابل محوري يمر به تيار كهربائي.

الحل:

شدة المجال المغناطيسي بين القشرتين هو:

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} , \quad a < \rho < b$$

$$-\nabla V_m = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = \frac{I}{2\pi}$$

يعطي التكامل المباشر ما يلي:

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi + c$$

عند اعتبار $\phi = 0$ كنقطة مرجعية فإن $c = 0$.

جد قيم دالة الجهد المغناطيسي العددي عند النقطة p حيث $\phi = \pi/4$ ؟

نستخدم النتيجة السابقة ونتحرك باتجاه ضد عقارب الساعة في مسارات دائرية , حيث المسار الأول يعطي $V_m = -I$, وعليه عند النقطة p , حيث قيم ϕ تتغير على النحو: $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots$ تكون قيم دالة الجهد المغناطيسي بالصورة العامة على النحو:

$$V_{mp} = \frac{I}{2\pi} \left(2n - \frac{1}{4} \right) \pi = I \left(n - \frac{1}{8} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

اما فرق الجهد بين نقطتين عبر المجال المغناطيسي فيمكن ايجاده, بالمقارنة مع حالة المجال الكهربائي , كما يلي

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} = 0 \rightarrow V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} \quad \text{حيث}$$

ولكن في حالة المجال المغناطيسي الأمر يختلف حيث

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \rightarrow \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

وعليه اذا لم يوجد تيار كهربى يخترق المسار المغلق فإنه يمكن تحديد قيم منفردة لدالة الجهد المغناطيسي العددي , ويكون فرق الجهد المغناطيسي بين نقطتين عبر مسار محدد على النحو:

$V_{m,ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$, من هنا نلاحظ ان الجهد المغناطيسي العددي غير محافظ non conservative (اي ان قيمة التكامل الخطي تتغير وفق المسار بعكس حالة فرق الجهد الكهربى حيث لا تتوقف قيمة التكامل على المسار بين النقطتين عبر المجال الكهربى)

• الجهد المغناطيسي الإتجاهي Magnetic Vector Potential

نعلم من قواعد المتجهات انه اذا كان تباعد اى متجه ما يساوي صفرا فإنه يمكن التعبير عن هذا المتجه بدلالة تدوير متجه آخر , وذلك إعتمادا على العلاقة الرياضية التالية:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

وحيث ان تباعد كثافة الفيض المغناطيسي تساوي صفر , فإنه يمكن ان نجد علاقة رياضية كالتالى:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.8)$$

حيث $\mathbf{A}$ تعرف بدالة الجهد المغناطيسي الإتجاهي. ويستفاد من هذه الدالة في دراسة الإشعاع الكهرومغناطيسي الناتج عن الهوائيات, ودراسة تسرب الإشعاع من خطوط النقل (الإرسال). ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{بما ان}$$

وبإخذ تدوير الطرفين نحصل على ما يلي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

او

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

باستخدام متطابقة تدوير تدوير المتجه نجد ان :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

على فرض ان هذا المتجه يحقق الشرط $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, عندها نحصل على ما يلي:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.9)$$

وعليه تكون مكونات معادلة (4.9) في الإحداثيات الكارتيزية كالتالي:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

وكل مكون يمثل معادلة والتي يكون حلها كالتالي:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{Vol} \frac{J_x dv}{R}, \dots$$

وعليه تكون الصورة الرياضية للجهد المغناطيسي الإتجاهي كالتالي:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{Vol} \frac{\mathbf{J} dv}{R} \quad (4.10)$$

حيث R بعد نقطة الملاحظة عن العنصر الحجمي في التوزيع الحجمي للتيار الكهربائي.

باستخدام علاقة التحويل التالية: $J dv = I dL$, تصبح معادلة (4.10) على النحو التالي:

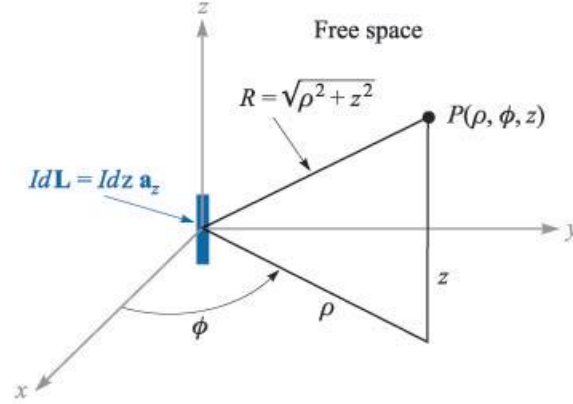
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{L}}{R} \quad (4.11)$$

اما الصورة التفاضلية لمعادلة (4.10) تكون على الصورة التالية:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R}$$

مثال (4.12)

جد الجهد المغناطيسي الإتجاهي عند نقطة تبعد مسافة ρ عن محور سلك طوله $2L$ ويحمل تيار كهربائي شدته I موضوع عند نقطة الأصل وفي اتجاه محور Z الموجب (كما في الشكل (4.18) ؟



شكل (4.18): الجهد المغناطيسي الإتجاهي عند نقطة في الفراغ والناتج عن سلك يمر به تيار كهربائي.

الحل:

$$d\vec{L} = \hat{z}dz$$

نستخدم الصورة التفاضلية للجهد المغناطيسي الإتجاهي وبدلالة الإحداثيات الإسطوانية كالتالي:

$$dA_z = \frac{\mu I dz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad dA_\phi = 0, \quad dA_\rho = 0$$

نلاحظ ان اتجاه الجهد المغناطيسي يكون باتجاه التيار الكهربائي (اي يوازي $d\vec{L}$).

وعليه فإن الجهد المغناطيسي الإتجاهي يعطى بالتكامل كالتالي:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{Idz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu I}{2\pi} [\ln(z + \sqrt{(z^2 + \rho^2)})]_0^L \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left[\frac{L}{\rho} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

في حالة $\rho \ll L$ فإن نشر الجذر باستخدام مفكوك تايلور يعطي التقريب لقيمة الجهد المغناطيسي على النحو

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2L}{\rho}\right)$$

إذن

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2L}{\rho}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

لإيجاد شدة المجال المغناطيسي باستخدام الجهد المغناطيسي الإتجاهي نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} \\ &= \frac{I \rho dz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi} \end{aligned}$$

وهذه النتيجة هي نفس قانون بيوت- سافارت . وبالتكامل المباشر نجد ان

$$\mathbf{H} = -\hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{L + \sqrt{\rho^2 + L^2}} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} - \frac{1}{\rho} \right)$$

إذا كان $\frac{L}{\rho} \gg 1$ فإن شدة المجال المغناطيسي تؤول الى

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

وهذه نفس النتيجة التي وجدت باستخدام قانون امبير الدائري في حالة سلك يمر به تيار كهربائي .

مثال (4.13):

جد باستخدام الجهد المغناطيسي الإتجاهي شدة المجال المغناطيسي عند نقطة ما بين قشريتي كابل محوري , حيث $a < \rho < b$ وتحمل القشرة الداخلية تيارا شدته I ؟

الحل:

حيث لا يوجد تيار بين القشرتين فإن

$$\nabla^2 A = \mu_0 J = 0$$

وحيث ان اتجاه التيار الكهربائي في اتجاه محور z فإنه يكون للجهد المغناطيسي مركبة واحدة فقط وباتجاه هذا المحور.

وعليه

$$\nabla^2 A_z = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

بسبب التماثل في المسألة فإن A_z تكون دالة للاحداثي ρ , وعليه نجد ان

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = 0$$

وبالتكامل المباشر نحصل على

$$A_z = c_1 \ln \rho + c_2$$

لتحديد قيم الثوابت نعتمد على فرض ان $A_z = 0$ عند $\rho = b$ ونحصل على:

$$c_2 = -c_1 \ln b$$

وعليه فإن

$$A_z = c_1 \ln\left(\frac{\rho}{b}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi} = -\frac{c_1}{\rho} \hat{\phi} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{c_1}{\rho} \hat{\phi}$$

للايجاد الثابت c_1 نتبع ما يلي:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-c_1 \hat{\phi}}{\mu_0 \rho} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} = I \Rightarrow c_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

وعليه نحصل على ما يلي:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho}$$

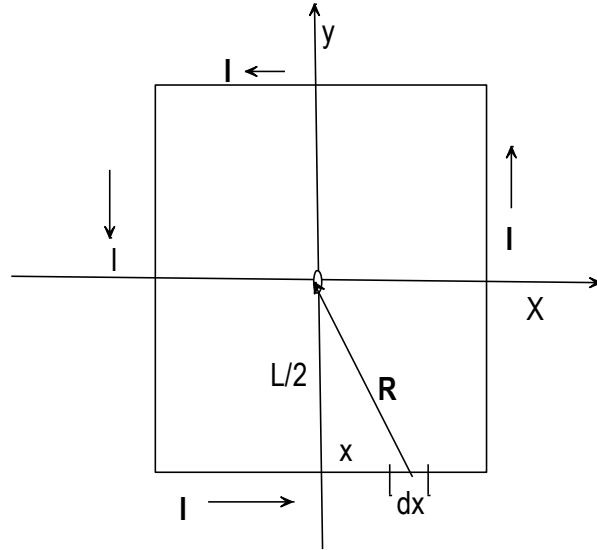
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

تمارين

(4.1) يحمل سلك موصل طويل جدا تيارا كهربيا شدته $8mA$, اذا كان السلك باتجاه محور z جد شدة المجال المغناطيسي عند النقطة (2,3,4)؟

(4.2) لفة دائرية من سلك موصل نصف قطرها a وتحمل تيار كهربيا شدته I , اذا كان مستوى اللفة هو $z = 0$, جد شدة المجال المغناطيسي عند مركزها؟

(4.3) جد شدة المجال المغناطيسي عند مركز لفة على شكل مربع طول ضلعه L ويمر بها تيار كهربيا شدته I في اتجاه مضاد لعقارب الساعة (كما في شكل 4.19) ؟



شكل (4.19) شدة المجال المغناطيسي عند مركز مربع يمر به تيار كهربيا.

(4.4) جد شدة المجال المغناطيسي عند مركز مثلث متساوي الأضلاع والمكون من ثلاثة اسلاك موصلة ويمر بها تيار كهربيا شدته I وطول كل ضلع L ؟

(4.5) سلكان موصلان مضعان على محور z بحيث يمتد الأول $-\infty < z < -a$, والثاني يمتد $a < z < \infty$, اذا كانا يحملان تيار كهربيا شدته I جد باستخدام قانون بايوت- سافارت شدة المجال المغناطيسي الناتج عند نقطة تبعد عن محور السلكتين مسافة ρ , حيث $z = 0$ ؟

(4.6) وضع قرص نصف قطره a في مستوى xy , اذا كانت كثافة الشحنة السطحية σ موزعة بانتظام على السطح وكان القرص يدور بسرعة زاوية ω حول محور z , جد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة ما على محور z المار بمركز القرص؟

(4.7) اذا كانت كثافة التيار المخترق للمنطقة المحصورة : $0 < r < 0.5$ كالتالي:

$$J = 4.5e^{-2r} \hat{z}$$

استخدم قانون امبير لإيجاد شدة المجال المغناطيسي الناتج عن التيار الكهربى في المناطق التالية :

- $r < 0.5$
- $r > 0.5$

(4.8) موصل كروي نصف قطره $r_0 = 10^{-2} \text{ m}$, جد شدة التيار الكهربى المار في هذا الموصل اللازم حتى ينتج داخل الموصل مجال مغناطيسى شدته كالتالى

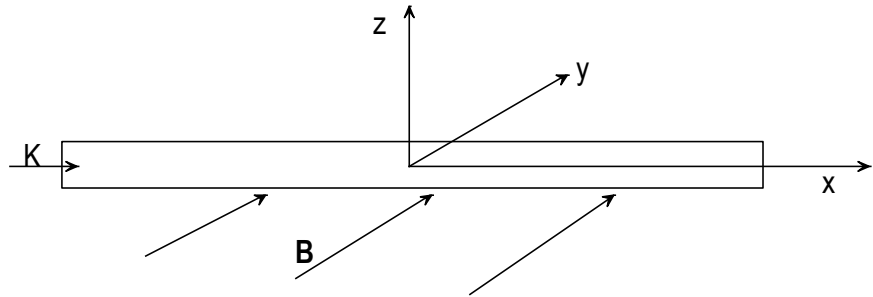
$$H = \frac{10^4}{r} \left(\frac{\sin ar}{a^2} - \frac{r}{a} \cos ar \right) \hat{\phi} \quad \text{حيث } a = \pi/2r_0$$

(4.9) جد الفيض المغناطيسى المخترق للسطح المحدد كالتالى

$0 \leq z \leq 1 \text{ m}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, حيث ان شدة المجال المغناطيسى عند نقاط هذا السطح هي:

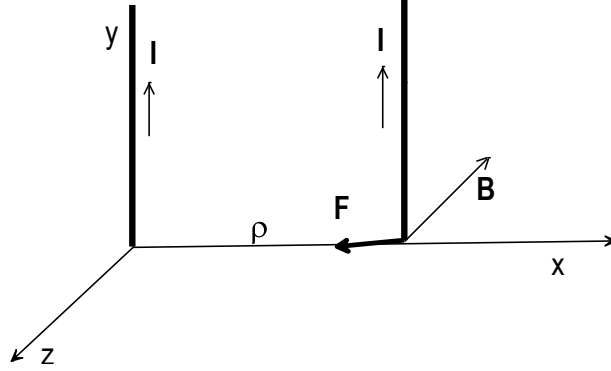
$$H = \frac{2.39 \times 10^6}{r} \cos \phi \hat{r}$$

(4.10) شريط موصل طويل جدا وعرضه 2 cm يمر به تيار كهربى شدته $I = 15 \text{ A}$ كما في الشكل (4.20) , جد القوة لكل وحدة طول المؤثرة على الشريط اذا وضع في مجال مغناطيسى كثافته فيضه $B = 0.2 \hat{y}$ ؟



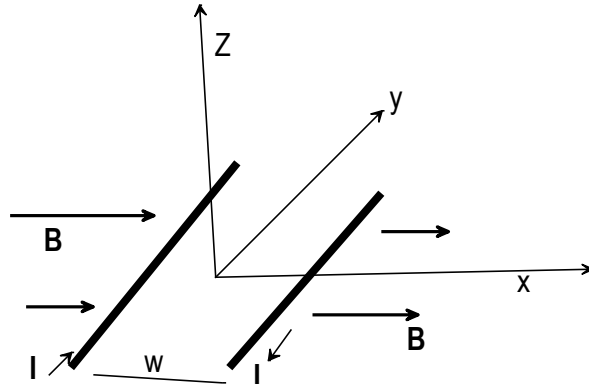
شكل (4.20) : شريط موصل في مجال مغناطيسى ويمر به تيار كهربى.

(4.11) جد القوة المتبادلة لكل وحدة طول بين موصلين طويلين ومتوازيين ويحمل كل منهما تيار كهربى شدته 10 A , علما ان المسافة بينهما 0.2 m (كما في الشكل 4.21) ؟



شكل(4.21) القوة المتبادلة بين موصلين متوازيين يمر بهما تيار كهربى.

(4.12) وضع موصلان طول كل منهما L والمسافة بينهما d في مجال مغناطيسى منتظم شدته B (كما في الشكل 4.22) , جد عزم الدوران حول محور y علما ان الموصلين يحملان نفس شدة التيار في اتجاهين متضادين ؟

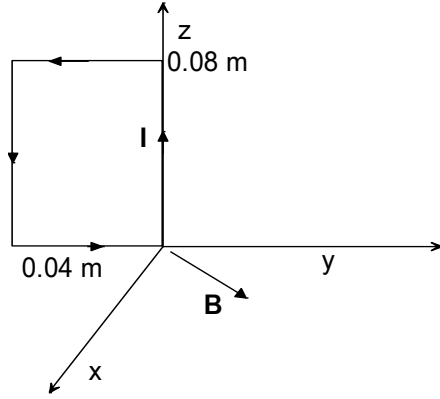


شكل (4.22) : عزم الدوران بين موصلين في مجال مغناطيسي .

(4.13) وضع ملف مستطيل الشكل في مجال مغناطيسي كثافة فيضه كالتالى:

$$\mathbf{B} = 0.05 (\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$$

اذا كان الملف يحمل تيار كهربى شدته $I = 5.0\text{ A}$, جد عزم الدوران المؤثر على هذا الملف ؟



شكل (4.23) ملف به تيار كهربى موضوع في مجال مغناطيسى.

(4.13) اذا كان متجه المجال المغناطيسى كالتالى:

$$\mathbf{A} = (y \cos ax) \hat{x} + (y + e^x) \hat{z}$$

جد كثافة الفيض المغناطيسى عند نقطة الأصل؟

(4.14) اذا كانت شدة المجال المغناطيسى , الناتج عن مرور تيار كهربى في موصل , تعطى بالعلاقة:

$$H = 20 \rho^2 \hat{\phi}$$

جد شدة التيار المار في هذا الموصل؟

(4.15) اثبت ان الفيض المغناطيسى المخترق لسطح مغلق يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

الفصل الخامس

المجال المغناطيسي للمواد المغناطيسية

Magnetic Field of Magnetic Materials

يتناول هذا الفصل دراسة مفهوم الحلقة الذرية والمجال المغناطيسي الناتج عن التيارات الذرية , كما يشرح الخواص المغناطيسية للمواد في الطبيعة وقابلية هذه المواد للتمغنط والنفوذية المغناطيسية لها . كما يتناول ايجاد شدة المجال المغناطيسي الناتج عن قضيب مغناطيسي ومنحنيات التمغنط . كما يقدم شرحا للدوائر المغناطيسية وللشروط الحدية للمجال المغناطيسي .

(5.1) الحلقة الذرية المغناطيسية Atomic Current Loop

وجدنا في الفصل الرابع ان المجال المغناطيسي ينتج عن مرور تيار كهربائي في موصل ما , وكذلك يمكن ان يتولد مجال مغناطيسي من المواد الممغنطة (الحجر المغناطيسي الطبيعي) كالقضيب المغناطيسي ويعزى ذلك الى التيارات الذرية الناتجة عن الحركة الدورانية للإلكترون حول النواة في ذرات هذه المواد (الحركة المدارية) , كما انه يمكن اعتبار الإلكترون في حد ذاته حلقة تيار Current Loop بسبب خاصية الغزل او اللف (Spin) حول محوره (الحركة المغزلية). وكذلك يمكن اعتبار الحركة المغزلية للنواة ولكن بتأثير قد لا يكاد يذكر.

لنفرض ان الكترون يدور حول نواة ما في مسار دائري نصف قطره ρ بسرعة زاوية ω , فهذا النموذج يكافئ تيار حلقي شدته $-e\omega/2\pi$, حيث e شحنة هذا الإلكترون, ويكون العزم المغناطيسي للحلقة الذرية مساويا لحاصل ضرب شدة التيار و مساحة المسار الدائري , اي :

$$\mathbf{m} = -\frac{e\omega}{2} \rho^2 \hat{\mathbf{z}}$$

حيث $\hat{\mathbf{z}}$ متجه وحدة عمودي على مستوى الحركة الدورانية (xy) .

بما ان حركة الإلكترون مغزلية ومدارية , يكون العزم المغناطيسي الكلي للإلكترون مساويا لمجموع العزم المغناطيسي الدوراني والمغزلي . وعليه يمكن تصنيف ذرات المواد الى نوعين: النوع الأول وهو الذي يمتلك عزم مغناطيسي دائم (ذرات مغناطيسية Magnetic كذرات الحديد والكوبالت , اما النوع الثاني وهو الذي يكون فيه المجمع الكلي للعزم المغناطيسي للإلكترون مساويا للصفر بسبب اختزال العزم المغناطيسي الدوراني

والمغزلي , وتسمى هذه الذرات غير مغناطيسية *nonmagnetic* . والسؤال اي الذرات حسب الجدول الدوري تكون مغناطيسية ؟ , والأجابة تتلخص في ان الذرات ذات المدارات غير ممتلئة *unfilled shells* تملك عزوم مغناطيسية, حيث يكون عدد الإلكترونات فرديا وهذا يكسب الذرة عزمًا مغناطيسيا , بينما الذرات ذات المدارات الممتلئة تكون الإلكترونات أزواجا *paired* وكل الكترونين يغزلان في اتجاهين متضادين مما يلاشي العزم المغناطيسي الكلي لهما وعليه لا تملك هذه الذرات اي عزوم مغناطيسية. وسنتناول لاحقا تصنيف المواد من حيث الخواص المغناطيسية وتفاعلها مع المجال المغناطيسي الخارجي المسلط عليها.

(5.2) القضيب المغناطيسي Magnetic Bar

وجد عمليا ان تعليق ابرة مغناطيسية بشكل حر ان احد طرفيها يتجه نحو الشمال الجغرافي الأرضي ويسمى هذا الطرف بقطب الإبرة الباحث عن الشمال (القطب الشمالي north pole) , في حين يتجه الطرف الآخر نحو الجنوب الجغرافي الأرضي ويسمى هذا الطرف بقطب الإبرة الباحث عن الجنوب (القطب الجنوبي south pole) , ويعود ذلك الى تصور ان الأرض لها قطبان مغناطيسيان (بسبب الحركة الدورانية للمعادن المنصهرة والمتأينة في باطنها) بحيث يقع القطب الشمالي المغناطيسي عند القطب الجنوبي الجغرافي الأرضي , وكذلك يقع القطب الجنوبي المغناطيسي عند القطب الشمالي الجغرافي. وعليه عند دراسة المجال المغناطيسي بالقرب من سطح الأرض يمكن اعتبار ان الأرض قضيب مغناطيسي , حيث تكون خطوط فارادي بإتجاه من القطب الجنوبي الجغرافي (القطب الشمالي المغناطيسي) نحو القطب الشمالي الجغرافي (القطب الجنوبي المغناطيسي).

ويمكن القول انه يكون لكل الاجسام المغناطيسية قطبان مغناطيسيان : شمالي وجنوبي , واذا تم قطع القضيب المغناطيسي الى عدد من القطع فإن كل قطعة يبقى لها قطبان مغناطيسيان , ويعود السبب الى ان مصدر المغناطيسية في المادة هو تيار الحلقة الذرية والتي تمثل مغناطيسا صغيرا. وعليه لا يمكن ايجاد قطب مغناطيسي منفرد !!! . ويعتبر القضيب المغناطيسي ثنائي قطب مغناطيسي magnetic dipole.

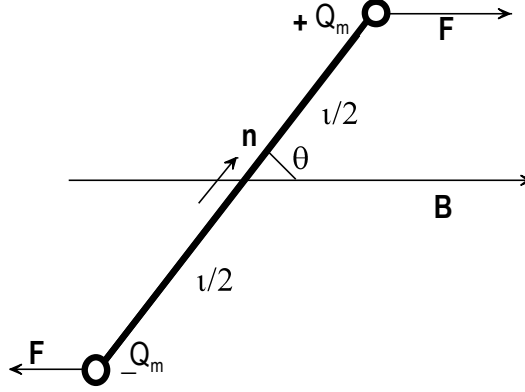
لنفرض ان قضيبا مغناطيسيا موضوع في مجال مغناطيسي منتظم خارجي , كثافة فيضه B , اذا كان طول القضيب l وشدة كل قطب Q_m (كما في شكل 5.1) . تكون القوة المؤثرة على القطب الشمالي (+) هي $F = Q_m B$ نحو اليمين , بينما القوة المؤثرة على القطب الجنوبي(-) مساوية لها ونحو اليسار , وهذا يجعل القضيب تحت تأثير عزم دوراني يعطى كما يلي:

$$T = 2F \left(\frac{l}{2} \right) \sin \theta = Q_m l B \sin \theta$$

حيث : $Q_m \ell =$ عزم ثنائي القطب المغناطيسي (m) ووحدته Am^2 , وعليه يمكن التعبير عن عزم الدوران كالتالي:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

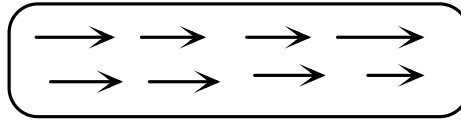
حيث : $m = \hat{n} Q_m \ell$, $\hat{n}$ = متجه الوحدة من القطب (-) نحو القطب (+).



شكل (5.1) عزم دوراني على قضيب مغناطيسي.

(5.3) التمثيل Magnetization

وجد العالم امبير ان قطعة ما من الحديد تصبح قضيبا مغناطيسيا اذا كان اتجاهات عزوم ثنائيات الأقطاب المغناطيسية فيها موحدة الإتجاه (اي تصطف هذه المغناط الذرية في نفس الإتجاه كما في شكل 5.2) .



شكل (5.2): قطعة حديد ممغنطة

إذا كانت ثنائيات الأقطاب المغناطيسية موزعة بانتظام داخل هذه القطعة وكانت الأقطاب المغناطيسية للمغناط الذرية قريبة من بعض بحيث يتلاشى التأثير المغناطيسي للأقطاب المختلفة , فإن ذلك يترك الأطراف لهذه القطعة بقطبية مختلفة (يصبح احد اطراف القطعة قطبا شماليا والطرف الآخر قطبا جنوبيا). وهذه الوضع يماثل الاستقطاب الكهربائي للعازل والشحنات الإستقطابية كما سبق شرحه في الفصل الثالث من هذا الكتاب.

تعرف شدة التمثيل (M) بمجموع عزوم ثنائيات الأقطاب المغناطيسية في وحدة الحجم , اي

$$M = \frac{\sum_i m_i}{v}$$

ووحدة شدة التـمـغـنـط (M) هي امبير/ متر.

ولإيجاد شدة التـمـغـنـط عند نقطة ما في المادة المغناطيسية , نفرض ان القضيب المغناطيسي يحوي على توزيع مستمر من ثنائيات الإقطاب المغناطيسية , ونعتبر عنصر حجمي صغير حول هذه النقطة , وعليه نعرف شدة التـمـغـنـط كالتالي:

$$M = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta v}$$

حيث m تمثل محصلة العزوم المغناطيسية لثنائيات الأقطاب المغناطيسية الموجودة في العنصر الحجمي.

إذا كانت M دالة للموقع في المادة المغناطيسية (التـمـغـنـط غير منتظم) فإنه يمكن إيجاد محصلة العزوم المغناطيسية m كالتالي:

$$m = \int_{vol} M dv$$

مثال(5.1)

قضيب مغناطيسي اسطواني دائري المقطع وممغنط بانتظام حيث:

$$M = (az^2 + b)\hat{z}$$

حيث a, b ثوابت , اذا كان طول القضيب 10 cm ومساحة مقطعه 8 cm^2 . جد محصلة العزوم المغناطيسية للقضيب؟

الحل:

نعتبر عنصر حجمي من القضيب على امتداد محور Z , يكون مقدار حجم هذا العنصر

$$dv = Adz = 8 \times 10^{-4} dz$$

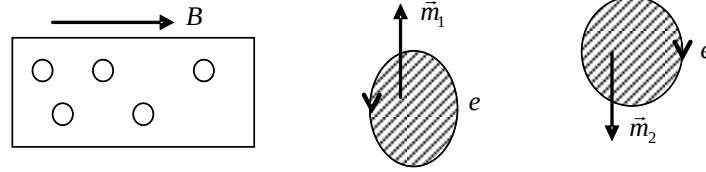
$$m = \int_0^{0.1} (az^2 + b)(8 \times 10^{-4} dz \hat{z}) = \left(\frac{8 \times 10^{-7} a}{3} + 10^{-3} b \right) \hat{z}$$

(5.4) خواص المواد المغناطيسية Magnetic Properties of Materials

تصنف المواد في الطبيعة حسب التركيب الذري لها وإلى مدى استجابة المادة للمجال المغناطيسي الخارجي المسلط عليها . وبناءً على ذلك أفرزت الأبحاث وجود ثلاثة أنواع من المواد من حيث هذه الاستجابة :

(1) مواد ديامغناطيسية: Diamagnetic material

لوحظ بالتجربة ان عند وضع عنصر البزموت (Bi) في مجال مغناطيسي خارجي قوي فإن هذه المادة تتنافر مع هذا المجال شكل (5.3)

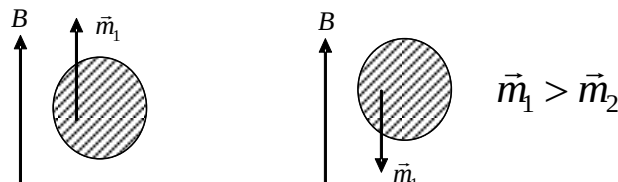


شكل (5.3)

وتفسير ذلك يعود إلى أن وجود إلكترونين في المدار الخارجي للعنصر يدوران في اتجاهين متعاكسين ويكون العزم المغناطيسي لكل منهما في اتجاهين متضادين . و في حال عدم وجود مجال مغناطيسي خارجي مسلط على العنصر فإن محصلة العزوم المغناطيسية للعنصر :

$$m_1 + m_2 = 0$$

أما عند تسليط المجال المغناطيسي الخارجي فإن القوة المؤثرة على الإلكترون تعتمد على سرعة هذا الإلكترون v , حيث $v = \omega \times R$, حيث R = نصف قطر الدائرة ، ω = السرعة الزاوية لدوران الإلكترون . وعليه , فإن الإلكترون الموازي لاتجاه المجال الخارجي تزداد سرعته الزاوية بفعل القوة الكهرومغناطيسية وبذلك يزداد عزمه المغناطيسي بينما ينقص العزم المغناطيسي للإلكترون الآخر . وبذلك تصبح محصلة العزوم المغناطيسية للعنصر بوجود هذا المجال لا تساوي صفراً.

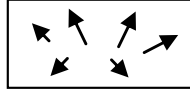


شكل(5.5)

ولذلك تتناثر هذه المواد مع تسليط المجال الخارجي (أي تحاول تخفيض مقدار الفيض المغناطيسي Φ المتشابك مع المادة) .

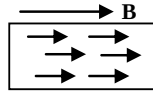
(2) المواد البارامغناطيسية: Paramagnetic materials

مثل مادة الزجاج (سيلكون)، السوائل، المواد البلورية. حيث تتكون هذه المواد من ذرات وجزيئات لها عزوم مغناطيسية دائمة موزعة عشوائياً في اتجاهاتها .



شكل(5.6): العزوم المغناطيسية للمواد البارامغناطيسية

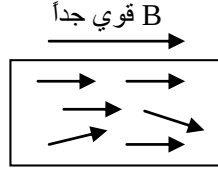
وعند تسليط مجال مغناطيسي خارجي على هذه المواد فإن اتجاهات العزوم المغناطيسية تتوجه نحو المجال المغناطيسي (تصبح في وضع مواز لاتجاه المجال الشكل 5.7)



شكل (5.7): اصطفاف العزوم المغناطيسية بفعل المجال الخارجي

وبسبب وجود الطاقة الداخلية الناتجة عن التصادمات بين الذرات , فإنه سرعان ما يزول هذا الترتيب وترجع المادة إلى حالة الفوضى العشوائية . أما إذا كان المجال المسلط قوي جداً يحدث هناك توجيه جزئي للعزوم المغناطيسية شكل 5.8). وهذا يتوقف على

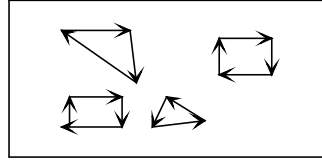
شدة المجال الخارجي ودرجة الحرارة . أي يكون لهذه المواد قابلية مغناطيسية (استجابة ضعيفة) .



شكل (5.8): اصطفاف جزئي للعزوم المغناطيسية .

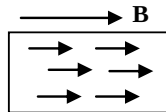
(3) المواد الحديدية المغناطيسية: Ferro - Magnetic Materials

مثل المواد الحديدية (حديد ، فولاذ) ، نيكل ، كوبالت (CO) ، في هذه المواد تكون العزوم المغناطيسية مرتبة في دواوين (Domains) حتى بدون المجال الخارجي كما في الشكل (5.9) .



شكل (5.9) : العزوم المغناطيسية مرتبة دواوين في المواد الحديدية ومغناطيسية.

حيث يكون هناك تفاعل خاص بين الذرات المتجاورة مما يسبب توجيه العزوم المغناطيسية عند تسليط مجال مغناطيسي خارجي على هذه المواد ليصبح هناك توجه قوي للعزوم المغناطيسية (أي تتفكك هذه الدواوين وتصطف العزوم باتجاه المجال الخارجي . وتبقى هذه الظاهرة موجودة مع زوال المؤثر الخارجي ($\vec{B}$) كما في الشكل 5.10) . وتبقى هذه المواد في حالة تمغنط دائم .



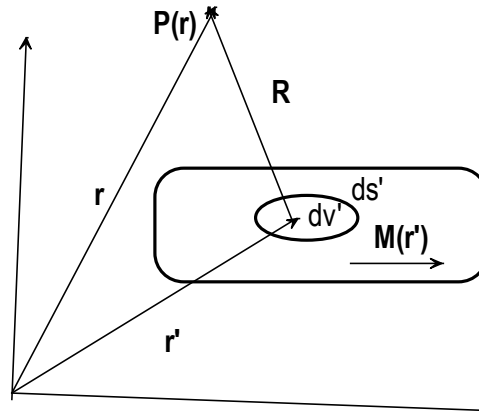
شكل (5.10) العزوم المغناطيسية في المواد الحديدومغناطيسية.

وعليه, يكون لهذه المواد قابلية كبيرة للتمغنت .

(5.5) شدة المجال المغناطيسي الناتج عن قضيب مغناطيسي.

Magnetic Field of a Magnetic Bar.

برهنت التجارب العملية ان المجال المغناطيسي ينتج عن التوزيعات للتيارات الحقيقية في المواد الموصلة, ويمكن ان ينتج عن التيارات الذرية (ثنائيات الأقطاب المغناطيسية). لنفرض ان قضيبا مغناطيسيا شدة تمغنته M , نعتبر عنصر حجمي من هذا القضيب dv' والذي يغلفه سطح مغلق ds' , لايجاد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة خارج القضيب (كما في الشكل 5.10) نجد اولا الجهد المغناطيسي العددي ثم نجد الشدة المغناطيسية وهذا يجنب التعامل مع التكاملات المعقدة عند استخدام الطريقة المباشرة والمعتمدة على استخدام العزوم المغناطيسية, وعليه



شكل (5.11) الشدة المغناطيسية الناتجة من قطعة ممغنطة.

بما ان

$$H = -\nabla \phi_m$$

حيث

$$\phi_m(r) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{vol} \frac{\rho_v}{R} dv + \int_{sur} \frac{\sigma_m}{R} ds' \right\}$$

σ_m تسمى كثافة الأقطاب المغناطيسية السطحية ، وتعطى كالتالي: $|R| = |r - r'|$

$$\sigma_m = \mathbf{M}(r') \cdot \hat{n}$$

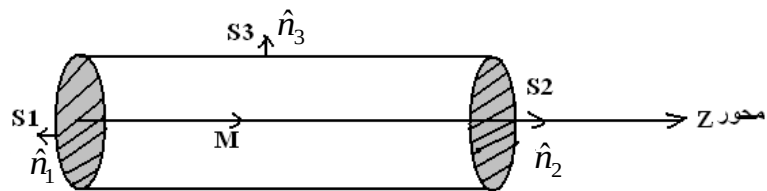
ووحدها أمبير / متر . بينما تسمى الكمية : $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}(r')$ الكثافة الحجمية لشدة القطب المغناطيسي. ونلاحظ ان هذه العلاقة تماثل العلاقة الرياضية لكثافة الأقطاب الكهربائية في حالة استقطاب العوازل (الفصل الرابع).

مثال (5.2)

جد كثافة شدة الأقطاب المغناطيسية لقضيب اسطواني الشكل ممغنط بانتظام باتجاه محوره (الشكل 5.12) .

الحل:

(1) الكثافة الحجمية لشدة القطب المغناطيسي:



شكل (5.12): قضيب ممغنط .

بما أن ، $\mathbf{M}(r') = M_0 \hat{z}$ ثابت ، إذن

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = -\frac{\partial M_0}{\partial z} = 0$$

(2) يوجد ثلاثة سطوح للاسطوانة s_1, s_2, s_3 تغلف حجمها. عند السطح الدائري الأول:

$$\hat{n}_1 = -\hat{z} \rightarrow (\sigma_m)_{s1} = M \cdot \hat{n}_1 = -M_0$$

بالمثل عند السطح الدائري الثاني فإن:

$$(\sigma_m)_{s2} = +M_0$$

بالإحداثيات الإسطوانية $\hat{n}_3 = \hat{r}$

$$(\sigma_m)_{s3} = M_0 \hat{z} \cdot \hat{r} = 0$$

اي لا يوجد كثافة سطحية للأقطاب المغناطيسية على سطح القضيب المغناطيسي .

• ملاحظة :

$$\int_{vol} \rho_m dv' + \int_{sur} \sigma_m ds' = 0$$

شدة القطب الكلية للقضيب المغناطيسي تساوي صفر

• **كثافة تيار التمغنط (magnetic current density) :**

تصنف تيارات التمغنط الى نوعين هما: النوع الأول يسمى تيار التمغنط الحجمي و يرمز لكثافته الحجمية بالرمز J_m , وذلك تميزاً لها عن كثافة التيار الحقيقي (J_e) وتعرف هذه الكثافة رياضياً بالتفاف شدة التمغنط , او

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

وفيزيائياً تعرف بأنها : كثافة التيار الحقيقي الذي يولد مجالاً مغناطيسياً مساوياً للمجال المغناطيسي الناتج عن التمغنط . وإذا كان التمغنط منتظماً (ثابت) فإن $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ وعليه $J_m = 0$. هنا تكون التيارات الذرية في المادة المغنطة تدور في نفس الاتجاه وعليه كل تيار ذري يحو الآخر المجاور له لتكون محصلة التيارات الذرية صفراً".

إما إذا كانت المادة ذات تمغنط غير منتظم فإن بمعنى $\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$ أي تكون $\mathbf{M}$ دالة للإحداثيات وتختلف باختلاف الموقع داخل المادة. وعليه فإن محصلة التيارات الذرية لا تساوي صفراً.

أما النوع الثاني من تيارات التمغنط تسمى تيار التمغنط السطحي ويرمز لكثافته السطحية بالرمز K_m ، ويعرف رياضياً كالتالي: $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{n}$. ويكون اتجاه هذا التيار عمودياً على متجه شدة المغنط. وعليه، يمكن اعتبار أن القضيب الممغنط باتجاه محوره يكافئ ملفاً حلزونياً solenoid يمر به تياراً كهربياً وينفس الطول.

لإيجاد كثافة الفيض المغناطيسي عند نقطة ما خارج قطعة ممغنطة (الشكل 5.11) ، نجد أولاً دالة متجه الجهد المغناطيسي $A(r)$ ، ثم نستخدم العلاقة: $\mathbf{B}(r) = \nabla \times A(r)$

حيث :

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{sur} \frac{\mathbf{K}_m ds'}{R} + \int_{vol} \frac{\mathbf{J}_m}{R} dv' \right\}$$

مثال (5.3)

إذا كانت شدة التمغنط لقضيب مغناطيسي اسطواني دائري، نصف قطر قاعدته a ،

$\mathbf{M} = (x^2y)\hat{z}$ ، جد كثافة تيار التمغنط الحجمية والسطحية؟

الحل:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x^2y \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}x^2 - (2xy)\hat{y} \end{aligned}$$

بدلالة الإحداثيات الإسطوانية وعلى السطح الدائري للقضيب, تكون كثافة تيار التمغنط السطحية:

$$K_m = M \times \hat{n} = (x^2 y) \hat{z} \times \hat{\rho} = x^2 y \hat{\phi} = (a^3 \cos^2 \phi \sin \phi) \hat{\phi}$$

(5.6) القابلية المغناطيسية والنفاذية النسبية للمواد المغناطيسية :

Magnetic Susceptibility and the Relative Permeability .

في حالة عدم وجود اي مادة مغناطيسية , فإن التواف كثافة الفيض المغناطيسي عند نقطة ما يعطى بدلالة كثافة التيار الحقيقي J_e (الناتج عن حركة الشحنات الحرة في الموصل) كالتالي:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 J_e$$

(وهذه المعادلة هي احدى معادلات ماكسويل والتي سيرد شرحها في الفصول اللاحقة من هذا الكتاب). اما في حالة وجود مادة ممغنطة فتصبح هذه المعادلة داخل المادة الممغنطة (ولكن ليس على سطحها) على النحو التالي:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (J_e + J_m)$$

بالتعويض بدلاً عن كثافة تيار التمغنط الحجمية , تصبح هذه المعادلة كالتالي:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (J_e + \nabla \times \mathbf{M})$$

إذا كانت μ_0 لا تعتمد على الإحداثيات داخل الوسط فإن ترتيب حدود المعادلة يعطي:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = J_e$$

وحسب قانون امبير الدائري فإن الكمية التي في داخل هي شدة المجال المغناطيسي , وعليه فإن

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

وحتى في داخل المادة الممغنطة فإن: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$

وبالمقارنة بين المواد المغناطيسية والمواد العازلة والمستقطبة بشدة استقطاب $\mathbf{P}$ فإن $\mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{P}$.

مثال (5.4)

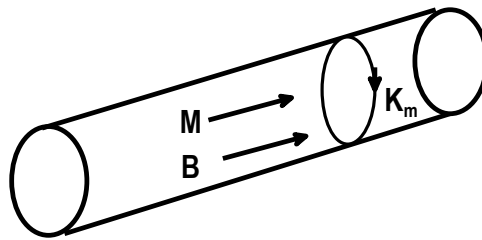
جد التيارات المكافئة في حالة قضيب مغناطيسي منتظم التماثل (كما في الشكل 5.13) ؟

الحل:

حيث ان شدة التماثل منتظمة: $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$, فإن $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$, اي لا يوجد تيارات حتمية مكافئة . وحيث ان $\mathbf{M}$ موازية لمحور القضيب , فإن التيارات السطحية على الوجوه المستوية للقضيب تساوي صفراً ($\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = M_0 \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$) . اما كثافة التيار السطحي على السطح الأسطواني تعطى كما يلي:

$$\mathbf{K}_m = M_0 \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = M_0 \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

وعليه يكون القضيب يمثل ملف حلزوني به تيار حقيقي شدته I , فإذا كانت عدد لفات هذا الملف لكل وحدة طول تساوي N' , فإن $N'I = M_0$. وتكون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{M}$ في نفس الإتجاه داخل القضيب.



شكل (5.13) المجالات المغناطيسية داخل قضيب ممغنط.

تعرف القابلية المغناطيسية لمادة ما بأنها النسبة بين شدة التمغنط الى الشدة المغناطيسية ويرمز لها بالرمز χ_m , اي

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

وعليه فإن

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

اذا عرفنا النفاذية النسبية للمادة المغناطيسية على النحو : $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$, حيث μ للمادة المغناطيسية النفوذية , فإن

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

اذن

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

تكون القابلية المغناطيسية للمواد الديامغناطيسية سالبة القيمة ومن رتبة 10^{-5} , بينما تكون هذه القيمة في المواد البارمغناطيسية في المدى $10^{-3} - 10^{-5}$. اما في المواد الحديومغناطيسية تكون $\chi_m > 10^5$.

ملاحظة: في المواد المتماثلة المناحي *Isotropic* والخطية *Linear* تكون $\mathbf{M} \propto \mathbf{H}$ وفي نفس الاتجاه .

مثال (5.5)

اذا كانت كثافة الفيض المغناطيسي داخل قضيب مغناطيسي من مادة حديدومغناطيسية هي $B = 0.05 \text{ Tesla}$, وكانت النفوذية النسبية لهذه المادة $\mu_r = 50$, جد ما يلي:

χ_m , M , and H ؟

الحل:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \Rightarrow \chi_m = 49$$

$$B = \mu_0 \mu_r H \Rightarrow H = \frac{0.05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \frac{A}{m}$$

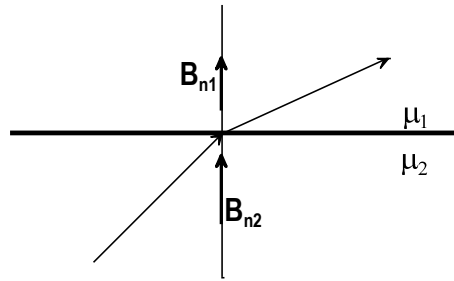
$$M = \chi_m H = (796)(50) = 39000 \text{ A/m}$$

(5.7) الشروط الحدودية للمجال المغناطيسي Magnetic Field Boundary Conditions

عند الإنتقال من وسط الى وسط آخر مختلف عنه في الخواص المغناطيسية فإن مقدار واتجاه المجال المغناطيسي يتغير بسبب اختلاف هذه الخواص. ولتوضيح ذلك نفرض ان النفوذية المغناطيسية لوسطين هي μ_1, μ_2 على الترتيب، وكما مر معنا في الفصل الثالث بخصوص سلوك خطوط المجال الكهربائي عند السطح الفاصل بين هذين الوسطين، حيث $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، فإن استخدام نظرية الإنتشار (التباعد) يعطي الشرط الحدودي الأول والذي ينص على ما يلي:

تكون المركبة العمودية لكثافة الفيض المغناطيسي متصلة *continuous* عبر السطح الفاصل بين الوسطين (كما في الشكل 5.13). ويعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$B_{n1} = B_{n2}$$



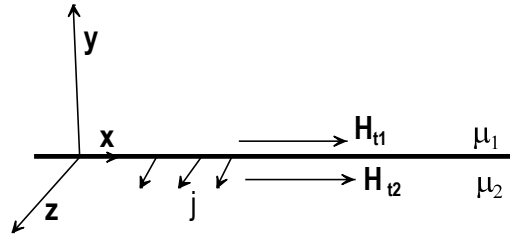
شكل (5.13) الشروط الحدودية للمجال المغناطيسي عند السطح الفاصل.

ونستنتج الشرط الحدودي الثاني بإستخدام قانون امبير الدائري ($\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{enc}$) . على فرض ان كثافة التيار الطولية (شدة التيار الكهربائي لكل وحدة طول) والتي تمر خلال طبقة رقيقة سطحية هي j , فإن نص هذا الشرط كما يلي:

التغير في المركبة المماسية لشدة المجال المغناطيسي عبر السطح الفاصل بين وسطين مختلفين يساوي كثافة التيار الطولية على هذا السطح. ويعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$H_{t1} - H_{t2} = j$$

ملاحظة: في حالة عدم وجود كثافة تيار طولية تمر عبر السطح الفاصل فإن $H_{t1} = H_{t2}$, اي تكون المركبات المماسية للشدة المغناطيسية متصلة عبر السطح الفاصل بين الوسطين (كما في الشكل 5.14).



شكل (5.14) المركبات المماسية للشدة المغناطيسية بين وسطين.

مثال (5.6)

اذا كانت خطوط المجال المغناطيسي تصنع الزوايا α_1, α_2 مع العمودي على السطح الفاصل بين وسطين (كما في الشكل 5.15) نفوذيتهما المغناطيسية μ_1, μ_2 على الترتيب. جد العلاقة بين هاتين الزاويتين على فرض ان الوسطين متماثلة المناحي وخطية ؟

الحل:

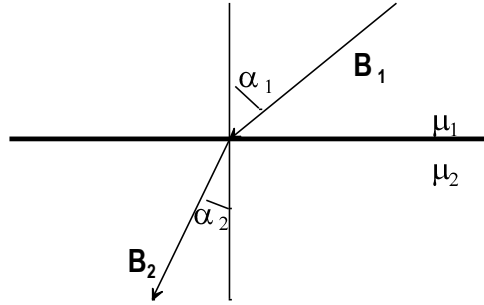
من الشروط الحدودية نحد ان:

$$B_{n1} = B_{n2} \rightarrow B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$$

$$H_{t1} = H_{t2} \rightarrow H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$$

بقسمة هاتين المعادلتين نحصل على:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$



شكل (5.15) خطوط المجال المغناطيسي بين وسطين.

مثال (5.7)

إذا كان الوسط الأول (في الشكل 5.15) هواء حيث ($\mu_{r1} = 1$) بينما الوسط الثاني من الحديد المطاوع ($\mu_{r2} = 7000$) ، وكانت $\alpha_2 = 85^\circ$ ، جد α_1 ؟

الحل:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \tan \alpha_2 = \frac{1}{7000} \tan 85^\circ = 0.0016 \rightarrow \alpha_1 = 0.1^\circ$$

مثال (5.8)

إذا النفوذية المغناطيسية لوسطين ماديين على النحو التالي:

$$\mu_1 = 4 \times 10^{-6}, z > 0, \quad \mu_2 = 4 \times 10^{-6}, z < 0$$

وكانت الكثافة الطولية على السطح الفاصل بينهما تساوي $\mathbf{j} = 80\hat{x} \text{ A/m}$ ، إذا كانت

كثافة الفيض المغناطيسي في الوسط الأول $\mathbf{B}_1 = (2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}) \text{ mT}$ ، جد $\mathbf{B}_2$ ؟

الحل:

بالرجوع للشكل (5.13) , وحيث ان متجة الوحدة العمودي على السطح من الوسط الأول

نحو الوسط الثاني هو $\hat{n}_{12} = \hat{z}$, نجد ان :

$$B_{n1} = (\mathbf{B}_1 \cdot \hat{n}_{12}) \hat{n}_{12} = ((2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}) \cdot (-\hat{z}))(-\hat{z}) = \hat{z} \text{ mT}$$

$$B_{n2} = B_{n2} = \hat{z}$$

$$B_{t1} = \mathbf{B}_1 - B_{n1} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$$

$$H_{t1} = \frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{(2\hat{x} - 3\hat{y}) \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} = 500\hat{x} - 750\hat{y}$$

$$\begin{aligned} H_{t2} &= H_{t1} - \hat{n}_{12} \times j = (500\hat{x} - 750\hat{y}) - (-\hat{z}) \times 80\hat{x} \\ &= 500\hat{x} - 670\hat{y} \text{ A/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{t2} &= \mu_2 H_{t2} = 7 \times 10^{-6} (500\hat{x} - 670\hat{y}) \\ &= (3.5\hat{x} - 4.69\hat{y}) \text{ mT} \end{aligned}$$

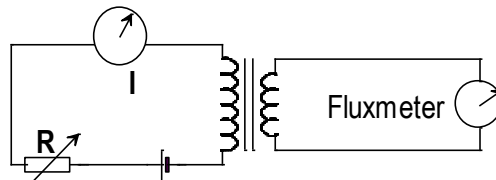
$$\mathbf{B}_2 = B_{t1} + B_{t2} = (3.5\hat{x} - 4.69\hat{y} + \hat{z}) \text{ mT}$$

(5.8) منحنيات التمتع Magnetization Curves

وجدنا ان النفوذية المغناطيسية للمادة تعرف كالتالي:

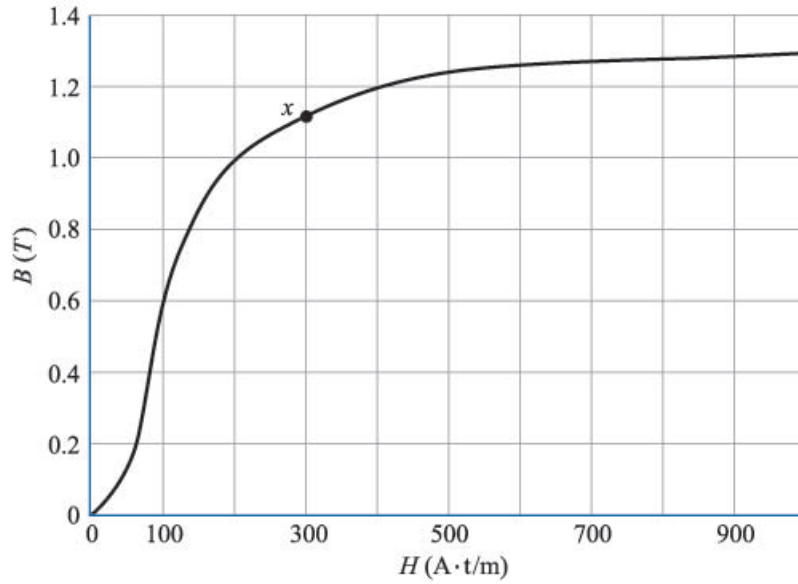
$$\mu = \frac{B}{H} = \mu_0 \mu_r$$

لدراسة العلاقة بين كثافة الفيض المغناطيسي B كدالة لشدة المجال المغناطيسي H , نستخدم التجربة المبينة في الشكل (5.16) , حيث ان $H \propto I$ فيمكن التحكم في قيمة شدة التيار الكهربائي



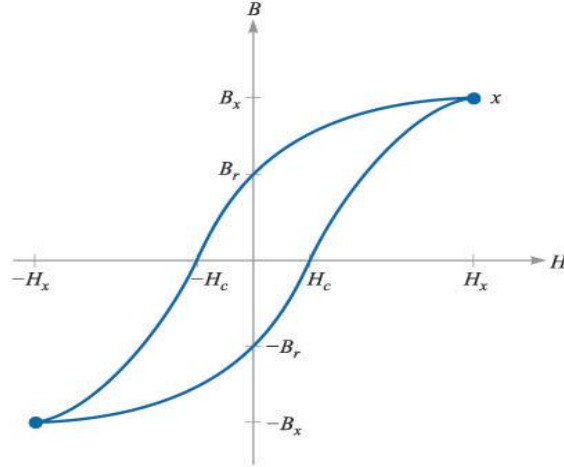
شكل (5.16) تجربة لدراسة العلاقة بين B, H

في الدائرة الابتدائية عن طريق المقاومة المتغيرة ، بينما يسجل مقياس الفيض Fluxmeter مقدار B مباشرة. لنفرض ان قلب المحول من مادة حديدومغناطيسية ، وفي البدء كانت المادة غير ممغنطة ($B, H = 0$) ، ثم اذا بدأنا بزيادة قيمة H تبدا قيمة B بالزيادة ولكن بشكل غير خطي حتى نصل الى قيمة معينة للمجال المغناطيسي (النقطة x في الشكل 5.17)، وعندها يكون ازدياد كثافة الفيض المغناطيسي بطيئا ليصل الى حالة الثبات (تقريبا خط مستقيم) ، وتسمى هذه الحالة بالتشبع *Saturation* ، وتكون العزوم المغناطيسية جميعها مصطفة *Aligned* في اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي.



شكل (5.17) منحنى التغمط في المواد الحديدومغناطيسية.

- منحنى التخلف المغناطيسي: *Hysteresis Loop*



شكل (5.18) منحني التخلف المغناطيسي للمواد الحديدومغناطيسية.

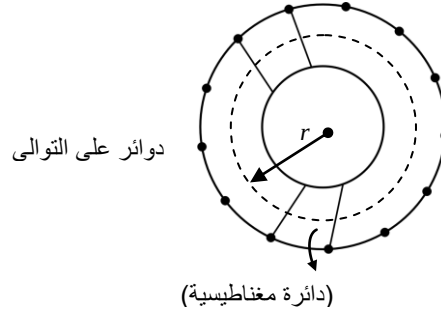
لنفرض ان قطعة من مادة حديدومغناطيسية كانت مشبعة مغناطيسيا حيث, اي شدة المجال وكثافة الفيض المغناطيسيين هما B_x, H_x . عند إنقاص مقدار H (الشكل 5.18) فإن مقدار B يتناقص ولكن لا يتبع نفس مسار التمغنط السابق (في الشكل 5.17), ولكن نجد ان هناك قيمة معينة لكثافة الفيض المغناطيسي كالتالي : $B = B_r$ عند $H = 0$. ويسمى B_r بالمغناطيسية المتبقية Remnant Magnetization .

عند عكس اتجاه H (عن طريق عكس اتجاه التيار المولد للشدة المغناطيسية) فإن مقدار B يتناقص وينعدم عند قيمة معينة لشدة المجال ($-H_c$) . ويسمى المقدار H_c الذي يجعل (او يلاشي) المغناطيسية المتبقية منعدمة بالحفاظية للمادة Coercive . وهكذا لو تابعنا زيادة H نحصل على منحني يشبه منحني نصف الدورة العلوي ويرجع إلى نقطة البداية (x) . وهذه الدورة تعرف باسم **منحني التخلف المغناطيسي** Hysteresis Loop . وتختلف مساحة الحلقة (المنحني) وفقا لنوع المادة الحديدومغناطيسية , فمثلا تكون الحلقة للحديد المطاوع (soft) اقل اتساعا منها في حالة الحديد الصلب (Hard) اي تتوقف على مقدار القابلية المغناطيسية للمادة . تكون الطاقة المغناطيسية المخزونة في المادة الممغنطة كما يلي :

$$W_m = 1/2 \int_{vol} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad \text{Joul}$$

(5.9) الدوائر المغناطيسية Magnetic Circuits

بما ان تباعد كثافة الفيض المغناطيسي يساوي صفراً , فإن خطوط الفيض المغناطيسي المرافق لتيارات معينة تكون محصورة في مسار محدد نوعاً ما ومغلقة. وعليه فإن الملف الحلزوني الحلقي يمثل دائرة مغناطيسية . وفي حالة الملف الذي به قطع (فجوة هوائية) يمثل دائرتين على التوالي هما الملف (وقد يحوي على قلب من مادة حديدومغناطيسية) والفجوة الهوائية (شكل 5.19).



شكل (5.19) دوائر مغناطيسية متصلة على التوالي.

لنفرض أن قلب الملف يتكون من عدة مواد مختلفة محاطة بملف حلزوني حلقي عدد لفاته N وتحمل تيار شدته I , وعند تطبيق قانون أمبير نحصل على:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = NI$$

ويكمن التعبير عن قيم H بدلالة الفيض المغناطيسي عند كل نقطة من نقاط المسار الدائري كالتالي:

$$B = \mu H ; \Phi = BA \Rightarrow H = \Phi / \mu A$$

A = مساحة مقطع الدائرة عند النقطة المعنية. ويصبح قانون أمبير:

$$\oint \frac{\Phi d\boldsymbol{\ell}}{\mu A} = NI$$

وما دما نتعامل مع دائرة مغناطيسية فإن قيمة Φ_m تبقى ثابتة لجميع نقاط هذه الدائرة، وعليه فإن: $\oint \frac{d\ell}{\mu_A} = NI$ وهذه المعادلة الأساسية للدائرة المغناطيسية التي تعطي الفيض المغناطيسي بدلالة معادلة الدائرة وتشبه هذه معادلة الدائرة الكهربية $\varepsilon = IR$ ، وبالمقارنة مع الدوائر الكهربية يمكن ان تعرف القوة الدافعة المغناطيسية (Magnatic motive force) ورمزها mmf على النحو:

$$mmf = NI$$

وتعرف المقاومة المغناطيسية او الممانعة (Reluctance) بين نقطتين في الدائرة المغناطيسية (R) على النحو التالي:

$$R = \oint \frac{d\ell}{NA}$$

وعليه ، يكون الفيض المغناطيسي معروفاً على النحو التالي:

$$\Phi_m = \frac{mmf}{R}$$

أما إذا تكونت الدائرة المغناطيسية (الحلقة الكاملة) من عدة من القطع المتجانسة بحيث يكون لكل قطعة مقطع عرضي منتظم فيمكن تعريف المقاومة المغناطيسية الكلية للدائرة على النحو:

$$R = \sum_j \frac{d\ell}{\mu_j A_j} = \sum_j R_j$$

وبهذا تكون المقاومة المغناطيسية الكلية للدائرة = المجموع المقاومات المغناطيسية للعناصر المكونة لها. ومن التناظر بين الدوائر الكهربية والمغناطيسية، نجد أنه في حالة الدائرة الكهربية فإن المقاومة الكهربية تعطى بالعلاقة:

$$R = \oint \frac{d\ell}{gA}$$

حيث g تمثل مقلوب المقاومة النوعية للمادة. ونلاحظ ان $g \leftrightarrow \mu$, وتقاس المقاومة المغناطيسية للدائرة , R , بوحدة مقلوب هنري (H^{-1}) Reciprocal of henry , حيث هنري هي وحدة الحث الذاتي وسيرد شرحه في الفصل السادس.

تتناسب المقاومة المغناطيسية R_j عكسياً مع النفوذية المغناطيسية μ_j , وحيث أن نفوذية المادة الحديدومغناطيسية تساوي مرة أو ألف مرة لنفوذية الفراغ وعليه تشكل المواد الحديدومغناطيسية ممراً ذا مقاومة منخفضة للفيض المغناطيسي. وعليه يكون معظم الفيض ماراً خلال المسار الذي له مقاومة مغناطيسية منخفضة.

مثال (5.9)

حلقة من الحديد مساحة مقطعها $A = 1000mm^2$ ومتوسط طولها $\ell = 600 mm$, جد عدد لفة-امبير اللازم لإنتاج كثافة فيض مغناطيسي $B = 1 T$ او مايعادل شدة مجال مغناطيسي $H = 1000A/m$ ؟
الحل:

$$NI = H\ell = 1000 \times 0.6 = 600 \text{ A.turn}$$

مثال (5.9)

جد المقاومة المغناطيسية للدائرة في المثال (5.8) ؟
الحل:

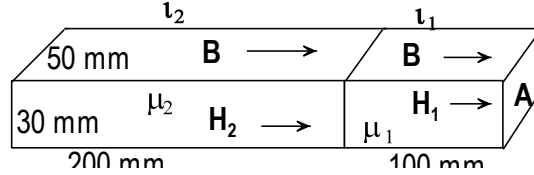
حيث ان $B = 1 T$ تقابل $H = 1000 \frac{A}{m}$ لذلك

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$R = \frac{\ell}{\mu A} = \frac{0.6}{10^{-3} \times 10^{-3}} = 6 \times 10^5 \text{ (H}^{-1}\text{)}$$

مثال (5.10)

جد المقاومة المغناطيسية الكلية بين طرفي قالبين من الحديد ملتصقين على التوالي (كما في الشكل (5.20) , على فرض ان كثافة الفيض المغناطيسي منتظمة وعمودية على الطرف. حيث $\mu_1 = 500\mu_0$, $\mu_2 = 2000\mu_0$.

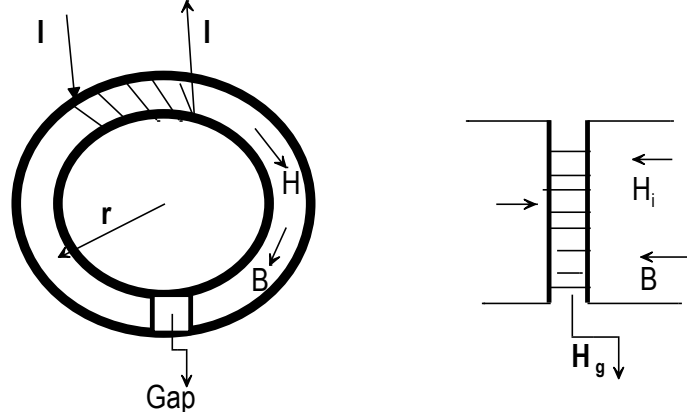


شكل (5.20) توصيل دائرتين مغناطيسيتين على التوالي.

الحل:

$$\begin{aligned}
 R_T &= \frac{\ell_1}{\mu_1 A} + \frac{\ell_2}{\mu_2 A} \\
 &= \frac{0.1}{(500 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4})} \\
 &\quad + \frac{0.2}{(200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 15 \times 10^{-4})} \\
 &= 1.06 \times 10^5 + 0.53 \times 10^5 = 1.59 \times 10^5 \quad H^{-1}
 \end{aligned}$$

• دائرة مغناطيسية بها فجوة هوائية Magnetic Circuit with Air Gap



شكل (5.21) دائرة مغناطيسية (ملف حلقي) ذات فجوة هوائية .

لنفرض ان حلقة من مادة الحديد قطع من محيطها جزء ضيق ليصبح على شكل فجوة هوائية ضيقة (كما في الشكل 5.21). حيث ان المركبات العمودية لكثافة الفيض المغناطيسي على سطح المقطع متصلة (الشروط الحدودية لكثافة الفيض المغناطيسي) , فإن هذه المركبة تكون متساوية في الفجوة والحلقة (مع اهمال إنتشار خطوط الفيض عند اطراف الفجوة بسبب كونها ضيقة). ولنفرض ان شدة المجال المغناطيسي في الفجوة H_g حيث $H = B/\mu_0$, بينما تكون شدة المجال داخل الحلقة H_i , حيث :

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_r \mu_0} = \frac{H_g}{\mu_r}$$

اذن

$$\frac{H_g}{H_i} = \mu_r$$

تكون المقاومة المغناطيسية الكلية للدائرة كالتالي:

$$R_T = R_i + R_g = \frac{(\ell - d)}{\mu A} + \frac{d}{\mu_0 A}$$

حيث اتساع الفجوة d , ومتوسط طول الحلقة مع الفجوة: $\ell = 2\pi r$

مثال (5.11)

جد عدد لفات- امبير (NI) لحلقة من الحديد ($\mu_r = 795$) ومساحة مقطعها $A = 1000\text{mm}^2$, اذا كان بها فجوة هوائية اتساعها $d = 2\text{mm}$, ومتوسط طول الحلقة $\ell = 600\text{mm}$, علما ان $B = 1\text{T}$ ؟

الحل:

$$NI = \oint H \cdot d\ell = H_i(\ell - d) + H_g d$$

$$H_g = \mu_r H_i$$

بالتعويض نجد ان

$$NI = H_i [(\ell - d) + \mu_r d]$$

من منحنى التمشيط للمادة نجد ان $H_i = 1000\text{A/m}$ تقابل كثافة الفيض المعطى في المسألة, وعليه

$$NI = 1000[(0.6 - 0.002) + 795 \times 0.002] = 2188\text{ A.turns}$$

تمارين

(5.1) (a) جد عزم الدوران المؤثر على الكترون يدور حول النواة في مسار دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ω عند وضعه في مجال مغناطيسي B يوازي مستوى الدوران؟

(b) جد السرعة الزاوية لحركة الإلكترون في ذرة الهيدروجين علما ان $a = 6 \times 10^{-11} m$, $B = 0.5 T$ ؟

(c) جد العزم الدوراني والعزم المغناطيسي للإلكترون بالمعطيات السابقة؟

(5.2) مغناطيسي دائمي على شكل جسم اسطواني دائري قائم طوله (L) . فإذا كان التـمـغـنـط منتظماً وباتجاه محور الاسطوانة. جد العزم المغناطيسي للقضيب علما ان مساحة مقطعه A ؟

(5.3) برهن ان للمواد المغناطيسية والخطية تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$M = \frac{\chi_m B}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

(5.4) برهن ان في حالة الوسط المتجانس والمتماثل المناحي تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$K = (\mu_r - 1)J_f$$

حيث K = كثافة التيار المغناطيسي السطحية, J_f = كثافة التيار الحقيقي الحجمية.

(5.5) اذا كانت كثافة الفيض المغناطيسي داخل مادة ($\chi_m = 3.1$) هي

$$B = 0.4 y \hat{x}$$

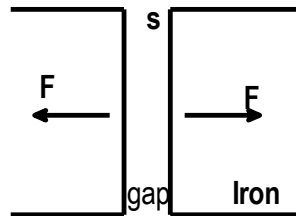
جد ما يلي : H, J_m ؟

(5.6) جد قية H في المادة المغناطيسية ($\mu_r = 4.2$) والتي تحتوي على عدد من الذرات $N = 2.7 \times 10^{29} atom/m^3$, اذا كان لكل ذرة عزم مغناطيسي $m = 2.6 \times 10^{-30} \hat{y}$ ؟

(5.7) سلك اسطواني الشكل من الحديد ($\mu_r = 1000$) ونصف قطره $(a = 1 mm)$, اذا كان التيار المار فيه منتظم شدته $I = 1 A$, جد كثافة التيار الحقيقي الحجمية وكثافة تيار التـمـغـنـط الحجمية ؟

(5.8) في المنطقة (1) المحددة بالعلاقة $2x + 3y - 4z > 1$ كانت $\mu_{r1} = 2$, بينما المنطقة (2) المحددة بالعلاقة $2x + 3y - 4z < 1$ كانت $\mu_{r2} = 5$, وكان المجال المغناطيسي في المنطقة (1) كالتالي: $H_1 = 50\hat{x} - 30\hat{y} + 20\hat{z}$, جد المركبات المماسية والعمودية للمجال H_1, H_2 ؟

(5.9) دائرة مغناطيسية عاى هيئة ملف حلقي به فجوة هوائية (الشكل 5.22) اتساعها s ومسحة مقطعها A , اذا كان قلب الملف من مادة مغناطيسية (μ) جد القوة المغناطيسية المتبادلة بين طرفي الفجوة؟



شكل (5.22) القوة المغناطيسية على فجوة هوائية في دائرة مغناطيسية.

(5.10) جد الطاقة المغناطيسية المخزونة في كرة نصف قطرها ($a = 1cm$) عند وضعها في منطقة مجال مغناطيسي منتظم شدته $H = 600 A/m$ ؟

(5.11) ملف حلقي مساحة مقطعه $A = 4 cm^2$ ومتوسط طوله $\ell = 6 cm$, اذا كان قلب الملف مكون من حلقتين كلاهما نصف دائرة ويفصل بينهما فجوتان هوائيتان اتساعهما $4mm$, واذا كانت النفوذية المغناطيسية للأولى ($\mu = 3 \times 10^{-3}$) بينما النفوذية النسبية للحلقة الثانية ($\mu_r = 200$) . وكان عدد لفات الملف 4000 لفة ويمر بها تيار شدته I , جد شدة هذا التيار اذا كان $B = 1.2 T$ ؟

(5.12) ملف حلقي حلزوني مساحة مقطعه $2.5 cm^2$ ومتوسط طوله $8 cm$, اذا كان في الملف فجوة هوائية اتساعها $0.25 mm$ ومساحة مقطعها التقريبي $2.8 cm^2$, ونفوذية مادة القلب النسبية $\mu_r = 1000$. جد الفيض المغناطيسي المخترق الملف اذا كانت القوة المحركة المغناطيسية $mmf = 200 A.turn$ ؟

الفصل السادس

المجالات الكهربائية والمغناطيسية المتغيرة زمنيا

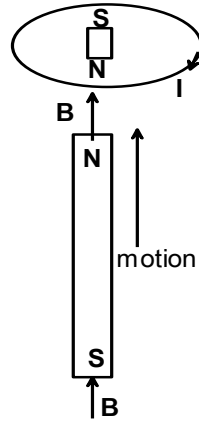
Time Varying Electric & Magnetic Fields

ندرس في هذا الفصل المجالات الكهربائية والمغناطيسية التي تكون دوال زمنية , ونبدء بعرض قانون فارادي الذي يعطي القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في دائرة كهربية مغلقة بسبب التغير في المجال المغناطيسي المتشابه مع هذه الدائرة. كما نتناول دراسة علاقة القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بفعل حركة موصل في مجال مغناطيسي. واخيرا ندرس مفهوم تيارات الإزاحة الناتجة عن تغير الإزاحة الكهربائية مع الزمن.

(6.1) قانون فارادي Faraday's Law

في عام 1831م , وجد ميخائيل فارادي العالم البريطاني , ان المجال المغناطيسي المتغير والذي يخترق دائرة كهربية مغلقة يمكن ان يتولد عنه تيار كهربى في هذه الدائرة. لو فرضنا ان قضيب مغناطيسي يتحرك نحو لفة بحيث يزداد الفيض المغناطيسي المخترق للفة (شكل 6.1) , ونتيجة لذلك يتولد تيار تأثيرى في اللفة ويجري في اتجاه يجعل المجال المغناطيسي للفة يعارض الحركة , فمثلا لو كان قطب القضيب المغناطيسي المتحرك نحو اللفة قطب شمالي فإن اللفة تصبح بفعل هذا التيار ثنائي قطب مغناطيسي قطبه الشمالي مقابلا للقطب الشمالي للقضيب (اي في حالة تنافر poles repel).

اما في حالة حركة القضيب المغناطيسي مبتعدا عن اللفة فإن اتجاه التيار التأثيرى ينعكس ليجعل اللفة ثنائي قطب مغناطيسي قطبه الجنوبي يقابل القطب الشمالي للقضيب (اي في حالة تجاذب poles attract).



شكل (6.1) التيار التأثيرى في لفة يتحرك نحوها قضيب مغناطيسي.

وعند تكرار هذه الحركة بالإقتراب والإبتعاد عن اللفة يكون التيار التأثيري متناوباً (او متردداً) (ac) alternating current . وفي عام 1834 م , وضع فريدريك لينز Friedrich Lenz قانونا عرف بإسمه والذي ينص كالتالي:

يكون اتجاه التيار التأثيري المتولد في اللفة دائما في الإتجاه الذي يسمح له بمعارضة التغير في الفيض المغناطيسي المخترق لهذه اللفة (زيادة او نقصان).

