

نظرية الزمر

تأليف

د. معروف عبدالرحمن سمحان د. فوزي بن أحمد صالح الذكر

جامعة الملك سعود

مقدمة

تُعد نظرية الزمر من أهم الأمثلة في الرياضيات على استخدام التجريد في دراسة أنظمة رياضية تبدو مختلفة ولكن تجمعها خصائص مشتركة تكوّن الأساس لبناء أنظمة رياضية شيقة بحد ذاتها. لقد نشأت نظرية الزمر قبل أكثر من مائتي عام وبتأثير من ثلاثة فروع في الرياضيات هي : الهندسة ، نظرية الأعداد ونظرية المعادلات الجبرية .

(١) الهندسة : في بداية القرن التاسع عشر بدأت تنشأ أنواع من الأنظمة الهندسية التي لا تعتمد على القياس مثل الهندسة الإسقاطية (**Projective geometry**) وأنواع الهندسة اللاقليدية. كما بدأت دراسة الهندسة في البعد النوني والتي استلزمت تجريد العديد من المفاهيم لتحريرها من الارتباط بالواقع الفيزيائي الوصفي. كل هذا أدى إلى دراسة نماذج هندسية لا تتغير تحت تأثير تحويلات معينة ، تبين لاحقاً أن هذه التحويلات تكوّن زمراً ذات خصائص مميزة وشيقة.

(٢) نظرية الأعداد : في نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر بدأت دراسة ما يسمى بالأنظمة الحسابية القياسية (**modular arithmetic**) ويُعد الرياضي المشهور أويلر (**Euler**) من الرواد في هذا المجال. إن دراسة هذه الأنظمة تُعد البداية لما نعرفه اليوم بالزمر الإبدالية كما أن عمل أويلر مهد لفكرة المجموعات المشاركة (**cosets**) والتي تلعب دوراً هاماً في دارسة الزمر. ولقد تطورت هذه الأفكار عبر السنين على يد الكثير من علماء الرياضيات وخاصة العالم جاوس (**Gauss**) الذي درس الأنظمة الحسابية القياسية بعمق أكثر وأثبت العديد من النظريات التي يمكن أن تفسرها اليوم بلغة نظرية الزمر. كما درس جاوس الصيغ التربيعية الثنائية تحت تأثير تحويلات معينة تشكل زمرة إبدالية منتهية تُعتبر الأساس للعديد من الدراسات التي تلت في النصف الثاني من القرن التاسع عشر.

(٣) نظرية المعادلات الجبرية : إن محاولة إيجاد صيغ جبرية لجذور المعادلات الجبرية دفعت العالم لاجرانج (**Lanrange**) لدراسة التبديلات التي لم يكن يعلم أنها تكوّن زمرة. بيد أنه استخدم التبديلات لمعرفة السبب في وجود صيغ جذرية للمعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة. ولقد تم تطوير أفكار لاجرانج من قبل روفيني (**Ruffini**) الذي تبين له أن التبديلات تكوّن زمرة استخدم بعض خصائصها في محاولته لإثبات استحالة وجود صيغة جذرية عامة للمعادلات من الدرجة الخامسة. إن العلاقة بين دراسة جذور المعادلات الجبرية و زمر التبديلات دفع العديد من علماء الرياضيات لدراسة زمر التبديلات بتفصيل أكثر ومن أشهرهم العالم كوشي (**Cauchy**) ولقد توّجت هذه الدراسات

على يد جالوا (Galois) الذي استخدم خصائص زمر التبديلات في إثبات إستحالة وجود صيغ جذرية عامة للمعادلات ذات الدرجة الخامسة فأكثر.

في نهاية القرن التاسع عشر تبين للعديد من المشتغلين في الرياضيات الأهمية البالغة لدراسة الزمر كبناء رياضي مستقل. ولقد صدرت عدة مؤلفات في ذلك الحين حول هذا الموضوع من أهمها كتاب "نظرية الزمر المنتهية" للعالم برنسايد (Burnside) والذي ألهم الكثير من الدارسين في هذا المجال في القرن العشرين. لقد تطورت دراسة الزمر بشكل متسارع خلال المئة عام الماضية وتم حل العديد من المسائل الهامة في هذا المجال وعلى رأسها تصنيف الزمر المنتهية البسيطة والذي تم في عام ١٩٨١ م. كما تبين دور الزمر في الكثير من المسائل التطبيقية منها :

- (١) في علم الفيزياء : دراسة نماذج رياضية للجسيمات الأولية (Elmentary Particles) .
- (٢) في علم الكيمياء : دراسة التركيب الجزيئي للمركبات العضوية والتعرف على الاستقراء الكيميائي لها وخاصة فيما يسمى بالكيمياء العضوية المجسمة (stereo organic chemistry) .
- (٣) في علم البلورات (Crystallography) : دراسة نظرية التناظر للبلورات المختلفة لغرض التصنيف وقياس مدى استقرار البناء البلوري في الطبيعة .
- (٤) في علم التعمية (Cryptography) : بناء أنظمة تعمية محكمة تعتمد على ميزات خاصة في زمر منتهية يتم اختيارها من أنظمة عديدة أو هندسية.
- (٥) في علم الشفرات (Coding Theory) : تكوين شفرات ذات كفاءة عالية لحماية المعلومات من التشويش.

يتكون كتابنا هذا من سبعة فصول حرصنا من خلالها على أن نقدم كل ما يتعلق بأساسيات نظرية الزمر. ولقد حرصنا على أن تكون مادة الكتاب مفهومة من قبل كل طالب درس أربعة فصول جامعية في تخصص الرياضيات. ولأجل تيسير الأمر أكثر ، فلقد خصصنا الفصل الأول للمبادئ الأساسية في الموضوع والمتعلقة بالأعداد الصحيحة والتبديلات والعمليات الثنائية. ولقد صممنا الكتاب لتشكّل فصوله الأربعة الأولى المادة اللازمة لتدريس الزمر في مرحلة البكالوريوس في معظم الجامعات. كما يمكن اختيار مادة إضافية من الفصلين الخامس والسادس بحسب ما يسمح به وقت الطالب وما يراه أستاذ المادة مناسباً. ويمكن أن يشكّل الفصلين الأخيرين أساساً لدراسة الزمر في مرحلة الماجستير.

لقد حرصنا في هذا الكتاب على تقديم الكثير من الأمثلة وعلى تنوع التمارين المحلولة وغير المحلولة والتي تعتبر جزءاً أساسياً من الكتاب لا يمكن الإستغناء عنه في دراسة مادة الزمر.

نرجو أن نكون قد وُفقنا في تقديم مادة هذا الكتاب بشكل واضح ومفيد. ندعو القراء أن لا ييخلوا علينا بملاحظاتهم ومرئياتهم حول محتوى هذا الكتاب لتلافي السليبيات في الطبعات القادمة إن شاء الله .

وبالله التوفيق .

المؤلفان

الفصل الأول : مبادئ أساسية

١	 الأعداد الصحيحة (١,١)
١١	 التبديلات (١,٢)
٢٨	 العمليات الثنائية (١,٣)
٣٥	 المجموعات المرتبة والشبكات (١,٤)

الفصل الثاني : مفاهيم أساسية في الزمر

٤٦	 تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية (٢,١)
٦٠	 تمارين محلولة (٢,١,١)
٦٦	 الزمر الجزئية والزمر الدورية (٢,٢)
٨٦	 تمارين محلولة (٢,٢,١)

الفصل الثالث : التشاكلات وزمر خارج القسمة

٩٥	 تشاكلات الزمر ومبرهنة كيلي (٣,١)
١٠٦	 تمارين محلولة (٣,١,١)
١١٣	 المجموعات المشاركة ومبرهنة لاجرانج (٣,٢)
١٢٠	 تمارين محلولة (٣,٢,١)
١٢٦	 الزمر الجزئية الناعمة (٣,٣)
١٣٣	 تمارين محلولة (٣,٣,١)
١٣٧	 الضرب المباشر للزمر (٣,٤)
١٥١	 تمارين محلولة (٣,٤,١)
١٥٧	 زمرة خارج القسمة (٣,٥)
١٦٦	 تمارين محلولة (٣,٥,١)
١٦٩	 مبرهنات التماثل (٣,٦)
١٧٧	 تمارين محلولة (٣,٦,١)

١٨١	 زمرة التماثلات الذاتية (٣,٧)
١٨٧	 تمارين محلولة (٣,٧,١)

الفصل الرابع : مبرهنات سيلو وتطبيقاتها

١٩١	 تأشير الزمر علي المجموعات (٤,١)
٢٠٠	 تمارين محلولة (٤,١,١)
٢٠٣	 فصول الترافق ومبرهنة كوشي (٤,٢)
٢١٢	 تمارين محلولة (٤,٢,١)
٢١٥	 مبرهنة سيلو (٤,٣)
٢٢٣	 تمارين محلولة (٤,٣,١)
٢٣٠	 الزمر البسيطة (٤,٤)
٢٤٥	 تمارين محلولة (٤,٤,١)

الفصل الخامس : إنشاء زمر جديدة

٢٥١	 الزمر الحرة (٥,١)
٢٥٧	 تمارين محلولة (٥,١,١)
٢٥٨	 توصيف الزمر (٥,٢)
٢٦٣	 تمارين محلولة (٥,٢,١)
٢٦٥	 الضرب والجمع المباشر التام (٥,٣)
٢٧٦	 شبه الضرب المباشر (٥,٤)
٢٨٦	 تمارين محلولة (٥,٤,١)

الفصل السادس : الزمر الإبدالية

٢٩١	 الزمر الإبدالية المنتهية (٦,١)
٢٩٩	 تمارين محلولة (٦,١,١)
٣٠١	 الزمر الإبدالية الحرة (٦,٢)
٣١١	 تمارين محلولة (٦,٢,١)
٣١٤	 الزمر الإبدالية القابلة للقسمة (٦,٣)
٣٢٥	 تمارين محلولة (٦,٣,١)

الفصل السابع : الزمر القابلة للحل والزمر المتلاشية

٣٣١		سلاسل الزمر (٧, ١)
٣٣٨		تمارين محلولة (٧, ١, ١)
٣٤٠		الزمر القابلة للحل (٧, ٢)
٣٥٩		تمارين محلولة (٧, ٢, ١)
٣٦٢		الزمر المتلاشية (٧, ٣)
٣٦٧		تمارين محلولة (٧, ٣, ١)
٣٧٠		إجابات وإرشادات لبعض التمارين
٣٩٣		المراجع
٣٩٥		كشف وثبت المصطلحات

الفصل الأول

مبادئ أساسية

BASIC CONCEPTS

(١,١) الأعداد الصحيحة

The Integers

تعد الأعداد الصحيحة إحدى أهم مجموعات الأعداد التي تزود موضوع الجبر المجرد بأمثلة عديدة. ويمكن بناء هذه الأعداد من الأعداد الطبيعية بشكل منطقي ولكننا لن نخوض في ذلك هنا، ونقصر دراستنا على مراجعة الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة. ونبدأ بتقديم إحدى أهم طرائق البرهان الأساسية في هذا المجال، ألا وهي الاستقراء الرياضي. للاستقراء الرياضي صورتان متكافئتان، وهاتان الصورتان تكافئان مبدأ هاماً جداً هو مبدأ الترتيب الحسن.

المبدأ الأول للاستقراء الرياضي (First Principle of Mathematical Induction)

ليكن $m \in \mathbb{N}$ ولتكن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. إذا كانت $S \subseteq S_m$ تحقق :

(أ) $m \in S$

(ب) $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

فإن $S = S_m$

تسمى (أ) الخطوة الأساسية للاستقراء ، أما (ب) فتسمى خطوة الاستقراء .

من المهم جداً أن يستوعب القارئ جيداً كيفية استخدام الاستقراء الرياضي ، فإذا أردنا برهان صحة التقرير

$\forall n \in S_m, P(n)$ فإننا نضع $\{P(n) \text{ تقرير صائب } , n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ ، ونأخذ $S \subseteq S_m$.

الخطوة الأساسية (أي $m \in S$) نبرهن لنا صواب التقرير $P(m)$ ، وباستخدام خطوة الاستقراء عندما

$k = m$ ، نحصل على صواب التقرير $P(m+1)$. الآن نطبق خطوة الاستقراء مرة أخرى عندما

$k = m + 1$ فنحصل على صواب التقرير $P(m+2)$ ، وهكذا .

إن خطوة الاستقراء تضمن لنا : في حال وصولنا إلى محطة ما ، فإننا نستطيع السير إلى المحطة التي تليها . أما الخطوة الأساسية فتضمن لنا وجود المحطة الأولى التي سننطلق منها .

مثال (١،١)

أثبت أن $3^n > 2^n + n$ لكل $n \geq 2$.

الحل

باستخدام الاستقراء الرياضي على n . نفرض إذن أن $S = \{n \in \mathbb{N} : 3^n > 2^n + n, n \geq 2\}$

(أ) بما أن $9 = 3^2 > 2^2 + 2 = 6$ فإن $2 \in S$.

(ب) نفرض أن $k \geq 2$ وأن $k \in S$. عندئذ:

$$(3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3(2^k + k) = 3 \cdot 2^k + 3k) \quad (\text{فرضية الاستقراء})$$

$$> 2 \cdot 2^k + k + 1 = 2^{k+1} + k + 1 \quad (\text{لأن } k \geq 2)$$

□ إذن ، $k+1 \in S$. وبالتالي فإن $S = S_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$

عند محاولتنا إثبات خطوة الاستقراء $k+1 \in S$ ، احتجنا فقط معرفة أن $k \in S$. سنجد في

كثير من الأحيان أن الاعتماد فقط على افتراض صحة خطوة سابقة واحدة فقط لا يكفي لإثبات صحة الخطوة التي تلي ذلك . من أجل ذلك نقدم صورة أخرى مكافئة للمبدأ الأول للاستقراء الرياضي :

المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي (Second Principle of Mathematical Induction)

ليكن $t, m \in \mathbb{N}$ ولتكن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. إذا كانت $S \subseteq S_m$ تحقق :

$$m, m+1, m+2, \dots, m+t \in S \quad (\text{أ})$$

(ب) $m, m+1, \dots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ حيث $k \geq m+t$ فإن $S = S_m$.

مثال (١,٢)

تعرف متتالية فيبوناتشي (Fibonacci sequence) $\{a_n\}$ استقرائياً كالتالي:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad (أ)$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{لكل } n \geq 2 \quad (ب)$$

$$\text{أثبت أن } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \text{لكل } n \geq 1$$

الحل

باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي على n . نفرض أن

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \geq 1 \right\}$$

$$1 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] = 1 \quad \text{بما أن } (أ)$$

$$\text{وأن } 1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = 1 \quad \text{فإن } 1, 2 \in S$$

(ب) نفرض أن $1, 2, \dots, k \in S$. عندئذ،

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right] \quad (\text{فرضية الاستقراء}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \end{aligned}$$

إذن ، $k+1 \in S$ ونخلص إلى أن $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ □

لقد رأينا كيفية استخدام الاستقراء الرياضي لبرهان صواب تقارير مختلفة عن الأعداد الطبيعية.

نقدم الآن مبدأً مكافئاً للاستقراء الرياضي يستخدم في برهان العديد من مبرهنات الجبر المجرد.

مبدأ الترتيب الحسن (Well-Ordering Principle)

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فإن A تحتوي على عنصر أصغر (least element).

أي ، يوجد $a \in A$ يحقق : $a \leq x$ لكل $x \in A$.

لاحظ أن العنصر الأصغر في A يجب أن يكون وحيداً . إذ، لو كان كلاً من a_1 و a_2 عنصراً أصغر

في A ، فإن $a_1 \leq a_2$ وإن $a_2 \leq a_1$ ، ولذا ، فإن $a_1 = a_2$.

سنبرهن فيما يلي على أن مبدأ الترتيب الحسن يكافئ كل من المبدأ الأول والثاني للاستقراء

الرياضي. ولكن قبل تقديم هذا البرهان ، دعنا نوضح كيفية استخدام مبدأ الترتيب الحسن . لنفرض أننا

بصدد إثبات صواب التقرير $P(n)$ لكل $n \geq m$ باستخدام مبدأ الترتيب الحسن. نفرض أن S هي

المجموعة الجزئية من $\mathbb{N}$ حيث أن التقرير $P(n)$ لكل $n \geq m$ خاطئ ، ونبرهن أن المجموعة S يجب أن

تكون خالية وذلك بإثبات أن S لا تحتوي على عنصر أصغر. أو نطبق مبدأ الترتيب الحسن على S باعتبار

أنها غير خالية ونبرهن أننا نستطيع الحصول على تناقض. المثال التالي يوضح الطريقة.

مثال (١,٣)

استخدم مبدأ الترتيب الحسن لإثبات صواب التقرير : $(\forall n \geq 1)(2^{n+1} < 1 + (n+1)2^n)$.

الحل

نفرض أن التقرير خاطئ. لتكن $S = \{n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} \geq 1 + (n+1)2^n, n \geq 1\}$.

إذن ، S مجموعة غير خالية . لاحظ أن $2^2 < 1 + 2 \times 2$ ومنه فإن $1 \notin S$. ولذا ، باستخدام مبدأ

الترتيب الحسن نجد أن S تحتوي على عنصر أصغر $k \geq 2$ ، إذن ، $k-1 \notin S$. ولذا فإن :

$$(1) \quad 2^{k+1} \geq 1 + (k+1)2^k$$

$$(2) \quad 2^k < 1 + k2^{k-1}$$

بضرب المتباينة (2) بالعدد 2 نحصل على: $2^{k+1} < 2 + 2 \cdot 2^k$ (3)

من المتباينتين (1) و (3) نجد أن: $2^k < 1 + (k+1)2^k$. ولذا فإن $2^k < 1$ حيث $k \geq 2$ وهذا مستحيل. إذن ، $S = \emptyset$ ، وبالتالي ، فإن التقرير صائب $\square$

مبرهنة (١,١)

العبارات التالية جميعها متكافئة :

(أ) المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي.

(ب) المبدأ الأول للاستقراء الرياضي.

(ج) مبدأ الترتيب الحسن.

البرهان

(أ) $\Leftrightarrow$ (ب) : واضح.

(ب) $\Leftrightarrow$ (ج) نفرض أن $A \subseteq \mathbb{N}$ وأن A لا تحتوي على عنصر أصغر ، سنبرهن أن $A = \emptyset$ باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضي وذلك بإثبات أن المجموعة

$S = \{m \in \mathbb{N} : \forall x (x \leq m \rightarrow x \in \mathbb{N} - A)\}$ تساوي $\mathbb{N}$. من الواضح أن $0 \in S$ ، لأنه لو كان $0 \notin S$ فإن $0 \in A$. وبذلك يكون 0 عنصراً أصغر في A ، وهذا مستحيل.

نفرض الآن أن $k \in S$. إذن ، $0, 1, \dots, k \in \mathbb{N} - A$. ولإثبات أن $k+1 \in S$ ، يكفي أن نثبت أن

$k+1 \in \mathbb{N} - A$. إذا كان $k+1 \notin \mathbb{N} - A$ فإن $k+1 \in A$. إذن ، $k+1$ عنصر أصغر في A ،

وهذا يناقض الفرض. ولذا فإن $k+1 \in S$. وبالتالي ، فإنه باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضي

نجد أن $S = \mathbb{N}$. إذن ، $A = \emptyset$.

(ج) $\Leftrightarrow$ (أ) : لنفرض أن $m \in \mathbb{N}$ وأن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. ولنفرض أن $S \subseteq S_m$ تحقق :

(١) $m \in S$.

(٢) $m, m+1, \dots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.

سنبرهن أن $S = S_m$. لنفرض لغرض التناقض أن $S_m - S \neq \emptyset$. إذن ، باستخدام مبدأ الترتيب الحسن ، نجد أن $S_m - S$ تحتوي على عنصر أصغر ، وليكن t . إذن ، $t \in S_m$ و $t \notin S$. ولذا فإن $t \geq m$. ولكن ، $m \in S$. إذن ، $m \notin S_m - S$ ، ولذا فإن $t \neq m$ ومنه فإن $t-1 \geq m$. ولكن بما أن t عنصر أصغر في $S_m - S$ فإن $t-1 \notin S_m - S$. إذن ، $m, m+1, \dots, t-1 \in S$. وعليه فإن ، $t = (t-1) + 1 \in S$ ، إذن ، $t \notin S_m - S$ وهذا تناقض . ومنه فإن ، $S_m - S = \emptyset$. وبما أن $S \subseteq S_m$ فإن $S = S_m$. وبهذا يتم البرهان ♦

فيما تبقى من هذا البند نوظف مبدأ الترتيب الحسن أو مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات بعض الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة.

مبرهنة (١,٢) [خوارزمية القسمة division algorithm]

إذا كان $a \in \mathbb{Z}^+$ و $b \in \mathbb{Z}$ فإنه يوجد عدداً وحيدان $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث $b = qa + r$ ، $0 \leq r < a$. البرهان

لتكن $S = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x = b - ta, t \in \mathbb{Z}\}$. لاحظ أن $S \neq \emptyset$. (لأن $b - ta \geq 0$ إذا فقط إذا كان $t \leq \frac{b}{a}$) . ولذا ، باستخدام مبدأ الترتيب الحسن ، يوجد عنصر أصغر $r \in S$. إذن ، يوجد $q \in \mathbb{Z}$ حيث $r = b - qa$. ومنه فإن $b = qa + r$. من الواضح أن $r \geq 0$. لنفرض ، لغرض التناقض أن $r \geq a$. إذن ، $0 \leq r - a = b - qa - a = b - (q+1)a$. ولذا فإن $r - a \in S$ وهذا يناقض اختيار r . وبالتالي فإن ، $b = qa + r$ ، $0 \leq r < a$.

ولبرهان الوحداية ، نفرض أيضاً أن $r_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ تحقق : $b = q_1 a + r_1$ ، $0 \leq r_1 < a$. عندئذ ، $r_1 - r = (q - q_1)a$. أي أن ، $\frac{r_1 - r}{a} = q - q_1$. ولكن $-1 < \frac{r_1 - r}{a} < 1$. ولذا فإن $q - q_1 = 0$. ونخلص إلى أن $q_1 = q$ وأن $r_1 = r$ ♦

تعريف (١,١)

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً . نقول إن $d > 0$ هو القاسم المشترك الأعظم

(greatest common divisor) للعددين a و b ونكتب $d = \gcd(a, b)$ إذا تحقق ما يلي :

$$(أ) \quad d|a \text{ و } d|b .$$

$$(ب) \quad \text{إذا كان } c|a \text{ و } c|b \text{ فإن } c|d .$$

لاحظ أولاً أنه إذا كان $c > 0$ و كان $c|b$ فإن $c \leq |b|$. وعليه فإن مجموعة قواسم b هي مجموعة منتهية . نستنتج من هذا أن مجموعة القواسم الموجبة للعددين a و b منتهية ، إذ هي تقاطع مجموعة قواسم العدد a الموجبة مع مجموعة قواسم العدد b الموجبة ، ولذا فإنها مجموعة جزئية من مجموعة القواسم الموجبة للعدد b وهي مجموعة منتهية . إذن ، تحتوي على عنصر أكبر مما يضمن لنا وجود القاسم المشترك الأعظم للعددين a و b . أما بالنسبة إلى وحدانية القاسم المشترك الأعظم فإننا نحصل عليها من ملاحظة أنه لو كان $d_1 = \gcd(a, b)$ و $d_2 = \gcd(a, b)$ فإن $d_1|d_2$ و $d_2|d_1$. إذن ، $d_1 = d_2$.

مبرهنة (١,٣)

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإنه يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $\gcd(a, b) = ax_0 + by_0$.

البرهان

لتكن $S = \{ax + by > 0 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. بما أن a و b ليس كلاهما صفراً فإننا نفرض أن $a \neq 0$. إذا كان $a > 0$ فإن $a = a \times 1 + b \times 0 \in S$. إما إذا كان $a < 0$ فإن $-a = a(-1) + b \times 0 \in S$. إذن ، $S \neq \emptyset$. وباستخدام مبدأ الترتيب الحسن يوجد عنصر أصغر $d \in S$. إذن ، يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $d = ax_0 + by_0$. سنبرهن أن $d = \gcd(a, b)$. باستخدام خوارزمية القسمة يوجد $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث $a = dq + r$ ، $0 \leq r < d$. ومنه فإن :

$r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - x_0q) + b(-y_0q) \in S$ ، وهذا يناقض اختيار d . إذن ، $d|a$. وبالمثل ، $d|b$. وأخيراً إذا كان $c|a$ و $c|b$ فإن $c|(ax_0 + by_0)$. ولذا فإن $c|d$.

وبالتالي نخلص إلى أن ، $d = \gcd(a, b)$ ♦

نتيجة (١,٤)

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإن :

$$\gcd(a, b) = 1 \text{ إذا وفقط إذا وجد } x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \text{ حيث } 1 = ax_0 + by_0 .$$

البرهان

إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فإنه باستخدام المبرهنة (١,٣) ، يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $1 = ax_0 + by_0$.
وبالعكس، إذا كان $1 = ax_0 + by_0$ حيث $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ وكان $d = \gcd(a, b)$ فإن $d | a$ و $d | b$.
ومنه فإن $a = dr$ و $b = ds$ حيث $r, s \in \mathbb{Z}$ وعليه فإن $ax_0 + by_0 = d(rx_0 + sy_0)$.
إذن ، $d | (ax_0 + by_0)$. أي أن $d | 1$. وبالتالي فإن $d = 1$ ♦

ملحوظة

إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فإن العددين a, b يسميان أوليين نسبياً (relatively prime) .

مبرهنة (١,٥)

(أ) إذا كان p عدداً أولياً حيث $p | ab$ فإن $p | a$ أو $p | b$.

(ب) إذا كان $p | a_1 a_2 \dots a_n$ حيث p عدد أولي فإنه يوجد على الأقل a_i حيث $p | a_i$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $p | ab$ ، ولنفرض أن p لا يقسم a . إذن ، $\gcd(a, p) = 1$. باستخدام النتيجة (١,٤) نجد أن $1 = ax + py$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن $b = abx + pby$. وبما أن $p | ab$ و $p | pb$ فإننا نجد أن $p | (abx + pby)$. ولذا فإن $p | b$.

(ب) باستخدام الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n = 1$.

نفرض الآن أن العبارة صحيحة لكل $1, 2, 3, \dots, k-1$. ولنفرض أن $p | a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$. إذن ، باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $p | a_k$ أو أن $p | a_1 a_2 \dots a_{k-1}$. ولذا ، باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن: $p | a_k$ أو $p | a_i$ حيث $1 \leq i \leq k-1$. وبهذا يتم البرهان ♦

المبرهنة التالية هي إحدى أهم مبرهنات الأعداد الصحيحة وتعرف باسم المبرهنة الأساسية في الحساب

(the fundamental theorem of arithmetic)

مبرهنة (١,٦) [المبرهنة الأساسية في الحساب]

إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً فإنه يمكن كتابة n بطريقة وحيدة (باستثناء الترتيب) كحاصل ضرب عدد من الأعداد الأولية.

البرهان

نبرهن أولاً باستخدام الاستقراء الرياضي n أنه يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد من الأعداد الأولية .
إذا كان $n = 2$ فالعبارة صحيحة. لنفرض أن العبارة صحيحة لكل $2, 3, \dots, k$. إذا كان $k+1$ عدداً أولياً، نكون قد انتهينا. لنفرض إذن أن $k+1 = ab$ حيث $1 < a, b \leq k$. باستخدام فرضية الاستقراء توجد أعداد أولية $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_r$ حيث $a = p_1 p_2 \dots p_r, b = q_1 q_2 \dots q_s$. إذن ،
 $k+1 = ab = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$

ولإثبات الوحداية ، نستخدم الاستقراء الرياضي أيضاً. إذا كان $n = 2$ فالعبارة واضحة.
لنفرض أن العبارة صحيحة لكل $1 < k < n$ وسنبرهن صحتها عند n . إذا كان n أولياً فالعبارة واضحة. نفرض إذن أن n مؤلف وأنها نستطيع كتابته كحاصل ضرب عدد من الأعداد الأولية بطريقتين مختلفتين. أي ، نفرض أن : $n = p_1 p_2 \dots p_t = q_1 q_2 \dots q_s$ ولنفرض أن $t \leq s$.
الآن: بما أن $p_1 \mid q_1 q_2 \dots q_s$ فإنه يوجد $1 < i \leq s$ حيث $p_1 \mid q_i$. ولكن بإعادة ترتيب الأعداد الآن: $q_1, q_2, \dots, q_s$ نستطيع أن نفرض أن $p_1 \mid q_1$. إذن ، $p_1 = q_1$ (لأن q_1 و p_1 أوليان). ولذا فإن:

$$\frac{n}{p_1} = p_2 p_3 \dots p_t = q_2 q_3 \dots q_s$$

ولما كان $1 < t \leq s$ فإن $1 < \frac{n}{p_1} < n$. إذن ، باستخدام فرضية الاستقراء نستنتج أن الطريقتين السابقتين

لكتابة $\frac{n}{p}$ متطابقتان (باستثناء الترتيب) ، ولذا فإن $s = t$ وأن $p_i = q_i$ لكل $i = 1, \dots, t$ ♦

ملحوظة

من الممكن أن تتكرر بعض الأعداد الأولية عند تحليل n إلى عوامله الأولية. فإذا كانت العوامل الأولية

المختلفة هي $p_1, p_2, \dots, p_k$ وكان عدد تكرار p_i هو a_i لكل $1 \leq i \leq k$ فإن $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ ويسمى هذا التحليل الصورة القياسية لتحليل n .

تمارين (١, ١)

(١) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات كل من العبارات التالية :

$$(أ) \quad 2^n > n! \quad \text{لكل } n \geq 1 \quad (ب) \quad (2n)! < 2^{2n} (n!)^2 \quad \text{لكل } n \geq 1$$

$$(ج) \quad n! \leq n^n \quad \text{لكل } n \geq 1$$

(٢) أعد التمرين (١) مستخدماً مبدأ الترتيب الحسن.

$$(٣) \quad \text{إذا كان } x \in \mathbb{R}, x > -1, \text{ فأثبت أن: } (1+x)^n \leq 1+nx \quad \text{لكل } n \geq 2.$$

(٤) أثبت أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الأولية .

$$(٥) \quad \text{إذا كان } \gcd(a, b) = d \text{ فأثبت أن } \gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

$$(٦) \quad \text{إذا كان } a|c \text{ و } b|c \text{ و } \gcd(a, b) = 1 \text{ فأثبت أن } ab|c. \text{ هل تبقى العبارة صحيحة إذا كان } \gcd(a, b) > 1?$$

(٧) إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإننا نقول إن $m > 0$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ونرمز لذلك بالرمز $m = \text{lcm}(a, b)$ إذا كان:

$$(أ) \quad a|m \text{ و } b|m \quad (ب) \quad \text{إذا كان } a|c \text{ و } b|c \text{ فإن } m|c$$

أثبت أنه إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}^+$ فإن $\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab$.

$$(٨) \quad \text{إذا كان } \gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1 \text{ فأثبت أن } \gcd(ab, c) = 1.$$

$$(٩) \quad \text{إذا كان } 2^k - 1 \text{ عدداً أولياً فأثبت أن } k \text{ عدد أولي. هل العكس صحيح؟}$$

$$(١٠) \quad \text{إذا كان } n|(n-1)! + 1 \text{ فأثبت أن } n \text{ عدد أولي.}$$

$$(١١) \quad \text{إذا كان } n \geq 0 \text{ فإن الأعداد } F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ تدعى أعداد فيرما (Fermat numbers)}$$

$$(أ) \quad \text{أثبت أن } F_0 F_1 F_2 \dots F_{m-1} = F_m - 2 \quad \text{لكل } m \geq 1.$$

(ب) أثبت أن $\gcd(F_m, F_n) = 1$ لكل $m \neq n$.

(ج) استخدم الفقرة (ب) لإثبات أن عدد الأعداد الأولية غير منته.

(١٢) أثبت أن $\gcd(a^n, b^n) = [\gcd(a, b)]^n$ لكل $n \geq 1$.

(١,٢) التبديلات

Permutations

سندرس في هذا البند الخواص الأساسية لتبديلات (permutations) مجموعة X وهي تطبيقات $f: X \rightarrow X$ أحادية وشاملة. أي تقابلات من X على نفسها. سنرمز لمجموعة جميع التبديلات على مجموعة X بالرمز S_X . إذا كانت $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعة منتهية فإننا نستخدم الرمز S_n بدلاً من الرمز S_X .

مبرهنة (١,٧)

$$|S_n| = n!$$

البرهان

لدينا $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ولكون X منتهية فإن f تقابل على X إذا وفقط إذا كان f أحادي. لذا يكفي أن نجد عدد التطبيقات الأحادية $f: X \rightarrow X$ حيث $X = \{1, 2, \dots, n\}$. الآن، لكل $f \in S_n$ لدينا $f(1) \in X$ ولذا فإنه يوجد n من الخيارات للعنصر $f(1)$. بما أن $f(1) \neq f(2)$ فإنه يوجد $n-1$ من الخيارات للعنصر $f(2)$. بصورة عامة، بما أن $f(i) \in X - \{f(1), f(2), \dots, f(i-1)\}$ فإنه يوجد $n-i+1$ من الخيارات للعنصر $f(i)$. إذن، عدد التطبيقات الأحادية $f: X \rightarrow X$ هو $n(n-1) \dots 3 \times 2 \times 1 = n!$ ♦ $|S_n| = n!$ ونخلص إلى أن

ملحوظات

(١) إذا كانت $\sigma \in S_n$ فإن $\sigma = \{(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))\}$

في معظم الأحوال يكون من المناسب أن نستخدم الترميز:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

بدلاً من كتابة σ كمجموعة أزواج مرتبة. هذا الترميز يسهل علينا حساب تحصيل التبديلات ، فإذا كان

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$\text{على سبيل المثال ، إذا كان } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4 \text{ فإن}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(٢) إذا كان $\sigma \in S_n$ حيث $\sigma(i) = i$ فإننا عادة ما نسقط العمود i فمثلاً ، إذا كانت

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ فإننا نكتب } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(٣) لاحظ أنه إذا كان $\tau \in S_X$ ، $\sigma \in S_X$ فإن $\sigma^{-1} \in S_X$ و $\sigma \circ \tau \in S_X$. كما أن $I_X \in S_X$

(٤) إذا كان $\sigma \in S_n$ وكان $k \in \mathbb{Z}^+$ فإن :

$$\sigma^0 = I$$

$$\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma \quad (k \text{ من المرات})$$

$$\sigma^{-k} = (\sigma^{-1})^k$$

تعريف (١،٢)

ليكن $\sigma \in S_n$. نقول إن σ دورة طولها k (k -cycle) ونكتب $\sigma = (i_1 i_2 i_3 \dots i_k)$ إذا

كان $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ لكل $j = 1, 2, \dots, k-1$ و $\sigma(i_k) = i_1$ وكان $\sigma(a) = a$ لكل $a \neq i_1, i_2, \dots, i_k$.

كما نقول إن σ منقلة (transposition) إذا كانت σ دورة طولها 2 .

ملحوظة

لاحظ أن : $(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_2 i_3 \dots i_k i_1) = \dots = (i_k i_1 i_2 \dots i_{k-1})$.

مثال (١,٤)

لنجد عناصر S_3 . أي مجموعة التبديلات على $\{1,2,3\}$. لاحظ أن $|S_3| = 6$. وهذه التبديلات هي :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

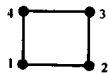
$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وإذا استخدمنا مفهوم الدورة تكون عناصر S_3 هي:

$$S_3 = \{(1), \rho_1 = (1\ 2\ 3), \rho_2 = (1\ 3\ 2), \mu_1 = (2\ 3), \mu_2 = (1\ 3), \mu_3 = (1\ 2)\}$$

لاحظ أن عناصر S_3 ما هي إلا تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع  حيث I, ρ_1, ρ_2 تقابل الدورانات بزاوية مقدارها 120 درجة حول مركز المثلث و μ_1, μ_2, μ_3 تقابل الانعكاسات حول منتصفات الزوايا. ولهذا السبب تسمى S_3 أحياناً مجموعة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع □
إن صياغة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع بدلالة S_3 هو مجرد حالة خاصة من استخدام مجموعات جزئية من S_n للتعبير عن تناظرات الأشكال الهندسية. المثال التالي يبين تناظرات المربع.

مثال (١,٥)

إذا كانت D_4 هي تناظرات المربع  فإن D_4 تحتوي على ثمانية عناصر هي :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

حيث $I, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ هي الدورانات ، μ_1, μ_2 هي الانعكاسات حول المنتصفات العمودية للأضلاع و δ_1, δ_2 هي الانعكاسات حول القطرين. لاحظ أيضاً أن $D_4 \subset S_4$ □

ملحوظة

إذا كان $\sigma \in S_n$ فإنه من السهل أن نجد عدداً $m \geq 1$ حيث $\sigma^m = I$. ولإثبات ذلك لاحظ أن $\sigma^t \in S_n$ لكل $t \geq 1$. وبما أن S_n مجموعة منتهية عدد عناصرها $n!$ حسب المبرهنة (١,٧) فإنه يوجد عدنان $t_1 < t_2$ بحيث يكون $\sigma^{t_2} = \sigma^{t_1}$. وبما أن $(\sigma^{-1})^{t_1} = (\sigma^{t_1})^{-1}$ فإننا نحصل على :

$$\sigma^{t_2 - t_1} = \sigma^{t_2} \circ \sigma^{t_1} = \sigma^{t_2} \circ (\sigma^{-1})^{t_1} = \sigma^{t_2} \circ (\sigma^{t_1})^{-1} = \sigma^{t_1} \circ (\sigma^{t_1})^{-1} = I$$

وبالتالي إذا وضعنا $m = t_2 - t_1$ فإننا نخلص إلى أن $\sigma^m = I$. الآن ، مبدأ الترتيب الحسن يضمن لنا وجود أصغر عدد $k \geq 1$ بحيث يكون $\sigma^k = I$ وهذا يقترح علينا التعريف التالي:

تعريف (١,٣)

إذا كان $\sigma \in S_n$ فإن رتبة σ (order of σ) ويرمز لها بالرمز $o(\sigma)$ هو أصغر عدد صحيح موجب k يحقق $\sigma^k = I$.

مبرهنة (١,٨)

إذا كان $\sigma \in S_n$ حيث $o(\sigma) = k$ وكان $\sigma^m = I$ حيث $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن $k | m$.

البرهان

باستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $m = kq + r$ ، $0 \leq r < k$. الآن :

$$\sigma^r = \sigma^{m - kq} = \sigma^m \circ (\sigma^k)^{-q} = I \circ I = I$$

ولذا باستخدام تعريف k ، نجد أن $r = 0$ ، إذن ، $m = kq$ ، وبالتالي فإن $k | m$ ◆

قبل إثبات المبرهنة التالية ، نذكر القارئ أنه إذا كان $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن العلاقة $\equiv$ المعرفة على $\mathbb{Z}$ كالتالي : $a \equiv b \pmod{m}$ إذا وفقط إذا كان $m | (a - b)$ هي علاقة تكافؤ. تدعى هذه العلاقة بعلاقة التطابق قياس m (congruence modulo m).

مبرهنة (١,٩)

إذا كانت $\sigma \in S_n$ دورة طولها k فإن $o(\sigma) = k$.

البرهان

لنفرض أن $\sigma = (a_0 a_1 \dots a_{k-1})$ دورة طولها k . لاحظ أنه لكل $j \geq 0$ نستطيع أن نبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن $\sigma^j(a_i) = a_{i+j}$ حيث $1 \leq i \leq k$ و $t \equiv i+j \pmod{k}$. إذن ، $\sigma^k = I$. كذلك ، إذا كان $0 \leq m < k$ فإن $\sigma^m(a_0) = a_{0+m} \neq a_0$ ونخلص إلى أن ، $\diamond o(\sigma) = k$.

تعريف (١,٤)

إذا كان $\alpha, \beta \in S_n$ فإننا نقول إنهما مترافقان (**conjugate**) إذا وجد $\sigma \in S_n$ يحقق $\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1} = \beta$.

تزودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب مرافقات الدورات.

مبرهنة (١,١٠)

إذا كانت $\alpha = (a_0 a_1 \dots a_{k-1})$ دورة طولها k في S_n وكان $\sigma \in S_n$ فإن :

$$\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_0) \sigma(a_1) \dots \sigma(a_{k-1}))$$

البرهان

لما كان σ تقابلاً على $X = \{1, 2, \dots, n\}$ فإن $\sigma(X) = X$. بوضع $\beta = (\sigma(a_0) \sigma(a_1) \dots \sigma(a_{k-1}))$

فإننا سنثبت أن $(\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1})(x) = \beta(x)$ لكل $x \in X$. لدينا حالتان :

الحالة الأولى : $x = \sigma(a_i)$ ، $0 \leq i \leq k-1$. في هذه الحالة $\beta(\sigma(a_i)) = \sigma(a_{i+1})$. ومن ناحية أخرى

لدينا : $(\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_i)) = (\sigma \circ \alpha)(a_i) = \sigma(a_{i+1})$ حيث نقرأ $i+1$ قياس k .

الحالة الثانية : $x \neq \sigma(a_i)$ لكل i ، $0 \leq i \leq k-1$. في هذه الحالة $\beta(x) = x$. ليكن $b = \sigma^{-1}(x)$.

عندئذ ، $b \neq a_i$ لكل i ، $0 \leq i \leq k-1$. وعليه فإن :

$$(\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1})(x) = (\sigma \circ \alpha)(b) = \sigma(b) = \sigma(\sigma^{-1}(x)) = x$$

لأن α تثبت b . وبالتالي نخلص إلى أن $(\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1})(x) = \beta(x)$ لكل $x \in X$. $\diamond$

مثال (١,٦)

إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$ وكانت $\beta = (1 \ 3 \ 4 \ 2) \in S_8$ فإن :

$$\square \sigma \circ \beta \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1) \ \sigma(3) \ \sigma(4) \ \sigma(2)) = (3 \ 6 \ 7 \ 8)$$

تبين لنا المبرهنة التالية العلاقة الوثيقة بين رتب الدورات المترافقة .

مبرهنة (١,١١)

إذا كانت $\alpha = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r), \beta = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_s) \in S_n$ فإن :

α و β مترافقتان إذا وفقط إذا كان $r = s$.

البرهان

نفرض أولاً أن α و β مترافقتان. إذن، يوجد $\sigma \in S_n$ حيث $\beta = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$. بما أن σ تطبيق أحادي

على $X = \{1, 2, \dots, n\}$ فإن $\sigma(a_i) = \sigma(a_j)$ ، $1 \leq i, j \leq r$ ، $i = j \Leftrightarrow 1 \leq i, j \leq r$ وباستخدام المبرهنة (١,١٠)

نجد أن: $\beta = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_s) = (\sigma(a_1) \ \sigma(a_2) \ \dots \ \sigma(a_r))$ ، إذن ، $s = r$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $s = r$. عندئذ ، $\alpha = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r)$ و $\beta = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r)$.

لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix} \in S_n$. عندئذ :

$$\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \sigma(a_2) \ \dots \ \sigma(a_r)) = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r) = \beta$$

وبالتالي ، فإن α و β مترافقتان ♦

تعريف (١,٥)

لتكن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in S_n$. نقول إن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ تبديلات منفصلة (**disjoint**) إذا كان لكل i ،

$1 \leq i \leq k$ ولكل $a \in X$: $\sigma_i(a) \neq a \Rightarrow \sigma_j(a) = a$ لكل $1 \leq j \leq k$ ، $i \neq j$. أي أن

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ منفصلة إذا حركت σ_i العنصر a فإن a يبقى ثابتاً تحت جميع التبديلات الأخرى .

الخاصية التالية إحدى أهم خصائص التبديلات المنفصلة .

مبرهنة (١٢، ١)

إذا كان $\sigma, \mu \in S_n$ تبديلين منفصلين فإن $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma$.

البرهان

لنفرض أن $a \in X$. لدينا ثلاث حالات:(أ) $\sigma(a) \neq a$. في هذه الحالة يكون $\mu(a) = a$. لنفرض أن $\sigma(a) = b$. عندئذ:

$$(\sigma \circ \mu)(a) = \sigma(\mu(a)) = \sigma(a) = b$$

$$(\mu \circ \sigma)(a) = \mu(\sigma(a)) = \mu(b)$$

نبرهن الآن أن $\mu(b) = b$. إذا كان $\mu(b) \neq b$ فإن $\sigma(b) = b = \sigma(a)$. ولذا فإن $b = a$ وهذامستحيل. إذن، $\mu(b) = b$. وبالتالي فإن: $(\sigma \circ \mu)(a) = (\mu \circ \sigma)(a)$.(ب) $\mu(a) \neq a$ وهي حالة مشابهة للحالة (أ) إذا استبدلنا μ بالتبديل σ .(ج) $\mu(a) = a$ و $\sigma(a) = a$. في هذه الحالة لدينا:

$$\blacklozenge \quad (\mu \circ \sigma)(a) = \mu(\sigma(a)) = \mu(a) = a, \text{ كذلك } (\sigma \circ \mu)(a) = \sigma(\mu(a)) = \sigma(a) = a$$

إن أحد الأهداف الرئيسية في هذا البند هو البرهان على إمكانية كتابة أي $\sigma \in S_n$ كتحويل

عدد منته من الدورات المنفصلة. النتيجة التالية تمهد لنا الطريق في هذا الاتجاه.

نتيجة (١٣، ١)

(أ) إذا كانت μ و σ دورتين منفصلتين في S_n من الرتبة r و s على التوالي فإن:

$$o(\sigma \circ \mu) = \text{lcm}(r, s)$$

(ب) إذا كانت $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ دورات منفصلة فإن:

$$o(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k) = \text{lcm}(o(\sigma_1), o(\sigma_2), \dots, o(\sigma_k))$$

البرهان

(أ) لنفرض أن $m = \text{lcm}(r, s)$. عندئذ، يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $m = xr = ys$. وبما أنفإن $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma$:

$$(\sigma \circ \mu)^m = \sigma^m \circ \mu^m = \sigma^{ys} \circ \sigma^{xr} = (\sigma^s)^y \circ (\sigma^r)^x = (I)^y \circ (I)^x = I \circ I = I$$

ولذا فإن $m \mid o(\sigma \circ \mu)$ حسب المبرهنة (١,٨). لنفرض الآن أن $(\sigma \circ \mu)^n = I$. عندئذ ، $\sigma^n \circ \mu^n = I$ ومنه نخلص إلى أن $\sigma^n = \mu^n = I$ لأنه لو كان أحدهما وليكن $\sigma^n \neq I$ لوجد $x \in X$ بحيث يكون $\sigma^n(x) \neq x$ وعليه فإن $\sigma(x) \neq x$ ولكن μ و σ منفصلان . إذن ، $\mu(x) = x$ وبالتالي فإن : $(\sigma^n \circ \mu^n)(x) = \sigma^n(x) \neq x$ وهذا تناقض لكون $\sigma^n \circ \mu^n = I$. إذن ، استناداً إلى المبرهنة (١,٨) نجد أن $s \mid n$ و $r \mid n$ ولذا فإن $m \mid n$ ومنه فإن $m \leq n$. وبالتالي ، فإن m هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $(\sigma \circ \mu)^m = I$. أي أن ، $o(\sigma \circ \mu) = m$.

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي على k والفقرة (أ) والخاصية

$$\blacklozenge \text{ lcm}(n_1, n_2, \dots, n_t) = \text{lcm}(\text{lcm}(n_1, n_2, \dots, n_{t-1}), n_t)$$

نقدم الآن مفهوم المدار للتبديلات والذي نحتاجه للبرهان على أننا نستطيع كتابة أي تبديل كتحصيل دورات منفصلة .

مبرهنة (١,١٤)

لتكن $\sigma \in S_n$. تعرف العلاقة $\sim_\sigma$ على $X = \{1, 2, \dots, n\}$ كالتالي :

$$a \sim_\sigma b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (\sigma^k(a) = b)$$

عندئذ ، علاقة تكافؤ على X .

البرهان

(أ) بما أن $\sigma^0(a) = I(a) = a$ لكل $a \in X$ فإن $a \sim_\sigma a$. ولذا فإن $\sim_\sigma$ انعكاسية .

(ب) لاحظ أن : $a \sim_\sigma b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (\sigma^k(a) = b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (\sigma^{-k}(b) = a) \Rightarrow b \sim_\sigma a$

إذن ، $\sim_\sigma$ تناظرية .

(ج) لاحظ أن :

$$a \sim_\sigma b \text{ و } b \sim_\sigma c \Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{Z} (\sigma^k(a) = b \text{ و } \sigma^m(b) = c)$$

$$\Rightarrow \sigma^{m+k}(a) = (\sigma^m \circ \sigma^k)(a) = \sigma^m(b) = c$$

إذن ، $a \sim_\sigma c$ ، وبالتالي ، فإن $\sim_\sigma$ متعدية $\blacklozenge$

ملحوظة

نكتفي بالرمز $a \sim b$ للدلالة على العلاقة أعلاه ، إذا كان التبديل σ واضح من السياق.

تعريف (١,٦)

ليكن $\sigma \in S_n$. تسمى فصول تكافؤ العلاقة $\sim$ في المبرهنة (١,٤)، مدارات σ (orbits).

ترودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب المدارات.

مبرهنة (١,١٥)

إذا كان $\sigma \in S_n$ وكان $a \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ فإن مدار σ الذي يحتوي a هو المجموعة :

$$A = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\} \text{ حيث } k \text{ هو أصغر عدد يحقق } \sigma^k(a) = a.$$

البرهان

إذا كان $x \in A$ فإنه باستخدام خاصية التعدي للعلاقة $\sim$ نجد أن x هو أحد عناصر مدار a .

ولبرهان العكس ، نفرض أن $b \in X$ حيث $b \sim a$. إذن ، يوجد $m \in \mathbb{Z}$ حيث $\sigma^m(a) = b$.

وباستخدام خوارزمية القسمة ، يوجد $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث: $m = kq + r$ ، $0 \leq r < k$. إذن ،

$$\blacklozenge b = \sigma^r(a) \in A \text{ فإن } r < k \text{ وبما أن } b = \sigma^m(a) = \sigma^{kq+r}(a) = ((\sigma^k)^q \circ \sigma^r)(a) = \sigma^r(a)$$

مثال (١,٧)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

مدارات

$$\square \{1, 2, 5, 7\}, \{3\}, \{4, 9, 6\}, \{8, 10\}$$

ملحوظة

لاحظ أن $\sigma \in S_n$ دورة إذا كان لها مداراً واحداً على الأكثر يحتوي على أكثر من عنصر واحد. على

سبيل المثال ،

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$$

دورة ، وذلك لأن مدارات σ هي: $\{1,3,6\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{8\}$.

مبرهنة (١,١٦)

إذا كان $I \neq \sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) فإنه من الممكن كتابة σ بطريقة وحيدة (باستثناء الترتيب) كتحويل دورات منفصلة .

البرهان

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_r$ مدارات σ حيث $|A_i| \geq 2$ لكل $1 \leq i \leq r$ ، ولتكن σ_i هي الدورة المعرفة على النحو التالي:

$$\sigma_i(a) = \begin{cases} \sigma(a) & , a \in A_i \\ a & , a \notin A_i \end{cases}$$

من الواضح أن $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r$. وبما أن المدارات منفصلة فإن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ دورات منفصلة . ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_s$ حيث $r \leq s$ وحيث μ_i دورات منفصلة و σ_j دورات منفصلة.

لنفرض أن $a \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ حيث $\sigma_1(a) \neq a$ ، إذن $\sigma_j(a) = a$ لكل $j = 2, 3, \dots, r$ وكذلك توجد μ_i حيث $\mu_i(a) \neq a$. وبما أن μ_i دورات منفصلة فإنها تتبادل حسب المبرهنة (١,١٢) ، ولذا نستطيع أن نفرض أن $\mu_i = \mu_1$. عندئذ ، $\mu_i(a) = a$ و $\mu_1(a) \neq a$ لكل $i = 2, 3, \dots, s$ ، إذن ، مدار a تحت σ (وتحت μ) هو $\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}$ حيث k هو أصغر عدد يحقق $\sigma^k(a) = a$ ولذا فإن $\sigma_1 = \mu_1 = (a \ \sigma(a) \ \dots \ \sigma^{k-1}(a))$. لاحظ أن العناصر $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)$ جميعها مختلفة (لماذا؟). إذن ، $\sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r = \mu_2 \circ \dots \circ \mu_s$ وبالاستمرار على هذا المثال ، نجد أن $r = s$ وأن $\sigma_i = \mu_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, r$ إذ لو كان $r \leq s$ لحصلنا على $I = \mu_{r+1} \circ \dots \circ \mu_s$ ولكون الدورات منفصلة فإن الطرف الأيمن لا يثبت عنصراً واحداً على الأقل بينما الطرف الأيسر (وهو التبديل المحايد) يثبت جميع العناصر وهذا مستحيل ◆

(مثال ١,٨)

□ إذا كان $\sigma \in S_{10}$ هو التبديل المقدم في المثال (١,٧) فإن $\sigma = (1\ 2\ 5\ 7) \circ (4\ 9\ 6) \circ (8\ 10)$

(نتيجة ١,١٧)

إذا كان $\sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) فإنه بالإمكان كتابة σ كتحويل مناقلات .

البرهان

استناداً إلى المبرهنة (١,١٦) ، يكفي أن نثبت أنه باستطاعتنا كتابة أي دورة طولها k كتحويل مناقلات.

وهذا واضح لأن : $\diamond (a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1\ a_k) \circ (a_1\ a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1\ a_2)$

(مثال ١,٩)

إذا كان $\sigma \in S_{10}$ هو التبديل المقدم في المثال (١,٧) فإنه يمكن كتابة σ كتحويل مناقلات كالتالي :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2\ 5\ 7) \circ (4\ 9\ 6) \circ (8\ 10) \\ \square \quad &= (1\ 7) \circ (1\ 5) \circ (1\ 2) \circ (4\ 6) \circ (4\ 9) \circ (8\ 10) \end{aligned}$$

(مثال ١,١٠)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 11 & 12 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{حيث } \sigma \in S_{12} \text{ جد رتبة } \sigma$$

الحل

□ لاحظ أن $\sigma = (1\ 3\ 2\ 4) \circ (5\ 8\ 11) \circ (6\ 7\ 9\ 12)$ ، إذن ، $o(\sigma) = \text{lcm}(4,3,4) = 12$

(مثال ١,١١)

سنستخدم المبرهنة (١,١٦) ، لإيجاد جميع عناصر S_4 . إذا كان $\sigma \in S_4$ فإنه إما يكون σ دورة من الرتبة

4 أو دورة طولها 3 أو كتحويل مناقلتين منفصلتين. ولذا فإن:

$$S_4 = \{I, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), \\ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), \\ (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), \\ (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 2) \circ (3\ 4), \\ (1\ 4) \circ (3\ 2), (1\ 3) \circ (2\ 4)\}$$

□ لاحظ أننا قد وجدنا 24 عنصراً وهي جميع عناصر S_4

لقد بينا في النتيجة (١٧، ١)، أنه بالإمكان كتابة أي $\sigma \in S_n$ كتحويل مناقلات. ونلفت انتباه القارئ إلى أنه من الممكن كتابة σ كتحويل مناقلات بأكثر من طريقة. أي أن هذا التمثيل ليس وحيداً. فمثلاً إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ فإن :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2) \circ (5\ 6) \\ &= (1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3) \circ (5\ 6) \\ &= (1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (4\ 5) \circ (2\ 3) \circ (4\ 6) \circ (4\ 5) \\ &= (1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 4) \circ (2\ 3) \circ (3\ 5) \circ (3\ 4) \circ (4\ 6) \circ (4\ 5) \end{aligned}$$

لاحظ أننا كتبنا σ كتحويل مناقلتين ، أربع مناقلات ، ست مناقلات ، ثمانية مناقلات . أي أن عدد المناقالات كان دائماً زوجياً. إن ذلك صحيح دائماً وهو ما نحن بصدد برهانه.

لنفرض أن $n \in \mathbb{Z}^+$ وأن $\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. فمثلاً ،

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (a_2 - a_1) \\ \Delta_3 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ \Delta_4 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \end{aligned}$$

تعريف (١،٧)

إذا كان $\sigma \in S_n$ فإننا نعرف $\sigma(\Delta_n)$ كالتالي: $\sigma(\Delta_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_{\sigma(j)} - a_{\sigma(i)})$.

مثال (١،١٢)

إذا كانت $\sigma = (1\ 3) \in S_n$ فعين $\sigma(\Delta_4)$.

الحل

$$\begin{aligned}
 \sigma(\Delta_4) &= (a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)})(a_{\sigma(4)} - a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(4)} - a_{\sigma(2)})(a_{\sigma(4)} - a_{\sigma(3)}) \\
 &= (a_2 - a_3)(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1) \\
 &= (-1)^3 (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)
 \end{aligned}$$

$$\square \sigma(\Delta_4) = -\Delta_4, \text{ إذن ,}$$

المبرهنة التالية تعميم للمثال (١٢, ١).

مبرهنة (١٨, ١)

إذا كانت $\sigma = (s \ t) \in S_n$ فإن $\sigma(\Delta_n) = -\Delta_n$.

البرهان

بما أن $\sigma = (s \ t)$ فإنه من الممكن أن نفرض أن $s < t$. الآن ، لإيجاد $\sigma(\Delta_n)$ فإننا ندرس تأثير σ على عوامل Δ_n المختلفة :

$$(١) \text{ إذا كان } t < i \text{ فإن : } \sigma[(a_i - a_s)(a_i - a_t)] = (a_i - a_t)(a_i - a_s)$$

$$(٢) \text{ إذا كان } s < i < t \text{ فإن : } \sigma[(a_i - a_s)(a_i - a_t)] = (a_i - a_t)(a_s - a_i) = (a_i - a_s)(a_t - a_i)$$

$$(٣) \text{ إذا كان } (i \neq t, i \neq s) \text{ أو } (j \neq t, j \neq s) \text{ فإن : } \sigma(a_j - a_i) = (a_j - a_i)$$

$$(٤) \sigma(a_t - a_s) = (a_s - a_t) = -(a_t - a_s)$$

وبالتالي من (١) إلى (٤) نخلص إلى أن $\sigma(\Delta_n) = -\Delta_n$ ♦

مبرهنة (١٩, ١)

إذا كان $\mu = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r \in S_n$ حيث σ_i مناقلات فإن $\mu(\Delta_n) = (-1)^r \Delta_n$.

البرهان

لاحظ أن : $\mu(\Delta_n) = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r(\Delta_n) = (-\Delta_n)(-\Delta_n) \dots (-\Delta_n) = (-1)^r \Delta_n$ ♦

نتيجة (١,٢٠)

لتكن $\sigma \in S_n$ ولنفرض أن: $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_s$ حيث σ_i و μ_j مناقلات. عندئذ، إما أن r و s كلاهما زوجي أو أن كليهما فردي.

البرهان

باستخدام المبرهنة (١,١٩)، نجد أن: $\sigma(\Delta_n) = (-1)^r \Delta_n = (-1)^s \Delta_n$.

إذن، $(-1)^r = (-1)^s$. وبالتالي، فإن r و s كلاهما زوجي أو أن كليهما فردي. ♦

تعريف (١,٨)

ليكن $\sigma \in S_n$. نقول إن σ تبديل زوجي إذا كان عدد المناقلات في كتابته كتحصيل مناقلات عدداً زوجياً. ونقول إنه فردي إذا كان عدد المناقلات فردياً.

نتيجة (١,٢١)

إذا كانت $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k) \in S_n$ فإن σ تبديل زوجي إذا فقط إذا كان k عدداً فردياً.

البرهان

لاحظ أن $\sigma = (a_1 a_k) \circ (a_1 a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1 a_2)$. أي أن σ تحصيل $k-1$ من المناقلات. ولذا فإن σ زوجي إذا فقط إذا كان k فردياً. ♦

نتيجة (١,٢٢)

إذا كان $\sigma, \mu \in S_n$ فإن :

(أ) $\sigma \circ \mu$ تبديل زوجي إذا فقط إذا كان كل من σ و μ زوجياً أو كان كل منهما فردياً.

(ب) $\sigma \circ \mu$ تبديل فردي إذا فقط إذا كان أحدهما زوجياً وكان الآخر فردياً.

البرهان

نحصل على المطلوب بدراسة نوعية العدد $m+k$ ، حيث m عدد المناقلات في تحصيل σ و k عدد

المناقلات في تحصيل μ . ♦

(مثال ١,١٣)

بين أي من التبديلين التاليين في S_9 زوجي وأيهما فردي:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 8 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

$$\sigma = (1 \ 3 \ 5) \circ (2 \ 6 \ 8 \ 7) \circ (4 \ 9) = (1 \ 5) \circ (1 \ 3) \circ (2 \ 7) \circ (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (4 \ 9)$$

ولذا فإن عدد المناقلات 6 ، وبالتالي فإن σ زوجي.

$$\mu = (1 \ 5 \ 7) \circ (2 \ 4 \ 3) \circ (6 \ 8) = (1 \ 7) \circ (1 \ 5) \circ (2 \ 3) \circ (2 \ 4) \circ (6 \ 8)$$

ولذا فإن عدد المناقلات 5 ، وبالتالي فإن μ فردي $\square$ لقد رأينا أن $|S_n| = n!$ ، وأن التبديل إما أن يكون زوجياً أو أن يكون فردياً. لتكن A_n و B_n بمجموعتي التبديلات الزوجية والفردية على التوالي. سنبرهن الآن ، أن $|A_n| = |B_n|$.

مبرهنة (١,٢٣)

$$|A_n| = |B_n|$$

البرهان

لنفرض أن δ مناقلة. عندئذ، $\delta \in B_n$. وليكن $f: A_n \rightarrow B_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(\sigma) = \sigma \circ \delta$ لكل $\sigma \in A_n$.بما أن $\sigma \in A_n$ و $\delta \in B_n$ فإن $\sigma \circ \delta \in B_n$. سنبرهن أن f تقابل. إذا كان $\sigma, \mu \in A_n$ فإن :

$$f(\sigma) = f(\mu) \Rightarrow \sigma \circ \delta = \mu \circ \delta \Rightarrow (\sigma \circ \delta) \circ \delta^{-1} = (\mu \circ \delta) \circ \delta^{-1}$$

$$\Rightarrow \sigma \circ (\delta \circ \delta^{-1}) = \mu \circ (\delta \circ \delta^{-1}) \Rightarrow \sigma \circ I = \mu \circ I \Rightarrow \sigma = \mu$$

إذن ، f أحادي. إذا كان $\alpha \in B_n$ ، فإنه من الواضح أن $\alpha \circ \delta^{-1} \in A_n$. وأن :

$$f(\alpha \circ \delta^{-1}) = (\alpha \circ \delta^{-1}) \circ \delta = \alpha \circ (\delta^{-1} \circ \delta) = \alpha$$

◆ إذن ، f شامل. وبالتالي ، f تقابل ونخلص إلى أن $|A_n| = |B_n|$

(نتيجة (١,٢٤)

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

البرهان

بما أن $S_n = A_n \cup B_n$ وأن $A_n \cap B_n = \emptyset$ فإن $|S_n| = |A_n| + |B_n|$.

ولكن $|A_n| = |B_n|$ ، إذن ، $2|A_n| = n!$ ، وبالتالي ، فإن $|A_n| = \frac{n!}{2}$ ◆

نختم هذا البند ببرهان الخاصية المهمة التالية عن A_n والتي سنحتاجها فيما بعد.

(مبرهنة (١,٢٥)

إذا كان $\sigma \in A_n$ حيث $n \geq 3$ فإنه من الممكن كتابة σ كتحويل دورات طول كل منها 3.

البرهان

لنفرض أن $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r$ هو تمثيل σ كتحويل مناقلات. بما أن $\sigma \in A_n$ فإن r عدد زوجي.

الآن ، لاحظ أن : $\sigma = (a \ b) = (1 \ a) \circ (1 \ b) \circ (1 \ a)$. ولذا فإن :

$(1 \ a_1) \circ (1 \ a_2) = (1 \ a_2 \ a_1)$ ولكن $\sigma = (1 \ a_1) \circ (1 \ a_2) \circ \dots \circ (1 \ a_m)$

إذن ، σ تحصيل دورات كل منها 3 ◆

تمارين (١,٢)

(١) لتكن

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

تبديلات في S_8 .

(أ) أكتب كل منها كتحويل دورات منفصلة ومن ثم كتحويل مناقلات (ب) احسب رتبة كل منها

(ج) أيها تبديلات زوجية وأيها تبديلات فردية؟ (د) احسب كل من $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ و $(\sigma_1 \circ \sigma_3) \circ \sigma_2$

(هـ) جد معكوس كل منها واكتبه كتحويل مناقلات (و) جد مدارات كل منها

(ز) احسب $(\sigma_4^{-1} \circ \sigma_3) \circ \sigma_2^{-1}$ (٢) احسب التحصيلات التالية في S_9 ، ثم جد رتبة كل منها وبين أيها زوجية وأيها فردية

$$(أ) (1\ 4\ 5) \circ (7\ 8) \circ (2\ 5\ 7) \quad (ب) (1\ 3\ 2\ 7) \circ (4\ 8\ 6)$$

$$(ج) (1\ 2\ 3) \circ (4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9) \quad (د) (1\ 2) \circ (4\ 7\ 8) \circ (2\ 1) \circ (7\ 2\ 8\ 1\ 5)$$

$$(هـ) (2\ 3\ 6\ 7\ 9\ 1\ 4) \circ (6\ 8\ 9\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

(٣) احسب $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ لكل مما يلي :

$$(أ) \alpha = (1\ 3) \circ (5\ 8), \beta = (2\ 3\ 6\ 7) \in S_8 \quad (ب) \alpha = (1\ 2\ 5\ 7), \beta = (2\ 4\ 6) \in S_7$$

$$(ج) \alpha = (2\ 5\ 9) \circ (1\ 3\ 6), \beta = (1\ 5\ 7) \circ (2\ 4\ 6\ 9) \in S_9$$

(٤) إذا كانت $\sigma = (1\ 2\ 3 \dots n-1)$ وكانت τ فائت أن:

$$(أ) \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (2\ 3) \quad (ب) \sigma^2 \circ \tau \circ \sigma^{-2} = (3\ 4)$$

$$(ج) \sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k} = (k+1\ k+2) \text{ حيث } k < n-1$$

(٥) إذا كانت σ دورة طولها k وكانت τ مناقلة فائت أن $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ دورة طولها k .

$$(٦) \text{ إذا كانت } \sigma = (1\ 2\ 3 \dots k) \in S_n \text{ فائت أن:}$$

$$(أ) \sigma^2 = (1\ 3\ 5 \dots 2m-1) \circ (2\ 4\ 6 \dots 2m) \text{ إذا كان } k = 2m.$$

$$(ب) \sigma^2 = (1\ 3\ 5 \dots 2m+1\ 2\ 4 \dots 2m) \text{ إذا كان } k = 2m+1.$$

$$(٧) \text{ جد } \alpha \in S_8 \text{ حيث } \alpha \circ (1\ 3\ 5\ 7) \circ \alpha^{-1} = (2\ 3\ 6\ 8).$$

$$(٨) \text{ جد } \alpha \in S_6 \text{ حيث } \alpha \circ (3\ 4) \circ (1\ 2) \circ \alpha^{-1} = (1\ 3) \circ (5\ 6).$$

$$(٩) \text{ أثبت أنه لا يمكن إيجاد تبديل } \alpha \text{ يحقق: } \alpha \circ (1\ 2\ 3) \circ \alpha^{-1} = (5\ 7\ 8) \circ (1\ 3).$$

$$(١٠) \text{ أثبت أنه لا يمكن إيجاد تبديل } \alpha \text{ يحقق: } \alpha \circ (1\ 2) \circ \alpha^{-1} = (1\ 5) \circ (3\ 4).$$

$$(١١) \text{ أثبت أن } (1\ 2 \dots k)^{-1} = (k\ k-1\ k-2 \dots 2\ 1).$$

$$(١٢) \text{ أثبت أن عدد الدورات المختلفة ذوات الطول } k \text{ في } S_n \text{ هو } \frac{n!}{k(n-k)!}.$$

$$(١٣) \text{ ليكن } \sigma \in S_n \text{ تبديلاً فردياً. أثبت أن أي تبديل فردي في } S_n \text{ يجب أن يكون على الصورة } \sigma \circ \mu.$$

$$\text{حيث } \mu \in A_n.$$

$$(١٤) \text{ لتكن } \sigma \text{ دورة من الرتبة } k. \text{ أثبت أن } \sigma^m \text{ دورة إذا وفقط إذا كان } \gcd(k, m) = 1.$$

(١,٣) العمليات الثنائية

Binary Operations

في هذا البند سنتطرق إلى العمليات الثنائية على مجموعة والتي تعد أساس بناء الأنظمة الجبرية .
إذا جمعنا عددين صحيحين فإن ناتج هذا الجمع هو أيضاً عدد صحيح ، وإذا ضربناهما فإننا نحصل
أيضاً على عدد صحيح. كذلك إذا جمعنا مصفوفتين من الدرجة $m \times n$ فإننا نحصل على مصفوفة جديدة
من الدرجة نفسها، وإذا ضربنا مصفوفتين من الدرجة n فإننا نحصل أيضاً على مصفوفة من الدرجة n . إن
ذلك يقترح علينا التعريف التالي للعملية الثنائية:

تعريف (١,٩)

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $*$ عملية ثنائية (binary operation) على A إذا كانت $*$
تطبيقاً من $A \times A$ إلى A . أي أن $(x, y) \in A$ لكل $(x, y) \in A \times A$. سنكتب $x * y$ بدلاً
من $(x, y) *$ ونقول إن A مجموعة مغلقة بالنسبة للعملية $*$.
لاحظ أن $+$ عملية ثنائية على $\mathbb{N}$ ولكن $-$ ليست عملية ثنائية على $\mathbb{N}$ وذلك لأن $3, 8 \in \mathbb{N}$
ولكن $3 - 8 = -5 \notin \mathbb{N}$ ، أي أن $\mathbb{N}$ ليست مغلقة بالنسبة للعملية $-$.

تعريف (١,١٠)

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة A فإننا نسمي الزوج المرتب $(A, *)$ نظاماً جبرياً
(algebraic system).

تعريف (١,١١)

ليكن $(A, *)$ نظاماً جبرياً.

- (أ) نقول إن $*$ تجميعية (associative) إذا كان $x * (y * z) = (x * y) * z$ لكل $x, y, z \in A$.
(ب) نقول إن $*$ إبدالية (commutative) إذا كان $x * y = y * x$ لكل $x, y \in A$.

مثال (١,١٤)

كل من عمليتي الجمع والضرب على $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^+$ أو $\mathbb{Q}$ أو $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{Z}$) إبدالية وتجميعية $\square$

مثال (١,١٥)

لتكن $F(\mathbb{R})$ هو مجموعة جميع التطبيقات من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ولتكن $\circ$ هي عملية تحصيل التطبيقات. لاحظ أن $\circ$ عملية تجميعية لأنه لكل $f, g, h \in F(\mathbb{R})$ ولكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

إذن، $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ولكن $\circ$ ليست إبدالية، على سبيل المثال إذا كانت $f(x) = x^2$ و $g(x) = x - 2$ فإن:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2)^2 \neq x^2 - 2$$

ولذا فإن $f \circ g \neq g \circ f$ $\square$

مثال (١,١٦)

في النظام الجبري $(\mathbb{Z}, -)$ ، علمية الطرح ليست إبدالية لأن: $3 - 5 = -2 \neq 2 = 5 - 3$. كذلك -

ليست عملية تجميعية لأن: $(7 - 3) - 2 = 2 \neq 6 = 7 - (3 - 2)$ $\square$

مثال (١,١٧)

في النظام الجبري $(M_{mn}(\mathbb{R}), +)$ ، حيث $M_{mn}(\mathbb{R})$ هي مجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ على $\mathbb{R}$ وحيث $+$ هي عملية جمع المصفوفات فإن $+$ عملية تجميعية وإبدالية، لأن:

$$\square A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{R}) \text{ لكل } A + B = B + A \text{ وأن } A + (B + C) = (A + B) + C$$

مثال (١,١٨)

في النظام $(\mathbb{Q}^+, *)$ حيث $a * b = \frac{ab}{2}$ لكل $a, b \in \mathbb{Q}^+$. $*$ تجميعية وإبدالية لأنه لكل $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$

لدينا: $a * (b * c) = a * \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4}$ وأن $\frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4}$. كذلك :

$$\square a * b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b * a$$

مثال (١,١٩)

لتكن $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$. ولتكن $*$ معرفة على G بالقاعدة $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. سنبرهن على أن $*$

عملية ثنائية إبدالية وتجميعية على G . لاحظ أولاً أن :

$$\left(\frac{x+y}{1+xy} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 < 1 + 2xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + x^2y^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 0 < (1-x^2)(1-y^2) < 1$$

إذن، $x * y \in G$ ومن ثم فإن G مغلقة تحت $*$. من السهل أن نرى أن :

$$x * (y * z) = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} = (x * y) * z$$

$$\square \text{ وأن: } x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x \text{ ، إذن، } * \text{ إبدالية وتجميعية}$$

مثال (١,٢٠)

في النظام $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ حيث $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$ تكون $*$ تجميعية وإبدالية لأن :

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + d) * (e, f) = (ace, b + d + f)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + f) = (ace, b + d + f)$$

$$\square \text{ كذلك: } (a, b) * (c, d) = (ac, b + d) = (ca, d + b) = (c, d) * (a, b)$$

مثال (١,٢١)

إذا كانت $G = \mathbb{Q} - \{-1\}$ فإن النظام الرياضي $(G, *)$ حيث $a * b = a + b + ab$ تجميعي وإبدالي

وذلك لأن :

$$(a * b) * c = (a + b + ab) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$$

$$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + (b * c) + a(b * c) = a * (b * c)$$

$$\square a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a : \text{كذلك}$$

إذا كانت A مجموعة منتهية وتحتوي على عدد قليل من العناصر فإن إحدى الطرائق المناسبة لتعريف عملية ثنائية عليها تكون باستخدام جدول يسمى عادة جدول كيلبي (Cayley's table)، على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ فإن الجدول التالي يعرف لنا عملية ثنائية $*$ على A :

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

ولإيجاد العنصر $x * y$ فإننا نبحث عن تقاطع صف x مع عمود y .

ملحوظة

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على مجموعة معرفة بواسطة جدول كيلبي فإنها تكون إبدالية إذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي.

ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$. من السهل أن نرى أن علاقة التطابق قياس n والمعرفة على النحو التالي:

$x \equiv_n y$ إذا وفقط إذا كان $n \mid (x - y)$ لكل $x, y \in \mathbb{Z}$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Z}$. سنرمز

لمجموعة فصول تكافؤ العلاقة بالرمز $\mathbb{Z}_n$. أي أن $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$.

مثال (١, ٢٢)

النظام الرياضي $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ تجميعي وإبدالي حيث $[a] +_n [b] = [a + b]$ لكل $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$.

الحل

للهتان على أن $+_n$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}_n$ نفرض أن $[a], [b], [c], [d] \in \mathbb{Z}_n$ ولنفرض أن $[a] = [c]$ وأن $[b] = [d]$. عندئذ ، $n \mid (a-c)$ و $n \mid (b-d)$ أي أن $a-c = ns$ و $b-d = nt$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن $(a+b) - (c+d) = n(s+t)$. ولذا فإن ، $n \mid ((a+b) - (c+d))$ وبالتالي فإن $a+b \equiv_n c+d$ ، أي أن $[a+b] = [c+d]$ وهذا يثبت أن $+_n$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}_n$. الآن :

$$([a] +_n [b]) +_n [c] = [a+b] +_n [c] = [(a+b) + c]$$

$$= [a + (b+c)] = [a] +_n [b+c] = [a] +_n ([b] +_n [c])$$

ولذا فإن $+_n$ تجميعية. كذلك : $[a] +_n [b] = [a+b] = [b+a] = [b] +_n [a]$. ومنه فإن $+_n$ إبدالية. إذا أخذنا على وجه الخصوص $\mathbb{Z}_6$ فإن جدول العملية $+_6$ يكون على الصورة:

$+_6$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

□

مثال (١, ٢٣)

الزوج المرتب $(\mathbb{Z}_n, \bullet_n)$ نظام تجميعي وإبدالي حيث $[a] \bullet_n [b] = [ab]$ لكل $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$

الحل

بصورة مماثلة للمثال (١, ٢٢) نستطيع أن نبرهن على أن $\bullet_n$ عملية تجميعية وإبدالية ولذا سنكتفي بإثبات أن $\mathbb{Z}_n$ مغلقة تحت $\bullet_n$. لنفرض أن $[a], [b], [c], [d] \in \mathbb{Z}_n$ وأن $[a] = [c]$ و $[a] = [d]$. إذن، $a-c = ns$ و $b-d = nt$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن:

$$(a-c)(b-d) = n^2st \Leftrightarrow ab+cd-bc-ad = n^2st$$

$$\Leftrightarrow ab-cd = n^2st - 2cd + bc + ad$$

$$\Leftrightarrow ab-cd = n^2st + (bc-cd) + (ad-cd)$$

$$\Leftrightarrow ab-cd = n^2st + c(b-d) + d(a-c)$$

$$\Leftrightarrow ab-cd = n^2st + nct + nsd$$

$$\Leftrightarrow ab-cd = n(nst + ct + sd)$$

إذن، $n \mid (ab-cd)$. ومنه فإن، $[ab] = [cd]$. وبالتالي، فإن $\mathbb{Z}_n$ مغلقة تحت $\bullet_n$

إذا أخذنا على وجه الخصوص $\mathbb{Z}_6$ فإن جدول العملية $\bullet_6$ يكون على الصورة:

$\bullet_6$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

□

مثال (١,٢٤)

لتكن X مجموعة ولتكن $P(X)$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X . من السهل التحقق من أن كل

من $(P(X), \cup)$ و $(P(X), \cap)$ نظام تجميعي وإبدالي □

تعريف (١,١٢)

لتكن $A, B \subseteq X$. يعرف الفرق التناظري (symmetric difference) للمجموعتين A و B ويرمز له

بالرمز $A \Delta B$ على النحو التالي:

$$A \Delta B = [A \cap (X-B)] \cup [(X-A) \cap B] = (A \cup B) - (A \cap B) = (A-B) \cup (B-A)$$

مثال (١,٢٥)

إذا كانت $P(X)$ كما في المثال (١,٢٤). فإن النظام الجبري $(P(X), \Delta)$ تجميعي وإبدالي.

الحل

لاحظ أولاً أن: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \Delta A$

إذن، Δ إبدالية. ولإثبات الخاصية التجميعية، نستخدم للسهولة الرمز $\bar{A} = X - A$ فنلاحظ أن:

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &= (A \cap \overline{(B \Delta C)}) \cup (\bar{A} \cap (B \Delta C)) \\ &= (A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))) \cup (\bar{A} \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))) \\ &= (A \cap ((\bar{B} \cup C) \cap (B \cup \bar{C}))) \cup ((\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap B) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap B) \\ &\quad \cup (A \cap C \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

وبالمثل نستطيع أن نبرهن أن:

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

إذن، $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ □

تمارين (١,٣)

في التمارين من (١) إلى (١٥) بين ما إذا كانت العملية المعرفة على المجموعة هي عملية ثنائية ،

وإذا كانت كذلك، بين ما إذا كانت تجميعية أو إبدالية.

$$(١) \quad (\mathbb{Z}, *) \text{ حيث } x * y = (x + y) - (xy) \text{ لكل } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(٢) \quad (\mathbb{R}, *) \text{ حيث } x * y = \max(x, y) \text{ لكل } x, y \in \mathbb{R}$$

$$(٣) \quad (\mathbb{R}, *) \text{ حيث } x * y = |x + y| \text{ لكل } x, y \in \mathbb{R}$$

$$(٤) \quad (\mathbb{N}, *) \text{ حيث } x * y = x^y \text{ لكل } x, y \in \mathbb{N}$$

$$(٥) \quad (\mathbb{Z}, *) \text{ حيث } x * y = x + y + 1 \text{ لكل } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(٦) \quad (\mathbb{N}, *) \text{ حيث } x * y = \gcd(x, y) \text{ لكل } x, y \in \mathbb{N}$$

$$(٧) (N, *) \text{ حيث } x * y = \text{lcm}(x, y) \text{ لكل } x, y \in N$$

$$(٨) (R, *) \text{ حيث } x * y = \min(x, y) \text{ لكل } x, y \in R$$

$$(٩) (R, *) \text{ حيث } x * y = |x| + |y| \text{ لكل } x, y \in R$$

$$(١٠) (Q, *) \text{ حيث } x * y = xy + 1 \text{ لكل } x, y \in Q$$

$$(١١) (Z, *) \text{ حيث } x * y = x^2 + y^2 \text{ لكل } x, y \in Z$$

$$(١٢) (Z, *) \text{ حيث } x * y = xy^2 \text{ لكل } x, y \in Z$$

$$(١٣) (Z, *) \text{ حيث } x * y = xy - x \text{ لكل } x, y \in Z$$

$$(١٤) (M_2(Z), *) \text{ حيث } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+v & 0 \\ 0 & c+w \end{bmatrix}$$

$$(١٥) (Q(\sqrt{2}), *) \text{ حيث } Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\} \text{ وحيث}$$

$$(a + b\sqrt{2}) * (c + d\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$$

$$(١٦) \text{ إذا كان } (A, *) \text{ نظاماً تجميعياً وإبدالياً فأثبت أن:}$$

$$a, b, c, d \in A \text{ لكل } (a * b) * (c * d) = [(d * c) * a] * b$$

(١٧) لتكن S مجموعة الأعداد الأولية التي تقل عن أو تساوي 13، ولتكن $*$ معرفة على S كالتالي:

$$p * q \text{ هو أكبر قاسم أولي للعدد } p + q - 2$$

(ب) هل $*$ تجميعية؟

(أ) أنشئ جدول العملية $*$

$$(١٨) \text{ لتكن } U_n = \{[a] \in Z_n : \gcd(a, n) = 1\}. \text{ أنشئ جدول } \cdot_n \text{ لكل من } n = 7, 9, 12, 18.$$

(١,٤) المجموعات المرتبة والشبكيات

Ordered Sets and Lattices

نقدم في هذا البند مفهوم الشبكيات التي تعتبر وسيلة رئيسة في فهم البنى الجبرية ومنها الزمر.

تعريف (١,١٣)

تكون العلاقة $\leq$ المعرفة على المجموعة A علاقة ترتيب جزئي (partial order) إذا تحقق ما يلي:

- (أ) $\leq$ انعكاسية (reflexive)، أي أن $a \leq a$ لكل $a \in A$.
- (ب) $\leq$ تخالفية (antisymmetric)، أي أنه إذا كان $a \leq b$ و $b \leq a$ فإن $a = b$ لكل $a, b \in A$.
- (ج) $\leq$ متعدية (transitive)، أي أنه إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$ لكل $a, b, c \in A$.

مثال (١,٢٦)

من الواضح أن العلاقة $\leq$ المعرفة على $P(S)$ على النحو التالي:

$A \leq B$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ لكل $A, B \in P(S)$ علاقة ترتيب جزئي على $P(S)$ $\square$

مثال (١,٢٧)

لتكن $\leq$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{Z}^+$ كالتالي:

$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b لكل $a, b \in \mathbb{Z}^+$. نستطيع التحقق وبسهولة من أن $\leq$ علاقة ترتيب

جزئي على $\mathbb{Z}^+$ $\square$

تعريف (١,١٤)

إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على A فإننا نسمي الزوج المرتب $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً (partially ordered set).

تعريف (١,١٥)

تكون العلاقة $\leq$ المعرفة على A مترابطة (connected) إذا كان $a \leq b$ أو $b \leq a$ لكل $a, b \in A$. إذا كانت $\leq$ علاقة مترابطة فإننا نقول إن العنصرين a, b قابلان للمقارنة (comparable).

تعريف (١,١٦)

تكون المجموعة المرتبة جزئياً $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً (totally ordered set) إذا كانت $\leq$ مترابطة.

مثال (١,٢٨)

المجموعة المرتبة جزئياً $(P(S), \leq)$ في المثال (١,٢٦) ليست مجموعة مرتبة كلياً وذلك لأن العنصرين $\{a\}, \{b\}$ حيث $a \neq b$ غير قابلين للمقارنة $\square$

مثال (١,٢٩)

المجموعة المرتبة جزئياً $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ في المثال (١,٢٧) ليست مجموعة مرتبة كلياً وذلك لأن العنصرين ٢ و ٥ غير قابلين للمقارنة $\square$

مثال (١,٣٠)

لتكن $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ والعلاقة $\leq$ معرفة كالتالي: $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b . من الواضح أن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً $\square$

تعريف (١,١٧)

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. ولتكن $B \subseteq A$.

(أ) نقول إن $a \in A$ حد علوي (upper bound) للمجموعة B إذا كان $x \leq a$ لكل $x \in B$.

ونقول إن $a \in A$ حد سفلي (lower bound) للمجموعة B إذا كان $a \leq x$ لكل $x \in B$.

(ب) ليكن $a \in A$ حد علوي للمجموعة B . نقول إن a أصغر حد علوي

(least upper bound) إذا كان $a \leq b$ لكل حد علوي b .

(ج) ليكن $a \in A$ حد سفلي للمجموعة B . نقول إن a أكبر حد سفلي

(greatest lower bound) إذا كان $a \geq b$ لكل حد سفلي b .

ملحوظات

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $B \subseteq A$ وليكن $a, b \in A$.

(١) من الممكن أن يكون للمجموعة B أكثر من حد علوي واحد. فمثلاً، ١٢, ٢٤, ٣٦ حدود

علوية للمجموعة $\{4, 6\}$ في المثال (١,٢٧).

(٢) من الممكن أن لا يوجد للمجموعة B حد علوي، وكذلك من الممكن أن لا يوجد لها أصغر حد علوي.

(٣) إذا وجد للمجموعة B أصغر حد علوي فإنه يجب أن يكون وحيداً. فمثلاً، إذا كان كل من a, b أصغر حد علوي للمجموعة B فإن $a \leq b$ و $b \leq a$ ومن ثم، فإن $a = b$.

(٤) الملاحظات (١)، (٢)، (٣) تبقى صحيحة في حالة الحد السفلي وأكبر حد سفلي.

(٥) سنرمز لأصغر حد علوي (إن وجد) للمجموعة B بالرمز $\text{lub}(B)$ ولأكبر حد سفلي (إن وجد)

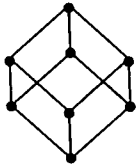
بالرمز $\text{glb}(B)$. وعلى وجه الخصوص سنرمز لـ $\text{glb}\{a, b\}$ إن وجد بالرمز $a \wedge b$ ولـ $\text{lub}\{a, b\}$ إن وجد بالرمز $a \vee b$.

تعريف (١٨، ١)

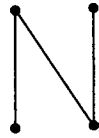
لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $x, y \in A$. نقول إن y يغطي x (y covers x) إذا كان $x \leq y$ و $x \neq y$ وإذا وجد $z \in A$ بحيث يكون $x \leq z \leq y$ فإن $x = z$ أو $x = y$.

ملحوظة

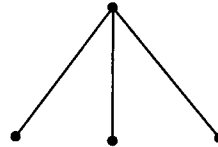
إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً فإننا نستطيع أن نستخدم فكرة الغطاء لتمثيلها بمخطط يدعى شكل هاس (**Hasse diagram**) كالآتي: تمثل عناصر A بنقاط المستوى وإذا كان $x \leq y$ فإن y يقع أعلى x ونصل بخط بين x و y إذا فقط إذا كان y يغطي x . على سبيل المثال كل شكل من الأشكال التالية يمثل مجموعة مرتبة جزئياً



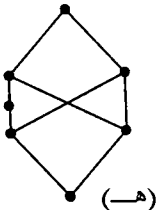
(ج)



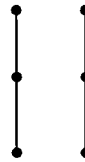
(ب)



(أ)



(هـ)



(د)

تعريف (١,١٩)

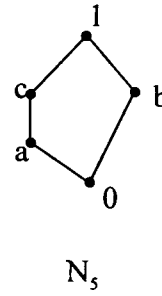
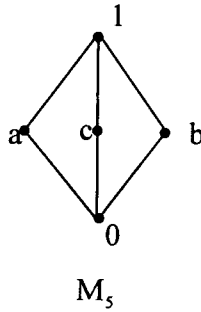
لتكن $(L, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. نقول إن L شبكية (Lattice) إذا كان كل من $a \vee b$ و $a \wedge b$ موجوداً لكل $a, b \in L$.

مثال (١,٣١)

إذا كانت $(P(S), \leq)$ المجموعة المرتبة جزئياً المقدمة في المثال (١,٢٦) وكانت $A, B \in P(S)$ فإنه من السهل أن نرى أن $A \wedge B = A \cap B$ وأن $A \vee B = A \cup B$ ولذا فإن $(P(S), \leq)$ شبكية $\square$

مثال (١,٣٢)

من السهل أن نرى أن كل من المجموعتين المرتبتين جزئياً المبينتين في الشكلين أدناه شبكية.



تقدم لنا المبرهنة التالية بعض الخصائص الأساسية للشبكيات.

مبرهنة (١,٢٦)

إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية وكان $a, b, c \in L$ فإن :

$$a \wedge b = b \wedge a \quad (\text{ب})$$

$$a \vee b = b \vee a \quad (\text{أ}) \quad (1)$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \quad (\text{ب})$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad (\text{أ}) \quad (2)$$

$$a \wedge a = a \quad (\text{ب})$$

$$a \vee a = a \quad (\text{أ}) \quad (3)$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (\text{ب})$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (\text{أ}) \quad (4)$$

البرهان

سنبرهن الفقرتين (ش١) (أ) و (ش٤) (أ) ونترك باقي الفقرات كتمرين للقارئ.

(ش١) بما أن المجموعتين $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ متساويتين فإن :

$$a \vee b = \text{lub}\{a, b\} = \text{lub}\{b, a\} = b \vee a$$

(ش٤) بما أن $a \leq a$ وأن $a \wedge b \leq a$ فإن a حد علوي للمجموعة $\{a, a \wedge b\}$. ولذا نجد باستخدامتعريف الحد الأصغر أن $a \vee (a \wedge b) \leq a$ وبما أن $a \vee (a \wedge b) = \text{lub}\{a, a \wedge b\}$ فإننا نجد

$$\blacklozenge a = a \vee (a \wedge b) \text{ وبالتالي نخلص إلى أن } a \leq a \vee (a \wedge b)$$

مبرهنة (١, ٢٧)

إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وكان $a, b \in A$ فإن العبارات التالية متكافئة :

$$(أ) a \leq b \quad (ب) a \vee b = b \quad (ج) a \wedge b = a$$

البرهان

نحصل على التكافؤات مباشرة من تعريف الحد العلوي الأصغر والحد السفلي الأكبر ونترك التفاصيل

للقارئ $\blacklozenge$

تعريف (١, ٢٠)

نقول أن الشبكية $(L, \leq)$ قياسية (modular) إذا تحقق الشرط التالي لكل $a, b, c \in L$:

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

مثال (١, ٣٣)

كل من الشبكية المقدمة في المثال (١, ٣١) والشبكية M_5 في المثال (١, ٣٢) قياسية أما الشبكية N_5 في

المثال (١, ٣٢) فهي ليست قياسية لأن :

$$\square a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq c = (a \vee b) \wedge c \text{ ولكن } a \leq c$$

(١,٢١) تعريف

نقول إن الشبكية $(L, \leq)$ توزيعية (distributive) إذا حققت أحد الشرطين التاليين لكل

$$a, b, c \in L$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (ت١)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (ت٢)$$

مثال (١,٣٤)

الشبكية المقدمة في المثال (١,٣١) توزيعية ولكن كل من الشبكتين M_5 و N_5 في المثال (١,٣٢) ليست

توزيعية لأن $a \vee (c \wedge b) = a \vee 0 = a \neq (a \vee c) \wedge (a \vee b) = 1$ في كل منهما $\square$

مبرهنة (١,٢٨)

إذا كانت الشبكية $(L, \leq)$ توزيعية فإنها قياسية .

البرهان

لنفرض أن $(L, \leq)$ توزيعية وأن $a, b, c \in L$ حيث $a \leq c$. عندئذ ،

$$\blacklozenge \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$$

ملحوظة

عكس المبرهنة (١,٢٨) ليس صحيحاً ، على سبيل المثال ، الشبكية M_5 قياسية ولكنها ليست توزيعية لأن

$$a \vee (c \wedge b) = a \vee 0 = a \neq 1 = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$$

تمارين (١,٤)

(١) لتكن A مجموعة والعلاقة $<$ على A متعدية وغير انعكاسية ($a \not\leq a$ لكل $a \in A$) . ولتكن $\leq$ علاقة

معرفة على A كالتالي: $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a < b$ أو $a = b$. أثبت أن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة

جزئياً .

(٢) لتكن $<$ معرفة على $\mathbb{Z}^+$ كالتالي: $m < n \Leftrightarrow 2m \mid n$.

(أ) أثبت أن $<$ غير انعكاسية ومتعدية.

(ب) استخدم تمرين (١) لتعريف علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$.

(ج) لتكن $\{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ يقسم } 24\}$ V_{24} والعلاقة على V_{24} هي كما في الفقرة (ب). ارسم

شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئياً $(V_{24}, \leq)$.

(د) هل $(V_{24}, \leq)$ شبكية؟ ولماذا؟

(٣) لتكن $\leq$ معرفة على $\mathbb{Q}^+$ كالتالي: $\frac{s}{r} \in \mathbb{Q}^+ : r \leq s \Leftrightarrow \frac{s}{r} \in \mathbb{Z}^+$.

(أ) أثبت أن $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

(ب) إذا كانت $V = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6\}$ فارسم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئياً $(V, \leq)$

حيث $\leq$ كما في الفقرة (أ).

(٤) إذا كانت $A = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ فأثبت أن $(A, \leq)$ شبكية قياسية حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الاعتيادية.

(٥) أثبت أي مجموعة مرتبة كلياً يجب أن تكون شبكية توزيعية.

(٦) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية وكان $a, b, c \in L$ فأثبت أن:

$$(أ) (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

$$(ب) a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$(ج) a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$$

(٧) لتكن $(L, \leq)$ شبكية

(أ) أثبت أن L توزيعية إذا وفقط إذا كان $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(ب) أثبت أن L توزيعية إذا وفقط إذا كان $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$ لكل

$$a, b, c \in L$$

(ج) أثبت أن L قياسية إذا وفقط إذا كان $a \leq b \Rightarrow b \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$ لكل

$$a, b, c \in L$$

(د) أثبت أن L قياسية إذا وفقط إذا كان $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \wedge ((a \wedge b) \vee c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(٨) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية توزيعية، وكان $a, b, c \in L$ حيث $a \vee b = a \vee c$ و $a \wedge b = a \wedge c$ فاثبت أن $b = c$.

(٩) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية قياسية وكان $a, b, c \in L$ حيث $a \vee c = b \vee c$ ، $a \wedge c = b \wedge c$ وحيث $a \leq b$ فاثبت أن $a = b$.

(١٠) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية فاثبت أن $(L, \leq)$ تحقق الشرط (ت١) إذا وفقط إذا كانت تحقق الشرط (ت٢).

الفصل الثاني

مفاهيم أساسية في الزمر

BASIC CONCEPTS IN GROUPS

تعد نظرية الزمر إحدى أهم الأنظمة الجبرية ، إذ يستخدم مفهوم الزمرة في العديد من فروع الرياضيات البحتة ، كالهندسة والتبولوجيا والتحليل الدالي وكثير غيرها . أما على صعيد الرياضيات التطبيقية ، فقد تم استخدامها في مجالات ميكانيكا الكم والأشعة السينية والتحليل الطيفي وعلم التعمية .

أصبحت نظرية الزمر أداة أساسية لا يمكن الإستغناء عنها ، ليس فقط لأنها تقودنا إلى اكتشافات جديدة ، ولكن لأنها أيضاً تختصر لنا العمليات الحسابية وتمكننا من وضع الكثير من النتائج الصعبة في صورة موجزة .

كان أول من استخدم مفهوم الزمرة هو الرياضي جوزيف لويس لاجرانج (Joseph Louis Lagrange) في العام ١٧٧٠م أثناء محاولته إيجاد جذور كثيرات الحدود حيث قادته هذه المحاولة لدراسة تبديلات هذه الجذور . أما الرياضي الفرنسي الشهير إيفرست جالوا (Evariste Galois) فكان أول من استخدم كلمة "زمرة" أثناء محاولته استكمال عمل لاجرانج ، حيث استطاع البرهان على استحالة استخدام طريقة استخلاص الجذور لحل معادلات كثيرات الحدود من الدرجة التي تزيد عن أربعة ، وكان ذلك في العام ١٨٣٠م . أثناء هذه الحقبة الزمنية كان اهتمام الرياضيين منصباً فقط على دراسة زمر التحويلات (مجموعة من التطبيقات تحت عملية التحصيل) ، حيث تبنى الرياضي فيليكس كلاين (Felix Klein) الذي عاش في الفترة بين عامي ١٨٤٩ و ١٩٢٥م ، مفهوم الزمرة لتوحيد جميع موضوعات الهندسة ، عندما أعلن أثناء إلقائه إحدى محاضراته عن إمكانية النظر إلى أي موضوع من مواضيع الهندسة على أنه مجموعة من اللامتغيرات من زمرة معينة من زمر التحويلات .

ويذكر المؤرخون أن من وضع أول محاولة لتعريف الزمرة باستخدام المسلمات فهو الرياضي الألماني ليوبولد كرونكر (Leopold Kronecker) في بحث كتبه عام ١٨٧٠م ولكنه لم يقم بنشره . وكان أول من نشر تعريفاً مجرداً للزمرة باستخدام المسلمات هو الرياضي ديكسون

(Dickson) في مجلة الجمعية الرياضية الأمريكية تحت عنوان " تعريف الزمرة والحقل بوساطة مسلمات مستقلة " ، وكان ذلك في العقد الأول من القرن العشرين .
ينقسم هذا الفصل إلى بندين ، في البند الأول نقدم تعريف الزمرة وندرس خصائصها الأساسية ونقدم بعض الأمثلة . والبند الثاني مخصص لدراسة الزمر الجزئية إضافة إلى صنف من الزمر الهامة والبسيطة التركيب ، ألا وهي الزمر الدورية .

(١ , ٢) تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية

Definition And Basic Properties of The Group

ينصب اهتمامنا في هذا البند (بل في هذا الكتاب) على دراسة الأنظمة الرياضية المؤلفة من مجموعة غير خالية معرف عليها عملية ثنائية تحقق مجموعة من المسلمات ، وباستخدام هذه المسلمات ، نستطيع الحصول على الكثير من النتائج الهامة التي يتمتع بها هذا النظام . قبل أن نقدم التعريف المجرد للزمرة ، نستعرض بعض الأمثلة ، لإرشادنا إلى المسلمات التي يفترض أن تتحقق لكي نحصل على زمرة.

دعنا نحاول إيجاد حل للمعادلة $x + a = b$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. لا شك في أن القارئ سبق وأن تعرض لهذه المعادلة في مرحلة التعليم المتوسط ، وتعلم أنه لحل هذه المعادلة يجب عليه أن يتبع الخطوات التالية :

$$\begin{aligned} x + a = b &\Leftrightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a) \\ &\Leftrightarrow x + (a + (-a)) = b - a \\ &\Leftrightarrow x + 0 = b - a \\ &\Leftrightarrow x = b - a \end{aligned}$$

لاحظ أن ما احتجناه لحل المعادلة هو أن عملية الجمع تجميعية ، وجود العدد 0 ووجود العدد $-a$.
وكمثال آخر ، لو حاولنا حل المعادلة $ax = b$ حيث $a \neq 0$ فإننا نتبع الخطوات نفسها حيث نستخدم الخاصية التجميعية للضرب ، خاصية العدد 1 وخاصية المقلوب $\frac{1}{a}$ لنحصل على $x = \frac{b}{a}$.

وأخيراً لو حاولنا حل المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث A مصفوفة قابلة للعكس فإننا نستخدم الخاصية التجميعية للمصفوفات ، خاصية المصفوفة المحايدة I_n وخاصية معكوس المصفوفة A^{-1} لنحصل على $X = A^{-1}B$.

إن ذلك يقترح علينا التعريف التالي :

تعريف (١ , ٢)

يكون النظام الرياضي $(G, *)$ حيث G مجموعة غير خالية و $*$ عملية ثنائية على G زمرة (group) إذا تحقق ما يلي :

$$(١) \quad \forall a, b, c \in G (a * (b * c) = (a * b) * c)$$

$$(٢) \quad \exists e \in G (\forall a \in G (a * e = e * a = a))$$

$$(٣) \quad \forall a \in G, \exists b \in G (a * b = b * a = e)$$

مبرهنة (١ , ٢)

إذا كانت $(G, *)$ زمرة فإن :

(١) العنصر e في الفقرة (٢) من التعريف (١ , ٢) وحيد .

(٢) العنصر b في الفقرة (٣) من التعريف (١ , ٢) وحيد .

البرهان

(١) لنفرض أن $e_1 \in G$ عنصر آخر يحقق : $\forall a \in G (a * e_1 = e_1 * a = a)$. عندئذ :

$$e_1 = e_1 * e = e * e_1 = e$$

(٢) لنفرض أن $c \in G$ عنصر آخر يحقق : $\forall a \in G (a * c = c * a = e)$. عندئذ :

$$\blacklozenge \quad b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

ملحوظات

(١) يسمى العنصر الوحيد الذي يحقق الفقرة (٢) من تعريف (١,٢) العنصر المحايد

(identity element) ونرمز له عادة بالرمز e .

(٢) يسمى العنصر الوحيد الذي يحقق الفقرة (٣) من تعريف (١,٢) نظير العنصر a

(inverse of a) ونرمز له عادة بالرمز a^{-1} .

(٣) في العادة إذا كانت $(G, *)$ زمرة فإننا نستخدم عملية الضرب بدلاً من $*$ ونكتب

ab بدلاً من $a * b$. كما نكتب أحياناً G بدلاً من $(G, *)$.

(٤) نكتب عادة abc بدلاً من $a(bc)$ أو $(ab)c$.

تعريف (٢ , ٢)

إذا كانت G زمرة تحقق : $\forall a, b \in G (ab = ba)$ فإننا نقول إن G زمرة إبدالية أو أبيلية (commutative or abelian group).

قبل أن نقدم أمثلة على الزمر ، نستعرض بعض الخصائص الرئيسة لها .

مبرهنة (٢ , ٢)

إذا كانت G زمرة فإنه لكل $a, b \in G$ لدينا :

$$(1) \quad (a^{-1})^{-1} = a$$

$$(2) \quad (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$$

$$(3) \quad G \text{ إبدالية إذا وفقط إذا كان } a^{-1} b^{-1} = (ab)^{-1}$$

$$(4) \quad \text{يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين } ax = b \text{ و } ya = b \text{ في الزمرة } G.$$

البرهان

$$(1) \quad \text{بما أن } a^{-1} a = e = a a^{-1} \text{ وأن } a^{-1} \text{ وحيد فإننا نخلص إلى أن } (a^{-1})^{-1} = a.$$

$$(2) \quad \text{لاحظ أن : } (ab)(b^{-1} a^{-1}) = ((ab)b^{-1}) a^{-1} = (ae) a^{-1} = aa^{-1} = e$$

$$\text{كما أن : } (b^{-1} a^{-1})(ab) = (b^{-1}(a^{-1}a))b = (b^{-1}e)b = b^{-1}b = e$$

$$\text{وباستخدام وحدانية النظير نحصل على : } (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$$

$$(3) \quad \text{نفرض أن } G \text{ إبدالية . عندئذٍ باستخدام الفقرة (٢) نجد أن :}$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = a^{-1} b^{-1}$$

$$\text{ولبرهان العكس ، نفرض أن } (ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1} \text{ لكل } a, b \in G \text{ . عندئذٍ ،}$$

$$b^{-1} a^{-1} = (ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1} = (ba)^{-1}$$

$$ab = [(ab)^{-1}]^{-1} = [(ba)^{-1}]^{-1} = ba \quad \text{ومنه فإن}$$

وبالتالي فإن G إبدالية .

$$(4) \quad \text{من الواضح أن } x = a^{-1}b \text{ حل للمعادلة } ax = b \text{ وأن } y = ba^{-1} \text{ حل للمعادلة}$$

$$ya = b \text{ . ولبرهان الوحداية ، نفرض أن } c \text{ حل آخر للمعادلة } ax = b \text{ . عندئذٍ ،}$$

$$c = ec = (a^{-1}a)c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b$$

$$\text{ولذا فإن } x = a^{-1}b \text{ هو الحل الوحيد للمعادلة } ax = b \text{ . وبالمثل يمكن برهان وحدانية } ba^{-1}$$

المبرهنة التالية تدعى قانون الاختصار للزمر .

مبرهنة (٢ , ٣) [قانوني الاختصار (cancellation laws)]

إذا كانت G زمرة وكان $a, b, c \in G$ فإن :

$$ca = cb \Rightarrow a = b \quad (٢)$$

$$ac = bc \Rightarrow a = b \quad (١)$$

البرهان

(١) لاحظ أن :

$$ac = bc \Rightarrow (ac) c^{-1} = (bc) c^{-1} \Rightarrow a (cc^{-1}) = b (cc^{-1}) \Rightarrow ae = be \Rightarrow a = b$$

◆ (٢) مماثل للفقرة (١)

نتيجة (٢ , ٤)

إذا كانت G زمرة فإن كل عنصر من عناصر G يظهر مرة واحدة فقط في كل صف ومرة واحدة فقط في كل عمود في جدول كيلي .

البرهان

ليكن $b \in G$. ولنفرض أن b يظهر مرتين في صف يحتوي العنصر a . عندئذٍ ، يوجد $x \neq y$ ، $x, y \in G$ بحيث يكون : $ax = b$ و $ay = b$. ولذا فإن $ax = ay$. وباستخدام قانون الاختصار نجد أن $x = y$ وهذا تناقض . وبالمثل ، إذا ظهر b مرتين في عمود يحتوي العنصر

◆ a

لتكن G زمرة ، $a \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$. نعرف a^n استقرائياً (inductively) كالآتي :

$$a^0 = e$$

$$a^n = a a^{n-1} , n > 0$$

$$a^n = (a^{-1})^n , n < 0$$

أما إذا استخدمنا عملية الجمع على G بدلاً من الضرب فإن a^n يكتب na ويكون تعريفه كالآتي :

$$0a = 0$$

$$na = a + (n-1)a , n > 0$$

$$na = (-n)(-a) , n < 0$$

نزودنا المبرهنة التالية بالخصائص التقليدية لقوى عناصر الزمرة والتي نترك برهانها للقارئ .

مبرهنة (٥, ٢)

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ وكان $m, n \in \mathbb{Z}^+$ فإن :

$$(a^n)^{-1} = a^{-n} \quad (٢) \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad (١)$$

$$\blacklozenge (ab)^n = a^n b^n \text{ فإن إبدالية } G \text{ كانت إذا كانت } (٤) \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (٣)$$

مبرهنة (٦, ٢)

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ فإن $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^na$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عندما $n=1$.نفرض الآن أن العبارة صحيحة عندما $n=k$. عندئذ ،

$$\begin{aligned} (a^{-1}ba)^{k+1} &= (a^{-1}ba)^k (a^{-1}ba) = (a^{-1}b^k a) (a^{-1}ba) \\ &= a^{-1}b^k eba = a^{-1}b^k ba = a^{-1}b^{k+1}a \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العبارة صحيحة عند $n=k+1$ $\blacklozenge$

مبرهنة (٧, ٢)

إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً يحقق :(١) يوجد عنصر $e \in G$ (يسمى محايد أيسر) بحيث يكون : $ea=a$ لكل $a \in G$ (٢) لكل $a \in G$ يوجد $b \in G$ (يسمى نظير a الأيسر) بحيث يكون $ba=e$ فإن G زمرة .

البرهان

لاحظ أولاً أن قانون الاختصار الأيسر محققاً تحت شروط المبرهنة .

نفرض أن $a \in G$. باستخدام (٢)، يوجد $b \in G$ حيث $ba=e$. ولذا فإن :

$$ba = e = ee = (ba)e = b(ae)$$

وباستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $a=ae$. إذن ، e محايد أيمن . كذلك ،

$$be = b = eb = (ba)b = b(ab)$$

ولذا فإنه باستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $e=ab$. ولذا فإن b نظير أيمن للعنصر a . $\blacklozenge$ وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G زمرة

مبرهنة (٨, ٢)

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً . إذا كان لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ حل في G لكل $a, b \in G$ فإن G زمرة .

البرهان

لنفرض أن $a \in G$. بما أن للمعادلة $ya = a$ حل في G فإنه يوجد $e \in G$ يحقق $ea = a$. سنرهن أن e محايد أيسر . ولذا ، نفرض أن $b \in G$. بما أن للمعادلة $ax = b$ حل في G فإنه يوجد $c \in G$ يحقق $ac = b$. ولذا فإن :
 $eb = e(ac) = (ea)c = ac = b$ لكل $b \in G$. ومنه فإن e محايد أيسر .

الآن ، للمعادلة $ya = e$ حل في G . إذن ، يوجد $d \in G$ يحقق $da = e$. ومنه فإن d نظير أيسر للعنصر a . وبالتالي ، فإن G زمرة استناداً للمبرهنة (٢, ٧) ◆

تعريف (٣, ٢)

إذا كانت G زمرة حيث G مجموعة منتهية فإننا نقول إن G زمرة منتهية (**finite group**) . وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فإننا نقول إن G زمرة غير منتهية (**infinite group**) . سنرمز لعدد عناصر الزمرة G بالرمز $|G|$ ونسميه رتبة الزمرة G (**order of G**) .

تبين لنا المبرهنة التالية إمكانية استبدال مسلمتي العنصر المحايد والنظير بقانون الاختصار للزمر

المنتهية .

مبرهنة (٩, ٢)

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً منتهياً . إذا حققت G قانوني الاختصار فإن G زمرة .

البرهان

لنفرض أن $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ وأن $a \in G$. عندئذ :

$$H = \{aa_1, aa_2, \dots, aa_n\} \subseteq G$$

إذا كان $aa_i = aa_j$ فإن $a_i = a_j$. إذن ، جميع عناصر H مختلفة . وبما أن $|H| = |G|$ فإن $H = G$.

وبما أن $a \in G$ فإن $a \in H$. ولذا فإن $aa_i = a$. ومنه فإن : $aa = (aa_i)a = a(a_i a)$.

وباستخدام قانون الاختصار ، نجد أن $a = a_i a$. ندعي أن a_i عنصر محايد أيسر .
وذلك لأنه لو كان $b \in G$ فإن $b = aa_j$. ولذا فإن :

$$a_i b = a_i (aa_j) = (a_i a) a_j = aa_j = b$$

نبرهن الآن على وجود نظير أيسر لكل عنصر من عناصر G . لنفرض أن $c \in G$
عندئذ ، بطريقة مماثلة لما سبق نجد أن $G = \{a_1 c, a_2 c, \dots, a_n c\}$. الآن ، بما أن
 $a_i \in G$ فإنه يوجد j حيث $a_j c = a_i$. إذن ، a_j نظير أيسر للعنصر c . وبالتالي فإن

◆ زمرة G

قبل الاسترسال في دراسة المزيد من الخصائص الأساسية للزمر نتوقف قليلاً لتقدم بعض الأمثلة .

مثال (٢ ، ١)

كل من $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{C}, +)$ زمرة إبدالية حيث 0 هو العنصر
المحايد و $-a$ هو نظير a . كذلك كل من $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ زمرة إبدالية حيث 1 هو
العنصر المحايد و $\frac{1}{a}$ هو نظير a . لاحظ أن $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ ليست زمرة لأنه على سبيل المثال ، لا يوجد
نظير للعنصر 2 □

مثال (٢ ، ٢)

إذا كانت $M_{mn}(\mathbb{R})$ هي مجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ التي عناصرها أعداد حقيقية
فإن $(M_{mn}(\mathbb{R}), +)$ زمرة إبدالية حيث العنصر المحايد هو المصفوفة الصفيرية ونظير المصفوفة A
هو $-A$ □

مثال (٢ ، ٣)

إذا كانت $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ فإن $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ زمرة
غير إبدالية حيث العنصر المحايد هو I_n ونظير A هو A^{-1} . تعرف هذه الزمرة
باسم الزمرة الخطية العامة من الدرجة n (general linear group of degree n) □

مثال (٢ , ٤)

□ $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ زمرة إبدالية حيث العنصر المحايد هو $[0]$ ونظير $[a]$ هو $[-a]$

مثال (٢ , ٥)

 $(\mathbb{Z}_6 - \{[0]\}, \cdot_6)$ ليست زمرة لأنه على سبيل المثال ، لا يوجد نظير للعنصر $[2]$ (تأكد من

□ ذلك!)

