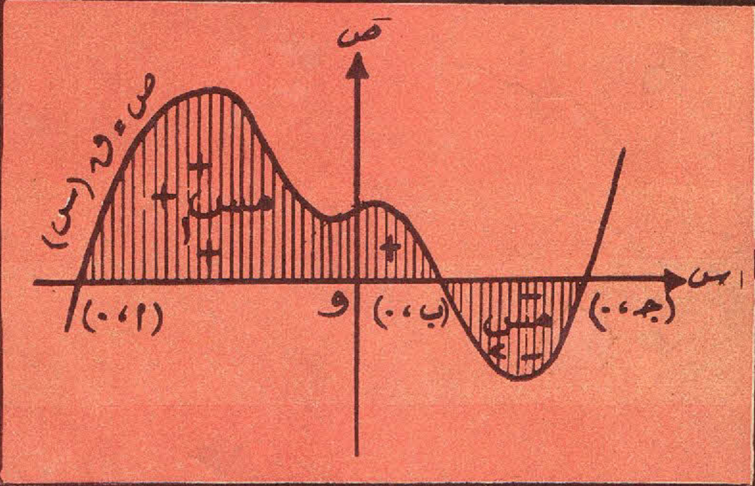
رحيم العذاري
كامل موسى الناصري

تمارين وأمثلة محلولة في

الرياضيات المعاصرة

وافقت مديرية الشؤون الفنية العامة على طبع هذا الكتاب في
١٩٧٦/٢/٢٤ تحت عدد ٤/٥٠/٧٢٩



يشتمل على :

٩٩٥ سؤالاً مع اجوبتها

٣١٥ مثالاً محلولاً

النظام الاحداثي للمستقيم

١ـ انتخب نظاما احداثيا لمستقيم وظلل كلا من المجموعات التالية :ـ

هـ١ = {س : س نقطة ، ق(س) ≥ ١}

هـ٢ = {س : س نقطة ، ـ٢ ≤ ق(س) ≤ ٣}

هـ٣ = {س : س نقطة ، |ق(س)| ≤ ٢}

هـ٤ = {س : س نقطة ، [ق(س)]٢ ≤ ٤}

هـ٥ = {س : س نقطة ، [ق(س)]٢ ≥ ٤}

هـ٦ = {س : س نقطة ، [ق(س)]٢ ـ ٧ [ق(س)] + ١٢ ≤ صفر}

هـ٧ = {س : س نقطة ، ـ٢ ق(س) + ٤ < صفر}

هـ٨ = {س : س نقطة ، [ق(س)] < صفر}

هـ٩ = {س : س نقطة ، [ق(س)]٢ + ١ > ق(س)}

هـ١٠ = {س : س نقطة ، [ق(س)] [ق(س) + ٢] [ق(س) ـ ١] ≥ صفر}

هـ١١ = {س : س نقطة ، ق(س) / (ق(س) + ١) > ٢ حيث ق(س) ≠ ـ١}

هـ٢ ∩ هـ٣ ، هـ٩ ∩ هـ١٠

٢ـ لتكن كل من حـ ، د ∈ المستقيم ل بحيث ق(حـ) = ـ٢ ، ق(د) = ٧ بالنسبة للنظام الاحداثي للمستقيم ل . فجد المسافة بين حـ ، د

٣ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق . اذا كانت المسافة بين النقطتين م ، ن = ٥ ا وحدة فاذا كان ق(م) = ـ٢ فجد ق(ن) حيث م ، ن ∈ المستقيم د

٤ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق . اذا كانت ق(ن) = ٧ ، ق(ل) = ـ٥ . فجد ق(هـ) بحيث المسافة بين ل ، هـ تساوى المسافة بين هـ ، ن حيث ن ، هـ ، ل ∈ المستقيم د .

٥ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق . اذا كان ق(ن) = ـ٢ ، ق(م) = ٧ . فجد ق(هـ) بحيث ان نسبة المسافة بين ن ، هـ الى المسافة بين هـ ، م = ٢/٣ ، حيث ن ، م ، هـ ∈ المستقيم د .

النظام الاحداثي للمستوى

١ـ اثبت ان النقاط (١ ، ٤) ، (٣ ، ـ ٢) ، (ـ ٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة .

٢ـ اذا كانت النقاط (ـ ٢ ، ـ ١٣) ، (صفر ، ـ ٥) ، (٣ ، ص) تقع على استقامة واحدة فجد قيمة ص .

٣ـ اذا كانت النقاط (٢ ، ـ ٣) ، (ـ ٦ ، ٥) ، (س ، ـ ٥) تقع على استقامة واحدة فجد قيمة س .

٤ـ اذا كانت النقاط (٣ ، ٧) ، (ـ ١ ، ١) ، (س ، ص) على استقامة واحدة فما هي العلاقة بين س ، ص .

٥ـ جد احداثي النقطة التي تنتمي الى المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (ـ ٤ ، ـ ٧) .

ميل ومعادلة المستقيم

ملاحظات

اولا ـ لكل مستقيم م توجد ثلاثة اعداد حقيقية أ ، ب ، حـ بحيث أ ، ب لايساويان معا صفرا وان م = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، أس + ب ص + حـ = ٠ }

وبعبارة اخرى :

ان معادلة كل مستقيم تكون بالصيغة أس + ب ص + حـ = صفر ، حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح وان أ ، ب لايساويان معا صفرا . وكل معادلة بهذه الصورة تمثل خطا مستقيما . وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة العامة لمستقيم .

ومن هذه المعادلة نلاحظ مايلي :ـ

١ـ عندما حـ = صفر فان هذه المعادلة تصبح أس + ب ص = صفر وهي معادلة مستقيم مار بنقطة الاصل .

٢ـ عندما ب = صفر ، أ ≠ صفر ، حـ ≠ صفر فان المعادلة تصبح :ـ

أس + حـ = صفر

اى ان س = $\frac{-حـ}{أ}$ وهي تمثل معادلة مستقيم يوازى المحور الثاني

٣ـ عندما أ = صفر ، ب ≠ صفر ، حـ ≠ صفر فان المعادلة تصبح :ـ

ب ص + حـ = ٠

اى ص = $\frac{-حـ}{ب}$ وهي تمثل معادلة مستقيم يوازى المحور الاول .

٤ـ عندما $أ$ = صفر ، $ب \neq$ صفر ، $حـ$ = صفر فان المعادلة تصبح :ـ
$ب ص$ = صفر اى $ص$ = صفر وهي معادلة المحور الاول .
٥ـ عندما $ب$ = صفر ، $أ \neq$ صفر ، $حـ$ = صفر فان المعادلة تصبح :ـ
$أ س$ = صفر اى $س$ = صفر وهي معادلة المحور الثاني .
٦ـ عندما $أ \neq$ صفر ، $ب \neq$ صفر ، $حـ \neq$ صفر فان المعادلة تصبح :ـ

$$\frac{أ}{-حـ} س + \frac{ب}{-حـ} ص = ١$$

اى

$$\frac{س}{\frac{-حـ}{أ}} + \frac{ص}{\frac{-حـ}{ب}} = ١$$

اى $\frac{س}{\text{المقطع السيني}} + \frac{ص}{\text{المقطع الصادى}} = ١$ معادلة مستقيم بدلالة المقطعين السيني والصادى

ثانيا ـ ميـل المستقيم

١ـ ان المعادلة $أ س + ب ص + حـ$ = صفر حيث $أ$ ، $ب$ ، $حـ \in ح$ وان $أ$ ، $ب$ لايساويان صفرا معا . هي المعادلة العامة لمستقيم .
من هذه المعادلة اذا كان $ب \neq$ صفر
فان $ب ص = - أ س - حـ$

$ص = \frac{-أ}{ب} س - \frac{حـ}{ب}$ بقسمة الطرفين على $ب$

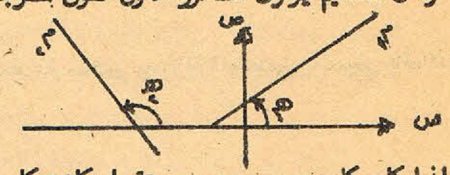
$ص = ل س + ك$ حيث $\frac{-أ}{ب} = ل \in ح$ ، $\frac{-حـ}{ب} = ك \in ح$

يسمى $ل$ ميل المستقيم ، $ك$ هو المقطع الصادى
اما في حالة $ب$ = صفر فان المستقيم يوازى المحور الثاني
وان $\frac{أ}{ب}$ في هذه الحالة $\notin ح$ لان لايوجد نظير بالنسبة لعملية الضرب للعدد صفر في مجموعة الاعداد الحقيقية ولذلك فالكلام عن ميل المحور الثاني لامعنى له .
من هذا حصلنا على ان ميل المستقيم الذى لايوازى المحور الثاني اذا علمت معادلته = $\frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$ ، ومقطعه الصادى = $\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } ص}$
وان المعادلة $ص = ل س + ك$ هي المعادلة العامة لاى مستقيم لايوازى المحـــور الثاني .

٢ـ ميل المستقيم غير الموازى للمحور الثاني والـذى يمر بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) يساوى $\dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_١ \neq س_٢$

٣ـ في حالة تعامد المحورين فان ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم مواز للمحور الاول .

ومن الجدير بالذكر انه اذا كان الميل موجبا فالزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول تكون حادة .
واذا كان الميل سالبا فالزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول تكون منفرجة .



ميل $م_١$ = ظا $هـ_١$
ميل $م_٢$ = ظا $هـ_٢$

٤ـ اذا كان كل من س ، ص مستقيما وكانت كل من أ ، ب ، حـ نقطة بحيث أ ، ب $\in$ س و ب ، حـ $\in$ ص وكان ميل س = ميل ص فان س = ص او ان النقاط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

ثالثا :

ليكن $م_١$ المستقيم الذى معادلته $أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠$.

وليكن $م_٢$ المستقيم الذى معادلته $أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ = ٠$.

حيث ان كلا من $م_١$ ، $م_٢$ في المستوى الاقليدى ك .

١ـ $م_١ \cap م_٢$ = مجموعة احادية $\Longleftrightarrow$ $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ \neq$ صفر

ولايجاد نقطة التقاطع نحل معادلتيهما آنيا .

$م_١ \cap م_٢ = \phi \Longleftrightarrow م_١ // م_٢$ و $م_١ \neq م_٢$

٢ـ أو $م_١ // م_٢$ و $م_١ \neq م_٢$ $\Longleftrightarrow$ ($أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١$ = صفر) و ($أ_١ حـ_٢ - أ_٢ حـ_١ \neq$ صفرا او $ب_١ حـ_٢ - ب_٢ حـ_١ \neq ٠$)

او $م_١ // م_٢$ و $م_١ \neq م_٢$ $\Longleftrightarrow$ ميل $م_١$ = ميل $م_٢$ ، و $حـ_١ \neq حـ_٢$ ، حيث كل من $م_١$ ، $م_٢$ لايوازى المحور الثاني

٣ـ $م_1 = م_2 \Longleftrightarrow أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1 = \text{صفر}$ و ($أ_1 حـ_2 - أ_2 حـ_1 = \text{صفر}$

او $ب_1 حـ_2 - ب_2 حـ_1 = \text{صفر}$)

٤ـ $م_1 \perp م_2 \Longleftrightarrow أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 = \text{صفر}$

او $م_1 \perp م_2 \Longleftrightarrow$ ميل $م_1 \times$ ميل $م_2 = -١$ ، حيث كل من $م_1$ ، $م_2$

لايوازى المحور الثاني .

رابعا :

يكون الشكل الرباعي متوازى اضلاع اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ، او اذا تناصف قطراه ، ويكون مستطيلا اذا كان متوازى اضلاع وحاصل ضرب ميلـــي ضلعين متجاورين فيه = ـ ١ ، ويكون شبه منحرف اذا توازى ضلعان متقابـــلان فيه فقط .

خامساـ

اذا كانت هـ هي الزاوية بين مستقيمين ميلاهما $ل_1$ ، $ل_2$ فان

$$طا\ هـ = \frac{ل_2 - ل_1}{1 + ل_1 ل_2} \quad \text{اذا كان } ل_1 \cdot ل_2 \neq -1$$

اما اذا كان $ل_1 \cdot ل_2 = -1$ فان $هـ = 90^\circ$

تمارين ١ – ١

(١) شفوى

١ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (ــ٢ ، ٥) ويوازى المحور الاول .
٢ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (ــ٢ ، ٥) ويوازى المحور الثاني .
٣ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (ــ٣ ، ٠) ويوازى المستقيم ص = ٣ .
٤ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ــ ٧) ويمر بنقطة الاصل .
٥ــ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويوازى المستقيم ٧ اص + ٢س ــ٥ = ٠
٦ــ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٣ ، صفر)
٧ــ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٠ ، ــ ٣)
٨ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (ــ٣ ، ٦) ، (ــ٣ ، ــ ٨)
٩ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (ــ٣ ، ٦) ، (٨ ، ٦)
١٠ــ جد معادلة المستقيم المار من نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (ــ ٣ ، ٥) مع المستقيم المار بالنقطتين (ــ ٤ ، ٣) ، (ــ ٤ ، ــ ٧) ونقطة الاصل .

(٢) بين ايا من النقاط التالية م$_{١}$ (٣ ، ١) ، م$_{٢}$ (٢ ، ٣) ، م$_{٣}$ (٦ ، ٣) ، م$_{٤}$ (ــ ٣ ، ــ ٣) ، م$_{٥}$ (٣ ، ــ ١) ، م$_{٦}$ (ــ٢ ، ١) تقع على المستقيم الذى معادلته ٣ص ــ ٢س + ٣ = ٠ .

الجواب : النقاط م$_{١}$ ، م$_{٣}$ ، م$_{٤}$ تقع على المستقيم المعلوم

(٣) النقاط ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ ، ل$_{٣}$ ، ل$_{٤}$ ، ل$_{٥}$ تقع على المستقيم الذى معادلتــه ٣ س ــ ٢ ص ــ ٦ = ٠ واحداثياتها على المحور الاول على التوالي ٤ ، ٠ ، ٢ ، ــ ٢ ، ٦ فجد احداثياتها على المحور الثاني .

الجواب : ٣ ، ــ ٣ ، ٠ ، ــ ٦ ، ــ ١٢

(٤) عين نقطتي تقاطع المستقيم ٢ س ــ ٣ ص ــ ١٢ = ٠ مع المحورين وارسم هذا المستقيم .

الجواب : (٦ ، ٠) ، (٠ ، ــ ٤)

(٥) معادلات اضلاع المثلث ب حـ ، أ ب ، أ حـ هي ٤ س + ٣ ص ــ ٥ = ٠ ، س ــ ٣ ص + ١٠ = ٠ ، س ــ ٢ = ٠ ، عين احداثيات رؤوسه .

الجواب : أ (٢ ، ــ ١) ، ب (ــ ١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٤) .

(٦) اكتب معادلة المستقيم الذى ميله ل ومقطعه الصادى ك كما يلي :ــ

(١) ل = $\frac{٢}{٣}$ ، ك = ٣   (٢) ل = ٣ ، ك = صفر

(٣) ل = صفر ، ك = ــ ٢   (٤) ل = ــ $\frac{٣}{٤}$ ، ك = ٣

(٥) ل = ــ ٢ ، ك = ــ ٥ (٦) ل = ــ $\frac{١}{٣}$ ، ك = ــ $\frac{٢}{٣}$

وارسم المستقيم في كل حالة من الحالات اعلاه .

الاجوبة : (١) ٢س ــ ٣ص + ٩ = ٠ ، (٢) ٣س ــ ص = ٠ ،
(٣) ص + ٢ = ٠ ، (٤) ٣س + ٤ص ــ ١٢ = ٠ ، (٥) ٢س + ص + ٥ = ٠ ،
(٦) س + ٣ص ــ ٢ = ٠ .

(٧) احسب الميل ل والمقطع الصادي ك لكل من المستقيمات التالية :ــ
(١) ٥س ــ ص + ٣ = ٠ ، (٢) ٢س + ٣ص ــ ٦ = ٠ ، (٣) ٥س + ٣ص + ٢ = ٠ ، (٤) ٣س + ٢ص = ٠ ، (٥) ص ــ ٣ = ٠ .

الاجوبة : (١) ل = ٥ ، ك = ٣ ، (٢) ل = $\frac{-٢}{٣}$ ، ك = ٢ ، (٣) ل = $\frac{-٣}{٥}$ ،
ك = $\frac{-٢}{٣}$ ، (٤) ل = $\frac{-٣}{٢}$ ، ك = صفر ، (٥) ل = صفر ، ك = ٣

(٨) فيما يلي : احسب الميل ل للمستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية :ــ
(١) (٢ ، ــ٥) ، (٣ ، ٢) (٢) (ــ٣ ، ١) ، (٧ ، ٨)
(٣) (٥ ، ــ٣) ، (ــ ١ ، ٦)

الاجوبة ٧ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، ــ $\frac{٣}{٢}$.

(٩) اكتب معادلات الخطوط المستقيمة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ والموازية للاضلاع المقابلة لها . اذا علمت ان رؤوس المثلث هي النقاط أ (٥ ، ــ٤) ،
ب (ــ١ ، ٣) ، حـ (ــ ٣ ، ــ ٢)

الاجوبة (١) ٥س ــ ٢ص ــ ٣٣ = ٠ ، (٢) س + ٤ص ــ ١١ = ٠ ،
(٣) ٧س + ٦ص + ٣٣ = ٠ .

(١٠) عين نقطتي تقاطع المستقيم المار بالنقطتين أ (ــ١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٣) مع المحورين الاحداثيين .

الجواب (ــ ٧ ، ٠) ، (٠ ، ٢ $\frac{١}{٣}$)

(١١) برهن ان معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) وينتمي الى منحى المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ ، هي أ (س ــ $س_{١}$) + ب (ص ــ $ص_{١}$) = صفر

(١٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ــ ٣) والذى ينتمي الى منحى المستقيم :
(١) ٣س ــ ٧ص + ٣ = ٠ (٢) س + ٩ص ــ ١١ = ٠
(٣) ١٦س ــ ٢٤ص ــ ٧ = ٠ (٤) ٢س + ٣ = ٠ ، (٥) ٣ص ــ ١ = ٠ .

تلميح / حل التمرين بالاستناد الى تمرين ١١ .

(١٣) عين قيم م ، واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(م + ٢) س + (م٢ – ٩) ص + ٣م٢ – ٨م + ٥ = ٠ ، حيث م ∋ ح

(١) موازيا للمحور الاول (٢) موازيا للمحور الثاني (٣) مارا بنقطة الاصل

الاجوبة (١) م = – ٢ ، ٥ ص – ٣٣ = ٠ ، (٢) م = – ٣ ، ٣ س – ٥٦ = ٠

، م٢ = ٣ ، ٥ س + ٨ = ٠ ، (٣) م١ = ١ ، ٣ س – ٨ ص = ٠

، م٢ = ٥/٣ ، ٣٣ س – ٥٦ = ٠

(١٤) عين قيم م ، ن واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(م + ٢ ن – ٣) س + (٢م – ن + ١) ص + ٦م + ٩ = ٠ حيث م

، ن ∋ ح

موازيا لمحور السينات ومقطعه الصادى = – ٣

الجواب / م = ٧ ، ن = –٢ ، ص + ٣ = صفر

(١٥) عين قيم م ، ن واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(٢م – ن + ٥) س + (م + ٣ ن – ٢) ص + ٢م + ٧ ن + ١٩ = صفر ،

حيث م ، ن ∋ ح موازيا لمحور الصادات ومقطعه السيني = ٥

الجواب : م = – ٤ ، ن = ٢ ، س – ٥ = صفر

(١٦) فيما يلي برهن تقاطع كل زوج من المستقيمات التالية وجد نقطة التقاطع .

(١) س + ٥ ص – ٣٥ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص – ٢٧ = ٠

(٢) ١٤ س – ٩ ص – ٢٤ = ٠ ، ٧ س – ٢ ص – ١٧ = صفر

(٣) ١٢ س + ١٥ ص – ٨ = ٠ ، ١٦ س + ٩ ص – ٧ = صفر

(٤) ٨ س – ٢٣ ص – ١٩ = ٠ ، ١٢ س + ٥٥ ص – ١٩ = ٠

(٥) ٣ س + ٥ = صفر ، ص – ٢ = صفر

الاجوبة (٥ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (١/٤ ، ١/٣) ، (٢ ، – ١/١١) ، (–٥/٣ ، ٢)

(١٧) فيما يلي برهن تساوى كل زوج من المستقيمات التالية :–

(١) ٣ س + ٥ ص – ٤ = ٠ ، ٦ س + ١٠ ص – ٨ = ٠

(٢) س – √٢ ص = صفر ، √٢ س – ٢ ص = صفر

(٣) √٣ س – ١ = صفر ، ٣ س – √٣ = صفر

(١٨) جد قيمة كل من ا ، ب لكي يكون المستقيمان ا س – ٢ ص – ١ = ٠ ،

٦ س – ٤ ص – ب = صفر حيث ا ، ب ∋ ح

(١) متقاطعين (٢) متوازيين (٣) متساويين (٤) متعامدين

الاجوبة (١) ا ≠ ٣ (٢) ا = ٣ ، ب ≠ ٢ (٣) ا = ٣ ، ب = ٢

(١٩) جد قيمة كل من أ ، ب لكي يكون المستقيمان أ س + ٨ ص + ب = ٠ ، ٢ س + أ ص - ١ = ٠
(١) متوازيين وغير متساويين (٢) متساويين (٣) متعامدين
الاجوبة (١) أ = -٤ ، ب ≠ ٢ او أ = ٤ ، ب ≠ -٢
(٢) أ = -٤ ، ب = ٢ او أ = ٤ ، ب = -٢
(٣) أ = صفر ، ن اية قيمة

(٢٠) عين قيمة م ∈ ح اذا علمت ان المستقيمات س + ص + ٣ = ٠ ، م س + ص - ١٣ = ٠ ، ٢ س - ص + ٣ = صفر ، مشتركة بنقطة واحدة ثم جد احداثيي نقطة تقاطعهما .
الجواب أ = -٧ ، (-٢ ، -١) .

(٢١) جد قيمة م ∈ ح اذا علمت ان المستقيمين م س + (٢ م + ٣) ص + م + ٦ = ٠ ، (٢ م + ١) س + (م - ١) ص + م - ٢ = صفر ، متقاطعان في نقطة واحدة تقع على محور الصادات .
الجواب م١ = صفر ، م٢ = ٦

(٢٢) اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٧) والذى يقطع جزئين متساويين من المحورين .
(الجواب : س + ص + ٤ = ٠ .

(٢٣) اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) والذى يقطع جزئين متساويين بقيمتيهما المطلقتين من المحورين .
الجواب : س + ص - ٥ = صفر ، س - ص + ١ = ٠ ، ٣ س - ٢ ص = ٠

(٢٤) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليدى
هـ١ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س = صفر ، ص ≥ صفر }
هـ٢ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص = ٣ ، س + ١ ≥ ٠ }
هـ٣ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص > ٣ ، س < -٢ }
هـ٤ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، -٥ ≤ س < ٣ ، -٣ < ص ≤ ٥ }
هـ٥ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، | ٤ - س | ≥ ١ ، ص٢ - ٤ ≥ صفر }
هـ٦ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح⁺ × ح⁺ ، -٢ < ٤ - س < ١ ، ٤ - ص٢ ≥ صفر }
هـ٧ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س٢ > ٣ س ، ٣ ص ≥ ص٢ }
هـ٨ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س + ٣ ص ≥ ٠ ، س٢ - ٤ ≥ صفر }

* هـ$_{٩}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، ٣س − ٤ص ≥ ١٢ ، ص < −٣}

هـ$_{١٠}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح$^{+}$ × ح$^{-}$ ، س < ٢ص ، س + ص ≤ ٤}

هـ$_{١١}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ {−٢} × ح}

هـ$_{١٢}$ = {(س، ص) :   ، س ≤ ص ≤ س + ١ ، (س، ص) ∈ ح × ح}

هـ$_{١٣}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، س ∈ [−٣ ، ٢[∪]٤ ، ٧]
، ص ∈ [−٣ ، −١] ∪]٣ ، ٦[}

هـ$_{١٤}$ = {(س، ص) : ص ≥ |س|} ، هـ$_{١٥}$ = {(س، ص) : |س| + |ص|
> ٢}

هـ$_{١٦}$ = {(س، ص) : |س| + |ص| < ٢} ، هـ$_{١٧}$ = {(س، ص) : |س| − |ص| < ١}

هـ$_{١٨}$ = {(س، ص) : |س + ٢ص| < ٤} ، هـ$_{١٩}$ = {(س، ص) : |س| > |ص|}

هـ$_{٢٠}$ = {(س، ص) : |س| + س > ٢ص} هـ$_{٢١}$ = {(س، ص) : س ≥ ٢ص ، ص
≤ ٢س}

هـ$_{٢٢}$ = {(س ، ص) : س^{٢} ≥ ١ ، ص^{٢} < ٤}

(٢٥) اذا كانت النقطة أ (هـ − ٤ ، ٤ + ٣هـ) ∈ المستقيم المار من النقطتين (−٥ ، ٦) ، (−٥ ، −٢) فجد معادلة المستقيم المار من أ ونقطة الاصل حيث هـ ∈ ح

الجواب س + ٥ص = ٠

(٢٦) لتكن هـ$_{١}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س + ص ≤ ٦}

هـ$_{٢}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س + ص > −٤}

هـ$_{٣}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ٢س − ٣ص > −١٢}

هـ$_{٤}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ٣س − ٢ص ≤ ١٢}

(١) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها هـ$_{١}$ ∩ هـ$_{٢}$ = هـ$_{٥}$

(٢) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها هـ$_{٦}$ = هـ$_{٣}$ ∩ هـ$_{٤}$

(٣) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها هـ$_{٧}$ = هـ$_{٥}$ ∩ هـ$_{٦}$

* (٤) جد المساحة التي تشغلها هـ$_{٧}$

(٢٧) جد ميل المستقيم الذى يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور الاول .

الجواب : $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٢٨) جد ميل المستقيم الذى يصنع مع المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ـ ١) ، (٥ ، ٣) زاوية قدرها ٤٥°

الجواب : $\frac{١}{٧}$ ، ـ ٧

(٢٩) مستقيم ميله $\frac{٣}{٤}$ فما الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور الاول

الجواب ٣٧°

(٣٠) جد ميل المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٤ ، ٧)

الجواب $\frac{٧}{٤}$

(٣١) اثبت ان المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٨) ، (ـ ٢ ، ١) يوازى المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (ـ ٤ ، ـ ٢) .

(٣٢) اثبت ان المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ٥) عمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ١) .

(٣٣) لتكن كل من أ (٦ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (ـ٢ ، ٣) ، د (س ، ٢) نقطة وكان أب // حـ د فجد قيمة س .

(٣٤) اثبت ان المثلث الذى رؤوسه النقاط ا (٣ ، ٢) ، ب (ـ ٤ ، ٣) ، حـ (٥ ، ـ ٦) مثلث منفرج الزاوية في ا

(٣٥) أ ب حـ د متوازى اضلاع احداثيات رؤوسه أ (٢ ، ـ ٦) ، ب (ـ٢ ، ـ٤) ، حـ (ـ ٢ ، ٥) جد احداثيات راسه الرابع . ثم جد الزاوية الحادة بين قطريه .

الجواب د (٢ ، ٣) $ظا^{-١} \frac{٦٢}{٦١}$

(٣٦) متوازى اضلاع نقطتان متجاورتان من نقاط رؤوسه (ـ ٣ ، ٣) ، (٢ ، ٠) فاذا كانت نقطة تقاطع قطريه هي (ـ ١ ، ٠) . جد احداثيي النقطتين الباقيتين

الجواب (١ ، ـ ٣) ، (ـ ٤ ، ٠) .

(٣٧) جد الزاوية المحصورة بين المستقيمين المرسومين من النقطة (٢ ، ١) الى النقطتين (٥ ، ١) ، (٤ ، ٢)

الجواب ٤٥°

(٣٨) اثبت ان امتداد المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (ـ٢ ، ٤) يصنع زاوية قدرها ١٢٠° مع المستقيم الواصل بين النقطتين (ـ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$)

(٣٩) جد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قدرها ٣٠° مع مستقيم ميله يساوى (٢) ٠

(٤٠) اذا كان ميل المستقيم أب = $\frac{٣}{٤}$ ، وكانت أ (٨ ، ـ ٣) ،
ب (٢هـ ، ـ ٣ هـ) حيث هـ ∋ ح نجد احداثي نقطة ب
الجواب (٤ ، ـ ٦)

(٤١) ارسم مستقيما يمر بالنقطة (ـ ٣ ، ٤) وميله يساوى $\frac{-٢}{٣}$

* (٤٢) جد مركز الشكل السداسي المنتظم اذا علم ان نقطتين من نقاط رؤوسه م (٢ ، ٠) ، ب (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ٠
الجواب (٨ ، ٠) أو (-١، ٣$\sqrt{٣}$)

(٤٣) جد ميل المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٦) والذى يقطع من محورى السينات والصادات جزئين مجموع طوليهما (٢٢) وحدة ٠

(٤٤) $م_١$ هو المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٤) ، $م_٢$ هو المستقيم المار بالنقطتين حـ (ـ ٢ ، ١٠) ، د (ـ ٤ ، ١٢) برهن على ان النقاط أ ، ب ، حـ ، د على استقامة واحدة (برهن ان $م_١$ = $م_٢$)

المسافة بين نقطتين

ملاحظات

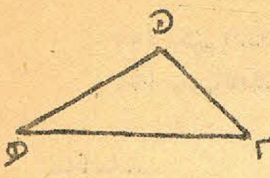
اولا ـ المسافة بين النقطتين م ، ن على مستقيم احداثي تساوى | ق (م) ـ ق (ن) |
حيث ان ق النظام الاحداثي للمستقيم ٠

(أ) المسافة بين نقطتين مختلفتين يكون عددا حقيقيا موجبا ٠
اذ ان | ق (م) ـ ق (ن) | > صفر لان ق تطبيق متباين

(ب) المسافة بين نقطة ونفسها يكون صفرا ٠ وبالعكس اذا كانت المسافة بين م ، ن = صفر فان م = ن اى | ق (م) ـ ق (ن) | = صفر ⟺ م = ن

(حـ) المسافة بين م ، ن تساوى المسافة بين ن ، م لان
| ق(م) ـ ق (ن) | = | ق(ن ـ ق (م) | خواص القيمة المطلقة

(د) المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن ، هـ ≥ المسافة بين م ، هـ
وذلك لان
| ق (م) ـ ق (هـ) | = | ق(م) ـ ق (ن) + ق (ن) ـ ق(هـ) | ≥
| ق (م) ـ ق (ن) | + | ق (ن) ـ ق (هـ) |



(١) او اذا كانت م ، ن ، هـ ليست على استقامة واحدة فانه يمكن تعيين مثلث رؤوسه هذه النقاط الثلاث وبما ان مجموع اى ضلعين في المثلث اكبر من ضلعه الثالث

∴ المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن ، هـ > المسافة م ، هـ

شكل (١ ــ ٢)

(٢) اذا كانت م ، ن ، هـ على استقامة واحدة فان الكل = مجموع اجزائه

شكل (١ ــ ٣)

اى المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن هـ = المسافة بين م ، هـ اى يمكن استخدام هذه الملاحظة لبرهان ان النقاط الثلاث على استقامة واحدة •

ثانيا ــ ليكن ك مستويا اقليديا وليكن كل من أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ نقطة في ك فان المسافة بين أ ، ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$ = د (أ ، ب)

ثالثا ــ المسافة بين المستقيم الذى معادلته أس + ب ص + حـ = ٠ والنقطة أ $(س_1 ، ص_1)$ في المستوى الاقليدى = $\dfrac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$ = ف

رابعا ــ في المستوى الاقليدى المتعامد المحورين

في △ أ ب حـ اذا كان :

(١) $[أحـ]^2 = [أب]^2 + [ب حـ]^2$ كان المثلث قائم الزاوية في (ب) (فيثاغورس)

(٢) $[أحـ]^2 > [أب]^2 + [ب حـ]^2$ كان المثلث منفرج الزاوية في (ب)

(٣) $[أحـ]^2 < [أب]^2 + [ب حـ]^2$ كان المثلث حاد الزاوية في (ب)

خامسا ــ في المستوى الاقليدى المتعامد المحورين

إنّ اى شكل رباعي اذا كان

(١) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان كان الشكل متوازى اضلاع

(٢) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان واحدى زواياه قائمة كان الشكل مستطيلا او كل ضلعين متقابلين متساويين والقطران متساويان كان الشكل مستطيــلا

(٣) جميع اضلاعه متساوية كان الشكل معينا

(٤) جميع اضلاعه متساوية واحدى زواياه قائمة كان الشكل مربعا

(٥) يكون الشكل الرباعي معينا اذا تعامد وتناصف قطراه
(٦) يكون الشكل الرباعي مربعا اذا تعامد وتناصف قطراه وكان لهما نفس القياس

سادساً —
(١) مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب القطرين

(٢) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع قاعدتيه المتوازيتين × ارتفاعه

(٣) مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث او رؤوس اى شكل تكون على ابعاد متساوية من الرؤوس .

تماريــــن ١ — ٤

١ — اذا كانت النقاط أ (٣، — ٧) ، ب (٥ ، — ٧) ، حـ (— ٢ ، ٥) تمثل ثلاثة رؤوس لمتوازى الاضلاع أ ب حـ د واذا كان راسه الرابع د يقابل الراس ب . جد طول كل من قطريه
الجواب ١٣ ، ١٥ وحدة

* ٢ — النقطتان أ (٣ ، — ٤) ، ب (١ ، ٢) راسان متقابلان في معين طول ضلعه ٥ $\sqrt{٢}$ جد ارتفاعه
الجواب ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة

٣ — النقطتان أ (٤ ، ٩) ، ب (— ٢ ، ١) راسان متقابلان في معين طول ضلعه ٥ $\sqrt{١٠}$ فجد مساحة هذا المعين .
الجواب ١٥ وحدة مربعة

٤ — اثبت ان النقاط أ (٣ ، — ٥) ، ب (— ٢ ، — ٧) ، حـ (١٨ ، ١) تقع على استقامة واحدة

* ٥ — اثبت ان المثلث الذى رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٥ ، — ١) هو مثلث قائم الزاوية .

* ٦ — برهن ان النقاط أ (٢ ، ٢) ، ب (— ٢ ، ٦) ، حـ (٢ ، ١٠) ، د (٦، ٦) هي رؤوس مربع

٧ — برهن ان المثلث الذى رؤوسه النقاط أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (٢ ، — ١) منفرج الزاوية في أ

٨ — برهن ان الزوايا الداخلية للمثلث الذى رؤوسه النقاط أ (— ١ ، ٣) ، ب (١ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٤) جميعها حادة .

٩ — النقاط أ (٥ ، ٠) ، ب (٠ ، ١) ، حـ (٣ ، ٣) هي رؤوس مثلث احسب الزاوية الخارجية عند أ
الجواب: ∠ ب أ حـ = ٤٥° ، ∠ أ ب حـ = ٤٥°

* ١٠ـ النقاط أ (ـ √٣ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (ـ٢ √٣ ، ٢)
رؤوس مثلث . احسب الزاوية الخارجية عند الرأس أ .
الجواب ٦٠°

١١ـ جد النقطة م ∋ المحور الاول والمسافة بينها وبين النقطة (٢ ، ٣٠) تساوى
٥ وحدات
الجواب م١ (٦ ، ٠) ، م٢ (ـ ٢ ، ٠) جوابان للحل .

١٢ـ جد النقطة م ∋ المحور الثاني والمسافة بين م والنقطة (ـ ٨ ، ١٣) تساوى
١٧ وحدة
الجواب: جوابان للحل م١ (٠ ، ٢٨) ، م٢ (٠ ، ـ٢)

١٣ـ اذا كانت النقطتان م (٢ ، ٢) ، ن (٥ ، ـ ٢) جد النقطة ل ∋ المحور
الاول بحيث م ل ن مثلث قائم الزاوية .
الجواب: جوابان للحل ل١ (١ ، ٠) ، ل٢ (٦ ، ٠)

* ١٤ـ النقطتان أ (٣ ، ٠) ، حـ (ـ ٤ ، ١) راسان متقابلان لمربع . جد بقية
رؤوس هذا المربع
الجواب: ب (٠ ، ٤) ، د (ـ ١ ، ـ ٣)

* ١٥ـ النقطتان أ (٢ ، ـ ١) ، ب (ـ ١ ، ٣) راسان متجاوران لمربع جد بقيــة
رؤوسه
الجواب مربعان يحققان شروط التمرين حـ١ (ـ ٥ ، ٠) ، د١ (ـ٢ ، ـ ٤)
، حـ٢ (٣ ، ٦) ، د٢ (٦ ، ١٢)

١٦ـ برهن ان النقاط أ (ـ ٣ ، ٦) ، ب (٩ ، ـ ١١) ، حـ (ـ ٥ ، ٤)
دائرية . ثم جد مركز الدائرة المارة بها ونصف قطرها .
الجواب م (٣ ، ـ ٢) ، نق = ١٠

* ١٧ـ أ ب حـ د مستطيل فيه أ (٨ ، ٨) ، حـ (ـ ٢ ، ٣) فاذا علمت ان طوله
يساوى ضعف عرضه . نما مساحته .
الجواب ١٥ وحدة ، ١٠ وحدات

* ١٨ـ برهن تحليليا ان
ا ـ اقطار المستطيل متساوية
ب ـ مجموع مربعي بعدى اى نقطة عن راسين متقابلين في مستطيل يساوى مجموع
مربعي بعد نفس النقطة عن الراسين الاخرين لهذا المستطيل .

ملاحظات

(١) احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$

من الداخل بنسبة $ر_١ : ر_٢$ ، حيث $ر_١ ، ر_٢ \in ح$ ، وان أ $\neq$ ب هي

$$\left(\frac{ر_٢ س_١ + ر_١ س_٢}{ر_٢ + ر_١} ، \frac{ر_٢ ص_١ + ر_١ ص_٢}{ر_٢ + ر_١} \right)$$

(٢) احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$

من الخارج (اى ان النقطة تقع على امتداد قطعة المستقيم) بنسبة $\frac{ر_١}{ر_٢}$ هي

نفس احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين أ ، ب من الداخل بعد جعل اشارتي $ر_١ ، ر_٢$ مختلفتين

اى $$\left(\frac{ر_٢ س_١ - ر_١ س_٢}{ر_٢ - ر_١} ، \frac{ر_٢ ص_١ - ر_١ ص_٢}{ر_٢ - ر_١} \right)$$

(٣) في حالة تقسيم قطعة المستقيم أ ب من الخارج

(أ) اذا كانت $|ر_١| > |ر_٢|$ فان نقطة التقسيم حـ تقع خارج قطعة المستقيم أ ب باتجاه ب .

(ب) اذا كانت $|ر_١| < |ر_٢|$ فان نقطة التقسيم حـ تقع خارج قطعة المستقيم أ ب باتجاه أ

(٤) اذا لم يذكر نوع التقسيم فان النسبة $ر_١ : ر_٢$ تحدد ما اذا كان التقسيم من الداخل او من الخارج كما يلي .

(أ) اذا كانت $ر_١ : ر_٢$ موجبة كان التقسيم من الداخل

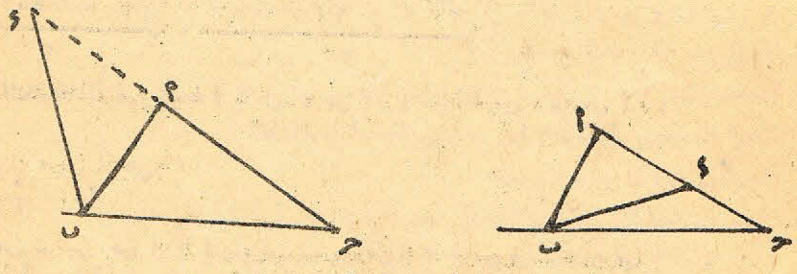
(ب) اذا كانت $ر_١ : ر_٢$ سالبة كان التقسيم من الخارج

(٥) في حالة التعويض بنسبة التقسيم من الخارج بقانون التقسيم من الخارج لا توخذ الاشارة السالبة ٠

(٦) المستقيم لا ينقسم في نقطتين بنسبة واحدة سواء كان التقسيم من الداخل او الخارج

(٧) المستقيم المتوسط هو المستقيم الواصل بين راس من رؤوس مثلث ومنتصف الضلع المقابل له وتلتقي المستقيمات المتوسطة لمثلث في نقطة ٠ تبعد بمقدار ثلثين من جهة الراس الى ثلث من جهة القاعدة اى ان نسبة التقسيم هي (٢) من جهة الراس الى (١) من جهة القاعدة كتقسيم من الداخل ٠

(٨) المنصف (الداخلي او الخارجي) لاحدى زوايا مثلث يقسم الضلع المقابل لها او امتداده بنسبة الضلعين المحيطين بها كما موضح في شكل ١ـ٤



(شكل ١ـ٤)

$$\frac{\text{حـ ب}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{حـ د}}{\text{د أ}} = \frac{ر_1}{ر_2}$$

تمارين ١ ــ ٥

(١) برهن تحليليا (أن) :

١ ــ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث يوازى ضلعه الثالث ويساوى نصفه .

٢ ــ في المثلث القائم الزاوية طول المستقيم المنصف للوتر من رأس الزاوية القائمة يساوى نصف طول الوتر .

٣ ــ نقطة منتصف الوتر في مثلث قائم الزاوية تبعد بابعاد متساوية عن رؤوس المثلث .

٤ ــ قطرى متوازى الاضلاع ينصف كل منهما الاخر .

٥ ــ مركز ثقل المثلث الذى رؤوسه أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، حـ ($س_{٣}$ ، $ص_{٣}$) هي النقطة

$$\left(\frac{س_{١} + س_{٢} + س_{٣}}{٣} \text{ ، } \frac{ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣}}{٣} \right)$$

٦ ــ مساحة المثلث الذى رؤوسه ا ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، حـ ($س_{٣}$ ، $ص_{٣}$) هي :

$$\frac{١}{٢} \left[(س_{١}ص_{٢} - س_{٢}ص_{١}) + (س_{٢}ص_{٣} - س_{٣}ص_{٢}) + (س_{٣}ص_{١} - س_{١}ص_{٣}) \right]$$

٧ ــ القاعدة الوسطى لشبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع قاعدتيه المتوازيتين .

٨ ــ المستقيمات الواصلة بين منتصفات اضلاع اى شكل رباعي تكون متوازى اضلاع .

٩ ــ المستقيمات الواصلة بين منتصفات الاضلاع المتقابلة في اى شكل رباعي متناصفة .

* ١٠ ــ المستقيم الواصل بين راس متوازى اضلاع ومنتصف الضلع المقابل يقطع القطر المقابل في نقطة تقسم كل من المستقيمين بنسبة ١ : ٢

* ١١ ــ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين متقابلين في شكل رباعي والمستقيم الواصل بين منتصفي قطرى هذا الشكل الرباعي ينصف احدهما الاخر .

* ١٢ ــ المستقيمات الواصلة بين منتصفات اضلاع اى شكل رباعي تكون شكلا رباعيا محيطه يساوى مجموع اقطار الشكل الرباعي الاول ومساحته تساوى نصف مساحة الشكل الرباعي الاول .

١٣ ــ قطرى المربع متعامدان ومتناصفان .

١٤ ــ قطرى المعين متعامدان ومتناصفان .

١٥ ــ اذا كانت اقطار المستطيل متعامدة فان هذا المستطيل مربع .

(٢) أب قضيب متجانس اذا كانت أ(٣ ، ــ ٥) ، ب (ــ ١ ، ١) فما هو مركز ثقلـــه .

الجواب (١ ، ــ ٢)

(٣) قضيب متجانس مركز ثقله النقطة م (١ ، ٤) واحدى نهايتيه أ (ــ ٢ ، ٢) عين احداثيي نهايته الثانيـة .

الجواب (٤ ، ٦) .

(٤) النقاط آ (٢ ، ــ ١) ، ب (ــ ١ ، ٤) ، حـ (ــ ٢ ، ٢) هي منتصفـات اضلاع المثلث . جد احداثيات رؤوسه .

الجواب (١ ، ــ ٣) ، (٣ ، ١) ، (ــ ٥ ، ٧)

(٥) آ (ــ ٣ ، ٥) ، ب (١ ، ٧) نقطتان متجاورتان لمتوازى الاضلاع أب حـ د فاذا كانت م (١ ، ١) ملتقى قطريه . جد احداثيي كل من حـ ، د .

الجواب (٥ ، ــ ٣) ، (١ ، ٣) .

* (٦) النقاط أ ، ب ، حـ ، د اربعة رؤوس لمتوازى اضلاع فاذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (ــ ١ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٥) جد احداثيي راسها الرابع د .

الجواب الراس الرابع لمتوازى الاضلاع يقابل اى واحد من الرؤوس المعطـــاة . كذلك توجد ثلاثة متوازيات اضلاع تحقق شروط التمرين . وتكون نقطة د كما يلي

د١ (٢ ، ١) ، د٢ (ــ ٢ ، ٩) ، د٣ (٦ ، ــ ٣)

(٧) النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، ــ ٩) ، حـ (ــ ٥ ، ٢) ثلاثة رؤوس لمثلث جد طول المستقيم المتوسط المرسوم من ب .

الجواب ١٣ وحدة .

(٨) رؤوس المثلث ا (٣ ، ــ ٥) ، ب (١ ، ــ ٣) ، حـ (٢ ، ــ ٢) . احسب طول المنصف الخارجي للزاوية ب .

الجواب ٤ وحدات

(٩) النقاط أ (٣ ، ــ ٥) ، ب (ــ ٣ ، ٣) ، حـ (ــ ١ ، ــ ٢) رؤوس مثلث جد طول المنصف الداخلي للزاوية أ .

الجواب $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$ وحدة

(١٠) أ (١ ، ــ ١) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٥) ثلاث نقاط على استقامـة واحدة . احسب النسبة التي تقسم بها احدى النقاط اعلاه قطعه المستقيم المحددة بالنقطتين الباقيتين

الجواب $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \frac{ــ٣}{١}$ ، $\frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}} = ــ \frac{٢}{٣}$

(١١) قطعة المستقيم أ ب قسمت الى ثلاثة اقسام متساوية بالنقطتين حـ (٢ ، ٢) ، د (١ ، ٥) . جد احداثيي النهايتين أ ، ب

الجواب أ (٣ ، ـ ١) ، ب (٠ ، ٨) .

(١٢) جد الاحداثي السيني للنقطة حـ علما ان احداثيها الصادي = ـ ٥ ، وان هذه النقطة تقع على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ـ ٣) ، ب (ـ ٦ ، ٥)

الجواب (٤ ، ـ ٥)

(١٣) جد النقطة التي عندها يقطع المستقيم المار بالنقطتين أ (٧ ، ـ ٣) ، ب (٢٣ ، ـ ٦) المحور الاول .

الجواب (ـ ٩ ، ٠)

(١٤) جد النقطة التي عندها يقطع المستقيم المار بالنقطتين أ (٥ ، ٢) ، ب (ـ ٤ ، ـ ٧) المحور الثاني

الجواب (٠ ، ـ ٣)

(١٥) النقاط أ (ـ ٣ ، ١٢) ، ب (٣ ، ـ ٤) ، حـ (٥ ، ـ ٤) ، د (٥ ، ٨) هي رؤوس شكل رباعي جد النسبة التي يقسم بها القطر أ حـ القطر ب د

الجواب ١ : ٣ مبتدئا من النقطة ب

(١٦) أ (٢ ، ـ ٣) ، ب (ـ ٥ ، ١) راسان للمثلث أ ب حـ اما راسه حـ فيقع على المحور الثاني . فاذا كان مركز ثقله م يقع على المحور الاول فاحسب احداثيي كل من النقطتين م ، حـ

الجواب م (ـ ١ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٢) .

(١٧) لتكن أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، حـ ($س_{٣}$ ، $ص_{٣}$) ثلاثة رؤوس لصفيحة مثلثية منتظمة الشكل . فاذا وصلت منتصفات اضلاعه تكونت صفيحة مثلثية منتظمة الشكل ايضا . اثبت ان مركز ثقل الاولى هو مركز ثقل الثانية نفسه .

(١٨) جد احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين (٣ ، ـ ١) ، (ـ ٢ ، ٥) بنسبة ـ $\frac{١}{٢}$.

الجواب: (٨ ، ـ ٧)

(١٩) [أ ب] قطعة مستقيمة ولتكن حـ نقطة واقعة عليها بحيث ٢ $\overline{[أ حـ]}$ = $\overline{[حـ ب]}$ فاذا كانت أ (١ ، ـ ٥) ، ب (٤ ، ١٦) فجد احداثيي نقطة حـ

الجواب (ـ ٥ر٣ ، ٥ر٨)

(٢٠) جد النسبة التي ينقسم بها المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٣) ، (٢ ، ـ ٤) بمحور الصادات مبينا نوع التقسيم .

الجواب ٥ : ٢ من الخارج

(٢١) جد النقطة التي تقسم بها النقطة (س ، ٣) المسافة بين النقطتين (٣ ، ٨) ،
(ـــ ١ ، ـــ ١٢) مبينا نوع التقسيم ثم جد قيمة س
الجواب ١ : ٣ من الداخل ، س = ٢

(٢٢) لتكن كل من أ (٨ ، ٦) ، ب (ـــ ٦ ، ـــ ٣) نقطة وصل أ ب فقطع محوري الاحداثيات في حـ ، د على الترتيب جد قيمتي (١) $\frac{\text{أ ب}}{\text{حـ ب}}$ (٢) $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}}$

الجواب $\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٤}{٣}$ على الترتيب

(٢٣) النقطة (٥ ، ـــ ١) تقسم المسافة بين أ ، ب بنسبة ٢ : ٣ فاذا كانت أ (١١ ، ـــ ٣) فما احداثيات نقطة ب
الجواب (ـــ ٤ ، ٢) او (١٤ ، ـــ ٤)

(٢٤) اثبت ان النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ـــ ٢) ، (ـــ ٣ ، ١٦) بنسبة ١ : ٢ من الداخل هي التي تنصف المسافة بين النقطتين (٣ ، ـــ ١) ، (ـــ ١ ، ٩)
الجواب (١ ، ٤)

(٢٥) اذا كانت النقطة (ـــ ٢ ، ٣) هي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٥) ، ب (ـــ ٣ ، ـــ ٤) ، حـ (هـ ، و) فجد احداثيي نقطة حـ .
الجواب حـ (ـــ ٤ ، ٨)

(٢٦) اثبت ان المثلث الذي رؤوسه النقاط أ (٢ ، ٧) ، ب (ـــ ١ ، ٣) ، حـ (ـــ ٢ ، ٤) مثلث متساوي الساقين ثم برهن ان المستقيم الواصل بين آ والنقطة التي تنصف ($\overline{\text{ب حـ}}$) يكون عمودا عليه .

(٢٧) جد احداثيات النقاط التي تقسم البعد بين النقطتين (٤ ، ـــ ١) ، (ـــ ٤ ، ـــ ٥) الى اربعة اقسام متساوية .
الجواب (٢ ، ـــ ٢) ، (٠ ، ـــ ٣) ، (ـــ ٢ ، ـــ ٤) .

* (٢٨) أ ب حـ مثلث رؤوسه أ (ـــ ٦ ، ٨) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (ـــ ٢ ، ـــ ١) والمنصف الداخلي لزاوية ب يلاقي أ حـ في د والمنصف الخارجي لنفس الزاوية يلاقي امتداد أ حـ في هـ . فاذا كان د ب هـ ك متوازي اضلاع فجد احداثيي نقطة ك . ثم برهن ان د ب هـ ك مستطيل .
الجواب (ـــ $\frac{١٠}{٣}$ ، ـــ ١٠)

* (٢٩) أ ب حـ مثلث رؤوسه أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣) ، حـ (ـــ ٤ ، ٤) نصفت قطعة المستقيم آ ب في د . ووصل حـ د ونصف آ د في هـ . ورسم هـ و // ب حـ في ق . ثم وصل ب ق فقطع د حـ في نقطة ى . جد احداثيي نقطة ى .
الجواب ى (٢ ، ٤) .

(٣٠) آ ب حـ د شبه منحرف فيه أ د // ب حـ ، أ (٢ ، ١) ، ب (ـ ٣ ، ٣) ، حـ (٣ ، ـ ٥) ، د (٥ ، ـ ٣) فاذا تقاطع أ حـ ، ب د في نقطة هـ فما قيمة أ هـ : هـ حـ وما احداثيي نقطة هـ .

الجواب $\frac{١}{٢}$ ، هـ ($\frac{٧}{٣}$ ، ـ ١)

(٣١) أ ب حـ د متوازي اضلاع مركزه م واحداثيات رؤوسه أ (٤ ، ٦) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (ـ ٢ ، ٦) مد آ د على استقامته بقدر نفسه الى نقطة هـ ثم وصل م هـ فقطع حـ د في نقطة ن جد احداثيي نقطة ن

الجواب (ـ ٢ ، $\frac{٢٦}{٣}$)

تمارين عامـــة ١ ــ ٦

(١) برهن باستخدام الميل ان النقاط أ (٣ ، ــ ٤) ، ب (٧ ، ٣) ،
جـ (٠ ، ٧) هي رؤوس لمثلث قائم الزاوية في ب • ثم جد احداثيي مركـــز
الدائرة المرسومة خارج المثلث وطول نصف قطرها •
الجواب (١ر٥ ، ١ر٥) ، نق = $\frac{\sqrt{١٣٠}}{٢}$

(٢) النقاط ب (٢ ، ٠) ، جـ (٨ ، ١) ، د (٢ ، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازى
الاضلاع ب جـ د هـ • جد طول قطره ($\overline{\text{جـ هـ}}$) •
الجواب: ٢ $\sqrt{٣٧}$ وحدة

(٣) برهن ان النقاط (٧ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١٠ ، ــ ٣) ، (٥ ، ــ ٥)
هي رؤوس مربع • ثم برهن تعامد قطريه •

(٤) برهن ان الشكل الرباعي الذى رؤوسه النقاط أ (ــ ٤ ، ٦) ، ب (٠ ، ٤) ،
جـ (ــ ٥ ، ــ ٦) ، د (ــ ٧ ، ٠) هو شبه منحرف • ثم جد مساحته •
الجواب: ٤٠ وحدة مربعة

(٥) أ ب جـ مثلث أ (٦ ، ٨) ، ب (ــ ٢ ، ــ ٦) ، جـ (ــ ٤ ، ٤) جد مساحة
الجزء المحصور من المثلث بين محصور الصادات والنقطة أ
الجواب: ٣ر٢٤ وحدة مربعة

(٦) احسب مساحة كل من المثلثات التي احداثيات رؤوسها كما يلي :ــ
(١) أ (٢ ، ــ ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (ــ ٢ ، ٥)
(٢) أ (ــ ٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ــ ٢) ، جـ (١ ، ٣)
(٣) أ (٣ ، ــ ٤) ، ب (ــ ٢ ، ٣) ، جـ (٤ ، ٥) •
الجواب ١٤ ، ١٢ ، ٢٦ وحدة مربعة على الترتيب

(٧) اثبت باستخدام بعد نقطة عن مستقيم (ف) (المسافة بين النقطة والمستقيم في
المستوى الاقليدى) ان النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، ــ ٢) ،
جـ (ــ ٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة •

(٨) النقاط أ (٣ ، ٦) ، ب (ــ ١ ، ٣) ، جـ (٢ ، ــ ١) هي رؤوس
مثلث • فجد طول ارتفاعه من الرأس جـ •
الجواب ٥ وحدة

(٩) احسب مساحة متوازى الاضلاع الذى ثلاثة رؤوس من رؤوسه هي أ (ــ ٢ ، ٣)
ب (٤ ، ــ ٥) ، جـ (ــ ٣ ، ١)
الجواب ٢٠ وحدة مربعة

(١٠) النقاط أ (٣ ، ٧) ، ب (٢ ، ــ ٣) ، جـ (ــ ١ ، ٤) ثلاثة رؤوس
لمتوازى اضلاع فجد ارتفاع الراس ب عن الضلع أ جـ
الجواب ٤ر٧ وحدة

(١١) أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، حـ (ــ ١ ، ٧) ، د (ــ ٧ ، ٥) اربعة رؤوس متتالية لشكل رباعي منتظم فجد احداثيي مركز ثقلـــه ٠

الجواب (٧/١٧ ، ١/٣ ٣)

(١٢) اذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ تساوى ٣ وحدات مربعة وان أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ــ ٣) جـد احداثيي الراس حـ ٠ اذا علمت انها تقع على محـــور الصادات ٠

الجواب (٠ ، ٨) او (٠ ، ــ ٢)

(١٣) مساحة المثلث أ ب حـ تساوى (٤) وحدات مربعة ٠ فاذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ــ ١) فجد احداثيي الراس حـ ٠ اذا علمت انها تقع على محـــور السينات ٠

الجواب (٥ ، ٠) او (ــ ١/٢ ، ٠)

* (١٤) اذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ تساوى (٣) وحدات مربعة وان أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ــ ٣) فجد احداثيي راسه حـ اذا علمت ان مركز ثقل المثلث يقع علــى محور السينـــات ٠

الجواب (٥ ، ٢) او (٢ ، ٢)

* (١٥) اذا كانت مساحة متوازى الاضلاع أ ب حـ د تساوى (١٢) وحدة مربعـــة وان أ (ــ ١ ، ٣) ، ب (ــ ٢ ، ٤) جد احداثيات بقية رؤوسه اذا علمت ان نقطة تقاطع قطريه تقع على محور السينات ٠

الجواب حـ١ (ــ ٧ ، ــ ٣) ، د١ (ــ ٥ ، ــ ١٦) ، او حـ٢ (١٧ ، ــ ٣) ، د٢ (١٨ ، ــ ٤)

* (١٦) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين ارتفاعه (٨) وحدة وقاعدته ب حـ فاذا علمت ان ب (٢ ، ٦) ، حـ (ــ ٤ ، ٢) فجد احداثيي الراس أ ٠

الجواب

* (١٧) اذا علمت ان المعادلتين ٨ س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٢ ص + س ــ ١ = ٠ هما معادلتا ضلعين من اضلاع متوازى اضلاع والمعادلة ٣ س + ٢ ص + ٣ = ٠ هي معادلة احد اقطاره ٠ عين احداثيات رؤوس هذا المتوازى الاضلاع ٠

الجواب (١ ، ــ ٣) ، (ــ ٨ ، ٥) ، (٥ ، ــ ٩) ، (٨ ، ــ ١٧)

(١٨) اضلاع مثلث تقع على المستقيمات التي معادلاتها س + ٥ ص ــ ٧ = ٠ ، ٣ س ــ ٢ ص ــ ٤ = ٠ ، ٧ س + ص + ١٩ = ٠ احسب مساحة المثلث ٠

الجواب ١٧ وحدة مربعة ٠

(١٩) مساحة مثلث ٨ وحدات مربعة • راسان من رؤوسه هما النقطتان ا (١ ، ــ ٢)
، ب (٢ ، ٣) والراس ح يقع على المستقيم ٢ س + ص ــ ٢ = • احسب
احداثيات الراس الاخر ح •
الجواب $ح_{١}$ (ــ ١ ، ٤) او $ح_{٢}$ ($\frac{٢٥}{٧}$ ، ــ $\frac{٣٦}{٧}$)

*(٢٠) مساحة المثلث ٥ر١ وحدة مربعة راسان من رؤوسه النقطتان آ(٢ ، ــ ٣) ،
ب (٣ ، ــ ٢) ومركز ثقله يقع على المستقيم ٣ س ــ ص ــ ٨ = • احسب
احداثيات راسه الثالث ح •
الجواب $ح_{١}$ (١ ، ــ ١) ، $ح_{٢}$ (ــ ٢ ، ١٠)

(٢١) اذا كان م هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٣ ص ــ ٣ = •
(١) جد ميل المستقيم الموازى الى م
(٢) جد ميل المستقيم العمود على م
الجواب $\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ على الترتيب

(٢٢) ليكن م هو المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ ص + ٤ = •
١ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) ويوازى م
٢ــ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) ويكون عمودا على م
الجواب ٢ س + ٣ ص ــ ٧ = • ، ٣ س ــ ٢ ص ــ ٤ = •

(٢٣) ضلعا مستطيل يقعان على المستقيمين اللذين معادلتهما •
٢ س ــ ٣ ص + ٥ = • ، ٣ س + ٢ ص ــ ٧ = • على الترتيب واحد رؤوسه
النقطة آ (٢ ، ــ ٣) اكتب معادلتي الضلعين الاخرين لهذا المستطيل •
(الجواب ٣ س + ٢ ص = • ، ٢ س ــ ٣ ص ــ ١٣ = •

(٢٤) ضلعا مستطيل يقعان على المستقيمين اللذين معادلتاهما س ــ ٢ ص = • ،
س ــ ٢ ص + ١٥ = • واحد اقطاره يقع على المستقيم الذى معادلته
٧ س + ص ــ ١٥ = • ، جد احداثيات رؤوس هذا المستطيل •
الجواب (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (ــ ١ ، ٧) ، (١ ، ٨) •

(٢٥) جد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ $\sqrt{٢}$ والذى يبعد بمقدار (٥) وحدات
عن نقطة الاصل
الجواب ص ــ ٢ $\sqrt{٢}$ س = $\pm$ ١٥

جد معادلة المجموعة

هـ = { أ : أ نقطة المسافة بينها وبين م$_{١}$ = المسافة بينها وبين م$_{٢}$ في المستوى الاقليدى } اذا علمت ان م$_{١}$ ، م$_{٢}$ كما يلي :ــ

(١) م$_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته ٣س ــ ٢ص ــ ١ = ٠

م$_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته ٣س ــ ٢ص ــ ١٣ = ٠

(٢) م$_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ص + ٣ = ٠

م$_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ص ــ ١٧ = ٠

(٣) م$_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ ص ــ ٦ = ٠

م$_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٦ ص + ١٧ = ٠

(٤) م$_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٧ ص + ١٥ = ٠

م$_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٧ ص + ٣ = ٠

(٥) م$_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته ٣ س ــ ١٥ ص ــ ١ = ٠

م$_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته س ــ ٥ ص ــ ٢ = ٠

الاجوبة (١) { (س ، ص) : ٣ س + ٢ ص + ٥ = ٠ }

(٢) { (س ، ص) : ٥ س + ص ــ ٧ = ٠ }

(٣) { (س ، ص) : ٨ س + ١٢ ص + ٥ = ٠ }

(٤) { (س ، ص) : ٥ س + ٧ ص + ٩ = ٠ }

(٥) { (س ، ص) : ٦ س ــ ٣٠ ص ــ ٧ = ٠ }

(٢٦) اذا علمت ان منتصفات اضلاع مثلث هي هـ (٢ ، ١) ، و (٥ ، ٣) ،
ز (٣ ، ـ ٤) فجد معادلات اضلاعه

الاجوبة (١) ٧ س ـ ٢ ص ـ ١٢ = ٠ (٢) ٥ س + ص ـ ٢٨ = ٠
(٣) س ـ ٣ ص ـ ١٨ = ٠

(٢٧) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة ب (ـ ١ ، ٠) والعمود على القطعة
المستقيمة أ ، ب اذا علمت ان أ (٢ ، ٣) .

الجواب س + ص + ١ = ٠

(٢٨) النقطة أ (٢ ، ١) هي اثر العمود النازل من نقطة الاصل الى مستقيم ما .
اكتب معادلة هذا المستقيم

الجواب ٢ س + ٣ ص + ١٣ = ٠

(٢٩) النقاط أ (٢ ، ١) ، ب (ـ ١ ، ـ ١) ، حـ (٣ ، ٢) هي رؤوس
مثلث جد معادلات ارتفاعه .

الجواب (١) ٢ س + ٣ ص ـ ١٣ = ٠ (٢) ٣ ص + ٤ س ـ ١١ = ٠
(٣) ص + س + ٢ = ٠

(٣٠) عين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذى معادلات اضلاعه هي
٤ س ـ ص ـ ٧ = ٠ ، س + ٣ ص ـ ٣١ = ٠ ، س + ٥ ص ـ ٧ = ٠

الجواب (٣ ، ٤)

(٣١) النقاط أ (١ ، ـ ١) ، ب (ـ ٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٥) هي رؤوس مثلث
اكتب معادلة العمود النازل من النقطة أ على المستقيم المتوسط المرسوم من ب

الجواب ٤ س + ص ـ ٣ = ٠

(٣٢) النقاط أ (٢ ، ـ ٢) ، ب (٣ ، ـ ٥) ، حـ (٥ ، ٧) هي رؤوس
مثلث . اكتب معادلة العمود النازل من الراس حـ على المنصف الداخلي للزاوية؟

الجواب س ـ ٥ = ٠

(٣٣) اكتب معادلات الاضلاع والمستقيمات المتوسطة للمثلث الذى رؤوسه النقاط
أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ـ ٢) ، حـ (١ ، ٠)

الجواب معادلة آب هي ٢ س + ص ـ ٨ = ٠ ، معادلة ب حـ هي
س + ٢ ص ـ ١ = ٠ معادلة حـ أ هي س ـ ص ـ ١ = ٠ ، معادلة المستقيم
المتوسط من الراس أ هي س ـ ٣ = ٠ من الراس ب هي س + ص ـ ٣ = ٠ ،
من الراس حـ هي ص = صفر

(٣٤) برهن ما يلي :ـ

النقاط الثلاث أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، حـ ($س_{٣}$ ، $ص_{٣}$) تكــون على استقامة واحدة اذا كانت مساحة المثلث المارة بهذه الرؤوس الثلاثة = صفــر والعكس بالعكس .

(٣٥) النقاط أ (ـ ٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٩) ، حـ (٧ ، ٦) ، د (ـ ٢ ، ـ ٦) هي رؤوس شكل رباعي . عين نقطة تقاطع قطريه .
الجواب (١ ، ٣)

(٣٦) ليكن أ (ـ ٣ ، ـ ١) ، ب (٢ ، ٢) راسين متجاورين لمتوازي الاضلاع أ ب حـ د . اكتب معادلات اضلاعه اذا علمت ان نقطة تقاطع قطريه هي هـ (٣ ، ٥) .
الجواب ٣ س ـ ٥ ص + ٤ = ٠ ، س + ٧ ص ـ ١٦ = ٠ ،
٣ س ـ ٥ ص ـ ٢٢ = ٠ ، س + ٧ ص + ١٠ = ٠ .

(٣٧) اذا كانت المعادلتان ٥ س + ٢ ص ـ ٧ = صفر ، ٥ س + ٧ ص ـ ٣٦ = ٠ ، معادلتي ضلعين لمستطيل . ومعادلة احد اقطاره ٣ س + ٧ ص ـ ١٠ = ٠ ، اكتب معادلة ضلعيه الاخرين وقطره الاخر .
الجواب معادلتا ضلعي المستطيل ٢ س ـ ٥ ص + ٣ = ٠ ، ٢ س ـ ٥ ص ـ ٢٦ = ٠ معادلة قطره الاخر ٧ س ـ ٣ ص ـ ٣٣ = ٠ .

*(٣٨) النقاط أ (١ ، ـ ٢) ، ب (٥ ، ٤) ، حـ (ـ ٢ ، ٠) هي رؤوس مثلث اكتب معادلات المنصفات الداخلية والخارجية لزواياه .
الجواب معادلة المنصف الداخلي ٥ س + ص ـ ٣ = ٠ معادلة المنصف الخارجي س ـ ٥ ص + ٣ = صفر .

(٣٩) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) . ويبعد ببعدين متساويين عن النقطتين أ (ـ ٧ ، ٣) ، ب (١١ ، ـ ٥) .
تلميح للحل / شروط التمرين تتحقق بالمستقيمين الذين احدهما يمر بالنقطــة (٣ ، ٥) وينصف قطعة المستقيم أ ، ب . والثاني المار من النقطة (٣ ، ٥) ويوازي المستقيم أ ب .
الجواب س + ص ـ ٨ = صفر ، ١١ س ـ ص ـ ٨ = صفر

(٤٠) عين الزاوية بين كل مستقيمين فيما يلي :ـ
(١) ٥ س ـ ص + ٧ = صفر ، ٣ س + ٢ ص = صفر
(٢) ٣ س ـ ٢ ص + ٧ = صفر ، ٢ س + ٣ ص ـ ٣ = صفر
(٣) س ـ ٢ ص ـ ٤ = صفر ، ٢ س ـ ٤ ص + ٣ = صفر
(٤) ٣ س + ٢ ص ـ ١ = صفر ، ٥ س ـ ٢ ص + ٣ = صفر

الاجوبة $\frac{\text{ط}}{٤}$ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، صفر ، ظا$^{-١}$ $\frac{١٦}{١١}$.

(٤١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (١ ، ٢) ويصنع زاوية قدرها ٤٥° مع المستقيم ٢ س + ٣ ص + ٤ = صفر .

الجواب س − ٥ ص + ٣ = صفر او ٥ س + ص − ١١ = صفر

(٤٢) اذا كانت النقطة أ (− ٤ ، ٥) هي رأس مربع قطره يقع على المستقيم ٧ س − ص + ٨ = صفر ، اكتب معادلات اضلاعه والقطر الاخر .

الجواب ٤ س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ٣٢ = ٠

٤ س + ٣ ص − ٢٤ = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ٧ = ٠

ومعادلة قطره الاخر س + ٧ ص − ٣١ = ٠

(٤٣) النقطة أ (١ ، − ١) هي مركز لمربع . احد اضلاعه على المستقيم س − ٢ ص + ١٢ = ٠ فجد معادلات المستقيمات التي تقع عليها بقية اضلاعه .

الجواب ٢ س + ص + ١٤ = صفر ، س − ٢ ص − ١٨ = ٠ ، ٢ س + ص − ١٦ = ٠

★ (٤٤) من النقطة أ (− ٢ ، ٣) سقط شعاع ضوئي فصنع مع الاتجاه الموجب للمحور الاول زاوية ظلها = ٣ وانعكس الضوء فجد معادلتي المستقيمين اللذين يقع عليهما الشعاع الساقط والشعاع المنعكس .

★ (٤٥) س − ٢ ص + ٥ = صفر هي معادلة الشعاع الساقط على المستقيم ٣ س − ٢ ص + ٧ = صفر ، وعند وصوله انعكس ثانية . فجد معادلة المستقيم الذى يقع عليه الشعاع المنعكس .

(٤٦) ٣ س + ٤ ص − ١ = ٠ ، س − ٧ ص − ١٧ = ٠ ، ٧ س + ص + ٣١ = ٠ هي معادلات اضلاع المثلث برهن ان هذا المثلث متساوى الساقين .

(٤٧) بين اى زوج من المستقيمات التالية متعامدة :−

(١) ٣ س − ص + ٥ = ٠ ، س + ٣ ص − ١ = ٠

(٢) ٣ س − ٤ ص + ١ = ٠ ، ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠

(٣) ٦ س − ١٥ ص + ٧ = ٠ ، ١٠ س + ٤ ص − ٣ = ٠

(٤) ٩ س − ١٢ ص + ٥ = ٠ ، ٨ س + ٦ ص − ١٣ = ٠

(٥) ٧ س − ٢ ص + ١ = ٠ ، ٤ س + ٦ ص + ١٧ = ٠

(٦) ٥ س − ٧ ص + ٣ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص − ٥ = ٠

حل التمرين بدون حساب ميل المستقيمات اعلاه (باستخدام تعريف المستوى الاقليدى) .

* (٤٨) برهن ان الصيغة التي يمكن بواسطتها تعيين الزاوية ى ، بين المستقيمين

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ = ٠ ، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = صفر هي

طاى = $\dfrac{\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1}{\text{أ}_1\text{أ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2}$

(٤٩) عين الزاوية ى بين كل مستقيمين كما يلي :-

(١) ٣ س − ص + ٥ = ٠ ، ٢ س + ص − ٧ = ٠

(٢) س $\sqrt{٢}$ − ص $\sqrt{٣}$ − ٥ = ٠ ، (٣ + $\sqrt{٢}$) س + ($\sqrt{٦}$ − $\sqrt{٣}$) ص + ٧ = صفر

(٣) س $\sqrt{٣}$ + ص $\sqrt{٢}$ − ٢ = ٠ ، ٢س $\sqrt{٦}$ − ٣ص + ٣ = صفر

حل التمرين السابق بدون حساب الميل للمستقيمات اعلاه بل استعن بالتمرين السابق

الجواب ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°

* (٥٠) اذا كانت أ (− ١٠ ، ٢) ، ب (٦ ، ٤) ، راسين لمثلث ملتقى ارتفاعاته النقطة (٥ ، ٢) فجد احداثيي راسه الثالث •

الجواب حـ (٦ ، ٦)

* (٥١) اذا كانت أ (٣ ، − ١) ، ب (٥ ، ٧) راسين للمثلث أ ب حـ ، وملتقى ارتفاعاته النقطة ن (٤ ، − ١) اكتب معادلات اضلاع هذا المثلث •

الجواب ٤س − ص − ١٣ = ٠ ، س − ٥ = ٠ ، س + ٨ ص + ٥ = ٠

* (٥٢) في المثلث أ ب حـ معادلة ضلعه أب هي ٥ س − ٣ ص + ٢ = صفر ومعادلة ارتفاعه أ ن هي ٤ س − ٣ ص + ١ = صفر ، ومعادلة ارتفاعه ب ن هي ٧ س + ٢ ص − ٢٢ = صفر ، اكتب معادلتي ضلعيه الاخرين وارتفاعه الثالث •

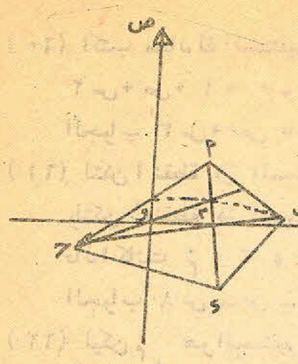
الجواب ب حـ : ٣ س + ٤ ص − ٢٢ = ٠ ، حـ أ : ٢ س − ٧ ص − ٥ = صفر ، حـ ن : ٣ س + ٥ ص − ٢٣ = ٠

* (٥٣) جد معادلات اضلاع المثلث الذى أ (١ ، ٣) • اذا كان س − ٢ ص + ١ = ٠ ، ص − ١ = صفر معادلتي مستقيمين متوسطين له •

تلميح

(١) بين ان الراس أ لايقع على احد المستقيمين المعلومين

(٢) جد نقطة تقاطع المستقيمين ولتكن م • وبما ان الراس أ والنقطة م معلومتين فاننا نستطيع ايجاد معادلة المستقيم المتوسط الثالث •



(٣) مد المستقيم ا م على استقامته الى نقطة د
بحيث أ م = م د وثم عين احداثي نقطة د
(٤) بين ان المضلع ب ا د حـ م هو متوازي اضلاع
(لان اقطاره متناصفة) اكتب معادلـتي
د ب ، د حـ
(٥) عين احداثيات النقطتين ب ، حـ
(٦) الان عرفت رؤوس المثلث وبذلك يمكن كتابة
معادلات اضلاعه ٠

الجواب س + ٢ ص ـ ٧ = ٠ ، س ـ ٤ ص ـ ١ = ٠ ، س ـ ص + ٢ = ٠

☆ (٥٤) جد معادلات اضلاع المثلث الذى احد رؤوسه ب (ـ ٤ ، ـ ٥) اذا كانت
٥ س + ٣ ص ـ ٤ = ٠ ، ٣ س + ٨ ص + ١٣ = ٠ ، معادلتي ارتفاعين له ٠

الجواب ٣ س ـ ٥ ص ـ ١٣ = صفر ، ٨ س ـ ٣ ص + ١٧ = ٠ ، ٥ س + ٢ ص ـ ١ = ٠

☆ (٥٥) جد معادلات اضلاع المثلث أ ب حـ ٠ اذا كانت ب (٢ ، ٦) راسا له ،
س ـ ٧ ص + ١٥ = ٠ ، ٧ س + ص + ٥ = ٠ ، ومعادلتي ارتفاع ومنصف زاويــة
من زواياه على التوالي مرسومين من رأس واحد ٠

الجواب ٤ س + ٧ ص ـ ١ = ٠ ، ص ـ ٣ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص ـ ٥ = ٠

☆ (٥٦) جد معادلات اضلاع المثلث الذى راسه حـ (٤ ، ـ ١) اذا كان
٢ س ـ ٣ ص + ١٢ = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٠ معادلتي ارتفاع ومستقيم متوســط
على التوالي لهذا المثلث مرسومين من راس واحد ٠

الجواب ٣ س + ٧ ص ـ ٥ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص ـ ١٠ = ٠ ، ٩ س + ١١ ص + ٥ = ٠

☆ (٥٧) جد معادلات اضلاع المثلث أ ب حـ اذا كانت ب (٢ ، ـ ١) راسا له مــع
العلم ان ٣ س ـ ٤ ص + ٢٧ = ٠ ، س + ٢ ص ـ ٥ = ٠ على التوالي معادلتا
ارتفاع ومنصف داخلي لزاوية مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب ٤ س + ٧ ص ـ ١ = ٠ ، ص ـ ٣ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص ـ ٥ = ٠

☆ (٥٨) جد معادلات اضلاع المثلث أ ب حـ اذا كانت ب (٢ ، ـ ٧) راسا له مــع
العلم ان ٣ س + ص + ١١ = ٠ ، س + ٢ ص + ٧ = ٠ ، معادلتا ارتفاع ،
ومستقيم متوسط على التوالي مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب س ـ ٣ ص ـ ٢٣ = ٠ ، ٧ س + ٩ ص + ١٩ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص + ١٣ = ٠

(٥٩) جد معادلات اضلاع المثلث ا ب حـ ٠ اذا كانت ا (٣ ، ـ ١) راسا لــه
مع العلم ان س ـ ٤ ص + ١٠ = ٠ ، ٦ س + ١٠ ص ـ ٥٩ = ٠ على التوالي معادلتا
منصف داخلي لزاوية ومستقيم متوسط مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب ٢ س + ٩ ص ـ ٦٥ = ٠ ، ٦ س ـ ٧ ص ـ ٢٥ = ٠ ،
١٨ س + ١٣ ص ـ ٤١ = ٠

(٦٠) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويصنع مع المستقيمين س ـ ص + ١٢ = ٠ ،
٢ س + ص + ٩ = ٠ ، مثلثا مساحته ٥ر١ وحدة مربعة .
الجواب ٣ س + ص = ٠ ، ٢٣ س + ٥ ٢ ص = صفر

(٦١) لتكن ا نقطة ∈ المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س ـ ٢
ولتكن ب نقطة ∈ المستقيم الذى معادلته س + ص + ٣ = ٠
فاذا كانت م (٣ ، ٠) منتصف قطعة المستقيم ا ب . جد معادلة ا ب .
الجواب ٨ س ـ ص ـ ٢٤ = ٠

(٦٢) ليكن $م_{١}$ هو المستقيم الذى معادلته س ـ ٢ ص ـ ٣ = صفر ،
$م_{٢}$ هو المستقيم الذى معادلته س + ٢ ص + ٥ = صفر
برهن انه ∃ أ ∈ $م_{١}$ ، ب ∈ $م_{٢}$ ، أ ، ب ∉ $م_{١}$ ∩ $م_{٢}$
بحيث ان منتصف [$\overline{أب}$] هو النقطه (-٢ ، -١)
فاذا كان ∀ أ ∈ $م_{١}$ و ∀ ب ∈ $م_{٢}$ ، ا ، ب ∉ $م_{١}$ ∩ $م_{٢}$ فان منتصف
[$\overline{أ ب}$] هو النقطة (ـ ٣ ، ـ ١) .

(٦٣) لتكن ا نقطة ∈ المستقيم الذى معادلته ٢ س ـ ص + ٥ = صفر
ب نقطة ∈ المستقيم الذى معادلته ٢س ـ ص + ١٠ = صفر ،
فاذا كان طول [$\overline{أ ب}$] = $\sqrt{١٠}$ وحدة وكانت نقطة الاصل ∈ ا ب فجد
معادلة ا ب .
الجواب ٣ س + ص = ٠ او س ـ ٣ ص = ٠ .

(٦٤) جد قيمة كل من آ ، ب لكي يكون المستقيمان أ س + ٨ ص + ب = صفر ،
٢ س + ا ص ـ ١ = صفر
(١) متوازيين (٢) متساويين (٣) متعامدين
الاجوبة (١) أ = ـ ٤ ، ب ≠ ٢ أو ا = ٤ ، ب ≠ ـ ٢
(٢) أ = ـ ٤ ، ب = ٢ أو آ = ٤ ، ب = ـ ٢
(٣) أ = صفر ، ب اى عدد حقيقي .

(٦٥) اكتب معادلة المستقيمات التاليـة بدلالة المقطعين وارسم المستقيمات
(١) ٢ س + ٣ ص ـ ٦ = صفر ، (٢) ٤س ـ ٣ ص + ٢٤ = ٠
(٣) ٢س + ٣ص ـ ٩ = ٠ (٤) ٣س ـ ٥ ص ـ ٢ = ٠ ،
(٥) ٥ س + ٢ ص ـ ١ = صفر
الاجوبة (١) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ١$ ، (٢) $\frac{س}{-٦} + \frac{ص}{٨} = ١$
(٣) $\frac{س}{\frac{٩}{٢}} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، (٤) $\frac{س}{\frac{٢}{٣}} + \frac{ص}{-\frac{٢}{٥}} = ١$ ، (٥) $\frac{س}{\frac{١}{٥}} + \frac{ص}{\frac{١}{٢}} = ١$

(٦٦) اكتب معادلة مستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) ويكون مع المحورين مثلثا مساحته (٢) وحدة مربعة .

الجواب س + ص − ٢ = ٠ ، (١ + $\sqrt{٢}$) س + (١ − $\sqrt{٢}$) ص − ٢ = ٠ ،
(١ − $\sqrt{٢}$) س + (١ + $\sqrt{٢}$) ص − ٢ = صفر

(٦٧) عين نقاط تقاطع المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) مع المحورين اذا علمت انه يصنع مع المحورين مثلثا مساحته (٣) وحدات مربعة .

الجواب شروط التمرين تتحقق بالمستقيمين اللذين يقطعان المحورين في النقاط
(٢ ، ٠) ، (٠ ، −٣) ، او (−٤ ، ٠) ، (٠ ، $\frac{٣}{٢}$) .