إذا كانت اللفة غير مغلقة (حلقة مفتوحة) فإنه يتولد بين طرفيها قوة دافعة تأثيرية ($\mathcal{V}$) تعطى كالتالي:

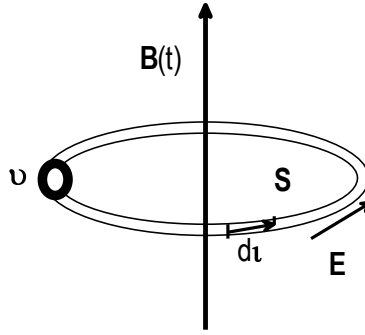
$$\mathcal{V} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

حيث Φ_m الفيض المغناطيسي الكلي المتشابك مع اللفة. وتسمى هذه العلاقة قانون فارادي. اما الفيض المغناطيسي الكلي فيعطى على النحو التالي:

$$\Phi_m = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

حيث $d\mathbf{S}$ عنصر من السطح المحدد بمحيط اللفة (كما في الشكل 6.2). وعليه تصبح القوة الدافعة التأثيرية كالتالي:

$$\mathcal{V} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



شكل (6.2): القوة الدافعة التأثيرية في حلقة مفتوحة يخترقها مجال مغناطيسي متغير زمنياً. إذا كانت مساحة اللفة ثابتة مع الزمن (stationary or fixed), فإن:

$$\mathcal{V} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وحيث ان القوة الدافعة الكهربائية هي الشغل اللازم لنقل وحدة شحنة كهربائية خلال الدائرة , لذلك :

$$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

حيث E المجال الكهربائي الناتج عن التيار التآثيري في الدائرة. ويتم اجراء التكامل الخطي حول المسار المغلق المحيط بالسطح .

$$\mathcal{V} = \oint E \cdot d\ell = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

وهذه المعادلة الأخيرة تعرف بإحدى معادلات ماكسويل , كما سيرد شرحه لاحقاً, بالصيغة التكاملية.

(6.2) الحث الكهربائي Electric Induction

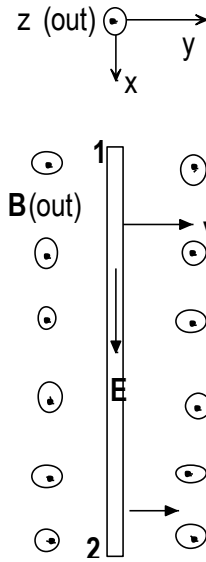
نفرض ان شحنة ما Q , تتحرك في مجال مغناطيسي كثافة فيضيه B بسرعة v , تكون القوة المؤثرة عليها (قوة لورنتز) كالتالي:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

وحيث ان القوة المؤثرة لكل وحدة شحنة (المجال الكهربائي) , لذلك نجد ان:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ومصدر هذا المجال الكهربائي القوة الدافعة التآثيرية المتولدة بين طرفي الموصل , على اعتبار ان هذه الشحنة موجودة بداخل الموصل المتحرك في المجال المغناطيسي بسرعة $\mathbf{v}$ (كما في الشكل 6.3). ويكون اتجاه المجال الكهربائي متعامداً مع كل من اتجاه السرعة والمجال المغناطيسي.



شكل (6.3) حركة موصل في مجال مغناطيسي.

ويمكن ان نعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$\mathcal{V} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

حيث $\mathcal{V}$ القوة الدافعة التأثيرية بين طرفي الموصل الذي طوله ℓ . اذا كان $\mathbf{B}$ منتظما و متعامدا مع اتجاه حركة الموصل , فإن

$$\mathcal{V} = E\ell = vB\ell$$

وتسمى القوة الدافعة التأثيرية الناتجة عن حركة الموصل في المجال المغناطيسي **بالحث الحركي** *motional - induction*. اما في حالة حركة دائرة مغلقة في مجال مغناطيسي تكون القوة الدافعة التأثيرية كالتالي:

$$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

وبشكل عام , اذا كانت دائرة مغلقة تتحرك بسرعة ما في منطقة مجال مغناطيسي متغير مع الزمن , فإن القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في هذه الدائرة تعطى كالتالي:

$$\mathcal{V} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال (6.1)

وضعت لفة مستطيلة الشكل مساحتها A في مجال مغناطيسي يتغير مع الزمن ومتعامدا على مستوى اللفة كالتالي:

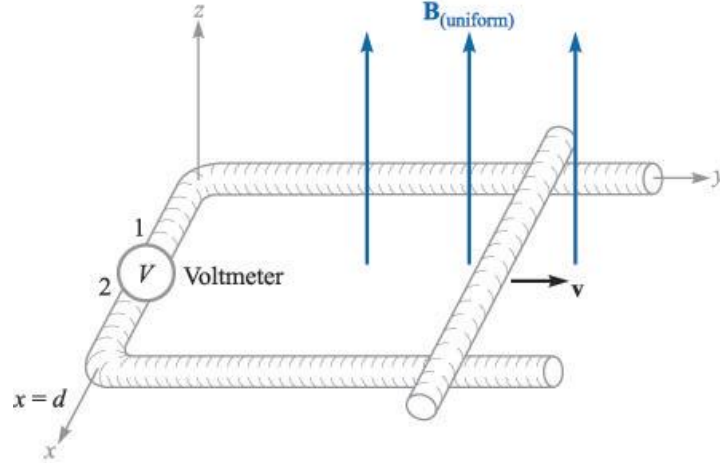
$$B = B_0 \cos \omega t$$

جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في اللفة؟
الحل:

$$\mathcal{V} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = A\omega B_0 \sin \omega t$$

مثال (6.2)

في الشكل (6.4) جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في الدائرة المغلقة بفعل تغير مساحة الدائرة مع الزمن.



شكل (6.4) القوة الدافعة التأثيرية في دائرة مغلقة ومتغيرة المساحة.

الحل:

حيث B ثابت ومتعامد مع مستوى الدائرة المغلقة , فإن الفيض المغناطيسي المخترق لهذه الدائرة في اي لحظة زمنية يكون كالتالي:

$$\Phi(t) = Byd$$

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \left(\frac{dy}{dt} \right) d = -Bvd$$

مثال (6.3)

تدور لفة مستطيلة الشكل طولها ℓ وعرضها $2R$ حول محور ثابت عند مركزها بسرعة زاوية ω في منطقة مجال مغناطيسي ثابت الشدة B (كما في الشكل 6.5). جد القوة الدافعة التأثيرية في اللفة؟

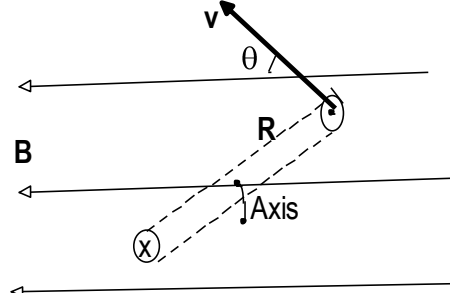
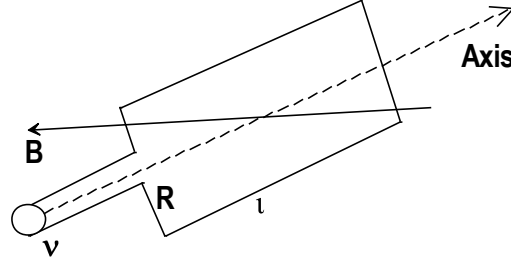
الحل:

هذا الترتيب يمثل فكرة المولد الكهربائي . تكون القوة الدافعة التأثيرية المتولدة كالتالي:

$$\mathcal{V} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\ell} = 2vB\ell \sin \theta = 2vB\ell \sin \omega t$$

حيث $v = \omega R$, اذن

$$\mathcal{V} = 2\omega R\ell B \sin \omega t = \omega AB \sin \omega t$$



شكل (6.5) لفة تدور في مجال مغناطيسي.

(6.3) نظرية ستوكس Stokes' Theorem

لنفرض عنصر مساحة مربع ΔS في مستوى xy (كما في الشكل 6.6), ولنفرض ان مركبات المجال الكهربائي في هذا المستوى هي E_x, E_y . يكون الشغل اللازم لنقل وحدة شحنة كهربائية عبر محيط المربع يساوي التكامل الخطي المغلق لشدة المجال الكهربائي, وهذا الشغل يساوي القوة الدافعة التأثيرية عبر محيط هذا المربع. اي

$$\mathcal{V} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

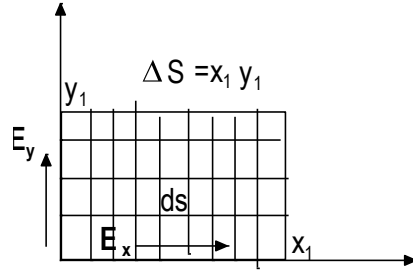
وكما مر معنا من التعريف الرياضي لتدوير متجه ما , فإن

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} = \nabla \times \mathbf{E}$$

يمكن توضيح المعنى الفيزيائي لهذه العلاقة كالتالي:

لنفرض ان مساحة سطح $x_1 y_1$ مقسما الى خلايا متناهية المساحات ومربعة الشكل (شكل 6.6), يكون الشغل لوحدة الشحنة اللازم لنقل شحنة ما حول اللفة المتناهية (الخلية) مقسوما على مساحة هذه الخلية يساوي تدوير شدة المجال الكهربائي حول النقطة التي تنكمش فيها هذه المساحة نحو الصفر.

إذا اعتبرنا تكامل تدوير $\mathbf{E}$ حول المساحة $x_1 y_1$, فإن كل المساهمات من الخلايا الصغيرة لهذا الشغل تتلاشى ولا يبقى الا الشغل حول محيط هذه المساحة فقط.



شكل (6.6) توضيح نظرية ستوكس.

وعليه يمكن التعبير عن ذلك رياضيا" كالتالي:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

ويمكن برهان صحة هذه العلاقة باستخدام نظرية الأبعاد كالتالي:

$$\frac{\text{Force}}{\text{Charge}} \times \text{distance} = \frac{\text{work/charge}}{\text{area}} \times \text{area}$$

حيث : $\text{Force} \times \text{distance} = \text{Work}$

وتسمى العلاقة الأخيرة نظرية ستوكس: وتنص على ما يلي

التكامل الخطي لمتجه ما حول خط كنتوري مغلق C يساوي التكامل السطحي لمرتبة هذا المتجه العمودية على السطح المحاط بهذا الخط الكنتوري.

(6.4) المحاثّة الذاتية والمتبادلة Self and Mutual Inductance

• المحاثّة الذاتية Self Inductance

يعتبر الملف جهازا لخزن الطاقة المغناطيسية , لنفرض ان ملف حلزوني عدد لفاته N ويمر به تيار كهربي شدته I , يكون الفيض المغناطيسي المتشابك في هذا الملف Ψ , مساويا لحاصل ضرب عدد اللفات مع الفيض المغناطيسي المخترق لكل لفه , اي

$$\Psi = N\Phi_m$$

وتعرف المحاثّة الذاتية L كالتالي:

$$L = \frac{\Psi}{I} = N\Phi_m/I$$

ويكون هذا التعريف للمحاثة الذاتية صحيحا في حال ثبوت النفوذية بالمغناطيسية للوسط , اما في حالة كون النفوذية غير ثابتة (اي تعتمد على احداثيات الوسط) , فإن المحاثة الذاتية للملف تكون كالتالي:

$$L = \frac{d\Psi}{dI}$$

وتقاس المحاثة الذاتية بوحدة تسمى هنري (henry) , ويرمز لها H , حيث

$$\text{Henry} = \frac{\text{weber}}{\text{amper}}$$

لنفرض ان ملف حلزونيا طويل, ℓ , وعدد لفاته N ومساحة مقطعه A . اذا كان التيار المار به شدته I , فإن الفيض المغناطيسي المتشابك مع هذا الملف يعطى كالتالي:

$$\Psi = N\Phi_m = NBA = \frac{\mu N^2 I A}{\ell}$$

حيث يمكن اعتبار ان B ثابتة خلال الملف وتساوي قيمة كثافة الفيض المغناطيسي عند مركز الملف (يكون هذا التقريب صحيحا الى درجة ما اذا كان الملف طويل جدا). وعليه تكون المحاثة الذاتية للملف كالتالي:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2 A}{\ell}$$

مثال (6.4)

جد المحاثة الذاتية لملف حلزوني عدد لفاته 2000 لفة وبطول 500 mm , اذا كانت اللفات على اسطوانة من الورق بقطر 40 mm وداخلها الهواء؟
الحل:

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^6 \times \pi \times 4 \times 10^{-4}}{0.5} = 12.6 \text{ mH}$$

مثال (6.5)

جد المحاثة الذاتية لملف حلقي متوسط نصف قطره R وعدد لفاته N , ونصف قطر اللفة r , اذا كان يمر به تيار شدته I ؟
الحل:

$$\Psi = N\Phi_m = NBA = N \frac{\mu N I}{2\pi R} \pi r^2 = \frac{\mu N^2 r^2 I}{2R}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2 r^2}{2R}$$

• المحاثية المتبادلة Mutual Inductance

لنفرض ان ملفين حلقيين قلبهما من حلقة مصنوعة من مادة مغناطيسية (μ) , حيث عدد لفات الأول N_1 بينما عدد لفات الثاني N_2 , ولا يوجد اتصال كهربائي بينهما. يسمى الملف الأول بالملف الابتدائي , بينما يسمى الملف الآخر بالملف الثانوي (الشكل 6.7).

اذا كان التيار الابتدائي I_1 ثابت القيمة , فإن الفيض المغناطيسي المتشابه مع الملف الثانوي Φ_{m1} يكون ثابتا , وعليه لا تتولد قوة دافعة تأثيرية عبر الملف الثانوي ($V_2 = 0$) . اما عند زيادة قيمة I_1 وذلك بانقاص قيمة (R) في الدائرة الابتدائية , فإن Φ_{m1} تزداد , وعليه حسب قانون فارادي تتولد قوة دافعة تأثيرية في الملف الثانوي مقدارها (بدون اعتبار الإشارة السالبة في القانون) كالتالي:

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi_{m1}}{dt}$$

حيث ان الفيض المغناطيسي يعطى كالتالي:

$$\Phi_{m1} = \frac{\mu N_1 I_1 A}{\ell}$$

حيث A = مساحة مقطع الملف الثانوي . وبالتعويض نجد ان

$$V_2 = N_1 N_2 \frac{\mu A}{\ell} \frac{dI_1}{dt}$$

لنعرف الكمية

$$N_1 N_2 \frac{\mu A}{\ell} = M$$

وتسمى هذه الكمية الفيزيائية بالمحاثية المتبادلة mutual inductance بين الملفين وتقاس بوحدة الهنري (H).

وتصبح قيمة القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في الملف الثانوي كالتالي:

$$V_2 = M \frac{dI_1}{dt}$$

لنفرض الحالة العكسية التالية وهي ان نجعل دائرة الملف الثانوي تحوي على البطارية والمقاومة , بحيث يمكن ان نتحكم في تغيير مقدار الفيض المغناطيسي المتشابه مع الملف الابتدائي , اي ان القوة الدافعة التأثيرية تتولد في دائرة الملف الابتدائي وتكون كالتالي:

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_{m2}}{dt}$$

حيث

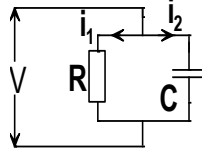
$$\Phi_{m2} = \frac{\mu N_2 I_2 A}{\ell}$$

اذن

$$V_1 = N_1 N_2 \frac{\mu A}{\ell} \frac{dI_2}{dt} = M \frac{dI_2}{dt}$$

(6.5) تيار الإزاحة (Displacement Current)

لنفرض ان دائرة كهربية مكونة من مكثف متصل على التوازي مع مقاومة كهربية , وسلط فرق في الجهد على هذه الدائرة (كما في الشكل 6.7) مما ولد تيارا مستمرا وثابت الشدة عبر المقاومة . بينما يكون هناك تيار عبر المكثف اذا كان فرق الجهد المسلط على الدائرة متغيرا فقط . لنفرض ان فرق الجهد بين طرفي المقاومة R يساوي V وسعة المكثف المتصل على التوازي مع المقاومة C , يكون تيار المقاومة $i_1 = \frac{V}{R}$, بينما يكون التيار عبر المكثف i_2 , كالتالي :



شكل(6.7) دائرة مكثف ومقاومة على التوازي.

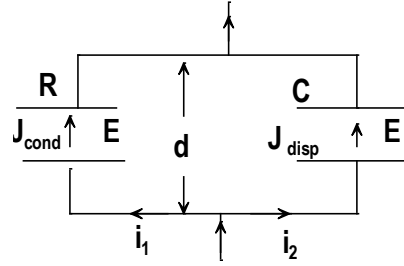
$$i_2 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

حيث Q تمثل شحنة المكثف اللحظية وتساوي CV . يسمى التيار المار في المقاومة **تيار التوصيل** *conduction current* , بينما يسمى **التيار خلال المكثف تيار الإزاحة** *displacement current* , ومما تجدر الإشارة اليه انه لا يمر تيار عبر المكثف حقيقة وانما يكون التأثير الخارجي في الدائرة بفعل التغير الزمني لفرق الجهد عبر لوحيتي المكثف وكأنه جريان تيار خلال هذا المكثف , ويكمن توضيح ذلك كالتالي:

لنفرض ان كلا من المقاومة والمكثف تشغل حجما (الشكل 6.8) , وبداخل كل منهما يكون المجال الكهربائي E مساويا لفرق الجهد عبرهما مقسوما على الطول , $\left(E = \frac{V}{d} \right)$, وعليه تكون كثافة التيار عبر المقاومة:

$$J_1 = E\sigma = \frac{i_1}{A}$$

حيث A مساحة المقطع , σ موصلية مادة المقاومة .



شكل (6.8) تيار التوصيل والإزاحة عبر دائرة المقاومة والمكثف.

بينما في حالة المكثف ذو اللوحتين المتوازيين, اذا كانت مساحة كلا من لوحتيه A والبعد بينهما d , تكون سعة هذا المكثف $C = \frac{\epsilon A}{d}$ ويعطى فرق الجهد بين اللوحتين كالتالي : $V = Ed$, وعليه

$$i_2 = \frac{\epsilon A d}{d} \frac{dE}{dt} = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

اذا اعتبرنا ان كثافة التيار خلال المكثف J_2 , فإن

$$J_2 = \frac{i_2}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt}$$

وحيث $D = \epsilon E$, فإن

$$J_2 = \frac{dD}{dt}$$

وبصورة عامة نرمز لكثافة تيار التوصيل J_{cond} , ونرمز لكثافة تيار الإزاحة J_{disp} . وحيث ان المجال الكهربائي كمية متجهة تكون كلا من كثافة التيار التوصيل والإزاحة كميات متجهة ايضا. اي

$$J_{cond} = \sigma E , J_{disp} = \frac{dD}{dt}$$

لو فرضنا ان مكثفا ما مملوء بمادة غير عازلة تماما وانما لها موصلية , يكون التيار الكلي عبر هذا المكثف يساوي مجموع تيار التوصيل وتيار الإزاحة , اي

$$J_{tot} = J_{cond} + J_{disp}$$

مثال (6.6)

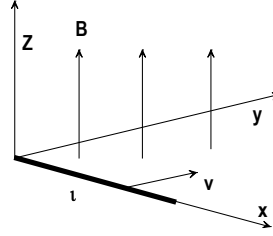
لمادة ما كانت $\epsilon_r = 1$, $\sigma = 5.0$, فإذا كان المجال الكهربائي يساوي
 $E = 250 \sin 10^{10} t$, جد كثافة كلاً من تيار التوصيل وتيار الإزاحة ؟
الحل:

$$J_{cond} = \sigma E = 1250 \sin 10^{10} t \quad (A/m^2)$$

$$\begin{aligned} J_{disp} &= \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon_r 250 \sin 10^{10} t) \\ &= 22.1 \cos 10^{10} t \quad (A/m^2) \end{aligned}$$

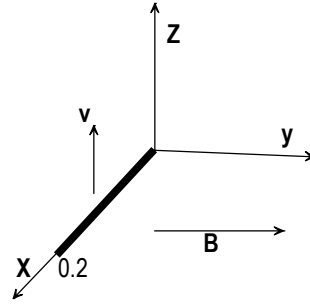
تمارين

(6.1) موصل موضوع باتجاه محور السينات (كما في شكل 6.9) و طوله 3.0 m , يتحرك بسرعة $\mathbf{v} = 2.5 \hat{\mathbf{y}} \text{ m/s}$ في مجال مغناطيسي منتظم كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.5 \hat{\mathbf{z}} \text{ T}$, جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة ؟



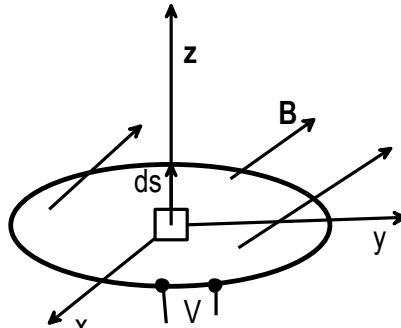
شكل (6.9)

(6.2) جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في موصل (الشكل 6.10) طوله 0.2 m ويتحرك بسرعة $\mathbf{v} = 2.5 \sin 10^3 t \hat{\mathbf{y}} \text{ m/s}$ في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.04 \hat{\mathbf{y}} \text{ T}$ ؟



شكل (6.10)

(6.3) لفة موصلة مساحتها $A = 0.65 \text{ m}^2$ موضوعة في مستوى $z = 0$ ويخترقها مجال مغناطيسي كثافة فيضه : $\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ (الشكل 6.11) , جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين طرفي اللفة ؟



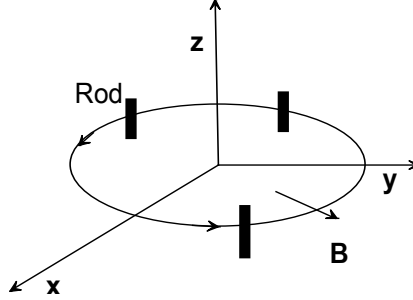
شكل (6.11)

(6.4) وضعت لفة دائرية نصف قطرها $0.1m$ عند المستوى $z = 0$ في مجال مغناطيسي كثافة فيضيه

$B = 0.2 \sin 10^3 t \hat{z}$, جد التيار التأثيري المار في هذه اللفة علما ان مقاومتها $R = 0.5 \Omega$ ؟

(6.5) موصل طوله $1 cm$ موازي لمحور z ويدور في مسار دائري نصف قطره $25 cm$ بسرعة زاوية

1200 دورة / دقيقة. اذا كان هذا الموصل موضوع في مجال مغناطيسي كثافة فيضيه $B = 0.5 \hat{r}$, جد اقوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين طرفي هذا الموصل (شكل 6.12) ؟



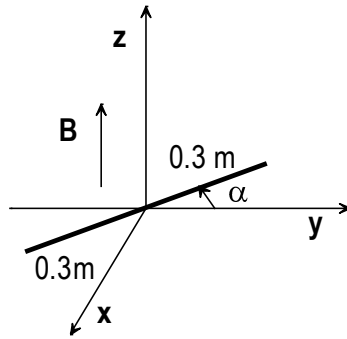
شكل (6.12).

(6.6) يدور قرص دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ω , اذا كان القرص موضوعا في

مجال مغناطيسي متعامد مع مستوى القرص و كثافة فيضيه $B = B_0 \hat{z}$, جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين مركز وحافة القرص ؟

(6.7) يدور ملف مربع الشكل حول محور x بسرعة زاوية $\omega = 60\pi rad/s$ في

مجال مغناطيسي $B = 0.80 \hat{z}$, جد مقدار القوة الدافعة التأثيرية المتولدة اذا كان طول ضلع المربع $0.6m$ (الشكل 6.13) ؟

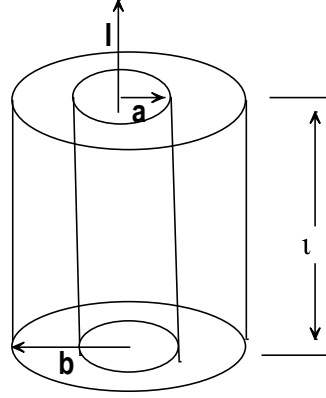


شكل (6.13)

(6.8) جد المحاثة الذاتية لكل وحدة طول لموصل مكون من اسطوانتين دائريتين متحدتين في

المركز ونصفي قطريهما $(a, b : b > a)$, ويمر في الاسطوانة الداخلية تيار كهربائي شدته

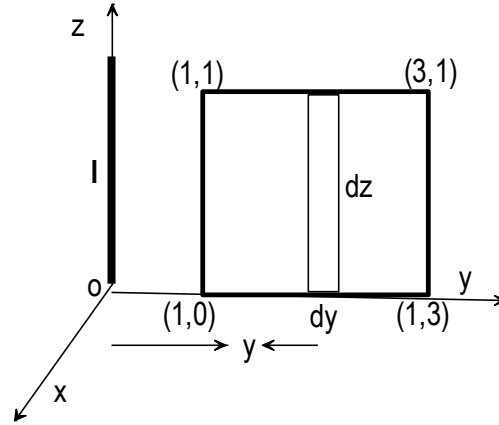
I (الشكل 6.14) , علما ان الوسط بين الاسطوانتين فراغا ؟



شكل (6.14)

(6.9) ملف حلقي مستطيل الشكل ومحدد بالسطوح: $\rho = 2, \rho = 3, z = 4$ and $z = 0$. إذا كان قلب الملف من مادة $(\mu_r = 80)$ وعدد لفاته 8000 لفة , جد المحثة الذاتية لهذا الملف إذا مر به تيار كهربائي I ؟

(6.10) وضع ملف مستطيل الشكل بالقرب من سلك طويل يمر به تيار I في اتجاه محور z , إذا مستوى الملف yz واحداثيات زواياه كالتالي: $(0,1,0), (0,3,0), (0,3,1), (0,1,1)$, وعدد لفاته 150 لفة , جد المحثة المتبادلة بين الملف والسلك؟



شكل (6.15)

(6.11) إذا كانت موصلية مادة ما تساوي 10^{-3} , والنفاذية النسبية لها تساوي $\epsilon_r = 2.5$, جد كثافة تيار التوصيل وتيار الإزاحة في هذه المادة عند تسليط مجال كهربائي عليها شدته $E = 6 \times 10^{-6} \sin 9 \times 10^9 t$ ؟

الفصل السابع

الأمواج الكهرومغناطيسية

Electromagnetic Waves

في الفصول السابقة , تمت دراسة الظواهر الكهربائية والمغناطيسية باعتبار ان المجالات الكهربائية والمغناطيسية لا تتغير مع الزمن . في هذا الفصل نتناول دراسة هذه الظواهر على اعتبار ان مصادر هذه المجالات (التوزيع الشحني والتيار الكهربائي) تعتمد على الزمن , وهذا أدى الى دمج الظاهرتين في ظاهرة واحدة هي الكهرومغناطيسية .

(7.1) المجال الكهربائي والمغناطيسي المتغير مع الزمن

Time varying Electric & Magnetic Fields

إذا كانت الشحنة الكهربائية دالة للزمن , فإنه عند أي نقطة ما وفي أي لحظة زمنية يكون قانون جاوس بصيغته التفاضلية والتكاملية صحيحا وكالتالي:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

وبالمثل , تكون معادلات المجال المغناطيسي $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ صحيحة وبالصيغة الرياضية التالية:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

وتعتبر هذه المعادلات الأركان الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية.

أما قانون فارادي بصيغته التفاضلية للمجالات المتغيرة زمنيا يكون صحيحا ويمثل أحد المعادلات الأصولية للنظرية الكهرومغناطيسية , وهو على الصورة التالية:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

في هذه الحالة , نلاحظ ان المجال الكهربائي لا يكون مجالا محافظا , أي $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ لأن القوة الدافعة التأثيرية لا تساوي صفرا في هذه الحالة , كما نلاحظ ان مصدر المجال الكهربائي يعود الى التوزيع الشحني والى التغير الزمني للمجال المغناطيسي والنتاج عن كون توزيع التيار الكهربائي دالة زمنية. وبصورة عامة لا يكون تدوير (التفاف) و تباعد المجال الكهربائي مساويا للصفر. وفقط يكون المجال الكهربائي محافظا عندما يكون المجال المغناطيسي ثابتا مع الزمن . static

لإيجاد شدة المجال الكهربائي , والمكون من حدين الأول منهما يكون محافظا والثاني غير محافظ , نتبع ما يلي:

بما ان $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, حيث $\mathbf{A}$ الجهد المغناطيسي المتجه , بالتعويض في قانون فارادي التفاضلي نحصل على

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

من نظريات المتجهات , اذا كان التفاف اي متجه ما يساوي الصفر , فإن هذا المتجه يساوي سالب تحددالة عددية . وعليه ,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

حيث Φ تمثل دالة الجهد الكهربائي . وملخص القول انه يمكن التعبير عن شدة المجال الكهربائي كالتالي:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^q ; \mathbf{E}^i = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \mathbf{E}^q = -\nabla \Phi$$

مثال (7.1)

برهن صحة المتطابقة التالية :

$$\oint_C \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

الحل:

نستخدم تكامل التفاف $\mathbf{E}^i$ على مساحة سطح S و نطبق نظرية ستوكس لنحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} \oiint_S \nabla \times \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

(7.2) معادلات ماكسويل Maxwell's Equations

عرفنا في الفصول السابقة ان الصيغة الرياضية لقانون امبير الدائري هي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$$

في عام 1864, طرح مكسويل التسائل التالي: لو اخذنا تباعد الطرفين في هذا القانون , اي

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_f$$

فإن هذه النتيجة تكون صحيحة في الحالة الساكنة (steady- state) , ولكن في حالة توزيعات الشحنات والتيارات المتغيرة مع الزمن فإن معادلة الإستمرارية (حفظ الشحنة) تعطي ما يلي

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = - \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \neq 0$$

وللتخلص من هذا التناقض , افترض ماكسويل تعديلا في قانون امبير الدائري وهو كالتالي:

حيث $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ فإن معادلة الإستمرارية تصبح على الصورة التالية :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left[\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0$$

وعليه , يصبح قانون امبير الدائري على النحو التالي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

وكما مر معنا في الفصل السابق , فإن $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, وتسمى كثافة تيار الإزاحة.

وبناء على ذلك , استطاع ماكسويل ان يضع الأسس الرياضية للنظرية الكهرومغناطيسية في الأوساط المادية على الصورة التالية:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

وهذه المعادلات تعرف بمعادلات ماكسويل ,

اما ملحقات هذه المعادلات في الأوساط الخطية فهي:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$$

مثال (7.2)

إذا كان المجال الكهربائي في الفراغ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}} \quad \text{جد ما يلي : } \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H} \quad ?$$

الحل

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}}$$

باستخدام معادلة ماكسويل التالية:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

نجد ان

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \sin(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$kE_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

وبتكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن , نجد ان

$$\mathbf{B} = -\frac{kE_0}{\omega} \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}}$$

وذلك مع اهمال ثابت التكامل , على اعتبار انه يمثل المجال الساكن (static field).

اذن

$$\mathbf{H} = -\frac{kE_0}{\omega\mu_0} \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}}$$

مثال (7.3)

في الفراغ الحر , اذا كانت $H = \hat{x}H_0 e^{i(\omega t + kz)}$, جد E ؟

الحل:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0 e^{i(\omega t + kz)} \hat{y} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$ikH_0 e^{i(\omega t + kz)} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

بالتكامل نجد ان

$$\mathbf{D} = \frac{kH_0}{\omega} e^{i(\omega t + kz)} \hat{y}$$

(7.3) معادلة الموجة الكهرومغناطيسية Electromagnetic Wave Equation

لنفرض ان الوسط المادي الذي يحوي المجالات الكهربائية والمغناطيسية وسطا خطيا , وعليه تكون العلاقة بين هذه المجالات كالتالي:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$$

وتكون ε, μ كميات ثابتة في هذا الوسط لحد ما . اما الموصلية تقاس (σ) بوحدة تسمى سيمنز (S) siemens , حيث ($1 \text{ S}^{-1} = 1 \Omega$) . يمكن كتابة معادلات ماكسويل السابقة الذكر على النحو التالي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (7.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

كما يمكن ايجاد المعادلات التفاضلية للمجالات (الكهربائية او المغناطيسية) والتي تمثل حالة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية كدالة للمكان والزمان بإستخدام معادلات ماكسويل كالتالي:

بأخذ التفاف طرفي معادلة (7.2) نحصل على ما يلي:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

نستخدم معادلة (7.1) ومتطابقة المتجهات (الفصل الأول) في طرفي هذه المعادلة لنحصل على ما يلي

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

بترتيب الحدود والتعويض بدلا من تباعد $\mathbf{E}$ نحصل على ما يلي :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\rho_f}{\varepsilon} \right)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة الموجة غير المتجانسة للمجال الكهربائي, كما يمكن الحصول على معادلة موجية مماثلة للمجال المغناطيسي وذلك بأخذ التفاف طرفي معادلة (7.1) وإتباع نفس الخطوات . وتعطي هذه المعادلة وصفا لظاهرة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الوسط المادي وحلها يعطي المجال الكهربائي كدالة للمكان والزمان .

في حالة عدم وجود مصادر للشحنة الكهربائية في الوسط , اي $\rho_f = 0$, فإن معادلة الموجة تصبح متجانسة , اي

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (7.3)$$

وبالمثل , تكون معادلة الموجة للمجال المغناطيسي على النحو التالي:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

في البنود التالية , سنتناول حل معادلة الموجة الكهرومغناطيسية لحالات خاصة من الأوساط المادية.

مثال (7.4)

إذا كان الإعتقاد الزمني للمجال الكهربائي والمغناطيسي يعبر عنه بالدالة الأسية التالية:

$$E(t) \sim e^{i\omega t}, \quad H(t) \sim e^{i\omega t}$$

جد الصورة التفاضلية لمعادلات ماكسويل في الوسط الخطي , حيث $\rho_f = 0$ ؟

الحل

حيث في الوسط الخطي والمتماثل المناحي , تكون العلاقات التالية صحيحة:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$$

وعليه , فإن معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة مع الزمن تصبح كالتالي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

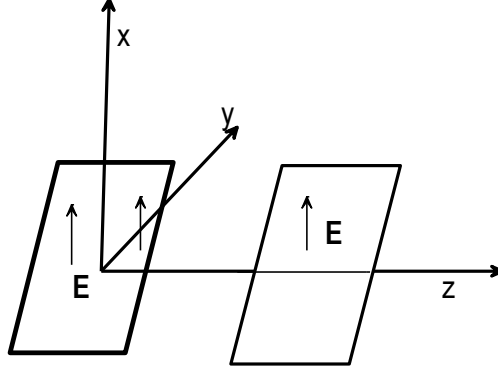
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

(7.4) الموجة المستوية Plane wave

عند اعتبار نظام الإحداثيات المستوية (الكارتيذية) , فإن معادلة (7.3) تصبح كالتالي:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

لنفرض ان $\mathbf{E}$ دالة لمتغير احداثي واحد , ولنعتبره z على سبيل المثال , وكذلك دالة للزمن , اي $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$, هذا يعني ان $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(x, y)$, وبالتالي فإن مقدار واتجاه $\mathbf{E}$ هو نفسه لجميع النقاط في مستوى xy , وفي هذه الحالة نسمي هذه الموجة موجة مستوية plane wave . مع ملاحظة ان $\mathbf{E}$ تتغير بين المستويات المختلفة (الشكل 7.1)



شكل (7.1) انتشار موجة مستوية في وسط مادي.

وعليه تؤول معادلة الموجة الى الصورة التالية

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (7.4)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة الموجة المستوية.

في حالة عدم وجود شحنات كهربية في الوسط , فإن

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

من هذه النتيجة نقول ان E_z تكون ثابتة القيمة في الفضاء اثناء انتشار الموجة المستوية في هذا الوسط.

وبناء عليه, فان معادلة (7.4) تؤول الى ما يلي:

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

وبالتكامل المباشر لهذه المعادلة نحصل على

$$E_z = ae^{-(\sigma/\epsilon)t} + b = \text{constant}$$

حيث a, b ثوابت التكامل.

في حالة $\sigma \neq 0$, فإن الحد الأول في مقدار E_z يتلاشى بعد فترة زمنية قصيرة , وتبقى قيمة هذا المقدار ثابتة مع الزمن. وهذا ينطبق ايضا على مركبة المجال المغناطيسي H_z .

كما نلاحظ ان E_z, H_z تقعان في مستوى xy , وتسمى هذه الموجة بالموجة المستعرضة *transverse wave*.

(7.4.1) انتشار موجة مستوية في وسط عازل

Propagation of a Plane Wave in a Dielectric Medium.

لنفرض ان موجة مستوية تنتشر في وسط مادي عازل ($\sigma = 0$) , تصبح معادلة (7.4) على النحو التالي:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

فاذا فرضنا ان اتجاه المجال الكهربائي هو محور x , اي $E = E(z, t)\hat{x}$, فيمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة مقدار شدة المجال الكهربائي كالتالي:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (7.5)$$

لإيجاد E , نفترض ان E دالة لمتغير واحد ξ . وهذا المتغير هو التركيب الخطي للمتغيريين (z, t) كالتالي:

$$\xi = \omega t - kz$$

وعليه ,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -k \frac{dE}{d\xi} = -kE'$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -k \frac{\partial E'}{\partial z} = -k \frac{dE'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -k^2 E''$$

بنفس الخطوات , نجد ان

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega^2 E''$$

بالتعويض في معادلة (7.5) نحصل على ما يلي:

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 \rightarrow k = \pm \sqrt{\epsilon\mu}\omega$$

تعريف: المقدار $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v$ يساوي سرعة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية

في الوسط . في حالة انتشار هذه الموجة في الفراغ , تكون هذه السرعة : $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = v_0$

وحيث $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$, وبتعويض هذه القيم , نجد ان

$$v_0 = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

وهذه السرعة تعادل سرعة انتشار الضوء في الفراغ (كما وجد في التجارب العملية) , مما ادى الى استنتاج ماكسويل نظريا ان طبيعة الضوء هي نفس طبيعة الأمواج كهرومغناطيسية.

لإيجاد الدالة التي تمثل الوصف الرياضي لتغير المجالات الكهربائية (المغناطيسية) مع المكان والزمان , نعتمد على تحليل فورييه *Fourier Analysis* والذي ينص على ما يلي: يمكن كتابة اي دالة دورية في مدى معين بدلالة مجموع التراكيب الخطية لدوال جيبية *sinusoidal functions*. اي ان الصورة الرياضية للمجال الكهربى (او المغناطيسى) هي

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

او بدلالة الدالة الأسية المركبة التالية :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

حيث E_0 تمثل سعة الموجة (القيمة العظمى لشدة المجال الكهربى كما في شكل 7.2). من هذه العلاقة , نجد ان تغير المجال الكهربى مع الزمن , عند $z = 0$, يكون كالتالى:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

ونلاحظ ان هذه الدالة تكرر نفسها كل فترة زمنية محددة تسمى الدور *Period* (T) , حيث $\omega = \frac{2\pi}{T}$, وحيث $f = 1/T$, فإن $\omega = 2\pi f$. وتسمى ω التردد الزاوي *Angular frequency* .

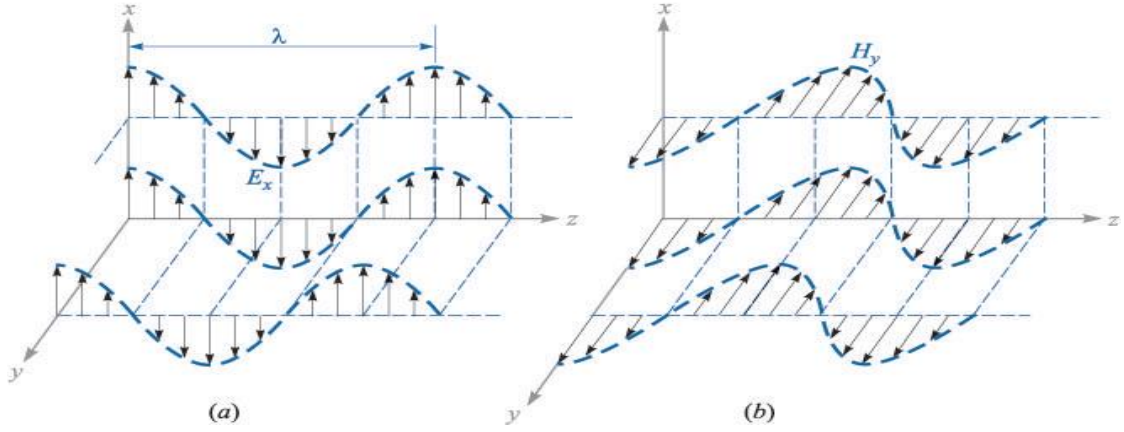
اما تغير المجال الكهربى مع المكان عند $t = 0$, يكون كالتالى:

$$E(z) = E_0 \cos(-kz) = E_0 \cos kz$$

ونلاحظ ان المجال يتغير دوريا عبر المسافة (λ) والتي تسمى طول الموجة *wavelength* (الشكل 7.2) , حيث

$$k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

وتعرف k بالعدد الموجي ووحدته راديان/متر.



شكل (7.2) (a) دالة المجال الكهربائي في الموجة المستوية, (b) دالة المجال المغناطيسي في الموجة المستوية.

وينطبق كل ما ذكر بخصوص المجال الكهربائي على المجال المغناطيسي في الموجة المستوية, حيث يكون هذا المجال مستعرضا بالنسبة لإتجاه انتشار الموجة, ويقع في مستوى xy . وعليه يمكن ان نعبر عن دالة هذا المجال في الموجة المستوية كالتالي:

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{u}}$$

حيث $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة, والذي يمكن تحديده كما يلي:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

او

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu H_0 \omega \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{u}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{\mathbf{y}} k E_0 \sin(\omega t - kz) = \mu H_0 \omega \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{u}}$$

اذن, $\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{y}}$, وعليه تصبح معادلة شدة المجال المغناطيسي للموجة المستوية على النحو:

$$\mathbf{H} = -\hat{y}H_0 \cos(\omega t - kz)$$

وكذلك نجد ان : $kE_0 = \mu H_0 \omega$, ومن هذه العلاقة نحصل على ما يلي:

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu \omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

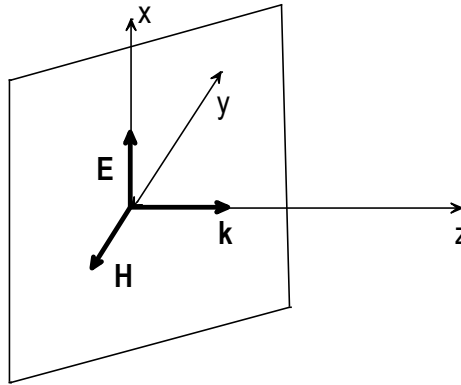
من هذه العلاقة , نجد ان وحدة η هي الأوم ($Ohm = \frac{V}{A}$) , حيث وحدة المجال الكهربائي والمغناطيسي كالتالي : $E_0 = \frac{V}{m}$, $H_0 = \frac{A}{m}$

وعليه , تسمى η ممانعة (مقاومة) الموجة المستعرضة *transverse wave impedance* . اذا كان انتشار الموجة المستعرضة في الفراغ , نجد ان:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ ohms}$$

الشكل (7.3) يبين ترتيب اتجاهات المجالات في الموجة المستوية بالنسبة لإتجاه انتشار هذه الموجة في الوسط . ونلاحظ ان $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ متعامدة على بعض وكلاهما متعامدا مع اتجاه انتشار الموجة , بمعنى:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$$



شكل (7.3) المجالات في الموجة المستوية.

باستخدام معادلة ماكسويل (7.2) او (7.1) , يمكن التوصل الى العلاقات الرياضية التالية:

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}; \quad \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E}/v$$

حيث $\hat{k}$ متجه وحدة يمثل اتجاه انتشار الموجة (كما سبق شرحه , يكون $\hat{k} = \hat{z}$) . وهذه العلاقات صحيحة لأي موجة كهرومغناطيسية تنتشر في اتجاه في الفضاء , حيث يكون حل معادلة الموجة بشكل عام كالتالي:

$$E(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - vt) ; B(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

مثال (7.5)

إذا كان المجال الكهربائي والمغناطيسي لموجة مستوية تنتشر في اتجاه محور y كالتالي:

$$\mathbf{E} = 30\pi e^{i(\omega t - (\frac{4}{3})y)} \hat{z}, \quad \mathbf{H} = 1.0 e^{i(\omega t - (\frac{4}{3})y)} \hat{x}$$

غير موصل حيث $\mu_r = 1$, جد ω , ϵ_r ؟

الحل

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \rightarrow 30\pi = 120\pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}}$$

$$\epsilon_r = 16$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\frac{\omega}{(\frac{4}{3})} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{16}} \rightarrow \omega = 10^8 \text{ rad/s}$$

(7.4.2) انتشار موجة مستوية في وسط موصل

Propagation of a Plane wave in a Conducting Medium.

لنفرض ان موجة مستوية تنتشر في وسط مادي خطي ومتماثل المناحي وموصلية σ .
تكون معادلة الموجة على الصورة التالية

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

على فرض ان الحل التجريبي لهذه المعادلة هو التالي:

$$E = \hat{x}E_0 e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

بتعويض هذا الحل في معادلة الموجة نحصل على

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma = \omega^2 \epsilon \mu \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \quad (7.6)$$

بما ان γ^2 عدد مركب , لذلك يمكن كتابته على الصورة التالية: $\gamma = \beta - i\alpha$, حيث α, β اعداد حقيقية وتحدد قيمها بإستخدام معادلة (7.6) كما سيرد لاحقا. ويكون الحد الثاني $(-i\alpha)$ مسئولا عن نقصان شدة المجالات في الموجة الكهرومغناطيسية اثناء انتشارها في الوسط الموصل وضياع الطاقة على هيئة حرارة . وعليه يكون المجال الكهربائي بدلالة γ على الصورة التالية

$$E = \hat{x}E_0 e^{i(\omega t - \gamma z)} = \hat{x}E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

وهذه المعادلة تمثل شدة المجال الكهربائي لموجة مستوية تنتشر في الوسط بسعة متناقصة بشكل اسي كلما تقدمت الموجة في هذا الوسط , اي ان هذه السعة تساوي $E_0 e^{-\alpha z}$.

ويعرف مقدار المسافة (δ) التي تخترقها الموجة المستوية في الوسط الموصل حتى تصبح سعتها $\frac{1}{e}$ من مقدار سعتها الابتدائية E_0 بمسافة الإختراق او العمق القشري $skin\ depth$, اي

$$E_0 e^{-\alpha \delta} = E_0 e^{-1} \Rightarrow \delta = 1/\alpha$$

يكون المجال المغناطيسي للموجة المنتشرة في هذا الوسط كالتالي:

$$H = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z - \theta)} \hat{y}$$

$$|\eta| = \sqrt{\mu/\epsilon} / \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}$$

ويسمى α معامل التوهين *attenuation factor* , وبإستخدام معادلة (7.6) مع العلاقة التالية:

$$\gamma^2 = (\beta - i\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 - i(2\alpha\beta)$$

وبمساواة الحدود الحقيقية في الطرفين و كذلك الحدود التخيلية , نجد ان

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon \mu / 2} \left[\{1 + (\sigma / \omega \epsilon)^2\}^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu / 2} [\{1 + (\sigma / \omega \epsilon)^2\}^{1/2} + 1]^{1/2}$$

في حالة انتشار الموجة المستوية الكهرومغناطيسية في وسط جيد التوصيل *Good Conductor* , الذي يحقق الشرط التالي: $\sigma \gg \omega \epsilon$, او $\omega \epsilon / \sigma \rightarrow 0$, التقريب لهذه العلاقات يعطي ما يلي:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\omega \mu \sigma / 2} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} : \eta = \sqrt{\omega \mu / \sigma} :$$

$$\tan 2\theta = \sigma / \omega \epsilon = \infty \rightarrow \theta = 45^\circ$$

كمثال على ذلك , لنعتبر عنصر النحاس *copper* , حيث تكون له قيم الثوابت كما يلي :

يجب ان يكون من رتبة 10^{16} Hz حتى نعتبر المقدار $\sigma / \omega \epsilon$ في هذه العلاقات التي تحدد قيم α, β .

مثال (7.6)

جد العمق القشري في حالة انتشار موجة مستوية ترددها 1.6 MHz في وسط موصليته

$\sigma = 38.2 \times 10^6 S/m$, $\mu_r = 1$, ثم جد سرعة انتشار الموجة في هذا الوسط؟

الحل

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{3.14 \times 1.6 \times 10^6 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 3.82 \times 10^6}} \\ = 6.44 \times 10^{-5} m$$

$$\alpha = \beta = \delta^{-1} = 1.55 \times 10^4$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega \delta = 674 m/s$$

(7.5) طاقة الموجات الكهرومغناطيسية Electromagnetic wave Energy

تكون طاقة الموجة الكهرومغناطيسية على شكل طاقة مخزونة في المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي, ويكون انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في وسط ما عبارة عن نقل هذه الطاقة من مكان لآخر.

• طاقة المجال الكهربائي Electric Field Energy

لنفرض ان مكتفا كهربيا ذا لوحين متوازيين مساحة اللوح A والبعد بينهما l . اذا كان فرق الجهد الكهربائي بين اللوحين V , فإن شدة المجال الكهربائي داخل المكثف $E = V/l$. فاذا زادت قيمة V بمقدار صغير جدا, فإن ذلك يؤدي افتراضيا الى نقل شحنة كهربائية بين اللوحين ويكون الشغل اللازم للنقل يساوي V جول/ كولوم. وتتنوع هذه الشحنات المنتقلة بين اللوحين بانتظام على مساحة اللوح وبكثافة منتظمة $\rho_s = D$.

يكون المعدل الزمني للشغل الذي يبذله المصدر (القدرة) لنقل هذه الشحنات على النحو التالي

$$\frac{dW}{dt} = P = VI = (El) dQ/dt$$

$$= (El) d(\rho_s A/dt) = AlE d\rho_s/dt = v E dD/dt$$

حيث v = حجم الحيز بين اللوحين.

لو عرفنا الطاقة الكهربائية لكل وحدة حجم ($U_e = W/v$), كثافة الطاقة الكهربائية, فإن

$$\frac{dU_e}{dt} = E dD/dt$$

وتكتب هذه العلاقة بصورة المتجهات (حيث $\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$) على النحو التالي:

$$\frac{dU_e}{dt} = \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right)$$

وعليه,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

• طاقة المجال المغناطيسي Magnetic Field Energy

لنفرض ان ملف حلزوني عدد لفاته N , طوله l , وساحة مقطعه A يمر به تيار كهربى شدته I . تكون شدة المجال المغناطيسى داخل الملف , على اعتبار ان طويل جدا , كالتالى:

$$H = NI/l$$

عند زيادة شدة التيار فى الملف , فإنه يتولد فيه قوة دافعة تأثيرية (قانون فارادى) ذات قيمة تساوى

$$V = N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{d}{dt} (BA) = NA \frac{dB}{dt}$$

وتكون القدرة المبذولة من مصدر التيار الكهربى كالتالى

$$P = \frac{dW}{dt} = VI = NA \frac{dB}{dt} \cdot \frac{Hl}{N} = \nu H \frac{dB}{dt}$$

فإذا عرفنا كثافة الطاقة المغناطيسية $(U_m = \frac{W}{\nu})$, فإن

$$\frac{dU_m}{dt} = H \frac{dB}{dt} = H \cdot \frac{dB}{dt}$$

وحيث فى الوسط الخطى , تكون $B = \mu H$, فإن

$$\frac{dU_m}{dt} = \mu H \cdot \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

اي

$$U_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} H \cdot B$$

• قانون حفظ الطاقة الكهرومغناطيسية

Electromagnetic Energy Conservation Law

فى حالة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية فى الوسط , يكون المجال الكهربى والمغناطيسى متغيرا مع الزمن , ولذلك لا يكون هناك حفظا للطاقة الكهربائية او الطاقة المغناطيسية . وحيث ان كلا من المجالين متلازمين اثناء انتقال هذه الموجة فى الوسط , لذلك تكون كثافة الطاقة الكلية للموجة الكهرومغناطيسية تساوى مجموع كثائتي الطاقة الكهربائية والمغناطيسية , اي

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

وبسبب التغير الزمني للمجالات , فإن المعدل الزمني لتغير كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية في الموجة يكون كالتالي:

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

باستخدام معدلتى ماكسويل (7.1), (7.2) نجد ان

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

باستخدام متطابقة المتجهات: $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, نحصل على ما يلي

$$-\frac{dU}{dt} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (7.6)$$

تسمى هذه المعادلة **نظرية بويتنج Poynting's theorem**. ويتضح المعنى الفيزيائي لهذه النظرية من خلال مايلي:

لو ضربنا طرفي المعادلة (7.6) بعنصر حجمي $d\tau$ واجراء عملية التكامل على الحجم المحتوي على المجالات نحصل على التالي:

$$-\frac{\partial}{\partial t} [\int_V U d\tau] = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau$$

ثم باستخدام نظرية التباعد , تؤول هذه المعادلة الى الصورة التالية

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int U d\tau = \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (7.7)$$

تعريف: تسمى الكمية الفيزيائية في التكامل السطحي للمعادلة (7.7), وهي كمية متجهة , **متجه بويتنج ($\mathbf{p}$)**, حيث

$$\mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

وعليه , تصبح معادلة (7.7) على النحو التالي:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int U d\tau = \oint \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (7.8)$$

ويمثل متجه **بوينتج** الطاقة الكهرومغناطيسية التي تخترق وحدة المساحة لكل ثانية , ووحدته واط/ متر² ($watt/m^2$). والتكامل السطحي لهذا المتجه يعطي الطاقة الكلية لكل ثانية المخترقة للسطح المحيط بالحجم الذي تتناقص الطاقة خلاله. وهكذا , فإن الطاقة المغادرة لهذا الحجم يجب ان تعبر هذا السطح. اما الحد الثاني في الطرف الأيمن من معادلة (7.8) يمثل الطاقة الكهربائية الضائعة والمتحولة الى طاقة حرارية في الموصل.

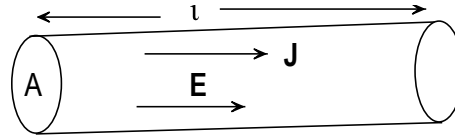
وملخص القول ان معادلة (7.8) تنص على ما يلي: خسارة طاقة المجال من خلال حجم ما تعادل طاقة المجال الهاربة من السطح المغلف زائداً ذلك الجزء الباقي في الحجم والذي يتحول الى حرارة . وعليه , فإن نظرية بوينتج ما هي الا قانون حفظ الطاقة في الموجة الكهرومغناطيسية (حيث المجالات الكهربائية والمغناطيسية متلازمة عند اية لحظة واية نقطة في الفضاء)

مثال (7.7)

برهن صحة العلاقة التالية: $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{v} = I^2 R$, حيث R مقاومة موصل به تيار كهربى شدته I ؟

الحل:

نفرض ان موصلاً ما طوله l ومساحة مقطعه A , وموصلية σ (كما في الشكل 7.4) , I/A كانت كثافة التيار منتظمة , بمعنى ان $\mathbf{J} = \frac{I}{A}$, شدة المجال الكهربى $\mathbf{E} = \frac{I}{\sigma A}$.



شكل (7.4)

اذن

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{v} &= \int \frac{J^2}{\sigma} d\mathbf{v} = (I/A)^2 (Al/\sigma) = I^2 \left(\frac{l}{\sigma A} \right) \\ &= I^2 R \end{aligned}$$

مثال (7.8)

اثبت ان متوسط متجه بوينتدخ $\langle \mathbf{p} \rangle$ خلال الزمن الدوري للموجة المستوية يساوي $\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0)$ ؟

الحل:

نستخدم الدالة الأسية المركبة للتعبير عن المجالات في الموجة عند $z=0$, فتكون كالتالي:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} , \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathcal{R}(\mathbf{E}) \times \mathcal{R}(\mathbf{H})$$

حيث $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ تعني الجزء الحقيقي من الدالة الأسية لمتجه المجال الكهربائي.

$$, e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad , \text{ وحيث ان}$$

اذن

$$\mathcal{R}(e^{i\omega t}) = \cos \omega t$$

وعليه ,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t \times \mathbf{H}_0 \cos \omega t = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 (\cos 2\omega t + 1)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) \langle (\cos 2\omega t + 1) \rangle$$

نفرض ان $\omega t = \theta$, من تعريف المعدل الزمني للدالة خلال الدور (2π) نجد ان:

$$\langle (\cos \theta + 1) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + 1) d\theta = 1$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0)$$

ملاحظة: اذا كان الإعتداد الزمني للمجال الكهربائي والمغناطيسي يعطى على بدلالة الدالة الأسية المركبة $e^{i\omega t}$, فإن المعدل الزمني لمتجه بوينتدخ يكون كالتالي:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(E \times H^*)$$

حيث H^* المرافق المركب *complex conjugate* لدالة المجال المغناطيسي .

مثال (7.9)

تنتشر موجة كهرومغناطيسية في الفضاء الحر , حيث :

$E(z, t) = 50 \cos(\omega t - kz) \hat{x}$. جد معدل القدرة المخترقة لمساحة دائرية نصف قطرها 2.5 متر عند المستوى $z=0$ ؟

الحل:

يكون المجال الكهربائي بدلالة الدالة الأسية المركبة كالتالي

$$E = 50 e^{i(\omega t - kz)} \hat{x}$$

$$H(z, t) = \frac{E_0}{\eta_0} e^{i(\omega t - kz)} \hat{y} = \frac{5}{12\pi} e^{i(\omega t - kz)} \hat{y}$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(E \times H^*) = \frac{1}{2} (50) \left(\frac{5}{12\pi} \right) \hat{z}$$

بما ان الإختراق للمساحة عموديا , اذن

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} (50) \left(\frac{5}{12\pi} \right) \times \pi (2.5)^2 = 65.1 \text{ Watt}$$

(7.6) استقطاب الموجات المستوية Polarization of Plane Waves

إذا كان اتجاه المجال الكهربائي , اثناء انتشار الموجة الكهرومغناطيسية, مقتصرًا على اتجاه ثابت في الفضاء , فإنه يقال ان هذه الموجة **مستقطبة استوائيا** *linearly polarized* . تكون الصيغة الرياضية العامة للمجال الكهربائي كالتالي:

$$E = \hat{a} E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi)}$$

حيث $\hat{a}$ متجه وحدة يحدد اتجاه المجال الكهربائي , ϕ زاوية الطور *phase angle* . ونلاحظ

ان سعة المجال الكهربائي تعطى كالتالي : $E \cdot E^* = E_0^2$, $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$.

بينما تكون الصيغة الرياضية للمجال المغناطيسي المرافق للمجال الكهربائي في هذه الموجة كالتالي

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{b}}B_0e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi')}$$

حيث $\hat{\mathbf{b}}$ متجة الوحدة في اتجاه المجال المغناطيسي, ϕ' زاوية طور هذا المجال. وتكون العلاقة بين متجهات الوحدة : $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{k}}$.

وهناك انواع اخرى من الإستقطاب والتي تنتج من تركيب *superposition* موجتان مستقطبان خطيا وهي كالتالي

• الإستقطاب البيضاوي *Elliptic Polarization*

لنفرض ان موجتين مستقطبتين خطيا تنتشران في الفضاء في اتجاه $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$, ولهما نفس التردد وطول الموجة, حيث يكون المجال الكهربائي لكل منهما كالتالي :

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_{0x}e^{i(\omega t - kz + \phi_x)}$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{y}}E_{0y}e^{i(\omega t - kz + \phi_y)}$$

يكون المجال الكهربائي المحصل والنتائج عن تركيب هاتين الموجتين كالتالي

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_{0x}e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y}e^{i(\omega t - kz + \phi_y)}$$

او

$$\mathbf{E} = [\hat{\mathbf{x}}E_{0x}e^{i\phi_x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y}e^{i\phi_y}]e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.5a)$$

ويكون الجزء الحقيقي للمجال الكهربائي للموجة المحصلة كالتالي:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_{0x} \cos[\omega t - kz + \phi_x] + \hat{\mathbf{y}}E_{0y} \cos[\omega t - kz + \phi_y] \quad (75b)$$

تعريف: تكون الموجة المحصلة مستقطبة بيضاويا اذا كان $\phi_x \neq \phi_y$. اما اذا كانت $\phi_x = \phi_y = \phi$, فإن الموجة المحصلة تكون مستقطبة خطيا لأن المجال المحصل للموجة يصبح كالتالي:

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}}E_{0x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y}) \cos[\omega t - kz + \phi] = \hat{\mathbf{a}}E_0 \cos[\omega t - kz + \phi]$$

حيث $\hat{a}$ متجه وحدة ثابت في مستوى xy . ويعود سبب هذا الإستقطاب الى كون رأس المتجه E يرسم شكل بيضاوي اثناء انتشار الموجة عند اي نقطة في المستوى المحدد بالمعادلة ثابت $z = z_0 =$ (الشكل 7.5). ويمكن توضيح ذلك كالتالي:

لنفرض ان $\phi_x = \phi$, and $\phi_y = \phi_x \pm \pi/2$ عند المستوى $z = z_0$, وعليه , تصبح معادلة (7.9) على النحو التالي :

$$E = \hat{x}E_{0x} \cos[\omega t - kz_0 + \phi] + \hat{y}E_{0y} \sin[\omega t - kz_0 + \phi] = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

لنفرض ان $\Omega = \omega t - kz_0 + \phi$, حيث

$$\cos \Omega = E_x/E_{0x} , \quad \sin \Omega = E_y/E_{0y}$$

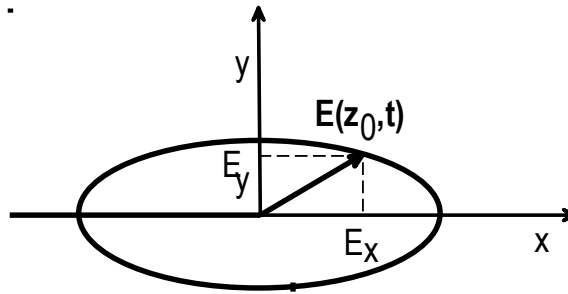
وحيث ان

$$\cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega = 1$$

اذن

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة الشكل البيضاوي , حيث المحور الرئيسي E_{0x} والمحور الثانوي E_{0y} (كما في الشكل 7.9) .



شكل (7.5) الإستقطاب البيضاوي .

ويصنف الإستقطاب البيضاوي الى صنفين هما : الإستقطاب البيضاوي اليميني (موجب) , حيث يدور متجه المجال الكهربائي المحصل مع عقارب الساعة اثناء انتشار الموجة وتكون العلاقة بين زوايا الطور كالتالي:

$$\phi_y = \phi_x + \pi/2$$

والإستقطاب البيضاوي اليساري (سالب) , حيث اتجاه دوران متجه المجال الكهربائي المحصل ضد عقارب الساعة وتكون العلاقة بين زوايا الطور كالتالي:

$$\phi_y = \phi_x - \pi/2$$

• الإستقطاب الدائري Circular Polarization

اذا كانت مركبات المجال الكهربائي المحصل متساوية , اي $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, وكانت العلاقة بين زوايا الطور كالتالي: $\phi_y = \phi_x \pm \pi/2$, فإن الصيغة الرياضية للمجال المحصل بدلالة الدالة الأسية المركبة تكون على النحو التالي :

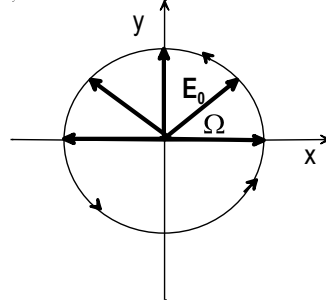
$$\mathbf{E} = [\hat{x} \pm i\hat{y}]E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi)}$$

او بدلالة الترميز الحقيقي , يمكن كتابة هذه العلاقة على النحو التالي:

$$\mathbf{E} = E_0\{\hat{x} \cos(\omega t - kz + \phi) \pm \hat{y} \sin(\omega t - kz + \phi)\} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E_0^2 \rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة دائرة نصف قطرها E_0 . وتكون قيمة المجال الكهربائي المحصل ثابتة , ولكن مع دوران متجه هذا المجال في هذه الدائرة اثناء انتشار الموجة في الفضاء. ويسمى الإستقطاب في هذه الحالة الإستقطاب الدائري (كما في الشكل 7.6).



شكل (7.6) الإستقطاب الدائري .

(7.7) الحالة الحدودية Boundary state

لنفرض ان موجة كهرومغناطيسية تسقط على سطح يفصل بين وسطين (كما في الشكل 7.7). فاذا كان هذا السقوط من وسط عازل نحو وسط موصل ($\sigma \neq 0$), فإن هذه الموجة تخترق مسافة قصيرة (العمق القشري) في الوسط الموصل وتكون شدة المجالات الكهربائية والمغناطيسية متناقصة بشكل لوغاريتمي . فاذا كان $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, فإن هذا التوهين في المجالات الكهرومغناطيسية يعزى الى تيارات التوصيل *conduction currents* المتولدة في الوسط الموصل والتي تحول الطاقة الكهرومغناطيسية الى طاقة حرارية . كما يمكن ان نفسر هذا التوهين في المجالات الموجة الكهرومغناطيسية الى ان تيارات التوصيل تولد مجالات كهربائية ومغناطيسية تعاكس مجالات هذه الموجة المنتشرة في الوسط الموصل . كما ان هناك تأثير مماثل للتيارات الذرية بفعل حركتها الموضعية والذي يؤثر على الخصائص المغناطيسية في الوسط العازل.

كما مر معنا في الفصول السابقة, تعطي الشروط الحدودية عند السطح الفاصل بين الوسطين العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \rho_s \\ H_{2t} - H_{1t} &= K \end{aligned}$$

حيث ρ_s, K تمثل كثافة الشحنة وكثافة التيار السطحية على الترتيب . اذا كان الرمز (2) يشير الى الوسط الثاني ($z > 0$), بينما الرمز (1) يشير الى الوسط الأول ($z < 0$), والسطح الفاصل بين الوسطين موضوعا عند المستوى $z = 0$.

لنفرض ان تيارا كهربيا ΔI , يمر بشكل مواز للسطح خلال المساحة العمودية $\Delta x \Delta z$ (كما في الشكل 7.7), اذا كانت الكثافة الحجمية لهذا التيار J , فإن $\Delta I = J \Delta x \Delta z$. وتكون كثافة التيار السطحي (التيار لكل وحدة عرض من السطح) كالتالي:

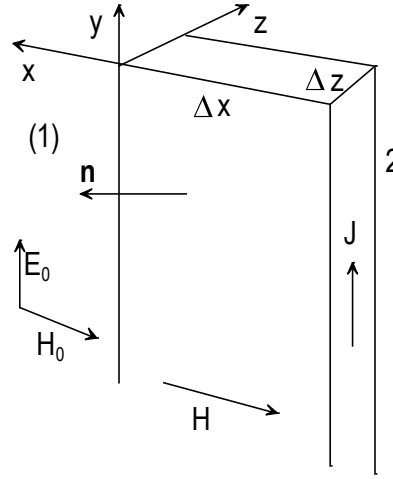
$$K = \Delta I / \Delta x = J \Delta z$$

ونلاحظ ان K, J, I تكون موازية E_0 , مما يعني , ان داخل الوسط يكون المجال المغناطيسي الناتج عن هذه التيارات معاكسا لمجال الموجة المغناطيسي (H_0). وتكون العلاقة الإتجاهية بين المجال المغناطيسي وكثافة التيار السطحي كالتالي :

$$K = \hat{n} \times H$$

حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عموديا على السطح الفاصل بإتجاه الخارج من الوسط . اما الشروط الحدودية الأخرى , كما سبق شرحه في الفصول السابقة , لمركبات المجالات الكهربائية والمغناطيسية عند السطح الفاصل بين الوسطين فتكون كالتالي:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned}$$



شكل (7.7) التيار والمجالات السطحية.

(7.8) انعكاس الأمواج عند السطح الفاصل *Waves Reflection at an interface*

في هذا البند , سنتناول سلوك الموجة الساقطة على سطح فاصل بين وسطين عازلين . بإعتبار ان التغيرات في المجالات الكهرومغناطيسية تحدث عند هذا السطح , فإننا لا نهتم بعوامل التوهين في المجالات الكهرومغناطيسية.

لنفرض ان موجة كهرومغناطيسية تسقط على سطح فاصل بين وسطين عازلين , موضوعا عند المستوى $z = 0$ (كما في الشكل 7.8) . وان ثابت انتشار هذه الموجة يحدد بالمتجه $\mathbf{k}_i$, حيث

$$\mathbf{k}_i = \hat{x}k_{xi} + \hat{y}k_{yi} + \hat{z}k_{zi}$$

وعليه ,

$$k^2 = k_{xi}^2 + k_{yi}^2 + k_{zi}^2$$

قبل تطور النظرية الكهرومغناطيسية , فهم الفيزيائيون النظريات الموجية الخاصة بانعكاس وانكسار الأشعة الضوئية عند السطح الفاصل بين وسطين , وان سعة الموجة (A) يجب ان تكون متصلة (مستمرة) *continuous* عبر هذا السطح الفاصل . بإعتبار ان للضوء طبيعة كهرومغناطيسية , فإن هذا يعني ان المركبات المماسية للمجال الكهربائي والمركبات العمودية للمجال المغناطيسي يجب ان تكون متصلة (الشروط الحدودية) عند هذا السطح.

اي ان الإستمرارية في السعة (A) عند السطح الفاصل تعطي ما يلي:

$$A_i + A_r = A_t , \quad \text{at } z = 0$$

حيث A_t, A_r, A_i تمثل سعة الموجة الساقطة , الموجة المنعكسة , والموجة النافذة الى الوسط الثاني على الترتيب (الشكل 7.8) .

او

$$A_i e^{i\omega t} e^{-i(k_{xi}x + k_{yi}y)} + A_r e^{i\omega t} e^{-i(k_{xr}x + k_{yr}y)} \\ = A_t e^{i\omega t} e^{-i(k_{xt}x + k_{yt}y)}$$

حيث مقدمات الموجة *wavefronts* تنتشر في مستوى xy . حتى تتحقق الشروط الحدودية عند اي لحظة ما , يجب ان تكون ترددات الموجات الساقطة , المنعكسة , والنافذة متساوية . كما ان شرط إستمرارية سعة الموجة يتطلب ما يلي:

$$k_{xr} = k_{xi} = k_{xt}, \quad k_{yr} = k_{yi} = k_{yt}$$

اذا فرضنا ان ثابت أنتشار للموجة الساقطة في اتجاه محور y يساوي صفرا , اي $k_{yi} = 0$, فإن $k_{yr} = 0 = k_{yt}$, وتكون الأشعة الثلاثة واقعة في مستوى الصفحة. ويسمى هذا المستوى **مستوى السقوط** *plane of incidence* والذي يتحدد بالأشعة الساقطة والعمودي على السطح الفاصل.

لنفرض ان مقدار ثابت الإنتشار للموجة الساقطة و المنعكسة متساوي , اي ان : $k_i = k_r = k_1$, اذن , نحصل من العلاقة $k_{xr} = k_{xi}$ على ما يلي:

$$k_1 \sin \theta_r = k_1 \sin \theta_i \Rightarrow \theta_r = \theta_i$$

وهذا يسمى **بقانون الإنعكاس** *law of reflection* وينص على ما يلي : زاوية السقوط = زاوية الإنعكاس.

حيث ان سرعة انتشار الموجة في الوسط تعتمد على خصائص هذا الوسط , لذا يمكن تعريف معامل انكسار الوسط العازل كنسبة سرعة الضوء في الفراغ الى سرعته في هذا الوسط, اي ان

$$n = \frac{v_0}{v} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \times \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

وعليه , يكون ثابت الإنتشار للموجة النافذة من السطح الفاصل كالتالي:

$$k_t = k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \left(\frac{\omega}{v_1} \frac{v_1}{v_0} \frac{v_0}{v_2} \right) = k_1 \frac{n_2}{n_1}$$

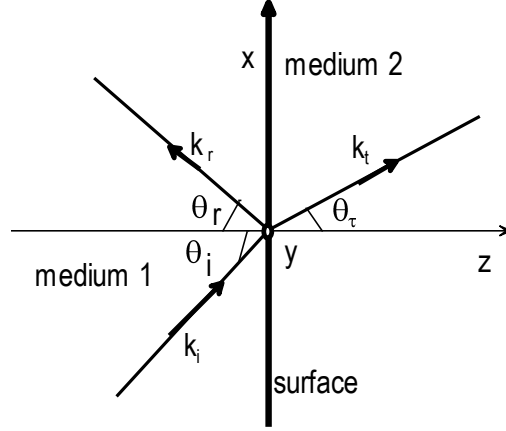
بما ان $k_{xi} = k_{xt}$, اذن

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t = k_1 \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_t$$

او

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

وهذه العلاقة تعرف **بقانون الإنكسار** *law of refraction* .



