نظريــة القيــاس

الفهرس

مقدمة

اتضح للرياضيين منذ مطلع القرن التاسع عشر، أن خواص الدوال المستمرة ونظرية تكامل ريمان لم تكن غنية بما يكفي لحل الكثير من المسائل في التحليل الرياضي، الأمر الذي قادهم إلى البحث عن صفوف أخرى من الدوال، لتأسيس نظرية في التكامل تكون أشد فعالية، وأكثر غنًى.

وهكذا، وجدت نظرية القياس أسسها الأولى مع بداية القرن العشرين. إذ بدا جلياً آنذاك، أنه لا بد من دراسة دقيقة ومركزة للمجموعات الجزئية من الفضاء الإقليدي بهدف التوصل إلى فهم أفضل لبنية الدوال. ومن هنا نشأت ضرورة تعميم مفاهيم الطول والمساحة والحجم، المرتبطة بالمجموعات الجزئية من R^n ، وبرزت بالتالي، وبأساليب مختلفة، فكرة ربط "القياس" بمجموعة مفروضة من النقاط، وكان الرياضي الفرنسي "إميل بوريل" E.BOREL (1898) أول من أسس نظرية قياس على صف المجموعات الجزئية من المستقيم الحقيقي، والمعروفة حالياً بمجموعات بوريل.

ثم قدم "هنري لوبيغ" H.LEBESGUE(1902) عمله الرائد ، حول ما عرف الآن بقياس لوبيغ. وفي عام (1918) عرف "كاراثيو دوري" C.CARATHÉODORY ، ودرس القياسات الخارجية، ومنذ ذلك الحين تطورت نظرية القياس تطوراً سريعاً وملحوظاً بفضل إسهامات كبار رياضيي النصف الأول من القرن الماضي.

ومع اتساع مجال تطبيقات تلك النظرية حظيت ولا تزال تحظى بالمزيد من الاهتمام المستمر، وغدت أحد الأجزاء المركزية المهمة في التحليل الرياضي.

ومن الطبيعي أن يكون لتعدد واختلاف تطبيقات نظرية القياس في العديد من العلوم، دوره في التركيز على جوانب معينة من تلك النظرية، أكثر من سواها. فكما أن لبعض الحقائق أهمية ملحوظة في التحليل الحقيقي والعقدي، فلبعضها الآخر أهمية في التحليل الدالي، أو في نظرية الاحتمالات والإحصاء.

وهكذا، فإن عرضاً متكاملاً ومتوازناً لنظرية القياس لا يمكنه الاستغناء عن أسلوب المعالجة المجردة لتحرير المسألة من قيود ارتباطها بهذا الجانب من العلوم ، أو ذاك، ولإيجاد صيغة عامة لمعالجة موحدة لمسائل هامة في مختلف المجالات ذات الصلة.

من جهة أخرى. فإن إقرار تدريس نظرية القياس لطلاب السنة الثالثة في قسم الرياضيات، وفقاً للخطة الدرسية الأخيرة، يبدو لنا خطوة إيجابية في مجال الأخذ بيد طلابنا- في فترة مبكرة نسبياً من سنوات دراستهم- على طريق مواجهة مختلف المسائل بأسلوب يرقى إلى روح رياضيات العصر، من حيث الفعالية والشمولية، وهما الميزتان الأساسيتان لطريقة المعالجة المجردة بالإضافة إلى بساطتها، وكونها الأكثر اقتصاداً.

يقع هذا الكتاب في سبعة فصول، هيأنا في أولها أرضية مناسبة من المفاهيم الأولية والتعاريف الأساسية، فعرفنا مفاهيم الحلقة والجبر والجبر التام، بالإضافة إلى الجبور التامة الأصغرية، التي تضفي على المعالجة طابعاً اقتصادياً مهماً، تتضح معالمه في الفصول التالية.

عرفنا بعد ذلك الصفوف الطردة، ودرسنا علاقتها مع الجبور التامة الأصغرية، تمهيداً لتزويد الجداء الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين، ببنية فضاء قياس. كما عمّمنا مفاهيم الحلقة والجبر والجبر التام من أجل فضاء جداء. وقد تم ذلك في الفقرتين 1.3 و 1.4 اللتين يمكن تأجيل دراستهما إلى بداية الفصل السادس.

عرفنا في الفصل الثاني فضاء القياس المجرد، انطلاقاً من كم بسيط من الموضوعات المميزة لدالة القياس المجرد، ثم تعرفنا على الخواص الأساسية للقياس، وعرضنا طريقة "كاراثيودوري" في الحصول على قياس من دالة مجموعة ذات بنية أبسط، ألا وهي القياس الخارجي. ثم استخدمنا القياس الخارجي المولدّ بدالة مجموعة تامة الجمعية على حلقة، لتمديد تلك الدالة إلى قياس على الجبر التام الأصغري على تلك الحلقة، وذلك بفضل مبرهنة التمديد.

استخدمنا في الفصل الثالث، مبرهنة التمديد لتعريف قياس لوبيغ، أحد أشهر وأهم القياسات على المستقيم الحقيقي، وأوضحنا أنه حالة خاصة من قياس لوبيغ-ستيلجس، ودرسنا خواصه الأساسية.

عرّفنا في الفصل الرابع، مفهوم الدالة القيوسة، فأتاح لنا ذلك الحصول على صف واسع من الدوال، صف الدوال القيوسة، مغلق بالنسبة للعمليات المألوفة في التحليل، بما في ذلك الانتقال إلى النهاية، يسير في التعامل، وملائم للاستثمار في إطار نظرية التكامل، التي ندرسها في الفصل الخامس، وفي الفصل السادس، بعد تعريف قياس على الجبر التام الجداء في فضاء قيوس جداء.

خصصنا الفصل السابع والأخير من الكتاب، لتعريف ودراسة مفاهيم التقارب المرتبط بقياس مفروض، ودرسنا علاقة أنواع ذلك التقارب ببعضها.

هذا، وقد ختمنا كل فصل من فصول الكتاب بمجموعة من التمارين، التي هدفنا منها إلى ترسيخ استيعاب الأفكار النظرية، ومزيد من الإيضاح لمختلف جوانبها.

أيار 2003

المؤلف

الفصل الأول

الحلقة – الجبر – الجبر التام

تُعَدُّ مفاهيم الحلقة، والجبر، والجبر التام من المفاهيم الأساسية في مجال تحديد البنية الرياضية لدوال القياس التي تشكل المادة الأساسية لدراستنا في هذا الكتاب.

ندرس في هذا الفصل المفاهيم الآنفة الذكر، ونتعرف على أهم خصائصها.

(1.1) تعاريف وأمثلة.

لتكن X مجموعة غير خالية. ندل بالرمز 2^X على مجموعة كل المجموعات الجزئية في X ، ونسمي كل مجموعة جزئية من المجموعة 2^X صفاً في X ، أو صفا من أجزاء X .

تعريف (1.1.1)

تقول عن صف غير خالٍ D من أجزاء X إنه **حلقة في X** ، إذا كان مغلقا بالنسبة لعمليتيّ الاتحاد المنتهي والتتميم النسبي، أي إذا حقق الشرطين التاليين:

(i) أياً تكن A و B من D فإن $A \cup B \in D$.

(ii) أياً تكن A و B من D فإن $A - B \in D$.

ينتج من التعريف السابق، أن المجموعة الخالية ϕ عنصر من أية حلقة D في X، وذلك استناداً إلى كون D صفاً غير خالٍ من أجزاء X ، وإلى الشرط (ii) . كما ينتج أن الحلقة صف مغلق بالنسبة لعملية التقاطع المنتهي، إذ أنه أياً تكن A و

B من حلقة D في X ، فإن المجموعة $A \cap B$ التي ليست إلا $A-(A-B)$ هي عنصر من D، استناداً إلى (ii) .

مثال (1):

الصفان $\{ \phi \}$ و 2^X ، حلقتان في X ، وهما أصغر وأكبر (على الترتيب) حلقتين في X، وذلك بالنسبة لعلاقة الاحتواء بين المجموعات.

مثال (2):

صف المجموعات الجزئية المنهية في X هو حلقة فيها. وكذلك فإن صف المجموعات الجزئية العدودة هو أيضاً حلقة في X .

مثال (3):

صف الاتحادات المنتهية للمجالات المحدودة والمنفصلة من الشكل $]a,b]$ ، هو حلقة في مجموعة الأعداد الحقيقية R . إذ يكفي أن نلاحظ من أجل ذلك، أن تقاطع وفرق مجالين من الشكل المذكور هو مجال من نفس الشكل.

ومما يجدر ذكره، هو أن الحلقة غير مغلقة بالنسبة لعملية التتميم بوجه عام.

وفي الواقع ، فإنه يلزم ويكفي لكي تكون حلقة D في X مغلقة بالنسبة لعملية التتميم أن تكون المجموعة X عنصراً منها:

إذ أنه إذا كانت $X \in D$ ، وكانت $A \in D$ ، ورمزنا بـــ A^c لمتممة A ، فإن $A^c = X-A \in D$ ، وذلك استناداً إلى (ii) .

وبالعكس ، إذا كانت D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم، وكانت $A \in D$ ، فإن $X = A \cup A^c \in D$ ، وذلك استناداً إلى (i) .

إن حاجتنا إلى التعامل مع صفوف مغلقة بالنسبة لعملية التتميم تدعونا إلى وضع التعريف التالي:

تعريف (1.1.2):

نقول عن صف غير خالٍ E من أجزاء X إنه جبر في X ، إذا كان مغلقاً بالنسبة لعمليتي الاتحاد المنتهي والتتميم، أي إذا حقق الشرطين التاليين:

(i) أياً تكن A و B من E . فإن $A \cup B \in E$.

(ii) أياً تكن A من E ، فإن $A^c \in E$.

ينتج من التعريف السابق أنه إذا كان E جبراً في X ، فإن E صف مغلق بالنسبة لعملية التقاطع المنتهي، إذ أنه أياً تكن A و B من E ، فإن:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in E$$

كذلك، فإن E صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم النسبي، إذ أنه أياً تكن A وB من E ، فإن:..

$$A-B = A \cap B^c \in E$$

وهكذا فإن كل جبر في X هو حلقة فيها ، كما أنه يلزم ويكفي لكي تكون حلقة في X جبراً فيها أن تكون X عنصراً من تلك الحلقة.

نشير بهذا الصدد، إلى أن الحلقة الواردة في المثال (3) ليست جبراً في R .

نعرّف فيما يلي مفهوم الجبر التام، الذي يدخل في صلب الجزء الأهم من دراستنا في الفصول القادمة.

تعريف (1.1.3):

نقول عن صف غير خالٍ F من أجزاء X إنه جبر تام أو σ – جبر في X ، إذا كان مغلقاً بالنسبة لعمليتي الاتحاد العدود والتتميم، أي إذا حقق الشرطين التاليين:

(iii) أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر F، فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

(iv) أياً تكن A من F ، فإن $A^c \in F$.

يتضح من التعريف السابق، أن كل جبر تام في X هو جبر فيها، وأن الجبر التام صف مغلق بالنسبة لعملية التقاطع العدود.

وهكذا، فإن مفهوم الجبر التام يلبي الحاجة إلى التعامل مع اتحادات وتقاطعات من المجموعات الجزئية من X، أكثر عمومية من تلك التي تمت مناقشتها ضمن إطار الحلقات والجبور.

مثال(4):

الصفّان $\{\phi , X\}$ و 2^X جبران تامان في X ، وهما أصغر وأكبر (على الترتيب) جبرين تامين في X .

مثال (5):

أياً يكن العدد a ، فإن الصف $\{\phi,]-\infty ,a[, [a ,+\infty[, R\}$ جبر تام في R .

مثال (6):

إذا كانت X مجموعة غير منتهية، فإن الصف:

$$F = \{ A\in 2^X : \text{A أو } A^c \text{ منتهية} \}$$

جبر في X ، إلا أنه ليس جبراً تاماً بوجه عام.

في الواقع $\phi \in F$ ، إذ نعتبر دوماً أن المجموعة الخالية منتهية. وإذا كانت $A ,B\in F$ ، وكانتا منتهيتين ، فإن $A\cup B$ تكون منتهية، وتنتمي بالتالي إلى F .

أما إذا كانت إحداهما أو كلتاهما غير منتهية، فإن $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ تكون منتهية، وعندئذ $A\cup B\in F$. أي أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي.

أخيراً، فإن شرط انتماء مجموعة $A(\subseteq X)$ إلى الصف F، متناظر في A و A^c ، مما يعني أن F مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

نترك للقارئ مهمة التحقق من أن الصف F ليس جبراً تاماً بالضرورة.

مثال (7):

إذا كانت X مجموعة غير عدودة، وكان:

$$F=\{A\in 2^X : \text{A أو } A^c \text{ عدودة} \}$$

فإن F يكون جبراً تاماً في X .

من الواضح أن $\phi\in F$. لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F . عندئذ، إذا كانت A_i عدودة من أجل كل $i\geq 1$ ، فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ تكون عدودة (اتحاد عدود لمجموعات عدودة)، وتنتمي بالتالي إلى F . أما إذا كانت إحدى المجموعات A_i غير عدودة، ولنفرض أنها A_{i_0} ، فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$ تكون عدودة، لأنها محتواة في $A_{i_0}^c$ ، وعندئذ :

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \in F$$

إذاً $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ أي أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود.

أخيراً، فإن شرط انتماء مجموعة $A(\subseteq X)$ إلى الصف F متناظر في A وA^c وبالتالي فإن F مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

مثال (8):

ليكن F جبراً تاماً في X ، ولتكن $A\subseteq X$. نسمي الصف:

$$F_1 = \{A\cap B: B\in F\}$$

مقصور الجبر التام F على المجموعة A .

نتحقق بسهولة من أن F_1 جبر تام في A .

مثال (9):

إذا كانت I مجموعة غير خالية من الجبور التامة في X ، ووضعنا $F_0=\bigcap_{F\in I} F$، فإن F_0 يكون جبراً تاماً في X .

في الواقع $\phi\in F$ ، من أجل كل $F\in I$ وبالتالي فإن $\phi\in F_0$. إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F_0 فإن $(A_i)_{i\geq 1}$ تكون متتالية من عناصر F ، وذلك أياً يكن $F\in I$ إذاً $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$، من أجل كل $F\in I$ ، وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F_0$.

أخيراً، إذا كانت $A \in F_0$ ، فإن $A \in F$ من أجل كل $F \in I$ إذاً $A^c \in F$، من أجل $F\in I$ ، وبالتالي فإن $A_c \in F_0$.

تعريف (1.1.4):

إذا كان F جبراً تاماً في X ، فإننا نسمي الثنائية (X,F) **فضاء قيوساً**.

ونسمي كل مجموعة $A \in F$ مجموعة قيوسة بالنسبة للجبر التام F ، أو-اختصاراً- قيوسة، إذا لم يؤد ذلك إلى أي التباس.

2 . 1 الجبور التامة الأصغرية

ليكن G صفاً من أجزاء X . إن مجموعة الجبور التامة في X التي تحوي الصف G غير خالية، إذ أن الجبر التام 2^X عنصر منها. إذاً، وفي ضوء ما ورد في المثال (9) يكون تقاطع عناصر تلك المجموعة، أي تقاطع كل الجبور التامة التي تحوي الصف G أصغر جبر تام في X يحوي الصف G . ندل على هذا الجبر التام بالرمز $\sigma(G)$ ، ونسميه **الجبر التام الأصغري** على الصف G ، أو **الجبر التام المولّد** بالصف G .

يتضح مما تقدم أنه إذا كان G و H صفين في X ، وكان $G \subseteq \sigma(H)$ ، فإن $\sigma (G) \subseteq \sigma (H)$.تجدر الإشارة إلى أن المجموعة X كانت إلى الآن مجموعة كيفية (غير خالية). فإذا فرضنا أن X فضاء توبولوجي، فإن الجبر التام الأصغري على صف المجموعات المفتوحة في X يلعب دوراً هاماً في نظرية القياس بوجه عام. نسمي عناصر هذا الجبر التام الأصغري **مجموعات بوريلية**، وندل عليه بالرمز B_X . أي أن B_X هو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة في X .من الواضح أن كل مجموعة مغلقة في X هي مجموعة بوريلية. وفي الواقع، فإن B_X هو نفسه الجبر التام الأصغري على صف المجموعات المغلقة في X. وهكذا نجد أن كل تقاطع عدود لمجموعات مفتوحة في X هو مجموعة بوريلية ، وأن كل اتحاد عدود لمجموعات مغلقة في X هو أيضاً مجموعة بوريلية في X. و إذا كان $X=R$ ، فإن كل مجال مفتوح هو مجموعة بوريلية. وحيث إنه ، أياً يكن العددان الحقيقيان a و b ، $(a\leq b)$ فإن:

$$[a,b]=\bigcap_{i=1}^{\infty}]a-\frac{1}{i},b+\frac{1}{i}[$$

$$]a,b]=\bigcap_{i=1}^{\infty}]a,b+\frac{1}{i}[$$

$$[a,b[=\bigcap_{i=1}^{\infty}]a-\frac{1}{i},b[$$

إذاً كل من المجالات $]a,b[$ ، و $]a,b]$، و $[a,b]$ هو مجموعة بوريلية. كما أن كل مجال غير محدود في R هو مجموعة بوريلية، ذلك لأنه يكتب على شكل اتحاد عدود لمجالات من أحد الأشكال الآنفة الذكر. أيضاً، فإن كل مجموعة $\{a\}=[a,a]$ وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية، وبالتالي فإن كل مجموعة عدودة هي مجموعة بوريلية أيضاً. أي أن Q، مجموعة الأعداد العادية هي مجموعة بوريلية، وكذلك تكون متممتها مجموعة الأعداد الصمّاء.

نبين فيما يلي أن صف المجالات من الشكل $]a,b]$ في R ، يولد الجبر التام B_R. نذكّر قبل ذلك بالمبرهنة الهامة التالية، المعروفة في دروس التوبولوجيا:

"كل مجموعة مفتوحة في الفضاء R^n،$(n\geq1)$ ، هي اتحاد عدود لمجالات منفصلة ، من الشكل $]a,b]$ ، أو من الشكل $[a,b[$ ، أو من الشكل $]a,b[$ ".

وهنا نشير إلى أنه من أجل أية نقطتين $a=(a_1,a_2,\dots a_n)$ و $b=(b_1,b_2,\dots\dots b_n)$ من R^n ، حيث $a_i\leq b_i$، $(1\leq i\leq n)$ ، فإن المجالات $]a,b[$ و $[a,b]$ و $]a,b]$ ، تكون معرّفة على النحو التالي:

$$]a,b[=\{x\in R^n : a_i<x_i<b_i\ ,\ i=1,2..,n\}$$

$$[a,b]=\{x\in R^n : a_i\leq x_i\leq b_i\ ,\ i=1,2,..n\}$$

$$]a,b]=\{x\in R^n : a_i<x_i\leq b_i,\ i=1,2,..,n\}$$

لنرمز بـ I لصف المجالات من الشكل $]a,b]$ في R ، ولنبرهن أن $\sigma(I)=B_R$.

بما أن كل مجال من الشكل $]a,b]$ هو مجموعة بوريلية كما أسلفنا، إذاً:

$$\sigma(I)\subseteq B_R \qquad (1)$$

من جهة أخرى، وفي ضوء المبرهنة التي أشرنا إليها، فإن كل مجموعة مفتوحة في R هي عنصر من $\sigma(I)$. وحيث إن B_R هو الجبر التام الأصغري على صف المجموعات في R ، إذاً:

$$B_R\subseteq\sigma(I) \qquad (2)$$

وهكذا نجد من (1) و (2) أن $\sigma(I)=B_R$.

يمكننا التحقق بطريقة مشابهة من أن كلاً من الصفوف التالية يولد B_R :

$$\{[a,b] : a,b\in R\ ,\ a\leq b\}$$
$$\{]a,b[: a,b\in R\ ,\ a\leq b\}$$
$$\{]-\infty,a[: a\in R\}$$
$$\{]-\infty,a] : a\in R\}$$

يمكن تعميم ماسبق بشكل مباشر إلى الفضاء R^n ، لنجد أن كل مجال في R^n هو مجموعة بوريلية وأن $\sigma(I^n)=B_{R^n}$ ، حيث I^n صف المجالات من الشكل $]a,b]$ في R^n .

أما في $\overline{R}$ ، المجال الموسع للأعداد الحقيقية، فإن كل مجال في $\overline{R}$ هو عنصر من $B_{\overline{R}}$، كما أن كلاً من الصفين $\{[-\infty,a]:a\in R\}$ و $\{[a,+\infty]:a\in R\}$ يولد $B_{\overline{R}}$.

وبوجه عام ، يمكن أن نعرّف المجموعات البوريلية في $\overline{R}$ على النحو:

$$B_{\overline{R}}=\{A\subseteq\overline{R} : A\cap R\in B_R\}$$

1.3 الصفوف المطّردة

نهتم فيما يلي بتعريف ودراسة صفوف في مجموعة مفروضة غير خالية X تكون في بعض حالاتها جبوراً تامة في X .

تعريف (1.3.1)

نقول عن صف M من أجزاء X إنه **صفّ مطّرد** ، إذا كان :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$$

وذلك أياً تكن المتتالية المطّردة $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر M .

تجدر الملاحظة بهذا الصدد أنه، أياً تكن المتتالية المتزايدة $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر صف مفروض M ، فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M$ ، وأياً تكن المتتالية المتناقصة $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر M فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$. وبالتالي فإن الصف M يكون مطّرداً إذا كان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$ ، من أجل أية متتالية متزايدة من عناصر M ، وكان $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M$ ، من أجل أية متتالية متناقصة من عناصر M .

يتضح من التعريف السابق أن كل جبر تام في X هو صف مطّرد فيها. وبوجه خاص، فإن الجبر التام 2^X هو أكبر صف مطّرد في X .

تقدّم المبرهنة والنتيجة التاليتان أمثلة لجبور تامة.

مبرهنة (1.3.1)

إذا كانت D حلقة في X وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ ،حيث $D_i \in D$ ، من أجل

$i \geq 1$ فإن D تكون جبراً تاماً إذا وفقط إذا كانت صفاً مطّرداً.

البرهان:

لزوم الشرط: من الواضح أنه إذا كانت D جبراً تاماً فإنها تكون صفاً مطّرداً.

كفاية الشرط: إذا كانت الحلقة D صفاً مطّرداً، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر D، ووضعنا $B_n=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$، من أجل كل $n\geq 1$ ، فإن $(B_n)_{n\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من عناصر D ، ويكون عندئذ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$. إذاً فالحلقة D مغلقة بالنسبة للاتحاد المعدود. ينتج عن ذلك، واستناداً إلى الفرض، أن $X\in D$ مما يودي بدوره إلى أن تكون الحلقة D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (1.3.1)

إذا كان F جبراً في X ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون F جبراً تاماً، هو أن يكون صفاً مطّرداً.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

ليكن M صفاً من أجزاء X. إن مجموعة الصفوف المطّردة التي تحوي M غير خالية، إذ أن الصف المطّرد 2^X عنصر منها.من جهة أخرى، نتحقق بسهولة من أن تقاطع عناصر المجموعة المذكورة، أي تقاطع كل الصفوف المطّردة التي تحوي M، هو أصغر صف مطّرد يحوي M. نسمي هذا الصف الأخير **الصف المطّرد الأصغري على** M .

لدينا بهذا الصدد المبرهنة الهامة التالية ، والتي سنحتاجها لاحقاً.

مبرهنة (1.3.2)

إذا كانت D حلقة في X ، وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$، حيث $D_i \in D$ ، من أجل $i=1,2,\dots$ ، فإن الصف المطّرد الأصغري على D هو $\sigma(D)$.

البرهان:

لنرمز بـ M_0 للصف المطّرد الأصغري على D. بما أن كل جبر تام هو صف مطّرد، إذاً:

$$M_0 \subseteq \sigma(D)$$

من أجل البرهان على صحة الاحتواء المعاكس، يكفي في ضوء النتيجة (1.3.1) أن يكون M_0 جبراً في X . لنضع:

$$M' = \{A : A, A^c \in M_0\}$$

عندئذ يكفي لكي يكون M_0 مغلقاً بالنسبة لعملية التتميم أن يكون $M_0 \subseteq M'$.

لنلاحظ أولاً أنه يمكننا أن نفرض أن $(D_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة. فإذا كانت $B \in D$ ، فإن $(D_i - B)_{i\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من عناصر D ، ومنه فإن :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(D_i - B) = B^c \in M_0 \; .$$

أي أن $D \in M'$.

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من عناصر M'. عندئذ تكون $(\forall i \geq 1) A_i$، من M_0، وبالتالي فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M_0$ كما تكون $(\forall i \geq 1) A_i^c$ من M_0. وحيث إن $(A_i^c)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة، إذاً :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \in M_0$$

ينتج أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M'$. نبرهن بطريقة مشابهة أنه، إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة من عناصر M' فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M'$. وهكذا فإن M' صف مطّرد.

وحيث إن M_0 هو الصف المطّرد الأصغري على D ، إذاً $M_0 \subseteq M'$.

لنبرهن الآن أن M_0 مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي. لنضع من أجل كل $A \in M_0$:

$$H_A = \{B : B \in M_0, A \cup B \in M_0\}$$

عندئذ ، يكفي برهان أن $M_0 = H_A$. لنلاحظ أولاً أن:

$$H_A \subseteq M_0 \qquad (1)$$

إذا كانت $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من عناصر H_A، فإنها تكون متتالية متزايدة من عناصر M_0 ، وكذلك تكون $(A \cup B_i)_{i\geq 1}$.

وحيث إن M_0 صف مطّرد ، إذاً:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i) = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in M_0$$

أي أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in H_A$. نتحقق بطريقة مشابهة من أنه إذا كانت $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة من عناصر H_A، فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in H_A$. ينتج أن H_A صف مطّرد.

من جهة أخرى، إذا كانت $A \in D$، فإن $D \subseteq H_A$. وحيث إن H_A صف مطّرد، إذاً $M_0 \subseteq H_A$، وعندئذ ينتج من (1) أن $M_0 = H_A$.

أخيراً ، أياً تكن $A \in M_0$ و $E \in D$، فإن $A \in H_E$، وبالتالي فإن $E \in H_A$ إذاً $D \subseteq H_A$، وذلك من أجل كل $A \in M_0$. وحيث إن H_A صف مطّرد، إذاً:

$$M_0 \subseteq H_A \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $M_0 = H_A$، من أجل كل $A \in M_0$، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (1.3.2)

إذا كان F جبراً في X ، فإن الصف المطرد الأصغري على F هو $\sigma(F)$.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

1.4 الفضاءات الجداء

نهدف في هذه الفقرة إلى تعريف جبر تام من أجزاء جداء ديكارتي لمجموعتين غير خاليتين، وبالتالي إلى تعريف فضاء قيوس ، تكون المجموعة الكلية فيه هي الجداء الديكارتي لتلك المجموعتين.

تعريف (1.4.1)

ليكن (X_1,M_1) و (X_2,M_2) فضاءين قيوسين، ولتكن $A_1 \subseteq X_1$ و $A_2 \subseteq X_2$.

نسمي المجموعة $A_1 \times A_2$ **مستطيلاً** في $X_1 \times X_2$ بعداه A_1 و A_2. ونقول عن $A_1 \times A_2$ إنه **مستطيل قيوس** ، إذا كان بعداه مجموعتين قيوسين بالنسبة لـ M_1 و M_2 (على الترتيب).

مبرهنة (1.4.1)

إذا كانت D_i حلقة في X_i ،حيث $i=1,2$ ، وكان D صف كل الاتحادات المنتهية لمستطيلات منفصلة من الشكل $A_1 \times A_2$، حيث $A_1 \in D_1$ و $A_2 \in D_2$، فإن D تكون حلقة في $X_1 \times X_2$.

البرهان:

لنلاحظ أولاً أن :

$$(E_1 \times E_2) \cap (F_1 \times F_2) = (E_1 \cap F_1) \times (E_2 \cap F_2)$$

أي أن تقاطع مستطيلين هو مستطيل في $X_1 \times X_2$. ينتج أنه ، إذا كان $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ و $\bigcup_{j=1}^{m} S_j$ عنصرين من D ، فإن:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (R_i \cap S_j) \in D$$

أي أن الصف D مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي. من جهة أخرى ، لدينا:

$$(E_1 \times E_2) - (F_1 \times F_2) = [(E_1 - F_1) \times E_2] \cup [(E_1 \cap F_1) \times (E_2 - F_2)]$$

أي أن فرق مستطيلين هو اتحاد منته لمستطيلين منفصلين. ينتج أن فرق مستطيلين من الصف D هو عنصر في D . وبالتالي، إذا كان $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ و $\bigcup_{j=1}^{m} S_j$ عنصرين من D فإن :

$$\bigcup_{i=1}^{n} R_i - \bigcup_{j=1}^{m} S_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (R_i - S_j) \in D$$

وذلك لأن الصف D مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي لعناصر منفصلة من D .

ينتج أن الصف D مغلق بالنسبة للتتميم النسبي، كما ينتج أنه مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي، ذلك لأنه إذا كان P و Q عنصرين من D ، فإن $P \cup Q = (P-Q) \cup Q$ هو اتحاد لعنصرين منفصلين من D .

ينتج مما تقدم أن D حلقة في $X_1 \times X_2$. ▲

نتيجة (1.4.1)

إذا كان F_i جبراً في X_i حيث $i=1,2$ ، وكان F صف كل الاتحادات المنتهية للمستطيلات المنفصلة من الشكل $A_1 \times A_2$ ، حيث $A_1 \in F_1$ و $A_2 \in F_2$ فإن F يكون جبراً في $X_1 \times X_2$.

تعريف (1.4.2)

نسمي الحلقة D الواردة في المبرهنة (**1.4.1**) الحلقة الجداء للحلقتين D_1 و D_2. كما نسمي الجبر الوارد في النتيجة (**1.4.1**) الجبر الجداء للجبرين F_1 و F_2.

تعريف (1.4.3)

إذا كان إذا كان (X_1,M_1) و (X_2,M_2) فضاءين قيوسين، فإننا نسمي الجبر التام الأصغري على صف المستطيلات القيوسة، **الجبر التام الجداء** للجبرين التامين M_1 و M_2 ، وندل عليه بالرمز $M_1 \times M_2$. كما نسمي الفضاء القيوس $(X_1 \times X_2, M_1 \times M_2)$ **الفضاء القيوس الجداء** للفضاءين القيوسين (X_1,M_1) و (X_2,M_2).

تعريف (1.4.4)

إذا كان $(X_1 \times X_2, M_1 \times M_2)$ فضاء قيوساً، فإننا نسمي **مجموعةً ابتدائيةً** في $X_1 \times X_2$ كلّ اتحادٍ منتهٍ لمستطيلات قيوسة ومنفصلة.

وهكذا ، فإن كل مجموعة ابتدائية في $X_1 \times X_2$ هي مجموعة قيوسة بالنسبة للجبر التام الجداء $M_1 \times M_2$. كما يتضح من التعريف السابق، وفي ضوء النتيجة(**1.4.1**) أن صف المجموعات الابتدائية $X_1 \times X_2$ هو جبر في $X_1 \times X_2$ وبالتحديد فهو الجبر الجداء للجبرين M_1 و M_2.

إذا رمزنا بـ E **لجبر المجموعات الابتدائية** ، فإن $\sigma(E) \subseteq M_1 \times M_2$.

من جهة ثانية، بما أن كل مستطيل قيوس هو مجموعة ابتدائية إذاً:

$$M_1 \times M_2 \subseteq \sigma(E)$$

وهكذا نجد أن $M_1 \times M_2 = \sigma(E)$. بتعبير آخر ، فإن الجبر التام الجداء $M_1 \times M_2$ هو الجبر التام الأصغري على جبر المجموعات الابتدائية في $X_1 \times X_2$.

مثال (10)

لنتحقق من أن:

$$B_R \times B_R = B_{R^2}$$

إذا رمزنا بـ I^2 لصف المجالات من الشكل $]a, b]$ في R ، فإن :

$$I^2 \subseteq B_R \times B_R .$$

إذاً:

$$B_{R^2} = \sigma(I^2) \subseteq B_R \times B_R \qquad (1)$$

من جهة أخرى، أياً تكن المجموعتان المفتوحتان O_1 و O_2 في R ، فإن $O_1 \times O_2 \in B_{R^2}$. وبوجه خاص، فإن $O_1 \times R \in B_{R^2}$. إذاً فالجبر التام الجداء للجبرين التامين B_R و $\{\phi, R\}$ محتوىً في B_{R^2} ، أي أن:

$$B_R \times \{\phi, R\} \subseteq B_{R^2}$$

بمحاكمة مماثلة نجد أيضاً أن:

$$\{\phi, R\} \times B_R \subseteq B_{R^2}$$

عندئذ ، أياً تكن المجموعتان البوريليتان B_1 و B_2 في R ، فإن:

$$B_1 \times B_2 = (B_1 \times R) \cap (R \times B_2) \in B_{R^2}$$

وبما أن المستطيلات $B_1 \times B_2$ ، حيث $B_1, B_2 \in B_R$ تولد الجبر التام الجداء $B_R \times B_R$ ، إذاً:

$$B_R \times B_R \subseteq B_{R^2} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$B_R \times B_R = B_{R^2}$$

نبرهن بسهولة باستخدام الاستقراء الرياضي، أنه أياً يكن العددان الطبيعيان $m, n \geq 1$ فإن :

$$B_{R^m} \times B_{R^n} = B_{R^{m+n}}$$

تعريف (1.4.5)

إذا كانت $A \subseteq X_1 \times X_2$ ، وكان $x_1 \in X_1$ ، فإننا نسمي المجموعة:

$$\{x_2 : (x_1, x_2) \in A\}$$

مقطع أو قصّة المجموعة A وفق x_1 ، ونرمز لها بـــ A_{x_1} ، أي أن:

$$A_{x_1} = \{x_2 : (x_1, x_2) \in A\}$$

نعرف بطريقة مشابهة A_{x_2} حيث $x_2 \in X_2$ ، فنضع:

$$A_{x_2} = \{x_1 : (x_1, x_2) \in A\}$$

من الواضح أنه أياً يكن $x_1 \in X_1$ ، و $x_2 \in X_2$ ، فإن $A_{x_1} \subseteq X_2$ ، و $A_{x_2} \subseteq X_1$

مثال (11)

إذا كانت $A = A_1 \times A_2$ ، حيث $A_1 \subseteq X_1$ ، و $A_2 \subseteq X_2$ وكان $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

فإن:

$$A_{x_1} = \begin{cases} A_2 , & x_1 \in A_1 \\ \phi , & x_1 \notin A_1 \end{cases} \quad , \quad A_{x_2} = \begin{cases} A_1 , & x_2 \in A_2 \\ \phi , & x_2 \notin A_2 \end{cases}$$

يتّضح من هذا المثال أنه ، إذا كان $(X_1 \times X_2, M_1 \times M_2)$ فضاء قيوساً ، وكان $A = A_1 \times A_2$ مستطيلاً قيوساً ، فإن مقاطع A تكون مجموعات قيوسة. وفي الحالة العامة لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة (1.4.2)

إذا كان $(X_1 \times X_2, M_1 \times M_2)$ فضاءً قيوساً، وكانت A مجموعة قيوسة بالنسبة للجبر التام $M_1 \times M_2$ ، فإن $A_{x_1} \in M_2$ ، و $A_{x_2} \in M_1$ وذلك أياً يكن $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

البرهان:

ليكن $x_1 \in X_1$ ، ولنبرهن أن $A_{x_1} \in M_2$. من أجل ذلك نضع:

$$M = \{A \subseteq X_1 \times X_2 : A_{x_1} \in M_2\}$$

عندئذ ، ينتج من العلاقات:

$$(X_1 \times X_2)_{x_1} = X_2 \quad , \quad (A^c)_{x_1} = (A_{x_1})^c \quad , \quad (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)_{x_1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)_{x_1}$$

أن M جبر تام في $X_1 \times X_2$. ولما كان M يحوي صف المستطيلات القيوسة ، كما يتضح من المثال (11) ، إذاً $M_1 \times M_2 \subseteq M$. أي أنه ، أياً تكن المجموعة القيوسة

برهن بطريقة مشابهة على أنه

A ، وأياً يكن $x_1 \in X_1$ ، فإن $A_{x_1} \in M_2$ وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A ، وأياً يكن $x_2 \in X_2$. وبذلك يكتمل البرهان. ▲

$A_{x_2} \in M_1$ فإن

نتيجة (1.4.2)

إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة (متناقصة) من المجموعات القيوسة بالنسبة للجبر التام الجداء $M_1 \times M_2$ ، وكان $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ ، فإن $((A_i)_{x_1})_{i\geq 1}$ و $((A_i)_{x_2})_{i\geq 1}$ تكونان متتاليتين متزايدتين (متناقصتين) من المجموعات القيوسة بالنسبة لـ M_2 و M_1 (على الترتيب).

البرهان:

سنكتفي ببرهان أنه إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة بالنسبة للجبر التام $M_1 \times M_2$ ، وكان $x_1 \in X_1$ ، فإن $((A_i)_{x_1})_{i\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة بالنسبة للجبر التام M_2 .

ليكن $x_2 \in (A_i)_{x_1}$. عندئذ $(x_1,x_2) \in A_i$ ، وبالتالي فإن $(x_1,x_2) \in A_{i+1}$ ، ذلك لأن $(A_i)_{i\geq 1}$ متزايدة. إذاً $x_2 \in (A_{i+1})_{x_1}$. ينتج أن $((A_i)_{x_1})_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة . من جهة أخرى، أياً يكن $i \geq 1$ ، فإن $(A_i)_{x_1}$ مجموعة قيوسة بالنسبة للجبر التام M_2 ، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(1.4.2)**، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

إن تعميم النتائج الواردة في الفقرة **1.4** إلى جداء ديكارتي لعدد منته من المجموعات غير الخالية يتم بشكل مباشر.

فإذا كانت (X_i, M_i) حيث $i =1,..,n$ فضاءات قيوسة، وكانت $A_i \subseteq X_i$ من أجل

$i =1,..,n$ فإننا نسمي المجموعة $A_1 \times \dots\dots \times A_n$ مستطيلاً أبعاده A_1 ، ..... ، A_n . ونقول عن المستطيل $A_1 \times \dots\dots \times A_n$ إنه قيوس، إذا كانت أبعاده مجموعات قيوسة بالنسبة للجبور التامة M_1 ، ..... ، M_n (على الترتيب).

وإذا كانت D_i حلقة (جبر) في X_i حيث $i =1,..,n$ ، وكان D صف كل الاتحادات المنتهية لمستطيلات منفصلة من الشكل $A_1 \times \dots\dots \times A_n$ حيث $A_i \in D_i$ فإن D تكون حلقة (جبراً) في $X_1 \times \dots\dots \times X_n$. ونسمي D الحلقة (الجبر) الجداء للحلقات (للجبور) D_1 ، ..... ، D_n.

كذلك ، فإننا نسمي الجبر التام الأصغري على صف المستطيلات القيوسة الجبر التام الجداء للجبور التامة M_1 ، ..... ، M_n ، ونرمز له بالرمز $M_1 \times \dots\dots \times M_n$.

تمارين

1– ليكن I صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار من الشكل $]a,b]$ ، حيث $a,b \in R$ ، و $a \le b$.

برهن أن صف كل الاتحادات المنتهية لعناصر منفصلة من الصف I هو حلقة في R .

2– لتكن D حلقة في X و $(D_i)_{i\ge1}$ متتالية من عناصر D. جد متتالية $(A_i)_{i\ge1}$ من عناصر D المنفصلة، بحيث يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

جد أيضاً متتالية متزايدة $(B_i)_{i\ge1}$ من عناصر D ، بحيث يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$

3– ليكن F صفاً من أجزاء X يحقق الشروط :

a) $\phi \in F$ ، b) إذا كانت $A \in F$ ، فإن $A^c \in F$ ، c) إذا كانت A_1 و A_2 من F ، فإن $A_1 \cap A_2 \in F$.

i) برهن أن F جبر في X .

ii) إذا كان F يحقق الشرطين a) ، و b) وكان مغلقاً بالنسبة للتقاطع العدود، برهن عندئذ أن F جبر تام في X .

4– ليكن F جبراً في X. برهن أنه إذا حقق F أياً من الشرطين التاليين ، فإنه يكون جبراً تاماً في X.

a) أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\ge1}$ من عناصر F المنفصلة ، فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

b) أياً تكن المتتالية المتزايدة $(A_i)_{i\ge1}$ من عناصر F ، فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

5– ليكن M جبراً تاماً في X .برهن أنه إذا كانت $(A_i)_{i\ge1}$ متتالية من عناصر M فإن $\overline{\lim_i} A_i , \underline{\lim_i} A_i \in M$

6– ليكن $f : X \to Y$ ، وليكن M جبراً تاماً في X . برهن أن الصف :

$$M_f = \{A : A \subseteq Y, f^{-1}(A) \in M\}$$

جبر تام في Y .

7– اعط مثالاً لجبرين تامين M_1 و M_2 في X بحيث لا يكون $M_1 \cup M_2$ جبراً تاماً.

8– لتكن X مجموعة غير عدودة. عين الجبر التام الأصغري على صف المجموعات المنتهية في X .

9– برهن أن تقاطع عناصر أي صف غير خال من الحلقات في X هو حلقة في X.

برهن أيضاً أن تقاطع عناصر أي صف غير خال من الجبور في X هو جبر في X .

استنتج أنه من أجل أي صف غير خال من أجزاء X توجد حلقة أصغرية، ويوجد جبر أصغري على ذلك الصف.

10– ليكن H صفاً غير خالٍ من أجزاء X ، وليكن F الحقل الأصغري على H . برهن أن :

$$\sigma(H) = \sigma(F) .$$

11– ليكن H صفاً غير خال من أجزاء X . ولتكن D الحلقة الأصغرية على H . برهن أنه إذا كانت $A \in D$ فإنه يوجد عدد منته $B_1, B_2, \ldots, B_n$ من عناصر H ، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

12- ليكن H صفاً غير خالٍ من أجزاء X ولتكن $A \subseteq X$. برهن أن مقصور الجبر التام $\sigma(H)$ على A هو جبر تام. انظر المثال (8) . ثم برهن أنه الجبر التام الأصغري على الصف $\{A \cap B : B \in H\}$ في A.

13- برهن أن كلاً من الصفوف التالية يولد B_R :

$\{[a,b] : a,b \in R, a \le b\}$
$\{]a,b[: a,b \in R, a \le b\}$
$\{]-\infty,a[: a \in R\}$
$\{]-\infty,a] : a \in R\}$

14- ليكن M جبراً تاماً في X، ولتكن $A \subseteq X$. برهن أن الصف:

$$M_0 = \{(A \cap B) \cup (A^c \cap C) : B,C \in M\}$$

هو الجبر التام الأصغري على الصف:

$$H = \{A\} \cup M$$

15- ليكن I^n صف المجالات من الشكل $]a,b]$ في R^n، حيث $n \ge 1$. برهن أن $\sigma(I^n) = B_{R^n}$.

16 – برهن أن كلاً من الصفين التاليين ، يولد $B_{\overline{R}}$:

$\{[-\infty,a] : a \in R\}$
$\{[a,+\infty] : a \in R\}$

17- برهن باستخدام الاستقراء الرياضي ، أنه أياً يكن العددان الطبيعيان $m,n \ge 1$ فإن:

$$B_{R^n} \times B_{R^m} = B_{R^{n+m}}$$

ارجع إلى المثال (10).

18- أعط مثالاً لصف مطّرد M في X ، بحيث إن $\phi , X \in M$ ، وبحيث لا يكون M جبراً تاماً في X .

الفصل الثاني

فضاء القياس المجرد

إن المفهوم الرياضي للقياس المجرد تعميم طبيعي لمفاهيم الطـــول والمســـاحة والحجم، ومفاهيم عديدة أخرى في مختلف الحقول العلمية. فكما نربط بين كل مجال في R وعدد غير سالب يمثل طول ذلك المجال، أو بين كل منطقة من R^2 وعدد غير سالب يمثل مساحة تلك المنطقة، يربط القياس بين كل مجموعة من صف معين مـــن المجموعات الجزئية من مجموعة مفروضة وعدد غير سالب يمثل قياس تلك المجموعـــة. فالقياس من وجهة نظر رياضية بحتة هو دالة معرفة على صف من المجموعات الجزئية من مجموعة مفروضة غير خالية، تقابل وفقها كل عنصر من ذلك الصف بعدد غير سالب، بحيث تحقق تلك الدالة كل الموضوعات المميزة للمفاهيم التي ننطلق من فكرة أن القياس المنشود هو تعميم طبيعي لها.

2.1 تعاريف وخواص أساسية

تعريف (2.1.1)

ليكن (X,M) فضاءً قيوساً. نسمي **قياساً**[1] على (X,M) أو على M ، أو –أحياناً– على X ، إذا لم يؤد ذلك إلى أي التباس، أية دالة μ :

$$\mu : M \to \overline{R}^{+}$$

(1) يسمى بعض المؤلفين هذا النوع من القياس قياساً موجباً، تمييزاً له عن القياسات التي تأخذ قيماً سالبة، والتي لا تدخل في نطاق دراستنا.

تحقق الشرطين التاليين:

(i) $$\mu(\phi) = 0$$

(ii) إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M المنفصلة فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

نعبّر –أحياناً– عن الشرطين (i) , (ii) بقولنا إن الدالة μ تامة الجمعية.

فالقياس إذاً هو **دالة مجموعة**[2] تامة الجمعية وغير سالبة.

إذا كان μ قياساً على M ، فإننا نسمي قيمته μ(A) من أجل مجموعـــة A قيوسة بالنسبة للجبر التام M قياس A. ونسمي الثلاثية (X,M, μ) **فضاء قياس**.

يتضح من التعريف السابق أنه ، إذا كان μ قياساً على M ، فإن αμ هـــو أيضاً قياس على M، وذلك أياً يكن $\alpha \geq 0$. وإذا كان M_0 جبراً تاماً محتوى في M فإن مقصور μ على M_0 هو قياس أيضاً. كذلك إذا كان μ_1 و μ_2 قياسين على M فإن $\mu_1+\mu_2$ هو أيضاً قياس على M .

إذا كان μ قياساً على M ، وكانت $A\in M$ أي قيوسة بالنسبة للجبر التام M ، فإننا نقول أحياناً إن A **قيوسة بالنسبة لـــ μ** ، أو اختصاراً μ– قيوسة.

تعريف (2.1.2)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكان $\mu(A)<+\infty$ من أجل كل مجموعة قيوسة A، فإننا نقول إن (X,M, μ) **فضاء قياس منته**، أو إن μ قياس منته.

(2) نسمي دالة مجموعة كل دالة معرفة على صف من أجزاء مجموعة مفروضة وتأخذ قيمها في R أو $\overline{R}$.

كما نقول عن (X,M,μ) إنه فضاء قياس σ - منته، أو عن μ إنه قياس σ - منته إذا أمكن إيجاد متتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من عناصر M، بحيث تكون $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$، وبحيث يكون $\mu(A_i)<+\infty$، من أجل $i=1,2,...$. ويتضح من التعريف أن كل قياس منته هو σ- منته، وأن الشرط اللازم والكافي لكي يكون μ قياساً σ- منتهياً، هو أن توجد متتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من المجموعات القيوسة والمنفصلة، بحيث تكون $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ وبحيث يكون $\mu(A_i)<+\infty$ من أجل $i=1,2,...$.

مثال (1)

ليكن الفضاء القيوس $(X,2^X)$، ولتكن μ دالة مجموعة $\mu:2^X\to\overline{\mathbb{R}}^+$ معرّفة على النحو التالي:

$$\mu(A)=\begin{cases} \text{عددعناصر } A & \text{، منتهية } A \\ +\infty & \text{، غير منتهية } A \end{cases}$$

نتحقق بسهولة من أن $(X,2^X,\mu)$ فضاء قياس. نسمي μ قياس العدّ.