(٦٨) بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) مر بالمستقيم $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ بحيث $س_١$ $ص_١$ > صفر ، (أ ∈ ح ، أ ≠ ٠ ، ب ∈ ح ، ب ≠ ٠) وصنع مع المحورين مثلثا مساحته م . ماهي العلاقة بين الكميات $س_١$ ، $ص_١$ م . اذا كان المقطعان

أ ، ب متشابهين بالاشارة

الجواب م ≥ ٢ $س_١$ $ص_١$

(٦٩) عين ايا من المعادلات التالية هي معادلات مستقيمات بصيغتها العمودية
(١) $\frac{٣}{٥}$ س − $\frac{٤}{٥}$ ص − ٣ = صفر ، (٢) $\frac{٢}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص − ١ = صفر
(٣) $\frac{٥}{١٣}$ س − $\frac{١٢}{١٣}$ ص + ٢ = صفر ، (٤) − $\frac{٥}{١٣}$ س + $\frac{١٢}{١٣}$ ص − ٢ = صفر
(٥) − س + ٢ = صفر (٦) س − ٢ = صفر (٧) ص + ٢ = صفر ،
(٨) − ص − ٢ = صفر

(٧٠) فيما يلي حول الصيغة العامة لمعادلة المستقيمات ادناه الى الصيغة العمودية .−
١) ٤ س − ٣ ص − ١٠ = ٠ (٢) $\frac{٤}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص + ١٠ = صفر
٣) ١٢ س − ٥ ص + ١٣ = ٠ (٤) س + ٢ = ٠ ، (٥) ٢ س − ص − ٥ = صفر
الجواب (١) $\frac{٤}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص − ٢ = ٠ ، (٢) − $\frac{٤}{٥}$ س + $\frac{٣}{٥}$ ص − ١٠ = صفر
(٣) $\frac{١٢}{١٣}$ س + $\frac{٥}{١٣}$ ص − ١ = صفر ، (٤) − س − ٢ = صفر
(٥) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ س − $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ص − ١ = صفر

★ (٧١) عين الزاوية (د) التي يصنعها العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيمات المبينة معادلاتها ادناه مع الاتجاه الموجب للمحور الاول . ثم جد طول العمود (ع) وعند تعينك مقدار الزاوية وطول العمود ارسم المستقيمات معتبرا

هـ = ٣٠° ، حـ = ٢ في الحالتين الاخيرتين فيما يلي :ـ

(١) س ـ ٢ = صفر ، (٢) س + ٢ = صفر ، (٣) ص ـ ٣ = صفر ،

(٤) ص + ٣ = صفر ، (٥) س √٣ + ص ـ ٦ = صفر

(٦) س ـ ص + ٢ = صفر (٧) س + ص √٣ + ٢ = صفر ،

(٨) س جتاهـ ـ ص حاهـ ـ حـ = صفر عندما تكون هـ حادة ،

(٩) س جتاهـ + ص حاهـ + حـ = صفر ، هـ حادة

الاجوبة (١) د = صفر° ، ع = ٢ (٢) د = ط ، ع = ٢ (٣) د = ط/٢ ، ع = ٣

(٤) د = ـ ط/٣ ، ع = ٣ (٥) د = ط/٦ ، ع = ٣ . (٦) د = ـ ط/٤ ، ع = ٢

(٧) د = ٢/٣ ط ، ع = ١ (٨) د = ـ هـ ، حـ = ٢ (٩) د = هـ ـ ط ، ع = حـ

(٧٢) فيما يلي احسب المسافة بين النقطة والمستقيم المبينة معادلته ازاءها في المستوى الاقليدى وكذلك بين اذا كانت النقطة ونقطة الاصل في جانب واحد او في جانبين مختلفين من المستقيم

(١) آ (٢ ، ـ ١) ، ٤ س + ٣ ص + ١٠ = صفر

(٢) ب (ـ ، ـ ٣) ، ٥ س ـ ١٢ ص ـ ٢٣ = صفر

(٣) حـ (ـ ٢ ، ٢) ، ٣ س ـ ٤ ص ـ ٢ = صفر

(٤) د (١ ، ـ ٢) ، س ـ ٢ ص ـ ٥ = صفر

الاجوبة ٢ ، ١ ، ٤ ، صفر على الترتيب

تلميح / اذا كانت اشارة حـ ، اشارة أس١ + ب ص١ + حـ متشابهة فان النقطة (س١ ، ص١) تقع في جهة نقطة الاصل . واذا اختلفت اشارتاهما فان النقطة (س١ ، ص١) تقع في الجهة المخالفة لنقطة الاصل .

(٧٣) فيما يلي بين فيما اذا كانت النقطة (١ ، ـ ٣) ونقطة الاصل في جانب واحد او في جانبين مختلفين من كل مستقيم من المستقيمات التالية :ـ

(١) ٢ س ـ ص + ٥ = صفر (٢) س ـ ٣ ص ـ ٥ = صفر (٣) ٣ س + ٢ ص ـ ١ = صفر

(٤) س ـ ٣ ص + ٢ = صفر (٥) ١٠ س + ٢٤ ص + ١٥ = صفر

الاجوبة (١) في جانب واحد (٢) في جانبين مختلفين (٣) في جانب واحد

(٤) في جانب واحد (٥) في جانبين مختلفين .

(٧٤) النقطة (٢ ، ـ ٥) هي راس مربع احد اضلاعه على المستقيم الذى معادلتـــه
س ـ ٢ ص ـ ٧ = صفر احسب مساحة هذا المربـــع ٠
الجواب ٥ وحدات مربعة
(٧٥) اذا كانت ٣ س ـ ٢ص ـ ٥ = صفر ، ٢ س + ٣ ص + ٧ = صفر معادلتي ضلعـــين
من اضلاع مستطيل والذى (ـ٢ ، ١) راس له ٠ احسب مساحته ٠
الجواب ٦ وحدات مربعـــه
★ (٧٦) برهن ان المستقيم ٢س + ص + ٣ = صفر يقطع قطعة المستقيم المحصورة بـــــين
النقطتين أ (ـ ٥ ، ١) ، ب (٣ ، ٢)
(٧٧) رؤوس المثلث أ ب حـ هي أ (ـ١٠ ، ـ١٣) ، ب (٢ ، ٣) ،
حـ (٢ ، ١) جد طول العمود النازل من الراس ب على المستقيم المتوسط المرسوم
في حـ ٠
الجواب ٤ وحدات
(٧٨) أ ب حـ مثلث معادلات اضلاعه أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب
س + ١١ص ـ ٢٢ = ٠ ، ٥س ـ ٢١ص + ٧ = ٠ ، ٤س ـ ٣٣ص + ١٤٦ = صفر
جد بعد مركز الثقل للمثلث عن الضلع ب حـ
(الجواب (٣) وحدات) ٠
(٧٩) احسب البعد بين كل مستقيمين متوازيين من المستقيمات التالية
(١) ٣س ـ ٤ ص ـ ١٠ = صفر ، ٦ س ـ ٨ ص + ٥ = صفر
(٢) ٥ س ـ ١٢ ص + ٢٦ = صفر ، ٥ س ـ ١٢ ص ـ ١٣ = صفر
(٣) ٤ س ـ ٣ص + ١٥ = صفر ، ٨ س ـ ٦ ص + ٢٥ = صفر
(٤) ٢٤س ـ ١٠ص + ٣٩ = صفر ، ١٢س ـ ٥ص ـ ٢٦ = صفر
الاجوبة ٢٫٥ ، ٣ ، ١/٢ ، ٣٫٥ ٠
(٨٠) ضلعان من مربع واقعان على ٥ س ـ ١٢ ص ـ ٦٥ = صفر ، ٥س ـ ١٢ص + ٢٦ = صفر ،
وما مساحته ؟
الجواب (٤٩) وحدة مربعة
(٨١) برهن ان المستقيم ٥ س ـ ٢ص ـ ١ = صفر ، يوازى كلا من المستقيمين ٥س ـ ٢ص +
٧ = صفر ، ٥س ـ ٢ص ـ ٩ = صفر ، ويمر بمنتصف المسافة بينهما ٠
★ (٨٢) بين ان المستقيم الذى معادلته ١٠س + ٥ص ـ ٣ = صفر يقع بين المستقيمين
٢س + ص + ٥ = صفر ، ٢س + ص ـ ٩ = صفر ٠ وجد النسبة التي يقســـم
بها المستقيم البعد بين المستقيمين ٠
الجواب النسبة ٢ : ٣
(٨٣) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٧) ويبعد عن النقطة (١ ، ٢) ببعد
مقداره (٥) وحدات ٠
الجواب ٥ س + ١٢ص ـ ٩٤ = صفر او ص ـ ٧ = صفر

★ (٨٤) برهن انـه يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة (٧ ، ـ ٢) بحيث بعده
عن النقطة (٤ ، ـ ٦) يساوى (٥) وحدات . وجد معادلة هذا المستقيم .
الجواب ٣ س + ٤ ص ـ ١٣ = ٠

(٨٥) ما هي المجموعة { م : م مستقيم يمر بالنقطة (٤ ، ـ ٥) بحيث بعده عـن
النقطة (ـ ٢ ، ٣) يساوى ١٢ وحدة }
الجواب ∅

(٨٦) جد معادلة المجموعة هـ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٣س ـ ٤ص ـ ١٠ = صفر
يساوى ٣ وحدات }
الجواب : { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ٨ س ـ ٥ ص + ٩ = ٠ }

(٨٧) جد معادلة المستقيم الذى يوازى المستقيم ٣س ـ ٤ص + ٥ = صفر ، والذى يبعد عنه
بمقدار (٣) وحدات
الجواب ٣س ـ ٤ص ـ ٢٥ = صفر ، ٣ س ـ ٤ص + ٥ = صفر

★ (٨٨) النقطتان آ (٢ ، ٠) ، ب (ـ ١ ، ٤) هما راسان متجاوران لمربع . جـد
معادلات اضلاعه .
الجواب شروط التمرين تتحقق بمربعين معادلات اضلاع المربع الاول هي :ـ
٤س + ٣ص ـ ٨ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١٧ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص + ١٩ = ٠
، ٣س ـ ٤ص ـ ٦ = ٠ ومعادلات اضلاع المربع الثاني هي
٤س + ٣ص ـ ٨ = ٠ ، ٤س + ٣ ص ـ ٣٣ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٦ = صفر ،
٣ب ـ ٤ ص + ١٩ = ٠

★ (٨٩) النقطة أ (٥ ، ـ ١) هي راس مربع ، احد اضلاعه يقع على المستقيم .
٤س ـ ٣ ص + ٧ = صفر ، جد مُعادلات بقية اضلاعـــه .
الجواب شروط التمرين تتحقق بمربعين معادلات بقية اضلاع المربع الاول هي :ـ
٣س + ٤ص ـ ١١ = ٠ ، ٤س ـ ٣ص ـ ٢٣ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٢٧ = ٠
ومعادلات بقية اضلاع المربع الثاني هي :ـ
٣س + ٤ص + ٣ = ٠ ، ٤س ـ ٣ص ـ ٢٣ = ٠ ، ٣س + ٤ص + ٥ = صفر

(٩٠) المعادلتان ٤س ـ ٣ص + ٣ = صفر ، ٤س ـ ٣ص ـ ١٧ = صفر هما معادلتـــي
ضلعين من اضلاع مربع والنقطة ا (٢ ، ـ ٣) هي احد رؤوسه جد معادلتي الضلعين الآخرين
الجواب ٣ س + ٤ص + ٦ = صفر ، ٣س + ٤ص ـ ١٤ = ٠
او ٣س + ٤ص + ٦ = صفر ، ٣س + ٤ص + ٢٦ = ٠

* (٩١) المعادلتان ٥ س + ١٢ ص — ١٠ = صفر ، ٥ س + ١٢ ص + ٢٩ = صفر هما معادلتا ضلعين من اضلاع مربع والنقطة (— ٣ ، ٥) تقع على احد ضلعيه جد معادلتي الضلعين الاخرين .

الجواب ١٢ س — ٥ ص + ٦١ = صفر ، ١٢ س — ٥ ص + ٢٢ = صفر

او ١٢ س — ٥ ص + ٦١ = صفر ، ١٢ س — ٥ ص — ١٠٠ = صفر .

(٩٢) اذا كان بعد النقطة ن (س١ ، ص١) عن المستقيمين

٥ س — ١٢ ص — ١٣ = صفر ، ٣ س — ٤ ص — ١٩ = ٠ هو على التوالي

٣ ، ٥ + ٠ فجد احداثيي نقطة ن

الجواب : ن (٣ ، ٢)

* (٩٣) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (— ٢ ، ٣) والذي يبعد ببعد متساو عن النقطتين (٥ ، — ١) ، (٣ ، ٧) .

الجواب ٤ س + ص + ٥ = ٠ ، ص — ٣ = ٠

(٩٤) جد معادلة كل من المجموعات التالية :—

هـ١ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٣ س — ص + ٧ = ٠ ، يساوي بعدها عن المستقيم ٣ س — ص — ٣ = صفر }

هـ٢ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم س — ٢ ص + ٣ = ٠ ، يساوي بعدها عن المستقيم س — ٢ ص + ٧ = ٠ }

هـ٣ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٥ س — ٢ ص + ٦ = ٠ يساوي بعدها عن المستقيم ١٠ س — ٤ ص + ٣ = ٠ }

الاجوبة (١) { (س ، ص) : ٣ س — ص + ٢ = ٠ }

(٢) { (س ، ص) : س — ٢ ص + ٥ = ٠ }

(٣) { (س ، ص) : ٢٠ س — ٨ ص — ٩ = ٠ }

(٩٥) جد معادلة كل من المجموعات التاليـة :—

هـ١ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم س — ٣ ص + ٥ = ٠ تساوي المسافة بين أ والنقطة ٣ س — ص — ٢ = ٠ }

هـ٢ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم س — ٢ ص — ٣ = ٠ تساوي المسافة بين أ والمستقيم ٨ ص + ١٣ = ٠ }

هـ٣ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم ٣ س + ٤ ص — ١ = ٠ تساوي المسافة بين أ والمستقيم ٥ س + ١٢ ص — ٢ = ٠ }

الاجوبة هـ١ { (س ، ص) : ٤ س — ٤ ص + ٣ = ٠ او ٢ س + ٢ ص — ٧ = ٠ } .

هـ$_2$ = {(س ، ص) : ٤س + ١ = ٠ او ٨ص + ١٢ = ٠}

هـ$_2$ = {(س ، ص) : ٤س + ١ = ٠ او ٨ص + ١٣ = ٠}

هـ$_3$ = {(س ، ص) : ٤١س − ٨ص − ٣ = ٠ او س + ١١٢ص − ٢٣ = ٠}

ملاحظة — ان المعادلة ٤س − ٤ص + ٣ = ٠ او المعادلة ٢س + ٢ص − ٧ = ٠
تمثل معادلة المستقيم المنصف الداخلي للزاوية او المنصف الخارجي لها .

٭ (٩٦) اكتب معادلتي المستقيمين اللذين يمر كل منهما بالنقطة (٢ ، −١) ويصنع كل منهما مع المستقيمين ٢س − ص + ٥ = ٠ ، ٣س + ٦ص − ١ = ٠ مثلثاً متساوي الساقين .

تلميح / جد معادلتي المنصفين للزاوية بين المستقيمين المعلومين وبما ان هذين المستقيمين المنصفين عمودان على المستقيمين المطلوبين (ميل ونقطة) فجد معادلة كل منهما) .

الجواب س − ٣ص − ٥ = ٠ ، ٣س + ص − ٥ = ٠ .

٭ ملاحظة/ (معادلة مجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين)

معادلة مجموعة المستقيمات المارة بالنقطة ن ، حيث ن نقطة تقاطع المستقيمين
أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ = ٠ ، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = ٠ هي

ل$_1$ (أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$) + ل$_2$ (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$) = صفر ....(١)

حيث ل$_1$ ، ل$_2$ عددان حقيقيان لا يساويان معاً صفراً . وتسمى النقطة ن الـراس الذي تشترك به المستقيمات .

اذا كان ل$_1$ ≠ صفراً تقسم طرفي المعادلة (١) على ل$_1$ وترمز الى $\frac{ل_2}{ل_1}$ = ل

فان المعادلة (١) تصبح
أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ + ل (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$) = صفر وهي تمثـل المعادلة العامة لاي مستقيم مار بنقطة تقاطع مستقيمين عدا المستقيم عندما ل$_1$ = صفر

اي عدا المستقيم أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = صفر

---

(٩٧) اذا كانت ل$_1$ (٢س + ٣ص − ١) + ل$_2$ (س − ٢ص − ٤) = صفراً هـي المعادلة العامة لمجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين . فجد احداثي نقطة التقاطع هذه .

الجواب (٢ ، −١)

* (٩٨) جد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى مجموعة المستقيمات التي معادلتها :ــ

ل١ (س + ٢ص ــ ٥) + ل٢ (٣س ــ ٢ص + ١) = ٠ والذى

(١) يمر بالنقطة (٣ ، ١) ، يمر بنقطة الاصل (٣) يوازى المحور الاول

(٤) يوازى المحور الثاني (٥) يوازي المستقيم ٤س + ٣ص ــ ٥ = ٠ ،

(٦) عمود على المستقيم ٢س + ٣ص + ٧ = ٠

الاجوبة / ٣س + ٢ص ــ ٧ = ٠ ، ٢س ــ ص = ٠ ، ص ــ ٢ = ٠ ، س ــ ١ = ٠

، ٤س + ٣ص ــ ١٠ = ٠ ، ٣س ــ ٢ص + ١ = ٠

(٩٩) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٣س ــ ٢ص + ٥ = ٠ ،

٤س + ٣ص ــ ١ = ٠ ، والذى يقطع من محور الصادات جزء طوله (٣) وحدات

الجواب ٧٤س + ١٣ص + ٣٩ = ٠

(١٠٠) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص ــ ٢ = ٠ ،

س ــ ٥ص ــ ٢٢ = ٠ ، والذى ينصف قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتيــــن

(٥ ، ــ ٦) ، (ــ ١ ، ــ ٤) .

الجواب س ــ ص ــ ٧ = ٠

(١٠١) لتكن ل١ (٢س ــ ٤ص ــ ٣) + ل٢ (٢س + ٣ص ــ ١) = ٠ معادلة مجموعة

المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين . اكتب معادلة المستقيم المار من مركز ثقل

صفيحة مثلثة منتظمة رؤوسها أ (ــ ١ ، ٢) ، ب (٤ ، ــ ٤) ، حـ (٦ ، ــ ١) ،

والذى ينتمي الى هذه المجموعة .

الجواب ٧س + ١٩ص ــ ٤ = صفر

(١٠٢) لتكن أ ∋ المستقيم الذى معادلته س + ٢ص + ٤ = ٠ ولتكن ب ∋

المستقيم الذى معادلته س + ٧ص ــ ١ = صفر اكتب معادلة أب اذا علمت انه ينتمي

الى المجموعة

ل١ (٣س ــ ٢ص ــ ١) + ل٢ (٤س ــ ٥ص + ٨) = صفر

(١٠٣) مثلث معادلات اضلاعه س + ٢ص ــ ١ = صفر ، ٥س + ٤ص ــ ١٧ = ٠

س ــ ٤ص + ١١ = ٠ ، اكتب معادلات ارتفاعاته .

الجواب ٤س ــ ٥ص + ٢٢ = ٠ ، ٤س + ص ــ ١٨ = ٠ ، ٢س ــ ص + ١ = صفر .

* (١٠٤) لتكن ل١ (٥س + ٣ص ــ ٧) + ل٢ (٣س + ١٠ص + ٤) = صفراً معادلة لمجموعة

المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين فاذا كان المستقيم أس + ٥ص + ٩ = ٠

(حيث أ ∈ ح) ينتمي الى هذه المجموعة فما قيمة أ وعين احداثيي الــرأس

المشترك لمجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين

الجواب أ = ــ ٢ ، (٢ ، ــ ١) .

* (١٠٥) لتكن ل$_{1}$ (٢س ـ ٣ص + ٢٠) + ل$_{2}$ (٣س + ٥ص ـ ٢٧) = صفرا معادلة مجموعة المستقيمات فاذا كان الراس المشترك لهذه المستقيمات هو راس مربع معادله احد قطريه س + ٧ص ـ ١٦ = صفر فاكتب معادلات اضلاعه وقطره الاخر ٠
الجواب معادلات اضلاعه ٤س + ٣ص ـ ٤١ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص + ٢٧ = صفر ، ٣س ـ ٤ص + ٢ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١١ = ٠ ومعادلة قطره الاخر ٧س ـ ص + ١٣ = ٠

(١٠٦) لتكن ل$_{1}$ (٢س + ٥ص + ٤) + ل$_{2}$ (٣س ـ ٢ص + ٢٥) = صفرا معادلة مجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين فاكتب معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هذه المجموعة ويقطع من المحورين جزئين متساويين ٠
الجواب س + ص + ٥ = صفر

(١٠٧) لتكن ل$_{1}$ (٢١س + ٨ص ـ ١٨) + ل$_{2}$ (١١س + ٣ص + ١٢) = صفرا هي معادلة مجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين ٠ جد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هذه المجموعة ويقطع من المحورين مثلثا مساحته (٩) وحدات مربعة ٠
الجواب ٢س + ص ـ ٦ = ٠ ، ٩س + ٢ص + ١٨ = ٠

(١٠٨) لتكن ل$_{1}$ (٢س + ص ـ ٦) + ل$_{2}$ (س ـ ٢ص ـ ٣) = صفرا ، مجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين ٠ برهن انه يوجد على الاقل مستقيم واحد ينتمي الى هذه المجموعة والذى يبعد عن النقطة (٢ ، ـ ٣) بمقدار ($\sqrt{10}$) وحدة ٠ ثم جد معادلة هذا المستقيم ٠
الجواب ٣س ـ ص + ١ = ٠

(١٠٩) لتكن هـ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح×ح ، أس + ب ص + حـ = صفرا ، أ ، ب لايساويان معا صفرا ، أ ، ب ، حـ ∈ ح } برهن ان هـ تمثل معادلة مجموعة نقاط الخط المستقيم ٠

(١١٠) المستقيم الذى معادلته س ـ ٢ص = ٨ يقطع محور السينات والصادات في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، نقطة حـ تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٣ فاذا اقيم من حـ عمود على أب فانه يقطع محور السينات في نقطة د ٠ جد احداثيي النقطة د ٠

(١١١) المستقيم ٣س + ٥ص ـ ١٥ = ٠ ، يقطع محور السينات في نقطة حـ ويقطع محور الصادات في نقطة د فاذا اقيم من منتصف حـ د عمود عليه ٠ فاثبت ان محورى الاحداثيات يحصران بينهما جزءا من هذا العمود طوله $\frac{8\sqrt{34}}{15}$

(١١٢) اثبت ان المستقيمات ٥س ـ ٢ص + ٦ = ٠ ، ٢س + ٥ص = ١٥ ، ٣س ـ ص + ٣ = ٠ ، تتقاطع في نقطة واحدة ٠

(١١٣) برهن ان المستقيمين ٢س + ص + ١ = صفرا ، س ـ ٢ص + ٨ = ٠ يتقاطعان
على المستقيم المار بالنقطتين (ـ ٢ ، ٢) ، (ـ ٢ ، ٣) ٠

★ (١١٤) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ٧ص ـ ٨ = ٠ ،
٣س + ٢ص + ٥ = صفر والذى يصنع مع المستقيم ٢س + ٣ص ـ ٧ = ٠ زاوية مقدارها
٤٥°

★ (١١٥) في المثلث أ ب حـ الارتفاعات أ د ، ب ن والضلع اب معرفة بالمعادلات التالية
على التوالي س + ٥ص ـ ٣ = ٠ ، س + ص ـ ١ = ٠ ، س + ٣ص ـ ١ = ٠ اكتب
معادلتي الضلعين الاخرين ومعادلة الارتفاع حـ ن ٠
الجواب ب حـ : ٥س ـ ص ـ ٥ = ٠ ، أ حـ = س ـ ص + ٣ = ٠ ، حـ ن : ٣س ـ ص ـ ١ = ٠

(١١٦) مستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويقطع من محوري الاحداثيات جزئين مجموع
طوليهما (٨) وحدات اكتب معادلة ثم بين ان للمسالة حلين ٠ـ
الجواب ٣س + ص ـ ٦ = ٠ ، س + ص ـ ٤ = ٠

(١١٧) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) والجزء المحصور منه بين محوري
الاحداثيات يقسم بهذه النقطة من ٣ : ٢ على الترتيب
الجواب ٥ س ـ ٦ ص + ١٠ = ٠

(١١٨) المستقيم اب يمر بالنقطة (٢ ، ١) ويقطع من محور الصادات جزء طوله
(٥) وحدات والمستقيم حـ د يمر بالنقطة (٥ ، ـ ٢) ويقطع من محور السينات
جزء طوله (٤) وحدات برهن ان اب // حـ د ٠ وجد البعد بينهما ٠
الجواب $\frac{٣\sqrt{٥}}{٥}$

(١١٩) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ١) ويبعد (١) وحدة عن نقطة
الاصل
الجواب: $\sqrt{٣}$س + ص = ٢ ، ص = ١

(١٢٠) جد مساحة الدائرة التي مركزها النقطة (٣ ، ـ ٤) والتي تمس المستقيم
٥ س + ١٢ ص + ٧ = ٠
الجواب $\frac{٨٨}{٧}$ وحدة مربعة

(١٢١) جد مساحة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم ٣س + ص ـ ٦ = ٠ ، والتي
تمر بالنقطتين (٦ ، ٤) ، (ـ ٢ ، ٠)
الجواب (٤٠ ط) وحدة مربعة ٠

(١٢٢) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ رأسه ا يقع على محور الصادات ورأسه ب يقع على محور السينات ، حـ (٤ ، ٦) ضلعه ا حـ يقع على المستقيم
س + ٢ص ـــ ١٦ = ٠ جد مساحة المثلث ا ب حـ
الجواب (١٥) وحدة مربعة ٠

(١٢٣) النقطة ب (٢ك ، هـ) تقع على المستقيم س ـــ ص ـــ ٤ = ٠ ، والنقطة ا (هـ ، ك) تقع على المستقيم ٣س + ٢ص ـــ ١٢ = ٠ ، جد معادلة اب علماً ان هـ ، ك ∋ ح
الجواب س + ٤ص ـــ ١٦ = ٠

(١٢٤) لتكن كل من ا (٦ ، ٨) ، ب (ـــ ٢ ، ٤) ، حـ (هـ ـــ ٣ ، ن ـــ ٤) نقطة ∋ مستقيم واحد بحيث ان ٣ [ا ب] = ٤ [ب حـ] فجد معادلة المستقيم المار من النقطة (٢ هـ ، ن) والعمود على المستقيم ا ب ٠ علماً ان
هـ ، ن ∋ ح
الجواب ٢س + ص + ١٩ = ٠

(١٢٥) لتكن م١ = { (س ، ص) : س + ص ـــ ٤ = ٠ }
ولتكن م٢ = { (س ، ص) : ٣س ـــ ص + ١٢ = صفر }
ولتكن م٣ = { (س ، ص) : ٣س + ٤ص ـــ ١٥ = صفر }
اذا علمت ان ا ∋ م١ ∩ م٢ ،
ب (٢ + هـ ، ٢ ـــ هـ) ∋ م٣ حيث هـ ∋ ح
حـ (ك ، ٣ك + ٨) ∋ م١ حيث ك ∋ ح

جد
(١) معادلة المستقيم المار من حـ ومن نقطة الوحدة للمحور الثاني
(٢) معادلة المستقيم المار من حـ والموازي للمحور الثاني
(٣) النسبة التي يقسم بها المستقيم الذي معادلته ص = ٣س ـــ ١٦ قطعة المستقيم ا ب وما نوع التقسيم ٠
الجواب ٤س + ص ـــ ١ = ٠ ، س = ـــ ١ ، $\frac{-٧}{٤}$ (من الخارج)

(١٢٦) المستقيم الذي معادلته ٤س + ٣ص = ٢٥ يقطع المستقيم ا هـ في نقطة هـ حيث ا (٥ ، ٠) ويقطع المستقيم ب ك في نقطة ك حيث ك (ـــ ٥ ، ٠) ، فاذا كانت المسافة بين هـ ، ك = ٥ وحدات فجد معادلة كل من ا هـ ، ب ك ٠ علماً ان ميل كل من المستقيمين ا هـ ، ب ك هو ل حيث ل ∋ ح

الدائـــــــــــرة

اذا كانت م نقطة في المستوى الاقليدى ، فانّ مجموعة كل النقاط المتساوية البعــد عن م تسمى دائرة . تسمى م مركز الدائرة . واى من هذه الابعاد المتساوية يسمى نصـف قطر الدائرة وباختصار الدائرة هي

$$\{ \text{أ} : \text{أ نقطة في المستوى} \ . \ \overline{\text{م أ}} = \text{نق} \ ، \ \text{نق} \in \text{ح}^{+} \}$$

ملاحظات/

(١) الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة أ (س ، ص) على الدائرة التي مركزها نقطـة الاصل ونصف قطرها نق هو

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (١)$$

اى ان معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها نق هي

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$$

(٢) الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة أ (س ، ص) على الدائرة التي مركزها (هـ ، ك) ونصف قطرها نق هو

$$(\text{س} - \text{هـ})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 = \text{نق}^2 \qquad \ldots\ldots (٢)$$

اى ان معادلة الدائرة التي مركزها (هـ ، ك) ونصف قطرها نق هي

$$(\text{س} - \text{هـ})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 = \text{نق}^2$$

(٣) معادلة كل دائرة تكون بالصورة التالية :-

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = ٠ \qquad \ldots\ldots (٣)$$

الا ان العكس ليس صحيحا على وجه العموم فاذا كان

(أ) $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - ٤\,\text{جـ} > \text{صفر}$ فان المعادلة (٣) تمثل دائرة مركزها $\left(\frac{-\text{أ}}{٢} ، \frac{-\text{ب}}{٢}\right) = (\text{هـ} ، \text{ك})$ ونصف قطرها $\sqrt{\text{هـ}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$

(ب) $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - ٤\,\text{جـ} = \text{صفرا}$ فان المعادلة (٣) تمثل مجموعة احادية هي $\left\{ \left(\frac{-\text{أ}}{٢} ، \frac{-\text{ب}}{٢}\right) \right\}$.

(جـ) $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - ٤\,\text{جـ}$ صفر فان المعادلة (٣) تمثل مجموعة خالية

(٤) لتكن د هي الدائرة التي مركزهـا (هـ ، ك) ونصف قطرها نق فان

(أ) د تمس محور السينات $\iff$ نق = |ك|

(ب) د تمس محور الصادات $\iff$ نق = |هـ|

(جـ) د تمس المحورين الاحداثيين $\iff$ نق = |هـ| = |ك|

(٥) العلاقة بين المستقيم والدائرة د .

(أ) م يمس د $\Longleftrightarrow$ م $\cap$ د = مجموعة احادية

او م يمس د $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى = نق

(ب) م يقطع د في نقطتين $\Longleftrightarrow$ م $\cap$ د = مجموعة ذات عنصرين .

او م يقطع د في نقطتين $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى < نق

(جـ) م لايقطع ولا يمس د $\Longleftrightarrow$ م $\cap$ د = مجموعة خالية

م لايقطع ولايمس د $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى > نق .

(٦) العلاقة بين الدائرة د والنقطة أ

(أ) النقطة أ تقع على الدائرة د $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة والنقطة أ = نق

(ب) النقطة أ تقع داخل الدائرة د $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة د والنقطة أ < نق

(جـ) النقطة أ تقع خارج الدائرة $\Longleftrightarrow$ المسافة بين مركز الدائرة د والنقطة أ > نق

(٧) العلاقة بين دائرتين

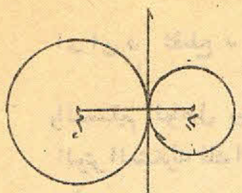
العلاقة بين الدائرة $د_١$ والتي مركزها $م_١$ ونصف قطرها $نق_١$ والدائرة $د_٢$ والتي مركزها $م_٢$ ونصف قطرها $نق_٢$

(أ) تماس دائرتين

$د_١$ تمس $د_٢$ $\Longleftrightarrow$ $د_١ \cap د_٢$ = مجموعة احادية

اى انه يقال للدائرة $د_١$ انها تمس الدائرة $د_٢$ اذا اشتركا بنقطة واحدة

وواحدة فقط والعكس بالعكس • وتمس النقطة المشتركة بنقطة تماس الدائرتين • ويسمى المماس لهاتين الدائرتين عند نقطة التماس بالمماس المشترك لهما عند نقطة التماس •



(شكل ١ـ٦)

اولا ــ تماس دائرتين من الخارج

د$_1$ تمس د$_2$ من الخارج $\Longleftrightarrow$ المسافة بين م$_1$ ، م$_2$ = نق$_1$ + نق$_2$ اى ان الدائرة د$_1$ تمس د$_2$ من الخارج اذا كان طول خط المركزين يساوى مجموع نصفي قطريهما والعكس بالعكس •

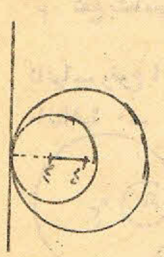
وان نقطة التماس تقسم المسافة بين م$_1$ ، م$_2$ من الداخل بنسبة نق$_1$: نق$_2$

ولايجاد معادلة المماس المشترك للدائرتين عند نقطة التماس نتبع مايلي

١ــ نجد ميل المستقيم الواصل بين م$_1$ ، م$_2$

٢ــ بما ان المماس عمود على المستقيم الواصل بين م$_1$ ، م$_2$ فان ميل المماس = المقلوب السالب لميل م$_1$ م$_2$

٣ــ من الميل ونقطة التماس نجد معادلة المماس المشترك عند نقطة التماس



(شكل ١ـ٧)

ثانيا ــ تماس دائرتين من الداخل

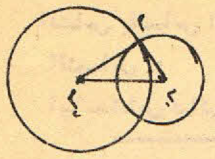
د$_1$ تمس د$_2$ من الداخل $\Longleftrightarrow$ المسافة بين م$_1$ ، م$_2$ = نق$_1$ ــ نق$_2$ وان نقطة التماس تقسم المسافة بين م$_1$ ، م$_2$ من الخارج بنسبة نق$_1$: نق$_2$

ولايجاد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما نتبع نفس الطريقة الواردة في حالة التماس من الخارج •

(ب) تقاطع دائرتين

د$_1$ تقطع د$_2$ $\Longleftrightarrow$ د$_1$ $\cap$ د$_2$ = مجموعة ذات عنصرين

اى ان $د_1$ تقطع $د_2$ اذا اشتركتا بنقطتين والمستقيم الواصل بين هاتين النقطتين يسمى الوتر المشترك للدائرتين . وشرط تقاطع دائرتين هو :



(شكل ١ـ٨)

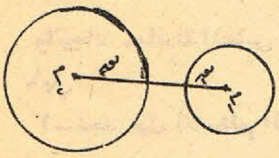
$د_1$ تقطع $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $<$ $نق_1 + نق_2$

والمسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $>$ $|\,نق_1 - نق_2\,|$

(جـ) الدائرتان غير متماستين وغير متقاطعتين

$د_1$ لاتقطع ولاتمس $د_2$ $\Longleftrightarrow$ $د_1 \cap د_2 = \phi$

مجموعة خالية ويمكن تقسيم هذه الحالة كما يلي :ـ



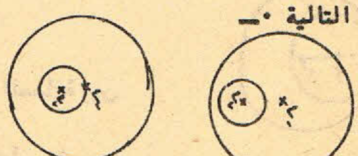
اولاـ تباعد الدائرتين (اى كل منهما تقطع بتمامها خارج الاخرى) اى كما في الشكل المجاور

(شكل ١ـ٩)

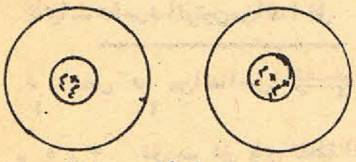
وشرط تباعد دائرتين هو :ـ

$د_1$ تقع بتمامها خارج $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $>$ $نق_1 + نق_2$

ثانياـ وقوع احدى الدائرتين بتمامها داخل الاخرى اى كما في الاشكال التالية :ـ



(شكل ١ـ١٠)



(شكل ١ـ١١)

وشرط وقوع احدى دائرتين بتمامها داخل الاخرى هو :ـ

$د_1$ تقع بتمامها داخل $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $<$ $|\,نق_1 - نق_2\,|$

وفي حالة اتحاد مركز $د_1$ مع مركز $د_2$ يمكن استنتاج الشرط التالي $د_1$ تتحد مع $د_2$ بالمركز $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ = صفرا

(٨) من المعادلة ٣

(أ) اذا وقع مركز الدائرة على محور السينات فان الاحداثي الصادى للمركز = صفرا ، اى $(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}) = (هـ ، صفر)$

ومن هذه نحصل ان ب = صفرا وتصبح المعادلة :

س٢ + ص٢ + أس + حـ = ٠

(ب) اذا وقع مركز الدائرة على محور الصادات فان الاحداثي السيني للمركز = صفرا ، اى $(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}) = (صفر ، ك)$ ومن هذه نحصل على ان أ = صفرا وتصبح المعادلة :

س٢ + ص٢ + ب ص + حـ = صفر

(جـ) اذا مرت الدائرة بنقطة الاصل فان نقطة الاصل تحقق المعادلة ومن ذلك نحصل على ان حـ = صفر وتكون المعادلة (٣) على الصورة التالية

س٢ + ص٢ + أ س + ب ص = صفرا

(٩) لايجاد معادلة الدائرة التي قطرها المستقيم الذى نهايتاه النقطتان (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) نجدها كما يلي :-

(١) مركزها النقطة $(\frac{س١ + س٢}{٢} ، \frac{ص١ + ص٢}{٢})$

(٢) نصف قطرها = $\frac{١}{٢}\sqrt{(ص٢ - ص١)^{٢} + (س٢ - س١)^{٢}}$ وبعد ذلك يمكن كتابة المعادلة بدلالة مركزها وطول نصف قطرها كما في الصيغة (٢) .

(١٠) لايجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة واقعة عليها نتبع مايلي :-

١- نجد ميل نصف قطرها الواصل بين مركزها ونقطة التماس المعلومة

٢- نجد ميل المماس (= المقلوب السالب لميل نق)

٣- من ميل المماس ونقطة التماس نجد معادلة المماس .

(١١) لايجاد معادلة مماس الدائرة من النقطة (س١ ، ص١) (الخارجة عن الدائرة) الى الدائرة س٢ + ص٢ + أ س + ب ص + حـ = ٠ نتبع مايلي

١- نجد مركز الدائرة = $(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}) = (هـ ، ك)$

٢- نجد نق = $\sqrt{هـ٢ + ك٢ - حـ}$

٣- نفرض ميل المماس = ل . ونجد معادلة المماس للدائرة بدلالة ل والنقطة (س١ ، ص١)

اى ل = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ وبالتبسيط ل س — ص — ل $س_1$ + $ص_1$ = ٠ ——— (١)

٤ــ من شروط تماس مستقيم مع دائرة
المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم الذى معادلته (١) في المستوى الاقليدى = نق ومن هذه المعادلة نجد قيمة ل ونعوضها في المعادلة (١) فهي معادلة المماس المطلوبة ٠

ومن الجدير بالذكر انه يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجة عنها ومتساويين بالطول ٠

(١٢) لايجاد معادلة الدائرة اذا علم مركزها ومعادلة مماسها نلخص كما يلي ٠ــ
نجد ميل المماس ومنه نجد ميل نق (= المقلوب السالب لميل المماس) ٠ ومن ميل نق ومركز الدائرة نجد معادلة نق ٠ وبحل معادلة المماس ومعادلة نق انيا ٠ نجد نقطة التقاطع (نقطة التماس) وبايجاد المسافة بين مركز الدائرة ونقطة التماس نحصل على نق وبمعرفة مركز الدائرة ونصف قطرها نستطيع كتابة معادلة الدائرة كما في الصيغة (٢) ٠
او نستطيع ايجاد طول نق بايجاد المسافة بين مركز الدائرة والمماس في المستوى الاقليدى وبعد ذلك نكتب المعادلة ٠

(١٣) لايجاد طول المماس المرسوم للدائرة من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) (الخارجة عن الدائرة)
$س^2 + ص^2 + أس + ب ص + حـ = ٠$ نتبع مايلي ٠ــ
١ــ نجد مركز الدائرة ($\frac{-أ}{2}$ ، $\frac{-ب}{2}$) = (هـ ، ك) ثم نجد
$$نق = \sqrt{هـ^2 + ك^2 - حـ}$$
٢ــ نجد المسافة بين ($س_1$ ، $ص_1$) ومركز الدائرة (هـ ، ك) ولتكن م
٣ــ نستخدم نظرية فيثاغورس لايجاد طول المماس اى (طول المماس$)^2$ = $م^2 - نق^2$

(١٤) يعرف وتر الدائرة بانه قطعة مستقيمة تقع نهايتاها على الدائرة ٠ ولايجاد طول الوتر اذا اعطي بنظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم فنحل المعادلتين انيا ٠ وبعد ذلك نحصل على نقطتي تقاطعهما ٠ ثم نجد المسافة بين هاتين النقطتين فهي طول الوتر اما اذا اعطي بنظام مكون من معادلتين كل منهما تمثل معادلة دائرة ٠

ففي هذه الحالة يتكون وتر مشترك للدائرتين . ونجد طوله بحل المعادلتين انيا وذلك بطرح احدى المعادلتين من الاخرى فنحصل على معادلة من الدرجة الاولى . ومن المعادلة الاخيرة نعوض في احدى معادلتي الدائرتين لنحصل على نقطتي التقاطع .

وبعد ذلك يمكن ايجاد طوله بتطبيق المسافة بين النقطتين وكذلك يمكن ايجاد معادلة الوتر المشترك بينهما الذى هو المستقيم المار بنقطتي تقاطعهما .

(١٥) لايجاد طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من محور السينات نتبع الطريقة التالية

$س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + حـ = ٠$ معادلة الدائرة

نحل معادلة الدائرة هذه مع معادلة محور السينات انيا اى نجعل ص = ٠ فتصبح المعادلة $س^٢ + أ س + حـ = ٠$

وبحل المعادلة $س^٢ + أ س + حـ = ٠$ نحصل على الجذرين وليكونا

$س = س_١ ، س = س_٢$

∴ نقطتا تقاطع الدائرة مع المحور الاول هما $(س_١ ، ٠) ، (س_٢ ، ٠)$

∴ طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من المحور الاول = $|س_٢ - س_١|$

وبنفس الطريقة نجد طول الجزء الذى تقطعه من المحور الثاني وذلك بان نجعل س = ٠ فتصبح معادلة الدائرة

$ص^٢ + ب ص + حـ = ٠$

وليكن جذرا المعادلة هذه $ص_١ ، ص_٢$

∴ $(٠ ، ص_١) ، (٠ ، ص_٢)$ هما نقطتا تقاطع الدائرة مع المحور الثاني

∴ طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من المحور الثاني = $|ص_٢ - ص_١|$

ــ تمارين ــ ١ــ ٧

(١) جد معادلة الدائرة من الشروط التالية :ــ

١) مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها (٣) وحدات

٢) مركزها (٢ ، ــ ٣) ونصف قطرها (٧) وحدات

٣) تمر بنقطة الاصل ومركزها (٦ ، ــ ٨)

٤) تمر بالنقطة (٢ ، ٦) ومركزها (ــ ١ ، ٢)

٥) النقطتان (٣ ، ٢) ، (ــ ١ ، ٦) نهايتا قطر فيها .

٦) مركزها نقطة الاصل وتمس المستقيم ٣ س ــ ٤ ص + ٢٠ = ٠

٧) مركزها (١ ، ــ ١) والمستقيم ٥ س ــ ١٢ص + ٩ = ٠ ، يمس الدائرة

٨) الدائرة تمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (ــ ١ ، ٣) ومركزها يقع على المستقيم ٣س ــ ص ــ ٢ = ٠

٩) الدائرة تمر بالنقاط (١ ، ١) ، (١ ، ــ ١) ، (٢ ، ٠)

الاجوبة على الترتيب / س٢ + ص٢ = ٩ ، (س ــ ٢)^{2} + (ص + ٣)^{2} = ٤٩ ،
(س ــ ٦)^{2} + (ص + ٨)^{2} = ــ ١ ، (س + ١)^{2} + (ص ــ ٢)^{2} = ٢٥ ،
(س ــ ١)^{2} + (ص ــ ٤)^{2} = ١٠ ، (س ــ ١)^{2} + ص٢ = ١

(٢) جد معادلة المماس للدائرة س٢ + ص٢ = ٢٥ عند النقطة (ــ ٤ ، ٣)

الجواب ٣ص ــ ٤ س = ٢٥

★ (٣) ١) برهن تحليليا ان المماسين لدائرة عند نهايتي قطر فيها يكونان متوازيين .

٢) برهن تحليليا ان الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة .

٣) برهن تحليليا ان المستقيم لايقطع الدائرة في اكثر من نقطتين .

٤) برهن تحليليا ان العمود النازل من مركز اى دائرة على وتر فيها ينصفه .

(٤) جد طول كل من الاوتار التالية (كل منها معطى بنظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم) .

١) س٢ + ص٢ = ٢٥ ، س + ٢ = ٠

٢) س٢ + ص٢ = ٩ ، ص ــ ١ = ٠

٣) س٢ + ص٢ + ٢س ــ ١٢ = ٠ ، س ــ ص = ٠

٤) س٢ + ص٢ = ٤ ، س + ص = ٢

الاجوبة/ ٨٤ ، ٣٢ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$

(٥) أ) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليدى :-

هـ$_1$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 < ٤ }

هـ$_2$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٩ }

هـ$_3$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٢٥ ، س < ص }

هـ$_4$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 − ٤س − ٢ص − ٤ ≤ ٠ ، ٢ص ≤ س }

هـ$_5$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 < ٤ ، صفر ≤ ص < $\frac{\text{س}}{٢}$ }

هـ$_6$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 ≤ ١ ، ص^2 < ٤ }

هـ$_7$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 − ١ ≥ صفر ، ٤ − س^2 − ص^2 ≥ صفر }

هـ$_8$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س ≥ ٢ص ، ص ≤ ٢س }

ب) لتكن م$_1$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٩ }

م$_2$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص ≤ ٢ }

ظلل كلا من م$_1$ ∩ م$_2$ ، م$_1$ / م$_2$

حـ) لتكن د$_1$ = { (س ، ص) : ب^2 + ص^2 + ٦س + ٢ص ≤ ١٥ }

د$_2$ = { (س ، ص) : س^2 + ص^2 − ٤س + ٨ص ≤ ٦١ }

د$_3$ = { (س ، ص) : ص − ٦ < ٢ }

ظلل كلا من (١) د$_1$ ∩ د$_2$ (٢) د$_1$ ∪ د$_2$ (٣) د$_1$ / د$_2$ (٤) د$_2$ / د$_1$

د$_3$ ∩ د$_2$ ، د$_3$ / د$_2$ ، د$_3$ ∩ د$_1$ ، (د$_1$ ∩ د$_2$) ∩ د$_3$

(د$_1$ ∩ د$_3$) / د$_2$ ، (د$_3$ ∪ د$_2$) / د$_1$ ، ك / د$_2$

حيث ك المستوى الاقليدى

(٦) لتكن د = { (س ، ص) : س٢ + ص٢ = ٨١ }
ولتكن ل = { (س ، ص) : س = أ ، أ ∋ ح }
أ) فاذا كانت د ∩ ل = مجموعة احاديــة فجد قيمة أ
ب) لتكن م = { (س ، ص) : س = ٧ }
ولتكن حـ ، د ∋ م ∩ د ، جد طول قطعة المستقيم الواصل بين حـ ، د
الاجوبة : أ = ٩ ، حـد = ١٢٨ وحدة .

(٧) جد طول المماسات المرسومة للدائرة { (س ، ص) : س٢ + ص٢ = ٤ } من النقطــة (٢ ، ٦)
الجواب : (٦) وحدات

(٨) اثبت ان وتر الدائرة ٩ س٢ + ٩ ص٢ ــ ١٨ س + ٦ ص ــ ١٧٠ = صفرا الذى معادلته س ــ ٣ص + ٨ = ٠ ، تقابله زاوية مركزية قائمة .

(٩) جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات ومركزها (٣ ، ٢) ما هو طول نصــف قطرها
الجواب (س ــ ٣)^{٢} + (ص ــ ٢)^{٢} = ٤ ، (٢) وحدة

(١٠) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ومركزها يقع على محور السينات
الجواب س٢ + ص٢ ــ ٣س = ٠

(١١) جد معادلة الدائرة التي مركزها في الربع الاول وتمس المحورين الاحداثيين اذا كان طول نصف قطرها (٥) وحدات .
الجواب (س ــ ٥)^{٢} + (ص ــ ٥)^{٢} = ٢٥

(١٢) النقطة (٣ ، ــ ١) هي مركز الدائرة التي تقطع من المستقيم ٢س ــ ٥ص + ١٨ = صفرا ، جزء طوله (٦) وحدات وما معادلتها .
الجواب (س ــ ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٣٨

* (١٣) اكتب معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ($\sqrt{٥}$) وحدة والتي تمس المستقيم س ــ ٢ص ــ ١ = ٠ عند النقطة (٣ ، ١) .
الجواب (س ــ ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٥ ، او (س ــ ٢)^{٢} + (ص ــ ٣)^{٢} = ٥

(١٤) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ٢س + ص ــ ٥ = ٠ ، ٢س + ص + ١٥ = ٠ اذا كانت احدى نقاط التماس هي (٢ ، ١) .
الجواب (س ــ ٦)^{٢} + (ص ــ ٣)^{٢} = ٢٠

* (١٥) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة أ (١ ، ٠) ، والتي تمس المستقيمين
٢س + ص + ٢ = ٠
٢س + ص ــ ١٨ = ٠
الجواب (س ــ ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠

(١٦) جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم ٢س + ص = ٠ ، والتي تمس المستقيمين ٤س ـ ٣ص + ١٠ = ٠ ، ٤س ـ ٣ص ـ ٣٠ = ٠

الجواب (س ـ ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦

* (١٧) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الاصل والتي تمس المستقيمين س + ٢ص ـ ٩ = ٠ ، ٢س ـ ص + ٢ = ٠

الجواب (س ـ ٢)^{٢} + (ص ـ ١)^{٢} = ٥ او (س ـ $\frac{٢٢}{٥}$)^{٢} + (ص + $\frac{٣١}{٥}$)^{٢} = $\frac{٢٨٩}{٥}$

(١٨) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ٧س ـ ص ـ ٥ = ٠ ، س + ص + ١٣ = ٠ اذا كانت (١ ، ٢) هي احدى نقاط التماس .

الجواب (س + ٦)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢} = ٥٠ ، (س ـ ٢٩)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٨٠٠

(١٩) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (ـ ١ ، ٥) والتي تمس المستقيمين ٣س + ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١٤ = ٠

الجواب (س + ٨)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = $\frac{٢٥}{١٣}$

* (٢٠) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات الثلاثة ٤س ـ ٣ص ـ ١٠ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٥ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ١٥ = ٠ ،

الجواب (س ـ ٢)^{٢} + (ص ـ ١)^{٢} = ٢٥ ، (س + $\frac{٢٠٢}{٤٩}$)^{٢} + (ص ـ $\frac{٣٤٩}{٤٩}$)^{٢} = ($\frac{١٨٥}{٤٩}$)^{٢} .

(٢١) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات الثلاثة .ـ ٣س + ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، س ـ ١ = ٠

(٢٢) عين ايا من المعادلات التالية تمثل معادلة دائرية ، مجموعة احادية ، مجموعة خالية ، واذا كانت معادلة دائرة فجد مركزها ونصف قطرها .

(١) (س ـ ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥ ، (٢) (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

(٣) (س ـ ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = صفر ، (٤) س^{٢} + (ص ـ ٥)^{٢} = ٥

(٥) س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢س + ٤ص ـ ٢٠ = صفر ، (٦) س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢س + ٤ص + ١٤ = صفر

(٧) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س ـ ٢ص + ٥ = صفر ، (٨) س^{٢} + ص^{٢} + س = صفر

(٩) س^{٢} + ص^{٢} + ٦س ـ ٤ص + ١٤ = صفر (١٠) س^{٢} + ص^{٢} + ص = ٠

الاجوبة/ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ كل منها تمثل معادلة دائرة .

(١) م$_{١}$ (٥ ، ـ ٢) ، نق$_{١}$ = ٥ ، (٢) م$_{٢}$ (ـ ٢ ، ٠) نق$_{٢}$ = ٨

(٣) تمثل مجموعة احادية وهي {(٥ ، −٢)} ، (٤) م$_{٤}$ (٠ ، ٥) ، نق$_{٤}$ = $\sqrt{٥}$ (٥) م$_{٥}$ (١ ، −٢) ، نق$_{٥}$ = ٥ ، (٦) مجموعة خالية

(٧) مجموعة احادية وهي {(−٢ ، ١)} (٨) م$_{٨}$ ($-\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، نق$_{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ،

(٩) مجموعة خالية (١٠) م$_{١٠}$ (٠ ، $-\frac{١}{٢}$) ، نق$_{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

* (٢٣) في كل مايلي ٠ـ جد اقصر مسافة من النقطة المعطاة الى الدائرة المبينة معادلتها ازاءها ٠ـ

(١) (٦ ، −٨) ، س^{٢} + ص^{٢} = ٩

(٢) (−٧ ، ٢) ، س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ٤ص − ١٥١ = ٠

(٣) (٣ ، ٩) ، س^{٢} + ص^{٢} − ٢٦س + ٣ص + ٣١٣ = ٠

الاجوبة / ٧ ، ٢ ، ١٧

* (٢٤) في كل مما يلي اعطي نظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم ٠ بين العلاقة بينهما او بعبارة اخرى بين فيما اذا كان المستقيم يمس او يقطع او لايمس او لايقطع الدائرة ٠

(١) ص = ٢س − ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٢ص − ٣ = ٠

(٢) ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ ، س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٢ص + ١٢ = ٠

(٣) ص = س + ١٠ ، س^{٢} + ص^{٢} − ١ = صفر

الاجوبة/ (١) يقطع الدائرة (٢) يمس الدائرة (٣) لايقطع الدائرة

(٢٥) لتكن هـ$_{١}$ = {(س،ص) : (س،ص) ∈ ح×ح ، ص = مس ، حيث م ∈ ح}

هـ$_{٢}$ = {(س،ص) : (س،ص) ∈ ح×ح ، س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ١٦ = ٠}

جد قيمة م في كل من الحالات التالية ٠ـ

١) اذا كان هـ$_{١}$ ∩ هـ$_{٢}$ = مجموعة ذات عنصرين (٢) اذا كان هـ$_{١}$ ∩ هـ$_{٢}$ = مجموعة احادية ٠

٣) اذا كان هـ$_{١}$ ∩ هـ$_{٢}$ = مجموعة خالية

الاجوبة (١) $|م| < \frac{٣}{٤}$ (٢) $|م| = \frac{٣}{٤}$ (٣) $|م| > \frac{٣}{٤}$

(٢٦) ليكن ل = {(س ، ص) : ص = م س + ك ، حيث م ، ك ∈ ح}
وليكن د = {(س ، ص) : س٢ + ص٢ = نق٢ ، نق ∈ ح++}
فاذا كان ل ∩ د = مجموعة احادية فاثبت ان نق = ك٢ / (١ + م٢)

(٢٧) اكتب معادلة قطر الدائرة (س − ٢)٢ + (ص + ١)٢ = ١٦ ، والذى ينصف وتر الدائرة الذى يقع على المستقيم س − ٢ص − ٣ = ٠ ،
الجواب/ ٢س + ص − ٣ = ٠ .

★ (٢٨) اكتب معادلة وتر الدائرة (س − ٣)٢ + (ص − ٧)٢ = ١٦٩ والذى منتصفه النقطة (٥ر٨ ، ٥ر٣)
الجواب/ ١١س − ٧ص − ٦٩ = ٠ .

(٢٩) جد طول وتر الدائرة (س − ٢)٢ + (ص − ٤)٢ = ١٠ والذى منتصفه النقطة (١ ، ٢)
الجواب ٢ √٥ وحـــدة .

★ (٣٠) اكتب معادلة الدائرة التي تمر من النقطة (١ ، − ١) ومن نقطتي تقاطـــع الدائرتين س٢ + ص٢ + ٢س − ٢ص − ٢٣ = ٠ ، س٢ + ص٢ − ٦س + ١٢ص − ٣٥ = ٠ .
الجواب/ س٢ + ص٢ + ٦س − ٩ص − ١٣ = ٠ .

★ (٣١) اكتب معادلة الدائرة التي تمر من نقطة الاصل ومن نقطتي تقاطع الدائرتيـــن (س + ٣)٢ + (ص + ١)٢ = ٢٥ ، (س − ٢)٢ + (ص + ٤)٢ = ٩
الجواب/ ١٣س٢ + ١٣ص٢ + ٣س + ٧١ص = ٠ .

★ (٣٢) لتكن ل١ (٣س + ٤ص − ١٠) + ل٢ (٣س − ص − ٥) = ٠ معادلة مجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين . نجد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هـــذه المجموعة ويمس الدائرة س٢ + ص٢ + ٢س − ٤ص = ٠ ،
الجواب/ ٢س − ص = ٠ ، أو ٢س + ص − ٥ = ٠ .

★ (٣٣) اكتب معادلة الوتر المشترك للدائرتين − المستقيم المار بنقطتي تقاطع الدائرتين − س٢ + ص٢ + ٣س − ص = ٠ ، ٣س٢ + ٣ص٢ + ٢س + ص = ٠
الجواب/ ٧س − ٤ص = ٠

★ (٣٤) جد بعد مركز الدائرة س٢ + ص٢ = ٢س عن المستقيم الواصل بين نقطتي تقاطع الدائرتين س٢ + ص٢ + ٥س − ٨ص + ١ = ٠ ، س٢ + ص٢ + ٧س − ٥ − ٢٥ = ٠ ،
الجواب/ (٢) وحدة .

* (٣٥) جد طول الوتر المشترك بين الدائرتين س٢ + ص٢ ـ ١٠ص = ٠ ،
س٢ + ص٢ + ٦س + ٢ص ـ ٤٠ = ٠
الجواب / (١٠) وحدات .

* (٣٦) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم س + ص = ٠ ، وتمر بنقطتي تقاطع دائرتين (س ـ ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٥٠ ،
(س + ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٠
الجواب / (س + ٣)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢} = ١٠

(٣٧) جد اقرب نقطة من نقاط الدائرة ١٦س٢ + ١٦ص٢ + ٤٨س ـ ٨ص ـ ٤٣ = ٠
للمستقيم ٨س ـ ٤ص + ٧٣ = ٠ ، وجد بعد هذه النقطة عن المستقيم .
الجواب / ($\frac{-٧}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$) ، ٢ $\sqrt{٥}$

* (٣٨) من النقطة ($\frac{٥}{٣}$ ، ـ $\frac{٥}{٣}$) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ = ٥ . فجد معادلتيهما .
الجواب / س ـ ٢ص ـ ٥ = ٠ ، ٢س ـ ص ـ ٥ = ٠

(٣٩) جد معادلتي المماسين المرسومين للدائرة س٢ + ص٢ + ٢س ـ ١٩ = ٠ من النقطة (١ ، ٦)
الجواب / ٢س + ص ـ ٨ = ٠ ، س ـ ٢ص + ١١ = ٠

(٤٠) جد الزاوية بين المماسين المرسومين للدائرة س٢ + ص٢ = ١٠ من النقطة (٤ ، ٢)
الجواب / ٩٠°

(٤١) رسم مماسان للدائرة (س ـ ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٤ من النقطة (٢ ، ـ ٣)
فجد معادلة المستقيم الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب / س + ٢ص + ٥ = ٠

* (٤٢) من النقطة (٦ ، ـ ٨) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ = ٢٥ ، جد بعد المستقيم الواصل بين نقطتي التماس عن هذه النقطة .
الجواب / ٧٫٥ وحدة .

(٤٣) من النقطة (ـ ٩ ، ٣) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ ـ ٦س + ٤ص ـ ٧٨ = ٠
جد بعد المركز الدائرة عن المستقيم الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب / (٦) وحدات .

* (٤٤) من النقطة (٤ ، ـ ٤) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ ـ ٦س + ٢ص + ٥ = ٠
جد طول الوتر الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب ($\sqrt{١٠}$) وحدة .

* (٤٥) جد طول المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + س − ٣ص − ٣ = ٠ من النقطة (١ ، −٢)

الجواب / (٣) وحدات .

(٤٦) جد معادلة المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + ١٠س − ٢ص + ٦ = ٠ والموازي للمستقيم ٢س + ص − ٧ = ٠

الجواب / ٢س + ص − ١ = ٠ ، ٢س + ص + ١٩ = ٠

(٤٧) جد معادلة المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + ٢س + ٤ص = ٠ والعمود على المستقيم س − ٢ص + ٩ = ٠

الجواب / ص + ٢س + ٩ = ٠ ، ص + ٢س − ١ = ٠

(٤٨) اذا كان المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$ يمس الدائرة س٢ + ص٢ = نق٢ فاثبت ان $\frac{١}{\text{أ}^٢} + \frac{١}{\text{ب}^٢} = \frac{١}{\text{نق}^٢}$ حيث أ ، ب ∌ صفر .

(٤٩) برهن ان النقاط (٥ ، −٨) ، (١ ، −٨) ، (١ ، −١٠) ، (٥ ، −١٠) دائرية .

تلميح للحل / جد معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط منها فاذا حققت الرابعة هذه المعادلة فان النقاط الاربع دائرية .

(٥٠) اذا كانت النقطتان (٥ ، ٢) ، (ل ، ٤) نهايتي قطر دائرة يمس محور الصادات . فجد معادلات هذه الدائرة .

الجواب / $(\text{س} - \frac{١٣}{٥})^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = \frac{١٦٩}{٢٥}$

* (٥١) جد طول المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ − ٦س + ٢ص − ٣ = ٠ من النقطة (−٤ ، ٠)

الجواب / $\sqrt{٣٧}$ وحدة

* (٥٢) جد معادلة الدائرة المرسومة داخل المثلث الذي معادلات اضلاعه ٣س − ٤ص − ١٩ = ٠ ، ٤س − ٣ص − ١٧ = ٠ ، س + ٧ = ٠

الجواب / س٢ + ص٢ + ٤س − ٢١ = ٠

* (٥٣) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (−٦ ، −٢) ومركزها يقع على محور الصادات .

الجواب / س٢ + ص٢ + ٥ص − ٣٠ = صفر

* (٥٤) جد معادلة الدائرة التي تمر من منتصفات اضلاع المثلث الذي رؤوسه النقاط (أ ، ٠) ، (ب ، ٠) ، (٠ ، حـ) حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ، ب ، حـ ≠ صفر

الجواب $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\text{س} + \frac{\text{أب} - \text{حـ}^٢}{٢\text{حـ}}\text{ص} = \text{صفر}$

(٥٥) جد معادلة كل من المجموعات التاليـة :ـ

هـ١ = { أ : أ نقطة بحيث مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين س ـ ٢ ص = ٧ ، ٢س + ص = ٣ يساوي ٧ دائما . }

هـ٢ = { أ : أ نقطة بحيث بعدها عن المستقيم ٣س + ٤ص ـ ١ = ٠ يساوي مربـع بعدها عن النقطة (٢ ، ٣) }

هـ٣ = { أ : أ نقطة بحيث مربع بعدها عن المستقيم س + ص = ٦ ، يساوي مساحة المستطيل المحدد بالاحداثيين والاعمدة النازلة من النقطة عليهما }

الاجوبة/ هـ١ = { (س ، ص) ؛ ٥س٢ + ٥ص٢ ـ ٢٦س + ٢٢ص + ٢٣ = ٠ }

هـ٢ = { (س ، ص) ؛ ٥س٢ + ٥ص٢ ـ ٢٣س ـ ٤٣ص + ٦٦ = ٠ او

٥س٢ + ٥ص٢ ـ ١٧س ـ ٢٦ص + ٦٤ = ٠ }

هـ٣ = { (س ، ص) ؛ س٢ + ص٢ ـ ١٢س ـ ١٢ص + ٣٦ = ٠ }

* (٥٦) برهن ان المستقيمات س ـ ٧ص ـ ٥ = ٠ ، س ـ ص ـ ٥ = ٠ ، س ـ ٣ص ـ ٧ = ٠ ، س + ٣ص + ٥ = ٠ هي اربعة اضلاع على الترتيب لشكـل رباعي دائري . ثم جد معادلة الدائرة المارة برؤوسه .

الجواب/ س٢ + ص٢ + ٢س + ٦ص ـ ٣ = ٠

* (٥٧) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (١ ، ٠) والتي تمس المستقيـم ٣س + ٢ص ـ ٤ = ٠ عند النقطة (٢ ، ـ١)

الجواب/ س٢ + ص٢ ـ ٢س ـ ٢س + ١ = ٠

(٥٨) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم س = ٣ عند النقطة (٣ ، ٠) والـتي تقطع من المستقيم ص + ٤ = ٠ ، جزءا طوله (٦) وحدات .

الجواب/ س٢ + ص٢ + ٤س ـ ٢١ = ٠ ، س٢ + ص٢ ـ ١٦س + ٣٩ = ٠

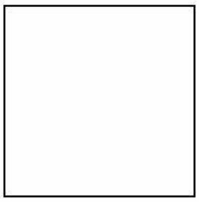
(٥٩) الدائرة س٢ + ص٢ ـ ٤س ـ ٦ص + أ = صفر تمس محور السينات . فجد قيمة أ . حيث أ ∈ ح ثم جد نقطة التماس .

الجواب/ أ = ٤ وحدات (٢ ، ٠) .

(٦٠) جد قيمة ك ∈ ح ، التي تجعل من المستقيم ٢س ـ ص + ك = ٠ ، مماســا للدائرة س٢ + ص٢ + ٤أص + ٦أس + ٨أ٢ = صفر حيث أ ∈ ح

الجواب/ ك = ـ أ ، ك = ٩أ

* (٦١) رسمت مماسات من النقاط (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٣) للدائـرة س٢ + ص٢ ـ ٢س ـ ٤ص ـ ٤ = ٠ برهن ان الاوتار الناتجة من نقاط التمـاس متلاقيـة .



الفصل الثاني
التطبيقات العددية

ملاحظـــات

١) يسمى ق : ك ⟵ ل تطبيقا عدديا ⟺ كل من ك ، ل مجموعة جزيئة من ح غير خاليـة .

٢) ق : ك ⟵ ح متناظر مع المحور الثاني ⟺ (∀س) (اذا كـــان س ∈ ك) فان ق (س) = ق (ـــ س) ، ـــ س ∈ ك

او بعبارة اخرى اذا كان (س ، ص) ∈ ق فان (ـــ س ، ص) ∈ ق ، ∀ س ، ـ س ∈ ك ⟺ ق متناظر مع المحور الثاني حيث ق : ك ⟵ ح

٣) ق : ك ⟵ ح متناظر مع نقطة الاصل ⟺ ∀ س ∈ ك ، ∀ ـــ س ∈ ك فان ق (س) = ـــ ق (ـــ س)

او بعبارة اخرى

اذا كان (س ، ص) ∈ ق فان (ـــ س ، ـــ ص) ∈ ق ، ∀ س ، ـــ س ∈ ك ⟺ ق متناظر مع نقطة الاصل .

٤) تط (ك) هي مجموعة التطبيقات العددية التي منطلقها ك ومستقرهـا ح

٥) اذا كان ⊘ ∈ تط (ك) بحيث ان ⊘ (س) = صفر ∀ س ∈ ك فان ⊘ يسمى بالتطبيق الصفرى

٦) اذا كان كل من ق ، ل ∈ تط (ك) فان

(١) (ق ⊕ ل) ∈ تط (ك) بحيث (ق ⊕ ل) (س) = ق(س) + ل (س) ∀ س ∈ ك .

(٢) (ق ⊙ ل) ∈ تط (ك) بحيث (ق ⊙ ل) (س) = ق (س) ٠ ل (س) ∀ س ∈ ك .

(٣) (ق ⨸ ل) ∈ تط (ك) بحيث (ق ⨸ ل) (س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ل(س)}}$ ∀ س ∈ ك ، ل (س) ≠ ٠

(٤) ⊖ ق ∈ تط (ك) بحيث (⊖ ق) (س) = ـــ ق(س) ∀ س ∈ ك

(٥) (آ ق) ∈ تط (ك) بحيث (آ ق) (س) = آ ق (س) ∀ س ∈ ك ، آ ∈ ح

(٦) ان كان ق ∈ تط (ك) وأن ق (س) = $أ_٠$ + $أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + ... + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + $أ_ن$ $س^ن$ حيث $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ....

أن اعداد حقيقية وأن ن ∈ ط

فيسمى ق تطبيقا عدديا متعدد الحدود من الدرجة ن Polynomial

(٧) ليكن ق ∈ قط (ك)

(١) ق محدود من الاعلى ⟺ (∃ ل ∈ ح) ∧ (ق (س) ≤ ل) (∀ س ∈ ك) ويقال ان ل حدا اعلى

(٢) ق محدود من الاسفل ⟺ (∃ هـ ∈ ح) ∧ (ق (س) ≥ هـ) (∀ س ∈ ك)

(٣) ق محدود ⟺ ق محدود من الاعلى و ق محدود من الاسفل .

ق غير محدود من الاعلى ⟺ (∀ ل) ∈ المدى، ∃ س ∈ المنطلق بحيث ق (س) > ل

ق غير محدود من الاسفل ⟺ ∀ هـ ∈ المدى ، ∃ س ∈ المنطلق بحيث ق (س) < هـ

ق غير محدود ⟺ ق غير محدود من الاعلى او غير محدود من الاسفل

ق محدود ⟺ (∀ س) (اذا كان س ∈ ك) (فان ∃ ل ∈ $ح^{++}$ بحيث |ق (س)| ≤ ل

ق غير محدود ⟺ (∀ ل) (اذا كان ل ∈ $ح^{++}$) ، ∃ س ∈ ك بحيث |ق (س)| > ل

(٨) ∀ ق ∈ تط (ك) ، أ ، ب ∈ ح

يقال ان أ اعظم قيمة للتطبيق ق اذا تحقق الشرطان التاليان :-

١) ∃ $س_١$ ∈ منطلق ق بحيث ق ($س_١$) = أ

٢) ∀ س ∈ منطلق ق فان ق (س) ≤ أ

وتسمى ($س_١$ ، ق ($س_١$)) نقطة اعظم قيمة للتطبيق ق

ويقال ان ب اصغر قيمة للتطبيق ق اذا تحقق الشرطان التاليان :-

١) ∃ $س_٢$ ∈ منطلق ق بحيث ق ($س_٢$) = ب

٢) ∀ س ∈ منطلق ق فان ق (س) ≥ ب

وتسمى ($س_٢$ ، ق ($س_٢$)) نقطة اصغر قيمة للتطبيق ق .

(٩) ليكن ق ∈ قط (ك) وليكن حـ ⊂ ك ، ∀ $س_1$ ، $س_2$ ∈ حـ فان

١) ق متزايد في حـ ⟺ اذا كان $س_1 < س_2$ ⟸ ق($س_1$) < ق($س_2$)

٢) ق متناقص في حـ ⟺ اذا كان $س_1 < س_2$ ⟸ ق($س_1$) > ق($س_2$)

٣) ق رتيب في حـ ⟺ ق متزايد في حـ او ق متناقص في حـ

(١٠) مح (ك) مجموعة كافة التطبيقات العددية المحددة التي منطلقها ك ومستقرها ح

ملاحظة / اذا لم يذكر المنطلق فان المنطلق هو ح

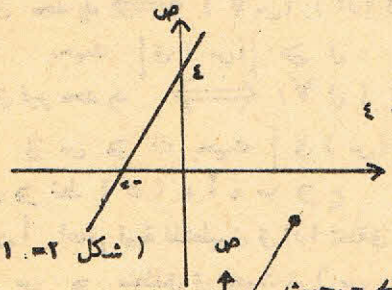
ملاحظات على التمثيل الديكارتي للتطبيقات العددية

اولاً — كل تطبيق من النوع ق (س) = أ س + ب حيث أ ، ب ∈ ح يعتبر معادلة مستقيم (Linear equation) ويكون ١) متزايداً ↗ اذا كان أ موجباً و ٢) متناقصاً ↘ اذا كان أ سالبا و ٣) مستقيما يوازي المحور الاول اذا كان أ = صفرا

امثلة

١) ق (س) = ٢ س + ٤

س	ص
٠	٤
ـ٢	٠

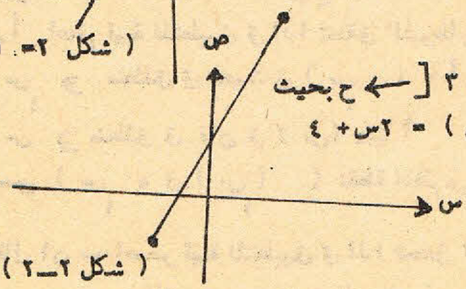


(شكل ٢ـ١)

٢) ق : [ـ٣ ، ٣ [⟶ ح بحيث

ق (س) = ٢س + ٤

س	ص
ـ٣	ـ٢
٣	١٠

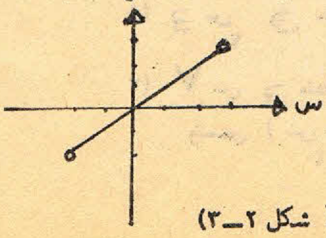


(شكل ٢ـ٢)

٣) ق :] ـ ٢ ، ٣] ⟶ ح بحيث

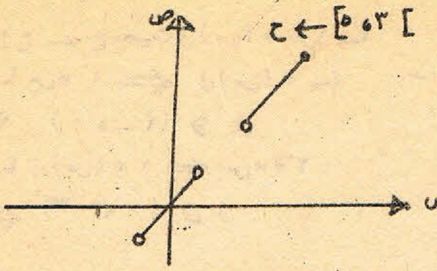
ق (س) = س

س	ص
ـ٢	ـ٢
٣	٣



(شكل ٢ـ٣)

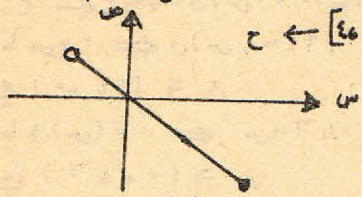
٤) ق :]ــ١ ، ١[∪]٣ ، ٥[← ح
بحيث ق (س) = س



(شكل ٢ــ٤)

س	ص
ــ١	ــ١
١	١
٣	٣
٥	٥

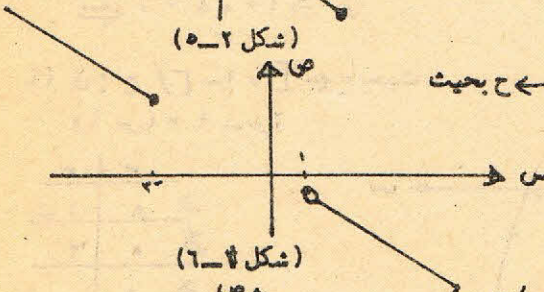
٥) ق :]ــ٢ ، ــ١[∩]ــ٤ ، ٤[← ح
بحيث ق (س) = ــ س



(شكل ٢ــ٥)

س	ص
ــ٢	٢
٤	ــ٤

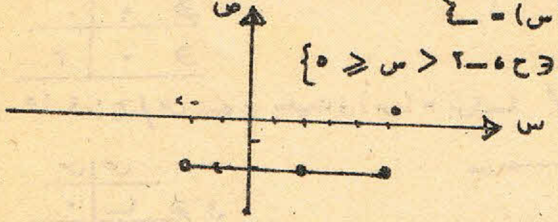
٦) ق : ح /]ــ٣ ، ١[← ح بحيث
ق (س) = ــ س



(شكل ٢ــ٦)

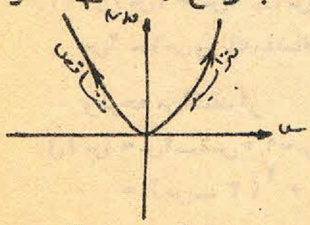
س	ص
ــ٣	٣
١	ــ١

٧) ق: أ ← ح بحيث ق(س) = ــ٤
حيث أ = {س : س ∈ ح ، ــ٢ < س ≤ ٥}



(شكل ٢ــ٧)

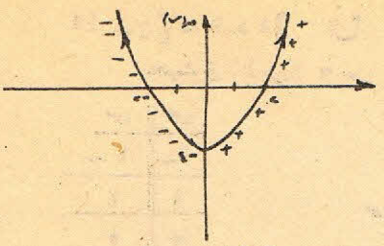
ثانيا ــ كل تطبيق من النوع ق (س) = أس٢ + ب حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر
(قطع مكافيء Parabola)
١) يرسم بشكل ∪ اذا كان أ موجبا
٢) يرسم بشكل ∩ اذا كان أ سالبا



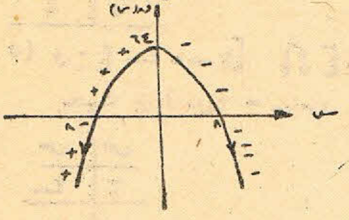
(شكل ٢ــ ٨)

امثلة

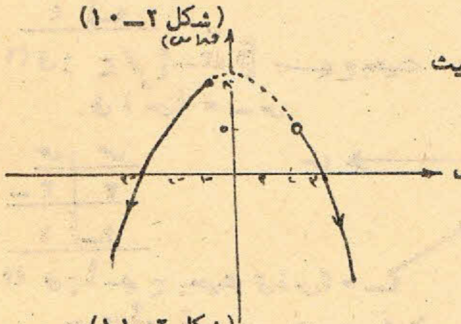
١) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢


(شكل ٢ـــ٩)

٢) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢ ـــ ٤
عندما س = ٠ ⟸ ق(س) = ـــ٤
⟸ (٠، ـــ٤) ∈ ق
عندما ق(س) = ٠ ⟸ س = ∓٢
⟸ (∓٢، ٠) ∈ ق

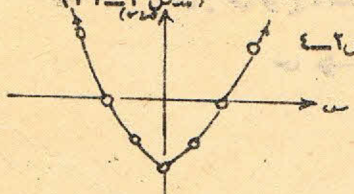

(شكل ٢ـــ١٠)

٣) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = ٦٤ ـــ س٢
عندما س = ٠ ⟸ ق(س) = ٦٤
⟸ (٠، ٦٤) ∈ ق
عندما ق(س) = ٠ ⟸ س = ∓٨
⟸ (∓٨، ٠) ∈ ق


(شكل ٢ـــ١١)

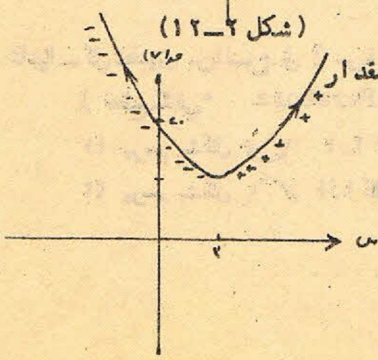
٤) ق : ح /]ـــ١، ٢] ← ح بحيث
ق(س) = ٩ ـــ س٢

س	ص	
ـــ١	٨	∈
٢	٥	∉
٠	٩	∉
٣	٠	∈


(شكل ٢ـــ١٢)

٥) ق : ح / ص ← ح بحيث ق(س) = س٢ ـــ ٤

س	ص	
٠	ـــ٤	∉ ق
∓٢		∉ ق


(شكل ٢ـــ١٣)

٦) ق(س) = س٢ ـــ ٦س + ١٩ باكمال المربع للمقدار س٢ ـــ ٦س وذلك باضافة $(\frac{1}{2}$ معامل س$)^2$ وطرحه من المقدار
ق(س) = س٢ ـــ ٦س + ٩ = س٢ ـــ ٦س + ٩ ـــ ٩ + ١٩
= (س ـــ ٣)^2 + ١٠

س	ص
٠	١٩
٣	١٠

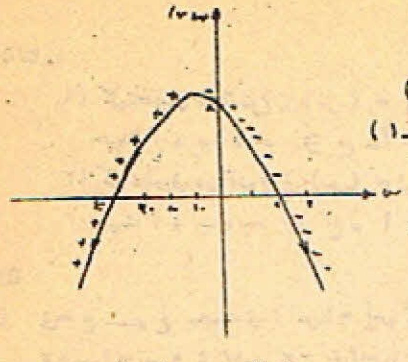
٧) ق(س) = ٨ ـ ٢س ـ س^{٢}

ق (س) = ٨ ـ (٢س + س^{٢})

ق (س) = ٨ ـ (س^{٢} + ٢س + ١ ـ ١)

= ٩ ـ (س + ١)^{٢}

س	ص
٠	٨
ـ١	٩
٢	٠
ـ٤	٠



(شكل ٢ـ١٤)

تمارين (٢ـ١)

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) ق (س) = س^{٢}

٢) ق(س) = ـ س^{٢}

٣) ق(س) = ٣ ـ س^{٢}

٤) ق(س) = ٣ + س^{٢}

٥) ق(س) = (س + ٣)^{٢}

٦) ق(س) = (س ـ ٣)^{٢}

٧) ق(س) = (س + ٣)^{٢} + ٤

٨) ق(س) = (س ـ ٣)^{٢} + ٤

٩) ق(س) = (س + ٣)^{٢} ـ ٤

١٠) ق(س) = (س ـ ٣)^{٢} ـ ٤

١١) ق(س) = س^{٢} ـ ٦س + ٩

١٢) ق(س) = س^{٢} + ٦س + ١٣

١٣) ق(س) = س^{٢} ـ ٦س + ٤

١٤) ق(س) = س^{٢} ـ ٨س + ٢٥

١٥) ق (س) = س^{٢} + ٤س + ٧

١٦) ق(س) = ٢س^{٢} ـ ٥ حيث ق: ح ⟵ ح

١٧) ق(س) = ـ٤س^{٢} + ٣

١٨) ق: ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { س^{٢} ـ ٤ اذا كان س^{٢} ≥ ٩ ؛ ٤ اذا كان س^{٢} < ٩ }

١٩) لیکن ق = { $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، ٣ ، ٤ ، ـ٢ ، ـ٤ } ⟵ ح

بحيث ق (س) = س^{٢} ـ ٤

ثالثاً

١) كل تطبيق من النوع ق(س) = |أس + ب| + حـ يرسم على شكل 

حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

٢) كل تطبيق من النوع ق (س) = ـ |أس + ب| + حـ يرسم على شكل 

حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

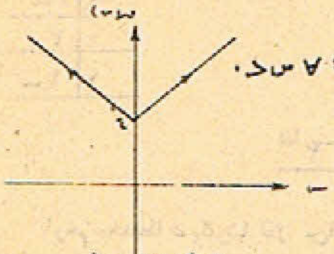
امثلة

١) ق: ح ⟵ ح بحيث ق (س) = |س| + ٤

ق(س) = س + ٤ ∀ س ≥ ٠ ، ق(س) = ـ س + ٤ ∀ س < ٠

س	ص
٠	٤
٢	٦

س	ص
٠	٤
ـ٢	٦

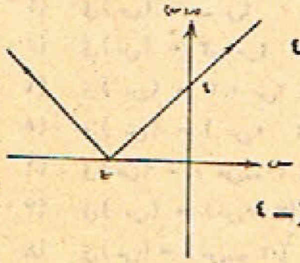


(شكل ٢ـ١٥)

٢) ق(س) = |٤ + س|

(١) ق (س) = ٤ + س ∀ (٤ + س) ≥ صفر ⟸ س ≥ ـ٤

س	ص
ـ٤	٠
٠	٤



(٢) ق(س) = ـ٤ ـ س ∀ (٤ + س) < صفر ⟸ س < ـ٤

س	ص
ـ٤	٠
ـ٨	٤

(شكل ٢ـ١٦)

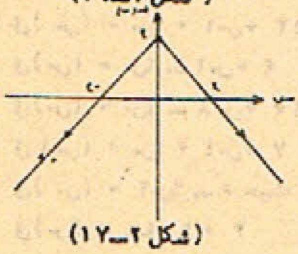
٣) ق(س) = ٤ ـ |س|

(١) ق (س) = ٤ ـ س ∀ س ≥ ٠

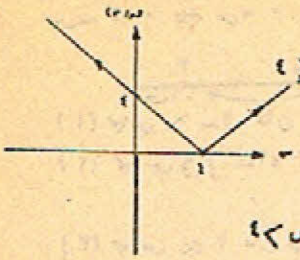
(٢) ق(س) = ٤ + س ∀ س < ٠

س	ص
٠	٤
٤	٠

س	ص
٠	٤
ـ٤	٠



(شكل ٢ـ١٧)



(شكل ٢ ـ ١٨)

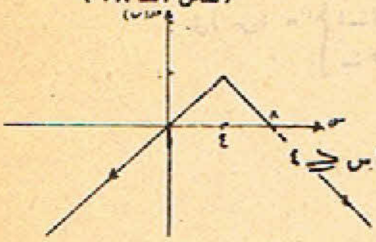
٤) ق(س) = |٤ ـ س|

(١) ق(س) = ٤ ـ س ∀ (٤ ـ س) ≥ ٠ ⇐ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	٠
٠	٤

(٢) ق(س) = س ـ ٤ ∀ (٤ ـ س) < ٠ ⇐ ∀ س > ٤

س	ص
٤	٠
٨	٤



(شكل ٢ ـ ١٩)

٥) ق(س) = ٤ ـ |٤ ـ س|

(١) ق(س) = س ∀ (٤ ـ س) ≥ ٠ ⇐ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	٤
٠	٠
ـ٢	ـ٢

(٢) ق(س) = ٨ ـ س ∀ (٤ ـ س) < ٠ ⇐ ∀ س > ٤

س	ص
٨	٠
٤	٤

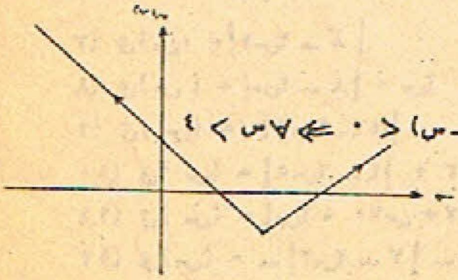
٦) ق(س) = |٤ ـ س| ـ ٢

(١) ق(س) = ٢ ـ س ∀ (٤ ـ س) ≥ ٠ ⇐ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	ـ٢
٠	٢

(٢) ق(س) = س ـ ٦ ∀ (٤ ـ س) < ٠ ⇐ ∀ س > ٤

س	ص
٤	ـ٢
٦	٠



(شكل ٢ ـ ٢٠)

٧) ق(س) = |س − ٣| − |س + ٢|

س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ ، س + ٢ = ٠ ⇐ س = −٢

(١) ∀ س < −٢ فان ق(س) =

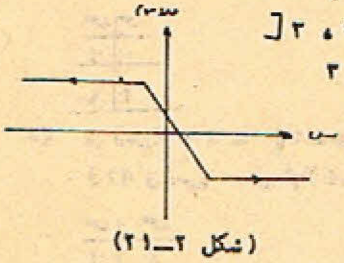
(٢) ∀ س ∈] −٢ ، ٣ [فان ق(س) = −(س − ٣) − (س + ٢)

ق(س) = ١ − ٢س

(٣) ∀ س ≥ ٣ فان ق(س) = (س − ٣) − (س + ٢) = −٥

اى

ق(س) = { ٥ ∀ س < −٢ ؛ ١ − ٢س ∀ س ∈] −٢ ، ٣ [؛ −٥ ∀ س ≥ ٣ }



(شكل ٢ − ٢١)

تمارين ٢ − ٢

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :−

١) ق(س) = |س|
٢) ق(س) = − |س|
٣) ق(س) = س |س|
٤) ق(س) = |س + ٣|
٥) ق(س) = |٢ − س|
٦) ق(س) = − |س + ٣|
٧) ق(س) = |٢س٢ − ٨|
٨) ق(س) = |س٢ − ٨| + س٢
٩) ق(س) = |٤س٢ − ٩|
١٠) ق(س) = |٥س٢ − ٤| + ٣
١١) ق(س) = |س٢ + ١٠س + ١٢|
١٢) ق(س) = − |٢س٢ − ٧| − ٢
١٣− ق(س) = س + |س|
١٤) ق(س) = |٢س − ٦| + س + ١
١٥) ق(س) = س |س| − ٢
١٦) ق(س) = |س + ٣| − |س − ٢|

١٧) ق(س) = |س| + |س − ٢|

١٨) ق(س) = ٣ |٢س + ١٠| − ٤

١٩) ق(س) = |٢س + ٦| + |٢س − ٤|

٢٠) ق(س) = |٢س − ٨|

٢١) ق(س) = |− ٢س + ٧|

٢٢) ق(س) = |− ٣س − ١٢|

٢٣) ق(س) = |٥س − ١٠| + ٢

٢٤) ق(س) = − |٥س − ١٥| + ٤

٢٥) ق(س) = |− ٢س٢ + ٥|

٢٦) ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { (|س − ٢|) / (٢ − س) ∀ س ≠ ٢ ؛ − ٥ اذا كانت س = ٢ }

٢٧) ق(س) = س|س| − س٢

٢٨) ق(س) = س|س| + س٢

٢٩) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { ٢٧ − ٣س٢ اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح ؛ صفر اذا كان س عدد صحيح }

٣٠) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = |س + ١| + |س − ٢| + س

٣١) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = |س + ١| − |س − ٢| + س

رابعا ــ كل تطبيق من النوع ق(س) = أ س٣ + ب حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر

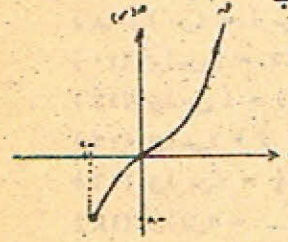
(١) يرسم على شكل اى متزايد اذا كان أ موجبا

(٢) يرسم على شكل اى متناقص اذا كان أ سالبا

امثلــة

(١) ليكن ق = أ ← ح بحيث ق (س) = س٣

حيث أ = {س : س ∈ ح ، س ≥ −٢}

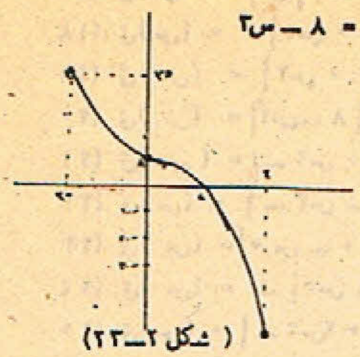


س	ص
−٢	−٨
٠	٠

(شكل ٢ــ٢٢)

(٢) $ق : [-٣ ، ٤] \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = ٨ - س^{٣}$

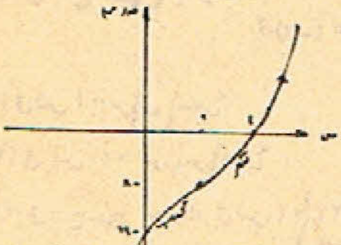
س	ص
−٣	٣٥
٤	−٥٦
٠	٨
٢	٠



(شكل ٢ـ٢٣)

(٣) $ق(س) = (س - ٢)^{٣} - ٨$

س	ص
٠	−١٦
٤	٠
٢	−٨



(شكل ٢ـ٢٤)

تمارين ٢ـ٣

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

(١) $ق(س) = -س^{٢}$ (٢) $ق(س) = س^{٢} - ٢$ (٣) $ق(س) = س^{٢} + ٢$

(٤) $ق(س) = ٢س^{٢} - ٣$ (٥) $ق(س) = -٢س^{٢} + ١$

(٦) $ق(س) = (س - ٢)^{٣}$ (٧) $ق(س) = -(س - ٢)^{٣}$

(٨) $ق(س) = (س - ٢)^{٣} + ٢$ (٩) $ق(س) = (س - ٢)^{٣} - ٢$

(١٠) $ق(س) = ٢ - (س - ٣)^{٢}$ (١١) $ق(س) = -٢ - (س - ٢)^{٣}$

(١٢) $ق(س) = (٢س + ٣)^{٢}$ (١٣) $ق(س) = (٢س + ٣)^{٢} + ٢$

(١٤) $ق(س) = (٢س + ٣)^{٢} - ٢$ (١٥) $ق(س) = ٢ - (٢س + ٣)^{٢}$

(١٦) $ق(س) = |٢س^{٢} + ٤|$ (١٧) $ق(س) = |-٢س^{٢} + ٤| - ٣$

(١٨) $ق(س) = -|٢س^{٢} - ٣| + ٥$ (١٩) $ق(س) = |س^{٢} + ١|$

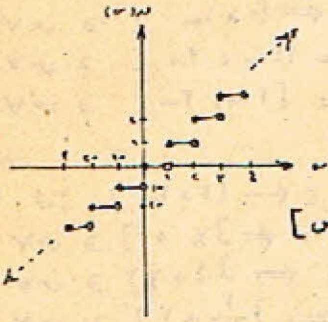
(٢٠) $ق(س) = س|س^{٢}| + س^{٢}$

٥) التطبيقات السلمية

ق(س) = [س] حيث [س] = أكبر عدد صحيح ≥ س

أو يعرف [س] = ن ⟺ ن ≤ س < ن + ١ حيث ن عدد صحيح

فمثلا



ق(٣) = [٣] = ٣

ق(٣ر١) = [٣ر١] = ٣

ق(−٣) = [−٣] = −٣

ق(−٣ر١) = [−٣ر١] = −٤

أمثلة

١) ليكن ق = ح ⟶ ح بحيث ق(س) = [س]

∀ س ∈ [٠ ، ١[⟹ ق(س) = ٠

∀ س ∈ [١ ، ٢[⟹ ق(س) = ١

∀ س ∈ [٢ ، ٣[⟹ ق(س) = ٢

....