شكل (7.8) موجة ساقطة على سطح فاصل بين وسطين .

• الإنعكاس الداخلي الكلي Total Internal Reflection

بإستخدام قانون الإنكسار , نجد ان زاوية الإنكسار θ_t تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

اذا سقطت موجة ما من وسط كثيف ضوئيا الى وسط اقل كثافة ضوئية , اي $n_1 > n_2$, فإن $\theta_t > \theta_i$, وكلما زادت زاوية السقوط تزداد زاوية الإنكسار . فإذا اصبحت قيمة زاوية السقوط , بحيث يكون جيب هذه الزاوية يحقق العلاقة التالية:

$$\sin \theta_i^* = \frac{n_2}{n_1}$$

, عندها تكون زاوية الإنكسار 90° . وتسمى زاوية السقوط في هذه الحالة بالزاوية الحرجة $critical\ angle$. اما اذا زادت قيمة زاوية السقوط عن مقدار الزاوية الحرجة فإن $\sin \theta_t > 1$, اي تصبح زاوية الإنكسار غير معرفة $undefined$, وهنا يحدث ما يسمى **الإنعكاس الداخلي الكلي** للموجة الساقطة.

لإيجاد k_{zt} , التي تمثل مركبة ثابت الإنتشار للموجة النافذة (المنكسرة) في اتجاه محور z , نتبع ما يلي :

من الشكل (7.8) , نجد ان $k_{zi} = -k_{zr}$, حيث

$$k_{zt}^2 + k_{xt}^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2$$

$$k_{zt}^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2 \sin^2 \theta_t = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2$$

تعطي هذه المعادلة

$$k_{zt}^2 = (n_2/n_1)^2 k_1^2 (1 - \sin^2 \theta_t)$$

وبدلالة زاوية السقوط , تصبح هذه العلاقة على النحو التالي:

$$k_{zt} = \pm k_1 [(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i]^{1/2}$$

حيث ($\pm$) تشير الى وجود احتمالين لإتجاه انتقال الموجة النافذة (المنكسرة) في الوسط الثاني وهما :

(1) اذا انتقلت الموجة من وسط خفيف ضوئيا الى وسط كثيف ضوئيا , اي ان

$n_1 < n_2$, فإن $\theta_t < \theta_i$, ويكون k_{zt} عدد حقيقي *real* .

(2) اذا انتقلت الموجة من وسط كثيف ضوئيا الى وسط اقل كثافة ضوئية , اي ان $n_1 > n_2$,

فإن k_{zt} يكون عدد تخيلي *imaginary* لكل زاوية سقوط اكبر من الزاوية الحرجة ($\theta_i > \theta_i^*$) . اي ان

$$k_{zt} = \pm i\alpha : \alpha = k_i [\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2]^{1/2}$$

حيث

$$k_t = \hat{x}k_{xt} + \hat{z}k_{zt} = \hat{x}k_{xi} \pm \hat{z}(i\alpha)$$

وعليه , تصبح معادلة الموجة النافذة على النحو التالي:

$$Ae^{i(\omega t - k \cdot r)} = Ae^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_{xi}x)}$$

تصف هذه المعادلة الأخيرة موجة منتقلة عبر سطح الوسط الثاني في اتجاه محور x , ولها سعة *مضمحلة* *attenuated* اثناء انتقالها من سطح هذا الوسط الى الداخل .

مثال (7.10)

جد زاوية انكسار موجة كهرومغناطيسية تسقط من الهواء نحو الزجاج ($n=1.5$) بزاوية سقوط 70° ؟ ثم جد الزاوية الحرجة في حالة سقوط الموجة من الزجاج نحو الهواء؟

الحل:

$$n_1 = 1, n_2 = 1.5$$

$$\sin \theta_t = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \sin \theta_i = \frac{0.9397}{1.5} = 0.6265$$

$$\theta_t = 38.8^\circ$$

$$\sin \theta_i^* = n_2/n_1 = \frac{1}{1.5} = 0.6667 \Rightarrow \theta_i^* = 41.813^\circ$$

مثال (7.11)

تسقط موجة ترددها $f = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ بزاوية 70° من الزجاج ($n=1.5$) نحو الهواء ,جد عامل التوهين لموجة السطح الفاصل بين الوسطين ؟

الحل:

في الزجاج , نجد ثابت الانتشار كما يلي:

$$k_1 = \omega/v_1 = 2\pi f n_1/v_0 = 1.571 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

اذن

$$\alpha = 1.571 \times 10^5 (0.883 - 0.444)^{\frac{1}{2}} = 8.5 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

• معامل الانعكاس و النفاذ للموجة المستوية الساقطة على سطح فاصل

يعرف معامل الانعكاس *reflection coefficient* , عند سقوط موجة كهرومغناطيسية على سطح فاصل بين وسطين عازلين , بدلالة نسبة شدة المجال الكهربائي للموجة المنعكسة الى شدة المجال الكهربائي للموجة الساقطة , اي

$$\rho_E = \frac{E_r}{E_i}$$

بينما يعرف معامل النفاذ *transmission coefficient* بدلالة نسبة شدة المجال الكهربائي للموجة النافذة (المنكسرة) الى شدة المجال الكهربائي للموجة الساقطة , اي

$$\tau_E = \frac{E_t}{E_i}$$

وبالمثل , يمكن تعريف هذه المعاملات بدلالة شدة المجال المغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية الساقطة والمنعكسة , والموجة النافذة الى الوسط الثاني , اي

$$\rho_H = \frac{H_r}{H_i} , \quad \tau_H = \frac{H_t}{H_i}$$

لإيجاد هذه المعاملات نفترض ان الموجة الساقطة مستقطبة , وهناك يمكن دراسة حالتين : الحالة الأولى : عندما يكون اتجاه المجال الكهربائي E_i يقع (او موازيا) في مستوى سقوط هذه الموجة , و الحالة الثانية : عندما يكون اتجاه المجال الكهربائي عموديا على مستوى السقوط . وفي كلتا الحالتين تكون $E_i, H_i, \text{ and } k_i$ متعامدة مع بعضها البعض . كما نستخدم العلاقات التالية :

$$\frac{E_i}{H_i} = \eta_1 = \frac{E_r}{H_r} , \quad \frac{E_t}{H_t} = \eta_2$$

حيث

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

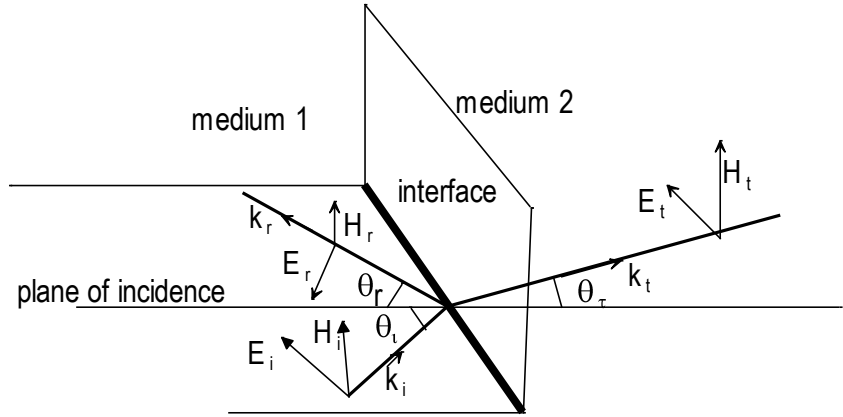
وتعرف η_1, η_2 بممانعة الموجة المستعرضة في الوسيطين *wave impedance*.

سنتناول إيجاد معاملات الانعكاس و النفاذ لكل حلة عل انفراد , وذلك بإستخدام الشروط الحدودية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية عند السطح الفاصل.

الحالة الأولى: $E \parallel$

في الشكل (7.9) , تقع E في مستوى السقوط , بينما H تكون عمودية على هذا المستوى , مع اعتبار ان اتجاه المجال المغناطيسي في كل وسط يجب ان يحقق الشرط التالي:

$$(E \times H) \parallel k$$



شكل (7.9) سلوك موجة مستوية ($E \parallel$) عند السطح الفاصل بين وسطين.

تعطي استمرارية المركبات المماسية للمجالات المغناطيسية والكهربية في عند السطح الفاصل ما يلي:

$$H_i + H_r = H_t \rightarrow \frac{E_i}{\eta_1} + \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

$$(E_i - E_r) \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t$$

حيث اسخدمنا قانون الانعكاس ($\theta_i = \theta_r$).

بحل هاتين المعادلتين , نجد ان

$$\rho_{\parallel,E} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

$$\tau_{\parallel,E} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

اما لإيجاد معامل الانعكاس والنفوذ للمجل المغناطيسي عند سقوط هذه الموجة على السطح الفاصل نتبع نفس الطريقة, ولكن نعبر عن معادلة الأستمرارية لمركبات المجال الكهربائي كالتالي:

$$\eta_1 (H_i - H_r) \cos \theta_i = \eta_2 H_t \cos \theta_t$$

وبحل هذه المعادلة مع معادلة الإستمرارية لمركبات المجال المغناطيسي المماسية , اي

$$H_i + H_r = H_t$$

نحصل على ما يلي:

$$\rho_{\parallel,H} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = \rho_{\parallel,E}$$

$$\tau_{\parallel,H} = \frac{H_t}{H_i} = \frac{2\eta \cos \theta}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

حالة خاصة: في حالة السقوط العمودي لهذه الموجة على السطح الفاصل , تكون

$\theta_i = 0 = \theta_t$, وعليه تصبح معاملات الانعكاس والنفوذ للمجالات الكهربائية والمغناطيسية كالتالي:

$$\rho_E = \rho_H = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} , \quad \tau_E = \frac{2\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)} , \tau_H = \frac{2\eta_1}{(\eta_1 + \eta_2)}$$

مثال(7.12)

جد سعة المجال الكهربائي المنعكسة والنافذة من سطح فاصل بين وسطين عازلين في حالة السقوط العمودي , حيث ثوابت الوسط الأول ($\epsilon_{r1} = 8.5, \mu_{r1} = 1$) , بينما يكون الوسط الثاني الفراغ. حيث المجال الساقط مواز لمستوى السقوط ومقداره :

والنافذة ؟
 ثم جد سعة المجال المغناطيسي للموجة الساقطة والمنعكسة,
 $E_i = 1.5 \times 10^{-3} \text{ V/m}$

الحل:

$$\eta_1 = \sqrt{\mu_0 \mu_{r1} / \epsilon_0 \epsilon_{r1}} = 129 \Omega, \quad \eta_2 = 120 \pi \Omega = 377 \Omega$$

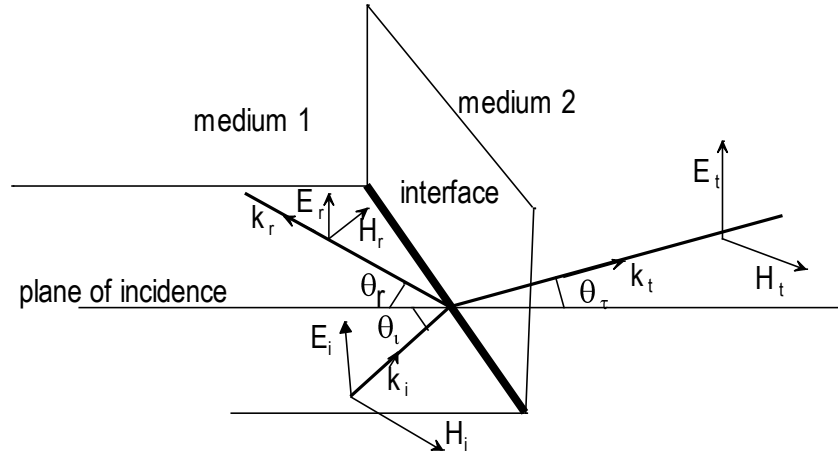
$$E_r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_i = 7.35 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$E_t = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_i = 2.24 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

$$H_i = \frac{E_i}{\eta_1} = 1.16 \times 10^{-5} \text{ A/m}$$

$$H_r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} H_i = -5.69 \times 10^{-6} \text{ A/m}$$

$$H_t = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} H_i = 5.91 \times 10^{-6} \text{ A/m}$$



شكل (7.10) سلوك موجة مستوية ($E_{\perp}$) عند السطح الفاصل بين وسطين.

النسبة بين شدة الموجة المنعكسة الى شدة الموجة الساقطة في الإتجاه العمودي على السطح الفاصل تسمى قدرة الإنعكاس (الإنعكاسية) **power reflection** وتعطى بالعلاقة التالية :

$$R = \frac{|\mathbf{p}_r| \cos \theta_r}{|\mathbf{p}_i| \cos \theta_i} = \frac{E_r H_r}{E_i H_i} = \frac{E_r^2 / \eta_1}{E_i^2 / \eta_1} = \rho^2$$

اما النسبة بين شدة الموجة النافذة الى شدة الموجة الساقطة في الإتجاه العمودي للسطح الفاصل تسمى قدرة النفاذ (النفاذية) *power transmission* وتعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{|p_t| \cos \theta_t}{|p_i| \cos \theta_i} = \frac{E_t H_t \cos \theta_t}{E_i H_i \cos \theta_i} = \frac{\frac{E_t^2}{\eta_2} \cos \theta_t}{\frac{E_i^2}{\eta_1} \cos \theta_i}$$
$$= \tau^2 \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} = \tau^2 \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i}$$

يترك للطالب اثبات العلاقة التالية : $T + R = 1$, وهذا يتفق مع قانون حفظ الطاقة .

تمارين

(7.1) اذا كان المجال المغناطيسي في الفراغ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{H} = H_0 e^{i(\omega t + kz)} \hat{\mathbf{x}}$$

استخدم معادلات ماكسويل لإيجاد المجال الكهربائي في الفراغ؟

(7.2) اذا كان المجال الكهربائي والمغناطيسي لموجة مستوية , تنتشر في الفراغ , كالتالي

$$\mathbf{E} = 30\pi e^{i(10^8 t + kz)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H} = H_0 e^{i(10^8 t + kz)} \hat{\mathbf{y}}$$

جد ما يلي k, H_0 ؟

(7.3) سطح فاصل بين وسطين موضوع عند $z=0$, اذا كانت النفوذية النسبية في الوسط الأول ($z < 0$) $\mu_{r1} = 1.5$, بينما في الوسط الثاني ($z > 0$) $\mu_{r2} = 5.0$, وكان المجال المغناطيسي في الوسطين يعطى كالتالي:

$$\mathbf{B}_1 = 2.4\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B}_2 = 25.75\hat{\mathbf{x}} - 17.7\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}$$

جد كثافة الشحنة السطحية $\mathbf{K}$ في السطح الفاصل عند نقطة الأصل ؟ .

(7.4) تنتشر موجة مستوية في الفراغ بثابت انتشار قيمته 30 rad/m وفي اتجاه $(-\hat{\mathbf{z}})$, فاذا كانت سعة المجال المغناطيسي $(1/3\pi) \text{ A/m}$ واتجاهه $(-\hat{\mathbf{y}})$, اكتب الجزء الحقيقي للمجالات الكهرومغناطيسية في هذه الموجة , ثم جد تردد وطول هذه الموجة ؟

(7.5) موجة مستوية تنتشر في وسط موصل ($\sigma = 58 \times 10^6 \text{ S/m}$) بتردد 100 MHz , حيث $\mu_r = 1$. جد الممانعة لهذه الموجة , ثابت الانتشار , وسرعة الموجة ؟ .

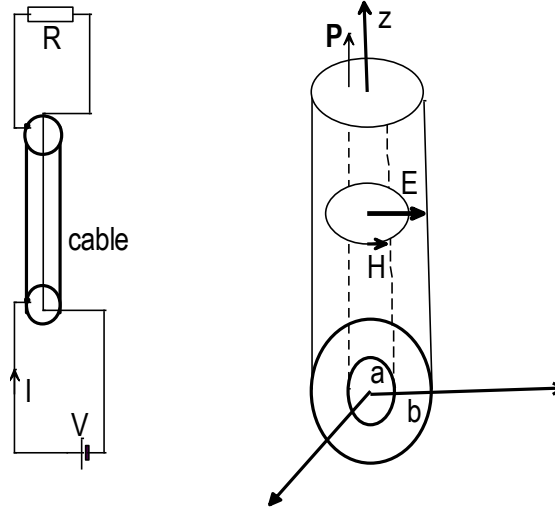
(7.6) تنتشر موجة مستوية في اتجاه $+z$ في الفراغ ($z < 0$) لتسقط عموديا على عند $z=0$ على وسط موصل ($z > 0$) له $\sigma = 61.7 \times 10^6$, $\mu_r = 1$. فاذا كان المجال الكهربائي للموجة في الفراغ يعطى بالعلاقة التالية

$$\mathbf{E}(0, t) = 1.0 \sin 2\pi f \hat{\mathbf{y}}, \quad f = 1.5 \text{ MHz}$$

جد $\mathbf{H}(z, t)$, $z > 0$ ؟

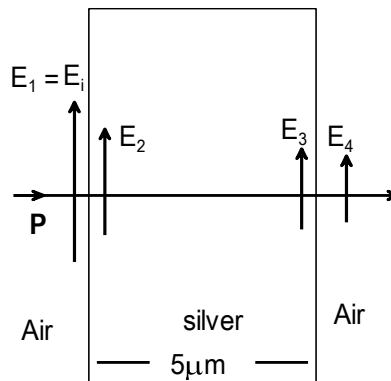
(7.6) اذا كانت سعة المجال الكهربائي في موجة مستوية ساقطة من الفراغ (منطقة 1) على سطح فاصل لمنطقة اخرى (منطقة 2) تساوي 1.0 V/m , وكانت سعة المجال المغناطيسي المنعكس $H_0^r = -1.41 \times 10^{-3} \text{ A/m}$, جد μ_{r2} , حيث $\sigma = 0$, $\epsilon_{r2} = 18.5$.

(7.7) مصدر كهربائي V , متصل عبر كابل محوري مع مقاومة R (كما في الشكل 7.11). جد متجه بوينتنج في العازل بين سلكي الكابل , ثم بتكامل هذا المتجه خلال مقطع عرضي للعازل برهن ان قيمة هذا التكامل تساوي الطاقة الحرارية الضائعة في المقاومة ؟ .



شكل (7.11) المجالات الكهرومغناطيسية في كابل توصيل محوري.

(7.8) تنتشر موجة كهرومغناطيسية في الفراغ , حيث سعة المجال الكهربائي E_1 تساوي 100 V/m , لتسقط عموديا على صفيحة من الفضة سمكها $5 \mu\text{m}$ (كما في شكل 7.12). علما ان موصلية الصفيحة $\sigma = 61 \text{ MS/m}$, وتردد الموجة $f = 200 \text{ MHz}$. جد سعات المجالات الكهربائية $E_2, E_3, \text{ and } E_4$ ؟



شكل (7.12) انتشار موجة مستوية عبر صفيحة فضية.

(7.11) تنتشر موجة بإستقطاب دائري يساري في اتجاه محور z , اذا كان المجال الكهربائي كالتالي

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_s = E_0(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\beta z}$$

جد $\langle p \rangle$ ؟

(7.12) تنتشر موجة مستوية في الفراغ حيث المجال الكهربائي كالتالي

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_s = 10e^{-i\beta x}\hat{z} + 15e^{-i\beta x}\hat{y}$$

صف استقطاب هذه الموجة , ثم جد $\langle p \rangle$ ؟

(7.13) تسقط موجة مستوية من الهواء على وسط من الزجاج بزاوية 30° , جد الإنعكاسية والنفاذية في حالتها كون المجال الكهربائي $E_{\perp}, E_{\parallel}$, اذا كان معامل انكسار مادة الزجاج 1.45 ؟

الفصل الثامن

خطوط النقل الكهربائية

Electric Transmission Lines

يتناول هذا الفصل دراسة المماثلة بين نظرية الدارة الكهربائية و المجالات . ويعرض شرحا للدائرة الكهربائية المكافئة لخط النقل الكهربائي , كما يعطي تعريفا لمفهوم الممانعة المميزة لخطوط النقل المحملة . ويقدم هذه الفصل مفهوم الموجات الساكنة ومعامل الانعكاس للموجة عند الحمل . ويشرح خارطة سميث واستخدامها في إيجاد معامل الانعكاس لخط النقل المحمل . واخيرا , يقدم طرق حساب معامل توهين الأمواج المنتشرة في خطوط النقل الكهربائية .

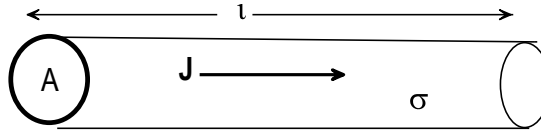
(8.1) مقدمة

في الفصول السابقة وجدنا ان المجال الكهربائي المتغير في الموجة الكهرومغناطيسية يولد مجالا مغناطيسيا متغيرا , والذي بدوره يولد مجالا كهربيا , وبهذه الطريقة يتم نقل الطاقة , سواء في الفراغ او في خطوط النقل *transmission lines* , من خلال انتشار الموجات الكهرومغناطيسية . ويمكن تعريف خط النقل الكهربائي على انه جهاز لنقل او توجيه الطاقة من نقطة لأخرى . وقد تكون هذه الطاقة على صورة ضوء , حرارة , او على شكل إشارة معلوماتية (كلام , صور , بيانات ...) . في الأساس , يتكون خط النقل من منفاذ ادخال *input terminals* لتغذية الطاقة من خلالهما ومنفاذ اخراج *output terminals* لاستلام هذه الطاقة , وعليه يمكن اعتبار خط النقل الكهربائي جهاز رباعي المسارات للتوصيل بين الأجهزة الكهربائية السمعية والبصرية . وهناك انواع مختلفة من خطوط النقل التي قد تم تطويرها تقنيا , وعناصرها من المعادن او المواد العازلة , وقد تكون على هيئة قضبان (اسلاك) , الياق , او اغشية . في هذا الفصل نتناول دراسة النظريات المتعلقة بخطوط النقل الكهربائية المكونة من موصلات معدنية , ومن اهم هذه الخطوط ما يعرف **خط النقل المحوري** *coaxial transmission line* , والذي يتكون من اسطوانتين معدنتين متحدتين في المركز (كابل محوري) , وقد يكون بينهما مادة عازلة *dielectric material* . كما ندرس تحليل الدائرة الكهربائية *circuit analysis* كنموذج لتوضيح نظرية خطوط النقل الكهربائية.

(8.2) العلاقة بين نظرية الدائرة الكهربائية والمجال

Relation between Field and circuit Theory

نتعامل في نظرية الدائرة الكهربائية مع فرق الجهد الكهربائي V عبر عناصر هذه الدائرة والتيار الكلي I المار خلال هذه العناصر , بينما نتعامل في نظرية المجال مع الكميات المتجهة المعبرة عن هذا المجال (E, D, B, H, J) , والتي قد تكون قيمها دوال للمكان . وكمثال على ذلك , لنفرض ان قضيبا معدنيا طوله l ومساحة مقطعه A , فيمكن وصف هذا القضيب , وفقا لنظرية الدائرة الكهربائية , بدلالة مقاومته R , بغض النظر عن طوله , مساحة مقطعه , او شكله العام . ويعطي قانون اوم فرق الجهد بين طرفي القضيب كالتالي : $V = IR$, حيث I شدة التيار الكهربائي المار في القضيب (الشكل 8.1) .



شكل (8.1) قضيب موصل

اما من وجهة نظر نظرية المجال , فان شدة المجال الكهربائي E , عند اي نقطة داخل القضيب , يمكن ايجادها من قانون اوم والذي يكون على الصورة التالية : $E = J/\sigma$, حيث σ موصلية مادة القضيب . و يكون فرق الجهد الكهربائي بين طرفي القضيب كالتالي :

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

وفي حالة القضيب المنتظم , تكون الكثافة الحجمية المنتظمة , فإن هذا التكامل يعطي ما يلي :

$$V = \frac{J\ell}{\sigma} = (JA) \left(\frac{\ell}{A\sigma} \right) = IR$$

من هذا المثال نجد ان نظرية المجال توصل الى علاقة الدائرة الكهربائية المعروفة بقانون اوم . وهناك امثلة اخرى توضح ان علاقات الدائرة يمكن استنباطها من معادلات المجال .

وهناك علاقتان مهمتان كحلقة وصل بين نظرية الدائرة الكهربائية والمجال وهما كالتالي :

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

حيث المعادلة الأولى تربط V (براميتير في نظرية الدائرة الكهربائية) بين نقطتين عبر الدائرة ، بالتكامل الخطي للمجال الكهربائي E (براميتير في نظرية المجال) ، بينما المعادلة الثانية ، تربط I (براميتير في الدائرة) مع التكامل المغلق للمجال المغناطيسي H ، وملخص القول ان الارتباط بين النظريتين يمكن تمثيله بالعلاقة بين زوجين مرتبين من المتغيرات كالتالي:

$$(V, I) \leftrightarrow (E, H)$$

مثال (8.1)

خط نقل كهربائي على شكل كابل محوري ، نصف قطره الداخلي والخارجي a ، b على الترتيب. اذا كانت شدة التيار المار في كل من الموصلين I (كما في الشكل 8.2) ، جد العلاقة بين (V, I) بدلالة (E, H) ؟

الحل :

باستخدام قانون جاوس ، نجد ان شدة المجال الكهربائي بين الموصلين هي

$$E = \hat{r} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon r}$$

حيث ρ_ℓ كثافة الشحنة الكهربائية لكل وحدة طول من الكابل على سطح الموصل. وباستخدام قانون أمبير الدائري نجد ان شدة المجال المغناطيسي هي

$$H = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi r}$$

ويكون فرق الجهد الكهربائي بين الموصلين (كما وجدنا في الفصل السابع) كالتالي:

$$V = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

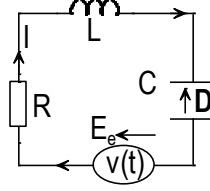
بالتعويض بدل ρ_ℓ بدلالة E نجد ان :

$$E = \hat{r} \frac{V}{r \ln(b/a)}$$

وعليه ، تكون النسبة بين فرق الجهد الى التيار الكهربائي كالتالي :

$$\frac{V}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \left(\frac{E}{H} \right)$$

وللمقارنة بين نظرية المجال والدائرة الكهربائية نتناول دراسة دائرة التوالي الكهربائية والمكونة من مقاومة , ملف , ومكثف كهربائي , وهذه العناصر متصلة على التوالي مع مصدر كهربائي ذي قوة دافعة كهربائية متغيرة بشكل توافقي وبتردد زاوي ω (كما في شكل 8.3).



شكل (8.3) دائرة كهربائية ذات تيار متردد.

يكون المجال الكهربائي الكلي عبر هذه الدائرة , E_{tot} , يساوي المجال الكهربائي الناتج عن المصدر E_e , مضافا اليه المجال الكهربائي الناتج عن الشحنات والتيار في الدائرة الكهربائية , E , اي

$$E_{tot} = E_e + E = J/\sigma$$

وكما وجدنا في حالة المجال الكهربائي المتغير زمنيا ان :

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

او

$$E_e = \frac{J}{\sigma} + \nabla V + \frac{\partial A}{\partial t}$$

ولتحويل كميات المجال الى متغيرات مرتبطة بعناصر الدائرة الكهربائية , نكامل كل هذه الحدود حول الدائرة وباتجاه عقارب الساعة كما يلي :

$$\oint E_e \cdot d\ell = \oint \frac{J}{\sigma} \cdot d\ell + \oint \nabla V \cdot d\ell + \oint \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\ell$$

ونتيجة هذا التكامل تعطي ما يلي

$$V = \frac{J\ell}{\sigma} + Ed + \frac{d}{dt} \oint A \cdot d\ell \quad (8.1)$$

حيث $\mathcal{V}$ القوة الدافعة الكهربائية للمصدر , $\nabla V = -\mathbf{E}$, d المسافة بين لوحتي المكثف ,
اما تكامل الحد الأخير فيمكن صياغته كالتالي

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{dI}{dt} \oint \frac{\mathbf{A}}{I} \cdot d\boldsymbol{\ell} = L \frac{dI}{dt}$$

حيث L محاثة الدائرة (الملف) الكهربائية . وعليه تصبح معادلة (8.1) كالتالي :

$$\mathcal{V} = \frac{I\ell}{\sigma} + Ed + L \frac{dI}{dt} \quad (8.2)$$

لنفرض ان مساحة لوح المكثف A , مساحة مقطع سلك المقاومة a , وطوله ℓ , يمكن التعبير عن الكميات التالية كما يلي:

$$J = \frac{I}{a} , E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon A} , R = \frac{\ell}{\sigma a} , \quad C = \frac{Q}{\mathcal{V}}$$

وعليه تؤول معادلة (8.2) الى الصورة التالية :

$$\mathcal{V} = IR + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها بدلالة التيار , حيث $Q = \int I dt$, لتصبح على الصورة التالية :

$$\mathcal{V} = IR + \frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt}$$

وتعتبر هذه المعادلة عن بمعادلة الدائرة الكهربائية للتيار المتغير زمنيا , $I(t)$, وتمثل الارتباط بين نظرية المجال ونظرية الدوائر الكهربائية. لنفرض ان التيار المار في هذه الدائرة يتغير بشكل دوري , اي

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

بالتعويض في هذه المعادلة , نجد ان :

$$\mathcal{V} = I_0 R + \frac{I_0}{i\omega C} + i\omega L I_0 = I_0 R + iI_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

حيث افترضنا في اشتقاق هذه النتيجة ان التيار الكهربى متساوى في جميع اجزاء الدائرة الكهربائية في اى لحظة. وهذا يتضمن ان اضطرابا disturbance ينتشر حول هذه الدائرة لحظيا .

(8.3) الدائرة المكافئة لخط النقل *Equivalent circuit of a transmission line*

لإستخدام متغيرات الدائرة الكهربائية (V, I) في دراسة نظرية خطوط النقل, يجب معرفة برامترات نظام الدائرة. نعتبر خط النقل المحوري كمثال في هذه الدراسة.

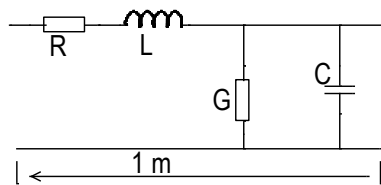
كما مر معنا في الفصل السادس , فإن المحاثة لكل وحدة طول من خط النقل المحوري هي

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

كما ان السعة الكهربائية لكل وحدة طول من هذا الخط هي

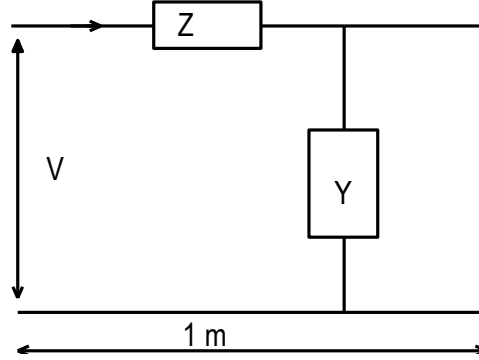
$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

حيث μ, ϵ السماحية الكهربائية والنفاذية المغناطيسية لمادة العازل بين موصلى خط النقل. كما ان مرور التيار الكهربى في الموصلين يتعرض لمقاومة كهربية , ولنفرض ان مقدارها لكل وحد طول هي R . عند الترددات العالية , يكون فقد للطاقة خلال هذا العازل بسبب امتصاص جزيئات العازل للطاقة الساقطة عليها واعادة اشعاعها في كافة الإتجاهات او تحويلها الى حرارة. إضافة الى ذلك , يوجد تيارات كهربية مستعرضة بين موصلى الخط بسبب التأين في العازل والنواتج عن المجال الكهربى القوي بين هذين الموصلين . ويمكن اعتبار هذه التسريبات في الطاقة تكافئ توصيلية مستعرضة transverse conductance مقدارها لكل وحدة طول من خط النقل G . وعليه يمكن ان نتصور ان طولاً ما من خط النقل يكافئ دائرة كهربية (الشكل 8.4).



شكل (8.4) دائرة كهربية مكافئة لخط نقل .

فإذا تم ادخال إشارة جيبية وبتردد زاوي ω على هذه الدائرة , فيمكن تبسيط هذه الدائرة (كما في شكل 8.5) كالتالي :



شكل (8.5) دائرة مبسطة مكافئة لخط نقل.

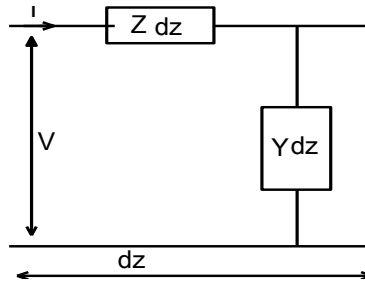
حيث

$$Z = R + i\omega L , Y = G + i\omega C$$

عند استخدام خط النقل في حالة التردد العالي (10^{10} Hz) , تكون طول موجة هذه الإشارة كالتالي:

$$\lambda = \frac{v_0}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^{10}} = 3 \text{ cm}$$

وهذا يعني ان التيار والجهد الكهربائي يبدلان اشارتيهما خلال المسافة $\lambda/2$. وعليه , فإن مكونات الدائرة الكهربائية ذات الطول 2 cm سيكون لها جهد كهربائي $\pm V$ عند النقاط الداخلية المختلفة. بينما في حالة الترددات المنخفضة (10^4) , تكون طول الموجة 30 km , اي ان النقاط المتباعدة بهذه المسافة يمكن ان يكون لها نفس الجهد عند اي لحظة. وعليه , لضمان ان يكون الجهد والتيار منتظمين في عناصر الدائرة المستخدمة في التحليل , يجب ان نستخدم عنصر طولي متناهي الصغر infinitesimal من خط النقل (كما في الشكل 8.6) .



شكل (8.6) دائرة بطول متناهي الصغر مكافئة لخط نقل .

باستخدام قوانين الدوائر الكهربائية العادية , نجد ان هبوط الجهد الكهربى عبر الممانعة impedance المتصلة على التوالي في هذه الدائرة المتناهية الصغر (شكل 8.6) , وكذلك التيار الكهربى المتسرب خلال القبولية admittance , المتصلة على التوازي , تعطى كالتالى :

$$dV = -I(Zdz) , \quad dI = -V(Ydz) \quad (8.2)$$

أو

$$\frac{dV}{dz} = -IZ , \quad \frac{dI}{dz} = -VY \quad (8.3)$$

تعني الإشارة السالبة في معادلة (8.3) ان V, I تتناقص كلما تحركنا على الخط . بأخذ المشتقة الثانية للمعادلة الأولى في (8.2) والتعويض بدل المشتقة الأولى للتيار نحصل على ما يلي :

$$\frac{d^2V}{dz^2} = YZV \quad (8.4)$$

ويمكن الحصول على معادلة مشابهة ل (8.4) للتيار الكهربى.

يكون حل هذه المعادلة التفاضلية (8.4) على النحو التالى :

$$V(z) = V_0 e^{\gamma z}$$

بالتعويض في معادلة (8.4) , نجد ان

$$\gamma = \pm \sqrt{YZ} \quad (8.5)$$

وباعتبار الشق الزمنى لدالة الجهد الكهربى , يكون الحل على الصورة التالية :

$$V(z, t) = V_0 e^{\gamma z} e^{i\omega t} \quad (8.6)$$

من هنا يجب ملاحظة ان العامل $e^{\gamma z}$ يدل على مدى تناقص سعة الموجة المنتقلة عبر الخط , كما ان التيارات عبر مكونات الدائرة R, G تسبب هبوطا في الجهد الكهربى , حرارة مفقودة , وضياع الطاقة المنقولة , مما ينتج عنه توهين وتشويه في موجات التيار والجهد المنتشرة في هذا الخط , وهذا يؤثر على مدى كفاءة خط النقل للإشارة المنقولة خلاله. ويمكن دراسة هذه الكفاءة كالتالى :

حيث

$$Z = R + i\omega L = i\omega L \left(1 - i \frac{R}{\omega L}\right), \quad Y = G + i\omega C = i\omega C \left(1 - i \frac{G}{\omega C}\right)$$

بالتعويض في معادلة (8.5) , نجد ان

$$\gamma = (i^2 \omega^2 LC)^{\frac{1}{2}} (1 - i \frac{R}{\omega L})^{\frac{1}{2}} (1 - i \frac{G}{\omega C})^{\frac{1}{2}} \quad (8.7)$$

وللتقليل من فقد الطاقة , يجب ان يتحقق الشرط التالي

$$\frac{R}{\omega L} \ll 1, \quad \frac{G}{\omega C} \ll 1$$

ويمكن هذا الشرط من استخدام مفكوك تايلور لتقريب الكميات التي تحت الجذر التربيعي (معادلة 8.7) كالتالي

$$(1 - i \frac{R}{\omega L})^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) i \frac{R}{\omega L} + \dots$$

$$(1 - i \frac{G}{\omega C})^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) i \frac{G}{\omega C} + \dots$$

وبتعويض هذه الكميات في معادلة (8.7) نحصل على ما يلي

$$\gamma = \pm i \omega \sqrt{LC} \left[1 - i \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) + \dots \right] = \pm (\alpha + i \beta)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}, \quad \alpha = \left(\frac{1}{2}\right) \beta \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \quad \text{حيث}$$

بالتعويض في معادلة (8.6) , نحصل على معادلة لموجة الجهد الكهربائي على الصورة التالية

$$V(z, t) = V_1 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + V_2 e^{+\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)} \quad (8.8)$$

هذا يعني ان معادلة (8.4) يوجد لها حلان مستقلان يمثل كل منهما موجة : **الحل الأول** يمثل موجة تنتشر نحو اليمين بسعة متناقصة لوغارتميا ($V_1 e^{-\alpha z}$) , كما اشرنا اليه في حالة الأمواج المستوية التي سبق شرحها في الفصل السادس . ويمكن ايجاد شرط ثبات الطور *constant phase* كالتالي :

$$\Phi = \omega t - \beta z = \text{constant} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \omega - \beta v = 0$$

$$v = + \frac{\omega}{\beta} \quad \text{او}$$

وهذا يعني فيزيائيا ان نقطة الطور الثابت تتحرك نحو اليمين بسرعة موجبة.

اما **الحل الثاني** فيمثل موجة تنتقل نحو اليسار (z سالب) بسرعة متناقصة لو غارتما , ونقطة الطور الثابت تتحرك بسرعة سالبة , اي , $v = -\frac{\omega}{\beta}$.

كما نلاحظ ان معامل التوهين α يتناسب طرديا مع مكونات الدائرة المسئولة عن فقدان الطاقة R, G , وبما ان هذه الكميات صغيرة المقدار لذلك يكون مقدار هذا المعامل صغيرا ايضا . ولتسهيل فهم سلوك خط النقل , يمكن دراسة حالة اقتراب مقدار فقدان الطاقة من الصفر , اي في حالة : $R = 0, G = 0$, حيث تكون $\alpha = 0$. في هذه الحالة نجد ان

$$\gamma = \pm i \beta = \pm i \omega \sqrt{LC}$$

وهنا تصبح معادلة (8.8) على الصورة التالية

$$V(z, t) = V_1 e^{i(\omega t - \beta z)} + V_2 e^{i(\omega t + \beta z)} \quad (8.9)$$

(8.4) الممانعة المميزة Characteristic Impedance

تعرف الممانعة المميزة لخط النقل Z_0 , بمقدار النسبة بين فرق الجهد V الى التيار I , اي

$$Z_0 = \frac{V}{I}$$

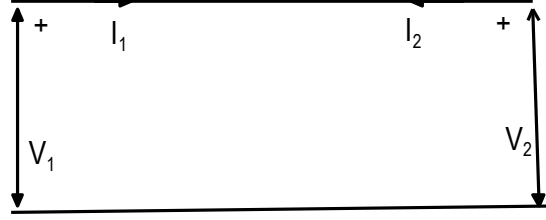
لإيجاد العلاقة بين V, I , نستخدم معادلة (8.3) ومعادلة (8.9) , مع اعتبار حالة عدم فقدان الطاقة في الخط , اي $R = 0, G = 0, \beta = \pm \omega \sqrt{LC}$. وعليه , نحصل على ما يلي

$$\frac{dV}{dz} = -i\beta(V_1 e^{i(\omega t - \beta z)} - V_2 e^{i(\omega t + \beta z)}) = -IZ = -I(i\omega L)$$

$$I = \sqrt{\frac{C}{L}} (V_1 e^{i(\omega t - \beta z)} - V_2 e^{i(\omega t + \beta z)}) =$$

$$\text{لنفرض ان } I_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} V_1 e^{i(\omega t - \beta z)} , I_2 = -\sqrt{\frac{C}{L}} V_2 e^{i(\omega t + \beta z)} \text{ هذا يعني}$$

ان التيار الكلي يساوي مجموع موجات التيارات الموجبة والسالبة والمرافقة لموجات الجهد (كما في الشكل 8.7) .



شكل (8.7) موجات التيار والجهد عبر خط النقل .

من تعريف الممانعة المميزة لكل تيار , نجد ان

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = \sqrt{L/C} = Z_0$$

مثال (8.2)

جد الممانعة المميزة لخط نقل محوري , حيث نصف قطري الموصلين الداخلي والخارجي a, b على الترتيب , والوسط الفاصل بينهما عازل (ϵ, μ) ؟

الحل

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln(b/a) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln(b/a)$$

نلاحظ ان Z_0 دالة لخواص الخط ولا تعتمد على مميزات الموجات.

بالعودة الى العلاقة بين متغيرات الدائرة والمجال في حالة خط النقل المحوري , نجد ان

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \left(\frac{E}{H} \right) \rightarrow \frac{E}{H} = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

وهذا يتفق مع ما توصلنا اليه في حالة انتشار الموجات المستوية في الوسط المادي.

اما سرعة الطور للموجة في خط النقل المحوري تكون كالتالي :

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v_0$$

وهذه نفس سرعة الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ .

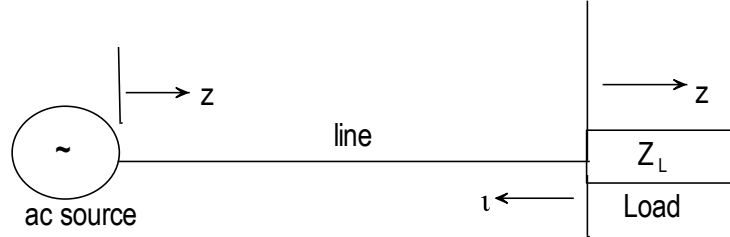
وملخص القول ان التطابق بين موجة خط النقل والموجة المستوية في الفراغ ليست بالصدفة , وانما تعزى الى حقيقة ان تحليل نظرية خط النقل , مهما كان نوعه , تفترض ان وجود فرق في الجهد بين طرفي الموصل في المستوي المستعرض يؤدي الى مرور تيار كهربائي في المستوى

الطولي. ونتيجة لذلك يكون كلا من المجال الكهربائي والمغناطيسي مستعرضا على اتجاه انتشار الموجة المستوية. اي ان نظرية خط النقل تفترض ان المجالات تشكل موجة كهرومغناطيسية مستعرضة (TEM) , وهذا ما سيأتي شرحه لاحقا في هذا الفصل .

(8.5) خط النقل المحمل *Loaded Transmission Line*

لتطبيق ما تم التوصل اليه من نتائج في صناعة الإتصالات الهندسية , لا بد من اعتبار التعديلات التالية :

- (1) نفرض ان خط نقل ما في اتجاه محور z الموجب (كما في الشكل 8.8) , حيث يوضع مولدا للموجات عند نقطة الأصل لهذه المحور , بينما يوجد عند نهاية خط النقل حمل $load$. ولنفرض ان متغير طول z , يقاس من الحمل نحو اليسار (محور z السالب) , اي ان اشارة z تخالف اشارة z في المعادلات التي سيرد شرحها في دراسة خصائص خط النقل .



شكل (8.8) خط نقل محمل.

- (2) لنفرض ان الدائرة في هذا الشكل تحوي عل مولد للذبذبات والذي يعطي موجات نحو اليمين . حيث ان الحد الثاني في معادلة (8.9) يمثل موجة منتقلة نحو اليسار ولا يجد اي مصدر اخر للموجات على الخط , اذن لا بد من افتراض ان هذه الموجة المنعكسة اتجة عن الإنعكاس عند الحمل .

يعرف معامل انعكاس الجهد عند الحمل , حسب معادلة (8.9) , كالتالي

$$\Gamma_L = \frac{V_2}{V_1}$$

حيث , عند موضع الحمل تكون $z = -l$, فإن معادلة (8.9) بدلالة هذا المعامل تصبح على الصورة التالية

$$V = V_1(e^{i(\omega t + \beta l)} + \Gamma_L e^{i(\omega t - \beta l)}) \quad (8.10)$$

وكذلك تكون معادلة التيار الكهربائي على النحو التالي

$$I = \frac{V_1}{Z_0} (e^{i(\omega t + \beta \ell)} - \Gamma_L e^{i(\omega t - \beta \ell)}) \quad (8.11)$$

عند نهاية الخط , $\ell = 0$, وبالتعويض في هاتين المعادلتين , نجد ان

$$V_L = V_1 (e^{i\omega t} + \Gamma_L e^{i\omega t})$$

$$I_L = \frac{V_1}{Z_0} (e^{i\omega t} - \Gamma_L e^{i\omega t})$$

ويكون قانون اوم للممانعة الحمل الموضوع عند نهاية خط النقل كالتالي

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

ويعطي حل هذه المعادلة بالنسبة لمعامل الانعكاس عند الحمل ما يلي

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\eta_L - 1}{\eta_L + 1} \quad (8.12)$$

حيث

$$\eta_L = Z_L / Z_0$$

من هنا نلاحظ ان معامل الانعكاس يعتمد فقط على η_L (النسبة بين ممانعة الحمل الى الممانعة المميزة للموجة المنتقلة عبر خط النقل). يسمى η_L **ممانعة الحمل المعيارية normalized load impedance**.

$$Z_L = Z_0 \rightarrow \eta_L = 1 \rightarrow \Gamma_L = 0 \quad \text{حالة خاصة : اذا كانت}$$

هذا يعني انه لا يوجد انعكاس عند الحمل , والموجة الساقطة على الحمل تمتص كلياً , ويقال ان **ممانعة الخط متناظرة matched** مع الحمل .

لايجاد ممانعة خط النقل عند اي نقطة عليه في حالة تواجد الموجتان , نحو اليمين ونحو اليسار , المتنقلتان عليه , نتبع ما يلي

نفرض ان النقطة تقع على بعد ℓ من الحمل , بقسمة معادلتني (8.10-11) , نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{V}{I} = Z_0 \frac{e^{i\beta \ell} + \Gamma_L e^{-i\beta \ell}}{e^{i\beta \ell} - \Gamma_L e^{-i\beta \ell}}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة η_L باستخدام معادلة (8.12) , والعلاقة التالية

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

وبعد الاختصارات نحصل على ما يلي

$$\eta(\ell) = \frac{Z}{Z_0} = \frac{\eta_L \cos \beta \ell + i \sin \beta \ell}{i \eta_L \sin \beta \ell + \cos \beta \ell} = \frac{\eta_L + i \tan \beta \ell}{1 + i \eta_L \tan \beta \ell} \quad (8.13)$$

نلاحظ ان الممانعة تختلف من نقطة لأخرى على خط النقل , اي ان النسبة $Z=V/I$ ليست خاصية دائرية بسيطة , ولكن تتغير من موقع لأخر وتعتد على الحمل وعلى طول الموجة. وعموماً, $Z(\ell) \neq Z_L$. اضافة لذلك, بما ان دالة الظل لها دور π , فإن دالة الممانعة تتكرر نفسها على الخط كلما تغيرت الزاوية $\beta \ell$ بمقدار π . وحيث $\beta \ell = \frac{2\pi \ell}{\lambda}$, فإن هذا يحدث عندما تكون $\Delta \ell = \frac{\lambda}{2}$, اي كل نصف طول موجة.

مثال (8.3)

إذا كانت الممانعة المعيارية عند نقطة ما على خط نقل هي $\eta = w$. نرهن ان قيمتها عند النقطة $\frac{\lambda}{4}$ تساوي $\frac{1}{w}$ ؟

الحل :

عند $\ell = 0$, تكون $\eta_L = w$. عند $\ell = \frac{\lambda}{4}$, يكون الطور $\beta \ell = \pi/2$. وكلما اقتربت ℓ من النقطة $\ell = \frac{\lambda}{4}$ فإن قيمة $\tan \beta \ell$ تصبح كبيرة جداً لدرجة ان معادلة (8.13) تؤول الى ما يلي :

$$\eta \left(\ell \rightarrow \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{i \tan \beta \ell}{i \eta_L \tan \beta \ell} = \frac{1}{\eta_L} = \frac{1}{w}$$

من التطبيقات العملية لهذا المثال ما يسمى **محول ربع موجي** quarter wave Transformer

وهو عبارة عن مقطع من خط نقل كهربائي طوله ربع طول الموجة المرسله عبر هذا الخط. لنفرض اننا نريد توصيل خط نقل ممانعته المميزة $Z_0 = 100\Omega$ مع حمل ممانعته $Z_L = 400 + i0$, يمكن عمل ذلك باستخدام محول ربع موجي ممانعته المميزة Z_1 , ولحساب هذه الممانعة (Z_1) نتبع ما يلي :

لنفرض ان الممانعة عند نقطة ما على خط النقل والتي تقع على بعد x عن الحمل تساوي Z_x , حيث

من معادلة (8.13) نجد ان

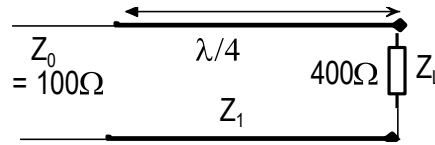
$$\frac{Z_x}{Z_1} = (Z_L + iZ_1 \tan \beta x) / (Z_1 + iZ_L \tan \beta x)$$

لذلك عند $x = \lambda/4$, فإن $\beta x = \pi/2 \Rightarrow \tan \beta x \rightarrow \infty$, وعليه تكون نهاية المعادلة كما يلي

$$\frac{Z_x}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_L} \Rightarrow Z_1 = \sqrt{Z_x Z_L}$$

وهذا يعني ان الممانعة المميزة لمحول ربع موجي تساوي الوسط الهندسي لممانعة الحمل وممانعة خط النقل عند طرفه الذي يبعد ربع طول موجة عن الحمل . اي

$$Z_1 = \sqrt{(100)(400)} = 200\Omega$$



مثال (8.4)

خط نقل منعدم فقد الطاقة ($R=0, G=0$) طوله 80 cm ويعمل على تردد 600 MHz , اذا كانت معاملات هذا الخط كالتالي : $L = 0.25\text{ MH/m}, C = 100\text{ pf/m}$. جد الممانعة المميزة , ثابت الطور , سرعة الموجة , الحمل الداخل (عند $z = -\ell$) ؟

الحل

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.25 \times 10^{-6}}{(100 \times 10^{-12})}} = 50\Omega$$

$$\gamma = i\beta = i\omega\sqrt{LC}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi \times 600 \times 10^6 = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_{input} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta \ell + iZ_0 \sin \beta \ell}{Z_0 \cos \beta \ell + iZ_L \sin \beta \ell}$$

$$\begin{aligned}
&= 50 \frac{100 \cos(18.85 \times 0.8) + i50 \sin(18.85 \times 0.8)}{50 \cos(18.85 \times 0.8) + i100 \sin(18.85 \times 0.8)} \\
&= 49.1 + i35 \quad \Omega = 60.3 \angle 35.5^\circ
\end{aligned}$$

(8.6) موجات الجهد الساكنة Voltage standing waves

في حالة كون الحمل دالة مركبة , فإن معامل الإنعكاس يكون دالة مركبة ايضاً , ويمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية

$$\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{i\phi}$$

بالتعويض في معادلة (8.10) , نجد ان

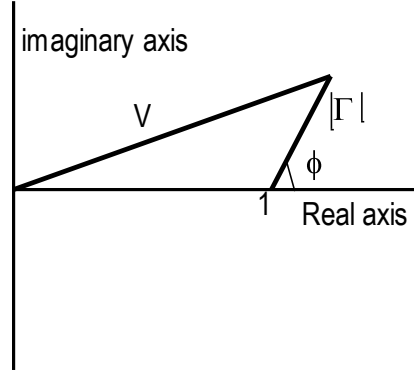
$$V = [1 + |\Gamma_L|e^{i(\phi-2\beta\ell)}]V_1e^{i(\omega t+\beta\ell)} = \nu V_{\text{incident}} \quad (8.14)$$

حيث V_{incident} تمثل الموجة المتحركة نحو اليمين (المتحركة نحو $\ell = 0$) , بينما ν تمثل الجهد عند النقطة ℓ على خط النقل بالنسبة للموجة الساقطة . ورياضياً

$$V_{\text{incident}} = V_1e^{i(\omega t+\beta\ell)}, \nu = [1 + |\Gamma_L|e^{i(\phi-2\beta\ell)}] \quad (8.15)$$

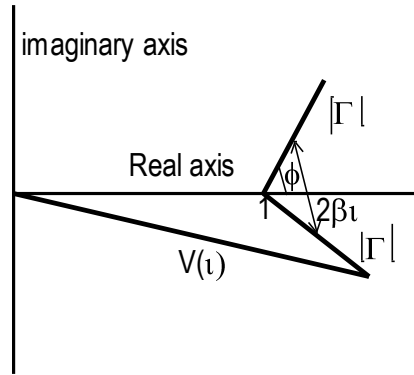
من معادلة (8.14) نجد ان الجهد على خط النقل يعبر عنه بحاصل ضرب سعة الموجة الساقطة بالدالة المركبة ν , والتي تمثل السعة المركبة للموجة . اي ان $\nu = \frac{V}{V_{\text{incident}}}$, ويمكن توضيح ذلك من الرسم في مستوى الأعداد المركبة كالتالي

يوضح الشكل (8.9a) الدالة ν عند الحمل ($\ell = 0$) , حيث المحور الأفقي هو المحور الحقيقي *real axis* , بينما المحور الرأسي هو المحور التخيلي *imaginary axis*



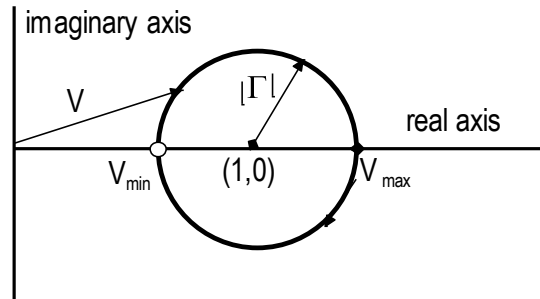
شكل (8.8a) سعة دالة الجهد المركبة عند الحمل.

عند الإبتعاد عن الحمل , فإن قيمة الدالة v تتغير كما في الشكل (8.8b)



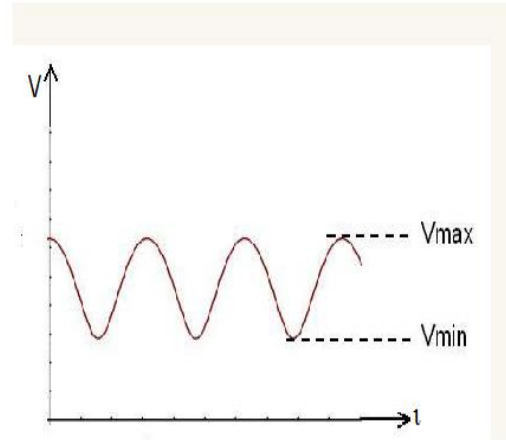
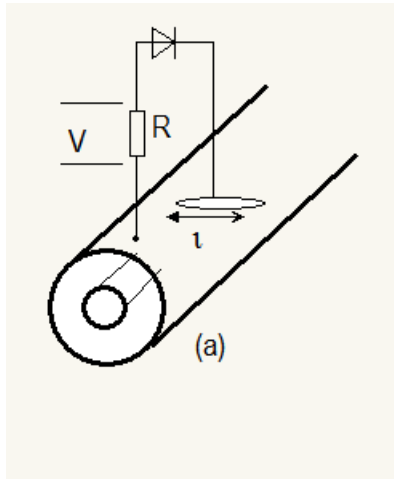
شكل (8.8b) سعة دالة الجهد المركبة عند نقطة ما على الخط .

نلاحظ من معادلة (8.15) ان التغير في سعة دالة الجهد المركبة يعود الى التغير في زاوية الطور, ويكون معيار $|\Gamma_L|$ على شكل متجه ثابت المقدار ونقطة بدايته (1,0) . وكلما تحركنا على خط النقل نحو المولد (اي زيادة l) كما في الشكل (8.8c) , فإن رأس هذا المتجه يرسم دائرة نصف قطرها $|\Gamma_L|$, ويكون المتجه من نقطة اصل المحاور الى اي نقطة على محيط هذه الدائرة يمثل v .



شكل (8.8c) تغير سعة موجة الجهد المركبة مع البعد عن الحمل .

ويمكن دراسة التغير في ν عمليا بإستخدام خط النقل المشقوق slotted line , حيث يعمل شق طولي في الغلاف الخارجي لخط النقل ويتم ادخال مجس رقيقا thin probe (كما في الشكل (8.9a)) لقياس قيمة V والتي تعطي $|\nu|$ خلال التحرك حول الدائرة . اما العلاقة البيانية للدالة $V(\ell)$ تكون كما في الشكل (8.9b) وهي تمثل موجة الجهد الساكنة في خط النقل والناجمة عن التداخل بين الموجات الساقطة والمنعكسة . وتكون هذه الموجة الساكنة ثابتة في المكان ويعتمد موقعها و سعتها على Z_L (او Γ_L) .



شكل (8.9) قياس جهد الموجة الساكنة .

نلاحظ من الشكل (8.8 c) ان نمط موجات الجهد الساكنة ليس منحني جيبي , حيث نجد ان التغير الثابت في ℓ يسبب تغيرا في $|\nu|$ بمقدار اقل عند الجانب البعيد من الدائرة ($\nu_{\max}$) بالنسبة للتغير عند الجانب القريب من هذه الدائرة ($\nu_{\min}$) .

تعرف نسبة جهد الموجة الساكنة (VSWR) Voltage standing -wave ratio على النحو التالي

$$VSWR = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \quad (8.16)$$

مثال (8.5)

وضع حمل مقاومة عند نهاية خط نقل ممانعته المميزة $Z_0 = 100 \text{ ohms}$, اذا كانت نسبة جهد الموجة الساكنة (VSWR) على هذا الخط تساوي 3 , جد مقدار الحمل ؟

الحل :

من معادلة (8.16) , نجد ان

$$|\Gamma_L| = \frac{(VSWR - 1)}{(VSWR + 1)} = 1/2$$

$$\Gamma_L = -\frac{1}{2} \text{ او } \Gamma_L = \frac{1}{2} \text{ اي ان}$$

بالتعويض في معادلة (8.12) , نحصل على $\eta_L = 3$ او $\eta_L = 1/3$.

حيث $R_L = Z_L = Z_0 \eta_L$, فإن التعويض يعطي ما يلي :

$$R_L = (100)(3) = 300 \text{ ohms} , \text{ or } R_L = (100)\left(\frac{1}{3}\right) = 33.3 \text{ ohms}$$

باستخدام معادلة (8.15) , يمكن تعريف معامل الانعكاس المكاني , $\Gamma(\ell)$, على النحو التالي

$$\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-2\beta\ell} = |\Gamma_L| e^{i(\phi - 2\beta\ell)}$$

وعليه تصبح معادلة (8.15) على الصورة التالية

$$V = V_{\text{incident}}[1 + \Gamma(\ell)] = V_{\text{incident}} v \quad (8.17)$$

وتعني هذه المعادلة ان نموذج الموجة الساكنة يمكن انتاجه اما بواسطة الانعكاس عند اي نقطة على خط النقل او بحمل بديل للمتبقّي من خط النقل والذي ينتج نفس معامل الانعكاس الفعّال $\Gamma(\ell)$ عند تلك النقطة .

كما نلاحظ ان معامل الانعكاس المحلي يكرر نفسه بدور 2π , اي

$$2\beta\ell = 2\pi \rightarrow \ell = \frac{\lambda}{2}$$

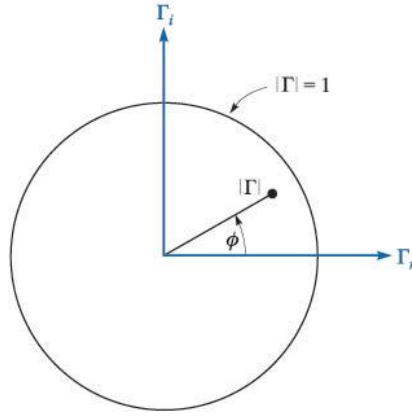
وهذا يتفق مع النتائج التي تم التوصل اليها في البنود السابقة .

اما العلاقة بين الممانعة المحلية ومعامل الانعكاس المحلي تكون كالتالي :

$$\eta(\ell) = \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)} \quad (8.18)$$

(8.7) مخطط (خارطة) سميث Smith Chart

في عام 1939 نشر العالم سميث P.H. Smith بحثا يتعلق بطريقة رسم مخطط بياني , عرف فيما بعد بمخطط (خارطة) سميث , يستخدم لحساب جهد معامل الانعكاس ($|\Gamma|$) , زاوية هذا المعامل , ونسبة جهد الموجة الساكنة (VSWR) لخط النقل المحمل . وهذا المخطط عبارة عن دوائر , حيث تمثل كل دائرة منحنى القيمة الثابتة لمقاومة خط النقل او منحنى القيمة الثابتة لمفاعلة Reactance هذا الخط . وتعتمد طريقة رسم هذا المخطط على اعتبار دائرة الوحدة , حيث نصف قطرها $|\Gamma|$ يساوي واحد . وكل نقطة داخل هذه الدائرة لها إحداثيات قطبية هي ($|\Gamma|, \phi$) , حيث $|\Gamma| < 1$, $\Gamma = |\Gamma|e^{i\phi}$, (الشكل 8.10) .



الشكل (8.10) الإحداثيات القطبية في مخطط سميث في مستوى الأعداد المركبة.

وحيث ان جهد معامل الانعكاس عدد مركب , لذلك يمكن ان نعبر عنه بالصورة التالية :

$$\Gamma = \Gamma_r + i\Gamma_i \quad (8.19)$$

Γ_r , Γ_i تمثل الجزء الحقيقي والتخيلي لجهد معامل الانعكاس . كما ان ممانعة الحمل المعابير η هي عدد مركب , وعليه يمكن ان نعبر عنه بصورة العدد المركب كالتالي :

$$\eta = r + ix = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + i \frac{X_L}{Z_0}$$

أو

$$r = \frac{R}{Z_0} , \quad x = \frac{X_L}{Z_0}$$

باستخدام معادلتني (8.18-19) , نحصل على ما يلي

$$r + ix = \frac{1 + \Gamma_r + i\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - i\Gamma_i}$$

ولإيجاد قيم r, x من هذه المعادلة , نستخدم طريقة انطاق المقام ومساواة الأجزاء الحقيقية وكذلك الأجزاء التخيلية في الطرفين للمعادلة الناتجة وبعد ترتيبها على صورة العدد المركب الأساسية , وتكون كالتالي :

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{[(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2]} \quad (8.20)$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (8.21)$$

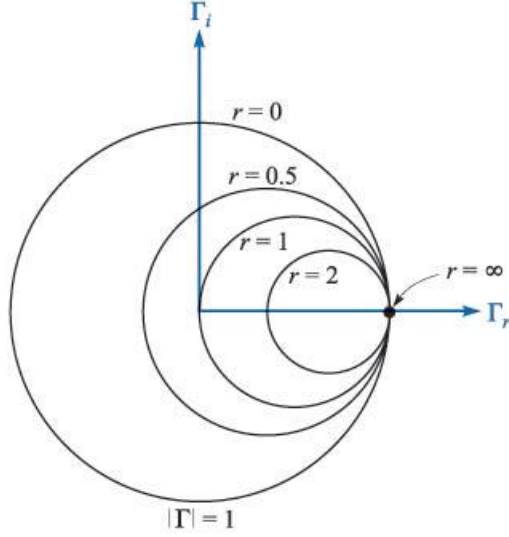
باستخدام طريقة اكمال المربع نحول هاتين المعادلتين الى معادلات تربيعية, وذلك لبيان طبيعة المنحنيات التي تربط المتغيرات Γ_r, Γ_i , كالتالي :

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (8.22)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (8.23)$$

رياضيا , تمثل معادلة (8.22) عائلة من الدوائر , حيث لكل قيمة من r يمكن رسم دائرة نصف قطرها $\left(\frac{1}{1+r}\right)$ ويقع مركزها عند النقطة $(\Gamma_r = \frac{r}{1+r}, \Gamma_i = 0)$. فمثلا , اذا كانت $0 < r < 1$, نحصل على دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويقع مركزها عند نقطة الأصل للمحور الحقيقي والمحور التخيلي , اي : $\Gamma_i = 0, \Gamma_r = 0$.

اما اذا كانت $r = 1$, فإن هذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي نصف قطرها يساوي 0.5 ويقع مركزها عند النقطة $(\Gamma_i = 0, \Gamma_r = 0.5)$ (لاحظ الشكل 8.11) .

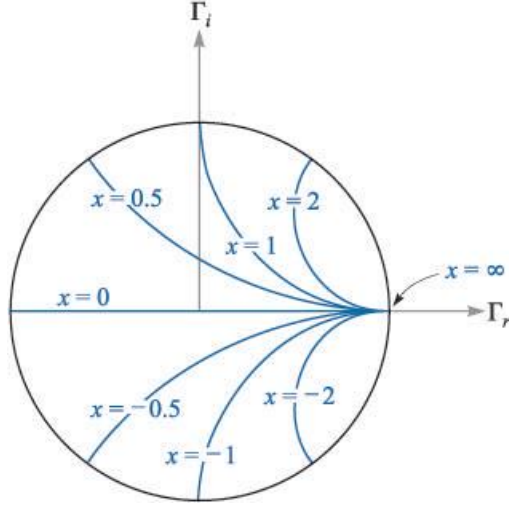


شكل (8.11) دوائر قيم r الثابتة في مستوى العدد المركب Γ , ضمن الدائرة $|\Gamma| = 1$.

ونلاحظ ان كل الدوائر تتمركز حول المحور Γ_r وتمر بالنقطة $\Gamma = 1 + 0i$. اما اذا كانت $r = \infty$, عندها تكون $\Gamma_L = \infty$, ومن معادلة (8.23) نجد ان المقام ينعدم عندما يكون $\Gamma_i = 0$, $\Gamma_r = 1$, وعندها تصبح الدائرة على شكل نقطة (نصف القطر = صفر) .

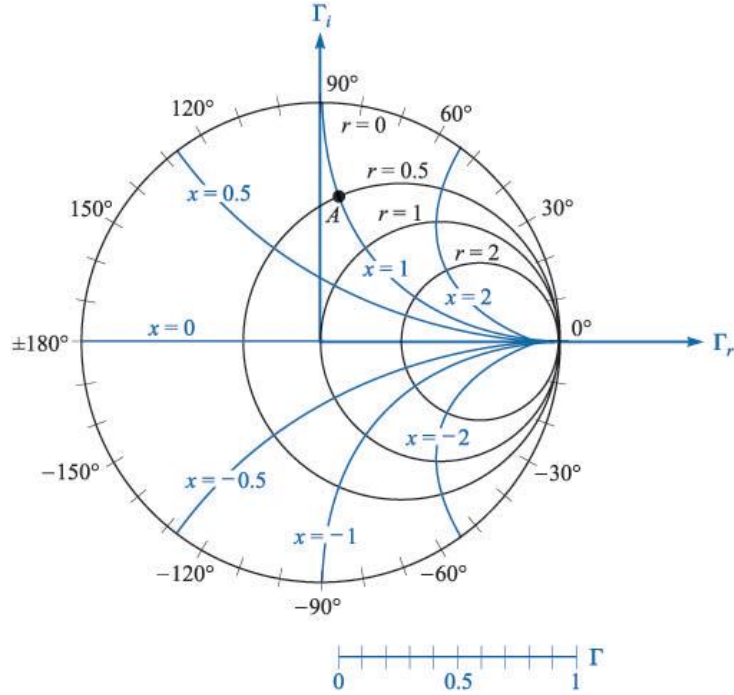
اما معادلة (8.23) فهي تمثل عائلة من الدوائر التي نصف قطرها $\frac{1}{x}$ ويقع مركزها عند النقطة $(\Gamma_r = 1, \Gamma_i = \frac{1}{x})$, اي ان كل دائرة تصاحب قيمة معينة من قيمة x , مثلا اذا كانت $x=1$, فإن الدائرة يكون نصف قطرها 1 ويقع مركزها عند النقطة (1,1) , و تكون قيمة Γ كالتالي : $\Gamma = 1 + 1i$. وفقط يكون ربع هذه الدائرة واقعا ضمن حدود دائرة الوحدة ($|\Gamma| = 1$) (الشكل 8.12) , وبالمثل يظهر ربع دائرة تحت محور Γ_r لقيم $x = -1$. اذا كانت $x = \infty$, فإن معادلة (8.23) تمثل دائرة نصف قطرها يساوي صفر (نقطة في مستوى الأعداد المركبة) وتقع عند النقطة (1,0) . كما ان هذا الشكل يظهر اجزاء من الدوائر الخاصة بقيم $x = 0.5, -0.5, 2, -2$

اما الدائرة التي لها $x = 0$ تكون على هيئة خط مستقيم منطبقا على محور Γ_r .



شكل (8.12) دوائر قيم x الثابتة في مستوى الأعداد المركبة , ضمن الدائرة $|\Gamma| = 1$.

عند تمثيل المعادلتين (8.22) و (8.23) بيانياً في مستوى الأعداد المركبة (Γ_r, Γ_i) لجميع قيم x, r فإننا نحصل على دوائر متقاطعة , وهذا الشكل العام يعرف بمخطط او خارطة سميث (الشكل 8.13) .



شكل (8.13) خارطة سميث لدوائر قيم x, r الثابتة .

Electronics, January 1944, pp.130. Copyright 1944, VNU Business Publication, Inc.

(8.8) استخدام خارطة سميث في دراسة نظريات خطوط النقل

• إيجاد معامل الانعكاس لخط النقل المحمل

تتلخص طريقة استخدام هذه الخارطة لإيجاد معامل الانعكاس لخط النقل كالتالي :

عند معرفة ممانعة الحمل (Z_L) وكذلك الممانعة المميزة لخط النقل (Z_0) , نجد $\eta_L = \frac{Z_L}{Z_0}$, ثم نجد قيم x, r , ومن ثم نجد نقط تقاطع الدوائر الخاصة لهذه القيم . نجد طول المسافة الشعاعية من نقطة الأصل الى نقطة التقاطع وذلك باستخدام مقياس الطول المساعد (الشكل 8.13) والذي تكون هذه الخارطة مزودة به , وبذلك نجد مقدار $|\Gamma|$. وعادة , يكون هناك تدريج زاوي على محيط الخارطة ($0^\circ - 360^\circ$) , ويستفاد من هذا التدريج لتحديد زاوية Γ (ϕ) , والتي تقاس من محور Γ_r باتجاه ضد عقارب الساعة . ونحدد مقدار هذه الزاوية من تقاطع امتداد المسافة الشعاعية السابق ذكرها مع محيط دائرة الخارطة . ويمكن ان نوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (8.6)

استخدم خارطة سميث لإيجاد معامل الانعكاس عند حمل خط نقل حيث ممانعة الحمل تعطى بالعلاقة التالية :

$$Z_L = 25.0 + 50.0i$$

والممانعة المميزة لهذا الخط $Z_0 = 50.0\Omega$ ؟

الحل :

$$\eta_L = Z_L / Z_0 = \frac{25 + 50i}{50} = 0.5 + 1i$$

ان

$$r = 0.5, \quad x = 1$$

بالرجوع الى خارطة سميث (الشكل 8.13) نجد ان النقطة A هي تقاطع دائرة $r = 0.5$ مع دائرة $x = 1$. بقياس المسافة بين نقطة الأصل وهذه النقطة نجد ان $\Gamma = 0.62$, $\phi = 83^\circ$.