مثال (٢ , ٦)

إذا كانت $U_n = \{[a] \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$ فإن $(U_n, \cdot_n)$ زمرة إبدالية . من الواضح أن العملية $\cdot_n$ تجميعية وإبدالية وأن $[1]$ هو العنصر المحايد . وإذا كان $[a] \in U_n$ فإن $\gcd(a, n) = 1$. ولذا فإنه يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$ حيث $ax + ny = 1$. ومنه فإن

□ $ax \equiv 1 \pmod{n}$. أي أن $[x] = [1]$. $[ax] = [a]$. وبالتالي ، فإن $[x]$ هو نظير $[a]$

مثال (٢ , ٧)

 $(S_n, \circ)$ حيث S_n هي مجموعة التبديلات على $\{1, 2, \dots, n\}$ و $\circ$ هي عملية تحصيل□ التبديلات زمرة غير إبدالية لكل $n \geq 2$ وتسمى زمرة التبديلاتلقد وجدنا في المثال (١ , ٤) عناصر S_3 وهي :

$$S_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

ومن السهل على القارئ أن يتحقق من أن جدول كيلى لهذه الزمرة هو :

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(1)	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(123)	(123)	(132)	(1)	(12)	(23)	(13)
(132)	(132)	(1)	(123)	(13)	(12)	(23)
(23)	(23)	(13)	(12)	(1)	(123)	(132)
(13)	(13)	(12)	(23)	(132)	(1)	(123)
(12)	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)	(1)

كذلك ، وجدنا في المثال (١١ , ١) عناصر الزمرة S_4 ، ندعو القارئ إلى التحقق من أن الجدولالتالي هو جدول كيلى للزمرة S_4 :

0	(1)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1432)
(1)	(1)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1432)
(1234)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)
(13)◦(24)	(13)◦(24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)
(1432)	(1432)	(1)	(1234)	(13)◦(24)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)
(123)	(123)	(1342)	(243)	(243)	(132)	(34)	(124)	(1432)	(1)	(1234)	(1243)	(1432)
(1342)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14)◦(23)	(13)	(12)◦(34)	(1423)	(132)	(24)	(132)
(243)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12)◦(34)	(24)	(14)◦(23)	(13)
(14)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(243)
(132)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)
(34)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(1243)
(124)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14)◦(23)	(13)	(12)◦(34)	(24)	(134)	(134)	(1432)	(1243)
(1423)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(1243)	(1432)	(13)
(12)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(14)◦(23)	(14)	(123)
(234)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(1342)	(1432)
(1324)	(1324)	(143)	(12)	(1324)	(12)◦(34)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)◦(24)	(1432)	(1)
(143)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(14)	(123)	(1)	(134)	(243)	(14)	(123)	(1342)
(23)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(12)◦(34)	(24)	(14)◦(23)	(13)	(243)	(234)	(1342)	(143)
(134)	(134)	(1243)	(142)	(134)	(124)	(1423)	(132)	(14)◦(23)	(12)	(234)	(12)◦(34)	(24)
(1243)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(134)	(12)	(13)◦(24)	(1432)	(1423)	(132)
(142)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(13)	(23)	(134)	(1243)	(142)
(13)	(13)	(12)◦(34)	(24)	(14)◦(23)	(12)	(1423)	(132)	(34)	(14)◦(23)	(124)	(1423)	(132)
(12)◦(34)	(12)◦(34)	(24)	(14)◦(23)	(13)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(13)	(234)	(1243)	(142)
(24)	(24)	(14)◦(23)	(13)	(12)◦(34)	(1423)	(132)	(34)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)
(14)◦(23)	(14)◦(23)	(13)	(12)◦(34)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(243)	(14)	(123)

مفاهيم أساسية في الزمر

o	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)
(1)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)
(1234)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14) o (23)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)
(13) o (24)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14) o (23)	(13)	(12) o (34)
(1432)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)	(13)
(123)	(13)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)
(1342)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13) o (24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)
(243)	(1432)	(1)	(1234)	(13) o (24)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)
(14)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14) o (23)	(13)	(12) o (34)	(14) o (23)	(12)	(234)	(1324)	(143)
(132)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)
(34)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)	(13)	(243)	(13) o (24)	(1342)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)
(124)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)
(1423)	(13) o (24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1423)
(12)	(1)	(1234)	(13) o (24)	(123)	(24)	(14) o (23)	(13)	(12) o (34)	(1423)	(132)	(34)	(124)
(234)	(1342)	(243)	(14)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)
(1324)	(1243)	(142)	(12) o (34)	(134)	(1432)	(1243)	(142)	(13) o (24)	(1423)	(124)	(1423)	(132)
(143)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(12)	(234)	(34)	(1423)	(243)	(14)
(23)	(1234)	(13)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(13) o (24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(1342)
(134)	(1234)	(13) o (24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13) o (24)	(1432)
(1243)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)	(14)	(1432)	(1)	(1234)	(13) o (24)
(142)	(24)	(14) o (23)	(13)	(12) o (34)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(243)	(14)	(123)	(123)
(13)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13) o (24)	(1432)
(12) o (34)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(13) o (24)
(24)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13) o (24)	(1432)	(1)	(2134)
(14) o (23)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13) o (24)	(1432)	(1)

مثال (٢, ٨)

لتكن $V = \{e, a, b, c\}$ مجموعة ولتكن . علمية ثنائية معرفة على V بواسطة جدول كيللي :

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

من السهل التحقق من أن $(V, \cdot)$ زمرة ابدالية. يطلق على هذه الزمرة ، زمرة كلاين الرابعة

□ (Klein 4-group)

مثال (٢, ٩)

إذا كانت X مجموعة غير خالية فقد بينا في المثال (١, ٢٥) أن النظام $(P(X), \Delta)$ تجميعي وإبدالي. لاحظ أيضاً أنه لكل $A \in P(X)$ لدينا :

$$A \Delta \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A$$

$$\text{وأن } A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$$

ولذا فإن ϕ هو العنصر المحايد ونظير A هو A . وبالتالي فإن $(P(X), \Delta)$ زمرة ابدالية □

مثال (٢, ١٠)

لقد بينا في المثال (١, ١٨) أن النظام $(\mathbb{Q}^+, *)$ حيث $a * b = \frac{ab}{2}$ تجميعي وإبدالي. لاحظ أيضاً

$$\text{أنه لكل } a \in \mathbb{Q}^+ \text{ لدينا : } a * 2 = \frac{(a)(2)}{2} = a \text{ . كما أن } 2 = \frac{(a)(\frac{4}{a})}{2} = a * \frac{4}{a}$$

ولذا فإن 2 هو العنصر المحايد وإن نظير a هو $\frac{4}{a}$. إذن ، $(\mathbb{Q}^+, *)$ زمرة إبدالية □

مثال (٢, ١١)

لقد بينا في المثال (١, ١٩) أن النظام $(G, *)$ حيث $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$ وحيث

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} \text{ نظام تجميعي وإبدالي . لاحظ أيضاً أنه لكل } x \in G \text{ لدينا :}$$

$$x * 0 = \frac{x+0}{1+0x} = x \text{ . كما أن : } x * (-x) = \frac{x+(-x)}{1+(x)(-x)} = 0$$

إذن ، العنصر المحايد هو 0 ونظير x هو $-x$. وبالتالي فإن $(G, *)$ زمرة إبدالية $\square$

المبرهنة التالية تقدم لنا طريقة لإنشاء زمرة جديدة من زمر معلومة .

(مبرهنة (٢, ١٠))

لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ زمراً . ولتكن $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. ولنعرف العملية الثنائية على G على النحو التالي :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n) \text{ . عندئذ :}$$

(أ) زمرة G (ب) إذا كانت G_i إبدالية لكل i فإن G إبدالية .

البرهان

$$\begin{aligned} & \text{(أ) لكل } (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n) \in G \text{ لدينا :} \\ & (a_1, a_2, \dots, a_n)[(b_1, b_2, \dots, b_n)(c_1, c_2, \dots, c_n)] \\ & = (a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1c_1, b_2c_2, \dots, b_nc_n) \\ & = (a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2), \dots, a_n(b_nc_n)) \\ & = ((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2, \dots, (a_nb_n)c_n) \\ & = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)(c_1, c_2, \dots, c_n) \\ & = [(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n)](c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

إذن ، النظام تجميعي .

العنصر المحايد هو $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ حيث e_i هو محايد G_i لكل $i=1, 2, \dots, n$ لأن

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(e_1, e_2, \dots, e_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

وأخيراً ، لأن $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = (a_1a_1^{-1}, a_2a_2^{-1}, \dots, a_na_n^{-1}) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

إذن ، G زمرة .

(ب) لنفرض أن كل من G_i إبدالية . الآن :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) &= (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n) \\ &= (b_1a_1, b_2a_2, \dots, b_na_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

ولذا ، فإن G إبدالية $\blacklozenge$

تسمى الزمرة G في المبرهنة (٢, ١٠) ، زمرة الضرب المباشر الخارجي

(external direct product) للزمر $G_1, G_2, \dots, G_n$ ، وسندرس خواصها بتفصيل أكثر في وقت لاحق من هذا الكتاب .

نتقل الآن إلى مفهوم هام جداً في دراسة الزمر وهو مفهوم رتب عناصر الزمرة .

تعريف (٤ ، ٢)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. إذا وجد عدداً صحيحاً موجباً n بحيث يكون $a^n = e$ فإن أصغر عدد صحيح موجب يحقق ذلك يسمى رتبة (order) العنصر a . وإذا استحال وجود مثل هذا العدد n فإننا نقول إن a ذو رتبة غير منتهية (of infinite order) . نرسم لرتبة العنصر a بالرمز $o(a)$.

سنرى في فصول قادمة أن معرفة رتب عناصر الزمرة يقودنا إلى معرفة الكثير عن البنية الجبرية للزمرة، وفي مواضيع كثيرة يصنف لنا هذه الزمرة .

ليكن $a \in G$ ذو رتبة غير منتهية . من الواضح أن رتبة العنصر a^k لكل $k \geq 1$ غير منتهية أيضاً . ولكن الوضع مختلف إذا كانت رتبة a منتهية حيث تقدم لنا المبرهنة التالية طريقة لحساب رتبة a^k بدلالة رتبة a .

مبرهنة (١١ ، ٢)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$ حيث $o(a) = n$. عندئذ :

(أ) إذا كان $a^m = e$ حيث $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن $n \mid m$.

(ب) إذا كان $t \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(t, n) = d$ فإن $o(a^t) = \frac{n}{d}$.

البرهان

(أ) باستخدام خوارزمية القسمة يوجد عدداً صحيحان q, r يحققان :

$$0 \leq r < n, \quad m = nq + r$$

الآن : $a^r = a^{m-nq} = a^m a^{-nq} = a^m (a^n)^{-q} = e(e)^{-q} = e$. وبما أن n هو أصغر عدد

صحيح موجب يحقق $a^n = e$ فإننا نخلص إلى أن $r = 0$. ولذا فإن $m = nq$. وبالتالي ، فإن $n \mid m$.

(ب) بما أن $\gcd(t, n) = d$ فإن يوجد عدداً صحيحان u, v حيث :

الآن، $k = \frac{n}{d}$ سنبرهن أن $o(a^t) = k$ لنفرض أن $n = dv, t = du, \gcd(u, v) = 1$ ، إذن، $a^{kt} = e$ باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $n \mid kt$ أي أن $kt = nr$ حيث $r \in \mathbb{Z}$. الآن، $kt = nr \Rightarrow kdu = dvr \Rightarrow ku = vr$ ، إذن، $v \mid ku$ و $\gcd(u, v) = 1$ ولذا فإن $k \mid v$ أي أن $k \mid \frac{n}{d}$. ومن ناحية أخرى لدينا :

$(a^t)^{\frac{n}{d}} = a^{\frac{nt}{d}} = a^{\frac{ndu}{d}} = a^{nu} = (a^n)^u = e^u = e$ إذن، باستخدام الفقرة (أ) نجد

◆ أن $k = \frac{n}{d} \mid o(a^t)$ وبما أن $k \mid \frac{n}{d}$ موجباً فإننا نخلص إلى أن $k = \frac{n}{d}$ ◆

نتيجة (٢، ١٢)

إذا كان $a \in G$ حيث $o(a) = n$ فإن $o(a^t) = n$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(t, n) = 1$. البرهان

لنفرض أولاً أن $o(a^t) = n$ باستخدام المبرهنة (٢، ١١) نجد أن :

$n = o(a^t) = \frac{n}{\gcd(t, n)}$ ولذا فإن $\gcd(t, n) = 1$ و البرهان العكس ، نفرض

◆ أن $\gcd(t, n) = 1$. إذن ، $\frac{n}{1} = n$ ، $\frac{n}{\gcd(t, n)} = \frac{n}{1} = n$ ، $o(a^t) = \frac{n}{\gcd(t, n)}$ ◆

تزوّدنا النتيجة التالية بطريقة سهلة لحساب رتب عناصر الزمر الإبدالية .

نتيجة (٢، ١٣)

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $a, b, a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ حيث $o(a_i) = r_i$ لكل

$i = 1, 2, \dots, k$ ، $o(a) = r$ و $o(b) = s$ ، عندئذ :

(أ) $o(ab) = \text{lcm}(r, s)$

(ب) $o(a_1 a_2 \dots a_k) = \text{lcm}(r_1, r_2, \dots, r_k)$

البرهان

(أ) لنفرض أن $m = \text{lcm}(r, s)$ وأن $n = o(ab)$. باستخدام المبرهنة (٢، ٥) نجد

أن $e = e^m = (ab)^m = a^m b^m = ee = e$ ، إذن ، $n \mid m$ ، ومن ناحية أخرى لدينا :

$$. o(ab) = n \Rightarrow (ab)^n = e \Rightarrow a^n b^n = e$$

ومنه فإن $a^n = b^n = e$ لأنه لو كان $a^n \neq e$ فإن $a^n = b^{-n} \neq e$ ولذا فإن $a^n b^n \neq e$.

إذن، $r|n$ و $s|n$ ولذا فإن $\ell cm(r, s) = m|n$ وبالتالي، نخلص إلى أن $m = n$.

(ب) استخدم الفقرة (أ) والاستقراء الرياضي على k لتحصل على المطلوب

ملحوظة

لاحظ أن النتيجة (١٣، ٢) ليست بالضرورة صحيحة إذا كانت G ليست إبدالية. على سبيل المثال

، إذا كان $a = (2\ 3\ 4)$ ، $b = (2\ 3) \in S_4$ فإن $ab = (2\ 4)$ ولكن

$$. 2 = o(ab) \neq 6 = \ell cm(o(a), o(b))$$

(١، ١، ٢) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كان $(G, *)$ نظاماً رياضياً حيث $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ وحيث

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$ لكل $(a, b), (c, d) \in G$ فأثبت أن :

(١) $(G, *)$ زمرة إبدالية (٢) G تحتوي على عنصر واحد فقط من الرتبة 2.

(٣) G لا تحتوي على عناصر من الرتبة 3.

الحل

(١) من السهل التحقق من أن $*$ عملية تجميعية وإبدالية. العنصر المحايد هو $(1, 0) \in G$ لأن :

$$. (a, b) \in G \text{ لكل } (1, 0) * (a, b) = (1a, 0 + b) = (a, b)$$

وأخيراً نظير العنصر $(a, b) \in G$ هو $(\frac{1}{a}, -b)$ لأن :

$$. (\frac{1}{a}, -b) * (a, b) = (\frac{1}{a}a, -b + b) = (1, 0)$$

(٢) لاحظ أولاً أن $(-1, 0) \in G$ من الرتبة 2 لأن $(-1, 0) * (-1, 0) = (1, 0)$.

لنفرض الآن أن (a, b) من الرتبة 2. عندئذ ، $(a, b) * (a, b) = (a^2, b + b) = (1, 0)$ ،

ومنه فإن $a^2 = 1$ و $b = 0$. أي أن : $b = 0, a = \pm 1$. إذا كان $a = 1$ فإن $(a, b) = (1, 0)$

وهذا مستحيل. إذن ، $a = -1$ وبالتالي $(-1, 0)$ هو العنصر الوحيد من الرتبة 2.

(٣) لنفرض أن $(a, b) \in G$ من الرتبة 3. عندئذ ، $(a, b)^3 = (a^3, 3b) = (1, 0)$ ،

ومنه فإن $a = 1$ و $b = 0$. أي أن $(a, b) = (1, 0)$ وبالتالي فإن G لا تحتوي على عناصر من

الرتبة 3 Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة حيث $a^2 = e$ لكل $a \in G$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .

الحل

لاحظ أولاً أن $a = a^{-1}$ لكل $a \in G$. لنفرض الآن أن $a, b \in G$. عندئذ :
 Δ وبالتالي فإن G إبدالية $(ab)^2 = e \Rightarrow abab = e \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = ba$

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبته $2n$ فأثبت أنه يوجد $a \in G$ حيث $a^2 = e$.

الحل

لنفرض أن $S = \{g \in G : g \neq g^{-1}\}$. عندئذ ، $e \notin S$. وإذا كان $g \in S$ فإن $g^{-1} \in S$. ولذا فإن $|S|$ زوجي . ومنه فإن $|S \cup \{e\}|$ فردي . وبما أن $\{e\} \cup S \subseteq G$ وعدد عناصر G زوجي فإنه يوجد $a \in G$ حيث $a \in S \cup \{e\}$. ومنه فإن $a \neq e$ وأن $a \notin S$. وبالتالي فإن $a = a^{-1}$ أي أن $a^2 = e$ Δ

تمرين (٤)

إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^3 = a^3 b^3$ و $(ab)^5 = a^5 b^5$ لكل $a, b \in G$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .

الحل

لاحظ أن : $(ab)^3 = a^3 b^3 \Rightarrow ababab = a^2 b^2 b^2 \Rightarrow (ba)^2 = a^2 b^2$. وبالمثل ، بما أن $(ab)^5 = a^5 b^5$ فإن $(ba)^4 = a^4 b^4$. الآن :
 $a^4 b^4 = (ba)^4 = [(ba)^2]^2 = (a^2 b^2)^2 = a^2 b^2 a^2 b^2$ ومنه فإن
 $\Delta a, b \in G$ لكل $ab = ba$ وبالتالي فإن $a^2 b^2 = b^2 a^2 = (ab)^2 = abab$

تمرين (٥)

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $a^{-1}b^2a = b^3$ و $a^2 = e$ فأثبت أن $b^5 = e$.

الحل

بما أن $a^2 = e$ فإن $a = a^{-1}$. الآن :

$$. a^{-1}b^2a = b^3 \Rightarrow b^2a = ab^3 \Rightarrow a = b^{-2} a b^3$$

$$. e = a^2 = b^{-2} a b^3 b^{-2} a b^3 = b^{-2} ab ab^3 \Rightarrow b^2 = abab^3$$

$$. b^2 = abab^3 \Rightarrow e = abab \Rightarrow a^{-1} = bab \Rightarrow a = bab$$

$$\Delta \quad b^3 = a^{-1}b^2a = abba \Rightarrow b^5 = babbab = aa = a^2 = e$$

تمارين (١ ، ٢)

بين أياً من الأنظمة الجبرية في التمارين من (١) إلى (١٥) زمرة . إذا كان النظام زمرة فبين

فيما إذا كانت إبدالية ، وإذا لم يكن زمرة فبين أي الشروط غير محققة .

$$. x * y = x - y \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (١)$$

$$. x * y = x + y + xy \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (٢)$$

$$. x * y = x + y \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{N}, *) \quad (٣)$$

$$. x * y = x + y - xy \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (٤)$$

$$. x * y = x^y \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{N}, *) \quad (٥)$$

$$. x * y = x + y + 1 \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (٦)$$

$$. x * y = \gcd(x, y) \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{N}, *) \quad (٧)$$

$$. x * y = x^2 + y^2 \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (٨)$$

$$. x * y = xy^2 \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (٩)$$

$$. x * y = xy - x \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Z}, *) \quad (١٠)$$

$$. x * y = xy + 1 \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Q}, *) \quad (١١)$$

$$. x * y = x + y + xy \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Q} - \{-1\}, *) \quad (١٢)$$

$$. x * y = x + y \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{Q}_5, *) \quad (١٣) \quad \text{وحيث}$$

$$. \mathbb{Q}_5 = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(a, b) = 1 \wedge 5 \nmid b \right\}$$

$$. x * y = |x + y| \quad \text{حيث} \quad (\mathbb{R}, *) \quad (١٤)$$

(١٥) $(G, *)$ حيث $x * y = y$ وحيث G مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر.

(١٦) لتكن $U = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$ حيث $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

أثبت أن $(U, *)$ زمرة إبدالية حيث $*$ هي عملية ضرب الأعداد المركبة الاعتيادية.

(١٧) لتكن $G = \{L_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ حيث $L_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً

بالقاعدة $L_{a,b}(x) = ax + b$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(أ) أثبت أن $(G, \circ)$ زمرة غير إبدالية.

(ب) إذا كانت $H = \{L_{a,b} \in G : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\}$ فأثبت أن $(H, \circ)$ زمرة غير إبدالية.

(ج) إذا كانت $K = \{L_{1,b} \in G : b \in \mathbb{R}\}$ فأثبت أن $(K, \circ)$ زمرة إبدالية.

(د) أثبت أن $L_{a,b} \circ Y \circ L_{a,b}^{-1} \in H$ لكل $L_{a,b} \in G$ و $Y \in H$.

(هـ) جد جميع $L_{a,b} \in G$ حيث $L_{a,b} \circ L_{1,x} = L_{1,x} \circ L_{a,b}$ لكل $x \in \mathbb{R}, 0 \neq x$.

(١٨) لتكن $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ والعملية الثنائية معرفة على G على النحو التالي :

$$(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$$

أثبت أن $(G, *)$ زمرة غير إبدالية.

(١٩) لتكن $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$. أثبت أن

$(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ زمرة غير إبدالية. تسمى هذه الزمرة، الزمرة الخطية الخاصة من الدرجة

n (special linear group of degree n).

(٢٠) لتكن $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. أثبت أن G زمرة إبدالية حيث العملية الثنائية

هي ضرب المصفوفات. أثبت أيضاً أن رتبة كل عنصر (عدا المحايد) في G غير منتهية.

(٢١) أثبت أن رتبة جميع عناصر (ما عدا المحايد) الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ غير منتهية.

(٢٢) هل يوجد عنصر (عدا المحايد) في الزمرة $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ رتبته منتهية؟

(٢٣) ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Q_p = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(b, p) = 1 \right\}$. أثبت أن

$(Q_p, +)$ زمرة إبدالية رتبة جميع عناصرها (ما عدا المحايد) غير منتهية.

(٢٤) ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Q^p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \right\}$. أثبت أن $(Q^p, +)$

زمرة إبدالية رتبة جميع عناصرها (ما عدا المحايد) غير منتهية.

(٢٥) لتكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

(أ) هل النظام $(G, *)$ زمرة حيث $(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bd)$ ؟

(ب) هل النظام $(G, *)$ زمرة حيث $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ؟

(٢٦) أثبت أن النظام $(\mathbb{R}^*, *)$ زمرة حيث

$$a * b = \begin{cases} ab, & a > 0 \\ \frac{a}{b}, & a < 0 \end{cases}$$

(٢٧) لتكن $G = GL(2, \mathbb{Q})$

(أ) عين رتبة كل من العناصر $\frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ب) جد عنصر في G رتبته 2 .

(ج) أثبت أن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ غير منتهية .

(د) جد $A, B, C \in G$ بحيث يكون $AB = BA$, $BC = CB$, ولكن $AC \neq CA$.

(٢٨) ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً حيث $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ وحيث

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

أثبت أن G زمرة تحتوي على عدد غير منته من العناصر التي رتبة كل منها 2 . هل يوجد $a \in G$

حيث $o(a) = 3$ ؟

(٢٩) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ حيث $a^2 = a$ فأثبت أن $a = e$.

(٣٠) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فأثبت أن $|G| \geq 6$.

(٣١) إذا كانت G زمرة و $a, b \in G$ حيث $ab = ba$ فأثبت أن :

$$ab^{-1} = b^{-1}a \quad (أ)$$

$$(ب) \quad x \in G \text{ لكل } (xax^{-1})(xbx^{-1}) = (xbx^{-1})(xax^{-1})$$

(٣٢) إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^2 = a^2 b^2$ لكل $a, b \in G$ فأثبت أن G إبدالية .

(٣٣) لتكن G زمرة . إذا كان $(ab)^n = a^n b^n$, $(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$ و

$$(ab)^{n+2} = a^{n+2} b^{n+2} \text{ لكل } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ولكل } a, b \in G \text{ فأثبت أن } G \text{ إبدالية .}$$

(٣٤) إذا كانت G زمرة وكان $a, b, c \in G$ حيث $abc = e$ فأثبت أن $bca = e$.

(٣٥) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $ab = ba^{-1}$, $ba = ab^{-1}$ فأثبت أن

$$. a^4 = b^4 = e$$

(٣٦) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $a^4 = e$, $a^2b = ba$ فأثبت أن $a = e$.

(٣٧) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $a^2b = ba$ و $b^2a = ab$ فأثبت أن $a = b = e$.

(٣٨) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $ab^2 = b^3a$, $ba^2 = a^3b$ فأثبت أن

$$. a = b = e$$

(٣٩) إذا كان $a, b \in G$ حيث $b^6 = a$, $ab = b^4a$ فأثبت أن $ab = ba$.

(٤٠) إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً يحقق :

$$(أ) \quad \forall a \in G \exists b \in G (aba = a \text{ و } bab = b)$$

(ب) يوجد عنصر وحيد $e \in G$ حيث $ea = a$ لكل $a \in G$ فأثبت أن G زمرة.

(٤١) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $ab = ba^2$ فأثبت أن $a^n b = ba^{2^n}$ وأن

$$. ab^n = b^n a^{2^n} \text{ لكل } n \in \mathbb{Z}^+ . \text{ استنتج أن } (ba^n)^2 \text{ يتبدل مع كل من } a \text{ و } b .$$

(٤٢) إذا كانت G زمرة منتهية رتبها n فأثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ حيث

$$. a^m = e$$

(٤٣) إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$ حيث $o(x) = mn$ و $\gcd(m, n) = 1$ فأثبت أنه

$$. \text{ يوجد } y, z \in G \text{ حيث } o(y) = m, o(z) = n \text{ و } x = yz = zy$$

(٤٤) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ فأثبت أن :

$$(أ) \quad o(a) = o(a^{-1})$$

$$(ب) \quad o(a) = o(b^{-1}ab)$$

$$(ج) \quad o(ab) = o(ba)$$

(٤٥) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ حيث $o(a) = n$ فأثبت أن $o(a^t) = \frac{\ell \text{cm}(n, t)}{t}$

$$. t \geq 1$$

(٤٦) لتكن G زمرة منتهية وليكن $g, h \in G$ حيث $ghg^{-1} = h^2, g^5 = e$. أثبت أن

$$. o(h) = 31$$

(٤٧) لتكن G زمرة لا تحتوي على عناصر من الرتبة 2 وتحقق $(xy)^2 = (yx)^2$ لكل

$$. x, y \in G . \text{ أثبت أن } G \text{ إبدالية} .$$

(٤٨) (أ) إذا كانت G زمرة فأثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $b \in G$ بحيث يكون $aba = a$.

(ب) إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً وكان لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $b \in G$ بحيث يكون $aba = a$ فأثبت أن :

(i) G تحتوي على عنصر وحيد a يحقق $a^2 = a$ (ii) G زمرة .

(٢ , ٢) الزمر الجزئية والزمر الدورية

Subgroups and Cyclic Groups

في هذا البند سنتطرق إلى دراسة فكرة بناء جزئي من الزمرة يدعى الزمر الجزئية . إن دراسة الزمر الجزئية يمكننا ، في معظم الأحيان ، من القاء الضوء على الخصائص الجبرية للزمرة الأم . سبق وأن تعرضنا في البند الأول إلى أمثلة على زمر جزئية ، فمثلاً $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$. في هذا البند نقوم بدراسة مفهوم الزمر الجزئية ونقدم خصائصها الأساسية . كما أننا سنقدم صنف هام من الزمر ألا وهو الزمر الدورية .

لتكن $(G, .)$ زمرة ، ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G . نقول إن H مغلقة (closed) تحت عملية الزمرة الثنائية إذا كان $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. على سبيل المثال ، إذا كانت الزمرة هي $(\mathbb{R}, +)$ والمجموعة هي $\mathbb{Z}$ فإن $\mathbb{Z}$ مغلقة تحت عملية الجمع $+$ ، وذلك لأن مجموع أي عددين صحيحين هو عدد صحيح أيضاً .

لاحظ أنه لو كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية فإن قصر العملية الثنائية على H يولد عملية ثنائية على H . وإذا حصل وأن كانت $(H, .)$ زمرة فإننا نقول إن H زمرة جزئية من G ونلخص ذلك بالتعريف التالي :

تعريف (٢ , ٥)

لتكن $(H, .)$ زمرة ولتكن $H \subseteq G$ ، $\phi \neq H$. إذا كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية بحيث تكون $(H, .)$ زمرة فإننا نقول إن H زمرة جزئية (subgroup) من G .

ملحوظات

(١) إذا كانت $(H, \cdot)$ زمرة جزئية من $(G, \cdot)$ فإننا عادة ما نعبر عن ذلك بكتابة $H \leq G$. وإذا كانت $H \neq G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية فعلية من G (**proper subgroup of G**) ونكتب $H < G$.

(٢) من الواضح أن $(G, \cdot)$ و $(\{e\}, \cdot)$ زمرتان جزئيتان من G . تسمى الأخيرة منها زمرة جزئية تافهة (**trivial subgroup**).

(٣) إذا كان e هو محايد G وكان e_H هو محايد H فإن $e_H e_H = e_H = e_H e$ وباستخدام قانون الاختصار نخلص إلى أن $e_H = e$. أي أن المحايدان متساويان.

(٤) إذا كان $h \in H$ و h_1 هو نظير h في H وكان h^{-1} هو نظير h في G فإن :

$$h_1 = h_1 e = h_1 (h h^{-1}) = (h_1 h) h^{-1} = e h^{-1} = h^{-1}$$

ولذا فإن نظير h في H ونظير h في G متساويان.

تزودنا المبرهنة التالية باختبار سهل لمعرفة متى تكون مجموعة جزئية من زمرة G هي بالفعل زمرة جزئية من G .

مبرهنة (١٤، ٢)

إذا كانت G زمرة وكانت $H \subseteq G$ فإن $\phi \neq H$:

$H \leq G$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $H \leq G$ وأن $a, b \in H$. بما أن H زمرة فإن $b^{-1} \in H$ ، ومن ثم فإن $ab^{-1} \in H$. ولبرهان العكس، نفرض أن $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$. بما أن $\phi \neq H$ فإنه يوجد $a \in H$ ، ولذا فإن $e = aa^{-1} \in H$. إذن، H تحتوي على العنصر المحايد. الآن، لكل $b \in H$ لدينا $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. إذن، لكل $a, b \in H$ يكون $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. وبالتالي فإن H زمرة.



نتيجة (١٥، ٢)

إذا كانت G زمرة وكانت H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G فإن :

$H \leq G$ إذا وفقط إذا كان $ab \in H$ لكل $a, b \in H$.

البرهان

إذا كانت $H \leq G$ فإنه من الواضح أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ولبرهان العكس، نفرض أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ليكن $h \in H$. عندئذ: $\{h, h^2, h^3, \dots, h^n, \dots\} \subseteq H$. وبما أن H مجموعة منتهية فإنه يوجد $0 \leq r < s$ حيث $h^r = h^s$ ولذا فإن $hh^{s-r-1} = h^{s-r} = e \in H$. وعليه فإن $h^{-1} = h^{s-r-1}$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أنه إذا كان $a, b \in H$ فإن $a, b^{-1} \in H$. ولذا فإن $ab^{-1} \in H$ ، إذن، $H \leq G$. ♦

نقدم الآن بعض الأمثلة على الزمر الجزئية.

مثال (٢، ١٢)

من الواضح أن: $(2\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

وأن $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ □

مثال (٢، ١٣)

إذا كانت $H = \{[0], [2]\}$ فإن H ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ وذلك لأن $[2] + [2] = [4] \notin H$. ولكن من السهل التحقق من أن كل من $L = \{[0], [3]\}$ و $K = \{[0], [2], [4]\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ □

مثال (٢، ١٤)

إذا كانت $V = \{e, a, b, c\}$ هي زمرة كلاين الرابعة فإنه من السهل التحقق من أن كل من $\{e, c\}$ ، $\{e, b\}$ و $\{e, a\}$ زمرة جزئية من V ولكن $\{e, b, c\}$ ليست زمرة جزئية من V □

مثال (٢، ١٥)

إذا كان $n \geq 2$ وكانت A_n هي مجموعة التبديلات الزوجية من S_n فإن $A_n \leq S_n$. وذلك لأن $e = (1\ 2) \circ (1\ 2) \in A_n$ ومن ثم فإن $A_n \neq \emptyset$. كما أنه إذا كان $\sigma, \mu \in A_n$

فإن $\sigma \circ \mu^{-1} \in A_n$ (لماذا!). تسمى الزمرة A_n زمرة التناوبات (alternating group) على

$$\square \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

مثال (٢، ١٦)

إذا كانت $H \leq GL(2, \mathbb{R})$ فإن $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : ad \neq 0 \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{R})$

وذلك لأنه لو كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & g \end{bmatrix} \in H$ فإن :

$$\square AB^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/e & -f/eg \\ 0 & 1/g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/e & -af/eg + b/g \\ 0 & d/g \end{bmatrix} \in H$$

مثال (٢، ١٧)

إذا كانت $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ حيث $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$ فإن

$H = \{(a, 0) : a > 0\}$ زمرة جزئية من G . لأنه لو كان $(a, 0), (c, 0) \in H$

$$\text{فإن } (a, 0)(c, 0)^{-1} = (a, 0)\left(\frac{1}{c}, 0\right) = \left(\frac{a}{c}, 0\right) \in H$$

أما المجموعة الجزئية $K = \{(a, 3a^3) : a \neq 0\}$ فإنها ليست زمرة جزئية من G وذلك لأن

العنصر المحايد $(1, 0)$ لا ينتمي إلى K $\square$

مثال (٢، ١٨)

المجموعة الجزئية $H = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. وذلك لأنه لو كان

$$\square xy^{-1} = 2^m 2^{-n} = 2^{m-n} \in H \text{ فإن } y = 2^m, x = 2^n \in H$$

تعريف (٢، ٦)

لتكن G زمرة و $a \in G$. يعرف بمركز a (centralizer of a) بأنه المجموعة

$C(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. كما يعرف مركز G (center of G) بأنه المجموعة

$$Z(G) = \{x \in G : xa = ax \forall a \in G\}$$

المثال التالي يبين أن كل من المركز والمركز زمرة جزئية من أي زمرة G .

مثال (٢ ، ١٩)

إذا كانت G زمرة و $a \in G$ فإن $C(a) \leq G$ وإن $Z(G) \leq G$.

الحل

بما أن $aa = aa$ فإن $a \in C(a)$. ولذا فإن $C(a) \neq \emptyset$. نفرض الآن أن $x, y \in C(a)$. عندئذ $xa = ax$ و $ya = ay$. ولذا فإن $y^{-1}a = ay^{-1}$. كما أن :

$$xy^{-1}a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = axy^{-1}$$

وبالتالي فإن $C(a) \leq G$. بالمثل ، يمكن إثبات أن $Z(G) \leq G$ $\square$

مثال (٢ ، ٢٠)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $a \in G$ فإن المجموعة الجزئية $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ زمرة جزئية من G .

الحل

بما أن $aea^{-1} = e$ فإن $e \in aHa^{-1}$. ولذا فإن $aHa^{-1} \neq \emptyset$.نفرض الآن أن $ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1} \in aHa^{-1}$. عندئذ :

$$(ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1a^{-1}ah_2^{-1}a^{-1} = ah_1h_2^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$$

وبالتالي فإن $aHa^{-1} \leq G$ $\square$

مبرهنة (٢ ، ١٦)

إذا كانت $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية من G فإن $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma \leq G$.

البرهان

لنفرض أن $H = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$. بما أن $e \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$ فإن $e \in H$. ولذا فإن $H \neq \emptyset$. لنفرضالآن أن $a, b \in H$. حينئذ $a, b \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$. وبما أن $H_\gamma \leq G$ فإن◆ $ab^{-1} \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$. ولذا فإن $ab^{-1} \in H$. وبالتالي فإن $H \leq G$.

تعريف (٢ ، ٧)

لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية من G . تعرف الزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة S

(subgroup generated by S) ويرمز لها بالرمز $\langle S \rangle$ على أنها :

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{H_\gamma : S \subseteq H_\gamma \leq G\}$$

أي أن ، $\langle S \rangle$ هي الزمرة الجزئية التي نحصل عليها من تقاطع جميع زمر G الجزئية التي تحتوي S .

ملحوظات

(١) إذا كانت $G = \langle S \rangle$ فإننا نقول إن المجموعة S تولد G (أو أن G مولدة بالمجموعة S).

(٢) إذا كانت $S = \emptyset$ أو كانت $S = \{e\}$ فإنه من الواضح أن $\langle S \rangle = \{e\}$.

(٣) إذا كانت G زمرة فإن $\langle G \rangle = G$.

(٤) إذا كانت $G = \langle S \rangle$ وكانت S منتهية فإننا نقول إن G منتهية التوليد (finitely generated).

(٥) التعريف (٧ ، ٢) هو التعريف المستخدم لأي نظام رياضي مهما كان عدد العمليات المعروفة عليه ، ولكن لبعض الأنظمة (كما هو الحال في الزمر) يكون بالإمكان إعطاء وصف للزمرة الجزئية $\langle S \rangle$ باستخدام عناصر الزمرة ، وهذا ما سنقوم به الآن .

مبرهنة (١٧ ، ٢)

إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G فإن $H = \langle S \rangle$ حيث

$$H = \{a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_n^{e_n} : a_i \in S, e_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

البرهان

من الواضح أن $S \subseteq H$ لأنه إذا كان $a \in S$ فإن $a = a^1 \in H$. سنبرهن الآن أن

$$H \leq G . \text{ لنفرض أن } b_1^{f_1} b_2^{f_2} \dots b_n^{f_n} \in H , a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_m^{e_m} \in H . \text{ عندئذ :}$$

$$(a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_m^{e_m})(b_1^{f_1} b_2^{f_2} \dots b_n^{f_n})^{-1} = a_1^{e_1} \dots a_m^{e_m} b_n^{-f_n} \dots b_1^{-f_1} \in H$$

وأخيراً إذا كانت $G \geq K \geq S$ وكان $a_1^{e_1} \dots a_m^{e_m} \in H$ فإن $a_1, \dots, a_m \in S$. ولذا فإن

وبما أن $a_1, \dots, a_m \in K$ فإن $a_1^{e_1} \dots a_m^{e_m} \in K$ وبالتالي فإن $H \subseteq K$. وباستخدام

تعريف $\langle S \rangle$ نخلص إلى أن $H = \langle S \rangle$ ♦

تعريف (٢ , ٨)

تعرف زمرة المرباعيات (quaternion group) على أنها الزمرة Q_8 المولدة بالعنصرين a و b حيث

$$. ba = a^3b = a^{-1}b, a^2 = b^2, o(a) = 4$$

مبرهنة (٢ , ١٨)

 Q_8 زمرة غير إبدالية رتبته 8 .

البرهان

باستخدام المبرهنة (٢ , ١٧) نجد أن :

$$. Q_8 = \{a^{i_1}b^{j_1} a^{i_2}b^{j_2} \dots a^{i_n}b^{j_n} : i_t, j_t \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq n, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

بما أن $ba = a^3b = a^{-1}b$ فإن عناصر Q_8 يجب أن تكون على الصورة $a^n b^m$ حيث

$$. m, n \in \mathbb{Z} \text{ و بما أن } a^4 = e \text{ وأن } a^2 = b^2 \text{ فإن } 0 \leq n < 4 \text{ وأن } 0 \leq m < 2$$

إذن ، $|Q_8| \leq 8$. ولكن e, a, a^2, a^3 جميعها عناصر مختلفة ، ولذا فإن b, ab, a^2b, a^3b جميعها

$$\{e, a, a^2, a^3\} \cap \{b, ab, a^2b, a^3b\} = \emptyset \text{ وبملاحظة أن } \phi$$

(لأن $a^2 = b^2, a^{-1} = a^3$ و $a \neq b \neq e$) فإننا نجد أن :

$$. Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\} \text{ إذن } |Q_8| = 8 \text{ . كما أن } Q_8 \text{ ليست إبدالية}$$

لأن $ab \neq ba$ (لأنه لو كان $ab = ba$ فإن $ab = a^3b$ ومن ثم نحصل على التناقض $a^2 = e$)من السهل التحقق من أن جدول كيلى للزمرة Q_8 هو :

	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
e	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	e	a	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	e	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	a ³ b	a ² b	ab	a ²	a	e	a ³
ab	ab	b	a ³ b	a ² b	a ³	a ²	a	e
a ² b	a ² b	ab	b	a ³ b	e	a ³	a ²	a
a ³ b	a ³ b	a ² b	ab	b	a	e	a ³	a ²

تعريف (٩ ، ٢)

تعرف الزمرة الزوجية من الدرجة $n \geq 3$ (**dihedral group of degree n**) ويرمز لها بالرمز D_n على أنها الزمرة المولدة بالعنصرين a, b حيث $o(a) = n$ ، $o(b) = 2$ وتحقق العلاقة $ba = a^{-1}b$.

مبرهنة (١٩ ، ٢)

D_n زمرة غير إبدالية رتبها $2n$ حيث $n \geq 3$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (١٧ ، ٢) نجد أن :

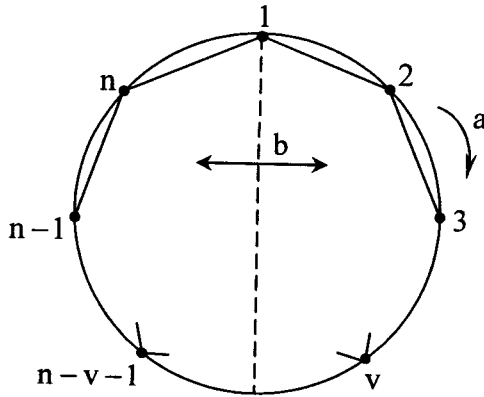
$D_n = \{a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_n} b^{j_n} : i_t, j_t \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ بما أن $ba = a^{-1}b = a^{n-1}b$ فإن عناصر D_n تأخذ الشكل $a^k b^m$ حيث $k, m \in \mathbb{Z}$. وبما أن $a^n = e$ ، $b^2 = e$ و $a^{-1} = a^{n-1}$ فإن $0 \leq m < 2$ و $0 \leq k < n$. إذن ، $|D_n| \leq 2n$. الآن ، $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ جميعها عناصر مختلفة ، ولذا فإن $b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b$ جميعها عناصر مختلفة . وبما أن $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \cap \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\} = \emptyset$ فإننا نخلص إلى أن $D_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. إذن ، $|D_n| = 2n$. وأخيراً D_n ليست إبدالية لأن $ab \neq ba$ ♦

من السهل التحقق من أن جدول كييلي للزمرة D_4 هو :

	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
e	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	e	a	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	e	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	a ³ b	a ² b	ab	e	a ³	a ²	a
ab	ab	b	a ³ b	a ² b	a	e	a ³	a ²
a ² b	a ² b	ab	b	a ³ b	a ²	a	e	a ³
a ³ b	a ³ b	a ² b	ab	b	a ³	a ²	a	e

ملحوظة

لاحظ أن D_4 ماهي إلا زمرة تناظرات المربع المقدمة في المثال (١,٥) ولذا فإن $D_4 \leq S_4$. وبصورة عامة من الممكن اعتبار الزمرة D_n حيث $n \geq 3$ هي زمرة تناظرات المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n حيث نفرض أن a هو دوران المضلع بزاوية $\frac{2\pi}{n}$ راديان وأن b هو الانعكاس حول القطر المار بالنقطة 1 كما هو مبين في الشكل أدناه.



$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ولذا فإن $ba = a^{-1}b$ و $b^2 = I$ ، $a^n = I$ وبالتالي فإن D_n كزمرة جزئية من زمرة التبديلات S_n .

نقدم الآن مفهوم ضرب زمريتين جزئيتين .

تعريف (٢ , ١٠)

لتكن G زمرة ولتكن كل من H و K مجموعة جزئية غير خالية من G . يعرف حاصل ضرب H مع K (product of H and K) بأنه المجموعة $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. وبالمثل يعرف

ضرب المجموعات الجزئية غير الخالية $H_1, H_2, \dots, H_n$ من G بأنه المجموعة :

$$H_1 H_2 \dots H_n = \{h_1 h_2 \dots h_n : h_i \in H_i, 1 \leq i \leq n\}$$

ملحوظة

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فإننا نلفت انتباه القارئ بأنه ليس من الضروري أن تكون HK زمرة جزئية من G وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٢١ ، ٢)

كل من $H = \{e, a^2b\}$ و $K = \{e, ab\}$ زمرة جزئية من D_4 (لماذا ؟) . ولكن $HK = \{e, ab, a^2b, a\}$ ليست زمرة جزئية من D_4 لأن $(a)(a^2b) = a^3b \notin HK$ □

تزودنا المبرهنة التالية بالشروط اللازمة والكافية لكي تكون HK زمرة جزئية من G .

مبرهنة (٢٠ ، ٢)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة G فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $HK \leq G$ (ب) $HK = KH$ (ج) $HK = \langle H \cup K \rangle$

البرهان

(أ) $\Leftrightarrow$ (ب) : لنفرض أن $HK \leq G$. ولنفرض أن $kh \in KH$ حيث $k \in K$ و $h \in H$. بما أن $HK \leq G$ وأن $h = he \in HK$ وأن $k = ek \in HK$ فإن $KH \subseteq HK$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $hk \in HK$ فإن $(hk)^{-1} \in HK$. ولذا فإن $(hk)^{-1} = h_1k_1$ حيث $h_1 \in H$ ، $k_1 \in K$. حينئذ ، $hk = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH$ ، إذن ، $HK = KH$. (ب) $\Leftrightarrow$ (ج) : لنفرض أن $HK = KH$. سنبرهن أولاً أن $HK \leq G$. ولهذا الغرض نفرض

أن $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$ حيث $h_1, h_2 \in H$ ، $k_1, k_2 \in K$. الآن :

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK$ ولكن $k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH$ ومنه فإن

$k_2^{-1}h_2^{-1} = h_3k_3$ حيث $h_3 \in H$ و $k_3 \in K$. ولذا فإن :

$h_1k_1h_3k_3 \in KH = HK$ ، كذلك ، $(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1k_1h_3k_3$.

إذن ، $k_1h_3 = h_4k_4$ حيث $h_4 \in H$ و $k_4 \in K$. ولذا فإن :

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1h_4k_4k_3 \in HK$. إذن ، $HK \leq G$.

لاحظ أن $H \cup K \subseteq HK$ وذلك لأن $H, K \subseteq HK$. وبما أن $\langle H \cup K \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية

من G تحتوي $H \cup K$ فإننا نخلص إلى أن $\langle H \cup K \rangle = HK$.

(ج) $\Leftrightarrow (أ)$: لنفرض أن $HK = \langle H \cup K \rangle$. بما أن $\langle H \cup K \rangle$ زمرة جزئية من G فإننا نخلص

♦ إلى أن $HK \leq G$

مبرهنة (٢١، ٢)

لتكن G زمرة ولتكن $S(G)$ هي مجموعة جميع الزمر الجزئية من G . عندئذ $(S(G), \subseteq)$ شبكية.

البرهان

من الواضح أن $(S(G), \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . سنبرهن الآن أن $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$ وأن $A \wedge B = A \cap B$ لكل $A, B \in S(G)$. بما أن $A, B \subseteq \langle A \cup B \rangle$ فإن $\langle A \cup B \rangle$ حد علوي لكل من A و B . لنفرض الآن أن $C \in S(G)$ حيث $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$. حيثئذ ، $A \cup B \subseteq C$. ولذا فإن $\langle A \cup B \rangle \subseteq C$. وبالتالي فإن $\langle A \cup B \rangle$ هو أصغر حد علوي لكل من A و B . إذن ، $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$.

وأخيراً ، لاحظ أن $A \cap B \subseteq A, B$. ولذا فإن $A \cap B$ حد سفلي لكل من A و B . وإذا كان $D \in S(G)$ حيث $D \subseteq A$ و $D \subseteq B$ فإن $D \subseteq A \cap B$. إذن ، $A \cap B$ أكبر حد سفلي

♦ لكل من A و B وبالتالي فإن $A \wedge B = A \cap B$

ملحوظة

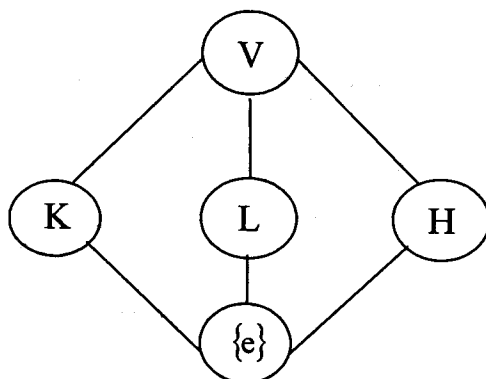
يسمى شكل هاس للشبكية $(S(G), \subseteq)$ بالمخطط الشبكي للزمر الجزئية من G (the lattice diagram of subgroups of G) .

مثال (٢٢، ٢)

سنجد المخطط الشبكي للزمر الجزئية من زمرة كلاين الرابعة $V = \{e, a, b, c\}$.

أنه ليس من الصعب التحقق من أن الزمر الجزئية الفعلية من V هي $L = \{e, c\}$

، $H = \{e, a\}$ ، $K = \{e, b\}$. ولذا ، فإن المخطط الشبكي للزمر V الجزئية هو :



□

نتقل الآن إلى دراسة صنف هام جداً من الزمر ألا وهو الزمر الدورية .

تعريف (٢ ، ١١)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a الزمرة الجزئية الدورية (cyclic subgroup) ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$. أي أن $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. وتكون الزمرة G زمرة دورية إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $G = \langle a \rangle$.

تحتل الزمر الدورية أهمية خاصة في دراسة الزمر وذلك لانفرادها دون غيرها من الزمر ببعض الخصائص الخاصة التي تسهل علينا عملية التعرف على هذه الزمر واستخدامها في تصنيف بعض الزمر الأخرى .

مثال (٢ ، ٢٣)

الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ دورية وذلك لأن $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. كذلك الزمرة $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ دورية لأن $\square \mathbb{Z}_n = \langle [1] \rangle$

مثال (٢ ، ٢٤)

زمرة كلاين الرابعة $V = \{e, a, b, c\}$ ليست دورية لأن $a^2 = b^2 = c^2 = e$. ولذا فإنه لا يمكن إيجاد عنصر يولد V □

مثال (٢٥، ٢)

الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دورية . لأنه لو وجد $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ حيث $\langle \frac{a}{b} \rangle = \mathbb{Q}$ وحيث $\gcd(a, b) = 1$ فإن $\frac{a}{2b} \in \mathbb{Q}$. ولذا فإن $\frac{a}{2b} = n \frac{a}{b}$ حيث $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن $n = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ وهذا مستحيل $\square$

المبرهنة التالية تبين لنا أن الزمر الدورية يجب أن تكون إبدالية .

مبرهنة (٢٢، ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية فإن G إبدالية .

البرهان

لنفرض أن $x, y \in G$. عندئذ ، $x = a^m$ و $y = a^n$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن :

$$\blacklozenge \quad xy = a^m a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m = yx$$

تبين لنا المبرهنة التالية أن الزمر الجزئية من الزمرة الدورية ترث هذه الخاصية .

مبرهنة (٢٣، ٢)

كل زمرة جزئية من زمرة دورية يجب أن تكون دورية .

البرهان

لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ وأن $H \leq G$. إذا كانت $H = \{e\}$ فإن $H = \langle e \rangle$. ولذا فإنها دورية . نفرض إذن أن $H \neq \{e\}$. باستخدام مبدأ الترتيب الحسن نستطيع إيجاد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n \in H$. سنبرهن الآن أن $H = \langle a^n \rangle$. لنفرض إذن أن $x \in H$. عندئذ ، $x \in G$. ولذا فإن $x = a^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. باستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $0 \leq r < n$ ، $k = nq + r$ ، بما أن $a^n, a^k \in H$ فإن :

$$\blacklozenge \quad H = \langle a^n \rangle \quad \text{وبالتالي فإن } r = 0 \text{ ولذا فإننا نجد أن } a^r = a^{k-nq} = a^k (a^n)^{-q} \in H$$

(٢٦ , ٢) مثال

($\mathbb{R}$, +) ليست دورية . وذلك لأنه لو كانت ($\mathbb{R}$, +) دورية فإن الزمرة الجزئية ($\mathbb{Q}$, +) يجب أن تكون دورية أيضاً وهذا تناقض $\square$

سندرس الآن خصائص الزمر الدورية المنتهية .

(٢٤ , ٢) مبرهنة

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبها n فإن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

البرهان

لاحظ أن $G = \langle a \rangle = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\}$. وبما أن G منتهية فإنه يوجد $i, j \in \mathbb{Z}$ و $i < j$ و $a^i = a^j$. إذن ، $a^{j-i} = e$. لنفرض الآن أن m هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^m = e$. إذن ، لكل $0 \leq i < j < m$ نجد أن $a^i \neq a^j$. ولذا فإن عناصر المجموعة $H = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$ جميعها مختلفة . لنفرض الآن أن $a^k \in G = \langle a \rangle$. باستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $0 \leq r < m$ ، $k = qm + r$. عندئذ ،

$a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r = e^q a^r = a^r \in H$. ولكن $H \subseteq G$. ولذا فإن $G \subseteq H$. إذن ، $H = G$. وبما أن جميع عناصر H مختلفة وأن $o(a) = n$ فإن $m = n$. وبالتالي

◆ $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ فإن

ملحوظة

يتضح من برهان المبرهنة (٢٤ , ٢) أنه إذا كانت $\langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية فإن $o(a) = |\langle a \rangle|$.

(٢٥ , ٢) نتيجة

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبها $n > 1$ وكانت $H \leq G$ فإن $|H|$ يقسم n .

البرهان

باستخدام المبرهنة (٢٣ , ٢) نجد أن $H = \langle a^k \rangle$ حيث k هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^k \in H$. وباستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث :

$$0 \leq r < k, n = qk + r$$

حينئذٍ ، $a^r = a^{n-qk} = a^n ((a^k)^{-1})^q = e((a^k)^{-1})^q = ((a^k)^{-1})^q \in H$ ، ولذا فإن $r = 0$ ، ومنه فإن k يقسم n . وأخيراً باستخدام المبرهنة (١١ ، ١) نجد أن :

$$\blacklozenge \quad |H| = o(a^k) = \frac{n}{\gcd(n, k)} = \frac{n}{k}$$

ولذا فإن $|H|$ يقسم n $\blacklozenge$

ملحوظة

نلفت نظر القارئ إلى أن النتيجة (٢٥ ، ٢) ما هي إلا حالة خاصة من مبرهنة هامة جداً ، يعتبرها الكثير من علماء الجبر ألف باء نظرية الزمر ، ألا وهي مبرهنة لاجرانج والتي نقدمها في الفصل الثالث من هذا الكتاب. وسنقدم لاحقاً مثلاً يبين أن عكس مبرهنة لاجرانج ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً في الحالة العامة ولكن في حالة الزمر الدورية فإن العكس صحيح وهذا هو فحوى المبرهنة التالية :

مبرهنة (٢٦ ، ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبها n فإنه لكل قاسم موجب d للعدد n توجد زمرة جزئية وحيدة من G رتبها d .

البرهان

بما أن d يقسم n فإن $n = kd$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. وباستخدام المبرهنة (١١ ، ١) نجد أن

$$o(a^k) = \frac{o(a)}{\gcd(k, n)} = \frac{n}{k} = d$$

ولبرهان الوجدانية ، نفرض أن $K \leq G$ حيث $|K| = d$. عندئذٍ ، $K = \langle a^t \rangle$ حيث t

$$d = |K| = o(a^t) = \frac{o(a)}{\gcd(t, n)} : a^t \in K \text{ يحقق الآن :}$$

$$\gcd(n, t) = \frac{n}{d} = k$$

ولذا فإن k يقسم t . أي أن $t = km$ حيث $m \in \mathbb{Z}$. ولذا

$$a^t = a^{km} = (a^k)^m \in H$$

فإن $K \subseteq H$. ومنه فإن $|K| = |H|$. وبما أن $|K| = |H|$ فإننا نخلص إلى

$\blacklozenge \quad K = H$

النتيجة التالية تبين لنا كيفية إيجاد جميع مولدات الزمرة الدورية المنتهية .

نتيجة (٢٧ ، ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبها n فإن a^k يولد G إذا وفقط إذا كان $\gcd(n, k) = 1$.

البرهان

لنفرض أولاً أن a^k يولد G . بما أن $|G| = n$ فإن $o(a^k) = n$. ولكن

$$n = o(a^k) = \frac{n}{\gcd(k, n)} \quad \text{إذن } \gcd(k, n) = 1. \text{ وبالعكس، إذا كان}$$

$$\gcd(n, k) = 1 \quad \text{فإن } o(a^k) = \frac{n}{\gcd(k, n)} = n \quad \text{ولذا فإن } |G| = n = |\langle a^k \rangle|.$$

ولكن $\langle a^k \rangle \subseteq G$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $G = \langle a^k \rangle$ ♦

نتيجة (٢٨ ، ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ زمرة دورية رتبها n فإن $a^r = a^t$ إذا وفقط إذا كان $r \equiv t \pmod{n}$.

البرهان

لنفرض أن $r > t$. عندئذ: $a^r = a^t \Leftrightarrow a^{r-t} = e \Leftrightarrow n \mid (r-t) \Leftrightarrow r \equiv t \pmod{n}$ ♦

مثال (٢٧ ، ٢)

عين جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية.

الحل

لنجد أولاً مولدات $\mathbb{Z}_{18}$. بما أن $\mathbb{Z}_{18} = \langle [1] \rangle$ وأن $|\mathbb{Z}_{18}| = 18$ فإننا نجد باستخدام النتيجة (٢٧ ، ٢) أن $k[1]$ مولد للزمرة $\mathbb{Z}_{18}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(k, 18) = 1$. أي أن $k = 1, 5, 7, 11, 13, 17$. وبالتالي فإن :

$$\mathbb{Z}_{18} = \langle [1] \rangle = \langle [5] \rangle = \langle [7] \rangle = \langle [11] \rangle = \langle [13] \rangle = \langle [17] \rangle$$

نجد الآن $\langle [2] \rangle$. من السهل أن نرى أن :

$$\langle [2] \rangle = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10], [12], [14], [16]\}$$

زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{18}$ رتبها 9. ولذا فإن مولداتها هي $k[2]$ حيث $\gcd(k, 9) = 1$. أي

أن: $\langle [2] \rangle = \langle [4] \rangle = \langle [8] \rangle = \langle [10] \rangle = \langle [14] \rangle = \langle [16] \rangle$. ننتقل الآن إلى الزمرة الجزئية $\langle [6] \rangle$.

لاحظ أن $\langle [6] \rangle = \{[0], [6], [12]\}$ ومولداتها على الصورة $k[6]$ حيث $\gcd(k, 3) = 1$. أي

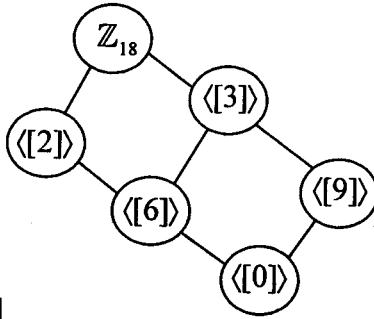
أن $\langle [6] \rangle = \langle [12] \rangle$. نجد الآن $\langle [3] \rangle$. لاحظ أن:

حيث $\langle [3] \rangle = \{[0], [3], [6], [9], [12], [15]\}$ ومولداتها على الصورة $[3]k$ حيث

$\gcd(k, 6) = 1$. أي أن $\langle [3] \rangle = \langle [15] \rangle$. وأخيراً لدينا $\langle [9] \rangle = \{[0], [9]\}$.

وبتجميع هذه المعلومات نخلص إلى أن المخطط الشبكي للزمر الجزئية من الزمرة

$(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ هو :



□

مثال (٢٨، ٢)

جد جميع الزمر الجزئية من Q_8 ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

لاحظ أن $Q_8 = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 4$ ، $a^2 = b^2$ ، و $ba = a^3b$. ولقد وجدنا في المبرهنة

(١٨، ٢) أن $Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. لإيجاد جميع الزمر الجزئية من Q_8 ،

نجد أولاً الزمر الجزئية الدورية وهي :

$$H_2 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}, H_1 = \langle a^2 \rangle = \{e, a^2\}, \{e\} = \langle e \rangle$$

$$H_4 = \langle ab \rangle = \{e, ab, a^2, a^3b\}, H_3 = \langle b \rangle = \{e, b, a^2, a^2b\}$$

سنبين الآن أن هذه هي جميع الزمر الجزئية الدورية من Q_8 .

بما أن $a^3 \in \langle a \rangle$ فإن $\langle a^3 \rangle \subseteq \langle a \rangle$. ولكن $o(a^3) = 4$. إذن، $\langle a^3 \rangle = \langle a \rangle$.

بما أن $a^2b \in \langle b \rangle$ فإن $\langle a^2b \rangle \subseteq \langle b \rangle$. ولكن $o(a^2b) = o(b)$ إذن، $\langle a^2b \rangle = \langle b \rangle$.

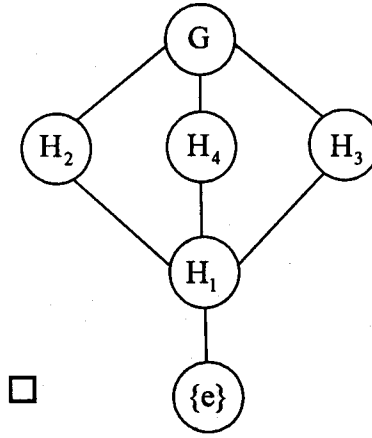
بما أن $a^3b \in \langle ab \rangle$ فإن $\langle a^3b \rangle \subseteq \langle ab \rangle$. ولكن $o(a^3b) = o(ab)$ إذن، $\langle a^3b \rangle = \langle ab \rangle$.

وبالتالي فإن H_1, H_2, H_3, H_4 هي جميع الزمر الجزئية الدورية من Q_8 . الآن، بما

أن $H_i \cup H_j = H_i$ لكل $i = 2, 3, 4$ فإن $\langle H_i \cup H_j \rangle = H_i$. وبما أن،

$$\langle H_2 \cup H_3 \rangle = Q_8 \text{ فإن } H_2 \cup H_3 = \{e, a, a^2, a^3, b, a^2b\}$$

وبالتالي فإن المخطط الشبكي لزمرة Q_8 الجزئية هو :



مثال (٢٩ , ٢)

جد جميع الزمر الجزئية من D_4 ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .
الحل

لقد بينا في المبرهنة (١٩ , ٢) أن : $D_4 = \langle a, b \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ حيث $o(a) = 4$ ، $o(b) = 2$ ، $ba = a^3b$. من الواضح أن الزمر الجزئية الدورية من D_4 هي :

$$H_3 = \langle ab \rangle = \{e, ab\} , H_2 = \langle b \rangle = \{e, b\} , H_1 = \langle a^2 \rangle = \{e, a^2\} , \langle e \rangle = \{e\}$$

$$T_1 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\} , H_5 = \langle a^3b \rangle = \{e, a^3b\} , H_4 = \langle a^2b \rangle = \{e, a^2b\}$$

لاحظ أن $H_1 \subseteq T_1$ وباقي الزمر الجزئية الدورية غير قابلة للمقارنة . الآن :

$$\{a, b\} \subset \langle T_1 \cup H_2 \rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_2 \rangle = D_4$$

$$\{a, ab\} \subset \langle T_1 \cup H_3 \rangle \Rightarrow \{a, b = a^{-1}ab\} \subset \langle T_1 \cup H_3 \rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_3 \rangle = D_4$$

$$\{a, a^2b\} \subset \langle T_1 \cup H_4 \rangle \Rightarrow \{a, ab = a^2ba\} \subset \langle T_1 \cup H_4 \rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_4 \rangle = D_4$$

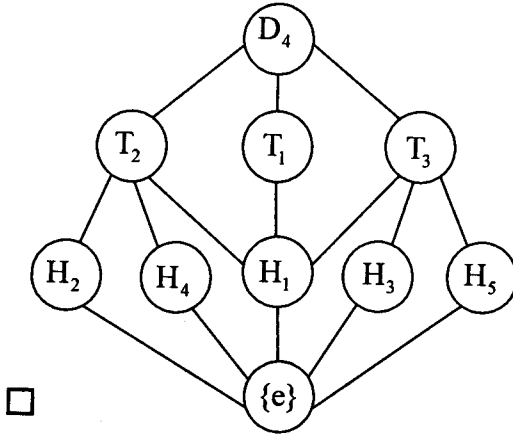
$$\{a, a^3b\} \subset \langle T_1 \cup H_5 \rangle \Rightarrow \{a, a^2b = a^3ba\} \subset \langle T_1 \cup H_5 \rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_5 \rangle = D_4$$

كذلك نستطيع بسهولة أن نثبت أن :

$$\langle H_2 \cup H_3 \rangle = \langle H_2 \cup H_5 \rangle = \langle H_4 \cup H_3 \rangle = \langle H_4 \cup H_5 \rangle = D_4$$

$$\{e, a^2, b\} \subset \langle H_1 \cup H_2 \rangle \Rightarrow T_2 = \{e, a^2, b, a^2b\} \subset \langle H_1 \cup H_2 \rangle : \text{الآن}$$

وبما أن $T_2 \leq D_4$ فإن $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = T_2$. بالمثل ، $T_2 = \langle H_2 \cup H_4 \rangle$. وبأسلوب مماثل نستطيع أن نثبت وبسهولة أن $\langle H_3 \cup H_5 \rangle = T_3 = \langle H_1 \cup H_3 \rangle = \langle H_3 \cup H_5 \rangle$. $T_3 = \{e, a^2, ab, a^3b\}$. وكذلك $\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \cup T_3 \rangle = \langle T_2 \cup T_3 \rangle = D_4$. ولذا فإننا نخلص إلى أن المخطط الشبكي للزمر الجزئية من D_4 هو :



□

مثال (٣٠ ، ٢)

جد جميع زمر A_4 الجزئية وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

$$A_4 = \{ e, \sigma_1 = (1\ 3) \circ (2\ 4), \sigma_2 = (1\ 4) \circ (2\ 3), \sigma_3 = (1\ 2) \circ (3\ 4), \\ \tau_1 = (2\ 3\ 4), \tau_2 = (2\ 4\ 3), \tau_3 = (1\ 3\ 4), \tau_4 = (1\ 4\ 3), \tau_5 = (1\ 2\ 4), \\ \tau_6 = (1\ 4\ 2), \tau_7 = (1\ 2\ 3), \tau_8 = (1\ 3\ 2) \}$$

لاحظ أيضاً أن $o(\sigma_i) = 2$ وأن $o(\tau_j) = 3$. إذن ، كل من $K_1 = \langle \sigma_1 \rangle$ ، $K_2 = \langle \sigma_2 \rangle$ ،

$K_3 = \langle \sigma_3 \rangle$ زمرة جزئية دورية من الرتبة 2 ، وأن كل من :

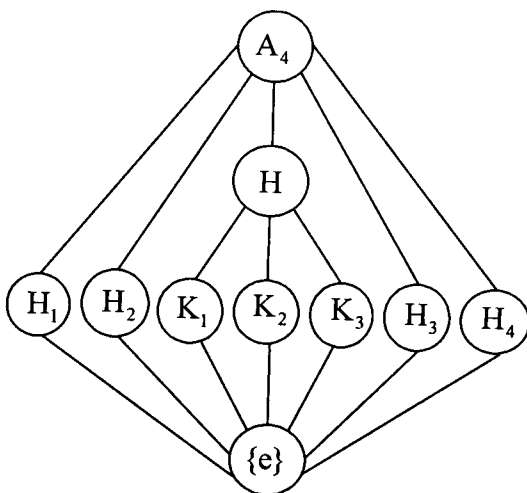
$$H_4 = \langle \tau_7 \rangle = \langle \tau_8 \rangle , H_3 = \langle \tau_5 \rangle = \langle \tau_6 \rangle , H_2 = \langle \tau_3 \rangle = \langle \tau_4 \rangle , H_1 = \langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle$$

زمرة جزئية دورية من الرتبة 3 .

من السهل أن نرى أن $H = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leq A_4$. وبصورة مماثلة لما اتبعناه في الأمثلة السابقة

نستطيع أن نثبت أن : $\langle K_i \cup K_j \rangle = H$ وأن $\langle H_i \cup H_j \rangle = A_4$.

وبالتالي يكون المخطط الشبكي للزمر الجزئية من A_4 هو :



ننهي هذا البند بدراسة الزمر الدورية غير المنتهية .

مبرهنة (٢٩ , ٢)

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية غير منتهية .

(أ) إذا كانت $H \leq G$ فإن $\{e\} \neq H$ غير منتهية أيضاً .

(ب) $a^r = a^t$ إذا وفقط إذا كان $r = t$ لكل $r, t \in \mathbb{Z}$.

(ج) a و a^{-1} هما المولدان الوحيدان للزمرة G .

البرهان

(أ) بما أن $H \leq G$ فإن $H = \langle a^k \rangle$. وبما أن رتبة a غير منتهية فإن رتبة a^k غير منتهية . ولذا

فإن H زمرة غير منتهية .

(ب) لنفرض أولاً أن $a^r = a^t$ وأن $r > t$. عندئذٍ $a^{r-t} = e$. ولذا فإن $o(a)$ منته وبالتالي

فإن G زمرة منتهية وهذا تناقض . إذن ، $r = t$. وبرهان العكس واضح .

(ج) لنفرض أن $G = \langle a \rangle = \langle b \rangle$. بما أن $a \in \langle b \rangle$ و $b \in \langle a \rangle$ فإن $a = b^r$ وأن $b = a^t$

حيث $r, t \in \mathbb{Z}$. إذن ، $a = b^r = a^{rt}$. ولذا فإن $rt = 1$. ومنه فإن $r = t = \pm 1$

وبالتالي فإن $b = a$ أو $b = a^{-1}$ ♦

مثال (٢, ٣١)

عين جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

الحل

إذا كانت $H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ فإن $H = \langle k \times 1 \rangle$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إذن، $H = k\mathbb{Z}$ حيث $\square k \in \mathbb{Z}$

(١, ٢, ٢) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H, K \leq G$ حيث $\gcd(|H|, |K|) = 1$ فثبت أن $H \cap K = \{e\}$. عين الزمرة $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

الحل

لنفرض أن $x \in H \cap K$. بما أن $|H| \mid o(x)$ وأن $|K| \mid o(x)$ فإن $\gcd(|H|, |K|) \mid o(x)$. ولذا فإن $o(x) = 1$. أي أن $x = e$.

بما أن $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$. سنبرهن الآن أن $k = \text{lcm}(m, n)$. بما أن $k \in m\mathbb{Z}$ و $k \in n\mathbb{Z}$ فإنه يوجد $r, s \in \mathbb{Z}$ حيث $k = mr$ و $k = ns$. ومنه فإن $k \mid m$ و $k \mid n$. لنفرض الآن أن $n \mid u$ و $m \mid u$. عندئذ:

$u \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$. ولذا فإن $u \in k\mathbb{Z}$. ومنه فإن $k \mid u$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $k = \text{lcm}(m, n)$.

تمرين (٢)

أثبت أن $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle$.

الحل

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. عندئذ، σ حاصل ضرب مناقلات. ولذا فإنه يكفي أن نثبت أنه إذا كانت $(i\ j) \in S_n$ مناقلة في S_n حيث $i < j$ فإن $(i\ j) \in \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle$. ولكن هذا صحيحاً لأن $(i\ j) = (1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i)$.

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة وكان $a, x \in G$ ، فأثبت أن $C(xax^{-1}) = xC(a)x^{-1}$.

الحل

لاحظ أن $C(xax^{-1}) = \{g \in G : gxax^{-1} = xax^{-1}g\}$ وأن

$x C(a) x^{-1} = \{xgx^{-1} : ga = ag\}$. لنفرض أن $h \in x C(a) x^{-1}$. عندئذ ،

$h = xgx^{-1}$ حيث $ga = ag$. الآن :

$$hxax^{-1} = (xgx^{-1})(xax^{-1}) = xgax^{-1} = xagx^{-1} = (xax^{-1})(xgx^{-1}) = xax^{-1}h$$

ولذا فإن $h \in C(xax^{-1})$. وبالعكس ، إذا كان $h \in C(xax^{-1})$ فإن $hxax^{-1} = xax^{-1}h$

وبوضع $g = x^{-1}hx$ فإننا نجد أن $h = xgx^{-1}$. بقي أن نثبت أن $ga = ag$. ولهذا الغرض لاحظ أن

$$hxax^{-1} = xax^{-1}h \Rightarrow x^{-1}hxax^{-1} = ax^{-1}h \Rightarrow gax^{-1} = ax^{-1}h$$

$$\Rightarrow gax^{-1}h^{-1}x = a \Rightarrow ga(x^{-1}hx)^{-1} = a$$

$$\Rightarrow gag^{-1} = a \Rightarrow ga = ag$$

وبالتالي فإن $h \in x C(a) x^{-1}$ Δ

تمرين (٤)

لتكن $(+, \mathbb{Q})$ زمرة الأعداد الكسرية وليكن $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$.

(أ) أثبت أن $\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ زمرة جزئية دورية .

(ب) أثبت أن $\mathbb{Q}$ غير منتهية التوليد .

(ج) إذا كانت $\mathbb{Q} \leq H_n = \langle 1/n! \rangle$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن $H_n \subseteq H_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) أثبت أن الاحتواء في الفقرة (ج) فعلي .

(هـ) أثبت أن $\mathbb{Q}$ هي اتحاد زمر جزئية دورية .

الحل

(أ) لنفرض أن $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ حيث $\gcd(p_i, q_i) = 1$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ عندئذ ،

$$r_i = p_i q_1 q_2 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_n \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \in \langle \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \rangle$$

ولذا فإن $\langle \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \rangle \subseteq \langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$. وبالتالي فإنها كزمرة جزئية من زمرة دورية يجب أن يكون دورية.

(ب) إذا كانت $\mathbb{Q}$ منتهية التوليد فإننا نجد من الفقرة (أ) أن $\mathbb{Q}$ يجب أن تكون دورية وهذا مستحيل.

(ج) بما أن $H_n \subseteq H_{n+1}$ فإننا نخلص إلى أن $\frac{1}{n!} = (n+1) \frac{1}{(n+1)!} \in H_{n+1}$.

(د) بما أن $\frac{1}{(n+1)!} \notin H_n$ فإن الإحتواء فعلي.

(هـ) إذا كانت $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ فإن وبالتالي $\frac{a}{b} = (b-1)! a \frac{1}{b!} \in H_b$ فإن $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

تمارين (٢, ٢)

(١) أثبت أن $H = \{a+bi : a^2 + b^2 = 1\} \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(٢) إذا كانت G_1 و G_2 زمريتين وكانت $G = G_1 \times G_2$ فأثبت أن $H = \{(a, e_2) : a \in G_1\}$ زمرة جزئية من G .

(٣) لتكن G هي الزمرة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث العملية الثنائية معرفة بالقاعدة

$(a, b)(c, d) = (a+bc, bd)$. أثبت أن كل من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من G وبين أيًا منها إبدالية.

(أ) $H = \{(a, b) \in G : a = 0\}$ (ب) $K = \{(a, b) \in G : b > 0\}$

(ج) $L = \{(a, b) \in G : b = 1\}$

(٤) لتكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ حيث $(a, b)(c, d) = (ac, bc+d)$. بين أيًا من المجموعات التالية زمرة جزئية من G .

(أ) $H = \{(a, 3(a-1)) : a \neq 0\}$ (ب) $K = \{(a, 0) : a > 0\}$

(ج) $L = \{(a, 3a^3) : a \neq 0\}$ (د) $M = \{(1, b) : b \in \mathbb{R}\}$

(٥) أثبت أن كل من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من $GL(2, \mathbb{R})$.

(أ) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$ (ب) $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \quad (د) \quad L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a \neq 0 \text{ أو } b \neq 0 \right\} \quad (ج)$$

$$(٦) \text{ أثبت أن } H = \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ زمرة جزئية من } (\mathbb{Q}^*, \cdot)$$

$$(٧) \text{ لتكن } G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ حيث } (a, b)(c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$$

(أ) أثبت أن G زمرة غير إبدالية .

$$(ب) \text{ أثبت أن كل من } H = \{(a, b) : b = 0\} \text{ و } K = \{(a, b) : a = 0\} \text{ زمرة جزئية من } G$$

$$(٨) \text{ لتكن } Y \subseteq X \text{ وليكن } y \in Y \text{ بين أيًا من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من } S_X .$$

$$(أ) H = \{\sigma \in S_X : \sigma(y) = y\} \quad (ب) K = \{\sigma \in S_X : \sigma(y) \in Y\}$$

$$(ج) M = \{\sigma \in S_X : \sigma(Y) \subseteq Y\} \quad (د) N = \{\sigma \in S_X : \sigma(Y) = Y\}$$

$$(٩) \text{ إذا كانت } H = \{\sigma \in S_3 : \sigma^2 = e\} \text{ فهل } H \leq S_3 ?$$

$$(١٠) \text{ عين جميع الزمر الجزئية وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمرتين}$$

$$(\mathbb{Z}_6, +_6) \text{ و } (U_9, \cdot_9) \text{ . ماذا تلاحظ ؟}$$

$$(١١) \text{ عين جميع الزمر الجزئية } (U_{16}, \cdot_{16}) \text{ وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .}$$

$$(١٢) \text{ عين جميع الزمر الجزئية للزمر } (U_{27}, \cdot_{27}) \text{ وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .}$$

$$(١٣) \text{ ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمر الدورية } \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{16}, \text{ و } \mathbb{Z}_{32} \text{ . ماذا تلاحظ ؟}$$

$$(١٤) \text{ ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمر الدورية } \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{21}, \text{ و } \mathbb{Z}_{35} .$$

ماذا تلاحظ ؟

$$(١٥) \text{ ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية للزمرة } \mathbb{Z}_{12} .$$

$$(١٦) \text{ ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية للزمرة } \mathbb{Z}_{36} .$$

$$(١٧) \text{ بين أيًا من الزمر التالية دورية . عين جميع مولدات الزمر الدورية منها :}$$

$$U_8, U_9, U_{17}, U_{18}, U_{20}, U_{25}, U_{27} .$$

$$(١٨) \text{ جد المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من } S_3 \text{ و } D_3 \text{ . ماذا تلاحظ ؟}$$

$$(١٩) \text{ في الزمرة } S_4 \text{ عين :}$$

$$(أ) \text{ جميع الزمر الجزئية الدورية من الرتبة 4} \quad (ب) \text{ ثلاث زمر جزئية غير دورية من الرتبة 4}$$

$$(ج) \text{ أربع زمر جزئية من الرتبة 6} \quad (د) \text{ ثلاث زمر جزئية من الرتبة 8}$$

$$(هـ) \text{ زمرة جزئية من الرتبة 12}$$

(٢٠) أثبت أن :

$$S_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), (2\ 4), \dots, (2\ n), (1\ 2\ \dots\ n) \rangle \quad (أ)$$

$$S_n = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \dots\ n) \rangle \quad (ب)$$

$$(٢١) \text{ ليكن } \alpha = (1\ 2\ 3\ 4) \text{ و } \beta = (2\ 4) \text{ عنصرين في } S_4$$

$$(أ) \text{ أحسب } o(\alpha) \text{ و } o(\beta) \text{ وأثبت أن } \alpha^3 \circ \beta$$

$$(ب) \text{ أثبت أن } H = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ زمرة غير إبدالية رتبته } 8$$

$$(٢٢) \text{ أثبت أن } Z(S_n) = \{e\} \text{ لكل } n \geq 3$$

$$(٢٣) \text{ لتكن } G = \langle x, y \rangle \text{ حيث } (xy)^2 = e, o(x) = o(y) = 3$$

$$(أ) \text{ أثبت أن } G = \{e, x, x^2, y, y^2, xy, yx, x^2y, xy^2, xy^2x, yx^2, y^2x\}$$

(ب) أثبت أن جميع زمر G الجزئية هي :

$$\{e\}, \langle x \rangle, \langle x^2y \rangle, \langle yx^2 \rangle, \langle xy \rangle, \langle yx \rangle, \langle xy^2x \rangle, \langle y \rangle, H = \{e, xy, yx, xy^2x\} \text{ و } G$$

(ج) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية . قارن المخطط مع المخطط الشبكي للزمر الجزئية من الزمرة A_4 . ماذا تلاحظ ؟

$$(٢٤) \text{ لتكن } T = \langle x, y \rangle \text{ حيث } yx = x^{-1}y \text{ و } x^3 = y^2, o(x) = 6$$

$$(أ) \text{ أثبت أن } G = \{x^i y^j : 0 \leq i \leq 5, j = 0, 1\}$$

(ب) أثبت أن جميع زمر G الجزئية هي :

$$\langle x \rangle, \langle x^2y \rangle, \langle xy \rangle, \langle y \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle, \{e\} \text{ و } G$$

(ج) ارسم المخطط الشبكي للرمز الجزئية من الزمرة G .

(٢٥) أثبت أن جميع زمر D_6 الجزئية هي :

$$\langle a^2 \rangle, \langle b \rangle, \langle a^2b \rangle, \langle a^4b \rangle, \langle a^3b \rangle, \langle a^2b \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^3, a^2b \rangle, \langle a^3, b \rangle, \langle a^2, b \rangle, \langle a^2, ab \rangle, \langle a \rangle, \langle a^3 \rangle, \langle a^3, a^4b \rangle, \{e\}, D_6$$

ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

$$(٢٦) \text{ أثبت أن كل من الزمرتين } (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{Q}^*, \cdot) \text{ ليست دورية.}$$

$$(٢٧) \text{ أعط مثلاً لزمرة غير إبدالية بحيث تكون جميع زمرها الجزئية الفعلية دورية.}$$

$$(٢٨) \text{ أعط مثلاً لزمرة غير منتهية تحتوي على زمرة جزئية فعلية دورية ومنتهية.}$$

(٢٩) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن عدد الزمر الجزئية من G يجب أن يكون منتهياً . هل توجد زمرة غير منتهية وعدد زمرها الجزئية منته ؟

(٣٠) عين الزمرة الجزئية $\langle 6, 4 \rangle$ من $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

(٣١) عين الزمرة الجزئية $\langle 5, 4 \rangle$ من $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

(٣٢) لتكن $H \leq G$ و $K \leq G$. متى تكون $K \cup H \leq G$ ؟

(٣٣) إذا كانت الزمرة G تحتوي على زمريتين جزئيتين فعليتين على الأكثر فأثبت أن G دورية .

(٣٤) أثبت أن $\mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي لا تحتوي على زمر جزئية فعلية .

(٣٥) لتكن $H \leq S_n$ حيث $n > 2$. برهن على أن جميع عناصر H إما أن تكون تبديلات زوجية أو أن عدد التبديلات الزوجية في H يساوي عدد التبديلات الفردية في H .

(٣٦) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ وكان $\lambda_a : G \rightarrow G$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة

$\lambda_a(g) = ga$ لكل $g \in G$ فأثبت أن $\lambda_a \in S_G$ وأن $\lambda_a \in S_G$ وأن $H = \{ \lambda_a : a \in G \} \leq G$.

(٣٧) لتكن G زمرة إبدالية وليكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن :

(أ) $nG = \{ nx : x \in G \} \leq G$ (ب) $G[n] = \{ x \in G : nx = e \} \leq G$.

(٣٨) لتكن G زمرة .

(أ) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $HH = H$.

(ب) إذا كانت S مجموعة جزئية منتهية من G حيث $SS = S$ فأثبت أن $S \leq G$.

(ج) بين أن الفقرة (ب) ليست بالضرورة صحيحة إذا كانت S مجموعة غير منتهية .

(٣٩) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $H = \{ a \in G : o(a) < \infty \}$ فأثبت أن $H \leq G$.

(٤٠) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ هو العنصر الوحيد الذي رتبته n فأثبت أن

$a \in Z(G)$.

(٤١) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $Z(G) \leq Z(H)$.

(٤٢) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $\sim$ علاقة معرفة على G كالتالي :

$a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in G$. فأثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G .

(٤٣) إذا كان $H, N \leq G$ وكان $h^{-1}Nh \subset N$ لكل $h \in H$ فأثبت أن $NH \leq G$.

(٤٤) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ فأثبت أن $N \leq G$ وأن $y^{-1}Ny = y$ لكل

$y \in G$.

(٤٥) إذا كان $H, K \leq G$ وكان $x^{-1}Hx \subseteq H$ و $x^{-1}Kx \subseteq K$ لكل $x \in G$ فأثبت $HK \leq G$ وأن $x \in HK$ لكل $x \in G$.

(٤٦) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $x^{-1}Hx \subset H$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $x^{-1}Hx = H$.

(٤٧) لنفرض أن $H, K \leq G$ حيث $x^{-1}Hx = H$ و $x^{-1}Kx = K$ لكل $x \in G$ وحيث $H \cap K = \{e\}$. أثبت أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.

(٤٨) لتكن $H \leq G$ ولتكن $H \leq K \leq G$ حيث $x^{-1}Hx = H$ وحيث K زمرة دورية منتهية أثبت أن $x^{-1}Hx = H$.

(٤٩) إذا كان m يقسم n فأثبت أن للمعادلة $m[x] = [0]$ بالضبط m من الحلول المختلفة في الزمرة $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

(٥٠) إذا كان $1 < m < n$ وكان m لا يقسم n فأثبت أن للمعادلة $m[x] = [0]$ بالضبط d من الحلول المختلفة في الزمرة $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ حيث $\gcd(n, m) = d$.

(٥١) لتكن G زمرة إبدالية وكل من H و K زمرة جزئية دورية منتهية حيث $|H| = r$ و $|K| = s$ (أ) إذا كان $\gcd(r, s) = 1$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبها rs .

(ب) إذا كان $\gcd(r, s) = d$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبها $\text{lcm}(r, s)$.

(٥٢) إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكان $a \in G$ هو المولد الوحيد للزمرة G فأثبت أن $|G| \leq 2$.

(٥٣) بين أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة :

(أ) كل من عناصر الزمرة الدورية G يولد الزمرة G .

(ب) G زمرة إبدالية إذا وفقط إذا كانت G زمرة دورية.

(ت) كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية يجب أن تكون إبدالية.

(ث) كل عنصر a في زمرة G يولد زمرة جزئية من G .

(ج) S_n ليست دورية لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ح) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن جميع الزمر الجزئية الفعلية من G غير إبدالية.

(خ) كل زمرة G رتبها أقل من أو يساوي 4 هي زمرة دورية.

(د) A_3 زمرة دورية.

(ذ) إذا كانت جميع الزمر الجزئية الفعلية من الزمرة G دورية فإن G دورية.

(ر) جميع الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة من $(\mathbb{Z}, +)$ زمر غير منتهية.

- (ز) إذا كان $H, K, L \leq G$ حيث $H \cup K \subseteq L$ فإن $HKL \subseteq L$.
- (س) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن $Z(G) = \{e\}$.
- (ش) توجد زمرة جزئية فعلية H من $(\mathbb{Z}, +)$ تحتوي كل من $3\mathbb{Z}$ و $4\mathbb{Z}$.
- (ص) إذا كانت H زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$ حيث $\mathbb{Z} \subset H$ فإن $H = \mathbb{Q}$.
- (ض) إذا كانت H زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ حيث $\mathbb{Z} - \{0\} \subseteq H$ فإن $H = \mathbb{Q}^*$.
- (ط) يوجد زمرة غير منتهية تحتوي على زمرة جزئية غير تافهة دورية منتهية.
- (ظ) S_4 تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبها 6.
- (ع) جميع الزمر الجزئية الفعلية من A_4 دورية.
- (غ) جميع الزمر الجزئية الفعلية من $(\mathbb{R}, +)$ دورية.
- (ف) عدد مولدات الزمرة $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ هو $\varphi(n)$ حيث $\varphi(n)$ هي دالة أويلر.

الفصل الثالث

التشاكلات وزمر خارج القسمة

HOMOMORPHISMS AND FACTOR GROUPS

(٣،١) تشاكلات الزمر ومبرهنة كيلى

Homomorphisms of Groups and Cayley's Theorem

نقوم في هذا البند بدراسة علاقة بين زمريتين G_1 و G_2 تأخذ شكل تطبيق $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ يحافظ على التركيب الداخلي للزمر ويطلق عليه تشاكل الزمر . في البداية نقوم بتعريف هذا التشاكل وندرس خواصه الأساسية ، ثم نقدم حالة خاصة من التشاكلات تسمى التماثلات ونلقي الضوء على بعض الزمر المتماثلة. إن لمفهوم التماثل في الزمر فوائد كثيرة من أهمها تصنيف الزمر وتمثيلها بدلالة زمر بسيطة التركيب يسهل التعرف عليها . وفي نهاية هذا البند نوظف مفهوم التماثل بتقديم إحدى المبرهنات الأساسية في نظرية الزمر ، ألا وهي مبرهنة كيلى التي تبين لنا العلاقة الوثيقة بين الزمر بشكلها العام وبين زمرة التبديلات التي كما اسلفنا كانت اول زمرة تتم دارستها قبل تطور نظرية الزمر بشكلها الحالي .

تعريف (٣،١)

لتكن G_1 و G_2 زمريتين وليكن $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تطبيقاً. نقول إن φ تشاكل (homomorphism) إذا كان: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ لكل $a, b \in G_1$.

مثال (٣،١)

من الواضح أن التطبيق $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = e_2$ لكل $x \in G_1$ تشاكل . يعرف هذا التشاكل عادة بالتشاكل التافه (trivial homomorphism). كذلك التطبيق $I: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ لكل $x \in G$ تشاكل . يعرف هذا التشاكل بالتشاكل

□ المحايد (identity homomorphism)

مثال (٣,٢)

التطبيق $\varphi: (\mathbb{R}^*, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = e^x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ تشاكل ، لأنه لكل

$$\square \varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y) : \text{ لدينا } x, y \in \mathbb{R}$$

مثال (٣,٣)

التطبيق $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, +)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$ تشاكل ، لأنه لكل

$$\square \varphi(xy) = |xy| = |x| |y| = \varphi(x)\varphi(y) : \text{ لدينا } x, y \in \mathbb{R}^*$$

مثال (٣,٤)

التطبيق $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = 2x$ لكل $x \in \mathbb{Z}$ ، لأنه لكل

$$\square \varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y) : \text{ لدينا } x, y \in \mathbb{Z}$$

مثال (٣,٥)

ليكن $m \in \mathbb{Z}^+$. التطبيق $\varphi_m: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi_m(x) = mx$ لكل $x \in \mathbb{Z}$

تشاكل ، لأنه لكل $x, y \in \mathbb{Z}$ لدينا :

$$\square \varphi_m(x+y) = m(x+y) = mx + my = \varphi_m(x) + \varphi_m(y)$$

مثال (٣,٦)

التطبيق $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(m) = [m]$ لكل $m \in \mathbb{Z}$ تشاكل حيث $[m]$ هو فصل

التكافؤ قياس n ، لأنه لكل $m, k \in \mathbb{Z}$ فإن :

$$\square \varphi(m+k) = [m+k] = [m] + [k] = \varphi(m) + \varphi(k)$$

مثال (٣,٧)

التطبيق $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ المعرفة :

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} [1] & , \text{ فردي } \sigma \\ [0] & , \text{ زوجي } \sigma \end{cases}$$

تشاكل لأنه لكل $\sigma, \mu \in S_n$ فإن $\varphi(\sigma \circ \mu) = \varphi(\sigma) + \varphi(\mu)$ (تحقق من ذلك) $\square$

مثال (٣,٨)

التطبيق $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ المعروف بالقاعدة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

تشاكل لأنه من السهل التحقق من أن : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ لكل $x, y \in \mathbb{R}^*$ □

مثال (٣,٩)

لتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$. التطبيق $\varphi : H \rightarrow aHa^{-1}$ المعروف بالقاعدة $\varphi(x) = axa^{-1}$ لكل $x \in H$ تشاكل ، لأنه لو كان $x, y \in H$ فإن :

$$\square \varphi(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)$$

مثال (٣,١٠)

التطبيق $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ المعروف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ لكل $A \in GL(n, \mathbb{R})$ تشاكل ، لأنه لو كان $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ فإن :

$$\square \varphi(AB) = \det(AB) = (\det A)(\det B) = \varphi(A)\varphi(B)$$

قبل أن نستعرض بعض الخواص الأساسية للتشاكلات يلزمنا التعريف التالي :

تعريف (٣,٢)

ليكن $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً ولتكن $H_1 \subseteq G_1$ و $H_2 \subseteq G_2$. تسمى المجموعة $\varphi(H_1) = \{\varphi(h) : h \in H_1\}$ صورة H_1 (image of H_1) . وتسمى المجموعة $\varphi^{-1}(H_2) = \{g \in G_1 : \varphi(g) \in H_2\}$ الصورة العكسية للمجموعة H_2 (preimage of H_2) . كما تسمى المجموعة $\text{Ker}\varphi = \{g \in G_1 : \varphi(g) = e_2\}$ نواة التشاكل φ (kernel of φ) .

مبرهنة (٣,١)

إذا كان $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً فإن :

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \quad (٢)$$

$$\varphi(e_1) = e_2 \quad (١)$$

(٣) إذا كانت $H \leq G_1$ فإن $\varphi(H) \leq G_2$ (٤) إذا كانت $K \leq G_2$ فإن $\varphi^{-1}(K) \leq G_1$
 (٥) $\text{Ker}\varphi \leq G_1$ (٦) $\text{Ker}\varphi = \{e_1\}$ إذا وفقط إذا كان φ أحادياً

(٧) G_1 إبدالية فإن $\varphi(G_1)$ إبدالية

(٨) إذا كان $a \in G_1$ وكان $o(a) = n$ فإن $o(\varphi(a))$ يقسم n

البرهان

(١) لاحظ أن : $\varphi(e_1)\varphi(e_1) = \varphi(e_1e_1) = \varphi(e_1) = \varphi(e_1)e_2$. ولذا فإن $\varphi(e_1) = e_2$.

(٢) لاحظ أن : $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_1) = e_2$. وأن :

$$\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_1) = e_2$$

وبالتالي باستخدام وحدانية النظير نجد أن : $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

(٣) لنفرض أن $H \leq G_1$. بما أن $e_1 \in H$ وأن $e_2 = \varphi(e_1)$ فإن $e_2 \in \varphi(H)$. ولذا فإن

$\varphi(H) \neq \emptyset$. لنفرض الآن أن $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(H)$ حيث $a, b \in H$. بما أن $H \leq G_1$ فإن

$$ab^{-1} \in H \text{ ولذا فإن : } \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H) \text{ ومنه فإن}$$

$$\varphi(H) \leq G_2$$

(٤) لنفرض أن $K \leq G_2$. لاحظ أن $e_1 \in \varphi^{-1}(K)$. ولذا فإن $\varphi^{-1}(K) \neq \emptyset$. لنفرض الآن أن

$a, b \in \varphi^{-1}(K)$. عندئذ ، $\varphi(a), \varphi(b) \in K$. ولذا فإن $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$ وإن :

$$ab^{-1} \in \varphi^{-1}(K) \text{ ، إذن ، } \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$$

$$\text{ . } \varphi^{-1}(K) \leq G_1$$

(٥) لاحظ أن $\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\})$. وبما أن $\{e_2\} \leq G_2$ فإننا نجد باستخدام الفقرة (٤) أن

$$\text{ . } \text{Ker}\varphi \leq G_1$$

(٦) لنفرض أولاً أن $\text{Ker}\varphi = \{e_1\}$. إذا كان $a, b \in G_1$ فإن :

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e_2 \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e_2 \Rightarrow ab^{-1} \in \text{Ker}\varphi$$

ولذا فإن $ab^{-1} = e_1$. أي أن $a = b$. وبالتالي فإن φ أحادي .

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ أحادي . وليكن $a \in \text{Ker}\varphi$. الآن :

$$\text{ . } \text{Ker}\varphi = \{e_1\} \text{ ، إذن ، } a \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(a) = e_2 = \varphi(e_1) \Rightarrow a = e_1$$

(٧) لنفرض أن G_1 إبدالية وأن $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(G_1)$. عندئذ :

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) \text{ . ولذا فإن } \varphi(G_1) \text{ إبدالية .}$$

(٨) لاحظ أن : $(\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = \varphi(e_1) = e_2$. إذن ، $o(\varphi(a))$ يقسم n ♦

تبين لنا المبرهنة التالية أن التشاكل الوحيد من الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ إلى الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ هو

التشاكل التافه.

مبرهنة (٣, ٢)

إذا كان $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ تشاكلاً فإن $\varphi(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{Q}$.

البرهان

سنبرهن أولاً أن $\varphi(1) = 0$. لنفرض لغرض التناقض أن $\varphi(1) \neq 0$. عندئذ، لكل

$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ لدينا:

$$\varphi(1) = \varphi\left(\frac{n}{n}\right) = \varphi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

ولذا فإن n يقسم $\varphi(1)$ لكل $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. ومن ثم فإنه يوجد عدد غير منته من القواسم للعدد

$\varphi(1)$ وهذا مستحيل. وبالتالي فإن $\varphi(1) = 0$. لنفرض الآن أن $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. عندئذ:

$$\diamond \quad \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \text{ وبالتالي فإن } n\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = mn\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = m\varphi\left(\frac{n}{n}\right) = m\varphi(1) = 0$$

تعريف (٣, ٣)

ليكن $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً.

(١) نقول إن φ تشاكل غامر أو شامل (epimorphism) إذا كان φ تطبيقاً غامراً. وفي هذه

الحالة نقول إن G_2 صورة تشاكلية (homomorphic image) للزمرة G_1 .

(٢) نقول إن φ تشاكل أحادي (monomorphism) إذا كان φ تطبيقاً أحادياً.

(٣) نقول إن φ تماثل (isomorphism) إذا كان φ تقابلاً (أي أحادياً وشاملاً).

(٤) نقول إن الزمرتين G_1 و G_2 متماثلتان (isomorphic) ونكتب $G_1 \cong G_2$ إذا وجد تماثل

$$\varphi : G_1 \rightarrow G_2$$

مثال (٣, ١١)

لقد بينا في المثال (٣, ٢) أن التطبيق $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = e^x$ تشاكلاً.

الآن : $\text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 1\} = \{0\}$. ولذا فإن φ أحادي. كما

أن φ شامل لأنه لكل $y \in \mathbb{R}^+$ لدينا : $\varphi(\ln y) = e^{\ln y} = y$.

$$\square \quad (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

مثال (٣, ١٢)

لقد بينا في المثال (٣, ٣) أن التطبيق $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل. الآن : $\text{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{R}^* : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$ ولذا فإن φ ليس أحادياً . لاحظ أن φ تشاكل

□ غامر

مثال (٣, ١٣)

لقد بينا في المثال (٣, ٤) أن التطبيق $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(x) = 2x$ تشاكل. الآن : $\text{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{Z} : 2x = 0\} = \{0\}$. إذن ، φ أحادي . كذلك φ شامل لأنه إذا كان $y \in 2\mathbb{Z}$ فإن $y = 2x$ حيث $x \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن $\varphi(x) = 2x = y$. إذن ،

$$\square (\mathbb{Z}, +) \cong (2\mathbb{Z}, +)$$

مثال (٣, ١٤)

لقد بينا في المثال (٣, ٦) أن التطبيق $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(m) = [m]$ تشاكل . من الواضح أن φ شامل . الآن :

$$\text{Ker}\varphi = \{a \in \mathbb{Z} : \varphi(a) = [a] = [0]\} = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ يقسم } n\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : a = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$$

□ ولذا فإن φ ليس أحادياً

مثال (٣, ١٥)

لقد بينا في المثال (٣, ٧) أن التطبيق $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ المعرفة بالقاعدة :

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \sigma \text{ فردي} \\ 0 & , \sigma \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\text{Ker}\varphi = \{\sigma \in S_n : \varphi(\sigma) = 0\} = A_n$$

مثال (٣, ١٦)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $a \in G$ فقد بينا في المثال (٣, ٩) أن التطبيق $\varphi: H \rightarrow aHa^{-1}$ المعرفة

بالقاعدة $\varphi(x) = axa^{-1}$ تشاكل . الآن : $\text{Ker}\varphi = \{x \in H : axa^{-1} = e\} = \{e\}$. ولذا فإن

$$\square H \cong aHa^{-1} , \text{ إذن ، } \varphi \text{ أحادي . من الواضح أن } \varphi \text{ شامل .}$$

مثال (٣,١٧)

لقد بينا في المثال (٣,١٠) أن التطبيق $\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ تشاكل. الآن :

$\square$ $\text{Ker}\varphi = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$. ولذا فإن φ ليس أحادياً

مثال (٣,١٨)

سنبين في هذا المثال أنه لا يمكن أن تكون $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. ولذا نفرض أنه يوجد تشاكل غامر $\varphi: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$. لاحظ أن رتبة العنصر $a = ([7], [0]) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ هي ٨. وبما أن φ غامر فإنه يوجد $b \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ حيث $\varphi(b) = a$. وباستخدام المبرهنة (٣,٢) نجد $o(\varphi(b)) = o(a) = 8$ يقسم $o(b)$ وهذا مستحيل لأن رتب b الممكنة هي ١, ٢, ٤. إذن، φ ليس تشاكلاً غامراً. وبالتالي فإنه لا يمكن أن تكون $\square$ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

المبرهنة التالية تبين لنا أن علاقة التماثل بين الزمر هي علاقة تكافؤ.

مبرهنة (٣,٣)

لتكن Γ مجموعة جميع الزمر ولتكن $\sim$ علاقة معرفة على Γ كالآتي :

$G_1 \sim G_2$ إذا وفقط إذا كان $G_1 \cong G_2$ لكل $G_1, G_2 \in \Gamma$. عندئذ $\sim$ علاقة تكافؤ.

البرهان

(١) $\sim$ انعكاسية لأن التطبيق المحايد $I: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ لكل $x \in G$ تماثل. ولذا فإن $G \cong G$.

(٢) لإثبات أن العلاقة تناظرية نفرض أن $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تماثل. بما أن φ تقابل فإن $\varphi^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ تقابل أيضاً. كذلك، إذا كان $a, b \in G_2$ فإنه يوجد $x, y \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(x) = a$ و $\varphi(y) = b$. ولذا فإن $ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$. ومنه فإن $\varphi^{-1}(ab) = xy = \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b)$. أي أن φ^{-1} تشاكل. وبالتالي فإنه تماثل.

(٣) لإثبات أن $\sim$ متعدية نفرض أن $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ و $\psi: G_2 \rightarrow G_3$ تماثلان . إذن ،
 $\psi \circ \varphi: G_1 \rightarrow G_3$ تقابل . كذلك ، إذا كان $a, b \in G_1$ فإن :
 $(\psi \circ \varphi)(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) = (\psi \circ \varphi)(a)(\psi \circ \varphi)(b)$
 ولذا فإن $\psi \circ \varphi$ تماثل وهو تماثل $\diamond$

ملحوظات

(١) بما أن علاقة التماثل على مجموعة الزمر هي علاقة تكافؤ فإنها تجزئ مجموعة جميع الزمر إلى فصول تكافؤ بحيث تكون جميع الزمر في فصل التكافؤ الواحد متماثلة وأي زمريتين في فصلين مختلفين تكونان غير متماثلتين . ولذا فإن تصنيف الزمر يتم عادة باستخدام علاقة التماثل هذه . فعندما نقول مثلاً أنه توجد زمريتان (باستثناء التماثل **up to isomorphism**) نعي بذلك أن علاقة التكافؤ تجزئ مجموعة الزمر إلى فصلي تكافؤ فقط وكل زمرة تنتمي إلى أحد هذين الفصلين .

(٢) إذا كانت G_1 و G_2 زمريتين فلكي نثبت أنهما متماثلتان تتبع عادة الخطوات التالية :

(أ) نعرف تطبيق $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ (ب) نثبت أن φ تماثل (أي تشاكل وأحادي وشامل).

مثال (٣، ١٩)

دعنا نثبت أن $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. لاحظ أن :

$V = \{e, a, b, c\}$ حيث $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{([0], [0]), ([0], [1]), ([1], [0]), ([1], [1])\}$ وأن

$\varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow V$ نعرف التطبيق . $a^2 = b^2 = c^2 = e$ و $bc = cb = a$ و $ac = ca = b$

كالتالي : $\varphi([0], [0]) = e, \varphi([0], [1]) = a, \varphi([1], [0]) = b, \varphi([1], [1]) = c$.

أنه ليس بالأمر العسير أن نبين أن φ تماثل $\square$

مثال (٣، ٢٠)

سنثبت أن $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$. نعرف التطبيق $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بالقاعدة

$\varphi(x+iy) = (x, y)$ لكل $x+iy \in \mathbb{C}$. عندئذ لكل $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$ لدينا :

$$\varphi((a+ib) + (c+id)) = \varphi((a+c) + i(b+d)) = (a+c, b+d) = (a, b) + (c, d)$$

ولذا فإن φ تشاكل . ومن الواضح أنه أحادي وشامل . ولذا فإن φ تقابل وبالتالي فإن

$$\square (\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$$

لقد رأينا في الفصل الثاني أن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة دورية غير منتهية وأن $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ زمرة دورية منتهية رتبته n . سنبرهن الآن أن هذه هي جميع الزمر الدورية (باستثناء التماثل).

مبرهنة (٣, ٤)

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية.

(أ) إذا كانت G منتهية رتبته n فإن $G \cong \mathbb{Z}_n$.

(ب) إذا كانت G غير منتهية فإن $G \cong \mathbb{Z}$.

البرهان

(أ) ليكن $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a^i) = [i]$ لكل $a^i \in G$. لإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $a^i, a^j \in G$. عندئذ:

$$\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = [i+j] = [i] +_n [j] = \varphi(a^i) +_n \varphi(a^j)$$

ولذا فإن φ تشاكل. ولإثبات أن φ أحادي لاحظ أن:

$$0 \leq i, j \leq n-1 \text{ ولكن } \varphi(a^i) = \varphi(a^j) \Rightarrow [i] = [j] \Rightarrow n \mid (j-i) \Rightarrow a^{j-i} = e \Rightarrow a^j = a^i$$

$$\text{ولذا فإن } |j-i| \leq n-1. \text{ وبما أن } n \mid |j-i| \text{ فإننا نستنتج أن } i = j.$$

إذن، φ أحادي. وبما أن $|G| = |\mathbb{Z}_n| = n$ فإن φ شامل. ولذا فإن φ تماثل. وبالتالي فإن $G \cong \mathbb{Z}$.

(ب) ليكن $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a^i) = i$ لكل $a^i \in G$. لاحظ أن:

$$a^i = a^j \Leftrightarrow a^{i-j} = e \Leftrightarrow i-j = 0 \Leftrightarrow i = j$$

لذا فإن φ تطبيق أحادي. من الواضح أن φ شامل. كذلك:

$$\blacklozenge \quad G \cong \mathbb{Z}, \text{ إذن } \varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = i+j = \varphi(a^i) + \varphi(a^j)$$

لقد وضعنا الخطوات التي يجب علينا اتباعها لإثبات أن زمريتين متماثلتان. دعنا نلقي الآن الضوء على كيفية معرفة أن الزمريتين غير متماثلتين. إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمريتين منتهيتين وكان $|G_1| \neq |G_2|$ فإنه لا يمكن أن يوجد تطبيق أحادي من G_1 إلى G_2 ولذا فإنهما غير متماثلتين (نستخدم الرمز $G_1 \not\cong G_2$ ليدل على أن الزمريتين غير متماثلتين). فيما عدا ذلك فإنه لمعرفة أن الزمريتين غير متماثلتين فإنه يفترض أن نجرب جميع التطبيقات الاحادية والشاملة من G_1 إلى G_2 والتأكد من أنها لا تحقق شروط التماثل. وأعتقد أن القارئ يدرك أن ذلك في عداد المستحيل في معظم

الأحوال . ولكننا لو أمعنا النظر في معنى العبارة "الزمرتان G_1 و G_2 متماثلتان" لوجدنا أن الزمرة G_1 هي نفس الزمرة G_2 ما عدا في تسمية عناصر كل منها ، أي أن G_1 و G_2 تتمتعان بنفس "الصفات الزمرية" ولذا ، لكي تكون الزمرتان غير متماثلتين يكفي أن نجد صفة واحدة تتمتع بها إحدى الزمرتين ولا تتمتع بها الأخرى والمبرهنة التالية تساعدنا على تحقيق ذلك .

مبرهنة (٣,٥)

ليكن التطبيق $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تماثلاً . عندئذ :

(أ) G_1 إبدالية إذا وفقط إذا كانت G_2 إبدالية .

(ب) $o(a) = o(\varphi(a))$ لكل $a \in G_1$.

(ج) G_1 دورية إذا وفقط إذا كانت G_2 دورية .

(د) للمعادلة $x^n = a$ حل في الزمرة G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $[\varphi(x)]^n = \varphi(a)$ حل في الزمرة G_2 لكل $a \in G_1$.

البرهان

(أ) لنفرض أن G_1 إبدالية ولنفرض أن $x, y \in G_2$. بما أن φ شامل فإنه يوجد $a, b \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(a) = x$ و $\varphi(b) = y$. الآن :

$$xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = yx$$

ولبرهان العكس ، نفرض أن G_2 إبدالية وأن $a, b \in G_1$. عندئذ :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$$

(ب) ليكن $a \in G$. لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ لدينا : $a^n = e_1 \Leftrightarrow \varphi(a^n) = \varphi(e_1) \Leftrightarrow (\varphi(a))^n = e_2$

إذن ، $o(a)$ منته إذا وفقط إذا كان $o(\varphi(a))$ منته . لنفرض الآن أن $o(a) = m$ وأن $o(\varphi(a)) = n$. بما أن $a^m = e_1$ فإن $(\varphi(a))^m = e_2$. ولذا فإن n يقسم m . كذلك ، بما أن

$$(\varphi(a))^n = e_2 \text{ فإن } a^n = e_1 \text{ ومنه فإن } m \text{ يقسم } n \text{ . إذن ، } m = n$$

(ج) لنفرض أن $\langle a \rangle = G_1$ دورية . بما أن $\varphi(a) \in G_2$ فإن $\langle \varphi(a) \rangle \subseteq G_2$. لنفرض الآن أن

$b \in G_2$. بما أن φ شامل فإنه يوجد $c \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(c) = b$. إذن $c = a^n$ حيث

$$n \in \mathbb{Z} \text{ . ولذا فإن : } b = \varphi(c) = \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n \in \langle \varphi(a) \rangle \text{ . إذن ، } G_2 = \langle \varphi(a) \rangle$$

أما برهان العكس ، فنحصل عليه بملاحظة أن φ^{-1} تماثل أيضاً .

(د) لاحظ أن : $x^n = a \Leftrightarrow \varphi(x^n) = \varphi(a) \Leftrightarrow (\varphi(x))^n = \varphi(a)$

ولذا فإن $x^n = a$ لها حل في G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $(\varphi(x))^n = \varphi(a)$ حل في G_2 ♦

مثال (٣, ٢١)

لقد بينا سابقاً أن $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دورية ولذا فإن $(\mathbb{Z}, +) \not\cong (\mathbb{Q}, +)$ □

مثال (٣, ٢٢)

$(\mathbb{Q}^*, \cdot) \not\cong (\mathbb{Q}, +)$. وذلك لأن رتبة أي عنصر ما عدا المحايد من عناصر $(\mathbb{Q}, +)$ غير متناهية ولكن $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ □
 $(-1)^2 = 1$. ولذا فإن رتبة -1 تساوي 2 في الزمرة $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

مثال (٣, ٢٣)

$(\mathbb{R}^*, \cdot) \not\cong (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ لأن للمعادلة $x^2 = 2$ حل في $\mathbb{R}^*$ ولكن ليس لها حل في $\mathbb{Q}^*$ □
 $x^2 = 2$

مثال (٣, ٢٤)

$(\mathbb{C}^*, \cdot) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ لأن للمعادلة $x^2 = -1$ حل في $\mathbb{C}^*$ لكن ليس لها حل في $\mathbb{R}^*$ □
 $x^2 = -1$

مثال (٣, ٢٥)

$(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ لأن للمعادلة $x + x = -1$ حل في $\mathbb{R}$ ولكن ليس للمعادلة $x \cdot x = -1$ حل في $\mathbb{R}^*$ □
 $x + x = -1$

مثال (٣, ٢٦)

$Q_8 \not\cong D_4$ لأن D_4 تحتوي على خمسة عناصر رتبة كل منها 2 بينما Q_8 تحتوي على عنصر واحد فقط من الرتبة 2 □

مثال (٣, ٢٧)

$\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ لأن $\mathbb{Z}_4$ دورية بينما $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دورية □

ننهي هذا البند بتقديم مبرهنة كيلي (Cayley's Theorem) .