∀ س ∈ [−١ ، ٠[⟹ ق(س) = −١

∀ س ∈ [−٢ ، −١[⟹ ق(س) = −٢

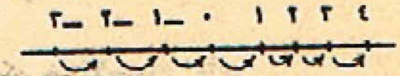
∀ س ∈ [−٣ ، −٢[⟹ ق(س) = −٣

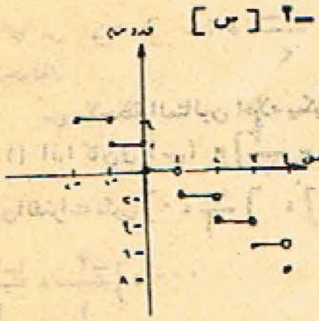
....

(شكل ٢−٢٥)

٢) ليكن

ق : [−٢ ، ٤] ⟶ ح بحيث ق(س) = −٢ [س]





∀ س ∈ [٠ ، ١[⟹ ق(س) = ٠

∀ س ∈ [١ ، ٢[⟹ ق(س) = −٢

∀ س ∈ [٢ ، ٣[⟹ ق(س) = −٤

∀ س ∈ [٣ ، ٤[⟹ ق(س) = −٦

ق(٤) = −٨

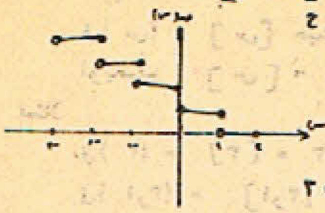
∀ س ∈ [−١ ، ٠[⟹ ق(س) = ٢

∀ س ∈ [−٢ ، −١[⟹ ق(س) = ٤

(شكل ٢−٢٦)

ليكن

٣) ق :] ـ٣ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = [٢ ـ س]



∀ س ∈]٠ ، ١] ⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈]١ ، ٢] ⟸ ق(س) = صفر

∀ س ∈]ـ١ ، ٠] ⟸ ق(س) = ٢

∀ س ∈]ـ٢ ، ـ١] ⟸ ق(س) = ٣

∀ س ∈]ـ٣ ، ـ٢] ⟸ ق(س) = ٤

(شكل ٢ـ٢٧)

ليكن

٤) ق : [ـ٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = [٢س]

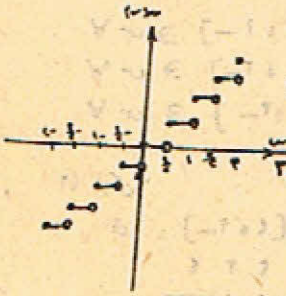
∀ س ∈ [٠ ، ½[⟸ ق(س) = صفر

∀ س ∈ [½ ، ١[⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [١ ، $\frac{٣}{٢}$[⟸ ق(س) = ٢

∀ س ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ٢[⟸ ق(س) = ٣

ق(٢) = ٤



∀ س ∈ [ـ ½ ، ٠[⟸ ق(س) = ـ١

∀ س ∈ [ـ١ ، ـ ½[⟸ ق(س) = ـ٢

∀ س ∈ [ـ $\frac{٣}{٢}$ ، ـ١[⟸ ق(س) = ـ٣

∀ س ∈ [ـ٢ ، $\frac{ـ٣}{٢}$[⟸ ق(س) = ـ٤

ملاحظة/

من ملاحظة المثالين اعلاه يمكن وضع الاستنتاج التالي

(١) اذا كان ق(س) = [$\frac{أ}{ب}$ س] وكانت $\frac{أ}{ب}$ > صفر

فان الفترات تكون [٠ ، $\frac{ب}{أ}$[، [$\frac{ب}{أ}$ ، $\frac{٢ب}{أ}$[،

[$\frac{٢ب}{أ}$ ، $\frac{٣ب}{أ}$[، ...

(شكل ٢ـ ٢٨)

(٢) واذا كانت $\frac{أ}{ب}$ > ٠ فان الفترات تكون بالترتيب التالي :ـ

]ـ $\frac{ب}{أ}$ ، ٠] ،]$\frac{ـ٢ب}{أ}$ ، ـ $\frac{ب}{أ}$] ،]$\frac{ـ٣ب}{أ}$ ، $\frac{ـ٢ب}{أ}$] ، ...

علما بأن ـ $\frac{ب}{أ}$ في هذه الحالة كمية موجبة

مثال (٥) ق : ح ⟵ {−١ ، ١} بحيث ق(س) = $(-1)^{[س]}$

حيث [س] اكبر عدد صحيح ≥ س.

∀ س ∈ [٠ ، ١[⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [١ ، ٢[⟸ ق(س) = −١

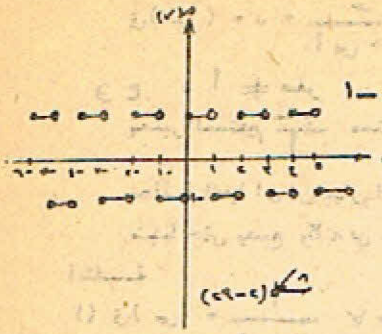
∀ س ∈ [٢ ، ٣[⟸ ق(س) = ١

. . . . .

∀ س ∈ [−١ ، ٠[⟸ ق(س) = −١

∀ س ∈ [−٢ ، −١[⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [−٣ ، −٢[⟸ ق(س) = −١



شكل (٢-٩)

تمارين ٢-٤

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :-

١) ق(س) = − [س]

٢) ق(س) = [س − ٣]

٣) ق(س) = [س + ٣]

٤) ق(س) = − [س − ٣]

٥) ق(س) = ٣ − [س]

٦) ق(س) = [س] + ٣

٧) ق(س) = [س] − ٣

٨) ق(س) = − [٢ + س]

٩) ق(س) = |[س]|

١٠) ق(س) = − |[س]|

١١) ق(س) = س − [س]

١٢) ق(س) = س + [س]

١٣) ق(س) = [س] − س

١٤) ق(س) = $\frac{س}{[س]}$ ∀ س ∉ [٠ ، ١[

١٥) ق(س) = |س| + [س]

١٦) ق(س) = [$\frac{س}{٢}$]

١٧) ق(س) = |س − ١ − ٢ [$\frac{س}{٢}$]|

* ١٨) ق: [−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = { −[س] اذا كان س ∈ [٠ ، ٢] ، [س] اذا كان س ∈ [−٢ ، ٠[}

* ١٩) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { |س − ٤| ∀ س ∈ ح | [−٢ ، ٢[، [١ − س] ∀ س ∈ [−٢ ، ٢[}

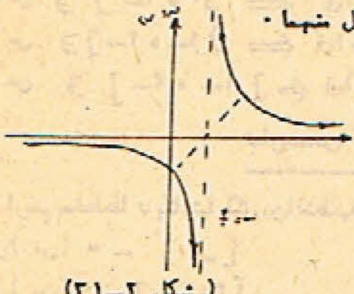
٦) التطبيقات من النوع

$$ق(س) = د + \frac{ح}{أس + ب} \quad حيث\ س \neq \frac{-ب}{أ}\ ،\ أ ، ب ، ح ، د \in ح\ ،\ أ \neq صفر$$

يعتبر المستقيم $\frac{-ب}{أ}$ مستقيما محاذيا شاقوليا ويعتبر المستقيم ص = د مستقيما محاذيا افقيا اي ان بيان التطبيق لايقطع اي من المحاذيين انما يقترب من كل منهما حتى يصبح وكأنه في وضع مماس لكل منهما .

امثلــة

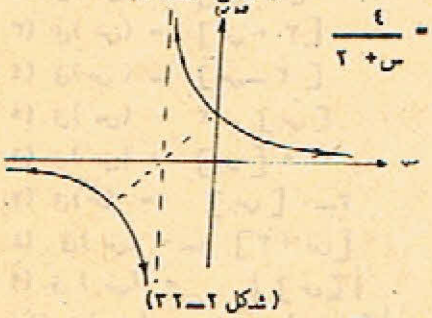
١) $ق(س) = \frac{٢}{٢س - ٣} \quad \forall\ س \neq \frac{٣}{٢}$



س	ص
٢	٢
٠	$\frac{-٢}{٣}$

(شكل ٢ـ٣١)

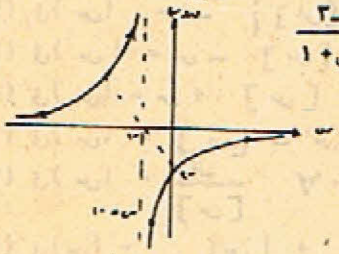
٢) ق : ح / { −٢ } ⟵ ح بحيث $ق(س) = \frac{٤}{س + ٢}$



س	ص
٠	٢
٤	١
−٤	−٢
−١	٤

(شكل ٢ـ٣٢)

٣) ق : ح / { −١ } ⟵ ح بحيث $ق(س) = \frac{-٣}{س + ١}$



س	ص
٠	−٣
٢	−١
−٢	٣
−٤	١

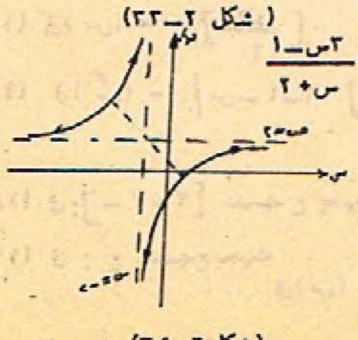
(شكل ٢ـ٣٣)

٤) ليكن ق : ح / { −٢ } ⟵ ح بحيث $ق(س) = \frac{٣س - ١}{س + ٢}$

$$ق(س) = \frac{٣(س + ٢) - ١ - ٦}{س + ٢} = ٣ - \frac{٧}{س + ٢}$$

س = −٢ المحاذي الشاقولي

ص = ٣ المحاذي الافقي



(شكل ٢ـ٣٤)

تمارين ٢ – ٥

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١} \quad \forall\, \text{س} \neq ١$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ١}$ حيث $\text{س} \neq -١$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} + ١$ حيث $\text{س} \neq ٠$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - ٢$ حيث $\text{س} \neq ٠$

٥) $\text{ق}(\text{س}) = -\frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ٣}$ حيث $\text{س} \neq ٣$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{[\text{س}]}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

٩) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{|\text{س}|}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

١٠) ق : ح ←ـــ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢}{\text{س} + ١} & \forall\, \text{س} \in \,]-١ ، ٢] \cup \,]-٣ ، -١[\\ -[\text{س}] & \forall\, \text{س} > ٢ \\ -٢[\text{س}] & \forall\, \text{س} \leq -٣ \\ ٨ & \text{عندما س} = -١ \end{cases}$$

١١) ق : ح ←ـــ ح بحيث

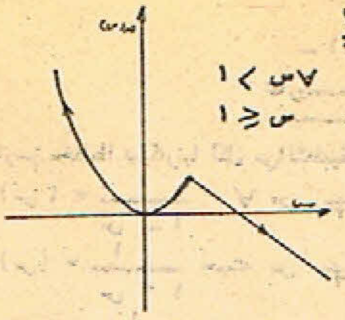
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-٣}{\text{س} + ٤} & \forall\, \text{س} \in \,]-٤ ، ١] \\ \text{س}\,|\text{س}| - ١٦ & \forall\, \text{س} \notin \,]-٤ ، ١] \end{cases}$$

١٢) ق : ح ←ـــ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-٢}{٢\text{س} - ٣} & \forall\, \text{س} \neq \frac{٣}{٢} \\ -٤ & \text{اذا كان س} = \frac{٣}{٢} \end{cases}$

١٢) ق : ح ←ـــ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-١}{|\text{س} + ٣|} & \forall\, \text{س} \neq -٣ \\ ٦ & \text{عندما س} = -٣ \end{cases}$

امثلة عامة على التمثيل الديكــارتي

١) ق: ح ←ــــ ح بحيث ق(س) = { ٢ − س ∀ س > ١
س٢ ∀ س ≤ ١ }



(شكل ٢ ـ ٣٥)

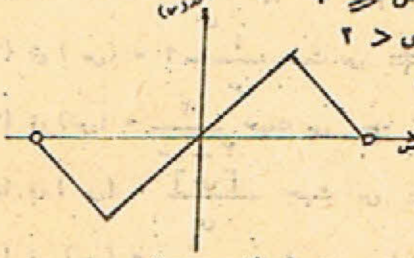
ص = ٢ − س ∀ س > ١ — ص = س٢

س	ص
١	١
٢	٠

س	ص
±١	١
٠	٠

٢) ق:] −٢ ، ٢ [←ــــ ح بحيث

ق(س) = { −٢ − س اذا كانت −٢ < س < −١
س اذا كانت −١ ≤ س ≤ ١
٢ − س اذا كانت ١ < س < ٢ }



(شكل ٢ ـ ٣٦)

ص = −٢ − س — ص = س — ص = ٢ − س

س	ص
−٢	٠
−١	−١

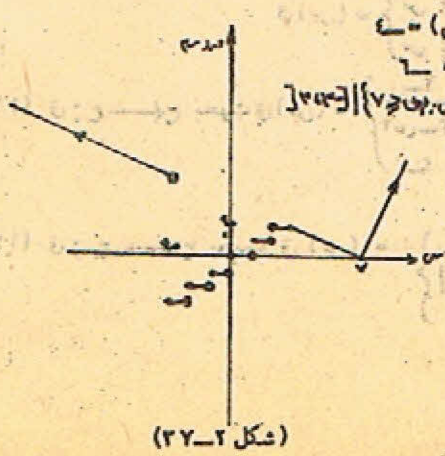
س	ص
−١	−١
١	١

س	ص
١	١
٢	٠

٣) ق: ح ←ــ ح بحيث ق(س) = { ٢[س] ∀ س ∈ [−٣، ٣[
|٧ − س| ∀ س ∈ ح / [−٣، ٣[}

∀ س ∈ [٠، ١[⇐ ق(س) = ٠
∀ س ∈ [١، ٢[⇐ ق(س) = ٢
∀ س ∈ [٢، ٣[⇐ ق(س) = ٤
∀ س ∈ [−١، ٠[⇐ ق(س) = −٢
∀ س ∈ [−٢، −١[⇐ ق(س) = −٤
∀ س ∈ [−٣، −٢[⇐ ق(س) = −٦

|٧ − س| = { ٧ − س ∀ س ∈ [س: س ≤ ٧] | [−٣،٣[
س − ٧ ∀ س > ٧ }



ص = س − ٧ — ص = ٧ − س

س	ص
٧	٠
١٠	٣

س	ص
٧	٠
٣	٤
−٣	١٠ ∌

(شكل ٢ ـ ٣٧)

٤) ق: ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{س}{٢}\right] & \forall\, س \in [٠ ، ٦[\\ \frac{١٠ - س}{٢} & \forall\, س \geqslant ٦ \\ -س^{٢} & \forall\, س \in ح^{-} \end{cases}$$

$\forall\, س \in [٠ ، ٢[\Leftarrow ق(س) = ٠$

$\forall\, س \in [٢ ، ٤[\Leftarrow ق(س) = ١$

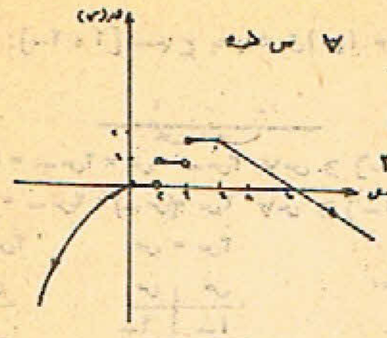
$\forall\, س \in [٤ ، ٦[\Leftarrow ق(س) = ٢$

$ص = \frac{١٠ - س}{٢}$

س	ص
٦	٢
١٠	٠

$-س^{٢} = ص$

س	ص
٠	٠
∓١	−١



(شكل ٢ـ٣٨)

٥) ق: ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} |س^{٢} - ٤| & \forall\, س \in [-٣ ، ٣] \\ \frac{٥}{٢}(٥ - س) & \forall\, س \geqslant ٣ \\ \frac{٥}{٢}(٥ + س) & \forall\, س \leqslant ٣ \end{cases}$$

لندرس التطبيق ق: ح ⟵ ح بحيث $ق(س) = |س^{٢} - ٤|$ وبعد ذلك نرسم السؤال المطلوب

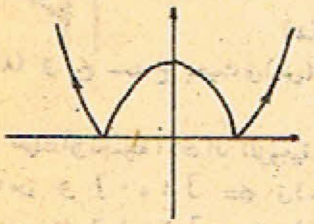
$$ق(س) = \begin{cases} -س^{٢} + ٤ & \forall\, (س^{٢} - ٤) < صفر \Leftarrow \forall\, س \in]-٢ ، ٢[\\ -٤ + س^{٢} & \forall\, (س^{٢} - ٤) \geqslant صفر \Leftarrow \forall\, س \in ح /]-٢ ، ٢[\end{cases}$$

$ص = س^{٢} - ٤$

س	ص	
−٢	٠	∈
٢	٠	∈
٠	−٤	∉

$ص = ٤ - س^{٢}$

س	ص	
−٢	٠	∉
٢	٠	∉
٠	٤	∈



(شكل ٢ـ٣٩)

والان يمكن رسم التطبيق السابق كما يلي :ـ

$ص = \frac{٥}{٢}(٥ - س)$

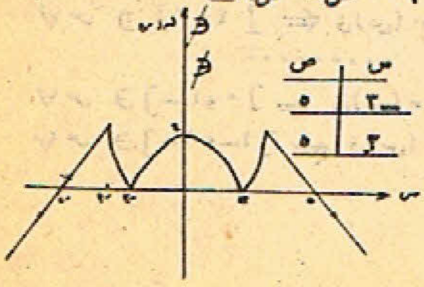
س	ص
٣	٥
٥	٠

$ص = \frac{٥}{٢}(٥ + س)$

س	ص
−٣	٥
−٥	٠

$ص = س^{٢} - ٤$

س	ص
−٣	٥
٣	٥



(شكل ٢ـ٤٠)

مثال ٦)

ليكن ق :[−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = { −س|س| ∀ س ∈ [−١ ، ١] ؛ ١ ∀ س ∉ [−١ ، ١] }

ق(س) = −س × س = −س٢ ∀ س ∈ [صفر ، ١]

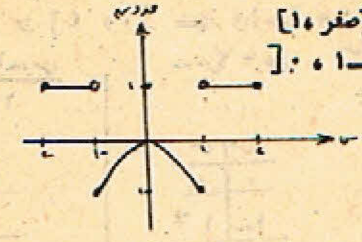
ق(س) = −س × (−س) = س٢ ∀ س ∈ [−١ ، ٠[

ص = −س٢

س	ص
١	−١
٠	٠

ص = س٢

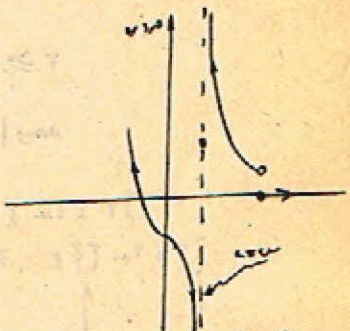
س	ص
−١	−١
٠	٠



(شكل ٢−٤١)

مثال ٧) ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = { $\frac{٢}{س−٢}$ ∀ س ∈]٠ ، ∞[/ {٢} ؛ س٢ − $\frac{٣}{٢}$ ∀ س < صفر ؛ صفر ∀ س ≥ ٠ عندما س = ٢ }



(شكل ٢−٤٢)

مثال ٨) ق : ج ⟵ ح بحيث ق(س) = { أ − س ∀ س ∈ [ب ، أ] ؛ س − أ ∀ س ∈ [أ ، ب] }

حيث أ ∈ مجموعة الاعداد الزوجية وان أ ، ب عددان صحيحان متتاليان

∀ س ∈ [٠ ، ١] ⟸ ق(س) = س − ٠ = س

∀ س ∈ [١ ، ٢] ⟸ ق(س) = ٢ − س

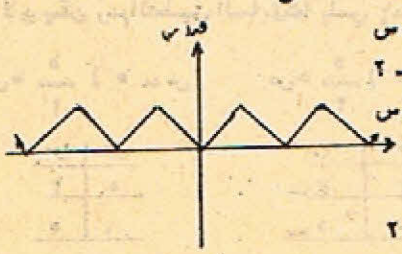
∀ س ∈ [٢ ، ٣] ⟸ ق(س) = س − ٢

∀ س ∈ [٣ ، ٤] ⟸ ق(س) = ٤ − س

. . . .

∀ س ∈ [−١ ، ٠] ⟸ ق(س) = −س

∀ س ∈ [−٢ ، −١] ⟸ ق(س) = س + ٢



(شكل ٢−٤٣)

امثلة على التطبيقات العددية المتناظـرة

١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = س + س^{٣}

برهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل

البرهان

ق(س) = س + س^{٣}

ق(ــ س) = ــ س ــ س^{٣}

ــ ق (ــ س) = س + س^{٣}

∴ ق(س) = ــ ق (ــ س) ، ∀ س ∈ ح

∴ متناظر مع نقطة الاصل

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = س^{٢} ــ س^{٤} + ١٦ فبرهن ان ق متناظـر مع المحور الثاني .

البرهان

∴ ق(س) = س^{٢} ــ س^{٤} + ١٦

∴ ق (ــ س) = س^{٢} ــ س^{٤} + ١٦ = ق(س)

∴ ق متناظر مع المحور الثاني

٣) ليكن ق = ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٣ ــ س^{٣}

١) هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك

٢) هل ق متناظر مع نقطة الاصـل؟ برهن قولك

ق غير متناظر مع نقطة الاصل ، وغير متناظر مع المحور الثاني

البرهان

∴ ق (س) = ٣ ــ س^{٣}

∴ ق(ــ س) = ٣ + س^{٣} ≠ ق(س)

∴ غير متناظر مع المحور الثاني

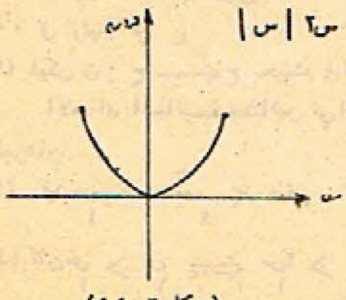
ــ ق (ــ س) = ــ ٣ ــ س^{٣} ≠ ق(س)

∴ غير متناظر مع نقطة الاصل

٤) ليكن ق : [ــ٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = س^{٢} = س | س |

هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟

برهن قولك ، وارسم ق فـي المستوي الاقليدي



(شكل ٢ــ٤٤)

البرهان

∀ س ∈ [٠ ، ٢] فان ق(س) = س^{٢}

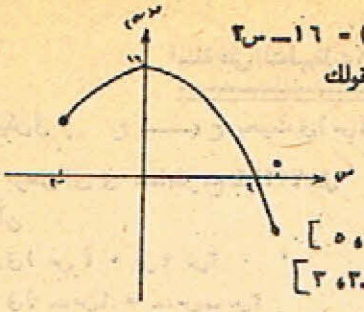
و ∀ س ∈ [ــ٢ ، ٠ [فان ق(س) = ــ س^{٢}

ان هذا التطبيق يسلك سلوك التطبيق

ق(س) = س^{٢} والذي يكون متناظر مع المحور الثاني

٥) ليكن ق : [–٣ ، ٥] ⟵ ح بحيث ق(س) = ١٦ – س^{٢}

١– هل ان ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك



البرهان

من ملاحظة المخطط المجاور

∃ (٤ ، ٠) ∈ ق ولكن (–٤ ، ٠) ∉ ق

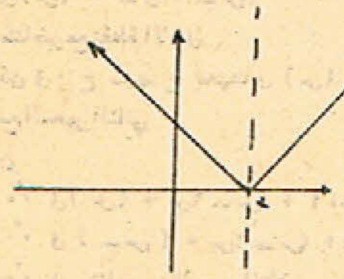
∴ ق غير متناظر مع المحور الثاني ∀س ∈ [–٣ ، ٥]

ولكنه يكون متناظرا مع المحور الثاني ∀ س ∈ [–٣ ، ٣]

(شكل ٢–٤٥)

٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = |٣ – س|

هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك



من الشكل المجاور نلاحظ انه

∃ (٣ ، ٠) ∈ ق وان (–٣ ، ٦) ∈ ق

اى انه ∃ ٣ ∈ ح و ∃ –٣ ∈ ح لكن

ق(–٣) ≠ ق(٣)

∴ ق غير متناظر مع المحور الثاني لكنه متناظر مع المستقيم س = ٣

(شكل ٢–٤٦)

امثلة على التطبيقات العددية المتزايدة والمتناقصة

١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = س^{٣} – ٤ برهن ان ق متزايد

البرهان :

∀ س$_{١}$ ، ∀ س$_{٢}$ ∈ ح

اذا كان س$_{١}$ < س$_{٢}$ ⟸ س$_{١}^{٣}$ < س$_{٢}^{٣}$ ⟸ س$_{١}^{٣}$ – ٤ < س$_{٢}^{٣}$ – ٤ ⟸ ق(س$_{١}$) < ق(س$_{٢}$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ ح

∴ ق رتيب في ح

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨ – ٣س^{٢} ، برهن ان ق متزايد في الاعداد السالبة ومتناقص في الاعداد الموجبة .

البرهان

١) ∀ س$_{١}$ ، س$_{٢}$ < صفر

اذا كان س$_{١}$ < س$_{٢}$ ⟸ س$_{١}^{٢}$ > س$_{٢}^{٢}$ ⟸ –س$_{١}^{٢}$ < –س$_{٢}^{٢}$ ⟸ –٣س$_{١}^{٢}$ < –٣س$_{٢}^{٢}$

⟸ ٨ – ٣س$_{١}^{٢}$ < ٨ – ٣س$_{٢}^{٢}$ ⟸ ق(س$_{١}$) < ق(س$_{٢}$)

∴ ق متناقص ∀ س < ٠

٢) ∀ $س_١$ ، $س_٢$ ≤ صفر

اذا كان $س_١$ < $س_٢$ ⟸ $س_١^٢$ > $س_٢^٢$ ⟸ −$س_١^٢$ < −$س_٢^٢$ ⟸ −٣$س_١^٢$

< −٣$س_٢^٢$ ⟸ ٨−٣$س_١^٢$ < ٨−٣$س_٢^٢$ ⟸ ق($س_١$) < ق($س_٢$)

∴ ق متزايد ∀ س ≤ صفر

٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٤ − |٢−س| برهن ان ق متزايـــد ∀ س ≤ ٢ ومتناقص ∀ س > ٢

(١) ∀ $س_١$ ، $س_٢$ > ٢

اذا كان ٢ < $س_١$ < $س_٢$ ⟸ −٢ > −$س_١$ > −$س_٢$ $\xLeftarrow{\text{باضافة (٢)}}$ صفر > ٢−$س_١$ >

٢−$س_٢$ ⟸ صفر < |٢−$س_١$| < |٢−$س_٢$| $\xLeftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ −|٢−$س_١$| >

−|٢−$س_٢$| $\xLeftarrow{\text{باضافة ٤}}$ ٤ − |٢−$س_١$| > ٤− |٢ − $س_٢$| ⟸ ق($س_١$)

> ق ($س_٢$)

∴ ق متناقص ∀ س > ٢

(٢) ∀ $س_١$ ، $س_٢$ <٢

اذا كان $س_١$ < $س_٢$ <٢ $\xLeftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ −$س_١$ > −$س_٢$ > −٢ $\xLeftarrow{\text{باضافة ٢}}$ ٢−$س_١$ >

٢−$س_٢$ >٠ ⟸ |٢−$س_١$| > |٢−$س_٢$| >٠ $\xLeftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ −|٢−$س_١$| <

−|٢−$س_٢$| < ٠ $\xLeftarrow{\text{باضافة ٤}}$ ٤−|٢−$س_١$| <٤− |٢ − $س_٢$| ⟸ ق($س_١$) <

ق($س_٢$) ⟸ ق متزايد ∀ س ≤ ٢

٤) ق: ح / {٢} ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{−٣}{٢−س}$ برهن ان ق متناقص فـــي منطلقه

∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ح / {٢}

اذا كان $س_١$ < $س_٢$ $\xLeftarrow{\text{بالضرب × −١}}$ −$س_١$ > −$س_٢$ $\xLeftarrow{\text{باضافة ٢}}$ ٢−$س_١$ > ٢−$س_٢$

⟸ $\frac{١}{٢−س_١}$ < $\frac{١}{٢ − س_٢}$ $\xLeftarrow{\text{بالضرب في ٣}}$ $\frac{٣}{٢−س_١}$ < $\frac{٣}{٢ − س_٢}$

$\xLeftarrow{\text{بالضرب × −١}}$ $\frac{−٣}{٢ − س_١}$ > $\frac{−٣}{٢ − س_٢}$ ⟸ ق($س_١$) > ق ($س_٢$)

∴ ق متناقص ∀ س ∈ ح / {٢}

٥) ليكن ق : ح / {−١} ⟵ ح بحيث $ق(س) = \frac{س - ٤}{س + ١}$

برهن ان ق متزايد في منطلقه

$ق(س) = \frac{س - ٤}{س + ١} = \frac{س + ١ - ١ - ٤}{س + ١}$ حيث $س \neq -١$

$= \frac{(س + ١) - ٥}{(س + ١)} = ١ - \frac{٥}{س + ١}$ حيث $س \neq -١$

$\therefore \forall س_١ ، \forall س_٢ \in ح / \{-١\}$

اذا كان $س_١ < س_٢ \xLeftarrow{باضافة ١} س_١ + ١ < س_٢ + ١ \Rightarrow \frac{١}{س_١ + ١} > \frac{١}{س_٢ + ١}$

$\xLeftarrow[واضافة ١]{بالضرب \times (-٥)} ١ - \frac{٥}{س_١ + ١} < ١ - \frac{٥}{س_٢ + ١}$ ، $ق(س_١) < ق(س_٢)$

∴ ق متزايد في منطلقه .

ملاحظة / يمكن كتابة $ق(س) = ١ - \frac{٥}{س + ١}$ بقسمة البسط (س − ٤) علـــى المقام (س + ١) قسمة مطولـــة

٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث $ق(س) = -٤س - س^٢$ برهن ان ق متزايد $\forall س < -٢$ ومتناقص $\forall س > -٢$

$ق(س) = -٤س - س^٢$

$= ٤ - ٤ - ٤س - س^٢$ باضافة وطرح ٤

$= ٤ - (٤ + ٤س + س^٢)$

$= ٤ - (٢ + س)^٢$

(١) $\forall س_١ ، س_٢ < -٢$

اذا كان $س_١ < س_٢ < -٢ \xLeftarrow{باضافة ٢} ٢ + س_١ < ٢ + س_٢ < صفر \xLeftarrow{بالتربيع}$

$(٢ + س_١)^٢ > (٢ + س_٢)^٢ > صفر \xLeftarrow{بالضرب في -١} -(٢ + س_١)^٢ <$

$-(٢ + س_٢)^٢ \; \therefore \xLeftarrow{باضافة ٤} ٤ - (٢ + س_١)^٢ < ٤ - (٢ + س_٢)^٢ \Rightarrow ق(س_١) < ق(س_٢)$ ∴ ق متزايد $\forall س < -٢$

(٢) ∀ س$_1$ ، س$_2$ < − ٢

اذا كان − ٢ > س$_1$ > س$_2$ $\overset{\text{باضافة ٢}}{\Longleftarrow}$ صفر > ٢ + س$_1$ > ٢ + س$_2$ $\overset{\text{بالتربيع}}{\Longleftarrow}$

صفر < (٢ + س$_1$)^2 < (٢ + س$_2$)^2 $\overset{\text{بالضرب في − ١}}{\Longleftarrow}$ − (٢ + س$_1$)^2 >

− (٢ + س$_2$)^2 $\overset{\text{باضافة ٤}}{\Longleftarrow}$ ٤ − (٢ + س$_1$)^2 > ٤ − (٢ + س$_2$)^2 $\Longleftarrow$

ق (س$_1$) > ق (س$_2$)

∴ ق متناقص ∀ س < − ٢

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = [س − ٢]

برهن ان ق متزايد في مجموعة الاعداد الصحيحة

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ ص

اذا كان س$_1$ < س$_2$ $\overset{\text{باضافة − ٣}}{\Longleftarrow}$ س$_1$ − ٣ < س$_2$ − ٣ ⟸ [س$_1$ − ٣] < [س$_2$ − ٣]

$\Longleftarrow$ ق (س$_1$) < ق (س$_2$)

∴ ق متزايد في ص

امثلة على التطبيقات العددية المحدودة وغير المحدودة

---

١) ليكن ق :]− ٢ ، ٤[⟵ ح بحيث ق (س) = ٣ − ٢س برهن ان ق محدود

∵ − ٢ ≤ س < ٤ بالفرض $\overset{\text{بالضرب في − ٢}}{\Longleftarrow}$

− ٤ ≥ ٢س < ٨ $\overset{\text{بالضرب في − ١}}{\Longleftarrow}$

٤ ≤ − ٢س > − ٨ $\overset{\text{باضافة ٣}}{\Longleftarrow}$

٧ ≤ ٣ − ٢س > − ٥ $\Longleftarrow$ | ق (س) | ≥ ٧

∴ ق محدود

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ − ٣س^2 برهن ان ق محدود من الاعلى

∀ س ∈ ح فان س^2 ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

٣س^2 ≥ صفر بالضرب في ٣

− ٣س^2 ≤ صفر بالضرب في − ١

٨ − ٣س^2 ≤ ٨ باضافة ٨

ق (س) ≤ ٨

∴ ق محدود من الاعلى

٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $س^2$ + س ـ ٤ برهن ان ق محدود من الاسفل

ق (س) = $س^2$ + س ـ ٤

= $س^2$ + س + $\frac{1}{4}$ ـ $\frac{1}{4}$ ـ ٤ باضافة وطرح $\frac{1}{4}$

= $(س + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$

∀ س ∈ ح فان $(س + \frac{1}{2})^2 \geqslant$ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

$(س + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4} \geqslant - \frac{17}{4}$ باضافة $- \frac{17}{4}$

∴ ق (س) $\geqslant \frac{-17}{4}$

∴ ق محدود من الاسفل

٤) ليكن ق: ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٤ ـ $|$ س + ٢ $|$ برهن ان ق محدود من الاعلى

∀ س ∈ ح فان $|$ س + ٢ $| \geqslant$ ٠

∴ ـ $|$ س + ٢ $| \leqslant$ صفر بالضرب في ـ١

٤ ـ $|$ س + ٢ $| \leqslant$ ٤ باضافة ٤ للطرفين

ق (س) $\leqslant$ ٤

∴ ق محدود من الاعلى

٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{1}{س^2 + 1}$ برهن أن ق محدود

١) ∀ س ∈ ح فان $س^2 \geqslant$ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

$س^2$ + ١ $\geqslant$ ١ باضافة ١ للطرفين

$\frac{1}{س^2 + 1} \leqslant$ ١ (خواص الاعداد الحقيقية)

ق (س) $\leqslant$ ١

∴ ق محدود من الاعلى

٢) ∵ $س^2 \geqslant$ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

$س^2$ + ١ $\geqslant$ ١ > صفر

∴ $\frac{1}{س^2 + 1}$ > صفر

ق (س) > صفر ∴ ومحدود من الأسفل

∴ ق محدود

ملاحظة / يمكن استخدام الطريقة الواردة في المثال الثامن من هذا الموضوع لبرهنة المثال (٥) اعلاه .

٦) ليكن ق : ح/{٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ برهن ان ق محدود من الاعلى وغير محدود من الاسفل

(١) ∀ س ∈ ح /{٠} فان س٢ > صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

∴ $\frac{١}{س^{٢}}$ > صفر

∴ $-\frac{١}{س^{٢}}$ < صفر

∴ ق (س) < صفر

∴ ق محدود من الاعلى

(٢) ∀ ص ∈ ح⁻ (اكبر مدى للتطبيق)

فانه ∃ $\frac{١}{\sqrt{١-ص}}$ ∈ منطلق التطبيق بحيث

ق($\frac{١}{\sqrt{١-ص}}$) = $\frac{-١}{\frac{١}{١-ص}}$ = ص − ١ < ص

∴ ق غير محدود من الاسفل .

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٣س٢ − ٢٧ برهن أن ق محدود من الاسفل وغير محدود من الاعلى .

(١) ∀ س ∈ ح فان س٢ ≥ صفر ⟸ ٣س٢ ≥ صفر ⟸ ٣س٢ − ٢٧ ≥ − ٢٧ ⟸ ق (س) ≥ − ٢٧

∴ ق محدود من الاسفل

(٢) اكبر مدى للتطبيق هو { ص : ص ≥ − ٢٧ }

∴ ∀ ص ≥ −٢٧ فانه ∃ $\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$ ∈ منطلق ق

بحيث ق ($\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$) = ٣($\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$)٢ −٢٧ = ص + ١ > ص

∴ ق غير محدود من الاعلى

٨) ليكن ق : ح ⟵ ح . بحيث ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$ برهن ان ق محدود

نفرض ق(س) = ص = $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$

∴ ص + ص$س^٢$ = ١ ـ $س^٢$

$س^٢$ (١ + ص) = ١ ـ ص

$س^٢ = \frac{١ - ص}{١ + ص}$

س = $\pm \sqrt{\frac{١ - ص}{١ + ص}}$

	١ـ	١	
+++	++++	-----	اشارة ١ـص
----	++++	+++	اشارة ١+ص
----	+++	----	اشارة (١ـص) (١+ص)

∴ ـ ١ < ص ≥ ١

∴ ـ ١ < ق (س) ≥ ١

∴ | ق (س) | > ١

∴ ق محدود

٩) ليكن ق :]٠ ، ٢[⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س}$

(١) هل يكون ق محدود من الاعلى ؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدود من الاسفل ؟ برهن قولك

(١) ليكن ل ∈ $ح^{++}$ (اكبر مدى للتطبيق)

∴ ل > صفر ⟸ ل + ١ > ١

∴ ٠ < $\frac{١}{ل + ١}$ < ١ ⟸ ٠ < $\frac{١}{ل + ١}$ < ٢

ق($\frac{١}{ل + ١}$) = $\frac{١}{\frac{١}{ل + ١}}$ = ل + ١ > ل

∴ ق غير محدود من الاعلى

(٢) س ∈]٠ ، ٢[بالفرض

∴ س < ٢ ⟸ س ـ ٢ < ـ ٢ ⟸ $\frac{١}{س - ٢}$ > ـ ½ ⟸ ق(س)

> ـ ½

∴ ق محدود من الاعلى

١٠) ليكن ق :] ٠ ، ٢ [⟵ ح بحيث ق(س) = ١ / (س − ٢)

(١) هل يكون ق محدودة من الاعلى ؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدودة من الاسفل ؟ برهن قولك

(١) ∀ ص ∈ ح بحيث ص < −½ فانه ∃ ((٢ص − ١) / (ص − ١)) ∈] ٠ ، ٢ [

بحيث ق ((٢ص − ١) / (ص − ١)) = ١ / ((٢ص − ١) / (ص − ١) − ٢) = ص − ١ < ص

∴ ق غير محدودة من الاسفل

١١) ليكن ق : [−٩ ، ٩] ⟵ ح بحيث ق (س) = √(٨١ − س²)

برهن ان ق محدودة

	٩−		٩
اشارة ٩ − س	+++	++++	−−−
اشارة ٩ + ب	−−−	++++	+++
اشارة (٩ − ص) (٩ + ص)	−−−	++++	−−−

ليكن ص = ق (س)

ص = √(٨١ − س²)

ص² = ٨١ − س²

س² = ٨١ − ص²

س = ± √(٨١ − ص²)

س = ± √((٩ − ص) (٩ + ص))

∴ ص ∈ [−٩ ، ٩]

ولكن ص ≥ صفر ∀ س ∈ [−٩ ، ٩]

∴ ٠ ≤ ص ≤ ٩

∴ ٠ ≤ ق (س) ≤ ٩

∴ ق محدودة

* امثلة على اعظم قيمة واوطأ قيمة للتطبيق *

(١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ − ٢س²

هل يمتلك ق اعظم قيمة ؟ وهل يمتلك أصغر قيمة ؟ برهن قولك

الحل/ بما ان ق (س) ≥ ٨ (ق محدودة من الاسفل ... برهن)

∴ (٨) اوطأ قيمة للتطبيق

وبما ان ق غير محدودة من الاعلى ∴ لايمتلك اعظم قيمة

(٢) ليكن ق :] −٢ ، ٥] ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ − ٣س .

(١) هل يمتلك ق اعظم قيمة ؟ برهن قولك

(٢) هل يمتلك ق اوطأ قيمة ؟ برهن قولك

س ∈] −٢ ، ٥] ⟸ −٢ < س ≤ ٥ ⟸ −٦ < ٣س ≤ ١٥ ⟸ ٦ > −٣س ≥ −١٥ ⟸ ١٤ > ٨ − ٣س ≥ −٧ ⟸

١٤ > ق (س) ⩾ −٧

∴ ق محدد

(١) بما ان ق (س) ⩾ −٧ ∀ س ∈] −٢ ، ٥ [

وتوجد ٥ ∈ المنطلق بحيث ق(٥) = −٧

∴ −٧ أصغر قيمة للتطبيق

(٢) بما انه لايوجد س١ ∈] −٢ ، ٥ [بحيث ق(س١) = ١٤

∴ ق لايمتلك اعظم قيمة

امثلة عامة

مثال ١) ليكن ق : [−٤ ، ٥] ⟵ ح بحيث

ق (س) = {
− [س] ∀ س ∈ [٢ ، ٥]
س|س| − ١ ∀ س ∈ [−٢ ، ٢ [
−١ / (س + ٢) ∀ س ∈ [−٣ ، −٢ [
−٢س − ٥ ∀ س ∈ [−٤ ، −٣ [

(١) مثل ق ديكارتيا

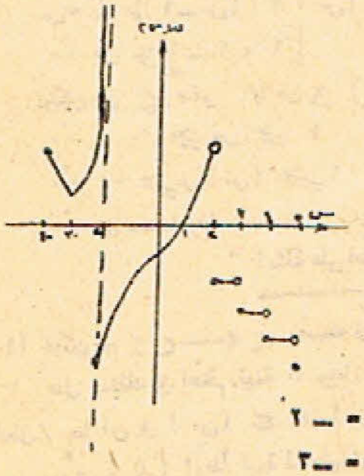
(٢) برهن ان ق متزايد في [−٢ ، ٢ [

(٣) برهن ان ق متناقص في [−٤ ، −٣ [

(٤) جد اعظم قيمة للتطبيق − ق

(٥) برهن ان ق غير محدد من الاعلى ومحدد من الاسفل

(٦) جد ان امكن [(ق∘ق)∘ق] (−١)



الجواب/

(١) ∀ س ∈ [٢ ، ٣ [⟸ ق (س) = −٢

∀ س ∈ [٣ ، ٤ [⟸ ق (س) = −٣

∀ س ∈ [٤ ، ٥ [⟸ ق(س) = −٤

عندما س = ٥ ⟸ ق (س) = −٥

∀ س ∈ [٠ ، ٢ [⟸ ق(س) = س٢ − ١

∀ س ∈ [−٢ ، ٠ [⟸ ق (س) = −س٢ − ١

س + ٢ = ٠ ⟸ س = −٢ المحاذي الشاقولي ، ق(−٢) = ١

ق(س) = −٢س − ٥

س	ص
−٣	١
−٤	٣

٢) ∀ س ∈ [−٢، ٠] ⟸ ق(س) = −س^2 − ١

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [−٢، ٠]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ س$_1^2$ > س$_2^2$ ⟸ −س$_1^2$ < −س$_2^2$ ⟸

−س$_1^2$ − ١ < −س$_2^2$ − ١ ⟸ ق(س$_1$) < ق(س$_2$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ [−٢، ٠]

∀ س ∈ [٠، ٢] ⟸ ق(س) = س^2 − ١

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [٠، ٢]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ س$_1^2$ < س$_2^2$ ⟸ س$_1^2$ − ١ < س$_2^2$ − ١ ⟸

ق(س$_1$) < ق(س$_2$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ [٠، ٢]

(٣) ∀ س ∈ [−٤، −٣] ⟸ ق(س) = −٢س − ٥

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [−٤، −٣]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ −س$_1$ > −س$_2$ ⟸ −٢س$_1$ > −٢س$_2$ ⟸

−٢س$_1$ − ٥ > −٢س$_2$ − ٥ ⟸ ق(س$_1$) > ق(س$_2$)

∴ ق متناقص ∀ س ∈ [−٤، −٣]

(٤) اعظم قيمة لـ (⊖ ق) = − (اصغر قيمة لـ (ق))

وبما ان اصغر قيمة للتطبيق ق هي −٥ لان

(١) ق(س) ≥ −٥ ∀ س ∈ [−٤، ٥]

(٢) ∃ ٥ ∈ [−٤، ٥] بحيث ق(٥) = −٥

∴ اعظم قيمة للتطبيق ⊖ ق هي ٥

(٥) ١) ق غير محدود من الاعلى لان ق (س) = $\frac{-١}{س + ٢}$ ∀ س ∈]−٣ ، −٢[

غير محدود من الاعلى ويمكن برهان ذلك كما يلي :-

∀ ص ≥ ١ ، ∃ ($\frac{-٣ - ٢ص}{ص + ١}$) ∈]−٣ ، −٢[بحيث

ق ($\frac{-٣ - ٢ص}{ص + ١}$) = $\frac{-١}{\frac{-٣ - ٢ص}{ص + ١} + ٢}$ = ص + ١ > ص

∴ ق غير محدود من الاعلى .

(٢) ∀ س ∈ [−٢ ، ٠] ⟸ ق(س) = −س٢ − ١

−٢ ≤ س < ٠ ⟸ ٤ ≥ س٢ > صفر ⟸ −٤ ≤ −س٢ ⟸

−٥ ≤ −س٢ − ١ ⟸ −٥ ≤ ق(س)

كذلك ∀ س ∈ [−٢ ، ٥] فان ق (س) ≥ −٥

∴ ق محدود من الاسفل

او يمكن برهنة ان ق محدود من الاسفل كما يلي

بما ان للتطبيق ق اصغر قيمة = −٥

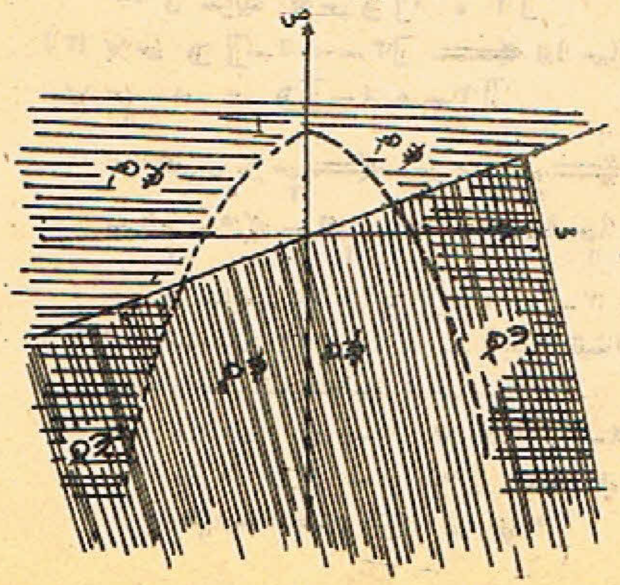
∴ التطبيق محدود من الاسفل

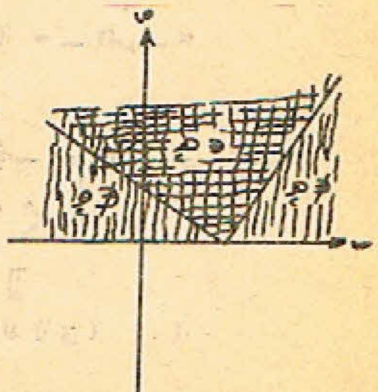
مثال ٢) أ) ظلل مجموعة النقاط هـ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ،

ص < ٩ − س٢ ، ٢س ≤ ٢ص }

في المستوى الاقليـــدي

ب) ظلل مجموعة النقاط هـ = { (س،ص) : (س،ص) ∈ ح×ح ، ص ≥ |س−٢| ، ص ≤ ٣ ،٠ }





مثال ٣) ليكن ق : ح / {٢} ⟵ ح بحيث $ق(س) = \frac{٣س^٢ - ١٢س + ٢٠}{٤س - س^٢ - ٤}$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد $\forall$ س > ٢ ومتناقص $\forall$ س < ٢

(٣) برهن ان ق محددة من الاعلى

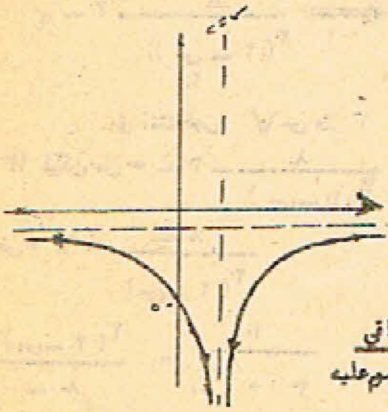
(٤) جد (ق ∘ ق) (صفر)

الحل/ $ق(س) = \frac{٣س^٢ - ١٢س + ٢٠}{٤س - س^٢ - ٤}$

$$= -٣ - \frac{٨}{(س-٢)^٢}$$

وذلك بقسمة البسط على المقام كما يلي

$$\begin{array}{r|l} & -٣ \\ \hline -س^٢ + ٤س - ٤ & ٣س^٢ - ١٢س + ٢٠ \\ & \mp ٣س^٢ \pm ١٢س \mp ١٢ \\ \hline & +٨ \end{array}$$



(شكل ٢−٤٩)

وباستخدام الفكرة $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}}$ = خارج القسمة + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\therefore ق(س) = -٣ + \frac{٨}{-س^٢ + ٤س - ٤} = -٣ - \frac{٨}{س^٢ - ٤س + ٤}$$

$$= -٣ - \frac{٨}{(س-٢)^٢}$$

المحاذي الافقي س = −٣ ، المحاذي الشاقولي س = ٢

(٢) $\forall$ $س_١$ > ٢ ، $\forall$ $س_٢$ > ٢

اذا كان $٢ < س_١ < س_٢ \Leftarrow صفر < س_١ - ٢ < س_٢ - ٢ \Leftarrow صفر <$

$(س_١ - ٢)^٢ < (س_٢ - ٢)^٢ \Leftarrow \frac{١}{(س_١ - ٢)^٢} > \frac{١}{(س_٢ - ٢)^٢} >$ صفر

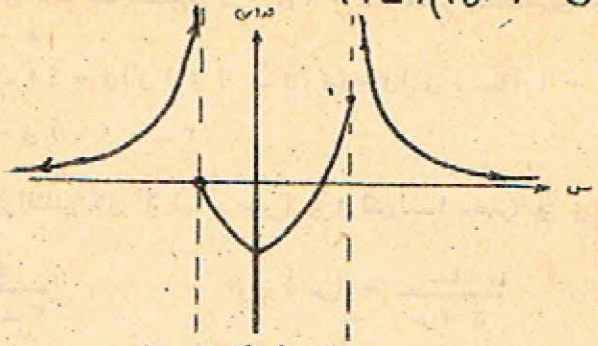
$\Leftarrow \frac{-٨}{(س_١-٢)^٢} < \frac{-٨}{(س_٢-٢)^٢} <$ صفر $\Leftarrow -٣ - \frac{٨}{(س_١-٢)^٢}$

$< -٣ - \frac{٨}{(س_٢-٢)^٢} < -٣ \Leftarrow ق(س_١) < ق(س_٢)$

$\therefore$ ق متزايد $\forall$ س > ٢

$\forall$ $س_١$ < ٢ ، $\forall$ $س_٢$ < ٢

(٥) جد (ق ٥ ق ٥ ق) (ــ ٢) (٦) هل يتناظر ق مع المحور الثاني فــــي [ــ ٢ ، ٢] (٧) جد س ∈ ح بحيث ق (س) = ١٠٠ (٨) جد((ق ⊕ ق ⊕ (٣ق)) (ــ ١)



(شكل ٢ـ٥٠)

٢) ∀ س$_١$ > ــ ٢ ، ∀س$_٢$ > ــ ٢

اذا كان س$_١$ > س$_٢$ > ــ ٢ ⟸

٢ > س$_٢$ + ٢ > صفر ⟸

$\frac{١}{س_١ + ٢}$ > $\frac{١}{س_٢ + ٢}$ ⟸

صفر > $\frac{-٤}{س_١ + ٢}$ > $\frac{-٤}{س_٢ + ٢}$

⟸ ق(س$_١$) > ق (س$_٢$) ∀س > ــ ٢

∴ ق متزايد ∀ س > ــ ٢

٣) اما ان نبرهن ق (س) = $\frac{٤}{س - ٢}$ ∀س > ٢ غير محدود من الاعلى

او ان نبرهن ق (س) = $\frac{-٤}{س + ٢}$ ∀س > ــ ٢ غير محدود من الاعلى

ولنأخذ الحالة الاولى

∀ل > صفر ، ∃ س = (٢ + $\frac{٤}{ل + ١}$) > ٢ بحيث ق(٢ + $\frac{٤}{ل + ١}$)

= $\frac{٤}{٢ + \frac{٤}{ل + ١} - ٢}$ = $\frac{٤}{\frac{٤}{ل + ١}}$ = ل + ١ > ل

∴ ق غير محدود من الاعلى

٤) اصغر قيمة للتطبيق ق تساوى (ـ ٦) واصغر قيمة للتطبيق (٣ ق)
تساوى (ـ ١٨) وبما ان اعظم قيمة للتطبيق (−٣ق) = ـ (اصغر قيمة للتطبيق ٣ق)
= ـ (ـ ١٨) = ١٨

٥) (ق ∘ ق ∘ ق) (ـ ٢) = ق(ق (ق (ـ ٢))) = ق(ق (ـ٦)) =
ق ($\frac{ـ٤}{ـ٦ + ٢}$) = ق (١) = ـ ٣

٦) ق غير متناظر مع المحور الثاني لان ∃ (٢ ، صفر) ∈ ق لكن (ـ٢ ، صفر) ∉ ق

٧) ق (س) = ١٠

اما ق (س) = $\frac{٤}{س ـ ٢}$ او ق (س) = $\frac{ـ٤}{س + ٢}$

∴ $\frac{٤}{س ـ ٢}$ = ١٠ ، ∴ $\frac{ـ٤}{س + ٢}$ = ١٠

$\frac{س ـ ٢}{٤}$ = $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{س + ٢}{ـ٤}$ = $\frac{١}{١٠}$

س ـ ٢ = $\frac{٤}{١٠}$ ، س + ٢ = $\frac{ـ٢}{٥}$

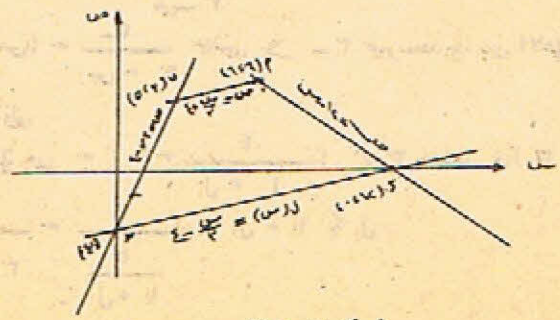
س = $\frac{١٢}{٥}$ ، ∴ س = ـ ٢ $\frac{٢}{٥}$

٨) ((ق ⊕ ق) ⊕ (٣ق)) (ـ ١) = (ق ⊕ ق) (ـ١) ⊕ (٣ق) (ـ١)
= ق(ـ١) + ق(ـ١) + ٣ق(ـ١) = ـ٣ـ٣ـ٣(ـ٣) = ـ٦ + ٩ = ٣

مثال ٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { ٣س ـ ٤ ∀ س < ٣
١٢ ـ س ∀ س ≥ ٦
$\frac{س}{٢}$ + ٤ ∀ س ∈ [٣، ٦[

وليكن ل (س) = $\frac{س}{٢}$ ـ ٤ فجد مساحة الشكل المحدد بين بياني التطبيقين
ق ، ل



(شكل ٢ـ١٥)

ص = ١٢ − س ‏ ‏ ‏ ‏ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ ‏ ‏ ‏ ‏ ص = ٢س − ٤

س	ص
٣	٥
٠	−٤

س	ص
٣	٥
٦	٦

س	ص
٦	٦
١٢	٠

بحل معادلتي حد ، حب انيا نحصل على نقطة حـ

ص = $\frac{\text{س}}{٢}$ − ٤

ص = ٢ س − ٤

∴ $\frac{\text{س}}{٢}$ − ٤ = ٢س − ٤

∴ س = ٠ وبالتعويض في احدى المعادلتين عن قيمة س = ٠

ينتج ص = −٤ ∴ حـ (٠ ، −٤)

وبحل معادلتي أد ، حد انيا نحصل على نقطة د (١٢ ، ٠)

∴ ميل أ ب = $\frac{١}{٢}$ ، وميل حد = $\frac{١}{٢}$ ∴ أب // حد

لكن ميل أد ≠ ميل ب حـ ⟸ أد ∦ ب حـ

∴ الشكل أ ب حـ د شبه منحرف

ء(أ ، ب) = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$ = $\sqrt{(٦-٣)^٢ + (٦-٥)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة

ء(حـ ، د) = $\sqrt{(١٢-٠)^٢ + (٠+٤)^٢}$ = $\sqrt{١٦٠}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ وحدة

اما عن ارتفاع شبه المنحرف فيمثل بعد اى من النقطتين أ ، ب عن المستقيم حد ، ونجده كما يلي :−

معادلة حـ د هي. ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٤ اى س − ٢ ص − ٨ = ٠ .

∴ ل = $\frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$ = $\frac{|١ \times ٦ - ٢ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{١ + ٤}}$ = $\frac{٢٤}{\sqrt{١٠}}$ وحدة

مساحة شبه المنحرف = ½ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × ارتفاعه .

= ½ ($\sqrt{١٠}$ + ٤ $\sqrt{١٠}$) × $\frac{٢٤}{\sqrt{١٠}}$ = ١٢ × ٥ = ٦٠ وحدة مربعة

مثال ٦) ليكن ق : ح ⟶ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} |\text{س}| + ٤ & \forall \text{ س} \in [-٢ ، ٢] /]-١ ، ١[\\ \text{س}^٢ |\text{س}| + ٨ & \forall \text{ س} \in [-١ ، ١] \\ \frac{٣}{\text{س} - ٢} & \forall \text{ س} > ٢ \\ \frac{٣}{\text{س} + ٢} & \forall \text{ س} < -٢ \\ \left[\frac{\text{٥س} + ٤}{٣}\right] & \forall \text{ س} \in \{-١ ، ١ ، ٢ ، -٢\} \end{cases}$$

٢ ‏ ‏ ١ ‏ ‏ −١ ‏ ‏ −٢

١) ق(س) = س^{٢}+٤ ∀ س ∈]١، ٢[، ق(س) = −س^{٢}+٤ ∀ س ∈]−٢، −١[

٢) ق(س) = س^{٣} + ٨ ∀ س ∈]٠، ١[،

ق(س) = −س^{٣} + ٨ ∀ س ∈]−١، ٠[

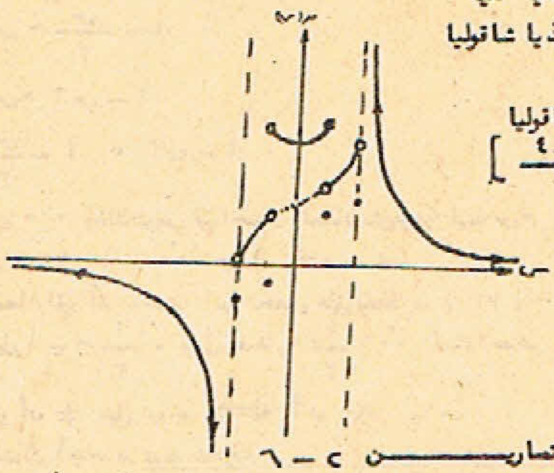
٣) ص = ٠ مستقيما محاذيا افقيا

س = ٢ مستقيما محاذيا شاقوليا

٤) ص = ٠ محاذيا افقيا

س = −٢ محاذيا شاقوليا

٥) ق(س) = $\left[\frac{٥س + ٤}{٢}\right]$



س	ق(س)
−١	−١
١	٣
٢	٤
−٢	−٢

تمارين ٢ − ٦

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :−

(١) ق : [−٣، ٣] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- $\frac{١}{٢}$ س^{٢} −٢ عندما س ≠ ١، س ≠ −١
- ١ عندما س = ١
- −½ عندما س = −١

(٢) ق : [−٤، ٦] ← [−١٠، ١٠] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- ٤ ∀ س ∈ [٠، ٦]
- −س−١ ∀ س ∈ [−٤، ٠[

(٣) ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- س + ١ ∀ س ≥ ١
- ٣ ، ٢ > س > ١
- −س + ٢ ، ٤ > س ≥ ٢
- −٣س + ٢٠ ∀ س ≥ ٥
- س^{٢} + ٨ ، ٥ > س ≥ ٤

(٤) ق(س) =
- س^{٢} ∀ س ≥ ١
- صفر −١ ≤ س < ١
- س + ١ ∀ س < −١

(٥) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} \in]-٢ ، ٢[\\ |\text{س}| & \forall\ \text{س} \in [٢ ، ٦] \cup [-٦ ، -٢] \\ ٦ & \forall\ \text{س} \in \text{ح} / [-٦ ، ٦] \end{cases}$$

(٦) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -٢ & \forall\ \text{س} < -٢ \\ \text{س} + ٣ & \forall\ \text{س} \in [-٢ ، ٠[\\ -\text{س}^٢ - ١ & \forall\ \text{س} \geqslant \text{صفر} \end{cases}$$

(٧) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & \forall\ \text{س} \geqslant \text{صفر} \\ ٣ & \text{عندما س} = \text{صفر} \end{cases}$$

(٨) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٢ & \forall\ \text{س} \neq \text{صفر} \\ -٢ & \text{عندما س} = \text{صفر} \end{cases}$$

(٩) ق : $[-٦ ، ٨] \longrightarrow$ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & \forall\ \text{س} \in]-٦ ، -٢] \\ ٢\text{س} - ١ & \forall\ \text{س} \in]-٢ ، ٢[\\ ٤ & \forall\ \text{س} \in [٢ ، ٨] \end{cases}$$

(١٠) ق : $]-٦ ، ١٠[\longrightarrow$ ح بحيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} - ٤ & \forall\ \text{س} \in]-٦ ، ٠[\\ [\text{س}] & \forall\ \text{س} \in [٠ ، ٤[\\ ٢\text{س} & \forall\ \text{س} \in [٤ ، ١٠[\end{cases}$$

(١١) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ & \forall\ \text{س} \in]-١ ، ١[\\ \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} \in \text{ح} /]-١ ، ١[\end{cases}$$

(١٢) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} \in]-٢ ، ٢[\\ ٨ & \forall\ \text{س} \geqslant ٢ \\ -٨ & \forall\ \text{س} < -٢ \end{cases}$$

(١٣) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} \in [-٢ ، ٢[\\ [\text{س}] & \forall\ \text{س} \geqslant ٢ \\ ٦ & \forall\ \text{س} \in]-٤ ، -٢[\\ \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} < -٤ \end{cases}$$

(١٤) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س}^٢ & \text{س عدد حقيقي غير سالب} \\ -[\text{س}] + \text{س}^٢ & \text{س عدد حقيقي سالب} \end{cases}$$

(١٥) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \forall\ \text{س} \in]-١ ، ١[\\ [\text{س}] & \forall\ \text{س} \in]-٤ ، -١[\\ ٣ & \forall\ \text{س} < -٤ \\ \text{س} & \forall\ \text{س} \geqslant ١ \end{cases}$$

(١٦) ق : $]-٢ ، ٢[\longrightarrow$ ح بحيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ & \forall\ \text{س} \in [-٢ ، ١] \\ ١ - \text{س}^٢ & \forall\ \text{س} \in]١ ، ٢[\end{cases}$$

(١٧) ه(س) = { س^{٢} ∀ س ≤ ١

|س| / س ∀ س > ١

(١٨) ق(س) = س^{٢} − ٢ |س| + ١

(١٩) ه(س) = { س + ١ اذا كان س < ٢

(س − ١)^{٢} اذا كان س ≥ ٢ .

(٢٠) ق: [−٢، ٧[⟵ ح بحيث ه(س) = { ١/س + ١ ∀ س < صفر

س^{٢} + ٢ ∀ س ∈ [٠، ٢[.

٤ ∀ س ≥ ٢

(٢١) ق:]−٤، ٥[⟵ ح بحيث ه(س) = { س^{٢} − ٢ اذا كان س < ٢

١/(س − ١) اذا كان س ≥ ٢

(٢٢) ق: [−٤، ٧] ⟵ ح بحيث ق(س) = { |س − ٢| اذا كان س < ٤

س [س] اذا كان س ≥ ٤.

(٢٣) ق(س) = { |س| اذا كان س عددا حقيقيا غير صحيح

صفر اذا كان س عددا صحيحا

(٢٤) ق(س) = { ٣ ∀ س > صفر

١ عندما س = صفر

−٢ س < صفر

(٢٥) ق(س) = { ٣س + ١ ∀ س > ٢

٤ ∀ س ∈ [−٣، ٢]

−س + ١ ∀ س < −٣

(٢٦) ق: [−٢، ٩] ⟵ ح بحيث ق(س) = { س ∀ س عدد حقيقي غير صحيح

٢ عندما يكون س عددا صحيحا

(٢٧) ق(س) = { −٣س^{٢} + ١٠ ∀ س ∈ [−٢، ٣]

٢ ∀ س > ٣

−س + ٢ ∀ س < −٢

(٢٨) ق(س) = { ٢س^{٢} − ١٠ ∀ س ∈ [−٣، ٣]

٤ ∀ س ∈ ح / [−٣، ٣]

(٢٩) ق(س) = { |س|/س + ٤ + س^{٢} ∀ س ≠ صفر

−٢ عندما س = صفر

(٣٠) ق(س) = { ٢/(س − ٣) ∀ س > ٣

[س]/٢ ∀ س ∈ [−٤، ٣]

٣ ∀ س < −٤.

(٣١) ق(س) = { ٤ − |س − ٤| ∀ س ∌]−١ ، ١]
[س] ∀ س ∈]−١ ، ١]

(٣٢) هـ(س) = [−س]

(٣٣) هـ(س) = [٠,٥ + س]

لكل من التطبيقات التالية (من ٣٤ ـ ٤٥) اجب عما يلي :ـ

(١) هل يكون ق محدودا من الاعلى ؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدودا من الاسفل ؟ برهن قولك

(٣) جد اعظم قيمة واصغر قيمة ان وجدت

(٣٤) ق(س) = ٢س^{٢} ـ ٣

(٣٥) ق(س) = ـ |٣س^{٢} ـ ٥|

(٣٦) ق(س) = { ٢س^{٢} ـ ٨ ∀ س ∈]−٣ ، ٣[
هـ(س) = ٤ ∀ س ∉]−٣ ، ٣[

(٣٧) ق(س) = ٣ + |٢س^{٢} ـ ٧|

(٣٨) ق: ح | {٢} ← ح بحيث ق(س) = ١ / (س ـ ٢)

(٣٩) ق:]ـ ٢ ، ٤[← ح بحيث ق(س) = ٢س ـ ٣

(٤٠) ق: ح | {ـ ١} ← ح بحيث ق(س) = ١ / (س + ١)

(٤١) ق:]٠ ، ٢[← ح بحيث ق(س) = ١ / (س ـ ٢)

(٤٢) ق: [ـ ٣ ، ٦] ← ح بحيث ق(س) = ٥ ـ ٢س

(٤٣) ق:]ـ ٣ ، ٩[← ح بحيث ق(س) = ٢٥ ـ ٢س^{٢}

(٤٤) ق: ح ← ح بحيث ق(س) = |٢س + ٣| + ٢

(٤٥) ق: ح ← ح بحيث
هـ(س) = { س^{٢} ـ ١٥ ∀ س ∈]ـ ١ ، ٣]
٤ ∀ س > ٣
ـ ٢ ∀ س ≤ ـ ١

(٤٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { |س + ٢| اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح
ـ ٣ اذا كان س عدد صحيح

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

(٢) بالاستعانة بالرسم جد ك ⊂ ح التي يكون عندها ق متزايدا

(٣) بالاستعانة بالرسم جد ع ⊂ ح التي يكون عندها ق متناقصا

(٤) بالاستعانة بالرسم جد ل ⊂ ح التي يكون عندها ق غير متزايد وغير متناقص

*(٤٧) ليكن ق : [−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- |س| + |س + ٢| + س ، ∀ س ∈ [−٢ ، ٠[
- ٢ ، ∀ س ∈ [٠ ، ٢[
- (٢ − س)/٢ ∀ س ∈ [٢ ، ٢]

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد ∀ س ∈ [−٢ ، ٠[
(٣) برهن ان ق محدود (٤) جد مساحة الشكل المحصور بين منحنى التطبيق والمحور الاول

(٤٨) ليكن ق : [٠ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- س ∀ س ∈ [٠ ، ١]
- س − ٢ ∀ س ∈]١ ، ٢[
- صفر عندما س = ٢

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد ∀ س ∈ [٠ ، ١]

(٣) برهن ان ق متناقص ∀ س ∈]١ ، ٢] (٤) برهن ان ق محدود
(٥) جد مساحة الشكل المحدد بين منحنى بيان التطبيق والمحور الاول .

٤٩) ليكن ق :]−١ ، ٢[⟵ ح بحيث ق(س) = س٢ + ١
(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق محدود (٣) برهن ان ق متزايد ∀ س ≥ ٠ (٤) برهن ان ق متناقص ∀ س < ٠
(٥) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟ (٦) جد الفترة التي يكون فيها ق متناظر مع المحور الثاني .

٥٠) ليكن ق : [−٣ ، ٣] ⟵ ح بحيث ق(س) = |س + ١|
وليكن ع : [−٣ ، ٣] ⟵ ح = ع (س) = ٢س
جد (١) (ق ⊙ ع) (٢) ، (٢) (ق ⊕ ٣ع) (−١) ، (ق ⊖ ع)(٤)

٥١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- ١ − ٢س اذا كان س ≤ −٢
- س٢ |س| اذا كان س ∈]−١ ، ١[
- − [س] اذا كان س ≥ −١
- صفر اذا كان س ∈ [١ ، ٢[

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) جد (ق ∘ ق) (−١) (٣) جد (ق ⊙ ق)(٤) ، (ق ⊖ ق)(٤)
(٤) هل يتناظر ق مع المحور الثاني في الفترة]−١ ، ١[؟ برهن قولك .

٥٢) ليكن د : ح ⟵ ح بحيث

د (س) =
- |٢/س| اذا كان س ∈ [−٣ ، ٣] / {٠}
- |س٢ − ٤| − ٤ اذا كان س ∈ ح / [−٣ ، ٣]
- ٥ عندما س = صفر

(١) مثل د ديكارتيا (٢) برهن ان د متزايد في الفترة [-٣ ، ٠]
(٣) برهن ان د محدود من الاسفل .

٥٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث

د(س) =
- س² اذا كان س ∉]-٤ ، ٤[
- س³ اذا كان س ∈]-٢ ، ٢[
- ٦ اذا كان س ∈]-٤ ، -٢]
- |س| اذا كان س ∈ [٢ ، ٤[

(١) مثل ق ديكارتيا

(٢) هل ق محدود ؟ برهن قولك (٣) برهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل في]-٢ ، ٢[(٤) برهن ان ق متزايد في الفترة]-٢ ، ٢[

(٥) برهن ان ق متناظر مع المحور الثاني ∀ س ∈ ح /]-٤ ، ٤[

٥٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث

د(س) =
- س³ ∀ س ∈]-١ ، ٢]
- ٤ - س² ∀ س ∈]٢ ، ٥]
- س⁴ |س| - س⁹ ∀ س ∈]٢ ، ٣]
- -[س] ∀ س > ٥
- ٢ [س] ∀ س ≤ -١

(١) جد ق(-٥ر٢) ، ق(٥ر٦) ، ق(٤) ، ق(½) ، ق(-½) ، ق(٠)

(٢) مثل ق ديكارتيا (٣) برهن ان ق محدود من الاعلى

(٥) برهن ان ق متناقص في الفترة]٥ر٣ ، ٥ر٤]

٥٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = |٤ - س²|

(١) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (ك اكبر منطلق) بحيث يكون (ك ، ح ، ق) تطبيقا (٢) جد المجموعة الجزئية من ح والتي يكون فيها ق متزايدا . (٣) جد المجموعة الجزئية من ح والتي يكون فيها ق متناقصا (٤) هل يكون ق محدودا من الأسفل ؟ برهن قولك ؟ (٥) هل يكون ق محدودا من الاعلى ؟ برهن قولك (٦) مثل ق ديكارتيا (٧) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ برهن قولك (٨) جد اعظم قيمة للتطبيق ⊖ ق . واصغر قيمة للتطبيق ق .

في كل مما يلي (من ٥٦ الى ٦٢) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (اكبر منطلق) بحيث يكون (ك ، ح ، ق) تطبيقا .

٥٦) ق(س) = $\frac{\text{٢س}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{٤س} - ٥}}$ ج : ح / [-١ ، ٥]

٥٧) ق(س) = $\frac{٢\,|\text{س}|}{[\text{س}] + ٢}$ ج : ح / [-٢ ، -١[

٥٨) ق(س) = $\frac{١}{\text{س}\,[\text{س}]}$ ج : ح / [٠ ، ١[

٥٩) ق(س) = $\sqrt{٢٥ - \text{س}^2}$ ج : [-٥ ، ٥]

٦٠) ق(س) = $\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$

٦١) ق = { (ـ ١ ، ١) ، (ـ ٢ ، ٣) ، (ـ ٣ ، ٥) }

٦٢) ق = { (س ، $\dfrac{1}{\text{س} + 2}$) : س ∈ ك }

في كل ما يلي (من ٦٣ الى ٧٢) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (ك اكبر منطلق) واكبر مجموعة جزئية من ح مثل ل (ل اكبر مدى) بحيث يكون الثلاثي (ك ، ل ، ق) تطبيقا .

٦٣) ق (س) = س^2 + ٤

٦٤) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^2 + 4}$ ٦٥) ق (س) = $\sqrt{\text{س}^2 - 9}$

٦٦) ق (س) = $\sqrt{4 - \text{س}^2}$ ٦٧) ق(س) = $\dfrac{1}{(\text{س}^2 - 1)(\text{س}^2 + 9)(\text{س} + 7\text{س}^2)}$

٦٨) ق(س) = $\sqrt{\dfrac{\text{س} + 4}{\text{س} - 4}}$ ٦٩) ق(س) = $\sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{س} + 4}}$

٧٠) ق(س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س} + 2}}{\sqrt[3]{\text{س} - 2}}$

٧١) ق(س) = $\dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 2}}{\sqrt{(\text{س} - 1)(\text{س} + 3)}}$

٧٢) ق = { (س ، $\sqrt{\text{س}(\text{س}^2 - 3)}$) : س ∈ ك }

٧٣) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك بحيث تجعل كلا من (ك ، ح ، ق) ، (ك ، ح ، ل) تطبيقا حيث ان ق(س) = $\sqrt{16 - \text{س}^2}$ وان ل (س) = ٢س ـ $\sqrt{16 - \text{س}^2}$ ثم جد ان امكن (ق ⊕ ل) (٢) ، (ق ⊖ ل) (٢) ، (ق ⊙ ل) (٠) ، (ق ⊘ ل) ($\sqrt{3}$)

٧٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 2 & \text{اذا كان س} < -3 \\ \text{س} + 3 & \forall\ \text{س} \in [-3 ، 0[\\ 3 - \text{س} & \forall\ \text{س} \geq \text{صفر} \end{cases}$$

(١) جد قيمة ق($\sqrt{2}$) ، ق(صفر) ، ق(ـ ٣) ، ق(ـ ١)

(٢) مثل ق ديكارتيا .