• إيجاد الممانعة عند نقاط خط النقل المحمل

يوجد على محيط الدائرة الخارجية (دائرة الوحدة) لخارطة سميث مقياس آخر والذي يمكن بواسطته تحديد المسافة على خط النقل , ويكون هذا المقياس مدرجا بدلالة وحدات طول الموجة. ولتحديد هذا التدرج نتبع ما يلي:

لنفرض ان V_s هو الجهد عند اي نقطة على خط النقل , والتي تبعد مسافة z من الحمل نحو المولد (المصدر), حيث يعطى كالتالي :

$$V_s = V_1(e^{-i\beta z} + e^{i\beta z})$$

لنفرض ان I_s يمثل شدة التيار عند هذه النقطة , حيث : $I_s = \frac{V_1}{Z_0} (e^{-i\beta z} - \Gamma e^{i\beta z})$

تكون الممانعة الداخلة المعاييرة *normalized input impedance* عند تلك النقطة كالتالي:

$$\eta_{in} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-i\beta z} + e^{i\beta z}}{e^{-i\beta z} - \Gamma e^{i\beta z}}$$

حيث ان $z = -\ell$ عند موقع المولد . وبالتعويض , وبقسمة البسط والمقام على $e^{i\beta\ell}$ تؤول هذه المعادلة الى ما يلي

$$\eta_{in} = \frac{1 + \Gamma e^{-i(2\beta\ell)}}{1 - \Gamma e^{-i(2\beta\ell)}} = \frac{1 + |\Gamma| e^{i(\phi - 2\beta\ell)}}{1 - |\Gamma| e^{i(\phi - 2\beta\ell)}} \quad (8.24)$$

تؤول هذه المعادلة عند موقع الحمل ($\ell = 0$) الى التالي

$$\eta_{in} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \eta_L$$

وتبين معادلة (8.24) ان الممانعة الداخلة المعاييرة عند النقطة $z = -\ell$ يمكن الحصول عليها باستبدال Γ بالمقدار $\Gamma e^{-i(2\beta\ell)}$, وهذا يعني ان زاوية Γ تنقص بمقدار $2\beta\ell$ كلما تقدمنا من موضع الحمل نحو المولد على خط النقل مسافة ℓ مع ملاحظة عدم تغير المقدار $|\Gamma|$. اي تكون هذه الحركة على دائرة ذات نصف قطر ثابت و في اتجاه عقارب الساعة على محيط خارطة سميث . اما الدورة الكاملة حول الخارطة تقابل تغيرا في ℓ بمقدار نصف طول الموجة المرسله عبر خط النقل , حيث

$$2\beta\ell = 2\pi \Rightarrow \ell = \lambda/2$$

وهذه النتيجة تتفق مع النتائج التي تم التوصل اليها سابقا وهي ان الممانعة الداخلة على خط النقل عديم الفقد للطاقة , والذي طوله نصف موجة , تساوي ممانعة الحمل.

وعليه, يكون تدريج المقياس المزود به مخطط سميث متزايدا بمقدار نصف طول موجة على محيط دائرة الوحدة في اتجاه مع عقارب الساعة , ويشار له الرمز (wtg) اختصارا للجملة التالية -wavelength toward generator, وكل خطوة عليه تزداد بمقدار ℓ/λ . ولتوضيح ما سبق نتناول المثال التالي :

مثال (8.7)

إذا كان طول خط النقل في المثال (8.6) يساوي 60 cm , وكان طول الموجة المرسله عبر هذا الخط 2 m , جد ممانعة المصدر ؟

الحل

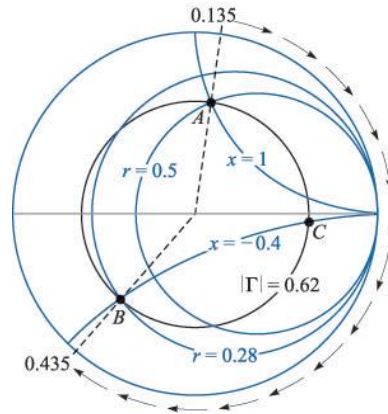
حيث : $\eta_L = 0.5 + 1i$, وبالرجوع الى الشكل (8.13) , تعطي النقطة A معامل الإنعكاس $\Gamma = 0.62 \angle 83^\circ$. اما امتداد الخط الواصل من A الى محيط دائرة الوحدة يتقاطع مع هذا المحيط عند النقطة 0.135 على مقياس (wgt) (كما في الشكل 8.14) , حيث

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{0.6}{2.0} = 0.3 \Rightarrow \ell = 0.3\lambda$$

وهي المسافة من الحمل نحو المولد , وعليه

$$\eta_{in} = 0.135 + 0.3 = 0.435$$

عند رسم مستقيم من النقطة التي تمثل η_{in} على المحيط نحو نقطة الأصل , نجد ان هذا المستقيم يتقاطع مع الدوائر التي لها $|\Gamma| = 0.62$, $x = -0.4$, $r = 0.28$, اي عند النقطة B (الشكل 8.14)



شكل (8.14) إيجاد الممانعة الداخلة (ممانعة المولد) المعيارية .

اي

$$\eta_{in} = r + ix = 0.28 - 0.4i$$

$$r = \frac{R_0}{Z_0} \Rightarrow R_0 = (0.28)(50) = 14$$

$$x = \frac{X_0}{Z_0} \Rightarrow X_0 = (-0.4)(50) = -20$$

وعليه , تكون ممانعة المولد (المصدر) كالتالي :

$$Z_{in} = 14 - 20i$$

• إيجاد مواقع الجهد العظمى والصغرى وقيمة VSWR

بالرجوع الى الشكل (8.8c) , نجد ان الجهد الأعظم V_{max} والجهد الأصغر V_{min} يقعان على المحور الحقيقي (Γ_r) , حيث يكون $x = 0$, اي يكون الحمل فقط مقاومة بحتة *pure resistance* . اذا كانت $R_L > Z_0$, فإنه توجد قيمة عظمى للجهد عند الحمل , وعليه تكون $r > 1$. اما اذا كانت $R_L < Z_0$, فإنه توجد قيمة صغرى عند الحمل وعليه تكون $r < 1$.

وعملياً , يمكن جعل موقع الحمل على خط النقل عند النقطة التي تكون عندها الممانعة الداخلة (Z_{in}) مقاومة بحتة , اي استبدال هذا الجزء من خط النقل بمقاومة R_{in} , بينما يبقى الجزء الآخر من هذا الخط المتصل بالمولد بدون تغيير .

بإستخدام المقياس في خارطة سميث , يكون موقع الجهد الأعظم عندما تكون المسافة نحو المصدر (wtg) تساوي 0.25 , اي $\left(\ell/\lambda = \frac{1}{4}\right)$, بينما يكون موقع الجهد الأصغر عندما تكون المسافة نحو المصدر (wtg) تساوي 0 . لتوضيح ذلك بيانياً , نتناول المثال التالي:

مثال (8.8)

جد موقع الجهد الأعظم لخط النقل المعروف في مثال (8.6) , بإستخدام خارطة سميث ؟

الحل :

بالرجوع الى الشكل (8.14) , نجد ان الخط المستقيم الواصل من نقطة الأصل الى النقطة A يتقاطع مع محيط خارطة سميث عند النقطة التي لها $wtg = 0.135$, وعليه يكون موقع الجهد الأعظم عند النقطة التي لها wtg يساوي المقدار

$$\ell/\lambda = 0.25 - 0.135 = 0.115$$

اي

$$\ell = 0.115 \times \lambda = 0.115 \times 200 \text{ cm} = 23 \text{ cm}$$

اي ان موقع الجهد الأعظم يبعد عن الحمل باتجاه المولد مسافة 23 cm . بينما يقع الجهد الأصغر التالي عند مسافة تبعد عن الحمل وباتجاه المولد بمقدار

$$\ell + \frac{\lambda}{4} = 23 + 50 = 83 \text{ cm}$$

اما لإيجاد نسبة جهد الموجة الساكنة (VSWR) بواسطة خارطة سميث فإننا نجد اولاً نقطة تقاطع دائرة $|\Gamma|$ التي مركزها (1,0) مع محور r (المحور الحقيقي) , عندها تكون قيمة r مساوية لهذه النسبة . في الشكل (8.14) , النقطة C تمثل نقطة التقاطع مع دائرة $|\Gamma| = 0.62$, حيث $r = 4.2$, وعليه تكون $VSWR = 4.2$.

مثال (8.9)

استخدم معادلة (8.22) لبيان ان $r = VSWR$ اذا كان $\Gamma = \Gamma_r$ ؟

الحل

حيث $\Gamma_i = 0$ نجد ان معادلة (8.22) تؤول اى ما يلي

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2}{(1 - \Gamma_r)^2} = \frac{1 + \Gamma_r}{1 - \Gamma_r} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = VSWR$$

بالرجوع الى المثال (8.3) , نجد ان البعد بين نقطتين على خط النقل بمقدار $\frac{\lambda}{4}$ يقابل التحرك بمقدار نصف دورة على لوحة سميث , وهذا يؤدي الى ان الممانعة المختزلة عند اي نقطة على هذا الخط تساوي **مقلوب** ممانعة النقطة المناظرة لها على الجانب الآخر لقطر دائرة الوحدة المار بتلك النقطة , اي $\lambda(\ell + \lambda/4) = 1/\eta(\ell)$. وهذه النتيجة ادت الى التفكير في تصميم لوحة جديدة مماثلة للوحة سميث , ولكن بدلالة مقياس القبولية المعيارية ξ , *normalized admittance* , اي

$$\xi = \frac{Y}{Y_0} = (1/Z)/(1/Z_0) = Z_0/Z = 1/\eta$$

عند استخدام هذا النموذج الجديد للوحة سميث , يكون من السهل المقارنة بين مقدار ممانعة خط النقل مع قبولية هذا الخط عند نقطة ما وعلى بعد معين من الحمل , وذلك بالتحرك نصف دورة على محيط دائرة الوحدة في اللوحة ($|\Gamma| = 1$).

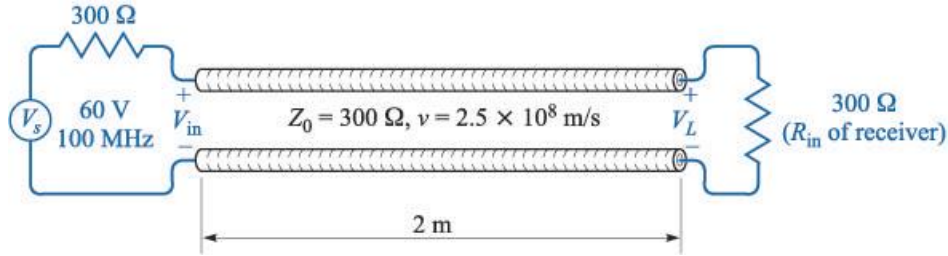
ويمكن التعبير عن القبولية المعيارية لخط نقل ما بدلالة العدد المركب على النحو التالي

$$\xi = c + i s$$

حيث c الموصلية conductance , s القابلية susceptance . حيث تكون دوائر r الثابتة تناظر دوائر c الثابتة , بينما تكون دوائر x الثابتة تناظر دوائر s الثابتة في كلا النموذجين للوحات سميث .

(8.9) نظرية خط النقل الكهربائي: مثال تطبيقي

لنفرض ان لدينا خط نقل يحافظ على الطاقة ويتكون من سلكين متوازيين مقاومة كلا منهما 300Ω , وطول هذا الخط $2m$ ويصل بين هوائي (Antenna) و جهاز استقبال (جهاز تلفزيون) كما في الشكل (8.15) .



شكل (8.15) خط نقل ذو سلكين موصلين .

ولنفرض ان ان ثابت العزل بين السلكين يجع سرعة انتقال الموجة في هذا الخط تساوي $2.5 \times 10^8 m/s$. على فرض ان مقاومة المستقبل (الحمل) 300Ω , وبحسب نظرية ثفينين **Theavnen Theory** للدوائر الكهربائية , يمكن ان هذا الخط عبارة عن دائرة كهربائية على النحو التالي: يمثل الهوائي , الذي ممانعته 300Ω , مصدرا (مولد) قوته الدافعة الكهربائية $V_s = 60 \text{ volt}$ وتردده 100 MHz . وبما ان ممانعة الحمل تساوي الممانعة المميزة , يكون الخط متناظرا (matched) , وهذا يعني ان $\Gamma = 0$, $VSWR = 1$.

يكون طول الموجة المرسله في خط النقل كالتالي :

$$\lambda = \frac{v}{f} = 2.5 \text{ m}$$

ويكون ثابت طور الموجة $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.8\pi$, اذن

$$\beta\ell = (0.8\pi)(2) = 1.6\pi \text{ rad/m}$$

بما ان $Z_{in} = R_{in} = 300 \Omega$, والتوصيل على التوالي , لذلك يكون مقدار الجهد الداخل على الخط: $V_0 = 60/2 = 30 \text{ volt}$.

اي

$$V_{in} = 30 \cos(2\pi \times 10^8 t) \text{ volt}$$

$$V_L = 30 \cos(2\pi \times 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{بينما يكون جهد الحمل}$$

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{300} = 0.1 \cos(2\pi \times 10^8 t) \text{ Amp}$$

$$I_L = 0.1 \cos(2\pi \times 10^8 t - 1.6\pi)$$

لنفرض اننا وصلنا المستقبل مع مستقبل آخر له نفس الممانعة على التوازي, تكون ممانعة الحمل المكافئ $Z_L = 150 \Omega$. باستخدام معادلة (8.12) , نجد ان معامل الإنعكاس في هذه الحالة كما يلي :

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

وتكون نسبة جهد الموجة الساكنة كما يلي :

$$VSWR = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

بينما تكون الممانعة المدخلة كالتالي :

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \left[\frac{Z_L \cos \beta\ell + iZ_0 \sin \beta\ell}{Z_0 \cos \beta\ell + iZ_L \sin \beta\ell} \right] \\ &= 300 \left[\frac{150 \cos 288^\circ + i300 \sin 288^\circ}{300 \cos 288^\circ + i150 \sin 288^\circ} \right] = 466 - i206 \Omega \end{aligned}$$

هذه النتيجة تعني ان الممانعة المدخلة تكون سعوية capacitive impedance , اي ان خط النقل يخزن مقدارا من الطاقة كهربية بشكل اكبر مما يخزن من الطاقة المغناطيسية.

ويكون التيار الداخل على الخط كالتالي :

$$I_{in} = \frac{60}{300 + (466 - i206)} = 0.0756 \angle 15^\circ$$

وتكون معدل القدرة الداخلة على خط النقل كالتالي :

$$P_{in} = \frac{1}{2} I_{in}^2 R_{in} = (1/2)(0.0756)^2(466) = 1.33 \text{ watt}$$

تكون مواقع الجهد الأعظم على خط النقل كالتالي:

$$z_{max} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + 2n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حيث ان $\phi = \pi, \beta = 0.8\pi$, يكون موقع الجهد الأعظم الأول ($n = 0$) والثاني

$$z_{2,max} = -1.825 \text{ m}, \quad z_{1,max} = -0.625 \text{ m} \quad (n = 1)$$

بينما تكون مواقع الجهد الأصغر على الخط كالتالي $z_{n,min} = z_{n,max} + \lambda/4$

اي

$$z_{1,min} = 0, z_{2,min} = -1.25 \text{ m}$$

وهذا يشير الى ان موضع الحمل يكون موضعاً للجهد الأصغر الأول , وهذا يتفق مع ما تم التوصل اليه في البند السابق, وهو ان عند موضع الحمل يكون الجهد اصغرا اذا كان $Z_L < Z_0$

(8.10) توهين الأمواج في خط النقل *Waves attenuation through line*

عند دراستنا لنظرية خطوط النقل الكهربائية, اهتمنا بفقدان الطاقة خلال مكونات الدائرة الكهربائية المكافئة لخط النقل (الشكل 8.4), ذلك بسبب ضالة كمية الطاقة المفقودة . عملياً, اذا كان طول خط النقل كبير , فإنه لا يمكن تجاهل هذا الفقد في الطاقة عبر مكونات الدائرة R, G وخلال الوسط العازل في الخط. في هذا البند , نتناول فقد الطاقة عبر المقاومة R على اعتبار ان هذا الفقد يمثل الجزء الأكبر من الطاقة المفقودة بالمقارنة مع الفقد عبر المكونات الأخرى .

باستخدام معادلة (8.6) , نجد ان الجهد والتيار الكهربائي للموجة المنتقلة في خط النقل باتجاه اليمين (من المصدر الى الحمل) يمكن التعبير عنهما كالتالي

$$V = V_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

ويكون معدل قدرة الموجة عند نقطة ما على خط النقل كالتالي

$$P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_0 I_0 e^{-2\alpha z} = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (8.25)$$

بإشتقاق هذه المعادلة , نجد ان

$$\frac{dP}{dz} = P_0 e^{-2\alpha z} (-2\alpha) \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}$$

$-\frac{dP}{dz}$ يمثل القدرة المفقودة لكل وحدة طول من الخط , ويمكن التعبير عن هذا المقدار بدلالة Rdz , اي

$$-dP = I^2 R dz \rightarrow -\frac{dP}{dz} = I^2 R$$

والإشارة السالبة تشير الى تناقص القدرة مع تزايد z . عند اي نقطة على الخط , تكون القدرة للموجة المنتقلة فيه كالتالي

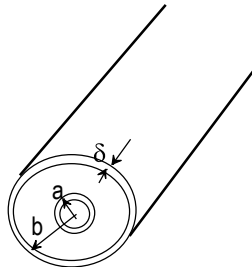
$$P = VI = Z_0 I^2$$

وعليه , يمكن التعبير عن معامل التوهين (α) بالصورة التالية

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0}$$

مثال (8.10)

خط نقل كهربائي على شكل كابل محوري (شكل 8.16) , مكون من مادة نحاسية لها ثابت عزل $\epsilon_r = 3$, حيث نصف قطر الموصل الداخلي $a = 0.5 \text{ cm}$. اذا كانت الممانعة المميزة للخط $Z_0 = 70 \Omega$, والخط يعمل على تردد $f = 10^9 \text{ Hz}$, جد مقدار R, α ؟



شكل (8.16) العمق القشري في خط نقل (كابل محوري).

الحل :

حيث ان الممانعة المميزة للكابل المحوري هي

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow 70 = \frac{60}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow b = 7.5a$$

, وحيث ان الموصلية للنحاس هي $\sigma = 5 \times 10^7 \frac{S}{m}$, يكون العمق القشري

$$\delta = \left(\frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2} = 0.0712 / \sqrt{f}$$

وتكون مقاومة الكابل المحوري لكل وحدة طول كالتالي :

$$R = \frac{1}{(2\pi a \delta) \sigma} + \frac{1}{(2\pi b \delta) \sigma} \Rightarrow R = 1.01 \times \frac{10^{-5}}{\sqrt{f}} = 0.321 \Omega$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} = 2.29 \times 10^{-3} m^{-1}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين في معادلة (8.25) نحصل على ما يلي

$$\alpha = -\frac{1}{2z} \ln \frac{P}{P_0} \quad (\text{nepers/meter})$$

حيث الوحدة neper (Np) وهي منسوبة الى العالم الرياضي الإسكتلندي نابير (1614) والذي ادخل فكرة اللوغاريتم الطبيعي (الأساس e). وعادة في التطبيقات الهندسية يعبر عن معامل التوهين α بدلالة معامل توهين القدرة α' والذي يعرف بقوى العدد 10, ويعود ذلك الى العالم هنري بريجس Henry Briggs في عام 1617, اي

$$\frac{P}{P_0} = 10^{-\alpha' z} \quad (8.26)$$

حيث يقاس مستوى القدرة النسبي بوحدة البيل *the bel*, والذي يعرف كالتالي :

$$\text{numbers of bels} = \log \frac{P}{P_0}$$

إذا كانت القدرة متناقصة , $P < P_0$, يكون اللوغارتم سالبا , ونقول ان القدرة P تحت P_0 بهذا العدد من البيل .

من معادلة (8.26) , نجد ان

$$\alpha' = -\frac{1}{z} \log \frac{P}{P_0} \quad (\text{bels/meter})$$

اما الوحدة المعيارية للتعبير عن α' فهي تسمى الديسيبل (dB) , حيث

$$1\text{dB} = 10 \text{ bels}$$

بإستخدام معادالتي (8.25) , (8.26) , نجد ان

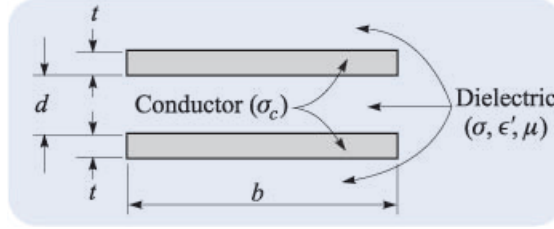
$$\alpha' (\text{bels}) = 2\alpha \log_{10} e$$

$$\alpha' (\text{dB/m}) = 8.686\alpha (Np/m)$$

وعمليا يسبب توهين الإشارة ضعفا في شدتها , وكما مر معنا في المثال السابق , فإن α تتناسب مع الجذر التربيعي لتردد هذه الإشارة , مما ينتج عنه تشويها لها (تغييرا في الشكل) , بمعنى ان الإشارة العالية التردد , ذات الحواف الحادة sharp corners , عند مرورها في خط نقل تتحول الى اشارة ذات حواف مستديرة rounded corners .

تمارين

(8.1) يتكون خط نقل كهربى من صفيحتين مستويتين ومتوازيتين (كما في الشكل 8.17) , حيث موصليتهما σ_c , البعد بينهما d . اذا كان الحيز بين الصفيحتين مملوء بعازل له المعاملات التالية : σ, ϵ', μ , جد معاملات هذا الخط بإعتباره دائرة كهربية ؟



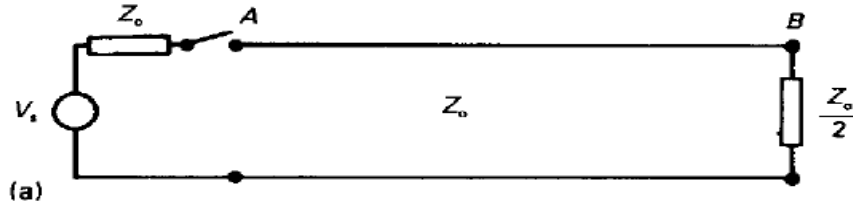
شكل (8.17) خط نقل كهربى بهيئة صفائح مستوية .

(8.2) خط نقل كهربى ممانعته المميزة $Z_0 = 300\Omega$, متصل بحمل ممانعته السعوية $-300i$, اذا كان هذا الحمل متصل على التوازي مع مستقبلين ممانعة كلا منهما 300Ω , جد معامل الإنعكاس ونسبة الموجة الساكنة لهذا الخط ؟

(8.3) خط نقل كهربى , يحمل اشارة ترددها $f = 1\text{ GHz}$, ممانعته المميزة 70Ω . اذا كان طول هذا الخط 0.5m ومنتهى بحمل ممانعته $Z_L = 105 + 35i$, جد طول هذا الخط بدلالة طول الموجة وممانعة الحمل المعيارية η_L ؟

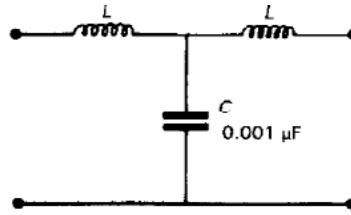
(8.4) خط نقل على شكل كابل محوري , مكون من مادة نحاسية موصليتها تساوي $\sigma_c = 5.8 \times 10^{-7}\text{S/m}$, ويحتوي بين موصليه على وسط عازل ($\epsilon_r = 2.26$) . اذا كان نصف قطر الموصل الخارجى 4 mm , وممانعة الخط المميزة $Z_0 = 50\Omega$, جد نصف قطر الموصل الداخلى لهذا الخط ؟.

(8.5) خط نقل كهربى ممانعته المميزة Z_0 , متصل مع حمل مقاوم $R = Z_0/2$ (كما في الشكل 8.18) , اذا وصل هذا الخط مع مصدر V_s متناظر معه , ومفتاح مؤقت ليعطي نبضة في هذا الخط زمنها τ . اذا كان زمن انتشار النبضة عبر الخط T حيث $T \gg \tau$, ادرس بيانيا تغير الجهد مع الزمن عند طرفي هذا الخط ؟



شكل (8.18) خط نقل متصل مع مصدر وحمل.

(8.6) ملف خلزوني به 318 لفة / م ملفوف على اسطوانة عازلة قطرها 100 mm , وطولها 2.5m , اذا قسم هذا الملف الى عشر اجزاء منتظمة وربط كل جزء مع مكثف سعته $0.001\mu F$ (كما في الشكل ادناه) , بحيث اصبح هذا الملف يتكون من عشر شبكات موصولة على التوالي والتي تشكل خط نقل كهربي , فاذا تم شحن هذا الخط بفرق جهد 20 KV , ثم وصل حمل متناظر عبر مخرجي الخط ليتم التفريغ خلال هذا الحمل , احسب سعة واتساع نبضة الجهد عبر الحمل , واحسب سعة التيار المار في الحمل وطاقة النبضة الكلية ؟.



(8.7) خط نقل كهربي منتهي بحمل ممانعته اقل من الممانعة المميزة للخط. اذا كانت نسبة الموجة الساكنة للجهد (VSWR) تساوي 2.0 , احسب معامل انعكاس الجهد عند الحمل , ممانعة الحمل المعاكسة , نسبة سعة الموجة المنعكسة الى سعة الموجة الساقطة بوحدة الديسيبل ؟.

(8.8) اذا كانت الممانعة المميزة لخط نقل ما 50Ω , وطول الموجة المرسله خلاله 150mm , وبتردد 1 GHz . علما ان طول هذا الخط 20 mm , وينتهي بحمل 100Ω , جد الممانعة الداخلة على هذا الخط , Z_{in} , عند هذا التردد ؟

(8.9) خط نقل محوري ممانعته المميزة 50Ω , اذا كان الوسط بين موصلي هذا الخط عازل ($\epsilon_r = 2.7$) , وكان طول الخط 1m وينتهي بحمل مقاومة 75 اوم , جد الممانعة المدخلة على الخط عند التردد 500 MHz ؟.

(8.10) كابل محوري ممانعته المميزة 50Ω والوسط الفاصل بين موصليه هواء , اذا كان قطر الموصل الخارجي 100 mm , احسب قطر الموصل الداخلي في هذا الخط . اذا كان يلزم

طول من هذا الخط قدره $\frac{\lambda}{4}$ ليتناظر مع حمل 75Ω عند التردد 1 GHz , جد طول هذا الخط ؟ .

الفصل التاسع

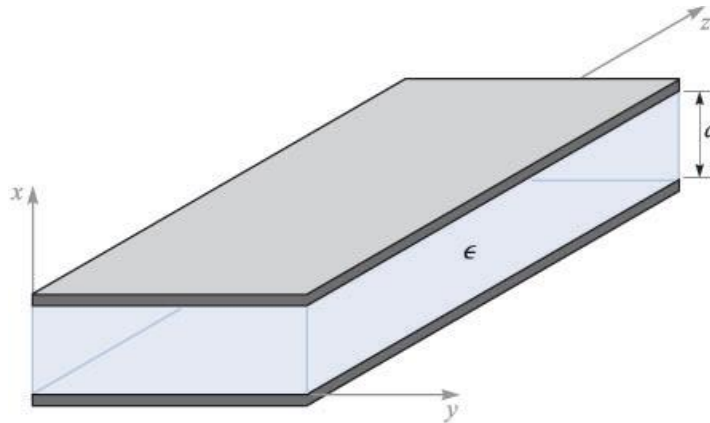
مرشحات الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic Waves Guides

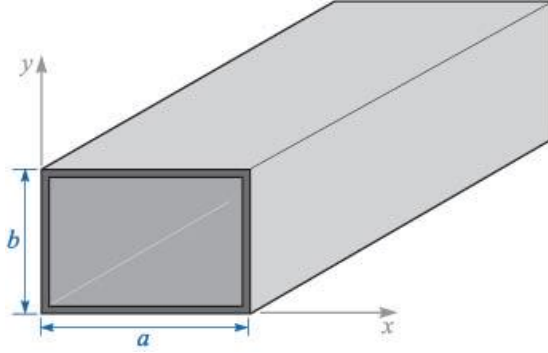
بشكل عام , يمكن القول ان مرشد (دليل) الموجة الكهرومغناطيسية عبارة عن وسيلة لنقل الموجة من نقطة لأخرى خلال مسار بحيث تكون المجالات المرافقة لهذه الموجة والتي تكون محصورة لحد ما خلاله . في هذا الفصل , ندرس المبدء الفيزيائي لعمل المرشد الموجي ونتعرف على الأشكال المختلفة للمرشحات , كما نعرض فكرة انماط المرشحات وشروط انتقال هذه الأنماط عبر المرشحات وتكوين المجالات الكهربائية والمغناطيسية أثناء انتشار الموجات المستوية , وذلك باستخدام حل معادلة الموجة خلال هذه المرشحات . كما نقدم عمل مرشحات الموجات المستوية ومرشد الشريحة العازلة .

(9.1) عملية مرشد الموجة الأساسية *Basic waveguide operation*

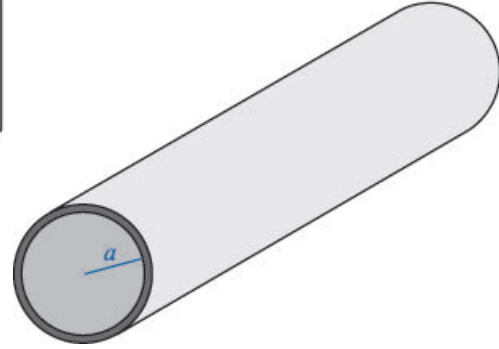
عادة , يتم تصميم الأشكال المختلفة من مرشحات الموجات وفقا لغرض استخدامها وحسب تردد الموجة المنقولة خلالها. ومن أبسط اشكال مرشحات الموجات ما يعرف بمرشد الألواح المتوازية *parallel plate guide* (الشكل 9.1) , ومن الأشكال الأخرى مرشد الأنبوبة المجوفة *hollow tube guide* والتي تكون مستطيلة او اسطوانية الشكل (شكل 9.2 , 9.3). وهناك مرشحات تستخدم لنقل الموجات الضوئية والتي تعرف بالألياف البصرية *optical fibers* (شكل 9.4) , واخيرا هناك مرشد الموجات ذات الشريحة العازلة (الشكل 9.5) . ويكون مبدء عمل كل هذه المرشحات متشابه , ومن اجل التسهيل على الطالب , نتناول عمل مرشد الألواح المتوازية .



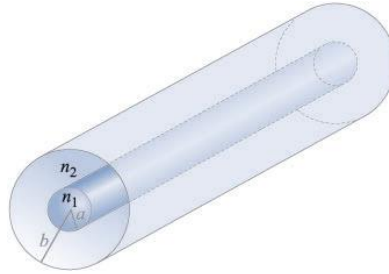
شكل (9.1) مرشد موجي ذو لوحين متوازيين .



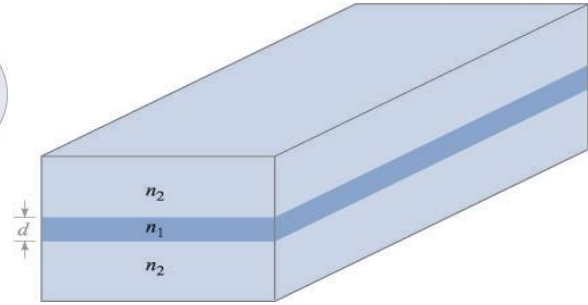
شكل (9.2) مرشد موجي مستطيل.



شكل (9.3) مرشد موجي اسطواني .

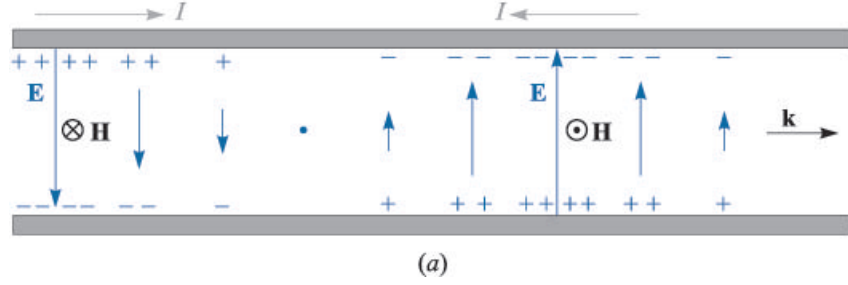


شكل (9.5) مرشد موجي ذو شرائح عازلة .



شكل (9.4) ليف بصري .

ما يتبادر الى ذهن الطالب السؤال التالي: ما هو الاختلاف بين عمل مرشد الموجة وعمل خط النقل الكهربائي (الفصل الثامن) ؟ ان الاختلاف يظهر جليا من خلال الشكل (9.6a) , ويمكن هذا الاختلاف في شكل (form) المجالات المغناطيسية والكهربائية عبر خط النقل.



شكل (9.6a) مجالات كهربائية ومغناطيسية لنمط TEM (خط نقل) تنتشر في مرشد موجة, مكونة موجة مستوية تنتشر على محور المرشد.

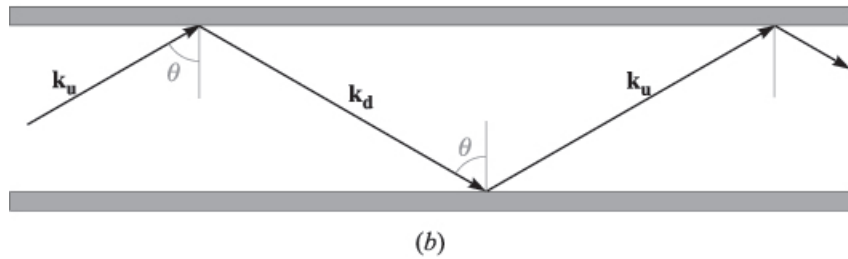
عند تسليط فرق جهد جيبي على الألواح , يكون اتجاه التيار في اتجاه محور z , ويكون اتجاه المجال المغناطيسي في اتجاه محور y (داخل او خارج الصفحة) , وتقع هذه المجالات في المستوى المستعرض لإتجاه انتشار الموجة (محور z) , ولذلك تسمى هذه الموجة بالموجة الكهرومغناطيسية المستعرضة *transverse electric magnetic (TEM)* . لنفرض ان k متجه ثابت انتشار هذه الموجة , وعليه , يمكن كتابة الصيغة الرياضية للمجال الكهربائي , كدالة للمكان والزمان , كالتالي:

$$E(z, t) = \hat{x}E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

لنفرض ان $ik = \alpha + i\beta$, وعليه , فإن هذه الصيغة الرياضية للمجال الكهربائي تؤول الى ما يلي :

$$E(z, t) = \hat{x}E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

ونلاحظ ان سعة موجة المجال الكهربائي تتناقص لو غارتميا مع z (المسافة التي تنتقلها الموجة عبر خط النقل) . كما نلاحظ انه مع ازدياد التردد للموجة , تحدث تغيرات على طريقة انتشار الموجة عبر الخط ولكن دون تغير الشكل العام للمجال الكهربائي . وتنتقل الموجة المستوية عبر المرشد الموجي من خلال الإنعكاسات المتتالية على الجدران الداخلية لصفائح المرشد (كما في الشكل 9.6b) .



شكل (9.6b) موجات مستوية منعكسة على بين موصلين متوازيين , مما ينتج عنه نمط مرشد موجي والذي لا يكون TEM .

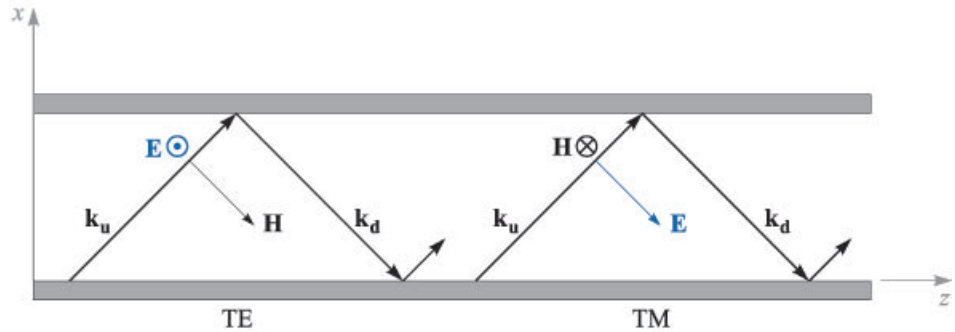
لنفرض ان k_u, k_d هي متجهات ثابت الانتشار للموجة الصاعدة الى الصفيحة العلوية والموجة الهابطة نحو الصفيحة السفلية , على الترتيب , حيث يكون $|k_u| = |k_d| = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$. وحتى تنتشر الموجة عبر المرشد , يجب ان تكون الموجة الصاعدة متفقة في الطور (in phase) مع الموجة النازلة . وهذا الشرط لا يتم الا عند قيم معينة للزاوية θ , وهذه القيم المسموحة لتلك الزاوية تحدد نمط (mode) المرشد الموجي الخاص بتكوين هيئة configuration المجالات الكهربائية والمغناطيسية .

في حالة مرشد موجي الألواح المتوازية , هناك نوعان من انماط المرشد الموجي (الشكل 9.7) والتي تظهر نتيجة لوجود نوعين من الإستقطاب للموجة المستوية (s , p - polarization) , ويشار اليهما كالتالي :

(1) نمط المجال الكهربائي المستعرض (TE mode) , حيث يكون متجه المجال الكهربائي (E) متعامدا على مستوى السقوط (s - polarized) , ويكون E موازيا للمستوى العرضي لمرشد الموجة .

(2) نمط المجال المغناطيسي المستعرض (TM mode) , حيث يكون متجه المجال المغناطيسي (H) متعامدا على مستوى السقوط (p - polarized) . ويكون H موازيا للمستوى العرضي لمرشد الموجة .

في الشكل (9.7) اذا كان E يقع في اتجاه محور y (TE mode) , فإن $E_z = 0$, ويكون للمجال المغناطيسي مركبتين في اتجاه محوري x, z . بينما في نمط TM , يكون $H_z = 0$, ويكون للمجال الكهربائي مركبتين في اتجاه محوري x, z .

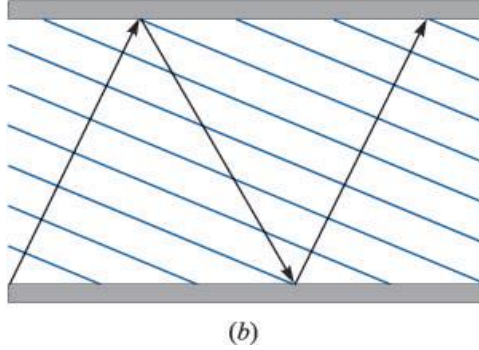


شكل (9.7) انماط المرشد الموجي ذي اللوحين المتوازيين.

(9.2) تحليل الموجة المستوية المنتشرة في مرشد موجي ذي لوحين متوازيين

Plane wave analysis of a parallel plate wave guide

في هذا البند نستخدم نموذج الموجة المستوية لنمط المجالات , وذلك لإيجاد الشروط التي تحدث عندها أنماط مرشد الموجة والمنتشرة بين لوحين متوازيين بواسطة الانعكاسات المتتالية عن السطوح الحدودية لهذين اللوحين (كما في الشكل 9.8).

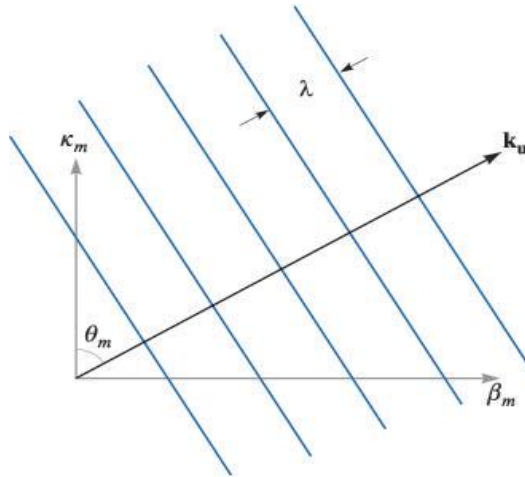


شكل (9.8) موجة مستوية منتشرة بين مرشد الألواح المتوازية.

لنفرض ان لمتجه ثابت الطور في الموجة الصاعدة مركبتان: في اتجاهي محوري x, z كالتالي :

$$\mathbf{k}_u = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{z}}k_z = \hat{\mathbf{x}}k_m + \hat{\mathbf{z}}\beta_m$$

حيث m عدد صحيح موجب ويسمى **عدد النمط** *mode number* (الشكل 9.9) .



الشكل (9.9) مركبات متجه ثابت الانتشار للنمط m .

وحتى تكون كل مقدمات الموجات المنتشرة الى اعلى (او الى اسفل) في المرشد متفقة في الطور (in phase), وهذا الشرط ضروريا لبناء النمط الموجي , يجب ان يكون للمركبات k_m, β_m قيم منفصلة discrete values , وهذه القيم تقابل الإتجاهات المسموحة بها للمتجاهات k_u, k_d اثناء انتقال الموجة خلال المرشد الموجي.

من الشكل (9.9) , نجد ان مركبة k_d او k_u في اتجاه محور z لنمط الموجة ذي الرتبة m تعطى بالعلاقة التالية

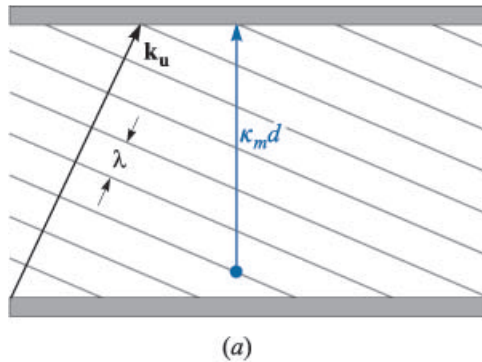
$$\beta_m = \sqrt{k^2 - k_m^2} \quad (9.1)$$

وهذه الكمية تعبر عن انزياح الطور للموجات المنتشرة في المرشد لوحدة المسافة بين لوحتي هذا المرشد. على فرض ان الوسط بين اللوحين لا يبدد اي طاقة , ومن مادة غير مغناطيسية , ومعامل انكساره n , فإن

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{\omega n}{c} \quad (9.2)$$

اما k_m (مركبة k في اتجاه محور x للموجات الصاعدة والهابطة عبر صفائح المرشد) تلعب دورا مهما في تحديد الشرط اللازم لحدوث ما يعرف بظاهرة الرنين المستعرض في المرشد الموجي transverse resonance , وهذا الشرط ينص على ان محصلة انزياح الطور خلال صعود وهبوط الموجة بين اللوحين (round trip) يجب ان يعادل عدد صحيح من 2π , وذلك تكون الموجات المنتشرة صعودا (او هبوطا) متفقة في الطور .

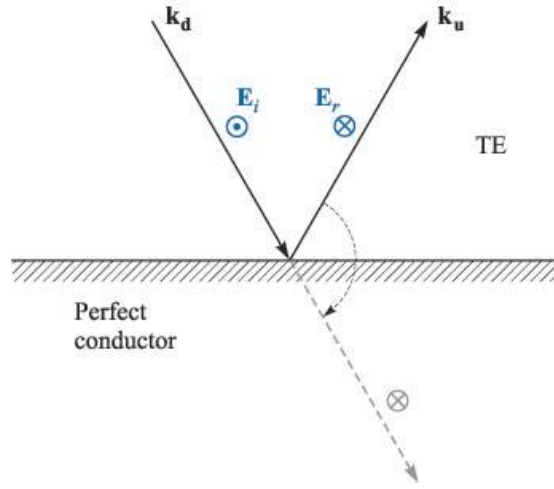
لنفرض ان المسافة بين اللوحين في المرشد d , يكون انزياح الطور للموجة الصاعدة من السطح السفلي الى السطح العلوي $k_m d$ زاوية نصف قطرية (radian) (كما في الشكل 9.10) .



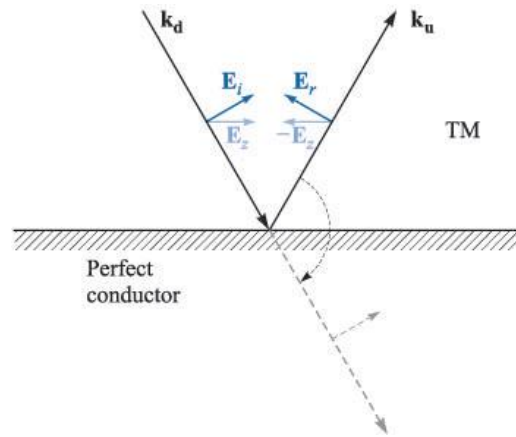
شكل (9.10) انزاح الطور للموجة الصاعدة بين لحي المرشد الموجي .

وعند وصول الموجة الى الحدود السفلية من السطح العلوي , يحصل تغير في الطور بسبب الانعكاس وقدره π في حالة نمط TE , او 0 في حالة انعكاس نمط TM , وبالمثل يحدث نفس التغير في طور الموجة الهابطة والمنعكسة عن حدود اللوح السفلي للمرشد . لنفرض ان ϕ هي مقدار انزياح الطور للموجة المنعكسة عن حدود سطح اللوح في المرشد الموجي (الأشكال 9.11 , 9.12) , لذلك تكون محصلة انزياح الطور للموجة خلال الدورة الكاملة (صعودا وهبوطا) بين اللوحين كما يلي

$$k_m d + \phi + k_m d + \phi = 2m\pi \quad (9.3)$$



شكل(9.11) انزياح طور الموجة نمط TE عند الانعكاس عن سطح لوح تام الموصلية.



شكل(9.12) انزياح طور الموجة نمط TM عند الانعكاس عن سطح لوح تام الموصلية .

وكما سبق شرحه , فإذا كانت $2\phi = 2\pi, 0$, بغض النظر عن زاوية سقوط الموجة

, فإن

$$k_m d = m\pi \Rightarrow k = \frac{m\pi}{d}; \quad m=1,2,3... \quad (9.4).$$

وهذا ينطبق على كل انماط TE , TM المنتشرة خلال المرشد ذو اللوحين المتوازيين .

اما في حالة سقوط الموجة على اللوح بزاوية θ_m , فإن

$$k_m = k \cos \theta_m \Rightarrow \theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{k_m}{k}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m\pi}{kd}\right) \quad (9.5)$$

اما بدلالة التردد الزاوي , نجد ان

$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{m\pi c}{\omega nd}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2nd}\right)$$

حيث λ طول الموجة في الفراغ. باستخدام هذه العلاقات , نجد ان

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - k_m^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{kd}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega nd}\right)^2} \quad (9.6)$$

لنفرض ان

$$\omega_{cm} = \frac{m\pi c}{nd} \quad (9.7)$$

وعليه,

$$\beta_m = \frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} \quad (9.8)$$

نسمي المقدار ω_{cm} **تردد القطع** cutoff frequency ويعتمد على خصائص المرشد الموجي ورتبة النمط , وهذا المقدار يحدد مدى سماحية انتشار النمط عبر المرشد , بمعنى اذا كان التردد الزاوي لموجة ما ω , حيث $\omega > \omega_{cm}$, فإن β_m يكون عدد حقيقي مما يسمح بمرور هذا النمط خلال مرشد الموجة . اما اذا كان $\omega < \omega_{cm}$ فإن β_m يكون عدد تخيلي , مما لا يسمح بانتشار النمط خلال المرشد الموجي .

يصاحب تردد القطع ما يعرف **بطول موجة القطع** (λ_{cm}) cutoff wavelength , حيث

$$\lambda_{cm} = \frac{2\pi c}{\omega_{cm}} = \frac{2nd}{m} \quad (9.9)$$

فمثلا , اذا كان الوسط بين لوحى المرشد هواء , فإن طول موجة القطع لأقل رتبة نمط ($m = 1$) , مسموح بانتشاره خلال هذا المرشد , يكون كالتالي :

$$\lambda_{c1} = \frac{2(1)d}{1} = 2d$$

كما يمكن التعبير عن β_m بدلالة طول موجة القطع كما يلي :

$$\beta_m = \frac{2\pi n}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2} \quad (9.10)$$

مثال (9.1)

مرشد موجي ذو لوحين متوازيين , المسافة بينهما $d=1 \text{ cm}$, اذا كان الوسط بين اللوحين مادة عازلة ($\epsilon_r = 2.1$) , جد اكبر قيمة للتردد المسموح بانتشاره في هذا المرشد لنمط TEM. ثم جد مدى التردد المسموح للأنماط TE_1, TM_1 ؟

الحل :

باستخدام معادلة (9.7) , نجد ان تردد القطع يساوي

$$f_{cm} = \frac{\omega_{cm}}{2\pi} = \frac{mc}{2nd} \Rightarrow f_{c1} = \frac{c}{2d\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2.99 \times 10^{10}}{2(1)\sqrt{2.1}} = 1.03 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$= 10.3 \text{ GHz}$$

اي ان الأمواج من نوع TEM والتي ترددها : $f < 10.3 \text{ GHz}$ يسمح المرشد بانتشارها خلاله. وحتى يسمح المرشد بتمرير الأنماط TE_1, TM_1 , يجب ان يكون ترددها ضمن المدى

$\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$. من معادلة (9.7) لتردد القطع, نجد ان $\omega_{c1} = 2 \omega_{c2}$, وعليه , يكون مدى التردد المسموح للمرور خلال المرشد كالتالي

$$10.3 \text{ GHz} < f < 20.6 \text{ GHz}$$

مثال (9.2)

في المثال (9.1) , اذا كان طول موجة التشغيل $\lambda = 2 \text{ mm}$, جد عدد الأنماط الكلي المسموح بانتشارها خلال المرشد الموجي ؟

الحل :

$$\lambda_{cm} = \frac{2nd}{m}$$

$$2 < \frac{2(10)\sqrt{2.1}}{m} \Rightarrow m < 10\sqrt{2.1} = 14.5$$

اي ان المرشد يسمح بمرور الأنماط حتى الرتبة 14 , وبما انه يوجد لكل قيمة من قيم m نمطان (TE, TM) , لذلك يكون عدد الأنماط المسموح بمرورها 28 نمطا , اضافة الى نمط TEM .

يمكن الحصول على الترتيب الرياضي للمجال الكهربائي (المغناطيسي) لأي نمط ما من محصلة تركيب مجالات كل الموجات المنعكسة عن سطوح المرشد الموجي , ويتم ذلك كالتالي:

لنفرض ان نمط TE ينتشر خلال مرشد موجي (شكل 9.12) , بحل معادلة الموجة للمجال الكهربائي (كما سبق شرحه في الفصل السابع) نجد ان

$$E_{ys} = E_0 e^{-ik_u r} - E_0 e^{-ik_d r} \quad (9.11)$$

حيث

$$k_u = \hat{x}k_m + \hat{z}\beta_m \quad (9.12)$$

$$k_d = -\hat{x}k_m + \hat{z}\beta_m \quad (9.13)$$

$$r = \hat{x}x + \hat{z}z$$

بالتعويض في معادلة (9.11) , نجد ان

$$\begin{aligned} E_{ys} &= E_0 (e^{-ik_m x} - e^{-ik_m x}) e^{-i\beta_m z} \\ &= 2iE \sin(k_m x) e^{-i\beta_m z} = E_0^* \sin(k_m x) e^{-i\beta_m z} \end{aligned} \quad (9.14)$$

اما الصيغة اللحظية والحقيقية للمجال الكهربائي فتكون كالتالي :

$$E_y(z, t) = \text{Re}(E_{ys} e^{i\omega t}) = E_0^* \sin(k_m x) \cos(\omega t - \beta_m z) \quad (9.15)$$

(حيث يكون نمط TE فوق القطع , حيث $\omega > \omega_{cm}$) .

والمعنى الفيزيائي لهذه المعادلة (9.15) يعطي المجال الكهربائي المنتشر في المرشد الموجي في اتجاه محور z الموجب (نزولا) وتكون شدة هذا المجال متغيرة جيبييا مع x , او $E_0^* \sin(k_m x)$. والتداخل بين الموجات الصاعدة والنازلة عبر المرشد تنتج نمودجا تداخليا $interference pattern$ تتناقص فيه شدة المجال الكهربائي مع ازدياد قيم z .

اما في حالة $\omega < \omega_{cm}$ (نمط TE تحت القطع) , نجد ان معادلة (9.8) تعطي قيم تخيلية ل β_m , اي

$$i |\beta_m| = \alpha_m$$

كما تصبح المعادلات (9.14,9.15) بدلالة α_m على الصور التالية :

$$E_{ys} = E_0^* \sin(k_m x) e^{-\alpha_m z} \quad (9.16)$$

$$E(z, t) = E_0^* \sin(k_m x) e^{-\alpha_m z} \cos(\omega t) \quad (9.17)$$

$$\alpha_m = \frac{n\omega_{cm}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{2\pi n}{\lambda_{cm}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda}\right)^2} \quad (9.18)$$

و لا يمر هذا النمط الموجي خلال المرشد ولكن يهتز بتردد ω ليظهر مجالا كهربيا شدته متناقصة مع ازدياد قيم z .

باستخدام معادلتني (9.5,9.6) نجد زاوية الموجة θ_m كالتالي

$$\cos \theta_m = \frac{\omega_{cm}}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_{cm}} \quad (9.19)$$

من هذه المعادلة , نجد انه عندما تكون $\omega = \omega_{cm}$, فإن $\theta_m = 0$, وهذا يعني ان الموجات المستوية تتحرك عبر مقطع المرشد الموجي صعودا وهبوطا (من والى اللوحين) دون التقدم على طول محور المرشد. بينما اذا زادت ω عن تردد القطع (تنقص λ) , فإن θ_m تزداد وتقترب من 90° عندما $\omega \rightarrow \infty$. بما ان

$$\beta_m = k \sin \theta_m = \frac{n\omega}{c} \sin \theta_m \quad (9.20)$$

يمكن تعريف سرعة طور النمط m كالتالي

$$v_{pm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{c}{n \sin \theta_m} \quad (9.21)$$

وتكون القيمة الصغرى لهذه السرعة c/n , اي عندما تكون $\sin \theta_m = 1$, ولكل الأنماط. ويكون الأقتراب من هذه القيمة عند التردد الأعلى بكثير من تردد القطع. وكلما اقترب التردد للموجة من تردد القطع , فإن $v_{pm} \rightarrow \infty$.

في المرشد الموجي , يكون انتشار الطاقة بسرعة تسمى سرعة المجموعة (v_g) group velocity , حيث $v_g = \frac{d\omega}{d\beta_m}$, ولإيجاد سرعة المجموعة نشتق معادلة (9.8) بالنسبة للتردد كالتالي :

$$\frac{d\beta_m}{d\omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} \right] \quad (9.22)$$

وبعد اجراء الاشتقاق وترتيب الحدود , نجصل على ما يلي :

$$v_{gm} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{c}{n} \sin \theta_m \quad (9.23)$$

فيزيائيا , تعرف سرعة المجموعة بأنها مسقط السرعة المصاحبة لمتجهات ثابت الانتشار k_d, k_u في اتجاه محور z .

مثال (9.3)

قي المرشد الموجي المعطى في المثال (9.1) , اذا كان تردد التشغيل 25 GHz , وكانت الأنماط ذات الرتب m=1,2 لها تردد فوق تردد القطع , جد زمن التأخير (delay) بين هذين النمطين عند انطلاقها معا في هذا المرشد لمسافة 1 cm ؟ .

الحل :

نفرض ان زمن التأخير للمجموعة Δt , وحيث الزمن = المسافة / السرعة , اذن

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left[\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right] \text{ sec/cm}$$

باستخدام معادلة (9.23) , نجد ان

$$v_{g1} = \frac{c}{\sqrt{2.1}} \sqrt{1 - \left(\frac{10.3}{25}\right)^2} = 0.63c$$

$$v_{g2} = \frac{c}{\sqrt{2.1}} \sqrt{1 - \left(\frac{26.6}{25}\right)^2} = 0.39c$$

$$\Delta t = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{0.39} - \frac{1}{0.63} \right) = 3.3 \times 10^{-11} \text{ sec/cm}$$

هذا يعني ان النبضة المرسله عبر هذا المرشد يزداد اتساعها بمقدار 33 ps/cm اثناء انتشارها عبر محور المرشد .

(9.3) تحليل عملية مرشد الألواح المتوازية باستخدام معادلة الموجة

Parallel plate guide operation analysis by using wave equation

نتناول في هذا البند طريقة ايجاد ترتيب المجالات الكهربائية والمغناطيسية اثناء انتشار موجة مستوية في مرشد موجي ذي لوحين متوازيين , وذلك باستخدام حلول معادلة الموجة المنتشرة خلال هذا المرشد.

اذا كان وسط المرشد غير موصل , فإن معادلة الموجة (7.3) المنتشرة خلاله تصبح كالتالي

$$\nabla^2 E_s = -k^2 E_s \quad (9.24)$$

حيث $k = n\omega/c$. ولنفرض ان نمط TE يتكون من مجال كهربائي له مركبة واحدة في اتجاه محور y وهي E_{ys} , وعليه يمكن كتابة (9.24) بالصورة التفاضلية التالية :

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2} + k^2 E_{ys} = 0 \quad (9.25)$$

بفرض ان اتساع المرشد الموجي في اتجاه y اكبر بكثير من المسافة بين اللوحين , عندها لا يكون هناك تغير للمجال في اتجاه y , اي ان $\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} = 0$, وكذلك يكون التغير في اتجاه z للمجال دالة اسية مركبة , يمكن استخدام طريقة فصل المتغيرات لحل معادلة (9.25) في البعدين (x, z) لنحصل على ما يلي :

$$E_{ys} = E_0 f_m(x) e^{-i\beta_m z} \quad (9.26)$$

حيث $f_m(x)$ دالة معايرة (قيمتها العظمى الوحدة) , ويمكن ايجادها بتعويض معادلة (9.25) في معادلة (9.26) كما يلي

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + (k^2 - \beta_m^2) f_m(x) = 0 \quad (9.27)$$

حيث $k^2 - \beta_m^2 = k_m^2$ (كما في الشكل 9.9) , فإن معادلة (9.27) تؤول الى

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + k_m^2 f_m(x) = 0 \quad (9.28)$$

ويكون حل معادلة (9.28) على الصورة التالية :

$$f_m(x) = \cos k_m x + \sin k_m x \quad (9.29)$$

نستخدم الشروط الحدودية التالية لإيجاد قيم k_m كما يلي :

$$E_{ys}|_{x=0} = 0 ; E_{ys}|_{x=d} = 0$$

وعليه تكون $f_m(x) = \sin k_m x$ هي الدالة التي تحقق الشروط الحدودية , وهذا يعطي ما يلي :

$$k_m d = m\pi \Rightarrow k_m = \frac{m\pi}{d} \quad (9.30)$$

اذن

$$E_{ys} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d} x\right) e^{-i\beta_m z} \quad (9.31)$$

إذا كانت الموجات المستوية مرتبة في الإتجاه العمودي (y- axis) , فإن $\beta_m = 0$, وعليه يكون

$$k_{cm} = k = 2n\pi / \lambda_{cm}$$

عند تردد القطع , يتحقق الشرط (9.30) ونجد ان

$$\frac{m\pi}{d} = \frac{2n\pi}{\lambda_{cm}} \quad (9.31)$$

اي

$$d = \frac{m\lambda_{cm}}{2n} \quad (9.33)$$

وتصبح معادلة المجال الكهربائي كالتالي :

$$E_{ys} = E_0 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\lambda_{cm}}\right) \quad (9.34)$$

في هذه الحالة, يصبح المرشد الموجي **فجوة رنينية Resonant Cavity** في بعد واحد , حيث تهتز الموجة في اتجاه x اذا كان طول هذه الموجة يساوي المضاعفات الصحيحة للمقدار 2d .

إستخدام معادلات ماكسويل (الفصل السابع) يعطي معادلة المجال المغناطيسي, حيث نفترض , في هذا النموذج للموجة المستوية (نمط TE) , ان للمجال المغناطيسي H_s مركبتان في اتجاهات x, z , ويتم تحديدهما كالتالي :

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -i\omega\mu\mathbf{H}_s \quad (9.35)$$

على فرض ان $\mathbf{E}_s = \hat{y}E_{ys}$, فإن معادلة (9.35) تكتب بالصورة التالية

$$\frac{\partial E_{ys}}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} \hat{x} = -i\omega\mu(\hat{x}H_{xs} + \hat{z}H_{zs})$$

استخدام معادلة (9.31) للمجال الكهربائي E_{ys} نحصل من هذه المعادلة على ما يلي

$$k_mE_0 \cos(k_mx)e^{-i\beta_m z} \hat{z} + i\beta_mE_0 \sin(k_mx)e^{-i\beta_m z} \hat{x} = -i\omega\mu(\hat{x}H_{xs} + \hat{z}H_{zs}) \quad (9.36)$$

مقارنة الحدود المتناظرة في معادلة (9.36) نحصل على ما يلي

$$H_{xs} = -\frac{\beta_m}{\omega\mu} E_0 \sin(k_mx)e^{-i\beta_m z} \quad (9.37)$$

$$H_{zs} = i\frac{k_m}{\omega\mu} E_0 \cos(k_mx)e^{-i\beta_m z} \quad (9.38)$$

مثال (9.4)

استخدم معادلتني (9.37, 9.38) لأثبت ان $|H_s| = \frac{E_0}{\eta}$, حيث $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ؟

الحل :

$$|\mathbf{H}_s| = \sqrt{\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_s} = \sqrt{H_{xs}H_{xs}^* + H_{zs}H_{zs}^*}$$

باستخدام معادلتني (9.37-38) , نجد ان

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{E_0}{\omega\mu} (k_m^2 + \beta_m^2)^{\frac{1}{2}} (\sin^2(k_mx) + \cos^2(k_mx))^{\frac{1}{2}} = \frac{E_0}{\omega\mu} k$$

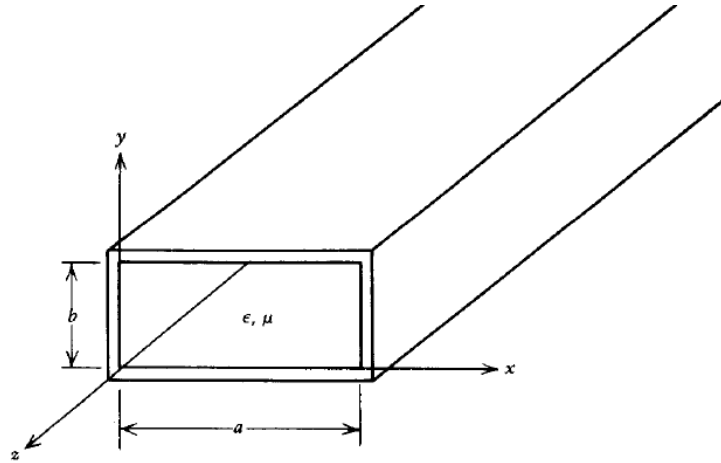
$$= \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu} E_0}{\omega \mu} = \frac{E_0}{\eta}$$

(9.4) مرشد الموجة المستطيل المقطع Rectangular Waveguide

لنفرض ان موجة مستوية تنتقل عبر محور z في مرشد موجي مستطيل المقطع (كما في الشكل 9.13) , حيث الصور الرياضية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية كالتالي :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (9.4.1a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (9.4.1b)$$



الشكل (9.13) مرشد موجي مستطيل المقطع .

نلاحظ ان المشتقات الزمنية والمشتقات المكانية (بالنسبة للإحداثي z) تكون بشكل عام على النحو التالي :

$$\frac{\partial[*]}{\partial t} = i\omega[*], \quad \frac{\partial[*]}{\partial z} = -i\omega[*] \quad (9.4.2)$$

حيث $[*]$ يرمز الى E, H .

في هذا البند , نحلل سلوك هذا المرشد عن طريق وصف المجالات الكهرومغناطيسية في العازل داخل تجويف المرشد (قد يكون هواء) , وتحت شرط $J = 0, \rho = 0$, وذلك باستخدام معادلات ماكسويل التي تعطي تدوير المجال الكهربائي بدلالة المجال المغناطيسي وبالعكس (الفصل السابع) , حيث تؤول هذه المعادلات داخل تجويف المرشد الى الصور التالية

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

بتطبيق معادلة (9.4.2) على هذه المعادلات , نحصل على ست معادلات جزئية تربط بين مكونات المجالات كالتالي :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\beta H_y = i\omega\varepsilon E_x ; \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x \quad (9.4.3a, b)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - i\beta H_x = i\omega\varepsilon E_y ; -\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\beta E_x = -i\omega\mu H_y \quad (9.4.4a, b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon E_z ; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad (9.4.5a, b)$$

حيث ان معادلتى (9.4.3a, 9.4.4b) خطية , يمكن حلها جبريا للحصول على ما يلي :

$$E_x = \frac{-i}{\beta_c^2} \left(\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (9.4.6a)$$

$$H_y = \frac{-i}{\beta_c^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (9.4.6b)$$

حيث

$$\beta_c^2 = \beta_0^2 - \beta^2 \quad (9.4.7a)$$

$$\beta_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \frac{\omega^2}{v_0^2} \quad (9.4.7b)$$

اي ان $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ تمثل العدد الموجي للموجة المستوية التي لها نفس التردد في الفراغ غير المتناهي مع الوسط داخل المرشد , بينما $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ تمثل العدد الموجي للموجة المنتشرة داخل المرشد , مع ملاحظة ان $\lambda_0 \neq \lambda$. من معادلة (9.4.7a) , يمكن اعتبار ان β_c تمثل العدد الموجي للموجة المستوية في الفراغ ولكن بتردد مختلف ويكون كالتالي :

$$\omega_c = \beta_c v_0 \quad (9.4.8a)$$

من معادلة (9.4.7a) , نجد ان

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{v_0^2} \quad (9.4.8b)$$

كما نلاحظ ان معادلتني (9.4.3b, 9.4.4a) معادلات خطية للمتغيرات E_y, H_x , يمكن حلها
 أنيا لنحصل على ما يلي :

$$E_y = \frac{i}{\beta_c^2} \left(\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (9.4.9a)$$

$$H_x = -\frac{i}{\beta_c^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (9.4.9b)$$

نلاحظ ان استخدام معادلات (9.4.6, 9.4.9) لإيجاد مركبات المجالات الكهربائية والمغناطيسية المستعرضة (في اتجاهات x, y) يتطلب معرفة مركبات المجالات في اتجاه محور z . لذلك نتناول دراسة تحديد المجالات في حالتني الأنماط TE, TM كلا على انفراد .

• إيجاد H_z

نستخدم معادلة الموجة للمجال المغناطيسي (او المجال الكهربائي), حيث العازل في المرشد الموجي هواء و لا يوجد به شحنات كهربية والموصلية $\sigma = 0$, تؤول الى ما يلي

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = -\beta_0^2 \mathbf{H} \quad (9.4.10a)$$

وتكون مركبة z لهذه المعادلة كالتالي:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -\beta_0^2 H_z \quad (9.4.10b)$$

باستخدام معادلة (9.4.2), نجد ان هذه المعادلة تؤول الى ما يلي :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -(\beta_0^2 - \beta^2) H_z = -\beta_c^2 H_z \quad (9.4.10c)$$

ويتم حل هذه المعادلة باستخدام طريقة فصل المتغيرات (المشروحة في حل معادلة لابلاس) , حيث نفترض ان

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (9.4.11)$$

ملاحظة: معادلة الموجة المستوية للمجال المغناطيسي (9.4.1b) يمكن ان تكتب بالصورة التالية

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t} e^{-i\beta z} = H_0 T(t) Z(z).$$

بتعويض معادلة (9.4.11) في معادلة (9.4.10c) , نحصل على ما يلي :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta_c^2 XY$$

بقسمة حدود هذه المعادلة على XY يعطي ما يلي :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta_c^2 \quad (9.4.12)$$

نفرض ان كل حد في الطرف الأيمن من هذه المعادلة يساوي ثابت كالتالي :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\beta_x^2 \quad (9.4.13a)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta_y^2 \quad (9.4.13b)$$

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_c^2 \quad (9.4.13c)$$

يكون حل معادلتني (9.4.13a,b) الافتراضي والأولي على الصورة التالية :

$$X = A \cos \beta_x x + B \sin \beta_x x \quad (9.4.14a)$$

$$Y = C e^{i\beta_y y} + D e^{-i\beta_y y} \quad (9.4.14b)$$

هذان الحلان متكافئان , فقط مع اختلاف الصورة الرياضية لهما , حيث كلاهما يمثلان دوال جيبية . اما A,B,C ,and D فهي ثوابت و تحدد قيمها بإستخدام الشروط الحدودية عند الجدران المعدنية لمرشد الموجة.إذا كانت جدران المرشد تامة الموصلية وعند الترددات العالية , فإن الإختراق القشري يكون صفر تقريبا , ولذلك يمكن اعتبار ان المجالات الكهربائية والمغناطيسية تساوي صفرا داخل هذه الجدران. وعليه , تتحقق الشروط الحدودية عند سطح المشد , كما في الوسط العازل , وهذه الشروط هي

$$B_{\text{normal}} = 0 ; E_{\text{tangential}} = 0 \quad (9.4.15a, b)$$

(9.4.1) نمط TE :

نستخدم الشروط الحدودية للمجال الكهربائي (9.4.15b) عند جدران المرشد (الشكل 9.13) وهي

$$E_z(x = 0) = E_z(x = a) = E_z(y = 0) = E_z(y = b) = 0 \quad (9.4.16)$$

$$E_x(y = 0) = E_x(y = b) = 0 \quad (9.4.17)$$

$$E_y(x = 0) = E_y(x = a) = 0 \quad (9.4.18)$$

باستخدام معادلتني (9.4.6a, 9.4.9a) , مع اعتبار ان E_z لهذا النمط تساوي صفر , وكذلك مشتقاتها بالنسبة ل x, y تساوي الصفر , نجد ان

$$E_x = \frac{-i\omega\mu}{\beta_c^2} i\beta_y X(x) [C e^{i\beta_y y} - D e^{-i\beta_y y}] \quad (9.4.19a)$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu}{\beta_c^2} \beta_x Y(y) [-A \sin \beta_x x + B \cos \beta_x x] \quad (9.4.19b)$$

باستخدام الشروط الحدودية (9.4.17) على معادلة (9.4.19a) , نجد ان

$$E_x(y = 0) = 0 \rightarrow C - D = 0 \rightarrow C = D$$

وعليه ,

$$E_x = \frac{\omega\mu\beta_y}{\beta_c^2} X(x) C [e^{i\beta_y y} - e^{-i\beta_y y}] = \frac{\omega\mu\beta_y}{\beta_c^2} X(x) 2iC \sin \beta_y y$$

بينما تطبيق الشرط $E_x(y = b) = 0$ يعطي ما يلي :

$$C \sin \beta_y b = 0 \rightarrow \sin \beta_y b = 0$$

$$\beta_y b = n\pi \rightarrow \beta_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (9.4.20)$$

ومرة اخرى , تطبيق الشرط $E_y(x = 0) = 0$ على معادلة (9.4.19b) يعطي $B = 0$.
اما تطبيق الشرط : $E_y(x = a) = 0$ على هذه المعادلة يعطي ما يلي :

$$E_y(x = a) = 0 \rightarrow A \sin \beta_x a = 0 \rightarrow \sin \beta_x a = 0$$

وهذا يتحقق اذا كان

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0,1,2,3 \dots \quad (9.4.21)$$

وعليه ,

$$H_z = X(x)Y(y) = AC \cos \beta_x x [e^{i\beta_y y} + e^{-i\beta_y y}]$$

$$H_z = H_0 \cos \beta_x x \cos \beta_y y \quad (9.4.22)$$

حيث , $H_0 = 2AC$, وتمثل سعة المجال المغناطيسي للموجة المنتشرة عبر المرشد .