مثال (2)

ليكن الفضاء القيوس $(X,2^X)$، وليكن $a\in X$. لنعرّف دالة مجموعة μ، $\mu:2^X\to\overline{\mathbb{R}}^+$ كما يلي:

$$\mu(A)=\begin{cases}1 & , a\in A\\ 0 & , a\notin A\end{cases}$$

إن $(X,2^X,\mu)$ فضاء قياس. نسمي القياس μ قياس ديراك.

مثال (3)

لتكن X مجموعة غير عدودة، وليكن الصف:

$$M=\{A\in2^X : \text{عدودة } A^c \text{ أو } A\}$$

نعلم أن M جبر تام. انظر المثال (7) في الفصل الأول. لنعرّف على M دالة مجموعة μ، $\mu:M\to\overline{\mathbb{R}}^+$ كما يلي:

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & , \text{ عدودة } A\\ 1 & , \text{ عدودة } A^c\end{cases}$$

نتحقق بسهولة من أن (X,M,μ) فضاء قياس.

مثال (4)

لتكن X مجموعة غير منتهية ، ولتكن $\{a_1,a_2,.....\}\subseteq X$ ولنفرض أن $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ متسلسلة ذات حدود غير سالبة متقاربة ومجموعها يساوي الواحد. إذا كانت μ دالة مجموعة $\mu:2^X\to\overline{\mathbb{R}}^+$ معرّفة على النحو التالي:

$$\mu(A)=\begin{cases}\sum_{a_i\in A}b_i & , A\cap\{a_1,a_2,.....\}\neq\phi\\ 0 & , A\cap\{a_1,a_2,......\}=\phi\end{cases}$$

نتحقق بسهولة من أن $(X,2^X,\mu)$ فضاء قياس وأن $\mu(X)=1$.

نسمي بوجه عام كل قياس μ يحقق الشرط $\mu(X)=1$ قياساً احتمالياً، ونسمي عندئذ فضاء القياس الموافق (X,M,μ) فضاء احتمالياً.

نقدم من خلال المبرهنات والنتائج التالية الخواص الأساسية للقياس:

مبرهنة (2.1.1)

(خاصة الجمعية)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس وكانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات قيوسة ومنفصلة فإن:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

البرهان:

إذا وضعنا $B_i = A_i$ من أجل $i=1,\ldots n$ و $B_i = \phi$ من أجل $i>n$ ، فإن $(B_i)_{i\geq 1}$ تكون متتالية من المجموعات القيوسة والمنفصلة ويكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

عندئذ، نجد أن:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \blacktriangle$$

مبرهنة (2.1.2)

(خاصة تحت الجمعية التامة)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة، فإن:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

البرهان:

إذا وضعنا :

$$B_1 = A_1 ، B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad \forall \quad i\geq 2$$

فإن $(B_i)_{i\geq 1}$ تكون عندئذ متتالية من المجموعات القيوسة والمنفصلة، وتكون $B_i \subseteq A_i$ من أجل $i=1,2,\ldots$ كما يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. إذا:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \blacktriangle$$

مبرهنة (2.1.3)

(خاصة التزايد)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس ، وكانت A و B مجموعتين قيوسيتن بحيث إن $A \subseteq B$ فإن:

$$\mu(A) \leq \mu(B) .$$

البرهان:

استناداً إلى الفرض ، تكون $B = A \cup (B-A)$ ، وتكون $B-A$ قيوسة وغير متقاطعة مع A . إذاً :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \geq \mu(A)$$

تجدر الإشارة ، بخصوص المبرهنة السابقة إلى أن خاصة التزايد التي تتمتع بها دالة القياس تكافئ كونها دالة غير سالبة. ▲

نتيجة (2.1.1)

إذا كانت A و B مجموعتين قيوسيتن، وكانت $A \subseteq B$ ، وكان $\mu(B) < +\infty$

فإن :

$$\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A)$$

البرهان:

النتيجة واضحة، ولا تحتاج إلى برهان. ▲

تعريف (2.1.3)

إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات الجزئية في X ، فإننا نعرّف النهاية العليا والنهاية السفلى للمتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ (على الترتيب) بالعلاقتين:

$$\overline{\lim_i}\, A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$$

$$\underline{\lim_i}\, A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$$

ونقول عن المتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ إنها متقاربة، إذا وفقط إذا كانت $\overline{\lim_i} A_i = \underline{\lim_i} A_i$ إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متقاربة، فإننا نسمي المجموعة $\overline{\lim_i} A_i (= \underline{\lim_i} A_i)$ نهاية المتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ ، ونرمز لها بالرمز $\lim_i A_i$.

يتضح من التعريف السابق أنه إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة، فإنها تكون متقاربة، وتكون $\lim_i A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. وإذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متناقصة، فإنها متقاربة أيضاً، وتكون $\lim_i A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

كما يتضح أيضاً أنه، إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة، فإن كلاً من المجموعتين $\overline{\lim_i} A_i$, $\underline{\lim_i} A_i$ تكون قيوسة وبالتالي إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متقاربة فإن المجموعة $\lim_i A_i$ تكون قيوسة أيضاً.

تعبر المبرهنتان التاليتان عما يسمى أحياناً استمرار القياس.

مبرهنة (2.1.4)

(خاصة الاستمرار من الأدنى)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، فإن:

$$\lim_i \mu(A_i) = \mu(\lim_i A_i)$$

البرهان:

بما أن $(A_i)_{i\geq 1}$ متزايدة، إذاً:

$$\lim_i A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

فإذا وضعنا $A_0 = \phi$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i - A_{i-1})$ فإذا لاحظنا أن المجموعات $A_i - A_{i-1}$ من أجل $i = 1,2,\ldots$ ، قيوسة ومنفصلة، فإن:

$$\mu(\lim_i A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i - A_{i-1})$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i - A_i) = \lim_n \mu[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i - A_{i-1})$$

$$= \lim_n \mu(A_n).\ ▲$$

مبرهنة (2.1.5)

(خاصة الاستمرار من الأعلى)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة، وكان $\mu(A_1) < +\infty$ ، فإن:

$$\lim_i^{\mu}(A_i) = \mu(\lim_i A_i)$$

البرهان :

بما أن $(A_i)_{i\geq 1}$ متناقصة، إذاً:

$$\lim_i A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

فإذا وضعنا $B_i = A_1 - A_i$ من أجل $i = 1,2,\ldots$ فإن $(B_i)_{i\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة ويكون $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة **(2.1.4)**، والنتيجة **(2.1.1)**، نجد أن:

$$\mu(\lim_i A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$$
$$= \mu(A_1) - \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A_1) - \lim_i \mu(B_i)$$
$$= \lim_i[\mu(A_1) - \mu(B_i)] = \lim_i \mu(A_i)\ . \ \blacktriangle$$

ملاحظة:

تبقى المبرهنة السابقة صحيحة إذا كان قياس أيٍ من المجموعات A_i منتهياً. فإذا فرضنا أن $\mu(A_{i_0}) < +\infty$ فإننا نضع $B_i = A_{i_0} - A_i$ من أجل $i > i_0$ ، $B_i = \phi$ من أجل $(1 \leq i < i_0)$ ونتابع نفس البرهان.

نتيجة (2.1.2)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس منتهٍ، و كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة، فإن:

$$\mu(\underline{\lim}_i A_i) \leq \underline{\lim}_i \mu(A_i) \leq \overline{\lim}_i \mu(A_i) \leq \mu(\overline{\lim}_i A_i)$$

البرهان:

إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية مطّردة (متزايدة أو متناقصة)، فإن:

$$\overline{\lim}_i A_i = \underline{\lim}_i A_i = \lim_i A_i$$

عندئذ، استناداً إلى الفرض، وإلى المبرهنتين **(2.1.4)** و**(2.1.5)** تكون النتيجة صحيحة، أما في الحالة العامة فإن:

$$\mu(\underline{\lim}_i A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j) = \lim_i \mu(\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j) \leq \underline{\lim}_i \mu(A_i) \qquad (1)$$

وذلك استناداً إلى المبرهنة **(2.1.4)**، وإلى أن $\mu(\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j) \leq \mu(A_i)$ ، وذلك أياً يكن $i \geq 1$.

و

$$\mu(\overline{\lim}_i A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j) = \lim_i \mu(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j) \geq \overline{\lim}_i \mu(A_i) \qquad (2)$$

وذلك استناداً إلى المبرهنة **(2.1.5)**، وإلى أن $\mu(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j) \geq \mu(A_i)$ ، وذلك أياً يكن $i \geq 1$.

من (1) و(2) نجد أن النتيجة صحيحة أيضاً في هذه الحالة، وبذلك يكتمل البرهان.▲

تبين النتيجة التالية أن القياس المنتهي دالة مستمرة.

نتيجة (2.1.3)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس منتهٍ، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متقاربة من المجموعات القيوسة. فإن :

$$\lim_i \mu(A_i) = \mu(\lim_i A_i)$$

البرهان:

في الواقع تكفي ملاحظة أن:

$$\underline{\lim} A_i = \overline{\lim_i} A_i = \lim_i A_i$$

والعودة إلى النتيجة (**2.1.2**).▲

يوضح المثال التالي أنه إذا كان $\mu(A_i) = +\infty$، من أجل ...,$i=1,2$ ، فإن المبرهنة (**2.1.5**) لا تبقى صحيحة.

مثال (5)

ليكن فضاء القياس $(N,2^N,\mu)$ حيث μ قياس العد، ولتكن:

$$A_i = \{i, i+1, \ldots\} \ , \quad i = 1,2,\ldots$$

عندئذ نجد أن $\mu(A_i) = +\infty$ وذلك من أجل ..,$i = 1,2$، وأن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$، وبالتالي فإن:

$$\mu(\lim_i A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\phi) = 0 \neq \lim_i \mu(A_i)$$

من المعلوم أن لسلوك دالة مستمرة على مجموعة كثيفة في مجموعة تعريفها، دور أساسي في تحديد بنية الدالة على كامل مجموعة تعريفها. لعلّ المبرهنة التالية تندرج ضمن سياق مماثل خاص بدوال القياس.

مبرهنة (2.1.6)

إذا كانت D حلقة في X ، وكان μ_1 وμ_2 قياسين σ- منتهيين على $\sigma(D)$ ومتساويين على D ، فإن $\mu_1 = \mu_2$.

البرهان:

لنفرض أولاً أن $\mu_1(X) < +\infty$، ولنضع:

$$H = \{A \in \sigma(D) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

عندئذ تكون $D \subseteq H$. إن H صف مطرد على الحلقة D، لأنه إذا كانت $(A_i)_{i\geq1}$ متتالية متزايدة من عناصر H، فإن:

$$\mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_i \mu_1(A_i) = \lim_i \mu_2(A_i) = \mu_2(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

إذاً، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$. نتحقق بطريقة متشابهة من أنه إذا كانت $(A_i)_{i\geq1}$ متتالية متناقصة من عناصر H، وأخذنا بعين الاعتبار أن $\mu_1(X) < +\infty$، فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in H$. ينتج أن H يحوي الصف المطرد الأصغري على D، أي أنه يحوي $\sigma(D)$، وذلك استناداً إلى المبرهنة (**1.3.2**)، وبالتالي فإن $\mu_1 = \mu_2$.

لنفرض الآن أن $\mu_1(X) = +\infty$. بما أن μ_1 قياس σ- منته إذاً، توجد متتالية $(D_i)_{i\geq1}$ من عناصر $\sigma(D)$ المنفصلة، بحيث تكون $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ ، وبحيث يكون $\mu_1(D_i) < +\infty$ من أجل ...,$i=1,2$. الآن أياً يكن $i\geq1$، فإن مقصور الجبر التام $\sigma(D)$ على D_i هو الجبر التام الأصغري على الصف $\{A \cap D_i : A \in D\}$.

وحيث إن $\mu_1(D_i) < +\infty$ إذاً، واستناداً إلى القسم الأول من البرهان، يكون:

$$\mu_1(B \cap D_i) = \mu_2(B \cap D_i) \ , \ \forall B \in \sigma(D)$$

إذاً، أياً تكن $B \in \sigma(D)$، فإن:

$$\begin{aligned}\mu_1(B) &= \mu_1[B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i)] = \mu_1[\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap D_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(B \cap D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B \cap D_i) \\ &= \mu_2[\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap D_i)] = \mu_2(B)\end{aligned}$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (2.1.4)

إذا كان F جبراً في X، وكان μ_1 و μ_2 قياسين σ - منتهيين على $\sigma(F)$، ومتساويين على F، فإن $\mu_2 = \mu_1$.

2.2 فضاء القياس التام

تعريف (2.2.1)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكانت $A \subseteq X$ فإننا نقول عن A إنها **مجموعة همولة بالنسبة للقياس μ، أو μ- همولة**، إذا كانت محتواة في مجموعة قيوسة، قياسها معدوم.

ينتج من التعريف أن كل اتحاد عدود لمجموعات μ- همولة هو مجموعة μ- همولة، وأن كل مجموعة جزئية من مجموعة μ - همولة هي بدورها μ - همولة أيضاً.

تجدر الإشارة بهذا الصدد إلى أن المجموعة المهمولة بالنسبة لقياس مفروض ليست قيوسة بوجه عام. فإذا اعتبرنا على سبيل المثال أن μ هو القياس الصفري على الجبر التام $\{\phi , X\}$ فإن كل المجموعات الجزئية في X تكون μ - همولة، في حين أن ϕ و X هما المجموعتان الوحيدتان القيوستان بالنسبة لـــ μ . وهكذا نجد أنفسنا أمام التعريف التالي:

تعريف (2.2.2)

نقول عن قياس μ إنه **قياس تام**، إذا كانت كل مجموعة μ - همولة، مجموعة μ- قيوسة.

إذا كان μ قياساً تاماً، فإننا نقول عن (X,M,μ) إنه **فضاء قياس تام**.

نعرض فيما يلي طريقة للحصول على قياس تام من قياس مفروض، وهو إجراء معروف بعملية تتميم القياس.

ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولنضع:

$$\overline{M} = \{E \subseteq X : E = A \cup B \text{ قيوسة - } \mu\ A \text{ ،همولة - } \mu\ B\}$$

عندئذ، نتحقق بسهولة من أن $\overline{M}$ جبر تاء يحوي M، ويحوي أيضاً صف المجموعات المهمولة بالنسبة لـــ μ. لنعرف على $\overline{M}$ دالة مجموعة $\overline{\mu}$ بالعلاقة:

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$$

إن $\overline{\mu}(E)$ مستقل عن الشكل الذي نعبر به عن المجموعة E باتحاد مجموعة μ-قيوسة ومجموعة μ-همولة. في الواقع إذا فرضنا أن $E= A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$، حيث A_1 وA_2 قيوستان بالنسبة لـــ μ و B_1 وB_2 همولتان بالنسبة لـــ μ، فإن:

$$A_1 - A_2 \subseteq E - A_2 \subseteq C_2$$

حيث C_2 μ- قيوسة، وقياسها معدوم، وتحوي B_2.

وعندئذ يكون $\mu(A_1 - A_2)=0$. ولكن:

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

إذاً :

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

بمحاكمة مماثلة نجد أن:

$$\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

وهكذا يكون:

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

من جهة أخرى، $\overline{\mu}$دالة غير سالبة، و $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\mu}(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) = 0$.

كذلك، إذا كانت $(E_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $\overline{M}$ المنفصلة، فإن $E_i = A_i \cup B_i$، حيث A_i μ− قيوسة، و B_i μ− همولة، وذلك من أجل $i=1,2,\dots$. وعندئذ يكون:

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \overline{\mu}[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)] = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)$$

ينتج أن $(X, \overline{M}, \overline{\mu})$ فضاء قياس.

لنتحقق الآن من أن $\overline{\mu}$ قياس تام:

لتكن F $\overline{\mu}$− همولة عندئذ توجد مجموعة G $\overline{\mu}$−قيوسة تحوي F، وبحيث يكون $\overline{\mu}(G) = 0$. بما أن G $\overline{\mu}$− قيوسة، إذاً $G=A\cup B$،

حيث A μ− قيوسة، و B μ− همولة. توجد بالتالي مجموعة C μ−قيوسة تحوي B، بحيث إن $\mu(C)=0$.

ينتج أن:

$$0 = \mu(C) \leq \mu(A \cup C) \leq \mu(A) + \mu(C) = \overline{\mu}(G) = 0$$

أي أن $\mu(A\cup C)=0$. ولكن $F \subseteq A\cup C$، إذاً F μ− همولة، وبالتالي فإن $F \in \overline{M}$.

وهذا يعني أن $\overline{\mu}$ قياس تام.

لنبين أخيراً أنه إذا كان μ تاماً، فإن $\overline{\mu} = \mu$.

في الواقع ،إذا كان μ تاماً، وكانت $E = A \cup B \in \overline{M}$، حيث A μ− قيوسة، B μ− همولة فإن B تكون μ − قيوسة، وتكون بالتالي E μ− قيوسة. أي أن $\overline{M} \subseteq M$. وحيث إن $M \subseteq \overline{M}$ إذاً: $M = \overline{M}$. من جهة ثانية، أياً تكن $E \in \overline{M}(=M)$، فإن:

$$\mu(A) \leq \mu(E) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = \mu(A)$$

أي أن:

$$\mu(E) = \mu(A) = \overline{\mu}(E)$$

وهكذا نجد أن $\overline{\mu} = \mu$

نسمي القياس $\overline{\mu}$ **القياس المتمم** للقياس μ و $\overline{M}$ **الجبر التام المتمم** لـ M.

كما نسمي $(X, \overline{M}, \overline{\mu})$ **فضاء القياس المتمم** للفضاء (X,M,μ).

2.3 القياس الخارجي

يُعَدّ الرياضي اليوناني كاراثيودوري أول من أدخل مفهوم القياس الخارجي في نظرية القياس، وتتجلى أهمية هذا المفهوم في استخدامه للحصول على دوال قياس.

تعريف (2.3.1)

نقول عن الدالة $\mu^* : 2^X \to \overline{R}$ ، إنها **قياس خارجي** على X، إذا حققت الشروط التالية:

$$\mu^*(\phi) = 0 \qquad \textbf{(i)}$$

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \qquad \textbf{(ii)}$$

وذلك أياً تكن المتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر 2^X .

(iii) إذا كانت $A \subseteq B \subseteq X$، فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

نعبر أحياناً عن الشرطين **(i)** و **(ii)** بقولنا إن μ^* يحقق خاصة تحت الجمعية التامة.

ينتج من التعريف أنه، إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X فإنه يحقق خاصة تحت الجمعية، أي إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من X، فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$$

كما ينتج أن كل قياس خارجي هو دالة غير سالبة، وذلك استناداً إلى **(i)** و **(iii)**.

مثال (6)

لتكن X مجموعة غير منتهية، ولنعرف على الصف 2^X دالة مجموعة μ^*، كما يلي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt{n}\ , & \text{A منتهية وعدد عناصرها n} \\ +\infty\ , & \text{A غير منتهية} \end{cases}$$

نتحقق بسهولة من أن μ^* قياس خارجي على X، إلا أنه ليس قياساً على الجبر التام 2^X إذ أنه من أجل أية مجموعتين جزئيتين منتهيتين من X، A_1 و A_2 منفصلتين، وعدد عناصرهما n_1 و n_2 (على الترتيب)، فإن:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \sqrt{n_1 + n_2} \neq \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

وهنا، تجدر ملاحظة أنه إذا قصرنا μ^* على الجبر التام $\{\phi, \{a\}, X-\{a\}, X\}$ حيث a عنصر مفروض من X، فإن المقصور الناتج يكون قياساً.

وبوجه عام، فإنه يمكننا دوماً أن نقصر قياساً خارجياً مفروضاً على X، على جبر تام محتوىً تماماً في الجبر التام 2^X، بحيث يكون المقصور الناتج قياساً. ولعلّ أبسط الأمثلة على ذلك هو مقصور أي قياس خارجي على X، على الجبر التام $\{\phi, X\}$.

إن أكثر الصفوف فائدة في إطار ما سبق ذكره، هو صف المجموعات الوارد تعريفها فيما يلي:

تعريف (2.3.2)

إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X، فإننا نقول عن مجموعة جزئية A من X، إنها قيوسة بالنسبة لـ μ^* أو إنها μ^* – قيوسة، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \qquad (*)$$

وذلك أياً تكن $T \subseteq X$. نسمي المجموعة T الواردة في الشرط (*) مجموعة الاختبار.

بما أنه، أياً تكن المجموعتان الجزئيتان T و A من X، فإن:

$$T = (T \cap A) \cup (T \cap A^c)$$

إذاً، فالمتباينة :

$$\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

صحيحة دوماً. بالتالي، فإن A تكون μ^* – قيوسة، إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

وذلك أياً تكن $T \subseteq X$، حيث $\mu^*(T) < +\infty$.

من المفيد أن نلاحظ أن شرط قيوسية مجموعة $A(\subseteq X)$ بالنسبة لقياس خارجي μ^* يتطلب أن تكون A "نظامية" بحيث أنها تقسم مجموعة الاختبار T إلى جزأين، يكون μ^* جمعياً على المجموعة المكونة منهما.

سندل بالرمز M^* على صف المجموعات الجزئية من X، القيوسة بالنسبة لـ μ^*.

إن هدفنا الأساسي في هذه الفقرة هو إثبات أن M^* جبر تام في X، وأن مقصور μ^* على M^* هو قياس تام.

نبدأ أولاً بالتحقق من أن M^* جبر في X.

مبرهنة (2.3.1)

إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X، فإن M^* يكون جبراً في X.

البرهان:

لتكن $T \subseteq X$. عندئذ:

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap X)=\mu^*(T\cap X)+\mu^*(\phi)$$
$$=\mu^*(T\cap X)+\mu^*(T\cap X^c)$$

أي أن $X \in M^*$.

كذلك، فإن M^* صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم، إذا يكفي أن نلاحظ أن شرط القيوسية بالنسبة لـ μ^* متناظر في المجموعة ومتممتها.

لنتحقق الآن من أن الصف M^* مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد المنتهي. لنفرض أن $A_1, A_2 \in M^*$.

عندئذ، أياً تكن $T \subseteq X$، فإن:

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A_1)+\mu^*(T\cap A_1^c)$$

و:

$$\mu^*(T\cap A_1^c)=\mu^*(T\cap A_1^c\cap A_2)+\mu^*(T\cap A_1^c\cap A_2^c)$$

إذاً:

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A_1)+\mu^*(T\cap A_1^c\cap A_2)+\mu^*(T\cap A_1^c\cap A_2^c)$$
$$\geq \mu^*[T\cap(A_1\cup A_2)]+\mu^*[T\cap(A_1\cup A_2)^c]$$

وذلك لأن:

$$T\cap(A_1\cup A_2)=(T\cap A_1)\cup(T\cap A_1^c\cap A_2)$$

ينتج أن $A_1 \cup A_2 \in M^*$، وبذلك يكتمل البرهان.▲

توطئة (1)

إذا كانت A_1، ....، A_n مجموعات μ^* – قيوسة، ومنفصلة، فإن:

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)]=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap A_i)$$

وذلك أياً تكن $T \subseteq X$.

البرهان:

سنبرهن على صحة التوطئة باستخدام الاستقراء الرياضي. لنفرض أن $T \subseteq X$.

نلاحظ أولاً أن العلاقة الواردة في التوطئة صحيحة من أجل $n=1$. لنفرض أنها صحيحة من أجل n ، ولنتحقق من صحتها من أجل $n+1$.

بما أن M^* جبر في X، إذاً $\bigcup_{i=1}^{n}A_i \in M^*$، وبالتالي فإن:

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)]=\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)]+$$
$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)^c]$$
$$=\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)]+\mu^*(T\cap A_{n+1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap A_i)+\mu^*(T\cap A_{n+1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\mu^*(T\cap A_i)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

تعود المبرهنة التالية إلى الرياضي كاراثيوردوري.

مبرهنة (2.3.2)

ليكن μ^* قياساً خارجياً على X. عندئذ يكون M^* جبراً تاماً في X ويكون مقصور μ^* على M^* قياساً تاماً.

البرهان:

لنبرهن أولاً أن M^* جبر تام في X. بما أن M^* جبر، إذاً يكفي التحقق من أن M^* مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M^* لنضع

$$B_1=A_1 \quad , \quad B_i=A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j \quad , \quad \forall i\geq 2$$

عند ئذ تكون $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M^* ~~المنفصلة ويكون~~ $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

لتكن $T\subseteq X$. بما أن M^* جبر في X، إذاً $\bigcup_{i=1}^{n}B_i\in M^*$، وذلك أياً يكن $n\geq 1$.

وبالتالي فإن:

$$\mu^*(T)=\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)]+\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)^c]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap B_i)+\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)^c]$$

وذلك استناداً إلى التوطئة (**1**). ينتج أن:

$$\mu^*(T)\geq\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap B_i)+\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)^c]\ ,\ \forall n\geq 1$$

وعندما يسعى n إلى $+\infty$، نجد أن:

$$\mu^*(T)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap B_i)+\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)^c]$$
$$\geq\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)^c]+\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)^c]$$

أي أن $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\in M^*$. وهذا يعني أن M^* مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. إذاً M^* جبر تام في X.

لنبرهن الآن أن μ^* تام الجمعية على M^*.

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M^*المنفصلة. عندئذ، استناداً إلى تزايد μ^*، وإلى التوطئة (**1**) نجد أن:

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)]\geq\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)]=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap A_i)$$

وذلك أياً يكن $n\geq 1$. وبالتالي عندما يسعى n إلى $+\infty$ فإن :

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)]\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_i) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، استناداً إلى خاصة تحت الجمعية التامة، نجد أن:

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)]=\mu^*[\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap A_i)]\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_i) \qquad (2)$$

من (1) و(2) ينتج أن :

$$\mu^*[T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i)$$

وذلك أياً تكن $T \subseteq X$. يكفي الآن أن نضع $T=X$ في المساواة الأخيرة لنجد أن μ^* تام الجمعية على M^*. وحيث إن $\mu^*(\phi) = 0$ و $\mu^* \geq 0$ إذاً فمقصور μ^* على M^* هو دالة قياس. لنتحقق أخيراً من أن هذا القياس تام.

لتكن A مجموعة مهملة بالنسبة لمقصور μ^* على M^*. عندئذ توجد مجموعة B μ^* - قيوسة وتحوي A، بحيث يكون $\mu^*(B) = 0$. بما أن μ^* دالة متزايدة، إذاً $\mu^*(A) = 0$. وبالتالي أياً تكن $T \subseteq X$، فإن:

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \leq \mu^*(A) + \mu^*(T \cap A^c)$$
$$\leq \mu^*(T \cap A^c) \leq \mu^*(T)$$

أي أن A قيوسة بالنسبة لـ μ^*. وبذلك يكتمل البرهان. ▲

2.4 مبرهنة التمديد

لتكن X مجموعة غير خالية. يمكن تلخيص الطريقة المألوفة في الحصول على قياس على جبر تام في X بما يلي:

نعرف على صف معين G من أجزاء X – غالباً ما يكون حلقة أو جبراً – دالة مجموعة τ تتمتع بجميع خواص القياس على G، ثم نستخدم ذلك القياس الخاص لتعريف قياس خارجي على X يمدد τ، بحيث يحوي صف المجموعات القيوسة بالنسبة له، الصف G. وبالتالي فإنه سيحوي الجبر التام $\sigma(G)$. عندئذ يكون مقصور القياس الخارجي الآنف الذكر على $\sigma(G)$ هو القياس المنشود.

تعريف (2.4.1)

إذا كان G صفاً من أجزاء X، بحيث إن $\phi \in G$ ، فإننا نقول عن دالة مجموعة $\tau: G \to \overline{R^+}$: τ إنها قياس على الصف G، إذا حققت الشرطين التاليين:

(i) $\tau(\phi)=0$

(ii) إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر G المنفصلة، وكان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in G$ فإن:

$$\tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$$

ينتج من التعريف السابق أنه إذا كان الصف G حلقة أو جبراً في X، وكان τ قياساً على G فإنه يكون متزايداً وجمعياً على G.

إذا كان τ قياساً على صف G في X، فإننا نقول عن τ إنه منته، إذا كان $\tau(A) < +\infty$، وذلك أياً تكن $A \in G$. كما نقول عن τ إنه σ – منته إذا أمكننا إيجاد متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر G، وذلك من أجل كل $A \in G$، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، و $\tau(A_i) < +\infty$، وذلك أياً يكن $i \geq 1$. من الواضح أنه إذا كان τ منتهياً فإنه يكون σ– منتهياً.

مبرهنة (2.4.1)

إذا كان τ قياساً على حلقة D في X، وكانت $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ ، حيث $D_i \in D$ من أجل $i=1,2,...$، فإن دالة المجموعة μ^* المعرفة على 2^X، بالعلاقة:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i) : A_i \in D, (\forall i \geq 1), \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A\right\}$$

تكون قياساً خارجياً على X.

البرهان:

من الواضح أن μ^* دالة غير سالبة.

لتكن $A_i = \phi$، من أجل $i=1,2,\dots$. عند ئذ تكون $(A_i)_{i\geq1}$ متتالية من عناصر D، وتكون $\phi \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، وعليه فإن:

$$0 \leq \mu^*(\phi) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i) = 0$$

إذاً $\mu^*(\phi) = 0$.

لتكن $A \subseteq B \subseteq X$. عندئذ أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من عناصر D، بحيث إن $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، فإن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. وبذلك يكون $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

أخيراً، لتكن $(E_i)_{i\geq1}$ متتالية من عناصر 2^X ، وليكن $\varepsilon > 0$. توجد استناداً إلى تعريف μ^*، من أجل كل $i\geq1$ متتالية $(A_{i,j})_{j\geq1}$ من عناصر الحلقة D، بحيث يكون: $E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$، وبحيث يكون $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_{i,j}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. عندئذ يكون: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{i,j}$ ، ويكون:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_{i,j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon$$

وحيث إن ε موجب كيفي، إذاً:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

ينتج مما تقدم أن μ^* قياس خارجي على X وبذلك ينتهي البرهان. ▲

ملاحظة (1):

من المفيد ملاحظة أن المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا استبدلنا الحلقة D بصفٍّ G من أجزاء X تكون معه $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i$، حيث $A_i \in G$، من أجل $i=1,2,\dots$، و تكون ϕ عنصراً من G.

تعريف (2.4.2)

نسمي القياس الخارجي الوارد في المبرهنة السابقة، **القياس الخارجي المولّد** بالقياس τ.

مبرهنة (2.4.2)

(مبرهنة التمديد)

إذا كان τ قياساً على حلقة D في X، وكانت $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$، حيث $D_i \in D$ من أجل $i=1,2,\dots$ فإنه يمكن تمديد τ إلى قياس على $\sigma(D)$. وإذ ا كان $\tau(D_i) < +\infty$ أياً يكن $i \geq 1$ ، فإن الممدد الناتج يكون σ - منتهياً ووحيداً.

البرهان:

ليكن μ^* القياس الخارجي المولد بالقياس τ. عندئذ أياً تكن $A \subseteq X$، فإن:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i) : A_i \in D, (\forall i \geq 1), \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A\right\}$$

لنبرهن أولاً أن μ^* ممدد لـــ τ.

لتكن $A \in D$. عندئذ تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، حيث $A_1 = A$ و $A_i = \phi$ من أجل $i \geq 1$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i) = \tau(A) \qquad (1)$$

من أجل البرهان على صحة المتباينة المعاكسة، أي $\tau(A) \leq \mu^*(A)$ ، نفرض أن $(A_1)_{i\geq1}$ متتالية من عناصر D، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، ونضع:

$$B_1 = A_1 \;,\; B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \;, \forall i \geq 2$$

عندئذ، تكون $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر D المنفصلة، وذلك استناداً إلى خواص الحلقة، كما يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. ينتج أن:

$$\tau(A) = \tau[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)] = \sum_{i=1}^{\infty}\tau(A \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\tau(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i)$$

وعليه، فإن:

$$\tau(A) \leq \mu^*(A) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نجد أن $\mu^*(A)=\tau(A)$، وذلك أياً تكن $A \in D$. أي أن μ^* ممدد لـ τ.

الآن، بما أن مقصور μ^* على الجبر التام M^*، صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـ μ^* هو دالة قياس، إذاً يكفي البرهان على أن $D \subseteq M^*$ ليكون مقصور μ^* على $\sigma(D)$ هو القياس الذي يمدد τ على $\sigma(D)$. لنبرهن إذاً أن $D \subseteq M^*$.

لتكن $A \in D$، وليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ، أياً تكن $T \subseteq X$ فإنه توجد استناداً إلى تعريف μ^* متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D، بحيث تكون $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، وبحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$$

عندئذ نجد أن:

$$T \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A) \quad , \quad T \cap A^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A^c)$$

وأن:

$$\begin{aligned}\mu^*(T)+\varepsilon &> \sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}[\tau(A_i \cap A)+\tau(A_i \cap A^c)]\\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i \cap A)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i \cap A^c)\\ &\geq \mu^*[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A)]+\mu^*[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A)^c]\\ &\geq \mu^*(T \cap A)+\mu^*(T \cap A^c)\end{aligned}$$

وحيث إن ε موجب كيفي، إذاً:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A)+\mu^*(T \cap A^c)$$

أي أن $A \in M^*$.

ينتج أن $D \subseteq M^*$، وبالتالي فإن $\sigma(D) \subseteq M^*$، وعندئذ يكون مقصور μ^* على $\sigma(D)$ قياساً يمدد τ.

أخيراً، من الواضح أنه إذا كان $\tau(D_i) < +\infty$ من أجل $i=1,2,\ldots$ فإن القياس الناتج يكون σ - منتهياً ووحيداً، وذلك استناداً إلى المبرهنة (2.1.6). ▲

لدينا بهذا الصدد النتيجة الواضحة التالية:

نتيجة (2.4.1)

إذا كان τ قياساً على جبر F في X، فإنه يوجد قياس يمدد τ على $\sigma(F)$. وإذا كان τ σ-منتهياً فإن المدد المذكور يكون σ - منتهياً ووحيداً.

تجدر الإشارة إلى أن ممدد القياس τ الوارد في المبرهنة **(2.4.2)** ليس قياساً تاماً بالضرورة. لنرمز بـ μ_τ للممدد المذكور، عندئذ تبين التوطئة والمبرهنة التاليتان

أن القياس المتمم للقياس μ_τ ما هو إلا مقصور القياس الخارجي μ^* المولد بالقياس τ، على صف المجموعات القيوسة بالنسبة له.

توطئة (2)

إذا كان τ قياساً على حلقة D في X وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$، حيث $D_i\in D$ $(\forall i\geq 1)$، وكان μ^* القياس الخارجي المولد بالقياس τ، فإنه توجد من أجل كل مجموعة جزئية A من X مجموعة B μ_τ- قيوسة، وتحوي A بحيث يكون $\mu_\tau(B)=\mu^*(A)$.

البرهان:

لتكن $A\subseteq X$. توجد، من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ متتالية $(A_{i,n})_{i\geq 1}$ من عناصر D، بحيث تكون $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i,n}$، وبحيث تتحقق المتباينة:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_{i,n})\leq\mu^*(A)+\frac{1}{n}$$

وذلك استناداً إلى تعريف μ^*. إذا وضعنا:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i,n}=B_n\quad,\quad B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$$

فإن $B\in\sigma(D)$ و $A\subseteq B$. وعندئذ يكون:

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(B)\leq\mu^*(B_n)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_{i,n})$$
$$\leq\mu^*(A)+\frac{1}{n}\quad,\quad\forall n\geq 1$$

ينتج أن:

$$\mu^*(A)=\mu^*(B)=\mu_\tau(B)$$

وبذلك ينتهي برهان التوطئة. ▲

نسمي المجموعة B الواردة في نص التوطئة السابقة غطاءً μ_τ- قيوساً للمجموعة A.

مبرهنة (2.4.3)

ليكن τ قياساً على حلقة D في X، ولتكن $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$، حيث $D_i\in D$ وذلك أياً يكن $i\geq 1$. عندئذ إذا كان $\tau(D_i)<+\infty$، من أجل $i=1,2,\ldots$، فإن مقصور القياس الخارجي μ^* المولد بالقياس τ، على M^* هو القياس المتمم للقياس μ_τ.

البرهان:

لنبرهن أولاً أنه أياً تكن $E\in M^*$، فإن $E=A\cup B$، حيث:

$$A\in\sigma(D)\ ,\ B\subseteq C\quad,C\in\sigma(D)\ ,\ \mu_\tau(C)=0$$

توجد، استناداً إلى الفرض متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D، بحيث إن $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$، و $\tau(A_i)<+\infty$، من أجل $i=1,2,\ldots$. إذا وضعنا $E_i=E\cap A_i$ من أجل $i=1,2,\ldots$ عندئذ تكون $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$، ويكون $\mu^*(E_i)\leq\mu^*(A_i)=\tau(A_i)<\infty$ من أجل $i=1,2,\ldots$.

توجد، استناداً إلى التوطئة (2) مجموعة F_i من $\sigma(D)$ تحوي E_i، بحيث يكون $\mu^*(E_i)=\mu_\tau(F_i)$، وذلك أياً يكن $i\geq 1$. ينتج أن:

$$\mu^*(F_i-E_i)=\mu^*(F_i)-\mu^*(E_i)=\mu_\tau(F_i)-\mu_\tau(E_i)=0,\quad\forall i\geq 1$$

توجد أيضاً، واستناداً إلى نفس التوطئة (2) مجموعة $C_i\in\sigma(D)$، تحوي F_i-E_i، بحيث يكون:

$$\mu_\tau(C_i)=\mu^*(F_i-E_i)=0\quad,\qquad\forall i\geq 1$$

فإذا وضعنا:

$$A_i = F_i - C_i \ , \quad B_i = E_i - A_i$$

فإن $A_i \subseteq E_i$ و $A_i \in \sigma(D)$ و $B_i \subseteq C_i$، وذلك من أجل كل $i \geq 1$ وعندئذ، تحقق المجموعات:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad , \quad C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

الغرض المنشود.

لنتحقق أخيراً من أن $\mu^*(E) = \mu_*(A)$. لدينا:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

أي أن:

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(E) \leq \mu_*(A) + \mu_*(C)$$

إذاً:

$$\mu_*(A) = \mu^*(E)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

تمارين

1- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. برهن أن الصف:

$$\overline{M} = \{E \subseteq X : E = A \cup B \text{ ، هولة} - \mu \ B \text{ ، قيوسة} - \mu \ A\}$$

جبر تام، يحوي صف المجموعات المهولة بالنسبة لـ μ.

2- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. إذا كانت $(A_i)_{i\geq1}$ و $(B_i)_{i\geq1}$ متتاليتين من المجموعات القيوسة، بحيث أن $A_i \in B_i$ ، من أجل $i=1,2,..$، فأثبت أن:

a) $$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i - A_i)$$

b) $$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i - A_i)$$

3-ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت $C \subseteq D \subseteq E$، حيث $C,E \in M$، وكان $\mu(E-C) = 0$، فإن $D \in \overline{M}$ ، حيث $\overline{M}$ الصف المعرف في التمرين **1**.

4- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت $A_1,A_2 \in M$، وكان $\mu(A_1 \Delta A_2)=0$ فإن $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. حيث $A_1 \Delta A_2$ هو الفرق التناظري لـ A_1 و A_2، أي أن $A_1 \Delta A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$.

5- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس تام. برهن أنه إذا كانت $A_1 \in M$ ، وكان $\mu(A_1 \Delta A_2)=0$ ، فإن $A_2 \in M$.

6- توطئة (بوريل – كانتيللي): ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة. برهن أنه إذا كان $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) < \infty$ ، فإن

$$\mu(\overline{\lim_i} A_i) = 0$$

7- لتكن X مجموعة غير عدودة وليكن μ قياس العدّ على صف المجموعات التي كل منها عدودة أو متممتها عدودة. برهن أن μ قياس تام.

8-ليكن μ_1 و μ_2 قياسين على $\sigma(I^n)$، حيث I^n صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار في R^n. برهن أنه إذا كان $\mu_1 = \mu_2$ على I^n، وكان μ منتهياً على I^n فإن $\mu_1=\mu_2$ على $\sigma(I^n)$.

9-تحقق من أن كل قياس خارجي هو دالة مجموعة غير سالبة.

10-برهن أنه إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X، وكان $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(A_i)$، من أجل أي عدد منته من المجموعات الجزئية المنفصلة في X، فإن μ^* يكون قياساً.

11-لتكن X مجموعة غير عدودة. برهن أن دالة المجموعة μ^* المعرفة على 2^X قياس خارجي، ثم عيّن صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـــ μ^*، وذلك في كل من الحالات التالية:

a) $\mu^*(\phi) = 0$، و $\mu^*(A) = 1$، وذلك أياً تكن $A \neq \phi$.

b) $\mu^*(\phi) = 0$ ، $\mu^*(X) = 2$، و $\mu^*(A) = 1$، من أجل أية مجموعة أخرى، جزئية من X.

c) $\mu^*(A) = 0$، إذا كانت عدودة، و $\mu^*(A) = 1$، إذا كانت A غير عدودة.

12-إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X، وكانت $A\subseteq X$،بحيث إن $\mu^*(A) = 0$ ، فأثبت أن A μ^*- قيوسة.

13-لتكن μ^* دالة مجموعة معرفة على 2^N، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية، كما يلي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & , \quad \text{منتهية وعدد عناصرها } n \quad A \\ 1 & , \quad \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

برهن أن μ^* قياس خارجي على N، ثم عين صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـــ μ^*.

14-ليكن μ^* قياساً خارجياً منتهياً على X، ولنفرض أنه أياً تكن $A\subseteq X$ فإنه توجد مجموعة μ^* ـ قيوسة B تحوي A، بحيث إن $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.برهن أن الشرط اللازم و الكافي لكي تكون A μ^*-قيوسة ، هو أن يكون:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

15-ليكن (X,M,μ) فضاء قياس σ - منتهياً ولنعرف على 2^X دالة مجموعة μ^* بالعلاقة:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \in M\}$$

برهن أن μ^* قياس خارجي على X، وأن مقصور μ^* على M^*، صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـــ μ^*، هو القياس المتمم لـــ μ.

16–ليكن H صفاً من أجزاء X بحيث إن $\phi \in H$، وبحيث إنه توجد من أجل أية مجموعة جزئية $A(\subseteq X)$ متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر H تحقق العلاقة $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
لتكن φ دالة بمجموعة معرفة على الصف H بحيث تكون غير سالبة، وبحيث إن $\varphi(\phi) = 0$. لنعرف على 2^X دالة بمجموعة μ^*، بالعلاقة:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in H, \forall i \geq 1\right\}$$

a) برهن أن μ^* قياس خارجي على X.

b) برهن أنه إذا كانت $A \in H$، وكانت كل متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر H، بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ تحقق المتباينة $\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$، فإن $\mu^*(A) = \varphi(A)$

c) برهن أن عناصر الصف H تكون μ^* – قيوسة، إذا وفقط إذا كان:

$$\mu^*(A_1) = \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c)$$

من أجل $A_1, A_2 \in H$.

d) برهن أنه إذا كان $H \subseteq M^*$، فإنه توجد من أجل أية مجموعة جزئية $T(\subseteq X)$، مجموعة $B \in \sigma(H)$ بحيث تكون : .

$$T \subseteq B \quad , \quad \mu^*(T) = \mu^*(B)$$

الفصل الثالث

قياس لوبيغ

إن أهم القياسات من الناحية العملية هي تلك المعرفة على صفوف من أجزاء المستقيم الحقيقي R. ولعلّ قياس لوبيغ على R أكثرها شهرة.

نستخدم فيما يلي مبرهنة التمديد لتعريف القياس الآنف الذكر، ثم ندرس أهم خواصه.

3.1 تعريف قياس لوبيغ

ندل بالرمز I على صف المجالات المحدودة، ونصف المفتوحة من اليسار في R، من الشكل $]a,b]$، حيث $a \leq b$.

لنعرف على الصف I دالة بمجموعة τ بالعلاقة:

$$\tau(]a,b]) = b - a \qquad (1)$$

عندئذ، من الواضح أن:

$$\tau \geq 0 \quad , \quad \tau(\phi) = 0$$

وأنه أياً يكن $a \leq b \leq c$ ، فإن:

$$\tau(]a,b]) + \tau(]b,c]) = \tau(]a,c])$$

لتكن D حلقة الاتحادات المنتهية للمجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار والمنفصلة. أي أن A تكون عنصراً من D، إذا وفقط إذا كانت من الشكل $A = \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$، حيث $a_i, b_i \in R$، و $a_i \leq b_i$، وذلك أياً يكن $1 \leq i \leq n$، وحيث $]a_i, b_i] \cap]a_j, b_j] = \phi$ من أجل $i \neq j$.

ستمدد لاحقاً دالة المجموعة τ على الحلقة D، الأمر الذي سنمهد له بالتوطئة والنتيجة التاليتين:

توطئة (1)

إذا كان $]a_i, b_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}]a,b]$ ، فإن $b-a \le \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$. وإذا كان $\bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] \subseteq]a,b]$ ، حيث المجالات $]a_i,b_i]$ $(1 \le i \le m)$ منفصلة، فإن $b-a \ge \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$.

البرهان:

إذا كان $m = 1$ فالنتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. لنفرض أن m أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من الواحد بحيث يكون $]a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i]$. عندئذ يكون:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m,\ a_1 \le a \le b_1,\ a_m < b \le b_m,\ a_{i+1} \le b_i < b_{i+1}$$

وعليه فإن:

$$b-a \le b_m - a_1 = \sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1} - a_i) + (b_m - a_m)$$
$$\le \sum_{i=1}^{m-1}(b_i - a_i) + (b_m - a_m) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$$

وهذا ما ينهي برهان القسم الأول من التوطئة.

لنفرض الآن أن المجالات $]a_i, b_i]$، $(1 \le i \le m)$ منفصلة وأن $\bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i] \subseteq]a,b]$.

إذا كان $m=1$ فالنتيجة واضحة. لنفرض أن $m > 1$ ، عندئذ يكون:

$$a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_m \le b_m \le b \ .$$

وبالتالي فإن:

$$b-a \ge b_m - a_1 = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1} - b_i) \ge \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$$

وهذا ما ينهي برهان القسم الثاني من التوطئة، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (3.1.1)

إذا كانت المجالات $]a_i , b_i]$ ، $1 \le i \le m$، منفصلة وكان

$$]a,b] = \bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i]$$

فإن: $b-a = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$

البرهان:

بالعودة إلى التوطئة (1) نجد أن النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان.▲

لنمدد الآن دالة المجموعة τ على الحلقة D وذلك كما يلي:

إذا كانت $A = \bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i] \in D$ ، حيث المجالات $]a_i , b_i]$ ، $1 \le i \le m$، منفصلة، فإننا نضع:

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^{m} \tau(]a_i - b_i]) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i) \qquad (2)$$

عندئذ تضمن النتيجة **(3.1.1)** أن القيمة τ(A) مستقلة عن الطريقة التي نعبر بها عن A باتحاد منته لمجالات محدودة ونصف مفتوحة من اليسار، ومنفصلة.

تبين المبرهنة التالية أن τ قياس σ – منته على الحلقة D.

مبرهنة (3.1.1).

إن دالة المجموعة τ المعرفة على الحلقة D بالعلاقة (2) قياس σ – منتهٍ على D.

البرهان:

أشرنا سابقاً إلى أن $\tau \geq 0$، وأن $\tau(\phi) = 0$. سنبرهن فيما يلي أن دالة المجموعة τ تامة الجمعية على D.

لتكن $(D_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر D المنفصلة، ولنفرض أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} D \in D$، ولنبرهن أن :

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D_i).$$

بما أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \in D$، إذاً فهو اتحاد منتهٍ لمجالات منفصلة من الشكل $]a,b]$، كذلك، فإن كلاً من المجموعات المنفصلة D_i $(i=1,2,\ldots)$ هي اتحاد منتهٍ لمجالات منفصلة من نفس الشكل. إذاً يكفي البرهان على أنه إذا كانت $(]a_i,b_i])_{i\geq 1}$ متتالية من المجالات المنفصلة، وكان $]a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i,b_i]$، فإن $b-a = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$.