٭ ٧٥) جد مساحة المنطقة المحددة بين بيان التطبيق ق :]ـ ٢ ، ٣[⟵ ح بحيث ق (س) = [س] والمحور الاول .

الجواب / ٦ وحدات مربعة .

٧٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} -6 & \forall\ \text{س} \in [-3 ، 1] \\ -\text{س} - 5 & \forall\ \text{س} \geq 1 \\ \text{س} - 3 & \forall\ \text{س} < -3 \end{cases}$$

وليكن ل : ح ← ح بحيث ل (س) = ـ ١٢

(١) مثل كلا من ق ، ل ديكارتيا

(٢) جد المساحة المحددة بين بياني التطبيقين ق ، ل

الجواب ٦٠ وحدة مربعة

٧٧) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليدي

هـ١ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ص = ٢ + ٣س ـ ٢س٢ ، ص = صفر }

هـ٢ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص ≯ ٢ + ٣س ـ ٢س٢ ، ٣س < ص }

هـ٣ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص ≥ ٤ ـ س٢ ، ص ≮ صفر }

هـ٤ = { (س ، ص) : (س ص) ∈ ح × ح ، ص ≱ ـ |س| + ٢ ، ص ≮ ـ٢ }

هـ٥ = { (س ، ص) : (س ص) ∈ ح × ح ، ص ≱ ٤ ـ س٢ ، ص ≮ س }

ثم جد المساحة التي تشغلها هـ٤

٧٨) ليكن ق :] ـ١٠ ، ١ [← ح بحيث ق (س) = ٢س٢ + ١

ل :] ـ١٠ ، ١ [← ح بحيث ل (س) = س٢ + س ـ ٦

جد ان امكن (ق / ل) (ـ ٣) ، (ل / ق) (ـ ٤) ، ((٢ق) ⊕ (٣ ل) / (ل ⊖ ق)) (ـ ٦)

٧٩) هل حاصل قسمة تطبيقين عددين محدودين تطبيق محدود ؟ برهن قولك .

* ٨٠) ليكن ق : [ـ ٣ ، ٥] ← ح بحيث ق (س) = |س| + ١

ل : [ـ ٣ ، ٥] ← ح بحيث ل (س) = [س] ـ ١

(١) جد كلا مما يلي : ق (ـ ½) ، ل (ـ ٠,١٨٥) ، (ق ⊕ ل٢) (ـ٢) ،

(ل ⊕ ق) (٣) ، (ل ⊕ ق) (ـ ١,٠٧٥) ، (ق ⊕ ل) (½ ١)

(٢) مثل كلا من ق ، ل ، ق ⊕ ل ديكارتيا موضحا كيفية التمثيل .

(٣) هل يكون ق متزايد ؟ هل يكون ل متزايد ؟ هل يكون ق ⊕ ل متزايد ؟ برهن قولك في كل حالة .

(٤) هل يكون ق محدودا ؟ هل يكون ل محدودا ؟ هل يكون ق ⊕ ل محدودا ؟ برهن قولك في كل حالـة .

(٥) مثل ق ⊙ ل ديكارتيا . وجد اعظم قيمة واصغر قيمة له ان وجدت

(٦) اذا كان ق : [ـ٣ ، ٥] / [١ ، ٢] بحيث ق (س) = |س| + ١

وليكن ل : [ـ ٣ ، ٥] / [١ ، ٢] ـ ل (س) = [س] ـ ١

فمثل ق ⊕ ل ديكارتيا وجد اعظم قيمة له واصغر قيمة ان وجدت

(٧) مثل ق ⊖ ل ديكارتيا

(٨) هل يكون ق ⊙ ل محدودا ؟ وهل يكون ق ⊕ ل المعرف في
هذا السؤال في الفرع السادس منه محدوداً ؟ برهن قولك .

٨١) (١) اذا كان حاصل ضرب تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضرورى ان يكون احدهما تطبيقا صفريا ؟ علل اجابتك

(٢) اذا كان حاصل جمع تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضرورى ان يكون احدهما تطبيقا صفريا ؟ علل اجابتك

(٣) اذا كان حاصل طرح تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضرورى ان يكون احدهما صفريا ؟ علل اجوبتك .

(٤) اذا كان حاصل قسمة تطبيقين عدديين يساوي تطبيقاً صفرياً فهل من الضرورى ان يكون احدهما صفريا ؟ علل اجابتك .

٨٢) ليكن ق ∈ تط (ك) ، ل ∈ تط (ك) وان كلا من ق ، ل متناظر مع نقطة الاصل . أتكون العبارات التالية صادقة ام كاذبة ؟ برهن قولك .

(١) ق ⊕ ل متناظر مع نقطة الاصل (٢) ق ⊖ ل متناظر مع نقطة الاصل

(٣) ق ⊙ ل متناظر مع نقطة الاصل (٤) ق ⊕ ل متناظر مع نقطة الاصل
بحيث ل (س) $\neq$ صفر $\forall$ س ∈ ك

٨٣) ليكن ق : [ـ ٧ ، ٨] $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = | س ـ ١ |
نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث

(١) ق(س) > ٢ (٢) ق(س) $\geq$ ٥ (٣) ١ < ق(س) $\geq$ ٥

(٤) ٧ > ق(س) > ٨

٨٤) ليكن ق :] ٠ ، ٢ [$\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س}$
نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث يكون

(١) ق(س) $\leqslant$ ½ (٢) ق(س) > $\frac{٣}{٤}$ (٣) ق (س) > $\frac{٣}{٤}$
ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٥) ليكن ق : ح $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = $(٢)^{س}$.
نجد قيمة ق(صفر) ، ق(٢) ، ق(ـ ٢) ، ق(١) ، ق (ـ ١) ،
ق(½) ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٦) ليكن ق : ح $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = $(٣)^{س}$ نجد قيمة
ق(صفر) ، ق(ـ ٢) ، ق(٢) ، ق(½) وارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٧) ليكن ق١(س) = (−١)^س ، وليكن ق٢(س) = (−١)^−س

(١) جد ق١ ÷ ق٢ ، ق١ ⊙ ق٢

(٢) ارسم المخطط الديكارتي للمجموعة {(س ، ص) : ص = (−١)^س أو ص = (−١)^−س}

٨٨) ليكن ق(س) = [س + ١] نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث ق(س) = ١

٨٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 1 & \forall\ \text{س} > 1 \\ \text{س} & \text{اذا كان } \text{س} \in [-1 ، 1] \\ -1 & \forall\ \text{س} < -1 \end{cases}$$

(١) جد قيمة ق(−٣) ، ق(−½) ، ق(صفر) ، ق(١) ، ق(√٢)

(٢) ارسم ق في المستوى الاقليدي

(٣) جد قيمة $\dfrac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-1)}{\text{ق}(2) - \text{ق}(-2)}$

٩٠) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - 1 & \forall\ \text{س} \geq \text{صفر} \\ 1 - \text{س} & \forall\ \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي (٢) جد قيمة $\dfrac{\text{ق}(2) - \text{ق}(1)}{2 - 1}$

(٣) جد قيمة $\dfrac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-1)}{1 - (-1)}$

٩١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2 + \text{س} & \text{اذا كان س} < -1 \\ |\text{س}| & \text{اذا كان س} \in [-1 ، 1] \\ 2 - \text{س} & \forall\ \text{س} > 1 \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي (٢) جد قيمة $\dfrac{\text{ق}(\text{صفر}) - \text{ق}(-2)}{\text{صفر} - (-2)}$

(٣) جد المجموعة الجزئية من ح بحيث ق(س) = ½

(٤) جد المجموعة الجزئية من ح بحيث ق(س) = صفر

٩٢) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$ فبرهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل ثم جد قيمة ق(س) عندما س = −١٠٠٠ ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ١٠٠٠

٩٣) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = س² ∀ س ∈ ح ، وكان كل من س ، ص ، ع ∈ ح فبرهن ان ق(س² + ص² + ع²) = (ق ∘ ق)(س) + (ق ∘ ق)(ص) + (ق ∘ ق)(ع) + ٢ق(س) · ق(ع) + ٢ق(ص) · ق(ع)

٩٤) اذا كان ق : ح$^{++}$ ⟵ ح لنجد قيمة المقدار $\frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$ ،

س ، هـ ∈ ح$^{++}$ اذا كان بيان ق كما يلي :-

(١) ق(س) = ٢س − ٣ (٢) ق(س) = س^{٢}

(٣) ق(س) = ٢س^{٢} − ٣س + ٥

(٤) ق(س) = س^{٣} (٥) ق(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ (٦) ق(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}^{٢}}$

الاجوبة/ (١) ٢ (٢) ٢س + هـ (٣) ٤س + ٢هـ − ٣

(٤) ٣س^{٢} + ٣س هـ + هـ^{٢} (٥) − $\frac{\text{١}}{\text{س(س + هـ)}}$ (٦) − $\frac{\text{٢س + هـ}}{\text{س}^{٢}\text{(س + هـ)}^{٢}}$

٩٥) ليكن ق : [−٥ ، ٠] ⟵ ح بحيث ق(س) = س^{٢} + ٤

وليكن ل : [−٥ ، ٠] ⟵ ح بحيث ل(س) = س^{٢} − ١

(١) فاذا كان (ق ⊙ ل) (ص) = ١٦ فما قيمة ص حيث ص ∈ [−٥ ، ٠]

(٢) اذا كان (ق ⊕ ل) (٢ن) = ٧٢ فما قيمة ن حيث ٢ن ∈ [−٥ ، ٠]

(٣) جد عدد ينتمي الى منطلق (ق ⊕ ل) ⊙ ل بحيث صورته بفعل هـــذا التطبيق تساوي ٢٤

(٤) اذا كان (ق ⊙ ع) (س) = صفر فماذا يسمى التطبيق ع ؟

الاجوبة / −٢ ، −٢ ، −٢ ، تطبيق صفري .

٩٦) اذا كان ق : ح$^{++}$ ⟵ ح بحيث ق(س) = (س) س $\sqrt{\text{س}}$

ل : ح$^{++}$ ⟵ ح = ل(س) = (س $\sqrt{\text{س}}$)$^{\text{س}}$

وكان (ق ⊖ ل) (ن) = صفر فما قيمة ن ؟ ، حيث ن ∈ ح$^{++}$

الجواب/ ن = $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$

٩٧) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨$^{\text{س}}$

ل : ح ⟵ ح = ل(س) = ٨$^{-\text{س}}$

وكان (ق ⊕ ل) (هـ) = $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ فما قيمة هـ ؟ حيث هـ ∈ ح

الجواب/ هـ = − $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ، او هـ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٩٨) اذا كان ق : ح$^{++}$ ⟵ ح بحيث ق(س) = س$^{\text{لو}_{١٠٠}}$ ،

ل : ح$^{++}$ ⟵ ح = ل(س) = لو س^{٢}

وكان (ق ⊕ ل) (س) = ٤ فما قيمة س ؟

الجواب/ س = ١٠

٩٩) ليكن ل : ك ⟵ ح تطبيقا متناظرا مع المحور الثاني

وليكن ع : ك ⟵ ح تطبيقا متناظرا مع المحور الثاني

بين صدق او كذب كل من العبارات التالية مبرهنا قولك ·

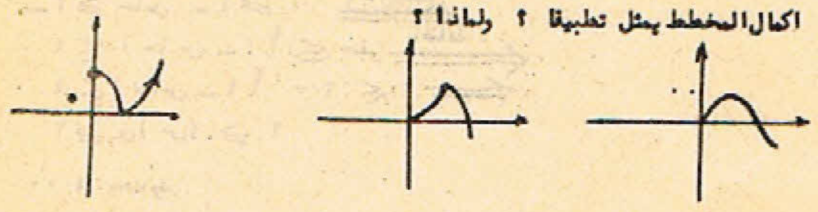
(١) ل $\oplus$ ع متناظر مع المحور الثاني (٢) ل $\odot$ ع متناظرا مع المحور الثاني

(٣) (أ ل) متناظر مع المحور الثاني حيث أ $\in$ ح

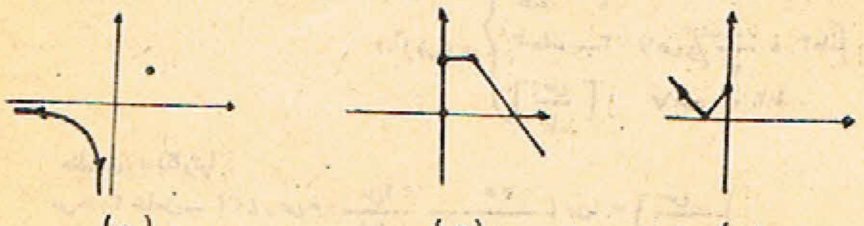
(٤) $\ominus$ ل متناظرا مع المحور الثاني

(٥) ل $\oslash$ ع متناظر مع المحور الثاني بحيث ع (س) $\neq$ صفر $\forall$ س $\in$ ك

١٠٠) اكمل كلا من المخططات الديكارتية التالية لتصبح متناظرة مع المحور الثاني مرة ومع نقطة الاصل مرة ثانية ومتناظرة مع المحور الاول مرة اخرى · وهل الشكل الناتج بعد اكمال المخطط يمثل تطبيقا ؟ ولماذا ؟



(أ) (ب) (جـ)



(د) (هـ) (و)

١٠١) برهن ان (تط (ك) ، $\oplus$) زمرة ابدالية

١٠٢) هل يكون (تط (ك) ، $\ominus$) تجميعي ؟ ابدالي ؟ يمتلك عنصر محايد ؟ متناظر ؟ برهن اجابتك ·

١٠٣) هل يكون (تط (ك) ، $\odot$) تجميعي ؟ ابدالي ، يمتلك عنصر محايد ؟ متناظر ؟ برهن اجابتك

التطبيقات الدائرية ·

لقد اعتمدنا في هذا البند على ما درسه الطالب في الصف الخامس العلمي فيستطيع الطالب الرجوع الى كتاب الرياضيات المقرر من قبل وزارة التربية للصف الخامس العلمي ·

وذلك سوف نقتصر على اعطاء بعض الامثلة المحلولة ونترك شرح الموضوع لانه موجود في الكتاب المذكور اعلاه بما يفي بالغرض المطلوب ·

امثلـــــــة

مثال ١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = حا^{2}س − ٢حاس + ٣

برهن ان ق محدودة

الحل) ق(س) = حا^{2}س − ٢حاس + ١ − ١ + ٣ باضافة وطرح (١) من الطرف الايسر

= (حاس − ١)^{2} + ٢

ومن دراستك في الصف الخامس العلمي تعلم ان

−١ ≤ حاس ≤ ١ $\xLeftarrow{\text{بطرح (١)}}$

−٢ ≤ حاس − ١ ≤ ٠ $\xLeftarrow{\text{بالتربيع}}$

٤ ≥ (حاس − ١)^{2} ≥ صفر $\xLeftarrow{\text{باضافة ٢}}$

٦ ≥ (حاس − ١)^{2} + ٢ ≥ ٢ ⟸

٢ ≤ ق(س) ≤ ٦

∴ ق محدودة

مثال ٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2}{2\text{ط}} - \dfrac{25}{4} & \forall\,\text{س} \leq \dfrac{-\text{ط}}{2} \\ 2\text{حاس} - 2 & \forall\,\text{س} \in \left]\dfrac{-\text{ط}}{2}\,،\,2\text{ط}\right] \\ \left[\dfrac{\text{س}}{\text{ط}}\right] & \forall\,\text{س} > 2\text{ط} \end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا

$$\text{ص} = 2\text{حاس} - 2 \quad،\quad \text{ص} = \frac{\text{س}^2}{2\text{ط}} - \frac{25}{4} \quad،\quad \text{ص} = \left[\frac{\text{س}}{\text{ط}}\right]$$

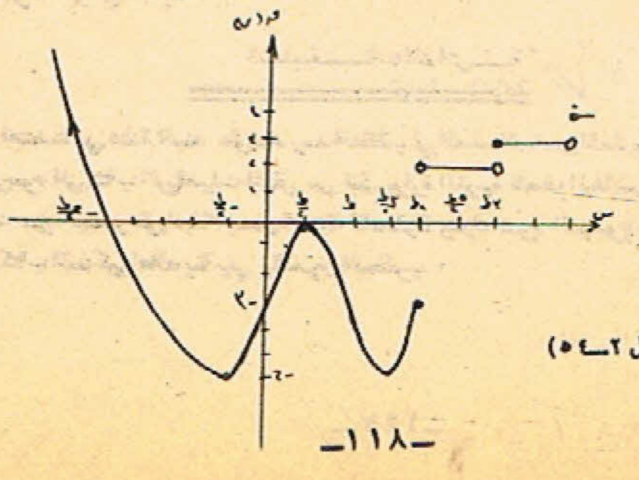
س	ص
$\frac{\text{ط}}{2}$	صفر
$\frac{-\text{ط}}{2}$	−٦
٠	−٢
ط	−٢
$\frac{3\text{ط}}{2}$	−٦
٢ط	−٢

س	ص
$\frac{-\text{ط}}{2}$	−٦
$\frac{-5\text{ط}}{2}$	صفر

$\forall\,\text{س} \in \left]2\text{ط}\,،\,3\text{ط}\right[\Rightarrow \text{ص} = 2$

$\forall\,\text{س} \in \left[3\text{ط}\,،\,4\text{ط}\right[\Rightarrow \text{ص} = 3$

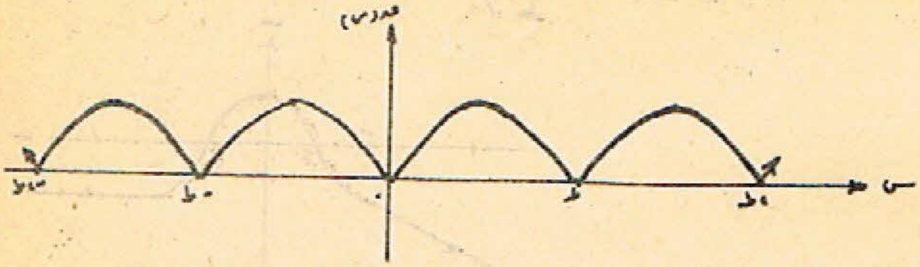
$\forall\,\text{س} \in \left[4\text{ط}\,،\,5\text{ط}\right[\Rightarrow \text{ص} = 4$



(شكل ٢ـ٤ـ٥)

مثال ٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = |حاس|

ق(س) = { صفر ∀ س ∈ {ن ط : ن ∈ ص}
      { ١ ∀ س ∈ {$\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط : ن ∈ ص}



شكل (٢ــ ٥٥)

مثال ٤) ليكن أ = {ن ط : ن عدد صحيح} ، ب = {$\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط : ن عدد صحيح}

وليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = { [حاس] + ٢ ∀ س ∈ ح / (أ ∪ ب)
       { ٢ اذا كان س ∈ أ
       { ١ اذا كان س ∈ ب

مثل ق ديكارتيا

∀ س ∈]٠ ، ط[/ {$\frac{ط}{٢}$} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸ [حاس] + ٢ = ٢

∀ س ∈]ط ، ٢ط[/ {$\frac{٣ط}{٢}$} ⟸ −١ < حاس < ٠ ⟸ [حاس] + ٢ = ١

∀ س ∈]٢ط ، ٣ط[/ {$\frac{٥ط}{٢}$} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸ [حاس] + ٢ = ٢

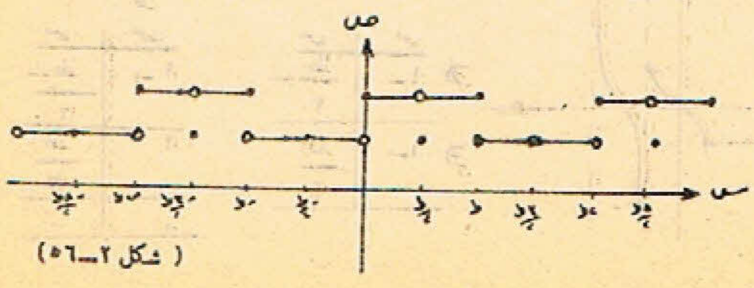
- - - -

∀ س ∈]−ط ، ٠[/ {$-\frac{ط}{٢}$} ⟸ −١ < حاس < ٠ ⟸

[حاس] + ٢ = ١

∀ س ∈]−٢ط ، −ط[/ {$\frac{-٣ط}{٢}$} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸

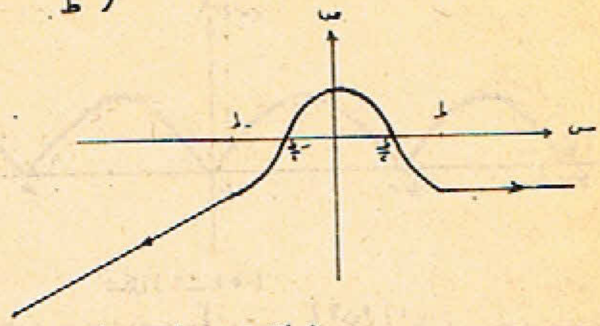
[حاس] + ٢ = ٢



(شكل ٢ــ٥٦)

مثال ٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { جتاس ∀س ∈ [−ط ، ط] ؛ −١ ∀س ≥ ط ؛ $\frac{س}{ط}$ ∀س < −ط }



(شكل ٢ــ٥٧)

مثال ٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ~~ق(س)~~

ق(س) = { طاس ∀س ∈] $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$ [؛ $(\frac{٢س}{ط})^٢$ ∀س ∈ [−$\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$] ؛ −١ ∀س ∈ ح/[−$\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$] }

مثل ق ديكارتيا

(١) ص = طاس

كل من س = $\frac{ط}{٢}$ ، س = $\frac{٣ط}{٢}$ محاذيا شاقوليا

طا ط = صفر ،

∀س ∈] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [فان طاس < صفر

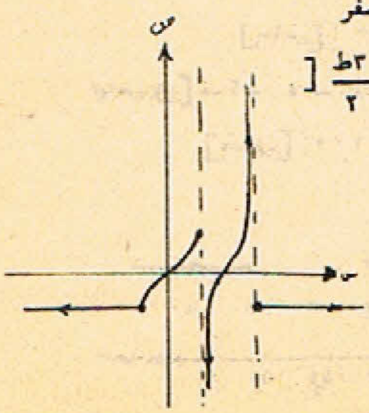
∀س ∈] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [فان طاس > صفر

طاس متزايد ∀ س ∈] $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$ [

(٢) ص = $(\frac{٢س}{ط})^٢$ (٣) ص = −١

س	ص
−$\frac{ط}{٢}$	١
$\frac{ط}{٢}$	١
٠	٠

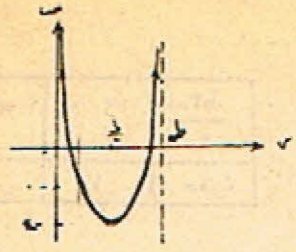
س	ص	
−$\frac{ط}{٢}$	−١	∌
$\frac{٣ط}{٢}$	−١	∌



(شكل ٢ــ ٥٨)

مثال ٧) ليكن ق :] صفر ، ط [⟵ ح

بحيث ق(س) = | ظتا س | − ٤



(شكل ٢ − ٥٩)

كل من س = صفر ، س = ط هو محاذ شاقولي

عندما س = $\frac{ط}{٢}$ فان ق(س) = ٤

مثال ٨) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = {
تاس ∀ س ∈] − $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$ [
$\frac{|٢س|}{ط}$ ∀ س ∈ ح /] − $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$ [

مثل ق ديكارتيا ، ثم برهن انه محدود من الاسفل

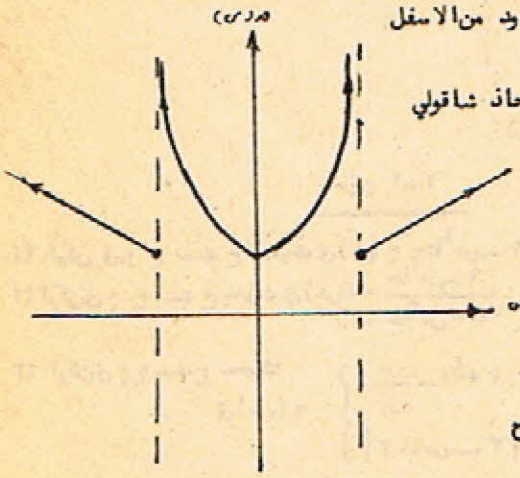
ص = تاس

كل من س = − $\frac{ط}{٢}$ ، س = $\frac{ط}{٢}$ محاذ شاقولي

ق(٠) = ١

ص = | $\frac{٢س}{ط}$ |

س	± $\frac{ط}{٢}$	± ط
ص	± ١	٢



(شكل ٢ − ٦٠)

وبما ان ق(س) ≥ ١ ∀ س ∈ ح

∴ ق محدود من الاسفل

مثال ٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = {
قتاس ∀ س ∈] − ط ، ط [/ {صفر}
[$\frac{س}{٢ط}$] ∀ س ≥ ط
| جتاس | ∀ س ≤ − ط
صفر عندما س = صفر

ص = قتاس

(٢) كل من س = − ط ، س = ط محاذ شاقولي

قتا($\frac{-ط}{٢}$) = −١ ، قتا($\frac{ط}{٢}$) = ١

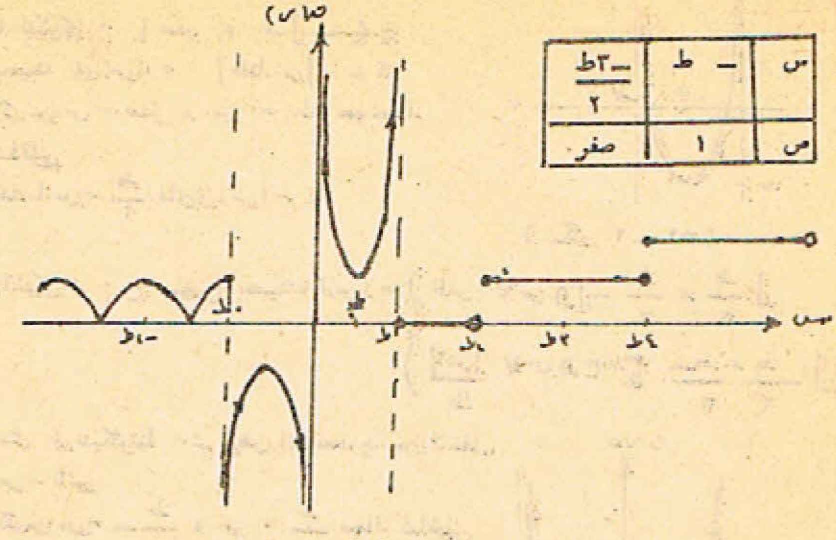
(٢) ∀ س ∈ [ط ، ٢ط [⟸ ق(س) = صفر

∀ س ∈ [٢ط ، ٤ط [⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [٤ط ، ٦ط [⟸ ق(س) = ٢

(٣)

س	– ط	$-\frac{٣ط}{٢}$
ص	١	صفر



(شكل ٢ـ٦١)

تمارين ٢ـ٧

١) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = جتا^{٢}س ـ ٢ جتاس ، برهن ان ق محدود

٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\frac{\text{حا}^{٢}\text{س} - ١}{\text{حا}^{٢}\text{س} + ١}$ ، برهن ان ق محدود

٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} (\frac{\text{س}}{\text{ط}} - ٢)^{٢} + ٢ & \forall\ \text{س} \in [\,٠ ، ٤\text{ط}\,] \\ |\,٢\,\text{حاس} - ٢\,| & \forall\ \text{س} \in \text{ح} \,/\, [\,٠ ، ٤\text{ط}\,] \end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا

٤) لتكن أ = {ن ط : ن عدد صحيح}، ب = $\{(\frac{٢\text{ن}+١}{٢})\text{ط} : \text{ن عدد صحيح}\}$

وليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{جتاس}] - ٢ & \forall\ \text{س} \in \text{ح} \,/\, (\text{أ} \cup \text{ب}) \\ -٢ & \text{اذا كان س} \in \text{أ} \\ -٣ & \text{اذا كان س} \in \text{ب} \end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا ، وبرهن ان ق محدود وجد اعظم قيمة واوطأ قيمة له

٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{جتاس} & \forall\ \text{س} \in [\,٠ ، ٢\text{ط}\,] \\ \text{حاس} & \forall\ \text{س} \in [\,-٢\text{ط} ، ٠\,[\\ |\,\frac{\text{س}}{\text{ط}} - ٢\,| & \forall\ \text{س} \in \text{ح} \,/\, [\,-٢\text{ط} ، ٢\text{ط}\,] \end{cases}$$

(٢) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق محدود من الاسفل وغير محدود من الاعلى

(٣) جد قيمة كل من $(\text{ق} \odot \text{ق})\left(\frac{\text{ط}}{6}\right)$ ، $(\text{ق} \oplus \text{ق})\left(\frac{5\text{ط}}{2}\right)$ ،
$(\text{ق} \circ \text{ق})(-2\text{ط})$ ، ق(-15) ، ق(15)

٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{طاس}| & \forall\, \text{س} \in \left]\frac{\text{ط}}{2}, \frac{3\text{ط}}{2}\right[\\ \left(\frac{2\text{س}}{\text{ط}}\right)^2 & \forall\, \text{س} \in \left[-\frac{\text{ط}}{2}, \frac{\text{ط}}{2}\right] \\ -\left(\frac{2\text{س}}{\text{ط}}\right)^2 - 2 & \forall\, \text{س} \in \text{ح} / \left[-\frac{\text{ط}}{2}, \frac{3\text{ط}}{2}\right[\end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{طتاس} & \forall\, \text{س} \in \left]\text{ط}, 2\text{ط}\right[\\ \frac{\text{س}}{\text{ط}} - 2 & \forall\, \text{س} \leqslant \text{ط} \\ 2 - \frac{\text{س}}{\text{ط}} & \forall\, \text{س} \geqslant 2\text{ط} \end{cases}$$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد $\forall\, \text{س} \leqslant \text{ط}$

(٣) برهن ان ق متناقص $\forall\, \text{س} \geqslant 2\text{ط}$

٨) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{حا}\left(\text{س} + \frac{\text{ط}}{2}\right) & \forall\, \text{س} \geqslant \text{صفر} \\ \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\text{ط}}{2}\right) & \forall\, \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) جد ق(صفر) ، ق(ط) ، ق(-2ط) .

٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = حا٢س جتاس − حاس جتا٢س

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق محدود

(تلميح / استخدم قانون جيب الفرق بين زاويتين في تمرين ٩ وقانوني جيب المجموع وجيب تمام المجموع لزاويتين في تمرين ٨) .

١٠) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{2} - \text{س}\right) & \forall\, \text{س} \in [-\text{ط}, \text{ط}] \\ \text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{2} - \text{س}\right) & \forall\, \text{س} \in \text{ح} / [-\text{ط}, \text{ط}] \end{cases}$$

(١) مثل ق ديكارتيا ثم برهن انه محدود

١١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{حا}(-\text{س}) & \forall\, \text{س} < \text{صفر} \\ \text{جتا}(-\text{س}) & \forall\, \text{س} \in [0, 2\text{ط}] \\ [\text{ط} - \text{س}] & \forall\, \text{س} > 2\text{ط} \end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا

١٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\,\text{حاس جتاس} & \forall\, \text{س} \in [-2\text{ط}, \text{ط}] \\ \text{حا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2 & \forall\, \text{س} \in \text{ح} / [-2\text{ط}, \text{ط}] \end{cases}$$

(١) مثل ق ديكارتيا ثم بين انه محدود

١٢) ليكن ق: ح ← ح بحيث

ق(س) = {
- ٢جتا^{2}س − ١ ∀ س ⩾ صفر
- $\frac{\text{١ − جتاس}}{\text{٢}}$ ∀ س ∈] − ط ، صفر [
- $\frac{\text{١ + جتاس}}{\text{٢}}$ ∀ س > − ط

مثل ق د بكارتيا

الفصل الثالث
غايـة المتتابعـــات

تعريف /

المتتابعة / تطبيق منطلقة المجموعة $ط^+$ = {١ ، ٢ ، ٣ ------} او المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ------ ، ن} حيث ن عدد طبيعي منه ، ومستقره مجموعة غير خاليــة .

مثال ١) ق(ن) = ن + ٣ ∀ن ∈ $ط^+$

نلاحظ ان ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ٥ ، ق(٣) = ٦ ، ق(٤) = ٧ ...

تسمى ق(١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(٤) ...... متتابعة

ولكون كل المتتابعة منطلقها $ط^+$ او المجموعة {١ ، ٢ ، ..... ، ن} فسوف نهمل مجموعة المساقط الاولى ونقتصر على كتابة مجموعة المساقط الثانية اي ق(١) ، ق(٢) ، .....

ولتمييزها عن المجموعات الاخرى سنضع حدود المتتابعات بين قوسين من النوع

< >

ففي المثال اعلاه تكتب هذه المتتابعة بالصورة

<ق(١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(٤) .....> او <٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ....>

او <ن + ٣> حيث ن + ٣ يسمى الحد العام للمتتابعة

وتسمى الاعداد ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، بالحدود الاربع الاولى لهذه المتتابعة

مثال ٢) اكتب الحدود الاربع الاولى من المتتابعة $\left\langle \frac{٣}{٢ن-١} \right\rangle$ ، ثم جد حدهـــا الخامس والعشرين

الحل) ق(١) = $\frac{٣}{١}$ ، ق(٢) = $\frac{٣}{٣}$ ، ق(٣) = $\frac{٣}{٥}$ ، ق(٤) = $\frac{٣}{٧}$

اي ان الحدود الاربع الاولى للمتتابعة التي حدها العام $\frac{٣}{٢ن-١}$ هي

على الترتيب ٣ ، ١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٧}$

$$ق(٢٥) = \frac{٣}{٢ \times ٢٥ - ١} = \frac{٣}{٤٩}$$

مثال ٣) اذا كانت الحدود الاربع الاولى لمتتابعة هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، فاكتـــب الحد العام لها .

الحل/ بالتجربة والخطأ نستطيع ايجاد الحد العام وهو ق(ن) = ٢ن .

مثال ٤) اذا كانت الحدود الخمسة الاولى لمتتابعة هي ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ... فاكتب الحد العام لها .

الحل/ $ق_١$ = ١

$ق_٢ = ٢ = ٢^١$

$ق_٣ = ٤ = ٢^٢$

$ق_٤ = ٨ = ٢^٣$

$ق_٥ = ١٦ = ٢^٤$

------ $ق_ن = ٢^{ن-١} \quad \forall ن \in ط^+$

مثال ٥) جد الحد العام للمتابعة التي حدودها الاربعة الاولى كما يلي :ـ

(١) $٢ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٤}$. (٢) $س ، \frac{-س^٢}{٢} ، \frac{س^٣}{٣} ، \frac{-س^٤}{٤}$

الجواب/ (١) $ق_ن = \frac{ن + ١}{ن}$ (٢) $\frac{(-١)^{ن+١} \cdot س^ن}{ن}$

مثال ٦) اكتب الحدود الاربعة الأولى للمتابعة التي حدها العام كما يلي :ـ

(١) $ق = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ (٢) $ق_ن = (-١)^ن ٢^ن$

الحل/ (١) ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ (٢) −٢ ، ٤ ، −٨ ، ١٦

تعريف: تسمى المتابعة منتهية اذا كان منطلقها {١ ، ٢ ، ...... ، ن}

حيث ن عدد طبيعي منته اى منطلقها مجموعة منتهية

وتسمى المتابعة غير منتهية اذا كان منطلقها $ط^+$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

اى مجموعة غير منتهيــة

ملاحظة / اذا كانت المتابعة منتهية فلا يمكن ان نحصل على حد عام وحيد .

فمثلا المتابعة <٣ ، ٦ ، ٩> يمكن ان يكتب حدها العام بالصورة

$ق_ن = ٣ن \quad \forall ن \in \{١ ، ٢ ، ٣\}$ اويمكن ان يكتب

$ق_ن = ٣ن + (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣) ، \forall ن \in \{١ ، ٢ ، ٣\}$

تماريـــــــن

١) اكتب الحدود الاربعة الاولى لكل من المتابعات التالية التي حدها العام كما يلي :ـ

(١) $ق_ن = ن - ٥$ ، (٢) $ق_ن = ٢ن - ٣$ (٣) $ق_ن = \frac{ن^٢ - ٢}{٢}$

(٤) $ق_ن = \frac{٣}{ن^٢ + ١}$ (٥) $ق_ن = ١ + \frac{١}{ن}$ ، (٦) $ق_ن = \frac{ن}{٢ن - ١}$ ،

(٧) $ق_ن = \frac{ن(ن - ١)}{٢}$ ، (٨) $ق_ن = \frac{٥}{ن(ن + ١)}$

(٩) $ق_ن = (-١)^ن$ ، (١٠) $ق_ن = (-١)^{ن+١}$ ، (١١) $ق_ن = \frac{(-١)^ن(ن-٢)}{ن}$

(١٢) $ق_{ن} = (-١)^{ن-١}\ ٣^{ن+١}$

٢) جد الحد العام لكل من المتابعات التالية التي حدودها الاربعة الاولى كما يلي :-

(١) ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ... (٢) ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ـــــ

(٣) ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... (٤) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ـــــ

(٥) −١ ، ١ ، −١ ، ١ ، ... (٦) ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ـــــ

(٧) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... (٨) ٣ ، −٧ ، ١١ ، −١١ ، ـــــ

(٩) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ... (١٠) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ـــــ

(١١) ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ـــــ (١٢) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ـــــ

(١٣) $س^{٦}$ ، $س^{٣}$ ، $س^{٤}$ ، $س^{٩}$ ، ... (١٤) ١ ، −س ، $س^{٢}$ ، $-س^{٣}$ ـــــ

ملاحظات/ (١) يقال للمتابعة $ق_{ن}$ انها متابعة متقاربة اذا كان لها غاية

ومعنى غا $\langle ق_{ن} \rangle = ب$ حيث $ب \in ح$ هو

انه $\forall هـ \in ح^{++}$ ، $\exists ن_{١} \in ط$ بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان $|ق_{ن} - ب| < هـ$

(٢) يقال للمتابعة $ق_{ن}$ انها غير متقاربة اذا لم يكن لها غاية

(٣) كل متابعة مداها غير محدود فانها ليست متقاربة اما اذا كان مداها محدودا فانه ليس شرطا ان تكون متقاربة

(٤) غاية المتابعة وحيدة

(٥) غاية المتابعة الثابتة هو العدد الثابت نفسه

(٦) غا $\langle \frac{١}{ن} \rangle$ = صفر وبصورة عامة غاية المتابعة التي درجة بسطها اقل من درجة مقامها تساوى صفرا .

امثلة / $\langle \frac{ن}{ن^{٢} + ١} \rangle$ ، $\langle \frac{ن^{٢} + ٣ن + ٥}{ن + ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٧} \rangle$

(٧) غاية المتابعة التي درجة بسطها كدرجة مقامها تساوى حاصل قسمة معامل الحد ذى الاعلى درجة بالبسط على معامل الحد ذى الاعلى درجة بالمقام .

امثلة / غا $\langle \frac{ن}{٢ن + ١} \rangle = \frac{١}{٢}$ ، غا $\langle \frac{٤ن^{٢} - ٣ن + ٤}{٥ن + ٢ن^{٢} + ٤} \rangle = ٢$

غا $\langle \frac{ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٧ن + ١٥}{٥ن - ٧ن^{٣} + ٣} \rangle = \frac{-١}{٧}$

(٨) المتابعة التي درجة بسطها اكبر من درجة مقامها غير متقاربة .

امثلة $\langle ن \rangle$ ، $\langle \frac{ن^{٢}}{٢ن + ٣} \rangle$ ، $\langle \frac{ن^{٢} + ٣ن^{٢} - ٢ن + ٧}{ن - ٢ن^{٢} + ٥} \rangle$

(٩) المتابعة المتذبذبة (Harmonic Sequence) غير متقاربة

امثلة $\langle (-١)^{ن} \rangle$ ، $\langle ٢ + (-١)^{ن} \rangle$

(١٠) غاية المجموع الجبرى لمتتابعتين متقاربتين = المجموع الجبرى لغايتيهما

(١١) غاية حاصل ضرب متتابعتين متقاربتين = حاصل ضرب غايتيهما

(١٢) غاية حاصل ضرب ثابت في متتابعة متقاربة = الثابت × غاية المتتابعة

(١٣) غاية حاصل قسمة متتابعة متقاربة على اخرى متقاربة (بحيث الاخرى غايتها $\neq$ صفر) تساوي حاصل قسمة غايتيها

امثلة

(١) برهن باستخدام التعريف مايلي

(١) غا $\langle -٣ \rangle = -٣$ (٢) غا $\left\langle \frac{٢}{٣ن} \right\rangle =$ صفر

(٣) غا $\left\langle \frac{٣ن - ٥}{٨ + ن} \right\rangle = ٣$ (٤) غا $\left\langle \frac{-٣ن + (-١)^{ن}}{ن} \right\rangle = -٣$

(١) غا $\langle -٣ \rangle = -٣$

البرهان/ ليكن $هـ \in ح^{++}$ فان $|ق_{ن} - (-٣)| = |-٣ + ٣| =$ صفر

$\therefore |ق_{ن} - (-٣)| < هـ$ مهما كان $ن_{١} \in ط$

$\therefore$ غا $\langle -٣ \rangle = -٣$

(٢) غا $\left\langle \frac{٢}{٣ن} \right\rangle =$ صفر

البرهان : $\forall هـ \in ح^{++} ، \exists ن_{١} > \frac{٢}{٣هـ}$ (خواص الاعداد الطبيعية)

بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان $|ق_{ن} - صفر| = \left| \frac{٢}{٣ن} - صفر \right| = \left| \frac{٢}{٣ن} \right| =$

$\frac{٢}{٣ن} < \frac{٢}{٣ن_{١}} < \frac{٢}{٣ \times \frac{٢}{٣هـ}} = هـ$

$\therefore$ غا $\left\langle \frac{٢}{٣ن} \right\rangle =$ صفر

(٣) غا $\left\langle \frac{٣ن + ٥}{٨ + ن} \right\rangle = ٣$

البرهان/ $\forall هـ \in ح^{++} ، \exists ن_{١} > \frac{١٩}{هـ} - ٨$ (خواص الاعداد الطبيعية)

بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان

$|ق_{ن} - ٣| = \left| \frac{٣ن + ٥}{٨ + ن} - ٣ \right| = \left| \frac{٣ن + ٥ - ٢٤ - ٣ن}{٨ + ن} \right| = \left| \frac{-١٩}{٨ + ن} \right|$

$= \frac{١٩}{٨ + ن} < \frac{١٩}{٨ + ن_{١}} < \frac{١٩}{٨ + \frac{١٩}{هـ} - ٨} = هـ$

$\therefore \text{غا} \left\langle \frac{\text{٣ن} + \text{٥}}{\text{٨} + \text{ن}} \right\rangle = \text{٣}$

(٤) $\text{غا} \left\langle \frac{-\text{٣ن} + (-\text{١})^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\rangle = -\text{٣}$

البرهان/ $\left\langle \frac{-\text{٣ن} + (-\text{١})^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\rangle = \left\langle -\text{٣} + \frac{(-\text{١})^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\rangle$

$\forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists$ $\text{ن}_{\text{١}} > \frac{\text{١}}{\text{هـ}}$ بحيث اذا كان $\text{ن} > \text{ن}_{\text{١}}$ فان

$\left|\text{ق}_{\text{ن}} + \text{٣}\right| = \left|-\text{٣} + \frac{(-\text{١})^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{٣}\right| = \left|\frac{(-\text{١})^{\text{ن}}}{\text{ن}}\right| = \frac{\text{١}}{\text{ن}} < \frac{\text{١}}{\text{ن}_{\text{١}}} < \text{هـ}$

وبهذا يتم البرهـــان

مثال ٢) لتكن $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \left\langle \frac{\text{٣ن} - \text{٥}}{\text{٩ن} + \text{٤}} \right\rangle$ ، جد العدد الطبيعي $\text{ن}_{\text{١}}$ بحيث اذا كان $\text{ن} > \text{ن}_{\text{١}}$ فان $\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right| < \text{٠٫٠٠١}$.

اى اوجد عدد النقاط التي خارج الفترة ل = $\left] \frac{\text{١}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}} ، \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}} \right[$

والتي تنتمي الى المتتابعة اعلاه .

الحل/

$\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right| = \left|\frac{\text{٣ن} - \text{٥}}{\text{٩ن} + \text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right| = \left|\frac{-\text{١٩}}{\text{٣}(\text{٩ن} + \text{٤})}\right| = \left|\frac{\text{١٩}}{\text{٣}(\text{٩ن} + \text{٤})}\right| = \frac{\text{١٩}}{\text{٣}(\text{٩ن} + \text{٤})}$

بما ان $\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right| < \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}}$

$\therefore \frac{\text{١٩}}{\text{٣}(\text{٩ن} + \text{٤})} < \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}}$

$\text{١٩٠٠٠} < \text{٢٧ن} + \text{١٢}$

$\frac{\text{١٨٩٧٣}}{\text{٢٧}} < \text{ن}$

$\therefore \text{ن}_{\text{١}} = \left[\frac{\text{١٨٩٨٨}}{\text{٢٧}}\right] = \left[\text{٧٠٣} \frac{\text{٧}}{\text{٢٧}}\right] = \text{٧٠٣}$ نقطة

$\therefore$ ٧٠٣ حدود $\notin$ ل

مثال ٣) اذا كان $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \left\langle \frac{\text{٣ن}^{\text{٢}} + \text{١}}{\text{٥ن}^{\text{٢}} - \text{١}} \right\rangle$ نبرهن ان

$\text{غا} \langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ باستخدام التعريف

ثم جد $\text{ن}_{\text{١}} \in$ ط بحيث اذا كان $\text{ن} > \text{ن}_{\text{١}}$ فان $\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\right| < \text{٠٫٠١}$

البرهان/

لنجد $\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\right|$

$$\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{٣}{٥}\right| = \left|\frac{٣\text{ن}^{٢} + ١}{٥\text{ن}^{٢} - ١} - \frac{٣}{٥}\right| = \frac{٨}{٥\,(٥\text{ن}^{٢} - ١)}$$

$\forall$ هـ $\in$ ح++ سوف نختار $\text{ن}_{١} < \text{ن}$ وتحقق المتراجحة

$$\frac{٨}{٥\,(٥\text{ن}^{٢} - ١)} < \text{هـ}$$

ومن حل هذه المتراجحة نجد ان $\text{ن}^{٢} > \frac{٨}{٢٥\text{هـ}} + \frac{١}{٥}$

$$\therefore\ \text{ن} > \frac{١}{٥}\sqrt{\frac{٨ + ٥\text{هـ}}{\text{هـ}}}$$

وبهذا نكون قد اوجدنا $\text{ن}_{١} < \text{ن}$ والتي تحقق

$\left|\text{ق}_{\text{ن}} - \frac{٣}{٥}\right| < \text{هـ}$ وبهذا يتم البرهان

اما اذا كانت هـ = ١٠ر٠ فان $\text{ن}_{١} = \left[\frac{١}{٥}\sqrt{\frac{٨ + ٥\text{هـ}}{\text{هـ}}}\right]$

$$= \left[\frac{١}{٥}\sqrt{٨٠٥}\right] = ٥$$

$\therefore$ جميع حدود المتتابعة والتي تبدأ بالحد السادس ستكون $\in \left]\frac{٣}{٥} - ١٠ر٠ ،\ \frac{٣}{٥} + ١٠ر٠\right[$

مثال ٤) برهن انه ليس للمتتابعات التالية غاية :-

(١) $\langle ٤\text{ن} - ٣ \rangle$ (٢) $\langle ٢ + (-٢)^{\text{ن}} \rangle$ (٣) $\langle ٣ + (-١)^{\text{ن}} \rangle$

(٤) $\left\langle \frac{(-٢)^{\text{ن}}}{\text{ن}} - ١ \right\rangle$

(٥) $\text{ق}_{\text{ن}} = \begin{cases} \text{ن} + ١ & \text{اذا كانت ن عددا طبيعيا زوجيا موجبا} \\ \text{ن} - ١ & \text{اذا كانت ن عددا طبيعيا فرديا موجبا} \end{cases}$

(٦) $\text{ق}_{١} = ١$ ، $\text{ق}_{\text{ن}+١} = (\text{ن} + ١) \cdot \text{ق}_{\text{ن}}$

(١) البرهان/ $\text{ق}_{١} = ١$ ، $\text{ق}_{٢} = ٥$ ، $\text{ق}_{٣} = ٩$ ، $\text{ق}_{٤} = ١٣$ ، ------

$$\therefore \left|\text{ق}_{٢} - \text{ق}_{١}\right| = |٥ - ١| = ٤$$

$$\left|\text{ق}_{٤} - \text{ق}_{٣}\right| = |١٣ - ٩| = ٤$$

$$\left|\text{ق}_{\text{ن}+١} - \text{ق}_{\text{ن}}\right| = ٤$$

نفرض ان للمتوالية غاية ولتكن ب

$\therefore \forall$ هـ $\in$ ح++ ، $\exists\ \text{ن}_{١} \in$ ط+ بحيث اذا كان $\text{ن} > \text{ن}_{١}$ فان

نرجو من القارئ اجراء التغييرات التالية قبل
البدء بدراسة مفردات الكتـــــاب :

---

١) في السطر الثالث عشر من المثال ١٢ من الصحيفة ١٤٦ يصبح $ق(س) = ٢س + ٢$ مستمر $\forall س \neq ١$ بدلا مـــن $ق(س) = ٢س + ٢ \;\; \forall س \neq ١$

٢) في السطر ١٧ من المثال ١٠ من الصحيفة ١٥٦ يصبـــح $\sqrt{س} + ٢$ وتوضع علامة الجذر لما يتبع هذه الخطوة مـــن نفس المثال في مكانها المناسب

٣) في السطر ٢ من المثال ٦ من اصحيفة ٢٢٨ يصبــــــح $ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + حـ س + د$ والسطر الرابع من نفس المثال يصبح : جد قيم أ ، ب حـ ، د وناقش المنحني $ل(س) = ق(س) - ٧$ ومثله بيانيا .

٤) في السطر السابع من الصحيفة ٢٢٩ : $د = -٤$ بدلا من $د = -١١$ وفي السطر ٨ من نفس الصحيفة $ل(س) = ق(س) - ٧ = -س^٣ + ٣س^٢ + ٩س - ١١$ ويستبدل الحرف ق بالحرف ل بعد السطر التاسع في نفس المثال

٥) في السطر ٥ من المثال ٧ من الصحيفة ٢٥٨ تصبـــح $\frac{س}{١٦} = ٤س$ بدلا من $\frac{س^٤}{١٦} = ٦٤س$.

٦) في مثال ٩ من الصحيفة ٢١٨ تصبح نصف قطرها بدلا مـــن نصف قطر قاعدتها .

٧) في التمرين ١٢ من ص ٢٦ تصبح ميل المماس لمنحن يساوي $٦س - ٣س^٢$ بدلا من $٦س - ٤س$

٨) يحذف السطران الخامس والسادس من س ١٢ ص ٣٦ .

٩) في برهان مثال ٤

$$ق(س) = \begin{cases} ١ + ٤س & \forall س > ١ \\ -١ + ٤س & \forall س < ١ \\ ١ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

$|ق_{ن} - ب| < هـ$

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+1} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+1} - ب| + |ب - ق_{ن}|$

$< هـ + هـ = ٢ هـ$

لتكن هـ = ١و

∴ $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| < ٢و$ وهذا تناقض

لانه $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = ٤$

∴ ليس للمتتابعة غاية .

(٢) $\langle ٢ + (-٣)^{ن} \rangle$

البرهان/

$ق_{١} = -١$ ، $ق_{٢} = ١١$ ، $ق_{٣} = -٢٥$ ، $ق_{٤} = ٨٣$ ، ------

$|ق_{٢} - ق_{١}| = |١١ + ١| = ١٢$

$|ق_{٤} - ق_{٣}| = |٨٣ + ٢٥| = ١٠٨$

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| \geqslant ١٢$

نفرض ان للمتتابعة غاية ولتكن ب .

∴ $\forall$ هـ $\in ح^{++}$ ، $\exists ن_{١} \in ط$ بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان

$|ق_{ن} - ب| < هـ$

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+1} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+1} - ب| + |ب - ق_{ن}|$

$< هـ + هـ = ٢ هـ$

ليكن = ٥و.

∴ $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| < ١$ وهذا تناقض لان

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| \geqslant ١٢$

∴ العبارة (للمتتابعة غاية تساوي ب) كاذبة

∴ العبارة (ليس للمتتابعة غاية) صادقة

(٣) $\langle ٣ + (-١)^{ن} \rangle$

البرهان/

$ق_{١} = ٢$ ، $ق_{٢} = ٤$ ، $ق_{٣} = ٢$ ، $ق_{٤} = ٤$ ، $ق_{٥} = ٢$ ، $ق_{٦} = ٤$ ، ......

$$|ق_{2} - ق_{1}| = |٤ - ٢| = ٢$$

$$|ق_{4} - ق_{3}| = |٤ - ٢| = ٢$$

$$- - - -$$

$$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = ٢$$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

$\therefore \forall$ هـ $\in ح^{++}$ $\exists$ $ن_{1} \in$ ط بحيث اذا كان $ن > ن_{1}$ فان

$$|ق_{ن} - ب| < هـ$$

$$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+1} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+1} - ب|$$

$$+ |ب - ق_{ن}|$$

$$< هـ + هـ = ٢هـ$$

ليكن هـ = ١و٠

$\therefore |ق_{ن+1} - ق_{ن}| < ٢$و٠ وهذا تناقض لان $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = ٢$

$\therefore$ العبارة "المتتابعة متقاربة وغايتها = ب كاذبة

$\therefore$ العبارة "ليس للمتتابعة غاية" صادقة .

(٤) $\left\langle \dfrac{(-٢)^{ن}}{ن} - ١ \right\rangle$

البرهان/

$$ق_{1} = -٣ ، ق_{2} = ١ ، ق_{3} = \frac{-١١}{٣} ، ق_{4} = ١٣ ------$$

$$|ق_{2} - ق_{1}| = |١ + ٣| = ٤$$

$$|ق_{4} - ق_{3}| = |٣ + \frac{١١}{٣}| = \frac{٢٠}{٣}$$

$$- - - - - - - - -$$

$$\therefore |ق_{ن+1} - ق_{ن}| \geqslant ٤$$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

$\therefore \forall$ هـ $\in ح^{++}$ ، $\exists$ ن $\in$ ط+ بحيث اذا كان $ن > ن_{1}$ فان

$$|ق_{ن} - ب| < هـ$$

$$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+1} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+1} - ب| + |ب - ق_{ن}|$$

$$< هـ + هـ = ٢هـ$$

لیكن هـ = $\frac{1}{2}$

∴ $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| < 1$ وهذا تناقض لان

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| \nless ٤$

∴ العبارة ᵛ$\langle ق_{ن} \rangle$ لها غاية = ب عبارة كاذبة

∴ العبارة ~ $\langle ق_{ن} \rangle$ ليس لها غاية صادقة

(٥) $\langle ن - (-١)^{ن+١} \rangle$

$ق_{1}$ = صفر ، $ق_{2} = ٣$ ، $ق_{3} = ٢$ ، $ق_{4} = ٥$ ، $ق_{5} = ٤$ ، $ق_{6} = ٧$ ، ———

$|ق_{2} - ق_{1}| = |٣ - ٠| = ٣$

$|ق_{4} - ق_{3}| = |٥ - ٢| = ٣$

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = ٣$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

∴ $\forall$ هـ $\in ح^{++}$ ، $\exists\ ن_{1} \in ط$ بحيث اذا كان $ن > ن_{1}$ فان

$|ق_{ن} - ب| <$ هـ

$|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+1} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+1} - ب| + |ب - ق_{ن}|$

$<$ هـ + هـ = ٢هـ

لیكن هـ = $\frac{1}{2}$

∴ $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| < ١$ وهذا تناقض لان $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| = ٣$

∴ العبارة المتتابعة $\langle ق_{ن} \rangle$ متقاربة وغايتها = ب كاذبة

∴ العبارة ليس للمتتابعة $ق_{ن}$ غاية صادقة

(٦) $ق_{1} = ١$ ، $ق_{2} = ٢$ ، $ق_{3} = ٦$ ، $ق_{4} = ٢٤$ ، ———

$|ق_{2} - ق_{1}| = |٢ - ١| = ١$

$|ق_{4} - ق_{3}| = |٢٤ - ٦| = ١٨$

∴ $|ق_{ن+1} - ق_{ن}| \geqslant ١$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب حيث ب $\in$ ح

$\therefore$ $\forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists$ ن$_1$ $\in$ ط بحيث اذا كان ن $>$ ن$_1$ فان $|\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ب}| <$ هـ

$$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| = |(\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}) + (\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}})| \leqslant |\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}| + |\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}}|$$

$$< \text{هـ} + \text{هـ} = 2\,\text{هـ}$$

لكن هـ = ½

$\therefore$ $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| < \frac{1}{2}$ وهذا تناقض لان $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| \geqslant 1$

$\therefore$ العبارة غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ = ب كاذبة .

$\therefore$ العبارة ليس للمتتابعة $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ غايةً عبارة صادقة

مثال ٥) باستخدام الملاحظات الواردة في ص ١٠٢ جد غاية كل من المتتابعات التالية

(١) $\left\langle \frac{-2\text{ن} + 3}{2\text{ن} + 1} \right\rangle$ ، (٢) $\left\langle \frac{\text{ن}^3 + 5\text{ن}^2 - 3\text{ن} + 7}{6 - 5\text{ن} + 2\text{ن}^3} \right\rangle$ (٣) $\left\langle \frac{\text{ن}^2 + 3\text{ن} - 7}{3\text{ن}^2 - 5\text{ن} + 2} \right\rangle$

(٤) $\left\langle \frac{-2}{\text{ن} - 1} \odot \frac{3 - 2\text{ن}}{3\text{ن}} \right\rangle$ (٥) $\left\langle \frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{2\text{ن} + 4} \right\rangle$

الحل/ (١) $\text{غا} \left\langle \frac{-2\text{ن} + 3}{2\text{ن} + 1} \right\rangle = \text{غا} \left\langle \frac{-2 + \frac{3}{\text{ن}}}{2 + \frac{1}{\text{ن}}} \right\rangle$

$$= \frac{\text{غا} \left\langle -2 + \frac{3}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{\text{غا} \langle -2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{3}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \langle 2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle}$$

$$= \frac{\text{غا} \langle -2 \rangle + 3\,\text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \langle 2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{-2 + 3 \times \text{صفر}}{2 + \text{صفر}} = \frac{-2}{2} = -1$$

(٥) $$\text{غا} \left\langle \frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{2\text{ن} + 4} \right\rangle = \text{غا} \left\langle \frac{\frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{\text{ن}}}{\frac{2\text{ن} + 4}{\text{ن}}} \right\rangle$$

$$= \text{غا} \left\langle \frac{\sqrt{\frac{2\text{ن}^2 + 3}{\text{ن}^2}}}{2 + \frac{4}{\text{ن}}} \right\rangle = \text{غا} \left\langle \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{\text{ن}^2}}}{2 + \frac{4}{\text{ن}}} \right\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{3}{\text{ن}^2} \right\rangle}}{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{4}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(٣) $\text{غا}\left\langle \frac{ن^3 + 5ن^2 - 3ن + 7}{6 - 5ن + 2ن^3} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{1 + \frac{5}{ن} - \frac{3}{ن^2} + \frac{7}{ن^3}}{\frac{6}{ن^3} - \frac{5}{ن^2} + 2} \right\rangle$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle 1 + \frac{5}{ن} - \frac{3}{ن^2} + \frac{7}{ن^3} \right\rangle}{\text{غا}\left\langle \frac{6}{ن^3} - \frac{5}{ن^2} + 2 \right\rangle} = \frac{1 + \text{صفر} - \text{صفر} + \text{صفر}}{\text{صفر} - \text{صفر} + 2} = \frac{1}{2}$$

(٤) $\text{غا}\left\langle \frac{ن^2 + 3ن - 7}{3ن^3 - 5ن + 3} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{\frac{1}{ن} - \frac{3}{ن^2} - \frac{7}{ن^3}}{3 - \frac{5}{ن^2} + \frac{3}{ن^3}} \right\rangle$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle \frac{1}{ن} \right\rangle - \text{غا}\left\langle \frac{3}{ن^2} \right\rangle - \text{غا}\left\langle \frac{7}{ن^3} \right\rangle}{\text{غا}\langle 3 \rangle - \text{غا}\left\langle \frac{5}{ن^2} \right\rangle + \text{غا}\left\langle \frac{3}{ن^3} \right\rangle} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر} - \text{صفر}}{3 - \text{صفر} + \text{صفر}} = \text{صفر}$$

(٥) $\text{غا}\left\langle \frac{-2}{ن + 1} \odot \frac{3 - 2ن}{ن^3} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{-2}{ن + 1} \right\rangle \times \text{غا}\left\langle \frac{3 - 2ن}{ن^3} \right\rangle$

$$= \text{غا}\left\langle \frac{-\frac{2}{ن}}{1 + \frac{1}{ن}} \right\rangle \cdot \text{غا}\left\langle \frac{\frac{3}{ن} - 2}{3} \right\rangle$$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle -\frac{2}{ن} \right\rangle}{\text{غا}\left\langle 1 + \frac{1}{ن} \right\rangle} \cdot \frac{\text{غا}\left\langle \frac{3}{ن} - 2 \right\rangle}{\text{غا}\langle 3 \rangle} = \frac{-2\,\text{غا}\left\langle \frac{1}{ن} \right\rangle}{\text{غا}\langle 1 \rangle + \text{غا}\left\langle \frac{1}{ن} \right\rangle} \cdot \frac{3\,\text{غا}\left\langle \frac{1}{ن} \right\rangle - \text{غا}\langle 2 \rangle}{\text{غا}\langle 3 \rangle}$$

$$= \frac{-2 \times \text{صفر}}{1 + \text{صفر}} \times \frac{3 \times \text{صفر} - 2}{3} = \text{صفر} \times \frac{-2}{3} = \text{صفر}$$

مثال ٦) لتكن $\langle ق_ن \rangle$ متتابعة $\neq$ صفر $\forall$ ن

فإذا كانت $\text{غا}\langle ق_ن \rangle = أ$ ، أ $\neq$ صفر فإن $\text{غا}\left\langle \frac{1}{ق_ن} \right\rangle = \frac{1}{أ}$

البرهان/ $\langle ق_ن \rangle \odot \left\langle \frac{1}{ق_ن} \right\rangle = \langle 1 \rangle$

$$\text{غا}\left\langle ق_ن \odot \frac{1}{ق_ن} \right\rangle = \text{غا}\langle ق_ن \rangle \cdot \text{غا}\left\langle \frac{1}{ق_ن} \right\rangle = \text{غا}\langle 1 \rangle$$

$$أ \cdot \text{غا}\left\langle \frac{1}{ق_ن} \right\rangle = 1$$

$$\text{غا}\left\langle \frac{1}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \frac{1}{1}$$

مثال ٧) ليكن $\text{ق} : \text{ح} / \{-\tfrac{1}{2}\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ١}{٢\text{س} + ١}$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متناقص $\forall\ \text{س} \in \text{ح} / \{-\tfrac{1}{2}\}$

(٣) جد غاية كل من المتتابعات التالية ان وجدت :-

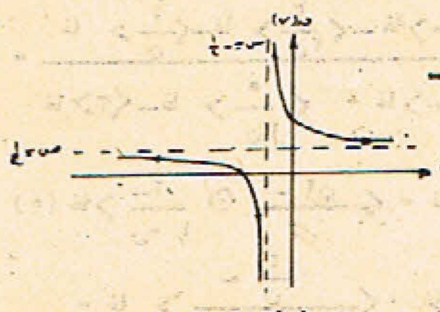
(١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$ (٢) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{٢}{\text{ن}}\right) \right\rangle$

(٣) $\left\langle \text{ق}\left(٢ + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$ (٤) $\left\langle \text{ق}\left(-٢ - \tfrac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$

(٥) $\left\langle \text{ق}(٤) \right\rangle$ (٦) $\left\langle \text{ق}(-٢) \right\rangle$

الحل/ بقسمة البسط على المقام ينتج

$$\text{ق}(\text{س}) = \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س} + ٢}$$



(شكل ٣ـ١)

$\text{س} = -\tfrac{1}{2}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$\text{ص} = \tfrac{1}{2}$ المستقيم المحاذي الافقي

س	ص
٠	١
١−	٠

٢) $\forall\ \text{س}_1 \in \text{ح} / \{-\tfrac{1}{2}\}$ ، $\forall\ \text{س}_2 \in \text{ح} / \{-\tfrac{1}{2}\}$

اذا كان $\text{س}_1 < \text{س}_2 \Leftarrow ٤\text{س}_1 + ٢ < ٤\text{س}_2 + ٢$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤\text{س}_1 + ٢} > \frac{١}{٤\text{س}_2 + ٢} \Leftarrow \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س}_1 + ٢} > \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س}_2 + ٢}$$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}_1) > \text{ق}(\text{س}_2)$ $\therefore$ ق متناقص $\forall\ \text{س} \in \text{ح} / \{-\tfrac{1}{2}\}$

٣) (١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \dfrac{١}{٤\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) + ٢} \right\rangle =$

$$\left\langle \tfrac{1}{2} + \frac{١}{\frac{٤}{\text{ن}}} \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\text{ن} \right\rangle$$

ان هذه المتتابعة غير متقاربة

(٢) بنفس طريقة (١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{٢}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle -\tfrac{1}{2} - \text{ن} \right\rangle$ غير متقاربة

(٣) $\left\langle \text{ق}\left(٢ + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \dfrac{١}{٤\left(٢ + \tfrac{١}{\text{ن}}\right) + ١} \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \dfrac{١}{٨ + \tfrac{٤}{\text{ن}} + ١} \right\rangle$

$= \langle ½ + \frac{١}{٩ + \frac{٤}{ن}} \rangle \therefore$ غا $\langle ق(٢ + \frac{١}{ن}) \rangle = ½ + \frac{١}{٩} = \frac{١١}{١٨}$

(٤) بنفس طريقة (٣)

(٥) غا $\langle ق(٤) \rangle =$ غا $\langle \frac{٥}{٩} \rangle = \frac{٥}{٩}$

(٦) غا $\langle ق(-٢) \rangle =$ غا $\langle \frac{-١}{-٢} \rangle = \frac{١}{٢}$.

مثال ٨) اذا كان كل من $\langle ق_ن \rangle$ ، $\langle ل_ن \rangle$ متتابعة وكان

١) غا $\langle ق_ن \odot ل_ن \rangle = ب$ حيث $ب \in ح$ فهل من الضروري ان يكون لكل من $\langle ق_ن \rangle$ ، $\langle ل_ن \rangle$ غاية ؟ برهن قولك

٢) اذا كان كل من $\langle ق_ن \rangle$ ، $\langle ل_ن \rangle$ متتابعة بحيث $ل_ن \neq$ صفر $\forall ن$
وكان غا $\langle ق_ن \oslash ل_ن \rangle = ب$ ، حيث $ب \in ح$ فهل من الضروري ان يكون لكل منهما غاية ؟ برهن قولك .

٣) اذا كان كل من $\langle ق_ن \rangle$ ، $\langle ل_ن \rangle$ متتابعة وكان
غا $\langle ق_ن \ominus ل_ن \rangle = ب$ ، حيث $ب \in ح$ فهل من الضروري ان يكون لكل منهما غاية ؟ برهن قولك .

الحل/ (١) لتكن $\langle ق_ن \rangle = \langle ب ن \rangle$ حيث $ب \in ح$ ولتكن $\langle ل_ن \rangle = \langle \frac{١}{ن} \rangle$

ان $\langle ق_ن \odot ل_ن \rangle = \langle ب ن \rangle \odot \langle \frac{١}{ن} \rangle = \langle ب \rangle$

وان غا $\langle ق_ن \odot ل_ن \rangle =$ غا $\langle ب \rangle = ب$

من هذا المثال ان غا $\langle ق_ن \odot ل_ن \rangle = ب$ في حين ان

$\langle ق_ن \rangle$ ليس لها غاية

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غاية .

٢) لتكن $\langle ق_ن \rangle = \langle ب ن + (-١)^{ن} \rangle$ متتابعة ليس لها غاية
ولتكن $\langle ل_ن \rangle = \langle ن \rangle$ متتابعة ليس لها غاية
وان $ل_ن \neq$ صفر $\forall ن$

لكن غا $\langle ق_ن \oslash ل_ن \rangle =$ غا $\langle \frac{ب ن + (-١)^{ن}}{ن} \rangle$

$=$ غا $\langle ب + \frac{(-١)^{ن}}{ن} \rangle = ب$

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غاية

٢) لتكن $\langle ق_ن \rangle = \langle ن + ٥ \rangle$ متتابعة ليس لها غاية

ولتكن $\langle ل_ن \rangle = \langle ٥ - ب + ن \rangle$ متتابعة ليس لها غاية

ولكن $\langle ق_ن \ominus ل_ن \rangle = $ غا $\langle ب \rangle = ب$

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غاية

تماريـــن

١) برهن باستخدام التعريف مايلي :-

أ) غا $\langle -\frac{١}{٢} \rangle = -\frac{١}{٢}$ ب) غا $\left\langle \frac{-٣\sqrt{ن}}{ن} \right\rangle = $ صفر

جـ) غا $\left\langle \frac{٣ن - ٢}{٢ن + ٨} \right\rangle = \frac{٣}{٢}$ د) غا $\left\langle \frac{٤ن + (-١)^ن}{٣ن} \right\rangle = \frac{٤}{٣}$

٢) برهن ان ليس للمتتابعات التالية غاية :-

أ) $\langle ن - ن^٢ \rangle$ ب) $\langle \frac{١}{٢} + (-٢)^ن \rangle$

جـ) $\langle (-١)^ن \rangle$ د) $\left\langle \frac{(-٢)^ن + ٤}{ن} \right\rangle$

هـ) $ق_ن = \begin{cases} -ن + ١ & \text{اذا كان ن عددا طبيعيا فرديا} \\ ن + ٢ & \text{اذا كان ن عددا طبيعيا زوجيا موجبا} \end{cases}$

و) $ق_١ = ١$ ، $ق_{ن+١} = (٢ن + ١) \cdot ق_ن$

٣) جد غاية كل من المتتابعات التالية وبرهن قولك باستخدام الملاحظات الواردة في الفصل

(١) $\left\langle \frac{ن^٣ + ٣ن^٢ - ٢\sqrt{ن} + ١}{\sqrt{ن^٣} + \sqrt[٣]{ن} + ٢ن^٤} \right\rangle$ ، (٢) $\left\langle \frac{\sqrt{ن} - ١}{\sqrt{٣ن} + ١} \right\rangle$ (٣) $\left\langle -٢ + \frac{(-١)^ن}{ن^٢} \right\rangle$

٤) اذا كانت $\langle ق_ن \rangle = \left\langle \frac{٣ن - ٢}{٤ن + ٣} \right\rangle$ فبرهن ان غا $\langle ق_ن \rangle = \frac{٣}{٤}$

ثم جد عددا طبيعيا $ن_١$ بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان $\left| ق_ن - \frac{٣}{٤} \right| < ٠,٠٠١$

الفصل الرابع
التطبيقات العددية المستمرة

ملاحظات

١) ليكن ق ∈ تط (ك) ، أ ∈ ك

ق مستمر عند أ ⟺ ∀ متتابعة ⟨ $س_ن$ ⟩ على ك متقاربة وغايتها = أ

فان ⟨ ق ($س_ن$) ⟩ متقاربة و غا ⟨ ق($س_ن$) ⟩ = ق (أ)

٢) ليكن ق ∈ تط (ك) ، أ ∈ ك

ق غير مستمر عند أ ⟺ ∃ متتابعة ⟨ $س_ن$ ⟩ على ك متقاربة وغايتها = أ ولكن ⟨ ق($س_ن$) ⟩ اما غير متقاربة او متقاربة ولكن غا ⟨ ق ($س_ن$) ⟩ ≠ ق (أ)

٣) يقال لتطبيق عددى انه مستمر اذا كان مستمرا في كل عنصر من عناصر منطلقه

٤) كل تطبيق عددى كثير الحدود Polynomial مستمر ومن هذه الملاحظة نستنتج (١) كل تطبيق عددى ثابت مستمر (٢) كل تطبيق عددى ذاتي مستمر .

٥) ليكن ق : ك ⟵ ح تطبيقا مستمرا عند أ

ل : ح ⟵ ح تطبيقا بحيث ل (س) = ق(س) ، ∀ س ∈ ح

علما بان ح ⊂ ك ، أ ∈ ح فان التطبيق ل مستمر عند أ

٦) اذا كان كل من ق ، ل تط (ك) مستمرا عند أ حيث أ ∈ ك فان :

(١) ق ⊕ ل مستمر عند أ (٢) ق ⊙ ل مستمر عند أ

(٣) ق ⊖ ل مستمر عند أ (٤) ق ⨸ ل مستمر عند أ بحيث ل (س) ≠ صفر ∀ س ∈ ك

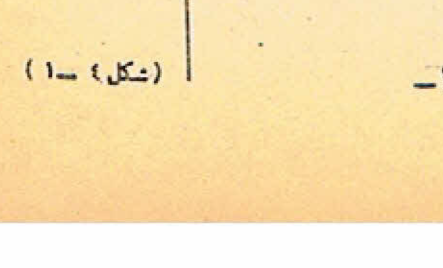
امثلة محلولة

١) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث

$$ق (س) = \begin{cases} س^٢ & \text{اذا كان } س \leqslant ٣ \\ ٢س + ١ & \text{اذا كان } س > ٣ \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدى

(٢) هل يكون ق مستمرا عند ٣ ؟ برهن قولك .



(شكل ٤ ــ ١)

الجواب / ق غير مستمر عند ٣

البرهان/

بما انه ∃ ⟨ $س_ن$ ⟩ = ⟨ $٣ + \frac{١}{ن}$ ⟩

متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ٣

لكن ⟨ ق ($س_ن$) ⟩ =

‹ق(١ + $\frac{1}{ن}$)›

= ‹٢(٣ + $\frac{1}{ن}$) + ١›

= ‹٦ + $\frac{٢}{ن}$ + ١› = ‹٧ + $\frac{٢}{ن}$› متقاربة

وغا ‹ق(سن)› = غا ‹٧ + $\frac{٢}{ن}$›

= غا ‹٧› + ٢ غا ‹$\frac{1}{ن}$› = ٧

وان ق(٣) = ٩

∴ غا ‹ق(س)› ≠ ق(٣)
ن

∴ ق غير مستمر عند ٣

٢) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث ق(س) = { ٢ س ≥ صفر
٥ س < صفر

برهن ان ق غير مستمر عند س = صفر وارسم ق في المستوى الاقليدى

البرهان/

بما انه ∃ ‹سن› = ‹صفر ــ $\frac{1}{ن}$›

متتابعة على ح متقاربة

وغا ‹سن› = صفر

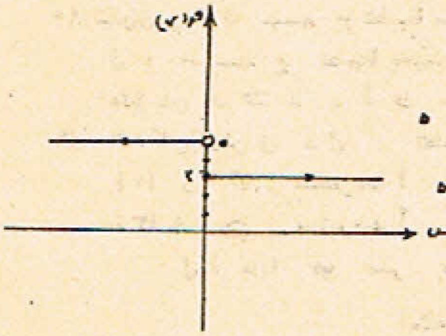
‹ق(س)› = ‹ق(ــ $\frac{1}{ن}$)› = ٥
ن

غا ‹ق(س)› = غا ‹٥› = ٥
ن

ق(صفر) = ٢

∴ غا ‹ق(س)› ≠ ق(صفر)
ن

∴ ق غير مستمر عند الصفر



(شكل ٤ـ٢)

٣) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث

ق(س) = { $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ اذا كان س ≠ ٢
١٢ عندما س = ٢

برهن ان ق مستمر عند س = ٢

البرهان/

يمكن كتابة التطبيق كما يلي :ــ

ق: ح ← ح بحيث ق(س) = { $\frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$ ∀ س ≠ ٢
١٢ عندما س = ٢

اى ق(س) = { س٢ + ٢س + ٤ ∀ س ≠ ٢
١٢ عندما س = ٢

∀ ⟨سن⟩ متتابعة علىح متقاربة وغايتها = ٢ فان

ق(سن) = ⟨(سن)٢ + ٢سن + ٤⟩ = غا ⟨سن⟩ غا ⟨سن⟩ + ٢غا ⟨سن⟩ + غا ⟨٤⟩

= ٢ × ٢ + ٢ × ٢ + ٤ = ١٢

وبما ان ق(٢) = ١٢

∴ غا ⟨ق(سن)⟩ = ق(٢)

∴ ق مستمر عند ٢

٤) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث ق(س) = { (س٢ + ٣س − ١٠) / (س − ٢) اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

حيث أ ∈ ح ، جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند س = ٢

الحل/ يمكن كتابة التطبيق كما يلي :-

ق(س) = { (س + ٥)(س − ٢) / (س − ٢) اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

اى ان ق(س) = { س + ٥ اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

ولكي يكون ق مستمرا عند س = ٢ فانه ∀ ⟨سن⟩ متتابعة علىح متقاربة وغايتها = ٢ فان غا ⟨ق(سن)⟩ = غا ⟨سن + ٥⟩ = غا ⟨سن⟩ + غا ⟨٥⟩

= ٢ + ٥ = ٧ = ق(٢) = أ ⟸ أ = ٧

٥) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث ق(س) = { س (١ + √س٢) / √س٢ س ≠ صفر
٣ عندما س = صفر

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدى

(٢) هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك

الحل/ قبل ان نبدا بحل هذا التمرين لنعرف √س٢

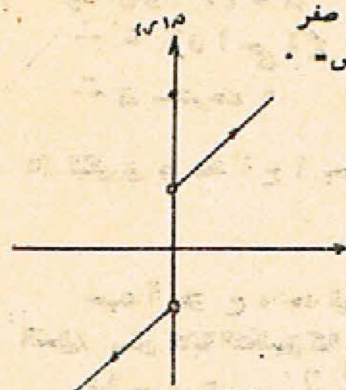
تعريف/ √س٢ = { س اذا كان س ≥ صفر
−س اذا كان س < صفر

اى ان $|س| = \sqrt{س^2}$ ∀ س ∈ ح

واستنادا الى هذا التعريف اعلاه سنعيد كتابة التطبيق كما يلي :-

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س\,(١ + س)}{س} & س > صفر \\ \dfrac{س\,(١ - س)}{- س} & س < صفر \\ ٣ & عندما\ س = صفر \end{cases}$$

$$اى\ ان\ ق(س) = \begin{cases} ١ + س & س > صفر \\ س - ١ & س < صفر \\ ٣ & عندما\ س = ٠ \end{cases}$$



(شكل ٤ـ٣)

الجواب/ ق غير مستمر عند الصفر

البرهان/ ∃ $\langle س_ن \rangle = \langle \frac{١}{ن} \rangle$ متتابعة على ح

متقاربة وغايتها = صفر

غا $\langle ق(س_ن) \rangle$ = غا $\langle ق(\frac{١}{ن}) \rangle$

= غا $\langle ١ + \frac{١}{ن} \rangle$ = غا $\langle ١ \rangle$ + غا $\langle \frac{١}{ن} \rangle$

= ١+ صفر = ١

ق (صفر) = ٣

∴ غا $\langle ق(س_ن) \rangle \neq$ ق(صفر)

∴ ق غير مستمر عند الصفر

٦) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س + ١}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٤ & عندما\ س = ١ \end{cases}$$

برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

البرهان/

∃ $\langle س_ن \rangle = \langle ١ + \frac{١}{ن} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ١

$$\langle ق(س_ن) \rangle = \langle ق(١ + \frac{١}{ن}) \rangle = \left\langle \frac{١ + \frac{١}{ن} + ١}{١ + \frac{١}{ن} - ١} \right\rangle = \left\langle \frac{٢ + \frac{١}{ن}}{\frac{١}{ن}} \right\rangle$$

= $\langle ٢ن + ١ \rangle$ غير متقاربة

∴ ق غير مستمر عند س = ١

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} صفر & اذا\ كان\ س\ عددا\ حقيقيا\ غير\ نسبي \\ ١ & اذا\ كان\ س\ عددا\ نسبيا \end{cases}$

برهن ان ق غير مستمر

البرهان / ليكن ب عددا نسبيا

$\exists \langle س_ن \rangle = \langle ب + \frac{1}{\sqrt{ن}} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ب

ولتكن $\langle ق(س_ن) \rangle = \langle ق(ب + \frac{1}{\sqrt{ن}}) \rangle$ متتابعة

صور حدود المتتابعة $\langle س_ن \rangle$ بفعل التطبيق ق .

ولنكتب الحدود التسعة الاولى من هذه المتتابعة

اى $\langle ق(س_ن) \rangle = \langle ق(ب+1) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{2}}) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{3}}) ،$

$ق(ب + \frac{1}{\sqrt{4}}) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{5}}) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{6}}) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{7}}) ،$

$ق(ب + \frac{1}{\sqrt{8}}) ، ق(ب + \frac{1}{\sqrt{9}}) ، --- \rangle$

$= \langle 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، \cdots \rangle$

وبما ان هذه المتتابعة غير متقاربة

$\therefore$ ق غير مستمر في ب

$\therefore$ ق غير مستمر .

٨) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث ق $(س) = س^2$. برهن ان ق مستمر باستخدام التعريف .

