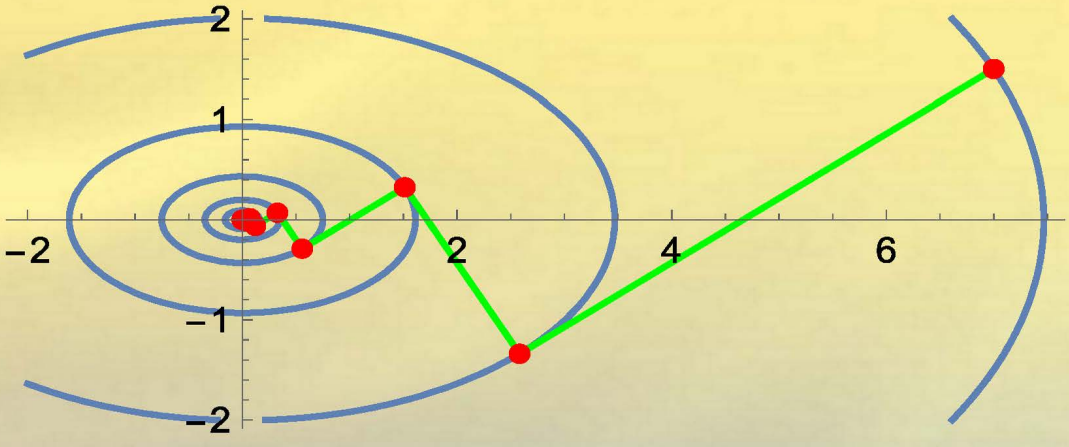
المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة
والتكنولوجيا

طرائق عدديّة للمهندسين

الجزء الأول



الدكتور نبيه عوده

- تمثيل الأعداد
- الاستقرار والحساسية
- التحليل العددي المصفوفاتي
- الاستيفاء
- تقريب التوابع

طرائق عدديّة للمهندسين

الدكتور نبيه عوده

الجزء الأول

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
2023

طرائق عددية للمهندسين
الجزء الأول

الدكتور نبيه عوده
التقويم العلمي: الدكتور عمران قوبا ، الدكتورمحمد بشير قابيل
التدقيق اللغوي: الدكتور محمد عطا موعد
تصميم الغلاف: المؤلف

الجمهورية العربية السورية
الطبعة الأولى 2023.

هذا الكتاب منشور تحت رخصة المشاع الإبداعي – النسب للمؤلف – حظر الاشتقاق - $\left(\text{CC-BY-ND } 4.0\right)$. يحق للمستخدم بموجب هذه الرخصة نسخ هذا الكتاب ومشاركته وإعادة نشره أو توزيعه بأية صيغة وبأية وسيلة للنشر ولأية غاية تجارية أو غير تجارية، وذلك شريطة عدم التعديل على الكتاب وعدم الاشتقاق منه على أن ينسب للمؤلف الأصلي على الشكل الآتي حصراً:

نبيه عوده، طرائق عددية للمهندسين، الجزء الأول، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية الطبعة الأولى 2023.

متوفر للتحميل من: www.hiast.edu.sy

عنوان الكتاب باللغة الإنكليزية:

Numerical Methods for engineers
Volume I
First edition
Dr. Nabih ODEH

Publications of the Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST), Syrian Arab Republic, First Edition 2023

ISBN: 978-9933-9261-8-2

Published under the license: Creative Commons Attrribution-No Drivatives 4.0.
International $\left(\text{CC-BY-ND } 4.0\right)$

https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/legalcode

Available for download at: www.hiast.edu.sy

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد. للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009 ، الطبعة الثانية 2017.
- التحليل، الجزء الأول. للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009 ، الطبعة الثانية 2017.
- كيمياء المحاليل المائية. للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الاولى 2011 ، الطبعة الثانية 2016، الطبعة الثالثة 2022.
- الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع. للدكتور علي طه 2011.
- ميكانيك النقطة المادية. للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الطبعة الاولى 2011، الطبعة الثانية 2016، الطبعة الثالثة 2022.
- الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي. للدكتور عمران قوبا 2017.
- التحليل، الجزء الثاني. للدكتور عمران قوبا 2017.
- المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث. للدكتور محمد بدر قويدر 2017.
- مدخل الى كيمياء المياه، تلوث، معالجة، تحليل. للدكتور نصر الحايك 2017.
- الترموديناميك. للدكتور عقيل سلوم 2017.
- دليل الرسام الصناعي. للدكتور مصطفى الجرف 2017.
- التحليل، الجزء الثالث. للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- التحليل، الجزء الرابع. للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- التحليل، الجزء الخامس. للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- تصميم عناصر الآلة، الجزء الأول. للدكتور محمد زهير مسالخي 2021.
- ميكانيك الجسم الصلب. للدكتور مصطفى العليوي والدكتور محسن علي، 2021.
- تصميم عناصر الآلة، الجزء الثاني. للدكتور محمد زهير مسالخي، 2023.
- طرائق عددية للمهندسين، الجزء الثاني. للدكتور نبيه عوده، 2023.

سيصدر قريباً:

- الكهرباء الساكنة والمغناطيسية الساكنة. للدكتور مازن حسن والدكتور مصطفى العليوي.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الالكتروني: **www.hiast.edu.sy**

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد كوادر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.

برامج المعهد العالي الأكاديمية ونشاطاته العلمية: يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاختصاصات التالية: الاتصالات، المعلوماتية، النظم الإلكترونية، الميكاترونيكس، علوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات، التحكم والروبوتيك، المعلوماتية باختصاصي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار، علوم وهندسة المواد وفي علوم وهندسة البصريات. أخيراً، يمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث العلمي والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد العالي بكوادره رفيعة التأهيل وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً، وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود كوادره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى نشر الإفادة لأوسع فئة من المهتمين بإمكانيات كوادره ومختبراته.

النشر في المعهد العالي: استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج كوادره، منها ما هو تدريسي يتوافق مع المناهج التدريسية في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشبكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

معلومات التواصل: للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983.
هاتف: 963115123819+ - فاكس: 963115140761+
بريد إلكتروني: contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني: www.hiast.edu.sy

شكر وتقدير

كلمة شكر وامتنان أتوجّه بها إلى جميع الزملاء الذين ساهموا بملاحظاتهم في إغناء محتوى هذا الكتاب ووصوله إلى شكله الحالي.

وأخصُّ بالشكر الدكتور عمران قوبا والأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل على قراءتهما المتمعّنة لفحوى هذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها مما كان له الأثر الكبير في إنجاز هذا العمل وإخراجه بالشكل الأمثل.

والشكر موصولٌ أيضاً إلى الدكتور محمد عطا موعد لقيامه بالتدقيق اللغوي، وكذلك الشكر الجزيل للزملاء في مديريّة التعاون العلمي والنشر على متابعتهم الحثيثة لمراحل إعداد هذا الكتاب خدمة للأجيال ونشراً للعلم والمعرفة.

الإهداء

إلى أحبائي الرائعين

فاتن

نورا ❧ فراس ❧ مجد

محتوى الجزء الأول

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

يُعدّ الحساب العلمي أحد فروع الرياضيات التي تهتم بتطوير وتحليل وتطبيق طرائق عددية على صلة وثيقة بمجالات رياضيّة متنوعة مثل التحليل الرياضي والجبر الخطي والهندسة الإقليديّة ونظريّة التقريب والمعادلات التابعيّة والأَمْثَلة والحساب التفاضلي، حيث يكون للطرائق العددية دورها الطبيعي في عديدٍ من المسائل المطروحة في مجالات الفيزياء والعلوم البيولوجيّة والعلوم الهندسيّة والاقتصاد والماليّة.

يتبوأ الحساب العلمي موقعاً مهماً على مفترق العديد من فروع العلوم التطبيقيّة الحديثة يمكّنه من تقديم أدوات تحليل فعّالة نوعاً وكمّاً؛ ويتعاظم دوره هذا مع التطور المستمر لأجهزة الحساب الرقميّة من جهة، ومع تطور الخوارزميات العدديّة: حيث تسمح إمكانات المعالجة الحاسوبيّة بحل مسائل من حجمٍ كبير وتنفيذ المحاكاة العدديّة لظواهر حقيقيّة.

يتوافر في يومنا هذا عديدٌ من برمجيات الحساب العددي، ومع ذلك فإن الاستفادة الفعليّة من هذه البرمجيات تتطّلب اختياراً دقيقاً للطرائق العددية المناسبة لكل مسألة مطروحة: في الواقع العملي، ليس هناك "علبة سوداء" Black Box يمكنها تقديم الحلول الدقيقة لكل أنماط المسائل.

إن أحد أبرز أهداف هذا الكتاب هو تقديم الأساس الرياضي لمسائل الحساب العلمي من خلال تحليل الخواص النظريّة للطرائق العدديّة مع تبيان نقاط القوة ونقاط الضعف لهذه الطرائق.

إضافةً إلى العرض الرياضي لخوارزميات الحساب ومبرهنات التقارب، نركّز في هذا الكتاب على التنفيذ العملي لهذه الخوارزميات من نواحٍ عديدة: عموميّة التطبيق، الدقّة، الاستقرار العددي فيما يتعلّق بأخطاء التدوير، سرعة الحساب، حجم الذاكرة الحاسوبيّة اللازمة، سهولة البرمجة. يسمح ذلك بمقارنة الطرائق المختلفة وفق معايير عديدة تبعاً لنمط الاستعمال المطلوب.

تشتمل فصول الكتاب المختلفة على صياغة برمجيّة لبعض الخوارزميات المدروسة بلغةٍ علميّة Pseudo Code بهدف توضيح سهولة برمجة هذه الخوارزميات والتي تأخذ في العموم أشكالاً بسيطة.

كذلك يتضمّن الكتاب (في نهاية كل فصل) العديد من التمارين على درجاتٍ من الصعوبة يمكن حلّ بعضها بالقلم والورقة وبعضها يتطلّب استعمال آلة حساب رقميّة مساعدة لتنفيذ الحسابات المطلوبة، وهذا يساهم في ترسيخ المفاهيم النظريّة وتوضيح جوانب معرفيّة إضافيّة تتعلّق بالمسائل الرياضيّة المطروحة.

يتوجّه هذا الكتاب بشكلٍ أساسي إلى طلاب الحلقة الجامعيّة الثانية وطلاب العلوم الهندسيّة. كما يمكن أن يكون مفيداً لطلاب الدراسات العليا وللعاملين في مجالات البحث العلمي وبوجهٍ عام لجميع مستخدمي الحساب العلمي.

يتطلب استخدام هذا الكتاب معرفة جيدة بالتحليل التابعي والحساب التفاضلي وقضايا الجبر الخطي وكذلك الإلمام بمسائل المعادلات التفاضلية. كما تتطلب الاستفادة الفعلية من الطرائق والخوارزميات العدديّة معرفةً لا بأس بها في أمور البرمجة الحاسوبية واستخدام الأنظمة الرقمية بهدف التنفيذ العملي وإجراء الحسابات.

من جانب آخر، يتطلّب الاستخدام الفعلي للحساب العلمي في التطبيقات معرفةً نظريّة بموضوع المسألة المراد حلّها كما يتطلّب خبرةً عمليّةً حسابيّة تتعلّق بالجوانب التطبيقيّة للخوارزميات العدديّة.

يتكوّن محتوى هذا الكتاب من أربعة عشر فصلاً موزّعة في جزأين:

في الفصل الأول: نعرض تمثيلَ الأعداد والعمليات الحسابيّة في الأجهزة الرقميّة ومفهوم استقرار المسائل الرياضيّة ومفهوم الحساسيّة واستقرار الطرائق العدديّة.

في الفصول الثاني إلى الخامس: نعرض تذكرة ببعض مفاهيم وموضوعات الجبر الخطي، إضافةً إلى معالجة المسائل التقليديّة في الجبر الخطي العددي: حل جمل المعادلات الخطيّة بالطرائق المباشرة والطرائق التكراريّة بالإضافة إلى حساب القيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة للمصفوفات.

في الفصلين السادس والسابع: نبحث في مسألة الاستيفاء التابعي باستخدام توابع كثيرات الحدود وتوابع السبلاين التكعيبيّة، ومسألة التقريب المنتظم للتوابع المستمرّة على مجال، وكذلك مسألة تقريب التوابع بطريقة الوسطي التربيعي باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة.

في الفصول الثامن إلى العاشر: نطرح مسألة معالجة المعطيات التابعيّة في المستوي باستخدام منحنيات السبلاين التكعيبيّة ونعالج مسألة التكامل العددي للتوابع العددية بمتحوّل واحد (تكاملات بسيطة) ومسألة التكامل العددي للتوابع العددية بمتحوّلين (تكاملات مضاعفة) باستخدام طرائق غاوص.

في الفصلين الحادي عشر والثاني عشر: نعرض طرائق وخوارزميات حل المعادلات التفاضليّة العاديّة عدديّاً وكذلك الأمر بالنسبة لمسائل القيم المحيطيّة.

في الفصلين الثالث عشر والرابع عشر: نعرض دراسةً للمعادلات الجبريّة غير الخطيّة والطرائق العدديّة لحلّها، وكذلك نبحث في مسائل الأمثلة العدديّة دون قيود ومسائل الأمثلة العدديّة مع قيود والطرائق العدديّة المستخدمة في معالجتها.

ختاماً، أرجو أن أكون قد وفقت في مسعاي هذا، وأن يعود هذا الكتاب بالفائدة على شرائح عديدة من المهتمين بقضايا الحساب العلمي من طلابنا الأعزاء في مرحلة التأهيل الهندسي وطلاب الدراسات العليا والعاملين في مجالات البحث العلمي بقدرٍ يتناسب مع الحاجات الملحّة في عصرٍ تتسارع فيه الإنجازات العلميّة والتقانيّة، متمنيّاً لهم حظاً وافراً في مواكبة هذا العصر نحو مستقبلٍ مشرق والله الموفّق.

تموز 2023 د. نبيه عوده

الفصل الأوّل
تمثيل الأعداد ومفهوم الاستقرار في التحليل العددي

كان مصنّعو الأجهزة الحاسوبيّة، في أعوام الستينيّات والسبعينيّات، يطوّرون -كلٌّ على طريقته- نظام تمثيل الأعداد بالنقطة العائمة مما جعل توافقية البرمجيات مع هذه الأجهزة أمراً عسيراً. فعلى سبيل المثال، كانت معظم الآلات الحاسبة تعتمد النظام الإثناني في تمثيل الأعداد في حين كانت حواسيب IBM 360/370 (والتي كانت شائعة في تلك الفترة) تعتمد النظام الست عشري hexadecimal وفيما كانت أنظمة حاسوبيّة أخرى مثل أنظمة HP الحاسبة تعتمد النظام العشري. من ناحيةٍ ثانية، ساهمت جهود العديد من اختصاصيّ الأجهزة الحاسوبيّة، في بداية أعوام الثمانينيّات من أمثال W. Kahan في وضع نظامٍ قياسي لتمثيل الأعداد بالنقطة العائمة وتلا ذلك دفعٌ كبيٌر لهذا النظام بتبنّي كلّ من شركة Intel وشركة Motorola لهذا المعيار في تمثيل الأعداد. عُرِفَ هذا النظام القياسي في التمثيل باسم معيار IEEE في تمثيل الأعداد بالنقطة العائمة وكان ذلك منذ أن بدأ بتطويره فريقٌ متخصص من معهد الهندسة الكهربائية والإلكترونية IEEE.

1. التمثيل بطريقة النقطة العائمة

ليكن $2 \leq \beta \in \mathbb{N}$ عدداً طبيعياً نسميّه الأساس (غالباً ما يكون زوجياً)، عندئذٍ، أياً كان العدد الحقيقي $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ فإنّه يوجد عددٌ صحيحٌ $e \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$\beta^e \leq \left|x\right| < \beta^{e+1}$$

وهذا يعني أنّه يوجد عددٌ وحيد $0 \leq \lambda < 1$ بحيث يكون

$$\left|x\right| = (1-\lambda)\cdot\beta^e + \lambda\cdot\beta^{e+1} = \big(1+\lambda\cdot(\beta-1)\big)\cdot\beta^e$$

أي أنّ العدد x يكتب بطريقةٍ وحيدة بالشكل

$$x = \pm m \times \beta^e, \quad 1 \leq m < \beta, \quad e \in \mathbb{Z}$$

نسمي العدد m دليل العدد x.

تعتمد طريقة التمثيل بالنقطة العائمة على اختيار عددٍ صحيح $1 \leq p$ يسمّى دقّة التمثيل precision إضافةً إلى عددين آخرين $e_{\min}$ و $e_{\max}$ يحدّدان مجال تغيّر الأس e بحيث نستطيع بهذه الطريقة تمثيل الأعداد التالية:

$$\pm\underbrace{\Big(d_0 + d_1\cdot\beta^{-1} + \cdots + d_{p-1}\cdot\beta^{-(p-1)}\Big)}_{m} \times \beta^e \tag{1}$$

حيث

$$d_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d_i < \beta$$

يعبّر المصطلح عدد النقطة العائمة floating-point number عن العدد الحقيقي الذي يكتب بالشكل (1). نلاحظ هنا أنّ الصيغة (1) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$M \times \beta^{e-p+1}$$

حيث M عددٌ صحيح يحقق $\left|M\right| \leq \beta^p - 1$. نسميّ العدد β^{e-p+1} كوانتوم التمثيل quantum كما نسمي العدد $e-p+1$ الأس الكوانتي quantum exponent.

لتخزين عدد النقطة العائمة تقسم وحدة الذاكرة computer word المخصّصة لذلك إلى ثلاثة حقول تمثّل على الترتيب الإشارة s، الأس e ومن ثمّ الدليل m. فمثلاً، في نظامٍ حاسوبي يعتمد وحدة ذاكرة قياسها $32 - \text{bit}$ يمكن توزيع هذه الحقول كالتالي:

تمثيل الإشارة: 1 bit، تمثيل الدليل: 23 bits، تمثيل الأس: 8 bits

هناك حالتان لا يمكن فيهما تمثيل عددٍ حقيقي تمثيلاً تاماً بصفته عدداً من أعداد النقطة العائمة. الحالة الأولى، وهي الأكثر شيوعاً، يمكن إيضاحها بالعدد العشري 0.1 . فهذا العدد يمتلك تمثيلاً عشرياً منتهياً $(\beta = 10)$:

$$0.1 = +1.0 \times 10^{-1}$$

وفي النظام الإثناني $(\beta = 2)$ يقع هذا العدد تماماً بين عددي نقطة عائمة وذلك لكونه لا يقبل تمثيلاً منتهياً:

$$(0.1)_{10} = (1.10011001100)_2 \cdots \times 2^{-4}$$

والحالة الثانية، وهي أقلّ حدوثاً وتتعلّق بالأعداد الواقعة خارج مجال التمثيل، أي أن تكون القيمة المطلقة للعدد أكبر من القيمة $\beta \times \beta^{e_{\max}}$.

إنّ تمثيل الأعداد بطريقة النقطة العائمة ليس وحيداً، فعلى سبيل المثال، كلا الكتابتين:

$$0.01 \times 10^{1} \quad \text{و} \quad 1.00 \times 10^{-1}$$

تمثّلان العدد 0.1 . لكي نجعل تمثيل الأعداد الحقيقيّة بطريقة النقطة العائمة وحيداً نشترط في هذا التمثيل أن يكون الرقم الأوّل من يسار دليل العدد d_0 غير معدوم وعندئذٍ يأخذ تمثيل العدد الشكل التالي:

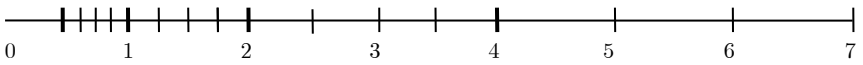
$$\pm d_0 \cdot d_1 d_2 \cdots d_{p-1} \times \beta^e, \quad 0 \leq d_i < \beta, \quad d_0 > 0 \tag{2}$$

نسميّ طريقة التمثيل (2) طريقة التمثيل بالنقطة العائمة القياسيّة Normalized floating-point، كما نسمّي الأعداد التي تكتب وفق العبارة (2) أعداداً نظامية Normal numbers.

فعلى سبيل المثال الكتابة 1.00×10^{-1} قياسيّة في حين أنّ الكتابة 0.01×10^{1} ليست كذلك.

مثال:

في حالة $\beta = 2$ ، $p = 3$ ، $e_{\min} = -1$ و $e_{\max} = 2$ يتضمّن نظام التمثيل بالنقطة العائمة 16 عدداً نظامياً موجباً (الإشارة $+$) يوضّحها الشكل التالي:



الشكل 1: الأعداد النظامية الموجبة.

وهذه الأعداد هي:

$$\bigcup_{i=-1}^{2} \left\{1.00 \times 2^i,\ 1.01 \times 2^i,\ 1.10 \times 2^i,\ 1.11 \times 2^i\right\}$$

لسوء الحظ، فإنّ الشرط الذي وضعناه ليصبح التمثيل بالنقطة العائمة قياسياً، لا يسمح بتمثيل الصفر!. سنرى في الفقرة التالية كيفيّة تمثيل الصفر وكذلك أعداداً أخرى لا يمكن كتابتها وفق العبارة (2).

2. معيار IEEE في تمثيل الأعداد

في عام 1985، جرى اعتماد معيار "IEEE 754" لتمثيل الأعداد بالنقطة العائمة، وهو نظام تمثيلٍ يقوم حصراً على استخدام النظام الإثناني ($\beta = 2$) في التعبير عن مكوّنات التمثيل: الأس exponent والدليل significand أو mantissa. بعد ذلك بأعوامٍ قليلة، وفي عام 1987 جرى تعميم هذا المعيار إلى "IEEE 854" والذي يسمح باستخدام أحد الأساسين $\beta = 2$ أو $\beta = 10$ في التمثيل على حدٍ سواء.

في شهر آب من عام 2008 جرى نشر إصدار جديد من معيار "$\text{IEEE } 754 - 2008$" بعد سبع سنوات من المراجعة، ليحلّ محل الإصدارين:

$$\text{“IEEE } 854 - 1987\text{”} \quad , \quad \text{“IEEE } 754 - 1985\text{”}$$

يشتمل معيار "$\text{IEEE } 754 - 2008$" في تمثيل الأعداد على مجموعة من الأنماط تحقق جميعها الشروط التالية:

- ❖ الأساس في أي نمط تمثيل هو 2 أو 10. (تمثيل إثناني أو تمثيل عشري).
- ❖ لكل نمط تمثيل دقةٌ منتهية p تمثّل عدد الخانات المخصصة لتمثيل الدليل في سجل الذاكرة الممثل لهذا النمط.
- ❖ مجال تغير الأس لكل الأنماط $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$ حيث $e_{\min} = 1 - e_{\max}$.

ننوّه هنا إلى أنّ جميع معالجات SPARC و x86 تستعمل نظام IEEE في تمثيل الأعداد.

يشتمل معيار "IEEE 754 – 2008" في تمثيل الأعداد على خمسة أنماط أساسية Basic formats:

- ثلاثة أنماط إثنانية binary32، binary64 و binary128 تمثّل بسجلات ذاكرة قياسها 32، 64 و 128 bits على الترتيب.
- نمطين عشريين decimal64 و decimal128 تمثّل بسجلات ذاكرة قياسها 64 و 128 bits على الترتيب.

كما يقترح المعيار، بالإضافة لذلك، أنماطاً موسّعةً Extended formats للأنماط الأساسيّة الخمسة السابقة وأنماطاً قابلة للتوسيع Extendable formats يمكن لمستخدمها تحديد قيمة دقّة التمثيل ومجال تغيّر الأس.

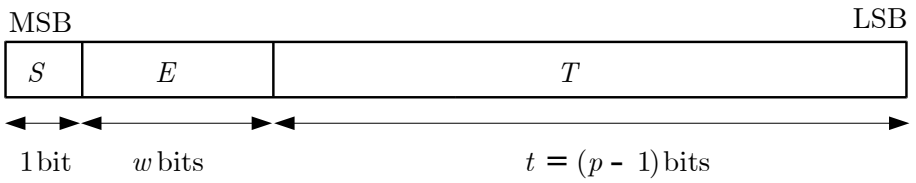
يبيّن الجدول التالي قيم الوسطاء p ، $e_{\max}$ و $e_{\min}$ الخاصة بهذه الأنماط.

decimal			binary				
28 (basic)	64 (basic)	32	128 (basic)	64 (basic)	32 (basic)	16	
34	16	7	113	53	24	11	p
+6144	+384	+96	+16383	+1023	+127	+15	$e_{\max}$
-6143	-383	-95	-16382	-1022	-126	-14	$e_{\min}$

1.2 تمثيل الأعداد وفق الأنماط الإثنانية Binary formats

يمثّل عدد نقطة عائمة floating-point number بسجل ذاكرة أو بصيغة تمثيل تتألف من ثلاثة حقول:

حقل T مكوّن من $(p-1)$ bits لتمثيل الدليل وحقلٌ E مكوّن من w bits لتمثيل الأس وحقل S مكوّن من bit1 لتمثيل الإشارة، كما هو مبيّن في الشكل التالي:



تعرّف ذاكرة حقل الأس عدداً صحيحاً $0 \leq E \leq 2^w - 1$، كما تعرّف ذاكرة حقل الدليل عدداً صحيحاً $0 \leq T < 2^{p-1}$، وتعرّف قيمة $S \in \{0,1\}$ إشارة العدد. يجري احتساب القيمة العددية لصيغة التمثيل (S, E, T) للأنماط الإثنانية في نظام IEEE المعياري كما يلي:

- حالة $E = 2^w - 1$ و $T \neq 0$: لا تمثل الصيغة في هذه الحالة عدد نقطة عائمة ويستخدم مصطلح NaN (Not-a-Number) للتعبير عن القيمة العددية لهذه الصيغة.
- حالة $E = 2^w - 1$ و $T = 0$: تمثل الصيغة في هذه الحالة اللانهاية الموجبة أو السالبة:

$$(-1)^S \times (+\infty)$$

- حالة $0 < E < 2^w - 1$: تمثل الصيغة عندها عدداً نظامياً normal number وتكون القيمة العددية عندها:

$$(-1)^S \times 2^{E-b} \times (1 + T \cdot 2^{1-p})$$

حيث

$$b = e_{\max} = 2^{w-1} - 1$$

ويأخذ القيم 15، 127، 1023 و 16383 في الأنماط binary16، binary32، binary64 و binary128 على الترتيب.

- حالة $E = 0$ و $T \neq 0$: تمثل الصيغة في هذه الحالة عدداً تحت نظامي subnormal number وتكون القيمة العددية عندها:

$$(-1)^S \times 2^{e_{\min}} \times (0 + T \cdot 2^{1-p})$$

- حالة $E = 0$ و $T = 0$: تمثل الصيغة في هذه الحالة الصفر الموجب أو السالب:

$$(-1)^S \times (+0)$$

يبيّن الجدول التالي قياس الحقول المختلفة وفق الأنماط الإثنانية المختلفة.

النمط	binary16	binary32	binary64	binary128
قياس السجل	16	32	64	128
قياس الدليل: $p-1$	10	23	52	112
قياس الأس: w	5	8	11	15
الانحياز في الأس: $b = e_{\max} = 2^{w-1}-1$	15	127	1023	16383

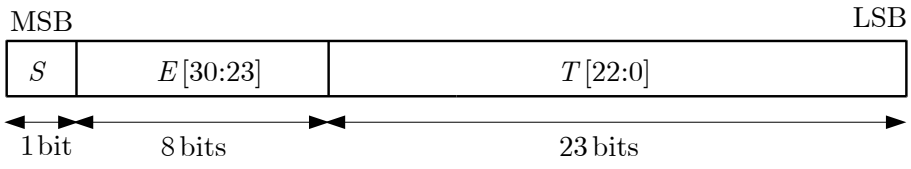
يوافق النمطان binary32 و binary64 في معيار "IEEE $754-2008$" نمط الدقة البسيطة ونمط الدقة المضاعفة في معيار "IEEE $754-1985$". لنوضح هذين النمطين مع بعض التفصيل:

أولاً: نمط الدقّة البسيطة أو binary32

تتألّف الصيغة الموافقة لهذا النمط من ثلاثة حقول:

- حقل مكوّن من 23 bits يمثّل الجزء الكسري $0 \leq \mathrm{f} = T \times 2^{-23} < 1$.
- حقلٌ مكوّن من 8 bits لتمثيل القيمة المنحازة للأس E.
- حقلٌ مكوّن من 1 bit لتمثيل الإشارة $S \in \{0,1\}$.

تُخَزّن هذه الحقول متجاورةً في وحدة ذاكرة قياسها 32-bit كما في الشكل 2.



الشكل 2: صيغة التخزين البسيطة binary32.

يبيّن الجدول التالي الحالات المختلفة للحقول الثلاثة S و E و T وما يقابلها من قيمٍ عدديّة تمثّلها صيغة التمثيل البسيطة binary32.

قيمة حقول التخزين	القيمة العدديّة
$0 < E < 255$	$(-1)^{s} \times 1.f \times 2^{E-127}$ normal numbers
$E = 0; T \neq 0$	$(-1)^{s} \times 0.f \times 2^{-126}$ subnormal numbers
$E = 0; T = 0$	$(-1)^{s} \times 0.0$ signed zero
$S = 0; E = 255; T = 0$	$+\text{INF}$ $+\infty$
$S = 1; E = 255; T = 0$	$-\text{INF}$ $-\infty$
$E = 255; T \neq 0$	NaN Not-a-Number

الجدول 1: القيم العدديّة التي يمثّلها نمط الدقّة البسيطة binary32.

الكتابة x.f ترمز إلى العدد x+f.

نلاحظ هنا أنّ الدليل m للعدد الممثّل بهذه الصيغة هو عددٌ مركّب يساوي:

- $m = 1.f$ عندما $0 < E < 255$. نسمّي العدد الذي تمثّله هذه الصيغة –في هذه الحالة– عدداً نظامياً normal number.
- $m = 0.f$ عندما $E = 0$ و $T \neq 0$. نسمّي العدد الذي تمثّله هذه الصيغة – في هذه الحالة– عدداً تحت نظامي subnormal number.

يتبيّن لنا من ذلك أنّ دليل الصيغة البسيطة m يمثّل بجزء كسري قيمته 0.f وجزء صحيح قيمته 1 في حالة الأعداد النظاميّة، و0 في حالة الأعداد تحت النظاميّة. يبيّن الجدول التالي بعض صيغ التمثيل البسيطة الهامّة وقيمها بالنظام العشري.

الاسم الشائع	الصيغة (Hex)	القيمة العدديّة العشرية
+0	00000000	0.0
-0	80000000	-0.0
1	3F800000	1.0
2	40000000	2.0
maximum normal number	7F7FFFFF	3.40282347e+38
minimum positive normal number	00800000	1.17549435e-38
maximum subnormal number	007FFFFF	1.17549421e-38
minimum positive subnormal number	00000001	1.40129846e-45
$+\infty$	7F800000	Infinity
$-\infty$	FF800000	-Infinity
Not-a-Number	7FC00000	NaN

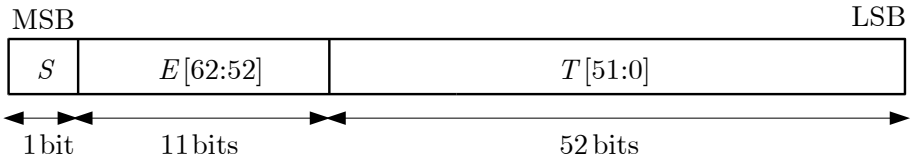
الجدول 2: بعض صيغ التمثيل بالدقّة البسيطة binary32 وقيمها العدديّة.

ثانياً: نمط الدقّة المضاعفة أو binary64

تتألّف الصيغة الموافقة لهذا النمط من ثلاثة حقول:

- حقل مكوّن من 52 bits يمثّل الجزء الكسري $0 \leq \mathrm{f} = T \times 2^{-52} < 1$.
- حقلٌ مكوّن من 11 bits لتمثيل القيمة المنحازة للأس E.
- حقلٌ مكوّن من 1 bit لتمثيل الإشارة $S \in \{0,1\}$.

تُخَزّن هذه الحقول متجاورةً في وحدة ذاكرةٍ قياسها 64 bits كما في الشكل التالي.



الشكل 3: صيغة التخزين المضاعفة binary64.

يبيّن الجدول التالي الحالات المختلفة للحقول الثلاثة S و E و T وما يقابلها من قيمٍ عدديّة تمثّلها صيغة التمثيل المضاعفة binary64.

قيمة حقول التخزين	القيمة العدديّة
$0 < E < 2047$	$(-1)^{\mathrm{s}} \times 1.\mathrm{f} \times 2^{E-1023}$ normal numbers
$E = 0; T \neq 0$	$(-1)^{\mathrm{s}} \times 0.\mathrm{f} \times 2^{-1022}$ subnormal numbers
$E = 0; T = 0$	$(-1)^{\mathrm{s}} \times 0.0$ signed zero
$S = 0; E = 2047; T = 0$	$+\mathrm{INF}$ $+\infty$
$S = 1; E = 2047; T = 0$	$-\mathrm{INF}$ $-\infty$
$E = 2047; T \neq 0$	NaN Not-a-Number

الجدول 3: القيم العدديّة التي يمثّلها نمط الدقّة المضاعفة binary64.

نلاحظ هنا - أيضاً - أنّ الدليل m للعدد الممثّل بهذه الصيغة هو عددٌ مركّب يساوي:

- $m = 1.\mathrm{f}$ عندما $0 < E < 2047$. نسمّي العدد الذي تمثّله هذه الصيغة -في هذه الحالة- عدداً نظامياً normal number.

- $m = 0.\mathrm{f}$ عندما $E = 0$ و $T \neq 0$. نسمّي العدد الذي تمثّله هذه الصيغة –في هذه الحالة– عدداً تحت نظامي subnormal number.

يتبيّن لنا من ذلك أنّ دليل الصيغة المضاعفة m يمثّل بجزء كسري قيمته $0.\mathrm{f}$ وجزء صحيح قيمته 1 في حالة الأعداد النظاميّة، و 0 في حالة الأعداد تحت النظاميّة. يبيّن الجدول التالي بعض صيغ التمثيل المضاعفة الهامّة وقيمها بالنظام العشري.

الاسم الشائع	الصيغة (Hex)	القيمة العدديّة العشرية
+0	00000000 00000000	0.0
-0	80000000 00000000	-0.0
1	3FF00000 00000000	1.0
2	40000000 00000000	2.0
maximum normal number	7FEFFFFF FFFFFFFF	1.7976931348623157e+308
minimum positive normal number	00100000 00000000	2.2250738585072014e-308
maximum subnormal number	000FFFFF FFFFFFFF	2.2250738585072009e-308
minimum positive subnormal number	00000000 00000001	4.9406564584124654e-324
$+\infty$	7FF00000 00000000	Infinity
$-\infty$	FFF00000 00000000	-Infinity
Not-a-Number	7FF80000 00000000	NaN

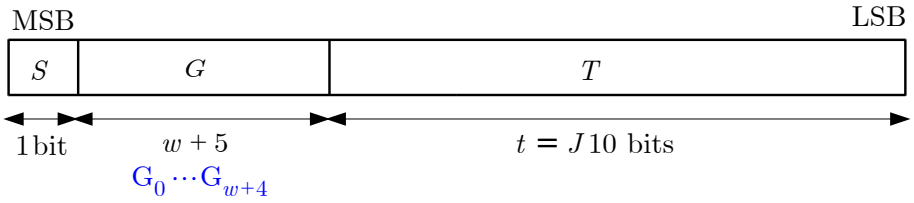
الجدول 4: بعض صيغ التمثيل بالدقّة المضاعفة binary64 وقيمها العدديّة.

2.2 تمثيل الأعداد وفق الأنماط العشريّة Decimal formats

يعدّ تمثيل الأعداد وفق الأنماط العشريّة Decimal formats أكثر تعقيداً منه في الحالة الإثنانيّة وذلك لأسباب عديدة منها:

- اقتراح شكلين مختلفين من الترميز "encoding" هما الترميز الإثناني Binary encoding والترميز العشري Decimal encoding لمكونات الصيغة وعلى الخصوص الجزء المتعلق بالدليل M.
- في الأنماط العشرية، لا تكون الحقول الثلاثة: الإشارة، الأس و الدليل منفصلةً عن بعضها بشكلٍ تام كما هو الحال في حالة الأنماط الإثنانية، حيث يتكون تمثيل الدليل من الحقل T وجزء من الحقل G.

وبشكلٍ مختصر، يكمن الفرق بين الترميز الإثناني والترميز العشري لمكونات الصيغة العشرية في طريقة تمثيل دليل العدد، حيث يأخذ دليل العدد قيمة صحيحة بين الصفر والقيمة $10^p - 1$. فإذا اخترنا ترميز هذا الدليل إثنانياً (يقودنا هذا إلى الشكل الإثناني للصيغة العشرية) أما إذا اخترنا ترميز هذا الدليل عشرياً (يقودنا هذا بدوره إلى الشكل العشري للصيغة العشرية). تتكون صيغة التمثيل في الأنماط العشرية من ثلاثة أقسام كما هو مبيّن في الشكل التالي:



- decimal encoding: J declets give $3J = p-1$ digits
- binary encoding: t bits give values $0,\ldots,2^t - 1$

يبيّن الجدول التالي قياس حقول صيغة التمثيل لبعض الأنماط العشرية:

decimal128	decimal64	decimal32	
128	64	32	قياس السجل
110	50	20	قياس الحقل T : $t = 10J$
17	13	11	قياس الحقل G : $w + 5$
6176	398	101	الانحياز في الأس: $b = E - (e - p + 1)$

يجري حساب القيمة التي تعبر عنها صيغة التمثيل وفق القواعد التالية:

- إذا كانت الخانات "bits" الأكثر دلالة من الحقل G (من اليسار إلى اليمين) $G_0\cdots G_4 = 11111$ فإنّ الصيغة لا تمثّل عدداً وهذا ما يعبّر عنه بمصطلح NaN،
- في حالة $G_0\cdots G_4 = 11110$ فإنّ صيغة التمثيل تعبّر عن اللانهاية: $(-1)^S \times (+\infty)$،
- في حالة وجود $i \in \{0,\ldots,3\}$ بحيث يكون $G_i = 0$ فإنّ الصيغة تمثّل عدداً منتهياً قيمته:

$$(-1)^S \times 10^{E-b} \times C$$

هنا $E-b$ يمثّل الأس الكوانتي للعدد ويمثّل b الانحياز في الأس والذي يأخذ القيمة 101، 398 أو 6176 تبعاً للنمط العشري المستخدم deciml32، decimal64 أو decimal128 على الترتيب. يجري تعيين قيمة كلّ من E و C كما يلي:

أولاً: في حالة الترميز العشري decimal encoding

❖ إذا كان $G_0\cdots G_4 = 110xx$ أو $G_0\cdots G_4 = 1110x$ فإنّ

$$E = \underbrace{G_2G_3G_5G_6\cdots G_{w+4}}_{\text{binary}} \quad , \quad C = \underbrace{(8+G_4)C_1C_2\cdots C_{p-1}}_{\text{decimal}}$$

نلاحظ في هذه الحالة أنّ $C_0 = 8+G_4 \in \{8,9\}$.

❖ إذا كان $G_0\cdots G_4 = 0xxxx$ أو $G_0\cdots G_4 = 10xxx$ فإنّ

$$E = \underbrace{G_0G_1G_5G_6\cdots G_{w+4}}_{\text{binary}} \quad , \quad C = \underbrace{(4G_2+2G_3+G_4)C_1C_2\cdots C_{p-1}}_{\text{decimal}}$$

حيث

$$C_0 = 4G_2+2G_3+G_4 \in \{0,\ldots,7\}$$
$$(C_{3j+1},C_{3j+2},C_{3j+3}) = \varphi(T_{10j},\ldots,T_{10j+9}), \quad 0 \le j < J$$

وحيث $\varphi : \{0,1\}^{10} \to \{0,\ldots,9\}^3$ تطبيق يفك الترميز الإثناني $b_0b_1\ldots b_9$ حيث $b_i \in \{0,1\}$ إلى الترميز العشري $d_0d_1d_2$ حيث $d_i \in \{0,\ldots,9\}$ وفقاً لمعيار "IEEE 754 – 2008" باستخدام الجدول التالي الذي يربط كل تركيبة إثنانيّة $b_0b_1\ldots b_9$ بثلاثيّة عشريّة $d_0d_1d_2$ بحيث يكون $(d_0,d_1,d_2) = \varphi(b_0,b_1,\ldots,b_9)$.

$b_6b_7b_8b_3b_4$	d_0	d_1	d_2
0 x x x x	$4b_0 + 2b_1 + b_2$	$4b_3 + 2b_4 + b_5$	$4b_7 + 2b_8 + b_9$
1 0 0 x x	$4b_0 + 2b_1 + b_2$	$4b_3 + 2b_4 + b_5$	$8 + b_9$
1 0 1 x x	$4b_0 + 2b_1 + b_2$	$8 + b_5$	$4b_3 + 2b_4 + b_9$
1 1 0 x x	$8 + b_2$	$4b_3 + 2b_4 + b_5$	$4b_0 + 2b_1 + b_9$
1 1 1 0 0	$8 + b_2$	$8 + b_5$	$4b_0 + 2b_1 + b_9$
1 1 1 0 1	$8 + b_2$	$4b_0 + 2b_1 + b_5$	$8 + b_9$
1 1 1 1 0	$4b_0 + 2b_1 + b_2$	$8 + b_5$	$8 + b_9$
1 1 1 1 1	$8 + b_2$	$8 + b_5$	$8 + b_9$

من ناحيةٍ ثانيةٍ، نحتاج عند تمثيل عدد عشري وفق أحد الأنماط العشريّة باستخدام الترميز العشري إلى تطبيق $\psi : \{0,\dots,9\}^3 \to \{0,1\}^{10}$ يسمح بترميز ثلاثيّة عشريّة $d_0d_1d_2$ بتركيبة إثنانيّة $b_0b_1\dots b_9$ بحيث يكون $(b_0,b_1,\dots,b_9) = \psi(d_0,d_1,d_2)$. يجري ذلك وفقاً لمعيار "IEEE $754-2008$" باستخدام الجدول التالي:

$d_0^0d_1^0d_2^0$	$b_0b_1b_2$	$b_3b_4b_5$	b_6	$b_7b_8b_9$
0 0 0	$d_0^1d_0^2d_0^3$	$d_1^1d_1^2d_1^3$	0	$d_2^1d_2^2d_2^3$
0 0 1	$d_0^1d_0^2d_0^3$	$d_1^1d_1^2d_1^3$	1	0 0 d_2^3
0 1 0	$d_0^1d_0^2d_0^3$	$d_2^1d_2^2d_1^3$	1	0 1 d_2^3
0 1 1	$d_0^1d_0^2d_0^3$	1 0 d_1^3	1	1 1 d_2^3
1 0 0	$d_2^1d_2^2d_0^3$	$d_1^1d_1^2d_1^3$	1	1 0 d_2^3
1 0 1	$d_1^1d_1^2d_0^3$	0 1 d_1^3	1	1 1 d_2^3
1 1 0	$d_2^1d_2^2d_0^3$	0 0 d_1^3	1	1 1 d_2^3
1 1 1	0 0 d_0^3	1 1 d_1^3	1	1 1 d_2^3

حيث $d_i^0d_i^1d_i^2d_i^3$ يمثّل الصيغة الإثنانية للعدد $d_i \in \{0,\dots,9\}$.

ننوّه هنا إلى أنّ التطبيق ψ يولّد جميع التراكيب الإثنانيّة $b_0b_1\dots b_9$ باستثناء 24 تركيبة هي:

$$\{01x11x111x,\ 10x11x111x,\ 11x11x111x\}$$

حيث x تعني قيمة اختياريّة للخانة في موقعها من التركيبة.

توصف هذه التراكيب بأنّها غير قانونيّة "non-canonical patterns".

نلاحظ هنا، أنّه عندما يكون

$$G_0\cdots G_4 \in \{00000, 01000, 10000\} \quad , \quad T = 0$$

فإنّ دليل العدد في هذه الحالة يكون معدوماً وتمثّل الصيغة عندئذ الصفر مع إشارة:

$$\text{signed zero}: \quad (\text{-}1)^S \times (+0)$$

يلخّص الجدول التالي الحالات المختلفة لصيغة التمثيل العشري في حالة الترميز العشري:

G	القيمة العددية للصيغة العشريّة
$111110x\cdots x$ or $111111x\cdots x$	NaN
$1110xx\cdots x$	$(-1)^S \times (+\infty)$
$110xx\cdots x$ or $1110x\cdots x$	$(-1)^S \times 10^{\overbrace{G_2G_3G_5G_6\cdots G_{w+4}}^{\text{binary}}-b} \times \underbrace{(8+G_4)C_1\cdots C_{p-1}}_{\text{decimal}}$ حيث $(C_{3j+1}, C_{3j+2}, C_{3j+3}) = \varphi(T_{10j},\dots,T_{10j+9})$ $0 \le j < J$
$0xx\cdots x$ or $10x\cdots x$	$(-1)^S \times 10^{\overbrace{G_0G_1G_5G_6\cdots G_{w+4}}^{\text{binary}}-b} \times \underbrace{(4G_2+2G_3+G_4)C_1\cdots C_{p-1}}_{\text{decimal}}$ حيث $(C_{3j+1}, C_{3j+2}, C_{3j+3}) = \varphi(T_{10j},\dots,T_{10j+9})$ $0 \le j < J$

ثانياً: في حالة الترميز الإثنائي binary encoding

❖ إذا كان $G_0G_1 \in \{00,01,10\}$ فإنّ

$$E = \underbrace{G_0 \cdots G_{w+1}}_{\text{binary}} \, , \, C = \underbrace{G_{w+2}G_{w+3}G_{w+4}T_0 \cdots T_{10J-1}}_{\text{binary}}$$

❖ إذا كان $G_0G_1 = 11$ و كان $G_2G_3 \in \{00,01,10\}$ فإنّ

$$E = \underbrace{G_2G_3 \cdots G_{w+3}}_{\text{binary}} \quad , \quad C = \underbrace{100G_{w+4}T_0T_1 \cdots T_{10J-1}}_{\text{binary}}$$

وفي كلتا الحالتين إذا تجاوزت قيمة العدد C القيمة العظمى للدليل $10^p - 1$ فإن الصيغة عندئذ تمثّل الصفر مع إشارة:

$$\text{signed zero}: \quad (\text{-1})^S \times (+0)$$

يلخّص الجدول التالي الحالات المختلفة لصيغة التمثيل العشري في حالة الترميز الإثنائي:

G	القيمة العددية للصيغة العشريّة
$11110x\cdots x$ or $11111x\cdots x$	NaN
$1110xx\cdots x$	$(-1)^S \times (+\infty)$
$00x\cdots x$ or $01x\cdots x$ or $10x\cdots x$	$(-1)^S \times 10^{\overbrace{G_0G_1G_2\cdots G_{w+1}}^{\text{binary}}-b} \times \underbrace{G_{w+2}G_{w+3}G_{w+4}T_0T_1\cdots T_{10J-1}}_{\text{binary}}$ وعندما $\left(G_{w+2}G_{w+3}G_{w+4}T_0T_1\cdots T_{10J-1}\right)_2 \geq 10^p$ تكون القيمة $(-1)^S \times (+0)$
$1100x\cdots x$ or $1101x\cdots x$ or $1110x\cdots x$	$(-1)^S \times 10^{\overbrace{G_2G_3G_4\cdots G_{w+3}}^{\text{binary}}-b} \times \underbrace{100G_{w+4}T_0T_1\cdots T_{10J-1}}_{\text{binary}}$ وعندما $\left(100G_{w+4}T_0T_1\cdots T_{10J-1}\right)_2 \geq 10^p$ تكون القيمة $(-1)^S \times (+0)$

نماذج من تمثيل الأعداد وفق الأنماط العشريّة:

① لنبحث في تمثيل العدد $x = 3.141592653589793$ وفق النمط العشري decimal64 باستخدام الترميز العشري للدليل.

- حقل الإشارة وضوحاً قيمته $S = 0$.
- نلاحظ هنا أنّ

$$x = 3.141592653589793 \times 10^{0} = 3141592653589793 \times 10^{-15}$$

أي أنّ الأس الكوانتي يساوي $e - p + 1 = -15$ ومن ثمّ يكون الأس المنحاز

$$E = e - p + 1 + b = 383$$

وتمثيله الإثنائي 0101111111 وبما أنّ $C_0 = 3$ يكون

$$\begin{aligned} C &= (4G_2 + 2G_3 + G_4)C_1C_2\cdots C_{p-1} \\ &= (4\times 0 + 2\times 1 + 1)141592653589793 \\ E &= G_0G_1G_5G_6\cdots G_{w+4} = 0101111111 \end{aligned}$$

نستخدم التطبيق ψ في تعيين التركيبات الإثنائيّة $b_0b_1\ldots b_9$ الموافقة للثلاثيات العشريّة $d_0d_1d_2$ المكوّنة للعدد 141592653589793 فنجد:

الترميز الإثنائي	الثلاثية العشريّة
0011000001	141
1010111010	592
1101010011	653
1011001111	589
1110111011	793

ومن ثمّ، تكون صيغة تمثيل العدد x وفق النمط العشري decimal64 باستخدام الترميز العشري للدليل:

$$\underbrace{0}_{sign}\ \underbrace{0101101111111}_{\text{combination field}}\ \underbrace{00110000011010111010110100111011001111111010111011}_{\text{trailing significand field}}$$

② لنبحث في تمثيل العدد $x = 3.141592653589793$ وفق النمط العشري decimal64 باستخدام الترميز الإثناني للدليل.

- حقل الإشارة وضوحاً قيمته $S = 0$.
- لدينا هنا

$$x = 3.141592653589793 \times 10^{0} = 3141592653589793 \times 10^{-15}$$

أي أنّ الأس الكوانتي يساوي $e - p + 1 = -15$ ومن ثمّ يكون الأس المنحاز $E = e - p + 1 + b = 383$ وتمثيله الإثناني 0101111111. نعيّن التمثيل الإثناني للدليل 3141592653589793:

$$10\underbrace{1100101001010000110000101000100101011011010010000 1}_{\text{t = 50 bits (trailing significand)}}$$

نلاحظ هنا أنّ التمثيل الإثناني للدليل يتكوّن من $52\,\text{bits}$ وهذا يعني أننا في الحالة التي يكون فيها:

$$E = \underbrace{G_0 G_1 \cdots G_{w+1}}_{\text{binary}} \quad , \quad C = \underbrace{G_{w+2} G_{w+3} G_{w+4} T_0 T_1 \cdots T_{10J-1}}_{\text{binary}}$$

ومن ثمّ، تكون صيغة تمثيل العدد x وفق النمط العشري decimal64 باستخدام الترميز الإثناني للدليل مكوّنة من:

$$\begin{cases} S = 0 \\ G = 0101111111010 \\ T = 1100101001010000110000101000100101011011010010000 1 \end{cases}$$

③ لنبحث في تعيين قيمة عدد النقطة العائمة x من النمط decimal32 والممثّل بالصيغة التالية والتي نفترض أنّها تستخدم الترميز العشري للدليل:

1	11101101101	01101001101111000011
S	G(11 bits)	T(20 bits)

- حقل الإشارة قيمته $S = 1$ وهذا يعني أنّ $x \leq 0$.
- بما أنّ $G_3 = 0$ فإنّ قيمة العدد x ليست اللانهاية أو NaN.

- لدينا أيضاً $G_0G_1G_2G_3 = 1110$ أيْ أنّ العدد x – في هذه الحالة – يكتب بالشكل:

$$(-1)^S \times 10^{G_2G_3G_5\cdots G_{10}-b} \times (8+G_4)C_1C_2\cdots C_6$$

حيث $b = 101$. نلاحظ هنا أنّ $G_4 = 1$ ومن ثمّ $C_0 = 9$، وباستخدام التطبيق φ في تعيين الثلاثيات العشريّة $C_1C_2C_3$ و $C_4C_5C_6$ انطلاقاً من التركيبات الإثنانيّة $T_0\dots T_9$ و $T_{10}\dots T_{19}$ نجد:

$$C_1C_2C_3 = 326, \quad C_4C_5C_6 = 743$$

بالنسبة للأس، لدينا

$$\left(G_2G_3G_5\cdots G_{10}\right)_2 = 10101101_2 = 173_{10}$$

ومن ثمّ

$$x = -9326743 \times 10^{173-101} = -9.326743 \times 10^{78}$$

④ لنبحث في تعيين قيمة عدد النقطة العائمة x من النمط decimal32 والممثّل بالصيغة التالية والتي نفترض أنّها تستخدم الترميز الإثناني للدليل:

1	11101101101	01101001101111000011
S	G(11 bits)	T(20 bits)

- حقل الإشارة قيمته $S = 1$ وهذا يعني أنّ $x \leq 0$.
- بما أنّ $G_3 = 0$ فإنّ قيمة العدد x ليست اللانهاية أو NaN.
- لدينا أيضاً $G_0G_1G_2G_3 = 1110$ أيْ أنّ مكوّنات العدد x – في هذه الحالة – هي:

$$\begin{aligned} E &= G_2G_3\cdots G_9 = 10110110_2 = 182_{10} \\ E-b &= 182-101 = 81 \\ C &= \left(100G_{10}T_0T_1\cdots T_{10J-1}\right)_2 \\ &= 10010110100110111100011_2 \\ &= 9870275_{10} \end{aligned}$$

أيْ أنّ

$$x = -9870275 \times 10^{81} = -9.870275 \times 10^{87}$$

3.2. وسطاء تعريف أنماط تمثيل الأعداد في نظام IEEE المعياري

تتطلب عمليّة تبادل المعطيات العددية بين مختلف الأجهزة الرقمية تحديداً دقيقاً لصيغ تمثيل الأعداد في المعطيات:

أساس التمثيل β، دقّة التمثيل p ومجال تغيّر الأس $e_{\max}$ بالإضافة إلى تحديد قياس صيغة التمثيل بالنقطة العائمة.

يعرّف معيار "IEEE $754-2008$" أنماطاً تبادليّة إثنانيّة من القياس 16، 32، 64 و $128\,\text{bits}$. كما يعرّف بشكلٍ عام، أنماطاً تبادليّة إثنانيّة قياساتها k أكبر أو تساوي $128\,\text{bits}$ ومن مضاعفات 32. كما يعرّف أنماطاً تبادليّة عشريّة قياساتها من مضاعفات $32\,\text{bits}$.

يبيّن الجدول التالي وسطاء تعريف الأنماط التبادليّة الإثنانيّة:

binary{k} $k \geq 128$	**binary** 128	**binary** 64	**binary** 32	**binary** 16	**الوسيط**
مضاعفات 32	128	64	32	16	k
$k - \text{round}(4\log_2 k) + 13$	113	53	24	11	p
$2^{k-p-1} - 1$	16383	1023	127	15	$e_{\max}$
وسطاء التمثيل					
$e_{\max}$	16383	1023	127	15	b
$\text{round}(4\log_2 k) - 13$	15	11	8	5	w
$k - w - 1$	112	52	23	10	t

يشمل الجدول التالي وسطاء تعريف الأنماط التبادليّة العشريّة:

decimal {k} $k \geq 32$	**decimal** 128	**decimal** 64	**decimal** 32	**الوسيط**
مضاعفات 32	128	64	32	k
$9 \times k \;/\; 32 - 2$	34	16	7	p
$3 \times 2^{k/16+3}$	6144	384	96	$e_{\max}$

وسطاء التمثيل				
$e_{\max} + p - 2$	9176	398	101	b
$k \,/\, 16 + 9$	17	13	11	$w + 5$
$15 \times k \,/\, 16 - 10$	110	50	20	t

على سبيل المثال، لدينا في حالتي النمط binary256 و decimal256 القيم:

binary256: $p = 237$ ، $e_{\max} = 262143$ ، $b = 262143$
$w = 19$ و $t = 236$.

decimal256: $p = 70$ ، $e_{\max} = 1572864$ ، $b = 1572932$
$w = 20$ و $t = 230$.

4.2. تدوير الأعداد في نظام IEEE المعياري

يحسب ناتج أيّ عمليّة حسابيّة – في نظام IEEE المعياري – بدّقة ومن ثمّ يجري تدوير الناتج (أي اختيار ممثّل له من بين أعداد الآلة). بوجهٍ عام، يقصد بعمليّة تدوير عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ اختيار أقرب أعداد الآلة إليه Round toward nearest. يتطلّب نظام IEEE المعياري تعريف ثلاثة أنماط أخرى من عمليات التدوير:

- التدوير باتجاه الصفر Round toward 0،
- التدوير باتجاه الـ $+\infty$ Round toward،
- التدوير باتجاه الـ $-\infty$ Round toward.

يشتمل نظام IEEE المعياري على مجموعة من المؤشرات التي تدلّ على الحالات الاستثنائيّة في الحساب العددي منها:

- ظاهرة نقص الأسْ underflow،
- ظاهرة زيادة الأسْ overflow،
- القسمة على الصفر division by zero،
- العمليات الحسابيّة الخاطئة invalid operation.

بما أنّ تدوير الأعداد يدخل في صميم الحساب بالنقطة العائمة فإنّه من المهمّ لنا إيجاد طريقة لقياس خطأ التدوير عند تنفيذ عمليّة حسابيّة ما. فعلى سبيل المثال، عندما نستخدم نظام تمثيل فيه $\beta = 10$، $p = 3$ وكانت نتيجة عمليّة حسابيّة ممثّلة بهذا النظام 3.12×10^{-2} وكان الناتج عندما نجري العمليّة بدقّة لا نهائيّة مساوياً 0.0314، يكون من الواضح أنّ هناك خطأً بمقدار وحدتين من مرتبة آخر رقم (هنا 10^{-4}) من أرقام تمثيل الناتج بهذا النظام. بشكلٍ مشابه، يمثّل العدد الحقيقي 0.0314159 في هذا النظام بالعدد 3.14×10^{-2} وعندها يكون خطأ التمثيل مساوياً 0.159 وحدة من مرتبة آخر رقم (هنا 10^{-4}).

وبوجهٍ عام، إذا كان $d_0.d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e$ التمثيل بالنقطة العائمة للعدد الحقيقي x فإنّ الخطأ المرتكب في هذا التمثيل يساوي

$$\left| d_0.d_1 \dots d_{p-1} - x \,/\, \beta^e \right| \cdot \beta^{p-1}$$

وحدةً من مرتبة آخر رقم (هنا $\beta^{e-(p-1)}$).

يستعمل عادةً مصطلح وحدة آخر رقم unit in the last place واختصاراً *ulp* وهذا ما رأيناه سابقاً تحت اسم كوانتوم تمثيل العدد، أي أنّ

$$ulp(\pm d_0 \cdot d_1 d_2 \cdots d_{p-1} \times \beta^e) = \beta^{e-(p-1)}$$

فمثلاً، في نظام التمثيل المبيّن بالشكل 1 لدينا:

$$ulp\,(1.11 \times 2^{-1}) = 2^{-1-2} = 1/8 \quad , \quad ulp\,(1.00 \times 2^0) = 2^{-2} = 1/4$$
$$ulp\,(1.10 \times 2^1) = 2^{1-2} = 1/2 \quad , \quad ulp\,(1.01 \times 2^2) = 2^{2-2} = 1$$

4.2. الحالات الخاصّة في نظام IEEE المعياري

- **القيمة NaN**

جرت العادة عند حساب النسبة $0/0$ أو المقدار $\sqrt{-1}$ أنْ يوقف الحساب بخطأ غير قابل للمعالجة unrecoverable error. لكن، هناك العديد من الحالات التي يكون فيها متابعة الحساب مفيداً. يمكن تجنّب هذه المشكلة بتعريف قيمة خاصّة تسمّى NaN وجَعْلِ ناتج كلّ من العمليّتين $0/0$ و $\sqrt{-1}$ مساوياً NaN بدلاً من التوقّف.

يلخّص الجدول التالي عدداً من الحالات التي يكون الناتج فيها NaN:

Operation	NaN *Produced By*
$+$	$\infty + (-\infty)$
$\times$	$0 \times \infty$
$/$	$0 \,/\, 0 \;,\; \infty \,/\, \infty$
$\sqrt{}$	$\sqrt{x},\ when\ x < 0$

- **القيمة ∞ أو اللانهاية**

يسمح تعريف القيمة ∞ بمتابعة الحساب عند حدوث زيادة في الأسْ overflow. يعدّ هذا الخيار أفضل من إرجاع القيمة الموافقة لأكبر عدد قابل للتمثيل. فمثلاً على سبيل المثال، عند حساب قيمة المقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ في نظام تمثيل للأعداد فيه

$$\beta = 10, \quad p = 3, \quad e_{\max} = 98$$

فإذا كان $x = 3 \times 10^{70}$ و $y = 4 \times 10^{70}$ فإنّ حساب قيمة x^2 سوف تُحْدِث زيادةً في الأسْ ولنفترض أنّ الناتج قد استبدل بالقيمة العظمى في هذا النظام وهي 9.99×10^{98}. بوجهٍ مشابه تحدث زيادةً في الأسْ عند حساب y^2. وكذلك تحدث زيادةً في الأسْ عند حساب المجموع $x^2 + y^2$ ومن ثمّ يكون الناتج أيضاً 9.99×10^{98}. وأخيراً، تكون نتيجة حساب المقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ مساويةً

$$\sqrt{9.99 \times 10^{98}} = 3.16 \times 10^{49}$$

من الواضح أنّ الخطأ في هذه النتيجة فظيعٌ جداً !!! والجواب الصحيح هو وضوحاً 5.00×10^{70}.

في نظام IEEE الحسابي تكون نتيجة حساب x^2 مساويةً للقيمة ∞ وكذلك الأمر بالنسبة لنتيجة حساب y^2 و $\sqrt{x^2 + y^2}$. ومن ثمّ تكون النتيجة النهائيّة ∞. من الواضح أنّ إعطاء هذه القيمة لنتيجة الحساب آمن من سابقتها. من الأمثلة على الحالات التي يكون الناتج فيها مساوياً ∞ ما يلي:

$$1 \,/\, 0 = \infty, \quad -1 \,/\, 0 = -\infty, \quad \sqrt{\infty} = \infty$$

- **الصفر مع الإشارة ± 0**

هناك تمثيلان - في نظام IEEE - للصفر $+0$ و -0. في مثل هذا الوضع يجب الحذر من طريقة التعامل مع هذا التمثيل، فمثلاً اختبار المقارنة $if\,(x = 0)$ يعتمد على إشارة x ولا يمكن في هذه الحالة إعطاء نتيجة دون وضع قاعدة توضّح العلاقة بين تمثيلي الصفر. فنظام IEEE المعياري يعرّف المقارنة بحيث يكون $-0 = +0$ بدلاً من $-0 < +0$.

من جهةٍ أخرى، يمكن للمرء أنْ يفكّر بإهمال الإشارة عند تمثيل الصفر، ولكنّ هذا أيضاً ينطوي على إشكالات، ونظام IEEE المعياري لا يفعل ذلك، لأنّ إشارة الصفر تفيد في تحديد إشارة ناتج حساب المقادير العدديّة. فمثلاً، تبطل صلاحيّة المطابقة $1 / (1 / x) = x$ عندما $x = \pm\infty$. والسبب في ذلك يعود إلى كون ناتج كلّ من $1 / -\infty$ و $1 / +\infty$ هو الصفر وناتج $1 / 0$ هو $+\infty$. وبذا تضيع معلومة إشارة الناتج.

لنتأمّل مثالاً آخر على فائدة إشارة الصفر في حالة نقص الأسْ underflow والتوابع التي لها انقطاعٌ عند الصفر مثل التابع اللوغاريتمي $\log$. في نظام IEEE المعياري، يعرّف $\log 0 = -\infty$ و $\log x = \mathrm{NaN}$ عندما $x < 0$. لنفترض x يمثّل عدداً سالباً صغيراً بما يكفي ليحدث نقصاً في الأسْ فيدوّر إلى الصفر. عندها ولحسن الحظ أنّ إشارة x سالبة ويكون ناتج حساب قيمة تابع اللوغاريتم NaN.

- **الأعداد تحت النظاميّة Subnormal**

لننظر في حالة العددين $x = 6.87 \times 10^{-97}$ و $y = 6.81 \times 10^{-97}$ في نظام تمثيل بالنقطة العائمة وسطاؤه: $\beta = 10$، $p = 3$ و $e_{\min} = -98$. من الواضح أنّ هذين العددين نظاميّان تماماً، وكلّ منهما يكبر أصغر الأعداد النظاميّة الممثّلة بهذا النظام 1.00×10^{-98}. مع ذلك، نلاحظ وجود ظاهرة غريبة تتعلّق بهذين العددين وهي أنّ الفرق بينهما يساوي الصفر في حين أنّ $x \neq y$. والسبب في ذلك يعود إلى كون $x - y = 0.06 \times 10^{-97} = 6.0 \times 10^{-99}$ وهذا الفرق يمثّل عدداً صغيراً لا يمكن تمثيله بعددٍ نظامي normal number ولهذا يدوّر هذا الفرق إلى الصفر. يتبيّن من ذلك أهميّة أنْ يحافظ نظام التمثيل على صحّة الخاصّة التالية:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \tag{3}$$

يضمن نظام التمثيل المعياري "IEEE 754 – 2008" الخاصّة (3) إضافةً إلى العديد من الخواص الأخرى من خلال توسيع مجموعة الأعداد النظاميّة الممثّلة بهذا النظام لتشمل أعداداً واقعة بين الصفر وأصغر الأعداد النظاميّة. أطلق على هذه الأعداد اسم "أعداد تحت نظاميّة" subnormal numbers.

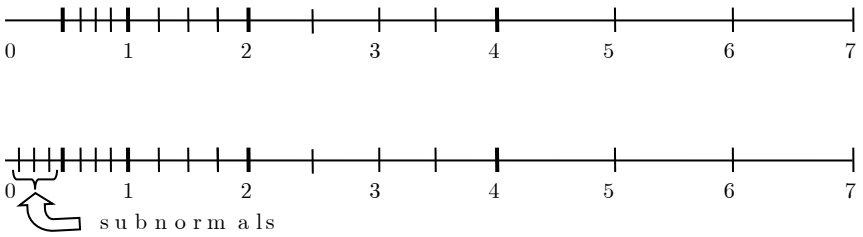
مثال: في حالة نظام تمثيل بالنقطة العائمة القياسيّة وسطاؤه $\beta = 2$، $p = 3$، $e_{\min} = -1$ و $e_{\max} = 2$ يكون لدينا (انظر الشكل 5):

- مجموعة الأعداد النظاميّة: وتشمل

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=-1}^{2} \left\{1.00 \times 2^i,\ 1.01 \times 2^i,\ 1.10 \times 2^i,\ 1.11 \times 2^i\right\}$$

- مجموعة الأعداد تحت النظاميّة وهي

$$\mathcal{S} = \left\{\ 0.01 \times 2^{-1},\ 0.10 \times 2^{-1},\ 0.11 \times 2^{-1}\right\}$$



الشكل 5: الأعداد النظاميّة والأعداد تحت النظاميّة.