إذا كان $a = b$ فالنتيجة واضحة. لنفرض أن $a<b$. عندئذ أياً يكن $n \geq 1$ فإن $\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i] \subseteq]a,b]$. وبالتالي، استناداً إلى التوطئة (1)، يكون:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq b-a, \forall n \geq 1$$

ندع n يسعى إلى $+\infty$، فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b-a \qquad (*)$$

من جهة أخرى، ليكن $\varepsilon > 0$ بحيث إن $a+\varepsilon < b$. عندئذ يكون $[a+\varepsilon,b] \subseteq]a,b]$

لنضع $b'_i = b_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$، من أجل $i = 1,2,\ldots$. عندئذ تشكل المجموعات المفتوحة $]a_i,b'_i[$، $(i \geq 1)$، تغطية للمجموعة المغلقة والمحدودة أي المتراصة $[a+\varepsilon, b]$.

وبالتالي، توجد استناداً إلى مبرهنة هين – بوريل تغطية منتهية للمجال $[a+\varepsilon, b]$ من التغطية المذكورة. لنفرض أن اتحاد المجالات $]a_{i_1}, b'_{i_1}[,]a_{i_2}, b'_{i_2}[, \ldots\ldots,]a_{i_m}, b'_{i_m}[$ يحوي المجال $[a+\varepsilon, b]$، عندئذ سيحوي من باب أولى المجال $]a+\varepsilon, b]$.

إذاً:

$$b-a-\varepsilon \leq \sum_{j=1}^{m}(b'_{i_j} - a_{i_j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b'_i - a_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \varepsilon$$

أي أن:

$$b-a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + 2\varepsilon$$

وذلك أياً يكن العدد الموجب ε صغيراً بما فيه الكفاية. ينتج أن:

$$b-a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \qquad (**)$$

من (*) و (**) نجد أن $b-a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. ينتج مما تقدم أن τ قياس على الحلقة D.

أخيراً، بما أن $R = \bigcup_{i=1}^{\infty}]-i,i]$، و $\tau(]-i,i]) = 2i < +\infty$، من أجل $i \geq 1$ إذاً τ قياس σ – منتهٍ، ويكتمل بذلك البرهان. ▲

يوجد، استناداً إلى المبرهنة السابقة، وإلى مبرهنة التمديد (2.4.2) ممدد وحيد للقياس τ على $\sigma(D)$، أي على B_R صف المجموعات البوريلية في R.

فإذا رمزنا بـ λ لمتمم ذلك الممدد فإننا نسمي λ **قياس لوبيغ** على R. ينتج أن قياس لوبيغ هو مقصور القياس الخارجي μ^* المولد بالقياس τ على صف المجموعات القيوسة بالنسبة له، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(2.4.3)**.

نذكر، بهذا الصدد أن القياس الخارجي μ^* المولد بالقياس τ معرف على مجموعة أجزاء R بالعلاقة:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(]a_i, b_i]) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i]\right\}$$

أي بالعلاقة:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \overset{(b_i - a_i)}{\cancel{\tau(]a_i, b_i])}} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i]\right\}$$

نسمي μ^* **قياس لوبيغ الخارجي** على R، ويرمز له عادة بالرمز λ^* عوضاً عن μ^*، ونشير بهذا الصدد إلى أنه واستناداً إلى ما سبق يكون للمصطلحين λ – قيوسة و λ^*–قيوسة نفس الدلالة. نحصل مما تقدم إلى أن قياس لوبيغ على R قياس σ–منته وتام وأن كل مجموعة λ–قيوسة هي اتحاد مجموعة بوريليه ومجموعة λ – مهولة، أي مجموعة جزئية من مجموعة بوريلية قياسها معدوم. من جهة أخرى، نجد أن:

$$\lambda(]a, b]) = \tau(]a, b]) = b - a$$

$$\lambda(]a, b[) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}]a, b - \frac{1}{i}]\right)$$

$$= \lim_{i} \lambda(]a, b - \frac{1}{i}])$$

$$= \lim_{i}(b - \frac{1}{i} - a) = b - a$$

وينتج بطريقة مماثلة أن:

$$\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$$

وبوجه خاص، فإن:

$$\lambda(\{a\}) = \lambda([a, a]) = 0$$

كذلك، نجد أن قياس لوبيغ لكل مجال غير محدود في R يساوي $+\infty$. بتعبير آخر فإن قياس لوبيغ لأي مجال في R يساوي طول ذلك المجال. تقدم المبرهنة التالية صيغة مفيدة لقياس لوبيغ الخارجي.

مبرهنة (3.1.2)

أياً تكن $A \subseteq R$، فإن:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}$$

البرهان:

من الواضح أنه أياً تكن المتتالية $(]a_i, b_i[)_{i\geq 1}$ حيث $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$، فإن:

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(]a_i, b_i[) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(]a_i, b_i[)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$$

فإذا كان $\lambda^*(A) = +\infty$، فإن النتيجة تكون واضحة. لنفرض أن $\lambda^*(A) < +\infty$.

عندئذ، أياً يكن $\varepsilon > 0$ توجد متتالية $(]a_i', b_i'])_{i\geq 1}$، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i', b_i']$، وبحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i' - a_i') < \lambda^*(A) + \varepsilon$$

وعليه فإن:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i', b_i' + \frac{\varepsilon}{2^i}[$$

وبالتالي:

$$\lambda^*(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(]a'_i, b'_i + \frac{\varepsilon}{2^i}[) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(]a'_i, b'_i + \frac{\varepsilon}{2^i}[)$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} (b'_i - a'_i) + \varepsilon < \lambda^*(A) + 2\varepsilon$$

الأمر الذي يعني أن الصيغة الواردة في المبرهنة صحيحة، وذلك ينهي البرهان.▲

نتيجة (3.1.2)

أياً تكن $A \subseteq R$، فإن:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(O) : A \subseteq O \text{ مفتوحة } \}$$

مبرهنة (3.1.3)

لتكن $A \subseteq R$. الشرط اللازم والكافي لكي تكون A λ^*–قيوسة، هو أن توجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة مفتوحة O تحوي A، بحيث يكون :

$$\lambda^*(O - A) < \varepsilon$$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن A λ^*– قيوسة. إذا كان $\lambda^*(A) < +\infty$، عندئذ أياً يكن $\varepsilon > 0$ توجد متتالية $(]a_i, b_i[)_{i\ge1}$، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$، وبحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \lambda(A) + \varepsilon$$

ينتج أن المجموعة المفتوحة $O = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$ تحوي A، وأن:

$$\lambda(O - A) = \lambda(O) - \lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) - \lambda(A) < \varepsilon$$

أما إذا كان $\lambda(A) = +\infty$، ووضعنا $B_i = [-i, i]$ و $A_i = A \cap B_i$، من أجل $i = 1, 2, \ldots$، فإن $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و A_i λ^* - قيوسة و $\lambda^*(A_i) < +\infty$، من أجل $i = 1, 2, \ldots$. عندئذ، يوجد استناداً إلى القسم الأول من البرهان، من أجل كل عدد طبيعي $i \ge 1$ مجموعة مفتوحة O_i تحوي A_i، بحيث يكون $\lambda(O_i - A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

وعليه فإن $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ مجموعة مفتوحة تحوي A و:

$$\lambda(O - A) \le \lambda[\bigcup_{i=1}^{\infty} (O_i - A_i)] \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(O_i - A_i) < \varepsilon$$

كفاية الشرط: توجد، استناداً إلى الفرض، من أجل كل عدد طبيعي $i \ge 1$، مجموعة مفتوحة O_i تحوي A، بحيث يكون $\lambda^*(O_i - A) < \frac{1}{i}$. عندئذ تكون $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ مجموعة λ^*– قيوسة تحوي A. من جهة أخرى لدينا:

$$\lambda^*(G - A) \le \lambda^*(O_i - A) < \frac{1}{i} \quad , \quad \forall i \ge 1$$

إذاً، $\lambda^*(G - A) = 0$، وبالتالي فإن $G\text{-}A$ λ^*– قيوسة. أخيراً بما أن $A = G - (G - A)$ إذاً A λ^*– قيوسة، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

3.2 قياس لوبيغ لا يتأثر بالانسحاب

لتكن $A \subseteq R$ وليكن α عدداً حقيقياً. ندل على المجموعة $\{x : x - \alpha \in A\}$ بالرمز $A + \alpha$ أو بالرمز $\alpha + A$، ونسميها المجموعة الناتجة عن A بانسحاب معين بالعدد α.

من أهم الخواص المميّزة لقياس لوبيغ أنه لا يتأثر بالانسحاب، أي أنه إذا كانت A مجموعة λ – قيوسة، فإن $A + \alpha$ تكون λ – قيوسة، ويكون $\lambda(A + \alpha) = \lambda(A)$، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية:

مبرهنة (3.2.1)

أياً يكن العدد الحقيقي α، وأياً تكن $A \subseteq R$، فإن $\lambda^*(A+\alpha) = \lambda^*(A)$
بالإضافة إلى ذلك، فإن A تكون λ - قيوسة إذا وفقط إذا كانت $A+\alpha$
λ- قيوسة، وعندئذ يكون $\lambda(A+\alpha) = \lambda(A)$.

البرهان:

إذا كانت $A=]a,b]$، فإن A تكون λ - قيوسة كما تكون $A+\alpha =]a+\alpha, b+\alpha]$ λ- قيوسة أيضاً، ويكون:

$$\lambda(A+\alpha) = \lambda(A) = b-a$$

وإذا كانت A مفتوحة، فإنها تكون λ - قيوسة، ويمكن – كما نعلم – كتابتها على الشكل $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i]$، حيث المجالات $]a_i, b_i]$ $(i \geq 1)$ منفصلة. وعندئذ تكون $A+\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i+\alpha, b_i+\alpha]$ مفتوحة وبالتالي λ - قيوسة، ويكون:

$$\lambda(A+\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty}[(b_i+\alpha)-(a_i+\alpha)] = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) = \lambda(A)$$

لتكن الآن A مجموعة جزئية كيفية من R. نعلم أن :

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(O) : A \subseteq O \text{ مفتوحة}\}$$

كما يمكننا التحقق بسهولة من أن O تكون مفتوحة وتحوي A، إذا وفقط إذا كانت $O+\alpha$ مفتوحة، وتحوي $A+\alpha$. إذاً:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(O+\alpha) : A \subseteq O \text{ مفتوحة}\}$$
$$= \inf\{\lambda(O) : A \subseteq O \text{ مفتوحة}\} = \lambda^*(A)$$

لنفرض أن A λ- قيوسة. عندئذ أياً تكن $T \subseteq R$ فإن:

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T-\alpha) = \lambda^*[(T-\alpha)\cap A] + \lambda^*[(T-\alpha)\cap A^c]$$
$$= \lambda^*[\alpha + ((T-\alpha)\cap A)] + \lambda^*[\alpha + ((T-\alpha)\cap A^c)]$$
$$= \lambda^*[T\cap(A+\alpha)] + \lambda^*[T\cap(A+\alpha)^c]$$

أي أن $A+\alpha$ λ - قيوسة. بالعكس إذا كانت $A+\alpha$ λ - قيوسة، فإن المجموعة الناتجة عنها بانسحاب معين بالعدد $-\alpha$، أي المجموعة A، تكون λ - قيوسة وذلك استناداً إلى ما تقدم.

أخيراً من الواضح إذا كانت A λ - قيوسة، فإن:

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \lambda^*(A+\alpha) = \lambda(A+\alpha)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

تعريف (3.2.1)

نسمي كل قياس μ معرف على B_R **قياساً بوريلياً** على R. ونقول عن قياس بوريلي μ على R إنه **نظامي** إذا حقق الشرط:

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) : \quad \text{مفتوحة} \quad O \supseteq B\}$$

وذلك أياً تكن $B \in B_R$.

ينتج من التعريف أن **مقصور قياس لوبيغ على B_R هو قياس بوريلي نظامي** وذلك استناداً إلى النتيجة **(3.1.2)**.

من جهة أخرى، لدينا:

مبرهنة (3.2.2)

أياً تكن المجموعة المتراصة K في R، فإن $\lambda(K) < +\infty$.

البرهان:

في الواقع، إذا كانت K متراصة فإنها تكون محدودة وبالتالي يوجد مجال J محدود في R، بحيث إن $K \subseteq J$. عند ئذ يكون:

$$\lambda(K) \leq \lambda(J) < \infty \,. \blacktriangle$$

مبرهنة (3.2.3)

أياً تكن المجموعة المفتوحة O في R، فإن:

$$\lambda(O) = \sup\{\lambda(K) : \text{متراصة } K \subseteq O\}$$

البرهان:

لتكن $K_1, K_2, \ldots$ متتالية كل المجالات المغلقة المحتواة في O، والتي طرفا كل منها عددان عاديان وطوله عدد عادي. عندئذ تكون $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. لنضع:

$$A_i = \bigcup_{m=1}^{i} K_m \qquad , \quad \forall i \geq 1$$

عندئذ تكون A_i، $(i \geq 1)$ مجموعة متراصة، وتكون $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، بحيث إن:

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

ينتج أن:

$$\lim_i \lambda(A_i) = \lambda(O)$$

وحيث إنه، أياً تكن K محتواة في O فإن:

$$\lambda(K) \leq \lambda(O)$$

إذاً من هاتين العلاقتين الأخيرتين نجد أن:

$$\lambda(O) = \sup\{\lambda(K) : \text{متراصة } K \subseteq O\}$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نسمي أحياناً كل قياس بوريلي نظامي يحقق المبرهنتين السابقتين **(3.2.2)** و**(3.2.3)**، **قياس رادون على R.**

و هكذا يتضح أن مقصور قياس لوبيغ على B_R هو قياس رادون.

على الرغم من أن قياس لوبيغ ليس معرفاً – كما وأينا – من أجل كل أجزاء R، إلا أن تقديم مثال لمجموعة غير قيوسة لا يبدو أمراً بديهياً. نستخدم فيما يلي ما يعرف ببديهية الاختيار لعرض مثال لمجموعة غير قيوسة.

بديهية الاختيار:

إذا كان $\{A_j : j \in J\}$ صفاً غير خالٍ من المجموعات غير الخالية والمنفصلة، فإنه توجد مجموعة $B \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$، بحيث أن $B \cap A_j$ تكون مجموعة وحيدة العنصر، وذلك من أجل كل $j \in J$.

مثال (1)

لتكن $A = [0,1]$، ولنعرف من أجل كل x من A المجموعة A_x على النحو التالي:

$$A_x = \{y \in A : \text{عدد عادي } y-x\}$$

من الواضح أن A_x غير خالية، وذلك أياً يكن $x \in A$، لأن $x \in A_x$، وأن الصف $\{A_x : x \in A\}$ غير خال ، لأن مجموعة الأعداد العادية في A عنصر منه. من جهة أخرى، أياً يكن $x \in A$. فإن $x \in A_x$ وبالتالي فإن $A = \bigcup_{x\in A} A_x$.

لنلاحظ أيضاً أنه أياً يكن x_1 وx_2 من A، فإن $A_{x_1} = A_{x_2}$ إذا كان $x_1 - x_2$ عدداً عادياً و $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \phi$ إذا كان $x_1 - x_2$ عدداً غير عادي (أصم).

لنختر استناداً إلى بديهية الاختيار عنصراً واحداً فقط من كلٍ من المجموعات المختلفة A_x، ولنرمز بـــ S لمجموعة العناصر المختارة تلك. نبرهن فيما يلي أن S مجموعة غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ.

لتكن $(r_i)_{i\geq 1}$ متتالية الأعداد العادية في المجال $[-1,1]$، ولنضع $C_i = S + r_i$ من أجل $i=1,2,\ldots$. عندئذ أياً يكن $i\neq j$ فإن $C_i \cap C_j = \phi$. إذا لو كان x عنصراً من التقاطع المذكور لكان كل من $x - r_i$، و $x-r_j$ عنصراً من S وذلك غير ممكن، لأن فرق العددين الأخيرين هو عدد عادي، وبالتالي فهما ينتميان إلى مجموعة واحدة من المجموعات A_x، وذلك يناقض تعريف S.

لنضع $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. عندئذ $C \subseteq [-1,2]$. من جهة أخرى، إذا كان $x \in A$ فإنه يوجد $y \in S$، بحيث يكون x-y عدداً عادياً من المجال $[-1,1]$، أي أنه يوجد عدد طبيعي i_0، بحيث يكون $x = y + r_{i_0}$. عندئذ $x \in C_{i_0}$، أي أن $x \in C$، إذاً $A \subseteq C$.

لنفرض الآن أن S λ– قيوسة. عندئذ تكون $S+r_i$ λ– قيوسة، ويكون:

$$\lambda(S) = \lambda(S + r_i) = \lambda(C_i)$$

وذلك من أجل $i=1,2,\ldots$. كما تكون C λ– قيوسة أيضاً، ويكون:

$$\lambda(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S + r_i) \text{ .}$$

فإذا كان $\lambda(S)=0$ فإن $\lambda(C)=0$ وذلك غير ممكن لأن $\lambda(C) \geq \lambda(A) = 1$. أما إذا كان $\lambda(S)>0$ فإن $\lambda(C)=\infty$، وذلك غير ممكن أيضاً لأن $\lambda(C) \leq \lambda([-1,2])$.

ينتج أن فرضنا S λ– قيوسة فرض خاطئ، وبالتالي فإن S غير قيوسة بالنسبة لـــ λ.

يتضح من المثال السابق أنه توجد مجموعات جزئية من R غير بوريلية. أي أن B_R محتوى تماماً في مجموعة أجزاء R.

مثال (2)

(مجموعة كانتور)

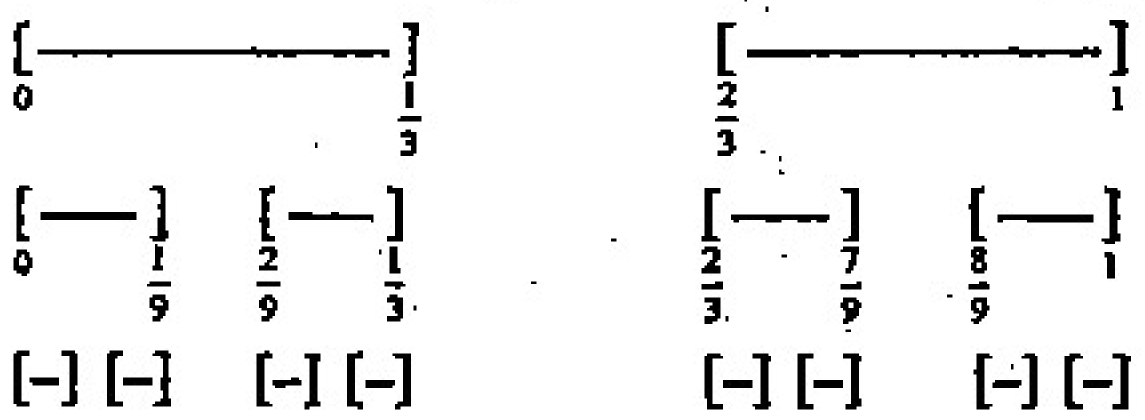
لتكن $C_0 = [0,1]$، ولتكن C_1 المجموعة الناتجة من C_0 بحذف داخل ثلثها الأوسط، أي بحذف المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$، أي أن:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ولتكن C_2 المجموعة الناتجة من C_1 بحذف داخل الثلث الأوسط لكل من المجالين المشكلين لها، أي بحذف المجالين $\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$ و $\left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$، أي أن:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

يوضح الشكل الآتي المجالات المخلوفة في الخطوات الثلاث الأولى.



بمتابعة العمل بنفس الطريقة نجد أن C_i تتألف من 2^i مجالاً مغلقاً طول كل منها $\frac{1}{3^i}$. فإذا حذفنا داخل الثلث الأوسط لكلٍ منها نحصل على C_{i+1}. نعرّف مجموعة كانتور C، بأنها المجموعة:

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

من الواضح أن C مجموعة بوريلية، وبالتالي λ- قيوسة، وأن $\lambda(C)=0$ لأن مجموعة أطوال المجالات المحذوفة من C_{i-1} للحصول على C_i يساوي $\frac{1}{3^i}.2^{i-1}$، وذلك أياً يكن $i \geq 1$ إذاً:

$$\lambda(C) = \lambda([0,1]) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1 - 1 = 0$$

نذكر من خواص مجموعة كانتور[(1)] بهذا الصدد أنها غير عدودة.

3.3 قياس لوبيغ – ستيلجس على R

يعتبر قياس لوبيغ – ستيلجس على R من القياسات الشهيرة التي يبدو قياس لوبيغ حالة خاصة منها. لتكن f دالة توزيع على R أي حقيقية متزايدة ومستمرة من اليمين. لنعرف على I، صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار من الشكل $]a,b]$، حيث $a,b \in R$، و $a \leq b$ دالة مجموعة τ_f بالعلاقة:

$$\tau_f(]a,b]) = f(b) - f(a)$$

عندئذ، من الواضح أن $\tau_f \geq 0$، و $\tau_f(\phi) = 0$. كما نلاحظ بسهولة أن

$$\tau_f(]a,b]) = \tau_f(]a,c]) + \tau_f(]c,b])$$

نبرهن بطريقة مشابهة لبرهان التوطئة (1) من الفقرة **3.1** أنه إذا كان $]a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}]a_i,b_i]$، فإن:

$$\tau_f(]a,b]) \leq \sum_{i=1}^{m} \tau_f(]a_i,b_i])$$

(1) لمعرفة المزيد عن خواص هذه المجموعة، يمكن للقارئ الاستعانة بأي من مراجع هذا الكتاب

وإذا كان $]a,b] \supseteq \bigcup_{i=1}^{m}]a_i,b_i]$، حيث المجالات $]a_i,b_i], (1 \leq i \leq m)$ منفصلة، فإن:

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_f(]a_i,b_i]) \leq \tau_f(]a,b])$$

وعندئذ نحصل على النتيجة التالية المشابهة للنتيجة (**3.1.1**):

نتيجة (3.3.1)

إذا كانت المجالات $]a_i,b_i], (1 \leq i \leq m)$ منفصلة، وكان $]a,b] \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m}]a_i,b_i]$ فإن:

$$\tau_f(]a,b]) \not\leq \sum_{i=1}^{m} \tau_f(]a_i,b_i])$$

لنمدد دالة المجموعة τ_f على الحلقة D، حلقة الاتحادات المنتهية للمجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار والمنفصلة، بالشكل الآتي:

إذا كانت $A = \bigcup_{i=1}^{m}]a_i,b_i] \in D$ ، حيث المجالات $]a_i,b_i], (1 \leq i \leq m)$ منفصلة، فإننا نضع:

$$\tau_f(A) = \sum_{i=1}^{m} \tau_f(]a_i,b_i]) \qquad (3)$$

عندئذ تضمن النتيجة (**3.3.1**) أن القيمة $\tau_f(A)$ مستقلة عن الطريقة التي نعبر بها عن A باتحاد منته لمجالات محدودة ونصف مفتوحة من اليسار ومنفصلة. وتبقى المبرهنة (**3.1.1**) صحيحة في هذه الحالة، على أن نأخذ بعين الاعتبار – في سياق البرهان– أنه يوجد من أجل $i \geq 1$ عدد b'_i بحيث يكون $b'_i = b_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$ وذلك استناداً إلى كون الدالة f مستمرة من اليمين على R.

ينتج استناداً إلى المبرهنة المذكورة أن دالة المجموعة τ_f المعرفة على الحلقة D بالعلاقة (3)، هي قياس على D، ويكون ذلك القياس σ – منتهياً استناداً إلى كون الدالة f دالة حقيقية.

عندئذ، باستخدام مبرهنة التمديد (2.4.2)، نجد أنه يوجد ممدد وحيد للقياس τ_f على $\sigma(D)$، صف المجموعات البوريلية في R. فإذا رمزنا بـ μ_f لمتمّم الممّدد المذكور، فإننا نسمي μ_f قياس لوبيغ – ستيلجس المعين بالدالة f.

ينتج أن قياس لوبيغ – ستيلجس μ_f معرف على صف المجموعات القيوسة بالنسبة للقياس الخارجي μ_f^* المولد بالقياس τ_f على الحلقة D والمعرف بالعلاقة:

$$\mu_f^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau_f(A_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i , A_i \in D\right\}$$

كما ينتج أن كل مجموعة μ_f – قيوسة هي اتحاد مجموعة بوريليه ومجموعة μ_f – مهولة.

وهكذا، فإن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ حيث $a \in R$ ، هي مجموعة μ_f – قيوسة و:

$$\mu_f(\{a\}) = \lim_i \mu_f(]a-\frac{1}{i},a])$$
$$= \lim_i [f(a) - f(a-\frac{1}{i})]$$
$$= f(a) - f(a\text{-})$$

حيث رمزنا بـ $f(a\text{-})$ لنهاية الدالة f من اليسار في النقطة a.

كما يمكننا أن نتحقق بسهولة من أن:

$$\mu_f(]a,b]) = f(b) - f(a)$$
$$\mu_f(]a,b[) = \lim_i \mu_f(]a,b-\frac{1}{i}])$$
$$= f(b-) - f(a)$$
$$\mu_f([a,b[) = \lim_i \mu_f(]a-\frac{1}{i},b-\frac{1}{i}])$$
$$= f(b-) - f(a-)$$

أخيراً، من الواضح أنه إذا كانت $f(x)=x$ ، من أجل كل $x \in R$، فإن قياس لوبيغ – ستيلجس المعين بالدالة f ما هو إلا قياس لوبيغ على R.

3.4 تعميم قياس لوبيغ على R^n

سنعمّم فيما يلي الدراسة الواردة في الفقرة **3.1** من هذا الفصل من أجل R^n . نعرف على الصف I^n، صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار، من الشكل $]a,b]$ في R^n دالة مجموعة τ، بالعلاقة:

$$\tau(]a,b]) = (b_1 - a_1)\ldots\ldots\ldots(b_n - a_n)$$

حيث:

$$a = (a_1,\ldots,a_n) \quad , \quad b = (b_1,\ldots\ldots,b_n)$$

عندئذ، من الواضح أن $\tau \geq 0$، و $\tau(\phi) = 0$. ليكن j عدداً طبيعياً، حيث $1 \leq j \leq n$. عندئذ أياً يكن العدد الحقيقي r فإن مجموعة النقاط $\{x : x \in R^n , x_j = r\}$ تكون فوق مستوٍ في R^n عمودياً على المحور الإحداثي ذي الدليل j ويمر من كل النقاط التي إحداثيها ذي الدليل j يساوي r.

فإذا كانت a و b نقطتين من R^n ، بحيث إن $a_j < r < b_j$ فإن فوق المستوي المذكور يقسم المجال $]a,b]$ إلى مجالين منفصلين $]a,c]$ و $]d,b]$ ، حيث:

$$c = (b_1, \ldots b_{j-1}, r, b_{j+1}, \ldots b_n)$$
$$d = (a_1, \ldots a_{j-1}, r, a_{j+1}, \ldots a_n)$$

عندئذ نتحقق بسهولة من أن:

$$\tau(]a,b]) = \tau(]a,c])+\tau(]d,b])$$

وهذه العلاقة الأخيرة هي بالطبع تعميم للعلاقة (1) في **3.1**.

ليكن الآن فوق مستوٍ آخر يمر من المجال $]a,b]$. فإذا كان عمودياً على المحور الإحداثي ذي الدليل j، فإنه يقسم أحد المجالين $]a,c]$ و $]d,b]$ إلى مجالين اثنين، وبخلاف ذلك، فإنه سيقسم كلاً من المجالين المذكورين إلى مجالين. وفي جميع الأحوال، فإننا نحصل على نتيجة مماثلة للنتيجة الواردة أعلاه. بتعبير آخر، $\tau(]a,b])$ يساوي مجموع قيم τ من أجل المجالات الثلاثة، أو الأربعة المنفصلة الناتجة. وهكذا نجد بمتابعة نفس العمل أنه إذا جزأنا المجال $]a,b]$ إلى مجالات منفصلة من نفس الشكل I_1،I_2،...،I_m بوساطة عدد منته من فوق المستويات العمودية على مختلف المحاور الاحداثية، فإن:

$$\tau(]a,b]) = \sum_{K=1}^{m} \tau(I_K) \qquad (4)$$

التوطئتان التاليان تعممان العلاقة الأخيرة من أجل تجزئات كيفية للمجال $]a,b]$.

توطئة (2)

إذا كانت المجالات $]a_i , b_i]$ $(i=1,..n_0)$، منفصلة، وكان $\bigcup_{i=1}^{n_0}]a_i , b_i] \subseteq]a, b]$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i , b_i]) \leq \tau(]a, b])$$

البرهان:

لنفرض أن فوق مستويات تمر من النقاط a_1،a_2،...،a_{n_0}،b_1،b_2،...،b_{n_0} عمودية على كل من المحاور الإحداثية. عندئذ ينقسم المجال $]a,b]$ إلى مجالات منفصلة I_1،I_2،...،I_m، وتكون العلاقة (3) صحيحة من أجلها، كما يكون كل من المجالات I_1،I_2،...،I_m محتوىً على الأكثر في واحد فقط من المجالات $]a_i , b_i]$ ويكون كل من هذه المجالات الأخيرة اتحاداً لتلك المجالات المحتواة فيه. ومنه فإن:

$$\tau(]a_i , b_i]) = \sum_{I_K \subseteq]a_i , b_i]} \tau(I_K)$$

وبالجمع من أجل i ، نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i , b_i]) = \sum_{I_K \subseteq \bigcup_i]a_i , b_i]} \tau(I_K) \leq \sum_{K=1}^{m} \tau(I_K) = \tau(]a, b])$$

وذلك ينهي البرهان. ▲

توطئة (3)

إذا كان $]a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0}]a_i , b_i]$ ، فإن $\tau(]a, b]) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i , b_i])$.

البرهان:

بشكل مشابه لما رأينا في التوطئة السابقة ينقسم المجال $]a,b]$ إلى مجالات منفصلة I_1 ، I_2 ، ......،I_m تكون العلاقة (3) صحيحة من أجلها. فإذا وضعنا:

$$A_1 =]a_1, b_1] \ , \ A_i =]a_i, b_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1}]a_j, b_j], i \geq 2$$

عندئذ يكون كل من المجالات I_1 ، I_2 ، ......،I_m محتوى في واحدة فقط من المجموعات A_i. ومنه فإن:

$$\sum_{I_K \subseteq A_i} \tau(I_K) \leq \tau(]a_i, b_i])$$

وذلك من أجل $1 \leq i \leq n_0$.

عندئذ بالجمع من أجل i ، نجد أن:

$$\tau(]a,b]) \quad \sum_{I_K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i} \tau(I_K) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i, b_i])$$

وبذلك ينتهي البرهان. ▲

نتيجة (3.4.1)

إذا كانت المجالات $]a_i, b_i]$، $(1 \leq i \leq n_0)$ منفصلة، وكان $]a,b] = \bigcup_{i=1}^{n_0}]a_i, b_i]$،

فإن:

$$\tau_r(]a,b]) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i, b_i])$$

البرهان:

بالعودة إلى التوطئتين (2) و (3)، نجد أن النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

لنمدد الآن دالة المجموعة τ على الحلقة الأصغرية على الصف I^n، حلقة الاتحادات المنتهية لعناصر منفصلة من الصف I^n كما يلي:

إذا كانت $A = \bigcup_{i=1}^{n_0}]a_i, b_i]$ تنتمي إلى الحلقة المذكورة، حيث المجالات $]a_i, b_i]$، $(1 \leq i \leq n_0)$ منفصلة فإننا نضع:

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^{n_0} \tau(]a_i, b_i]) \qquad (5)$$

وهذه العلاقة الأخيرة كما نلاحظ هي نفسها العلاقة (2) الواردة في **3.1** والتي مدّدنا بوساطتها τ إلى قياس σ – منتهٍ على الحلقة الأصغرية على الصف I^n .

مبرهنة (3.4.1)

إن دالة المجموعة τ المعرفة على الحلقة الأصغرية على الصف I^n بالعلاقة(5)، قياس σ – منتهٍ على تلك الحلقة.

البرهان:

يبقى برهان المبرهنة **(3.1.1)** الواردة في الفقرة **3.1** مقبولاً، بعد الأخذ بعين الاعتبار أن ε الوارد في ذلك البرهان يكون في هذه الحالة، بحيث إن $a_i + \varepsilon < b_i$، وذلك من أجل $i=1,\dots n_0$. ▲

ينتج مما تقدم أنه يوجد ممدّد وحيد لـ τ على $\sigma(I^n)$ ، صف المجموعات البوريلية في R^n . وهذا الممدّد المذكور قياس σ – منتهٍ، لأن الدالة τ تأخذ قيمها في R .

نسمي متمّم الممدّد المذكور **قياس لوبيغ** على R^n، ونرمز له بالرمز λ^n، على الرغم من أنه يحتفظ أحياناً بالرمز λ للتعبير عنه، وتبقى كل التعليقات والنتائج الواردة في الفقرة **3.1** صحيحة.

3.5 تعميم قياس لوبيغ ستيلجس على R^n

لتكن f دالة حقيقية معرفة على R^n، ولنعرف من أجل أية نقطتين $a=(a_1,\dots,a_n)$ و $b=(b_1,\dots,b_n)$ من R^n، المؤثر $\Delta_{b_i-a_i}$ بالعلاقة :

$$\Delta_{b_i-a_i} f(a_1,\dots a_{i-1}, a_i,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_{i-1}, b_i,\dots,a_n) - f(a_1,\dots a_{i-1}, a_i,\dots a_n)$$

ولنحدل بالرمز $\Delta_{b-a} f(a)$ على المقدار

$$\Delta_{b_1-a_1} \Delta_{b_2-a_2} \ldots \Delta_{b_n-a_n} f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

نقول عن الدالة f إنها متزايدة على R^n إذا وفقط إذا كان $\Delta_{b-a} f(a) \geq 0$ وذلك من أجل كل نقطتين $a = (a_1, \ldots, a_n)$، و$b = (b_1, \ldots, b_n)$ تحققان العلاقات $a_i \leq b_i$، من أجل $i=1,\ldots,n$. نعبر عن هذه العلاقات – اختصاراً – بالرمز $a \leq b$.

كما نقول عن f إنها مستمرة من اليمين في النقطة a من R^n، إذا وفقط إذا كانت

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = f(a)$$

لنفرض الآن، أن f دالة توزيع على R^n، أي دالة متزايدة ومستمرة من اليمين، وأن τ_f دالة مجموعة معرفة على الصف I^n، صف المجالات المحدودة، ونصف المفتوحة من اليسار من الشكل $]a,b]$ في R^n بالعلاقة:

$$\tau_f(]a,b]) = \Delta_{b-a} f(a)$$

عندئذ، يمكننا التحقق بسهولة من أن الدراسة الواردة في الفقرة **3.4** تصحّ بكل تفاصيلها، وبتسلسل خطواتها، على الدالة τ_f المعرفة آنفاً، وتقودنا إلى الحصول على قياس μ_f تام، وσ– منتهٍ، على الجبر التام في R^n، الذي كل من عناصره اتحاد لمجموعة بوريلية ومجموعة جزئية من مجموعة بوريلية ذات قياس معدوم. نسمي μ_f **قياس لوبيغ– ستيلجس** المعيّن بدالة التوزيع f على R^n. أخيراً، نشير بهذا الصدد إلى أن كل التعليقات الواردة في نهاية الفقرة **3.3** تبقى صحيحة من أجل μ_f على R^n .

تمارين

1– برهن أن:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i b_i]\right\}$$

وذلك أياً تكن $A \subseteq R$

2– لتكن $A \subseteq R$. برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون A λ'– قيوسة، هو أن توجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة مغلقة F محتواة في A، بحيث يكون $\lambda(A - F) < \varepsilon$.

3– برهن أنه إذا كانت $A \subseteq [0,1]$، وكان $\lambda(A) = 1$، فإن A تكون كثيفة في المجال $[0,1]$، أي أن $\overline{A} = [0,1]$

4– برهن أنه إذا كانت $A \subseteq R$، وكان $\lambda(A) = 0$، فإن داخل A يكون المجموعة الخالية، أي أن $\mathring{A} = \phi$

5– ليكن $\alpha > 0$، ولتكن $A \subseteq R$. برهن أنه إذا كانت $\alpha A = \left\{x : \dfrac{x}{\alpha} \in A\right\}$، فإن:

i) $\lambda^*(\alpha A) = \alpha \lambda^*(A)$

ii) A تكون λ– قيوسة، إذا وفقط إذا كانت αA λ– قيوسة.

6– لتكن $A \subseteq R$، ولتكن:

$$-A = \{x : -x \in A\}$$

برهن أن:

i) $\lambda^*(-A) = \lambda^*(A)$

ii) A تكون λ – قيوسة، إذا وفقط إذا كانت $A-$ $\lambda-$ قيوسة.

7– برهن أن صف المجموعات المتراصة في R يولد B_R.

8– ليكن (R,M,μ) فضاء قياس، بحيث إن M يحوي صف كل المجالات في R.
ولنعرف على R دالة f_α ، $(\alpha \in R)$ كما يلي:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}-\mu(]x,\alpha]) & , x<\alpha \\ 0 & , x=\alpha \\ \mu(]\alpha,x]) & , x>\alpha\end{cases}$$

برهن أن:

i) $f_\alpha(b)-f_\alpha(a)=\mu(]a,b])$

ii) f_α دالة توزيع على R.

9– أعط مثالاً لدالة حقيقية f متزايدة ومستمرة من اليمين على R(دالة توزيع) بحيث يكون:

$$\mu_\ell(]a,b[)<f(b)-f(a)<\mu_\ell([a,b])$$

وذلك من أجل نقطتين a وb من R، حيث μ_ℓ هو قياس لوبيغ – ستيلجس المعين بالدالة f.

الفصل الرابع

الدّوال القيوسة

نعرّف في هذا الفصل مفهوم الدالة القيوسة بوجه عام، ونحصر اهتمامنا بدراسة الدوال الحقيقية القيوسة، وهي الحالة الأكثر فائدة فيما يتعلق بنظرية التكامل.

4.1 تعريف الدوال القيوسة

تعريف (4.1.1)

ليكن (X,M) و (Y,N) فضاءين قيوسين. نقول عن التطبيق $f:X\to Y$ إنه **قيوس بالنسبة للجبرين التامين M وN** أو – اختصاراً – قيوس، إذا كانت $f^{-1}(N)\subseteq M$، أي إذا كانت $f^{-1}(E)\in M$، وذلك أياً تكن $E\in N$.

وإذا كانت $A\subseteq X$، فإننا نقول عن التطبيق $f:X\to Y$ إنه قيوس على A إذا كانت $f^{-1}(E)\cap A\in M$ وذلك أياً تكن $E\in N$. ينتج أنه إذا كان $f:A(\subseteq X)\to Y$ فإن f يكون قيوساً إذا كانت $f^{-1}(E)\in M$ من أجل كل $E\in N$.

يتضح من التعريف السابق أنه يلزم لكي يكون التطبيق $f:X\to Y$ قيوساً على المجموعة $A(\subseteq X)$، أن تكون A قيوسة بالنسبة للجبر التام M، إذ أن:

$$A=f^{-1}(Y)\cap A$$

كما ينتج من التعريف أنه إذا كان $f: X \to Y$، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات الجزئية من X، حيث $A_i \cap A_j = \phi$، من أجل $i \neq j$، وكان f قيوساً على كلٍ من المجموعات A_i، $(i \geq 1)$، فإنه يكون قيوساً على $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. لأنه أياً تكن $E \in N$ فإن:

$$f^{-1}(E) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f^{-1}(E) \cap A_i)$$

كذلك، إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ قيوساً على مجموعة $B(\subseteq X)$، وكانت A محتواة B، وقيوسة بالنسبة للجبر التام M، فإن f يكون قيوساً على A. لأنه، أياً تكن $E \in N$، فإن:

$$f^{-1}(E) \cap A = f^{-1}(E) \cap A \cap B$$

أيضاً، واستناداً إلى التعريف نجد أن تركيب تطبيقين قيوسين هو تطبيق قيوس. أي أنه إذا كانت (X,M) و (Y,N) و (Z,L) فضاءات قيوسة، وكان $f: X \to Y$ تطبيقاً قيوساً بالنسبة للجبرين التامين M و N، وكان $g: Y \to Z$ تطبيقاً قيوساً بالنسبة للجبرين التامين N و L فإن التطبيق $gof: X \to Z$ يكون قيوساً بالنسبة للجبرين التامين M و L وذلك لأنه، أياً تكن $E \subseteq Z$ فإن:

$$(gof)^{-1}(E) = f^{-1}[g^{-1}(E)]$$

تعريف (4.1.2)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكان Y فضاءً توبولوجياً، فإننا نقول عن التطبيق $f: X \to Y$ **إنه قيوس بالنسبة للجبر التام M**، أو – اختصاراً – قيوس، إذا كان قيوساً بالنسبة للجبرين التامين M و B_Y. وبوجه خاص، إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكان f تطبيقاً قيوساً بالنسبة للجبر التام M، فإننا نقول أحياناً **إن f تطبيق قيوس بالنسبة لـ μ أو μ – قيوس.**

وهكذا فإننا نقول في ضوء التعريف السابق عن دالة حقيقية $f: X \to R$ إنها قيوسة بالنسبة للجبر التام M، أو إنها قيوسة – إذا لم ينجم عن ذلك أي التباس– إذا كانت $f^{-1}(B) \in M$، من أجل أية مجموعة بوريلية B في R.

نحتاج عملياً، عند دراسة قيوسية تطبيق $f: X \to Y$ بالنسبة لجبرين تامين M و N، في X و Y (على الترتيب) إلى جملة من الحقائق الأساسية المتعلقة بالصورة العكسية وفق f لصف معين من المجموعات الجزئية من Y.

لدينا بهذا الصدد المبرهنة والنتيجة التاليتان:

مبرهنة (4.1.1)

إذا كان $f: X \to Y$، وكان H صفاً غير خالٍ من أجزاء Y، فإن:

$$f^{-1}(\sigma(H)) = \sigma(f^{-1}(H))$$

البرهان:

لنتحقق أولاً من أن $f^{-1}(\sigma(H))$ جبرٌ تام في X. في الواقع، ينتج بسهولة من العلاقات:

$$f^{-1}(Y) = X \quad , \quad f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c \quad , \quad f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

أن $f^{-1}(\sigma(H))$ جبر تام.

بما أن $H \subseteq \sigma(H)$، وبالتالي $f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(\sigma(H))$ إذاً، استناداً إلى ما سبق يكون:

$$\sigma(f^{-1}(H)) \subseteq f^{-1}(\sigma(H)) \qquad (1)$$

من أجل البرهان على صحة الاحتواء المعاكس، نضع:

$$H_0 = \{A : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(H))\}$$

نتحقق بسهولة من أن H_0 جبر تام في Y يحوي H، وبالتالي فهو يحوي $\sigma(H)$.
عندئذ نجد أن:

$$f^{-1}(\sigma(H)) \subseteq f^{-1}(H_0) \subseteq \sigma(f^{-1}(H)) \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على النتيجة المطلوبة، وينتهي البرهان. ▲

نتيجة (4.1.1)

إذا كان (X,M) و (Y,N) فضاءين قيوسين وكان H سفاً من أجزاء Y يولّد الجبر التام N، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق $f : X \to Y$ قيوساً بالنسبة للجبرين التامين M و N هو أن يكون $f^{-1}(H) \subseteq M$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن f تطبيق قيوس. بما أن $H \subseteq N$ إذاً:

$$f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(N) \subseteq M$$

كفاية الشرط: لنفرض أن $f^{-1}(H) \subseteq M$. عندئذ يكون $\sigma(f^{-1}(H)) \subseteq M$. إذاً:

$$f^{-1}(N) = f^{-1}(\sigma(H)) = \sigma(f^{-1}(H)) \subseteq M$$

أي أن f تطبيق قيوس، وبذلك ينتهي البرهان. ▲

نتيجة (4.1.2)

إذا كان X و Y فضاءين توبولوجيين، وكان $f : X \to Y$ تطبيقاً مستمراً، فإنه يكون قيوساً بالنسبة للجبرين التامين B_X و B_Y.

البرهان:

في الواقع، يكفي أن نلاحظ أن صف المجموعات المفتوحة في Y يولد B_Y، وأن الصورة العكسية لذلك الصف وفق التطبيق المستمر f محتواة في صف المجموعات

المفتوحة في X المحتوى بدوره في B_x. ▲

مبرهنة (4.1.2)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكانت f دالة حقيقية على X: $f : X \to R$ فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون $f^{-1}(]-\infty,a[) \in M$ من أجل كل عدد حقيقي a.

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن f قيوسة. عندئذ $f^{-1}(B) \in M$، وذلك أياً تكن المجموعة البوريلية B في R. إذاً $f^{-1}(]-\infty,a[) \in M$، من أجل أي عدد حقيقي a.

كفاية الشرط: لنفرض أن $f^{-1}(]-\infty,a[) \in M$، أياً يكن $a \in R$. بما أن الصف $\{]-\infty,a[, a \in R\}$ يولد B_R، إذاً f قيوسة، وذلك استناداً إلى النتيجة **(4.1.1)** وبذلك ينتهي البرهان. ▲

ملاحظة (1)

بما أن كلاً من الصفوف:

$\{O : R$ مفتوحة في $O\}$ ، $\{F : R$ مغلقة في $F\}$ ، $\{]-\infty,a] : a \in R\}$،

$\{]a, +\infty[: a \in R\}$, $\{[a,+\infty[: a \in R\}$, $\{]a,b[: a,b \in R , a \le b\}$

$\{]a,b] : a,b \in R , a \le b\}$, $\{[a,b[: a,b \in R , a \le b\}$

و $\{[a,b] : a,b \in R , a \le b\}$ يولد B_R ، فإنه يمكن الاستعاضة عن الشرط الوارد في المبرهنة السابقة، بأي من الشروط الموافقة للصفوف المذكورة، وفقاً لما ورد في المبرهنة الآنفة الذكر.

مبرهنة (4.1.3)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكانت $f: X \to \overline{R}$، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون $f^{-1}[-\infty,a[\in M$ من أجل كل عدد حقيقي a.

البرهان:

يتم البرهان بطريقة مشابهة تماماً لبرهان المبرهنة (4.1.2).▲

ملاحظة (2)

بما أن كلاً من الصفوف:

$\{[a,+\infty]: a \in R\}$, $\{]a,+\infty]: a\in R\}$, $\{[-\infty,a]: a\in R\}$

يولد $B_{\overline{R}}$، فإنه يمكن الاستعاضة عن الشرط الوارد في المبرهنة السابقة بأي من الشروط الموافقة للصفوف المذكورة، وذلك وفقاً لما ورد في نفس المبرهنة.

مثال (1)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكانت f دالة حقيقية ثابتة على مجموعة قيوسة $A(\subseteq X)$، فإن f تكون قيوسة.

مثال (2)

إذا كانت f دالة حقيقية مطردة (متزايدة أو متناقصة) على R، فإن $f^{-1}(]-\infty,a[)$ تكون مجالاً في R، وذلك أياً يكن $a \in R$. إذاً فهي مجموعة λ – قيوسة . ينتج أن f دالة λ – قيوسة .

مثال (3)

الدالة الحقيقية f المعرفة على R بالعلاقة: $f(x)=x$ هي دالة λ– قيوسة، لأنها متزايدة، أو لأنها مستمرة على R. في حين أن f ليست قيوسة بالنسبة للجبر التام $M = \{\phi,R,]-\infty,0],]0,+\infty[\}$، إذ إن $f^{-1}(]-\infty,a[) \notin M$.

مثال (4)

الدالة المميِّزة لمجموعة:

ليكن (X,M) فضاء قيوساً ، ولتكن $A\subseteq X$. نسمي الدالة χ_A المعرفة على X كما يلي:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \dot{A} \\ 0 & , \ x \in A^c \end{cases}$$

الدالة المميزة للمجموعة A. (سيكون للدوال المميزة دور هام في نظرية التكامل).