البرهان/

ليكن ب $\in$ ح

$\therefore \forall \langle س_ن \rangle$ متتابعة على ح متقاربة غايتها = ب

$غا \langle ق(س_ن) \rangle = غا \langle (س_ن)^2 \rangle = غا \langle س_ن \rangle . غا \langle س_ن \rangle . غا \langle س_ن \rangle$

$= ب . ب . ب = ب^2$

وبما ان ق $(ب) = ب^2$

$\therefore غا \langle ق(س_ن) \rangle = ق(ب)$

$\therefore$ ق مستمر عند ب

ولكننا اخذنا ب اى عنصر من عناصر ح وكان ق مستمرا في ب

$\therefore$ ق مستمر

٩) ليكن ق $\in$ تط (ك) بحيث :-

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س - |س|}{س} & \text{اذا كان } س < \text{صفر} \\ 2 & \text{عندما } س = \text{صفر} \end{cases}$$

حيث ك مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة

برهن ان ق مستمر

البرهان/ استنادا الى تعريف القيمة المطلقة نعيد كتابة التطبيق كما يلي :-

ق(س) = { (س − (− س)) / س ، س ⟨ صفر
          ٢ ، عندما س = صفر

اى ان ق (س) = { ٢ ، س ⟨ صفر
                  ٢ ، عندما س = صفر

اى ان ق (س) = ٢ ∀ س ≤ صفر

وبما ان هذا التطبيق ثابت ∀ س ∋ منطلقة

∴ ق مستمر (كل تطبيق عددى ثابت مستمر)

١٠) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = [س / ٤]

ولتكن أ = { س : س ∋ ص ، س يقبل القسمة على ٤ }

برهن ان ق غير مستمر في أ

البرهان / ليكن هـ ∋ أ

∃ ⟨س ن⟩ = ⟨هـ − ١/ن⟩ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = هـ

⟨ق(س ن)⟩ = ⟨ق ((هـ − ١/ن) / ٤)⟩ = ⟨[(هـ − ١/ن) / ٤]⟩

= ⟨[هـ/٤ − ١/٤ن]⟩ = ⟨ هـ/٤ − ١ ⟩

∴ غا ⟨ق(س ن)⟩ = غا ⟨ هـ/٤ − ١ ⟩ = هـ/٤ − ١

بينما ق(هـ) = [هـ/٤] = هـ/٤ ،

∴ غا ⟨ ق (س ن) ⟩ ≠ ق(هـ)

∴ ق غير مستمر عند س = هـ

وبما اننا اخذنا هـ اى عنصر من عناصر أ بدون تعيين

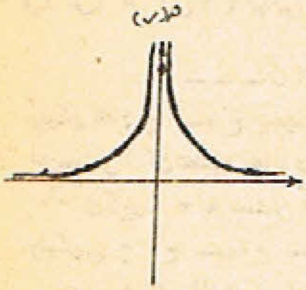
∴ ق غير مستمر في كل عنصر من عناصر أ

١١) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { ١/س ∀ س ⟨ ٠ ،
                                   − ١/س ∀ س ⟩ ٠ ،
                                   ٤ اذا كانت س = ٠

١) مثل ق د يكارتيا
٢) هل يكون ق متناظرا مع المحور الثاني ؟ برهن قولك
٣) هل يكون ق محدودا من الاسفل ؟ برهن قولك
٤) برهن ان ق غير مستمر عند الصفر

الحل/

٢) ق متناظر بالنسبة للمحور الثاني لانه
$\forall$ (أ ، ب) $\in$ ق فان (ـ أ ، ب) $\in$ ق
٣) بما انه $\forall$ س > ٠ فان $\frac{1}{س}$ > ٠ $\Longleftarrow$



شكل (٤ ـ ٤)

ق(س) > صفر ، وبما انه $\forall$ س < ٠
فان $\frac{1}{س}$ < ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{-1}{س}$ > صفر $\Longleftarrow$
ق(س) > ٠
وبما ان ق (صفر) = ٤ ، اى ان
ق(س) > صفر
$\therefore$ ق(س) > صفر $\forall$ س $\in$ ح
$\therefore$ ق محدود من الاسفل

٤) بما انه $\exists$ ⟨س$_{ن}$⟩ = ⟨صفر + $\frac{1}{ن}$⟩ متتابعة على ح متقاربة
وغايتها = صفر وان ⟨ق(س$_{ن}$)⟩ = ⟨ ق($\frac{1}{ن}$)⟩ = ⟨ ن ⟩
غير متقاربة
$\therefore$ ق غير مستمر عند الصفر

١٢) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث ق(س) = |س ـ ١| ـ |س| + |٢س + ٣|
برهن ان ق مستمر ، وارسم ق في المستوى الاقليدى
البرهان/ |س ـ ١| = ٠ $\Longleftarrow$ س = ١
|س| = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٠
|٢س + ٣| = ٠ $\Longleftarrow$ س = $\frac{-3}{2}$

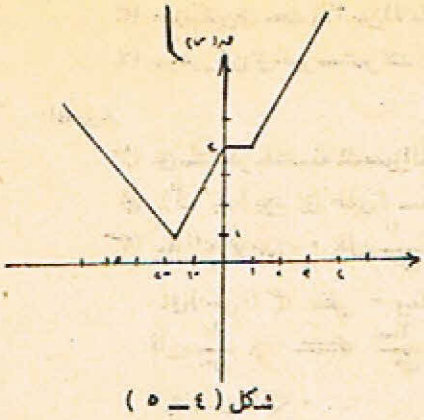
$$\text{اى ان ق (س)} = \begin{cases} -\,٢س - ٢ & س < \frac{-3}{2} \\ ٢س + ٤ & س \in [\frac{-3}{2} ، ٠[\\ ٤ & س \in [٠ ، ١[\\ ٢س + ٢ & س \geq ١ \end{cases}$$

ليكن ل : ح ← ح بحيث ل (س) = ــ٢س ــ٢

ل مستمر (كثير الحدود)

∴ ق(س) = ــ٢س ــ٢ مستمر ∀ س < $\frac{-٣}{٢}$

(ملاحظة ٥) . . . (١)



شكل (٤ ــ ٥)

وليكن ع : ح ← ح بحيث ع (س) = ٢س + ٤

ع مستمر (كثير الحدود)

∴ ق(س) = ٢س + ٤ ∀ س ∈] $\frac{-٣}{٢}$ ، ٠ [

ـــ (٢)

وليكن ك : ح ← ح بحيث ك (س) = ٤

ك مستمر (كل تطبيق عددي ثابت مستمر)

∴ ق(س) = ٤ مستمر ∀ س ∈ [٠ ، ١ [. . . (٣)

وليكن م : ح ← ح بحيث م(س) = ٢س + ٢

م مستمر (كثير الحدود) مستمر

∴ ق(س) = ٢س + ٢ ∀ س ≥ ١ . . . (٤)

من (١) و (٢) و (٣) و (٤) نستنتج ان

ق مستمر

(يكون التطبيق مستمرا اذا كان مستمرا في كل عنصر من عناصر منطلقه)

١٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $س^{٢}$ ــ ١

وليكن ل : ح ← ح بحيث ل (س) = $س^{٢}$ + ١

برهن ان كلا من التطبيقات التالية مستمر

(١) ق ⊕ ل (٢) ق ⊖ ل (٣) ق ⊙ ل (٤) ق ⨸ ل

(٥) (٧ ق)

البرهان/ بما ان ق تطبيق كثير الحدود فهو مستمر (كل تطبيق كثير الحدود مستمر)

كذلك ل تطبيق كثير الحدود فهو مستمر (نفس السبب)

وبالاستناد الى الملاحظة (٦) ص فان كلا من ق ⊕ ل ، ق ⊙ ل ،

ق ⊖ ل ، ق ⨸ ل ، (٧ق) مستمر

تمارين

١) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق (س) = $\begin{cases} \frac{س+٢}{س-١} & س \neq ١ \\ ٣ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} س^2 & \forall\ س \geq صفر \\ ٣ - س^2 & \forall\ س < صفر \end{cases}$

هل يكون ق مستمرا عند الصفر ؟ برهن قولك

٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} س & \text{اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح} \\ صفر & \text{اذا كان س عدد صحيح} \end{cases}$

هل يكون ق مستمرا ؟ برهن قولك

٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - ١}{س - ١} & \text{اذا كان } س \neq ١ \\ ٢ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

١) هل يكون ق مستمرا عند ٢ ؟ برهن قولك

٢) هل يكون ق مستمرا عند ١ ؟ برهن قولك

٥) ليكن ق : $[٠ ، ٢]$ ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} ٢س & \text{اذا كان } س \in [٠ ، ١] \\ ٣ - س & \text{اذا كان } س \in]١ ، ٢] \end{cases}$

١) مثل ق ديكارتيا

٢) هل يكون ق مستمرا ؟ برهن قولك

٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} س^2 & \forall\ س < صفر \\ ٣ - س^2 & \forall\ س \geq صفر \end{cases}$

هل يكون ق مستمرا عند الصفر ؟ برهن قولك

٧) ليكن ق : $ح^+$ ← ح بحيث ق(س) = $\sqrt{س}$

برهن ان ق مستمراً . وارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س − $[س]$

برهن ان ق غير مستمر في كل عدد صحيح وارسم ق في المستوى الاقليدي

٩) ليكن ق $\in$ تط(ك) وان ق غير مستمر ، وليكن ل $\in$ تط(ك) وان ل غير مستمر فهل من الضروري ان يكون

(١) ق $\oplus$ ل غير مستمر (٢) ق $\odot$ ل غير مستمر (٣) ق $\div$ ل غير مستمر

بشرط ل(س) $\neq$ صفر $\forall$ س $\in$ ك . برهن قولك في كل حالة .

١٠) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - ٤}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ أ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

حيث أ $\in$ ح

جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند ٢

١١) اذا كان ق مستمرا عند أ وكان ق(أ) $\neq$ صفر فان $\left(\dfrac{١}{ق}\right)$ مستمر عند أ

١٢) اذا كان ق مستمرا عند أ وكان ل مستمرا عند أ فبرهن ان ق $\circ$ ل مستمراً عند أ

١٣) ليكن ق(س) = { ١ اذا كان س ≥ ٠ ، −١ اذا كان س < ٠ }

ل(س) = { ١ اذا كانت س٢ = ١ ، صفر اذا كانت س٢ ≠ ١ }

برهن ان ل ∘ ق مستمر عند الصفر وكذلك برهن ان ق غير مستمر عند الصفر وان ل غير مستمر عند ١ .

١٤) اذا كان ق (س) = س − ل (س)

حيث ل (س) = { س ∙ ع(س) اذا كان س ≠ صفر ، صفر اذا كان س = صفر }

وان ع : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ع (س) = عَ (١/س)

وان عَ(س) = (س − [س]) ∧ ([س + ١] − س)

حيث أ ∧ ب ⟺ اصغر العددين أ او ب

هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك .

١٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { √س س ≥ صفر ، −√(−س) س < صفر }

هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك

١٦) ليكن ق : [−١ ، ١] ⟵ ح بحيث ق(س) = { س + ١ اذا كان −١ ≤ س ≤ ٠ ، −س اذا كان ٠ < س ≤ ١ }

برهن ان ق غير مستمر عند الصفر وان ق يمتلك اعظم واوطأ قيمة .

١٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { ١/(١−س) ∀ س ∈ ح / {٠ ، ١} ، س اذا كان س ∈ {٠ ، ١} }

١) مثل كلا من ق ، ق ∘ ق ، ق ∘ ق ∘ ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

٣) برهن ان ق ∘ ق غير مستمر عند الصفر

٤) برهن ان ق ∘ ق ∘ ق مستمر

١٨) ليكن ق : ح /]−٢ ، ٣[⟵ ح بحيث ق (س) = ٤ − س٢

مثل ق ديكارتيا وبرهن انه مستمر في منطلقه

١٩) اذا كان ق : ح ← ح بحيث ق(س) =
- أس^{٢} + ب س − ٤ ∀ س ∈]−٢ ، ١[
- ٢س − ٥ ، س > ١
- ب س^{٢} + س + ٢ ، س ≤ −٢

وكان ق مستمرا فجد قيمة كل من أ ، ب ثم مثل ق ديكارتيا وبرهن انه متزايد في ح /]−٢ ، ٠]

الجواب [أ = ١ ، ب = صفر]

٢٠) ليكن م =]−١ ، ١[، ولتكن ن =]٣ ، ٥]

وليكن ق (س) =
- ١٠ − ٦س ∀ س ∈ م
- ٢س − ٦ ∀ س ∈ ن
- أس^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + د ∀ س ∈ ح / (م ∪ ن)

حيث أ ، ب ، حـ ، د ∈ ح

واذا كان ق تطبيقا مستمرا فاجب عن الاسئلة التالية :-

١) جد قيم أ ، ب ، حـ ، د
٢) مثل ق ديكارتيا
٣) هل يكون ق محدودا ؟ برهن قولك
٤) برهن ان (ق ∘ ق ∘ ق) (٣) = ١٦٩

الجواب أ = ٠ ، ب = ١ ، حـ = −٦ ، د = ٩ .

٢١) ليكن ق :]−٤ ، ٦] ← ح بحيث ق(س) =
- $[\frac{س}{٢}]$ + ٢ ∀ س ∈ [٠ ، ٢[
- س + ٢ ∀ س ∈]−٤ ، ٠[
- |س − ٤| ∀ س ∈ [٢ ، ٦]

١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق مستمر
٣) جد اوطا قيمة للتطبيق ق واوطا قيمة للتطبيق (⊖ ق)
٤) برهن ان ق محدود
٥) جد المساحة المحددة بين بيان التطبيق ق والمحور الاول والمحددة بنقاط التقاطع معه .

الفصل الخامس
غاية التطبيقات العددية

بند ٥ـ١

تعريف (٥ـ١) العناصر: الملازمة (الملاصة) لمجموعة عددية

لتكن ك مجموعة جزئية من ح غير خالية وليكن أ $\in$ ح

١) أ ملاصق الى ك $\Leftrightarrow \exists$ ⟨م ن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ

٢) أ ليس ملاصقا الى ك $\Leftrightarrow$ ($\forall$ ⟨م ن⟩) اذا كانت ⟨م ن⟩ في ك / {أ} فان ⟨م ن⟩ $\not\to$ أ

ملاحظات (٥ـ١)

---

١) ليس من الضروري ان يكون هناك عنصر ملاصق لكل مجموعة فمثلا المجموعة ك = {٠ ، ٢ ، ٤ ، .... ، ٢ن ، ...} لايوجد عنصر ملاصق لها مثل أ والسبب في ذلك انه لاتوجد متتابعة في المجموعة ك / {أ} ولها غاية

٢) اذا كانت ك مجموعة من الاعداد الحقيقية وكان أ ملاصق لها فليس من الضروري ان أ $\in$ ك

٣) قد يوجد اكثر من عنصر ملاصق لمجموعة

٤) كل عنصر $\in$ [أ ، ب] عنصرا ملاصقا لـ]أ ، ب[

٥) كل عنصر في ح هو ملاصق الى ح

تعريف (٥ـ٢)

ليكن ق $\in$ تط (ك) ، أ ملاصق الى ك ، ل $\in$ ح

ل غاية ق عند أ $\Leftrightarrow$ ($\forall$ ⟨م ن⟩) (اذا كان ⟨م ن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ فان ⟨ق(م ن)⟩ متقاربة وغايتها = ل

ويرمز للعبارة غاية ق عند أ تساوي ل باختصار

غا ق = ل او غا ق (س) = ل
أ   س ← أ

تعريف (٥ـ٣)

ليكن ق $\in$ تط ك ، أ ملاصق الى ك ، ل $\in$ ح

ل ليست غاية للتطبيق ق عند أ $\Leftrightarrow \exists$ ⟨م ن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ لكن ⟨ق(م ن)⟩ اما غير متقاربة او متقاربة وغايتها $\neq$ ل

حيث ل عددا حقيقيا وحيدا

ملاحظات (٥ ـ ٢)

---

١) ليكن أ ملاصقا الى ك ، ق $\in$ تط (ك)

ق مستمر عند أ $\Leftrightarrow$ غا ق = ق (أ)
                                   أ

٢) غاية التطبيق وحيدة

٣) غاية التطبيق الثابت هو العدد الثابت نفسه

٤) اذا كان ق (س) = س ، فان $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = أ

٥) ليكن ك مجموعة جزئية من ح غير خالية ∴ أ عنصراً ملاصقاً الى كل من ك ، ك / { أ }

وليكن هـ : ك / { أ } ⟵ ح ، ل : ك ⟵ ح

فاذا كان ق (س) = ع (س) ∀ س ∈ ك / { أ } وكان $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ع = ل حيث

ل ∈ ح فان $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = ل ايضا

٦) ونتيجة للملاحظة الخامسة :

ليكن أ ∈ ح ، ن ∈ ط

ق : ح / { أ } ⟵ ح بحيث ق (س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ فان $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = ن $\text{أ}^{\text{ن} - ١}$

٧) اذا كان ن ∈ ط^{+} ، أ > صفر ،

ق : ح^{+} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}}$ فان $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$

٨) لتكن ك ⊂ ح غير خالية ، أ ملاصق الى ك

وليكن كل من ق ، ع ∈ تط (ك) ، وكانت $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = $\text{ل}_{١}$ ، $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ع = $\text{ل}_{٢}$

فان :

(١) $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ (ق ⊕ ع) = $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق + $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ع = $\text{ل}_{١}$ + $\text{ل}_{٢}$

(٢) $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ (ق ⊙ ع) = $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق · $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ع = $\text{ل}_{١}$ · $\text{ل}_{٢}$

(٣) $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ (ق ⊘ ع) = $\dfrac{\underset{\text{أ}}{\text{غا}}\text{ ق}}{\underset{\text{أ}}{\text{غا}}\text{ ع}}$ = $\dfrac{\text{ل}_{١}}{\text{ل}_{٢}}$

بشرط $\text{ل}_{٢}$ ≠ صفر

(٤) $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ (حـ ق) = حـ $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق = حـ $\text{ل}_{١}$ حيث حـ ∈ ح

امثلـــة محلولـــة

١) ليكن ق : [ـ ٤ ، ٦] ⟵ ح بحيث ق (س) = ٥ $\text{س}^{٢}$ ـ ٢

(١) برهن ان كلا من ـ ٤ ، ١ ، صفر عنصراً ملاصقاً الى [ـ ٤ ، ٦]

(٢) جد $\underset{\text{ـ ٤}}{\text{غـا}}$ ق

الحل/ لتكن ك = $[-٤ ، ٦]$

أ) بما ان $\exists \langle م_ن \rangle = \langle -٤ + \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة في ك / $\{-٤\}$ متقاربة وغايتها = -٤

$\therefore -٤$ عنصراً ملاصق الى ك

ب) بما ان $\exists \langle م_ن \rangle = \langle ١ + \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة في ك / $\{١\}$ متقاربــــة وغايتها = ١

$\therefore$ ١ عنصراً ملاصق الى ك

جـ) بما ان $\exists \langle م_ن \rangle = \langle \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة وغايتها = صفر

$\therefore$ صفر عنصراً ملاصق الى ك

٢) $\forall \langle م_ن \rangle$ متتابعة في ك / $\{-٤\}$ متقاربة وغايتها = -٤ فان $\langle ق(م_ن) \rangle = \langle ٥(م_ن)^٢ - ٢ \rangle$

$\therefore$ غا $\langle ق(م_ن) \rangle$ = غا $\langle ٥(م_ن)^٢ - ٢ \rangle$ = ٥ غا $\langle م_ن \rangle$. غا $\langle م_ن \rangle$ – غا $\langle ٢ \rangle$

$= ٥(-٤)(-٤) - ٢ = ٧٨$

مثال ٢) ليكن ق : ح $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) $= \begin{cases} س^٣ + ٢ & س \neq ٢ \\ ٢ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

جد غــا ق
$_{٢}$

الحل/ $\forall \langle م_ن \rangle$ متتابعة في ح / $\{٢\}$ متقاربة وغايتها = ٢ فان

غا $\langle ق(م_ن) \rangle$ = غا $\langle (م_ن)^٣ + ٢ \rangle$ = غا $\langle م_ن \rangle$. غا $\langle م_ن \rangle$. غا $\langle م_ن \rangle$ + غا $\langle ٢ \rangle$

$= ٢ \times ٢ \times ٢ + ٢ = ١٠$

$\therefore$ غــا ق = ١٠
$_{٢}$

مثال ٣) ليكن ق : ح $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) $= \begin{cases} \frac{٣س + ٢}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٣ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند ٢ ، ثم جد غــا ق
$_{١}$

$\exists \langle م_ن \rangle = \langle ٢ + \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة متقاربة في ح / $\{٢\}$ وغايتها = ٢

لكن $\langle ق(م_ن) \rangle = \langle \frac{٣م_ن + ٢}{م_ن - ٢} \rangle = \langle \frac{٣(٢ + \frac{1}{ن}) + ٢}{٢ + \frac{1}{ن} - ٢} \rangle = \langle \frac{٨ + \frac{٣}{ن}}{\frac{1}{ن}} \rangle$

$\langle ٨ن + ٣ \rangle$ غير متقاربة

(لان التطبيق ق : $ط^+ \longrightarrow$ ح بحيث $ق_ن = ٨ن + ٣$ غير محدود مــن الاعلى)

∴ ليس للتطبيق غاية عند ٢

∵ $\underset{-١}{\text{غا}}$ (س − ٢) ≠ صفر

$$\therefore \underset{-١}{\text{غا}} \frac{٣س + ٢}{س - ٢} = \frac{\underset{-١}{\text{غا}} (٣س + ٢)}{\underset{-١}{\text{غا}} (س - ٢)} = \frac{٣ \underset{-١}{\text{غا}} س + \underset{-١}{\text{غا}} ٢}{\underset{-١}{\text{غا}} س - \underset{-١}{\text{غا}} ٢} = \frac{٣(-١) + ٢}{-١ - ٢}$$

$$= \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \underset{-١}{\text{غا}} ق = \frac{١}{٣} \quad \left(\underset{أ}{\text{غا}} \frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{\underset{أ}{\text{غا}} ق_١}{\underset{أ}{\text{غا}} ق_٢} ، \underset{أ}{\text{غا}} ق_٢ \neq \text{صفر} \right)$$

مثال٤) ليكن ق: ح ← ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س - ١|}{س - ١} + ٤س & \forall\ س \neq ١ \\ ١ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند س = ١

البرهان/ استنادا الى تعريف القيمة المطلقة يمكن كتابة التطبيق بالشكل الاتي :-

$$ق(س) = \begin{cases} ١ + ٤س & س \quad ١ \\ -١ + ٤س & س \quad ١ \\ ١ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$$

$\exists$ ⟨م ن⟩ = ⟨$١ + \frac{١}{ن}$⟩ متتابعة في ح / {١} متقاربة وغايتها = ١

وان غا ⟨ق($١ + \frac{١}{ن}$)⟩ = غا ⟨١ + ٤ ($١ + \frac{١}{ن}$)⟩ = ٥

اى ان ق(س) ← ٥ عندما س ← ١ من جهة اليمين

ويرمز الى هذه الحالة $\underset{س \to ١^+}{\text{غا}}$ ق = ٥

كذلك $\exists$ ⟨س ن⟩ = ⟨$١ - \frac{١}{ن}$⟩ متتابعة في ح / {١} متقاربة وغايتها = ١

وان غا ⟨ق($١ - \frac{١}{ن}$)⟩ = غا ⟨−١ + ٤ ($١ - \frac{١}{ن}$)⟩ = ٣

اى ان ق(س) ← ٣ عندما س ← ١ من جهة اليسار ويرمز الى هذه الحالة

$\underset{س \to ١^-}{\text{غا}}$ ق = ٣

وبما ان $\underset{س \to ١^+}{\text{غا}}$ ق ≠ $\underset{س \to ١^-}{\text{غا}}$ ق اى الغاية من اليمين موجودة وكذلك الغاية من اليسار لكن غير متساويتين

∴ ليس للتطبيق غاية عند ١

مثال ٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ + ١ & \text{س} > ٢ \\ ٣ - \text{س}^٢ & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند س = ٢

البرهان/

$\exists \langle \text{م}_\text{ن} \rangle = \langle ٢ + \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة متقاربة في ح / [٢] وغايتها = ٢

وان غا $\langle \text{ق}(٢ + \frac{١}{\text{ن}}) \rangle =$ غا $\langle ٢(٢ + \frac{١}{\text{ن}})^٢ + ١ \rangle$

$=$ غا $\langle ٢(٤ + \frac{٤}{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ن}^٢}) + ١ \rangle = ٩$

∴ $\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{غا}}\ \text{ق} = ٩$

كذلك $\exists \langle \text{س}_\text{ن} \rangle = \langle ٢ - \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في ح / [٢] متقاربة وغايتها = ٢

وان غا $\langle \text{ق}(٢ - \frac{١}{\text{ن}}) \rangle =$ غا $\langle ٣ - (٢ - \frac{١}{\text{ن}})^٢ \rangle = -١$

∴ $\underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{غا}}\ \text{ق} = -١$

∴ $\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{غا}}\ \text{ق} \neq \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{غا}}\ \text{ق}$ ∴ ليس للتطبيق غاية عند ٢

مثال ٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٥}{\text{س}^٤ + ٣}$

جد $\underset{٢}{\text{غا}}\ \text{ق}$ ، $\underset{-٣}{\text{غا}}\ \text{ق}$

الحل / برهن ان ق مستمر

∴ $\underset{-٣}{\text{غا}}\ \text{ق} = \frac{\underset{-٣}{\text{غا}}(\text{س}^٢ + ٥)}{\underset{-٣}{\text{غا}}(\text{س}^٤ + ٣)} = \frac{١٤}{٨٤} = \frac{١}{٦}$

٢) وكذلك $\underset{٢}{\text{غا}}\ \text{ق} = \text{ق}(٢) = \frac{٤ + ٥}{١٦ + ٥} = \frac{٩}{٢١} = \frac{٣}{٧}$

مثال ٧) ليكن ق : ح / {−٢} ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٤}{\text{س} + ٢}$

هل توجد $\underset{-٢}{\text{غا}}\ \text{ق}$ ؟ برهن قولك ثم جد $\underset{٢}{\text{غا}}\ \text{ق}$

البرهان/

$\exists \langle \text{م}_\text{ن} \rangle = \langle -٢ + \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في ح / {−٢} متقاربة وغايتها = −٢

لكن $\langle \text{ق}(\text{م}_\text{ن}) \rangle = \langle \text{ق}(-2 + \frac{1}{\text{ن}}) \rangle = \left\langle \frac{(-2 + \frac{1}{\text{ن}})^2 + 4}{(-2 + \frac{1}{\text{ن}}) + 2} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{4 - \frac{4}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}^2} + 4}{\frac{1}{\text{ن}}} \right\rangle = \langle 8\text{ن} - 4 + \frac{1}{\text{ن}} \rangle$ غير متقاربة

(لان التطبيق ق : $\text{ط}^+ \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}_\text{ن} = 8\text{ن} - 4 + \frac{1}{\text{ن}}$ غير محدود)

∴ ليس للتطبيق غاية عند س = −٢

$$\lim_{2} \text{ق} = \lim_{2} \frac{\text{س}^2 + 4}{\text{س} + 2} = \frac{\lim_{2}(\text{س}^2 + 4)}{\lim_{2}(\text{س} + 2)} = \frac{8}{4} = 2$$

لان ق مستمر عند (٢) وان $\lim_{2} (\text{س} + 2) \neq$ صفر

مثال ٨) ليكن ق : [صفر ، ٢] $\longrightarrow$ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} & \forall\ \text{س} \in [0 ، 1[\\ 3 - \text{س} & \forall\ \text{س} \in [1 ، 2] \end{cases}$

جد $\lim_{1} \text{ق}$

(١) $\forall \langle \text{م}_\text{ن} \rangle$ متتابعة في [٠ ، ١[متقاربة وغايتها = ١

فان $\langle \text{ق}(\text{م}_\text{ن}) \rangle = \langle 2(\text{م}_\text{ن}) \rangle$

$\lim \langle \text{ق}(\text{م}_\text{ن}) \rangle = 2 \lim \langle \text{م}_\text{ن} \rangle = 2 \times 1 = 2$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ق} = 2$

(٢) $\forall \langle \text{م}_\text{ن} \rangle$ متتابعة في]١ ، ٢] متقاربة وغايتها = ١ فان

$\langle \text{ق}(\text{م}_\text{ن}) \rangle = \langle 3 - \text{م}_\text{ن} \rangle$

$\lim \langle \text{ق}(\text{م}_\text{ن}) \rangle = \lim (3) - \lim \langle \text{م}_\text{ن} \rangle = 3 - 1 = 2$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ق} = 2$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ق} = \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ق} = 2$

ويمكن ايجاد الغاية كما يلي :-

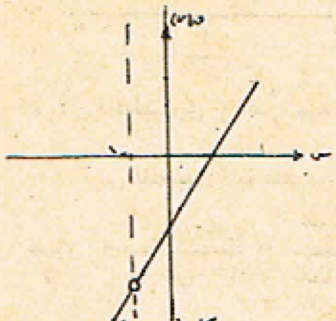
$\lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ق} = \lim_{\text{س} \to 1^+} (3 - \text{س}) = \lim 3 - \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{س} = 3 - 1 = 2$

$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ق} = \lim_{\text{س} \to 1^-} (2\text{س}) = 2 \lim_{\text{س} \to 1^-} \text{س} = 2(1) = 2$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ق} = \lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ق} = 2$

مثال ٩) ليكن ق : ح / {−١} ← ح بحيث $ق(س) = \frac{٢س^٢ - س - ٣}{س + ١}$ جد $\underset{-١}{غا}\ ق$

عند رسمنا للمخطط الديكارتي للتطبيق يظهر ان المخطط يمثل خط مستقيم



شكل (−١، −٥)

وتظهر فجوة عند النقطة (−١ ، −٥)

وبالتحليل للعوامل نستطيع كتابة

$ق(س) = \frac{(٢س - ٣)(س + ١)}{س + ١}$ (∀ س ≠ −١)

وبما ان س ≠ −١ ⟸ س + ١ ≠ ٠

∴ يجوز لنا قسمة البسط والمقام على س + ١

∴ ق(س) = ٢س − ٣ ∀ س ≠ −١

ليكن ع(س) = ٢س − ٣ ∀ س ∈ ح

ونحن نعلم من الفصل الرابع ان التطبيق ع مستمر كثير الحدود

∴ $\underset{-١}{غا}\ ع = ع(-١) = -٥$

وبما ان ع(س) = ق(س) ∀ س ∈ ح / {−١}

∴ $\underset{-١}{غا}\ ع(س) = \underset{-١}{غا}\ ق(س) = -٥$ (راجع الملاحظة ٥)

مثال ١٠) ليكن ق ح⁺ / {٤} ← ح بحيث $ق(س) = \frac{س - ٤}{٣(\sqrt{س} - ٢)}$ نجد $\underset{٤}{غا}\ ق$

الحل/ عند التعويض عن س بالعدد (٤) مباشرة فان $ق(٤) = \frac{صفر}{صفر}$

والتي لامعنى لها .

ولكن بضرب البسط والمقام بمرافق المقام $\sqrt{س} + ٢$ بشرط س ∈ ح⁺ / {٤}

فان $ق(س) = \frac{س - ٤}{٣(\sqrt{س} - ٢)} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢} = \frac{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)}{٣(س - ٤)}$

وبما ان س ≠ ٤ فباستطاعتنا حذف العامل المشترك لنحصل على

$ق(س) = \frac{\sqrt{س} + ٢}{٣}$ ، ∀ س ∈ ح⁺ / {٤}

ليكن $ع(س) = \frac{\sqrt{س} + ٢}{٣}$ ∀ س ∈ ح⁺

ان ع تطبيق مستمر عند ٤ (برهن)

∴ $\underset{٤}{غا}\ ع(س) = ع(٤) = \frac{٤ + ٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

وبما ان ق(س) = ع(س) ∀ س ∈ ح⁺ / {٤}

∴ $\underset{٤}{غا}\ ق = \underset{٤}{غا}\ ع = \frac{٤}{٣}$ (راجع ملاحظة ٥)

مثال ١١) ليكن ك = $\{\text{س} : \text{س} \geqslant -٢ \text{ ، } \text{س} \neq -١\}$

وليكن ق : ك ⟵ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\sqrt{٢+\text{س}} - ١}{\text{س} + ١}$

جد $\underset{-١}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

الحل/ بما ان س $\neq -١$

∴ يمكن ضرب البسط والمقام بمرافق البسط فيصبح :ـ

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\sqrt{٢+\text{س}} - ١)(\sqrt{٢+\text{س}} + ١)}{(\text{س}+١)(\sqrt{٢+\text{س}} + ١)} = \frac{١ + \text{س}}{(\text{س}+١)(\sqrt{٢+\text{س}} + ١)}$$

وبما ان س $\neq -١$

∴ يمكن قسمة البسط والمقام على (س + ١) فيصبح

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{٢+\text{س}} + ١}$$

ليكن ع (س) = $\dfrac{١}{\sqrt{٢+\text{س}} + ١}$ ∀ س $\geqslant -٢$

وبما ان ع مستمر عند (ـ ١) (برهن)

$$\therefore \underset{-١}{\text{غـا}}\ \text{ع}(\text{س}) = \text{ع}(-١) = \frac{١}{\sqrt{٢-١} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ولكن ع (س) = ق(س) ∀ س ∈ ك

$$\therefore \underset{-١}{\text{غـا}}\ \text{ق} = \underset{-١}{\text{غـا}}\ \text{ع} = \frac{١}{٢}$$

مثال ١٢) اذا كان كل من م ، ن ∈ ط^{+} ، أ ∈ ح

ق : ح / { أ } ⟵ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$ فجد $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

الحل/ بما ان س $\neq$ أ ⟸ س ـ أ $\neq$ صفر

∴ يمكن قسمة البسط والمقام على س ـ أ فيصبح

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}}{\dfrac{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{س} - \text{أ}}} = \frac{\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\ \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}}{\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\ \dfrac{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{س} - \text{أ}}}$$

$$= \frac{\text{ن}\ \text{أ}^{\text{ن}-١}}{\text{م}\ \text{أ}^{\text{م}-١}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\ \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$ (راجع ملاحظة ٦)

مثال ١٣) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٣$

جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{صفر}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(٥ + \text{س}) - \text{ق}(٥)}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq \text{صفر}$

الحل/ التعويض عن س بالعدد صفر يقودنا الى $\dfrac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٥)}{\text{صفر}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لامعنى لها

ولذلك يجب ان نتبع مايلي :-

$\text{ق}(٥) = ٢٨$ ، $\text{ق}(٥ + \text{س}) = (٥ + \text{س})^٢ + ٣ = \text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ٢٨$

$\therefore \dfrac{\text{ق}(٥ + \text{س}) - \text{ق}(٥)}{\text{س}} = \dfrac{\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ٢٨ - ٢٨}{\text{س}}$

$= \dfrac{\text{س}^٢ + ١٠\text{س}}{\text{س}} = \text{س} + ١٠$ لان $\text{س} \neq ٠$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(٥ + \text{س}) - \text{ق}(٥)}{\text{س}} = ١٠$

مثال ١٤) ليكن $\text{ق} : \text{ح} / \{-١\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{(\text{س} + ١)^٢}$

جد $\underset{\text{ع} \leftarrow ٠}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(٤ + \text{ع}) - \text{ق}(٤)}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} \neq \text{صفر}$

الحل/ التعويض المباشر عن ع = صفر يعطينا $\dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤)}{\text{صفر}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لامعنى لها

بينما $\text{ق}(٤) = \dfrac{١}{٢٥}$ ، $\text{ق}(٤ + \text{ع}) = \dfrac{١}{(٤ + \text{ع} + ١)^٢} = \dfrac{١}{(٥ + \text{ع})^٢}$

$\therefore \underset{\text{ع} \leftarrow ٠}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(٤ + \text{ع}) - \text{ق}(٤)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \leftarrow ٠}{\text{غا}} \dfrac{\dfrac{١}{(٥ + \text{ع})^٢} - \dfrac{١}{٢٥}}{\text{ع}}$

وعند التعويض عن ع = صفر سنحصل على النتيجة $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ايضا وبتبسيط المقدار اكثر وذلك بايجاد المضاعف المشترك لمخارج كسور البسط نحصل على :-

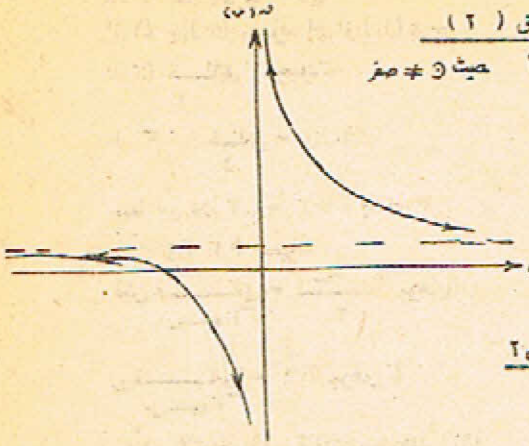
$\dfrac{\text{ق}(٤ + \text{ع}) - \text{ق}(٤)}{\text{ع}} = \dfrac{٢٥ - (٥ + \text{ع})^٢}{٢٥\text{ع}(٥ + \text{ع})^٢} = \dfrac{-(١٠\text{ع} + \text{ع}^٢)}{٢٥\text{ع}(٥ + \text{ع})^٢}$

$= \dfrac{-\text{ع}(١٠ + \text{ع})}{٢٥\text{ع}(٥ + \text{ع})^٢}$ وبما ان $\text{ع} \neq \text{صفر}$ نيكن اختصار العامل المشترك

$\therefore \underset{\text{صفر}}{\text{غـا}} \dfrac{-(١٠ + \text{ع})}{٢٥(٥ + \text{ع})^٢} = \dfrac{-٢}{١٢٥}$

مثال ١٥) ليكن $ق(س) = س^{٢}$

جد $\lim\limits_{ن \to صفر} \dfrac{ق(ن+٢) - ق(٢)}{ن^{٢}}$ حيث ن ≠ صفر



(شكل ٥ـ٢)

الحل/ $ق(٢) = ٤$

$ق(٢+ن) = (ن+٢)^{٤}$

$= ٤ + ٤ن + ن^{٢}$

وبما ان ن ≠ صفر

$\therefore \dfrac{ق(٢+ن) - ق(٢)}{ن^{٢}}$

$= \dfrac{٤ + ٤ن + ن^{٢} - ٤}{ن^{٢}} = \dfrac{٤ن + ن^{٢}}{ن^{٢}}$

$= \dfrac{ن(٤+ن)}{ن^{٢}} = \dfrac{٤+ن}{ن}$

من المخطط الديكارتي المجاور (شكل (٥ـ٢))

نلاحظ ان $ص = \dfrac{٤+ن}{ن}$ يزداد بدون حدود

عندما ن ← صفر خلال القيم الموجبة

ويتناقص بدون حدود عندما ن ← صفر خلال القيم السالبة .

∴ لاتوجد الغاية

مثال ١٦) ليكن $ق(س) = س^{٣}$

جد $\lim\limits_{هـ \to صفر} \dfrac{ق(-١+هـ) - ق(-١)}{\sqrt{هـ}}$ ، هـ > صفر

الحل/ $ق(-١) = -١$ $ق(-١+هـ) = (-١+هـ)^{٣} = هـ^{٣} - ٣هـ^{٢} + ٣هـ - ١$

$\therefore \dfrac{ق(-١+هـ) - ق(-١)}{\sqrt{هـ}} = \dfrac{هـ^{٣} - ٣هـ^{٢} + ٣هـ - ١ - (-١)}{\sqrt{هـ}} = \dfrac{هـ(هـ^{٢} - ٣هـ + ٣)}{\sqrt{هـ}}$

$= \sqrt{هـ}\,(هـ^{٢} - ٣هـ + ٣)$

$\therefore \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(-١+هـ) - ق(-١)}{\sqrt{هـ}} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \sqrt{هـ}\,(هـ^{٢} - ٣هـ + ٣) = صفر$

مثال ١٧) ليكن $ق : [-١ ، ٤] \to ح$ بحيث $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & -١ \leqslant س \leqslant ١ \\ \frac{١}{٢}س^{٢} - ٣ & ١ < س \leqslant ٤ \end{cases}$

(١) مثل ق ديكارتيا

(٢) هل ق مستمر عند ١ ؟ برهن اجابتك باستخدام الملاحظات (٥ـ٢)

الملاحظة الاولى

البرهان/ لكي نبرهن ان ق مستمرعند (١)

يجب ان نبرهن مايلي :-

(١) ق(١) معرف اى ق(١) ∈ ح

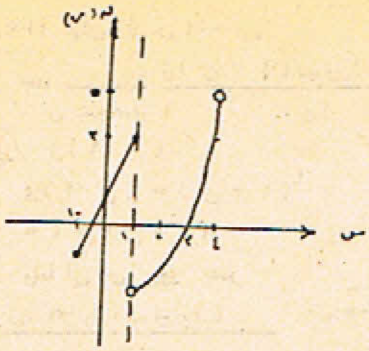
(٢) غـــا ق موجودة
١

(٣) غـا ق = ق(١)
١

وبما ان ق(١) = ٢ × ١ + ١ = ٣

∴ ق(١) معرف

لكن غـــا ق = $\frac{٥}{٢}$ (برهن)
س ← ١⁺



شكل (٥ـ٣)

وغـــا ق = ٣ (برهن)
س ← ١⁻

∴ لاتوجد غايـة للتطبيق عند (١)

اى ان الشرط الثاني غير متوفر

∴ ق غير مستمرعند (١)

مثال ١٨) ليكن ق : [ـ١ ، ٢] ← ح بحيث ق(س) = { ٢س٢ س ∈ [ـ١ ، ١] ؛ ٣ـ س س ∈]١ ، ٢] }

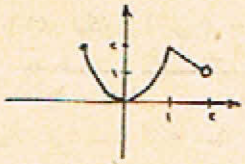
(١) مثل ق د يكارتيا

(٢) بنفس الطريقة الواردة في المثال ١٧ برهن ق مستمرعند ١

(٣) هل توجد غـــا $\frac{\text{ق(١+ هـ) ـ ق(١)}}{\text{هـ}}$ ؟ برهن اجابتك
هـ ← ٠

الحل/ (١) ق (١) = ٢ معرف

(٢) غـــا ق = ٢ (برهن)
س ← ١⁺


شكل (٥ـ٤)

غـــا ق = ٢ (برهن)
س ← ١⁻

∴ غـــا ق = غـــا ق = ٢ اى أن الغاية موجودة وتساوى ٢
س ← ١⁺ س ← ١⁻

(٣) غـــا ق = ق (١)
١

∴ ق مستمرعند ١

(٣) غـــا $\frac{\text{ق(١ + هـ) ـ ق(١)}}{\text{هـ}}$
هـ ← ٠

(أ) نجد ق (١ + هـ) وهنا اما هـ > صفر فيكون هـ + ١ > ١ أو هـ < صفر فيكون ١ + هـ < ١ فاذا كان هـ > صفر فان ق(١ + هـ) = ٣ ـ (١ + هـ) = ٣ ـ ١ ـ هـ = ٢ ـ هـ

وان ق (١) = ٢

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \frac{2 - \text{هـ} - 2}{\text{هـ}} = -1$$

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to\text{صفر}^{+}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = -1$$

واذا كان هـ < صفر وهنا $\text{ق}(1+\text{هـ}) = 2(1+\text{هـ})^2 = 2(1+2\text{هـ}+\text{هـ}^2)$

$= 2 + 4\text{هـ} + 2\text{هـ}^2$

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \frac{2 + 4\text{هـ} + 2\text{هـ}^2 - 2}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \frac{\text{هـ}(4 + 2\text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} (4 + 2\text{هـ}) = 4$$

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to\text{صفر}^{-}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = 4$$

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to\text{صفر}^{+}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} \neq \underset{\text{هـ}\to\text{صفر}^{-}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \text{لاتوجد } \underset{\text{هـ}\to\text{صفر}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}}$$

مثال ١٩) ليكن ق : $[-5 , 5] \longrightarrow$ ح

بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - 4| & \forall\, \text{س} \in]2 , 5] \\ 2\text{س} - 2 & \forall\, \text{س} \in [-2 , 2] \\ [\text{س} - 2] & \forall\, \text{س} \in [-5 , -2[\end{cases}$

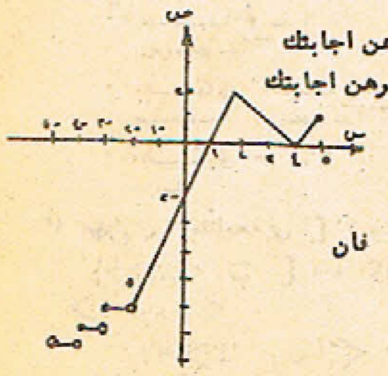
مثل ق ديكارتيا ثم

١) برهن ان $\underset{2}{\text{غا}}\ \text{ق} = 2$

٢) برهن ان $\underset{-2}{\text{غا}}\ \text{ق} = 6$

٣) هل توجد للتطبيق ق غاية عند ٤ ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد للتطبيق ق غاية عند − ٤ ؟ برهن اجابتك



الحل/ (١) $\forall \langle \text{س}_\text{ن} \rangle$ متتابعة في $]-2 , 2[\,/\, \{2\}$ متقاربة غايتها = ٢

(١) عندما $\langle \text{س}_\text{ن} \rangle$ في $]-2 , 2[$ فان

$\langle \text{ق}(\text{س}_\text{ن}) \rangle = \langle 2\text{س}_\text{ن} - 2 \rangle$

غا $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle$ = غا $\langle ٢\text{م}_{\text{ن}} - ٢ \rangle$

= ٢غا $\langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ − غا $\langle ٢ \rangle$ = ٢ × ٢ − ٢ = ٢

أي $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{غـا}}$ ق = ٢

٢) عندما $\langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle \subset]٢ ، ٤[$ فان $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \langle |\text{م}_{\text{ن}} - ٤| \rangle$

= $\langle -(\text{م}_{\text{ن}} - ٤) \rangle$

∴ غا $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle$ = غا $\langle -(\text{م}_{\text{ن}} - ٤) \rangle$

= −غا $\langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ − غا $\langle -٤ \rangle$ = −٢ + ٤ = ٢

∴ $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{غـا}}$ ق = ٢

∴ $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{غـا}}$ ق = $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{غـا}}$ ق = ٢

∴ $\underset{٢}{\text{غـا}}$ ق = ٢

٢) $\forall \langle \text{س}_{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في $[-٣ ، ٢]$ / {٢} متقاربة وغايتها = −٢

فان (١) عندما $\langle \text{س}_{\text{ن}} \rangle \subset]-٢ ، ٢]$ فان

$\langle \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) \rangle = \langle ٢\text{س}_{\text{ن}} - ٢ \rangle$

∴ غا $\langle \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) \rangle$ = ٢غا $\langle \text{س}_{\text{ن}} \rangle$ − غا $\langle ٢ \rangle$ = ٢(−٢) − ٢ = −٦

∴ $\underset{\text{س} \to -٢^{+}}{\text{غـا}}$ = −٦

٢) عندما $\langle \text{س}_{\text{ن}} \rangle \subset [-٣ ، -٢[$ فان $\langle \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) \rangle = \langle [\text{س}_{\text{ن}} - ٣] \rangle$

= $\langle -٦ \rangle$

∴ غا $\langle \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) \rangle$ = غا $\langle -٦ \rangle$ = −٦

∴ $\underset{\text{س} \to -٢^{-}}{\text{غـا}}$ = −٦

∴ $\underset{\text{س} \to -٢^{+}}{\text{غـا}}$ ق = $\underset{\text{س} \to -٢^{-}}{\text{غـا}}$ ق = −٦

∴ $\underset{-٢}{\text{غـا}}$ ق = −٦

٣) $\forall \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في $]٢ ، ٥]$ / {٤} متقاربة وغايتها = ٤

اما $\langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle \subset]٢ ، ٤[$ فان $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \langle |\text{م}_{\text{ن}} - ٤| \rangle$ =

$\langle ٤ - \text{م}_{\text{ن}} \rangle$

∴ غا $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle$ = غا $\langle ٤ \rangle$ − غا $\langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ = ٤ − ٤ = صفر

∴ $\underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{غـا}}$ ق = صفر

او <م ن> ⊂]٤ ، ٥[فان <ق (م ن)> = <|م ن − ٤|> = <م ن − ٤>

∴ غا <ق (م ن)> = غا <م ن − ٤> = غا <م ن> − غا <٤> =

٤ − ٤ = صفر

∴ غـــا ق (س ← ٤⁺) = صفر

∴ غـــا ق (س ← ٤⁺) = غـــا ق (س ← ٤⁻) = صفر

∴ غـــا ق (٤) = صفر

<u>ملاحظة</u> / يمكن برهن غـــا ق (٤) = صفر باستخدام الملاحظة الاولى من ملاحظـــات (٥ − ٢)

بما ان ق مستمر عند ٤ ، غـــا ق (٤) = ق (٤) = |٤ − ٤| = صفر

٤) ∀ <م ن> متتابعة في]−٥ ، −٣[/ {−٣} متقاربة غايتها = −٤

٥) اذا كان <م ن> ⊂]−٤ ، −٣[فان <ق (م ن)> = <[م ن − ٣]> = <−٧>

∴ غا <ق (م ن)> = غا <−٧> = −٧

∴ غـــا ق (س ← −٤⁺) = −٧

٦) اذا كان <م ن> ⊂]−٥ ، −٤[فان <ق (م ن)> = <[م ن − ٣]> = <−٨>

∴ غا <ق (م ن)> = غا <−٨> = −٨

∴ غـــا ق (س ← −٤⁻) = −٨

∴ غـــا ق (س ← −٤⁺) ≠ غـــا ق (س ← −٤⁻)

∴ لاتوجد غاية للتطبيق عند (−٤)

<u>ملاحظة</u> / يمكن برهنة انه ليس للتطبيق غاية عند (−٤) وذلك كما يلي :−

∃ <م ن> = <−٤ + ١/٢ن> متتابعة في]−٤ ، −٣[متقاربـــة

غايتها = −٤ وان غا <ق (م ن)> = −٧

وكذلك ∃ <م ن> = <−٤ − ١/٢ن> متتابعة في]−٥ ، −٤[

متقاربـــة وغايتها = −٤

∴ غا <ق (م ن)> = −٨

∴ لاتوجد غاية للتطبيق عند −٤ وهذا استنادا الى التعريف (٥ − ٢)

تماريـــــن

١) ليكن ق : $ح / \{٢\} \longleftarrow ح$ بحيث $ق(س) = \frac{س - ٢}{٢|س - ٢|}$ برهن انـــه لاتوجد غاية للتطبيق عند ٢

٢) ليكن ق : $ح / \{٣\} \longleftarrow ح$ بحيث $ق(س) = \frac{١}{(س - ٣)^٢}$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل توجد غاية للتطبيق عند ٣ ؟ برهن اجابتك

في كل من التمارين (من ٣ الى ١٤) .

١) جد اكبر منطلق للتطبيق مثل ك (٢) جد $\underset{أ}{\text{غـــا}}$ ق ان وجد حيث أ يلاصق الى ك والمبين ازاء كل تطبيق أدناه .

٣) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، أ = ٢

٤) $ق(س) = \frac{س^٣ + ٢س - ١}{س + ٢}$ ، أ = ٣

٥) $ق(س) = \frac{س^٣ + ١}{س + ١}$ ، أ = −١

٦) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٧س + ٢}$ ، أ = ٣

٧) $ق(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤س + ٤}$ ، أ = ٢

٨) $ق(س) = \frac{س^٤ - ١}{س^٢ - ١}$ ، أ = ١

٩) $ق(س) = \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$ ، أ = ٢

١٠) $ق(س) = \frac{س^٤ - ٢س - ٣}{س + ١}$ ، أ = −١

١١) $ق(س) = \frac{\sqrt{٢س + ٣} - س}{س - ٣}$ ، أ = ٣

١٢) $ق(س) = \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣}$ ، أ = ٩

١٣) $ق(س) = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٧} - ٤}$ ، أ = −٣

١٤) $ق(س) = \frac{\sqrt{س^٢ + ٣} - ٢}{س + ١}$ ، أ = −١

جد الغاية لكل من التمارين (من ١٥ الى ٢٢)

١٥) $\underset{س \to ٢}{\text{غـــا}} (س^٢ + ٤س - ٦)$

١٦) $\underset{\text{س} \to \text{٤}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١٦}}{\text{س} - \text{٤}}$ ، $\text{س} \neq \text{٤}$

١٧) $\underset{\text{س} \to -\text{٢}}{\text{غـا}} \dfrac{\sqrt{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}}{\text{س} + \text{٢}}$ ، $\text{س} \in [-\text{٢} ، \text{٢}]$

١٨) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{غـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٥}} - \sqrt{\text{٥}}}{\text{٢س}}$ ، $\text{س} \geq -\text{٥}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$

١٩) $\underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{غـا}} \dfrac{\sqrt{\text{٢س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{٢س}}}{\text{هـ}}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{هـ} \in \text{ح}^{++}$

٢٠) $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{غـا}} \dfrac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}}{\text{س} - \text{٢}}$ ، $\text{س} \neq \text{٢}$

٢١) $\underset{\text{س} \to -\text{٤}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٦}} - \text{٤٠٩٦}}{\text{س} + \text{٤}}$ ، $\text{س} \neq -\text{٤}$

٢٢) $\underset{\text{س} \to -\text{٢}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٨}}$ ، $\text{س} \in \text{ح} / \{-\text{٢} ، -\text{٤}\}$

٢٣) اذا كان $\text{ق} : \text{ح} / \{\text{٢}\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{\text{٥}} - \text{٣٢}}{\text{س}^{\text{٤}} - \text{١٦}}$ فجد $\underset{\text{٢}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

٢٤) اذا كان $\text{ق} : \text{ح} / \{\sqrt{\text{٣}}\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{\text{٦}} - \text{٢٧}}{\text{س} - \sqrt{\text{٣}}}$ فجد $\underset{\sqrt{\text{٣}}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

٢٥) ليكن $\text{ق} : \text{ح} / \,]\text{١} ، \text{٢}[\longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}$ فجد $\underset{\text{٢}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

وبرهن انه لاتوجد غاية للتطبيق عند ١ .

٢٦) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$ فجد $\underset{-\text{١}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

٢٧) ليكن $\text{ق} : \text{ح}^{+} / \{\text{أ}\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+}$

فجد $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$

٢٨) ليكن $\text{ق} : \text{ح}^{+} / \{\text{أ}\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{أ}}}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}}$ فجد $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\ \text{ق}$ ،

$\text{أ} \in \text{ح}^{+}$.

من تمرين (٢٩ الى ٣٣) احسب الغاية ان وجدت

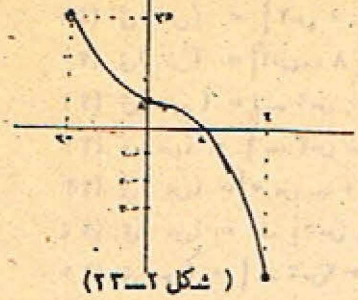
٢٩) $\underset{\text{س} \to \text{صفر}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٤} + \text{س}) - \text{ق}(\text{٤})}{\text{س}}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{١}$

٣٠) $\underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٢} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{هـ}}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{٢}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$

٣١) $\underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{غـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{١}}{\text{س}}$ ، $\text{أ} \neq \text{صفر}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$

(٢) ق :] ــ٣ ، ٤] ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨ ــ $س^{٣}$

س	ص
ــ٣	٣٥
٤	ــ٥٦
٠	٨
٢	٠



(شكل ٢ــ٢٣)

(٣) ق(س) = $(س ــ ٢)^{٣}$ ــ ٨

س	ص
٠	ــ١٦
٤	٠
٢	ــ٨

(شكل ٢ــ٢٤)

تمارين ٢ــ٣

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ــ

(١) ق(س) = ــ$س^{٢}$ (٢) ق(س) = $س^{٢}$ ــ ٢ (٣) ق(س) = $س^{٢}$ + ٢

(٤) ق(س) = ٢$س^{٢}$ ــ ٢ (٥) ق(س) = ــ٢$س^{٢}$ + ١

(٦) ق(س) = $(س ــ ٢)^{٢}$ (٧) ق(س) = ــ $(س ــ ٢)^{٢}$

(٨) ق(س) = $(س ــ ٢)^{٢}$ + ٢ (٩) ق(س) = $(س ــ ٢)^{٢}$ ــ ٢

(١٠) ق(س) = ٢ ــ $(س ــ ٣)^{٢}$ (١١) ق(س) = ــ٢ ــ $(س ــ ٢)^{٢}$

(١٢) ق(س) = $(٢س + ٣)^{٢}$ (١٣) ق(س) = $(٢س + ٣)^{٢}$ + ٢

(١٤) ق(س) = $(٢س + ٣)^{٢}$ ــ ٢ (١٥) ق(س) = ٢ ــ $(٢س + ٣)^{٢}$

(١٦) ق(س) = |٢$س^{٢}$ + ٤| (١٧) ق(س) = |ــ٢$س^{٢}$ + ٤| ــ ٣

(١٨) ق(س) = ــ |٢$س^{٢}$ ــ ٣| + ٥ (١٩) ق(س) = |$س^{٢}$ + ١|

(٢٠) ق(س) = س |$س^{٢}$| + $س^{٢}$

$$= \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\frac{\text{س} - (\text{س}+\text{ع})}{\text{س}(\text{س}+\text{ع})}}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{-١}{\text{س}(\text{س}+\text{ع})} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

مثال ٣) ليكن ق : ح++ ← ح بحيث ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$. جد ق (س)

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$= \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\cancel{\text{س}} + \text{ع} - \cancel{\text{س}}}{\text{ع}(\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})}$$

$$= \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

مثال ٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^{٢} + ١ & \text{س} \geq ٢ \\ ٥\text{س} - ١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$

هل ق قابل للاشتقاق عند (٢) ؟ برهن اجابتك

الحل/ من التعريف : اذا وجدت $\text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}}$ فان ق قابل للاشتقاق عند ٢

١) اذا كان ع > صفر فان $\text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{٢(٢+\text{ع})^{٢} + ١ - ٩}{\text{ع}}$

$$= \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{٩ + ٨\text{ع} + ٢\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} (٨ + ٢\text{ع}) = ٨$$

$$\text{اى } \text{غـا}_{\text{ع}\to \text{صفر}^{+}} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}} = ٨$$

٢) اذا كان ع < ٠

فان $\text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{٥(٢+\text{ع}) - ١ - ٩}{\text{ع}} = \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{٩ + ٥\text{ع} - ٩}{\text{ع}}$

$$= \text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{٥\text{ع}}{\text{ع}} = ٥ \quad \therefore \text{غـا}_{\text{ع}\to \text{صفر}^{-}} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}} = ٥$$

$$\therefore \text{غـا}_{\text{ع}\to \text{صفر}^{+}} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}} \neq \text{غـا}_{\text{ع}\to \text{صفر}^{-}} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}}$$

$\therefore$ لاتوجد $\text{غـا}_{\text{ع}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢+\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}}$

$\therefore$ ق غير قابل للاشتقاق عند ٢

مثال ٥) ليكن $ق : ح \to ح$ بحيث $ق(س) = |٣س - ٥|$

هل ق قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$ ؟ برهن اجابتك ثم جد $\bar{ق}(٢)$

الحل/ اذا وجدت $\underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{ق(\frac{٥}{٣} + ع) - ق(\frac{٥}{٣})}{ع}$ فان ق قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$

ولذا الان هل توجد هذه الغاية ؟

$$\underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{ق(\frac{٥}{٣} + ع) - ق(\frac{٥}{٣})}{ع} = \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|٣(\frac{٥}{٣} + ع) - ٥| - |٣(\frac{٥}{٣}) - ٥|}{ع}$$

$$= \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|٥ + ٣ع - ٥| - \text{صفر}}{ع} = \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|٣ع|}{ع}$$

١) إما $ع > ٠$ اى $ع \to \text{صفر}^{+}$ فتكون $\underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|٣ع|}{ع} = ٣$

٢) او $ع < ٠$ اى $ع \to \text{صفر}^{-}$ فتكون $\underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{-٣ع}{ع} = -٣$

$\therefore$ لاتوجد $\underset{ع \to \text{صفر}}{\text{غـا}} \frac{ق(\frac{٥}{٣} + ع) - ق(\frac{٥}{٣})}{ع}$

$\therefore$ ق غير قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$

$$\bar{ق}(٢) = \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{ق(٢ + ع) - ق(٢)}{ع} = \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|٣(٢ + ع) - ٥| - ١}{ع}$$

$$= \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{|١ + ٣ع| - ١}{ع} = \underset{ع \to ٠}{\text{غـا}} \frac{\cancel{١} + ٣ع - \cancel{١}}{ع} = ٣$$

مثال ٦) ليكن ق : $\{س : س \leq ٤\} \to ح$

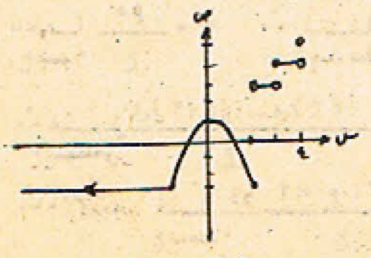
بحيث $ق(س) = \begin{cases} ١ - س^{٢} & س \in [-٢ ، ٢] \\ [س] + ١ & س \in]٢ ، ٤] \\ -٣ & س \leq -٢ \end{cases}$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل ق مستمر عند − ٢ ، ٢ ، ٣ ؟ برهن اجابتك

هل توجد غاية للتطبيق عند − ٢ ، ٢ ، ٣ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق قابل للاشتقاق عند (− ٢) ؟ برهن اجابتك

٥) برهن ان ق محدود وجد اعظم واوطأ قيمة للتطبيق .



(شكل ٥ـ٦)

٦) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق متزايدا وبرهن اجابتك

٧) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق متناقصا وبرهن اجابتك

٨) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق غير متزايد وغير متناقص

الحل/ سوف اجيب على الفرع الرابع من السؤال واترك باقي الفروع كتمرين للطالب .

$$\underset{\text{ع}\to\,٠^{+}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(-٢+\text{ع})-\text{ق}(-٢)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to\,٠^{+}}{\text{غا}}\ \frac{١-(-٢+\text{ع})^{٢}-(-٣)}{\text{ع}}\ \text{اذا}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\,٠^{+}}{\text{غا}}\ \frac{١-(٤-٤\text{ع}+\text{ع}^{٢})+٣}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to\,٠^{+}}{\text{غا}}\ \frac{-٣+٤\text{ع}-\text{ع}^{٢}+٣}{\text{ع}} = ٤$$

$$\text{كذلك}\quad \underset{\text{ع}\to\,٠^{-}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(-٢+\text{ع})-\text{ق}(-٢)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to\,٠^{-}}{\text{غا}}\ \frac{-٣-(-٣)}{\text{ع}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{+}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(-٢+\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}} \neq \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{-}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(-٢+\text{ع})-\text{ق}(-٢)}{\text{ع}}$$

$$\therefore\ \text{لاتوجد}\quad \underset{\text{ع}\to\,٠}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(-٢+\text{ع})-\text{ق}(-٢)}{\text{ع}}$$

$\therefore$ ق غير قابل للاشتقاق عند (-٢) .

مثال ٢) ليكن $\text{ق}:\text{ح}\to\text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢}-٥\text{س} & \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}^{٢}+٣\text{س}-٨ & \text{س} < ٢ \end{cases}$

هل ق قابل للاشتقاق عند ٢ ؟ برهن أجابتك

$$\text{الحل/}\ \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{+}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(٢+\text{ع})-\text{ق}(٢)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{+}}{\text{غا}}\ \frac{٣(٢+\text{ع})^{٢}-٥(٢+\text{ع})-٢}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{+}}{\text{غا}}\ \frac{٧\text{ع}+٣\text{ع}^{٢}}{\text{ع}} = ٧$$

$$\underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{-}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(٢+\text{ع})-\text{ق}(٢)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{-}}{\text{غا}}\ \frac{(٢+\text{ع})^{٢}+٣(٢+\text{ع})-٨-٢}{\text{ع}}$$

$$\underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}^{-}}{\text{غا}}\ \frac{٧\text{ع}+\text{ع}^{٢}}{\text{ع}} = ٧$$

$$\therefore \underset{\text{ع}\to\,\text{صفر}}{\text{غا}}\ \frac{\text{ق}(٢+\text{ع})-\text{ق}(٢)}{\text{ع}} = ٧ = \text{ق}'(٢)$$

$\therefore$ ق قابل للاشتقاق عند ٢

تمارين

جد باستخدام التعريف مشتقة كل من التطبيقات التالية (من ١ الى ٨)

١) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{١}}{\text{س} - \text{١}}$ ، $\text{س} \neq \text{١}$ (٢) $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}$

٣) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٢س} + \text{٣}}{\text{٣س} - \text{٢}}$ ، $\text{س} \neq \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$

٤) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}{\text{٢}}$ (٥) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{\text{س} + \text{٣}}}$ ، $\text{س} > -\text{٣}$

٦) $\text{ق(س)} = \text{س}\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} > \text{صفر}$

٧) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} - \text{١}}}$ $\text{س} > \text{١}$

٨) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}}$ ، $|\text{س}| < \text{٢}$

اى من التطبيقات التالية قابلة للاشتقاق عند أ المبين ازاء كل منها ؟ برهن اجابتك .

٩) $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}}$ ، أ = ٤،٠ ، حيث المنطلق ح^{++}

١٠) $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٤}}$ ، أ = ١

١١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} & \forall\ \text{س} \in \text{ص} \\ \text{س} & \text{س} \in \text{ح}/\text{ص} \end{cases}$ ، أ = صفر

١٢) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} & \forall\ \text{س} \geq \text{صفر} \\ -\sqrt{-\text{س}} & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$ ، أ = صفر

١٣) $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}} + \sqrt{-\text{س}}$ ، أ = صفر (جد اكبر منطلق لهذا التطبيق)

١٤) ق(س) = س − ل (س) حيث

$\text{ل(س)} = \begin{cases} \text{س} \cdot \text{ع(س)} & \text{اذا كانت س} \neq \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت س} = \text{٠} \end{cases}$

وان $\text{ع(س)} = \text{ع}^{*}\left(\dfrac{\text{١}}{\text{س}}\right)$: $\text{ع} : \text{ح}/\{\text{٠}\} \to \text{ح}$

وان $\text{ع}^{*}\text{(س)} = (\text{س} - [\text{س}])\ \text{أص}\ ([\text{س}] + \text{١} - \text{س})$ ، أ = صفر

حيث أ (أص) ب = اصغر العددين أ ، ب

١٥) $\text{ق(س)} = \text{٣}\ |\text{س}| + \text{١}$ ، أ = صفر

١٦) $\text{ق(س)} = [\text{س} + \text{١}]$ أ = −٥ر٢

١٧) اذا كان ق : ح ← ح بحيث $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٢س}^{\text{٢}} & \forall\ \text{س} < \text{١} \\ \text{أس}^{\text{٢}} + \text{ب س} & \forall\ \text{س} \geq \text{١} \end{cases}$

وكان ق قابلا للاشتقاق عند ال (١) فجد قيمة كل من [أ ، ب] الجواب
(ـ ٢ ، ٨)

١٨) ليكن ق : { س : س ≠ ٣ } ⟵ ح بحيث
ق(س) = { ١ ـ س٢ ∀ س ≤ ١ ، [س] ـ ١ ∀ س > ١ } .

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق مستمر عند ١ وغير قابل للاشتقاق عند ١
٣) هل توجد غاية للتطبيق عند ٢ ؟ برهن ذلك

١٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { س٢ ∀ س > ١ ، س٣ ∀ س ≤ ١ }

١) برهن ان ق مستمر عند ١ وغير قابل للاشتقاق عند ١

٢٠) اذا كان ق : ك ⟵ ح بحيث ق(س) = | ٢س | ـ $\frac{٢}{٣}$ | ٧ ـ ٣س |

حيث ك = { س : س ∈ ح ، س < $\frac{٧}{٣}$ } نبرهن باستخدام التعريف ان

ق̄(أ) = صفر
∀ أ ∈ ك

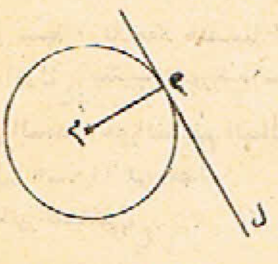
٢١) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٤س٢ ـ ٦س + ٩

ل : ح ⟵ ح بحيث ل (س) = ٦س + ١ فاثبت ان
ق̄ (س) + ل̄ (س) = ٨ س .

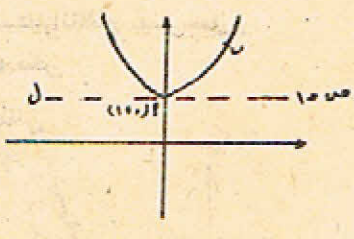
٢٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { ٣ ـ س ∀ س ≤ ٢ ، ½ س٢ ـ ١ ∀ س > ٢ }

هل ق قابل للاشتقاق عند ٢ ؟ برهن اجابتك .

التفسير الهندسي للمشتقة



(شكل ٥ ـ ٧)



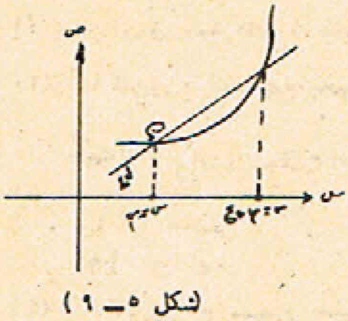
(شكل ٥ ـ ٨)

لقد سبق ان عرفنا المستقيم المماس للدائرة عند النقطة الواقعة على الدائرة وقلنا انه المستقيم الذى يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة وواحدة فقط وكما مرسوم في شكل (٥ ـ ٧) نلاحظ ان نصف قطر الدائرة م أ من مركز الدائرة م عمود على المستقيم ل المماس للدائرة عند نقطة أ . وعند رسمنا لمنحنى التطبيق ق (س) = س٢ + ١ كما في الشكل (٥ ـ ٨)

كيف نستطيع تعريف المستقيم المماس الى هذا المنحني عند النقطة أ ؟
اذا كان النقطة أ هي النقطة (٠ ، ١) ، اوطا نقطة على المنحني ، كما مبين في الشكل (٥ ــ ٨) وان المستقيم المماس هذا يمس المنحنى في نقطة واحـــدة وواحدة فقط .

ولكن هذا التعريف لايكفي ، طالما ان هناك عدة مستقيمات تشترك مع المنحنى في نقطة واحدة . فمثلا المحور الثاني يشترك مع المنحنى في نقطة واحدة ولكنه لايعتبـر مماسا للمنحنى .

ليكن المنحنى ص = ق (س) كما موضح في الشكل (٥ ــ ٩)

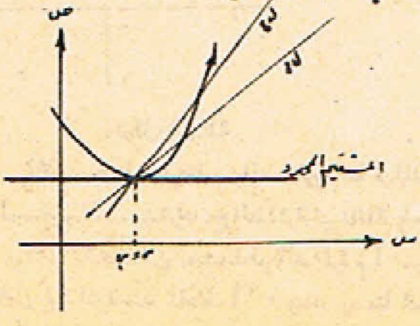


(شكل ٥ ــ ٩)

نرسم المستقيم $ل_ع$ خلال النقطتين م ، ن الواقعتين على منحنى التطبيق
وبما ان المستقيم الواصل بين نقطتين على المنحنى يسمى بالمستقيم القاطع للمنحنى
∴ $ل_ع$ هو المستقيم القاطع للمنحنى
ص = ق (س)
لتكن احداثي نقطة ن هي ($س_1$ ، $ص_1$)
وهذا يعني ان $ص_1$ = ق($س_1$)
ولتكن احداثيي نقطة م ($س_1$+ ع ، ق($س_1$ + ع) وعندما تكون ع > صفـــر
وان م تكون على يمين ن كما في الشكل (٥ ــ ٩) اما اذا كانت ع < صفر فان م تقع على يسار ن

$$\text{ميل المستقيم}\ ل_ع = \frac{ق(س_1+ع) - ق(س_1)}{س_1 + ع - س_1} = \frac{ق(س_1+ع) - ق(س_1)}{ع}$$

وعندما ع ⟵ ٠ نلاحظ هندسيا ان م ⟵ ن والمستقيم القاطع يدور حول ن والحقيقة ان $ل_ع$ يقترب نحو وضع محدد عندما ع ⟵ صفر
والمستقيم المحدد هو المستقيم المماس للمنحني عند النقطة ن
ففي الشكل (٥ ــ ١٠) نرى عدة وضعيات الى المستقيم $ل_ع$
والوضع المحدد عندما ع ⟵ ٠
اى اذا كان التطبيق قابلا للاشتقاق عندما س = $س_1$
وبعبارة اخرى : ميل المماس للمنحني عند نقطة واقعة عليه يساوى المشتقـة عند تلك النقطـة .



شكل (٥ ــ ١٠)

تعريف: المستقيم المماس للمنحنى $ص = ق(س)$ عند $ن(س_١، ق(س_١))$ هو المستقيم المار بالنقطة $ن(س_١، ق(س_١))$ وميله $\bar{ق}(س_١)$

اي ان معادلته :

$$ص - ق(س_١) = \bar{ق}(س_١)(س - س_١)$$

تعريف : المستقيم العمود على المنحني الذى معادلته $ص = ق(س)$ عند نقطة $ن(س_١، ق(س_١))$ هو المستقيم المار بنقطة ن والعمود على المستقيم المماس للمنحني عند نقطة ن .

مثال/ جد معادلة المستقيم المماس للمنحني $ق(س) = س^٢ + ١$ عند نقطة على منحني بيان التطبيق والتي احداثيتها السيني = ٢ ثم جد معادلة المستقيم العمود على منحني بيان التطبيق عند النقطة التي احداثيها السيني = ٣

الحل/

١) $ق(س) = س^٢ + ١$ ، $س_١ = ٢$ ، $ص_١ = ق(٢) = ٥$

$$\bar{ق}(س) = \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{ق(س + ع) - ق(س)}{ع}$$

$$= \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{(س + ع)^٢ + ١ - (س^٢ + ١)}{ع}$$

$$= \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{س^٢ + ٢ع + ع^٢ + ١ - س^٢ - ١}{ع} = \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{٢ع س + ع^٢}{ع}$$

$$= \underset{ع \to ٠}{غـا} ٢س + ع = ٢س$$

∴ $\bar{ق}(س) = ٢س$ ميل المماس لاية قيمة س في منطلق التطبيق

∴ $\bar{ق}(٢) = ٢ \times ٢ = ٤$ ميل المماس

∴ المعادلة : $ص - ق(٢) = \bar{ق}(٢)(س - ٢)$

$ص - ٥ = ٤(س - ٢)$

$ص - ٤س + ٣ = ٠$ معادلة المماس

٢) بما ان $\bar{ق}(س) = ٢س$ ميل المماس لاية قيمة لـ س في منطلق التطبيق

∴ $\bar{ق}(٣) = ٢ \times ٣ = ٦$ ميل المماس عند $س = ٣$

∴ المستقيم العمود ميله يساوى المقلوب السالب لميل المماس عند $س = ٣$

$= -\frac{١}{٦}$

$ق(٣) = ١٠$ ∴ معادلة العمود

$$ص - ١٠ = - \frac{١}{٦} (س - ٣)$$

$$س + ٦ص - ٥٧ = ٠$$

نظريـة / اذا كان التطبيق قابلا للاشتقاق عند أ حيث أ ∈ منطلق فان ق مستمرا عند أ

البرهان/ ∵ ق قابلا للاشتقاق عند أ

$$∴ \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(أ + ع) - ق (أ)}{ع} = \bar{ق} (أ)$$

$$ق(أ + ع) - ق (أ) = (\frac{ق(أ + ع) - ق (أ)}{ع}) ع$$

عند ع ⟵ ٠ فان

$$(\frac{ق(أ + ع) - ق (أ)}{ع}) ⟵ \bar{ق} (أ) ، ع ⟵ صفر$$

$$∴ ق (أ + ع) - ق (أ) ⟵ صفر$$

∴ ق مستمرا عند أ

نظريـات في التفاضـل

١) اذا كان ق (س) = حـ ، ثابت ، ∀ س ∈ منطلقه فان $\bar{ق}$ (س) = صفـر
(مشتقة التطبيق الثابت تساوى صفرا)

٢) اذا كان ن ∈ ط+ ، ق(س) = $س^{ن}$ فان $\bar{ق}$(س) = ن $س^{ن-١}$

$$مثال \frac{د}{د س} (س^{١٧}) = ١٧ س^{١٦}$$

اذا كان ع (س) = حـ ق (س) . وكانت مشتقة ق (س) هي $\bar{ق}$(س) فـان

٣) $\bar{ع}$ (س) = حـ $\bar{ق}$ (س) حيث حـ عددا حقيقيا ثابتا .

(مشتقة حاصل ضرب ثابت في بيان تطبيق ما = الثابت × مشتقة بيان التطبيق)

$$مثال/ \quad \frac{د}{د س} (٤ س^{٧}) = ٤ (٧ س^{٦}) = ٢٨ س^{٦}$$

$$مثال اخر/ \quad \frac{د}{د س} (- ٢ س^{٥}) = - ٢ × ٥ س^{٤} = - ١٠ س^{٤}$$

٤) اذا كان كل من ق ، ل قابلا للاشتقاق وكان ع (س) = ق (س) + ل (س) فان

$$\bar{ع} (س) = \bar{ق} (س) + \bar{ل} (س)$$

(مشتقة المجموع الجبرى لعدة تطبيقات = المجموع الجبرى لمشتقات هـــذه التطبيقات)

مثال) اذا كان ق (س) = ٣ س^{٥} + ٢س^{٤} ـ ٧س^{٢} + ٢س + ٥ فان

قَ (س) = ١٥ س^{٤} + ٨س^{٣} ـ ١٤ س + ٢

٥) اذا كان كل من ق ، ل تطبيقا قابلا للاشتقاق وكان ع = ق ⊙ ل فان

عَ = (ق ⊙ لَ) ⊕ (ل ⊙ قَ)

(مشتقة حاصل ضرب تطبيقين = الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول)

مثال/ ع (س) = (س^{٢} ـ ٣س + ٢) (س^{٣} + ٢س^{٢} ـ ٦س) جد عَ (٣) ،

عَ (٢)

الحل/ ليكن ل (س) = س^{٣} + ٢س^{٢} ـ ٦س وليكن ق (س) = س^{٢} ـ ٣س + ٢

لَ (س) = ٣س^{٢} + ٤س ـ ٦ قَ (س) = ٢س ـ ٣

∵ ع (س) = ق (س) · ل (س)

∴ عَ (س) = (س^{٢} ـ ٣س + ٢) (٣س^{٢} + ٤س ـ ٦) + (س^{٣} + ٢س^{٢} ـ ٦س)

(٢س ـ ٣)

∴ عَ (٣) = (٩ ـ ٩ + ٢) (٢٧ + ١٢ ـ ٦) + (٢٧ + ١٨ ـ ١٨) (٦ ـ ٣) = ١٤٧

عَ (٢) = ٤

٦) اذا كان كل من ق ، ل تطبيقا قابلا للاشتقاق وكان ع (س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ل(س)}}$

بشرط ل (س) ≠ صفر فان

عَ (س) = $\dfrac{\text{ل(س) · قَ(س) ـ ق(س) · لَ(س)}}{\left(\text{ل(س)}\right)^{٢}}$

مثال/ جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ ($\dfrac{\text{٢س}^{٢}\text{ ـ ٣س}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣}}$)

ليكن ق (س) = ٢س^{٢} ـ ٣س وليكن ل (س) = س^{٢} + ٣

ولتكن ع (س) = $\dfrac{\text{٢س}^{٢}\text{ ـ ٣س}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣}}$ ،

∵ قَ (س) = ٤س ـ ٣ ، لَ (س) = ٢س

∴ عَ (س) = $\dfrac{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣) (٤س ـ ٣) ـ (٢س}^{٢}\text{ ـ ٣س) × ٢س}}{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣)}^{٢}}$ =

$\dfrac{\text{٣س}^{٢}\text{ + ١٢س ـ ٩}}{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣)}^{٢}}$

٧) اذا كان ن ∈ ط$^{+}$ وكان ق (س) = س$^{-ن}$ بشرط س ≠ صفر فان

قَ (س) = ـ ن س$^{-ن-١}$

٨) ليكن كل من ق ، ل ، ع تطبيقا بحيث ع (س) = ق [ل (س)]

ولنفرض ان ق ، ل قابلا للاشتقاق ∴ فان ع قابلا للاشتقاق وان

عَ (س) = قَ [ل (س)] · لَ (س)

نتيجة / اذا كان $ق(س) = [ل(س)]^{ن}$ حيث ن عددا صحيحا موجبا فان

$$ق'(س) = ن\,[ل(س)]^{ن-١}\,ل'(س)$$

مثال : جد $ق'(س)$ اذا علمت ان $ق(س) = \left(\frac{٣س-٢}{٢س+١}\right)^{٧}$ حيث $س \neq -\frac{١}{٢}$

$$ق'(س) = ٧\left(\frac{٣س-٢}{٢س+١}\right)^{٦}\left(\frac{د}{د\,س}\left(\frac{٣س-٢}{٢س+١}\right)\right)$$

ولايجاد $\frac{د}{د\,س}\left(\frac{٣س-٢}{٢س+١}\right)$ نطبق نظرية ٦

$$\therefore ق'(س) = ٧\left(\frac{٣س-٢}{٢س+١}\right)^{٦}\frac{(٢س+١)\times ٣-(٣س-٢)\times ٢}{(٢س+١)^{٢}} =$$

$$= \frac{٤٩(٣س-٢)^{٦}}{(٢س+١)^{٨}}$$

مثال ٢) اذا كان $ق(س) = (س^{٢}+٣س-٢)^{٤}$ فجد $ق'(س)$

الحل/ $ق'(س) = ٤(س^{٢}+٣س-٢)^{٣}(٢س+٣)$ لان مشتقة $(س^{٢}+٣س-٢)$ تساوي $٢س+٣$

مثال ٣) جد $ع'(س)$ اذا كان $ع(س) = (س^{٢}+٢س-٣)^{١٦}(٢س+٥)^{١٣}$

ليكن $ق(س) = (س^{٢}+٢س-٣)^{١٦}$ ، $ل(س) = (٢س+٥)^{١٣}$ وسوف نستخدم نظرية ٥

$$ع'(س) = ق(س)\cdot ل'(س) + ل(س)\,ق'(س) \quad ...(١)$$

حيث $ق'(س) = ١٦(س^{٢}+٢س-٣)^{١٥}(٢س+٢)$

$$ل'(س) = ١٣(٢س+٥)^{١٢}(٢)$$

وبالتعويض في (١) نحصل على :

$$ع'(س) = (س^{٢}+٢س-٣)^{١٦}\times ٢٦(٢س+٥)^{١٢} + (٢س+٥)^{١٣}\times$$

$$٣٢(س^{٢}+٢س-٣)^{٥}\times(س+١)$$

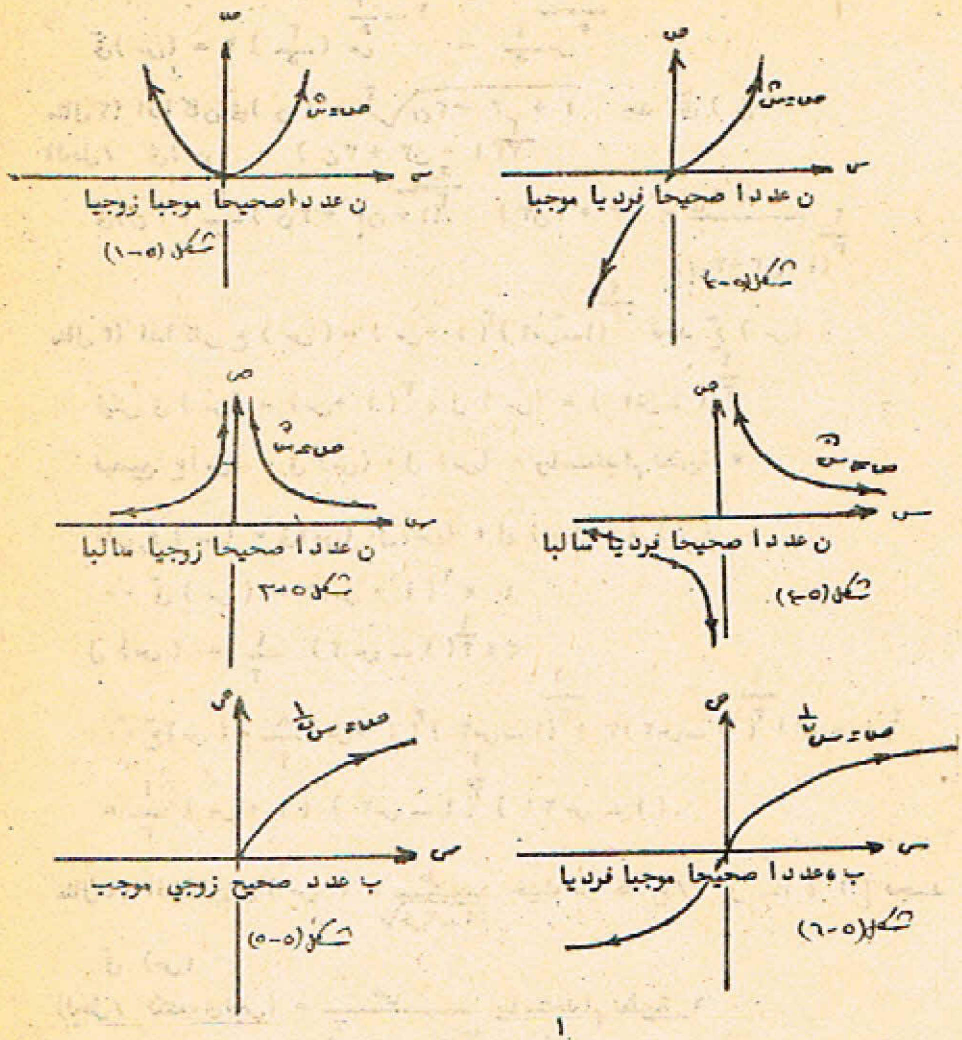
التطبيق الاسي

$ق : ح \longrightarrow ح^{+}$ بحيث $ق(س) = س^{ن}$

اذا كان ن عددا صحيحا موجبا زوجيا فان المخطط الديكارتي لهذا التطبيق يظهر كما في شكل (٥ـ١) واذا كان ن عددا صحيحا فرديا موجبا فان المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ـ٢) واذا كان ن عددا صحيحا سالبا زوجيا فان المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ـ٣) واذا كان ن عددا صحيحا سالبا فرديا فان المخطط الديكارتي لهذا التطبيق كما في شكل (٥ـ٤)

اما اذا كان $ن = \frac{١}{ب}$ حيث ب عددا صحيحا موجبا .. فهنا اما ان يكون ب زوجيا وفي هذه الحالة يكون التطبيق معرفا في الاعداد الحقيقية غير السالبة والمخطط الديكارتي له كما في الشكل (٥ - ٥) .