بإستخدام معادلة (9.4.22) مع معادلات (9.4.6), (9.4.4) , نجد جميع مركبات المجالات الكهربائية والمغناطيسية (نمط TE) , وتكون على النحو التالي :

$$E_x = \frac{i\omega\mu\beta_y}{\beta_c^2} H_0 \cos \beta_x x \sin \beta_y y$$

$$E_y = \frac{-i\omega\mu\beta_x}{\beta_c^2} H_0 \sin \beta_x x \cos \beta_y y$$

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cos \beta_x x \cos \beta_y y$$

$$H_y = \frac{i\beta\beta_y}{\beta_c^2} H_0 \cos \beta_x x \sin \beta_y y$$

$$H_x = \frac{i\beta\beta_x}{\beta_c^2} H_0 \sin \beta_x x \cos \beta_y y \quad (9.4.23)$$

حيث

$$\beta^2 = \beta_0^2 - \beta_c^2 \quad (9.4.24a)$$

$$\beta_c^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (9.4.24b)$$

• بنية نمط المرشد الموجي Waveguide Mode Structure

نلاحظ من معادلات (9.4.23) ان الطريقة التي تتغير فيها المجالات الكهرومغناطيسية تتوقف على القيم المختارة للأعداد الصحيحة m, n , وهذه الأعداد تسمى اعداد النمط

mode numbers , في حالة $m=1$, $n=0$, نرمز للنمط TE_{10} . وتعطى المعادلات (9.4.23-24) ما يلي :

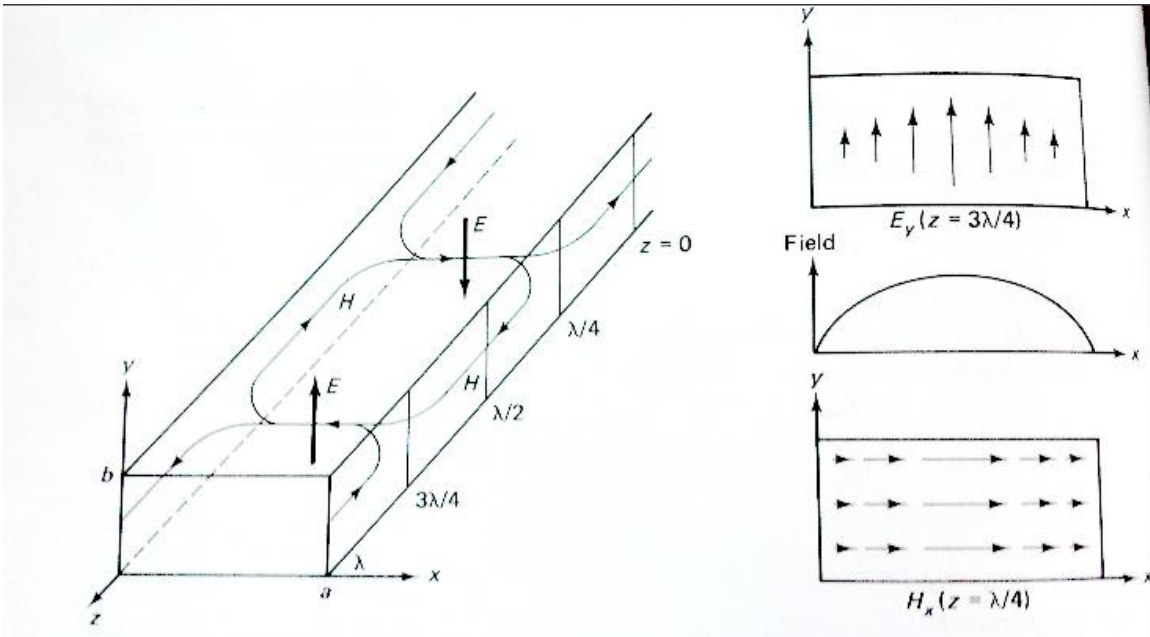
$$\beta_y = \left(\frac{0\pi}{b}\right) = 0 , \beta_c = \beta_x = \frac{\pi}{a}, \beta^2 = \beta_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad (9.4.25)$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x$$

$$E_x = 0 = H_y$$

$$E_y = \frac{-i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \pi x/a$$

$$H_x = \frac{i\beta a}{\pi} H_0 \sin \pi x/a \quad (9.4.26)$$



الشكل (9.14) نموذج المجالات الكهربائية والمغناطيسية لنمط TE_{10} .

لإيجاد مركبات المجالات في الموجة المنتقلة خلال المرشد , كدوال زمانية ومكانية , نضرب مركبات المجالات في معادلة (9.4.26) بعامل $e^{i(\omega t - \beta z)}$, اي

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{i(\omega t - \beta z)} \leftrightarrow H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - \beta z) \quad (9.4.27)$$

$$H_x = H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x e^{i(\omega t - \beta z + \pi/2)}$$

$$\leftrightarrow H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x \cos[\omega t - \beta \left(z - \frac{\lambda}{4}\right)]$$

من هذه المعادلة , نلاحظ ان فرق الطور بين مركبتي المجال المغناطيسي في اتجاه محوري x, z هو 90° . وفي اي لحظة زمنية , تكون قيمة العظمى H_z على بعد $\frac{\lambda}{4}$ من موقع قيمة العظمى H_x على محور z . اي

$$\mathbf{H} = \hat{x}H_x \text{ at } z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots; \mathbf{H} = \hat{z}H_z \text{ at } z = 0, \lambda/2, \dots,$$

كما نلاحظ ان متجه المجال المغناطيسي يدور في المستوى xz اثناء انتقال الموجة عبر المرشد , بينما نجد ان متجه المجال الكهربائي يتغير جيبيًا عبر المرشد وفي اتجاه محور y .

مثال (9.5)

جد مركبات المجالات الكهربائية والمغناطيسية لنمط TE_{11} , ثم بين بالرسم نماذج المجالات في هذا النمط ؟

الحل :

باستخدام معادلتني (9.22-23) , نحصل على ما يلي :

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

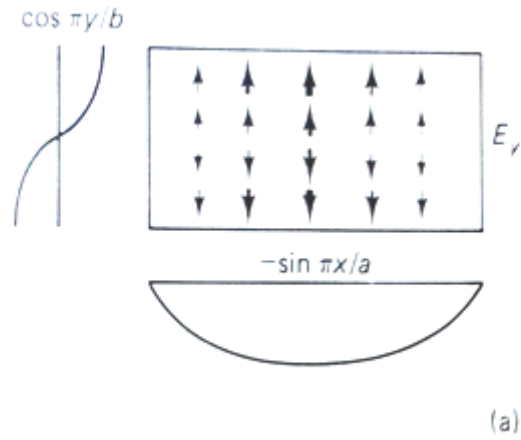
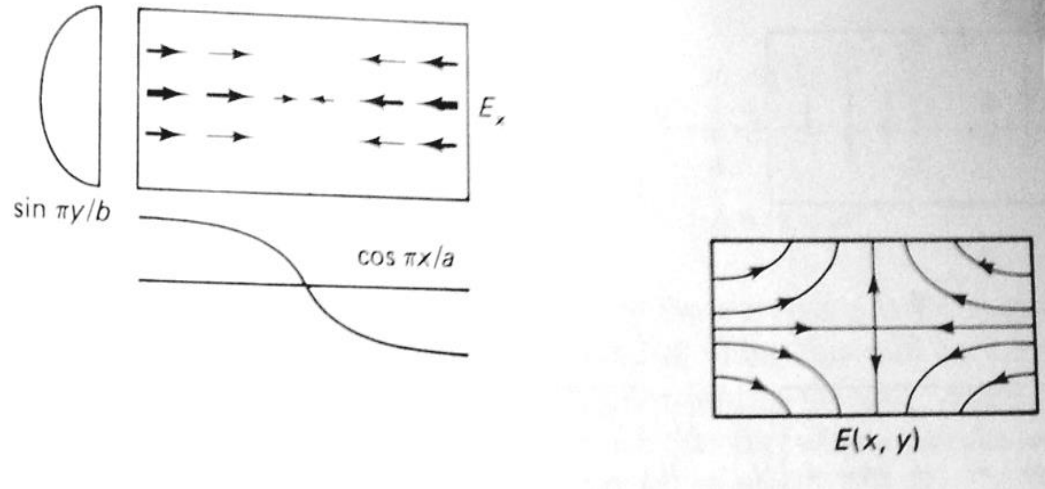
$$E_x = \frac{i\omega\mu\pi}{b\beta_c^2} H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$H_y = \frac{i\beta\pi}{b\beta_c^2} H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

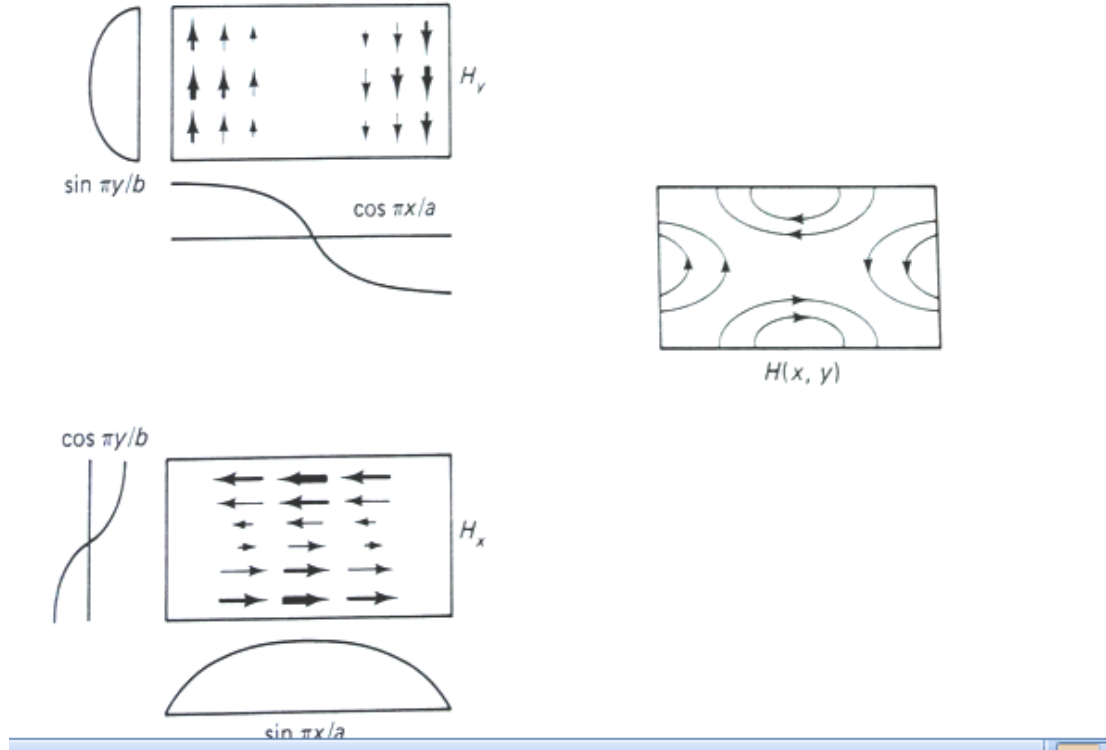
$$E_y = -\frac{i\omega\mu\pi}{a\beta_c^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$H_x = \frac{i\beta\pi}{a\beta_c^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

الشكل المبين ادناه (9.15) يوضح بيانيا نماذج المجالات الكهرومغناطيسية لنمط TE_{11} .



(a) شكل (9.15) مركبات المجال الكهربائي في نمط TE_{11} .



(b) شكل (9.15) مركبات المجال المغناطيسي في نمط TE_{11} .

• تردد القطع *cutoff frequency*

وجدنا ان العدد الموجي , في حالة المرشد الموجي مستطيل المقطع , يعطى بالعلاقة التالية :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{حيث} \quad \beta^2 = \beta_0^2 - \beta_c^2$$

وحتى يسمح هذا المرشد بانتشار الموجة خلاله , يجب ان تكون β عدد حقيقي , وهذا يتطلب الشرط التالي : $\beta_0 > \beta_c$. من المعادلات التالية : (9.5.7b, 9.4.8a, 9.4.24b) , نجد انه من الممكن التعبير عن هذا الشرط بدلالة التردد كالتالي :

$$\omega > \omega_c = v_0 \beta_c = v_0 \frac{\pi}{a} \left[m^2 + \left(n \frac{a}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.4.28)$$

هذا يعني ان سماح المرشد بتمرير الموجة خلاله يعتمد على قيم الأعداد الموجية (m, n) . اي , يمكن ان يحدث مرور خلال المرشد , اذا كان تردد الموجة الداخلة الى هذا المرشد

أكبر من القيمة الصغرى الخاصة بنمط تلك الموجة والمحددة بقيم الأعداد الموجية لهذا النمط. وتسمى هذه القيمة الصغرى بتردد القطع *cutoff frequency* , والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (9.6)

إذا كانت أبعاد مرشد موجي مستطيل المقطع: $a = 0.9 \text{ inch}, b = 0.4 \text{ inch}$, جد الأنماط الموجية التي يمكن أن تمر عبر هذا المرشد , علما أن تردد الموجة المراد نقلها عبره هو $f = 15.0 \text{ GHZ}$ ؟

الحل

باستخدام معادلة (9.4.28) نجد أن

$$f_c = 6.56 \times 10^9 (m^2 + 5.06n^2)^{1/2}$$

نعمل جدولاً يبين تردد القطع كدالة لقيم الأعداد الموجية (m,n) كالتالي :

M	0	1	0	1	2	2	0	1	3	3
N	0	0	1	1	0	1	2	2	0	1
$f_c/6.56 \times 10^9$	0	1	2.25	2.46	2	3.01	4.5	4.61	3	3.7

وعليه , تكون الأنماط الموجية المسموح بإنتشارها في المرشد هي ذات التردد المحققة للشرط , أو $f_c < 15 \times 10^9$. من هذا الجدول , تكون هذه الأنماط كما يلي :

$$10 (f = 6.56 \text{ GHZ}), \quad 20 (f = 13.12 \text{ GHZ}), \\ 01 (f = 14.76 \text{ GHZ})$$

TM أنماط (9.4.2)

نتناول في هذا البند , دراسة الأنماط الموجية التي تكون فيها $H_z = 0, E_z \neq 0$. وفي هذه الحالات , نستخدم E_z بدلا عن H_z في معادلات (9.4.10) . ويكون الحل العام بصورة معادلات (9.4.14) . ثم نستخدم الشروط الحدودية , حيث E_z هي المماس لجدران المرشد , لذلك تتلاشي المركبات المماسية للمجال الكهربائي عند جدران المرشد . وباستخدام معادلة (9.4.16) , نحصل على الحل التالي

$$E_z(x, y) = E_0 \sin \beta_x x \sin \beta_y y \quad (9.4.29)$$

حيث E_0 سعة المجال الكهربائي للموجة داخل المرشد . اما β_x, β_y تعطى بالمعادلات (9.4.20-21) , والعلاقة بينهما كما في معادلة (9.4.24) .

باستخدام معادلتني (9.4.6, 9.4.9) نجد المركبات المستعرضة لهذا النمط (TM) , وتكون كالتالي :

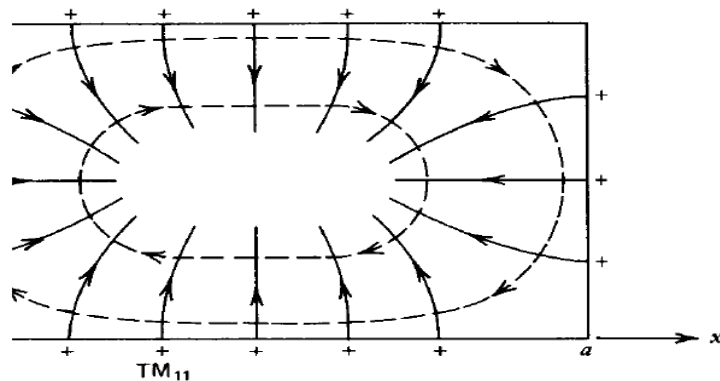
$$\begin{aligned} E_y &= \frac{-i\beta\beta_y}{\beta_c^2} E_0 \sin \beta_x x \cos \beta_y y \\ E_x &= \frac{-i\beta\beta_x}{\beta_c^2} E_0 \cos \beta_x x \sin \beta_y y \\ H_x &= \frac{i\omega\epsilon\beta_y}{\beta_c^2} E_0 \sin \beta_x x \cos \beta_y y \\ H_y &= \frac{-i\omega\epsilon\beta_x}{\beta_c^2} E_0 \cos \beta_x x \sin \beta_y y \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.30)$$

نلاحظ ان هذه الحلول تحقق الشروط الحدودية عند جدران المرشد ($B_{normal} = 0$) , اي

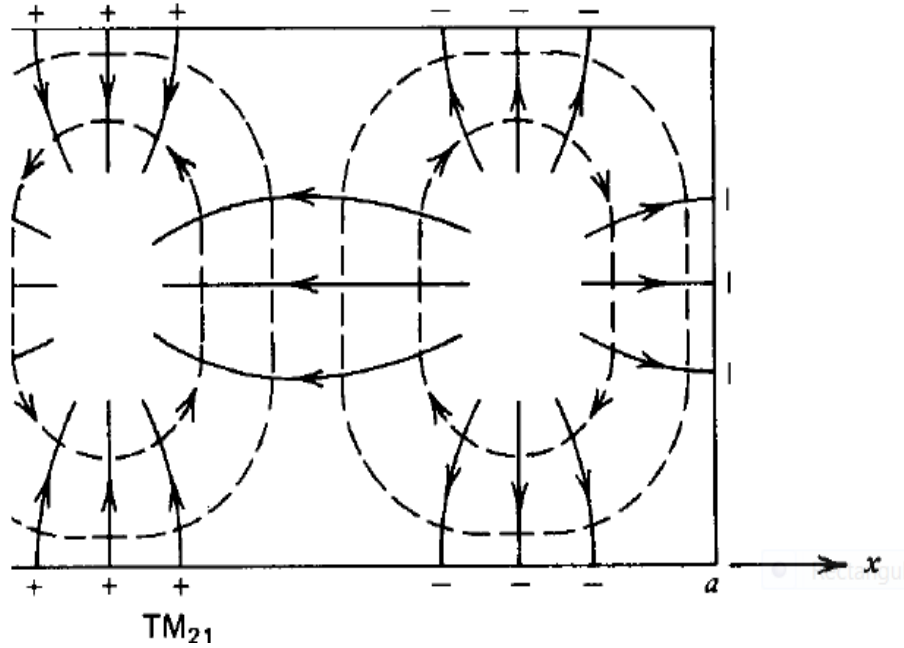
$$H_y(x, y = 0) = 0 ; H_y(x, y = b) = 0$$

$$H_x(x = 0, y) = 0, H_x(x = a, y) = 0$$

وايضا , ينعدم نمط TM اذا كانت $m = 0$ او $n = 0$. وعليه , يكون TM_{11} النمط الأدنى (lowest mode) المسموح له بالمرور عبر المرشد الموجي (الشكل 9.16) . بينما نلاحظ في الشكل (9.17) تغير اتجاه المجالات عند $x = a/2$.



الشكل (9.16) المجال الكهربائي (الخط المتصل) , المجال المغناطيسي (----) في النمط TM_{11} داخل المرشد الموجي.



الشكل (9.17) تخطيط المجال الكهربائي (الخط المتصل) , والمجال المغناطيسي (----) لنمط TM_{21} في المرشد الموجي المستطيل المقطع.

(9.4.3) ثابت الانتشار *Propagation constant*

تبين معادلة (9.4.24b) ان قيمة ثابت انتشار الموجة الحرج β_c , تتوقف على قيم الأعداد الموجية الخاصة بها. وعليه , يمكن تحديد قيمة ثابت إنتشار الموجة β داخل المرشد اذا عرفنا قيمة β_c , كما يتم معرفة طول الموجة المنتشرة خلال المرشد , حيث $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

بإستخدام معادلة (9.4.8b) , نجد ان

$$\lambda = \frac{v_0/f}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} \quad (9.4.31)$$

حيث $\lambda_0 = v_0/f$ وهي تمثل طول الموجة في الفراغ والتي لها نفس تردد الموجة المنتشرة في المرشد .

ماذا يحدث اذا تم ارسال نبضة في المرشد بتردد f , حيث $f < f_c$ ؟

في هذه الحالة , تكون $\omega < \omega_c$, وعليه , $\beta_0 < \beta_c$, وتصبح معادلة (9.4.24a) كالتالي :

$$\beta = \pm [-(\beta_c^2 - \beta_0^2)]^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{[-(\omega_c^2 - \omega^2)]^{1/2}}{v_0}$$

$$= \pm \frac{i}{v_0} (\omega_c^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} = \pm i\alpha \quad (9.4.32)$$

حيث α عدد حقيقي , بينما تكون β عدد تخيلي . عند التعويض , بإعتبار إشارة β السالبة , في معادلة (9.4.1) تصبح شدة المجال الكهربائي داخل المرشد كالتالي :

$$E \sim E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-\alpha z} \leftrightarrow E_0 e^{-\alpha z} \cos \omega t \quad (9.4.33)$$

توضح هذه المعادلة انه لا توجد موجة منتشرة عبر المرشد , وانما يكون المجال متغير مع الزمن كدالة جيبية , كما ان سعة هذا المجال متناقصة على طول المرشد .

مثال (9.7)

ارسلت إشارة بتردد $f = 10 \text{ GHz}$ عبر مرشد موجي ابعاده كما يلي :

$a = 0.9 \text{ inch}$, $b = 0.4 \text{ inch}$. صف انتشار هذه النبضة في حالة النمط 10 , و النمط 20 ؟

الحل

باستخدام معادلة (9.4.24b) , نجد ان

$$\beta_c(10) = \pi/a = 1.374 \text{ cm}^{-1}$$

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v_0} = \frac{2\pi f}{v_0} = \frac{2 \times 3.14 \times 10^{10}}{3 \times 10^{10}} = 2.096 \text{ cm}^{-1}$$

بما ان $\beta_0 > \beta_c(10)$, اذن

$$\beta = (\beta_0^2 - \beta_c^2)^{1/2} = 1.583 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 3.97 \text{ cm}$$

$$\lambda_0 = \frac{v_0}{f} = \frac{3 \times 10^{10}}{10 \times 10^9} = 3.0 \text{ cm}$$

بما ان $\lambda > \lambda_0$, فإن هذا النمط ينتشر في المرشد دون اي توهين .

اما في حالة النمط 20

$$\beta_c(20) = 2.749 \text{ cm}^{-1}$$

بما ان $\beta_0 < \beta_c(20)$, وعليه

$$\alpha = (\beta_c^2 - \beta_0^2)^{1/2} = 1.78 \text{ cm}^{-1}$$

اي ان سعة المجالات تتناقص داخل المرشد لوغارتميا مع الكمية $e^{-\alpha z}$, بينما تتناقص الطاقة لوغارتميا مع الكمية $e^{-2\alpha z}$, وتصل الى القيمة $1/e = 0.368$ من القيمة الابتدائية خلال المسافة $z = \frac{1}{2\alpha} = 0.28 \text{ cm}$. وهذا المثال يبين ان الموجات ذات التردد تحت تردد القطع تضمحل سريعا اثناء انتشارها عبر هذا المرشد .

(9.4.4) كثافة الشحنات والتيارات السطحية عند جدران المرشد الموجي

charge density and surface currents at waveguide walls

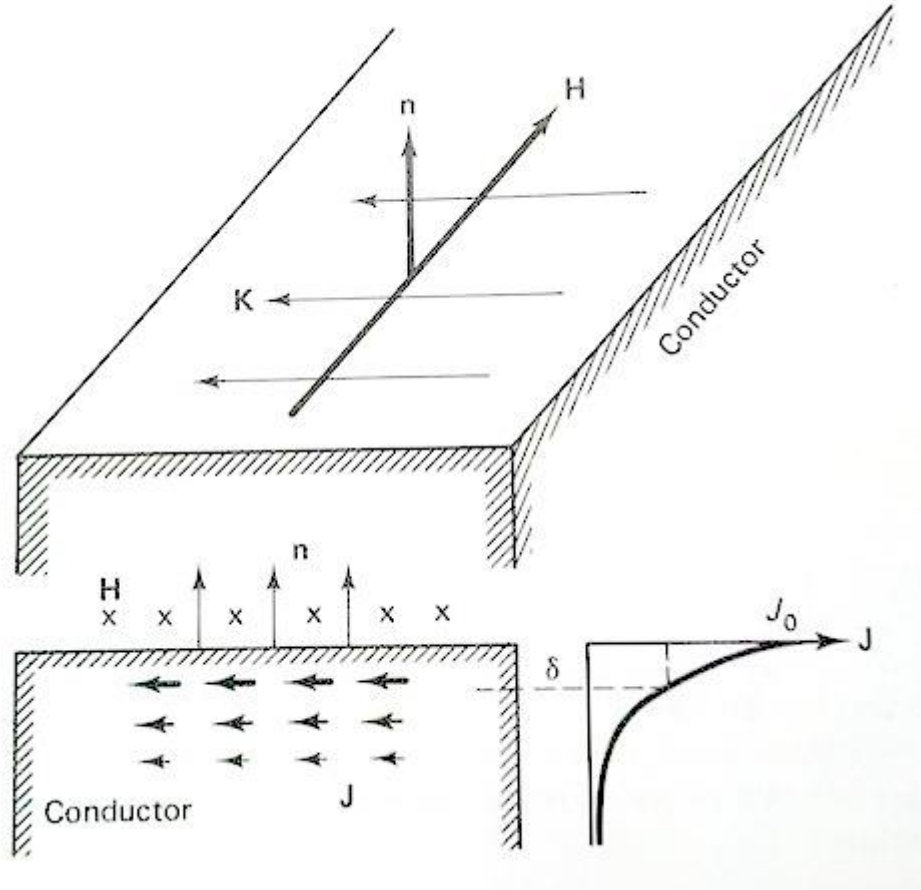
عندما تكون جدران المرشد تامة الموصلية ($\sigma = \infty$) , فإن المجالات الكهرومغناطيسية تصبح صفرا داخل هذه الجدران , ويمكن استخدام الشروط الحدودية التالية :

$$B_{norm} = 0, E_{tan} = 0 \text{ في المنطقة الملاصقة لهذه الجدران لإيجاد ترتيب المجالات}$$

الكهربية والمغناطيسية . عمليا , عندما تكون $\sigma/\omega\epsilon$ كمية كبيرة ومحدودة , فإن $E \neq 0$ عند الحدود ويكون هناك اختراق للمجالات داخل المعدن بعمق δ . وفي هذه الحالة , يمكن استخدام هذه المجالات بشروط حدودية اخرى وهي:

$$D_{norm} = \rho_s, H_{tan} = K$$

حيث ρ_s كثافة الشحنة السطحية على جدار المرشد , K كثافة التيار السطحي . ولدراسة هذه التيارات السطحية , نطبق الشرط التالي عند السطح الفاصل على المجال المغناطيسي وهو كالتالي: $H_{2t} - H_{1t} = K$. بما ان قيمة H تتناقص مع المسافة داخل الموصل , لذلك يكون المجال المغناطيسي (H) الناتج عن K في الإتجاه الذي يختزل H_{tan} داخل الموصل . وعليه , يكون اتجاه K (كما في الشكل (9.18).



الشكل (9.18) توزيع التيار السطحي في جدار الموصل للمرشد الموجي .

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \quad (9.4.34)$$

حيث $\hat{\mathbf{n}}$ متجه الوحدة الخارج من سطح الموصل . ويكون توزيع $\mathbf{J}$ على العمق القشري كما في الشكل (9.18) .

لنفرض ان مرشد موجي يحمل النمط TE_{10} , بحيث يكون ترتيب المجال المغناطيسي كما في الشكل (9.19) . عند نقاط جدار المرشد , حيث $\sigma = \infty$, فإن الحل يعطي مركبات H المماسية (H_{tan}) .

باستخدام معادلة (9.4.26) , تكون هذه التيارات السطحية كالتالي :

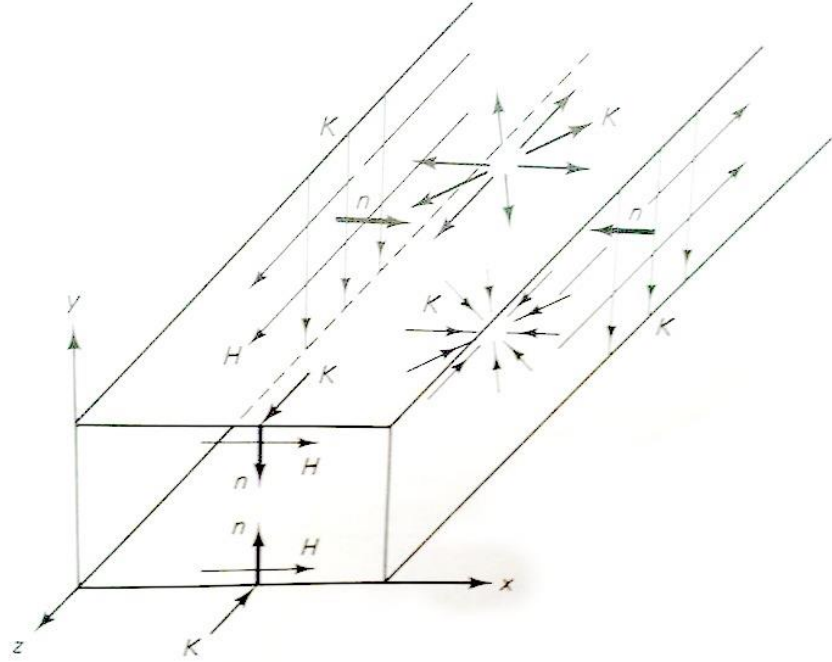
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{top\ surface} &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{tan} = -\hat{\mathbf{y}} \times (\hat{\mathbf{x}}H_x + \hat{\mathbf{z}}H_z) = \hat{\mathbf{z}}H_x - \hat{\mathbf{x}}H_z \\ &= \hat{\mathbf{z}}H_0 \frac{i\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} - \hat{\mathbf{x}}H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \end{aligned} \quad (9.4.35a)$$

$$\mathbf{K}_{side\ wall} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{tan} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} H_z$$

عند $x=a$

$$\mathbf{K}_{side\ wall} = -\hat{\mathbf{y}} H_0 \cos \frac{\pi x}{a} = \hat{\mathbf{y}} H_0 \quad (9.4.35b)$$

من الشكل (9.19) , تكون التيارات الطولية عند السطح العلوي معاكسة في الإتجاه للتيارات السطحية عند السطح السفلي للمرشد.



الشكل (9.19) التيارات السطحية على الجدران الداخلية للمرشد موجي , نمط TE_{10} .

بإستخدام الشرط الحدودي $D_{norm} = \rho_s$, تكون كثافة الشحنات السطحية ρ_s على جدران المرشد الموجي , في حالة نمط TE كالتالي :

$$\rho_s(x=0, y) = \epsilon E_x(x=0, y) = \frac{-\beta_y \beta^2}{i\omega \beta_c^2} H_0 \sin \beta_y y$$

$$\rho_s(x=a, y) = -\epsilon E_x(x=a, y) = \frac{\beta_y \beta^2}{i\omega \beta_c^2} H_0 \cos m\pi \sin \beta_y y$$

$$\rho_s(x, y=0) = \epsilon E_y(x, y=0) = \frac{\beta_x \beta^2}{i\omega \beta_c^2} H_0 \sin \beta_x x$$

$$\rho_s(x, y = b) = -\epsilon E_y(x, y = 0) = -\frac{\beta_x \beta^2}{i\omega \beta_c^2} H_0 \cos n\pi \sin \beta_x x$$

من هذه المعادلات , نلاحظ ان كثافة الشحنة على الجدران المتقابلة تكون مختلفة الإشارة .

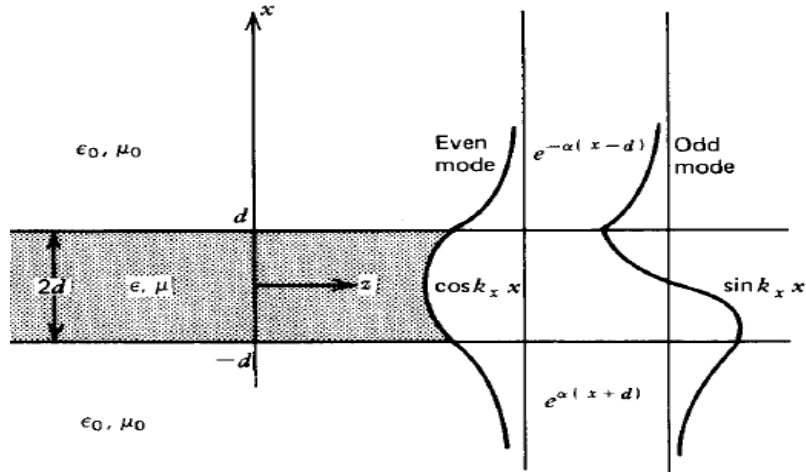
(9.5) مرشد الموجة العازل Dielectric waveguide

بالرجوع الى الفصل السابع , نجد ان الانعكاس الداخلي للموجة المستوية يحدث عندما تسقط هذه الموجة من وسط كثيف ضوئيا الى وسط اخر اقل منه كثافة , بشرط ان تكون زاوية السقوط اكبر من الزاوية الحرجة . وعليه , يمكن للموجات الكهرومغناطيسية ان تنتشر عبر مرشد موجي عازل (ليف بصري optical fiber) اذا تحقق هذا الشرط.

في هذا البند , نتناول وصف المجالات الكهرومغناطيسية اثناء انتشار الموجة في مرشد عازل و في حالة الأنماط TE , TM .

(9.5.1) نمط TM

لنفرض ان موجة مستوية تنتشر في اتجاه محور z لمرشد موجي عازل (كما في الشكل (9.20)) , حيث الوسط المحيط بهذا المرشد فراغ .



الشكل (9.20) انتشار موجة نمط TM في مرشد عازل .

على فرض ان المجالات محصورة فقط في العازل , ولا تتغير في اتجاه y , تكون حلول معادلة الموجة في المناطق الثلاثة كالتالي :

$$E_z(x, t) = \begin{cases} A_2 e^{-\alpha(x-d)} e^{i(\omega t - \beta z)}, & x \geq d \\ (A_1 \sin \beta_x x + B_1 \cos \beta_x x) e^{i(\omega t - \beta z)}, & |x| \leq d \\ A_3 e^{\alpha(x+d)} e^{i(\omega t - \beta z)}, & x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.1)$$

حيث

$$\begin{aligned} \beta_x^2 + \beta^2 &= \omega^2 \varepsilon \mu \\ -\alpha^2 + \beta^2 &= \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

مع اعتبار ان β متساوية لجميع المناطق (الشكل 9.20) . وحتى تتحقق الشروط الحدودية عند السطح الفاصل بين المرشد والفراغ , ويكون هناك انتشار للموجة في العازل والمنطقة المحيطة به , يجب ان يتحقق الشرط التالي :

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 < \omega^2 \varepsilon \mu \quad (9.5.3)$$

باستخدام معادلة (9.5.1) , واتباع الخطوات المشروحة في حالة المرشد الموجي ذي الجدران المعدنية , نجد جميع مركبات المجال الكهربائي والمغناطيسي في العازل في حالتين منفصلتين للمركبة E_z كالتالي :

(a) الحلول الفردية Odd solutions

اذا كان اتجاه E_z فوق الخط المركزي للمرشد يعاكس اتجاهه تحت هذا الخط , فإن E_z يتغير مع دالة الجيب $\sin \beta_x x$, وتسمى الحلول , في هذه الحالة , بالحلول الفردية , وتكون كالتالي :

$$E_z = \begin{cases} A_2 e^{-\alpha(x-d)} & ; x \geq d \\ A_1 \sin \beta_x x & ; |x| \leq d \\ A_3 e^{\alpha(x+d)} & ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.4)$$

اذا كانت $\rho_s = 0 \rightarrow \nabla \cdot E_z = 0$, وعليه

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - i\beta E_z = 0$$

باستخدام معادلة (9.5.4) , واجراء التكامل نجد ان

$$E_x = \begin{cases} -i\beta/\alpha[A_2 e^{-\alpha(x-d)}] & ; x \geq d \\ -i\beta/\beta_x[A_1 \cos \beta_x x] & ; |x| \leq d \\ i\beta/\alpha[A_3 e^{\alpha(x+d)}] & ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.5)$$

بإستخدام قانون فارادي , نجد ان المجال المغناطيسي يكون كالتالي :

$$H_y = (-1/i\omega\mu)(-i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x})$$

وبإستخدام معادلتني (9.5.4-5) , نجد ان :

$$H_y = \begin{cases} (-i\omega\varepsilon_0/\alpha)(A_2 e^{-\alpha(x-d)}); & x \geq d \\ \left(-\frac{i\omega\varepsilon}{\beta_x}\right) A_1 \cos \beta_x x & ; |x| \leq d \\ (i\omega\varepsilon_0/\alpha)(A_3 e^{\alpha(x+d)}); & x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.6)$$

لإيجاد الثوابت في هذه المعادلات , نستخدم الشروط الحدية عند $x = \pm d$, حيث المركبات المماسية للمجال الكهربائي تكون متصلة , وعليه ,

$$E_z(x = \pm d_-) = E_z(x = \pm d_+)$$

بإستخدام هذا الشرط مع معادلة (9.5.4) , نحصل على ما يلي :

$$A_1 \sin \beta_x d = A_2$$

$$-A_1 \sin \beta_x d = A_3 \quad (9.5.7a)$$

بتطبيق الشروط الحدودية على المركبات المماسية للمجال المغناطيسي , اي

$$\frac{-i\omega\varepsilon A_1}{\beta_x} \cos \beta_x d = \frac{-i\omega\varepsilon_0}{\alpha} A_2$$

$$\frac{-i\omega\varepsilon A_1}{\beta_x} \cos \beta_x d = \frac{i\omega\varepsilon_0}{\alpha} A_3 \quad (9.5.7b)$$

بحل المعادلتين (9.5.7a,b) , نجد ان

$$\frac{A_2}{A_1} = \sin \beta_x d = \frac{\varepsilon \alpha}{\varepsilon_0 \beta} \cos \beta_x d$$

$$\frac{A_3}{A_1} = -\sin \beta_x d = -\frac{\varepsilon \alpha}{\varepsilon_0 \beta} \cos \beta_x d$$

باستخدام اي من هاتين المعادلتين , نجد ان

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \beta_x \tan \beta_x d \quad (9.5.8)$$

يكون حل المعادلتين (9.5.2, 9.5.8) ممكننا بطريقة التحليل العددي *numerical analysis* , حيث نجد قيم α, β_x . اذا كانت $\alpha = 0$, فإن $\beta_x d = n\pi; n = 1,2,3 \dots$, $\beta^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ من معادلة (9.5.2) نجد ان التردد الحرج (عند $\alpha = 0$) يكون كالتالي:

$$\omega^2 = \frac{\beta^2}{\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{(\frac{n\pi}{d})^2}{\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0} \quad (9.5.9)$$

ويكون التردد الحرج عدد حقيقي اذا كان $\varepsilon \mu > \varepsilon_0 \mu_0$.

يمكن كتابة معادلة (9.5.9) بدلالة معامل إنكسار العازل والوسط المحيط به وطول الموجة كالتالي :

لنفرض ان معامل مادة المرشد $n_1 = v_0 \sqrt{\varepsilon \mu}$, ومعامل الوسط المحيط بالمرشد , بشكل عام , $n_2 = v_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, (في حالة الفراغ , يكون $n_2 = 1$) . اما شرط النمط الوحيد *single mode* المار في المرشد هو ان يكون عدد النمط $n=1$, وعليه تؤول معادلة (9.5.9) الى ما يلي :

$$\omega = \left(\pi/d \right) / (v_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

وعليه , حتى يسمح المرشد بتمرير نمط وحيد خلاله ان يكون الشرط التالي:

$$\beta_c < \beta_0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_c} < \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_c > \lambda_0$$

او

$$\lambda > 2d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \rightarrow n_1 < \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 + n_2^2}$$

مثال (9.8)

مرشد موجي عازل ومتماثل , يسمح بمرور ضوء طول موجته $\lambda = 1.3\mu\text{m}$, اذا كان سمك الشريحة $d = 5.0\mu\text{m}$, وعامل الوسط المحيط بالمرشد $n_2 = 1.450$, جد اكبر قيمة لمعامل انكسار مادة المرشد التي تسمح بمرور نمط وحيد (منفرد) من TE او TM ؟

الحل :

باستخدام الشرط التالي:

$$n_1 < 2d \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 + n_2^2} = (2 \times 0.5) \sqrt{\left(\frac{1.3}{(2 \times 5.0)}\right)^2 + (1.45)^2} = 1.456$$

(b) الحلول الزوجية *Even solutions*

اذا كان E_z تحت وفوق الخط المركزي للمرشد في نفس الإتجاه , تعرف حلول معادلة الموجة بالحلول الزوجية , وتكون بالصورة التالية :

$$E_z = \begin{cases} B_2 e^{-\alpha(x-d)} & ; x \geq d \\ B_1 \cos \beta_x x & ; |x| \leq d \\ B_3 e^{\alpha(x+d)} & ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.10)$$

$$E_x = \begin{cases} \left(-\frac{i\beta}{\alpha}\right) B_1 e^{-\alpha(x-d)} & ; x \geq d \\ \left(\frac{i\beta}{\beta_x}\right) B_1 \sin \beta_x x & ; |x| \leq d \\ \left(\frac{i\beta}{\alpha}\right) B_3 e^{\alpha(x+d)} & ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.11)$$

$$H_y = \begin{cases} \left(-\frac{i\omega\epsilon_0}{\alpha}\right) B_2 e^{-\alpha(x-d)} & ; x \geq d \\ \left(-\frac{i\omega\epsilon}{\alpha}\right) B_1 \sin \beta_x x & ; |x| \leq d \\ \left(\frac{i\omega\epsilon_0}{\alpha}\right) B_3 e^{\alpha(x+d)} & ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.12)$$

باستخدام خاصية الإستمرار للمجال الكهربائي والمجال المغناطيسي عند $x = \pm d$, نجد ان

$$B_1 \cos \beta_x d = B_2 \quad ; B_1 \cos \beta_x d = B_3$$

$$\frac{i\omega\epsilon}{\beta_x} B_1 \sin \beta_x d = \frac{-i\omega\epsilon_0}{\alpha} B_2$$

$$-\frac{i\omega\epsilon}{\beta_x} B_1 \sin \beta_x d = \frac{i\omega\epsilon_0}{\alpha} B_3 \quad (9.5.13)$$

أو

$$\frac{B_2}{B_1} = \cos \beta_x d = \frac{-\alpha\epsilon}{\epsilon_0\beta_x} \sin \beta_x d$$

$$\frac{B_3}{B_1} = \cos \beta_x d = \frac{-\alpha\epsilon}{\epsilon_0\beta_x} \sin \beta_x d$$

أو

$$\alpha = -\frac{\epsilon_0\beta}{\epsilon} \cot \beta_x d \quad (9.5.14)$$

9.5.2) حلول TE

نتبع نفس الخطوات السابقة في بند (9.5.1) لإيجاد مركبات المجالات للنمط TE , حيث نجد
أولا H_z لحالة الحلول الفردية والزوجية كما يلي

(a) الحلول الفردية odd solutions

$$H_z = \begin{cases} A_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ A_1 \sin \beta_x x ; |x| \leq d \\ A_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.15)$$

$$H_x = \begin{cases} (-i\beta/\alpha) A_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ (-i\beta/\beta_x) A_1 \sin \beta_x x ; |x| \leq d \\ (i\beta/\alpha) A_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.16)$$

$$E_y = \begin{cases} \left(\frac{i\omega\mu_0}{\alpha}\right)A_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ \left(\frac{i\omega\mu}{\beta_x}\right)A_1 \cos \beta_x x ; |x| \leq d \\ \left(-\frac{i\omega\mu_0}{\alpha}\right)A_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.17)$$

تعطي خاصية الإستمرار لمركبات المجالات المماسية عند $x = \pm d$ ما يلي

$$\alpha = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \beta_x \tan \beta_x d \quad (9.5.18)$$

(b) الحلول الزوجية even solutions

$$H_z = \begin{cases} B_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ B_1 \cos \beta_x x ; |x| \leq d \\ B_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.19)$$

$$H_x = \begin{cases} \left(-\frac{i\beta}{\alpha}\right) B_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ \left(\frac{i\beta}{\beta_x}\right) B_1 \sin \beta_x x ; |x| \leq d \\ \left(\frac{i\beta}{\alpha}\right) B_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.20)$$

$$E_y = \begin{cases} \left(\frac{i\omega\mu_0}{\alpha}\right) B_2 e^{-\alpha(x-d)} ; x \geq d \\ \left(-\frac{i\omega\mu}{\beta_x}\right) B_1 \sin \beta_x x ; |x| \leq d \\ \left(-\frac{i\omega\mu_0}{\alpha}\right) B_3 e^{\alpha(x+d)} ; x \leq -d \end{cases} \quad (9.5.21)$$

كما تعطي الشروط الحدودية لمركبات المجالات المماسية العلاقة بين α, β_x كالتالي:

$$\alpha = -(\mu_0/\mu) \beta_x d \quad (9.5.22)$$

تمارين

(9.1) مرشد موجي ذو لوحين متوازيين يعمل مع نمط TEM في مدى تردد $0 < f < 3 \text{ GHz}$. أقصى مسافة بين اللوحين إذا كان ثابت العازل النسبي للوسط بينهما $\epsilon_r = 2.1$ ؟

(9.2) مرشد موجي ذو لوحين متوازيين وبداخله زجاج ($n_1 = 1.45$) , إذا كانت المسافة بين اللوحين $d = 1 \text{ cm}$ ويعمل على تردد 32 GHz , جد الأنماط المسموح لها بالمرور في هذا المرشد ؟

(9.3) مرشد موجي مستطيل المقطع ابعاده كالتالي: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, ووسطه هواء . جد المدى الذي يمكن ان يعمل به هذا المرشد كنمط وحيد (TE_{10}) ؟

(9.4) جد اقل قيمة لعرض مرشد موجي (a) , واكبر قيمة لإرتفاعه (b) لكي يعمل هذا المرشد ضمن مدى التردد $15 \text{ GHz} < f < 20 \text{ GHz}$, علما ان وسط هذا المرشد هواء ؟

(9.5) مرشد موجي عازل ($n_1 = 1.45$) , وكان هذا المرشد محاط بالهواء وسمك شريحة العازل 0.5 mm . جد عدد الأنماط التي يمكن لهذا المرشد تمريرها اذا كان طول موجة القطع $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$ ؟

(9.6) مرشد موجي مستطيل المقطع ابعاده $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, جد مدى التردد الذي يعمل به هذا المرشد لنمط موجي منفرد , علما ان معامل انكسار مادة وسطه n_1 ؟

(9.7) مرشد موجي معدني ومستطيل المقطع , مملوء بمادة بلازمية تحقق المعادلة التالية :

$$\frac{\partial J_f}{\partial t} = \omega_p^2 \epsilon E$$

(a) جد حلول TE, TM التي تحقق الشروط الحدودية ؟

(b) جد العدد الموجي على محور المرشد , ثم جد تردد القطع ؟

(c) جد سرعة الطور وسرعة المجموعة ؟.

(9.8) (a) جد معادلات المجالات الكهرومغناطيسية في مستوى xy للأنماط الموجية TE, TM ؟

(b) جد التيارات السطحية على سطوح المرشد للنمط الموجي TM_{mn} ؟

(9.9) (a) جد العشرة الأولى من ترددات القطع لمرشد موجي به هواء ابعاده $a = b = 1\text{ cm}$ ؟ (b) جد الأبعاد اللازمة لمرشد موجي مستطيل المقطع (وداخله هواء) حتى يكون تردد القطع كالتالي : $10^2, 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}$ ؟

(9.10) مرشد موجي مستطيل المقطع , ابعاده a, b , اذا كان مغلق بمستويات تامة الموصلية عند المستوى $z = 0, z = L$. جد المجالات الكهربائية والمغناطيسية للأنماط TM, TE , ثم جد التيارات السطحية في حالة انتشار موجة عبر هذا المرشد ؟

(9.11) (a) جد الترددات الحرجة لأنماط الموجة المنتشرة في مرشد عازل سمكه d , حيث معامل التوهين $\alpha = 0$ ؟

(b) جد القيم التقريبية ل k_x, k_z, α اذا كان $k_x d \ll 1$ ؟

(9.12) جد الأنماط المسموح بانتشارها عبر مرشد موجي , سمكه عازل , سمكه d , موضوع على سطح تام الموصلية (كما في 9.21) , ثم جد التيارات السطحية والشحنة على الموصل ؟

الفصل العاشر

الهوائيات Antennas

في حالة الدوائر الكهربائية ذات التردد المنخفض , تنتقل القدرة الكهربائية , من المصدر نحو الحمل عبر الأسلاك الموصلة , على هيئة مجالات محصورة ضمن المنطقة حول هذه الأسلاك . بينما في حالة الدوائر الكهربائية ذات التردد العالي , تصبح هذه الأسلاك هوائيات , حيث يتولد عنها اشعاعا ينتشر في الفضاء على هيئة امواج كهرومغناطيسية بسرعة الضوء , ولا يوجد اي بنية لترشيد هذه الأمواج اثناء انتشارها في الوسط المحيط . في هذا الفصل , سنتناول النظريات الفيزيائية الخاصة لعمل هذه الهوائيات وانواعها .

(10.1) الجهد المعوق Retarded Potential

(10.1.1) معادلات الموجة غير المتجانسة :

في الفصل السابع , وجدنا ان معادلات ماكسويل , في حالة وجود مصادر للشحنات والتيار الكهربائي , تكون على الصور التالية

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (4)$$

باستخدام متطابقات المتجهات التالية

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7)$$

حيث

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8)$$

بإستخدام قانون فارادي , فإن معادلة (1) تصبح كالتالي :

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9)$$

من المعلوم في متطابقات المتجهات انه اذا كان **التفاف** اي متجه صفرا , فإن هذا المتجه يساوي سالب تحدر كمية عددية , اي

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (10)$$

وفي حالة الوسط الخطي والمتجانس , فإن معادلة (2) تكتب كالتالي

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}_f + \frac{1}{c^2} \left[-\nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right], \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon \mu} \quad (11)$$

بإستخدام معادلة (7) , فإن معادلة (11) تؤول الى الصورة التالية :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_f \quad (12)$$

وضع لورنتز Lorentz مقياس Guage عرف بإسمه وهو على النحو التالي :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (13)$$

وبإستخدام هذا المقياس , فإن معادلة (12) , والتي تعرف بمعادلة موجة الجهد المغناطيسي المتجه , تصبح على النحو التالي :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_f \quad (14)$$

وعند إعطاء دالة توزيع التيار $\mathbf{J}_f$, يمكن بإستخدام معادلة (14) إيجاد $\mathbf{A}$. كما ان بإستخدام معادلة (13) , نحصل على دالة الجهد الكهربائي .

كما يمكن الحصول على معادلة شبيهة لمعادلة (14) ولكن بدلالة الجهد وذلك بإستخدام معادلة (10) وقانون جاوس (معادلة 4) كالتالي :

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{-\rho_f}{\epsilon} \quad (15)$$

وبإستخدام مقياس لورنتز مع معادلة (15) , نحصل على معادلة الموجة العددية لدالة الجهد الكهربى على النحو التالى :

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{-\rho_f}{\epsilon} \quad (16)$$

نلاحظ ان معادلة (16) تؤول الى معادلة بويسون في حالة الجهد الكهربى الساكن (في حالة $V \neq V(t)$).

(10.1.2) حلول معادلة الموجة *Solutions of Wave Equation*

لنفرض ان شحنة نقطية مستقرة عند نقطة الأصل ($r = 0$) , ومعرفة بالدالة $Q(t)$. بسبب التماثل , يكون الجهد الناتج عن هذه الشحنة معتمدا على المتغير r , وعليه تصبح معادلة (16) على الصورة الرياضية التالية

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad r > 0 \quad (17)$$

بضرب حدود المعادلة (17) بالمتغير r , واستخدام المتطابقة التالية:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) \quad (18)$$

يمكن كتابة معادلة (17) على الصورة التالية :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rV) = 0 \quad (19)$$

ويكون حل هذه المعادلة كالتالى:

$$rV = f_+\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_-\left(t, \frac{\vec{r}}{c}\right) \quad (20)$$

نظرا لعدم وجود مصدر شحني في المنطقة $r > 0$, يكون الحل السالب في معادلة (20) مساويا للصفر , وتكون كل الأمواج منبعثة بشكل شعاعي (قطري) من هذه الشحنة النقطية , بينما يمكن تقييم الحل الموجب , $f_+(t - r/c)$, كالتالي : كلما اقتربت $r \rightarrow 0$ فإنه لا يوجد تأخير في انتشار الموجة , ويكون الجهد مقتربا من جهد كولوم في الحالة الساكنة للشحنة النقطية , اي

$$\lim_{r \rightarrow 0} V = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon r} \Rightarrow f_+(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon} \quad (21)$$

ويمكن الحصول على الجهد الناتج عن الشحنة النقطية , كدالة للموقع والزمن , من معادلتنا (20) و(21) , وذلك باستبدال $t \rightarrow t - r/c$, اي

$$V(r, t) = \frac{Q(t - r/c)}{4\pi\epsilon r} \quad (22)$$

اما في حالة التوزيع الشحني في حجم ما , يكون الجهد الكهربائي عند النقطة p التي تبعد مسافة r_{QP} عن الشحنة النقطية كالتالي

$$V(r, t) = \int_{\text{all charge}} \frac{\rho_f(t - r_{QP}/c)}{4\pi\epsilon r_{QP}} dV \quad (23)$$

وبنفس الطريقة , يمكن ايجاد متجه المجال المغناطيسي لتوزيع حجمي من التيارات ذات الكثافة الحجمية J_f كالتالي

$$A(r, t) = \int_{\text{all current}} \frac{\mu J_f(t - r_{QP}/c)}{4\pi r_{QP}} dV \quad (24)$$

إذا كان طول ثنائي القطب متناهي في الصغر والمسافة بينه وبين نقطة الملاحظة كبيرة جدا , فإن بعد هذه النقطة عن جميع نقاط الموصل تكون متساوية تقريبا وتساوي r , وعليه تؤول معادلة (5) الى ما يلي :

$$\hat{A}_z = \frac{\mu \hat{I} dl}{4\pi r} e^{-jkr}, \quad A_z(r, t) = \text{Re} [\hat{A}_z(r) e^{j\omega t}] \quad (6)$$

حيث $k = \omega/c$. باستخدام الإحداثيات الكروية , تكون مركبات متجه الجهد المغناطيسي كالتالي :

$$\hat{A}_r = \hat{A}_z \cos \theta, \quad \hat{A}_\theta = -\hat{A}_z \sin \theta, \quad \hat{A}_\phi = 0 \quad (7)$$

وبمعرفة دالة متجه الجهد المغناطيسي , نجد المجال الكهربائي والمغناطيسي من العلاقات التالية

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{\mathbf{A}}, & \mathbf{H}(r, t) &= \text{Re} [\hat{\mathbf{H}}(r, \theta) e^{j\omega t}] \\ \hat{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \hat{\mathbf{H}}, & \mathbf{E}(r, t) &= \text{Re} [\hat{\mathbf{E}}(r, \theta) e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (8)$$

(10.2.2) طريقة بديلة للاشتقاق باستخدام دالة الجهد الكهربائي القياسي

قد يكون من الأسهل ايجاد الجهد الكهربائي العددي , حيث التكامل في معادلة (5) يتحول الى عملية ضرب كما يلي :

من تعريف الجهد الكهربائي للشحنة النقطية , نجد ان الجهد الناتج من شحنتي ثنائي القطب عند نقطة الملاحظة (شكل 10.1) كالتالي :

$$\hat{V} = \frac{\hat{Q}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{e^{-jkr_+}}{r_+} - \frac{e^{-jkr_-}}{r_-} \right) \quad (9)$$

$$r_+ \approx r - \frac{dl}{2} \cos \theta$$

$$r_- \approx r + \frac{dl}{2} \cos \theta$$
(10)

بالتعويض في معادلة (9) , نجد ان

$$\hat{V} \approx \frac{\hat{Q}}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr} \left(\frac{e^{jk(dl/2)\cos\theta}}{\left(1 - \frac{dl}{2r} \cos\theta\right)} - \frac{e^{-jk(dl/2)\cos\theta}}{\left(1 + \frac{dl}{2r} \cos\theta\right)} \right) \quad (11)$$

في حالة $dl \ll r, \lambda$, يمكن استخدام مفكوك تايلور لتقريب الدالة الأسية اللوغارتمية كالتالي
 $e^{-jkr} \sim 1 - jkr$ والتعويض في معادلة (10) وإستخدام العمليات الجبرية نحصل عل ما يلي :

$$\lim_{\substack{k dl \ll 1 \\ dl/r \ll 1}} \hat{V} \approx \frac{\hat{Q}}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr} \left[\left(1 + j\frac{k dl}{2} \cos\theta\right) \left(1 + \frac{dl}{2r} \cos\theta\right) - \left(1 - j\frac{k dl}{2} \cos\theta\right) \left(1 - \frac{dl}{2r} \cos\theta\right) \right]$$

$$= \frac{\hat{Q} dl}{4\pi\epsilon r^2} e^{-jkr} \cos\theta (1 + jkr) \quad (12)$$

يمكن الحصول على معدلة (12) باستخدام $\hat{Q} = \hat{I}/j\omega$, $c = \sqrt{1/\epsilon\mu}$ وبإستخدام معادلتني (6,7) ومقياس لورنتز كالتالي :

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= \frac{-c^2}{j\omega} \nabla \cdot \hat{A} = \frac{-c^2}{j\omega} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{A}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{A}_\theta \sin \theta) \right) \\
&= \frac{\mu \hat{I} dl c^2}{4\pi j\omega} \frac{(1 + jkr)}{r^2} e^{-jkr} \cos \theta \\
&= \frac{\hat{Q} dl}{4\pi \epsilon r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cos \theta \quad (13)
\end{aligned}$$

(10.2.3) المجال المغناطيسي والكهربي

نستخدم معادلة (6) مع معادلة (8) لنحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{A} \\
&= \hat{i}_\phi \frac{1}{\mu r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \hat{A}_\theta) - \frac{\partial \hat{A}_r}{\partial \theta} \right) \\
&= -\hat{i}_\phi \frac{\hat{I} dl}{4\pi} k^2 \sin \theta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) e^{-jkr} \quad (14)
\end{aligned}$$

(ملاحظة: نرسم لمتجهات الوحدة في الإحداثيات الكروية : $i_\phi = \hat{\phi}$, $i_r = \hat{r}$, $i_\theta = \hat{\theta}$)

ويكون المجال الكهربي على النحو التالي :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \hat{\mathbf{H}} \\
&= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{H}_\phi \sin \theta) \mathbf{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{H}_\phi) \mathbf{i}_\theta \right) \\
&= -\frac{\hat{I} dl k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \mathbf{i}_r \left[2 \cos \theta \left(\frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{i}_\theta \left[\sin \theta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] \right\} e^{-jkr} \quad (15)
\end{aligned}$$

يسمى الحد الذي يتناسب مع $1/r^2$ بالمجال المستحث (المجال القريب *near field*) , حيث يسود هذا المجال عند النقاط القريبة من ثنائي القطب ويكون له مقدار عند التردد الصفري.

بينما يسمى الحد الذي يتناسب مع $1/r$ بالمجال الإشعاعي *radiation field* ويسود هذا المجال عند النقاط البعيدة عن ثنائي القطب الكهربائي , ويكون هذا المجال مسؤولاً عن انسياب القدرة الكهربائية بعيداً عن المصدر.

ولكن الحد المهم في مجال الإشعاع هو المركبة في اتجاه $\hat{\theta}$ والتي تتناسب مع المسافة $1/r$, ويسود هذا الحد عندما يكون $kr \gg 1$.

نلاحظ ان في حالة المجال البعيد ($kr \gg 1$) , تؤول معادلات المجالات الى ما يلي

$$\lim_{kr \gg 1} \hat{E}_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_0}{jkr} \sin \theta e^{-jkr}, \quad \hat{E}_0 = -\frac{\hat{I} dl k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (16)$$

ويكون المجال الكهربائي متعامداً مع المجال المغناطيسي وتكون ممانعة الموجة $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, ويعزى هذا الى تحول مقدمات الأمواج من سطوح كروية الى سطوح مستوية في المجال البعيد.

(10.2.4) خطوط المجال الكهربائي *Electric Field Lines*

حيث ان كثافة الشحنة الحجمية خارج ثنائي القطب صفراً , فإن تباعد المجال الكهربائي يساوي صفراً. وعليه , يمكن التعبير عن المجال الكهربائي بدلالة متجه جهد كهربائي C , كالتالي

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} \quad (17)$$

بما ان للمجال الكهربى المعطى في معادلة (15) مركبتين في اتجاهي r, θ لذلك يكون مركبة واحدة للمتجه $\mathbf{C}$ مركبة واحدة في اتجاه ϕ , اي ان $C_\phi(r, \theta)$, حيث

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta C_\phi) \mathbf{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r C_\phi) \mathbf{i}_\theta \quad (18)$$

باستخدام الإحداثيات الإسطوانية , وكون خطوط المجال الكهربى مماسات لإتجاه هذا المجال , نجد ان العلاقة بين مركبات هذا المجال تعطى كالتالي :

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta C_\phi)}{\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r C_\phi)} \quad (19)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة على صورة معادلة تفاضلية تامة كالتالي

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta C_\phi) dr + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta C_\phi) d\theta = 0 \Rightarrow d(r \sin \theta C_\phi) = 0 \quad (20)$$

هذا يعني ان خطوط المجال عبارة عن خطوط ثابتة الإنسياب للدالة $r \sin \theta C_\phi$, حيث نجد C_ϕ بمساواة مركبات المتجه المتناظرة في معادلتى (15 , 18) لنحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \hat{C}_\phi) \\ &= \hat{E}_r = - \frac{\hat{I} dl k^2}{4 \pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[2 \cos \theta \left(\frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] e^{-jkr} \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{C}_\phi) \\ &= \hat{E}_\theta = - \frac{\hat{I} dl k^2}{4 \pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\sin \theta \left(\frac{1}{(jkr)} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] e^{-jkr} \end{aligned} \quad (21)$$

بالتكامل نجد ان

$$\hat{C}_\phi = \frac{\hat{I} dl}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sin \theta}{r} \left(1 - \frac{j}{kr} \right) e^{-jkr} \quad (22)$$

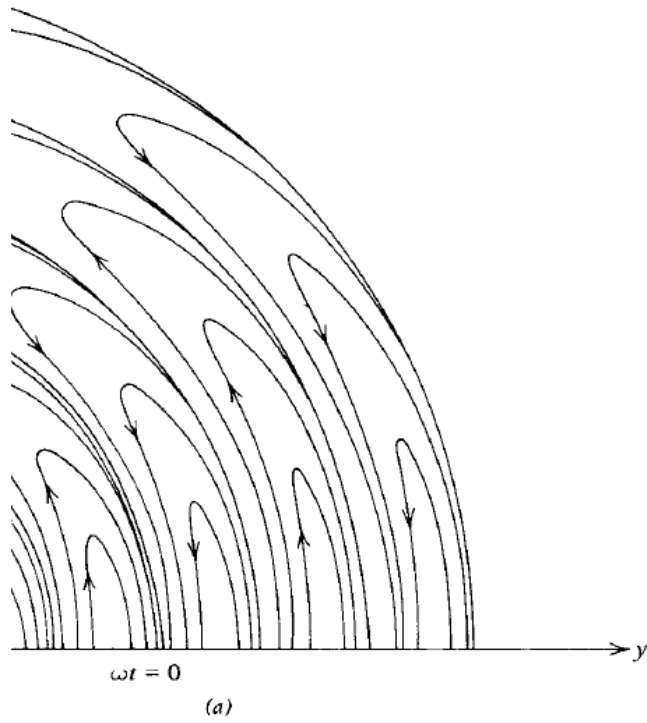
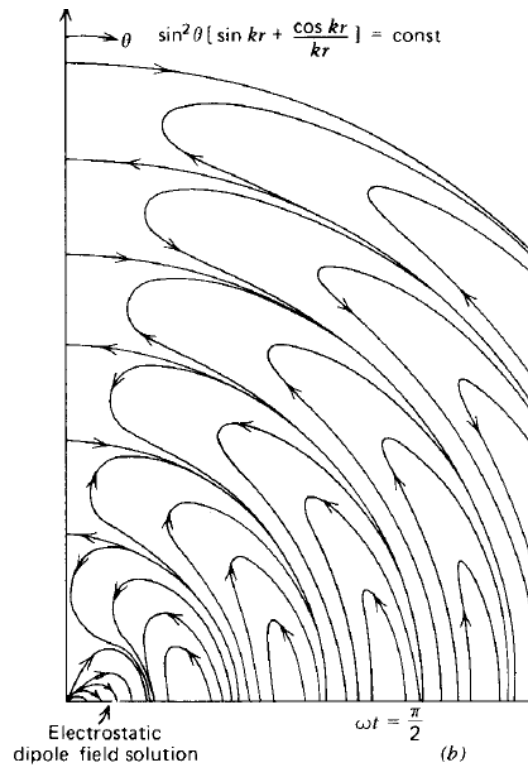
على فرض ان $\hat{I}$ عدد حقيقي , تكون قيمة C_ϕ اللحظية كالتالي:

$$\begin{aligned} C_\phi &= \text{Re} (\hat{C}_\phi e^{j\omega t}) \\ &= \frac{\hat{I} dl}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sin \theta}{r} \left(\cos (\omega t - kr) + \frac{\sin (\omega t - kr)}{kr} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

بحذف ثابت معامل السعة في معادلة (23), تكون معادلة خطوط القوة للمجال الكهربائي كالتالي

$$r C_\phi \sin \theta = \text{const} \Rightarrow \sin^2 \theta \left(\cos (\omega t - kr) + \frac{\sin (\omega t - kr)}{kr} \right) = \text{const} \quad (24)$$

الشكل (10.2a, b) يوضح خطوط المجال الكهربائي لثنائي القطب عند $\omega t = 0, \pi/2$



شكل (10.2) خطوط المجال الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي (a) $\omega t = 0$, (b) $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

ويمكن التحقق من صحة النتائج السابقة بالمقارنة مع خطوط المجال الكهربائي الساكن , حيث عند الترددات المنخفضة تكون $k = \frac{\omega}{c}$, ونحصل على ما يلي

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \begin{cases} \cos(\omega t - kr) \approx 1 \\ \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr} \approx \frac{(t - r/c)}{r/c} \approx \frac{t}{r/c} - 1 \end{cases} \quad (25)$$

وعليه , تؤول معادلة (24) الى ما يلي

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sin^2 \theta \left(\frac{ct}{r} \right) = \text{const} \quad (26)$$

بينما في حالة المجال البعيد , نجد ان

$$\lim_{kr \gg 1} \sin^2 \theta \cos(\omega t - kr) = \text{const} \quad (27)$$

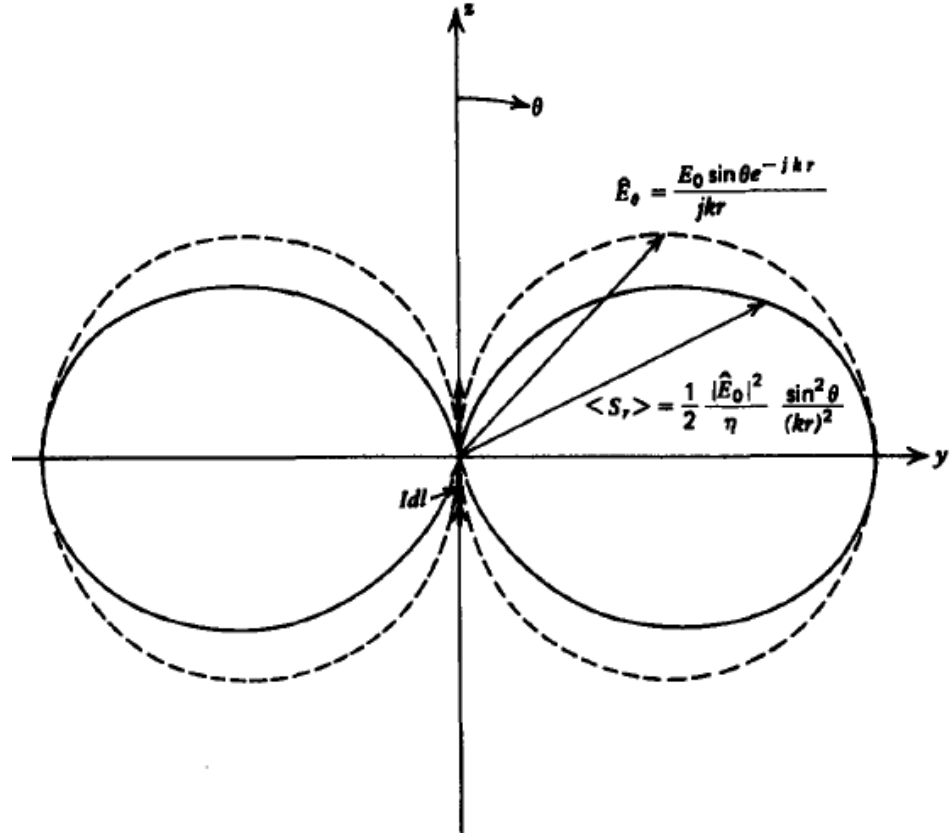
وتكرر خطوط المجال نفسها خلال كل فترة مقدارها $\lambda = 2\pi/k$.

(10.2.5) مقاومة الإشعاع Radiation Resistance

باستخدام معادلات المجالات الكهربائية والمغناطيسية المعطاة في بند (10.2.3) , يمكن ايجاد المعدل الزمني لكثافة القدرة الكهرومغناطيسية (الفصل السابع : المعدل الزمني لمتجه بويتنج) , $\langle S \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle$, كالتالي :

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*) \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{|\hat{I} dl|^2 \eta k^4}{2(4\pi)^2} \left[-\mathbf{i}_\theta \sin 2\theta \left(-\frac{1}{(jkr)^3} + \frac{1}{(jkr)^5} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i}_r \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^5} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} |\hat{I} dl|^2 \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 \frac{\eta}{r^2} \sin^2 \theta \mathbf{i}_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\hat{E}_0|^2}{\eta} \frac{\sin^2 \theta}{(kr)^2} \mathbf{i}_r \end{aligned} \quad (28)$$

حيث تعطي معادلة (16) قيمة E_0 , وتساهم المجالات البعيدة في تحديد هذا المعدل الزمني للقدرة , بينما تعطي المجالات القريبة والمتوسطة حدودا تخيلية في معادلة (28) , وهذه الحدود تمثل ما يعرف بالقدرة التفاعلية *Reactive Power* . كما ان كثافة القدرة تعتمد على المتغير θ (الشكل 10.3) , حيث هذه الكثافة تساوي الصفر عند النقاط الواقعة على طول محور ثنائي القطب ($\theta = 0, \pi$) , بينما تكون قيمتها عظمى عند النقاط الواقعة على الخط العمودي على محوره ($\theta = \pi/2$) .



شكل (10.3): شدة المجال الكهربائي وكثافة القدرة كدالة للزاوية θ .

من الشكل (10.3) , نلاحظ ان شدة كثافة القدرة تتناسب طرديا مع طول المتجه الواصل بين نقطة الأصل (مركز ثنائي القطب) و نقطة الملاحظة . وهذه الخاصية الإتجاهية مهمة في توجيه الإشعاع بحيث يمكن التحكم في انسياب القدرة وفق هذا الإتجاه . يمكن ايجاد المعدل الزمني للقدرة الكلية المشعة من ثنائي القطب بتكامل متجه بويتنج على سطح كروي نصف قطره r , ويكون كالتالي :

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \langle S_r \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2} |\hat{I} dl|^2 \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 \eta 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\
&= \frac{|\hat{I} dl|^2}{16\pi} \eta k^2 \left[-\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{|\hat{I} dl|^2}{12\pi} \eta k^2 \quad (29)
\end{aligned}$$

بالرجوع الى معادلة ضياع القدرة عبر المقاومة R (التسخين الجولي) , او

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} |\hat{I}|^2 R \quad (30)$$

وبالمقارنة بين معادلتني (30, 29) , نجد ان المقاومة المكافئة (مقاومة الإشعاع) تساوي

$$R = \frac{\eta}{6\pi} (k dl)^2 = \frac{2\pi\eta}{3} \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (31)$$

في حالة الفراغ , تكون $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$, وتكون مقاومة الإشعاع كالتالي :

$$R_0 = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{free space}) \quad (32)$$

تبقى هذه النتيجة صحيحة لحد ما طالما تحقق الشرط $dl/\lambda \ll 1$, اي في حالة ثنائي القطب النقطي , حيث يكون طول الهوائي (الموصل) اقل من طول الموجة المشعة , وعندها يمكن اهمال القدرة المشعة .