ليكن $a \in R$. عندئذ نجد أن:

$$\chi_A^{-1}(]-\infty,a[) = \begin{cases} R & , \ a > 1 \\ A^c & , \ o < a \leq 1 \\ \phi & , \ a \leq o \end{cases}$$

وبذلك يتضح أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون χ_A قيوسة هو أن تكون المجموعة A قيوسة.

تعريف (4.1.3)

إذا كان X فضاء توبولوجياً، وكان M حيزاً تاماً في X يحوي B_X، فإننا نقول

عن دالة f تأخذ قيمها في R أو $\overline{R}$ إنها دالة بوريلية، إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأية مجموعة بوريلية في R أو $\overline{R}$ (على الترتيب) مجموعة بوريلية في X.

ينتج من التعريف، أن كل دالة بوريلية هي دالة قيوسة بالنسبة للجبر التام M، وأن كل دالة تأخذ قيمها في R أو تأخذ قيمها في $\overline{R}$ ومستمرة على X، هي دالة بوريلية. وبوجه خاص، فإن كل دالة حقيقية مستمرة على R هي دالة λ- قيوسة.

ليكن (X,M) فضاء قيوساً، ولتكن $f: X \to R^n$. من الواضح أن f تعرّف n دالة حقيقية $f_1, f_2, \ldots, f_n$ على X بحيث يكون:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_n(x))$$

وذلك أياً يكن $x \in X$، ونعلم أن f تكون قيوسة بالنسبة للجبر التام M، أو -اختصاراً- قيوسة، إذا كانت قيوسة بالنسبة للجبرين التامين M و B_{R^n}، أي إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأية مجموعة بوريلية في R^n تنتمي إلى M. عندئذ، استناداً إلى النتيجة **(4.1.1)** تكون f قيوسة إذا كانت $f^{-1}(]-\infty, a[) \in M$، وذلك أياً تكن النقطة $a = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ من R^n، حيث:

$$]-\infty, a[=]-\infty, a_1[\times \ldots\ldots\ldots \times]-\infty, a_n[$$

لأن صف المجالات $]-\infty, a[$ في R^n يولّد الجبر التام B_{R^n}. وفي جميع الأحوال، فإن قيوسية الدالة f يمكن أن تعرّف كما يتضح من المبرهنة التالية بقيوسية كلٍ من الدوال $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

مبرهنة (4.1.4)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكانت $f: X \to R^n$ بحيث إن:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_n(x)) \quad , \quad \forall x \in X$$

فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون كل من الدوال f_i، $i = 1, \ldots, n$ قيوسة.

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن f قيوسة. عندئذ تكفي ملاحظة أنه أياً يكن $1 \le i \le n$، وأياً يكن $a_i \in R$، فإن:

$$f_i^{-1}(]-\infty, a_i[) = f^{-1}(]-\infty, a[)$$

حيث:

$$a = (+\infty, \ldots, +\infty, a_i, +\infty, \ldots, +\infty)$$

كفاية الشرط: لنفرض أن الدوال f_i، $(1 \le i \le n)$ قيوسة، بما أنه أيا تكن $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$، فإن:

$$f^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(]-\infty, a_i[)$$

إذاً، فالمجموعة $f^{-1}(]-\infty, a[)$ قيوسة، وذلك أياً تكن $a \in R^n$ أي أن f قيوسة.▲

نتيجة (4.1.3)

إذا كان (X,M) فضاء قيوساً، وكانت f دالة عقدية: $f: X \to C$، قسماها الحقيقي والتخيلي f_1 و f_2 (على الترتيب)، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون الدالتان الحقيقيتان f_1 و f_2 قيوستين.

البرهان:

في الواقع، تكفي ملاحظة أن $B_C = B_{R^2}$، والاستفادة من المبرهنة **(4.1.4)**.▲

4.2 العمليات على الدوال القيوسة

ليكن (X,M) فضاءً قيوساً. إن قيوسية كل الدوال الواردة في هذه الفقرة هي بالنسبة للجبر التام M، إلا إذا أشرنا صراحة إلى خلاف ذلك.

تتصف مجموعة الدوال الحقيقية القيوسة، بكونها مغلقة بالنسبة للعمليات المألوفة في التحليل الرياضي، كما سيتضح ذلك مما يلي:

مبرهنة (4.2.1)

إذا كانت الدالتان $f_1 : X \to R$ و $f_2 : X \to R$ قيوستين، وكانت الدالة $g : R^2 \to R$ بوريلية، فإن الدالة h المعرفة على X بالعلاقة :

$$h(x) = g(f_1(x), f_2(x))$$

تكون قيوسة.

البرهان:

استناداً إلى الفرض، وإلى المبرهنة (**4.1.4**)، تكون الدالة f المعرفة على X بالعلاقة:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

دالة قيوسة، وتكون $h = g \circ f$:

عندئذ، أياً تكن المجموعة البوريلية B في R فإن $g^{-1}(B)$ تكون بوريلية في R^2، وتكون بالتالي $h^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ قيوسة، وذلك ما يثبت قيوسية الدالة h، وينهي البرهان. ▲

نتيجة (4.2.1)

إذا كانت $f : X \to R$ دالة قيوسة، وكانت $g : R \to R$ دالة مستمرة، فإن $g \circ f$ تكون دالة قيوسة.

البرهان:

لتكن $h_1 : R^2 \to R$ دالة معرفة بالعلاقة $h_1(x_1, x_2) = g(x_1)$. عندئذ تكون h_1 دالة مستمرة على R^2 وبالتالي بوريلية. إذاً فالدالة h_2 المعرفة على X بالعلاقة:

$$h_2(x) = h_1(f(x), f(x)) = g(f(x))$$

دالة قيوسة استناداً إلى المبرهنة (**4.2.1**)، وذلك ينهي البرهان. ▲

مبرهنة (4.2.2)

إذا كانت الدالتان $f_1 : A \to R$، و $f_2 : A \to R$ قيوستين، وكان $\alpha \in R$، فإن كلاً من الدوال التالية تكون قيوسة:

$$f_1 + f_2, f_1.f_2, \frac{f_1}{f_2}, |f_1|^\alpha, \max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\}$$

البرهان:

لنتحقق أولاً من أن مجموعة تعريف كلٍ من الدوال الواردة في المبرهنة قيوسة. لذلك نلاحظ أن الدالة $\frac{f_1}{f_2}$ معرفة على المجموعة $B = A - \{x : f_2(x) = 0\}$ وهي مجموعة قيوسة، لأن:

$$B = A - \{x : f_2(x) = 0\} = A - f_2^{-1}(\{0\})$$

كما نلاحظ أن الدالة $|f_1|^\alpha$، حيث $\alpha < 0$ معرفة على المجموعة $B = A - \{x : f_1(x) = 0\}$ وهي مجموعة قيوسة، لأن:

$$B = A - \{x : f_1(x) = 0\} = A - f_1^{-1}(\{0\})$$

أما بالنسبة للدوال الأخرى، فكل منها معرفة على المجموعة القيوسة A.

لنبرهن الآن على قيوسية الدالة $f_1 + f_2$. من أجل ذلك نضع:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad , \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2$$

عندئذ تكون g دالة بوريلية، لأنها مستمرة، وتكون الدالة h المعرفة على X بالعلاقة:

$$h(x) = g(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x)$$

قيوسة، استناداً إلى المبرهنة (**4.2.1**)، أي أن $f_1 + f_2$ دالة قيوسة.

باستخدام الدالة المستمرة g المعرفة R^2 بالعلاقة $g = (x_1, x_2) = x_1.x_2$، وإجراء نفس المحاكمة، نجد أن الدالة $f_1.f_2$ قيوسة.

أيضاً، وباستخدام الدالة المستمرة g، المعرفة على $R^2 - \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$ بالعلاقة $g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$، وإجراء نفس المحاكمة، نجد أن الدالة $\frac{f_1}{f_2}$ قيوسة على مجموعة تعريفها A.

كذلك، باستخدام الدالة المستمرة g المعرفة على R بالعلاقة $g(x) = |x|^\alpha$، والاستفادة من النتيجة (**4.2.1**)، نجد أن الدالة $|f_1|^\alpha ,(\alpha \geq o)$، قيوسة على X.

أما من أجل الدالة $|f_1|^\alpha$، حيث $\alpha < 0$، فإننا نستخدم الدالة المستمرة g المعرفة على $R-\{0\}$ بالعلاقة $g(x) = |x|^\alpha$، ونستفيد من النتيجة (**4.2.1**)، لنجد أن الدالة $|f_1|^\alpha ,(\alpha \geq 0)$ قيوسة على مجموعة تعريفها E.

أخيراً، ومن أجل الدالتين $\max\{f_1, f_2\}$ و $\min\{f_1, f_2\}$، فإننا نستخدم الدالتين المستمرتين $g_1(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$ و $g_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$، ونستفيد من المبرهنة (**4.2.1**) لنجد أن $\max\{f_1, f_2\}$، و $\min\{f_1, f_2\}$ دالتان قيوستان على X. وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (**4.2.2**)

إذا كانت $f : A \to R$، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون كل من الدالتين $\max\{f,0\}$، و $\max\{-f,0\}$ قيوسة.

البرهان:

إذا رمزنا بـــ f^+ للدالة $\max\{f,0\}$، وبـــ f^- للدالة $\max\{-f,0\}$، فإننا نتحقق بسهولة من أن:

$$f = f^+ - f^-$$

وعندئذ تكون النتيجة صحيحةً، استناداً إلى المبرهنة (**4.2.2**). ▲

نسمي الدالة f^+ **دالة الجزء الموجب للدالة f**، ونسمي الدالة f^- **دالة الجزء السالب للدالة f**. نشير بهذا الصدد إلى أنه يمكن التحقق بسهولة من أن:

$$|f| = f^+ + f^-$$

ملاحظة (3)

تبقى المبرهنة (**4.2.2**) صحيحة في الحالة التي تأخذ فيها الدالتان القيوستان f_1 وf_2 قيمهما في $\overline{R}$، على أن نأخذ بعين الاعتبار أن كلاً من الدوال: $f_1 + f_2$،$f_1 \cdot f_2$،$\frac{f_1}{f_2}$،$|f_1|^\alpha$ لا تغدو معرّفة في النقاط x من A، التي تقع فيها على حالة عدم تعيين. فعلى سبيل المثال ، لا تكون الدالة $f_1 + f_2$ معرفة على المجموعة:

$$B = \{x : f_1(x) = -f_2(x) = \pm\infty\}$$

وحيث إن B مجموعة قيوسة (تحقق من ذلك!). إذاً، فمجموعة تعريف الدالة $f_1 + f_2$، وهي المجموعة A-B مجموعة قيوسة.

نتيجة (4.2.3)

إذا كانت $f : R \to R$ دالة محدودة التغيرات، فإنها تكون دالة قيوسة.

البرهان:

بما أنه يمكن التعبير عن كل دالة محدودة التغيرات على R بشكل مجموع دالتين مطردتين، إذاً استناداً إلى المبرهنة (**4.2.2**)، و إلى ما أشرنا إليه في المثال (**2**) تكون f دالة قيوسة.▲

مبرهنة (4.2.3)

إذا كانت $f_1 : A(\subseteq X) \to R$ ، و $f_2 : A(\subseteq X) \to R$ دالتين قيوستين، فإن كلاً من المجموعات التالية تكون قيوسة:

$$\{x \in A : f_1(x) < f_2(x)\}\ ,\ [x \in A : f_1(x) = f_2(x)\},\{x \in A : f_1(x) \le f_2(x)\}$$

البرهان:

بما أن f_1 وf_2 قيوستان، إذاً $g = f_2 - f_1$ دالة قيوسة. عندئذ، تكون كل من المجموعات:

$$g^{-1}(]0,+\infty[) = \{x \in A : f_1(x) < f_2(x)\},\ g^{-1}(\{0\}) = \{x \in A : f_1(x) = f_2(x)\}$$
$$g^{-1}([0,+\infty[) = \{x \in A : f_1(x) \le f_2(x)\}$$

مجموعة قيوسة، لأنها صورة عكسية وفق الدالة g لمجموعة بوريلية. ▲

4.3 متتاليات الدوال القيوسة

نحتفظ في يهذه الفقرة بفرضية أن (X,M) فضاء قيوس، وأن قيوسية كل الدوال الواردة في المناقشة هي بالنسبة للجبر التام M.سنفرض أيضاً أن حدود المتتاليات الواردة في هذه الفقرة دوال حقيقية لها نفس مجموعة التعريف .

من جهة أخرى، تجدر الإشارة إلى أنه إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية غير محدودة، فإن الدوال $\sup_i f_i$،$\inf_i f_i$،$\overline{\lim_i} f_i$،$\underline{\lim_i} f_i$ تأخذ قيمها في $\overline{R}$.

مبرهنة (4.3.1)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة، فإن كلاً من الدالتين $\sup_i f_i$ و $\inf_i f_i$ تكون قيوسة.

البرهان:

أياً يكن العدد الحقيقي a فإن:

$$(\sup_i f_i)^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(]-\infty,a])$$

ومنه، فإن $\sup_i f_i$ تكون دالة قيوسة.

أما قيوسية الدالة $\inf_i f_i$ فتنتج من العلاقة $\inf_i f_i = -\sup_i(-f)$. ▲

نتيجة (4.3.1)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة، فإن كلاً من الدالتين $\overline{\lim_i} f_i$، و $\underline{\lim_i} f_i$ تكون قيوسة.

البرهان:

في الواقع، تكفي ملاحظة أن:

$$\overline{\lim_i} f_i = \inf_i(\sup_{j\ge i} f_j) \quad , \underline{\lim_i} f_i = \sup_i(\inf_{j\ge i} f_j)$$

والاستفادة من المبرهنة (**4.3.1**). ▲

نتيجة (4.3.2)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة، متقاربة من الدالة f على مجموعة جزئية A من X، فإن f تكون دالة قيوسة على A.

البرهان:

لنلاحظ أولاً أن مجموعة تعريف الدالة f، أي المجموعة A، هي:

$$A = \{x : \overline{\lim_i} f_i(x) = \underline{\lim_i} f_i(x)\}$$

وبالتالي، استناداً إلى النتيجة (4.3.1)، والمبرهنة (4.2.3)، تكون A قيوسة.

من جهة أخرى، فإن الدالة f هي مقصور أيٍ من الدالتين القيوستين $\underline{\lim_i} f_i$ و $\overline{\lim_i} f_i$ على المجموعة القيوسة A، إذاً هي دالة قيوسة. ▲

ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $A \subseteq X$. نقول عن علاقة ما P تتضمن عناصر المجموعة A إنها **محققة حيثما كان تقريباً بالنسبة لـ μ على A**، وندلّ على ذلك – اختصاراً – بكتابة: μ (a.e) P على A، إذا كانت P محققة في جميع نقاط A باستثناء نقاط مجموعة μ- هولة.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على $A(\subseteq X)$، وكان $f(x) \leq g(x)$، من أجل كل $x \in A\text{-}B$، حيث B مجموعة μ – هولة، فإننا نقول إن f أصغر أو تساوي g حيثما كان تقريباً بالنسبة لـ μ على A، ونكتب:

$$f \leq g \quad (a.e)\mu \text{ على } A$$

وهكذا، فإنه إذا كانت $(\forall x \in R), f(x) = |x|$، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق حيثما كان تقريباً بالنسبة لـ λ (قياس لوبيغ) على R، لأن $\lambda(\{0\}) = 0$.

لدينا بهذا الصدد المبرهنة التالية:

مبرهنة (4.3.2)

إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس تام، وكانت f_1 و f_2 دالتين حقيقيتين معرفتين على $A(\subseteq X)$، بحيث إن $f_1 = f_2 \ (a.e)\mu$ على A، وكانت إحدى الدالتين قيوسة، فإن الأخرى تكون قيوسة أيضاً.

البرهان:

لنضع:

$$E = \{x \in A : f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

عندئذ تكون E مجموعة μ – هولة، وحيث إن μ قياس تام، إذاً E قيوسة وقياسها معدوم.

لنفرض أن f_1 قيوسة. عندئذ أياً تكن المجموعة البوريلية B في R، فإن $f_1^{-1}(B)$ مجموعة قيوسة. من جهة أخرى لدينا:

$$f_2^{-1}(B) = [f_2^{-1}(B) \cap (A-E)] \cup (f_2^{-1}(B) \cap E)$$
$$= [f_1^{-1}(B) \cap (A-E)] \cup (f_2^{-1}(B) \cap E)$$

وحيث إن $f_2^{-1}(B) \cap E \subseteq E$، إذاً $f_2^{-1}(B) \cap E$ مجموعة μ – هولةوبالتالي μ – قيوسة. وعندئذ تكون المجموعة الواردة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة قيوسة، أي أن $f_2^{-1}(B)$ قيوسة، وذلك أياً تكن المجموعة البوريلية B. إذاً f_2 قيوسة.▲

تعريف (4.3.2)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة على $A(\subseteq X)$، فإننا نقول عن $(f_i)_{i\geq 1}$ إنها متقاربة من دالة f حيثما كان تقريباً بالنسبة لـ μ على A، ونكتب

μ(a.e) $f_i \underset{i}{\to} f$ ، أو $\lim_i f_i(x) = f(x)$(a.e)μ على A، أي إذاً أمكن إيجاد مجموعة B μ – همولة، بحيث تكون $\lim_i f_i(x) = f(x)$، وذلك أياً يكن $x \in A\text{-}B$.

ينتج من التعريف أن المجموعة A-B قيوسة، وأن الدالة f قيوسة على A-B، وذلك استناداً إلى النتيجة **(4.3.2)**.

نتحقق بسهولة من أنه إذا كانت μ(a.e) $f_i \underset{i}{\to} f$، و μ(a.e) $f_i \underset{i}{\to} g$، على A فإن μ(a.e) f=g على A. تعبر عن ذلك بالقول إنه إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية متقاربة حيثما كان تقريباً على A، فإن نهايتها تكون وحيدةً حيثما كان تقريباً على A.

كما يمكننا التحقق أيضاً من أن هذا النوع من التقارب يخضع للقواعد المألوفة المتعلقة بنهاية مجموع متتاليتين، وجداء متتاليتين...الخ.

من جهة أخرى، إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة حيثما كان تقريباً على A من الدالة f، فإن f لا تكون بوجه عام معرفة إلا من أجل النقاط التي تتقارب فيها المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$، وحيث إن f وحيدة، حيثما كان تقريباً – كما أسلفنا– فإنه يكون مناسباً في الكثير من الحالات اعتماد الاصطلاح التالي:

f(x) = o، وذلك أياً يكن x من A، حيث $(f_i)_{i\geq 1}$متباعدة.

وبذلك، تغدو الدالة f معرفة على A دون أن يؤثر ذلك على مفهوم التقارب. نعتمد نفس الاصطلاح كذلك من أجل $\overline{\lim_i} f_i$ ، $\underline{\lim_i} f_i$ حيثما كان تقريباً.

مبرهنة (4.3.3)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة، متقاربة من الدالة f، حيثما كان تقريباً على A، فإن f تكون دالة قيوسة.

البرهان:

بما أن الدوال f_i ، $(i \geq 1)$ قيوسة على A، إذاً A مجموعة قيوسة.

لتكن B مجموعة μ – همولة، بحيث إن $\lim_i f_i(x) = f(x)$ ، وذلك أياً يكن $x \in A\text{-}B$ عندئذ، تكون A-B قيوسة، وتكون f قيوسة على A-B. وذلك استناداً إلى النتيجة**(4.3.2)**.

ينتج أن $B = A\text{-}(A\text{-}B)$ قيوسة، وأن الدالة f قيوسة على B، لأنها ثابتة على تلك المجموعة. الأمر الذي يؤدي إلى أن تكون f قيوسة على $A=(A\text{-}B)\cup B$ ، وينهي البرهان. ▲

4.4 الدوال البسيطة

تلعب الدوال البسيطة دور حجر الأساس في بناء نظرية التكامل على الشكل الذي نعرضها عليه في الفصل القادم.

تعريف (4.4.1)

ليكن (X,M) فضاء قيوساً، ولتكن $s : X \to R$. نقول عن s إنها دالة بسيطة، إذا كانت قيوسة، وكانت مجموعة قيمها منتهية.

يتضح من التعريف أن الدالة الحقيقية الثابتة على X هي دالة بسيطة، وأن الدالة المميزة لمجموعة قيوسة، هي دالة بسيطة أيضاً.

كما نتحقق بسهولة من أن مجموع وجداء دالتين بسيطتين هو دالة بسيطة، وأنه إذا كانت s_1 و s_2 دالتين بسيطتين، فإن $\min\{s_1,s_2\}$ و $\max\{s_1,s_2\}$ دالتان بسيطتان.

لتكن s دالة بسيطة، ولنفرض أن $s(R) = \{a_1,\ldots,a_n\}$. عندئذ تكون المجموعات $s^{-1}(\{a_i\})$ ، $(i = 1,\ldots,n)$ قيوسة و منفصلة ، كما تكون $X = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$.

فإذا كان $x \in X$ فإنه يوجد عدد طبيعي i_0، $1 \le i_0 \le n$، بحيث إن $x \in A_{i_0}$ و $x \notin A_i$، من أجل $i \ne i_0$. إذاً:

$$s(x) = a_{i_0} = a_{i_0}\chi_{A_{i_0}}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

نخلص مما تقدم إلى أنه أياً تكن الدالة البسيطة s، فإنها تكتب على شكل عبارة خطية بمعاملات حقيقية لدوال مميزة لمجموعات قيوسة ومنفصلة، بحيث إن اتحادها يساوي X. نسمي الشكل $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$، **الشكل النموذجي للدالة البسيطة s.**

نتحقق بسهولة من أنه إذا كانت $s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$، و $s_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ دالتين بسيطتين، فإن:

$$s_1 \pm s_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

$$s_1 . s_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_i . b_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

تبرز أهمية الدوال البسيطة في إمكانية التعبير عن الدوال الحقيقية القيوسة بدلالتها، كما يتضح ذلك من المبرهنة والنتيجة التاليتين:

مبرهنة (4.4.1)

ليكن (X,M) فضاء قيوساً، ولتكن $f : X \to \overline{R}^+$. الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة هو أن تكون نهايةً لمتتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة.

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن f دالة قيوسة وغير سالبة على X. لنعرف على X من اجل كل عدد طبيعي $i \ge 1$، دالة s_i، كما يلي:

نجزئ المجال $[0,i[$ إلى 2^i مجالاً نصف مفتوح من اليمين بأطوال متساوية، كل منها يساوي $\frac{1}{2^i}$، ونضع $s_i(x) = \frac{m}{2^i}$ إذا كان $\frac{m}{2^i} \le f(x) < \frac{m+1}{2^i}$، وذلك من أجل $m = 0,1,\dots,i2^i$ و $s_i(x) = i$ إذا كان $f(x) \ge i$. عندئذ تكون المجموعات $A_{i,m} = f^{-1}([\frac{m}{2^i}, \frac{m+1}{2^i}[)$، $(0 \le m \le i2^i - 1)$، قيوسة ومنفصلة، كما تكون $A_i = f^{-1}([i,+\infty[)$، قيوسة، ولا تتقاطع مع أي من المجموعات $A_{i,m}$، و تكون $X = (\bigcup_{m=0}^{i2^i-1} A_{i,m}) \cup A_i$. ومنه فإن الدالة:

$$s_i = \sum_{m=0}^{i2^i-1} \frac{m}{2^i}\chi_{A_{i,m}} + i\chi_{A_i}$$

تكون قيوسة وغير سالبة، كما تكون مجموعة قيمها منتهية. ينتج أن s_i دالة بسيطة غير سالبة، وأن $s_i \le s_{i+1}$، وذلك أياً يكن $i \ge 1$، أي أن $(s_i)_{i \ge 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة غير السالبة.

من جهة أخرى، إذا كان $x \in X$ بحيث إن $f(x) = +\infty$، فإن $s_i(x) = i$، من أجل كل $i \ge 1$. وعندئذ تكون:

$$\lim_i s_i(x) = +\infty = f(x)$$

أما إذا كان $x \in X$، بحيث إن $f(x) < i_0$، فإن $f(x) \in [0,i[$ وذلك أياً يكن $i \ge i_0$. عندئذ يوجد عدد طبيعي m، $0 \le m \le i2^i - 1$، بحيث إن $f(x) \in \left[\frac{m}{2^i}, \frac{m+1}{2^i}\right[$ وفي هذه الحالة تكون $|f(x) - s_i(x)| < \frac{1}{2^i}$، وذلك من أجل $i \ge i_0$، وهذا يعني أن $\lim_i s_i(x) = f(x)$. إذاً، أياً يكن $x \in X$، فإن :

$$\lim_i s_i(x) = f(x)$$

كفاية الشرط: لنفرض أن $f = \lim_i s_i$، حيث $(s_i)_{i\ge1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة. عندئذ، استناداً إلى النتيجة **(4.3.2)** تكون f دالة قيوسة، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (4.4.1)

إذا كانت $f: X \to \overline{R}$ ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f قيوسة، هو أن تكون نهايةً لمتتالية من الدوال البسيطة.

البرهان:

لزوم الشرط: إذا كانت f قيوسة، فإن كلاً من الدالتين f^+ و f^- تكون قيوسة. عندئذ، توجد استناداً إلى المبرهنة **(4.4.1)** متتاليتان $(s_i)_{i\ge1}$ و $(t_i)_{i\ge1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث تكون:

$$\lim_i s_i = f^+ \quad , \quad \lim_i t_i = f^-$$

عندئذ، تكون $(s_i - t_i)_{i\ge1}$ متتالية من الدوال البسيطة، متقاربة من $f = f^+ - f^-$.

كفاية الشرط: إذا كانت $f = \lim_i s_i$، حيث $(s_i)_{i\ge1}$ متتالية من الدوال البسيطة، فإن f تكون دالة قيوسة، وذلك استناداً إلى النتيجة **(4.3.2)**. ▲

تمارين

1- ليكن (X,M) فضاء قيوساً، ولتكن $f: X \to \overline{R}$. برهن أنه إذا كانت $f^{-1}([-\infty, x])$ قيوسة، من أجل كل $x \in A$، حيث A كثيفة في R، فإن f تكون قيوسة.

2- عيّن صف الدوال $f: X \to \overline{R}$ ، القيوسة بالنسبة للجبر التام:

$$M = \{\phi, R,]-\infty, 0],]0, \infty[\}$$

3- أعط مثالاً لدالة $f: \bar{X} \to R$ ، غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ، بحيث تكون $|f|$ λ- قيوسة.

4- أعط مثالاً لدالتين حقيقيتين f_1 و f_2 غير قيوستين بالنسبة لقياس لوبيغ λ، بحيث تكون $f_1.f_2$ λ - قيوسة.

5- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ و $s_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ دالتين بسيطتين. برهن أن كلاً من الدوال التالية:

$$s_1 + s_2 \, , \, s_1 s_2 \, , \, \max\{s_1, s_2\}, \, \min\{s_1, s_2\}$$

دالة بسيطة، وأن :

$$s_1 + s_2 = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \, , \quad s_1 s_2 = \sum_{i,j} (a_i . b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \, ,$$

$$\max\{s_1, s_2\} = \sum_{i,j} \max\{a_i, b_j\} \chi_{A_i \cap B_j} \, , \quad \min\{s_1, s_2\} = \sum_{i,j} \min\{a_i, b_j\} \chi_{A_i \cap B_j} \, ,$$

6- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس غير تام، وليكن $\overline{\mu}$ القياس المتمم لـ μ. برهن أنه إذا كانت $f : X \to R$ $\overline{\mu}$ - قيوسة، فإنه توجد دالة $g : X \to R$ μ - قيوسة، بحيث تكون $f=g$ $(a.e)\mu$.

7- أعط مثالاً لدالة $f : R \to R$ غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ، بحيث تكون $f^{-1}(\{a\})$ λ - قيوسة، وذلك أياً تكن $a \in R$.

8- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس σ - منته، ولتكن f دالة قيوسة وغير سالبة على X. برهن أن $f = \lim_i s_i$، حيث $(s_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث إنه أياً يكن $i \geq 1$، توجد $A_i \in M$، بحيث يكون :

$$\mu(A_i) < \infty , \; s_i(x) = 0 \;, \; \forall x \in A_i^c$$

الفصل الخامس

التكامل

نوظّف في هذا الفصل كلّ المفاهيم التي تم تعريفها ودراستها في الفصول السابقة، لتأسيس ودراسة نظرية التكامل بمفهومها المعاصر. يعتبر هذا التكامل تعميماً لتكامل ريمان، ويتيح المجال لتوسيع مفهوم التكامل التقليدي ليشمل صفاً من الدوال أكثر اتساعاً وغنى، وليلبي حاجة نظرية الاحتمالات بمفهومها المتقدم.

نبدأ بتعريف ودراسة تكامل الدوال البسيطة وغير السالبة، لننتقل بعد ذلك إلى تعريف ودراسة تكامل الدوال القيوسة وغير السالبة. ولن نجد بعد ذلك أية صعوبة في توسيع التعريف ليشمل كل الدوال القيوسة.

ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. سنفرض أن كل المجموعات الواردة في المناقشة عناصر من M، وأن كل الدوال قيد الدراسة دوال حقيقية معرفة على X وقيوسة بالنسبة لـ μ.

نلفت الانتباه أخيراً إلى أننا سنعتمد الاصطلاح المألوف في نظرية القياس بوجه عام، وهو أن $0.\infty=0$.

5.1 تكامل الدوال البسيطة وغير السالبة

تعريف (5.1.1)

إذا كانت s دالة بسيطة وغير سالبة، شكلها النموذجي $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$، (الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ متباينة وغير سالبة، والمجموعات $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ ، $(1\leq i \leq n)$ قيوسة

ومنفصلة، بحيث إن $X=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$)، وكانت $A \in M$، فإننا نسمي المجموع $\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A\cap A_i)$ **تكامل الدالة s على المجموعة A بالنسبة للقياس μ**، وندل عليه بالرمز $\int_A s\,d\mu$، أو بالرمز $\int_A s(x)d\mu(x)$، وذلك إذا رغبنا في إبراز المتغير x. هذا مع العلم أنه ليس للحرف d الوارد في رمز التكامل أي مدلول خاص. وفي الواقع، فإننا نكتب أحياناً $\int_A s$ للدلالة على $\int_A s\,d\mu$.

يتضح من التعريف أن $\int_A s\,d\mu \geq 0$ وأن $\int_A s\,d\mu$ مستقل عن سلوك الدالة s على A^c.

من جهة أخرى، إذا عبّرنا عن الدالة s على الشكل $\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{B_j}$، حيث: $b_1, b_2, \ldots, b_m$ أعداد غير سالبة، و $B_1, B_2, \ldots, B_m$ مجموعات قيوسة ومنفصلة، بحيث إن $X=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$ وفرضنا أنه من أجل $1\leq i\leq n$ و $1\leq j\leq m$، كان $A_i\cap B_j\neq\phi$ فإن $a_i=b_j$، لأنه إذا كان $x\in A_i\cap B_j$، فإن $x\in A_i$ و $x\in B_j$، وعندئذ يكون $s(x)=a_i=b_j$. ومنه فإن:

$$
\begin{aligned}
\int_A s\,d\mu &= \sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu[A\cap A_i\cap(\bigcup_{j=1}^{m}B_j)]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(A\cap A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(A\cap A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{j=1}^{m}b_j\mu[A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cap B_j]\\
&=\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(A\cap B_j)
\end{aligned}
$$

إذاً $\int_A s\,d\mu$ مستقل عن الشكل الذي نعبر به عن الدالة s.

نتعرف فيما يلي على الخواص الأساسية لتكامل دالة بسيطة وغير سالبة s، شكلها النموذجي $s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$.

مبرهنة (5.1.1)

أياً تكن المجموعة القيوسة $A(\subseteq X)$، فإن:

$$\int_A \chi_A\,d\mu=\mu(A)$$

البرهان:

لدينا:

$$\chi_A=1.\chi_A+0.\chi_{A^c}$$

وبالتالي، فإن:

$$\int_A \chi_A\,d\mu=1.\mu(A)+0.\mu(A\cap A^c)=\mu(A).\ \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.2)

أياً تكن المجموعة القيوسة A، فإن:

$$\int_A s\,d\mu=\int_X s\chi_A\,d\mu$$

البرهان:

لدينا:

$$s\chi_A=\sum_{i=1}^{n}a_i(1.\chi_{A\cap A_i}+0.\chi_{A^c\cap A_i})=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A\cap A_i}$$

وبالتالي فإن:

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A \cap A_i \cap X)$$
$$= \int_X s\chi_A\,d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.3)

إذا كانت s و t دالتين بسيطتين وغير سالبتين، وكانت $0 \le s \le t$، فإن :
$$\int_A s\,d\mu \le \int_A t\,d\mu$$
وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

لتكن $t = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$. لنلاحظ أنه، أياً يكن $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le m$، فإما أن يكون $A_i \cap B_j \neq \phi$، وعندئذ $a_i \le b_j$، وإما أن يكون $A_i \cap B_j = \phi$، وعندئذ $\mu(A_i \cap B_j) = 0$. استناداً إلى ما تقدم نجد أن:
$$\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A \cap A_i) = \sum_{i,j} a_i\mu(A \cap A_i \cap B_j)$$
$$\le \sum_{i,j} b_j\mu(A \cap A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(A \cap B_j)$$
$$\le \int_A t\,d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.4)

أياً يكن $\alpha \ge 0$ وأياً تكن $A \in M$، فإن:
$$\int_A \alpha s\,d\mu = \alpha\int_A s\,d\mu$$

البرهان:

$$\int_A \alpha s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i\mu(A \cap A_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A \cap A_i)$$
$$= \alpha\int_A s\,d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.5)

إذا كانت $A,B \in M$، وكان $A \cap B = \phi$ فإن:
$$\int_{A\cup B} s\,d\mu = \int_A s\,d\mu + \int_B s\,d\mu$$

البرهان:

$$\int_{A\cup B} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu[(A \cup B) \cap A_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i[\mu(A \cap A_i) + \mu(B \cap A_i)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A \cap A_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(B \cap A_i)$$
$$= \int_A s\,d\mu + \int_B s\,d\mu \ \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.6)

إذا كانت s و t دالتين بسيطتين وغير سالبتين، فإن:
$$\int_A (s+t)\,d\mu = \int_A s\,d\mu + \int_A t\,d\mu$$
وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

لتكن $s = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$، و $t = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$. عندئذ:
$$s + t = \sum_{i,j} (a_i + b_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

إذاً:

$$\int_A (s+t)d\mu = \sum_{i,j}(a_i + b_j)\mu(A\cap A_i \cap B_j)$$
$$= \sum_{i,j} a_i\mu(A\cap A_i\cap B_j) + \sum_{i,j} b_j\mu(A\cap A_i \cap B_j)$$

أي أن:

$$\int_A (s+t)d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu[A\cap A_i \cap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j)] + \sum_{j=1}^{m} b_j\mu[A\cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\cap B_j]$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A\cap A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(A\cap B_j)$$
$$= \int_A s d\mu + \int_A t d\mu \ \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.7)

إذا كانت $A, B\in M$، وكانت $A \subseteq B$، فإن:

$$\int_A s d\mu \le \int_B s d\mu$$

البرهان:

استناداً إلى الفرض تكون $B=A\cup(B-A)$. عندئذ:

$$\int_B s d\mu = \int_A s d\mu + \int_{B-A} s d\mu$$

وذلك استناداً إلى المبرهنة **(5.1.5)**. وحيث إن $\int_{B-A} s d\mu \ge 0$ إذاً:

$$\int_A s d\mu \le \int_B s d\mu \ . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.8)

إذا كانت $(B_j)_{j\ge 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، فإن:

$$\lim_j \int_{B_j} s d\mu = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} s d\mu$$

البرهان:

نعلم أن:

$$\lim_j \mu(B_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)$$

إذاً:

$$\lim_j \int_{B_j} s d\mu = \lim_j \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(B_j\cap A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i . \lim_j \mu(B_j \cap A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu[(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)\cap A_i)]$$
$$= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} s d\mu \ .\blacktriangle$$

مبرهنة (5.1.8)

إذا كانت s دالة بسيطة وغير سالبة، فإن دالة المجموعة $\nu : M \to \overline{R}$ المعرّفة بالعلاقة:

$$\nu(A) = \int_A s d\mu$$

تكون قياساً على M.

البرهان:

من الواضح أن $\nu\ge 0$ و $\nu(\phi)=0$. لتكن $s = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$. إذا كانت $(B_j)_{j\ge 1}$ متتالية من عناصر M المنفصلة، فإن:

$$v(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu[(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \cap A_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i [\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i)]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(B_j \cap A_i)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} s\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} v(B_j)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

5.2 تكامل الدوال القيوسة وغير السالبة

تعريف (5.2.1)

إذا كانت $f : X \to \overline{R}^{+}$ دالة قيوسة غير سالبة، وكانت $A \in M$، فإننا نعرّف تكامل f على A بالنسبة للقياس μ بالعلاقة:

$$\int_A f\,d\mu = \sup\{\int_A s\,d\mu \ : \ 0 \le s \le f \text{ ، دالة بسيطة } s\}$$

أو — اختصاراً — بالعلاقة:

$$\int_A f\,d\mu = \sup_{0 \le s \le f} \int_A s\,d\mu$$

يتضح من التعريف أن $\int_A f\,d\mu$ موجود، أياً تكن الدالة القيوسة وغير السالبة f، وأياً تكن $A \in M$ و أن $\int_A f\,d\mu \ge 0$.

فإذا كان $\int_A f\,d\mu < +\infty$، فإننا نقول إن الدالة f كمولة على A بالنسبة للقياس μ.

تجدر ملاحظة أن التعريف السابق منسجم مع تعريف تكامل الدالة البسيطة وغير السالبة الوارد في الفقرة السابقة، تعريف (5.1.1).

في الواقع، إذا رمزنا بـ $I_1(s)$ لتكامل الدالة البسيطة وغير السالبة s على المجموعة A، وفقاً للتعريف (5.1.1)، وبـ $I_2(s)$ لتكامل s على A، وفقاً للتعريف (5.2.1)، فإنه أياً تكن الدالة البسيطة t، حيث $0 \le t \le s$، فإن $I_1(t) \le I_1(s)$، وذلك استناداً إلى المبرهنة (5.1.3). وعندئذ يكون

$$I_2(s) = \sup_{0 \le t \le s} I_1(t) \le I_1(s)$$

وحيث إن $0 \le s \le s$ ، إذاً:

$$I_2(s) \ge I_1(s)$$

مما تقدم ينتج أن $I_1(s) = I_2(s)$. وبوجه خاص، فإن $\int_A \alpha\,d\mu = \alpha\mu(A)$، وذلك أياً تكن الدالة الثابتة وغير السالبة α.

مبرهنة (5.2.1)

إذا كانت f دالة قيوسة وغير سالبة على X، وكانت $A \in M$، فإن:

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f.\chi_A\,d\mu$$

البرهان:

بما أنه ليس لسلوك دالة بسيطة وغير سالبة على مجموعة ما أي دور في تحديد قيمة تكامل تلك الدالة على متمّمة تلك المجموعة، إذاً:

$$\sup_{0 \le s \le f} \int_A s\,d\mu = \sup_{0 \le s' \le f\chi_A} \int_A s'\,d\mu$$

وبالتالي فإن:

$$\int_A f\,d\mu = \sup_{0 \le s' \le f\chi_A} \int_A s'\,d\mu = \sup_{0 \le s' \le f\chi_A} (\int_A s'\,d\mu + \int_{A^c} s'\,d\mu)$$
$$= \sup_{0 \le s' \le f\chi_A} \int_X s'\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu \ ▲$$

مبرهنة (5.2.2)

إذا كانت f و g دالتين قيوستين وغير سالبتين على X، وكانت $f \le g$ (a.e)μ على A، حيث $A \in M$، فإن:

$$\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$$

البرهان:

توجد استناداً إلى الفرض مجموعة قيوسة B قياسها معدوم، بحيث إن: $f(x) \le g(x)$، أياً يكن $x \in A-B$. عندئذ، أياً تكن الدالة البسيطة s، حيث $0 \le s \le f$، فإن الدالة $s' = s\chi_B$، تكون دالة بسيطة وغير سالبة وتحقق المتباينة $s' \le g$، ويكون:

$$\int_A s\,d\mu = \int_A s'\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$$

ومنه فإن:

$$\int_A f\,d\mu = \sup_{0\le s\le f} \int_A s\,d\mu \le \int_A g\,d\mu . \blacktriangle$$

نتيجة (5.2.1)

إذا كانت $\alpha \le f \le \beta$ ، حيث α و β عددان حقيقيان غير سالبين، فإن:

$$\alpha\,\mu(A) \le \int_A f\,d\mu \le \beta\mu(A)$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

لدينا:

$$\alpha\chi_A \le f \le \beta\chi_A$$

عندئذ، استناداً إلى المبرهنة (**5.2.2**)، نجد أن:

$$\int_A \alpha\chi_A\,d\mu \le \int_A f\,d\mu \le \int_A \beta\chi_A\,d\mu$$

إذاً:

$$\alpha\mu(A) \le \int_A f\,d\mu \le \beta\mu(A) . \blacktriangle$$

نتيجة (5.2.2)

إذا كانت $f=g$ (a.e)μ على A، حيث $A \in M$، فإن $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$

البرهان:

استناداً إلى المبرهنة(**5.2.2**) تكون النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

تجدر الإشارة إلى أنه، إذا كان $\mu(X) < +\infty$، وكانت $0 \le \alpha \le f \le \beta$، فإن f تكون كمولة على A، وذلك أياً تكن $A \in M$، كما يكون:

$$\alpha\mu(A) \le \int_A f\,d\mu \le \beta\mu(A)$$

وذلك استناداً إلى النتيجة (**5.2.1**) .

مبرهنة (5.2.3)

لتكن f دالة قيوسة وغير سالبة. إذا كانت f كمولة على A، حيث $A \in M$، فإن $f(x) \in R$، حيثما كان تقريباً على A.

البرهان:

لنضع:

$$B = \{x \in A : f(x) = +\infty\}$$

عندئذ يكفي برهان أن $B\in M$، و $\mu(B)=0$. بما أن $B=A\cap f^{-1}(\{\infty\})$، إذاً $B\in M$. من جهة أخرى، أياً يكن العدد الطبيعي $i\geq 1$، فإن الدالة البسيطة $s_i=i\chi_B$ تحقق المتباينة $0\leq s_i\leq f$. إذاً.

$$i\mu(B)=\int_A s_i\,d\mu\leq\int_A f\,d\mu<+\infty\quad,\forall i\geq 1$$

ينتج أن $\mu(B)=0$. ▲

مبرهنة (5.2.4)

إذا كان $\mu(A)=0$، فإن $\int_A f d\mu=0$، وذلك أياً تكن الدالة القيوسة وغير السالبة f.

البرهان:

أياً تكن الدالة البسيطة وغير السالبة s، حيث $0\leq s\leq f$، فإن $\int_A s d\mu=0$.

إذاً:

$$\int_A f\,d\mu=\sup_{0\leq s\leq f}\int_A s\,d\mu=0\,.\ ▲$$

مبرهنة (5.2.5)

إذا كانت f دالة قيوسة وغير سالبة، وكانت $A,B\in M$، حيث $A\subseteq B$،

فإن:

$$\int_A f\,d\mu\leq\int_B f\,d\mu$$

البرهان:

أياً تكن الدالة البسيطة وغير السالبة s، حيث $0\leq s\leq f$، فإن:

$$\int_A s\,d\mu\leq\int_B s\,d\mu\leq\int_B f\,d\mu$$

عندئذ:

$$\int_A f\,d\mu=\sup_{0\leq s\leq f}\int_A s\,d\mu\leq\int_B f\,d\mu\,.\ ▲$$

نتيجة (5.2.3)

لتكن f دالة قيوسة غير سالبة، و$A,B\in M$، حيث $A\subseteq B$. إذا كانت f كمولة على B، فإنها تكون كمولة على A.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

مبرهنة (5.2.6)

إذا كانت f قيوسة وغير سالبة، و$A\in M$، وكان $\int_A f\,d\mu=0$، فإن:

$$f=0\ (a.e)\mu \text{ على } A$$

البرهان:

لنضع:

$$B=\{x\in A: f(x)>0\}\quad;\quad B_i=\{x\in A: f(x)>\tfrac{1}{i}\},\forall i\geq 1$$

عندئذ تكون $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، ويكون $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$

إذاً:

$$\frac{1}{i}\mu(B_i)\leq\int_{B_i}f\,d\mu\leq\int_A f\,d\mu=0\qquad,\forall i\geq 1$$

ومنه فإن $\mu(B_i)=0$، من أجل $i\geq 1$. عندئذ نجد أن:

$$\mu(B)=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\lim_i\mu(B_i)=0\,.\ ▲$$

نتيجة (5.2.4)

إذا كانت f قيوسة وغير سالبة، وكانت $A \in M$، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون $\int_A f\,d\mu = 0$، هو أن يكون $f = 0\ (a.e)\mu$ على A.

البرهان:

بالرجوع إلى النتيجة (5.2.2) والمبرهنة (5.2.6)، نجد أن النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان.▲

مبرهنة (5.2.7)

إذا كانت f قيوسة وغير سالبة، وكان $\alpha \geq 0$، فإن:

$$\int_A \alpha f\,d\mu = \alpha \int_A f\,d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

إذا كان $\alpha = 0$، فإن النتيجة واضحة. لنفرض أن $\alpha > 0$. عندئذ، أياً تكن الدالة البسيطة وغير السالبة s، حيث $0 \leq s \leq f$، فإن:

$$\int_A \alpha f\,d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A \alpha s\,d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \alpha \int_A s\,d\mu$$
$$= \alpha \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s\,d\mu = \alpha \int_A f\,d\mu \ . \ ▲$$

مبرهنة (5.2.8)

لتكن f قيوسة وغير سالبة، و$A \in M$. إذا كان مقصور f على A هو الدالة الصفرية على A، فإن $\int_A f\,d\mu = 0$.

البرهان:

أياً تكن الدالة البسيطة وغير السالبة $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$، حيث $0 \leq s \leq f$، فإن:

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A \cap A_i) = 0$$

ذلك لأنه إذا كان $A \cap A_i \neq \phi$، وكان $x \in A \cap A_i$، فإن:

$$0 \leq a_i = s(x) \leq f(x) = 0$$

ينتج أن:

$$\int_A f\,d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s\,d\mu = 0 \ . \ ▲$$

تعتبر المبرهنة التالية المعروفة بمبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد من المبرهنات الأساسية في نظرية القياس بوجه عام. وتتجلى أهميتها بوجه خاص في إيضاح إمكانية المبادلة بين عملية التكامل وعملية إيجاد النهاية لمتتالية من الدوال. هذا بالإضافة إلى أنها أداة فعالة في إثبات صحة العديد من المبرهنات والنتائج.

مبرهنة (5.2.9)

(مبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد)

لتكن $(f_i)_{i \geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة. إذا كانت $(f_i)_{i \geq 1}$ متزايدة حيثما كان تقريباً، فإن:

$$\lim_i \int_A f_i\,d\mu = \int_A \lim f_i\,d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

توجد، استناداً إلى الفرض، مجموعة قيوسة B قياسها معدوم، بحيث يكون $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$، من أجل $i \geq 1$، وكل $x \in A\text{-}B$. عندئذ، تكون $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة حيثما كان تقريباً على A. إذا فرضنا أن $\lim_i f_i(x) = f(x)$، من أجل كل $x \in A\text{-}B$، فإن $f(x) = \sup_i f_i(x)$، من أجل كل $x \in A\text{-}B$، وعندئذ، تكون f قيوسة وغير سالبة، كما يكون $\int_A f_i d\mu \leq \int_A f d\mu$.