3. الأخطاء من وجهة النظر العدديّة

تعدّ دراسة الخطأ موضوعاً جوهريّاً في التحليل العددي، ذلك أنّ معظم الطرائق العددية توفّر حلولاً تقريبيّة للحل المنشود، ومن المهم هنا أن نستطيع تقدير الخطأ الناشئ عن اعتماد هذه الحلول، وأن نحصره ضمن حدودٍ معيّنة. نصنّف في هذه الفقرة الأخطاء المتعلّقة بمسألة معيّنة، كما نقدّم عرضاً موجزاً لنتائج أوليّة تتعلق بانتشار الأخطاء في أنواع مختلفةٍ من الحسابات العددية.

نعرّف خطأ التقريب لعددٍ ما بأنّه الفرق بين قيمته الحقيقيّة x_T والقيمة التقريبيّة x_A، ونضع

$$\mathrm{Err}\,(x_A) = x_T - x_A \tag{4}$$

وفي حالة $x_T \neq 0$ نعرّف الخطأ النسبي بالعلاقة

$$\text{Rel}(x_A) = \frac{x_T - x_A}{x_T} \tag{5}$$

مثال: إذا كان

$$x_T = e = 2.7182818\cdots \quad , \quad x_A = \frac{19}{7} = 2.7142857\cdots$$

فإنَّ

$$\text{Err}(x_A) = 0.03996\cdots \quad , \quad \text{Rel}(x_A) = 0.00147\cdots$$

1.3 مصادر الأخطاء

تصنّف الأخطاء تبعاً لمصدرها كما يلي:

- **أولاً: أخطاء ناجمة عن النمذجة الرياضيّاتيّة للمسائل الفيزيائيّة:**

يعدّ النموذج الرياضياتي لظاهرةٍ فيزيائية محاولةً لإبراز علاقةٍ بين بعض المقادير الفيزيائيّة المتعلّقة بهذه الظاهرة. وبسبب تعقيد الواقع الفيزيائي، نعمد إلى استخدام فرضيّات تبسيطيّة، بغية الحصول على نموذج رياضياتي بسيط يحكم الظاهرة الفيزيائيّة. وبحكم التبسيط فإنّ النموذج الرياضيّاتي الموضوع سيكون محدود الدقّة، وقد تكون هذه المحدوديّة في بعض الحالات عائقاً دون الاستفادة منه، وقد يعطي النموذج نتائج مقبولة في حالاتٍ أخرى، وهذا يتعلّق باستخدامات النموذج. وفي الحالة التي يكون فيها النموذج غير دقيق فإنّ الحلَّ العددي للنموذج لا يمكنه أن يمحو أو يقلل من آثار نقص الدقّة في النموذج.

- **ثانياً: أخطاء ناجمة عن عدم الدقّة في المعطيات الفيزيائيّة:**

تشتمل معظم المعطيات في المسائل الفيزيائيّة على أخطاء، وهذا ما يؤثّر في دقّة الحسابات التي تُجرى على هذه المعطيات، ومن ثمَّ تحدّ من دقّة النتائج التي نحصل عليها.

- **ثالثاً: أخطاء ناجمة عن تدوير الأعداد:**

إنّ تمثيل الأعداد في الأنظمة الحاسوبيّة بعدد محدود من الأرقام، يجعل عمليّة تقريب الأعداد الحقيقيّة بأعداد الآلة أمراً لا بدَّ منه، للتمكّن من تمثيل الأعداد والتعامل معها في الحسابات. إنّ دقّة التقريب في تمثيل الأعداد في النظام الحاسوبي، تتعلّق كما رأينا بالمواصفات التي يتسم بها النظام الحاسوبي للتعامل مع الأعداد. في حالة التمثيل بالنقطة العائمة، رأينا أنّ الدقّة في التمثيل تتعلّق بعدد الأرقام p

المستخدمة في التعبير عن الجزء الكسري وبطبيعة الحال بأساس نظام التمثيل β المستخدم. نرمز لعمليّة تمثيل عدد حقيقي بالتطبيق $fl : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ حيث تمثّل $\mathcal{A}$ مجموعة الأعداد القابلة للتمثيل في النظام الحاسوبي، ونعرّف دقة الآلة بأنّها العدد

$$eps = \inf\{\varepsilon > 0 : fl(1+\varepsilon) > 1\}$$

والذي نثبت بسهولة أنّه يساوي

$$eps = \frac{\beta}{2}\beta^{-p}$$

وأنّه يمثّل حداً أعلى للخطأ النسبي في تمثيل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq eps$$

فمثلاً في حالة التمثيل وفق النمط binary32 يكون $eps = 2^{-24} \simeq 5.96 \times 10^{-8}$، وفي حالة النمط binary64 يكون $eps = 2^{-53} \simeq 1.11 \times 10^{-16}$ وفي حالة النمط decimal32 يكون $eps = 5 \times 10^{-7}$ وفي حالة النمط decimal64 يكون $eps = 5 \times 10^{-16}$.

2.3 انتشار الأخطاء

ندرس في هذه الفقرة، الآثار الناجمة عن العمليّات الحسابيّة على أعدادٍ تشوبها أخطاء. لهذا نرمز بـ ω إلى عمليّة حسابيّة أساسيّة مثل $+$، $-$، $\times$، $/$ ونرمز بـ ω^* إلى العمليّة الحسابيّة المقابلة في النظام الحاسوبي، والتي غالباً ما تتضمّن عمليّة تدوير rounding ليكون الناتج أحد أعداد النظام.

ليكن x_A و y_A العددين اللذين ستجرى عليهما العمليّة الحسابيّة، ونفترض أنّهما مشوبان بخطأ مقداره ε و η على الترتيب، أي أنّ القيم الحقيقية هي:

$$x_T = x_A + \varepsilon \quad , \quad y_T = y_A + \eta$$

عندها يكون $x_A \cdot \omega^* \cdot y_A$ هو العدد الناتج من إجراء العمليّة ω^*، ويكون الخطأ المرتكب:

$$x_T \cdot \omega \cdot y_T - x_A \cdot \omega^* \cdot y_A = \left(x_T \cdot \omega \cdot y_T - x_A \cdot \omega \cdot y_A\right) + \left(x_A \cdot \omega \cdot y_A - x_A \cdot \omega^* \cdot y_A\right) \tag{6}$$

نسمّي المقدار

$$(x_T \cdot \omega \cdot y_T - x_A \cdot \omega \cdot y_A)$$

خطأ الانتشار وبالمثل نسمّي المقدار

$$(x_A \cdot \omega \cdot y_A - x_A \cdot \omega^* \cdot y_A)$$

خطأ التدوير وفيما يخصّ خطأ التدوير فإنّه غالباً ما يكون:

$$x_A \cdot \omega^* \cdot y_A = fl(x_A \cdot \omega \cdot y_A) \tag{7}$$

وهذا يعني أنّ المقدار $x_A \cdot \omega \cdot y_A$ يحسب تماماً ومن ثَمَّ يجري تمثيل الناتج. نلاحظ هنا أنّ خطأ التدوير يحقق المتراجحة:

$$\frac{\left|x_A \cdot \omega \cdot y_A - x_A \cdot \omega^* \cdot y_A\right|}{\left|x_A \cdot \omega \cdot y_A\right|} \leq \frac{\beta}{2} \cdot \beta^{-p} \tag{8}$$

لنتفحّص انتشار الأخطاء في الحالات الخاصّة التالية:

☒ حالة عمليّة الضرب

$$\begin{aligned} x_T \cdot y_T - x_A \cdot y_A &= x_T \cdot y_T - (x_T - \varepsilon) \cdot (y_T - \eta) \\ &= x_T \cdot \eta + y_T \cdot \varepsilon - \varepsilon \cdot \eta \end{aligned}$$

ويكون الخطأ النسبي:

$$\mathrm{Rel}(x_A \cdot y_A) = \frac{x_T y_T - x_A y_A}{x_T y_T} = \frac{\eta}{y_T} + \frac{\varepsilon}{x_T} - \frac{\varepsilon}{x_T} \cdot \frac{\eta}{y_T}$$

ومنه

$$\mathrm{Rel}(x_A \cdot y_A) = \mathrm{Rel}(x_A) + \mathrm{Rel}(y_A) - \mathrm{Rel}(x_A) \cdot \mathrm{Rel}(y_A) \tag{9}$$

وفي حالة كون $\left|\mathrm{Rel}(x_A)\right| \ll 1$ و $\left|\mathrm{Rel}(y_A)\right| \ll 1$ يكون

$$\mathrm{Rel}(x_A \cdot y_A) \simeq \mathrm{Rel}(x_A) + \mathrm{Rel}(y_A) \tag{10}$$

الرمز $\ll$ يعني "أصغر بكثير من".

☒ حالة عمليّة القسمة

بطريقةٍ مشابهةٍ للحالة السابقة نحصل على:

$$\mathrm{Rel}\,(x_A \,/\, y_A) = \frac{\mathrm{Rel}\,(x_A) - \mathrm{Rel}\,(y_A)}{1 - \mathrm{Rel}\,(y_A)} \tag{11}$$

عندما يكون $\left|\mathrm{Rel}\,(y_A)\right| \ll 1$ فإنّ

$$\mathrm{Rel}\,(x_A \,/\, y_A) \simeq \mathrm{Rel}\,(x_A) - \mathrm{Rel}\,(y_A) \tag{12}$$

نلاحظ في عمليّتي الضرب والقسمة، أنّ الأخطاء النسبيّة لا تنتشر بسرعة.

☒ حالة عمليّتي الجمع والطرح

لدينا هنا

$$(x_T \pm y_T) - (x_A \pm y_A) = (x_T - x_A) \pm (y_T - y_A) = \varepsilon \pm \eta$$

ومنه

$$\mathrm{Err}\,(x_A \pm y_A) = \mathrm{Err}\,(x_A) \pm \mathrm{Err}\,(y_A) \tag{13}$$

☒ حالة حساب القيمة العدديّة لتابع

لتكن $f(x_A)$ القيمة التقريبيّة لقيمة التابع $f(x_T)$ عند النقطة x_T . باستخدام مبرهنة القيمة المتوسّطة نكتب

$$f(x_T) - f(x_A) \simeq f'(x) \cdot (x_T - x_A) \tag{14}$$

وذلك بفَرْض أنّ x_A و x_T عددان قريبان نسبياً وأنّ المشتق $f'(x)$ لا يتغيَّر كثيراً في المجال المحدد بالعددين x_A و x_T ، فعلى سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\sin\big(\pi \,/\, 5\big) - \sin\big(0.628\big) &\simeq \cos(\pi \,/\, 5) \cdot (\pi \,/\, 5 - 0.628)\\ &\simeq 0.00026\end{aligned}$$

وهذا تقريبٌ ممتاز.

☒ حالة حساب مجموع

لندرس حساب مجموع من النمط

$$S = \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{15}$$

باستخدام نظامٍ حاسوبي تمثّل فيه الأعداد $x_1,\ldots,x_m$ مجموعة من أعداد الآلة. نعرّف

$$S_2 = fl(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)\cdot(1+\varepsilon_2)$$

حيث $\left|\varepsilon_2\right| \le \beta^{1-p} \,/\, 2$. نعرّف بالتدريج، المجموع

$$S_{r+1} = fl(S_r + x_{r+1}) \;, \qquad 1 \le r \le m-1$$

عندها يكون

$$S_{r+1} = (S_r + x_{r+1})\cdot(1+\varepsilon_{r+1}) \;,\; \left|\varepsilon_{r+1}\right| \le \beta^{1-p} \,/\, 2$$

ونحصل أخيراً على

$$\begin{aligned}
S_2 - (x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)\cdot\varepsilon_2 \\
S_3 - (x_1 + x_2 + x_3) &= (x_1 + x_2)\cdot\varepsilon_2 + \\
&\quad (x_1 + x_2)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_3 + x_3\cdot\varepsilon_3 \\
&\simeq (x_1 + x_2)\cdot\varepsilon_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\cdot\varepsilon_3 \\
S_4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\simeq (x_1 + x_2)\cdot\varepsilon_2 + \\
&\quad (x_1 + x_2 + x_3)\cdot\varepsilon_3 + \\
&\quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\cdot\varepsilon_4
\end{aligned}$$

ومن ثَمَّ، فإنّ

$$\begin{aligned}
S_m - \sum_{i=1}^{m} x_i &\simeq (x_1 + x_2)\cdot\varepsilon_2 + \cdots + (x_1 + \cdots + x_m)\cdot\varepsilon_m \\
&= x_1\cdot(\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m) + x_2\cdot(\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m) + \\
&\quad x_3\cdot(\varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_m) + \cdots + x_m\cdot\varepsilon_m
\end{aligned} \tag{16}$$

من هذه العلاقة نستنتج أنّ أفضل استراتيجيّة لجمع الأعداد هي أن يجري الجمع من الأصغر إلى الأكبر.

☒ تأثير المعطيات غير الدقيقة

إنّ المعطيات ذات المصدر التجريبي (ناجمة عن قياسات فيزيائيّة) غالباً ما تكون ذات دقّة محدودة، لنقل إنّها مقاديرٌ مقيسةٌ بدقّة r رقماً. إنّ الأخطاء المرتكبة في القياس (نتيجة نقص الدقّة في أجهزة القياس) سوف تنتشر بالحسابات التي تجرى على هذه المعطيات، ومن ثَمَّ تتسبب في الحصول على نتائج حسابيّة لها عددٌ من أرقام الدقَّةِ يَقلُّ عن r رقماً.

فمثلاً، لننظر في مسألة حساب المجموع

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i$$

الأعداد x_i و y_i تقع في المجال $[0.1,1]$ وتتمتع بدقّة r رقماً. باستخدام الحسابات العشريّة $(\beta = 10)$، نحسب المجموع بطريقتين ونحلل الخطأ في الحالتين تمثّل X_i و Y_i القيم الأصليّة:

$$X_i = x_i + \varepsilon_i\,, \quad Y_i = y_i + \eta_i\,, \qquad \big|\varepsilon_i\big| \le 5\times 10^{-r}, \quad \big|\eta_i\big| \le 5\times 10^{-r}$$

حالة أولى: نكوّن الجداء $x_i \cdot y_i$ وندوّر إلى r رقماً ثُمَّ نجمع. إنّ الخطأ المرتكب في المجموع هو:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^{m} X_iY_i - \text{Computed value of}\left(\sum_{i=1}^{m} x_iy_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X_iY_i - \sum_{i=1}^{m}\big[(X_i-\varepsilon_i)\cdot(Y_i-\eta_i)+\gamma_i\big] \end{aligned}$$

حيث $\big|\gamma_i\big| \le 5\times 10^{-r}$، γ_i هو خطأ التدوير في الجداء $x_i \cdot y_i$. لدينا في هذه الحالة:

$$E_1 \simeq \sum_{i=1}^{m}\big[\varepsilon_i \cdot Y_i + \eta_i \cdot X_i - \gamma_i\big]$$

ومنه نجد

$$\big|E_1\big| \le 3m\left(5\times 10^{-r}\right) \tag{17}$$

حالة ثانية: نكوّن الجداءات $\big(x_i \cdot y_i\big)_{1\le i\le m}$ بدقّة $2r$ ونجري عمليّة جمعها محتفظين بكلّ أرقام الدقّة. ثُمَّ نقوم بتدوير ناتج الجمع الأخير إلى r رقماً. عندها يعطى الخطأ المرتكب في هذه الحالة

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{i=1}^{m} X_iY_i - \text{Computed value of}\left(\sum_{i=1}^{m} x_iy_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X_iY_i - \left\{\sum_{i=1}^{m}\big[(X_i-\varepsilon_i)\cdot(Y_i-\eta_i)\big]+\gamma\right\} \\ &\simeq \sum_{i=1}^{m}\big[\varepsilon_i \cdot X_i + \eta_i \cdot Y_i\big]_i - \gamma \end{aligned}$$

حيث $|\gamma| \leq 5 \times 10^{-r}$. ومنه نستنتج

$$|E_2| \leq (2m+1)\left(5 \times 10^{-r}\right) \tag{18}$$

من الواضح أنّ تحديد الخطأ في المتراجحة (18) أفضل مما هو عليه في المتراجحة (17). إنّ الخطأ E_2 ناتجٌ من انتشار أخطاء المعطيات الأصليّة ؛ في حين يشمل E_1، إضافةً إلى ذلك أخطاء تدوير النتائج المرحليّة إلى r رقماً. ومن ثَمَّ تَتَبيّن أهميّة إجراء الحسابات بدقّةٍ تتجاوز الـ r رقماً لتجنّب حدوث انتشار أوسع للأخطاء.

4. مفهوم الاستقرار في التحليل العددي

تتأثر حلول العديد من المسائل الرياضيّة بدرجةٍ ملحوظة ببعض الأخطاء الحسابيّة مثل أخطاء التدوير. ولكي نستطيع دراسة وتحليل مثل هذه الظواهر، نشرح مفهوم "الاستقرار" Stability ومفهوم "الحساسيّة" Sensitivity. إنّ حساسيّة مسألة ما مرتبطةٌ إلى حدٍّ بعيد بالدقّة العظمى التي يمكننا الوصول إليها في حلّ هذه المسألة عندما نستخدم نظام تمثيل منتهٍ للأعداد ونجري العمليّات الحسابيّة فيه لإيجاد الحل. نوسّع في مرحلةٍ لاحقة هذه المفاهيم لتشمل الطرائق العددية المستخدمة في حلّ المسائل الرياضيّة على أنواعها. وبوجهٍ عام، نعتمد الطرائق العدديّة التي لا تتمتّع بحساسيّة عالية للأخطاء الصغيرة التي قد تشوب معطيات المسألة، أو قد تنجم عن أخطاء تمثيل الأعداد وأخطاء التدوير عند إجراء الحسابات.

لتبسيط العرض، نقتصر في نقاشنا على دراسة المسائل التي لها شكل المعادلة:

$$F(x,d) = 0 \tag{19}$$

حيث يمثّل المتحوّل x مجهول المسألة الذي نودُّ تعيينه بحلّ هذه المعادلة، ويمثّل المتحوّل d المعطيات التي تتعلّق بها نتيجة الحل. ولتكن D مجموعة المعطيات d التي يكون عندها للمسألة (19) حلاً وحيداً.

يمكن أن تمثّل المعادلة (19) العديد من المسائل الرياضيّاتية: يمكن أن تكون معادلة تكامليّة أو معادلة تفاضليّة يمثّل فيها x التابع المجهول ويمثّل d تابعاً معطى أو قيماً محيطيّة معطاة.

نقول عن المسألة (19) إنّها مستقرّة Stable إذا كان الحلّ x موجود ووحيد ويتبع باستمرار المتحوّل d. بمعنى أنّه إذا كانت $\{d_n\}$ متتالية من القيم التي تقرّب قيمة d بمعنىً من المعاني، فإنّ متتالية الحلول الموافقة $\{x_n\}$ يجب أن تقرّب الحلَّ x على نحوٍ موافق. نسميّ أيضاً المسائل المستقرّة، مسائلَ جيّدة الطّرح well-posed problems كما نسميّ المسائل غير المستقرّة Unstable، مسائلَ سيّئة الطرح ill-posed problems.

أمثلة:

❶ لننظر في مسألة حل المعادلة الجبريّة

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\ ,\quad a \neq 0$$

المعطيات هنا هي الثلاثيّة $d = (a, b, c)$. نعلم أنّه في حالة تحقق الشرط $b^2 - 4ac \geq 0$ تقبل هذه المعادلة حلولاً حقيقيّة تعطى بالعلاقة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ومن الواضح أنّ هذين الحليّن مستمرّان بصفتهما تابعين للمتحولات a و b و c وهذا يعني أنّ المسألة مستقرّة.

❷ إنّ مسألة عدد الجذور الحقيقيّة $N(a)$ لكثير الحدود

$$p(x) = x^4 - (2a-1)x^2 + a(a-1),\quad a \in \mathbb{R}$$

غير مستقرّة، وذلك لأنّ التابع $N(a)$ غير مستمر بالنسبة للمتحول a حيث

$$N(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 2 & 0 \leq a < 1 \\ 3 & a = 1 \\ 4 & a > 1 \end{cases}$$

❸ لتكن المعادلة التكامليّة التالية:

$$\int_0^1 \frac{3\,x(t)\,dt}{5 - 4\cos\big(2\pi(s+t)\big)} = y(s)\ ,\quad 0 \leq s \leq 1 \tag{20}$$

إنّ هذه المسألة غير مستقرّة. لأنَّه إذا كان $x(s)$ حلاً للمعادلة (20) موافقاً لتابعٍ معطى $y(s)$ فعندئذٍ توجد متتالية من التشويشات $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$n \in \mathbb{N},\ \ \delta_n(s) = y_n(s) - y(s)$$

تحقق

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le s\le 1} \left|\delta_n(s)\right| = 0 \tag{21}$$

وتحقق متتالية الحلول الموافقة $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ الشرط:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \max_{0\le s\le 1} \left|x_n(s) - x(s)\right| = 1 \tag{22}$$

فعلى سبيل المثال، نعرّف $y_n(s) = y(s) + \delta_n(s)$ حيث

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \delta_n(s) = \frac{1}{2^n}\cos(2n\pi s)\ ,\qquad 0 \le s \le 1$$

ويكون في هذه الحالة

$$x_n(s) - x(s) = \cos(2n\pi s)$$

وهذا يحقق الشرط (22).

إذا كانت مسألة من النمط (19) غير مستقرّة فإنّ صعوبات جديّة ستواجهنا إذا ما حاولنا حلَّها. ومن غير الممكن عادةً أن نحلَّ مثل هذه المسائل من دون محاولتنا فهم جوانبَ عديدة تتعلّق بخصائص الحل. وهذا الجانب من المعالجة للمسائل غير المستقرّة هو مجال بحثٍ حثيث في الرياضيّات التطبيقيّة عموماً، وفي مسائل التحليل العددي خصوصاً.

في الواقع العملي، هناك العديد من المسائل المستقرّة بالمعنى الذي أوردناه آنفاً، ولكن تبقى هناك صعوبات وعوائق تنجم عن الحسابات العددية المتعلّقة بطرائق حلّ هذه المسائل. ولكي نستطيع التعامل مع هذه الصعوبات، نستخدم مفهوماً لقياس استقرار المسألة نسمّيه "عدد الحساسيّة" ويقابل هذه التسمية المصطلح اللاتيني Condition number.

نحاول بواسطة عدد الحساسيّة أن نقيس أسوأ آثار المسألة (19) في الحل x، عندما يتعرّض المتحول d لتشويش صغير $\delta d \neq 0$ بحيث يكون $d + \delta d \in D$. نفترض أنّ $x + \delta x$ هو حلّ المعادلة المشوّشة:

$$F(x+\delta x, d+\delta d)=0 \tag{23}$$

- في حالة $(d\neq 0 \wedge x\neq 0)$ نعرّف الحساسيّة النسبيّة عند d بالعلاقة:

$$\kappa_{rel}(d)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ \sup_{0<\|\delta d\|\leq\varepsilon}\ \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta d\|/\|d\|} \tag{24}$$

- في حالة $(d=0 \vee x=0)$ نعرّف الحساسيّة المطلقة عند d بالعلاقة:

$$\kappa_{abs}(d)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ \sup_{0<\|\delta d\|\leq\varepsilon}\ \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|}$$

نستخدم هنا الرمز $\|.\|$ لندلَّ على قياسٍ للمقدار الموضوع داخله. يحسب الحدّ الأعلى sup في العبارة (24) على مجموعة التشويشات الصغيرة $0<\|\delta d\|\leq\varepsilon$ والتي تكون عندها المسألة (23) ذات معنىً، أي قابلةً للحل. وبطبيعة الحال فإنّ المسائل غير المستقرّة تقودنا إلى $\kappa(d)=\infty$.

إنّ عدد الحساسيّة $\kappa(d)$ للمسألة (19) يقيس حساسيّة الحل x للتغيّرات في المعطيات d. فإذا كان $\kappa(d)$ كبيراً نسبيّاً فإنّ هذا يعني وجود تغيير نسبيّ δd في المعطيات d يحدث تغييراً نسبياً كبيراً δx في الحل x. ولكن إذا كان $\kappa(x)$ صغيراً ولنقل $\kappa(x)\leq 10$، عندها لا يكون للتغييرات النسبيّة الصغيرة في المعطيات δd الأثر الكبير في تغيّر الحل δx. فالتغيرات الصغيرة نسبيّاً في d تقودنا إلى تغيّرات صغيرة نسبيّاً في الحل x. ولمّا كانت الحسابات العدديّة يشوبها عادةً أخطاءٌ صغيرةٌ ناجمة عن التدوير وتقريب الأعداد، فإننا لا نرغب أن يكون عدد الحساسيّة لمسألةٍ نودّ حلَّها بالطرائق العدديّة كبيراً. إنّ مسألة كهذه نسميّها سيّئة الحساسيّة ill-conditioned (ذات حساسيّة عالية)، وتكون غالباً صعبة الحل بدقّة.

أمثلة:

❶ لنطرح مسألة إيجاد حل للمعادلة

$$x-a^d=0\ ,\ \ a>1 \tag{25}$$

ولنفترض أنّ δd تشويشٌ في المتحول $d\neq 0$، وفي هذه الحالة يكون:

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{a^{d+\delta d}-a^d}{a^d}=a^{\delta d}-1$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\sup_{0<\delta d\leq\varepsilon}\left|\frac{\delta x\,/\,x}{\delta d\,/\,d}\right|=\sup_{0<\delta d\leq\varepsilon}\left|\,d\,(a^{\delta d}-1)\,/\,\delta d\,\right|=\left|\,d\,(a^{\varepsilon}-1)\,/\,\varepsilon\,\right|$$

ومنه نجد

$$\kappa_{rel}\,(d)=\ln a\cdot\left|d\right|$$

نلاحظ هنا، أنّه عندما يكون المقدار $d=0$ فإنّ

$$\kappa_{abs}\,(d)=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\ \sup_{0<\|\delta d\|\leq\varepsilon}\left|\frac{a^{\delta d}-1}{\delta d}\right|=\ln a \tag{26}$$

❷ لتكن المعادلة

$$\begin{pmatrix}0.780 & 0.563\\ 0.913 & 0.659\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.217\\ 0.254\end{pmatrix}$$

والتي تكتب بالشكل

$$A\cdot x=b \tag{27}$$

هذه مسألة من النمط (19) معطياتها المصفوفة A والشعاع b. نبحث عن الحل x الذي يحقق الشرط (27). تتمتع هذه المسألة بحساسية عالية، فأيّ تغيير بسيط في المعطيات، أي عناصر المصفوفة A وعناصر الشعاع b ينتج عنه تغيير كبيرٌ في الحل. تقبل المعادلة (27) حلاً وحيداً هو $x=(1,-1)^{T}$.

إذا أجرينا تغييراً بسيطاً في عناصر الشعاع b وليكن

$$\Delta b=(10^{-3},-10^{-3})^{T}$$

حصلنا على المعادلة المشوشة

$$A\cdot\tilde{x}=b+\Delta b \tag{28}$$

تقبل هذه المعادلة حلاً هو

$$\tilde{x} = A^{-1} \cdot \tilde{b} = \begin{pmatrix} 659000 & -563000 \\ -913000 & 780000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.218 \\ 0.253 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1223 \\ -1694 \end{pmatrix}$$

نلاحظ هنا أنّ

$$\begin{aligned} \|\delta x\|_\infty &= 1693, \quad \|x\|_\infty = 1 \\ \|\delta b\|_\infty &= 10^{-3}, \quad \|b\|_\infty = 0.254 \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\frac{\|\delta x\|_\infty \,/\, \|x\|_\infty}{\|\delta b\|_\infty \,/\, \|b\|_\infty} = \frac{1693 \,/\, 1}{10^{-3} \,/\, 0.254} = 430,022$$

أيْ أنّ التغيّر النسبي في الشعاع b قد تضخّم $430,022$ مرّة. وهذا يبيّن السلوك الحسّاس جداً لهذه الجملة الخطيّة. من ناحيةٍثانية، لدينا

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \Big/ \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\|A^{-1} \cdot \delta b\|_\infty}{\|A^{-1} \cdot b\|_\infty} \frac{\|b\|_\infty}{\|\delta b\|_\infty}$$

ومنه يكون

$$\sup_{0<\|\delta b\| \leq \varepsilon} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \Big/ \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

أيْ أنّ

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{0<\|\delta b\|<\varepsilon} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \Big/ \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 1693 \times 10^3 \times \frac{0.254}{1}$$

ومن ثمّ

$$\kappa_{rel}(b) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{0<\|\delta b\| \leq \varepsilon} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \Big/ \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 430,022$$

وهذا يؤكّد الطبيعة الحساسة جداً للجملة الخطيّة.

5. استقرار الطرائق العددية

نقول عن طريقة عددية لحل مسألةٍ رياضيّة إنّها مستقرّة إذا كانت حساسيّة ناتجها العددي للمعطيات لا تزيد عن حساسيّة المسألة الأصليّة. يعالج المثال التالي مسألة حساب تكامل محدود بإتباع طرائق عددية، وبه نوضّح مفهوم الاستقرار هذا. ليكن

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n \in \mathbb{N} \tag{29}$$

إذا كان $n \geq 1$ فإنّ

$$\left(x^n e^{x-1}\right)' = n \cdot x^{n-1} e^{x-1} + x^n e^{x-1}$$

بمكاملة الطرفين على المجال $[0,1]$ نجد

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx = \left[x^n e^{x-1}\right]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

ومنه نحصل على علاقة التدريج

$$\begin{cases} E_0 = \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - e^{-1} \\ \\ E_n = 1 - n \cdot E_{n-1} \ , \ n \geq 1 \end{cases} \tag{30}$$

بتطبيق علاقة التدريج (30) يمكننا حساب قيمٍ تقريبيّة للمقادير E_n انطلاقاً من القيمة الابتدائية $E_0 \simeq 0.632121$ في نظام تمثيلٍ حاسوبي فيه $p = 6$ و $\beta = 10$ نحصل على النتائج المبيّنة في الجدول التالي:

$E_1 \simeq 0.367879$	$E_6 \simeq 0.127120$
$E_2 \simeq 0.264242$	$E_7 \simeq 0.110160$
$E_3 \simeq 0.207274$	$E_8 \simeq 0.118720$
$E_4 \simeq 0.170904$	$E_9 \simeq -0.068480 < 0$
$E_5 \simeq 0.145480$	

نلاحظ هنا أنّ القيمة العدديّة التي نحصل عليها بهذه الطريقة كقيمةٍ تقريبيّة للتكامل E_9 هي قيمة سالبة، في حين يجب أن يكون تكامل التابع x^9e^{x-1} على المجال $[0,1]$ موجباً، فما هو سبب هذه المشكلة؟

في الواقع، إذا أردنا تحليل ما حدث ومعرفة مصدر الخطأ الذي تسبب في هذه النتيجة، نحلل الأخطاء الحاصلة في النواتج العدديّة للتكاملات E_1 و E_2 و ⋯ و E_9 فنجد:

في حساب $E_1 = 1 - E_0 = e^{-1}$ نرتكب خطأ تقريب من مرتبة دقّة الآلة مقداره 4.412×10^{-7}. هذا الخطأ ينتشر في حساب E_2 ليصبح $(-2) \times 4.412 \times 10^{-7}$، وهكذا يكون خطأ التقريب الناتج في حساب E_9 من مرتبة

$$(-2)(-3)\cdots(-9) \times 4.412 \times 10^{-7} = 9! \times 4.412 \times 10^{-7} \simeq 0.1601$$

إنّ القيمة الدقيقة لـ E_9 في هذه الحالة (بدقّة ثلاثة أرقام) هي:

$$-0.06848 + 0.1601 = 0.0916$$

وهنا نطرح التساؤل عن وجود طريقة أخرى تحلّ مشكلة عدم الاستقرار هذا؟ في الواقع، إذا أعدنا كتابة علاقة التدريج (30) بالشكل:

$$E_{n-1} = \left(1 - E_n\right) / n, \quad n \geq 1 \tag{31}$$

وإذا كنّا نعرف قيمةً تقريبيّة لـ E_n فإن استخدام العلاقة (31) لحساب E_{n-1} يسمح لنا بالحصول على قيمةٍ تقريبيّة يتناقص فيها خطأ التقريب n مَرَّة عمّا هو عليه في E_n. لتكن $1 \ll n$، لدينا

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

نستنتج من ذلك أنّ $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

فعلى سبيل المثال، يمكننا عدُّ القيمة 0 تقريباً لـ E_{20} ونكون في هذه الحالة قد ارتكبنا خطأً لا يتجاوز $\frac{1}{21}$. وباستخدام العلاقة (31) يمكننا حساب قيمة تقريبيّة لـ E_{19} يكون الخطأ فيها محدوداً بالقيمة:

$$\frac{1}{20} \times \frac{1}{21} \simeq 0.0024$$

تسمح علاقة التدريج (31) تدريجيّاً، بإيجاد قيمةٍ تقريبيّةٍ لـ E_{15} بخطأٍ لا يتجاوز 4×10^{-8} وهذا الخطأ أقلّ من دقَّةِ الآلة التي نجري بها الحسابات (هنا $eps = 5\times10^{-6}$). باستخدام هذه الطريقة نحصل على القيم التقريبيّة التالية:

$E_{20} \simeq 0.0$	$E_{14} \simeq 0.0627322$
$E_{19} \simeq 0.0500000$	$E_{13} \simeq 0.0669477$
$E_{18} \simeq 0.0500000$	$E_{12} \simeq 0.0717733$
$E_{17} \simeq 0.0527778$	$E_{11} \simeq 0.0773523$
$E_{16} \simeq 0.0557190$	$E_{10} \simeq 0.0838771$
$E_{15} \simeq 0.0590176$	$E_{9} \simeq 0.0916123$

نلاحظ هنا أنّ تأثير الخطأ الابتدائي المرتكب في تقريب قيمة التكامل E_{20} قد اختفى نهائيّاً اعتباراً من الحد E_{15} ؛ وهذا يعود إلى استقرار هذه الطريقة، ومن ثَمَّ نكون قد حصلنا على قيمٍ تقريبيّة للتكاملات

$$E_9,\dots,E_{15}$$

بدقّةٍ تفوق دقّة الآلة التي نجري بها الحسابات، ومن هذا نستنتج أن جميع أرقام الجزء الكسري في تمثيل القيم $E_9,\dots,E_{15}$ هي أرقامٌ معنويّة significant digits باستثناء الرقم الأخير الذي يمكن أن يكون مدوَّراً.

6. مسائل وتمارين

1.6. يعتمد تمثيل النقطة العائمة القياسيّة في نظامٍ حاسوبي المواصفات

$$\beta = 10 \text{ ، } p = 3 \text{ ، } e_{\min} = -8 \text{ ، } e_{\max} = 9$$

كم يبلغ عدد الأعداد النظاميّة normal numbers في هذه النظام؟

2.6. ليكن نظام التمثيل بالنقطة العائمة المحدّد بالوسطاء $\beta = 10$ ، $p = 3$. ما هو الخطأ النسبي المرتكب في حساب ناتج العمليات الحسابيّة التالية:

$$(3.28\ 10^{-2}) \times^* (6.98\ 10^{3})$$
$$[(3.28\ 10^{-2}) \times^* (6.98\ 10^{3})]\ /^*\ (4.82\ 10^{-8})$$

إذا كان هذا النظام يعتمد التدوير إلى الأقرب في تمثيل النواتج.

3.6. بيّن أنّه إذا كان x عدداً حقيقياً صغيراً بالقدر الكافي فإنّ حساب القيمة العددية للمقدار

$$1 - \cos x$$

يكون مصحوباً بخطأٍ كبيرٍ ناجمٍ عن عمليّة الطرح. اقترح صيغة مكافئة لحساب هذه القيمة بحيث نتجنّب هذا الخطأ.

4.6. نعلم أنّ أحد جذور المعادلة $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ يعطى بالعلاقة

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(a) عيّن قيمة r_1 بأكبر دقّة ممكنة وذلك في حالة الأمثال $a = 1$ ، $b = 111.11$ و $c = 1.2121$.

(b) احسب قيمة هذا الجذر مستخدماً نظام تمثيل بخمسة أرقام $p = 5$. ما هو تعليقك على النتيجة؟

(c) اقترح صيغة مكافئة أكثر ملائمةً للحساب في نظام تمثيلٍ بخمسة أرقام.

5.6. نجد في الكتب التي تعرض جداول تكامليّة علاقة التدريج التالية

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x(a+x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2am(a+x^2)^m} + \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x(a+x^2)^m} \qquad (m \neq 0)$$

(a) نعرّف

$$f(m) = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x(a+x^2)^m}$$

استخدم علاقة التدريج السابقة في تعيين المقدار c_m الذي يحقق العلاقة

$$f(m+1) = c_m + \frac{1}{a} f(m) \tag{M}$$

(b) ادرس تجريبياً استقرار الطريقة (M).

6.6. لتكن المتتالية

$$a_0 = 11/2, \quad a_1 = 61/11$$
$$a_{n+1} = 111 - \frac{1130}{a_n} + \frac{3000}{a_n a_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

أولاً: ادرس التقارب النظري لهذه المتتالية بمساعدة أحد البرنامجين Mathematica أو Maple. ماذا تلاحظ؟

ثانياً: ادرس تجريبياً تقارب هذه المتتالية مستخدماً نظام تمثيل الأعداد في برنامج مثل Mathematica أو Maple وذلك بإجراء الحسابات بالدقّة البسيطة (ثمانية أرقام عشرية) وبالدقّة المضاعفة (ست عشرة رقماً عشرياً) بما في ذلك القيم الابتدائيّة $\hat{a}_0 = fl(a_0)$ و $\hat{a}_1 = fl(a_1)$.

7.6. ليكن $x_A = 0.937$ قيمة تقريبيّة بثلاثة أرقام معنويّة للقيمة الحقيقيّة x_T.

أولاً: عيّن أفضل تحديد ممكن من الأعلى للخطأ النسبي في القيمة التقريبيّة x_A.

ثانياً: ليكن التابع $x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x}$.

عيّن أفضل تحديد من الأعلى للخطأ النسبي في حساب القيمة التقريبيّة $f(x_A)$ بالمقارنة مع القيمة الحقيقيّة $f(x_T)$.

8.6. لتكن المعادلة

$$x^2 - 40x + 1 = 0$$

أوجد جذور هذه المعادلة بدقّة خمسة أرقام، علماً أنّ $\sqrt{399} \simeq 19.975$ هو تقريبٌ ناجمٌ عن تدوير القيمة الحقيقيّة للجذر التربيعي $\sqrt{399}$ إلى خمسة أرقام.

9.6. ليكن التابع f المعرّف بالعلاقة

$$x \mapsto f(x) = \frac{\ln\big(1-x\big) + x \cdot e^{x/2}}{x^3}$$

أولاً: ما قيمة النهاية $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ؟ احسب القيم العدديّة للتابع $f(x)$ عند النقاط:

$$x = 10^{-m}, \quad 1 \leq m \leq 7$$

توجيه: يمكن استخدم تعليمات برنامج Mathematica التالية:

$$\text{Limit[f[}x\text{],}\{x \to 0\}\text{]} \quad , \quad \text{Table[f[}10^{-m}\text{],}\{m,1,7\}\text{]} \,//\, \text{N}$$

ثانياً: ما هي أفضل طريقة لحساب قيمة تقديريّة للتابع $f(x)$ عندما تكون x قريبة من الصفر؟

توجيه: استخدم منشور تايلور بجوار الصفر.

10.6. ما قيمة أصغر دليل $n \in \mathbb{N}$ يكون عندها المجموع الجزئي

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-5)^k}{k!}$$

تقريباً للقيمة e^{-5} بخطأٍ نسبي لا يتجاوز بالقيمة المطلقة 10^{-3}؟

الفصل الثاني

مفاهيم أوليّة في التحليل العددي المصفوفاتي

نورد في هذا الفصل بعضاً من النتائج والخواص المتعلّقة بالمصفوفات والفضاءات الشعاعيّة المنتهية البعد والتي نحتاجها لاحقاً في أغلب الموضوعات التي سنعالجها في الفصول القادمة.

1. تعاريف ومفاهيم أساسيّة

ليكن V فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) بعده منتهٍ ويساوي n. نقول عن جماعة منتهية $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ من عناصر الفضاء V إنّها تشكّل أساساً له إذا وفقط إذا كانت مستقلّة خطّياً، وعندها نستطيع كتابة كل عنصر $v \in V$ بطريقةٍ وحيدة:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

حيث $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ هي مركّبات الشعاع v على عناصر الأساس $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. باستخدام الكتابة المصفوفاتيّة، يمكننا تمثيل الشعاع $v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i$ بشعاع العمود

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

ونرمز بـ v^T و v^* لأشعّة الأسطر التالية:

$$v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad , \quad v^* = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$$

حيث ترمز الكتابة $\overline{\alpha}$ إلى العدد العقدي المرافق للعدد α. نسمّي عادةً شعاع السطر v^T منقول شعاع العمود v، كما نسمّي شعاع السطر v^* مساعد شعاع العمود v.

نسمّي التطبيق $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \Bbbk$ المعرّف كما يلي:

$$\Bbbk = \mathbb{R} : \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i = u^T \, v = v^T \, u \quad , \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$\Bbbk = \mathbb{C} : \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \overline{v}_i = v^* \, u = \overline{u^* \, v} \quad , \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

جداءً سلّمياً إقليدياً عندما $\Bbbk = \mathbb{R}$ و جداءً سلّمياً هرميتياً عندما $\Bbbk = \mathbb{C}$، وعندما لا نحدد ماهيّة حقل الأعداد السلّميّة $\Bbbk$ نسمّي هذا التطبيق جداءً سلّمياً قانونياً.

ليكن V فضاءً شعاعياً مزوّداً بجداءٍ سلّمي قانوني. نقول عن شعاعين u و v من هذا الفضاء إنّهما متعامدان إذا كان $\langle u, v \rangle = 0$. بوجهٍ عام، نقول عن عنصرٍ $v \in V$ إنّه عموديّ على مجموعة $U \subset V$ ونكتب اصطلاحاً $v \perp U$ عندما يكون الشعاع v عمودياً على كل عنصر $u \in U$. وأخيراً، نقول عن مجموعةٍ من الأشعّة $\{v_1, \ldots, v_k\}$ من عناصر V إنّها متعامدة نظاميّة إذا حقّقت الشروط

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i\,j}, \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

حيث $\delta_{i\,j}$ هو رمز كرونكر Kronecker المعرّف بالعلاقة:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ليكن V و W فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\Bbbk$، مزوّدين بالأساسين $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ و $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ على الترتيب، وليكن $\mathcal{A}: V \to W$ تطبيقاً خطّياً. يُمثّل هذا التطبيق بالنسبة لهذين الأساسين بمصفوفة فيها m سطراً و n عموداً:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

الأمثال فيها معرّفة بطريقة وحيدة بالعلاقات:

$$\mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

بعبارةٍ أخرى، يمثّل العمود رقم j من المصفوفة A الشعاع $\mathcal{A} \cdot e_j$ ممثّلاً بالأساس $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$. نرمز بالكتابة $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ لشعاع السطر رقم i من المصفوفة A. نقول عن مصفوفة فيها m سطراً و n عموداً إنّها من النمط (m,n)، ونرمز بالرمز $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ أو $\mathcal{M}_{m,n}$ للفضاء الشعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ المكوّن من المصفوفات من النمط (m,n) والتي عناصرها من الحقل $\mathbb{k}$. عندئذٍ يكون شعاع عمود مصفوفة من النمط $(m,1)$ ويكون شعاع سطر مصفوفة من النمط $(1,n)$. ونقول عن مصفوفة إنّها حقيقيّة أو عقديّة تبعاً لكون عناصرها من الحقل $\mathbb{R}$ أو من الحقل $\mathbb{C}$ على الترتيب.

◄ لتكن $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$، نعرّف المصفوفة المساعدة $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ بأنّها المصفوفة الوحيدة التي تحقق الشرط:

$$\forall u \in \mathbb{C}^n, \forall v \in \mathbb{C}^m, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$$

أي إنّ $(A^*)_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad , \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$

◄ وبالطريقة نفسها، نعرّف منقول المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ بأنّها المصفوفة الوحيدة $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ التي تحقق الشرط

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^T v \rangle$$

◄ نقول عن مصفوفة من النمط (n,n) إنّها مربّعة من المرتبة n. نرمز بـ $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ أو $\mathcal{M}_n$ لحلقة المصفوفات المربّعة من المرتبة n والتي تنتمي عناصرها إلى الحقل $\mathbb{k}$.

◄ نسمّي المصفوفة $I = (\delta_{ij})$ المصفوفة المطابقة.

◄ نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ إنّها قلوبة إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ نسمّيها مقلوب المصفوفة بحيث يكون

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

وفي الحالة المعاكسة، نقول إنّ المصفوفة غير قلوبة. نلاحظ هنا أنّه إذا كانت A و B مصفوفتين قلوبتين فإنّ:

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

تعريف 1: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ إنّها:

متناظرة: إذا كانت حقيقيّة وكان $A = A^T$

هرميتية: إذا حقّقت الشرط $A = A^*$

متعامدة: إذا كانت حقيقيّة وكان $AA^T = A^TA = I$

واحديّة: إذا حقّقت الشرط $AA^* = A^*A = I$

نظاميّة: إذا حقّقت الشرط $AA^* = A^*A$

▪ نقول عن مصفوفة مربّعة $A = (a_{ij})$ إنّها قطريّة إذا حقّقت الشروط

$$i \neq j \Rightarrow a_{i\,j} = 0$$

ونرمز لها بالكتابة التالية

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

▪ نسمّي أثر المصفوفة المربّعة $A = (a_{ij})$ العدد المعرّف بالعلاقة:

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

تعريف 2: ليكن $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ تبديلاً لمجموعة الأدلّة $\{1,2,\ldots,n\}$. نعرّف مصفوفة التبديل P_σ بأنّها المصفوفة:

$$P_\sigma = (\delta_{i\,\sigma(j)})$$

نلاحظ هنا أنّ مصفوفة تبديل ما هي مصفوفة متعامدة.

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة. نعرّف القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة بأنّها جذور كثير المميّز $\mathcal{X}_A$ (سواءً أكانت حقيقيّة أم عقديّة، بسيطة أم مضاعفة) المعرّف بالعلاقة:

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

نرمز بالكتابة $\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)$ إلى القيم الذاتيّة للمصفوفة A مع التكرار في حال كانت القيم الذاتية مضاعفة. كذلك نسمّي مجموعة القيم الذاتيّة:

$$\{\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{X}_A(\lambda) = 0\}$$

طيف المصفوفة ونرمز إليها بالكتابة $\mathrm{sp}(A)$.

☜ نذكّر هنا بالخواص التالية:

- $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$
- $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$
- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

نسمّي العدد الحقيقي الموجب المعرّف بالعلاقة:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$$

نصف القطر الطيفي للمصفوفة المربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. لتكن $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ قيمةً ذاتيّة للمصفوفة المربّعة A، نسمّي الشعاع $v \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}$ شعاعاً ذاتيّاً لهذه المصفوفة موافقاً للقيمة الذاتيّة λ إذا وفقط إذا حقّق الشرط

$$A \cdot v = \lambda v$$

تولّد مجموعة الأشعّة الذاتيّة الموافقة لقيمة ذاتيّة $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{k}^n$ (بُعده يساوي 1 على الأقل) نسمّيه الفضاء الجزئي الذاتي الموافق للقيمة الذاتيّة λ ونرمز إليه بالكتابة E_λ.

2. ردّ المصفوفات

ليكن V فضاءً شعاعيّاً بعده منتهٍ ويساوي n، وليكن $\mathcal{A} : V \to V$ تطبيقاً خطّياً ممثلاً بالمصفوفة المربّعة $A = (a_{ij})$ بالنسبة لأساسٍ $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ وممثّلاً بالمصفوفة $B = (b_{ij})$ بالنسبة لأساسٍ آخر $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. نعلم أنّ

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من الأساس $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ إلى الأساس $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ أعمدتها مكوّنة من مركّبات الأشعّة (f_j) على عناصر الأساس $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

مما تقدّم، نلاحظ أنّ التطبيق نفسه يُمثَّل بمصفوفاتٍ مختلفة تبعاً للأساس الذي نختاره للفضاء V. نطرح هنا مسألة إيجاد أساس مناسب يكون فيه لهذا التطبيق تمثيلاً مصفوفاتياً بسيطاً قدر الإمكان. نبحث بين جميع المصفوفات المشابهة للمصفوفة A، (أي المصفوفات من الشكل $P^{-1} \cdot A \cdot P$ حيث P مصفوفة قلوبة) عن المصفوفات التي لها أبسط شكل ممكن وهذا ما نسمّيه مسألة ردّ مصفوفة.

إنّ أحسن حالات ردّ مصفوفة مربّعة هي تلك التي يمكن عندها إيجاد مصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1} \cdot A \cdot P$ قطريّة، وعندها نقول عن المصفوفة A إنّها تقبل الرّد إلى القطريّة وفي هذه الحالة تمثّل عناصر القطر في المصفوفة $P^{-1} \cdot A \cdot P$ القيم الذاتيّة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ للمصفوفة A وتمثّل أعمدة المصفوفة P الأشعّة الذاتيّة $p_1, \ldots, p_n$ الموافقة على الترتيب، أي:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_i)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\{A \cdot p_j = \lambda_j \cdot p_j, \quad 1 \leq j \leq n\right\}$$

وبمعنى آخر، تقبل مصفوفة الرّد إلى القطريّة إذا وفقط إذا وجد أساس من الأشعّة الذاتيّة.

مبرهنة 1: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة. عندئذٍ:

أولاً: توجد مصفوفة واحديّة U بحيث تكون المصفوفة $U^{-1}AU$ مثلّثيّة من الأعلى،

ثانياً: إذا كانت المصفوفة A نظاميّة فإنّه توجد مصفوفة واحديّة V بحيث تكون المصفوفة $V^{-1}AV$ قطريّة،

ثالثاً: إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإنّه توجد مصفوفة متعامدة O بحيث تكون المصفوفة $O^{-1}AO$ قطريّة.

نتيجة: إنّ كل مصفوفة هرميتيّة أو واحديّة تقبل الرّد إلى قطريّة.

تعريف 3: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة، نسمّي الجذور التربيعيّة للقيم الذاتيّة للمصفوفة A^*A قيماً مميَّزة لها $\big(\text{singular values}\big)$.

نلاحظ هنا أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة A^*A حقيقيّة وموجبة وذلك لأنّه إذا كان:

$$A^*A \cdot p = \lambda \cdot p, \quad p \neq 0$$

فإنّ

$$(A \cdot p)^* A \cdot p = \lambda \cdot p^* p$$

كما نلاحظ أيضاً أنّ القيم المميَّزة لمصفوفة تكون موجبة تماماً إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A قلوبة. في الواقع لدينا:

$$\begin{array}{ccc} Ap = 0 & \Rightarrow & A^*Ap = 0 \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (Ap)^*Ap = 0 & \Leftarrow & p^*A^*Ap = 0 \end{array}$$

تبيّن المبرهنة التالية أنّ كل مصفوفة مربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ تكافئ مصفوفة قطريّة (أيْ هناك مصفوفتان Q و R قلوبتان بحيث تكون المصفوفة $Q \cdot A \cdot R$ قطريّة) عناصر قطرها الرئيس مكوّنة من قيمها المميَّزة.

مبرهنة 2

أولاً: إذا كانت A مصفوفة حقيقيّة مربّعة، فإنّه توجد مصفوفتان متعامدتان U و V بحيث يكون

$$U^T A\, V = \mathrm{diag}(\mu_1,\ldots\mu_n)$$

ثانياً: إذا كانت A مصفوفة عقديّة مربّعة، فإنّه توجد مصفوفتان واحديّتان U و V بحيث يكون

$$U^* A\, V = \mathrm{diag}(\mu_1,\ldots\mu_n)$$

حيث $\left(\mu_i\right)_{1\leq i\leq n}$ أعدادٌ موجبة تمثّل القيم المميَّزة للمصفوفة A .

3. خواص ونتائج متعلقّة بفضاء المصفوفات المربّعة

1.3. خواص المصفوفات المتناظرة والهرميتيّة

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة. نسمّي قسمة Rayleigh للمصفوفة A التطبيق:

$$R_A : \mathbb{k}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$$

المعرّف بالعلاقة

$$\forall v \neq 0, \quad R_A(v) = \frac{\langle v, Av\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{v^* A^* v}{v^* v}$$

نلاحظ هنا أنّه إذا كانت المصفوفة A هرميتيّة، فإنّ R_A يأخذ قيماً حقيقيّة. من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad R_A(\alpha v) = R_A(v).$$

مبرهنة 3: لتكن A مصفوفة هرميتيّة من المرتبة n ، قيمها الذاتيّة

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

وليكن $\{p_1,\ldots,p_n\}$ أساساً متعامداً نظاميّاً مكوّناً من الأشعّة الذاتيّة الموافقة على الترتيب، أيْ

$$p_i^* \cdot p_j = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq n$$

نرمز بـ V_k إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولّد بالأشعّة $\{p_1,\dots,p_k\}$ ونرمز بـ $\mathcal{V}_k$ إلى مجموعة الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من $\mathbb{k}^n$ والتي بعدها يساوي k. نضع

$$V_0 = \{0\}, \quad \mathcal{V}_0 = \{V_0\},$$

عندئذٍ، تحقق القيم الذاتيّة للمصفوفة A الخواص التالية:

$$(1) \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k = R_A(p_k)$$
$$(2) \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$$
$$(3) \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k = \min_{\substack{v \perp V_{k-1} \\ v \neq 0}} R_A(v)$$
$$(4) \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{v \in W \\ v \neq 0}} R_A(v)$$
$$(5) \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{\substack{v \perp W \\ v \neq 0}} R_A(v)$$
$$(6) \quad \mathrm{Im}(R_A) = [\lambda_1, \lambda_n]$$

يمكن الرجوع إلى Ciarlet P.G. [31] للاطلاع على إثبات هذه الخواص.

في الختام، نُذَكّر ببعض التعاريف:

- نقول عن مصفوفة هرميتيّة A إنّها معرّفة موجبة إذا حققت الشرط

$$\forall v \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}, \quad v^* A v > 0$$

- ونقول عنها إنّها موجبة إذا حققت الشرط

$$\forall v \in \mathbb{k}^n, \quad v^* A v \geq 0$$

ملاحظة: يمكننا بمحاكمةٍ بسيطة أن نبرهن أنّ مصفوفةً هرميتيّة تكون معرّفة موجبة أو موجبة إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها الذاتيّة موجبة تماماً أو موجبة على الترتيب.

2.3. النظيم الشعاعي والنظيم المصفوفاتي

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{k}$. نسمّي نظيماً شعاعياً على الفضاء V كلّ تطبيق $\mathrm{N} : V \to \mathbb{R}_+$ يحقّق الخواص التالية:

- $\mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \Bbbk, \forall x \in V, \quad \mathrm{N}(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot \mathrm{N}(x)$
- $\forall x \in V, \forall y \in V, \quad \mathrm{N}(x+y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$

تعرف الخاصّة الأخيرة باسم المتراجحة المثلّثية. نستخدم عادةً الرمز $\|\cdot\|$ للدلالة على نظيم شعاعي على فضاء V، وفي حالة فضاء شعاعي منتهي البعد V، النظائم الثلاثة التالية هي الأكثر استخداماً من الناحية العمليّة:

- $\|v\|_1 = \sum_i |v_i|$
- $\|v\|_2 = \left(\sum_i |v_i|^2 \right)^{1/2} = \langle v, v \rangle^{1/2}$
- $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$

يسمّى $\|\cdot\|_2$ النظيم الاقليدي. وبوجهٍ عام، تعرض لنا المبرهنة التالية جماعة من النظائم الشعاعيّة تشمل النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ السابقين.

مبرهنة 4: ليكن V فضاءً شعاعياً منتهي البعد، وليكن $1 \leq p$ عدداً حقيقياً. إنّ التطبيق $\|\cdot\|_p$ المعرّف بالعلاقة:

$$\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p \right)^{1/p}$$

هو نظيمٌ شعاعي.

الإثبات: يمكن التحقق بسهولة من صحّة المبرهنة عندما $p = 1$، لذلك نقتصر على الحالة التي يكون فيها $1 < p$. ليكن q عدداً حقيقياً $(1 < q)$ يحقق المعادلة

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

نعلم أنّه إذا كان α و β عددين حقيقيّين موجبين فإنّ:

$$\alpha \cdot \beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

وذلك لأنّ التابع الأسّي هو تابعٌ محدّب ويحقق المتراجحة:

$$\forall \theta \in]0,1[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad e^{\theta x+(1-\theta)y} \leq \theta e^{x} + (1-\theta)e^{y}$$

يكفي أن نستبدل $\dfrac{1}{p}$ بـ θ و $p\log\alpha$ بـ x و $q\log\beta$ بـ y.

الآن، إذا كان u و v عنصرين من الفضاء V فإنّه تبعاً للمتراجحة السابقة يكون لدينا

$$\forall i,\quad \frac{\left|u_i v_i\right|}{\left\|u\right\|_p \cdot \left\|v\right\|_p} \leq \frac{1}{p}\frac{\left|u_i\right|^p}{\left\|u\right\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\left|v_i\right|^p}{\left\|v\right\|_q^q}$$

بأخذ المجموع عند طرفي هذه المتراجحات نجد

$$\sum_i \left|u_i v_i\right| \leq \left\|u\right\|_p \cdot \left\|v\right\|_q \qquad \text{(متراجحة Hölder)}$$

حتّى نثبت أنّ $\|\cdot\|_p$ هو نظيم شعاعي، يكفي أن نبرهن صحّة المتراجحة المثلثيّة، وذلك لوضوح صحّة الخواص الأخرى.

لدينا

$$\left(\left|u_i\right| + \left|v_i\right|\right)^p = \left|u_i\right|\left(\left|u_i\right| + \left|v_i\right|\right)^{p-1} + \left|v_i\right|\left(\left|u_i\right| + \left|v_i\right|\right)^{p-1}$$

بالجمع واستعمال المتراجحة السابقة نجد أنّ

$$\sum_i \left(\left|u_i\right| + \left|v_i\right|\right)^p \leq \left(\left\|u\right\|_p + \left\|v\right\|_p\right)\left(\sum_i \left(\left|u_i\right| + \left|v_i\right|\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

وتنتج المتراجحة المطلوبة من كون $(p-1)q = p$. ■

ملاحظة: في الحالة الخاصّة $p = 2$ تأخذ متراجحة Hölder الشكل التالي

$$\sum_i \left|u_i v_i\right| \leq \left(\sum_i \left|u_i\right|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_i \left|v_i\right|^2\right)^{1/2}$$

وتعرف في هذه الحالة باسم متراجحة Cauchy-Schwarz أو متراجحة Bunyakovskii (وخاصّة في بلاد السوفييت سابقاً).

كما تعرف المتراجحة المثلثيّة في حالة النظيم $\|\cdot\|_p$:

$$\left(\sum_i |u_i + v_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_i |u_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}$$

بمتراجحة Minkowski.

من الجدير ذكره هنا، هو أنّ جميع النظائم الشعاعيّة، في فضاءٍ شعاعي V منتهي البعد، متكافئة، بمعنى أنّه إذا كان $\|.\|$ و $\|.\|'$ نظيمين شعاعيين فإنّه يوجد عددان $c_1 > 0$ و $c_2 > 0$ بحيث يكون

$$\forall v \in V, \quad c_1 \|v\| \leq \|v\|' \leq c_2 \|v\|$$

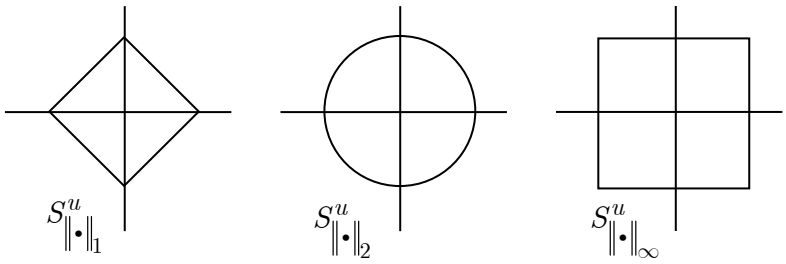
أمثلة:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

نسمّي شعاعاً واحدياً، في فضاءٍ شعاعي منتهي البعد V منسوباً لنظيمٍ شعاعي $\|.\|$ كلّ عنصر من هذا الفضاء يحقق الشرط $\|x\| = 1$. كما نسمّي مجموعة العناصر:

$$S^u_{\|.\|} = \{x \in V : \|x\| = 1\}$$

سطح الكرة الواحديّة في هذا الفضاء. في الحالة الخاصّة $V = \mathbb{R}^2$ يمكننا تمثيل سطح الكرة الواحديّة هندسياً كما يلي:



تعريف 4: لتكن $\mathcal{M}_n$ حلقة المصفوفات المربّعة من المرتبة n على الحقل $\mathbb{k}$. نسمّي نظيماً مصفوفاتياً كلّ تطبيق $\|.\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ يحقق الخواص التالية:

$$i. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$ii. \quad \forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$$

$$iii. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{M}_n, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$iv. \quad \forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{M}_n, \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

أمثلة:

من بين النظائم المصفوفاتية الأكثر استعمالاً في الجبر العددي الخطي ما يلي:

☒ نظيم فروبينوس Frobinius (ويسمّى أيضاً النظيم الإقليدي):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j \left|a_{ij}\right|^2}$$

☒ النظيم $\|\cdot\|_p$:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A \cdot x\|_p}{\|x\|_p}, \qquad p \geq 1$$

نلاحظ هنا أنّ

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A \cdot x\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|A \cdot x\|_p$$

بوجهٍ عام، نستطيع ببساطةٍ تامّة إنشاء نظيمٍ مصفوفاتي انطلاقاً من نظيمٍ شعاعي على الفضاء $V \equiv \mathbb{k}^n$ كما يلي: ليكن $\|.\|$ نظيماً شعاعياً على الفضاء V، التطبيق $\|.\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ المعرّف بالعلاقة:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \max_{\|x\| = 1} \|A \cdot x\|$$

هو نظيمٌ مصفوفاتي، نسميّه النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي $\|.\|$. من جهةٍ أخرى، هناك نظائم مصفوفاتيّة غير ملحقة بأيّ نظيم شعاعي ؛ فعلى سبيل المثال، نظيم فروبينوس $\|.\|_F$ هو نظيم مصفوفاتي غير ملحق ويحقق $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$.

ملاحظة هامّة: يحقّق أيّ نظيمٍ مصفوفاتي ملحق $\|.\|$ دوماً الخاصّة $\|I_n\| = 1$.

مبرهنة 5: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة. الخواص التالية صحيحة:

✓ $$\|A\|_1 \overset{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

✓ $$\|A\|_2 \overset{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$$

✓ $$\|A\|_\infty \overset{def}{=} \sup \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

ملاحظات:

☜ النظيم $\|.\|_2$ هو نظيم لا متغيّر بالتحويل الواحدي:

$$UU^* = I \Rightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2$$

☜ في حالة مصفوفة نظاميّة A يكون لدينا

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

☜ إذا كانت A مصفوفة هرميتيّة أو متناظرة (ومن ثمّ فهي نظاميّة) فإنّ $\|A\|_2 = \rho(A)$.

☜ إذا كانت A مصفوفة واحديّة أو متعامدة (ومن ثمّ فهي نظاميّة) فإن:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$$

☜ من الناحية العمليّة، نلاحظ أنّ تعيين قيمة كلّ من النظيمين $\|A\|_1$ و $\|A\|_\infty$ بسيطٌ ولا يتطلّب سوى معرفة قيم عناصر المصفوفة A، على حين أن تعيين قيمة النظيم $\|A\|_2$ ليس بسيطاً.

ننصح القارئ المهتم بإثبات المبرهنة 5 ونتائجها الرجوع إلى Ciarlet P.G. [31].

تؤدّي النتيجة التالية دوراً هاماً في دراسة تقارب متتاليات المصفوفات.

مبرهنة 6: لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n.

أولاً: أيّاً كان النظيم المصفوفاتي $\|.\|$ (سواءٌ أكان ملحقاً أم غير ملحق) فإنّ

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

ثانياً: أيّاً كان العدد $\varepsilon > 0$، يوجد على الأقلّ نظيمٌ مصفوفاتي ملحق $\|.\|$ بحيث تتحقق المتراجحة

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

الإثبات

أولاً: لتكن $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ بحيث $|\lambda| = \rho(A)$. وليكن p شعاعاً ذاتياً موافقاً للقيمة λ. عندئذٍ يكون

$$\rho(A) \cdot \|p \cdot p^T\| = \|\lambda p \cdot p^T\| = \|A \cdot pp^T\| \leq \|A\| \cdot \|p \cdot p^T\|$$

بملاحظة أنّ $p \cdot p^T \neq 0$ نستنتج صحّة المتراجحة $\rho(A) \leq \|A\|$.

ثانياً: الإثبات هنا إنشائي (للاطلاع راجع Ciarlet P.G. [31]). ■

3.3. متتاليات الأشعّة ومتتاليات المصفوفات

ليكن V فضاءً شعاعياً مزوّداً بنظيمٍ $\|.\|$. نقول عن متتالية $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من عناصر V إنّها متقاربة نحو عنصرٍ $v \in V$ أو نقول أيضاً إنّ العنصر v هو نهاية المتتالية $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$، إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\| = 0$$

ونكتب

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k$$

إذا كان الفضاء الشعاعي V ذا بعدٍ يساوي $n \leq 1$، فإنّ تكافؤ النظائم يبيّن أنّ تقارب متتالية من الأشعّة مستقلّ عن النظيم المستعمل. من جهةٍ أخرى، فإنّ الاختيار الخاص للنظيم $\|.\|_\infty$ يبيّن أنّ تقارب متتالية من الأشعّة يكافئ تقارب n متتالية عدديّة مكوّنة من مركّبات الأشعّة.

بالأسلوب نفسه، نعرّف تقارب متتالية من عناصر فضاء المصفوفات $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ والذي بعده يساوي $m \cdot n$ ونلاحظ أيضاً أنّ تقارب متتالية من المصفوفات لا يتعلّق بالنظيم المستعمل وأنّ تقارب متتالية من المصفوفات من النمط (m,n) يكافئ تقارب $m \cdot n$ متتالية عدديّة مكوّنة من مركّبات المصفوفات. تعطينا النتيجة التالية شروطاً متكافئة لتقارب قوى مصفوفة مربّعة نحو المصفوفة الصفرية.

مبرهنة 7: أياً كانت المصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ فإنّ المقولات التالية متكافئة:

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \quad (1)$$

$$\forall v \in \mathbb{k}^n, \quad \lim_{k\to\infty} B^k v = 0 \quad (2)$$

$$\rho(B) < 1 \quad (3)$$

(4) يوجد نظيم مصفوفاتي ملحق $\|\ \|$ يحقق $\|B\| < 1$.