مبرهنة (٣,٦) [كيلي]

لتكن G زمرة . وليكن $a \in G$.

(أ) التطبيق $\lambda_a : G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $\lambda_a(x) = ax$ لكل $x \in G$ تبديلاً

(ج) $G \cong H$

(ب) $H = \{\lambda_a : a \in G\} \leq S_G$

البرهان

(أ) لاحظ أنه لكل $x, y \in G$ لدينا : $\lambda_a(x) = \lambda_a(y) \Leftrightarrow ax = ay \Leftrightarrow x = y$

ولذا فإن λ_a تطبيق أحادي . وإذا كان $y \in G$ فإن $\lambda_a(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = y$ ومنه فإن λ_a شامل . إذن ، λ_a تبديل .

(ب) لاحظ أن $\lambda_e \in H$ ولذا فإن $H \neq \emptyset$. لاحظ أيضاً أنه إذا كان $\lambda_a \in H$ فإنه لكل $x \in G$

$\lambda_{a^{-1}}(x) = a^{-1}x$ وأن $\lambda_a(a^{-1}x) = x$. ولذا فإن $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_e$. ومنه فإن $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$.
الآن إذا كان $\lambda_a, \lambda_b \in H$ فإنه لكل $x \in G$ لدينا :

$$(\lambda_a \circ \lambda_b^{-1})(x) = (\lambda_a \circ \lambda_{b^{-1}})(x) = \lambda_a(b^{-1}x) = a(b^{-1}x) = (ab^{-1})(x) = \lambda_{ab^{-1}}(x)$$

إذن ، $\lambda_a \circ \lambda_b^{-1} \in H$ ، وبالتالي فإن $H \leq S_G$.

(ج) ليكن $\varphi : G \rightarrow H$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = \lambda_a$ لكل $a \in G$.

لاحظ أنه إذا كان $a, b \in G$ فلكل $x \in G$ لدينا :

$$ax = bx \Leftrightarrow \lambda_a(x) = \lambda_b(x) \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

ولذا فإن φ تطبيق أحادي . من الواضح أيضاً أن φ شامل . أخيراً ، لكل $a, b \in G$ لدينا :

$$\varphi(a) \circ \varphi(b) = \lambda_a \circ \lambda_b \quad \text{و} \quad \varphi(ab) = \lambda_{ab}$$

$$\lambda_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \lambda_a(bx) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = (\lambda_a \circ \lambda_b)(x)$$

ولذا فإن $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. أي أن φ تشاكل . إذن ، $G \cong H$ ♦

(Solved Exercises) تمارين محلولة (٣، ١، ١)

تمرين (١)

لتكن كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G|=n$ ، $|H|=m$ ، و $\gcd(m,n)=1$. أثبت أن التشاكل الوحيد من G إلى H هو التشاكل التافه .

الحل

نفرض أن $G \rightarrow H$ تشاكل . وليكن $a \in G$. لاحظ أن $o(a) | n$ وأن $o(\varphi(a)) | m$. كما أنه باستخدام المبرهنة (٣، ٢) نعلم أن $o(\varphi(a)) | o(a)$. ولذا فإن $o(\varphi(a)) | n$. وبما أن $\gcd(m,n)=1$ فإننا نخلص إلى أن $o(\varphi(a))=1$. أي أن $\varphi(a)=e$. وبالتالي فإن φ هو التشاكل التافه Δ .

تمرين (٢)

عين جميع التشاكلات من Z_6 إلى Z_4 .

الحل

ليكن $\varphi: Z_6 \rightarrow Z_4$ تشاكلاً . بما أن $Z_6 = \langle [1] \rangle$ فإننا نجد $\varphi([a]) = a\varphi([1])$ لكل $[a] \in Z_6$. ولذا فإن φ يتحدد تماماً إذا عرفنا قيمة $\varphi([1])$. الآن ، $o(\varphi([1]) | o([1]) = 6$ ، $o(\varphi([1]) | 4$ كما أن $o(\varphi([1])) = 1$ أو 2 . ومنه فإن $o(\varphi([1])) = 1$ أي أن $\varphi([1]) = [0]$ أو $[2]$. إذا كان $\varphi([1]) = [0]$ فإن φ هو التشاكل التافه . أما إذا كان $\varphi([1]) = [2]$ فإن $\varphi([a]) = [2a]$ لكل $a \in Z_6$. وبالتالي فإن يوجد تشاكلان فقط من Z_6 إلى Z_4 Δ .

تمرين (٣)

(أ) عين جميع التشاكلات من Z إلى Z .

(ب) عين جميع التشاكلات الغامرة من Z إلى Z .

الحل

(أ) لكل $m \in Z$ التطبيق $\varphi_m: Z \rightarrow Z$ المعرف بالقاعدة $\varphi_m(n) = mn$ لكل $n \in Z$ تشاكل . ولذا فإن يوجد عدد غير منته من التشاكلات من Z إلى Z .

(ب) ليكن $\varphi: Z \rightarrow Z$ تشاكل غامر . بما أن $\varphi(1)$ مولدٌ للزمرة Z فإن $\varphi(1) = 1$ أو $\varphi(1) = -1$. إذا كان $\varphi(1) = 1$ فإن $\varphi(n) = n\varphi(1) = n$ لكل $n \in Z$.

أما إذا كان $\varphi(1) = -1$ فإن $\varphi(n) = n\varphi(1) = -n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. وبالتالي فإنه يوجد تشاكلان غامران فقط Δ

تمرين (٤)

- (أ) لتكن G زمرة منتهية إبدالية وليكن $n \in \mathbb{Z}$ حيث $\gcd(|G|, n) = 1$ وليكن $\varphi: G \rightarrow G$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = a^n$ لكل $a \in G$. أثبت أن φ تماثل.
- (ب) إذا كانت G زمرة وكان التطبيق $\varphi: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = a^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ تماثلاً فاثبت أن $a^{n-1} \in Z(G)$ لكل $a \in G$.
- (ج) إذا كانت $n = 3$ في الفقرة (ب) فاثبت أن G إبدالية.

الحل

- (أ) لنفرض أن $a, b \in G$ عندئذ: $\varphi(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \varphi(a)\varphi(b)$. ولذا فإن φ تشاكل.
- ولإثبات أن φ أحادي نفرض أن $\varphi(a) = \varphi(b)$. عندئذ، $a^n = b^n$. أي أن $(ab^{-1})^n = e$. ومنه فإن $n \mid o(ab^{-1})$. وبما أن $n \mid |G|$ و $|G|$ أوليان نسبياً فإن $o(ab^{-1}) = 1$. ومنه فإن $ab^{-1} = e$. أي أن $a = b$. وأخيراً φ شامل (لأن G منتهية و φ أحادي). إذن، φ تماثل.

(ب) لنفرض أن $a, b \in G$ عندئذ:

$$a^{-n} b^n a^n = \varphi(a^{-1})\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a^{-1}ba) = (a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$$

ولذا فإن $a^{-(n-1)} b^n a^{n-1} = b^n$ أي أن $(a^{-(n-1)} b a^{n-1})^n = b^n$. ومنه فإن

$\varphi(a^{-(n-1)} b a^{n-1}) = \varphi(b)$. وبما أن φ أحادي فإن $a^{-(n-1)} b a^{n-1} = b$. وبالتالي فإن

$$a^{n-1} b = b a^{n-1} \quad \text{أي أن } a^{n-1} \in Z(G)$$

(ج) باستخدام الفقرة (ب) نجد أن $a^2 \in Z(G)$ لكل $a \in G$. لنفرض الآن أن $a, b \in G$

عندئذ:

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= (ab)^3 = (ab)(ab)^2 = a(ab)^2 b = aababb = a^2 bab^2 \\ &= ba^2 b^2 a = bb^2 a^2 a = b^3 a^3 = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba) \end{aligned}$$

وبما أن φ أحادي فإننا نخلص إلى أن $ab = ba$ لكل $a, b \in G$ Δ

تمارين (٣، ١)

في التمارين من (١) إلى (١٧) ، بين ما إذا كان التطبيق تشاكلاً من الزمرة G_1 إلى الزمرة G_2 .
وللتشاكلات منها عين كلاً من $\text{Ker}\varphi$ و $\varphi(G_1)$. وبين أيها تماثل .

$$\cdot \varphi(a) = a \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \quad (١)$$

$$\cdot \varphi([a]) = [a] \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (٢)$$

$$\cdot \varphi([a]) = [a] \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (٣)$$

$$\cdot \varphi(x) = 3^x \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \quad (٤)$$

$$\cdot \varphi(x) = \ln x \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \quad (٥)$$

$$\cdot \varphi(x) = x^2 \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \quad (٦)$$

$$\cdot \varphi(x) = ([x], [x]) \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \quad (٧)$$

$$\cdot \varphi([m], [n]) = (1\ 2)^m \circ (1\ 2\ 3)^n \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_3 \quad (٨)$$

$$\cdot \varphi: S_n \rightarrow S_{n+1} \text{ معرفاً بالقاعدة :} \quad (٩)$$

$$\varphi \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \varphi(n) = A_n \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G \text{ حيث :} \quad (١٠)$$

$$G = \left\{ A_n \in GL(2, \mathbb{Z}) : A_n = \begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cdot \varphi(A) = \text{tr}(A) \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: (M_n(\mathbb{R}), +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \quad (١١)$$

$$\cdot \varphi(A) = \text{tr}(A) \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \quad (١٢)$$

$$\cdot \varphi([m], [n]) = ([m], [0]) \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \quad (١٣)$$

$$\cdot \varphi: \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_3 \text{ معرفاً بالقاعدة :} \quad (١٤)$$

$$\cdot \varphi([2]) = (1\ 3\ 2) , \quad \varphi([1]) = (1\ 2\ 3) , \quad \varphi([0]) = (1)$$

$$\cdot \varphi(m, n) = 2m \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} \quad (١٥)$$

$$\cdot \varphi(\sigma) = \begin{cases} (1\ 2) & , \text{ فردي } \sigma \\ (1) & , \text{ زوجي } \sigma \end{cases} \text{ معرفاً بالقاعدة :} \quad \varphi: S_4 \rightarrow S_3 \quad (١٦)$$

$$\cdot \varphi(2n) = (n, 0) \text{ معرفاً بالقاعدة } \varphi: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (١٧)$$

$$\cdot \text{أثبت أن } S_3 \not\cong \mathbb{Z}_6 \text{ ولكن كل زمرة جزئية فعلية } H \text{ من } S_3 \text{ تماثل زمرة جزئية فعلية } K \quad (١٨)$$

من $\mathbb{Z}_6$.

- (١٩) جد جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_2$.
- (٢٠) جد جميع التماثلات من V إلى $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (٢١) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ إلى $\mathbb{Z}_6$.
- (٢٢) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ إلى $\mathbb{Z}_{10}$.
- (٢٣) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_6$.
- (٢٤) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_8$ إلى $\mathbb{Z}_8$.
- (٢٥) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_{12}$.
- (٢٦) جد جميع التماثلات من U_{18} إلى U_{18} .
- (٢٧) جد جميع التماثلات من U_{25} إلى U_{25} .
- (٢٨) استخدم علاقة التكافؤ المبينة في المبرهنة (٣, ٣) لتجزئة مجموعة الزمر التالية إلى فصول تكافؤ:
 $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}^+, +)$ ، $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +)$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{S}_6$ ، $\mathbb{S}_2$ ، $3\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}_{12}$ ، D_8 ، $8\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_6$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ، $12\mathbb{Z}$ ، A_3 ، $SL(2, \mathbb{Z}_3)$ ، $\mathbb{S}_4$ ، $\langle \pi \rangle$.
- (٢٩) هل $T \cong A_4$ ؟ $T \cong D_6$ ؟ $T \cong A_4$ ؟ حيث T كما في التمرين (٢٤) من فصول (٢, ٢).
- (٣٠) جد جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $(\mathbb{Q}, +)$.

(٣١) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ والتطبيق $\varphi_a: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $\varphi_a(x) = ax$ لكل $x \in G$ تشاكل فما هي قيم a الممكنة ؟

(٣٢) إذا كانت $H \leq GL(2, \mathbb{R})$ مولدة بالعنصرين $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

فأثبت أن $H \cong D_4$.

(٣٣) إذا كانت $H \leq \mathbb{S}_4$ مولدة بالعنصرين $\alpha = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ و $\beta = (2 \ 4)$

فأثبت أن $H \cong D_4$.

(٣٤) إذا كانت $H \leq GL(2, \mathbb{C})$ مولدة بالعنصرين $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

فأثبت أن $H \cong Q_8$.

$$(٣٥) \quad \text{لتكن } H \leq SL(2, \mathbb{Z}_3) \text{ المولدة بالعنصرين } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن $H \cong Q_8$.

$$(٣٦) \quad \text{ليكن } \varphi: G \rightarrow G \text{ التطبيق المعرف بالقاعدة } \varphi(x) = x^{-1} \text{ لكل } x \in G. \text{ ماهو القيد}$$

الذي يتوجب علينا وضعه على الزمرة G لكي يكون φ تشاكل؟

$$(٣٧) \quad \text{إذا كان } \varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G \text{ تشاكلاً يحقق } \varphi(1,0) = h \text{ و } \varphi(0,1) = k \text{ فعين قاعدة}$$

تعريف φ .

$$(٣٨) \quad \text{إذا كانت } G \text{ زمرة إبدالية وكان } \varphi: G \rightarrow G \text{ التطبيق المعرف بالقاعدة } \varphi(x) = x^n \text{ لكل}$$

$x \in G$ فأثبت أن φ تشاكل وجد كل من $\text{Ker} \varphi$ و $\varphi(G)$.

$$(٣٩) \quad \text{ليكن } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin a \\ -1 & 0 & \cos a \\ -\sin a & \cos a & 0 \end{bmatrix} \text{ حيث } a \in \mathbb{R}$$

(أ) أثبت أن $A^3 = 0$

$$(ب) \quad \text{إذا كانت } x \in \mathbb{R} \text{ وكان } A_x = I + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 \text{ فأثبت أن}$$

$G = \{A_x : x \in \mathbb{R}\} \leq GL(3, \mathbb{R})$ وأن G إبدالية.

$$(ج) \quad \text{أثبت أن } G \cong (\mathbb{R}, +)$$

$$(٤٠) \quad \text{لتكن } K, H, G \text{ هي الزمر المبينة في التمرين (٣) من نماذج (٢,٢). أثبت أن}$$

$$H \cap K \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

$$(٤١) \quad \text{لتكن } G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ والعملية الثنائية معرفة على } G \text{ كالتالي:}$$

$$(a, b)(c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$$

(أ) أثبت أن G زمرة غير إبدالية.

$$(ب) \quad \text{أثبت أن التطبيق } \varphi: G \rightarrow G \text{ المعرف بالقاعدة } \varphi(a, b) = (0, b) \text{ تشاكل وجد كل من}$$

$\text{Ker} \varphi$ و $\varphi(G)$.

$$(٤٢) \quad \text{لتكن } G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A + I) \neq 0\} \text{ ولتكن } * \text{ عملية معرفة على } G \text{ كالتالي:}$$

$$A * B = A + B + AB \text{ أثبت أن:}$$

$$(أ) \quad (G, *) \text{ زمرة} \quad (ب) \quad G \cong GL(2, \mathbb{R})$$

$$(٤٣) \quad \text{لتكن } G \text{ هي الزمرة المبينة في المثال (٢,١١). أثبت أن } G \cong (\mathbb{R}, +)$$

$$(44) \quad \text{أثبت أن } (\mathbb{R}^+, \cdot) \times (\mathbb{Z}_2, +_2) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

$$(45) \quad \text{إذا كان } \varphi: G_1 \rightarrow G_2 \text{ تشاكلاً فأثبت أن } \varphi(Z(G_1)) \subseteq Z(\varphi(G_1))$$

$$(46) \quad \text{ليكن } \varphi: G_1 \rightarrow G_2 \text{ تشاكلاً حيث } \text{Ker } \varphi = K \text{ وليكن } a \in G. \text{ أثبت أن}$$

$$\{x \in G_1 : \varphi(x) = \varphi(a)\} = \{ka : k \in K\}$$

$$(47) \quad \text{لتكن } G \text{ زمرة و } H \text{ مجموعة. وليكن } \varphi: G \rightarrow H \text{ تطبيقاً أحادياً وشاملاً. أثبت أنه يوجد}$$

$$\text{عملية ثنائية وحيدة } * \text{ على } H \text{ بحيث تكون } (H, *) \text{ زمرة و } \varphi \text{ تماثل.}$$

$$(48) \quad \text{بين أيّاً من العبارات التالية صائبة وإيها خاطئة:}$$

$$(أ) \text{ يوجد تشاكل بين أي زمرتين.}$$

$$(ب) \text{ يوجد تشاكل غير تافه بين أي زمرتين.}$$

$$(ت) \text{ يوجد تشاكل من زمرة غير منتهية إلى زمرة منتهية.}$$

$$(ث) \text{ من الممكن أن أي زمرتين من الرتبة 5 يجب أن تكونا متماثلتين.}$$

$$(ج) \text{ إذا كانت كل من } G \text{ و } H \text{ زمرة منتهية حيث } |G| = |H| \text{ فإن } G \cong H$$

$$(ح) \text{ إذا كانت كل من } G \text{ و } H \text{ زمرة منتهية حيث } G \cong H \text{ فإن } |G| = |H|$$

$$(خ) \text{ من الممكن أن تماثل زمرة إبدالية زمرة غير إبدالية.}$$

$$(د) (\mathbb{R}, +) \text{ تماثل زمرة تبديلات.}$$

$$(ذ) \text{ الزمرة } (G, *) \text{ حيث } G = \mathbb{R} - \{-1\} \text{ وحيث } a * b = a + b + ab \text{ تماثل الزمرة } (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

$$(ر) \text{ التطبيق } \varphi: G \rightarrow G \text{ المعرفة بالقاعدة } \varphi(x) = x^{-1} \text{ تشاكل.}$$

$$(ز) S_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

$$(س) \text{ إذا كان } \varphi: \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \text{ تشاكل غامر فإن } \text{Ker } \varphi = \{[0], [4]\}$$

$$(ش) \text{ الصورة التشاكلية لأي زمرة دورية يجب أن تكون دورية.}$$

$$(ص) \text{ إذا كانت كل من } G \text{ و } H \text{ زمرة فإن } G \times H \cong H \times G$$

$$(ض) \text{ إذا كان كل من } \varphi \text{ و } \psi \text{ تشاكل غامر من } G \text{ إلى } H \text{ وكان } \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \text{ فإن } \varphi = \psi$$

$$(ط) \text{ يوجد تشاكل غامر من } (\mathbb{Q}, +) \text{ إلى } (\mathbb{Z}, +)$$

$$(ظ) \text{ التطبيق } \varphi: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \text{ المعرفة بالقاعدة } \varphi(x + iy) = x + y \text{ تشاكل غامر.}$$

$$(ع) \text{ التطبيق } \varphi: (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \text{ المعرفة بالقاعدة } \varphi(a + bi) = a^2 + b^2 \text{ تشاكل.}$$

$$(غ) SL(2, \mathbb{Z}_2) \cong S_3$$

$$(ف) SL(2, \mathbb{Z}_3) \cong S_4$$

(٣,٢) المجموعات المشاركة ومبرهنة لاجرانج
Cosets and Lagrange's Theorem

لقد بينا عند دراستنا للزمر الدورية المنتهية ، أنه إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكانت $H \leq G$ فإن رتبة H تقسم رتبة G . هذه النتيجة ماهي إلا حالة خاصة من مبرهنة هامة جداً ، تسمى مبرهنة لاجرانج نسبة إلى مكتشفها . سنقوم في هذا البند ببرهان هذه المبرهنة ونقدم بعض تطبيقاتها ، وسنحقق ذلك مستعينين بمفهوم المجموعات المشاركة .

تعريف (٣,٤)

لتكن G زمرة ولتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$.

(١) تعرف المجموعة المشاركة اليسرى (left coset) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها المجموعة :

$$aH = \{ ah : h \in H \}$$

(٢) تعرف المجموعة المشاركة اليمنى (right coset) للزمرة H التي تحتوي a بأنها المجموعة :

$$Ha = \{ ha : h \in H \}$$

في كلتا الحالتين ، يسمى العنصر a ممثلاً للمجموعة المشاركة (representative of the coset).

ملحوظات

(١) لاحظ أن $eH = H = He$ لكل $H \leq G$.

(٢) لاحظ أنه لكل $a \in G$ يكون : $a = ea \in Ha$ و $a = ae \in aH$.

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فإنه من الواضح أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

مثال (٣,٢٨)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}$ وكانت $H = 3\mathbb{Z}$ فإنه من الواضح أن المجموعات المشاركة اليسرى (اليمنى)

المختلفة للزمرة الجزئية H هي : $1+H = 1+3\mathbb{Z}$ ، $2+H = 2+3\mathbb{Z}$ ، $H = 3\mathbb{Z}$.

وبصورة عامة المجموعات المشاركة اليسرى (اليمنى) للزمرة الجزئية $n\mathbb{Z}$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ هي :

$$\square 1+n\mathbb{Z} , 2+n\mathbb{Z} , \dots , (n-1)+n\mathbb{Z} , n\mathbb{Z}$$

مثال (٣,٢٩)

إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2) \rangle \leq G$ فإن المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H هي :

$$H = (1\ 2) \circ H = \{e, (1\ 2)\}$$

$$(1\ 3) \circ H = (1\ 2\ 3) \circ H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

$$(2\ 3) \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

أما المجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H فهي :

$$H = H \circ (1\ 2) = \{e, (1\ 2)\}$$

$$H \circ (1\ 3) = H \circ (1\ 3\ 2) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$H \circ (2\ 3) = H \circ (1\ 2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

□ لاحظ أن المجموعات المشاركة اليسرى مختلفة في هذه الحالة عن المجموعات المشاركة اليمنى

مثال (٣,٣٠)

إذا كانت $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$ فإن المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية K هي :

$$K = (1\ 2\ 3) \circ K = (1\ 3\ 2) \circ K = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$(2\ 3) \circ K = (1\ 3) \circ K = (1\ 2) \circ K = \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

أما المجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية K فهي :

$$K = K \circ (1\ 2\ 3) = K \circ (1\ 3\ 2) = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$K \circ (2\ 3) = K \circ (1\ 3) = K \circ (1\ 2) = \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

□ لاحظ أن $\sigma \in S_3$ لكل $\sigma \circ K = K \circ \sigma$

تبين لنا المبرهنة التالية أن مجموعة جميع المجموعات المشاركة (اليسرى أو اليمنى) للزمرة الجزئية

$H \leq G$ تشكل تجزئاً للزمرة G .

مبرهنة (٣,٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن :

(١) $aH = bH$ إذا وفقط إذا كان $b^{-1}a \in H$ (أو $a^{-1}b \in H$) لكل $a, b \in G$.

(٢) $aH \cap bH = \phi$ أو $aH = bH$ لكل $a, b \in G$.

(٣) $Ha = Hb$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ (أو $ba^{-1} \in H$) لكل $a, b \in G$.

(٤) $Ha = Hb$ أو $Ha \cap Hb = \phi$ لكل $a, b \in G$.

البرهان

(١) لنفرض أولاً أن $aH = bH$. بما أن $a \in aH = bH$ فإن $a = bh$ حيث $h \in H$. ولذا فإن $b^{-1}a = h \in H$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $b^{-1}a \in H$. عندئذ، $b^{-1}a = h$ حيث $h \in H$. أي أن $a = bh$. الآن، نفرض أن $ah_1 \in aH$. إذن، $ah_1 = bhh_1 \in bH$. ولذا فإن $aH \subseteq bH$. ومن ناحية أخرى، إذا كان $bh_1 \in bH$ فإن $bh_1 = ah^{-1}h_1 \in aH$. إذن، $bH \subseteq aH$. وبالتالي فإن $aH = bH$.

(٢) لنفرض أن $aH \cap bH \neq \phi$. وليكن $x \in aH \cap bH$. عندئذ، $x = ah_1 = bh_2$ حيث $h_1, h_2 \in H$. ولذا فإن $b^{-1}a = h_2h_1^{-1} \in H$. وباستخدام الفقرة (١) نخلص إلى أن $aH = bH$.

(٣) البرهان مشابه لبرهان الفقرة (١).

◆ (٤) البرهان مشابه لبرهان الفقرة (٢).

ملحوظات

(١) بما أن $(a \in Ha) a \in aH$ لكل $a \in G$ فإن $\bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{a \in G} Ha$. وباستخدام

المبرهنة (٣،٧) نخلص إلى أن كل من $\{aH : a \in G\}$ و $\{Ha : a \in G\}$ تجزئياً للزمرة G .

(٢) لتكن $H \leq G$. يمكن إثبات أن المجموعات المشاركة اليمنى (و اليسرى) للزمرة الجزئية H في G تشكل تجزئياً للزمرة G وذلك بتعريف علاقة تكافؤ على G بحيث تكون فصول التكافؤ هي المجموعات المشاركة (أنظر التمرين المحلول (٥)).

تبين لنا المبرهنة التالية العلاقة بين عدد عناصر المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى.

مبرهنة (٣،٨)

إذا كان $H \leq G$ وكان $a \in G$ فإن $|H| = |aH| = |Ha|$.

البرهان

ليكن $f: H \rightarrow aH$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(h) = ah$ لكل $h \in H$. ولنفرض أن $f(h_1) = f(h_2) \Leftrightarrow ah_1 = ah_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2$ ، الآن ، $h_1, h_2 \in H$ ، إذن ، f تطبيق معرفاً تعريفاً حسناً وأحادي .

من الواضح أن f شامل . إذن ، f تقابل . وبالتالي فإن $|H| = |aH|$. وبالمثل $|H| = |Ha|$.

نبين الآن العلاقة بين عدد المجموعات المشاركة اليمنى لزمرة جزئية $H \leq G$ وعدد المجموعات المشاركة اليسرى لها .

(٣,٩) مبرهنة

إذا كانت $H \leq G$ وكانت $L = \{aH : a \in G\}$ وكانت $R = \{Ha : a \in G\}$ فإن $|L| = |R|$.

البرهان

ليكن $f: L \rightarrow R$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(aH) = Ha^{-1}$ لكل $aH \in L$. الآن :

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H \Leftrightarrow b^{-1}(a^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1} \Leftrightarrow f(aH) = f(bH)$$

إذن ، f حسن التعريف وأحادي . ومن الواضح أن f شامل ، لأنه لو كان $Ha \in R$ فإن

$$\diamond |L| = |R| ، \text{ إذن } f(a^{-1}H) = Ha$$

(٣,٥) تعريف

إذا كانت $H \leq G$ فإننا نسمي عدد المجموعات المشاركة اليسرى (أو اليمنى) دليل H في G (index of H in G) ونرمز لهذا العدد بالرمز $[G:H]$.

مثال (٣, ٣١)

من المثال (٣, ٢٨) نجد أن $[Z : nZ] = n$. ومن المثال (٣, ٢٩) نجد أن $[S_3 : \langle (1\ 2) \rangle] = 3$.

ومن المثال (٣, ٣٠) نجد أن $[S_3 : \langle (1\ 2\ 3) \rangle] = 2$ □

مثال (٣, ٣٢)

إذا كانت $H = \{[0], [3]\} \leq Z_6$ فإنه من السهل أن نرى أن :

$$\square [Z_6 : H] = 3 ، \text{ إذن } L = \{ H, \{ [1], [4] \}, \{ [2], [5] \} \}$$

مثال (٣, ٣٣)

إذا كانت $A_n \leq S_n$ فإن $L = \{A_n, \sigma A_n\}$ حيث $\sigma \in S_n$ تبديلاً فردياً. إذن،
 $\square [S_n : A_n] = 2$

نحن الآن جاهزون لتقديم مبرهنة لاجرانج بعد أن قدمنا المفاهيم الضرورية لبرهانها.

مبرهنة (٣, ١٠) [مبرهنة لاجرانج]

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن $|G| = [G:H]|H|$. ومن ثم فإن $|H|$ يقسم $|G|$.

البرهان

لنفرض أن $\{a_1H, a_2H, \dots, a_kH\}$ هي جميع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة الجزئية H . عندئذ: $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_kH$. وبما أن $a_iH \cap a_jH = \emptyset$ لكل $i \neq j$ فإن: $|G| = |a_1H| + |a_2H| + \dots + |a_kH|$. ولكن $|H| = |a_iH|$ لكل $1 \leq i \leq k$. ولذا فإن
 $\diamond |G| = k|H| = [G:H]|H|$

نتيجة (٣, ١١)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبها n وكان $a \in G$ فإن $a^n = e$.

البرهان

لنفرض أن $m = o(a)$. بما أن $m = | \langle a \rangle |$ فإن m يقسم n . ومنه فإن $n = km$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. ونستنتج أن $a^n = (a^m)^k = e^k = e$ $\diamond$

نتيجة (٣, ١٢)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبها عدداً أولياً p فإن G دورية.

البرهان

بما أن $|G| \geq 2$ فإنه يوجد $e \neq a \in G$. عندئذ، $\langle a \rangle \neq \{e\}$. ولذا فإن $| \langle a \rangle |$ يقسم p . ومنه فإن $| \langle a \rangle | = p = |G|$. وبالتالي فإن $\langle a \rangle = G$. أي أن G دورية $\diamond$

نتيجة (٣, ١٣) [مبرهنة فيرما الصغرى Fermat little theorem]

لكل عدد صحيح a ولكل عدد أولي p لدينا $a^p \equiv a \pmod{p}$.

البرهان

إذا كان $p \mid a$ فإن $a \equiv 0 \pmod{p}$ وبالتالي فإن $a^p \equiv 0 \equiv a \pmod{p}$. لذا نفرض أن

p لا يقسم a .

باستخدام خوارزمية القسمة، نستطيع إيجاد $m, r \in \mathbb{Z}$ يحققان $a = pm + r$ ، $0 < r < p$ ،
ولذا فإن $a \equiv r \pmod{p}$ ، ولكن $r \in U_p = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$. عندئذ، باستخدام
النتيجة (٣, ١١) نجد أن $r^{p-1} = [1]$ ، إذن $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ، أي أن $r^p \equiv r \pmod{p}$. وبالتالي

◆ فإن $a^p \equiv r^p \equiv r \equiv a \pmod{p}$.

لقد بينا في الفصل الثاني أنه إذا كانت G زمرة دورية رتبها n فإنه لكل قاسم d للعدد
 n ، توجد زمرة جزئية H من G رتبها d . أي أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً للزمر الدورية
المنتهية. كما أننا سنبرهن لاحقاً أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً للزمر الإبدالية المنتهية.
سنبين الآن أن الزمرة A_4 لا تحتوي على زمرة جزئية رتبها 6. وهذا يكون لدينا مثلاً على أن
عكس مبرهنة لاجرانج ليس صحيحاً للزمر غير الإبدالية.

مبرهنة (٣, ١٤)

لا توجد زمرة جزئية من A_4 رتبها 6.

البرهان

لاحظ أولاً $|A_4| = 12$ وأنها تحتوي على ثلاثة عناصر من الرتبة 2، ثمانية عناصر من الرتبة 3 إضافة
إلى العنصر المحايد. لنفرض لغرض التناقض أن $H \leq A_4$ حيث $|H| = 6$. ولنفرض أن $a \in A_4$
حيث $o(a) = 3$. بما أن $[A_4 : H] = 2$ فإن المجموعات المشاركة H ، aH و a^2H ليست
جميعها مختلفة. وبناء على ذلك فإن تساوي أي مجموعتين منها يقتضي أن يكون $a \in H$. وبالتالي
فإن H تحتوي على جميع العناصر من الرتبة 3. أي أن $|H| \geq 8$ وهذا مستحيل ◆

لتكن كل من H و K زمرة جزئية من زمرة منتهية G . لقد لاحظنا (أنظر المثال (٢١ و ٢٢)) أن HK ليست بالضرورة زمرة جزئية من G . ولذا فإنه ليس بالضرورة أن يقسم $|HK|$ رتبة الزمرة G . نقدم الآن طريقة لحساب $|HK|$ بالاستعانة بمبرهنة لاجرانج وسيكون لهذه النتيجة استخدامات عديدة.

مبرهنة (١٥, ٣)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية منتهية من زمرة G فإن $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

البرهان

نفرض أن $N = H \cap K$. بما أن $N \leq H$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة لاجرانج أن $|N|$ يقسم $|H|$. لنفرض أن $[H:N] = n = \frac{|H|}{|N|}$. ولتكن $\{a_1N, a_2N, \dots, a_nN\}$ هي مجموعة جميع

المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـ N في H . عندئذ: $H = \bigcup_{i=1}^n a_iN$. وبما أن $N \subseteq K$ فإننا

$$\text{نجد أن: } HK = \left(\bigcup_{i=1}^n a_iN \right) K = \bigcup_{i=1}^n a_iK$$

سنبرهن الآن أن $a_iK \cap a_jK = \emptyset$ لكل $i \neq j$. لنفرض لغرض التناقض أن $a_iK \cap a_jK \neq \emptyset$. عندئذ، $a_iK = a_jK$. ولذا فإن $a_i^{-1}a_j \in K$. وبما أن $a_i^{-1}a_j \in H$ فإننا نجد أن $a_i^{-1}a_j \in N$. ومنه فإن $a_iN = a_jN$ وهذا تناقض. إذن، $\{a_1K, a_2K, \dots, a_nK\}$ مجموعات مشاركة جميعها مختلفة. ومن ثم فإن: $|HK| = |a_1K| + \dots + |a_nK|$. ولكن $|a_iK| = |K|$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\blacklozenge \quad |HK| = n|K| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

تقدم لنا المبرهنة التالية علاقة بين الأدلة $[G:K]$ ، $[H:K]$ و $[G:H]$ حيث

$$K \leq H \leq G$$

مبرهنة (١٦, ٣)

إذا كان $K \leq H \leq G$ وكان كل من $[G:H]$ و $[H:K]$ منتهياً فإن $[G:K]$ منته وأنها

$$[G:K] = [G:H][H:K]$$

البرهان

لنفرض أن $\{a_1H, \dots, a_rH\}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة H في G وأن $\{b_1K, \dots, b_sK\}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة K في H . سنبرهن أن $\{a_i b_j K : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ هي مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة K في G . ولهذا الغرض نفرض أولاً أن $g \in G$ وليكن $g \in a_i H$. عندئذ $g = a_i h$ حيث $h \in H$. ولكن $h \in b_j K$ ولذا فإن $h = b_j k$ حيث $k \in K$. إذن، $g = a_i b_j k$ وهذا تكون المجموعة $\{a_i b_j K : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ هي بالفعل جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة K في G . إذن، يبقى علينا أن نبرهن أنها مختلفة. لنفرض أن $a_i b_j K = a_p b_q K$. ولذا فإن $a_i b_j k_1 = a_p b_q k_2$ حيث $k_1, k_2 \in K$. الآن كل من $b_q k_2$ و $b_j k_1$ ينتمي إلى H . إذن، a_i و a_p ينتميان إلى نفس المجموعة المشاركة للزمرة H . ولذا فإن $a_i = a_p$. وباستخدام قانون الاختصار نحصل على $b_j k_1 = b_q k_2$. ولذا فإن b_j و b_q ينتميان إلى نفس المجموعة المشاركة للزمرة K . ومنه فإن $b_j = b_q$. وبالتالي فإن :

$$\blacklozenge [G : K] = rs = [G : H] [H : K]$$

(٣، ٢، ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

(١) تمرين

لتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

$$(أ) \quad a \in H \quad (ب) \quad aH = H \quad (ج) \quad aH \leq G$$

الحل

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : لنفرض أن $a \in H$. ليكن $x \in aH$. عندئذ، $x = ah$ حيث $h \in H$. وبما أن $H \leq G$ وأن $a \in H$ فإن $x \in H$. أي أن $aH \subseteq H$. لنفرض الآن أن $x \in H$. بما أن $a \in H$ فإن $a^{-1}x \in H$. ومنه فإن $a(a^{-1}x) = x = ex = (aa^{-1})x = a(a^{-1}x) \in aH$. ولذا فإن $aH = H$. وبالتالي فإن $aH \leq G$.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : بما أن $aH = H$ وأن $H \leq G$ فإن $aH \leq G$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض أن $aH \leq G$. عندئذ ، $e \in aH$ ، ومنه فإن $aH \cap H \neq \emptyset$. ولذا فإن $aH = H$. وبالتالي فإن $\Delta \quad a = ae \in aH = H$

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pq حيث p و q أوليان مختلفان. ولتكن H و K زمريتين جزئيتين وحيدتين حيث $|H| = p$ و $|K| = q$. أثبت أن G دورية .

الحل

لاحظ أولاً أن $|H \cup K| = p + q - 1 < pq$. ولذا فإنه يوجد $a \in G$ حيث $a \notin H \cup K$. باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن $o(a) = p$ أو $o(a) = q$ أو $o(a) = pq$. إذا كان $o(a) = p$ فإن $\langle a \rangle = H$ وهذا يناقض وحدانية H . ولذا فإن $o(a) \neq p$. وبالمثل $o(a) \neq q$. وبالتالي فإن $o(a) = pq$. أي أن $G = \langle a \rangle$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة من الرتبة p^n حيث p أولي . أثبت أن G تحتوي على عنصر رتبته p .

الحل

لنفرض أن $e \neq a \in G$. عندئذ ، $H = \langle a \rangle$ زمرة جزئية دورية من G وأن $|H|$ يقسم p^n . ولذا فإن $|H| = p^m$ حيث $0 < m \leq n$. بما أن H دورية وأن p يقسم $|H|$ فإنه توجد زمرة جزئية $T \leq H$ حيث $|T| = p$. ولكن T دورية . إذن، يوجد $b \in T$ حيث $T = \langle b \rangle$. وبالتالي فإن $\Delta \quad o(b) = p$

تمرين (٤)

(أ) إذا كان G زمرة إبدالية منتهية تحتوي على عنصرين مختلفين رتبة كل منهما 2 فأثبت أن $|G| = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.
(ب) بين أن النتيجة غير صحيحة إذا كان G غير إبدالية .

الحل

(أ) لنفرض أن $a \neq b \in G$ حيث $o(a) = o(b) = 2$. ولنفرض أن $H = \{e, a\}$ وأن $K = \{e, b\}$. بما أن G إبدالية فإن $HK = \{e, a, b, ab\}$. ولذا فإن $|HK| = 4$ يقسم $|G|$. أي أن $|G| = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(ب) رتبة كل من $(1\ 2)$ و $(1\ 3)$ هي 2 في الزمرة S_3 ولكن 4 لا يقسم $|S_3|$ Δ

تمرين (٥)

لتكن $H \leq G$ ولتكن $\sim_H$ علاقة على G معرفة بالقاعدة $a \sim_H b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$.

(أ) أثبت أن $a \sim_H b$ علاقة تكافؤ على G .

(ب) أثبت أن فصول تكافؤ $\sim_H$ هي المجموعة المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H في الزمرة G .

الحل

(أ) بما أن $a^{-1}a = e \in H$ فإن $a \sim_H a$ لكل $a \in G$. ولذا فإن $\sim_H$ انعكاسية. لنفرض أن $a \sim_H b$.

عندئذ: $a \sim_H b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow (ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H \Leftrightarrow b \sim_H a$. ولذا فإن $\sim_H$ تناظرية.

وأخيراً لاثبات أن $\sim_H$ متعدية، نفرض أن $a \sim_H b$ و $b \sim_H c$. عندئذ:

$$a \sim_H b \text{ و } b \sim_H c \Rightarrow ab^{-1} \in H \text{ و } bc^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow (ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in H \Rightarrow a \sim_H c$$

وعليه فإن $\sim_H$ متعدية ومن ثم فهي علاقة تكافؤ.

(ب) لنفرض أن $a \in G$. سنبرهن الآن أن $[a] = Ha$. لنفرض أن $x \in [a]$. عندئذ،

$ax^{-1} \in H$ ولذا فإن $ax^{-1} = h$ حيث $h \in H$. أي أن $x = h^{-1}a$. وعليه فإن $x \in Ha$. ومن

ناحية أخرى إذا كان $y \in Ha$ فإن $y = ha$ حيث $h \in H$. ومنه فإن

$ay^{-1} = a(ha)^{-1} = aa^{-1}h^{-1} = h^{-1} \in H$. وعليه فإن $a \sim_H y$. أي أن $y \in [a]$. وبالتالي فإن

$$\Delta [a] = Ha$$

تمارين (٢، ٣)

(١) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $\langle [4] \rangle$ في $\mathbb{Z}_{12}$.

(٢) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $\langle [18] \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$.

(٣) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $H = \{[1], [11]\}$ في U_{30} .

(٤) جد جميع المجموعات المشاركة اليمنى واليسرى للزمرة الجزئية $H = \{e, a^2b\}$ في D_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٥) جد جميع المجموعات المشاركة اليمنى واليسرى للزمرة الجزئية $H = \langle a \rangle$ في D_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٦) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle b \rangle$ في Q_8 . ماذا تلاحظ ؟

(٧) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle ab \rangle$ في T . ماذا تلاحظ ؟

(٨) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ في A_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٩) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية :

$$H = \{e, (1\ 4) \circ (2\ 3), (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4)\} \text{ في } A_4 . \text{ ماذا تلاحظ ؟}$$

(١٠) أثبت أن كل من الزمر التالية تحقق عكس ميرهنه لاجرانج : S_4 ، T ، Q_8 ، D_4 .

(١١) إذا كانت G زمرة منتهية وتحقق عكس ميرهنه لاجرانج فهل من الضروري أن تحقق كل زمرة جزئية من G عكس ميرهنه لاجرانج ؟

(١٢) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن العبارات التالية متكافئة :

$$(أ) \quad xH = Hx \text{ لكل } x \in G .$$

$$(ب) \quad \text{لكل } x \in G \text{ ولكل } h \in H \text{ يوجد } h_1 \in H \text{ يحقق } xh = h_1x .$$

$$(ج) \quad x^{-1}hx \in H \text{ لكل } x \in G \text{ ولكل } h \in H .$$

$$(د) \quad x^{-1}Hx \subseteq H \text{ لكل } x \in G .$$

$$(هـ) \quad x^{-1}Hx = H \text{ لكل } x \in G .$$

$$(و) \quad h^{-1}x^{-1}hx \in H \text{ لكل } x \in G \text{ ولكل } h \in H .$$

(١٣) لتكن $H \leq G$ ولتكن $\sim_H$ علاقة معرفة على G كالتالي : $a \sim_H b$ إذا وفقط إذا كان

$$b^{-1}a \in H . \text{ أثبت أن } \sim_H \text{ علاقة تكافؤ على } G \text{ وأن } [a] = aH .$$

(١٤) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = 2$ فأثبت أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

(١٥) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة pq حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن كل زمرة جزئية

فعلية غير تافهة من G دورية .

(١٦) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبته $2n$ حيث n عدد فردي فأثبت أن G تحتوي على عنصر

وحيد من الرتبة 2 .

(١٧) إذا كانت G زمرة غير تافهة ولا تحتوي على زمر جزئية فعلية غير تافهة فأثبت أن G منتهية ورتبتها عدد أولي .

(١٨) إذا كانت G زمرة ليست دورية رتبتها p^2 حيث p عدد أولي وكان $e \neq a \in G$ فأثبت أن $o(a) = p$.

(١٩) أثبت أن S_n تحتوي على زمرة جزئية فعلية H تحقق $[S_n : H] \leq n$ لكل $n > 1$.

(٢٠) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمر المنتهية G حيث $|K|, |H| > \sqrt{|G|}$ فأثبت أن $|H \cap K| > 1$.

(٢١) إذا كانت $|G| = pq$ حيث p و q عددا أوليان و $p > q$ فاستخدم التمرين (٢٠) لإثبات أن G تحتوي على زمرة جزئية واحدة على الأكثر رتبتها p .

(٢٢) إذا كانت $|G| = 48$ وكل من H و K زمرة جزئية من G رتبتها 16 فأثبت أن $|H \cap K| = 8$.

(٢٣) إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G| = m$ و $|H| = n$ و $\gcd(m, n) = 1$ فأثبت أن التشاكل الوحيد من G إلى H هو التشاكل التافه .

(٢٤) إذا كانت $|G| = 2^n$ حيث G لا تحتوي على عنصر من الرتبة 4 فأثبت أن G إبدالية.

(٢٥) إذا كانت $K, H \leq \mathbb{Z}_n$ حيث $n = p^m$ ، p عدد أولي فأثبت أن $H \leq K$ أو $K \leq H$. وبالعكس إذا كانت $K \leq H$ أو $H \leq K$ لكل $K, H \leq \mathbb{Z}_n$ فأثبت $n = p^m$ حيث p عدد أولي.

(٢٦) إذا كانت $H, K \leq G$ حيث $[G : H] < \infty$ و $[G : K] < \infty$ فأثبت أن $[G : H \cap K] < \infty$. وإذا كانت $H_i \leq G$ ، $i \in \mathbb{Z}^+$ حيث $[G : H_i] < \infty$ لكل $i \in \mathbb{Z}^+$ فهل

من الضروري أن يكون $[G : \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} H_i] < \infty$ ؟

(٢٧) إذا كان $a, n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(a, n) = 1$ فأثبت أن $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ حيث $\varphi(n)$ هي دالة أولر .

(٢٨) لتكن G زمرة منتهية غير تافهة . أثبت أن $|G|$ عدد فردي إذا وفقط إذا كان لكل $x \in G$ يوجد $y \in G$ بحيث يكون $x = y^2$.

(٢٩) لتكن $K, H \leq G$ ولتكن $\sim$ علاقة معرفة على G كالآتي :

$a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $b = hak$ حيث $h \in H$ و $k \in K$.

(أ) أثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G .

(ب) أثبت أن $[a] = HaK = \{ hak : h \in H, k \in K \}$. تسمى المجموعة المشاركة المضاعفة للزمرتين H و K في G .

(ج) إذا كانت $bK = \phi$ مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئية K في G فأثبت أن $HaK \cap bK = \phi$ أو أن $bK \subseteq HaK$ لكل $a, b \in G$.

(د) أثبت أن $HaK \cap HbK = \phi$ أو أن $HaK = HbK$ لكل $a, b \in G$.

(هـ) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن $|HaK| = |HaKa^{-1}|$.

(و) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن : $|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}$

(٣٠) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $|HaH| = m$ لكل $a \in G$. أثبت أن $xH = Hx$ لكل $x \in G$.

(٣١) بين أيّاً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية رتبها عدد أولي فإن G إبدالية .

(ب) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Rightarrow Ha = Hb$

(ت) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $Ha = Hb \Rightarrow b \in Ha$

(ث) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Leftrightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1}$

(ج) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Rightarrow a^2H = b^2H$

(ح) إذا كان $o(a) = 30$ فإن $[\langle a \rangle : \langle a^4 \rangle] = 2$.

(خ) إذا كانت $H = \{ a \in GL(2, \mathbb{R}) : \det a = \pm 1 \} \leq GL(2, \mathbb{R})$ وكان $a, b \in GL(2, \mathbb{R})$

حيث $aH = bH$ فإن $\det a = \det b$.

(د) إذا كانت $|G| < 100$ وكانت $H, K \leq G$ حيث $|H| = 10$ و $|K| = 25$ فإن $|G| = 50$.

(ذ) إذا كان $H, K \leq G$ فإن $x(H \cap K) = xH \cap xK$ لكل $x \in G$.

(ر) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in H$ فإنه يوجد $c \in G$ حيث $(aH)(bH) = cH$.

(٣, ٣) الزمر الجزئية الناعمة

Normal Subgroups

لقد بينا في البند (٣, ٢) أن أي زمرة جزئية H من زمرة G تزودنا بتجزيتين للزمرة G . بالتحديد، مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H ومجموعة المجموعات المشاركة اليمينية لها. وقد قدمنا أمثلة تبين لنا عدم تساوي هذان التجزيتان. سندرس في هذا البند الزمر الجزئية H من G التي تجعل التجزيتين متساويين، أي تحقق $aH = Ha$ لكل $a \in G$. يطلق على هذه الزمر، الزمر الجزئية الناعمة حيث تلعب هذه الزمر الجزئية دوراً ريادياً في الحصول على خواص هامة للزمرة الأم وفي إنشاء زمر جديدة من زمر معلومة. ومن الجدير بالذكر هنا هو أن أول استخدام لمفهوم الزمر الجزئية الناعمة كان على يد الرياضي الفرنسي الشهير جالوا (Galois) أثناء محاولته إيجاد حلول لكثيرات الحدود باستخلاص الجذور.

تعريف (٣, ٦)

لتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية ناعمة (normal subgroup) من G إذا كان $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

ملحوظات

- (١) إذا كانت H زمرة جزئية ناعمة من G فإننا نكتب $H \triangleleft G$.
- (٢) من الواضح أن $G \triangleleft G$ و $\{e\} \triangleleft G$ لكل زمرة G .
- (٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $H \triangleleft G$ لكل $H \leq G$.
- (٤) نحذر القارئ من أن $aH = Ha$ لا يعني بالضرورة أن $ah = ha$ لكل $a \in G$ و $h \in H$ ولكنه يعني أنه إذا كان $ah \in aH$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $ah = h_1a$.

قبل أن نقدم أمثلة على الزمر الجزئية الناعمة نقدم المبرهنة التالية التي تزودنا بتعريفات مكافئة للزمر الجزئية الناعمة.

مبرهنة (٣, ١٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن العبارات التالية متكافئة :(أ) $H \triangleleft G$.(ب) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1x$.(ج) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ $x^{-1}hx \in H$.(د) لكل $x \in G$ $x^{-1}Hx \subseteq H$.(هـ) لكل $x \in G$ $x^{-1}Hx = H$.(و) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ $h^{-1}x^{-1}hx \in H$.

البرهان

(أ) $\Leftrightarrow$ (ب) : لنفرض أن $xH = Hx$. عندئذ، لكل $h \in H$ نجد أن $xh \in xH = Hx$. ولذا فإنهيوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1x$.(ب) $\Leftrightarrow$ (ج) : بما أنه لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1x$ فإنه على وجهالخصوص $x^{-1}h = h_1x^{-1}$. ولذا فإن $x^{-1}hx = h_1 \in H$.(ج) $\Leftrightarrow$ (د) : واضح .(د) $\Leftrightarrow$ (هـ) : بما أن $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$ فإنه على وجه الخصوص $xHx^{-1} \subseteq H$ لكل $x \in G$ (وذلك بتبديل x بـ x^{-1}) . إذن ، $xhx^{-1} \in H$ لكل $x \in G$ وكل $h \in H$. ولذا فإنهيوجد $h_1 \in H$ حيث $xhx^{-1} = h_1$. أي أن ، $h = x^{-1}h_1x \in x^{-1}Hx$ ، إذن ، $H \subseteq x^{-1}Hx$.(هـ) $\Leftrightarrow$ (و) : لنفرض أن $x \in G$ و $h \in H$. بما أن $x^{-1}Hx = H$ فإن $x^{-1}hx \in H$. ولذا فإنهيوجد $h_1 \in H$ حيث $x^{-1}hx = h_1$. ومنه فإن $h^{-1}x^{-1}hx = h^{-1}h_1 \in H$.(و) $\Leftrightarrow$ (أ) : بما أن $h^{-1}x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيثأن $h^{-1}x^{-1}hx = h_1$ أي أن $hx = xhh_1$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.نفرض الآن أن $a \in Hx$. إذن ، $a = hx$ حيث $h \in H$. ولذا فإن $a = xhh_1 \in xH$. أي أن ، $Hx \subseteq xH$. ومن ناحية أخرى ، لدينا $h^{-1}(x^{-1})^{-1}hx^{-1} \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$. إذن ، $h^{-1}(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = h_2$ حيث $h_2 \in H$. أي أن ، $xh = hh_2x$. نفرض الآن أن $a \in xH$.

عندئذ : $a = xh = hh_2x \in Hx$. ولذا فإن $xH \subseteq Hx$ وبالتالي فإن $xH = Hx$ ، ♦

مثال (٣,٣٤)

إذا كانت $H = \langle (1 \ 2) \rangle \leq S_3$ فإن :

$(1 \ 3) \circ H = \{(1 \ 3), (1 \ 2 \ 3)\} \neq H \circ (1 \ 3) = \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$ ، إذن H ليست

ناظمية من S_3 □

مثال (٣,٣٥)

إذا كانت $K = \langle (1 \ 2 \ 3) \rangle \leq S_3$ فإننا وجدنا في المثال (٣,٣٠) أن $\sigma \circ K = K \circ \sigma$ لكل $\sigma \in S_3$

ولذا فإن $K \triangleleft S_3$ □

مثال (٣,٣٦)

$SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$

الحل

لاحظ أن $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} \leq GL(n, \mathbb{R})$. لنفرض الآن أن

$A \in SL(n, \mathbb{R})$ وأن $B \in GL(n, \mathbb{R})$. عندئذ :

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})(\det A)(\det B) = \frac{1}{\det B} \times 1 \times \det B = 1$$

□ $SL(n, \mathbb{R}) \triangleleft GL(n, \mathbb{R})$. ولذا فإن $B^{-1}AB \in SL(n, \mathbb{R})$ ، إذن

تزودنا المبرهنة التالية بالعديد من الزمر الجزئية الناعمية .

مبرهنة (٣,١٨)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $[G:H] = 2$ فإن $H \triangleleft G$.

البرهان

لنفرض أن $\{H, xH\}$ و $\{H, Hx\}$ هما تجزيتي G من المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى على التوالي. إذن ، $G = H \cup xH = H \cup Hx$ ، ولذا فإن $xH = G - H = Hx$ لكل $x \in G$. وبالتالي فإن ،

$$\blacklozenge H \triangleleft G$$

مثال (٣, ٣٧)

بما أن $[S_n : A_n] = 2$ فإن $A_n \triangleleft S_n$ لكل $n \geq 2$ □

مثال (٣, ٣٨)

$Z(G) \triangleleft G$ لكل زمرة G .

الحل

لقد بينا سابقاً أن $Z(G) \leq G$ (أنظر المثال (٢, ١٩)) . لنفرض الآن $x \in G$ وأن $h \in Z(G)$. إذن ،

$$xh = hx \text{ . ولذا فإن } h \in Z(G) \text{ فإن } xhx^{-1} = h \text{ . وبالتالي فإن } Z(G) \triangleleft G \text{ □}$$

تعريف (٣, ٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن منظم H في G (**normalizer of H in G**) هو المجموعة

$$N(H) = \{x \in G : x^{-1}Hx = H\}$$

تزودنا المبرهنة التالية بخصائص المنظم الأساسية.

مبرهنة (٣, ١٩)

إذا كانت $H \leq G$ فإن :

$$(ب) H \triangleleft N(H)$$

$$(أ) N(H) \leq G$$

(ج) $H \triangleleft G$ إذا وفقط إذا كان $N(H) = G$ (د) إذا كانت $H \triangleleft K \leq G$ فإن $K \subseteq N(H)$

أي أن $N(H)$ هي أكبر زمرة جزئية من G بحيث تكون H ناظمية فيها .

البرهان

(أ) لاحظ أولاً أن $N(H) \neq \emptyset$ (لأن $e \in N(H)$). لنفرض الآن أن $x, y \in N(H)$. عندئذ،
 $xH = Hx$ و $yH = Hy$. ولذا فإن $xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$ ، إذن $xy^{-1} \in N(H)$.
 ومن ثم فإن $N(H) \leq G$.

(ب) من الواضح أن $xH = Hx$ لكل $x \in N(H)$. ولذا فإن $H \triangleleft N(H)$.

(ج) لنفرض أولاً أن $H \triangleleft G$. عندئذ، $xH = Hx$ لكل $x \in G$. ولذا فإن $x \in N(H)$. إذن،
 $G = N(H)$. وبالتالي فإن $G \subseteq N(H)$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $N(H) = G$. بما أن $H \triangleleft N(H)$ وأن $N(H) = G$ فإن $H \triangleleft G$.

(د) لنفرض أن $H \triangleleft K \leq G$. وليكن $k \in K$. بما أن $H \triangleleft K$ فإن $khk^{-1} \in H$ لكل $h \in H$.
 وباستخدام المبرهنة (٣, ١٧) نجد أن $kHk^{-1} = H$ ، إذن $k \in N(H)$. وبذلك يكون

$$\blacklozenge K \subseteq N(H)$$

تزدونا المبرهنة التالية باختبار لمعرفة فيما إذا كانت الزمرة الجزئية H من الزمرة المنتهية G ناظمية.

مبرهنة (٣, ٢٠)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = m$. إذا كانت H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من
 G ذات الرتبة m فإن $H \triangleleft G$.

البرهان

لنفرض أن $x \in G$. لقد بينا في المثال (٣, ١٦) أن التطبيق $\varphi: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة
 $\varphi(g) = x^{-1}gx$ لكل $g \in G$ تماثل. إذن، $\varphi(H) = x^{-1}Hx \leq G$. ولكن $|H| = |x^{-1}Hx| = m$.
 وباستخدام وحدانية H نجد أن $H = x^{-1}Hx$. وبالتالي نستنتج أن $H \triangleleft G$.

مثال (٣, ٣٩)

بما أن $H = \{e, a^2\} \leq Q_8$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة من Q_8 ذات الرتبة 2 فإنه باستخدام المبرهنة
 (٣, ٢٠) نجد أن $H \triangleleft Q_8$.

مثال (٣, ٤٠)

بما أن $H = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\} \leq A_4$ هي الزمرة الجزئية

الوحيدة من A_4 ذات الرتبة 4 فإنه باستخدام المبرهنة (٣, ٢٠) نجد أن $H \triangleleft A_4$ □

مثال (٣, ٤١)

إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً فإن $\text{Ker } \varphi \triangleleft G_1$.

الحل

لقد بينا أن $\text{Ker } \varphi \leq G_1$ (أنظر المبرهنة (٣, ٢)). لنفرض الآن أن $x \in G_1$ و $h \in \text{Ker } \varphi$. إذن ،

$$\varphi(x^{-1}hx) = \varphi(x^{-1})\varphi(h)\varphi(x) = \varphi(x^{-1})e_2\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(e_1) = e_2$$

ومنه فإن $x^{-1}hx \in \text{Ker } \varphi$. ولذا فإن $\text{Ker } \varphi \triangleleft G_1$ □

ملحوظة

سنبرهن لاحقاً أن عكس المثال (٣, ٤١) صحيح أيضاً. أي أنه إذا كانت $K \triangleleft G$ فإنه يوجد تشاكل

$\varphi: G \rightarrow H$ بحيث يكون $\text{Ker } \varphi = K$.

المثال التالي يبين لنا أن علاقة الناطمية ليس متعددة. أي ، من الممكن أن نجد زمر H, K, G بحيث

$H \triangleleft K \triangleleft G$ ولكن H ليست ناظمية في G .

مثال (٣, ٤٢)

إذا كانت $G = D_4$ وكانت $K = \{e, a^2, ab, a^3b\}$ و $H = \{e, a^3b\}$ فإن $H \triangleleft K \triangleleft G$ ، لأن

□ $aH = \{a, b\} \neq Ha = \{a, a^2b\}$: لأن G ليست ناظمية في G ولكن $[G:K] = [K:H] = 2$

لقد بينا في المبرهنة (٢, ١٦) أنه إذا كانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية من G فإن

سنبرهن الآن أن $\bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$ إذا كانت $H_i \triangleleft G$ لكل $i \in I$.

مبرهنة (٣,٢١)

إذا كانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية الناعمية من الزمرة G فإن $\bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$.

البرهان

نفرض أن $x \in G$ و $h \in \bigcap_{i \in I} H_i$. عندئذ، $h \in H_i$ لكل $i \in I$. وبما أن $H_i \triangleleft G$ فإن

$$\blacklozenge \bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G \text{ وبالتالي فإن } x^{-1}hx \in \bigcap_{i \in I} H_i, \text{ إذن } x^{-1}hx \in H_i \text{ لكل } i \in I.$$

لقد عرفنا في الفصل الثاني حاصل الضرب HK حيث $H, K \leq G$ وقدمنا شرطاً كافياً ولازمياً لكي تكون $HK \leq G$. ونوظف الآن مفهوم الناعمية لتقدم شرطاً كافياً لكي تكون $HK \leq G$.

مبرهنة (٣,٢٢)

(أ) إذا كان $H, K \leq G$ حيث $K \triangleleft G$ فإن $HK \leq G$.

(ب) إذا كانت $K \triangleleft G$ و $H \triangleleft G$ فإن $HK \triangleleft G$.

البرهان

(أ) لاحظ أن $HK \neq \emptyset$ لأن $e = ee \in HK$. لنفرض الآن أن $x = h_1k_1, y = h_2k_2 \in HK$

حيث $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. عندئذ،

$$xy^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_3k_3 \in HK$$

حيث $h_3 = h_1h_2^{-1} \in H$ و $k_3 = h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in K$. إذن، $HK \leq G$.

(ب) لنفرض أن $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$. ولنفرض أن $x \in G$ وأن $y = hk \in HK$. إذن،

$$\blacklozenge HK \triangleleft G \text{ فإن } x^{-1}yx = x^{-1}h_kx = (x^{-1}hx)(x^{-1}kx) \in HK$$

من المبرهنة (٢,٢٠) والمبرهنة (٣,٢٢) نحصل مباشرة على النتيجة التالية :

نتيجة (٣,٢٣)

إذا كانت $H \leq G$ و $K \triangleleft G$ فإن $HK = KH = \langle H \cup K \rangle$

لقد بينا في المبرهنة (٢,٢١) أن المجموعة المرتبة جزئياً $(S(G), \leq)$ شبكية . نختتم هذا البند ببرهان أن المجموعة المرتبة جزئياً $(N(G), \leq)$ شبكية قياسية حيث $N(G)$ هي مجموعة جميع الزمر الجزئية الناعمية من G .

مبرهنة (٣,٢٤)

المجموعة المرتبة جزئياً $(N(G), \leq)$ شبكية قياسية .

البرهان

بطريقة مماثلة تماماً للمبرهنة (٢,٢١) نستطيع البرهان على أن $(N(G), \leq)$ شبكية . ولإنهاء البرهان يكفي أن نثبت أنها تحقق قانون القياس . تذكر أن $H \wedge K = H \cap K$ وأن $H \vee K = HK = \langle H \cup K \rangle$. لنفرض إذن أن $H, K, L \triangleleft G$ حيث $H \leq K$. لذا فإن المطلوب إثباته هو :

$$K \cap (HL) = H(K \cap L)$$

من الواضح أن $H(K \cap L) \subseteq K \cap (HL)$. ولبرهان الاحتواء الآخر ، نفرض أن $x \in K \cap (HL)$. إذن ، $x \in K$ و $x = hk \in HL$. بما أن $h \in H$ وأن $H \leq K$ فإن $h \in K$. ولذا فإن $x = hk \in H(K \cap L)$. وبالتالي فإن : $k = xh^{-1} \in K$.

(٣,٣,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $x^2 \in H$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $H \triangleleft G$.

الحل

لنفرض أن $g \in G$ وأن $h \in H$. بما أن $h^{-1}, g^{-2}, (gh)^2 \in H$ فإن :

$$ghg^{-1} = ghgh(gh)^{-1}g^{-1} = ghghh^{-1}g^{-1}g^{-1} = (gh)^2h^{-1}g^{-2} \in H$$

و بالتالي فإن $H \triangleleft G$.

تمرين (٢)

لتكن $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية الفعلية الناعمية من الزمرة G حيث $G = \bigcup_{i \in I} H_i$ و $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$. أثبت أن G زمرة إبدالية.

الحل

لنفرض أن $x, y \in G$. بما أن $G = \bigcup_{i \in I} H_i$ فإنه يوجد $i, j \in I$ حيث $x \in H_i$ و $y \in H_j$. إذا كان $i \neq j$ فإن $H_i \cap H_j = \{e\}$. وبما أن $H_i \triangleleft G$ و $H_j \triangleleft G$ فإن $x^{-1}y^{-1}xy \in H_i \cap H_j$ ولذا فإن $x^{-1}y^{-1}xy = e$. أي أن $xy = yx$. لنفرض إذن، أن $i = j$. عندئذ، $x, y \in H_i$. بما أن $H_i < G$ فإنه يوجد $z \in G$ حيث $z \notin H_i$. ومنه فإن $zx \notin H_i$. إذن، $zx \in H_k$ حيث $k \neq i$. وكما بينا في الفقرة السابقة فإن $(zx)y = y(zx)$. الآن:

$$z(xy) = (zx)y = y(zx) = (yz)x = (zy)x = z(yx)$$

وبالتالي فإن $xy = yx$. أي أن G إبدالية Δ

تمرين (٣)

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ولتكن $H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$.

(أ) أثبت أن $H_G \triangleleft G$.(ب) إذا كانت $K \leq H$ حيث $K \triangleleft G$ فأثبت أن $K \leq H_G$.

(ج) إذا كانت $G = GL(2, \mathbb{Q})$ وكانت $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, ab \neq 0 \right\}$ فأثبت أن

$$H_G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}^* \right\}$$

الحل

(أ) بما أن $g^{-1}Hg$ زمرة جزئية من G لكل $g \in G$ فإن $H_G \leq G$.لنفرض الآن أن $x \in H_G$ وأن $y \in G$. عندئذ، $x \in g^{-1}Hg$ لكل $g \in G$. ولذا فإن

$$y^{-1}xy \in y^{-1}(g^{-1}Hg)y = (gy)^{-1}H(gy)$$

وبالتالي فإن $H_G \triangleleft G$.

(ب) لنفرض أن $K \leq H$ وأن $K \triangleleft G$. وليكن $k \in K$. بما أن $K \triangleleft G$ فإن $gkg^{-1} \in K$ لكل $g \in G$. ولذا فإن $k \in g^{-1}Kg \subseteq g^{-1}Hg$. ونستنتج أن $k \in H_G$.

(ج) لنفرض أن $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}^* \right\}$. من الواضح أن $K \triangleleft GL(2, \mathbb{Q})$. ولذا باستخدام

الفقرة (ب) يكون $K \subseteq H_G$. لنفرض الآن أن $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H_G$. عندئذ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H_G \subseteq H$$

ولذا فإن $a-b=0$. أي أن $a=b$. ومنه فإن $x \in K$ وبالتالي فإن $\Delta K = H_G$

تمارين (٣, ٣)

(١) إذا كانت $H = \{ e, (1 \ 2) \circ (3 \ 4) \}$ فهل $H \triangleleft A_4$ ؟

(٢) إذا كانت $H \triangleleft S_3$ وكانت H تحتوي على عنصر رتبته 2 فأثبت أن $H = S_3$.

(٣) أثبت أن $S_4 \triangleleft K = \{ e, (1 \ 2) \circ (3 \ 4), (1 \ 3) \circ (2 \ 4), (1 \ 4) \circ (2 \ 3) \}$.

(٤) لنفرض أن لدينا المجموعات الجزئية التالية من $GL(2, \mathbb{R})$:

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}, K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\}, H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(ب) أثبت أن $H \triangleleft G$ وأن $L \triangleleft H$

(أ) أثبت أن $G = H \cup K \leq GL(2, \mathbb{R})$

(د) هل $L \triangleleft G$ ؟

(ج) هل $K \leq G$ ؟

(٥) إذا كانت $H \leq G$ و $K \triangleleft G$ فأثبت أن $H \cap K \triangleleft H$. هل $H \cap K \triangleleft G$ ؟

(٦) إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً وكانت $H \triangleleft G_1$ فأثبت أن $\varphi(H) \triangleleft \varphi(G_1)$.

(٧) إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً وكانت $H \triangleleft G_2$ فأثبت أن $\varphi^{-1}(H) \triangleleft G_1$.

(٨) إذا كانت كل زمرة جزئية دورية من الزمرة G ناظرية فأثبت أن كل زمرة جزئية من G ناظرية .

(٩) إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من G تحقق $xy \in H$ لكل $x, y \in G - H$ فأثبت أن $H \triangleleft G$.

(١٠) لتكن H زمرة جزئية فعلية من G وليكن $a \in G - H$. إذا كان $x \in H$ أو $xH = aH$ لكل $x \in G$ فثبت أن $H \triangleleft G$.

(١١) لتكن $H \leq G$. ولنفرض أنه لكل $a, b \in G$ ، إذا كان $ab \in H$ فإن $ba \in H$. أثبت أن $H \triangleleft G$.

(١٢) إذا كانت $H \leq G$ فثبت أن $H \triangleleft G$ إذا وفقط إذا كان $xH = hxH$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(١٣) إذا كانت $H \triangleleft G$ وكان $|H| = 2$ فثبت أن $H \subseteq Z(G)$.

(١٤) أثبت أن S_3 لا تحتوي على زمرة جزئية ناظرية رتبها 2 [إرشاد : استخدم تمرين (١٣)].

(١٥) أثبت أن A_4 هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_4 التي دليلها 2.

(١٦) لنفرض أن G زمرة تحتوي على زمرة جزئية رتبها m . ولتكن $\{H_i : i \in I\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية من G ذات الرتبة m . أثبت أن $\bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G$.

(١٧) إذا كان $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$ حيث $H \cap K = \{e\}$ فثبت أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$.

(١٨) لتكن $H \leq G$. ولنفرض أن لكل $a, b \in G$ تكون $(aH)(bH)$ مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئية H في G . أثبت أن $H \triangleleft G$.

(١٩) إذا كان $H \triangleleft G$ وكان $K \leq G$ فثبت أن $[HK : H] = [K : H \cap K]$.

(٢٠) نقول إن الزمرة G غير قابلة للاختزال جزئياً (subdirectly irreducible) إذا كان تقاطع جميع الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة الناظرية من G لا يساوي العنصر المحايد. أثبت أن كل من الزمر D_3, D_4, Q_8 غير قابلة للاختزال جزئياً. هل الزمرة T غير قابلة للاختزال جزئياً؟

(٢١) لتكن G زمرة ولتكن θ علاقة تكافؤ على G . نقول إن θ علاقة تطابق (congruence) إذا تحقق ما يلي : لكل $a, b, c \in G$ إذا كان $a\theta b$ فإن $ac\theta bc$ وإن $ca\theta cb$.

لنفرض الآن أن $H \triangleleft G$ والعلاقة θ_H معرفة على G كالتالي : $a\theta_H b$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$ لكل $a, b \in G$. أثبت أن :

(أ) θ_H علاقة تطابق على G

(ب) $[e] = H$

(٢٢) لتكن θ علاقة تطابق على G . أثبت أن :

(أ) $[e] \triangleleft G$ (ب) $a\theta b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in [e]$.

(٢٣) بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة .

(أ) إذا كانت $H \leq G$ وكانت H إبدالية فإن $H \triangleleft G$.

(ب) إذا كانت $H \leq G$ وكانت G إبدالية فإن $N(H) = G$.

(ت) إذا كانت $H \leq K \leq G$ وكانت $H \triangleleft G$ فإن $H \triangleleft K$.

(ث) توجد زمرة غير إبدالية G جميع زمريها الجزئية ناظمية .

(ج) إذا كانت كل من H, K, L زمرة جزئية ناظمية من G فإن $H(K \cap L) \triangleleft G$.

(ح) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية G فإن $[G:H] = 2$.

(خ) إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً وكانت $H \triangleleft G_1$ فإن $\varphi(H) \triangleleft G_2$.

(د) إذا كانت $H \triangleleft G$ فإن $xhx \in H$ لكل $x \in G$ وكل $h \in H$.

(ذ) A_4 تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبته 2 .

(ر) توجد زمرة جزئية ناظمية وحيدة من S_4 رتبته 12 .

(٣,٤) الضرب المباشر للزمر

Direct Product of Groups

إذا كانت $G_1, G_2, \dots, G_n$ زمراً فلقد برهنا في الفصل الثاني (مبرهنة (٢,١٠)) أن

$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ زمرة حيث العملية الثنائية المعرفة على G هي :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

تسمى الزمرة G زمرة الضرب المباشر الخارجي (external direct product) للزمر $G_1, G_2, \dots, G_n$.

في هذا البند ندرس هذه الزمرة بشيء من التفصيل . كذلك نبين كيفية تفريق أي زمرة كحاصل ضرب مباشر لبعض زمريها الجزئية . هذا التفريق على قدر كبير من الأهمية لأنه يساعدنا على تصنيف الزمر ومنها الإبدالية .

تزودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب رتبة عنصر في زمرة الضرب المباشر الخارجي

باستخدام رتب إحداثيات هذا العنصر .

مبرهنة (٣,٢٥)

إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ وكان $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in G$ حيث $o(a_i) = r_i$ لكل $1 \leq i \leq n$ فإن $o(a) = \text{lcm}(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على n .

لنفرض أولاً أن $n=2$ وأن $a = (a_1, a_2)$ حيث $o(a_1) = r_1$ ، $o(a_2) = r_2$ ولنفرض أن $r = \text{lcm}(r_1, r_2)$. عندئذ ، $a^r = (a_1^r, a_2^r) = (e_1, e_2)$. ولذا فإن $m = o(a)$ يقسم r . أيضاً $a^m = (a_1^m, a_2^m) = (e_1, e_2)$. ولذا فإن $a_1^m = e_1$ وإن $a_2^m = e_2$. إذن ، r_1 يقسم m و r_2 يقسم m . ومنه فإن r يقسم m . إذن ، $m = r$. أي أن $o(a) = \text{lcm}(r_1, r_2)$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة عند $n-1$. وليكن $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in G$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن : $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in G_1 \times \dots \times G_{n-1}$ و $a_n \in G_n$. ولذا فإن $o(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \text{lcm}(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$.

◆ وبالتالي فإن العبارة صحيحة عند n . $o(a) = \text{lcm}(\text{lcm}(r_1, \dots, r_{n-1}), r_n) = \text{lcm}(r_1, r_2, \dots, r_n)$

مثال (٣,٤٣)

احسب رتبة العنصر $([8], [4], [10]) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$.

الحل

$$\text{لاحظ أن : } o([4]) = \frac{60}{\gcd(60, 4)} = 15 \quad , \quad o([8]) = \frac{12}{\gcd(12, 8)} = 3$$

$$\square \quad o([8], [4], [10]) = \text{lcm}(3, 15, 12) = 60 \quad , \quad \text{إذن} \quad o([10]) = \frac{24}{\gcd(24, 10)} = 12$$

مثال (٣,٤٤)

جد جميع عناصر $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ التي رتبة كل منها 3 .

الحل

لنفرض أن $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ حيث $o(a) = 3$. إذن ، باستخدام المبرهنة(٣,٢٥) نجد أن $\text{lcm}(o(a_1), o(a_2)) = 3$. ولذا فإن لدينا الحالات التالية :(أ) $o(a_1) = o(a_2) = 3$. في هذه الحالة $a_1 = [6]$ أو $a_1 = [3]$ و $a_2 = [2]$ أو $a_2 = [1]$.إذن ، $a = ([3], [1])$ أو $a = ([3], [2])$ أو $a = ([6], [1])$ أو $a = ([6], [2])$.(ب) $o(a_1) = 3, o(a_2) = 1$. في هذه الحالة $a = ([3], [0])$ أو $a = ([6], [0])$.(ج) $o(a_1) = 1, o(a_2) = 3$. في هذه الحالة $a = ([0], [1])$ أو $a = ([0], [2])$ □

مبرهنة (٣,٢٦)

إذا كانت كل من $G = \langle a \rangle$ و $H = \langle b \rangle$ زمرة دورية منتهية من الرتبة m و n على التوالي فإن $G \times H$ زمرة دورية إذا وفقط إذا كان $\text{gcd}(m, n) = 1$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $G \times H$ زمرة دورية (لاحظ أن $|G \times H| = mn$) . ولنفرض أن $\text{gcd}(m, n) = d > 1$.

الآن :

$$o(b^{n/d}) = \frac{n}{\text{gcd}(n, n/d)} = \frac{n}{n/d} = d \text{ و } o(a^{m/d}) = \frac{m}{\text{gcd}(m, m/d)} = \frac{m}{m/d} = d$$

وعليه فإن كل من $\langle (b^{n/d}, e) \rangle$ و $\langle (a^{m/d}, e) \rangle$ زمرة جزئية من الزمرة الدورية $G \times H$ رتبتهما d وهذامستحيل . إذن ، $\text{gcd}(m, n) = 1$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $\text{gcd}(m, n) = 1$. عندئذ:

$$\blacklozenge \quad G \times H = \langle (a, b) \rangle \text{ ولذا فإن } o(a, b) = \text{lcm}(m, n) = mn = |G \times H|$$

يستخدم الاستقراء الرياضي نحصل على التعميم التالي للمبرهنة (٣,٢٦)

(نتيجة ٣, ٢٧)

لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ زمر دورية منتهية رتبها $m_1, m_2, \dots, m_n$ على التوالي . عندئذ ،

◆ $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ زمرة دورية إذا وفقط إذا كان $\gcd(m_i, m_j) = 1$ لكل $i \neq j$

وبصورة خاصة لدينا :

(نتيجة ٣, ٢٨)

إذا كان $m = n_1 n_2 \dots n_k$ فإن :

◆ $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(n_i, n_j) = 1$ لكل $i \neq j$

(نتيجة ٣, ٢٩)

إذا كان $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ هو تحليل العدد n إلى قوى عوامله الأولية حيث $p_1, p_2, \dots, p_k$ أعداد

أولية جميعها مختلفة فإن : $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$

مثال (٣, ٤٥)

باستخدام المبرهنة (٣, ٢٦) ونتائجنا نجد أن :

$$\square \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}$$

نتقل الآن إلى مفهوم ضرب مباشر آخر للزمر .

تعريف (٣, ٨)

نقول إن G هي زمرة الضرب المباشر الداخلي (internal direct product) للزمر الجزئية النظامية

$H_1, H_2, \dots, H_n$ من G إذا كان لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ ، $1 \leq i \leq n$ حيث

$$a = a_1 a_2 \dots a_n$$

تزودنا المبرهنة التالية بتعريف مكافئ لزمرة الضرب المباشر الداخلي .

مبرهنة (٣,٣٠)

تكون الزمرة G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية النظامية $H_1, H_2, \dots, H_n$ من G إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$G = H_1 H_2 \dots H_n \quad (أ)$$

$$H_i \cap (H_1 H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n) = \{e\} \quad \text{لكل } 1 \leq i \leq n \quad (ب)$$

البرهان

لنفرض أولاً أن G هي زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية النظامية $H_1, H_2, \dots, H_n$ من G . ولنفرض أن $a \in G$. إذن، يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ لكل $i=1, \dots, n$ حيث $a = a_1 a_2 \dots a_n$. ومنه فإن $G = H_1 H_2 \dots H_n$. لنفرض الآن أن $a \in H_i \cap (H_1 H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n)$. عندئذ،

$$a = a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n \quad \text{حيث } a_j \in H_j \text{ و } j \neq i. \text{ ولذا فإن}$$

$$a = e \quad \text{وباستخدام الوحدة نجد أن } a = e e \dots e = a_1 a_2 \dots a_{i-1} e a_{i+1} \dots a_n$$

ولبرهان العكس نفرض أن الشرطين (أ) و (ب) محققان. عندئذ، $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$. ولذا فإنه لكل $x \in H_i$ وكل $y \in H_j$ نجد أن : $x^{-1} y^{-1} x y \in H_i \cap H_j = \{e\}$ (لأن $H_i \triangleleft G$)

و $H_j \triangleleft G$. أي أن $xy = yx$. الآن نفرض أن :

$$a = a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n \quad \text{حيث } a_i, b_i \in H_i \text{ لكل } i=1, 2, \dots, n. \text{ إذن}$$

$$e = a^{-1} a = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 b_2 \dots b_n = a_1^{-1} b_1 a_2^{-1} b_2 \dots a_n^{-1} b_n$$

ذلك لأن $xy = yx$ لكل $x \in H_i$ ، $y \in H_j$ ، $(i \neq j)$. ومنه :

$$b_i^{-1} a_i = a_1^{-1} b_1 \dots a_{i-1}^{-1} b_{i-1} a_{i+1}^{-1} b_{i+1} \dots a_n^{-1} b_n \in H_i \cap (H_1 H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_n) = \{e\}$$

إذن، $a_i = b_i$ لكل $i=1, 2, \dots, n$. وبالتالي فإن G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر

$$\blacklozenge H_1, H_2, \dots, H_n$$

المبرهنة التالية تبين لنا إمكانية اعتبار الضرب المباشر الخارجي ضرباً مباشراً داخلياً.

مبرهنة (٣,٣١)

إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ زمرة ضرب مباشر خارجي وكانت :

$$H_i = \{(e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) : a_i \in G_i\} \text{ لكل } 1 \leq i \leq n \text{ فإن :}$$

$$(أ) \quad 1 \leq i \leq n \text{ لكل } H_i \triangleleft G \quad (ب) \quad H_i \cong G_i \text{ لكل } 1 \leq i \leq n$$

(ج) G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية النظامية $H_1, H_2, \dots, H_n$
البرهان

(أ) بما أن $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in H_i$ فإن $H_i \neq \emptyset$ لنفرض أن :

عندئذ : $a = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n), b = (e_1, \dots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \in H_i$

ولذا فإن $ab^{-1} = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i b_i^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \in H_i$ وإذا كان $g = (g_1, \dots, g_n) \in G$ فإن :

$$gag^{-1} = (g_1 e_1 g_1^{-1}, \dots, g_{i-1} e_{i-1} g_{i-1}^{-1}, g_i a_i g_i^{-1}, g_{i+1} a_{i+1} g_{i+1}^{-1}, \dots, g_n e_n g_n^{-1})$$

$$= (e_1, \dots, e_{i-1}, g_i a_i g_i^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \in H_i$$

ولذا فإن $H_i \triangleleft G$

(ب) ليكن $\varphi: G_i \rightarrow H_i$ التطبيق المعرف بالقاعدة : $\varphi(a_i) = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ لكل $a_i \in G_i$ من السهل أن نرى أن φ تماثل . ولذا فإن $G_i \cong H_i$

(ج) لنفرض أن $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in G$ وأن $h_i = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \in H_i$ عندئذ ،
من الواضح أن $a = h_1 h_2 \dots h_n$. ولإثبات الوحداية نفرض أيضاً أن $a = k_1 k_2 \dots k_n$ حيث
عندئذ ، $k_i = (e_1, \dots, b_i, \dots, e_n) \in H_i$

$$(a_1, \dots, a_n) = h_1 h_2 \dots h_n = a = k_1 k_2 \dots k_n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

ولذا فإن $a_i = b_i$ لكل i . ومنه فإن $h_i = k_i$ لكل i ◆

نبرهن الآن الاتجاه الآخر . أي أننا سنثبت أنه إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر
الجزئية النظامية $H_1, H_2, \dots, H_n$ فإنه من الممكن النظر إليها على أنها زمرة ضرب مباشر خارجي للزمر
 $H_1, H_2, \dots, H_n$

مبرهنة (٣، ٣٢)

إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية النظامية $H_1, H_2, \dots, H_n$ فإن
 $G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$

البرهان

لنفرض أن $a \in G$. بما أن G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناطمية $H_1, H_2, \dots, H_n$ فإنه يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ لكل $1 \leq i \leq n$ حيث $a = a_1 a_2 \dots a_n$. ليسكن $\varphi: G \rightarrow H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. من الواضح أن φ معرف تعريفاً حسناً وشاملاً. وبما أن تمثيل a وحيد فإن φ أحادي. وأخيراً φ تشاكل لأنه لو كان

حيث $a = a_1 a_2 \dots a_n, b = b_1 b_2 \dots b_n \in G$ فإن :

$$ab = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n = a_1 b_1 a_2 \dots a_n b_n$$

(لأن $xy = yx$ لكل $x \in H_i$ و $y \in H_j$ ، $i \neq j$). إذن ،

$$\blacklozenge \varphi(ab) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n) = (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = \varphi(a)\varphi(b)$$

ملحوظة

من المبرهنتين (٣،٣١) و (٣،٣٢) نجد أن مفهومي الضرب المباشر الداخلي والخارجي لعدد منته من الزمر متماثلان ولذا فإننا من الآن فصاعداً سنكتب $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناطمية $H_1, H_2, \dots, H_n$.

تعريف (٣،٩)

نقول إن الزمرة G متحللة (decomposable) إذا كانت $G = H \times K$ حيث كل من G و K زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G . ونقول إن G غير متحللة (indecomposable) إذا لم تكن متحللة. أي إذا كان :

$$G = H \times K \Rightarrow H = \{e\} \text{ أو } K = \{e\}$$

مثال (٣،٤٦)

S_3 غير متحللة. في الحقيقة، إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من S_3 فإما $H \cong \mathbb{Z}_2$ أو إن $H \cong \mathbb{Z}_3$.

ولكن $S_3 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ $\square$

مثال (٣, ٤٧)

$(\mathbb{Q}, +)$ غير متحللة . لأنه لو كانت $\mathbb{Q} = H \times K$ حيث $H \neq \{0\}$ و $K \neq \{0\}$ فإنه يوجد

$$0 \neq \frac{a}{b} \in H \text{ و } 0 \neq \frac{r}{s} \in K . \text{ بما أن } H \leq \mathbb{Q} \text{ و } K \leq \mathbb{Q} \text{ فإننا نجد أن :}$$

$$as\left(\frac{r}{s}\right) = ar \in K \text{ و أن } rb\left(\frac{a}{b}\right) = ra \in H$$

إذن ، $H \cap K \neq \{0\}$ وهذا مستحيل . وبالتالي فإن $\mathbb{Q}$ غير متحللة $\square$

مبرهنة (٣, ٣٣)

$\mathbb{Z}_n$ غير متحللة إذا وفقط إذا كان $n = p^k$ حيث p عدد أولي و $k \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbb{Z}_n$ غير متحللة . ولنفرض لغرض التناقض أن $n = p^k m$ حيث $\gcd(p, m) = 1$. إذن ،

نستطيع إيجاد زميرتين جزئيتين H و K من $\mathbb{Z}_n$ حيث $|H| = m$ و $|K| = p^k$. وبما أن $H \cap K = \{0\}$

فإن $\mathbb{Z}_n \cong H \times K$ وهذا مستحيل . إذن ، $n = p^k$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $n = p^k$. إذا كان $\mathbb{Z}_n = H \times K$ فإن $|H| = p^i$ و $|K| = p^j$. ولذا فإن

$H \cap K \neq \{0\}$. وهذا تناقض $\blacklozenge$

سنبرهن الآن أنه بالإمكان كتابة أي زمرة منتهية كحاصل ضرب مباشر لزمر غير متحللة ، ولكننا

نحتاج أولاً إلى المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣, ٣٤)

إذا كانت كل من G_1, G_2, G_3, G_4 زمرة فإن :

(أ) إذا كانت $G_1 \cong G_3$ و $G_2 \cong G_4$ فإن $G_1 \times G_2 \cong G_3 \times G_4$

(ج) $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$

(ب) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$

البرهان

- (أ) إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_3$ و $\psi: G_2 \rightarrow G_4$ تماثلين فإنه من الواضح أن التطبيق $\gamma: G_1 \times G_2 \rightarrow G_3 \times G_4$ المعرفة بالقاعدة $\gamma(a, b) = (\varphi(a), \psi(b))$ تماثل .
- (ب) التطبيق $\varphi: G_1 \times G_2 \rightarrow G_2 \times G_1$ المعرفة بالقاعدة $\varphi(a, b) = (b, a)$ تماثل .
- (ج) التطبيق $\varphi: G_1 \times (G_2 \times G_3) \rightarrow G_1 \times G_2 \times G_3$ المعرفة بالقاعدة :
- ◆ تماثل $\varphi[(a_1, (a_2, a_3))] = (a_1, a_2, a_3)$

مبرهنة (٣, ٣٥)

إذا كانت G زمرة منتهية فإن G زمرة ضرب مباشر لزمر غير متحللة .

البرهان

إذا كانت $G = \{e\}$ فإن G غير متحللة ونكون قد أنهينا . لنفرض إذن ، أن $G \neq \{e\}$ ولنفرض أن $|G| = n$. نستخدم الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n = 2$. نفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر ذوات رتب أصغر من n . إذا كانت G غير متحللة فإن العبارة صحيحة . نفرض إذن أن $G = G_1 \times G_2$ حيث $|G_1|, |G_2| < n$. باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع إيجاد زمرة $H_1, H_2, \dots, H_k$ و $K_1, K_2, \dots, K_m$ غير متحللة حيث $G_1 \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$ و $G_2 \cong K_1 \times K_2 \times \dots \times K_m$. إذن ،

◆ $G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k \times K_1 \times K_2 \times \dots \times K_m$

نقدم الآن المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية

(Fundamental Theorem of Finite Abelian Groups)

والتي نوجل برهانها إلى الفصل السادس (أنظر مبرهنة (٦, ٧) والنتيجة التي تليها) .

مبرهنة (٣, ٣٦) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإن G ضرب مباشر لزمر دورية رتبة كل منها قوة لعدد أولي p . وعلاوة على ذلك فإن طريقة كتابة G كضرب مباشر وحيدة باستثناء الترتيب

◆

إذا كان $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$ هو تحليل n إلى قوى عوامله الأولية المختلفة فإننا قد بينا في النتيجة (٣, ٢٩) أن : $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_t^{n_t}}$ ولذا فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٣, ٣٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه توجد أعداد صحيحة $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ وحيدة (باستثناء الترتيب) حيث $p_1, \dots, p_k$ أعداد أولية (ليست بالضرورة مختلفة) وحيث $s_1, \dots, s_k$ أعداد صحيحة موجبة (ليست بالضرورة مختلفة) بحيث يكون : $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ $\blacklozenge$ تسمى الأعداد $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ القواسم البدائية (elementary divisors) للزمرة G .

مثال (٣, ٤٨)

جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 720 .

الحل

لاحظ أن $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. ولذا فإن مجموعات القواسم البدائية هي :

$$2^4, 3^2, 5$$

$$2, 2^3, 3^2, 5$$

$$2^2, 2^2, 3^2, 5$$

$$2, 2, 2^2, 3^2, 5$$

$$2, 2, 2, 2, 3^2, 5$$

$$2^4, 3, 3, 5$$

$$2, 2^3, 3, 3, 5$$

$$2^2, 2^2, 3, 3, 5$$

$$2, 2, 2^2, 3, 3, 5$$

$$2, 2, 2, 2, 3, 3, 5$$

ولذا فإن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 720 هي :

$$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\square \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

لقد بينا في المثال (٢,٥) أن $(U_n, \cdot)$ حيث $U_n = \{[a] \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$ زمرة إبدالية.

والمرهنة التالية التي يمكن إيجاد برهانها في كتب نظرية الأعداد (أنظر [18]) تبين لنا متى تكون U_n دورية .

مرهنة (٣,٣٨)

تكون الزمرة U_n دورية إذا وفقط إذا كان $n = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$ حيث p عدد أولي فردي

و $k \in \mathbb{Z}^+$ ♦

سنبين الآن كيفية استخدام المرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية لكتابة U_n كحاصل ضرب

مباشر لزمرة دورية .

مرهنة (٣,٣٩)

إذا كان $\gcd(m, n) = 1$ فإن $U_{mn} \cong U_m \times U_n$.

البرهان

ليكن $\varphi : U_{mn} \rightarrow U_m \times U_n$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n)$. حسن

التعريف لأن $[a]_{mn} \in U_{mn}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(a, mn) = 1$. وهذا يجعل

$\gcd(a, n) = \gcd(a, m) = 1$. فيكون $[a]_m \in U_m$ و $[a]_n \in U_n$. φ تشاكل لأن :

$$\begin{aligned}\varphi([a]_{mn}, [b]_{mn}) &= \varphi([ab]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) \\ &= ([a]_m [b]_m, [a]_n [b]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) \\ &= \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})\end{aligned}$$

φ أحادي لأنه لو كان $[x]_{mn} \in \text{Ker } \varphi$ فإن $([x]_m, [x]_n) = ([1]_m, [1]_n)$ ومنه فإن $m \mid (x-1)$ و $n \mid (x-1)$. وبما أن $\gcd(m, n) = 1$ فإننا نجد أن $mn \mid (x-1)$ مما يجعل $[x]_{mn} = [1]_{mn}$. وأخيراً φ شامل لأنه لو كان $([a]_m, [b]_n) \in U_m \times U_n$ فإنه لكون $\gcd(m, n) = 1$ نجد استناداً إلى مبرهنة الباقي الصينية (أنظر [2]) عدداً x بحيث يكون $[x]_m = [a]_m$ و $[x]_n = [b]_n$ وعليه فإن $\varphi([x]_{mn}) = ([a]_m, [b]_n)$ $\blacklozenge$ $U_{mn} \cong U_m \times U_n$ وبالتالي نخلص إلى أن

باستخدام المبرهنة (٣٩، ٣) والاستقراء الرياضي نحصل مباشرة على النتيجة التالية :

نتيجة (٤٠، ٣)

(أ) إذا كان $m = n_1 n_2 \dots n_k$ حيث $\gcd(n_i, n_j) = 1$ لكل $i \neq j$ فإن

$$U_m \cong U_{n_1} \times U_{n_2} \times \dots \times U_{n_k}$$

(ب) إذا كان $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ هو تحليل m إلى قوى عوامله الأولية

$$\blacklozenge U_m = U_{p_1^{k_1}} \times U_{p_2^{k_2}} \times \dots \times U_{p_t^{k_t}}$$

ملحوظات

(١) إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن دالة أويلر ويرمز لها بالرمز $\varphi(n)$ وتعرف على أنها رتبة الزمرة U_n . أي عدد الأعداد الموجبة الأولية نسبياً مع n والتي لا تزيد عن n .

(٢) لاحظ أن $U_2 \cong \mathbb{Z}_1$ وأن $U_4 \cong \mathbb{Z}_2$. وبما أن U_{p^n} دورية من الرتبة $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ حيث

p عدد أولي فردي فإن $U_{p^n} \cong \mathbb{Z}_{p^n - p^{n-1}}$. ومن المعلوم أيضاً (أنظر [18]) أن $U_{2^n} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}$

حيث $n \geq 3$. وبالتالي نستطيع التعبير عن الزمرة U_n كحاصل ضرب مباشر لزمر دورية ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثال (٣, ٤٩)

أكتب الزمرة U_{720} على صورة ضرب مباشر لزمر دورية .

الحل

بما أن $720 = 16 \times 9 \times 5$ فإن $U_{720} \cong U_{16} \times U_9 \times U_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ □

مثال (٣, ٥٠)

أثبت أن U_{65} تحتوي زمرة جزئية تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

الحل

لاحظ أن $U_{65} \cong U_5 \times U_{13} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ ولذا فإن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \{[0]\}$ زمرةجزئية من U_{65} تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ □

ننهي هذا البند بتصنيف بعض الزمر ذات الرتب الصغيرة .

مبرهنة (٣, ٤١)

إذا كانت G زمرة من الرتبة $2p$ حيث p عدد أولي فردي فإن $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ أو أن $G \cong D_p$.

البرهان

لنفرض أولاً أن G إبدالية . إذن باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد أن

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$$

لنفرض الآن أن G غير إبدالية . بما أن $|G|$ زوجي فإنه يوجد $e \neq b \in G$ حيث $o(b) = 2$. إذا كانت جميع عناصر G (عدا المحايد) من الرتبة 2 فإن G إبدالية . لذافإنه يوجد $a \in G$ حيث $o(a) \neq 2$. باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن $o(a) = 2p$ أو أن $o(a) = p$. إذا كان $o(a) = 2p$ فإن $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_{2p}$. إذن ، $o(a) = p$. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$. بما أن $[G:H] = 2$ فإن $H \triangleleft G$. إذن ، $bab = bab^{-1} \in H$. ولذا فإن $bab = a^i$ حيث $0 \leq i < p$. الآن ، $(bab)^i = (bab^{-1})^i = ba^i b = a^{i^2}$. كذلك ، $a = ba^i b = a^{i^2}$. إذن ، $a^{i^2} = a$ ، أي أن ، $a^{i^2-1} = e$. وبما أن $o(a) = p$ فإن

$p \mid (i^2 - 1)$. إذن ، $p \mid (i-1)$ أو $p \mid (i+1)$. إذا كان $p \mid (i-1)$ فإن $i-1=0$. ومنه
 فإن $i=1$. إذن $bab = a$. أي أن $ba = ab$. ولذا فإن G تحتوي على عنصر رتبته $2p$ ومن ثم
 دورية. إذن ، $p \mid (i+1)$. ومنه فإن $i+1=0$. أي أن $bab = a^{-1}$. وبالتالي نخلص إلى
 أن $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = p$ ، $o(b) = 2$ و $ba = a^{-1}b$. إذن ، $G \cong D_p$ ♦

لدينا الآن المعلومات اللازمة لتصنيف الزمر (باستثناء التماثل) من الرتب أصغر من أو يساوي 8 .

مبرهنة (٤٢ ، ٣)

لتكن G زمرة حيث $|G| \leq 8$. عندئذ :

- (أ) إذا كانت $|G| = 2, 3, 5, 7$ فإن G دورية .
- (ب) إذا كانت $|G| = 4$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (ج) إذا كانت $|G| = 6$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_6$ أو أن $G \cong D_3$.
- (د) إذا كانت $|G| = 8$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_8$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ أو $G \cong D_4$ أو $G \cong Q_8$.

البرهان

- (أ) بما أن كل من 2 , 3 , 5 , 7 عدد أولي فإن G دورية.
- (ب) إذا كانت G دورية فإن $G \cong \mathbb{Z}_4$. أما إذا كانت G غير دورية فإن جميع عناصرها (عدا المحايد)
 من الرتبة 2 . إذن G إبدالية ، ولذا فإن $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (ج) نحصل عليها مباشرة من المبرهنة (٤١ ، ٣) .
- (د) لنفرض أن $|G| = 8$. إذا كانت G إبدالية فباستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية يكون
 من الواضح أن $G \cong \mathbb{Z}_8$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
 لنفرض إذن أن G غير إبدالية . بما أن $|G|$ زوجي فإنها تحتوي على عنصر من الرتبة 2 . إذا كانت جميع
 عناصر G (عدا المحايد) من الرتبة 2 فإن G إبدالية . إذن يوجد
 $a \in G$ حيث $o(a) \neq 2$. ولذا فإن 8 أو 4 $o(a) =$. إذا كان $o(a) = 8$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_8$

إذن، $o(a) = 4$. لنفرض إذن ، أن $H = \{e, a, a^2, a^3\}$. بما أن $[G : H] = 2$ فإن $H \triangleleft G$. لنفرض أن $b \notin H$. إذن $G = H \cup bH$ و $H \cap bH = \emptyset$. ولذا فإن :

$$G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

الآن ، بما أن $b \notin H$ وأن $[G : H] = 2$ فإن $o(bH) = 2$. ولذا فإن $b^2H = H$. أي أن $b^2 \in H$. إذا كان $b^2 = a$ أو $b^2 = a^3$ فإننا نجد أن $o(b) = 8$. ومن ثم فإن G دورية . إذن ، $b^2 = e$ أو $b^2 = a^2$. الآن : بما أن $H \triangleleft G$ فإن $bab^{-1} \in H$. إذا كان $bab^{-1} = e$ فإن $a = e$ وهذا تناقض . إذا كان $bab^{-1} = a^2$ فإن $ba = ab$ وهذا تناقض . إذا كان $bab^{-1} = a^3$ ، إذن ، $ba^2b^{-1} = (bab^{-1})^2 = a^4 = e$. ولذا فإن $a^2 = e$ وهذا أيضاً تناقض . إذن ، $bab^{-1} = a^3$. أي $ba = a^3b$. وبجميع ما تقدم نكون قد أثبتنا :

(أ) إما أن $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 4$ ، $o(b) = 2$ ، $ba = a^3b$ ، ولذا فإن $G \cong D_4$.

(ب) أو أن $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 4$ ، $b^2 = a^2$ ، $ba = a^3b$ ، ولذا فإن $G \cong Q_8$.

وأخيراً لاحظ أن $Q_8 \not\cong D_4$ لأن جميع زممر Q_8 الجزئية ناظرية ولكن هذا ليس صحيحاً للزمرة D_4 ♦

(١ ، ٤ ، ٣) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

ليكن $\varphi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G_1 . ولتكن $H \triangleleft G$ وليكن $\varphi|_H: H \rightarrow G_1$ تماثلاً . أثبت أن $G = H \times \text{Ker} \varphi$ وبين أن النتيجة ليست بالضرورة صحيحة إذا لم تكن H زمرة جزئية ناظرية من G .

الحل

لنفرض أن $a \in G$. عندئذٍ ، $\varphi(a) \in G_1 = \varphi(H)$. ولذا فإنه يوجد $h \in H$ حيث $\varphi(a) = \varphi(h)$. ومنه فإن $\varphi(h^{-1}a) = e_1$. أي أن $h^{-1}a \in \text{Ker} \varphi$. وبالتالي فإن : $a = hh^{-1}a \in H\text{Ker} \varphi$. أي أن $G = H\text{Ker} \varphi$. لنفرض الآن أن $a \in H \cap \text{Ker} \varphi$. عندئذٍ ، $a \in H$ و $\varphi(a) = e_1 = \varphi(e)$. وبما أن $\varphi|_H$ أحادي فإن $a = e$. وبالتالي فإن $H \cap \text{Ker} \varphi = \{e\}$. أي أن $G = H \times \text{Ker} \varphi$.

ولإثبات أن النتيجة ليست صحيحة إذا لم تكن H ناظمية في G . أعتبر $G = S_3$ و $G_1 = \mathbb{Z}_2$ و $H = \langle (1\ 2) \rangle$. لاحظ أن H ليست ناظمية في G . ليكن $\varphi : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ التطبيق المعروف بالقاعدة :

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} [0] & , \sigma = (1) \text{ أو } o(\sigma)=3 \\ [1] & , o(\sigma) = 2 \end{cases}$$

من الواضح أن $\varphi|_H : H \rightarrow \mathbb{Z}_2$ تماثل وأن $\langle (123) \rangle = \text{Ker}\varphi = \{(1), (123), (132)\}$. ولكننا بينا في المثال (٣، ٤٦) أن $S_3 \neq H \times \text{Ker}\varphi$
 تمرين (٢)

لتكن كل من H و K زمرة جزئية ناظمية من G حيث $G = H \times K$ ولتكن $N \triangleleft G$ حيث $N \cap H = N \cap K = \{e\}$. أثبت أن N زمرة إبدالية.

الحل

لاحظ أولاً أنه إذا كان $n \in N$ و $h \in H$ فإن $nhn^{-1}h^{-1} \in N \cap H = \{e\}$. ولذا فإن $nh = hn$. وبالمثل، $nk = kn$ لكل $n \in N$ و $k \in K$. الآن، لنفرض أن $a, b \in N$. بما أن $b \in G$ فإنه يوجد $h \in H$ و $k \in K$ حيث $b = hk$. ولذا فإن :

$$\Delta \quad ab = a(hk) = (ah)k = (ha)k = h(ka) = (hk)a = ba$$

تمرين (٣)

عين أربعة زمر غير متماثلة من الرتبة 66 .

الحل

كل من $\mathbb{Z}_{66}$ ، D_{33} ، $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ و $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ زمرة رتبته 66. ومن السهل أن نرى أن جميع هذه الزمر غير متماثلة. فمثلاً، $\mathbb{Z}_{66}$ إبدالية والزمر الثلاثة الأخرى غير إبدالية ولذا فإن $\mathbb{Z}_{66}$ لا تماثل أي منها. كما أن $Z(D_{33}) = \{e\}$ ولكن $Z(D_{11} \times \mathbb{Z}_3) \neq \{e\}$ و $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_{11}) \neq \{e\}$. ولذا فإن $D_{33} \not\cong D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ و $D_{33} \not\cong D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$. وأخيراً، الزمرة $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ تحتوي على 11 عنصراً من الرتبة 2 ولكن الزمرة $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ تحتوي على 3 عناصر فقط من الرتبة 2. ولذا فإن $D_{11} \times \mathbb{Z}_3 \not\cong D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$
 Δ

تمرين (٤)

ليكن $\alpha_1: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G_1 وليكن $\alpha_2: G \rightarrow G_2$ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G_2 . نقول إن α_1 و α_2 يفصلان العناصر (separate elements) إذا كان :

$$\forall a, b \in G (a \neq b \rightarrow \alpha_1(a) \neq \alpha_1(b) \vee \alpha_2(a) \neq \alpha_2(b))$$

(أ) أثبت أن التطبيق $\alpha: G \rightarrow G_1 \times G_2$ المعرف بالقاعدة $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$ تشاكلي .

(ب) أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(i) α_1 و α_2 يفصلان العناصر .

(ii) α تشاكلي أحادي .

(iii) $\text{Ker} \alpha_1 \cap \text{Ker} \alpha_2 = \{e\}$

الحل

(أ) لنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ :

$$\begin{aligned} \alpha(ab) &= (\alpha_1(ab), \alpha_2(ab)) = (\alpha_1(a)\alpha_1(b), \alpha_2(a)\alpha_2(b)) \\ &= (\alpha_1(a), \alpha_2(a)) (\alpha_1(b), \alpha_2(b)) = \alpha(a)\alpha(b) \end{aligned}$$

ولذا فإن α تشاكلي .

(ب) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : لنفرض أن α_1 و α_2 يفصلان العناصر . ولنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$.

عندئذ ، إما أن $\alpha_1(a) \neq \alpha_1(b)$ أو أن $\alpha_2(a) \neq \alpha_2(b)$. ولذا فإن $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. أي أن α أحادي .

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : لنفرض أن $a \in \text{Ker} \alpha_1 \cap \text{Ker} \alpha_2$. عندئذ ، $\alpha_1(a) = e_1$ و $\alpha_2(a) = e_2$. ومنه

فإن $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (e_1, e_2) = \alpha(e)$. وبما أن α أحادي فإن $a = e$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (i) : لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. عندئذ ، $ab^{-1} \neq e$. ومنه فإن

$ab^{-1} \notin \text{Ker} \alpha_1 \cap \text{Ker} \alpha_2$. ولذا فإن $\alpha_1(ab^{-1}) \neq e_1$ أو $\alpha_2(ab^{-1}) \neq e_2$. أي أن

$\alpha_1(a) \neq \alpha_1(b)$ أو أن $\alpha_2(a) \neq \alpha_2(b)$. وبالتالي فإن α_1 و α_2 يفصلان العناصر Δ

تمارين (٣ ، ٤)

(١) احسب رتبة كل من العناصر التالية :

- (أ) $([2],[3]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ (ب) $([2],[3]) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$
- (ج) $([8],[10]) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ (د) $([3],[10],[9]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$
- (هـ) $([3],[6],[12],[16]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{24}$
- (٢) جد جميع العناصر من الرتبة 5 في الزمرة $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_5$.
- (٣) جد زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{12}$ رتبته 24.
- (٤) جد زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{800} \times \mathbb{Z}_{200}$ تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
- (٥) أثبت أن $D_3 \times D_7 \not\cong D_{42}$.
- (٦) جد الزمرة التي تماثل $D_3 \times \mathbb{Z}_2$ من بين الزمر $\mathbb{Z}_{12}$ ، $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ ، A_4 ، D_6 .
- (٧) أثبت أن الزمرة $G = \{3^m 6^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ مع عملية الضرب تماثل الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (٨) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتب :
8, 16, 20, 32, 60, 66, 80, 240, 540, 780, 1089
- (٩) جد القواسم البدائية للزمر التالية :
- (أ) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{50}$ (ب) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_8$ (ج) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{120}$
- (١٠) هل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ زمرة دورية ؟ لماذا ؟
- (١١) هل $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{27}$ ؟ لماذا ؟
- (١٢) بين أن عدد العناصر من الرتبة 4 في الزمرة $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ يساوي عدد العناصر من الرتبة 4 في الزمرة $\mathbb{Z}_{8000000} \times \mathbb{Z}_{4000000}$.
- (١٣) احسب رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
- (١٤) جد جميع الزمر الجزئية من الرتبة 3 في الزمرة $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$.
- (١٥) جد عدد العناصر من الرتبة 15 في الزمرة $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{20}$ ، ثم جد عدد الزمر الجزئية الدورية من الرتبة 15.
- (١٦) جد زمرة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$ تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$.
- (١٧) أعط مثلاً لزمرة غير دورية G بحيث يكون $o(a) = 5$ لكل $a \in G$ ، $e \neq a$.
- (١٨) أكتب كل من U_{165} و U_{105} على صورة ضرب مباشر لزمر دورية.

- (١٩) ما هي أعلى رتبة لعناصر U_{900} ؟
- (٢٠) أثبت أن $U_{55} \cong U_{75}$ وأن $U_{144} \cong U_{140}$.
- (٢١) جد عدداً صحيحاً n بحيث تحتوي U_n على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
- (٢٢) جد عدداً صحيحاً n بحيث تحتوي U_n على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_{14}$.
- (٢٣) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 15 فأثبت أن G يجب أن تكون دورية.
- (٢٤) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 455 فأثبت أن G يجب أن تكون دورية.
- (٢٥) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة n وكان m يقسم n فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m .
- (٢٦) إذا كان $n = p_1 p_2 \dots p_i$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة وكانت G زمرة إبدالية رتبته n فأثبت أن G دورية .
- (٢٧) لتكن G زمرة إبدالية . ولتكن $H = \{e\} \cup \{x \in G : o(x) = n\}$. إذا كان n عدداً أولياً فأثبت أن $H \leq G$. هل تبقى H زمرة جزئية إذا لم يكن n أولياً؟
- (٢٨) لتكن G زمرة إبدالية منتهية . أثبت أن G ليست دورية إذا وفقط إذا كانت G تحتوي على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي .
- (٢٩) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبته p^n حيث p عدد أولي فأثبت أن رتبة كل من عناصرها قوة للعدد p .
- (٣٠) هل يبقى التمرين (٢٩) صحيحاً إذا كانت G غير إبدالية ؟
- (٣١) إذا كانت كل من G, H, K زمر إبدالية منتهية وكان $G \times K \cong H \times K$ فأثبت أن $G \cong H$.
- (٣٢) إذا كانت G زمرة غير قابلة للاختزال جزئياً فأثبت أن G غير متحللة
- (أنظر تمرين (٢٢) من تمارين (٣, ٣)) .
- (٣٣) هل عكس التمرين (٣٢) صحيحاً دائماً ؟
- (٣٤) أثبت أن كل من الزمر A_4, Q_8, D_4 غير متحللة .

(٣٥) إذا كان $K, H \leq G$ حيث $G = HK$ ، $H \cap K = \{e\}$ ، و $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$ فثبت أن $G = H \times K$.

(٣٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $H \triangleleft G$ ، $K \triangleleft G$ ، وكان $|H||K| = |G|$ وكان $H \cap K = \{e\}$ فثبت أن $G = H \times K$.

(٣٧) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $H \triangleleft G$ ، $K \triangleleft G$ ، وكان $|H||K| = |G|$ و $G = HK$ فثبت أن $G = H \times K$.

(٣٨) أعط مثلاً على زمرة G وزمر جزئية ناظرية H_1, H_2, H_3 من G حيث $G = H_1 H_2 H_3$ و $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$ ولكن $G \neq H_1 \times H_2 \times H_3$.

(٣٩) إذا كانت G زمرة وكانت $G_1 = \{ (a, a) : a \in G \}$ فثبت أن :
(أ) $G_1 \cong G$

(ب) $G_1 \triangleleft G \times G$ إذا وفقط إذا كانت G إبدالية .

(ج) إذا كانت $G = (\mathbb{R}, +)$ فكيف تصف G_1 ؟

(٤٠) إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية وكان $n \in \mathbb{Z}^+$ فثبت أن $n(G \times H) = nG \times nH$

(أنظر تمرين (٣٨) من تمارين (٢, ٢)) .

(٤١) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً خاطئة :

(أ) $(\mathbb{Z}, +)$ متحللة .

(ب) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ دورية .