من جهة أخرى، واستناداً إلى المبرهنة **(5.2.2)** تكون المتتالية $(\int_A f_i d\mu)_{i\geq 1}$ متزايدة في $\overline{\mathbb{R}}^+$، فإذا رمزنا لنهايتها بـــ α، فإن:

$$\alpha \leq \int_A f d\mu \qquad (1)$$

ليكن $\beta \in]0,1[$، ولتكن s دالة بسيطة وغير سالبة، بحيث إن $0 \leq s \leq f$، ولنضع من أجل كل $i \geq 1$:

$$A_i = \{x \in A - B : \beta : \beta s(x) \leq f_i(x)\}$$

عندئذ تكون $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، كما تكون $A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq B$. ومنه فإن $\mu(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

ينتج مما تقدم:

$$\int_A f_i d\mu \geq \int_{A_i} f_i d\mu \geq \int_{A_i} \beta s d\mu = \beta \int_{A_i} s d\mu$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$، نجد أن:

$$\alpha = \lim_i \int_A f_i d\mu \geq \beta \int_{\bigcup_{i\geq 1} A_i} s d\mu = \beta \int_A s d\mu$$

وحيث إن المتباينة الأخيرة محققة أياً كان $\beta \in]0,1[$، إذاً:

$$\alpha \geq \sup_{\beta \in]0,1[} \int_A s d\mu = \int_A s d\mu$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha \geq \sup_{0\leq s\leq f} \int_A s d\mu = \int_A f d\mu \qquad (2)$$

من المتباينتين (1) و(2) نحصل على النتيجة المنشودة. ▲

تُعمِّم المبرهنة التالية المعروفة بمبرهنة فاتو مبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد من أجل متتاليات الدوال القيوسة وغير السالبة، بوجه عام.

مبرهنة **(5.2.10)**

(مبرهنة فاتو)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة، وكانت $\underline{\lim}_i f_i = f$ ، حيثما كان تقريباً، فإن:

$$\int_A f d\mu \leq \underline{\lim}_i \int_A f_i d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

استناداً إلى الفرض، تكون f دالة قيوسة وغير سالبة. لنضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$g_n = \inf\{f_i : i \geq n\}$$

عندئذ تكون المتتالية $(g_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة وغير السالبة، كما يكون $g_n \leq f_n$، من أجل $n=1,2,\ldots$. ومنه فإن:

$$\underline{\lim_{n}}\int_{A} g_n d\mu \leq \underline{\lim_{n}}\int_{A} f_n d\mu$$

من جهة أخرى بما أن:

$$\lim_{n} g_n = \sup_{n} g_n = \sup_{n}(\inf_{i \geq n} f_i) = \underline{\lim_{i}} f_i = f$$

وذلك حيثما كان تقريباً، إذاً:

$$\underline{\lim_{n}}\int_{A} g_n d\mu = \lim_{n}\int_{A} g_n d\mu = \int_{A} f d\mu \leq \underline{\lim_{n}}\int_{A} f_n d\mu$$

وذلك، استناداً إلى مبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد من أجل المتتالية $(g_n)_{n\geq 1}$. ▲

مثال (1)

لتكن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال المعرفة على R، كما يلي:

$$f_i = \chi_{]i,i+1[} \quad , \quad \forall i \geq 1$$

إن $(f_i)_{i\geq 1}$متتالية من الدوال القيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ، وغير السالبة على R، ثم إن:

$$\lim_{i} f_i = \chi_{\phi} = 0$$

ومنه فإن:

$$\int_{R} \lim_{i} f_i d\lambda = 0 < \lim_{i}\int_{R} f_i d\lambda = \lambda(]i,i+1[) = 1$$

وهكذا نجد أن المثال السابق يوضح الحقيقتين التاليتين:

i) شرط تزايد المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$، حيثما كان تقريباً في مبرهنة التقارب المطرد شرط ضروري لصحة المبرهنة.

ii) إن $\underline{\lim_{i}}\int_{A} f_i d\mu$، يمكن أن تكون أكبر تماماً من $\int_{A} \underline{\lim_{i}} f_i d\mu$ في مبرهنة فاتو.

ملاحظة (1)

تجدر الإشارة إلى أن تطبيق مبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد، غالباً ما يكون من أجل متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة. إذ أنه – وكما نعلم – استناداً إلى المبرهنة (**4.4.1**) تكون كل دالة قيوسة وغير سالبة f نهاية لمتتالية متزايدة $(s_i)_{i\geq 1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة. وبالتالي فإن تطبيق مبرهنة التقارب المطّرد يعطي:

$$\int_{A} f d\mu = \lim_{i}\int_{A} s_i d\mu$$

وهنا نُذكر أنه في الوقت الذي غالباً ما نستخدم فيه هذه النتيجة الأخيرة من أجل إثبات صحة العديد من خواص تكامل دالة قيوسة وغير سالبة، فإنها تستخدم أحياناً لتعريف تكامل دالة قيوسة وغير سالبة بالنسبة لقياس مفروض، على مجموعة قيوسة.

من الواضح أنه إذا كانت f دالة قيوسة وغير سالبة، فإن التطبيق $A \to \int_{A} f d\mu$ يعرّف دالة مجموعة على الجبر التام M. نستخدم فيما يلي مبرهنة التقارب المطّرد لإثبات صحة خاصة الجمعية التامة للدالة المذكورة، أو لإثبات صحة ما يعرف بجمعية التكامل.

مبرهنة (5.2.11)

إذا كانت f دالة قيوسة وغير سالبة، و كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات قيوسة ومنفصلة، فإن:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} f d\mu$$

البرهان:

توجد استناداً إلى الفرض متتالية متزايدة $(s_j)_{j\geq 1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث تكون $f = \lim_j s_j$. عندئذ باستخدام مبرهنة التقارب المطّرد نجد أن:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu = \lim_j \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} s_j d\mu = \lim_j \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} s_j d\mu$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_j \int_{A_i} s_j d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu \quad \blacktriangle$$

مبرهنة (5.2.12)

إذا كانت f قيوسة وغير سالبة، وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة والمنفصلة فإن:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu$$

البرهان:

لنضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad f_n = f\chi_{B_n}$$

عندئذ، تكون $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة وغير السالبة، وتكون $\lim_n f_n = f\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$. باستخدام مبرهنة التقارب المطّرد، نجد أن:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} d\mu = \lim_n \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f_n d\mu$$
$$= \lim_n \int_{B_n} f_n d\mu = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f_n d\mu\right)$$
$$= \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, d\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu \quad \blacktriangle$$

نتيجة (5.2.5)

إذا كانت f دالة قيوسة وغير سالبة، فإن دالة المجموعة $\nu : M \to \overline{\mathbb{R}}$ المعرّفة بالعلاقة:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \, , \; \forall A \in M$$

تعرّف قياساً على M.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

مبرهنة (5.2.13)

إذا كانت f و g دالتين قيوستين وغير سالبتين، وكانت $A \in M$، فإن:

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

البرهان:

توجد، استناداً إلى المبرهنة **(4.4.1)** متتاليتان متزايدتان $(s_i)_{i\geq 1}$ و $(t_i)_{i\geq 1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث تكون:

$$f = \lim_i s_i \quad , \quad g = \lim_i t_i$$

عندئذ تكون $(s_i + t_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة متقاربة من الدالة $f+g$. إذاً:

$$\int_A (f+g)d\mu = \lim_i \int_A (s_i + t_i)d\mu$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة التقارب المطّرد. ومنه فإن:

$$\int_A (f+g)d\mu = \lim_i \int_A s_i d\mu + \lim_i \int_A t_i d\mu$$

باستخدام مبرهنة التقارب المطّرد مرة أخرى ، نجد أن:

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu\ . \blacktriangle$$

نتيجة (5.2.6)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة، وكانت $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$، فإن:

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_i d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

لنضع $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$، من أجل $n \geq 1$. عندئذ تكون $(g_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة وغير السالبة، متقاربة من الدالة f. وعليه فإن f دالة قيوسة وغير سالبة. باستخدام مبرهنة التقارب المطّرد، والمبرهنة **(5.2.13)** نجد أن:

$$\int_A f\,d\mu = \lim_n \int_A g_n d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A f_i d\mu\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_i d\mu\ \blacktriangle$$

5.3 تكامل الدوال القيوسة

نعرّف في هذه الفقرة تكامل دالة حقيقية قيوسة، وندرس خواصه الأساسية.

ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة قيوسة.نعلم أن:

$$f = f^+ - f^-$$

وأن كلاً من الدالتين f^+ و f^- قيوسة وغير سالبة، كما نعلم أنه أياً تكن $A \in M$، فإن كلاً من التكاملين $\int_A f^+ d\mu$ و $\int_A f^- d\mu$ موجود. نضع في ضوء ما تقدم التعريف التالي:

تعريف (5.3.1)

إذا كانت $f : X \to \overline{R}$ دالة قيوسة، وكان أحد التكاملين $\int_A f^+ d\mu$ و $\int_A f^- d\mu$ على الأقل منتهياً، فإننا نعرّف **تكامل الدالة f بالنسبة للقياس μ على المجموعة A**، بالعلاقة:

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

تجدر الإشارة بهذا الصدد إلى أن كتابة الدالة f على الشكل $f = f^+ - f^-$ تتم بطريقة وحيدة، وبالتالي فإن التكامل $\int_A f\,d\mu$ – كما ورد أعلاه – معرّف بدقة.

إذا كان $\left|\int_A f d\mu\right| < +\infty$ فإننا نقول إن **f كمولة بالنسبة للقياس μ على A**، أو – اختصاراً – **كمولة على A**. وسندلّ بالرمز $L_A(\mu)$ على مجموعة الدوال الكمولة بالنسبة للقياس μ على المجموعة A، ونحصر اهتمامنا بدراسة الخواص الأساسية لتكامل ذلك النوع من الدوال تحديداً، وذلك تجنباً لما ينجم من تعقيد في

المناقشة من أجل الدوال غير الكمولة، ولأن دور تلك الدوال محدود نسبياً من الناحية العملية.

يتضح من التعريف السابق أنّ $f \in L_A(\mu)$، إذا وفقط إذا كانت كل من الدالتين f^+ و f^- تنتمي إلى $L_A(\mu)$.

نلفت الانتباه إلى أن كل المجموعات الواردة في المناقشة، مجموعات قيوسة بالنسبة للجبر التام M.

مبرهنة (5.3.1)

إذا كانت f قيوسة، وكان $\mu(A) = 0$، فإن $f \in L_A(\mu)$ و $\int_A f d\mu = 0$.

البرهان:

استناداً إلى الفرض، وإلى المبرهنة (5.2.4)، يكون $\int_A f^+ d\mu = \int_A f^- d\mu = 0$.

وعندئذ نجد أن:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = 0 . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.3.2)

إذا كانت $f \in L_B(\mu)$، وكانت $A \subseteq B$، فإن $f \in L_A(\mu)$.

البرهان:

استناداً إلى الفرض، وإلى المبرهنة (5.2.5)، نجد أن:

$$\int_A f^+ d\mu \le \int_B f^+ d\mu < +\infty \quad , \quad \int_A f^- d\mu \le \int_B f^- d\mu < +\infty$$

وعندئذ تكون $f \in L_A(\mu)$. $\blacktriangle$

مبرهنة(5.3.3)

إذا كانت $(A_i)_{i \ge 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة والمنفصلة، وكانت $f \in L_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}(\mu)$ فإن:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

البرهان:

لنضع $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة (5.3.2)، تكون $f \in L_{A_i}(\mu)$، وذلك أياً يكن $i \ge 1$. من جهة ثانية، استناداً إلى خاصة جمعية التكـ أجل دالة قيوسة وغير سالبة، نجد أن:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+ d\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^- d\mu$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{A_i} f^+ d\mu - \int_{A} f^- d\mu \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.3.4)

لتكن f و g دالتين قيوستين. إذا كانت $f = g \ (a.e)\mu$ على A، وكانت $f \in L_A(\mu)$، فإن $g \in L_A(\mu)$ و $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$.

البرهان:

توجد، استناداً إلى الفرض، مجموعة قيوسة B قياسها معدوم، بحيث إن $f(x) = g(x)$، أياً يكن $x \in A-B$. عندئذ نجد أن:

$$\int_A f^+ d\mu = \int_{A-B} f^+ d\mu = \int_{A-B} g^+ d\mu = \int_A g^+ d\mu$$

وأن:

$$\int_A f^- d\mu = \int_{A-B} f^- d\mu = \int_{A-B} g^- d\mu = \int_A g^- d\mu$$

وحيث إن $f \in L_A(\mu)$ إذاً $g \in L_A(\mu)$، و:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu = \int_A g d\mu . \blacktriangle$$

تبين المبرهنتان التاليتان أن $L_A(\mu)$ فضاء متجهي فوق حقل الأعداد الحقيقية R.

مبرهنة (5.3.5)

إذا كانت $f \in L_A(\mu)$ وكان $\alpha \in R$، فإن $\alpha f \in L_A(\mu)$ و:

$$\int_A \alpha f d\mu = \alpha \int_A f d\mu$$

البرهان:

إذا كان $\alpha = 0$ فإن النتيجة واضحة.

لنفرض أن $\alpha > 0$. لدينا:

$$\alpha f = (\alpha f^+) - (\alpha f)^- = \alpha f^+ - \alpha f^-$$

وبالتالي فإن:

$$\int_A \alpha f d\mu = \int_A \alpha f^+ d\mu - \int_A \alpha f^- d\mu$$
$$= \alpha \int_A f^+ d\mu - \alpha \int_A f^- d\mu = \alpha \int_A f d\mu$$

أما من أجل $\alpha < 0$ فإن:

$$\alpha f = (-\alpha) f^- - (-\alpha) f^+$$

وعندئذ نجد أن:

$$\int_A \alpha f d\mu = \int_A (-\alpha) f^- d\mu - \int_A (-\alpha) f^+ d\mu$$
$$= (-\alpha) \int_A f^- d\mu - (-\alpha) \int_A f^+ d\mu$$
$$= \alpha \left(\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right) = \alpha \int_A f d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.3.6)

إذا كانت $f, g \in L_A(\mu)$ فإن $f + g \in L_A(\mu)$ و:

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

البرهان:

لدينا:

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$
$$= (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

ومنه، فإن:

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

عندئذ، استناداً إلى المبرهنة **(5.2.13)**، نجد أن:

$$\int_A (f+g)^+ d\mu + \int_A f^- d\mu + \int_A g^- d\mu = \int_A (f+g)^- d\mu + \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu$$

إذاً:

$$\int_A (f+g)^+ d\mu - \int_A (f+g)^- d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu + \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu$$

وبالتالي فإن:

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu . \blacktriangle$$

مبرهنة (5.3.7)

الشرط اللازم والكافي لكي تكون $f \in L_A(\mu)$، هو أن تكون $|f| \in L_A(\mu)$.

وإذا كانت أي من الدالتين كمولة على A، فإن:

$$\left|\int_A f d\mu\right| = \left|\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu\right|$$
$$\le \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A |f| d\mu$$

البرهان:

إذا كانت $f \in L_A(\mu)$ فإن $f^+, f^- \in L_A(\mu)$ وعندئذ استناداً إلى المبرهنة **(5.3.6)** تكون $|f| = (f^+ + f^-) \in L_A(\mu)$.

بالعكس، إذا كانت $|f| \in L_A(\mu)$ وأخذنا بعين الاعتبار أنها دالة قيوسة وغير سالبة وأن $f^+ \le |f|$ و $f^- \le |f|$ عندئذ نجد أن $f^+, f^- \in L_A(\mu)$ وبالتالي فإن $f \in L_A(\mu)$.

أخيراً، إذا كانت أي من الدالتين f و $|f|$ كمولة على A فإن:

$$\left|\int_A f d\mu\right| = \left|\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu\right|$$
$$\le \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A |f| d\mu . \blacktriangle$$

نتيجة (5.3.1)

إذا كانت $g \in L_A(\mu)$، وكانت $|f| \le g$، فإن $f \in L_A(\mu)$.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان.▲

مبرهنة (5.3.8)

إذا كانت $f, g \in L_A(\mu)$، وكانت $f \le g$ حيثما كان تقريباً على A، فإن:

$$\int_A f d\mu \le \int_A g d\mu$$

البرهان:

استناداً إلى الفرض، تكون $g - f \ge 0$ حيثما كان تقريباً على A، وعندئذ يكون $\int_A (g-f) d\mu \ge 0$ وذلك استناداً إلى المبرهنة **(5.2.2)**. إذاً، واستناداً إلى المبرهنة **(5.3.6)** نجد أن:

$$\int_A g d\mu - \int_A f d\mu \ge 0$$

أي أن:

$$\int_A f d\mu \le \int_A g d\mu . \blacktriangle$$

نتيجة (5.3.2)

إذا كان $\mu(A) < +\infty$، وكان $\alpha \le f(x) \le \beta$، من أجل كل $x \in A$، فإن $f \in L_A(\mu)$ و:

$$\alpha\mu(A) \le \int_A f d\mu \le \beta\mu(A)$$

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان. ▲

تُعمِّم المبرهنة التالية مبرهنة لوبيغ في التقارب المطرد من أجل الدوال القيوسة، بوجه عام.

مبرهنة (5.3.9)

(مبرهنة لوبيغ في التقارب الراجح)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة، متقاربة حيثما كان تقريباً من الدالة f، وكانت $|f_i| \leq g$، أياً يكن $i \geq 1$، حيث $g \in L_A(\mu)$، فإن:

$$\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

استناداً إلى الفرض، وإلى النتيجة (**5.3.1**)، تكون الدوال f و f_i، $(i \geq 1)$ كمولة على A.

من جهة أخرى، بما أن $|f_i| \leq g$، إذاً $-g \leq f_i \leq g$، أياً يكن $i \geq 1$. عندئذ تكون كل من $(f_i + g)_{i\geq 1}$، و $(g - f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة.

بتطبيق مبرهنة "فاتو" على المتتالية $(f_i + g)_{i\geq 1}$، نجد أن:

$$\int_A f d\mu \leq \underline{\lim}_i \int_A f_i d\mu \qquad (1)$$

وبتطبيق نفس المبرهنة على $(g - f_i)_{i\geq 1}$ نجد أن:

$$-\int_A f d\mu \leq \underline{\lim}_i \left(-\int_A f_i d\mu\right)$$

أي أن:

$$\overline{\lim}_i \int_A f_i d\mu \leq \int_A f d\mu \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن:

$$\int_A f d\mu \leq \underline{\lim}_i \int_A f_i d\mu \leq \overline{\lim}_i \int_A f_i d\mu \leq \int_A f d\mu$$

أي أن:

$$\underline{\lim}_i \int_A f_i d\mu = \overline{\lim}_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu$$

إذاً، $\left(\int_A f_i d\mu\right)_{i\geq 1}$ متقاربة من $\int_A f d\mu$، وذلك ينهي البرهان. ▲

نتيجة (5.3.3)

إذا كان $\mu(X) < +\infty$، وكانت $(f_i)_{i\geq 1}$ محدودة بانتظام، ومتقاربة حيثما كان تقريباً من الدالة f، فإن:

$$\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu$$

وذلك أياً تكن $A \in M$.

البرهان:

يوجد استناداً إلى الفرض، عدد موجب α بحيث يكون:

$$|f_i(x)| \leq \alpha \ . \ \forall i \geq 1, \forall x \in X$$

من جهة ثانية، بما أن $\mu(A) < +\infty$، وذلك أياً تكن $A \in M$، فإن الدالة الثابتة α تكون كمولة على A. عندئذ استناداً إلى المبرهنة (**5.3.9**) نجد أن:

$$\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu \ . \ ▲$$

5.4 تكامل الدوال العقدية

لتكن $f : X \to C$ دالة عقدية. من المعلوم أن الدالة f تكتب على الشكل $f = f_1 + if_2$، حيث f_1 , f_2 دالتا القسمين الحقيقي والتخيلي (على الترتيب) للدالة f، و أنّ f تكون قيوسة إذا وفقط إذا كانت كل من الدالتين الحقيقيتين f_1 , f_2 قيوسة.

تعريف (5.4.1)

إذا كانت f قيوسة، فإننا نعرف تكاملها بالنسبة للقياس μ على المجموعة القيوسة **A** بالعلاقة:

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f_1 d\mu + i\int_A f_2 d\mu$$

ونقول عن f إنها **كمولة** على A، إذا كانت كل من الدالتين f_1 و f_2 كمولة على A. فإذا لاحظنا أن:

$$|f| \le |f_1| + |f_2| \le 2|f|$$

لاتضح من التعريف أن f تكون كمولة على A إذا وفقط إذا كانت $|f|$ كمولة على A.

في ضوء ما تقدم، نجد أنه يمكن تعميم كل خواص تكامل الدوال الحقيقية القيوسة من أجل الدوال العقدية القيوسة دونما صعوبة تذكر، على أن نستثني من تلك الخواص الخاصة الواردة في المبرهنة **(5.3.8)** بطبيعة الحال.

في جميع الأحوال، فإننا نكتفي في هذا المجال بتقديم المبرهنتين التاليتين:

مبرهنة (5.4.1)

إذا كانت $f : X \to C$، و $g : X \to C$ كمولتين على A، فإن $f+g$، و αf أياً يكن $\alpha \in C$، تكونان كمولتين على A، ويكون:

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu \qquad (1)$$

$$\int_A \alpha f\,d\mu = \alpha\int_A f\,d\mu \qquad (2)$$

البرهان

من المتباينة $|f+g| \le |f| + |g|$ ينتج أن f+g كمولة. كما ينتج من العلاقة $|\alpha f| = |\alpha||f|$ أن αf كمولة أيضاً.

لنضع:

$$f = f_1 + if_2 \qquad , \qquad g = g_1 + ig_2$$

عندئذ، نجد أن:

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A (f_1+g_1)d\mu + i\int_A (f_2+g_2)d\mu$$
$$= \int_A f_1 d\mu + \int_A g_1 d\mu + i\int_A f_2 d\mu + i\int_A g_2 d\mu$$

ومنه، فإن:

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A f_1 d\mu + i\int_A f_2 d\mu + \int_A g_1 d\mu + i\int_A g_2 d\mu$$
$$= \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

وبالتالي فإن (1) صحيحة.

أخيراً، إذا فرضنا أن $\alpha = \beta + i\gamma$ فإن:

$$\int_A \alpha f d\mu = \int_A (\beta+i\gamma)(f_1+if_2)d\mu$$
$$= \int_A (\beta f_1 - \gamma f_2)d\mu + i\int_A (\gamma f_1 + \beta f_2)d\mu$$
$$= \beta\int_A f_1 d\mu - \gamma\int_A f_2 d\mu + i\gamma\int_A f_1 d\mu + i\beta\int_A f_2 d\mu$$
$$= (\beta+i\gamma)\left(\int_A f_1 d\mu + i\int_A f_2 d\mu\right)$$
$$= \alpha\int_A f d\mu$$

أي أن (2) صحيحة، وبذلك يكمل البرهان. ▲

نتيجة (5.4.1)

إن مجموعة الدوال العقدية الكمولة بالنسبة للقياس μ على مجموعة μ- قيوسة هي فضاء متجهي فوق الحقل C.

النتيجة واضحة ولا تحتاج إلى برهان.▲

مبرهنة (5.4.2)

إذا كانت $f : X \to C$ كمولة على A، فإن:

$$\left|\int_A f\, d\mu\right| \le \int_A |f|\, d\mu$$

البرهان:

لنفرض أن $\int_A f\, d\mu = re^{i\theta}$، حيث $r,\theta \in R$، و $r \ge 0$. عندئذ $r = \left|\int_A f\, d\mu\right|$. وبالتالي فإن:

$$\left|\int_A f\, d\mu\right| = r = \int_A e^{-i\theta} f\, d\mu = \int_A \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)\, d\mu$$
$$\le \int_A |R_e(e^{-i\theta} f)|\, d\mu \le \int_A |e^{-i\theta} f|\, d\mu$$
$$\le \int_A |f|\, d\mu$$

وبذلك ينتهي البرهان. ▲

5.5 العلاقة بين تكاملي لوبيغ وريمان

لعلّه كان واضحاً مما تقدم أن تكامل دالة حقيقية قيوسة بالنسبة لقياس مفروض يشبه إلى حد كبير تكامل ريمان لدالة حقيقية. هذا التكامل الذي نأمل أن

يكون القارئ على إلمام كافٍ بتعريفه وبخواصه الأساسية.

نهدف في هذه الفقرة إلى إيضاح العلاقة بين تكامل لوبيغ، أي التكامل بالنسبة لقياس لوبيغ λ، وتكامل ريمان. وبتعبير أدق، سنبين أن تكامل لوبيغ تعميم لتكامل ريمان. نُذكّر، من أجل ذلك، بتعريف هذا التكامل الأخير.

ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً في R، حيث $a \le b$. نقول عن مجموعة منتهية $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ من نقاط المجال $[a,b]$ إنها تجزئة لذلك المجال، ونرمز لها بـ P إذا كان:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b$$

لنضع $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$، من أجل $i=1,\ldots,n$. نعرّف قطر التجزئة P بالعدد $\max\{\Delta x_i : i = 1,\ldots n\}$، ونرمز له بـ δ_p. أي أن:

$$\delta_p = \max\{\Delta x_i : i = 1,\ldots n\}$$

لتكن الآن f دالة حقيقية معرفة ومحدودة على المجال $[a,b]$، ولنعرّف من أجل تجزئة ما P للمجال $[a,b]$، ومن أجل $i=1,\ldots,n$:

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

ولنضع:

$$\underline{R}(p) = \sum_{i=1}^{m} m_i \Delta x_i \quad , \quad \overline{R}(p) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

نُسمي $\underline{R}(P), \overline{R}(P)$ **مجموعي ريمان السفلي والعلوي** (على الترتيب) بالنسبة للتجزئة P.

نقول عن تجزئة P' للمجال $[a,b]$، إنها **أدقّ** من التجزئة P، إذا كانت $P \subseteq P'$.

من الواضح أنه إذا كانت P' أدق من P، فإن $\delta_{P'} \le \delta_P$، و:

$$\underline{R}(P) \le \underline{R}(P') \le \overline{R}(P') \le \overline{R}(P)$$

نتحقق بسهولة من أنه إذا كانت P_1 و P_2 تجزئتين للمجال $[a,b]$ فإن $\underline{R}(P_1) \le \overline{R}(P_2)$. نسمي الحد الأعلى الأصغري لمجاميع ريمان السفلية بالنسبة لكل تجزئات المجال $[a,b]$، **تكامل ريمان السفلي** للدالة f على المجال $[a,b]$، ونرمز له بـ $\underline{\int_a^b} f(x)dx$، أي أن:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \underline{R}(P)$$

كما نسمي الحد الأدنى الأعظمي لمجاميع ريمان العلوية بالنسبة لكل تجزئات المجال $[a,b]$ **تكامل ريمان العلوي** للدالة f على المجال $[a,b]$ ونرمز له بـ $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ أي أن:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \overline{R}(P)$$

تعريف (5.5.1)

إذا كان $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$، فإننا نقول عن الدالة f إنها **كمولة وفق مفهوم ريمان**، أو – اختصاراً – R-كمولة على $[a,b]$ وعندئذ نسمي القيمة المشتركة لتكاملي ريمان السفلي والعلوي، **تكامل ريمان** للدالة f على المجال $[a,b]$. وندلّ عليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$، أي أن:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

نتحقق بسهولة، في ضوء التعريف السابق، واستناداً إلى ما تقدم، أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة f R-كمولة على المجال $[a,b]$، هو أن يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P : \overline{R}(P) - \underline{R}(P) < \varepsilon$$

وأكثر من ذلك، يمكننا أن نتحقق من أنه إذا كانت f R-كمولة على المجال $[a,b]$ فإنه واستناداً إلى الشرط السابق توجد متتالية $(P_n)_{n\ge1}$ من التجزئات للمجال $[a,b]$، بحيث يكون:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{P_n}\to 0}} \underline{R}(P_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{P_n}\to 0}} \overline{R}(P_n) = \int_a^b f(x)dx$$

لتكن الآن $P=\{x_0,x_1,\dots x_n\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$، و لنعرّف على R باستخدام الأعداد m_i و M_i، $(1\le i \le n)$ دالتين s و t، على النحو التالي:

$$s(x) = \begin{cases} m_i & , \ x_{i-1} < x \le x_i \\ f(a) & , \ x = a \\ 0 & , \ x \notin [a,b] \end{cases} \quad , \quad t(x) = \begin{cases} M_i & , \ x_{i-1} < x \le x_i \\ f(a) & , \ x = a \\ 0 & , \ x \notin [a,b] \end{cases}$$

عندئذ، تكون s و t دالتين بسيطتين تحققان $s \le f \le t$، حيث نفرض أن $f(x) = 0$ من أجل كل $x \notin [a,b]$. وهنا تجدر الإشارة إلى أن الفرضية السابقة لا تفقد المناقشة شيئاً من عموميتها، طالما أننا بصدد دراسة تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$ حصراً.

ينتج مما سبق أن:

$$\int_{[a,b]} s d\lambda = \underline{R}(P) \quad , \quad \int_{[a,b]} t d\lambda = \overline{R}(P) \ ^{(*)}$$

(*) يرمز عادة لتكامل لوبيغ للدالة f على مجال من الأعداد الحقيقية طرفاه a و b، حيث a≤b، بالرمز $\int_a^b f d\lambda$. إلا أننا فضلنا الاحتفاظ بالرمز $\int_{[a,b]} f d\lambda$، تمييزه عن الرمز $\int_a^b f(x)dx$ الذي ندل به على تكامل ريمان للدالة f على المجال $[a,b]$.

أصبح بإمكاننا الآن عرض وإثبات صحة المبرهنة الأساسية التالية:

مبرهنة (5.5.1)

إذا كانت f دالة R-كمولة على المجال [a,b]، فإنها تكون كمولة بالنسبة لقياس لوبيغ على ذلك المجال، ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$$

البرهان:

توجد، استناداً إلى الفرض، متتالية $(P_n)_{n\geq 1}$ من تجزئات المجال [a,b] بحيث تكون:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \delta_{P_n}\to 0}} \underline{R}(P_n) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \delta_{P_n}\to 0}} \overline{R}(P_n) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

يمكننا أن نفرض أن المتتالية $(P_n)_{n\geq 1}$ متزايدة أي أن $P_n \subseteq P_{n+1}$ أياً يكن $n \geq 1$ وإلا فإنه يمكننا الاستعاضة عنها بمتتالية متزايدة من التجزئات الأدق، دون أن يؤثر ذلك على صحة(1).

لتكن s_n و t_n الدالتين البسيطتين المعرفتين سابقاً، من أجل التجزئة P_n، حيث $n \geq 1$. عندئذ استناداً إلى كون $(P_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة، وإلى خواص الحدين الأدنى الأعظمي، والأعلى الأصغري، تكون $(s_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة، و $(t_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة. لنضع:

$$g = \lim_n s_n \quad , \quad h = \lim_n t_n$$

عندئذ، نجد أن $g \leq f \leq h$. وبالتالي فإن تطبيق مبرهنة لوبيغ في التقارب الراجح **(5.3.9)** على المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 1}$، و $(t_n)_{n\geq 1}$، يعطي:

$$\lim_n \underline{R}(P_n) = \lim_n \int_{[a,b]} s_n d\lambda = \int_{[a,b]} g\, d\lambda$$

$$\lim_n \overline{R}(P_n) = \lim_n \int_{[a,b]} t_n d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda$$

إذاً، واستناداً إلى (1)، يكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda \qquad (2)$$

وحيث إن $g \leq f \leq h$، إذاً $g = f = h$ حيثما كان تقريباً على المجال [a,b].

ينتج أن f دالة قيوسة بالنسبة لـ λ (λ قياس تام). وحيث إن g و h كمولتان بالنسبة لـ λ على المجال [a,b] إذاً f كمولة أيضاً بالنسبة لـ λ على ذلك المجال. وعندئذ من العلاقة (2)، نجد أن:

$$\int_{[a,b]} h\, d\lambda = \int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

وبذلك يكتمل البرهان.▲

يوضح المثال التالي، أن عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً.

مثال(2)

لتكن f دالة معرفة على المجال [0,1]، كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in [0,1] \cap Q \\ 1 & , \ x \in [0,1] - Q \end{cases}$$

عندئذ، f λ- قيوسة، و $\int_{[a,b]} f\, d\lambda = 1$.

من جهة أخرى، أياً تكن التجزئة P للمجال [0,1]، فإن:

$$\underline{R}(P) = 0 \quad , \quad \overline{R}(P) = 1$$

وبالتالي فإن f ليست R-كمولة على [0,1].

ملاحظة (2)

من المعلوم أن مفهوم تكامل ريمان المعتل (المعمّم) يتيح توسيع مفهوم تكامل ريمان ليشمل الدوال غير المحدودة والمجالات غير المغلقة أوغير المحدودة. نعلم على سبيل المثال، أنه إذا كانت f R – كمولة على المجال [a,b]، وذلك أياً يكن العدد الحقيقي b، فإننا نعرّف تكامل ريمان المعتل للدالة f على المجال [a,+∞[بالعلاقة:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

فإذا كانت النهاية المذكورة موجودة ومنتهية، قلنا عن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ إنه متقارب. وبخلاف ذلك، فإننا نقول إنه متباعد.

ومما يجدر ذكره بهذا الصدد، أن تكامل ريمان المعتل يطرح إمكانية **التقارب الشرطي** للتكامل. بتعبير أدق، يمكن أن يكون التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً، دون أن يكون التكامل $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متقارباً. نذكر من الأمثلة الشهيرة على هذه الحالة، التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

وهكذا يمكننا القول في ضوءِ ما سبق، إن نظرية تكامل لوبيغ لا تشمل تكاملات ريمان المعتلة. إذ أنه وكما نعلم فإن دالةً حقيقيةً f تكون كمولةً بالنسبة لقياس لوبيغ إذا وفقط إذا كانت |f| كمولة.

تمارين

1- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن f دالة قيوسة وغير سالبة. برهن أنه إذا كانت f كمولة على X، فإن:

$$\mu(\{x : f(x) > \alpha\}) < \infty$$

وذلك أياً يكن $\alpha > 0$.

استنتج أن المجموعة $\{x:f(x)>0\}$ هي اتحاد عدود لمجموعات قيوسة، ل منها منته.

2- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت f دالة غير سالبة، وكمولة على X، فإن $f = \lim_i s_i$، حيث $(s_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث إنه أياً يكن $i \geq 1$، توجد $A_i \in M$، بحيث يكون $\mu(A_i) < +\infty$، و $s_i(x) = 0$، من أجل كل $x \in A_i^c$.

3- استنتج مبرهنة التقارب المطّرد من مبرهنة فاتو.

4- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس ولتكن f دالة قيوسة وغير سالبة. برهن أنه إذا كانت $f_i(x) = \min\{f(x), i\}$, $(\forall i \geq 1)$ فإن:

$$\lim_i \int_X f_i d\mu = \int_X f\, d\mu$$

5- ليكن(X,M,μ) فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت f كمولة على X، فإن المجموعة $\{x:f(x)\neq 0\}$ اتحاد عدود لمجموعات قيوسة، قياس كل منها منته.

6- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت f كمولة على X، وكانت g دالة قيوسة ومحدودة، فإن $f.g$ تكون كمولة.

7- إذا كان (X,M,μ) فضاء قياس، وكانت f و g دالتين كمولتين على X، فأثبت أن:

$$\int_X |f+g|\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu$$

8- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن f و h دالتين كمولتين على X.

برهن أنه إذا كانت $f \le g \le h$، وكان $\int_X f\,d\mu = \int_X h\,d\mu$، فإن g تكون كمولة، ويكون:

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

9- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $(A_i)_{i\ge1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة، بحيث إن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$. أثبت أنه إذا كانت f دالة كمولة على X، فإن:

$$\lim_i \int_{A_i} f\,d\mu = 0$$

10- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس. إذا كانت f كمولة على X، وكانت $A_i = \{x : |f(x)| > i\}$، من أجل $i = 1,2,\ldots$، فأثبت أن:

$$\lim_i \int_{A_i} |f|\,d\mu = 0$$

11- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن f دالة قيوسة، و g دالة كمولة. إذا كان $\alpha \le f(x) \le \beta$، من أجل كل $x \in X$، وحيث $\alpha,\beta \in R$. فأثبت أنه يوجد عدد حقيقي γ، $\alpha \le \gamma \le \beta$ بحيث يكون:

$$\int_X f|g|\,d\mu = \gamma \int_X |g|\,d\mu$$

12- برهن، ضمن نفس معطيات مبرهنة التقارب الراجح، أن:

$$\lim_i \int_X |f_i - f|\,d\mu = 0$$

13- لتكن $M = 2^N, X = N$ و μ قياس العدّ على 2^N.

برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون f كمولة على N، هو أن تكون $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ متقاربة إطلاقاً.

14- استخدم نتيجة التمرين السابق لبرهان أن تبديل ترتيب حدود متسلسلة عددية متقاربة إطلاقاً لا يؤثر على تقاربها ولا على مجموعها.

15- إذا كانت f دالة كمولة على المجال $[a,b]$ بالنسبة لقياس لوبيغ λ، وكانت f مستمرة في النقطة $c \in]a,b[$، فأثبت أن الدالة g المعرفة على $[a,b]$ بالعلاقة:

$$g(x) = \int_a^x f\,d\lambda \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

تكون قابلة للاشتقاق في النقطة c ، ويكون $g'(c) = f(c)$.

16 – تحقق من أن:

i) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

ii) $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ متباعد.

الفصل السادس

فضاء القياس الجداء

ليكن (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2) فضاءي قياس. عرّفنا في الفصل الأول الجبر التام الجداء $M_1 \times M_2$ للجبرين التامين M_1 و M_2 ، بأنه الجبر التام الأصغري على صف المستطيلات القيوسة، أي على صف المستطيلات من الشكل $A_1 \times A_2$، حيث $A_1 \in M_1$ و $A_2 \in M_2$. كما وجدنا أن صف المجموعات التي كل منها اتحاد منته لمستطيلات قيوسة ومنفصلة، هو جبر في $X_1 \times X_2$ يولّد الجبر التام $M_1 \times M_2$. وهكذا، عرّفنا الفضاء القيوس الجداء للفضاءين القيوسين (X_1 , M_1) و (X_2 , M_2) بأنه الثنائية $(X_1 \times X_2 , M_1 \times M_2)$.

6.1 القياس الجداء

نهدف في هذا الفصل إلى تعريف قياس على الفضاء القيوس الجداء الآنف الذكر، ليصبح فضاء قياس.

إن إحدى الطرق المتبعة لهذا الغرض، تستند أساساً على نظرية التكامل التي تمّ التعرف على ملامحها الأساسية في الفصل الخامس. نقدّم فيما يلي عرضاً مفصلاً لتلك الطريقة.

مبرهنة (6.1.1)

إذا كان (X_1,M_1,μ_1) و(X_2,M_2,μ_2) فضاءي قياس σ-منتهيين، وكانت $E \in M_1 \times M_2$، فإن الدالة $\varphi_E : X_1 \to \overline{R}^+$، المعرّفة بالعلاقة:

$$\varphi_E(x_1) = \mu_2(E_{x_1}) \qquad (1)$$

تكون μ_1-قيوسة، وتكون دالة المجموعة $\mu : M_1 \times M_2 \to \overline{R}^+$، المعرّفة بالعلاقة:

$$\mu(E) = \int_{X_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1 \qquad (2)$$

قياساً σ-منتهياً معيناً بطريقة وحيدة بوساطة العلاقة:

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A).\mu_2(B) \qquad (3)$$

حيث $A \in M_1$ و $B \in M_2$.

البرهان:

بما أن μ_1 وμ_2 قياسين σ-منتهيين، إذاً يمكن كتابة المجموعة $X_1 \times X_2$ على شكل اتحاد عدود لمستطيلات قيوسة ومنفصلة، يكون قياس بعدي كلٍ منها منتهياً . عندئذ، يكفي إثبات صحة المبرهنة من أجل كلٍ من تلك المستطيلات إذاً، وبدون أن ننتقص من عمومية المبرهنة، يمكن أن نفرض $\mu_1(X_1) < +\infty$ و $\mu_2(X_2) < +\infty$.

لنضع:

$$M=\{E \in M_1 \times M_2 : \text{قيوسة} - \mu_1 \text{ دالة } \varphi_E\}$$

عندئذ يكفي لإثبات أن الدالة φ_E μ_1-قيوسة،أن يكون $M_1 \times M_2 \subseteq M$.

لنفرض أن $E=A \times B$، حيث $A \in M_1$، و $B \in M_2$. عندئذ تكون:

$$\varphi_E(x_1) = \mu_2(B)\chi_A(x_1) \quad , \forall x_1 \in X_1$$

أي أن φ_E دالة بسيطة على X_1 تأخذ فقط القيمتين $\mu_2(B)$ و 0. إذاً φ_E دالة μ_1 — قيوسة. و:

$$\int_X \varphi_E d\mu_1 = \mu_1(A).\mu_2(B) \qquad (4)$$

ينتج أن الصف M يحوي صف المستطيلات القيوسة $A \times B$، حيث $A \in M$ و $B \in M_2$.

أكثر من ذلك، فإن M يحوي في الواقع جبر المجموعات الابتدائية. إذ لو كانت $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$، حيث $E_1, E_2, \dots, E_n$ مستطيلات قيوسة ومنفصلة، فإن:

$$\varphi_E(x_1) = \mu_2(E_{x_1}) = \mu_2[(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)_{x_1}] = \mu_2[\bigcup_{i=1}^{n} (E_i)_{x_1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_2(E_i)_{x_1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{E_i}(x_1)$$

وهذا ما يبيّن أن φ_E مجموع منتهٍ لدوال بسيطة على X_1، أي دالة μ_1-قيوسة.

لتكن $(E_i)_{i \ge 1}$ متتالية متزايدة من عناصر M، ولنضع $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. عندئذ، تكون $(\varphi_{E_i})_{i \ge 1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة بالنسبة لـ μ_1، وتكون:

$$\lim_i \varphi_{E_i}(x_1) = \lim_i \mu_2((E_i)_{x_1}) = \mu_2[\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_{x_1}]$$

$$= \mu_2[\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_{x_1}] = \mu_2(E_{x_1}) = \varphi_E(x_1)$$

وذلك أياً يكن $x_1 \in X_1$. بتعبير آخر، تكون $\lim_i \varphi_{E_i} = \varphi_E$. ومنه، فإن دالة φ_E μ_1 – قيوسة. إذاً: $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$.

نتحقق بطريقة مشابهة، من أنه إذا كانت $(E_i)_{i \ge 1}$ متتالية متناقصة من عناصر M، فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in M$، وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن $\mu_2(X_2) < +\infty$.

ينتج أن M صف مطّرد من أجزاء $X_1 \times X_2$. وحيث إن M يحوي جبر المجموعات الابتدائية، إذاً فهو يحوي الصف المطّرد الأصغري على ذلك الجبر، أي أنه يحوي الجبر التام $M_1 \times M_2$ وذلك استناداً إلى النتيجة (1.3.2).

لنتحقق الآن من أن دالة المجموعة μ المعرفة على الجبر التام $M_1 \times M_2$ بالعلاقة (2) قياس على $M_1 \times M_2$.

من الواضح أن μ دالة غير سالبة، وأن $\mu(\phi) = 0$. لتكن $(E_i)_{i \ge 1}$ متتالية من عناصر $M_1 \times M_2$ المنفصلة، ولنضع $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. عندئذ، نجد أن:

$$\mu(E) = \int_{X_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2[(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{x_1}] d\mu_1$$

$$= \int_{X_1} \mu_2[(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{x_1}] d\mu_1 = \int_{X_1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2((E_i)_{x_1}) d\mu_1$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{X_1} \varphi_{E_i} d\mu_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

وذلك ما يبرهن أن μ قياس على الجبر التام $M_1 \times M_2$.

أخيراً، من العلاقة (4) نجد أن (3) صحيحة وأن μ قياس σ – منتهٍ، إذ أن:

$$\mu(E) \le \mu(X_1 \times X_2) = \mu_1(X_1).\mu_2(X_2) < +\infty$$

وذلك أياً تكن $E \in M_1 \times M_2$. أما وحدانية القياس μ فهي ما تثبته النتيجة (2.1.4)، وذلك بعد ملاحظة أن أي قياس آخر على الجبر التام $M_1 \times M_2$ يحقق العلاقة (4) سيكون مساوياً لـ μ على جبر المجموعات الابتدائية وبذلك يكتمل البرهان. ▲

نتيجة (6.1.1)

إذا كان (X_1, M_1, μ_1) و (X_2, M_2, μ_2) فضاءي قياس σ- منتهيين، وكانت $E \in M_1 \times M_2$، فإن الدالة $\psi_E : X_2 \to \overline{R}^+$ المعرّفة بالعلاقة:

$$\psi_E(x_2) = \mu_1(E_{x_2})$$

تكون μ_2 – قيوسة، ويكون:

$$\int_{X_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_E d\mu_2$$

حيث الدالة φ_E معرفة على X_1 بالعلاقة (1).

البرهان:

نتحقق، بطريقة مشابهة لما ورد في برهان المبرهنة **(6.1.1)**، من أن دالة ψ_E μ_2 – قيوسة، وأن دالة المجموعة $\nu : M_1 \times M_2 \to \overline{R}^+$ المعرّفة بالعلاقة:

$$\nu(E) = \int_{X_2} \psi_E d\mu_2$$

قياس σ– منته، وأن:

$$\nu(A \times B) = \mu_1(A).\mu_2(B)$$

حيث $A \in M_1$ و $B \in M_2$. عندئذ، ينتج أن $\nu = \mu$، وذلك استناداً إلى وحدانية القياس μ، ويكون بالتالي:

$$\int_{X_1} \varphi_E d\mu_1 = \mu(E) = \nu(E) = \int_{X_1} \psi_E d\mu_2$$

وبذلك ينتهي البرهان. ▲

تعريف (6.1.1)

نسمي القياس μ الوارد في المبرهنة **(6.1.1)** **القياس الجداء** للقياسين μ_1 و μ_2 ونرمز له μ_1 : .

و نسمي فضاء القياس $(X_1 \times X_2 , M_1 \times M_2 , \mu_1 \times \mu_2)$ **فضاء القياس الجداء** لفضاءي القياس (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2).

يتضح من التالي، أن النتيجة **(6.1.1)** وبالتالي المبرهنة **(6.1.1)** لا تبقيان صحيحتين ، إذا لم يكن كل من القياسين μ_1 و μ_2 σ–منتهياً.

مثال (1)

لتكن $X_1 = X_2 = [0,1]$، وليكن $M_1 = B_{[0,1]}$ و M_2 مجموعة أجزاء المجال $[0,1]$ ، و μ_1 مقصور λ على $B_{[0,1]}$ ، و μ_2 قياس العدّ على المجال $[0,1]$. ولتكن:

$$E = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : x_1 = x_2\}$$

ولنضع:

$$A_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \quad , i = 1,2,...n \ , \forall n \geq 1$$

و:

$$E_n = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup .... \cup A_n \times A_n$$

عندئذ، تكون المجموعات E_n ، $(\forall n \geq 1)$ قيوسة، وتكون بالتالي $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ قيوسة أيضاً. من جهة أخرى، نلاحظ أنه أياً يكن $x_1 \in X_1$، و $x_2 \in X_2$، فإن كلاً من E_{x_1} و E_{x_2} تكون مجموعة وحيدة العنصر، وبالتالي فإن:

$$\mu_2(E_{x_1}) = 1 \qquad , \qquad \mu_1(E_{x_2}) = 0$$

ومنه، فإن $\varphi_E(x_1) = 1$ و $\psi_E(x_2) = 0$، وذلك أياً يكن $x_1 \in X_1$ و $x_2 \in X_2$.

ينتج أن:

$$\int_{X_1} \varphi_E d\mu_1 = \mu_1(X_1) = 1 \quad , \quad \int_{X_2} \psi_E d\mu_2 = 0$$

إن فضاء القياس الجداء لفضاءي قياس تامين، ليس بالضرورة تاماً. كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال (2)

لتكن $X_1 = X_2 = R$، وليكن $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$ ، قياس لوبيغ على R.