او ان يكون ب فرديا وفي هذه الحالة يكون معرفا $\forall$ س $\in$ ح ٠٠ ويكون المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ - ٦)



نظرية ٩) اذا كان $ق(س) = س^{\frac{١}{ب}}$ حيث ب عدد صحيحا يختلف عن الصفر فان $\bar{ق}(س) = \frac{١}{ب} س^{\frac{١}{ب} - ١}$

نتيجة ١) اذا كان $ق(س) = س^{\frac{أ}{ب}}$ فان $\bar{ق}(س) = \frac{أ}{ب} س^{\frac{أ}{ب} - ١}$

حيث أ عددا صحيحا ، ب عددا صحيحا $\neq$ صفرا ٠٠٠

نتيجة ٢) اذا كان $ق(س) = [ل(س)]^{ر}$ وان ر عددا نسبيا فان

$$ق'(س) = ر\,[ل(س)]^{ر-1} \times ل'(س)$$

مثال ١) ليكن $ق(س) = ٢\sqrt[٥]{س^٣}$ جد $ق'(س)$

الحل/ $ق(س) = ٢س^{\frac{٣}{٥}}$

$$ق'(س) = ٢\left(\frac{٣}{٥}\right) س^{\frac{٣}{٥}-١} = \frac{٦}{٥} س^{-\frac{٢}{٥}}$$

مثال ٢) اذا كان $ق(ن) = \sqrt[٣]{ن^٣ + ٣ن + ١}$ جد $ق'(ن)$

الحل/ $ق(ن) = (ن^٣ + ٣ن + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$$ق'(ن) = \frac{١}{٣}(ن^٣ + ٣ن + ١)^{-\frac{٢}{٣}}(٣ن^٢ + ٣) = \frac{ن^٢ + ١}{(ن^٣ + ٣ن + ١)^{\frac{٢}{٣}}}$$

مثال ٣) اذا كان $ع(س) = (س + ١)^٣(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$ فجد $ع'(س)$

ليكن $ق(س) = (س + ١)^٣$ ، $ل(س) = (٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$

فيصبح $ع(س) = ق(س) \cdot ل(س)$ وباستخدام نظرية ٥

فان $ع'(س) = ق(س) \cdot ل'(س) + ل(س) \cdot ق'(س)$

$\therefore ق'(س) = ٣(س + ١)^٢ \times ١$

$ل'(س) = \frac{٤}{٣}(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} \times ٢$

$$\therefore ع'(س) = \frac{٨}{٣}(س + ١)^٣(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} + ٣(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}(س + ١)^٢$$

$$= \frac{١}{٣}(س + ١)^٢(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}}(٢٦س - ١)$$

مثال ٤) اذا كان $ق(ص) = \frac{ص}{\sqrt{ص^٢ - ١}}$ حيث $ص \in ح / [-١ ، ١]$ فجد $ق'(ص)$

الحل/ نكتب $ق(ص) = \frac{ص}{(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}}}$ وباستخدام نظرية ٦

$$ق'(ص) = \frac{(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}} \times ١ - ص \times \frac{١}{٢}(ص^٢ - ١)^{-\frac{١}{٢}}(٢ص)}{ص^٢ - ١}$$ وبضرب البسط

والمقام في $(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}}$ ينتج

$$ان\ ق'(ص) = \frac{(ص^٢ - ١)^١ - ص^٢(ص^٢ - ١)^{صفر}}{(ص^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{-١}{(ص^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

__نظرية ١٠)__ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) \neq ٠$ ، $\text{ن} \neq ٠$.

فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \dfrac{-١\,\text{ن} \cdot \bar{\text{ل}}(\text{س})}{[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}+١}}$

مثال ١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٤}{(\text{س}^٢ + ٣)^٣}$ فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \dfrac{-٤ \times ٣\,(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ + ٣)^٤} =$

$= \dfrac{-٢٤\,\text{س}}{(\text{س}^٢ + ٣)^٤}$

مثال ٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٨}{\text{س}^٤ + \text{س}^٢ + ٤}$ فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \dfrac{-٨\,(٤\text{س}^٣ + ٢\text{س})}{(\text{س}^٤ + \text{س}^٢ + ٤)^٢}$

نتيجة) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$ ، $\text{ن} \neq ٠$ ، $\text{س} \neq ٠$

فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \dfrac{-١\,\text{ن}}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}+١}}$

مثال ١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٤}{٣\text{س}^٢}$ فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \dfrac{-٨}{٣\text{س}^٣}$

مثال ٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣}{\text{س}} - \dfrac{٤}{٥\text{س}^٢} + \dfrac{٧}{٢\text{س}^٣} - \dfrac{١٣}{\text{س}^٤}$ ، $\text{س} \neq ٠$

فان $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = -\dfrac{٣}{\text{س}^٢} + \dfrac{٨}{٥\text{س}^٣} - \dfrac{٢١}{٢\text{س}^٤} + \dfrac{٥٢}{\text{س}^٥}$

__التفاضل الضمني Implicit Differentiation__

تعطى عادة معادلة منحنى مستو على اشكال مختلفة ، ففي الاحداثيات الديكارتية (س ، ص) اما ان تعطى بالشكل الظاهري :-

ص = ق (س) Explicit Functions وجميع التطبيقات والدوال التي تعاملنا بها يمكن التعبير عن ص بدلالة س بصورة واضحة ، ولكن غالبا ماتصادفنا معادلات من الشكل :

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ، $\text{ص}^٣ = \text{ﻫ}$ ، $\text{س}^٢ + \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^٢ = ٣$ ... وهو مايسمى بالشكل الضمني : ق(س ،ص) = صفر Implicit Functions حيث لايمكن فيها التعبير عن ص بدلالة س بصورة واضحة .. وذلك عند تعويضنا عنها س بقيمة

واحد نحصل على قيم واحدة لـ ص او اكثر ، وفي هذه الحالة نقول ان ص دالـــــة ضمنية الى س او اكثر .

وفي الحقيقة انه يمكن حل كل من المعادلات السابقة والحصول على ص بدلالة س ، الا ان هذا لايتم دائما اذ توجد بعض المعادلات التي يكون فيها من المتعذر ايجـــاد ص بدلالة س مثل .

$$\text{س}^{٩} + ٤\,\text{س}\,\text{ص}^{٣} - ٣\,\text{ص}^{٩} = ٢$$

الا اننا نريد استخراج $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في هذه المعادلة تسمى طريقة ايجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لهذه المعادلة بالاشتقاق الضمني ، والطريقة هي

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{\text{المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة لـ س}}{\text{المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة لـ ص}} = -\frac{\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} \,،\, \text{ص})}{\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} \,،\, \text{ص})}$$

$$= -\frac{\text{مشتقة الدالة بالنسبة لـ (س) على اعتبار ص كمية ثابتة}}{\text{مشتقة الدالة بالنسبة لـ (ص) على اعتبار س كمية ثابتة}}$$

وبشرط $\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} \,،\, \text{ص}) \neq$ صفر

مثال) اذا كان $\text{س}^{٩} + ٤\,\text{س}\,\text{ص}^{٣} - ٣\,\text{ص}^{٥} - ٢ =$ صفر فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

$$\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} \,،\, \text{ص}) = ٥\,\text{س}^{٤} + ٤\,\text{ص}^{٣}$$

$$\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} \,،\, \text{ص}) = ١٢\,\text{س}\,\text{ص}^{٢} - ١٥\,\text{ص}^{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-(٥\,\text{س}^{٤} + ٤\,\text{ص}^{٣})}{١٢\,\text{س}\,\text{ص}^{٢} - ١٥\,\text{ص}^{٤}}$$

مثال ٢) اذا كان $\text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢} - ٩ = ٠$ فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} \,،\, \text{ص}) = ٢\,\text{س}$ اعتبرنا ص ثابتة

$\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} \,،\, \text{ص}) = ٢\,\text{ص}$ اعتبرنا س ثابتة

وعندما يكون $\text{ص} \neq ٠$ فان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{٢\,\text{س}}{٢\,\text{ص}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

مثال ٣) اذا كان $٣\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٣\,\text{ص} + ١٩٧٦ = ٠$ فجـــــد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل/ $\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٩\text{س}^٢\text{ص}^٢ - ٢$ ، $\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٦\text{ص}\text{س}^٣ - ٣$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - \frac{٩\text{س}^٢\text{ص}^٢ - ٢}{٦\text{س}^٣\text{ص} - ٣}$$

مثال ٤) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند النقطة (١ ، ١) اذا علمت ان $\text{س}^٣ + ٣\text{س} + \text{ص}^٣ + ٣\text{ص} - ٨ = ٠$

الحل) $\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٣\text{س}^٢ + ٣$ ، $\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٣\text{ص}^٢ + ٣$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - \frac{٣\text{س}^٢ + ٣}{٣\text{ص}^٢ + ٣} = - \frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{ص}^٢ + ١}$$

$$\therefore \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{(١ ، ١)} = - \frac{١ + ١}{١ + ١} = -١$$

مثال ٥) جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $\text{س}^٢\text{ص}^٢ - ٣\text{س} - ٣\text{ص} - ١ = ٠$ عند $(-١ ، ١)$

$\text{ق}_{\text{س}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٢\text{س}\text{ص}^٢ - ٣$ ، $\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س} ، \text{ص}) = ٢\text{س}^٢\text{ص} - ٣$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - \frac{٢\text{س}\text{ص}^٢ - ٣}{٢\text{س}^٢\text{ص} - ٣}$$

$$\therefore \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{(-١ ، ١)} = - \frac{-٢ - ٣}{٢ - ٣} = ٥ \quad \text{ميل المماس}$$

$\therefore$ معادلة المماس هي $\text{ص} - ١ = -٥(\text{س} + ١)$

$٥\text{س} + \text{ص} + ٤ = \text{صفر}$

الدوال الوسيطية (البارامترية) Parametric Functions

قد تعطى معادلة المنحنى بالشكل الوسيطي

$\text{ص} = \text{ص}(\text{ن})$ ، $\text{س} = \text{س}(\text{ن})$

ومن الامثلة على مثل هذه الدوال هي

$\text{س} = \text{حتا}\,\text{هـ}$ ، $\text{ص} = \text{جا}\,\text{هـ}$ $\forall\ \text{هـ} \in \text{ح}$

فان منحنى هذه الدالة هو دائرة نصف قطرها (١) وحدة ومركزها نقطة الاصل ..

(ولقد سبق التاكيد على هذه الدالة في كتاب المثلثات المعاصرة للصف الخامس العلمي)

ويمكن ربط هذه الدالة وتحويلها الى دالة ضمنية بالصورة التالية :-

$\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{حتا}^٢\text{هـ} = ١$

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ١ = \text{صفر}$

واذا اردنا ايجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لهذه الدالة نقول

اذا كان كل من ص(ن) ، س(ن) قابلة للاشتقاق $\forall$ ن $\in$ [أ ، ب]

وان $\bar{\text{س}}$ (ن) $\neq$ صفر فان

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}$$

مثال ١) اذا كانت $\text{س(ن)} = \text{ن}^{٣} + ٣\text{ن} + ١$ ، $\text{ص(ن)} = \text{ن}^{٣} - ٣\text{ن} + ١$

نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^{٢} + ٣$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^{٢} - ٣$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{دن}}} = \frac{٣\text{ن}^{٢} - ٣}{٣\text{ن}^{٢} + ٣} = \frac{\text{ن}^{٢} - ١}{\text{ن}^{٢} + ١}$$

مثال ٢) اذا كان $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$ وكان $\text{س} = ٤\text{هـ}^{٣} - ٢\text{هـ} + ١$ نجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة حيث هـ = ٢

الحل) $\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = ٤\text{هـ} - ١ \Big]_{\text{هـ}=٢} = ٤ \times ٢ - ١ = ٧$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = ١٢\text{هـ}^{٢} - ٢ \Big]_{\text{هـ}=٢} = ١٢ \times ٤ - ٢ = ٤٦$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Big]_{\text{هـ}=٢} = \frac{٧}{٤٦} = \text{ميل المماس}$$

عندما هـ = ٢ فان س = ٢٩ ، ص = ٦

$\therefore$ نقطة التماس (٢٩ ، ٦)

معادلة المماس $\frac{٧}{٤٦} = \frac{\text{ص} - ٦}{\text{س} - ٢٩}$

$٧\text{س} - ٢٠٣ = ٤٦\text{ص} - ٢٧٦$

$٧\text{س} - ٤٦\text{ص} + ٧٣ = ٠$

ان المشتقة $ق''$ للتطبيق ق هي تطبيق ايضا .

فاذا كان $ق' :]م ، هـ[\longrightarrow ح$ تطبيقا مستمرا وليكن $أ \in]م ، هـ[$

$ق'$ قابلا للاشتقاق عند $أ \Longleftrightarrow \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{ق'(أ+ع) - ق'(أ)}{ع}$

ويرمز الى $\underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{ق'(أ+ع) - ق'(أ)}{ع}$ بالرمز $ق''(أ)$

ويمكن كتابته بالشكل $\left[\frac{د^٢(ق(س))}{د س^٢}\right]_{س=أ}$

فمثلا اذا كان $ق(س) = س^٣$

فان $ق'(س) = ٣س^٢$

وان $ق''(س) = ٦س$

فاذا استمرينا بايجاد اشتقاق التطبيق ق الى ن من المرات فان المشتقة هي

$$\frac{د^ن(ق(س))}{د س^ن}$$

مثال) اذا كان $ق(س) = س^٣$ فاثبت ان

$ق'''(س) \cdot ق'(س) - ١٨ ق(س) = صفر$

الحل) $ق'(س) = ٣س^٢$

$ق''(س) = ٦س$

$\therefore ق'''(س) \cdot ق'(س) = (٣س^٢)(٦س) = ١٨س^٣$

$\therefore ق'''(س) \cdot ق'(س) - ١٨س^٣ = صفر$

$\therefore ق'''(س) \cdot ق'(س) - ١٨ ق(س) = صفر$

تماريـــــــــن

جد مشتقة كل مما يلي بالنسبة لمتغيرها المستقل

١) $ق(س) = س^٣ - ٢س + ٤$

٢) $ق(س) = \frac{س^٣ - ٢س + ٤}{١٢}$

٣) $ق(س) = \frac{١٢}{س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ١}$ ، $س \neq ١$

٤) $ق(س) = \frac{س}{٢} + \frac{٢}{٥س}$ ، $س \neq ٠$

٥) $ق(نق) = \frac{ط}{٣} نق \, (٦٤ - نق^٢)$

٦) $ق(ل) = ٣ل \sqrt{١٢ - ل^٢}$ ، $ل \in [-٢\sqrt{٣} ، ٢\sqrt{٣}]$

٧) ق (س) = $\dfrac{\text{٥ ٢س٢ − ٧س − ١٢}}{\text{٣س٩}}$ ، س $\neq$ ٠

٨) ق(س) = $\sqrt{\text{١٢}^{\text{٢}} + (\text{٢٠ − س})^{\text{٢}}}$ + $\sqrt{\text{١٨}^{\text{٢}} + \text{س٢}}$ وجد قيمة س عند ما

$\bar{\text{ق}}$ (س) = صفر .

٩) ح (نق) = $\dfrac{\text{٨١ ط}}{\text{نق}}$ + ط نق٣ حيث نق $\neq$. ثم جد قيمة نق والتي عند هـــا

$\bar{\text{ح}}$ = صفر

١٠) ق(س) = (٣ − ٢س) $\sqrt{\text{س}}$ حيث س > ٠ .

١١) ق (س) = (٢ س + ٣) . $\sqrt{\text{س٢ + ٤}}$

١٢) ق(س) = $\sqrt{\dfrac{\text{١ + ٢س}}{\text{١ − ٢س}}}$ ٧ س ∋] −½ ، ½ [

١٣) ق(س) = (س− ٢)$^{\text{٣}}$(س+ ١)$^{\text{٤}}$ ثم جد قيمة س التي تجعل $\bar{\text{ق}}$ (س) = صفر

١٤) ليكن ق : ح++ ⟵ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س − ١}}{\text{س + ١}}$

ل : ح++ ⟵ ح بحيث ل(س) = $\sqrt{\text{س}}$

جد ١) (ق ∘ل)$'$ (س)

٢) (ق ⊖ ل)$'$ (س)

٣) (ق ⊕ ل)$'$ (٤)

٤) (ق ⊘ ل)$'$ (٤)

١٥) جد ميل المماس للمنحنى ٢س٢ −٣س ص+ ٢ص٢ = ٢ عند النقطة (١، $\dfrac{\text{−٣}}{\text{٢}}$)

١٦) جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للعلاقة |ص٢ − ٣س ص| − ١ = صفر

١٧) اذا كان ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = أس٣ + ب س٢ حيث كل من

أ ، ب عددا حقيقيا ثابتا فبرهن ان س٢ $\bar{\bar{\text{ق}}}$(س) − ٤س $\bar{\text{ق}}$(س) + ٦ق (س) =

صفـــر .

١٨) اذا كان ق : ح++ ⟵ ح بحيث ق(س) = أس + ب $\sqrt{\text{س}}$ + $\dfrac{\text{حـ}}{\text{س}}$ ،

فبرهن على ان :−

٢س٣ $\bar{\bar{\bar{\text{ق}}}}$ (س) + ٥س٢ $\bar{\bar{\text{ق}}}$ (س) − س $\bar{\text{ق}}$(س) + ق (س) = صفر

١٩) اذا كان ق(س) = (١ − ٥ س)$^{\text{٦}}$ فاثبت ان

(١−٥س) $\bar{\text{ق}}$ (س) + ٣٠ ق (س) = صفر

٢٠) اذا كان ص (ن) = ن٤ + ١ ، س (ن) = ن٢ + ٣ن٣ ، ن $\neq$ صفر

نجد $\frac{دص}{دس}$

٢١) جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ عند النقطة (ــ ١ ، ١) للمنحني س٢ ص + ٣ص ــ ٤ = ٠

تطبيقات على المشتقــة

اولا ــ المماس والعمود عليه

لقد درسنا في بند سابق المعنى الهندسي للمشتقة وتعريف المماس والعمود عليه والان سنورد بعض الامثلة الايضاحية الاخرى بعد ان تعلمنا ايجاد المشتقة باستخدام النظريات

مثال ١) جد معادلة المستقيم المماس لبيان التطبيق ق(س) = $\frac{س ــ ٤}{س^٢ + ٤}$

عند نقطة تقاطعه مع المحور الثاني

الحل) نجد نقطة تقاطع المنحني مع المحور الثاني

اى ق(٠) = ــ ١

∴ نقطة التماس (٠ ، ــ ١)

والان لنجد ميل المماس

$$\bar{ق}(س) = \frac{(س^٢+٤) \times ١ ــ (س ــ ٤) \times ٢س}{(س^٢ + ٤)^٢} = \frac{ــ س^٢ + ٨س + ٤}{(س^٢ + ٤)^٢}$$

$\bar{ق}$ (٠) = ¼ = ميل المماس عند س = ٠

$$ل = \frac{ص ــ ص_١}{س ــ س_١} \Longleftarrow ¼ = \frac{ص + ١}{س ــ ٠}$$

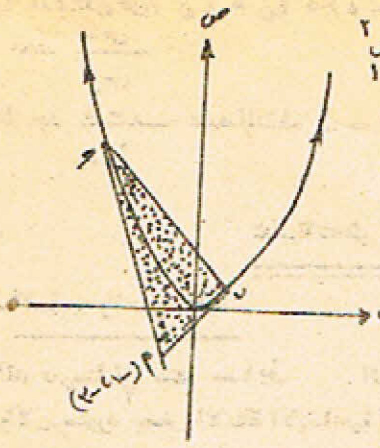
$\Longleftarrow$ س ــ ٤ص ــ ٤ = صفر

مثال ٢) ليكن ق (س) = س٢ ٠٠ رسم المماسان أ ب ، أ حـ لبيان التطبيق من نقطــة أ (ــ ١ ، ــ ٣) فلاقياه في ب ، حـ

١) جد معادلتي كل من المماسين أ ب ، أ حـ

٢) جد مساحة المثلث أ ب حـ

الحل) النقطة أ(ـ١ ، ـ٣) لاتقع على بيان التطبيق لانها لاتحقق بيانه



لنفترض أن النقطة $(س_1 ، ص_1) \in ق \Leftarrow ص_1 = س_1^2$

ولنجد المماس عندها والمار من $(-1 ، -3)$

$\acute{ق}(س) = 2س$

$\acute{ق}(س_1) = 2س_1 =$ ميل المماس عند النقطة $(س_1 ، س_1^2)$

$ل = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

$$2س_1 = \frac{ص - س_1^2}{س - س_1} \quad \cdots\cdots (1)$$

لكن أ$(-1 ، -3) \in$ المماس فهي تحقق معادلته .. فبالتعويض في (١) عن $س = -1$ ، $ص = -3$ ينتج

$$2س_1 = \frac{-3 - س_1^2}{-1 - س_1} \Longleftarrow (س_1 + 3)(س_1 - 1) = \text{صفر}$$

اما $س_1 = -3 \Longleftarrow ص_1 = 9 \Longleftarrow$ حـ$(-3 ، 9)$

او $س_1 = 1 \Longleftarrow ص_1 = 1 \Longleftarrow$ ب$(1 ، 1)$

ولايجاد معادلتي المماسين أ ب ، أ حـ نعوض عن قيمة $س_1$ بالمعادلة (١) ،

$س_1 = 1$ تصبح $2 = \frac{ص - 1}{س - 1} \Longleftarrow ص - 2س + 1 = 0$ معادلة أ ب

وعندما $س_1 = -3$ تصبح المعادلة $-6 = \frac{ص - 9}{س + 3} \Longleftarrow ص + 6س + 9 = 0$

معادلة أ حـ

ولايجاد مساحة المثلث أ ب حـ

طول أ ب $= \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ وحدة

الارتفاع $=$ ف $= \frac{|9 - 2 \times -3 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$ وحدة

$\therefore$ المساحة $= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{16}{\sqrt{5}} = 16$ وحدة مربعة

٢) تماس المنحنيـــات

تعريف / اذا كان ق : ك ⟵ ح تطبيقا قابلا للاشتقاق عند أ ، أ ∈ ك

ع : ل ⟵ ح تطبيقا قابلا للاشتقاق عند أ ، أ ∈ ل

وكان ك ∩ ل = حـ حيث حـ ⊂ ح غيرخالية

ق يمس ع عند أ ، أ ∈ حـ ⟺ ١) قَ (أ) = لَ (أ)

٢) ق (أ) = ل (أ)

اى ان الشرط اللازم والكافي لتماس بياني تطبيق هو :-

١) ق ∩ ع ≠ ∅

اى يشتركان في نقطة واحدة على الاقل

٢) ميلاهما متساوني تلك النقطة

مثال ١) اذا كان المستقيم ص = ٤س – ٣ مماسا لبيان التطبيق

ق(س) = س^{٢} – ٤س + ٢أ نجد قيمة العدد الثابت أ

الحل/ ليكن ص = ل (س) = ٤س – ٣

لنفترض انهما يتماسان عند س = ب

∴ قَ (ب) = لَ (ب)

قَ (س) = ٢س – ٤ ⟸ قَ (ب) = ٢ب – ٤

لَ (س) = ٤ ⟸ لَ (ب) = ٤

ومن الشرط الاول للتماس نحصل على ٢ب – ٤ = ٤ ⟸ ب = ٤ ...(١)

ومن الشرط الثاني للتماس نحصل على ق (ب) = ل (ب)

اى ٤ ب – ٣ = ب^{٢} – ٤ب + ٢أ

اى ٢أ = ٨ ب – ب^{٢} – ٣

وبالتعويض عن ب ينتج ٢أ = ٨ × ٤ – ٤^{٢} – ٣ = ١٣

∴ أ = $\frac{١٣}{٢}$

مثال ٢) جد نقطة يشترك بها بياني التطبيق ق(س) = س^{٢} – ٧ ، ل(س) = ٢س^{٢} – ٤س – ٣ وبين انها نقطة تماس .

١) نجد ق ∩ ل

ليكن ق (س) = ل (س) ⟸ س^{٢} – ٧ = ٢س^{٢} – ٤س – ٣

⟸ (س – ٢)^{٢} = ٠

⟸ س = ٢

∴ ق (٢) = ل (٢) = – ٣

∴ ق ∩ ل = {(٢ ، ـ ٣)}

٢) نجد قَ (٢) ، لَ (٢) .

قَ (س) = ٢س ، قَ (٢) = ٤

لَ (س) = ٤س ـ ٤ ، لَ (٢) = ٤

∴ ق يمس ل

مثال ٣) اذا كان المستقيم ٢س ـ ص ـ ٣ = ٠ مماسا لبيان التطبيق ق(س) = أس^{٢} + ب س ـ ٤ عند س = ١ ١) جد قيم أ ، ب ٢) برهن ان ق محدود من الاعلى ٣) برهن ان ق متزايد ∀ س < ٢

الحل)

١) ٢ × ١ ـ ص ـ ٣ = ٠ ⟸ ص = ـ ١

∴ نقطة التماس (١ ، ـ ١)

ميل المستقيم = ٢

قَ (س) = ٢ أ س + ب

قَ (١) = ٢ أ × ١ + ب = ٢

∴ ٢ أ + ب = ٢ .... (١)

لكن (١ ، ـ ١) ∈ ق ∴ يحقق معادلته

∴ ـ ١ = أ + ب ـ ٤

أ + ب = ٣ .... (٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) آنيا نجد أ = ـ ١ ، ب = ٤

(٢) ∵ ق (س) = ـ س^{٢} + ٤س ـ ٤

= ـ (س^{٢} ـ ٤س + ٤)

= ـ (س ـ ٢)^{٢}

و ∵ ∀ س ∈ ح فان (س ـ ٢)^{٢} ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

∴ ـ (س ـ ٢)^{٢} ≤ صفر

ق (س) ≤ صفر ∀ س ∈ ح

∴ ق محدود من الاعلى .

(٣) س$_{١}$ < ٢ ، س$_{٢}$ < ٢

اذا كان س$_{١}$ < س$_{٢}$ < ٢ $\xLeftarrow{\text{باضافة ـ ٢}}$ س$_{١}$ ـ ٢ < س$_{٢}$ ـ ٢ < صفر $\xLeftarrow{\text{بالتربيع}}$

(س$_{١}$ ـ ٢)^{٢} > (س$_{٢}$ ـ ٢)^{٢} > صفر $\xLeftarrow{\text{بالضرب × ـ ١}}$

ـ (س١ـ٢)٢ < ـ(س٢ـ ٢)٢ < صفر ⟸ ق(س١) < ق (س٢)

⟸ ق متزايد ∀ س < ٢

مثال ٤) ليكن ق (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د . رسم مماسان الى بيان ق الاول عند النقطة م (٢ ، ١٥) والثاني عند النقطة ن (ـ ٢ ، ـ ١٧) بحيث ان كلا منهما يوازى المستقيم ص + ٤ = صفر .. علما بان م ، ن ∈ ق

برهن ان (ـ ١ ، ـ ٢) ∈ ق .

الحل) يجب ان نجد كلا من أ ، ب ، حـ ، د

∵ م ∈ ق ∴ تحقق معادلته ⟸ ٨أ + ٤ب + ٢حـ + د = ١٥ ... (١)

بالطرح ∵ ن ∈ ق ∴ تحقق معادلته ⟸ ـ ٨أ + ٤ب ـ ٢حـ + د = ـ ١٧ ... (٢)

٤أ + حـ = ٨ .... (٣)

∵ ميل المستقيم (ص + ٤ = ٠) = صفرًا (لانه يوازى المحور الاول)

∴ ميل كل من المماسين = صفرا ايضا (اذا توازى مستقيمان تساوى ميلاهما) .

قَ (س) = ٣ أس٢ + ٢ب س + حـ

قَ (٢) = ١٢أ + ٤ب + حـ = صفر ... (٤)

قَ (ـ٢) = ١٢أ ـ ٤ب + حـ = صفر ...(٥) بالجمع والتبسيط نحصل على

١٢أ + حـ = صفر ..... (٦)

ومن حل المعادلتين (٣) ، (٦) ينتج ان أ = ـ ١ ، حـ = ١٢ وبالتعويض في (٤) ينتج ان ب = صفر وبالتعويض في ١) ينتج ان د = ـ ١

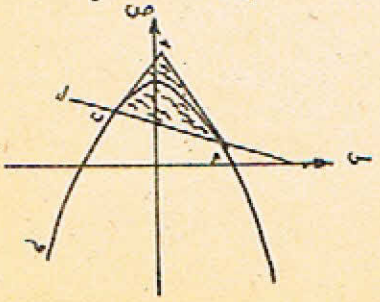
∴ ق (س) = ـ س٣ + ١٢س ـ ١

∵ ق (ـ ١) = ـ (ـ ١)٣ + ١٢ (ـ ١) ـ ١ = ـ ١٢

∴ (ـ ١ ، ـ ١٢) ∈ ق .

مثال ٥) ليكن ق (س) = ١٠ ـ س٢ وليكن ل (س) = ٤ ـ س ، فاذا كانت ق ∩ ل = { أ ، ب } ورسم عند أ ، ب مماسان للتطبيق ق فالتقيا في نقطة حـ

جد مساحة المثلث أ ب حـ



الحل)

ل (س) = ٤ ـ س ، ق(س) = ١٠ ـ س٢

اذا فان ل (س) = ق (س)

فان ٤ ـ س = ١٠ ـ س٢

اى $\text{س}^2 - \text{س} - ٦ = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) = ٠$

اما $\text{س} = ٣$ او $\text{س} = -٢$

$\therefore$ $\text{ص} = ١$ او $\text{ص} = ٦$

$\therefore$ أ $(٣ ، ١)$ ، ب $(-٢ ، ٦)$

$\text{ق}(\text{س}) = -٢\text{س}$

$\bar{\text{ق}}(٣) = -٢ \times ٣ = -٦$ ميل المماس عند أ

$\therefore$ معادلته $-٦ = \dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٣} \Longleftarrow \text{ص} + ٦\text{س} - ١٩ = ٠ \quad \ldots\ldots (١)$

$\bar{\text{ق}}(-٢) = ٤$ ميل المماس عند ب

$\therefore$ معادلته $٤ = \dfrac{\text{ص} - ٦}{\text{س} + ٢} \Longleftarrow \text{ص} - ٤\text{س} - ١٤ = ٠ \quad \ldots\ldots (٢)$

ومن حل المعادلتين (١) و (٢) انيا نجد حـ $(\tfrac{1}{2} ، ١٦)$

$\text{د}(\text{أ} ، \text{ب}) = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2} = \sqrt{(٣ + ٢)^2 + (١ - ٦)^2} =$

$٥\sqrt{٢}$ وحدة

بعد نقطة حـ عن أ ب = ف = الارتفاع

$\text{ف} = \dfrac{|\text{أ}\text{س}_1 + \text{ب}\text{ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \dfrac{|١ \times \tfrac{1}{2} - ١ \times ١٦ - ٤|}{\sqrt{١ + ١}} = \dfrac{٢٥}{٢\sqrt{٢}}$ وحدة

$\therefore$ المساحة = $\tfrac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع = $\tfrac{1}{2} \times ٥ \sqrt{٢} \times \dfrac{٢٥}{\sqrt{٢}} = \dfrac{١٢٥}{٤}$

وحدة مربعة .

تماريـــن

١) النقطتان أ ، ب واقعتان على منحنى التطبيق ق : ح / {١} ⟵ ح وبحيث ق (س) = س + ٥ ـ $\frac{٤}{\quad}$ حيث ميل المماس عند كل منها = ٢ ٠٠ واذا رسم المماسان عند أ ، ب بحيث قطعا محور السينات في النقطتين حـ ، د على الترتيب ٠ اثبت ان مساحة الشكل أ ب حـ د = ١٦ وحدة مربعة ٠

٢) مماس التطبيق ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{٩}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{٤}$ عند النقطة التي احداثيها السيني = ٣ ، يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب جد طول أ ب ٠

٣) جد نقطة على بيان التطبيق ق (س) = $\text{س}^٢$ ـ ٧س + ٣ يكون عندها المماس لبيان التطبيق موازيا للمستقيم ٥ س + ص = ٣

٤) جد معادلتي المماس والعمودي عليه لبيان التطبيق ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ عند النقطة التي احداثيها السيني = + ١

٥) جد النقاط الواقعة على بيان التطبيق ق : ح / {١} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١}$ والتي يكون المماس عندها موازيا للمحور الاول ٠

٦) اثبت ان مماسي المنحني ق (س) = $\text{س}^٣$ ـ $٣\text{س}^٢$ + ٣س ـ ٥ عند النقطتين (٣ ، ٤) ، (ـ ١ ، ـ ١٢) متوازيان ٠

٧) اثبت ان مماسي المنحنى ق (س) = (س ـ ٢) (س + ١) عند النقطتين (١ ، ـ ٢) ، (٠ ، ـ ٢) متعامدان ٠

٨) جد النقاط الواقعة على المنحنى ق(س) = $\text{س}^٣$ + ٥ والتي يكون المماس للمنحنى عندها عموديا على المستقيم س + ٣ص = ٢

٩) جد النقاط الواقعة على المنحنى ق (س) = $\frac{\text{س} - ١}{٢\text{س} - ١}$ ، س ≠ ½ بحيث يصنع المستقيم المماس للمنحنى عندها زاوية مقدارها ٤٥° مع الاتجاه الموجب للمحور الاول ٠

١٠) اذا كان مماسا المنحنى ص = ٣ + ب س ـ $\text{س}^٢$ عند النقطتين س = ٢ ، س = ٣ متعامدين فجد قيمة ب ٠

١١) رسم مماس للمنحنى $\text{س}^٢$ ص = ٢ حيث س ≠ صفر عند النقطة (١ ، ٢) فلاقى المنحنى مرة اخرى في نقطة ب فجد احداثيي ب ٠

١٢) ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = س + $\frac{٨}{\text{س}^٢}$ ٠٠٠ جد معادلة المستقيم المماس لبيان ق والذي يصنع مقطعين متساويين مع المحورين ٠

١٣) ليكن ق : ح / {٠} ـــــ ح بحيث ق(س) = $\frac{١٦}{س}$

وليكن ل : ح ⟵ ح بحيث ل (س) = ـ $\frac{س^٢}{٤}$

ولتكن أ ∈ ق ∩ ل ٠٠عن أ رسمنا مستقيما مماسا لكل من ق ، ل ٠٠٠ جد مساحة المثلث المحدد بالمماسين والمستقيم س ـ ص = ١٢

١٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{١}{١ + س^٢}$

وليكن ل : ح / {ـ١} ⟵ ح بحيث ل (س) = $\frac{١}{س + ١}$

ولتكن {أ ، ب} = ل ∩ ق

جد معادلتي المماسين المرسومين عن أ ، ب الى بيان ق .

١٥) ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = س ـ $\frac{١}{س}$ جد معادلتي المماسين المرسومين لبيان ق عند ـ ١ ، ٣

١٦) برهن ان المماس لبيان ق حيث ب٢ ق (س) = س٢ (أ ـ س) عند س = ½ أ يمر من نقطة الاصل .

١٧) برهن تماس بياني التطبيق ق(س) = ٢س ـ ٣ ، ل (س) = ١٠س ـ ٢س٢ ـ ١١

١٨) برهن تماس بياني التطبيق ل (س) = س٢ ـ ١ ، ق(س) = ٨ س ـ س ٢ ـ ٩ ثم جد معادلة المستقيم المماس والعمود عليه عن نقطة التماس ومساحة المثلث المحدد بهذين المستقيمين والمحور الاول .

١٩) المستقيم العمود على بيان التطبيق ق (س) = ٤ ـ س٢ عن النقطة أ(١ ، ٣) يقطعه مرة اخرى في نقطة ب . جد

١) معادلة أب

٢) معادلة المماس لبيان ق عند ب

٣) واذا تلاقى المستقيم المماس للمنحني عند نقطة ب مع العمود عليه من نقطة أ في نقطة جـ نجد مساحة المثلث أب حـ

٢٠) ليكن ق : ح / {١ ، ٢} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{١}{س ـ ١} - \frac{٤}{س ـ ٢}$

جد معادلتي المماسين المرسومين لبيان ق عند نقطتي تقاطعه مع المحورين .

٢١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = أ س٢ + ب س + حـ ولتكن (١ ، ١) ∈ ق . وعند هذه النقطة يصنع المماس لبيان التطبيق زاوية مقدارها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ٠٠ وعند النقطة التي احداثيها السيني = ٢ فان المماس زاوية ميله = ٦٠° نجد أ ، ب ، حـ

٢٢) ليكن ل (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د فاذا كان هذا المنحنى يمـر بالنقطتين ن (٢ ، ٢) ، هـ (ــ ٢ ، ٤) بحيث انه ممكن رسم مماسين يوازيان المحور الاول لبيان ق عند هاتين النقطتين. جد كلا من أ ، ب ، حـ ، د

٢٣) ليكن ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س٢ + $\frac{١}{٣}$ جد نقطة او نقاط ∋ ق بحيث يمكن ان يكون المماس عندها يمر بالنقطة (ــ ١ ، ــ ٥) .

٢٤) اذا كان بيان التطبيق ق (س) = أ س٢ + ب س + حـ يمس المستقيم ٥س ــ ص = ٣ عند النقطة (٢ ، ٧) ويمر بالنقطة (ــ ١ ، ١٠) فجد قيم كل من أ ، ب ، حـ .

٢٥) المستقيم المماس للدائرة س٢ + ص٢ + ٦س ــ ٨ص = ٠ يمس بيان التطبيق ق (س) = أ س٢ + ب عند النقطة حـ (٤ ، ٣) ما قيمة كل من أ ، ب .

٢٦) المستقيم المرسوم مماسا لبيان التطبيق ق (س) = س٣ ــ س عند النقطة التي احداثيها السيني = ١ يمس الدائرة س٢ + ص٢ + ١٤ ص = حـ

جد قيمة حـ ثم جد احداثيي نقطة تماس الدائرة مع المستقيم .

٢٧) لتكن أ هي النقطة (ــ ٢ ، ٤) ولتكن ب ∋ المحور الاول ولتكن حـ ∋ المحور الثاني بحيث ان أ تقسم قطعة المستقيم حـ ب بنسبة ١ : ٢ فاذا كانت ب هي نقطة تماس المستقيم أب مع بيان التطبيق ق (س) = د س٢ + هـ س + ٢٠ فجد قيمة كل من د ، هـ

٢٨) اثبت ان مماسي بيان التطبيق ق (س) = ٥س ــ س٢ ــ ٦ عند نقطتي تقاطعه مع المحور الاول يكونان متعامدين .

٢٩) اذا كان ق (س) = ٥ ــ س٢ ــ س فجد معادلتي المستقيمين المماس والعمود عليه عند س = ١ واثبت ان مساحة المثلث المحدد بالمماس والعمود عليه من نقطة المماس والمحور الاول يساوي ١٥ وحدة مربعة .

٣٠) اذا كان د (س) = أ س٢ + ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ ثوابت وكان د (١) = ٧ ، د (٢) = ٢٣ ، د (٣) = ١٧ جد دً (٢)

٣١) اذا كان ق (س) = س٢ + أ س + ب ، د (س) = حـ س ــ س٢ متماسان عند النقطة (١ ، ٠) فجد قيم الثوابت أ ، ب ، حـ

٣٢) جد قيمة الثابت حـ والتي تجعل مماس بيان التطبيق ق (س) = س (حـ ــ س٢) في نقطة الاصل يصنع زاوية مقدارها ٤٥ مع الاتجاه الموجب للمحور الاول .

٣٣) جد قيمة الثابت حـ التي تجعل المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٣) ، (٥ ، ــ ٢) يمس بيان التطبيق ق (س) = $\frac{حـ}{س + ١}$ حيث س ≠ ــ١

٣٤) اذا كان ق (س) = س٢ + ٣س ــ ٤ وكانت النقطتان أ (١ ، هـ) ، ب (ــ ١ ، دَ) تقعان على بيان التطبيق . جد نقطة على المنحنى بحيث يكون فيها المماس موازيا للمستقيم أب .

٣٥) اذا كان بيان التطبيق ق (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د يمس المستقيمين ص = ٩ س + ١٨ ، ٣س + ص = ٢ عند نقاط تقاطعهما مع محوري السينات والصادات على الترتيب .. فجد كلا من أ ، ب ، حـ ، د

٣٦) بين ان المماسين للمنحنى ٨ ص = (س ــ ٢)٢ عند النقطتين (٤ ، ½) ، (ــ ٦ ، ٨) يتقاطعان في زاوية قائمة على المستقيم ص = ــ ٢
واذا كانت نقطة التقاطع هي آ اما ب فهي (٢ ، ٢) .. بين ان المستقيم آب يكون عمودا على المستقيم الواصل بين نقطتي التماس .

ثانيا ــ بعض التطبيقات الفيزياوية

اذا كان ق (ن) = م يمثل القانون الذي بموجبه تتحرك كتلة مادية بعد ن من الثواني من بدء حركتها وسوف نطلق عليه اسم التطبيق المسافي وعلى خط مستقيم .
فبعد ن وحدة زمنية يكون $م_1$ = ق (ن)

وبعد ن + ع وحدة زمنية يكون $م_2$ = ق(ن + ع)

$$\text{وبما ان } \frac{م_2 - م_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{ق(ن+ع) - ق(ن)}{ن + ع - ن} = \frac{ق(ن+ع) - ق(ن)}{ع}$$

$$= \frac{م}{ن} = \text{معدل السرعة}$$

وعند ما ع ← صفر فان $\frac{ق(ن+ع) - ق(ن)}{ع}$ تسمى بالسرعة الانية

$$\therefore \text{غـــا}_{ن \to \text{صفر}} \frac{م}{ن} = \frac{دم}{دن} = \text{السرعة الانية} = س(ن)$$

وبما ان التعجيل عند اية لحظة يعرف بانه تغير السرعة بالنسبة للزمن .

$$\therefore ت(ن) = \frac{دس}{دن} = \frac{د^2ل}{د ن^2}$$

اما الانطلاق Speed فيعرف بانه |قَ (ن)| اى انه انطلاق الجسم يعرف بانه قيمة السرعة ويهمل الاتجـــاه .

مثال ١) نقطة مادية تتحرك على خط مستقيم بموجب القانون م (ن) = ١٣٢ + ١٠٨ن ــ ١٦ن٢ + ٣ن٣ . حيث م المسافة بالاقدام ن هو الزمن بالثواني .
ما هي سرعته عند ما ن = ٢ ؟ وما هو تعجيله عند ما ن = ١ ، ن = ٣
الحل) س(ن) = مَ (ن) = ١٠٨ ــ ٣٢ن + ٩ن٢

ت(ن) = ـ ح(ن) = ـ ٣٢ + ١٨ ن

عندما ن = ٢ فان س(٢) = ١٠٨ ـ ٣٢ × ٢ + ٩ × ٤

= ١٠٨ ـ ٦٤ + ٣٦ = ٨٠ قدم/ ثا

عندما ن = ١ ، ت (١) = ـ ٣٢ + ١٨ = ـ ١٤ قدم/ ثا/ ثا

عندما ن = ٣ ، ت (٣) = ـ ٣٢ + ٥٤ = ٢٢ قد/ ثا / ثا

مثال ٢) نقطة مادية تتحرك بخط مستقيم افقي بموجب القانون

ل (ن) = ن٣ ـ ٩ن٢ + ٢٤ن

آ ـ متى تتزايد الازاحة ومتى تتناقص

ب ـ متى تتزايد السرعة ومتى تتناقص

جـ ـ متى تتزايد الانطلاق ومتى تتناقص

د ـ جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم خلال الخمس ثواني الاولى من بدء حركته .

هـ ـ جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم خلال الثانية الرابعة

الحل) س(ن) = دل/دن = ٣ن٢ ـ ١٨ن + ٢٤

= ٣(ن ـ٢) (ن ـ ٤)

	٢	٤	
----	+++	+++	اشارة ن ـ٢
----	---	+++	اشارة ن ـ٤
++++	---	+++	اشارة ٣(ن ـ٢) (ن ـ ٤)

وبما ان الازاحة تتزايد

عندما السرعة > صفر

اى عندما ن< ٢ أو ن > ٤

وبما ان الازاحة تتناقص عندما السرعة < صفر

اى عندما ن ∈] ٢ ، ٤ [

ب) ت (ن) = دس/دن = ٦ن ـ ١٨ = ٦(ن ـ٣)

	٣	
---	++++++	اشارة ن ـ٣

وبما ان السرعة تتزايد عندما التعجيل > صفر اى عندما ن > ٣

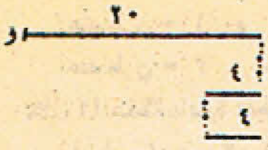
وتتناقص عندما التعجيل < صفر اىعندما ن < ٣

جـ) الانطلاق يتزايد عندما السرعة والتعجيل لهما نفس الاشارة ويتناقص عندما يختلفان في الاشارة ومن المخطط المجاور نستنتج ان الانطلاق يتزايد في ن > ٤ او ن ∈]٢ ، ٣ [

ويتناقص في ن <٢ أو في ن ∈]٣ ، ٤ [

٢	٣	٤		
+++	---	---	++	اشارة س(ن)
---	---	++++	++	اشارة ت (ن)

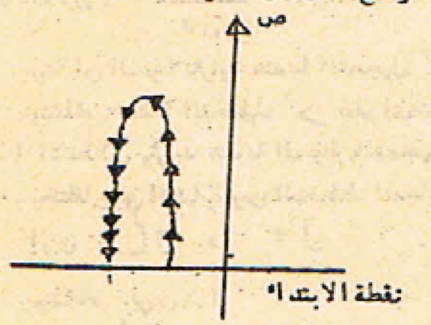
د) النقطة تتحرك الى اليمين من النقطة (و) عندما تكون السرعة موجبة وانها تتحـــرك نحو اليسار عندما تكون السرعة سالبـــة .
وهنا عندما ن = صفر فان ل = صفر
ويكون الجسم عند نقطة و



وان بداية الحركة نحو اليمين لان س(ن) > صفر
لاول ثانيتين والتي عندها ل (٢) = ٢٠ قدما هـ ......
من و
وفي خلال الثانيتين التاليتين سوف يتحرك الجسم نحو اليسار والتي في نهايتهـــا

يكون الجسم على بعد ل (٤) = ١٦ قدما من و
اى يتراجع الى اليسار مسافــة ٤ اقدام (٢٠ــ ١٦)
وبعد خمس ثوان من المركز يكون الجسم على بعد ل (٥) = ٢٠ قدما مـــن و
ويكون باتجاه اليمين اى يسير ٤ ثوان اخرى نحـــو اليمين خلال الثانية الخامســة (٢٠ـــ ١٦)
∴ المسافة الكلية التي تقطعها الجسم = ٢٠ + ٤ + ٤ = ٢٨ قدم
هـ) المسافة التي يقطعها خلال الثانية الرابعة
= | ل (٤) ــ ل (٣) | = | ١٦ ــ ١٨ | = ٢ قدم

مثال ٣) قذفت كرة شاقوليا الى الاعلى بموجب القانون م = ٩٦ن ــ ١٦ن٢ حيث م الارتفاع بالاقدام ن الزمن بالثواني (١) جد سرعتها بعد ثانيتين مـــن بـــداء حركته . هل تبقى ترتفع ام تسقط ؟
٢) كم ثانية تبقى ترتفع ؟ وماهو اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة ؟



الحل) مَ = ٩٦ ــ ٣٢ن
∴ س (ن) = ٩٦ ــ ٣٢ ن
س(٢) = ٣٢ قد / ثا
وبما ان السرعة موجبة
∴ الكرة لازالت ترتفع
وعندما س (ن) = صفر
فان ٩٦ــ ٣٢ن = ٠
∴ ن = ٣

وعندما ن > ٣ فان السرعة تصبح سالبة وهذا يعني ان الحركة تكون الى الاسفـــل اى ان الكرة تسقط وعندما ن = ٣ فان م = ١٤٤ قدم وهو اقصى ارتفاع تصلـــه الكرة .

تمارين

١) جسم تحرك بخط مستقيم بموجب القانون م = ن^{٣} ـ ٦ن^{٢} + ٩ن + ٤

١) جد الازاحه والتعجيل عند ما السرعة = صفر

٢) جد الازاحه والسرعة عند ما التعجيل = صفر

٣) متى تتزايد م ؟

٤) متى تتزايد السرعة ؟ متى يتغير اتجاه الحركة ٠

٢) جسم يتحرك افقيا بخط مستقيم بموجب القانون م = ق (ن) = ن^{٤} ـ ٦ن^{٣} + ١٢ن^{٢} ـ ١٠ن + ٣

١) متى يتزايد الانطلاق ومتى يتناقص؟

٢) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

٣) جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الثلاث ثوان الاولى من بدء الحركة ٠

٣) تقذف حجر شاقوليا الى الاعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (١١٢) قدم/ ثا يتحرك بموجب القانون م = ١١٢ن ـ ١٦ن^{٢} حيث م المسافة بالاقدام من نقطة الابتداء احسب :ـ

١) السرعة والتعجيل عند ما ن = ٣ ، ن = ٤

٢) اقصى ارتفاع يصله الجسم

٣) متى يكون على ارتفاع ٩٦ قدم ؟ وماهي سرعته عندما يكون على هذا الارتفاع ؟

٤) ادرس حركة كل من الاجسام التالية والتي بشكل افقي وعلى خط مستقيم والمعطاة معادلة كل منهما فيما ياتي :ـ

١) ل(ن) = ن^{٣} ـ ٦ن^{٢} + ٣

٢) ل(ن) = ن^{٣} ـ ٥ن^{٢} + ٧ن ـ ٣

٣) س(ن) = (ن ـ ١)^{٢} (ن ـ ٤)

٤) س(ن) = (ن ـ ١)^{٤}

٥) جسم يتحرك عموديا الى الاعلى وفي خط مستقيم بحيث ان الازاحة ل تقاس وفق التطبيق

ل (ن) = ن^{٢} ـ ١٨ن + ٨٨١ جد

١) مقدار الزمن الذى يمضي حتى يصل اعلى ارتفاع

٢) ما ارتفاعه عند نقطة بدء الحركة عندئذ ؟

٦) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم وفق بيان التطبيق التالي :ـ

ل(ن) = ن^{٣} + ٤ن ـ ٣ن^{٢} حيث ل الازاحة بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد

١) معدل السرعة خلال الثانية الخامسة

٢) السرعة والتعجيل في نهاية خمس ثوان من بدء الحركة

٧) جد السرعة الابتدائية التي يجب ان يقذف بها صاروخ راسيا الى الاعلى حتى يصل الى ارتفاع (٢٧٠٠) يارد ·

(ملاحظة = استخدام القانون ل(ن) = س$_{١}$ ن − ١٦ن^{٢} حيث (س$_{١}$) ثابت

ل بالاقدام ن بالثواني) ·

نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem

اذا كان ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق في]أ ، ب[
فانه ∃ على الاقل حـ ∈]أ ، ب[وتحقق
ق(ب) − ق(أ) = (ب − أ) ق̀(حـ)

مثال ١) جد قيمة حـ التي تحصل عليها بنظرية القيمة المتوسطة اذا كان

ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ − $\frac{س}{١٢}$ + $\frac{١}{١٢}$ ، وان أ = −٢ ، ب = ١ ·

بما ان التطبيق مستمر في [−٢ ، ١] وقابل للاشتقاق في]−٢ ، ١[

وان ق(−٢) = ٢ + $\frac{٢}{١٢}$ + $\frac{١}{١٢}$ ، ق(١) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$ + $\frac{١}{١٢}$

ق̀(س) = $\frac{٢س}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$

ق̀(حـ) = $\frac{٢حـ}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$

ق(ب) − ق(أ) = (ب − أ) ق̀(حـ)

$\frac{١}{٢}$ − (٢ + $\frac{٢}{١٢}$ + $\frac{١}{١٢}$) = (١ + ٢) ($\frac{٢حـ}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$) = −٣

∈]−٢ ، ١[

مثال ٢) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتجد قيمة تقريبية الى $\sqrt{٣٧}$

الحل) نفرض ان ق(س) = $\sqrt{س}$ وان أ = ٣٦ ، ب = ٣٧

التطبيق ق قابل للاشتقاق في الفترة]٣٦ ، ٣٧[ومستمر في [٣٦ ، ٣٧]

لذا فانه ∃ عدد مثل حـ يحقق المعادلة

ق̀(حـ) = $\frac{\sqrt{٣٧} - ٦}{٣٧ - ٣٦}$

$\frac{١}{٢\sqrt{حـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣٧} - ٦}{١}$

وان $36 < \text{حـ} < 37$

لذا $6 + \dfrac{1}{2\sqrt{\text{حـ}}} = \sqrt{37}$

وبما ان $\sqrt{36} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{37}$ لان $\text{حـ} \in]36 , 37[$

$\Leftrightarrow \sqrt{36} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{37} < \sqrt{49}$

$\Leftrightarrow \sqrt{36} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{49}$ لان $\sqrt{37} < \sqrt{49}$

$\Leftrightarrow 6 < \sqrt{\text{حـ}} < 7$

$\Leftrightarrow 12 < 2\sqrt{\text{حـ}} < 14$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{12} > \dfrac{1}{2\sqrt{\text{حـ}}} > \dfrac{1}{14}$

$\Leftrightarrow 6 + \dfrac{1}{12} > 6 + \dfrac{1}{2\sqrt{\text{حـ}}} > 6 + \dfrac{1}{14}$

$\Leftrightarrow 6.0714 < \sqrt{37} < 6.0833$

ومن الممكن ان نستخدم النتيجة التالية وهي مشتقة من نظرية القيمة المتوسطة

$\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) \cong \text{ق}(\text{أ}) + \text{هـ}\ \bar{\text{ق}}(\text{أ})$

$\text{أ} = 36$ ، $\text{هـ} = 37 - 36$ ، $\bar{\text{ق}}(36) = \dfrac{1}{2\sqrt{36}} = \dfrac{1}{12}$

$\text{ق}(36) = \sqrt{36} = 6$

$\therefore \text{ق}(36 + 1) \cong 6 + 1 \times \dfrac{1}{12}$

$\sqrt{37} \cong 6.0833$

مثال ٣) صندوق على شكل مكعب طول حرفه ٩٩٫٨ سم جد حجمه بصورة تقريبيــة .

الحل) $\text{ح} = \text{ل}^3$ ، $\text{أ} = 100$ ، $\text{هـ} = 99.8 - 100 = -0.2$

$\text{ح} = \text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(100) = (100)^3 = 1000000$

$\bar{\text{ق}}(\text{ل}) = 3\text{ل}^2$ ، $\bar{\text{ق}}(100) = 30000$

$\therefore \text{ق}(100 - 0.2) \cong 1000000 + (-0.2) \times 30000$

$\text{ق}(99.8) \cong 994000$ سم^3

مثال ٤) جد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63} + \sqrt[6]{63}$.

الحل) ليكن $\text{ق} : \text{ح}^{+} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt[6]{\text{س}}$

$63 = 64 + (-1) = \text{أ} + \text{هـ}$

$\text{ق}(\text{أ}) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[6]{64} = 14$

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} + \frac{١}{٦\sqrt[٦]{\text{س}^{٥}}}$$

$$\bar{\text{ق}}(\text{أ}) = \bar{\text{ق}}(٦٤) = \frac{١}{٢\sqrt{٦٤}} + \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(٦٤)^{٢}}} + \frac{١}{٦\sqrt[٦]{(٦٤)^{٥}}}$$

$$= \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٤٨} + \frac{١}{١٩٢}$$

$$= \frac{١٧}{١٩٢}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) \cong \text{ق}(\text{أ}) + \text{هـ}\,\bar{\text{ق}}(\text{أ})$$

$$\text{ق}(٦٣) \cong \text{ق}(٦٤) + (-١)\,\bar{\text{ق}}(٦٤) = ١٤ - \frac{١٧}{١٩٢}$$

ملاحظة / اذا كان ق مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق في]أ ، ب[فاذا وتغيرت س من $\text{س}_{١}$ الى $\text{س}_{٢}$

فان هـ ⟵ $\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}$ ويكون هو التغير في س

اما المقدار هـ $\bar{\text{ق}}(\text{س}_{١})$ فيسمى التغير التقريبي لـ ق (س)

ويطلق عليه ايضا الخطأ التقريبي .

مثال ٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ س ـ $\text{س}^{٢}$ فاذا تغيرت س من ٢ الى ٨ر١ ، جد التغير في ق(س) بصورة تقريبية

الحل) $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = ٨ - ٢\text{س}$

$\therefore \bar{\text{ق}}(٢) = ٨ - ٢ \times ٢ = ٤$

هـ = ٨ر١ ـ ٢ = ـ ٢ر٠

$\therefore$ هـ $\bar{\text{ق}}(\text{س}_{١})$ = هـ $\bar{\text{ق}}(٢)$ = ـ ٢ر٠ × ٤ = ـ ٨ر٠

مقدار التغير التقريبي في ق (س) .

مثال ٦) ليكن ق (س) = ٢ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ناقش صحة نظرية القيمة المتوسطة اذا علمت ان

أ = ـ ٨ ، ب = ١

الحل)

$\text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(-٨) = ٢\sqrt[٣]{٦٤} = ٨$

$\text{ق}(\text{ب}) = \text{ق}(١) = ٢$

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{٤}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}} \quad ، \quad \therefore \bar{\text{ق}}(\text{حـ}) = \frac{٤}{٣\sqrt[٣]{\text{حـ}}}$$

ق (ب) ـ ق (أ) = (ب ـ أ) قَ (ح)

٢ ـ ٨ = (١ + ٨) × $\frac{٤}{٣\sqrt[٣]{ح}}$

$\sqrt[٣]{ح}$ = ـ ١

∴ ح = ـ ٨ ∉] ـ ٨ ، ١ [

∴ لاتتحقق نظرية القيمة المتوسطة والسبب في ذلك ان التطبيق غير قابل للاشتقاق عند الصفر ∈] ـ ٨ ، ١ [

مثال ٧) يراد طلاء صندوق مغلق على شكل مكعب طول حرفه ١ م بطلاء سمكه ١ ملم . جد كمية الطلاء بصورة تقريبيـة .

الحل)

ان الطلاء سيسبب زيادة في الحجم نتيجة للزيادة في طول حرف المكعب .. فاذا كان طول حرف المكعب الاصلي = ١٠٠ سم

فان طوله الجديد = ١٠٠٫٢ سم اى ان هـ = ١٠٠٫٢ ـ ١٠٠ = ٠٫٢ سم

ق(ل) = ح = ل٣ ، قَ (ل) = ٣ل٢ ، قَ (١٠٠) = ٣٠٠٠٠

التغير في الحجم = هـ قَ (ل) = ٠٫٢ × ٣٠٠٠٠ = ٦٠٠٠سم٣ = ٦ لتر

مثال ٨) دائرة نصف قطرها ١٤ سم . فاذا كان هناك احتمال خطأ في قيـــاس محيطها = ١٫٤ ط سم فما هو احتمال الخطا في قياس مساحتها .

الحل)

محيط الدائرة = ٢نق ط

ل (نق) = ٢ نق ط

لَ (نق) = ٢ ط

الخطا في قياس المحيط = ± هـ لَ (نق)

١٫٤ ط = ± هـ × ٢ ط

∴ هـ = ± ٠٫٧ سم الخطأ في قياس نصف القطر

المساحة = نق٢ ط اى ع (نق) = نق٢ ط ، ∴ عَ (نق) = ٢نق ط

عَ (١٤) = ٢٨ ط

اى ان الخطا في قياس المساحة = هـ عَ (نق) = ∓ ٠٫٧ × ٢٨ ط

= ± ١٩٫٦ط سم٢

تمارين

في كل مما يلي (من تمرين ١ الى ٧) جد جميع الاعداد حـ بين أ و ب والتي تحقق نظرية القيمة المتوسطة . وان كانت نظرية القيمة المتوسطة لاتتحقق فاذكر سبب عدم امكانية تطبيقها .

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢$ ، أ = ٠ ، ب = ٢

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢$ ، أ = ١ ، ب = ٣

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ ، أ = صفر ، ب = ١

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$ ، أ = ـ ٣ ، ب = ٤

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} + ٣}{٣\text{س} + ٢}$ حيث $\text{س} \neq \dfrac{-٢}{٣}$ ، أ = ـ ١ ، ب = صفر

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٥]{\text{س}^{٩} - \text{س}^{٤}}$ ، أ = ـ ½ ، ب = ½

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ ، $\text{س} \neq ١$ ، أ = ـ ١ ، ب = ٢

٨) اذا كان ق تطبيق كثير الحدود من الدرجة الثانية وكان أ ، ب اي عددين حقيقيين في منطلق ق . فاثبت ان $\text{حـ} = \dfrac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ هي التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة .

(تلميح / افرض ان $\text{ق}(\text{س}) = \text{د}\,\text{س}^{٢} + \text{هـ}\,\text{س} + \text{و}$ ، $\text{د} \neq$ صفر وان كلا من د ، هـ ، و ثوابت)

٩) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٧} - ٢\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + ٣$. جد بصورة تقريبية ق(١٫٠١)

١٠) جد بصورة تقريبية كلا مما يلي :-

$(١٢)^{-\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{(٠٫٩٨)^{-١}}$ ، $(١٫٠٨)^{\frac{٤}{٣}} + (١٫٠٨)^{-٢}$ ، $\dfrac{١}{\sqrt[٣]{١٫٠٨}}$ ،

$\sqrt{(٠٫٠٠٩٩)^{-١}}$ ، $\sqrt[٥]{(٣١)^{-١}}$ ، $\sqrt{٨٢} + \sqrt[٤]{٨٢}$ ، $\sqrt{١٠} + \sqrt[٣]{١٠}$

التطبيقات العددية المتزايدة المتناقصة

نحن نعلم انه اذا كان ميل المماس موجبا فانه يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول ٠

اى انه عندما قَ (س) > صفر فان المنحني يتزايد كلما اتجهنا من اليسار الى اليمين ٠

اما اذا كان ميل المماس سالبا فان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول ٠ وبذلك عندما يكون قَ (س) < صفر فان المنحني يتناقص كلما اتجهنا من اليسار الى اليمين ٠

اما اذا كان الميل = صفر فانه يعني ان المماس يوازى المحور الاول والنظرية التالية توضح امكانية استخدام اشارة المشتقة فيما اذا كان التطبيق متزايد او متناقص بفترات معينة ٠

نظريــــة

ليكن ق تطبيق مستمر في [أ ، ب] وكان ق قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[فان :

١) ق متزايد في]أ ، ب[⟺ قَ (س) > صفر ∀ س ∈] أ ، ب [

٢) ق متناقص في]أ ، ب[⟺ قَ (س) < صفر ∀ س ∈] أ ، ب [

تعريف

ليكن ق ∈ تط (ك) ، ∀ س ∈ ك

١) اذا كان قَ ($س_١$) = صفرا فان ($س_١$ ، ق ($س_١$)) نقطة حرجــــة

٢) اذا كان ق غير قابل للاشتقاق عند $س_١$ فان ($س_١$ ، ق ($س_١$)) نقطة حرجة

تعريف

ليكن ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب]

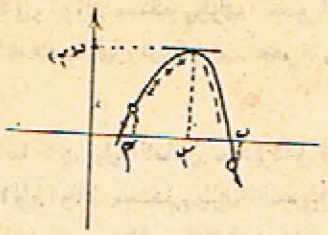
١) للتطبيق ق اعظم قيمة محلية عند النقطة ن اذا وجد]حـ ، ك[⊂ [أ ، ب] وان]حـ ، ك[تحتوى اعظم قيمة فان ق (ن) = اعظم قيمة محلية ٠

٢) للتطبيق اوطأ قيمة محليا عند النقطة و اذا وجد]ى ، ل[⊂ [أ ، ب] وان]ى ، ل[تحتوى اوطأ قيمة فان ق (و) اصغر قيمة محليا ٠

نظريــــة

اذا كان ق تطبيقا عدديا قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[وكان للتطبيق اصغـــر قيمة محليا او اكبر قيمة محليا عند ن فان قَ (ن) = صفر

نظرية



ليكن ق تطبيقا مستمرا

وليكن $س_1$ ∈ منطلق ق

ولتكن]أ ، ب[بحيث ان

$س_1$ ∈]أ ، ب[قابلا للاشتقاق فيها

١) فاذا كان قَ (س) < صفر ∀ س ∈]$س_1$ ، ب[و قَ(س) > صفر ∀ س ∈]أ ، $س_1$[و قَ ($س_1$) = صفر فان ق ($س_1$) = اعظـم قيمة محليا لـ ق .

٢) واذا كان قَ (س) > صفر ∀ س ∈]$س_1$ ، ب[و قَ (س) < صفر ∀ س ∈]أ ، $س_1$[وقَ ($س_1$) = صفر فان ق ($س_1$) = اوطأ قيمة محليا لـ ق .

كيفية ايجاد اعظم قيمة واصغر قيمة للتطبيق

ليكن ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق فـي]أ ، ب[فيمكـــن ايجاد اعظم قيمة واوطأ قيمة محليـــة للتطبيق ق كما يلي :—

١) نجد قَ (س)

٢) نجد النقاط الحرجة ولتكن احداثياتها السينية $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ...

٣) ناخذ القيم التي ∈ [أ ، ب] فقط ولتكن على سبيل المثال $س_1$ ، $س_3$

٤) نجد ق (أ) ، ق (ب) ، ق ($س_1$) ، ق ($س_3$) فايهما اكبر هـــو اعظم قيمة وايهما اصغر هو اصغر قيمة في الفترة [أ ، ب].

امثلـــــــة

في الامثلة التاليـة جد مناطـق التزايـد والتناقص ان امكــن وجد النقـــاط الحرجة ... ثم جد ان امكن اعظم واوطأ قيمـة محليا .

١) ق (س) = ٨ ـ ٣س

ق َ (س) = ـ ٣ < صفر ∀ س ∈ ح

∴ ق متناقص ∀ س ∈ ح

∴ لاتوجد نقاط حرجة

∴ لاتوجد اعظم ولاتوجد اصغر قيمة محليـــة

٢) ق(س) = س٢ ـ ٦س + ٤

ق َ(س) = ٢س ـ ٦ ق َ(س) ++++ ٣ ------ اشارة ٢(س ـ ٣)

↗متزايد ↘متناقص

∴ ق متزايد في { س : س ∈ ح ، س > ٣ }

ق متناقص في { س : س ∈ ح ، س < ٣ }

(٣ ، ق (٣)) = (٣ ، ـ ٥) نقطة حرجة

ق (٣) = ـ ٥ اصغر قيمة محلية لـ ق

٣) ق (س) = س٣ ـ ٩ س٢ + ٢٧س ـ ٤

ق َ (س) = ٣س٢ ـ ١٨ س + ٢٧

= ٣(س٢ ـ ٦س + ٩)

= ٣(س ـ ٣)٢ ≥ صفر ∀ س ∈ ح

∴ ق متزايد ∀ س ∈ ح / {٣} ،

∴ لاتوجد اعظم قيمةمحليةولاتوجد اصغر قيمة محلية للتطبيق

وبجعل ق َ (س) = ٠ نحصل على س = ٣

∴ (٣ ، ق (٣)) نقطة حرجـة

٤) ليكن ق : ح / { ـ ٢ } ⟵ ن بحيث ق (س) = $\frac{٣ ـ س}{٢ + س}$

ق َ (س) = $\frac{(٢+ س) (ـ١) ـ (٣ ـ س) × ١}{(٢ + س)^{٢}}$ = $\frac{ـ٥}{(٢ + س)^{٢}}$ < صفر

∀ س ∈ ح / { ـ ٢ }

∴ ق متناقص في ح / { ـ ٢ }

∴ لاتوجد نقاط حرجة لان ق َ (س) ≠ صفر ∀س ∈ ح / { ـ٢ }

وانه قابل للاشتقاق ∀ س ∈ ح / { ـ٢ }

∴ لاتوجد اعظم قيمة محلية ولاتوجد اصغر قيمة محلية

٥) ليكن ق : [ـ٣ ، ٣] ⟵ ح بحيث ق(س) = $\sqrt{٩ ـ س^{٢}}$

ق̄ (س) = (ـ ٢س) / (٢ √(٩ ـ س٢)) = (ـ س) / √(٩ ـ س٢)

ق̄ (س) > صفر ∀ س ∈] ـ٣ ، ٠ [

ق̄ (س) < صفر ∀ س ∈] ٠ ، ٣ [

∴ ق متزايد في] ـ ٣ ، ٠ [

و ق متناقص في] ٠ ، ٣ [

ق̄ (صفر) = صفر

∴ (٠ ، ٣) نقطة حرجة

ق (٠) = ٣ اعظم قيمة محلية

	٣	صفر	ـ٣
اشارة ـ س		ـــــ	++++
اشارة √(٩ ـ س٢)		++++++	++++
اشارة ق̄ (س)		ـــــ	+++++
		متناقص	متزايد

٦) ق (س) = ∛س

ق̄ (س) = ١ / (٣ ∛س٢) > صفر ∀ س ∈ ح / {٠}

∴ ق متزايد ∀ س ∈ ح / {٠}

∴ لايمتلك اعظم قيمة ولايمتلك اصغر قيمة محلية

ق غير قابل للاشتقاق عند الصفر

∴ (٠ ، ٠) نقطة حرجـــة

٧) ق (س) = ٢٧س ـ س٣

ق̄ (س) = ٢٧ ـ ٣س٢ = ٣(٩ ـ س٢) = ٣(٣ ـ س) (٣ + س)

∴ ق متزايد في] ـ٣ ، ٣ [

ومتناقص في ح / [ـ٣ ، ٣]

اعظم قيمة محلية = ق(٣) = ٥٤

اصغرقيمة محلية = ق(ـ٣) = ـ٥٤

النقاط الحرجة

(٣ ، ٥٤) ، (ـ٣ ، ـ٥٤)

	٣	ـ٣	
اشارة ٣ـ س	ـــ	++++	+++
اشارة ٣ + س	+++	++++	ـــــ
اشارة ق̄(س)	ـــ	++++	ـــــ
	متناقص	متزايد	متناقص

٨) ق: ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = ٢س + ١٨/س

ق̄(س) = ٢ ـ ١٨/س٢ = (٢س٢ ـ ١٨)/س٢ = ٢(س٢ ـ ٩)/س٢ = ٢(س ـ ٣) (س + ٣)/س٢

ق متناقص في] ـ٣ ، ٣ [/ {٠}

ق متزايد في ح / [ـ٣ ، ٣]

ق (٣) = ١٢ اوطا قيمة محليا

ق(ـ٣) = ـ١٢ اعظم قيمة محليا

النقاط الحرجة(٣ ، ١٢) ،

(ـ ٣ ، ـ١٢)

	٣	صفر	ـ٣	
اشارة س ـ ٣	+++	ـــ	ـــ	ـــ
اشارة س + ٣	+++	+++++	+++	ـــــ
اشارة س٢	+++	++ ++	++++	+++
اشارة ق̄(س)	+++	ـــ	ـــ	+++
	متزايد	متناقص	متناقص	متزايد

٩) ق : ح /]-٣ ، ٣[← ح بحيث ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٩}$

ق'(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ٩}}$

ق متزايد ∀ س > ٣

ق متناقص ∀ س ≤ -٣

لاتوجد نقاط حرجة

لاتوجد اعظم قيمة محلية

ولاتوجد اصغر قيمة محلية للتطبيق

	٣		-٣
اشارة س	++++++		-----
اشارة $\sqrt{س^{٢} - ٩}$	++++	∌ [illegible]	++++
اشارة ق'(س)	+++		----
	متزايد		متناقص

١٠) ق(س) = $\frac{٢}{س^{٢} + ١}$ ، ق'(س) = $\frac{-٤س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

ق متزايد ∀ س < صفر

ومتناقص ∀ س > صفر

ق(٠) = اعظم قيمة محلية

(٠ ، ق(٠)) نقطة حرجة

	صفر	
اشارة -٤س	----	++++
اشارة $(س^{٢} + ١)^{٢}$	+++	++++++
اشارة ق'(س)	----	+++
	متناقص	متزايد

(١١) ليكن ق(س) = $س^{٤} - ٨ س^{٢}$

جد اعظم واصغر قيمة للتطبيق ق في الفترات التالية [-٣ ، ٣] ، [-١ ، ١] ، [٣ ، ٤]

الحل ق'(س) = $٤س^{٣} - ١٦س$

= ٤س($س^{٢}$ - ٤) = ٤س(س - ٢)(س + ٢)

عندما ق'(س) = ٠ فان س = ٠ او س = ٢ او س = -٢

١) في [-٣ ، ٣] ، كل من صفر ، -٢ ، ٢ ∈ [-٣ ، ٣]

وان ق(-٣) = ٩ ، ق(٣) = ٩ ، ق(٢) = -١٦ ، ق(-٢) = -١٦ ، ق(٠) = ٠

∴ اعظم قيمة = ٩ ، اصغر قيمة = -١٦

٢) في [-١ ، ١]

صفر ∈ [-١ ، ١]

∴ ق(-١) = -٧ ، ق(١) = -٧ ، ق(٠) = صفر

∴ صفر اعظم قيمة و -٧ اصغر قيمة للتطبيق ق في [-١ ، ١]

٣) في [٣ ، ٤] ايا من -٢ ، ٠ ، ٢ ∉ [٣ ، ٤]

ق(٣) = ٩ ، اوطا قيمة

ق(٤) = ١٢٨ اعظم قيمة

١٢) اذا كان ق : ح / {٠} ← ح بحيث ق(س) = أس + $\frac{ب}{س}$ حيث

أ ، ب ∈ ح واذا كانت ($\frac{٥}{٢}$ ، ٢) نقطة حرجة فما قيمة كل من الثابتين

ای $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س + ٤ & \forall\ س \neq ٢ \\ ١٢ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

$\forall \langle س_ن \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ٢ فان

$ق(س_ن) = \langle (س_ن)^٢ + ٢س_ن + ٤ \rangle =$ غا $\langle س_ن \rangle$ غا $\langle س_ن \rangle +$ ٢غا $\langle س_ن \rangle$

+ غا $\langle ٤ \rangle$

$= ٢ \times ٢ + ٢ \times ٢ + ٤ = ١٢$

وبما ان $ق(٢) = ١٢$

$\therefore$ غا $\langle ق(س_ن) \rangle = ق(٢)$

$\therefore$ ق مستمر عند ٢

٤) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س - ٢} & \text{اذا كان } س \neq ٢ \\ أ & \text{اذا كان } س = ٢ \end{cases}$

حيث أ $\in$ ح ، جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند س = ٢

الحل/ يمكن كتابة التطبيق كما يلي :-

$ق(س) = \begin{cases} \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{س - ٢} & \text{اذا كان } س \neq ٢ \\ أ & \text{اذا كان } س = ٢ \end{cases}$

اى ان $ق(س) = \begin{cases} س + ٥ & \text{اذا كان } س \neq ٢ \\ أ & \text{اذا كان } س = ٢ \end{cases}$

ولكي يكون ق مستمرا عند س = ٢ فانه $\forall \langle س_ن \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ٢ فان غا $\langle ق(س_ن) \rangle =$ غا $\langle س_ن + ٥ \rangle =$ غا $\langle س_ن \rangle$

+ غا $\langle ٥ \rangle$

$= ٢ + ٥ = ٧ = ق(٢) = أ \Longleftarrow أ = ٧$

٥) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س + ١ \sqrt{س^٢}}{\sqrt{س^٢}} & س \neq \text{صفر} \\ ٣ & \text{عندما } س = \text{صفر} \end{cases}$

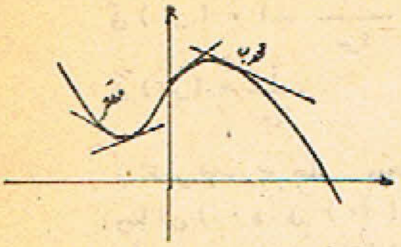
(١) ارسم ق في المستوى الاقليدى

(٢) هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك

الحل/ قبل ان نبدا بحل هذا التمرين لنعرف $\sqrt{س^٢}$

تعريف / $\sqrt{س^٢} = \begin{cases} س & \text{اذا كان } س \geq \text{صفر} \\ -س & \text{اذا كان } س < \text{صفر} \end{cases}$

يقال لتطبيق عددي انه مقعر (في فترة ما) اذا كان واقعا فوق مماساته ومحـــدب اذا كان واقعا تحتها



وتسمى النقطة التي يلتقي بها التقعر بالتحدب او التحدب بالتقعر بنقطة الانقلاب

ولمعرفة المناطق التي يكون فيهـــا منحنى التطبيق مقعرا او محدبا تجيبنا النظرية التاليـــة :ـــ

نظرية

ليكن ق ∈ تط (ك) ولتكن]أ ، ب[⊂ ك وان ق قابل للاشتقـــاق في]أ ، ب[فعندئذ

١) ق محدب في]أ ، ب[⟸⟹ ق̋ (س) < صفر ∀ س ∈]أ ، ب[

٢) ق مقعرا في]أ ، ب[⟸⟹ ق̋ (س) > صفر ، ∀ س ∈]أ ، ب[

٣) اذا كان حـ ∈]أ ، ب[و (حـ ، ق (حـ)) نقطة انقلاب فان ق̋ (حـ) = صفر او ق̄ غير قابل للاشتقاق في حـ

نظرية/

ليكن ق ، ق̄ تطبيقا قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[والتي تحتوي على حـ وان ق̄ (حـ) = صفر فعندئذ

١) اذا كانت ق̋ (حـ) < صفر فان ق (حـ) هي اعظم قيمة الى ق

٢) اذا كانت ق̋ (حـ) > صفر فان ق (حـ) هي اصغر قيمة الى ق

امثلـــــة

في الامثلة التالية جد مناطق التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب ان وجدت :ـــ

١) ق (س) = ٤س^٣ − س^٤ − ٦س^٢ − ٤

ق̄ (س) = ١٢س^٢ − ٤س^٣ − ١٢س

ق̋ (س) = ٢٤ س − ١٢س^٢ − ١٢

= − ١٢ (س^٢ − ٢س + ١)

= − ١٢ (س − ١)^٢

وبما ان ق̋ (س) < صفر ∀ س ∈ ح / {١}

∴ ق محدب ∀ س ∈ ح / {١}

$ق''(١) =$ صفر ولكن $(١ ، -٧)$ ليست نقطة انقلاب لان المنحني محدب قبلها وبعدها

٢) ليكن $ق : ح \ \{٠\} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = س + \frac{١}{س}$

$ق'(س) = ١ - \frac{١}{س^٢} = \frac{س^٢ - ١}{س^٢}$

$ق''(س) = \frac{٢}{س^٢}$

اشارة ق (س) ‎+++++ صفر ‎−−−−−

مقعر ‎ ‎ محدب

ق مقعر $\forall$ س > صفر ‎ ‎ ومحدب $\forall$ س $<$ صفر

وبما ان $(٠ ، ق(٠)) \not\in$ ق

∴ ليس للتطبيق نقطة انقلاب

٣) ليكن $ق(س) = ٤٠ س^٣ - ٣س^٥ + ١٠س - ٨$

$ق'(س) = ١٢٠ س^٢ - ١٥س^٤ + ١٠$

$ق''(س) = ٢٤٠ س - ٦٠س^٣$

$= ٦٠س(٤ - س^٢)$

$= ٦٠س(٢ - س)(٢ + س)$

٢ ‎ ‎ صفر ‎ ‎ −٢

اشارة ٦٠س	+++	+++	−−−	−−
اشارة ٢ − س	−	+++	++++	++
اشارة ٢ + س	+++	++	+++	−−
اشارة ق''(س)	−	+++	−−−	+++

∴ ق محدب في $]-٢ ، ٠[\cup \{س : س \in ح ، س > ٢\}$

ق مقعر في $]٠ ، ٢[\cup \{س : س \in ح ، س < -٢\}$

نقاط الانقلاب $(٠ ، ق(٠))$ ، $(٢ ، ق(٢))$ ، $(-٢ ، ق(-٢))$

٤) ليكن $ق : ح \ \{٢\} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = \frac{-٣}{س - ٢}$ ،

$ق'(س) = \frac{٣}{(س - ٢)^٢}$ ، $ق''(س) = \frac{-٦}{(س - ٢)^٣}$

ق محدب $\forall$ س > ٢

ومقعر $\forall$ س $<$ ٢

وبما ان ٢ $\not\in$ المنطلق

∴ لاتوجد نقطة انقلاب

	٢	
اشارة البسط	−−−−−	−−−−−−
اشارة $(س - ٢)^٣$	++++++	−−−−−−
اشارة ق (س)	−−−−	+++++++

٥) جد اعظم واوطأ قيمة محلية للتطبيق $ق(س) = س^٤ - ٨س^٢ + ٧$

$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٦س$

$ق''(س) = ١٢س^٢ - ١٦$

عندما $ق'(س) = ٠$ فان $٤س(س - ٢)(س + ٢) =$ صفر

∴ $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -٢$

ق (صفر) = ــ ١٦ < صفر ∴ ق(٠) اعظم قيمة محلية

ق (٢) = ٣٢ > صفر ∴ ق (٢) اصغر قيمة محلية

ق (ــ٢) = ٣٢ > صفر ∴ ق (ــ ٢) اصغر قيمة محلية

تمارين

جد المناطق التي يكون فيها كل من التطبيقات (من تمرين ١ الى ١٨) متزايدا او متناقصا ثم جد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية للتطبيق ان وجدت .

١) $\text{ص} = ١ - ٤\text{س} - \text{س}^{٢}$

٢) $\text{ل}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} + ٤)^{٣}$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}(\text{س} - ٣)$

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{س} \neq ٢$

٦) $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ ، $\text{س} \neq ١$

٧) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ١٦}$ ، $\text{س} \neq -٢ ، ٨$

٨) $\text{ص} = (\text{س} - ٣)\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} \geq$ صفر

٩) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{٣} - \sqrt[٣]{\text{س}}$

١٠) $\text{ص} = \text{س}^{٢}(\text{س} - ١٢)^{٢}$

١١) $\text{ص} = \text{س}(\text{س} - ١)^{٢}(\text{س} - ٢)$

١٢) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢} + ٣}$

١٣) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٢}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$

١٤) $\text{ص} = \frac{(\text{س} - ٢)(٨ - \text{س})}{\text{س}^{٢}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

١٥) $\text{ص} = \frac{١٦}{\text{س}(٤ - \text{س}^{٢})}$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح} / \{٢ ، -٢ ، ٠\}$

١٦) $\text{ص} = \frac{٤}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٨}}$

١٧) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ٤}}$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح} / \{٢ ، -٢\}$

١٨) $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

في الاسئلة (من تمرين ١٩ الى ٢٢) جد اعظم واوطأ قيمة لكل تطبيق في الفترة المبينة ازاء كل منها اما اذا لم تذكر الفترة نجدها ضمن اكبر منطلق له .