(ث) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

(د) $D_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times D_4$.

(ج) إذا كان $a = ([2], [3], (1 \ 2 \ 3)) \circ (1 \ 5) \in U_{15} \times \mathbb{Z}_{10} \times S_5$ فإن $o(a) = 20$.

(ح) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 5 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبته 5 .

(خ) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 4 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبته 4 .

(د) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 6 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبته 6 .

(ذ) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 72 فإن G تحتوي على زمرة جزئية رتبته 8 .

(ر) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 72 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة رتبته 4 .

(ز) إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$ فإن $Z(G) \leq G$.

(س) إذا كانت $G = HK$ حيث $H, K \leq G$ وكان $hk \in G$ فإن $o(hk) = \text{lcm}(o(h), o(k))$.

(٣,٥) زمر خارج القسمة

Quotient Groups

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ وكانت $G/H = \{aH : a \in G\}$ فإننا نود أن نعرف عملية ثنائية على G/H بحيث نحصل على زمرة . والتعريف الطبيعي المرشح للعملية الثنائية هو: $(aH)(bH) = (ab)H$ لكل $a, b \in G$.

إن أول شيء يجب علينا القيام به هو اختبار ما إذا كان هذا التعريف يزودنا بالفعل بعملية ثنائية على G/H . أي أنه يعرف لنا تطبيقاً من $G/H \times G/H$ إلى G/H . ولكن للأسف إن هذا ليس صحيحاً لجميع الزمر الجزئية H . على سبيل المثال ، إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2) \rangle$ فإن:

$$(1\ 3) \circ H = (1\ 2\ 3) \circ H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

$$(2\ 3) \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

ولكن

$$[(1\ 3) \circ (2\ 3)] \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H \neq [(1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2)] \circ H = H$$

وللخروج من هذا المأزق ، لابد لنا من البحث عن شروط مناسبة نقيدها بالزمرة الجزئية H لنحصل على زمرة G/H . ولحسن الحظ فإن هذا القيد متوفر لدينا ونقدمه في المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣,٤٣)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $(aH)(bH) = (ab)H$ عملية ثنائية على G/H إذا وفقط إذا كانت $H \triangleleft G$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $(aH)(bH) = (ab)H$ معرفة تعريفاً حسناً (أي أنها عملية ثنائية). سنبرهن أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$. نفرض إذن، أن $x \in aH$ ، عندئذ، $xH = aH$. وبما أن العملية معرفة تعريفاً حسناً فإن: $(xH)(a^{-1}H) = (aH)(a^{-1}H)$ ولذا فإن $xa^{-1}H = H$. أي أن $xa^{-1} \in H$. ومنه فإن $x \in Ha$. ومن ناحية أخرى، إذا كان $x \in Ha$ فإن $x = ha$ حيث $h \in H$. ولذا فإن $x^{-1} = a^{-1}h^{-1} \in a^{-1}H$. أي أن $x^{-1}H = a^{-1}H$. وبما أن العملية معرفة تعريفاً حسناً فإن:

$(x^{-1}H)(aH) = (a^{-1}H)(aH)$. ولذا فإن $x^{-1}aH = H$. أي أن $x^{-1}a \in H$. ومنه فإن $x \in aH$. إذن، $aH = Ha$. وبالتالي فإن $H \triangleleft G$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $H \triangleleft G$ وأن $aH = xH$ و $bH = yH$. عندئذ، $a = xh_1$ و $b = yh_2$ حيث $h_1, h_2 \in H$. وبما أن $H \triangleleft G$ فإن $y^{-1}h_1yh_2 \in H$. إذن، $(xy)^{-1}(ab) = y^{-1}x^{-1}ab = y^{-1}x^{-1}xh_1yh_2 = y^{-1}h_1yh_2 \in H$. ولذا فإن $xyH = abH$. أي أن العملية معرفة تعريفاً حسناً. ♦

مبرهنة (٣، ٤٤)

إذا كانت $H \triangleleft G$ فإن:(أ) $(aH)(bH) = (ab)H$ زمرة حيث $G/H = \{aH : a \in G\}$ (ب) إذا كانت G إبدالية فإن G/H إبدالية.(ج) إذا كانت $G = \langle x \rangle$ دورية فإن $G/H = \langle xH \rangle$ دورية.(د) إذا كانت G منتهية فإن $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

البرهان

(أ) إذا كان $aH, bH, cH \in G/H$ فإن:

$$\begin{aligned} [(aH)(bH)](cH) &= [(ab)H](cH) = [(ab)c]H = [(a(bc))H] \\ &= (aH)[(bc)H] = (aH)[(bH)(cH)] \end{aligned}$$

ولذا فإن العملية تجميعية.

العنصر المحايد هو $eH = H$ لأنه لكل $a \in G$ لدينا :

$$(aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH)$$

وأخيراً فإن نظير العنصر aH هو $a^{-1}H$ لأن :

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = (aa^{-1})H = (aH)(a^{-1}H)$$

إذن ، G/H زمرة .

(ب) إذا كانت G إبدالية وكان $a, b \in G$ فإن :

$$(aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH)$$

ولذا فإن G/H إبدالية .

(ج) لنفرض أن $G = \langle x \rangle$. ولنفرض أن $aH \in G/H$. وبما أن $a \in G$ فإن $a = x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. إذن ، $aH = x^n H = (xH)^n$. وبالتالي فإن $G/H = \langle xH \rangle$. أي أن G/H دورية .

$$\blacklozenge \quad |G/H| = \frac{|G|}{|H|} \quad \text{فإننا نجد مباشرة أن } |G/H| = [G:H]$$

تعريف (٣,١٠)

تسمى الزمرة G/H في المبرهنة (٣,٤٤) زمرة خارج القسمة للزمرة G على H

(quotient group (or factor group) of G by H) .

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \triangleleft G$ فإن رتبة زمرة خارج القسمة G/H أصغر من رتبة G ، وفي العادة يكون تركيب زمرة خارج القسمة أبسط من تركيب الزمرة G مع أن G/H تشبه في كثير من الأوقات G ، فمثلاً G/H إبدالية (دورية) إذا كانت G كذلك . لذا ، فإن أهمية زمرة خارج القسمة تكمن في استطاعتنا الحصول على بعض الخواص الهامة للزمرة G بدراسة الزمرة الأبسط G/H . وهذا ما سنلاحظه الآن وفي بقية فصول الكتاب . وقبل تقديم بعض هذه التطبيقات ، دعنا نبين ببعض الأمثلة كيفية حساب زمر خارج القسمة .

مثال (٣,٥١)

في هذا المثال نجد عناصر الزمرة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. إنه ليس من الصعب أن يقتنع القارئ نفسه بأن المجموعات المشاركة المختلفة للزمرة $6\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ هي : $6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}, 5+6\mathbb{Z}$.

وجداول كيلبي لهذه الزمرة هو :

	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$
$6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$
$1+6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$
$2+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$
$3+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$
$4+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$
$5+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$

ومن الواضح أن التطبيق $\varphi: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a+6\mathbb{Z}) = [a]$ تماثل . وبالتالي

$$\square \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6 \quad \text{فإن}$$

مثال (٣,٥٢)

لتكن $G = \mathbb{Z}_{18}$ ولتكن $H = \langle [6] \rangle$. بما أن $H = \{[0], [6], [12]\}$ فإن $|G/H| = 6$. وبما أن

$G/H = \langle [1] + H \rangle$ دورية فإن $G/H = \langle [1] + H \rangle$. ولذا باستخدام المبرهنة (٣,٤٢) نجد أن

$$\square \quad G/H = \{H, [1]+H, [2]+H, [3]+H, [4]+H, [5]+H\} \quad \text{كما أن} \quad G/H \cong \mathbb{Z}_6$$

مثال (٣,٥٣)

لتكن $G = Q_8$ و $H = \langle a^2 \rangle = \{e, a^2\}$. عندئذ، $H \triangleleft G$ وأن Q_8/H زمرة رتبته 4.

ولذا فإن $Q_8/H \cong \mathbb{Z}_4$ أو $Q_8/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. لاحظ أن Q_8/H هي :

$$\{H = a^2H = \{e, a^2\}, aH = a^3H = \{a, a^3\}, bH = a^2bH = \{b, a^2b\},$$

$$abH = a^3bH = \{ab, a^3b\}\}$$

$$\text{كما أن : } (bH)^2 = b^2H = a^2H = H, (aH)^2 = a^2H = H,$$

$$(abH)^2 = (ab)^2H = a^2H = H$$

$$\square \quad Q_8/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{ولذا فإن} \quad 2 \text{ هو (عدا المحايد) رتبة كل من عناصرها}$$

مثال (٣,٥٤)

لتكن $G = A_4$ و $H = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4), (2\ 3) \circ (1\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4)\}$. بما أن

$$\square \quad |G/H| = 3 \quad \text{فإن} \quad G/H \text{ دورية ولذا فإن} \quad G/H \cong \mathbb{Z}_3$$

مثال (٣,٥٥)

لتكن $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$ ولتكن $H = \langle ([1], (1\ 2\ 3)) \rangle$. إذن ،

$$H = \{([0], e), ([1], (1\ 2\ 3)), ([0], (1\ 3\ 2)), ([1], e), ([0], (1\ 2\ 3)), ([1], (1\ 3\ 2))\}$$

$$\square G/H \cong \mathbb{Z}_2 \text{ أي أن } |G/H| = 2$$

(٣, ٥٦) مثال

$$\text{إذا كانت } H = \langle ([1], [1]) \rangle \leq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ فإن :}$$

$$H = \{([0], [0]), ([1], [1]), ([2], [2]), ([3], [3])\}$$

ولذا فإن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 / H \cong \mathbb{Z}_4$ زمرة من الرتبة 4. إذن، إما أن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 / H \cong \mathbb{Z}_4$ أو أن

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 / H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. وعلى أن $[0], [1] + H$ عنصر من الرتبة 4 فإن

$$\square \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 / H \cong \mathbb{Z}_4$$

(٣, ٥٧) مثال

$$\text{إذا كانت } H = \langle ([4], [4]) \rangle \leq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \text{ فإن :}$$

$$H = \{([0], [0]), ([4], [4]), ([2], [0]), ([0], [4]), ([4], [0]), ([2], [4])\}$$

ولذا فإن $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 / H$ زمرة إبدالية رتبته 8. ومن ثم فإنها تماثل $\mathbb{Z}_8$ أو $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

أو $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ولكن $[0], [3] + H$ عنصر من الرتبة 8 ولذا فإن $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 / H \cong \mathbb{Z}_8$

(٣, ٥٨) مثال

إذا كانت $H = \langle ([0], [4]) \rangle \leq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ فإن $|H| = 3$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H$ زمرة إبدالية

من الرتبة 8. وبحساب بسيط نجد أن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H$ لا تحتوي على عنصر رتبته 8 وليست جميع

$$\square \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \text{، إذن،}$$

(٣, ٥٩) مثال

إذا كانت $H = \langle ([3], [2]) \rangle \leq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ فإن $|H| = 4$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 / H$ زمرة إبدالية

من الرتبة 12. إذن فهي تماثل $\mathbb{Z}_{12}$ أو $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. ولكن $[0], [2] + H$ عنصر رتبته 4.

$$\square \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 / H \cong \mathbb{Z}_{12}$$

(٣, ٦٠) مثال

لتكن $H = \{[1], [17]\} \leq U_{32}$. لاحظ أن $U_{32} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$. ولذا فإن U_{32} / H زمرة إبدالية

من الرتبة 8. بما أن $[3]H \neq H$ فإن $([3]H)^2 = [9]H \neq H$ فإن $o([3]H) \neq 2$. ولذا فإن U_{32} / H

لا تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. كذلك من السهل أن نرى أن $o([7]H) = o([9]H) = 2$. ولذا فإنها تحتوي على زميرتين دوريتين من الرتبة 2. ومن ثم فإنها لا يمكن أن تماثل $\mathbb{Z}_8$. إذن،

$$\square U_{32}/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

مثال (٣,٦١)

إذا كانت $H = \{[1], [15]\} \leq U_{32}$ فإن $|U_{32}/H| = 8$. ولما كانت U_{32}/H إبدالية وكان

$$\square U_{32}/H \cong \mathbb{Z}_8 \text{ وبالتالي فإن } o([3]H) = 8 \text{ فإن } ([3]H)^4 = [81]H = [17]H \neq H$$

نقدم الآن بعض التطبيقات التي توضح لنا كيفية استخلاص بعض خواص زمرة G من خواص زمرة خارج القسمة G/H .

مبرهنة (٣,٤٥)

إذا كانت G زمرة حيث $G/Z(G)$ دورية فإن G إبدالية.

البرهان

لنفرض أن $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$. ولنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ، يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ حيث:

$$bZ(G) = (xZ(G))^n = x^n Z(G) \text{ و } aZ(G) = (xZ(G))^m = x^m Z(G)$$

$$\text{و } b = x^n h \text{ و } a = x^m g \text{ حيث } g, h \in Z(G) \text{، إذن،}$$

$$ab = (x^m g)(x^n h) = x^m (gx^n)h = x^m (x^n g)h$$

$$= (x^m x^n)(gh) = (x^n x^m)(hg) = (x^n h)(x^m g) = ba$$

وبالتالي فإن G إبدالية ♦

مبرهنة (٣,٤٦) [مبرهنة كوشي للزمر الإبدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية وكان p عدداً أولياً يقسم رتبة G فإن G تحتوي على عنصر رتبته p

(وبالتالي تحتوي على زمرة جزئية رتبته p).

البرهان

يستخدم الاستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G| = 2$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية المنتهية التي رتبها أصغر من رتبة $|G|$. سنبرهن الآن أن العبارة صحيحة للزمرة G . لاحظ أولاً أنه لا بد وأن تحتوي G على عنصر رتبته عدد أولي ، لأنه لو كان $a \in G$ من الرتبة n حيث n عدداً مؤلفاً فإن $n = mq$ ، q عدداً أولياً. ومن ثم فإن

$$o(a^m) = \frac{n}{\gcd(m, n)} = \frac{n}{m} = q \text{ وأن } a^m \in G$$

لنفرض إذن أن $x \in G$ رتبته عدداً أولياً q . إذا كان $q = p$ فنكون قد انتهينا. لنفرض إذن ، أن $p \neq q$. ولنفرض أن $H = \langle x \rangle$. بما أن G إبدالية فإن $H \triangleleft G$ وأن G/H زمرة. وبما أن p يقسم $|G|$ فإن p يقسم $|G/H|$. وبما أن $|G/H| < |G|$ فإننا نجد باستخدام الاستقراء الرياضي أن G/H تحتوي على عنصر aH رتبته p . إذن ، $(aH)^p = a^p H = H$ ، ولذا فإن $a^p \in H$. ومنه فإن $a^p = e$ أو أن $o(a^p) = q$ (لأن $p \neq q$). إذا كان $a^p = e$ فإن $a \in G$ رتبته p . أما إذا كان $o(a^p) = q$ فإن $(a^p)^q = (a^q)^p = e$ وبالتالي فإن ،
◆ $o(a^q) = p$

لقد سبق وأن برهنا (أنظر المبرهنة (٢,٢٦)) عكس مبرهنة لاجرانج للزمر الدورية ، وسنبرهنها الآن للزمر الإبدالية .

مبرهنة (٣,٤٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية رتبها n وكان m يقسم n فإن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m .

البرهان

يستخدم الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عندما $n = 2$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية التي رتبها أصغر من n . ولنفرض أن $n = ms$ وأن p عدداً أولياً يقسم m . إذن ، $m = rp$ حيث $r \in \mathbb{Z}$. باستخدام المبرهنة (٣,٤٦) نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية H رتبها p . وبما أن G إبدالية فإن $H \triangleleft G$. الآن :

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{n}{p} = rs$$

إذن ، r يقسم $|G/H|$. ولذا باستخدام الاستقراء نجد أن G/H تحتوي على زمرة جزئية K/H رتبها r . وبالتالي فإن $K \leq G$ وإن $|K| = |K/H||H| = rp = m$ **◆**

ندرس الآن تطبيقاً آخر على زمرة خارج القسمة .

تعريف (٣,١١)

لتكن G زمرة وليكن $a, b \in G$. يسمى العنصر $aba^{-1}b^{-1}$ مبدلاً (commutator) للعنصرين a و b . وإذا كانت $S = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$ فإن الزمرة الجزئية $\langle S \rangle$ تسمى زمرة المبدلات (commutator group) أو الزمرة المشتقة (derived group) للزمرة G وتكتب G' . لاحظ أن $(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} \in G'$. ولذا فإن عناصر G' هي حاصل ضرب مبدلات .

تزودنا المبرهنة التالية بالخواص الأساسية للزمرة G' .

مبرهنة (٣,٤٨)

(ب) G/G' زمرة إبدالية

(أ) $G' \triangleleft G$

(ج) إذا كان $H \leq G$ فإن $G' \subseteq H$ إذا وفقط إذا كانت $H \triangleleft G$ وكانت G/H إبدالية .

البرهان

(أ) لنفرض أن $x \in G$ وأن $h \in G'$. لاحظ أولاً أنه إذا كان $h = aba^{-1}b^{-1}$ فإن :

$$\begin{aligned} x^{-1}hx &= x^{-1}aba^{-1}b^{-1}x = (x^{-1}aba^{-1})(e)(b^{-1}x) = (x^{-1}aba^{-1})(xb^{-1}bx^{-1})(b^{-1}x) \\ &= ((x^{-1}a)b(x^{-1}a)^{-1}b^{-1})(bx^{-1}b^{-1}x) \in G' \end{aligned}$$

لنفرض الآن أن $h = c_1c_2 \dots c_k$ حيث c_i مبدلات . عندئذ ،

$$x^{-1}hx = x^{-1}(c_1c_2 \dots c_k)x = (x^{-1}c_1x)(x^{-1}c_2x) \dots (x^{-1}c_kx) \in G'$$

وذلك لأن كل من $x^{-1}c_kx \in G'$ ، إذن ، $G' \triangleleft G$.

(ب) لنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ ، $(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab \in G'$. ولذا فإن

$$abG' = baG' . \text{ أي أن } (aG')(bG') = (bG')(aG') . \text{ إذن ، } G/G' \text{ إبدالية .}$$

(ج) لنفرض أولاً أن $G' \subseteq H$. ولنفرض أن $a \in G$ و $h \in H$. عندئذ ، $aha^{-1}h^{-1} \in G'$.

ولذا فإن $aha^{-1}h^{-1} \in H$. ومنه فإن $aha^{-1} = (aha^{-1}h^{-1})h \in H$. إذن ، $H \triangleleft G$. ولإثبات

أن G/H إبدالية ، نفرض أن $aH, bH \in G/H$. عندئذ :

$$(aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}H$$

$$(aH)(bH) = (bH)(aH) : \text{ ولذا فإن } (aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = H$$

ولبرهان العكس ، نفرض أن $H \triangleleft G$ وان G/H إبدالية . إذن ، لكل $a, b \in G$ لدينا :

$$\blacklozenge \quad G' \subseteq H \text{ وبالتالي فإن } a^{-1}b^{-1}ab \in H . \text{ ومنه فإن } (aH)(bH) = (bH)(aH)$$

نتيجة (٣, ٤٩)

 G إبدالية إذا وفقط إذا كانت $G' = \{e\}$.

البرهان

بما أن $G \triangleleft \{e\}$ فإنه باستخدام المبرهنة (٣, ٤٨) نجد أن $G/\{e\} \cong G$ إبدالية إذا وفقط إذا كانت

$$\blacklozenge \quad G' \subseteq \{e\}$$

مثال (٣, ٦٢)

عين الزمرة المشتقة D_4' .

الحل

لاحظ أن $D_4 = \langle a, b \rangle$ حيث $a^4 = e$ ، $b^2 = e$ و $ba = a^{-1}b$. ومن السهل أن نرى أن $H = \{e, a^2\} \triangleleft D_4$. إذن ، D_4/H زمرة من الرتبة 4 . ولذا فهي إبدالية . ومن ثم فإن $D_4' \subseteq H$. إذن ، $D_4' = \{e\}$ أو $D_4' = H$. وبما أن D_4 ليست إبدالية فإن $D_4' \neq \{e\}$ وبالتالي فإن ، $D_4' = H$ $\square$

لقد بينا في المثال (٣, ٤١) أنه إذا كان $\varphi: G \rightarrow H$ تشاكل فإن $\text{Ker} \varphi \triangleleft G$ ، ووعدنا بأن نبرهن أن العكس صحيح أيضاً ، سنفي الآن بهذا الوعد .

مبرهنة (٣, ٥٠)

إذا كانت $K \triangleleft G$ فإنه يوجد تشاكل مجاله G ونواته K .

البرهان

بما أن $K \triangleleft G$ فإن G/K زمرة . ليكن $\pi: G \rightarrow G/K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\pi(a) = aK$ لكل $a \in G$. من الواضح أن π تشاكل (وفي الحقيقة غامر) . الآن :

$$a \in \text{Ker} \pi \Leftrightarrow \pi(a) = aK = K \Leftrightarrow a \in K$$

$$\blacklozenge \quad \text{إذن ، } \text{Ker} \pi = K$$

تعريف (٣, ١٢)

يسمى التشاكل الغامر π في المبرهنة (٣, ٥٠) التشاكل الطبيعي الغامر (natural epimorphism).

(Solved Exercises) تمارين محلولة (٣, ٥, ١)

تمرين (١)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}_4 \times U_4$ ، $H = \langle ([2], [3]) \rangle$ و $K = \langle ([2], [1]) \rangle$ فأثبت أن $H \cong K$ ولكن $G/H \not\cong G/K$.

الحل

من الواضح أن $|H| = |K| = 2$. ولذا فإن $H \cong K$. الآن ، G/H زمرة إبدالية من الرتبة 4 وأن $([1], [1])H = H$ ، ولذا فإن G/H دورية . أي أن $G/H \cong \mathbb{Z}_4$. كما أن G/K زمرة إبدالية من الرتبة 4 أيضاً وجميع عناصرها (عدا المحايد) من الرتبة 2 . ولذا فإن $G/K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. وبالتالي فإن $H \cong K$ ولكن $G/H \not\cong G/K$ Δ

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية غير إبدالية من الرتبة p^3 حيث p عدد أولي وليكن $Z(G) \neq \{e\}$. أثبت أن $Z(G)$ زمرة دورية .

الحل

بما أن $Z(G) \triangleleft G$ فإن $|Z(G)|$ يقسم $|G|$. ولذا فإن $|Z(G)| = p$ أو أن $|Z(G)| = p^2$. إذا كان $|Z(G)| = p^2$ فإن $|G/Z(G)| = p$. ولذا فإن $G/Z(G)$ زمرة دورية . ومنه فإن G إبدالية وهذا مستحيل . إذن ، $|Z(G)| = p$. وبالتالي فإن $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \triangleleft G$ وليكن $x \in G$ حيث $\gcd(o(x), |G/H|) = 1$. أثبت أن $x \in H$.

الحل

بما أن $\gcd(o(x), |G/H|) = 1$ فإن $\gcd(o(xH), |G/H|) = 1$. ولكن $o(xH)$ يقسم $|G/H|$. ولذا فإن $o(xH) = 1$ ومنه فإن $xH = H$. وبالتالي فإن $x \in H$ Δ

(٤) تمرين

إذا كانت $G = A_5$ فأثبت أن G لا تحتوي على أي زمرة جزئية ناظمية من الرتب $3, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$.

الحل

لاحظ أولاً أن A_5 تحتوي على 24 عنصراً من الرتبة 5، 20 عنصراً من الرتبة 3، 15 عنصراً من الرتبة 2 والعنصر المحايد.

لنفرض الآن أن $H \triangleleft G$ حيث $|H| = 3, 6, 12, 15$. عندئذ، $|G/H| = 20, 10, 5, 4$.
ولنفرض أن $x \in G$ حيث $o(x) = 3$. بما أن $\gcd(o(x), |G/H|) = 1$ فإننا نجد باستخدام التمرين (٣) أن $x \in H$. وبالتالي فإن H تحتوي على جميع عناصر G من الرتبة 3. أي أن $|H| \geq 21$ وهذا تناقض. لنفرض الآن أن $H \triangleleft G$ حيث $|H| = 5, 10, 20$. ولذا فإن $|G/H| = 12, 6, 3$. ليكن $x \in G$ حيث $o(x) = 5$. بما أن $\gcd(o(x), |G/H|) = 1$ فإن $x \in H$. ولذا فإن $|H| \geq 25$ وهذا مستحيل. وأخيراً نفرض أن $H \triangleleft G$ حيث $|H| = 30$. عندئذ، $|G/H| = 2$. إذا كان $x \in G$ حيث $o(x) = 3$ أو $o(x) = 5$ فإن $\gcd(o(x), |G/H|) = 1$ ولذا فإن $x \in H$. أي أن $|H| \geq 20 + 24 + 1 = 45$ وهذا مستحيل Δ

تمارين (٣، ٥)

في التمارين من (١) إلى (١٣) استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية لتصنيف زمرة خارج القسمة المبينة:

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle ([0], [2]) \rangle$ (٢)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle ([0], [1]) \rangle$ (١)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle ([0], [1]) \rangle$ (٤)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle ([2], [3]) \rangle$ (٣)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle ([1], [2]) \rangle$ (٦)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle ([0], [2]) \rangle$ (٥)
$U_{32} / \{[1], [15]\}$ (٨)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 / \langle ([1], [2]) \rangle$ (٧)
$H = \langle ([2], [1]) \rangle$ حيث $\mathbb{Z}_4 \times U_4 / H$ (١٠)	$H = \langle ([2], [3]) \rangle$ حيث $\mathbb{Z}_4 \times U_4 / H$ (٩)
$H = \{[1], [31]\}$ حيث U_{32} / H (١٢)	$H = \langle ([2], [9]) \rangle$ حيث $\mathbb{Z}_{10} \times U_{10} / H$ (١١)
	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle ([0], [1]) \rangle$ (١٣)

هل $(\mathbb{Q}, +) / (\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Q}, +)$ ؟

(١٥) إذا كانت G_1 و G_2 زميرتين فأثبت أن $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

(١٦) جد مركز كل من الزمر التالية : D_4 ، Q_8 ، T ، $S_3 \times D_4$ ، $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

(١٧) جد الزمرة المشتقة لكل الزمر التالية : Q_8 ، $GL(2, \mathbb{R})$.

(١٨) إذا كانت $G = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_4$ فأثبت أن :

(أ) $G/H \cong \mathbb{Z}_3$ (ب) $H = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4) \rangle \triangleleft G$

(ج) $K = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4) \rangle \triangleleft H$ (د) هل $K \triangleleft G$ ؟

(١٩) إذا كانت $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 5) \circ (3\ 4) \rangle \leq S_5$ فأثبت أن :

(أ) $G/H \cong \mathbb{Z}_2$ (ب) $G/H \cong \mathbb{Z}_5$ (ج) $G \cong D_5$

(٢٠) إذا كانت $H \triangleleft G$ وكان $[G:H] = n$ فأثبت أن $a^n \in H$ لكل $a \in G$.

(٢١) إذا كانت $H \leq G$ حيث $x^2 \in H$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $H \triangleleft G$ وأن G/H إبدالية.

(٢٢) لتكن G زمرة . ولنرمز للمبدل $aba^{-1}b^{-1}$ بالرمز $[a, b]$.

(أ) أثبت أن $[a, xy] = [a, x]x[a, y]x^{-1}$ لكل $a, b, x \in G$.

(ب) إذا كان $G' \subseteq Z(G)$ وكان $a \in G$ فأثبت أن التطبيق $\phi: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة

$\phi(x) = [a, x]$ تشاكل .

(ج) جد $\text{Ker } \phi$.

(٢٣) إذا كانت $H \triangleleft G$ حيث $H \cap G' = \{e\}$ فأثبت أن :

(أ) $H \subseteq Z(G)$ (ب) $Z(G/H) = Z(G)/H$

(٢٤) إذا كان $G = \langle S \rangle$ فأثبت أن $G/H = \langle xH : x \in S \rangle$.

(٢٥) إذا كانت $H \triangleleft G$ ، $K \triangleleft G$ ، $G = HK$ ، وكانت $H \cap K = N$ فأثبت أن

$G/N \cong H/N \times K/N$.

(٢٦) هل نتيجة التمرين (٢٥) صحيحة إذا لم تكن K ناظمية من G ؟

(٢٧) إذا كانت G زمرة غير إبدالية من الرتبة pq حيث p و q عددا أوليان مختلفان فأثبت أن

$Z(G) = \{e\}$.

(٢٨) إذا كانت $G = H \times K$ من حيث $K \triangleleft G$ و $H \triangleleft G$ فأثبت أن $G/H \cong K$ وأن

$G/K \cong H$.

(٢٩) إذا كانت $H_1, H_2, \dots, H_n$ زمر جزئية ناظمية من G حيث $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n = \{e\}$

فأثبت أنه يوجد تشاكل أحادي $\phi: G \rightarrow G/H_1 \times \dots \times G/H_n$.

(٣٠) لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $H \leq G$. ولنفرض أنه لكل $h \in H$ ولكل $n \in \mathbb{Z}^+$ يكون للمعادلة $x^n = h$ حل في G إذا وفقط إذا كان لها حل في H .

(أ) إذا كانت $xH \in G/H$ فثبت أنه يوجد $y \in xH$ حيث $o(y) = o(xH)$.

(ب) إذا كانت G/H دورية فثبت أنه يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = H \times K$.

(٣١) لتكن $N \triangleleft G$ ولتكن $H \leq G$ حيث $N \subseteq H$. أثبت أن $H/N \triangleleft G/N$ إذا وفقط إذا كانت $H \triangleleft G$.

(٣٢) لتكن G زمرة إبدالية منتهية ولتكن كل من H و K زمرة جزئية من G حيث $|H| = m$ و $|K| = n$. إذا كان $d = \text{lcm}(m, n)$ فثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة d .

(٣٣) لتكن G زمرة إبدالية منتهية وليكن n يقسم $|G|$. أثبت أن عدد حلول المعادلة $x^n = e$ يجب أن يكون مضاعفاً للعدد n .

(٣٤) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً خاطئة :

(أ) إذا كانت $H \leq Z(G) \leq G$ حيث G/H دورية فإن G إبدالية .

(ب) إذا كانت $G/Z(G)$ دورية فإن $G/Z(G)$ هي الزمرة التافهة .

(ت) إذا كانت $G = U_{16}$ ، $H = \{[1], [15]\}$ و $K = \{[1], [9]\}$ فإن $G/H \cong G/K$.

(ث) $S'_3 \subseteq A_3$ (ج) $|A'_4| = 3$ (ح) $D_4/Z(D_4) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(خ) إذا كانت G ليست دورية وكان $H \triangleleft G$ فإن G/H ليست دورية .

(د) $(\mathbb{R}, +)/n\mathbb{R} = \{0\}$ (ذ) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{b} + \mathbb{Z} : 1 < a < b \right\}$

(ر) إذا كانت $H \triangleleft G$ وكانت G/H زمرة منتهية فإن G زمرة منتهية .

(ز) إذا كانت $H \triangleleft G$ وكان $a, b \in G$ حيث $aH = bH$ فإن $o(a) = o(b)$.

(٣, ٦) ميرهنات التماثل

Isomorphism Theorems

لقد بينا في المثال (٣, ٤١) أنه إذا كان $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ تماثل فإن $\text{Ker } \phi \triangleleft G_1$. كما

بيننا في المبرهنة (٣, ٥٠) أن أي تماثل يجب أن يكون على الصورة أعلاه . أي إذا كانت $K \triangleleft G$

فإنه يوجد تشاكل مجاله G بحيث تكون K نواة هذا التشاكل . ولاحظنا أيضاً أن صورة G التشاكلية هي زمرة خارج القسمة G/K .

في هذا البند ، نقوم بتعميم ذلك بتقديم مبرهنات يطلق عليها مبرهنات التماثل . ونلفت نظر القارئ إلى أن هذه المبرهنات صحيحة لأي نظام رياضي وليست قاصرة على الزمر . أولى هذه المبرهنات تعرف باسم مبرهنة التماثل الأولى (first isomorphism theorem) . كما تسمى أيضاً المبرهنة الأساسية للتشاكلات (the fundamental theorem of homomorphisms) .

مبرهنة (٣,٥١) [مبرهنة التماثل الأولى]

إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً فإن $G_1 / \text{Ker}\varphi \cong \varphi(G_1)$.

البرهان

لنفرض أن $K = \text{Ker}\varphi$. ليكن $\psi: G_1 / K \rightarrow G_2$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$\psi(aK) = \varphi(a)$ لكل $a \in G_1$. نبرهن أولاً أن ψ معرف تعريفاً حسناً . لنفرض إذن أن

$aK = bK$. عندئذ ، $a = bk$ حيث $k \in K$. الآن :

$$\psi(aK) = \varphi(a) = \varphi(bk) = \varphi(b)\varphi(k) = \varphi(b)e_2 = \varphi(b) = \psi(bK)$$

إذن ، ψ حسن التعريف . كما أن ψ تشاكل لأن :

$$\psi(aKbK) = \psi(abK) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(aK)\psi(bK)$$

وأخيراً ψ أحادي لأن :

$$aK \in \text{Ker}\psi \Rightarrow \psi(aK) = e_2 \Rightarrow \varphi(a) = e_2 \Rightarrow a \in \text{Ker}\varphi = K \Rightarrow aK = K$$

إذن ، $\text{Ker}\psi = \{K\}$. ومن ثم فإن ψ أحادي . وبالتالي فإن $G_1 / K \cong \varphi(G_1)$ ♦

نتيجة (٣,٥٢)

إذا كان $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكل غامر فإن $G_1 / \text{Ker}\varphi \cong G_2$.

البرهان

باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل $G_1 / \text{Ker}\varphi \cong \varphi(G_1)$. وبما أن φ غامر فإن $\varphi(G_1) = G_2$

وبالتالي فإن $G_1 / \text{Ker}\varphi \cong G_2$ ♦

نتيجة (٣,٥٣)

إذا كانت G زمرة منتهية وكان $\varphi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً فإن $|\varphi(G)|$ يقسم $|G|$.

البرهان

باستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $G/\text{Ker}\varphi \cong \varphi(G)$. ولذا فإن :

$$\blacklozenge \quad |G/\text{Ker}\varphi| = \frac{|G|}{|\text{Ker}\varphi|} = |\varphi(G)| \quad \text{إذن ، } |\varphi(G)| \text{ يقسم } |G|$$

مثال (٣,٦٣)

لقد بينا في المثال (٣,١٢) أن التطبيق $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ المعرفة بالمعرفة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل غامر وأن $\text{Ker}\varphi = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$. إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن

$$\square \quad (\mathbb{R}^*, \cdot) / \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

مثال (٣,٦٤)

من المثال (٣,١٤) نجد أن التطبيق $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ المعرفة بالمعرفة $\varphi(m) = [m]$ تشاكلاً غامراً وأن

$$\square \quad \mathbb{Z} / n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \quad \text{إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن } \text{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$$

مثال (٣,٦٥)

عودة إلى المثال (٣,١٥) نجد أن التطبيق $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ المعرفة بالمعرفة $\varphi(\sigma) = 1$ إذا كان σ فردياً و $\varphi(\sigma) = 0$ إذا كان σ زوجياً تشاكلاً غامراً وأن $\text{Ker}\varphi = A_n$. إذن ، $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

□

مثال (٣,٦٦)

لقد بينا في المثال (٣,١٧) أن التطبيق $\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ المعرفة بالمعرفة $\varphi(A) = \det A$ تشاكلاً وأن $\text{Ker}\varphi = SL(n, \mathbb{R})$. ومن الواضح أن φ شامل ، لأنه لو كان $a \in \mathbb{R}^*$ فإن المصفوفة القطرية $A \in GL(n, \mathbb{R})$ التي يكون أحد عناصر القطر هو a وباقي عناصر القطر تساوي 1 تحقق $\det A = a$. إذن باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن

$$\square \quad GL(n, \mathbb{R}) / SL(n, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

مثال (٣,٦٧)

من الواضح أن التطبيق $\varphi: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ المعرفة بالقاعدة $\varphi([x], [y]) = [x]$ تشاكلاً غامراً .
 كما أن $\text{Ker}\varphi = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$. إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن :

$$\square \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 / \{0\} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$$

مثال (٣,٦٨)

لتكن $G = \{e^{ix} \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$ وليكن $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ هو التطبيق المعرفة بالقاعدة
 $\varphi(x) = e^{2\pi ix}$. تشاكل لأن : $\varphi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix} e^{2\pi iy} = \varphi(x)\varphi(y)$.
 الواضح أن φ شامل . الآن : $\text{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{R} : e^{2\pi ix} = 1\} = \mathbb{Z}$ ، باستخدام المبرهنة الأولى
 للتماثل نجد أن $\square \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$

تكمن أهمية المبرهنة الأولى للتماثل في أنها تكشف لنا عن وجود تقابل بين الصور التشاكلية
 لزمرة G وبين الزمر الجزئية الناعمية من G . ولتوضيح هذا التقابل لاحظ أنه إذا كان
 $\varphi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً غامراً فإنه باستخدام مبرهنة التماثل الأولى نستطيع إيجاد زمرة جزئية ناعمية
 $\text{Ker}\varphi = K$ من G بحيث يكون $G/K \cong G_1$. وبالعكس ، لكل زمرة جزئية ناعمية K من
 G تكون G/K صورة تشاكلية للزمرة G . إذن ، نخلص إلى أنه لإيجاد صور G التشاكلية يكفي
 أن نجد زمر G الجزئية الناعمية .

مثال (٣,٦٩)

لاحظ أن الزمرة الجزئية الناعمية من S_3 هي S_3 ، $H = \langle (1 \ 2 \ 3) \rangle$ ، $\{e\}$. ولذا فإن صور S_3
 التشاكلية هي : $S_3 / \{e\} \cong S_3$ ، $S_3 / H \cong \mathbb{Z}_2$ ، $S_3 / S_3 \cong \{e\}$ ،
 $\square$

مثال (٣,٧٠)

الزمر الجزئية الناعمية من الزمرة D_4 هي :

$$\{e\}, \langle a^2 \rangle, \langle a \rangle, H = \{e, a^2, b, a^2b\}, K = \{e, a^2, ab, a^3b\}, D_4$$

إذن ، الصور التشاكلية للزمرة D_4 هي :

$$D_4 / \langle a \rangle \cong D_4 / H \cong D_4 / K \cong \mathbb{Z}_2 , \quad D_4 / D_4 \cong \{e\} , \quad D_4 / \{e\} \cong D_4$$

φ تشاكل لأن : $\varphi(h_1 h_2) = (h_1 h_2)K = (h_1 K)(h_2 K) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$.

φ غامراً لأنه : إذا كان $(hk)K \in HK/K$ فإن $hK = hkK$.

وأخيراً : $h \in \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(h) = K \Leftrightarrow hK = K \Leftrightarrow h \in K \Leftrightarrow h \in H \cap K$.

◆ إذن ، $\text{Ker}\varphi = H \cap K$. وباستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $H/(H \cap K) \cong HK/K$.

مثال (٣, ٧٢)

إذا كانت $K = 4\mathbb{Z}$ ، $H = 3\mathbb{Z}$ ، $G = \mathbb{Z}$ فإن :

$$H \cap K = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z} \text{ وأن } H + K = 3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

إذن ، باستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن : $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

ولكن باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نعلم أن $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$. إذن ، $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$. □

مثال (٣, ٧٣)

إذا كانت $G = S_n$ ، $H = \langle (1\ 2) \rangle$ ، $K = A_n$ فإن $H \cap K = \{e\}$ (لأن $(1\ 2)$ فردي) .

ولذا باستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن : $HA_n/A_n \cong H/(H \cap A_n) \cong H \cong \mathbb{Z}_2$. □

نتقل الآن إلى المبرهنة الثالثة للتماثل (**third isomorphism theorem**) والتي يطلق

عليها أحياناً مبرهنة خارج زمرة خارج القسمة

(**quotient of a quotient group theorem**) .

مبرهنة (٣, ٥٥) [مبرهنة التماثل الثالثة]

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية ناظمية من G حيث $H \leq K$ فإن :

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K \quad (\text{ب}) \quad K/H \triangleleft G/H \quad (\text{أ})$$

البرهان

(أ) لنفرض أن $kH \in K/H$ وأن $gH \in G/H$. بما أن $K \triangleleft G$ فإن $gkg^{-1} \in K$. إذن ،

$$(gH)(kH)(gH)^{-1} = gkg^{-1}H \in K/H$$

(ب) ليكن $\varphi: G/H \rightarrow G/K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(gH) = gK$ لكل $g \in G$.

φ معرف تعريفاً حسناً لأن :

$$g_1 H = g_2 H \Rightarrow g_1 = g_2 h, h \in H \Rightarrow g_1 = g_2 h, h \in K$$

$$\Rightarrow g_1 K = g_2 K \Rightarrow \varphi(g_1 H) = \varphi(g_2 H)$$

φ تشاكل لأن : $\varphi(g_1 H g_2 H) = \varphi(g_1 g_2 H) = g_1 g_2 K = (g_1 K)(g_2 K) = \varphi(g_1 H)\varphi(g_2 H)$.

من الواضح أن φ غامر . وأخيراً :

$$\begin{aligned} \text{Ker}\varphi &= \{gH \in G/H : \varphi(gH) = K\} = \{gH \in G/H : gK = K\} \\ &= \{gH \in G/H : g \in K\} = K/H \end{aligned}$$

♦ إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $(G/H)/(K/H) \cong G/K$

مثال (٣, ٧٤)

لنفرض أن n يقسم m وأن $G = \mathbb{Z}$ ، $H = n\mathbb{Z}$ ، $K = m\mathbb{Z}$. لاحظ أن $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.
وبإستخدام المبرهنة الثالثة والمبرهنة الأولى للتماثل نجد أن :

$$\square (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$$

مثال (٣, ٧٥)

إذا كانت $G = S_4$ ، $K = A_4$ وكانت $H = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$

فإن $K/H = \{H, (1\ 2\ 3) \circ H, (1\ 3\ 2) \circ H\}$ وإن

$$S_4/H = \{H, (1\ 2\ 3) \circ H, (1\ 3\ 2) \circ H, (1\ 2) \circ H, (1\ 3) \circ H, (2\ 3) \circ H\}$$

لاحظ أن $K/H \triangleleft S_4/H$ لأن $[S_4/H : K/H] = 2$. إذن ، بإستخدام المبرهنة الثالثة

$$\square (S_4/H)/(K/H) \cong S_4/K = S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$$

والمبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $S_4/K = S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$.
المبرهنة التالية تقدم لنا وصفاً للزمر الجزئية من زمرة خارج القسمة G/K وتدعى مبرهنة

التقابل (correspondence theorem) ويطلق عليها أحياناً مبرهنة التماثل الرابعة .

مبرهنة (٣, ٥٦) [مبرهنة التقابل]

لتكن G زمرة ولتكن $K \triangleleft G$ وليكن $\pi : G \rightarrow G/K$ التشاكل الغامر الطبيعي . ولنفرض أن

$$\text{Sub}(G/K) = \{S^* : S^* \leq G/K\} \text{ وأن } \text{Sub}(G; K) = \{S : K \subseteq S \leq G\}$$

عندئذ :

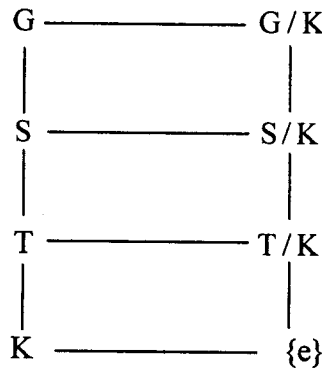
(١) يوجد تقابل من $\text{Sub}(G; K)$ إلى $\text{Sub}(G/K)$.

(٢) $T \leq S \leq G$ إذا وفقط إذا كان $T/K \leq S/K$. وفي هذه الحالة يكون

$$[S : T] = [S/K : T/K]$$

(٣) $T \triangleleft S$ إذا وفقط إذا كان $T/K \triangleleft S/K$. وفي هذه الحالة يكون :

$$S/T \cong (S/K)/(T/K)$$



البرهان

(١) ليكن $\Phi : \text{Sub}(G; K) \rightarrow \text{Sub}(G/K)$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\Phi(S) = S/K$ لكل $S \in \text{Sub}(G; K)$ من السهل ان نرى ان $S/K \leq G/K$. ولذا فان $S/K \in \text{Sub}(G/K)$.

سنثبت أولاً انه إذا كانت $S \in \text{Sub}(G; K)$ فإن $\pi^{-1}(\pi(S)) = S$. لاحظ أولاً أن $S \subseteq \pi^{-1}(\pi(S))$ صحيح دائماً. ولبرهان الاتجاه الآخر نفرض أن $a \in \pi^{-1}(\pi(S))$. عندئذ، يوجد $s \in S$ حيث أن $\pi(a) = \pi(s)$. ولذا فإن $\pi(a) \in \text{Ker } \pi = K$. أي أن $as^{-1} = k$ حيث $k \in K$. ولكن $K \leq S$. ولذا فإن $k \in S$. وبالتالي فإن $a = sk \in S$. ولإثبات أن Φ أحادي نفرض أن $S, S' \in \text{Sub}(G; K)$ حيث $\Phi(S) = \Phi(S')$. ومنه فإن $S/K = S'/K$. أي أن $\pi(S) = \pi(S')$. ولذا $\pi^{-1}(\pi(S)) = \pi^{-1}(\pi(S'))$ وبالتالي نستنتج $S = S'$. أي أن Φ أحادي.

ولإثبات أن Φ شامل نفرض أن $H \leq G/K$. الآن، $K = \pi^{-1}(\{e\}) \leq \pi^{-1}(H) \leq G$. ولذا فإن $\Phi(\pi^{-1}(H)) = \pi(\pi^{-1}(H)) = H$. وبالتالي فإن Φ شامل.

(٢) إذا كان $T \leq S \leq G$ فإنه من الواضح أن $\pi(T) \leq \pi(S)$. وبالتالي فإن $T/K \leq S/K$. ولبرهان العكس، نفرض أن $T/K \leq S/K$. وليكن $t \in T$. عندئذ $tK \in T/K \leq S/K$. ولذا فإن $tK = sK$ حيث $s \in S$. ومنه فإن $t = sk$ حيث $k \in K$. وبما أن $K \leq S$ فإن $k \in S$. وبالتالي فإن $t \in S$. أي أن $T \leq S$.

ولإثبات أن $[S : T] = [S/K : T/K]$ فإنه يكفي أن نبرهن على وجود تقابل بين $\{sT : s \in S\}$ و $\{(aK)T/K : a \in S\}$. ومن الواضح أن $sT \mapsto \pi(s)T/K$ هو التقابل المنشود. (٣) إذا كانت $T \triangleleft S$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة التماثل الثالثة أن $T/K \triangleleft S/K$ وأن

$$(S/K)/(T/K) \cong S/T$$

ولإثبات الاتجاه الآخر نفرض أن $T/K \triangleleft S/K$ ولنفرض أن $t \in T$ و $s \in S$. الآن:

$$\pi(sts^{-1}) = \pi(s)\pi(t)\pi(s)^{-1} \in \pi(s)(T/K)\pi(s)^{-1} \in T/K$$

$$\blacklozenge \quad T \triangleleft S \text{ ونستنتج أن } sts^{-1} \in \pi^{-1}(T/K) = T$$

ملحوظة

لاحظ أنه باستخدام مبرهنة التقابل نجد أن أي زمرة جزئية من الزمرة G/K هي على الصورة H/K حيث H زمرة جزئية وحيدة من G وتحتوي K .

(٣، ٦، ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت G و G_1 زميرتين وكانت $K \triangleleft G$ و $K_1 \triangleleft G_1$ فأثبت أن $K \times K_1 \triangleleft G \times G_1$ وأن $(G \times G_1)/(K \times K_1) \cong (G/K) \times (G_1/K_1)$.

الحل

ليكن كل من $\pi: G \rightarrow G/K$ و $\pi_1: G_1 \rightarrow G_1/K_1$ التشاكل الطبيعي الغامر. وليكن $\varphi: G \times G_1 \rightarrow (G/K) \times (G_1/K_1)$ التطبيق المعرف بالقاعدة: $\varphi(x, y) = (\pi(x), \pi_1(y))$. من السهل ان نرى الآن أن φ تشاكل غامر وأن $\text{Ker } \varphi = K \times K_1$. ولذا فإن $K \times K_1 \triangleleft G \times G_1$ ومن المبرهنة الأولى للتماثل نخلص الى أن:

$$\Delta \quad (G \times G_1)/(K \times K_1) \cong (G/K) \times (G_1/K_1)$$

تمرين (٢)

عين جميع الصور التشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$.

الحل

لتكن H صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$. عندئذ، يوجد تشاكل غامر $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow H$. وباستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $\mathbb{Z}/\text{Ker } \varphi \cong H$. وبما أن $\text{Ker } \varphi \leq \mathbb{Z}$ فإن $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$ حيث $n \geq 0$. ومنه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong H$ فإن $H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

وبالعكس لكل $n \geq 0$ ، $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$. كما أن التشاكل الطبيعي $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تشاكل غامر .
أي أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$ لكل $n \geq 0$. وبالتالي فإن جميع الصور التشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$ هي الزمرة $\mathbb{Z}$ والزمرة $\mathbb{Z}_n$ لكل $n > 1$ Δ

تمرين (٣)

إذا كان $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_8$ تشاكلاً غامراً من الزمرة المنتهية G إلى الزمرة $\mathbb{Z}_8$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية دليلها 2 وزمرة جزئية ناظمية دليلها 4 .
الحل

باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/\text{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}_8$ ولذا فإن $G/\text{Ker}\varphi$ زمرة دورية من الرتبة 8 . ومن ثم فهي تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة 4 وزمرة جزئية K من الرتبة 2 . وباستخدام مبرهنة التقابل توجد $\text{Ker}\varphi \subseteq S \triangleleft G$ و $\text{Ker}\varphi \subseteq T \triangleleft G$ حيث $T/\text{Ker}\varphi = K$ و $S/\text{Ker}\varphi = H$ ، إذن ،
 $[G:S] = 2$ وبالتالي فإن $[G:S] = 2$. وبالمثل يمكن إثبات أن $[G:T] = 4$ Δ

تمرين (٤)

لتكن كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G حيث $[G:K] = [G:H] = 2$.
و $H \neq K$ ، أثبت أن $[G:H \cap K] = 4$ وأن $G/(H \cap K)$ ليست دورية .
الحل

بما أن دليل كل من H و K في G هو 2 فإن $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$. ولذا فإن $H \cap K \triangleleft G$.
وباستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن $H/(H \cap K) \cong HK/K$. ولذا فإن
 $[H:H \cap K] = [HK:K]$. الآن $[G:HK][HK:K] = [G:K] = 2$. ولذا فإن
 $[HK:K] = 2$ لأن $H \neq K$. ومنه فإن :
 $[G:H \cap K] = [G:H][H:H \cap K] = [G:H][HK:K] = 2 \times 2 = 4$
و أخيراً ، $G/(H \cap K)$ ليست دورية لأنها تحتوي على زمرتين من الرتبة 2 Δ

تمارين (٣, ٦)

في التمارين من (١) إلى (١١) استخدم ميرھنة التماثل الأولى لإثبات تماثل الزمرتين .

$$8\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7 \quad (٣) \quad 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3 \quad (٢) \quad \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_3 \quad (١)$$

$$\gcd(m, n) = 1 \text{ حيث } m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \quad (٤)$$

$$(\mathbb{C}, +)/(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}, +) \quad (٦) \quad (\mathbb{Q}^*, \cdot)/\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Q}^+, \cdot) \quad (٥)$$

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \text{ حيث } (\mathbb{C}^*, \cdot)/(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (U, \cdot) \quad (٧)$$

$$K = \langle (0, n) \rangle \text{ و } H = \langle (m, 0) \rangle \text{ حيث } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H \times K \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad (٨)$$

$$(\mathbb{C}^*, \cdot)/(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot) \text{ حيث } U \text{ هي كما في التمرين (٧)} \quad (٩)$$

$$H = \{(m, m) : m \in \mathbb{Z}\} \text{ حيث } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H \cong \mathbb{Z} \quad (١١) \quad (\mathbb{Q}^*, \cdot)/(\mathbb{Q}^+, \cdot) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (١٠)$$

(١٢) إذا كان $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ تشاكلاً غامراً فأثبت أن G تحتوي على زمر جزئية ناظرية

$$[G : H_3] = 10, [G : H_2] = 5, [G : H_1] = 2 \text{ حيث } H_1, H_2, H_3$$

$$(١٣) \text{ إذا كان } \varphi: \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_{30} \text{ تشاكل وكان } \varphi([23]) = [9] \text{ وكان } \varphi^{-1}([9]) = \{[0], [10], [20]\}$$

$$\text{فجد } \text{Ker}\varphi = \{[0], [10], [20]\}$$

$$(١٤) \text{ إذا كان } \varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \text{ تشاكلاً غامراً وكان } |\text{Ker}\varphi| = 5 \text{ فأثبت أن } G \text{ تحتوي على}$$

زمر جزئية ناظرية من الرتب 5, 10, 15, 20, 30, 60

$$(١٥) \text{ أثبت أن } \mathbb{Z}_8 \text{ ليست صورة تشاكرية للزمرة } \mathbb{Z}_{15}$$

$$(١٦) \text{ أثبت أن } \mathbb{Z}_9 \text{ ليست صورة تشاكرية للزمرة } \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

$$(١٧) \text{ أثبت أن } \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ ليست صورة تشاكرية للزمرة } \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$$

$$(١٨) \text{ إذا كانت كل من } G \text{ و } H \text{ زمرة منتهية حيث } \gcd(|G|, |H|) = 1 \text{ وكان } \varphi: G \rightarrow H$$

تشاكلاً فأثبت أن φ هو التشاكل التافه .

$$(١٩) \text{ ليكن } \varphi: G \rightarrow G_1 \text{ تشاكلاً غامراً ولتكن } K \triangleleft G_1 \text{ حيث } [G_1 : K] = n \text{ . إذا كانت}$$

$$[G : H] = n \text{ فأثبت أن } H = \varphi^{-1}(K)$$

$$(٢٠) \text{ جد جميع الصور التشاكرية (باستثناء التماثل) للزمرة } Q_8$$

$$(٢١) \text{ هل } D_3 \text{ صورة تشاكرية للزمرة } T?$$

$$(٢٢) \text{ إذا كانت } N \triangleleft G \text{ و } M \triangleleft G \text{ وكانت } H \leq G \text{ حيث } H \cap M = H \cap N \text{ فأثبت أن}$$

$$(HN)/N \cong (HM)/M$$

(٢٣) إذا كانت $H \leq G$ و $K \leq G$ وكانت $N \triangleleft G$ حيث $HN = KN$ فأثبت أن :
 $H/(H \cap N) \cong K/(K \cap N)$.

(٢٤) لنفرض أن $H \triangleleft G$ وأن $K \triangleleft G$ حيث $H \subseteq K$. إذا كانت كل من K/H و G/K زمرة منتهية فثبت أن زمرة G/H زمرة منتهية.

(٢٥) إذا كانت $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$ حيث كل من G/K و G/H زمرة منتهية فثبت أن $G/(H \cap K)$ زمرة منتهية.

(٢٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $N \triangleleft G$ ، $M \triangleleft G$ و $H \leq G$ حيث $HM/M \cong HN/N$ فأثبت أن $\gcd(|M|, |H|) = \gcd(|N|, |H|) = 1$.

(٢٧) لتكن $K \triangleleft G$ و $H \triangleleft G$ حيث $H \subseteq K$. إذا كانت G/K زمرة دورية وكان $|K/H| = 2$ فأثبت أن G/H زمرة إبدالية.

(٢٨) إذا كانت $K \triangleleft G$ و $H \triangleleft G$ حيث $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$ فأثبت أن $G/H \cong K$ وأن $G/K \cong H$.

(٢٩) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $\phi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً غامراً وكانت G_1 تحتوي على عنصر رتبته n فأثبت أن G تحتوي على عنصر رتبة n .

(٣٠) إذا كان $\phi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً غامراً وكانت $H \triangleleft G$ حيث $H \subseteq \text{Ker } \phi$ فأثبت أن:
 (أ) يوجد تشاكل غامر وحيد $\psi: G/H \rightarrow G_1$ يحقق $\phi = \psi \circ \pi$ حيث $\pi: G \rightarrow G/H$ هو التشاكل الطبيعي.

(ب) ψ تماثل إذا وفقط إذا كان $H = \text{Ker } \phi$.

(٣١) استخدم التمرين (٣٠) لإثبات المبرهنة الأولى للتماثل.

(٣٢) إذا كان $\phi: G \rightarrow G_1$ تشاكلاً غامراً وكانت $H \triangleleft G$ حيث $\text{Ker } \phi \subseteq H$ وإذا كان $\mu: G_1 \rightarrow G_1 / \phi(H)$ و $\pi: G \rightarrow G/H$ التشاكليين الطبيعيين فأثبت أنه يوجد تماثل وحيد.

$\psi: G/H \rightarrow G_1 / \phi(H)$ يحقق $\psi \circ \pi = \mu \circ \phi$ [ارشاد : استخدم تمرين (٣٠)].

(٣٣) استخدم التمرين (٣٢) لإثبات المبرهنة الثالثة للتماثل.

(٣٤) بين أيّاً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) توجد زمرة G بحيث تكون $\mathbb{Z}_p$ زمرة تشاكلية للزمرة G لكل عدد أولي p .

(ب) إذا كانت $\mathbb{Z}_{10}$ صورة تشاكلية للزمرة المنتهية G فإن 10 يقسم رتبة G .

(ت) إذا كان $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ تشاكلاً غامراً فإن ϕ تماثل.

(ث) إذا كان φ تشاكلاً غامراً من الزمرة G إلى الزمرة G فإن φ تماثل.

(ج) توجد خمسة زمر جزئية للزمرة $4\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$.

(ح) توجد خمسة صور تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_5$.

(خ) التطبيق $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a, b) = a - b$ تشاكل

$$\text{و } \text{Ker}\varphi = \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

$$D_4 / Z(D_4) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

(ذ) إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ وكانت $H = \{x \in G : o(x) = n\}$ زمرة جزئية G فإن $H \triangleleft G$.

$$H = \{x \in D_4 : o(x) = 2\} \leq D_4$$

(ز) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(س) إذا كانت $H \triangleleft S_4$ حيث $|H| = 4$ فإن $S_4/H \cong S_3$.

(٣, ٧) زمرة التماثلات الذاتية

Group of Automorphisms

لقد درسنا في بداية هذا الفصل مفهوم التماثل بين زمريتين G و G_1 . إذا كانت $G = G_1$ فإن مجموعة التماثلات من G إلى G تكون زمرة تسمى زمرة التماثلات الذاتية وهي على قدر كبير من الأهمية. نخصص هذا البند لإلقاء مزيد من الضوء على هذه الزمرة.

تعريف (٣, ١٣)

يسمى التشاكل $\varphi: G \rightarrow G$ تشاكلاً ذاتياً (endomorphism). وإذا كان φ تماثلاً فإنه يسمى تماثلاً ذاتياً (automorphism). نرمز لمجموعة التماثلات الذاتية على زمرة G بالرمز $\text{Aut}(G)$.

المبرهنة التالية تبين لنا أن مجموعة التماثلات الذاتية زمرة جزئية من مجموعة التبديلات.

مبرهنة (٣, ٥٧)

إذا كانت G زمرة فإن $(\text{Aut}(G), \circ)$ زمرة جزئية من $(S_G, \circ)$ حيث S_G هي زمرة التبديلات على G .

البرهان

لاحظ أن التطبيق $I: G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ تماثل . ولذا فإن $I \in \text{Aut}(G)$. أي أن $\text{Aut}(G) \neq \emptyset$. لنفرض أن $\varphi, \psi \in \text{Aut}(G)$. بما أن كل من φ و ψ تقابل فإن $\varphi \circ \psi$ تقابل أيضاً . وإذا كان $x, y \in G$ فإن :

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(xy) &= \varphi(\psi(xy)) = \varphi(\psi(x)\psi(y)) = \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) \\ &= [(\varphi \circ \psi)(x)][(\varphi \circ \psi)(y)] \end{aligned}$$

إذن ، $\varphi \circ \psi \in \text{Aut}(G)$.

وأخيراً إذا كان $\varphi \in \text{Aut}(G)$ فإن φ^{-1} تقابل أيضاً وأنه لكل $x, y \in G$:

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y)) = I(x)I(y) = xy$$

♦ $\text{Aut}(G) \leq S_G$ وبالتالي فإن $\varphi^{-1} \in \text{Aut}(G)$ ، إذن ، $\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$

تعريف (٣، ١٤)

تسمى الزمرة $\text{Aut}(G)$ زمرة التماثلات الذاتية للزمرة G (group of automorphisms of G) .

مبرهنة (٣، ٥٨)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. إذا كان $\varphi_a: G \rightarrow G$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$$\varphi_a(x) = axa^{-1} \quad \text{لكل } x \in G \quad \text{فإن :}$$

$$(ب) \quad \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \quad \text{لكل } a, b \in G$$

$$(أ) \quad \varphi_a \in \text{Aut}(G)$$

$$(د) \quad \psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)} \quad \text{لكل } \psi \in \text{Aut}(G)$$

$$(ج) \quad (\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$$

البرهان

$$(أ) \quad \text{تطبيق أحادي لأنه لو كان } x, y \in G \quad \text{فإن :}$$

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

$$\varphi_a(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = y \quad \text{وإن } a^{-1}ya \in G \quad \text{فإن } y \in G \quad \text{فإن } \varphi_a \text{ تطبيق شامل لأنه لو كان}$$

$$\varphi_a \text{ تشاكل لأنه لو كان } x, y \in G \quad \text{فإن :}$$

$$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x)\varphi_a(y) \quad \text{إذن ، } \varphi_a \in \text{Aut}(G)$$

$$(ب) \quad \text{لنفرض أن } a, b \in G \quad \text{عندئذ ، لكل } x \in G$$

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$$

$$\text{إذن ، } \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$$

(ج) لاحظ أن $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{aa^{-1}} = \varphi_e = I$ وأن $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = \varphi_{a^{-1}a} = \varphi_e = I$: إذن ، $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$.

(د) لنفرض أن $\psi \in \text{Aut}(G)$. عندئذ لكل $x \in G$ لدينا :

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1})(x) &= \psi(\varphi_a(\psi^{-1}(x))) = \psi(a\psi^{-1}(x)a^{-1}) = \psi(a)\psi(\psi^{-1}(x))\psi(a^{-1}) \\ &= \psi(a)x(\psi(a))^{-1} = \varphi_{\psi(a)}(x) \end{aligned}$$

◆ إذن ، $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$ ،

تعريف (٣، ١٥)

لتكن G زمرة . تسمى المجموعة الجزئية $\text{Inn}(G) = \{\varphi_a \in \text{Aut}(G) : a \in G\}$ مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G (inner automorphisms of G).

نتيجة (٣، ٥٩)

$\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ لكل زمرة G .

البرهان

بما أن $\varphi_e = I \in \text{Inn}(G)$ فإن $\text{Inn}(G) \neq \emptyset$. إذا كان $\varphi_a, \varphi_b \in \text{Inn}(G)$ وكان $\psi \in \text{Aut}(G)$ فإنه باستخدام المبرهنة (٣، ٥٨) نجد أن :

$\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)} \in \text{Inn}(G)$: وأن $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1} = \varphi_a \circ \varphi_{b^{-1}} = \varphi_{ab^{-1}} \in \text{Inn}(G)$ (إذن ،

◆ $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$)

نتيجة (٣، ٦٠)

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ فإن $N(H)/C(H)$ تماثل زمرة جزئية من $\text{Aut}(H)$ حيث

$$N(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$$

و $C(H) = \{x \in G : xhx^{-1} = h \forall h \in H\}$ هو مركز H في G .

البرهان

ليكن $\varphi : N(H) \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التطبيق المعروف بالقاعدة $\varphi(a) = \varphi_a$ لكل $a \in N(H)$.
 φ تشاكل لأنه إذا كان $a, b \in N(H)$ فإن $\varphi(ab) = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$: كما أن :

$$\text{Ker} \varphi = \{a \in N(H) : \varphi(a) = I = \varphi_e\} = \{a \in G : \varphi_a(h) = \varphi_e(h) \forall h \in H\}$$

$$= \{a \in G : aha^{-1} = h \forall h \in H\} = C(H)$$

♦ إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $N(H)/C(H) \cong \varphi(N(H)) \leq \text{Aut}(H)$

نتيجة (٣,٦١)

إذا كانت G زمرة فإن $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$

البرهان

إذا وضعنا $H = G$ في النتيجة (٣,٦٠) فإننا نجد أن $N(G) = G$ ، $C(G) = Z(G)$ وأن

$$\diamond \quad \varphi(N(G)) = \varphi(G) = \text{Inn}(G)$$

نتيجة (٣,٦٢)

$|\text{Inn}(G)| = 1$ إذا وفقط إذا كانت G زمرة إبدالية.

البرهان

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $Z(G) = G$. ولذا فإنه باستخدام النتيجة (٣,٦١) نجد أن:

$$1 = |G/Z(G)| = |\text{Inn}(G)|$$

وبالعكس لنفرض أن $1 = |\text{Inn}(G)|$. عندئذ ، $\varphi_a = \varphi_e$ لكل $a \in G$. ومنه فإن $axa^{-1} = x$

لكل $a, x \in G$. ولذا فإن $ax = xa$ لكل $a, x \in G$. وبالتالي فإن G إبدالية ♦

مثال (٣,٧٦)

أثبت أن $\text{Aut}(S_3) \cong S_3$.

الحل

بما أن $Z(S_3) = \{e\}$ فإننا نجد باستخدام النتيجة (٣,٦١) أن $S_3 \cong \text{Inn}(S_3)$. إذن ،

$$6 = |S_3| = |\text{Inn}(S_3)| \leq |\text{Aut}(S_3)|$$

الآن: $S_3 = \langle a, b \rangle$ حيث $a = (1\ 2)$ و $b = (1\ 2\ 3)$. إذا كان $\varphi \in \text{Aut}(S_3)$ فإن φ يتحدد

تماماً بمعرفة $\varphi(a)$ و $\varphi(b)$. وبما أن $o(\varphi(a)) = o(a) = 2$ وأن $o(\varphi(b)) = o(b) = 3$ و S_3

تحتوي على عنصرين من الرتبة 3 وثلاثة عناصر من الرتبة 2 فإننا نجد أن للعنصر $\varphi(a)$ ثلاثة

إختيارات وإختياران للعنصر $\varphi(b)$. إذن ، $|\text{Aut}(S_3)| \leq 6$. ولذا فإننا نخلص إلى أن

$$\square \quad 6 \leq |\text{Aut}(S_3)| \leq 6 \quad \text{أي أن} \quad |\text{Aut}(S_3)| = 6 \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \text{Aut}(S_3) \cong S_3$$

مثال (٣, ٧٧)

أثبت أن $\text{Inn}(D_6) \cong D_3$.

الحل

لاحظ أن $D_6 = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 6$ ، $o(b) = 2$ و $ba = a^{-1}b$. كذلك نعلم أن $Z(D_6) = \{e, a^3\}$. إذن $|\text{Inn}(D_6)| = |D_6 / Z(D_6)| = 6$. وباستخدام المبرهنة (٣, ٤٢) نجد أن $\text{Inn}(D_6) \cong \mathbb{Z}_6$ أو $\text{Inn}(D_6) \cong D_3$.
 إذا كانت $\text{Inn}(D_6) \cong \mathbb{Z}_6$ فإن $\text{Inn}(D_6)$ دورية ، ولذا فإن $D_6 / Z(D_6)$ دورية . ومن ثم فإن D_6 إبدالية وهذا تناقض . إذن ، $\text{Inn}(D_6) \cong D_3$. $\square$

لقد بينا في التمرين (٣) من التمارين المحلولة (٣, ١, ١) أنه يوجد تماثلان من الزمرة $\mathbb{Z}$ إلى الزمرة $\mathbb{Z}$. ولذا فإن $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. قبل أن نقوم بحساب زمرة التماثلات الذاتية للزمرة الدورية المنتهية $\mathbb{Z}_n$ نقدم الحالة الخاصة عندما يكون $n = 12$ لمساعدتنا على فهم الحالة العامة .

مثال (٣, ٧٨)

أثبت أن $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong U_{12}$.

الحل

لاحظ أن $\mathbb{Z}_{12} = \langle [1] \rangle$. وإذا كان $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ فإن φ يتحدد تماماً بمعرفة $\varphi([1])$. وبما أن $\varphi([1])$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ فإن $\varphi([1]) = [1]$ أو $\varphi([1]) = [5]$ أو $\varphi([1]) = [7]$ أو $\varphi([1]) = [11]$. إذا كان $\varphi([1]) = [1]$ فإن φ هو التطبيق المحايد ومن ثم فإن $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$.
 لكن $\varphi([1]) = [5]$. بما أن $\varphi([1])$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ فإن φ شامل . ومن ثم فهو أحادي . كما أن $\varphi([1]) = [11]$. وبالمثل إذا كان $\varphi([1]) = [7]$ أو $\varphi([1]) = [11]$. وبالتالي فإن $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$. وبالتالي فإن $|\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})| = 4$. ومنه فإن $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_4$ أو $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ولكن من السهل أن نرى أن رتبة كل من عناصر $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ (عدا المحايد) هي 2 . وبالتالي فإن $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong U_{12}$. $\square$

المبرهنة التالية تعمم لنا المثال (٣, ٧٨).

مبرهنة (٣, ٦٣)

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong U_n \quad \text{لكل } n \in \mathbb{Z}^+$$

البرهان

ليكن $f: \text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \rightarrow U_n$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $f(\varphi) = \varphi([1])$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.
 f معرف تعريفاً حسناً: لاحظ أولاً أن $m\varphi([1]) = \varphi([m])$ إذن، $\varphi([m]) = [0]$ إذا وقفت إذا كان n يقسم m . ولذا فإن $\varphi([1]) \in U_n$ أي أن $\varphi([1]) \in U_n$ وبذلك يكون f معرفاً تعريفاً حسناً.

f تشاكل: لنفرض أن $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ ، إذن، $f(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)([1]) = \varphi(\psi([1]))$ ،
 لنفرض أن $\psi([1]) = [k]$ ، عندئذ:

$$\begin{aligned} f(\varphi \circ \psi) &= \varphi([k]) = k\varphi([1]) = k[1]\varphi([1]) = [k]\varphi([1]) = \varphi([1])[k] \\ &= \varphi([1])\psi([1]) = f(\varphi) f(\psi) \end{aligned}$$

إذن f تشاكل.

f أحادي: إذا كان $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ و $[k] \in \mathbb{Z}_n$ فإن:

$$\begin{aligned} f(\varphi) = f(\psi) &\Rightarrow \varphi([1]) = \psi([1]) \Rightarrow [k]\varphi([1]) = [k]\psi([1]) \Rightarrow \varphi([k]) = \psi([k]) \\ &\Rightarrow \varphi = \psi \end{aligned}$$

إذن، f أحادي.

f شامل: لنفرض أن $[t] \in U_n$ ، إذن، $\gcd(n, t) = 1$. ليكن $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi([m]) = [mt]$ لكل $[m] \in \mathbb{Z}_n$. سنبرهن أولاً أن $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ إذا كان $[r], [s] \in \mathbb{Z}_n$ فإن:

$$[r] = [s] \Rightarrow r - s = nq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow rt - st = nqt \Rightarrow [rt] = [st] \Rightarrow \varphi([r]) = \varphi([s])$$

ولذا فإن φ معرف تعريفاً حسناً. الآن:

$$\varphi([r]) = \varphi([s]) \Rightarrow [rt] = [st] \Rightarrow n \mid (rt - st)$$

$$\Rightarrow n \mid (r - s)t \Rightarrow n \mid (r - s) \Rightarrow [r] = [s]$$

وذلك لأن $\gcd(t, n) = 1$ ، إذن، φ أحادي.

لنفرض الآن أن $[r] \in \mathbb{Z}_n$ ، بما أن $\gcd(n, t) = 1$ فإن $tx + ny = 1$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$ ولذا

فإن $r = txr + nyr$ أي أن $[r] = [txr]$ ، إذن، $[r] = [xrt] = [xr]$ ، ولذا فإن φ شامل.

من الواضح أن φ تشاكل وبالتالي فإن $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$. أخيراً ، $f(\varphi) = \varphi([1]) = [t]$ ، إذن ،
 f شامل . ونخلص إلى أن $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$ ◆

(٣ , ٧ , ١) تمارين محلولة (solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية وليكن $\varphi \in \text{Aut}(G)$ حيث $\varphi(a) = a$ إذا وفقط إذا كان $a = e$ لكل $a \in G$.

(أ) أثبت أنه لكل $g \in G$ يوجد $a \in G$ بحيث يكون $g = a^{-1}\varphi(a)$.

(ب) إذا كان $\varphi^2 = I$ فأثبت أن G إبدالية .

الحل

(أ) لنفرض أن $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ وأن $H = \{a_1^{-1}\varphi(a_1), a_2^{-1}\varphi(a_2), \dots, a_n^{-1}\varphi(a_n)\}$ عندئذ ، $H \subseteq G$. سنبرهن الآن أن جميع عناصر H مختلفة . لاحظ أن :

$$a_i^{-1}\varphi(a_i) = a_j^{-1}\varphi(a_j) \Leftrightarrow \varphi(a_i a_j^{-1}) = a_i a_j^{-1} \Leftrightarrow a_i a_j^{-1} = e \Leftrightarrow a_i = a_j$$

$|H| = |G|$ فإن $H = G$. وبالتالي ، إذا كان $g \in G$ فإن $g \in H$. أي يوجد $a \in G$ حيث $g = a^{-1}\varphi(a)$.

(ب) سنثبت أولاً أن $\varphi(g) = g^{-1}$ لكل $g \in G$. باستخدام الفقرة (أ) يوجد $a \in G$ حيث $g = a^{-1}\varphi(a)$ ، عندئذ :

$$g = I(g) = \varphi^2(a^{-1}\varphi(a)) = \varphi(\varphi(a^{-1})\varphi^2(a)) = \varphi(\varphi(a^{-1})a) = \varphi(g^{-1})$$

$\varphi(g) = g^{-1}$. لنفرض الآن أن $a, b \in G$ ، عندئذ ،

$$\Delta ab = ba \text{ فإن } (ab)^{-1} = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$$

تمرين (٢) .

لتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية لامتغيرة تماماً (fully invariant) إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل ذاتي $\varphi: G \rightarrow G$. ونقول إن H مميزة (characteristic) إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

(أ) أثبت أن H مميزة إذا وفقط إذا كان $\varphi(H) = H$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

- (ب) إذا كانت H لامتنغية تماماً فأثبت أن H مميزة .
 (ج) أثبت أن $Z(G)$ مميزة ولكنها ليست بالضرورة لامتنغية تماماً .
 (د) إذا كانت H مميزة فأثبت أن $H \triangleleft G$. أعط مثلاً يبين أن العكس غير صحيح .

الحل

- (أ) لنفرض أن $H \leq G$ مميزة . عندئذٍ ، $\varphi(H) \leq H$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(G)$. وبما أن $\varphi^{-1} \in \text{Aut}(G)$ فإن $\varphi^{-1}(H) \leq H$. وعليه فإن $H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \leq \varphi(H)$. وبالتالي فإن $\varphi(H) = H$. أما برهان العكس فهو واضح .
 (ب) لنفرض أن H لامتنغية تماماً . ولنفرض أن $\varphi \in \text{Aut}(G)$. بما أن φ تشاكل ذاتي وأن H لامتنغية تماماً فإننا نخلص إلى أن $\varphi(H) \leq H$. وبالتالي فإن H مميزة .
 (ج) لنفرض أن $\varphi \in \text{Aut}(G)$. وليكن $\varphi(x) \in \varphi(Z(G))$. عندئذٍ ، $x \in Z(G)$. ومنه $xa = ax$ لكل $a \in G$. ولذا فإن $\varphi(x)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(x)$. أي أن $\varphi(x) \in Z(G)$ (لأن φ شامل) . وبالتالي فإن $\varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$. أي أن $Z(G)$ مميزة . ولإثبات أن $Z(G)$ ليست بالضرورة لامتنغية تماماً اعتبر $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$. عندئذٍ ، $Z(G) = \langle ([1], e) \rangle$. ليكن $\varphi: G \rightarrow G$ التطبيق المعرف بالقاعدة :
 $\varphi([0], \sigma) = ([0], e)$ ، $\varphi([1], \sigma) = ([0], (12))$ لكل $\sigma \in S_3$. من الواضح أن $\varphi(Z(G)) \not\subseteq Z(G)$. ولكن φ تشاكل ذاتي .
 (د) لنفرض أن $H \leq G$ مميزة ولنفرض أن $g \in G$. عندئذٍ ، $\varphi_g \in \text{Aut}(G)$. ومنه $\varphi_g(H) \subseteq H$. أي أن $gHg^{-1} \subseteq H$. وبالتالي فإن $H \triangleleft G$. ولإثبات أن العكس غير صحيح ، اعتبر $G = V$ و $H = \{e, a\}$. من الواضح أن $H \triangleleft G$. ليكن $\varphi: G \rightarrow G$ التطابق المعرف على النحو التالي : $\varphi(e) = e$ ، $\varphi(a) = b$ ، $\varphi(b) = c$ و $\varphi(c) = a$.
 من الواضح أن $\varphi \in \text{Aut}(G)$ ولكن $\varphi(H) = \{e, b\} \not\subseteq H$.

تمارين (٧ ، ٤)

- (١) إذا كان $a, b \in G$ فأثبت أن $\varphi_a = \varphi_b$ إذا وفقط إذا كان $b^{-1}a \in Z(G)$.
 (٢) إذا كان $\varphi_a \in \text{Inn}(G)$ فأثبت أن φ_a يقسم $o(a)$.
 (٣) أثبت أن $\text{Inn}(D_4) \cong \text{Inn}(Q_8)$.
 (٤) أثبت أن $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

(٥) أثبت أن $\text{Aut}(S_4) \cong S_4$.

(٦) أثبت أن $\text{Inn}(T) \cong S_3$.

(٧) إذا كان $Z(G) = \{e\}$ فأثبت أن $Z(\text{Aut}(G)) = \{e\}$. هل العكس صحيح ؟

(٨) إذا كان $\text{Aut}(G) = \{e\}$ فأثبت أن $G = \{e\}$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2$.

(٩) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $[G : H] = 2$ وليكن $o(g) = 2$ لكل

$$g \in G - H$$

(أ) إذا كان $g \in G - H$ فأثبت أن $\varphi_g \in \text{Aut}(H)$ وأن $\varphi_g^2 = I$.

(ب) إذا كان $|H|$ عدداً فردياً فأثبت أن $\varphi_g(h) = h$ إذا وفقط إذا كان $h = e$ لكل

$$h \in H$$

(ج) أثبت أن G إبدالية .

(١٠) أثبت أن كل من الزمر الجزئية التالية لامتغيرة تماماً (وبالتالي فهي مميزة)

$$V \leq A_4 \quad (ب)$$

(أ) G' لأي زمرة G

(ج) $G^n = \{g^n : g \in G\} \leq G$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) $G_n = \{g \in G : g^n = e\} \leq G$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(١١) إذا كانت كل من H و K مميزة في G فأثبت أن $H \cap K$ مميزة في G .

(١٢) إذا كانت كل من H و K مميزة في G فأثبت أن HK مميزة في G .

(١٣) إذا كانت $G \triangleleft H$ و K مميزة في H فأثبت أن $K \triangleleft G$.

(١٤) إذا كانت H مميزة في K وكانت K مميزة في G فأثبت أن H مميزة في G .

(١٥) إذا كانت H زمرة جزئية ناظرية من الزمرة المنتهية G حيث $\gcd(|H|, [G : H]) = 1$

فأثبت أن H مميزة في G .

(١٦) ليكن $t \in \mathbb{Q}^*$ وليكن $\varphi_t : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ التطبيق المعرف بالقاعدة

$\varphi_t(r) = tr$. أثبت أن $\varphi_t \in \text{Aut}(\mathbb{Q})$ ثم استنتج أن الزمر الجزئية المميزة من $\mathbb{Q}$ هي $\{0\}$ و $\mathbb{Q}$

فقط .

(١٧) لتكن $(G, +)$ زمرة إبدالية وليكن p عدداً أولياً يحقق $px = 0$ لكل $x \in G$. إذا

كان $|G| = p^n$ فأثبت أن $\text{Aut}(G) \cong \text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$.

(١٨) إذا كانت $G = H \times K$ وكانت L زمرة جزئية لامتغيرة تماماً من G فأثبت أن

$$L = (L \cap H) \times (L \cap K)$$

(١٩) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياًها خاطئة :

(أ) إذا كانت $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(H)$ فإن $G \cong H$.

(ب) إذا كانت $\text{Aut}(G)$ زمرة دورية فإن G إبدالية .

(ت) إذا كانت $|G| \geq 2$ وكانت G غير إبدالية فإنه من الممكن أن تكون $\text{Aut}(G) = \{e\}$.

(ث) إذا كانت G زمرة إبدالية تحتوي على عنصر رتبته لا تساوي 2 فإن $\text{Aut}(G) \neq \{e\}$.

(ج) إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكانت $H \leq G$ فإن H مميزة في G .

(ح) إذا كانت $H < S_3$ فإن H مميزة في S_3 .

(خ) $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(د) $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{105}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

الفصل الرابع

مبرهنات سيلو وتطبيقاتها

SYLOW THEOREMS AND ITS APPLICATIONS

(١ , ٤) تأثير الزمر على المجموعات

Groups Acting on Sets

يعد مفهوم تأثير نظام رياضي على نظام رياضي آخر من المفاهيم الهامة والمتكررة في دراسة الرياضيات ، فعندما يؤثر نظام رياضي على آخر نستطيع إستشفاف معلومات هامة جداً عن النظامين. في هذا البند ندرس مفهوم تأثير زمرة على مجموعة ونوضح هذا المفهوم ببعض الأمثلة . سنوظف هذا المفهوم في البند (٣ , ٤) لإثبات مبرهنات سيلو . كما أنه من الممكن استخدام مفهوم تأثير زمرة على مجموعة في مساعدتنا على تصنيف بعض الزمر .

تعريف (١ , ٤)

لتكن G زمرة ولتكن A مجموعة غير خالية . يعرف تأثير الزمرة G على المجموعة A (action of a group on a set) بأنه تطبيق $A \rightarrow G \times A : *$ (في العادة نكتب $g * a$ بدلاً

من $(g, a) *$) الذي يحقق مايلي :

(أ) $e * a = a$ لكل $a \in A$.

(ب) $(g_1 g_2) * a = g_1 * (g_2 * a)$ لكل $a \in A$ ولكل $g_1, g_2 \in G$.

يسمى التأثير المقدم في التعريف (١ , ٤) التأثير الأيسر ، ومن الممكن تعريف التأثير الأيمن

بصورة مماثلة . وإذا كان لدينا تأثير (أيمن أو أيسر) لزمرة G على مجموعة A فإننا نقول إن G تؤثر على A .

مثال (١ , ٤)

إذا كان $A \rightarrow G \times A : *$ معرفاً بالقاعدة $g * a = a$ لكل $g \in G$ وكل $a \in A$ فيمكن اعتبار أن

G تؤثر على A لأن :

$$(أ) \quad e * a = a \text{ لكل } a \in A .$$

$$(ب) \quad (g_1 g_2) * a = a = g_2 * a = g_1 * (g_2 * a) \text{ لكل } g_1, g_2 \in G \text{ وكل } a \in A .$$

يسمى هذا التأثير ، التأثير التافه $\square$

مثال (٢ , ٤)

إذا كانت G هي زمرة التبديلات على المجموعة A فإن $G \times A \rightarrow A$: المعرف
بالقاعدة $\sigma * a = \sigma(a)$ لكل $\sigma \in G$ وكل $a \in A$ تأثيراً للزمرة G على A لأن :

$$(أ) \quad e * a = e(a) = a \text{ لكل } a \in A .$$

$$(ب) \quad (\sigma_1 \circ \sigma_2) * a = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(a) = \sigma_1(\sigma_2(a)) = \sigma_1 * (\sigma_2(a)) = \sigma_1 * (\sigma_2 * a)$$

لكل $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ وكل $a \in A$ $\square$

مثال (٣ , ٤)

إذا كان V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ فإن $\mathbb{R}^* \times V \rightarrow V$: المعرف بالقاعدة
 $r * v = rv$ لكل $r \in \mathbb{R}^*$ وكل $v \in V$ تأثيراً للزمرة $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ على المجموعة V لأن :

$$(أ) \quad 1 * v = 1v = v \text{ لكل } v \in V .$$

$$(ب) \quad (rs) * v = (rs)v = r(sv) = r(s * v) = r * (s * v)$$

لكل $r, s \in \mathbb{R}^*$ وكل $v \in V$ $\square$

مثال (٤ , ٤)

إذا كانت G زمرة فإنه من الواضح أن $G \times G \rightarrow G$: المعرف بالقاعدة $g_1 * g_2 = g_1 g_2$ لكل

$g_1, g_2 \in G$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة G $\square$

مثال (٥ , ٤)

إذا كانت $H \leq G$ فإنه من الواضح أن $H \times G \rightarrow G$: المعرف بالقاعدة $h * g = hg$ لكل

$h \in H$ وكل $g \in G$ تأثيراً للزمرة H على المجموعة G $\square$

مثال (٤ , ٦)

إذا كانت $H \leq G$ وكانت $A = \{ aH : a \in G \}$ فإن $A \rightarrow G \times A \rightarrow A$ المعرف $*$ بالمعادلة $(ga)H = g * aH$ لكل $g \in G$ وكل $aH \in A$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة A لأن :

(أ) $e * aH = (ea)H = aH$ لكل $aH \in A$.

(ب) $(g_1 g_2) * aH = (g_1 g_2 a)H = g_1 (g_2 a)H = g_1 (g_2 * aH) = g_1 * (g_2 * aH)$

□ لكل $aH \in A$ وكل $g_1, g_2 \in G$

ملحوظة

يسمى التأثير في الأمثلة من (٤ , ٤) إلى (٤ , ٦) الضرب من اليسار (action by left multiplication).

مثال (٤ , ٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $H \times G \rightarrow G$ المعرف بالمعادلة $h * g = hgh^{-1}$ لكل $h \in H$ وكل $g \in G$ تأثيراً للزمرة H على المجموعة G لأن :

(أ) $e * g = ege^{-1} = g$ لكل $g \in G$.

(ب) $(h_1 h_2) * g = (h_1 h_2)g(h_1 h_2)^{-1} = h_1 (h_2 g h_2^{-1}) h_1^{-1}$

$= h_1 * (h_2 g h_2^{-1}) = h_1 * (h_2 * g)$

□ لكل $g \in G$ وكل $h_1, h_2 \in H$

مثال (٤ , ٨)

إذا كانت $H \triangleleft G$ فإن $G \times H \rightarrow H$ المعرف بالمعادلة $g * h = ghg^{-1}$ لكل $g \in G$ وكل $h \in H$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة H □

مثال (٤ , ٩)

إذا كانت G زمرة وكانت $A = \{ H : H \leq G \}$ فإن $A \rightarrow G \times A \rightarrow A$ المعرف بالمعادلة $g * H = gHg^{-1}$ لكل $g \in G$ وكل $H \in A$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة A لأن :

$$(أ) \quad H \in A \text{ لكل } e * H = eHe^{-1} = H$$

$$(ب) \quad (g_1 g_2) * H = (g_1 g_2) H (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 H g_2^{-1}) g_1^{-1}$$

$$= g_1 * g_2 H g_2^{-1} = g_1 * (g_2 * H)$$

$$\square \quad H \in A \text{ وكل } g_1, g_2 \in G$$

ملحوظة

يسمى التأثير في الأمثلة من (٤, ٧) إلى (٤, ٩) التأثير بالترافق (action by conjugation).
من الآن فصاعداً نكتب ga بدلاً من $g * a$ إذا لم يحصل التباس.

مبرهنة (٤, ١)

لنفرض أن الزمرة G تؤثر على المجموعة A . إذا كانت $\approx$ علاقة معرفة على A كالآتي :
 $a \approx b \Leftrightarrow \exists g \in G (ga = b)$ لكل $a, b \in A$ فإن $\approx$ علاقة تكافؤ على A .

البرهان

(أ) بما أن $ea = a$ لكل $a \in A$ فإن $a \approx a$. ولذا فإن $\approx$ انعكاسية.

(ب) لنفرض أن $a \approx b$ حيث $a, b \in A$. عندئذ، يوجد $g \in G$ حيث $ga = b$. الآن :

$$a = ea = (g^{-1}g)a = g^{-1}(ga) = g^{-1}b$$

(ج) لنفرض أن $a \approx b$ وأن $b \approx c$ حيث $a, b, c \in A$. عندئذ، يوجد $g_1, g_2 \in G$ حيث $g_1a = b$ و $g_2b = c$. إذن ، $(g_2g_1)a = g_2(g_1a) = g_2b = c$. ولذا فإن $a \approx c$.

وبالتالي فإن $\approx$ متعدية ونستنتج إن $\approx$ علاقة تكافؤ ◆

تعريف (٤, ٢)

لتكن الزمرة G تؤثر على المجموعة غير الخالية A .

(أ) تسمى فصول تكافؤ العلاقة $\approx$ المقدمة في المبرهنة (٤, ١)، مدارات (orbits) G على A .

لاحظ أن فصل التكافؤ الذي يحتوي $a \in A$ هو :

$$[a] = \{ b \in A : \exists g \in G (ga = b) \} = \{ ga : g \in G \}$$

(ب) يكون تأثير G على A متعدياً (transitive) إذا كان هناك مدار واحد فقط

أي أنه لكل $a, b \in A$ يوجد $g \in G$ بحيث يكون $ga = b$.

مثال (٤ , ١٠)

إذا كان تأثير الزمرة G على المجموعة A هو التأثير التافه المبين في المثال (٤ , ١) فإن مدارات G على A هي عناصر A . لاحظ أن هذا التأثير يكون متعدداً إذا وفقط إذا كان $|A|=1$ □

مثال (٤ , ١١)

إذا كانت $G = S_n$ فإن تأثير G على $A = \{1, 2, \dots, n\}$ المبين في المثال (٤ , ٢) متعدداً □

ملحوظة

إذا كانت $H \leq G$ وكان تأثير G على A متعدداً فإنه ليس من الضروري أن يكون تأثير H على A متعدداً ، وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٤ , ١٢)

إذا كانت $H = \langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle \leq S_4$ فإن مدارات H على $A = \{1, 2, 3, 4\}$ هي $\{1, 2\}$ و $\{3, 4\}$. ولذا فإن تأثير H على A ليس متعدداً . لاحظ أنه لا يمكن إيجاد $\sigma \in H$ حيث $\sigma(2)=3$ □

مثال (٤ , ١٣)

إذا كانت $\sigma \in S_n$ فإنه باستخدام المبرهنة (١٦ , ١) نستطيع أن نجد مدارات $\langle \sigma \rangle$ بكتابة σ كتحويل دورات منفصلة . فمثلاً إذا كانت $\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5)$ فإن مدارات $\langle \sigma \rangle$ هي $\{1, 2\}$ و $\{3, 4, 5\}$ □

مبرهنة (٤ , ٢)

إذا كانت الزمرة G تؤثر على المجموعة A وكان $a \in A$ فإن $G_a = \{g \in G : ga = a\} \leq G$.

البرهان

بما أن $ea = a$ لكل $a \in A$ فإن $e \in G_a$. ولذا فإن $G_a \neq \emptyset$. لنفرض الآن أن $g, h \in G_a$.

عندئذ ، $ga = ha = a$. ومنه فإن $ga = a$ ، $g(h^{-1}a) = g(h^{-1}a) = gh^{-1}a$ ، إذن ،

$$\blacklozenge \quad G_a \leq G \text{ وبالتالي فإن } gh^{-1} \in G_a$$

تعريف (٣ ، ٤)

تسمى الزمرة G_a في المبرهنة (٢ ، ٤) مثبتة a (**stabilizer of a**) أو الزمرة الموحدة الخواص

(**isotropic group**) . كما تعرف نواة (**kernel**) تأثير G على A كالآتي :

$$G_A = \{ g \in G : ga = a \quad \forall a \in A \} = \bigcap_{a \in A} G_a$$

نقول إن تأثير G على A تأثيراً أميناً (**faithful action**) إذا كانت $G_A = \{e\}$.

مثال (١٤ ، ٤)

إذا كان تأثير الزمرة G على المجموعة A هو التأثير التافه المبين في المثال (١ ، ٤)

فإن $G_a = G$ لكل $a \in A$. ولذا فإن $G_A = G$. ومن ثم فإن هذا التأثير ليس أميناً إلا إذا

$$\square \quad G = \{e\} \text{ كانت}$$

مثال (١٥ ، ٤)

إذا كانت G زمرة وكانت $A = \{ H : H \leq G \}$ وكان تأثير G على A هو التأثير بالترافق فإن

الزمرة المثبتة للعنصر $H \in A$ هي $G_H = \{ g \in G : gHg^{-1} = H \}$. لاحظ أن G_H ما هي إلا

$$\square \quad N(H) \text{ (منظم } H \text{ في } G)$$

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة الوثيقة بين دليل G_a في G وبين عدد عناصر المدار $[a]$.

مبرهنة (٣ ، ٤)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A فإن $[G : G_a] = |[a]|$ لكل $a \in A$.

البرهان

لنفرض أن $L = \{ xG_a : x \in G \}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية G_a

في G . وليكن $[a] = \{ ga : g \in G \}$ هو مدار a . ولنعرف التطبيق $f : L \rightarrow [a]$ بالقاعدة

: الآن $xG_a \in L$ لكل $f(xG_a) = xa$

$xG_a = yG_a \Leftrightarrow y^{-1}x \in G_a \Leftrightarrow y^{-1}(xa) = a \Leftrightarrow xa = ya \Leftrightarrow f(xG_a) = f(yG_a)$
 إذن ، f معرفة تعريفاً حسناً وأحاديّاً . ومن الواضح أيضاً أن f شامل ، لأنه لكل $b \in [a]$ يوجد $x \in G$ حيث $xa = b$. ولذا فإن $f(xG_a) = xa = b$. إذن ،

$$\blacklozenge |L| = [G : G_a] = |[a]|$$

نتيجة (٤ ، ٤)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A وكانت $B \subseteq A$ هي مجموعة ممثلات مدارات A فإن

$$|A| = \sum_{b \in B} [G : G_b]$$

البرهان

باستخدام المبرهنة (٤ ، ١) نعلم أن $A = \bigcup_{b \in B} [b]$. وباستخدام المبرهنة (٤ ، ٣)

$$\blacklozenge |A| = \sum_{b \in B} |[b]| = \sum_{b \in B} [G : G_b]$$

نستخدم الآن مفهوم تأثير الزمرة على مجموعة لتعميم مبرهنة كيلى .

مبرهنة (٤ ، ٥)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A بالضرب من اليسار (أي $g * a = ga$) فإن :

(أ) لكل $g \in G$ يكون التطبيق $\tau_g : A \rightarrow A$ المعرف بالقاعدة $\tau_g(a) = ga$ تبديلاً .

(ب) $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$ لكل $g_1, g_2 \in G$.

(ج) يكون التطبيق $\psi : G \rightarrow S_A$ المعرف بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ تشاكلاً .

البرهان

(أ) لنفرض أن $\tau_g(a) = \tau_g(b)$ حيث $a, b \in A$. عندئذ ، $ga = gb$. الآن :

$$a = ea = (g^{-1}g)a = g^{-1}(ga) = g^{-1}(gb) = (g^{-1}g)b = eb = b$$

ولذا فإن τ_g أحادي . τ_g شامل أيضاً لأنه إذا كان $b \in A$ فإن :

$$\tau_g(g^{-1}b) = g(g^{-1}b) = (gg^{-1})b = eb = b$$

(ب) إذا كان $g_1, g_2 \in G$ فإنه لكل $a \in A$

$$\tau_{g_1 g_2}(a) = (g_1 g_2) a = g_1 (g_2 a) = \tau_{g_1}(g_2 a) = \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(a)) = (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(a)$$

$$\cdot \tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$$

$$\blacklozenge \text{ (ج) } \psi(g_1 g_2) = \tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \psi(g_1) \circ \psi(g_2) \text{ ، إذن } \psi \text{ تشاكل}$$

ملحوظات

(١) يسمى التشاكل ψ في المبرهنة (٥ ، ٤) التمثيل التبادلي المقرون مع التأثير

(permutation representation associated with the action) .

(٢) لاحظ أيضاً أن عكس المبرهنة (٥ ، ٤) صحيح أيضاً . أي أنه إذا كان

$$\psi: G \rightarrow S_A \text{ تشاكلاً فإننا نستطيع تعريف تأثير } G \times A \rightarrow A \text{ كالتالي :}$$

$$g * a = \psi(g)(a) \text{ . ولذا فإننا نستنتج أن تأثير زمرة على مجموعة والتمثيل المقرون به ما هما إلا وجهان لعملة واحدة (أي أنه يوجد تقابل بينهما) .}$$

(٣) لاحظ أن نواة تأثير زمرة على مجموعة هي نواة التمثيل التبادلي المقرون به (أنظر التمرين (١٤) من

تمارين هذا البند).

نتيجة (٦ ، ٤) [مبرهنة كيلبي المعممة]

إذا كانت $H \leq G$ وكانت $A = \{ aH : a \in G \}$ فإنه يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow S_A$ يحقق

$$\cdot \text{Ker} \psi \subseteq H$$

البرهان

لاحظ أولاً أن G تؤثر على A بالضرب من اليسار . أي أن $g * (aH) = (ga)H$ لكل

$aH \in A$ و $g \in G$. إذن ، باستخدام المبرهنة (٥ ، ٤) يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow S_A$ معرفاً

$$\text{بالقاعدة } \psi(g) = \tau_g \text{ . الآن :}$$

$$g \in \text{Ker} \psi \Rightarrow \psi(g) = \tau_e \Rightarrow \tau_g(aH) = aH \quad \forall aH \in A$$

$$\Rightarrow g(aH) = aH \quad \forall aH \in A \Rightarrow g(eH) = eH \Rightarrow gH = H \Rightarrow g \in H$$

$$\blacklozenge \text{Ker} \psi \subseteq H \text{ ، إذن}$$

النتيجة التالية هي مبرهنة كيلبي .

نتيجة (٧، ٤) [مبرهنة كيلبي]

إذا كانت G زمرة فإن G تماثل زمرة جزئية من S_G .

البرهان

إذا أخذنا $H = \{e\}$ في النتيجة (٦، ٤) فإن $A = G$ وإن $\text{Ker}\psi = \{e\}$. إذن، ψ تشاكل

أحادي من G إلى S_G ♦

النتيجة التالية تعرف أحياناً باسم مبرهنة الدليل (index theorem)، وتزودنا باختبار هام

لوجود زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية G .

نتيجة (٨، ٤) [مبرهنة الدليل]

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G حيث $[G:H] = n$ ، وإذا كان $|G|$

لا يقسم $n!$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة.

البرهان

باستخدام النتيجة (٦، ٤) يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow S_n$ يحقق $\text{Ker}\psi \subseteq H$. ولذا، باستخدام

مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $G / \text{Ker}\psi \cong \psi(G) \leq S_n$. إذن، $\frac{|G|}{|\text{Ker}\psi|}$ يقسم $n!$. وبما

أن $|G|$ لا يقسم $n!$ فإننا نجد أن $|\text{Ker}\psi| \neq 1$. وبالتالي فإن $\text{Ker}\psi$ زمرة جزئية ناظمية غير تافهة

من G ♦

مثال (١٦، ٤)

إذا كانت $H \leq G$ حيث $|G| = 80$ و $|H| = 16$ فإن $[G:H] = 5$. وبما أن 80 لا يقسم

5! فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة □

(١ , ١ , ٤) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ ، حيث $[G:H] = p$ ، p هو أصغر قاسم أولي للعدد $|G|$.
أثبت أن $H \triangleleft G$.

الحل

لنفرض أن $A = \{aH : a \in G\}$. عندئذٍ ، $|A| = [G:H] = p$. باستخدام النتيجة (٦ ، ٤) يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow S_p$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ حيث $\psi(g) = \tau_g$. ولذا

فإن $G / \text{Ker} \psi \cong \psi(G) \leq S_p$. ومنه فإن $|G / \text{Ker} \psi|$ يقسم $p!$. لنفرض أن

$|G / \text{Ker} \psi| = n$ ولنفرض أن $n = p_1 p_2 \dots p_k$ حيث p_i أعداداً أولية . الآن :

$n = [G:H][H:\text{Ker} \psi] \geq p$. بما أن $|G|$ يقسم $p!$ لكل i وأن p أصغر قاسم أولي

للعدد $|G|$ فإن $p_i \geq p$ لكل i . وبما أن $n \mid p!$ فإن $p_i \mid p!$ لكل i . وبما أن $p_i \geq p$ فإننا نخلص

إلى أن $i = 1$ وأن $p_i = p$. وبالتالي فإن $n = p$. أي أن $[H:\text{Ker} \psi] = 1$. ومنه فإن

$$\Delta \quad H = \text{Ker} \psi \triangleleft G$$

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pn حيث p عدد أولي $p > n$. ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = p$. أثبت أن $H \triangleleft G$.

الحل

لنفرض أن $A = \{aH : a \in G\}$. عندئذٍ ، $|A| = [G:H] = \frac{pn}{p} = n$. ليكن $\psi: G \rightarrow S_n$.

هو التشاكل الذي نحصل عليه من النتيجة (٦ ، ٤) . عندئذٍ ، $\text{Ker} \psi \subseteq H$. وبما أن $|H| = p$

فإن $\text{Ker} \psi = \{e\}$ أو $\text{Ker} \psi = H$. إذا كان $\text{Ker} \psi = \{e\}$ فإن G تماثل زمرة جزئية من S_n .

ومنه فإن $|G| = pn$ يقسم $n!$. أي أن $p \mid (n-1)!$ وهذا مستحيل لأن $p > n$. إذن ،

$$\Delta \quad \text{Ker} \psi = H \triangleleft G$$

تمارين (١ , ٤)

- (١) أثبت أن $r*(x, y) = (x + ry, y)$ تأثير للزمرة $(\mathbb{R}, +)$ على المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (٢) أثبت أن $g*a = ag^{-1}$ تأثير للزمرة G على نفسها.
- (٣) إذا كان لكل $1 \leq i \leq n$ يوجد $\sigma \in S_n$ حيث $\sigma(1) = i$ فأثبت أن S_n متعدية على $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- (٤) أثبت أن زمرة كلاين الرابعة V متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (٥) إذا كانت $S_4 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle = H$ فأثبت أن H متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (٦) إذا كانت $S_4 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = H$ فأثبت أن H ليست متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (٧) أثبت أن D_4 متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (٨) لنفرض أن G تؤثر على المجموعة A . أثبت أن هذا التأثير يحدث لنا تأثير للزمرة G على $P(A)$.

(٩) أثبت أن $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * (x, y) = (ax + by, cx + dy)$ تأثير للزمرة $GL(2, \mathbb{R})$ على

المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- (١٠) أثبت أن التأثير $g*a = ga$ للزمرة G على المجموعة G تأثيراً أميناً.
- (١١) إذا كانت الزمرة G تؤثر على G بالترافق فأثبت أن :
- (أ) إذا كان $|G| > 1$ فإن التأثير ليس متعدياً.
- (ب) إذا كان $a \in G$ فإن $[a] = \{a\}$ إذا وفقط إذا كان $a \in Z(G)$.
- (١٢) ليكن $\sigma*i = \sigma(i)$ هو تأثير الزمرة S_n على المجموعة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. أثبت أن هذا التأثير أميناً وأن $(S_n)_i \cong S_{n-1}$ لكل $1 \leq i \leq n$.
- (١٣) إذا كانت $|G| = 160$ وكانت $H \leq G$ حيث $|H| = 32$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة.

- (١٤) أثبت أن نواة التأثير للزمرة G على المجموعة A هو نواة التمثيل التبادلي المرفق مع التأثير.
- (١٥) إذا كان تأثير الزمرة G على المجموعة A متعدياً فأثبت أن :
- (أ) $G_b = gG_ag^{-1}$ لكل $a, b \in A$ وكل $g \in G$ (ب) $G_A = \bigcap_{g \in G} gG_ag^{-1}$.
- (١٦) إذا كانت $H \leq G$ وكانت G تؤثر على $A = \{aH : a \in G\}$ بالضرب من اليسار فأثبت أن:

(أ) التأثير متعدي $G_H = H$ (ب) $G_A = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$ (ج)

(د) G_A هي أكبر زمرة جزئية ناظمية من G محتواة في H .

(١٧) لنفرض أن $H \leq G$ حيث G زمرة منتهية . و لنفرض أن H تؤثر على G بالضرب من اليسار . أثبت أن $|H| = |[a]|$ لكل $a \in G$ ثم استنتج مبرهنة لاجرانج .

(١٨) إذا كانت G زمرة منتهية رتبها $2m$ حيث m عدد فردي فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبها m .

(١٩) إذا كانت $H \leq S_n$ فأثبت أنه إما أن تكون جميع عناصر H فردية أو أن نصف هذه العناصر بالضبط زوجي والنصف الآخر الفردي.

(٢٠) إذا كانت G زمر منتهية لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة وكانت

$H \leq G$ حيث $[G:H] = n$ فأثبت أن G تماثل زمرة جزئية من A_n [إرشاد : استخدم

التمرين (١٩) والتمرين (١٦) من تمارين (٣,٣)] .

(٢١) بين أيًا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت $S_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq H$ فإن H متعدية على $\{1, 2, 3\}$.

(ب) إذا كانت $S_3 = \langle (2\ 3) \rangle \leq H$ فإن H متعدية على $\{1, 2, 3\}$.

(ت) S_3 متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.

(ث) إذا كانت $H \leq G$ حيث $|G| = 24$ و $|H| = 8$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

(ج) كل زمرة منتهية G يجب أن تحتوي زمرة جزئية H دليلها عدداً أولياً .

(ح) إذا كانت G زمرة رتبها 63 ولا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة فإنها لا يمكن أن تحتوي على زمرة جزئية رتبها 21 .

(خ) إذا كانت $H \leq G$ حيث $|G| = 58$ و $|H| = 29$ فإن $H \triangleleft G$.

(د) إذا كانت G زمرة رتبها 66 فإنها تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبها 33 .

(ذ) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = n$ وكانت H لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من G فإن H تماثل زمرة جزئية من S_n .

(ر) إذا كانت $H \leq G$ حيث $|G| = 112$ و $|H| = 16$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

(٢ , ٤) فصول الترافق ومبرهنة كوشي

Conjugacy Classes and Cauchy's Theorem

في هذا البند سنركز اهتمامنا على نوع هام من تأثير الزمرة على مجموعة وهو التأثير بالترافق . تسمى مدارات هذا التأثير فصول الترافق حيث تساعدنا هذه الفصول في الحصول على تفريق لرتبة الزمرة المنتهية على صورة معادلة تعرف بمعادلة الفصول . ولمعادلة الفصول أهمية خاصة لأنها تلقي الضوء على تركيب الزمر المنتهية . كما أنها تستخدم في برهان مبرهنة كوشي الهامة والتي تعتبر المفتاح الأساسي لبرهان مبرهنات سيلو . ولكن قبل تقديم معادلة الفصول نقدم نوع خاص من الزمر .

تعريف (٤ , ٤)

إذا كان p عدداً أولياً فإننا نقول إن الزمرة G هي زمرة من النوع p (p-group) إذا كانت رتبة كل من عناصرها قوة للعدد p . وإذا كانت $H \leq G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية من النوع p إذا كانت H زمرة من النوع p .

إذا كانت G زمرة من الرتبة p^n حيث p عدداً أولياً فإنه من الواضح أن G زمرة من النوع p لأن رتبة أي عنصر في الزمرة يجب أن يقسم رتبة الزمرة . وسنبرهن في نهاية هذا البند أن العكس صحيحاً أيضاً للزمر المنتهية . ولكننا نقدم الآن مثلاً على زمرة غير منتهية من النوع p .

ليكن p عدداً أولياً ولتكن $\mathbb{Q}^p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \right\}$. من الواضح أن $(\mathbb{Q}^p, +)$

زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}, +)$. لنفرض الآن أن $\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Q}^p / \mathbb{Z}$. من الواضح أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة إبدالية غير منتهية . وعلاوة على ذلك فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p . لأنه لو

كان $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(x)$

يقسم p^n . إذن ، $o(x) = p^m$ حيث $m \leq n$. وبالتالي فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p .

سنقدم المزيد من خواص الزمر المنتهية من النوع p مع نهاية هذا البند ولكننا نعود الآن إلى

موضوعنا الأساسي .

(٤, ٥) تعريف

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A وكان $a \in A$ فإننا نقول إن a مثبتاً بالعنصر $g \in G$ (a fixed by g) إذا كان $ga = a$. وإذا كان a مثبتاً بجميع عناصر G فإننا نقول إن a مثبتاً بالزمرة G (a fixed by G). سنرمز بالرمز A_g (A_G) لجميع عناصر A المثبتة بالعنصر g (بالزمرة G). أي أن :

$$A_g = \{a \in A : ga = a \forall g \in G\} \text{ وأن } A_G = \{a \in A : ga = a\}$$

ملحوظة

لاحظ أن $a \in A_g$ إذا وفقط إذا كان $ga = a$ لكل $g \in G$. أي أن $[a] = \{a\}$. وبالتالي فإن A_G هي اتحاد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط.

لنفرض الآن أن G تؤثر على المجموعة المنتهية A ولنفرض أن عدد مدارات G على A هو r ولنفرض أن $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ هي مجموعة ممثلات المدارات. إذن باستخدام النتيجة (٤, ٤) نجد أن :

$$(١) \quad |A| = \sum_{i=1}^r |[a_i]| = \sum_{i=1}^r [G : G_{a_i}]$$

ولكن ، كما لاحظنا أعلاه فإن A_G هي اتحاد المدارات التي يحتوي كل منها على عنصر واحد فقط. فإذا كان عدد هذه المدارات هو k حيث $0 \leq k \leq r$ فإن المعادلة (١) تصبح :

$$(٢) \quad |A| = \sum_{i=1}^k |[a_i]| + \sum_{i=k+1}^r |[a_i]| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$$

نستخدم الآن هذه المعادلة للحصول على نتائج على قدر كبير من الأهمية للزمر المنتهية من النوع p .

(٤, ٩) مبرهنة

إذا كانت G زمرة رتبها p^n حيث p عدد أولي وإذا كانت G تؤثر على المجموعة المنتهية A فإن $|A| \equiv |A_G| \pmod{p}$.

البرهان

بما أن $|A| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$ وأن $|A|$ يقسم $|G|$ لكل $k+1 \leq i \leq r$ فإن

p يقسم $[G : G_{a_i}]$ لكل $k+1 \leq i \leq r$. ولذا فإن p يقسم $|A| - |A_G|$. ونخلص إلى
 ◆ $|A| \equiv |A_G| \pmod{p}$ أن

مبرهنة (٤, ١٠)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \leq G$ حيث $|H| = p^k$ و p عدد أولي فإن :

$$(أ) \quad [G : H] \equiv [N(H) : H] \pmod{p}.$$

(ب) إذا كان p يقسم $[G : H]$ فإن $N(H) \neq H$.

البرهان

(أ) لنفرض أن H تؤثر على $A = \{xH : x \in G\}$ بالضرب من اليسار. بما أن $|H| = p^k$ فإننا

نجد باستخدام المبرهنة (٩, ٤) أن $|A| \equiv |A_H| \pmod{p}$. الآن ، $|A| = [G : H]$ وأن :

$$xH \in A_H \Leftrightarrow h(xH) = xH \quad \forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}hx \in H \quad \forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}Hx \subseteq H$$

وبما أن $|x^{-1}Hx| = |H|$ و H منتهية فإننا نجد أن $x^{-1}Hx = H$. إذن ،

$$xH \in A_H \Leftrightarrow x^{-1}Hx = H \Leftrightarrow x \in N(H)$$

المشاركة للزمرة الجزئية H في $N(H)$. ومن ثم فإن $|A_H| = [N(H) : H]$. وبالتالي فإن

$$[G : H] \equiv [N(H) : H] \pmod{p}.$$

(ب) بما أن p يقسم $[G : H]$ فإنه باستخدام (أ) نجد أن p يقسم $[N(H) : H]$. ولذا

$$◆ \quad [N(H) : H] \geq p. \text{ وبالتالي فإن } N(H) \neq H.$$

إذا أثرت الزمرة المنتهية G على نفسها بالترافق فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية :

مبرهنة (٤, ١١)

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$$

إذا أثرت الزمرة المنتهية G على نفسها بالترافق فإن :

حيث r هو عدد المدارات و k هو عدد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط .

البرهان

$$|G| = |G_G| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$$

في هذه الحالة تأخذ المعادلة (٢) الصورة :

$$G_G = \{x \in G : gxg^{-1} = x \quad \forall g \in G\} = \{x \in G : gx = xg \quad \forall g \in G\} = Z(G)$$

$$\blacklozenge \quad |G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}] , \quad \text{إذن ,}$$

تعريف (٤ , ٦)

تسمى المعادلة في المبرهنة (٤,١١) معادلة الفصول للزمرة G (class equation of G). كما تسمى مدارات تأثير G على G بالترافق ، فصول الترافق (conjugate classes). ولذا فإن فصل الترافق الذي يحتوي $x \in G$ هو : $\{gxg^{-1} : g \in G\}$.

ملحوظات

(١) لاحظ أنه باستخدام المبرهنة (٤ , ٣) نجد أن عدد عناصر فصل الترافق $[x]$ (أي عدد مرافقات x) هو $[G : G_x]$. ولكن :

$$G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = \{g \in G : gx = xg\} = C(x)$$

إذن ، عدد مرافقات x ما هو إلا دليل المركز $C(x)$ في الزمرة G . أي $[G : C(x)]$.

(٢) أما إذا كانت الزمرة G تؤثر على المجموعة $A = \{H : H \leq G\}$ بالترافق فإننا نجد أن عدد مرافقات $H \in A$ هو $[G : G_H]$. ولكن $G_H = N(H)$ (في هذه الحالة) . إذن ، عدد مرافقات الزمرة الجزئية H هو دليل المنظم $N(H)$ في G . أي $[G : N(H)]$.

مثال (٤ , ١٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية وكان $x \in G$ فإن فصل ترافق x هو :

$$[x] = \{gxg^{-1} : g \in G\} = \{gg^{-1}x : g \in G\} = \{x\}$$

ولذا فإن معادلة الفصول للزمرة الإبدالية لا تقدم لنا معلومات إضافية عن الزمرة $\square$

مثال (٤ , ١٨)

بما أن أي دورتين في S_n تكونان مترافقتين إذا وفقط إذا كانتا متساويتين في الطول فإننا نستطيع أن نرى وبسهولة أن فصول ترافق S_3 هي :

$$\{e\} , \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} , \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$$

ولذا فإن معادلة فصول S_3 هي : $6 = 1 + 2 + 3$ $\square$

ملحوظة

لكل زمرة G نستطيع أن نرى وبسهولة أن $\langle x \rangle \leq C(x)$. وهذه الحقيقة تساعدنا على حساب فصول ترافق بعض الزمر.

مثال (٤ , ١٩)

لإيجاد معادلة فصول الزمرة Q_8 ، لاحظ أولاً أن $Z(Q_8) = \{e, a^2\}$. الآن :
 $\langle a \rangle \leq C(a) \leq Q_8$. وعلمنا أن $a \notin Z(Q_8)$ وأن $[Q_8 : \langle a \rangle] = 2$ فإن
 $C(a) = \langle a \rangle$. ولذا فإن $|[a]| = 2$. وبحساب بسيط نجد أن $[a] = \{a, a^3\}$.

وعلى المتوال نفسه نجد أن فصول ترافق Q_8 هي :

$\{e, a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}$. ولذا فإن معادلة الفصول للزمرة Q_8 هي :

$$\square \quad 8 = 2 + 2 + 2 + 2$$

مثال (٤ , ٢٠)

لإيجاد معادلة فصول D_4 ، لاحظ أولاً أن $Z(D_4) = \{e, a^2\}$ وإذا كان $x \notin Z(D_4)$ فإن $|C(x)| = 4$. ولذا فإن فصل ترافق x يحتوي على عنصرين فقط . وتكون فصول D_4 هي
 $\{e, a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}$. ولذا فإن معادلة فصول D_4 هي :

$$\square \quad 8 = 2 + 2 + 2 + 2$$

مثال (٤ , ٢١)

إنه ليس بالأمر العسير أن نتحقق من أن فصول ترافق A_4 هي :

$$[(1)] = \{(1)\}$$

$$[(1 \ 2 \ 3)] = \{(1 \ 2 \ 3), (1 \ 4 \ 2), (1 \ 3 \ 4), (2 \ 4 \ 3)\}$$

$$[(1 \ 3 \ 2)] = \{(1 \ 3 \ 2), (1 \ 2 \ 4), (2 \ 3 \ 4), (1 \ 4 \ 3)\}$$

$$[(1 \ 2) \circ (3 \ 4)] = \{(1 \ 2) \circ (3 \ 4), (1 \ 3) \circ (2 \ 4) \circ (1 \ 4) \circ (2 \ 3)\}$$

$$\square \quad 12 = 1 + 4 + 4 + 3 \quad \text{هي : } A_4 \text{ فصول}$$

نقدم الآن طريقة لحساب فصول ترافق زمرة التبديلات S_n .

(٤, ٧) تعريف

(أ) إذا كانت $\sigma \in S_n$ هي تحصيل دورات منفصلة أطوالها $n_1, n_2, \dots, n_k$ حيث $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ فإن الأعداد $n_1, n_2, \dots, n_k$ تسمى النمط الدوري (cycle type) للتبديل σ .

(ب) إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نعي بتجزئة n أي متتالية غير متناقصة من الأعداد الصحيحة الموجبة التي مجموع حدودها يساوي n .

(٤, ٢٢) مثال

إذا كانت $\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9) \in S_{11}$ فإن النمط الدوري لها هو $1, 1, 2, 3, 4$. أما النمط الدوري للدورة $(2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in S_{11}$ فهو $\square\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5$

(٤, ٢٣) مثال

تجزئات العدد 5 هي : $\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 4\}, \{5\}, \{1, 2, 2\}, \{2, 3\}$: $\square$

(٤, ١٢) مبرهنة

إذا كان $\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_{k_1}) \circ (b_1\ b_2\ \dots\ b_{k_2}) \circ \dots$ هو تحصيل دورات منفصلة وإذا كان $\tau \in S_n$ فإن :

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2)\ \dots\ \tau(a_{k_1})) \circ (\tau(b_1)\ \tau(b_2)\ \dots\ \tau(b_{k_2})) \circ \dots$$

البرهان

لاحظ أنه إذا كان $\sigma(i) = j$ فإن $\tau(\sigma(i)) = \tau(j)$ فإن $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}(\tau(i)) = \tau(\sigma(i)) = \tau(j)$. ولذا ، إذا ظهر الزوج المرتب (i, j) في كتابة σ كتحويل دورات منفصلة فإن الزوج المرتب $(\tau(i), \tau(j))$ يظهر في كتابة $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ كتحويل دورات منفصلة $\blacklozenge$

(٤, ١٣) مبرهنة

إذا كان $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ فإن σ_1 و σ_2 مترافقان في S_n إذا وفقط إذا كان لهما النمط الدوري نفسه.

البرهان

إذا كان σ_1 و σ_2 مترافقان في S_n فإنه باستخدام المبرهنة (٤, ١٢) نجد أن لهما النمط الدوري نفسه. ولبرهان العكس، نفرض أن σ_1 و σ_2 لهما النمط الدوري نفسه. أي أن :

$$\sigma_1 = (a_1 a_2 \dots a_{n_1}) \circ (b_1 b_2 \dots b_{n_2}) \circ \dots \circ (x_1 x_2 \dots x_{n_k})$$

$$\sigma_2 = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_1}) \circ (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n_2}) \circ \dots \circ (\chi_1 \chi_2 \dots \chi_{n_k})$$

ولنفرض أن :

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n_1} & \dots & x_1 & x_2 & \dots & x_{n_k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n_1} & \dots & \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_{n_k} \end{pmatrix}$$

♦ إذن ، $\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1} = \sigma_2$ وبالتالي فإن σ_1 و σ_2 مترافقان

نتيجة (٤, ١٤)

عدد فصول ترافق S_n يساوي عدد تجزئات n .

البرهان

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. إذا كان $n_1, n_2, \dots, n_k$ هو النمط الدوري للتبديل σ فإنه من الواضح أن $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. ولذا فإننا نحصل على تجزئة للعدد n . الآن باستخدام المبرهنة (٤, ١٣) نجد أن σ يرافق أي تبديل آخر له نفس النمط الدوري. ومن ثم فإننا نحصل على التجزئة نفسها للعدد n . إذن، نخلص إلى أن التبديلات المترافقة تقابل تجزئاً واحداً للعدد n . وبالتالي فإنه يوجد تقابل بين فصول ترافق S_n وتجزئات n .

نقدم الآن صيغة (دون برهان) لحساب عدد عناصر كل من فصول ترافق S_n .

مبرهنة (٤, ١٥)

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. ولنفرض أن $m_1, m_2, \dots, m_k$ هي الأعداد الصحيحة المختلفة التي تظهر في النمط الدوري للتبديل σ (بما في ذلك الدورات من الطول 1). ولنفرض

لكل $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ أن σ تحتوي على k_i دورة من الطول m_i (أي أن $\sum_{i=1}^s k_i m_i = n$)

عندئذ يكون عدد عناصر فصل ترافق σ (أي عدد مرافقات σ) هو :

$$|[\sigma]| = \frac{n!}{(k_1! m_1^{k_1}) (k_2! m_2^{k_2}) \dots (k_s! m_s^{k_s})}$$

مثال (٢٤ , ٤)

إذا كانت $\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4) \in S_n$ حيث $n \geq 4$ فإن $m_1 = 1, m_2 = 2$ وإن

$k_1 = n - 4, k_2 = 2$. ولذا فإن :

$$|[\sigma]| = \frac{n!}{((n-4)! 1^{n-4})(2! 2^2)} = \frac{n!}{8(n-4)!}$$

أما إذا كانت $\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5) \in S_5$ فإن $m_1 = 2, m_2 = 3$ وأن $k_1 = k_2 = 1$

$$\square |[\sigma]| = \frac{5!}{(1!2^1)(1!3^1)} = 20 \text{ ونستنتج أن}$$

مثال (٢٥ , ٤)

الجدول التالي يبين لنا فصول ترافق وعدد عناصر كل من هذه الفصول للزمرة S_5 :

عدد عناصر فصل الترافق	تمثل فصل الترافق	تجزئة 5
1	(1)	1,1,1,1,1
10	(1 2)	1,1,1,2
20	(1 2 3)	1,1,3
30	(1 2 3 4)	1,4
24	(1 2 3 4 5)	5
15	(1 2) ◦ (3 4)	1,2,2
20	(1 2) ◦ (3 4 5)	2,3

□ ولذا فإن معادلة فصول S_5 هي : $120 = 1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 15 + 20$

نتنقل الآن إلى تقديم بعض تطبيقات معادلة الفصول .

مبرهنة (١٦ , ٤)

إذا كانت G زمرة رتبها p^n حيث p عدداً أولياً فإن $|Z(G)| > 1$.

البرهان

نعلم أن : $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$. إذا كان $|G| = |Z(G)|$ فإن النتيجة

واضحة . ولنفرض إذن أن $Z(G)$ زمرة جزئية فعلية من G . بما أن $[G : G_{a_i}] = \frac{|G|}{|G_{a_i}|}$

فإن $[G : G_{a_i}]$ يقسم p^i لكل $k+1 \leq i \leq r$. ولذا فإن p يقسم $[G : G_{a_i}]$ كل $k+1 \leq i \leq r$.

ومن ثم فإن p يقسم $|G| - \sum_{i=k+1}^r [G : G_{a_i}]$. إذن ، p يقسم $|Z(G)|$. ونستنتج أن $|Z(G)| \geq p$ ♦

نتيجة (١٧ ، ٤)

إذا كانت G زمرة رتبته p^2 فإن G إبدالية .

البرهان

بما أن $|Z(G)| > 1$ فإن $|Z(G)| = p^2$ أو أن $|Z(G)| = p$. إذا كان $|Z(G)| = p^2$ فإن $G = Z(G)$. ومن ثم فإن G إبدالية . أما إذا كان $|Z(G)| = p$ فإن $|G/Z(G)| = p$ ، إذن ، $G/Z(G)$ دورية . وبالتالي فإن G إبدالية حسب المبرهنة (٣، ٤٥) ♦

باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية والنتيجة (٤، ١٧) نحصل على :

نتيجة (١٨ ، ٤)

يوجد فقط زمرة غير متماثلتين من الرتبة p^2 حيث p عدداً أولياً هما $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_{p^2}$ ♦

لقد سبق وأن قدمنا في الفصل الثالث مبرهنة كوشي للزمر الإبدالية المنتهية . نستخدم الآن معادلة الفصول لإثبات مبرهنة كوشي للزمر المنتهية بصورة عامة.

مبرهنة (١٩ ، ٤) [مبرهنة كوشي]

إذا كانت G زمرة منتهية رتبته n وكان p عدداً أولياً يقسم n فإن G تحتوي على عنصر من الرتبة p ومن ثم زمرة جزئية من الرتبة p .

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على $|G| = n$. إذا كان $n = 2$ فإن G دورية من الرتبة 2 ولذا فإنها تحتوي على عنصر من الرتبة 2 .

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لكل $2 \leq r < n$. لدينا معادلة الفصول للزمرة G :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{a \in Z(G)} [G : G_a]$$

إذا كانت $G = Z(G)$ فإن G إبدالية . ومن ثم فإن العبارة صحيحة باستخدام المبرهنة (٣, ٤٥) .
لنفرض إذن ، أن $G \neq Z(G)$ وأن $a \in G - Z(G)$. عندئذ ، $G \neq G_a$. ولذا فإن $[G : G_a] > 1$. باستخدام مبرهنة لاجرانج لدينا $|G_a| > |G|$. الآن إما p يقسم $|G_a|$ أو أن p لا يقسم $|G_a|$. إذا كان p يقسم $|G_a|$ فإنه باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن G_a (ومن ثم G) تحتوي على عنصر رتبته p . أما إذا كان p لا يقسم $|G_a|$ لكل $a \notin Z(G)$ فإننا نجد أن p يقسم $[G : G_a]$ (لأن p يقسم $|G|$) . إذن p يقسم $|G| - \sum_{a \in Z(G)} [G : G_a]$. ومنه فإن p يقسم $|Z(G)|$. وبما أن $Z(G)$ إبدالية فإنه باستخدام المبرهنة (٣, ٤٥) نجد أن $Z(G)$ (ومن ثم G) تحتوي على عنصر رتبته p .

نتيجة (٤, ٢٠)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p (أي رتبة أي عنصر في G هي قوة للعدد p) فإن $|G| = p^n$.
البرهان

لنفرض أن G زمرة منتهية من النوع p . ولنفرض لغرض التناقض أن q عدد أولي لا يساوي p ويقسم $|G|$. عندئذ ، باستخدام مبرهنة كوشي تحتوي G على عنصر رتبته q وهذا مستحيل .
إذن ، p هو القاسم الأولي الوحيد لرتبة الزمرة G . وبالتالي فإن $|G| = p^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(١, ٢, ٤) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

أثبت أنه لا يمكن إيجاد زمرة منتهية $\{e\} \neq G$ تحقق الشرط التالي:

كل $a \in G$ ، $a \neq e$ يتبدل مع نصف عناصر G .

الحل

لنفرض أن $|G| = n > 1$ تحقق الشرط . وليكن $e \neq x \in G$. عندئذ ، $|C(x)| = \frac{n}{2}$. ولذا فإن $|[x]| = [G : C(x)] = 2$. ولكن لدينا من معادلة الفصول للزمرة G :

$$|G| = [e] + \sum_{x \neq e} |[x]|$$

بما أن $[e] = 1$ وأن $[x] = 2$ لكل $e \neq x \in G$ فإننا نجد أن $|G|$ فردي . ولكن

$$|C(x)| = \frac{n}{2} = \frac{|G|}{2} \quad \Delta$$

ومنه فإن $|G|$ زوجي وهذا مستحيل Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة .

الحل

إذا كان $p = q$ فإن $|G| = p^2$. ولذا فإن p إبدالية . وباستخدام مبرهنة كوشي نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p وهذه الزمرة ناظرية لأن G إبدالية .

أما إذا كان $p > q$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة كوشي أيضاً أن G تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة p . وباستخدام التمرين (٢) من التمارين المحلولة (١ ، ٤) نجد أن $H \triangleleft G$.

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة p^n حيث p عدد أولي و $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن أي زمرة جزئية من G رتبته p^{n-1} يجب أن تكون ناظرية من G .

الحل

نستخدم الاستقراء الرياضي على n .

إذا كان $n = 1$ فإن G زمرة دورية من الرتبة p ولذا فإن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون ناظرية من G .

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر من الرتبة p^m حيث $1 \leq m < n$. ولنفرض أن $H \leq G$ من الرتبة p^{n-1} . إذا كانت $H \neq N(H)$ فإن $|N(H)| > p^{n-1}$. ولذا فإن $|N(H)| = p^n$.

ومنه فإن $N(H) = G$. وبالتالي $H \triangleleft G$. لنفرض الآن أن $H = N(H)$. بما أن G زمرة من الرتبة p^n فإن $Z(G) \neq \{e\}$. ولذا باستخدام مبرهنة كوشي يوجد $e \neq a \in Z(G)$ حيث $o(a) = p$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن $G = \langle a \rangle \triangleleft K$. وبما أن $|H/K| = p^{n-2}$ وأن $|G/K| = p^{n-1}$ فإننا نجد باستخدام فرضية الاستقراء أن $H/K \triangleleft G/K$ وبالتالي فإن $H \triangleleft G$ Δ

تمارين (٢ ، ٤)

(١) لتكن H زمرة جزئية من G وليكن $x \in G$. أثبت أن عدد مرافقات x في H أصغر من أو يساوي عدد مرافقات x في G . أعط مثلاً على زمرة G بحيث يكون عدد مرافقات x في H أصغر من عدد مرافقات x في G .

(٢) إذا كانت $G = S_5$ وكانت $H = A_5$ وكان $\alpha = (1\ 2\ 3)$ فأثبت أن عدد مرافقات α في A_5 يساوي عدد مرافقات α في S_5 . ومن ثم استنتج أن جميع الدورات الثلاثية مترافقة في A_5 .

(٣) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $[G:H] = 2$. وليكن $x \in H$ حيث أن عدد مرافقات x في G هو m . أثبت أن عدد مرافقات x في H هو m أو $\frac{m}{2}$.

(٤) أثبت أن A_5 مولدة بدورات ثلاثية .

(٥) أثبت أن A_5 لا تحتوي على زمرة جزئية فعلية ناظرية غير تافهة .

(٦) جد معادلة فصول الزمرة A_5 .

(٧) جد معادلة فصول الزمرة S_6 .

(٨) إذا كانت H زمرة إبدالية ناظرية من الزمرة G فأثبت أنه يوجد تشاكل من G/H إلى $\text{Aut}(H)$.

(٩) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فأثبت أن $H \triangleleft K$ إذا وفقط إذا كان $H \subseteq K \subseteq N(H)$.

(١٠) إذا كانت الزمرتان الجزئيتان H و K مترافقتين في G فأثبت أن $N(H)$ و $N(K)$ مترافقتان في G .

(١١) إذا كانت G زمرة غير إبدالية رتبته p^3 فأثبت أن $Z(G)$ زمرة دورية .

(١٢) إذا أثرت الزمرة G على نفسها بالتوافق فأثبت أنه يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow \text{Aut}(G)$

حيث $\text{Ker}\psi = Z(G)$.

(١٣) إذا كانت $G \triangleleft H$ وكانت كل من H و G/H زمرة من النوع p فأثبت أن G زمرة من النوع p .

(١٤) إذا كانت G زمرة منتهية وكان للعنصر $a \in G$ مرافقان فقط فأثبت أن $C(a) \triangleleft G$.

(١٥) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة n وكان عدد فصول ترافقها هو 2 فأثبت أن $n = 2$.

(١٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^m حيث p عدداً أولياً وكانت H زمرة جزئية فعلية من G فأثبت أنه يوجد $a \in G - H$ حيث $aHa^{-1} = H$.

(١٧) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $H \triangleleft G$ إذا وفقط إذا كانت H هي اتحاد فصول ترافق G .

(١٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^n حيث p عدداً أولياً و $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p^i لكل $0 \leq i \leq n$.

(١٩) لتكن $\sigma = (a_1 a_2 a_3 \dots a_r) \in S_n$.

(أ) جد عدد فصول ترافق σ (ب) احسب $|C(\sigma)|$ (ج) عين $C(\sigma)$

(٢٠) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كان $a \in G$ فإن $a \in Z(G)$ إذا وفقط إذا كان $\{a\} = [a]$.

(ب) إذا كانت $|G| = 14$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية رتبها 7.

(ت) إذا كانت $|G| = 15$ فإن G إبدالية.

(ث) إذا كانت $|G| = 28$ وكانت G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 4 فإن G إبدالية.

(ج) إذا كانت $|G| = 81$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية فعلية ناظرية رتبها أكبر من 3.

(ح) يوجد عنصران $\sigma, \mu \in A_5$ مترافقان في S_5 ولكنهما غير مترافقين في A_5 .

(خ) إذا كانت $|G| = 99$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية وحيدة من

الرتبة 11.

(٤, ٣) مبرهنات سيلو

Sylow Theorems

لتكن G زمرة منتهية. لقد سبق وأن برهنا (مبرهنة لاجرانج) أن رتبة أي زمرة جزئية من

G يجب أن تقسم رتبة G . ولقد بينا أيضاً أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً أيضاً للزمر الدورية

والزمر الإبدالية المنتهية . ولكن عكس مبرهنة لاجرانج ليس صحيحاً للزمر المنتهية بصورة عامة ، إذ سبق وأن بينا أن A_4 لا تحتوي على زمرة جزئية رتبته 6 .

إن التحقق من وجود زمر جزئية معينة من زمر منتهية مسألة صعبة بصورة عامة. ومن أهم المنجزات في هذا الاتجاه ما قدمه الرياضي النرويجي لدويغ سيلو (Ludwig Sylow) حيث قدم لنا ثلاث مبرهنات ، الأولى منها تنص على أنه إذا كان p^k يقسم رتبة الزمرة G حيث p عدداً أولياً فإن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p^k . والمبرهنة الثانية تضمن لنا توافق (ومن ثم تماثل) جميع هذه الزمر الجزئية ، وأما المبرهنة الثالثة فهي تزودنا بمعلومات عن عدد هذه الزمر الجزئية .

من الجدير ذكره هنا أن سيلو برهن مبرهناته الثلاث لزمر التبديلات ، وكان الرياضي جورج فروبينس (George Frobenius) هو أول من قدم برهاناً عاماً لهذه المبرهنات حيث كانت مبرهنة كيللي حافظاً له لتقديم هذه البراهين . وبعد ذلك نشر العديد من البراهين المختلفة لمبرهنات سيلو ولكننا سنقدم هنا ما نراه أفضل هذه البراهين وهو البرهان الذي يعتمد على مبرهنة كوشي وتأثير الزمرة على مجموعة .

مبرهنة (٢١ ، ٤) [مبرهنة سيلو الأولى]

إذا كانت G زمرة منتهية رتبته $p^n m$ حيث p عدداً أولياً، $n \in \mathbb{Z}^+$ و $\gcd(p, m) = 1$ فإن :

(أ) G تحتوي على زمرة جزئية رتبته p^k لكل $1 \leq k \leq n$.

(ب) إذا كانت G حيث $H \leq G$ حيث $|H| = p^k$ ، $1 \leq k < n$ ، فإنه يوجد زمرة جزئية K من

G رتبته p^{k+1} بحيث تكون $H \triangleleft K$.

البرهان

(أ) باستخدام الإستقراء الرياضي على n . إذا كان $n = 1$ فإن $|G| = pm$. وباستخدام مبرهنة

كوشي G تحتوي على زمرة جزئية رتبته p .

لنفرض الآن أن G تحتوي على زمرة جزئية H رتبته p^k لكل $1 \leq k < n$. عندئذ H زمرة جزئية

فعلية من G . وباستخدام المبرهنة (١٠ ، ٤) لدينا :

$$[G:H] \equiv [N(H):H] \pmod{p}$$

وكذلك $H \neq N(H)$ لأن p يقسم $[G:H]$. الآن :

p يقسم $[N(H)/H] = [N(H):H]$. ولذا فباستخدام مبرهنة كوشي يوجد زمرة

جزئية K/H من $N(H)/H$ رتبته p حيث $K \leq N(H) \leq G$. إذن :

ونكون قد أنهينا . $|K| = |K/H| |H| = pp^k = p^{k+1}$. ومن ثم فإن K زمرة جزئية من G رتبته p^{k+1}

(ب) إذا كانت $H \leq G$ حيث $|H| = p^k$ فإنه باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $|K| = p^{k+1}$. ومن

التمرين (٣) من التمارين المحلولة (١ , ٢ , ٤) نجد أن $H \triangleleft K$ ♦

تعريف (٨ , ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية وكان p عدداً أولياً يقسم $|G|$ فإننا نقول إن الزمرة الجزئية P من G هي زمرة سيلو من النوع p (Sylow p -subgroup) إذا كانت P زمرة جزئية أعظمية من النوع p (أي أنها غير محتواة فعلياً في زمرة جزئية أخرى من النوع p) .

لاحظ أن مبرهنة سيلو الأولى تضمن لنا وجود زمر سيلو من النوع p لكل p يقسم $|G|$ وإذا كانت $|G| = p^n m$ فإن رتبة زمرة سيلو من النوع p هي p^n . سنرمز لمجموعة زمر سيلو الجزئية من G من النوع p بالرمز $Syl_p(G)$.

مبرهنة (٢٢ , ٤) [مبرهنة سيلو الثانية]

إذا كانت $|G| = p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $n \in \mathbb{Z}^+$ و $\gcd(p, m) = 1$ وكانت $H, K \in Syl_p(G)$ فإن H و K مترافقتان (ومن ثم متماثلتان) .

البرهان

لنفرض أن $A = \{ aH : a \in G \}$ وأن K تؤثر على A بالضرب من اليسار . باستخدام المبرهنة

(٩ , ٤) نجد أن $|A| \equiv |A_K| \pmod{p}$. الآن : $|A| = [G:H]$ و أن

$A_K = \{ aH \in A : (ka)H = aH \forall k \in K \} \neq \emptyset$. بما أن $H \in Syl_p(G)$ فإن p لا

يقسم $|A|$ ومن ثم فإن $|A_K| \neq 0$. لنفرض أن $aH \in A_K$. عندئذ :

$k(aH) = aH \forall k \in K \Rightarrow a^{-1}ka \in H \forall k \in K \Rightarrow a^{-1}Ka \subseteq H$. وبما أن

♦ $a^{-1}Ka = H$ فإن $|a^{-1}Ka| = |K| = |H|$. وبالتالي فإن H و K مترافقتان

(نتيجة (٤, ٢٣))

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \in \text{Syl}_p(G)$ فإن H وحيدة إذا وفقط إذا كانت $H \triangleleft G$.

البرهان

لنفرض أولاً أن H وحيدة. لاحظ أنه لكل $g \in G$ لدينا $|gHg^{-1}| = |H|$. ولذا فإن $gHg^{-1} \in \text{Syl}_p(G)$. إذن، $gHg^{-1} = H$. ومنه فإن $H \triangleleft G$. ولبرهان العكس، نفرض

أن $H \triangleleft G$. ولنفرض أن $K \in \text{Syl}_p(G)$. إذن، باستخدام مبرهنة سيلو الثانية نجد أن $K = xHx^{-1}$ حيث $x \in G$. ولكن $xHx^{-1} = H$ لأن $H \triangleleft G$. إذن، $K = H$. ♦

(مبرهنة سيلو الثالثة) (٤, ٢٤)

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً، $\gcd(m, p) = 1$ و $n \in \mathbb{Z}^+$

وإذا كان n_p هو عدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فإن :

$$(أ) \quad n_p \equiv 1 \pmod{p} \quad (ب) \quad n_p \text{ يقسم } |G|$$

البرهان

لتكن $A = \{H \leq G : H \in \text{Syl}_p(G)\}$.

(أ) لنفرض أن $H \in A$ تؤثر على A بالترافق. عندئذٍ، باستخدام المبرهنة (٩, ٤) نجد أن $|A| \equiv |A_H| \pmod{p}$. الآن، $|A| = n_p$ وأن :

$H, K \in \text{Syl}_p(N(K))$ ومنه فإن $K \in A_H \Rightarrow hKh^{-1} = K \forall h \in H \Rightarrow H \subseteq N(K)$ ولذا

فهما مترافقتان في $N(K)$. أي أن $xKx^{-1} = H$ حيث $x \in N(K)$. وعليه فإن $H = K$.

ولذا فإن $A_H = \{H\}$. إذن، $n_p = |A| \equiv 1 \pmod{p}$.

(ب) لبرهان أن n_p يقسم $|G|$ نفرض أن G تؤثر على A بالترافق. باستخدام المبرهنة

(٣, ٤) نجد أن $[H] = [G : G_H]$ لكل $H \in A$. ولكن $[H] = \{gHg^{-1} : g \in G\}$.

وأن $G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\} = N(H)$. وباستخدام المبرهنة الثانية لسيلو نعلم أن جميع

زمر سيلو من النوع p مترافقة. إذن يوجد مدار واحد فقط للمجموعة A . ومنه فإن $[H] = A$.

ولذا فإن $n_p = |A| = [H] = [G : G_H] = [G : N(H)]$. ونخلص إلى أن n_p يقسم $|G|$. ♦

(مثال (٤, ٢٦))

في هذا المثال سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة S_3 . لدينا: $|S_3| = 2 \times 3$ ، وباستخدام مبرهنة

سيلو الثالثة نأخذ أن $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ ويقسم 6 . ومنه فإن ، $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكن كل من $\langle (1\ 2) \rangle$ ، $\langle (1\ 3) \rangle$ و $\langle (2\ 3) \rangle$ زمرة جزئية من S_3 رتبته 2 . إذن ، $n_2 = 3$. وبما أن $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ فإن $n_3 = 1$. إذن ، توجد زمرة سيلو وحيدة من النوع 3 وهي $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$. ومن ثم فإن $H \triangleleft S_3$ $\square$

مثال (٢٧ ، ٤)

سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة A_4 . نعلم أن $|A_4| = 2^2 \times 3$ ، كما أن $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$. ولذا فإن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكن باستخدام ميرهنه لاجرانج نعلم أن أي زمرة جزئية من A_4 رتبته 4 لا يمكن أن تحتوي على دورة طولها 3 . إذن ، $n_2 = 1$ وهذه الزمرة هي :

$H = \{ (1) , (1\ 3) \circ (2\ 4) , (1\ 4) \circ (2\ 3) , (1\ 2) \circ (3\ 4) \} \triangleleft A_4$ الآن ، $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$. ولذا فإن $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$. ولكن كل من الزمر التالية زمرة جزئية من A_4 رتبته 3 :

$$H_4 = \langle (2\ 3\ 4) \rangle , H_3 = \langle (1\ 3\ 4) \rangle , H_2 = \langle (1\ 2\ 4) \rangle , H_1 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

وبالتالي فإن $n_3 = 4$ $\square$

مثال (٢٨ ، ٤)

سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة S_4 ونبين أنها مترافقة . لاحظ أن $|S_4| = 2^3 \times 3$ وأن $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$. ومنه فإن ، $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$. ولكن كل من الزمر التالية زمرة جزئية من S_4 رتبته 3 : $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$ ، $\langle (1\ 3\ 4) \rangle$ ، $\langle (1\ 2\ 4) \rangle$ و $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$. إذن ، $n_3 = 4$. لاحظ أيضاً أن :

$$\langle (1\ 2\ 4) \rangle = (3\ 4) \circ \langle (1\ 2\ 3) \rangle \circ (3\ 4)$$

$$\langle (1\ 3\ 2) \rangle = (2\ 4) \circ \langle (1\ 2\ 3) \rangle \circ (2\ 4)$$

$$\langle (2\ 3\ 4) \rangle = (1\ 4) \circ \langle (1\ 2\ 3) \rangle \circ (1\ 4)$$

ولذا فإنها جميعاً مترافقة . الآن $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$. ومن ثم فإن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكننا نعلم أن D_4 زمرة جزئية من S_4 رتبته 8 . وإذا اعتبرنا أن D_4 زمرة تناظرات المربع الذي رؤوسه 1,2,3,4 فإننا نجد أن :

$$H = D_4 = \{(1), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$$

وإذا أعدنا ترتيب الرؤوس مرة على الصورة 1,3,2,4 ومرة على الصورة 1,3,4,2 فإننا نحصل على الزمرتين :

$$K \cong D_4 = \{(1), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 2), (3\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3), (1\ 3) \circ (2\ 4)\}$$

$$L \cong D_4 = \{(1), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4) \circ (2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$$

إذن ، $n_2 = 3$. ومن السهل أيضاً أن نرى أن :

$$K = (2\ 3) \circ H \circ (2\ 3) \text{ و } L = (2\ 3\ 4) \circ H \circ (2\ 3\ 4)^{-1} \text{ . وبالتالي فجميعها مترافقة } \square$$

نستخدم الآن مبرهنات سيلو لمساعدتنا في تصنيف بعض الزمر المنتهية .

مبرهنة (٢٥ ، ٤)

عدد الزمر غير المتماثلة من الرتبة 12 يساوي 5 .

البرهان

لنفرض أن G زمرة رتبته 12 . إذا كانت G إبدالية فإنه باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_{12}$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. وبهذا فإنه يوجد زميرتين إبداليتين غير متماثلتين من الرتبة 12 . لنفرض الآن أن G غير إبدالية . ولنفرض أن $P \in \text{Syl}_3(G)$. إذن ، $|P| = 3$ و $[G:P] = 4$. إذا جعلنا G تؤثر على $\{xP : x \in G\}$ بالضرب من اليسار فإننا نحصل باستخدام النتيجة (٦ ، ٤) على تشاكل $\psi : G \rightarrow S_4$ حيث $\text{Ker}\psi \subseteq P$. إذن ، $\text{Ker}\psi = \{e\}$ أو $\text{Ker}\psi = P$. إذا كان $\text{Ker}\psi = \{e\}$ فإن ψ أحادي . ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من S_4 رتبته 12 . ولكن باستخدام تمرين (١٥) من تمارين (٣ ، ٣) نجد أن A_4 هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_4 من الرتبة 12 . إذن ، $G \cong A_4$.

إذا كان $\text{Ker}\psi = P$ فإن $P \triangleleft G$. ولذا فإن P وحيدة . ومن ثم فإن G تحتوي على عنصرين فقط رتبة كل منهما 3 . لنفرض أن x أحد هذين العنصرين . عندئذ ، $|[x]| = 1$ أو $|[x]| = 2$.

ومن ثم فإن $[G : C(x)] = 1$ أو $[G : C(x)] = 2$. إذن ، $|C(x)| = 6$ أو $|C(x)| = 12$.
 وباستخدام مبرهنة كوشي فإن $C(x)$ تحتوي على عنصر y من الرتبة 2 . لنفرض أن $a = xy$.
 إذن ، $o(a) = 6$. ومنه فإن $G = \langle a \rangle \triangleleft H$. لنفرض الآن أن $e \neq b \in G$ وأن $b \notin H$.
 إذن ، $bab^{-1} \in H$. ولذا فإن bab^{-1} هو أحد العناصر a^5, a^4, a^3, a^2, a . الآن :
 إذا كان $bab^{-1} = e$ فإن $a = e$ وهذا تناقض . إذا كان $bab^{-1} = a$ فإن $ab = ba$ وهذا تناقض .
 إذا كان $bab^{-1} = a^2$ فإن $a^6 = e$ ، $bab^{-1} = a^2$ ، $(bab^{-1})^3 = ba^3b^{-1} = a^6 = e$. ولذا فإن $a^3 = e$ وهذا تناقض .
 إذا كان $bab^{-1} = a^3$ فإن $a^6 = e$ ، $bab^{-1} = a^3$ ، $(bab^{-1})^2 = ba^2b^{-1} = a^6 = e$. ولذا فإن $a^2 = e$ وهذا تناقض .
 إذا كان $bab^{-1} = a^4$ فإن $a^{12} = e$ ، $bab^{-1} = a^4$ ، $(bab^{-1})^3 = ba^3b^{-1} = a^{12} = e$. ولذا فإن $a^3 = e$ وهذا تناقض .
 إذن $bab^{-1} = a^5 = a^{-1}$. أي أن $a^{-1}b = ba$. الآن بما أن $|G/H| = 2$ فإن $b^2 \in H$. ولذا
 فإن b^2 هو أحد العناصر a^5, a^4, a^3, a^2, a, e . إذا كان $b^2 = a^2$ فإن :
 $ba = a^{-1}b \Rightarrow ba^2 = a^{-1}ba \Rightarrow b^3 = a^{-1}ba \Rightarrow b^6 = e = a^{-1}b^2a \Rightarrow b^2 = e \Rightarrow a^2 = e$
 وهذا تناقض . إذا كان $b^2 = a^4$ فإن :

$b^2 = a^4 \Rightarrow b^2a^2 = e \Rightarrow ba^{-1}ba = e \Rightarrow ba^{-2}b = e \Rightarrow a^{-2} = b^{-2} \Rightarrow a^2 = b^2$
 وبذلك نحصل على تناقض . إذا كان $b^2 = a$ فإن $b^{12} = a^6 = e$. ولذا فإن $o(b) = 12$. ومن
 ثم فإن G إبدالية وهذا تناقض . وبالمثل إذا كان $b^2 = a^5$ فإن G إبدالية . إذن $b^2 = e$
 أو $b^2 = a^3$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن :

(أ) $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 6$ ، $o(b) = 2$ و $ba = a^{-1}b$. وفي هذه الحالة
 $G \cong D_6$. أو

(ب) $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 6$ ، $b^2 = a^3$ و $ba = a^{-1}b$. وفي هذه الحالة
 $G \cong T$. لاحظ أن الزمر A_4, D_4, T ليست متماثلة (لماذا ؟) . وبهذا يتم البرهان ♦

مبرهنة (٢٦ ، ٤)

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p و q عددا أوليان و $p < q$ فإن :

(أ) G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية وحيدة رتبته q .

(ب) إذا كان $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ فإن G دورية .

(ج) إذا كان $q \equiv 1 \pmod{p}$ فإن $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(b) = p$ ، $o(a) = q$

و $ba = a^r b$ حيث q لا يقسم $r-1$ ولكن q يقسم $r^p - 1$.

البرهان

(أ) لاحظ أن $n_q \equiv 1 \pmod{q}$ ويقسم p . بما أن $p < q$ فإن $n_q = 1$. ولذا فإنه يوجد زمرة وحيدة $H \in \text{Syl}_q(G)$. ومن ثم فإن $H < G$ من الرتبة q .

(ب) $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ يقسم q . عندئذٍ ، $n_p = 1$ أو $n_p = q$. وبما أن $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ فإن $n_p = 1$. إذن ، توجد زمرة وحيدة $K \in \text{Syl}_p(G)$. ولذا فإن $K < G$ من الرتبة p . لاحظ أن $H \cong \mathbb{Z}_q$ وأن $K \cong \mathbb{Z}_p$ وأن $H \cap K = \{e\}$. ولذا فإن $G = HK$. وبالتالي فإن $|HK| = |H||K| = pq = |G|$ ، ولذا فإن $G \cong K \times H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

(ج) لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$. بما أن $q \equiv 1 \pmod{p}$ فإن K ليست وحيدة ولذا فإنها ليست ناظرية في G . ولكن $H < G$. إذن $bab^{-1} = a^r$ حيث $1 \leq r \leq q-1$. إذا كان q يقسم $r-1$ فإن $r-1 = mq$. ولذا فإن $bab^{-1} = a^{mq+1} = a$. ومنه فإن $ba = ab$. أي أن G إبدالية . إذن نفرض أن q لا يقسم $r-1$. الآن باستخدام الاستقراء الرياضي على n نستطيع أن نبرهن أن $b^n ab^{-n} = a^{r^n}$. إذن ، على وجه الخصوص يكون لدينا $b^p ab^{-p} = a^{r^p}$. أي أن $a = a^{r^p}$. ومنه فإن $o(a) = q$ يقسم $r^p - 1$.

باستخدام النتائج (٣،١٢) ، (٣،٣٩) ، (٤،١٧) والمبرهنات (٣،٤٠) ، (٣،٤١) ، (٤،٢٥) ، (٤،٢٦) نكون قد وجدنا جميع الزمر (باستثناء التماثل) من الرتب التي لا تزيد عن ١٥ والتي نلخصها في الجدول التالي :

الرتبة	عدد الزمر	الزمر الإبدالية	الزمر غير الإبدالية
1	1	$\{e\}$	لا يوجد
2	1	$\mathbb{Z}_2$	لا يوجد
3	1	$\mathbb{Z}_3$	لا يوجد
4	2	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	لا يوجد
5	1	$\mathbb{Z}_5$	لا يوجد
6	2	$\mathbb{Z}_6$	D_3
7	1	$\mathbb{Z}_7$	لا يوجد
8	5	$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	D_4, Q_8
9	2	$\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	لا يوجد
10	2	$\mathbb{Z}_{10}$	D_5

لا يوجد	$\mathbb{Z}_{11}$	1	11
A_4, D_6, T	$\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	5	12
لا يوجد	$\mathbb{Z}_{13}$	1	13
D_7	$\mathbb{Z}_{14}$	2	14
لا يوجد	$\mathbb{Z}_{15}$	1	15

ومن الجدير ذكره هنا أن عدد الزمر غير المتماثلة من الرتبة 16 هو 14 زمرة ، خمس منها إبدالية والباقي زمر غير إبدالية .

(٤ , ٣ , ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 66 .

الحل

لنفرض أن G زمرة حيث $|G| = 66 = 2 \times 3 \times 11$. ولتكن $H \in \text{Syl}_3(G)$ و $K \in \text{Syl}_{11}(G)$. بما أن $n_{11} = 1$ فإن $K \triangleleft G$. ولذا فإن $HK \leq G$ من الرتبة 33 . وباستخدام المبرهنة (٤ , ٢٦) نجد أن HK دورية . لنفرض أن $HK = \langle x \rangle$. وبما أن $[G : \langle x \rangle] = 2$ فإن $\langle x \rangle \triangleleft G$. وباستخدام مبرهنة كوشي يوجد $y \in G$ حيث $o(y) = 2$. ولذا فإن $xyx^{-1} \in \langle x \rangle$. أي أنه يوجد $i, 1 \leq i \leq 32$ حيث $xyx^{-1} = x^i$. أي أن $yx = x^i y$. الآن ، بما أن عناصر G على الصورة $x^s y^t$ فإننا نستطيع تحديد G بمعرفة قيم i . سنبرهن الآن أنه يوجد أربع قيم فقط للعدد i . بما أن $o(x^i) = o(x)$ فإن $\gcd(i, 33) = 1$. وبما أن $o(y) = 2$ فإن :

$$x = y^{-1} (xyx^{-1}) y = y^{-1} x^i y = y x^i y^{-1} = (y x y^{-1})^i = (x^i)^i = x^{i^2}$$

ومنه فإن $x^{i^2-1} = e$. ولذا فإن $(i^2 - 1) \mid 33$. وبالتالي فإننا نجد أن القيم الممكنة للعدد i هي $i = 1, 10, 23, 32$. ومن ثم فإنه يوجد على الأكثر أربع زمر غير متماثلة من الرتبة 66 . وأخيراً لإثبات أن عدد هذه الزمر هو بالضبط أربعة ، لاحظ أن رتبة كل من الزمر الأربعة التالية هي 66 : $\mathbb{Z}_{66}, D_{33}, D_{11} \times \mathbb{Z}_3, D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$. كما أن جميع هذه الزمر غير متماثلة (أنظر تمرين (٣) من التمارين المحلولة (١ , ٤ , ٣) . وبالتالي فإننا نخلص إلى أنه يوجد فقط أربعة زمر غير المتماثلة من

الرتبة 66 Δ

(٢) تمرين

لتكن G زمرة من الرتبة $231 = 3 \times 7 \times 11$. ولتكن $K \in \text{Syl}_7(G)$ ، $H \in \text{Syl}_{11}(G)$ و $L \in \text{Syl}_3(G)$. أثبت أن :

- (أ) $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$ (ب) G تحتوي على زمرة جزئية دورية من الرتبة 77 .
 (ج) $G = HKL$ (د) $H \subseteq Z(G)$.

الحل

(أ) بما أن $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ يقسم 3×7 فإن $n_{11} = 1$. ولذا فإن $H \triangleleft G$. وبما أن $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$ يقسم 3×11 فإن $n_7 = 1$. ولذا فإن $K \triangleleft G$.
 (ب) بما أن $H \triangleleft G$ وأن $K \triangleleft G$ فإن $HK \triangleleft G$. وبما أن $H \cap K = \{e\}$ فإن :
 $|HK| = |H||K| = 77$. وبما أن $11 \not\equiv 1 \pmod{7}$ فإن HK دورية . استناداً إلى المبرهنة (٤، ٢٦) .

$$(ج) \text{ بما أن } L \cap (HK) = \{e\} \text{ فإن } |G| = 231 = 77 \times 3 = |HK| \cdot |L| .$$

ولذا فإن $G = HKL$.

(د) بما أن H و K ناظميتان من G وأن $H \cap K = \{e\}$ فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. وبما أن $|G/K| = 3 \times 11$ فإن G/K دورية وبالتالي إبدالية . لنفرض أن $a \neq e \in L$ وأن $b \neq e \in H$. عندئذ ، $a, b \notin K$. وبما أن G/K زمرة إبدالية فإن $(ab)K = (aK)(bK) = (bK)(aK) = (ba)K$. ومنه فإن

$(ab)^{-1}(ba) = b^{-1}a^{-1}ba \in K$. وبما أن $b \in H$ وأن $H \triangleleft G$ فإن $b^{-1}a^{-1}ba \in H$. ولذا فإن $b^{-1}a^{-1}ba \in H \cap K = \{e\}$. ومنه فإن $b^{-1}a^{-1}ba = e$ أي أن $ba = ab$. لنفرض الآن أن $x \in G$ وأن $h \in H$. بما أن $G = HKL$ فإن $x = abc$ حيث $a \in H$ ، $b \in K$ و $c \in L$.

الآن :

$$\begin{aligned} xh &= (abc)h = ab(ch) = ab(hc) = a(bh)c = a(hb)c \\ &= (ah)(bc) = (ha)bc = hx \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $h \in Z(G)$ أي أن $H \subseteq Z(G)$.

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة من الرتبة $255 = 3 \times 5 \times 17$ فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}_{255}$.

الحل

لتكن $H \in \text{Syl}_{17}(G)$. بما أن $n_{17} \equiv 1 \pmod{17}$ يقسم 3×5 فإن $n_{17} = 1$. ولذا فإن

$H \triangleleft G$. وباستخدام المبرهنة (٣, ١٩) نجد أن $N(H) = G$. وباستخدام المبرهنة (٣, ٦٠) والمبرهنة (٣, ٦٣) نجد أن :

$$|G/C(H)| = |N(H)/C(H)| \text{ يقسم } |\text{Aut}(H)|. \text{ ولكن}$$

$|\text{Aut}(H)| = |\text{Aut}(\mathbb{Z}_{17})| = |U_{17}| = 16$. ومنه فإن $|G/C(H)|$ يقسم 16. وبما أن

$|G/C(H)|$ يقسم أيضاً 255 فإن $|G/C(H)| = 1$. ولذا فإن

$G = C(H)$. أي أن جميع عناصر G تتبدل مع جميع عناصر H ، وهذا يعني أن

$H \subseteq Z(G)$. ومنه فإن 17 يقسم $|Z(G)|$. وبما أن $|Z(G)|$ يقسم أيضاً 255 فإن القيم

الممكنة هي : $|Z(G)| = 17, 51, 85, 255$. ولذا فإن $|G/Z(G)| = 15, 5, 3, 1$.

ولكن أي زمرة من الرتبة 1، 3، 5 أو 15 يجب أن تكون دورية ولذا فإن $G/Z(G)$ دورية . ومنه

فإن G إبدالية . وباستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد

$$\Delta \quad G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \cong \mathbb{Z}_{255}$$

تمرين (٤)

إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p و q عدداً أوليان وحيث $q \not\equiv 1 \pmod{p}$

و $p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_{p^2q}$ أو $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{pq}$.

الحل

نفرض أن $H \in \text{Syl}_p(G)$ وأن $K \in \text{Syl}_q(G)$. بما أن $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ فإن $n_p = 1$.

ولذا فإن $H \triangleleft G$. وبما أن $p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$ فإن $n_q = 1$. ولذا فإن $K \triangleleft G$.

الآن ، $|H| = p^2$ و $|K| = q$. ومنه فإن H إبدالية وأن K دورية . وبما أن $H \cap K = \{e\}$

فإن $G = HK$. ومن ثم فإن $|HK| = |H||K| = p^2q = G$. ومنه فإن

$G = H \times K$. وبما أن كل من H و K إبدالية فإن G إبدالية . وبالتالي فإننا نخلص باستخدام

المبرهنة الأساسية للزمر الأبديّة المنتهية أن $G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{p^2q}$ أو أن

$$\Delta \quad G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{pq}$$

تمرين (٥)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ بحيث إن جميع زمر سيلو الجزئية من G ناظرية أثبت أن G تساوي الضرب المباشر الداخلي لزمر سيلو الجزئية منها .

الحل

نفرض أن $H_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ لكل $i, 1 \leq i \leq t$ ، بما أن $H \triangleleft G$ وأن $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل

$i \neq j$ فإن $h_i h_j = h_j h_i$ لكل $h_i \in H_i, h_j \in H_j$. لنفرض الآن أن

$x = h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_t$ و $x \in H_i \cap (H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_t)$ عندئذٍ ،

حيث $h_j \in H_j$. وبما أن $o(x)$ يقسم كل من $p_i^{k_i}$ و $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \dots p_t^{k_t}$ فإن $o(x) = 1$. ومنه $x = e$. كما أن $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t} = |H_1 H_2 \dots H_t|$. ومنه

$$\Delta \quad G = H_1 H_2 \dots H_t \quad \text{وبالتالي فإن} \quad G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_t$$

تمرين (٦)

لتكن G زمرة من الرتبة $p^m n$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, n) = 1$ ولتكن $K \triangleleft G$.

(أ) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ فأثبت أن $P \cap K \in \text{Syl}_p(K)$.

(ب) إذا كانت $B \in \text{Syl}_p(K)$ فأثبت أن $B = P \cap K$ حيث $P \in \text{Syl}_p(G)$.

الحل

(أ) بما أن $|P \cap K|$ يقسم $|P| = p^m$ فإن $|P \cap K| = p^i$ حيث $i \leq m$. لنفرض الآن أن

$$|P \cap K| = \frac{|P| |K|}{|PK|} = \frac{p^m p^s t}{p^i} = p^{m+s-i} t \quad \text{فإن} \quad s > i \quad \text{إذا كان} \quad s = i \quad \text{سنبرهن أن} \quad |K| = p^s t$$

وهذا مستحيل لأن $PK \leq G$ وأن $|G| = p^m n$ ، إذن ، $s = i$. وبالتالي فإن : $P \cap K \in \text{Syl}_p(K)$.

(ب) لنفرض أن $|K| = p^s t$ حيث $\gcd(p, t) = 1$ وأن $B \in \text{Syl}_p(K)$. لنفرض أن

$Q \in \text{Syl}_p(G)$. عندئذٍ ، باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $Q \cap K \in \text{Syl}_p(K)$. وبما أن

$B \in \text{Syl}_p(K)$ فإن B و $Q \cap K$ مترافقتان في K . أي أنه يوجد $a \in K$ حيث $\Delta P = a^{-1}Qa \in \text{Syl}_p(G)$ حيث $B = a^{-1}(Q \cap K)a = a^{-1}Qa \cap a^{-1}Ka = P \cap K$

تمرين (٧)

لتكن $H < G$ حيث G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ ، p عدد أولي لا يقسم m .
(أ) إذا كان $[G : H] = k$ و p أوليين نسبياً فأثبت أن H تحتوي على جميع زمر سيلو الجزئية من النوع p للزمرة G .
(ب) بين أن الفقرة (أ) ليست صحيحة إذا لم تكن H ناظمية من G .

الحل

(أ) بما أن $|G| = p^n m = k |H|$ فإن p^n يقسم $k |H|$. وبما أن $\gcd(p, k) = 1$ فإن p^n يقسم $|H|$. ولذا فإن $|H| = p^n s$ حيث $\gcd(p, s) = 1$. لنفرض أن $P \in \text{Syl}_p(H)$ عندئذٍ ، $|P| = p^n$. ولذا فإن $P \in \text{Syl}_p(G)$. لنفرض الآن أن $Q \in \text{Syl}_p(G)$. عندئذٍ ،
يوجد $a \in G$ حيث $a^{-1}Pa \subseteq a^{-1}Ha = H$.

(ب) إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2) \rangle$ فإن H ليست ناظمية من G وأن $\gcd(3, 2) = 1$ ، $[G : H] = 3$. ولكن H لا تحتوي جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 2 للزمرة G

تمارين (٣ ، ٤)

- (١) صنف جميع زمر سيلو الجزئية من النوع p للزمرة A_5 ثم احسب عدد كل منها.
- (٢) عين جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 3 للزمرة S_5 .
- (٣) عين جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 5 للزمرة S_5 .
- (٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة $2p$ حيث p عدداً أولياً فردياً فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة p وأن G تحتوي على p من الزمر الجزئية كل منها من الرتبة 2 أو أنها تحتوي على زمرة جزئية واحدة فقط من الرتبة 2.
- (٥) إذا كان $|G| = p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, m) = 1$ وكانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ و H زمرة جزئية من G من النوع p تحتوي P فأثبت أن $H = P$.

(٦) ليكن p عدداً أولياً يقسم رتبة الزمرة المنتهية G ، ولتكن $P \in \text{Syl}_p(G)$ و H زمرة جزئية من G من النوع p . أثبت أنه يوجد $g \in G$ حيث $gHg^{-1} \leq P$.

(٧) إذا كانت K زمرة جزئية ناظرية من النوع p من الزمرة المنتهية G فأثبت أن K محتواة في أي زمرة سيلو جزئية من النوع p .

(٨) إذا كانت $H \in \text{Syl}_p(G)$ فأثبت أن $N(N(H)) = N(H)$.

(٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة $p^n m$ حيث $\gcd(m, p) = 1$ وإذا كانت $H \in \text{Syl}_p(G)$

فأثبت أن H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G التي تحقق $H \subseteq N(H)$.

(١٠) لتكن $H \in \text{Syl}_p(G)$ وليكن $a, b \in Z(H)$ حيث $a = xbx^{-1}$ ، $x \in G$. أثبت أنه يوجد $y \in N(H)$ يحقق $a = yby^{-1}$.

(١١) لتكن $H \in \text{Syl}_p(G)$ وليكن $a \in G$ حيث $a^p = o(a)$. إذا كان $aHa^{-1} = H$ فأثبت أن $a \in H$.

(١٢) لتكن K زمرة جزئية ناظرية من الزمرة المنتهية G ولتكن $P \in \text{Syl}_p(K)$. أثبت أن :

(أ) $Pg \in \text{Syl}_p(K)$ لكل $g \in G$ (ب) $G = N(P)K$.

(ج) إذا كانت $Q \in \text{Syl}_p(G)$ وكانت $H \leq G$ حيث $N(Q) \leq H$ فأثبت أن $N(H) = H$.

(١٣) لتكن G زمرة من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, m) = 1$. ولتكن $H \triangleleft G$.

(أ) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ فأثبت أن $PH/H \in \text{Syl}_p(G/H)$.

(ب) إذا كانت $K/H \in \text{Syl}_p(G/H)$ فأثبت أن $K/H = PH/H$ حيث $P \in \text{Syl}_p(G)$.

(١٤) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ وكانت Q زمرة جزئية من النوع p من G فأثبت أن $Q \cap N(P) = Q \cap P$.

(١٥) لتكن $P \in \text{Syl}_p(G)$. أثبت أن P وحيدة إذا وفقط إذا كانت P مميزة في G .

(١٦) لتكن $P \in \text{Syl}_p(G)$ ولتكن $S = \{x \in G : o(x) = p^k, k \in \mathbb{Z}^+\}$. أثبت أن P وحيدة إذا وفقط إذا كانت $\langle S \rangle$ زمرة جزئية من النوع p من G .

(١٧) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(H)$ وكان $P \triangleleft H \triangleleft G$ فأثبت أن $P \triangleleft G$.

(١٨) لتكن G زمرة منتهية حيث جميع زمر سيلو الجزئية من G دورية ولتكن $H \leq G$. أثبت أن جميع زمر سيلو الجزئية من H دورية أيضاً .

(١٩) أثبت أن أي زمرة من الرتب التالية يجب أن تكون دورية :

- 15, 33, 35, 51, 65, 69, 77, 85, 87, 91, 95, 115, 119, 123, 133, 141, 143, 145, 159, 161, 177, 185, 187, 323, 4747
- (٢٠) جد جميع الزمر غير المتماثلة لكل من الرتب التالية : 637, 245, 175, 99, 45 .
- (٢١) أثبت أن أي زمرة من الرتب التالية يجب أن تكون دورية : 1855, 1645, 1547, 1001 .
- (٢٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة $p^2 q^2$ حيث p و q عدداً أوليان مختلفان وحيث $p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$, $q^2 \not\equiv 1 \pmod{p}$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .
- (٢٣) جد جميع الزمر غير المتماثلة لكل من الرتب التالية : 14161, 5929, 1225 .
- (٢٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 455 فأثبت أن G دورية .
- (٢٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 105 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 35 .
- (٢٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 375 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 15 .
- (٢٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة 595 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 17 .
- (٢٨) (أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة 231 وكانت $H \in \text{Syl}_{11}(G)$ فأثبت أن $H \subseteq Z(G)$.
- (ب) إذا كانت G زمرة من الرتبة 385 وكانت $H \in \text{Syl}_7(G)$ فأثبت أن $H \subseteq Z(G)$.
- (٢٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1045 وكانت $H \in \text{Syl}_{19}(G)$ و $K \in \text{Syl}_{11}(G)$ فأثبت أن $K \triangleleft G$ وأن $H \subseteq Z(G)$.
- (٣٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة 627 وكانت $H \in \text{Syl}_{11}(G)$ و $K \in \text{Syl}_{19}(G)$ فأثبت أن $K \triangleleft G$ و $H \subseteq Z(G)$.
- (٣١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبت أن G إما أن تحتوي على أربعة عناصر أو أربعاً وعشرون عنصراً من الرتبة 5 .
- (٣٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبت أن $|Z(G)| \neq 4$.
- (٣٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 ولا تحتوي على زمر جزئية ناظرية فعلية غير تافهة فأثبت أن G لا تحتوي على زمر جزئية من الرتب 15, 20, 30 .
- (٣٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 168 ولا تحتوي على زمر جزئية ناظرية فعلية غير تافهة فأثبت أن :
(أ) $n_7 = 8$ (ب) إذا كانت $H \in \text{Syl}_7(G)$ فإن $|N(H)| = 21$ (ج) G لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 14 .
- (٣٥) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 30 .

(٣٦) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياًها خاطئة :

- (أ) توجد زمرة منتهية G حيث $|G/Z(G)| = 91$.
 (ب) باستثناء التماثل توجد زمرة منتهية وحيدة من الرتبة 77 .
 (ت) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ حيث $P \triangleleft G$ وإذا كانت $H \leq G$ فإن $P \cap H \in \text{Syl}_p(H)$ وحيدة .
 (ث) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ وكانت $P \subseteq H \leq G$ فإن $P \in \text{Syl}_p(H)$.
 (ج) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $P \in \text{Syl}_p(H)$ فإن $P \in \text{Syl}_p(G)$.
 (ح) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $P \in \text{Syl}_p(H)$ فإن $P \in \text{Syl}_p(GH g^{-1})$ لكل $g \in G$.
 (خ) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ فإن $P \cap H \in \text{Syl}_p(H)$.
 (د) إذا كانت G زمرة من الرتبة 957 فإن G دورية .
 (ذ) توجد زمرتان فقط غير متماثلتين من الرتبة 2873 .
 (ر) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1729 فإن G إبدالية .
 (ز) توجد زمرة غير إبدالية من الرتبة 255 .

(٤ , ٤) الزمر البسيطة

Simple Groups

تسمى الزمرة G زمرة بسيطة (simple) إذا كانت G لا تحتوي على زمر جزئية ناظرية عدا الزمرتين G و $\{e\}$.

إن أول من قدم مفهوم الزمر البسيطة هو جالو (Galois) في القرن التاسع عشر الميلادي أثناء محاولته البرهان على استحالة حل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة باستخلاص الجذور .
 تكمن أهمية الزمر البسيطة في كونها اللبنة الأساسية في بناء الزمر المنتهية (كما الأعداد الأولية في نظرية الأعداد أو العناصر في الكيمياء) . وهذا البناء يتم على النحو التالي :

لنفرض أن $G = G_0$ زمرة منتهية ولنفرض أن G_1 زمرة جزئية ناظرية أعظمية من G_0 (أي أن $G_1 \triangleleft G_0$ وإذا كانت $G_1 \triangleleft H \triangleleft G_0$ فإن $H = G_0$ أو أن $G_1 = H$) . عندئذ ، تكون G_0/G_1 زمرة بسيطة . الآن نختار زمرة جزئية ناظرية أعظمية G_2 من G_1 فتكون G_1/G_2 زمرة بسيطة . ونستمر على هذا المنوال إلى أن نتوقف عند $\{e\} = G_n$. وهذا يكون لدينا السلسلة :

$$\{e\} = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

حيث زمر خارج القسمة : $G_0/G_1, G_1/G_2, \dots, G_{n-1}/G_n$ جميعها زمر بسيطة يطلق عليها العوامل المُحصَّلة (**composition factors**) للزمرة G . ولقد برهن جوردان وهولدر (**Jordan and Holder**) أن هذا العوامل لا تعتمد على طريقة اختيار الزمر الناعظمية . وفي حالات كثيرة من الممكن تحديد زمرة بمعرفة عواملها المُحصَّلة ومن الممكن أيضاً معرفة الكثير من خواص الزمرة من دراسة عواملها المُحصَّلة . وإذا علمنا أن الكثير من خصائص الزمر المنتهية يتم برهانها بالاستقراء الرياضي مستخدمين الزمر البسيطة كخطوة أساسية فإن هذا يوضح لنا بدون شك أهمية الزمر البسيطة لدراسة الزمر المنتهية . ولهذا السبب اعتبرت مسألة تصنيف جميع الزمر المنتهية البسيطة من المسائل الأساسية في نظرية الزمر .

إن مسألة إيجاد جميع الزمر الإبدالية البسيطة المنتهية مسألة سهلة وسنبين في هذا البند أنه يوجد زمرة وحيدة (باستثناء التماثل) هي $\mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي . أما مسألة تصنيف الزمر غير الإبدالية البسيطة المنتهية فهي مسألة صعبة جداً احتاج حلها إلى عمل شاق وطويل اشترك فيه أكثر من مائة باحث رياضي ونشر أكثر من عشرة آلاف صفحة في المجلات العلمية المتخصصة في محاولة لحل هذه المسألة إلى أن تم تصنيف هذه الزمر تماماً في العام ١٩٨١ م .

في هذا البند سنبين من خلال الأمثلة واستخدام المفاهيم التي درسناها أنه توجد زمرتان فقط غير إبداليتين بسيطتين من بين الزمر التي رتبها أصغر من أو يساوي 200 . إحدى هذه الزمر من الرتبة 60 وأما الأخرى فرتبتها 168 .

المبرهنة التالية تصنف لنا جميع الزمر الإبدالية البسيطة .

مبرهنة (٢٧ و ٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن G زمرة بسيطة إذا وفقط إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}_p$ حيث p عدداً أولياً أو $p = 1$. .

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة إبدالية بسيطة ولنفرض أن $a \in G, a \neq e$. بما أن $\langle a \rangle \triangleleft G$ وأن G بسيطة فإن $\langle a \rangle = G$. ولذا فإن G دورية . إذن ، $G \cong \mathbb{Z}_n$ أو $G \cong \mathbb{Z}$. وبما أن $\mathbb{Z}$ ليست بسيطة فإن $G \cong \mathbb{Z}_n$. وأخيراً إذا كان $n = pq$ عدداً مؤلفاً فإن $\langle a^p \rangle$ زمرة جزئية من G رتبها q وهذا

مستحيل . إذن ، n عدداً أولياً . ونخلص إلى أن $G \cong \mathbb{Z}_p$. وبرهان العكس واضحاً لأن $\mathbb{Z}_p$ زمرة بسيطة ◆

نتقل الآن إلى تطبيق مبرهنات سيلو للبرهان على أنه إذا كانت G زمرة من الرتبة n حيث $1 \leq n \leq 200$ ، $n \neq 60$ و $n \neq 168$ فإن G زمرة غير بسيطة .

مبرهنة (٤ ، ٢٨)

إذا كانت $|G| = p^n$ حيث $n > 1$ و p عدداً أولياً فإن G زمرة غير بسيطة . ولذا لا يوجد زمرة بسيطة من الرتب : 4 , 8 , 9 , 16 , 25 , 27 , 32 , 49 , 64 , 81 , 121 , 125 , 128 , 169 البرهان

باستخدام المبرهنة (٤ ، ١٦) نعلم أن $\{e\} \neq Z(G)$. إذا كان $G = Z(G)$ فإن G إبدالية . ولذا فإن G غير بسيطة . أما إذا كان $G \neq Z(G)$ فإن $Z(G) < G$. ولذا فإن G غير بسيطة ◆

مبرهنة (٤ ، ٢٩)

إذا كانت $|G| = p^n m$ حيث $n \geq 1$ ، p عدداً أولياً و $p > m > 1$ فإن G ليست بسيطة . ولذا لا يوجد زمر بسيطة من الرتب :

6,10,14,15,18,20,21,22,26,28,33,34,35,38,39,42,44,46,50,51,52,54,55,57,
58,62,65,66,68,69,74,75,76,77,78,82,85,86,87,88,91,92,93,94,95,98,99,
100,102,104,106,110,111,114,115,116,117,118,119,122,123,124,129,130,
133,134,136,138,141,142,143,145,146,147,148,150,152,153,155,156,158,
159,161,162,164,166,170,171,172,174,177,178,183,184,185,186,187,188,
190,194,196

البرهان

باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = pk + 1$ ويقسم m . إذن ، $n_p = 1$ أو $n_p = m$. وبما أن $p > m$ فإن $n_p = 1$. ولذا فإن G تحتوي على زمرة سيلو وحيدة H من النوع p ، ومنه فإن ، $H < G$ وبالتالي فإن G ليست بسيطة لأن $H \neq G$ حيث ◆ $m = [G : H] > 1$

(مبرهنة (٣٠ , ٤)

إذا كانت $|G| = 2m$ حيث $m > 1$ عدداً فردياً فإن G زمرة غير بسيطة . ولذا لا يوجد زمرة بسيطة من الرتب : 30,70,90,126,154,182,198 .

البرهان

باستخدام مبرهنة كيللي يوجد تشاكل أحادي $\psi : G \rightarrow S_{2m}$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ حيث $\tau_g(a) = ga$. ليكن $g \in G$ حيث $o(g) = 2$. الآن :
 $\tau_g(a) = ga \Rightarrow \tau_g(ga) = g^2a = a$. إذن ، τ_g (كعنصر في S_{2m}) هو تحصيل مناقلات على الصورة $(a \ ga)$. وبما أن $|G| = 2m$ فإن عدد هذه المناقلات يساوي m . وبما أن m فردي فإن عدد هذه المناقلات فردياً . ولذا فإن τ_g فردي . إذن ، $G \cong \psi(G)$ تحتوي على تبديل فردي . ليكن التطبيق $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ معرفاً بالقاعدة

$$f(\sigma) = \begin{cases} 0 & , \sigma \text{ فردي} \\ 1 & , \sigma \text{ زوجي} \end{cases}$$

من الواضح أن f تشاكل غامر . إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن

$$G / \text{Ker } f \cong \mathbb{Z}_2 . \text{ ولذا فإن : } m = \frac{2m}{2} = \frac{|G|}{|\mathbb{Z}_2|} = |\text{Ker } f| . \text{ إذن ، } \{e\} \neq \text{Ker } f \triangleleft G$$

وبالتالي فإن G ليست بسيطة ◆

ملحوظات

(١) باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نستطيع أن نثبت أن أي زمرة من الرتب :

$$40,45,63,84,135,140,165,175,176,189,195,200$$

تحتوي على زمرة سيلو وحيدة من النوع p . ولذا فهي ليست بسيطة .

(٢) باستخدام مبرهنة الدليل (النتيجة (٨ , ٤)) بأخذ $H \in \text{Syl}_p(G)$ حيث رتبة H كبيرة ،

نستطيع أن نبرهن أن أي زمرة من الرتب : 12,24,36,48,96,108,160,192 ليست بسيطة .

نقدم الآن نسخة معدلة عن مبرهنة الدليل تستخدم للمساعدة على اكتشاف المزيد من الزمر غير البسيطة ولكن برهانها يحتاج إلى الحقيقة التالية عن زمر التبديلات .

تمهيدية (٣١ ، ٤)

إذا كانت $H \leq S_n$ فإن $H \leq A_n$ أو إن نصف عناصر H بالضبط زوجياً .

البرهان

حسب المبرهنة الثانية للتماثل لدينا : $H/(A_n \cap H) \cong HA_n/A_n$. إذا كانت جميع عناصر H زوجية فإن $H < A_n$. أما إذا احتوت H على تبديل فردي فإن $HA_n = S_n$. وبالتالي :

$$\blacklozenge |H \cap A_n| = \frac{1}{2}|H| \text{ ومنه نستنتج أن } |H/(H \cap A_n)| = |HA_n/A_n| = |S_n/A_n| = 2$$

مبرهنة (٣٢ ، ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية بسيطة وكانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = n$ فإن G تماثل زمرة جزئية من A_n .

البرهان

لنفرض أن G تؤثر على المجموعة $A = \{aH : a \in G\}$. عندئذ ، يوجد تشاكل $\psi : G \rightarrow S_n$. بما أن $\text{Ker } \psi \triangleleft G$ وأن G بسيطة فإننا نجد أن $\text{Ker } \psi = \{e\}$. ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من S_n . لنفرض أن $G \cong \psi(G)$ ليست زمرة جزئية من A_n . إذن باستخدام التمهيدية (٣١ ، ٤) ، نجد أن نصف عناصر $\psi(G)$ تبديلات فردية .

ولكن $\{\mu \text{ زوجي} : \mu \in \psi(G)\} = H$ زمرة جزئية من $\psi(G)$ دليلها 2 . ولذا فإن $H \triangleleft \psi(G)$ وهذا تناقض . وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $G \cong \psi(G) \leq A_n$ $\blacklozenge$

ملحوظات

(١) باستخدام المبرهنة (٣٢ ، ٤) ، نستطيع أن نثبت أن الزمرة من الرتبة 80 أو 112 ليست بسيطة فإذا كانت $|G| = 80 = 2^4 \times 5$ بسيطة وكانت $H \in \text{Syl}_2(G)$ فإن $[G:H] = 5$. ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من A_5 . إذن ، 80 يقسم $|A_5|$ وهذا مستحيل . وبالتالي فإن G ليست

بسيطة . وبالمثل ، إذا كانت $|G| = 112 = 2^4 \times 7$ فإن G تماثل زمرة جزئية من A_7 وهذا مستحيل لأن 112 لا يقسم $|A_7|$.

(٢) بقي لدينا الآن الزمر من الرتب : 56, 60, 72, 105, 120, 132, 144, 168, 180 . سنبرهن لاحقاً أنه يوجد زمرة بسيطة رتبها 60 وزمرة بسيطة رتبها 168 . أما ما تبقى فهي زمرة غير بسيطة وسنبرهن ذلك لكل زمرة على حدة .

مثال (٤ , ٢٩)

إذا كانت $|G| = 56 = 2^3 \times 7$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن 8 أو 7 أو $n_7 = 1$ وأن $n_2 = 1$. إذا كان $n_7 = 1$ أو $n_2 = 1$ فإن G ليست بسيطة . لنفرض ، إذن أن $n_7 = 8$ و $n_2 = 7$. عندئذ ، G تحتوي على $8 \times 6 = 48$ عنصراً من الرتبة 7 . لنفرض أن $H_1, H_2 \in \text{Syl}_2(G)$. بما أن $H_1 \cap H_2 \leq H_1$ فإن $|H_1 \cap H_2| \leq 4$. ولذا فإن $|H_1 \cup H_2| \geq 12$ ولا يوجد أي عنصر من عناصر $H_1 \cup H_2$ رتبته 7 . إذن ، $|G| \geq 48 + 12 = 60$ وهذا مستحيل . ولذا فإن $n_7 = 1$ أو $n_2 = 1$. وبالتالي فإن G ليست بسيطة $\square$

مثال (٤ , ٣٠)

إذا كانت $|G| = 72 = 2^3 \times 3^2$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن $n_3 = 4$ أو $n_3 = 1$. إذا كان $n_3 = 1$ فإن G ليست بسيطة . لنفرض إذن أن $n_3 = 4$. ولنفرض أن $H \in \text{Syl}_3(G)$. إذن ، باستخدام المبرهنة الثالثة لـ سيلو نجد أن $[G : N(H)] = n_3 = 4$. وبما أن $|G|$ لا يقسم 4 فإنه باستخدام مبرهنة الدليل نخلص إلى أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية فعلية غير تافهة . إذن ، G ليست بسيطة $\square$

مثال (٤ , ٣١)

إذا كانت $|G| = 105 = 3 \times 5 \times 7$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن ($n_7 = 15$ أو $n_7 = 1$) و ($n_5 = 21$ أو $n_5 = 1$) و ($n_3 = 7$ أو $n_3 = 1$). إذا كانت G بسيطة فإن $n_7 = 15$ ، $n_5 = 21$ و $n_3 = 7$. إذن ، G تحتوي على $15 \times 6 = 90$ عنصراً من الرتبة 7 وتحتوي على $21 \times 4 = 84$ عنصراً من الرتبة 5 وتحتوي على $7 \times 2 = 14$ عنصراً من الرتبة 3 . ولذا فإن $|G| \geq 90 + 84 + 14 = 188$ وهذا مستحيل. إذن ، G ليست بسيطة $\square$

مثال (٣٢ ، ٤)

إذا كانت $|G| = 132 = 2^2 \times 3 \times 11$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

نفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_{11} = 12$ ، $n_3 \geq 4$ و $n_2 \geq 3$. ولذا فإن G تحتوي على 120 عنصراً من الرتبة 11 وعلى الأقل 8 عناصر من الرتبة 3 وعلى الأقل 9 عناصر من الرتبة 2 أو 4 . ولذا فإن $|G| \geq 120 + 8 + 9 = 137$ وهذا مستحيل . إذن ، G ليست بسيطة $\square$

مثال (٣٣ ، ٤)

إذا كانت $|G| = 144 = 2^4 \times 3^2$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

نفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_3 = 16$ أو $n_3 = 4$ و $n_2 \geq 3$. نفرض أن $n_3 = 4$ وأن $H \in \text{Syl}_3(G)$. عندئذ ، $[G : N(H)] = 4$ وهذا مستحيل لأن 144 لا يقسم 4! . إذن ، $n_3 = 16$. الآن إذا كان $|H_i \cap H_j| = 1$ لكل $H_i, H_j \in \text{Syl}_3(G)$ ، $i \neq j$ فإن G تحتوي على 128 عنصراً من الرتبة 3 أو 9 . وبما أن $n_2 \geq 3$ فإن $|G| > 144$ وهذا مستحيل . إذن ، يوجد $H_i, H_j \in \text{Syl}_3(G)$ حيث $|H_i \cap H_j| \neq 1$ ، $i \neq j$. ولذا فإن $|H_i \cap H_j| = 3$. إذن ، $H_i \cap H_j < H_j$ و $H_i \cap H_j < H_i$. ولذا فإن كل من H_i, H_j محتواة في $N(H_i \cap H_j)$. ومن ثم فإن $H_i H_j \subseteq N(H_i \cap H_j)$. ومنه فإن

$$|N(H_i \cap H_j)| \geq |H_i H_j| = \frac{9 \times 9}{3} = 27 \quad \text{كذلك ، } 9 \text{ يقسم } |N(H_i \cap H_j)| \text{ و}$$

$|N(H_i \cap H_j)| \geq 36$. وعليه فإن 144 يقسم $|N(H_i \cap H_j)|$. ولذا فإن $[G : N((H_i \cap H_j))] \leq 4$ وهذا مستحيل لأن 144 لا يقسم $m!$ حيث $m \leq 4$. إذن، G ليست بسيطة $\square$

مثال (٤, ٣٤)

إذا كانت $|G| = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_3 = 10$ و $(n_5 = 6 \text{ أو } n_5 = 36)$. لنفرض أن $n_5 = 36$. إذن ، G تحتوي على $36 \times 4 = 144$ عنصراً من الرتبة 5 . لنفرض الآن أن $|H_i \cap H_j| = 1$ لكل $(G) \in \text{Syl}_3(G)$ ، $H_i, H_j \in \text{Syl}_3(G)$. إذن، G تحتوي على $10 \times 8 = 80$ عنصراً من الرتب 3 أو 9 . ولذا فإن $|G| \geq 144 + 80 = 224$ وهذا مستحيل . إذن ، يوجد $(G) \in \text{Syl}_3(G)$ ، $H_i, H_j \in \text{Syl}_3(G)$ حيث $|H_i \cap H_j| = 3$. وكما هو مبين في المثال (٤, ٣٣) نجد أن :

$$|N(H_i \cap H_j)| \geq |N(H_i \cap H_j)| \text{ يقسم } 9 \text{ وأن } |N(H_i \cap H_j)| \geq |H_i H_j| = \frac{9 \times 9}{3} = 27$$

يقسم 180 . إذن ، $|N(H_i \cap H_j)| \geq 36$. ومن ثم فإن $[G : N((H_i \cap H_j))] \leq 5$. وهذا مستحيل . وأخيراً نفرض أن $n_5 = 6$. ولنفرض أن $H \in \text{Syl}_5(G)$. إذن ، $[G : N(H)] = 6$. ولذا فإن $|N(H)| = 30$. وباستخدام المبرهنة (٤, ٢٧) فإن $N(H)$ تحتوي على عنصر من الرتبة 15 . ولكن G تماثل زمرة جزئية من A_6 و A_6 لا تحتوي على أي عنصر من الرتبة 15 مما يؤدي إلى تناقض . إذن ، G ليست بسيطة $\square$

مثال (٤, ٣٥)

إذا كانت $|G| = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G زمرة بسيطة . عندئذ ، $n_5 = 6$. لنفرض أن $H \in \text{Syl}_5(G)$. عندئذ ، $n_5 = [G : N(H)] = 6$. ولذا فإن $|N(H)| = 2^2 \times 5$. لنفرض الآن أن $K \in \text{Syl}_2(N(H))$. ولذا فإن ، $|K| = 4$. وبما أن $K \leq N(H)$ و $H \in \text{Syl}_5(G)$ فإن $N(K) \geq N(N(H)) = N(H)$. ومنه فإن $|N(H)| = 2^2 \times 5$ يقسم $|N(K)|$

وبما أن $|K| = 2^2$ فإنه يوجد $P \in \text{Syl}_2(G)$ حيث $K \triangleleft P$. ومنه فإن $P \leq N(P) \leq N(K)$. ولذا فإن $|P| = 8$ يقسم $|N(K)|$. ومنه فإن $\text{lcm}(8, 20) = 2^3 \times 5$ يقسم $|N(K)|$. ولذا فإن $[G : N(K)] \leq 3$ وهذا مستحيل لأن $|G|$ لا يقسم $3!$. إذن ، G ليست بسيطة $\square$

ننتقل الآن لبرهان أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \neq 4$. لاحظ أولاً أن $A_2 = \{(1)\}$ وأن $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$. ولذا فإن كل منهما زمرة بسيطة . أما A_4 فهي زمرة ليست بسيطة لأن $V \triangleleft A_4$. سنبرهن الآن أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$ ولإنجاز ذلك نحتاج أولاً إلى بعض النتائج التحضيرية .

تمهيدية (٣٣ ، ٤)

لتكن $H \triangleleft A_n$ حيث $n \geq 5$. إذا احتوت H على دورة طولها 3 فإن $H = A_n$.

البرهان

لنفرض أن $(a b c) \in H$. ولتكن $(u v w) \in A_n$ ولنفرض أن $\pi \in S_n$ حيث $\pi \circ (a b c) \circ \pi^{-1} = (u v w)$ ، عندئذ ، $\pi(c) = w$ و $\pi(b) = v$ ، $\pi(a) = u$. إذا كان $\pi \in A_n$ فإن $(u v w) \in H$ ونكون قد انتهينا . لنفرض الآن أن $\pi \notin A_n$. عندئذ ، π تبديل فردي . وبما أن $n \geq 5$ فإنه يوجد d و f مختلفان عن a, b, c . ومنه فإن :

$$\pi \circ (d f) \in A_n \text{ الآن :}$$

$$\begin{aligned} (u v w) &= \pi \circ (a b c) \circ \pi^{-1} = \pi \circ (a b c) \circ (d f) \circ (d f)^{-1} \circ \pi^{-1} \\ &= \pi \circ (d f) \circ (a b c) \circ (d f)^{-1} \circ \pi^{-1} \\ &= (\pi \circ (d f)) \circ (a b c) \circ (\pi \circ (d f))^{-1} \in H \end{aligned}$$

ولذا فإن H تحتوي على جميع الدورات الثلاثية . وبما أن الدورات الثلاثية تولد A_n

◆ فإننا نخلص إلى أن $H = A_n$

تمهيدية (٣٤ ، ٤)

A_5 زمرة بسيطة .

البرهان

لاحظ أن $|A_5| = 60$ وأن 24 عنصراً من عناصر A_5 من الرتبة 5 ، 20 عنصراً من الرتبة 3 ، 15 عنصراً من الرتبة 2 . لنفرض أن $A_5 \triangleleft H$ ، $\{e\} \neq H$. عندئذٍ ، باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن : $|H| = 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$. ولقد بينا في التمرين (٤) من التمارين المحلولة (١ ، ٥ ، ٣) أن A_5 لا يمكن أن تحتوي على زمرة جزئية رتبته 3 ، 5 ، 6 ، 10 ، 12 ، 15 ، 20 أو 30 . ولذا فإن $|H| = 2$ أو $|H| = 4$. ومنه فإن $|A_5/H| = 30$ أو $|A_5/H| = 15$. أي أن A_5/H تحتوي على عنصر من الرتبة 15 وهذا مستحيل لأن A_5 لا تحتوي على عناصر من الرتبة 15 . وبالتالي فإن A_5 زمرة بسيطة ◆

تمهيدية (٣٥ ، ٤)

A_6 زمرة بسيطة .

البرهان

لنفرض أن $A_6 \triangleleft H$ ، $\{e\} \neq H$. لنفرض أولاً أن $\pi \in H$ ، $\pi(1) \neq 1$ حيث $\pi(i) = i$ ، $1 \leq i \leq 6$. ولتكن $K = \{\sigma \in A_6 : \sigma(i) = i\}$. من الواضح أن $K \cong A_5$. ولذا فإن K زمرة بسيطة . وبما أن $\pi \in H \cap K$ فإن $H \cap K \neq \{e\}$. وبما أن $H \cap K \triangleleft K$ وأن K زمرة بسيطة فإن $H \cap K = K$. ومنه فإن $K \leq H$. وبما أن K تحتوي على دورة ثلاثية فإن H تحتوي على دورة ثلاثية . ومن ثم نجد باستخدام التمهيدية (٣٣ ، ٤) أن $H = A_6$. لنفرض الآن أن $\pi(i) \neq i$ لكل $\pi \in H$ ولكل $1 \leq i \leq 6$. في هذه الحالة يكون من السهل أن نرى أن $\pi = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5\ 6)$ أو $\pi = (1\ 2) \circ (3\ 4) \circ (5\ 6)$. في الحالة الأولى نجد أن $\pi^2 \in H$ وأن $\pi^2(1) = 1$ وهذا مستحيل . وفي الحالة الثانية فإن $\pi \circ (\beta \circ \pi^{-1} \circ \beta^{-1}) \in H$ حيث $\beta = (2\ 3\ 4)$. وهذا مستحيل أيضاً لأن

$$\pi \circ (\beta \circ \pi^{-1} \circ \beta^{-1})(1) = 1$$

مبرهنة (٣٦ ، ٤)

A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$.

البرهان

لنفرض أن $A_n \triangleleft H$ ، $\{e\} \neq H$. لنفرض أن $\beta \in H$ ، $\beta(1) \neq 1$. عندئذٍ ، يوجد i ، $1 \leq i \leq n$ بحيث يكون $\beta(i) = j \neq i$. لنفرض أن α دورة طولها 3 بحيث $\alpha(i) = i$ وأن $\alpha(j) \neq j$. لاحظ

أن α و β لا يتبدلان لأن : $(\beta \circ \alpha)(i) = \beta(i) = j$ ولكن $(\alpha \circ \beta)(i) = \alpha(j) \neq j$ ولذا فإن γ ولذا فإن : $\gamma = (\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}) \circ \beta^{-1} \in H$. ولكن $\beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$ دورة ثلاثية . ولذا فإن γ حاصل ضرب دورتين ثلاثيتين . ومنه فإن γ تحرك ستة عناصر على الأكثر ولتكن $i_1, i_2, \dots, i_6$. لنفرض الآن أن :

$K = \{ \sigma \in A_n : \sigma(i) = i \forall i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_6\} \}$. عندئذ ، $K \cong A_6$. ولذا فإن K زمرة بسيطة . كما أن $K \triangleleft H \cap K \neq (1)$. ومنه فإن $H \cap K = K$. أي أن $K \leq H$. ولذا فإن H تحتوي على دورة ثلاثية . وبالتالي فإن $H = A_n$ ♦

نتقل الآن إلى المثال الثاني على الزمر البسيطة حيث نجد زمرة بسيطة من الرتبة 168 . إذا كان p عدداً أولياً فإننا سنكتب $GL(n, p)$ بدلاً من $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ ونكتب $SL(n, p)$ بدلاً من $SL(n, \mathbb{Z}_p)$. كما أننا نكتب $U_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$ بدلاً من $U_p = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$.

إذا كان $\varphi : GL(n, p) \rightarrow U_p$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ فإنه من الواضح أن φ تشاكل غامر وأن $\text{Ker} \varphi = SL(n, p)$. ولذا فباستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $GL(n, p) / SL(n, p) \cong U_p$.

إذا كان $a \in U_p$ فإننا نعرف المصفوفة $E_{ij}(a)$ على أنها المصفوفة التي يكون فيها $a_{ij} = a$ وباقي العناصر أصفاراً . كذلك نعرف المصفوفة $T_{ij}(a)$ على أنها $T_{ij}(a) = I_n + E_{ij}(a)$. إذا كان $i \neq j$ فإن $T_{ij}(a)$ تسمى مصفوفة مناقلة (transvection) . لاحظ أنه إذا كان $i \neq j$ فإن :

$$T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$$

$$[T_{ij}(a)]^{-1} = T_{ij}(-a)$$

$$\text{لكل } m \in \mathbb{Z} \quad [T_{ij}(a)]^m = T_{ij}(ma)$$

نركز اهتمامنا الآن على الحالة الخاصة التي يكون فيها $n = 2$.

مبرهنة (٣٧ ، ٤)

إذا كان $p > 2$ عدداً أولياً فإن $Z(SL(2, p)) = \{I_2, -I_2\}$.

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Z(SL(2, p))$. عندئذ ، $AT_{12}(1) = T_{12}(1)A$. أي أن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن $a = a + c$. أي أن $c = 0$. ولذا

فإن $b = 0$. ومن ثم فإن $a = d$. أي أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. وبما أن $\det A = 1$ فإن $a^2 = 1$.

ومن ثم فإن $a = \pm 1$. وبالتالي فإن $Z(SL(2, p)) = \{I_2, -I_2\}$ ♦

(٤ ، ٣٨) نتيجة

إذا كان p عدداً أولياً فإن الزمرة $SL(2, p)$ ليست بسيطة .

البرهان

إذا كان $p > 2$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٤ ، ٣٧) أن $\{e\} \neq Z(SL(2, p)) \triangleleft SL(2, p)$.

أما إذا كان $p = 2$ فإن :

$$SL(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ولذا فإن : ♦ زمرة جزئية من $SL(2, 2)$ دليلها 2 . وبالتالي فإن $H \triangleleft SL(2, 2)$

(٤ ، ٣٩) مبرهنة

الزمرة $SL(2, p)$ مولدة بمصفوفات منقولة .

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, p)$. إذا كان $c \neq 0$ فإننا بحساب مباشر وملاحظة

أن $ad - bc = 1$ نجد : $A = T_{12}(c^{-1}(a-1)) T_{21}(c) T_{12}(b+c^{-1}d(1-a))$. أما إذا

كان $c = 0$ فإن $a \neq 0$. لنفرض أن $B = T_{21}(1)A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b+d \end{bmatrix}$ وبحساب مباشر نجد أن :

$A = T_{21}(-1)B$. ولذا فإن $B = T_{12}(a^{-1}(a-1))T_{21}(a)T_{12}(b+a^{-1}(b+d)(1-a))$
 حاصل ضرب مصفوفات مناقلة في هذه الحالة أيضاً . وبالتالي فإن $SL(2, p)$ مولدة بمصفوفات مناقلة

◆ مناقلة

(٤, ٩) تعريف

تعرف الزمرة الخطية الخاصة الإسقاطية (**projective special linear group**) ويرمز لها بالرمز $PSL(2, p)$ على أنها زمرة خارج القسمة : $PSL(2, p) = SL(2, p) / Z(SL(2, p))$.

(٤, ٤٠) مبرهنة

$|SL(2, p)| = p(p^2 - 1)$ لكل عدد أولي p . وإذا كان $p > 2$ فإن :

$$|PSL(2, p)| = \frac{1}{2} p (p^2 - 1)$$

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, p)$. ولنفرض أولاً أن $c = 0$. عندئذ، عدد طرق اختيار العنصر a في هذه الحالة هو $p-1$ (لأن $a \neq 0$) . وعدد طرق اختيار العنصر b هو p . وبما أن $ad = 1$ فإن $d = a^{-1}$. ولذا فإن d يتحدد تماماً بمعرفة a . ومنه فإن عدد عناصر $SL(2, p)$ من هذا النوع $p(p-1)$.

نفرض الآن أن $c \neq 0$. عندئذ ، عدد طرق اختيار العنصر c هو $p-1$ وعدد طرق اختيار كل من a و d هو p . وبما أن $ad - bc = 1$ فإن b يتحدد تماماً بمعرفة كل من a, c, d . ولذا فإن عدد عناصر $SL(2, p)$ من هذا النوع هو $p^2(p-1)$. إذن ،

$$|SL(2, p)| = p(p-1) + p^2(p-1) = p(p^2 - 1)$$

وأخيراً إذا كان $p > 2$ فإن $|PSL(2, p)| = \frac{|SL(2, p)|}{|Z(SL(2, p))|} = \frac{1}{2} p (p^2 - 1)$ ◆

ملحوظة

لاحظ أن $|PSL(2, 2)| = |SL(2, 2)| = 6$.

(مبرهنة (٤, ٤١)

لتكن $H \triangleleft SL(2, p)$. عندئذ :(أ) إذا كانت $A \in H$ فإن $A^T \in H$.(ب) إذا احتوت H على مصفوفة منقولة فإن $H = SL(2, p)$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H$. ولتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. بما أن $H \triangleleft SL(2, p)$ فإن $B^{-1}A^{-1}B \in H$. ولكن :

$$B^{-1}A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A^T$$

(ب) لنفرض أن $T_{12}(a) \in H$. سنبرهن أن $T_{12}(b), T_{21}(b) \in H$ لكل $b \in \mathbb{Z}_p$.إذا كان $b = 0$ فإن $T_{12}(b) = T_{21}(b) = I_2 \in H$. أما إذا كان $b \neq 0$ فإن $b = na$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن : $T_{12}(b) = T_{12}(na) = [T_{12}(a)]^n \in H$. وبما أن $T_{21}(b) = [T_{12}(b)]^T$ فإن $T_{21}(b) \in H$. وبالتالي فإن H تحتوي على جميع مصفوفات المناقلة ونخلص باستخدام المبرهنة◆ (٤, ٣٩) إلى أن $H = SL(2, p)$

(مبرهنة (٤, ٤٢)

إذا كانت $Z(SL(2, p)) \subset H \triangleleft SL(2, p)$ حيث $p \geq 5$ فإن $H = SL(2, p)$

البرهان

باستخدام المبرهنة (٤, ٤١) يكفي أن نثبت أن H تحتوي على مصفوفة منقولة.لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H$ حيث $A \neq \pm I_2$. لاحظ أولاً أنه إذا كان $b = c = 0$ فإن

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} . \text{ ولذا فإن : } A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} & a - a^{-1} \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H$$

وبما أن $a \neq \pm 1$ فإن $a - a^{-1} \neq 0$. لذا فإننا نستطيع أن نفرض أن H تحتوي على عنصر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حيث على الأقل $b \neq 0$ أو $c \neq 0$. ولكن باستخدام المبرهنة (٤, ٤١) نعلم أن

ولذا فإننا نستطيع أن نفرض أن H تحتوي على $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in H$

عنصر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حيث $c \neq 0$ الآن ، بما أن $H \triangleleft SL(2, p)$ فإن :

$$X = T_{12}(x^2) \text{ لنفرض أن } B = (T_{12}(c^{-1}a))^{-1} A T_{12}(c^{-1}a) = \begin{bmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & a+d \end{bmatrix} \in H$$

حيث $0 \neq x \in \mathbb{Z}_p$ ، إذن ، $BXB^{-1}X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x^2 \\ -x^2c^2 & 1+x^4c^2 \end{bmatrix} \in H$ ، وإذا كان

$$D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+x^4c^2 \end{bmatrix} \in H \text{ فإن } D = \begin{bmatrix} x^{-1}c^{-1} - x^{-1}c^{-1} \\ 0 & xc \end{bmatrix}$$

الآن ، إذا كان $p \geq 7$ فإن $\mathbb{Z}_p$ يجب أن تحتوي على عنصر $x \neq 0$ حيث $x^4 \neq 1$ (لأنه إذا كان $x^4 = 1$ لكل $x \neq 0$ فإن للمعادلة $x^4 - 1 = 0$ أكثر من 4 ، حلول وهذا مستحيل) . وفي

هذه الحالة يكون : $T_{12}(c^2(x^4 - 1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+x^4c^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2+c^2 \end{bmatrix} \in H$

أما إذا كان $p = 5$ فإن $x^4 = 1$ لكل $x \in \mathbb{Z}_5$ ، ولذا فإن

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H \text{ وعلى وجه الخصوص فإن } D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+c^2 \end{bmatrix} \in H$$

(عندما $c = \pm 1$) أو أن $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$ (عندما $c = \pm 2$) . إذا كان $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H$

فإن $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ وبوضع $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \in H$

أن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$ أما إذا كان $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$ فإن

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، إذن ، $D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H$

ولذا فإن $T_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ ونخلص إلى أن H تحتوي على

مصفوفة مناقلة وبهذا ينتهي البرهان ♦

(نتيجة (٤٣، ٤٤)

إذا كان $p \geq 5$ عدداً أولياً فإن $\text{PSL}(2, p)$ زمرة بسيطة .

البرهان

لنفرض أن $K \triangleleft \text{PSL}(2, p)$. باستخدام مبرهنة التقابل نجد أن : $K = H/Z(\text{SL}(2, p))$ حيث $H \triangleleft \text{SL}(2, p)$ و $Z(\text{SL}(2, p)) \subset H$ ولذا باستخدامالمبرهنة (٤٢، ٤٤) نجد أن $H = \text{SL}(2, p)$. وبالتالي فإن :

$$\blacklozenge K = \text{SL}(2, p) / Z(\text{SL}(2, p)) = \text{PSL}(2, p)$$

(١، ٤، ٤٤) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت G زمرة بسيطة رتبته 60 فأثبت أن G تحتوي زمرة جزئية رتبته 12 .

الحل

لنفرض أن G لا تحتوي زمرة جزئية من الرتبة 12 . الآن ، $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$.باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_5 = 1$ أو $n_5 = 6$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $n_5 = 6$. لنفرض أن $A_1, A_2, \dots, A_6$ زمر سيلو الجزئية من النوع 5 للزمرة G . بماأن $|A_i| = 5$ وأن $A_i \cap A_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$ فإن G تحتوي على $6 \times 4 = 24$ عنصر منالرتبة 5 . الآن ، $n_2 = 1, 3, 5, 15$. وبما أن G بسيطة فإن $n_2 \neq 1$. ولذا فإن $n_2 = 3, 5, 15$. لنفرض أن $n_2 = 15$ وأن هذه الزمر هي $B_1, B_2, \dots, B_{15}$. إذا كان $B_i \cap B_j = \{e\}$ إذا كانلكل $i \neq j$ فإن $\bigcup_{i=1}^{15} B_i$ تحتوي على $3 \times 15 = 45$ عنصر رتبة كل منها لا يساوي 5 . ولذافإن $|G| \geq 24 + 45 = 69$ وهذا مستحيل . إذن ، يوجد $i \neq j$ حيث $B_i \cap B_j \neq \{e\}$. وبماأن $|B_i| = |B_j| = 4$ فإن $|B_i \cap B_j| = 2$. ولذا فإن $B_i \cap B_j \triangleleft B_i$ وأن $B_i \cap B_j \triangleleft B_j$. ومنهفإن $B_i, B_j \subseteq N(B_i \cap B_j)$. أي أن $B_i B_j \subseteq N(B_i \cap B_j)$. ولذا فإن

$$|N(B_i \cap B_j)| \geq |B_i B_j| = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

ولكن من الفرض نعلم أن $|N(B_i \cap B_j)| \neq 12$. ولذا فإن $|N(B_i \cap B_j)| = 12, 20, 30, 60$ إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 30$ فإن $N(B_i \cap B_j) \triangleleft G$ وهذا مستحيل لأن G زمرة

بسيطة. إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 20$ فإن $[G : N(B_i \cap B_j)] = 3$ ومنه فإن $|G|$ لا يقسم 3! . ولذا باستخدام النتيجة (٨ ، ٤) نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة وهذا مستحيل . إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 60$ فإن $N(B_i \cap B_j) = G$ ومن ثم فباستخدام المبرهنة (١٩ ، ٣) نجد أن $B_i \cap B_j < G$ وهذا مستحيل أيضاً .

لنفرض الآن أن $n_2 = 3$ أو $n_2 = 5$. ولتكن $H \in \text{Syl}_2(G)$. عندئذ ، $[G : N(H)] = n_2 \neq 1$. ولذا فإن $N(H) \neq H$. ومنه فإن $|N(H)| \neq 4$. وبما أن 4 يقسم $|N(H)|$ وأن $|N(H)|$ يقسم 60 فإننا نجد أن $|N(H)| = 12, 20, 60$. وبطريقة ماثلة لما سبق نحصل على تناقض في هذه الحالة أيضاً . وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 12 Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة بسيطة رتبته 60 فأثبت أن $G \cong A_5$.

الحل

بما أن $|G| = 60$ فباستخدام التمرين (١) نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية H حيث $|H| = 12$. وبما أن $[G : H] = 5$ فنجد باستخدام النتيجة (٦ ، ٤) تشاكل $\psi : G \rightarrow S_5$ حيث $\text{Ker} \psi \subseteq H$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $\text{Ker} \psi = \{e\}$. أي أن ψ أحادي ومن ثم فإن $G \cong \psi(S_5) \leq S_5$. وسنثبت الآن أن $\psi(S_5)$ لا تحتوي على تبديلات فردية وبالتالي فإن $\psi(S_5) = A_5$ ونكون قد انتهينا. لنفرض لغرض التناقض أن $\psi(S_5)$ تحتوي على تبديل فردي . ولتكن K مجموعة جميع التبديلات الزوجية من $\psi(S_5)$. عندئذ ، $\psi(S_5) < K$ وأن $[\psi(S_5) : K] = 2$. وبما أن $G \cong \psi(S_5) \leq G$ فإن $G < \psi^{-1}(K)$ وهذا مستحيل لأن G زمرة بسيطة . ومن ثم فإن جميع تبديلات $\psi(S_5)$ زوجية. ومنه فإن $\psi(S_5) \leq A_5$. وبما أن $|\psi(S_5)| = |A_5| = 60 = |G|$ فإننا نخلص إلى أن $G \cong \psi(S_5) = A_5$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة بسيطة من الرتبة $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.

(أ) أثبت أن G لا تحتوي على زمر جزئية من الرتب 28، 42، 56 أو 84 .

(ب) أثبت أن $n_7 = 8$ وإذا كانت $H \in \text{Syl}_7(G)$ فإن $|N(H)| = 21$.

(ج) أثبت أن G لا تحتوي على زمرة جزئية رتبته 14 .

الحل

(أ) لنفرض أن $H \leq G$ حيث $|H| = 28$. عندئذ ، $[G:H] = 6$. ولذا باستخدام المبرهنة (٣٢ ، ٤) نجد أن $G \leq A_6$. ولذا فإن 168 يقسم $|A_6|$ وهذا تناقض . وبالتالي فإن G لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 28 . وبالمثل ، إذا كانت $H \leq G$ حيث $|H| = 42$ أو $|H| = 56$ أو $|H| = 84$ فإن $G \leq A_4$ أو $G \leq A_3$ أو $G \leq A_2$ وهذا مستحيل .

(ب) $n_7 = 7k + 1$ يقسم 24 . ولذا فإن $n_7 = 1$ أو $n_7 = 8$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $n_7 = 8$. الآن ، $[G:N(H)] = n_7 = 8$. ولذا فإن $|N(H)| = 21$.

(ج) بما أن $n_7 = 8$ فإن $[G:N(H)] = 8$ حيث $H \in \text{Syl}_7(G)$. ولذا فإن $|N(H)| = 21$. لنفرض أن $K \leq G$ حيث $|K| = 14$. ولنفرض أن m هو عدد زمر سيلو الجزئية من النوع 7 للزمرة K . عندئذ ، $m \equiv 1 \pmod{7}$ ويقسم 14 . ولذا فإن $m = 1$. لنفرض أن $L \in \text{Syl}_7(K)$. عندئذ ، $L < K$. وبما أن $|L| = 7$ فإن $L \in \text{Syl}_7(G)$. وبما أن $L < K$ فإن $K \leq N(L)$. ومنه فإن $|K| = 14$ يقسم $|N(L)| = 21$ وهذا مستحيل Δ

تمارين (٤ ، ٤)

- (١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 210 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 216 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 280 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 300 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 302 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 312 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة 351 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة 375 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة 396 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (١٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة 462 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (١١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 525 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (١٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 528 فأثبت أن G غير بسيطة .
- (١٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 542 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث $p < q$ عدداً أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة.

(١٥) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

10403 ، 115939 و 329839 .

(١٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة pqr حيث $p < q < r$ أعداداً أولية وحيث $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ فأثبت أن G ليست بسيطة.

(١٧) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

12673 ، 71299 و 80571 .

(١٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة .

(١٩) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

963 ، 2725 و 5537 .

(٢٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة .

(٢١) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

8281 ، 104 329 و 137 641 .

(٢٢) إذا كان $201 \leq n \leq 220$ حيث n عدداً مؤلفاً فأثبت أنه لا يوجد زمرة بسيطة رتبها n .

(٢٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1785 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 4389 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 6545 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 3675 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة 4851 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة 5145 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٩) لتكن G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث $n \geq 1$ و $\gcd(p, m) = 1$. إذا كان

$n_p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ فأثبت أنه يوجد $H \neq K \in \text{Syl}_p(G)$ حيث $|H \cap K| = p^{n-1}$.

(٣٠) إستخدم التمرين (٢٩) لإثبات أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

144 ، 351 ، 525 ، 2025 و 3159 .

(٣١) إذا كان $n \geq 3$ وكانت $H \leq S_n$ حيث $|H| = \frac{n!}{2}$ فأثبت أن $H = A_n$.

(٣٢) أثبت أن $\text{PSL}(2, 3)$ زمرة ليست بسيطة .

- (٣٣) هل توجد زمرة بسيطة من الرتبة 660 ؟
- (٣٤) هل توجد زمرة بسيطة من الرتبة 360 ؟
- (٣٥) جد الزمرة المشتقة A'_n للزمرة A_n حيث $n \geq 5$.
- (٣٦) أثبت أن $A_n, S_n, \{e\}$ هي جميع الزمر الناطمية من S_n حيث $n \geq 5$.
- (٣٧) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = p$ و p عدداً أولياً فأثبت أن H زمرة جزئية أعظمية من G .
- (٣٨) إذا كانت $H < G$ فأثبت أن H زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G إذا وفقط إذا كانت G/H زمرة بسيطة.
- (٣٩) بين أياً من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة :
- (أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة 5103 فإن G ليست بسيطة .
- (ب) إذا كانت G زمرة من الرتبة 76 فإنها تحتوي على عنصر وحيد من الرتبة 19.
- (ت) إذا كانت G زمرة من الرتبة 70 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 7 و زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 5 .
- (ث) إذا كانت G زمرة من الرتبة 70 فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبته 35 .
- (ج) إذا كانت G زمرة من الرتبة 215 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة رتبته n لكل قاسم n للعدد 215 .
- (ح) $S'_n = S_n$ لكل $n \geq 5$.
- (خ) $\mathbb{Z}_p$ تحتوي على زمرة جزئية أعظمية وحيدة لكل عدد أولي p .
- (د) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G فإن H محتواة في زمرة جزئية أعظمية من G .
- (ذ) إذا كانت H زمرة جزئية أعظمية من الزمرة المنتهية G فإن $[G:H]$ عدداً أولياً .
- (ر) إذا كانت G زمرة بسيطة فإن G غير قابلة للاختزال جزئياً .
- (ز) إذا كانت G زمرة غير قابلة للاختزال جزئياً فإن G زمرة بسيطة .
- (س) $SL(2, 2) \cong S_3$.
- (ش) $PSL(2, 5) \cong A_5$.

إنشاء زمرة جديدة

CONSTRUCTING NEW GROUPS

(٥, ١) الزمرة الحرة

Free Groups

لقد قدمنا في الفصل الثاني مفهوم الزمرة المولدة بمجموعة S . كما أننا عرضنا أمثلة على زمرة من هذا النوع حيث توجد علاقات بين هذه العناصر، مثل الزمرة D_4 والزمرة Q_8 . نقدم في هذا البند مفهوم الزمرة الحرة حيث لا توجد علاقات بين عناصرها المولدة، ونستعين بالزمرة الحرة في البند (٥, ٢)، في تقديم أسلوب جبري للزمرة المولدة بعناصر ترتبط بعلاقات فيما بينها.

تكمن الفكرة الأساسية في تعريف الزمرة الحرة المولدة بالمجموعة S في عدم وجود علاقات تربط عناصر S بعضها ببعض (أي أن S خالية من العلاقات). على سبيل المثال، إذا كانت $S = \{a, b\}$ فإن عناصر الزمرة الحرة تأخذ الصورة:

$$a, aa, ab, abab, bab, \dots$$

مضافاً إلى هذه العناصر نظائرها، وإعتبار أن جميعها مختلفة.

نقدم الآن التعريف الرياضي الدقيق للزمرة الحرة:

لتكن S مجموعة ولتكن S^{-1} مجموعة أخرى تحقق $S \cap S^{-1} = \emptyset$ و $|S| = |S^{-1}|$. وليكن $s^{-1} \in S^{-1}$ هو العنصر الوحيد المقابل للعنصر $s \in S$ لكل $s \in S$. وليكن $t^{-1} \in S^{-1}$ هو العنصر الوحيد المقابل للعنصر $t \in S^{-1}$ لكل $t \in S^{-1}$. (أي أن $(s^{-1})^{-1} = s$ لكل $s \in S$). وليكن $e \notin S \cup S^{-1}$. ولنفرض أن $x^1 = x$ ، $e^{-1} = e$ لكل $x \in S \cup S^{-1} \cup \{e\}$.

تعريف (٥, ١)

إذا كانت S مجموعة فإننا نعني بكلمة (word) على S أنها المتتالية $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ حيث

$$s_i \in S \cup S^{-1} \cup \{e\} \text{ وبحيث يوجد } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ يحقق : } s_i = e \text{ لكل } i \geq k.$$

من التعريف السابق نجد أنه يمكن النظر إلى الكلمة على أنها حاصل ضرب عدد منته من عناصر S ونظائرها بحيث نسمح بتكرار هذه العناصر. على سبيل المثال ، إذا كانت $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ فإن $s_1^3 s_2^{-1} s_3 s_1^2 s_1^{-7}$ ، $s_1 s_3^{-4} s_2^2 s_3$ ، s_3^2 جميعها كلمات على S . لكي نضمن عدم حدوث تكرار غير ضروري في عناصر الكلمة فإننا بحاجة إلى كلمات لا تحتوي على إختصار واضح بين عناصرها وهذا ما يقدمه التعريف التالي :

تعريف (٥,٢)

تكون الكلمة $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ مختزلة (reduced) إذا حققت ما يلي :

$$(أ) \quad s_{i+1} \neq s_i^{-1} \text{ لكل } s_i \neq e.$$

$$(ب) \quad \text{إذا كان } s_k = e \text{ فإن } s_i = e \text{ لكل } i \geq k.$$

إذا كانت $S = \{x, y\}$ فإن كل من xy ، $x^{-1}xyxx^{-1}$ ، $x^{-1}yyxy^{-1}$ كلمة مختزلة على S وكل من الكلمتين $xyxx^{-1}$ و $x^{-1}xyyy^{-1}$ غير مختزلة على S . ولكننا نستطيع الحصول على كلمة مختزلة xyx من $xyxx^{-1}$ وأخرى مختزلة $x^{-1}yx$ من $x^{-1}xyyy^{-1}$.

ملحوظات

- (١) تسمى الكلمة المختزلة $(e, e, e, \dots)$ الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز e .
- (٢) من الآن فصاعداً نكتب الكلمة المختزلة $(s_1^{a_1}, s_2^{a_2}, \dots, s_n^{a_n}, e, e, \dots)$ حيث $s_i \in S$ و $a_i = \pm 1$ على الصورة $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$.

تعريف (٥,٣)

نقول إن الكلمتين المختزلتين $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$ و $r_1^{b_1} r_2^{b_2} \dots r_m^{b_m}$ متساويتان إذا كان $n = m$ ، $r_i = s_i$ ، $a_i = b_i$ لكل $1 \leq i \leq n$.

لتكن $F(S)$ هي مجموعة جميع الكلمات المختزلة على المجموعة S . من الواضح أن التطبيق $f: S \rightarrow F(S)$ المعرفة بالقاعدة $f(s) = (s, e, e, \dots)$ أحادياً. ولذا فإننا نعتبر من الآن فصاعداً

أن $S \subseteq F(S)$. كما نعتبر أن $F(\{\phi\}) = \{e\}$. نعرف الآن عملية ثنائية على $F(S)$.

تعريف (٥,٤)

إذا كان $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \in F(S)$ ، $r_1^{b_1} r_2^{b_2} \dots r_m^{b_m}$ حيث $m \leq n$ وإذا كان $1 \leq k \leq m+1$ أصغر عدد صحيح يحقق $s_k^{a_k} \neq r_{m-k+1}^{-b_{m-k+1}}$ فإننا نعرف عملية ثنائية على $F(S)$ كالتالي :

$$(r_1^{b_1} r_2^{b_2} \dots r_m^{b_m})(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}) = \begin{cases} r_1^{b_1} \dots r_{m-k+1}^{b_{m-k+1}} s_k^{a_k} \dots s_n^{a_n} & , k \leq m \\ s_{m+1}^{a_{m+1}} \dots s_n^{a_n} & , k = m+1 \leq n \\ e & , k = m+1, m = n \end{cases}$$

أما إذا كان $n \leq m$ فإن العملية الثنائية على $F(S)$ تعرف بطريقة مماثلة. ومن الواضح في كلا الحالتين أن حاصل ضرب كلمتين مختزلتين كلمة مختزلة أيضاً.

مبرهنة (٥,١)

$F(S)$ زمرة حيث العملية الثنائية هي كما وردت في التعريف (٥,٤) .