إذا كانت $A = \{a\}$، حيث $a\in R$، وكانت B مجموعة غير قيوسة بالنسبة لـ λ فإن $E=A\times B$ تكون مجموعة جزئية من المجموعة القيوسة $A \times R$. وحيث إن:

$$(\lambda \times \lambda)(A \times R) = \lambda(\{a\}).\lambda(R) = 0.\infty = 0$$

إذاً E مجموعة $\lambda\times\lambda$-همولة.

ولكن، استناداً إلى المبرهنة (**1.4.2**)، فإن E ليست $\lambda\times\lambda$ - قيوسة، لأنها ليست عنصراً من الجبر التام الجداء، إذ أن $E_a = B$، وهي مجموعة غير قيوسة بالنسبة لـ λ.

ينتج أن $\lambda\times\lambda$ ليس قياساً تاماً، أي أن فضاء القياس الجداء ليس تاماً. كما يتضح من هذا المثال أيضاً أن قياس لوبيغ على R^2، وهو قياس تام، لا يساوي القياس الجداء $\lambda\times\lambda$.

يمكن تعميم النتائج السابقة بسهولة، باستخدام الاستقراء الرياضي، من أجل n بعداً. فإذا كان (X_i,M_i,μ_i) فضاء قياس σ-منتهياً، حيث $i=1,\ldots,n$، فإنه يوجد قياس σ -منته، على الجبر التام الجداء $M_1\times\ldots\times M_n$، معين بطريقة وحيدة بقيمته $\mu_1(E_1)\ldots\mu_2(E_2)$، من أجل كل مستطيل $E_1\times\ldots\times E_n$، حيث $E_i \in M_i$، من أجل $i=1,\ldots,n$. نسمي ذلك القياس، **القياس الجداء للقياسات** $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ونرمز له بـ $\mu_1\times\ldots\times\mu_n$ أو بـ $\prod_{i=1}^{n}\mu_i$.

و تسمي فضاء القياس $(\prod_{i=1}^{n}X_i,\prod_{i=1}^{n}M_i,\prod_{i=1}^{n}\mu_i)$ **فضاء القياس الجداء لفضاءات** القياس $(X_1,M_1,\mu_1),\ldots\ldots,(X_1,M_1,\mu_1)$.

6.2 التكامل بالنسبة لقياس جداء

إن تعريف تكامل دالة حقيقية قيوسة بالنسبة لقياس مفروض، وكما ورد في الفصل الخامس، كان مستقلاً عن بعد الفضاء الذي كاملنا عليه — هذا إذا كان لمفهوم البعد دلالة من أجل الفضاء المعتبر.الآن، وبعد أن عرفنا فضاء القياس الجداء لفضاءي قياس مفروضين، يبدو مثيراً للاهتمام أن نقارن التكامل على فضاء جداء، بالتكاملات على مركبات ذلك الفضاء.

نهتم في هذه الفقرة بدراسة المسألة الآنفة الذكر .

تعريف (6.2.1)

ليكن (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2) فضاءي قياس، ولتكن $f:X_1\times X_2\to\overline{R}$ إذا كان $x_1\in X_1$، فإننا نسمي الدالة $f_{x_1}:X_2\to\overline{R}$ المعرّفة بالعلاقة:

$$f_{x_1}(x_2)=f(x_1,x_2)$$

مقطع الدالة f وفق x_1.

وإذا كان $x_2\in X_2$، فإننا نسمي الدالة $f_{x_2}:X_1\to\overline{R}$ المعرّفة بالعلاقة :

$$f_{x_2}(x_1)=f(x_1,x_2)$$

مقطع الدالة f وفق x_2.

لدينا بهذا الصدد المبرهنة التالية:

مبرهنة (6.2.1)

إذا كان (X_1, M_1, μ_1) و (X_2, M_2, μ_2) فضاءي قياس σ-منتهيين، وكانت الدالة $f : X_1 \times X_2 \to R$ $\mu_1 \times \mu_2$-قيوسة، فإن f_{x_1} تكون μ_2- قيوسة وتكون f_{x_2} μ_1- قيوسة، وذلك أياً يكن $x_1 \in X_1$ و $x_2 \in X_2$.

البرهان:

أياً يكن العدد الحقيقي α، فإن:

$$\{x_2 : f_{x_1}(x_2) \le \alpha\} = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) \le \alpha\}_{x_1}$$

عندئذ،استناداً إلى الفرض، وإلى المبرهنة **(1.4.2)**، تكون المجموعة $\{x_2 : f_{x_1}(x_2) \le \alpha\}$ μ_2 - قيوسة، وتكون بالتالي f_{x_1} دالة μ_2-قيوسة.

نتحقق بطريقة مشابهة من أن f_{x_2} μ_1- قيوسة. ▲

نتيجة (6.2.2)

إذا كان (X_1, M_1, μ_1) و(X_2, M_2, μ_2) فضاءي قياس σ-منتهيين، وإذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية متزايدة (متناقصة) من الدوال القيوسة بالنسبة للقياس الجداء $\mu_1 \times \mu_2$، فإن $((f_i)_{x_1})_{i\ge1}$ تكون متتالية متزايدة (متناقصة) على الترتيب، من الدوال القيوسة بالنسبة للقياس μ_2، كما تكون $((f_i)_{x_1})_{i\ge1}$ متتالية متزايدة (متناقصة) على الترتيب، من الدوال القيوسة بالنسبة للقياس μ_1، وذلك أياً يكن $x_1 \in X_1$ و $x_2 \in X_2$.

البرهان:

لنفرض أن $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة بالنسبة لـــ $\mu_1 \times \mu_2$، وأن $x_1 \in X_1$.عندئذ، أياً يكن $x_2 \in X_2$، وأياً يكن $i \ge 1$ ، فإن:

$$(f_i)_{x_1}(x_2) = f_i(x_1, x_2) \le f_{i+1}(x_1, x_2) = (f_{i+1})_{x_1}(x_2)$$

أي أن $((f_i)_{x_1})_{i\ge1}$ متتالية متزايدة. وبما أن $(f_i)_{i\ge1}$ دالة μ_2- قيوسة، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(6.2.1)**، إذاً $((f_i)_{x_1})_{i\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة بالنسبة لـــ μ_2.

نتحقق بطريقة مشابهة، من أن $((f_i)_{x_2})_{i\ge1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة بالنسبة لـــμ_1. بمحاكمة مماثلة نتحقق من صحة النتيجة في الحالة التي تكون فيها المتتالية $(f_i)_{i\ge1}$ متناقصة. ▲

ليكن (X_1, M_1, μ_1) و (X_2, M_2, μ_2) فضاءي قياس σ- منتهيين، ولتكن $f : X_1 \times X_2 \to \overline{R}$ دالة قيوسة بالنسبة للقياس الجداء $\mu_1 \times \mu_2$.

إذا كان التكامل $\int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1$ موجوداً من أجل كل $x_2 \in X_2$، فإنه يعرّف دالة على X_2، وذلك بالعلاقة:

$$\psi(x_2) = \int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1$$

وإذا كان $\int_{X_2} \psi d\mu_2$ موجوداً، بدوره هو أيضاً، فإننا تدلّ عليه بأيٍ من الرموز:

$$\int_{X_2}\int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1 d\mu_2 = \int_{X_2}\int_{X_1} f d\mu_1 d\mu_2 = \int \int_{X_1 \times X_2} f d\mu_1 d\mu_2$$

ونسميه **تكاملاً مكرراً** للدالة f.

من الواضح، أننا نحصل على تكاملٍ مكررٍ آخر للدالة f، إذا أعدنا نفس المحاكمة من أجل f_{x_1}، حيث $x_1 \in X_1$. أي أننا نحصل على التكامل المكرر:

$$\int_{X_1}\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 d\mu_1 = \int_{X_1}\int_{X_2} f d\mu_2 d\mu_1 = \int_{X_1 \times X_2}\int f d\mu_2 d\mu_1$$

من جهة أخرى وبهدف تمييزه عن التكاملين المكررين السابقين، فإننا ندل على تكامل الدالة f بالنسبة للقياس الجداء $\mu_1 \times \mu_2$ على $X_1 \times X_2$، بالرمز:

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2)$$

ونسميه **التكامل الثنائي** للدالة f .

وهكذا، فإننا ندل بالرموز:

$\iint_E f\, d\mu_1 d\mu_2$ ، $\iint_E f\, d\mu_2 d\mu_1$ ، $\int_E f\, d(\mu_1 \times \mu_2)$، على التكاملين المكررين، والتكامل الثنائي (على الترتيب)، للدالة f على أية مجموعة قيوسة E .

تبين المبرهنة التالية، المعروفة بمبرهنة فوبيني، أنه إذا كانت f دالة غير سالبة، أو إذا كان أحد التكاملين المكررين للدالة $|f|$ منتهياً، فإن التكامل الثنائي للدالة f يكون مساوياً لكلٍ من تكامليها المكررين.

مبرهنة (6.2.2)

(مبرهنة فوبيني)

ليكن (X_1, M_1, μ_1) و (X_2, M_2, μ_2) فضاءي قياس σ – منتهيين، ولتكن $f : X_1 \times X_2 \to \overline{R}$ دالة $\mu_1 \times \mu_2$ – قيوسة. عندئذ:

i) إذا كانت f غير سالبة، فإن كلاً من الدالتين φ و ψ المعرفتين على X_1 و X_2 (على الترتيب) بالعلاقتين:

$$\varphi(x_1) = \int_{X_1} f_{x_1} d\mu_2 \quad , \quad \psi(x_2) = \int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1 \qquad (1)$$

تكون قيوسة، ويكون:

$$\int_E f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \iint_E f\, d\mu_2 d\mu_1 = \iint_E f\, d\mu_1 d\mu_2 \qquad (2)$$

ii) إذا كان $\int_{X_1 \times X_2}\int |f|\, d\mu_1 d\mu_2 < +\infty$، فإن f تكون كمولة على $X_1 \times X_2$.

iii) إذا كانت f كمولة، فإن العلاقة (2) تكون محققة، وتكون كل مقاطع الدالة f كمولة، كما تكون الدالتان المعرفتان بالعلاقتين (1) كمولتين.

البرهان:

i) لنفرض أولاً أن f دالة مميزة لمجموعة قيوسة، أي لتكن $f = \chi_E$، حيث E $\mu_1 \times \mu_2$-قيوسة. عندئذ تكون:

$$\varphi(x_1) = \int_{X_2} (\chi_E)_{x_1} d\mu_2 = \int_{X_2} \chi_{E_{x_1}} d\mu_2 = \mu_2(E_{x_1})$$

وتكون:

$$\psi(x_2) = \int_{X_1} (\chi_E)_{x_2} d\mu_1 = \int_{X_1} \chi_{E_{x_2}} d\mu_1 = \mu_1(E_{x_2})$$

وبالتالي فإن φ تكون μ_1– قوسة، و ψ μ_2– قيوسة، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(6.1.1)** والنتيجة **(6.1.1)**، كما يكون استناداً إلى المبرهنة والنتيجة المذكورتين:

$$\int_{X_1} \varphi\, d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{X_1 \times X_2} \chi_E d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2)$$

و:

$$\int_{X_2} \psi\, d\mu_2 = \mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{X_1 \times X_2} \chi_E\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2)$$

وبذلك تكون العلاقة (2) محققة.

إذا كانت الآن f دالة بسيطة وغير سالبة $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$، فإن العلاقة (2) تكون نتيجةً لما تقدم من البرهان وللمبرهنة **(5.2.13)**.

لنفرض الآن أن f دالة غير سالبة. عندئذ، توجد متتالية متزايدة $(s_i)_{i\geq1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة بحيث تكون:

$$\lim_i s_i(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)\ ,\ \forall(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$$

إذاً، واستناداً إلى مبرهنة التقارب المطّرد، يكون:

$$\int_{X_1\times X_2} f\,d(\mu_1\times\mu_2)=\lim_i\int_{X_1\times X_2} s_i\,d(\mu_1\times\mu_2)$$

لنضع:

$$\varphi_i(x_1)=\int_{X_2}(s_i)_{x_1}d\mu_2\quad,\quad \psi_i(x_2)=\int_{X_1}(s_i)_{x_2}d\mu_1$$

وذلك أياً يكن $(x_1\,,x_2)\in X_1\times X_2$، ومن أجل كل $i\geq1$. عندئذ تكون $(\varphi_i)_{i\geq1}$ و $(\psi_i)_{i\geq1}$ متتاليتين متزايدتين من الدوال القيوسة وغير السالبة، متقاربتين من الدالتين φ و ψ (على الترتيب)، حيث:

$$\varphi(x_1)=\int_{X_2}f_{x_1}d\mu_2$$

وحيث:

$$\psi(x_2)=\int_{X_1}f_{x_2}d\mu_1$$

إذاً φ و ψ دالتان قيوستان (كل منهما نهاية لمتتالية من الدوال القيوسة).

ينتج أن:

$$\int_{X_1}\int_{X_2}f\,d\mu_2d\mu_1=\int_{X_1}\varphi\,d\mu_1=\lim_i\int_{X_1}\varphi_i\,d\mu_1=\lim_i\int_{X_1}\int_{X_2}s_i\,d\mu_2d\mu_1$$

و:

$$\int_{X_2}\int_{X_1}f\,d\mu_1d\mu_2=\int_{X_2}\psi\,d\mu_2=\lim_i\int_{X_2}\psi_i\,d\mu_2=\lim_i\int_{X_2}\int_{X_1}s_i\,d\mu_1d\mu_2$$

وحيث إن العلاقة (2) محققة من أجل الدوال البسيطة وغير السالبة إذاً:

$$\int_{X_1}\int_{X_2}f\,d\mu_2d\mu_1=\int_{X_2}\int_{X_1}f\,d\mu_1d\mu_2=\lim_i\int_{X_1\times X_2}s_i\,d(\mu_1\times\mu_2)$$

ومنه، فإن:

$$\int_{X_1}\int_{X_2}f\,d\mu_2d\mu_1=\int_{X_2}\int_{X_1}f\,d\mu_1d\mu_2=\int_{X_1\times X_2}f\,d(\mu_1\times\mu_2)$$

وبذلك يكتمل برهان i).

ii) نتيجة مباشرة لتطبيق i) على الدالة $|f|$.

iii) إذا كانت f كمولة، فإن كلاً من الدالتين f^+ و f^- تكون كمولة، ويكون:

$$\int f^+d(\mu_1\times\mu_2)=\int\int f^+d\mu_1d\mu_2=\int_{X_1\times X_2}\int f^+d\mu_2d\mu_1$$

$$\int_{X_1\times X_2}f^-d(\mu_1\times\mu_2)=\int_{X_1\times X_2}\int f^-d\mu_1d\mu_2=\int_{X_1\times X_2}\int f^-d\mu_2d\mu_1$$

ومنه، فإن:

$$\int_{X_1\times X_2}\int f^+d(\mu_1\times\mu_2)-\int_{X_1\times X_2}f^-d(\mu_1\times\mu_2)=\int_{X_1\times X_2}\int f^+d\mu_1d\mu_2-\int_{X_1\times X_2}\int f^-d\mu_1d\mu_2$$
$$=\int_{X_1\times X_2}\int f^+d\mu_2d\mu_1-\int_{X_1\times X_2}\int f^-d\mu_2d\mu_1$$

إذاً:

$$\int_{X_1\times X_2}f\,d(\mu_1\times\mu_2)=\int_{X_1\times X_2}\int f\,d\mu_1d\mu_2=\int_{X_1\times X_2}\int f\,d\mu_2d\mu_1$$

أي أن العلاقة (2) محققة.

أخيراً، بما أن f كمولة، فإن كلاً من التكاملين $\int_{X_1} \varphi d\mu_1$ و $\int_{X_2} \psi d\mu_2$ يكون منتهياً، وتكون بالتالي كل من الدالتين φ ، ψ منتهية حيثما كان تقريباً، أي أن... الدالتين f_{x_1} و f_{x_2} كمولتان حيثما كان تقريباً، وبذلك ينتهي البرهان.▲

نتيجة **(6.2.3)**

إذا احتفظنا بنفس معطيات المبرهنة **(6.2.2)**، فإن:

$$\int_E f\,d(\mu_1 \times \mu_2) = \iint_E f\,d\mu_1 d\mu_2 = \iint_E f\,d\mu_2 d\mu_1$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة E.

البرهان:

يكفي تطبيق المبرهنة **(6.2.2)** على الدالة $f\chi_E$. ▲

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن باستخدام الاستقراء الرياضي تعميم مبرهنة فوبيني من أجل عدد منته من الفضاءات.

أخيراً، لا بد من ملاحظة أن وجود التكاملين المكررين الدالة f لا يضمن على الإطلاق كمولية تلك الدالة على الفضاء الجداء، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال:

ليكن $X_1 = X_2 = [0,1]$، و $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$، ولتكن f دالة معرفة كما يلي:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

عندئذ، نتحقق بسهولة، من أن:

$$\int_{X_1 \times X_2} \int f\,d\mu_1 d\mu_2 = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_{X_1 \times X_2} \int f\,d\mu_2 d\mu_1 = \frac{\pi}{4}$$

في حين أن f غير كمولة على $X_1 \times X_2$، كما يتبين ذلك من مبرهنة فوبيني.

تمارين

1- برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون فضاء القياس الجداء $(X_1 \times X_2 , M_1 \times M_2 , \mu_1 \times \mu_2)$ σ-منتهياً، هو أن يكون كل من فضاءي القياس (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2) σ-منتهياً.

2- لتكن $X_1 = X_2 = N$، وليكن $M_1 = M_2 = 2^N$، وليكن كل من μ_1 و μ_2 قياس العدّ على 2^N. إذا كانت f معرفة على $N \times N$ كما يلي:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1+2^{-x_1} & , \quad x_1 = x_2 \\ -1-2^{-x_1} & , \quad x_1 = x_2+1 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

برهن أن f قيوسة، وأن التكاملين المكررين للدالة f موجودان، ولكنهما غير متساويين. ماذا تستنتج؟

3- لتكن $X_1 = X_2 = [0,1]$، وليكن $\mu_1 = \lambda$ و μ_2- قياس العدّ، و $M_1 = M_2 = B_R$.

برهن أن المجموعة $E=\{(x_1,x_2):x_1=x_2\}$، قيوسة، وأن التكاملين المكررين للدالة χ_E موجودان، ولكنهما غير متساويين. ماذا تستنتج؟

4- استخدم التمرين 5 من الفصل الخامس لبرهان أنه إذا كانت f دالة كمولة، فإن نتيجة مبرهنة فوبيني تبقى صحيحة، حتى لو لم يكن القياسان σ-منتهيين.

5- ليكن (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2) فضاءي قياس، ولتكن f_1وf_2 دالتين كمولتين على X_1 وX_2 (على الترتيب).

برهن أنه إذا كانت f دالة معرفة على $X_1 \times X_2$ بالعلاقة:

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1).f_2(x_2)$$

فإن f تكون كمولة على $X_1 \times X_2$، ويكون:

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int\limits_{X_1} f_1\, d\mu_1 . \int\limits_{X_2} f_2\, d\mu_2$$

6- لتكن $X_1 = X_2 = N$، وليكن $M_1 = M_2 = 2^N$، وكل من μ_1 وμ_2 هو قياس العدّ على 2^N.

استخدم مبرهنة فوبيني لبيان أنه إذا كانت $a_{ij} \geq 0$، من أجل $i,j=1,2,\ldots$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

7- لتكن $X_1 = X_2 = [-1,1]$، وليكن $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$. إذا كانت f دالة معرفة على $X_1 \times X_2$ بالعلاقة:

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1.x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

برهن أن:

i) التكاملين المكررين للدالة f موجودان ومتساويان.

ii) f غير كمولة على $X_1 \times X_2$.

الفصل السابع

أنواع التقارب المرتبط بمفهوم القياس

من المعلوم أنه توجد أكثر من طريقة لتعريف تقارب متتالية من الدوال، وأن كلاً من هذه الطرق تلبي حاجة ضرورية في سياق دراسة معنية.
نوجّه اهتمامنا في هذا الفصل لدراسة بعض أشكال التقارب المرتبطة بمفهوم القياس، بما في ذلك، علاقة تلك الأشكال ببعضها.

سنفرض فيما يلي أن (X,M,μ) فضاء قياس، و أن كل الدوال الواردة في الدارسة تأخذ قيمها في $\overline{R}$، وأنها μ-قيوسة، ونشير إلى أن المجموعة التي سندرس التقارب عليها هي المجموعة الكلية X بوجه عام، وذلك بهدف تبسيط الدارسة دون الانتقاص من عموميتها.

7.1 التقارب بانتظام تقريباً

نذكّر أولاً بمفاهيم التقارب النقطي والتقارب المنتظم، والتقارب حيثما كان تقريباً. نقول عن المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$ إنها **تتقارب نقطياً** من الدالة f، إذا كانت المتتالية $(f_i(x))_{i\geq 1}$ تتقارب من $f(x)$، وذلك أياً يكن $x \in X$، أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists i_0(\varepsilon, x) : i \geq i_0 \Rightarrow \left| f_i(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

من أجل كل $x \in X$. وعندئذ نكتب:

$$f_i \xrightarrow[i]{} f \ \text{أو}\ ،\ f_i \xrightarrow[i]{\text{نقطياً}} f$$

ونقول عن المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$ إنها **تتقارب بانتظام** من الدالة f، إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \ \exists i_0(\varepsilon) : i \geq i_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| f_i(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

وعندئذ نكتب:

$$f_i \xrightarrow[i]{u} f \ \text{أو}\ ،\ f_i \xrightarrow[i]{\text{بانتظام}} f$$

كما نقول عن المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$ إنها **تتقارب حيثما كان تقريباً بالنسبة للقياس μ** من الدالة f، إذا وجدت مجموعة قيوسة A، بحيث يكون $\mu(A^c)=0$ ، وبحيث تتقارب $(f_i)_{i\geq 1}$ نقطياً من f على المجموعة A. نعبر عن شرط التقارب هذا على النحو:

$$\exists A \in M : \mu(A^c) = 0\ ,\ \ \forall x \in A\ ,\ f_i(x) \xrightarrow[i]{} f(x)$$

فإذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة حيثما كان تقريباً بالنسبة للقياس μ من الدالة f فإننا نكتب:

$f_i \xrightarrow[i]{} f$ حيثما كان تقريباً بالنسبة للقياس μ، أو $f_i \xrightarrow[i]{} f$ حيثما كان تقريباً – إذا لم ينجم عن ذلك أي التباس – كما نكتب أحياناً $f_i \xrightarrow[i]{a.e} f$.

ينتج مما تقدم أن التقارب المنتظم لمتتالية من الدوال يقتضي التقارب النقطي لتلك المتتالية، الذي يقتضي بدوره التقارب حيثما كان تقريباً. إلا أن العكس غير صحيح بوجه عام، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال (1)

لتكن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية معرفة بحدها العام على النحو الآتي:

$$f_i(x) = x^i \qquad ; \qquad \forall x \in [0,1]$$

من الواضح أن $(f_i)_{i\geq 1}$ تتقارب حيثما كان تقريباً بالنسبة لقياس لوبيغ λ، من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$. إلا أن $(f_i)_{i\geq 1}$ ليست متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$، لأنها تتقارب في النقطة $x = 1$ من العدد 1.

ومن باب أولى، فإن $(f_i)_{i\geq 1}$ لا تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$. هذا مع العلم، أن $(f_i)_{i\geq 1}$ تتقارب بانتظام من الدالة الصفرية على كل مجال من الشكل $[0,\alpha]$، حيث $\alpha < 1$. بتعبير آخر، فإن إخفاق المتتالية في التقارب بانتظام من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$ ناجم عن سلوكها بجوار العدد 1 . الأمر الذي يوحي بوجه عام بأنه إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة حيثما كان تقريباً من الدالة f على مجموعة قيوسة A، فإنها يمكن أن تكون متقاربة بانتظام من تلك الدالة على مجموعة ناتجة من A بحذف جزء صغير منها.

ولعل المبرهنة التالية، المعروفة بمبرهنة "إيغوروف" من أهم النتائج بهذا الصدد.

مبرهنة (7.1.1)

(مبرهنة إيغوروف)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة، متقاربة حيثما كان تقريباً على X من الدالة f وكان $\mu(X) < +\infty$، فإنه توجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة قيوسة A، بحيث يكون $\mu(A^c) < \varepsilon$، بحيث تتقارب $(f_i)_{i\geq 1}$ بانتظام من f على A.

البرهان:

سنفرض أن المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة نقطياً من الدالة f على X. إذ أننا لا نحتاج خلاف ذلك إلا لحذف مجموعة قيوسة قياسها معدوم، مما لا يفقد المبرهنة شيئاً من عموميتها.

لنضع من أجل كل عددين طبيعيين $n , m \geq 1$:

$$A_{m,n} = \bigcap_{i=n}^{\infty}\{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}$$

عندئذ، أياً يكن $m \geq 1$، فإن $(A_{m,n})_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة .

كذلك، بما أن $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة من f على X، إذاً $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$، وذلك من أجل كل $m \geq 1$.

ينتج أن $(A^c_{m,n})_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة. وحيث إن $\mu(X) < +\infty$، إذاً:

$$\lim_n (A^c_{m,n}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A^c_{m,n}) = \mu(\phi) = 0$$

ومنه، أياً يكن $\varepsilon > 0$، وأياً يكن $m \geq 1$، فإنه يوجد عدد طبيعي n_m، بحيث يكون:

$$\mu(A^c_{m,n_m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

لتكن $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m,n_m}$. عندئذ تكون A قيوسة ويكون:

$$\mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{m,n_m}) < \varepsilon$$

أخيراً، من أجل كل $m \geq 1$، إذا كان $i > n_m$ و كان $x \in A$، فإن:

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

مما يعني أن $(f_i)_{i\geq 1}$ متقاربة بانتظام من الدالة f على المجموعة A، وبذلك ينتهي البرهان. ▲

نضع في ضوء مبرهنة إيغوروف التعريف التالي:

تعريف (7.1.1)

نقول عن متتالية $(f_i)_{i\geq1}$ من الدوال القيوسة إنها **متقاربة بانتظام تقريباً** من الدالة f على X، وندلّ على ذلك بالرمز $f_i \xrightarrow[i]{a.u} f$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists A \in M : \mu(A^c) < \varepsilon \ , f_i \xrightarrow[i]{\text{بانتظام على } A} f$$

وهنا، لا بد من لفت الانتباه إلى ضرورة عدم الخلط بين مفهوم التقارب الآنف الذكر، أي " التقارب بانتظام تقريباً"، وبين مفهوم التقارب " بانتظام حيثما كان تقريباً ".

ينتج من التعريف، أن **شرط كوشي** الموافق لمفهوم " التقارب بانتظام تقريباً" هو:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists A \in M : \mu(A^c) < \varepsilon, \forall\delta > 0 \ \exists i_0 : \left| f_i(x) - f_j(x) \right| < \delta$$

وذلك، أياً يكن $i,j \geq i_0$، وأياً يكن $x \in A$.

وكما يمكننا أن نلاحظ، فإن الشرط المذكور يكافئ شرط " التقارب بانتظام تقريباً".

يتّضح من التعريف أيضاً، أنه إذا كانت $(f_i)_{i\geq1}$ متقاربة بانتظام ، فإنها تكون متقاربة بانتظام تقريباً. إلا أن عكس ذلك غير صحيح بالضرورة ، كما يبيّن المثال (1) الذي أوردناه سابقاً:

إذ أنه، أياً يكن $0 < \varepsilon < 1$، فإن المتتالية $(f_i)_{i\geq1}$ المعرفة بحدها العام $f_i(x) = x^i$ وذلك على المجال $[0,1]$، تكون متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على المجال $[0,1-\frac{\varepsilon}{2}]$ و $\lambda(]1-\frac{\varepsilon}{2},1]) < \varepsilon$. أي أن $(f_i)_{i\geq1}$ متقاربة بانتظام تقريباً من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$، ولكنها ليست متقاربة بانتظام على ذلك المجال.

مبرهنة (7.1.2)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{a.u} f$، فإن $f_i \xrightarrow[i]{a.e} f$.

البرهان:

لنفرض أن $(f_i)_{i\geq1}$ لا تتقارب من f حيثما كان تقريباً. عندئذ، توجد مجموعة قيوسة A قياسها موجب تماماً، بحيث إن $(f_i)_{i\geq1}$ لا تتقارب من f على A. ينتج أنه، أياً تكن المجموعة القيوسة B التي تتقارب عليها $(f_i)_{i\geq1}$ بانتظام من f، فإن $B \subseteq A^c$. وعندئذ تكون $A \subseteq B^c$. ومنه فإن $\mu(B^c) \geq \mu(A) > 0$. وذلك يناقض كون $(f_i)_{i\geq1}$ متقاربة بانتظام تقريباً.إذاً،فالفرض خاطئ،وبالتالي فإن $f_i \xrightarrow[i]{a.e} f$. ▲

إن عكس المبرهنة السابقة صحيح ، شريطة أن يكون $\mu(X) < +\infty$ كما أوضحت ذلك مبرهنة إيغوروف **(7.1.1)**. وهنا تجدر الإشارة إلى أن الشرط $\mu(X) < +\infty$ ضروري لصحة المبرهنة **(7.1.1)**، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال (2)

لتكن $f_i = \chi_{[i,+\infty]}$، وذلك أياً يكن $i \geq 1$.من الواضح أن $(f_i)_{i\geq1}$ تتقارب نقطياً من الدالة الصفرية على R. فإذا فرضنا أن $(f_i)_{i\geq1}$ متقاربة بانتظام على مجموعة

λ- قيوسة A، عندئذ من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ يوجد عدد طبيعي i_0 بحيث يكون $f_i(x) \le \frac{1}{2}$، من أجل $i \ge i_0$، وأياً يكن $x \in A$. ومنه فإن $f_{i_0}(x) = 0$ من أجل كل $x \in A$.

ينتج أن $A \subseteq]-\infty, i_0[$، وبالتالي فإن $\lambda(A^c) = +\infty$. الأمر الذي يعني أن $(f_i)_{i \ge 1}$ لا يمكن أن تكون متقاربة بانتظام تقريباً.

7.2 التقارب بالقياس

إن لهذا النوع من التقارب دوراً مهماً في نظرية الاحتمالات، حيث يعرف **بالتقارب بالاحتمال.**

تعريف (7.2.1)

نقول عن متتالية $(f_i)_{i \ge 1}$ من الدوال القيوسة إنها **تتقارب بالقياس μ** من دالة قيوسة f، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \lim_i \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0$$

و عندئذ نكتب :

$$f_i \xrightarrow[i]{\mu} f \text{ ، أو } (\mu) \lim_i f_i = f$$

نصوغ **شرط كوشي** الموافق لهذا النوع من التقارب على الشكل:

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists i_0 : i, j \ge i_0 \Rightarrow \mu(\{x : |f_i(x) - f_j(x)| \ge \delta\}) < \varepsilon$$

ونقدم بهذا الصدد المبرهنة التالية:

مبرهنة (7.2.1)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، فإن $(f_i)_{i \ge 1}$ تكون متتالية لكوشي بالقياس μ.

البرهان:

نعلم أن :

$$|f_i(x) - f_j(x)| \le |f_i(x) - f(x)| + |f_j(x) - f(x)|$$

وذلك أياً يكن العددان الطبيعيان $i, j \ge 1$. وبالتالي فإن :

$$\{x : |f_i(x) - f_j(x)| \ge \delta\} \subseteq \{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \frac{\delta}{2}\} \cup \{x : |f_j(x) - f(x)| \ge \frac{\delta}{2}\}$$

وذلك من أجل كل $\delta > 0$. ينتج أن :

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f_j(x)| \ge \delta\}) \le \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \frac{\delta}{2}\}) + \mu(\{x : |f_j(x) - f(x)| \ge \frac{\delta}{2}\})$$

من جهة أخرى واستناداً إلى الفرض، يوجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي i_0، بحيث يكون:

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \delta\}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك من أجل $i \ge i_0$. إذاً أياً يكن $\delta > 0$ و $\varepsilon > 0$ و $i, j \ge i_0$ فإن :

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f_j(x)| \ge \delta\}) < \varepsilon$$

وبذلك ينتهي البرهان.▲

نتعرّف من خلال المبرهنة التالية على الخواص الأساسية لمفهوم التقارب بالقياس.

مبرهنة (7.2.2)

لتكن $(f_i)_{i\geq 1}$ و $(g_i)_{i\geq 1}$ متتاليتين من الدوال القيوسة، ولتكن f و g دالتين قيوستين. عندئذ:

i) إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$ و $g_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، فإن $\alpha f_i + \beta g_i \xrightarrow[i]{\mu} \alpha f + \beta g$، وذلك أياً يكن العددان الحقيقيان α و β.

ii) إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، فإن $|f_i| \xrightarrow[i]{\mu} |f|$.

iii) إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، و $f_i \xrightarrow[i]{\mu} g$، فإن $f=g\ (a.e)\mu$.

البرهان:

من الواضح أنه إذا كان $\alpha = 0$، أو $\beta = 0$، فإن النتيجة صحيحة.لنفرض أن كلاً من العددين α و β مغاير للصفر. عندئذ، بما أن:

$$\left|\alpha f_i(x)+\beta g_i(x)-(\alpha f(x)+\beta g(x))\right| \leq \left|\alpha\right|\left|f_i(x)-f(x)\right|+\left|\beta\right|\left|g_i(x)-g(x)\right|$$

إذاً:

$$\{x:\left|\alpha f_i(x)+\beta g_i(x)-(\alpha f(x)+\beta g(x))\right|\geq \varepsilon\} \subseteq \{x:\left|f_i(x)-f(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\}\cup\{x:\left|g_i(x)-g(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}$$

ومنه فإن:

$$\mu(\{x:\left|\alpha f_i(x)+\beta g_i(x)-(\alpha f(x)+\beta g(x))\right|\geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x:\left|f_i(x)-f(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\}\cup\{x:\left|g_i(x)-g(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\})$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$ نحصل على النتيجة المطلوبة.

ii) تكفي ملاحظة أن:

$$\left|\,|f_i|-|f|\,\right| \leq |f_i - f| \quad , \quad \forall i \geq 1$$

iii) لنفرض أن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$ و $f_i \xrightarrow[i]{\mu} g$، وليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ باستخدام متباينة المثلث، نجد أن:

$$\{x:\left|f(x)-g(x)\right|\geq \varepsilon\} \subseteq \{x:\left|f_i(x)-f(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{x:\left|f_i(x)-g(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ويكون بالتالي:

$$\mu(\{x:\left|f(x)-g(x)\right|\geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x:\left|f_i(x)-f(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2}\})+\mu(\{x:\left|f_i(x)-g(x)\right|\geq \frac{\varepsilon}{2}\})$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$، نجد أن:

$$\mu(\{x:\left|f(x)-g(x)\right|\geq \varepsilon\})=0 \quad , \quad \forall \varepsilon>0$$

ولكن:

$$\mu(\{x:f(x)\neq g(x)\})=\{x:\left|f(x)-g(x)\right|>0 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:\left|f(x)-g(x)\right|\geq \frac{1}{n}\}$$

إذاً:

$$\mu(\{x:f(x)\neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x:\left|f(x)-g(x)\right|\geq \frac{1}{n}\})=0$$

أي أن $f=g\ (a.e)\mu$. ▲

مبرهنة (7.2.3)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{a.u} f$، فإن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$.

البرهان:

توجد استناداً إلى الفرض، من أجل أي عددين $\varepsilon,\delta>0$ مجموعة قيوسة A ويوجد عدد طبيعي i_0، بحيث يكون:

$$\mu(A^c)<\varepsilon\ ,\quad |f_i(x)-f(x)|<\delta\quad ,\ \forall i\ge i_0\ ,\quad \forall x\in A$$

إذاً:

$$\mu(\{x:|f_i(x)-f(x)|\ge\delta\})<\varepsilon\quad ,\ \forall i\ge i_0$$

أي أن:

$$\lim_i \mu(\{x:|f_i(x)-f(x)|\ge\delta\})=0$$

وذلك ينهي البرهان. ▲

إن التقارب حيثما كان تقريباً، لا يؤدي بوجه عام إلى التقارب بالقياس كما يتّضح من المثال التالي :

مثال (3)

لتكن $X=R$، وليكن $\mu=\lambda$. إذا كانت:

$$f_i=\chi_{[i,i+1]}\quad ,\quad \forall i\ge 1$$

فإن:

$$\lim_i f_i(x)=0\qquad ,\quad \forall x\in R$$

أي أن $(f_i)_{i\ge1}$ تتقارب نقطياً من '' الة الصفرية على R.

من جهة أخرى، بما أن:

$$\lambda(\{x:|f_i(x)|\ge 1\})=\lambda([i,i+1])=1\quad ,\quad \forall i\ge1$$

إذاً، $(f_i)_{i\ge1}$ لا تتقارب بالقياس λ من الدالة الصفرية على R.

النتيجة التالية ترصد ما تقدم في الحالة التي يكون فيها $\mu(X)<+\infty$.

نتيجة (7.2.1)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{a.e} f$، وكان $\mu(X)<+\infty$، فإن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$.

البرهان:

يكفي تطبيق مبرهنة إيغوروف، واستخدام المبرهنة (7.2.3). ▲

وجدنا سابقاً أن كل متتالية متقاربة بالقياس هي متتالية لكوشي بالقياس (مبرهنة (7.2.1)). تمثل المبرهنة التالية خطوةً أساسيةً في اتجاه إثبات صحة العكس.

مبرهنة (7.2.4)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية لكوشي بالقياس، فإنه توجد متتالية جزئية منها $(f_{i_j})_{j\ge1}$، بحيث تكون متقاربة بانتظام تقريباً.

البرهان:

يوجد استناداً إلى الفرض من أجل كل عدد طبيعي $j\ge1$، عدد طبيعي n_j، بحيث يكون:

$$\mu(\{x: f_i(x)-f_j(x) \ge \frac{1}{2j}\}) < \frac{1}{2j} \qquad (1)$$

وذلك من أجل $i, j \ge n_j$. لنضع:

$$i_1 = n_1 \quad , \quad i_j = \max\{i_{j-1}+1, n_j\}$$

عندئذ تكون $(i_j)_{j\ge1}$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الطبيعية، وتكون $(f_{i_j})_{j\ge1}$ متتالية جزئية من المتتالية $(f_i)_{i\ge1}$، كما تكون العلاقة (1) محققة من أجل $i, j \ge i_j$.

لنعرّف الآن من أجل كل $j \ge 1$ المجموعة القيوسة A_j بالعلاقة:

$$A_j = \{x: \left|f_{i_{j+1}}(x) - f_{i_j}(x)\right| \ge \frac{1}{2j}\}$$

وليكن $\varepsilon > 0$، و m عدداً طبيعياً يحقق المتباينة $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$. إذا وضعنا $B = \bigcap_{j=m}^{\infty} A_j^c$ فإننا نجد من العلاقة (1) أن:

$$\mu(B^c) \le \sum_{j=m}^{\infty} \mu(A_j) < \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$$

لنتحقق أخيراً من أن $(f_{i_j})_{j\ge1}$ تحقق شرط كوشي في المتقارب المنتظم على المجموعة B. ليكن $\delta > 0$، و n عدداً طبيعياً يحقق المتباينتين:

$$n > m \, , \; \frac{1}{2^{n-1}} < \delta$$

عندئذ أياً يكن $r \ge s \ge n$ وأياً يكن $x \in B$، فإن:

$$\left|f_{i_s}(x) - f_{i_r}(x)\right| \le \sum_{j=s}^{\infty} \left|f_{i_j}(x) - f_{i_{j+1}}(x)\right|$$
$$< \sum_{i=s}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{s-1}} < \delta$$

ينتج أن $(f_{i_j})_{j\ge1}$ تحقق شرط كوشي الموافق للتقارب بانتظام تقريباً، وبالتالي فهي متقاربة بانتظام تقريباً، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

يمكننا الآن على ضوء المبرهنة السابقة برهان أن كل متتالية لكوشي بالقياس هي متتالية متقاربة بالقياس.

مبرهنة (7.2.5)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية لكوشي بالقياس μ، فإنه توجد دالة f بحيث تكون $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$.

البرهان:

توجد، استناداً إلى المبرهنة **(7.2.4)** متتالية جزئية $(f_{i_j})_{j\ge1}$، متقاربة بانتظام تقريباً. أي أنه توجد دالة f بحيث تكون:

$$f_{i_j} \xrightarrow[j]{a.u} f$$

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن:

$$\{x: \left|f_i(x)-f(x)\right| \ge \varepsilon\} \subseteq$$
$$\{x: \left|f_i(x) - f_{i_j}(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x: \left|f_{i_j}(x)-f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$$

إذاً:

$$\mu(\{x: \left|f_i(x)-f(x)\right| \ge \varepsilon\}) \le$$
$$\mu(\{x: \left|f_i(x)-f_{i_j}(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{x: \left|f_{i_j}(x)-f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\})$$

وحيث إن $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية لكوشي بالقياس μ، فإنه يمكن جعل الحد الأول الوارد في الطرف الأيمن من المتباينة الأخيرة صغيراً بالقدر الذي نريد عندما يكون

i و j كبيرين بما فيه الكفاية، كذلك يمكن جعل الحد الثاني الوارد في الطرف الأيمن من نفس المتباينة صغيراً بالقدر الذي نريد، عندما يكون j كبيراً بما فيه الكفاية، وذلك لأن التقارب بانتظام تقريباً يقتضي التقارب بالقياس.

ينتج أنه يمكن جعل الطرف الأيمن من المتباينة الأخيرة صغيراً بالقدر الذي نريد، عندما يكون i كبيراً بما فيه الكفاية. الأمر الذي يعني أن:

$$\lim_{i} \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

أي أن:

$$f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$$

وذلك ينهي البرهان. ▲

نتيجة (7.2.2)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$ فإنه توجد متتالية جزئية منها $(f_{i_j})_{j\geq1}$، بحيث تكون:

$$f_{i_j} \xrightarrow{a.e} f$$

البرهان:

استناداً إلى الفرض تكون $(f_i)_{i\geq1}$ متتالية لكوشي بالقياس. عندئذ، استناداً إلى المبرهنة **(7.2.4)**، توجد متتالية جزئية $(f_{i_j})_{j\geq1}$ متقاربة بانتظام تقريباً.

لنفرض أن $f_{i_j} \xrightarrow[j]{a.u} g$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة **(7.1.2)** تكون:

$$f_{i_j} \xrightarrow[j]{a.e} g$$

واستناداً إلى المبرهنة **(7.2.3)** تكون:

$$f_{i_j} \xrightarrow[j]{\mu} g$$

ولكن $f_{i_j} \xrightarrow[j]{\mu} f$ وذلك استناداً إلى الفرض، إذاً $f = g\ (a.e)\mu$، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(7.2.2)**. أي أن $f_{i_j} \xrightarrow[j]{a.e} f$ وذلك ينهي البرهان. ▲

نقدّم فيما يلي مثالاً لمتتالية متقاربة بالقياس من دالة معينة، دون أن تكون متقاربة نقطياً من تلك الدالة.

مثال (4)

لتكن $X = R$، وليكن $\mu = \lambda$. لنجزئ المجال $]0,1]$ إلى k مجالاً جزئياً: $]0,\frac{1}{i}]$ ، $]\frac{1}{i},\frac{2}{i}]$،.....، $]\frac{i-1}{i},1]$، ولنضع:

$$f_{i,k} = \chi_{]\frac{k-1}{i},\frac{k}{i}]} \quad , k = 1,2,\dots,i$$

وذلك أياً يكن $i \geq 1$.

عندئذ تتقارب المتتالية:

$$f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots\dots\dots, f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,i}, \dots$$

بالقياس λ من الدالة الصفرية على المجال $]0,1]$، ولا تتقارب في أي نقطة من ذلك المجال من العدد 0.

قبل الانتقال إلى التعرّف على نوع آخر من أنواع التقارب المرتبط بمفهوم القياس، نتوقف لعرض وإثبات صحة متباينتين شهيرتين، هما متباينة هولدر و متباينة **مينكوفسكي**.

7.3 متباينتا هولدر ومينكوفسكي

مبرهنة (7.3.1)

(متباينة هولدر)

ليكن $1 < p < \infty$ و $1 < q < \infty$ بحيث إن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. إذا كانت f و g دالتين قيوستين بحيث تكون الدالتان $|f|^p$، و $|g|^q$ كمولتين، فإن الدالة f.g تكون كمولة ويكون:

$$\int_A |f.g|d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A.

البرهان:

ليكن $\alpha > 0$، ولنعرف الدالة المساعدة φ على المجال $[0,\infty[$ بالعلاقة:

$$\varphi(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}-\alpha x$$

عندئذ، نتحقق بسهولة من أن الصفر هو القيمة الصغرى للدالة φ. أي أن:

$$\alpha x \le \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q} \quad , \quad \forall x \ge 0 \qquad (2)$$

ليكن:

$$\beta=\left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \gamma=\left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

عندئذ، إذا كان $\beta = 0$ فإن الدالة $|f|^p$ وبالتالي الدالة f، تكون مساوية للصفر حيثما تقريباً على A، وتكون المتباينة (1) محققة. وبالمثل إذا كان $\gamma = 0$ فإن (1) تكون محققة أيضاً.

لنفرض، إذاً أن $\beta,\gamma>0$، ولنضع من أجل كل $y\in A$:

$$x=\frac{|f(x)|}{\beta} \quad , \quad \alpha=\frac{|g(y)|}{\gamma}$$

عندئذ من (2) نجد أن:

$$\frac{|f(y).g(y)|}{\beta\gamma} \le \frac{|f(y)|^p}{\beta^p.p}+\frac{|g(y)|^q}{\gamma^q.q}$$

ومنه، فإن الدالة f.g كمولة على A، و:

$$\frac{1}{\beta.\gamma}\int_A |f.g|d\mu \le \frac{\int_A |f|^p d\mu}{\beta^p.q}+\frac{\int_A |g|^q d\mu}{\gamma^q.q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

أي أن:

$$\int_A |f.g|d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

حالة خاصة:

(متباينة شوارتز)

إذا كان $p = q = 2$ في متباينة هولدر، فإننا نحصل على المتباينة الشهيرة المعروفة **بمتباينة شوارتز** :

إذا كانت f و g قيوستين، وكانت $|f|^2$ و $|g|^2$ كمولتين فإن f.g تكون كمولة، ويكون:

$$\left(\int_A |f.g|d\mu\right)^2 \le \left(\int_A |f|^2 d\mu\right)\left(\int_A |g|^2 d\mu\right)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A.

ملاحظة:

غالباً ما نحتاج إلى استخدام المتباينة التالية:

$$|f+g|^p \le 2^p|f|^p + 2^p|g|^p \qquad (3)$$

ولإثبات صحتها، نلاحظ أنه أياً يكن $x \in X$، فإن:

$$|f(x)+g(x)| \le 2.\max\{|f(x)|,|g(x)|\}$$

أي أن:

$$|f(x)+g(x)|^p \le \max\{2^p|f(x)|^p, 2^p|g(x)|^p\}$$
$$\le 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p$$

مبرهنة (7.3.2)

(متباينة مينكوفسكي)

إذا كان $p \ge 1$، وكانت f و g دالتين قيوستين، بحيث تكون الدالتان $|f|^p$ و $|g|^p$ كمولتين، فإن $|f+g|^p$ تكون كمولة، ويكون:

$$\int_A |f+g|^p d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A

البرهان:

نتحقق بسهولة من أنه إذا كان $p = 1$ فإن (4) تكون محققة، وذلك بالاستفادة من متباينة المثلث. لنفرض أن $p>1$. عندئذ ينتج من المتباينة (3) أن الدالة $|f+g|^p$ كمولة. ومن الواضح أن:

$$\int_A |f+g|^p d\mu = \int_A |f+g|.|f+g|^{p-1} d\mu$$
$$\le \int_A |f|.|f+g|^{p-1} d\mu + \int_A |g|.|f+g|^{p-1} d\mu$$

عندئذ استناداً إلى متباينة هولدر نجد أن:

$$\int_A |f+g|^p d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |f+g|^{pq-q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |f+g|^{pq-q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

وحيث إن $p\,q = p + q$، إذاً:

$$\int_A |f+g|^p d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$
$$\left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

فإذا كان $\int_A |f+g|^p d\mu = 0$ فإن (4) تكون محققة. وخلاف ذلك نقسم طرفي المتباينة الأخيرة على $\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ آخذين بعين الاعتبار أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، فنحصل النتيجة المنشودة. ▲

(7.4) التقارب بالوسط

ننتقل الآن إلى تعريف ودراسة نوع آخر من أنواع التقارب المرتبط بالقياس μ، ذي تطبيقات واسعة في التحليل ونظرية الاحتمالات.