مثال (1)

جد مقاومة الإشعاع لهوائي صغير يعمل على تردد 30 MHz , اذا كلن طوله 10 cm ؟

الحل :

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{30 \times 10^6} = 10 \text{ m}$$

باستخدام معادلة (32) , نجد ان

$$R_0 = 80(3.14)^2 \left(\frac{0.1}{10}\right)^2 = 0.079 \Omega$$

اذا كان التيار المار في الموصل غير ثابت ويعتمد على الأحداثي z لنقاط الموصل , يكون الحد الذي يتغير مع z معادلة (5) , التي تعطي متجه الجهد المغناطيسي , هو $\hat{I}(z)$, وعليه تكون مركبة متجه الجهد المغناطيسي في اتجاه محور z كالتالي :

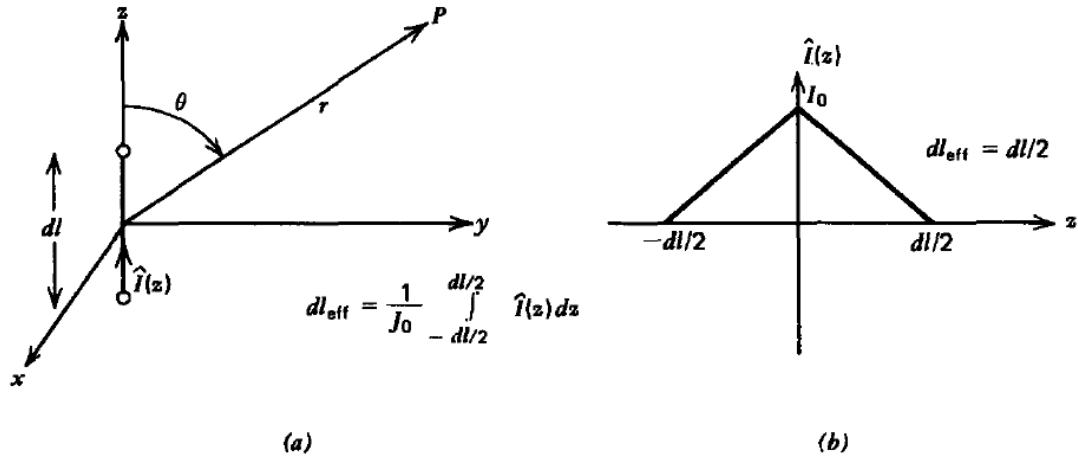
$$\hat{A}_z(r) = \text{Re} \left[\int_{-dl/2}^{+dl/2} \frac{\mu \hat{I}(z) e^{-jkr_{QP}}}{4\pi r_{QP}} dz \right] \approx \text{Re} \left[\frac{\mu e^{-jkr_{QP}}}{4\pi r_{QP}} \int_{-dl/2}^{+dl/2} \hat{I}(z) dz \right] \quad (33)$$

بما ان ثنائي القطب متناهي الصغر طوليا , تكون المسافة بين نقاط هذا الموصل ونقطة الملاحظة متساوية تقريبا (r) , ولا تعتمد على z . لذلك تبقى معادلات المجال الكهربائي والمغناطيسي , المعطاة في بند (10.2.3) , كما هي , ولكن نعوض بالطول الفعلي لثنائي القطب كما يلي

$$dl_{\text{eff}} = \frac{1}{\hat{I}_0} \int_{-dl/2}^{+dl/2} \hat{I}(z) dz \quad (34)$$

حيث $\hat{I}_0$ التيار الطرفي والمغذي عند مركز الهوائي . بما ان التيار صفرا عند نهايتي الدائرة المفتوحة (الشكل 10.4) , يمكن ان نعبر عن دالة هذا التيار كما يلي

$$\hat{I}(z) = \begin{cases} I_0(1 - 2z/dl), & 0 \leq z \leq dl/2 \\ I_0(1 + 2z/dl), & -dl/2 \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (35)$$



شكل (10.4) توزيع التيار غير المنتظم عبر ثنائي القطب الكهربائي.

وعليه , يكون الطول الفعال كالتالي:

$$dl_{\text{eff}} = \frac{1}{I_0} \int_{-dl/2}^{+dl/2} \hat{I}(z) dz = \frac{dl}{2} \quad (36)$$

وعليه , تصغر شدة المجالات بمقدار النصف , بينما تصغر القدرة الإشعاعية الى الربع , اي

$$R = \frac{2\pi\eta}{3} \left(\frac{dl_{\text{eff}}}{\lambda} \right)^2 = 20\pi^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 \quad (37)$$

اما اذا كان توزيع التيار دالة للمكان , يكون هناك توزيع لكثافة الشحنة على طول الثنائي , وليس فقط عند الأطراف , كالتالي :

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{j\omega} \frac{d\hat{I}}{dz} \quad (38)$$

في حالة التوزيع الخطي للتيار المعطى في معادلة (35) , تكون كثافة الشحنة الموزعة على طول الثنائي كالتالي :

$$\hat{\lambda} = \pm \frac{2I_0}{j\omega dl} \begin{cases} 0 \leq z \leq dl/2 \\ -dl/2 \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (39)$$

(10.2.7) اشعاع ثنائي القطب المغناطيسي النقطي

Radiation from a Point Magnetic Dipole .

ثنائي القطب المغناطيسي هو عبارة عن لفة دائرية صغيرة الأبعاد , ويمر بها تيار متغير جيبيا مع الزمن , وعليه ينتج عن هذا النظام امواج اشعاعية . لنفرض ان لفة مغلقة , موضوعة في مستوى $z = 0$, ويمر بها تيار شدته $\hat{I}$, تكون السعة الطورية لمتجه الجهد المغناطيسي عند النقطة التي تبعد مسافة r عن مركز اللفة كالتالي :

$$\hat{A}(r) = \int \frac{\mu \hat{I} e^{-jk r_{QP}}}{4\pi r_{QP}} dl \quad (40)$$

على فرض ان ابعاد ثنائي القطب اصغر من طول الموجة , او $k(r_{QP} - r) \ll 1$, يمكن استخدام مفكوك تيلور للدالة الأسية كالتالي :

$$\lim_{k(r_{QP}-r) \ll 1} e^{-jk r_{QP}} = e^{-jk r} e^{-jk(r_{QP}-r)} \approx e^{-jk r} [1 - jk(r_{QP} - r)]$$

بالتعويض في معادلة (40) , نحصل على متجه الجهد المغناطيسي كالتالي :

$$\begin{aligned} \hat{A}(r) &= \int \frac{\mu \hat{I}}{4\pi} e^{-jk r} \left(\frac{1 + jkr}{r_{QP}} - jk \right) dl \\ &= e^{-jk r} \int \frac{\mu \hat{I}}{4\pi} \left(\frac{1 + jkr}{r_{QP}} - jk \right) dl \\ &= \frac{\mu}{4\pi} e^{-jk r} \left((1 + jkr) \int \frac{\hat{I} dl}{r_{QP}} - jk \int \hat{I} dl \right) \end{aligned}$$

ولأن التكامل عبر مسار مغلق (لفة دائرية) لأي متجه يساوي صفرا , لذلك يتلشى التكامل الثاني في هذه المعادلة. ويمكن برهنة ذلك رياضيا كالتالي :

$$\hat{\mathbf{I}} d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{I}} \mathbf{i}_\phi a d\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi} \mathbf{i}_\phi d\phi = \int_0^{2\pi} (-\sin \phi \mathbf{i}_x + \cos \phi \mathbf{i}_y) d\phi = 0$$

بينما يعطي التكامل الأول في هذه المعادلة ما يلي :

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mu \hat{m}}{4\pi r^2} \sin \theta (1 + jkr) e^{-jkr} \mathbf{i}_\phi, \quad \hat{m} = \hat{\mathbf{I}} dS$$

حيث $\hat{m}$ العزم المغناطيسي لثنائي القطب , dS متجه عنصر المساحة. وتكون معدلات المجال الكهربائي والمغناطيسي كالتالي :

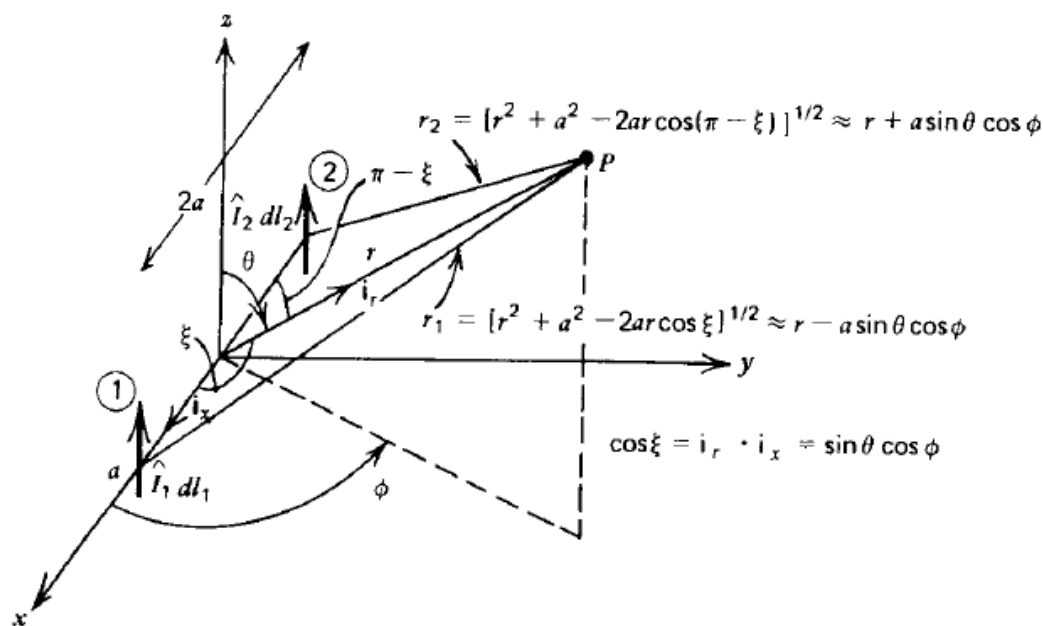
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{\mathbf{A}} = -\frac{\hat{m}}{4\pi} jk^3 e^{-jkr} \left\{ \mathbf{i}_r \left[2 \cos \theta \left(\frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i}_\theta \left[\sin \theta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \right] \right\} \\ \hat{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{m}jk^3}{4\pi} \eta e^{-jkr} \sin \theta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \mathbf{i}_\phi \end{aligned}$$

(10.3) مصفوفات ثنائي القطب النقطي Point Dipole Arrays

مر معنا ان شدة القدرة المشعة من ثنائي القطب الكهربائي تتناسب طرديا مع متسع التوزيع الزاوي $\sin^2 \theta$, واحيانا يتطلب ان تكون هذه الشدة عالية عند زاوية معينة دون غيرها من الزوايا وبدون الحركة الميكانيكية للهوائي . ويمكن توفير هذا المتطلب بإستخدام مصفوفة من ثنائيات الأقطاب , وهذا ما سنتاوله في هذا البند .

(10.3.1) مصفوفة بسيطة من عنصرين A simple Two Element Array

لنعتبر عنصرين من ثنائيات الأقطاب (كما في الشكل 10.5) , حيث يحمل كل منهما تيار كهربائي $\hat{\mathbf{I}}_1$, $\hat{\mathbf{I}}_2$ وطول كل منهما $d\ell_1$, $d\ell_2$ والمسافة بينهما $2a$.



شكل (10.5) مصفوفة من عنصري ثنائي القطب الكهربى .

نجد المجال الكهربائي عند نقطة (P) , والناتج من هذا النظام , بإستخدام مبدء تركيب المجال الناتج عن كل ثنائي القطب في المنظومة . في حالة نموذج الإشعاع للمجال البعيد , فإن $\theta_1 \approx \theta_2$. وبإستخدام الحلول المعطاة في معادلة (16) في البند (10.2.3) , نحصل على ما يلي:

$$\hat{E}_\theta = \eta \hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_1 \sin \theta e^{-jk r_1}}{j k r_1} + \frac{\hat{E}_2 \sin \theta e^{-j k r_2}}{j k r_2} \quad (1)$$

$$\hat{E}_1 = -\frac{\hat{I}_1 dl_1 k^2}{4\pi} \eta, \quad \hat{E}_2 = -\frac{\hat{I}_2 dl_2 k^2 \eta}{4\pi}$$

بإستخدام قانون جيوب التمام , نحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned} r_2 &= [r^2 + a^2 - 2ar \cos(\pi - \xi)]^{1/2} = [r^2 + a^2 + 2ar \cos \xi]^{1/2} \\ r_1 &= [r^2 + a^2 - 2ar \cos \xi]^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

حيث $\xi =$ الزاوية بين متجه الوحدة $\hat{r}$ ومحور x ، $\cos \xi = \hat{r} \cdot \hat{x} = -\sin \theta \cos \phi$ ،
 اما في حالة نموذج الإشعاع للمجال البعيد ، يمكن استخدام التقريب التالي :

$$\lim_{r \gg a} \begin{cases} r_2 \approx r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) \right] \approx r + a \sin \theta \cos \phi \\ r_1 \approx r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) \right] \approx r - a \sin \theta \cos \phi \end{cases} \quad (3)$$

وعليه ، يمكن كتابة معادلة (1) كالتالي :

$$\begin{aligned} \hat{E}_\theta &= \eta \hat{H}_\phi \\ &= \underbrace{\frac{jk\eta}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}}_{\text{element factor}} \underbrace{(\hat{I}_1 dl_1 e^{jka \sin \theta \cos \phi} + \hat{I}_2 dl_2 e^{-jka \sin \theta \cos \phi})}_{\text{array factor}} \end{aligned} \quad (4)$$

يسمى العامل الأول في معادلة (4) عامل العنصر *Element factor* لأنه يعطي مجال الإشعاع الناتج لكل وحدة عنصر تيلر (*Idl*) من ثنائي القطب. بينما يسمى العامل الثاني في هذه المعادلة عامل المصفوفة *Array factor* لأنه يعتمد على الترتيب الهندسي للمصفوفة وطور التيارات في عناصر هذه المصفوفة .

ولتفحص معادلة (4) ، نفرض ان مصفوفة ثنائية مكونة من ثنائيات قطب متماثلة ويمر في كل عنصر منها نفس التيار ولكن بفرق طور χ ، اي

$$\begin{aligned} dl_1 &= dl_2 \equiv dl \\ \hat{I}_1 &= \hat{I}, \quad \hat{I}_2 = \hat{I} e^{j\chi} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_0, \quad \hat{E}_2 = \hat{E}_0 e^{j\chi} \end{aligned} \quad (5)$$

وعليه ، يمكن كتابة معادلة (4) كالتالي :

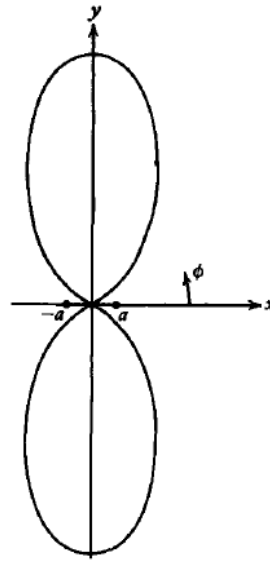
$$\hat{E}_\theta = \eta \hat{H}_\phi = \frac{2\hat{E}_0^*}{jk r} e^{-jkr} \sin \theta e^{j\chi/2} \cos (ka \sin \theta \cos \phi - \frac{\chi}{2}) \quad (6)$$

لنعتبر الحالة عندما تكون $\theta = \pi/2$ ، يكون معدل انسياب القدرة كالتالي :

$$\lim_{\theta=\pi/2} \langle S_r \rangle = \frac{1}{2\eta} |\hat{E}_\theta|^2 = \frac{2|\hat{E}_0|^2}{\eta(kr)^2} \cos^2 \left(ka \cos \phi - \frac{\chi}{2} \right) \quad (7)$$

تبين معادلة (7) ان انسياب القدرة يعتمد بدرجة كبيرة على المسافة بين ثنائيات الأقطاب (2a) وفرق التيار الطوري (χ). ويمكن دراسة هذه العلاقة بيانيا في الحالات التالية كما يلي:

(a) اذا كانت $\chi = 0$, المسافة $2a = \frac{\lambda}{2}$: في هذه الحالة تكون $r_1 = r_2$, تتلاشى مركبات المجالات السينية الناتجة من ثنائيات الأقطاب بسبب كون المسافات في اتجاه محور x تختلف بمقدار $\frac{\lambda}{2}$, بينما تتجمع مركبات المجالات الصادية بسبب كون $r_1 = r_2$. يكون النموذج الإشعاعي كما في الشكل (10.6a).



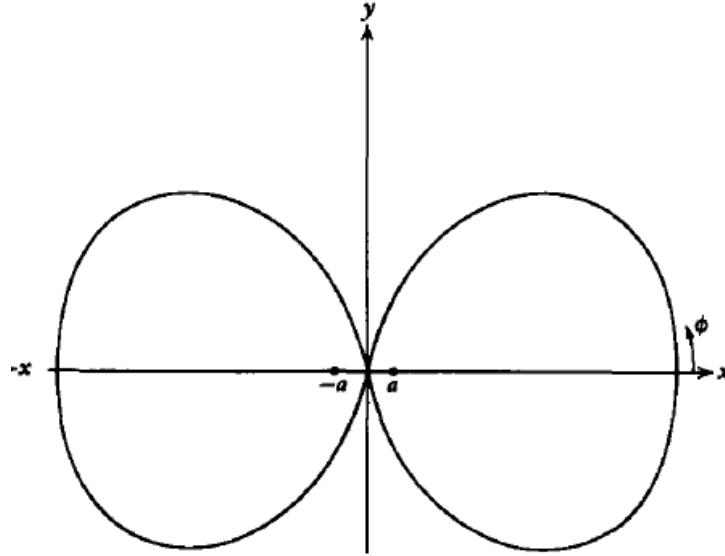
$$\langle S_r \rangle \propto \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi \right), \quad x = 0$$

Broadside

شكل (10.6a) النموذج الإشعاعي لفرق طور التيار الصفري لمصفوفة ثنائية الأقطاب.

كما تكون كثافة القدرة عظمى اذا كان عامل طور المصفوفة ($ka \cos \phi - \chi/2$) يساوي مضاعفات π الصحيحة, وتتعدم كثافة القدرة اذا كان هذا العامل يساوي مضاعفات $\pi/2$ الفردية. بما ان هذا النموذج الإشعاعي اعظميا في الإتجاه العمودي على مستوى المصفوفة, يسمى هذا النموذج نموذج الجانب العريض Broadside Pattern.

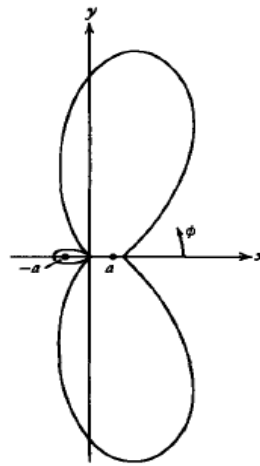
(b) اذا كانت $\chi = \pi$, فإنه تتلاشى المجالات في اتجاهي محوري x, y بسبب كون هذه المجالات متضادة *out of phase* . وتكون القدرة الإشعاعية عظمى على اتجاه طول المصفوفة (الشكل 10.6b).



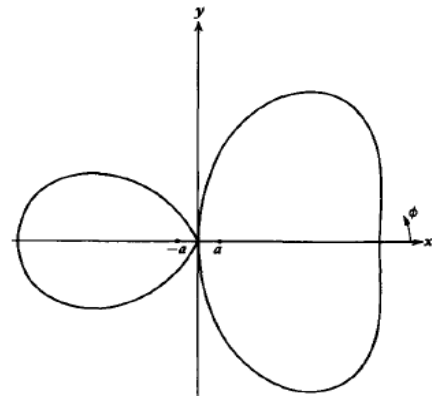
$$\langle S_r \rangle \propto \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi - \frac{\pi}{2} \right), \chi = \pi$$

شكل (10.6b) نموذج الأشعاع لمصفوفة من عنصري ثنائي القطب حيث فرق طور التيار $\chi = \pi$.

ونحصل على نماذج اشعاعية مختلفة عندما يكون فرق التيار الطوري مطلقا , اي عندما تكون $\chi = \pi/4, 3\pi/4$ كما في الأشكال المبينة ادناه :



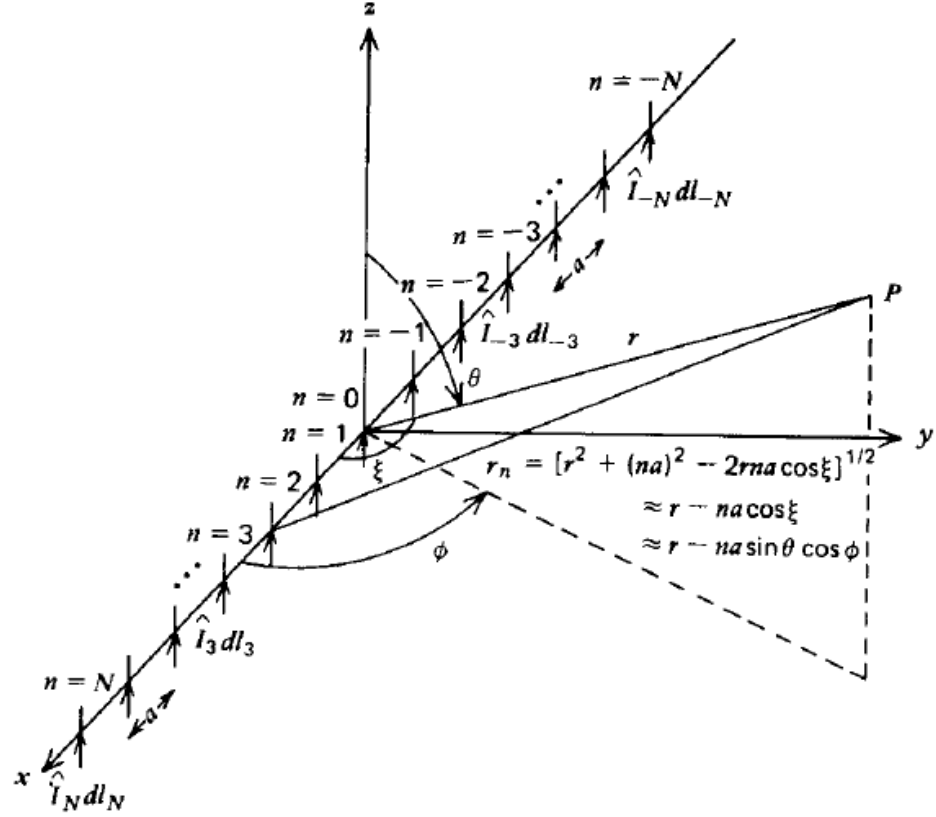
$$\langle S_r \rangle \propto \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi - \frac{\pi}{8} \right), \chi = \frac{\pi}{4}$$



$$\langle S_r \rangle \propto \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi - \frac{3\pi}{8} \right), \chi = \frac{3\pi}{4}$$

(10.3.2) مصفوفة N -ثنائي القطب N -Dipoles Array

لنفرض ان هوائي على شكل مصفوفة مكونة من $(2N+1)$ ثنائي قطب , متساوية التباعد بينها , كما في الشكل (10.7).



شكل (10.7) مصفوفة خطية من $2N+1$ ثنائيات الأقطاب , المتساوية التباعد بينها.

من الشكل (10.7) , تعطى المسافة من ثنائي القطب ذي الترتيب n الى النقطة البعيدة (نقطة الملاحظة) بالتقريب التالي :

$$\lim_{r \gg |na|} r_n \approx r - na \sin \theta \cos \phi \quad (8)$$

وبشكل عام , يكون عامل المصفوفة (AF) في معادلة (4) كالتالي :

$$AF = \sum_{-N}^{+N} \hat{I}_n dl_n e^{jkn a \sin \theta \cos \phi} \quad (9)$$

وللحصول على تماثل المصفوفة, نجعل عدد ثنائيات القطب على جانبي نقطة الأصل متساوية. على فرض ان ان طول كل من ثنائيات الأقطاب متساوية (dl) ويمر بها نفس التيار I_0 , ولكن بتغيير زاوية طور التيار بين كل ثنائي قطب متتاليين بمقدار χ_0 , او

$$\hat{I}_n = I_0 e^{-jn\chi_0}, \quad -N \leq n \leq N \quad (10)$$

وعليه, تصبح معادلة (9) على الصورة التالية

$$AF = I_0 dl \sum_{-N}^{+N} e^{jn(ka \sin \theta \cos \phi - \chi_0)} \quad (11)$$

لنفرض ان :

$$\beta = e^{j(ka \sin \theta \cos \phi - \chi_0)} \quad (12)$$

وعليه, يمكن كتابة المتتالية الهندسية في معادلة (11) بالصورة التالية :

$$S = \sum_{-N}^{+N} \beta^n = \beta^{-N} + \beta^{-N+1} + \dots + \beta^{-2} + \beta^{-1} + 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{N-1} + \beta^N \quad (13)$$

بضرب حدود المتتالية بالمقدار β وطرح الناتج من معادلة (13) نحصل على ما يلي :

$$S(1 - \beta) = \beta^{-N} - \beta^{N+1} \quad (14)$$

وعليه, يكون مجموع المتتالية الهندسية كالتالي:

$$S = \frac{\beta^{-N} - \beta^{N+1}}{1 - \beta} = \frac{\beta^{-(N+1/2)} - \beta^{(N+1/2)}}{\beta^{-1/2} - \beta^{1/2}} = \frac{\sin [(N + \frac{1}{2})(ka \sin \theta \cos \phi - \chi_0)]}{\sin [\frac{1}{2}(ka \sin \theta \cos \phi - \chi_0)]} \quad (15)$$

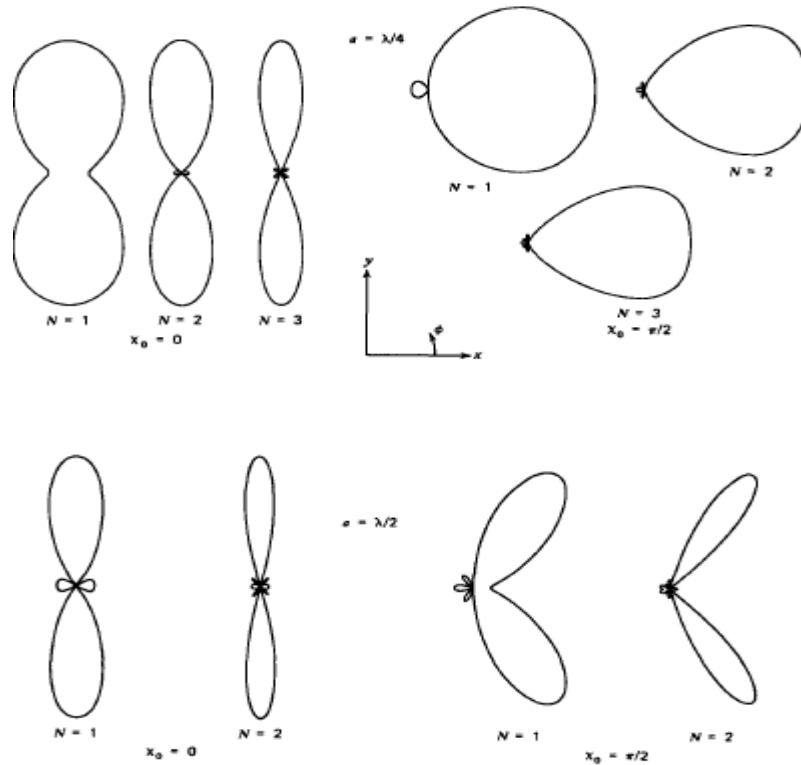
وفي حالة $\theta = \pi/2$, يصبح عامل المصفوفة كالتالي

$$AF = I_0 dl \frac{\sin [(N + \frac{1}{2})(ka \cos \phi - \chi_0)]}{\sin [\frac{1}{2}(ka \cos \phi - \chi_0)]} \quad (16)$$

حيث يتناسب نموذج الإشعاع مع مربع عامل المصفوفة . وتكون قيمة القدرة الإشعاعية عظمى اذا كان

$$ka \cos \phi - \chi_0 = 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

كما تقع القيمة العظمى الرئيسية عند $n = 0$ لكل القيم المختلفة من المتغيرات ka, χ_0 كما في الشكل 10.8 , الذي يبين نموذج الإشعاع من هوائي مكون من عدة ثنائيات الأقطاب .



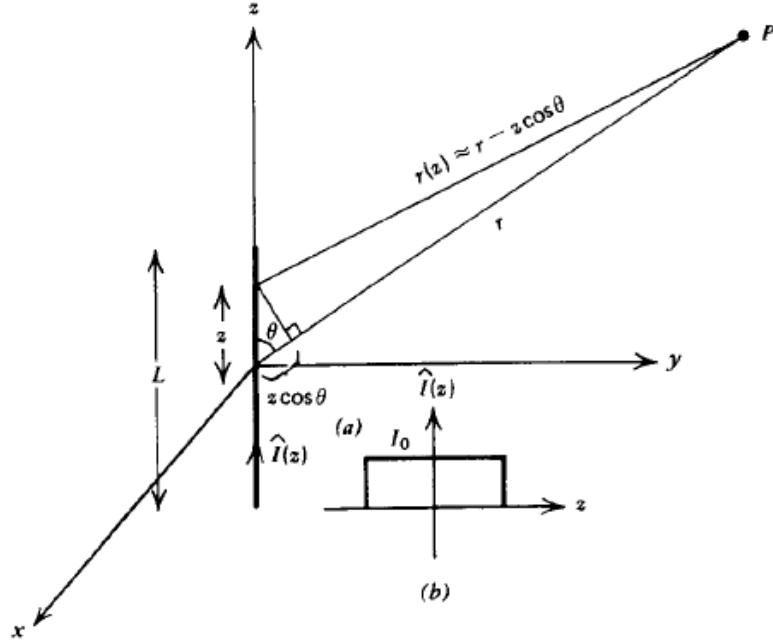
نلاحظ من الشكل (10.8) انه كلما زاد عدد الثنائيات القطبية (N) كلما قل اتساع العظمى المركزية وتصغر سعة اللفات الجانبية , وهذا يسمح الى درجة كبيرة بتوجيه الشعاع عند الزاوية ϕ , والتي يتم التحكم في مقدارها من خلال زاوية الطور , حيث $\cos \phi = \frac{\chi_0}{ka}$.

(10.4) هوائي ثنائي قطب طويل Long Dipole Antennas

في حالة ثنائي القطب النقطي , حيث $d\ell \ll \lambda$, تكون القدرة المشعة من هذا الثنائي قليلة نسبيا . وعمليا , يمكن زيادة هذه القدرة بزيادة طول الهوائي بالرغم من ان المجالات الناتجة من مقاطع الهوائي الطويل قد لا تتداخل بينها بشكل بناء. فيما يلي , نتناول حل المجال البعيد .

(10.4.1) حل المجال البعيد Far Field Solution

لنفرض ان هوائي ثنائي قطب طويل يحمل تيارا كهربيا شدته $\hat{I}(z)$ (كما في الشكل 10.9)



شكل (10.9) هوائي ثنائي قطب طويل .

في حالة المجال البعيد ($r \gg L$) , يلعب التفاوت في البعد بين عناصر التيار المتتالية على طول الهوائي (dz) ونقطة الملاحظة دورا مهما في عامل الطور للدالة الأسية , ولا تأثير له على العامل $\left(\frac{1}{r}\right)$. كما وجدنا في البند (10.2.3) ان عنصر التيار عند الموضع z يولد مجالا بعيدا كالتالي :

$$d\hat{E}_\theta = \eta d\hat{H}_\phi = \frac{jk\eta}{4\pi} \frac{\hat{I}(z) dz}{r} \sin \theta e^{-jk(r-z \cos \theta)} \quad (1)$$

لنفرض ان في المجال البعيد تكون θ متساوية لجميع عناصر التيار التزايدية , وعليه يمكن إيجاد المجال الكهربائي البعيد الناتج عن التوزيع الكلي للتيار باستخدام التكامل كالتالي :

$$\hat{E}_\theta = \eta \hat{H}_\phi = \frac{jk\eta}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \int_{-L/2}^{+L/2} \hat{I}(z) e^{jkz \cos \theta} dz \quad (2)$$

إذا كان التوزيع التياراتي معلوماً , يمكن إيجاد مقدار التكامل في معادلة (2) مباشرة. وعملياً تكون المسألة صعبة , لأن التوزيع التياراتي على طول الهوائي يتحدد بالمجالات القريبة *near fields* ومن خلال الشروط الحدودية *Boundary conditions* . وبما ان المجالات والتيارات مرتبطة معاً , فإنه من الصعب إيجاد حل تام *exact solution* مهما كان الهوائي بسيط هندسياً. ولكن يمكن إيجاد حل تقريبي للمسألة عددياً *numerically* , أي بطريقة التكرار *iteration method* , حيث يتم وضع حل افتراضي *guess solution* للتوزيع التياراتي ثم نحسب المجالات المحصلة (النعيدة والقريبة) الناتجة , وهكذا تتكرر الخطوات عدة مرات حتى نقرب من الحل الصحيح الى درجة معينة. نتناول حل المجال البعيد في حالة التيار المنتظم .

(10.4.2) التيار المنتظم *Uniform current*

لنفرض ان تيار الهوائي هو : ثابت $\hat{I}(z) = I_0$, وعليه , تصبح معادلة (2) على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \hat{E}_\theta &= \eta \hat{H}_\phi = \frac{jk\eta}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \hat{I}_0 \int_{-L/2}^{+L/2} e^{jkz \cos \theta} dz \\ &= \frac{jk\eta}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \hat{I}_0 \left[\frac{e^{jkz \cos \theta}}{jk \cos \theta} \right]_{-L/2}^{+L/2} \\ &= \frac{\hat{I}_0 \eta}{4\pi r} \tan \theta e^{-jkr} \left[2j \sin \left(\frac{kL}{2} \cos \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

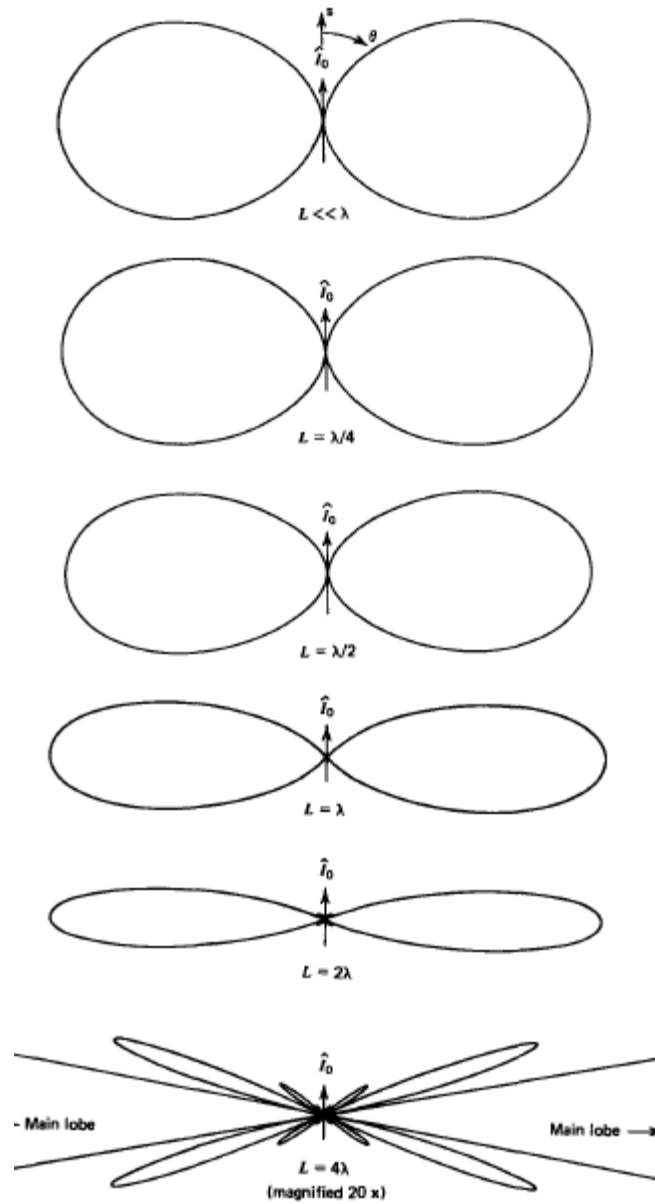
ويكون المعدل الزمي لكثافة القدرة المشعة كالتالي :

$$\langle S_r \rangle = \frac{1}{2\eta} |\hat{E}_\theta|^2 = \frac{|\hat{E}_0|^2 \tan^2 \theta \sin^2 [(kL/2) \cos \theta]}{2\eta (kr)^2 (kL/2)^2} \quad (4)$$

حيث

$$\hat{E}_0 = \frac{\hat{I}_0 L \eta k^2}{4\pi} \quad (5)$$

عند دراسة كثافة القدرة المشعة كدالة للزاوية θ , نحصل على الشكل (10.10) في حالات اطوال الهوائي المختلفة L .



شكل (10.10) كثافة القدرة المشعة لأطوال مختلفة من الهوائي .

تكون النهاية العظمى الرئيسية عند $\theta = \pi/2$, كما تصبح هذه النهاية أكثر حدة كلما زادت قيمة L . إذا كانت $L > \lambda$, فإن كثافة القدرة تتعدهم عند الزوايا التالية

$$\cos \theta = \frac{2n\pi}{kL} = \frac{n\lambda}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

(10.4.3) مقاومة الإشعاع Radiation Resistance

بإجراء التكامل على معادلة (4) مدى جميع الزوايا, نجد ان المعدل الزمني للقدرة الكلية والمشعة من الهوائي تكون كالتالي :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \langle S_r \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{|\hat{E}_0|^2 \pi}{k^2 \eta (kL/2)^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{kL}{2} \cos \theta \right) d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

لنفرض ان

$$v = \frac{kL}{2} \cos \theta, \quad dv = -\frac{kL}{2} \sin \theta d\theta \quad (8)$$

بالتعويض في معادلة (7) نحصل على ما يلي :

$$\langle P \rangle = \frac{|\hat{E}_0|^2 \pi}{k^2 \eta (kL/2)^2} \int_{+kL/2}^{-kL/2} \left(\frac{2}{kL} \sin^2 v dv - \frac{kL}{2} \frac{\sin^2 v}{v^2} \right) dv \quad (9)$$

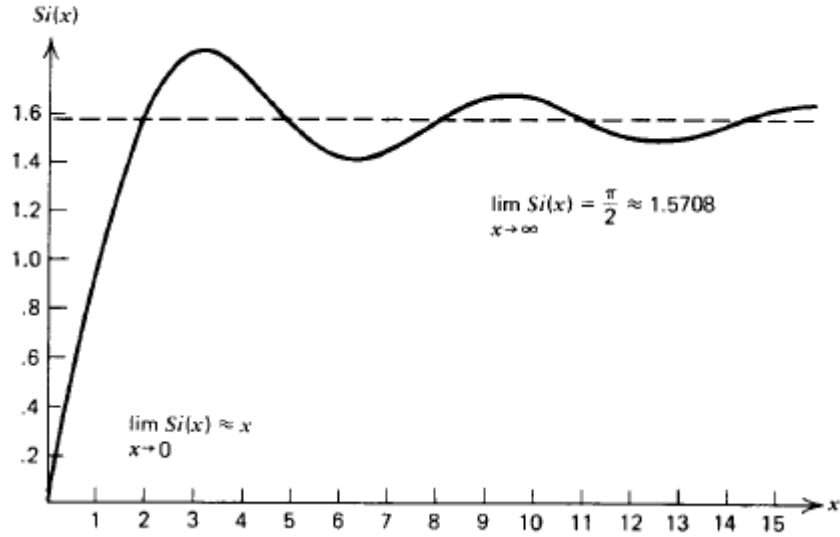
يكون تكامل الحد الأول في معادلة (9) كالتالي :

$$\int \sin^2 v dv = \frac{1}{2}v - \frac{1}{4} \sin 2v \quad (10)$$

بينما يعرف تكامل الحد الثاني في هذه المعادلة بما يسمى تكامل الجيب sine integral, ويكون على الصورة التالية :

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (11)$$

وتمثل هذه الدالة بيانيا كما في الشكل (10.11)



شكل (10.11) دالة تكامل الجيب .

بنشر التكامل الثاني في معادلة (9) وباستخدام التكامل بالتجزئة , نجد ان

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 v}{v^2} dv &= \int \frac{(1 - \cos 2v)}{2v^2} dv \\ &= -\frac{1}{2v} - \int \cos 2v \frac{dv}{2v^2} \\ &= -\frac{1}{2v} + \frac{\cos 2v}{2v} + \int \frac{\sin 2v d(2v)}{2v} \\ &= -\frac{1}{2v} + \frac{\cos 2v}{2v} + Si(2v) \end{aligned} \quad (12)$$

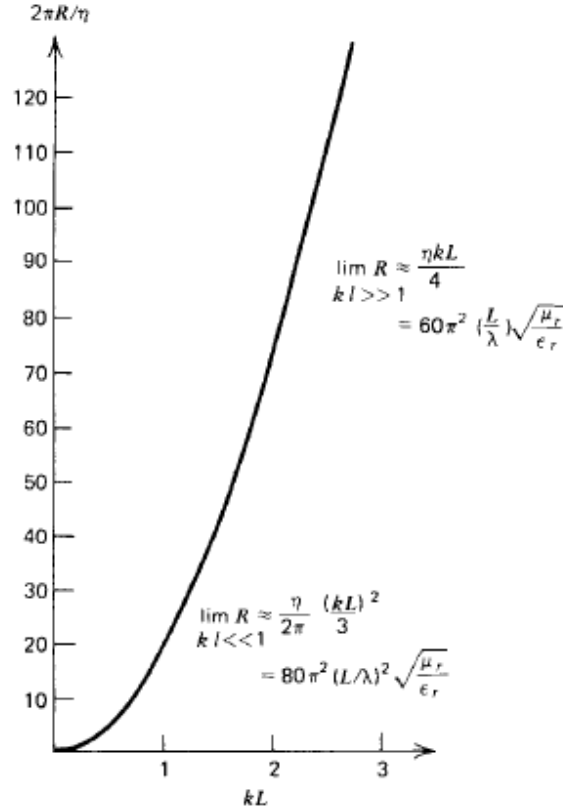
وبتعيين قيم التكامل في المعادلات (10-12) عند الحدود السفلى والعليا للزوايا , مع ملاحظة ان دالة تكامل الجيب دالة فردية , نجد ان

$$\langle P \rangle = \frac{|\hat{E}_0|^2 \pi}{k^2 \eta (kL/2)^2} \left(\frac{\sin kL}{kL} + \cos kL - 2 + kL \text{Si}(kL) \right) \quad (13)$$

باستخدام معادلة (5) , نجد ان مقاومة الإشعاع تساوي

$$R = \frac{2\langle P \rangle}{|\hat{I}_0|^2} = \frac{\eta}{2\pi} \left(\frac{\sin kL}{kL} + \cos kL - 2 + kL \text{Si}(kL) \right) \quad (14)$$

وعند تمثيل العلاقة بين R , kL , نحصل على المنحنى التالي:



شكل (10.12)

وللتأكد من صحة هذه النتائج (معادلة 14) , نعتبر نهاية المقدار في حالة اقتراب L من القيمة الصفرية , اي $kL \ll 1$, حيث نقارن هذه الحالة مع النتيجة المعطاة في حالة ثنائي القطب النقطي (بند 10.2.5) . تكون نهاية معادلة (14) كالتالي :

$$\lim_{kL \ll 1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin kL}{kL} \approx 1 - \frac{(kL)^2}{6} \\ \cos kL \approx 1 - \frac{(kL)^2}{2} \\ kL Si(kL) \approx (kL)^2 \end{array} \right. \quad (15)$$

وعليه , تصبح معادلة (14) في هذه الحالة كما يلي :

$$\lim_{kL \ll 1} R \approx \frac{\eta}{2\pi} \frac{(kL)^2}{3} = \frac{2\pi\eta}{3} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (16)$$

من هنا , نلاحظ ان معادلة (16) تتفق مع النتائج المعطاة في بند (10.2.5). اما في حالة ثنائي القطب المتسع الجانب ($kL \gg 1$) , فإن الحد المحتوي على تكامل الجيب يطغى على باقي الحدود الأخرى والتي يمكن اهمال مقاديرها , حيث $S_i(kL) \rightarrow \pi/2$, وتكون النتيجة كما يلي

$$\lim_{kL \gg 1} R \approx \frac{\eta kL}{4} = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \pi^2 \frac{L}{\lambda} \quad (17)$$

تمارين

(10.1) يمر تيار كهربي في صفيحة غير محدودة موضوعة عند $z=0$, اذا كان التيار يتغير كالتالي : $\text{Re} [K_0 e^{j(\omega t - k_x x)} \mathbf{i}_x]$, جد ما يلي :

(a) الجهد العددي ومتجه الجهد ؟

(b) المجال الكهربي والمغناطيسي ؟

(c) اذا كان توزيع التيار منتظم على شريحة مستوية سمكها $2a$, جد المطلوب في الفرعين (a,b) ؟

(10.2) كرة نصف قطرها R , مشحونة بانتظام بكثافة $\sigma_f = \text{Re}(\hat{\sigma}_0 e^{j\omega t})$, حيث الشحنة السطحية المتغيرة مع الزمن ناتجة عن تيار التوصيل الشعاعي النقي. جد ما يلي

(a) الجهد العددي ومتجه الجهد المغناطيسي ؟

(b) المجال الكهربي والمغناطيسي في جميع المناطق ؟

(10.3) جد الأطوال الفعالة , مقاومات الأشعاع , والتوزيع الشحني لكل من التوزيعات التيارية لثنائي قطب كهربي نقطي قصير طوله $d\ell$, حيث $|z| < \frac{d\ell}{2}$.

(a) $I(z) = I_0 \cos \alpha z$

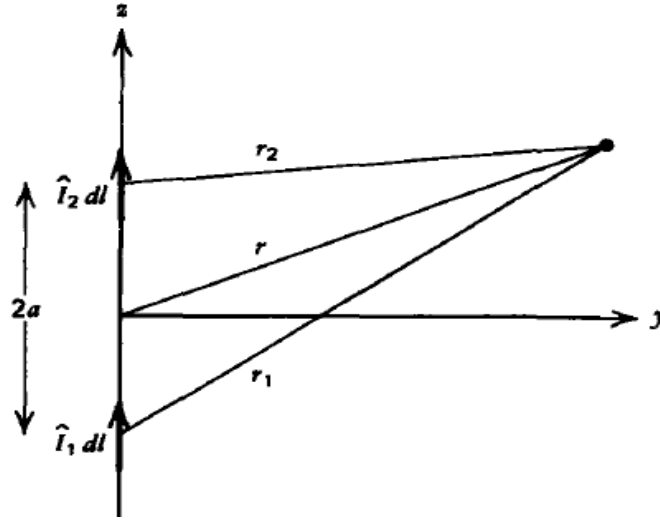
(b) $\hat{I}(z) = I_0 e^{-\alpha|z|}$

(c) $\hat{I}(z) = I_0 \cosh \alpha z$

(10.4) جد المعدل الزمني لكثافة القدرة , والمعدل الزمني للقدرة الكلية لثنائي قطب مغناطيسي نقطي ؟

(10.5) جد العلاقة بين خطوط المجال المغناطيسي مع متجه الجهد المغناطيسي $\mathbf{A}$, ثم جد معادلة خطوط هذا المجال ؟

(10.6) وضع ثنائيي اقطاب كهربية على محور z وعلى نفس الخط بحيث كان البعد بينهما $2a$, اذا كان تياراهما متساوي ولكن فرق الطور بينهما χ (كما في الشكل ادناه)



جد ما يلي :

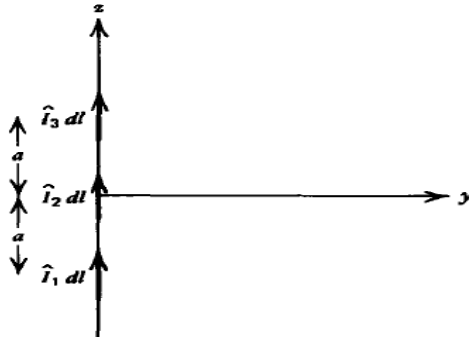
(a) المجال الكهربائي والمغناطيسي البعيدين ؟

(b) المعدل الزمني لكثافة القدرة ؟

(c) اذا كانت $2a = \lambda/2$, جد قيم χ التي تعطي مصفوفة واسعة الجانب *Broadside Array* ؟

(10.7) جد المطلوب في الفروع (a-c) من السؤال (10.6) لعدد $(2N+1)$ من ثنائيات الأقطاب المتساوية البعد بينها وعلى محور z , اذا كان فرق الطور يزداد بمقدار χ_0 ؟

(10.8) وضعت ثلاثة من ثنائي القطب الكهربائي على محور z (كما في الشكل ادناه)



اذا كانت اطوالها متساوية ($d\ell$) جد ما يلي:

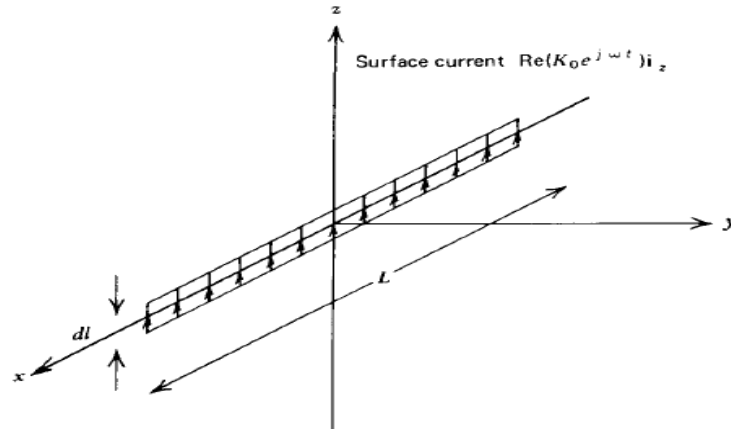
(a) المجال الكهربائي والمغناطيسي في المدى البعيد ؟

(b) المعدل الزمني لكثافة القدرة ؟

(c) الزوايا التي تجعل كثافة القدرة صفراً أو عظمى في حالات التيار التالية :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \hat{I}_1 &= \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = 2I_0 \\ \text{(ii)} \quad \hat{I}_1 &= \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = -2I_0 \\ \text{(iii)} \quad \hat{I}_1 &= -\hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = 2jI_0 \end{aligned}$$

(10.9) وضع عدد من ثنائيات الأقطاب النقطية والمتساوية المسافات بينها على محور x (كما في الشكل المرفق)



فإذا مر بهذا الهوائي تيار سطحي في نفس الطور وشدته $\hat{z} \text{Re}[K_0 e^{j\omega t}]$, جد ما يلي:

(a) المجالات في المدى البعيد ؟

(b) الزوايا التي تجعل كثافة القدرة صغرى أو عظمى ؟

(10.10) جد المجالات في المدى البعيد , المعدل الزمني لكثافة القدرة في الحالات التالية لتوزيعات التيار لثنائي قطب طويل .

$$(a) \quad \hat{I}(z) = \begin{cases} I_0(1 - 2z/L), & 0 < z < L/2 \\ I_0(1 + 2z/L), & -L/2 < z < 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \hat{I}(z) = I_0 \cos \pi z/L, \quad -L/2 < z < L/2$$

(c) جد في هذه الحالات مقاومة الإشعاع في حالة $kL \ll 1$ ؟

المراجع

- (1) Richard L. Coren, *Basic Engineering Electromagnetics an Applied Approach*, Prentice - Hall International Inc., 1st ed., Englewood Cliffs, NJ (1989).
- (2) William H. Hayt Jr. and John A.Buck, *Engineering Electromagnetis* , 6th ed., McGraw Hill, New York (2001).
- (3) Markus Zahn, *Electromagnetics Field Theory: A Problem Solving Approach*, 1st ed., Cambridge, MA (1988).
- (4) Richard Carter, *Electromagnetism for electronics Engineers*, 1st ed., Bookboon,com (2010).
- (5) Balanis, C.A., *Antenna Theory Analysis and Design*, 1st ed., Harper & Row Publishers, Incorporated, New York (1982).
- (6) Davidson, C.W., *Transmission Lines for Communications*, 1st ed. , John Wiley&sons, Inc., New York (1978)
- (7) Joseph A.Edminstir, *Electromagnetics, Schaum' outline series in Engineering*, 1st ed., McGraw Hill Book Company, New York (1979).
- (8) John D. Kraus, *Electromagnetics*, 3rd ed., McGraw Hill Inc., Tokyo (1984).
- (9) John R. Reitz and Frederic J. Milford, *Foundation of Electromagnetic Theory*, Addison Wesely Publishing Company, 2nd ed.,Reeding (1969).
- (10) Munir H. Nayfeh and Morton K. Brussel, *Electricity and Magnetism*, 1st ed.,John Willey Sons Inc., Canada (1985).
- (11) Paul Lorrain, Dole R. Corson, and Francois Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 3rd ed., W.H. Freeman Company, New York (1988).

(12) Bo Thide', *Electromagnetic Field Theory*, 2nd ed., <http://www.plasma.uu.se/CED> book (2012).

(13) Ramo,S. ,J.R . Whimery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics* , 3rd ed. ,John Wiley and Sons, New York (1990).

(14)Buck, J.A. , *Fundamentals of Optical Fibers*, Wiley- Interscience, 1st ed. , New York(1995).

(15) Jordan, E. C., and K.G. ,Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd ed., Prentice - Hall , Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1968).

حلول تمارين فصول الكتاب

الفصل الأول

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{(1)(4) + (4)(2) + (3)(-4)}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{16+4+16}} = 0 \quad (1.1)$$

$$\theta = 90^\circ$$

الزاوية بين المتجهين زاوية قائمة , اذن المتجهان متعامدان.

(1.2) اذا كان $A = B - C$, برهن صحة قانون جيب التمام ؟

الحل:

$$A \cdot A = (B - C) \cdot (B - C) = B^2 + C^2 - B \cdot C - C \cdot B$$

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2B \cdot C$$

(1.3) اذا كان A متجه ثابت وكان R متجه موقع النقطة (x, y, z) من نقطة الأصل , برهن ان : $(R - A) \cdot R = 0$ يمثل معادلة كرة ؟

الحل:

$$A = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}, \quad R = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$(R - A) = (x - a)\hat{x} + (y - b)\hat{y} + (z - c)\hat{z}$$

$$(R - A) \cdot R = 0 = x(x - a) + y(y - b) + z(z - c)$$

$$= x^2 - ax + y^2 - by + z^2 - cz$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/4$$

هذه معادلة دائرة , حيث احداثيات مركزها $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ ونصف قطرها

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/4}$$

(1.4) في السؤال (1.4) اثبت ان $\nabla(A.R) = A$ ؟

الحل:

$$\begin{aligned}\nabla(A.R) &= \hat{x} \frac{\partial(ax)}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial(ay)}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial(az)}{\partial z} \\ &= a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = A\end{aligned}$$

(1.5) برهن ان $\nabla.R = 3$, حيث R متجه الموقع للنقطة (x,y,z) من نقطة الأصل؟

الحل:

$$\nabla.R = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(1.6) اذا اكان B متجه ما , برهن ان $(B.\nabla)R = B$ ؟

الحل:

$$B.\nabla = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}(B.\nabla)R &= B_x \frac{\partial(x\hat{x})}{\partial x} + B_y \frac{\partial(y\hat{y})}{\partial y} + B_z \frac{\partial(z\hat{z})}{\partial z} \\ &= \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z = B\end{aligned}$$

(1.7) جد متجه الوحدة العمدي على السطح $x^2 + y^2 - z = 6$ عند النقطة $(2,3,7)$ ؟

الحل:

$$\hat{n} = \nabla f / |\nabla f|$$

حيث:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\hat{n} = \frac{(2x\hat{x} + 2y\hat{y} - \hat{z})}{\sqrt{(4x^2 + 4y^2 + 1)}} = \frac{\sqrt{53}}{53} (4\hat{x} + 6\hat{y} - \hat{z})$$

$$(1.8) \text{ جد } \nabla f(r) , \text{ حيث } f(r) = \frac{1}{r} , r = |\mathbf{R}|$$

الحل:

$$\nabla r = \nabla |\mathbf{R}| = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \nabla r = \left(-\frac{1}{r^2}\right) \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = -\frac{\mathbf{R}}{r^3}$$

$$(1.9) \text{ جد التكامل الخطي للمتجه } \mathbf{F} = x\hat{x} + x^2\hat{y} \text{ من النقطة } (-1,0) \text{ الى } (1,0) \text{ عبر مسار محور السينات؟}$$

الحل:

على محور السينات : $y = 0$, وعليه , $dy = 0$, اذن

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int xdx + x^2dy = \int_{-1}^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0$$

$$(1.10) \text{ برهن صحة المتطابقة التالية باستخدام الإحداثيات الإسطوانية}$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

$$\text{حيث } \mathbf{A} = 30e^{-\rho} \hat{\rho} - 2z\hat{z} , \text{ والحجم المحصور بين المستويات : } z = 5, \rho = 2$$

$$\rho = 0, z = 5 \text{ (كما في الشكل 1.9) ؟}$$

الحل:

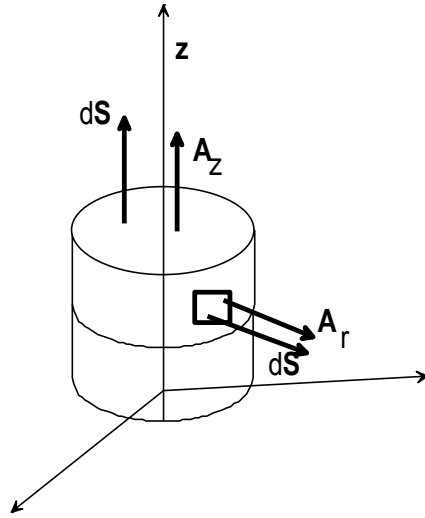
$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{bottom} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{top} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{side} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

حيث : $A_z = 0$, at $z = 0$, لذلك يكون التكامل السطحي عند القاعدة صفرا , وعليه

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-2)(5)\hat{\mathbf{z}} \cdot r d\mathbf{r} d\phi \hat{\mathbf{z}} \\
&\quad + \int_0^5 \int_0^{2\pi} 30e^{-2}\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot 2d\phi dz \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
&= 60e^{-2}(2\pi(5) - 10(2\pi)(2)) = 129.4
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(30\rho e^{-\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = \frac{30e^{-\rho}}{\rho} - 30e^{-\rho} - 2$$

$$\begin{aligned}
\int \nabla \cdot \mathbf{A} d\mathbf{v} &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\frac{30e^{-\rho}}{\rho} - 30e^{-\rho} - 2 \right) r d\mathbf{r} d\phi dz \\
&= 129.4
\end{aligned}$$



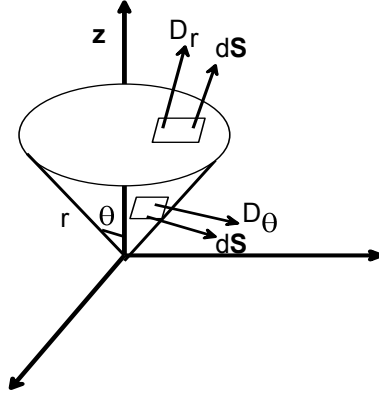
شكل (1.9) التكامل السطحي والحجمي بالإحداثيات الإسطوانية.

(1.11) برهن صحة المتطابقة المعطاة في سؤال (1.10) ,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} d\mathbf{v}$$

بإستخدام الإحداثيات الكروية , علما ان $\mathbf{D} = \frac{5r^2}{4} \hat{\mathbf{r}}$, والحجم محدود بالمستوى , $r = 4 \text{ m}$ ؟ $\theta = \pi/4$

الحل:



شكل (1.11) التكامل الحجمي والسطحي بالإحداثيات الكروية.

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{4\pi} \frac{5(4)^2}{4} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} (4)^2 \sin \theta d\theta d\phi = 589.1$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{5r^2}{4} \right) = 5 r$$

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 (5r) \sin \theta dr d\theta d\phi = 589.1$$

الفصل الثاني

(2.1) شحنتان نقطيتان $Q_1 = 50\mu C$, $Q_2 = 10\mu C$ موضوعتان عند $(-1, 1, -3)$, $(3, 1, 0)$ على الترتيب . جد القوة المؤثرة على الشحنة Q_1 ؟

الحل:

$$\mathbf{r}_{21} = \hat{x}(x_1 - x_2) + \hat{y}(y_1 - y_2) + \hat{z}(z_1 - z_2) = -4\hat{x} - 0\hat{y} - 3\hat{z}$$

$$|\mathbf{r}_{21}| = [(-4)^2 + (-3)^2]^{0.5} = 5 \rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_{21}}{|\mathbf{r}_{21}|}$$

$$= \frac{-4\hat{x} - 0\hat{y} - 3\hat{z}}{5}$$

إذن , بإستخدام قانون كولوم , نجد ان القوة المؤثرة على الشحنة Q_1 من الشحنة Q_2 , $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21}$,

$$\mathbf{F}_1 = 9 \times 10^9 \frac{QQ}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

$$= (9 \times 10^9)(50 \times 10^{-6})(10 \times 10^{-6}) \frac{(-4\hat{x} - 3\hat{z})}{5^3}$$

$$= (0.18)(-0.8\hat{x} - 0.6\hat{z}) = -0.144\hat{x} - 0.108\hat{z}$$

(2.2) جد القوة الكهربائية المؤثرة على شحنة نقطية $50 \mu C$ عند النقطة $(0, 0, 5)m$ والناجمة عن قرص دائري مشحون بانتظام بشحنة $500\pi \mu C$ ونصف قطره $r = 5 m$ موضوع في مستوى xy ؟

الحل:

نعتبر عنصر مساحة على سطح القرص كالتالي : $ds = r dr d\phi$ وكثافة الشحنة السطحية ρ_s , وعليه تكون شحنة هذا العنصر dQ كالتالي:

$$dQ = \rho ds = \rho_s r dr d\phi$$

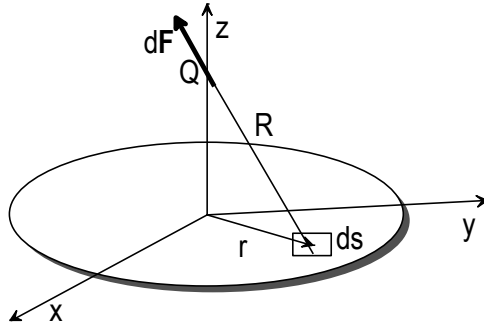
لنفرض ان بعد العنصر عن مركز القرص (نقطة اصل الإحداثيات كما في الشكل المبين) r , بينما بعد هذا العنصر عن الشحنة النقطية R , وبدلالة المتجهات : $\mathbf{R} = -r\hat{\mathbf{r}} + 5\hat{\mathbf{z}}$, حيث $R = \sqrt{(r^2 + 25)}$. بما ان شحنة القرص موزعة بانتظام على سطحه فإن :

باستخدام قانون كولوم , فإن القوة المؤثرة على الشحنة النقطية من العنصر السطحي تكون كالتالي:

$$d\mathbf{F} = \frac{(9 \times 10^9)(50 \times 10^{-6})(\rho_s r dr d\phi)}{(r^2 + 25)} \left(\frac{-r\hat{r} + 5\hat{z}}{\sqrt{r^2 + 25}} \right)$$

وبسبب تماثل القرص حول محور z فإن مجسلة مركبات هذه القوة الشعاعية (في اتجاه $\hat{r}$) لجميع عناصر القرص تتلاشى ولا يبقى سوى المركبات في اتجاه $\hat{z}$, وبالتكامل على جميع عناصر القرص نجد ان:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \frac{(9 \times 10^9)(50 \times 10^{-6})(0.2 \times 10^{-4})(5r dr d\phi)}{(r^2 + 25)\sqrt{r^2 + 25}} \hat{z} \\ &= 90\pi \int_0^5 \frac{r dr}{(r^2 + 25)^{3/2}} \hat{z} = 90\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + 25}} \right]_0^5 \hat{z} = 16.56 \hat{z} \end{aligned}$$



(2.3) جد شدة المجال الكهربائي عند النقطة (0,0,5) والناتج عن الشحنة $Q_1 = 0.35\mu C$,الموضوعة عند النقطة (0,4,0) والشحنة $Q_2 = -0.55\mu C$ الموضوعة عند (3,0,0) ؟

الحل:

$$\mathbf{r}_1 = -4\hat{y} + 5\hat{z}.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1| &= \sqrt{(-4)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_2 = -3\hat{x} + 5\hat{z} ,$$

$$|r_2| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{34}$$

$$E_1 = 9 \times \frac{10^9 (0.35 \times 10^{-6}) ((-4\hat{y} + 5\hat{z}))}{41 \sqrt{41}}$$

$$= -48.0\hat{y} + 60\hat{z}$$

$$E_2 = 9$$

$$= 74.9\hat{x} - 124.9\hat{z}$$

$$E = E_1 + E_2 = 74.9\hat{x} - 48.0\hat{y} - 64.9\hat{z} \quad \text{V/m}$$

(2.4) وزعت شحنة بانتظام على سلك مستقيم لانهائي الطول بكثافة طولية ρ_ℓ . جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة p الواقعة على بعد r عموديا من منتصف السلك؟

الحل:

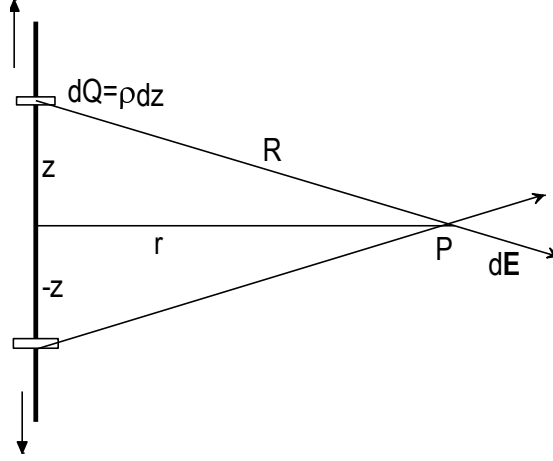
نستخدم الإحداثيات الأسطوانية و نعتبر عنصر طولي dz من السلك على بعد z من منتصف السلك , وشحنته $dQ = \rho_\ell dz$, شدة المجال الكهربائي من العنصر هي:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(r\hat{r} - z\hat{z})}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

بسبب تناظر عناصر الطول فوق وتحت محور z , فان مركبات شدة المجال في اتجاه هذا المحور تتلشى , وعليه , نجد شدة المجال الكهربائي المحصل بتكامل المركبات الشعاعية للمجال الناتج عن العناصر (كما في الشكل ادناه) كالتالي:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_\ell r dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{r}$$

$$= \frac{\rho_\ell r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{r} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$



(2.5) وزعت شحنة كهربائية بانتظام على سطح مستوي لانهائي موضوع في مستوى xy (كما في الشكل المرفق ادناه) بكثافة سطحية ρ_s , جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة على محور z ؟

الحل :

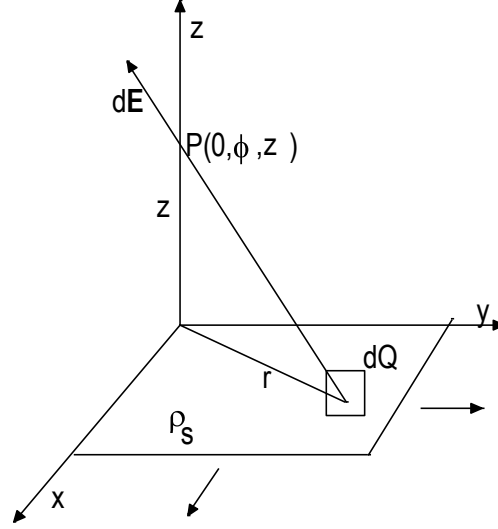
من الشكل وباستخدام الإحداثيات الأسطوانية , نجد ان شدة المجال الكهربائي هو:

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)} \left(\frac{-r\hat{r} + z\hat{z}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

بسبب تماثل العناصر السطحية للشحنات حول محور z فان مركبات المجال الشعاعية الناتج من هذه العناصر تتلاشى فقط يتم التكامل على المركبات في اتجاه هذا المحور كالتالي:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_s r z dr d\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^\infty = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \end{aligned}$$

نلاحظ ان شدة المجال الكهربائي عمودي على المستوى المشحون ومقداره لا يعتمد على البعد عن ذلك المستوى .



(2.6) صفيحة منتظمة الشحنة $\rho_s = \frac{1}{(3\pi)} \text{ nC/m}^2$ موضوعة عند $z=5$, كما يوجد خط شحني منتظم عند $z=-3, y=3$ حيث كثافة الشحنة الطولية : $z=-3, y=3$. $\rho_\ell = \left(-\frac{25}{9}\right) \text{ nC/m}$. جد شدة المجال الكهربائي عند النقطة $(x,-1,0)$ ؟

الحل:

في الشكل المبين ادناه نعتبر المستوى yz وعليه تكون شدة المجال الكهربائي الناتجة من الصفيحة عند النقطة p

$$\mathbf{E}_s = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_s = -6\hat{\mathbf{z}}$$

تكون شدة المجال الكهربائي الناتج عن خط الشحنة عند النقطة p كالتالي :

$$\mathbf{E}_\ell = \frac{\rho_\ell}{2\pi r \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

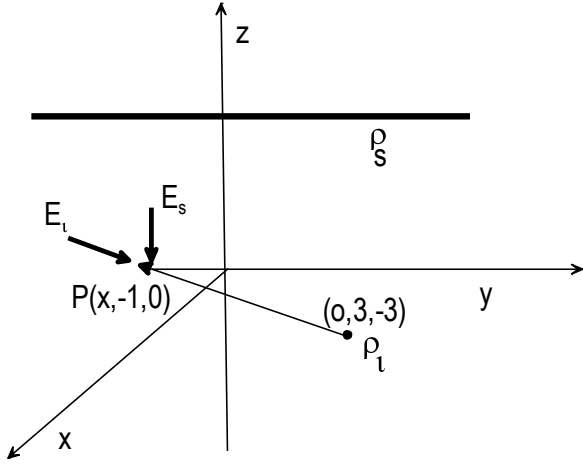
$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{y}}(3+1) + \hat{\mathbf{z}}(-3-0) = 4\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{z}}$$

$$r = \sqrt{(3+1)^2 + (-3-0)^2} = 5$$

$$\mathbf{E}_\ell = 8\hat{\mathbf{y}} - 6\hat{\mathbf{z}}$$

وعليه , تكون شدة المجال الكلي عند النقطة p كما يلي : $E_T = E_\ell + E_s$

$$E_T = 8\hat{y} - 12\hat{z}$$



(2.7) جد شدة المجال الكهربائي الناتج عن قرص مشحون بانتظام ρ_s عند نقطة على محور القرص وتبعد عن مركزه مسافة h , اذا كان نصف قطره a ؟

الحل:

نستخدم الإحداثيات الأسطوانية , ونعتبر عنصر سطحي على القرص مساحته كما يلي :

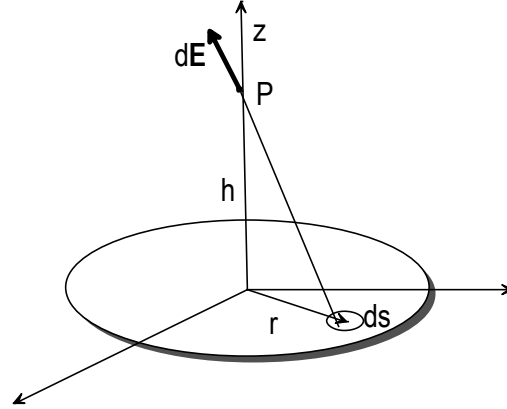
$ds = r dr d\phi$, وعليه , تكون شدة المجال الكهربائي عند النقطة على المحور والناتج عن هذا العنصر كما يلي:

$$dE = \frac{\rho_s r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + h^2)} \left(\frac{-r\hat{r} + h\hat{z}}{\sqrt{(r^2 + h^2)}} \right)$$

وبسبب تماثل القرص حول محور z تتلاشى المركبات الشعاعية (في اتجاه r) ويبقى فقط المركبات في اتجاه محور z , او

$$E = (\rho_s h)/4\pi\epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\phi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$E = \frac{\rho_s h}{2\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{1}{h} \right) \hat{z}$$



(2.8) جد الشحنة الكلية الموزعة على حجم ما ، اذا كانت كثافة الشحنة الحجمية كالتالي:

$$\rho = \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4}$$

حيث $1 \leq r \leq 2$ ؟

الحل:

$$Q = \iiint \rho \, dv$$

نستخدم الإحداثيات الكروية للعنصر الحجمي:

$$dv = r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} \right) r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 5\pi \text{ Coul}$$

(2.9) جد صافي الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق S والذي يحتوي على مجموعة الشحنات الكهربائية التالية:

$$Q_1 = +30 \text{ nC}, Q_2 = 150 \text{ nC}, Q_3 = -70 \text{ nC}$$

الحل:

$$\Psi_{\text{net}} = Q_{\text{enc}} = 30 + 150 - 70 = 110 \text{ nC}$$

(2.10) قرص دائري نصف قطره 4m وكثافة شحنته السطحية تتبع العلاقة التالية :

$$\rho_s = 12 \sin \phi \text{ , جد صافي الفيض الكهربائي الذي يخترق سطح مغلقا , محيطا بالسلك ؟}$$

الحل:

$$\Psi = Q = \int_0^{2\pi} \int_0^4 12 \sin \theta r dr d\theta = 0$$

وتفسير ان صافي الفيض الكهربائي = صفرا يعود الى ان القرص يحتوي على شحنات سالبة مساوية للشحنات الموجبة حيث ان: $\sin(\phi + \pi) = -\sin \phi$.