١٩) $ق(س) = \dfrac{س}{١ + س^{٢}}$

٢٠) $ق(س) = \sqrt{س(١٠ - س)}$

٢١) $ق(س) = س^{٢}$ في $[-١ ، ٣]$

٢٢) $ق(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$

(١) في $[-١ ، ٥]$

(٢) في $[-١٠ ، ١٢]$

في الاسئلة (من تمرين ٢٣ الى ٢٨) جد الفترات التي يكون فيها التطبيق محدبا او مقعرا .

٢٣) $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٢س + ٤$

٢٤) $ق(س) = (س + ١)^{٤}$

٢٥) $ق(س) = \dfrac{١}{س + ٣}$ ، $س \neq -٣$

٢٦) $ق(س) = \dfrac{س^{٢}}{س^{٢} + ١٢}$

٢٧) $ق(س) = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١٢س}$

٢٨) $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

تطبيقات على اعظم قيمة واوطأ قيمة محلية

كثير من الاسئلة تحل بفكرة اعظم قيمة واوطأ قيمة محلية للتطبيق وطريقة الحل نلخصها كما يلي :-

١) كوّن التطبيق المراد ايجاد اعظم او اوطأ قيمة محلية له على ان يكون في متغير واحد .

٢) اذا لم يكن التطبيق في متغير واحد فاستخدم شروط المسالة لتحويله الى تطبيق في متغير واحد .

٣) اشتق التطبيق بالنسبة لمتغيره المستقل ثم جد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية كما مر سابقا .

امثلـــة محلولـــة

١) اثبت صحة المتراجحة $\text{س} + \frac{1}{\text{س}} \geq 2 \quad \forall\ \text{س} > \text{صفر}$

الحل) ليكن ق : $\text{ح}^{++} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق(س)} = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 1 - \frac{1}{\text{س}^2}$

لتكن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر} \Longleftarrow \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2} = 0 \Longleftarrow \text{س}^2 - 1 = 0$

$\Longleftarrow \text{س} = \pm 1$

وبما ان $-1 \notin \text{ح}^{++}$ ∴ $\text{س} = 1$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}^3}$ ∴ $\text{ق}''(\text{س}) > \text{صفر} ، \forall\ \text{س} > \text{صفر}$

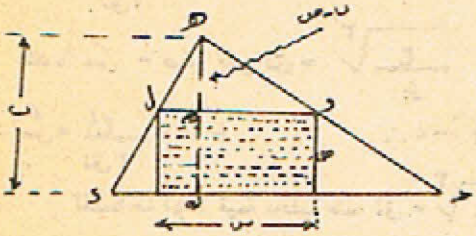
∴ ق مقعر $\forall\ \text{س} > \text{صفر}$

∵ ق (١) = ٢ اصغر قيمة محلية للتطبيق

∴ $\text{س} + \frac{1}{\text{س}} \geq 2$

٢) مثلث طول قاعدته أ سم وارتفاعه ب سم . رسم داخله مستطيل راسان متجاوران من رؤوسه يقعان على القاعدة .

جد اكبر مساحة لهذا المستطيل .



ΔΔ هـ و ل ، هـ حـ د المتشابهان

وفيهما

$\frac{\text{ول}}{\text{حد}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ ك}}$

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب} - \text{ص}}{\text{ب}}$

$\text{س} = \frac{\text{أ}(\text{ب} - \text{ص})}{\text{ب}}$ ......(١)

م = الطول × العرض = س ص ...(٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ينتج :-

$\text{م} = \frac{\text{أ}(\text{ب} - \text{ص})}{\text{ب}} \times \text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب ص} - \text{ص}^2)$

م : $]0 ، \text{ب}[\longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{م(ص)} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب ص} - \text{ص}^2)$

$\text{م}'(\text{ص}) = \text{صفر}$ فان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب} - 2\text{ص}) = \text{صفر}$

∴ $\text{ص} = \frac{\text{ب}}{2}$

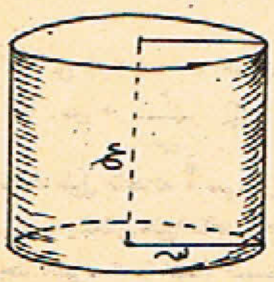
$$\text{ق}''(\text{ص}) = \frac{-2\text{أ}}{\text{ب}} < \text{صفر} \quad ، \quad \forall \text{ص} \in]0 ، \text{ب}[$$

$\therefore$ المساحة أكبر ما يمكن عندما ص $= \frac{\text{ب}}{2}$

$$\therefore \text{ق}\left(\frac{\text{ب}}{2}\right) = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\left(\text{ب} \times \frac{\text{ب}}{2} - \frac{\text{ب}^2}{4}\right) = \frac{\text{أب}}{4} \text{ سم}^2$$

مثال ٣) يراد صنع علبة اسطوانية مفتوحة سعتها (ح) سم ٣ من معدن رقيق برهن انه يجب ان يكون نق = ع لكي يكفي لصنعها اقل كمية ممكنة من المعدن .

الحل)



$$\text{ح} = \text{نق}^2 \text{ ط ع}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}^2 \text{ ط}}$$

س = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= 2\text{نق ط ع} + \text{نق}^2 \text{ ط}$$

$$\text{س} = 2\text{نق ط} \times \frac{\text{ح}}{\text{نق}^2 \text{ ط}} + \text{نق}^2 \text{ ط}$$

$$\text{س} = \frac{2\text{ح}}{\text{نق}} + \text{نق}^2 \text{ ط}$$

$$\text{س}' = \frac{-2\text{ح}}{\text{نق}^2} + 2\text{نق ط}$$

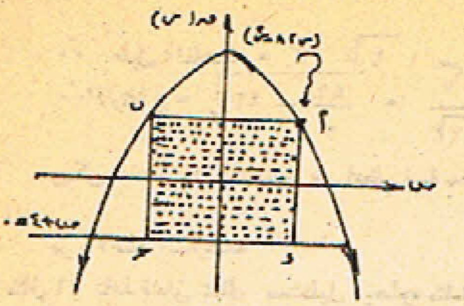
عندما $\text{س}' = $ صفر فان $\text{نق} = \sqrt[3]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}$

$$\text{س}'' = \frac{4\text{ح}}{\text{نق}^3} + 2 \text{ ط} \qquad \therefore \text{س}''\left(\sqrt[3]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}\right) = \frac{4\text{ح}}{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}} + \text{ط} > \text{صفر}$$

$\therefore$ للمساحة اوطا قيمة محلية عند $\text{نق} = \sqrt[3]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}^2 \text{ ط}} = \frac{\text{ح}}{\left(\sqrt[3]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}\right)^2 \text{ط}} = \sqrt[3]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}} = \text{نق}$$

مثال ٤) أ ب حـ د مستطيل راسين متجاورين من رؤوسه يقعان على بيان التطبيق ق (س) = ٨ ــ س٢ والراسان الاخران يقعان على المستقيم ص + ٤ = صفر .
جد اكبر مساحة ممكنة لهذا المستطيل .



لتكن أ (س ، ٨ ـ $س^{٢}$)

∴ طول و د = س

وبما ان التطبيق ق متناظر مع المحور الثاني

∴ طول قاعدة المستطيل = ٢س

وبما ان احداثيي د هي (س ، ـ٤)

لانها تقع على المستقيم ص + ٤ = ٠

∴ طول أ د = | ٨ ـ $س^{٢}$ ـ (ـ٤) | = | ١٢ ـ $س^{٢}$ | = ١٢ ـ $س^{٢}$

∴ م = ٢س (١٢ ـ $س^{٢}$) = ٢٤س ـ ٢$س^{٣}$

∴ م َ = ٢٤ ـ ٦$س^{٢}$

عندما م َ = صفر فان $س^{٢}$ = ٤ ومنها س = ٢

م ً = ـ١٢ س

م ً (٢) = ـ١٢ × ٢ < صفر

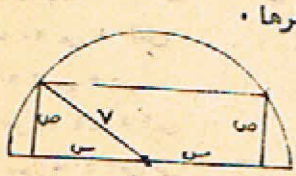
∴ التطبيق اعظم قيمة محلية

عند س = ٢

∴ م (٢) = ٢٤ × ٢ ـ ٢ × $٢^{٣}$ = ٣٢ وحدة مربعة .

مثال ٥) جد ابعاد اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل نصف كرة نصف قطرها ٧ سم بحيث ان راسين متجاورين من رؤوسه يقعان على قطرها .

الحل)



نفرض طول قاعدة المستطيل = ٢س سم

نفرض ارتفاع المستطيل = ص سم

∴ مساحته = ٢س ص

لكن $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٤٩ ... (فيثاغورس)

∴ ص = $\sqrt{٤٩ ـ س^{٢}}$

∴ م = ٢س $\sqrt{٤٩ ـ س^{٢}}$

∴ ق :] ٠ ، ٧ [⟵ ح بحيث ق(س) = ٢س $\sqrt{٤٩ ـ س^{٢}}$

اي ق (س) = ٢ $\sqrt{٤٩س^{٢} ـ س^{٤}}$

ق َ (س) = $\frac{٩٨ س ـ ٤ س^{٣}}{\sqrt{٤٩س^{٢} ـ س^{٤}}}$

عندما ق َ (س) = صفر فان ٢س (٤٩ ـ ٢$س^{٢}$) = ٠

س ≠ صفر

∴ ٤٩ = ٢$س^{٢}$

∴ س = $\frac{٧}{\sqrt{٢}}$ سم

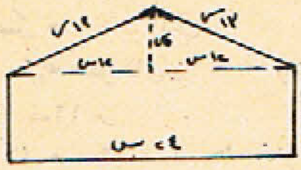
∴ طول القاعدة = ٧ $\sqrt{٢}$

∴ الارتفاع = $\sqrt{٤٩ - \frac{٤٩}{٢}} = \frac{٧}{\sqrt{٢}} = \frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ سم

ويمكن اختبار ان للتطبيق ق اعظم قيمة محلية اى اعظم مساحة عند $\frac{٧}{٢}$ كما مر بالامثلة السابقة .

مثال ٦) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوى الساقين ارتفاعه $\frac{٥}{٢٤}$ طول قاعدته فاذا كان محيط النافذة = ١٢ مترا جد مساحته بحيث تسمح بمرور اكبر كمية ممكنة من الضوء .

الحل)



نفرض طول القاعدة = ٢٤س متر

∴ ارتفاع المثلث = $\frac{٥}{٢٤} \times$ ٢٤س

= ٥ س متر

وبتطبيق نظرية فيثاغورس نجد طول الوتر أب = أحـ = ١٢ س متر

نفرض ارتفاع المستطيل = ص متر

∴ المحيط = ١٢س + ١٣س + ٢ص + ٢٤س

١٢ = ٥٠ س + ٢ص

٦ = ٢٥ س + ص

∴ ص = ٦ ـ ٢٥س

∴ م = ٢٤س ص + ½ (٢٤س) (٥ س)

= ١٤٤ ـ ٦٠٠س^{٢} + ٦٠س^{٢}

= ١٤٤س ـ ٥٤٠ س^{٢}

∴ ق : [٠ ، $\frac{٤}{١٥}$] ⟵ ح بحيث ق(س) = ١٤٤ س ـ ٥٤٠ س^{٢}

∴ ق َ(س) = ١٤٤ ـ ١٠٨٠ س

عندما قَ (س) = صفر فان س = $\frac{١٤٤}{١٠٨٠} = \frac{٢}{١٥}$ سم

ق ً(س) = ـ ١٠٨٠ < صفر

اى ق ً ($\frac{٢}{١٥}$) < صفر

∴ للمساحة اعظم قيمة محلية عند $\frac{٢}{١٥}$

ق (٢/١٥) = ١٤٤ × ٢/١٥ ـ ٥٤ × ٤/٢٢٥ سم^{٢}

المساحة التي تسمح بمرور اكبر كمية ممكنة من الضوء ٠

مثال ٧) قطعة سلك تصلح لتكون دائرة نصف قطرها ١٢ سم قطعت الى قطعتين بحيث حولت كل قطعة الى دائرة ٠ جد طول كل قطعة عندما تكون مجموع مساحتي الدائرتين اقل مايمكن ٠

الحل) ـ

طول القطعة = محيط الدائرة = ٢نق ط = ٢ × ١٢ ط = ٢٤ ط سم

نفرض نصف قطر الدائرة الاولى = س

∴ محيط الاولى = ٢س ط

نفرض نصف قطر الدائرة الثانية = ص

∴ محيط الثانية = ٢ص ط

لكن محيط الدائرة الاولى + محيط الدائرة الثانية = طول السلك

٢س ط + ٢ص ط = ٢٤ ط وبقسمة الطرفين على ٢ ط ينتج

س + ص = ١٢

∴ ص = ١٢ ـ س

ليكن ق (س) = مساحة الدائرة الاولى + مساحة الدائرة الثانية

اى ق (س) = س^{٢} ط + (١٢ ـ س)^{٢} ط

قَ(س) = ٢س ط + ٢(١٢ ـ س) ط × (ـ ١)

= ٢س ط ـ ٢٤ ط + ٢س ط

= ٤س ط ـ ٢٤ ط

عندما قَ (س) = ٠ فان ٤ س ط ـ ٢٤ ط = ٠

∴ س = ٦ سم ٠ نصف قطر الاولى

∴ ص = ١٢ ـ ٦ = ٦ سم نصف قطر الثانية

∴ طول القطعة الاولى = ١٢ ط سم وطول القطعة الثانية = ١٢ ط سم ايضا

مثال ٨)

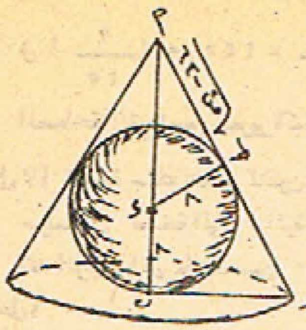
كرة نصف قطرها ٨ سم موضوعة داخل مخروط دائرى قائم بحيث تمس قاعدته وسطحه الجانبي ٠ احسب ارتفاع المخروط عندما يكون حجمه اصغر مايمكن ٠

الحل)

نفرض س = نصف قطر قاعدة المخروط

وارتفاعه = ص + ٨

من تشابه المثلثين القائمين أ ب حـ ، أ د ط



نحصل على

$$\frac{س}{٨} = \frac{ص + ٨}{\sqrt{ص^٢ - ٦٤}}$$

$$\therefore س^٢ = \frac{٦٤(ص+٨)^٢}{ص^٢ - ٦٤} = \frac{٦٤(ص+٨)}{ص - ٨}$$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$ح = \frac{(ط س^٢)\,(ص+٨)}{٣} = \frac{٦٤\,ط\,(ص+٨)^٢}{٣\,(ص-٨)}$$

اى ق : $\{ص : ص > ٨\} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(ص) = \frac{٦٤\,ط\,(ص+٨)^٢}{٣(ص-٨)}$

$$\therefore ق'(ص) = \frac{٦٤\,ط\,(ص+٨)(ص-٢٤)}{٣(ص-٨)^٢}$$

وعندما $ق'(ص) = ٠$ فان ص = ٢٤

وبايجاد $ق''(٢٤)$ نجد انها موجبة

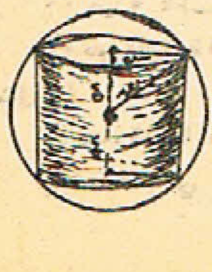
∴ للتطبيق اصغر قيمة محلية عند ص = ٢٤

∴ الارتفاع = ص + ٨ = ٣٢ سم

∴ نصف قطر قاعدة المخروط = $٨\sqrt{٢}$ سم

مثال ٩) اسطوانة دائرية قائمة موضوعة داخل كرة نصف قطر قاعدتها = نق احسب ارتفاعها عندما يكون حجمها اكبر مايمكن

الحل)



نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة

= س وارتفاعها (٢ع)

حجم الاسطوانة = ٢ ط $س^٢$ ع

ح = ٢$س^٢$ ط ع ....(١)

$نق^٢ = ع^٢ + س^٢$ ...(٢)(فيثاغورس)

$\therefore س^٢ = نق^٢ - ع^٢$

وبالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة $س^٢$ ينتج :-

ح = ٢ ط (نق٢ ـ ع٢) ع = ٢ ط نق٢ ع ـ ٢ ط ع٣

اى ق :]٠ ، نق[⟵ ح بحيث ق (ع) = ٢ ط نق٢ ع ـ ٢ ط ع٣

قَ(ع) = ٢نق٢ ط ـ ٦ ط ع٢ وعندما قَ(ع) = صفر

فان ٦ ط ع٢ = ٢ط نق٢

$$\therefore \text{ع}^{2} = \frac{\text{٢ ط نق}^{2}}{\text{٦ ط}} = \frac{1}{3}\,\text{نق}^{2}$$

$$\text{ع} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{نق}$$

وبايجاد قً ($\frac{1}{\sqrt{3}}$ نق) نرى انها سالبة

∴ توجد اعظم قيمة محلية للتطبيق عند ع = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ نق

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{٢نق}}{\sqrt{3}}$$

تمارين

١) الفرق بين عددين = أ . جد هذين العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اقل مايمكن .

٢) جد العدد الموجب الذى يختلف عن مربعه باكبر مقدار ممكن

٣) كرة نصف قطرها ٤ $\sqrt{2}$ سم موضوعة داخل مخروط دائرى قائم .. جد ابعاد ذلك المخروط بحيث يكون حجمه اقل مايمكن .

٤) يراد صنع خزان ناقلة نفط على شكل اسطوانة احدى نهايتيها سطح مستوى والاخر نصف كرة فاذا كانت سعة هذا الخزان $\frac{\text{أ}^{3}\text{ ط}}{6}$ متر مكعب . جد ابعاد ذلك الخزان لكي تكفي لصنعه اقل كمية ممكنة من المعدن .

٥) برهن ان اصغر معيّن يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها نق هو مربع .

٦) جد ابعاد اكبر مخروط دائرى قائم يمكن صنعه داخل نصف كرة نصف قطرها أ والذى راسه يقع على مركز الكرة .

٧) مخروط مجموع نصف قطر قاعدته وارتفاعه ١٢ سم جد اعظم حجم لهذا المخروط .

٨) مستطيل مساحته ٢٥سم٢ جد اقل محيط ممكن له .

٩) مستطيل مساحته ٣٠سم٢ جد ابعاده بحيث يكون قطره اصغر مايمكن .

١٠) ماهو ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من احدى نهايتيها ذات اكبر مساحة موضوعة داخل كرة نصف قطرها نق .

١١) طابوقة طولها ضعف عرضها فاذا كانت مساحتها الكلية ١٠٨أً

جد اعظم حجم لهذه الطابوقة .

١) جد احداثيات نقطة ∋ المنحنى س ص٤ ـ ١٦ = صفر والتي تكون اقرب مايمكن لنقطة الاصل .

١٢) ب ك وترللمنحني ص٢ = ٤ أس يوازى المحور الثاني . جـ نقطة ثابتة هـي (هـ ، ٠) جد اعظم مساحة للمثلث جـ ب ك . علما ان الوتر ب ك يقع بين نقطة الاصل ونقطة حـ .

١٤) برهن ان المستقيم ٤ص + ٣س ـ ٢٢ = صفر يمس الدائرة (س + ١)٢ + ص٢ = ٢٥ واذا رسم داخل المثلث (المحدد بالمستقيم المماس والمحورين) مستطيل بحيث ان راسا من رؤوسه نقطة الاصل . فجد اعظم مساحة لهذا المستطيل ثم جد مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المماس والعمود عليه من نقطة التماس ومحور السينات .

١٥) آب قطرا لدائرة حـ د وترا فيها // آب برهن ان اكبر محيط للشكل الرباعي آب حـ د = خمس امثال نصف قطر الدائرة .

١٦) مجموع وتر وضلع قائم لمثلث قائم الزاوية = أ سم برهن ان للمثلث اكبر مساحة عندما تكون الزاوية الحادة = ٦٠°

١٧) حجم مخروط ٢٠سم٣ . . جد نصف قطر القاعدة عندما يكون سطح المخروط اصغر مايمكن .

١٨) محيط مثلث = ٣٦ سم واحد اضلاعه ضعف الاخر جد طول اقصر ضلع حين تكون للمثلث اقل مساحة ممكنة .

١٩) يراد صنع علبة اسطوانية مفتوحها سعتها ١٠٠٠ ط سم٣ من معدن رقيق . جد ابعاد الاسطوانة كي يكفي لصنعها اقل كمية ممكنة من المعدن .

٢٠) في الساعة التاسعة صباحا كانت الباخرة ب تبعد ٦٥ ميلا شرق السفينة أ فاذا ابحرت السفينة ب غربا بسرعة ١٠ ميل / ساعة ، أ جنوبا بسرعة ١٥ ميل / ساعة متى يكون البعد بينهما اقصر مايمكن ؟ واحسب هذا البعد عندئذ .

٢١) اسطوانة دائرية قائمة موضوعة داخل مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٠ سم ونصف قطر قاعدته ٨ سم بحيث احدى قاعدتيها على قاعدة المخروط احسب ارتفاعها عندما يكون حجمها اكبر مايمكن .

٢٢) سلك طوله ل قسم الى جزئين . ثم ثني احد الجزئين على شكل مربع وثني الاخر على شكل مثلث متساوى الاضلاع . جد طول كل من جزأى السلك عندما يكون مجموع مساحتي المربع والمثلث اصغر مايمكن .

٢٣) اثبت ان نصف قطر قاعدة اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته = نق يساوي ⅔ نق

٢٤) وعاء ثابت الحجم على شكل اسطوانة دائرية قائمة وتكاليف المادة المصنوع منها الغطاء = ثلثي المادة المصنوع منها باقي الوعاء . فاذا كانت التكاليف اقل مايمكن اثبت ان ثلاثة امثال ارتفاع الوعاء = خمسة امثال نصف قطر قاعدته .

٢٥) منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع وحجمه ٢ قدما مكعبا اوجد ابعـــاده لتكون مساحة اوجهه الخمسة اقل مايمكـــن .

٢٦) يراد عمل خزان يسع ٢٠ ط قدم٣ على هيئة اسطوانة دائرية قائمة فاذا كانـــت تكاليف صنع القاعدة ٤ دنانير لكل قدم مربع . وتكاليف صنع السطح الجانبي ديناران لكل قدم مربع . وتكاليف صنع الغطاء دينار واحد لكل قدم مربع . جد ابعـــاد اوفر خزان يمكن عملـــه .

٢٧) خزان للماء الساخن قاعدته افقية على شكل اسطوانة دائرية قائمة تعلوه نصـــف كرة بحيث كانت المساحة الكلية للخزان ثابتة وتساوى ٢٠ ط أ^{٢} . اثبت انه اذا كان حجم الخزان اكبر مايمكن فان نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوى ارتفاعها .

٢٨) خيمة مخروطية الشكل حجمها ثابت ح . اثبت ان ارتفاعها = $\sqrt{٢}$ نق حيـث نق نصف قطر قاعدتها . وان مساحة القماش المصنوع منه الخيمة اقل مايمكن .

٢٩) أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ قدم ، ب حـ = ١٢ قدم ونقطة هـ على ب حـ فاذا كان (أ هـ)^{٢} + (هـ حـ)^{٢} أصغر مايمكن . اثبت ان هـ منتصف ب حـ

٣٠) اثبت ان المثلث المتساوى الساقين المرسوم خارج دائرة والذى تكون مساحته اصغر مايمكن هو متساوى الاضلاع .

٣١) خط مستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويقطع المحورين في النقطتين أ ، ب علـــى الترتيب جد اصغر مساحة ممكنة للمثلث المحصور بين المستقيم أ ب ونقطة الاصل .

٣٢) اثبت ان المستطيل الذى مساحته اكبر مايمكن ومحيطه معلوم هو مربـــع .

٣٣) المستقيم اب محصور بين المستقيم ص = ٢س والمنحني ص = ½ س^{٢} وامتـــداد آب عمودى على محور السينات . جد اكبر طول ممكن للمستقيم آب .

٣٤) مثلث قائم الزاوية معلوم وتره . يدور حول احد ضلعيه القائمين فيصنع مخـــروط دائرى قائم . احسب حجم اكبر مخروط .

٣٥) جد النقاط على المنحني ٥س^{٢} ــ ٦س ص + ٥ص^{٢} = ٤ والتي تكون اقرب مايمكـــن من نقطة الاصل .

٣٦) المثلث أ ب حـ فيه آب = أ حـ راسه أ في نقطة الاصل وان ب حـ // محور السينـات وان النقطتين ب ، حـ على المنحنى ١٢ ص = ٣٦ ــ س^{٢} . احسب مساحته عند مـا يكون اكبر مايمكـــن .

ملاحظات / لرسم المخطط الديكارتي يمكن اتباع الملاحظات التالية :-

١- نجد نقاط التقاطع مع المحورين .

٢- نجد التناظر مع المحورين : لقد سبق ان بحثنا موضوع التناظر مع نقطة الاصل ومع المحور الثاني في فصل التطبيقات العددية .

اما بالنسبة للتناظر مع المحور الاول فيمكن تعريفه كما يلي :-

اذا كان س = ق (ص) فان ق (-ص) = ق (ص) ∀ ص

او ∀(أ ، ب) (اذا كانت (أ ، ب) ∋ المنحني فان (أ ، -ب) ∋ المنحني

٣- جد اكبر منطلق واكبر مدى للتطبيق . وقد سبق ان تطرقنا الى ايجاد اكبر منطلق في فصل التطبيقات العددية وبحثنا حدود التطبيق فهي تمثل اكبر مدى له .

٤- المستقيمات المحاذية :

ليس لكل المنحنيات مستقيمات محاذية - وليست كل المحاذيات يجب ان توازى احد المحورين ولكن ضمن الدراسة الاعدادية سنكتفي بدراسة المستقيمات المحاذية العمودية او الافقية وللتطبيقات التي يمكن وضعها بالصورة ص = أ + $\frac{ب}{حـ س + د}$

حيث كل من أ ، ب ، حـ ، د اعداد حقيقية ثابتة ، س $\neq$ $-\frac{د}{حـ}$

فان المستقيم المحاذي الافقي هو ص = أ والمستقيم المحاذي العمودي س = $-\frac{د}{حـ}$

٥- جد النقاط الحرجة للتطبيق ومن ثم القيم العظمى والصغرى المحلية .

٦- الفترات التي يكون فيها التطبيق متزايد او متناقص

٧- تقعر التطبيق وتحدبه ونقاط الانقلاب

وفيما يلي امثلة توضيحية .

امثلة محلولة

ناقش المنحنيات التالية ثم مثلها ديكارتيا

١) ق(س) = ٩س $-\frac{س^3}{٣}$

١) اكبر منطلق للتطبيق = ح لان التطبيق كثير الحدود

واكبر مدى ح ايضا لان التطبيق غير محدود من الاعلى وغير محدود من الاسفل .

٢) لايجاد نقاط التقاطع مع المحورين

ليكن س = ٠ فان ق (س) = صفر اى ان المنحنى يمر بنقطة الاصل .

عندما ق(س) = ٠ فان ٩ س − $\frac{س^{٣}}{٣}$ = ٠

اى س (٩ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢}) = ٠

∴ اما س = ٠ او س = ∓ ٣ √٣

∴ (٣ √٣ ، ٠) ، (−٣ √٣ ، ٠) ، (٠ ، ٠) نقاط التقاطع مع المحور الاول .

٣) ق(س) = ٩س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

ق(−س) = −٩س + $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

− ق (−س) = ٩ س − $\frac{س^{٣}}{٣}$ = ق (س)

∴ ق متناظر حول نقطة الاصل

٤) لاتوجد مستقيمات محاذية عمودية ولا افقية

٥) ق$'$(س) = ٩ − س^{٢} = (٣ − س) (٣ + س)

	٣	−٣	
اشارة ٣ − س	− − −	+++	++
اشارة ٣ + س	++	++	− − −
اشارة ق$'$(س)	− − −	+++	− − −
	متناقص	متزايد	متناقص

ق متزايد في] −٣ ، ٣ [

ق متناقص في ح / [−٣ ، ٣]

ق(٣) = ١٨ اعظم قيمة محلية

ق(−٣) = −١٨ اصغر

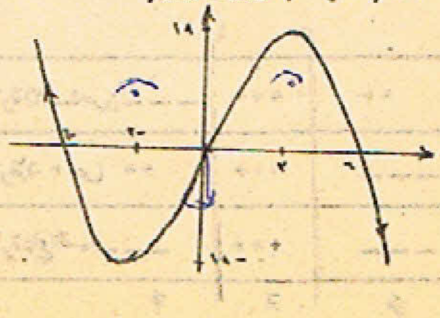
٦) ق$''$(س) = −٢س

ق محدب ∀ س > صفر

ومقعر ∀ س < صفر

∴ (٠ ، ٠) نقطة انقلاب

ق$''$(س)	− − − − − −	+++ ++
	محدب	مقعر



مثال ٢) ليكن ق (س) = $\frac{\text{٣س + ٢}}{\text{س − ٢}}$

١) اكبر منطلق هو ح / {٢}٠ و ق غير محدود (برهن ذلك)

٢) ق غير متناظر مع اى من المحورين او نقطة الاصل

٣) التقاطع مع المحورين

ليكن ق(س) = صفر ⟸ س = $\frac{\text{−٢}}{\text{٣}}$ ⟸ ($\frac{\text{−٢}}{\text{٣}}$، ٠) ∈ ق

وليكن س = ٠ ⟸ ق(س) = −١ ⟸ (٠، −١) ∈ ق

٤) المستقيمات المحاذية : بالقسمة نحصل على

ق(س) = ٣ + $\frac{\text{٨}}{\text{س − ٢}}$

∴ ص = ٣ هو المحاذى الافقي ، س = ٢ المحاذى العمودى

٥) قَ (س) = $\frac{\text{−٨}}{\text{(س − ٢)}^{٢}}$ < صفر ∀ س ∈ ح / {٢}

∴ ق متناقص في ح / {٢}

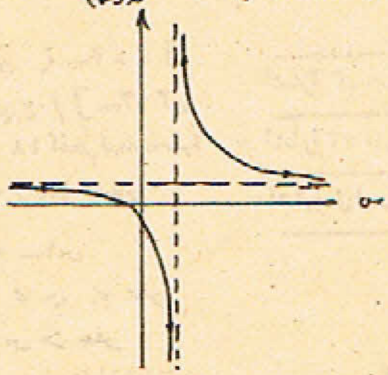
∴ لاتوجد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية

٦) قً (س) = $\frac{\text{١٦}}{\text{(س − ٢)}^{٢}}$

قً(س) ‎ − − − − ٢ + + + + + +

محدب مقعر

ق محدب ∀ س < ٢ ومقعر ∀ س > ٢



مثال ٣) ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = $\frac{\text{٤ − س}^{٢}}{\text{٤ + س}^{٢}}$

١) ق محدود

البرهان/

ليكن ص = $\frac{\text{٤ − س}^{٢}}{\text{٤ + س}^{٢}}$

٤ص + ص س٢ = ٤ − س٢

س٢ + ص س٢ = ٤ − ٤ص

س = $\sqrt{\frac{\text{٤ − ٤ص}}{\text{١ + ص}}}$

	−١	١	
اشارة (٤ − ٤ص)	− − −	+ + +	+ +
اشارة (١ + ص)	+ +	+ + +	− − −
اشارة ناتج القسمة	− − −	+ + +	− − −
	∉	∈	∉

مدى ق = $]-١ ، ١[$

٢) التقاطع مع المحورين

ليكن ق (س) = ٠ ∴ س = $\pm$ ٢ ، ∴ $(-٢ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$

نقطتا تقاطع المنحني مع المحور الاول

ق(٠) = ١ ∴ (٠ ، ١) نقطة التقاطع مع المحور الثاني

٣) $\text{ق}(-\text{س}) = \dfrac{٤ - \text{س}^٢}{٤ + \text{س}^٢} = \text{ق}(\text{س})$

∴ه متناظر مع المحور الثاني

٤) المستقيمات المحاذية

$\text{ق}(\text{س}) = -١ + \dfrac{٨}{\text{س}^٢ + ٤}$

∴ ص = −١ المحاذى الافقي

ولايوجد محاذ شاقولي

٥) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(٤ + \text{س}^٢)(-٢\text{س}) - (٤ - \text{س}^٢)(٢\text{س})}{(٤ + \text{س}^٢)^٢} = \dfrac{-١٦\text{س}}{(٤ + \text{س}^٢)^٢}$

اشارة ق$'$(س)

صفر

+ + + + + ٠٠ - - - - - -

متناقص ↘ ↗ متزايد

ق متزايد ∀ س ≤ صفر

ومتناقص ∀ س > صفر

ق(٠) = ١ اعظم قيمة محلية

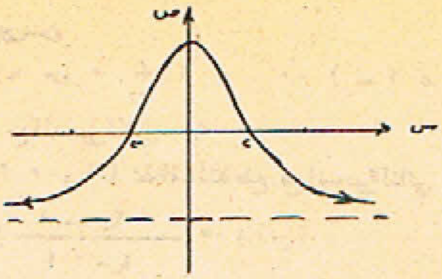
٦) $\text{ق}''(\text{س}) = \dfrac{١٦(٣\text{س}^٢ - ٤)}{(٤ + \text{س}^٢)^٣} = \dfrac{١٦(\sqrt{٣}\text{س} - ٢)(\sqrt{٣}\text{س} + ٢)}{(٤ + \text{س}^٢)^٣}$

		$\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
اشارة ($\sqrt{٣}$س − ٢)	+ + +	− − −	− − −
اشارة $\sqrt{٣}$س + ٢	+ + +	+ + +	− − −
اشارة ق$''$(س)	+ + +	− − −	+ + +
	مقعر	محدب	مقعر

ق محدب ∀ س ∈ $\left]\dfrac{-٢}{\sqrt{٣}} ، \dfrac{٢}{\sqrt{٣}}\right[$

ق مقعر ∀ س ∈ ح / $\left[\dfrac{-٢}{\sqrt{٣}} ، \dfrac{٢}{\sqrt{٣}}\right]$

$\left(\pm \dfrac{٢}{\sqrt{٣}} ، \dfrac{٣}{٤}\right)$ نقطتي الانقلاب



مثال ٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = س٤ ــ ٤س٣

(١) نقاط التقاطع مع المحورين

ق(س) = ٠ ⟸ س٣ (س ــ ٤) = ٠ ⟸ اما س = صفر اوس= ٤

∴ (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) نقطتا تقاطع المنحني مع المحورالاول

عندما س= ٠ فان ق(٠) = ٠ اى ان المنحني يمر بنقطة الاصل .

(٢) المنحني غير متناظر

(٣) لاتوجد مستقيمات محاذية عمودية او افقيــة

(٤) قَ (س) = ٤س٣ ــ ١٢س٢

= ٤س٢(س ــ ٣)

	٣	صفر	
اشارة ٤س٢	++	++	++++
اشارة (س ــ ٣)	+	ــ ــ	ــ ــ ــ ــ
اشارة قَ (س)	+	ــ ــ	ــ ــ ــ ــ
	متزايد	متناقص	متناقص

ق متزايد ∀س > ٣

ق متناقص ∀ س ∈

{س : س < ٣ } / {صفر}

ق(٣) = ــ٢٧ اصغر قيمة محلية

(٠ ، ٠) نقطة حرجة ركزلاو (٢-٢٧)

(٥) قً (س) = ١٢س٢ ــ ٢٤س

= ١٢س (س ــ ٢)

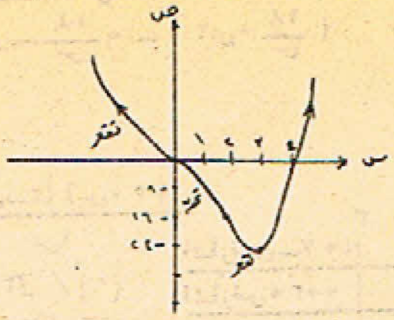
	٢	صفر	
اشارة ١٢س	++++	+++	ــ ــ ــ ــ ــ
اشارة س ــ ٢	+++	ــ ــ ــ	ــ ــ ــ ــ ــ
اشارة قً(س)	+++	ــ ــ ــ ــ	++++
	مقعر	محدب	مقعر

ق محدب في]٠ ، ٢[

ق مقعر في ح /]٠ ، ٢[

(٠ ، ٠) ، (٢ ، ــ١٦) نقطتي انقلاب

(٦) ق محدود من الاسفل لان ق(س) ⩾ −٢٧



مثال ٥)

ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = آ س + $\frac{ب}{س}$

اذا كانت النقطة (٣ ، ١٢) نقطة حرجة فجد قيمة آ ، ب وناقش بيان التطبيق ومثله بيانيا

∵ (٣ ، ١٢) نقطة حرجة ∴ تحقق معادلة بيان التطبيق ق

اى ق (٣) = ١٢ ∴ ٣ آ + $\frac{ب}{٣}$ = ١٢

∴ ٩ آ + ب = ٣٦ ....(١)

بما ان(٣ ، ١٢) نقطة حرجة و ق قابل للاشتقاق عند ٣

∴ ق' (٣) = صفر

∴ ق' (س) = آ − $\frac{ب}{س^٢}$

ق' (٣) = آ − $\frac{ب}{٩}$

صفر = آ − $\frac{ب}{٩}$

٩ آ − ب = صفر .... (٢)

نحل المعادلتين (١) و (٢) انيا نجد آ = ٢ ، ب = ١٨

∴ ق (س) = ٢س + $\frac{١٨}{س}$

(١) التقاطع مع المحورين س ≠ ٠ ∴ المنحنى لايقطع المحور الثاني عندما ق(س) = صفر فان ٢س² + ١٨ = ٠

ليس لها حل ∴ لاتوجد نقاط تقاطع مع المحور الاول

(٢) المستقيمات المحاذية العمودية والافقية

س = صفر محاذ شاقولي . لايوجد محاذى افقي ولكن يوجد محاذى مائل هو $\boxed{ص = ٢س}$

(٣) التناظر : ق متناظر مع نقطة الاصل

لان ق (ــ س) = ــ٢س ــ ١٨/س = ــ (٢س + ١٨/س)

= ــ ق (س)

(٤) ق/(س) = ٢ ــ ١٨/س٢

= (٢س٢ ــ ١٨)/س٢ = ٢(س ــ ٣) (س + ٣)/س٢

	٣	صفر	٣
اشارة س ــ ٣	++	ــ ــ	ــ ــ
اشارة س + ٣	++	+ +	ــ ــ ــ
اشارة س٢	+	++ ++	++
اشارة ق/(س)	++	ــ ــ ــ ــ	++

ق متناقص في]ــ٣ ، ٣[/ {٠}

ق متزايد في ح /]ــ٣ ، ٣[

ق(ــ٣) = ــ١٢ = اعظم قيمة محلية

ق(٣) = ١٢ اوطا قيمة محلية

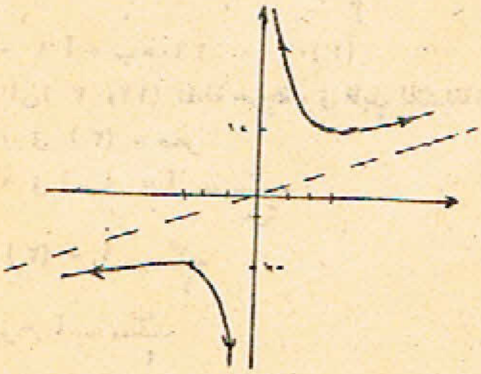
(٥) ق//(س) = ١٦/س٣

		صفر	
اشارة ق//(س)	+ + ++		ــ ــ ــ
	مقعر		محدب

ق مقعر ∀ س > صفر ،

ق محدب ∀ س < صفر

لاتوجد نقاط انقلاب



مثال ٦) اذا كانت النقطة (ــ ١ ، ــ ٩) نقطة حرجة لبيان التطبيق

ق(س) = ~~أ س٣ + ب س٢ + حـ س + ٢~~

اما النقطة (١ ، ٧) فهي نقطة انقلاب علما ان ق قابل للاشتقاق عند ١ .

جد قيم أ ، ب ، حـ ، د وناقش المنحني ومثله بيانيا .

الحل)

(١) (ــ ١ ، ــ ٩) تحقق معادلة التطبيق

∴ ــ ٩ = ــ أ + ب ــ حـ + د ....(١)

(٢) ق/(ــ ١) = صفر

اى ق/(س) = ٣أس٢ + ٢ب س + حـ

قً (—١) = ٣أ — ٢ب + حـ = صفر ...(٢)

وبما ان (١ ، ٧) ∋ ق فهي تحقق معادلته

اى ٧ = أ + ب + حـ + د .....(٣)

(٢) قً(١) = صفر

قً(س) = ٦أس + ٢ب

قً(١) = ٦أ + ٢ب = صفر ....(٤)

وبحل المعادلات الاربعة انيا نجد أ = —١ ، ب = ٣ ، حـ = ٩ ، د = —١١

∴ ق(س) = $س^{٣}$ + $٣س^{٢}$ + ٩س — ١١

قَ (س) = $—٣س^{٢}$ + ٦س + ٩

= —٣($س^{٢}$ — ٢س + ٣)

= —٣(س — ٣) (س + ١)

	٣		—١
اشارة س — ٣	++	— — —	— — —
اشارة س + ١	++	+++	— — —
اشارة (س — ٣) × (س + ١)	++	— — —	+++
اشارة قَ(س)	— — —	+++	— — —
	متناقص	متزايد	متناقص

ق متناقص في ح /]—١ ، ٣[

ق متزايد في]—١ ، ٣[

اعظم قيمة محلية = ق(٣) = ١٦

اوطا قيمة محلية = ق(—١) = —١٦

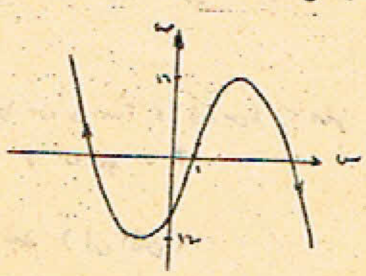
قً(س) = —٦س + ٦ = ٦(١ — س)

	١	
٦(١ — س)	++++	— — — — —
	محدب	مقعر

ق محدب ∀ س > ١

ومقعر ∀ س < ١

نقطة الانقلاب (١ ، صفر)



تماريـــــن

١) ارسم مخططا ديكارتيا للمنحنى ص = ق (س) من المعلومات التالية :—

ق(١) = صفر ، قَ(س) < صفر ∀ س < ١ ، قَ(س) > صفر ∀ س > ١ .

(٢) ارسم مخططا ديكارتيا للمنحنى ص = ق (س) ومن المعلومات التاليـــــة

ق(١) = صفر ، ق″(س) < صفر ∀ س < ١ ، ق″(س) > صفر ∀ س > ١

من تمرين (٣ الى ٨) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق مؤشرا على اعظم قيمة محلية واصغر قيمة محلية ونقطة الانقلاب ان وجدت :ـ

٣) ص = ٦ ــ ٢س ــ س^{٢}

٤) ص = ٢س^{٢} ــ ٤س + ٣ (٥) ص = ١٢ ــ ١٢س + س^{٣}

٦) ص = س^{٤} ــ ٣٢س + ٤٨ (٧) ص = س^{٣} ــ ٣س^{٢} + ٢

٨) ص = $\frac{١}{٦}$ (س^{٣} ــ ٦س^{٢} + ٩س + ٦)

٩) ارسم مخططا ديكارتيا لتطبيق مستمر ص = ق(س) ومن الخواص التالية :ـ

ق(ــ٢) = ٨ ق′(٢) = ق′(ــ٢) = صفر

ق(٠) = ٤ ق′(س) < صفر ∀ س ∈]ــ٢ ، ٢[

ق(٢) = صفر ق″(س) < صفر ∀ س < صفر

ق′(س) > صفر ∀ س ∈ ح / [ــ٢ ، ٢] ق″(س) > صفر ∀ س > صفر

١٠) ارسم مخططا ديكارتيا لتطبيق مستمر ص = ق(س)

والذي فيه ق′(س) > صفر ∀ س < ٢ ، ق′(س) < صفر ∀ س > ٢

أ) اذا ق′(س) مستمر عند س = ٢

ب) اذا ق′(س) ⟵ ١ عندما س ⟵ ٢$^{-}$

ق′(س) ⟵ ــ١ عندما س ⟵ ٢$^{+}$

جـ) اذا ق′(س) = ١ ∀ س < ٢ وق′(س) = ــ١ ∀ س > ٢

١١) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق ومن الشروط التالية :ـ

١) ق مستمر لجميع قيم س

٢) ق(ــ٣) = ١

٣) ق′(س) < صفر ∀ س < ــ٣ ، ق′(س) > صفر ∀ س > ــ٣

٤) ق″(س) > صفر ∀ س ≠ ــ٣

١٢) لكل من التطبيقات التالية جد (ان امكن)

١) مناطق التزايد والتناقص

٢) اعظم واصغر قيمة محليا

٣) النقاط الحرجة

٤) مناطق التحدب والتقعر

٥) نقاط الانقلاب

٦) التناظر

ثــم مثل كلا منها ديكارتيا بعد تحديد اكبرمنطلق

١) $ق(س) = س^{٣} - ٢٧س + ٤$

٢) $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦س - ٤$

٣) $ق(س) = س^{٤} + ٤س^{٢}$

٤) $ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} - ٢س^{٢} + ١٢س - ٨$

٥) $ق(س) = ٢س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}$

٦) $ق(س) = \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

٧) $ق(س) = س\sqrt{س + ٣}$

٨) $ق(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٤س - ١$

٩) $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣س - ٥$

١٠) $ق(س) = س^{٣} - س^{٢} + س - ١$

١١) $ق(س) = (س + ٢)(س - ٢)^{٣}$

١٢) $ق(س) = س^{٤} - ٢س^{٣} + ٣س^{٢}$

١٣) $ق(س) = س^{٤} + ٥س^{٣} + ٦س^{٢}$

١٤) $ق(س) = س - ٣ + \frac{٢}{س + ١}$

١٥) $ق(س) = ٥س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{٥}{٣}}$

١٦) $ق(س) = س\sqrt{٨ - س^{٢}}$

١٧) $ق(س) = س^{٢}\sqrt{٥ + س}$

١٨) $ق(س) = س^{٢}\sqrt{٣ - س^{٢}}$

١٩) $ق(س) = س + \frac{٨}{س^{٢}}$

٢٠) $ق(س) = س^{٢} + \frac{٢}{س}$

٢١) $ق(س) = س^{٣} + \frac{٣}{س}$

الفصل السادس

التكامل Integration

بند ٦ـ١ مفهوم التكامل غير المحدود

ان مفهوم تعيين مشتق تطبيق مفروض او تعيين تفاضله يعتبر من المهام الرئيسية في الحساب التفاضلي .

واما المسالة المعاكسة وهي تعيين تطبيق بدءاً من مشتقه او من تفاضله فتعتبر المهمة الرئيسية الاولى للحساب التكاملي .

ليكن صَ = ق(س) لتطبيق مجهول ص ، او تفاضل هذا التطبيق
دص = قَ(س) د س

ولنسمي التطبيق ع (س) الذى مشتقه ق (س) او تفاضله ق (س) د س تطبيقا اصليا لـ ق(س) . فاذا كان على سبيل المثال ق (س) = س٢ فعندئذ يكون
ع (س) = $\frac{١}{٣}$ س٣ هو احد تطبيقاته الاصلية وذلك لان ($\frac{١}{٣}$ س٣)َ =
$\frac{١}{٣}$ (٣س٢) = س٢

ولنفرض اننا تمكنا من الوصول الى تطبيق اصلي ع (س) لتطبيق مفروض ق(س) .
اى تمكنا من الوصول الى ع (س) يحقق العلاقة : عَ (س) = ق (س) وحيث ان مشتق اى ثابت اختيارى حـ يساوى الصفر ، فان (ع (س) + حـ)َ =
عَ(س) = ق (س) .

وهذا يعني ان ع (س) ليس وحده تطبيقا اصليا بل ان ع (س) + حـ هو كذلك تطبيق اصلي لـ ق (س) . فاذا استطعنا اذن الوصول الى تطبيق اصلي لمسالة ما فاننا نكون في الوقت نفسه حصلنا على مجموعة غير منتهية الحلول الاخرى التي لاتختلف عن الحل المذكور الا بثابت اضافي . وسنبرهن فيما يلي على ان هذه المجموعة من الحلول تمثل جميع حلول المسالة المطروحة .

اى اذا كان ع (س) تطبيقا اصليا لتطبيق مفروض ق(س) فعندئذ تكون العبارة العامة للتطبيق الاصلي من الشكل ع (س) + حـ بفرض ان حـ ثابت كيفي .

ولبرهان ذلك نفرض ع١ (س) تطبيقا كيفيا مشتقه ق (س)
اى عَ١ (س) = ق (س) كذلك وبطرح هذه المعادلة من السابقة نجد ان :
عَ١(س) ـ عَ (س) = (ع١ (س) ـ ع (س))َ = صفر
ومنه نستنتج ان ع١ (س) ـ ع (س) = حـ بفرض حـ كمية ثابتة

(اذا كان لتطبيقين نفس المنطلق ونفس المشتق فان الفرق بينهما ثابتا)

تسمى العبارة العامة للتطبيق الاصلي • التكامل غير المحدود للتطبيق المفروض ق(س) او للتفاضل المفروض ق(س) د س • ونرمز له بالشكل

∫ ق(س) د س ، وهو التطبيق الذى مشتقه ق(س) او ذلك التطبيق الذى يكون تفاضله مساويا ق(س) د س •

نسمي التطبيق ق(س) التطبيق المكامل • وتسمى ق(س) د س العبارة التفاضلية للتكامل •

بند ٦ـ٢ خواص التكامل غير المحدود

١) اذا تساوى تطبيقان فعندئذ لايختلف التكامل غير المحدود لاحدهما عن التكامل غير المحدود للاخر الا بثابت اضافي • وبالعكس كي نتحقق من عدم اختلاف تطبيقين إلا بثابت اضافي يكفي ان نبرهن تساوى مشتقتيهما •

٢) ان مشتق التكامل غير المحدود مساو للتطبيق المكامل وان تفاضله مساو للعبارة التفاضلية للتكامل •

اى $\frac{د}{د س}$ [∫ ق(س) د س] = [∫ ق(س) د س]′ = ق(س)

او د [∫ ق(س) د س] = ق(س) د س

٣) ∫ ع′ (س) د س = ع(س) + حـ

او ∫ د ع(س) = ع(س) + حـ

ويستنتج من هذا ومن الخاصية (٢) انه اذا وردت الاشارتان د ، ∫ الواحدة تلو الاخرى مباشرة وباى ترتيب فان الواحدة منهما تنفي تاثير الاخرى وذلك اذا تم الاتفاق على غض النظر عن الثابت الكيفي في اية مساواة بين تكاملات غير محدودة

٤) يمكن اخراج المعامل الثابت المضروب في التطبيق المكامل خارج علامة التكامل غير المحدود اى انه اذا كان أ عددا حقيقيا ثابتا فان

∫ أ ق(س) د س = أ ∫ ق(س) د س

٥) التكامل غير المحدود للمجموع الجبرى لعدة تطبيقات عددية يساوى المجموع الجبرى لتكاملات حدوده •

اى ∫ (ق(س) + ل(س) + ع(س) + ـــــ) د س = ∫ ق(س) د س + ∫ ل(س) د س + ∫ $ع_1$(س) د س + ــــ

٦) ∫ $س^ن$ د س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + حـ حيث ن ≠ ـ ١ ، حيث حـ ثابت يمكن

استنتاج الخاصية التالية :-

$$\int \text{د س} = \int \text{س}^{\text{صفر}} \text{د س} = \text{س} + \text{ح}$$

٧) اذا كان ق قابلا للاشتقاق وتفاضله $\bar{\text{ق}}(\text{س})$ د س فان

$$\int \left[\text{ق}(\text{س})\right]^{\text{م}} \bar{\text{ق}}(\text{س}) \, \text{د س} = \frac{\left[\text{ق}(\text{س})\right]^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} + \text{ح} \quad \text{حيث م} \neq -1$$

امثلــة محلولــة

١) جد $\int \text{س}^5 \, \text{د س}$

الحل) بتطبيق الخاصية (٦) فان $\int \text{س}^5 \, \text{د س} = \frac{\text{س}^{5+1}}{5+1} + \text{ح} = \frac{\text{س}^6}{6} + \text{ح}$

٢) جد $\int \sqrt[3]{\text{س}^2} \, \text{د س}$

الحل) $\int \sqrt[3]{\text{س}^2} \, \text{د س} = \int \text{س}^{\frac{2}{3}} \, \text{د س} = \frac{\text{س}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{ح} = \frac{3}{5} \text{س}^{\frac{5}{3}} + \text{ح}$

٣) جد $\int (\text{س}+1)(\text{س}-2) \, \text{د س}$

الحل) بفك التطبيق المكامل نجد ان

$$\int (\text{س}+1)(\text{س}-2) \, \text{د س} = \int (\text{س}^2 - \text{س} - 2) \, \text{د س}$$

$$= \int \text{س}^2 \, \text{د س} - \int \text{س} \, \text{د س} - \int 2 \, \text{د س}$$

وبتطبيق الخاصية (٥) :

$$= \int \text{س}^2 \, \text{د س} - \int \text{س} \, \text{د س} - 2 \int \text{د س} \quad \text{بتطبيق الخاصية (٤)}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{3} + \text{ح}_1 - \frac{\text{س}^2}{2} + \text{ح}_2 - 2\text{س} + \text{ح}_3 \quad \text{بتطبيق الخاصية (٦)}$$

وبفرض ان $\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \text{ح}_3 = \text{ح}$ فان الناتج

$$= \frac{1}{3} \text{س}^3 - \frac{1}{2} \text{س}^2 - 2\text{س} + \text{ح}$$

ملاحظة / سوف لانضيف في الامثلة القادمة ثابت الى كل حد من حدود المقدار المكامل وانما سنكتفي باضافة الثابت ح الى ناتج التكامل النهائي .

٤) اذا كان ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 3}{\text{س}^2}$

فجد $\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{د س}$

الحل) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 3}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} - \frac{2\text{س}}{\text{س}^2} + \frac{3}{\text{س}^2} = 1 - \frac{2}{\text{س}^2} + \frac{3}{\text{س}^2}$

$$\therefore \int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int \left(1 - \frac{2}{\text{س}^{2}} + \frac{3}{\text{س}^{3}}\right)\text{د س} = \int \text{د س} - \int 2\text{س}^{-2}\,\text{د س} + \int 3\text{س}^{-3}\,\text{د س}$$

$$= \text{س} - \frac{2\text{س}^{-1}}{-1} + 3\,\frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{ح} = \text{س} + \frac{2}{\text{س}} - \frac{3}{2\text{س}^{2}} + \text{ح}$$

٥) اذا كان $\text{ق}: \text{ح} / \{2\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2}$

فجد $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$

الحل) بتحليل البسط فرق مكعبين ينتج :-

$$\int \frac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2}\,\text{د س} = \int \frac{(\text{س} - 2)(\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4)}{(\text{س} - 2)}\,\text{د س}$$

وبما ان $\text{س} \neq 2$

$\therefore \quad \text{س} - 2 \neq$ صفر

نقسم البسط والمقام على $(\text{س} - 2)$

$$\therefore \int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int (\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4)\,\text{د س} = \int \text{س}^{2}\,\text{د س} + 2\int \text{س}\,\text{د س} + 4\int \text{د س}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{س}^{2} + 4\text{س} + \text{ح}$$

مثال ٦) جد $\displaystyle\int \frac{\text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1}{\text{م}^{2} + \text{م} + 1}\,\text{د م}$

الحل) $\displaystyle\int \frac{\text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1}{\text{م}^{2} + \text{م} + 1}\,\text{د م} = \int (\text{م}^{2} - \text{م} + 1)\,\text{د م}$ وذلك بقسمة البسط على المقام قسمة مطولة كما يلي :-

$$= \int \text{م}^{2}\,\text{د م} - \int \text{م}\,\text{د م} + \int \text{د م}$$

$$= \frac{1}{3}\text{م}^{3} - \tfrac{1}{2}\text{م}^{2} + \text{م} + \text{ح}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{م}^{2} - \text{م} + 1 \\ \hline
\text{م}^{2} + \text{م} + 1 & \text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1 \\
 & \mp\text{م}^{4} \mp \text{م}^{3} \mp \text{م}^{2} \\ \hline
 & -\text{م}^{3} + 1 \\
 & \pm\text{م}^{3} \pm \text{م}^{2} \pm \text{م} \\ \hline
 & \text{م}^{2} + \text{م} + 1 \\
 & \mp\text{م}^{2} \mp \text{م} \mp 1 \\ \hline
\end{array}$$

مثال ٧) جد $\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}}\,\text{د س}$

باستخدام الخاصية السادسة الواردة في (بند ٦ـ٢)

اى $\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}}\,\text{د س} =$

$\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2}\,\text{د س} = \frac{1}{2}$

$$\int (2\text{س}-3)^{\frac{1}{2}}(2\,\text{د س}) =$$

$$\frac{1}{2}\int (2\text{س}-3)^{\frac{1}{2}}\,\text{د}\,(2\text{س}-3) = \frac{\frac{1}{2}(2\text{س}-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{حـ} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2\text{س}-3)^{\frac{3}{2}} + \text{حـ}$$

$$= \frac{1}{3}(2\text{س}-3)^{\frac{3}{2}} + \text{حـ}$$

مثال ٨) $\int \frac{\text{د س}}{(3\text{س}+5)^{2}} = \int (3\text{س}+5)^{-2}\,\text{د س} = \frac{1}{3}\int (3\text{س}+5)^{-2}(3\,\text{د س})$

$$= \frac{1}{3}\int (3\text{س}+5)^{-2}\,\text{د}\,(3\text{س}+5) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\text{س}+5}{-1}\right)^{-1} + \text{حـ}$$

$$= -\frac{1}{3}(3\text{س}+5)^{-1} + \text{حـ} = -\frac{1}{3(3\text{س}+5)} + \text{حـ}$$

مثال ٩) جد $\int \frac{\text{س د س}}{\sqrt{2\text{س}^{2}+5}}$

الحل) $\int \frac{\text{س د س}}{\sqrt{2\text{س}^{2}+5}} = \int (2\text{س}^{2}+5)^{-\frac{1}{2}}\,\text{س د س} = \frac{1}{4}\int (2\text{س}^{2}+5)^{-\frac{1}{2}}\,4\text{س د س}$

$$= \frac{1}{4}\int (2\text{س}^{2}+5)^{-\frac{1}{2}}\,\text{د}\,(2\text{س}^{2}+5) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\text{س}^{2}+5}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{حـ}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\text{س}^{2}+5} + \text{حـ}$$

مثال ١٠) اذا كان التطبيق المكامل عبارة عن حاصل ضرب فانه احيانا يكون مفيدا ان تضع احد الحدود في صورة اخرى بحيث لاتتغير قيمته فمثلا

$$\int \text{س}\sqrt{\text{س}+1}\;\text{د س}$$

$= \int (\text{س}+1-1)\sqrt{\text{س}+1}\;\text{د س}$ (وذلك باضافة وطرح (١) من س)

$$= \int \left\{(\text{س}+1)\sqrt{\text{س}+1} - \sqrt{\text{س}+1}\right\}\text{د س} = \int (\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}\,\text{د س} - \int (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\,\text{د س}$$

$$= \int (\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}\,\text{د}\,(\text{س}+1) - \int (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\,\text{د}\,(\text{س}+1)$$

$$= \frac{2}{5}(\text{س}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + \text{حـ}$$

تماريـــــن ٦ ـ ١

من تمرين ١ الى ٢٠ جد التكامل غير المحدود وحقق الناتج بايجاد التفاضـــــل

١) $\int (٣س - ٢)^{٥}\, دس$ ‏ ٢) $\int (٢س + ٥)^{٤}\, دس$

٣) $\int (٢ - س)^{٤}\, دس$ ‏ ٤) $\int (٤ - ٦س)^{-٧}\, دس$

٥) $\int (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\, دس$ ‏ ٦) $\int (٢س^{٢} + ٣)^{٤}\, س\, دس$

٧) $\int (٢س^{٢} + ٣)^{\frac{٧}{٣}}\, س\, دس$ ‏ ٨) $\int (٤ - س^{٢})^{٣}\, س\, دس$

٩) $\int (٤ - ٢س^{٢})^{-\frac{٢}{٣}}\, س\, دس$ ‏ ١٠) $\int \frac{س\, دس}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$

١١) $\int س \sqrt{٢س^{٢} - ١}\, دس$ ‏ ١٢) $\int \frac{س\, دس}{(٣س^{٢} + ٢)^{٢}}$

١٣) $\int س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١}\, دس$ ‏ ١٤) $\int ل^{٣} \sqrt{ل^{٤} + ١}\, دل$

١٥) $\int \frac{(س^{٢} + ٢س)\, دس}{\sqrt[٣]{س^{٣} + ٣س^{٢} + ١}}$ ‏ ١٦) $\int \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{٢} \frac{دن}{ن^{٢}}$

١٧) $\int (س^{٢} + ١)^{٣}\, س^{٣}\, دس$ ‏ ١٨) $\int (٢س^{٢} - ٣)^{\frac{٤}{٣}}\, س\, دس$

١٩) $\int (س^{٣} + ١)^{\frac{٧}{٩}}\, س^{٤}\, دس$ ‏ ٢٠) $\int (س^{٢} - ٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}\, دس$

بند ٦ ـ ٢ تطبيقـــات على التكامـــل غـــير المحـــدود

اولا ـ التفسير الهندسي لمسالة تعيين التطبيق الاصلي :ـ

سبق وان درسنا في الفصل الخامس ان ميل المماس لمنحني بيان التطبيق يســـاوى المشتقة الاولى للمنحني عند النقطة (س ، ص) الواقعة على هذا المنحنى وفي هـــذا الفصل سندرس المسالة المعاكسة اى تعيين منحنى بيان التطبيق الاصلي اوكما يقـــال

المنحني التكاملي ص = ع (س) ...(١)

اى تعيين ذلك المنحني الذى ميل مماسه $\bar{ص}$ = ق (س) ∀ س ∈ لمنطلق ...(٢)

فاذا استطعنا انشاء منحن تكاملي مثل هذا فعندئذ يكون لجميع المنحنيات التي تنشأ عن هذا المنحني بانسحاب مواز للمحور الثاني بمسافة كيفية ، مماسات متوازية مـــن اجل القيم نفسها لـ (س) وميل هذه المماسات هو كما في المنحني الاصلي $\bar{ص}$ = ق(س) ويكافيء هذا الانسحاب المتوازى اضافة حـ لتراتيب المنحني وبذلك تكون المعادلة العامة للمنحنيات الممثلة لحلول المسالة هي :ـ

ص = ع (س) + حـ ....(٣)

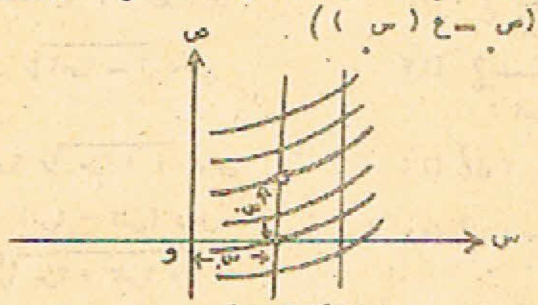
وحتى نستطيع تعيين المنحني التكاملي المطلوب تماما يجب ان نعطي سلفا موضع نقطة من المنحني التكاملي كان نعطي مثلا نقطة تقاطع هذا المنحني مع مستقيم مواز لمحور الصادات ($\text{س} = \text{س}_{٠}$) ان هذا التحديد يكافيء اعطاء القيمة الابتدائية $\text{ص}_{٠}$ للتطبيق $\text{ص}_{٠} = \text{ع}(\text{س}_{٠})$

وبتعويض القيمة الابتدائية هذه في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة التي تعيين قيمة الثابت حـ .

اي $\text{ص}_{٠} = \text{ع}(\text{س}_{٠}) + \text{حـ}$

وبذلك يكون التطبيق الاصلي الذى يحقق الشرط الابتدائي المفروض من الشكل .

$\text{ص} = \text{ع}(\text{س}) + (\text{ص}_{٠} - \text{ع}(\text{س}_{٠}))$



(شكل ٦ـ١)

امثلة محلولة

١) جد معادلة المنحني الذى ميله عند النقطة (س ، ص) هو $٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س}$. ويمر بالنقطة (٣ ، ١)

الحل) $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س})\,\text{د س} = (٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س})\,\text{د س}$

$\therefore \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{د س} = \int (٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س})\,\text{د س}$

$\text{ق}(\text{س}) + \text{حـ}_{١} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٦}{٢}\text{س}^{٢} + \text{حـ}_{٢}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{حـ}_{٢} - \text{حـ}_{١}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{حـ}$ (بفرض ان $\text{حـ}_{٢} - \text{حـ}_{١} = \text{حـ}$)

وبما ان المنحني يمر بالنقطة (٣ ، ١)

$\therefore$ هذه النقطة تحقق معادلته

اي $\text{ق}(٣) = ١ \Longleftrightarrow \frac{٢}{٣} \times ٢٧ - ٣ \times ٩ + \text{حـ} = ١$

⟺ ١٨ ـ ٢٧ + حـ = ١ ⟺ ـ ٩ + حـ = ١ ⟺ حـ = ١٠

∴ ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س٣ ـ ٣س٢ + ١٠

مثال ٢) ليكن ق تطبيقا عدديا مشتقته الاولى بالنسبة الى س تساوى ٢س ـ ٢ واصغر قيمة محلية له = ـ ٤ نجد بيان هذا التطبيق .

الحل) قَ (س) = ٢س ـ ٢

قَ (س) د س = (٢س ـ ٢) د س

∫ قَ (س) د س = ∫ (٢س ـ ٢) د س

ق (س) = س٢ ـ ٢س + حـ ......(١)

بما ان للتطبيق اصغر قيمة محلية = ـ ٤

∴ قَ (س) = ٢س ـ ٢ قَ (س) ـــــ ا ++++

متناقص متزايد

يكون موجبا ∀ س > ١ وسالبا ∀ س < ١

ويساوى صفر عند س = ١

اى النقطة الحرجة عند س = ١ ومنها نستنتج ان للتطبيق اصغر قيمة محلية عند النقطة (١ ، ـ ٤)

وبما ان هذه النقطة تحقق معادلة المنحني .

∴ ق (١) = ـ ٤ ⟺ ١ ـ ٢ + حـ = ـ ٤ ⟺ حـ = ـ ٣

∴ معادلة المنحني هي ق (س) = س٢ ـ ٢س ـ ٣

مثال ٣) منحن يمر بالنقطتين (ـ ١ ، ٩) ، (٢ ، ـ ٣) وميله عند اية نقطة عليه يساوى أس ـ ٥ حيث أ ∈ ح جد (١) قيمة أ (٢) معادلة المنحني (٣) معادلة كل من المماس والعمودى عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ٣

الحل) قَ (س) = أس ـ ٥

قَ (س) د س = (أس ـ ٥) د س

∫ قَ (س) د س = ∫ (أس ـ ٥) د س

ق (س) = ½ أس٢ ـ ٥س + حـ

المنحني يمر بالنقطة (ـ ١ ، ٩) فهي تحقق معادلته

اى ق (ـ ١) = ٩ ⟺ ٩ = ½ أ + ٥ + حـ

⟺ ٤ = ½ أ + حـ .....(١)

وبما ان المنحني يمر بالنقطة (٢ ، ـ ٣) ، ∴ ق(٢) = ـ ٣

(١) حذفنا الثابت الاختيارى من الطرف الايمن وذلك يعتبر ضمنيا انه موجود وليكن ح$_1$ والثابت في الطرف الايسر وليكن ح$_2$ وباضافة ـ ح$_1$ الى الطرفين يصبح الثابت في الجهة اليسرى ح$_2$ ـ ح$_1$ = ح

⟸ ٢ أ + ح = ٧ ....(٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) اننا نحصل على ان أ = ٢ ، ح = ٣

∴ معادلة المنحني هي

ق (س) = س^2 ـ ٥س + ٣

ولايجاد معادلة المماس والعمود عليه عند س = ٣

ق (٣) = ـ٣

∴ نقطة التماس هي (٣ ، ـ٣)

ق' (٣) = ٦ ـ ٥ = ١ ميل المماس

∴ معادلة المماس : ص + ٣ = ١ (س ـ ٣) ومنها ص ـ س + ٦ = ٠

ميل العمود = ـ ١

∴ معادلة العمود ، ص + ٣ = ـ (س ـ ٣)

اى ص + س = ٠

مثال ٤) اذا كان ق'' (س) = ٤س و ق' (صفر) = صفر وان ق (صفر) = ٢

نجد كلا من ق' (س) ، ق (س)

الحل)

ق'' (س) = ٤س

ق'' (س) د س = ٤س د س

∫ق'' (س) د س = ∫ ٤س د س

$$ق' (س) = \frac{٤س^2}{٢} + ح$$

ق' (س) = ٢س^2 + ح

وبما ان ق' (صفر) = صفر

∴ صفر = ٢ × صفر + ح

∴ ح = ٠

∴ ق' (س) = ٢س^2

ق' (س) د س = ٢س^2 د س

∫ ق' (س) د س = ∫٢س^2 د س

$$ق (س) = \frac{٢}{٣} س^3 + ك$$

وبما ان ق (صفر) = ٢ ∴ ٢ = $\frac{٢}{٣}$ × صفر + ك

اي ك = ٢

∴ ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س٣ + ٢

تمارين ٦ـ٢

١) اذا كان قَ (س) = س٢ (س ـ $\frac{٣}{س}$)٢ ، حيث س ≠ صفر فجد ق(١) علما بان (صفر ، ٢) ∈ ق

٢) اذا كان قَ (س) = س (٣س ـ ٢) فاثبت ان ق (س) = س٣ ـ س٢ ـ ٩ اذا علمت ان ق (٢) = ـ ٥

٣) ليكن $\frac{دق}{دس}$ = ٢س + ١

فاذا علمت ان (١ ، أ + ٢) ∈ ق ، (٢ ، ٣أ + ٢) ∈ ق فما قيمة أ ؟

٤) اذا علم ان قً (س) = ٦س وكان $\frac{دق}{دس}\Big|_{س=١}$ = ٣

وان (١ ، ٤) ∈ ق فاثبت ان ق (س) = س٣ + ٣

٥) جد اعظم قيمة محليا واصغر قيمة محليا للمنحني الذى ميله عند نقطة عليه يساوى ٣(س٢ ـ ٢س ـ ٣) مع العلم انه يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

٦) اذا كان قَ(س) = ٦ (س ـ ٢)٢ وكانت ق (٢) = صفر فاثبت ان ق (ـ ١) = ـ ٥٤

٧) اذا كان ميل المماس للمنحني عند اية نقطة (س ، ص) على المنحني يساوى ٦س٢ ـ ٣٠س + ٣٦ فجد معادلة المنحني اذا علمت ان اعظم قيمة محلية له = ٢٨ كذلك جد اصغر قيمة محلية .

٨) منحن يمر بالنقطة (٠ ، ١) وميله يساوى ٢س ـ ½ س٢ لجميع قيم س . جد معادلة كل من المماس والعمود عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ٢

*٩) ليكن ق : ح ← ح تطبيقا وليكن ل : ح ← ح تطبيقا بحيث ان ∀(س ، ص) ∈ ق و ∀(س ، ص) ∈ ل فان قَ (س) = ٤س ، لَ (س) = ٣س٢ + ١ وكانت نقطة الاصل ∈ ل ∩ ق . برهن ان ل يمس ق واذا كان المستقيم المماس والعمود عليه من نقطة التماس يصنعان مثلثا مع المحور الاول . جد مساحة هذا المثلث

* ١٠) ليكن ل : ح ← ح تطبيقا بحيث ان ل″ (س) = ١٢س٢ – ٢٤س
∀س ∈ ح فاذا كانت (٢ ، –١٦) ∈ ق و (٣ ، –٢٧) ∈ ق فجد
ل (٤) ومثل ل ديكارتيا .

ثانيا – التفسير الفيزياوى للتكامل غير المحدود

لنفرض ان لدينا القانون الذى يعطي الارتباط التحليلي للسرعة بدلالة الزمن (ن)

س = ق (ن)

وليكن المطلوب البحث عن علاقة المسافة م بالزمن

ولما كانت السرعة على مسار مفروض مساوية لمشتق المسافة بالنسبة للزمن دم / دن فان المسالة تؤول الى تعيين التطبيق الاصلي .

م = ∫ ق (ن) دن

وبذلك نحصل على مجموعة غير منتهية من حلول لاتختلف عن بعضها الا بثابت اضافي . ويعود عدم التعيين هنا الى عدم تحديد الموضع الذى تقاس ابتداء منه المسافة م ، فاذا كان لدينا على سبيل المثال س = حـ ن + س١ (الحركة بسرعة منتظمة)

فعندئذ تعطى م بالعبارة الاتية :–

م = ½ حـ ن٢ + س١ ن + د ..... (١)

وذلك لان مشتق هذه العبارة بالنسبة للزمن يتكافأ مع العبارة المفروضة س = حـ ن + س١

واذا اتفقنا على ان نقيس م بدءا من النقطة الموافقة للقيمة ن = صفر ، اى اذا افترضنا م = صفر عندما ن = صفر ، فعندئذ يجب ان نعوض في العلاقة (١) عن د بالصفر

امثلـــة محلولـــة

١) بدأت نقطة مادية حركتها بسرعة ١٥ سم / ثا في خط مستقيم ابتداء من نقطة الاصل فبلغ تعجيلها ٦ (٢ – ن) سم / ثا٢ بعد ن ثانية . أثبت ان سرعتها تصبح صفرا عندما تكون على بعد (١) متر من نقطة الاصل وان سرعتها لاتزيد عن ٢٧ سم / ثا

الحل) تَ(ن) = سَ(ن) = ١٢ – ٦ن بالفرض

سَ(ن) دن = (١٢ – ٦ن) دن

∫ سَ(ن) دن = ∫ (١٢ – ٦ن) دن

س(ن) = ١٢ن – ٣ن٢ + حـ ، حيث حـ ثابت اختيارى

عندما ن = صفر فان س(٠) = ١٥ بالفرض

∴ ١٥ = ١٢ × صفر – ٣ × صفر + حـ

∴ حـ = ١٥

∴ س(ن) = ١٢ ن – ٣ن٢ + ١٥ ....(١)

مَ = س(ن) = ١٢ ن – ٣ن٢ + ١٥

مَ(ن) د ن = (١٢ن – ٣ن٢ + ١٥) د ن

∫ مَ(ن) د ن = ∫ (١٢ ن – ٣ن٢ + ١٥) د ن

م(ن) = ٦ن٢ – ن٣ + ١٥ن + حـ

وبوضع ن = صفر ، م = ٠ فان حـ = صفر ، وتكون م = ٦ن٢ – ن٣ + ١٥ن ..(٢)

واذا كانت السرعة = صفر فان

١٢ن – ٣ن٢ + ١٥ = ٠

ن٢ – ٤ن – ٥ = ٠

(ن – ٥) (ن + ١) = ٠

∴ ن = ٥ ثا وبالتعويض في (٢) عن قيمة ن = ٥ ينتج

م = ٦ × ٢٥ – ١٢٥ + ١٥ × ٥ = ١٠٠ سم

ولايجاد اقصى سرعة لها نجد سً = ١٢ – ٦ن ومنها

سً(ن) > صفر ∀ن < ٢

و سً (ن) < صفر ∀ن > ٢

و سً (٢) = صفر

∴ توجد اصغر قيمة محلية وهي س(٢) = ٢٧سم/ ثا

مثال ٢) جسم يتحرك في خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره ٢ ق/ ثا فاذا بلغت سرعته في نهاية ٤ ثوان من بدء الحركة ١٤ ق/ ثا كما ان بعده عن نقطة الحركة عندئذ تساوي ٤٩ قدما احسب

آ) سرعة الجسم في اية لحظة ن   ب) سرعة الجسم في نهاية ٦ ثوان

جـ) بعد الجسم عن النقطة الثابتة بدلالة ن   د) بعد الجسم عن النقطة الثابتة في نهاية الثانية الثامنة .