الإثبات

(1) $\Leftarrow$ (2): ليكن $\|.\|$ نظيماً شعاعياً وليكن $\|.\|$ النظيم المصفوفاتي الملحق به. إذا كان $v \in \mathbb{k}^n$ عنصراً ما، فإنّ المتراجحة $\|B^k \cdot v\| \leq \|B^k\| \cdot \|v\|$ تبيّن أنّ

$$\lim_{k\to\infty} B^k v = 0$$

(2) $\Leftarrow$ (3): إذا كان $\rho(B) \geq 1$، فإنّه من الممكن إيجاد شعاع p يحقق

$$p \neq 0, \quad B \cdot p = \lambda p, \quad |\lambda| \geq 1$$

عندها يكون لدينا $B^k \cdot p = \lambda^k \cdot p$ ومن ثمّ لا تكون المتتالية $\left(B^k \cdot p\right)_{k\geq 1}$ متقاربة من الصفر.

(3) $\Leftarrow$ (4): ينتج مباشرة من **المبرهنة 6 (ثانياً)**.

(4) $\Leftarrow$ (1): يكفي أن نطبّق المتراجحة $\|B^k\| \leq \|B\|^k$ في حالة النظيم المعطى في (4). ■

تعرض المبرهنة التالية بعض الخواص الهامّة والمفيدة للمصفوفات من الشكل $(I - B)$.

مبرهنة 8: لتكن $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة.

أولاً: إذا كان $\rho(B) < 1$ فإنّ المصفوفة $(I - B)$ تكون قلوبة ويساوي مقلوبها مجموع المتسلسلة

$$(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

ثانياً: إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ فإنّ $\rho(B) < 1$.

ثالثاً: إذا كان $\| \ \|$ نظيماً مصفوفاتياً يحقّق $\|B\| < 1$ فإنّ المصفوفة $I - B$ تكون قلوبة. إضافةً لذلك، إذا كان النظيم $\| \ \|$ ملحقاً فإنّ المقلوب $(I-B)^{-1}$ يحقق المتراجحة

$$\left\|(I-B)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$$

الإثبات

أولاً: قولنا أنّ المصفوفة $I - B$ غير قلوبة يكافئ قولنا أنّ 1 هي قيمة ذاتيّة للمصفوفة B، أي أنّ $\rho(B) \geq 1$ وهذا يناقض افتراضنا وبالتالي فإنّ المصفوفة $I - B$ قلوبة. من جهةٍ ثانية، لدينا

$$(I-B)(I+B+B^2+\cdots+B^m) = I - B^{m+1} \qquad (\$)$$

بضرب طرفي هذه المطابقة بالمصفوفة $(I-B)^{-1}$ نجد

$$I+B+\cdots+B^m = (I-B)^{-1}\cdot(I-B^{m+1})$$

ومنه يكون

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} B^k = (I-B)^{-1}\cdot\lim_{m\to\infty}(I-B^{m+1})$$

واستناداً إلى **المبرهنة 7** يكون $\lim_{m\to\infty} B^{m+1} = 0$، أي أنّ

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} B^k = (I-B)^{-1}$$

ثانياً: إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ ولنَقُلْ أنّ مجموعها S، أيْ

$$S = I + B + B^2 + \cdots + B^m + \cdots$$

فإنّ

$$S - BS = S - SB = I$$

ينتج من ذلك أنّ للمصفوفة $I-B$ مقلوباً هو S. بأخذ نهاية الطرفين في المطابقة ($) نجد

$$(I-B)\cdot S = I - \lim_{m\to\infty} B^m$$

وهذا يعني بدوره أنّ $\lim_{m\to\infty} B^m = 0$ واستناداً إلى **المبرهنة 7** يكون $\rho(B) < 1$.

ثالثاً: استناداً إلى **المبرهنة 6** فإنّ $\rho(B) < 1$ ومن ثمّ واعتماداً على ما سبق (**أولاً**) فإنّ المصفوفة $I-B$ تكون قلوبة ومقلوبها هو

$$(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\left\|(I-B)^{-1}\cdot(I-B^{m+1})\right\| = \left\|I+B+\cdots+B^m\right\| \le 1+\|B\|+\cdots+\|B\|^m$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\|B\|^k = \frac{1}{1-\|B\|}$$

اعتمدنا هنا على كون النظيم المصفوفاتي ملحقاً في كون $\|I\| = 1$. ينتج مما سبق أنّ

$$\lim_{m\to\infty}\left\|(I-B)^{-1}\cdot(I-B^{m+1})\right\| = \left\|(I-B)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|B\|} \quad \blacksquare$$

نتيجة: إذا كانت المصفوفة $\left(I-B\right)$ غير قلوبة فإنّ $\rho(B) \ge 1$.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

لدينا هنا، $A = 4(I+B)$، حيث $\|B\|_\infty = \frac{1}{2}$ ومن ثمّ فإنّ $(I+B)^{-1}$ موجودة وبحسب **المبرهنة 8** يكون

$$\left\|(I+B)^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{1-1/2} = 2$$

عندئذٍ لدينا $A^{-1} = \frac{1}{4}(I+B)^{-1}$ ومن ثمّ $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. ومنه

$$\rho(A) \leq 6 \quad , \quad \rho(A^{-1}) \leq \frac{1}{2}$$

أي أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة A تحقق المتراجحة المزدوجة

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad 2 \leq |\lambda| \leq 6$$

مبرهنة 9: أيّاً كانت $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ وأيّاً كان النظيم المصفوفاتي $\|.\|$ فإنّ:

$$\lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$$

الإثبات

استناداً إلى **المبرهنة 6** لدينا $\rho(B) \leq \|B\|$، ومن المطابقة $\rho(B) = \{\rho(B^k)\}^{1/k}$ نستنتج أنّ

$$\forall k \geq 1, \quad \rho(B) \leq \|B^k\|^{1/k}$$

لنبرهن الآن، أنّه أيّاً كان العدد $\varepsilon > 0$ يوجد عددٌ صحيح ℓ_ε بحيث يكون

$$k \geq \ell_\varepsilon \Rightarrow \|B^k\|^{1/k} \leq \rho(B) + \varepsilon$$

وهذا يكفي لإثبات المطلوب. ليكن إذن، $\varepsilon > 0$ عدداً معطى، نضع

$$B_\varepsilon = \frac{1}{\rho(B)+\varepsilon} B$$

نلاحظ هنا أنّ $\rho(B_\varepsilon) < 1$، وبالاعتماد على **المبرهنة 8** يكون $\lim_{k\to\infty} B_\varepsilon^k = 0$. وهذا يثبت وجود عدد صحيح ℓ_ε يحقق

$$k \geq \ell_\varepsilon \Rightarrow \|B_\varepsilon^k\| = \frac{\|B^k\|}{\big(\rho(B)+\varepsilon\big)^k} \leq 1$$

وهو المطلوب. ■

4. مفهوم الحساسيّة في الجبر الخطّي

من النادر أن نحصل على حلٍّ لجملةٍ من المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ دون أن يكون هذا الحلّ مشوباً بالأخطاء. يعود ذلك إلى مصادر الأخطاء المتعدّدة التي تتعرّض لها والتي بنتيجتها نحصل على حلّ فعلي لا يتطابق مع حلّ الجملة $A \cdot x = b$ وإنّما يتطابق مع حل الجملة المشوّشة:

$$(A + \Delta A) \cdot y = b + \Delta b$$

طبعاً، الأخطاء ΔA و Δb مجهولة، ولكنّها بوجهٍ عام، أياً كان مصدرها، تكون قابلة للتحديد والتقدير، فعلى سبيل المثال نَعرِف خطأ التدوير المرتكب عند تمثيل أي عدد في النظام الحاسوبي.

السؤال الذي يطرح نفسه هو كيفيّة تقدير أو تعيين الحدّ الأعلى للخطأ في الحل الذي يمثّله الفرق $x - y$ للجملتين الخطيّتين:

$$A \cdot x = b$$
$$(A + \Delta A) \cdot y = b + \Delta b$$

بدلالة المقادير ΔA و Δb.

لنتفحّص الآن مثالاً ينسب إلى R.S. Wilson: لتكن الجملة الخطيّة

$$A \cdot x = b$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولنفترض أنّ عناصر هذه الجملة معرّضة للتشويش كما يلي:

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.89 \end{pmatrix}, \quad b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 22.99 \\ 33.01 \\ 30.99 \end{pmatrix}$$

أي أنّ

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

من جهةٍ أخرى، فإنّ حل الجملة $A \cdot y = (b + \Delta b)$ والتي تعرّض فيها الطرف الثاني للتشويش هو $y = (1.82, -0.36, 1.35, 0.79)^T$ ومن ثمّ يكون

$$\Delta x = y - x = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -1.36 \\ 0.35 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

وكذلك فإنّ حلّ الجملة المشوّشة $(A + \Delta A) \cdot z = b$ هو $z = (-81, 137, -34, 22)^T$ ويكون الخطأ في الحل مساوياً

$$\Delta x = z - x = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

وهكذا فإننا نرى أنّ اضطراباً (تشويشاً) نسبياً قَدْره $\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \simeq 3.3 \times 10^{-4}$ يصيب الطرف الثاني من المعادلات الخطيّة، يتسبّب في حدوث اضطراب نسبي في الحلّ قَدْره $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \simeq 0.82$، وهذا يعني أنّ الخطأ قد تضخّم بمعدّل 2460 مرّة.

وكذلك فإننا نلاحظ أنّ تشويشاً نسبياً قَدْره $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} \simeq 7.6 \times 10^{-3}$، في عناصر مصفوفة الجملة الخطيّة، يتسبّب في خطأٍ نسبي في الحلّ قَدْره $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \simeq 82.0$، وهذا يعني أنّ الخطأ قد تضخّم بمعدّل 10758 مرّة.

1.4. حساسيّة مصفوفة قلوبة

نعرّف فيما يلي مفهوم الحساسيّة للمصفوفات المربّعة والقلوبة. ونصطلح أن تكون حساسيّة المصفوفات المربّعة غير القلوبة لا نهائيّة.

تعريف 5

ليكن $\|.\|$ نظيماً مصفوفاتياً ؛ ولتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. نعرّف حساسيّة المصفوفة A بأنّها العدد الموجب:

$$\kappa(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$$

والذي يرمز إليه أحياناً بالكتابة $\mathrm{cond}(A)$. وبوجهٍ خاص، لدينا $\kappa_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$ حيث $\|.\|_p$ هو النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي $\|.\|_p$. نسمّي التطبيق κ مؤثّر الحساسيّة المصفوفاتيّة. تبيّن المبرهنة التالية بعضاً من خصائص عدد الحساسيّة $\kappa(A)$.

مبرهنة 10: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. لدينا

أولاً: أيّاً كان $0 \neq \alpha \in \mathbb{k}$ فإنّ

$$\kappa(\alpha \cdot A) = \kappa(A)$$

ثانياً: أيّاً كان النظيم المصفوفاتي $\|.\|$ فإنّ

$$\kappa(A) = \|A\| . \|A^{-1}\| \geq 1$$

ثالثاً: لتكن $\mu_{\min} = \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n = \mu_{\max}$ القيم المميَّزة للمصفوفة A ، عندها يكون

$$\kappa_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

رابعاً: $\kappa_2(A) = 1$ إذا وفقط إذا كان $A = \alpha \cdot Q$ حيث $\alpha \in \mathbb{k}\backslash\{0\}$ و Q مصفوفة واحديّة.

الإثبات:

أولاً: لدينا

$$\kappa(\alpha \cdot A) = \|\alpha \cdot A\| \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha| \cdot \|A\| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

ثانياً: لدينا

$$I = A \cdot A^{-1} \Rightarrow 1 = \rho(I) \leq \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

ثالثاً: نعلم أنّ

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A^*A)} \lambda} = \mu_{\max}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-1^*}A^{-1})} = \sqrt{\max_{\lambda \in \mathrm{sp}(AA^*)} \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\mu_{\min}}$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

رابعاً: نعلم أنّه أيّاً كانت المصفوفة A فإنّه توجد مصفوفتان واحديّتان U و V ومصفوفة قطرية Σ عناصر القطر فيها هي القيم المميَّزة لهذه المصفوفة بحيث يكون $A = U\Sigma V^*$ واعتماداً على الخاصّة السابقة، في هذه المبرهنة، فإنّ $\kappa_2(A) = 1$ إذا وفقط إذا كانت جميع القيم المميَّزة للمصفوفة A متساوية فيما بينها. لنفرض α القيمة المشتركة لها، عندها يكون $\Sigma = \alpha \cdot I$ و $A = \alpha \cdot UV^*$ حيث $Q = UV^*$ مصفوفة واحديّة. ■

ملاحظات:

- نقول عن مصفوفة إنّها "جيّدة الحساسيّة"، إذا كانت حساسيّتها ليست كبيرة مقارنةً بالقيمة 1. تبيّن الخاصّة الأخيرة في المبرهنة 10 أنّ المصفوفات الواحديّة تتمتّع بحساسيّة مثلى $(\kappa_2(Q) = 1)$، ولهذا السبب فهي شائعة الاستعمال في العديد من خوارزميّات التحليل العددي.
- في الحالة التي تكون فيها المصفوفة هرميتيّة، أي $A = A^*$ فإنّ $\mu_i = |\lambda_i(A)|$ وعندها يكون

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|} = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$$

- نعلم مما سبق أنّ مؤثّر الحساسيّة لمصفوفة $A \in \mathcal{M}_n$ يتبع النظيم المصفوفاتي المستخدم، ولكنّ مؤثّرات الحساسيّة متكافئة فيما بينها، بمعنى أنّه إذا كان κ و κ' مؤثّري حساسيّة فإنّه يوجد عددان موجبان تماماً c_1 و c_2 بحيث يكون

$$\forall A \in \mathcal{M}_n, \quad c_1 \cdot \kappa(A) \leq \kappa'(A) \leq c_2 \cdot \kappa(A)$$

فعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leq \kappa_1(A) \leq n \cdot \kappa_2(A)$$
$$\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_2(A) \leq n \cdot \kappa_\infty(A)$$
$$\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \leq \kappa_\infty(A) \leq n^2 \cdot \kappa_1(A)$$

- ليس هناك ارتباط بين القيمة التي يأخذها محدّد المصفوفة وبين حساسيّة هذه المصفوفة كما تبيّن الأمثلة التالية.

أمثلة:

❶ لتكن A مصفوفة مربّعة وقطريّة من المرتبة 100 معرّفة كما يلي:

$$a_{11} = 1,$$
$$a_{ii} = 0.1, \quad 2 \leq i \leq 100$$

لدينا هنا

$$\left\{\|A\|_2 = 1, \quad \|A^{-1}\|_2 = 10\right\} \Rightarrow \kappa_2(A) = 10$$

في حين أنّ

$$\det(A) = 1 \times 10^{-99} = 10^{-99}$$

❷ لتكن A مصفوفة مثلّثية من الأعلى وثنائيّة القطريّة معرّفة بالعلاقات:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & j = i+1 \\ 0 & else \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

يبرهن أنّ مقلوب هذه المصفوفة هو المصفوفة

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{j-1} & \cdots & (-2)^{n-1} \\ & 1 & -2 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & 4 & & \vdots \\ & & & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \ddots & 4 \\ & & & & & \ddots & -2 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا في هذه الحالة

$$\begin{cases} \|A\|_\infty = \|A\|_1 = 3 \\ \|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = 1+2+4+\cdots+n^{n-1} = 2^n-1 \end{cases}$$

ومن ثمّ يكون

$$\kappa_1(A)=\kappa_\infty(A)=3\times 2^n-3$$

بالرغم من كون $\det(A)=1$.

2.4. دراسة أثر التشويش في حل جملة معادلات خطيّة

لندرس أولاً حالة التغييرات الناجمة عن تشويش شعاع الطرف الثاني في جملة معادلات خطّية دون أن تتعرّض مصفوفة هذه الجملة لأي تغيير.

مبرهنة 11: لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن x و $x+\Delta x$ حَلَّيْ جُمْلَتي المعادلات الخطيّة:

$$\begin{cases} A\cdot x = b \\ A\cdot(x+\Delta x) = b+\Delta b \end{cases}$$

عندها تتحقق المتراجحة

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

أياً كان النظيم الشعاعي $\|\cdot\|$، حيث يمثّل العدد $\kappa(A)$ حساسيّة المصفوفة A محسوبةً بالنظيم المصفوفاتي الملحق بهذا النظيم.

الإثبات:

بأخذ الفرق بين المعادلتين نجد

$$A \cdot \Delta x = \Delta b$$

ومنه يكون $\Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b$. ومن تعريف النظيم الملحق لدينا

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$
$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

بضرب هاتين المتراجحتين، طرفاً في طرف، نحصل على المتراجحة التالية:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

■

لنعالج الآن مسألة تشويش عناصر مصفوفة الجملة الخطيّة دون أن نغيّر الطرف الثاني فيها وذلك من خلال المبرهنة التالية.

مبرهنة 12: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن x و $x + \Delta x$ حَلَّيْ جُمْلَتَي المعادلات الخطيّة:

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ (A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b \end{cases}$$

عندها تتحقق المتراجحة

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

أيّاً كان النظيم الشعاعي $\|.\|$، حيث يمثّل العدد $\kappa(A)$ حساسيّة المصفوفة A محسوبةً بالنظيم المصفوفاتي الملحق بهذا النظيم.

الإثبات:

لدينا

$$A \cdot x = b = (A + \Delta A)(x + \Delta x)$$

ومنه

$$A \cdot \Delta x + \Delta A \cdot (x + \Delta x) = 0$$

ومن ثمّ

$$\Delta x = -A^{-1} \cdot \Delta A \cdot (x + \Delta x)$$

من ذلك نستنتج أنّ

$$\|\Delta x\| = \left\|A^{-1} \cdot \Delta A \cdot (x + \Delta x)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x + \Delta x\|$$

وهذا يعني أنّ

$$\blacksquare \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta A\| = \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

لننظر في حالة مثال R. S. Wilson الذي بدأنا فيه هذا الفصل. فإذا استعملنا النظيم الشعاعي الاقليدي نجد $\|b\|_2 \simeq 60.025$ و $\|\Delta b\|_2 = 0.02$. بحكم كون المصفوفة A متناظرة يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned} \left\|A\right\|_2 &= \max_{\lambda \in \mathrm{sp(A)}} \left|\lambda\right| \simeq 30.2887 \\ \left\|A^{-1}\right\|_2 &= \max_{\lambda \in \mathrm{sp(A)}} \frac{1}{\left|\lambda\right|} = \frac{1}{\min\limits_{\lambda \in \mathrm{sp(A)}} \left|\lambda\right|} \simeq \frac{1}{0.01015} \end{aligned}\right\}, \quad \kappa_2(A) \simeq 2984$$

من جهةٍ ثانية، لدينا

$$\left.\begin{aligned} \left\|x\right\|_2 &= 2, \\ \|\Delta x\|_2 &\simeq 1.64 \end{aligned}\right\}, \quad \frac{\|\Delta x\|_2}{\left\|x\right\|_2} \simeq 0.82$$

وهذا يساوي تقريباً قيمة الحدّ

$$\kappa_2(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \simeq 2984 \times \frac{0.02}{60.025} \simeq 0.994$$

ونذكّر أخيراً بأنّ هذه المصفوفة تتمتّع، إضافةً لكونها متناظرة بكون محدّدها يساوي الـ 1 وأنّ مقلوبها هو

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

لندرس الآن الحالة العامّة المتعلّقة بتشويش عنصري الجملة الخطيّة، أي المصفوفة A وشعاع الطرف الثاني b. نفترض أنّ الجملة الخطيّة المشوّشة تكتب على الشكل:

$$\begin{aligned}(A+\varepsilon F)\cdot x(\varepsilon) &= b+\varepsilon f, \quad F\in M_n(\mathbb{k}), \quad f\in \mathbb{k}^n\\ x(0) &= x\end{aligned}$$

إذا كانت المصفوفة A قلوبة فإنّ التطبيق $\varepsilon \longrightarrow x(\varepsilon)$ يكون قابلاً للاشتقاق بجوار الصفر ويحقق الشرط $x'(0)=A^{-1}\cdot(f-F\cdot x)$، ومن ثمّ فإنّ عبارة النشر المحدود للتطبيق $\varepsilon \longrightarrow x(\varepsilon)$ بجوار الصفر تكتب كما يلي:

$$x(\varepsilon)=x+\varepsilon\cdot x'(0)+O(\varepsilon^2)\cdot u, \quad \|u\|=1$$

حيث $\|.\|$ نظيمٌ شعاعي ما. باستخدام النظيم المصفوفاتي الملحق به، نحصل من العبارة السابقة على المتراجحة التالية:

$$\frac{\|x(\varepsilon)-x\|}{\|x\|}\leq |\varepsilon|\|A^{-1}\|\left\{\frac{\|f\|}{\|x\|}+\|F\|\right\}+O(\varepsilon^2)$$

من جهةٍ ثانية، لدينا

$$\|b\|\leq \|A\|\cdot\|x\|$$

ومن ثمّ نحصل على المتراجحة

$$\frac{\|x(\varepsilon)-x\|}{\|x\|}\leq \kappa(A)\big(r_A+r_b\big)+O(\varepsilon^2)$$

حيث

$$r_A=|\varepsilon|\cdot\frac{\|F\|}{\|A\|} \quad , \quad r_b=|\varepsilon|\cdot\frac{\|f\|}{\|b\|}$$

بالنتيجة، فإننا نلاحظ أنّ الخطأ النسبي في الحل x لا يتجاوز $\kappa(A)$ مرّةً الخطأ النسبي في عناصر الجملة الخطيّة (r_A+r_b). بهذا المعنى، فإنّ عدد الحساسيّة $\kappa(A)$ يقيس لنا حساسيّة الجملة الخطية للتشويشات وهو يمثّل، بناءً على ما سبق، معامل التضخيم الأعظمي للخطأ في الحل.

خاصّة هامّة: تتعلّق بحساسيّة مصفوفة مربّعة تعرف باسم مبرهنة Gastinel تتمثّل بالعلاقة:

$$\frac{1}{\kappa(A)} = \min_{\{E:\det(A+E)=0\}} \frac{\|E\|}{\|A\|}$$

تبيّن هذه النتيجة (انظر Kahan 1966 [77]) أنّ عدد الحساسيّة $\kappa(A)$ يسمح بقياس المسافة النسبيّة للمصفوفة A عن المصفوفات غير القلوبة.

تبيّن المبرهنة التالية أثر التشويش في حساب مقلوب مصفوفة مربّعة.

مبرهنة 13: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة قلوبة، وليكن $\|.\|$ نظيم مصفوفاتي ملحق و E مصفوفة تحقق

$$\|A^{-1} \cdot E\| = r < 1$$

عندئذٍ تكون المصفوفة $(A+E)$ قلوبة ويحقق مقلوبها المتراجحتين التاليتين:

$$\|(A+E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-r}$$

$$\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|E\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1-r}$$

الإثبات:

بما أنّ المصفوفة A قلوبة، يمكننا أن نكتب $A+E = A \cdot (I-F)$ حيث $F = -A^{-1} \cdot E$. من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\|F\| = \|A^{-1} \cdot E\| = r < 1$$

ومن ذلك نستنتج أنّ المصفوفة $(I-F)$ قلوبة **(المبرهنة 8)** وأنّ

$$\|(I-F)^{-1}\| \leq 1 / (1-r)$$

لدينا أيضاً

$$(A+E)^{-1} = (I-F)^{-1} \cdot A^{-1}$$

ومن ثمّ

$$\left\|(A+E)^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-r}$$

وكذلك، لدينا

$$(A+E)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1} \cdot E \cdot (A+E)^{-1}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\left\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\right\| &\leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|E\| \cdot \left\|(A+E)^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{\|E\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|^2}{1-r}\end{aligned}$$

وبذا يتم الإثبات. ■

5. مسائل وتمارين

1.5. ليكن

$$u_1 = (1,2,-1)^T, \quad u_2 = (1,1,3)^T$$

شعاعين متعامدين. عيّن شعاعاً ثالثاً u_3 بحيث تكون الجملة $\{u_1, u_2, u_3\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$. استنتج من ذلك أساساً متعامداً نظامياً.

2.5. ليكن $w \in \mathbb{C}^n$ حيث $\|w\|_2 = \sqrt{w^* w} = 1$. نعرّف المصفوفة المربّعة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ بالعلاقة

$$A = I - 2w \cdot w^*$$

أثبت أنّ المصفوفة A هي مصفوفة هرميتيّة وواحديّة.

3.5. احسب القيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لكلٍّ من المصفوفتين

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.5. لتكن $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة واحديّة.

(a) بيّن أنّه أيّاً كان الشعاع x من الفضاء $\mathbb{C}^n$ فإنّ $\|U \cdot x\|_2 = \|x\|_2$.

(b) أثبت أنّ

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \quad \langle U \cdot x, U \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle$$

تبيّن هذه العلاقة أنّ التحويلات الواحديّة تحافظ على الزوايا بين الأشعّة في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

(c) بيّن أنّ لجميع القيم الذاتيّة لمصفوفة واحديّة طويلة تساوي 1.

5.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة هرميتيّة. بيّن أنّ A تكون مصفوفة معرّفة موجبة إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها الذاتيّة حقيقيّة وموجبة تماماً.

6.5. ليكن الشعاع $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$، نعرّف المصفوفة $A = y \cdot y^T$.

i) بيّن أنّ $\lambda = 0$ هي قيمة ذاتيّة درجة مضاعفتها $n-1$.

ii) ما هي القيمة الذاتيّة الوحيدة غير المعدومة لهذه المصفوفة؟

7.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة، وليكن $\|.\|$ نظيماً شعاعياً في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

نعرّف

$$\|x\|_A = \|A \cdot x\|, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

بيّن أنّ $\|.\|_A$ نظيمٌ شعاعي في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

8.5. برهن أنّ

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

يسوّغ هذا استخدام الرمز $\|x\|_\infty$ للدلالة على المقدار في الطرف اليميني من العلاقة.

9.5. برهن أنّه أيّاً كان النظيم المصفوفاتي $\|.\|$ فإنّ

$$(a) \quad \|I\| \geq 1$$
$$(b) \quad \|A^{-1}\| \geq 1 \,/\, \|A\|$$

10.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. عيّن القيم والأشعّة الذاتيّة للمصفوفات في كلٍّ من الحالات التالية:

i) $A + \alpha I$ حيث α عدد ثابت.

ii) A^{-1} إذا افترضنا أنّ A مصفوفة قلوبة.

iii) A^m $(m \geq 2)$.

بدلالة القيم والأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A.

11.5 لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) بيّن أنّه أيّاً كانت المصفوفة الواحديّة U فإنّ

$$\|A \cdot U\|_F = \|U \cdot A\|_F = \|A\|_F$$

(b) إذا كانت A مصفوفة هرميتية أثبت أنّ

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$$

حيث $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ هي القيم الذاتيّة للمصفوفة A، وبيّن صحّة المتراجحة المزدوجة:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

12.5. برهن أنّه إذا كانت Q مصفوفة متعامدة فإنّ

$$\forall A \in \mathcal{M}_n, \quad \kappa_2(Q \cdot A) = \kappa_2(A)$$

13.5. برهن أنّ

$$\kappa_2(A+B) \leq \max\big(\kappa_2(A), \kappa_2(B)\big)$$

حيث A و B مصفوفتان متناظرتان ومعرفتان موجبتان.

14.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، برهن أنّ

$$\kappa_2\left(A^T \cdot A\right) = \big[\kappa_2(A)\big]^2$$

15.5. لتكن A مصفوفة قلوبة. برهن أنّه أيّاً كانت المصفوفة المربّعة B فإنّ

$$\|AB - I\|_2 \leq \kappa_2(A) \cdot \|BA - I\|_2$$

وبرهن أنّ هناك مصفوفات مربّعة B تتحقق عندها المساواة.

16.5. لتكن المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta A = \begin{bmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{bmatrix}$$

نضع

$$A \cdot x = (A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x)$$

أولاً: احسب $\kappa_2(A)$ وعيّن قيمة النسبة $\dfrac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$.

ثانياً: عيّن قيمة الخطأ النسبي في الحل $\dfrac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$.

قارن ذلك مع المقدار $\kappa_2(A) \cdot \dfrac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$.

ثالثاً: لتكن المصفوفة $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix}$.

- عيّن المصفوفتين $D \cdot A$ و $D \cdot \Delta A$ واحسب قيمة $\kappa_2(D \cdot A)$.
- قارن النسبة $\dfrac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ مع المقدار $\kappa_2(D \cdot A) \cdot \dfrac{\|D \cdot \Delta A\|_2}{\|D \cdot A\|_2}$.

ما استنتاجك؟

الفصل الثالث

الطرائق المباشرة في حلّ جُمَل المعادلات الخَطيّة

لتكن جملة المعادلات الخطّية

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

حيث الأمثال a_{ij} ، b_j هي أعدادٌ حقيقيّة معطاة. نرمز إلى هذه المعادلات، على الترتيب، بالكتابة

$$E_1,\ldots,E_n$$

نبحث عن الحل المشترك $x_1,\ldots,x_n$ لهذه المعادلات. في أغلب الأحيان نستخدم الكتابة المصفوفاتيّة في التعبير عن جملة المعادلات

$$A \cdot x = b \tag{2}$$

نعلم أنّ جملة المعادلات (2) تقبل حلاً وحيداً إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. يقوم مبدأ الطرائق التي سنعرضها في هذا الفصل على تعيين مصفوفة مربّعة قلوبة M بحيث تكون المصفوفة $M \cdot A$ مثلّثية من الأعلى (أو مثلّثية من الأسفل). ومن ثمّ نقوم بحلّ جملة المعادلات الخطّية المكافئة:

$$M \cdot A \cdot x = M \cdot b$$

بطريقة التعويض.

يشكّل هذا المبدأ أساس الطرائق التالية:

- طريقة غاوص Gauss (في حالة مصفوفات عامّة)،
- طريقة شولسكي Choleski (في حالة مصفوفات متناظرة معرّفة موجبة)،
- طريقة هاوسهولدر Householder (الإرجاع إلى الشكل المثلثي باستخدام تحويلات متعامدة).

1. طريقة غاوص

لتكن لدينا جملة المعادلات (1) ولنفترض أنّ $\det(A) \neq 0$. إذا كان $a_{11} \neq 0$، فإنّه من الممكن حذف المجهول x_1 من المعادلات الثانية، الثالثة،...، إلى الأخيرة باستعمال المعادلة الأولى، كما يلي:

نضع
$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2,\dots,n$$

ونجري على المعادلة E_i التحويل التالي

$$E_i \leftarrow E_i - m_{i1} \cdot E_1$$

وبنتيجة هذا التحويل نحصل على جملة المعادلات المكافئة التالية

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & + a_{12}^{(1)}x_2 & + \cdots + & a_{1n}^{(1)}x_n & = b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)}x_2 & + \cdots + & a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)}x_2 & + \cdots + & a_{nn}^{(1)}x_n & = b_n^{(1)} \end{array} \tag{3}$$

حيث

$$\left.\begin{array}{ll} a_{1j}^{(1)} = a_{1j}, & a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j} \\ b_1^{(1)} = b_1, & b_i^{(1)} = b_i - m_{i1}b_1 \end{array}\right\} \quad i = 2,\dots,n$$

نرمز بـ $A^{(1)}$ إلى مصفوفة الجملة (3) و بـ $b^{(1)}$ إلى شعاع الطرف الثاني في هذه الجملة.

في الحالة التي يكون فيها $a_{11} = 0$، نبدّل المعادلة E_1 بمعادلةٍ E_i يكون فيها $a_{i1} \neq 0$ وهذا ممكنٌ على الدوام لأنّنا افترضنا $\det(A) \neq 0$.

الآن، إذا نظرنا إلى جملة المعادلات (3) فإننا نلاحظ أنّ المعادلات

$$E_2,\dots,E_n$$

تشكّل بدورها جملة معادلات خطيّة بالمجاهيل $x_2,\dots,x_n$. فهي جملة-جزئيّة مرتبتها $(n-1)$.

نستطيع أن نطبّق عليها المعالجة السابقة ذاتها ونحذف بذلك المجهول x_2 من المعادلات

$$E_3,\dots,E_n$$

من الناحية العمليّة نضرب المعادلة E_2 من جملة المعادلات (3) بالعدد $m_{i2} = a_{i2}^{(1)} \,/\, a_{22}^{(1)}$ ونطرحها من المعادلة E_i $(3 \le i \le n)$. بتكرار هذه المعالجة نحصل على الجُمَل الخطيّة المتكافئة

$$(A,b) \to (A^{(1)},b^{(1)}) \to (A^{(2)},b^{(2)}) \to \cdots \to (A^{(n-1)},b^{(n-1)}) \equiv (R,c)$$

ويؤول حلّ الجملة الخطيّة (1) إلى حل الجملة المثلثيّة التالية:

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \cdots + r_{1n}x_n &= c_1 \\ r_{22}x_2 + \cdots + r_{2n}x_n &= c_2 \\ \ddots \quad \vdots \quad &\vdots \\ r_{nn}x_n &= c_n \end{aligned} \tag{4}$$

والتي نستطيع حلّها بسهولة "بطريقة التعويض" كما يلي

$$\begin{cases} x_n = c_n \,/\, r_{nn} \\ x_i = (c_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}x_j) \,/\, r_{ii} \qquad i = (n-1),(n-2),\dots,1 \end{cases} \tag{5}$$

1.1. تحويل غاوص

ليكن $c^T = (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n$ بحيث تكون المركّبة $c_k \neq 0$. نعرّف الشعاع

$$\tau^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tau_{k+1} \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \tau_i = \frac{c_i}{c_k}, \quad k+1 \le i \le n$$

نضع

$$M_k = I_n - \tau^{(k)} \cdot e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\tau_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\tau_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

عندها، نجد أنّ

$$M_k \cdot c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعرّف المصفوفة M_k ما يسمّى بتحويل غاوص، ويسمّى الشعاع $\tau^{(k)}$ شعاع غاوص.

مثال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

لدينا هنا

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 \cdot \big(M_1 \cdot A\big) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1. خوارزميّة غاوص

في الحالة العامّة، نستعمل طريقة حذف المجاهيل في حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$ مصفوفتها A قلوبة. هذا ما يعرف باسم خوارزميّة غاوص وهي كالآتي:

Algorithm Gauss (Input: A, b; Output : x);
Begin
step 1 : put $B = [A, b] \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$;
step 2 : for $k = 1$ to n - 1 do
Begin
find $\ell \in \{k, \ldots, n\}$ so that
$$\left|B_{\ell,k}\right| = \max_{j \geq k} \left|B_{j,k}\right|;$$
permute lines k and ℓ;
for $i = k + 1$ to n do
for $j = k$ to $n + 1$ do
$$B_{i,j} \leftarrow B_{i,j} - B_{i,k} \,/\, B_{k,k} \cdot B_{k,j}$$
End;
step 3 : "Solve the obtained triangular system "
Begin
$x_n \leftarrow B_{n,n+1} \,/\, B_{n,n}$;
for $i = n - 1$ downto 1 do
$$x_i \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}} \left(B_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j \right)$$
End;
End.{Gauss}

ملاحظة:

تمثّل المرحلة الثانية من خوارزميّة غاوص السابقة استراتيجيّة البحث الجزئي عن المرتكز القطري Pivot، أي البحث عن أفضل عنصر (أكبر العناصر بالقيمة المطلقة) من بين العناصر الواقعة تحت القطر في العمود الذي يجري فيه الحذف.

مثال: لتكن الجملة الخطّية

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

بتطبيق الخوارزميّة السابقة نحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \overline{2/3} & 1/3 & -1 & 17/3 \\ 1/3 & \textcircled{2/3} & -1 & 10/3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \overline{1/3} & \underline{2/3} & -1 & 10/3 \\ 2/3 & 1/2 & -1/2 & 4 \end{array}\right]$$

ومن ثمّ تؤول جملة المعادلات إلى الجملة المكافئة

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10/3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{aligned} x_3 &= -8, \\ x_2 &= \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3} + x_3\right) = -7, \\ x_1 &= \frac{1}{3}\left(2 - x_2 - 6x_3\right) = 19 \end{aligned}$$

من جهةٍ ثانية، إذا كانت P مصفوفة التبديل للسطرين 2 و 3 أيْ أنّ:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

فإننا نلاحظ هنا تطابقاً بين المصفوفة $P \cdot A$ والجداء $L \cdot R$ حيث

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ & 2/3 & -1 \\ & & -1/2 \end{bmatrix}$$

3.1. التفريق LR

تعريف: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ إنّها تقبل تفريقاً LR (Left-Right) إذا وفقط إذا أمكن إيجاد مصفوفة مثلثيّة من الأسفل $L = (\ell_{ij})$ فيها $(\ell_{ii} = 1)_{1 \le i \le n}$ ومصفوفة مثلثيّة من الأعلى $R = (r_{ij})$ بحيث يكون:

$$A = L \cdot R$$

توضّح المبرهنات التالية الخواص المتعلّقة بهذا التفريق.

مبرهنة 1:

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مربّعة وقلوبة. إنّ تطبيق خوارزميّة غاوص في حل جملة المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ تسمح بإيجاد تفريق LR للمصفوفة $P \cdot A$:

$$P \cdot A = L \cdot R \tag{6}$$

حيث P هي مصفوفة تبديل، L و R مصفوفتان مثلثيّتان من الشكل:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

الإثبات:

لنفترض أنّنا أجرينا مسبقاً جميع التباديل الضروريّة لترتيب معادلات الجملة الخطيّة بحيث لا نحتاج عند إجراء عمليّة حذف المجاهيل إلى أي تبديل. عندئذٍ، باستخدام تحويلات غاوص

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

نستطيع التعبير عن مراحل الحذف في خوارزميّة غاوص كما يلي:

$$M_1A = A^{(1)},\ M_2A^{(1)} = A^{(2)},\cdots,\ M_{n-1}A^{(n-2)} = A^{(n-1)} = R$$

ومن ثمّ يكون

$$(M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\ldots\cdot M_1)\cdot A = R$$
$$\Updownarrow$$
$$A = (M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\ldots\cdot M_1)^{-1}\cdot R$$

بقي أن نبرهن أنّ المصفوفة L في العلاقة (6) هي

$$(M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\ldots\cdot M_1)^{-1}$$

نطبّق تحويلات الحذف M_1 ، M_2 ، ...، M_{n-1} على المصفوفة L فتحذف بذلك العناصر تحت القطر ونحصل على المصفوفة المطابقة، أي أنّ

$$(M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdots M_1)\cdot L = I$$

وهو المطلوب. ■

مبرهنة 2: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. نعرّف المصفوفات المربّعة

$$\Delta_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$$

أوّلاً: إذا تحققت الشروط

$$\det(\Delta_k) \neq 0, \quad 1 \le k \le n-1$$

فإنّ المصفوفة A تقبل تفريقاً LR .

ثانياً: إذا كانت المصفوفة A قلوبة وكانت تقبل تفريقاً LR فإنّ هذا التفريق يكون وحيداً.

الإثبات:

أولاً: إذا كان $a_{11} \neq 0$ فإنّ تحويل غاوص M_1 يكون معرّفاً. لنبرهن الآن أنّه إذا كانت تحويلات غاوص:

$$M_1,\ldots,M_{k-1}$$

معرّفة فإنّ تحويل غاوص M_k يكون معرّفاً أيضاً.

لدينا

$$A^{(k-1)} = M_{k-1}\cdots M_1 \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k-1)} & \times & \cdots & \times \\ & & \times & \cdots & \cdots & \times \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & \times & \cdots & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

عندئذٍ، يكون

$$\det(\Delta_k) = a_{11}^{(k-1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

ومنه نستنتج أنّ $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. ومن ثمّ يكون تحويل غاوص M_k معرّفاً أياً كان $1 \leq k \leq n-1$.

ثانياً: نفترض أنّ المصفوفة القلوبة A تقبل تفريقين LR هما:

$$A = L_1 \cdot R_1 \quad , \quad A = L_2 \cdot R_2$$

عندها يكون بالضرورة $L_2^{-1} \cdot L_1 = R_2 \cdot R_1^{-1}$. المصفوفة $L_2^{-1} \cdot L_1$ مثلّثيّة من الأسفل عناصر قطرها الرئيس $(L_2^{-1} \cdot L_1)_{kk} = 1$، في حين أنّ المصفوفة $R_2 \cdot R_1^{-1}$ مثلّثيّة من الأعلى. من ذلك نستنتج أنّ

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = R_2 \cdot R_1^{-1} = I_n$$

وبالتالي يكون

$$L_1 = L_2 \quad , \quad R_1 = R_2$$

وبذا يتمّ المطلوب ■

ملاحظات

① توجد مصفوفات قلوبة لا تقبل تفريقاً LR، منها على سبيل المثال، المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

② تتوضّح فائدة وجود تفريق LR لمصفوفة A عندما تطرح مسألة حل عدّة جُملٍ خطّية لها المصفوفة A ذاتها: في هذه الحالة، يبيّنُ التكافؤ التالي

$$A \cdot x = b \xleftarrow{A=L\cdot R} \begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y \end{cases}$$

أنّه يكفي إيجاد تفريق LR للمصفوفة A ومن ثمّ حلّ جملة المعادلتين:

$$L \cdot y = b \quad , \quad R \cdot x = y$$

لكلّ قيمةٍ معطاة لشعاع الطرف الثاني b.

③ يسمح التفريق $P \cdot A = L \cdot R$ بحساب مُحَدّد المصفوفة المربّعة A وذلك لأنّ

$$\det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$$

وبما أنّ $\det(P) = (-1)^{\sigma}$ حيث σ هو عدد المناقلات المطبّقة في أثناء تنفيذ خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل، ومن ثمّ يكون

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} \cdot r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$$

④ يمكن حساب كلفة تطبيق خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل والإرجاع إلى الشكل المثلّثي كما يلي:

نحتاج تطبيق تحويل غاوص على العمود الأول M_1 (الانتقال من A إلى $A^{(1)}$) إلى:

$(n-1)$ عمليّة قسمة ، $(n-1)^2$ عمليّة ضرب وجمع

وكذلك الأمر، فإنّ تطبيق تحويل غاوص M_2 يتطلّب:

$n-2$ عمليّة قسمة ، $(n-2)^2$ عمليّة ضرب وجمع

وهكذا، تكون الكلفة الإجماليّة لتطبيق خوارزميّة غاوص في الحذف (أو كلفة التفريق LR) معطاة بالمجموع:

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \simeq \frac{n^3}{3} \; operations$$

حيث تمثّل الواحدة $operation$ عمليّة مركّبة (عمليّة ضرب وعمليّة جمع)، أي:

$$operation = multiplication + addition$$

وبالنسبة لتطبيق تحويلات غاوص على الطرف الثاني، فإنّ الانتقال من b إلى $b^{(1)}$ يتطلّب $(n-1)$ عمليّة مركّبة، ومن ثمّ، فإننا نحصل على شعاع الطرف الثاني c بكلفة تقديرية تساوي:

$$(n-1)+\cdots+2+1 \simeq n^2\ /\ 2\ operations$$

وعلى نحوٍ مشابه، فإنّ تطبيق طريقة التعويض (5) -لإيجاد حل جملة المعادلات- يتطلّب $n^2\ /\ 2$ عمليّة مركّبة.

⑤ إذا كانت مصفوفة مربّعة A تقبل تفريقاً LR، فإنّه يمكن النظر إلى عمليّة تعيين هذا التفريق كعمليّة حلّ n^2 معادلة بـ n^2 مجهول:

$$\{\ell_{ik} : k < i\ ,\ r_{ik} : k \geq i\}$$

وهذه المعادلات هي

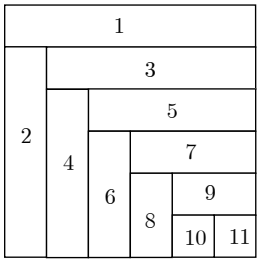
$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{\min(i,k)} \ell_{ij} \cdot r_{jk} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq n$$

حيث

$$\{\ell_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

وهذا أساس ما يعرف باسم طريقة Crout وكذلك طريقة Banachiewicz في تعيين المصفوفتين L و R.

- **طريقة** Crout: وتستخدم أسلوب المسح سطر-عمود وفق الترتيب الموضّح بالشكل التالي:



نعيّن وفق هذه الطريقة عناصر التفريق $(\ell_{ki})_{k>i}$ و $\left(r_{ik}\right)_{k\geq i}$ كالآتي:

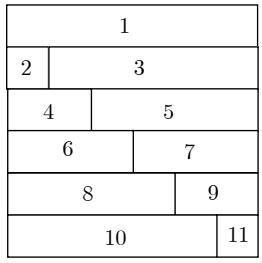
- $a_{1k} = \sum_{j=1}^{1} \ell_{1j} \cdot r_{jk} \quad \Rightarrow \quad r_{1k} = a_{1k}, \quad 1 \le k \le n$
- $a_{i1} = \sum_{j=1}^{1} \ell_{ij} \cdot r_{j1} \quad \Rightarrow \quad \ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad 2 \le i \le n$
- $a_{2k} = \sum_{j=1}^{2} \ell_{2j} \cdot r_{jk} \quad \Rightarrow \quad r_{2k} = a_{2k} - \ell_{21} \cdot r_{1k}, \quad 2 \le k \le n$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

وهذا يقودنا إلى صياغة خوارزميّة Crout :

Algorithm Crout (Input: A ; Output: $L,\ R$);
Begin
  for $i = 1$ to n do
  Begin
    for $k = i$ to n do $\quad r_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} \cdot r_{jk}$
    for $k = i+1$ to n do $\quad \ell_{ki} = \dfrac{1}{r_{ii}} \left(a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{kj} \cdot r_{ji} \right)$
  End;
End; {Crout}

- **طريقة** Banachiewicz : وتستخدم أسلوب المسح سطر-سطر وفق الترتيب الموضّح بالشكل التالي:



وهذا يقودنا إلى صياغة خوارزميّة Banachiewicz :

Algorithm Banachiewicz (Input: A ; Output: $L,\ R$);
Begin
for $i = 1$ to n do
Begin
for $j = 1$ to $i-1$ do $\quad \ell_{ij} = \dfrac{1}{r_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \cdot r_{kj}\right)$
for $k = i$ to n do $\quad r_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} \cdot r_{jk}$
End;
End; {Banachiewicz}

4.1. اختيار المرتكز القطري

تصادفنا، في بداية عمليّة حذف المجاهيل في طريقة غاوص، مسألة اختيار معادلة يكون فيها $a_{i1} \neq 0$ ؛ نسمّي هذا العنصر المرتكز القطري *Pivot* والذي بواسطته نتمكّن من حذف المجهول x_1 من بقيّة المعادلات. يؤدي اختيار عنصر الارتكاز القطري دوراً هاماً في دقّة الناتج العددي للحساب بالنقطة العائمة. كما يوضّح المثال الآتي.

مثال: (Forsyth) لتكن جملة المعادلتين:

$$\begin{aligned} 1.00 \times 10^{-4} \cdot x_1 + 1.00 \cdot x_2 &= 1.00 \\ 1.00 \cdot x_1 + 1.00 \cdot x_2 &= 2.00 \end{aligned} \tag{7}$$

والتي تقبل حلاً معطى بالعلاقات:

$$x_1 = \frac{1}{0.9999} = 1.000010001\cdots, \quad x_2 = \frac{0.9998}{0.9999} = 0.99989998\cdots$$

لنطبّق طريقة غاوص في الحذف ولنفترض أننا ننفّذ ذلك مستخدمين نظاماً حاسوبياً تمثّل الأعداد فيه بالنقطة العائمة بدقّة ثلاثة أرقام بالنظام العشري. لنناقش الحالتين التاليتين:

1) لنأخذ $a_{11} = 1.00 \times 10^{-4}$ كمرتكز قطري، عندها يكون

$$\begin{aligned} \ell_{21} &= a_{21} \,/\, a_{11} = 1.00 \times 10^{4} \\ a_{22}^{(1)} &= 1.00 - 1.00 \times 10^{4} \doteq -1.00 \times 10^{4} \\ b_{2}^{(1)} &= 2.00 - 1.00 \times 10^{4} = -1.00 \times 10^{4} \end{aligned}$$

ومن ثمّ يكون

$$x_2 = b_2^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 1.00$$

ولكن بالنسبة لـ x_1 نحصل على القيمة

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2) / a_{11} \\ &= (1.00 - 1.00 * 1.00) / (1.00 \times 10^{-4}) = 0 \end{aligned}$$

نلاحظ هنا أنّ قيمة x_1 التي حصلنا عليها هنا خاطئة تماماً.

2) الآن، نقوم بتبديل المعادلتين في (7)، فيصبح عندئذٍ المرتكز القطري 1.00 وتعطي عمليّة حذف غاوص القيم التالية:

$$\begin{aligned} \ell_{21} &= 1.00 \times 10^{-4} \\ a_{22}^{(1)} &= 1.00 - 1.00 \times 10^{-4} = 1.00 \\ b_2^{(1)} &= 1.00 - 2.00 * 1.00 \times 10^{-4} = 1.00 \end{aligned}$$

ومن جديد، نحصل على

$$x_2 = b_2^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 1.00$$

ولكن، هذه المرّة تكون قيمة x_1 كما يلي

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2) / a_{11} \\ &= (2.00 - 1.00 * 1.00) / 1.00 = 1.00 \end{aligned}$$

نلاحظ هنا أنّ قيم كلّ من x_2 وكذلك x_1 تمثّل تقريباً جيّداً للحلّ.

2. طريقة شولسكي

لندرس طريقة غاوص في الحالة الخاصّة التي تكون فيها المصفوفة A :

- متناظرة أيْ $A^T = A$ ،
- معرّفة موجبة أيْ $x^T \cdot A \cdot x > 0$ أياً كان الشعاع $x \neq 0$.

توضّح المبرهنة التالية، أنّه لا حاجة، في هذه الحالة، إلى إجراء البحث عن عناصر الارتكاز القطري في خوارزميّة غاوص في حذف المجاهيل.

مبرهنة 3: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة. عندئذٍ:

أولاً: تقبل المصفوفة A تفريقاً وحيداً $A = LR$.

ثانياً: يحقّق التفريق $A = LR$ الخاصّة التالية:

$$R = D \cdot L^T, \quad D = \operatorname{diag}(r_{11},\ldots,r_{nn}) \tag{8}$$

الإثبات:

أولاً: لدينا هنا $a_{11} = e_1^T \cdot A \cdot e_1 > 0$ حيث $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T$، وذلك لكون المصفوفة A معرّفة موجبة. ومن ثمّ يمكن اختيار العنصر a_{11} كمرتكز قطري في المرحلة الأولى من طريقة غاوص:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ a & C \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C^{(1)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

حيث

$$c_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad 2 \le i,j \le n$$

أو بشكلٍ مكافئ

$$C^{(1)} = C - \frac{1}{a_{11}} a \cdot a^T$$

من الواضح أنّ المصفوفة $C^{(1)}$ متناظرة. لنبرهن أنّها أيضاً معرّفة موجبة. نفترض أنّ

$$y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$$

يلزمنا إثبات صحّة المتراجحة $y^T \cdot C^{(1)} \cdot y > 0$. بالاستفادة من الكتابة (9) ومن كون المصفوفة A معرّفة موجبة نستطيع أن نكتب

$$(x_1, y^T) \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ a & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2x_1 \cdot y^T a + y^T \cdot C \cdot y > 0$$

فإذا وضعنا $x_1 = -y^T a \,/\, a_{11}$ في المتراجحة السابقة نجد

$$y^T C^{(1)} y = y^T C y - \frac{1}{a_{11}}(y^T a)^2 > 0$$

وبالتدريج، نجد أنّ المرحلة الثانية وكذلك المراحل الأخرى من طريقة غاوص في حذف المجاهيل قابلة للتنفيذ دون البحث عن مرتكز قطري جديد.

ثانياً: العلاقة (8) هي نتيجة من وحدانيّة التفريق LR لمصفوفة قلوبة: في الواقع، إذا عرّفنا $\hat{L} = R^T \cdot D^{-1}$ فإننا نحصل على المطابقة التالية:

$$A = A^T = R^T \cdot L^T = \hat{L} \cdot (D \cdot L^T)$$

ومن وحدانيّة التفريق LR نستنتج أنّ $\hat{L} = L$ ومن ثمّ $R = D \cdot L^T$. ■

ملاحظة هامة: بما أنّ العناصر $r_{ii} > 0$ (المصفوفة A معرّفة موجبة)، فإنّه يمكن تعريف المصفوفة

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{r_{11}}, \cdots, \sqrt{r_{nn}}\right)$$

ومن ثمّ يؤول التفريق $A = L \cdot D \cdot L^T$ إلى الشكل

$$A = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$$

نضع $B = L \cdot D^{1/2}$، فنحصل على التفريق

$$A = B \cdot B^T \tag{10}$$

والذي يسمّى تفريق شولسكي للمصفوفة A. حيث

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

بمقارنة طرفي المطابقة $A = B \cdot B^T$ نجد

$$\left.\begin{array}{ll} i = k: & a_{kk} = b_{k1}^2 + b_{k2}^2 + \cdots + b_{kk}^2 \\ i > k: & a_{ik} = b_{i1}b_{k1} + \cdots + b_{ik}b_{kk} \end{array}\right\}, \quad 1 \le k \le n$$

ومنه نستنتج خوارزميّة شولسكي في تفريق مصفوفة متناظرة معرّفة موجبة.

Algorithm Choleski (Input: A ; Output: B);
Begin
for $k = 1$ to n do
Begin
$b_{kk} \leftarrow \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj}^2}$;
for $i = k+1$ to n do $b_{ik} \leftarrow \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij} b_{kj} \right) / b_{kk}$
end;
End. {Choleski}

فيما يتعلّق بكلفة خوارزميّة شولسكي، فيمكن تقدير عدد العمليّات الحسابيّة الأساسيّة (مع إهمال الـ n عمليّة جذر تربيعي) اللازمة كما يلي:

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k) \cdot k = \frac{n(n^2-1)}{6} \simeq \frac{n^3}{6}$$

وهذا يوافق نصف كلفة تعيين التفريق LR التي رأيناها سابقاً.

3. طريقة هاوسهولدر وتفريق QR

رأينا في طريقة غاوص كيف أدى ضرب طرفي الجملة الخطيّة $A \cdot x = b$ بالمصفوفة $M_{n-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$ إلى تحويل هذه الجملة إلى الجملة المكافئة $R \cdot x = c$ حيث R هي مصفوفة مثلثيّة من الأعلى. في هذه الفقرة، نعرض أسلوباً مشابهاً لذلك باستخدام تحويلات خطية متعامدة تعرف باسم تحويلات هاوسهولدر. تطبّق هذه التحويلات كما في طريقة غاوص على أعمدة مصفوفة الجملة الخطية A بحيث تردّ إلى مصفوفة مثلثيّة من الأعلى. لتكن H_1 ، H_2 ، ...، H_{n-1} تحويلات خطية متعامدة بحيث يكون

$$H_{n-1} \cdot H_{n-2} \cdots H_1 \cdot A = R$$

حيث R مصفوفة مثلثيّة من الأعلى. عندها نحصل على التفريق $A = Q \cdot R$ ، حيث

$$Q = \left(H_{n-1} H_{n-2} \cdots H_1 \right)^T$$

مصفوفة متعامدة.

بوجهٍ عام، نبحث عند حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$ عن مصفوفة Q متعامدة (أي $Q^T Q = I$) وعن مصفوفة مثلثيّة من الأعلى R بحيث يكون $Q^T \cdot A = R$ أو بشكلٍ مكافئ

$$A = Q \cdot R$$

تسمّى الكتابة الأخيرة "تفريق QR للمصفوفة A".

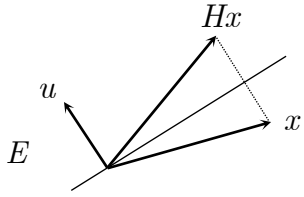
1.3. انعكاسات هاوسهولدر

ليكن $u \in \mathbb{R}^n$ يحقق الشرط $u^T u = 1$. نسمّي مصفوفة هاوسهولدر Householder الموافقة للشعاع u المصفوفة المعرّفة بالعلاقة:

$$H = I - 2u \cdot u^T \tag{11}$$

تمتلك مصفوفات هاوسهولدر الخواص التالية:

1°) H هي انعكاس بالنسبة للمستوي $E = \{v : u^T v = 0\}$:



حيث

$$\{H \cdot x = x - 2\langle u, x\rangle u\} \wedge \{(H \cdot x + x) \perp u\}$$

2°) H مصفوفة متناظرة،

3°) H مصفوفة متعامدة:

$$\begin{aligned} H^T H &= (I - 2uu^T)^T (I - 2uu^T) \\ &= I - 4uu^T + 4uu^T uu^T = I \end{aligned}$$

نعرض في الفقرة التالية طريقةً تستخدم تحويلات هاوسهولدر في رد مصفوفة $A \in \mathcal{M}_{m.n}(\mathbb{R})$ حيث $m \geq n$ إلى الشكل المثلّثي.

2.3. خوارزمية هاوسهولدر Householder-Businger-Golub

⌖ **في المرحلة الأولى:** نبحث عن مصفوفة هاوسهولدر

$$H_1 = I_m - 2u_1u_1^T, \quad u_1 \in \mathbb{R}^m, \quad u_1^Tu_1 = 1$$

بحيث يكون

$$H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \tag{12}$$

فإذا رمزنا بـ A_1 للعمود الأوّل في المصفوفة A، يكون لدينا $H_1A_1 = \alpha_1e_1 = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)^T$ ويكون أيضاً $\|H_1A_1\|_2 = \|A_1\|_2$. $|\alpha_1|$. كما أنّ الشكل الخاص للمصفوفة H_1 يقتضي أن يكون

$$H_1A_1 = A_1 - 2u_1 \cdot u_1^TA_1 = \alpha_1e_1$$

نلاحظ هنا أنّ المقدار $u_1^TA_1$ هو عددٌ سلميّ. نستنتج من ذلك أنّ

$$u_1 = \lambda \cdot v_1 \quad , \quad v_1 = A_1 - \alpha_1e_1$$

يعيّن الثابت λ من الشرط $\|u_1\|_2 = 1$. وبما أنّنا نملك حريّة اختيار إشارة العدد α_1 فإننا نختار

$$\alpha_1 = -\text{sign}(a_{11}) \cdot \|A_1\|_2 \tag{13}$$

لتجنّب عمليّة طرح حسابيّة قد ينجم عنها أخطاء تدوير محسوسة عند حساب قيمة $v_1 = A_1 - \alpha_1e_1$.

نرمز بـ A_j و $(H_1A)_j$ للعمود رقم j من المصفوفة A والمصفوفة H_1A على الترتيب. عندها يكون

$$\begin{cases} (H_1A)_j = A_j - 2u_1u_1^TA_j = A_j - \beta \cdot v_1^TA_jv_1 \\ \\ \beta = 2 \,/\, v_1^Tv_1 \end{cases} \tag{14}$$

يمكن حساب العدد β بمساعدة العلاقة التالية:

$$\beta^{-1} = \frac{v_1^T v_1}{2} = \frac{1}{2}\left(A_1^T A_1 - 2\alpha_1 a_{11} + \alpha_1^2\right) = -\alpha_1(a_{11} - \alpha_1) \quad (15)$$

⊕ **في المرحلة الثانية:** نطبّق العمليّة السابقة على المصفوفة الجزئيّة ذات الأبعاد $(m-1)\times(n-1)$ والتي نحصل عليها بحذف السطر الأول والعمود الأول من المصفوفة H_1A. بهذا نحصل على شعاعٍ $\overline{u}_2 \in \mathbb{R}^{m-1}$ ومصفوفة هاوسهولدر $\overline{H}_2 = I_{m-1} - 2\overline{u}_2\overline{u}_2^T$.

نضع $u_2 = (0, \overline{u}_2)^T$ ونضرب طرفي المساواة (12) بالمصفوفة $H_2 = I_m - 2u_2u_2^T$ فنحصل على:

$$H_2H_1A = H_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{H}_2C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \alpha_2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

بمتابعة هذه التحويلات على الأعمدة نحصل على مصفوفة مثلثيّة من الأعلى:

$$\underbrace{H_n \cdot \ldots \cdot H_2H_1}_{Q^T} A = R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

وهذا يعطينا تفريق QR للمصفوفة A مع $Q = H_1H_2\cdots H_n$. يمكن صياغة خوارزميّة تفريق Householder على النحو الآتي:

```
Algorithm  Householder (Input: A; Output : Q, R);
Begin
   R ← A;   { R = [R_1, R_2, ..., R_n] }
   Qt ← I_m;
   for k = 1 to n do
   begin
      v=R_k[k, ..., m];
      if ‖v‖_2 > 0 then
      begin
         if v[1] ≥ 0 then  α ← −‖v‖_2  else  α ← ‖v‖_2 ;
         u ← [0, ..., 0 (k−1 times), v_1, v_2, ..., v_{m−k+1}];
         u[k] ← u[k] − α;
         u ← u / ‖u‖_2 ;
         H ← I_m − 2 u · u^T;
         Qt ← H · Qt;
         R ← H · R
      end;
   end;
   Q ← Qt^T;   S ← diag[sign(R_ii), 1 ≤ i ≤ n];
   Q ← Q · S;
   R ← S · R
End;
```

⌖ **كلفة التفريق** QR: في المرحلة الأولى، نقوم بحساب α_1 من العلاقة (15) وهذا يتطلّب تقريباً m عمليّة حسابيّة، وأمّا حساب المقدار $2 \,/\, v_1^T v_1$ عن طريق العلاقة (15) فهو مهمل وفيما يتعلّق بحساب الأشعّة $\left((H_1 A)_j\right)_{j=2,\ldots,n}$ باستخدام العلاقة (14) فإنّ ذلك يتطلّب تقريباً $2(n-1)\times m$ عمليّة حسابيّة. بالمحصّلة، تتطلّب هذه المرحلة تقريباً $2m \times n$ عمليّة حسابيّة. ومن ثمّ فإنّ الحصول على التفريق QR للمصفوفة A يتطلّب:

$$2(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1) \simeq 2n^3 \,/\, 3 \;\; operations \quad (m = n)$$
$$2m(n + (n-1) + \cdots + 1) \simeq mn^2 \quad operations \quad (m \gg n)$$

مثال:

لنطبق خوارزميّة هاوسهولدر في تعيين التفريق QR للمصفوفة

$$A=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-9 & 27 & 99 & 198\\ -15 & -35 & -107 & -200\\ -3 & -61 & 29 & -22\\ -3 & -61 & -115 & -4\end{pmatrix}$$

- تحويل هاوسهولدر الأوّل: بالحساب نجد

$$\alpha_1=1,$$

$$u_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{5}{6\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{6\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{6\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad H_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{5}{6} & \frac{29}{54} & -\frac{5}{54} & -\frac{5}{54}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{54} & -\frac{53}{24} & -\frac{1}{54}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{54} & -\frac{1}{54} & \frac{53}{54}\end{pmatrix},\quad R_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -15\\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -2\\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & -1\end{pmatrix}$$

- تحويل هاوسهولدر الثاني: بالحساب نجد

$$\alpha_2=5,$$

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad H_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

- وبذلك نكون قد حصلنا على تفريق QR للمصفوفة A عناصره:

$$Q=\left(H_2\cdot H_1\right)^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{18} & -\frac{7}{18} & -\frac{7}{18}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{11}{18} & \frac{13}{18} & -\frac{5}{18}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{11}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{13}{18}\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

4. طريقة التربيعات الصغرى في حل جمل المعادلات الخطيّة

لتكن جملة المعادلات الخطّية

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} \tag{16}$$

حيث $n \le m$. تكتب هذه الجملة مصفوفاتياً بالشكل

$$A\cdot x = b, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

بوجهٍ عام، لا تملك جملة المعادلات (16) حلولاً. تكمن الفكرة في طرح هذه المسألة في البحث عن شعاعٍ x يحقق الخاصّة التالية:

$$\|A\cdot x - b\|_2 = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \|A\cdot y - b\|_2 \tag{17}$$

يدلّ اسم "التربيعات الصغرى" على اختيار النظيم الاقليدي لقياس خطأ التقريب (مجموع مربّعات الأخطاء).

مبرهنة 4: لتكن $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$، حيث $n \le m$ وليكن $b \in \mathbb{R}^m$. يكون الشعاع $x \in \mathbb{R}^n$ حلاً للمسألة (17) **إذا وفقط إذا** كان x حلاً لجملة المعادلات الخطّية

$$A^T A\cdot x = A^T b \tag{18}$$

الإثبات: إذا كان $z \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$$\|A(x+\alpha z) - b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 + 2\alpha\cdot z^T\cdot A^T(Ax-b) + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2$$

- **لزوم الشرط:** إذا كان الشعاع $z = -A^T(Ax-b)$ غير معدوم فإنّ المقدار

$$2\alpha\cdot z^T\cdot A^T(Ax-b) + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2 = -2\alpha\cdot z^T\cdot z + \alpha^2\cdot\|Az\|_2^2$$

يكون ذا إشارة سالبة عندما تكون قيمة الوسيط α صغيرةً بالقدر الكافي وعندها يكون

$$\|Ax-b\|_2 > \|A(x+\alpha z)-b\|_2$$

وهذا يتعارض مع افتراض x حلاً للمسألة (17).

- **كفاية الشرط:** إذا كان x يحقق الشرط (18) فإنّ

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \|A(x+\alpha z)-b\|_2^2 = \|Ax-b\|_2^2 + \alpha^2 \cdot \|Az\|_2^2$$

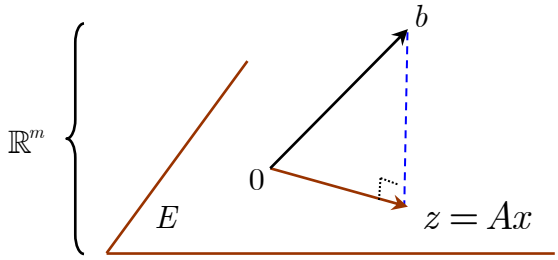
ومن ثمّ يكون

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\cdot x-b\|_2 \leq \|A\cdot y-b\|_2$$

أي أنّ x حلٌ للمسألة (17) وهو المطلوب. ■

1.4. التمثيل الهندسي لمسألة التربيعات الصغرى

تشكّل المجموعة $E=\{Ay : y\in\mathbb{R}^n\}$ فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء $\mathbb{R}^m$. إذا كان $b\in\mathbb{R}^m$ شعاعاً اختيارياً، فإنّ الشعاع $x\in\mathbb{R}^n$ يكون حلاً للمسألة (17) إذا وفقط إذا كان العنصر $z=Ax$ هو المسقط العمودي للشعاع b على الفضاء E.



الإسقاط العمودي للشعاع b على الفضاء الجزئي E.

وهذا يعني أنّ

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (A\cdot x-b) \perp A\cdot y$$

نستنتج من ذلك أنّ $A^T(Ax-b)=0$. وبهذا نكون قد أثبتنا مرّة أخرى **المبرهنة 4**.

ملاحظات:

① تمتلك جملة المعادلات (18) دوماً حلاً على الأقل، وذلك لأنّ المسقط العمودي للشعاع b على الفضاء E موجودٌ دائماً.