(2.11) وضعت شحنة $Q = 30 \text{ nC}$ عند نقطة الأصل , جد كثافة الفيض الكهربائي عند النقطة (1,3,-4)؟

الحل:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{R} = \hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z} \text{ , } R = \sqrt{26}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{30 \times 10^{-9}}{4 \times (3.14) \times 26} \left(\frac{\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}}{\sqrt{26}} \right) \\ &= (9.18 \times 10^{-11}) \left(\frac{\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}}{\sqrt{26}} \right) \end{aligned}$$

او

$$D = 91.8 \text{ pC/m}^2$$

(2.12) خط شحني منتظم بكثافة خطية ρ_ℓ موضوع على محور اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها a وكثافة شحنتها السطحية ρ_s , على فرض ان التوزيعات الشحنية غير متناهية , جد بإستخدام قانون جاوس كثافة الفيض الكهربائي في جميع المناطق المبينة ادناه ؟

الحل:

$$0 \leq r \leq a \quad \bullet$$

نفرض ان سطح جاوس على هيئة اسطوانة نصف قطرها r وطولها L وعلية يكون قانون جاوس كالتالي:

$$\rho_\ell L = D(2\pi r L) \Rightarrow D = \frac{\rho_\ell}{2\pi r} \Rightarrow D = \frac{\rho_\ell}{2\pi r} \hat{r}$$

$$r > a \quad \bullet$$

$$(\rho_\ell L + \rho_s 2\pi a L) = D(2\pi r L) \Rightarrow D = \frac{(\rho_\ell + 2\pi a \rho_s)}{2\pi r}$$

(2.13) قشرة اسطوانية دائرية قائمة ونصف قطرها الداخلي والخارجي هما a, b على الترتيب , اذا كانت مشحونة بانتظام بكثافة ρ جد كثافة الفيض الكهربائي في جميع المناطق باستخدام قانون جاوس؟

الحل:

$$r < a \quad \bullet$$

$$Q_{en} = \oiint D \cdot dS \Rightarrow 0 = D(2\pi r L) \Rightarrow D = 0$$

$$a < r < b \quad \bullet$$

$$\pi \rho L (r^2 - a^2) = D(2\pi r L) \Rightarrow D = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2r}$$

$$r > b \quad \bullet$$

$$\pi \rho (b^2 - a^2) L = D (2\pi r L) \Rightarrow D = \frac{\rho (b^2 - a^2)}{2r}$$

(2.14) توزيع شحني كروي منتظم بكثافة حجمية ρ , جد كثافة الفيض الكهربائي داخل وخارج التوزيع اذا كان نصف قطر الكرة a ؟

الحل:

$$r < a \quad \bullet$$

$$\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3 \rho = D (4\pi r^2) \Rightarrow D = \rho r / 3$$

$$r > a \quad \bullet$$

$$\left(\frac{4}{3}\right) \pi a^3 \rho = D (4\pi r^2) \Rightarrow D = \frac{\rho a^3}{4r^3}$$

(2.15) مكثف كهربائي ذو لوحين متوازيين , اذا كانت كثافة الشحنة السطحية للوحين هي $\pm \rho_s$, جد كثافة الفيض الكهربائي بين لوح المكثف وكذلك شدة المجال الكهربائي اذا كان الوسط بينهما هواء؟

الحل:

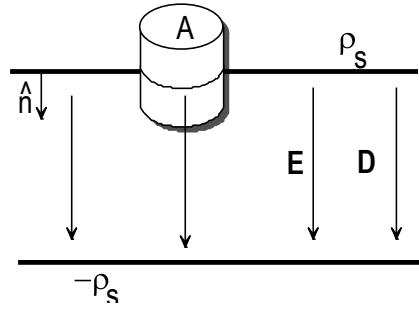
نعتبر سطح جاوس على شكل علبة اسطوانية صغيرة الطول ومساحة وجهها A بحيث تخترق اللوح (كما في الشكل) , بتطبيق قانون جاوس نجد ان:

$$\begin{aligned} Q_{\text{enc}} &= \int_{\text{top}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{side}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \\ &= 0 + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + 0 \end{aligned}$$

$$\rho_s A = D \int ds = DA \Rightarrow D = \rho_s$$

او

$$\mathbf{D} = \rho_s \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$



(2.16) جد تباعد شدة المجال الكهربائي الناتج عن خط شحني منتظم كثافته الطولية ρ_ℓ ؟

الحل:

بإستخدام الإحداثيات الأسطوانية لصيغة التباعد , نجد ان :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r)$$

$$E_r = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \right) = 0$$

(2.17) اثبت ان تباعد كثافة الفيض الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية Q يساوي صفرا ؟

الحل:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{Q}{4\pi r^2}) = 0$$

(2.18) جد الكثافة الحجمية لتوزيع شحني حجمي اذا كانت كثافة الفيض الكهربائي هي:

$$\mathbf{D} = \frac{Q(1 - \cos 3r)}{\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

الحل:

نستخدم الصورة التفاضلية لقانون جاوس في الإحداثيات الكروية كالتالي

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{Q(1 - \cos 3r)}{\pi r^2} \right) = \frac{3Q \sin 3r}{\pi r^2}$$

(2.19) جد الشغل اللازم لنقل شحنة نقطية $Q = -20 \text{ nC}$ من نقطة الأصل الى النقطة

(4,0,0) خلال مجال كهربائي شدته : $\mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right) \hat{\mathbf{x}} + 2x\hat{\mathbf{y}}$ ؟

الحل:

$$dw = -Q\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -Q(E_x dx + E_y dy) = -Q\left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx + 0$$

$$\begin{aligned} w = \int dw &= (20 \times 10^{-6}) \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx \\ &= 20 \times 10^{-6} \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^4 + 0 = 80 \mu J \end{aligned}$$

(2.20) جد فرق الجهد الكهربائي بين النقطة $A(4, \frac{\pi}{2}, 0)$ والنقطة $B(4, \pi, 5)$ خلال

المجال الكهربائي الناتج عن خط شحني كثافة شحنته $\rho_\ell = 10^{-9}/2$ موضوع على محور

z ؟

الحل:

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_B^A E_r dr = - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_4^2 \frac{dr}{r} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_2^4 = 6.24$$

Volt

(2.21) جد الجهد الكهربائي عند نقطة على محور حلقة تحمل شحنة $Q = (40/3) nC$ موزعة بانتظام على محيطها , علما بان نصف قطر الحلقة $2 m$ والنقطة تبعد عن المركز مسافة $5 m$ ؟

الحل:

نعتبر عنصر طولي على محيط الحلقة $d\ell$ ويحمل شحنة dQ , يكون الجهد الكهربائي عند النقطة التي تبعد مسافة R كالتالي :

$$V = \int \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$R = \sqrt{(5^2 + 2^2)} = \sqrt{29}, \quad \rho_\ell = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{(\frac{40}{3}) \times 10^{-9}}{2\pi(2)} = \frac{10^{-8}}{3\pi}$$

$$d\ell = r d\phi = 2 d\phi$$

$$V = \int_0^{2\pi} 9 \times 10^9 \frac{(\frac{10^{-8}}{3\pi})}{\sqrt{29}} 2 d\phi = 22.3 \text{ volt}$$

(2.22) اذا كان الجهد الكهربائي لقشرة موصلة كروية نصف قطرها a يعطى بالعلاقة

$$V = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ \frac{V_0 a}{r}, & r > a \end{cases}$$

, جد شدة المجال الكهربائي داخل وخارج القشرة ؟

الحل:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{V_0 a}{r^2} \hat{r}, & r > a \end{cases}$$

الفصل الثالث

(3.1) جد شدة المجال الكهربائي في عازل قابليته الكهربائية تساوي 3.5 , اذا كان الإستقطاب $P = 2.3 \times 10^{-7} \hat{u} \text{ Cm}^{-2}$ ؟

الحل:

بما ان اتجاه المجال الكهربائي في اتجاه الإستقطاب , لذلك نجد ان:

$$E = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} P = 7.42 \times 10^3 \hat{u}$$

(3.2) اذا كانت القوة المتبادلة بين شحنتين نقطيتين موضوعتين في وسط عازل

($\epsilon_r = 5.2$) تساوي $8.6 \times 10^{-3} \text{ N}$, جد القوة المتبادلة بين الشحنتين في الفراغ ؟

الحل:

باستخدام قانون كولوم في الوسط العازل , نجد ان :

$$F_d = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2) = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0 d^2) \frac{1}{\epsilon_r} = F_a / \epsilon_r$$

حيث $F_a =$ القوة المتبادلة في الفراغ , اذن

$$F_a = \epsilon_r F_d = (5.2)(8.6 \times 10^{-3}) = 4.47 \times 10^{-2} \text{ N}$$

نلاحظ ازدياد القوة المتبادلة بين الشحنتين في حالة وجود عازل بينهما مقارنة مع حالة الفراغ .

(3.3) في الشكل (3.12) المنطقة 1 , حيث $(x < 0)$ هي منطقة فراغ , بينما المنطقة 2 , حيث $(x > 0)$ تحوي على وسط عازل ($\epsilon_r = 2.4$) . اذا كان

$$D_1 = 3 \hat{x} - 4 \hat{y} + 6 \hat{z}$$

جد E_2, θ_1, θ_2 ؟

الحل:

متجه الوحدة العمودي على المستوى الفاصل بين الوسطين هو $\hat{x}$, بما انه لا يوجد شحنات حرة على المستوى الفاصل بين الوسطين , لذلك تكون الشروط الحدودية كالتالي:

$$D_{n2} = D_{n1} , \quad E_{2t} = E_{t1}$$

اي

$$D_{x2} = D_{x1} = 3\hat{x}$$

$$E_{z2} = E_{z1} = \frac{6}{\epsilon_0} , \quad E_{y2} = E_{y1} = -\frac{4}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{3}{\epsilon_0} \hat{x} - \frac{4}{\epsilon_0} \hat{y} + \frac{6}{\epsilon_0} \hat{z} \quad \Leftarrow \quad D_1 = \epsilon_0 E_1 \quad \text{حيث ان:}$$

$$D_2 = 3\hat{x} + D_{y2}\hat{y} + D_{z2}\hat{z} \Rightarrow E_2 = E_{x2} \hat{x} - \frac{4}{\epsilon_0} \hat{y} + \frac{6}{\epsilon_0} \hat{z}$$

وحيث ان :

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2 \Rightarrow$$

$$3\hat{x} + D_{y2}\hat{y} + D_{z2}\hat{z} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{x2} \hat{x} - 4\epsilon_r \hat{y} + 6\epsilon_r \hat{z}$$

مقارنة الحدود المتناظرة يعطي:

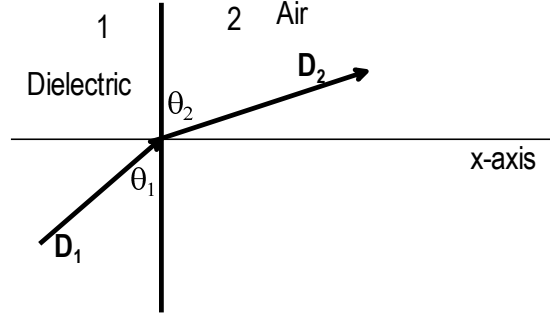
$$E_{x2} = \frac{3}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1.25}{\epsilon_0}, \quad D_{y2} = -4\epsilon_r = -9.6, \quad D_{z2} = 6\epsilon_r = 14.4$$

اما لإيجاد الزوايا , نعتمد على ما يلي:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{x} = |D_1| \cdot \cos(90 - \theta_1)$$

$$3 = \sqrt{61} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 22.6^\circ$$

$$\theta_2 = 8.13^\circ \quad \text{وبنفس الطريقة نجد}$$



شكل (3.12) مستوى فاصل بين عازل وهواء.

(3.4) اذا كانت معادلة المستوى الفاصل بين منطقتي عازل- هواء (شكل 3.13) معطاة كالتالي:

$$3x + 2y + z = 12$$

فاذا كانت السماحية النسبية للعازل عند نقطة الأصل (منطقة 1) تساوي 3.0 , وكان المجال الكهربائي : $E_1 = 2\hat{x} + 5\hat{z}$, جد E_2 ؟

الحل:

نجد اولاً متجه الوحدة العمودي على الوسط الفاصل كالتالي:

$$\Phi = 3x + 2y + z - 12$$

$$\nabla\Phi = 3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z} \Rightarrow |\nabla\Phi| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\hat{n} = \nabla\Phi/|\nabla\Phi| = (3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z})/\sqrt{14}$$

$$E_1 \cdot \hat{n} = 11/\sqrt{14}$$

$$E_{n1} = (11/\sqrt{14})\hat{n} = 2.36\hat{x} + 1.57\hat{y} + 0.79\hat{z}$$

$$E_{t1} = E_1 - E_{n1} = -0.36\hat{x} - 1.57\hat{y} + 4.21\hat{z}$$

من الشروط الحدودية عند السطح الفاصل (لا يوجد شحنات حرة) نجد ان

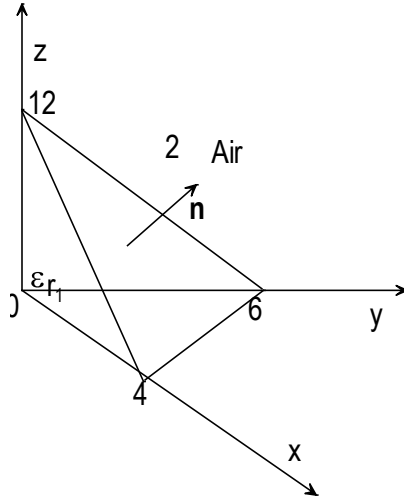
$$E_{t2} = E_{t1}$$

$$D_{n2} = D_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_0 (7.08\hat{x} + 4.71\hat{y} + 2.37\hat{z})$$

$$\mathbf{E}_{n2} = \mathbf{D}_{n2}/\epsilon_0 = 7.08\hat{x} + 4.71\hat{y} + 2.37\hat{z}$$

اذن

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{t2} + \mathbf{E}_{n2} = 6.72\hat{x} + 3.14\hat{y} + 6.58\hat{z}$$



شكل (3.13) مستوى فاصل بين عازل وهواء.

(3.5) جد سعة المكثف المكون من اسطوانتين متحدثتين في المركز وبينهما عازل و طول كل منهما L ونصف قطر الإسطوانة الداخلية والخارجية a, b على الترتيب , علما ان كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلي ρ_s ؟

الحل:

بإستخدام قانون جاوس, حيث سطح جاوس اسطوانة ذات نصف قطر r , نجد ان:

$$\mathbf{D} = \rho_s \frac{a}{r} \hat{r} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{r}$$

فرق الجهد بين الموصليين هو

$$V_{ab} = - \int_b^a \left(\frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \hat{r} \right) \cdot \hat{r} dr = \left(\frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \ln \frac{b}{a}$$

الشحنة الكلية على سطح الإسطوانة الداخلية هي :

$$Q = \rho_s (2\pi a L)$$

اذن:

$$C = Q/V = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r L / \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

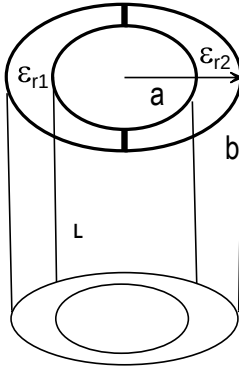
(3.6) في السؤال السابق جد سعة المكثف اذا ملئ نصف الفراغ بين الأسطوانتين بمادة عازلة لها سماحية نسبية ϵ_{r1} بينما ملئ النصف الآخر بمادة عازلة لها سماحية نسبية ϵ_{r2} ؟

الحل:

بما ان السطح الفاصل بين العازلين مواز لكل من $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, لذلك يمكن اعتبار ان هذا النظام مكون من مكثفين متصلين على التوازي , ومساحة كل مكثف نصف المساحة الجانبية للأسطوانة , وعليه تكون السعة الكلية للنظام كالتالي:

$$C = C_1 + C_2 = \pi\epsilon_0\epsilon_{r2}L / \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L / \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\pi\epsilon_0\bar{\epsilon}_r L / \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} \quad \text{حيث :}$$



شكل (3.14) مكثف ذو لوحتين اسطوانيتين بينهما عوازل.

(3.7) جد فرق الجهد عبر كل عازل في المكثف المبين في الشكل (3.15) اذا كان فرق الجهد الكلي عبر لوحتي المكثف 200 فولت ؟

الحل:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0(5)(1)}{10^{-3}} = 5000\epsilon_0 , \quad C_2 = \frac{\epsilon_0(1)}{3 \times 10^{-3}} = 1000\epsilon_0/3$$

حيث ان المكثفان متصلان على التوالي, عليا , تكون السعة الكلية هي:

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 312.5\epsilon_0 = 2.77 \times 10^{-9} \text{ F}$$

وتكون كثافة الفيض الكهربائي خلال المكثف كالتالي :

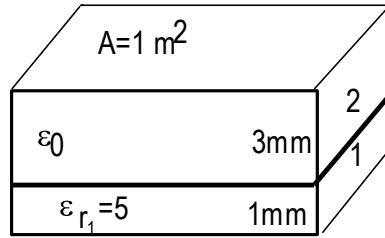
$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} = CV/1$$

$$= \frac{(2.77 \times 10^{-9})(200)}{1} = 5.54 \times 10^{-7} \text{ Coul/m}^2$$

$$E_1 = D/\epsilon_0\epsilon_{r1} = 1.25 \times 10^4 \text{ volt/m} , \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0}$$

$$= 6.25 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$V_1 = E_1 d_1 = 12.5 \text{ volt} , \quad V_2 = E_2 d_2 = 187.5 \text{ volt}$$



شكل (3.15) مكثف كهربائي من طبقة عازل وهواء .

(3.8) اثبت ان شدة المجال الكهربائي الساقط على احد اوجه شريحة عازلة ينفذ من الوجه المقابل بنفس الشدة ؟

الحل:

نفرض ان متجه شدة المجال الساقط على احد اوجه الشريحة $\mathbf{E}_1$, ومتجه شدة المجال الكهربائي عبر الشريحة $\mathbf{E}_2$. بتطبيق الشروط الحدودية على هذا الوجه , نجد ان:

$$E_{t2} = E_{t1}$$

$$D_{n2} = D_{n1} \Rightarrow \epsilon_r E_{n2} = \epsilon_0 E_{n1}$$

فاذا كان متجه شدة المجال الكهربائي النافذ من الوجه الآخر للشريحة $\mathbf{E}_3$, تكون الشروط الحدودية على هذا الوجه كالتالي :

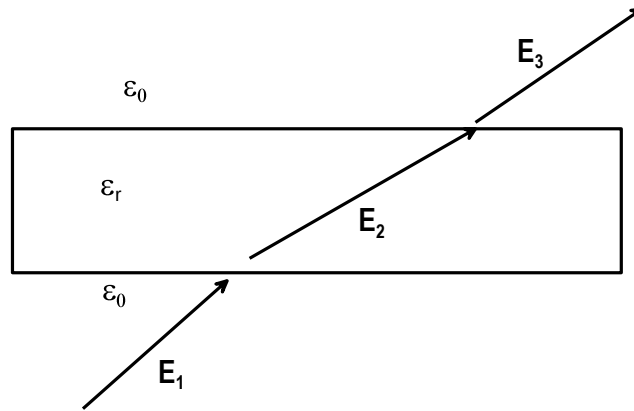
$$E_{t3} = E_{t2} , D_{n3} = D_{n2} \Rightarrow \epsilon_0 E_{n3} = \epsilon_0 E_{n2} ,$$

من هذه العلاقات نحصل على ما يلي:

$$E_{n1} = E_{n3} , E_{t1} = E_{t3}$$

ويتبع ذلك :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_3$$



شكل (3.16) مجال كهربائي يسقط على وجه شريحة من عازل.

(3.9) مكثف ذو لوحين متوازيين تفصلهما مسافة $d = 1.0 \text{ cm}$ والعازل بينهما هواء , اذا كان فرق الجهد بين اللوحين $29 \times 10^3 \text{ V}$. على فرض ان قوة العزل للهواء (اقصى مقدار شدة المجال بين اللوحين حتى يتأين العازل ويصبح موصلا) $30 \times 10^3 \text{ V/cm}$, برهن اذا وضعت شريحة من الزجاج ($\epsilon_r = 6.5$) , الذي له قوة عزل $29 \times 10^3 \text{ V/cm}$ وبسمك قدره $d_2 = 0.20 \text{ cm}$, بين اللوحين فإن الهواء في الجزء المتبقي بين اللوحين يفقد قدرته على العزل؟

الحل:

عند وضع الشريحة الزجاجية يصبح النظام مكون من مكثفين متصلين على التوالي , حيث

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{8 \times 10^{-3}} = 125 \epsilon_0 A$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{2 \times 10^{-3}} = 3250 \epsilon_0 A$$

وحيث ان في حالة التوصيل على التوالي فإن:

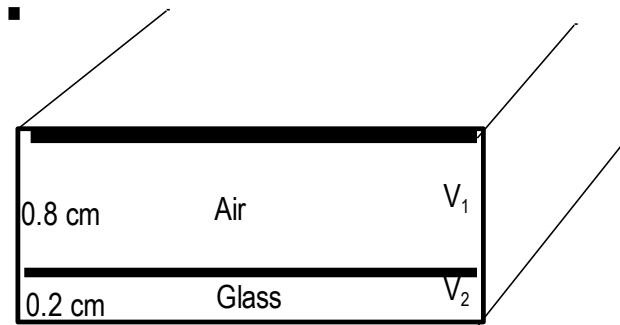
$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2, \quad V_1 + V_2 = V$$

ويتبع من ذلك ما يلي:

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V = \frac{3250}{(125 + 3250)} (29 \times 10^3) = 27926 \text{ volt}$$

$$E_1 = \frac{V_1}{d_1} = \frac{27926}{0.8} = 34907.5 \text{ volt/cm} > 30 \times 10^3 \text{ volt/cm}$$

وعليه لا يستطيع الهواء تحمل قوة المجال الناتجة عن وضع الشريحة.



شكل (3.17) مكثف كهربائي يحتوي على عازل وهواء .

(3.10) اذا كانت المنطقة بين اسطوانتين متحدتين مركزيا" تحوي على كثافة شحنة حجمية ومنتظمة ρ , جد بإستخدام معادلة بويسون مقدار الجهد بين الإسطوانتين ؟

الحل:

بإستخدام الإحداثيات الأسطوانية ,حيث فرق الجهد $V(r)$,فان معادلة بويسون تصبح كالتالي:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho r}{\epsilon}$$

بالتكامل , نجد ان

$$r \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r^2}{2\epsilon} + A \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{2\epsilon} + \frac{A}{r}$$

و بالتكامل مرة اخرى , نجد ان :

$$V(r) = -\rho r^2/4\epsilon + A \ln r + B$$

(3.11) جد دالة الجهد وشدة المجال الكهربائي في المنطقة المحصورة بين اسطوانتين دائريتين ومتحدتين في المركز بإستخدام معادلة لابلاس , علما ان :

$$V(r) = \begin{cases} 0 , at r = 1 mm \\ 150 , at r = 20 mm \end{cases}$$

الحل:

حيث ان الجهد $V(r)$ فقط , لذلك تصبح معادلة لابلاس على الصورة:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dV}{dr} = A = constant$$

بالتكامل مرة اخرى , نجد ان

$$V(r) = A \ln r + B$$

بالتعويض في هذه المعادلة بالقيم المعطاة للجهد , نجد الثوابت كالتالي: $A = 50.1$
 $B = 345.9$

وعليه , تكون دالة الجهد الكهربائي:

$$V(r) = 50.1 \ln r + 345.9 \text{ volt}$$

لإيجاد شدة المجال الكهربائي نتبع ما يلي :

$$E = -\nabla V = -\frac{50.1}{r} \hat{r} \quad \text{volt/cm}$$

(3.12) استخدم صورة الإحداثيات الكروية لمعادلة لابلاس لإيجاد $E, D, \text{ and } \rho_s$ في المنطقة بين قشرتين موصلتين ومتحدتين في المركز وبينهما الفراغ , علما ان دالة الجهد الكهربائي معطاة كالتالي:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{at } r = 0.1 \text{ m} \\ 150, & \text{at } r = 2.0 \text{ m} \end{cases}$$

الحل:

بتكامل معادلة لابلاس مرتين , نحصل على:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dV}{dr} = A \Rightarrow V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

بتعويض القيم الحدودية , نجد قيم الثوابت كالتالي:

$$A = 10.53, B = 105.3$$

وعليه , تكون دالة الجهد كالتالي:

$$V(r) = -\frac{10.53}{r} + 105.3 \quad \text{volt}$$

$$E = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \hat{r} = -\frac{10.53}{r^2} \hat{r} \quad \text{volt/m}$$

$$D = \epsilon_0 E = -\frac{9.32 \times 10^{-11}}{r^2} \hat{r}$$

على سطح القشرة الداخلية, تكون كثافة الشحنة الحجمية كالتالي:

$$\rho_s = D_n = \frac{-9.32 \times 10^{-11}}{(0.1)^2} = -9.32 \times 10^{-13} \quad \text{Coul/m}^3$$

وعلى سطح القشرة الخارجية:

$$\rho_s = D_n = \frac{-9.32 \times 10^{-11}}{(2)^2} = -2.33 \times 10^{-11} \quad \text{Coul/m}^3$$

(3.13) قرصان رقبان موصلان ومتوازيان, اذا كانت المسافة بينهما $5mm$, ويوجد بينهما عازل سماعته النسبية $\epsilon_r = 2.2$, اذا كان الجهد الكهربى على القرص السفلى والعلوى هو $V = 100,250 \text{ volt}$ على الترتيب, جد باستخدام معادلة لابلاس كثافة الشحنة السطحية على كل منهما؟

الحل:

لنفرض ان محور القرص فى اتجاه z (كما فى شكل 3.18), وحيث ان دالة الجهد الكهربى $V(z)$ فان معادلة لابلاس تكون كالتالى:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

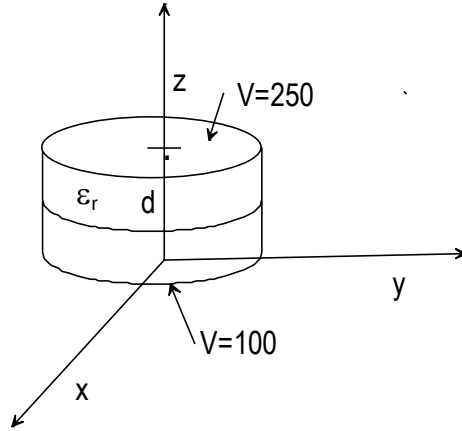
ويكون حل المعادلة كالتالى: $V(z) = Az + B$, حيث A, B ثوابت,

$$A = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{250 - 100}{5 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^4 \text{ volt/m}$$

$$E = -\nabla V = -A\hat{x} = -3 \times 10^4 \text{ volt/m}$$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = -5.84 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

حيث ان D ثابت بين القرصين, فان $\rho_s = D_n = \pm 5.84 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$.



شكل (3.18) قرصان موصلان رقيقان بينهما عازل.

الفصل الرابع

(4.1) يحمل سلك موصل , طويل جدا , تيارا كهربيا شدته $8mA$, اذا كان السلك بإتجاه محور z جد شدة المجال المغناطيسي عند النقطة $(2,3,4)$ ؟

الحل:

بإستخدام قانون بايت - سافارت :

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Id\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{R} = (2 - 0)\hat{\mathbf{x}} + (3 - 0)\hat{\mathbf{y}} + (4 - z)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{حيث}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz \hat{\mathbf{z}} \times [(2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + (4 - z)\hat{\mathbf{z}}]}{4\pi(z^2 - 8z + 29)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz (2\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{x}})}{4\pi(z^2 - 8z + 29)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi} \left[\frac{2(2z - 8)(2\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{x}})}{52(z^2 - 8z + 29)^{3/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{I(2\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{x}})}{26\pi} \\ &= -29\hat{\mathbf{x}} + 196\hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

(4.2) لفة دائرية من سلك موصل نصف قطرها a وتحمل تيار كهربى شدته I , اذا كان مستوى اللفة هو $z = 0$, جد شدة المجال المغناطيسي عند مركزها؟

الحل:

$$d\mathbf{L} = ad\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi} \frac{Iad\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \times (-\hat{\boldsymbol{\rho}})}{4\pi a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{Id\phi}{4\pi a} \hat{\mathbf{z}} = \frac{I}{2a} \hat{\mathbf{z}}$$

(4.3) جد شدة المجال المغناطيسي عند مركز لفة على شكل مربع طول ضلعه L , ويمر بها تيار كهربى شدته I , فى اتجاه مضاد لعقارب الساعة (كما فى شكل 4.19) ؟

الحل:

(1) بإستخدام قانون بايوت- سافارت:

شدة المجال المغناطيسى الناتج عن نصف الضلع المحدد بالمستوى التالى :

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad y = -L/2$$

تكون حسب قانون بايوت - سافارت على النحو:

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{(Id\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \left[-x\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{L}{2}\right)\hat{\mathbf{y}}\right]}{4\pi\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{Id\mathbf{x} \left(\frac{L}{2}\right)\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

ويكون شدة المجال الكلى عند المركز من كافة التيار الكهربى المار فى كل اضلاع المربع:

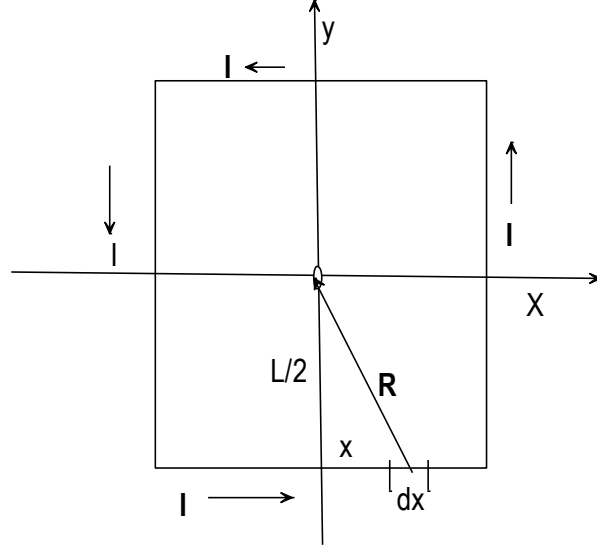
$$\mathbf{H} = 8 \int_0^{L/2} \frac{Id\mathbf{x} \left(\frac{L}{2}\right)\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi L} I \hat{\mathbf{z}}$$

(2) بإستخدام معادلة (4.3) , من الشكل (4.19) نجد ان :

$$\alpha_2 = 45^\circ, \quad \alpha_1 = -45^\circ, \quad \rho = L/2$$

شدة المجال المغناطيسى المحصل عند المركز , الناتج من مرور التيار الكهربى فى اضلاع المربع , هى:

$$\mathbf{H} = 4(I/4\pi L/2) [(\sin 45^\circ) - \sin(-45^\circ)] \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi L} I \hat{\mathbf{z}}$$



شكل (4.19) شدة المجال المغناطيسي عند مركز مربع من الأسلاك الموصلة, المار بها تيار كهربى.

(4.4) جد شدة المجال المغناطيسي عند مركز مثلث متساوي الأضلاع , والمكون من ثلاثة أسلاك موصلة , اذا كانت شدة التيار الكهربى المار فى كل سلك I وطول كل ضلع L ؟

الحل:

نستخدم معادلة (4.3) , حيث

$$\alpha_2 = 60^\circ, \alpha_1 = -60^\circ, \rho = \left(\frac{1}{3}\right) L \sin 60 = L/2\sqrt{3}$$

وعليه ومع اعتبار ان مستوى المثلث هو xy تكون شدة المجال المغناطيسي عند المركز كالتالى:

$$\begin{aligned} H &= 3 \left(\frac{I 2\sqrt{3}}{4\pi L} \right) [\sin 60 - \sin(-60)] \hat{z} \\ &= \frac{9 I}{2\pi L} \hat{z} \end{aligned}$$

(4.5) سلكان موصلان موضعان على محور z بحيث يمتد الأول كالتالى : $-\infty < z < a$, وبينما يمتد الثاني كالتالى : $a < z < \infty$, فاذا كن السلكان يحملان تيار كهربى

شدته I , جد بإستخدام قانون بايوت- سافارت شدة المجال المغناطيسي الناتج عند نقطة تبعد عن محور السلكين مسافة ρ , حيث $z = 0$ ؟

الحل:

لتسهيل الحل نفترض بدل السلكين سلكا متناهما في الطول ويمتد على محور z كالتالي: $-\infty < z < \infty$ ومقطوعا منه جزء ممتد على النحو: $-a < z < a$. وعليه تكون شدة المجال المغناطيسي الناتج عن السلك الكلي حسب قانون امبير الدائري كالتالي :

$$H_1 = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

بينما تكون شدة المجال المغناطيسي الناتج عن الجزء المقطوع كما يلي :

$$H_2 = \int_{-a}^a \frac{Idz \hat{z} \times (\rho\hat{\rho} - z\hat{z})}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \hat{\phi}$$

اذن , تكون شدة المجال المغناطيسي المحصل عند النقطة كما يلي :

$$\begin{aligned} H = H_1 - H_2 &= \frac{1}{2\pi\rho} \hat{\phi} - \int_{-a}^a \frac{Idz \hat{z} \times (\rho\hat{\rho} - z\hat{z})}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{I}{2\pi\rho} - \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{(\rho+z)}} \right]_{-a}^a = \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{(\rho^2+a^2)}} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

(4.6) وضع قرص نصف قطره a في مستوى xy , اذا كانت كثافة الشحنة السطحية σ موزعة بانتظام على السطح وكان القرص يدور بسرعة زاوية ω حول محور z , جد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة ما على محور z المار بمركز القرص؟

الحل:

باستخدام قانون بايوت - سافارت , وتقسيم سطح القرص الى حلقات نصف قطرها ρ , تكون كثافة التيار السطحي K حيث

$$K = \sigma v = \sigma\rho\omega \hat{\phi}$$

$$R = \sqrt{(\rho^2 + z^2)} , \hat{R} = \frac{(z\hat{z} - \rho\hat{\rho})}{R}, \quad ds = 2\pi\rho d\rho$$

$$Idz = Kds$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{Kds \times \hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2} \\ &= \frac{\sigma\rho\omega\hat{\phi} \times (z\hat{\mathbf{z}} - \rho\hat{\rho})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi\rho d\rho \\ H &= \int_0^a \frac{\sigma\omega\rho\hat{\mathbf{z}}}{2(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{\sigma\omega}{2} \left[\sqrt{(\rho^2 + z^2)} - \frac{z^2}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right]_0^a \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\sigma\omega}{2z} \left[\frac{a^2 + 2z^2(1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}})}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

(4.7) اذا كانت كثافة التيار المخترق للمنطقة المحصورة : $0 < r < 0.5$ كالتالي:

$$\mathbf{J} = 4.5e^{-2r} \hat{\mathbf{z}}$$

استخدم قانون امبير لإيجاد شدة المجال المغناطيسي الناتج عن التيار الكهربائي في المناطق التالية :

- $r < 0.5$
- $r > 0.5$

الحل:

- في حالة $r < 0.5$

حيث ان كثافة التيار متماثلة حول نقطة الأصل , لذلك يمكن استخدام قانون امبير الدائري على مسار مغلق نصف قطره r . وعليه ,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$H_\phi(2\pi r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r (4.5e^{-2r}) r dr d\phi$$

بالتكامل المباشر نجد ان :

$$\mathbf{H} = \frac{1.125}{r} (1 - e^{-2r} - 2re^{-2r}) \hat{\phi}$$

• في حالة $r \geq 0.5$

يكون التيار المخترق للمنطقة يساوي عدديا 0.594π . وعليه , يعطي قانون أمبير ما يلي :

$$H_{\phi}(2\pi r) = 0.594\pi \rightarrow \mathbf{H} = \frac{0.297}{r} \hat{\phi}$$

(4.8) موصل كروي نصف قطره $r_0 = 10^{-2} \text{ m}$, جد شدة التيار الكهربى المار في هذا الموصل لنكون شدة المجال مغناطيسي داخل الموصل كالتالى :

$$\text{حيث } a = \pi/2r_0, \quad \mathbf{H} = \frac{10^4}{r} \left(\frac{\sin ar}{a^2} - \frac{r}{a} \cos ar \right) \hat{\phi}$$

الحل:

بإستخدام قانون أمبير الدائري , نجد ان :

$$I_{\text{enc}} = \oint_{r=r} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \frac{10^4}{r_0} \left(\frac{4r_0^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2r_0^2}{\pi} \cos \pi/2 \right) r_0 d\phi$$

$$I_{\text{enc}} = \frac{8 \times 10^4 r_0^2}{\pi} = \frac{8}{\pi} \text{ Amp}$$

(4.9) جد الفيض المغناطيسي المخترق للسطح المحدد بما يلي :

$0 \leq z \leq 1 \text{ m}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, اذا كانت شدة المجال المغناطيسي عند نقاط هذا السطح كما يلي :

$$\mathbf{H} = \frac{2.39 \times 10^6}{r} \cos \phi \hat{r}$$

الحل:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{r} (2.39 \times 10^6 \cos \phi) \hat{r} = \frac{3}{r} \cos \phi \hat{r}$$

$$\Phi = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3}{r} \cos \phi \right) \hat{r} \cdot r d\phi dz \hat{r}$$

$$= 4.24 \text{ Wb}$$

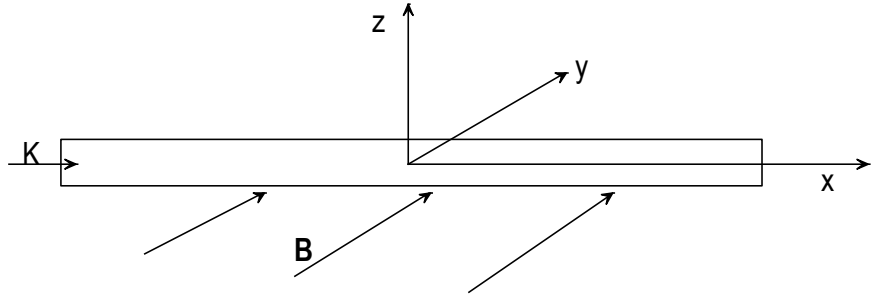
(4.10) شريط موصل , طويل جدا , وعرضه 2 cm , يمر به تيار كهربائي شدته $I = 15 \text{ A}$ كما في الشكل (4.20) , جد القوة لكل وحدة طول المؤثرة على هذا الشريط , اذا وضع في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.2 \hat{y}$ ؟

الحل:

تكون القوة المؤثرة على عنصر سطحي من الشريط كالتالي :

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = K dS \times \mathbf{B} = \left(\frac{15}{0.02} \right) dx dy (0.2) \hat{z}$$

$$\mathbf{F} = \int_{-0.01}^{0.01} \int_0^L 150 dx dy \hat{z} = 3.0 L \hat{z} \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{L} = 3.0 \hat{z}$$



شكل (4.20) : شريط موصل في مجال مغناطيسي ويمر به تيار كهربائي.

(4.11) جد القوة المتبادلة لكل وحدة طول بين موصلين طويلين ومتوازيين , ويحمل كل منهما تيار كهربائي شدته 10 A , علما ان المسافة بينهما 0.2 m (كما في الشكل 4.21) ؟

الحل:

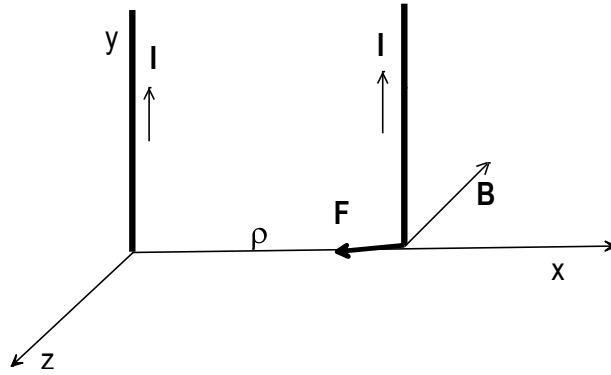
يولد السلك الأيسر مجالا مغناطيسيا عند موقع السلك الأيمن , وتكون كثافة الفيض المغناطيسي كالتالي:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10)}{2\pi(0,2)} = -10^{-5} \hat{\mathbf{z}}$$

وعليه , تكون القوة المؤثرة على السلك الأيمن بفعل المجال الناتج عن السلك الأيسر كما يلي :

$$\mathbf{F} = IL\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{B}(-\hat{\mathbf{z}}) = ILB(-\hat{\mathbf{z}}) = -ILB\hat{\mathbf{x}}$$

$$\frac{F}{L} = -10(10^{-5})\hat{\mathbf{x}} = -10^{-4}\hat{\mathbf{x}}$$



شكل (4.21) القوة المتبادلة بين موصلين متوازيين يمر بهما تيار كهربائي.

(4.12) وضع موصلان , طول كل منهما L والمسافة بينهما d , في مجال مغناطيسي منتظم شدته B (كما في الشكل 4.22) . جد عزم الدوران حول محور y علما ان الموصلين يحملان نفس شدة التيار في اتجاهين متضادين ؟

الحل:

تكون القوة المؤثرة على الموصل الأيسر كما يلي :

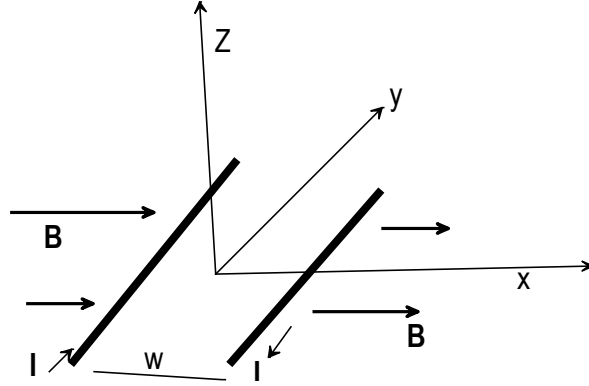
$$\mathbf{F}_1 = IL\hat{\mathbf{y}} \times B\hat{\mathbf{x}} = BIL(-\hat{\mathbf{z}})$$

حيث عزم الدوران للقوة يعرف على النحو التالي: $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, فإن

$$\mathbf{T}_1 = \left(\frac{w}{2}\right) (-\hat{\mathbf{x}}) \times BIL(-\hat{\mathbf{z}}) = BILw/2(-\hat{\mathbf{y}})$$

وكذلك تنتج القوة المؤثرة على الموصل الأيمن نفس العزم الدوراني حول المحور , وعليه يكون عزم الدوران الكلي حول هذا المحور كالتالي:

$$\mathbf{T} = BILw(-\hat{y})$$



شكل (4.22) : عزم الدوران بين موصلين في مجال مغناطيسي .

(4.13) وضع ملف مستطيل الشكل في مجال مغناطيسي كثافة فيضه كالتالي:

$$\mathbf{B} = 0.05 (\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$$

فاذا كان الملف يحمل تيار كهربى شدته $I = 5.0 \text{ A}$, جد عزم الدوران المؤثر على هذا الملف ؟

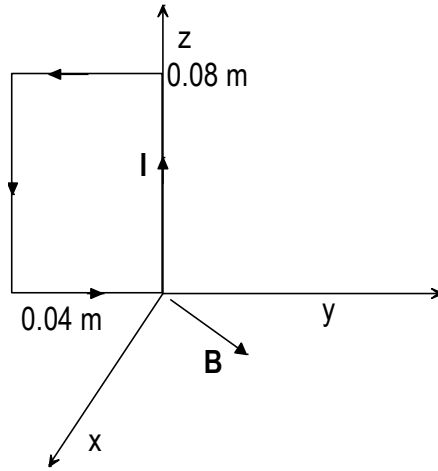
الحل:

العزم المغناطيسي للملف يساوي:

$$\mathbf{m} = I A \hat{n} = 1.6 \times 10^{-2} \hat{x}$$

عزم الدوران :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} &= 1.6 \times 10^{-2} \hat{x} \times \frac{0.05(\hat{x} + \hat{y})}{\sqrt{2}} \\ &= 5.66 \times 10^{-4} \hat{z} \end{aligned}$$



شكل (4.23) ملف به تيار كهربائي موصوع في مجال مغناطيسي.

(4.13) اذا كان متجه المجال المغناطيسي كالتالي:

$$\mathbf{A} = (y \cos ax) \hat{x} + (y + e^x) \hat{z}$$

جد كثافة الفيض المغناطيسي عند نقطة الأصل؟

الحل:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y \cos ax & 0 & y + e^x \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} - e^x \hat{y} - \cos ax \hat{z} \end{aligned}$$

بالتعويض بإحداثيات نقطة الأصل , نجد ان :

$$= \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$$

(4.14) اذا كانت شدة المجال المغناطيسي , الناتج عن مرور تيار كهربى في موصل , تعطى بالعلاقة:

$$H = 20 \rho^2 \hat{\phi}$$

جد شدة التيار المار في هذا الموصل؟

الحل:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho H_{\phi})}{d\rho} = 60\rho \hat{z}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 60\rho \hat{z} \cdot \rho d\rho d\phi \hat{z} = 40\pi \text{ Amp}$$

طريقة أخرى:

نعتبر مسار مغلق دائري نصف قطره $\rho = 1$, نطبق قانون امبير الدائري على النحو:

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} 20 d\phi = 40\pi$$

(4.15) اثبت ان الفيض المغناطيسي المخترق لسطح مغلق يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

الحل:

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

الفصل الخامس

(5.1) (a) جد عزم الدوران المؤثر على الكترون يدور حول النواة في مسار دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ω عند وضعه في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$ يوازي مستوى الدوران؟

الحل:

$$\mathbf{m} = IA\hat{\mathbf{z}} = \frac{e}{\tau}\hat{\mathbf{z}} = \frac{e\omega}{2\pi}(\pi a^2) = \frac{e\omega a^2}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

على فرض ان $\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{\rho}}$, اذن

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{e\omega a^2}{2}\hat{\mathbf{z}} \times B\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{e\omega a^2}{2}B\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

(b) جد السرعة الزاوية لحركة الإلكترون في ذرة الهيدروجين , علما ان $a = 6 \times 10^{-11} \text{ m}$, $B = 0.5 \text{ T}$ ؟

الحل:

في حالة الإتزان الميكانيكي للإلكترون , تتساوي القوة الكهربائية مع القوة المركزية , اي

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = m_e a \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a^2}}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 9.1 \times 10^{-31} (6 \times 10^{-11})^2}} \\ &= 3.42 \times 10^{16} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

(c) جد العزم الدوراني والعزم المغناطيسي للإلكترون بالمعطيات السابقة؟

الحل:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) (3.42 \times 10^{16})(1.6 \times 10^{-19})(0.5)(6 \times 10^{-11})^2$$

$$= 4.93 \times 10^{-24} \text{ N.m}$$

$$m = \frac{T}{B} = 9.86 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

(5.2) مغناطيسي دائمي على شكل جسم اسطواني دائري قائم طوله (L). فإذا كان التمعنط منتظماً وباتجاه محور الاسطوانة . جد العزم المغناطيسي للقضيب علماً ان مساحة مقطعه A ؟

الحل:

نفرض ان القضيب باتجاه محور z , وان $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$,

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv = M_0(LA) \hat{\mathbf{z}}$$

(5.3) برهن ان في حالة المواد المغناطيسية والخطية , تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$M = \frac{\chi_m B}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

الحل:

$$\frac{\chi_m B}{\mu_0(1 + \chi_m)} = \frac{(M/H)B}{\mu_0\mu_r} = \frac{(M/H)B}{\mu} = \frac{M}{H} \quad H = M$$

(5.4) برهن ان في حالة الوسط المتجانس والمتماثل المناحي تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$K = (\mu_r - 1)J_f$$

حيث $K =$ كثافة التيار المغناطيسي السطحية, $J_f =$ كثافة التيار الحقيقي الحجمية.

الحل:

$$\begin{aligned} K &= \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times \left[\frac{B}{\mu_0} - H \right] = \nabla \times \left[\frac{\mu_r B}{\mu_r \mu_0} - H \right] = \nabla \times \left[\frac{\mu_r B}{\mu} - H \right] \\ &= \nabla \times [\mu_r H - H] = (\mu_r - 1)\nabla \times H = (\mu_r - 1)J_f \end{aligned}$$

(5.5) اذا كانت كثافة الفيض المغناطيسي داخل مادة ما ($\chi_m = 3.1$) هي

$$B = 0.4 y \hat{x}$$

جد ما يلي : H, J_m ؟

الحل:

$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H \rightarrow H = \frac{B}{\mu_0 (1 + \chi_m)}$$

اذن

$$H = \frac{0.4 y \hat{x}}{(1 + 3.1)(4\pi \times 10^{-7})} = 77.6 \times 10^3 y \hat{x}$$

$$M = \chi_m H = (3.1)(77.6 \times 10^3) y \hat{x} = 241 \times 10^3 y \hat{x}$$

$$J_m = \nabla \times M = - \left(\frac{dM_x}{dy} \right) \hat{x} = -241 \times 10^3 \hat{z}$$

(5.6) جد قية H في المادة المغناطيسية ($\mu_r = 4.2$) والتي تحتوي على عدد من

الذرات $N = 2.7 \times 10^{29} \text{ atom/m}^3$, اذا كان لكل ذرة عزم مغناطيسي $m = 2.6 \times 10^{-30} \hat{y}$ ؟

الحل:

$$M = Nm = (2.7 \times 10^{29})(2.6 \times 10^{-30}) \hat{y} = 0.7 \hat{y} \text{ A/meter}$$

$$H = \frac{M}{(\mu_r - 1)} = \frac{0.7 \hat{y}}{(4.2 - 1)} = 0.22 \hat{y} \text{ A/m}$$

(5.7) سلك اسطواني الشكل من الحديد ($\mu_r = 1000$) ونصف قطره ($a = 1 \text{ mm}$)

, اذا كان التيار المار فيه منتظم شدته $I = 1 \text{ A}$, جد كثافة التيار الحقيقي الحجمية وكثافة تيار التمغنط الحجمية ؟

الحل:

نطبق قانون امبير الدائري على مسار مغلق نصف قطره ($\rho < a$) كالتالي:

$$\oint H \cdot d\ell = 2\pi\rho H_\phi = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I \Rightarrow H_\phi = I\rho/2\pi a^2$$

$$B = \mu H = \frac{1000\mu I\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

$$\mathbf{B} = \frac{(10^3)(4\pi \times 10^{-7})(1)\rho}{2\pi \times 10^{-6}} \hat{\phi} = 200\rho \hat{\phi} \text{ Wb/m}^2$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\rho}{2\pi} \times 10^6 \hat{\phi} \text{ A/m}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = 1.59 \times 10^8 \rho \hat{\phi}$$

$$\mathbf{J}_f = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho H_\phi)}{d\rho} \hat{z} = 3.18 \times 10^5 \hat{z}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho M_\phi)}{d\rho} \hat{z} = 3.18 \times 10^8 \hat{z}$$

(5.8) في المنطقة (1) المحددة بالعلاقة : $2x + 3y - 4z > 1$, كانت $\mu_{r1} = 2$, بينما في المنطقة (2) المحددة بالعلاقة : $2x + 3y - 4z < 1$, كانت $\mu_{r2} = 5$. اذا كان المجال المغناطيسي في المنطقة (1) كالتالي:

$\mathbf{H}_1 = 50\hat{x} - 30\hat{y} + 20\hat{z}$, جد المركبات المماسية والعمودية للمجال $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ ؟
الحل:

لإيجاد متجه الوحدة العمودي على السطح الفاصل بين المنطقتين , نفرض ان:

$$\psi = 2x + 3y - 4z$$

اذن

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\psi}{|\psi|} = \frac{(2\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z})}{\sqrt{29}} = 0.37\hat{x} + 0.56\hat{y} - 0.74\hat{z}$$

عند السطح الفاصل بين الوسطين , تكون المركبة العمودية للمجال المغناطيسي كالتالي:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{n1} &= (\mathbf{H}_1 \cdot \hat{n}_{21}) \hat{n}_{21} \\ &= [(50\hat{x} - 30\hat{y} + 20\hat{z}) \cdot (0.37\hat{x} + 0.56\hat{y} - 0.74\hat{z})](0.37\hat{x} + 0.56\hat{y} - 0.74\hat{z}) \\ \mathbf{H}_{n1} &= -4.83\hat{x} - 7.24\hat{y} + 9.66\hat{z} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{n1} = 54.83\hat{x} - 22.76\hat{y} + 10.34\hat{z}$$

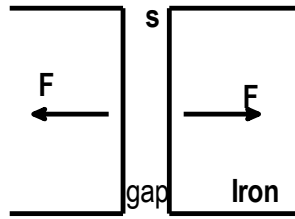
حيث لا يوجد عند السطح الفاصل تيارات سطحية , لذلك تكون المركبات المماسية للمجال المغناطيسي متصلة continuous , اي $H_{t2} = H_{t1}$, وعليه ,

$$\mathbf{H}_{t2} = 54.83\hat{x} - 22.76\hat{y} + 10.34\hat{z}$$

وكذلك تكون الشروط الحدودية لكثافة الفيض المغناطيسي عند السطح الفاصل كالتالي:

$$\begin{aligned}
B_{n2} &= B_{n1} \Rightarrow \mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} \\
H_{n2} &= \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} H_{n1} = (2/5)(-4.83\hat{x} - 7.24\hat{y} + 9.66\hat{z}) \\
&= -1.93\hat{x} - 2.9\hat{y} + 3.86\hat{z} \\
H_2 &= H_{t1} + H_{n2} = 52.9\hat{x} - 25.66\hat{y} + 14.2\hat{z}
\end{aligned}$$

(5.9) دائرة مغناطيسية عاى هيئة ملف حلقي به فجوة هوائية (الشكل 5.22) اتساعها s ومساحة مقطعها A , فاذا كان قلب الملف من مادة مغناطيسية (μ) جد القوة المغناطيسية المتبادلة بين طرفي الفجوة؟



شكل (5.22) القوة المغناطيسية على فجوة هوائية في دائرة مغناطيسية.

الحل:

كثافة الطاقة المغناطيسية الحجمية و المخزونة في المجال المغناطيسي تعطى كالتالي:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

اذا كانت الفتحة ضيقة , يكون المجال منتظم بداخلها وتكون الطاقة المغناطيسية الكلية المخزونة في الفجوة كالتالي:

$$W_m = w_m As = \frac{B^2 As}{2\mu_0}$$

على فرض ان حديد الحلقة مرن , وعند زيادة اتساع الفجوة بمقدار متناهي في الصغر (ds) , مع المحافظة على ثبوت قيمة كثافة الفيض المغناطيسي (B) , فإن الطاقة المغناطيسية المخزونة في الفجوة تزداد بمقدار ما يلي:

$$dW_m = \frac{B^2 A}{2\mu_0} ds = F ds \Rightarrow F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$$

(5.10) جد الطاقة المغناطيسية المخزونة في كرة نصف قطرها ($a = 1cm$) عند وضعها في منطقة مجال مغناطيسي منتظم شدته $H = 600 A/m$ ؟

الحل:

كثافة الطاقة الحجمية :

$$w_m = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \left(\frac{1}{2}\right) \mu_0 H^2 = \left(\frac{1}{2}\right) (4\pi \times 10^{-7})(600)^2 \\ = 0.226 \text{ Joul/m}^2$$

$$W_m = \left(\frac{4}{3}\right) \pi a^3 (w_m) = \left(\frac{4}{3}\right) \pi \times 10^{-6} (0.226) = 0.947 \times 10^{-6} \text{ Joul}$$

(5.11) ملف حلقي مساحة مقطعه $A = 4 \text{ cm}^2$ ومتوسط طوله $\ell = 6 \text{ cm}$, اذا كان قلب الملف مكون من حلقتين , كلا منهما نصف دائرة , ويفصل بينهما فجوتان هوائيتان اتساعهما 4 mm . اذا كانت النفوذية المغناطيسية للأولى $(\mu = 3 \times 10^{-3})$, بينما النفوذية النسبية للحلقة الثانية $(\mu_r = 200)$, وكان عدد لفات الملف 4000 لفة ويمر بها تيار شدته I , جد شدة هذا التيار اذا كان $B = 1.2 \text{ T}$ ؟

الحل:

$$R_1 = \frac{\pi(6 \times 10^{-2})}{(3 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-4})} = 1.57 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_2 = \frac{\pi(6 \times 10^{-2})}{(200)(4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^{-4})} = 1.88 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_g = \frac{0.4 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^{-4})} = 7.96 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$NI = \Phi R_{tot} = BA(R_1 + R_2 + 2R_g) \\ = (1.2)(4 \times 10^{-4})(1.57 + 18.8 + 2 \times 7.96) \times 10^5 \\ = 1.74 \times 10^3 \Rightarrow I = 0.435 \text{ A}$$

(5.12) ملف حلقي حلزوني مساحة مقطعه 2.5 cm^2 ومتوسط طوله 8 cm , اذا كان في الملف فجوة هوائية اتساعها 0.25 mm ومساحة مقطعها التقريبي 2.8 cm^2 , ونفوذية مادة القلب النسبية $\mu_r = 1000$. جد الفيض المغناطيسي المخترق الملف اذا كانت القوة المحركة المغناطيسية $mmf = 200 \text{ A.turn}$ ؟

الحل:

$$R_g = \frac{d}{\mu A_g} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(2.8 \times 10^{-4})} = 7.1 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{core} = \frac{8 \times 10^{-2}}{(1000)(4\pi \times 10^{-7})(2.5 \times 10^{-2})} = 2.6 \times 10^5 \text{ } H^{-1}$$

$$\Phi = \frac{mmf}{(R_g + R_{core})} = \frac{200}{9.7 \times 10^5} = 2.1 \times 10^{-4} \text{ } Wb$$

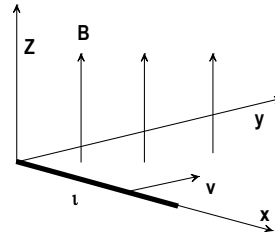
الفصل السادس

(6.1) موصل موضوع بإتجاه محور السينات (شكل 6.9) و طوله 3.0 m , يتحرك بسرعة $\mathbf{v} = 2.5 \hat{\mathbf{y}} \text{ m/s}$ في مجال مغناطيسي منتظم كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.5 \hat{\mathbf{z}} \text{ T}$, جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة ؟

الحل:

بما ان اتجاهي السرعة والمجال المغناطيسي متعامدان , وكذلك طول الموصل عموديا على كلا منهما , فإن

$$\mathcal{V} = Bv\ell = (0.5)(2.5)(3) = 3.75 \text{ volt}$$

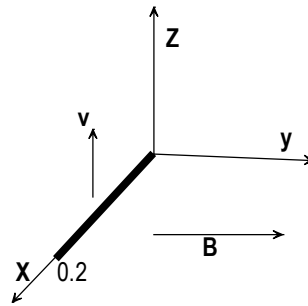


شكل (6.9)

(6.2) جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في موصل (الشكل 6.10) طوله 0.2 m ويتحرك بسرعة كما يلي :

$\mathbf{v} = 2.5 \sin 10^3 t \hat{\mathbf{y}} \text{ m/s}$, في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.04 \hat{\mathbf{y}} \text{ T}$ ؟

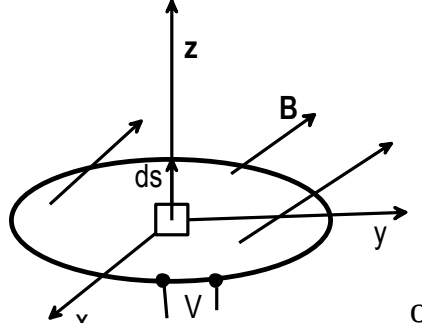
الحل:



شكل (6.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^{0.2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\ell} = \int_0^{0.2} 0.1 \sin 10^3 t (-\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} dx \\ &= -0.02 \sin 10^3 t \text{ volt} \end{aligned}$$

(6.3) لفة موصلة مساحتها $A = 0.65 \text{ m}^2$ موضوعة في مستوى $z = 0$ ويخترقها مجال مغناطيسي كثافة فيضه : $\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ (الشكل 6.11) , جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين طرفي اللفة ؟



شكل (6.11)

الحل:

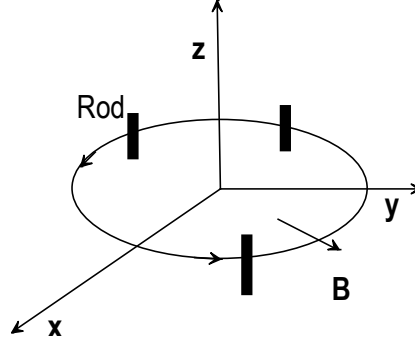
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} = \int_s \frac{50}{\sqrt{2}} \sin 10^3 t (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{S} \hat{\mathbf{z}} \\ &= 23.0 \sin 10^3 t \quad \text{volt} \end{aligned}$$

(6.4) وضعت لفة دائرية نصف قطرها 0.1 m عند المستوى $z = 0$ في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.2 \sin 10^3 t \hat{\mathbf{z}}$, جد التيار التأثيري المار في هذه اللفة علما ان مقاومتها $R = 0.5 \Omega$ ؟

الحل:

$$\begin{aligned} \phi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 2 \times 10^{-3} \pi \sin 10^3 t \\ \mathcal{V} &= - \frac{d\phi}{dt} = -2\pi \cos 10^3 t \\ i &= \frac{\mathcal{V}}{R} = -0.4\pi \cos 10^3 t \end{aligned}$$

(6.5) موصل , طوله 1 cm موازي لمحور z , ويدور في مسار دائري نصف قطره 25 cm بسرعة زاوية 1200 دورة / دقيقة. اذا كان هذا الموصل موضوعا في مجال مغناطيسي كثافة فيضه $\mathbf{B} = 0.5 \hat{\mathbf{r}}$, جد اقوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين طرفي هذا الموصل (شكل 6.12) ؟



شكل 6.12

الحل :

$$(1200 \text{ rev/min}) = (1 \text{ min}/60 \text{ s}) (2\pi \text{ rad/rev}) = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$v = r\omega = (0.25)(40\pi) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 10\pi \hat{\phi} \times 0.5 \hat{r} = 5.0(-\hat{z})$$

$$\mathcal{V} = \int_0^{0.01} 5.0\pi(-\hat{z}) \cdot \hat{z} dz = -5.0 \times 10^{-2} \pi \text{ volt}$$

تعني الإشارة السالبة ان الطرف السفلي للموصل يكون موجبا بالنسبة لطرفه العلوي.

(6.6) يدور قرص دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ω , اذا كان القرص موضوعا في مجال مغناطيسي متعامد مع مستوى القرص و كثافة فيضه $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, جد القوة الدافعة التأثيرية المتولدة بين مركز وحافة القرص ؟

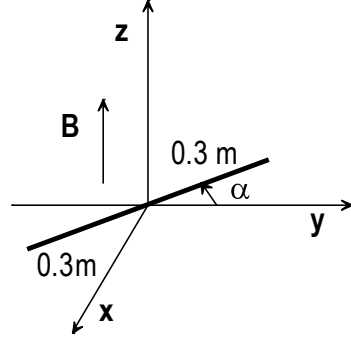
الحل:

$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\phi}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r B \hat{r}$$

$$\mathcal{V} = \int_0^a \omega r B \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{\omega a^2 B}{2}$$

(6.7) يدور ملف مربع الشكل حول محور x بسرعة زاوية $\omega = 60\pi \text{ rad/s}$ في مجال مغناطيسي $\mathbf{B} = 0.80 \hat{z}$, جد مقدار القوة الدافعة التأثيرية المتولدة , اذا كان طول ضلع المربع 0.6 m (الشكل 6.13) ؟



شكل (6.13)

الحل:

لنفرض ان مستوى الملف في البداية كان في مستوى xy , وبعد زمن t يصنع هذا المستوى مع محور y زاوية α , حيث :

$$\alpha = \omega t = 60\pi t \quad (rad)$$

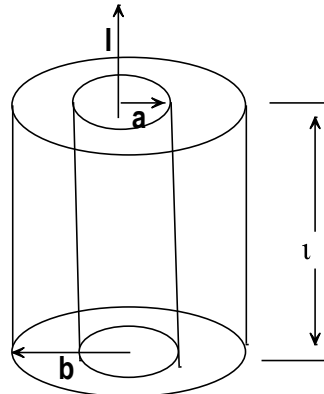
, يكون مسقط مساحة الملف على مستوى xy مساويا للمقدار التالي :

$$A = (0.6)(0.6 \cos 60\pi t) \quad m^2$$

$$\Phi = BA = 0.288 \cos 60\pi t$$

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} = 54.3 \sin 60\pi t \quad volt$$

(6.8) جد المحاثة الذاتية لكل وحدة طول لموصل مكون من اسطوانتين دائريتين متحدتين في المركز ونصف قطريهما $(a, b : b > a)$, ويمر في الاسطوانة الداخلية تيار كهربائي شدته I (الشكل 6.14) , علما ان الوسط بين الاسطوانتين فراغا ؟



شكل (6.14)

الحل:

باستخدام قانون امبير الدائري, نجد ان كثافة الفيض المغناطيسي بين الإسطوانتين كما يلي:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

لإيجاد الفيض المغناطيسي المتشابك بين الإسطوانتين عند السطح, الذي معادلته $\phi = const.$, نعتبر عنصر مساحة على هذا السطح مقداره $dS = dr dz$, ويكون متجة الوحدة العمودية على هذا السطح باتجاه $\hat{\phi}$. وعليه, يكون الفيض المغناطيسي كالتالي:

$$\Phi = \int_0^\ell \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow L/\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

(6.9) ملف حلقي مستطيل الشكل ومحدد بالسطوح: $\rho = 2, \rho = 3, z = 4$ and $z = 4.5$ cm. اذا كان قلب الملف من مادة ($\mu_r = 80$) وعدد لفاته 8000 لفة, جد المحاطة الذاتية لهذا الملف اذا مر به تيار كهربائي I ؟

الحل:

باستخدام قانون امبير الدائري داخل الملف وعلى مسار مغلق نصف قطره ρ , نجد ان

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi\rho H_\phi = NI$$

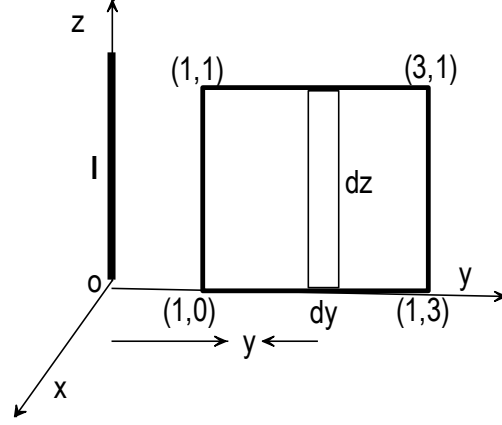
$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{0.04}^{0.045} \int_{0.02}^{0.03} \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi\rho} d\rho dz = 0.005 \times \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi} \ln 1.5$$

$$\Psi = N\Phi$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{0.005(80)(4\pi \times 10^{-7})(8000)^2}{2\pi} \ln 1.5 = 2.08 \text{ H}$$

(6.10) وضع ملف مستطيل الشكل بالقرب من سلك طويل يمر به تيار I في اتجاه محور z , اذا مستوى الملف yz واحداثيات زواياه كالتالي: $(0,1,0), (0,3,0), (0,3,1), (0,1,1)$. وعدد لفاته 150 لفة, جد المحاطة المتبادلة بين الملف والسلك؟.



شكل (6.15)

الحل:

نعتبر عنصر مساحة في داخل الملف كشريط مساحته $dydz$ وعلى بعد y من السلك .
 باستخدام قانون امبير الدائري حول السلك عند موقع عنصر المساحة , نجد ان :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu I}{2\pi y} \hat{x}$$

يكون الفيض المغناطيسي المخترق للملف كالتالي :

$$\Phi = \int_0^1 \int_1^3 \frac{-\mu_0 I \hat{x}}{2\pi y} \cdot (-\hat{x}) dy dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 3$$

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{150\mu_0}{2\pi} \ln 3 = 33 \times 10^{-6} H$$

(6.11) اذا كانت موصلية مادة ما تساوي 10^{-3} , والنفاذية النسبية لها تساوي $\epsilon_r = 2.5$,
 جد كثافة تيار التوصيل وتيار الإزاحة في هذه المادة عند تسليط مجال كهربائي عليها شدته
 $E = 6 \times 10^{-6} \sin 9 \times 10^9 t$ ؟

الحل:

$$J_{cond} = \sigma E = 6 \times 10^{-9} \sin 9 \times 10^9 t \quad A/m^2$$

$$J_{disp} = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = 1.2 \times 10^{-6} \cos 9 \times 10^9 t$$

الفصل السابع

(7.1) اذا كان المجال المغناطيسي في الفراغ يعطى بالعلاقة التالية:

استخدم معادلات ماكسويل لإيجاد المجال الكهربائي في الفراغ؟

الحل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (H_0 e^{i(\omega t + kz)}) \hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$ikH_0 e^{i(\omega t + kz)} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

بالتكامل نجد ان

$$\mathbf{D} = \frac{kH_0 e^{i(\omega t + kz)}}{\omega} \hat{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0}$$

(7.2) اذا كان المجال الكهربائي والمغناطيسي لموجة مستوية , تنتشر في الفراغ , كالتالي

$$k, H_0, E = 30\pi e^{i(10^8 t + kz)} \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{H} = H_0 e^{i(10^8 t + kz)} \hat{\mathbf{y}} \quad ?$$

الحل

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{\omega}{3 \times 10^8} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \text{ rad/m}$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

$$H_0 = \pm \frac{30\pi}{120\pi} = \pm \frac{1}{4} \text{ A/m}$$

لتحديد إشارة سعة المجال المغناطيسي نستخدم معادلة ماكسويل كالتالي

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$ik(30\pi e^{i(10^8 t + kz)})y = -i(10^8)\mu_0 H_0 e^{i(10^8 t + kz)}\hat{y}$$

وعليه تكون الإشارة الصحيحة للمجال المغناطيسي الإشارة السالبة .

(7.3) سطح فاصل بين وسطين موضوع عند $z=0$, اذا كان الوسط الأول ($z < 0$) له $\mu_{r1} = 1.5$, بينما الوسط الثاني ($z > 0$) له $\mu_{r2} = 5.0$, وكان المجال المغناطيسي في الوسطين يعطى كالتالي:

$$\mathbf{B}_1 = 2.4\hat{x} + 10\hat{z}, \quad \mathbf{B}_2 = 25.75\hat{x} - 17.7\hat{y} + 10\hat{z}$$

جد كثافة الشحنة السطحية $\mathbf{K}$ في السطح الفاصل عند نقطة الأصل ؟

الحل

عند نقطة الأصل\

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0 \mu_{r1}} = \frac{1}{\mu_0} (1.6\hat{x} + 6.67\hat{z})$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} (5.15\hat{x} - 3.54\hat{y} + 2\hat{z})$$

تطبيق الشروط الحدودية على المجال المغناطيسي عند السطح الفاصل يعطي

$$\mathbf{K} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{n}_{12}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\mu_0} (-3.55\hat{x} + 3.54\hat{y} + 4.67\hat{z}) \times \hat{z} = \frac{5}{\mu_0} (\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2} \text{ A/m}$$

(7.4) تنتشر موجة مستوية في الفراغ بثابت انتشار 30 rad/m في اتجاه $(-\hat{z})$, اذا كانت سعة المجال المغناطيسي $(1/3\pi) \text{ A/m}$ واتجاهه $(-\hat{y})$. اكتب الجزء الحقيقي للمجالات الكهرومغناطيسية في هذه الموجة , ثم جد تردد وطول الموجة ؟

الحل

$$\mathbf{H}(z, t) = -\frac{1}{3\pi} \cos(\omega t + kz)\hat{y}$$

حيث الانتشار في اتجاه $(-z)$, اذن

$$\frac{E_x}{H_y} = -\eta_0 = -120\pi \Rightarrow E_x = 40 \cos(\omega t + kz)$$

$$\mathbf{E} = 40 \cos(\omega t + kz) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{15} \text{ m}, \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\pi/15} = \frac{45}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz}$$

(7.5) موجة مستوية تنتشر في وسط موصل ($\sigma = 58 \times 10^6 \text{ S/m}$) بتردد

$f = 100 \text{ MHz}$, حيث $\mu_r = 1$. جد الممانعة لهذه الموجة , ثابت الانتشار , وسرعة الموجة؟

الحل

$$\eta = \sqrt{\omega \mu / \sigma} = 3.69 \times 10^{-3} \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{\omega \mu \sigma} = 2.14 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 1.51 \times 10^5$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 6.61 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 4.15 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(7.6) تنتشر موجة مستوية في اتجاه $+z$ في الفراغ ($z < 0$) لتسقط عموديا على عند

$z=0$ على وسط موصل ($z > 0$) له $\sigma = 61.7 \times 10^6$, $\mu_r = 1$. اذا كان

المجال الكهربائي للموجة في الفراغ يعطى بالعلاقة التالية

$$\mathbf{E}(0, t) = 1.0 \sin 2\pi f \hat{\mathbf{y}}, \quad f = 1.5 \text{ MHz}$$

جد $\mathbf{H}(z, t)$, $z > 0$ ؟

الحل

نكتب المجال الكهربائي بدلالة الدالة الأسية المركبة , في منطقة الموصل, كما يلي

$$E(z, t) = 1.0e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \hat{y}$$

حيث

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 1.91 \times 10^4$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = 4.38 \times 10^{-4}, \quad \theta = \pi/4 \rightarrow \eta = 4.38 \times 10^{-4} e^{i\pi/4}$$

حيث ان

$$\frac{E_x}{(-H_y)} = \eta$$

اذن

$$H(z, t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z - \pi/4)} \hat{x}$$

باعتبار الجزء التخيلي للمجال المغناطيسي , نجد ان

$$H(z, t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} \sin\left(2\pi f - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) \hat{x}$$

(7.6) اذا كانت سعة المجال الكهربائي في موجة مستوية ساقطة من الفراغ (منطقة 1) على سطح فاصل لمنطقة اخرى (منطقة 2) تساوي 1.0 V/m , وكانت سعة المجال

المغناطيسي المنعكس $H_0^r = -1.41 \times 10^{-3} \text{ A/m}$, جد μ_{r2} , حيث

$$\sigma = 0, \quad \epsilon_{r2} = 18.5$$

الحل

$$\frac{E_0^r}{H_0^r} = -120\pi = -377\Omega$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - 377}{377 + \eta_2}$$

$$\frac{E_0^i}{H_0^r} = \frac{1.0}{-1.41 \times 10^{-3}} = \frac{-377(377 + \eta_2)}{\eta_2 - 377}$$

ومنه , نجد ان $\eta_2 = 1234 \Omega$.