الحل)

آ) ت(ن) = ٢

سً(ن) د ن = ٢ د ن

∫ سً(ن) د ن = ٢ ∫ د ن

س(ن) = ٢ن + حـ

١٤ = ٢ × ٤ + حـ

∴ حـ = ٦

∴ س(ن) = ٢ن + ٦ ق/ ثا

ب) س(٦) = ٢ × ٦ + ٦ = ١٨ق/ ثا

جـ) س(ن) = ٢ن + ٦

م̄ (ن) = ٢ن + ٦

$\int$ م̄ (ن) د ن = $\int$ (٢ ن + ٦) دن

م (ن) = ن٢ + ٦ن + ك

٤٩ = ١٦ + ٢٤ + ك

∴ ك = ٩

∴ م(ن) = ن٢ + ٦ن + ٩

د) م (٨) = ٦٤ + ٦ × ٨ + ٩ = ١١٩ قدم

تمارين ٦ ــ ٣

(١) نقطة مادية بدات تتحرك من السكون بتعجيل قدره (٢ + ٣ ن) م/ ثا٢ وعندما ن = صفر فان النقطة يكون على بعد ٥ م من نقطة الابتداء • وبعد ن = ١ تصبح سرعة النقطة ١٠م/ ثا اين تكون بعد ن ثا ؟

(٢) نقطة مادية بدأت من السكون بتعجيل قدره (٣٠ ــ ٦ن م/ ثا بزمن ن اين ومتى تقف ثانيــة •

(٣) تقذفت كرة راسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بسرعة ابتدائيــة قدرهـــــا ٩٦ ق/ ثا • جد باستخدام التكامل •

١) السرعة والمسافة عند اى لحظة ٢) اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة

بند ٦ ــ ٤ • التكامل المحـــدود •

تعريف / سبق ان عرفنا التكامل غير المحدود بانه العملية العكسية للتفاضل كما اوضحنا في بند ٦ ــ ١ وفي كل من عمليات التكامل كنا نضيف ثابتا للتكامل حـ وذلك لتكون نتيجة التكامل شاملة لجميع التطبيقات الممكنة فاذا فرضنا ان

الاسعى $\int$ ق (س) د س = ل (س) + حـ ••••• (١)

فان الطرف الايمن لهذه المعادلة لايتعين تعيينا كاملا الا اذا عرفنا قيمة الثابــت حـ • وهذه تتوقف على ظروف اضافية في المسالة • بينما قيمة التكامل عند (س = أ) هي من التعويض في المعادلة (١)

ل (أ) + حـ ـــ ـــ ـــ ـــ (٢)

وكذلك فانه قيمة التكامل عند (س = ب) هي

ل (ب) + حـ ••••• (٣)

وعلى هذا نفرق قيمتي التكامل عند (س = آ) و (س = ب) ينتج بطرح القيمـــة (٢) من القيمة (٣) اى

٢٠/٤/٧٦

ل (ب) ــ ل (أ) ....(٤)

يلاحظ ان القيمتين (٢) و (٣) غير معينتين لوجود الثابت حـ بينما فـــرق القيمتين (٤) معين (اى عدد حقيقي) نستنتج اذن ان قيمة التكامل عنـد اى قيمة معينة للمتغير س لاتكون معينة اما الفرق بين قيمتي التكامل المناظرتين لاى قيمتين للمتغير س يكون معينا ويرمز لهذا الفرق بالرمز

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = ل(ب) - ل(أ)$$

ويقرا تكامل ق (س) بالنسبة الى س مابين النهايتين أ ، ب ويسمى بالتكامـــل المحدود ٠ بشرط ق: [أ ، ب] ⟵ ح مستمر

وعملية ايجاد التكامل هذا تسمى بالتكامل بين حدين أ ، ب وتسمى أ بالحـــد الادنى للتكامل وتسمى ب بالحد الاعلى للتكامل ٠

بند ٦ــ٥ خواص التكامل المحدود

اولا ــ اذا بادلنا بين موضعي الحدين الاعلى والادنى لتكامل محدود فعندئذ لاتتغير سوى اشارة التكامل ٠ فالتكامل اذن يحافظ على قيمته المطلقة

$$\text{اى} \quad \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = - \int_{ب}^{أ} ق(س)\, د س$$

ثانيا ــ تقسيم حدود التكامل

اذا كان ق : [أ ، هـ] ⟵ ح مستمر فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س + \int_{ب}^{هـ} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{هـ} ق(س)\, د س$$

ثالثا ــ ان كل تكامل محدود حده الاعلى مساو لحده الادنى يساوى صفر

$$\text{اى} \quad \int_{أ}^{أ} ق(س)\, د س = \text{صفر}$$

$$\int_{أ}^{ب} د س = ب - أ$$ وذلك لان التطبيق المكامل يساوى الواحد بالنسبـــة الـى جميع قيم س وبالتالي فان

$$\int_{أ}^{ب} د س = \int_{أ}^{ب} س^{٠}\, د س = \Big[س\Big]_{أ}^{ب} = ب - أ$$

خامسا ــ لاتتعلق قيمة التكامل المحدود بالرمز الذى نختاره لمتغير التكامل ٠

$$\text{اى} \quad \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{ب} ق(ن)\, د ن$$

سادسا ــ يمكن اخراج العامل الثابت خارج رمز التكامل المحدد

$$\text{اى} \quad \int_{أ}^{ب} حـ\, ق(س)\, د س = حـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$$

سابعاً ـ التكامل المحدود لمجموع جبرى يساوى المجموع الجبرى للتكاملات المحدودة

أى $\int_{أ}^{ب} (\text{ق}_1 \oplus \text{ق}_2 \ominus \text{ق}_3 \oplus \cdots)\,\text{د س} = \int_{أ}^{ب} \text{ق}_1\,\text{د س} + \int_{أ}^{ب} \text{ق}_2\,\text{د س} - \int_{أ}^{ب} \text{ق}_3\,\text{د س} + \cdots$

امثلـــة محلولـــة

1) $\int_{1}^{ب} \text{حـ}\,\text{د س} = \text{حـ س}\Big]_{1}^{ب} = \text{حـ}(\text{ب} - 1)$

2) $\int_{0}^{5} \text{س}\,\text{د س} = \frac{1}{2}\text{س}^2\Big]_{0}^{5} = \frac{1}{2}(25 - 0) = \frac{25}{2}$

3) $\int_{1}^{3} \text{س}^3\,\text{د س} = \frac{1}{4}\text{س}^4\Big]_{1}^{3} = \frac{1}{4}(81 - 1) = 20$

4) $\int_{-1}^{1} (2\text{س}^2 - \text{س}^3)\,\text{د س} = \frac{2}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{4}\text{س}^4\Big]_{-1}^{1} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) - (\frac{-2}{3} - \frac{1}{4})$

$= \frac{4}{3}$

5) $\int_{-3}^{-1} (\frac{-1}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}^3})\,\text{د س} = \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{2\text{س}^2}\Big]_{-3}^{-1}$

$= (1 + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{18}) = \frac{10}{9}$

6) $\int_{1}^{4} \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}} = 2\sqrt{\text{س}}\Big]_{1}^{4} = 2(\sqrt{4} - 1) = 2$

7) $\int_{1}^{2} (\frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س}^2})\,\text{د س} = \int_{1}^{2} (\text{س} - \text{س}^{-2})\,\text{د س} = \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}}\Big]_{1}^{2}$

$= (\frac{4}{2} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} + 1) = 1$

8) $\int_{1}^{2} \text{س}^2(1 - \frac{2}{\text{س}^4})\,\text{د س} = \int_{1}^{2} (\text{س}^2 - 2\text{س}^{-2})\,\text{د س} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{2}{\text{س}}\Big]_{1}^{2}$

$= (\frac{1}{3} \times 8 + 1) - (\frac{1}{3} + 2) = \frac{11}{3} - \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$

9) $\int_{-1}^{1} \text{س}(1 + \text{س}^3)\,\text{د س} = \int_{-1}^{1} (\text{س} + \text{س}^4)\,\text{د س} = \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{5}\text{س}^5\Big]_{-1}^{1} =$

$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

10) $\int_{\text{صفر}}^{1} \text{س}(\text{س} - 1)(\text{س} - 2)\,\text{د س} = \int_{\text{صفر}}^{1} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س})\,\text{د س} =$

$$\frac{1}{2}\left[\text{س}^4 - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{\text{صفر}}^{1} = \left(\frac{1}{2} - 1 + 1\right) - \text{صفر} = \frac{1}{2}$$

(11) $$\int_1^2 (\text{س} + 1)\,(\text{س}^2 + 2\text{س} + 2)^{\frac{1}{3}}\,\text{د س} = \frac{1}{2}\int_1^2 (\text{س}^2 + 2\text{س} + 2)^{\frac{1}{3}}\, 2(\text{س} + 1)\,\text{د س}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (\text{س}^2 + 2\text{س} + 2)^{\frac{1}{3}}\,\text{د}\,(\text{س}^2 + 2\text{س} + 2) = \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 2}{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{8}\left[(\text{س}^2 + 2\text{س} + 2)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2 = \frac{3}{8}\left\{(4 + 4 + 2)^{\frac{4}{3}} - (1 + 2 + 2)^{\frac{4}{3}}\right\}$$

$$= \frac{3}{8}\left\{10^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}}\right\} = \frac{3}{8}\left(10\sqrt[3]{10} - 5\sqrt[3]{5}\right)$$

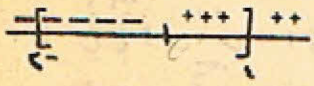
(12) $$\int_{-2}^{\text{صفر}} \text{س}\sqrt{2\text{س}^2 + 1}\,\text{د س} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{\text{صفر}} (2\text{س}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \times 4\text{س}\,\text{د س}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{\text{صفر}} (2\text{س}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\,\text{د}\,(2\text{س}^2 + 1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\left[(2\text{س}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{\text{صفر}}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2\text{س}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{\text{صفر}} = \frac{1}{6}\left\{(2 \times 0 + 1)^{\frac{3}{2}} - (2 \times 4 + 1)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{1 - 9^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{-26}{6} = \frac{-13}{3}$$

(13) $$\int_{-2}^{4} |3\text{س} - 6|\,\text{د س}$$ اشارة $3\text{س} - 6$



نلاحظ من المخطط المجاور

ان $|3\text{س} - 6| = 3\text{س} - 6 \quad \forall\ \text{س} \in [2 ، 4]$

وان $|3\text{س} - 6| = 6 - 3\text{س} \quad \forall\ \text{س} \in [-2 ، 2[$

$$\therefore \int_{-2}^{4} |3\text{س} - 6|\,\text{د س} = \int_{-2}^{2} (6 - 3\text{س})\,\text{د س} + \int_{2}^{4} (3\text{س} - 6)\,\text{د س}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{2}^{4} (3\text{س} - 6)\,3\,\text{د س} - \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} (6 - 3\text{س})\,(-3\,\text{د س})$$

$$= \frac{1}{3}\int_{2}^{4} (3\text{س} - 6)\,\text{د}\,(3\text{س} - 6) - \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} (6 - 3\text{س})\,\text{د}\,(6 - 3\text{س})$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left[(3\text{س} - 6)^2\right]_{2}^{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left[(6 - 3\text{س})^2\right]_{-2}^{2}$$

$$6 - \frac{1}{6}\left[(\text{صفر}) - (12)^2\right] = 6 - \frac{1}{6} \times \left(-(12)^2\right) = 30$$

١٤) احسب قيمة $\int_{-٣}^{٣} \left| ٣\text{س}^٢ - ١٢ \right| \, \text{دس}$

$$٣\text{س}^٢ - ١٢ = ٣(\text{س}^٢ - ٤) = ٣(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)$$

	-٣		-٢		٢		٣
$\text{س} + ٢$		$- - -$		$+ + +$		$+ +$	
$٣(\text{س} - ٢)$		$- - -$		$- - -$		$+ +$	
$٣(\text{س}^٢ - ٤)$		$+ + +$		$- - -$		$+ +$	

$$\therefore \int_{-٣}^{٣} \left| ٣\text{س}^٢ - ١٢ \right| \text{دس} = \int_{-٣}^{-٢} (٣\text{س}^٢ - ١٢)\, \text{دس} + \int_{-٢}^{٢} (١٢ - ٣\text{س}^٢)\, \text{دس} +$$

$$\int^{٣} (٣\text{س}^٢ - ١٢)\, \text{دس} = \Big[\text{س}^٣ - ١٢\text{س}\Big]_{-٣}^{-٢} - \Big[(\text{س}^٣ - ١٢\text{س})\Big]_{-٢}^{٢} + \Big[(\text{س}^٣ - ١٢\text{س})\Big]_{٢}^{٣}$$

$$= \Big\{(-٨ + ٢٤) - (-٢٧ + ٣٦)\Big\} - \Big\{(٨ - ٢٤) - (-٨ + ٢٤)\Big\} +$$

$$\Big\{(٢٧ - ٣٦) - (٨ - ٢٤)\Big\} = ٧ + ٣٢ + ٧ = ٤٦$$

١٥) $$\int_{-١}^{٢} \int_{\text{س}^٢}^{\text{س}+٢} \text{دص}\,\text{دس} = \int_{-١}^{٢} \Big[\text{ص}\Big]_{\text{س}^٢}^{\text{س}+٢} \text{دس} = \int_{-١}^{٢} (\text{س} + ٢ - \text{س}^٢)\, \text{دس} = \frac{٩}{٢}$$

١٦) $$\int_{-١}^{٢} \int_{\text{س}^٢}^{\text{س}+٢} \text{ح}\,\text{س}^٢\, \text{دص}\,\text{دس} = \text{ح} \int_{-١}^{٢} \int_{\text{س}^٢}^{\text{س}+٢} \text{س}^٢\, \text{دص}\,\text{دس}$$

$$= \text{ح} \int_{-١}^{٢} \Big[\text{س}^٢\text{ص}\Big]_{\text{س}^٢}^{\text{س}+٢} \text{دس} = \text{ح} \int_{-١}^{٢} (\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - \text{س}^٤)\, \text{دس} = \frac{٦٣}{٢٠}\text{ح}$$

١٧) $$\int_{٠}^{١} \int_{٠}^{\text{س}} (\text{س} + \text{ص} + ١)\, \text{دص}\,\text{دس}$$

١) نجد $\int_{٠}^{\text{س}} (\text{س} + \text{ص} + ١)\, \text{دص}$ على فرض س كمية ثابتة

$$= \Big[\text{س}\,\text{ص} + \tfrac{١}{٢}\text{ص}^٢ + \text{ص}\Big]_{٠}^{\text{س}} = \frac{٣\text{س}^٢}{٢} + \text{س}$$

٢) نجد $$\int_{٠}^{١} \left(\frac{٣\text{س}^٢}{٢} + \text{س}\right) \text{دس} = \Big[\frac{٣\text{س}^٣}{٢ \times ٣} + \tfrac{١}{٢}\text{س}^٢\Big]_{٠}^{١} =$$

$$\tfrac{١}{٢}\Big[\text{س}^٣ + \text{س}^٢\Big]_{٠}^{١} = \tfrac{١}{٢} \times ٢ = ١$$

١٨) $$\int^{٢} \Big\{ \int_{-١}^{\text{ع}} \Big[\int_{٠}^{\text{ص}} ١٢\text{س}\,\text{دس} \Big] \text{دص} \Big\} \text{دع} =$$

١) نجد $$\int_{٠}^{\text{ص}} ١٢\text{س}\,\text{دس} = \Big[\frac{١٢\text{س}^٢}{٢}\Big]_{٠}^{\text{ص}} = \Big[٦\text{س}^٢\Big]_{٠}^{\text{ص}} = ٦\text{ص}^٢$$

٢) نجد $$\int_{-١}^{\text{ع}} ٦\text{ص}^٢\, \text{دص} = \Big[\frac{٦\text{ص}^٣}{٣}\Big]_{-١}^{\text{ع}} = \Big[٢\text{ص}^٣\Big]_{-١}^{\text{ع}} = ٢\text{ع}^٣ + ٢$$

٣) نجد $$\int^{٢} (٢\text{ع}^٣ + ٢)\, \text{دع} = \Big[\frac{٢\text{ع}^٤}{٤} + ٢\text{ع}\Big]^{٢} = \Big[\tfrac{١}{٢}\text{ع}^٤ + ٢\text{ع}\Big]^{٢}$$

$$= \left(٨١ \times \tfrac{١}{٢} + ٢ \times ٣ \right) - \left(١٦ \times \tfrac{١}{٢} + ٢ \times ٢ \right) = \left(\frac{٨١}{٢} + ٦ \right) - \left(٨ + ٤ \right)$$

$$= \frac{٨١}{٢} + ٦ - ١٢ = \frac{٨١}{٢} - ٦ = ١٤٫٥$$

١٩) $\int_{١}^{٢} \left(٣\text{س}^٢ + [\text{س} + ٢] \right) \text{دس}$

نحن نعلم من الفصل الثاني انه $\forall$ س $\in$ [١ ، ٢[فان [س + ٢] = ٣

$$\therefore \int_{١}^{٢} \left(٣\text{س}^٢ + [\text{س} + ٢] \right) \text{دس} = \int_{١}^{٢} \left(٣\text{س}^٢ + ٣ \right) \text{دس} = \Big[\text{س}^٣ + ٣\text{س} \Big]_{١}^{٢}$$

$$= (٨ + ٦) - (١ + ٣) = ١٠$$

٢٠) ليكن ق: [٠ ، ٣] $\longrightarrow$ ح بحيث.

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{٢} + \dfrac{١}{٢} & \forall \text{س} \in [٠ ، ٢[\\ \text{س} & \forall \text{س} \in [٢ ، ٣] \end{cases}$$

فجد $\int^{٣} \text{ق(س)} \text{ دس}$

الحل) ان التطبيق غير مستمر عند س = ٢ ولكن تطبيقه الاصلي مستمر $\forall$ س $\in$ [٠ ، ٣]

اي $\text{ع(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{٤} + \dfrac{\text{س}}{٢} \quad \forall \text{س} \in [٠ ، ٢[$

و $\text{ع(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{٢} \quad \forall \text{س} \in [٢ ، ٣]$

ولايجاد التكامل المحدود لمثل هذه التطبيقات نتبع مايلي :-

ليكن ق: [أ ، ب] $\longrightarrow$ ح تطبيق مستمر $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] / {حـ}

وان $\int$ ق(س) دس مستمر $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] فان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}-\text{و}} \text{ق(س) دس} + \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \int_{\text{حـ}+\text{و}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$

وبما ان $\int$ ق(س) دس = ع(س) + حـ مستمرا $\forall$ س $\in$ [أ ، ب]

$$\therefore \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}-\text{و}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \Big[\text{ع(س)} \Big]_{\text{أ}}^{\text{حـ}-\text{و}} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \Big[\text{ع(حـ} - \text{و)} - \text{ع(أ)} \Big]$$

$$\text{وان } \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \int_{\text{حـ}+\text{و}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \Big[\text{ع(س)} \Big]_{\text{حـ}+\text{و}}^{\text{ب}} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \Big[\text{ع(ب)} - \text{ع(حـ} + \text{و)} \Big]$$

$$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \text{ ع(حـ} - \text{و)} - \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \text{ ع(أ)} + \underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \text{ ع(ب)}$$

$$\underset{\text{و}\to ٠}{\text{غـا}} \text{ ع(حـ} + \text{و)}$$

وبما ان ع مستمر ∴ $\lim_{و \to 0} ع(حـ - و) = \lim_{و \to 0} ع(حـ + و)$

∴ $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \left(ع(ب) - ع(حـ)\right) + \left(ع(حـ) - ع(أ)\right)$

اى في حالة انقطاع التطبيق الكامل في نقطة حـ فان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$

$= \int_{أ}^{حـ} ق(س)\,دس + \int_{حـ}^{ب} ق(س)\,دس$ يبقى صحيحا مادام التطبيق الاصلي مستمرا في [أ ، ب]

$$∴ \int ق(س)\,دس = \int \left(\frac{س}{2} + \frac{1}{2}\right) دس + \int س\,دس = \left[\frac{س^2}{4} + \frac{س}{2}\right] + \left[\frac{س^2}{2}\right]^{3}_{2}$$

$$= 5 + \frac{9}{2} - 2 = \frac{15}{2}$$

مثال) جد $\int_{-1}^{1} س^{-\frac{2}{3}}\,دس$

الحل) ان التطبيق ق(س) $= س^{-\frac{2}{3}}$ تصبح قيمته غير محددة عند س = صفر لكن تطبيقه الاصلي $3س^{\frac{1}{3}}$ يبقى مستمرا عند هذه القيمة لـ س وبذلك يمكننا ان نكتب .

$$\int_{-1}^{1} س^{-\frac{2}{3}}\,دس = \left[3س^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{0} + \left[3س^{\frac{1}{3}}\right]_{0}^{1} = 6$$

تمارين ٦ ـ ٤

١) اذا كان ق: ح / $\{-\frac{2}{3}\}$ ⟵ ح بحيث ق(س) $= \frac{9س^2 - 4}{3س + 2}$ نجد

$$\int_{-5}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{4} ق(س)\,دس$$

٢) برهن ان $\int \int (\,دس)\,دص = \int_{1}^{4} \int دس\,دص$

٣) جد $\int_{1}^{2} \int_{ص}^{ص^2} دس\,دص$ ٤) $\int \int_{}^{1} دس\,دص$

٥) $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{4-ص^2}}^{\sqrt{4-ص^2}} ص\,دس\,دص$ ٦) $\int \int دص\,دس$

٦) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٢)^{٣}$ اثبت ان $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س}(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}$

واحسب $\int_{٠}^{٢} ٦\text{س}(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}\,\text{دس}$

٧) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ اثبت ان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}(\text{س}^{٢} + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

واحسب $\int_{٠}^{٢} \dfrac{\text{س}\,\text{دس}}{\text{س}^{٢} + ٥}$

٨) اذا كان $\text{ق} : \{\text{س} : \text{س} \geq -٢\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث

$\text{ق}(\text{س}) = ٦(\text{س} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}(\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{٤}{٣}}$ اثبت أن

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}}(\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{١}{٣}}(٢٥\text{س}^{٢} + ٣٢\text{س} + ٩)$ ربي.

احسب $\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}}(\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{١}{٣}}(٢٥\text{س}^{٢} + ٣٢\text{س} + ٩)\,\text{دس}$

٩) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ $\forall\ \text{س} \neq ٢$

اثبت ان $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٥}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$ واحسب $\int_{-١}^{١} \dfrac{-٥\,\text{دس}}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

١٠) اذا كان $\text{ق}(-\text{س}) = -\text{ق}(\text{س})$ $\forall\ \text{س} \in \text{ك}$ فماذا يمكنك القول عن

$\int_{-أ}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟

١١) اذا كان $\text{ق}(-\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ $\forall\ \text{س} \in \text{ك}$ فما هي العلاقة بين

$\int_{-أ}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ و $\int_{٠}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟

١٢) ليكن ق تطبيق وان $\text{ع}(\text{س}) = \int_{أ}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ن})\,\text{دن}$

وليكن $\text{ل}(\text{س}) = \int_{ب}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ن})\,\text{دن}$ حيث أ ، ب عددين حقيقين معلومين

برهن أن ع ، ل مختلفان بكمية ثابتة . ثم جد قيمة هذه الكمية الثابتة .

احسب قيمة التكاملات المحدودة التاليـة :ـ

١٣) $\int_{1}^{2} (3\text{ن} - 1)^{2} \, \text{دن}$

١٤) $\int_{-1}^{1} \sqrt{2-\text{س}} \; \text{دس}$

١٥) $\int_{-2}^{-1} \frac{\text{دس}}{(\text{س}-1)^{2}}$

١٦) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}^{2}+1} \cdot \text{دس}$

١٧) $\int \frac{(\text{س}^{2}+1)\,\text{دس}}{\text{س}^{3}+3\text{س}+1}$

١٨) $\int_{1}^{2} (2\text{س}+1) \sqrt{\text{س}^{2}+\text{س}+1} \; \text{دس}$

١٩) $\int_{1} \frac{(\text{س}^{\frac{1}{3}}+2)^{4}\,\text{دس}}{\sqrt[3]{\text{س}^{2}}}$

٢٠) $\int_{1}^{2} (\text{س}+\frac{1}{\text{س}})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\text{س}^{2}-1}{\text{س}^{2}}\right) \text{دس}$

٢١) $\int_{1}^{2} (\text{س}-\frac{3}{\text{س}})^{9} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right) \text{دس}$

٢٢) $\int \left((2\text{س})^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{2\text{س}}}\right) \text{دس}$

٢٣) $\int_{-2}^{2} \left| 24\text{س} - 6\text{س}^{2} \right| \text{دس}$

٢٤) $\int_{-1}^{2} \left([\text{س}] + \left| 2\text{س}+4 \right| \right) \text{دس}$

٢٥) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{2}-6\text{س}+9}$

٢٦) $\int \left(\text{س}^{\text{هـ}} - \text{هـ}^{\text{س}}\right) \text{دس}$

بعض تطبيقات التكامل المحدود

١ـ حساب مساحة سطح :

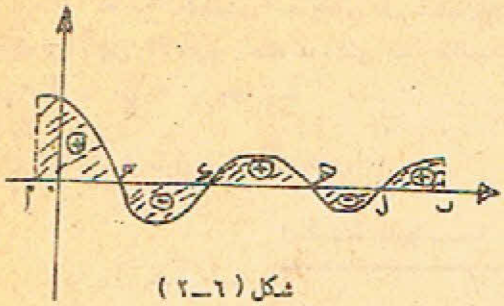
أ) مساحة السطح المحصور بين المنحني ص= ق(س) ومحور السينات

ان مساحة السطح المحصور بين المنحنى ص= ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س= أ ، س = ب تقدر بالتكامل المحدود

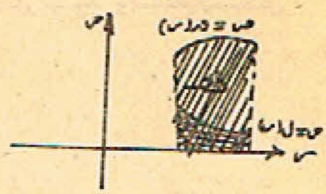
$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}$$

الا ان المساحة المستخرجة بهذه الطريقة لاتعبر عن المساحة الحقيقية للسطح التي يشكلها المنحني مع محور السينات بل تعبر عن المجموع الجبرى لها على اعتبار اشارة كل سطح يقع تحت محور السينات سالبة واذا اردنا للحصول على مجموع مساحات السطوح بالمعنى المالوف فما علينا الا حساب التكامل .

$\int_{أ}^{ب} |ق(س)|$ دس



شكل (٦ـ٢)



شكل (٦ـ٣)

فمجموع مساحات السطوح المخططة كما في الشكل (٦ـ٢) تساوى

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس - \int_{جـ}^{د} ق(س)\, دس + \int_{د}^{هـ} ق(س)\, دس - \int_{هـ}^{ل} ق(س)\, دس + \int_{ل}^{ب} ق(س)\, دس$$

ب) مساحة السطح المحصور بين منحنين

ان مساحة السطح المحصور بين المنحنين ص = ق(س) ، ص = ل(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوى

$\int_{أ}^{ب} \big(ق(س) - ل(س)\big)$ دس في الحالة التي يقع فيها احد المنحنين فوق الاخرى في الحالة التي يكون فيها ق (س) $\geqslant$ ل (س) في الفترة [أ ، ب]

وتساوى $\int_{أ}^{ب} \big(ل(س) - ق(س)\big)$ د س اذا كان ل (س) $\geqslant$ ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ولبرهان ذلك نفرض اولا ان كلا المنحنيين يقع فوق محور السينات فعندئذ يتضح من الشكل (٦ـ٣) مباشرة ان السطح هو يساوى الفرق بين السطحين المحصورين بين المنحنين المفروضين ومحور السينات.

$$هـ = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس - \int_{أ}^{ب} ل(س)\, دس = \int_{أ}^{ب} \big(ق(س) - ل(س)\big)\, دس$$

وهو المطلوب

اما الحالة العامة التي يكون فيها للمنحنين وضع كيفي بالنسبة لمحور السينات فانها ترجع الى الحالة السابقة بسحب محور السينات نحو الاسفل بمقدار كاف حتى يقع المنحنيات فوقه وبما ان هذا الانسحاب يضيف لكل من التطبيقين ق(س) ، ل(س) الثابت الاضافي نفسه فان الفرق ق (س) ـ ل (س) يبقى دون ان يطرأ عليه تغيير . هـذا ونترك للقارئ برهان ما يأتي :ـ

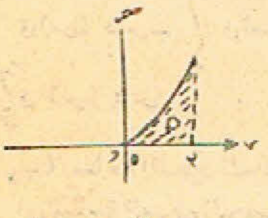
اذا تقاطع المنحنيان المفروضان على شكل يقع احدهما تحت الاخر في بعض الاجزاء وفوقه في الاجزاء الاخرى فعندئذ تكون مساحة السطح المحصور بينهما والمستقيمين س = أ ، س = ب مساوية

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س}) \right| \text{د س}$$

امثلة محلولة

مثال ١) جد المساحة المحددة بين المنحني ص = ½ س² والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ والمحور الاول

الحل) $\frac{\text{س}^2}{2} \geq$ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)



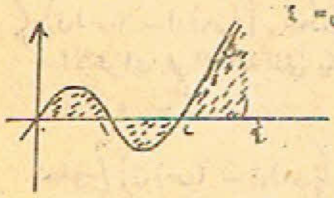
(شكل ٦ ـ ٤)

∴ ق (س) ≥ صفر ∀ س ∈ ح

∴ المساحة = $\int_{1}^{3} \frac{\text{س}^2}{2} \text{د س} = \left[\frac{\text{س}^3}{6}\right]_{1}^{3} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6}$

$= \frac{26}{6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

مثال ٢) جد المساحة المحددة بين المنحني ق (س) = س(س ـ ١) (س ـ ٢) والمحور الاول بين المستقيمين س = صفر ، س = ٤



(شكل ٦ ـ ٥)

من المخطط الديكارتي للتطبيق نلاحظ ان منحني التطبيق المحصور بين س = ٠ ، س = ١ يقع فوق محور السينات وبين س = ١ ، س = ٢ يقع تحته وبين س = ٢ ، س = ٤ يقع فوقه

ولهذا فالمساحة = $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س}) \text{د س} - \int_{1}^{2} \text{ق}(\text{س}) \text{د س} + \int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س}) \text{د س}$

$= \int_{0}^{1} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2) \text{د س} - \int_{1}^{2} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2) \text{د س} + \int_{2}^{4} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2) \text{د س}$

$= \int_{0}^{1} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 2\text{س}) \text{د س} - \int_{1}^{2} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س}) \text{د س} + \int_{2}^{4} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 2\text{س}) \text{د س}$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{0}^{1} - \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{1}^{2} + \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{2}^{4}$$

= ١٦٫٥ وحدة مربعة

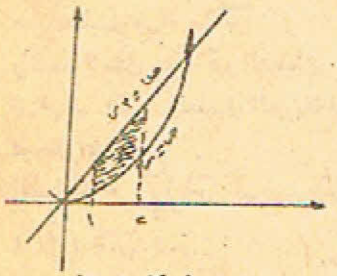
ملاحظة / يمكن معرفة ان المنحني يقع فوق المحور الاول في الفترة [٠ ، ١] لبا [٢ ، ٤]
ويقع تحته في [١ ، ٢] وذلك دون اللجوء الى المخطط الديكارتي
كما يلي

	صفر	١	٢	
---	++	++	++	اشارة س
---	--	++	++	اشارة س ـ ١
---	---	---	++	اشارة س ـ ٢
---	+++	---	++	اشارة ق(س)

اى ق(س) $\geq$ صفر
$\forall$ س $\in$ [٠ ، ١] $\cup$ [٢ ، ٤]
و ق(س) $\leq$ صفر
$\forall$ س $\in$ [١ ، ٢]

مثال ٣) جد مساحة المنطقة المحددة بين المستقيمات ص = ٢س ، س = ١ ، س = ٢
والمنحني ص = س٢

المخطط الديكارتي كما مبين في شكل (٦ـ٦) يوضح ان ص = ٢س هو فوق ص = س٢ في الفترة [١ ، ٢]



(شكل ٦ـ٦)

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{1}^{2} (\text{٢س} - \text{س}^2)\, \text{د س}$$

$$= \left[\frac{2}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{1}^{2} = \frac{12}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

ملاحظة/ ليكن ص = س٢ هو ق(س) وليكن ص = ٢س هو ع(س) فيمكن معرفة ان
ع(س) $\geq$ ق(س) $\forall$ س $\in$ [١ ، ٢] بدون اللجوء الى المخطط الديكارتي وذلك
بمعرفة اشارة (ع(س) ـ ق(س)) فاذا كانت $\geq$ صفر فيعني ان
ع(س) $\geq$ ق(س) واذا كانت $\leq$ صفر فيعني ان ع(س) $\leq$ ق(س) .
ويمكن ايضاح ذلك كما يلي :ـ

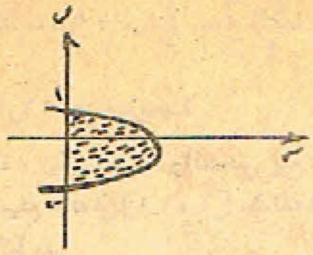
ع(س) ـ ق(س) = ٢س ـ س٢ = س (٢ ـ س)

	صفر	١ ، ٢	٢	
---	+	[+]	++ +	اشارة س
+++		++	----	اشارة ٢ ـ س
---		++	---	اشارة ع(س) ـ ق(س)

اى ع(س) ـ ق(س) $\geq$ صفر
$\forall$ س $\in$ [١ ، ٢]
$\therefore$ ع(س) $\geq$ ق(س)
$\forall$ س $\in$ [١ ، ٢]

مثال ٤) احسب المساحة المحددة بين المنحني $\text{س} = ٢ - \text{ص} + \text{ص}^{٢}$ والمحور الثاني .

الحل)



نجد نقاط التقاطع مع المحور الثاني

وهي $\text{ص}_{٢} = -٢$ ، $\text{ص}_{١} = ١$

وهنا يكون س تطبيقا بدلالة ص

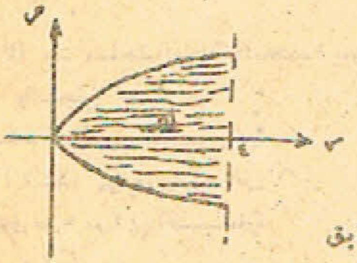
$\therefore$ المساحة $= \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{ص} - \text{ص}^{٢})\, \text{د ص}$

$= \left[٢\text{ص} - \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} \right]_{-٢}^{١} = ٤\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

(شكل ٦ ـ ٧)

مثال ٥) جد مساحة المنطقة بين المنحني $\text{ص}^{٢} = \text{س}$ والمستقيم $\text{س} = ٤$

الطريقة الاولى



ان العلاقة $\text{ص}^{٢} = \text{س}$ لا تمثل تطبيقا بدلالة س ولكن القسم الاعلى من المنطقة هو التطبيق $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ والقسم الاسفل منها هو التطبيق $\text{ص} = -\sqrt{\text{س}}$ وبتطبيق الطريقة في المثال السابق نحصل على :ـ

المساحة $= \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} - (-\sqrt{\text{س}}) \right) \text{د س}$

$= \int_{٠}^{٤} ٢\sqrt{\text{س}}\, \text{د س}$

$= ٢ \int_{٠}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, \text{د س} = ٢ \times \frac{٢}{٣}\, \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{٤} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(شكل ٦ ـ ٨)

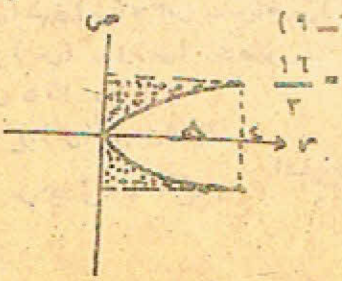
الطريقة الثانية

ان المعادلة $\text{س} = \text{ص}^{٢}$ تعني ان س تطبيق بدلالة ص . ولذلك سنجري تكامل بالنسبة الى ص .

المنطقة محددة بالمنحني $\text{س} = \text{ص}^{٢}$ والمستقيمين $\text{ص} = \pm ٢$ والمحور الثاني

ومساحة المنطقة المظللة كما موضحة في شكل (٦ ـ ٩)

$= \int_{-٢}^{٢} \text{ص}^{٢}\, \text{د ص} = \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} \Big]_{-٢}^{٢} = \frac{٨}{٣} - \left(-\frac{٨}{٣}\right) = \frac{١٦}{٣}$



اما المساحة المحصورة بين المستقيمات $\text{ص} = -٢$ ، $\text{ص} = ٢$ ، $\text{س} = \text{صفر}$ ، $\text{س} = ٤$ تساوي ١٦ وحدة مربعة

$\therefore$ مساحة المنطقة هـ =

(شكل ٦ ـ ٩)

$$١٦ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة

الطريقة الثالثة

يمكن ايجاد المساحة باستخدام الطريقة الثانية مباشرة بخطوة واحدة وذلك بايجاد المساحة بين $\text{س} = ٤$ ، $\text{س} = \text{ص}^٢$ وايجاد التكامل بالنسبة الى ص كما يلي :-

$$\text{المساحة} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{ص}^٢)\, \text{دص} = \left[٤\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^٣\right]_{-٢}^{٢} = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

الطريقة الرابعة

بما ان المنحني متناظر بالنسبة للمحور الاول

$$\therefore \text{المساحة} = ٢ \int_{٠}^{٤} \sqrt{\text{س}}\, \text{دس} = ٢ \int_{٠}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, \text{دس}$$

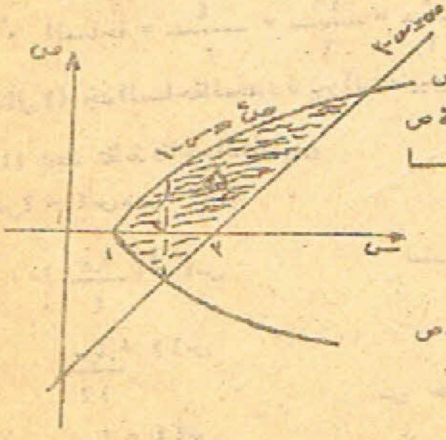
$$= ٢ \times \frac{٢}{٣} \left[\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال ٦) جد المساحة المحددة بين $\text{ص}^٢ = \text{س} - ١$ والمستقيم $\text{ص} = \text{س} - ٣$

بحل المعادلتين $\text{س} = \text{ص}^٢ + ١$ ، $\text{س} = \text{ص} + ٣$ انيا

ينتج $\text{ص} = -١$ ، ٢ و $\text{س} = ٢$ ، ٥ على الترتيب

الطريقة الاولى



(شكل ٦ـ١٠)

ان $\text{س} = \text{ص}^٢ + ١$ هي س تطبيق بدلالة ص

وكذلك $\text{س} = \text{ص} + ٣$ هي س تطبيق بدلالة ص

$\therefore$ المساحة بين المنحنين نحصل عليهـــا بايجاد التكامل بالنسبة الى ص من $\text{ص} = -١$ الى $\text{ص} = ٢$

اى ان المساحة

$$= \int_{-١}^{٢} \left((\text{ص} + ٣) - (\text{ص}^٢ + ١)\right) \text{دص}$$

$$= \int_{-١}^{٢} (-\text{ص}^٢ + \text{ص} + ٢)\, \text{دص}$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}\text{ص}^٣ + \frac{١}{٢}\text{ص}^٢ + ٢\text{ص}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(-\frac{٨}{٣} + ٢ + ٤\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢\right) = ٤\frac{١}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

الطريقة الثانية

من المخطط الديكارتي شكل (٦ ـ ١٠) نلاحظ ان القسم الاعلى من المنطقة محدد بالمنحنى $ص = \sqrt{س - ١}$ والقسم الاسفل من المنطقة محدد بجزئي المنحنيين $ص = -\sqrt{س - ١}$

اذا $١ \leq س \leq ٢$ و $ص = س - ٣$ اذا $٢ \leq س \leq ٥$

$\therefore$ المساحة الاولى $= \int_{١}^{٢} \left(\sqrt{س - ١} - (- \sqrt{س - ١}) \right) دس$

$= ٢ \int_{١}^{٢} \sqrt{س - ١}\ دس = ٢ \int_{١}^{٢} (س - ١)^{\frac{١}{٢}} دس$

$= ٢ \times \frac{٢}{٣} \left[(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١}^{٢} = \frac{٤}{٣} \left[(١)^{\frac{٣}{٢}} - ٠ \right] = \frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

المساحة الثانية $= \int_{٢}^{٥} \left(\sqrt{س - ١} - (س - ٣) \right) دس$

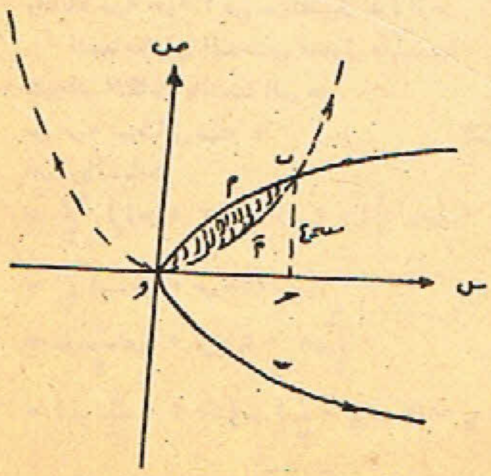
$= \int_{٢}^{٥} (س - ١)^{\frac{١}{٢}} - \int_{٢}^{٥} (س - ٣)\ دس$

$= \frac{٢}{٣} \left[(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٢}^{٥} - \frac{١}{٢} \left[(س - ٣)^{٢} \right]_{٢}^{٥}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٧ - \frac{٣}{٢} = \frac{١٩}{٦}$ وحدة مربعة

$\therefore$ المساحة $= \frac{٤}{٣} + \frac{١٩}{٦} = \frac{٩}{٢} = ٤ \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

مثال ٧) جد المساحة المحددة بين المنحنيين $ص^{٢} = ٤س$ و $س^{٢} = ٤ص$



(شكل ٦ ـ ١١)

١) نجد نقاط تقاطع المنحنيين

$ص^{٢} = ٤س ، ص = \frac{١}{٤} س^{٢}$

$\therefore \left(\frac{س^{٢}}{٤} \right)^{٢} = ٤س$

$\frac{س^{٤}}{١٦} = ٤س$

$س^{٤} = ٦٤س$

$س^{٤} - ٦٤س = ٠$

$س (س^{٣} - ٦٤) = ٠$

اما $س = ٠$ او $س = ٤$

$\therefore$ في الفترة $[٠ ، ٤]$

$ص = ٢ \sqrt{س}$

$\therefore$ المساحة و آ ب حـ $= \int_{0}^{4} 2\sqrt{س}\, دس$

$= \frac{4}{3} \left[س^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{4} = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

والمساحة و حـ ب آَ $= \int_{0}^{4} \frac{س^2}{4}\, دس$

$= \frac{1}{12} \left[س^3 \right]_{0}^{4} = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

$\therefore$ المساحة و آَ ب آ $= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

<u>طريقة ثانية</u>

$2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2 = \sqrt{س}\,(2 - \frac{1}{4}س\sqrt{س})$

	٤	صفر
اشارة $\sqrt{س}$	++	+++
اشارة $(2 - \frac{1}{4}س\sqrt{س})$	---	++++
اشارة $2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2$	---	++++

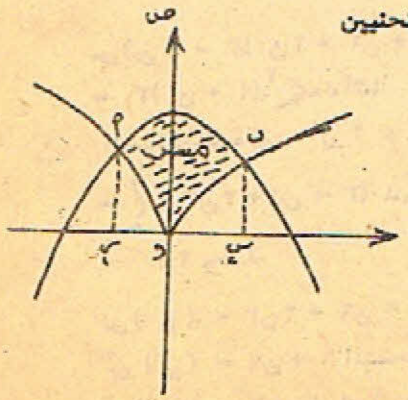
نلاحظ ان $2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2 \geq$ صفر $\forall\ س \in [0, 4]$

$\therefore\ 2\sqrt{س} \geq \frac{1}{4}س^2\ \forall\ س \in [0, 4]$

$\therefore$ المساحة $= \int_{0}^{4} (2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2)\, دس$

مثال ٨) احسب المساحة المحددة بين المنحنيين

$ص = 2 - س^2$ و $ص^3 = س^2$



الحل) بحل المعادلتين انيا نجد حدود التكامل

$س_2 = -1$ ، $س_1 = 1$

$\therefore$ المساحة $=$

$\int_{-1}^{1} (2 - س^2 - س^{\frac{2}{3}})\, دس$

$= \left[2س - \frac{1}{3}س^3 - \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} \right]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}$ وحدة مربعة

٢) المسافة الكلية

اذا كان س(ن) تطبيقا سرعيا يمثل سرعة جسم متحرك على خط مستقيم في اللحظة التي يمثلها العدد ن ... فان المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة

$[ا ، ب] = \int_{ا}^{ب} |س(ن)| \, دن$

امثلة

١) اذا كان $س(ن) = ١٢ - ٣ن^{٢}$ يمثل سرعة جسم متحرك عند اية ثانية ن .. فجد بالوحدات المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٤ ثواني من بدء الحركة

$س(ن) = ٣(٢ - ن)(٢ + ن)$

	صفر	٢	٤
اشارة ٣(٢ − ن)	++	− −	−
اشارة ٢+ن	++	+ +	++
اشارة س(ن)	++	− −	− −

المسافة في $[٠ ، ٤] =$

$= \int_{٠}^{٤} |س(ن)| \, دن$

$= \int_{٠}^{٤} |١٢ - ٣ن^{٢}| \, دن =$

$= \int_{٠}^{٢} (١٢ - ٣ن^{٢}) \, دن - \int_{٢}^{٤} (١٢ - ٣ن^{٢}) \, دن$

$= [١٢ن - ن^{٣}]_{٠}^{٢} - [١٢ن - ن^{٣}]_{٢}^{٤}$

$=$ ٤٠ وحدة

٢) اذا كانت $س(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن + ٣$ يمثل سرعة جسم عند اية ثانية ن .. فجد .

١) المسافة الكلية في [٢ ، ٤] ثانية

٢) تعجيله بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة

$س(ن) = ٣(ن^{٢} + ٢ن + ١)$

$= ٣(ن + ١)^{٢} > ٠$ دائما

$\therefore$ المسافة الكلية في $[٢ ، ٤] = \int_{٢}^{٤} س(ن) \, دن$

$= \int_{٢}^{٤} (٣ن^{٢} + ٦ن + ٣) \, دن = [ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٣ن]_{٢}^{٤}$

$=$ ٩٨ وحدة

$س(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن + ٣$

$\dot{س}(ن) = ٦ن + ٦$ التعجيل عند اية لحظة ن

$\dot{س}(٣) = ٦ \times ٣ + ٦ = ٢٤$ وحدة/ ثا^{٢}

تمارين (٦ ـ ٥)

١) احسب المساحة المحددة بين ص = ٤س ـ س^{٢} والمحور الاول

٢) احسب المساحة المحددة بين ص^{٢} = س والمستقيمين ص = ١ ، س = ٨

٣) احسب المساحة المحددة بين المنحني س ص = م^{٢} حيث م ∈ ح ، (ثابت)
والمستقيمين س = أ ، س = ٣أ (حيث أ > صفر)

٤) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = س^{٣} والمستقيم ص = ٨ والمحور الثاني

٥) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = ٢س ـ س^{٢} والمستقيم ص = ـ س

٦) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = س^{٢} والمستقيم ص = ٣ ـ ٢س

٧ ـ احسب المساحة المحددة بين المنحنيين ص = س^{٢} ، ص = ½ س^{٢} والمستقيم
ص = ٢س

٨ ـ احسب المساحة المحددة بين المنحنيين ص = $\frac{\text{س}^{٢}}{٣}$ ، ص = ٤ ـ $\frac{٢}{٣}$ س^{٢}

٩) احسب المساحة المحددة بين المنحنى ص = ١ + ١٠س ـ ٢س^{٢} والمحور الاول

١٠) احسب المساحة المحددة بين المنحنى ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ١١س ـ ٦ والمحصور
بين س = ١ ، س = ٢

١١) احسب المساحة المحصورة بين المحور الاول والمنحنى ص = ٥س ـ ٦ ـ س^{٢} للمنطقة
التي يكون فيها ص ≤ صفر

١٢) ميل المماس لمنحن يساوى ٦س ـ ٤س^{٢} فاذا مر المنحني من نقطة الاصل جد
معادلته وبين انه يقطع محور السينات ثانية عند س = ٣ ثم جد المساحة المحددة
بين المنحني والمحور الاول .

١٣) ليكن ق(س) = س(١ ـ س^{٢}) برهن ان المساحة المحددة بين منحنى بيان
التطبيق ق في الفترة [١ ، ١ + هـ] حيث هـ ∈ ح++ يساوى القيمة المطلقة
للمساحة بين المحور الاول والمنحني في الفترة [٠ ، ١]

١٤) ليكن ق (س) = ١١س ـ ٢٤ ـ س^{٢} يقطع محور السينات عند النقطتين
أ ، ب ولتكن ل اعظم قيمة للتطبيق ق . برهن ان
٢ل × طول أ ب = ثلاثة امثال المساحة المحصورة بين منحني بيان التطبيق
والمحور الاول والواقعة في الربع الاول .

١٥) منحن يمر بالنقطة (٠ ، ١) وميله عند اية نقطة عليه هـ هو $\frac{٣}{٢}$ + س ـ ½ س^{٢}
جد معادلة المنحني والمساحة المحصورة بين المنحني والمحور الاول في الفترة
[١ ، ٢]

١٦) المنحني ص يمر بالنقطة (٣ ، ١) واذا كان $\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢}$ + س − ½ س٢
جد معادلة المنحني والمساحة المحددة بالاحداثيين السينيين لنقطتي اعظم قيمة محلية واوطا قيمة محلية لــــه .

١٧) جد المساحة المحصورة بين المنحني ص = س (س − ١) (س − ٢) ومحــور السينات وبين س = ٠ ، س = ٤

١٨) جد المساحة المحصورة بين المنحنيين س٢ + ص٢ = ١ و ٤س٢ + ص٢ = ٤ والتي فيها ص ≤ صفر

١٩) جد المساحة المحصورة بين المنحنيين ص٢ = ١٦س و ص = ٣س

٢٠) جد المساحة المحددة بين المنحني ص = ٤س − س٢ والمحور الاول في [٠ ، ٦]

٢١) جد المساحة المحددة بين المنحنيين أ٧ص = س٨ ، أ٧س = ص٨

٢٢) جد المساحة المحددة بين المستقيم ص = ٢ والمنحني ص = س (٣ − س)

٢٣) جد المساحة المحددة بين المنحنيين ص٢ = س٣ وص٢ = ٨ (س − ١)

٢٤) جد المساحة المحددة بين س = ١ ، ص = صفر ، ص = $\frac{١}{س٢}$ والمستقيــم س = أ (حيث أ > ١)

٢٥) نفس التمرين (٢٤) استبدل المعادلة ص = $\frac{١}{س٢}$ بالمعادلة ص = $\frac{١}{س}$

٢٦) جد المساحة المحددة بين المنحنيين ص = س٢ − س ، ص = س − س٢

٢٧) شبه منحرف رؤوسه الاربعة (٠ ، ٠) ، (ل ، صفر) ، (أ ، هـ) ، (أ + ب ، هـ) . استخدم معلوماتك في التكامل لاثبات ان مساحته = ½ هـ (ل + ب)

٢٨) جد مساحة المثلث الذى رؤوسه (٠ ، ٠) ، هـ (أ ، ٠) ، ل(ب ، حـ) باستخدام معلوماتك في التكامل .

من تمرين ٢٩ الى ٣٥) ارسم مخطط ديكارتيا في كل حالة للمنطقة المتكونـــة بالمنحنيات المعطاة ثم جد مساحة هذه المنطقــة

٢٩) س = ٢ ، س = ٤ ، ص = س٢ ، ص = − س

٣٠) س = ٢ ، س = −٢ ، ص = س٢ ، ص = ١٦ − س٢

٣١) س = صفر ، س = ٣ ، ص = س^{٢} ، ص = ١٢س

٣٢) ص = صفر ، ص = $\frac{٣}{٤}$ ، س = ص^{٢} ، س = ص

٣٣) س = −٢ ، س = صفر ، ص = س^{٣} ، ص = −س

٣٤) س = صفر ، س = ٣ ، ص = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، ص = ½ س

٣٥) س = ١ ، س = ٢ ، س^{٢}ص = ٢ ، س + ص = ٤

٣٦) س = ٠ ، س = ½ ، ص = س^{٢} ، ص = س^{٤}

٣٧) ص = س^{٢} ، ص = س^{٤}

٣٨) س = صفر ، س = ٣ ، ص = صفر ، ص = $\frac{١}{\sqrt{\text{س} + ١}}$

٣٩) س = ١ ، س = ٢ ، ص^{٢} = س

٤٠) ص = صفر ، ص = ٢ ، س = صفر ، س = ص^{٢}

٤١) ص = −١ ، ص = ١ ، س − ص + ١ = ٠ ، س = ١ − ص^{٢}

٤٢) ص = ١ ، س = ص ، س ص^{٢} = ٤

٤٣) س = ص^{٢} ، س = ١٨ − ص^{٢}

٤٤) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = س^{٢}

٤٥) ص^{٢} = ٤س + ١ ، س + ص = ١

٤٦) ص = س^{٢} + ٤س + ٢ ، ٢س − ص + ٥ = صفر

٤٧) ص = ١ ، ص = ٢ ، س = صفر ، س = $\frac{\text{ص}}{\sqrt{٩ - \text{ص}^{٢}}}$

٤٨) ص^{٢} = ٢ − س ، ص = ٢س + ٢

٤٩) ص = س^{٢} ، ص = ٣س ، ص = ١ ، ص = ٢

٥٠) ص = ٢س ، ٤ص = س ، ص = $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ ، س > صفر

٥١) س = ١ ، س = ٢ ، س^{٢}ص = ١ ، ص = صفر

٥٢) س = ١ ، س = ٢ ، ص = ½ س ، ص − س^{٢} = ١

تمارين عامة

س١ـ لتكن د دائرة بالنقطة أ (٣ ، ٢) وتمس المستقيم ص = ـ١ عند النقطة ب (٠ ، ـ١) .

وليكن ل المستقيم الذى معادلته ص ـ س = ٥

فاذا كان ل ∩ د = { حـ ، هـ }

١) جد معادلة الدائرة د ٢) برهن ان الشكل أ ب حـ د مربع

س٢ـ المثلث أ ب حـ رؤوسه النقاط أ (١ ، ـ٣) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (ـ٦ ، ـ٢)

١) جد مساحة المثلث أ ب حـ

٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها أ وتمس ب حـ

٣) جد النسبة التي يقسم بها محور السينات المستقيم ب حـ

س٣ـ اذا كانت أ (ـ١ ، ك ـ ١) هي نقطة تماس المستقيم ٤س ـ ٣ص + ٣٢ = صفر مع الدائرة س^{2} + ص^{2} ـ ١٠ص ـ ٤س + ٤ = صفر فجد احداثيي النهاية الاخرى لقطر هذه الدائرة اذا كانت أ هي احدى نهايتي هذا القطر .

س٤ـ انتخب نظاما احداثيا وظلل منطقة مجموعة النقاط في كل فيما يلي :ـ

هـ$_{1}$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح$^{+}$ × ح$^{-}$ ، ٣س^{2} + ٣ص^{2} ≱ ٢٧ }

هـ$_{2}$ = { (س ، ص) : ـ١ ≯ س ≯ ٢ ، س^{2} ≯ ص < س + ٦ }

هـ$_{3}$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، (س ـ ٤)^{2} + (ص + ٣)^{2} < ٢٥ ، ٣س > ٢ص }

س٥ـ جد معادلة كل من المستقيمات التي في منحى المستقيم العمودي على المستقيم ٤س ـ ٣ص = ١٢ . ثم جد معادلة المماس للدائرة س^{2} + ص^{2} + ٨س ـ ١٠ص ـ ٢٣ = صفر ، والذى ينتمي الى هذا المنحى . ثم بين أن للمسألة حلين .

س٦ـ جد معادلة المجموعة هـ = { أ : أ نقطة مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين س ـ ٢ص + ٥ = صفر ، ٢س + ص = صفر يساويا ٩ }

س٧ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ١٠ ـ س^{2}

لتكن هـ معادلة مجموعة كل المستقيمات التي في منحى المستقيم س + ص = ٥

وليكن كل من م$_{1}$ ، م$_{2}$ ∈ هـ بحيث أ (٢ ، ١) ∈ م$_{1}$ و ن (٦ ، ـ ٧) ∈ م$_{2}$ وكان م$_{1}$ ∩ ق = { أ ، ب } وليكن كل من م$_{3}$ ، م$_{4}$

مماسان مرسومان لبيان ق عند أ ، ب على الترتيب جد مساحة الشكل المحدد بالمستقيمات الاربعة $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، $م_٤$

س٨ـ يماس الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢$ عند النقطة (١ ، ١) يمس بيان التطبيق $ق(س) = س^٢ + أ$ حيث $أ \in ح$ جد قيمة أ

س٩ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢|س - ١|}{س - ١} + ٢ + س^٢ & \text{اذا كان } س \neq ١ \\ ٣ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد المجموعة ك $\subset$ ح يكون ق عندها متناقصا وبرهن ذلك ٣) هل ق مستمر عند الواحد ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد أصغر قيمة للتطبيق ق ؟ علل اجابتك

٥) هل توجد غاية للتطبيق عند الواحد ؟ برهن اجابتك

س١٠ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢}{س - ٢} & \text{اذا كان } س < ٢ \\ [س] + ٢ & \text{اذا كان } ٢ \leq س < ٣ \\ س + ١ & \text{اذا كان } س \geq ٣ \end{cases}$$

١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

٢) برهن ان ق مستمر عند س = ٣

٣) هل ق قابل للاشتقاق عند ٣ ؟ برهن اجابتك

٤) برهن ان ق غير محدود من الاسفل في] ١ ، ٢ [

٥) برهن ان ق مستمر ∀ س ∈] ١ ، ٢ [

س١١ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{اذا كان } س < ١ \\ [س] & \text{اذا كان } ١ \leq س < ٢ \\ ٢س - ٣ & \text{اذا كان } س \geq ٢ \end{cases}$$

١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

٢) اثبت ان ق مستمر عند ٢

٣) هل ق قابل للاشتقاق ق عند ٢ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق مستمر عند (١) ؟ برهن اجابتك

٥) هل توجد غاية للتطبيق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س١٢ـ ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{اذا كان } -٦ \leq س < ٠ \\ ٣ & \text{اذا كان } ٠ \leq س < ٢ \\ \left[\dfrac{س}{٢}\right] & \text{اذا كان } ٢ \leq س \leq ٦ \end{cases}$$

وليكن ل (س) = $\sqrt{٣٦ - س^٢}$

١) جد اكبر منطلق لكل من التطبيقين ق ، ل

٢) مثل كلا من ق، ل ديكارتيا

٣) جد ان امكن (٢ق $\oplus$ ٣ل) (٣) ، (ق $\odot$ ل) (-٢) ،
(ق $\circ$ ل) ($\sqrt{٢٠}$) ، (ق $\ominus$ ل) (صفر) ، $\oslash$ (٣)

٤ - هل ق مستمر عند ٢ ؟ برهن اجابتك

٥ - هل ق مستمر عند الصفر؟ برهن اجابتك

س١٣ - ليكن ق : ح $\longrightarrow$ ح بحيث

$$ق\,(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{س} & \forall\, س > ٠ \\ س^٢ & \text{اذا كان } -٢ < س \leqslant \text{صفر} \\ [س] & \text{اذا كان } س \leqslant -٢ \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق متناقص $\forall$ س > صفر

٣) برهن ان ق غير محدود من الاعلى

٤) جد قيمة $\dfrac{ق(-٣+هـ) - ق(-٢+هـ)}{ق\,(هـ)}$ اذا كان ٠ < هـ < ١

٥) هل ق مستمر عند الصفر ؟ برهن اجابتك

س١٤ - ليكن ق (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{٣س - ٢}{س - ١} & \text{اذا كان } س \neq ١ \\ ٧ & \text{عند } س = ١ \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا . ٢) هل ق مستمر عند ١ ؟ برهن اجابتك

٣) جد المجموعة ك $\subset$ ح بحيث يكون ق عندها متناقصا ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد غاية للتطبيق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س١٥ - ليكن ق (س) = س - [س]

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل ق محدود ؟ برهن اجابتك

٣) برهن ان ق مستمر عند $\dfrac{٣}{٢}$

س١٦ - ليكن ق : ح /]-١ ، ٢[$\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = ١ - س^٢

وليكن ل : ح /]-١ ، ٢[$\longrightarrow$ ح بحيث ل (س) = $\dfrac{|س - ٢|}{٢ - س}$

١) مثل كلا من ق ، ل ، ق $\oplus$ ل ، ق $\odot$ ل ديكارتيا

٢) جد اعظم قيمة واوطأ قيمة للتطبيق ل

٣) جد الحد الاعلى للتطبيق ق ⊕ ل

٤) جد المجموعة الجزئية من منطلق ق بحيث يكون فيها ق متزايد

٥) جد المجموعة الجزئية من منطلق ق بحيث يكون فيها ق متناقص

٦) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ برهن اجابتك ٠

س١٧ ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} \text{١٦} - \text{س}^{\text{٢}} & \forall \text{س} \notin \text{ص} \\ -\text{٩} & \text{اذا كان س} \in \text{ص} \end{cases}$

حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة ٠

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق غير مستمر ∀ س ∈ ص / { ـ ٥ ، ٥ }

٣) برهن ق مستمر عند ٥ ، ـ ٥

٤) جد $\underset{\text{٦}}{\text{غـــاق}}$ ٥) هل ق قابل للاشتقاق عند ٥ ؟ برهن اجابتك

س١٨ ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٩س}} & \text{اذا كان س} \notin \,]-\text{٩} ، \text{٠}[\\ \text{س} & \forall \text{س} \in \,]-\text{٩} ، \text{٠}[\end{cases}$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد $\underset{-\text{٤}}{\text{غـــاق}}$

٣) هل ق مستمر عند ـ ٩ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق مستمر عند صفر ؟ برهن اجابتك

٥) هل ق قابل للاشتقاق عند الصفر ؟ برهن اجابتك

س١٩ ـ ليكن ق : ح / { ٢ } ⟵ ح بحيث ق (س) = $\dfrac{|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٤}|}{\text{س} - \text{٢}}$

جد $\underset{\text{٢}}{\text{غـــاق}}$ ، $\underset{-\text{٢}}{\text{غـــاق}}$

س٢٠ ـ ليكن ق : ح / { ٠ ، ١ } ⟵ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{١١}} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

جد $\underset{\text{١}}{\text{غـــاق}}$

س٢١ ـ اذا كان ق (س) = ٩ ـ س٢ فجد

١) معادلة كل من المستقيم المماس والعمودي عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ـ ٣

٢) جد مساحة المثلث المحدد بين المماس والعمود عليه والمستقيم ص + ٤ = ٠

٣) جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث نقطتين متجاورتين من نقاطــه منطبقتين على محور السينات والنقطتين الباقيتين على منحنى التطبيق ٠

٤) جد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول

س٢٢ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ⎧ ٦س ـ س٢ اذا كان س > ٢
⎨ √(٩ ـ س٢) اذا كان ـ٣ ≤ س ≤ ٢
⎩ [س ـ ٣] ، اذا كان س < ـ٣

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد اعظم قيمة لـ ق

٣) برهن ان كلا من ق (٣) ، ق(٠) اعظم قيمة محلية للتطبيق ق

٤) برهن ان ق متناقص ∀ س > ٣

٥) برهن ان ق متزايد في {س : س ∈ ص ، س < ـ ٣}

٦) برهن ان ق غير متزايد وغير متناقص في [ـ ٥ ، ـ ٤[

٧) برهن ان ق غير محدود من الاسفل

٨) جد معادلة المماس لبيان ق عند ـ ٢ √٢

٩) جد (ق ∘ ق) (٢)

١٠) برهن ان ق غير مستمر عند ـ ٤ ، ٢

١١) هل ق مستمر عند ـ ٣ ؟ برهن اجابتك

١٢) جد ان امكن غـا ق ، غـا ق
                 ٣   ـ٣

١٣) برهن ان ق مستمر عند ـ ٥ر٣

١٤) جد حـ ⊂ ح يكون عندها ق (س) = ـ ٧

١٥) اذا كان < س $_ن$ > = < (ن ـ ١)/ن > فجد غـا < ق (س $_ن$) >
                                                    ن

١٦) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول في [ـ٣ ، ٠]

س٢٣ـ احسب قيمة أ ، ب ، حـ ، د التي تجعل التطبيق ق (س) =
أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د له اعظم قيمة محلية عند النقطة (ـ ١ ، ١٠) وله نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، ـ ٦) . ثم جد معادلة المماس لبيان ق عند نقطة الانقلاب . ومثل ق ديكارتيا وجد المساحة المحددة بين بيان ق والمحور الاول في الفترة [ـ ١ ، ٣] .

س٢٤ـ ليكن ق : ح / {١} ⟵ ح بحيث ق(س) = أس + ب/(س ـ ١)
له اصغر قيمة محلية عند النقطة (٣ ، ١٠) فجد قيم أ ، ب ومثل ق ديكارتيا .

س٢٥ـ لتكن أ هي النقطة (٣ ، ـ ١٠) ، أ ب ، أ حـ يمسان بيان التطبيق ق (س) = س٢ ـ ٦س . عند النقطتين ب ، حـ جد احداثيي كل من ب ، حـ ومساحة المثلث أ ب حـ .

س٢٦ــ ليكن ق : [٠ ، ٣] ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & \text{اذا كان } ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س} & \text{اذا كان } ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} - ٢ & \text{اذا كان } ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

١) برهن ان ق مستمر ، ومثله يكارتيا

٢) بين انه يمتلك اعظم قيمة في نقطتين

٣) هل النقطة (١ ، ١) نقطة حرجة ؟ برهن اجابتك

س٢٧ــ ا) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [ــ٢ ، ٥] ويمتلك اعظم قيمة في نقطتين واوطأ قيمة في ثلاثة نقاط مختلفة .

ب) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [١ ، ٦] ويمتلك اعظم قيمة ∀ س ∈ [٢ ، ٥ر٤]

جـ) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [٠ ، ٥] وله اصغر قيمة عند س = ١ و ∀ س ∈ [٢ ، ٣]

د) اعط مثالا لتطبيق مستمر معرف في [ــ١ ، ٤] وله اعظم قيمة عند س = صفر وله اصغر قيمة عند س = ٢ وانه غير قابل للاشتقاق عند س = صفر ، وعند س = ٢ .

س٢٨ــ ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٢ + ١}$

١) برهن ان ق مستمر وجد اصغر قيمة له

٢) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق مع مناقشة مايلي :ــ

ا) التناظر ب) التقاطع مع المحورين حـ) مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة د) مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب هـ) المستقيمات المحاذية و) حدود التطبيق .

س٢٩. ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + ١} & \forall\ \text{س} \geq \text{صفر} \\ \dfrac{-\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + ١} & \forall\ \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$

بين انه ليس للتطبيق اعظم قيمة وليس له اصغر قيمة ثم مثل ق ديكارتيا .

س٣٠ــ جد اعظم قيمة للتطبيق ق : [٠ ، ٣] ⟵ ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{اذا كان صفر } \leq \text{س} \leq ١ \\ ٣ - \text{س}^٢ & \text{اذا كان } ١ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

هل ق قابل للاشتقاق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س ٣١ ـ ليكن ق (س) = { ـ س^٢ + ٤ س ـ ٢ اذا كان ١ ≥ س ≥ ٢ ؛ ـ ½ س^٢ + ٢ س اذا كان ٢ < س ≥ ٣ }

حيث ق : [١ ، ٣] ← ح

١) جد نقطة اعظم قيمة للتطبيق

٢) هل ق قابل للاشتقاق عند هذه النقطة ؟ برهن اجابتك

٣) جد المساحة المحددة بين بيان ق والمحور الأول .

س ٣٢ ـ جد احداثيي النقطة (س ، ص) التي تقع على كل من المنحنيات التالية والتي تكون المسافة بينها وبين النقطة المبينة ازاء كل منحن فيما يلي أقصر ما يمكن

أ) س^٢ ـ ص^٢ = ١٦ ، (٠ ، ٦)

ب) ص = ٢ س^٢ ، (٩ ، ٠)

جـ) س ص^٢ = ١ ـ س ، (٠ ، ٠)

س ٣٣ ـ لكل مما يأتي ارسم المخطط الديكارتي الى التطبيق ق (س) . ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق قَ (س) :

١) ق (س) = س^٢ + ١ ٢) ق (س) = ٢ س^٣ + ٣ س^٢ ـ ١٢ س

٣) ق (س) = ٣ س ـ س^٣ ٤) ق (س) = س $\sqrt{س}$ ، حيث س ∈ ح$^{++}$

س ٣٤ ـ لكل مما يأتي جد اعظم او اوطأ قيمة محلية وارسم المخطط الديكارتي لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) ق (س) = (س ـ أ)^٢ (ب ـ س) حيث أ ، ب ∈ ح

٢) ص = $\frac{١}{س^٢}$ ـ $\frac{٢}{س^٣}$ ، س ≠ ٠

٣) ص = س^٤ ـ ٤ س^٣ ـ ٢ س^٢ + ١٢ س + ٣

س ٣٥ ـ برهن أن ص = س $\sqrt{(٤ س ـ س^٢)}$ له اعظم قيمة عند س = ٣

س ٣٦ ـ جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٢٤ ط سم^٢

س ٣٧ ـ اذا كان مجموع المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة وسطح كرة نصف قطر كل منهما يساوي نق هي ٢٥٠ ط سم^٢ .

جد قيمة نق عندما يكون مجموع حجميهما اعظم ما يمكن

س ٣٨ ـ اذا كان مجموع قاعدتي وارتفاع شبه منحرف ٢٤ سم ويزيد طول احدى القاعدتين على الاخرى بمقدار ٢ سم جد ابعاده عندما تكون مساحته اكبر ما يمكن .

س ٣٩ ـ اذا كانت النقطتين أ ، ب نهايتي قطر لدائرة ونقطة حـ تقع على محيطها فاي من العبارات التالية صادقة بالنسبة للمثلث أ ب حـ

١) اكبر مساحة للمثلث أ ب حـ عندما يكون متساوي الساقين

٢) اصغر مساحة للمثلث أ ب حـ عندما يكون متساوي الساقين

٣) محيطه أكبر ما يمكن عندما يكون متساوي الساقين

٤) محيطه أصغر ما يمكن عندما يكون متساوي الساقين

س ٤٠ ـ عند ما يكون كل من محيط وقاعدة مثلث معلوم احسب طول الضلعين الاخريــــن عند ما تكون مساحته اكبر مايمكن

س ٤١ ـ مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ب) فيلاقي محور السينات في نقطة حـ ومحور الصادات في نقطة هـ فاذا كانت (و) نقطة الاصل فبرهن ان اصغر قيمة لكل مما يأتي :ـ

د (حـ ، هـ) ، د (و ، حـ) + د (و ، هـ) ، د (و ، حـ) × د (و ، هـ)

حيث د التطبيق المسافي

هي على الترتيب : $(أ^{\frac{٢}{٣}} + ب^{\frac{٢}{٣}})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $(أ + ب)^{٢}$ ، ٤ أب

س ٤٢ ـ ليكن د (س) = (ق ⊙ ع) (س) حيث كل من ق ، ع له مشتقة اولى ومشتقة ثانية وان ق(س) > ٠ ، ع (س) > ٠ ∀ س ∋ ك فهل العبــــارات التالية صادقة ؟ ان كانت صادقة برهن اجابتك وان كانت كاذبة هات مثــالا يؤيد كلامك .

١) اذا كان كل من ق ، ع اعظم قيمة محلية عند س = أ فان د له اعظم قيمة محلية عند س = أ

٢) اذا كان لكل من ق ، ع نقطة انقلاب عند س = أ فان د له نقطة انقلاب عند س = أ

س ٤٣ ـ سفينة أ تبعد ١٥ ميل شرق الميناء حـ وتتحرك نحوه بسرعة ٢٠ ميل/ ساعة . والسفينة ب تبعد ٦٠ ميل جنوب حـ وتتحرك نحوه بسرعة ١٥ ميل/ ساعة . اثبت ان البعد بين السفينتين يكون اقل مايمكن بعد مضي $١\frac{١١}{١٢}$ ساعة .

س ٤٤ ـ ق(س) = ١٢س ـ س٣

جد المناطق التي يكون فيها ق متزايدا او متناقصا ثم جد ان امكن اعظم واوطأ قيمة لـ ق في]ـ٥ ، ٥[،]ـ١ ، ٣[،]ـ٢ ، ٢[

س ٤٥ ـ ليكن ق : [٠ ، ١٦] ⟵ ح بحيث ق(س) = $\sqrt[٣]{(٨ ـ س)^{٢}}$

١) جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة

٢) جد مناطق التحدب والتقعر

٣) جد ان امكن اعظم واصغر قيمة للتطبيق

٤) مثل ق ديكارتيا .

س ٤٦ ـ ا ب حـ د مربع طول ضلعه ٢٠ سم فرضت النقطتان هـ ، ق على ب حـ ، حـ د على الترتيب بحيث ان حـ ق = ٢ب هـ اثبت ان اصغر مساحة للمثلث = ٧٥ سم .

س ٤٧ــ لوحة اعلانات مستطيلة الشكل مساحتها ٢م٢ ٠ اقتطع من حافتها علـى موازاة اضلاعها قطعة بعرض ١٥ سم لكل من قاعدتيها العليا والسفلى وبعرض ١٠ سـم لكل من ضلعيها الاخرين اوجد بعدى اللوحة بحيث مساحة الجزء الباقي بعـد الاقتطاع اكبر مايمكن ٠

س٤٨ــ جد قيم التكاملات التاليـة ٠ــ

١) $\int (4\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 2\text{س} - \text{ط}) \, د\text{س}$

٢) $\int \left(\dfrac{1 + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} \right)^2 د\text{س}$

٣) $\int (1 + 2\text{س}^3)^{-\frac{2}{3}} \, \text{س}^2 \, د\text{س}$

٤) $\int \dfrac{(\text{ع} + 1)\, د\text{ع}}{\sqrt[3]{\text{ع}^2 + 2\text{ع} + 2}}$

٥) $\int 45(4\text{س}^2 - 1) \sqrt[5]{4\text{س}^3 - 3\text{س} + 7} \; د\text{س}$ ٠

٦) $\int \dfrac{\text{س}^4 + \text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + \text{س} + 1} \, د\text{س}$

س ٤٩ــ جد القيمة العددية لكل ما يلي ٠ــ

١) $\int_{1}^{2} \text{س}^2 \left(1 - \dfrac{2}{\text{س}^4}\right) د\text{س}$

٢) $\int_{1}^{8} \left((2\text{س})^{\frac{1}{3}} + \text{س}^{\frac{1}{3}} \right) د\text{س}$

٣) $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2} - \sqrt{2\text{س}} \right)^2 د\text{س}$

٤) $\int \text{س} \sqrt{1 + 3\text{س}^2} \; د\text{س}$

س٥٠ــ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته معرفة بموجب القانون
س(ن) = ٣ن٢ ــ ٢ن ٠ جد المسافة الكلية التي يقطعها هذا الجسم فـي الفترة [٠ ، ٤]

س٥١ــ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ت (ن) = ٢ن + ٣ فاذا كانـت س (١٠) = ٥٠ ١ق/ ثا حيث س (ن) سرعته في اية لحظة ٠ جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

س٥٢ــ جسم يبدأ حركته من السكون بتعجيل قدره (٣٠ ــ ٦ن) ق/ ثا ٠ متى واين يقف الجسم مرة اخرى ٠

س٥٣ ـ تحركت نقطة مادية على خط مستقيم وبتعجيل ثابت فكانت سرعتها بعد مضي ٥ ثا من بدء حركته ٤٠ سم/ ثا وسرعتها بعد مضي ٨ ثا من بدء الحركة ٥٢ سم/ ثا . احسب باستخدام التكامل التعجيل والسرعة الابتدائية .

س٥٤ ـ قذفت كرة راسيا الى الاعلى من نقطة على سطح الارض وبسرعة ابتدائية قدرهـا ٩٦ ق/ ثا . جد باستخدام التكامل (١) السرعة والمسافة في اية لحظة ن ،
(٢) اقصى ارتفاع تصل اليه الكـرة .

س٥٥ ـ جسم يتحرك على خط مستقيم وبتعجيل = ٤م/ ثا^{2} عند كل (ن) حيث (ن) يمثـل الزمن بالثواني . وكانت سرعته = ٣م/ ثا . وكانت المسافة = ٩م في نهاية الثانيـة الاولى . جد المسافة المقطوعة في الثانية الرابعة .

س٥٦ ـ ليكن ق تطبيق كثير الحدود ومن الدرجة الثالثة ويحقق الشروط التاليـة :ـ

١) ق(٢) = ٠ ، ق(١) = ٢ ، ق(٠) = ٤ ، ق(ـ ٢) = ٠ .

٢) قَ(س) > ٠ ، ∀ س ∋ ح /]٠ ، ٢[، قَ(س) < ٠ ∀ س ∋]٠ ، ٢[

٣) قً(س) > ٠ ∀ س > ١ ، قً(س) < ٠ ∀ س < ١

أ) مثل ق ديكارتيا (ب) جد بيان ق (جـ) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول والمستقيمين س= ـ٣ ، س= ٣ ، (د) جد اعظم واوطا قيمـة لـ ق في [ـ١ ، ٣]

س٥٧ـ ليكن ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق (س) = ـ٤ س ـ ٢/س٢

١) برهن ان ق مستمر عند ١ ثم جد غـــاق ١

٢) جد معادلة المماس لبيان ق والعمود على المستقيم ٢س = ٧ص

٣) جد مناطق التزايد والتناقص والتحدب والتقعر والنقاط الحرجة واعظم قيمة محلية واوطا قيمة محلية ونقاط الانقلاب ان وجدت •

٤) جد نقطة او نقاط تقاطع ق مع المحور الاول

٥) مثل ق ديكارتيا

٦) جد بصورة تقريبية ق (٠ر٩٩٨)

٧) جد ∫ ق (س) د س

٨) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول والمستقيمين س = ١ ، س = ٣

س٥٨ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح

بحيث ق(س) = { س ∀ س < ١ ؛ س٢ + أس + ب ∀ س ≥ ١ }

وكان ق قابلا للاشتقاق عند ١ فجد قيم أ ، ب

س٥٩ـ جد بصورة تقريبية قيمة √٢٦ + ∛٢٦

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة •

س٦٠ـ منحن يمر بالنقطة (١ ، ٢) وميله عند اى نقطة (س ، ص) هو ٢س٢ + ٥س ـ ٣

جد كل من اعظم واصغر قيمة محلية له •

س٦١ـ جد معادلة المنحني الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) اذا كان ميل المنحني لاية نقطة (س ، ص) يساوى ٢/ــ هل هذا المنحني يمثل تطبيق ؟ ولماذا ؟

س٦٢ـ منحن يمر بالنقطة (٦ ، ١) وميله عند اى نقطة = (٣س٢ ـ ٥)/٣ص • جد معادلة المنحني وهل يمثل تطبيق ؟ ولماذا ؟

س٦٣ـ اذا علمت ان قَ (س) = س٢ ـ ٢س + ٢ وان الاحداثي الصادى لنقطة الانقلاب = ـ٢ جد ق(س)

س٦٤ ـ اذا كان ميل المماس لمنحن عند اية نقطة (س ، ص) يساوي $\frac{٢ - \text{س}}{\text{ص} + ٣}$ برهن ان المنحني يمثل دائرة . اذا كان يمر بالنقطة (٢ ، ١) ثم جد مركزها ونصف قطرها واحسب طول المماس للدائرة من النقطة (٦ ، ٠)

س٦٥ ـ ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق ق (س) = ٦ ـ س ـ س٢ .
ثم جد المساحة المحصورة بين بيان التطبيق والمحور الاول وبين المستقيمين س = ـ ٣ ، س = ٢

س٦٦ ـ اذا كان قَ (س) = ٢س ـ ٢ وان اصغر قيمة محلية له = ـ٤ جد ق (س)
ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق واوجد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول .

س٦٧ ـ اذا كان قً (س) = ٦س لتطبيق ما . وكانت ق (ـ $\sqrt{٣}$) = ٦ $\sqrt{٣}$ اعظم قيمة محلية . جد ق (س) .
ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق واوجد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول في الفترة [ـ٤ ، ٤] .

س٦٨ ـ ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{١}{\text{س} + ٣} & \forall\ \text{س} < -٣ \\ \frac{-١}{\text{س} - ٣} & \forall\ \text{س} > ٣ \\ \frac{٢}{\text{س} + ٣} & \forall\ \text{س} \in]١ ، ٣[\\ |\text{س}| & \forall\ \text{س} \in]-١ ، ١[\cup \{-٣ ، ٣\} \\ [\text{س}] & \forall\ \text{س} \in]-٣ ، -١] \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا
٢) بين ان ق محدود من الاعلى وجد اعظم قيمة للتطبيق ق
٣) برهن ان ق غير محدود من الاسفل
٤) جد (ق ∘ ق ∘ ق) (ـ٤)
٥) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟

س ٦٩ــ ليكن ق : ص ← ح بحيث ق(س) = { |س٢ ــ ٤| ∀س ∈ [ــ٢ ، ٢] ؛ س ∀س > ٢ ؛ ــ س ∀س < ــ٢ }

١) مثل ق ديكارتيا
٢) برهن ان ق متزايد ∀س > ٢
٣) جد (ق ٥ ق) (ــ٥)
٤) جد اوطا قيمة ل (ق)
٥) برهن ان ق غير محدود من الاعلى
٦) هل ق قابل للاشتقاق عند ٢ ، ــ٢ ؟ برهن اجابتك

س ٧٠ــ ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س/٢ ــ [س/٢]

١) مثل ق ديكارتيا
٢) برهن ان ق محدود ٣) برهن انه ق غير مستمر في كل عدد صحيح زوجي

س ٧١ــ ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢ / (س٢ + ١) برهن ان ق محدود

س ٧٢ــ ليكن ق :]ــ٥ ، ٤[← ح بحيث ق(س) = |س ــ ٢|
وليكن ع :]ــ٥ ، ٤[← ح بحيث ع(س) = |س + ٣|
وليكن ل :]ــ٥ ، ٤[← ح بحيث ل (س) = س
١) مثل كلا من ق ، ل ، ع ، ق ⊕ ع ، ق ⊕ ل ، ق ⊙ ل ، ع ⊙ ل
ع ⊕ ل ، ع ⊙ ل ديكارتيا . وبرهن ان كلا منها محدودا
٢) مثل (ق ⊕ ل) ⊕ ع ديكارتيا وجد اعظم قيمة له
٣) جد ان امكن (ق ⊕ ل) (٢) ، (ق ⊖ ع) (ــ١)
(ق ⊙ ل) (ــ ٢)
٤) برهن ان ق ⊕ ع مستمر .

س ٧٣ــ ليكن ق : حَ ← ح بحيث ق(س) = { |س٢ + ١| ∀س ∈]ــ٣ ، ٠] ؛ ــ٢س ∀س ∈ حَ /]ــ٣ ، ٠] }

١) مثل ق ديكارتيا
٢) جد اوطا قيمة ل (ق)
٣) برهن ان ق متزايد في]ــ١ ، ٠]
٤) جد ان امكن (ق ٥ ق) (ــ ٥ر٣)

س٧٤ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { س٢ ـ ٤ ∀ س > ـ١
٤ ـ س٢ ∀ س ≤ ـ١ }

وليكن ل : ح ⟵ ح بحيث ل(س) = { س٢ ـ [س] ∀ س ≥ ـ١
س٣ ـ س٢ + ١٢ ∀ س < ـ١ }

١) مثل ق ديكارتيا ٢) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا
٣) برهن أن ق غير محدود من الاعلى
٤) هل يتناظر ق مع المحور الثاني في [ـ١ ، ١] ولماذا ؟
٥) هل ق ⊕ ل محدود من الاسفل ؟ ولماذا ؟
٦) اذا كان ق ⊕ ل = د نجد (د ∘ د) (ـ √٢)
٧) جد ك ⊂ ح يكون عندها ق (س) = ٩ ، ∀ س ∈ ك
٨) جد (٢ق) . ⊕ (٣ل) (ـ٣ / ٢)
٩) برهن ان ق ⊕ ل متناقص في {س : س ∈ ص ، س ≤ ـ١}

س٧٥ـ ليكن ق :]ـ ٥ ، ٤[⟵ ح بحيث ق(س) = ٢س ـ س٢
١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق محدود ٣) جد اعظم قيمة للتطبيق ق ان امكن ٤) جد ك ⊂ منطلق ق يكون عندها ق متزايد وبرهن ذلــك
٥) جد (ق ∘ ق) (ـ٢) ان امكن ٦) جد س ∈ منطلق ق وتحقق العلاقة ق (س) = ـ ٢٤

س٧٦ـ ليكن ق :] ـ٢ ، ٤[⟵ ح بحيث ق(س) = س٢ + ٤
وليكن ل :] ـ٢ ، ٤[⟵ ح = ل (س) = ـ ٩ ـ س٢
١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق محدود
٣) جد ان امكن (ق ∘ ق) (ـ١)
٤) جد ك ⊂ منطلق ق يكون ق عندها متناقصا وبرهن ذلك
٥) جد اعظم واوطا قيمة ل(ل ⊖ ٢ق)
٦) مثل (٢ل) ديكارتيا ٧) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا
٨) جد اعظم قيمة ل . (ق ⊕ ل)
٩) برهن ان ق ⊕ ل غير متزايد وغير متناقص

س٧٧ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { |١ ـ س| ∀ س ∈] ـ١ ، ٢[
[س + ٣] اذا كانت ـ٢ ≥ س ≥ ـ١
س + ٢ ∀ س > ـ٢
ـ٢ / (س ـ ٢) ∀ س < ٢ }

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق غير محدود من الاسفل

٣) جد اوطا قيمة لـ (⊖ ٢ق)

٤) برهن ان ق متزايد ∀س > ٢

٥) جد (ق ٥ ق ٥ ق) (ـ ٥ر١)

٦) جد س ∋ ح بحيث ق (س) = ـ١٠

٧) هل ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ، س = ـ٢ ؟ برهن اجابتك .

ظلل كلا من المجمعات التالية في المستوى الاقليــــدى

س٧٨ـ هـ$_{1}$ = { (س،ص) : (س،ص) ∋ ح × ح ، ٣ص < ٢س ، س ∋ [ـ٢، ٣] }

هـ$_{2}$ = { (س،ص) : س^{2} + ص^{2} > ٢٥ ، س ـ ص < ١ }

هـ$_{3}$ = { (س،ص) : ص < س^{2} ـ ٩ ، س > ص }

س٧٩ـ دائرتان متماستان من الداخل عند النقطة ب . والمماس المشترك لهمــــا عند نقطة ب هو ٣ص + ٤س + ٢ = صفر ، فاذا كان مركز احداهمــــا هو النقطة (٦ ، ٨) ونصف قطر الثانية ٣ وحدات فما معادلة كل مــــن الدائرتين .

س٨٠ـ اثبت ان النقطة أ (ـ ١ ، ١) تقع خارج الدائرة (س + ٣)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٤ ثم جد معادلتي المماسين المرسومين للدائرة من النقطة أ . واذا كانت نقطتا التماس هما ب ، حـ فاثبت ان أ ب م حـ مربع . حيــث م مركز الدائرة .

س٨١ـ اذا كان المستقيم أب الذى معادلته ص = ـ١ مماسا للدائرة س^{2} + ص^{2} + ٦س + ١٠ص + ١٨ = صفر عند النقطة ب . وكان أ ب م حـ مربع حيث م نقطة مركز الدائرة فجد معادلة المماس المرسوم للدائرة من نقطة أ

س٨٢ـ اثبت ان الدائرتين (س + ١)^{2} + (ص ـ ٥)^{2} = ١٨ ، س^{2} + ص^{2} ـ ٢٠ص + ١٢س ـ ١٥٢ = ٠ متماستان ثم جد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما . واذا كان المماس هذا مماسا للدائـــرة أس^{2} + ٢ص^{2} ـ ٤ب س = ٠ فجد قيمة أ ، ب .

س٨٣ـ ليكن ق : ح / {ـ١ ، ١} ⟵ ح بحيث ق(س) = س٢ ـ $\frac{١ ـ س٢}{|١ ـ س٢|}$

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق متناظر مع المحور الثاني

٣) هل تمتلك ق اعظم قيمة ؟ ولماذا ؟

٤) هل تمتلك ⊖ ق اعظم قيمة ؟ ولماذا ؟

٥) هل توجد غاية للتطبيق ق عند س = ١ ، س = ـ١ ؟ برهن اجابتك

س٨٤ـ ليكن ق : ح /]ـ١ ، ٢[⟵ ح بحيث ق(س) = ٤ + س٢

وليكن ل : ح /]ـ١ ، ٢[⟵ ح = ل(س) = $\frac{|س ـ ١|}{١ ـ س}$

١) مثل ق ، ل ديكارتيا

٢) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا ٣) برهن : ق ⊙ ل = ق ⨸ ل

٤) جد اوطأ قيمة للتطبيق ق ٥) جد الحد الادنى للتطبيق ق ⊕ ل

٦) جد ك ⊂ منطلق ق بحيث يكون ق فيها متناقصا وبرهن قولك

٧) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟

المساحات والحجوم وبعض القوانين الرياضية

١- المستطيل مساحته = الطول × العرض
محيطه = ٢ (الطول + العرض)

٢- المربع مساحته = مربع ضلعه
محيطه = ٤ × طول الضلع

٣- المعين مساحته = طول قاعدته × ارتفاعه
= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول قطريه

٤- المثلث مساحته = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × مربع الضلع (اذا كان متساوي الاضلاع)

٥- شبه المنحرف مساحته = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع
محيطه = مجموع اضلاعه

٦- الدائرة مساحتها = $نق^٢$ ط
محيطها = ٢ نق ط

٧- المنشور حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع
من اشكاله متوازي السطوح
مساحته الجانبية = محيط مقطعه القائم × طول حرفه
= محيط القاعدة × الارتفاع (اذا كان قائماً)

٨- الاسطوانة حجمها = مساحة القاعدة × الارتفاع
مساحتها الجانبية = محيط مقطعها القائم × طول مولدها
= محيط القاعدة × الارتفاع (اذا كانت قائمة)

٩- الهرم والمخروط حجمه = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاعه
المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدته × الارتفاع الجانبي
" " للمخروط " = $\frac{١}{٢}$ " " × المستقيم المولد
حجم الهرم الناقص = $\frac{١}{٣}$ ع $(ق_١ + ق_٢ + \sqrt{ق_١ ق_٢})$ حيث ان
$ق_١$، $ق_٢$ مساحتي القاعدتين ع ارتفاعه

١٠- الكرة ح = $\frac{٤}{٣}$ $نق^٣$ ط
س = ٤ $نق^٢$ ط