من جهةٍ ثانية، المصفوفة A^TA متناظرة وشبه معرّفة موجبة $(x^TA^TAx = \|Ax\|_2^2 \geq 0)$ وتكون معرّفة موجبة إذا كانت أشعّة الأعمدة في المصفوفة A مستقلّة خطياً، أيْ:

$$\forall x \neq 0, \quad A \cdot x \neq 0$$

وفي هذه الحالة، يمكننا استخدام خوارزميّة شولسكي لحل جملة المعادلات (18). ولكن غالباً، ما يجري إيجاد الحلّ مباشرةً من المسألة (17) دون استعمال المعادلات (18).

② لحلّ مسألة التربيعات الصغرى (17) نبحث عن مصفوفة متعامدة $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ بحيث يكون

$$Q^T(Ax - b) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

حيث $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مثلثيّة من الأعلى، ويمثّل الشعاع $(c, c')^T$ تجزئةً للشعاع Q^Tb حيث $c \in \mathbb{R}^n$، $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$. وبما أنّ التحويلات المتعامدة تحافظ على النظيم الاقليدي يكون لدينا

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|Q^T \cdot (Ax - b)\right\|_2^2 = \|Rx - c\|_2^2 + \|c'\|_2^2 \tag{19}$$

ومن ثمّ، فإنّ إيجاد حلٍ للمسألة (17) يؤول إلى حل الجملة الخطّية:

$$R \cdot x = c$$

③ في الحالة التي تكون فيها أعمدة المصفوفة A "تقريباً" مرتبطة خطّياً، فإنّه يستحسن حلّ المسألة (17) باستخدام التفريق QR بدلاً من حلّ المعادلات (18) مباشرةً. فعلى سبيل المثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث ε هو عددٌ صغيرٌ يحقق $\varepsilon^2 < eps$ والمقدار eps يمثّل دقّة الآلة التي نجري فيها الحسابات العددية بالنقطة العائمة.

بإجراء حسابات تامّة (دون تقريب عددي) نحصل على

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad A^Tb = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ويعطى حلّ المعادلات (18) في هذه الحالة القيم

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon^2)$$

نلاحظ هنا أنّ إجراء الحسابات العددية بالنقطة العائمة يخفي الحدّ ε^2 من المصفوفة A^TA وبذلك تصبح غير قلوبة، ولا يكون هناك بالنتيجة حلٌ للمعادلات (18).

بالمقابل، فإنّ تطبيق خوارزميّة Householder (بإهمال الحدّ ε^2) يعطي النتائج التالية:

$$\alpha_1 = -1,$$
$$v_1 = (2, \varepsilon, 0)^T, \ldots$$

وفي النهاية نحصل على

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\cdot\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^Tb = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon \,/\, \sqrt{2} \\ -\varepsilon \,/\, \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

يعطي حل الجملة

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\cdot\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon \,/\, \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

تقريباً جيّداً للحل النظري للمسألة.

2.4. تطبيق: معالجة معطيات تابعية بطريقة التربيعات الصغرى

لتكن $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq m\}$ معطيات تابعية عددها $m \geq 2$ وليكن $E \subset C(I)$ فضاءً شعاعياً جزئياً بعده $m \geq n$ ومكوناً من توابع حقيقية مستمرة على مجالٍ $I \subseteq \mathbb{R}$ يحوي النقاط المختلفة $\{x_1,\ldots,x_m\}$.

ليكن $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ أساساً للفضاء E. نبحث في هذا التطبيق عن تابعٍ $f \in E$ من الشكل:

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

يجعل المقدار

$$\psi(c_1,\ldots,c_n) = \sum_{i=1}^{m}\big(f(x_i) - y_i\big)^2$$

أصغر ما يمكن. لمعالجة هذه المسألة نلاحظ أنّ

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

فإذا وضعنا

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

نستطيع أن نكتب المقدار السابق بالشكل:

$$\psi(c_1,\ldots,c_n) = \big\|Ax - b\big\|_2^2$$

من ذلك يتبين أن المسألة هي مسألة تربيعات صغرى نحلّها بالبحث عن حل جملة المعادلات $A^TAx = A^Tb$. نلاحظ هنا أن مصفوفة A^TA متناظرة وتكون معرّفة موجبة إذا كانت أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً وفي هذه الحالة يكون للمسألة حلاً وحيداً.

مثال: في مسألة البحث عن تابعٍ يستوفي - بالقدر الممكن - معطياتٍ تجريبيّة

$$\{(x_i, y_i) : 1 \le i \le m\}$$

حيث $x_i \in [a,b]$ مختلفة مثنىً مثنى، نرغب في تعيين تابعٍ كثير الحدود:

$$p \in \mathcal{P}_n, \quad p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n < m)$$

بحيث تكون قيمة المقدار

$$\psi(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} (p_n(x_i) - y_i)^2$$

أصغر ما يمكن. ليكن

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

الأساس القانوني في الفضاء $\mathcal{P}_n$، عندئذٍ يكون:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

نلاحظ أنّ أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً ومن ثمّ تكون المصفوفة $A^T A$ متناظرة ومعرّفة موجبة ويكون للجملة الخطيّة

$$A^T A x = A^T b$$

حلاً وحيداً.

فعلى سبيل المثال، في حالة المعطيات التابعيّة المشوّشة:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	0.123	1.00	0.906	0.821	1.06

, $(m = 5)$

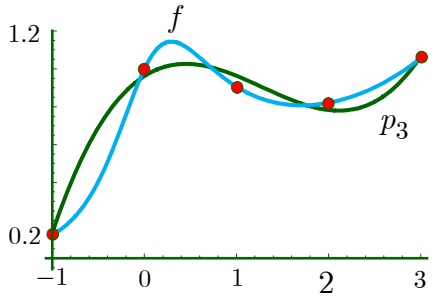
الموافقة للتابع

$$f(x) = e^x \ / \ (1 + 2x^2)$$

نجد في حالة $n = 3$ الحل الوحيد لمسألة التربيعات الصغرى:

$$p_3(x) \simeq 0.961846 + 0.307872\,x - 0.4141\,x^2 + 0.107708\ x^3$$

والذي نمثّله بيانياً مع المعطيات والتابع f في الشكل التالي:



5. مسائل وتمارين

1.5. لتكن $A \cdot x = b$ جملة معادلات خطيّة معرّفة كما يلي

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

تقبل هذه الجملة الحل $x^T = (1,-1)$. ليكن

$$x_1 = (0.999,-1.001), \quad x_2 = (0.341,-0.087)$$

حلّين تقريبيّين لهذه الجملة. نعرّف "راسب" الشعاع x بأنّه الشعاع $r(x) = b - A \cdot x$.

أولاً: احسب كلاً من $r(x_1)$ و $r(x_2)$. ما تعليقك على النتيجة؟

ثانياً: بيّن أنّ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 659000 & -563000 \\ -913000 & 780000 \end{pmatrix}$$

وأوجد قيمة $\kappa_\infty(A)$.

2.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تقبل تفريقاً LR حيث $|\ell_{ij}| \leq 1$ أيّاً كان $1 \leq j \leq i \leq n$. نرمز بـ a_i^T و r_i^T إلى الأسطر رقم i من المصفوفة A والمصفوفة R على الترتيب. برهن أنّ

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \cdot r_k^T$$

واستنتج أنّ $\|R\|_\infty \leq 2^{n-1} \cdot \|A\|_\infty$.

3.5. لتكن A و C مصفوفتين مربّعتين. نعرّف المصفوفة $R = I - CA$. نفترض أنّ $\|R\| < 1$ حيث $\|\ \|$ هو نظيمٌ مصفوفاتي ملحق.

أولاً: برهن أنّ المصفوفتين A و C قلوبتان وأنّ

$$\frac{\|R\|}{\|A\| \cdot \|C\|} \leq \frac{\|A^{-1} - C\|}{\|C\|} \leq \frac{\|R\|}{1 - \|R\|}$$

ثانياً: ليكن $\hat{x}$ حلاً تقريبياً لجملة المعادلات $A \cdot x = b$. نعرّف $r = b - A \cdot \hat{x}$. أثبت صحّة المتراجحة التالية:

$$\|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|C \cdot r\|}{1 - \|R\|}$$

4.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. نعرّف التحليل

$$A = M - N$$

حيث M مصفوفة قلوبة. وليكن $\| \ \|$ نظيماً مصفوفاتياً ملحقاً بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$\|N\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$$

برهن أنّ $\rho(M^{-1}N) < 1$.

5.5. نعرّف مصفوفات هلبرت التالية:

$$A = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}, \qquad n \in \{3,6,9,12,15\}$$

أولاً: احسب تفريق شولسكي $A = B \cdot B^T$ لكلّ من مصفوفات هلبرت السابقة.

ثانياً: قارن النتائج العددية مع القيم الفعليّة لعناصر المصفوفة B المعطاة بالعلاقات:

$$b_{jk} = \frac{\sqrt{2k-1} \cdot (j-1)! \cdot (j-1)!}{(j-k)! \cdot (j+k-1)!} \tag{20}$$

ما عدد الأرقام المعنويّة (ذات الدلالة)؟

ثالثاً: إذا كانت $\hat{B}$ ترمز إلى النتيجة العدديّة، احسب الفرق $A - \hat{B} \cdot \hat{B}^T$. واحسب أيضاً الفرق

$$A - B \cdot B^T$$

في حالة مصفوفة التفريق B المعرّفة بالعلاقات (20) .

6.5. لتكن

$$A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

مصفوفة مربّعة. نرمز بـ $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$ لمصفوفات المراحل الانتقاليّة في خوارزميّة غاوص. برهن أنّه عند اتّباع استراتيجيّة البحث الجزئي في إيجاد المرتكز القطري (البحث عمودياً) يكون لدينا

$$\max_{i,j,k}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq 2^{n-1} \cdot \max_{i,j}\left|a_{ij}\right| \tag{21}$$

بيّن أنّ المتراجحة السابقة تكون مساواة في حالة المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة. نفترض وجود عددين موجبين $0 < \beta < \alpha$ بحيث يكون:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \cdot x^T x \leq x^T A x \leq \alpha \cdot x^T x$$

أثبت أنّ

$$\left|a_{ij}\right| \leq \alpha - \beta \quad , \quad 1 \leq i < j \leq n$$

8.5. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة.

برهن أنّ تفريق QR (حيث Q متعامدة و R مثلثيّة من الأعلى) لهذه المصفوفة يكون وحيداً إذا تحقّقت الشروط:

$$r_{ii} > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

9.5. لتكن $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة، تكتب بالشكل

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

أولاً: أثبت أنّ المصفوفة $C - B^T A^{-1} B$ متناظرة ومعرّفة موجبة.

بالاعتماد على مبرهنة شولسكي يمكن تفريق المصفوفة G وكتابتها بالشكل $G = R \cdot R^T$ حيث R مصفوفة مثلثيّة من الأسفل من الشكل:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, \quad R_{11} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

ثانياً: بيّن أنّه إذا كانت N مصفوفة مربّعة وقلوبة فإنّ المصفوفة $N^T N$ تكون متناظرة ومعرّفة موجبة.

ثالثاً: برهن أنّ $R_{22} R_{22}^T = C - B^T A^{-1} B$.

رابعاً: أثبت صحّة المتراجحتين التاليتين

$$r_{ii}^2 \geq \min_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot G \cdot x}{x^T x} = \frac{1}{\left\| R^{-1} \right\|_2^2}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$r_{ii}^2 \leq \max_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot G \cdot x}{x^T x} = \|R\|_2^2, \quad 1 \leq i \leq n$$

خامساً: برهن أنّ

$$\kappa_2(R) \geq \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|r_{ii}|}{|r_{jj}|}$$

الفصل الرابع
الطرائق التكراريّة في حلّ جُمَل المعادلات الخطّية

ندرس في هذا الفصل بعضاً من الطرائق التكراريّة "النموذجيّة" من الشكل

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

بهدف حل جملة معادلات خطيّة $A \cdot x = b$. تحدّد المصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ والشعاع $c \in \mathbb{R}^n$ من معطيات الجملة الخطيّة (تتعلّق المصفوفة B فقط بالمصفوفة A).

1. لمحة عامّة عن الطرائق التكراريّة

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة، وليكن $b \in \mathbb{R}^n$. نفترض وجود مصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وشعاع $c \in \mathbb{R}^n$ بحيث تكون الجملة الخطيّة

$$(I - B) \cdot x = c$$

مكافئة للجملة الخطيّة $A \cdot x = b$. يوحي شكل الكتابة $x = B \cdot x + c$ للجملة الخطيّة المكافئة بتعريف طريقةٍ تكراريّة لحلّها:

نختار شعاعاً $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ونعرّف متتالية الأشعّة:

$$x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \geq 0$$

أيّ إنّ الطريقة التكراريّة هي آليّة لتوليد متتاليات أشعّة انطلاقاً من أشعّة ابتدائيّة اختياريّة.

تعريف: نقول عن الطريقة التكراريّة (1) إنّها متقاربة إذا تحقّق الشرط

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{k \to \infty} x_k = x$$

ملاحظة: تمثّل الطرائق التكراريّة حالة خاصّة من طريقة التقريبات المتتالية (طريقة Picard) في إيجاد نقطة ثابتة للتطبيق:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v \mapsto f(v) = B \cdot v + c$$

يسمّى مثل هذا التطبيق "مقلّصاً" إذا وُجِدَ نظيمٌ مصفوفاتي ملحق $\| \ \|$ يكون من أجله $\|B\| < 1$، وعندها يكون

$$\|f(v) - f(u)\| \leq \|B\| \cdot \|v - u\|$$

تتمحور دراسة الطرائق التكراريّة حول المسألتين التاليتين:

- دراسة تقارب طريقة تكراريّة من النمط (1) أيْ أنْ ندرس إذا كان $\rho(B) < 1$ أو بشكلٍ مكافئ إذا وجد نظيمٌ مصفوفاتي يكون من أجله $\|B\| < 1$.
- مقارنة الطرائق التكراريّة من حيث سرعة التقارب: الطريقة الأسرع هي الطريقة التي يكون لمصفوفة تكرارها B نصف قطر طيفي أصغر.

2. عرض وصفي لبعض الطرائق التقليديّة النموذجيّة

لتكن $A \cdot x = b$ جملة معادلات خطيّة مصفوفتها A قلوبة. نفترض أنّه يمكن كتابة هذه المصفوفة بالشكل

$$A = M - N \tag{2}$$

حيث M مصفوفة قلوبة ومقلوبها سهل التعيين ؛ أي أنّها عمليّاً إمّا أن تكون قطريّة أو مثلثيّة نقطياً أو أن تكون قطريّة أو مثلثيّة كتلياً.

في هذه الحالة، يكون لدينا:

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow M \cdot x = N \cdot x + b \Leftrightarrow x = \underbrace{M^{-1}N}_{B} \cdot x + \underbrace{M^{-1} \cdot b}_{c}$$

وهذا الشكل يوحي بالطريقة التكراريّة

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}N \cdot x_k + M^{-1}b, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

ويكون في هذه الحالة

$$B = M^{-1}N = I - M^{-1} \cdot A$$

من ذلك يتبيّن لنا أنّ المصفوفة $I - B$ قلوبة. يجري حساب التكرارات عند الانتقال من شعاع التكرار x_k إلى الشعاع x_{k+1} بحلّ جمل المعادلات الخطيّة

$$M \cdot x_{k+1} = N \cdot x_k + b, \quad k \geq 0$$

1.2. طريقة جاكوبي Jacobi

لتكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مربّعة عناصر قطرها الرئيس غير معدومة، أيْ:

$$a_{ii} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

وليكن التحليل $A = D - E - F$ المعرّف بالمصفوفات:

$$D = \operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn}),$$

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

توافق طريقة جاكوبي اختيار $M = D$ فنحصل عندها على التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} A \cdot x = b &\Leftrightarrow D \cdot x = (E + F) \cdot x + b \\ &\Leftrightarrow \quad x = D^{-1} \cdot (E + F) \cdot x + D^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

وهذا يقودنا إلى تعريف طريقة جاكوبي التكراريّة (النقطيّة) كالآتي:

$$D \cdot x_{k+1} = (E + F) \cdot x_k + b$$

أو بالشكل

$$x_{k+1} = \underbrace{D^{-1} \cdot (E + F)}_{J} \cdot x_k + D^{-1} \cdot b, \quad k \geq 0$$

ومن ثمّ، فإنّ مصفوفة التكرار لهذه الطريقة هي

$$J = D^{-1} \cdot (E + F) = I - D^{-1} \cdot A$$

وتسمّى مصفوفة جاكوبي (النقطيّة).

❖ **حساب التكرار:** يحسب شعاع التكرار $x_{k+1} = \left(x_{k+1}(i)\right)_{i=1}^{n}$ من المعادلات الخطيّة التالية:

$$(3) \begin{cases} a_{1,1}x_{k+1}(1) = & -a_{1,2}x_k(2) - a_{1,3}x_k(3) \cdots - a_{1,n-1}x_k(n-1) - a_{1,n}x_k(n) + b_1 \\ a_{2,2}x_{k+1}(2) = -a_{21}x_k(1) & -a_{2,3}x_k(3) \cdots - a_{2,n-1}x_k(n-1) - a_{2,n}x_k(n) + b_2 \\ \vdots \quad \ddots & \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots & \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ a_{n,n}x_{k+1}(n) = -a_{n,1}x_k(1) - a_{n,2}x_k(2) \cdots - a_{n,n-1}x_k(n-1) & + b_n \end{cases}$$

ومن الناحية الخوارزميّة يكتب تكرار جاكوبي كما يلي:

$$x_{k+1}(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_k(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_k(j) \right), \quad 1 \leq i \leq n$$

2.2. طريقة غاوص–سايدل Gauss-Seidel

إذا استبدلنا في معادلات تكرار جاكوبي (3) بالقيم $x_k(i)$ القيم الجديدة $x_{k+1}(i)$ فإننا نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$(4) \begin{cases} a_{1,1}x_{k+1}(1) = & -a_{1,2}x_k(2) - a_{1,3}x_k(3) \cdots - a_{1,n-1}x_k(n-1) - a_{1,n}x_k(n) + b_1 \\ a_{2,2}x_{k+1}(2) = -a_{21}x_{k+1}(1) & -a_{2,3}x_k(3) \cdots - a_{2,n-1}x_k(n-1) - a_{2,n}x_k(n) + b_2 \\ \vdots \quad \ddots & \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots & \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ a_{n,n}x_{k+1}(n) = -a_{n,1}x_{k+1}(1) - a_{n,2}x_{k+1}(2) \cdots - a_{n,n-1}x_{k+1}(n-1) & + b_n \end{cases}$$

ومن الناحية الخوارزميّة يكتب تكرار غاوص–سايدل كما يلي:

$$x_{k+1}(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_k(j)\right), \quad 1 \le i \le n$$

وهذا يعرّف طريقةً تكراريّة جديدة يمكن صياغتها باستخدام الصيغة المصفوفاتيّة على الشكل التالي:

$$D \cdot x_{k+1} = E \cdot x_{k+1} + F \cdot x_k + b$$

أو بالشكل المكافئ

$$x_{k+1} = \underbrace{(D-E)^{-1} \cdot F}_{\mathcal{L}_1} \cdot x_k + (D-E)^{-1} \cdot b, \quad k \ge 0$$

تسمّى المصفوفة

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} \cdot F$$

مصفوفة غاوص–سايدل (النقطيّة).

ملاحظة:

إحدى الفوائد التي تميّز طريقة غاوص–سايدل عن طريقة جاكوبي كونها تحتاج فقط إلى شعاع واحد لتخزين وإجراء التكرار (بدلاً من شعاعين في حالة جاكوبي)، وهذا مفيدٌ جداً في حالة الجمل الخطيّة الكبيرة. من الناحية العمليّة يجري حساب التكرارات على شعاع التكرار $x \in \mathbb{R}^n$ انطلاقاً من الوضع الابتدائي $x = x_0$ كما يلي:

$$x(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x(j)\right), \quad 1 \le i \le n$$

3.2. طريقة SOR

إحدى التعديلات الهامّة لطريقة غاوص–سايدل هي الطريقة المسمّاة SOR وهذا الاسم هو اختصارٌ لكلمات العبارة الانكليزيّة "Successive Over-Relaxation".

نُجري تعديلاً في طريقة غاوص–سايدل بأنْ ندخل وسيطاً حقيقياً $\omega \neq 0$ من خلال تحليل المصفوفة $A = M - N$ بحيث يكون

$$M = \frac{1}{\omega} D - E \quad , \quad N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$$

عندها يكتب تكرار الطريقة التكراريّة الموافقة لهذا التحليل كما يلي

$$(\frac{1}{\omega} D - E) \cdot x_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F) \cdot x_k + b, \quad k \geq 0$$

أو على الشكل

$$(D - \omega \cdot E) \cdot x_{k+1} = [(1-\omega) \cdot D + \omega \cdot F) \cdot x_k + \omega \cdot b, \quad k \geq 0$$

تعرّف العلاقة التكراريّة السابقة ما يعرف باسم طريقة SOR أو طريقة الـRelaxation.

تكتب مصفوفة التكرار لهذه الطريقة بالشكل:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= (\frac{1}{\omega} D - E)^{-1} \cdot (\frac{1-\omega}{\omega} D + F) \\ &= (D - \omega \cdot E)^{-1} [(1-\omega) \cdot D + \omega \cdot F] \end{aligned}$$

إنّ اختيار قيمة الوسيط $\omega = 1$ يوافق طريقة غاوص–سايدل التي رأيناها سابقاً، أيْ أنّ:

$$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1} \cdot F$$

وهذا يسوّغ الرمز $\mathcal{L}_1$ الذي أعطيناه لمصفوفة تكرار طريقة غاوص–سايدل في الفقرة السابقة.

تتضمّن دراسة طريقة SOR النقطتين الأساسيّتين:

(1) البحث عن مجالٍ $I \subset \mathbb{R}$ لا يحوي الصفر ويحقق الخاصّة التالية:

$$\omega \in I \Rightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$$

(2) البحث عن قيمةٍ للوسيط $\omega^* \in I$ بحيث يكون

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \inf_{\omega \in I} \rho(\mathcal{L}_\omega)$$

يقوم حساب تكرار طريقة الـ SOR على حلّ جملة المعادلات الخطيّة التالية:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_{k+1}(1) = a_{1,1}x_k(1) - \omega \cdot [a_{1,1}x_k(1) + a_{1,2}x_k(2) + \cdots + a_{1,n}x_k(n) - b_1] \\ a_{2,2}x_{k+1}(2) = a_{2,2}x_k(2) - \omega \cdot [a_{2,1}x_{k+1}(1) + a_{2,2}x_k(2) + \cdots + a_{2,n}x_k(n) - b_2] \\ \quad \vdots \\ a_{n,n}x_{k+1}(n) = a_{n,n}x_k(n) - \omega \cdot [a_{n,1}x_{k+1}(1) + \cdots + a_{n,n-1}x_{k+1}(n-1) + a_{n,n}x_k(n) - b_n] \end{cases}$$

ومن الناحية الخوارزميّة يكتب تكرار طريقة SOR كما يلي:

$$x(i) \leftarrow x(i) + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x(j) - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x(j)\right), \quad 1 \le i \le n$$

3. دراسة تقارب الطرائق التكراريّة

إنّ جميع الطرائق التي عرضناها في الفقرة السابقة هي من النمط:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c, \quad k \ge 0 \end{cases} \tag{6}$$

حيث تمثّل B مصفوفة تكرار الطريقة. نبحث في هذه الفقرة في تقارب الطرائق التكراريّة من النمط (6) كما نبحث في مفهوم سرعة تقارب هذه الطرائق. نلاحظ هنا أنّه إذا تقاربت المتتالية المولّدة بعلاقة التكرار (6) نحو الشعاع $x \in \mathbb{R}^n$ فإنّ هذا الأخير يحقق المعادلة

$$x = B \cdot x + c \tag{7}$$

بطرح العلاقات (6) و (7) طرفاً لطرف نحصل على

$$x_{k+1} - x = B \cdot (x_k - x) = \cdots = B^{k+1} \cdot (x_0 - x)$$

نعرّف شعاع الخطأ في الخطوة k بأنّه الفرق $e_k = x_k - x$ عندئذٍ يكون

$$e_k = B^k \cdot e_0 \tag{8}$$

يتبيّن من ذلك أنّ

$$\left(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{k\to\infty} x_k = x\right) \Leftrightarrow \left(\forall v \in \mathbb{R}^n, \lim_{k\to\infty} B^k \cdot v = 0\right) \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1: تتقارب الطريقة التكراريّة (6) إذا وفقط إذا كان $\rho(B) < 1$.

نتيجة: إذا كان $\|B\| < 1$ حيث $\|\ \|$ نظيمٌ مصفوفاتي ما، فإنّ المصفوفة $I - B$ تكون قلوبة وتكون الطريقة التكراريّة (6) متقاربة.

أمثلة

① لتكن الجملة الخطيّة

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- استخدام طريقة جاكوبي

لدينا هنا

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ -0.2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

بتطبيق خوارزميّة جاكوبي انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = (0,0)^T$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 1.004 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.9996 \\ 0.9992 \end{pmatrix}$$

- استخدام طريقة غاوص–سايدل

لدينا هنا

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

بتطبيق خوارزميّة غاوص–سايدل انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = (0,0)^T$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.9996 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1.00004 \\ 0.999992 \end{pmatrix}$$

لننظر الآن في الجملة الخطيّة

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- في حالة تكرار جاكوبي لدينا

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

بحساب تكرار جاكوبي انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = (0,0)^T$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -19 \\ -49 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 501 \\ 251 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -2499 \\ -2499 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

- في حالة تكرار غاوص–سايدل لدينا

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 11 \\ -49 \end{pmatrix}$$

بحساب تكرار غاوص–سايدل انطلاقاً من شعاع البدء $x_0 = (0,0)^T$ نحصل على التوالي

$$x_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -49 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 501 \\ -2499 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 25001 \\ -124999 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

يتبيّن لنا من المثالين السابقين أنّ المتتاليات المولّدة بطريقتي جاكوبي وغاوص–سايدل يمكن أن "تقترب" من الحلّ أو على العكس يمكن أن "تبتعد" عن الحل.

- **دراسة التقارب:** لدينا في حالة الجملة الخطيّة الأولى

$$\mathrm{sp}(J) = \{\pm\sqrt{2} \,/\, 10\}, \quad \mathrm{sp}(\mathcal{L}_1) = \{1 \,/\, 50, 0\}$$

ومنه

$$\rho(J) = \sqrt{2} \,/\, 10 \quad , \quad \rho(\mathcal{L}_1) = 1 \,/\, 50 = \big[\rho(J)\big]^2$$

وهذا يبيّن تقارب كلاً من طريقتي جاكوبي وغاوص–سايدل.

ولدينا في حالة الجملة الخطيّة الثانية

$$\mathrm{sp}(J) = \{\pm 5\sqrt{2}\ i\}, \quad \mathrm{sp}(\mathcal{L}_1) = \{50, 0\}$$

ومنه

$$\rho(J) = 5\sqrt{2} \quad , \quad \rho(\mathcal{L}_1) = 50 = \big[\rho(J)\big]^2$$

وهذا يبيّن تباعد كلٍّ من طريقتي جاكوبي وغاوص–سايدل.

② تكرار ريتشاردسون

ندرس في هذا المثال طريقة تكراريّة من الشكل:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot (b - A \cdot x_k), \quad \alpha > 0$$

يمكن إعادة كتابة هذا التكرار على الشكل المألوف:

$$x_{k+1} = (I - \alpha \cdot A)x_k + \alpha \cdot b$$

وهكذا، نلاحظ أنّ مصفوفة التكرار في هذه الحالة هي المصفوفة $B_\alpha = I - \alpha A$ ومن ثمّ فإنّ تقارب هذه الطريقة مرهون بالعدد $\rho(I - \alpha A)$. لنفترض أنّ جميع القيم الذاتيّة (λ_i) للمصفوفة A حقيقيّة بحيث $\lambda_{\min} \le \lambda_i \le \lambda_{\max}$. عندها تحقّق القيم الذاتيّة (μ_i) للمصفوفة B_α المتراجحة:

$$1 - \alpha\lambda_{\max} \le \mu_i \le 1 - \alpha\lambda_{\min}$$

وبشكلٍ خاص، عندما يكون $\lambda_{\min} < 0$ فإنّ قيمةً ذاتيّة واحدةً على الأقلّ μ_i تكون أكبر تماماً من الواحد، ومن ثمّ يكون $\rho(B_\alpha) > 1$ أياً كانت قيمة الوسيط $\alpha > 0$. في هذه الحالة تتباعد الطريقة التكراريّة. نفترض الآن، أنّ $\lambda_{\min} > 0$ أيْ أنّ جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A موجبة تماماً. عندئذٍ، يصبحُ تقارب هذه الطريقة مرهوناً بتحقق الشرطين التاليين:

$$1 - \alpha\lambda_{\min} < 1 \quad , \quad 1 - \alpha\lambda_{\max} > -1$$

الشرط الأوّل محقق إذا كان $\alpha > 0$. أمّا الشرط الثاني فيقتضي أن تكون قيمة الوسيط α محققة للشرط $\alpha < 2 / \lambda_{\max}$. بمعنى، أنّ طريقة ريتشاردسون تكون متقاربة عندما يحقق الوسيط α الشرط:

$$0 < \alpha < 2 / \lambda_{\max}$$

لنبحث الآن عن قيمة الوسيط α التي تجعل $\rho(B_\alpha)$ أصغرياً:

لدينا
$$\rho(B_\alpha) = \max\{|1 - \alpha\lambda_{\min}|, |1 - \alpha\lambda_{\max}|\} \tag{9}$$

يوضّح الشكل (1) بيان التطبيق $\alpha \mapsto \rho(B_\alpha)$ والذي يمثّل نصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار، ونلاحظ أنّ القيمة الأمثليّة α_{opt} للوسيط α يأخذها التطبيق عند تقاطع نصف المستقيم

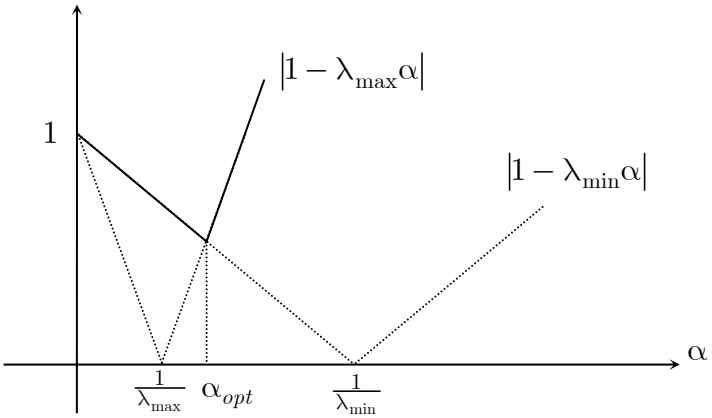
$$\{\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_{\max}| : \alpha > 1 / \lambda_{\max}\}$$

مع نصف المستقيم

$$\{\alpha \mapsto |1 - \alpha\lambda_{\min}| : \alpha < 1 / \lambda_{\min}\}$$

أيْ أن يكون:

$$-1+\lambda_{\max}\alpha_{opt} = 1-\lambda_{\min}\alpha_{opt}$$



الشكل 1: بيان تبعيّة $\rho(B_\alpha)$ للوسيط α.

ومنه نجد

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$$

وبتعويض هذه القيمة في الصيغة (9) نجد

$$\rho(B_{\alpha_{opt}}) = \frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}$$

مبرهنة 2: تحقق مصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ لطريقة SOR في حل جملة معادلات خطيّة $A\cdot x = b$ الشرط:

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq \left|\omega-1\right|$$

ومن ثمّ، فإنّ طريقة الـ SOR تكون متباعدة إذا جرى اختيار الوسيط ω خارج المجال $]0,2[$.

الإثبات:

نعلم أنّ

$$\mathcal{L}_\omega = (\tfrac{1}{\omega}D-E)^{-1}\cdot(\tfrac{1-\omega}{\omega}D+F)$$

فإذا كانت $\left(\lambda_i\right)$ هي مجموعة القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة فإنّ

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{\det(\frac{1-\omega}{\omega} D + F)}{\det(\frac{1}{\omega} D - E)} = (1-\omega)^n$$

ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq \left| \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right|^{1/n} = |1-\omega| \qquad \blacksquare$$

1.3. تقدير الخطأ وسرعة التقارب

إنّ الطريقة التي تتقارب فيها المتتالية $\left(x_k\right)$ نحو الحل x معقّدة نسبيّاً، ويتعلّق ذلك بالقيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لمصفوفة التكرار B. لكن سلوك الخطأ $e_k = x_k - x$ في معظم الحالات التطبيقيّة يكون بسيطاً إلى درجةٍ ما، حيث يتناقص هذا الخطأ في كلّ تكرارٍ بمعدّلٍ ثابت تقريباً. نعلمُ أنّه عندما تكون الطريقة التكراريّة متقاربة فإنّ ذلك يعني أن $\rho(B) < 1$ وهذا بدوره يقتضي وجود نظيمٍ مصفوفاتي ملحق $\|\ \|$ يحقق الشرط

$$\rho(B) \leq \|B\| < \rho(B) + \varepsilon < 1, \quad \varepsilon > 0$$

وهذا يعني وجود عدد $\rho(B) \leq \delta < 1$ بحيث يكون

$$\|x_{k+1} - x\| \leq \delta \cdot \|x_k - x\|, \quad k \geq 0 \tag{10}$$

لتعيين قيمة تقريبيّة لعددٍ δ يحقق الشرط (10) نتطلّع إلى العلاقة التكراريّة

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k = B \cdot (e_k - e_{k-1}) = B \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad k \geq 1$$

توحي لنا هذه العلاقة باستعمال التقديرات

$$\delta_k = \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|}, \quad k \geq 1$$

من جهةٍ أخرى، إذا افترضنا أنّ (10) محققة فإنّ

$$\|x_{k+1} - x_k\| \geq \|x_k - x\| - \|x_{k+1} - x\| \geq \|x_k - x\| - \delta \cdot \|x_k - x\|$$

وبالتالي

$$\|x_k - x\| \le \frac{1}{1-\delta}\|x_{k+1} - x_k\|$$

أو

$$\|x_{k+1} - x\| \le \frac{\delta}{1-\delta}\|x_{k+1} - x_k\|$$

تبيّن هذه المتراجحة أنّه عندما يكون $\delta \simeq 1$ يكون تقارب الطريقة التكراريّة بطيئاً. وفي هذه الحالة يكون الفرق $\|x_{k+1} - x_k\|$ أصغر بكثير من الخطأ الفعلي $\|x_{k+1} - x\|$.

- **سرعة التقارب**

نريد في هذه الفقرة أن نجيب على التساؤلين التاليين:

- ما هو عدد التكرارات اللازمة للحصول على حلّ تقريبي يتمتّع بدقّةٍ معيّنة؟
- متى يكون استعمال طريقةٍ تكراريّة مفضّلاً على استعمال طريقة غاوص في حلّ جملة المعادلات الخطيّة $A \cdot x = b$ ؟

للإجابة على التساؤل الأوّل، نبحث عن قيمةٍ m يكون عندها

$$\|x_m - x\| \le \varepsilon \cdot \|x_0 - x\|, \quad \varepsilon > 0$$

حيث يمثّل ε النسبة التي نريد بها إنقاص الخطأ الابتدائي عندما نصل إلى التكرار m. فإذا وُجِدَ عددٌ موجبٌ $\delta < 1$ بحيث تتحقق المتراجحات (10) فإننا نستطيع أن نكتب

$$\|x_m - x\| \le \delta^m \cdot \|x_0 - x\|, \quad k \ge 0$$

نختار عندئذٍ، أصغر قيمة للدليل m تحقق الشرط:

$$\delta^m \le \varepsilon$$

أيْ

$$m \ge \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \delta} \right\rceil \equiv m^* \tag{11}$$

يتبيّن من هذه العلاقة أنّ عدد التكرارات اللازم للوصول إلى الدقّة المطلوبة يتناسب عكساً مع المقدار $-\ln \delta$.

عند إيجاد حلٍ لجملة معادلات خطّية كثيفة $A \cdot x = b$ (مصفوفتها A لا تحوي أصفاراً كثيرة) بطريقة تكراريّة من النمط (1) انطلاقاً من $x_0 = 0$ نستخدم العلاقة السابقة في البحث عن عدد التكرارات m اللازم لكي تتحقق المتراجحة:

$$\frac{\|x_m - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-6} = \varepsilon \tag{12}$$

فإذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ فإنّ عدد العمليّات التي يتطلّبها تكرارٌ واحد هو n^2 عمليّة ومن ثمّ حتّى يتحقّق الشرط (12) يلزمنا عددٌ من التكرارات يساوي

$$m^* = \left\lceil \frac{6 \ln 10}{-\ln \delta} \right\rceil \tag{13}$$

يقابل هذا العدد من التكرارات عددٌ من العمليّات الحسابيّة يعادل

$$m^* \cdot n^2 = \left\lceil \frac{6 \ln 10}{-\ln \delta} \right\rceil \cdot n^2$$

من جهةٍ أخرى، نعلم أنّ استخدام طريقة غاوص في حذف المجاهيل يتطلّب عدداً من العمليّات يقارب $n^3 \,/\, 3$ عمليّة، ومن ثمّ فإنّ الطريقة التكراريّة تكون أكثر فعّاليّة إذا تحقق الشرط:

$$m^* \cdot n^2 < n^3 \,/\, 3$$

أو

$$m^* < n \,/\, 3 \tag{14}$$

مثال: لتكن $A \in \mathcal{M}_{51}(\mathbb{R})$. في هذه الحالة يؤول الشرط (14) إلى الشكل $m^* < 17$. يتضمّن الجدول التالي قيم m^* الموافقة لقيمٍ مختلفة للمعامل δ . فعندما يكون $\delta \leq 0.44$ تكون الطريقة التكراريّة أكثر فعّاليّة من طريقة غاوص في حذف المجاهيل.

δ	$-\ln \delta$	m^*
0.9	0.105	131
0.8	0.223	62
0.6	0.511	27
0.4	0.916	15
0.2	1.61	9

ننوّه هنا إلى أنّه في أغلب الأحيان يجري استخدام الطرائق التكراريّة في حالة جمل المعادلات الخطيّة الكبيرة والتي تكون مصفوفتها كثيرة الأصفار، ومع أنّه في هذه الحالة غالباً ما تكون قيمة δ قريبة جداً من 1 فإنّ فعّالية الطرائق التكراريّة المتاحة تبقى متفوّقة.

يمكن لنا أنْ نميّز طريقةً تكراريّة عن أخرى من خلال السرعة التي يسعى فيها الخطأ $e_k = x_k - x$ نحو الصفر.

رأينا أنّه إذا كانت B هي مصفوفة التكرار لطريقةٍ ما فإنّ:

$$e_k = B^k \cdot e_0$$

وباستخدام نظيم مصفوفاتي ملحق يكون

$$\|e_k\| \le \|B^k\| \cdot \|e_0\| \le \|B\|^k \cdot \|e_0\|$$

ومن ثمّ يكون

$$\frac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \le \|B^k\|$$

تعريف: نعرّف المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار بأنّه العدد الحقيقي

$$\Re_k(B) = -\ln \|B^k\|^{1/k} \tag{10}$$

نلاحظ أنّ عدد التكرارات اللازمة لخفض الخطأ الابتدائي $\|e_0\|$ بنسبة $0 < \varepsilon$ يتناسبٌ عكساً مع المعدّل الوسطي للتقارب: في الواقع، لتعيين قيمة k بحيث يكون

$$\|e_k\| \le \varepsilon \cdot \|e_0\|$$

نبحث عن $k_{\min}$ أصغر قيمة لـ k تحقق الشرط $\|B^k\| \le \varepsilon$ أو الشرط المكافئ:

$$\Re_k(B) \ge \frac{-\ln \varepsilon}{k}$$

ومنه نستنتج

$$k_{\min} = \min\left\{k : k \ge \frac{-\ln \varepsilon}{\Re_k(B)}\right\} \tag{11}$$

ملاحظة: لهذا التعريف العديد من المساوئ، منها:

- معدّل التقارب يتعلّق بالعدد k وبالنظيم المستعمل.
- تعيين القيمة العدديّة للمقدار $\|B^k\|^{1/k}$ مكلفٌ من حيث عدد العمليّات ولا نقوم بحسابه عادةً.

لذلك نلجأ إلى تعريف معدّل مقارب للتقارب، بمعنى، أنْ نبحث في نهاية المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار عندما يسعى عدد التكرارات إلى اللانهاية. في الحالة الخاصّة التي تكون فيها مصفوفة التكرار متناظرة (هرميتيّة) يكون لدينا:

$$\|B^k\|_2^{1/k} = \left[\rho(B^k)\right]^{1/k} = \left[\rho^k(B)\right]^{1/k} = \rho(B)$$

ويكون

$$\Re_k(B) = -\ln\rho(B)$$

إذن، في هذه الحالة يكون المعدّل الوسطي للتقارب بعد k تكرار ثابتاً ويساوي $-\ln\rho(B)$.

تعريف: نعرّف معدّل تقارب طريقةٍ تكراريّة مصفوفتها B بأنّه العدد الحقيقي:

$$\Re_\infty(B) = \lim_{k\to\infty} \Re_k(B) = -\ln\rho(B) \tag{12}$$

نلاحظ هنا أنّ هذا التعريف تسوّغه الخاصّة المعروفة:

$$\lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$$

مبرهنة 3: يحقق عدد التكرارات $k_{\min}$ اللازم لخفض الخطأ الابتدائي لطريقةٍ تكراريّة مصفوفتها B بنسبة ε المتراجحة:

$$k_{\min} \geq \frac{-\ln\varepsilon}{\Re_\infty(B)} \tag{13}$$

الإثبات: بما أنّ

$$\rho^k(B) = \rho(B^k) \leq \|B^k\|$$

فإنّ

$$\rho(B) \leq \|B^k\|^{1/k}$$

ومن ثمّ يكون

$$-\ln\rho(B) \geq -\ln\|B^k\|^{1/k}$$

والذي يكتب بالشكل

$$\Re_\infty(B) \geq \Re_k(B)$$

وبالاعتماد على العلاقة (11) نستنتج صحّة المتراجحة (13). ■

ملاحظة: عندما تتوافر لدينا طريقتان تكراريّتان لحل جملة معادلات خطيّة (بحيث تكون كلفة حساب التكرار في كلّ منهما متقاربة) فإننا نختار (نفضّل) الطريقة التي يكون معدّل تقاربها أكبر.

من الناحية العمليّة، لتعيين قيمة $\Re_\infty(B) = -\ln\rho(B)$ نكتفي بتقديرٍ جيّد لنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار $\rho(B)$. سنرى لاحقاً، من خلال بعض الأمثلة المتعلّقة بتقطيع المعادلات التفاضليّة أنّ قيمة $\rho(B)$ غالباً ما تكون قريبة من 1، فمثلاً عندما يكون $\rho(B) = 1-\eta$ فإنّ $\Re_\infty(B) = -\ln(1-\eta) \underset{0}{\sim} \eta$ وهذا العدد قريبٌ من الصفر وعندها يكون المقدار $-\ln\varepsilon \,/\, \Re_\infty(B)$ كبيراً.

2.3. حالة مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطرْ

تعريف: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ إنّها ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً إذا وفقط إذا حقّقت عناصر قطرها الرئيس الشروط التالية:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}| \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{14}$$

يرتبط مفهوم القطر الرئيس المسيطر بنتيجةٍ هامّة في الجبر الخطّي العددي تعرفُ باسم مبرهنة Gershgorin. تحدّد هذه المبرهنة التوضّعات المحليّة للقيم الذاتيّة لمصفوفة مربّعة A في المستوي العقدي. نحتاج في بعض الأحيان إلى تحديد منطقة توضّع هذه القيم باستعمال معرفتنا لعناصر المصفوفة A. فمثلاً، من أبسط هذه التحديدات المتراجحة التالية:

$$\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leq \|A\|$$

وذلك أياً كان النظيم المصفوفاتي $\|\ \|$. تزوّدنا مبرهنة Gershgorin بتحديدٍ أفضل لتوزّع القيم الذاتيّة في المستوي العقدي.

مبرهنة 4 (Gershgorin)

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة عناصرها حقيقيّة أو عقديّة. إذا كانت $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة، عندئذٍ يوجد دليلٌ $1 \le i \le n$ بحيث يكون:

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

أي أنّ جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A موجودة في اجتماع الأقراص

$$D_i = \{z : |z - a_{ii}| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

الإثبات:

ليكن $v \neq 0$ شعاعاً ذاتيّاً موافقاً للقيمة الذاتيّة λ. وليكن $1 \le i \le n$ بحيث يكون

$$|v_i| \ge |v_j|, \quad 1 \le j \le n$$

من المطابقة $Av = \lambda v$ نجد

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} v_j = (\lambda - a_{ii}) v_i$$

بتقسيم طرفي العلاقة السابقة على v_i وباستخدام المتراجحة المثلثيّة نحصل على

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot \frac{v_j}{v_i} \right| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

■

تسمّى الأقراص

$$D_i = \{z : |z - a_{ii}| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$$

أقراص Gershgorin. توضّح المبرهنة السابقة أنّ $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1 \cup \cdots \cup D_n$.

من جهةٍ ثانية، إذا كان أحد هذه الأقراص معزولاً عن بقيّة الأقراص فإنّ هذا القرص يحوي تماماً قيمة ذاتيّة واحدة.

نتيجة: إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ هذه المصفوفة قلوبة.

الإثبات: بما أنّ المصفوفة A ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ اجتماع أقراص Gershgorin لها لا يحوي الصفر أي أنّ القيمة $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة. ومن ثمّ لا يمكن إيجاد شعاع $v \neq 0$ بحيث يكون $Av = 0$ وهذا يعني أنّ المصفوفة A قلوبة.

مبرهنة 5: إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً فإنّ طريقة جاكوبي التكراريّة في حلّ الجملة الخطيّة $A \cdot x = b$ تتقارب.

الإثبات:

لدينا في هذه الحالة $J = M^{-1}N = D^{-1} \cdot (E + F)$. يقتضي الشرط (14) أنْ يكون:

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j \neq i}|a_{ij}| < 1 \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

وهذا بدوره يقتضي صحّة المتراجحة:

$$\|J\|_\infty = \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j \neq i}|a_{ij}| \right) < 1 \qquad \blacksquare$$

مبرهنة 6: إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً وكان $0 < \omega \leq 1$ فإنّ طريقة SOR التكراريّة في حلّ الجملة الخطيّة $A \cdot x = b$ تتقارب.

الإثبات:

نعلم أنّ مصفوفة تكرار طريقة SOR تكتب بالشكل

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= (D - \omega \cdot E)^{-1} \cdot [(1 - \omega) \cdot D + \omega \cdot F] \\ &= (I - \omega \cdot D^{-1}E)^{-1} \cdot [(1 - \omega) \cdot I + \omega \cdot D^{-1}F] \end{aligned}$$

بوضع

$$U = D^{-1}F \quad , \quad L = D^{-1}E$$

يكون

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1 - \omega) \cdot I + \omega \cdot U]$$

من ذلك نجد أنّ كثير الحدود المميّز لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ يكتب بالشكل

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\big(\lambda \cdot I - \mathcal{L}_\omega\big) = \det\big(\lambda \cdot I - (I - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot I + \omega \cdot U]\big) \\ &= \det\big(\lambda \cdot (I - \omega \cdot L) - (1-\omega) \cdot I - \omega \cdot U\big) \\ &= \det\big((\lambda + \omega - 1) \cdot I - \lambda\omega \cdot L - \omega \cdot U\big) \\ &= (\lambda + \omega - 1)^n \cdot \det\left(I - \frac{\lambda\omega \cdot L}{\lambda + \omega - 1} - \frac{\omega \cdot U}{\lambda + \omega - 1}\right) \end{aligned}$$

نضع

$$\alpha = \frac{\lambda\omega}{\lambda + \omega - 1} \quad , \quad \beta = \frac{\omega}{\lambda + \omega - 1}$$

عندئذٍ، تكون λ قيمةً ذاتيّة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$، أيْ $p(\lambda) = 0$ إذا تحقق واحد من الشرطين:

$$\lambda = 1 - \omega \quad , \quad \det(I - \alpha L - \beta U) = 0$$

لنفترض أنّ λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ تحقق $|\lambda| \geq 1$. نرى في هذه الحالة أنّه من المستحيل أن يكون $\lambda = 1 - \omega$ (لأنّ $|\lambda| = 1 - \omega < 1$). لنبرهن أيضاً استحالة تحقق الشرط الثاني $\det(I - \alpha L - \beta U) = 0$. نضع

$$\lambda = a\, e^{i\theta}, \quad a \geq 1$$

عندها يكون

$$|\beta|^2 \leq |\alpha|^2 = \frac{a^2\omega^2}{(a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2 \sin^2\theta}$$

ولكن، لدينا

$$\begin{aligned} (a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2\sin^2\theta &= a^2 - 2a(1-\omega)\cos\theta + (1-\omega)^2 \\ &\geq a^2 - 2a(1-\omega) + (1-\omega)^2 \\ &= (a - 1 + \omega)^2 \end{aligned}$$

ففي حالة $a > 1$ و $0 < \omega \leq 1$ يكون:

$$\begin{aligned} \big(a \cdot (1-\omega) > 1 - \omega\big) &\Leftrightarrow \big(a - 1 + \omega > a \cdot \omega\big) \\ &\Leftrightarrow \big((a - 1 + \omega)^2 > a^2 \cdot \omega^2\big) \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أنّ

$$|\beta| \leq |\alpha| < 1$$

من جهةٍ أخرى، المصفوفة $D^{-1}A = I - L - U$ (كما هي حال المصفوفة A) ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً، وكذلك الحال بالنسبة للمصفوفة $I - \alpha L - \beta U$ والتي تنتج عن المصفوفة $I - L - U$ بضربِ العناصر غير القطرية بأعدادٍ لا تتجاوز الواحد بالقيمة المطلقة، فهي إذن ذات قطرٍ مسيطر تماماً، ومن ثمّ فهي قلوبة وهذا يعني أنّ

$$\det(I - \alpha L - \beta U) \neq 0$$

وهو المطلوب. ■

ملاحظة: تمثّل **المبرهنة 6** السابقة شرطاً كافياً لتقارب طريقة SOR في حالة جملة خطيّة $A \cdot x = b$ مصفوفتها ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً وهي لا تثبت عدم تقارب طريقة SOR عندما يكون $\omega > 1$. يبيّن المثال التالي تقارب طريقة SOR أياً كانت قيمة الوسيط ω في المجال $0 < \omega < 2$ علماً أنّ مصفوفة الجملة الخطية $A \cdot x = b$ ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر تماماً.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\frac{\omega}{2} \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}$$

للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ قيمة ذاتيّة مضاعفة هي $\lambda = 1 - \omega$. إذن، تتقارب طريقة SOR في هذه الحالة إذا تحقّق الشرط $|1 - \omega| < 1$ أيْ $0 < \omega < 2$.

3.3. حالة مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة

ندرس في هذه الفقرة تقارب مجموعة الطرائق التكراريّة التي عرضناها سابقاً في حالة جملة معادلات خطيّة مصفوفتها متناظرة ومعرّفة موجبة.

مبرهنة 7: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة. وليكن $A = M - N$ تحليلاً بحيث تكون المصفوفة M قلوبة. إذا كانت المصفوفة المتناظرة $M^T + N$ معرّفة موجبة فإنّ $\rho(M^{-1}N) < 1$.

الإثبات: المصفوفة $M^T + N$ متناظرة لأنّ

$$M^T + N = A^T + N^T + N = A + N + N^T = M + N^T$$

لنبرهن الآن أنّ $\|M^{-1}\cdot N\|<1$ في حالة النظيم المصفوفاتي الملحق بالنظيم الشعاعي:

$$\|\ \|: v\in\mathbb{R}^n \mapsto \|v\|=(v^TAv)^{1/2}$$

لدينا

$$\|M^{-1}\cdot N\|=\|I-M^{-1}\cdot A\|=\sup_{\|v\|=1}\|v-M^{-1}Av\|$$

نضع $w=M^{-1}Av$. عندئذٍ نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \|v\|^2 - v^TAw - w^TAv + w^TAw\\ &= \|v\|^2 - w^TM^Tw - w^TMw + w^TAw\\ &= \|v\|^2 - w^T(M^T+N)w\end{aligned}$$

ومن ثمّ، يكون

$$\|v\|=1 \Rightarrow \|v-M^{-1}Av\|<1$$

وذلك لأنّ المصفوفة M^T+N معرّفة موجبة حسب الفرض، أيْ:

$$v\neq 0 \Rightarrow w=M^{-1}Av\neq 0 \Rightarrow w^T(M^T+N)w>0$$

من جهةٍ ثانية، التطبيق $v\in\mathbb{R}^n \mapsto \|v-M^{-1}Av\|\in\mathbb{R}$ مستمرٌ على سطح الكرة الواحديّة:

$$S=\{v\in\mathbb{R}^n : \|v\|=1\}$$

فهو يبلغ حدّه الأعلى عند إحدى نقاط هذا السطح، بمعنى أنّه يوجد $v^*\in S$ يكون عنده

$$\|v^*-M^{-1}Av^*\|=\sup_{\|v\|=1}\|v-M^{-1}Av\|<1$$

وهو المطلوب. ■

نتائج

① إذا كانت $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة فإنّ طريقة SOR (النقطية أو الكِتلية) تتقارب أيّاً كان $0<\omega<2$.

بوجهٍ خاص، عندما $\omega = 1$ تتقارب طريقة غاوص–سايدل.

الإثبات:

نعلم أنّ التفريق $A = M - N$ في حالة SOR يكتب بالشكل

$$M - N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} M^T + N &= \frac{1}{\omega}D - E^T + \frac{1-\omega}{\omega}D + F \\ &= \frac{2-\omega}{\omega}D \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$D = D^T \quad , \quad E^T = F$$

المصفوفة D هي مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة (سواءً أكانت نقطية أم كِتلية) ومن ثمّ فإنّ المصفوفة $M^T + N$ تكون معرّفة موجبة إذا وفقط إذا كان $0 < \omega < 2$. وبالاعتماد على **المبرهنة 7** يتمّ المطلوب. ■

② إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ومعرّفة موجبة وكانت المصفوفة

$$2D - A$$

معرّفة موجبة فإنّ طريقة جاكوبي (النقطيّة أو الكتليّة) تتقارب.

الإثبات:

في هذه الحالة يكون لدينا

$$\begin{aligned} M^T + N &= D + E + F \\ &= 2D - D + E + F \\ &= 2D - A \end{aligned}$$

وبالاعتماد على **المبرهنة 7** يتمّ المطلوب. ■

4. حالة المصفوفات ثلاثية الأقطار كِتلياً

تعريف: نقول عن مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ إنّها ثلاثية الأقطار كتلياً إذا كانت تكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ & & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

حيث

$$\begin{cases} A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R}), \quad 1 \le i \le p, \quad \sum_{i=1}^{p} n_i = n \\ A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{R}) \quad , \quad |i-j| = 1 \end{cases}$$

نستعمل هنا أيضاً التحليل الكتلي من الشكل $A = D - E - F$ حيث D مصفوفة قُطْرية كتلياً يتكوّن قُطْرها الرئيس من المصفوفات $\left(A_{ii}\right)_{1\le i\le p}$، E مصفوفة مثلثيّة من الأسفل و F مصفوفة مثلثيّة من الأعلى.

مبرهنة 8: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثية الأقطار كتلياً، وليكن $\mu \in \mathbb{C}^*$. نعرّف:

$$A(\mu) = D - \mu E - (1/\mu)F$$

عندها يكون $\det A(\mu) = \det A$.

الإثبات:

نعرّف المصفوفة القطريّة كتلياً

$$S = \begin{pmatrix} \mu I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^p I_p \end{pmatrix}$$

حيث I_i تمثّل مصفوفة مطابقة من المرتبة n_i. لدينا

$$\det S = \det(\mu I_1) \cdot \det(\mu^2 I_2) \cdots \det(\mu^p I_p) = \mu^k \neq 0$$

حيث

$$k = n_1 + 2 \cdot n_2 + \cdots + p \cdot n_p$$

نلاحظ هنا أنّ

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{-p} I_p \end{pmatrix}$$

وبإجراء عمليّة ضرب المصفوفات كتلياً نجد

$$\big(S \cdot A\big)_{i\ell} = \sum_{j=1}^{p} S_{ij} \cdot A_{j\ell} = S_{ii} \cdot A_{i\ell} = \mu^i A_{i\ell}$$

$$\left(S \cdot A \cdot S^{-1}\right)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} \big(S \cdot A\big)_{i\ell} \cdot S^{-1}_{\ell j} = \big(S \cdot A\big)_{ij} \cdot S^{-1}_{jj} = \frac{\mu^i}{\mu^j} \cdot A_{ij}$$

نلاحظ هنا أنّ

$$\begin{aligned}
\left(S \cdot A \cdot S^{-1}\right)_{ii} &= A_{ii}, && i = 1,\dots,p \\
\left(S \cdot A \cdot S^{-1}\right)_{i,i-1} &= \mu \cdot A_{i,i-1}, && i = 2,\dots,p \\
\left(S \cdot A \cdot S^{-1}\right)_{i,i+1} &= \frac{1}{\mu} \cdot A_{i,i+1}, && i = 1,\dots,p-1 \\
\left(S \cdot A \cdot S^{-1}\right)_{i,j} &= 0, && \big|i-j\big| > 1
\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد برهنّا المساواة $A(\mu) = S \cdot A \cdot S^{-1}$. ينتج من ذلك أنّ

$$\det A(\mu) = \det(S \cdot A \cdot S^{-1}) = \det A$$

وهو المطلوب. ■

مبرهنة 9: لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثية الأقطار كتلياً بحيث تكون كتل القطر الرئيس (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

① إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكِتلية $J = D^{-1}(E+F)$ فإنّ $-\lambda$ تكون أيضاً قيمة ذاتيّة لهذه المصفوفة.

② تشترك طريقة جاكوبي الكِتليّة مع طريقة غاوص–سايدل الكِتليّة في طبيعة التقارب (تتقاربان أو تتباعدان معاً).

③ في حالة تقارب طريقة غاوص–سايدل الكِتليّة فإنّ معدّل تقاربها يساوي ضِعْفَي معدّل تقارب طريقة جاكوبي الكِتليّة، أي

$$\Re_\infty(\mathcal{L}_1) = 2 \cdot \Re_\infty(J)$$

الإثبات:

① ليكن $P_J(\lambda)$ كثير الحدود المميّز لمصفوفة تكرار جاكوبي $J = D^{-1}E + D^{-1}F$. لدينا

$$P_J(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \det(\lambda I - D^{-1}E - D^{-1}F)$$

ومنه

$$\det D \cdot P_J(\lambda) = \det(D) \cdot \det(\lambda I - D^{-1}E - D^{-1}F)$$

بتطبيق **المبرهنة 8** على المصفوفة $\lambda D - E - F$ مع $\mu = -1$ نجد

$$\begin{aligned}\det(D) \cdot P_J(\lambda) &= \det(\lambda D + E + F)\\ &= (-1)^n \det(-\lambda D - E - F)\\ &= (-1)^n \det(D) \cdot P_J(-\lambda)\end{aligned}$$

وبما أنّ $\det(D) \neq 0$ فإنّ

$$P_J(\lambda) = (-1)^n \cdot P_J(-\lambda)$$

② لندرس الآن كثير الحدود المميّز P_1 لمصفوفة غاوص–سايدل $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} \cdot F$:

$$P_1(\lambda) = \det\Big(\lambda I - (D-E)^{-1}F\Big)$$

فإذا كان $\lambda \neq 0$ نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}\det(D-E) \cdot P_1(\lambda) &= \det\Big(\lambda(D-E) - F\Big) = \det(\lambda D - \lambda E - F)\\ &= \det\Big(\lambda^{1/2}\Big(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \lambda^{-1/2}F\Big)\Big)\\ &= \lambda^{n/2}\det\Big(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \lambda^{-1/2}F\Big)\end{aligned}$$

وباستخدام **المبرهنة 8** نجد

$$\begin{aligned}\det\left(\lambda^{1/2}D - \lambda^{1/2}E - \frac{F}{\lambda^{1/2}}\right) &= \det\Big(\lambda^{1/2}D - E - F\Big)\\ &= \det(D) \cdot P_J(\lambda^{1/2})\end{aligned}$$

ومن ثمّ يكون

$$\det\big(D-E\big)P_1(\lambda)=\lambda^{n/2}\det(D)\cdot P_J(\lambda^{1/2})$$

ولكن لدينا

$$\det(D-E)=\prod_{i=1}^{p}\det A_{ii}=\det(D)\neq 0$$

ومن ثمّ يكون

$$P_1(\lambda)=\lambda^{n/2}P_J(\lambda^{1/2})$$

ينتج من هذه العلاقة أنّه إذا كانت $\alpha\neq 0$ قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_1$ فإنّ $\beta=\pm\alpha^{1/2}$ تكون قيماً ذاتيّة للمصفوفة J. وبالعكس، إذا كانت $\beta\neq 0$ قيمة ذاتيّة للمصفوفة J فإنّ $\alpha=\beta^2$ تكون قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_1$.

نستنتج مما سبق، أنّ

$$\rho(\mathcal{L}_1)=\rho^2(J) \tag{15}$$

ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_1)<1\Leftrightarrow\rho(J)<1$$

أيْ أنّ طريقتي جاكوبي وغاوص–سايدل الكِتليّة تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً.

③ من العلاقة (15) لدينا

$$\begin{aligned}\Re_\infty(\mathcal{L}_1)&=-\ln\rho(\mathcal{L}_1)=-\ln\rho(J^2)\\&=-2\cdot\ln\rho(J)=2\cdot\Re_\infty(J)\end{aligned} \tag{16}$$

نلاحظ هنا أنّ تقارب طريقة غاوص–سايدل الكتليّة أسرع مرّتين من تقارب طريقة جاكوبي الكتليّة في حالة المصفوفات ثلاثية الأقطار. ■

مبرهنة 10: لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثية الأقطار كتلياً بحيث تكون كتل القطر الرئيس (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

- إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي J، وكان η عدداً يحقق العلاقة:

$$(\eta+\omega-1)^2=\eta\omega^2\lambda^2 \tag{17}$$

عندئذٍ تكون η قيمة ذاتيّة غير معدومة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$.

- بالعكس، إذا كانت η قيمة ذاتيّة غير معدومة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ وكانت λ قيمة عدديّة تحقق العلاقة (17) فإنّ λ تكون حينئذٍ قيمة ذاتيّة لمصفوفة التكرار J.

الإثبات:

القيم الذاتيّة لمصفوفة التكرار $\mathcal{L}_\omega$ هي جذور كثير الحدود المميّز:

$$P_\omega(\eta) = \det\Big(\eta I - (D-E)^{-1}\big((1-\omega)D + \omega F\big)\Big)$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\det(D-\omega E)\cdot P_\omega(\eta) &= \det\big(\eta(D-\omega E) - (1-\omega)D - \omega F\big)\\ &= \det\big((\eta+\omega-1)D - \eta\omega E - \omega F\big)\end{aligned}$$

وباستثناء حالة $\omega = 1$ (حالة غاوص–سايدل التي عالجناها سابقاً) فإنّ 0 ليس قيمةً ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$، لأنّ:

$$\det\big((1-\omega)D + \omega F\big) = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{p} \det A_{ii} \neq 0$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned}\det\big(D-\omega E\big)\cdot P_\omega(\eta) &= \det\left[\eta^{1/2}\omega\left(\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right)D - \eta^{1/2}E - \frac{1}{\eta^{1/2}}F\right)\right]\\ &= \eta^{n/2}\omega^n \det\left[\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}D - \eta^{1/2}E - \frac{1}{\eta^{1/2}}F\right]\end{aligned}$$

وبتطبيق **المبرهنة 8** نجد

$$\begin{aligned}\det(D-\omega E)\cdot P_\omega(\eta) &= \eta^{n/2}\omega^n \det\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}D - E - F\right)\\ &= \eta^{n/2}\cdot\omega^n\cdot\det D\cdot P_J\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right)\end{aligned}$$

وبما أنّ $\det(D-\omega E) = \det D$ يكون

$$P_\omega(\eta) = \eta^{n/2}\cdot\omega^n\cdot P_J\left(\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}\right)$$

نستنتج أنّه إذا كانت η قيمة ذاتيّة غير معدومة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ $(\omega \neq 1)$ فإنّ

$$\frac{\eta+\omega-1}{\eta^{1/2}\omega}$$

قيمة ذاتيّة للمصفوفة J .

وبالعكس، إذا كانت λ قيمة ذاتيّة للمصفوفة J وكانت القيمة η تحقق الشرط:

$$\frac{(\eta+\omega-1)^2}{\eta}=\omega^2\lambda^2$$

فإنّ η تكون قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$. ■

مبرهنة 11: لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ثلاثية الأقطار كتلياً بحيث تكون كتل القطر الرئيس (المصفوفات A_{ii}) قلوبة:

إذا كانت جميع القيم الذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكتليّة حقيقيّة فإنّ كلاً من طريقة جاكوبي الكتليّة وطريقة SOR الكتليّة تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً.

في حالة التقارب، توجد قيمة أمثليّة ω^* تعطى بالعلاقة:

$$\omega^*=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J)}} \tag{18}$$

تجعل المقدار $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغرياً ويكون عندئذٍ:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega^*})=\min_{0<\omega<2}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\omega^*-1 \tag{19}$$

الإثبات:

برهنّا سابقاً أنّه إذا كانت λ قيمة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكِتليّة فإنّ $-\lambda$ تكون أيضاً قيمةً ذاتيّة لها (**مبرهنة 8**). لتكن η قيمة ذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ ، عندئذٍ تكون η حلاً للمعادلة:

$$\eta^2+(2\omega-2-\lambda^2\omega^2)\eta+(\omega-1)^2=0 \tag{20}$$

نلاحظ هنا أنّ حلول هذه المعادلة لا تتعلّق بتغيّرات إشارة λ وإنّما تتعلّق فقط بقيمتها المطلقة، ولهذا السبب يكفي أن ندرس تغيّرات η عندما تكون $0\le\lambda$.

يكتب مميّز المعادلة (20) بالشكل

$$\Delta=(2\omega-2-\lambda^2\omega^2)^2-4(\omega-1)^2=\lambda^2\omega^2(\lambda^2\omega^2-4\omega+4)$$

فإشارة Δ من إشارة المقدار

$$\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4$$

الذي بدوره يمثّل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية بـ ω مميّزه المختصر هو $\delta = 4(1-\lambda)^2$.

- **حالة** $\rho(J) \geq 1$

يوجد عندها على الأقلّ قيمة ذاتيّة λ للمصفوفة J تحقق $1 \leq \lambda$ وعندها يكون $0 \leq \delta$ ويكون $0 \leq \omega^2(\omega-2)^2 \leq \Delta$ ومن ثمّ يكون للمعادلة (20) جذران حقيقيان $\eta_2 \leq \eta_1$ ويكون

$$\begin{aligned}
\rho(\mathcal{L}_\omega) &\geq \left|\eta_1\right| \\
&= \frac{1}{2}(\omega^2\lambda^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega\lambda(\omega^2\lambda^2 - 4\omega + 4)^{1/2} \\
&\geq \frac{1}{2}(\omega^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega(\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\omega^2 - 2\omega + 2) + \frac{1}{2}\omega(2-\omega) = 1
\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّه إذا تباعدت طريقة جاكوبي فإنّ طريقة الـ SOR تتباعد أيضاً (أياً كانت قيمة الوسيط ω).