تعريف (7.4.1)

ليكن $p \geq 1$ ، ولتكن $(f_i)_{i\geq1}$ متتالية من الدوال القيوسة بحيث تكون $|f_i|^p$ كمولة، أياً يكن $i \geq 1$، ولتكن f دالة قيوسة بحيث تكون $|f|^p$ كمولة.

نقول عن المتتالية $(f_i)_{i\geq1}$ إنها **تتقارب بالوسط من المرتبة p** من الدالة f، إذا كانت:

$$\lim_i \int_X |f_i - f|^p \, d\mu = 0$$

عندئذ نكتب :

$$(m^p)\lim_i f_i = f \text{ ، أو } f_i \xrightarrow[i]{m^p} f .$$

فإذا كان $p = 1$ فإننا نقول إن $(f_i)_{i\geq1}$ **تتقارب بالوسط** من الدالة f. وإذا كان $p = 2$، فإننا نقول إن $(f_i)_{i\geq1}$ **تتقارب بالوسط التربيعي** من الدالة f.

يعود الاهتمام بدراسة هذا النوع من التقارب، إلى أنه يسمح بالانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية:

مبرهنة (7.4.1)

الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية $(f_i)_{i\geq1}$ من الدوال الكمولة بالوسط من الدالة الكمولة f، هو أن تكون:

$$\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f \, d\mu$$

وذلك بانتظام في A. أي أنه، أياً يكن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي i_0، بحيث تكون:

$$\left| \int_A f_i d\mu - \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon$$

من أجل $i \geq i_0$، وأياً تكن المجموعة القيوسة A .

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن $(f_i)_{i\geq1}$ تتقارب بالوسط من الدالة f. عندئذ، بما أن:

$$\left| \int_A f_i d\mu - \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f_i - f| \, d\mu$$
$$\leq \int_X |f_i - f| \, d\mu$$

إذاً:

$$\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu$$

وذلك بانتظام في A.

كفاية الشرط: لنفرض أن $\lim_i \int_A f_i d\mu = \int_A f d\mu$ بانتظام في A، ولنضع:

$$A_i = \{x : f_i(x) > f(x)\} \quad , \quad \forall i \geq 1$$

فإن:

$$\int_X |f_i - f| d\mu = \left(\int_{A_i} f_i d\mu - \int_{A_i} f d\mu \right) - \left(\int_{A_i^c} f_i d\mu - \int_{A_i^c} f d\mu \right)$$

ومنه فإن:

$$\lim_i \int_X |f_i - f| d\mu = 0$$

أي أن $(f_i)_{i\geq1}$ تتقارب بالوسط من f، وذلك ينهي البرهان. ▲

مبرهنة (7.4.2)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$ وكانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} g$، فإن $f = g \, (a.e)\mu$.

البرهان:

استناداً إلى متباينة مينكوفسكي، نجد أن:

$$\left(\int_X |f-g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f_i - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |f_i - g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$، نجد أن $\int_X |f_i - f|^p d\mu = 0$. إذاً $f = g\ (a.e)\mu$. ▲

مبرهنة (7.4.3)

ليكن $\mu(X) < +\infty$. إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$، وكان $1 \le q < p$، فإن $f_i \xrightarrow[i]{m^q} f$.

البرهان:

من المتباينتين:

$$|f|^q \le 1 + |f|^p \;,\; |f_i|^q \le 1 + |f_i|^p$$

ينتج أن $|f|^q$ كمولة وأن $|f_i|^q$ كمولة أيضاً وذلك أيا يكن $i \ge 1$. عندئذ باستخدام متباينة هولدر نجد أن:

$$\int_X |f_i - f|^q d\mu \le \left(\int_X (|f_i - f|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} . \left(\int_X 1^{\frac{p}{p-q}} d\mu\right)^{\frac{(p-q)}{p}}$$

$$\le \left(\int_X |f_i - f|^p\right)^{\frac{q}{p}} . [\mu(X)]^{\frac{(p-q)}{p}}$$

ومنه، فإن:

$$\lim_i \int_X |f_i - f|^q d\mu = 0$$

أي أن:

$$f_i \xrightarrow[i]{m^q} f$$

وبذلك ينتهي البرهان. ▲

نقدّم فيما يلي مثالاً يوضح أن علاقة التقارب بالوسط من المرتبة p، حيث $p \ge 1$، بالأنواع الأخرى من التقارب ضعيفة نسبياً.

مثال (4)

لتكن $X = R$، وليكن $\mu = \lambda$. إن المتتالية $(f_i)_{i\ge1}$ المعرفة بحدها العام:

$$f_i = i^{-\frac{1}{p}} \chi_{[0,i]} \quad , \quad \forall i \ge 1$$

تتقارب بانتظام من الدالة الصفرية على R. إذ أنه أياً يكن $x \in R$، فإن:

$$f_i \le i^{-\frac{1}{p}} \quad , \quad \forall i \ge 1$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\lim_i \int_X |f_i|^p d\lambda = \lim_i \frac{1}{i} \lambda([0,i]) = 1$$

أي أن $(f_i)_{i\ge1}$ لا تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة الصفرية.

ينتج، من باب أولى أن أياً من: التقارب بانتظام تقريباً، والتقارب حيثما كان تقريباً، والتقارب بالقياس لا يقتضي التقارب بالوسط من المرتبة p، أما في الاتجاه المعاكس فإننا نجد الاقتضاء التالي:

مبرهنة (7.4.4)

إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$، فإن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$.

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$، ولنضع:

$$A_i = \{x : |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad , \quad \forall i \geq 1$$

عندئذ، نجد أن:

$$\int_X |f_i - f|^p d\mu \geq \int_{A_i} |f_i - f|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(A_i)$$

ومنه فإن:

$$\lim_i \mu(A_i) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \lim_i \int_X |f_i - f|^p d\mu = 0$$

أي أن $\lim_i \mu(A_i) = 0$. الأمر الذي يعني أن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، وذلك ينهي البرهان.▲

مبرهنة (7.4.5)

إذا كانت $f_i \xrightarrow{m^p} f$، فإنها تكون متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p.

البرهان:

استناداً إلى متباينة مينكوفسكي، نجد أن:

$$\left(\int_X |f_i - f_j|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f_i - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f_j - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

وذلك أياً يكن $i,j \geq 1$.

عندئذ أياً يكن $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي i_0، بحيث يكون:

$$\int_X |f_i - f_j|^p d\mu < \varepsilon$$

من أجل $i,j \geq i_0$.

أي أن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p.▲

مبرهنة (7.4.6)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p، فإنها تكون متتالية لكوشي بالقياس.

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$، ولنضع:

$$A_{i,j} = \{x : |f_i(x) - f_j(x)| \geq \varepsilon \quad ; \quad \forall i, j \geq 1$$

عندئذ نجد أن:

$$\int_X |f_i - f_j|^p d\mu \geq \int_{A_{i,j}} |f_i - f_j|^p d\mu \geq \varepsilon^p . \mu(A_{i,j})$$

أي أن:

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f_j(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_i - f_j|^p d\mu$$

ومنه نحصل على النتيجة المطلوبة.▲

مبرهنة (7.4.7)

إذا كانت $|f_i|^p$ كمولة، وذلك أياً يكن $i \geq 1$، و كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p، فإن:

$$\sup_i \int_X |f_i|^p d\mu < \infty$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد، استناداً إلى الفرض، عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\int_X |f_i - f_{j_0}|^p d\mu < \varepsilon$$

وذلك أياً يكن $i \geq i_0$.

من جهة أخرى، استناداً إلى المتباينة (3) في الفقرة **7.3**، ينتج أنه أياً يكن $i \geq i_0$، فإن:

$$\int_X |f_i|^p d\mu \leq 2^p.\int_X \left|f_i - f_{i_0}\right|^p d\mu + 2^p.\int_X \left|f_{i_0}\right|^p d\mu$$
$$\leq 2^p.\varepsilon + 2^p.\sup_{i \leq i_0} \int_X \left|f_{i_0}\right|^p d\mu < \infty$$

ينتج أن:

$$\sup_i \int_X |f_i|^p d\mu < \infty$$

وذلك ينهي البرهان. ▲

مبرهنة (7.4.8)

إذا كانت $|f_i|^p$ كمولة، وذلك أياً يكن $i \geq 1$، وكانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p فإنها تكون متقاربة بالوسط من المرتبة p .

البرهان:

استناداً إلى المبرهنة (**7.4.4**)، تكون $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس. عندئذ، استناداً إلى المبرهنة (**7.2.4**)، توجد متتالية جزئية $(f_{i_j})_{j\geq 1}$ متقاربة بانتظام تقريباً، وبالتالي متقاربة حيثما كان تقريباً. لنضع:

$$\lim_j f_{i_j} = f \ (a.e)\mu$$

عندئذ تكون:

$$\lim_j \left|f_{i_j}\right|^p d\mu = |f|^p \ (a.e)\mu$$

ويكون بالتالي:

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \underline{\lim}_j \int_X \left|f_{i_j}\right|^p d\mu < \infty$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة فاتو. ينتج أن $|f|^p$ كمولة.

من جهة أخرى، لدينا:

$$\lim_j \left|f_i - f_{i_j}\right|^p = |f_i - f|^p \ (a.e)\mu \quad , \quad \forall i \geq 1$$

و بالتالي فإن :

$$\int_X |f_i - f|^p d\mu \leq \underline{\lim}_j \int_X \left|f_i - f_{i_j}\right|^p d\mu \quad , \quad \forall i \geq 1$$

و ذلك استناداً إلى مبرهنة فاتو أيضاً .و حيث إن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p، إذاً يوجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\int_X \left|f_i - f_{i_j}\right|^p d\mu < \varepsilon$$

وذلك من أجل $i, i_j \geq i_0$. ينتج أن:

$$\int_X |f_i - f|^p d\mu < \varepsilon \quad , \quad \forall i \geq i_0$$

أي أن $(f_i)_{i\geq 1}$ تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة f، وبذلك يكتمل البرهان. ▲

7.5 الفضاءات $L^p(\mu)$

يتكون العديد من الفضاءات التقليدية في التحليل الدالي من دوالّ قيوسة. ولعلّ أكثر النظائم (جمع نظيم) على تلك الفضاءات معرّف بوساطة التكامل .وفي الواقع، فإن نظرية التكامل تتيح لنا دراسة أهم خصائص تلك الفضاءات. تعتبر الفضاءات L^p من تلك الفضاءات الآنفة الذكر، والتي نخصّص ما تبقّى من هذا الفصل لدراستها.

يَحتفظ فيما يلي الرمزُ (X,M,μ) بدلالته على فضاء قياس مثبّت، كما سنبقي على فرضية أن الدوال قيد الدراسة تأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$، وأنها μ- قيوسة.

106

تعريف (7.5.1)

ليكن $1 \le p < \infty$. نرمز لمجموعة الدوال $f: X \to \overline{R}$ القيوسة بالنسبة لـμ، بحيث تكون $|f|^p$ كمولة على X بالرمز $L^p(\mu)$، أو بالرمز $L^p(X)$، وذلك إذا استدعى الإيضاح الإشارة إلى الفضاء X، أو- اختصاراً - بالرمز L^p إذا لم يؤد ذلك إلى أي التباس.

من الواضح أنه إذا كانت $f \in L^p(\mu)$، فإن $\alpha f \in L^p(\mu)$، وذلك أياً يكن $\alpha \in R$. كذلك إذا كانت $f, g \in L^p(\mu)$، فإن $f + g \in L^p(\mu)$، وذلك استناداً إلى المتباينة:

$$|f+g|^p \le 2^p.(|f|^p + |g|^p)$$

أي أن $L^p(\mu)$ فضاء متجهي حقيقي .

لعلّ من أهم خواص الفضاء $L^p(\mu)$ أنه **فضاء باناخ**، الأمر الذي يستدعي التذكير بتعريف هذا الفضاء الأخير.

تعريف (7.5.2)

نقول عن دالة حقيقية $\| \cdot \|$ معرّفة على فضاء متجهي X فوق الحقل العددي K ($K = R$ أو $K = C$) **إنها نظيم** على X، إذا حققت الشروط التالية:

i) $\|x\| \ge 0$ ، وذلك أياً يكن $x \in X$.

ii) $\|x\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

iv) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

وذلك أياً يكن $x, y \in X$، و $\alpha \in K$.

تُعرف المتباينة الواردة في الشرط iv) **بمتباينة المثلث**. إذا كانت الدالة $\| \cdot \|$ نظيماً

على الفضاء المتجهي X، فإننا نسمي الثنائية $(X, \| \cdot \|)$ فضاءً منظّماً، على الرغم من أننا نكتفي في غالب الأحيان بالقول إن X فضاء منظّم، إذا لم ينجم عن ذلك أي التباس.

إذا كان X فضاء منظّماً، فإنه من الواضح أن الدالة $d: X \times X \to R^+$ المعرّفة بالعلاقة $d(x,y) = \|x - y\|$ تعرّف مسافة على X، نسميها المسافة المشتقة من النظيم $\| \cdot \|$. بتعبير آخر، فإن كل فضاء منظّم هو فضاء متري.

نقول عن متتالية $(x_i)_{i \ge 1}$ في فضاء منظّم X **إنها متقاربة**، إذا وجد $x \in X$ بحيث تكون:

$$\lim_i \|x_i - x\| = 0$$

وعندئذ نكتب :

$$x_i \xrightarrow[i]{} x \quad \text{أو} \quad x_i \xrightarrow[i]{\| \|} x$$

ونسمي x نهاية المتتالية $(x_i)_{i \ge 1}$. ونقول عن متتالية $(x_i)_{i \ge 1}$ **إنها متتالية لكوشي في** X، إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي i_0، بحيث يكون:

$$\|x_i - x_j\| < \varepsilon \ , \quad \forall i, j \ge i_0$$

كما نقول عن فضاء منظّم X **إنه فضاء باناخ**، إذا كانت كل متتالية لكوشي في X متقاربة. و هذا ما يكافئ - كما نعلم - القول إن الفضاء المتري X تامّ. بتعبير آخر، يكون الفضاء المنظّم X فضاء باناخ، إذا كان تاماً بالنسبة للمسافة المشتقة من النظيم على X.

لنضع من أجل كل $f \in L^p(\mu)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

عندئذ، من الواضح أن $\|f\|_p \ge 0$، و $\|\alpha f\|_p = |\alpha| . \|f\|_p$، كما أن:

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

وذلك استناداً إلى متباينة مينكوفسكي، وأنه إذا كانت $f = 0$ فإن $\|f\|_p = 0$، وذلك أياً يكن $f, g \in L^p(\mu)$ و $\alpha \in R$.

يبقى أن نلاحظ أيضاً أنه إذا كان $\|f\|_p = 0$، أي إذا كان $\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$، فإن $f = 0$ حيثما كان تقريباً بالنسبة لـ μ على X.

وهكذا نجد أن الدالّة $\|\cdot\|_p$ تخفق في أن تعرّف نظيماً على الفضاء $L^p(\mu)$، وذلك بسبب عدم صحة الاقتضاء $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. وقد جرت العادة في التعامل مع هذه المسألة، أن نقول عن دالتين من الفضاء $L^p(\mu)$ إنهما متكافئتان، إذا كانتا متساويتين حيثما كان تقريباً. عندئذ، من الواضح أن ذلك يعرّف علاقة تكافؤ على $L^p(\mu)$، وتغدو الدالة $\|\cdot\|_p$ نظيماً على فضاء صفوف تكافؤ العلاقة الآنفة الذكر. بتعبير آخر، فإن العلاقة $\|\tilde{f}\| = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$، حيث f ممثل لصف التكافؤ $\tilde{f}$، تعرّف نظيماً على فضاء صفوف التكافؤ. وهكذا فإننا نعتبر الفضاء $L^p(\mu)$ فضاءً منظماً، شريطة عدم التمييز بين الدوال المتساوية حيثما كان تقريباً، واعتبار أن صفوف التكافؤ قضية صورية تتعلق بخلفية المسألة. أي أننا نتعامل مع عناصر الفضاء $L^p(\mu)$ على أساس أنها دوال، حيث نعتبر كل دالتين متساويتين حيثما كان تقريباً دالتين متساويتين.

لتكن $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية في $L^p(\mu)$. بما أن $(f_i)_{i\ge1}$ تتقارب من الدالة f إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_i \|f_i - f\|_p = \lim_i \int_X |f_i - f|^p d\mu = 0$$

إذاً، فالتقارب في الفضاء $L^p(\mu)$ هو نفسه التقارب بالوسط من المرتبة p ، الذي تمت دراسته في الفقرة **7.4** من هذا الفصل. وعلى ضوء ذلك، فإنه ينتج من المبرهنة (**7.4.8**) أن الفضاء المنظم $L^p(\mu)$ هو فضاء تام، وبالتالي فهو فضاء باناخ. كما ينتج أن المبرهنات الست التالية هي صياغة بمفردات الفضاء $L^p(\mu)$، $(1 \le p < \infty)$ للمبرهنات (**7.4.1**)، (**7.4.2**)، (**7.4.3**)، (**7.4.4**)، (**7.4.5**)، (**7.4.8**) على الترتيب.

مبرهنة (7.5.1)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية في $L^1(\mu)$، فإنها تتقارب من الدالة f في $L^1(\mu)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists i_0 : i > i_0 \Rightarrow \left| \int_A f_i d\mu - \int_A f\, d\mu \right| < \varepsilon$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A.

مبرهنة (7.5.2)

إذا كانت $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية في $L^p(\mu)$، $(1 \le p < \infty)$ متقاربة من الدالة f، ومن الدالة g في $L^p(\mu)$، فإن $f = g\ (a.e)\mu$.

مبرهنة (7.5.3)

إذا كان $1 \le q < p < \infty$، وكان $\mu(X) < +\infty$، فإن كل متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$ تكون متقاربة في $L^q(\mu)$ من نفس الدالة.

مبرهنة (7.5.4)

إذا كانت $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$، فإنها تكون متقاربة بالقياس μ من نفس الدالة.

مبرهنة (7.5.5)

كل متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$ هي متتالية لكوشي.

مبرهنة (7.5.6)

كل متتالية لكوشي في الفضاء $L^p(\mu)$ تكون متتالية متقاربة فيه.

نختم هذه الفقرة بالمبرهنة التالية:

مبرهنة (7.5.7)

إذا كان $1\leq p<\infty$، فإن مجموعة الدوال البسيطة تكون كثيفة في الفضاء $L^p(\mu)$ بالنسبة للتوبولوجيا المشتقة من النظيم على $L^p(\mu)$.

البرهان:

إذا كانت f دالة غير سالبة من الفضاء $L^p(\mu)$، فإن:

$$f = \lim_i s_i$$

حيث $(s_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(4.4.1)**. عندئذ تكون $(f - s_i)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة، متقاربة من الدالة الصفرية على X، وتكون $(f - s_i)^p \leq f^p$. أي أن $f - s_i \in L^p(\mu)$، وذلك أياً يكن $i \geq 1$. ومنه فإن:

$$\lim_i \| f - s_i \|_p = \lim_i \Big(\int_X (f - s_i)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = 0$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة لوبيغ في التقارب الراجح.

وفي الحالة العامة، إذا كانت $f \in L^p(\mu)$ فإن $f = f^+ - f^-$. وعندئذ تكون $f^+, f^- \in L^p(\mu)$. وبالتالي، استناداً إلى القسم الأول من البرهان توجد متتالية $(t_i)_{i\geq 1}$ من الدوال البسيطة، بحيث تكون:

$$\lim_i \| f - t_i \| = 0$$

وبذلك يكتمل البرهان. ▲

7.6 الفضاء $L^\infty(\mu)$

ليكن (X,M,μ) فضاء قياس، ولتكن $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. نعرّف الحد الأعلى الأساسي للدالة f بـــ $\inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \ (a.e)\mu\}$، و نرمز له بـــ $\| f \|_\infty$، أي أن:

$$\| f \|_\infty = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \ (a.e)\mu\}$$

ينتج من التعريف أن $|f| \leq \| f \|_\infty$، حيثما كان تقريباً.

نتحقق بسهولة من صحة الخواص التالية للحد الأعلى الأساسي:

1) إذا كانت $f = g \ (a.e)\mu$، فإن $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty$.

2) $\| f \|_\infty \geq 0$ ، وذلك أياً تكن الدالة الحقيقية f المعرفة على X.

3) $\| f \|_\infty = 0$، إذا وفقط إذا كانت $f = 0 \ (a.e)\mu$.

4) $\| \alpha f \|_\infty \leq |\alpha| . \| f \|_\infty$، وذلك أياً يكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) $\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$.

6) إذا كانت $|f| \leq |g|$، فإن $\| f \|_\infty \leq \| g \|_\infty$.

تعريف (7.6.1)

ندلّ على مجموعة الدوال القيوسة f، التي يكون من أجلها $\|f\|_\infty < \infty$ بالرمز $L^\infty(\mu)$.

نتائج مباشرة:

i) إذا كان $\mu(X) < +\infty$، فإن $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$، وذلك أياً يكن $p \geq 1$.

ii) $L^\infty(\mu)$ فضاء متجهي حقيقي، وذلك استناداً إلى 4) و 5).

iii) $L^\infty(\mu)$ فضاء منظم، وذلك استناداً إلى 2)، 3)، 4)، 5)، حيث النظيم معرّف بالعلاقة:

$$\|f\| = \|f\|_\infty \quad , \quad \forall f \in L^\infty(\mu)$$

وحيث نصطلح هنا أيضاً على اعتبار أن كل دالتين متساويتين حيثما كان تقريباً هما دالتان متساويتان.

مبرهنة (7.6.1)

$L^\infty(\mu)$ فضاء باناخ.

البرهان:

لنبرهن أن $L^\infty(\mu)$ فضاء تام بالنسبة لتوبولوجيا المسافة المشتقة من النظيم $\|\ \|_\infty$.

لنفرض أن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي في $L^\infty(\mu)$، ولنتحقق من وجود دالة f من $L^\infty(\mu)$ بحيث تكون:

$$\lim_i \|f_i - f\|_\infty = 0$$

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد، استناداً إلى الفرض، عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon \quad , \quad \forall i, j \geq i_0$$

عندئذ تكون:

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall i, j \geq i_0$$

حيثما كان تقريباً. توجد إذاً، مجموعة قيوسة A قياسها معدوم بحيث تكون:

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall i, j \geq i_0 \ , \ \forall x \in A^c$$

عندئذ تكون $(f_i(x))_{i\geq 1}$ متتالية لكوشي حيثما كان تقريباً في R. وبالتالي فإنها تكون متقاربة من أجل كل $x \in A^c$. لنضع:

$$\lim_i f_i(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in A^c$$

و:

$$f(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in A$$

عندئذ تكون f قيوسة ويكون $\|f\|_\infty < \infty$. إذاً $f \in L_\infty(\mu)$.

من جهة أخرى، لدينا:

$$|f(x) - f_j(x)| = \lim_i |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$$

وذلك من أجل كل $x \in A^c$، وأياً يكن $j \geq i_0$. ينتج أن $\|f(x) - f_j(x)\| \leq \varepsilon$، من أجل كل $j \geq i_0$.

أي أن:

$$\lim_j \|f - f_j\|_\infty = 0$$

وذلك ينهي البرهان. ▲

تجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه إذا كان $X = N$ و $M = 2^N$ و μ قياس العدّ، وكان $1 \leq p \leq \infty$، فإننا نرمز للفضاء $L^p(\mu)$ بالرمز ℓ^p. وفي هذه الحالة، فإن الدوالّ

المعرّفة على N هي المتتاليات و التكامل بالنسبة للقياس μ يعني الجمع. بتعبير آخر، فإن l^p هو فضاء المتتاليات $x=(x_i)_{i\ge1}$ التي يكون من أجلها $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$، و $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

أما l^∞ فهو فضاء المتتاليات $x=(x_i)_{i\ge1}$ حيث x متتالية محدودة، وحيث $\|x\|_\infty=\sup_i|x_i|$.

إن الفضاءات l^p $(1\le p\le\infty)$ قابلة للمقارنة دوماً، بخلاف الفضاءات $L^p(\mu)$، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية.

مبرهنة (7.6.2)

إذا كان $1\le q<p\le\infty$. فإن $l^q\subseteq l^p$.

البرهان:

لنلاحظ أولاً أنه إذا كانت $x=(x_i)_{i\ge1}$ من l^q، حيث $1\le q<\infty$، فإن $(x_i)_{i\ge1}$ تكون متتالية محدودة لأنها تتقارب من الصفر، وبالتالي فإن $x\in l^\infty$. أي أن $l^q\subseteq l^\infty$ ، و ذلك من أجل $1\le q<\infty$. لنفرض أن $1<p<\infty$، وأن $x=(x_i)_{i\ge1}\in l^q$. بما أن $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^q<\infty$، إذاً، يوجد عدد طبيعي i_0، بحيث يكون $|x_i|<1$ ، من أجل $i\ge i_0$. عندئذ $|x_i|^p\le|x_i|^q$ من أجل كل $i\ge i_0$. إذاً $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$. أي أن $x=(x_i)_{i\ge1}\in l^p$. ومنه فإن $l^q\subseteq l^p$.

تجدر الإشارة أخيراً إلى أن $l^q\neq l^p$ ، إذ تكفي ملاحظة أن $\left(i^{-q}\right)_{i\ge1}$ عنصر من l^p لا ينتمي إلى l^q . ▲

تمارين

سنفرض من أجل كل التمارين الواردة فيما يلي أن (X,M,μ) فضاء قياس، وأن قيوسية الدوال والمجموعات هي بالنسبة للقياس μ، إلا إذا أشرنا إلى خلاف ذلك.

1- برهن أنه إذا كانت $f_i\xrightarrow[i]{a.u}f$، و $g_i\xrightarrow[i]{a.u}g$، فإن

i) $f_i+g_i\xrightarrow[i]{a.u}f+g$

ii) $|f_i|\xrightarrow[i]{a.u}|f|$

iii) $f_i.g_i\xrightarrow[i]{a.u}f.g$

2- لتكن $(f_i)_{i\ge1}$ متتالية معرفة بحدها العام:

$$f_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{i} & , 1\le x\le i\\ 0 & , x>i\end{cases}$$

i) برهن أن $f_i\xrightarrow[i]{u}0$ على المجال $[1,\infty[$

ii) تحقق من أن $\lim_i\int_{[0,1[}d\lambda\neq0$. ماذا تستنتج؟

3- لتكن $x=[0,1]$، وليكن $\mu=\lambda$، قياس لوبيغ على $[0,1]$.

برهن أنه إذا كانت $f_i(x)=x^{-\frac{1}{2}}\chi_{[0,\frac{1}{i}]}(x)$، وذلك أياً يكون $i\ge1$، فإن:

$f_i\xrightarrow[i]{a.u}0$ و $f_i\not\xrightarrow[i]{}0$ بانتظام على $[0,1]$.

4- برهن أنه إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$ فإن:

i) $f_i^+ \xrightarrow[i]{\mu} f^+$

ii) $f_i^- \xrightarrow[i]{\mu} f^-$

5- برهن أنه، إذا كان μ هو قياس العدّ على 2^X، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب متتالية $(f_i)_{i\geq1}$ بالقياس من الدالة f، هو أن تكون $(f_i)_{i\geq1}$ متقاربة بانتظام من f.

6- لتكن $X = R$، وليكن $\mu = \lambda$، قياس لوبيغ على R. برهن أنه إذا كانت $f_i(x) = \frac{x}{i}$، من أجل ... ,i=1,2، وأياً يكن $x \in R$، فإن $(f_i)_{i\geq1}$ لاتتقارب بالقياس λ. ماذا تستنتج؟

7- برهن أنه إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$ فإنه توجد متتالية جزئية $(f_{i_j})_{j\geq1}$ تتقارب حيثما كان تقريباً من f.

8- برهن أنه:

i) إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، فإن كل متتالية جزئية من $(f_i)_{i\geq1}$ تتقارب بالقياس من f.

ii) إذا كانت $(f_i)_{i\geq1}$ متتالية لكوشي بالقياس، فإن كل متتالية جزئية منها هي متتالية لكوشي بالقياس.

9- برهن أن كلاً من متباينتي هولدر ومينكوفسكي صحيحة من أجل الدوال العقدية.

10- استخدم الدالتين $f = \chi_{[0,1]}$، و $g = \chi_{[1,2]}$، لبيان أن متباينة مينكوفسكي غير صحيحة من أجل $p<1$.

11- برهن أن إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$، وكانت g دالة قيوسة ومحدودة، فإن $f_i.g_i \xrightarrow[i]{m^p} f.g$.

12- لتكن $(f_i)_{i\geq1}$ متتالية من الدوال القيوسة، بحيث إن $|f_i|^p$ تكون كمولة، $(\forall i\geq1)$.

برهن أنه إذا كانت f قيوسة، وكانت $\lim_i \int_X |f_i - f|^p d\mu = 0$، فإن $|f|^p$ تكون كمولة، وتكون $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$.

13- برهن أنه إذا كانت $f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$، و $g_i \xrightarrow[i]{m^q} g$، حيث $p>1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، فإن $f_i.g_i \xrightarrow[i]{m^1} f.g$.

14 – لتكن $X =]0,1]$، وليكن $\mu = \lambda$، قياس لوبيغ على $]0,1]$. برهن أنه إذا كانت $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$، حيث $p > 1$ و $x \in]0,1]$، فإن المتتالية:

f, f, f,.... تتقارب بالوسط من المرتبة 1، ولا تتقارب بالوسط من المرتبة p.

15- ضمن نفس معطيات التمرين 14، برهن أنه إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$، وذلك أياً يكن $x \in]0,1]$، فإن المتتالية ....f,f,f تتقارب بالوسط من المرتبة p، حيث $0< p < 1$، ولا تتقارب بالوسط من المرتبة 1.

تمارين محلولة

نقدّم فيما يلي حلول تمارين الكتاب ذات الأرقام الزوجية .

الفصل الأول:

2- لنضع:

$$A_1 = D_1 \quad , \quad A_i = D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j \ , \forall i \geq 2$$

عندئذ $\bigcup_{j=1}^{i-1} D_j \in D$ من أجل $i \geq 2$ ، وذلك لأن الحلقة صف مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد المنتهي، الأمر الذي يؤدي بدوره إلى أن تكون $D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j$ عنصراً من الحلقة D، لكونها صفاً مغلقاً أيضاً بالنسبة لعملية التتميم النسبي. ينتج أن $A_i \in D$ من أجل $i \geq 1$.

من جهة أخرى، لو فرضنا أن $D_i \cap D_j \neq \phi$ من أجل أي زوجٍ من الأعداد الطبيعية i و j، حيث $i, j \geq 1$ و $i \neq j$، وأن $x \in A_i \cap A_j$، لترتّب على ذلك أن يكون $x \in D_i \cap D_j$ و $x \notin \bigcup_{m=1}^{k} D_m$ حيث $k = \max\{i-1, j-1\}$. فإذا كان $i > j$ فإن $x \notin D_j$ ، وإذا كان $j > i$ فإن $x \notin D_i$ ، وبذلك نحصل على تناقضٍ في كلتا الحالتين. إذاً $A_i \cap A_j = \phi$ من أجل $i \neq j$. وهكذا تكون $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر D المنفصلة.

أخيراً بالعودة إلى تعريف المتتالية $(A_i)_{i \geq 1}$ نجد أن $A_i \subseteq D_i$ من أجل $i \geq 1$، إذاً $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. ثم أنه إذا كان $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$، وفرضنا أن i_0 هو أصغر عدد

طبيعي أكبر أو يساوي الواحد بحيث إن $x \in D_{i_0}$ و $x_i \notin D_i$ من أجل $i < i_0$ ، فإن $x \in A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. أي أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. وهكذا نجد أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

أما من أجل المتتالية $(B_i)_{i \geq 1}$ فإننا نضع:

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{i} D_j \quad , \quad \forall i \geq 1$$

عندئذ تكون B_j اتحاداً منتهياً لعناصر من D، وبالتالي فإن $B_i \in D$ من أجل $i \geq 1$، كما تكون $B_i \subseteq B_{i+1}$ من أجل $i \geq 1$، ثم أنه من الواضح أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

4- a) نعلم أن أي جبر في X هو صف غير خالٍ من أجزاء X، مغلق بالنسبة لعمليتي الاتحاد المنتهي والتتميم. وبالتالي فإنه يكفي أن نتحقق من أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود من أجل أن يكون جبراً تاماً في X .

لتكن $(B_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر F، ولنضع:

$$A_1 = B_1 \quad , \quad A_i = B_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \quad , \quad i \geq 2$$

عندئذ تكون $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر F المنفصلة، كما يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
(تذكّر أن كل جبر في X هو حلقة فيها، ثم ارجع إلى حل التمرين رقم **2**). عندئذ نجد استناداً إلى الفرض أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in F$، أي أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود.

b) يكفي التحقق في هذه الحالة أيضاً من أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود.
لتكن $(B_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر F، ولنضع:

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{i} B_j \quad , \quad \forall i \geq 1$$

عندئذ تكون $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية متزايدة من عناصر F، كما يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(ارجع إلى حل التمرين رقم **2**). ينتج استناداً إلى الفرض أن $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i \in F$. أي أن F صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود.

6- بما أن $f^{-1}(Y) = X \in M$، إذاً M_1 صف غير خالٍ من أجزاء Y. من جهة أخرى، نعلم أنه أياً تكن $A \subseteq Y$، وأياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر 2^Y، فإن :

$$f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c \;,\; f^{-1}(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} f^{-1}(A_i)$$

وذلك استناداً إلى خواص الصورة العكسية وفق التطبيق f. وبالتالي إذا كانت $A \in M_1$ فإن $f^{-1}(A^c) \in M$، أي أن $A^c \in M_1$. الأمر الذي يعني أن M_1 صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

أخيراً، إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M_1، فإن $f^{-1}(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i) \in M$، أي أن $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in M_1$. الأمر الذي يعني أن M_1 صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. ينتج مما تقدم أن M_1 جبر تام في Y.

8- لنرمز بـــ M للجبر التام الأصغري على صف المجموعات المنتهية في X. عندئذ أياً يكن $a \in X$، فإن $\{a\} \in M$. وبالتالي، أياً تكن المجموعة العدودة $A = \{a_1, a_2, ...\}$ من 2^X فإن $A \in M$ ينتج أن M يحوي صف المجموعات العدودة ومتمماتها. بتعبير آخر، إذا كانت A عدودة أو كانت A^c عدودة فإن $A \in M$. فإذا رمزنا بـــ M_0 لصف المجموعات الجزئية من X، العدودة أو التي متمماتها عدودة فإن $M_0 \subseteq M$.

من جهة أخرى، إذا كانت $A \in M_0$ فإن $A^c \in M_0$. لأنه، إما أن تكون A عدودة وعندئذ A^c متممة لمجموعة عدودة وبالتالي $A^c \in M_0$، أو أن تكون A^c عدودةً

وعندئذ $A^c \in M_0$. وهكذا فإن M_0 صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M_0، وكانت A_i عدودة من أجل $i\geq 1$، فإن $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$ تكون مجموعة عدودة وبالتالي فإن $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in M_0$. أما إذا كانت إحدى المجموعات A_i غير عدودة، ولتكن A_{i_0}، فإن $A_{i_0}^c$ تكون عدودة، وحيث إن:

$$(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i)^c = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} A_i^c \subseteq A_{i_0}$$

إذاً $(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i)^c$ مجموعة عدودة، وعندئذ $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in M_0$. وهكذا نجد أن M_0 صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. فإذا لاحظنا بالإضافة إلى ذلك أنه صف غير خالٍ من أجزاء X، إذ أن $X \in M_0$ لأن $X^c (= \phi)$ عدودة، لوجدنا أن M_0 جبر تام في X. أخيراً، وبما أن كل مجموعة منتهية هي مجموعة عدودة، إذاً $M \subseteq M_0$. وحيث إننا وجدنا سابقاً أن $M_0 \subseteq M$، إذاً $M = M_0$.

10- بما أن F جبر على الصف H، إذاً $H \subseteq F$، وبالتالي فإن:

$$\sigma(H) \subseteq \sigma(F) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، بما أن كل جبر تام في X هو جبر فيها، إذاً $\sigma(H)$ جبر يحوي الصف H، وبالتالي فهو يحوي الجبر الأصغري على X. أي أن $F \subseteq \sigma(H)$، ومنه فإن:

$$\sigma(F) \subseteq \sigma(H) \qquad (2)$$

من(1)و (2) ينتج أن $\sigma(F) = \sigma(H)$.

12- لنرمز بـــ M لمقصور الجبر التام $\sigma(H)$ على A. أي أن:

$$M = \{ A \cap C : C \in \sigma(H)\}$$

إن M صف غير خالٍ من أجزاء A، إذ أن $A = A \cap X \in M$. لتكن $A \cap C \in M$، عندئذ $A - (A \cap C) = A \cap C^c \in M$. أي أن M صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم في A. ثم أنه إذا كانت $(A \cap C_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر M، فإن:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap C_i) = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \in M$$

أي أن M صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. وهكذا نجد مما تقدّم أن M جبر تام في A. لنرمز بـــ M_0 للجبر التام الأصغري على الصف $\{A \cap B : B \in H\}$ في A. عندئذ، بما أن $H \subseteq \sigma(H)$، إذاً $M_0 \subseteq M$.

من جهة أخرى، إذا كان M' جبراً تاماً في A يحوي الصف $H \cap \{A\}$، فإنه مقصور لجبر تام في X يحوي الصف H، على A . (M'مقصور الجبر التام $M' \cup M''$، حيث M'' جبر تام في A^c يحوي الصف $H \cap \{A^c\}$)، وبالتالي فإن $M \subseteq M'$. ينتج أن M هو أصغر الجبور التامة في A التي تحوي الصف $H \cap \{A\}$. أي أن $M_0 = M$.

14- من الواضح أن كل عنصر من الصف M_0 هو عنصر من $\sigma(H)$. أي أن:

$$M_0 \subseteq \sigma(H) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، من العلاقات:

$$(A \cap \phi) \cup (A^c \cap \phi) = \phi$$
$$[(A \cap B) \cup (A^c \cap C)]^c = [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap C^c)]$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty}[(A \cap B_i) \cup (A^c \cap C_i)] = [(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \cup (A^c \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i))]$$

ينتج أن M_0 جبر تام. بالإضافة إلى ذلك، أياً تكن $B \in M$ فإن:

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \in M_0$$

كذلك فإن:

$$A = (A \cap X) \cup (A^c \cap \phi) \in M_0$$

ومنه فإن $H \subseteq M_0$. إذاً:

$$\sigma(H) \subseteq M_0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $\sigma(H) = M_0$.

16- لنضع:

$$H_1 = \{[-\infty, a], a \in R\}$$

عند ئذ يكون $H_1 \subseteq B_{\overline{R}}$، وذلك لأن عناصر H_1 مجموعات مغلقة في $\overline{R}$.

وبالتالي فإن:

$$\sigma(H_1) \subseteq B_{\overline{R}} \qquad (1)$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$[-\infty, a[= \bigcup_{i=1}^{\infty}[-\infty, a - \frac{1}{i}]$$

وحيث إن الصف $\{[-\infty, a], a \in R\}$ يولّد $B_{\overline{R}}$، إذاً:

$$B_{\overline{R}} \subseteq \sigma(H_1) \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن:

$$B_{\overline{R}} = \sigma(H_1)$$

نبرهن بطريقة مماثلة أن الصف $\{[a, +\infty], a \in R\}$ يولّد $B_{\overline{R}}$ أيضاً.

18- ليكن الصف:

$$H = \{\phi, A, X\}$$

حيث $A \subseteq X$. عندئذ من الواضح أن H صف مطّرد، وأنه ليس جبراً تاماً في X، إذ أنه غير مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

2- لاحظ أن:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}(B_i - A_j)$$

وأن:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}(B_j - A_i)$$

لنجد أن:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left[\bigcap_{j=1}^{\infty}(B_i - A_j)\right] \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i - A_j) \quad , \forall j \ge 1 \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i - A_i)\end{aligned}$$

وأن:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left[\bigcap_{j=1}^{\infty}(B_j - A_i)\right] \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_j - A_i) \quad , \forall j \ge 1 \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i - A_i).\end{aligned}$$

4- بما أن:

$$(A_1 - A_2) \cap (A_2 - A_1) = \phi$$

إذاً:

$$\mu(A_1 \Delta A_2) = \mu(A_1 - A_2) + \mu(A_2 - A_1) = 0$$

وحيث إن $\mu \ge 0$ ، إذاً:

$$\mu(A_1 - A_2) = 0 \quad , \quad \mu(A_2 - A_1) = 0$$

من جهة أخرى، نعلم أن:

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \quad , \quad A_2 = (A_2 - A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

وأن:

$$(A_1 - A_2) \cap (A_1 \cap A_2) = \phi \quad , \quad (A_2 - A_1) \cap (A_1 \cap A_2) = \phi$$

إذاً:

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 - A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

و

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 - A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

أي أن $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

6- نعلم أن:

$$\overline{\lim_i} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j \ge i} A_j$$

إذاً:

$$\begin{aligned}0 \le \mu(\overline{\lim_i} A_i) &\le \mu\left(\bigcup_{j \ge i}^{\infty} A_j\right) \\ &\le \sum_{j=i}^{\infty} \mu(A_j) \qquad , \qquad \forall i \ge 1\end{aligned}$$

وحيث إن $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ متسلسلة متقاربة، إذاً فالباقي من المرتبة i يسعى إلى الصفر عندما يسعى i إلى $+\infty$، أي أن:

$$0 \le \mu(\overline{\lim_i} A_i) \le \lim_i \sum_{j=i}^{\infty} \mu(A_j) = 0$$

إذاً $\mu(\overline{\lim_i} A_i) = 0$.

8- لنرمز بـ D لصف الاتحادات المنتهية لعناصر منفصلة من I، صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار في R. عندئذ، نعلم أن D حلقة في R، وأنه استناداً إلى المبرهنة (**1.4.1**) يكون صف كل الاتحادات المنتهية لمستطيلات منفصلة من الشكل $A \times B$، حيث $A,B \in D$ حلقة في R^2. وهو نفسه صف كل الاتحادات المنتهية لعناصر منفصلة من I^2. لنرمز لهذه الحلقة الأخيرة بـ D_2. عندئذ باستخدام الاستقراء الرياضي والاستفادة من نفس المبرهنة (**1.4.1**) نجد أن صف كل الاتحادات المنتهية لعناصر منفصلة من I^n هو حلقة في R^n، نرمز لها بـ D_n.

من جهة أخرى، من الواضح أن $I^n \subseteq D_n$، وأن $\sigma(I^n) \supseteq D_n$. إذاً $\sigma(D_n) = \sigma(I^n)$. وحيث إن $\mu_1 = \mu_2$ على I^n، إذاً $\mu_1 = \mu_2$ على D_n. بالإضافة إلى ذلك، لدينا:

$$R^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{]-i,i] \times .. \times]-i,i]}_{n \text{ مرة}}$$

وبما أن μ_1 منتهٍ على I^n ، إذاً ، و استناداً إلى المبرهنة(**2.1.6**) ، يكون $\mu_1 = \mu_2$ على $\sigma(I^n)$.

10- بما أن μ^* قياس خارجي على X ، إذاً $\mu^* \geq 0$ و $\mu^*(\phi) = 0$. يكفي إذاً للتحقق من أن μ^* قياس على الصف 2^X أن نبرهن أنه أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i \geq 1}$ من عناصر 2^X المنفصلة، فإن $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

بما أن μ^* دالة متزايدة، و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad , \forall n \geq 1$$

و بالتالي فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \quad , \quad \forall n \geq 1$$

وذلك استناداً إلى الفرض. ندع n يسعى إلى $+\infty$ ، فنحصل على:

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \qquad (2)$$

وذلك استناداً إلى خاصة تحت الجمعية التامة لـ μ^*. من (1) و (2) ينتج المطلوب.

12- لتكن $T \subseteq X$. عندئذ $T \cap A \subseteq A$، وبالتالي فإن:

$$0 \leq \mu^*(T \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$$

أي أن $\mu^*(T \cap A) = 0$. وحيث إن $T \cap A^c \subseteq T$، إذاً:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A^c) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

وهذا يعني أن A μ^*- قيوسة.

14- نعلم أنه إذا كانت A μ^*- قيوسة، فإن:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \quad , \quad \forall T \subseteq X$$

ومن أجل $T = X$ نجد أن:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

من أجل البرهان على صحة العكس ، نفرض أن $A \subseteq X$، وأن:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

ونتحقق من أن A μ^* - قيوسة.

لتكن $T \subseteq X$. توجد، استناداً إلى الفرض، مجموعة B μ^* - قيوسة وتحوي T، بحيث يكون $\mu^*(T) = \mu^*(B)$. عندئذ نجد أن:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

و

$$\mu^*(A^c) = \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B^c)$$

وبجمع المساواتين الأخيرتين طرفاً لطرف نحصل على:

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) + \\ &\quad \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(B) + \mu^*(B^c) = \mu^*(X)\end{aligned}$$

ينتج أن:

$$\begin{aligned}\mu^*(B) + \mu^*(B^c) &= \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) + \\ &\quad \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned}\mu^*(B^c) &= \mu^*[(B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c)] \\ &\leq \mu^*(B^c \cap A) + \mu^*(B^c \cap A^c)\end{aligned}$$

إذاً:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$$

لأن $\mu^*(B^c) \leq \mu^*(X) < +\infty$.

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $T \subseteq B$، وأن $\mu^*(T) = \mu^*(B)$، نجد:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

الأمر الذي يعني أن A μ^* - قيوسة.

16- a) بما أن $\varphi \geq 0$، إذاً $\mu^* \geq 0$. لتكن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq X$. عندئذ أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من عناصر H بحيث إن $B_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، فإن $B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، إذاً $\mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2)$.

أخيراً ، إذا كانت $(B_i)_{i\geq1}$ متتالية من عناصر 2^X، وكان $\varepsilon > 0$، فإنه توجد متتالية $(A_{i,k})_{k\geq1}$ من عناصر H، بحيث يكون $B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$ من أجل كل $i \geq 1$، ويكون:

$$\mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_{i,k})$$

و حيث إن $(A_{i,k})_{k\geq1}$ متتالية من عناصر H، و $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i,k=1}^{\infty} A_{i,k}$، إذاً :

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i,k}^{\infty} \varphi(A_{i,k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon$$

وحيث إن ε موجب كيفي إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$$

ينتج مّما تقدّم أن μ^* – قياس خارجي.

b) لتكن $A \in H$، ولنضع:

$$A_1 = A \quad , \quad A_i = \phi \quad , \quad \forall i \geq 2$$

عندئذ تكون $(A_i)_{i\geq1}$ متتالية من عناصر H بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. إذاً:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) = \varphi(A_1) = \varphi(A) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، بما أن $\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$، وذلك أياً تكن المتتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من عناصر H بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، إذاً:

$$\varphi(A) \le \mu^*(A) \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن :

$$\mu^*(A) = \varphi(A) \quad , \quad \forall A \in H$$

c) لتكن $A \in H$، ولنفرض أن A μ^*- قيوسة. عندئذ:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \quad , \quad \forall T \subseteq X$$

فإذا كانت $A_1 , A_2 \in H$، ووضعنا $T = A_1$ و $A = A_2$، نجد أن:

$$\mu^*(A_1) = \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c) \qquad (3)$$

بالعكس لنفرض أن العلاقة (3) صحيحة من أجل كل زوج A_1 وA_2 من عناصر H، ولتكن $A \in H$. عندئذ أياً تكن $T \subseteq X$، وأياً يكن $\varepsilon > 0$، فإنه توجد متتالية $(A_i)_{i \ge 1}$ من عناصر H بحيث إن $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، و:

$$\mu^*(T) + \varepsilon \ge \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

وعندئذ نجد أن:

$$\mu^*(T \cap A) \le \mu^*[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A] \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap A)$$

و

$$\mu^*(T \cap A^c) \le \mu^*[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A^c] \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap A^c)$$

ومنه فإن:

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \le \sum_{i=1}^{\infty} [\mu^*(A_i \cap A) + \mu^*(A_i \cap A^c)]$$

إذاً:

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

وذلك استناداً إلى العلاقة (3)، وإلى المتباينة $\mu^*(A_i) \le \varphi(A_i)$، من أجل $i \ge 1$.