البرهان

من الواضح أن e هو العنصر المحايد وأن نظير الكلمة المختزلة $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$ هي الكلمة المختزلة $s_1^{-a_1} s_2^{-a_2} \dots s_n^{-a_n}$. ولذا يبقى علينا إثبات الخاصية التجميعية . ولهذا الغرض ، نفرض أن $s \in S \cup S^{-1} \cup \{e\}$ ونفرض أن $\sigma_s : F(S) \rightarrow F(S)$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$$\sigma_s(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}) = \begin{cases} s s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n} & , s_1^{a_1} \neq s^{-1} \\ s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} & , s_1^{a_1} = s^{-1} \end{cases}$$

من الواضح أن $\sigma_s(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = s s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}$. ولذا فإن σ_s تبديل على $F(S)$. لنفرض الآن أن $A(F)$ هي الزمرة الجزئية من زمرة التبديلات على المجموعة $F(S)$ المولدة بالمجموعة $\{\sigma_s : s \in S\}$. إذن ، من الواضح أن التطبيق $\phi : F(S) \rightarrow A(S)$ المعرف بالقاعدة

$$\phi(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = \sigma_{s_1}^{a_1} \circ \sigma_{s_2}^{a_2} \circ \dots \circ \sigma_{s_n}^{a_n}$$

أحاديًا وشاملاً ويحافظ على العملية الثنائية. وبما أن $A(S)$ زمرة فإن العملية الثنائية عليها تجميعية.

وبالتالي فإن العملية الثنائية على $F(S)$ يجب أن تكون تجميعية ♦

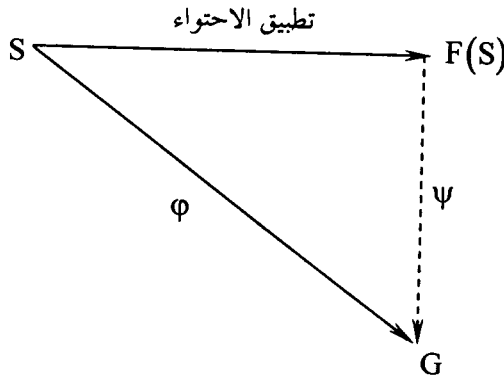
ملحوظة

من الممكن إثبات الخاصية التجميعية باستخدام الاستقراء الرياضي على طول الكلمة المختزلة ودراسة

جميع الحالات الممكنة ، إلا أن البرهان الذي قدمناه في المبرهنة (٥,١) قصير جداً .
 إن إحدى أهم خصائص الزمرة $F(S)$ هي الخاصية الشمولية (universal property) حيث تعكس هذه الخاصية عدم وجود علاقة تربط بين عناصر S .

مبرهنة (٥,٢) [الخاصية الشمولية للزمرة الحرة]

إذا كانت G زمرة ، S مجموعة وكان $\varphi: S \rightarrow G$ تطبيقاً فإنه يوجد تشاكل وحيد $\psi: F(S) \rightarrow G$ حيث $\psi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$ (أي أن الشكل أدناه إبدالياً)



البرهان

لنفرض أن $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \in F(S)$ وأن $\psi: F(S) \rightarrow G$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة
 $\psi(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}) = \varphi(s_1)^{a_1} \varphi(s_2)^{a_2} \dots \varphi(s_n)^{a_n}$
 من الواضح أن ψ تشاكل وأن $\psi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. ولبرهان الوحداية ، نفرض أن
 $\psi_1: F(S) \rightarrow G$ تشاكلاً آخر يحقق $\psi_1(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. عندئذ ،
 $\psi_1(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = \psi_1(s_1)^{a_1} \dots \psi_1(s_n)^{a_n} = \varphi(s_1)^{a_1} \dots \varphi(s_n)^{a_n} = \psi(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n})$
 إذن ، $\psi_1 = \psi$ ،

نتيجة (٥,٣)

$F(S)$ زمرة وحيدة (باستثناء التماثل).

البرهان

نفرض أن $F_1(S)$ زمرة أخرى مولدة بالمجموعة S . ولنفرض أن $i: S \rightarrow F(S)$ و $i_1: S \rightarrow F_1(S)$ هما تطبيقا الاحتواء. باستخدام المبرهنة (٥,٢)، نستطيع إيجاد تشاكلين وحيدين $\psi: F_1(S) \rightarrow F(S)$ و $\psi_1: F(S) \rightarrow F_1(S)$ حيث $\psi|_S = i$ و $\psi_1|_S = i_1$. ولذا فإن $\psi \circ \psi_1: F(S) \rightarrow F(S)$ تشاكل يحقق $\psi \circ \psi_1(s) = s$ لكل $s \in S$. إذن باستخدام الوحداية نجد أن $\psi \circ \psi_1(a) = a$ لكل $a \in F(S)$. وبالمثل، $\psi_1 \circ \psi: F_1(S) \rightarrow F_1(S)$ تشاكل يحقق $\psi_1 \circ \psi(a) = a$ لكل $a \in F_1(S)$. إذن، ψ تماثل (معكوسه هو التطبيق ψ_1). وبالتالي فإن

◆ $F_1(S) \cong F(S)$

تعريف (٥,٥)

تسمى الزمرة $F(S)$ الزمرة الحرة (free group) على S . ونقول إن زمرة F حرة إذا وجدت مجموعة S حيث $F(S) = F$. وفي هذه الحالة نقول إن S أساس حُر (أو أساس) للزمرة F . ونقول إن $|S|$ هو بعد (rank) الزمرة الحرة F . وإذا كانت $|S| = n$ فإننا نقول إن F زمرة حرة بعدها n ونرمز لها بالرمز F_n .

المبرهنة التالية تبين أن أي زمرة جزئية من زمرة حرة يجب أن تكون حرة. ولكننا لن نقدم برهاناً لها، وبإمكان القارئ الرجوع إلى [19].

مبرهنة (٥,٤)

◆ إذا كانت $H \leq F$ حيث F زمرة حرة فإن H زمرة حرة أيضاً

مثال (٥,١)

من الواضح أن الزمرة الحرة F_1 هي $\mathbb{Z}$ □

مثال (٥,٢)

إذا كانت F_n زمرة حرة بعدها n فإن F_n تحتوي على زمرة حرة جزئية F_k لكل $1 \leq k \leq n$. في الحقيقة، إذا كانت $S_n = \{s_1, \dots, s_n\}$ فإنه بأخذ $S_k = \{s_1, \dots, s_k\}$ نجد أن:

$$\square F_k = F(S_k) \leq F(S_n) = F_n$$

نختم هذا البند بإثبات أنه بإمكاننا اعتبار أي زمرة صورة تشاكلية لزمرة حرة . سيكون لهذه الحقيقة أهمية خاصة في البند القادم .

مبرهنة (٥,٥)

إذا كانت G زمرة فإنه توجد زمرة حرة F وزمرة جزئية ناظمية H من F بحيث يكون $G \cong F/H$ البرهان

لنفرض أن $G = \langle A \rangle$ (يمكن أن نأخذ $A = G$ كمجموعة مولدة). ولنفرض أن S مجموعة حيث $|S| = |A|$. عندئذ ، يوجد تقابل $\varphi: S \rightarrow A$. إذن ، التطبيق $\psi: F(S) \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة

$$\psi(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = \varphi(s_1)^{a_1} \dots \varphi(s_n)^{a_n}$$

تشاكل شامل . وباستخدام المبرهنة الأولى للتماثل ، نجد أن $G \cong F(S)/\text{Ker}\psi$ أي أن

◆ $H = \text{Ker}\psi$

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن الزمرة الحرة في المبرهنة (٥,٥) ليست وحيدة ، وهذا ما يوضحه المثال التالي:

مثال (٥,٣)

لتكن $G = \mathbb{Z}_6 = \langle [1] \rangle$ من الممكن اعتبار G زمرة خارج قسمة الزمرة الحرة $\mathbb{Z}$ بتعريف التشاكل الشامل ، $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ ، بالقاعدة $\psi(n) = [n]$. ولذا فإن $\mathbb{Z}/\text{Ker}\psi \cong \mathbb{Z}_6$. ومن ناحية أخرى، يمكن اعتبار الزمرة G زمرة خارج قسمة الزمرة الحرة $F_2 = \langle s_1, s_2 \rangle$ ، لأنه إذا كان $\mathbb{Z}_2 = \langle b \rangle$ و $\mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle$ فإن $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. ولذا فإن التطبيق $\varphi: F_2 \rightarrow \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ المعرف بالقاعدة $\varphi(s_1^{a_1} s_2^{a_2}) = (a^{a_1}, b^{a_2})$ تشاكل شامل . وبالتالي فإن

□ $F_2 / \text{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}_6 \cong G$

تمارين (٥, ١, ١) (Solved Exercises)

تمرين (١)

ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ ولتكن F_{n+1} زمرة حرة بعدها $n+1$. أثبت أنه يوجد صورة تشاكلية G للزمرة F_{n+1} بحيث تكون $G \cong F_n$ و $G \leq F_{n+1}$.

الحل

لنفرض أن $F_{n+1} = F(S)$ حيث $|S| = n+1$. ولنفرض أن $S = S_1 \cup \{a\}$ حيث $|S_1| = n$. من الواضح أن $G = F(S_1) \leq F(S)$ وأن التطبيق $\varphi: S \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \neq a \\ e, & x = a \end{cases}$$

وبالتالي فإن G صورة تشاكلية للزمرة ΔF_{n+1}

تمرين (٢)

إذا كانت F_n زمرة حرة بعدها n فأثبت أن F_n تحتوي على زمرة جزئية دليلها m لكل $m \in \mathbb{Z}^+$.

الحل

لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبها m ولتكن $F_n = F(S)$ حيث $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. عندئذ، يوجد تشاكل شامل $\psi: F_n \rightarrow G$ يحقق $\psi(s_i) = a$ لكل $1 \leq i \leq n$ وعليه نجد باستخدام مبرهنة التماثل الأولى أن $F_n / \text{Ker} \psi \cong G$. وبالتالي فإن $\text{Ker} \psi$

زمرة جزئية من F_n دليلها m

تمارين (٥, ١)

(١) إذا كانت $F \neq \{e\}$ زمرة حرة فأثبت أن $\mathbb{Z} \leq F$.

(٢) إذا كانت $F \neq \{e\}$ زمرة منتهية فأثبت أن F ليست حرة.

(٣) أثبت أن الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ليست حرة.

(٤) إذا كانت $F = F(S)$ زمرة حرة حيث $|S| \geq 2$ فأثبت أن $Z(F) = \{e\}$.

(٥) ليكن كل من $\varphi: G \rightarrow H$ و $\psi: G \rightarrow H$ تشاكلاً. إذا كانت $G = \langle S \rangle$ وكان

$$\varphi|_S = \psi|_S \quad \text{فأثبت أن} \quad \varphi = \psi$$

(٦) أعط مثلاً لزمرة $G = \langle S \rangle$ وتطبيق $\varphi: S \rightarrow H$ بحيث لا يمكن إيجاد تشاكل $\psi: G \rightarrow H$ يحقق $\psi|_S = \varphi$.

(٧) أثبت أن $\langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$.

(٨) جد زمرة حرة F بحيث تكون S_n صورة تشاكليّة للزمرة F لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٩) جد عدد التشاكلات من F_2 إلى $\mathbb{Z}_4$.

(١٠) جد عدد التشاكلات من F_2 إلى S_3 .

(٥,٢) توصيف الزمر

Group Presentation

تعرضنا في الفصول السابقة إلى زمر مولدة بمجموعة من العناصر ترتبط فيما بينها بعلاقات. في هذا البند ، نستخدم مفهوم الزمرة الحرة على مجموعة S لصياغة هذه الفكرة بشكل رياضي دقيق . لنفرض أن G زمرة مولدة بالمجموعة S وأن $F(S)$ الزمرة الحرة المولدة بالمجموعة S . ولنفرض أن $R \subseteq F(S)$ وأن $N = \langle R \rangle$ الزمرة الجزئية الناعمية من الزمرة الحرة $F(S)$ المولدة بالمجموعة R . أي أن :

$$N = \langle \{a^{-1}ra : a \in F(S), r \in R\} \rangle$$

وليكن $\psi: F(S) \rightarrow G$ هو التشاكل الشامل حيث $\psi|_S$ هو التطبيق المحايد على S (أنظر مبرهنة (٥,٥)). نقول إن الزوج المرتب $\langle S, R \rangle$ توصيف (presentation) للزمرة G إذا كان $\text{Ker} \psi = N$. أي أن $F(S)/N \cong G$. وإذا كانت كل من S و R مجموعة منتهية فإننا نقول إن $\langle S, R \rangle$ تقديم منته للزمرة G . يسمى كل عنصر من عناصر R رابطاً (relator). وإذا كانت $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ فإننا نكتب:

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid r_1 = r_2 = \dots = r_m = e \rangle$$

وإذا كانت r هي الكلمة $r_1 r_2^{-1}$ فإننا نكتب $r_1 = r_2$ بدلاً من $r = e$.

نلفت نظر القارئ إلى أنه على الرغم من أهمية مفهوم توصيف الزمر ، إلا أن له مشاكله ، أحد هذه المشاكل ، هي إفتقاره للوحدانية . أي من الممكن أن يكون لزمرة واحدة أكثر من توصيفاً ، وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٥,٤)

من الواضح أن $\mathbb{Z}_5 = \langle a \mid 5a = e \rangle$. سنبرهن الآن أن للزمرة $\mathbb{Z}_5$ توصيفاً آخر هو

$\langle a, b, c, d \mid ab = c, bc = d, cd = a, da = b \rangle$. لاحظ أن :

$$\begin{aligned} & \langle a, b, c, d \mid ab = c, bc = d, cd = a, da = b \rangle \\ &= \langle a, b, c \mid ab = c, cbc = a, bca = b \rangle \quad (d = bc \text{ لأن}) \\ &= \langle a, b, c \mid ab = c, cbc = a, ca = e \rangle \\ &= \langle a, b, c \mid ab = c, cbc = a, c = a^{-1} \rangle \\ &= \langle a, b \mid ab = a^{-1}, a^{-1}ba^{-1} = a \rangle \\ &= \langle a, b \mid b = a^{-2}, a^{-1}ba^{-1} = a \rangle \\ &= \langle a \mid a^{-1}a^{-2}a^{-1} = a \rangle \\ &= \langle a \mid a^5 = e \rangle \end{aligned}$$

ولذا فإن للزمرة $\mathbb{Z}_5$ توصيفان على الأقل $\square$

إذا كان $\langle S \mid R \rangle$ توصيفاً لزمرة G فإنه يكون من الصعب ، عموماً ، وصف زمر G الجزئية بمعرفة توصيفها . إلا أن المبرهنة التالية تزودنا بطريقة سهلة لإيجاد زمر خارج القسمة للزمرة G .

مبرهنة (٥,٦)

إذا كانت $G = \langle S \mid R \rangle$ وكانت $H = \langle S \mid R_1 \rangle$ حيث $R \subseteq R_1$ فإن H تماثل زمرة خارج قسمة للزمرة G .

البرهان

لنفرض أن $F = F(S)$ وأن N و N_1 زمرتان جزئيتان ناظمتان من F مولدتان بالمجموعتين R و R_1 على التوالي . بما أن $R \subseteq R_1$ فإن $N \leq N_1$. وبما أن $N \triangleleft F$ فإن $N \triangleleft N_1$. وبما أن $H \cong F/N_1$ و $G \cong F/N$ فإنه بإستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل نجد أن :

$$\blacklozenge \quad H \cong F/N_1 \cong (F/N)/(N_1/N) \cong G/N_1$$

في الحالة الخاصة التي تكون فيها G زمرة منتهية فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية التي تستخدم عادة في التعرف على زمرة معلومة تماثل توصيف زمرة معطاة .

نتيجة (٥,٧)

لتكن $G = \langle S \mid R \rangle$ زمرة منتهية ولتكن H زمرة تحقق $|G| \leq |H|$. لنفرض أن $T \subseteq H$ مجموعة من المولدات بحيث يكون $\varphi: S \rightarrow T$ تقابل يحقق :

$$s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \in R \Rightarrow \varphi(s_1)^{a_1} \varphi(s_2)^{a_2} \dots \varphi(s_n)^{a_n} = e$$

عندئذ ، $G \cong H$.

البرهان

لاحظ أن $G \cong \langle T | \varphi(R) \rangle$ وأن $H = \langle T | \varphi(R) \cup R_1 \rangle$. إذن ، بإستخدام المبرهنة (٥, ٦) نجد أن $H \cong G/N$ حيث $N \triangleleft G$. إذن ، $|G| = |H||N|$. وبما أن $|G| \leq |H|$ فإن $|N| = 1$. ولذا فإن $N = \{e\}$. وبالتالي فإن $H \cong G$ ♦

مثال (٥, ٥)

إذا كانت $G = \langle a, b | a^2 = e, b^3 = e, (ab)^2 = e \rangle$ فأثبت أن $G \cong S_3$.

الحل

نفرض أن $N = \langle b \rangle$. وبما أن $(ab)^2 = e$ فإن $a^{-1}b^{-1}a = b \in N$. كذلك $b^{-1}bb = b \in N$. إذن ، $N \triangleleft G$. الآن :

$G/N = G/\langle b \rangle \cong \langle a, b | a^2 = e, b^3 = e, (ab)^2 = e, b = e \rangle = \langle a | a^2 = e \rangle \cong \mathbb{Z}_2$
وبما أن $|N| \leq 3$ فإن $|G| \leq 6$. ولكن $S_3 = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3) \rangle$ حيث $(1\ 2)^2 = (1)$ و $(1\ 2\ 3)^3 = (1)$ و $((1\ 2) \circ (1\ 2\ 3))^2 = (1)$. وأن $|S_3| = 6$. إذن ، $G \cong S_3$ □

مثال (٥, ٦)

إذا كانت $G = \langle a, b | a^n = e, b^m = e, ab = ba \rangle$ فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

الحل

بما أن $ab = ba$ فإن G إبدالية . لنفرض الآن أن $N = \langle a \rangle$. إذن ، $N \triangleleft G$ وأن
 $G/N = \langle a, b | a^n = e, b^m = e, ab = ba, a = e \rangle = \langle b | b^m = e \rangle \cong \mathbb{Z}_m$
وبما أن $|N| \leq n$ فإن $|G| \leq nm$. الآن ، $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \langle ([1], [0]), ([0], [1]) \rangle$ ، حيث
 $m([0], [1]) = ([0], [0])$ ، $n([1], [0]) = ([0], [0])$
و $G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ، إذن ، $([1], [0]) + ([0], [1]) = ([0], [1]) + ([1], [0])$ □

مثال (٥,٧)

إذا كانت $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{R})$ حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

$$G \cong D_4$$

الحل

$$\text{لاحظ أن } A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وأن } B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } BA = A^3B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن ، $G = \langle A, B \mid A^4 = I, B^2 = I, BA = A^3B \rangle$. لنفرض أن $N = \langle A \rangle$. وبما أن

$$A^3 = A^{-1} \text{ وأن } BA = A^3B = A^{-1}B \text{ فإن } BAB^{-1} = A^{-1} \in N \text{ كذلك ،}$$

$$AAA^{-1} = A \in N \text{ إذن } N \triangleleft G \text{ ولذا فإن :}$$

$$G/N = \langle A, B \mid A^4 = I, B^2 = I, BA = A^3B, A = I \rangle = \langle B \mid B^2 = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

وبما أن $|N| \leq 4$ فإن $|G| \leq 8$. ولكن $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = e, b^2 = e, ba = a^3b \rangle$ وأن

$$|D_4| = 8 \text{ . إذن } G \cong D_4 \quad \square$$

تحذير

على الرغم من أن $N = \langle A \rangle$ وأن $A^4 = I$ في المثال (٥,٧) ، إلا أننا لا نستطيع أن نضمن أن

$$|N| = 4 \text{ لأنه من الجائز أن نستخدم علاقات أخرى مع العلاقة } A^4 = I \text{ لنحصل على أن } A^2 = I$$

وحتى على $A = I$. والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٥,٨)

إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^8 = e, a^2 = b^2, ab = b^{-1}a \rangle$ فإن :

$$ab = b^{-1}a \Rightarrow bab = a \Rightarrow b^2ab^2 = a \text{ . وبما أن } b^2 = a^2 \text{ فإن } a^2aa^2 = a \text{ . منه فإن}$$

$$\square a^4 = e$$

تعريف (٥,٦)

تسمى الزمرة $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e \rangle$ الزمرة الزوجية غير المنتهية .

مبرهنة (٥, ٨)

إذا كانت $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = o(b) = 2$ فإن $G \cong D_n$ أو $G \cong D_\infty$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$. البرهان

لنفرض أن $G = \langle a, b \rangle$. لدينا الحالتان التاليتان :

(١) $o(ab) = \infty$. في هذه الحالة G زمرة غير منتهية وتحقق العلاقات على D_∞ . باستخدام المبرهنة (٥, ٦)، نجد أن $G \cong D_\infty / H$ حيث $H \triangleleft D_\infty$. سنبرهن الآن أن $H = \{e\}$. لنفرض لغرض التناقض أن $H \neq \{e\}$ وأن $h \in H$. بما أن عناصر D_∞ على الشكل $(ab)^m$ ، $(ba)^m$ ، $(ab)^m a$ أو $(ba)^m b$ فإنه يكفي أن نفرض أن $h = (ab)^m$ أو $h = (ab)^m a$ أو $h = (ab)^m b$. إذا كان $h = (ab)^m$ فإن $H = (ab)^m H = (abH)^m$ ولذا فإن $(abH)^{-1} = (abH)^{m-1}$. وبما أن $o(a) = o(b) = 2$ فإن $(ab)^{-1} H = b^{-1} a^{-1} H = baH$ إذن $(aH)(abH) = (abH)^{-1}(aH)$ ، $aHabaH = a^2 baH = baH = (abH)^{-1}$ وبوضع $y = aH$ و $x = abH$ فإننا نجد أن

$$y^2 = e, \quad x^m = e \quad \text{حيث} \quad G = D_\infty / H = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle = \langle x, y \rangle$$

و $yx = x^{-1}y$. أي أن G تحقق علاقات D_m . ولذا فإن G منتهية وهذا مستحيل. وبالمثل، إذا كان $h = (ab)^m a$ فإننا نجد أن $H = (ab)^m aH = (ab)^m HaH$ ولذا فإن:

$$(abH)^m = (ab)^m H = (aH)^{-1} = a^{-1}H = aH$$

إذن $(abH)^{2m} = (aH)^2 = a^2 H = H$ ولكن $G = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle \subseteq \langle abH \rangle$ ، إذن G منتهية، وهذا مستحيل أيضاً. وبالتالي فإننا نخلص في هذه الحالة إلى أن $h = e$. أي أن $H = \{e\}$. ومنه فإن $G \cong D_\infty$.

$$o(ab) = n < \infty \quad (٢)$$

بما أن $G = \langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$ ، وأن $a^2 = e$ ، $(ab)^n = e$ ، $(ab)^{-1}a = a(ab)$ فإن :

$$\blacklozenge \quad G \cong D_n \quad \text{وبالتالي فإن} \quad G = \langle a, ab \mid a^2 = e, (ab)^n = e, (ab)^{-1}a = a(ab) \rangle$$

(Solved Exercises) تمارين محلولة (٥, ٢, ١)

تمرين (١)

إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = e, (ab)^n = (ab^{-1}ab)^k \rangle$ فأثبت أن :

$$\langle (ab)^n \rangle \leq G' \quad (\text{ب})$$

$$G = \langle ab, ab^{-1}ab \rangle \quad (\text{أ})$$

الحل

(أ) لنفرض أن $H = \langle ab, ab^{-1}ab \rangle \leq G$. عندئذ ، $ab^{-1} = ab^{-1}ab(ab)^{-1} \in H$ ، وأن

$$b = b^{-2} = (ab)^{-1}ab^{-1} \in H \quad \text{وأن} \quad a = abb^{-1} \in H \quad \text{وبالتالي فإن} \quad H = G$$

(ب) لنفرض أن $M = \langle (ab)^n \rangle \leq G$. لإثبات أن $M \leq G'$ فإنه يكفي استناداً إلى الفقرة (أ) أن

$$[(ab)^n, ab] = e \quad \text{وأن} \quad [(ab)^n, ab^{-1}ab] = e \quad \text{الآن}$$

$$[(ab)^n, ab] = (ab)^{-n}(ab)^{-1}(ab)^n(ab) = (ab)^{-(n+1)}(ab)^{n+1} = e$$

$$[(ab)^n, ab^{-1}ab] = [(ab^{-1}ab)^k, ab^{-1}ab] = e$$

$$\Delta \quad M \leq G' \quad \text{وبالتالي فإن} \quad (ab)^n = (ab^{-1}ab)^k = (a^{-1}b^{-1}ab)^k \in G' \quad \text{وأخيراً}$$

تمرين (٢)

لتكن $G = \langle a, b \rangle$ حيث $x^3 = e$ لكل $x \in G$.(ب) أثبت أن G زمرة منتهية.

$$[a, b] \in Z(G) \quad (\text{أ}) \quad \text{أثبت أن}$$

الحل

(أ) لإثبات أن $[a, b] \in Z(G)$ يكفي أن نثبت أن $[a, b]$ يتبدل مع كل من a و b . الآن :

$$a^{-1}[a, b]a = a^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)a$$

$$= a(b^{-1}a)ba$$

$$(\text{لأن } a^{-2} = a)$$

$$= a(a^{-1}ba^{-1}b)ba$$

$$(\text{لأن } b^{-1}a = (a^{-1}b)^2)$$

$$= ba^{-1}b^{-1}a$$

$$(\text{لأن } b^2 = b^{-1})$$

$$= b(baba)a$$

$$(\text{لأن } a^{-1}b^{-1} = (ba)^2)$$

$$= b^{-1}aba^{-1}$$

$$(\text{لأن } a^2 = a^{-1} \text{ و } b^2 = b^{-1})$$

$$= a^{-1}ba^{-1}bba^{-1}$$

$$(\text{لأن } b^{-1}a = (a^{-1}b)^2)$$

$$= a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a^{-1}$$

$$(\text{لأن } b^2 = b^{-1})$$

$$= a^{-1}bbabaa^{-1}$$

$$(\text{لأن } a^{-1}b^{-1} = (ba)^2)$$

$$= a^{-1}b^{-1}ab \quad (\text{لأن } b^2 = b^{-1})$$

$$= [a, b]$$

وعليه فإن $[a, b]a = a[a, b]$. وبالمثل نستطيع إثبات أن $[a, b]b = b[a, b]$. وبالتالي نخلص إلى أن $[a, b] \in Z(G)$.

(ب) بما أن $[a, b] \in Z(G)$ فإن $G/Z(G)$ زمرة إبدالية. ولكن أي زمرة إبدالية مولدة بمجموعة منتهية وتحقق $x^n = e$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ يجب أن تكون منتهية. وعليه فإن كل من $G/Z(G)$ و $Z(G)$ زمرة منتهية وبالتالي نخلص إلى أن G زمرة منتهية Δ .

تمارين (٥, ٢)

- (١) أثبت أن الزمرة $G = \langle a, b \mid a^5 = e, b^2 = e, ba = a^2b \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_2$.
- (٢) أثبت أن $G = \langle a, b \mid a^2b^2 = e, b^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة D_∞ أو الزمرة D_n حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.
- (٣) أثبت أن $G = \langle a, b \mid abab^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}$.
- (٤) أثبت أن $G = \langle a, b, c, d, f \mid ab = c, bc = d, cd = f, df = a, fa = b \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_{11}$.
- (٥) أثبت أن $G = \langle a, b \mid ab = b^2a, ba = a^2b \rangle$ هي الزمرة التافهة.
- (٦) أثبت أن $G = \langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = e, a^{-1}b^{-1}ab = e \rangle$ تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (٧) أثبت أن $G = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة A_4 .
- (٨) أثبت أن الزمرة G في التمرين (٧) تماثل الزمرة $\text{PSL}(2, 3)$.
- (٩) لتكن $G = \langle A, B \rangle \leq \text{GL}(2, \mathbb{C})$ حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. أثبت أن

$$G \cong Q_8$$

(١٠) أثبت أن الزمرة التالية جميعها متماثلة وكل منها يمثل الزمرة Q_8 .

$$G = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^3 \rangle \quad (\text{أ})$$

$$H = \langle a, b \mid a = bab, b = aba \rangle \quad (\text{ب})$$

$$K = \langle a, b \mid ab = c, bc = a, ca = b \rangle \quad (\text{ج})$$

(١١) إذا كانت $G = \langle A, B \rangle \leq \text{SL}(2, 3)$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

$$G \cong Q_8$$

(١٢) إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^2b = b^2a, a^8 = e \rangle$ فأثبت أن $(ab)^4 = e$ وأن $b^8 = e$.

(١٣) إذا كان $\pi: SL(2, 7) \rightarrow PSL(2, 7)$ هو التشاكل الطبيعي وكان $a = \pi \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

و $b = \pi \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $G = \langle a, b \rangle$ تماثل D_4 .

(١٤) إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^3 = e, b^4 = e, (ab)^2 = e \rangle$ فأثبت أن $G \cong S_4$.

(٥, ٣) الضرب والجمع المباشر التام

Complete Direct Products and Sums

لقد قدمنا في البند (٣, ٤) مفهوم الضرب المباشر لعدد منته من الزمر. في هذا البند نعمم هذا

المفهوم حيث نقدم الضرب المباشر والجمع المباشر لأي عائلة من الزمر.

لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $\prod_{i \in I} G_i$ هو الضرب الديكارتي للمجموعات

G_i . أي أن $\prod_{i \in I} G_i = \{f : f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i, f(i) \in G_i \forall i \in I\}$. نعرف عملية ثنائية على

$\prod_{i \in I} G_i$ على النحو التالي:

إذا كانت $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$ فإن $fg : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$fg(i) = f(i)g(i)$. بما أن $f(i), g(i) \in G_i$ و G_i زمرة فإنه من الواضح أن

$f(i)g(i) \in G_i$. ولذا فإن $fg \in \prod_{i \in I} G_i$.

لاحظ أنه لو كان $f(i) = a_i$ و $g(i) = b_i$ فإن $f = \{a_i : i \in I\}$ و $g = \{b_i : i \in I\}$. وهذا

يكون $fg = \{a_i b_i : i \in I\}$. وهذا هو بالضبط التعريف الذي قدمناه في الحالة التي تكون فيها مجموعة

الدليل I منتهية.

من الواضح أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة. لاحظ أن العنصر المحايد هو التطبيق $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$

المعرف بالقاعدة $f(i) = e_i$ لكل $i \in I$. ومن الواضح أيضاً أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة إبدالية إذا كانت كل

من G_i إبدالية.

(٥,٧) تعريف

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر فإن الزمرة $\prod_{i \in I} G_i$ تدعى زمرة الضرب المباشر (direct product) أو زمرة الجمع المباشر التام (complete direct sum). وفي الحالة التي تكون فيها $I = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعة منتهية فإننا نكتب $\prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ أو $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ إذا كانت الزمر إبدالية.

(٥,٩) مبرهنة

التطبيق $\pi_k : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_k$ المعرف بالقاعدة : $\pi_k(f) = f(k)$ لكل $f \in \prod_{i \in I} G_i$ ولكل $k \in I$ تشاكل شامل.

البرهان

لكل $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$ لدينا : $\pi_k(fg) = (fg)(k) = f(k)g(k) = \pi_k(f)\pi_k(g)$ إذن ، π_k تشاكل. ومن الواضح أن π_k شامل. ♦

(٥,٨) تعريف

يدعى التشاكل الشامل المقدم في المبرهنة (٥,٩) ، الإسقاط الطبيعي (canonical projection).

(٥,١٠) مبرهنة

إذا كانت G زمرة وكانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $\alpha_i : G \rightarrow G_i$ تشاكلاً لكل $i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $\alpha : G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ يحقق $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$ لكل $i \in I$.

البرهان

لنفرض أن $\alpha : G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\alpha(a)(i) = \alpha_i(a)$ لكل $a \in G$ ولكل $i \in I$. لنفرض أن $a, b \in G$ عندئذ:

$\alpha(ab)(i) = \alpha_i(ab) = \alpha_i(a)\alpha_i(b) = \alpha(a)(i)\alpha(b)(i)$ ولذا فإن α تشاكل. كذلك، $(\pi_i \circ \alpha)(a)(i) = \pi_i(\alpha_i(a)) = \alpha_i(a)$ ، إذن ، $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$ لكل $i \in I$.

ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن $\beta: G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ تشاكل آخر يحقق $\pi_i \circ \beta = \alpha_i$ لكل $i \in I$.

عندئذ، بإستخدام الفرض وتعريف π_i نجد أن :

$$\blacklozenge \alpha = \beta \quad \text{إذن،} \quad \beta(a)(i) = (\pi_i \circ \beta)(a) = \alpha_i(a) \pi_i \circ \alpha(a) = \alpha(a)(i)$$

مبرهنة (٥, ١١)

إذا كانت كل من $\{G_i : i \in I\}$ و $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $\varphi_i : G_i \rightarrow H_i$ تشاكلاً لكل $i \in I$ وكان $\varphi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} H_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$ لكل

$$f \in \prod_{i \in I} G_i$$

(أ) φ تشاكل (ب) φ أحادي إذا وفقط إذا كان φ_i أحادياً لكل $i \in I$

(ج) φ شامل إذا وفقط إذا كان φ_i شاملاً لكل $i \in I$

$$\varphi\left(\prod_{i \in I} G_i\right) = \prod_{i \in I} \varphi_i(G_i) \quad (\text{هـ}) \quad \text{Ker } \varphi = \prod_{i \in I} \text{Ker } \varphi_i \quad (\text{د})$$

البرهان

(أ) لنفرض أن $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$. عندئذ ،

$$\begin{aligned} \varphi(fg)(i) &= \varphi_i((fg)(i)) = \varphi_i(f(i)g(i)) = \varphi_i(f(i))\varphi_i(g(i)) = \varphi(f)(i)\varphi(g)(i) \\ &= (\varphi(f)\varphi(g))(i) \end{aligned}$$

لكل $i \in I$. إذن ، $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. وبالتالي فإن φ تشاكل.

(ب) من الواضح أنه إذا كان φ أحادي فإن φ_i أحادي لكل $i \in I$. ولبرهان العكس ، نفرض أن

φ_i أحادي لكل $i \in I$. ولنفرض أن $g \in \text{Ker } \varphi$. إذن ، $\varphi(g) = e$. أي أن ،

$\varphi(g)(i) = \varphi_i(g(i)) = e(i) = e_i$ لكل $i \in I$. وبما أن φ_i أحادي فإن $g(i) = e_i$ لكل $i \in I$.

إذن $g = e$. وبالتالي فإن φ أحادي .

(ج) من الواضح أنه إذا كان φ شامل فإن φ_i شامل لكل $i \in I$. ولبرهان العكس ، نفرض أن

φ_i شامل لكل $i \in I$. ولنفرض أن $h \in \prod_{i \in I} H_i$. إذن $h(i) \in H_i$ لكل $i \in I$. وبما أن

شامل فإنه يوجد $g(i) \in G_i$ حيث $\varphi_i(g(i)) = h(i)$. إذن ، $\varphi(g)(i) = \varphi_i(g(i)) = h(i)$ لكل

$i \in I$. أي أن $\varphi(g) = h$. ومن ثم فإن φ شامل.

$$f \in \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = e \Leftrightarrow \varphi(f)(i) = e(i) \forall i \in I \Leftrightarrow \varphi_i(f(i)) = e_i \forall i \in I \quad (د)$$

$$\Leftrightarrow f(i) \in \text{Ker}\varphi_i \forall i \in I \Leftrightarrow f \in \prod_{i \in I} \text{Ker}\varphi_i$$

$$\text{Ker}\varphi = \prod_{i \in I} \text{Ker}\varphi_i \quad \text{إذن ،}$$

(هـ) بما أن $\varphi_i : G_i \rightarrow \varphi_i(G_i)$ تشاكل شامل فإنه بإستخدام الفقرة (ج) ، نجد أن

$$\blacklozenge \quad \varphi\left(\prod_{i \in I} G_i\right) = \prod_{i \in I} \varphi_i(G_i) \quad \text{إذن ،} \quad \varphi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} \varphi_i(G_i)$$

نتيجة (٥، ١٢)

إذا كانت $\{H_i \triangleleft G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر والزمر الجزئية الناعمية فإن $\prod_{i \in I} H_i \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$ وإن

$$\prod_{i \in I} G_i / \prod_{i \in I} H_i \cong \prod_{i \in I} (G_i / H_i)$$

البرهان

لنفرض أن $\varphi_i : G_i \rightarrow G_i / H_i$ هو التشاكل الشامل الطبيعي لكل $i \in I$. عندئذ ، بإستخدام

المبرهنة (٥، ١١) ، نجد أن التطبيق $\varphi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} (G_i / H_i)$ المعرف بالقاعدة:

$$\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i)) \quad \text{تتشاكل شامل وأن} \quad \text{Ker}\varphi = \prod_{i \in I} \text{Ker}\varphi_i = \prod_{i \in I} H_i$$

$$\blacklozenge \quad \prod_{i \in I} G_i / \prod_{i \in I} H_i \cong \prod_{i \in I} (G_i / H_i) \quad \text{إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن}$$

تعريف (٥، ٩)

(أ) إذا كانت كل من G و H زمرة وكان $a, b \in G$ فإننا نقول إن التطبيق $\alpha : G \rightarrow H$

يفصل (separate) العنصرين a و b إذا كان $\alpha(a) \neq \alpha(b)$.

(ب) إذا كانت G زمرة وكانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكانت $\alpha_i : G \rightarrow G_i$ عائلة من

التطبيقات فإننا نقول إن عائلة التطبيقات تفصل العناصر إذا كان لكل $a, b \in G$ و $a \neq b$ فإنه

يوجد α_i حيث $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$.

(ميرهنه (٥, ١٣)

إذا كانت $\alpha_i: G \rightarrow G_i$ عائلة من التشاكلات فإن العبارات التالية متكافئة :(أ) $\{\alpha_i: i \in I\}$ تفصل العناصر(ب) التشاكل الطبيعي $\alpha: G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ أحادي.(ج) $\bigcap_{i \in I} \text{Ker} \alpha_i = \{e\}$

البرهان

(أ) $\Leftrightarrow$ (ب) : لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. إذن يوجد $i \in I$ حيث $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$. ولذا فإن $\alpha(a)(i) \neq \alpha(b)(i)$ أي أن $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. وبالتالي فإن α أحادي.(ب) $\Leftrightarrow$ (ج) : لنفرض أن $a \in \bigcap_{i \in I} \text{Ker} \alpha_i$. إذن ، $\alpha_i(a) = e_i = \alpha_i(e)$ لكل $i \in I$. وعليه فإن ، $\alpha(a) = \alpha(e)$. وبما أن α أحادي فإن $a = e$. إذن $\bigcap_{i \in I} \text{Ker} \alpha_i = \{e\}$.(ج) $\Leftrightarrow$ (أ) : لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. عندئذ ، $ab^{-1} \neq e$. ولذا فإن $ab^{-1} \notin \bigcap_{i \in I} \text{Ker} \alpha_i$. وعليه فإن، يوجد $i \in I$ حيث $ab^{-1} \notin \text{Ker} \alpha_i$. إذن $\alpha_i(ab^{-1}) \neq e_i$.ومنه فإن $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$ وبالتالي فإن $\{\alpha_i: i \in I\}$ تفصل العناصر ◆

نقدم الآن زمرة أخرى هي زمرة الجمع المباشر والتي يمكن النظر إليها كزمرة جزئية من زمرة

الضرب المباشر .

تعريف (٥, ١٠)

لتكن $\{G_i: i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $f \in \prod_{i \in I} G_i$. يعرف سنَدُ f (**support of f**) بأنه المجموعة $S(f) = \{i \in I: f(i) \neq e_i\}$.

تعريف (٥, ١١)

إذا كانت $\{G_i: i \in I\}$ عائلة من الزمر . تعرف زمرة الجمع المباشر (**direct sum**) للزمر G_i على النحو التالي: $\sum_{i \in I} G_i = \left\{ f \in \prod_{i \in I} G_i : S(f) \text{ مجموعة منتهية} \right\}$.

مبرهنة (٥, ١٤)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر فإن $\sum_{i \in I} G_i \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$.

البرهان

لنفرض أن $f, g \in \sum_{i \in I} G_i$. إذن كل من $S(f)$ و $S(g)$ مجموعة منتهية. ولذا فإن

$S(f) \cup S(g)$ مجموعة منتهية أيضاً. ولذا فإنه لإثبات أن $fg^{-1} \in \sum_{i \in I} G_i$ يكفي أن نثبت أن

$S(fg^{-1}) \subseteq S(f) \cup S(g)$. لنفرض إذن أن $i \notin S(f) \cup S(g)$. عندئذ، $f(i) = g(i) = e_i$.

ومنه فإن $(fg^{-1})(i) = f(i)g^{-1}(i) = e_i e_i^{-1} = e_i$. ولذا فإن

$S(fg^{-1}) \subseteq S(f) \cup S(g)$. ومن ثم فإنه $\sum_{i \in I} G_i \leq \prod_{i \in I} G_i$.

ولإثبات الناطمية، نفرض أن $f \in \sum_{i \in I} G_i$ وأن $g \in \prod_{i \in I} G_i$. ولنفرض أن $i \notin S(f)$. عندئذ،

$f(i) = e_i$. ولذا فإن $(g^{-1}fg)(i) = g^{-1}(i)f(i)g(i) = g^{-1}(i)g(i) = e_i$ وعليه فإن

♦ $\sum_{i \in I} G_i \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$ وبالتالي فإن $S(g^{-1}fg) \subseteq S(f)$. ولذا فإن $i \notin S(g^{-1}fg)$.

ملحوظات

(١) يطلق على زمرة الجمع المباشر $\sum_{i \in I} G_i$ أسماء كثيرة منها، زمرة الضرب المباشر المقتصر

(restricted direct product)، زمرة الضرب المباشر الضعيف (weak direct product)

، زمرة الجمع المباشر غير التام (incomplete direct sum).

(٢) لاحظ أيضاً أنه إذا كانت I مجموعة منتهية فإن الزمرتين $\sum_{i \in I} G_i$ و $\prod_{i \in I} G_i$ متساويتان. ويظهر

الاختلاف فقط إذا كانت I غير منتهية.

(٣) إذا كانت الزمر G_i إبدالية فإننا نعتبر من الآن فصاعداً أن العملية الثنائية على G_i هي عملية

الجمع.

تعريف (٥, ١٢)

لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $k \in I$. نقول إن التطبيق $\lambda_k : G_k \rightarrow \sum_{i \in I} G_i$ هو

تطبيق الإحتواء الطبيعي (canonical injection) إذا كان معرفاً بالقاعدة :

$$\lambda_k(a)(i) = \begin{cases} a & , k = i \\ e_i & , k \neq i \end{cases} . a \in G_k \text{ لكل } i$$

مبرهنة (٥, ١٥)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $k \in I$ فإن :

$$\lambda_k(G_k) \triangleleft \prod_{i \in I} G_i \quad (\text{ب}) \quad \lambda_k \text{ تشاكل أحادي}$$

البرهان

(أ) لنفرض أن $a, b \in G_k$. ولنفرض أن $\lambda_k(a) = f$ و $\lambda_k(b) = g$ و $\lambda_k(ab) = h$. عندئذ لكل $i \in I$ لدينا :

$$(fg)(i) = f(i)g(i) = \begin{cases} ab & , k = i \\ e_i & , k \neq i \end{cases} = h(i)$$

إذن ، $fg = h$. ولذا فإن $\lambda_k(ab) = \lambda_k(a)\lambda_k(b)$ أي أن λ_k تشاكل .

لنفرض الآن أن $\lambda_k(a) = \lambda_k(b)$. بما أن $\lambda_k(a)(i) = \begin{cases} a & , k = i \\ e_i & , k \neq i \end{cases}$ وأن $\lambda_k(b)(i) = \begin{cases} b & , k = i \\ e_i & , k \neq i \end{cases}$ وبالتالي فإن $a = b$. وبالتالي فإن λ_k أحادي .

$$\lambda_k(b)(i) = \begin{cases} b & , k = i \\ e_i & , k \neq i \end{cases} . a = b \text{ وبالتالي فإن } \lambda_k \text{ أحادي.}$$

◆ (ب) البرهان مباشر ونتركه كتمرين للقارئ

مبرهنة (٥, ١٦)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $f \in \sum_{i \in I} G_i$ حيث $S(f) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ وكان

$$f = \lambda_{i_1}(a_1)\lambda_{i_2}(a_2)\dots\lambda_{i_n}(a_n) \text{ فإن } 1 \leq j \leq n \text{ لكل } f(i_j) = a_j$$

البرهان

لنفرض أن $g = \lambda_{i_1}(a_1)\lambda_{i_2}(a_2)\dots\lambda_{i_n}(a_n)$. إذا كان $i \notin S(f)$ فإن $i \neq i_j$ لكل $1 \leq j \leq n$ ، ومنه فإن $\lambda_{i_j}(a_j)(i) = e_i$ أي أن $g(i) = e_i$. وبما أن $i \notin S(f)$ فإن $f(i) = e_i$ أيضاً . إذن ،

$f(i) = g(i)$ لكل $i \notin S(f)$. أما إذا كان $i \in S(f)$ فإن $i = i_j$ حيث $1 \leq j \leq n$. وفي هذه الحالة يكون $\lambda_{i_j}(a_j)(i) = f(i_j)$ ولكن $\lambda_{i_t}(a_t)(i) = e_i$ لكل $t \neq j$. إذن ،

◆ $f = g$ وبالتالي فإن $g(i) = e_i e_{i_1} \dots f(i_j) \dots e_{i_1} = f(i_j) = f(i)$

ملحوظة

إذا كان $f \in \sum_{i \in I} G_i$ و G_i إبدالية فإننا سنكتب من الآن فصاعداً $f = \sum_{i \in I} f(i)$ حيث $f(i) \in G_i$. لاحظ أن هذا المجموع منته لأن $S(f)$ مجموعة منتهية .

المبرهنة التالية رديفة المبرهنة (٥، ١٠) للزمر الإبدالية.

مبرهنة (٥، ١٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية وكان $\varphi_i : G_i \rightarrow G$ تشاكلاً لكل $i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $\varphi : \sum_{i \in I} G_i \rightarrow G$ حيث $\varphi \circ \lambda_k = \varphi_k$ لكل $k \in I$.

البرهان

لنفرض أن $f = \sum_{i \in I} f(i) \in \sum_{i \in I} G_i$. ولنفرض أن φ معرفاً بالقاعدة $\varphi(f) = \sum_{i \in I} \varphi_i(f(i))$. لإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $f, g \in \sum_{i \in I} G_i$. عندئذ،

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= \sum_{i \in I} \varphi_i((f+g)(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_i(f(i) + g(i)) \\ &= \sum_{i \in I} (\varphi_i(f(i)) + \varphi_i(g(i))) = \sum_{i \in I} \varphi_i(f(i)) + \sum_{i \in I} \varphi_i(g(i)) = \varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

إذن ، φ تشاكل.

ولإثبات أن $\varphi \circ \lambda_k = \varphi_k$ لكل $k \in I$. نفرض أن $a \in G_k$. عندئذ ،

$$(\varphi \circ \lambda_k)(a) = \varphi(\lambda_k(a)) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\lambda_k(a)(i))$$

يكون فيها $k = i$.

إذن ، $(\varphi \circ \lambda_k)(a) = \varphi_k(\lambda_k(a))(k) = \varphi_k(a)$ ، وبالتالي فإن $\varphi \circ \lambda_k = \varphi_k$ لكل $k \in I$.

ولإثبات الوحدة، نفرض أن $\psi: \sum_{i \in I} G_i \rightarrow G$ تشاكلاً آخر يحقق $\psi \circ \lambda_k = \varphi_k$ لكل $k \in I$.

إذن ، $\psi(\lambda_k(a)) = \varphi_k(a) = \varphi(\lambda_k(a))$ ، ولذا فإنه بإستخدام المبرهنة (٥, ١٦) نجد أن

$$\blacklozenge \quad \psi = \varphi$$

مبرهنة (٥, ١٨)

لتكن كل من $\{G_i : i \in I\}$ و $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $\varphi_i: G_i \rightarrow H_i$ تشاكلاً لكل

$i \in I$. إذا كان $\varphi: \sum_{i \in I} G_i \rightarrow \sum_{i \in I} H_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$

لكل $i \in I$ فإن :

(أ) φ تشاكل (ب) φ أحادي إذا وفقط إذا كان φ_i أحادياً لكل $i \in I$

(ج) φ شامل إذا وفقط إذا كان φ_i شاملاً لكل $i \in I$.

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} G_i\right) = \sum_{i \in I} \varphi(G_i) \quad (\text{هـ}) \quad \text{Ker } \varphi = \sum_{i \in I} \text{Ker } \varphi_i \quad (\text{د})$$

البرهان

لاحظ أولاً أنه إذا كان $i \notin S(f)$ فإن $f(i) = e_i$ ، ولذا فإن $\varphi_i(f(i)) = e_i$. ومن ثم فإن

$\varphi(f)(i) = e_i$. أي أن $i \notin S(\varphi(f))$. إذن ، $S(\varphi(f)) \subseteq S(f)$. ومنه إذا كان $f \in \sum_{i \in I} G_i$ فإن

$$\varphi(f) \in \sum_{i \in I} H_i$$

(أ) لنفرض أن $g, h \in \sum_{i \in I} G_i$. عندئذ ،

$$\begin{aligned} \varphi(fg)(i) &= \varphi_i((fg)(i)) = \varphi_i(f(i)g(i)) = \varphi_i(f(i))\varphi_i(g(i)) = \varphi(f)(i)\varphi(g)(i) \\ &= (\varphi(f)\varphi(g))(i) \end{aligned}$$

لكل $i \in I$. إذن ، $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ ، وبالتالي فإن φ تشاكل.

(ب) إذا كان φ أحادياً فإنه من الواضح أن φ_i أحادي لكل $i \in I$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ_i أحادي لكل $i \in I$. ولنفرض أن $g \in \text{Ker } \varphi$. إذن ، $\varphi(g) = e$.

أي أن $\varphi(g)(i) = e_i$ لكل $i \in I$. ومنه فإن $\varphi_i(g(i)) = e_i$ لكل $i \in I$. وبما أن φ_i أحادي

فإن $g(i) = e_i$ لكل $i \in I$. إذن ، $g = e$. وبالتالي فإن φ أحادي .

(ج) من الواضح أنه إذا كان φ شاملاً فإن φ_i شامل لكل $i \in I$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ_i شامل لكل $i \in I$. ولنفرض أن $h \in \sum_{i \in I} H_i$ حيث $S(h) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. بما أن φ_i شامل لكل $i \in I$ فإنه لكل $1 \leq k \leq n$ يوجد $x_k \in G_{i_k}$ حيث $\varphi_{i_k}(x_k) = h(i_k)$ لنفرض الآن أن :

$$f(i) = \begin{cases} x_k & , i = i_k \\ e_i & , i \neq i_k \forall 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

من الواضح أن $S(f)$ مجموعة منتهية . ولذا فإن $f \in \sum_{i \in I} G_i$ وأن

$$\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i)) = \begin{cases} \varphi_{i_k}(x_k) = h(i_k) & , i = i_k \\ e_i & , i \neq i_k \forall 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

وبالتالي فإن $\varphi(f) = h$

♦ (د) و (هـ) متروكان للقارئ

نتيجة (٥, ١٩)

إذا كانت $\{H_i \triangleleft G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر والزمر الجزئية الناعمة فإن $\sum_{i \in I} H_i \triangleleft \sum_{i \in I} G_i$ وأن

$$\sum_{i \in I} G_i / \sum_{i \in I} H_i \cong \sum_{i \in I} (G_i / H_i)$$

البرهان

لنفرض أن $\pi_i : G_i \rightarrow G_i / H_i$ التشاكل الشامل الطبيعي لكل $i \in I$. إذن التطبيق $\varphi : \sum_{i \in I} G_i \rightarrow \sum_{i \in I} (G_i / H_i)$ المعرفة بالمعنى $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$ تشاكل شامل . كذلك

$$\text{Ker } \varphi = \sum_{i \in I} \text{Ker } \varphi_i = \sum_{i \in I} H_i$$

$$♦ \sum_{i \in I} G_i / \sum_{i \in I} H_i \cong \sum_{i \in I} (G_i / H_i)$$

لقد قدمنا في البند (٣, ٤) مفهوم الضرب المباشر الداخلي لعدد منته من الزمر الجزئية الناعمة

من زمرة G . نقدم الآن تعميماً لهذا المفهوم .

تعريف (٥, ١٣)

لتكن $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناعمية من الزمرة G . نقول إن G زمرة جمع مباشر داخلي (internal direct sum) للزمر الجزئية $\{H_i : i \in I\}$ إذا كان لكل $e \neq a \in G$ توجد عناصر وحيدة $e_{i_k} \neq a_{i_k} \in H_{i_k}$ $1 \leq k \leq n$ بحيث $a = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ وبحيث تكون $i_1, i_2, \dots, i_n$ عناصر مختلفة من I .

المبرهنة التالية تعميم للمبرهنة (٣, ٣٢) وتزودنا بتعريف مكافئ للجمع المباشر الداخلي.

مبرهنة (٥, ٢٠)

تكون الزمرة G جمعاً مباشراً داخلياً لعائلة الزمر الجزئية الناعمية $\{H_i : i \in I\}$ من G إذا وفقط إذا كان :

$$G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle \quad (أ) \quad H_k \cap \langle \bigcup_{i \neq k} H_i \rangle = \{e\} \quad \text{لكل } k \in I \quad (ب)$$

البرهان

◆ مشابه لبرهان المبرهنة (٣, ٣٢) ، ولذا فإننا نتركه كتمرين للقارئ

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كانت G زمرة جمع مباشر للزمر الجزئية الناعمية $\{H_i : i \in I\}$ فإن $H_i \triangleleft G$ وأن G تماثل زمرة الجمع المباشر $\sum_{i \in I} H_i$. ولكن $\sum_{i \in I} H_i$ في الحقيقة لا يحتوي H_i كزمرة جزئية ولكنه يحتوي الزمر الجزئية $\lambda_i(H_i)$ المماثلة للزمرة H_i . إن هذا الاختلاف ليس له تأثير حقيقي عند التطبيقات ، ولذا فإننا لن نعيده أي إهتمام ونكتب $G = \sum_{i \in I} H_i$.

تمارين (٥, ٣)

(١) لتكن G زمرة إبدالية وكل من H و K زمرة جزئية من G . أثبت أن $G = H \oplus K$ إذا وفقط إذا وجدت تشاكلات $H \xrightarrow{\lambda_1} G \xrightarrow{\pi_2} K$ و $K \xrightarrow{\lambda_2} G \xrightarrow{\pi_1} H$ تحقق :

$$\pi_2 \circ \lambda_1 = 0 , \pi_1 \circ \lambda_2 = 0 , \pi_2 \circ \lambda_2 = e_K , \pi_1 \circ \lambda_1 = e_H$$

$$\text{و } x \in G \text{ لكل } (\lambda_1 \circ \pi_1)(x) + \lambda_2 \circ \pi_2(x) = x$$

(٢) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $G = H \oplus K$ حيث $H, K \leq G$ وكان $\pi: G \rightarrow H$ و $\theta: G \rightarrow K$ الإسقاطين الطبيعيين فأثبت أن $\pi \circ \pi = \pi$ ، $\theta \circ \theta = \theta$ ، $\theta \circ \pi = \pi \circ \theta = 0$ ، و $\pi(x) + \theta(x) = x$ لكل $x \in G$.

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان التشاكلان $\pi: G \rightarrow G$ و $\theta: G \rightarrow G$ يحققان شروط التمرين (٢) فأثبت أن $G = \pi(G) \oplus \theta(G)$.

(٤) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية G فإننا نقول إن H عامل جمع مباشر (direct summand) إذا وجدت زمرة جزئية K من G حيث $G = H \oplus K$. أثبت أنه إذا كان $\pi: G \rightarrow H$ إسقاطاً شاملاً فإن H عامل جمع مباشر.

(٥) إذا كانت A زمرة إبدالية وكانت $A = B \oplus C$ حيث $B, C \leq A$ وإذا كانت $H \leq A$ لا متغيرة تماماً فأثبت أن $H = (H \cap B) \oplus (H \cap C)$.

(٦) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة إبدالية.

(٧) إذا كانت G زمرة و $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناعمة من G فأثبت أنه يوجد تشاكل أحادي من $G / \bigcap_{i \in I} H_i$ إلى $\prod_{i \in I} (G/H_i)$.

(٨) لتكن I و J مجموعتين حيث $|I| = |J|$. إذا كانت G زمرة فأثبت أن $\sum_{i \in I} G \cong \sum_{j \in J} G$.

(٩) إذا كانت $G = \sum_{i \in N} A$ فأثبت أن :

(أ) $A \times G \cong G$ (ب) $G \times G \cong G$ [إرشاد : استخدم التمرين (٨)].

(١٠) إذا كانت كل من A و B زمرة إبدالية وكانت $H(A, B) = \{f : B \text{ إلى } A \text{ تشاكل من}\}$ فأثبت أن $H(A, B) \leq \prod_{a \in A} B_a$.

(٥، ٤) شبه الضرب المباشر

Semidirect Product

نقدم في هذا البند تعميماً لمفهوم الضرب المباشر لزمريتين H و K يدعى شبه الضرب المباشر للزمريتين H و K . ستساعدنا طريقة الإنشاء هذه في الحصول على زمرة جديدة G من زمريتين معلومتين H و K بحيث تحتوي G على زمرة جزئية مماثلة لكل من H و K كما في الضرب المباشر ، إلا أننا سنفترض هنا أن H ناظمية و K ليست بالضرورة ناظمية ، ولذا فإنه

يكون بمقدورنا إنشاء زمرة غير إبدالية حتى لو كانت كل من H و K إبدالية. وهذا يكون باستطاعتنا الحصول على زمر جديدة لم يكن بمقدورنا الحصول عليها باستخدام مفهوم الضرب المباشر.

لقد بينا في الفصل الرابع أنه إذا كانت K و H زميرتين وكان $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكل فإننا نستطيع أن نجعل K تؤثر على H بتعريف $*$: $K \times H \rightarrow H$ بالقاعدة $\varphi(k) = \varphi_k$ لكل $k \in K$ و $h \in H$ حيث اعتبرنا أن $k * h = \varphi(k)(h) = \varphi_k(h)$ لكل $k \in K$.

مبرهنة (٥, ٢١)

لتكن H و K زميرتين وليكن $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكل وليكن $*$ هو تأثير K على H المقرون مع φ . إذا كانت $G = \{(h, k) : h \in H, k \in K\}$ والعمليّة الثنائية معرفة على G على النحو التالي: $(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 k_1 * h_2, k_1 k_2) = (h_1 \varphi_{k_1}(h_2), k_1 k_2)$ فإن G زمرة. البرهان

(١) لكل $(a, x), (b, y), (c, z) \in G$ لدينا :

$$[(a, x)(b, y)](c, z) = (a\varphi_x(b), xy)(c, z) = (a\varphi_x(b)\varphi_{xy}(c), xyz)$$

ومن ناحية أخرى ،

$$(a, x)[(b, y)(c, z)] = (a, x)(b\varphi_y(c), yz) = (a\varphi_x(b\varphi_y(c)), xyz)$$

وبما أن $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ تشاكل فإن $\varphi_{xy} = \varphi_x \circ \varphi_y$ ولذا فإن :

$$a\varphi_x(b\varphi_y(c)) = a\varphi_x(b)\varphi_x(\varphi_y(c)) = a\varphi_x(b)(\varphi_x \circ \varphi_y)(c) = a\varphi_x(b)\varphi_{xy}(c)$$

وهذا نخلص إلى أن العمليّة تجميعية .

(٢) لكل $(h, k) \in G$ لدينا : $(h, k)(e_1, e_2) = (h\varphi_k(e_1), ke_2) = (h, k)$

إذن ، (e_1, e_2) عنصر محايد أيمن .

(٣) إذا كان $(h, k) \in G$ فإن :

$$\begin{aligned} (h, k)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) &= (h\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})), kk^{-1}) = (h\varphi_{kk^{-1}}(h^{-1}), e_2) \\ &= (h\varphi_{e_2}(h^{-1}), e_2) = (hh^{-1}, e_2) = (e_1, e_2) \end{aligned}$$

ولذا فإن $(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})$ نظير أيمن للعنصر (h, k) . إذن ، باستخدام المبرهنة (٢,٧) نخلص إلى
 أن G زمرة ◆

تعريف (٥,١٤)

تسمى الزمرة G التي حصلنا عليها من المبرهنة (٥,٢١) شبه الضرب المباشر الخارجي للزمرة H على K بتأثير φ (**external semidirect product of H by K with action φ**) ونرمز لها بالرمز $G = H \rtimes_{\varphi} K$.

ملحوظة

إذا كان $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ هو التشاكل التافه فإن $\text{Ker} \varphi = H$ وإن $\varphi_k(h) = h$ لكل $k \in K$ وكل $h \in H$. لذا فإن $(h_1 \varphi_{k_1}(h_2), k_1 k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2)$. أي أن $G = H \rtimes_{\varphi} K = H \times K$. ومن ثم فإن شبه الضرب المباشر الخارجي هو بالفعل تعميم للضرب المباشر الخارجى للزمرتين H و K .

ننتقل الآن إلى مفهوم شبه الضرب المباشر الداخلي :

تعريف (٥,١٥)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة G فإننا نقول إن G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K (**internal semidirect product of H by K**) إذا تحققت الشروط التالية :

$$(أ) \quad H \triangleleft G \quad (ب) \quad G = HK \quad (ج) \quad H \cap K = \{e\}$$

مثال (٥,٩)

إذا كانت $G = H \times K$ فإنه من الواضح أن G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة $H \times \{e\}$ على

الزمرة $\{e\} \times K \rightarrow \text{Aut}(H \times \{e\})$ حيث $\varphi: \{e\} \times K \rightarrow \text{Aut}(H \times \{e\})$ هو التشاكل التافه الذي يرسل جميع العناصر إلى العنصر المحايد في $\text{Aut}(H \times \{e\})$ □

مثال (٥, ١٠)

إذا كانت كل من $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ و $K = \langle (1\ 2) \rangle$ زمرة جزئية من S_3 فإن S_3 شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K . حيث أنه من الواضح أن $H \triangleleft S_3$ ، $S_3 = HK$ وأن $H \cap K = \{e\}$ □

مبرهنة (٥, ٢٢)

إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن :
(أ) لكل $g \in G$ يوجد عنصر وحيد $h \in H$ وعنصر وحيد $k \in K$ حيث $g = hk$.
(ب) $G/H \cong K$.

البرهان

(أ) بما أن $G = HK$ فإنه $g = hk$ لكل $g \in G$ حيث $h \in H$ و $k \in K$. ولبرهان الوحدة نفرض أن $g = hk = h_1 k_1$ ، عندئذ ، $h_1^{-1} h = k_1 k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ ، ولذا فإن $h = h_1$ وأن $k = k_1$.

(ب) ليكن $\varphi: G \rightarrow K$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(g) = \varphi(hk) = k$ لكل $g \in G$. لاحظ أولاً أن $hk = kh$ لكل $k \in K$ وكل $h \in H$. الآن إذا كان $g = hk$ و $g_1 = h_1 k_1$ عنصرين من G فإن : $\varphi(gg_1) = \varphi(hkh_1 k_1) = \varphi(hh_1 k k_1) = k k_1 = \varphi(g) \varphi(g_1)$ ولذا فإن φ تشاكل. من الواضح أن φ شامل. وأخيراً :

$$g = hk \in \text{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi(g) = k = e \Leftrightarrow g = h \Leftrightarrow g \in H$$

♦ إذن باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/H \cong K$

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن عكس المبرهنة (٥, ٢٢) ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً. أي أنه من الممكن أن يكون $G/H \cong K$ ولكن G ليست شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K .

وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٥, ١١)

إذا كانت $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, ba = a^3b \rangle$ وكانت $H = \langle a \rangle \triangleleft G$ وكانت $K = \{e, a^2\}$ فإن $H \cap K \neq \{e\}$. إذن، G ليست شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K

$$\square \quad G/H \cong \mathbb{Z}_2 \cong K \text{ بينما}$$

المبرهنة التالية تبين لنا أنه إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن

$$G \cong H \times_{\phi} K$$

مبرهنة (٥, ٢٣)

إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن $G \cong H \times_{\phi} K$ حيث $\phi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة:

$$\phi(k)(h) = \phi_k(h) = khk^{-1}, \forall k \in K, \forall h \in H$$

البرهان

باستخدام المبرهنة (٥, ٢٢)، نجد أنه لكل $g \in G$ يوجد عنصر وحيد $h \in H$ وعنصر وحيد $k \in K$ حيث $g = hk$. ليكن $\psi: G = HK \rightarrow H \times_{\phi} K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\psi(hk) = (h, k)$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. من الواضح أن ψ تقابل. سنبرهن الآن أن ψ تشاكل. لاحظ أولاً أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. لنفرض الآن أن $hk, h_1k_1 \in G$ عندئذ:

$$(h, k)(h_1, k_1) = (h\phi_k(h_1), kk_1) = (hkh_1k^{-1}, kk_1) = (hh_1kk^{-1}, kk_1) = (hh_1, kk_1)$$

إذن،

$$\psi(hkh_1k_1) = \psi(hh_1kk_1) = (hh_1, kk_1) = (h, k)(h_1, k_1) = \psi(hk)\psi(h_1k_1)$$

وبالتالي فإن ψ تشاكل

المبرهنة التالية تبين لنا الاتجاه الآخر. أي أنه إذا كانت $G = H \times_{\phi} K$ فإنه يمكن اعتبار أن

G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K .

مبرهنة (٥, ٢٤)

إذا كانت $G = H \times_{\phi} K$ فإن:

(أ) كل من $\bar{H} = \{(h, e_2) : h \in H\}$ و $\bar{K} = \{(e_1, k) : k \in K\}$ زمرة جزئية من G وأن $H \cong \bar{H}$ و $K \cong \bar{K}$.

(ب) $G = \bar{H}\bar{K}$ (ج) $\bar{H} \triangleleft G$ (د) $\bar{H} \cap \bar{K} = \{(e, e)\}$

البرهان

(أ) إذا كان $(h_1, e_2), (h_2, e_2) \in \bar{H}$ فإن :

$$(h_1, e_2)(h_2, e_2) = (h_1 \phi_{e_2}(h_2), e_2) = (h_1 h_2, e_2) \in \bar{H}$$

$$(h_1, e_2)^{-1} = (\phi_{e_2^{-1}}(h_1^{-1}), e_2^{-1}) = (h_1^{-1}, e_2) \in \bar{H}$$

إذن $\bar{H} \leq G$ ، وبالمثل ، $\bar{K} \leq G$.

وأخيراً من الواضح أن كل من التطبيقين تماثلان :

$$f(h) = (h, e_2) \text{ حيث } f: H \rightarrow \bar{H}$$

$$g(k) = (e_1, k) \text{ حيث } g: K \rightarrow \bar{K}$$

(ب) $G = \bar{H}\bar{K}$ إذن $g \in G \Leftrightarrow g = (h, k) = (h, e_2)(e_1, k)$

(ج) لنفرض أن $(h, e_2) \in \bar{H}$ وأن $(x, y) \in G$ ، إذن ،

$$(x, y)(h, e_2)(x, y)^{-1} = (x, y)(h, e_2)(\phi_{y^{-1}}(x^{-1}), y^{-1})$$

$$= (x\phi_y(h)\phi_{ye_2}(\phi_{y^{-1}}(x^{-1})), ye_2y^{-1})$$

$$= (x\phi_y(h)x^{-1}, e_2) \in \bar{H}$$

لأن $x \in H$ و $\phi_y(h) \in H$ ، ولذا فإن $x\phi_y(h)x^{-1} \in H$ إذن $\bar{H} \triangleleft G$.

(د) واضح من تعريف $\bar{H}$ و $\bar{K}$ ♦

ملحوظة

إذا اعتبرنا أن $H = \bar{H}$ و $K = \bar{K}$ في المبرهنة (٥، ٢٤) وملاحظة أن

$$(e_1, k)(h, e_2)(e_1, k)^{-1} = (\phi_k(h), k)(e_1, k^{-1}) = (\phi_k(h)\phi_k(e_1), kk^{-1}) = (\phi_k(h), e_2)$$

فإننا نجد بوضع $k = (e_1, k)$ و $h = (h, e_2)$ أن $khk^{-1} = \phi_k(h) = k * h$

نقدم الآن بعض الأمثلة على شبه الضرب المباشر .

مثال (٥, ١٢)

إذا كانت H إبدالية وكانت $K = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ وكان $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف على النحو التالي: $\varphi(k)(h) = \varphi_k(h) = h^{-1}$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. إذن، باستخدام الملحوظة التي تلي المبرهنة (٥, ٢٤) نجد أن $khk^{-1} = h^{-1}$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. ولذا فإن $G = H \rtimes_\varphi K$ تحتوي على الزمرة H حيث $[G:H] = 2$ وتحقق

$$\square h \in H \text{ لكل } aha^{-1} = h^{-1}$$

مثال (٥, ١٣)

إذا كانت $H = \mathbb{Z} = \langle b \rangle$ ، $K = \langle a \rangle = \mathbb{Z}_2$ والتشاكل φ كما هو مبين في المثال (٥, ١٢) فإننا نجد أن $G = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$. وأن $aba^{-1} = b^{-1}$. سنبرهن الآن أن $G \cong D_\infty$. من الواضح أن $G = \langle \beta, \alpha \rangle$ حيث $\beta = (b, e)$ و $\alpha = (e, a)$. كذلك،

$$\beta^2 = (b, e)(b, e) = (b\varphi_e(b), e) = (bb^{-1}, e) = (e, e)$$

$$\alpha^2 = (e, a)(e, a) = (e\varphi_a(e), a^2) = (e, e)$$

إذن، $\square G = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2 = \langle \beta, \alpha \mid \beta^2 = \alpha^2 = e \rangle \cong D_\infty$

مثال (٥, ١٤)

إذا كانت $H = \mathbb{Z}_n = \langle b \rangle$ وكانت $K = \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$ وكان $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ التشاكل المبين في المثال (٥, ١٢) فإنه ليس من الصعب أن نرى في هذه الحالة أن

$$\square G = \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2 \cong D_n$$

مثال (٥, ١٥)

لفرض أن $H = \mathbb{Z}_3 = \langle b \rangle$ وأن $K = \mathbb{Z}_4 = \langle a \rangle$ وأن $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المبين في المثال (٥, ١٢). إذن $G = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 12 وتحقق $aba^{-1} = b^{-1}$. سنبين الآن أن $G \cong T$. تذكر أن $T = \langle x, y \mid x^6 = e, x^3 = y^2, yx = x^{-1}y \rangle$. الآن، إذا فرضنا أن $x = (b, a^2)$ وأن $y = (e, a)$ فإنه ليس من الصعب أن نبين أن $G = \langle x, y \rangle$. وبحساب مباشر نستطيع أن نتحقق من العلاقات الأخرى، فمثلاً:

$$\begin{aligned} xyx &= (b, a^2)(e, a)(b, a^2) = (b\varphi_a(b), a^3)(b, a^2) \\ &= (b, a^3)(b, a^2) = (b\varphi_{a^3}(b), a^5) = (ba^3ba^{-3}, a) = (baba^{-1}, a) \end{aligned}$$

$$= (bb^{-1}, a) = (e, a) = y$$

$$\square G = \mathbb{Z}_3 \times_{\varphi} \mathbb{Z}_4 \cong T, \text{ إذن } x^3 = y^2 \text{ و } x^6 = e, \text{ وبالمثل}$$

مثال (٥, ١٦)

إذا كانت $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وكانت $K = \mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle$ فإن $\text{Aut}(H) \cong S_3$. ولذا فإن $\text{Aut}(H)$ تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 3 ولتكن $\langle \gamma \rangle$. لنفرض أن $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = \gamma$. ولذا فإن $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times_{\varphi} \mathbb{Z}_3$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 12. لاحظ أن $G \not\cong D_6$ وأن $G \not\cong T$ إذن $G \cong A_4$.

مثال (٥, ١٧)

إذا كانت $H = \mathbb{Z}_8 = \langle b \rangle$ وكانت $K = \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$ وكان $f \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ هو التماثل المعرف بالقاعدة $f(b) = b^5$. من الواضح أن $o(f) = 2$. ليكن $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi_e(b) = e$ و $\varphi_a(b) = f(b) = b^5$. سنبرهن الآن أن: $G = \mathbb{Z}_8 \times_{\varphi} \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid x^8 = e, y^2 = e, yxyx^3 = e \rangle$. من الواضح أن G زمرة غير إبدالية رتبها 16. وإذا كان $x = (b, e)$ و $y = (e, a)$ فإن $G = \langle x, y \rangle$. ومن الواضح أن $x^8 = e$ وأن $y^2 = e$. وأخيراً:

$$yxyx^3 = (e, a)(b, e)(e, a)(b^3, e) = (e\varphi_a(b), a)(e\varphi_a(b^3), a) = (b^5, a)(b^{15}, a) \\ = (b^5, a)(b^7, a) = (b^5\varphi_a(b^7), a^2) = (b^5b^{35}, a^2) = (b^{40}, a^2) = (e, e)$$

إذن ، $yxyx^3 = e$ وبالتالي فإن :

$$\square G = \mathbb{Z}_8 \times_{\varphi} \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid x^8 = e, y^2 = e, yxyx^3 = e \rangle$$

إن من أهم تطبيقات شبه الضرب المباشر هو استخدامه في تصنيف الزمر من الرتبة n ، لبعض قيم n . ولإنجاز ذلك نتبع الإستراتيجية التالية :

(١) لتكن G زمرة من الرتبة n . أثبت أن G تحتوي على زمريتين جزئيتين فلعيتين تحققان : $H < G$ و $H \cap K = \{e\}$ و $G = HK$. أي أن $G = H \times_{\varphi} K$ حيث $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi_k(h) = khk^{-1}$.

(٢) جد جميع الزمر من الرتبة $|H|$ التي لا تماثل الزمرة H . وبالمثل ، بالنسبة للزمرة K .

(٣) لكل زوج H و K وجد في الخطوة (٢) ، جد جميع التشاكلات الممكنة $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$.

(٤) لكل ثلاثي H و K و φ وجد في الخطوة (٣) ، جد $H \times_{\varphi} K$.

(٥) جد أزواج الزمر المماثلة في الخطوة (٤) ، ولذا فإنه يتبقى الزمر غير المتماثلة من الرتبة n .

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن الإستراتيجية أعلاه تكون فعالة فقط لبعض قيم n ، وعلى الأخص إذا كان p^k لا يقسم n حيث k عدد صحيح كبير نسبياً . فمثلاً ، الزمرة Q_8 من الرتبة 2^3 لا يمكن تفريقها كشيء ضرب مباشر لأن $H \cap K \neq \{e\}$ لكل الزمر الجزئية الفعلية للزمرة Q_8 . قبل تقديم أمثلة على تصنيف بعض الزمر نحتاج إلى بعض المعلومات الإضافية التي نقدمها في المبرهنتين التاليتين .

مبرهنة (٥, ٢٥)

إذا كانت $G = H \times_{\varphi} K$ حيث $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكل فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) التطبيق المحايد $i: H \times_{\varphi} K \rightarrow H \times K$ تماثل .

(ب) φ هو التشاكل التافه .

(ج) $K \triangleleft H \times_{\varphi} K$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : إذا كان $(h, k), (h_1, k_1) \in G$ فإن :

$$(h\varphi_k(h), kk_1) = (h, k)(h_1, k_1) = (hh_1, kk_1)$$

ولذا فإن $h\varphi_k(h_1) = hh_1$ أي أن $\varphi_k(h_1) = h_1$ لكل $h_1 \in H$. إذن φ هو التشاكل التافه .

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : بما أن φ هو التشاكل التافه فإن $\varphi_k(h) = khk^{-1} = h$ لكل $h \in H$ وكل

$k \in K$. لنفرض الآن أن $(h, k) \in H \times_{\varphi} K$ وأن $(e, k_1) \in k$. عندئذ :

$$(h, k)(e, k_1)(h, k)^{-1} = (h\varphi_k(e), kk_1)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h, kk_1)(h^{-1}, k^{-1})$$

$$= (h\varphi_{kk_1}(h^{-1}), kk_1k^{-1}) = (hh^{-1}, kk_1k^{-1}) = (e, kk_1k^{-1}) \in K$$

إذن ، $K \triangleleft H \times_{\varphi} K$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض أن $K \triangleleft H \times_{\varphi} K$. بما أن $H \triangleleft H \times_{\varphi} K$ فإن $H \cap K = \{e\}$. ولذا فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. وعليه فإن φ هو التشاكل التافه . إذن ،

◆ $H \times K = H \times_{\varphi} K$ وبالتالي فإن $(h, k)(h_1, k_1) = (h\varphi_k(h_1), kk_1) = (hh_1, kk_1)$

مبرهنة (٥, ٢٦)

لتكن K زمرة دورية ولتكن H زمرة . وليكن كل من $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ و $\varphi_2: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكلاً . إذا كانت الزمرتان $\varphi_1(K), \varphi_2(K)$ مترافقتين في $\text{Aut}(H)$ فإن $H \times_{\varphi_1} K \cong H \times_{\varphi_2} K$.

البرهان

لنفرض أن $\varphi_1(K)$ و $\varphi_2(K)$ مترافقتان في $\text{Aut}(H)$. إذن يوجد $\sigma \in \text{Aut}(H)$ حيث $\sigma\varphi_1(K)\sigma^{-1} = \varphi_2(K)$. ولذا فإنه لكل $k \in K$ يوجد $n \in \mathbb{Z}$ حيث $\sigma\varphi_1(k)\sigma^{-1} = (\varphi_1(k))^n$. من السهل أن نرى الآن أن التطبيق $\psi: H \times_{\varphi_1} K \rightarrow H \times_{\varphi_2} K$ المعرفة بالمعادلة $\psi((h, k)) = (\sigma(h), k^n)$ تماثل

مثال (٥, ١٨)

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 15 . ولنفرض أن $K \in \text{Syl}_3(G)$ وأن $H \in \text{Syl}_5(G)$. بما أن $H \cap K = \{e\}$ وأن $H \triangleleft G$ فإن $G = H \times_{\varphi} K$ حيث $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكلاً . الآن ، نعلم أن $\text{Aut}(H) \cong \mathbb{Z}_4$. بما أن $|K| = 3$ لا يقسم 4 فإن التشاكل الوحيد $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل التافه . إذن ، $G = H \times_{\varphi} K = H \times K \cong \mathbb{Z}_{15}$.

□ أي أن الزمرة الوحيدة من الرتبة 15 هي الزمرة الدورية

مثال (٥, ١٩)

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 21 . ولنفرض أن $\langle x \rangle = K \in \text{Syl}_3(G)$ وأن $H \in \text{Syl}_7(G)$. كما في المثال السابق نجد أن $G = H \times_{\varphi} K$ حيث φ تشاكل من K إلى $\text{Aut}(H)$. وبما أن $\text{Aut}(H)$ زمرة دورية من الرتبة 6 فإنه يوجد زمرة جزئية وحيدة من الزمرة $\text{Aut}(H)$ رتبته 3 . لنفرض أن هذه الزمرة هي $\langle \gamma \rangle$. ولذا فإنه يوجد ثلاث تشاكلات $\varphi_1: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ معرفة

بالقاعدة $\varphi_i(x) = \gamma^i$ حيث $i = 0, 1, 2$.

إذا كان $i = 0$ فإن φ_0 هو التشاكل التافه . ولذا فإن $G = H \times_{\varphi_0} K = H \times K \cong \mathbb{Z}_{21}$. أما إذا

كان $i \neq 0$ فإن كل من $H \times_{\varphi_1} K$ و $H \times_{\varphi_2} K$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 21 .

ومن الواضح أن $H \times_{\varphi_1} K \cong H \times_{\varphi_2} K$ لأن $\varphi_1(K)$ و $\varphi_2(K)$ زميرتين متماثلتين (ومن ثم

مترافقان) من $\text{Aut}(H)$. ولذا فإننا نخلص إلى وجود زميرتين فقط غير متماثلتين من الرتبة 21 $\square$

(٥, ٤, ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

عين جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 30 .

الحل

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 30 . لقد بينا في المبرهنة (٤, ٢٧) أن G تحتوي على زمرة جزئية H

من الرتبة 15 . ولذا فإن H زمرة دورية وأن $H \triangleleft G$ وباستخدام مبرهنة كوشي ، تحتوي G أيضاً

على زمرة K من الرتبة 2 . إذن $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$. ولذا فإن $G = H \times_{\varphi} K$ حيث

$\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ تشاكل . ولكننا نعلم أن :

$$\text{Aut}(H) = \text{Aut}(\mathbb{Z}_{15}) \cong U_{15} \cong U_5 \times U_3 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_5) \times \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$$

لنفرض أن $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$. الآن $\text{Aut}(H)$ تحتوي على ثلاثة عناصر (تماثلات) من

الرتبة 2 وهي:

$$f_3(a) = a^{-1}, f_3(b) = b^{-1}, f_2(a) = a^{-1}, f_2(b) = b, f_1(a) = a, f_1(b) = b^{-1}$$

ولذا فإنه يوجد ثلاثة تشاكلات غير تافهة $\varphi_i: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ وهي

$$\varphi_1(x) = f_1, \varphi_2(x) = f_2, \varphi_3(x) = f_3$$

الآن لدينا الزمرة غير الإبدالية التالية :

$$G = H \times_{\varphi_1} K = \langle a, b, x \mid a^5 = e, b^3 = e, x^2 = e, xax^{-1} = a, xbx^{-1} = b^{-1} \rangle \quad (١)$$

ومن السهل أن نرى أن هذه الزمرة هي :

$$G = \langle a, b, x \mid a^5 = e, b^3 = e, x^2 = e, xb = b^{-1}x \rangle \cong \mathbb{Z}_5 \times D_3$$

$$G = H \times_{\varphi_2} K = \langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^2 = e, xax^{-1} = a^{-1}, xbx^{-1} = b \rangle \quad (٢)$$

ومن السهل أن نرى أن هذه الزمرة هي :

$$G = \langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^2 = e, xa = a^{-1}x \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times D_5$$

(٣) $G = H \times_{\varphi_3} K = \mathbb{Z}_{15} \times_{\varphi_3} \mathbb{Z}_2$. وكما رأينا في المثال (٥, ١٤) فإن هذه الزمرة هي D_{15} .

وأخيراً إذا كان $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل التافه فإننا نحصل على الزمرة الإبدالية

$$G = H \times K \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{30}$$

ولقد بينا في المبرهنة (٤, ٢٧) أن الزمر الأربعة $\mathbb{Z}_3 \times D_5$ ، $\mathbb{Z}_5 \times D_3$ ، D_{15} و $\mathbb{Z}_{30}$ جميعها غير

متماثلة وبالتالي فإنه يوجد أربع زمر غير متماثلة من الرتبة 30Δ

تمرين (٢)

استخدم شبه الضرب المباشر لتصنيف الزمر من الرتبة 12.

الحل

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 12. ولنفرض أن $H \in \text{Syl}_2(G)$ وأن $K \in \text{Syl}_3(G)$. باستخدام

المبرهنة الثالثة لسيلو نجد أن $K \triangleleft G$ أو أن $H \triangleleft G$. وبما أن $H \cap K = \{e\}$ فإن G شبه ضرب

مباشر. لاحظ أيضاً أن $H \cong \mathbb{Z}_4$ أو $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وأن $K \cong \mathbb{Z}_3$.

ندرس الآن الحالتان التاليتان :

(أ) $H \triangleleft G$

إذا كانت $H \cong \mathbb{Z}_4$ فإن $\text{Aut}(H) \cong \mathbb{Z}_2$. ولذا فإن التشاكل الوحيد $\varphi: K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو

التشاكل التافه. ولذا فإن $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$.

أما إذا كانت $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ فإن $\text{Aut}(H) \cong S_3$. وفي هذه الحالة توجد زمرة جزئية وحيدة من

S_3 من الرتبة 3 ، ولتكن $\langle \gamma \rangle$. إذا كانت $K = \langle x \rangle$ فإننا نحصل على التشاكلات الثلاث التالية

$$\varphi_i: K \rightarrow (H) \text{ حيث } \varphi_i(x) = \gamma^i \text{ حيث } i = 0, 1, 2$$

إذا كان $i = 0$ فإن φ_0 هو التشاكل التافه . ولذا فإن $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

وأما التشاكلات φ_1 و φ_2 فإنهما يؤديان إلى زميرتين غير إبداليتين $H \times_{\varphi_1} K$ و $H \times_{\varphi_2} K$.

وباستخدام المبرهنة (٥, ٢٦) نجد أن $H \times_{\varphi_1} K \cong H \times_{\varphi_2} K$. وباستخدام المثال (٥, ١٦) نجد أن G

في هذه الحالة ما هي إلا الزمرة A_4 .

(ب) $K \triangleleft G$. لاحظ أن $\text{Aut}(K) = \langle \lambda \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ حيث $\lambda(k) = k^{-1}$

إذا كانت $H = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ فإنه يوجد في هذه الحالة تشاكلان $\varphi_i: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ ، $i = 0, 1$.

حيث φ_0 هو التشاكل التافه . ومنه فإن $G = K \times H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$. والتشاكل φ_1 هو

التشاكل المبين في المثال (٥, ١٥) ، وفي هذه الحالة نجد أن $G \cong K \times_{\varphi_1} H \cong \mathbb{Z}_3 \times_{\varphi_1} \mathbb{Z}_4 \cong T$

وأخيراً إذا كانت $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ فإننا نحصل على ثلاثة تشاكلات غير تافهة

$$\varphi_i : H \rightarrow \text{Aut}(K)$$

$$\varphi_3(a) = \lambda, \varphi_3(b) = e, \varphi_2(a) = e, \varphi_2(b) = \lambda, \varphi_1(a) = \varphi_1(b) = \lambda$$

ومن السهل أن نرى أن $G = K \rtimes_{\varphi_i} H$ في كل من الحالات الثلاثة هي $D_6 \cong \Delta$

تمارين (٤، ٥)

(١) إذا كانت $Q_8 = H = \langle a, b, c \mid ab = c, bc = a, ca = b \rangle$ وإذا كان $f \in \text{Aut}(H)$ هو

التماثل $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ وإذا كان $\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل

المعرف بواسطة f فأثبت أن $H \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3 \cong \text{SL}(2, 3)$.

(٢) إذا كان $m, n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(m, n) = 1$ فأثبت أن

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}_{mn}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z}_m) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z}_n)$$

(٣) أثبت أن $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_6) = S_3 \times Q_8 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$ حيث φ هو التشاكل المعرف بالتمرين (١).

(٤) لتكن H زمرة و $K = \text{Aut}(H)$. إذا كان $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ هو التشاكل المحايد فإننا

نرمز لشبه الضرب المباشر $H \rtimes_{\varphi} \text{Aut}(H)$ بالرمز $\text{Hol}(H)$. أثبت أن $\text{Hol}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_4$.

(٥) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان و $p < q$.

(٦) أثبت أنه يوجد أربعة تشاكلات مختلفة $\varphi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. ثم استنتج أن زمر شبه الضرب

المباشر التي تحصل عليها من التشاكلات هي : $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, D_8$,

$M = \langle a, b \mid a^2 = b^8 = e, ba = ab^5 \rangle$ و $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = e, ab = ba^3 \rangle$.

(٧) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 28.

(٨) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 20.

(٩) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة $4p$ حيث p عدداً أولياً فردياً.

(١٠) لتكن G زمرة من الرتبة 56 ولتكن $H \in \text{Syl}_7(G)$ و $K \in \text{Syl}_2(G)$.

(أ) أثبت أن $H \triangleleft G$ أو أن $K \triangleleft G$.

(ب) إذا كانت G إبدالية فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}_{56}$ أو أن $G \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أو أن

$$G \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

(ت) إذا كانت $K \triangleleft G$ وكانت $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ فأثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير إبدالية

من الرتبة 56.

(ث) إذا كانت $K \triangleleft G$ وكانت $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ فأثبت أنه يوجد زميرتان غير إبداليتين (باستثناء

التماثل) من الرتبة 56.

(ج) إذا كانت $K \triangleleft G$ وكانت $H = \mathbb{Z}_8$ فأثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير إبدالية من الرتبة 56.

(ح) إذا كانت $K \triangleleft G$ وكانت $H = Q_8$ فأثبت أنه يوجد زميرتان غير إبداليتين (باستثناء التماثل)

من الرتبة 56.

(خ) إذا كانت $K \triangleleft G$ وكانت $H = D_4$ فأثبت أنه يوجد ثلاث زمر غير إبدالية (باستثناء

التماثل) من الرتبة 56.

(د) إذا كانت $H \triangleleft G$ فأثبت أن $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وأثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير

إبدالية في هذه الحالة من الرتبة 56.

(ذ) أثبت أن جميع الزمر التي وجدت من الرتبة 56 غير متماثلة .

الفصل السادس

الزمر الإبدالية

ABELIAN GROUPS

نخصص هذا الفصل لدراسة الزمر الإبدالية. حيث نقوم في البند الأول بتصنيف الزمر الإبدالية المنتهية ونخصص البند الثاني لدراسة الزمر الإبدالية المنتهية التوليد وأما البند الثالث فندرس فيه الزمر الإبدالية القابلة للقسمة. في هذا الفصل جميع الزمر ستكون إبدالية ، ولذا فإنه من المناسب أن نستخدم رمز الجمع + للعملية الثنائية، ونرمز للعنصر المحايد بالرمز 0 ، ولنظير العنصر a بالرمز -a . وسنرمز للضرب المباشر (الداخلي أو الخارجي) بالرمز $G \oplus H$ بدلاً من $G \times H$ ونسميه الجمع المباشر (direct sum).

(٦, ١) الزمر الإبدالية المنتهية

Finite Abelian Groups

لقد قدمنا في البند (٣, ٤) المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية ووعدنا بتقديم برهان لها ، سنفي بهذا الوعد ونقدم البرهان في هذا البند. ونظراً لطول البرهان فإننا نقدمه على مراحل.

مبرهنة (٦, ١)

إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $m \in \mathbb{Z}$ و p عدداً أولياً فإن :

$$G[m] = \{g \in G : mg = 0\} \leq G \quad (١)$$

$$mG = \{mg : g \in G\} \leq G \quad (٢)$$

$$G(p) = \{g \in G : o(g) = p^n, n \geq 0\} \leq G \quad (٣)$$

$$G/G[m] \cong mG \quad (٤)$$

البرهان

جميع الفقرات سهلة البرهان ولذا فإننا نتركها للقارئ ♦

مبرهنة (٦, ٢)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية من الرتبة p^m حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, m) = 1$ فإن

حيث $G = H \oplus K$ و $K = G[m]$ و $H = G(p) = \{x \in G : p^n x = 0\}$ كذلك ، $|H| = p^n$.

البرهان

لإثبات أن $G = H \oplus K$ فإنه يكفي أن نثبت أن $G = H + K$ وأن $H \cap K = \{0\}$. لنفرض أن $x \in G$. بما أن $\gcd(m, p^n) = 1$ فإننا نستطيع إيجاد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = sm + tp^n$. وعليه

$$x = (sm + tp^n)x = smx + tp^n x$$

ولكن $p^n(sm x) = p^n m(sx) = 0$ و $m(tp^n x) = p^n m(tx) = 0$ إذن ، $smx \in H$ ، $tp^n x \in K$ ومنه فإن $G = H + K$.

لنفرض الآن أن $x \in H \cap K$. عندئذ ، $p^n x = 0 = mx$ ، ولذا فإن $o(x)$ يقسم كل من p^n و m . وبما أن $\gcd(p^n, m) = 1$ فإن $o(x) = 1$ إذن ، $x = 0$ وبالتالي فإن $G = H \oplus K$ ولبرهان الفقرة الأخيرة لاحظ أن:

$$p^n m = |G| = |H \oplus K| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |H||K|$$

إذا كان p يقسم $|K|$ فإنه باستخدام مبرهنة كوشي نجد أن K تحتوي على عنصر رتبة p وهذا مستحيل لأن $\gcd(m, p) = 1$ إذن ، p لا يقسم $|K|$. ومن ثم فإن $|H| = p^n$ ♦

نتيجة (٦, ٣)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبته $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة وكانت $G(p_i) = \{x \in G : p_i^{k_i} x = 0\}$ فإن $G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus \dots \oplus G(p_t)$ وإن $|G(p_i)| = p_i^{k_i}$.

البرهان

نحصل على النتيجة باستخدام الإستقراء الرياضي على t وتطبيق المبرهنة (٦, ٢) ♦

مبرهنة (٦, ٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبته p^n حيث p عدداً أولياً وإذا كان $a \in G$ عنصراً رتبته أعظمية فإنه توجد زمرة جزئية K من G حيث $G = \langle a \rangle \oplus K$.

البرهان

باستخدام الإستقراء الرياضي على n . إذا كان $n = 1$ فإن $G = \langle a \rangle \oplus \langle 0 \rangle$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من الرتبة p^k حيث $k < n$. لنفرض أن $a \in G$ عنصراً رتبته أعظمية ولتكن $o(a) = p^m$. إذن ، $p^m x = 0$ لكل $x \in G$. إذا كانت $G = \langle a \rangle$ فنكون قد إنتهينا. إذن ، نفرض أن $G \neq \langle a \rangle$. لنفرض أن b عنصراً رتبته أصغر ما يمكن حيث $b \notin \langle a \rangle$. سنبرهن الآن أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. من الواضح أنه يكفي أن نبرهن أن $o(b) = p$. بما أن $o(pb) = o(p) < o(b)$ فإن $pb \in \langle a \rangle$. إذن ، $pb = sa$ حيث $s \in \mathbb{Z}^+$. الآن : $e = p^m b = p^{m-1}(pb) = p^{m-1}(sa)$ ، إذن ، $o(sa) \leq p^{m-1}$. ولذا فإن sa لا يولد $\langle a \rangle$. ومنه فإن $\gcd(p^m, s) \neq 1$. إذن p يقسم s . ومنه فإن $s = pt$ حيث $t \in \mathbb{Z}^+$. إذن ، $pb = sa = (pt)a$. لنفرض أن $c = (-ta) + b$. بما أن $b \notin \langle a \rangle$ فإن $c \notin \langle a \rangle$. كذلك $pc = (-tpa) + pb = (-sa) + pb = (-pb) + pb = 0$ من ثم فإننا نستنتج من طريقة إختيار b أن $o(b) = p$. أي أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. لدينا الآن $|G/\langle b \rangle| < |G|$. لاحظ أن $o(a + \langle b \rangle) = o(a) = p^m$. لأنه لو كان $o(a + \langle b \rangle) < p^m$ فإن $o(a + \langle b \rangle) = p^{m-1}$ ومنه فإن $\langle b \rangle = p^{m-1}(a + \langle b \rangle) = p^{m-1}a + \langle b \rangle$ ، وهذا مستحيل لأن $o(a) = p^m$. إذن ، $a + \langle b \rangle$ ذو رتبة أعظمية في الزمرة $G/\langle b \rangle$. وباستخدام فرضية الاستقراء توجد زمرة جزئية $K/\langle b \rangle$ من $G/\langle b \rangle$ بحيث $\langle b \rangle \leq K \leq G$ تحقق : $G/\langle b \rangle = \langle a + \langle b \rangle \rangle \oplus K/\langle b \rangle$.

سنبرهن الآن أن $\langle a \rangle \cap K = \{0\}$. لنفرض إذن أن $x \in \langle a \rangle \cap K$. الآن :

$$x \in \langle a \rangle \cap K \Rightarrow x + \langle b \rangle \in \langle a + \langle b \rangle \rangle \cap K/\langle b \rangle = \{\langle b \rangle\}$$

$$\Rightarrow x + \langle b \rangle = \langle b \rangle \Rightarrow x \in \langle b \rangle \Rightarrow x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$$

ومنه فإن ، $\langle a \rangle \cap K = \{0\}$ ، كذلك ، $|\langle a \rangle + K| = |\langle a \rangle||K| = |G|$ ، إذن ، $G = \langle a \rangle + K$ ، ونستنتج أن $G = \langle a \rangle \oplus K$ ◆

نتيجة (٦،٥)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبته p^n حيث p عدداً أولياً فإن G حاصل جمع مباشر لزمر دورية . البرهان

باستخدام الإستقراء الرياضي على n . إذا كان $n = 1$ فالعبارة واضحة . لنفرض أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من النوع p التي رتبها أصغر من p^n . لنفرض أن $a \in G$ ذو رتبة أعظمية . إذن ، باستخدام المبرهنة (٦،٤) ، توجد $K \leq G$ حيث

$G = \langle a \rangle \oplus K$. بما أن $|K| < |G|$ فإننا نستطيع باستخدام فرضية الاستقراء كتابة K كمجموع مباشر لزمر دورية . إذن ، G حاصل جمع مباشر لزمر دورية ♦

مبرهنة (٦,٦)

لتكن G زمرة إبدالية رتبته p^n حيث p عدد أولي . إذا كانت $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_m = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n$ حيث H_i و K_j زمر جزئية دورية غير تافهة وحيث $|H_1| \geq |H_2| \geq \dots \geq |H_m|$ و $|K_1| \geq |K_2| \geq \dots \geq |K_n|$ فإن $m = n$ و $|H_i| = |K_i|$ لكل $1 \leq i \leq n$.

البرهان

يستخدم الاستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G| = p$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من النوع p التي رتبها أصغر من $|G|$. الآن

$$pG = pH_1 \oplus pH_2 \oplus \dots \oplus pH_m = pK_1 \oplus pK_2 \oplus \dots \oplus pK_n$$

حيث m_1 هو أكبر عدد صحيح i يحقق $|H_i| > p$ و n_1 هو أكبر عدد صحيح j يحقق $|K_j| > p$. بما أن $|pG| < |G|$ فإننا نجد باستخدام فرضية الاستقراء أن $m_1 = n_1$ وأن $|pH_i| = |pK_i|$ لكل $1 \leq i \leq n_1$. إذن ، لإنهاء البرهان يجب أن نرهن أن عدد الزمر H_i و K_j من الرتبة p متساو . أي يجب أن نثبت أن $m - m_1 = n - n_1$. الآن ، بما أن

$$|G| = |H_1| |H_2| \dots |H_m| p^{m-m_1} = |K_1| |K_2| \dots |K_n| p^{n-n_1}$$

♦ وأن $|H_i| = |K_i|$ وأن $n_1 = m_1$ فإن $m - m_1 = n - n_1$

لدينا الآن جميع ماحتاجه لبرهان المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية

(the fundamental theorem of finite abelian groups)

مبرهنة (٦,٧) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإن G مجموع مباشر لزمر دورية من النوع p . كما أن طريقة كتابة G كمجموع مباشر وحيدة باستثناء الترتيب.

البرهان

لنفرض أن $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة . لنفرض أن $G_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$. بما أن G إبدالية فإن $G_i \triangleleft G$. ولذا فإنه باستخدام تمرين (١٤) من تمارين (٤,٣) نجد

أن $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$. وبما أن $|G_i| = p_i^{n_i}$ فإنه باستخدام النتيجة (٦,٥) نجد أن G_i حاصل جمع مباشر لزممر دورية من النوع p .

ولبرهان الوحداية، نستخدم الإستقراء الرياضي على k . إذا كان $k = 1$ فإن $|G| = p_1^{n_1}$. ولذا فإننا نحصل على الوحداية باستخدام المبرهنة (٦,٦).

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية المنتهية التي رتبها أصغر من $|G|$. ولنفرض أن:

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_m = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n$$

حيث كل من H_i و K_j زمرة دورية من النوع p . وبإعادة الترتيب إذا استدعى الأمر نستطيع أن نفرض أن $H_1, H_2, \dots, H_r$ و $K_1, K_2, \dots, K_t$ حيث $t \leq n$ و $r \leq m$ هي الزمر الدورية من النوع p_1 وأن $|H_1| \geq |H_2| \geq \dots \geq |H_r|$ و $|K_1| \geq |K_2| \geq \dots \geq |K_t|$.

لنفرض الآن أن:

$$A = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_r$$

$$B = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_t$$

$$C = H_{r+1} \oplus H_{r+2} \oplus \dots \oplus H_m$$

$$D = K_{t+1} \oplus K_{t+2} \oplus \dots \oplus K_n$$

$$\text{إذن، } G = A \oplus C = B \oplus D$$

سنبرهن الآن أن $A = B$ و $C = D$. لنفرض أن $a \in A$. إذن، $a \in G = B \oplus D$. ولذا فإن $a = b + d$ حيث $b \in B$ و $d \in D$. إذا كان $a - b \neq 0$ فإن $o(a - b) = p_1^{t_1}$ ولكن $o(d) \neq p_1^{t_1}$ لهذا مستحيل. إذن، $a - b = 0$. ولذا فإن $a = b \in B$. أي أن $A \subseteq B$. وبالمثل $B \subseteq A$. إذن $A = B$. وبطريقة مماثلة نستطيع أن نثبت أن $C = D$. الآن:

بما أن $A = B$ فإنه باستخدام المبرهنة (٦,٦) نجد أن $r = t$ وأن $H_i \cong K_i$ لكل $1 \leq i \leq r$. وبما أن $C = D$ زمرة إبدالية من الرتبة $p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ فإننا نجد باستخدام الاستقراء الرياضي أن التفريقين $H_{r+1} \oplus H_{r+2} \oplus \dots \oplus H_m$ و $K_{t+1} \oplus K_{t+2} \oplus \dots \oplus K_n$ متساويان بإستثناء الترتيب.

ولذا فإننا نخلص إلى أن تفريقي G متساويان بإستثناء الترتيب

نحصل على النتيجة التالية من المبرهنة (٦,٧) والمبرهنة الأساسية في الحساب:

نتيجة (٦,٨)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه يوجد أعداد صحيحة $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \dots, p_k^{n_k}$ وحيدة (بإستثناء الترتيب)

حيث $p_1, \dots, p_k$ أعداد أولية (ليست بالضرورة مختلفة) وحيث $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة موجبة

♦ $G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ بحيث يكون:

تسمى الأعداد $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \dots, p_k^{n_k}$ القواسم البدائية (elementary divisors) للزمرة G .

مثال (٦، ١)

عين القواسم البدائية للزمرة $G = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{27}$.

الحل

$$G \cong \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{3^3} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{3^3} \oplus \mathbb{Z}_5$$

□ ولذا فإن القواسم البدائية هي: $2, 2^3, 3^3, 5$

لقد سبق وأن أثبتنا في المبرهنة (٣، ٤٦) عكس مبرهنة لاجرانج للزمر الإبدالية المنتهية باستخدام مبرهنة كوشي. نقدم الآن برهاناً آخر كنتيجة للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية.

نتيجة (٦، ٩)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبها n وكان m يقسم n فإن G تحتوي على زمرة جزئية رتبها m .

البرهان

باستخدام النتيجة (٦، ٨)، توجد أعداد صحيحة $p_1^{n_1}, \dots, p_k^{n_k}$ وحيدة حيث $p_1, \dots, p_k$ أعداد أولية

وحيث $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة موجبة بحيث يكون: $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$.

إذن، $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$. بما أن m يقسم n فإن $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ حيث $0 \leq m_i \leq n_i$. وبما

أن $p_i^{m_i}$ يقسم $p_i^{n_i}$ لكل $1 \leq i \leq k$ وأن $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ دورية فإن $\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}}$ تحتوي على زمرة جزئية دورية وحيدة

♦ رتبها $p_i^{m_i}$ تماثل $\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}}$. إذن، $H = \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{m_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{m_k}}$ زمرة جزئية من G رتبها m .

مثال (٦، ٢)

إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9$ فعين زمرة جزئية H من G رتبها 12.

الحل

لاحظ أن $H_1 = \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_9$ رتبها 3. إذن، $H = \{([a], [0], [b]) : [a] \in \mathbb{Z}_4, [b] \in H_1\}$

□ زمرة جزئية من G رتبها 12

(٦, ١) تعريف

لتكن $G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ إذا كانت p^n زمرة إبدالية منتهية رتبته p^n . إذا كانت $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ فإن الأعداد الصحيحة $n_1, n_2, \dots, n_k$ تسمى لامتغيرات (invariants) الزمرة G كما يسمى العديد $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ غط (type) الزمرة G .

(٦, ٣) مثال

لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 1, 1, 1 بينما لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 2, 1 $\square$

(٦, ١٠) مبرهنة

إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية من الرتبة p^n فإن $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان لهما اللامتغيرات نفسها.

البرهان

لنفرض أولاً أن $\psi: G \rightarrow H$ تماثل. ولنفرض أن $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ وأن $H \cong \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{m_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{m_t}}$ حيث $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ و $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t > 0$. الآن $\psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}})$ زمرة جزئية دورية من G رتبته $p_i^{m_i}$. ولذا فإن $G \cong \psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}}) \oplus \dots \oplus \psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_t^{m_t}})$. ولذا فإنه باستخدام المبرهنة (٦, ٦) نجد أن $t = k$ وأن $p_i^{m_i} = |\psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}})| = p_i^{n_i}$ لكل $1 \leq i \leq k$. أي أن لامتغيرات G هي نفسها لامتغيرات H . ولبرهان العكس، لنفرض أن $n_1, n_2, \dots, n_k$ هي لامتغيرات كل من G و H . إذن

◆ $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}} \cong H$

(٦, ٤) مثال

كل من الزمرتين $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ زمرة من الرتبة $2^5 = 32$. لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 4, 1. وأما لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ فهي 3, 1, 1. ولذا فإن الزمرتين غير متماثلتين $\square$

تعريف (٦,٢)

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نعي بتجزئة (partition) n عديد $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ من النوع k من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ حيث $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

نتيجة (٦,١١)

عدد الزمر الإبدالية المنتهية غير المتماثلة من الرتبة p^n يساوي عدد تجزئات n .

البرهان

إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة p^n فإن $G \cong \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_k}}$ حيث $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ تجزئة للعدد n . وبالعكس، إذا كان $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ تجزئة للعدد n فإن $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ولذا فإن $\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_k}}$ زمرة إبدالية رتبته p^n لا متغيراتها $n_1, n_2, \dots, n_k$.

مثال (٦,٥)

جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة $64 = 2^6$.

الحل

تجزئات العدد 6 هي :

$$3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1$$

$$6, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1$$

إذن، الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 2^6 هي :

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$$

$$\square \quad \mathbb{Z}_{64}, \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

مثال (٦,٦)

جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة $1089 = 3^2 \times 11^2$.

الحل

تجزئات العدد 2 هي : $2 = 1 + 1$. إذن ، مجموعات القواسم البدائية هي :

$$(3^2, 11^2) , (3^2, 11, 11) , (3, 3, 11^2) , (3, 3, 11, 11) .$$

ولذا فإن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1089 هي :

$$\square \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{11} , \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{121} , \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{11} , \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{121}$$

(٦، ١، ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

عين جميع الزمر الإبدالية من الرتبة 63 التي تحتوي على عنصر من الرتبة 21

الحل

لنفرض أن G زمرة إبدالية رتبها $63 = 3^2 \times 7$. عندئذ ، $G \cong \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$ أو

$G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_7$. لاحظ أن $[0], [1], [1] \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_7$ رتبته 21 وأن

$$\Delta [3], [1] \in \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7 \text{ رتبته } 21$$

تمرين (٢)

لتكن كل من G أو H زمرة إبدالية منتهية.

(أ) إذا كان $\varphi: G \rightarrow H$ تشاكلاً فأثبت أن $\varphi(G(p)) \subseteq H(p)$ لكل عدد أولي p .

(ب) أثبت أن $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان $G(p) \cong H(p)$ لكل عدد أولي p .

الحل

(أ) لنفرض أن $x \in G(p)$. عندئذ ، $p^k x = 0$ حيث $k \geq 0$ وعليه فإن

$$0 = \varphi(p^k x) = p^k \varphi(x) . \text{ ومنه فإن } \varphi(x) \in H(p) \text{ وبالتالي فإن } \varphi(G(p)) \subseteq H(p) .$$

(ب) لنفرض أولاً أن $\varphi: G \rightarrow H$ تماثل. وليكن $\psi = \varphi|_{G(p)}$ لكل عدد أولي p . أي أن

$$\psi: G(p) \rightarrow H(p) . \text{ من الواضح أن } \psi \text{ تشاكل أحادي. لنفرض الآن أن } y \in H(p) . \text{ عندئذ ،}$$

يوجد $x \in G$ بحيث يكون $\varphi(x) = y$. كذلك $p^k y = 0$ حيث $k \geq 0$. وعليه فإن

$$\varphi(p^k x) = p^k \varphi(x) = p^k y = 0 . \text{ ولذا فإن } p^k x = 0 \text{ (لأن } \varphi \text{ أحادي). إذن ، } x \in G(p) ,$$

وبالتالي فإن ψ تماثل.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $G(p) \cong H(p)$ لكل عدد أولي p . ولنفرض أن $G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus \dots \oplus G(p_k)$ وأن $H = H(p_1) \oplus H(p_2) \oplus \dots \oplus H(p_k)$. عندئذ ، $G(p_i) \cong H(p_i)$ لكل i . لنفرض أن $\varphi_i : G(p_i) \rightarrow H(p_i)$ تماثل لكل i وليكن $\varphi : G \rightarrow H$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \dots + \varphi_k(x_k)$$

عندئذ ، φ تماثل وبالتالي فإن $\Delta \quad G \cong H$

تمارين (٦، ١)

- (١) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتب p^2, p^3, p^4, p^5, p^6 ، و p^7 حيث p عدداً أولياً.
- (٢) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان مختلفان.
- (٣) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2q حيث p و q عددان أوليان مختلفان.
- (٤) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عددان أوليان مختلفان .
- (٥) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^3q^2 حيث p و q عددان أوليان مختلفان .
- (٦) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 360 .
- (٧) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 3528 .
- (٨) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1440 .
- (٩) إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية رتبها n حيث p^2 لا يقسم n لكل عدد أولي p فأثبت أن G زمرة دورية .
- (١٠) بين أيّاً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :
 - (أ) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 21 هو 2 .
 - (ب) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 42 هو 2 .
 - (ج) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبها 105 فإن G دورية .
 - (د) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 5^7 يساوي عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 7^7 .
 - (هـ) كل زمرة إبدالية رتبها 28 تحتوي عنصر رتبته 14 .

(٦,٢) الزمر الإبدالية الحرة

Free Abelian Groups

لقد قدمنا في الفصل الخامس مفهوم الزمرة الحرة . سنخصص هذا البند للزمر الإبدالية الحرة حيث ندرس خواصها الأساسية ونوظفها للحصول على تصنيف الزمر الإبدالية منتهية التوليد .

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة مولدة بالمجموعة S فإننا سبق وأن بينا في المبرهنة (٥,٢) أن G تحقق خاصية الشمول. أي إذا كانت H زمرة إبدالية أخرى وكان $\varphi: S \rightarrow H$ تطبيقاً فإنه يوجد تشاكل وحيد $\varphi: G \rightarrow H$ حيث $\varphi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. إذا كانت $G = \langle S \rangle$ زمرة إبدالية تحقق خاصية الشمول فإننا نقول إن G زمرة حرة إبدالية أساسها S (free abelian group with basis S).

نلفت إنتباه القارئ إلى أن التعريف أعلاه للزمر الإبدالية الحرة يتفق مع التعريف المستخدم لمفهوم النظام الرياضي الحر بصورة عامة. ولحسن الحظ فإنه يوجد وصف آخر للزمر الإبدالية الحرة المنتهية التوليد (أي مولدة بمجموعة منتهية) يساعدنا على فهم ماهية هذه الزمر بصورة أفضل.

تعريف (٦,٣)

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ مجموعة جزئية من G . نقول إن S مستقلة خطياً (linearly independent) إذا تحقق ما يلي : لكل $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{Z}$ إذا كان $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t = 0$ فإن $n_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq t$.

ملحوظات

- (١) سنعتبر المجموعة الخالية على أنها مستقلة خطياً .
- (٢) تكون المجموعة الجزئية غير المنتهية S من الزمرة G مستقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة منتهية من S مستقلة خطياً.
- (٣) لاحظ أن أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة خطياً يجب أن تكون مستقلة خطياً .
- (٤) إذا كانت $G \neq \{0\}$ فإن أي مجموعة جزئية من G تحتوي 0 ليست مستقلة خطياً .
- (٥) من الآن فصاعداً نستخدم الزمر $\mathbb{Z}^{(t)}$ ليدل على حاصل الضرب المباشر $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ الذي عدد عوامله t .