- **حالة** $\rho(J) < 1$

في هذه الحالة يكون $0 \leq \delta$ ومن ثمّ يكون للمُمَيّز Δ جذران حقيقيان:

$$\begin{cases}
\omega_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \\
\omega_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} \quad = \dfrac{2}{1-\sqrt{1-\lambda^2}}
\end{cases}$$

وهذان الجذران موجبان لأنّ مجموعهما يساوي $\dfrac{4}{\lambda^2}$ وجداؤهما يساوي أيضاً $\dfrac{4}{\lambda^2}$. بمقارنة هذين الجذرين مع $\omega = 1$ و $\omega = 2$ نجد $0 < 1 < \omega_1 < 2 < \omega_2$. وبما أنّ $0 < \omega < 2$ تكون تغيّرات إشارة Δ في هذا المجال على النحو التالي:

ω	0	1	ω_1	2
Δ	0	$+$	0	$-$

❖ $\omega_1 < \omega$:

في هذه الحالة يكون $\Delta > 0$ وعندها تكون القيم الذاتيّة $\eta(\lambda)$ للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ عقديّة مترافقة مثنىً مثنى ويكون للمعادلة (20) جذران عقديّان مترافقان جداؤهما يساوي $(\omega-1)^2$ ومن ثمّ

$$\left|\eta\right| = \omega - 1 < 1$$

❖ $0 < \omega < \omega_1$:

في هذه الحالة يكون $\Delta \leq 0$ وتكون القيم الذاتيّة $\eta(\lambda)$ للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ حقيقيّة موجبة، وذلك لأنّ

$$\eta = (\eta + \omega - 1)^2 \,/\, (\omega^2\lambda^2)$$

نهتم هنا بالقيمة الذاتيّة الكبرى

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2\omega^2 - 2\omega + 2 + \lambda\omega(\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2}}{2}$$

وذلك بهدف تعيين $\max\limits_{\lambda,\omega}\left|\eta\right|$ لنحصل على تحديد من الأعلى لنصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{L}_\omega)$.

فعندما يكون $0 < \lambda < 1$، $0 < \omega < 2$ تتحقق المتراجحة التالية

$$\eta_1 < \frac{\omega^2 - 2\omega + 2 + \omega(\omega^2 - 4\omega + 4)^{1/2}}{2} = 1$$

نستنتج من هذا أنّه أياً كانت $0 < \omega < 2$ فإنّ طريقة الـ SOR تتقارب. وهكذا، نكون قد أثبتنا أنّ طريقتي جاكوبي و SOR تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً (لهما طبيعة واحدة في التقارب).

نرغب الآن في تعيين القيمة الأمثليّة ω^* للوسيط ω التي تجعل $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغر ما يمكن. لذا ندرس تغيّرات η بدلالة ω في المجال $]0,\omega_1[$ مع ثبات القيمة الذاتيّة λ.

باشتقاق العلاقة (17) بالنسبة للوسيط ω نجد

$$2(\eta + \omega - 1) + 2(\eta + \omega - 1)\frac{\partial\eta}{\partial\omega} = \frac{\partial\eta}{\partial\omega}\omega^2\lambda^2 + 2\eta\omega\lambda^2$$

ومنه

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\eta\lambda^2 - 1) + 2(1-\eta)}{2(\eta + \omega - 1) - \lambda^2\omega^2}$$

وبما أنّ η_1 (قيمة الجذر الأكبر للمعادلة 20) تحقق المتراجحة

$$(2\eta_1 + 2\omega - 2) - \lambda^2\omega^2 = \lambda\omega(\lambda^2\omega^2 - 4\omega + 4) > 0$$

فإنّ مقام الكسر $\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega}$ ذو إشارةٍ موجبة. فيما يتعلّق بالبسط، لدينا

$$2\omega(\eta\lambda^2 - 1) + 2(1-\eta) < 4(\eta - 1) + 2(1-\eta) = 2(\eta - 1) < 0$$

لأنّ

$$0 < \omega < 2, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

ومن ثمّ

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega} < 0$$

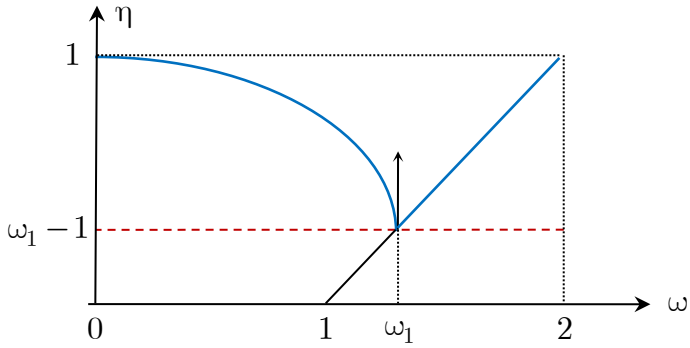
وبهذا نحصل على جدول التغيّرات التالي:

ω	0		1		ω_1
$\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega}$	$\lambda - 1$		$-$		$-\infty$
η	1	$\searrow$		$\searrow$	$\omega_1 - 1$

نلاحظ هنا أنّ

- $\lim\limits_{\substack{\omega \to 0 \\ >}} \eta = 1$
- $\eta = 1 - \omega(1-\lambda) + O(\omega^2)$
- $\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega} \underset{0}{=} (\lambda - 1) + O(\omega) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\omega \to 0 \\ >}} \dfrac{\partial \eta}{\partial \omega} = \lambda - 1$

وعند النقطة $\omega = \omega_1$ يكون $\eta = \omega_1 - 1$. من جهةٍ ثانية، المشتق $\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega}$ غير معرّف عند النقطة $\omega = \omega_1$ ولكن النهاية من اليسار تساوي $-\infty$. بتجميع الدراسة السابقة نحصل على منحني $\left|\eta(\omega)\right|$ في المجال $0 < \omega < 2$ (مع ثبات قيمة λ).



من الواضح أنّ القيمة الأصغريّة للتابع $\left|\eta(\omega)\right|$ تكون عندما $\omega = \omega_1$. لندرس الآن تغيّرات $\left|\eta\right|$ بدلالة λ عندما $0 \le \lambda < 1$. لدينا من العلاقة (17)

$$2\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(\eta + \omega - 1) = \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\omega^2\lambda^2 + 2\eta\omega^2\lambda$$

أو

$$\frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = \frac{2\eta\lambda\omega^2}{2(\eta + \omega - 1) - \lambda^2\omega^2}$$

المقام هنا موجب (كما رأينا سابقاً) وكذلك الحال بالنسبة للبسط. إذن $\dfrac{\partial \eta}{\partial \lambda} > 0$ ومن ثمّ

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_{\lambda \in Sp(J)} \left|\eta(\lambda)\right| = \left|\eta(\rho(J))\right| = \eta(\rho(J))$$

أمّا القيمة الأمثليّة ω^* والتي تحقق: $\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \min\limits_{0<\omega<2} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \eta(\omega^*) = \omega^* - 1$ فهي

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(J)}}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

5. تطبيق: الحل العددي لمسألة بواسون بطريقة الفروق المنتهية

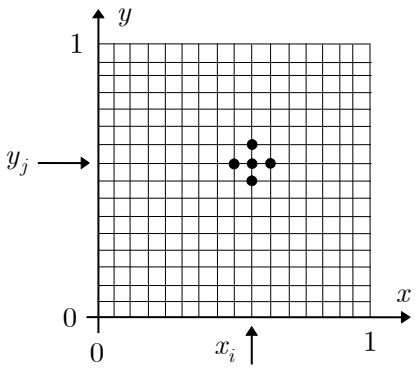
ندرس في هذه الفقرة مسألة بواسون Poisson في المربّع $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ (مسألة Dirichlet):

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = g(x,y) & if\ (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega} \\ u(x,y) = f(x,y) & if\ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

حيث $\partial\Omega = \Omega \setminus \overset{\circ}{\Omega}$ يمثّل مجموعة النقاط المحيطيّة للمربّع Ω. g و f تابعان معروفان

نبحث عن حلٍّ عددي للمسألة باستخدام طريقة الفروق المنتهية بخمس نقاط مطبّقةً على شبكة مربّعة خطوتها:

$$h = \Delta x = \Delta y = 1 / n$$



شبكة النقاط المربّعة Ω_h.

نعرّف

- "شبكة النقاط":

$$\Omega_h = \left\{(x_i,y_j) = (ih, jh),\quad 0 \le i,j \le n\right\}$$

- "النقاط المحيطيّة":

$$\partial\Omega_h = \left\{(x_i,0),(x_i,1),(0,y_j),(1,y_j),\quad 0 \le i,j \le n\right\}$$

- "النقاط الداخليّة":

$$\overset{\circ}{\Omega} = \Omega_h \setminus \partial\Omega_h$$

⌫ نذكّر هنا بالخاصّة التحليليّة التالية:

إذا كان $G \in C^4\left([x-h, x+h]\right)$ فإنّ

$$G''(x) = \frac{G(x+h) - 2G(x) + G(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} G^{(4)}(\xi)$$
$$x - h \le \xi \le x + h$$

فإذا افترضنا أنّ حلّ المسألة (P) كان نظامياً بما يكفي فإننا نستطيع أن نكتب:

$$-\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}\right) =$$
$$g_{i,j} - \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)\right]$$
$$1 \le i, j \le n-1$$

حيث

$$\left.\begin{matrix} u_{i,j} = u(x_i, y_j) \\ g_{i,j} = g(x_i, y_j) \end{matrix}\right|_{0 \le i,j \le n}, \qquad \left.\begin{matrix} x_{i-1} \le \xi_i \le x_{i+1} \\ y_{i-1} \le \eta_j \le y_{j+1} \end{matrix}\right|_{1 \le i,j \le n-1}$$

وهذا يقودنا إلى المسألة المنقطعة التالية:

$$(22)\quad (P_h) \quad \begin{cases} -\Delta_h u_h(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), & 1 \le i, j \le n-1, \\ u_h(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), & i \in \{0, n\} \vee j \in \{0, n\} \end{cases}$$

حيث

$$-\Delta_h u_h(x_i, y_j) = \frac{4\,u_h(x_i, y_j) - u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_{j-1})}{h^2}$$

- **الشروط عند الأطراف**

يؤول الشرط عند المحيط $u(x,y) = f(x,y)$ في المسألة (P) إلى شروط عددية عند النقاط المحيطيّة $\partial\Omega_h$:

$$u_h(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = f_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in \partial\Omega_h$$

- **جملة المعادلات الخطيّة**

بترقيم نقاط الشبكة وفق ترتيبٍ نختاره بشكل مناسب تؤول المسألة (P_h) إلى جملة معادلات خطيّة بالمجاهيل

$$\{u_h(x_i, y_j) : 1 \leq i, j \leq n-1\}$$

مصفوفتها مربّعة من النمط $\mathcal{M}_{(n-1)^2}(\mathbb{R})$.

أولاً: أسلوب الترقيم سطر-سطر

يجري الترقيم وفق هذا الأسلوب من اليسار إلى اليمين ومن الأسفل إلى الأعلى كما هو مبيّن في الشكل التالي في حالة $n = 5$:

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

تأخذ مصفوفة الجملة الخطيّة وفق هذا الأسلوب في الترقيم الشكل:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} G & -I & & & \\ -I & G & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & G & -I \\ & & & -I & G \end{pmatrix}$$

حيث I هي مصفوفة مطابقة من المرتبة $n-1$، G: مصفوفة مربعّة من المرتبة $n-1$ من الشكل:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

نلاحظ هنا أنّ المصفوفة A ثلاثية الأقطار كِتلياً متناظرة ومعرّفة موجبة، وهي أيضاً ذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر. يمكن التحقق بسهولة من أنّ القيم الذاتيّة $\lambda_{i,j}$ والأشعّة الذاتيّة $V_{i,j}$ للمصفوفة A تعطى بالعلاقات:

$$\lambda_{i,j} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2 i\frac{\pi}{2n} + \sin^2 j\frac{\pi}{2n}\right), \quad 1 \le i,j \le n-1$$
$$V_{i,j}[p,q] = \sin(p\,i\frac{\pi}{n})\cdot\sin(q\,j\frac{\pi}{n}), \quad 1 \le i,j,p,q \le n-1$$

نلاحظ هنا أنّ أصغر القيم الذاتيّة هي $\lambda_{1,1} = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2n}$ وأنّ أكبرها هي $\lambda_{n-1,n-1} = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2n}$.

ثانياً: أسلوب الترقيم قطرياً–من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل

يجري الترقيم وفق هذا الأسلوب قطرياً كما هو مبيّن في الشكل التالي في حالة $n = 5$:

7	11	14	16
4	8	12	15
2	5	9	13
1	3	6	10

تأخذ مصفوفة الجملة الخطيّة وفق هذا الأسلوب في الترقيم الشكل:

$$\tilde{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 4I_1 & C_1 & & & & & \\ C_1^T & 4I_2 & C_2 & & & & \\ & C_2^T & 4I_3 & C_3 & & & \\ & & C_3^T & 4I_4 & C_3^T & & \\ & & & C_3 & 4I_3 & C_2^T & \\ & & & & C_2 & 4I_2 & C_1^T \\ & & & & & C_1 & 4I_1 \end{pmatrix}$$

حيث I_k هي مصفوفة مطابقة من المرتبة k وحيث C_1، C_2، C_3 مصفوفات معرّفة كما يلي:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \\ & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & & \\ & -1 & -1 & \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ هنا أنّ المصفوفة $\tilde{A}$ ثلاثية الأقطار كِتلياً، متناظرة وذات قطرٍ رئيسٍ مسيطر. ونلاحظ أنّ الكتل القطريّة فيها هي مصفوفات مربّعة قطريّة مراتبها $\{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$ على الترتيب.

ملاحظة: يجري الانتقال من نظام الترقيم وفق الأسطر إلى نظام الترقيم القطري بإجراء التبديل التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(i)$	1	3	6	10	2	5	9	13	4	8	12	15	7	11	14	16

يعرّف هذا التبديل مصفوفة الانتقال:

$$P = \big(p_{ij}\big), \quad p_{ij} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

المصفوفة P متعامدة وتحقق العلاقة:

$$\tilde{A} = P^T A P$$

أيْ أنّ المصفوفتين A و $\tilde{A}$ متشابهتان. ينتج من ذلك أنّ $\mathrm{sp}(\tilde{A}) = \mathrm{sp}(A)$.

يمكن التحقق بسهولة من صحّة الخواص التي نعرضها في المبرهنة التالية:

مبرهنة 12: لتكن A مصفوفة الجملة الخطيّة الموافقة لاختيار أسلوب الترقيم سطر–سطر، ولتكن $\tilde{A}$ مصفوفة الجملة الخطيّة الموافقة لاختيار أسلوب الترقيم القطري. ولتكن P مصفوفة الانتقال من نظام الترقيم سطر–سطر إلى نظام الترقيم القطري. عندئذٍ تتحقق الخواص التالية:

أولاً: تتطابق طرائق جاكوبي و SOR النقطيّة مع طرائق جاكوبي و SOR الكتليّة في حالة مصفوفة ثلاثيّة الأقطار كتلياً $\tilde{A}$ مصفوفاتها القطرية $\tilde{A}_{ii}$ هي مصفوفات قطرية نقطياً، أيْ أنّ:

$$\tilde{J}_p = \tilde{J}_B \quad , \quad \tilde{\mathcal{L}}_{1,p} = \tilde{\mathcal{L}}_{1,B} \quad , \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\omega,p} = \tilde{\mathcal{L}}_{\omega,B}$$

ثانياً: ترتبط مصفوفات الطرائق التكراريّة $\tilde{\mathcal{L}}_{\omega,p}, \mathcal{L}_{\omega,p}, \tilde{J}_p, J_p$ الموافقة للمصفوفتين A و $\tilde{A}$ بالعلاقات:

$$\tilde{J}_p = P^T J_p P \quad , \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\omega,p} = P^T \mathcal{L}_{\omega,p} P$$
$$\rho\left(\tilde{J}_p\right) = \rho\left(J_p\right) \quad , \quad \rho\left(\tilde{\mathcal{L}}_{\omega,p}\right) = \rho\left(\mathcal{L}_{\omega,p}\right)$$

نتيجة هامة: بتطبيق المبرهنات 9 و 10 المتعلّقة بتقارب الطرائق التكراريّة في الحالة الكتليّة لمصفوفة ثلاثيّة الأقطار كتلياً على المصفوفة $\tilde{A}$ واعتماداً على خواص المبرهنة 12 السابقة نجد:

$$\rho\left(\mathcal{L}_{1,p}\right) = \rho\left(\tilde{\mathcal{L}}_{1,p}\right) = \rho^2\left(\tilde{J}_p\right) = \rho^2\left(J_p\right)$$
$$\tilde{\omega}_p^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2\left(\tilde{J}_p\right)}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2\left(J_p\right)}} = \omega_p^*$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathcal{L}_{\omega_p^*,p}\right) &= \min_{0<\omega<2} \rho\left(\mathcal{L}_{\omega,p}\right) = \min_{0<\omega<2} \rho\left(\tilde{\mathcal{L}}_{\omega,p}\right) \\ &= \rho\left(\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\omega}_p^*,p}\right) = \tilde{\omega}_p^* - 1 \\ &= \frac{1-\sqrt{1-\rho^2\left(J_p\right)}}{1+\sqrt{1-\rho^2\left(J_p\right)}} = \omega_p^* - 1\end{aligned}$$

- **وجود ووحدانية الحل العددي للمسألة المنقطعة (P_h)**

مبرهنة 13: أياً كانت قيمة $n \geq 2$ فإنّ المسألة (P_h) تقبل حلاً وحيداً

$$\{u_h(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n\}$$

إضافةً لذلك، إذا كان حل مسألة بواسون $u \in C^4(\Omega)$ فإنّ:

$$\max_{0\leq i,j\leq n} \left|u(x_i, y_j) - u_h(x_i, y_j)\right| \leq c \cdot h^2$$

حيث

$$c = \frac{1}{24}\left(\max_{0\leq x,y\leq 1}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,y)\right| + \max_{0\leq x,y\leq 1}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y)\right|\right)$$

لنبحث الآن في تعيين نصف القطر الطيفي لكلّ من الطرائق التكراريّة: جاكوبي، غاوص-سايدل و طريقة SOR وذلك في الحالتين النقطيّة والكتليّة.

1.5. الحالة النقطيّة

a) طريقة جاكوبي: تعطى مصفوفة التكرار في هذه الحالة بالعلاقة:

$$J_p = I - D^{-1}A = I - \frac{h^2}{4}A$$

يتبيّن من ذلك أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة J_p هي

$$\mathrm{sp}(J_p) = \{1 - \tfrac{1}{4}h^2\,\lambda_{i,j} : 1 \le i,j \le n-1\}$$

أمّا الأشعّة الذاتيّة لهذه المصفوفة فهي ذات الأشعة الذاتيّة للمصفوفة A . لدينا

$$1 - \frac{h^2}{4}\lambda_{i,j} = 1 - \sin^2 i\frac{\pi}{2n} - \sin^2 j\frac{\pi}{2n} = \frac{\cos i\pi h + \cos j\pi h}{2}$$

ومن ثمّ يكون

$$\rho(J_p) = \max_{1\le i,j\le n-1} \frac{\left|\cos i\pi h + \cos j\pi h\right|}{2} = \cos(\pi h)$$

ينتج من ذلك أنّ نصف القطر الطيفي لمصفوفة تكرار جاكوبي أصغر تماماً من الواحد، أي أنّ طريقة جاكوبي النقطيّة تتقارب. من جهةٍ ثانية، لدينا

$$\cos(\pi h) = 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)$$

أي أنّ معدّل التقارب لطريقة جاكوبي النقطيّة يساوي

$$\Re_\infty(J_p) = -\ln\left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)\right) \sim \frac{\pi^2 h^2}{2}$$

b) طريقة غاوص–سايدل: بالاعتماد على النتيجة السابقة نستطيع أن نكتب

$$\rho(\mathcal{L}_{1,p}) = \rho^2(J_p) = \cos^2(\pi h) = 1 - \pi^2 h^2 + O(h^4)$$

ومن ذلك نستنتج معدّل التقارب لهذه الطريقة

$$\Re_\infty(\mathcal{L}_{1,p}) = -\ln\rho(\mathcal{L}_{1,p}) \sim \pi^2 h^2$$

نلاحظ هنا أيضاً بطء هذه الطريقة ولكنّها أسرع مرتين بالمقارنة مع طريقة جاكوبي النقطيّة.

c) طريقة SOR : لدينا، اعتماداً على النتيجة السابقة أيضاً النتائج التالية:

$$\omega_p^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(J_p)}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\cos^2(\pi h)}} = \frac{2}{1+\sin(\pi h)}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{L}_{\omega_p^*,p}) = \omega_p^* - 1 &= \frac{2}{1+\sin(\pi h)} - 1 = \frac{1-\sin(\pi h)}{1+\sin(\pi h)} \\ &= \frac{1-\pi h + O(h^3)}{1+\pi h + O(h^3)} = 1 - 2\pi h + O(h^2)\end{aligned}$$

ويعطى معدّل التقارب بالعلاقة

$$\Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega_p^*,p}) \sim 2\pi h$$

نلاحظ في هذه الحالة أنّ معدّل التقارب أصبح من رتبة h مقارنةً بالحالتين السابقتين حيث كان من رتبة h^2.

ملاحظة: إن الربح الذي نجنيه من استعمال القيمة الأمثليّة ω_p^* في طريقة SOR هامٌ جداً، وذلك لأنّ

$$\frac{\Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega_p^*,p})}{\Re_\infty(\mathcal{L}_{1,p})} \simeq \frac{2\pi h}{\pi^2 h^2} = \frac{2}{\pi h} = \frac{2n}{\pi}$$

فعلى سبيل المثال، في حالة $h = 1/100$ تقوم طريقة SOR الأمثليّة بعدد من التكرارات أقلّ بـ $\frac{200}{\pi} \simeq 63.662$ مرّة من العدد اللازم لطريقة غاوص-سايدل للوصول إلى الدقّة المطلوبة في حل الجملة الخطّية.

2.5. الحالة الكِتليّة

لدينا في هذه الحالة

$$D_B = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \end{pmatrix}$$

لنبرهن أنّ الأشعة الذاتيّة $V_{i,j}$ للمصفوفة A هي أيضاً أشعّة ذاتيّة للمصفوفة D_B. في الواقع

$$\begin{aligned} D_B V_{i,j}[p,q] &= \frac{1}{h^2}\Big\{4\sin\Big(pi\tfrac{\pi}{n}\Big)\sin\Big(qj\tfrac{\pi}{n}\Big) - \sin\Big[(p+1)i\tfrac{\pi}{n}\Big]\sin\Big(qj\tfrac{\pi}{n}\Big) - \sin\Big[(p-1)i\tfrac{\pi}{n}\Big]\sin\Big(qj\tfrac{\pi}{n}\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{h^2}\Big\{\sin\Big(qj\tfrac{\pi}{n}\Big)\cdot\Big[4\sin\Big(pi\tfrac{\pi}{n}\Big) - \sin\Big[(p+1)i\tfrac{\pi}{n}\Big] - \sin\Big[(p-1)i\tfrac{\pi}{n}\Big]\Big]\Big\} \\ &= \frac{2}{h^2}\sin\Big(q\,j\tfrac{\pi}{n}\Big)\cdot\sin\Big(p\,i\tfrac{\pi}{n}\Big)\cdot\Big[2-\cos\Big(i\tfrac{\pi}{n}\Big)\Big] \end{aligned}$$

ومن ثمّ، يكون

$$D_B \cdot V_{i,j} = \frac{2}{h^2}\Big[2-\cos\Big(i\frac{\pi}{n}\Big)\Big]\cdot V_{i,j}$$

وبما أنّ الأشعّة $V_{i,j}$ هي أشعة ذاتيّة للمصفوفة A وكذلك للمصفوفة D_B^{-1}، فهي أشعّة ذاتيّة لمصفوفة تكرار جاكوبي الكِتليّة:

$$J_B = I - D_B^{-1}\cdot A$$

لدينا

$$A\cdot V_{i,j} = \frac{4}{h^2}\Big[\sin^2(i\frac{\pi}{2n}) + \sin^2(j\frac{\pi}{2n})\Big]\cdot V_{i,j}$$

ومنه

$$\begin{aligned} J_B\cdot V_{i,j} &= \left[1 - \frac{h^2}{2(2-\cos(i\frac{\pi}{n}))}\cdot\frac{4}{h^2}\left(\sin^2(i\frac{\pi}{2n}) + \sin^2(j\frac{\pi}{2n})\right)\right]V_{i,j} \\ &= \mu_{i,j}V_{i,j} \end{aligned}$$

حيث

$$\mu_{i,j} = \left(1 - \frac{2-\cos(i\pi h) - \cos(j\pi h)}{2-\cos(i\pi h)}\right) = \frac{\cos(j\pi h)}{2-\cos(i\pi h)}$$

ومن ثمّ

$$\rho(J_B) = \max_{i,j}\left|\mu_{i,j}\right| = \left|\mu_{1,1}\right| = \frac{\cos(\pi h)}{2-\cos(\pi h)} = 1 - \pi^2h^2 + O(h^4)$$

ويكون معدّل التقارب في هذه الحالة مساوياً

$$\Re_\infty(J_B) \sim \pi^2h^2$$

نلاحظ هنا أنّ طريقة جاكوبي الكِتليّة أسرع مرّتين من طريقة جاكوبي النقطيّة:

$$\Re_\infty(J_p) \sim \tfrac{1}{2}\pi^2h^2$$

بالاعتماد على المبرهنات والخواص المتعلّقة بالمصفوفات ثلاثية الأقطار، وكون القيم الذاتيّة لمصفوفة جاكوبي حقيقيّة، يكون لدينا:

$$\rho(\mathcal{L}_{1,B}) \sim 1 - 2\pi^2 h^2$$
$$\Re_\infty(\mathcal{L}_{1,B}) \sim 2\pi^2 h^2$$

وكذلك

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_B^*,B}) = \frac{1-\sqrt{1-\rho^2(J_B)}}{1+\sqrt{1-\rho^2(J_B)}} \sim \frac{1-\pi h\sqrt{2}}{1+\pi h\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}\,\pi h + O(h^2)$$

ومنه

$$\Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega_B^*,B}) \sim 2\sqrt{2}\,\pi h$$

نلخّص النتائج السابقة في الجدول التالي:

	الحالة النقطيّة		الحالة الكِتليّة	
	ρ	$\Re_\infty$	ρ	$\Re_\infty$
جاكوبي	$1-\frac{\pi^2h^2}{2}$	$\frac{\pi^2h^2}{2}$	$1-\pi^2h^2$	π^2h^2
غاوص–سايدل	$1-\pi^2h^2$	π^2h^2	$1-2\pi^2h^2$	$2\pi^2h^2$
SOR الأمثليّة	$1-2\pi h$	$2\pi h$	$1-2\sqrt{2}\,\pi h$	$2\sqrt{2}\,\pi h$

توضّح الدراسة السابقة أهميّة طريقة SOR الأمثليّة (بوسيطٍ أمثلي ω^*).

برهنّا فيما سبق أنّه إذا أردنا خفض الخطأ الابتدائي بنسبة ε فإنّ عدد التكرارات اللازمة لذلك يتناسب عكساً مع معدّل تقارب الطريقة التكراريّة $\Re_\infty$.

فعلى سبيل المثال، إذا كان

$$\varepsilon = 10^{-6}$$
$$h = 10^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad n = 100$$

فإنّ عدد التكرارات اللازم للوصول إلى الدقّة المطلوبة يكون من رتبة:

$$\frac{-\ln 10^{-6}}{\Re_\infty} = \frac{6\ln 10}{\Re_\infty} \simeq \frac{13.8}{\Re_\infty}$$

بتطبيق ذلك على الطرائق التكراريّة السابقة نحصل على النتائج التالية:

	جاكوبي	غاوص–سايدل	SOR الأمثليّة
الحالة النقطيّة	27964	13982	219
الحالة الكتليّة	13982	6991	155

عدد التكرارات في الحالتين النقطيّة والكتليّة.

3.5 . التطبيق العملي للخوارزميات التكراريّة في الحالة النقطيّة

أولاً: صياغة العلاقات التكراريّة

لتبسيط كتابة العلاقات التكراريّة صياغة خوارزميّات جاكوبي، غاوص–سايدل أو خوارزميّة SOR نرمز بالكتابة $U_{i,j}^{(k)}$ لقيمة شعاع التكرار $(u_h)_k$ عند النقطة (x_i, y_j) من نقاط الشبكة، أياً كان $0 \leq i, j \leq n$.

نذكّر هنا أنّ الهدف هنا هو إنشاء متتالية من الأشعّة $(u_h)_{k\geq 0}$ تتقارب من الحلّ العددي u_h عندما يسعى الدليل k إلى اللانهاية، أيْ

$$\lim_{k\to\infty} (u_h)_k = u_h$$

☒ خوارزميّة جاكوبي Jacobi

يمكن أن نرى بسهولة أنّ تكرار جاكوبي في الحالة النقطيّة يكتب بالشكل:

$$\begin{cases} U_{i,j}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\Big(U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)}\Big) + \dfrac{h^2}{4} g(x_i, y_j) \\ \\ \quad 1 \le i \le n-1 \\ \quad 1 \le j \le n-1 \end{cases}$$

علماً أنّ $U_{i,j}^{(k)} = f(x_i, y_j)$ عندما $(x_i, y_j) \in \partial\Omega_h$.

☒ خوارزميّة غاوص–سايدل Gauss-Seidel

يأخذ تكرار غاوص–سايدل في الحالة النقطيّة الشكل:

$$\begin{cases} U_{i,j}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\Big(U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)}\Big) + \dfrac{h^2}{4} g(x_i, y_j) \\ \\ \quad 1 \le i \le n-1 \\ \quad 1 \le j \le n-1 \end{cases}$$

☒ خوارزميّة SOR

يكتب تكرار SOR في الحالة النقطيّة كالآتي: أياً كان $1 \le i, j \le n-1$ فإنّ

$$U_{i,j}^{(k+1)} = \omega \cdot \left[\frac{1}{4}\Big(U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)}\Big) + \frac{h^2}{4} g(x_i, y_j)\right] + (1-\omega) \cdot U_{i,j}^{(k)}$$

ثانياً: ترتيب الحساب العددي

تحسب قيم التكرار $U_{i,j}^{(k+1)}$ وفق خطوط الشبكة، سطراً سطراً، من الأسفل إلى الأعلى ومن اليسار إلى اليمين كما يلي:

$$\begin{cases} for\ \ j := 1\ to\ n-1\ do \\ \quad for\ \ i := 1\ to\ n-1\ do \qquad \ll Compute\ U_{i,j}^{(k+1)} \gg \end{cases}$$

ثالثاً: تقارب الطرائق التكراريّة

وجدنا عند دراسة تقارب الخوارزميّات التكراريّة في الحالة النقطيّة النتائج التالية:

- **طريقة جاكوبي**

$$\rho(J_p) = \cos(\pi h) = 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)$$
$$\Re_\infty(J_p) = -\ln\big(\cos(\pi h)\big) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2 h^2}{2}$$

- **طريقة غاوص–سايدل**

$$\rho(\mathcal{L}_{1,p}) = \rho^2(J_p) = \cos^2(\pi h) = 1 - \pi^2 h^2 + O(h^4)$$
$$\Re_\infty(\mathcal{L}_{1,p}) = -\ln \rho(\mathcal{L}_{1,p}) \underset{0}{\sim} \pi^2 h^2$$

- **طريقة *SOR* مع وسيط أمثلي**

$$\begin{cases} \omega_p^* = \dfrac{2}{1+\sin(\pi h)} \\ \rho(\mathcal{L}_{\omega^*,p}) = \omega_p^* - 1 = 1 - 2\pi h + O(h^2) \\ \Re_\infty(\mathcal{L}_{\omega^*,p}) = -\ln\Big(\rho(\mathcal{L}_{\omega^*,p})\Big) \underset{0}{\sim} 2\pi h \end{cases}$$

رابعاً: الوضع الابتدائي للتكرار

$$\big(u_h\big)_0(x_i, y_j) = \frac{1}{2}\big[(1-x_i)\cdot f_{0,j} + x_i \cdot f_{n,j} + (1-y_j)\cdot f_{i,0} + y_j \cdot f_{i,n}\big]$$
$$1 \le i, j \le n-1$$

خامساً: اختبار التوقّف

ليكن $\varepsilon > 0$. تتوقف عمليّة الحساب التكراري عندما يتحقق الشرط:

$$\big\| u_h - (u_h)_k \big\|_\infty = \max_{1\le i,j\le n-1} \big| u_h(x_i, y_j) - (u_h)_k(x_i, y_j) \big| \le \varepsilon$$

وللتحقق من هذا الشرط في أثناء الحساب، نستخدم اختباراً من النمط:

$$\frac{\delta_k}{1-\delta_k} \big\| (u_h)_{k+1} - (u_h)_k \big\|_\infty < \varepsilon$$

- **عند تطبيق خوارزميّة جاكوبي:** نستعمل

$$\delta_k = \cos(\pi h) = \rho(J_p), \quad k \geq 0$$

- **عند تطبيق خوارزميّة غاوص–سايدل:** يمكننا استعمال

$$\delta_k = \frac{\left\|(u_h)_{k+1} - (u_h)_k\right\|_\infty}{\left\|(u_h)_k - (u_h)_{k-1}\right\|_\infty}$$

ويلاحظ في هذه الحالة أنّ

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \cos^2(\pi h) = \rho(\mathcal{L}_{1,p})$$

- **عند تطبيق خوارزميّة *SOR*** : نستعمل

$$\delta_k = \rho(\mathcal{L}_{\omega^*,p}) = \omega_p^* - 1 = \frac{1-\sin(\pi h)}{1+\sin(\pi h)}, \quad k \geq 0$$

4.5 . تطبيق عددي للخوارزميات التكراريّة في الحالتين النقطيّة والكتلية

نعالج في هذا المثال مسألة بواسون المعرّفة على المنطقة $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = g(x,y) & if\ (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega} \\ u(x,y) = \cos(2\pi x\, y)\, e^{-x\,y} & if\ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

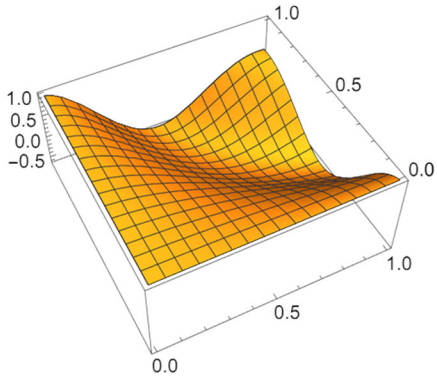
حيث

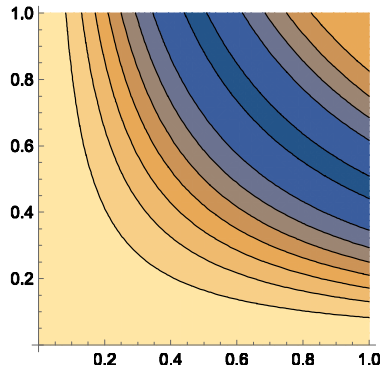
$$g(x,y) = e^{-x\,y}(x^2+y^2)\Big[(4x^2-1)\cos(2\pi x\, y) - 4\pi \sin(2\pi x\, y)\Big]$$

والتي تقبل حلاً تحليلياً وحيداً معطى بالصيغة

$$u(x,y) = \cos(2\pi x\, y)\, e^{-x\,y}$$

يبيّن الشكل التالي تمثيلاً بيانياً للحل $u(x,y)$ إضافةً إلى خطوط السوّية له.





لمقارنة كفاءة طرائق الحل التكراريّة التي رأيناها في هذا البحث نطبّق خوارزميات جاكوبي وغاوص–سايدل وخوارزميّة SOR الأمثليّة في الحالتين النقطيّة والكتليّة عند تجزئة المربّع $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ بخطوة مقدارها $h = 1/32$ ودقّة في تعيين الحل التقريبي تساوي $\varepsilon = 10^{-5}$. نسجّل لكل خوارزميّة عدد التكرارات اللازمة للوصول إلى تقريب بالدقّة المطلوبة للحل العددي:

$$\left\{u_h(x_i,y_i) : 1 \le i,j \le 32\right\}$$

فنحصل على النتائج المبيّنة في الجدول التالي:

	جاكوبي	غاوص–سايدل	SOR الأمثليّة
الحالة النقطيّة	2203	1116	83
الحالة الكتليّة	1141	560	59

عدد التكرارات في حالة $n = 32$ و $\varepsilon = 10^{-5}$.

نلاحظ من الجدول السابق تطابق النتائج العمليّة مع النتائج النظريّة المتعلّقة بسرعة تقارب كلّ من الخوارزميات الثلاث في الحالتين النقطية والكتليّة.

6. مسائل وتمارين

1.6. ليكن $a \in \mathbb{R}$ ولتكن $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ من الشكل

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -4a & 1 \end{pmatrix}$$

أوّلاً: احسب كلاً من $\rho(J)$ و $\rho(\mathcal{L}_1)$ بدلالة الوسيط a.

ثانياً: نفرض $a = 1/4$. برهن أنّ

$$\rho(\mathcal{L}_{1/2}) < 1$$

وأنّ

$$\rho(\mathcal{L}_{1/2}) < \frac{1+\rho(J)}{2}$$

2.6. ليكن $a \in \mathbb{R}$ ولتكن $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ من الشكل

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

أوّلاً: عيّن قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تجعل المصفوفة A معرّفة موجبة.

ثانياً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تتقارب عندها طريقة جاكوبي؟

ثالثاً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تتقارب عندها طريقة غاوص–سايدل؟

رابعاً: ما هي قيم الوسيط $a \in \mathbb{R}$ التي تكون عندها طريقة غاوص–سايدل أسرع من طريقة جاكوبي؟

3.6. ليكن

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

نعرّف الطريقة التكراريّة: $x_{k+1} = B \cdot x_k - b, \quad k \geq 0$

أوّلاً: بيّن أنّ $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ يحقق المعادلة $x = B \cdot x - b$.

ثانياً: ليكن $x_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$. احسب x_k بدلالة ε.

هل تتقارب المتتالية $\left(x_k\right)_{k\geq 0}$ إلى $\overline{x}$ ؟

ثالثاً: نختار الآن $x_0 = \begin{bmatrix} 1+2\varepsilon \\ 1-9\varepsilon \end{bmatrix}$. هل تتقارب المتتالية $\left(x_k\right)_{k\geq 0}$ إلى $\overline{x}$ ؟ اشرح لماذا.

4.6. لتكن $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ معرّفة بالعلاقة $A = I + E + F$ حيث

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لتكن $\mathcal{L}_\omega$ مصفوفة تكرار طريقة SOR الموافقة لهذا التحليل، أيْ

$$\mathcal{L}_\omega = (I + \omega E)^{-1} \cdot \Big((1-\omega)I - \omega F\Big)$$

أوّلاً: احسب بدلالة ω القيم الذاتيّة للمصفوفة $\mathcal{L}_\omega$ ومن ثمّ استنتج نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{L}_\omega)$.

ثانياً: عيّن قيم الوسيط ω التي تتقارب عندها طريقة SOR. عيّن قيمة الوسيط الأمثلي ω^* الذي يجعل $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ أصغرياً.

5.6. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة و $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولتكن جملة المعادلات الخطيّة:

$$\begin{aligned} A \cdot z_1 + B \cdot z_2 &= b_1 \\ B \cdot z_1 + A \cdot z_2 &= b_2 \end{aligned}$$

حيث z_1 ، z_2 ، b_1 و b_2 أشعّة من $\mathbb{R}^n$. نضع $Z = (z_1, z_2)^T, b = (b_1, b_2)^T$.

أوّلاً: أوجد شرطاً لازماً وكافياً لتقارب كلٍّ من الطريقتين التكراريّتين التاليتين:

$$(i) \quad Z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \cdot B \\ -A^{-1} \cdot B & 0 \end{pmatrix} \cdot Z_k + \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot b_1 \\ A^{-1} \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad Z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \cdot B \\ 0 & -(A^{-1} \cdot B)^2 \end{pmatrix} \cdot Z_k + \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot b_1 \\ A^{-1} \cdot (b_2 - B \cdot A^{-1} \cdot b_1) \end{pmatrix}$$

ثانياً: قارن معدّلات تقارب الطريقتين السابقتين.

6.6. لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وليكن a و b شعاعين من $\mathbb{R}^n$. نعرّف العلاقات التكراريّة:

$$(\mathrm{M}_1) \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n,\, y_0 \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} x_{k+1} = B \cdot y_k + a, & k \geq 0, \\ y_{k+1} = A \cdot x_k + b, & k \geq 0, \end{cases}$$

أولاً: أوجد الشرط اللازم والكافي لتقارب كلٍّ من المتتاليتين (x_k) و (y_k).

ثانياً: نضع $z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$. برهن أنّ جملة التكرارات (M_1) تكتب بالشكل المكافئ $z_{k+1} = C \cdot z_k + c$ حيث C مصفوفة مربّعة من المرتبة $2n$. عيّن صيغة كلٍّ من المصفوفة C والشعاع c بدلالة عناصر (M_1).

ثالثاً: برهن أنّ $\rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$.

نعرّف الآن العلاقات التكراريّة التالية

$$(\mathrm{M}_2) \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n,\, y_0 \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} x_{k+1} = B \cdot y_k + a, & k \geq 0, \\ y_{k+1} = A \cdot x_{k+1} + b, & k \geq 0, \end{cases}$$

رابعاً: أوجد الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتاليتين (x_k) و (y_k) في هذه الحالة.

خامساً: برهن كما في الطلب الثالث أنّ جملة التكرارات (M_2) تكافئ تكراراً من الشكل:

$$z_{k+1} = D \cdot z_k + d$$

حيث D مصفوفة مربّعة من المرتبة $2n$ يطلب تحديدها وتحديد الشعاع d.

سادساً: برهن أنّ $\rho(D) = \rho(AB)$.

سابعاً: قارن معدّلات التقارب لكلّ من التكرارين (M_1) و (M_2).

7.6. لتكن $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. نفترض وجود عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ ونظيم مصفوفاتي ملحق $\|\ \|$ بحيث يكون $\|B\| \leq \alpha < 1$.

لتكن متتالية الأشعّة

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = B \cdot x_k + c \quad k \geq 0 \end{cases}$$

أوّلاً: برهن تقارب المتتالية $\left(x_k\right)$. ما العلاقة التي تحققها النهاية $\overline{x}$؟

ثانياً: نعرّف متتالية الرواسب الموافقة للمتتالية $\left(x_k\right)$ بالعلاقة:

$$r_k = c - (I - B)\cdot x_k, \quad k \geq 0$$

برهن صحّة العلاقات التالية: $\forall k \geq 0, \quad \begin{cases} r_k = x_{k+1} - x_k \\ r_{k+1} = B \cdot r_k \end{cases}$

واستنتج أنّ

$$x_{k+1} = x_0 + (I + B + \cdots + B^k)\cdot r_0$$

ثالثاً: أثبت أنّ

$$\overline{x} = x_0 + (I - B)^{-1}\cdot r_0 = x_k + B^k(I - B)^{-1}\cdot r_0$$

رابعاً: أثبت أنّ

$$\left\|(I - B)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

واستنتج المتراجحة التالية

$$\left\|\overline{x} - x_k\right\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|}\cdot\left\|r_0\right\|$$

خامساً: لتكن المصفوفة

$$B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اختر نظيماً مصفوفاتياً ملحقاً وأوجد تقديراً مناسباً للعدد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\|B\| \leq \alpha < 1$، واستنتج قيمة الحد الأدنى m^* لعدد التكرارات m اللازم لكي يتحقق الشرط:

$$\forall m \geq m^*, \quad \left\|\overline{x} - x_m\right\| \leq \varepsilon\left\|r_0\right\|$$

حيث ε عددٌ معطى.

8.6. لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قلوبة. وليكن $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تقريباً للمقلوب A^{-1}.

يهدف هذا التمرين إلى توضيح خوارزميّة تسمح بحساب تقريبٍ أفضل للمقلوب A^{-1} وذلك بإنشاء متتالية من المصفوفات تتقارب إليها.

نضع

$$R_0 = I - A \cdot X_0$$

ونفترض أنّ $\|R_0\| = \delta < 1$.

أوّلاً: برهن أنّ

$$A^{-1} = X_0\big(2I - A \cdot X_0\big) + A^{-1} \cdot R_0^2$$

ثانياً: نعرّف المتتاليتين

$$\begin{cases} X_k = X_{k-1}\big(2I - A \cdot X_{k-1}\big), & k \geq 1 \\ R_k = I - A \cdot X_k, & k \geq 0 \end{cases}$$

برهن أنّ

$$R_k = R_{k-1}^2$$

واستنتج أنّ

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{-1}$$

ثالثاً: نعيد صياغة العلاقات التكراريّة السابقة بالشكل التالي:

$$\text{(H)} \qquad \left.\begin{array}{l} X_k = X_{k-1}(I + R_{k-1}) \\ R_k = R_{k-1}^2 \end{array}\right\}, \qquad k \geq 1$$

أثبت أنّ

$$X_k = X_{k-1}\big(I + R_{k-1}\big) = X_0\big(I + R_0\big)\Big(I + R_0^2\Big)\cdots\Big(I + R_0^{2^{k-1}}\Big)$$

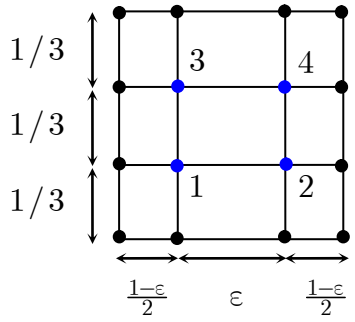
ملاحظة:

تمثّل علاقات التدريج (H) خوارزميّة Hotelling-Bodewig في تعيين تقريب جيّد للمقلوب A^{-1}.

9.6. ليكن $\Omega = [0,1]\times[0,1]$. ولتكن المسألة التفاضليّة التالية:

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega} \\ u(x,y) = 1 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

نقطّع الساحة Ω بشبكةٍ فيها أربع نقاط داخليّة كما في الشكل التالي:



أوّلاً: اكتب المعادلات الخطيّة (بدلالة ε) التي نحصل عليها بتطبيق طريقة الفروق المنتهية بتقريب المؤثّر Δ بخمس نقاط.

ثانياً: استنتج مصفوفة تكرار جاكوبي $J(\varepsilon)$.

ثالثاً: احسب قيمة $\rho(J(\varepsilon))$.

الفصل الخامس

القيم والأشعّة الذاتيّة

ندرس في هذا الفصل مسألة حساب القيم الذاتيّة والأشعّة الذاتيّة لمصفوفةٍ مربّعة. تواجهنا هذه المسألة في العديد من المواضع حيث تأخذ المصفوفة المربّعة أشكالاً متنوّعة، فقد تكون كثيرة الأصفار أو كثيفة، صغيرة المرتبة أو كبيرة، وفي أغلب الأحيان تكون متناظرة. تتعلّق الطريقة المستعملة في حساب القيم الذاتيّة بعدد القيم التي نريد حسابها (كلّها أو بعضها).

إنّ تعيين القيم والأشعّة الذاتيّة لمصفوفة غير متناظرة هي مسألة غير سهلة ويمكن أن تكون أيضاً غير مستقرّة بالنسبة للتشويشات في عناصر المصفوفة، وهذا ما يجعل تصميم خوارزميّات عامّة لمعالجة هذه المسألة أكثر صعوبة. من جهةٍ أخرى، تتميّز المصفوفات المتناظرة باستقراريّة جيّدة في مسألة حساب عناصرها الذاتيّة.

نقوم عادةً بتعيين القيم الذاتيّة أولاً؛ ومن ثمّ نستعمل هذه القيم في تعيين الأشعّة الذاتيّة إذا رغبنا في تعيين هذه الأشعّة. يستثنى من هذه القاعدة طريقة القوى التكراريّة التي تسمح بتعيين أكبر القيم الذاتيّة طويلةً إضافةً إلى شعاعٍ ذاتيّ موافق.

لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n. تتلخّص مسألة تعيين العناصر الذاتيّة لهذه المصفوفة بالبحث عن أعدادٍ $\lambda \in \mathbb{C}$ وأشعّةٍ $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$، بحيث يكون

$$A.v = \lambda \cdot v \tag{1}$$

نسميّ العدد λ قيمةً ذاتيّة للمصفوفة A كما نسميّ الشعاع v شعاعاً ذاتيّاً موافقاً لهذه القيمة. يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0 \tag{2}$$

تقبل المعادلة (2) حلاً $v \neq 0$ إذا وفقط إذا كان

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

نسميّ كثير الحدود $\mathcal{X}_A(\lambda)$ كثير الحدود المميّز للمصفوفة A. يتبيّن من ذلك أنّ القيم الذاتيّة للمصفوفة A هي جذور كثير الحدود المميّز.

1. حساسيّة العناصر الذاتيّة

تولّد العديد من خوارزميّات حساب القيم الذاتيّة لمصفوفةٍ مربّعة A متتالية من تحويلات التشابه X_k هدفها جعل المصفوفة $X^{-1} \cdot A \cdot X$ أقرب ما يمكن إلى القطريّة. وهنا نتساءل عن مدى تقريب قيم العناصر القطريّة في المصفوفة لقِيَمها الذاتيّة؟ تزوّدنا مبرهنة Gershgorin التالية بالإجابةٍ.

مبرهنة 1 (Gershgorin)

لتكن A مصفوفة مربّعة وليكن التحويل $X^{-1} \cdot A \cdot X = D + F$ حيث $D = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ و F مصفوفة مربّعة عناصر قطرها الرئيس معدومة. عندها يكون

$$\operatorname{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad , \quad D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - d_i \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| f_{ij} \right| \right\} \tag{3}$$

الإثبات: انظر المبرهنة 4 من الفصل الرابع.

ملاحظات:

① يبرهن أنّه في حالة كون أحد الأقراص D_i معزولاً عن بقيّة الأقراص في المستوي العقدي فإنّ هذا القرص يحوي قيمة ذاتيّة واحدة فقط من القيم الذاتيّة للمصفوفة A.

② بما أنّ $\mathrm{sp}(A^*) = \mathrm{sp}(A)$ فإنّ المبرهنة السابقة تبقى صحيحة عند استعمال عناصر أعمدة المصفوفة F بدلاً من عناصر أسطرها في حساب أنصاف أقطار الأقراص D_i مما يسمح بتحديدٍ أفضل لتوضّع القيم الذاتيّة في المستوي العقدي.

مثال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا هنا

$$\mathrm{sp}(A) = \{10.226,\ 0.387 + 2.2216\,i,\ 0.387 - 2.2216\,i\}$$

وتكون أقراص Gershgorin في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z : \big|z - 10\big| \le 5\} \\ D_2 &= \{z : \big|z\big| \le 3\} \\ D_3 &= \{z : |z - 1| \le 3\} \end{aligned}$$

نلاحظ هنا أنّ استعمال عناصر العمود الأوّل بدلاً من السطر الأوّل يسمح بتحديدٍ أفضل لنصف قطر القرص D_1 فيصبح $\{z : \big|z - 10\big| \le 2\}$ وهذا تحديدٌ أفضل لتوضّع القيمة الذاتيّة $\lambda_1 = 10.226$.

تبرز الحاجة، في العديد من تطبيقات حساب القيم الذاتيّة، إلى معرفة مدى تأثير التشويشات الصغيرة في حساب القيم الذاتيّة لمصفوفة. المبرهنة التالية تلقي بعض الضوء في هذا الخصوص.

مبرهنة 2 (Bauer-Fike)

لتكن A و E مصفوفتين مربّعتين من المرتبة n ولنفترض أنّ $\mu \in \mathrm{sp}(A + E)$. إذا وجد تحويلٌ يحقق

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

فإنّ

$$\min_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \big|\lambda - \mu\big| \le \kappa_p(X) \cdot \|E\|_p \tag{4}$$

أياً كان $1 \le p$.

الإثبات:

يكفي أن نبرهن الحالة التي يكون فيها $\mu \notin \mathrm{sp}(A)$. نعلم في هذه الحالة أنّ المصفوفة

$$X^{-1} \cdot (A + E - \mu \cdot I) \cdot X$$

غير قلوبة ومن ثمّ تكون المصفوفة

$$I + (D - \mu \cdot I)^{-1} \cdot (X^{-1} \cdot E \cdot X)$$

غير قلوبة أيضاً وهذا يقتضي بدوره أن يكون

$$\begin{aligned} &\forall p \geq 1, \\ &1 \leq \left\| (D - \mu \cdot I)^{-1} \cdot (X^{-1} \cdot E \cdot X) \right\|_p \\ &\leq \left\| (D - \mu \cdot I)^{-1} \right\|_p \cdot \|X\|_p \cdot \|E\|_p \cdot \left\| X^{-1} \right\|_p \end{aligned}$$

وبما أنّ المصفوفة $(D - \mu \cdot I)^{-1}$ هي مصفوفة قطريّة فإنّ

$$\begin{aligned} \left\| (D - \mu \cdot I)^{-1} \right\|_p &= \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \frac{1}{\left| \lambda - \mu \right|} \\ &= \frac{1}{\min\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \left| \lambda - \mu \right|} \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\min_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \left| \lambda - \mu \right| \leq \kappa_p(X) \cdot \|E\|_p \quad \blacksquare$$

مثال: لتكن المصفوفتان المربّعتان من المرتبة $n = 10$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10^{-10} & 0 \end{pmatrix}$$

لدينا في هذه الحالة

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(A), \forall \mu \in \mathrm{sp}(A + E), \quad \left| \lambda - \mu \right| = 10^{-1}$$

يتّضح من ذلك أنّ تغييراً من رتبة 10^{-10} في عناصر المصفوفة يقود إلى تغييرٍ من رتبة 10^{-1} في القيم الذاتيّة.

1.1. حساسيّة القيم الذاتيّة

تتمتّع القيم الذاتيّة لمصفوفة نظاميّة بحساسيّة جيّدة، ولكن هذا لا يعني بالضرورة أنّ حساسيّة القيم الذاتيّة لمصفوفة غير نظاميّة تكون كبيرةً. في الواقع، تمتلك المصفوفات غير النظاميّة، بوجهٍ عام، مزيجاً من القيم الذاتيّة في طيفها، فبعضها يكون جيّد الحساسيّة للتغيّرات وبعضها الآخر لا يكون كذلك. لهذا السبب، نجد أنّه من المفيد دراسة حساسيّة كلّ قيمة ذاتيّة (بمفردها) للتغيّرات التي قد تتعرّض لها عناصر المصفوفة وتجنّب الحديث عن حساسيّة طيف المصفوفة ككُل.

لتكن λ قيمة ذاتيّة بسيطة للمصفوفة المربّعة A ولنفترض أنّ x و y شعاعان ذاتيّان من اليمين ومن اليسار على الترتيب بحيث يكون

$$y^* \cdot A = \lambda \cdot y^*, \quad A \cdot x = \lambda \cdot x, \quad \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$$

ولتكن $F = (f_{ij})$ مصفوفة مربّعة من المرتبة n تحقق $\|F\|_2 = 1$. يمكن باستخدام نتائج التحليل التابعي، أن نبرهن على وجود توابع $x(\varepsilon)$ و $\lambda(\varepsilon)$ قابلة للاشتقاق في جوار الصفر وتحقق:

$$(A + \varepsilon \cdot F) \cdot x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \cdot x(\varepsilon), \quad \|x(\varepsilon)\|_2 = 1$$

حيث $\lambda(0) = \lambda$ و $x(0) = x$. باشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة للمتحوّل ε عند الصفر نجد

$$A \cdot x'(0) + F \cdot x = \lambda'(0) \cdot x + \lambda \cdot x'(0)$$

بتطبيق y^* على طرفي هذه المعادلة نجد

$$\lambda'(0) = \frac{1}{y^* \cdot x} y^* \cdot F \cdot x$$

ومنه

$$|\lambda'(0)| = \frac{|y^* \cdot F \cdot x|}{|y^* \cdot x|} \leq \frac{1}{|y^* \cdot x|}$$

تبلغ قيمة المقدار $|\lambda'(0)|$ حدّها الأعلى $\frac{1}{|y^* \cdot x|}$ عندما $F = y \cdot x^*$. ولهذا السبب نشير إلى مقلوب العدد:

$$s(\lambda) = |y^* \cdot x|$$

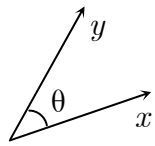
على أنّه عدد الحساسيّة للقيمة الذاتيّة البسيطة λ.

نستنتج مما سبق أنّه يمكن التعبير عن $\lambda(\varepsilon)$ بالصياغة التالية:

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \cdot \frac{y^* \cdot F \cdot x}{y^* \cdot x} + O(\varepsilon^2) \tag{5}$$

يبيّن هذا التحليل أنّ تغييراً من رتبة ε في عناصر المصفوفة A يقود إلى تغييرٍ في القيمة الذاتيّة λ من رتبة $\varepsilon \,/\, s(\lambda)$. وهكذا، إذا كانت قيمة $s(\lambda)$ صغيرة فإنّه ينظر إلى القيمة الذاتيّة λ على أنّها سيّئة الحساسيّة وتتأثّر كثيراً بالتغيّرات التي تتعرّض لها عناصر المصفوفة A.

من جهةٍ أخرى، نلاحظ هنا أنّ المقدار $s(\lambda)$ يمثّل العدد $|\cos\theta|$ حيث θ هي الزاوية بين الشعاعين الذاتيين x و y الموافقين للقيمة الذاتيّة λ.



الشكل 1: يتعلّق المقدار $s(\lambda)$ بالزاوية θ المحصورة بين الشعاعين الذاتيين.

وهو مقدارٌ وحيدٌ إذا كانت القيمة الذاتيّة λ بسيطة.

نتائج

① في الحالة التي تكون فيها المصفوفة A نظاميّة $(A^*A = AA^*)$ أو بشكلٍ مكافئ إذا وجدت مصفوفة واحديّة V تحقق المساواة $V^*AV = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ يكون $y_1 = x_1$ وتؤول العلاقة (5) بعد إهمال الحدّ $O(\varepsilon^2)$ إلى الشكل:

$$\left|\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1\right| \le \left|\varepsilon\right| \cdot \|F\|_2 \tag{6}$$

لأنّ

$$\left|y_1^* \cdot F \cdot x_1\right| \le \|y_1\|_2 \cdot \|F\|_2 \cdot \|x_1\|_2 = \|F\|_2$$

وهذا يعني أنّ مسألة حساب قيمة ذاتيّة بسيطة لمصفوفة نظاميّة (مثلاً متناظرة أو متناظرة عكسياً) هي مسألةٌ ذات حساسيّة ممتازة (لا تتأثّر كثيراً بالتشويش...).

② في حالة مصفوفة غير نظاميّة، يمكن أن تكون مسألة حساب قيمة ذاتيّة بسيطة ذات حساسيّة عالية (تتأثّر كثيراً بالتشويش). فعلى سبيل المثال، في حالة المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

من الواضح هنا أنّ جميع القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة بسيطة $\mathrm{sp}(A) = \{1,2\}$. تكتب العلاقة (5) في هذه الحالة على الشكل:

$$\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1 = \varepsilon \cdot (f_{11} - \alpha \cdot f_{21}) + O(\varepsilon^2)$$

ومن ثمّ، إذا كان $f_{21} \neq 0$ وكانت قيمة الوسيط α كبيرة فإنّ حساب القيمة الذاتيّة $\lambda_1 = 1$ يكون بالغ الحساسيّة.

مثال: ليكن $\varepsilon > 0$. لندرس حالة التشويش المصفوفاتي التالية

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}), \quad A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & 1 \end{pmatrix}$$

يعطى كثير الحدود المميّز للمصفوفة المشوّشة $A(\varepsilon)$ بالعبارة التالية

$$(8) \qquad \chi_{A(\varepsilon)}(\lambda) = \det(A(\varepsilon) - \lambda \cdot I_n) = (1-\lambda)^n - (-1)^n \cdot \varepsilon$$

نلاحظ هنا أنّ لكثير الحدود المميّز n جذراً مختلفاً

$$\lambda_k(\varepsilon) = 1 + \omega_k \cdot \sqrt[n]{\varepsilon}, \quad k = 1, \ldots, n$$

حيث

$$\omega_k = e^{2\pi k i/n}, \quad k = 1, \ldots, n$$

الجذور العقديّة من المرتبة n للعدد 1. ويكون الخطأ في حساب القيم الذاتيّة مساوياً

$$(9) \qquad \left|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k\right| = \sqrt[n]{\varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n$$

فعلى سبيل المثال، في حالة $n = 10$ و $\varepsilon = 10^{-10}$ نحصل على:

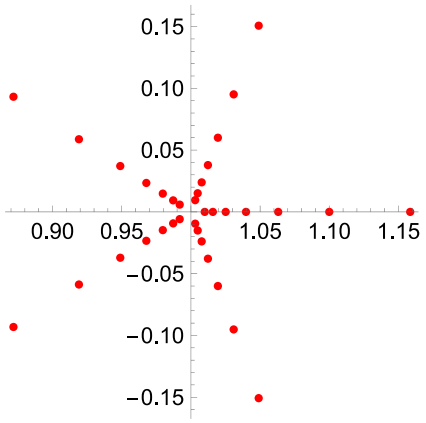
$$\left|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k\right| = 0.1$$

تطبيق عددي

نعالج في هذا التطبيق حالة المصفوفة (7) عندما $n = 5$.

يوضّح الشكل التالي القيم الذاتيّة الخمسة للمصفوفة $A(\varepsilon)$ في الحالات الموافقة لقيم الوسيط:

$$\varepsilon \in \{10^{-10},\ldots,10^{-5},10^{-4}\}$$



الشكل 2: توزّع القيم الذاتيّة للمصفوفة $A(\varepsilon)$.

نلاحظ هنا أنّ الخطأ المرتكب في القيم الناجمة يساوي تقريباً 0.158 في حالة $\varepsilon = 10^{-4}$ ويكون من مرتبة 0.01 عندما نختار $\varepsilon = 10^{-10}$ وهذا متوافقٌ تماماً مع القيم التقديريّة التي تبيّنها العلاقة (9).

نتيجة: إذا كانت مرتبة المصفوفة (7) أكبر من الواحد فإنّ حساب القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة يتمتّع بحساسيّة عالية. من الناحية العمليّة، غالباً ما نتعامل مع مصفوفات متناظرة، ويبدو طبيعياً في مثل هذه الحالات افتراض كون مصفوفة التشويش F متناظرة أيضاً.

تبيّن المبرهنة التالية أنّ العلاقة (5) تبقى صحيحة حتّى عندما تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة المتناظرة غير بسيطة. نستنتج من ذلك أنّ لمسألة حساب القيم الذاتيّة لمصفوفة متناظرة حساسيّة جيّدة.

مبرهنة 3 (حالة مصفوفة متناظرة)

لتكن A و F مصفوفتين متناظرتين. ولتكن $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ القيم الذاتيّة للمصفوفة A (ليست مختلفة بالضرورة). عندئذٍ، تحقق القيم الذاتيّة $\lambda_1(\varepsilon),\ldots,\lambda_n(\varepsilon)$ للمصفوفة $A+\varepsilon\cdot F$ العلاقات التالية:

$$\lambda_k(\varepsilon)=\lambda_k+\varepsilon\cdot v_k^T\cdot F\cdot v_k+O(\varepsilon^2)\quad 1\le k\le n \tag{10}$$

حيث $v_1,\ldots,v_n$ أساسٌ متعامدٌ نظاميّ من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A.

ملاحظة: يبرهن في الحالة العامّة، أنّه إذا كانت λ قيمة ذاتيّة درجة مضاعفتها m لمصفوفة مربّعةٍ A فإنّ أيّ تشويش من رتبة $O(\varepsilon)$ في عناصر هذه المصفوفة يقابله تشويشٌ في قيمة λ من رتبة $O(\varepsilon^{1/m})$.

2.1. حساسيّة الأشعّة الذاتيّة

ندرس الحالة التي تكون فيها جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A مختلفة. نضع $\mathrm{sp}(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ ولتكن $P=[v_1,v_2,\ldots,v_n]$ مصفوفة الأشعة الذاتيّة (من اليمين) الموافقة والتي تشكّل أساساً نظامياً للفضاء C^n. عندها يكون

$$P^{-1}AP=D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

نضع $(P^*)^{-1}=[w_1,\ldots,w_n]$. فيكون

$$A^*w_i=\overline{\lambda}_i w_i\quad,\quad 1\le i\le n$$

أيْ أنّ $(w_1,\ldots,w_n)$ تشكل أساساً من الأشعّة الذاتيّة من اليسار للمصفوفة A. يبرهن في هذه الحالة أنّ الأشعّة الذاتيّة الواحديّة $v_i(\varepsilon)$ للمصفوفة $A(\varepsilon)=A+\varepsilon F$ هي توابع تحليليّة للمتحول ε. لدراسة حساسيّة مسألة حساب الأشعّة الذاتيّة نكتب عبارة المقدار $v_1'(0)$ بدلالة الأساس $(v_1,\ldots,v_n)$:

$$v_1'(0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

من جهةٍ ثانية، نعلم أنّ

$$\Big[A(\varepsilon)-\lambda_1(\varepsilon)I\Big]\cdot v_1(\varepsilon)=0$$

باشتقاق هذه العلاقة عند $\varepsilon=0$ نجد

$$\big(A-\lambda_1 I\big)v_1'(0)+\big(F-\lambda_1'(0)I\big)v_1=0$$

ومن ثمّ يكون

$$\sum_{j=2}^{n}\big(\lambda_j-\lambda_1\big)\alpha_j v_j+\big(F-\lambda_1'(0)I\big)v_1=0$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بالشعاع الذاتي من اليسار w_i^* (حيث $w_i^*v_j=0$ أياً كان $i\neq j$) نحصل على القيم α_i $(i\geq 2)$ من العلاقات:

$$(\lambda_i-\lambda_1)\alpha_i w_i^*v_i+w_i^*Fv_1=0$$

من الشرط $\big\|v_1(\varepsilon)\big\|_2^2=1$ نحصل (بالاشتقاق) على $v_1^*v_1'(0)=0$ ومن ثمّ نستنتج أنّ

$$\alpha_1=-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_1^*v_i$$

بذلك يكون

$$v_1'(0)=\sum_{i=2}^{n}\frac{w_i^*Fv_1}{(\lambda_1-\lambda_i)w_i^*v_i}(v_i-v_1v_1^*v_i)$$

وعندها تكتب عبارة النشر $v_1(\varepsilon)=v_1+\varepsilon v_1'(0)+O(\varepsilon^2)$ كما يلي:

$$v_1(\varepsilon)=v_1+\varepsilon\sum_{i=2}^{n}\frac{w_i^*Fv_1}{(\lambda_1-\lambda_i)w_i^*v_i}(v_i-v_1v_1^*v_i)+O(\varepsilon^2)\qquad(11)$$

يتبيّن من هذه العلاقة أنّ حساسيّة حساب الشعاع الذاتي v_1 تتعلّق بالمقدار $w_i^*v_i$ (مثل حال القيمة الذاتيّة) وكذلك بالمسافة بين القيمة الذاتيّة الموافقة λ_1 وبقيّة القيم الذاتيّة للمصفوفة A.