حيث $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}}$, فإن

$$\eta_2 = 1234 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 (18.5)}} \Rightarrow \mu_{r2} = 198.4$$

(7.7) مصدر كهربى , V , متصل عبر كابل محوري مع مقاومة R (كما في الشكل 7.11). جد متجه بوينتج في العازل بين سلكي الكابل , ثم بتكامل هذا المتجه خلال مقطع عرضي للعازل برهن ان قيمة هذا التكامل تساوي الطاقة الحرارية الضائعة في المقاومة ؟

الحل

باستخدام قانون جاوس نجد ان المجال الكهربى في العازل كالتالى:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s a}{\epsilon r} \hat{\mathbf{r}} : r > a$$

حيث ρ_s كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلى للكابل الذى نصف قطره a .

نجد فرق الجهد بين موصلى الكابل , حيث نصف القطر الخارجى b , كالتالى

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \frac{\rho_s a}{\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

وعليه ,

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \ln(\frac{b}{a})} \hat{\mathbf{r}}$$

نستخدم قانون امبير لإيجاد المجال المغناطيسى كالتالى

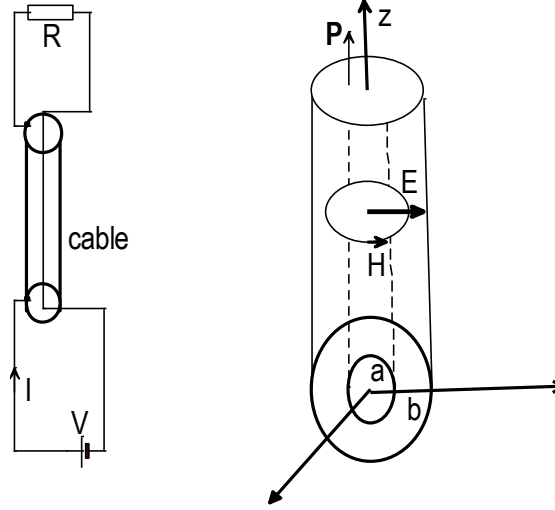
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

يكون متجه بوينتج في العازل ($a < r < b$) كالتالى

بالتكامل . بالعازل . هذه العلاقة تعطي كثافة القدرة اللحظية في العازل . بالتكامل
 $\mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{VI}{2\pi r^2 \ln(\frac{b}{a})} \hat{\mathbf{z}}$
 نجد ان القدرة الكلية اللحظية كالتالي

$$P(t) = \int_S \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{VI}{2\pi r^2 \ln(\frac{b}{a})} \hat{\mathbf{z}} \cdot r dr d\phi \hat{\mathbf{z}} = VI = I^2 R$$

وهذا المقدار يمثل التسخين الجولي في المقاومة.



شكل (7.11) المجالات الكهرومغناطيسية في كابل توصيل محوري.

(7.8) تنتشر موجة كهرومغناطيسية في الفراغ , حيث سعة المجال الكهربائي E_1 (V/m)
 100 , لتسقط عموديا على صفيحة من الفضة سمكها $5 \mu m$ (كما في شكل 7.12). علما ان
 موصلية الصفيحة $\sigma = 61 MS/m$, وتردد الموجة $f = 200 MHz$. جد سعات المجالات
 الكهربائية $E_2, E_3, \text{ and } E_4$ ؟

الحل

تكون ممانعة الفضة عند التردد $200 MHz$, $\eta = 5.06 \times 10^{-3} \Omega$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2(5.06 \times 10^{-3})}{377 + 5.06 \times 10^{-3}} \Rightarrow E_2 = 2.68 \times 10^{-3} \text{ volt/m}$$

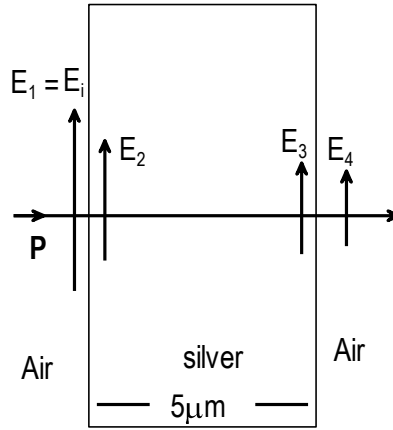
خلال الموصل (الفضة) يكون

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 2.21 \times 10^5$$

حيث يوجد توهين خلال الموصل , لذلك يكون

$$E_3 = E_2 e^{-\alpha z} = (2.68 \times 10^{-3})(e^{-(2.21 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-6})}) \\ = 8.88 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{2(377)}{377 + 5.06 \times 10^{-3}} \Rightarrow E_4 = 1.78 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$



شكل (7.12) انتشار موجة مستوية عبر صفيحة فضية.

(7.11) تنتشر موجة مستقطبة دائريا يساريا في اتجاه محور z , اذا كان المجال الكهربائي كالتالي

$$E(z) = E_s = E_0(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\beta z}$$

جد $\langle p \rangle$ ؟

الحل

نجد مركبات المجال المغناطيسي لكل مرطبة من المجال الكهربائي والتي تحقق الشرط

$$\hat{k} \times E = H, \text{ وعليه يكون المجال المغناطيسي كالتالي}$$

$$H(z) = H_s = \frac{E_0}{\eta}(\hat{y} - i\hat{x})e^{-i\beta z}$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \left(\frac{1}{2} \right) \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \text{Re} \left[E_0 (\hat{x} + i\hat{y}) e^{-i\beta z} \times \frac{E_0}{\eta} (\hat{y} + i\hat{x}) e^{+i\beta z} \right] = \frac{E_0^2}{\eta} \hat{z} \end{aligned}$$

(7.12) تنتشر موجة مستوية في الفراغ حيث المجال الكهربائي كالتالي

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_s = 10e^{-i\beta x} \hat{z} + 15e^{-i\beta x} \hat{y}$$

صف استقطاب هذه الموجة , ثم جد $\langle p \rangle$ ؟

الحل

بما ان فرق الطور بين مركبتي المجال الكهربائي في الموجة ثابت مع المكان والزمان ويساوي الصفر, تكون الموجة مستقطبة خطيا ويقع المجال الكهربائي المحصل للمركبتين في مستوى yz

وينع مع محور y زاوية $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{10}{15} \right) = 33.7^\circ$.

بما ان انتشار الموجة في اتجاه محور x , ان تكون مركبات المجال المغناطيسي تحقق العلاقة الإتجاهية التالية : $\hat{x} \times \mathbf{E}_s = \mathbf{H}_s$, وعليه

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{H}(z) &= \frac{\mathbf{E}_s}{\eta_0} = - (10/377) e^{-i\beta x} \hat{y} + (15/377) e^{-i\beta x} \hat{z} \\ &= -26.5 e^{-i\beta x} \hat{y} + 39.8 e^{-i\beta x} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= (1/2) \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{100}{377} \hat{x} + \frac{(15)^2}{377} \hat{x} \right] \\ &= 0.43 \hat{x} \text{ watt/m}^2 \end{aligned}$$

(7.13) تسقط موجة مستوية من الهواء على وسط من الزجاج بزاوية 30° , جد الانعكاسية والنفاذية في حالتي كون المجال الكهربائي $E_\perp, E_\parallel$, اذا كان معامل انكسار مادة الزجاج 1.45 ؟

الحل

• حالة $E_\parallel$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow \sin 30 = 1.45 \sin \theta_2 \rightarrow \theta_2 = 20.2^\circ$$

$$\eta_{1,\parallel} = \eta_1 \cos 30 = 377(0.866) = 326.2$$

$$\eta_{2,\parallel} = \eta_2 \cos 20.2 = 377(0.938)/1.45 = 244.2$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{244.2 - 326.2}{244.2 + 326.2} = -0.144 \Rightarrow R = \rho_{\parallel}^2 = (-0.144)^2 = 0.021$$

$$T = 1 - R = 0.979$$

• حالة $E_{\perp}$

$$\eta_{1,\perp} = \eta_1 \sec 30 = \frac{377}{0.866} = 435.2$$

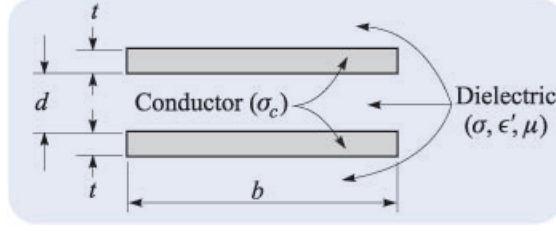
$$\eta_{2,\perp} = \eta_2 \sec 20.2 = \frac{377}{1.45(0.938)} = 277.2$$

$$\rho_{\perp} = \frac{277.2 - 435.2}{277.2 + 435.2} = -0.222 \Rightarrow R_{\perp} = 0.049$$

$$T_{\perp} = 1 - R_{\perp} = 0.951$$

الفصل الثامن

(8.1) يتكون خط نقل كهربائي من صفيحتين مستويتين ومتوازيتين (كما في الشكل 8.17) , حيث موصليتيهما σ_c , البعد بينهما d . اذا كان الحيز بين الصفيحتين مملوء بعازل له المعاملات التالية : σ, μ, ϵ' , جد معاملات هذا الخط بإعتباره دائرة كهربائية ؟



شكل (8.17) خط نقل كهربائي بهيئة صفائح مستوية .

الحل

على فرض ان $b \gg d$, تكون سعة المكثف ذو اللوحين المتوازيين لكل وحدة طول كالتالي

$$C = \epsilon' b/d$$

بينما تكون التوصيلية لكل وحدة طول من هذا الخط كالتالي

$$G = \sigma b/d$$

اما المحاثة الذاتية لكل وحدة طول فهي

$$L = \mu d/b$$

على اعتبار ان التيار المار خلال العمق القشري منتظم التوزيع , تكون مقاومة كل صفيحة , حيث مساحتها S , لكل وحدة طول كالتالي

$$R_1 = R_2 = 1/S\sigma_c = 1/(b\delta)\sigma_c$$

بما ان التوصيل للمقاومات على التوالي , نجد ان مقاومة خط النقل تساوي مجموع مقاومة الصفيحتين , اي

$$R = 2/b\delta\sigma_c$$

في حالة خط النقل بدون فقدان للطاقة , تكون الممانعة المميزة للخط كالتالي

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{d}{b}$$

(8.2) خط نقل كهربى ممانعته المميزة $Z_0 = 300\Omega$, متصل بحمل ممانعته السعوية $-300i$, اذا كان هذا الحمل متصل على التوازي مع مستقبليين ممانعة كلا منهما 300Ω , جد معامل الانعكاس ونسبة الموجة الساكنة لهذا الخط ؟

الحل

المقاومة المكافئة للمستقبليين هي 150Ω , وتكون متصلة على التوازي مع الحمل , وعليه تكون ممانعة الحمل Z_L كالتالي

$$Z_L = 150(-300i)/(150 - 300i) = \frac{-300i}{1 - 2i} = 120 - 60i$$

يكون معامل الانعكاس كالتالي

$$\Gamma = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} = \frac{(120 - 60i) - 300}{(120 - 60i) + 300} = \frac{-180 - 60i}{420 - 60i} = 0.447\angle -153.4^\circ$$

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.62$$

(8.3) خط نقل كهربى , يحمل اشارة ترددها $f = 1\text{ GHz}$, ممانعته المميزة 70Ω . اذا كان طول هذا الخط 0.5m ومنتهى بحمل ممانعته $Z_L = 105 + 35i$, جد طول هذا الخط بدلالة طول الموجة وممانعة الحمل المعيارية η_L ؟

الحل

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1 \times 10^9} = 0.3\text{ m}$$

طول الخط بدلالة طول الموجة يساوي

$$\ell = \frac{0.5}{0.3} = 1.667\lambda$$

ممانعة الحمل المعيارية تساوي

$$\eta_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(105 + 35i)}{70} = 1.5 + 0.5i$$

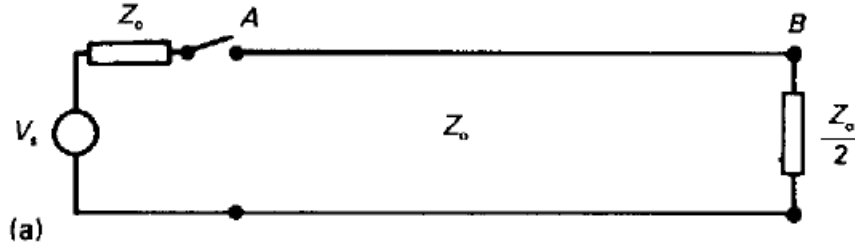
(8.4) خط نقل على شكل كابل محوري , مكون من مادة نحاسية موصليتها تساوي $\sigma_c = 5.8 \times 10^{-7} \text{ S/m}$, ويحتوي على وسط عازل ($\epsilon_r = 2.26$). اذا كان نصف قطر الموصل الخارجي 4 mm , وممانعة الخط المميزة $Z_0 = 50 \Omega$, جد نصف قطر الموصل الداخلي لهذا الخط .؟

الحل

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \ln(b/a) = \frac{2\pi(50)\sqrt{\epsilon_r}}{377} = 1.25$$

$$b/a = e^{1.25} = 3.5 \Rightarrow a = 4/3.5 = 1.142 \text{ mm}$$

(8.5) خط نقل كهربي ممانعته المميزة Z_0 , متصل مع حمل مقاوم $R = Z_0/2$ (كما في الشكل 8.18) , اذا وصل هذا الخط مع مصدر V_s متناظر معه , ومفتاح مؤقت ليعطي نبضة



شكل (8.18) خط نقل متصل مع مصدر وحمل.

في هذا الخط زمنها τ . اذا كان زمن انتشار النبضة عبر الخط T حيث $T \gg \tau$, ادرس بيانيا تغير الجهد مع الزمن عند طرفي هذا الخط ؟

الحل

عند غلق الدائرة , يتوزع جهد المصدر بالتساوي بين مانعة المصدر وممانعة الخط وتنطلق نبضة عبر الخط بسعة قدرها $V_s/2$. وبعد زمن T تصل هذه النبضة الى الطرف الآخر من الخط وتنعكس عند النقطة B , ويكون معامل انعكاس الجهد كالتالي

$$\Gamma_B = \frac{\left(\frac{Z_0}{2}\right) - Z_0}{\left(\frac{Z_0}{2}\right) + Z_0} = -1/3$$

حيث ان سعة الموجة المنعكسة = (معامل انعكاس الجهد) (سعة الموجة الساقطة) , وعليه تصبح سعة الموجة المنعكسة عند النقطة B تساوي

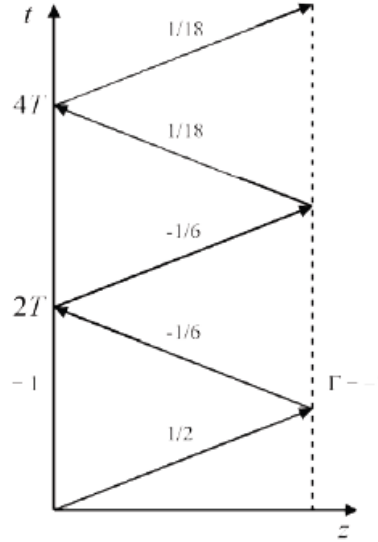
$$\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{V_s}{2}\right) = -\frac{V_s}{6}$$

وبعد زمن $2T$ تعود النبضة المنعكسة الى النقطة A وتكون الدائرة مفتوحة في هذه اللحظة , ويكون معامل انعكاس الجهد عند A كالتالي

$$\Gamma_A = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = 1$$

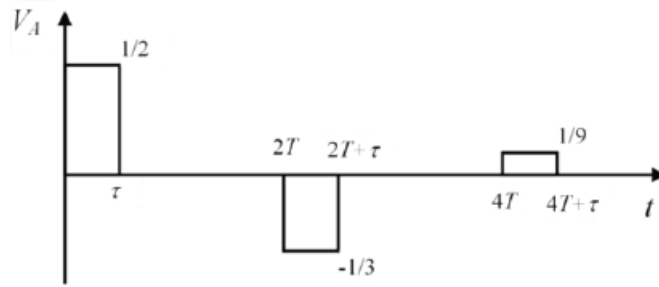
وهكذا تعود الموجة الساقطة على A لتنعكس مرة اخرى نحو النقطة B , وهكذا دواليك .

الشكل (8.19) يمثل سعة النبضة نتيجة الانعكاس المتتالي عند النقطتين A, B عبر خط النقل.



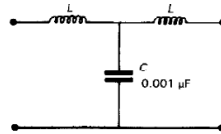
شكل (8.19) سعة النبضة المنعكسة عند طرفي خط النقل.

اما الشكل (8.20) فيمثل بيانيا تغير الجهد مع الزمن عند كل طرف من خط النقل .



شكل (8.20) جهد النبضة عبر خط النقل دالة للزمن .

(8.6) ملف خلزوني به 318 لفة / م ملفوف على اسطوانة عازلة قطرها 100 mm , وطولها 2.5m , قسمنا هذا الملف الى عشر اجزاء منتظمة وربط كل جزء مع مكثف سعته $0.001\mu F$ (كما في الشكل المرفق), بحيث اصبح هذا الملف يتكون من عشر شبكات موصولة على التوالي والتي تشكل خط نقل كهربى. اذا تم شحن هذا الخط بفرق جهد 20 KV, ثم وصل حمل متناظر عبر مخرجي الخط ليتم التفريغ خلال هذا الحمل, احسب سعة واتساع نبضة الجهد عبر الحمل, واحسب سعة التيار المار في الحمل وطاقة النبضة الكلية؟



الحل

نحسب المحاثة الذاتية للملف لكل وحدة طول كالتالي
كثافة الفيض المغناطيسي للملف الخلزوني هي

$$B = \mu_0 n I$$

اما الفيض المغناطيسي لكل وحدة طول تكون كالتالي

$$\Phi = n B A = \mu_0 n^2 I (\pi a^2)$$

حيث a نصف قطر الملف .

$$L = \Phi / I = \mu_0 n^2 (\pi a^2) = 10^{-3} H.meter$$

نعتبر توصيل المكثفات على التوازي , فتكون السعة المكافئة لكل وحدة طول في الخط هي

$$C = \frac{10 \times 10^{-9}}{2.5} = 0.004 \times 10^{-6} F/m$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 500\Omega$$

سرعة طور النبضة عبر خط النقل هي

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0.5 \times 10^6 \text{ m/s}$$

بما ان ممانعة الحمل تساوي ممانعة المصدر , يكون جهد النبضة المارة عبر الحمل يساوي 10 KV , وتكون مدة النبضة كالتالي

$$\tau = 2\ell/v_p = \frac{2(2.5)}{0.5 \times 10^6} = 10\mu s$$

باستخدام قانون اوم , ن جد ان شدة التيار المار في الحمل كالتالي

$$I = \frac{V}{Z_0} = \frac{10 \times 10^3}{500} = 20 \text{ A}$$

بما ان خط النقل لا يفقد طاقة , فإن طاقة النبضة الكلية = الطاقة المخزونة في المكثف , وتكون كالتالي

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{10(0.001 \times 10^{-6})(20 \times 10^3)^2}{2} = 2 \text{ Joule}$$

(8.7) خط نقل كهربائي منتهي بحمل ممانعته اقل من الممانعة المميزة للخط. اذا كانت نسبة الموجة الساكنة للجهد (VSWR) تساوي 2.0 , احسب معامل انعكاس الجهد عند الحمل , ممانعة الحمل المعاييرة , نسبة سعة الموجة المنعكسة الى سعة الموجة الساقطة بوحدة الديسيبل ؟

الحل

باستخدام معادلة (8.16) , نجد ان

$$|\Gamma| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} = 0.33$$

بما ان الحمل مقاومة بحتة , لذلك يكون معامل الانعكاس عدد حقيقي. وبما ان $Z_L < Z_0$, فإن من معادلة (8.12) نجد ان اشارة Γ تكون سالبة. اي , $\Gamma = -0.33$.

اما ممانعة الحمل المعيرة فتكون كالتالي

$$\eta_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 - 0.33}{1 + 0.33} = \frac{1}{2} = 1/\text{VSWR}$$

حيث $\frac{V_2}{V_1} = |\Gamma|$, وبإخذ لو غارتم الطرفين , نجد ان نسبة سعة الموجة المنعكسة الى سعة الموجة الساقطة بدلالة الديسيبل كالتالي

$$20 \log |\Gamma| = -9.5 \text{ dB}$$

(8.8) اذا كانت الممانعة المميزة لخط نقل ما 50Ω , وطول الموجة المرسله خلاله 150 mm , وبتردد 1 GHz . علما ان طول هذا الخط 20 mm , وينتهي بحمل 100Ω , جد الممانعة الداخلة على هذا الخط , Z_{in} , عند هذا التردد ؟

الحل

نجد الطول الكهربى للخط كالتالي

$$\beta \ell = \frac{2\pi}{0.15} \times 0.25 = 0.838 \text{ Rad} \Rightarrow \tan \beta \ell = 1.11$$

$$Z_{in} = Z_0 \left[\frac{Z_L + iZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + iZ_L \tan \beta \ell} \right] = 50 \left[\frac{100 + i(50 \times 1.11)}{50 + i(100 \times 1.11)} \right] = 37.6 - 28.1i$$

(8.9) خط نقل محوري ممانعته المميزة 50Ω , اذا كان الوسط بين موصلتي هذا الخط عازل ($\epsilon_r = 2.7$) , وكان طول الخط 1 m وينتهي بحمل مقاومة 75 اوم , جد الممانعة المدخلة على الخط عند التردد 500 MHz ؟

الحل

سرعة طور الموجة عبر الخط هي

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = 182 \times 10^6 \text{ m/s}$$

طول هذه الموجة هو

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{186 \times 10^6}{500 \times 10^6} = 365 \text{ mm}$$

بإستخدام نفس الخطوات في سؤال (8.8) , نجد الممانعة الدخلة على الخط ومقدارها

$$Z_{in} = 33.4 - 1.7i \quad \Omega$$

(8.10) كابل محوري ممانعته المميزة 50Ω والوسط الفاصل بين موصليه هواء, اذا كان قطر الموصل الخارجي 100 mm , احسب قطر الموصل الداخلي في هذا الخط . اذا كان يلزم طول من هذا الخط قدره $\frac{\lambda}{4}$ ليتناظر مع حمل 75Ω عند التردد 1 GHz , جد طول هذا الخط ؟ .

الحل

حيث

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \ln \frac{b}{a} = Z_0 (2\pi) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

$$\ln \frac{b}{a} = (50)(2\pi) \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 0.834$$

$$\frac{b}{a} = e^{0.834} \Rightarrow a = 100e^{-0.834} = 43.34 \text{ mm}$$

نفرض ان ممانعة المحول ربع الموجي Z_1 , حيث

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_L}$$

وعليه ,

$$Z_1 = \sqrt{50 \times 75} = 61.2\Omega$$

اذن

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{0.834 \times 61.2}{50} = 1.021$$

$$a = 100e^{-1.021} = 36.023 \text{ mm}$$

عند التردد 1 GHz , يكون طول الموجة 300 mm , وعليه يكون طول الخط الن
متناظر مع الحمل عند هذا التردد يساوي

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{300}{4} = 75\text{ mm}$$

الفصل التاسع

(9.1) مرشد موجي ذو لوحين متوازيين يعمل مع نمط TEM في مدى تردد $0 < f < 3\text{ GHz}$. جد أقصى مسافة بين اللوحين إذا كان ثابت العازل النسبي للوسط بينهما $\epsilon_r = 2.1$ ؟

الحل

$$f < \frac{c}{2n_1d} \Rightarrow d_{max} = \frac{c}{2n_1f_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.1}(3 \times 10^9)} = 3.45\text{ cm}$$

(9.2) مرشد موجي ذو لوحين متوازيين وبداخله زجاج ($n_1 = 1.45$) , إذا كانت المسافة بين اللوحين $d = 1\text{ cm}$ ويعمل على تردد 32 GHz , جد الأنماط المسموح لها بالمرور في هذا المرشد ؟

الحل

$$f > \frac{mc}{2n_1d} \Rightarrow m < \frac{2fn_1d}{c} = \frac{2(32 \times 10^9)(1.45)(0.01)}{3 \times 10^8} = 3.09$$

اذن الأنماط المسموح بها: $TE_1, TE_2, TE_3, TM_1, TM_2, TM_3$

(9.3) مرشد موجي مستطيل المقطع ابعاده كالتالي: $a = 2\text{ cm}$, $b = 1\text{ cm}$, ووسطه هواء . جد المدى الذي يمكن ان يعمل به هذا المرشد كنمط وحيد (TE_{10}) ؟

الحل

باستخدام معادلة تردد القطع $\omega_c(m0) = m\pi c/n_1 a$ حيث $n_1=1$ (الوسط هواء) , $m=1$, وعليه

$$f_c(10) = \omega/2\pi = c/2a = \frac{3 \times 10^{10}}{2(2)} = 7.5 \times 10^9 = 7.5 \text{ GHz}$$

يكون النمط الأعلى التالي , اما TE_{20} او TE_{01} , وحيث $a=2b$ فإن تردد القطع لهذه الأنماط يساوي ضعف تردد النمط الوحيد , اي

$$f_c(20) = 2(7.5) = 15 \text{ GHz} , \text{ وعليه يكون مدى التردد المطلوب هو}$$

$$7.5 \text{ GHz} < f < 15 \text{ GHz}$$

(9.4) جد اقل قيمة لعرض مرشد موجي (a) , واكبر قيمة لإرتفاعه (b) لكي يعمل هذا المرشد ضمن مدى التردد $15 \text{ GHz} < f < 20 \text{ GHz}$, علما ان وسط هذا المرشد هواء ؟

الحل

$$f_c(10) = \frac{c}{2a} \rightarrow 15 \times 10^9 = \frac{3 \times 10^{10}}{2a}$$

$$a = 1 \text{ cm}$$

لإيجاد ارتفاع المرشد نستخدم تردد القطع للنمط TE_{01} , حيث

$$f_c(01) = \frac{c}{2b} \rightarrow 20 \times 10^9 = \frac{3 \times 10^{10}}{2b}$$

$$b = 0.75 \text{ cm}$$

(9.5) مرشد موجي عازل ($n_1=1.45$) , وكان هذا المرشد محاط بالهواء وسمك شريحة العازل 0.5 mm . جد عدد الأنماط التي يمكن لهذا المرشد تمريرها اذا كان طول موجة القطع $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$ ؟

الحل

نستخدم العلاقة (9.5.9) لتردد القطع بعد تحويلها بدلالة معاملات الانكسار كالتالي

$$m - 1 < \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \text{ , حيث } m \text{ عدد الأنماط , وعليه}$$

$$m < \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} + 1 = \frac{2 \times (0.5) \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} \sqrt{(1.45)^2 - 1} + 1$$

$$m = 2102$$

(9.6) مرشدموجي مستطيل المقطع ابعاده $a = 6 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}$, جد مدى التردد الذي يعمل به هذا المرشد لنمط موجي منفرد , علما ان معامل انكسار مادة وسطه n_1 ؟

الحل

$$f_c (nm) = \frac{c}{2n_1} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

نبحث عن التردد الواقع بين ترددي النمطين TE_{01}, TE_{10} , اي

$$f_c(10) = \frac{c}{2n_1 a} = \frac{3 \times 10^8}{2n_1 (0.06)} = \frac{2.5 \times 10^9}{n_1}$$

$$f_c(01) = \frac{c}{2n_1 b} = \frac{3 \times 10^8}{2n_1 (0.04)} = \frac{3.75 \times 10^9}{n_1}$$

اذن

$$\frac{2.5 \times 10^9}{n_1} < f < \frac{3.75 \times 10^9}{n_1}$$

(9.7) مرشد موجي معدني ومستطيل المقطع , مملوء بمادة بلازمية تحقق المعادلة

$$\frac{\partial J_f}{\partial t} = \omega_p^2 \epsilon E$$

(a) جد حلول TE, TM التي تحقق الشروط الحدودية ؟

(b) جد العدد الموجي على محور المرشد , ثم جد تردد القطع ؟

(c) جد سرعة الطور وسرعة المجموعة ؟

الحل

(a) نفرض ان مركبة ثابت الانتشار في اتجاه محور z هي : $\beta = k_z$

$$a) \quad \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \bar{J}_f}{\partial t} = \omega_p^2 \epsilon \bar{E}$$

$$\epsilon \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$\mu \nabla \cdot \bar{H} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H}) = -\mu \left[\omega_p^2 \epsilon \bar{E} + \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \right]$$

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \bar{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{H}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} = \nabla \times \bar{J}_f + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{E}$$

$$= \nabla \times \bar{J}_f - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \bar{J}_f}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial t^3} = -\omega_p^2 \epsilon \nabla \times \bar{E} + \epsilon \mu \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial t^3}$$

$$= \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial t^3}$$

$$\nabla^2 \bar{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \bar{H}$$

Solutions the same as in text with $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$

$$b) \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \rightarrow k_z = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\omega_{co} = \left[\omega_p^2 + \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$c) \quad v_p = \frac{\omega}{k_z}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{k_z c^2}{\omega}$$

(9.8) (a) جد معادلات المجالات الكهرومغناطيسية في مستوى xy للأنماط الموجية TE, TM

(b) جد التيارات السطحية على سطوح المرشد للنمط الموجي TM_{mn}؟

الحل

a) TE

Electric Field Lines

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = -\frac{k_x}{k_y} \frac{\tan k_x x}{\tan k_y y} \rightarrow \tan k_y y \, d(k_y y) = -\tan k_x x \, d(k_x x)$$

$$-\ln \cos k_y y = \ln \cos k_x x + \text{constant} \rightarrow \cos k_x x \cos k_y y = \text{constant}$$

Magnetic Field Lines

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} = \frac{k_y}{k_x} \frac{\tanh y}{\tanh x} \rightarrow \frac{\coth y \, d(k_y y)}{k_y^2} = \frac{\coth x \, d(k_x x)}{k_x^2}$$

$$\frac{1}{k_y^2} \ln \sinh y = \frac{1}{k_x^2} \ln \sinh x + \text{constant}$$

$$\frac{(\sinh x)^{(k_y/k_x)^2}}{\sinh y} = \text{constant}$$

TM

Electric Field Lines

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{k_y}{k_x} \frac{\tanh x}{\tanh y} \rightarrow \frac{\tanh y \, d(k_y y)}{k_y^2} = \frac{\tanh x \, d(k_x x)}{k_x^2}$$

$$\frac{1}{k_y^2} \ln \cosh y = \frac{1}{k_x^2} \ln \cosh x + \text{constant}$$

$$\frac{(\cosh x)^{(k_y/k_x)^2}}{\cosh y} = \text{constant}$$

Magnetic Field Lines

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} = -\frac{k_x}{k_y} \frac{\coth x}{\coth y} \rightarrow \coth y \, d(k_y y) = -\coth x \, d(k_x x)$$

$$\ln \sinh y = -\ln \sinh x + \text{constant}$$

$$\sinh x \sinh y = \text{constant}$$

$$b) \hat{K}(x, y=0) = H_0 \left[\bar{i}_x \cosh x - \bar{i}_z \frac{j k_z k_x \sinh x}{k_x^2 + k_y^2} \right]$$

$$\hat{K}(x, y=b) = -H_0 \cos n\pi \left[\bar{i}_x \cosh x - \bar{i}_z \frac{j k_z k_x}{k_x^2 + k_y^2} \sinh x \right]$$

$$\hat{K}(x=0, y) = H_0 \left[-\bar{i}_y \cosh y + \bar{i}_z \frac{j k_z k_y}{k_x^2 + k_y^2} \sinh y \right]$$

$$\hat{K}(x=a,y) = -H_0 \cos m\pi \left[-\bar{i}_y \cos k_y y + \bar{i}_z \frac{j k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_y y \right]$$

(9.9) (a) جد العشرة الأولى من ترددات القطع لمرشد موجي به هواء ابعاده $a = b = 1 \text{ cm}$ ؟
 (b) جد الأبعاد اللازمة لمرشد موجي مستطيل المقطع (وداخله هواء) حتى يكون تردد القطع كالتالي : $10^2, 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}$ ؟

الحل

$$a) \quad f_c = \frac{c}{2\pi} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$a = b \rightarrow f_c = \frac{c}{2a} [m^2 + n^2]^{1/2}$$

$$c = 3 \times 10^8, \quad a = 10^{-2} \rightarrow f_c = 1.5 \times 10^{10} [m^2 + n^2]^{1/2}$$

m	n	f_c
1	0	1.50×10^{10}
1	1	2.12×10^{10}
2	0	3×10^{10}
2	1	3.35×10^{10}
2	2	4.24×10^{10}
3	0	4.5×10^{10}
3	1	4.74×10^{10}
3	2	5.41×10^{10}
4	0	6.0×10^{10}
3	3	6.36×10^{10}

$$b) \quad f_{co} = \frac{c}{2a} \rightarrow a = \frac{c}{2f_{co}} = \frac{1.5 \times 10^8}{f_{co}}$$

f_{co}	a
10^{10}	1.5 cm
10^8	1.5 m
10^6	150 m
10^4	15 km
10^2	1.5×10^6 m

(9.10) مرشد موجي مستطيل المقطع , ابعاده a, b , اذا كان مغلق بمستويات تامة الموصلية عند المستوى $z = 0, z = L$. جد المجالات الكهربائية والمغناطيسية للأنماط TM, TE , ثم جد التيارات السطحية في حالة انتشار موجة عبر هذا المرشد ؟

الحل

a) TM

$$\hat{E}_z(x,y,z) = E_o \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z; k_x = m\pi/a$$

$$\hat{E}_y(x,y,z) = \frac{E_o k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z; k_y = n\pi/b$$

$$\hat{E}_x(x,y,z) = \frac{E_o k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z; k_z = p\pi/c$$

$$\hat{H}_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial \hat{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{E_o}{j\omega\mu} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \left(k_y + \frac{k_y k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} \right)$$

$$= -\frac{E_o k_y}{j\omega\mu} \frac{k^2}{(k_x^2 + k_y^2)} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$\hat{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{E_o}{j\omega\mu} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \left(\frac{k_x k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} + k_x \right)$$

$$= \frac{E_o k_x}{j\omega\mu} \frac{k^2}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$\hat{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} \right) = 0$$

TE

$$\hat{H}_z(x,y,z) = H_o \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

TE

$$\hat{H}_z(x,y,z) = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$\hat{H}_y(x,y,z) = \frac{-H_0 k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z$$

$$\hat{H}_x(x,y,z) = \frac{-H_0 k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z$$

$$\hat{E}_x = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{-H_0}{j\omega\epsilon} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \left(k_y + \frac{k_x k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} \right)$$

$$= \frac{-H_0 k_y^2 k_z}{j\omega\epsilon (k_x^2 + k_y^2)} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$\hat{E}_y = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{H_0}{j\omega\epsilon} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \left(\frac{k_x k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} + k_x \right)$$

$$= \frac{H_0 k_x^2 k_z}{j\omega\epsilon (k_x^2 + k_y^2)} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$\hat{E}_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$b) \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$c) \quad TE_{101}$$

$$\hat{E} = \frac{j\omega\mu H_0}{k_x} \sin k_x x \sin k_z z \bar{i}_y; \quad k_x = \frac{\pi}{a}, \quad k_y = 0, \quad k_z = \frac{\pi}{l}$$

$$\hat{H} = H_0 \left[-\frac{k_z}{k_x} \sin k_x x \cos k_z z \bar{i}_x + \cos k_x x \sin k_z z \bar{i}_z \right]$$

$$\hat{K}(x,y=0,z) = -\hat{K}(x,y=b,z) = -\hat{H}_x(x,y=0,z) \bar{i}_z + \hat{H}_z(x,y=0,z) \bar{i}_x$$

$$= H_0 \left[\frac{k_z}{k_x} \sin k_x x \cos k_z z \bar{i}_z + \cos k_x x \sin k_z z \bar{i}_x \right]$$

$$\begin{aligned}\hat{K}(x=0,y,z) &= \hat{K}(x=a,y,z) = -\hat{H}_z(x=0,y,z)\bar{i}_y \\ &= -H_0 \sin k_z z\end{aligned}$$

(9.11) (a) جد الترددات الحرجة لأنماط الموجة المنتشرة في مرشد عازل سمكه d , حيث معامل التوهين $\alpha = 0$ ؟

(b) جد القيم التقريبية لـ k_x, k_z, α اذا كان $k_x d \ll 1$ ؟

الحل

$$a) \quad k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

$$-\alpha^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon_o \mu_o$$

$$\alpha = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{k_x^2}{\epsilon \mu - \epsilon_o \mu_o}$$

TM

$$\text{Odd: } \alpha = \frac{\epsilon_o}{\epsilon} k_x \tan k_x d = 0 \rightarrow k_x = \frac{n\pi}{d}$$

$$\text{Even: } \alpha = -\frac{\epsilon_o}{\epsilon} k_x \cot k_x d = 0 \rightarrow k_x = \frac{(2n+1)\pi}{2d}$$

TE

$$\text{Odd: } \alpha = \frac{\mu_o}{\mu} k_x \tan k_x d = 0 \rightarrow k_x = \frac{n\pi}{d}$$

$$\text{Even: } \alpha = -\frac{\mu_o}{\mu} k_x \cot k_x d = 0 \rightarrow k_x = \frac{(2n+1)\pi}{2d}$$

$$b) \quad k_x d \ll 1 \rightarrow \tan k_x d \approx k_x d, \cot k_x d \approx \frac{1}{k_x d}$$

TM

$$\text{Odd: } \alpha \approx \frac{\epsilon_o}{\epsilon} k_x^2 d, k_x^2 + \alpha^2 = \omega^2 (\epsilon \mu - \epsilon_o \mu_o)$$

$$k_x^4 + k_x^2 \left(\frac{\epsilon_o}{\epsilon} d\right)^2 - \omega^2 (\epsilon \mu - \epsilon_o \mu_o) \left(\frac{\epsilon_o}{\epsilon} d\right)^2 = 0$$

$$k_x^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_o d} \right)^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_o d} \right)^4 + \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_o d} \right)^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o)}$$

$$k_z^2 = \omega^2 \epsilon_o \mu_o + \alpha^2 = \omega^2 \epsilon\mu - k_x^2$$

$$\text{Even: } \alpha \approx -\frac{\epsilon_o}{\epsilon d}, \quad k_x^2 = -\alpha^2 + \omega^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o) = \omega^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o) - \left(\frac{\epsilon_o}{\epsilon d} \right)^2$$

TE

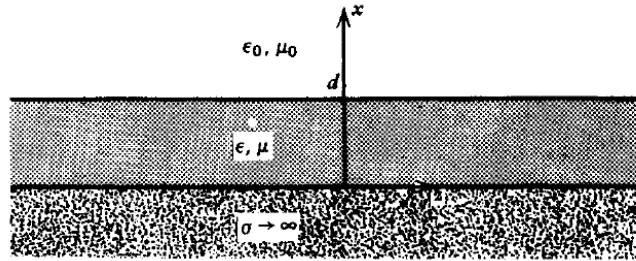
$$\text{Odd: } \alpha \approx \frac{\mu_o}{\mu} k_x^2 d, \quad k_x^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\mu_o d} \right)^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{\mu_o d} \right)^4 + \omega^2 \left(\frac{\mu}{\mu_o d} \right)^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o)}$$

$$k_z^2 = \omega^2 \epsilon_o \mu_o + \alpha^2 = \omega^2 \epsilon\mu - k_x^2$$

$$\text{Even: } \alpha = -\frac{\mu_o}{\mu d}, \quad k_x^2 = -\alpha^2 + \omega^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o) = \omega^2 (\epsilon\mu - \epsilon_o \mu_o) - \left(\frac{\mu_o}{\mu d} \right)^2$$

(9.12) جد الأنماط المسموح بانتشارها عبر مرشد موجي , سمكه عازل , سمكه d ,
موضوع على سطح تام الموصلية (كما في 9.21) , ثم جد التيارات السطحية والشحنة على
الموصل ؟

الحل



الشكل (9.21) مرشد عازل فوق سطح موصل .

$$a) \quad E_y(x=0) = E_z(x=0) = 0$$

TM even not allowed

TE odd not allowed

Allowed modes: TM odd, TE even

b) TM odd

$$\hat{\sigma}_f(x=0) = \epsilon \hat{E}_x(x=0) = - \frac{j\epsilon k_z A_1}{k_x}$$

$$\hat{K}_z(x=0) = \hat{H}_y(x=0) = - \frac{j\omega\epsilon A_1}{k_x}$$

TE even

$$\hat{\sigma}_f(x=0) = 0$$

$$\hat{K}_y(x=0) = B_1$$

حيث A_1, B_1 الثوابت في الحلول المذكورة في البند (9.7) في حالة المرشد العازل .

الفصل العاشر

(10.1) يمر تيار كهربي في صفيحة غير محدودة موضوعة عند $z=0$, اذا كان التيار يتغير كالتالي

$$\text{Re} [K_0 e^{j(\omega t - k_x x)} \mathbf{i}_x].$$
 جد ما يلي

(a) الجهد العددي ومتجه الجهد ؟

(b) المجال الكهربي والمغناطيسي ؟

(c) اذا كان توزيع التيار منتظم على شريحة مستوية سمكها $2a$, جد المطلوب في الفرعين (a,b) ؟

الحل :

$$a) \quad \nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}_f = 0$$

$$\bar{A} = \text{Re} \hat{A}_x e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \mathbf{i}_x \quad z > 0$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A_x = 0 \rightarrow k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \rightarrow -jk_x \hat{A}_x = -\frac{j\omega}{c^2} \hat{V} \rightarrow \hat{V} = \frac{k_x c^2}{\omega} \hat{A}_x$$

$$b) \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \rightarrow \hat{E} = -j\omega \hat{A}_x \vec{i}_x + (jk_x \vec{i}_x + jk_z \vec{i}_z) \hat{V}$$

$$= \vec{i}_x j \left(\frac{k_x^2 c^2 - \omega^2}{\omega} \right) \hat{A}_x + \vec{i}_z \frac{jk_z k_x c^2}{\omega} \hat{A}_x$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{i}_y \frac{\partial A_x}{\partial z} \rightarrow \hat{B}_y = -jk_z \hat{A}_x$$

$$\hat{H}_y = -\frac{jk_z}{\mu} \hat{A}_x \rightarrow \hat{H}_y(z=0) = -\frac{K_0}{2} = -\frac{jk_z}{\mu} \hat{A}_x \rightarrow \hat{A}_x = \frac{\mu K_0}{2jk_z}$$

For $z < 0$ let $k_z \rightarrow -k_z$.

$$(c) \quad \nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu J_0 e^{j(\omega t - k_x x)} \quad |z| < a$$

$$A_x = \text{Re} \hat{A}_x(z) e^{j(\omega t - k_x x)}$$

$$\frac{d^2 \hat{A}_x}{dz^2} - \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{A}_x = -\mu J_0$$

$$\hat{A}_x = \text{Re} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\mu J_0}{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right) e^{j(\omega t - k_x x)}}_{\text{Particular Solution}} + \underbrace{A_1 e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} + A_2 e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)}}_{\text{Homogeneous Solution}} \right\}$$

$$d\hat{A}_x = \begin{cases} \frac{\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x - k_z(z-z'))} & z > z' \\ \frac{-\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x + k_z(z-z'))} & z < z' \end{cases}$$

$$z > a$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_x &= \int_{-a}^a \frac{\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x - k_z(z-z'))} \\ &= \frac{\mu J_0}{2k_z} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} [e^{jk_z a} - e^{-jk_z a}] \\ &= \frac{\mu J_0 j}{k_z} \sin k_z a e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \end{aligned}$$

$$z < -a$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_x &= \int_{-a}^a \frac{-\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x + k_z(z-z'))} \\ &= \frac{\mu J_0}{2k_z} e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} [e^{-jk_z a} - e^{jk_z a}] \\ &= \frac{-\mu J_0 j}{2k_z} \text{sinc}_z a e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)}\end{aligned}$$

$$-a < z < a$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_x &= \int_{-a}^z \frac{-\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x - k_z(z-z'))} + \int_z^a \frac{\mu J_0 dz'}{2jk_z} e^{j(\omega t - k_x x + k_z(z-z'))} \\ &= \frac{\mu J_0}{2k_z} e^{j(\omega t - k_x x)} [1 - e^{-jk_z(z+a)} + e^{jk_z(z-a)} - 1] \\ &= \frac{j\mu J_0}{2k_z} e^{-jk_z a} \text{sinc}_z z e^{j(\omega t - k_x x)}\end{aligned}$$

$$A_x = \begin{cases} \text{Re} \left[\frac{\mu J_0 j}{2k_z} \text{sinc}_z a e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \right] & z > a \\ \text{Re} \left[\frac{\mu J_0 j}{2k_z} e^{-jk_z a} \text{sinc}_z z e^{j(\omega t - k_x x)} \right] & |z| < a \\ \text{Re} \left[\frac{-\mu J_0 j}{2k_z} \text{sinc}_z a e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} \right] & z < -a \end{cases}$$

$$V = \frac{k_x c^2}{\omega} A_x$$

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$$

$$\hat{E}_x = -j\omega \hat{A}_x + jk_x \hat{V} = \hat{A}_x (-j\omega + \frac{j k_x^2 c^2}{\omega}) = \frac{j \hat{A}_x}{\omega} (k_x^2 c^2 - \omega^2)$$

$$\hat{E}_z = jk_z \hat{V} = \frac{j k_z k_x c^2}{\omega} \hat{A}_x$$

$$H_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial z} \rightarrow \hat{H}_y = \frac{-jk_z}{\mu} \hat{A}_x$$

(10.2) كرة نصف قطرها R , مشحونة بانتظام بكثافة $\sigma_f = Re(\hat{\sigma}_0 e^{j\omega t})$, حيث الشحنة السطحية المتغيرة مع الزمن ناتجة عن تيار التوصيل الشعاعي النقي. جد ما يلي

(a) الجهد العددي ومتجه الجهد المغناطيسي ؟

(b) المجال الكهربائي والمغناطيسي في جميع المناطق ؟

الحل

$$(a) \quad V = \int_S \frac{\sigma_f(t - \frac{r_{QP}}{c})}{4\pi\epsilon r_{QP}} R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$r_{QP}^2 = [r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta]$$

$$\hat{V} = \frac{\sigma_0 R^2}{2\epsilon} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c} r_{QP}}}{r_{QP}} \sin\theta d\theta$$

$$2r_{QP} dr_{QP} = 2rR \sin\theta d\theta \rightarrow \frac{\sin\theta d\theta}{r_{QP}} = \frac{dr_{QP}}{rR}$$

$$\hat{V} = \frac{\sigma_o R}{2\epsilon r} \int_{|r-R|}^{r+R} e^{-j \frac{\omega}{c} r_{QP}} dr_{QP}$$

$$= \frac{\sigma_o R}{2\epsilon r \left(\frac{-j\omega}{c} \right)} \left[e^{-j \frac{\omega}{c} (r+R)} - e^{-j \frac{\omega}{c} |r-R|} \right]$$

$$r < R$$

$$e^{-j \frac{\omega}{c} (r+R)} - e^{-j \frac{\omega}{c} (R-r)} = e^{-j \frac{\omega}{c} R} \left[e^{-j \frac{\omega}{c} r} - e^{j \frac{\omega}{c} r} \right]$$

$$\hat{V} = \frac{j \sigma_o R c e^{-j \frac{\omega}{c} R}}{2\epsilon r \omega} \left[e^{-j \frac{\omega}{c} r} - e^{j \frac{\omega}{c} r} \right]$$

$$r > R$$

$$e^{-j \frac{\omega}{c} (r+R)} - e^{-j \frac{\omega}{c} (r-R)} = e^{-j \frac{\omega}{c} r} \left[e^{-j \frac{\omega}{c} R} - e^{j \frac{\omega}{c} R} \right]$$

$$\hat{V} = \frac{j\sigma_o R c e^{-j\frac{\omega}{c}r}}{2\epsilon r \omega} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}R} - e^{j\frac{\omega}{c}R} \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{A}_r) = \frac{-j\omega}{c^2} \hat{V}$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \hat{A}_r) = \frac{\sigma_o R c e^{-j\omega r/c}}{2\epsilon c} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}R} - e^{j\frac{\omega}{c}R} \right]$$

$$\hat{A}_r = \frac{\sigma_o R}{2\epsilon c r^2} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}R} - e^{j\frac{\omega}{c}R} \right] \frac{e^{-j\omega r/c}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \left(\frac{j\omega r}{c} + 1\right)$$

$$= \frac{\sigma_o R c}{2\epsilon \omega^2 r^2} \left(\frac{j\omega r}{c} + 1\right) e^{-j\omega r/c} \left[e^{-j\omega R/c} - e^{j\omega R/c} \right] + \frac{C_1}{r^2}$$

$$r < R$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \hat{A}_r) = \frac{\sigma_o R r}{2\epsilon c} e^{-j\frac{\omega}{c}R} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}r} - e^{j\frac{\omega}{c}r} \right]$$

$$\hat{A}_r = \frac{\sigma_o R c}{2\epsilon r^2} \frac{e^{-j\omega R/c}}{\omega^2} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}r} \left(\frac{j\omega r}{c} + 1\right) + e^{j\frac{\omega}{c}r} \left(\frac{j\omega r}{c} - 1\right) \right] + \frac{C_2}{r^2}$$

$$(b) \quad E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{dV}{dr}$$

$$r > R$$

$$\begin{aligned}\hat{E}_r &= \frac{-j\sigma_o R c}{2\epsilon r^2 \omega} \left(\frac{j\omega r}{c} + 1 \right) e^{-j\omega r/c} \left[e^{-j\omega R/c} - e^{j\omega R/c} \right] [1 - 1] - \frac{j\omega C_1}{r^2} \\ &= \frac{-j\omega C_1}{r^2}\end{aligned}$$

$$r < R$$

$$\begin{aligned}\hat{E}_r &= \frac{-j\sigma_o R c}{2\epsilon r^2 \omega} e^{-j\omega R/c} \left[e^{-j\frac{\omega}{c}r} \left(\frac{j\omega r}{c} + 1 \right) (1 - 1) + e^{j\omega r/c} \left(\frac{j\omega r}{c} - 1 \right) (1 - 1) \right] - \frac{j\omega C_2}{r^2} \\ &= \frac{-j\omega C_2}{r^2}\end{aligned}$$

$$\hat{E}_r(r=0) = \text{finite} \rightarrow C_2 = 0$$

$$\hat{E}_r(r=R_+) = \frac{\sigma_o}{\epsilon} = \frac{-j\omega C_1}{R^2} \rightarrow C_1 = \frac{j\sigma_o R^2}{\epsilon \omega}$$

$$\hat{E}_r = \begin{cases} \frac{\sigma_o R^2}{\epsilon r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \overline{A} = 0$$

$$(c) \quad \nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \epsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \rightarrow \hat{J}_r = -j\omega \epsilon \hat{E}_r$$

(10.3) جد الأطوال الفعالة، مقاومات الأشعاع، والتوزيع الشحني لكل من التوزيعات التيارية
لثنائي قطب كهربائي نقطي قصير طوله $d\ell$ ، حيث $|z| < \frac{d\ell}{2}$.

(a) $I(z) = I_0 \cos \alpha z$

(b) $\hat{I}(z) = I_0 e^{-\alpha|z|}$

(c) $\hat{I}(z) = I_0 \cosh \alpha z$

الحل

$$d\ell_{\text{eff}} = \frac{1}{I_0} \int_{-d\ell/2}^{d\ell/2} \hat{I}(z) dz, \quad R = \frac{2\pi\eta}{3} \left(\frac{d\ell_{\text{eff}}}{\lambda} \right)^2$$

$$\hat{\lambda} = - \frac{1}{j\omega} \frac{d\hat{I}}{dz}$$

(a) $\hat{I}(z) = I_0 \cos \alpha z$

$$d\ell_{\text{eff}} = \int_{-d\ell/2}^{d\ell/2} \cos \alpha z dz = \frac{2 \sin \alpha \frac{d\ell}{2}}{\alpha}$$

$$\hat{\lambda}(z) = \frac{I_0 \alpha}{j\omega} \sin \alpha z$$

(b) $\hat{I}(z) = I_0 e^{-\alpha|z|}$

$$d\ell_{\text{eff}} = \int_{-d\ell/2}^0 e^{\alpha z} dz + \int_0^{d\ell/2} e^{-\alpha z} dz$$

$$= \frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha d\ell/2})$$

$$(c) \quad \hat{I}(z) = I_0 \cosh \alpha z$$

$$d\ell_{\text{eff}} = \int_{-d\ell/2}^{d\ell/2} \cosh \alpha z dz = \frac{2}{\alpha} \sinh \frac{\alpha d\ell}{2}$$

$$\hat{\lambda}(z) = \frac{-\alpha I_0}{j\omega} \sinh \alpha z$$

$$\hat{\lambda}(z) = \begin{cases} \frac{I_0 \alpha}{j\omega} e^{-\alpha z} & z > 0 \\ \frac{-\alpha I_0}{j\omega} e^{\alpha z} & z < 0 \end{cases}$$

(10.4) جد المعدل الزمني لكثافة القدرة , والمعدل الزمني للقدرة الكلية لثنائي قطب مغناطيسي
نقطي ؟

الحل

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \quad \hat{E} \times \hat{H}^*$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|m|^2 k^4 \eta}{(4\pi)^2 r^2} \sin^2 \theta \quad \bar{i}_r$$

$$\langle P \rangle = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \langle S_r \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|m|^2 k^4 \eta 2\pi}{(4\pi)^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{|m|^2 k^4 \eta}{12\pi} = |I|^2 \frac{(dS)^2 k^4 \eta}{12\pi}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} |I|^2 R \rightarrow R = \frac{k^2 \eta (dS)^2}{6\pi}$$

(10.5) جد العلاقة بين خطوط المجال المغناطيسي مع متجه الجهد المغناطيسي A , ثم جد معادلة خطوط هذا المجال؟

الحل

$$(a) \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\phi} \sin \theta) \vec{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\phi}) \vec{i}_{\theta}$$

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{B_r}{B_{\theta}} = \frac{-1}{\sin \theta} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\phi} \sin \theta)}{\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\phi})}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_{\phi}) dr + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_{\phi}) d\theta = 0$$

$$r \sin \theta A_{\phi} = \text{constant}$$

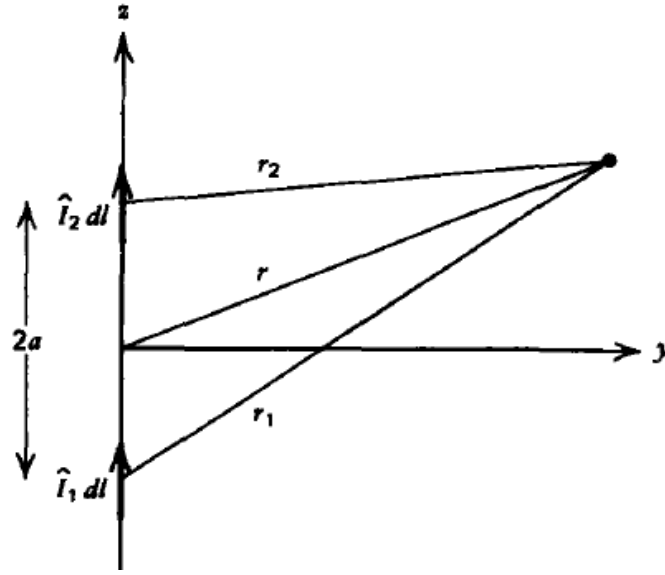
$$(b) \quad A_{\phi} = \text{Re}[\hat{A}_{\phi} e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{\mu \hat{m}}{4\pi r^2} \sin \theta (1 + jkr) e^{j(\omega t - kr)}\right]$$

Assume $\hat{m} = m$ real

$$A_{\phi} = \frac{\mu m}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} [\cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr)]$$

$$\text{Magnetic field lines} \rightarrow \sin^2 \theta \left[\frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} - \sin(\omega t - kr) \right] = \text{constant}$$

(10.6) وضع ثنائيي اقطاب على محور z وعلى نفس الخط بحيث كان البعد بينهما $2a$, اذا كان تياراهما متساوي ولكن فرق الطور بينهما χ (كما في الشكل ادناه)



جد :

(a) المجال الكهربائي والمغناطيسي البعيدين ؟

(b) المعدل الزمني لكثافة القدرة ؟

(c) اذا كانت $2a = \lambda/2$, جد قيم χ التي تعطي مصفوفة واسعة الجانب *Broadside Array* ؟

الحل :

$$(a) \quad r_1 \approx r - a \cos \theta, \quad r_2 \approx r + a \cos \theta$$

$$\hat{E}_\theta \approx \frac{\hat{E}_0}{jkr} \sin \theta e^{-jkr} [e^{jk a \cos \theta} + e^{-j(k a \cos \theta - \chi)}]$$

$$\approx \frac{2\hat{E}_0}{jkr} \sin \theta e^{-j(kr - \frac{\chi}{2})} [\cos(k a \cos \theta - \frac{\chi}{2})]$$

$$\hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_\theta}{\eta}$$

$$(b) \quad \langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\hat{E}_\theta|^2}{\eta} = \frac{2|\hat{E}_0|^2}{k^2 r^2 \eta} \sin^2 \theta \cos^2 (k a \cos \theta - \frac{\chi}{2})$$

$$2a = \frac{\lambda}{2} \rightarrow ka = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Broadside} \rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \chi = \pm 2n\pi$$

(10.7) جد المطلوب في الفروع (a-c) من السؤال (10.6) لعدد $(2N+1)$ من ثنائيات الأقطاب المتساوية البعد بينها وعلى محور z , اذا كان فرق الطور يزداد بمقدار χ_0 ؟

الحل

$$\langle S_r \rangle = 0 \text{ when } k a \cos \theta - \frac{\chi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{(2n + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{\chi}{2}}{ka} \right]$$

$$\langle S_r \rangle_{\max} \text{ when } k a \cos \theta - \frac{\chi}{2} = n\pi$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{n\pi + \frac{\chi}{2}}{ka} \right]$$

$$\hat{E}_\theta = \frac{\hat{E}_0}{jkr} \sin \theta e^{-jkr} \sum_{n=-N}^N e^{jn(k a \cos \theta - \chi_0)}$$

$$= \frac{\hat{E}_o}{jkr} \sin\theta e^{-jkr} \left\{ \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(k a \cos\theta - \chi_o)}{\sin \frac{1}{2} (k a \cos\theta - \chi_o)} \right\}$$

$$\hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_\theta}{\eta}$$

$$\langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\hat{E}_\theta|^2}{\eta} = \frac{|\hat{E}_o|^2}{k^2 r^2 \eta} \sin^2 \theta \left\{ \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(k a \cos\theta - \chi_o)}{\sin \frac{1}{2} (k a \cos\theta - \chi_o)} \right\}^2$$

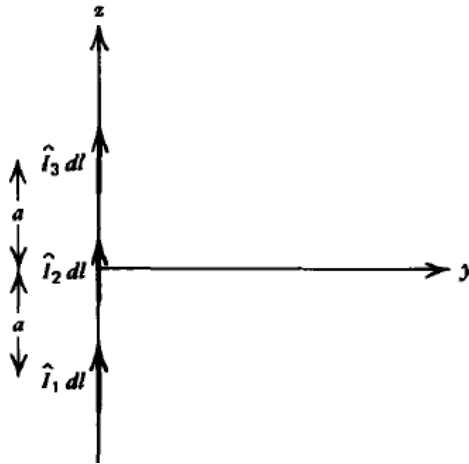
$$\langle S_r \rangle = 0 \rightarrow (N + \frac{1}{2})(k a \cos\theta - \chi_o) = n\pi$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\frac{n\pi}{N + \frac{1}{2}} + \chi_o}{ka}$$

$$\langle S_r \rangle_{\max} \rightarrow (N + \frac{1}{2})(k a \cos\theta - \chi_o) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{\frac{(2n + 1)(\pi/2)}{N + \frac{1}{2}} + \chi_o}{ka} \right]$$

(10.8) وضعت ثلاثة من ثنائي القطب الكهربائي على محور z (كما في الشكل ادناه)



إذا كانت أطوالها متساوية ($d\ell$) جد ما يلي

(a) المجال الكهربائي والمغناطيسي في المدى البعيد ؟

(b) المعدل الزمني لكثافة القدرة ؟

(c) الزوايا التي تجعا كثافة القدرة صفرا او عظمى في حالات التيار التالية :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \hat{I}_1 = \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = 2I_0 \\ \text{(ii)} \quad & \hat{I}_1 = \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = -2I_0 \\ \text{(iii)} \quad & \hat{I}_1 = -\hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = 2jI_0 \end{aligned}$$

الحل

$$(a) \quad \hat{E}_\theta = \frac{\sin\theta e^{-jkr}}{jkr} [\hat{E}_1 e^{jkac\cos\theta} + \hat{E}_2 + \hat{E}_3 e^{-jkac\cos\theta}]$$

$$\hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_\theta}{\eta}$$

$$(b) \quad \langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\hat{E}_\theta|^2}{\eta}$$

$$(i) \quad \hat{I}_1 = \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = 2I_0 \rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_3 \equiv \hat{E}_0, \hat{E}_2 = 2\hat{E}_0$$

$$\hat{E}_\theta = \frac{2\hat{E}_0 \sin\theta e^{-jkr}}{jkr} [\cos(kac\cos\theta) + 1] = \frac{4\hat{E}_0}{jkr} \sin\theta e^{-jkr} \cos^2\left(\frac{kac\cos\theta}{2}\right)$$

$$\langle S_r \rangle = 0 \rightarrow \theta = 0, 180^\circ; \theta = \cos^{-1} \left[\frac{(2n+1)\pi}{ka} \right]$$

$$\langle S_r \rangle_{\max} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{2n\pi}{ka} \right]$$

$$(ii) \quad \hat{I}_1 = \hat{I}_3 = I_0, \hat{I}_2 = -2I_0, \hat{E}_2 = -2\hat{E}_0, \hat{E}_1 = \hat{E}_3 = \hat{E}_0$$

$$\hat{E}_\theta = \frac{2\hat{E}_o}{jkr} \sin\theta e^{-jkr} [\cos(k a \cos\theta) - 1] = \frac{-4\hat{E}_o \sin\theta e^{-jkr}}{jkr} \sin^2\left(\frac{k a \cos\theta}{2}\right)$$

$$\langle S_r \rangle = 0 \rightarrow \theta = 0, 180^\circ; \theta = \cos^{-1} \left[\frac{2n\pi}{ka} \right]$$

$$\langle S_r \rangle_{\max} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{(2n+1)\pi}{ka} \right]$$

$$(iii) \quad \hat{I}_1 = -\hat{I}_3 = jI_o, \quad \hat{I}_2 = I_o \rightarrow \hat{E}_1 = -\hat{E}_3 = j\hat{E}_o, \quad \hat{E}_2 = \hat{E}_o$$

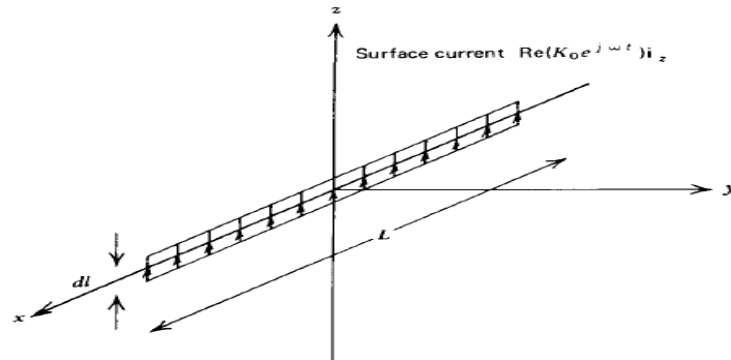
$$\hat{E}_\theta = \frac{\hat{E}_o \sin\theta e^{-jkr}}{jkr} [e^{jk a \cos\theta} - e^{-jk a \cos\theta} + 2j]$$

$$= \frac{2\hat{E}_o \sin\theta e^{-jkr}}{kr} [1 + \sin(k a \cos\theta)]$$

$$\langle S_r \rangle = 0 \rightarrow \theta = 0, 180^\circ; \theta = \cos^{-1} \left[\frac{(4n+3)\pi}{2ka} \right]$$

$$\langle S_r \rangle_{\max} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left[\frac{(4n+1)\pi}{2ka} \right]$$

(10.9) وضع عدد من ثنائيات الأقطاب النقطية والمتساوية المسافات بينها على محور x (كما في الشكل المرفق)



إذا مر بهذا الهوائي تيار سطحي في نفس الطور وشدته $\hat{z} Re[K_0 e^{j\omega t}]$, جد ما يلي

(a) المجالات في المدى البعيد ؟

(b) الزوايا التي تجعل كثافة القدرة صغرى او عظمى ؟

الحل

$$(a) \quad dI = K_0 dx$$

$$d\hat{E}_\theta = \frac{E'_0 \sin\theta e^{-jkr}}{jkr} e^{jkx \sin\theta \cos\phi} dx; \quad E'_0 = \frac{-K_0 d\ell k^2 \eta}{4\pi}$$

$$\hat{E}_\theta = \frac{E'_0 \sin\theta e^{-jkr}}{jkr} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{jkx \sin\theta \cos\phi} dx$$

$$= \frac{E'_0 \sin\theta e^{-jkr}}{(jkr) jk \sin\theta \cos\phi} \left[e^{\frac{jkL}{2} \sin\theta \cos\phi} - e^{-\frac{jkL}{2} \sin\theta \cos\phi} \right]$$

$$= \frac{2jE'_0 e^{-jkr}}{-k^2 r \cos\phi} \left[\sin\left(\frac{kL}{2} \sin\theta \cos\phi\right) \right]$$

$$\hat{H}_\phi = \frac{\hat{E}_\theta}{\eta}$$

$$(b) \quad \langle S_r \rangle = 0 \quad \frac{kL}{2} \sin\theta \cos\phi = n\pi$$

ir Snip

$$\langle S_r \rangle_{\max} \quad \frac{kL}{2} \sin\theta \cos\phi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

(10.10) جد المجالات في المدى البعيد , المعدل الزمني لكثافة القدرة في الحالات التالية لتوزيعات التيار لثنائي قطب طويل .

$$(a) \quad \hat{I}(z) = \begin{cases} I_0(1-2z/L), & 0 < z < L/2 \\ I_0(1+2z/L), & -L/2 < z < 0 \end{cases}$$

$$(b) \hat{I}(z) = I_0 \cos \pi z/L, \quad -L/2 < z < L/2$$

(c) جد في هذه الحالات مقاومة الإشعاع في حالة $kL \ll 1$ ؟

الحل

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \hat{E}_\theta &= \eta \hat{H}_\phi = \frac{j k \eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \int_{-L/2}^0 \left(1 + \frac{2z}{L}\right) e^{jkz \cos \theta} dz + \int_0^{L/2} \left(1 - \frac{2z}{L}\right) e^{jkz \cos \theta} dz \right\} \\
 &= \frac{j k \eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \frac{e^{jkz \cos \theta}}{jk \cos \theta} \left(1 + \frac{2}{jkL \cos \theta} (jkz \cos \theta - 1)\right) \Big|_{-L/2}^0 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{jkz \cos \theta}}{jk \cos \theta} \left(1 - \frac{2}{jkL \cos \theta} (jkz \cos \theta - 1)\right) \Big|_0^{L/2} \right\} \\
 &= \frac{j k \eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ 1 - \frac{2}{jkL \cos \theta} - e^{\frac{-jkL}{2} \cos \theta} \left(1 + \frac{2}{jkL \cos \theta} \left(\frac{-jkL}{2} \cos \theta - 1\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + e^{\frac{jkL}{2} \cos \theta} \left(1 - \frac{2}{jkL \cos \theta} \left(\frac{jkL}{2} \cos \theta - 1\right) - \left(1 + \frac{2}{jkL \cos \theta}\right)\right) \right\} \\
 &= \frac{j k \eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ 1 - \frac{2}{jkL \cos \theta} - e^{\frac{-jkL}{2} \cos \theta} \left(1 + \frac{2}{jkL \cos \theta} \left(\frac{-jkL}{2} \cos \theta - 1\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + e^{\frac{jkL}{2} \cos \theta} \left(1 - \frac{2}{jkL \cos \theta} \left(\frac{jkL}{2} \cos \theta - 1\right) - \left(1 + \frac{2}{jkL \cos \theta}\right)\right) \right\} \\
 &= \frac{k \eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \frac{-4}{jkL \cos \theta} + \frac{2}{jkL \cos \theta} \left(e^{\frac{jkL}{2} \cos \theta} + e^{\frac{-jkL}{2} \cos \theta}\right) \right\} \\
 &= \frac{\eta I_0 \sin \theta e^{-jkr}}{j \pi k r L \cos^2 \theta} [-1 + \cos(\frac{kL}{2} \cos \theta)] \\
 \langle S_r \rangle &= \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{\eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad \hat{E}_\theta &= \eta \hat{H}_\phi = \frac{j k \eta I_o \sin \theta e^{-j k r}}{4 \pi r} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{\pi z}{L} e^{j k z \cos \theta} dz \\
&= \frac{j k \eta I_o \sin \theta e^{-j k r}}{4 \pi r} e^{j k z \cos \theta} \frac{[j k \cos \theta \cos \frac{\pi z}{L} + \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi z}{L}]}{(\frac{\pi}{L})^2 - (k \cos \theta)^2} \Big|_{z=-L/2}^{L/2} \\
&= \frac{j k \eta I_o \sin \theta e^{-j k r}}{4 \pi r L} \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - (k \cos \theta)^2 \right]^{-2} \left(e^{\frac{j k L}{2} \cos \theta} + e^{-\frac{j k L}{2} \cos \theta} \right) \\
&= \frac{j k L \eta I_o}{8 r} \sin \theta e^{-j k r} \frac{\cos \left[\frac{k L}{2} \cos \theta \right]}{\left[\left(\frac{k L}{2} \cos \theta \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right]}
\end{aligned}$$

$$\langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{\eta}$$

$$(c) \quad kL \ll 1$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad \hat{E}_\theta &\approx \frac{\eta I_o \sin \theta e^{-j k r}}{j \pi k r L \cos^2 \theta} \frac{1}{2} \frac{k^2 L^2 \cos^2 \theta}{4} \\
&= \frac{\eta I_o \sin \theta k L e^{-j k r}}{j 8 \pi r} \rightarrow (d\ell)_{\text{eff}} = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

$$R = 40 \pi^2 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2$$

$$(b) \quad \hat{E}_\theta \approx \frac{-j k L \eta I_o \sin \theta e^{-j k r}}{2 \pi^2 r} \rightarrow (d\ell)_{\text{eff}} = \frac{2L}{\pi}$$

$$R = \frac{320 L^2}{\lambda^2}$$