مبرهنة (٦, ١٢)

إذا كانت $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ مجموعة جزئية منتهية من الزمرة الإبدالية G فإن العبارات التالية متكافئة:

(١) G زمرة إبدالية حرة أساسها S .(٢) $G = \langle S \rangle$ و S مستقلة خطياً.(٣) لكل $a \in G$ يوجد أعداد صحيحة وحيدة $n_1, n_2, \dots, n_t$ بحيث يكون:

$$a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t$$

(٤) $G \cong \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_t \rangle$

البرهان

(١) $\Leftrightarrow$ (٢): من الواضح أن $G = \langle S \rangle$. لنفرض الآن أن $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t = 0$.ولنفرض أن $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{(t)}$ لكل $1 \leq i \leq t$. وليكن $\varphi: S \rightarrow \mathbb{Z}^{(t)}$ هو التطبيقالمعرف بالقاعدة $\varphi(x_i) = e_i$. إذن، باستخدام (١) يوجد تشاكل وحيد $\psi: G \rightarrow \mathbb{Z}^{(t)}$ بحيثيكون $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$ لكل $1 \leq i \leq t$. الآن:

$$\begin{aligned} (0, 0, \dots, 0) &= \psi(0) = \psi(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t) \\ &= n_1 \psi(x_1) + n_2 \psi(x_2) + \dots + n_t \psi(x_t) \\ &= n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \dots + n_t \varphi(x_t) \\ &= n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots + n_t e_t \\ &= (n_1, n_2, \dots, n_t) \end{aligned}$$

إذن، $n_1 = n_2 = \dots = n_t = 0$. وبالتالي، فإن S مستقلة خطياً.(٢) $\Leftrightarrow$ (٣): بما أن $G = \langle S \rangle$ فإنه من الواضح أن $a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t$ لكل $a \in G$. ولبرهان الوجدانية نفرض أيضاً أن $a = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_t x_t$. عندئذ:

$$(m_1 - n_1)x_1 + (m_2 - n_2)x_2 + \dots + (m_t - n_t)x_t = 0$$

وبما أن S مستقلة خطياً فإن $m_i - n_i = 0$ (أي $m_i = n_i$) لكل $1 \leq i \leq t$.(٣) $\Leftrightarrow$ (٤): بما أن $a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t$ لكل $a \in G$ فإن $G = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle + \dots + \langle x_t \rangle$. لنفرض الآن أن: $a \in \langle x_i \rangle \cap (\langle x_1 \rangle + \dots + \langle x_{i-1} \rangle + \langle x_{i+1} \rangle + \dots + \langle x_t \rangle)$ ، إذن،

وحيدة فإن $a = n_1 x_1 = n_1 x_1 + \dots + n_{i-1} x_{i-1} + n_{i+1} x_{i+1} + \dots + n_t x_t$. وبما أن طريقة كتابة a وحيدة فإن $n_1 = n_2 = \dots = n_t = 0$. إذن $a = 0$. وبالتالي فإن $G = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_t \rangle$.

(٤) $\Leftarrow$ (٣) : واضح من تعريف الجمع الداخلي المباشر.

(٣) $\Leftarrow$ (١) : لنفرض أن H زمرة إبدالية وأن $\varphi: S \rightarrow H$ تطبيقاً حيث $\varphi(x_i) = y_i$.

لنفرض أن $a \in G$. باستخدام الفقرة (٣) توجد أعداد صحيحة وحيدة $n_1, n_2, \dots, n_t$ حيث $a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t$. ليمكن $\psi: G \rightarrow H$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\psi(a) = n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_t y_t$. من الواضح أن $\psi(x_i) = y_i = \varphi(x_i)$ لكل $1 \leq i \leq t$. كذلك، إذا كان $a = n_1 x_1 + \dots + n_t x_t$ و $b = m_1 x_1 + \dots + m_t x_t \in G$ فإن:

$$\begin{aligned} \psi(a+b) &= \psi[(n_1 + m_1)x_1 + \dots + (n_t + m_t)x_t] \\ &= (n_1 + m_1)y_1 + \dots + (n_t + m_t)y_t \\ &= (n_1 y_1 + \dots + n_t y_t) + (m_1 y_1 + \dots + m_t y_t) \\ &= \psi(a) + \psi(b) \end{aligned}$$

◆ إذن، φ تشاكل، ومن السهل أن نرى أن φ وحيد. إذن، G زمرة إبدالية حرة أساسها S .

تعريف (٦،٤)

تسمى الزمرة الإبدالية G التي تحقق شروط المبرهنة (٦،١٢)، الزمرة الإبدالية الحرة المنتهية التوليد (finitely generated free abelian group).

نتيجة (٦،١٣)

إذا كانت $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ مجموعة جزئية مولدة للزمرة الإبدالية G فإن:

$$G \cong \mathbb{Z}^{(t)} \text{ حرة إذا وفقط إذا كانت } G \cong \mathbb{Z}^{(t)}.$$

البرهان

إذا كانت G حرة فياستخدام المبرهنة (٦،١٢) نجد أن $G \cong \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_t \rangle$.

وبما أن $\langle x_i \rangle$ زمرة دورية غير منتهية فإن $\langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$. إذن، $G \cong \mathbb{Z}^{(t)}$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}^{(t)}$ تماثل. ولنفرض أن $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{(t)}$. بما

أن φ شامل فإنه يوجد $x_i \in G$ حيث $\varphi(x_i) = e_i$. من السهل الآن التحقق من أن

◆ $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ أساساً للزمرة G . وبالتالي فإن G حرة.

ملحوظة

لاحظ الشبه بين تعريف أساس الزمرة الإبدالية الحرة وأساس فضاء المتجهات على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. الفرق الوحيد بين هذين التعريفين هو استبدال المجموعة $\mathbb{R}$ بمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ التي لا تشكل حقلاً ، ولذا فإن تعريف الزمرة الإبدالية الحرة أعم.

كما في فضاء المتجهات ، من الممكن أن يكون للزمرة الإبدالية الحرة أكثر من أساس ، على سبيل المثال ، كل من المجموعتين $\{(1,0), (0,1)\}$ و $\{(-1,0), (0,-1)\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ولكن كما في فضاء المتجهات عدد عناصر جميع الأساسات المختلفة واحداً وهذا هو فحوى المبرهنة التالية .

مبرهنة (٦، ١٤)

إذا كان كل من $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ و $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحرة G فإن $t = r$.

البرهان

باستخدام النتيجة (٦، ١٣) لدينا $G \cong \mathbb{Z}^{(t)}$ و $G \cong \mathbb{Z}^{(r)}$. وبما أن $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ فإن $2G \leq G$. إذن،

$G/2G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(t)}$ وأن $G/2G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(r)}$. ولكن $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$. إذن ،

$$\blacklozenge \quad |G/2G| = 2^t = 2^r \quad \text{وبالتالي فإن } r = t$$

تعريف (٦، ٥)

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد فإن بُعد G ($\text{rank } G$) هو عدد عناصر أي أساس للزمرة G .

لقد بينا في المبرهنة (٥، ٥) أنه يمكن الحصول على أي زمرة H كصورة تشاكلية لزمرة حرة

G . وعلى وجه الخصوص إذا كانت H زمرة إبدالية مولدة بالمجموعة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$

وكانت G زمرة إبدالية حرة أساسها $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ فإننا نستطيع إيجاد تشاكل شامل

$$\varphi: G \rightarrow H \quad \text{بحيث تكون } \varphi(x_i) = a_i.$$

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة أساسها S فإنه يكون من المناسب أحياناً أن نغير هذا الأساس لنحصل على أساس آخر من الأساس S ، وهذا هو ما تزودنا به المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦,١٥)

إذا كان $S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحرة G وكان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $T = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + nx_i, x_{j+1}, \dots, x_r\}$ أساس آخر للزمرة G لكل $i \neq j$.

البرهان

من الواضح ان T تولد G لأن $x_j = -nx_i + (x_j + nx_i)$. لنفرض الآن أن :
 $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_{j-1}x_{j-1} + n_j(x_j + nx_i) + n_{j+1}x_{j+1} + \dots + n_rx_r = 0$ عندئذ ،
 $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + (n_i + n_jn)x_i + \dots + n_jx_j + \dots + n_rx_r = 0$ وبما أن S أساس للزمرة G
 فإن : $n_1 = n_2 = \dots = n_i + n_jn = \dots = n_j = \dots = n_r = 0$
 ولذا فإن $n_i = 0$ وبالتالي فإن T أساس للزمرة G ♦

مثال (٦,٧)

بما أن $S = \{(1,0), (0,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ فإنه باستخدام المبرهنة (٦,١٥) نجد أن $T = \{(1,0), (4,1)\}$ أساس آخر للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ لأن $\square (4,1) = 4(1,0) + (0,1)$

لقد ذكرنا في المبرهنة (٥,٤) أن أي زمرة جزئية من زمرة حرة يجب أن تكون حرة ، ولكننا لم نقدم برهاناً لذلك. سنبرهن هذه الحقيقة الهامة في الحالة الخاصة للزمر الإبدالية الحرة المنتهية التوليد وسنوظفها لمساعدتنا على تصنيف الزمر الإبدالية المنتهية التوليد.

مبرهنة (٦,١٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة بعدها k وإذا كانت H زمرة جزئية غير تافهة من G فإنه يوجد أساس $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ للزمرة G وعدد صحيح r حيث $1 \leq r \leq k$ وأعداد صحيحة موجبة $m_1, m_2, \dots, m_r$ بحيث m_{i-1} يقسم m_i لكل $2 \leq i \leq r$ وبحيث أن $\{m_1x_1, m_2x_2, \dots, m_rx_r\}$ أساس للزمرة الجزئية H .

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على k . إذا كان $k=1$ فإن $G = \langle x_1 \rangle$ زمرة دورية. لذا فإن $H = \langle m_1 x_1 \rangle$ زمرة دورية أيضاً حيث $m_1 \in \mathbb{Z}^+$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية الحرة التي بعدها أصغر من k . ولنفرض أن $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ تحقق: $m \in S$ إذا وفقط إذا وجد أساس $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ للزمرة G بحيث يكون $my_1 + n_2 y_2 + \dots + n_k y_k \in H$ حيث $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. بما أن H زمرة جزئية غير تافهة فإن $S \neq \emptyset$. لذا، باستخدام مبدأ الترتيب الحسن تحتوي S على عنصر أصغري وليكن m_1 . إذن، يوجد أساس $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ للزمرة G حيث $h = m_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_k y_k \in H$ و $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. وإذا كان $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ أساساً آخر للزمرة G يحقق $d_1 z_1 + d_2 z_2 + \dots + d_k z_k \in H$ و $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{Z}$ فإن $m_1 \leq d_1$. الآن، باستخدام خوارزمية القسمة يوجد $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ حيث: $n_1 = q_1 m_1 + r_1$ ، $0 \leq r_1 < m_1$ لكل $2 \leq i \leq k$. إذن، $h = m_1(y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_k y_k) + r_2 y_2 + \dots + r_k y_k \in H$.

ولكن باستخدام المبرهنة (٦، ١٥)، نجد أن: $\{y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_k y_k, y_2, \dots, y_k\}$ أساس للزمرة G . وباستخدام أصغرية m_1 نجد أن $r_i = 0$ لكل $2 \leq i \leq k$. إذن، $h = m_1 x_1 \in H$. من الواضح أن $K = \langle y_2, y_3, \dots, y_k \rangle$ زمرة إبدالية حرة بعدها $k-1$ وأن $G = \langle x_1 \rangle \oplus K$.

سنبرهن الآن أن $H = \langle m_1 x_1 \rangle \oplus (H \cap K)$. ولهذا الغرض، نفرض أن $a \in H$. إذن، يوجد $1 \leq i \leq k$ بحيث يكون $a = d_1 x_1 + d_2 y_2 + \dots + d_k y_k$ ، $d_i \in \mathbb{Z}$. وباستخدام خوارزمية القسمة مرة أخرى نستطيع إيجاد $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ حيث:

$a - q_1 m_1 x_1 = r_1 x_1 + d_2 y_2 + \dots + d_k y_k \in H$ ، إذن، $0 \leq r_1 < m_1$ ، $d_i = q_i m_1 + r_i$ ، $2 \leq i \leq k$. ولذا فإن $r_1 = 0$ ، $d_2 y_2 + \dots + d_k y_k \in H$.

أن m_1 أصغري فإن $r_1 = 0$ ، $d_2 y_2 + \dots + d_k y_k \in H$. ولذا فإن $a = q_1(m_1 x_1) + d_2 y_2 + \dots + d_k y_k \in \langle m_1 x_1 \rangle + (H \cap K)$. نخلص إلى أن $H = \langle m_1 x_1 \rangle \oplus (H \cap K)$. الآن، إذا كان $H \cap K = \{0\}$ فإن $H = \langle m_1 x_1 \rangle$ ونكون قد أنهينا. لنفرض إذن، أن $H \cap K \neq \{0\}$. بما أن $H \cap K \leq K$ وأن K زمرة حرة بعدها $k-1$ فإننا نجد باستخدام فرضية الاستقراء أساساً $\{x_2, x_3, \dots, x_k\}$ للزمرة K وأعداد صحيحة موجبة $m_2, \dots, m_k$ بحيث يكون $\{m_2 x_2, \dots, m_k x_k\}$ أساساً للزمرة $H \cap K$ وحيث m_{i-1} يقسم m_i لكل $3 \leq i \leq k$. من الواضح الآن أن $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ أساساً للزمرة G وأن

$\{m_1x_1, m_2x_2, \dots, m_rx_r\}$ أساساً للزمرة الجزئية H . ولإكمال البرهان يجب أن نثبت أن m_1 يقسم m_2 . ولهذا الغرض، نستعين بخوارزمية القسمة مرة ثالثة لإيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث :

$$0 \leq r < m_1, \quad m_2 = qm_1 + r$$

باستخدام المبرهنة (٦, ١٥) نجد أن :

$\{x_2, x_1 + qx_2, x_3, \dots, x_k\}$ أساس للزمرة G وأن :

$$rx_2 + m_1(x_1 + qx_2) = m_1x_1 + m_2x_2 + 0m_3x_3 + \dots + 0m_kx_k \in H$$

وبما أن m_1 أصغري فإن $r = 0$. إذن m_1 يقسم m_2 وبهذا نكون قد أتممنا البرهان ◆

بعد هذا الجهد الذي بذلناه لبرهان المبرهنة (٦, ١٦) نكون قد تسلحنا بالمعلومات اللازمة

لبرهان المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التوليد

(the fundamental theorem of finitely generated abelian groups)

مبرهنة (٦, ١٧) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهاية التوليد]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهاية التوليد ومولدة بمجموعة عدد عناصرها k فإن :

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$$

حيث (إن وجدت) $m_1 > 1$ و m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \leq i < r-1$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٥, ٥)، توجد زمرة إبدالية حرة F بعدها k وتشاكل شامل $\varphi: F \rightarrow G$. إذن،

باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل، نجد أن $F/\text{Ker}\varphi \cong G$.

إذا كان $\text{Ker}\varphi = \{0\}$ فإن $G \cong F \cong \mathbb{Z}^{(k)}$ ونكون قد انتهينا. لنفرض إذن، أن $\text{Ker}\varphi \neq \{0\}$.

بما أن $\text{Ker}\varphi \leq F$ فإنه باستخدام المبرهنة (٦, ١٦)، يوجد أساس $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ للزمرة F

وعدد صحيح r ، $1 \leq r \leq k$ وأعداد صحيحة موجبة $m_1, m_2, \dots, m_r$ بحيث m_{i-1} يقسم m_i

لكل $2 \leq i \leq r$ وبحيث أن $\{m_1x_1, \dots, m_rx_r\}$ أساساً للزمرة الجزئية $\text{Ker}\varphi$. إذن،

$$\text{Ker}\varphi = \langle m_1x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle m_rx_r \rangle \cong m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus m_r\mathbb{Z} \quad \text{و} \quad F = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_k \rangle \cong \mathbb{Z}^{(k)}$$

ولذا فإن : $G \cong F/\text{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$

$$\cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$$

◆ وبهذا يتم البرهان

في الحقيقة ، إن تحليل الزمرة الإبدالية المنتهية التوليد كحاصل جمع مباشر لزمر دورية هو تحليل وحيد. سنقوم ببرهان وحدانية التحليل على مراحل .

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $T(G) = \{x \in G : o(x) < \infty\}$ من الواضح أن $T(G)$ زمرة جزئية من G . تسمى $T(G)$ زمرة القتل الجزئية من G (**torsion subgroup of G**). كما أن الزمرة G تكون زمرة عديمة القتل (**torsion free**) إذا كانت رتب جميع عناصرها (عدا العنصر المحايد) غير منتهية. أي إذا كانت $T(G) = \{0\}$.

مبرهنة (٦, ١٨)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن :

(١) $G/T(G)$ زمرة إبدالية عديمة القتل .

(٢) إذا كانت G منتهية التوليد فإن $G/T(G)$ منتهية التوليد.

البرهان

(١) لنفرض أن $a + T(G) \in G/T(G)$ ولنفرض أن $o(a + T(G)) = n$. إذن ، $n(a + T(G)) = T(G)$. ولذا فإن $na \in T(G)$. ومنه فإن $m(na) = 0$ حيث $m \in \mathbb{Z}^+$.

إذن ، $a = 0$ ، وبالتالي فإن $a + T(G) = T(G)$. إذن ، $G/T(G)$ عديمة القتل .

(٢) من الواضح أنه إذا كانت $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ فإن :

$$\blacklozenge \quad G/T(G) = \langle a_1 + T(G), \dots, a_k + T(G) \rangle$$

مبرهنة (٦, ١٩)

إذا كانت $G \neq \{0\}$ زمرة إبدالية منتهية التوليد فإن G زمرة عديمة القتل إذا وفقط إذا كانت G زمرة حرة .

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة عديمة القتل . باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد نجد

أن $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$. وبما أن G عديمة القتل فإن $r = 0$ ، إذن ، $G \cong \mathbb{Z}^{(k-r)}$.

وبالتالي فهي زمرة حرة .

ولبرهان العكس ، نفرض أن G زمرة حرة . إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $G \cong \mathbb{Z}^{(k)}$. ولذا فإن رتب جميع عناصر G عدا العنصر المحايد غير منتهية . وبالتالي فإن G عديمة القتل

نتيجة (٦,٢٠)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد وكانت $G/T(G)$ زمرة غير تافهة فإن $G/T(G)$ زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٦,١٨) ، نجد أن $G/T(G)$ زمرة إبدالية منتهية التوليد وعديمة القتل . وباستخدام المبرهنة (٦,١٩) ، نجد أن $G/T(G)$ زمرة حرة

مبرهنة (٦,٢١)

إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية فإن $T(G \oplus H) = T(G) \oplus T(H)$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $x \in T(G \oplus H)$. عندئذ ، $x = g + h$ حيث $g \in G$ و $h \in H$ وأن $o(x) = n < \infty$ ، إذن ، $nx = ng + nh = 0$. ولذا فإن $ng = 0$ و $nh = 0$ وعليه فإن $g \in T(G)$ و $h \in T(H)$. ولذا فإن $x \in T(G) \oplus T(H)$ ومنه فإن $T(G \oplus H) \subseteq T(G) \oplus T(H)$.

وبالعكس ، إذا كان $g + h \in T(G) \oplus T(H)$ فإن $g \in T(G)$ و $h \in T(H)$. إذن ، $o(g) = m < \infty$ و $o(h) = n < \infty$ أي أن $mg = 0$ و $nh = 0$. ولذا فإن

◆ $T(G) \oplus T(H) \subseteq T(G \oplus H)$. وبالتالي فإن

ملحوظة

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد بحيث $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$ حيث $m_1 > 1$ ، m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \leq i < k-1$ فإننا نستطيع كتابة G على الصورة : $G \cong \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$. ولذا فإنه من الممكن اعتبار أن $m_k > 1$ وأن m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \leq i < k-1$.

(٦, ٢٢) مبرهنة

لنفرض أن G زمرة إبدالية غير تافهة منتهية التوليد . ولنفرض أن :

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(r)} \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_q} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$$

حيث $m_k > 1$ و m_{i+1} يقسم m_i لكل $1 \leq i < k-1$ و $n_q > 1$ و n_{j+1} يقسم n_j لكل $1 \leq j < q-1$. عندئذ :

$$m_i = n_i \text{ لكل } 1 \leq i \leq k \text{ و } r = s, k = q$$

البرهان

لنفرض أن $G_1 = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(r)}$ وأن $G_2 = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_q} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$. باستخدام المبرهنة (٦, ٢١) ، نجد أن $T(G_1) = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ وأن $T(G_2) = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_q}$.

لنفرض أن $x \in T(G_1)$. إذن يوجد $x_i \in \mathbb{Z}_{m_i}$ حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. وبما أن $| \mathbb{Z}_{m_i} | = m_i$ و m_i يقسم m_1 لكل $1 \leq i \leq k$ وأن $m_i x_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq k$ فإن $m_1 a = 0$ لكل $a \in T(G_1)$. كذلك يوجد $x_1 \in \mathbb{Z}_{m_1}$ حيث $o(x_1) = m_1$. إذن ،

$a = (x_1, 0, 0, \dots, 0) \in T(G_1)$ رتبته m_1 . وبالمثل ، يوجد $b \in T(G_2)$ حيث $o(b) = n_1$. وبما أن $n_1 y = 0$ لكل $y \in T(G_2)$. فإنه يوجد تماثل $\psi : T(G_1) \rightarrow T(G_2)$. الآن $o(\psi(a)) = m_1$ و $n_1 \psi(a) = 0$ ، إذن ، $m_1 \leq n_1$. وبالمثل ، يمكن إثبات أن $n_1 \leq m_1$. إذن ، $m_1 = n_1$. لنفرض الآن أن $m_i = n_i$ ، $m_{i-1} = n_{i-1}$ ، $m_2 = n_2$ ، ... ، ولكن $m_i \neq n_i$ حيث $1 \leq i \leq \min\{k, q\}$. لنفرض أن $m_i < n_i$. ولتكن

$$K = \{m_i x : x \in T(G_1)\} \leq T(G_1) \text{ من الواضح أن } K = \langle m_i a_1 \rangle \oplus \langle m_i a_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle m_i a_k \rangle$$

$$\psi(K) = \{m_i \psi(x) : x \in T(G_1)\} \leq T(G_2) \text{ وإذا فرضنا أن } \mathbb{Z}_{n_i} = \langle b_i \rangle \text{ فإن}$$

$$\psi(K) = \langle m_i b_1 \rangle \oplus \langle m_i b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle m_i b_q \rangle \text{ ، إذن ،}$$

$$|K| = \frac{o(a_1)}{\gcd(o(a_1), m_i)} \dots \frac{o(a_k)}{\gcd(o(a_k), m_i)} = \frac{m_1}{\gcd(m_1, m_i)} \dots \frac{m_k}{\gcd(m_k, m_i)}$$

$$= \frac{m_1}{m_i} \dots \frac{m_{i-1}}{m_i} \frac{m_i}{m_i} \frac{m_{i+1}}{m_{i+1}} \dots \frac{m_k}{m_k} = \frac{m_1 m_2 \dots m_{i-1}}{m_i^{i-1}}$$

وذلك لأن m_{i+1} يقسم m_i لكل $1 \leq i \leq k-1$. وبالمثل ،

$$|\psi(K)| = \frac{m_1 m_2 \dots m_{i-1}}{m_i^{i-1}} \cdot \frac{n_i}{\gcd(n_i, m_i)} \dots \frac{n_q}{\gcd(n_q, m_i)}$$

$$(*) \cdot \frac{n_i}{\gcd(n_i, m_i)} \cdots \frac{m_q}{\gcd(n_q, m_i)} = 1 \text{ فإن } |K| = |\psi(K)| \text{ وبما أن}$$

وبما أن $m_i < n_i$ فإن $\gcd(n_i, m_i) < n_i$ ولذا فإن $\frac{n_i}{\gcd(n_i, m_i)} > 1$ وينتج عن ذلك أن الطرف

الأيسر (*) أكبر من 1 وهذا مستحيل. إذن، $m_i \nmid n_i$ وبالمثل، $n_i \nmid m_i$ ، إذن، $m_i = n_i$. ولذا فإننا نخلص إلى أن $m_1 m_2 \cdots m_k = n_1 n_2 \cdots n_q$. إذا كان $k < q$ فإن $m_i = n_i$ لكل $1 \leq i \leq k$. ومنه فإن $1 = n_{k+1} \cdots n_q$ وهذا مستحيل لأن $n_i > 1$ لكل i . إذن، $k \nlessdot q$ وبالمثل $k \nlessdot q$. ومنه فإن $q = k$.

وأخيراً، لإثبات أن $r = s$ لاحظ أن $G_1 / T(G_1) \cong \mathbb{Z}^{(r)}$ وأن $G_2 / T(G_2) \cong \mathbb{Z}^{(s)}$. وبما

$$\blacklozenge \text{ أن } T(G_1) \cong T(G_2) \text{ فإن } \mathbb{Z}^{(r)} \cong \mathbb{Z}^{(s)} \text{ وبالتالي نخلص إلى أن } r = s$$

نستطيع الآن الحصول على الصيغة التالية للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية كنتيجة

للمبرهنتين (٦، ١٧) و (٦، ٢٢)

نتيجة (٦، ٢٣)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية غير تافهة فإنه يوجد أعداد صحيحة موجبة وحيدة $m_1, m_2, \dots, m_k$

بحيث $m_1 > 1$ و m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \leq i \leq k-1$ وبحيث يكون:

$$\blacklozenge G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$

ملحوظة

لاحظ أن الأعداد m_i ليست بالضرورة أن تكون جميعها مختلفة، وعلى الرغم من ذلك فإن

الأعداد $m_1, m_2, \dots, m_k, r$ تحدد لنا تماماً الزمرة الإبدالية المنتهية التوليد (باستثناء التماثل). يسمى

العدد r الرتبة الحرة للزمرة G ، كما تسمى الأعداد $m_1, m_2, \dots, m_k$ العوامل اللامتغيرة

(invariant factors) للزمرة G .

(٦، ٢، ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_7$ فأثبت أن $T(G)$ زمرة دورية.

الحل

لاحظ أن $G \cong \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{240} \oplus \mathbb{Z}$. ولذا فإن $T(G) \cong \mathbb{Z}_{240}$. وبالتالي فهي

دورية Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد فأثبت أن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون منتهية التوليد.

الحل

بما أن G زمرة إبدالية منتهية التوليد فإنه توجد زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد F بحيث إن $G \cong F/N$ حيث $N \leq F$. الآن، زمر F/N الجزئية يجب أن تكون على الصورة H/N حيث $H \leq F$. وبما أن F زمرة حرة منتهية التوليد فإن H زمرة حرة ومنتهية التوليد. وعليه فإن H/N منتهية التوليد Δ

تمرين (٣)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ فجد $m_1, m_2, \dots, m_k$ حيث $m_i > 1$ ، $m_i | m_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \dots, k-1$ بحيث يكون $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$.

الحل

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{2640} \end{aligned}$$

ولذا فإن $m_1 = 6$ و $m_2 = 2640$ Δ

تمارين (٦، ٢)

- (١) عين أساس للزمرة الحرة $\mathbb{Z}^{(3)}$ بحيث تكون جميع إحداثيات عناصر الأساس ليست أصفاراً.
- (٢) إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمرة إبدالية حرة فأثبت أن $G_1 \oplus G_2$ زمرة إبدالية حرة أيضاً.
- (٣) لتكن G زمرة إبدالية منتهية التوليد غير تافهة. إذا كان $o(a) = p$ لكل $a \in G$ حيث $0 \neq a$ حيث p عدداً أولياً فأثبت أن $|G| = p^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(٤) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية G حيث $T(G) \subseteq H$ فأثبت أن $T(G) = T(H)$.

(٥) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $nG \cap T(G) \subseteq nT(G)$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٦) إذا كانت $H \leq G$ فإننا نقول إن H لا متغيرة تماماً (fully invariant) إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل $\varphi: G \rightarrow G$. إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $T(G)$ لا متغيرة تماماً.

(٧) إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة إبدالية G حيث G/H عديمة القتل فأثبت أن $T(G) \subseteq H$.

(٨) جد $T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ حيث $\mathbb{R}$ هي زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع و $\mathbb{Z}$ زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع.

(٩) إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية فأثبت أن :

$$(G \oplus H)/T(G \oplus H) \cong (G/T(G)) \oplus (H/T(H))$$

(١٠) لتكن H زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية G . إذا كانت كل من H و G/H منتهية التوليد فأثبت أن G منتهية التوليد.

(١١) بين أيّاً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

(أ) $\{(2,1), (3,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(ب) $\{(2,1), (4,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(ت) إذا كانت G زمرة إبدالية حرة بعدها r فإنه من الممكن إيجاد زمرة جزئية فعلية من G بعدها r أيضاً.

(ث) $(\mathbb{Q}, +)$ عديمة القتل.

(ج) $(\mathbb{Q}, +)$ منتهية التوليد.

(ح) $(\mathbb{Q}, +)$ حرة.

(خ) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{15}$ فإن $T(G)$ دورية.

(د) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ زمرة قتل.

(ذ) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{81} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_2$ فإنه يوجد $m_1 | m_2$

حيث $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$.

(ر) الزمرة $G = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_{108} \oplus \mathbb{Z}_{50} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(٦,٣) الزمر الإبدالية القابلة للقسمة

Divisible Abelian Groups

نخصص هذا البند لدراسة أحد أهم أنواع الزمر الإبدالية وهو الزمر الإبدالية القابلة للقسمة. سنقوم بتقديم تصنيف كامل لهذه الزمر.

تعريف (٦,٦)

نقول إن الزمرة الإبدالية G قابلة للقسمة (divisible) إذا كان لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ولكل $y \in G$ يوجد $x \in G$ حيث $nx = y$. أي أن G قابلة للقسمة إذا كان $nG = G$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال (٦,٨)

$\square$ زمرة $\mathbb{Q}$ قابلة للقسمة، لأنه إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ وكان $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ فإن $\frac{a}{nb} \in \mathbb{Q}$ وإن $\frac{a}{nb} = \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)$.

مثال (٦,٩)

$\square$ $\mathbb{Z}$ غير قابلة للقسمة لأن $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ إذا كان $n > 1$.

مبرهنة (٦,٢٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية حيث لكل عدد أولي p وكل $y \in G$ يوجد $x \in G$ بحيث يكون $px = y$ فإن G قابلة للقسمة.

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ و $y \in G$. ولنفرض أن $n = p_1 p_2 \dots p_k$ هو تحليل n إلى عوامل أولية (ليست بالضرورة مختلفة). إذن، يوجد $x_1 \in G$ حيث $p_1 x_1 = y$ ، $x_2 \in G$ حيث $p_2 x_2 = x_1$ ، $\dots$ ، $x_k \in G$ حيث $p_k x_k = x_{k-1}$. ولذا فإن:

◆ $nx_k = p_1 p_2 \dots p_k x_k = p_1 p_2 \dots p_{k-1} x_{k-1} = \dots = p_1 x_1 = y$ وبالتالي فإن G قابلة للقسمة.

ليكن p عدداً أولياً ولتكن $\mathbb{Q}^p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \right\}$ من الواضح أن $\mathbb{Q}^p$ زمرة جزئية

من $\mathbb{Q}$ وتحتوي $\mathbb{Z}$ لأنه إذا كان $\frac{a}{p^n}, \frac{c}{p^m} \in \mathbb{Q}^p$ حيث $n \leq m$ فإن:

$$\frac{a}{p^n} - \frac{c}{p^m} = \frac{ap^{m-n} - c}{p^m} \in \mathbb{Q}^p$$

تعريف (٦,٧)

تسمى الزمرة $\mathbb{Q}^p / \mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Q}^p\}$ زمرة برفر (Prufer group) من النوع p ويرمز لها عادة بالرمز $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

تلعب الزمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ دوراً أساسياً في بناء الزمر الإبدالية القابلة للقسمة حيث تشكل مع زمرة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ اللبنات الأساسية في هذا البناء. ولذا فإننا نلخص الخواص الأساسية للزمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ في المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦,٢٥)

(أ) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p وعلاوة على ذلك ، إذا كان $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $o(x) = p^n$.

(ب) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.

(ج) إذا كانت $H \leq \mathbb{Z}(p^\infty)$ وكان $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$ فإن $\frac{1}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$.

(د) لتكن $H_m = \langle \frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} \rangle$ لكل $m \in \mathbb{Z}^+$. إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ فإنه يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ حيث $H = H_m$. ولذا فإن كل زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ يجب أن تكون منتهية.

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m \quad (هـ)$$

$$\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n] = \{x \in \mathbb{Z}(p^\infty) : p^n x = 0\} = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \rangle \quad (و)$$

(ز) جميع زمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ الجزئية لامتنغيرية تماماً.

(ح) إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)/H \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(ط) إذا كانت $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ حيث $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ وكل زمرة دورية من الرتبة p^i فإن $G \cong \mathbb{Z}(p^{\infty})$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}$. عندئذ، $p^n x = p^n \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(x)$

يقسم p^n . لنفرض أن $o(x) = p^m$. عندئذ، $\mathbb{Z} = p^m \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \right) = \frac{p^m a}{p^n} + \mathbb{Z}$ ،

ولذا فإن $\frac{p^m a}{p^n} \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن p^n يقسم $p^m a$ ومن ثم فإن p^n يقسم p^m لأن $\gcd(p^n, a) = 1$.

إذن، $p^n = p^m = o(x)$.

(ب) لنفرض أن q عدداً أولياً . ولنفرض أن $y = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^{\infty})$. إذا كان $q = p$ فإن:

$$q \left(\frac{a}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} \right) = \frac{pa}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = y$$

أما إذا كان $q \neq p$ وكان $y = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^{\infty})$ فإن $\frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}^p$. وبما أن $\gcd(q, p^n) = 1$ فإنه

يوجد $i, j \in \mathbb{Z}$ حيث $iq + jp^n = 1$. ولذا فإن

$$iq \left(\frac{a}{p^n} \right) + ja = \frac{iqua + jap^n}{p^n} = \frac{a}{p^n} (iq + jp^n) = \frac{a}{p^n}$$

$$iq \left(\frac{ia}{p^n} \right) + ja + \mathbb{Z} = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = y$$

$$iq \left(\frac{ia}{p^n} + \mathbb{Z} \right) = y$$

وباستخدام المبرهنة (٦، ٢٤)، نخلص إلى أن $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ قابلة للقسمة.

(ج) لنفرض أن $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$. بما أن $\gcd(t, p^j) = 1$ فإنه يوجد $c, d \in \mathbb{Z}$ حيث

$$cp^j + dt = 1$$

وبما أن $H \leq \mathbb{Z}(p^{\infty})$ فإن $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$. إذن،

$$\frac{dt}{p^j} + \mathbb{Z} = \frac{1 - cp^j}{p^j} + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^j} - c + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$$

(د) لنفرض أن H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$. إذا كان $\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \in H$ لكل عدد صحيح غير سالب i فإن $H = \mathbb{Z}(p^\infty)$ وهذا مستحيل. إذن، يوجد عدد أصغر $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \notin H$. لنفرض أن $m = n-1$. إذن، $\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} \in H$ ولذا فإن $H_m \subseteq H$.

وليرهان العكس، نفرض أن $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$ ، إذن، باستخدام الفقرة (ج) نجد أن $\frac{1}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$. لاحظ أن $p^n < p^j$. لأنه لو كان $p^n \leq p^j$ فإن $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in H$ وهذا مستحيل. إذن، $p^j < p^n$ ومنه فإن $p^j \leq m$. إذن، $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H_m$ ، $tp^{m-j} \left(\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} \right) = \frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H_m$ ، وعليه فإن، $H \subseteq H_m$. وبالتالي فإن $H = H_m$. وأخيراً بما أن H_m زمرة منتهية فإن H زمرة منتهية.

(هـ) من الواضح أن $H_m \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ وأن $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$. ونستنتج أن $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$.

(و) لنفرض أن $y = \frac{t}{p^k} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$. عندئذ، $p^n y = \mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(y)$ يقسم p^n . وباستخدام الفقرة (أ)، نجد أن p^k يقسم p^n . أي أن $k \leq n$ ، إذن،

$$y = \frac{t}{p^k} + \mathbb{Z} = \frac{tp^{n-k}}{p^n} + \mathbb{Z} \in \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle$$

وبالعكس، إذا كان $y \in \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle$ فإن $y = \frac{t}{p^n} + \mathbb{Z}$ ولذا فإن $p^n y = \mathbb{Z}$.

إذن، $y \in \mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$.

(ز) لنفرض أن $H \leq \mathbb{Z}(P^\infty)$. إذا كانت $H = \mathbb{Z}(P^\infty)$ فإنه من الواضح أن H لامنتهية تماماً. لنفرض إذن أن H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(P^\infty)$. إذن باستخدام الفقرة (د)، نجد

أن $H = H_n = \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$. ولذا فإنه باستخدام الفقرة (و)، نجد

أن $H = \mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$. لنفرض أن $\varphi: \mathbb{Z}(p^\infty) \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$ تشاكل. ولنفرض أن $x \in H$. عندئذ، $p^n x = \mathbb{Z}$ ولذا فإن $p^n \varphi(x) = \varphi(p^n x) = \varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. إذن، $\varphi(x) \in H$. وبالتالي فإن

$$\varphi(H) \subseteq H$$

(ح) باستخدام المبرهنة (٦, ١) نجد أن $\mathbb{Z}(p^\infty)/\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n] \cong p^n\mathbb{Z}(p^\infty)$ ولكن $p^n\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ لأن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة. إذن، $\mathbb{Z}(p^\infty)/H \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(ط) لنفرض أن $C_i = \langle a_i \rangle$. باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع أن نثبت وبسهولة أن $pa_{i+1} = a_i$ لكل $i \in \mathbb{Z}^+$. لنفرض الآن أن $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(ma_i) = \frac{m}{p^i} + \mathbb{Z}$ لكل عدد صحيح m . إذا كان $ma_r, na_s \in G$ حيث $ma_r = na_s$ فإن $\varphi(ma_r) = \frac{m}{p^r} + \mathbb{Z}$ و $\varphi(na_s) = \frac{n}{p^s} + \mathbb{Z}$. إذا فرضنا أن $r \geq s$ فإننا نجد أن $p^{r-s}a_r = a_s$ ، إذن، $ma_r = na_s = np^{r-s}a_r$ أي $(m - np^{r-s})a_r = 0$ ، إذن، $o(a_r) = p^r$ يقسم $m - np^{r-s} = kp^r$ أي أن $m = np^{r-s} + kp^r$. ومنه فإن $\frac{m}{p^r} + \mathbb{Z} = \frac{n}{p^s} + \mathbb{Z}$ ، إذن، $\frac{m}{p^r} = \frac{n}{p^s} + k$ أي $\varphi(ma_r) = \varphi(na_s)$ وبالتالي فإن φ حسن التعريف.

نبرهن الآن أن φ تشاكل. ولهذا الغرض نفرض أن $g, h \in G$. إذن، يوجد $r \in \mathbb{Z}^+$ حيث $g, h \in C_r$. ولذا فإن $g = sa_r$ و $h = ta_r$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$. الآن:

$$\varphi(g+h) = \varphi((s+t)a_r) = \frac{s+t}{p^r} + \mathbb{Z} = \left(\frac{s}{p^r} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{t}{p^r} + \mathbb{Z}\right) = \varphi(g) + \varphi(h)$$

ولذا فإن φ تشاكل. ومن الواضح أن φ شامل. وأخيراً:

$$\text{Ker}\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = \mathbb{Z}\} = \{sa_r : s \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}^+, \frac{s}{p^r} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\}$$

$$= \{sa_r : \frac{s}{p^r} \in \mathbb{Z}\} = \{sa_r : s \text{ يقسم } p^r\} = \{0\}$$

وبالتالي فإن φ أحادي وينتج عن ذلك أن $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ ♦

مبرهنة (٦, ٢٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية قابلة للقسمة وكانت $H \leq G$ فإن G/H قابلة للقسمة. أي أن الصورة التماثلية لزمرة قابلة للقسمة هي زمرة قابلة للقسمة أيضاً.

البرهان

لنفرض أن $g+H \in G/H$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه يوجد $x \in G$ حيث

◆ $nx = g$. إذن ، $n(x+H) = nx + H = g + H$. وبالتالي فإن G/H قابلة للقسمة

مبرهنة (٦, ٢٧)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فإن $G = \sum_{i \in I} G_i$ قابلة للقسمة إذا وفقط إذا كانت G_i قابلة للقسمة لكل $i \in I$.

البرهان

لنفرض أولاً أن G قابلة للقسمة . لاحظ أن $G = G_j \oplus \sum_{i \neq j} G_i$ وأن $G/\sum_{i \neq j} G_i \cong G_j$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه باستخدام المبرهنة (٦, ٢٦) نجد أن $G/\sum_{i \neq j} G_i$ قابلة للقسمة . وبالتالي فإن G_j قابلة للقسمة . ولبرهان العكس، نفرض أن G_i قابلة للقسمة لكل $i \in I$. ولنفرض أن $f \in G$ حيث $S(f) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G_{i_t} قابلة للقسمة فإنه يوجد y_t حيث $ny_t = f(i_t)$ لكل $1 \leq t \leq k$. لنفرض الآن أن:

$$g(i) = \begin{cases} y_t & , i = i_t \\ 0 & i \neq i_t \end{cases}$$

من الواضح أن $g \in G$ وأن $ng = f$. وبالتالي فإن G قابلة للقسمة . ◆

المبرهنة التالية ليست فقط الأداة الأساسية لتصنيف الزمر القابلة للقسمة ولكنها أيضاً مهمة

بحد ذاتها . وبرهانها هو تطبيق نمطي لتمهيدية زورن (Zorn's lemma) والتي تنص على :
إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بحيث يوجد لكل سلسلة من A (مجموعة جزئية من A مرتبة كلياً) حد أعلى فإن A تحتوي على عنصر أعظمي .

مبرهنة (٦, ٢٨)

إذا كانت H زمرة جزئية قابلة للقسمة من الزمرة الإبدالية G فإنه يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = H \oplus K$. أي أن الزمر الجزئية القابلة للقسمة عبارة عن عامل جمع مباشر .

البرهان

لنفرض أن $S = \{L \leq G : L \cap H = \{0\}\}$. من الواضح أن $(S, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . لنفرض

أن $\{L_i : i \in I\}$ سلسلة من S . سنبرهن الآن أن $\bigcup_{i \in I} L_i \in S$. بما أن $L_i \subseteq L_j$ أو $L_j \subseteq L_i$ ،
كل $i, j \in I$ فإنه من الواضح أن $\bigcup_{i \in I} L_i \leq G$. ومن الواضح أيضاً أن $H \cap \bigcup_{i \in I} L_i = \{0\}$ ، لأنه لو
كان $x \in H \cap \bigcup_{i \in I} L_i$ فإنه يوجد $i \in I$ حيث $x \in H \cap L_i$. ولذا فإن $x = 0$. إذن، $\bigcup_{i \in I} L_i \in S$.
حداً أعلى. وباستخدام تمهيدية زورن فإن S تحتوي على عنصر أعظمي وليكن K . وعليه
فإن $H \cap K = \{0\}$. ومنه فإن $H + K = H \oplus K$. وإلغاء البرهان يجب أن تثبت
أن $G = H \oplus K$. ولغرض التناقض نفرض أن $G \neq H \oplus K$. إذن، $G/H \oplus K \neq \{0\}$. لاحظ
أولاً أن $G/H \oplus K$ زمرة فتل، لأنه لو كان $x + H \oplus K \in G/H \oplus K$ ذي رتبة غير منتهية
فإن $x \notin K$. ولذا فإن $\langle K, x \rangle = K_1 < K$. إذا كان $k_1 \in K$ فإن $k_1 = k + nx$ حيث $k \in K$
و $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان $k_1 = k + nx \in H$ فإن $nx \in H + K$. إذن $n = 0$ هو الخيار الوحيد. ولذا
فإن $k_1 = k \in H$. وبما أن $H \cap K = \{0\}$ فإن $k = 0$. إذن $H \cap K_1 = \{0\}$ وهذا يناقض
أعظمية K . وبالتالي فإن $G/H \oplus K$ زمرة فتل. لنفرض الآن أن $x \in G$ وأن $x \notin H \oplus K$. عندئذ،
 $\langle x + H \oplus K \rangle$ زمرة جزئية من $G/H \oplus K$ رتبته منتهية ولتكن m . وعليه فإن $mx \in H \oplus K$.
وأن $rx \notin H \oplus K$ لكل $0 < r < m$. لنفرض أن $mx = h + k$. بما أن H قابلة للقسمه فإنه يوجد
 $h_1 \in H$ حيث $mh_1 = h$. لنفرض أن $x_1 = x - h_1$. لاحظ أن $x_1 \notin K$.
وأن $mx_1 = mx - mh_1 = h + k - h = k \in K$ وإذا وضعنا $K_1 = \langle x_1, K \rangle$ فإننا نجد أن:
 $K_1 = \{rx_1 + k : 0 \leq r \leq m-1, \forall k \in K\}$

سنبرهن الآن أن $H \cap K_1 = \{0\}$. لأنه إذا كان $rx_1 + k \in H \cap K_1$ فإن $rx_1 + k \in H$ وإن
 $x_1 + (H \oplus K) = x + (H \oplus K)$. وبما أن $H \oplus K = rx_1 + (H \oplus K) = r(x_1 + H \oplus K)$
فإن $r = 0$. إذن $k \in H$ ومنه فإن $k = 0$. إذن $H \cap K_1 = \{0\}$. وهذا يناقض أعظمية K . وبالتالي
◆ فإن $G = H \oplus K$

قبل أن نقدم المبرهنة التي تصنف لنا الزمر الإبدالية القابلة للقسمه يلزمنا بعض الحقائق التي نقدمها الآن.

مبرهنة (٦, ٢٩)

إذا كانت G زمرة فتل وكانت P هي مجموعة الأعداد الأولية فإن $G = \sum_{p \in P} G(p)$.

البرهان

لنفرض أن $g \in G$ وأن $o(g) = n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ حيث $p_1, p_2, \dots, p_t$ أعداد أولية جميعها مختلفة. سنبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي على t أن $g = g_1 + g_2 + \dots + g_t$ حيث $g_i \in G(p_i)$. إذا كان $t = 1$ فإن العبارة واضحة. لنفرض أن العبارة صحيحة لجميع عناصر G التي رتبها أقل من n . ولنفرض أن $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{t-1}^{k_{t-1}}$. بما أن $\gcd(m, p_t^{k_t}) = 1$ فإنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ حيث $1 = am + bp_t^{k_t}$. إذن، $g = amg + hp_t^{k_t}g$. الآن، $o(amg) = p_t^{k_t}$. ولذا فإن $amg \in G(p_t)$. وبما أن $o(bp_t^{k_t}g) = m$ فإننا نجد باستخدام الاستقراء الرياضي أن $bp_t^{k_t}g = g_1 + g_2 + \dots + g_{t-1}$ إذن،

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_{t-1} + amg$$

ولإتمام البرهان، نفرض أن $g_1 + g_2 + \dots + g_n = 0$ حيث $g_i \in G(p_i)$. ونبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي على n أن $g_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq n$. من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n = 1$. لنفرض أن العبارة صحيحة عند n . ولنفرض أن $g_1 + g_2 + \dots + g_n + g_{n+1} = 0$ حيث $o(g_{n+1}) = p_{n+1}^{k_{n+1}}$ إذن،

$$p_{n+1}^{k_{n+1}}g_1 + p_{n+1}^{k_{n+1}}g_2 + \dots + p_{n+1}^{k_{n+1}}g_n = 0 \text{ ولذا فإن } p_{n+1}^{k_{n+1}}g_1 + p_{n+1}^{k_{n+1}}g_2 + \dots + p_{n+1}^{k_{n+1}}g_{n+1} = 0$$

وباستخدام فرضية الاستقراء نجد أن $p_{n+1}^{k_{n+1}}g_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq n$. وبما أن $o(g_i) = p_i^{k_i}$ حيث $p_i \neq p_{n+1}$ فإن $g_i = 0$ حيث $p_i \neq p_{n+1}$ $\blacklozenge$

مبرهنة (٦, ٣٠)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن G تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية.

البرهان

نستخدم تمهيدية زورن. لنفرض أن S مستقلة خطياً. $P = \{S \subseteq G : S \text{ مستقلة خطياً}\}$. ولتكن $L = \{S_i : i \in I\}$ سلسلة في P . ولنفرض أن $T = \bigcup_{i \in I} S_i$. من الواضح أن $T \subseteq G$. وسنبرهن الآن أن T مستقلة خطياً.

لنفرض إذن، أن $a_1, a_2, \dots, a_n \in T$ وأن $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ حيث $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n = 0$. بما أن L سلسلة فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ حيث $a_1, a_2, \dots, a_n \in S_k$ حيث S_k مستقلة خطياً فإن $t_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq n$. إذن، T مستقلة خطياً. ومن ثم $T \in P$ حداً

أعلى للسلسلة T . وباستخدام تمهيدية زورن فإن P تحتوي على عنصر أعظمي. أي تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية ◆

مبرهنة (٣, ٣١)

لتكن $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ سلسلة تصاعدية من الزمر الدورية غير المنتهية حيث $A_i = \langle a_i \rangle$ وحيث $(i+1)a_{i+1} = a_i$. إذا كانت $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ فإن $G \cong (\mathbb{Q}, +)$.

البرهان

إذا كانت $Q_i = \langle 1/i! \rangle$ فإنه من الواضح أن $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots$ وأن $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. لنفرض الآن

أن $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Q}$ معرفاً بالقاعدة: $\varphi(ma_i) = \frac{m}{i!}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$.

سنبرهن أولاً أن φ معرفاً تعريفاً حسناً. لنفرض إذن أن $m_1 a_i = m_2 a_j$ ولنفرض أن $i \leq j$.

عندئذ، $a_i = \frac{j!}{i!} a_j$. ولذا فإن $m_1 \frac{j!}{i!} a_j = m_2 a_j$. وعليه فإن $m_2 = m_1 \frac{j!}{i!}$.

أي أن $\frac{m_2}{j!} = \frac{m_1}{i!}$. وبالتالي فإن $\varphi(m_1 a_i) = \varphi(m_2 a_j)$.

سنبرهن الآن أن φ تشاكل. لنفرض إذن إن $g, h \in G$. عندئذ، يوجد i حيث $g, h \in A_i$. ولذا

فإن $g = m_1 a_i$ و $h = m_2 a_i$ ومنه فإن:

$$\varphi(g+h) = (m_1 + m_2) \frac{1}{i!} = \frac{m_1}{i!} + \frac{m_2}{i!} = \varphi(g) + \varphi(h)$$

بما أن $\varphi(A_i) = Q_i = \langle 1/i! \rangle$ فإن $\varphi(G) \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \mathbb{Q}$. ولذا فإن φ شامل.

وأخيراً إذا كانت $g = ma_i \in \text{Ker } \varphi$ فإن:

$$g \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(g) = 0 \Rightarrow \frac{m}{i!} = 0 \Rightarrow m = 0$$

إذن، $g = 0$. وبالتالي فإن φ أحادي ونخلص إلى أن $G \cong \mathbb{Q}$ ◆

مبرهنة (٦, ٣٢)

إذا كانت G زمرة قابلة للقسمة فإن $T(G)$ زمرة قابلة للقسمة أيضاً وأن $G = T(G) \oplus F$ حيث F

زمرة عديمة القتل وقابلة للقسمة.

البرهان

لنفرض أن $y \in T(G)$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه يوجد $x \in G$ حيث $nx = y$. وبما أن $\infty < o(y)$ فإن $\infty < o(x)$. إذن $x \in T(G)$. وبالتالي فإن $T(G)$ قابلة للقسمة. الآن باستخدام المبرهنة (٦, ٢٨)، نستطيع إيجاد زمرة جزئية F من G حيث $G = T(G) \oplus F$. وبما أن $T(G) \cap F = \{0\}$ فإن $T(G) \cong F$. وباستخدام المبرهنة (٦, ١٨)، نجد أن F عديمة القتل. وأخيراً بما أن G قابلة للقسمة فإنه باستخدام المبرهنة (٦, ٢٦)، نجد أن $G/T(G)$ قابلة للقسمة. وبالتالي فإن F قابلة للقسمة. ♦

مبرهنة (٦, ٣٣)

إذا كانت F زمرة إبدالية قابلة للقسمة وعديمة القتل فإن $F = \sum_{s \in S} A_s$ حيث $Q \cong A_s$ لكل $s \in S$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٦, ٣٠)، نجد أن F تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية ولتكن S . لنفرض أن $s \in S$. نعرف الآن استقرائياً العناصر $r_{i,s}$ حيث $i \in \mathbb{Z}^+$ كالآتي: $r_{1,s} = s$ و $r_{i+1,s}$ هو العنصر الذي يحقق $(i+1)r_{i+1,s} = r_{i,s}$ (لاحظ أن $r_{i+1,s}$ نحصل عليه باستخدام قابلية القسمة للزمرة F).

لنفرض الآن أن $B_i = \langle r_{i,s} \rangle$. إذن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$ حيث $(i+1)r_{i+1,s} = r_{i,s}$. ولذا فإنه باستخدام المبرهنة (٦, ٣١) نجد أن $Q \cong A_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. لنفرض أن $G = \sum_{s \in S} A_s$. سنبرهن الآن أن $F = G$. بما أن A_s زمرة قابلة للقسمة فإن G زمرة جزئية من F قابلة للقسمة. إذن، باستخدام المبرهنة (٦, ٢٨)، توجد زمرة جزئية K من F حيث $F = G \oplus K$. إذا كانت $K \neq \{0\}$ فإنه يوجد $k \in K$ ، $k \neq 0$. وبما أن $k \notin S$ فإن $k \in S \cup \{k\}$ مجموعة مستقلة خطياً. وهذا يناقض أعظمية S . إذن، $K = \{0\}$. وبالتالي فإن $F = G = \sum_{s \in S} A_s$. ♦

مبرهنة (٦, ٣٤)

إذا كانت T زمرة إبدالية قابلة للقسمة من النوع p فإن T مجموع مباشر لزممر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

البرهان

لنفرض أن $H = \{x \in T : o(x) \leq p\}$. من الواضح أن $H \leq T$. لنفرض أن $S \subseteq H$ مجموعة مستقلة خطياً أعظمية. وليكن $s \in S$. ولنفرض أن $\{b_{i,s}\}$ هي المتتالية المعرفة كالتالي: $pb_{1,s} = s$ و $pb_{i+1,s} = b_{i,s}$ لكل $i \geq 1$. (لاحظ أننا نحصل على العناصر $b_{i+1,s}$ باستخدام قابلية القسمة للزمرة T). لنفرض الآن أن $B_i = \langle b_{i,s} \rangle$. من الواضح أن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$. باستخدام المبرهنة (٦,٢٥) ، نجد أن $\mathbb{Z}(P^\infty) \cong A_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. لنفرض أن $G = \sum_{s \in S} A_s$. بما أن A_s قابلة للقسمة فإن G زمرة جزئية من T قابلة للقسمة. إذن، باستخدام المبرهنة (٦,٢٨) توجد زمرة جزئية K من T بحيث يكون $T = G \oplus K$. إذا كانت $K \neq \{0\}$ فإنه يوجد $k \in K$ حيث $o(k) = p$. ولذا فإن $S \cup \{k\}$ مجموعة مستقلة خطياً. وهذا يناقض أعظمية S . إذن، $K = \{0\}$. وبالتالي

◆ $T = G = \sum_{s \in S} A_s$

مبرهنة (٦,٣٥)

إذا كانت T زمرة قتل قابلة للقسمة فإن T مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٢,٢٩) ، نجد أن $T = \sum_{p \in P} T(p)$ حيث P هي مجموعة الأعداد الأولية. وبما أن T قابلة للقسمة فإن $T(p)$ قابلة للقسمة لكل $p \in P$. وباستخدام المبرهنة (٦,٣٤) ، نجد أن $T(p)$ مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$. إذن، T مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$.

◆

لدينا الآن جميع المعلومات اللازمة لتصنيف الزمر الإبدالية القابلة للقسمة.

مبرهنة (٦,٣٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية قابلة للقسمة فإن $G = \sum_{i \in I} A_i$ حيث $A_i \cong \mathbb{Q}$ أو $A_i \cong \mathbb{Z}(P^\infty)$ لكل $i \in I$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٦,٣٢) ، نجد أن $G = T(G) \oplus F$ حيث F زمرة عديدة القتل وقابلة للقسمة.

وباستخدام المبرهنة (٦,٣٣) ، نجد أن F مجموع مباشر لزممر كل منها تماثل Q . وباستخدام المبرهنة (٦,٣٥) ، فإن $T(G)$ مجموع مباشر لزممر تماثل كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$ ♦

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن عوامل الجمع المباشر في المبرهنة (٦,٣٦) ليست وحيدة ولكن الوحيد هو عدد الزمر من كل نوع، والقارئ المهتم بمسألة الوحدات عليه الرجوع [13] .

(٦,٣,١) تمارين محلولة (Solved Exercices)

تمرين (١)

لتكن G زمرة إبدالية . نقول إن G زمرة مختزلة (**reduced group**) إذا كانت الزمرة الجزئية القابلة للقسمة هي فقط الزمرة التافهة $\{0\}$. أثبت أن جميع الزمر الجزئية الفعلية من Q هي زمرة مختزلة .

الحل

لنفرض أن H زمرة جزئية غير مختزلة من Q . سنبرهن أن $H = Q$. بما أن H غير مختزلة فإنه توجد $D \leq H$ ، $D \neq \{0\}$ بحيث أن D قابلة للقسمة . لنفرض أن $\frac{x}{y} \in Q$ ، $y \neq 0$. بما أن $D \neq \{0\}$ فإنه يوجد $\frac{a}{b} \in D$ حيث $a \neq 0$. وعليه فإن $ay \neq 0$. وبما أن D قابلة للقسمة فإنه يوجد $t \in D$ بحيث يكون $(ay)t = \frac{a}{b}$. ومنه فإن $t = (\frac{a}{b})(\frac{1}{ay}) = \frac{1}{by}$. وبما أن $t \in D$ فإن $(xb)t \in D$. ولذا فإن $(xb)(\frac{1}{by}) = \frac{x}{y} \in D$. وبالتالي فإن $Q \subseteq D$. أي أن $Q \subseteq H$. وعليه فإن $Q = H$.

تمرين (٢)

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية نقية من G (**pure subgroup of G**) إذا كان $nH = H \cap nG$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. كما نقول إن الزمرة G

زمرة نقية بسيطة (pure simple group) إذا كانت زمر G الجزئية النقية هي فقط $\{0\}$ و G .
أثبت أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة نقية بسيطة.

الحل

لنفرض أن $\{0\} < H < \mathbb{Z}(p^\infty)$. سنبرهن أن H ليست نقية. إستناداً إلى المبرهنة (٦, ٢٥) يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $H = H_n = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \rangle$. لنفرض لغرض التناقض أن H نقية. عندئذ،
 $p^n \mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ ولكن $p^n \mathbb{Z}(p^\infty) \cap H_n = p^n H_n$. ولذا فإن $H_n = p^n H_n$. وعليه فإنه
يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = p^n (\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z})$. ومنه فإن $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = k + \mathbb{Z}$. أي أن
 $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $\frac{1}{p^n} \in \mathbb{Z}$ وهذا مستحيل لأن $n \neq 0$ ونخلص إلى أن H ليست زمرة
جزئية نقية Δ

تمارين (٦, ٣)

- (١) إذا كانت $G = \sum_{i \in I} G_i$ حيث G_i زمرة من النوع p فأثبت أن زمرة من النوع p .
- (٢) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر عديمة القتل فأثبت أن كلاً من $\sum_{i \in I} G_i$ و $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة عديمة القتل.
- (٣) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن $T\left(\sum_{i \in I} G_i\right) = \sum_{i \in I} T(G_i)$.
- (٤) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن :
 $\sum_{i \in I} G_i / \sum_{i \in I} T(G_i) \cong \sum_{i \in I} G_i / T(G_i)$
- (٥) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية وكان $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت
أن $n \sum_{i \in I} G_i = \sum_{i \in I} n G_i$
- (٦) إذا كانت P مجموعة الأعداد الأولية فأثبت أن $\prod_{p \in P} G(p) / \sum_{p \in P} G(p)$ زمرة قابلة للقسمة.
- (٧) إذا كانت $S \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ مستقلة خطياً فأثبت أن $|S| = 1$.

- (٨) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فأثبت أن G تحتوي على زمرة إبدالية جزئية أعظمية.
- (٩) أثبت أن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \sum_{p \in P} \mathbb{Z}(p^\infty)$ حيث P هي مجموعة الأعداد الأولية. ثم استنتج أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.
- (١٠) إذا كانت G زمرة من النوع p حيث p عدداً أولياً فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ إذا وفقط إذا كانت G تحقق الشرطين التاليين:
- (أ) جميع الزمر الجزئية الفعلية من G زمر دورية.
- (ب) لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ توجد زمر جزئية دورية من G رتبها p^n .
- (١١) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ تحتوي على جميع جذور الوحدة من النوع n فأثبت أن $H \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- (١٢) إذا كانت G زمرة إبدالية حرة فأثبت أن G تماثل زمرة إبدالية قابلة للقسمة.
- (١٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن G تماثل زمرة جزئية من زمرة إبدالية قابلة للقسمة.
- (١٤) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث G عامل جمع مباشر لكل زمرة $G \subseteq H$ فأثبت أن G قابلة للقسمة.
- (١٥) أثبت أن الزمرة $\mathbb{Q}$ تحتوي على زمرة جزئية فعلية H حيث H ليست زمرة إبدالية حرة.
- (١٦) إذا كانت G زمرة عديمة القتل حيث كل زمرة جزئية فعلية من G هي زمرة إبدالية حرة فأثبت أن G زمرة إبدالية حرة.
- (١٧) أثبت أن كل من الزمر الإبدالية التالية مختزلة:
- (أ) $\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(a, b) = 1 \right\}$ حيث p عدداً أولياً.
- (ب) $\mathbb{Q}^p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \right\}$ حيث p عدداً أولياً.
- (١٨) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $\{H_i \leq G : H_i \text{ قابلة للقسمة}\}$ $S = \langle H_i \rangle$ فأثبت أن $H = \langle S \rangle$ زمرة جزئية من G قابلة للقسمة.
- (١٩) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $G = H \oplus K$ وحيث H قابلة للقسمة و K مختزلة.
- (٢٠) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث $G = H \oplus K$ وكانت $H < D < G$ فأثبت أن $D = H \oplus (K \cap D)$.

(٢١) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث $G = H \oplus K$ ، H قابلة للقسمة، K مختزلة فأثبت أن H زمرة جزئية أعظمية قابلة للقسمة من G .

(٢٢) إذا كانت $G = H \oplus K$ حيث H قابلة للقسمة و K مختزلة فأثبت أن H وحيدة.

(٢٣) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية المختزلة فأثبت أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة مختزلة.

(٢٤) إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية قابلة للقسمة وكان $G \oplus G \cong H \oplus H$ فأثبت أن $G \cong H$.

(٢٥) إذا كانت كل من G و H و K زمرة إبدالية قابلة للقسمة حيث $G \oplus H \cong G \oplus K$ فأثبت أن $H \cong K$.

(٢٦) نقول إن الزمر الإبدالية D زمرة تباينية (**injective group**) إذا كان لكل تشاكل أحادي $\alpha : A \rightarrow B$ و كل تشاكل $\varphi : A \rightarrow D$ يوجد تشاكل $\psi : B \rightarrow D$ حيث $\psi \circ \alpha = \varphi$. إذا كانت D زمرة إبدالية فأثبت أن العبارات التالية متكافئة:

(أ) D قابلة للقسمة.

(ب) D زمرة تباينية.

(ج) لكل زمرة إبدالية $D \subseteq G$ يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = D \oplus K$.
[إرشاد: استخدم تمهيدية زورن والتمرينين ١٣ و ١٤.]

(٢٧) أثبت أن جميع الزمر الجزئية من $\mathbb{Q}$ هي زمر نقية بسيطة.

(٢٨) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $T(G)$ زمرة جزئية نقية من G .

(٢٩) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن أي عامل جمع مباشر من G زمرة جزئية نقية من G .

(٣٠) إذا كانت G زمرة إبدالية و H زمرة جزئية من G حيث G/H عديمة القتل فأثبت أن H نقية من G .

(٣١) إذا كانت G زمرة إبدالية عديمة القتل وكانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية النقية من G فأثبت أن $\bigcap_{i \in I} H_i$ زمرة جزئية نقية من G .

(٣٢) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $H \leq K \leq G$ حيث H نقية من K و K نقية من G فأثبت أن H نقية من G .

(٣٣) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $H \leq K \leq G$ وكانت K نقية من G فأثبت أن K/H نقية من G/H .

- (٣٤) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $H \leq K \leq G$ وكانت H نقية من G و K/H نقية من G/H فأثبت أن K نقية من G .
- (٣٥) أثبت أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ غير قابلة للاختزال جزئياً.

الفصل السابع

الزمر القابلة للحل والزمر المتلاشية SOLVABLE AND NILPOTANT GROUPS

(٧, ١) سلاسل الزمر

Series of Groups

لتكن G زمرة منتهية. إذا كانت G ليست بسيطة فإننا نستطيع إيجاد زمرة جزئية ناظرية فعلية غير تافهة H_{n-1} من G . وإذا كانت H_{n-1} ليست بسيطة فإننا نستطيع أن نجد زمرة جزئية ناظرية فعلية غير تافهة H_{n-2} من H_{n-1} . وبالإستمرار على هذا المنوال نحصل على سلسلة $\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$. إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٧, ١)

لتكن G زمرة ولتكن $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة من زمر G الجزئية. (أ) نقول إن السلسلة ناظرية جزئياً (subnormal series) إذا كانت $H_{i-1} \triangleleft H_i$ لكل $1 \leq i \leq n$.

(ب) إذا كانت $H \leq G$ فإننا نقول إن الزمرة H زمرة ناظرية جزئياً (subnormal group) من الزمرة G إذا كانت H حداً في سلسلة ناظرية جزئياً للزمرة G .

(ج) نقول إن السلسلة ناظرية (normal series) إذا كانت $H_i \triangleleft G$ لكل $0 \leq i \leq n-1$.

(د) نقول إن السلسلة الناظرية جزئياً هي سلسلة تركيبية (composition series) إذا كانت

H_i/H_{i-1} زمرة بسيطة غير تافهة (أي أن H_{i-1} زمرة جزئية أعظمية من H_i) لكل $1 \leq i \leq n$.

(هـ) نقول إن السلسلة الناظرية هي سلسلة رئيسية (principal series) إذا كانت H_i/H_{i-1}

زمرة بسيطة غير تافهة لكل $1 \leq i \leq n$.

(و) تسمى زمر خارج القسمة H_i/H_{i-1} عوامل (factors) السلسلة.

(ي) طول السلسلة هو عدد العوامل غير التافهة.

ملحوظات

- (١) في الزمر الإبدالية تتطابق السلاسل الناعمية جزئياً والناعمية.
- (٢) من الواضح أن السلسلة الناعمية هي سلسلة ناعمية جزئياً (ولذا فإن الزمرة الجزئية الناعمية هي زمرة جزئية ناعمية جزئياً) ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً، فمثلاً، السلسلة $H_2 = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ حيث $\{e\} \leq H_1 \leq H_2 \leq A_4$ و $H_1 = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$ زمرة جزئية من A_4 ولكنها ليست ناعمية من A_4 .
- (٣) من الواضح أن السلسلة الرئيسة يجب أن تكون تركيبيّة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.
- (٤) من الواضح أن $\{e\} \subseteq G$ سلسلة ناعمية لأي زمرة G .
- (٥) من الواضح أنه يوجد سلسلة تركيبيّة لكل زمرة منتهية G . أما إذا كانت G زمرة غير منتهية فإنه ليس من الضروري أن يكون لها سلسلة تركيبيّة. فمثلاً، كل زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ زمرة دورية وكل زمرة جزئية دورية $\langle k \rangle$ من $\mathbb{Z}$ تحتوي على عدد غير منته من الزمر الجزئية، بالتحديد:

$$\langle k \rangle > \langle 3k \rangle > \langle 6k \rangle > \langle 12k \rangle > \dots$$

- (٦) إذا كانت $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نستطيع دائماً أن نجد زمرة G وسلسلة تركيبيّة للزمرة G طولها n . على سبيل المثال، إذا كان p عدداً أولياً وكانت $H_i \cong \mathbb{Z}_p$ لكل $1 \leq i \leq n$ فإن:
- $$\{e\} < H_1 < H_1 \times H_2 < H_1 \times H_2 \times H_3 < \dots < G$$
- سلسلة تركيبيّة للزمرة $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ طولها n .
- (٧) إذا كانت G زمرة فإنه من الممكن أن يكون للزمرة G أكثر من سلسلة تركيبيّة واحدة من الطول نفسه. فمثلاً، كل من السلاسل التالية تركيبيّة طولها 3 للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\langle [0] \rangle \leq \langle [6] \rangle \leq \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$$

$$\langle [0] \rangle \leq \langle [4] \rangle \leq \langle [2] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$$

$$\langle [0] \rangle \leq \langle [6] \rangle \leq \langle [2] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$$

تعريف (٧، ٢)

- (1) لنفرض أن G زمرة وأن: $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة ناعمية جزئياً للزمرة G .

(أ) نقول إن السلسلة: $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{i-1} \leq H_i \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$

- سلسلة أدق من السلسلة (1) بخطوة واحدة (**one-step refinement**) إذا كان $H_{i-1} < H < H_i$.
 (ب) نقول إن سلسلة ناظرية جزئياً: $\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$ هي سلسلة أدق (**refinement**) من السلسلة (1) إذا حصلنا عليها من السلسلة (1) بعدد من الخطوات. أي أن: $\{H_0, H_1, \dots, H_n\} \subseteq \{K_0, K_1, \dots, K_m\}$.
 (ج) إذا كانت: $\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$ (2) سلسلة أدق من السلسلة (1) فإننا نقول إنها أدق فعلياً (**proper refinement**) إذا وجدت زمرة جزئية K_j في السلسلة (2) حيث $K_j \neq H_i$ لكل $0 \leq i \leq n$. أي أن:
 $\{H_0, H_1, \dots, H_n\} \subset \{K_0, K_1, \dots, K_m\}$.

مثال (٧, ١)

السلسلة $\{0\} \leq 24\mathbb{Z} \leq 12\mathbb{Z} \leq 6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ أدق بخطوة واحدة من السلسلة $\{0\} \leq 24\mathbb{Z} \leq 12\mathbb{Z} \leq 6\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. أما السلسلة $\{0\} \leq 48\mathbb{Z} \leq 24\mathbb{Z} \leq 12\mathbb{Z} \leq 6\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ فهي أدق بخطوتين $\square$

مثال (٧, ٢)

السلسلة $\langle [0] \rangle \leq \langle [6] \rangle \leq \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ أدق من السلسلة $\langle [0] \rangle \leq \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ ولكن السلسلة $\langle [0] \rangle \leq \langle [2] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ فهي ليست أدق $\square$

مبرهنة (٧, ١)

- (3) إذا كانت $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ سلسلة ناظرية جزئياً فإنها تركيبية إذا وفقط إذا لم توجد سلسلة أدق منها فعلياً.

البرهان

لنفرض أولاً أن السلسلة (3) تركيبية. ولنفرض أن:

$$(4) \quad \{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{i-1} \leq H \leq H_i \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$$

سلسلة أدق من (3) بخطوة واحدة. بما أن (3) تركيبية فإن H_{i-1} زمرة جزئية ناظرية أعظمية من H_i . إذن، $H_{i-1} = H$ أو $H_i = H$. وبالتالي فإن السلسلة (4) ليست أدق فعلياً من السلسلة (3). ولبرهان العكس، لنفرض أنه لا توجد سلسلة أدق فعلياً من السلسلة (3). ولنفرض لغرض التناقض أن

(3) ليست تركيبية. عندئذ ، توجد زمرة جزئية من H_{i-1} بحيث تكون H_{i-1} ليست أعظمية من H_i . إذن توجد H حيث $H \neq H_i$ و $H \neq H_{i-1}$. ولذا فإنه توجد سلسلة أدق فعلياً من (3) وهذا تناقض. إذن، السلسلة (3) تركيبية ◆

تعريف (٧, ٣)

نقول إن السلسلتين الناظمتين جزئياً:

$$(5) \quad \{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$$

$$(6) \quad \{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$$

متكافئتان (equivalent) إذا كان $m = n$ ويوجد تقابل بين عوامل (5) غير التافهة وعوامل (6) غير التافهة بحيث تكون العوامل المتقابلة متماثلة.

مثال (٧, ٣)

السلسلتان $\langle [0] \rangle \leq \langle [6] \rangle \leq \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_2$ و $\langle [0] \rangle \leq \langle [4] \rangle \leq \langle [2] \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ متكافئتان لأن طول كل منهما 3 وأن عوامل السلسلة الأولى هي :

$$\mathbb{Z}_{12} / \langle [3] \rangle \cong \mathbb{Z}_3, \langle [3] \rangle / \langle [6] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \langle [6] \rangle / \langle [0] \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

وعوامل السلسلة الثانية هي :

$$\mathbb{Z}_{12} / \langle [2] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \langle [2] \rangle / \langle [4] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \langle [4] \rangle / \langle [0] \rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

ولذا فإنه يوجد تقابل بين العوامل والعوامل المتقابلة متماثلة □

المبرهنة التالية تعرف بتمهيدية زازنهاوس (Zassenhaus lemma) وتعرف أحياناً

بتمهيدية الفراشة (butterfly lemma) لأن الشكل المصاحب للتمهيدية يشبه الفراشة.

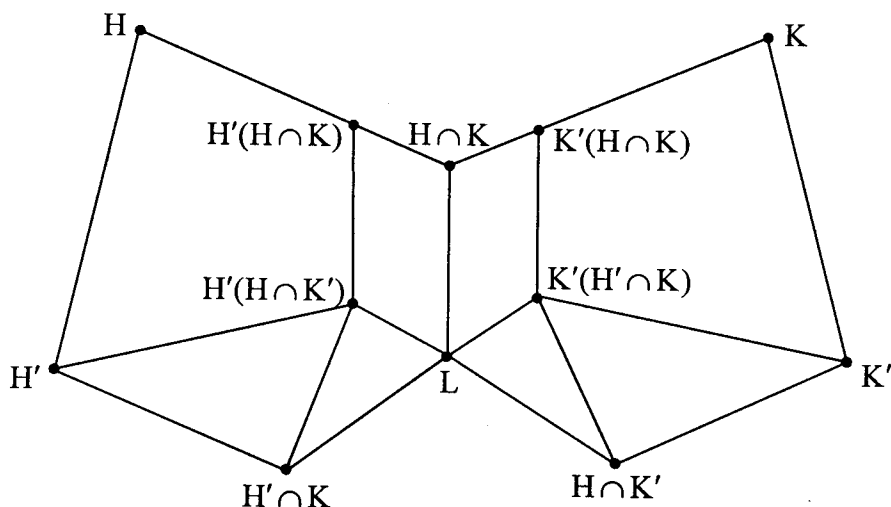
مبرهنة (٧, ٢) [تمهيدية زازنهاوس]

إذا كانت كل من H, H', K, K' زمرة جزئية من زمرة G حيث $H' \triangleleft H$ و $K' \triangleleft K$ فإن :

$$(أ) \quad H'(H \cap K') \triangleleft H'(H \cap K)$$

$$(ب) \quad K'(H' \cap K) \triangleleft K'(H' \cap K)$$

$$(ج) \quad H'(H \cap K) / H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K) / K'(H' \cap K)$$



البرهان

(أ) إذا كان $a \in H \cap K'$ و $b \in H \cap K$ فإن $a \in K'$ و $b \in K$ ، وبما أن $K' \triangleleft K$ فإن $bab^{-1} \in K'$ أيضاً $a, b \in H$ ولذا فإن $bab^{-1} \in H$ إذن $bab^{-1} \in H \cap K'$ ، ولذا فإن $H \cap K' \triangleleft H \cap K$ وبالتالي فإن $H'(H \cap K') \triangleleft H'(H \cap K)$.

(ب) مماثل لبرهان الفقرة (أ).

(ج) لنفرض أن $L = (H \cap K')(H' \cap K)$ ، بما أن كل من $H' \cap K$ و $H \cap K'$ زمرة جزئية ناظمية من $H \cap K$ فإن $L \triangleleft H \cap K$ ، ليكن $\varphi: H'(H \cap K) \rightarrow (H \cap K)/L$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(h'b) = bL$ لكل $h' \in H$ وكل $b \in H \cap K$.

سنبرهن الآن أن φ حسن التعريف. ولهذا الغرض نفرض أن $h_1b_1 = h_2b_2$ حيث $h_1, h_2 \in H'$ و $b_1, b_2 \in H \cap K$ عندئذ :

$$h_2^{-1}h_1 = b_2b_1^{-1} \in H' \cap (H \cap K) = H' \cap K \subseteq L$$

ولذا فإن $b_1L = b_2L$ أي أن $\varphi(h_1b_1) = \varphi(h_2b_2)$.

ولإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $h_1b_1, h_2b_2 \in H'(H \cap K)$ ، بما أن $H' \triangleleft H$ فإنه يوجد $h_3 \in H$ حيث $b_1h_2 = h_3b_1$ ومنه فإن :

$$\varphi(h_1b_1h_2b_2) = \varphi(h_1h_3b_1b_2) = (b_1b_2)L = (b_1L)(b_2L) = \varphi(h_1b_1)\varphi(h_2b_2)$$

من الواضح أن φ شامل. وأخيراً، إذا كان $h \in H'$ و $b \in H \cap K$ فإن :

$$\varphi(hb) = bL = L \Leftrightarrow b \in L \Leftrightarrow hb \in H'L$$

ولكن $\text{Ker}\varphi = H'(H \cap K')$ ، إذن $H'L = H'(H' \cap K)(H \cap K') = H'(H \cap K')$

وباستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $H'(H \cap K)/H'(H \cap K') \cong (H \cap K)/L$

وبطريقة مماثلة تماماً نجد أن : $K'(H \cap K)/K'(H' \cap K) \cong (H \cap K)/L$. وبالتالي فإن :

$$\blacklozenge H'(H \cap K)/H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K)/K'(H' \cap K)$$

مبرهنة (٧، ٣) [شراير (Schreier)]

إذا كانت :

$$(7) \quad \{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$$

$$(8) \quad \{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$$

سلسلتين ناظميتين جزئياً للزمرة G فإن توجد سلسلتان أدق منهما ومتكافئتين.

البرهان

لكل $0 \leq i \leq n-1$ لدينا :

$$H_i = H_i(H_{i+1} \cap K_0) \leq H_i(H_{i+1} \cap K_1) \leq \dots \leq H_i(H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}$$

أي أننا أدخلنا العدد $m-1$ من الزمر (ليست جميعها مختلفة) بين H_i و H_{i+1} لكل

$0 \leq i \leq n-1$. وبوضع $H_{i,j} = H_i(H_{i+1} \cap K_j)$ لكل $0 \leq i \leq n-1$ وكل $0 \leq j \leq m$ فإننا

نحصل على السلسلة :

$$\{e\} = H_{0,0} \leq H_{0,1} \leq H_{0,2} \leq \dots \leq H_{0,m-1} \leq H_{1,0}$$

$$(9) \quad \leq H_{1,1} \leq H_{1,2} \leq \dots \leq H_{1,m-1} \leq H_{2,0}$$

$$\leq H_{2,1} \leq H_{2,2} \leq \dots \leq H_{2,m-1} \leq H_{3,0}$$

$$\leq \dots$$

$$\leq H_{n-1,1} \leq H_{n-1,2} \leq \dots \leq H_{n-1,m-1} \leq H_{n-1,m} = G$$

لاحظ أن السلسلة (9) تحتوي على $mn+1$ زمرة (ليست بالضرورة مختلفة) وأن $H_{i,0} = H_i$.

وباستخدام تمهيدية زانهاواس نجد أن السلسلة (9) ناظمية جزئياً وأنها أدق من السلسلة (7) .

وبصورة مماثلة إذا وضعنا $K_{j,i} = K_j(K_{j+1} \cap H_i)$ لكل $0 \leq j \leq m-1$ وكل $0 \leq i \leq n$ نحصل

على السلسلة الناظمية جزئياً (10) والتي تحتوي على $mn+1$ زمرة (ليست بالضرورة مختلفة) وأن

$K_{j,0} = K_j$ حيث (10) أدق من (8) .

$$(10) \quad \{e\} = K_{0,0} \leq K_{0,1} \leq K_{0,2} \leq \dots \leq K_{0,n-1} \leq K_{1,0}$$

$$\leq K_{1,1} \leq K_{1,2} \leq \dots \leq K_{1,n-1} \leq K_{2,0}$$

$$\begin{aligned} &\leq K_{2,1} \leq K_{2,2} \leq \dots \leq K_{2,n-1} \leq K_{3,0} \\ &\leq \dots \\ &\leq K_{m-1,1} \leq K_{m-1,2} \leq \dots \leq K_{m-1,n-1} \leq K_{m-1,n} = G \end{aligned}$$

الآن ، بإستخدام تمهيدية زازنهاوس نجد أن :

$$\begin{aligned} H_{i,j+1} / H_{i,j} &\cong H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1}) / H_i(H_{i+1} \cap K_j) \\ &\cong K_j(K_{j+1} \cap H_{i+1}) / K_j(K_{j+1} \cap H_i) \\ &\cong K_{j,i+1} / K_{j,i} \end{aligned}$$

ولذا فإن السلسلتين (9) و (10) متكافئتان ♦

المبرهنة التالية تسمى مبرهنة جوردان وهولدر (Jordan-Holder theorem).

مبرهنة (٧، ٤) [جوردن وهولدر]

أي سلسلتين تركيبيتين لزمرة G متكافئتان.

البرهان

لنفرض أن $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ سلسلتين تركيبيتين للزمرة G . بإستخدام مبرهنة شرير نستطيع إيجاد سلسلتان أدق منهما ومتكافئتان. وبما أن السلسلة التركيبية ليس لها سلسلة أدق منها فعلياً فإن أي سلسلة تركيبية تكافئ أي سلسلة أدق منها. ولذا فإن $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ متكافئتان ♦

بما أنه يوجد سلسلة تركيبية لأي زمرة منتهية فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٧، ٥)

أي سلسلتين تركيبيتين لزمرة منتهية G يجب أن تكونا متكافئتين ♦

ملحوظة

استناداً إلى مبرهنة جوردان وهولدر يكون من الواضح أنه إذا كان للزمرة G سلسلة تركيبية طولها n فإن طول أي سلسلة تركيبية أخرى للزمرة G يجب أن يكون n أيضاً وأن عوامل سلسلة تركيبية للزمرة G هي نفس العوامل في أي سلسلة تركيبية أخرى. ولذا فإننا نسمي زمر خارج القسمة لأي سلسلة تركيبية العوامل التركيبية (composition factors). وبالتالي فإن أي زمرة تحدد لنا تماماً عواملها التركيبية ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٧, ٤)

العوامل التركيبية لكل من الزمرتين S_3 و $\mathbb{Z}_6$ هي $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ لأن $\{e\} \leq \mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ سلسلة تركيبية للزمرة $\mathbb{Z}_6$ وأن $\{e\} \leq \mathbb{Z}_3 \leq S_3$ سلسلة تركيبية للزمرة S_3 ولكن $\mathbb{Z}_6 \not\cong S_3$ □

(Solved Exercises) تمارين محلولة (٧, ١, ١)

تمرين (١)

لتكن $\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_n = G$ سلسلة ناظرية للزمرة G . إذا كانت H_{i+1}/H_i زمرة منتهية رتبها m_{i+1} فأثبت أن G زمرة منتهية رتبها $m_1 m_2 \dots m_n$.

الحل

نستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن $|H_i| = m_1 m_2 \dots m_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$. إذا كان $n = 1$ فإن $|H_1| = |H_1/\{e\}| = |H_1/H_0| = m_1$. لنفرض الآن أن $|H_k| = m_1 m_2 \dots m_k$ حيث $k < i \leq n$. الآن: عدد المجموعات المشاركة للزمرة H_i/H_{i-1} هو m_i وعدد عناصر كل من هذه المجموعات المشاركة يساوي $|H_{i-1}|$. ولكن باستخدام فرضية الاستقراء نعلم أن $|H_{i-1}| = m_1 m_2 \dots m_{i-1}$. ولذا فإن $|H_i| = |H_{i-1}| m_i = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_i$. وبالتالي نحصل على المطلوب بأخذ $i = n$ Δ

تمرين (٢)

استخدم مبرهنة جوردان وهولدر لإثبات المبرهنة الأساسية للحساب.

الحل

لنفرض أن $n > 1$ عدد صحيح. بما أن $\mathbb{Z}_n$ زمرة منتهية فإن لها سلسلة تركيبية: $\{[0]\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{k-1} \leq H_k = \mathbb{Z}_n$ حيث H_i/H_{i-1} زمرة إبدالية بسيطة. ولذا فإن $|H_i/H_{i-1}| = p_i$ حيث p_i عدداً أولياً. ومنه فإن:

$$n = |\mathbb{Z}_n| = |H_k/H_{k-1}| |H_{k-1}/H_{k-2}| \dots |H_1/H_0|$$

$$= p_k p_{k-1} \dots p_1$$

أما وحدانية التحليل فنحصل عليها من تكافؤ السلاسل التركيبية Δ

تمارين (٧, ١)

- (١) جد سلسلة ناظرية جزئياً وليست ناظرية للزمرة D_4 .
- (٢) لكل زوج من أزواج السلاسل التالية جد زوجاً أدق ومتكافئاً:
- (أ) $\{e\} \leq 25\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ، $\{0\} \leq 10\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
- (ب) $\{0\} \leq 245\mathbb{Z} \leq 49\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ، $\{0\} \leq 60\mathbb{Z} \leq 20\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
- (ج) $\{[0]\} \leq \langle [24] \rangle \leq \langle [12] \rangle \leq \mathbb{Z}_{72}$ ، $\{[0]\} \leq \langle [18] \rangle \leq \langle [3] \rangle \leq \mathbb{Z}_{72}$
- (٣) لكل زمرة من الزمر التالية ، جد جميع السلاسل التركيبية وأثبت أنها متكافئة:
- (أ) $\mathbb{Z}_{60}$ (ب) $\mathbb{Z}_{48}$
- (٤) لكل زمرة من الزمر التالية ، جد جميع السلاسل التركيبية:
- (أ) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (ب) S_3 (ج) A_4
- (د) D_4 (هـ) S_4 (و) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$
- (ز) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ (ح) $S_3 \times S_3$
- (٥) أعط مثلاً لزمرة G وسلسلتين غير قابلتين للتدقيق مختلفتا الطول. هل هذا يناقض مبرهنة جوردان وهولدر؟
- (٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \leq G$ فأثبت أن H ناظرية جزئياً إذا وفقط إذا كانت H إحدى حدود سلسلة تركيبية للزمرة G .
- (٧) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أنه يوجد سلسلة تركيبية للزمرة G إذا وفقط إذا كانت G منتهية.
- (٨) إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p حيث p عدداً أولياً وكانت $H \leq G$ فأثبت أن H ناظرية جزئياً.
- (٩) إذا كانت H زمرة جزئية ناظرية جزئياً من G وكانت K زمرة جزئية ناظرية جزئياً من H فأثبت أن K زمرة جزئية ناظرية جزئياً من G .
- (١٠) إذا كانت $H \leq G$ وكانت K زمرة جزئية ناظرية جزئياً من G فأثبت أن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظرية جزئياً من H .
- (١١) إذا كانت $K \leq H \leq G$ وكانت K ناظرية جزئياً من G فأثبت أن K ناظرية جزئياً من H .

(١٢) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G فأثبت أن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G .

(١٣) أعط مثلاً لزمرة G وزمريتين جزئيتين H و K ناظمتين جزئياً من G ولكن HK ليست زمرة جزئية من G .

(١٤) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G وكانت $K \triangleleft G$ فأثبت أن HK زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G .

(١٥) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كان لزمريتين سلسلتين تركيبتين متكافئتين فإن الزمريتين متماثلتين.

(ب) أي سلسلة ناظمية يجب أن تكون ناظمية جزئياً.

(ج) أي سلسلة ناظمية جزئياً يجب أن تكون ناظمية.

(د) توجد سلسلة تركيبيه لأي زمرة إبدالية.

(هـ) توجد سلسلة تركيبيه لأي زمرة منتهية.

(٧, ٢) الزمر القابلة للحل

Solvable Groups

إن أول من قدم مفهوم الزمر القابلة للحل هو الرياضي الفرنسي الشهير جالوا (Galois) أثناء محاولته حل معادلات كثيرات الحلول بإستخلاص الجذور.

تعريف (٧, ٤)

(أ) نقول إن السلسلة الناظمية جزئياً $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة قابلة

للحل (solvable series) إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة إبدالية لكل $1 \leq i \leq n$.

(ب) نقول إن الزمرة G قابلة للحل (solvable group) إذا وجدت سلسلة قابلة للحل للزمرة G .

(ج) نقول إن السلسلة الناظمية جزئياً $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة كثيرة

الدورية (polycyclic series) إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة دورية لكل $1 \leq i \leq n$.

(د) نقول إن الزمرة G كثيرة الدورية (polycyclic group) إذا وجدت سلسلة كثيرة الدورية

للزمرة G .

(هـ) نقول أن السلسلة الناعمية $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل فوقياً (supersolvable series) إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة دورية لكل $1 \leq i \leq n$.
 (و) نقول إن الزمرة G قابلة للحل فوقياً (supersolvable group) إذا وجدت سلسلة قابلة للحل فوقياً للزمرة G .

ملحوظات

- (١) من الواضح أن أي زمرة إبدالية يجب أن تكون قابلة للحل.
- (٢) بما أن الزمر الدورية هي زمر إبدالية فإن كل زمرة كثيرة الدورية يجب أن تكون قابلة للحل.
- (٣) بما أن السلسلة الناعمية هي سلسلة ناعمية جزئياً فإن كل زمرة قابلة للحل فوقياً يجب أن تكون كثيرة الدورية ومن ثم قابلة للحل.
- (٤) إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية (أو قابلة للحل فوقياً) فإن G منتهية التوليد ، وذلك لأنه لو كانت $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة كثيرة الدورية حيث H_i / H_{i-1} دورية مولدة بالعنصر a_i فإنه من الواضح أن $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. ولذا فهي منتهية التوليد.
- (٥) بما أن $\mathbb{Q}$ زمرة إبدالية فهي قابلة للحل . وبما أن $\mathbb{Q}$ غير منتهية التوليد فإن $\mathbb{Q}$ ليست كثيرة الدورية.

(٦) A_4 كثيرة الدورية لأن السلسلة $\{e\} = \{e, (1\ 2) \circ (4\ 3)\} \leq V \leq A_4$ كثيرة الدورية . ولكن A_4 ليست قابلة للحل فوقياً.

مبرهنة (٦، ٧)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \leq G$ فإن H قابلة للحل.

البرهان

بما أن G قابلة للحل فإنه توجد سلسلة قابلة للحل $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ لنفرض أن $K_i = H_i \cap H$ لكل $0 \leq i \leq n$ ، إذن ، $\{e\} = K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n = H$ سلسلة ناعمية جزئياً للزمرة H . وباستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن :

$$\begin{aligned} K_i / K_{i-1} &= (H_i \cap H) / (H_{i-1} \cap H) \\ &= (H_i \cap H) / (H_{i-1} \cap (H_i \cap H)) \\ &\cong H_{i-1} (H_i \cap H) / H_{i-1} \leq H_i / H_{i-1} \end{aligned}$$

وبما أن H_i / H_{i-1} إبدالية فإن K_i / K_{i-1} إبدالية . وبالتالي نخلص إلى أن H قابلة للحل ◆

مبرهنة (٧,٧)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \triangleleft G$ فإن G/H زمرة قابلة للحل.

البرهان

بما أن G قابلة للحل فإنه توجد سلسلة قابلة للحل $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$.

نفرض أن $K_i = H_i H / H$ لكل $0 \leq i \leq n$. بما أن $H_i \triangleleft H_{i+1}$ فإن :

$\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{n-1} \leq K_n = G/H$ سلسلة ناظرية جزئياً للزمرة G/H . وباستخدام

المبرهنة الثالثة للتماثل نجد أن : $K_i / K_{i-1} = (H_i H / H) / (H_{i-1} H / H) \cong H_i H / H_{i-1} H$.

وباستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن :

$$H_i H / H_{i-1} H = H_i (H_{i-1} H) / H_{i-1} H \cong H_i / (H_i \cap H_{i-1} H)$$

وبما أن : $H_{i-1} \triangleleft H_i \cap H_{i-1} H$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل أن :

$H_i / H_i \cap H_{i-1} H \cong (H_i / H_{i-1}) / (H_i \cap H_{i-1} H) / H_{i-1}$. ولذا فإن K_i / K_{i-1} تماثل زمرة

خارج قسمة زمرة إبدالية ، وبالتالي فهي إبدالية. إذن ، G/H قابلة للحل ◆

مبرهنة (٧,٨)

إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية وكانت $H \leq G$ فإن H زمرة كثيرة الدورية أيضاً.

البرهان

البرهان مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٦) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,٩)

إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية وكانت $H \triangleleft G$ فإن G/H زمرة كثيرة الدورية.

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٧) ، ولذا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,١٠)

إذا كانت G زمرة قابلة لحل فوقياً وكانت $H \leq G$ فإن H قابلة للحل فوقياً.

البرهان

◆ مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٦) ، ولذا نتركه للقارئ

مبرهنة (٧,١١)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل فوقياً وكانت $H < G$ فإن G/H قابلة للحل فوقياً .

البرهان

◆ مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٧) ، ولهذا فإننا نتركه للقارئ

مبرهنة (٧,١٢)

إذا كانت $H < G$ حيث كل من H و G/H قابلة للحل فإن G قابلة للحل .

البرهان

لنفرض أن كل من :

$$\{H\} = \bar{K}_0 \leq \bar{K}_1 \leq \dots \leq \bar{K}_{m-1} \leq \bar{K}_m = G/H$$

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = H$$

سلسلة قابلة للحل . باستخدام مبرهنة التقابل توجد $K_i \leq G$ حيث $K_i < K_{i+1}$ ، $\bar{K}_i = K_i / H$ ، $G = K_m$ ، $H = K_0$ لكل $0 \leq i \leq m-1$. وباستخدام المبرهنة الثالثة للتماثلنجد أن $\bar{K}_i / \bar{K}_{i-1} \cong K_i / K_{i-1}$. إذن ، $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H \leq K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_m = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G .◆ وبالتالي فإن G قابلة للحل

مبرهنة (٧,١٣)

إذا كانت $H < G$ حيث كل من H و G/H كثيرة الدورية فإن G كثيرة الدورية .

البرهان

◆ مماثل لبرهان المبرهنة (٧,١٢) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ

مبرهنة (٧,١٤)

إذا كانت $H < G$ حيث كل من H و G/H قابلة للحل فوقياً فإن G قابلة للحل فوقياً .

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧, ١٢) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ ♦

تزودنا المبرهنة التالية بأمثلة لزمر كثيرة الدورية (ومن ثم قابلة للحل).

مبرهنة (٧, ١٥)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G كثيرة الدورية.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على $|G|$. لنفرض إذن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية من النوع p التي رتبها أقل من $|G|$. بما أن G من النوع p فإن $Z(G) \neq \{e\}$. وبما أن $Z(G)$ زمرة إبدالية من النوع p فإنه باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التوليد نجد أن $Z(G)$ زمرة ضرب مباشر لزمر دورية من النوع p . ولذا فإننا نستطيع إيجاد سلسلة ناظرية جزئياً $Z(G)$ كثيرة الدورية. وباستخدام الاستقراء الرياضي نجد أن $G/Z(G)$ زمرة كثيرة الدورية. إذن ، $Z(G)$ كثيرة الدورية. وباستخدام المبرهنة (٧, ١٣) ، نجد أن G كثيرة الدورية ♦

نتيجة (٧, ١٦)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G قابلة للحل.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٧, ١٥) ، نجد أن G كثيرة الدورية ، ولذا فهي قابلة للحل ♦

لقد بينا أن $\mathbb{Q}$ زمرة قابلة للحل ولكنها ليست كثيرة الدورية. لاحظ أن $\mathbb{Q}$ ليست منتهية التوليد. المبرهنة التالية تبين لنا الشرط اللازم والكافي لكي تكون الزمرة القابلة للحل زمرة كثيرة الدورية.

مبرهنة (٧, ١٧)

لتكن G زمرة قابلة للحل. عندئذ ، G كثيرة الدورية إذا وفقط إذا كانت كل زمرة جزئية من G منتهية التوليد.

البرهان

لنفرض أولاً أن G كثيرة دورية. ولتكن $H \leq G$. عندئذ ، باستخدام المبرهنة (٧,٨) ، نجد أن H كثيرة دورية. ولذا فإن H منتهية التوليد حسب الملحوظة (٤).

ولبرهان العكس ، نفرض أن G قابلة للحل وجميع زمريها الجزئية منتهية التوليد. لنفرض أن :

H_i / H_{i-1} ، الآن ، $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ زمرة إبدالية وأن $H_i \leq G$. إذن ، H_i منتهية التوليد. لاحظ أيضاً أن H_i كثيرة دورية. لنفرض الآن أن $H_i = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$. عندئذ ، $H_i / H_{i-1} = \langle a_1 H_{i-1}, a_2 H_{i-1}, \dots, a_k H_{i-1} \rangle$. ولذا فإن $H_i / H_{i-1} \leq \langle a_1 H_{i-1} \rangle \leq \langle a_1 H_{i-1}, a_2 H_{i-1} \rangle \leq \dots \leq H_i / H_{i-1}$ سلسلة ناظرية جزئياً للزمرة H_i / H_{i-1} عواملها زمر دورية. إذن ، H_i / H_{i-1} كثيرة دورية لكل $1 \leq i \leq n$. وعلى وجه الخصوص ، G / H_{n-1} كثيرة دورية. وبما أن H_{n-1} كثيرة دورية فإننا نخلص باستخدام المبرهنة (٧,١٣) إلى أن G كثيرة دورية. ♦

سنبرهن الآن أن الزمرة S_n غير قابلة للحل لكل $n \geq 5$. لاحظ أولاً أن كل من S_3 و S_4 قابلة للحل لأن $S_3 \leq \langle (1 \ 2 \ 3) \rangle \leq S_3$ سلسلة قابلة للحل. وأن $\{e\} \leq V \leq A_4 \leq S_4$ سلسلة قابلة للحل.

مبرهنة (٧,١٨)

لتكن G زمرة قابلة للحل. عندئذ ، G زمرة بسيطة إذا وفقط إذا كانت G زمرة دورية رتبها عدداً أولياً.

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة بسيطة. ولنفرض أن $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G وبمحذف الحدود المتساوية نستطيع أن نفرض أن لكل $0 \leq i \leq n-1$ $H_i \neq H_{i+1}$. إذن H_{n-1} زمرة جزئية ناظرية فعلية من G . بما أن G زمرة بسيطة فإن $H_{n-1} = \{e\}$. ولذا فإن السلسلة الوحيدة القابلة للحل للزمرة G هي $\{e\} < G$. إذن G زمرة إبدالية. وباستخدام المبرهنة (٤,٣٠) ، نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي. وبرهان العكس واضحاً. ♦

نتيجة (٧, ١٩)

الزمرة S_n غير قابلة للحل لكل $n \geq 5$.

البرهان

إذا كانت S_n زمرة قابلة للحل فإنه باستخدام المبرهنة (٧, ٦) نجد أن A_n قابلة للحل. وبما أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$ فإنه باستخدام المبرهنة (٧, ١٨) نجد أن A_n زمرة دورية رتبها عدداً أولياً

وهذا مستحيل لأن $|A_n| = \frac{n!}{2}$ ليس عدداً أولياً لكل $n \geq 5$. إذن، S_n غير قابلة للحل ◆

نقدم الآن شرطاً لازماً وكافياً لقابلية حل الزمر باستخدام زمرة المبدلات، ويلزمنا لذلك

التعريف التالي وهو عبارة عن تعميم لمفهوم المبدلات.

تعريف (٧, ٥)

إذا كانت كل من A و B مجموعة جزئية من الزمرة G فإننا نعرف مبدلاً A و B على النحو التالي:

$$[A, B] = \langle [a, b] : a \in A, b \in B \rangle. \text{ لاحظ أن } G' = [G, G]$$

مبرهنة (٧, ٢٠)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فإن :

$$(أ) \quad H \triangleleft G \text{ إذا وفقط إذا كان } [H, G] \leq H$$

$$(ب) \quad \text{إذا كانت } H \triangleleft G \text{ و } K \triangleleft G \text{ فإن } [H, K] \triangleleft G$$

$$(ج) \quad \text{إذا كان } H \triangleleft G \text{ فإن } [K, G] \leq H \text{ إذا وفقط إذا كان } HK/H \leq Z(G/H)$$

البرهان

$$(أ) \quad \text{لكل } g \in G \text{ و } h \in H \text{ لدينا : } h^{-1}g^{-1}hg \in H \Leftrightarrow [h, g] \in H$$

$$\text{إذن } H \triangleleft G \text{ إذا وفقط إذا كانت } [H, G] \leq H.$$

$$(ب) \quad \text{لاحظ أولاً أنه لكل } h, k, g \in G \text{ لدينا :}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}[h, k]g &= g^{-1}(h^{-1}k^{-1}hk)g \\ &= (g^{-1}hg)^{-1}(g^{-1}kg)^{-1}(g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \\ &= [g^{-1}hg, g^{-1}kg] \end{aligned}$$

الآن ، إذا كان $h \in H$ و $k \in K$ و $g \in G$ فإن $g^{-1}hg \in H$ وإن $g^{-1}kg \in K$. ولذا فإن $g^{-1}[h,k]g \in [H,K]$

لنفرض الآن أن $a \in [H,K]$. عندئذ ، $a = a_1 a_2 \dots a_m$ ، حيث $a_i \in [h_i, k_i]$ و $h_i \in H$ و $k_i \in K$. إذن ، $g^{-1}ag = g^{-1}a_1 g g^{-1}a_2 g \dots g^{-1}a_m g \in [H,K]$. وبالتالي فإن $[H,K] \triangleleft G$.

(ج) لنفرض أولاً أن $[K,G] \leq H$. عندئذ ، لكل $k \in K$ و $g \in G$ نجد أن $kgk^{-1}g^{-1} \in H$.

ومنه فإن $HkHg = HgHk$. ولذا فإن $Hk \in Z(G/H)$. لنفرض الآن أن $h \in H$ و $k \in K$.

عندئذ ، $Hhk = HhHk = HHk = Hk \in Z(G/H)$. وبالتالي فإن $HK/H \leq Z(G/H)$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $HK/H \leq Z(G/H)$. ولنفرض أن $k \in K$ ، $g \in G$. بما أن

$[k,g] \in H$. ولذا فإن $Hkgk^{-1}g^{-1} = HkHgHb^{-1}Hk^{-1} = H$ فإن $HK \in Z(G/H)$

وبالتالي فإن $[K,G] \leq H$ ♦

تعريف (٧,٦)

إذا كانت G زمرة فإننا نعرف استقرائياً $G^{(i)}$ كالتالي :

$$G^{(0)} = G \text{ و } G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \text{ لكل } i \geq 1 .$$

ملحوظة

من الواضح أن $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$

تسمى هذه السلسلة ، السلسلة المشتقة (derived series) للزمرة G .

مبرهنة (٧,٢١)

تكون الزمرة G قابلة للحل إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح موجب m حيث $G^{(m)} = \{e\}$.

وعلاوة على ذلك إذا كان m هو أصغر عدد صحيح يحقق $G^{(m)} = \{e\}$ فإن طول أي سلسلة قابلة

للحل للزمرة G هو على الأقل m .

البرهان

لنفرض أن G قابلة للحل وأن $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G .

سنبرهن باستخدام الإستقراء الرياضي على i أن $G^{(i)} \leq H_{n-i}$. بما أن $G^{(0)} = H_n = G$ فإن

العبارة صحيحة عندما $i = 0$. لنفرض الآن أن $G^{(i-1)} \leq H_{n-i+1}$. بما أن H_{n-i+1}/H_{n-i} زمرة إبدالية فإن $[H_{n-i+1}, H_{n-i+1}] \leq H_{n-i}$. ولذا فإن :

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \leq [H_{n-i+1}, H_{n-i+1}] \leq H_{n-i}$$

$$G^{(n)} \leq H_{n-n} = H_0 = \{e\}$$

ولبرهان العكس ، نفرض أن $G^{(m)} = \{e\}$. عندئذ :

$$\{e\} = G^{(m)} \leq G^{(m-1)} \leq \dots \leq G^{(1)} \leq G^{(0)} = G$$

وأخيراً ، من الواضح أنه إذا كان طول أي سلسلة قابلة للحل يساوي n وكان m هو أصغر عدد صحيح يحقق $G^{(m)} = \{e\}$ فإن $m \leq n$ ♦

تعريف (٧,٧)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل فإن أصغر عدد صحيح m يحقق $G^{(m)} = \{e\}$ يسمى الطول الاشتقاقي (derived length) للزمرة G .
لاحظ أن الزمر الإبدالية زمر قابلة للحل وطولها الاشتقاقي يساوي 1.

مثال (٧,٥)

الطول الاشتقاقي للزمرة S_3 و 2. لأن $S_3^{(1)} = \mathbb{Z}_3$ وأن $S_3^{(2)} = \mathbb{Z}_3^{(1)} = \{e\}$. إذن ، السلسلة المشتقة للزمرة S_3 هي $S_3 \geq \mathbb{Z}_3 \geq \{e\}$ □

مثال (٧,٦)

الطول الاشتقاقي للزمرة S_4 هو 3. لاحظ أولاً أن $S_4^{(1)} = S_4' = A_4$. لأن :
 $[(1\ 2), (1\ 3)] = (1\ 3\ 2) \in S_4^{(1)}$. وبما أن جميع الدورات ذات الطول 3 مترافقة في S_4 فإننا نجد أن $S_4^{(1)}$ تحتوي على جميع الدورات من الطول 3. إذن ، $A_4 \leq S_4^{(1)}$. ولكن $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$. إذن ، $S_4^{(1)} \leq A_4$. وبالتالي فإن $S_4^{(1)} = A_4$. الآن ، V هي الزمرة الجزئية الوحيدة الناعمة من A_4 . ولذا فإن $S_4^{(2)} = V$. إذن ، $S_4 \geq A_4 \geq V \geq \{e\}$ هي السلسلة المشتقة للزمرة S_4 □

مثال (٧,٧)

السلسلة المشتقة للزمرة S_n حيث $n \geq 5$ هي $S_n \geq A_n \geq A_n \geq \dots$ لأن $S_n^{(i)} = A_n$ لكل $i \geq 1$ □

نتقل الآن لدراسة الزمر المنتهية القابلة للحل ، هذه الزمر نبرهن التعميم التالي لمبرهنات سيلو

التي قدم برهانها فيليب هول (Phillip Hall).

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m, n) = 1$ فإن :

(١) G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m .

(٢) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G رتبتهما m فإن H و K مترافقتان.

لكي نبرهن الحقيقتين أعلاه يلزمنا بعض التحضيرات لذلك . لقد قدمنا في التمارين (٣,٧)

مفهوم الزمر الجزئية اللامتغيرة تماماً والمميزة ودرسنا بعض خواصهما. ولغرض التسهيل على القارئ نعيد تقديم هذين المفهومين ونبرهن بعض الخواص الأساسية لهما.

تعريف (٧,٨)

لتكن H زمرة جزئية من G .

(أ) نقول إن H لامتغيرة تماماً (fully invariant) إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل

$\varphi: G \rightarrow G$.

(ب) نقول إن H مميزة من G (characteristic in G) إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل

$\varphi \in \text{Aut}(G)$.

ملحوظات

(١) بما أن كل تماثل ذاتي هو تشاكل فإنه من الواضح أن الزمر الجزئية اللامتغيرة تماماً يجب أن تكون مميزة.

(٢) إذا كانت $H \leq G$ فإن H مميزة إذا وفقط إذا كان $\varphi(H) = H$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(G)$. لأنه

إذا كانت H مميزة فإن $\varphi(H) \subseteq H$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(G)$. ولذا فإن $\varphi^{-1}(H) \subseteq H$. إذن ، لكل

$\varphi \in \text{Aut}(G)$ يكون $H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \subseteq \varphi(H)$. أما العكس فهو واضح.

(٣) إن عكس الملحوظة (١) ليس بالضرورة صحيحاً إذ أن $Z(G)$ زمرة جزئية مميزة من G لأنه إذا كان $\varphi \in \text{Aut}(G)$ وكان $\varphi(x) \in \varphi(Z(G))$ فإن $x \in Z(G)$. ولذا فإن:

$$x \in Z(G) \Rightarrow xa = ax \quad \forall a \in G \Rightarrow \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \in Z(G)$$

$$\Rightarrow \varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$$

وينتج عن ذلك أن $Z(G)$ زمرة جزئية مميزة من G . ولكن $Z(G)$ ليست لامتغيرة تماماً، خذ $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$ ولاحظ أن $Z(G) = \langle ([1], e) \rangle$. ولاحظ أيضاً أن $\varphi: G \rightarrow G$ المعرفة بالقاعدة $\varphi([1], \sigma) = ([0], (1\ 2)), \varphi([0], \sigma) = ([0], e)$ لكل $\sigma \in S_3$ تشاكل. ولكن $\varphi(Z(G)) \not\subseteq Z(G)$.

مثال (٧, ٨)

إذا كانت G زمرة فإن G' زمرة جزئية لامتغيرة تماماً وبالتالي مميزة من G . لأنه إذا كان $\varphi: G \rightarrow G$ تشاكل وكان $a, b \in G$ فإن:

$$\square \varphi(G') \subseteq G' \quad \text{ولذا فإن} \quad \varphi([a, b]) = \varphi(a)^{-1} \varphi(b)^{-1} \varphi(a) \varphi(b) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in G'$$

تروودنا المبرهنة التالية بالخصائص الأساسية للزمر الجزئية المميزة.

مبرهنة (٧, ٢٢)

- (أ) إذا كانت H زمرة جزئية مميزة من G فإن $H \triangleleft G$.
- (ب) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية مميزة من G فإن $H \cap K$ زمرة جزئية مميزة من G .
- (ج) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية مميزة من G فإن HK زمرة جزئية مميزة من G .
- (د) إذا كانت $H \triangleleft G$ وكانت K زمرة جزئية مميزة من H فإن $K \triangleleft G$.
- (هـ) إذا كانت H زمرة جزئية مميزة من K وكانت K زمرة جزئية مميزة من G فإن H زمرة جزئية مميزة من G .
- (و) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية ناظمية من G حيث $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$ فإن H زمرة جزئية مميزة من G .
- (ي) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ وكانت $P \triangleleft G$ فإن P مميزة من G .

البرهان

(أ) لنفرض أن $H \leq G$ مميزة وليكن $g \in G$. عندئذ، $gHg^{-1} = \varphi_g(H) \subseteq H$. ولذا فإن

$$. H \triangleleft G$$

(ب) لنفرض أن $x \in H \cap K$ وأن $\varphi \in \text{Aut}(G)$. إذن، $\varphi(x) \in \varphi(H)$ و $\varphi(x) \in \varphi(K)$. وبما أن $\varphi(H) \subseteq H$ وأن $\varphi(K) \subseteq K$ فإن $\varphi(x) \in H \cap K$. وبالتالي فإن $\varphi(H \cap K) \subseteq H \cap K$.

(ج) لنفرض أن $x = hk \in HK$ وأن $\varphi \in \text{Aut}(G)$. عندئذ:

$$\varphi(HK) \subseteq HK \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \varphi(x) = \varphi(h)\varphi(k) \in \varphi(H)\varphi(K) \subseteq HK$$

(د) بما أن $H \triangleleft G$ فإن $\varphi_g(H) \subseteq H$ لكل $\varphi_g \in \text{Inn}(G)$. لنفرض أن $\psi = \varphi_g|_H$. إذن، $\psi \in \text{Aut}(H)$ وأن $\psi(K) \subseteq K$ لأن K مميزة من H . ولكن $\varphi_g(K) = \psi(K)$. إذن، $\varphi_g(K) \subseteq K$ لكل $g \in G$. وبالتالي فإن $K \triangleleft G$.