خوارزميّة يجب تجنّبها

إحدى وسائل حساب القيم الذاتيّة لمصفوفة مربّعة هي التالية: نحسب أمثال كثير الحدود المميّز $\chi_A(\lambda)$ ومن ثمّ نحسب جذور كثير الحدود هذا. فإذا كانت مرتبة المصفوفة صغيرة جداً (لنقلْ $n\leq 3$) أو إذا ما أجرينا الحساب بدقّة لا نهائيّة (حساب تام)، فإنّ هذه الطريقة يمكن أن تكون ذات فائدة كبيرة.

من جانبٍ آخر، إذا أجرينا الحساب العددي مستخدمين تمثيل الأعداد بالنقطة العائمة، فإنّ هذه الخوارزميّة غير مستقرّة من الناحية العدديّة. لنأخذ على سبيل المثال، مسألة حساب القيم الذاتيّة للمصفوفة القطريّة

$$A = \mathrm{diag}(1,2,3,\ldots,n)$$

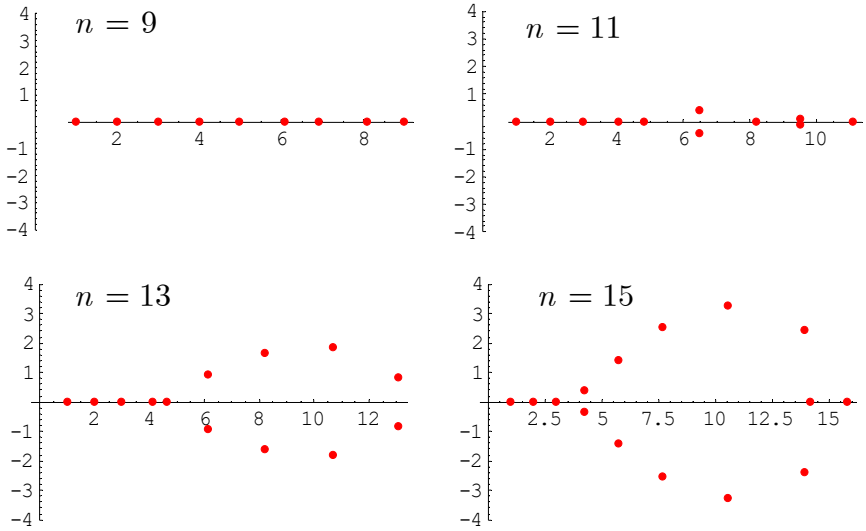
حيث يأخذ كثير الحدود المميّز الشكل

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\cdot\ldots\cdot(n-\lambda)\\ &= (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0\end{aligned}$$

تتعرّض أمثال كثير الحدود المميّز لأخطاء الحساب العددي نتيجة التمثيل بالنقطة العائمة وتعطى قيمها العدديّة بالعلاقات:

$$\hat{a}_i = a_i(1+\varepsilon_i) \quad , \quad \left|\varepsilon_i\right| \leq eps$$

إنّ مثل هذه التشويشات في الأمثال تسبّب خطأً كبيراً في الحساب العددي للجذور. يعرض الشكل التالي تمثيلاً بيانياً للقيم الذاتيّة المحسوبة بهذه الطريقة في الحالات $n \in \{9,11,13,15\}$، باستخدام نظام تمثيل للأعداد بالدقّة البسيطة (حيث $eps \simeq 6\times 10^{-8}$).



جذور كثير الحدود المميّز المشوب بأخطاء التدوير.

النتيجة: تجنّب حساب أمثال كثير الحدود المميّز لمصفوفة بهدف تعيين قيمها الذاتيّة.

2. طريقة القوى التكراريّة

من الخوارزميات البسيطة لحساب القيم الذاتيّة لمصفوفة مربّعة A الخوارزميّة المبنيّة على التكرار التالي:

$$y_{k+1} = Ay_k \quad , \quad k \geq 0 \tag{12}$$

حيث y_0 شعاعُ بدءٍ اختياري. نبيّن في المبرهنة التالية أنّ المتتالية $y_k = A^k \cdot y_0$ (طريقة القوى) تسمح بتعيين إحدى القيم الذاتيّة للمصفوفة A وأنّ قسمة Rayleigh المعرّفة بالعلاقة $R_A(y_k) = y_k^* A y_k \,/\, y_k^* y_k$ تشكّل تقريباً لإحدى القيم الذاتيّة للمصفوفة A.

مبرهنة 4

لتكن A مصفوفة تقبل القطريّة وقيمها الذاتيّة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ وأشعتّها الذاتيّة $v_1,\ldots,v_n$ تحقق الشروط $\|v_i\|_2 = 1$ أياً كان $1 \leq i \leq n$. إذا كانت القيم الذاتيّة تخضع للترتيب $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ فإنّ أشعة المتتالية y_k المعرّفة بالعلاقات (12) تحقق

$$y_k = \lambda_1^k \left(a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \left(\lambda_i \,/\, \lambda_1\right)^k v_i \right) \tag{13}$$

حيث a_1 هو العدد المعرّف بالتركيب الخطي $y_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. تحقق قسمة Rayleigh (بفرض أنّ $a_1 \neq 0$) المساواة:

$$\frac{y_k^* A y_k}{y_k^* y_k} = \lambda_1 + O\left(\left| \lambda_2 \,/\, \lambda_1 \right|^k \right) \tag{14}$$

في الحالة التي تكون فيها المصفوفة A نظاميّة (يوجد أساس متعامد من الأشعّة الذاتيّة) يكون خطأ التقريب في العلاقة (14) مساوياً $O\left(\left| \lambda_2 \,/\, \lambda_1 \right|^{2k} \right)$.

مثال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

والتي أكبر قيمها الذاتيّة تساوي

$$\lambda_1 = 2(1+\cos(\pi\,/\,4)) \simeq 3.414213562373095$$

بحساب بعض تكرارات طريقة القوى السابقة نجد:

$$y_0 = (1,1,1)^T, \quad y_1 = (3,4,3)^T, \quad y_2 = (10,14,10)^T$$

وأوّل تقريب نحصل عليه من العلاقة

$$\frac{y_1^* A y_1}{y_1^* y_1} = \frac{y_1^* y_2}{y_1^* y_1} = \frac{116}{34} \simeq 3.41176$$

ملاحظات

❶ تزداد قيم مركبات شعاع التكرار y_k أسياً مع ازدياد قيمة الدليل k. لذلك ينصح بتقييس شعاع التكرار y_k عند كل تكرار (أيْ بقسمته على نظيمه واستبدال $y_k \,/\, \|y_k\|$ بالشعاع y_k) وإلاّ سيحصل تضخّمٌ في القيم العدديّة وتنتهي الحسابات العدديّة بخطأ "overflow".

❷ عندما تكون النسبة $|\lambda_2 \,/\, \lambda_1|$ قريبة من القيمة 1 يكون تقارب هذه الطريقة بطيئاً. وفي هذه الحالة نعمد إلى تسريع التقارب بإجراء التعديل التالي على خوارزميّة القوى التكراريّة:

طريقة القوى المقلوبة (Wielandt)

نفترض أنّ μ تقريباً لقيمةٍ ذاتيّة λ_1 (ليست بالضرورة أكبر القيم الذاتيّة للمصفوفة A). تكمن الفكرة في هذه الطريقة في تطبيق التكرار (12) على المصفوفة $(A-\mu I)^{-1}$ حيث أنّ القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة هي:

$$\{(\lambda_i - \mu)^{-1}, 1 \le i \le n\}$$

فإذا كانت μ قريبة من λ_1 يكون لدينا

$$1\,/\,|\lambda_1 - \mu| \gg 1\,/\,|\lambda_i - \mu| \quad , \quad i \ge 2$$

ومن ثمّ يصبح تقارب الطريقة التكراريّة سريعاً. يكتب التكرار في هذه الحالة

$$y_{k+1} = (A-\mu I)^{-1} y_k$$

أو بالشكل المكافئ

$$(A-\mu I)\, y_{k+1} = y_k \tag{15}$$

بحساب التفريق LR للمصفوفة $(A-\mu I)$ تعود كلفة حساب تكرار من النمط (15) معادلة لكلفة حساب التكرار (12).

مثال

نختار، في حالة المثال السابق، القيمة $\mu = 3.41$ ونختار $y_0 = (1,1.4,1)^T$. نحسب التكرارين:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 236.134453781513 \\ 333.949579831933 \\ 236.134453781513 \end{pmatrix} \quad , \quad y_2 = \begin{pmatrix} 56041.9461902408 \\ 79255.2785820210 \\ 56041.941902408 \end{pmatrix}$$

ومن ثمّ نحسب

$$\frac{1}{\lambda_1 - 3.41} \simeq \frac{y_1^*(A-\mu I)^{-1}y_1}{y_1^*y_1} = \frac{y_1^*y_2}{y_1^*y_1} \simeq 237.328870774159$$

من هذه العلاقة نحسب القيمة التقريبيّة $\lambda_1 \simeq 3.41421356237333$. نلاحظ هنا أنّ الأرقام الثلاثة عشر الأوَل متطابقة مع مثيلاتها من القيمة الفعليّة للقيمة الذاتيّة λ_1.

تعدّ طريقة القوى التكراريّة وكذلك طريقة Wielandt هامّة لفهم خوارزميات أخرى. إذا أردنا حساب كلّ القيم الذاتيّة لمصفوفة فإننا نحتاج إلى طرائق أكثر تطوراً.

3. طريقة التكرار المتعامد

نعرض في هذه الفقرة تعميماً لطريقة القوى التكراريّة وذلك بهدف حساب قيمتين أو أكثر من القيم الذاتيّة الأكبر طويلةً لمصفوفة مربّعة.

1.3. حساب القيمتين الذاتيّتين الأكبر طويلة

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقق قيمها الذاتيّة الشرط

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| \tag{16}$$

رأينا في الفقرة السابقة أنّ طريقة القوى التكراريّة مبنيّة على التكرار $y_{k+1} = A \cdot y_k$ وتسمح بالحصول على تقريبٍ للقيمة الذاتيّة λ_1 باستخدام قسمة Rayleigh.

لكي نحسب - في آنٍ واحد - القيمة الذاتيّة λ_2 نختار شعاعين y_0 و z_0 يحققان شرط التعامد

$$y_0^* \cdot z_0 = 0$$

ونعرّف التكرار التالي:

$$\begin{cases} y_{k+1} = A \cdot y_k \\ z_{k+1} = A \cdot z_k - \beta_{k+1} \cdot y_{k+1} \end{cases} \tag{17}$$

حيث β_{k+1} عددٌ يجري تحديده من شرط التعامد $y_{k+1}^* \cdot z_{k+1} = 0$. بالتدريج، نرى أنّ العلاقات (17) تكتب بالشكل:

$$\begin{cases} y_k = A^k \cdot y_0 \\ z_k = A^k \cdot z_0 - \gamma_k \cdot y_k \end{cases} \tag{18}$$

حيث γ_k عددٌ معرفٌ بالشرط $y_k^* \cdot z_k = 0$.

يتبيّن من العلاقات (18) أنّ المتتالية (z_k) توافق تطبيق طريقة القوى التكراريّة على الشعاع z_0 مع الإسقاط العمودي، أيْ أنّ z_k المسقط العمودي للشعاع $A^k \cdot z_0$ على الفضاء العمودي المتمم للشعاع y_k.

تكتب الأشعة y_0 و z_0 بدلالة أساس من الأشعّة الذاتيّة النظاميّة $\{v_1,\ldots,v_n\}$ للمصفوفة A $\left(\|v_i\|_2 = 1\right)$:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad , \quad z_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

وهذا يسمح بكتابة علاقات التدريج السابقة بالشكل:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k v_i \quad , \quad z_k = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \gamma_k a_i\right) \lambda_i^k v_i \tag{19}$$

وكما رأينا في الفقرة 2 يكون الحدّ $a_1 \lambda_1^k v_1$ مسيطراً (عندما $k \leftarrow \infty$) على بقيّة الحدود في عبارة y_k إذا كان $a_1 \neq 0$ ونحصل على تقريبٍ لأوّل شعاع ذاتي v_1. وهنا نتساءل عن طبيعة المتتالية (z_k) ؟ يقتضي شرط التعامد $y_k^* \cdot z_k = 0$ أن يكون

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_i(b_j-\gamma_k a_j)\,\overline{\lambda}_i^k\cdot\lambda_j^k\,v_i^*\cdot v_j=0 \tag{20}$$

تعرّف هذه العلاقة العدد γ_k. وبما أنّ الحدّ الموافق للدليلين $i=j=1$ مسيطرٌ في العبارة (20) يكون لدينا:

$$\gamma_k \simeq b_1 \,/\, a_1$$

نفترض فيما يلي أنّ

$$a_1\neq 0 \quad , \quad a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

نقسّم طرفي العلاقة (20) على $\overline{\lambda}_1^k$ فنحصل على

$$\begin{aligned}\overline{a}_1(b_1-\gamma_k a_1)\lambda_1^k\left[1+O\left(\left|\lambda_2\,/\,\lambda_1\right|^k\right)\right]=\\ -\,\overline{a}_1(b_2-\gamma_k a_2)\lambda_2^k\left[v_1^*v_2+O\left(\left|\lambda_2\,/\,\lambda_1\right|^k\right)+O\left(\left|\lambda_3\,/\,\lambda_2\right|^k\right)\right]\end{aligned}$$

وباستخدام هذه الصيغة في العلاقات (19) نحصل على

$$z_k=\lambda_2^k\,(b_2-\gamma_k a_2)\left[v_2-v_1^*v_2v_1+O\left(\left|\lambda_2\,/\,\lambda_1\right|^k\right)+O\left(\left|\lambda_3\,/\,\lambda_2\right|^k\right)\right] \tag{21}$$

نلاحظ من هذه العلاقة أنّه عندما تسعى k إلى اللانهاية فإنّ z_k يسعى إلى مضاعف للشعاع

$$v_2-v_1^*v_2v_1$$

والذي يمثّل المسقط العمودي للشعاع v_2 على الفضاء الشعاعي $v_1^{\perp}$ (بعده $n-1$).

فيما يتعلّق بالقيم الذاتيّة لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 5

لتكن المتتاليتان $\left(y_k\right)$ و $\left(z_k\right)$ المعرّفتان كما في العلاقات (17). نعرّف المصفوفات

$$U_k=\left(y_k\,/\,\left\|y_k\right\|_2, z_k\,/\,\left\|z_k\right\|_2\right) \quad , \quad k\geq 0 \tag{22}$$

(لاحظ أنّ $U_k^*U_k=I_2$). إذا تحقق الشرط (16) فإنّ

$$\lim_{k\,\infty} U_k^*A\,U_k=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \tag{23}$$

الإثبات

يمثّل العنصر $(1,1)$ من المصفوفة $U_k^* A U_k$ قسمة Rayleigh (14) والتي تتقارب نحو λ_1. باستخدام العلاقة (21) نجد أنّ العنصر $(2,2)$ يحقق:

$$\lim_{k\infty} \frac{z_k^* A z_k}{z_k^* z_k} = \frac{(v_2 - v_1^* v_2 v_1)^*(\lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1^* v_2 v_1)}{(v_2 - v_1^* v_2 v_1)^*(v_2 - v_1^* v_2 v_1)} = \frac{\lambda_2(1 - \left|v_1^* v_2\right|^2)}{1 - \left|v_1^* v_2\right|^2} = \lambda_2$$

بالطريقة نفسها، نبرهن أنّ العنصر $(2,1)$ من المصفوفة $U_k^* A U_k$ يحقق

$$\lim_{k\infty} \frac{z_k^* A y_k}{\left\| z_k \right\|_2 \left\| y_k \right\|_2} = \frac{(v_2 - v_1^* v_2 v_1)^* \lambda_1 v_1}{\left\| v_2 - v_1^* v_2 v_1 \right\|_2 \left\| v_1 \right\|_2} = 0$$

وأخيراً، يحقق العنصر $(1,2)$ من المصفوفة $U_k^* A U_k$ العلاقة

$$\lim_{k\infty} \frac{y_k^* A z_k}{\left\| y_k \right\|_2 \left\| z_k \right\|_2} = \frac{v_1^*(\lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1^* v_2 v_1)}{\left\| v_1 \right\|_2 \left\| v_2 - v_1^* v_2 v_1 \right\|_2} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) v_1^* v_2}{\sqrt{1 - \left|v_1^* v_2\right|^2}}$$

إنّ قيمة العبارة السابقة، بوجهٍ عام، غير معدومة.

ملاحظة: باستخدام الرموز (22) نستطيع كتابة التكرار (17) بالشكل:

$$A U_k = U_{k+1} R_{k+1}$$

حيث R_{k+1} مصفوفة مربّعة من المرتبة 2 ومثلثيّة من الأعلى.

2.3. حساب كلّ القيم الذاتيّة لمصفوفة مربّعة

إنّ تعميم الطريقة السابقة إلى الحالة التي تمكننا فيها من حساب كلّ القيم الذاتيّة لمصفوفة مربّعة هو أمرٌ أصبح واضحاً:

نختار مصفوفة متعامدة U_0 (أيْ نختار مجموعة أشعّة متعامدة تمثّل أعمدة هذه المصفوفة). تؤدي أشعّة الأعمدة لهذه المصفوفة دور الأشعّة y_0 ، z_0 ، ... ومن ثمّ نجري التكرار التالي:

$$\begin{aligned} &for \;\; k = 1,2,\ldots \\ &\quad Z_k = A \cdot U_{k-1} \\ &\quad U_k \cdot R_k = Z_k \quad \text{"}QR \;\; factorization\text{"} \end{aligned} \tag{24}$$

في الحالة التي يكون فيها الشرط (16) محققاً وإذا كانت المصفوفة U_0 مختارة بشكلٍ مناسب ($a_1 \neq 0$، $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$، ...) فإنّ تعميم المبرهنة 5 يقود إلى إثبات تقارب متتالية المصفوفات:

$$T_k = U_k^* A\, U_k \quad , \quad k \geq 0 \tag{25}$$

نحو مصفوفة مثلثيّة عناصر القطر فيها هي القيم الذاتيّة للمصفوفة A. وبذلك نكون قد حوّلنا المصفوفة A إلى مثلثيّة بمساعدة مصفوفة متعامدة (تفريق Schur).

ملاحظة:

هناك طريقة هامّة لحساب المصفوفات T_k مباشرةً انطلاقاً من T_{k-1}:

من العلاقة

$$A\, U_k = U_{k+1} R_{k+1}$$

نستطيع أن نكتب

$$\begin{cases} T_{k-1} = U_{k-1}^* A\, U_{k-1} = (U_{k-1}^* U_k) R_k \\ \\ T_k = U_k^* A\, U_k = U_k^* A\, U_{k-1} U_{k-1}^* U_k = R_k \cdot (U_{k-1}^* U_k) \end{cases} \tag{26}$$

نحسب التفريق QR للمصفوفة T_{k-1} ومن ثمّ نبادل مصفوفتي هذا التفريق لنحصل على T_k.

4. خوارزميّة QR

إنّ الصيغة البسيطة للخوارزميّة الشهيرة QR ليست سوى الطريقة التي رأيناها في الفقرة السابقة. بمعنى أنّه، إذا وضعنا $Q_k = U_{k-1}^* U_k$ وإذا بدأنا التكرار بالمصفوفة $U_0 = I$، فإنّ العلاقات (25) و (26) تسمح بصياغة الخوارزميّة السابقة كما يلي:

$$T_0 = A;$$

$$for \;\; k = 1, 2, \ldots \quad \begin{bmatrix} Q_k R_k = T_{k-1} \\ T_k = R_k Q_k \end{bmatrix}$$

(QR تفريق)

نلاحظ هنا أنّ مصفوفات المتتالية T_k (نفس مصفوفات الفقرة السابقة) تتقارب - بوجهٍ عام - إلى مصفوفة مثلثيّة. يسمح هذا التقارب إنْ حصل بالحصول على جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A .

طوّر هذه الخوارزميّة عام 1961 -وبشكلٍ مستقلّ- كلٌّ من J.G.F. Francis و V.N. Kublanovskaya. هناك خوارزميّة شبيهة تستخدم التفريق LR بدلاً من التفريق QR اقترحها H. Rutishauser عام 1958.

مثال

لنطبّق طريقة QR على المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

والتي هي من نمط مصفوفات هيسنبرغ Hessenberg. يمكن أنْ نبرهن هنا (تمرين للقارئ) أنّ كلّ المصفوفات T_k في هذه الحالة تكون من نمط هيسنبرغ. لدراسة التقارب نحو مصفوفة مثلثيّة، يكفي أنْ ندرس متتاليات العناصر:

$$\{(t^k_{i+1,i}) : 1 \leq i \leq n-1\}$$

والتي تمثّل عناصر ما تحت القطر الرئيس في المصفوفة $T_k = (t^{(k)}_{i,j})$. يمكن التحقق أنّه لدينا في هذه الحالة:

$$\frac{t^{(k+1)}_{i+1,i}}{t^{(k)}_{i+1,i}} \simeq \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$$

لدينا في هذا المثال:

$$\lambda_1 \simeq 14.3 \quad , \quad \lambda_2 \simeq 7.86 \quad , \quad \lambda_3 \simeq 2.70 \quad , \quad \lambda_4 \simeq -1.86$$

وبما أنّ $\left|\lambda_{i+1} \,/\, \lambda_i\right| < 1$ فإنّ متتالية العناصر $(t^k_{i+1,i})$ تتقارب نحو الصفر عندما يسعى الدليل k إلى اللانهاية.

5. طريقة جاكوبي

تستخدم طريقة جاكوبي لتعيين جميع القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة متناظرة. نعلم أنّ كل مصفوفة متناظرة A تقبل الرد إلى القطرية: بمعنى أنّه هناك مصفوفة متعامدة O بحيث يكون

$$O^T A O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ تمثّل القيم الذاتية للمصفوفة A. نذكّر هنا بأنّ أعمدة المصفوفة O تشكّل أساساً متعامداً نظامياً للفضاء $\mathbb{R}^n$.

تقوم طريقة جاكوبي في جوهرها على إنشاء متتالية من المصفوفات المتعامدة البسيطة $\left(\Omega_k\right)_{k\geq 1}$ بحيث تتقارب متتالية المصفوفات:

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = \Omega_k^T A_k \Omega_k, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

نحو مصفوفة قطرية

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

عناصر القطر الرئيس فيها هي القيم الذاتية للمصفوفة A. يمكن أنْ نتوقع تقارب متتالية المصفوفات المتعامدة

$$O_k = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k \quad k \geq 1$$

نحو مصفوفة متعامدة O تشكّل أعمدتها مجموعة أشعّة ذاتيّة متعامدة نظاميّة للمصفوفة A. يقوم مبدأ التكرار في طريقة جاكوبي

$$A_k \rightarrow A_{k+1} = \Omega_k^T A_k \Omega_k \ , \quad k \geq 1$$

على تطبيق تحويل متعامد بسيط يؤدي إلى جعل قيمة العنصرين المتناظرين:

$$\left(A_k\right)_{pq} = \left(A_k\right)_{qp} \neq 0 \quad , p < q$$

معدومة في المصفوفة الناتجة A_{k+1}. توضّح المبرهنة التالية كيفية إنشاء التحويلات المتعامدة البسيطة والتي تشكّل أساس طريقة جاكوبي.

مبرهنة 6: ليكن $1 \leq p < q \leq n$ وليكن $\theta \in \mathbb{R}$. نعرّف المصفوفة المتعامدة:

$$\Omega = \left(\Omega_{ij}\right), \quad \begin{cases} \Omega_{ii} = 1 & i \notin \{p,q\} \\ \Omega_{pp} = \Omega_{qq} = \cos\theta & \\ \Omega_{pq} = \sin\theta & \\ \Omega_{qp} = -\sin\theta & \\ \Omega_{ij} = 0 & (i \neq j) \wedge (\{i,j\} \neq \{p,q\}) \end{cases}$$

أولاً: إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة متناظرة، فإنّ المصفوفة $B = \Omega^T A \Omega = (b_{ij})$ تكون أيضاً متناظرة وتحقق الخاصّة:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

ثانياً: إذا كان $a_{pq} \neq 0$ هناك عددٌ وحيدٌ $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ بحيث يكون

$$B_{pq} = 0$$

ويمثّل العدد θ الحل الوحيد في هذا المجال للمعادلة

$$\cot(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

وعندها تتحقق العلاقة التالية

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

الإثبات

أولاً: يمكن التحقق بسهولة من كون المصفوفة Ω متعامدة. من ناحيةٍ ثانية، نعلم أنّ النظيم المصفوفاتي $\|\cdot\|_F$ لا يتغير بالتحويلات المتعامدة، ومنه نستطيع أن نكتب

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \|B\|_F = \left\|\Omega^T A \Omega\right\|_F = \|A\|_F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

ثانياً: نلاحظ هنا أنّ التحويل $B = \Omega^T A\Omega = (b_{ij})$ يحافظ على قيمة عناصر المصفوفة A التالية:

$$b_{ij} = a_{ij} \quad , \quad i,j \notin \{p,q\}$$

ويغيّر قيمة العناصر $b_{pp}, b_{pq}, b_{qp}, b_{qq}$ وفق التحويل المتعامد التالي:

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ومن كون النظيم $\|\cdot\|_F$ لا متغيّر بالتحويلات المتعامدة نستنتج

$$b_{pp}^2 + b_{qq}^2 + 2b_{pq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$$

وذلك أياً كانت قيمة الوسيط θ. من التحويل السابق نجد أنّ

$$b_{pq} = 0 \Leftrightarrow a_{pq}\cos 2\theta + \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2}\sin 2\theta = 0$$

وهذا يعني أنّ الاختيار المناسب لقيمة θ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$\cot 2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}, \quad \theta \in \left]-\tfrac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \tfrac{\pi}{4}\right]$$

في هذه الحالة يكون لدينا $b_{pq} = b_{qp} = 0$ ومن ثمّ يكون

$$b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$$

ولدينا مما سبق

$$b_{ii}^2 = a_{ii}^2, \quad i \notin \{p,q\}$$

ومنه نستنتج العلاقة

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

ملاحظة: بالاستفادة من العلاقات الموجودة بين التوابع المثلثية يمكن أن نعيّن عناصر المصفوفة $B = \Omega^T A\Omega = (b_{ij})$ باستخدام علاقات جبريّة: نضع

$$s = \sin\theta \quad , \quad c = \cos\theta$$

$$t = \tan\theta = \frac{s}{c}, \quad \delta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \cot 2\theta = \frac{1-t^2}{2t}$$

عندئذٍ، يحقق t المعادلة

$$t^2 + 2\delta t - 1 = 0$$

والتي تقبل الجذرين التاليين

$$t = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 1}$$

من الواضح هنا أنّ الحل الموافق للشرط $|\theta| \le \pi / 4$ هو الحل الأصغر طويلةً، أيْ

$$t = \frac{\text{sign}(\delta)}{|\delta| + \sqrt{\delta^2 + 1}}$$

ومنه نجد

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$s = c\,t$$

الآن، يمكننا تلخيص مراحل **طريقة جاكوبي التقليديّة** بما يلي:

أولاً: نختار دليلين $1 \le p < q \le n$ بحيث يكون

$$a_{pq} = \max_{1 \le i < j \le n} |a_{ij}| \neq 0$$

ثانياً: نحسب كما رأينا سابقاً، المقادير:

$$\delta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \quad , \quad t = \frac{\text{sign}(\delta)}{|\delta| + \sqrt{\delta^2 + 1}}$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad s = c\,t$$

ثالثاً: نعيّن القيم الجديدة لعناصر أسطر وأعمدة المصفوفة B التي يغيّرها تطبيق التحويل $B = \Omega^T A \Omega$ وهي:

$$\begin{aligned} b_{pq} &= b_{qp} = 0 \\ b_{pj} &= c\,a_{pj} - s\,a_{qj} \quad j \notin \{p,q\} \\ b_{qj} &= c\,a_{qj} + s\,a_{pj} \quad j \notin \{p,q\} \\ b_{pp} &= a_{pp} - t\,a_{pq} \\ b_{qq} &= a_{qq} + t\,a_{pq} \end{aligned}$$

تبيّن المبرهنة التالية تقارب طريقة جاكوبي التقليديّة.

مبرهنة 7:

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة.

أولاً: تتقارب متتالية المصفوفات $\left(A_k\right)_{k\geq 1}$ المعرّفة بعلاقات تكرار جاكوبي

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = \Omega_k^T A_k \Omega_k, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

نحو مصفوفة قطرية $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ عناصر القطر الرئيس فيها هي القيم الذاتية للمصفوفة A.

ثانياً: إذا كانت جميع القيم الذاتيّة للمصفوفة A بسيطة فإنّ متتالية المصفوفات المتعامدة $\left(O_k\right)_{k\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة

$$O_k = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k \quad k \geq 1$$

تتقارب نحو مصفوفة متعامدة تشكّل أعمدتها مجموعة متعامدة نظاميّة من الأشعة الذاتيّة للمصفوفة A.

مثال: لتكن المصفوفة المتناظرة

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

بتطبيق طريقة جاكوبي التقليديّة وحساب متتالية المصفوفات $\left(A_k\right)_{k\geq 1}$ و $\left(O_k\right)_{k\geq 1}$ نجد بعد 15 تكراراً النتائج التالية:

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 3.2957 & -5.1071\times10^{-11} & -3.82945\times10^{-6} & -4.85967\times10^{-16} \\ -5.1071\times10^{-11} & 8.40766 & -1.4433\times10^{-9} & -1.93196\times10^{-6} \\ -3.82945\times10^{-6} & -1.4433\times10^{-9} & 11.7043 & 1.01232\times10^{-10} \\ -4.85967\times10^{-16} & -1.4433\times10^{-9} & 1.01232\times10^{-10} & 6.59234 \end{pmatrix}$$

$$O_{15} = \begin{pmatrix} 0.528779 & -0.573042 & 0.582298 & 0.230097 \\ 0.591967 & 0.472301 & 0.175776 & -0.628976 \\ -0.536039 & 0.28205 & 0.792487 & -0.071235 \\ 0.287454 & 0.607456 & 0.0446804 & 0.739169 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sp(A)} \simeq \{3.2957,\ 8.40766,\ 11.7043,\ 6.59234\}$$

يمكن التحقق من كون أعمدة المصفوفة O_{15} تشكّل أشعّة ذاتيّة متعامدة نظاميّة للمصفوفة A موافقة للقيم الذاتية

$$\{3.2957,\ 8.40766,\ 11.7043,\ 6.59234\}$$

على الترتيب.

6. مسائل وتمارين

1.6. عيّن القيم الذاتيّة للمصفوفة ثلاثيّة القطريّة

$$A=\begin{pmatrix} a & c & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ & & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \quad b\cdot c>0$$

توجيه: تحقق مركبات شعاع ذاتي $(v_1,v_2,\ldots,v_n)^T$ موافق لقيمة ذاتيّة λ العلاقات:

$$v_j=\delta\cdot(\alpha_1^j-\alpha_2^j), \quad \delta\in\mathbb{R},$$

حيث

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\lambda-a}{c}, \quad \alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{b}{c}, \quad \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{n+1}=1$$

الجواب: $1\le j\le n$ $\lambda_j=a-2\sqrt{bc}\cdot\cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right)$,

2.6. لتكن المصفوفة

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1+\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

إذا علمت أنّ لهذه المصفوفة قيمة ذاتيّة من الشكل:

$$\lambda(\varepsilon)=i+\varepsilon\cdot d+O(\varepsilon^2)$$

عيّن قيمة المقدار d وارسم المماس للمنحني $\varepsilon\mapsto\lambda(\varepsilon)$ عند النقطة $(0,\lambda(0))$.

3.6. لتكن المصفوفة ثلاثيّة القطريّة

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

نفترض أنّ $a_i \cdot c_i > 0$ أياً كانت $1 \leq i \leq n-1$. برهن أنّ جميع القيم الذاتيّة لهذه المصفوفة حقيقيّة.

توجيه: أوجد مصفوفة $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ بحيث تكون المصفوفة DAD^{-1} متناظرة.

4.6. لتكن المصفوفة المربّعة

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$$

أولاً: احسب بطريقة القوى التكراريّة أكبر قيمة ذاتيّة للمصفوفة A.

ثانياً: طبّق طريقة القوى التكراريّة على المصفوفة $A - pI$ مع اختيارٍ ذكي للعدد p.

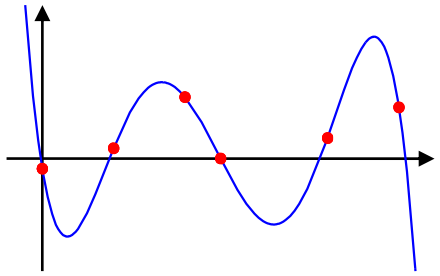
ثالثاً: بأي اختيار للعدد p نحصل على أصغر قيمة ذاتيّة؟

الفصل السادس

الاستيفاء

يقوم مفهوم الاستيفاء على اختيار تابعٍ φ من أحد أصناف التوابع بحيث تتوافق قيم هذا التابع (أو قيم مشتقّاته) عند نقاطٍ معلومة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ مع قيمٍ معلومة لتابعٍ مجهول (أو مع قيمٍ معلومةٍ لمشتقّاته).

هناك استعمالات هامّة عديدة للاستيفاء، فمن جهة أولى، تزوّدنا دراسة هذه العمليّة ببعض الأدوات الرياضيّة التي تستخدم في عرض الطرائق العدديّة المتعلّقة بمسائل التقريبات ومسائل التكامل العددي، إضافةً إلى الحل العددي للمعادلات التفاضليّة. ومن جهةٍ ثانية، تسمح لنا عمليّة الاستيفاء بالتعامل مع جداول قيم تابعيّة.



الشكل 1: الاستيفاء بتابع كثير الحدود من الدرجة 5.

سنعرض مجموعة من الطرائق التي تسمح بتعيين صيغٍ تابعيّة لهذه المعطيات المجدولة وخاصّة الصيغ التي يكون فيها التابع φ من كثيرات الحدود. بالإضافة إلى ذلك سنقوم بدراسة وتحليل خطأ التقريب لكلّ طريقة من هذه الطرائق.

1. استيفاء لاغرانج

لتكن $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة من الأعداد الحقيقيّة المختلفة، ولتكن

$$\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

مجموعة قيم تابعٍ حقيقي مجهول f معرّف على مجال يحوي مجموعة الأعداد السابقة.

ندرس في هذه الفقرة مسألة إيجاد تابعٍ $\tilde{f}$ ينتمي إلى فضاء توابع حقيقيّة منتهي البعد E يحقق شروط الاستيفاء التالية:

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i), \qquad 0 \le i \le n \tag{1}$$

نلاحظ هنا أنّ اختيار فضاء توابع E بعده $m = \dim(E)$ أكبر من عدد شروط الاستيفاء $n+1$ يقودنا إلى عدد كبير من الحلول، وهذا بطبيعة الحال غير مرغوب في غياب معيار الاختيار وتحديد الأفضل من بين الحلول. كما أنّ اختيار فضاء توابع E بعده $m < n+1$ قد يؤدي (في بعض الحالات) إلى عدم وجود حل للمعادلات (1).

لنفترض الآن أن $\dim(E) = n+1$. وليكن $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ أساساً للفضاء E. تتلخص مسألة استيفاء لاغرانج للمعطيات التابعيّة $\{(x_i, f(x_i)) : 0 \le i \le n\}$ بالبحث عن تابع $\tilde{f} \in E$ من الشكل:

$$\tilde{f}(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x)$$

يحقق شروط الاستيفاء (1)، أيْ أنْ يكون

$$\begin{cases} \alpha_0\varphi_0(x_0) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x_0) = f(x_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \alpha_0\varphi_0(x_n) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

وهو ما يمكن التعبير عنه مصفوفاتياً بالكتابة:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

وهنا نطرح عدّة تساؤلات:

- هل ثمّة تابع $\tilde{f} \in E$ يحقق الشروط السابقة؟
- هل هو وحيد؟
- كيف يمكن تعيينه؟

في الحالة التي يكون فيها $E = \mathcal{P}_n$ تؤول المسألة إلى البحث عن تابعٍ كثير الحدود من الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

من الواضح أنّ كثير الحدود $p(x)$ يتعيّن بأمثاله $a_0, a_1, \cdots, a_n$ التي تمثّل $n+1$ وسيطاً مستقلاً. يجري تعيين هذه الأمثال عن طريق حل جملة المعادلات الخطيّة:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

وهذه جملةٌ مؤلّفة من $n+1$ معادلة و $n+1$ مجهولاً. يمكن أن نكتب المعادلات (2) بالشكل المصفوفاتي المكافئ:

$$X \cdot a = y$$

حيث

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

تُعرف المصفوفات من النمط X بمصفوفات فاندرموند Vandermonde وهي مصفوفات قلوبة عندما تكون الأعداد $\left(x_i\right)_{0\leq i\leq n}$ مختلفة وهو ما افترضناه محققاً في معطيات المسألة.

1.1 صيغة لاغرانج للاستيفاء بكثيرات الحدود

مبرهنة 1

لتكن $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ مجموعة أعداد مختلفة و $\{y_0,y_1,\ldots,y_n\}$ مجموعة من القيم التابعيّة الموافقة. هناك تابع كثير الحدود وحيد $p\in\mathcal{P}_n$ يحقق شروط الاستيفاء (1).

الإثبات: لنبرهن في البداية مسألة الاستيفاء في الحالة الخاصّة الموافقة للمعطيات التابعيّة التالية:

$$\{0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0\},\quad 0\leq i\leq n$$

ولنعيّن تابع كثير الحدود $\ell_i\in\mathcal{P}_n$ المحقّق للشروط:

$$\ell_i(x_i)=1,\quad \ell_i(x_j)=0,\quad j\neq i$$

عندها يكون

$$\ell_i(x)=c\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

حيث c عدد ثابت يتعيّن من الشرط $\ell_i(x_i)=1$:

$$c=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\ell_i(x)=\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right),\qquad (i=0,1,\ldots,n) \tag{3}$$

لإيجاد حل مسألة الاستيفاء العامّة (1) نضع

$$p(x)=y_0\ell_0(x)+y_1\ell_1(x)+\cdots+y_n\ell_n(x)$$

يمكن التحقق بسهولة أنّ كثير الحدود p يحقّق الشروط:

$$i)\ \deg(p)\leq n$$
$$ii)\ p(x_i)=y_i,\quad 0\leq i\leq n$$

لكي نثبت وحدانيّة هذا الحلّ، نفترض وجود تابع كثير الحدود آخر $q \in \mathcal{P}_n$ يحقّق الشروط (1).
نضع

$$r = p - q$$

إنّ $r(x)$ تابعٌ كثير الحدود درجته $\geq n$ ويحقق

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0, \qquad 0 \leq i \leq n$$

وبذلك يكون لـ $r(x)$ جذورٌ عددها $n+1$.
من ذلك نستنتج أنّ $r \equiv 0$ ومن ثمّ $p \equiv q$. ■

نسميّ الصيغة

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x) \tag{4}$$

صيغة لاغرانج Lagrange للاستيفاء بكثيرات الحدود.

أمثلة:

- $p_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = y_0 + (x - x_0)\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

- $p_2(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$
$= y_0 + (x - x_0)\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a \cdot (x - x_0)(x - x_1)$

حيث

$$a = \frac{1}{(x_2 - x_0)} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)$$

فمثلاً، كثير الحدود من الدرجة ≥ 2 والذي يمرّ من النقاط $(1,3), (-1,2), (0,1)$ هو

$$p_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \times 2 + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} \times 3$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2$$

ملاحظة: يمكننا استخدام عمليّة الاستيفاء للحصول على تقريب لتابعٍ $f(x)$ وذلك بتعيين كثير حدود الاستيفاء

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \ell_i(x) \tag{5}$$

اصطلاح: نرمز بـ $\mathcal{I}\{a,b,c,\cdots\}$ إلى أصغر مجالٍ يحوي الأعداد الحقيقيّة $a,b,c,\ldots$.

2.1 صيغة نيوتن للاستيفاء بكثيرات الحدود

لتكن $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ مجموعةً مختلفةً من الأعداد الحقيقيّة، وليكن f تابعاً حقيقيّاً معرّفاً على المجال $\mathcal{I}\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$. ليكن $p_k \in \mathcal{P}_k$ كثير حدود الاستيفاء الوحيد المحقق للشروط:

$$p_k(x_i) = f(x_i), \qquad i \in \{0,\ldots,k\}$$

نرغب في إيجاد علاقةٍ تدريجيّة بين كثيرات الحدود $\big(p_k\big)_{0\le k\le n}$ من النمط

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x)$$

حيث $c_k(x)$ هو تابع كثير الحدود درجته تساوي k على الأكثر، ويحقق

$$\begin{aligned} c_k(x_i) &= p_k(x_i) - p_{k-1}(x_i) \\ &= f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad 0 \le i \le k-1 \end{aligned}$$

وهذا يعني أنّ $c_k(x)$ يكتب بالشكل

$$c_k(x) = a_k \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

ولدينا هنا $p_k(x_k) = f(x_k)$ ومن ثمّ

$$a_k = \frac{f(x_k) - p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

نسمّي العدد a_k الفرق المقسوم لنيوتن من المرتبة k للتابع f عند النقاط $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ ونعبّر عنه بالكتابة:

$$\Delta^k f(x_0,x_1,\ldots,x_k) \qquad \text{أو} \qquad f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

ومن ثَمَّ فإنّ العلاقة التدريجيّة السابقة تكتب بالشكل

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \tag{6}$$

لكي نعلم أكثر عن الفرق المقسوم a_k، نعود إلى صيغة لاغرانج لكثير حدود الاستيفاء $p_k(x)$. نضع

$$\Psi_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_k)$$

فيكون عندها

$$\Psi_k'(x_j) = (x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)$$

ومنه

$$\frac{\Psi_k(x)}{(x - x_j) \cdot \Psi_k'(x_j)} = \ell_j(x), \quad 0 \le j \le k$$

وإذا كان $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ فإنّ

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \ell_j(x) \cdot f(x_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\Psi_k(x)}{(x - x_j) \cdot \Psi_k'(x_j)} f(x_j) \tag{7}$$

ولمّا كان a_k هو مَثَل x^k في الصيغة القانونيّة لتابع كثير الحدود $p_k(x)$ فإنّنا نستنتج من العلاقة (7) أنّ:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\Psi_k'(x_j)} \tag{Δ}$$

نستنتج من هذه العلاقة خاصّةً مهمّة للفروق المقسومة. لتكن $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ أحد تباديل الأدلّة $\{0, 1, \ldots, k\}$، عندها يكون

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\Psi_k'(x_j)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_{i_j})}{\Psi_k'(x_{i_j})}$$

ينتج من ذلك

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$$

أيّاً كان التبديل $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ للأدلّة $\{0,1,\ldots,k\}$. نستنتج أيضاً من العلاقة (Δ) خاصّة أخرى مفيدة في حساب الفروق المقسومة، وهي العلاقة التدريجيّة التالية:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \qquad n \geq 1 \tag{8}$$

وهذا ما يسوّغ تسمية "الفرق المقسوم". تستخدم العلاقة التدريجيّة (6) في التعبير عن كثيرات حدود الاستيفاء $\left(p_k\right)_{k\geq 0}$:

$$\begin{cases} p_0(x) = f(x_0) \\ p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) \\ \quad \vdots \\ p_n(x) = f(x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{cases} \tag{9}$$

نسمّي الصيغة (9) صيغة نيوتن في الاستيفاء بكثيرات الحدود. تعدّ هذه الصيغة - من وجهة النظر الحسابيّة- أفضل من صيغة لاغرانج السابقة.

لتعيين قيم الفروق المقسومة نحسبها بالترتيب المتزايد للمرتبة $0, 1, \ldots, n$ كما هو موضّح في الجدول 1، حيث يتضمّن العمود الأوّل النقاط (x_i) ويتضمّن العمود الثاني قيم الفروق المقسومة من المرتبة 0 للتابع f أي قيمه: $\{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$، ويتضمّن العمود الثالث قيم الفروق المقسومة من المرتبة الأولى: $\{f[x_0, x_1], \ldots, f[x_{n-1}, x_n]\}$، وهكذا، حتّى العمود رقم $n+2$ ويتضمّن قيمة الفرق المقسوم $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. يجري حساب قيم كلّ عمود من قيم العمود الذي على يساره وذلك باستخدام علاقة التدريج (8).

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\cdots$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\ddots$
x_4	f_4	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$\ddots$
x_5	f_5	$f[x_4, x_5]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

الجدول 1: إنشاء الفروق المقسومة للتابع f.

مثال: لننشئ، في حالة معطيات الشكل 1، جدول الفروق المقسومة الموافق (الجدول 2).

نستعمل الرمز $\Delta^r f$ للدلالة على الفرق المقسوم من المرتبة r.

x_i	y_i	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	-1					
2	1	1				
4	6	5 / 2	3 / 8			
5	0	-6	-17 / 6	-77 / 120		
8	2	2 / 3	5 / 3	3 / 4	167 / 960	
10	5	3 / 2	1 / 6	-1 / 4	-1 / 8	-287 / 9600

الجدول 2: إنشاء الفروق المقسومة لمعطيات الشكل 1.

ومن ثمّ نحصل على صيغة نيوتن لكثير حدود الاستيفاء الموافق لمعطيات الشكل 1 كما يلي:

$$p(x) = -1 + x + \frac{3}{8}x(x-2) - \frac{77}{120}x(x-2)(x-4) + \frac{167}{960}x(x-2)(x-4)(x-5) - \frac{287}{9600}x(x-2)(x-4)(x-5)(x-8)$$

ملاحظة:

إنّ ترتيب النقاط $\{x_i\}$ غير ذي أهميّة في صيغة نيوتن (9)، فإذا بدّلنا ترتيب المعطيات (x_i, y_i) نحصل بالطبع على كثير حدود الاستيفاء السابق نفسه. فمثلاً، في حالة المثال السابق، اختيار النقاط $\{x_i\}$ وفق الترتيب $\{4,5,2,8,0,10\}$ يقودنا إلى الصيغة المكافئة التالية:

$$p(x) = 6 - 6(x-4) - \frac{17}{6}(x-4)(x-5) + \frac{3}{4}(x-4)(x-5)(x-2) + \frac{167}{960}(x-4)(x-5)(x-2)(x-8) - \frac{287}{9600}(x-4)(x-5)(x-2)(x-8)x$$

من جهةٍ أخرى، عندما تكون التجزئة $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ غير منتظمة يُنصح بترتيب النقاط $\{x_i\}$ بحيث توضع النقاط الواقعة في الوسط في البداية وبحيث توضع نقاط الأطراف في

النهاية ؛ وبذلك يكون تضخيم الأخطاء (الناجمة عن التدوير) أقلّ أهميّة عند حساب الفروق المقسومة عددياً. وهنا يمكننا أن نصوغ خوارزميّة إنشاء الفروق المقسومة:

$$f[x_0],\quad f[x_0,x_1],\quad f[x_0,x_1,x_2],\cdots,f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

اللازمة لحساب قيمة كثير حدود الاستيفاء من صيغة نيوتن. تقوم هذه الخوارزميّة على المعطيات التالية:

الدخل: شعاع x يحوي قيم النقاط $(x_i)_{0\le i\le n}$،

شعاع d يحوي قيم التابع $\big(f(x_i)\big)_{0\le i\le n}$،

الخرج: عند الانتهاء من تنفيذ الخوارزميّة نحصل على قيم الفروق المقسومة:

$$d_i = f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \quad , \quad 0\le i\le n$$

Algorithm *Divided Differences* (Input: f,x,n ; Output: d);
Begin
  for $i := 1$ *to* n *do*
  for $j := n$ *downto* i *do* $\quad d_j = (d_j - d_{j-1})\cdot(x_j - x_{j-i})^{-1}$
End; {*Divided Differences*}

بعد حساب قيم الفروق المقسومة للتابع f المنشأة على النقاط $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ وتخزينها في الشعاع $d=(d_0,d_1,\ldots,d_n)$، يمكننا حساب قيمة كثير حدود الاستيفاء $p_n(x)$ من صيغة نيوتن بالخوارزميّة التالية:

الدخل: شعاع x يحوي قيم النقاط $(x_i)_{0\le i\le n}$،

شعاع d يحوي أمثال كثير حدود الاستيفاء في صيغة نيوتن،

الخرج: متحوّل p يحوي عند الانتهاء من تنفيذ الخوارزميّة قيمة كثير حدود الاستيفاء عند النقطة t.

Algorithm *Value* (Input: x, d, n, t ; Output: p);
Begin
  $p := d_n$;
  for $i := n-1$ *downto* 0 *do* $\quad p := d_i + (t - x_i) * p$
End; {*Value*}

3.1 خطأ استيفاء لاغرانج بكثيرات الحدود

مبرهنة 2

لتكن $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعة أعداد حقيقيّة مختلفة، وليكن f تابعاً حقيقيّاً يقبل الاشتقاق مع الاستمرار $n+1$ مرّة على المجال $I_t = \mathcal{I}\{t, x_0, x_1, \cdots, x_n\}$، حيث t هو عدد حقيقيّ معطى. عندها، توجد نقطة $\xi \in I_t$ بحيث يكون

$$f(t) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \ell_i(t) = \frac{(t-x_0)\cdots(t-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (10)$$

الإثبات

نلاحظ أولاً أنّ المساواة (10) تكون محققة عندما يكون $t \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. نفترض الآن أنّ $t \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ونضع

$$\forall x \in I_t, \quad \begin{cases} p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_j(x) \\ E(x) = f(x) - p_n(x) \\ G(x) = E(x) - \dfrac{\Psi(x)}{\Psi(t)} E(t) \end{cases}$$

حيث $\Psi(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$. نلاحظ هنا أنّ التابع $G(x)$ يقبل الاشتقاق مع الاستمرار $n+1$ مرّة على المجال I_t وكذلك الحال بالنسبة للتابعين $E(x)$ و $\Psi(x)$. إضافةً إلى ذلك فإنّ:

$$\begin{cases} G(x_i) = E(x_i) - \dfrac{\Psi(x_i)}{\Psi(t)} E(t) = 0, \quad 0 \le i \le n \\ G(t) = E(t) - E(t) = 0 \end{cases}$$

وبذلك يكون للتابع G $(n+2)$ جذراً مختلفاً في المجال I_t.

واستناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة يكون للتابع المشتق G' على الأقل $(n+1)$ جذراً مختلفاً في المجال I_t ؛ ونستنتج بالتدريج أنّ للتابع المشتق $G^{(j)}$ على الأقل $(n+2-j)$ جذراً مختلفاً في

المجال I_t أيّاً كانت قيمة $j \in \{0,\ldots,n+1\}$. ليكن ξ جذراً للتابع المشتق $G^{(n+1)}$ أي $G^{(n+1)}(\xi) = 0$. وبملاحظة أنّ

$$\begin{cases} E^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \\ \Psi^{(n+1)}(x) = (n+1)! \end{cases}$$

يكون

$$G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!}{\Psi(t)} E(t)$$

بتعويض $x = \xi$ نجد

$$E(t) = \frac{\Psi(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

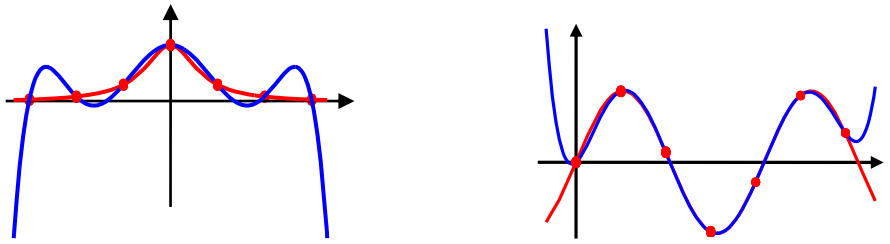
وهي النتيجة المطلوبة. ■

مثال

لتكن لدينا المعطيات التابعيّة

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

في الحالتين: (انظر الشكل 2)



استيفاء لاغرانج للتابع $\sin x$ استيفاء لاغرانج للتابع $1 / (1+x^2)$

الشكل 2: استيفاء لاغرانج بكثيرات حدود من الدرجة السادسة.

أولاً: حالة استيفاء التابع $f(x) = \sin x$ عند النقاط:

$$n+1 = 7 \quad , \quad \{0,\ 1.5,\ 3,\ 4.5,\ 6,\ 7.5,\ 9\}$$

من الواضح هنا أنّ المشتقّ السابع للتابع $\sin x$ محدودٌ بالقيمة 1، ومن ثمّ يحقق خطأ الاستيفاء المتراجحة التالية:

$$\left|p(x)-\sin x\right| \le \left|x(x-1.5)(x-3)(x-4.5)(x-6)(x-7.5)(x-9)\right| \cdot \frac{1}{7!}$$

فعلى سبيل المثال

$$\left|p(1)-\sin 1\right| \le 0.181 \quad , \quad \left|p(4)-\sin 4\right| \le 0.035$$

ثانياً: حالة استيفاء التابع $f(x) = 1\,/\,(1+x^2)$ عند النقاط:

$$\{0,\ \pm\sqrt{2.25}, \pm 3, \pm\sqrt{20.25}\}$$

في هذه الحالة يعطى المشتقّ السابع للتابع f بالعلاقة:

$$f^{(7)} = -8!\frac{(x+1)(x-1)x(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)}{(1+x^2)^8}$$

ويأخذ قيمةً أعظميّة $\left\|f^{(7)}\right\|_\infty \simeq 4391.31$ عند النقطة $x \simeq \pm 0.17632698$.

وبذلك يكون لدينا

$$\left|p(x)-\frac{1}{1+x^2}\right| \le \left|(x^2-20.25)(x^2-9)(x^2-2.25)x\right| \cdot \frac{4392}{7!}$$

نلاحظ هنا أنّ الخطأ يقارب 4392 مرّة في الكِبَر عمّا هو عليه في حالة تابع الـ $\sin x$.

تساؤلٌ مهم: تبيّن العبارة (10) في **المبرهنة 2** أنّ خطأ الاستيفاء يساوي جداء قيمة المشتقّ من المرتبة $(n+1)$ عند نقطةٍ مجهولة مع العبارة $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ والتي لا تتعلّق إلاّ بنقاط التجزئة $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. من ذلك نجد من الأهميّة أَن نبحثَ، في حالة n معيّنة، في تعيين تجزئةٍ

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$$

للمجال $[a,b]$ تحقق الشرط:

$$\text{(M)} \qquad \max_{x\in[a,b]}\left|(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right| = \min_{a\le t_0<\ldots<t_n\le b}\left\{\max_{x\in[a,b]}\left|(x-t_0)\cdots(x-t_n)\right|\right\}$$

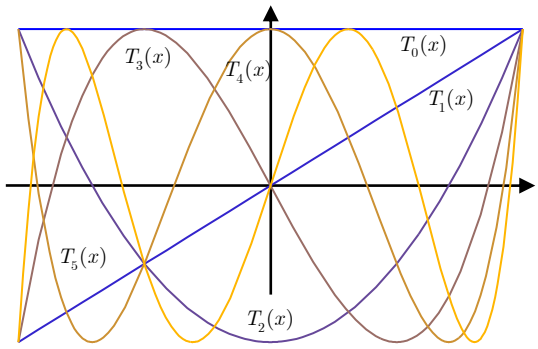
الجواب على هذا التساؤل يكمن في الخواص التي تحقّقها كثيرات حدود تشيبيشف Chebyshev.

• كثيرات حدود تشيبيشف

أياً كانت $n \in \mathbb{N}$ نعرّف

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1]$$

يبيّن الشكل التالي بيانياً مجموعة من التوابع $\{T_n(x) : n = 1,\dots,5\}$ على المجال $[-1,1]$.



الشكل 3: كثيرات حدود تشيبيشف $T_n(x)$.

خواص كثيرات حدود تشيبيشف:

(P1) تحقق التوابع $T_n(x)$ علاقات التدريج:

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ومن ثمّ، فإنّ $T_n(x)$ هو كثير حدود درجته n، مَثَلُ الحدّ x^n فيه يساوي 2^{n-1}، أي أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$$

(P2) التوابع $T_n(x)$ محدودة، أي أنّ

$$\left|T_n(x)\right| \leq 1, \quad \forall x \in [-1,1]$$

(P3) تحقق التوابع $T_n(x)$ الخاصّتين:

$$\begin{cases} T_n\left(\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)\right) = (-1)^k, & 0 \leq k \leq n \\ T_n\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) = 0, & 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

(P4) التوابع $T_n(x)$ متعامدة بالنسبة للجداء السلّمي الطبيعي المعرّف على فضاء التوابع المستمرّة $C^0\big([-1,1]\big)$:

$$\big\langle f,g\big\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وتحقّق

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \pi & if\ n=m=0 \\ \pi\,/\,2 & if\ n=m\neq 0 \\ 0 & if\ n\neq m. \end{cases}$$

الإثبات:

تنتج علاقات التدريج السابقة من العلاقة المثلّثيّة

$$\cos\big((n+1)\varphi\big)+\cos\big((n-1)\varphi\big) = 2\cos\varphi\cdot\cos(n\varphi)$$

وذلك بوضع $\cos\varphi = x$ ، $\varphi = \arccos x$.

ويعطي التحويل الأخير أيضاً

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\pi} \cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi$$

وتنتج الخاصّة (P4) من تعامد التوابع $\big(\cos(n\varphi)\big)_{n\geq 0}$.

نعود الآن إلى التساؤل الذي طرحناه آنفاً لإيجاد تجزئةٍ تحقق الشرط (M). توضّح المبرهنة التالية الإجابة عن هذا التساؤل وكيفيّة الاختيار الأمثلي لنقاط الاستيفاء.

مبرهنة 3: ليكن $q(x)$ كثير حدود درجته n ومَثلُ x^n فيه يساوي 2^{n-1}. إذا كان $q(x)\not\equiv T_n(x)$ فإنّ:

$$\max_{x\in[-1,1]}\big|q(x)\big| > \max_{x\in[-1,1]}\big|T_n(x)\big| = 1$$

الإثبات: (نقض الفرض)

لنفترض جدلاً أنّ:

$$\max_{x\in[-1,1]}\big|q(x)\big| \leq \max_{x\in[-1,1]}\big|T_n(x)\big|$$

ولنعرّف الفرق $\delta(x) = q(x) - T_n(x)$. نلاحظ هنا أنّ تابع الفرق هذا ينعدم مرّة على الأقلّ في كلّ مجال من المجالات المغلقة

$$[\cos(\tfrac{k+1}{n}\pi), \cos(\tfrac{k}{n}\pi)], \quad 0 \le k \le n-1$$

ومن ثمّ فإنّ $\delta(x)$ يمتلك n جذراً في المجال $[-1,1]$ (إذا وقع أحد الجذور α عند طرف أحد المجالات السابقة يكون جذراً مضاعفاً وذلك لأنّ $T_n'(\alpha) = 0$ ومن ثمّ $q'(\alpha) = 0$). ولكن $\delta(x)$ هو كثير حدود من الدرجة $n-1$ (أمثال x^n واحدة في كلّ من $T_n(x)$ و $q(x)$) وهذا يتناقض مع كون $\delta(x) \not\equiv 0$. ■

تثبت المبرهنة السابقة أنّ المقدار $\max_{x\in[-1,1]} \left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|$ يكون أصغرياً إذا وفقط إذا كان

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$$

وهذا يعني أنّ

$$x_k = \cos\left[\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right], \quad 0 \le k \le n$$

نسميّ هذه النقاط نقاط تشيبيشف. للإجابة عن التساؤل السابق نستخدم التحويل:

$$x \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot x$$

للانتقال من المجال $[-1,1]$ إلى المجال $[a,b]$، فنحصل على النتيجة التالية:

مبرهنة 4:

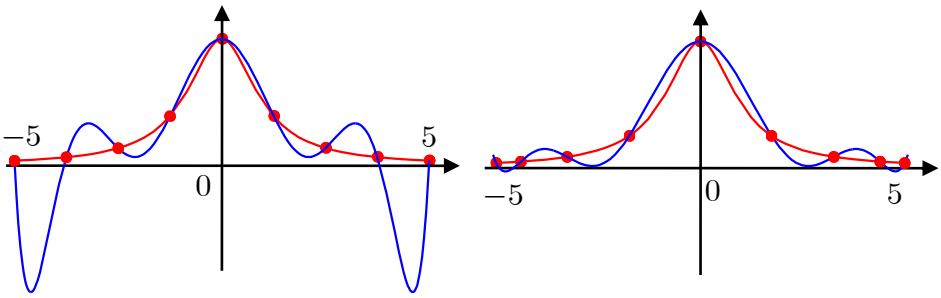
يتحقق الشرط (M) في حالة التجزئة $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ إذا وفقط إذا كان:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\cos\left[\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right], \quad 0 \le k \le n$$

نوضّح فعّاليّة استعمال نقاط تشيبيشف في عمليّة استيفاء لاغرانج من خلال المثال التالي (انظر الشكل 4) والذي نبيّن فيه نتيجة استيفاء لاغرانج في حالة استعمال تجزئة منتظمة للمجال $[-5,5]$ وفي حالة استعمال نقاط تشيبيشف

$$5 \cdot \cos\left[\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right], \quad 0 \le k \le 8$$

وذلك عند قيم تابعيّة معرّفة بالعلاقة $f(x) = 1 \,/\, (1+x^2)$.



الشكل 4: استيفاء لاغرانج: التجزئة المنتظمة (إلى اليسار) وتجزئة تشيبيشف (إلى اليمين).

ملاحظة:

ليكن t عدداً حقيقيّاً مختلفاً عن القيم $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. يعطى كثير حدود الاستيفاء للتابع $f(x)$ عند النقاط:

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, t\}$$

بالعلاقة:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\cdot f[x_0,x_1] + \cdots + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\cdot f[x_0,\ldots,x_n] \\ &\quad + (x-x_0)\cdots(x-x_n)\cdot f[x_0,\ldots,x_n,t] \\ &= p_n(x) + (x-x_0)\cdots(x-x_n)\cdot f[x_0,\ldots,x_n,t] \end{aligned}$$

ومن كون $p_{n+1}(t) = f(t)$ نستنتج أنّ

$$f(t) = p_n(t) + (t-x_0)\cdots(t-x_n)\cdot f[x_0,\ldots,x_n,t] \tag{11}$$

تعطينا المساواة (11) صيغة أخرى للخطأ $f(t) - p_n(t)$. بمقارنة ذلك بالصيغة السابقة (10)، نحصل على المساواة:

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n,t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \qquad \xi \in \mathcal{I}\{x_0, \quad x_1,\ldots,x_n,t\}$$

نتيجة: إذا كان $f \in C^m\left(\mathcal{I}\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}\right)$ فإنّ

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \quad , \quad \xi \in \mathcal{I}\{x_0,x_1,\ldots,x_m\} \tag{12}$$

4.1 تقارب استيفاء لاغرانج بكثيرات الحدود

لننظر في مسألة تقريب تابعٍ معطى f على مجالٍ $[a,b]$ وذلك باستخدام الاستيفاء بكثيرات الحدود في التقريب على هذا المجال. لتكن $n \geq 1$، نعرّف التجزئة:

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

وليكن $p_n(x)$ كثير حدود الاستيفاء المحقق للشروط:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

نعرّف خطأ التقريب للتابع f بالمقدار

$$\left\| f - p_n \right\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - p_n(x) \right|$$

وهنا **نتساءل:** هل يتقارب الخطأ $\left\| f - p_n \right\|_\infty$ من الصفر عندما $n \leftarrow \infty$؟

الجواب: ليس بالضرورة.

مبرهنة 5: ليكن $f \in C^\infty\left([a,b]\right)$، ولنفترض أنّه يحقق الشرط:

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leq M \tag{13}$$

ولتكن $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ تجزئةً اختياريّة للمجال $[a,b]$. عندئذٍ يكون

$$\lim_{n \to \infty} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - p_n(x) \right| = 0$$

الإثبات: من العلاقة (10) والفرضيّة (13) نجد أنّ

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq (b-a)^{n+1} \cdot \frac{M}{(n+1)!}$$

من الواضح هنا أنّ المقدار $(b-a)^{n+1} \,/\, (n+1)!$ يسعى إلى الصفر عندما يسعى n إلى اللانهاية وذلك لأنّه يمثّل الحدّ العام للمتسلسلة المتقاربة:

$$e^{b-a} = \sum\nolimits_{k \geq 0} (b-a)^k \,/\, k!$$

من الناحية العمليّة، لا يوجد الكثير من التوابع التي تحقق الفرضيّة (13) ومنها، على سبيل المثال، التوابع e^x، $\sin x$، $\cos x$ وكذلك توابع كثيرات الحدود؛ وفي أغلب الأحيان لا تتحقق هذه الفرضيّة. فمثلاً، في حالة التابع الكسري $f(x) = 1 \,/\, x$ لدينا $f^{(n)}(x) = \pm n! / \, x^{n+1}$. ومن ثمّ فهو لا يحقق الفرضيّة (13) على المجال $[1,2]$.

من الجدير بالذكر أيضاً أنّ استعمال نقاط تشيبيشف (تجزئة غير منتظمة) في استيفاء لاغرانج يعطينا أفضل النتائج فيما يتعلّق بالتقارب كما تبيّن المبرهنة التالية.

مبرهنة 6: ليكن $f \in C^1\big([-1,1]\big)$. وليكن p_n كثير حدود استيفاء لاغرانج المنشأ على النقاط $\big(x_i, f(x_i)\big)$ حيث

$$x_i = \cos\left[\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right], \quad 0 \le i \le n$$

عندئذٍ، تتقارب متتالية استيفاء لاغرانج $\big(p_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام نحو التابع f على المجال $[-1,1]$. أي أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \big\| f - p_n \big\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} \big| f(x) - p_n(x) \big| = 0$$

يعتمد إثبات هذه المبرهنة على مبرهنة ستون–فايرشتراس (راجع [141]).