ينتج أن:

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \le \mu^*(T) + \varepsilon \text{ ،}$$

وحيث إن ε موجب كيفي، إذاً :

$$\mu^*(T) \ge \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

أي أن A μ^*- قيوسة.

d) لنفرض أن $H \subseteq M^*$، وأن $T \subseteq X$، ولنتحقق من وجود مجموعة B من $\sigma(H)$، بحيث تكون:

$$T \subseteq B \quad , \quad \mu^*(T) = \mu^*(B)$$

في الواقع، أياً يكن العدد الطبيعي $i \ge 1$، فإن توجد متتالية $(A_{i,k})_{k \ge 1}$ من عناصر H بحيث إن $T \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$، و:

$$\mu^*(T) + \frac{1}{i} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_{i,k})$$

لنضع $B_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$. عندئذ تكون $T \subseteq B_i$، و $B_i \in \sigma(H)$، ويكون:

$$\mu^*(B_i) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_{i,k}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_{i,k})$$

فإذا وضعنا $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$، نجد أن $T \subseteq B$ و $B \in \sigma(H)$، وأن:

$$\mu^*(T) \le \mu^*(B) \le \mu^*(B_i) \le \mu^*(T) + \frac{1}{i} \quad , \quad \forall i \ge 1$$

إذاً:

$$\mu^*(T) = \mu^*(B)$$

2- لنفرض أن A λ- قيوسة، عندئذ تكون A^c قيوسة. ليكن $\varepsilon > 0$.توجد ، استناداً إلى المبرهنة (**3.1.3**) ، مجموعة مفتوحة O تحوي A^c بحيث يكون:

$$\lambda(O - A^c) < \varepsilon$$

عندئذ تكون O^c مغلقة محتواة في A، ويكون:

$$\lambda(A - O^c) = \lambda(O - A^c) < \varepsilon$$

بالعكس، لنفرض أنه أياً يكن $\varepsilon > 0$ فإنه توجد مجموعة مغلقة F محتواة في A بحيث يكون:

$$\lambda^*(A - F) < \varepsilon$$

ولنتحقق من أن A λ- قيوسة. بما أن F مغلقة ومحتواة في A ، إذاً F^c مفتوحة وتحوي A^c ، و :

$$\lambda^*(F^c - A^c) = \lambda^*(A - F) < \varepsilon$$

ينتج أن A^c λ- قيوسة وذلك استناداً إلى المبرهنة (**3.1.3**)، ومنه فإن A λ- قيوسة.

4- لنفرض أن $\mathring{A} \neq \phi$، و أن $x \in \mathring{A}$، عندئذ يوجد مجال مفتوح $]a,b[$ بحيث إن:

$$x \in]a,b[\subseteq A$$

ومنه فإن:

$$0 < \lambda(]a,b[) = b - a \leq \lambda(A) = 0$$

وهذا غير ممكن. ينتج أن الفرض خاطئ ، وبالتالي فإن $\mathring{A} \neq \phi$.

6- i) نعلم أن :

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\supseteq A\right\}$$

وحيث إن $\bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\supseteq A$ إذا وفقط إذا كان $\bigcup_{i=1}^{\infty}]-b_i, -a_i[\supseteq -A$، إذاً:

$$\lambda^*(-A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(-a_i - (-b_i)) : \bigcup_{i=1}^{\infty}]-b_i, -a_i[\supseteq -A\right\}$$
$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\supseteq A\right\}$$

أي أن:

$$\lambda^*(-A) = \lambda^*(A)$$

ii) لنفرض أن A λ- قيوسة. عندئذ من العلاقات:

$$-T \cap A = -(T \cap (-A))$$
$$-T \cap A^c = -(T \cap (-A^c)) = -(T \cap (-A)^c)$$

ومن **i**) ينتج أن:

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(-T) = \lambda^*(-T \cap A) + \lambda^*(-T \cap A^c)$$
$$= \lambda^*[-(T \cap (-A))] + \lambda^*[-(T \cap (-A)^c)]$$
$$= \lambda^*(T \cap (-A)) + \lambda^*(T \cap (-A)^c)$$

وذلك أياً تكن $T \subseteq X$. الأمر الذي يعني أن (-T) λ- قيوسة.

بالعكس، إذا كانت (-A) λ- قيوسة، فإنه، واستناداً إلى ما تقدم ، تكون (-(-A)) λ- قيوسة، أي تكون A λ- قيوسة.

8- i) استناداً إلى تعريف الدالة f_α ، وبعد إجراء حسابات بسيطة نجد أن:

$$f_\alpha(b) - f_\alpha(a) = \mu(]a,b])$$

وذلك أياً يكن $a \leq b$.

ii) بما أن $\mu(]a,b]) \geq 0$، إذاً f_α دالة متزايدة. من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{b\to a+}[f_\alpha(b)-f_\alpha(a)]=\lim_{b\to a+}\mu(]a,b])$$
$$=\lim_{i\to\infty}\mu(]a,a+\frac{1}{i}])$$

وبما أن f_α دالة حقيقية، إذاً $\mu(]a,a+\frac{1}{i}])<+\infty$ من أجل $i\geq 1$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{i\to\infty}\mu(]a,a+\frac{1}{i}])=\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}]a,a+\frac{1}{i}])$$
$$=\mu(\phi)=0$$

إذاً:

$$\lim_{b\to a+}[f_\alpha(b)-f_\alpha(a)]=0$$

أي إن f_α دالة مستمرة من اليمين على R. ينتج مما تقدم أن f_α دالة توزيع على R.

10– توجد متتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من المجموعات القيوسة، بحيث إن $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ ، و $\mu(A_i)<+\infty$ من أجل ...,i=1,2. يمكننا دون الانتقاص من عمومية المسألة، أن نفرض أن $(A_i)_{i\geq1}$ متزايدة، إذ إنه في خلاف ذلك نعرّف متتالية متزايدة $(B_i)_{i\geq1}$ من المجموعات القيوسة التي قياس كل منها منتهٍ، وذلك بوضع:

$$B_i=A_1\cup A_2\cup...\cup A_i\quad,\quad\forall i\geq 1$$

وعندئذٍ تكون $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

توجد استناداً إلى المبرهنة (**4.4.1**) متتالية متزايدة $(t_i)_{i\geq1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة بحيث تكون $f=\lim_i t_i$. لنضع:

$$s_i=t_i\chi_{A_i}\quad,\quad\forall i\geq 1$$

عندئذ تكون $(s_i)_{i\geq1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، وتكون:

$$\lim_i s_i=\lim_i t_i\chi_{A_i}=f.\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=f$$

كما أنه أياً يكن $i\geq 1$ ، فإن $s_i(x)=0$ من أجل كل $x\in A_i^c$.

2– إذا كانت f ثابتة على R وتساوي α، حيث $\alpha\in\overline{R}$، عندئذ أياً يكن $a\in R$ فإن:

$$f^{-1}[a,+\infty]=\begin{cases}R & ,\quad \alpha\geq a\\ \phi & ,\quad \alpha<a\end{cases}$$

وحيث إن $\phi,R\in M$، إذاً f قيوسة. وإذا كانت f ثابتة على كلٍ من المجالين $]-\infty,0]$ و $]0,+\infty[$، حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha & ,\quad x\in]-\infty,0]\\ \beta & ,\quad x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

وفرضنا $\alpha<\beta$، فإن:

$$f^{-1}[a,+\infty]=\begin{cases}\phi & ,\quad a>\beta\\ ]0,+\infty[& ,\quad \alpha<a\leq\beta\\ R & ,\quad a\leq\alpha\end{cases}$$

وحيث إن ϕ, R, $]0,+\infty[$ عناصر من M، إذاً f قيوسة أيضاً في هذه الحالة. أما إذا لم تكن f ثابتة على R أو على أيٍ من المجالين $]-\infty,0]$, $]0,+\infty[$ فإنها لن تكون قيوسة، فعلى سبيل المثال، إذا فرضنا أنه توجد نقطة x_0 من المجال $]-\infty,0]$ بحيث تكون:

$$f(x_0)=\alpha\neq f(x),\forall x\in]-\infty,0]-\{x_0\}$$

فإن:

$$f^{-1}(\{\alpha\})=\{x_0\}\cup A$$

حيث: $A=\{x\in R:f(x)=\alpha\}\supseteq]0,+\infty[$. وعندئذ لا تكون الصورة العكسية وفق f للمجموعة البوريلية $\{\alpha\}$ عنصراً من M، الأمر الذي يعني أن f ليست قيوسة.

4- لتكن S مجموعة غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ. عندئذ تكون كل من الدالتين χ_S و $\chi_{S'}$، غير قيوسة بالنسبة لـ λ (كل منهما دالة مميزة لمجموعة غير قيوسة بالنسبة لـ λ) في حين إن الدالة $\chi_S \cdot \chi_{S'}$، المساوية للدالة الصفرية على R، تكون λ- قيوسة.

6-نعلم أن صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـ $\overline{\mu}$ هو الجبر التام $\overline{M}$، حيث:

$$\overline{M} = \{E = A \cup B : A \in M, B \subseteq C, C \in M, \mu(C) = 0\}$$

فإذا كانت $f = \chi_E$، حيث $E \in \overline{M}$، فإن f تكون $\overline{\mu}$- قيوسة، وتكون الدالة $g = \chi_A$ μ- قيوسة، و $f=g\ (a.e)\mu$، وذلك لأن:

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} = B - A \subseteq C$$

و $\mu(C) = 0$.

وإذا كانت f دالة بسيطة $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$، حيث $E_i = A_i \cup B_i \in \overline{M}$، و $E_i \cap E_j = \phi$ من أجل $i \neq j$، و $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$، وحيث $a_i \in R$ من أجل $i=1,2,\dots,n$، فإن f تكون دالة $\overline{\mu}$- قيوسة، وتكون الدالة:

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} + 0.\chi_{\bigcup_{i=1}^{n}(B_i - A_i)}$$

μ-قيوسة، و $f=g\ (a.e)\mu$، وذلك لأن:

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{i=1}^{n}(B_i - A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

و:

$$0 \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = 0$$

أما إذا كانت f $\overline{\mu}$- قيوسة بوجه عام. فإنه توجد استناداً إلى النتيجة **(4.4.1)** متتالية $(s_j)_{j\geq1}$ من الدوال البسيطة القيوسة بالنسبة لـ $\overline{\mu}$. بحيث تكون:

$$f = \lim_j s_j$$

وعندئذ ينتج مما تقدم أنه توجد متتالية $(t_j)_{j\geq1}$ من الدوال البسيطة القيوسة لـ μ، بحيث تكون $s_j = t_j\ (a.e)\mu$. فإذا كانت:

$$D_j = \{x : s_j(x) \neq t_j(x)\}\ ,\ \forall j \geq 1$$

فإن D_j تكون μ- هولة، وتكون بالتالي $(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j)$ μ- هولة، أي إنه توجد $C \in M$ بحيث يكون $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \subseteq C$، و $\mu(C) = 0$.

ينتج أن الدالة g المعرفة على النحو التالي:

$$g(x) = \begin{cases} \lim_j t_j(x) & ,\ \forall x \notin C \\ 0 & ,\ \forall x \in C \end{cases}$$

تكون μ- قيوسة، و $f=g\ (a.e)\mu$، وذلك لأن:

$$g(x) = \lim_j t_j(x) = \lim_j s_j(x) = f(x)\ ,\ \forall x \notin C$$

و:

$$\mu(C) = 0$$

8- بما أن μ قياس σ- منته، إذاً توجد متتالية $(A_i)_{i\geq1}$ من المجموعات القيوسة، بحيث يكون:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\ \ ,\ \ \mu(A_i) < +\infty\ ,\ \forall i \geq 1$$

يمكننا أن نفرض أن $(A_i)_{i\geq1}$ متتالية متزايدة، لأنها إذا لم تكن كذلك، فبالإمكان تعريف متتالية $(B_i)_{i\geq1}$ كما يلي:

$$B_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i\ \ ,\ \ \forall i \geq 1$$

وعندئذ تكون $(B_i)_{i\geq1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة، كما يكون:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X\ ,\ \ \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^{i} \mu(A_j) < +\infty\ ,\ \ \forall i \geq 1$$

توجد، استناداً إلى المبرهنة (**4.4.1**)، متتالية متزايدة $(t_i)_{i\geq 1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث تكون $f = \lim\limits_i t_i$. فإذا وضعنا $s_i = t_i\chi_{A_i}$ من أجل كل عدد طبيعي $i \geq 1$، فإن $(s_i)_{i\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، كما تكون $s_i(x) = 0$ من أجل كل x من A_i^c، وذلك أياً يكن $i \geq 1$. بالإضافة إلى ذلك فإن:

$$\begin{aligned}\lim_i s_i &= \lim_i t_i . \lim_i \chi_{A_i}\\ &= f.\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = f\end{aligned}$$

الفصل الخامس:

2- لنضع:

$$A_0 = \{x : f(x) = 0\} \quad , \quad A_i = \{x : f(x) > \tfrac{1}{i}\} \ , \ \forall i \geq 1$$

عندئذ، بما أن f قيوسة وغير سالبة، فإن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة التي قياس كل منها منته (انظر التمرين رقم **1**) و:

$$X = A_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

من جهة أخرى، توجد استناداً إلى المبرهنة (**4.4.1**) متتالية متزايدة $(t_i)_{i\geq 1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث تكون $f = \lim\limits_i t_i$. فإذا وضعنا:

$$s_i = t_i\chi_{A_i} \quad , \quad \forall i \geq 1$$

فإن $(s_i)_{i\geq 1}$ تكون متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، كما يكون $s_i(x) = 0$ من أجل كل x من A_i^c، وذلك أياً يكن $i \geq 1$.
بالإضافة إلى ذلك، فإن:

$$\begin{aligned}\lim_i s_i &= \lim_i t_i . \lim_i \chi_{A_i}\\ &= f.\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}\end{aligned}$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $f(x) = 0$ من أجل كل x من A_0 ، وأن $X = A_0 \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$ حصلنا على:

$$\begin{aligned}\lim_i s_i &= \lim_i t_i . \lim_i \chi_{A_i}\\ &= f.\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = f\end{aligned}$$

4- استناداً إلى الفرض فإن $(f_i)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال القيوسة وغير السالبة، و $f_i \leq f$ من أجل $i=1,2,...$. بالإضافة إلى ذلك فإن:

$$\lim_i f_i(x) = \sup_i f_i(x) = f(x) \ , \ \forall x \in X$$

عندئذ بالاستفادة من مبرهنة لوبيغ في التقارب المطّرد، نجد أن:

$$\lim_i \int_X f_i \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

6- يوجد استناداً إلى الفرض عدد حقيقي موجب تماماً α بحيث تكون $|g(x)| \leq \alpha$ وذلك أياً يكن $x \in X$. وعندئذ تكون $|f.g| \leq \alpha |f|$
من جهة أخرى، بما أن f كمولة على X، إذاً $|f|$ كمولة أيضاً، وبالتالي فإن:

$$\int\limits_X |f.g| d\mu \leq \alpha \int\limits_X |f| d\mu < +\infty$$

الأمر الذي يعني أن $|f.g|$ دالة كمولة، وعندئذ تكون f.g كمولة.

8- من الواضح أن الدالة $h - f \geq 0$، وأن:

$$\int\limits_X (h - f) d\mu = \int\limits_X h \, d\mu - \int\limits_X f \, d\mu = 0$$

ينتج أن $h = f \ (a.e)\ \mu$، وذلك استناداً إلى المبرهنة **(5.2.6)**. وحيث إن $f \le g \le h$، إذاً $f = g \ (a.e)\mu$. عندئذ بالاستفادة من المبرهنة **(5.3.8)** نجد أن g دالة كمولة، وأن:

$$\int_X g\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

10– استناداً إلى الفرض، تكون $|f|$ كمولة، ويكون:

$$+\infty > \int_X |f|d\mu \ge \int_{A_i} |f|d\mu \ge i\mu(A_i)\ ,\ \forall i \ge 1$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$ نجد أن $\lim_i \mu(A_i) = 0$. وحيث إن $(A_i)_{i\ge1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة، و:

$$\mu(A_1) \le \int_{A_1} |f|d\mu \le \int_X |f|d\mu < +\infty$$

إذاً:

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_i \mu(A_i) = 0$$

من جهة أخرى، توجد متتالية $(s_j)_{j\ge1}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة، بحيث إن $\lim_j s_j = |f|$، وبالتالي:

$$\lim_i \int_{A_i} |f|d\mu = \lim_i \int_{A_i} (\lim_j s_j)d\mu = \lim_i \lim_j \int_{A_i} s_j d\mu$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة لوبيغ في التقارب المطّرد. عندئذ، بما أن $\lim_j \int_{A_i} s_j d\mu$ موجودة من أجل كل $i\ge1$، إذاً:

$$\lim_i \int_{A_i} |f|d\mu = \lim_j \lim_i \int_{A_i} s_j d\mu = 0$$

حيث استفدنا في المساواة الأخيرة من معلومة أنه إذا كانت s دالة بسيطة وغير سالبة وكانت $\lim_i \mu(A_i) = 0$، فإن:

$$\lim_i \int_{A_i} s\, d\mu = 0$$

(إذ إنه إذا كانت $s = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$، فإنه وكما نعلم:

$$0 \le \int_{A_i} s\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j \cap A_i)$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(A_i)$$

وبالتالي فإن:

$$0 \le \lim_i \int_{A_i} s\, d\mu \le \lim_i \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(A_i) = 0 \ .)$$

طريقة أخرى:

استناداً إلى الفرض تكون $|f|$ كمولة، ويكون:

$$+\infty > \int_X |f|d\mu \ge \int_{A_i} |f|d\mu \ge i\mu(A_i)\ ,\ \forall i \ge 1$$

وعندما يسعى i إلى $+\infty$ نجد أن $\lim_i \mu(A_i) = 0$، وحيث إن $(A_i)_{i\ge1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة، و:

$$\mu(A_1) \le \int_{A_1} |f|d\mu \le \int_X |f|d\mu < +\infty$$

إذاً:

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_i \mu(A_i) = 0$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\int_{A_i} |f|d\mu \ge \int_{A_{i+1}} |f|d\mu \ge \dots \ge \int_{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} |f|d\mu = 0$$

أي أن $(\int_{A_i} |f|d\mu)_{i\ge1}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالصفر، وبالتالي فإن:

$$\lim_i \int_{A_i} |f| d\mu = 0$$

12- بما أن $|f_i| \le g$ أياً يكن $i \ge 1$، إذاً $|f| \le g$ وعندئذ تكون f دالة كمولة. من جهة أخرى، لدينا:

$$|f_i - f| \le |f_i| + |f| \le 2g \ , \ \forall i \ge 1$$

أي أن $(2g - |f_i - f|)_{i \ge 1}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة. ومنه فإن:

$$\int_X \underline{\lim}_i (2g - |f_i - f|) d\mu \le \underline{\lim}_i \int_X (2g - |f_i - f|) d\mu$$

ولكن:

$$\underline{\lim}_i (2g - |f_i - f|) = 2g$$

إذاً:

$$0 \le \int_X 2g \, d\mu \le \int_X 2g \, d\mu - \overline{\lim}_i \int_X |f_i - f| d\mu$$

وبالتالي فإن:

$$0 \le -\overline{\lim}_i \int_X |f_i - f| d\mu \le 0$$

إذاً:

$$0 \le \underline{\lim}_i \int_X |f_i - f| d\mu \le \overline{\lim}_i \int_X |f_i - f| d\mu \le 0$$

أي أن:

$$\lim_i \int_X |f_i - f| d\mu = 0$$

14- لتكن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة إطلاقاً، ولنضع:

$$f(i) = a_i \ , \ \forall i \ge 1$$

عندئذ تكون f كمولة على N بالنسبة لقياس العدّ μ على N (انظر التمرين رقم**13**)، ويكون:

$$\int_N f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

وبالتالي فإن أيّ تبديل في حدود المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سيعطي متسلسلة متقاربة لها المجموع نفسه الذي يساوي دوماً $\int_N f \, d\mu$.

16-i) بما أن $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ موجودة، فإن التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ متقارب في النقطة x=0.

ليكن $\varepsilon > 0$، عندئذ من أجل كل $t > \varepsilon$، لدينا:

$$\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{d(1-\cos x)}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \Big]_{\varepsilon}^{t} + \int_{\varepsilon}^{t} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

وعندما يسعى ε إلى الصفر، نجد أن:

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1-\cos t}{t} + \int_0^t \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (*)$$

وبما أن:

$$\left| \frac{1-\cos x}{x^2} \right| \le \frac{2}{x^2} \quad , \quad \forall x \in R - \{0\}$$

فالتكامل $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ متقارب إطلاقاً في اللانهاية، وبالتالي إذا سعى t إلى $+\infty$ في العلاقة (*) نحصل على:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

أي أن $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ متقارب ويساوي $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

ii) لدينا من أجل كل x من المجال $[(n-1)\pi, n\pi]$، حيث $n=1,2,\ldots$:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{n\pi}|\sin x|$$

ومنه فإن:

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{n\pi}$$

إذاً:

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ متباعدة ، فإن المتتالية التي حدها العام $\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ تتباعد إلى $+\infty$ عندما يسعى n إلى $+\infty$. ينتج أن $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ متباعد.

الفصل السادس:

2- من أجل البرهان على قيوسية f بالنسبة للجبر التام الجداء $2^N \times 2^N$، نفرض أن B مجموعة بوريلية كيفية في R. عندئذ تكون $f^{-1}(B)$ مجموعة جزئية من $N \times N$، إذاً فهي تكتب على الشكل $\bigcup_{i,j}\{i\}\times\{j\}$، حيث $i,j\in N$. أي أنها اتحاد عدود لمستطيلات من الشكل $\{i\}\times\{j\}$، وحيث إن $\{i\},\{j\}\in 2^N$، إذاً $f^{-1}(B)\in 2^N\times 2^N$.

ومنه فإن f دالة قيوسة. من جهة أخرى، لدينا:

$$I_1 = \int_N\int_N f_{x_1} d\mu_2\, d\mu_1 = \int_N [(1+2^{-x_1})\mu_2(\{x_2\}) + (-1-2^{-x_1})\mu_2(\{x_2\}) + 0]d\mu_1$$
$$= \int_N (1+2^{-x_1} - 1 - 2^{-x_1})d\mu_1 = 0$$
$$I_2 = \int_N\int_N f_{x_2} d\mu_1\, d\mu_2 = \int_{N_1} [(1+2^{-x_2})\mu_1(\{x_1\}) + (-1-2^{-x_2-1})\mu_1(\{x_1\}) + 0]d\mu_2$$
$$= \int_N (1+2^{-x_2} - 1 - 2^{-x_2-1})d\mu_2 = \sum_{x_2=1}^{\infty}\frac{1}{2^{x_2+1}} = \frac{1}{2}$$

أي أن $I_1 \neq I_2$.

نستنتج أن شرط كون الدالة f غير سالبة أو كمولة ضروري لصحة مبرهنة فوبيني.

4- ليكن (X_1,M_1,μ_1) و (X_2,M_2,μ_2) فضاءي قياس، ولتكن f كمولة على $X_1\times X_2$ بالنسبة للقياس الجداء $\mu_1\times\mu_2$. عندئذ، استناداً إلى نتيجة التمرين رقم **5** من الفصل الخامس، نجد أن:

$$\{(x_1,x_2): f(x_1,x_2)\neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$$

حيث $E_i \in M_1\times M_2$، و $(\mu_1\times\mu_2)(E_i) < +\infty$ من أجل $i=1,2,\ldots$.

ينتج أن:

$$\int_{X_1\times X_2} fd(\mu_1\times\mu_2) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i} fd(\mu_1\times\mu_2) + \int_{(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)^c} fd(\mu_1\times\mu_2)$$
$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i} fd(\mu_1\times\mu_2) + 0$$

من جهة أخرى، أياً يكن $(x_1,x_2)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$، فإن:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)_{x_2}\times(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)_{x_1}$$

فإذا اعتبرنا مقصور $\mu_1\times\mu_2$ على الجبر التام $(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) \cap M_1\times M_2$، فإن القياس الناتج يكون σ- منتهياً، ويكون بالتالي كل من مقصور μ_1 على $M_1\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)_{x_2}$،

ومقصور μ_2 على $M_2 \cap (\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i)_{x_1}$ قياساً σ− منتهياً. (انظر التمرين رقم**1**). عندئذ تصبح مبرهنة فوبيني من أجل مقصور الدالة الكمولة f على $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i$، وبالتالي من أجل f على $X_1 \times X_2$.

6-لتكن f دالة معرفة على $N \times N$ كما يلي:

$$f(i,j) = a_{ij} \quad , \; i,j = 1,2,\ldots$$

عندئذ تكون f دالة قيوسة (ارجع إلى التمرين رقم **2**)، وغير سالبة. وبما أن فضاء القياس $(N,2^N,\mu)$، حيث μ قياس العدّ، فضاء قياس σ− منته، إذاً تصبح مبرهنة فوبيني من أجل الدالة f. أي أن:

$$\int_N\int_N f_i \, d\mu \, d\mu = \int_N\int_N f_j \, d\mu \, d\mu \int_{N\times N} f \, d(\mu\times\mu)$$

حيث f_i وf_j مقطعا الدالة f وفق i و j على الترتيب. بتعبير آخر:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

الفصل السابع:

2− i) ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ تحقق المتباينة $|f_i(x) - 0| = \frac{1}{i} < \varepsilon$ من أجل كل $i \geq i_0$، حيث i_0 أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من $\frac{1}{\varepsilon}$ ، ومن أجل كل x من المجال $[1,\infty[$. أي أن $f_i \xrightarrow[i]{u} 0$ على المجال $[1,\infty[$.

ii) لدينا:

$$\int_{[1,+\infty[} f_i \, d\lambda = \int_{[1,i]} f_i \, d\lambda + \int_{]i,+\infty[} f_i \, d\lambda \;, \; \forall i \geq 1$$
$$= \frac{1}{i}\lambda([1,i]) + 0.\lambda(]i,+\infty[)$$
$$= \frac{i-1}{i}$$

ينتج أن:

$$\lim_i \int_{[1,+\infty[} f_i \, d\lambda = \lim_i \frac{i-1}{i} = 1$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_i \int_{[1,+\infty[} f_i \, d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{[1,+\infty[} \lim_i f_i \, d\lambda$$

نستنتج أن التقارب بانتظام لمتتالية من الدوال ليس كافياً بوجه عام من أجل تحقق المساواة:

$$\lim_i \int_A f_i \, d\lambda = \int_A \lim_i f_i \, d\lambda$$

4− من العلاقة:

$$\left|f_i^+ - f^+\right| \leq |f_i - f| \quad , \; \forall i \geq 1$$

ينتج أنه أياً يكن $\varepsilon > 0$، فإن:

$$\{x : \left|f_i^+(x) - f^+(x)\right| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

إذاً:

$$0 \leq \mu(\{x : \left|f_i^+(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$

وحيث إن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، إذاً:

$$\lim_i \mu(\{x : \left|f_i^+(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\}) = 0$$

أي أن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f^+$.

بطريقة مشابهة تماماً ، نجد أن $f_i^- \xrightarrow[i]{\mu} f^-$، وذلك بعد الاستفادة من العلاقة:

$$|f_i^- - f^-| \le |f_i - f| \quad , \quad \forall i \ge 1$$

6- لنضع:

$$A_i = \{x : \left|\frac{x}{i}\right| \ge 1\} \quad , \quad \forall i \ge 1$$

عندئذ نجد أن:

$$\lambda(A_i) = \lambda(\{x : |x| \ge i\})$$
$$= \lambda(\{x : x \ge i\} \cup \{x : x \le -i\})$$
$$= +\infty$$

وذلك أياً يكن $i \ge 1$. الأمر الذي يعني أن $(f_i)_{i\ge1}$ لا تتقارب بالقياس λ من الدالة الصفرية على R.

أخيراً، إذا لاحظنا أن $\frac{x}{i} \xrightarrow[i]{} 0$ من أجل كل x من R، فإننا نستنتج أن التقارب النقطي لمتالية من الدوال لا يقتضي تقاربها بالقياس بوجه عام.

8- i) بما أن $f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$، إذاً أياً يكن $\varepsilon > 0$ فإن:

$$\lim_i \mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0$$

وبالتالي أياً يكن $\delta > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) < \delta \quad , \quad \forall i \ge i_0$$

ومنه فإن:

$$\mu(\{x : |f_{i_j}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) < \delta \quad , \quad \forall i_j \ge i_0$$

أي أن $f_{i_j} \xrightarrow[j]{\mu} f$.

ii) ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $(f_i)_{i\ge1}$ متالية لكوشي بالقياس، إذاً من أجل كل $\delta > 0$ يوجد عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\mu(\{x : |f_i(x) - f_j(x)| \ge \varepsilon\}) < \delta$$

وذلك أياً يكن $i, j \ge i_0$. عندئذ إذا كانت $(f_{i_m})_{m\ge1}$ متالية جزئية من المتالية $(f_i)_{i\ge1}$، فإن:

$$\mu(\{x : |f_{i_m}(x) - f_{i_n}(x)| \ge \varepsilon\}) < \delta$$

وذلك من أجل $i_m, i_n \ge i_0$. أي أن $(f_{i_m})_{m\ge1}$ متالية لكوشي بالقياس.

10- ليكن $p < 1$ و $\mu = \lambda$. عندئذ:

$$(\int_R |f|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = (\int_R |\chi_{[0,1]}|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = 1.\lambda([0,1]) = 1$$

$$(\int_R |g|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = (\int_R |\chi_{[1,2]}|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = 1.\lambda([1,2]) = 1$$

$$(\int_R |f+g|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = (\int_R |\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]}|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}}$$
$$= [\int_{[0,1[} (\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]})^p d\lambda +$$
$$\int_{[1,2]} (\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]})^p d\lambda]^{\frac{1}{p}}$$
$$= (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} .$$

ينتج أن:

$$(\int_R |f+g|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} > (\int_R |f|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}} . (\int_R |g|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}}$$

أي أن متباينة مينكوفسكي غير صحيحة من أجل $p < 1$.

12- لدينا:

$$|f|^p = |f - f_i + f_i|^p \le 2^p |f - f_i|^p + 2^p |f_i|^p$$

وذلك أياً يكن $i \geq 1$. إذاً:

$$\int_X |f|^p d\mu \leq 2^p \int_X |f - f_i|^p d\mu + 2^p \int_X |f_i|^p d\mu$$

من جهة أخرى، بما أن $\lim_i \int_X |f - f_i|^p d\mu = 0$، إذاً يوجد عدد طبيعي i_0 بحيث يكون:

$$\int_X |f - f_i|^p d\mu < 1 \quad , \quad \forall i \geq i_0$$

كذلك بما أن $|f_i|^p$ كمولة من أجل $i \geq 1$، إذاً $\int_X |f_i|^p d\mu < +\infty$ من أجل $i \geq 1$.

ينتج أن:

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty$$

أي أن $|f|^p$ كمولة على X. وحيث إن:

$$\lim_i \int_X |f - f_i|^p d\mu = 0$$

إذاً :

$$. f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$$

14- من الواضح أن المتتالية $(f_i)_{i\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة :

$$f_i(x) = x^{-\frac{1}{p}} \ , \ \forall x \in]0,1], \forall i \geq 1$$

تتقارب بالوسط من المرتبة 1، من الدالة $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ على المجال $]0,1]$، ذلك لأن f دالة كمولة على المجال $]0,1]$، ($\int_{]0,1]} x^{-\frac{1}{p}} d\lambda = \frac{p}{p-1}$)، كما أن:

$$\lim_i \int_{]0,1]} \left| x^{-\frac{1}{p}} - x^{-\frac{1}{p}} \right| d\lambda = 0$$

في حين أن الدالة $|f_i|^p = \frac{1}{x}$ ليست كمولة على المجال $]0,1]$، وذلك أياً يكن $i \geq 1$ إذ إن:

$$\int_{]0,1]} |f_i|^p d\lambda = \int_{]0,1]} \frac{1}{x} d\lambda = \int_0^1 \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (-\ln \varepsilon)$$
$$= +\infty$$

ينتج أن $(f_i)_{i\geq 1}$ تتقارب بالوسط من المرتبة 1 و لا تتقارب بالوسط من المرتبة p، $p>1$.

المراجع

المراجع العربية:

(1) د. صلاح أحمد، د. بشير قابيل: "نظرية القياس" — دمشق — صدر بإشراف لجنة الإنجاز. (1990-1991).

المراجع الأجنبية:

(1) **C.D.ALIPRANTIS – O.BURKISHAW:**
Principles of Real Analysis. Elsevier North Holland,Inc, New York. (1981).

(2) **T.M.APOSTOL:**
Mathematical Analysis. 2nd . Ed. Reading, MA: Addison-Weasley. (1974).

(3) **G.de BARRA:**
Measure Theory And Integration. Wiley Eastern Limited.(1991).

(4) **C.BURRILL:**
Measure, Integration and Probability. Mc Graw-Hill, New York.(1972).

(5) **N.DUNFORD-J.T.SCHWARTZ:**
Linear Operators. Part I: General Theory. Inter science Publishers, Inc, New York. (1957).

(6) **P.R. HALMOS:**
Measure Theory. D. Van. Nostrand. Company, Inc, Princeton, N.J.(1950).

(7) **A.N.KOLMOGOROV – S.V.FOMIN:**
Introductory To Real Analysis. General Publishing Company. Ltd. Toronto. (1970).

(8) **H.L.ROYDEN:**
Real Analysis. The Macmillan Company, New York. (1963).

(9) **W.RUDIN:**
Real And Complex Analysis. Mc Graw- Hill Book Company, Inc, New York. (1966).

(10) **R.L. WHEEDEN – A.ZYGMUND:**
Measure And Integral, An Introduction To Real Analysis. Marcel Dekker Inc, New York. (1977).

الرمز	المدلول
2^X	مجموعة أجزاء X
ϕ	المجموعة الخالية
$(\,.\,)_i$	متتالية
$\in$	ينتمي إلى
$\notin$	لا ينتمي إلى
$A_1 \cup A_2$، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	اتحاد
$A_1 \cap A_2$، $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	تقاطع
$A-B$	فرق A عن B (متممة A بالنسبة إلى B)
A^c	متممة A
$\{x:\dots\}$	مجموعة العناصر x المحققة
B_X	جبر بوريل في X
$\sigma(A)$	الجبر التام الأصغري على الصف A
$A \subseteq B$	A محتواة في B أو تساويها
R	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\overline{R}$	المجال الموسّع للأعداد الحقيقية
▲	نهاية البرهان
R^n	الفضاء الإقليدي ذو الـ n بعداً
$\overline{R}^n$	الجداء الديكارتي لـ $\overline{R}$ بنفسها n مرة
I^n	صف المجالات المحدودة في R^n، من الشكل $]a,b]$، $a,b \in R^n$، $(n \geq 1)$
$X_1 \times X_2$	الجداء الديكارتي لـ X_1 و X_2

(*) تم ترتيب الرموز وفقاً لتسلسل ورودها.

$A \times B$	مستطيل بعداه A و B : $A \subseteq X_1$ و $B \subseteq X_2$
$D_1 \times D_2$	الحلقة الجداء للحلقتين D_1 و D_2
$F_1 \times F_2$	الجبر الجداء للجبرين F_1 و F_2
$M_1 \times M_2$	الجبر التام الجداء للجبرين التامين M_1 و M_2
(X,M)	فضاء قيوس (X مجموعة غير خالية، و M جبر تام في X)
$(X_1 \times X_2, M_1 \times M_2)$	الفضاء القيوس الجداء للفضاءين القيوسين (X_1,M_1) و (X_2,M_2)
A_{x_1}	مقطع المجموعة $A(\subseteq X_1 \times X_2)$ وفق x_1 من X_1
A_{x_2}	مقطع المجموعة $A(\subseteq X_1 \times X_2)$ وفق x_2 من X_2
τ	دالة مجموعة، قياس على حلقة
μ	قياس
μ- قيوسة	قيوسة بالنسبة لـ μ
(X,M,μ)	فضاء قياس
N	مجموعة الأعداد الطبيعية
μ- همولة	همولة بالنسبة لـ μ
$\lim$	نهاية
$\overline{\lim}$	نهاية عليا
$\underline{\lim}$	نهاية سفلى
$\overline{\mu}$	القياس المتمم للقياس μ
$\overline{M}$	الجبر التام المتمم للجبر التام M
$(X,\overline{M},\overline{\mu})$	فضاء القياس المتمّم لفضاء القياس (X,M,μ)
μ^*	قياس خارجي
μ^*- قيوسة	قيوسة بالنسبة لـ μ^*

M^*	صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـــ μ^*
λ	قياس لوبيغ على R
λ^*	قياس لوبيغ الخارجي على R
$A+\alpha$	المجموعة الناتجة عن المجموعة A بالسحاب معيّن بالعدد α.
$-A$	$\{x:-x\in A\}$
C	مجموعة كانتور
$\overline{A}$	لصاقة A
$\mathring{A}$	داخل A
μ_f	قياس لوبيغ- ستيلجس المعيّن بدالة التوزيع f
λ^n	قياس لوبيغ على R^n
sup	الحد الأعلى الأصغري
inf	الحد الأدنى الأعظمي
$f^{-1}(A)$	الصورة العكسية وفق f للمجموعةA
χ_A	الدالة المميّزة للمجموعةA
$\max\{\ \}$	أكبر عناصر المجموعة
$\min\{\ \}$	أصغر عناصر المجموعة
f^+	دالة الجزء الموجب للدالة f
f^-	دالة الجزء السالب للدالة f
$f=f_1+if_2$	دالة عقدية، قسمها الحقيقي f_1، وقسمها التخيلي f_2
$\underline{R}(P)$	مجموع ريمان السفلي بالنسبة للتجزئة P
$\overline{R}(P)$	مجموع ريمان العلوي بالنسبة للتجزئة P
$\overline{\int_a^b} f(x)dx$	تكامل ريمان العلوي

$\underline{\int_a^b} f(x)dx$	تكامل ريمان السفلي
$\int_a^b f(x)dx$	تكامل ريمان للدالة f على [a,b]
$\mu_1 \times \mu_2$	القياس الجداء للقياسين μ_1 و μ_2
$(X_1\times X_2, M_1\times M_2, \mu_1\times\mu_2)$	فضاء القياس الجداء
$f_{x_1}(x_1,x_2)$	مقطع الدالة f وفق x_1 من X_1
$f_{x_2}(x_1,x_2)$	مقطع f وفق x_2 من X_2
$\int\limits_{X_1\times X_2}\int f d\mu_2 d\mu_1$, $\int\limits_{X_1\times X_2}\int f d\mu_1 d\mu_2$	التكاملان المكرّران لـــ f على $X_1\times X_2$
$\int\limits_{X_1\times X_2} f\, d(\mu_1\times\mu_2)$	تكامل f بالنسبة للقياس الجداء $\mu_1\times\mu_2$
$f_i \xrightarrow[i]{u} f$	$(f_i)_i$ تتقارب بانتظام من f
$f_i \xrightarrow[i]{a.u} f$	$(f_i)_i$ تتقارب بانتظام تقريباً من f
$f_i \xrightarrow[i]{\mu} f$	$(f_i)_i$ تتقارب بالقياس μ من f
$f_i \xrightarrow[i]{m^p} f$	$(f_i)_i$ تتقارب بالوسط من المرتبة p، من الدالة f.
$d(x,y)$	المسافة بين النقطتين x و y
$\Rightarrow$	يقتضي
$\lVert\cdot\rVert$	نظيم
$L^\infty(\mu)$،$L^p(\mu)$	فضاءات دوال
$\lVert\cdot\rVert_p$	النظيم على L^p
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	النظيم على L^∞
l^p	فضاء متتاليات

ثبت المصطلحات

عربي – انكليزي

- أ -

اتحاد	union
عدود	countable
منتهٍ	finite
استقراء رياضي	mathematical induction
أصغري	minimal
جبر تام أصغري	minimal σ-algebra
الجبر التام الجداء	product σ-algebra
الجبر التام المولد	generated σ algebra
الجبر الجداء	product algebra
الجزء السالب	negative part
الجزء الموجب	positive part
الحد الأدنى الأعظمي	infimum
الحد الأعلى الأساسي	essential supremum
الحد الأعلى الأصغري	supremum
الحلقة الأصغرية	minimal ring
الحلقة الجداء	product ring
صف مطرد	monotone class
أصغري	minimal
القياس الجداء	product measure
المجال الموسع للأعداد الحقيقية	extended real number system

- ب -

بناخ (فضاء بناخ)	Banach space
بانتظام	uniformly
تقريبا	almost

بُعد	dimension
بوريل	Borel
جبر	algebra
قياس	measure
بوريلية (دالة بوريلية)	function
(مجموعة بوريلية)	set

- ت -

تام	complete
تام الجمعية	σ-additive
تام (فضاء قياس تام)	complete measure space
فضاء متري	metric space
قياس	measure
تجزئة	partition
تطبيق	mapping
مستمر	continuous
تقارب	convergence
بالقياس	in measure
بالوسط	in mean
بانتظام تقريبا	almost uniformly
حيثما كان تقريبا	almost everywhere
منتظم	uniform
نقطي	pointwise
تقاطع	intersection
عدود	countable
منتهٍ	finite
تكامل	integral
بالنسبة لقياس	relative to a measure
ثنائي	double

Riemann	ريمان
Lebesgue	لوبيغ
improper	معتل
convergent	متقارب
absolutely convergent	متقارب إطلاقا
iterated	مكرر
extension	**تمديد**
topological space	**توبولوجي(فضاء توبولوجي)**
topology	**توبولوجيا**
metric	المسافة
induced	مشتقة
lemma	**توطئة**
algebra	**جبر**
Borel	بوريل
σ-algebra	تام
product space	**جداء (فضاء جداء)**
Field (numerical)	**حقل (حقل عددي)**
of real numbers	الأعداد الحقيقية
of complex numbers	الأعداد العقدية
ring	**حلقة**
minimal	أصغرية
almost everywhere	**حيثما كان تقريبا**

- خ -

property	**خاصة**

- د -

interior	**داخل**
of a set	**مجموعة**

function	دالة
distribution	توزيع
simple	بسيطة
Borel	بوريلية
constant	ثابتة
real	حقيقية
complex	عقدية
nonnegative	غير سالبة
nonmeasurable	غير قيوسة
measurable	قيوسة
integrable	كمولة
increasing	متزايدة
decreasing	متناقصة
set	مجموعة
of bounded variations	محدودة التغيرات
distance	مسافة
continuous	مستمرة
characteristic	مميزة

- ر -

Radon measure	رادون (قياس رادون)

- س -

σ-finite	σ- منتهٍ
measure space	فضاء قياس
measure	قياس

- ش -

Schwarz inequality	شوارتز (متباينة شوارتز)

- ص -

صفة	class
تكافؤ	equivalence
مطرد	monotone
صورة	image
عكسية	inverse

-ع-

عادي	rational
عدد	number
أصم	irrational
عادي	rational
حقيقي	real
عقدي	complex
علاقة	relation
تكافؤ	equivalence
عنصر	element

-غ-

غير سالب	nonnegative
غير عدودة	noncountable
غير قيوسة	nonmeasurable
غير منتهية (منتهٍ)	infinite
غطاء قيوس	measurable cover

- ف -

فضاء	space
احتمالي	probability
باناخ	Banach

توبولوجي	topological
جداء	product
قياس	measure
قياس تام	complete measure
قياس جداء	product measure
قياس σ- منتهٍ	σ-finite measure
قياس مجرد	abstract measure
قياس منتهٍ	finite measure
قيوس	measurable
قيوس جداء	product measurable
متجهي	vector
متجهي حقيقي	real vector
متجهي عقدي	complex vector
متري	metric
متري تام	complete metric
منظم	normed
فوق مستوٍ	hyperplane

- ق -

قطر	diameter
تجزئة	of a partition
قياس	measure
احتمال	probability
العدّ	counting
بوريلي	Borel
جداء	product
خارجي	outer
خارجي مولّد	generated outer
رادون	Radon

σ- منته	σ-finite
لوبيغ	Lebesgue
لوبيغ الخارجي	Lebesgue outer
لوبيغ-ستيلجس	Lebesgue-Stieltjes
منته	finite
قيمة صغرى	**minimum value**
قيوس (قيوسة)	**measurable**
تطبيق	mapping
دالة	function
مجموعة	set
فضاء	space

-ك-

كانتور (مجموعة كانتور)	**Cantor set**
كثيفة (مجموعة كثيفة)	**dense set**
كوشي(متتالية كوشي)	**Cauchy sequence**
كمولة (دالة كمولة)	**integrable function**

-ل-

لا يتأثر بالانسحاب	**translation invariant**
لوبيغ (تكامل لوبيغ)	**Lebesgue integral**
لوبيغ(قياس لوبيغ)	**Lebesgue measure**

-م-

مبرهنة	**theorem**
التقارب الراجح	dominated convergence
التقارب المطرد	monotone convergence
التمديد	extension
ليغوروف	Egoroff
فاتو	Fatou

فوبيني	Fubini
كارا ثيودوري	Carathéodory
هان	Hahn
هين- بوريل	Heine- Borel
متباينة	**inequality**
المثلث	triangle
شوارتز	Schwarz
مينكوفسكي	Minkowski
هولدر	Holder
متتالية	**sequence**
جزئية	subsequence
متزايدة	increasing
متزايدة حيثما تقريبا	increasing almost everywhere
متقاربة	convergent
متقاربة بالقياس	convergent in measure
متقاربة بالوسط	convergent in mean
متقاربة بانتظام	uniformly convergent
متقاربة بانتظام تقريبا	almost uniformly convergent
متقاربة حيثما كان تقريبا	convergent almost everywhere
متقاربة نقطيا	pointwise convergent
متناقصة	decreasing
متسلسلة	**Series**
متقاربة	convergent
متقاربة إطلاقا	absolutely convergent
مجال	**interval**
غير محدود	unbounded
محدود	bounded
مغلق	closed
مفتوح	open

نصف مفتوح	half-open
مجموعة	set
بوريلية	Borel
عدودة	countable
غير عدودة	noncountable
غير قيوسة	nonmeasurable
غير منتهية	infinite
قيوسة	measurable
كانتور	Cantor
كثيفة	dense
متراصة	compact
محدودة	bounded
مغلقة	closed
مفتوحة	open
μ- قيوسة	μ-measurable
*μ- قيوسة	μ*-measurable
منتهية	finite
μ - همولة	μ-negligible
جزئية	subset

- ن -

نظامي (قياس بوريلي نظامي)	regular Borel measure
نظيم	norm

- هـ -

هان (مبرهنةهان)	Hahn theorem
هين- بوريل (مبرهنة هين - بوريل)	Heine-Borel theorem
هولدر (متباينة)	Holder inequality

اللجنةالعلمية

الدكتور محمد الموشي	أستاذ في قسم الرياضيات- جامعة تشرين
الدكتور حسن بدور	أستاذ في قسم الرياضيات- جامعة تشرين
الدكتور اسكندر علي	أستاذ في قسم الرياضيات- جامعة تشرين

المدقق اللغوي

الدكتور عيسى فارس	مدرس في قسم اللغة العربية بكلية الآداب والعلوم الإنسانية – جامعة تشرين

مدونة ملحوظة