(هـ) لنفرض أن $\varphi \in \text{Aut}(G)$ وأن $\psi = \varphi|_K$. إذن $\psi \in \text{Aut}(K)$. ولذا فإن $\psi(H) \subseteq H$ وبما أن $\varphi(K) \subseteq K$ وأن $\psi(H) = \varphi(H)$ فإن $\varphi(H) \subseteq H$. وبالتالي فإن H مميزة من G .

(و) لنفرض أن $H \triangleleft G$ وأن $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$. لنفرض أن $\varphi \in \text{Aut}(G)$ وأن $K = \varphi(H)$. لنفرض أن $|H| = n$ وأن $|G/H| = m$. بما أن $HK/H \leq G/H$ فإن $|HK/K|$ يقسم m . ولكن باستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن $HK/H \cong K/H \cap K$. إذن، $|HK/H| = \frac{|K|}{|H \cap K|} = \frac{|\varphi(H)|}{|H \cap K|} = \frac{|H|}{|H \cap K|}$. وبما أن $\gcd(m, n) = 1$ فإن $|HK/H| = 1$. ولذا فإن $HK = H$. إذن، $K = \varphi(H) \subseteq H$. وبالتالي فإن H زمرة جزئية مميزة من G .

(ي) بما أن $P \triangleleft G$ فإن P وحيدة. لنفرض أن $x \in P$ وأن $\varphi \in \text{Aut}(G)$. إذن، $|\varphi(x)| = p^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$. وبما أن P وحيدة فإن $\varphi(x) \in P$. إذن، $\varphi(P) \subseteq P$. ♦

تعريف (٧, ٩)

إذا كانت H زمرة جزئية من G فإننا نعرف قلب H في G (core of H in G) كالتالي :

$$\text{CR}(H) = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$$

مبرهنة (٧, ٢٣)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $\text{CR}(H)$ أكبر زمرة جزئية ناظمية من G محتواة في H .

البرهان

بما أن $H = e^{-1}He$ فإن $CR(H) \leq H$. وإذا كان $g \in G$ فإن:

$$\begin{aligned} g^{-1}CR(H)g &= g^{-1}\left(\bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx\right)g = \bigcap_{x \in G} (xg)^{-1}H(xg) = \bigcap_{y \in G} CR(H) \\ &= \bigcap_{y \in G} y^{-1}Hy = CR(H) \end{aligned}$$

♦ إذن ، $CR(H) \triangleleft G$

(٧, ٢٤) مبرهنة

إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = n$ فإن $G/CR(H)$ تماثل زمرة جزئية من S_n .

البرهان

لنفرض أن $A = \{xH : x \in G\}$. باستخدام النتيجة (٤, ٦) ، يوجد تشاكل $\psi : G \rightarrow S_n$ معرفاً

بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ حيث $\tau_g : A \rightarrow A$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\tau_g(xH) = gxH$. الآن:

$$g \in \text{Ker}\psi \Leftrightarrow \psi(g) = \tau_e \Leftrightarrow g(aH) = aH \quad \forall aH \in A \Leftrightarrow ga = ah, h \in H$$

$$\Leftrightarrow g \in a^{-1}Ha \Leftrightarrow g \in \bigcap_{a \in G} a^{-1}Ha = CR(H)$$

♦ ولذا فإنه باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/CR(H)$ تماثل زمرة جزئية من S_n

(٧, ١٠) تعريف

لتكن H زمرة جزئية فعلية من زمرة G .

(أ) نقول إن H زمرة جزئية أعظمية (maximal subgroup) من G إذا كان لكل

$$K = G \text{ أو } H = K \text{ فإن } H \leq K \leq G$$

(ب) نقول إن H زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G (maximal normal subgroup) إذا

$$\text{كانت } H \triangleleft G \text{ وكان لكل } H \triangleleft K \triangleleft G \text{ فإن } H = K \text{ أو } K = G.$$

(ج) نقول أن H زمرة جزئية أصغرية (minimal subgroup) من G إذا كانت $H \neq \{e\}$

$$\text{وكان لكل } \{e\} \leq K \leq H \text{ فإن } K = \{e\} \text{ أو } K = H.$$

(د) نقول إن H زمرة جزئية ناظمية أصغرية (minimal normal subgroup) من G إذا

$$\text{كانت } H \triangleleft G \text{ وكان لكل } \{e\} \triangleleft K \triangleleft H \text{ فإن } K = \{e\} \text{ أو } K = H.$$

ملحوظات

- (١) ليس بالضرورة أن توجد زمر جزئية أصغرية (أو أعظمية) لزمرة معطاة ، فمثلاً لا توجد زمرة جزئية أصغرية للزمرة $\mathbb{Z}$.
- (٢) إذا كان p عدداً أولياً فإنه توجد للزمرة $\mathbb{Z}_p$ زمرة جزئية أعظمية وحيدة هي $\{e\}$ وزمرة جزئية أصغرية وحيدة هي $\mathbb{Z}_p$.
- (٣) من الواضح أنه إذا كانت $G \neq \{e\}$ زمرة منتهية فإن G تحتوي زمرة جزئية أعظمية وزمرة جزئية أصغرية.
- (٤) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G فإن H تحتوي زمرة جزئية أصغرية من G وأن H محتواة في زمرة جزئية أعظمية من G .
- (٥) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = p$ وحيث p عدد أولي فإنه من الواضح أن H زمرة جزئية أعظمية من G . لاحظ أن العكس غير صحيح ، فمثلاً $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ زمرة جزئية أعظمية من A_4 لأنه لو كان $H < K < A_4$ فإن $|K| = 6$ وهذا مستحيل. لاحظ أيضاً أن $[A_4:H] = 4$ ليس عدداً أولياً.

لدينا الآن جميع المعلومات اللازمة لإستكمال دراستنا للزمر المنتهية القابلة للحل.

مبرهنة (٧, ٢٥)

إذا كانت H زمرة جزئية ناظرية أصغرية من الزمرة المنتهية والقابلة للحل G فإن H زمرة إبدالية من النوع p ومن ثم فهي تماثل زمرة ضرب مباشر لزمرة دورية رتبة كل منها تساوي p .

البرهان

بما أن الزمرة المشتقة H' مميزة من H وأن H ناظرية من G فإن $H' \triangleleft G$. وبما أن G قابلة للحل و $H \leq G$ فإن H قابلة للحل أيضاً. ولذا فإن $H' \neq H$. وبما أن H زمرة أصغرية من G فإن $H' = \{e\}$. إذن، H زمرة إبدالية. لنفرض الآن أن p عدداً أولياً يقسم $|H|$ وأن $P \in \text{Syl}_p(H)$. بما أن H إبدالية فإن $P \triangleleft H$. ولذا فإن P وحيدة. وباستخدام المبرهنة (٧, ٢٢)، نجد أن P مميزة من H . وباستخدام المبرهنة (٧, ٢٢) مرة أخرى ، نجد أن $P \triangleleft G$. وباستخدام أصغرية H نجد أن $P = H$. إذن ، H زمرة إبدالية منتهية من الرتبة p^k حيث $k \in \mathbb{Z}^+$. وباستخدام النتيجة (٦, ٥) ، نجد أن H تماثل زمرة ضرب مباشر لزمرة دورية رتبة كل

(٧, ٢٦) مبرهنة

إذا كانت M زمرة جزئية أعظمية من الزمرة G المنتهية والقابلة للحل فإن $[G:M] = p^k$ حيث p عدد أولي و $k \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

نفرض أن $K = CR(M)$. عندئذ، باستخدام المبرهنة (٧, ٢٣) نجد أن K أكبر زمرة جزئية ناظمية من G حيث $K \leq M$. لنفرض الآن أن H/K زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G/K . إذن، $G < H < K$. ومنه فإن $H \not\leq M$. ولذا فإن $G = HM$. بما أن $H \cap M < M$ فإن $(H \cap M)/K < M/K$. ولكن $(H \cap M)/K \leq H/K$. وباستخدام المبرهنة (٧, ٢٥)، نجد أن H/K زمرة إبدالية. إذن $(H \cap M)/K < H/K$. ولذا فإن

$(H \cap M)/K < HM/K = G/K$. وبما أن $H \not\leq M$ فإن $H \cap M < H$. ولذا فإن $H \cap M = K$. إذن، $[H:K] = [H:H \cap M] = [HM:M] = [G:M]$. وباستخدام المبرهنة (٧, ٢٥)، نجد أن $[H:K] = p^k$ حيث p عدد أولي. وبالتالي فإن $[G:M] = p^k$ ♦

(٧, ١١) تعريف

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G فإننا نقول إن H زمرة هول الجزئية من G (Hall subgroup of G) إذا كان $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$.

(٧, ٩) مثال

□ إذا كانت $H \in \text{Syl}_p(G)$ فإن H زمرة هول الجزئية من G

(٧, ١٠) مثال

لتكن $G = A_5$. ولتكن $H \leq A_5$ زمرة هول الجزئية. عندئذ، $\gcd(H, [A_5:H]) = 1$. ولذا فإن $|H| = 3, 4, 5, 12, 15, 20$. إذا كانت $|H| = 3, 4, 5$ فإن $H \in \text{Syl}_p(A_5)$ حيث $p = 2, 3, 5$. ولذا فإنه توجد زمرة هول الجزئية من الرتبة 3, 4, 5. أيضاً توجد زمرة هول الجزئية من الرتبة 12 لأن $|A_4| = 12$ وأن $A_4 \leq A_5$. ولكن A_5 لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 15 أو الرتبة

20 لأنه لو كانت مثل هذه الزمرة الجزئية موجودة فإنه استناداً إلى النتيجة (٤,٨) نجد أن A_5 تماثل زمرة جزئية من S_4 أو S_5 وهذا مستحيل $\square$

لاحظ أن $|A_5| = 60$ وأن $\gcd(20,3) = 1$ ولكن لا تحتوي A_5 على زمرة هول الجزئية من الرتبة 20. المبرهنة التالية تضمن لنا وجود زمر هول الجزئية للزمر المنتهية القابلة للحل.

مبرهنة (٧,٢٧)

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m,n) = 1$ فإن G تحتوي على زمرة هول الجزئية من الرتبة m .

البرهان

باستخدام الإستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G| = 1$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية القابلة للحل التي رتبها أقل من $|G|$. لدينا الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى:

تحتوي G على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة N من الرتبة ab حيث a يقسم m و b قاسم فعلي للعدد n . أي أن $|N|$ لا يقسم n . لنفرض في هذه الحالة أن $m = ar$ وأن $n = bs$. إذن، $|G/N| = rs < |G|$. وباستخدام فرضية الإستقراء نجد أن G/N تحتوي على زمرة جزئية K/N من الرتبة r . إذن، $|K| = rab = mb < |G|$. وباستخدام الإستقراء الرياضي مرة أخرى نجد أن K تحتوي على زمرة جزئية H رتبها m .

الحالة الثانية:

العدد n يقسم رتبة أي زمرة جزئية ناظرية غير تافهة من الزمرة G . لنفرض في هذه الحالة أن N زمرة جزئية ناظرية أصغر من G . إذن، n يقسم $|N|$. باستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|N| = p^\alpha$ حيث p عدد أولي. وبما أن n يقسم p^α فإن p لا يقسم m . إذن، $n = p^\alpha$. ولذا فإن $N \in \text{Syl}_p(G)$ وأن N وحيدة. لنفرض الآن أن K/N زمرة جزئية ناظرية أصغر من G/N . إذن، باستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|K/N| = q^\beta$ حيث q عدد أولي. بما أن q^β يقسم m فإن $p \neq q$. لاحظ أيضاً أن $|K| = p^\alpha q^\beta$. لنفرض أن $Q \in \text{Syl}_q(K)$ وأن $H = N(Q)$. إذا كانت $H = G$ فإن $Q < G$ وهذا يناقض الفرض لأن p^α لا يقسم $|Q|$. إذن

$H < G$. الآن بما أن $Q \leq K \triangleleft G$ وأن $Q \in \text{Syl}_q(K)$ فإن $x^{-1}Qx \leq x^{-1}Kx = K$ إذن، $Q, x^{-1}Qx \in \text{Syl}_q(K)$ ولذا فإنه يوجد $y \in K$ حيث $Q = (xy)^{-1}Qxy$. ولذا فإن، $xy \in N(Q)$ ومنه فإن $x \in N(Q)K = HK = KH$ وبالتالي فإن $G = N(Q)K = HK = KH$ الآن، $NQ \leq K$ وأن $\gcd(|N|, |Q|) = 1$ ، إذن، $N \cap Q = \{e\}$ ولذا فإن :

$$|NQ| = \frac{|N||Q|}{|N \cap Q|} = |N||Q| = p^\alpha q^\beta = |K| \text{ ومنه فإن } K = NQ \text{ إذن،}$$

$G = HK = NQH = NH$ بما أن $N \triangleleft G$ فإن $N \cap H \triangleleft H$ وبما أن N إبدالية فإن $N \cap H \triangleleft N$ ، إذن، $N \cap H \triangleleft NH = G$ وبما أن N أصغرية فإن $N \cap H = N$ أو $N \cap H = \{e\}$. إذا كان $N \cap H = N$ فإن $N \leq H$ ولذا فإن $G = NH = H$ وهذا مستحيل. إذن $N \cap H = \{e\}$ الآن $|G| = |NH| = |N||H| = p^\alpha |H|$ ولذا فإن

$$|H| = \frac{|G|}{p^\alpha} = m \text{ وبالتالي فإن } H \text{ هي زمرة هول الجزئية من الرتبة } m \quad \blacklozenge$$

سنبرهن الآن أن زمر هول الجزئية من الزمرة المنتهية والقابلة للحل G جميعها مترافقة. ولكننا نحتاج أولاً إلى الحقيقة التالية :

مبرهنة (٧, ٢٨)

إذا كانت H و K زميرتين مترافقتين من G فإن $N(H)$ و $N(K)$ كذلك.

البرهان

لنفرض أن $K = g^{-1}Hg$ حيث $g \in G$. سنبرهن أن $N(K) = g^{-1}N(H)g$. لنفرض أن $x \in N(H)$. لكل $k \in K$ لدينا : $(g^{-1}xg)^{-1}k(g^{-1}xg) = g^{-1}x^{-1}gkg^{-1}xg$ وبما أن $gkg^{-1} \in H$ فإن $x^{-1}(gkg^{-1})x \in H$ ولذا فإن $g^{-1}(x^{-1}(gkg^{-1})x)g \in K$ ، إذن،

$$N(K) \leq g^{-1}N(H)g \text{ ، وبالمثل ، } g^{-1}N(H)g \leq N(K) \quad \blacklozenge$$

مبرهنة (٧, ٢٩)

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m, n) = 1$ فإن أي زميرتي هول الجزئية من الرتبة m يجب أن تكونا مترافقتين (ومن ثم متماثلتان).

البرهان

باستخدام الإستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G|=1$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية القابلة للحل التي رتبها أقل من $|G|$. كما في المبرهنة (٧, ٢٧) ندرس الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى:

تحتوي G على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة N من الرتبة ab حيث a يقسم m و b قاسم فعلي للعدد n . لنفرض أن كل من H و K زمرة هول من الرتبة m . ولنفرض أن $n = bs$ ، حيث $s \neq 1$. إذن، $|NH| = |N| |NH : N| = |N| |H : N \cap H| = abm_1$ ، حيث $m_1 = |H : N \cap H|$ يقسم m . وبما أن $H \leq NH$ فإن m يقسم abm_1 . ولذا فإن $m = am_1$ ومنه فإن $|NH| = bm$. وبصورة مماثلة تماماً نستطيع أن نبرهن أن $|NK| = bm$ أيضاً. الآن كل NH/N و NK/N زمرة جزئية من G/N رتبها r . إذن باستخدام الإستقراء الرياضي نجد أنهما مترافقتان في G/N . ومنه يوجد $xN \in G/N$ حيث $(x^{-1}N)(NK/N)(xN) = NH/N$ ولذا فإن $(x^{-1}N)(NK/N)(xN) = NH/N$ و H و $x^{-1}Kx$ زمري هول من NH مترافقتان استناداً إلى فرضية الإستقراء. ولذا فإنه يوجد $H = y^{-1}(x^{-1}Kx) = (xy)^{-1}K(xy)$ حيث $y \in G$.

الحالة الثانية:

العدد n يقسم رتبة أي زمرة جزئية ناظرية غير تافهة من G . لنفرض أن N زمرة جزئية ناظرية أصغر من G . وكما رأينا في برهان الحالة الثانية من المبرهنة (٧, ٢٧) فإن $|N| = p^e$ وأن N وحيدة. لنفرض أن كل من H و K زمرة هول من الرتبة m . بما أن p لا يقسم m فإن $H \cap N = \{e\}$. ولذا فإن $|HN| = |G|$. إذن، $G = HN$. سنبرهن الآن أن H زمرة جزئية أعظمية من G . إذا كانت H محتواة فعلياً في زمرة جزئية أعظمية M من G فإن $G = HN = MN$ ولذا فإن $N \leq M$. ومن ثم فإن $M \cap N < N$. كذلك، $M \cap N \neq \{e\}$. لأنه إذا كان $M \cap N = \{e\}$ فإن $|M||N| = |H||N|$ ولذا فإن $M = H$ وهذا تناقض. إذن، $M \cap N < M$. وبما أنه باستخدام المبرهنة (٧, ٢٥)، N إبدالية فإن $M \cap N < N$. إذن، $M \cap N < MN = G$ وهذا يناقض أصغرية N . إذن، H زمرة جزئية أعظمية من G .

لنفرض الآن أن B/N زمرة جزئية ناظرية أصغر من G/N . باستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|B/N| = q^\beta$ حيث q عدداً أولياً و $q \neq p$. إذن، $|B/N| = q^\beta$ حيث q عدداً أولياً و $q \neq p$. ومنه فإن $|B| = p^\alpha q^\beta$. لنفرض أن $Q = B \cap H$. بما أن H زمرة أعظمية لا تحتوي B فإن: $p^\alpha m = |G| = |BH| = \frac{|B||H|}{|Q|} = \frac{p^\alpha q^\beta m}{|Q|}$. إذن $|Q| = q^\beta$. ولذا فإن $Q \in \text{Syl}_q(B)$. وبما أن $G \triangleleft B$ فإن $Q \triangleleft H$. لاحظ أن Q ليست ناظرية من G لأن N زمرة جزئية ناظرية أصغر من G . وبما أن H أعظمية فإن $H = N(Q)$. وبصورة مماثلة إذا كانت $R = B \cap K$ فإن $R \in \text{Syl}_q(B)$ وأن $K = N(R)$. إذن، باستخدام المبرهنة الثانية لسيلو نجد أن Q و R مترافقتان في B . ولذا فإنهما مترافقتان في G . إذن، باستخدام المبرهنة (٧,٢٨)، نجد أن $N(Q)$ و $N(R)$ مترافقتان في G . وبالتالي فإن H و K مترافقتان في G ♦

ملحوظات

(١) لقد رأينا أن A_5 ليست قابلة للحل ولا تحتوي على زمرة هول من الرتبة 20 ولكنها تحتوي على زمرة هول من الرتبة 12. وفي الحقيقة ، أي زميرتين من الرتبة 12 يجب أن تكونا مترافقتان (من متماثلتان) في A_5 (انظر تمرين ١٦).

(٢) لاحظ أيضاً أن الزمرة $PSL(2,11)$ غير قابلة للحل ولكنها تحتوي على زميرتي هول غير متماثلتين (ومن ثم غير مترافقتين) من الرتبة 12 (أنظر تمرين ١٧).

ننهي هذا البند بتقديم بعض الشروط التي يجب أن تحققها الزمرة المنتهية لكي تكون قابلة للحل :

(۱) [بیرنساید (Burnside)]:

إذا كانت $|G| = p^\alpha q^\beta$ حيث p و q عددان أوليان فإن G قابلة للحل.

(۲) [فیلیپ هول (Phillip Hall)]:

إذا كانت $|G| = p^\alpha m$ حيث $\gcd(p, m) = 1$ وكانت G تحتوي على زمرة جزئية من رتبة m فإن G قابلة للحل.

(٣) [فیت وٹومپسون (Feit-Thompson)]:

إذا كان $|G|$ عدداً فردياً فإن G قابلة للحل.

(٤) [تومبسون (Thompson)] :

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $\langle x, y \rangle$ قابلة للحل لكل $x, y \in G$ فإن G قابلة للحل.
 إن جميع براهين الفقرات أعلاه صعبة وتخرجنا عن مستوى هذا الكتاب ، ولكننا نلفت نظر القارئ إلى أن برهان الفقرة (٢) يمكن الحصول عليه من برهان الفقرة (١). وبرهان الفقرة (٣) يحتاج ما يقارب ٢٥٥ صفحة. أما برهان الفقرة (٤) فهو يعتمد على برهان الفقرة (٣) ويحتاج ما يقارب ٤٧٥ صفحة.

(١, ٢, ٧) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تكوين (١)

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية الرتبة pq حيث $p > q$ عدداً أوليان فأثبت أن G زمرة قابلة للحل.

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة pqr حيث $p > q > r$ أعداداً أولية فأثبت أن G قابلة للحل.

الحل

(أ) باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = pk + 1$ ويقسم q . إذن، $n_p = 1$ أو $n_p = q$. وبما أن $p > q$ فإن $n_p = 1$. ولذا فإن G تحتوي على زمرة سيلو وحيدة H من النوع p وبالتالي فإن $H \triangleleft G$. الآن $|G/H| = q$. ولذا باستخدام النتيجة (٧, ١٦) نجد أن كل من G/H و H زمرة قابلة للحل وبالتالي نخلص استناداً إلى المبرهنة (٧, ١٢) أن G زمرة قابلة للحل.

(ب) باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = kp + 1$ ويقسم qr . لنفرض أن $n_p \neq 1$ ، إذن $n_p = qr$ (لأن $p > q > r$). أيضاً $n_q = jq + 1$ ويقسم pr . إذا كان $n_q \neq 1$ فإن $n_q = p$ أو $n_q = pr$ (لأن $q > r$). وبالتالي فإن $n_q \geq p$. وأيضاً، $n_r = ir + 1$ ويقسم pq . إذا كان $n_r \neq 1$ فإن $n_r = q$ أو $n_r = p$ أو $n_r = pq$. وبالتالي فإن $n_r \geq q$. ولذا نجد أن G تحتوي على $qr(p-1)$ عنصراً من الرتبة p ، على الأقل $p(q-1)$ عنصراً من الرتبة q وعلى الأقل $q(r-1)$ عنصراً من الرتبة r . ومنه فإن : $|G| = pqr \geq qr(p-1) + p(q-1) + q(r-1) + 1$. ومنه فإن $0 \geq pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1)$ وهذا مستحيل. إذن ، $n_p = 1$ أو $n_q = 1$ أو $n_r = 1$. لنفرض أن $n_p = 1$. عندئذ، توجد زمرة سيلو وحيدة H من النوع p . ومنه فإن $H \triangleleft G$ وبما أن $|G/H| = qr$ فاستناداً إلى الفقرة (أ) نجد أن G/H قابلة للحل. وبما أن H

قابلة للحل أيضاً فنجد باستخدام المبرهنة (٧, ١٢) أن G زمرة قابلة للحل. وبالمثل إذا كان $n_q = 1$

$$\Delta \quad n_r = 1$$

تقرين (٢)

بين أن الزمرة $S_3 \times S_3$ قابلة للحل وجد سلسلة قابلة للحل لها.

الحل

السلسلة $S_3 \times S_3 \leq S_3 \times A_3 \leq A_3 \times A_3 \leq A_3 \times \{e\} \leq \{e\} \times \{e\}$ قابلة للحل للزمرة $S_3 \times S_3$

وبالتالي فإن الزمرة قابلة للحل Δ

تقرين (٣)

إذا كانت G زمرة بسيطة وقابلة للحل فأثبت أن G زمرة إبدالية.

الحل

إذا كانت $G = \{e\}$ فالنتيجة واضحة. لنفرض أن $G \neq \{e\}$. ولنفرض لغرض التناقض أن G ليست إبدالية. عندئذ، $G' \neq \{e\}$. بما أن G' زمرة جزئية ناظمية من G وأن G زمرة بسيطة فإن $G = G'$. إذن، $G^{(n)} = G \neq \{e\}$ لكل عدد صحيح موجب n . وهذا يناقض قابلية الحل للزمرة G . وبالتالي فإن G زمرة إبدالية Δ

تقرين (٤)

لتكن G زمرة منتهية. أثبت أن G زمرة قابلة للحل إذا وفقط إذا كان $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$ من G .

الحل

لنفرض أولاً أن G قابلة للحل وأن $H \neq \{e\}$ زمرة جزئية من G . وبما أن G قابلة للحل فإن H قابلة للحل أيضاً. إذا كان $H' = H$ فإن $H' = H = (H')' = H^{(2)} = H^{(n)}$. وباستخدام الإستقراء الرياضي نخلص إلى أن $H^{(n)} = H \neq \{e\}$ لكل عدد صحيح موجب n مما يناقض قابلية الحل للزمرة H . وبالتالي فإن $H' \neq H$. ولبرهان العكس نفرض أن $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$. عندئذ، $G' \neq G$ ومن ثم من $G' < G$. إذا كان $G^{(n)} \neq \{e\}$ فإن $G^{(n)} \neq G^{(n+1)}$. أي أن $G^{(n+1)} < G^{(n)}$. ولذا فإننا نحصل على السلسلة $G^{(n+1)} < G^{(n)} < G^{(n-1)} < \dots < G^{(2)} < G^{(1)} = G' < G$. وبما أن

G منتهية وأن $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$ من G فإنه يجب أن يوجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $G^{(n)} = \{e\}$. وبالتالي فإن G زمرة قابلة للحل Δ

تمارين (٧, ٢)

- (١) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن G قابلة للحل.
- (٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عدداً أوليان فأثبت أن G قابلة للحل.
- (٣) أثبت أن $(GL(2, \mathbb{R}))' = SL(2, \mathbb{R})$.
- (٤) إذا كان $n \geq 3$ فأثبت أن $GL(n, \mathbb{R})$ غير قابلة للحل.
- (٥) أثبت أن $SL(2, 3)$ قابلة للحل وأن طولها الاشتقاقي يساوي 3.
- (٦) أثبت أن $GL(2, 3)$ قابلة للحل وأن طولها الاشتقاقي يساوي 4.
- (٧) أثبت أن $SL(2, 3)$ كثيرة الدورية ولكنها ليست قابلة للحل فوقياً.
- (٨) إذا كانت كل من $G_1, G_2, \dots, G_n$ قابلة للحل فأثبت أن $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ قابلة للحل.
- (٩) إذا كانت كل من G_1 و G_2 قابلة للحل فأثبت أن شبه الضرب المباشر لهما زمرة قابلة للحل.
- (١٠) إذا كانت كل من G_1 و G_2 كثيرة الدورية فأثبت أن شبه الضرب المباشر لهما زمرة كثيرة الدورية. استنتج أن $SL(2, 3)$ كثيرة الدورية.
- (١١) أثبت أن $T = \langle x, y \mid x^6 = e, x^3 = y^2, yx = x^{-1}y \rangle$ كثيرة الدورية.
- (١٢) إذا كانت H زمرة جزئية من G فأثبت أن $H^{(n)} \subseteq G^{(n)}$ لكل $n \geq 0$.
- (١٣) إذا كانت G زمرة فأثبت أن $G^{(n)}$ زمرة جزئية لامتغيرة تماماً لكل $n \geq 0$.
- (١٤) إذا كانت $G = A \times B$ فأثبت أن $G^{(n)} = A^{(n)} \times B^{(n)}$ لكل $n \geq 0$.
- (١٥) إذا كانت $G \neq \{e\}$ زمرة قابلة للحل فأثبت أن عوامل أي سلسلة تركيبية للزمرة G هي زمر دورية رتبة كل منها عدداً أولياً.
- (١٦) إذا كانت كل H و K زمرة جزئية من الرتبة 12 من A_5 فأثبت أن H و K مترافقتان.
- (١٧) أثبت أن $PSL(2, 11)$ تحتوي على زمري هول من الرتبة 12 غير متمثلتين.
- (١٨) بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:
- (أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2 حيث p عدداً أولياً فإن G قابلة للحل.

- (ب) إذا كانت G زمرة قابلة للحل فإن G زمرة من النوع p حيث p عدد أولي.
- (ت) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \in \text{Syl}_p(G)$ فإن H قابلة للحل.
- (ث) إذا كانت G زمرة بسيطة وقابلة للحل فإن G دورية.
- (ج) إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G قابلة للحل فوقياً.
- (ح) $S_3 \times \mathbb{Z}$ قابلة للحل.
- (خ) إذا كانت G زمرة غير تافهة قابلة للحل فإن $Z(G) \neq \{e\}$.
- (د) إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل فإنها تحقق عكس مبرهنة لاجرانج.
- (ذ) إذا كانت G زمرة رتبها 35 فإن G قابلة للحل.

(٧,٣) الزمر المتلاشية

Nilpotent Groups

قدمنا في البند (٧,٢) صنف هام من الزمر وهو الزمر القابلة للحل ، ونقدم في هذا البند صنف آخر هو الزمر المتلاشية ونبين العلاقة بين هذه الزمر والزمر القابلة للحل.

تعريف (٧,١٢)

(أ) نقول إن السلسلة الناظرية $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ هي سلسلة مركزية (central series) إذا كان $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$ لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$.

(ب) نقول إن الزمرة G زمرة متلاشية (nilpotent group) إذا وجدت سلسلة مركزية للزمرة G .

ملحوظات

(١) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $\{e\} \leq Z(G) = G$ سلسلة مركزية للزمرة G وبالتالي فإن G زمرة متلاشية.

(٢) إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي سلسلة مركزية للزمرة G هي سلسلة قابلة للحل وذلك لأن $Z(G/H_i)$ زمرة إبدالية. وبالتالي فإن أي زمرة متلاشية يجب أن تكون قابلة للحل. ولكن العكس ليس صحيحاً والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٧, ١١)

الزمرة S_3 قابلة للحل ولها سلسلتين ناظميتين هما $\{e\} \leq S_3 \leq A_3$ و $\{e\} \leq S_3$. للسلسلة الأولى لدينا: $S_3 / \{e\} \cong S_3 \not\leq Z(S_3 / \{e\}) = \{e\}$. وأما للسلسلة الثانية فإن $A_3 / \{e\} \cong A_3$ وإن $A_3 \not\leq Z(S_3 / \{e\})$. وبالتالي فإن S_3 ليست متلاشية $\square$

قبل أن نقدم المزيد من الأمثلة على الزمر المتلاشية نعطي تعريفان مكافئان آخران لهذه الزمر.

لتكن G زمرة. نعرف متتالية $G^{[n]}$ من الزمر الجزئية استقرائياً على النحو التالي:

$$G^{[1]} = G \text{ و } G^{[n]} = [G^{[n-1]}, G] \text{ لكل } n \geq 2$$

من السهل أن نرى أن :

$$G = G^{[1]} \supseteq G^{[2]} \supseteq G^{[3]} \supseteq \dots$$

تسمى هذه السلسلة من الزمر الجزئية ، سلسلة مركزية تنازلية للزمرة G

(**descending central series of G**). سنعرف الآن متتالية أخرى $Z_n(G)$ من الزمرة الجزئية

للزمرة G استقرائياً على النحو التالي : $Z_0(G) = \{e\}$ و $Z_1(G) = Z(G)$. الآن:

بما أن $Z_1(G) \triangleleft G$ وأن $Z(G/Z_1(G)) \triangleleft G/Z_1(G)$ فإننا نجد استناداً إلى مبرهنة التقابل،

زمرة جزئية ناظمية وحيدة $Z_2(G)$ من G بحيث يكون $Z_1(G) \subseteq Z_2(G)$

و $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_2(G))$. لنفرض الآن أن $Z_n(G)$ معرفة حيث $n \geq 1$. أي أن

$Z_n(G) \triangleleft G$ ، $Z_{n-1}(G) \subseteq Z_n(G)$ ، $Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z(G/Z_{n-1}(G))$. عندئذ ،

توجد زمرة جزئية ناظمية وحيدة $Z_{n+1}(G)$ من G بحيث يكون :

$Z_n(G) \subseteq Z_{n+1}(G)$ و $Z_n(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$. وبالتالي فإن لدينا السلسلة

الناظمية التالية من الزمر الجزئية للزمرة G :

$$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) \leq \dots$$

حيث $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$ لكل $n \geq 0$. تسمى مثل هذه السلسلة الناظمية ،

سلسلة مركزية تصاعدية للزمرة G (**ascending central series of G**) .

المبرهنة التالية تقدم لنا التكافؤ بين الزمر المتلاشية ووجود سلاسل مركزية تصاعدية وتنازلية

مبرهنة (٧, ٣٠)

إذا كانت G زمرة فإن العبارات التالية متكافئة :(أ) G زمرة متلاشية.(ب) يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G = Z_n(G)$.(ج) يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$.

البرهان

(أ) $\Leftrightarrow$ (ب) : بما أن G متلاشية فإنه يوجد عدد صحيح غير سالب n وسلسلة مركزية :

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n = G$$

ولذا فإن $H_i / H_{i-1} \leq Z(G / H_{i-1})$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$. سنبرهن بالاستقراء الرياضي على i أن $H_i \leq Z_i(G)$ لكل $i = 0, 1, 2, \dots, n$. إذا كان $i = 0$ فإن $H_0 = \{e\} = Z_0(G)$. لنفرض الآن أن $H_i \leq Z_i(G)$ حيث $i \geq 0$. بما أن $H_i H_{i+1} / H_i = H_{i+1} / H_i \leq Z(G / H_i)$ فإننا نجد استناداً إلى المبرهنة (٧, ٢٠) أن $[H_{i+1}, G] \leq H_i \leq Z_i(G)$. أيضاً :

$$Z_i(G) H_{i+1} / Z_i(G) \leq Z(G / Z_i(G)) = Z_{i+1}(G) / Z_i(G)$$

ومنه فإن $H_{i+1} \leq Z_i(G) H_{i+1} \leq Z_{i+1}(G)$ ونكون قد أنهينا خطوة الاستقراء. وبما أن $H_n = G$ فإننا نخلص إلى أن $Z_n(G) = G$.

(ب) $\Leftrightarrow$ (أ) : بما أن $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) = G$ سلسلة ناظرية بحيث إن $Z_{i+1}(G) / Z_i(G) = Z(G / Z_i(G))$ لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$ فإننا نخلص إلى أن G زمرة متلاشية.

(أ) $\Leftrightarrow$ (ج) : بما أن G زمرة متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية :

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n = G$$

سنبرهن الآن أن $G^{[i]} \leq H_{n-i+1}$ لكل $i = 1, 2, \dots, n+1$. من الواضح أن $G^{[1]} = G = H_n$. لنفرض الآن أن $G^{[i]} \leq H_{n-i+1}$ حيث $1 \leq i \leq n+1$. بما أن $H_{i+1} / H_i \leq Z(G / H_i)$ لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$ فإننا نجد استناداً إلى المبرهنة (٧, ٢٠) أن $[H_{i+1}, G] \leq H_i$. ولذا فإن $G^{[i+1]} = [G^{[i]}, G] \leq [H_{n-i+1}, G] \leq H_{n-i}$. وبالتالي نكون قد أنهينا خطوة الاستقراء ونخلص إلى أن $G^{[n+1]} \leq H_0 = \{e\}$.

(ج) $\Leftrightarrow$ (أ) : إذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$ فإن السلسلة $G = G^{[1]} \leq G^{[2]} \leq \dots \leq G^{[n+1]} = \{e\}$ سلسلة مركزية للزمرة G وبالتالي فإن G زمرة متلاشية ♦

ملحوظة

إذا عرفنا طول السلسلة المركزية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $H_n = G$ ، طول السلسلة المركزية التصاعدية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $Z_n(G) = G$ وطول السلسلة المركزية التنازلية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٧,٣٠) أن هذه الأطوال متساوية للزمر المتلاشية. يسمى هذا الطول فصل تلاشي (nilpotency class) الزمرة المتلاشية G .

مثال (٧,١٢)

أثبت أن زمرة المربعات $Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^{-1} \rangle$ زمرة متلاشية.

الحل

لاحظ أن $|Q_8| = 8$ وأن $Z(Q_8) = \langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ، $Q_8 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، وبالتالي فإن $\{e\} \leq \mathbb{Z}_2 \leq Q_8$ سلسلة مركزية للزمرة Q_8 وبالتالي فهي متلاشية □

المثال (٧,١٢) حالة خاصة من المبرهنة المهمة التالية :

مبرهنة (٧,٣١)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p حيث p عدداً أولياً فإن G زمرة متلاشية.

البرهان

بما أن $|G| = p^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نجد أن $G/Z_1(G)$ زمرة من النوع p لكل $i \geq 0$. ولذا إذا كان $|G/Z_i(G)| > 1$ فإن $Z(G/Z_i(G)) \neq \{e\}$ وعليه إذا كان $Z_i(G) \neq \{e\}$ فإن $|Z_{i+1}(G)| \geq p|Z_i(G)|$. ومن ثم فإن $|Z_{i+1}(G)| \geq p^{i+1}$. على وجه الخصوص $|Z_n(G)| \geq p^n$ وبالتالي فإن $Z_n(G) = G$ ونخلص إلى أن G زمرة متلاشية ♦

مبرهنة (٧, ٣٢)

إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون متلاشية.

البرهان

لتكن $H \leq G$. بما أن G زمرة متلاشية فإنه يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$. سنستخدم الاستقراء الرياضي لاثبات أن $H^{[i]} \subseteq G^{[i]}$ لكل $i = 1, 2, \dots, n+1$. بما أن $H^{[1]} = H \subseteq G = G^{[1]}$ فإن العبارة صحيحة عندما $i = 1$. لنفرض الآن أن $H^{[i]} \subseteq G^{[i]}$ حيث $1 \leq i < n+1$. عندئذ : $H^{[i+1]} = [H^{[i]}, H] \subseteq [G^{[i]}, G] = G^{[i+1]}$. ولذا فإن العبارة صحيحة عند $i+1$. وبالتالي فإن $H^{[n+1]} \subseteq G^{[n+1]} = \{e\}$ ونخلص إلى أن H متلاشية. ♦

مبرهنة (٧, ٣٣)

إذا كانت G زمرة متلاشية وكانت $H \triangleleft G$ فإن G/H زمرة متلاشية.

البرهان

بما أن G زمرة متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية للزمرة G :

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$$

سنبرهن الآن أن :

$$H = H_0 H / H \leq H_1 H / H \leq \dots \leq H_{n-1} H / H \leq H_n H / H = G / H$$

سلسلة مركزية للزمرة G/H . بما أن $H_i \triangleleft G$ فإن $H_i H / H \triangleleft G/H$. أيضاً ، إذا كان

$$[x, y] \in H_i H \text{ فإن } yH \in G/H \text{ و } xH \in H_{i-1} H / H$$

$$[xH, yH] = [x, y]H \in H_i H / H \text{ ولذا فإن : } [H_{i-1} H / H, G/H] \leq H_i H / H$$

باستخدام المبرهنة (٧, ٢٠) نجد أن $H_{i+1} H / H \leq Z(G/H H_i)$ ونخلص إلى أن G/H زمرة

متلاشية. ♦

مبرهنة (٧, ٣٤)

إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمرة متلاشية فإن $G_1 \times G_2$ زمرة متلاشية.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع إثبات أن $Z_i(G_1 \times G_2) = Z_i(G_1) \times Z_i(G_2)$ لكل $i \geq 1$

الآن، بما أن G_1 و G_2 متلاشيتان فإنه يوجد عدداً غير سالبين m و n بحيث يكون
 $Z_k(G_1) = G_1$ و $Z_n(G_1) = G_1$ لنفرض أن $k = \max\{m, n\}$. عندئذ،
 $Z_k(G_1) = G_1$ و $Z_k(G_2) = G_2$. وبالتالي فإن $Z_k(G_1 \times G_2) = Z_k(G_1) \times Z_k(G_2) = G_1 \times G_2$ ونخلص إلى
 أن $G_1 \times G_2$ زمرة متلاشية ♦

نتيجة (٧, ٣٥)

إذا كانت كل من $G_1, G_2, \dots, G_n$ زمرة متلاشية فإن $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ زمرة متلاشية.

البرهان

نحصل على البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي على n والمبرهنة (٧, ٢٤) ♦

(٧, ٣, ١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(١) G زمرة متلاشية .

(٢) إذا كانت $H < G$ فإن $H < N(H)$.

(٣) إذا كانت H زمرة جزئية أعظمية من G فإن $H < G$.

(٤) إذا كانت $P \in \text{Syl}_p(G)$ فإن $P < G$.

(٥) G تماثل زمرة ضرب مباشرة لزمر من النوع p .

الحل

(١) $\Leftrightarrow$ (٢) : بما أن G متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية للزمرة G :

$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$. الآن، بما أن $H_0 \leq H < G = H_n$ فإنه يوجد عدد

صحيح غير سالب m بحيث يكون $H_m \leq H$ ولكن $H_{m+1} \not\leq H$. ولذا فإنه يوجد $x \in H_{m+1}$

بحيث يكون $x \notin H$. بما أن $xH_m \in Z(G/H_m)$ فإن $(xH_m)(hH_m) = (hH_m)(xH_m)$ لكل

$h \in H$. ومنه فإن $h^{-1}x^{-1}hx = (xh)^{-1}hx \in H_m \subseteq H$ وعليه فإن $x^{-1}hx \in H$ ويكون

$x^{-1}Hx \subseteq H$ ، وبالمثل، $xHx^{-1} \subseteq H$. ولذا فإن $x^{-1}Hx \subseteq H$ و $H = x^{-1}(xHx^{-1})x \subseteq x^{-1}Hx \subseteq H$

وبالتالي فإن $x \in N(H)$ ونخلص إلى أن $H \neq N(H)$.

(٢) $\Leftarrow$ (٣) : بما أن H زمرة جزئية أعظمية من G وأن $H \subset N(H) \subseteq G$ فإن $N(H) = G$. وبالتالي فإن $H \triangleleft G$.

(٣) $\Leftarrow$ (٤) : لنفرض أن $P \in \text{Syl}_p(G)$ ولنفرض أن P غير ناظمية. بما أن G منتهية فإنه توجد زمرة جزئية أعظمية H من G بحيث يكون $N(P) \subseteq H$. ولذا بإستخدام (٣) نجد أن $H \triangleleft G$. لنفرض أن $x \in G$. عندئذ، $xPx^{-1} \subseteq xN(P)x^{-1} \subseteq xHx^{-1} = H$. ولذا فإن $P, xPx^{-1} \in \text{Syl}_p(H)$. وعليه يوجد $h \in H$ بحيث يكون $h(xPx^{-1})h^{-1} = P$. ومنه فإن $hx \in N(P) \subseteq H$. أي أن $x = h^{-1}hx \in H$. وبالتالي فإن $G = H$ وهذا مستحيل ونخلص إلى أن $P \triangleleft G$.

(٤) $\Leftarrow$ (٥) : بإستخدام التمرين المحلول (٥) ص ٢٢٣ نجد أن G زمرة ضرب مباشر لزمير سيلو الجزئية. وبما أن زمرة سيلو هي زمرة من النوع p فإننا نحصل على المطلوب.

(٥) $\Leftarrow$ (١) : بما أن الزمر من النوع p متلاشية فإننا نجد استناداً إلى النتيجة (٧, ٣٥) أن G متلاشية Δ .

تكوين (٢)

إذا كانت G زمرة متلاشية من الرتبة m وكان $n|m$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة n .

الحل

إذا كان $m=1$ فإن $H = \{e\}$ زمرة جزئية من G رتبها 1. لنفرض إذن أن $m > 1$ وأن $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ هو تحليل m إلى قوى عوامله الأولية. لنفرض أن $H_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$. عندئذ، استناداً إلى التمرين المحلول (١) نجد أن $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_t$. بما أن $n|m$ فإن $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$. الآن $|H_i| = p_i^{\alpha_i}$. ولذا فإن H_i تحتوي زمرة جزئية K_i من الرتبة $p_i^{\beta_i}$. وبالتالي فإن $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_t$ زمرة جزئية من G رتبها n .

تمارين (٧, ٣)

(١) عين سلسلة مركزية تنازلية للزمرة S_3 ومن ثم استنتج أن S_3 ليست متلاشية.

(٢) عين سلسلة مركزية للزمرة D_4 .

(٣) عين سلسلة مركزية تصاعدية للزمرة $\mathbb{Z}_2 \times S_3$.

(٤) أثبت أن D_n زمرة متلاشية إذا وفقط إذا كان $n = 2^k$ حيث k عدد صحيح موجب.

(٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث $p > q$ عدداً أوليان وحيث $p \not\equiv 1 \pmod{q}$ فأثبت أن G متلاشية.

(٦) إذا كانت $H \leq Z(G)$ وكانت G/H زمرة متلاشية فأثبت أن G زمرة متلاشية.

(٧) بين أن النتيجة في التمرين (٦) ليست صحيحة إذا كانت $H \not\leq Z(G)$.

(٨) أثبت أن A_4 ليست زمرة متلاشية.

(٩) إذا كانت G زمرة متلاشية وكانت $H < G$ بحيث إن $[G:H]$ عدداً أولياً فأثبت أن $H < G$.

(١٠) إذا كانت G زمرة متلاشية منتهية وكانت H زمرة جزئية أعظمية من G فأثبت أن $[G:H]$ عدد أولي.

(١١) لتكن G زمرة ولتكن H تقاطع جميع زمر G الأعظمية (تسمى H زمرة فراتيني **Fratini** الجزئية من G).

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن H زمرة جزئية ناظمية ومتلاشية من G .

(ب) أثبت أن الزمرة المنتهية G تكون متلاشية إذا وفقط إذا كان $G' \subseteq H$.

(ج) عين H لزمرة المرباعيات Q_8 .

إجابات وإرشادات لبعض التمارين

Answers and Hints for Some Exercises

تمارين (١, ١)

(٤) افرض لغرض التناقض أن $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ هي جميع الأعداد الأولية واعتبر العدد

$$N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$$

(٦) بما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فإن $c = ar = bs$ حيث $r, s \in \mathbb{Z}$. وبما أن $\gcd(a, b) = 1$ فإن

$1 = ax + by$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ولذا فإننا نستنتج أن $c = ab(sx + ry)$. والعبرة خاطئة عندما

يكون $\gcd(a, b) > 1$ ، فمثلاً $4 \mid 12$ و $6 \mid 12$ ولكن 24 لا يقسم 12 .

(٩) العكس غير صحيح حيث 11 عدد أولي ولكن $2^{11} - 1$ عدد مؤلف.

(١٠) إذا كان n مؤلفاً فإن $n = ab$ حيث $1 < a, b < n$. بما أن $a < n$ فإن $a \mid (n-1)!$ وبما

أن $a \mid (n-1)! + 1$ فإن $a \mid 1$ وهذا مستحيل.

(١١) (أ) استخدم الاستقراء الرياضي.

تمارين (١, ٢)

$$(1 \ 4 \ 5) \circ (7 \ 8) \circ (2 \ 5 \ 7) = (1 \ 4 \ 5 \ 8 \ 7 \ 2) \quad (٢) \text{ (أ)}$$

$$= (1 \ 2) \circ (1 \ 7) \circ (1 \ 8) \circ (1 \ 5) \circ (1 \ 4)$$

التبديل فردي ورتبته 6

$$o[(1 \ 2 \ 3) \circ (4 \ 5) \circ (6 \ 7 \ 8 \ 9)] = \text{lcm}(3, 2, 4) = 12 \quad (د)$$

$$(1 \ 2 \ 3) \circ (4 \ 5) \circ (6 \ 7 \ 8 \ 9) = (1 \ 3) \circ (1 \ 2) \circ (4 \ 5) \circ (6 \ 9) \circ (6 \ 8) \circ (6 \ 7)$$

ولذا فإنه تبديلاً زوجياً.

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} = (\alpha(2) \ \alpha(4) \ \alpha(6)) = (5 \ 4 \ 6) \quad (٣) \text{ (أ)}$$

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} = (\alpha(2) \ \alpha(3) \ \alpha(6) \ \alpha(7)) = (2 \ 1 \ 6 \ 7) \quad (ب)$$

$$\alpha = (1 \ 2) \circ (5 \ 6) \circ (7 \ 8) \quad (٧)$$

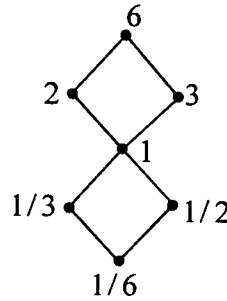
$$\frac{P(n, k)}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!} : \text{عدد الدورات من الطول } k \text{ المختلفة هو}$$

تمارين (١,٣)

- (١) إبدالية وليست تجميعية .
 (٢) إبدالية وتجميعية .
 (٣) إبدالية وتجميعية .
 (٤) ليست إبدالية وليست تجميعية .
 (٥) إبدالية وتجميعية .
 (٦) إبدالية وتجميعية .
 (٧) إبدالية وتجميعية .
 (٨) إبدالية وتجميعية .
 (٩) إبدالية وتجميعية .
 (١٠) إبدالية وليست تجميعية .
 (١١) إبدالية وليست تجميعية .
 (١٢) ليست إبدالية وليست تجميعية .
 (١٣) ليست إبدالية وليست تجميعية .
 (١٤) إبدالية وتجميعية .
 (١٥) إبدالية وتجميعية .

تمارين (١,٤)

(٣) (ب)



(٦) (أ) بما أن $a \wedge b \leq a$ وأن $a \wedge b \leq b \vee c$ فإن $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ وبالمثل

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ ، إذن ، $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$

(٧) (أ) إذا كانت L توزيعية فإن $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ولذا فإن

$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ وليرهان العكس ، لاحظ أنه من التمرين ٦ (أ) لدينا

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$. وبالتالي نحصل على المساواة من الفرض.

$$b = b \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c) \quad (٨)$$

$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c) = c \vee (a \wedge b) = c \vee (a \wedge c) = c$$

تمارين (١، ٢)

(١) ليست زمرة لأن $*$ ليست تجميعية ولا يوجد عنصر محايد .

(٢) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر -1 .

(٣) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير لكل $a \neq 0$.

(٤) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر 1 .

(٥) ليست زمرة لأن $*$ ليست تجميعية .

(٦) زمرة إبدالية .

(٧) ليست زمرة ، العنصر المحايد 0 ولكن لا يوجد نظير لكل $x \in \mathbb{N}$.

(٨) ليست زمرة ، $*$ ليست تجميعية ولا يوجد عنصر محايد .

(٩) ليست زمرة ، $*$ ليست تجميعية .

(١٠) ليست زمرة ، $*$ ليست تجميعية .

(١١) ليست زمرة ، $*$ ليست تجميعية .

(١٢) زمرة إبدالية ، العنصر المحايد 0 ونظير $a \neq -1$ هو $(-a/b, 1/b)$.

(١٣) ليست زمرة ، $*$ ليست عملية ثنائية .

(١٤) ليست زمرة ، لا يوجد عنصر محايد .

(١٥) ليست زمرة ، لا يوجد عنصر محايد .

(١٨) العنصر المحايد هو $(0, 1)$ ونظير (a, b) هو $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$.

(٢٠) لاحظ أنه لكل $e \neq A \in G$ ولكل $k \in \mathbb{Z}^+$ ، $A^k = \begin{bmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(٢١) إذا كان $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ رتبته n فإن $\frac{na}{b} = 0$ ومنه فإن $a = 0$ مستحيل .

(٢٢) -1 رتبته 2 .

(٢٥) (أ) $*$ ليست تجميعية .

(٢٧) (أ) الرتب هي 6 ، 4 ، 3 على التوالي . (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ رتبته 2 .

(ج) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = aabb \Rightarrow ba = ab \quad (٣٢)$$

$$(٣٣) \text{ أثبت أن } (ba)^n = (ab)^n \text{ وأن } (ba)^{n+1} = (ab)^{n+1} \text{ ومن ثم } ab = ba.$$

$$(٣٦) \text{ أثبت أولاً أن } a^2 = e.$$

$$(٣٧) \text{ أثبت أولاً أن } b = a^{-1}.$$

$$(٣٨) \text{ أثبت أولاً أن } (ba)^2 = (ab)^3 \text{ وأن } (ab)^2 = (ba)^3.$$

$$(٤١) \text{ استخدم الاستقراء الرياضي على } n.$$

$$(٤٢) \text{ إذا كان } a \in G \text{ فإن العناصر } e, a, a^2, \dots, a^n \text{ ليست جميعها مختلفة.}$$

$$(٤٣) \text{ بما أن } \gcd(m, n) = 1 \text{ فإن } 1 = ms + nt \text{ حيث } s, t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{الآن : } x = x^{ms+nt} = x^{ms}x^{nt} \text{ ضع } y = x^{nt} \text{ و } z = x^{ms}$$

$$(٤٦) \text{ ولذا فإن } g^5 h g^{-5} = h^{32}.$$

$$(٤٧) \text{ أثبت أن } y^{-1}x^{-1}y = yx^{-1}y^{-1}, \quad x^{-1}y^{-1}x = xy^{-1}x^{-1}, \quad x^2y = yx^2$$

$$\text{ومن ثم استنتج أن } xy = yx \text{ و } (xyx^{-1}y^{-1})^2 = e$$

تمارين (٢, ٢)

$$(٣) \text{ H و L إبداليتان ولكن K ليست إبدالية.}$$

$$(٤) \text{ كل من H ، K ، M زمرة جزئية ولكن L ليست زمرة جزئية لأنها لا تحتوي العنصر المحايد}$$

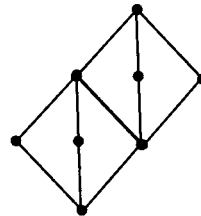
$$(1, 0)$$

$$(٨) \text{ H و N زمرة جزئية. K ليست زمرة جزئية، فعلى فرض أن } b, c \in Y \text{ حيث } \sigma(b) = c,$$

$$\mu(b) = b \text{ و } \mu(c) \notin Y \text{ فإن } \mu(c) \notin Y \text{ فإن } (\mu \circ \sigma)(b) = \mu(c) \notin Y. \text{ ليست زمرة جزئية.}$$

$$(٩) \text{ لاحظ أن } H = \{e, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\} \text{ ولذا فهي ليست زمرة جزئية من } S_3.$$

$$(١٠) \text{ كلاهما زمرة دورية من الرتبة 6.}$$



(١١)

(١٢) $U_{27} = ([2])$ دورية رتبها 18.

(١٣) الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}_{p^n}$ حيث p عدد أولي هي سلسلة تتكون من $(n+1)$ زمرة جزئية.



(١٤) مخطط الزمر الجزئية للزمرة $\mathbb{Z}_{pq}$ حيث p و q عددين أوليان يأخذ الشكل

(١٧) U_n دورية إذا وفقط إذا كان $n = 2, 4, p^k, 2p^k$ حيث p عدد أولي.

(١٨) لكل من D_3 و S_3 .



(٢٦) إذا كانت Q^* دورية فإن $Q^* = \langle \frac{a}{b} \rangle$ حيث $\gcd(a, b) = 1$ ولذا فإن $\frac{1}{2} = (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

أي أن $2a^2 = b^n$ مستحيل. أما إذا كانت $\mathbb{R}^*$ دورية نجد أن Q^* دورية مستحيل أيضاً.

(٢٧) Q_8 أو S_3 .

(٢٨) $H = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \leq GL(2, \mathbb{R})$ رتبها 2.

(٢٩) إذا كان $|G| = n$ فإن عدد المجموعات الجزئية من G هو 2^n . لا يوجد زمرة غير منتهية عدد

زمرها الجزئية منته لأن $\langle a \rangle \leq G$ لكل $a \in G$ و $a \neq e$.

(٣٠) $2\mathbb{Z}$.

(٣١) $\mathbb{Z}$.

(٣٣) إذا كانت G غير دورية وكان $e \neq a \neq b \in G$ فإن كل من $\langle a \rangle$ ، $\langle b \rangle$ ، $\langle ab \rangle$ زمرة

جزئية فعلية من G وهذا مستحيل.

(٣٨) (ج) خذ $G = (\mathbb{Z}, +)$ و $S = \mathbb{N}$.

(٤٠) بما أن $o(x^{-1}ax) = o(a) = n$ فإن $x^{-1}ax = a$ ومن ثم فإن $a \in Z(G)$.

(٤٦) بما أن $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$ فإن $(x^{-1})^{-1}Hx^{-1} \subseteq H$. لنفرض أن $h \in H$. عندئذ،

$hxh^{-1} \in H$ لكل $x \in G$. أي أن $hxh^{-1} = h_1 \in H$ ومنه فإن $h = x^{-1}h_1x \in x^{-1}Hx$.

(٤٧) ولذا فإن $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$.

(٤٨) بما أن $|H| = |xHx^{-1}|$ وأن K دورية منتهية فإنها تحتوي على زمرة وحيدة لكل رتبة. ولذا

فإن $H = xHx^{-1}$.

(أ) خاطئة	(ب) خاطئة	(ت) صائبة
(ث) صائبة	(ج) خاطئة	(ح) خاطئة
(خ) خاطئة	(د) صائبة	(ذ) خاطئة
(ر) صائبة	(ز) صائبة	(س) خاطئة
(ش) خاطئة	(ص) خاطئة	(ض) صائبة
(ط) صائبة	(ظ) خاطئة	(ع) خاطئة
(غ) خاطئة	(ف) صائبة	

تمارين (٣, ١)

- (١) تشاكل أحادي . (٢) تشاكل غامر . (٣) ليست تشاكل .
(٤) تماثل . (٥) تماثل . (٦) تشاكل غامر .

(٧) تشاكل ، $\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$ ، $\text{Ker}\varphi = 4\mathbb{Z}$.

- (٨) ليست تشاكل . (٩) تشاكل أحادي . (١٠) تماثل .
(١١) تشاكل . (١٢) ليس تشاكل . (١٣) تشاكل .
(١٤) تشاكل . (١٥) تشاكل . (١٦) تشاكل .
(١٧) تشاكل . (١٩) تشاكلان هما التافه والمحايد .

(٢٠) جميع التطبيقات الأحادية حيث $\varphi(e) = ([0], [0])$ هي تماثلات وهذه عددها $6 = 3!$.
(٢١) كل من $\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ دورية ولذا أي تماثل φ من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ إلى $\mathbb{Z}_6$ يتمدد تماماً بمعرفة $\varphi([1], [1])$ ويجب أن يكون مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_6$. وبما أنه مولدات $\mathbb{Z}_6$ هي $[1]$ و $[5]$ فإنه يوجد تماثلان .

(٢٢) يوجد 4 تماثلات لأن عدد مولدات $\mathbb{Z}_{10}$ هو 4 .

(٢٣) اثنان (عدد مولدات $\mathbb{Z}_6$) .

(٢٤) أربعة تماثلات . (٢٥) أربعة تماثلات . (٢٦) عدد مولدات U_{18} .

(٢٧) عدد مولدات U_{25} . (٢٩) جميع الزمر غير متماثلة .

(٣٠) يوجد عدد غير منته من التشاكلات .

(٣١) $a = e$ (٣٦) G يجب أن تكون إبدالية .

$$\varphi(0, n) = k^n \text{ و } \varphi(m, 0) = h^m \text{ حيث } \varphi(m, n) = h^m k^n \quad (٣٧)$$

$$\varphi(G) = \{x^n : x \in G\} \text{ و } \text{Ker} \varphi = \{x \in G : x^n = e\} \quad (٣٨)$$

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{R} \text{ المعرفة بالقاعدة } \varphi(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ تماثل.} \quad (٤٣)$$

$$\varphi(x, y) = (-1)^y x \quad (٤٤)$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(xa^{-1}) = e_2 \Leftrightarrow xa^{-1} \in K \Leftrightarrow x = ka, k \in K \quad (٤٦)$$

$$(أ) \text{ صائبة} \quad (ب) \text{ خاطئة} \quad (ت) \text{ صائبة} \quad (٤٨)$$

$$(ث) \text{ صائبة} \quad (ج) \text{ خاطئة} \quad (ح) \text{ صائبة}$$

$$(خ) \text{ خاطئة} \quad (د) \text{ صائبة} \quad (ذ) \text{ صائبة}$$

$$(ر) \text{ خاطئة} \quad (ز) \text{ صائبة} \quad (س) \text{ صائبة}$$

$$(ش) \text{ صائبة} \quad (ص) \text{ صائبة} \quad (ض) \text{ خاطئة}$$

$$(ط) \text{ خاطئة} \quad (ظ) \text{ صائبة} \quad (ع) \text{ صائبة}$$

$$(غ) \text{ صائبة} \quad (ف) \text{ خاطئة}$$

تمارين (٣، ٢)

$$\{[0], [4], [8]\}, \{[1], [5], [9]\}, \{[2], [6], [10]\}, \{[3], [7], [11]\} \quad (١)$$

$$H, [7]H, [13]H, [19]H \quad (٣)$$

(٤) توجد أربعة مجموعات مشاركة مختلفة والمجموعات المشاركة اليسرى لا تساوي المجموعات المشاركة اليمنى.

$$(٥) \text{ توجد مجموعتان مشاركتان وأن } bH = Hb$$

$$(١١) \text{ لا، فمثلاً } S_4 \text{ تحقق عكس مبرهنة لاجرانج ولكن } A_4 \text{ لا تحقق عكس مبرهنة لاجرانج.}$$

$$(١٤) \text{ لاحظ أن } G = H \cup Ha = H \cup aH \text{ وأن } H \cap Ha = H \cap aH = \phi \text{ ولذا فإن}$$

$$aH = G - H = Ha$$

$$(١٥) \text{ إذا كانت } H \text{ زمرة جزئية فعلية فإن } |H| = p \text{ أو } |H| = q$$

$$(١٦) \text{ إذا كانت كل من } a \text{ و } b \text{ عنصر من الرتبة } 2 \text{ فإن } ab \neq e \text{ و } (ab)^2 = a^2 b^2 = e \text{ ولذا}$$

$$\text{فإن } o(ab) = 2 \text{ أي أن } H = \{e, a, b, ab\} \text{ ومن ثم فإن } 4 \mid 2n \text{ وهذا مستحيل لأن } n \text{ فردي.}$$

(٢٢) بما أن $|H \cap K|$ يقسم 16 فإن $|H \cap K| = 1, 2, 4, 8$. إذا كان $|H \cap K| \leq 4$ فإن $|HK| \geq \frac{16 \times 16}{4} = 64$ مستحيل.

(٢٤) رتبة كل من عناصر G يساوي 2 ومن ثم فإن G إبدالية.

(٢٦) $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ، $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$ ، ولكن $n\mathbb{Z} = \{0\}$ وبالتالي فإن دليل $\bigcap n\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ غير منته.

(أ) صائبة	(ب) خاطئة	(ت) صائبة
(ث) صائبة	(ج) خاطئة	(ح) صائبة
(خ) خاطئة	(د) صائبة	(ذ) صائبة
(ر) خاطئة		

تمارين (٣, ٣)

(١) ليست ناظمية .

(٤) (ج) K ليست زمرة جزئية من G (د) L ليست ناظمية من G

(٥) $H \cap K$ ليست ناظمية من G ، فمثلاً ضع $G = K = S_3$ و $H = \langle (2 \ 3) \rangle$. عندئذ ، $H \cap K = H$ ليست ناظمية من S_3 .

(٨) لنفرض أن $H \leq G$ وأن $g \in G$ ، $a \in H$. بما أن $\langle a \rangle \triangleleft G$ فإن $\langle a \rangle \subseteq H$. $g^{-1}ag \in \langle a \rangle \subseteq H$ ولذا فإن $H \triangleleft G$.

(١٠) أثبت أن $[G : H] = 2$.

(١٣) لنفرض أن $e \neq a \in H$ وأن $x \in G$. عندئذ :

$$H \triangleleft G \Rightarrow x^{-1}ax \in H \Rightarrow x^{-1}ax = e \text{ or } x^{-1}ax = a \Rightarrow ax = xa \Rightarrow a \in Z(G)$$

(٢٠) T غير قابلة للاختزال جزئياً لأن $\langle a^3 \rangle \cap \langle a^2 \rangle = \{e\}$.

(أ) خاطئة	(ب) صائبة	(ت) صائبة	(ث) صائبة
(ج) صائبة	(ح) خاطئة	(ج) خاطئة	(د) خاطئة
(ذ) خاطئة	(ر) صائبة		

تمارين (٣, ٤)

- (١) (أ) 6 (ب) 15 (ج) 9 (د) 60 (هـ) 60
 (٢) بما أن $o(a, b) = \text{lcm}(o(a), o(b)) = 5$ فإن $o(a) = o(b) = 5$ ويوجد 16 عنصر من هذا النوع أو $o(a) = 5$ و $o(b) = 1$ ويوجد 4 عناصر من هذا النوع أو $o(a) = 1$ و $o(b) = 5$ ويوجد 4 عناصر من هذا النوع. ولذا فإن الزمرة تحتوي على 24 عنصر من الرتبة 5.

$$(٣) \langle [5] \rangle \times \langle [3] \rangle \text{ زمرة جزئية رتبته } 24.$$

$$(٤) \langle ([400], [50]) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4.$$

$$(٥) D_{42} \text{ تحتوي على عنصر رتبته } 42 \text{ ولكن لا تحتوي على عناصر من الرتبة } 42.$$

$$(٦) D_6. (١١) \text{ لا، لأن } \gcd(3, 9) = 3. (١٣) 3.$$

$$(١٥) \text{ عدد العناصر } 48 \text{ وعدد الزمر الجزئية الدورية } 6.$$

$$(١٦) \langle [3] \times [4] \rangle. \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 (١٧)$$

$$(١٩) U_{900} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20} \text{ ولذا أعلى رتبة للعناصر هي } \text{lcm}(2, 6, 20) = 60.$$

$$(٢١) n = 275. (٢٢) n = 49.$$

$$(٢٧) \text{ لا : خذ } n = 4 \text{ و } x \in H. \text{ عندئذ } o(x^2) = 2 \text{ ولذا فإن } x^2 \notin H.$$

$$(٢٩) \text{ استخدم مبرهنة لاجرانج. (٣٠) نعم.}$$

$$(٣٣) \text{ لا : } T \text{ غير متحللة ولكنها قابلة للاختزال جزئياً.}$$

$$(٣٦) |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |H||K| = |G|. \text{ ولذا فإن } HK = G \text{ ومن ثم فإن } G = H \times K.$$

$$(٣٨) \text{ خذ } G = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4)\}, H_1 = \langle (1\ 2) \rangle, H_2 = \langle (3\ 4) \rangle, H_3 = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4) \rangle.$$

$$(٤١) (أ) خاطئة (ب) خاطئة (ت) خاطئة (ث) خاطئة$$

$$(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) صائبة$$

$$(ذ) صائبة (ر) خاطئة (ز) صائبة (س) خاطئة$$

تمارين (٣, ٥)

$$(١) \mathbb{Z}_4. (٢) \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4. (٣) \mathbb{Z}_{12}. (٤) \mathbb{Z}_2.$$

$$(٥) \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. (٦) \mathbb{Z}_4. (٧) \mathbb{Z}_8. (٨) \mathbb{Z}_8.$$

- (٩) $\mathbb{Z}_4$ (١٠) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (١١) $\mathbb{Z}_4$ (١٢) $\mathbb{Z}_8$ (١٣) $\mathbb{Z}$ (١٤) لا ، لأن رتب جميع عناصر $\mathbb{Q}$ غير منتهية.
- (١٦) $Z(D_4) = \{e, a^2\}$ ، $Z(Q_8) = \langle a^2 \rangle$ ، $Z(T) = \langle a^3 \rangle$ ، $Z(S_3 \times \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$ ، $Z(S_3 \times D_4) \cong \langle a^2 \rangle$
- (١٧) $GL(2, \mathbb{R})' = SL(2, \mathbb{R})$ ، $Q'_8 = \{e, a^2\}$
- (٢٠) $|G/H| = n \Rightarrow (aH)^n = H \Rightarrow a^n \in H$
- (٢٦) لا : ضع $G = S_3$ ، $|K| = 2$ ، $|H| = 3$
- (٢٧) $|Z(G)| = 1, p, q, pq$. G غير إبدالية ولذا $|Z(G)| \neq pq$. إذا كان q أو p $|Z(G)| = p$ فإن $G/Z(G)$ دورية ومن ثم G إبدالية. إذن $|Z(G)| = 1$
- (٣٢) بما أن G إبدالية فإن $HK \leq G$ وأن HK منتهية لأن لكل من H و K منتهية . بما أن $H, K \leq HK$ فإن $m|HK|$ و $n|HK|$. ولذا فإن $d|HK|$. ولذا توجد زمرة جزئية من HK (ومن ثم زمرة جزئية من G) من الرتبة d .
- (٣٣) $H = \{x : x^n = e\} \leq G$. بما أن $n|G|$ فإنه يوجد $K \leq G$ حيث $|K| = n$. إذا كان $a \in K$ فإن $a^n = e$. ولذا فإن $K \leq H$. ومنه فإن $n|H|$. أي أن $|H| = nm$ وبالتالي فإن عدد الحلول يجب أن يكون مضاعفاً للعدد n .

- (٣٤) (أ) صائبة (ب) صائبة (ت) خاطئة (ث) صائبة
- (ج) خاطئة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) صائبة
- (ذ) صائبة (ر) خاطئة (ز) خاطئة

تمارين (٦، ٣)

- (٥) $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ بالمعرف بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل غامر ، $\text{Ker} \varphi = \mathbb{Z}_2$
- (٦) $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x + iy) = x$ تشاكل غامر ، $\text{Ker} \varphi = \mathbb{R}$
- (٩) $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$ تشاكل غامر ، $\text{Ker} \varphi = U$
- (١٢) كل من $K_1 = \langle [1] \rangle$ ، $K_2 = \langle [5] \rangle$ ، $K_3 = \langle [2] \rangle$ زمر جزئية من $\mathbb{Z}_{10}$ دليلها 10 ، 5 ، 2 على التوالي. ولذا الزمر الجزئية المطلوبة هي $\varphi^{-1}(K_i)$ حيث $i = 1, 2, 3$
- (١٣) $\varphi^{-1}([9]) = \{[3], [13], [23]\}$

(١٤) استخدم مبرهنة التقابل.

(١٦) إذا كان $\varphi: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ تشاكل غامر فإن $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 / \text{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}_9$. ولذا فإن $\text{Ker}\varphi = \{e\}$. أي أن φ هو التشاكل التافه.

(١٩) استخدم مبرهنة التقابل.

$$(٢٠) \quad \mathbb{Q}_8, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \{e\} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$(٢٢) \quad \text{HN/N} \cong \text{H/H} \cap \text{N} = \text{H/H} \cap \text{M} \cong \text{HM/M}$$

(٢٧) $G/K \cong (G/H)/(K/H)$ دورية. وبما أن $|K/H| = 2$ فإن $K/H \subseteq Z(G/H)$. ولذا فإن K/H إبدالية. وبالتالي فإن G/H إبدالية.

(أ) صائبة	(ب) صائبة	(ت) صائبة	(ث) خاطئة
(ج) صائبة	(ح) خاطئة	(خ) صائبة	(د) صائبة
(ذ) صائبة	(ر) خاطئة	(ز) خاطئة	(س) صائبة

تمارين (٣, ٧)

$$(٣) \quad Z(D_4) = Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{ولذا فإن:}$$

$$\text{Inn}(D_4) \cong D_4 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Inn}(Q_8) \cong Q_8 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

(١٠) (أ) إذا كان $\varphi: G \rightarrow G$ تشاكلاً وكان $a, b \in G$ فإن :

$$\varphi([a, b]) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} = [\varphi(a), \varphi(b)] \in G'$$

ولذا فإن $\varphi(G') \subseteq G'$.

(١١) إذا كان $\varphi: G \rightarrow G$ تماثلاً وكان $x \in H \cap K$ فإن $\varphi(x) \in \varphi(H)$ و $\varphi(x) \in \varphi(K)$ ولذا فإن $\varphi(x) \in H$ و $\varphi(x) \in K$. ومنه فإن $\varphi(x) \in K \cap H$. وبالتالي فإن $\varphi(H \cap K) \subseteq H \cap K$.

(١٣) بما أن $H < G$ فإن $\varphi_g(H) \leq H$ لكل $\varphi_g \in \text{Inn}G$. وإذا فرضنا أن $\psi = \varphi_g|_H$ فإن $\psi \in \text{Aut}H$. ولذا فإن $\psi(K) \leq K$ (لأن K مميزة في H). ولكن $\varphi_g(K) = \varphi(K)$. ولذا فإن $\varphi_g(K) \leq K$ لكل $g \in G$. أي أن $gKg^{-1} \subseteq K$.

(أ) خاطئة	(ب) صائبة	(ت) خاطئة	(ث) صائبة
(ج) صائبة	(ح) صائبة	(خ) صائبة	(د) صائبة

تمارين (٤, ١)

(٣) لنفرض أن $1 \leq i, j \leq n$. عندئذ، يوجد $\sigma, \gamma \in S_n$ حيث $\sigma(1) = i$ و $\gamma(1) = j$. ضع

$\delta = \gamma\sigma^{-1}$ ويكون $\delta(i) = j$. أي أن S_n متعدية على $\{1, 2, \dots, n\}$.

(٥) لاحظ أن $(1 \ 2 \ 3 \ 4)^i(1) = i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4$.

(٦) لا يمكن إيجاد i بحيث يكون $(1 \ 2 \ 3)^i(1) = 4$.

(١٠) إذا كان $g \in G_G$ فإن $ga = a$ لكل $g \in G$. ولذا فإن $g = e$ ومن ثم $G_G = \{e\}$.

(١١) (أ) $[e] = \{geg^{-1} : g \in G\} = \{e\} \neq G$

(ب) $[a] = \{a\} \Leftrightarrow gag^{-1} = a \ \forall g \in G \Leftrightarrow a \in Z(G)$

(١٣) $[G : H] = 5$ و 160 لا يقسم $5!$.

(١٧) التطبيق $f : H \rightarrow [a]$ حيث $f(h) = ha$ قابل.

$$G = \bigcup_{i=1}^n [a_i] \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^n |[a_i]| = \sum_{i=1}^n |H| = n|H|$$

(٢١) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) خاطئة (ث) صائبة

(ج) خاطئة (ح) صائبة (خ) صائبة (د) صائبة

(ذ) صائبة (ر) صائبة

تمارين (٤, ٢)

(١) $G = S_3$ ، إذا كانت $[x]_H = \{hxh^{-1} : h \in H\} \subseteq \{gxg^{-1} : g \in G\} = [x]_G$

$|[x]_G| = 3$ ولكن $|[x]_H| = 1$ فإن $H = \langle x \rangle$ ، $x = (1 \ 2)$.

(٦) $60 = 1 + 12 + 12 + 15 + 20$

(٧)

عدد عناصر فصل التوافق	تمثيلات فصول التوافق	تجزئة العدد 6
1	(1)	1,1,1,1,1,1
15	(1 2)	1,1,1,1,2
40	(1 2 3)	1,1,1,3
90	(1 2 3 4)	1,1,4
144	(1 2 3 4 5)	1,5
120	(1 2 3 4 5 6)	6
120	(1 2) \circ (3 4 5)	1,2,3

15	$(1\ 2) \circ (3\ 4) \circ (5\ 6)$	2,2,2
90	$(1\ 2) \circ (3\ 4\ 5\ 6)$	2,4
40	$(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5\ 6)$	3,3
45	$(1\ 2) \circ (3\ 4)$	1,1,2,2

(٨) افرض أن G/H تؤثر على H بالترافق.

(١١) أثبت أن $|Z(G)| = p$.

(١٤) $[G : C(a)] = |a| = 2$.

(٢٠) (أ) صائبة (ب) صائبة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) صائبة

تمارين (٤, ٣)

(١) $n_2 = 6$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_5$ ، $n_3 = 10$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_3$ ، $n_2 = 5$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (لاحتوي دورات طولها 4).

(٢) $n_3 = 10$ (٣) $n_5 = 6$

(٥) لنفرض أن $|H| = p^t$ يقسم $p^n m$. وعما أن $|P| = p^n$ وأن $P \subseteq H$ فإن $p^t | p^n$. إذن $|P| = |H|$ ومن ثم فإن $P = H$.

(٦) لنفرض أن $Q \in \text{Syl}_p(G)$ حيث $H \subseteq Q$. الآن ، يوجد $g \in G$ حيث $gQg^{-1} = P$. ولذا فإن $gHg^{-1} \leq gQg^{-1} = P$.

(١٧) بما أن $H \triangleleft G$ فإن $xHx^{-1} = H$ لكل $x \in G$. الآن :

$$P \in \text{Syl}_p(H) \Rightarrow xPx^{-1} \in \text{Syl}_p(xHx^{-1}) \Rightarrow xPx^{-1} \in \text{Syl}_p(H)$$

إذن من وحدانية P نجد أن $xPx^{-1} = P$ ومن ثم فإن $P \triangleleft G$.

(١٩) كل منها زمرة رتبها pq حيث $p < q$ و $q \not\equiv 1 \pmod{p}$.

(٢٣) كل منها إبدالية باستخدام التمرين (٢٢) ومن ثم استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية.

(٢٥) إما أن $n_7 = 1$ أو أن $n_5 = 1$ إذا فرضنا أن $n_7 = 1$ وأن $H \in \text{Syl}_p(G)$

و $K \in \text{Syl}_5(G)$ فإن $H \triangleleft G$ وأن $HK \leq G$ من الرتبة 35.

(٢٦) $n_5 = 1$ ولتكن $H \in \text{Syl}_5(G)$. عندئذ $H \triangleleft G$ و $|H| = 5^3$. ولذا توجد $K \triangleleft H$ حيث $|K| = 5$. لنفرض أن $L \in \text{Syl}_3(G)$. عندئذ $KL = LK$ ، ومنه $LK \leq G$ من الرتبة 15.
 (٣١) $n_5 = 1$ أو $n_5 = 6$. ولذا فإنه يوجد 4 عناصر أو $6 \times 4 = 24$ عنصراً من الرتبة 5.
 (٣٢) إذا كان $|Z(G)| = 4$ فإن $G/Z(G)$ دورية ومن ثم G إبدالية أي أن $G = Z(G)$ وهذا مستحيل.

(٣٣) إذا كانت $H \leq G$ ربتها 15 فإن $[G:H] = 4$ ومن ثم فإنه يوجد تشاكل $\psi: G \rightarrow S_4$ حيث $\ker \psi \subseteq H$. ولذا فإن $\ker \psi = \{e\}$. ومنه فإن G تماثل زمرة جزئية من S_4 وهذا مستحيل لأن 60 لا يقسم 24.

(٣٦)	(أ) خاطئة	(ب) صائبة	(ت) صائبة	(ث) صائبة
	(ج) خاطئة	(ح) صائبة	(ج) خاطئة	(د) صائبة
	(ذ) صائبة	(ر) صائبة	(ز) خاطئة	

تمارين (٤, ٤)

- (١) $210 = 2 \times 5 \times 3 \times 7$ ولذا فالزمرة غير بسيطة حسب المبرهنة (٤, ٣٠).
 (٢) $216 = 2^3 \times 3^3$. إذا كانت $H \in \text{Syl}_3(G)$ فإن $[G:H] = 8$ وإذا كانت G بسيطة فإن $G \leq A_8$ مستحيل.
 (٣) $n_5 = 1$ ولذا الزمرة غير بسيطة.
 (٤) 6 أو $n_5 = 1$. لنفرض أن G بسيطة، إذن $n_5 = 6$. ولنفرض أن $H \in \text{Syl}_5(G)$. عندئذ $[G:N(H)] = 6$. ومن ثم $G \leq A_6$ مستحيل.
 (٥) $302 = 2 \times 151$ غير بسيطة حسب المبرهنة (٤, ٣٠).
 (٦) $n_{13} = 1$ ولذا الزمرة غير بسيطة.
 (٧) $351 = 3^3 \times 13$. إذا كان $n_3 = 1$ أو $n_{13} = 1$ فإن G ليست بسيطة. لنفرض إذن أن $n_3 = 13$ و $n_{13} = 27$. عندئذ تحتوي الزمرة على $27 \times 12 = 324$ عنصراً من الرتبة 13. لنفرض أن $H, K \in \text{Syl}_3(G)$. عما أن $|H \cap K| < |H|$ فإن $|H \cap K| \leq 9$. ولذا فإن $|H \cup K| \geq 27 + 27 - 9 = 45$. وبالتالي فإن $|G| \geq 324 + 45 = 369$ مستحيل.
 (٨) $n_5 = 1$ ولذا فالزمرة غير بسيطة.

(٩) 12 أو $n_{11} = 1$. إذا كانت G بسيطة وكانت $H \in \text{Syl}_{11}(G)$ فإن $[G : N(H)] = 12$. ولذا فإن $|N(G)| = 33$. ومنه فإن $N(H)$ دورية تحتوي على عنصر من الرتبة 33 ولكن $G \leq A_{12}$ و A_{12} لا تحتوي على عنصر من الرتبة 33. إذن G ليست بسيطة.

(١٠) $462 = 2 \times 231$ ولذا فالزمرة غير بسيطة حسب المبرهنة (٤, ٣٠).

(١١) إذا كانت G بسيطة فإن $n_7 = 15$ ، $n_5 = 21$ و $n_3 \geq 25$. إذا كان $|H_1 \cap H_2| = 1$ لكل $H_1, H_2 \in \text{Syl}_5(G)$ فإن G تحتوي على $21 \times 24 = 504$ عنصراً رتبة كل منها لا يساوي 7. و $15 \times 6 = 90$ عنصراً من الرتبة 7 ويكون $|G| \geq 525$ مستحيل. لنفرض إذن أنه يوجد $H_1, H_2 \in \text{Syl}_5(G)$ حيث $|H_1 \cap H_2| = 3$. عندئذ، $H_1 \cap H_2 < H_1, H_2$ ومنه $H_1 H_2 \subset N(H_1 \cap H_2)$. ولذا فإن $|N(H_1 \cap H_2)| \geq \frac{25 \times 25}{5} = 125$ ويقسم 525. إذن

$N(H_1 \cap H_2) \geq 175$ ومنه $[G : N(H_1 \cap H_2)] \leq 3$ وهذا مستحيل حسب مبرهنة الدليل.

(١٢) لنفرض أن G بسيطة. عندئذ، $n_{11} = 12$ ، $n_3 \geq 4$ ، $n_2 \geq 3$. لنفرض أن $H \in \text{Syl}_{11}(G)$. عندئذ، $[G : N(H)] = 12$. ومنه $G \leq A_{12}$. الآن، G تحتوي على عنصر x من الرتبة 11 وعنصر y من الرتبة 2. ولذا فإن $o(xy) = 22$ وهذا مستحيل لأن A_{12} لا تحتوي على عنصر من الرتبة 22.

(١٣) $542 = 2 \times 271$ ولذا فالزمرة ليست بسيطة حسب المبرهنة (٤, ٣٠).

(١٥) استخدم التمرين (١٤)

(١٧) استخدم التمرين (١٦)

(١٩) استخدم التمرين (١٨)

(٢١) استخدم التمرين (٢٠)

(٣٣) $\text{PSL}(2, 11)$ زمرة بسيطة من الرتبة 660.

(٣٤) A_6 زمرة بسيطة من الرتبة 360.

(٣٥) $A'_n = A_n$ أو $A'_n = \{e\}$ (لأن $A'_n < A_n$). وبما أن A_n بسيطة فإن $A'_n = A_n$.

(٣٩) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة (ث) صائبة

(ج) صائبة (ح) خاطئة (خ) صائبة (د) صائبة

(ذ) خاطئة (ر) صائبة (ز) خاطئة (س) صائبة

(ش) صائبة

تمارين (٥, ١)

- (١) إذا كانت $F = F(S)$ وكان $a \in S$ فإن $\langle a \rangle \leq F$. ولكن لكل $r \in \mathbb{Z}^+$ ، a^r كلمة مختزلة وأن $r = s \Leftrightarrow a^r = a^s$. إذن ، $\langle a \rangle$ زمرة دورية غير منتهية ومن ثم فإن $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z} \leq F$.
- (٢) إذا كانت F حرة فإن $\mathbb{Z} \leq F$ وهذا مستحيل.
- (٨) لنفرض أن $F = F(X)$ حيث $|X| = n!$ وليكن $\varphi: X \rightarrow S_n$ تقابل. إذن يوجد $\psi: F(X) \rightarrow S_n$ تشاكل شامل.
- (٩) $F_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ وكل مولّد يمكن إرساله لأي من عناصر $\mathbb{Z}_4$ لنحصل على تشاكل ومن ثم يكون عدد التشاكلات يساوي 16.
- (١٠) عدد التشاكلات يساوي 36.

تمارين (٥, ٢)

- (١) أثبت أن العلاقات المبينة تؤدي إلى أن $a = e$.
- (٥) $ab = b^2a = bba = ba^2b = baab \Rightarrow ba = e \Rightarrow b^{-1} = a$
- $ab = b^2a \Rightarrow b = e, ba = a^2b \Rightarrow a = e$
- إذن $G = \{e\}$.
- (١٢) $a^2 = b^2ab^{-1} \Rightarrow e = a^8 = (b^2ab^{-1})^4 = (bbab^{-1})^4 = b(ba)^4b^{-1}$
- $\Rightarrow (ba)^4 = e \Rightarrow (ab)^4 = e$
- $b^2 = a^2ba^{-1} \Rightarrow b^8 = (aaba^{-1})^4 = a(ab)^4a^{-1} = aa^{-1} = e$

تمارين (٥, ٣)

- (٦) $(fg)(i) = f(i)g(i) = g(i)f(i) = (gf)(i) \forall i \in I$
- (٧) ضع $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. التطبيق $\varphi: G/H \rightarrow \prod_{i \in I} (G/H_i)$ المعرف بالقاعدة
- $\varphi(xH) = \{(H_i, xH_i) : i \in I\}$ تشاكل أحادي.
- (٨) إذا كان $\alpha: J \rightarrow I$ فإن التطبيق $\varphi: \sum_{j \in J} G \rightarrow \sum_{i \in I} G$ المعرف بالقاعدة
- $\varphi(g)(j) = g(\alpha(j))$ تماثل.

تمارين (٥, ٤)

(١) لنفرض أن $\mathbb{Z}_3 = \langle t \rangle$. الآن

$$H \times_{\phi} \mathbb{Z}_3 = \langle a, b, c, t \mid ab = c, bc = a, ca = b, t^3 = e, t^{-1}at = b, t^{-1}bt = c, t^{-1}ct = a \rangle$$

$$= \langle a, t \mid at^{-1}a = tat, t^3 = e \rangle$$

إذا كان $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $\tau = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فإن $SL(2, 3) \cong \langle \alpha, \tau \rangle$ وتحقق العلاقات أعلاه . ولذا

$$H \times_{\phi} \mathbb{Z}_3 \cong SL(2, 3) \text{ فإن}$$

$$SL(2, \mathbb{Z}_6) \cong SL(2, 2) \times SL(2, 3) \cong S_3 \times SL(2, 3) \quad (٣)$$

$$. SL(2, 3) \cong Q_8 \times_{\phi} \mathbb{Z}$$

(٧) يوجد أربع زمر غير متماثلة .

(٨) يوجد خمسة زمر غير متماثلة .

(٩) إذا كان $p \equiv 1 \pmod{4}$ فإنه يوجد خمسة زمر غير متماثلة .وإذا كان $p \equiv 3 \pmod{4}$ فإنه يوجد أربع زمر غير متماثلة .

تمارين (٦, ١)

$$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^3} : p^3 \text{ من الرتبة } (١)$$

$$\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{p^4} \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^5} : p^5 \text{ من الرتبة } (٢)$$

$$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

$$. \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq} \quad (٢)$$

$$. \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_q \quad (٣)$$

(٩) بما أن p^2 لا يقسم n فإن $n = p_1 p_2 \dots p_k$ ومن ثم فإن

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k} \cong \mathbb{Z}_{p_1 p_2 \dots p_k}$$

(هـ) صائبة

(د) صائبة

(ج) صائبة

(ب) خاطئة

(أ) خاطئة (١٠)

تمارين (٦, ٢)

(١) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ وإجابات أخرى ممكنة.

(٣) استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد . 388

(٧) لنفرض أن $g \in T(G)$. عندئذ ،

$$o(g) < \infty \Rightarrow o(g+H) < \infty \Rightarrow g+H = H \text{ (لأن } G/H \text{ عديمة الفتل)}$$

$$\Rightarrow g \in H \Rightarrow T(G) \subseteq H$$

$$T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (٨)$$

(٩) التطبيق $\varphi: G \oplus H \rightarrow G/T(G) \oplus H/T(H)$ المعرف بالقاعدة:

$$\varphi(g+h) = (g+T(G)) + (h+T(H)) \quad \text{و } \text{Ker} \varphi = \{0\}$$

$$(١١) \quad \begin{array}{llll} \text{(أ) صائبة} & \text{(ب) خاطئة} & \text{(ت) صائبة} & \text{(ث) صائبة} \\ \text{(ج) خاطئة} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{(ح) خاطئة} & \text{(خ) صائبة} & \text{(د) صائبة} & \text{(ذ) صائبة} \\ \text{(ر) خاطئة} & & & \end{array}$$

تمارين (٦,٣)

(٣) لنفرض أن $g \in T(\sum G_i)$. عندئذ $g \in \sum G_i$ و $o(g) = n$

$$ng = 0 \Rightarrow (ng)(i) = 0 \forall i \in I \Rightarrow ng(i) = 0 \Rightarrow g(i) \in T(G_i)$$

وبما أن $S(g) < \infty$ فإن $g \in \sum T(G_i)$. وليرهان العكس ، لاحظ أن $T(G_i)$ زمرة فتل ولذا فإن

$$\sum T(G_i) \leq \sum G_i \text{ وأن } \sum T(G_i) \subseteq T(\sum G_i) \text{ ولذا فإن}$$

(٨) استخدم تمهيدية زورن.

$$(٩) \text{ بما أن } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ زمرة فتل فإن } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \sum_{p \in P} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p) \text{ . الآن}$$

$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p) = \{x + \mathbb{Z} : o(x + \mathbb{Z}) = p^\alpha\}$$

$$= \{x + \mathbb{Z} : p^\alpha x \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \left\{ \frac{m}{p^\alpha} + \mathbb{Z} : 0 \leq m < p^{\alpha-1} \right\}$$

$$= \mathbb{Z}(p^\infty)$$

وبما أن $\mathbb{Q}$ قابلة للقسمة فإن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ قابلة للقسمة . ولذا فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.

$$(١٢) \text{ لاحظ أن } G = \sum_{i \in I} A_i \text{ حيث كل من } A_i \text{ دورية غير منتهية. لنفرض أن } K = \sum_{i \in I} \mathbb{Q}_i$$

عندئذ ، K قابلة للقسمة . وإذا كان $b_i \in \mathbb{Q}_i$ وكان $B_i = \langle b_i \rangle$ فإن

$$G = \sum A_i \cong \sum B_i \leq \sum \mathbb{Q}_i = K$$

(١٣) لاحظ أن $G \cong F/N$ حيث F إبدالية حرة . ولكن باستخدام تمرين (١٢) نعلم أن $F \leq D$

حيث D قابلة للقسمة . عندئذ ، $G \cong F/N \leq D/N$ و D/N قابلة للقسمة .

(١٤) باستخدام التمرين (١٣) ، $G \leq D$ حيث D قابلة للقسمة. ومن الفرض $D \cong G \oplus K$.
بما أن D قابلة للقسمة فإن G قابلة للقسمة.

(١٥) $H = \langle \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}^+ \rangle < \mathbb{Q}$ و H ليست حرة.

(٢٠) $d \in D \Rightarrow d \in G = H + K \Rightarrow d = h + k, h \in H, k \in K$. بما أن $H < D$ فإن

$h \in D$. ولذا فإن $k = d - h \in D$ أي أن $k \in K \cap D$. ومنه فإن $D = H + (K \cap D)$. وإذا

كان $x \in H \cap (K \cap D)$ فإن $x \in H \cap K$. ومنه فإن $x = 0$. إذن ، $D = H \oplus (K \cap D)$.

(٢١) إذا كانت D هي الزمرة الجزئية الأعظمية من G والقابلة للقسمة فإن $H < D < G$.

وباستخدام تمرين (٢٠) نجد أن $D = H \oplus (K \cap D)$. وبما أن D قابلة للقسمة فإن $K \cap D$ قابلة

للقسمة. وبما أن K مختزلة فإن $K \cap D = \{0\}$. إذن $D = H$ ومن ثم فإن H أعظمية.

(٢٨) $x \in nG \cap T(G) \Rightarrow x = ny, y \in G, o(x) = m$ ولذا فإن

$x = ny \in nT(G)$ وبالتالي فإن $0 = mx = mny \Rightarrow o(y) < \infty \Rightarrow y \in T(G)$

والاتجاه الآخر واضح.

(٣٢) $nH = H \cap nK = H \cap (K \cap nG) = (H \cap K) \cap nG = H \cap nG$

(٣٣) $n(K/H) = nK + H = (K \cap nG) + H = K \cap (nG + H) = K \cap n(G/H)$

تمارين (٧، ١)

(١) $\{e\} < \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\} < \{e, (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\} < D_4$

سلسلة ناظرية جزئياً من D_4 ولكنها ليست سلسلة ناظرية لأن $\{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$ ليست زمرة

جزئية ناظرية من D_4 .

(٢) (ب) $\{0\} \leq 14700\mathbb{Z} \leq 300\mathbb{Z} \leq 60\mathbb{Z} \leq 20\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$\{0\} \leq 14700\mathbb{Z} \leq 4900\mathbb{Z} \leq 245\mathbb{Z} \leq 49\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

(٤) (ب) $\{e\} \leq A_3 \leq S_3$

(ج) إذا كانت $H_1 = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$ ، $H_2 = \{e, (1\ 2) \circ (2\ 4)\}$

$H_3 = \{e, (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ فإن سلاسل A_4 التركيبية هي :

$\{e\} \leq H_i \leq V \leq A_4$ حيث $i = 1, 2, 3$

(٥) $\{e\} \leq \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq A_4$ سلسلة ليست ناظرية جزئياً ولكن

$\{e\} \leq \langle (1\ 3) \circ (2\ 4) \rangle \leq V \leq A_4$ فهي ناظرية (تركيبية).

(٨) $H \leq N(H) \leq N(N(H)) \leq \dots \leq G$ سلسلة ناظرية جزئياً.

(١٠) بما أن K زمرة جزئية ناظرية جزئياً من G فإن K إحدى حدود سلسلة ناظرية جزئياً:

$\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{i-1} \leq K \leq K_i \leq \dots \leq K_n = G$ ولذا فإن :

$$H = K_0 \cap H \leq K_1 \cap H \leq \dots \leq K \cap H \leq \dots \leq K_n \cap H = G \cap H = H$$

وكل من $K_i \triangleleft K_{i+1}$ لأن $H \cap K_i \triangleleft H \cap K_{i+1}$.

(١١) استخدم التمرين (١٠).

(١٢) استخدم التمرين (٦) والتمرين (١٠).

(١٣) $K = \{e, ab\}$ ، $H = \{e, a^2b\}$ ، $G = D_4$

(١٥) (أ) خاطئة (ب) صائبة (ج) خاطئة (د) خاطئة (هـ) صائبة

تمارين (٧, ٢)

(٥) $e \leq \mathbb{Z}_2 \leq Q_8 \leq SL(2, 3)$ ، $SL(2, 3)^{(1)} = Q_8$ ، $SL(2, 3)^{(2)} = Z(Q_8) = \mathbb{Z}_2$

سلسلة مشتقة .

(٦) $\{e\} \leq \mathbb{Z}_2 \leq Q_8 \leq SL(2, 3) \leq GL(2, 3)$ سلسلة مشتقة.

(٨) إذا كانت $G = G_1 \times G_2$ فإن $G/G_1 \cong G_2$. وبما أن كل من G_1 و G_2 قابلة للحل فإن

G قابلة للحل . استخدم الآن الاستقراء الرياضي.

(١٨) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة (ث) صائبة

(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) خاطئة

(ذ) صائبة

تمارين (٧, ٣)

$$S_3^{[1]} = S_3^I = A_3 \quad (١)$$

$$S_3^{[2]} = [S_3^{[1]}] = A_3$$

لأن $(1\ 2\ 3) = [(1\ 2), (1\ 3\ 2)] \in [S_3^{[1]}, S_3]$

وبالتالي فإن $S_3 \geq A_3 = A_3$ سلسلة مركزية تناظرية للزمرة S_3 .

(٢) $\{e\} = H_0 \leq H_1 = \{e, a^2\} \leq H_2 = \{e, a, a^2, a^3\} \leq D_4$

(٥) G دورية ومن ثم فهي متلاشية.

(٦) استخدم الاستقراء الرياضي على k لأثبت أنه إذا كان $xH \in Z_k(G/H)$ فإن

$$G = Z_{n+1}(G) \text{ لكل } x \in Z_{k+1}(G) \text{ . ثم أثبت أن } K = Z_{n+1}(G) \text{ .}$$

(٧) S_3 غير متلاشية ، $A_3 \triangleleft S_3$ ، $A_3 \not\subseteq Z(S_3)$ ، S_3/A_3 متلاشية.

$$(٨) \quad Z_1(A_4) = \{e\} \text{ ولذا فإن } Z_n \neq A_4 \text{ لكل } n.$$

(٩) عـا أن $p = [G:H] = [G:N(H)][N(H):H]$ وأن $[N(H):H] \neq 1$ فـإن

$$[G:N(H)] = 1 \text{ . ومنه فإن } G = N(H) \text{ . أي أن } H \triangleleft G \text{ .}$$

$$(١١) \quad H \cong \mathbb{Z}_2 \text{ (ج)}$$

المراجع

REFERENCES

أولاً : المراجع العربية

[1] الذكير ، فوزي والسحيباني ، علي . مواضيع في الجبر (مترجم). الرياض ، منشورات جامعة الملك سعود ، ١٩٩٤م.

[2] الذكير ، فوزي وسمحان ، معروف . مقدمة في نظرية الأعداد. الطبعة الثانية ، الرياض ، دار الخريجي للنشر والتوزيع ، ٢٠٠٢م.

[3] سمحان ، معروف والذكير ، فوزي ، وأبوعمه ، عبدالرحمن . معجم العلوم الرياضية. الرياض ، منشورات جامعة الملك سعود ، ٢٠٠١م.

ثانياً : المراجع الأجنبية

[4] Aschbacher, M. The Classification of Finite Simple Groups. Mathematics Intelligencer, 3(2), 59-65, 1981.

[5] Buchthal, D.C. and Cameron E.D., Modern Abstract Algebra. PWS-Boston, 1987.

[6] Cohn, P.M. Algebra, Vols. 1 and 2. Wiley, 1974, 1977.

[7] Dean, R.A., Classical Abstract Algebra. Harper and Row, Inc., 1990.

[8] Enderton, H.B., Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.

[9] Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic. Academic Press, 1972.

[10] Fraleigh, J.B., A First Course in Abstract Algebra. Fourth Edition, Addison-Wesley, 1989.

[11] Fuchs, L. Infinite Abelian Groups, Vols. 1 and 2, Academic Press, 1970, 1973.

- [12] Gallian, J.A., Contemporary Abstract Algebra. Fourth Edition, Houghton Mifflin Company, 1998.
- [13] Hall, M., The Theory of Groups. Chelsea Publishing Company, 1976.
- [14] Herstein, I.N., Abstract Algebra. Macmillan Publishing Company, 1986.
- [15] Hillman, A.P. and Alexanderson, G.L., A First Undergraduate Course in Abstract Algebra, Third Edition, Wadsworth, 1983.
- [16] Hungerford, T.W., Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.
- [17] Jacobson, N. Basis Algebra, Vols. 1 and 2. Freeman, 1974, 1980.
- [18] Jones, G.A. and Jones, J.M., Elementary Number Theory, Springer Verlag, 1998.
- [19] Lyndon, R.C. and Schupp, P.E. Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, 1977.
- [20] Mitchell, A.R. and Mitchell, R.W. An Introduction to Abstract Algebra, Wadsworth Publishing Company, 1970.
- [21] Micheal, W. Examples of Groups, Polygonal Publishing House, 1977.
- [22] Rotman, J.J. An Introductoin to The Theory of Groups. Wm. C. Brown, 1988.
- [23] Saracino, D. Abstract Algebra: A First Course, Addision Wesley, 1980.

2. كشاف وثبت المصطلحات

Subject Index

	أ	
Integers	١	أعداد صحيحة
Inductively	٤٩	استقرائياً
Canonical projection	٢٦٦	إسقاط طبيعي
Least upper bound	٣٧	أصغر حد علوي
Fermat numbers	١٠	أعداد فيرما
Greatest lower bound	٣٧	أكبر حد سفلي
Relatively prime	٨	أوليان نسبياً
	ب	
Rank of a free group	٢٥٥	بعد زمرة حرة
Rank of a free abelian group	٣٠٤	بعد زمرة حرة إبدالية
	ت	
Faithful action	١٩٦	تأثير أمين
Action by conjugation	١٩٤	التأثير بالترافق
Action of a group on a set	١٩١	تأثير زمرة على مجموعة
Transitive action	١٩٤	تأثير متعددي
Permutations	١١	تبديلات
Disjoint Permutations	١٦	تبديلات منفصلة
Partition	٢٩٨	تجزئة
Homomorphism	٩٥	تشاكل
Monomorphism	٩٩	تشاكل أحادي
Trivial homomorphism	٩٥	تشاكل تافه
Endomorphism	١٨١	تشاكل ذاتي
Epimorphism	٩٩	تشاكل شامل (غامر)

Natural epimorphism	١٦٥	تشاكل طبيعي غامر
Identity homomorphism	٩٥	تشاكل محايد
Congruence	١٤	تطابق
Isomorphism	٩٩	تماثل
Automorphism	١٨١	تماثل ذاتي
Permutation representation	١٩٨	تمثيل تبديلي
Betterfly lemma	٣٣٤	تمهيدية الفراشة
Zassenhaus lemma	٣٣٤	تمهيدية زازنهاوس
Zoron's lemma	٣١٩	تمهيدية زورن
Presentation of a group	٢٥٨	توصيف زمرة
ج		
Cayley's table	٣١	جدول كيللي
Direct sum	٢٦٩	جمع مباشر
Complete direct sum	٢٦٦	جمع مباشر تام
Incomplete direct sum	٢٧٠	جمع مباشر غير تام
ح		
Lower bound	٣٧	حد سفلي
Upper bound	٣٧	حد علوي
خ		
Universal property	٢٥٤	خاصية شمولية
Division algorithm	٦	خوارزمية القسمة
د		
Index of subgroup	١١٦	دليل زمرة جزئية
Cycle	١٢	دورة

	ر	
Relator	٢٥٨	رابط
Order of a group	٥١	رتبة زمرة
Order of a permutation	١٤	رتبة تبديل
Order of an element	٥٨	رتبة عنصر
	ز	
Group	٤٧	زمرة
Commutative group	٤٨	زمرة إبدالية
Finitely generated free abelian group	٣٠٣	زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد
Abelian group	٤٨	زمرة أبيلية
Permutation group	٥٣	زمرة التبديلات
Group of automorphisms	١٨٢	زمرة التماثلات الذاتية
Group of inner automorphisms	١٨٣	زمرة التماثلات الذاتية الداخلية
Alternating group	٦٩	زمرة التناوبات
Special linear group	٦٣	الزمرة الخطية الخاصة
General linear group	٥٢	الزمرة الخطية العامة
Dihedral group	٧٣	الزمرة الزوجية
External direct product group	٥٨	زمرة الضرب المباشر الخارجي
Quaternion group	٧٢	زمرة المرباعيات
Isotropic group	١٩٦	الزمرة الموحدة الخواص
Prufer group	٣١٥	زمرة برفر
Simple group	٢٣٠	زمرة بسيطة
Injective group	٣٢٨	زمرة تباينية
Subgroup	٦٦	زمرة جزئية
Minimal subgroup	٣٥٢	زمرة جزئية أصغر
Maximal subgroup	٣٥٢	زمرة جزئية أعظم

Trivial subgroup	٦٧	زمرة جزئية تافهة
Cyclic subgroup	٧٧	زمرة جزئية دورية
Proper subgroup	٦٧	زمرة جزئية فعلية
Fully invariant subgroup	١٨٧ ،	زمرة جزئية لامتغيرة تماماً
	٣٤٩، ٣١٣	
Characteristic subgroup	٣٤٩، ١٨٧	زمرة جزئية مميزة
Generated subgroup	٧١	زمرة جزئية مولدة
Normal subgroup	١٢٦	زمرة جزئية ناظرية
Minimal normal subgroup	٣٥٢	زمرة جزئية ناظرية أصغر
Maximal normal subgroup	٣٥٢	زمرة جزئية ناظرية أعظم
Pure subgroup	٣٢٥	زمرة جزئية نقية
Free group	٢٥٥	زمرة حرة
Free abelian group	٣٠١	زمرة حرة إبدالية
Quotient group	١٥٩	زمرة خارج القسمة
Projective special linear group	٢٤١	زمرة خطية خاصة إسقاطية
Cyclic group	٧٧	زمرة دورية
Sylow group	٢١٧	زمرة سيلو
Torsion free group	٣٠٨	زمرة عديمة الفتل
Subdirectly irreducible group	١٣٦	زمرة غير قابلة للاختزال جزئياً
Indecomposable group	١٤٣	زمرة غير متحللة
Torsion subgroup	٣٠٨	زمرة فتل جزئية
Fratini group	٣٦٩	زمرة فراتيني
Solvable group	٣٤٠	زمرة قابلة للحل
Supersolvable group	٣٤١	زمرة قابلة للحل فوقياً
Divisible group	٣١٤	زمرة قابلة للقسمة
Polycyclic group	٣٤٠	زمرة كثيرة الدورية
Klein group	٥٦	زمرة كلاين

Commutator group	١٦٤	زمرة مبدلات
Decomposable group	١٤٣	زمرة متحللة
Nilpotent group	٣٦٢	زمرة متلاشية
Reduced group	٣٢٥	زمرة مختزلة
Derived group	١٦٤	زمرة مشتقة
p-group	٢٠٣	زمرة من النوع p
Finite group	٥١	زمرة منتهية
Finitely generated group	٧١	زمرة منتهية التوليد
Subnormal group	٣٣١	زمرة ناظرية جزئياً
Pure simple group	٣٢٦	زمرة نقية بسيطة
Hall subgroup	٣٥٤	زمرة هول الجزئية

س

Equivalent series	٣٣٤	سلاسل متكافئة
Refinement series	٣٣٣	سلسلة أدق
Proper refinement series	٣٣٣	سلسلة أدق فعلياً
Composition series	٣٣١	سلسلة تركيبية
Principal series	٣٣١	سلسلة رئيسية
Solvable series	٣٤٠	سلسلة قابلة للحل
Supersolvable series	٣٤١	سلسلة قابلة للحل فوقياً
Polycyclic series	٣٤٠	سلسلة كثيرة الدورية
Central series	٣٦٢	سلسلة مركزية
Ascending central series	٣٦٣	سلسلة مركزية تصاعدية
Descending central series	٣٦٣	سلسلة مركزية تنازلية
Derived series	٣٤٧	سلسلة مشتقة
Subnormal series	٣٣١	سلسلة ناظرية جزئياً
Normal series	٣٣١	سلسلة ناظرية

Support	٢٦٩	سند
ش		
Lattice	٤٠	شبكة
Distributive lattice	٤١	شبكة توزيعية
Modular lattice	٤٠	شبكة قياسية
External semidirect product	٢٧٨	شبه ضرب خارجي
Internal semidirect product	٢٧٨	شبه ضرب داخلي
Hasse diagram	٣٨	شكل هاس
ص		
Image	٩٧	صورة
Homomorphic image	٩٩	صورة تشاكلية
Preimage	٩٧	صورة عكسية
ض		
Direct product	٢٦٦	ضرب مباشر
Internal direct product	١٤٠	ضرب مباشر داخلي
Weak direct product	٢٧٠	ضرب مباشر ضعيف
Restricted direct product	٢٧٠	ضرب مباشر مقتصر
ط		
Derived length	٣٤٨	طول اشتقاقي
ع		
Direct summand	٢٧٦	عامل جمع مباشر
Reflexive relation	٣٥	علاقة انعكاسية
Antisymmetric relation	٣٥	علاقة تخالفية
Partial order relation	٣٥	علاقة ترتيب جزئي

Connected relation	٣٦	علاقة مترابطة
Transitive relation	٣٦	علاقة متعدية
Binary operation	٢٨	عملية ثنائية
Commutative binary operation	٢٨	عملية ثنائية إبدالية
associative binary operation	٢٨	عملية ثنائية تجميعية
Least element	٤	عنصر أصغر
Identity element	٤٧	عنصر محايد
Composition factors	٣٣٧	عوامل تركيبية
Series factors	٣٣١	عوامل سلسلة
Invariant factors	٣١١	عوامل لا متغيرة
Composition factors	٢٣٠	عوامل مُحَصَّلَة

غ

Cover	٣٨	غطاء

ف

Symmetric difference	٣٣	فرق تناظري
Nilpotency class	٣٦٥	فصل تلاشي
Conjugate classes	٢٠٦	فصول الترافق

ق

Comparable	٣٦	قابلان للمقارنة
Greatest common divisor	٧	القاسم المشترك الأكبر
Cancellation law	٤٩	قانون الاختصار
Elementary divisors	٢٩٦، ١٤٦	قواسم بدائية

ك

Word	٢٥١	كلمة

Reduced word	٢٥٢	كلمة مختزلة
Invariants	٢٩٧	لا متغيرات
First principle of mathematical induction	١	المبدأ الأول للاستقراء الرياضي
Well-ordering principle	٤	مبدأ الترتيب الحسن
Second principle of mathematical induction	٢	المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي
Commutator	١٦٤	مبدل
Fundamental theorem of arithmetic	٩	المبرهنة الأساسية في الحساب
Fundamental theorem of finitely generated abelian groups	٣٠٧	المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التوليد
Fundamental theorem of finite abelian groups	١٤٥، ٢٩٤	المبرهنة الأساسية للزمرة الإبدالية المنتهية
Correspondence theorem	١٧٥	مبرهنة التقابل
First isomorphism theorem	١٧٠	مبرهنة التماثل الأولى
Third isomorphism theorem	١٧٤	مبرهنة التماثل الثالثة
Second isomorphism theorem	١٧٣	مبرهنة التماثل الثانية
Index theorem	١٩٩	مبرهنة الدليل
Jordan-Holder theorem	٣٣٧	مبرهنة جوردان وهولدر
First Sylow theorem	٢١٦	مبرهنة سيلو الأولى
Third Sylow theorem	٢١٨	مبرهنة سيلو الثالثة
Second Sylow theorem	٢١٧	مبرهنة سيلو الثانية
Schreier theorem	٣٣٦	مبرهنة شراير
Fermat little theorem	١١٨	مبرهنة فيرما الصغرى
Cauchy's theorem	٢١١	مبرهنة كوشي

Cauchy's theorem for finite abelian groups	١٦٢	مبرهنة كوشي للزمر الإبدالية المنتهية
Cayley's theorem	١٠٦	مبرهنة كيلي
Generalized Cayley's theorem	١٩٨	مبرهنة كيلي المعممة
Lagrange theorem	١١٧	مبرهنة لاجرانج
Fibonacci sequence	٣	متتالية فيبوناتشي
Conjugate	١٥	مترافقان
Isomorphic	٩٩	متماثلان
Stabilizer of an element	١٩٦	مثبت عنصر
Partially ordered set	٣٦	مجموعة مرتبة جزئياً
Coset	١١٣	مجموعة مشاركة
Left coset	١١٣	مجموعة مشاركة يسرى
Right coset	١١٣	مجموعة مشاركة يميني
Left identity	٥٠	محاييد أيسر
Lattice diagram of subgroups	٧٦	المخطط الشبكي للزمر الجزئية
Orbits of a permutation	١٩	مدارات تبديل
Orbits of a group on a set	١٩٤	مدارات زمرة على مجموعة
Center of a group	٦٩	مركز زمرة
Linearly independent	٣٠١	مستقلة خطياً
Transvection	٢٤٠	مصفوفة مناقلة
Class equation	٢٠٦	معادلة الفصول
Closed	٦٦	مغلقة
Representative of a coset	١١٣	ممثل مجموعة مشاركة
Centralizer of an element	٦٩	مركز عنصر
Transposition	١٢	مناقلة
Normalizer of a subgroup	١٢٩	منظم زمرة جزئية

ن

Algebraic system	٢٨	نظام جبري
Inverse	٤٧	نظير
Left inverse	٥٠	نظير أيسر
Cycle type	٢٠٨	نمط دوري
Group type	٢٩٧	نمط زمرة
Kernel of an action	١٩٦	نواة تأثير
Kernel of a homomorphism	٩٧	نواة تشاكل

ي

Separate elements	١٥٣	يفصل عناصر



مدونة ملحوظة