ظاهرة رونج Runge$\big(1901\big)$

نذكر هنا بالمثال الشهير التالي (ينسب إلى الرياضي Runge)

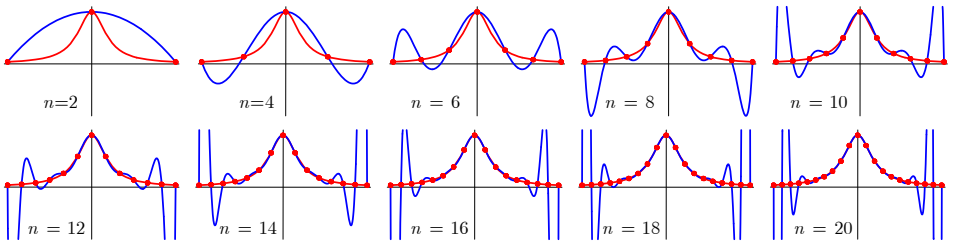
$$f(x) = \frac{1}{1+25\,x^2}, \qquad -1 \le x \le 1$$

برهن Isaacson و Killer في كتابهما (انظر [72]) أنّ متتالية كثيرات حدود استيفاء لاغرانج $\big(p_n\big)_{n\ge1}$ الموافقة لتجزئة منتظمة للمجال $[-1,1]$ تحقق:

$$\big|x\big| > 0.728 \quad \Rightarrow \quad \forall k \ge 0,\ \sup_{n\ge k} \ \big| f(x) - p_n(x) \big| = \infty$$

ومن ثَمَّ، فإنّ المتتالية العدديّة $\big(p_n(x)\big)_{n\ge1}$ لا تتقارب من القيمة $f(x)$ عندما يسعى n إلى اللانهاية.

في الشكل 5، نلاحظ تقارب متتالية الاستيفاء $p_n(x)$ في جوار الصفر نحو $f(x)$، ولكنّها تتباعد عند الأطراف.



الشكل 5: ظاهرة رونج في حالة التابع $f(x) = 1 / (1 + 25x^2)$.

5.1 أثر أخطاء التدوير في استيفاء لاغرانج

نعلم أنّ كثير حدود استيفاء لاغرانج $p \in \mathcal{P}_n$ المار بالنقاط (x_i, y_i)، $0 \le i \le n$ يعطى بالعلاقة

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

نفترض أنّ القيم y_i مشوبة بأخطاء التمثيل أي أنّ القيم العددية المستعملة في الحساب هي القيم التقريبيّة $\hat{y}_i$ الممثّلة للأعداد y_i في النظام الحاسوبي المستخدم

$$\hat{y}_i = fl(y_i) = y_i(1 + \varepsilon_i), \quad |\varepsilon_i| \le eps$$

حيث يمثّل eps دقّة الآلة التي نجري فيها الحساب و $fl(y_i)$ ممثّل العدد y_i في النظام المستخدم. (راجع الفصل الأول).

ليكن

$$\hat{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \hat{y}_i \ell_i(x)$$

كثير حدود استيفاء لاغرانج الموافق للمعطيات $(x_i, \hat{y}_i)$. عندئذ يكتب التغيّر بالشكل

$$\hat{p}(x) - p(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i \ell_i(x)$$

ومن ثمّ نجد

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \le eps \cdot \max_{0 \le i \le n} |y_i| \cdot \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$$

يمثّل التابع

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \ell_i(x) \right|$$

معامل تضخيم الخطأ في عمليّة الاستيفاء. تسمّى قيمته العظمى

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} \left| \ell_i(x) \right|$$

ثابت لوبيغ Lebesgue الموافق للنقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ والمجال $[a,b]$، ومن الممكن حساب هذا الثابت عددياً. ويبرهن أنّه في حالة التجزئة المنتظمة للمجال $[a,b]$ بالنقاط:

$$x_i = a + i(b-a) \,/\, n, \qquad 0 \le i \le n$$

يكون لدينا

$$\Lambda_{20} \simeq 1.1 \times 10^4, \quad \Lambda_{40} \simeq 4.7 \times 10^9, \quad \Lambda_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \log n}$$

وكذلك يبرهن أنّه في حالة استعمال نقاط تشيبيشف:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left[\frac{2i+1}{2n+2} \pi \right]$$

في تجزئة المجال $[a,b]$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} &\Lambda_n \le 3 && if\ n \le 20 \\ &\Lambda_n \le 4 && if\ n \le 100 \\ &\Lambda_n \simeq \frac{2}{\pi} \log n && if\ n > 100 \end{aligned}$$

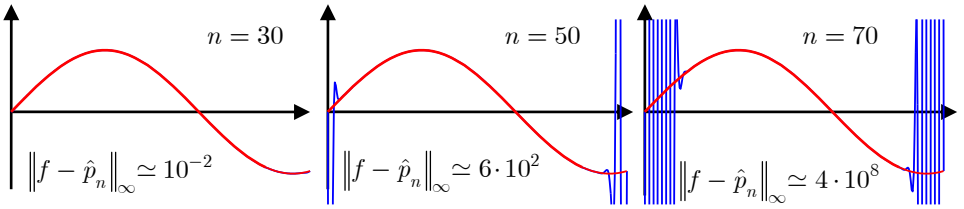
مثال

لِنُجرِ تطبيقاً عملياً لحساب كثير حدود استيفاء لاغرانج للتابع $f(x) = \sin x$ في المجال $[0,5]$. من الناحية النظرية، نعلم أنه عندما تكون $n \ge 25$ فإنّ خطأ استيفاء لاغرانج يكون محدوداً من الأعلى بالمقدار $5^{26} \,/\, 26! \simeq 3.69\,10^{-9}$ وذلك أياً كانت التجزئة للمجال $[0,5]$.

نقوم بحساب القيم التابعيّة $\hat{y}_i = \widehat{\sin}\, x_i$ مستعملين دقّة حساب بسيطة $(eps \simeq 1.49\times 10^{-8})$ ومن ثمّ نعيّن كثير حدود استيفاء لاغرانج الموافق لهذه القيم مستعملين دقّة تمثيلٍ عالية (نظرياً لانهائيّة: أي أننا لا نسمح بأيّ خطأ تقريب عددي في حساب تابع كثير حدود الاستيفاء)، وذلك في:

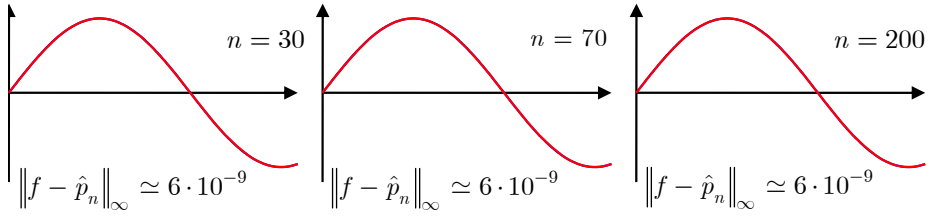
- حالة تجزئة منتظمة للمجال: $x_i = \dfrac{5}{n} i$ ،
- حالة تجزئة باستعمال نقاط تشيبيشف: $x_i = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\cos\left(\dfrac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$.

فنلاحظ من النتائج أنّ خطأ الاستيفاء في – حالة التجزئة المنتظمة – يبدأ بالتضخّم بسرعة عند طرفي المجال بدءاً من القيمة $n = 30$ ويصبح هذا الخطأ من مرتبة 10^8 عند القيمة $n = 70$ كما يتبيّن من الشكل التالي:



الشكل 6: استعمال التجزئة المنتظمة في استيفاء قيم تابعية مشوّشة $\hat{y}_i$.

أمّا في حالة استعمال نقاط تشيبيشف في الاستيفاء فإننا نلاحظ الاستقرار العددي في حساب تابع الاستيفاء حتّى لو بلغت n قيماً كبيرة (لنقل $n = 200$ على سبيل المثال) ويتبيّن ذلك من الشكل البياني التالي للنتائج التي نحصل عليها في هذه الحالة.



الشكل 7: استعمال نقاط تشيبيشف في استيفاء قيم تابعية مشوّشة $\hat{y}_i$.

2. استيفاء هرميت

في هذا النوع من الاستيفاء، نستخدم إضافةً إلى قيم التابع f عند نقاط الشبكة (x_i) قيم مشتقّه f' عند هذه النقاط فتصبح المسألة على النحو التالي:

لتكن $\{x_1,\dots,x_n\}$ مجموعة مختلفة من الأعداد الحقيقيّة، ولتكن مجموعتا القيم $\{y_1,\dots,y_n\}$ و $\{y'_1,\dots,y'_n\}$ هي المعطيات المتوافرة عن قيم التابع f وقيم مشتقّه الأوّل f' عند النقاط $\{x_1,\dots,x_n\}$ على الترتيب. نبحث عن تابع كثير الحدود يحقق شروط Hermite في الاستيفاء:

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= y_i \\ p'(x_i) &= y'_i \end{aligned}\right\}, \quad 1 \le i \le n \tag{13}$$

نلاحظ هنا أنّ عدد الشروط هو $2n$ شرطاً، ولذلك نبحث عن حلّ لهذه المسألة كتابع كثير الحدود لا تتجاوز درجته $(2n-1)$. للبحث في حلّ هذه المسألة، نعمّم الأسلوب الذي اتبعناه في إثبات **المبرهنة 1**. ليكن

$$\Psi_n(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

نعلم أنّ كثيرات حدود لاغرانج الموافقة للنقاط $\{x_1,\dots,x_n\}$ تعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \frac{\Psi_n(x)}{(x-x_i)\cdot\Psi'_n(x_i)} \quad , \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

نعرّف التوابع

$$\left.\begin{aligned} \tilde{h}_i(x) &= (x-x_i)\big(\ell_i(x)\big)^2 \\ h_i(x) &= \big(1-2\ell'_i(x_i)(x-x_i)\big)\big(\ell_i(x)\big)^2 \end{aligned}\right\}, \quad 1 \le i \le n$$

نلاحظ أنّ التوابع $h_i(x)$ و $\tilde{h}_i(x)$ هي كثيرات حدود من الدرجة $2n-1$ على الأكثر وتحقق الخواص التالية:

$$h'_i(x_j) = \tilde{h}_i(x_j) = 0 \quad , \quad h_i(x_j) = \tilde{h}'_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

يمكن التحقق بسهولة أنّ حلاً لمسألة الاستيفاء (13) يعطى بالعلاقة:

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot \tilde{h}_i(x) \tag{14}$$

نلاحظ أنّ $H_n(x)$ هو كثير الحدود درجته $2n-1$ على الأكثر. لإثبات وحدانيّة هذا الحل، نفترض وجود تابع كثير الحدود آخر G يحقق شروط الاستيفاء (13) ودرجته $2n-1$ على الأكثر. نلاحظ هنا أنّ الفرق $R = H_n - G$ هو تابعٌ كثير الحدود درجته $2n-1$ على الأكثر ويحقق العلاقات:

$$R(x_i) = R'(x_i) = 0, \qquad 1 \le i \le n$$

أيْ أنّ له n جذراً مضاعفاً $x_1, \cdots, x_n$، فهو يكتب بالشكل

$$R(x) = q(x) \cdot (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

فإذا كان $q \not\equiv 0$ فإنّ $\deg(R) \ge 2n$ وهذا مستحيل. من ذلك ينتج أنّ $R \equiv 0$.

للحصول على صيغةٍ للحلّ أكثر ملاءمةً للحساب العددي من الصيغة (14) وكذلك لدراسة الخطأ في عمليّة الاستيفاء هذه، ننظر في كثير حدود استيفاء لاغرانج للتابع f عند النقاط المختلفة $\{z_1, z_2, \ldots, z_{2n}\}$ والذي يكتب وفق صيغة نيوتن بالشكل:

$$p_{2n-1}(x) = f(z_1) + \cdots + (x - z_1) \cdots (x - z_{2n-1}) f[z_1, \cdots, z_{2n}]$$

ونعلم أنّ خطأ الاستيفاء في هذه الحالة هو

$$f(x) - p_{2n-1}(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_{2n}) f[z_1, \cdots, z_{2n}, x] \tag{15}$$

وعندما تسعى النقاط $x_1 \leftarrow z_1, z_2$، $x_2 \leftarrow z_3, z_4$، $\cdots$ ، $x_n \leftarrow z_{2n-1}, z_{2n}$ فإنّ كثير الحدود p_{2n-1} يسعى إلى تابع كثير الحدود $\overline{p}_{2n-1}$ التالي:

$$\begin{aligned} \overline{p}_{2n-1}(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x_1, x_1] + (x - x_1)^2 f[x_1, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_1)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n) f[x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n] \end{aligned} \tag{16}$$

وهو تابع كثير الحدود درجته $\le (2n-1)$. نلاحظ هنا أنّ

$$\lim_{z_{2i-1}, z_{2i} \to x_i} f[z_{2i-1}, z_{2i}] = f[x_i, x_i] = f'(x_i), \qquad 1 \le i \le n$$

وبالاعتماد على استمراريّة الفروق المقسومة وافتراض أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند النقاط $\{x_1,\ldots,x_n\}$ تؤول عبارة الخطأ (15) عند حساب نهاية الطرفين إلى الصيغة التالية:

$$f(x)-\overline{p}_{2n-1}(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2 f[x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x] \quad (17)$$

لنبرهن الآن أنّ $\overline{p}_{2n-1}$ المعرّف بالعلاقة (16) يطابق كثير حدود الاستيفاء H_n. من الواضح أنّ

$$f(x_i)-\overline{p}_{2n-1}(x_i)=0, \quad 1\le i\le n$$

وكذلك لدينا

$$f'(x)-\overline{p}'_{2n-1}(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\cdot\frac{d}{dx}f[x_1,x_1,\cdots,x_n,x_n,x]$$
$$+2f[x_1,x_1,\cdots,x_n,x_n,x]\cdot\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}(x-x_j)^2$$

ومن ثَمَّ يكون

$$f'(x_i)-\overline{p}'_{2n-1}(x_i)=0, \qquad 1\le i\le n$$

وهكذا، فإنّ $\overline{p}_{2n-1}\in\mathcal{P}_{2n-1}$ ويحقق شروط الاستيفاء (13) الموافقة للمعطيات:

$$\left.\begin{aligned} y_i&=f(x_i)\\ y'_i&=f'(x_i)\end{aligned}\right\} \quad , \quad 1\le i\le n$$

وبالاعتماد على وحدانيّة كثير حدود الاستيفاء الهرميتيّ نستنتج أنّ $\overline{p}_{2n-1}=H_n$.

تعطينا العلاقة (16) صيغة الفروق المقسومة الملائمة لحساب H_n وكذلك فإنّ العلاقة (17) تعطينا صيغةً للخطأ في استيفاء Hermite نكتبها بالشكل:

$$f(x)-H_n(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\cdot f[x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x]$$

بالاعتماد على النتيجة (12) المتعلّقة بالفروق المقسومة، وإذا افترضنا أنّ

$$f\in C^{2n}\left(\mathcal{I}\{x_1,\ldots,x_n,x\}\right)$$

فإنّ عبارة الخطأ السابقة تكتب بالشكل:

$$f(x)-H_n(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\cdot\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!},\ \xi_x\in\mathcal{I}\{x_1,\ldots,x_n,x\}$$

مثال: إنّ استيفاء Hermite الأكثر شيوعاً هو الاستيفاء بكثيرات الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر. في هذه الحالة تكون شروط الاستيفاء:

$$\begin{aligned} p(a) &= f(a) \quad ; \quad p'(a) = f'(a) \\ p(b) &= f(b) \quad ; \quad p'(b) = f'(b) \end{aligned}$$

استناداً للعلاقة (14) يأخذ كثير حدود الاستيفاء $H_2(x)$ الشكل:

$$(18) \quad \begin{cases} H_2(x) = \left(1 + 2\dfrac{x-a}{b-a}\right)\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2 f(a) + \left(1 + 2\dfrac{b-x}{b-a}\right)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b) \\ \qquad + \dfrac{(x-a)(b-x)^2}{(b-a)^2} f'(a) - \dfrac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2} f'(b) \end{cases}$$

وتسمح لنا العلاقة (16) بالحصول على صيغة الفروق المقسومة لكثير حدود الاستيفاء $H_2(x)$ التالية:

$$(19) \quad \begin{aligned} H_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 f[a,a,b] \\ + (x-a)^2(x-b) f[a,a,b,b] \end{aligned}$$

حيث

$$\begin{cases} f[a,a,b] = \dfrac{f[a,b] - f'(a)}{b-a} \\ f[a,a,b,b] = \dfrac{f'(b) - 2f[a,b] + f'(a)}{(b-a)^2} \end{cases}$$

إنّ أنسب صيغة للحساب العددي هي (19)، ويمكن حسابها بخوارزميّة مشابهة لخوارزميّة $Value$ التي عرضناها في الفقرة السابقة. تكتب عبارة الخطأ -في هذا المثال- الموافقة للصيغة (18) أو (19) بالشكل:

$$(20) \quad \begin{aligned} f(x) - H_2(x) &= (x-a)^2(x-b)^2 f[a,a,b,b,x] \\ &= \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24} f^{(4)}(\xi_x) \end{aligned}$$

حيث $\xi_x \in \mathcal{I}\{a,b,x\}$. نستنتج من ذلك أنّ الخطأ الأعظمي يحقق المتراجحة:

$$(21) \quad \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - H_2(x) \right| \le \frac{(b-a)^4}{384} \max_{a \le t \le b} \left| f^{(4)}(t) \right|$$

3. الاستيفاء بتوابع كثيرات الحدود قِطَعيّاً

منذ مطلع ستّينيّات القرن العشرين، ازداد استخدام التوابع المكوَّنة من أجزاء كثيرات الحدود، فقد استخدمت بأشكالٍ متنوّعة في: الاستيفاء، والتكامل والتفاضل العددي، والحل العددي للمعادلات التكامليّة، التفاضليّة والتفاضليّة الجزئيّة. نتطلّع هنا إلى توابع كثيرات الحدود قِطعيّاً من وجهة النظر المتعلّقة بالاستيفاء. يلازم تعريف تابع كثير الحدود قِطَعيّاً f_n شبكة -تكون عادة منتهية- من النقاط:

$$-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < +\infty$$

ويتطابق مقصور التابع $f_n(x)$ على كل مجال من المجالات

$$]-\infty, x_0], \quad [x_0, x_1], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n], \quad [x_n, +\infty[$$

مع تابعٍ كثير الحدود. وغالباً ما تكون درجات كثيرات الحدود في هذه المجالات متساوية، كذلك فإنّه غالباً ما يكون التابع f_n مستمراً في التطبيقات.

هناك نمطان من مسائل الاستيفاء: محليّ Local وشامل Global. أمّا النمط المحلّي فيكون فيه مقصور التابع f_n على كلّ مجالٍ $[x_{i-1}, x_i]$ قابلاً للتعيين، بالاعتماد فقط على معطيات الاستيفاء المتعلّقة بهذا المجال. على حين أنّه في النمط الشامل، يتعلّق اختيار مقصور التابع f_n على كلّ مجالٍ $[x_{i-1}, x_i]$ بمعطيات الاستيفاء كلّها. إنّ النمط الشامل هو أكثر تعقيداً، وأفضل مثالٍ على هذا النمط توابع الـ Splines والتي سنعرضها لاحقاً في هذه الفقرة.

1.3 نمط الاستيفاء المحلّي

لتوضيح العرض، ندرس التوابع كثيرات الحدود التكعيبيّة قِطَعيّاً؛ وهذه هي الحال في أغلب التطبيقات. ليكن f تابعاً حقيقياً معرّفاً على مجال $[a,b]$. نضع $h = (b-a)/n$ ونعرّف التجزئة المنتظمة:

$$x_j = a + j \cdot h, \quad 0 \le j \le n$$

في البداية، نستخدم استيفاء لاغرانج بكثيرات الحدود، ثُمَّ نقدّم صيغةً لاستيفاء Hermite. نفترض أنّ n يقبل القسمة على 3. نستخدم صيغة لاغرانج (5) لتعريف تابع الاستيفاء f_n على كلّ مجالٍ جزئيّ $[x_{3j-3}, x_{3j}]$:

$$f_n(x) = \frac{1}{6h^3}\begin{pmatrix} -(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)\cdot f(z_0) \\ +3(x-z_0)(x-z_2)(x-z_3)\cdot f(z_1) \\ -3(x-z_0)(x-z_1)(x-z_3)\cdot f(z_2) \\ +(x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)\cdot f(z_3) \end{pmatrix} \quad , \quad 1 \le j \le n\ /\ 3$$

حيث

$$z_0 = x_{3j-3}\ ,\ z_1 = x_{3j-2}\ , z_2 = x_{3j-1}\ , z_3 = x_{3j}$$

نلاحظ هنا، أنّ التابع f_n مستمرٌ على المجال $[a,b]$ ويحقق شروط الاستيفاء

$$f_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \le i \le n$$

نسمّي f_n تابع استيفاء لاغرانج القِطَعيّ بكثيرات الحدود من الدرجة الثالثة. وبوجهٍ عام، نلاحظ هنا أنّ التابع f_n لا يقبل الاشتقاق عند النقاط $(x_{3j})_{1\le j\le n/3-1}$.

لدراسة الخطأ $f(x)-f_n(x)$ نستخدم معرفتنا السابقة عن خطأ الاستيفاء على كلّ مجالٍ جزئيّ $[x_{3j-3}, x_{3j}]$. وهذا يقودنا إلى المتراجحة التالية:

$$\max_{a\le x\le b} \left|f(x)-f_n(x)\right| \le \frac{h^4}{24} \max_{a\le t\le b} \left|f^{(4)}(t)\right| \qquad (22)$$

ملاحظة: اعتمدنا في استنتاج المتراجحة (22) على الخاصّة التالية:

$$\max_{x_{3j-3}\le x\le x_{3j}} \left|(x-x_{3j-3})(x-x_{3j-2})(x-x_{3j-1})(x-x_{3j})\right| = h^4$$

يتّضح من المتراجحة (22) أنّنا نستطيع زيادة الدقّة في التقريب f_n وذلك بجعل خطوة التقسيم h أصغر مع الاحتفاظ بدرجة كثير الحدود على كلّ مجال $[x_{3j-3}, x_{3j}]$.

مثال:

ليكن التابع $f(x)=e^x$ على المجال $[0,1]$. لنحسب القيمة الحديّة للخطوة $h=\frac{1}{n}$ في تقسيم المجال $[0,1]$ بانتظام، بحيث يكون الخطأ الأعظم للتقريب بتابع استيفاء لاغرانج القطعي بكثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أقلّ من 10^{-6}.

باستخدام المتراجحة (22) نجد

$$\frac{h^4}{24}\cdot e \le 10^{-6}$$

ومنه نحصل على

$$h \le 0.055 \;\Leftrightarrow\; n \ge 18.3$$

فمن المحتمل هنا أن يكون استعمال القيمة $n = 18$ كافياً لأنّ المتراجحة (22) تعطينا حداً أعلى للخطأ. عندها نحتاج إلى تعيين 6 توابع كثيرات الحدود تكعيبيّة على المجالات $\left([x_{3j-3}, x_{3j}]\right)_{1\le j\le 6}$. وفيما يتعلّق بتخزين تابع التقريب f_n نحتاج إلى تخزين $4n\ /\ 3$ قيمة وذلك لأنّ كثير الحدود من الدرجة الثالثة يتطلّب معرفة 4 قيم لتحديده تماماً. وغالباً ما يجري تخزين f_n وفق صيغة تايلور على كل مجالٍ جزئي $[x_{3j-3}, x_{3j}]$ كما يلي:

$$f_n(x) = a_j + b_j(x - x_{3j-3}) + c_j(x - x_{3j-3})^2 + d_j(x - x_{3j-3})^3$$

والنوع الثاني من الاستيفاء القِطَعي يستخدم استيفاء Hermite على كلّ مجالٍ جزئي $[x_{j-1}, x_j]$ حيث نعرّف على كل مجال كثير حدود الاستيفاء الهرميتيّ فنحصل بالنتيجة على تابع التقريب القِطعي h_n والذي يحقق الشروط التالية:

$$\left.\begin{array}{lll} h_n(x_{j-1}) = f(x_{j-1}) & ; & h_n(x_j) = f(x_j) \\ h_n'(x_{j-1}) = f'(x_{j-1}) & ; & h_n'(x_j) = f'(x_j) \end{array}\right\},\ j = 1,\cdots,n$$

في هذه الحالة يكون تابع التقريب h_n ومشتقّه h_n' مستمرّين على المجال $[a,b]$.

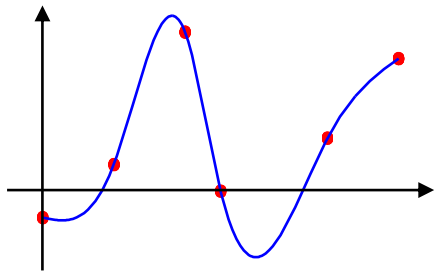
لتعيين الحد الأعلى للخطأ في التقريب h_n نستخدم العلاقات (20) و (21) فنحصل على المتراجحة:

$$\max_{a\le x\le b} \left|f(x) - h_n(x)\right| \le \frac{h^4}{384} \max_{a\le t\le b} \left|f^{(4)}(t)\right|$$

لمقارنة هذين النوعين من التقريب يجب مقارنة f_{2n} بـ h_n حتى تكون المقارنة صحيحة، وعندها نجد أنّ حدود خطأ التقريب الأعظم متساوية في الحالتين، ومن ثمَّ يكون للطريقتين دقّةٌ واحدة في التقريب، ويعتمد اختيار إحداهما على طبيعة التطبيقات المطلوبة.

2.3 نمط الاستيفاء الشامل وتوابع الـ Splines

تعني كلمة "Spline" الانكليزية صفيحة شريطيّة مرنة. نهتمّ في هذه الفقرة بمسألة تمرير صفيحةٍ شريطيّة مرنة بمجموعةٍ من النقاط $\big((x_i,y_i)\big)_{0\le i\le n}$. الشكل 8 يبيّن تابع الـ Spline الذي يحقق شروط استيفاء معطيات الشكل 1.



الشكل 8: الاستيفاء بتابع الـ Spline التكعيبي.

من الناحية الرياضيّاتيّة، يمكن صياغة هذه المسألة كما يلي: نبحث عن تابع $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a=x_0, b=x_n)$ يحقق الشروط التالية:

$$\text{(S1)}\quad s(x_i)=y_i,\quad 0\le i\le n$$

$$\text{(S2)}\quad s\in C^2\big([a,b]\big)$$

$$\text{(S3)}\quad \int_a^b\big[s''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x=\min_{\substack{f\in C^2([a,b])\\ f(x_i)=y_i\ ,\ 0\le i\le n}}\int_a^b\big[f''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x$$

يمثّل الشرط (S3) طاقة الانحناء الأصغرية لصفيحة مرنة تمرّ بالنقاط $\big((x_i,y_i)\big)_{0\le i\le n}$. لإيجاد حلّ لهذه المسألة، نضع $f(x)=s(x)+\varepsilon\cdot h(x)$ حيث $\varepsilon\in\mathbb{R}$ و $h\in C^2\big([a,b]\big)$ يحقق الشروط

$$h(x_i)=0,\quad 0\le i\le n \tag{23}$$

وبما أنّ التابع $s(x)$ يحقق الشرط (S3) فإنّ

$$\begin{aligned}\int_a^b\big[s''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x &\le \int_a^b\big[s''(x)+\varepsilon\cdot h''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x\\ &=\int_a^b\big[s''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x+2\varepsilon\int_a^b s''(x)h''(x)\,\mathrm{d}\,x+\varepsilon^2\int_a^b\big[h''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وهذا يكافئ

$$\int_a^b s''(x)\cdot h''(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{24}$$

أياً كان $h \in C^2\big([a,b]\big)$ يحقق الشروط (23). لنفترض أنّ التابع $s''(x)$ يقبل الاشتقاق مع الاستمراريّة على كلّ مجالٍ جزئي $[x_i, x_{i+1}]$، عندئذٍ، بتكامل العبارة (24) بالتجزئة نحصل على

$$s''(x)h'(x)\Big|_a^b - \int_a^b s'''(x)h'(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{25}$$

ويقودنا هذا إلى المبرهنة التالية.

مبرهنة 7: لتكن $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تجزئة ما للمجال $[a,b]$، وليكن $f, s : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعين يحققان الشرطين (S1) و (S2). نفترض أنّ

$$s''(b)\big[f'(b) - s'(b)\big] = s''(a)\big[f'(a) - s'(a)\big] \tag{26}$$

وأنّ مقصور التابع s على كلّ مجالٍ جزئي $[x_{i-1}, x_i]$ يتطابق مع تابع كثير الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر. عندئذٍ تتحقق المتراجحة التالية:

$$\int_a^b \big[s''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x \le \int_a^b \big[f''(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x \tag{27}$$

الإثبات: نضع

$$h(x) = f(x) - s(x)$$

تقتضي الفرضيّة (26) أن يكون الجزء الأوّل من العبارة (25) معدوماً.

وبما أنّ تابع المشتقّ الثالث $s'''(x)$ ثابتٌ على كل مجال $[x_{i-1}, x_i]$ ويساوي α_i، فإنّ الجزء الثاني من العبارة (25) يكتب على الشكل:

$$\begin{aligned}\int_a^b s'''(x)\,h'(x)\,\mathrm{d}\,x &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} h'(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(h(x_i) - h(x_{i-1})\big) = 0\end{aligned}$$

استناداً إلى الشروط (23). وهكذا، تكون المساواة (24) محقّقة ومن ثمّ تكون المتراجحة (27) محقّقة أيضاً. ■

تبيّن المبرهنة السابقة أنّ التوابع المرشحّة لتكون حلولاً محققة للشروط (S1···S3) هي التوابع من الصفّ C^2 والمكوّنة قِطَعياً من توابع كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر.

تعريف: لتكن لدينا شبكة النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. نسمّي تابع Spline من المرتبة $m \geq 1$ على المجال $[a,b]$ كل تابع حقيقي $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ يحقق الشرطين التاليين:

i) مقصـــور s على كلّ من المجالات $\{[x_i, x_{i+1}], 0 \leq i < n\}$ هو كثير حدود من الدرجة m.

ii) $s \in C^{m-1}\big([a,b]\big)$.

تشكّل مجموعة توابع الـ Splines من المرتبة m على المجال $[a,b]$ فضاءً شعاعياً عدد أبعاده $n+m$ نرمز إليه بالكتابة $S_m^n\big([a,b]\big)$.

من الواضح أنّ مشتق تابع Spline من المرتبة m هو تابع Spline من المرتبة $m-1$، وكذلك فإنّ أي تابع أصلي لتابع Spline من المرتبة m هو تابع Spline من المرتبة $m+1$.

إنّ أكثر توابع الـ Splines استخداماً وتداولاً هي توابع الـ Splines من المرتبة الثالثة (تكعيبيّة)، وذلك لأسبابٍ عديدة: فهي توابع ملساء قليلة الاهتزازات عند استعمالها لأغراض استيفاء المعطيات، على النقيض من توابع كثيرات حدود استيفاء لاغرانج ؛ وهي إضافةً إلى ذلك سهلة الحساب عدديّاً.

1.2.3 إنشاء تابع Spline الاستيفاء التكعيبيّ

في حالة $m = 3$ فإنّ عدد أبعاد الفضاء $S_3^n\big([a,b]\big)$ يساوي $n+3$، ولدينا بالمقابل $n+1$ شرط استيفاء $\{s(x_i) = y_i, 0 \leq i \leq n\}$ يجب أن يحقّقها تابع الاستيفاء، يتبيّن من ذلك أنّه لدينا درجتا حرّية إضافيّتان يتعيّن علينا استغلالهما بغية تحديد تابع استيفاء وحيد من بين جميع توابع الفضاء $S_3^n\big([a,b]\big)$.

تُستغلّ درجتا الحرّية هاتان لتحقيق الشرط (26) في المبرهنة 7 والذي يجعل بدوره تابع الاستيفاء يحقق شرط الطاقة الأصغريّة (S3) ويجري ذلك بعدّة أشكال منها:

⟨1⟩ حالة تابع الـ Spline الطبيعي (أو الحرّ) ويوافق اختيار الشرطين:

$$s''(a) = s''(b) = 0 \tag{28}$$

⟨2⟩ حالة تابع الـ Spline التّام ويوافق معرفة قيم ميل المماس عند طرفي المجال $[a,b]$:

$$s'(a) = f'(a) \quad , \quad s'(b) = f'(b) \tag{29}$$

⟨3⟩ حالة تابع الـ Spline الدَوريّ ويوافق تحقق شَرطيّ تساوي قيم المشتق الأول والثاني عند طرفي المجال $[a,b]$:

$$s'(a) = s'(b) \quad , \quad s''(a) = s''(b) \tag{30}$$

نعرض فيما يلي كيفيّة تعيين تابع Spline $s \in S_3^n\big([a,b]\big)$ يحقق شروط استيفاء لاغرانج

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0,\dots,n$$

ويحقق -إضافةً لذلك- عند طرفي المجال $[a,b]$ إحدى مجموعات الشروط (28)، (29)، (30).

ليكن $[x_i, x_{i+1}]$ مجالاً جزئياً من مجالات التجزئة

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

نعرّف الرموز التالية:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$
$$p_i = s'(x_i) \quad , \quad p_{i+1} = s'(x_{i+1})$$

نرمز بـ $s_i(x)$ لكثير الحدود التكعيبي الوحيد المحقق لشروط استيفاء هرميت عند طرفي المجال $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= y_i \quad , \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ s_i'(x_i) &= p_i \quad , \quad s_i'(x_{i+1}) = p_{i+1} \end{aligned} \tag{31}$$

نجد من العلاقة (19) أنّه يمكن التعبير عن $s_i(x)$ بالصيغة التالية:

$$s_i(x) = y_i + (x - x_i)p_i + (x - x_i)^2 \frac{m_i - p_i}{h_i} + (x - x_i)^2(x - x_{i+1}) \frac{p_i + p_{i+1} - 2m_i}{h_i^2} \tag{32}$$

نلاحظ هنا أنّ كلّ اختيارٍ للقيم $p_n,\dots,p_0$ يقابله تابع استيفاء هرميت قطعي تكعيبي $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ معرّف بمقصوراته

$$\{s_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}, \quad i = 0,\dots,n-1\}$$

من الواضح أنّ هذا التابع يحقّق الخواص التالية:

أولاً: أياً كان $0 \le i \le n$ فإنّ $s(x_i) = y_i$،

ثانياً: $s \in C^1\big([a,b]\big)$،

ثالثاً: أياً كان $0 \le i \le n-1$ فإنّ $s_{/[x_i,x_{i+1}]}$ يتطابق مع تابع كثير الحدود درجته ≥ 3.

نستنتج مما سبق، أنّه لتعيين تابع Spline الاستيفاء التكعيبي يكفي أن نعيّن قيم الميول $p_n,\dots,p_0$ بحيث يكون تابع المشتقّ $s''(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$، أيْ أنْ يحقق الشروط:

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad 0 \le i \le n-2 \tag{33}$$

وبحيث تتحقق إحدى مجموعات الشروط (28)، (29)، (30). باشتقاق طرفي العلاقة (32) مرّتين نحصل على

$$s_i''(x_{i+1}) = \frac{2}{h_i}(2p_{i+1} + p_i - 3m_i)$$

$$s_{i+1}''(x_{i+1}) = \frac{-2}{h_{i+1}}(p_{i+2} + 2p_{i+1} - 3m_{i+1})$$

ومن ثمّ فإنّ شرط الاستمراريّة (33) يؤول إلى

$$\frac{p_i}{h_i} + 2\,p_{i+1}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{p_{i+2}}{h_{i+1}} = 3\left(\frac{m_i}{h_i} + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}}\right), \; 0 \le i \le n-2 \tag{34}$$

تشكّل هذه الشروط جملة مكوّنة من $n-1$ معادلة خطّية بالمجاهيل:

$$p_n,\dots,p_0$$

لإكمال تحديد تابع استيفاء وحيد يلزمنا معادلتين إضافيّتين نحصل عليهما من الشروط التي تحدد نوع تابع الـ Spline:

- في حالة تابع الـ Spline الطبيعي تعطينا الشروط (28) المعادلتين:

$$\begin{cases} 2p_0 + p_1 = 3m_0 \\ p_{n-1} + 2p_n = 3m_{n-1} \end{cases} \tag{35}$$

- في حالة تابع الـ Spline التّام تكون قيم p_0 و p_n معلومة.
- في حالة تابع الـ Spline الدّوري تعطينا الشروط (30) المعادلتين:

$$\begin{cases} p_0 - p_n = 0 \\ \dfrac{p_{n-1}}{h_{n-1}} + 2p_0\left(\dfrac{1}{h_{n-1}} + \dfrac{1}{h_0}\right) + \dfrac{p_1}{h_0} = 3\left(\dfrac{m_{n-1}}{h_{n-1}} + \dfrac{m_0}{h_0}\right) \end{cases} \tag{36}$$

تكتب جملة المعادلات الخطيّة هذه (في حالة تابع الـ Spline التّام) كما يلي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & & & \\ \frac{1}{h_1} & 2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_{n-2}} & \\ & & & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_{c} \tag{37}$$

حيث

$$\begin{cases} c_1 = 3\left(\dfrac{m_0}{h_0} + \dfrac{m_1}{h_1}\right) - \dfrac{p_0}{h_0} \\ c_i = 3\left(\dfrac{m_{i-1}}{h_{i-1}} + \dfrac{m_i}{h_i}\right), \quad 2 \le i \le n-2 \\ c_{n-1} = 3\left(\dfrac{m_{n-2}}{h_{n-2}} + \dfrac{m_{n-1}}{h_{n-1}}\right) - \dfrac{p_n}{h_{n-1}} \end{cases}$$

نلاحظ هنا أنّ المصفوفة A متناظرة وثلاثيّة الأقطار وذات قطر رئيس مسيطر تماماً فهي إذن قلوبة وهذا يثبت أنّ تابع Spline الاستيفاء التّام موجودٌ ووحيد. وبالأسلوب نفسه، نبرهن وجود ووحدانيّة كلٍّ من تابع الـ Spline الطبيعي وتابع الـ Spline الدوري.

تزودنا المبرهنة التالية بتحديدٍ من الأعلى لقيم الميول $(p_i)_{1\le i\le n-1}$ بدلالة الخطوة الأعظمية

$$h = \max_{0\le i\le n-1} h_i$$

والقيمة

$$\|c\|_\infty = \max_{1\le i\le n-1} |c_i|$$

مبرهنة 8: يحقق الحل الوحيد p للجملة الخطيّة $A\cdot p = c$ المعرّفة بالعلاقة (37) المتراجحة التالية:

$$|p_i| \le \gamma\cdot\frac{h}{2} \tag{38}$$

حيث $\gamma = \max_{1\le i\le n-1}|c_i|$ إضافةً لذلك، المصفوفة A قلوبة (خُذْ $\gamma = 0$).

الإثبات: ليكن $1 \le \ell \le n-1$ دليلاً تتحقق عنده المساواة:

$$|p_\ell| = \|p\|_1 = \max_{1\le i\le n-1}|p_i|$$

تكتب المعادلة الممثّلة بالسطر ℓ من الجملة $A\cdot p = c$ كما يلي:

$$2\left(\frac{1}{h_{\ell-1}}+\frac{1}{h_\ell}\right)\cdot p_\ell = -\frac{p_{\ell-1}}{h_{\ell-1}} - \frac{p_{\ell+1}}{h_\ell} + c_\ell$$

بأخذ القيمة المطلقة للطرفين نحصل على

$$2\left(\frac{1}{h_{\ell-1}}+\frac{1}{h_\ell}\right)\cdot|p_\ell| = |p_\ell|\cdot\left(\frac{1}{h_{\ell-1}}+\frac{1}{h_\ell}\right) + \gamma$$

ومنه نجد أنّ

$$|p_\ell| \le \frac{h_\ell\cdot h_{\ell-1}}{h_\ell+h_{\ell-1}}\gamma \le \frac{\max\left(h_\ell,h_{\ell-1}\right)}{2}\gamma \le \frac{h}{2}\gamma$$

وذلك لأنّ $h_\ell + h_{\ell-1} \ge 2\min\left(h_\ell,h_{\ell-1}\right)$. ■

مثال: لنعيد معالجة معطيات الشكل 1:

$$\{(0,-1),(2,1),(4,6),(5,0),(8,2),(10,5)\}$$

لدينا في هذا المثال:

$$\begin{cases} n = 5 \\ h_0 = 2, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 3, \quad h_4 = 2 \end{cases}$$

أولاً: الاستيفاء باستخدام تابع Spline تكعيبي تام مع إضافة الشرطين $p_0 = 0$ و $p_5 = 1$.

في هذه الحالة، تأخذ الجملة الخطيّة (37) الشكل:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} \\ -\frac{57}{4} \\ -\frac{52}{3} \\ \frac{31}{12} \end{pmatrix}$$

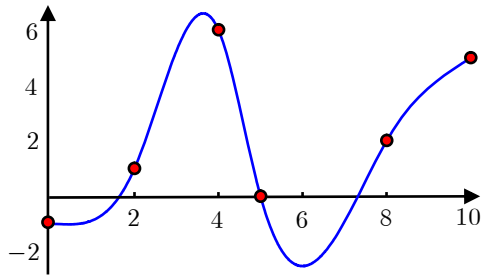
تقبل هذه الجملة الحل الوحيد:

$$\begin{aligned} p_1 &= 906 \,/\, 259, \\ p_2 &= -1809 \,/\, 518, \\ p_3 &= -5721 \,/\, 1036, \\ p_4 &= 1375 \,/\, 518 \end{aligned}$$

ومن ثمّ، نحصل من العلاقات (32) على صيغة تابع الـ Spline التام الموافق لمعطيات المسألة:

$$s(x) \simeq \begin{cases} -1 - 0.249\,x^2 + 0.375\,x^3 & 0 \le x < 2 \\ 11.985 - 19.477\,x + 9.489\,x^2 - 1.249\,x^3 & 2 \le x < 4 \\ -258.996 + 183.759\,x - 41.319\,x^2 + 2.986\,x^3 & 4 \le x < 5 \\ 172.543 - 75.165\,x + 10.465\,x^2 - 0.467 x^3 & 5 \le x < 8 \\ -160.888 + 48.539\,x - 4.831\,x^2 + 0.164\,x^3 & 8 \le x \le 10 \end{cases}$$

والذي نوضّحه بالرسم البياني التالي



ثانياً: الاستيفاء باستخدام تابع Spline تكعيبي طبيعي

في هذه الحالة، يمكن التعبير عن مجموعة الشروط (34) إضافةً لشرطي النهاية الحرّة (35) عند طرفي المجال $[0,10]$ بالجملة الخطيّة التالية:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1/2 & 2 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & 8/3 & 1/3 & \\ & & & 1/3 & 5/3 & 1/2 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 21/4 \\ -57/4 \\ -52/3 \\ 35/12 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

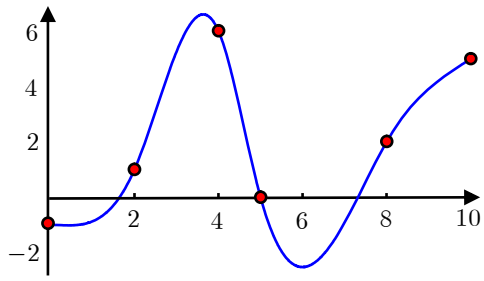
تقبل هذه الجملة الحل الوحيد:

$$\begin{cases} p_0 = -\frac{656}{2283}, & p_1 = \frac{8161}{2283}, & p_2 = -\frac{16033}{4566} \\ p_3 = -\frac{50255}{9132}, & p_4 = \frac{11687}{4566}, & p_5 = \frac{2215}{2283} \end{cases}$$

ومن ثمّ، نحصل من العلاقات (32) على صيغة تابع الـ Spline الطبيعي الموافق لمعطيات المسألة:

$$s(x) \simeq \begin{cases} -1 - 0.287\,x + 0.322\,x^3 & 0 \le x < 2 \\ 11.448 - 18.960\,x + 9.336\,x^2 - 1.234\,x^3 & 2 \le x < 4 \\ -258.607 + 187.582\,x - 41.299\,x^2 + 2.985\,x^3 & 4 \le x < 5 \\ 173.974 - 75.967\,x + 10.611\,x^2 - 0.475\,x^3 & 5 \le x < 8 \\ -137.148 + 40.704\,x - 3.973\,x^2 + 0.132\,x^3 & 8 \le x \le 10 \end{cases}$$

والذي نوضّحه بالرسم البياني التالي



2.2.3 دراسة خطأ الاستيفاء بتوابع الـ Splines

لتكن $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تجزئةً للمجال $[a,b]$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق. وليكن $s \in S_3^n\big([a,b]\big)$ تابع الـ Spline التّام المحقّق للشروط:

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \quad 0 \le i \le n \\ s'(x_0) = f'(x_0), \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

رأينا في الفقرة السابقة أنّ تابع الـ Spline هذا معرّفٌ بالصيغة (32) حيث تحقق الميول $\big(p_i\big)$ المعادلات (34) إضافةً إلى الشرطين $p_0 = f'(x_0)$ و $p_n = f'(x_n)$. نريد في هذه الفقرة أن ندرس الخطأ $f(x) - s(x)$ على المجال $[a,b]$.

تكمن الفكرة الأساسيّة في دراسة خطأ الاستيفاء في تقسيم عبارة الخطأ إلى جزأين وذلك بإدخال تابع استيفاء هرميت التكعيبي على مجالٍ جزئي $[x_i, x_{i+1}]$ ولنرمز إليه بـ $q_i(x)$ وهو محدد بالشروط:

$$\begin{cases} q_i(x_i) = f(x_i) \quad , \quad q_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \\ q_i'(x_i) = f'(x_i) \quad , \quad q_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}) \end{cases}$$

ويمكن التعبير عنه أيضاً بالصيغة (32) إذا استبدلنا القيم $\big(f'(x_i)\big)$ بالقيم $\big(p_i\big)$. وعندها يمكننا تجزئة عبارة الخطأ على مجالٍ $[x_i, x_{i+1}]$ إلى مجموع حدّين يمثّل الأول فيهما خطأ استيفاء هرميت التكعيبي $f(x) - q_i(x)$ والذي درسناه سابقاً ويمثّل الثاني الفرق بين تابع الـ Spline التّام $s_i(x)$ وتابع استيفاء هرميت التكعيبي $q_i(x)$ على هذا المجال:

$$f(x) - s_i(x) = \big[f(x) - q_i(x)\big] + \big[q_i(x) - s_i(x)\big] \qquad (39)$$

فيما يتعلّق بالحدّ الأوّل فإننا نعلم (المتراجحة (21)) أنّه إذا كان $f \in C^4[a,b]$ فإنّ خطأ استيفاء هرميت التكعيبي يحقق المتراجحة:

$$\left|f(x)-q_i(x)\right| \le \frac{h_i^4}{384}\max_{t\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f^{(4)}(t)\right| \tag{40}$$

وفيما يتعلّق بالحدّ الثاني لدينا

$$\begin{aligned} q_i(x)-s_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h_i^2}&[(f'(x_{i+1})-p_{i+1})(x-x_i) \\ &+(f'(x_i)-p_i)(x-x_{i+1})] \end{aligned} \tag{41}$$

ومن ذلك يتبيّن أنّه يلزمنا الحصول على تقدير للمقادير $\left(f'(x_i)-p_i\right)$.

مبرهنة 9: ليكن $f \in C^4[a,b]$، $h=\max_i h_i$ حيث $h_i = x_{i+1}-x_i$. إذا حققت الأعداد (p_i) المعادلات (34) إضافةً إلى الشرطين $p_0 = f'(x_0)$ و $p_n = f'(x_n)$ فإنّ

$$\left|f'(x_i)-p_i\right| \le \frac{h^3}{24}\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \tag{42}$$

إضافةً لذلك، إذا كانت التجزئة $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ منتظمة $\left(h=(b-a)/n\right)$ وكان $f\in C^5[a,b]$ فإنّ

$$\left|f'(x_i)-p_i\right| \le \frac{h^4}{60}\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(5)}(x)\right| \tag{43}$$

الإثبات: (حالة التجزئة المنتظمة)

في هذه الحالة تحقق الأعداد $\left(p_i\right)$ المعادلات الخطيّة:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(p_{i-1}+4p_i+p_{i+1}\right)-\frac{3}{h^2}\left(f(x_{i+1})-f(x_{i-1})\right)=0 \\ &1\le i\le n-1 \end{aligned} \tag{44}$$

للحصول على تقديرٍ للفرق $f'(x_i)-p_i$ نقوم بحساب التغيّرات (d_i) الناجمة عن استبدال الأعداد $\big(f'(x_i)\big)$ بالأعداد (p_i) في المعادلات (44):

$$d_i=\frac{1}{h}\Big(f'(x_{i-1})+4f'(x_i)+f'(x_{i+1})\Big)-\frac{3}{h^2}\big(f(x_{i+1})-f(x_{i-1})\big) \qquad (45)$$
$$1\le i\le n-1$$

وباستخدام صيغة تايلور في النشر المحدود لكلّ من المقدارين $f(x_i\pm h)$ و $f'(x_i\pm h)$، على سبيل المثال:

$$f(x_i\pm h)=f(x_i)\pm hf'(x_i)\pm\frac{h^2}{2!}f''(x_i)\pm\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)\pm\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)$$
$$\pm h^5\int_0^1\frac{(1-t)^4}{4!}f^{(5)}(x_i\pm th)\,\mathrm{d}\,t$$

نجد

$$d_i=h^3\int_0^1\left(\frac{(1-t)^3}{3!}-3\frac{(1-t)^4}{4!}\right).\Big(f^{(5)}(x_i+th)+f^{(5)}(x_i-th)\Big)\,\mathrm{d}\,t$$

وبما أنّ التابع $(1-t)^3/3!-3(1-t)^4/4!$ لا يغيّر إشارته على المجال $[0,1]$ فإن

$$\big|d_i\big|\le h^3\underbrace{\int_0^1\left(\frac{(1-t)^3}{3!}-3\frac{(1-t)^4}{4!}\right)\mathrm{d}\,t}_{=1/30}\times 2\times\max_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]}\big|f^{(5)}(x)\big|$$

نضع

$$e=(e_1,\dots e_{n-1})^T\quad,\quad d=(d_1,\dots d_{n-1})^T$$

حيث $e_i=f'(x_i)-p_i$.

بحساب الفرق بين (44) و (45) نجد $A\cdot e=d$ حيث A هي مصفوفة الجملة الخطيّة (37).

باستخدام المبرهنة 8 نجد

$$\big|e_i\big|\le\frac{h}{2}\max_j\big|d_j\big|\le\frac{h^4}{60}\times\max_{x\in[a,b]}\big|f^{(5)}(x)\big|$$

وهذا ما نريد إثباته. ■

مبرهنة 10: إذا كان $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^4، وكانت

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

تجزئةً ما للمجال $[a,b]$ أطوال الخطوات فيها $h_i = x_{i+1} - x_i$ و $h = \max\limits_i h_i$

فإنّ تابع الـ Spline الوحيد $s \in S_3^n\big([a,b]\big)$ الذي يحقق شروط الاستيفاء:

$$\begin{cases} s\,(x_i) = f(x_i), & 0 \le i \le n \\ s'(x_0) = p_0 = f'(x_0) \\ s'(x_n) = p_n = f'(x_n) \end{cases}$$

يحقق المتراجحة التالية

$$\big|f(x) - s(x)\big| \le \frac{5}{384} h^4 \max_{x\in[a,b]} \big|f^{(4)}(x)\big| \tag{46}$$

وفي حالة تجزئة منتظمة للمجال $(h_i = h)$ و $f \in C^5[a,b]$، يحقق s المتراجحة:

$$\big|f(x) - s(x)\big| \le \frac{h^4}{384} \max_{x\in[a,b]} \big|f^{(4)}(x)\big| + \frac{h^5}{240} \max_{x\in[a,b]} \big|f^{(5)}(x)\big| \tag{47}$$

الإثبات: (حالة التجزئة المنتظمة)

ليكن $x \in [x_i, x_{i+1}]$، ولنحدّ من الأعلى حدّي العلاقة (39). من المتراجحة (40) لدينا

$$\big|f(x) - q_i(x)\big| \le \frac{h^4}{384} \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} \big|f^{(4)}(t)\big| \le \frac{h^4}{384} \max_{t\in[a,b]} \big|f^{(4)}(t)\big|$$

وباستخدام العلاقتين (41) و (43) نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned} \big|q_i(x) - s_i(x)\big| &\le \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i^2} h_i \frac{h^4}{60} \max_{x\in[a,b]} \big|f^{(5)}(x)\big| \\ &\le \frac{h^5}{4 \times 60} \max_{x\in[a,b]} \big|f^{(5)}(x)\big| \end{aligned}$$

من المتراجحتين السابقتين نستنتج المطلوب. ■

مثال:

لنتفحّص مرّة أخرى مسألة الاستيفاء في حالة التابع

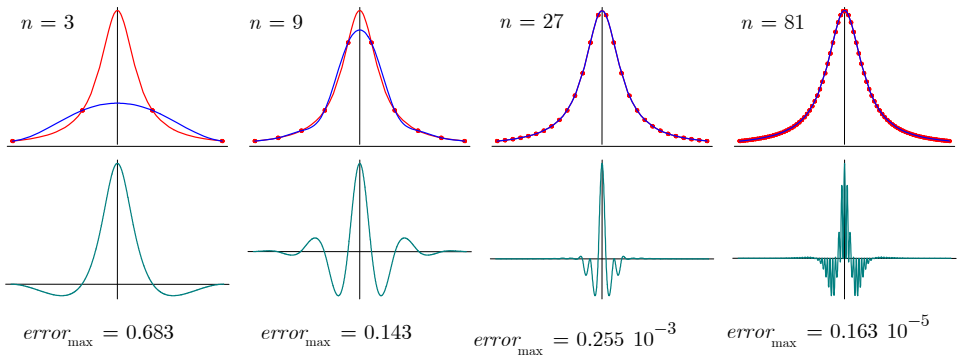
$$f(x) = \frac{1}{1+25\,x^2}, \quad -1 \le x \le 1 \tag{48}$$

ولنحسب تابع Spline الاستيفاء التام في حالة التجزئة المنتظمة:

$$x_i = -1 + 2i \,/\, n, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

يبيّن الشكل 9 عمليّة الاستيفاء وخطأ تقريب الاستيفاء على المجال $[-1,1]$ عندما:

$$n \in \{3,\ 9,\ 27,\ 81\}$$



الشكل 9: توابع Spline الاستيفاء التّام للتابع f .

4. الاستيفاء باستخدام توابع B-Splines التكعيبيّة

1.4. توابع B-Splines

لتكن

$$\cdots < x_{-3} < \cdots < \underbrace{x_0}_{a} < \cdots < \underbrace{x_n}_{b} < \cdots < x_{n+3} < \cdots \tag{49}$$

متتالية من النقاط المرتّبة على المحور الحقيقي.

تُعرّف توابع الـ B-Splines من الدرجة $k \ge 1$ بعلاقة التدريج:

$$\begin{cases} B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \le t \le x_{i+1} \\ 0 & else \end{cases} \\ B_{i,k}(t) = \dfrac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(t) + \dfrac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t), \quad k \ge 1 \end{cases}$$

يبرهن أنّه أيّاً كان $1 \le k$ فإنّ التوابع

$$B_{i,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

هي توابع من الفضاء $C^{k-1}(\mathbb{R})$ وأنّ مقصور التابع $B_{i,k}$ على كلّ مجالٍ من المجالات $\{[t_i,t_{i+1}],\cdots,[t_{i+k},t_{i+k+1}]\}$ يتطابق مع تابع كثير الحدود درجته $\ge k$. من ناحية ثانية، يكون $B_{i,k}(t) = 0$ عندما $t \notin [t_i,t_{i+k+1}]$.

في حالة $k = 3$ تتكون التوابع $B_{i,3}(t)$ من أجزاء كثيرات حدود من الدرجة الثالثة على كل مجالٍ من المجالات $\{[t_i,t_{i+1}[,[t_{i+1},t_{i+2}[,[t_{i+2},t_{i+3}[,[t_{i+3},t_{i+4}[\}$ وتكون معدومة خارج المجال $[t_i,t_{i+4}]$. تُعرَف هذه التوابع باسم توابع B-Splines التكعيبيّة. لهذه التوابع خواص عديدة نذكر منها:

- أياً كانت $t \in [t_i,t_{i+4}]$ فإنّ $0 \le B_{i,3}(t) \le 1$
- تشكّل توابع الـ B-splines التكعيبيّة تجزئة للواحد:

$$\sum_{i=-3}^{n-1} B_{i,3}(t) = 1, \quad t \in [a,b]$$

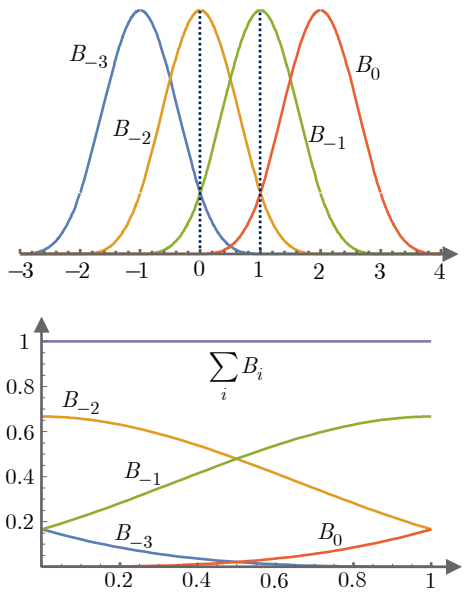
- التوابع $(B_{i,3})$ مستقلّة خطياً.

مثال:

في حالة تجزئة منتظمة $(n = 1)$:

$$x_i = i, \quad -3 \le i \le n+3$$

تمثّل التوابع $\{B_{i,3}(t), -3 \le i \le 0\}$ تجزئة للواحد على المجال $[0,1]$ كما هو مبيّن في الشكل التالي:



نلاحظ هنا أنّ مقصورات التوابع $\{B_{i,3}(t), -3 \le i \le 0\}$ على المجال $[0,1]$ تشكّل أساساً لفضاء توابع كثيرات الحدود $\mathcal{P}_3\big([0,1]\big)$. تشكّل التوابع $\{B_{-3,3},\ldots,B_{n-1,3}\}$ أساساً للفضاء $S_3^n\big([a,b]\big)$ الموافق للتجزئة (49).

نصطلح فيما يلي استخدام الكتابة $\{B_{-3},\ldots,B_{n-1}\}$ للتعبير عن هذا الأساس.

2.4. توابع B-Splines والاستيفاء التابعي

ليكن $s \in S_3^n\big([a,b]\big)$. يمكن التعبير عن التابع s كتركيب خطي

$$s(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(t)$$

بالأساس $\{B_{-3},\ldots,B_{n-1}\}$. نبحث في مسألة الاستيفاء عن تابع spline يحقق الشروط:

$$s(x_i) = y_i, \quad 0 \le i \le n$$

أو بشكلٍ مكافئ

$$\sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(x_i) = y_i \quad 0 \le i \le n \tag{50}$$

بإضافة شَرطين من أحد الأنماط $\{(28),(29),(30)\}$ للمعادلات (50) نحصل على جملة معادلات خطيّة مؤلّفة من $n+3$ معادلةً بـ $n+3$ مجهولاً $\{\alpha_{-3},\ldots,\alpha_{n-1}\}$.

أولاً: حالة تابع الـ Spline الطبيعي (أو الحرّ) ويوافق اختيار الشرطين:

$$\begin{cases} s''(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{-3}B''_{-3}(a)+\alpha_{-2}B''_{-2}(a)+\alpha_{-1}B''_{-1}(a)=0 \\ s''(b)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{n-3}B''_{n-3}(b)+\alpha_{n-2}B''_{n-2}(b)+\alpha_{n-1}B''_{n-1}(b)=0 \end{cases}$$

في هذه الحالة، تكتب جملة المعادلات الخطيّة الموافقة لمسألة الاستيفاء بالشكل:

$$\begin{pmatrix} B''_{-3}(a) & B''_{-2}(a) & B''_{-1}(a) & & & \\ B_{-3}(x_0) & B_{-2}(x_0) & B_{-1}(x_0) & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & B_{n-3}(x_n) & B_{n-2}(x_n) & B_{n-1}(x_n) & \\ & & B''_{n-3}(b) & B''_{n-2}(b) & B''_{n-1}(b) & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

ثانياً: حالة تابع الـ Spline التّام ويوافق معرفة قيم ميل المماس عند طرفي المجال $[a,b]$:

$$\begin{cases} s'(a)=f'(a) \Leftrightarrow \alpha_{-3}B'_{-3}(a)+\alpha_{-2}B'_{-2}(a)+\alpha_{-1}B'_{-1}(a)=f'(a) \\ s'(b)=f'(b) \Leftrightarrow \alpha_{n-3}B'_{n-3}(b)+\alpha_{n-2}B'_{n-2}(b)+\alpha_{n-1}B'_{n-1}(b)=f'(b) \end{cases}$$

في هذه الحالة، تكتب جملة المعادلات الخطيّة الموافقة لمسألة الاستيفاء بالشكل:

$$\begin{pmatrix} B'_{-3}(a) & B'_{-2}(a) & B'_{-1}(a) & & & \\ B_{-3}(x_0) & B_{-2}(x_0) & B_{-1}(x_0) & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & B_{n-3}(x_n) & B_{n-2}(x_n) & B_{n-1}(x_n) & \\ & & B'_{n-3}(b) & B'_{n-2}(b) & B'_{n-1}(b) & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f'(a) \\ y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ f'(b) \end{pmatrix}$$

ثالثاً: حالة تابع الـ Spline الدَوريّ ويوافق تحقق شَرطيّ تساوي قيم المشتق الأول والثاني عند طرفي المجال $[a,b]$:

$$\begin{cases} s'(a)=s'(b) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{-3}B'_{-3}(a)+\alpha_{-2}B'_{-2}(a)+\alpha_{-1}B'_{-1}(a) \\ -\big(\alpha_{n-3}B'_{n-3}(b)+\alpha_{n-2}B'_{n-2}(b)+\alpha_{n-1}B'_{n-1}(b)\big)=0 \end{cases} \\ s''(a)=s''(b) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{-3}B''_{-3}(a)+\alpha_{-2}B''_{-2}(a)+\alpha_{-1}B''_{-1}(a) \\ -\big(\alpha_{n-3}B''_{n-3}(b)+\alpha_{n-2}B''_{n-2}(b)+\alpha_{n-1}B''_{n-1}(b)\big)=0 \end{cases} \end{cases}$$

في هذه الحالة، تكتب جملة المعادلات الخطيّة الموافقة لمسألة الاستيفاء بالشكل:

$$\begin{pmatrix} B'_{-3}(a) & B'_{-2}(a) & B'_{-1}(a) & 0\cdots 0 & -B'_{n-3}(b) & -B'_{n-2}(b) & -B'_{n-1}(b) \\ B_{-3}(x_0) & B_{-2}(x_0) & B_{-1}(x_0) & 0\cdots 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{n-3}(x_n) & B_{n-2}(x_n) & B_{n-1}(x_n) \\ B''_{-3}(b) & B''_{-2}(b) & B''_{-1}(b) & 0\cdots 0 & -B''_{n-3}(b) & -B''_{n-2}(b) & -B''_{n-1}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-3} \\ \alpha_{-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. مسائل وتمارين

1.5. عيّن كثير حدود الاستيفاء التربيعي الموافق للتابع $f(x)=\ln x$ عند النقاط $[10,\ 11,\ 12]$.

أولاً: أعط قيمة تقديريّة للخطأ المرتكب عند النقطة $x=11.1$ إذا استخدمنا تقريب التابع $\ln x$ بكثير الحدود الاستيفائي التربيعي.

ثانياً: ادرس تغيّرات إشارة الخطأ بدلالة x.

2.5. برهن أنّ تابع الفروق المقسومة $\Delta^n f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ هو تابعٌ متناظر ؛ أيْ أنّه أياً كان التبديل σ لمجموعة الأدلّة $\{0,1,\ldots,n\}$ فإنّ

$$\Delta^n f(x_{\sigma(0)},x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \Delta^n f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

3.5. لتكن $\mathcal{D}=\left\{(0,3\ /\ 2)\ ,\ (1\ /\ 4,1)\ ,\ (1\ /\ 2,1\ /\ 2)\right\}$. أنشئ جدول الفروق المقسومة الموافق للمعطيات $\mathcal{D}$.

أولاً: عيّن صيغة نيوتن لكثير حدود الاستيفاء $p(x)$ الموافق لهذه المعطيات.

ثانياً: نفترض أنّ المعطيات $\mathcal{D}$ مولّدة بالتابع الحقيقي $f(x)=1+\cos(2\pi x)\ /\ 2$. أثبت صحّة المتراجحة:

$$\max_{0\le x\le 1/2}\left|f(x)-p(x)\right| \le \frac{\pi^3}{144\sqrt{3}}$$

4.5. لتكن $a<x_1<b$ تجزئةً للمجال الحقيقي $[a,b]$. وليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعاً عُلِمتْ قِيمَه:

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f'(x_1),\quad f(b)$$

أولاً: أثبت أنّه يوجد تابع كثير الحدود $p\in\mathcal{P}_3$ وحيد يحقق شروط الاستيفاء التالية:

$$\begin{cases} p(a)=f(a) \\ p(x_1)=f(x_1),\quad p'(x_1)=f'(x_1) \\ p(b)=f(b) \end{cases}$$

عيّن صيغة نيوتن لهذا التابع واكتب عبارة خطأ الاستيفاء في هذه الحالة.

ثانياً: نفترض الآن $a=-1,\ x_1=0,\ b=1$. وندرس حالة التابع $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(i) عيّن كثير حدود الاستيفاء في هذه الحالة.

(ii) أوجد قيمة الخطأ الأعظمي للاستيفاء، أيْ قيمة المقدار $\max\limits_{a\le x\le b}\left|\dfrac{1}{1+x^2}-p(x)\right|$.

5.5. لتكن التجزئة $x_0<x_1<\cdots<x_n$ ، حيث $2\le n$. لندرس التابع:

$$\Lambda(x)=\sum_{i=0}^{n}\left|\ell_i(x)\right|,\quad \ell_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

(a) ارسم $\Lambda(x)$ في حالة التجزئة $\{-1,0,1\}$.

(b) برهن أنّه أياً كان $x\in[x_{j-1},x_j]$ فإنّ

$$\Lambda(x)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i\ell_i(x),\quad \varepsilon_i=\begin{cases}(-1)^{j-i+1} & i\le j-1\\ (-1)^{i-j} & i\ge j\end{cases}$$

(c) بيّن أنّ للتابع $\Lambda(x)$ قيمة محليّة أعظميّة وحيدة في كلّ مجالٍ $[x_{j-1},x_j]$.

6.5. عيّن قيم ثوابت لوبيغ Lebesgue

$$\Lambda_n=\max_{x\in[-1,1]}\sum_{i=0}^{n}\left|\ell_i(x)\right|,\quad n=1,2,3,\ldots$$

(a) في حالة التجزئة المنتظمة:

$$x_k=-1+2\frac{k}{n},\quad 0\le k\le n$$

(b) في حالة نقاط تشيبيشف Chebyshev:

$$x_k=\cos\left[\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right],\quad 0\le k\le n$$

7.5. ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

نعرّف مؤثر الفرق بالعلاقات

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x), \quad \Delta^2 g(x) = \Delta(\Delta g(x)), \quad \ldots$$

احسب الفروق

$$\Delta f(x), \quad \Delta^2 f(x), \quad \Delta^3 f(x), \quad B(x) = \Delta^4 f(x)$$

أولاً: برهن أنّ $B(x)$ هو تابع Spline (يسمّى B-Spline) ذو حامل متراص (أي أنّه ينعدم خارج مجالٍ محدود).

ثانياً: احسب قيم $B(x)$ عندما $x \in \mathbb{Z}$ وارسمه.

8.5. لتكن التجزئة

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t_{n+1} = b \qquad (n \geq 1)$$

نرمز بـ $\Pi_1^0[a,b]$ للفضاء الشعاعي المكوّن من التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[a,b]$ والتي تتطابق مقصوراتها على كلّ مجالٍ جزئي $\left([t_i, t_{i+1}]\right)_{1 \leq i \leq n-1}$ مع كثير حدود من الدرجة ≥ 1 وتكون ثابتة على كلّ من $[a,t_1]$ و $[t_n,b]$. نعرّف فضاء التوابع

$$X = \left\{ f \in C^0[a,b] : f_{/]t_i,t_{i+1}[} \in C^1, 0 \leq i \leq n \right\}$$

أولاً: ما هو عدد أبعاد الفضاء $\Pi_1^0[a,b]$ ؟

ثانياً: برهن أنّه أياً كان $s \in \Pi_1^0[a,b]$ وأياً كان $f \in X$ فإنّ:

$$\int_a^b s'(t) \cdot f'(t)\,\mathrm{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \Delta_{t_i}(s') \cdot f(t_i)$$

حيث

$$\Delta_{t_i}(s') = s'(t_i^+) - s'(t_i^-) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ >}} s'(t) - \lim_{\substack{t \to t_i \\ <}} s'(t)$$

ثالثاً: ليكن $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. وليكن

$$I_y = \left\{ f \in X : f(t_i) = y_i,\ i = 1,\dots,n \right\}$$

برهن أنّ $\Pi_1^0[a,b] \cap I_y = \{\sigma\}$ وأنّ التابع σ يحقق الخاصّة التالية:

$$\int_a^b \big(\sigma'(t)\big)^2 \,\mathrm{dt} = \min_{f \in I_y} \int_a^b \big(f'(t)\big)^2 \,\mathrm{dt}$$

9.5. ليكن f تابعاً قابلاً للاشتقاق مع الاستمرار مرّتين على المجال $I = [-1,1]$. عيّن كثير حدود الاستيفاء $p(x)$ من الدرجة ≥ 1 المنشأ على النقطتين $\big(x_0, f(x_0)\big)$ و $\big(x_1, f(x_1)\big)$ حيث $-1 \leq x_0 < x_1 \leq 1$.

أولاً: أثبت أنّ

$$\max_{x \in I} \quad \big|f(x) - p(x)\big| \leq \frac{1}{2}\,\alpha \cdot \max_{\xi \in I} \quad \big|f''(\xi)\big|$$

حيث $\alpha = \max\limits_{x \in I} \big|(x - x_0)(x - x_1)\big|$.

ثانياً: عيّن قيم x_0 و x_1 التي تجعل قيمة المقدار α أصغريّاً؟

10.5. لتكن $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة أعداد حقيقيّة مختلفة، ولتكن مسألة الاستيفاء التالية: نبحث عن تابع من النمط

$$p_n(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{n} c_j e^{jx}$$

ويحقق

$$p_n(x_i) = y_i \ , \quad i = 0,1,\dots,n$$

حيث $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ قيمٌ معطاة. ادرس وجود ووحدانية الحل لهذه المسألة.

11.5. لنطرح مسألة تعيين كثير الحدود التربيعيّ $p(x)$ والمحقّق للشروط:

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_1) = y_1', \quad p(x_2) = y_2$$

حيث $x_0 \neq x_2$ و $\{y_0, y_1', y_2\}$ مجموعة قيم حقيقيّة معطاة. ولنفترض أنّ الأعداد $\{x_0, x_1, x_2\}$ حقيقيّة.

ما هي الشروط الواجب تحققها حتّى يكون هناك حلّ وحيد لهذه المسألة؟

12.5. ليكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^4 على المجال $[a,b]$. ولتكن

$$a < x_1 < b$$

أولاً: أثبت أنّه يوجد تابع كثير الحدود $p(x)$ درجته ≥ 3 يحقق الشروط:

$$p(a) = f(a), \quad \begin{cases} p'(x_1) = f'(x_1) \\ p''(x_1) = f''(x_1) \end{cases}, \quad p(b) = f(b)$$

نفترض فيما يلي أنّ $[a,b] = [-1,1]$، $x_1 = 0$.

ثانياً: عيّن صيغة لـ $p(x)$ شبيهة بصيغة لاغرانج في الاستيفاء.

ثالثاً: أثبت أنّ

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) - p(x) = \frac{x^4 - 1}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \qquad \xi \in [-1,1]$$

الفصل السابع
تقريب التوابع ومعالجة المعطيات العددية

لتعيين قيمةٍ عدديّة لتابعٍ حقيقي $f : I \mapsto \mathbb{R}$ معرّفٌ على مجالٍ $I \subseteq \mathbb{R}$، يلزمنا معرفة صيغةٍ تقريبيّةٍ له قابلةٍ للحساب. تُعَرَّفُ التوابع في أغلب الأحيان، بأشكالٍ شتّى، تتضمّن تكاملات ومتسلسلات صحيحة. إنّ مثل هذه التعاريف مفيدة في دراسة مميّزات هذا التابع ولكنّها عموماً لا تشكّل طريقةً فعّالة لحساب قيمه العدديّة.

بوجهٍ عام، يستحسن استخدام صيغة تقريب تحليليّة للتابع f بدلاً من تخزين جدولٍ بقيمه العدديّة واستعمال الاستيفاء في تعيين قيمٍ تقريبيّة له. هناك العديد من صيغ التقريب التابعيّة، منها صيغة كثيرات الحدود التي تعدّ الأسهل تناولاً من الناحيتين النظريّة والعمليّة. وهناك أيضاً صيغ التقريب الكسرية التي تسمح بإنشاء طرائق فعّالة في التقريب، ولكنّ دراستها النظريّة على درجةٍ من التعقيد، بالمقارنة مع كثيرات الحدود، لا تسمح لنا بعرضها في إطار هذا البحث.

وأخيراً، ننوّه إلى إمكان استعمال طرائق التقريب التي تنتج توابع كثيرات الحدود قِطَعياً شبيهةً بالتي رأيناها سابقاً.

1. التقريب المنتظم أو تقريب تشيبيشف

ليكن $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$ الفضاء الشعاعي المكوّن من التوابع المستمرّة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. نزوّد هذا الفضاء بنظيم التقارب المنتظم (أو نظيم تشيبيشِفْ Chebyshev)

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

نسمّي التطبيق $(f,g) \mapsto d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ تابع المسافة الموافق لهذا النظيم. نعرّف المسافة بين تابعٍ $f \in \mathrm{C}\big([a,b]\big)$ والفضاء $\mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$ المكوّن من توابع كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن n بالعلاقة:

$$d(f,\mathcal{P}_n) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} d(f,p) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|f-p\|_\infty$$

ليكن $\mathcal{P}\big([a,b]\big)$ فضاء توابع كثيرات الحدود على المجال $[a,b]$. إنّ $\mathcal{P}\big([a,b]\big)$ فضاءٌ شعاعيٌ جزئي من فضاء التوابع المستمرة $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$. برهن فايرشتراس Weierstrass عام 1885 أنّ الفضاء $\mathcal{P}\big([a,b]\big)$ كثيفٌ في الفضاء $\mathrm{C}\big([a,b]\big)$، أيْ أنّه يمكن تقريب أيّ تابعٍ مستمر $f \in \mathrm{C}\big([a,b]\big)$ بانتظامٍ على المجال $[a,b]$ وبالدقّة التي نريد بتابع كثير الحدود $p \in \mathcal{P}\big([a,b]\big)$ كما تبيّن المبرهنة التالية.

مبرهنة 1 $\big(\text{Weierstrass}\big)$

أيّاً كان $f \in \mathrm{C}\big([a,b]\big)$، وأيّاً كان $\varepsilon > 0$، يوجد تابع كثير الحدود $p \in \mathcal{P}\big([a,b]\big)$ بحيث يكون

$$\forall x \in [a,b], \quad \big|f(x)-p(x)\big| \le \varepsilon$$

للاطلاع على إثبات المبرهنة، راجع Atkinson Kendall E. [12].

من الناحية العمليّة، نبحث عن أفضل تقريب للتابع $f \in \mathrm{C}\big([a,b]\big)$ في فضاء كثيرات الحدود التي لا تتجاوز درجتها $n \in \mathbb{N}$. نعرّف

$$\rho_n(f) = d(f,\mathcal{P}_n) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|f-p\|_\infty = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \left(\max_{a\le x\le b} \big|f(x)-p(x)\big| \right)$$

وهنا نتساءل عن وجود تابع كثير حدود $p_n \in \mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$ يحقّق شرط المسافة الأصغريّة:

$$\rho_n(f) = \|f-p_n\|_\infty$$

وفي حال وجود مثل هذا التابع، نطرح التساؤلات:

هل هو وحيد؟ وما هي خواصّه المميّزة؟ وكيف يمكن إنشاؤه؟

مبرهنة 2 (التقريب المنتظم الأمثل)

أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$، فإنّ هناك تابعاً وحيداً $p_n \in \mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$ يحقّق شرط المسافة الأصغريّة للتابع $f \in \mathrm{C}\big([a,b]\big)$ عن الفضاء $\mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$، أي

$$\rho_n(f) = d(f,\mathcal{P}_n) = \big\| f - p_n \big\|_\infty$$

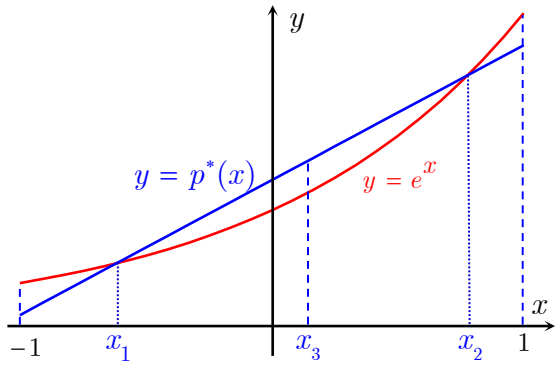
للاطلاع على إثبات المبرهنة، راجع Davis Philip J., Chapter VII [38].

نسمّي كثير الحدود p_n تابع التقريب المنتظم الأمثل للتابع f من المرتبة n على المجال $[a,b]$.

مثال 1: لننظر في مسألة إيجاد أفضل تقريب منتظم للتابع $f(x) = e^x$ على المجال $[-1,1]$ بتابع كثير الحدود $p_1 \in \mathcal{P}_1\big([-1,1]\big)$.

نضع $p_1(x) = a_0 + a_1 x$، ونعرّف تابع الخطأ:

$$\varepsilon(x) = e^x - (a_0 + a_1 x), \quad -1 \le x \le 1$$



الشكل 1: التقريب الخطي المنتظم للتابع e^x.

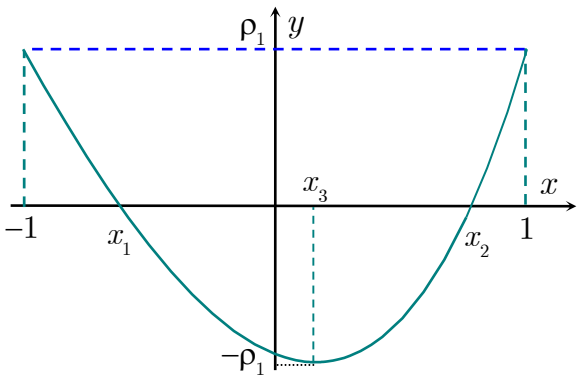
من الواضح أنّ $\varepsilon(x)$ ينعدم عند نقطتين ولنقل

$$-1 < x_1 < x_2 < 1$$

(انظر الشكل 1). وهكذا يكون

$$\rho_1 = \max_{-1\le x\le 1} \big|\varepsilon(x)\big|$$

حيث $\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2) = 0$.



الشكل 2: الخطأ في حالة التقريب الخطّي المنتظم للتابع e^x .

نلاحظ في هذا المثال أنّ القيمة المطلقة لتابع الخطأ $\varepsilon(x)$ تبلغ القيمة الأعظميّة ρ_1 عند ثلاث نقاط (انظر الشكل 2):

$$\varepsilon(-1) = \rho_1 \quad , \quad \varepsilon(x_3) = -\rho_1 \quad , \quad \varepsilon(1) = \rho_1$$

حيث $x_1 < x_3 < x_2$. وبما أنّ التابع $\varepsilon(x)$ يمتلك عند النقطة x_3 قيمةً محلّية صغرى فإنّ $\varepsilon'(x_3) = 0$. نشكّل المعادلات الأربع الموافقة لهذه الشروط فنجد

$$\begin{aligned} e^{-1} - (a_0 - a_1) &= \rho_1 & \qquad e - (a_0 + a_1) &= \rho_1 \\ e^{x_3} - (a_0 + a_1 x_3) &= -\rho_1 & \qquad e^{x_3} - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

تقبل المعادلات غير الخطيّة السابقة حلاً وحيداً يعطى بالعلاقات:

$$\begin{cases} a_0 = \rho_1 + (1 - x_3) \cdot a_1 \simeq 1.2643 \\ a_1 = \dfrac{e - e^{-1}}{2} \simeq 1.1752 \\ x_3 = \ln_e(a_1) \simeq 0.1614 \\ \rho_1 = \frac{1}{2} e^{-1} + \dfrac{x_3}{4}(e - e^{-1}) \simeq 0.2788 \end{cases}$$

ومنه

$$p_1(x) \simeq 1.2643 + 1.1752\, x$$

نلاحظ من المثال السابق أنّ الخطأ الأعظمي يتناوب بالإشارة عند النقاط $\{-1, x_3, 1\}$.

لتوضيح أهمّية التوزيع المنتظم للخطأ على مجال التقريب وتناوب إشارة تابع الخطأ نعرض مبرهنتين، تسمح الأولى منهما بتقدير قيمة خطأ التقريب المنتظم $\rho_n(f)$ دون الحاجة إلى تعيين تابع التقريب المنتظم $p_n(x)$.

مبرهنة 3 $\left(\text{de La Vallée Poussin}\right)$

ليكن $f \in C\left([a,b]\right)$ و $n \in \mathbb{N}$. إذا وجد تابع كثير الحدود $q \in \mathcal{P}_n\left([a,b]\right)$ يحقق الشروط:

$$f(x_j) - q(x_j) = (-1)^j e_j, \quad 0 \le j \le n+1$$

حيث $(e_j)_{0\le j\le n+1}$ أعدادٌ حقيقيّة غير معدومة وجميعها من إشارةٍ واحدة وحيث $(x_j)_{0\le j\le n+1}$ أعدادٌ واقعة في المجال $[a,b]$ بحيث يكون

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$$

عندئذٍ يكون

$$\min_{0\le j\le n+1}\left|e_j\right| \le \rho_n(f) \equiv \left\|f - p_n\right\|_\infty \le \left\|f - q\right\|_\infty$$

الإثبات: لنفترض جدلاً أنّ

$$\rho_n(f) < \min_{0\le j\le n+1}\left|e_j\right| \qquad (*)$$

وهذا يعني وجود تابع كثير الحدود $p \in \mathcal{P}_n\left([a,b]\right)$ يحقق

$$\rho_n(f) \le \left\|f - p\right\|_\infty < \min_{0\le j\le n+1}\left|e_j\right|$$

نضع $r = q - p$. إنّ r هو تابع كثير الحدود درجته n على الأكثر.

نفترض (لتبسيط العرض فقط) أنّ $e_j > 0$ أيّاً كان $0 \le j \le n+1$. لدينا هنا:

$$\begin{aligned} r(x_0) &= q(x_0) - p(x_0) = [f(x_0) - p(x_0)] - [f(x_0) - q(x_0)] \\ &= [f(x_0) - p(x_0)] - e_0 < 0 \end{aligned}$$

وذلك اعتماداً على الافتراض $(*)$، وكذلك لدينا

$$r(x_1) = q(x_1) - p(x_1) = [f(x_1) - p(x_1)] + e_1 > 0$$

وهكذا، وبالتدريج نبرهن أنّ إشارة العدد $r(x_j)$ هي $(-1)^{j+1}$ أياً كانت قيمة الدليل $0 \le j \le n+1$. هذا يعني أنّ تابع كثير الحدود $r(x)$ قد غيّر إشارته $n+2$ مرّة ومن ثمّ فإنّه يمتلك $n+1$ جذراً حقيقياً في المجال $[a,b]$، وبما أنّ $r \in \mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$ فإنّنا نستنتج أنّ هذا مستحيل إلاّ إذا كان $r \equiv 0$ أيْ $p \equiv q$ وهذا مخالفٌ للافتراض $(*)$. ■

مبرهنة 4 $\big($Chebyshev Alternation Theorem$\big)$

ليكن $f \in C\big([a,b]\big)$، $n \in \mathbb{N}$، $p_n \in \mathcal{P}_n\big([a,b]\big)$ تابع التقريب المنتظم الأمثل للتابع f من المرتبة n. عندئذٍ، يحقق تابع التقريب p_n الخاصّة المميّزة التالية:

هناك على الأقلّ $n+2$ نقطة مختلفة:

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$$

تحقق شرط التناوب:

$$f(x_j) - p_n(x_j) = \sigma(-1)^j \rho_n(f),\ 0 \le j \le n+1,\ \sigma \in \{-1,1\}$$

حيث تتعلّق قيمة σ فقط بالتابع f وقيمة n.

للاطلاع على إثبات المبرهنة، راجع Davis Philip J., Chapter VII [38].

وأخيراً، لكي نوضّح درجة تقريب كثير الحدود الأمثلي p_n للتابع f عندما تزداد قيمة n نعرض المبرهنة التالية والتي تنسب إلى D. Jackson.

مبرهنة 5 $\big($Jackson$\big)$

ليكن $f \in C^k\big([a,b]\big)$، $0 \le k$. نفترض أنّ المشتق $f^{(k)}$ يحقق الشرط:

$$a \le x < y \le b, \quad \Big|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)\Big| \le M \cdot \big|x-y\big|^{\alpha}$$

وبحيث يكون $0 < M$، $0 < \alpha \le 1$. عندئذٍ تتحقق المتراجحة:

$$\rho_n(f) \le \frac{M \cdot d_k}{n^{k+\alpha}}, \quad n \ge 1$$

حيث d_k عددٌ ثابتٌ لا يتعلّق بالتابع f ولا يتعلّق بالعدد n.

خوارزميّة ريمس (Rémès 1934)

يمكن تعيين تابع التقريب المنتظم الأمثل $p_n \in \mathcal{P}_n\big([-1,1]\big)$ للتابع $f \in \mathrm{C}\big([-1,1]\big)$ باستخدام طريقة تكراريّة تسمّى خوارزميّة Rémès الثانية. تقوم هذه الخوارزميّة على خاصّة التناوب التي يتميّز بها تابع التقريب المنتظم الأمثل كما هو مبيّن في **المبرهنة 4**. تتلخّص هذه الخوارزميّة بالخطوات التالية:

(S_0) نختار $n+2$ عدداً مختلفاً:

$$-1 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le 1$$

(S_1) نعيّن كثير الحدود $p \in \mathcal{P}_n\big([-1,1]\big)$ والعدد الحقيقي E بحيث تتحقق المعادلات الخطيّة:

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i E, \qquad 0 \le i \le n+1$$

مع مراعاة اختيار الأعداد $(x_i)_{0\le i\le n+1}$ بحيث نحصل على عددٍ $E \neq 0$. تمثّل هذه المعادلات جملة معادلات خطيّة عددها $n+2$ المجاهيل فيها العدد E وأمثال تابع كثير الحدود $p \in \mathcal{P}_n\big([-1,1]\big)$.

(S_2) نقوم بتعيين $n+2$ عدداً جديداً:

$$-1 \le z_0 < z_1 < \cdots < z_{n+1} \le 1$$

بحيث يكون للتابع $f-p$ قيماً أمثليّةً محلّيةً عند كلّ نقطة z_i، وبحيث يكون

$$\big(f(x_i) - p(x_i)\big)\cdot\big(f(z_i) - p(z_i)\big) > 0, \quad 0 \le i \le n+1$$

عندما يكون التابع f قابلاً للاشتقاق فإنّ ذلك يقتضي لزوماً أن يكون

$$f'(z_i) - p'(z_i) = 0, \quad 1 \le i \le n$$

وكذلك الأمر بالنسبة للنقطتين z_0 و z_{n+1} إذا وقعتا في المجال $]-1,1[$. بالإضافة إلى ذلك، يجب أن تحقق القيم الأمثليّة هذه الشرط:

$$\big\|f-p\big\|_\infty = \max_{0\le i\le n+1}\big|f(z_i) - p(z_i)\big|$$

(S_3) لدينا، استناداً إلى **المبرهنة 3** وخواص النقاط (z_i)، المتراجحة المزدوجة التالية:

$$m = \min_i \left| f(z_i) - p(z_i) \right| \le \rho_n(f) \le M = \max_i \left| f(z_i) - p(z_i) \right|$$

فإذا كانت النسبة $\dfrac{M}{m}$ قريبةً بالقدر الكافي من القيمة 1 فحينها يكون التابع $p(x)$ قريباً بما فيه الكفاية من تابع التقريب المنتظم الأمثل ويتوقف التكرار. فمثلاً، يمكن استعمال الشرط:

$$\frac{M}{m} \le 1.05$$

كشرطٍ للتوقف. أمّا إذا لم يتحقّق هذا الشرط فإنّنا نضع $(z_i) \leftarrow (x_i)$ ونعود إلى الخطوة (S_1).

ملاحظة

يجري عادةً الاختيار الابتدائي للأعداد $(x_i)_{0\le i\le n+1}$ في خوارزميّة Rémès كما يلي:

$$x_i = \cos\left[\frac{i}{n+1}\pi\right], \quad 0 \le i \le n+1$$

ومن ثمّ، فإنّ التقريب الأوّل $p(x)$ يعطى بالعلاقة

$$p(x) = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x), \quad -1 \le x \le 1$$

حيث

$$c_k = \frac{1}{n+1}\left\{ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cos\Big(i\,k\,\pi \,/\, (n+1)\Big) + (-1)^k f(x_{n+1}) \right\}$$

تمثّل التوابع $(T_k)_{k\ge 0}$ توابع كثيرات الحدود لتشيبيشف المعرّفة بالعلاقة:

$$T_k(x) = \cos\Big(k\cos^{-1}(x)\Big)$$

ويتعيّن العدد E من العلاقة

$$E = \frac{1}{n+1}\left\{ \tfrac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_i) + \tfrac{1}{2}(-1)^{n+1} f(x_{n+1}) \right\}$$

مثال 2

ليكن التابع $f(x) = \dfrac{1}{1+25\,x^2}$ على المجال $[-1,1]$.

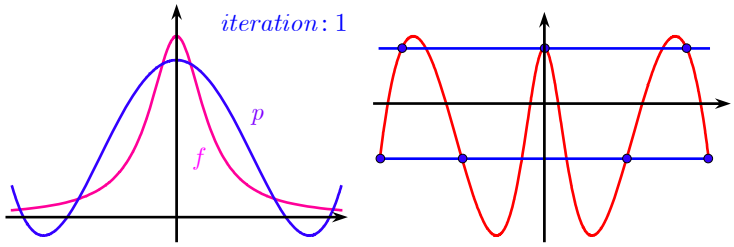
في حالة $n = 5$، يمكن أن نختار كتقريبٍ أوليّ لخوارزميّة Rémès كثير الحدود

$$p(x) = \frac{103507}{119132} - \frac{88325}{29783}x^2 + \frac{67500}{29783}x^4 \qquad -1 \le x \le 1$$

يتناوب تابع الخطأ عند النقاط

$$\{-1\ ,\ -\sqrt{3}\,/\,2\ ,\ -1\,/\,2\ ,\ 0\ ,\ 1\,/\,2\ ,\ \sqrt{3}\,/\,2\ ,\ 1\}$$

بين القيمة $-0.131157 \simeq -\dfrac{15625}{119132}$ والقيمة $E = -E$، كما هو موضّحٌ في الشكل 3 (التكرار الأوّل).



الشكل 3: التابع f والتقريب الأولي p (على اليسار)
تناوب خطأ التقريب $f - p$ (على اليمين).

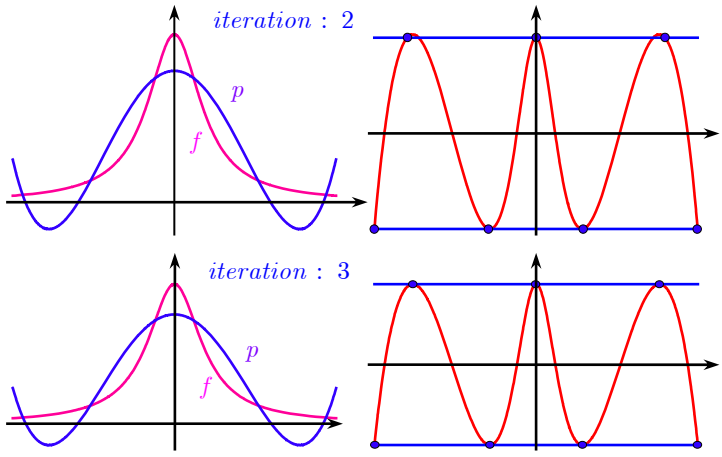
بمتابعة تطبيق خوارزميّة Rémès انطلاقاً من التكرار الأوّل السابق باستعمال شرط التوقف

$$\frac{M}{m} < 1.01$$

نحصل بعد ثلاث تكرارات فقط على النتائج المبيّنة في الجدول التالي:

$iteration$	E	$\|f-p\|_\infty$	$M\,/\,m$
1	-0.131157	0.313144	2.39001
2	-0.216140	0.222664	1.03018
3	-0.217146	0.21717	1.00015

الشكل التالي يوضّح نتائج التكرارين الثاني والثالث لخوارزميّة Rémès :



الشكل 4: نتائج تكرار خوارزميّة Rémès .

ومن ثمّ نحصل بعد ثلاث تكرارات لهذه الخوارزميّة على النتائج التالية:

$$p_5(x) \simeq 0.78283 - 3.11208\,x^2 + 2.58486\,x^4$$
$$\rho_5(f) \simeq 0.21717$$

2. كثيرات الحدود المتعامدة

ليكن $]a,b[$ مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$ (ليس محدوداً بالضرورة). وليكن $w :]a,b[\to]0,\infty[$ تابع وزن (تابع مستمر موجب تماماً باستثناء مجموعة مهملة من النقاط التي ينعدم عندها) ويحقّق الشرط:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left|x\right|^n w(x)\,\mathrm{d}\,x < +\infty$$

نرمز بـ $E\big(]a,b[\big)$ للفضاء الشعاعي المكوّن من التوابع f المستمرّة على المجال $]a,b[$ والتي تحقق الشرط:

$$\int_a^b \left|f(x)\right|^2 w(x)\,\mathrm{d}\,x < +\infty$$

نلاحظ هنا أنّ الفضاء $E\big(]a,b[\big)$ يحتوي على توابع كثيرات الحدود. نزوّد هذا الفضاء بالجداء السلّمي الطبيعي

$$\big\langle f,g \big\rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ونرمز بـ $\|\ \|_2$ للنظيم الملحق به ؛ وهذا ما يعرف باسم نظيم الوسطي التربيعي أو نظيم L^2. ترمز الكتابة $d_2(f,g)=\|f-g\|_2$ إلى تابع المسافة الموافق.

تؤدي كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للجداء السلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ على فضاء التوابع $E(]a,b[)$ دوراً هاماً في العديد من مسائل التحليل العددي كما رأينا في بحث الاستيفاء من خلال الخواص المفيدة لكثيرات حدود تشيبيشف، وفي مسألة التقريب المنتظم وكذلك الحال في مسألة التقريب بالوسطي التربيعي (الفقرة التالية) وكذلك، سنرى تطبيقات هامّة لها عند البحث في مسألة التكامل العددي.

تبيّن المبرهنة التالية وجود متتالية من كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للجداء السلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ في الفضاء $E(]a,b[)$. تكون هذه المتتالية وحيدة في حال تحقق شَرطيّ توافق الدرجة مع الدليل وكون كثيرات الحدود واحديّة أو نظاميّة.

مبرهنة 6 (Gram-Schmidt)

هناك متتالية وحيدة من توابع كثيرات الحدود الواحديّة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشروط:

$$\begin{cases}\bullet\ \deg(\varphi_n)=n\\ \bullet\ \langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_w=0, \quad n\neq m\end{cases}$$

تسمّى التوابع φ_n كثيرات الحدود المتعامدة الواحديّة بالنسبة للجداء السلمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$.

الإثبات

ننشئ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالتدريج مستخدمين في ذلك طريقة Gram-Schmidt. نضع $\varphi_0(x)=1$ وذلك لأنّ φ_0 يجب أن يكون واحدياً. نفترض الآن أنّ العناصر $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ قد أُنشِئت. بما أنّ $\deg(\varphi_i)=i$ فإنّ هذه العناصر تشكّل أساساً للفضاء $\mathcal{P}_{n-1}$.

إذن، يمكن البحث عن العنصر φ_n من الشكل:

$$\varphi_n(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_{j,n}\varphi_j(x)$$

إنّ الشرط

$$\langle\varphi_n,\varphi_k\rangle_w=0, \quad 0\leq k<n$$

يقتضي أن يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi_n, \varphi_k \right\rangle_w = 0 &= \left\langle x^n, \varphi_k \right\rangle_w - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n} \left\langle \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_w \\ &= \left\langle x^n, \varphi_k \right\rangle_w - \lambda_{k,n} \left\| \varphi_k \right\|_2^2\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\lambda_{k,n} = \frac{\left\langle x^n, \varphi_k \right\rangle_w}{\left\| \varphi_k \right\|_2^2}$$

ملاحظة: المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متعامدة ولكنّها غير نظاميّة بوجهٍ عام، وتشكّل المتتالية:

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\left\| \varphi_n \right\|_2}, \quad n \geq 0$$

أساساً متعامداً نظامياً لفضاء كثيرات الحدود $\mathcal{P}$.

1.2. بعض خواص كثيرات الحدود المتعامدة

نعرض في هذه الفقرة بعض الخواص المفيدة لهذا الفصل وللفصول القادمة على حدٍّ سواء.

مبرهنة 7

إذا كانت $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود الواحديّة والمتعامدة بالنسبة للجداء السلّمي $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle_w$، فإنّها تحقّق علاقات التدريج التالية:

$$\varphi_n(x) = (x - \lambda_n)\varphi_{n-1}(x) - \mu_n \varphi_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

حيث

$$\lambda_n = \frac{\left\langle x\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \right\rangle_w}{\left\| \varphi_{n-1} \right\|_2^2}, \quad \mu_n = \frac{\left\| \varphi_{n-1} \right\|_2^2}{\left\| \varphi_{n-2} \right\|_2^2}$$

الإثبات

إنّ كثير الحدود $x \cdot \varphi_{n-1}$ واحدي درجته n، ولذلك يمكننا أن نكتب

$$x\,\varphi_{n-1} = \varphi_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_k$$

حيث

$$\left\langle x\varphi_{n-1},\varphi_k \right\rangle_w = \alpha_k \left\|\varphi_k\right\|_2^2, \quad 0 \le k \le n-1$$

لدينا من تعريف الجداء السلّمي

$$\left\langle x\varphi_{n-1},\varphi_k \right\rangle_w = \left\langle \varphi_{n-1},x\varphi_k \right\rangle_w = \int_a^b x\varphi_{n-1}(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$

فإذا كان $n-3 \ge k$ فإنّ

$$x\,\varphi_k \in \mathcal{P}_{n-2}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\left\langle \varphi_{n-1},x\varphi_k \right\rangle_w = 0$$

ومن ثمّ يكون هناك، على الأكثر، مَثَلان غير معدومين:

$$\alpha_{n-1} = \frac{\left\langle x\varphi_{n-1},\varphi_{n-1} \right\rangle_w}{\left\|\varphi_{n-1}\right\|_2^2} = \lambda_n$$

$$\alpha_{n-2} = \frac{\left\langle \varphi_{n-1},x\varphi_{n-2} \right\rangle_w}{\left\|\varphi_{n-2}\right\|_2^2}$$

ولدينا أيضاً

$$x\varphi_{n-2} = \varphi_{n-1} + q \quad , \quad q \in \mathcal{P}_{n-2}$$

إذن،

$$\left\langle \varphi_{n-1},x\varphi_{n-2} \right\rangle_w = \left\|\varphi_{n-1}\right\|_2^2 + \left\langle \varphi_{n-1},q \right\rangle_w = \left\|\varphi_{n-1}\right\|_2^2$$

وهذا يقتضي كون $\alpha_{n-2} = \mu_n$ ومن ثمّ يكون

$$x\varphi_{n-1} = \varphi_n + \lambda_n\varphi_{n-1} + \mu_n\varphi_{n-2}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

مبرهنة 8

ليكن w تابع وزنٍ على مجالٍ $]a,b[$، ولتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود الواحديّة والمتعامدة بالنسبة للجداء السلّمي $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$. أياً كانت قيمة $n \in \mathbb{N}$، يمتلك كثير الحدود φ_n جذوراً حقيقيّةً مختلفةً عددها n واقعة كلّها في المجال $]a,b[$.

الإثبات

لتكن

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

الجذور الحقيقيّة المختلفة للتابع φ_n الواقعة في المجال $]a,b[$ بدرجات مضاعفة $m_1, m_2, \ldots, m_k$ على الترتيب. عندها يكون

$$m_1 + \cdots + m_k \leq \deg(\varphi_n) = n$$

نضع

$$\begin{cases} \varepsilon_i = m_i \bmod 2, \quad 1 \leq i \leq k, \\ q(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \deg(q) \leq k \leq n \end{cases}$$

ومن ثمّ فإنّ كثير الحدود $q \cdot \varphi_n$ يقبل x_i جذوراً له في المجال $]a,b[$ بدرجات مضاعفة زوجيّة تساوي $m_i + \varepsilon_i$، وبالتالي، فإنّ إشارته تبقى ثابتة في المجموعة:

$$]a,b[\setminus\{x_1, \ldots, x_k\}$$

ومن ذلك نستنتج أنّ

$$\left\langle \varphi_n, q \right\rangle_w = \int_a^b \varphi_n(x) q(x) w(x) \,\mathrm{d}\, x \neq 0$$

وبما أنّ $\varphi_n \perp \mathcal{P}_{n-1}$ فإنّ

$$\deg(q) = n$$

ومن ثمّ يكون $k = n$ ويكون $m_1 = \cdots = m_k = 1$. ■

2.2. حالات شهيرة من كثيرات الحدود المتعامدة

من أشهر كثيرات الحدود المتعامدة، التي تتطرّق إليها مسائل التحليل العددي، كثيرات الحدود التالية:

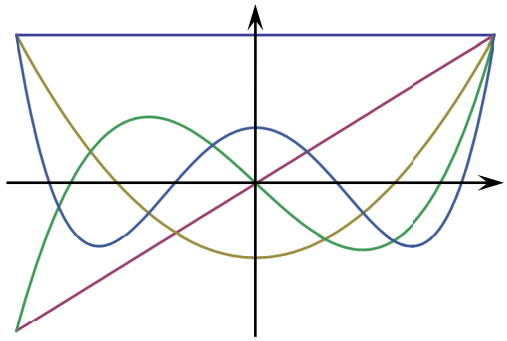
① كثيرات حدود لوجندر Legendre

توافق هذه الحالة اختيار تابع الوزن $w(x) = 1$ على المجال $]-1,+1[$. تعطى كثيرات الحدود المتعامدة في هذه الحالة بالعلاقات

$$p_0(x) \equiv 1, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n}(x^2-1)^n, \qquad n \geq 1$$

فعلى سبيل المثال، لدينا

$$p_0(x) \equiv 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},\ p_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x, \cdots$$



كثيرات حدود لوجندر: $p_0, \ldots, p_4$.

تحقق كثيرات حدود لوجندر، إضافةً لكونها متعامدة على المجال $]-1,+1[$، الخواص التالية:

- $\deg p_n(x) = n$
- $p_n(1) = 1$
- $\left\langle p_n, p_n \right\rangle_w = \dfrac{2}{2n+1}$
- $p_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}\, x\, p_n(x) - \dfrac{n}{n+1}\, p_{n-1}(x)$
- $(x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, x^2} p_n(x) + 2x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_n(x) - n(n+1)p_n(x) = 0$

② كثيرات حدود تشيبيشف Tchebychev

توافق هذه الحالة اختيار تابع الوزن $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $]-1,+1[$.

عندئذٍ، تحقق متتالية كثيرات الحدود المتعامدة الخاصّة التالية:

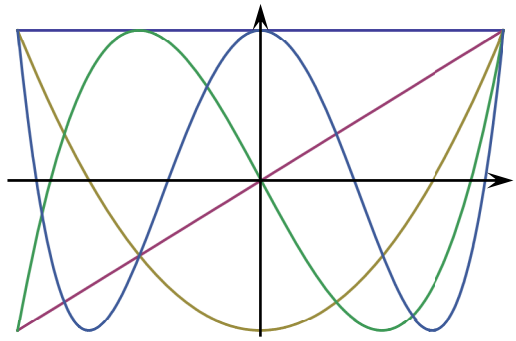
$$\forall x\in[-1,1],\quad T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x),\quad n\geq 0$$

ولكثيرات حدود تشيبيشف خواص عديدة أهمّها:

- $\deg(T_n)=n$
- $T_n(1)=1$
- $\left\langle T_0,T_0\right\rangle_w=\pi$
- $\left\langle T_n,T_n\right\rangle_w=\pi/2,\quad (n\geq 1)$
- $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\quad n\geq 1$

بحساب بسيط، واعتماداً على ما سبق نجد

$$T_0(x)\equiv 1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\cdots$$



كثيرات حدود تشيبيشف: $T_0,\ldots,T_4$.

③ كثيرات حدود لاجر Laguerre

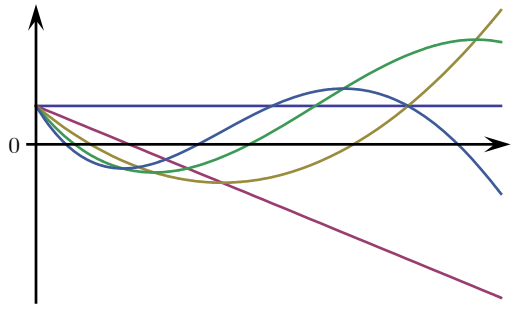
توافق هذه الحالة اختيار تابع الوزن $w(x)=e^{-x}$ على المجال $]0,+\infty[$.

عندئذٍ تشكّل توابع كثيرات الحدود

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\quad n\geq 0$$

متتالية متعامدة نظاميّة، فعلى سبيل المثال لدينا:

$$L_0(x) \equiv 1,\ L_1(x) = -x + 1,\ L_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$
$$L_3(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 3x + 1, \cdots$$



كثيرات حدود لاجر: $L_0,\ldots,L_4$.

وتحقق كثيرات حدود لاجر الخواص التالية:

- $$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}(2n+1-x)L_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$
- $$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}L_n(x) + (1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n(x) + n \cdot L_n(x) = 0$$

④ كثيرات حدود هرميت Hermite

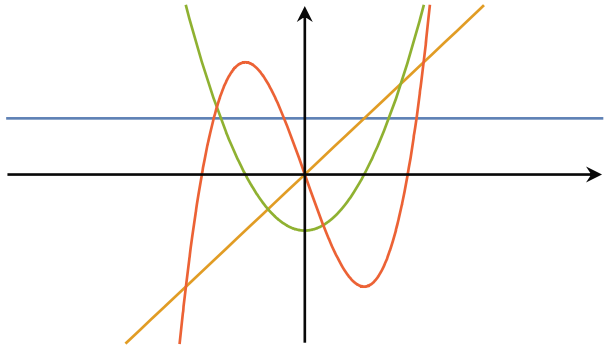
توافق هذه الحالة اختيار تابع الوزن $w(x) = e^{-x^2/2}$ على المجال $]-\infty,+\infty[$.

عندئذٍ تعطى كثيرات حدود هرميت بالعلاقات

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left(e^{-x^2/2}\right), \qquad n \geq 0$$

منها على سبيل المثال:

$$H_0(x) \equiv 1,$$
$$H_1(x) = x,$$
$$H_2(x) = x^2 - 1,$$
$$H_3(x) = x^3 - 3x,$$
$$\vdots$$



كثيرات حدود هرميت: $H_0,\ldots,H_3$.

وهي تحقق الخواص التالية:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\cdot e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x = n!\sqrt{2\pi}$
- $H_{n+1}(x) - x\cdot H_n(x) + n\cdot H_{n-1}(x) = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}H_n(x) - x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) + n\cdot H_n(x) = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) = n\cdot H_{n-1}(x)$

3. التقريب بطريقة الوسطي التربيعي

تتلخّص مسألة التقريب بالوسطي التربيعي لتابعٍ $f\in E(]a,b[)$ بالبحث عن تابع كثير الحدود $r_n\in\mathcal{P}_n$ يحقق الشرط:

$$d_2(f,r_n) = \inf_{r\in\mathcal{P}_n}\left\|f-r\right\|_2 = \inf_{r\in\mathcal{P}_n}\left(\int_a^b [f(x)-r(x)]^2 w(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/2}$$

يسمّى r_n أفضل تقريب بالوسطي التربيعي للتابع f من المرتبة n.

لتكن $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ متتالية من كثيرات الحدود المتعامدة النظاميّة بالنسبة للجداء السلمي الطبيعي $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$، أي إنّ

$$\left\langle \varphi_n,\varphi_m\right\rangle_w = \delta_{nm} = \begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

نعلم في هذه الحالة أنّه يمكن كتابة أيّ كثير حدود $r \in \mathcal{P}_n$ بالشكل:

$$r(x) = b_0\varphi_0(x) + \cdots + b_n\varphi_n(x)$$

عندئذٍ، يكون

$$\|f - r\|_2^2 = \int_a^b [f(x) - \sum_{j=0}^n b_j\varphi_j(x)]^2 w(x)\,\mathrm{d}\,x \equiv G(b_0,\ldots,b_n)$$

وبذلك تؤول مسألة التقريب بالوسطي التربيعي للتابع f إلى البحث عن قيم الوسطاء $\{b_0,\ldots,b_n\}$ التي تجعل المقدار $G(b_0,\ldots,b_n)$ أصغرياً.

نلاحظ هنا أنّ

$$0 \le G(b_0,\ldots,b_n) = \left\langle f - \sum_{j=0}^n b_j\varphi_j \ , \ f - \sum_{j=0}^n b_j\varphi_j \right\rangle_w$$

ومنه نجد أنّ

$$\begin{aligned} G(b_0,\ldots,b_n) &= \left\langle f,f \right\rangle_w - 2\sum_{j=0}^n b_j \left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w + \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n b_ib_j \left\langle \varphi_i,\varphi_j \right\rangle_w \\ &= \|f\|_2^2 - 2\sum_{j=0}^n b_j \left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w + \sum_{j=0}^n b_j^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n \left(\left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w\right)^2 + \sum_{j=0}^n \left[\left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w - b_j\right]^2 \end{aligned}$$

ومن ثمّ نستنتج أنّ المقدار $G(b_0,\ldots,b_n)$ يكون أصغرياً إذا وفقط إذا كان

$$b_j = \left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w, \quad 0 \le j \le n$$

ينتج من ذلك أنّ كثير حدود التقريب بالوسطي التربيعي موجودٌ ويعيّن بطريقة وحيدة بالعلاقة:

$$r_n(x) = \sum_{j=0}^n \left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w \varphi_j(x)$$

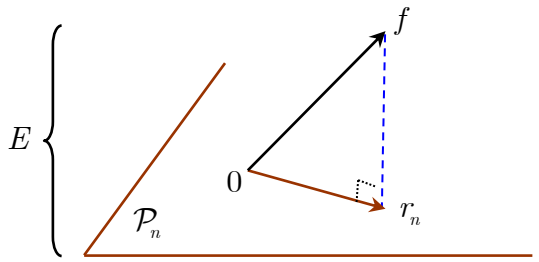
وتكون قيمة المسافة الأصغريّة $\|f - r_n\|_2 = \inf\limits_{r\in\mathcal{P}_n} \|f - r\|_2$ عندئذٍ محددة بالعلاقة:

$$\|f - r_n\|_2 = \left[\|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n \left(\left\langle f,\varphi_j \right\rangle_w\right)_w^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|r_n\|_2^2}$$

من ذلك نستنتج العلاقة:

$$\|f\|_2^2 = \|r_n\|_2^2 + \|f - r_n\|_2^2$$

ملاحظة: إنّ التقريب بالوسطي التربيعي ليس إلاّ المسقط العمودي للتابع f على فضاء توابع كثيرات الحدود $\mathcal{P}_n$.



الشكل 3: الإسقاط العمودي على الفضاء $\mathcal{P}_n$.

مثال 3

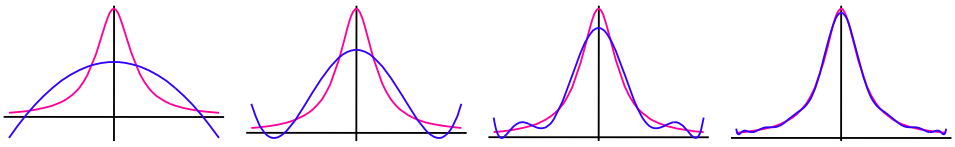
لنبحث في تقريب التابع $f(x) = 1\,/\,(1+25\,x^2)$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام طريقة التقريب بالوسطي التربيعي واعتماد كثيرات حدود لوجندر المتعامدة، أي أن نعيّن $r_n \in \mathcal{P}_n$ المعرّف بالصيغة

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle f, \tilde{p}_k \right\rangle_{w\equiv 1} \cdot \tilde{p}_k(x) \quad , \quad \tilde{p}_k = \frac{p_k}{\|p_k\|_2}$$

حيث

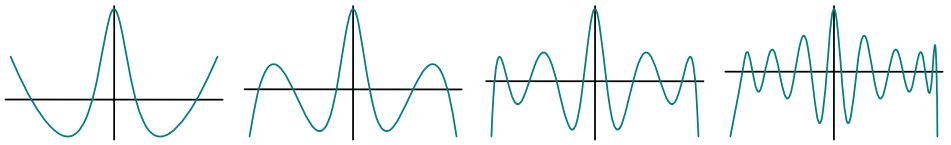
$$\left\langle f, \tilde{p}_k \right\rangle_1 = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \int_{-1}^{1} f(x) p_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$

نقوم بحساب التقريب r_n في الحالات $n \in \{2^i : 1 \le i \le 4\}$. يبيّن الشكلان 5 و 6 بيان هذه التقريبات وبيان تابع الخطأ في كلّ حالةٍ.



$n=2$ $n=4$ $n=8$ $n=16$

الشكل 5: التقريب بطريقة الوسطي التربيعي.



$n = 2$ $err \simeq 0.5$ | $n = 4$ $err \simeq 0.3$ | $n = 8$ $err \simeq 0.15$ | $n = 16$ $err \simeq 0.03$

الشكل 6: أخطاء التقريب بطريقة الوسطي التربيعي.

1.3 دراسة عامّة لمسألة التقريب بالوسطي التربيعي

نكتب مسألة التقريب بالوسطي التربيعي بالشكل

$$\min_{r\in\mathcal{P}_n} \|f-r\|_2^2 = \min_{r\in\mathcal{P}_n} \psi_f(r)$$

حيث ψ_f هو الشكل التربيعي المعرّف بالعلاقة:

$$\psi_f(r) = \langle r,r\rangle_\omega - 2\langle f,r\rangle_\omega + \langle f,f\rangle_\omega$$

يكون $r_n \in \mathcal{P}_n$ حلاً لمسألة التقريب بالوسطي التربيعي إذا وفقط إذا حقق الشرط $\nabla\psi_f(r_n) = 0$، أيْ:

$$\forall r \in \mathcal{P}_n, \quad \langle r_n, r\rangle_\omega = \langle f, r\rangle_\omega$$

ليكن $\{\varphi_0,\ldots,\varphi_n\}$ أساساً للفضاء $\mathcal{P}_n$، وليكن

$$r_n(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(x)$$

صيغة الحل وفق هذا الأساس. عندئذٍ، نستطيع التعبير عن الشرط السابق بالكتابة

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle_\omega = \langle f,\varphi_i\rangle_\omega \quad , \quad 0 \le i \le n$$

فإذا وضعنا

$$\delta = \big(\langle f,\varphi_0\rangle_\omega,\ldots,\langle f,\varphi_n\rangle_\omega\big)^T \quad , \quad \Omega = \big(\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle_\omega\big)_{0\le i,j\le n}$$

يؤول حل المسألة إلى حل الجملة الخطية $\Omega \cdot \lambda = \delta$ حيث $\lambda = \left(\lambda_0,\ldots,\lambda_n\right)$.

نلاحظ أنّ المصفوفة Ω متناظرة ومعرّفة موجبة ومن ثمّ يكون للمسألة حلّ وحيدٌ يعطى بالعلاقة $\lambda = \Omega^{-1} \cdot \delta$. كما نلاحظ أنّه في الحالة التي يكون فيها الأساس $\{\varphi_0,\ldots,\varphi_n\}$ متعامداً نظامياً تؤول الجملة الخطيّة إلى $I_n \cdot \lambda = \delta$ أيْ أنّ $\lambda = \delta$ وهذا يعني أنّ كثير حدود التقريب بالوسطي التربيعي هو

$$r_n(x) = \langle f,\varphi_0\rangle_\omega \varphi_0(x) + \cdots + \langle f,\varphi_n\rangle_\omega \varphi_n(x)$$

وهذا ما وجدناه سابقاً.

2.3 تقارب متتالية التقريب بالوسطي التربيعي

تبيّن المبرهنة التالية تقارب متتالية التقريب بالوسطي التربيعي $\left(r_n\right)_{n\geq 1}$ عندما تسعى n إلى اللانهاية من التابع f.

مبرهنة 9

إذا كان المجال $]a,b[$ محدوداً فإنّ $\lim_{n\to\infty} \left\| f - r_n \right\|_2 = 0$.

الإثبات

نعلم أنّ r_n هو أقرب عنصر من فضاء كثيرات الحدود $\mathcal{P}_n$ إلى التابع f وفق المسافة:

$$d_2(f,r) = \left\| f - r \right\|_2$$

ومن ثمّ يكون

$$\left\| f - r_1 \right\|_2 \geq \left\| f - r_2 \right\|_2 \geq \ldots \geq \left\| f - r_n \right\|_2 \geq \ldots$$

من جهةٍ أخرى، ليكن $\varepsilon > 0$ اختيارياً. استناداً لمبرهنة فايرشتراس فإنّ هناك كثير حدود $Q \in \mathcal{P}$ من درجة معيّنة ولنقل m يحقق

$$\max_{a\leq x\leq b} \left| f(x) - Q(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{c} \quad , \quad c = \left(\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}\,x \right)^{1/2}$$

وحسب تعريف التقريب r_m يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left\|f-r_m\right\|_2 &\le \left\|f-Q\right\|_2\\ &= \left[\int_a^b \left[f(x)-Q(x)\right]^2 w(x)\,\mathrm{d}\,x\right]^{1/2}\\ &\le \left[\int_a^b w(x)\frac{\varepsilon^2}{c^2}\,\mathrm{d}\,x\right]^{1/2}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

ينتج مما سبق أنّ

$$\forall n \ge m, \quad \left\|f-r_n\right\|_2 \le \varepsilon$$

وبذا يتمّ المطلوب. ■

4. معالجة المعطيات العدديّة

نعالج في هذه الفقرة مسألة معطياتٍ تابعيّة تقريبيّة كبيرة العدد من الشكل:

$$\{(x_i,y_i), \quad y_i \simeq f(x_i) \quad 1 \le i \le m\}$$

حيث f تابعٌ مجهول معرّف على مجال يحوي النقاط

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$$

ويمرّ بيانه بجوار النقاط $\{(x_i,y_i) : 1 \le i \le m\}$. نعرض فيما يلي طريقتين لمعالجة هذه المسألة:

- ❖ طريقة التربيعات الصغرى في معالجة المعطيات التابعيّة.
- ❖ طريقة التمليس (Lissage) باستخدام توابع الـ Splines.

1.4. طريقة التربيعات الصغرى

ليكن V و W فضاءَين شعاعيين عدد أبعادهما n و m على الترتيب $(n \le m)$. وليكن $\{v_i : 1 \le i \le n\}$ أساساً في الفضاء V. نفترض أنّ الفضاء الشعاعي W مزودٌ بجداءٍ سلّمي نرمز إليه بالكتابة $\langle \cdot,\cdot \rangle$ وليكن $\|\cdot\|$ النظيم الشعاعي الموافق له، أيْ:

$$\left\|x\right\| = \langle x,x\rangle^{1/2}, \quad x \in W$$

ترتكز طريقة التربيعات الصغرى في معالجة المعطيات التابعية على النقاط التالية:

(1) نفترض وجود تطبيق خطي متباين

$$T : V \to W$$

رتبته n، بمعنى أنّه يحقق الشرط

$$T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

(2) ليكن w عنصراً محدداً من الفضاء W. نبحث عن عنصرٍ $\overline{v} \in V$ يحقق الشرط:

$$\forall v \in V, \quad \big\|T(\overline{v}) - w\big\| \leq \big\|T(v) - w\big\|$$

يبرهن ضمن هذه الشروط أنّ هناك حلاً وحيداً لهذه المسألة مميّزاً بالشرط التالي:

$$\forall v \in V, \quad \langle T(\overline{v}), T(v)\rangle = \langle w, T(v)\rangle$$

أو الشرط المكافئ

$$\langle T(\overline{v}), T(v_i)\rangle = \langle w, T(v_i)\rangle, \quad 1 \leq i \leq n$$

لنفترض أنّ $\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. نضع

$$\Omega = \big(\Omega_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq n}, \quad \beta = (\beta_i)_{1\leq i\leq n}, \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

حيث

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \langle T(v_i), T(v_j)\rangle, & 1 \leq i,j \leq n \\ \beta_i = \langle w, T(v_i)\rangle, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

عندئذٍ تؤول مسألة تعيين الحل $\overline{v} \in V$ إلى حلّ جملة المعادلات الخطيّة $\Omega \cdot \lambda = \beta$.

تطبيق نموذجي لطريقة التربيعات الصغرى

ليكن $V = \mathcal{P}_{n-1}$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $n-1$ على الأكثر، و $W = \mathbb{R}^m$ مزوداً بالجداء السلّمي الإقليدي $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

ولتكن $t_1, t_2, \ldots, t_m$ مجموعة أعداد مختلفة و $T : V \to W$ تطبيقٌ خطيّ معرّفٌ بالعلاقة:

$$\forall p \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad T(p) = (p(t_1),\ldots,p(t_m))$$

إذا كان $z \in \mathbb{R}^m$ فإنّ مسألة التربيعات الصغرى تتلخّص بالبحث عن تابع كثير الحدود $\overline{p} \in \mathcal{P}_{n-1}$ يحقق الشرط:

$$\left\|T(\overline{p}) - z\right\|^2 = \min_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\|T(p) - z\right\|^2 = \min_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \big(p(t_i) - z_i\big)^2$$

وإذا كان $(v_1, \ldots, v_n)$ أساساً للفضاء V فإنّ:

$$\Omega_{ij} = \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \sum_{k=1}^{m} v_i(t_k) \cdot v_j(t_k), \quad 1 \le i, j \le n$$

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{m} z_k \cdot v_i(t_k) \quad 1 \le i \le n$$

إذا رمزنا بالكتابة $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ للمصفوفة الحقيقيّة المعرّفة بالعلاقات:

$$a_{ij} = v_j(t_i), \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n$$

فإننا نستطيع أن نكتب

$$\Omega = A^T \cdot A \quad , \quad \beta = A^T \cdot z$$

نلاحظ هنا أنّ المصفوفة المربّعة $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ متناظرة ومعرّفة موجبة (أعمدة المصفوفة A مستقلّة خطياً)، وهذا يعني أنّنا نستطيع حلّ الجملة الخطيّة $\Omega \cdot \lambda = \beta$ مباشرةً باستخدام إحدى طرائق التفريق (مستقرة عددياً).

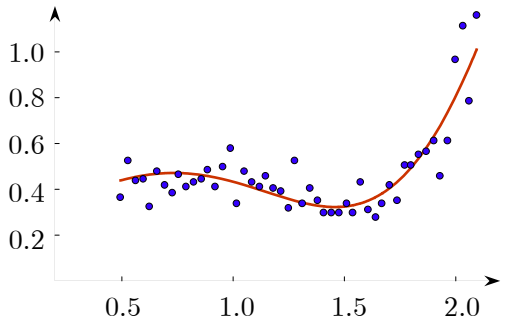
مثال 4: لنعالج مجموعة المعطيات التابعيّة $\{(t_i, y_i) : 1 \le i \le n\}$ حيث

$$\left.\begin{aligned} t_i &= 0.5 + (i-1)\frac{1.5}{n-1} \\ y_i &= (1 + \varepsilon_i) \cdot f(t_i) \end{aligned}\right\}, \quad 1 \le i \le n$$

f تابعٌ حقيقي معرّف على المجال $[0.5\ ,\ 2]$ بالعلاقة

$$f(x) = \frac{2 + \sin(\pi x)}{1 + (x-3)^2}$$

والمقادير (ε_i) هي تحقيقات عمليّة لمتحوّل عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً من النمط $N(0, 0.2)$. يبيّن الشكل 7 جملة النقاط الممثّلة للمعطيات التابعيّة المشوَّشة $(n = 50)$ وكذلك بيان التابع f .



الشكل 7: المعطيات التابعيّة والتابع f .

نستخدم طريقة التربيعات الصغرى في تعيين تابع كثير الحدود $\overline{p} \in \mathcal{P}_3$ يحقق الخاصّة:

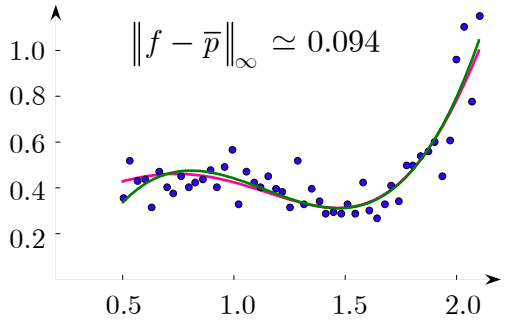
$$\sum_{i=1}^{50} (\overline{p}(t_i) - z_i)^2 = \min_{p \in \mathcal{P}_3} \sum_{i=1}^{50} (p(t_i) - z_i)^2$$

وهذا يقودنا، وفق ما سبق، إلى حل جملة معادلات خطيّة مرتبتها 4 (أربع معادلات بأربعة مجاهيل).

بحل هذه الجملة نحصل على تابع كثير الحدود

$$\overline{p}(x) \simeq -1.038 + 4.682\,x - 4.636\,x^2 + 1.408\,x^3$$

والذي نوضحّه بيانياً في الشكل التالي مع مجموعة المعطيات المشوّشة وبيان التابع f .



2.4. طريقة التمليس (Lissage) باستخدام توابع الـ Splines

نعرض في هذه الفقرة طريقة معالجة معطياتٍ تابعيّة $\{(t_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ تسمح بتعيين تابع من الصفّ $C^2([a,b])$ يجعل المقدار

$$\int_a^b \big(f''(t)\big)^2 \,\mathrm{d}\,t + \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) - y_i\big)^2, \qquad \rho > 0$$

أصغر ما يمكن. يؤدّي الحدّ

$$\int_a^b \big(f''(t)\big)^2 \,\mathrm{d}\,t$$

دور مخمّد الاهتزاز ويدفع الحل باتجاه مستقيم التربيعات الصغرى، وعلى عكس ذلك يؤدّي الحدّ

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) - y_i\big)^2$$

دوراً يقرّب الحلّ من المعطيات ويدفع باتجاه تحقيق المساواة $f(t_i) = y_i$. أمّا الوسيط ρ فيهدف إلى التوفيق بين الحدّين السابقين: إنّ اختيار قيمة كبيرة للوسيط ρ يعني التركيز على أهميّة المعطيات واعتبارها دقيقة وذات مصداقيّة كبيرة، ويكون الحل في هذه الحالة أقرب إلى الاستيفاء، وفي حالة اختيار قيمة ضعيفة لهذا الوسيط فهذا يعني أننا نقلل من أهميّة هذه المعطيات ونعدّ الأخطاء التي تشوبها كبيرة نسبياً ويكون الحل في هذه الحالة أقرب إلى مستقيم التربيعات الصغرى الموافق لهذه المعطيات.

ليكن $C^2([a,b])$ فضاء التوابع الحقيقيّة التي تقبل الاشتقاق مع الاستمراريّة حتّى المرتبة الثانية على المجال $[a,b]$، ولتكن التجزئة

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b, \qquad n \geq 2$$

للمجال $[a,b]$.

نرمز بالكتابة $\prod_3^2\big([a,b]\big)$ إلى فضاء توابع Splines المكوّنة من التوابع الحقيقيّة:

$$s : [a,b] \to \mathbb{R}$$

التي تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1°) مقصور s على كلّ مجال جزئي $\big([t_i, t_{i+1}]\big)_{i=1,\ldots,n-1}$ يتطابق مع تابع كثير الحدود درجته أصغر أو يساوي 3.

2°) مقصور s على كلّ من المجالين $[a,t_1]$ و $[t_n,b]$ يتطابق مع تابع كثير الحدود درجته أصغر أو يساوي 1.

3°) $s \in C^2([a,b])$.

نلاحظ هنا أنّ $\prod_3^2\big([a,b]\big)$ فضاءٌ شعاعيّ جزئي من الفضاء $C^2([a,b])$ بعده يساوي n.

مبرهنة 10

يمكن التعبير عن أيّ تابع $s \in \prod_3^2\big([a,b]\big)$ بصيغةٍ من الشكل:

$$\begin{cases} s(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \sum_{i=1}^{n} d_i(s)\dfrac{\big(t-t_i\big)_+^3}{3!} \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0 \\ d_1 t_1 + d_2 t_2 + \cdots + d_n t_n = 0 \end{cases}$$

حيث

$$(t-t_i)_+ = \begin{cases} t-t_i & if\ t > t_i \\ 0 & else \end{cases}, \quad d_i(s) = s'''(t_i^+) - s'''(t_i^-)$$

نترك إثبات المبرهنة للقارئ. ■

ملاحظة:

إذا كان $p_i(t)$ يرمز إلى مقصور التابع s على المجال الجزئي $[t_i, t_{i+1}]$. وكان $p_0(t)$ و $p_n(t)$ يمثّلان مقصورَي التابع s على المجالين $[a,t_1]$ و $[t_n,b]$ على الترتيب فإنّه يمكن بسهولة إثبات علاقة التدريج التالية:

$$p_i(t) = p_{i-1}(t) + d_i(s)\frac{(t-t_i)^3}{3!}, \quad 1 \le i \le n$$

مبرهنة 11

أياً كانت القيم $y_1,\ldots,y_n$ هناك عنصر وحيد $\sigma \in \prod_3^2\big([a,b]\big)$ يحقق المعادلات:

$$\sigma(t_i) + \frac{1}{\rho}\underbrace{\big(\sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-)\big)}_{d_i(\sigma)} = y_i, \quad 1 \le i \le n$$

ملاحظة: إذا رمزنا بـ σ_j للعنصر الوحيد من الفضاء $\prod_3^2\big([a,b]\big)$ الموافق للشروط:

$$\sigma_j(t_i) + \frac{1}{\rho}d_i(\sigma_j) = \begin{cases} 1 & if\ i = j \\ 0 & else. \end{cases}, \quad 1 \le i \le n$$

فعندها نستطيع أن نكتب

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} y_j \sigma_j$$

1.2.4 الخواص الحدّية لتوابع الـ Splines

تمتاز عناصر الفضاء $\prod_3^2\big([a,b]\big)$ بخواص حدّية تكسبها أهميّة خاصّة من بين توابع الفضاء $C^2\big([a,b]\big)$ جميعها. نلخّص أهمّ هذه الخواص بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 12 (راجع Laurent P.J. [87])

ليكن $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. وليكن $\sigma\in\prod_3^2\big([a,b]\big)$ العنصر الوحيد الذي يحقق الشروط:

$$\sigma(t_i)+\frac{1}{\rho}\underbrace{\big(\sigma'''(t_i^+)-\sigma'''(t_i^-)\big)}_{d_i(\sigma)}=y_i,\quad 1\le i\le n$$

نعرّف المقدار

$$m(s,f)=\int_a^b\big[s''(t)-f''(t)\big]^2\,\mathrm{d}\,t+\rho\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i(s)}{\rho}+y_i-f(t_i)\right)^2$$

فيكون لدينا:

أولاً: أيّاً كان $f\in C^2\big([a,b]\big)$ فإنّ

$$m(\sigma,f)=\min_{s\in\prod_3^2([a,b])}m(s,f)$$

وأي عنصر آخر $\tilde\sigma\in\prod_3^2\big([a,b]\big)$ يحقق هذه الخاصّة يختلف عن σ بكثير حدود درجته أصغر أو يساوي 1. أيْ أنّ $(\sigma-\tilde\sigma)\in\mathcal{P}_1$.

ثانياً: أيّاً كان $s\in\prod_3^2\big([a,b]\big)$ فإنّ

$$m(s,\sigma)=\min_{f\in C^2([a,b])}m(s,f)$$

ويكون σ في هذه الحالة العنصر الوحيد من الفضاء $C^2\big([a,b]\big)$ الذي يحقق هذه الخاصّة.

نتائج

ليكن $\sigma\in\prod_3^2\big([a,b]\big)$ العنصر الوحيد الذي يحقق شروط المبرهنة 11، عندئذٍ يكون لدينا:

❶ أياً كان التابع $f \in C^2\big([a,b]\big)$ الذي يحقق شروط الاستيفاء $\underset{i=1,\ldots,n}{f(t_i) = y_i}$ فإنّ:

$$\int_a^b [\sigma''(t) - f''(t)]^2 dt + \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^{n} \big[d_i(\sigma) \big]^2 = \min_{s \in \Pi_3^2} \left(\int_a^b [s''(t) - f''(t)]^2 dt + \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^{n} \big[d_i(s) \big]^2 \right)$$

وأي عنصر آخر $\tilde{\sigma} \in \prod_3^2\big([a,b]\big)$ يحقق هذه الخاصّة يختلف عن σ بكثير حدود درجته أصغر أو يساوي 1. أي أنّ $(\sigma - \tilde{\sigma}) \in \mathcal{P}_1$.

❷ إنّ اختيار $s \equiv 0$ في الجزء الثاني من المبرهنة 12 يقودنا إلى الخاصّة التالية:

$$\int_a^b [\sigma''(t)]^2 dt + \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(\sigma(t_i) - y_i \big)^2 = \min_{f \in C^2([a,b])} \left(\int_a^b [f''(t)]^2 dt + \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i) - y_i \big)^2 \right)$$

ويكون σ في هذه الحالة العنصر الوحيد من الفضاء $C^2\big([a,b]\big)$ الذي يحقق هذه الخاصّة.

2.2.4 تعيين تابع الحل σ

لتكن $\{(t_i, y_i) : 1 \le i \le n\}$ مجموعة المعطيات التابعيّة التي نريد معالجتها. نفترض هنا أنّ النقاط $(t_1, \ldots, t_n)$ تعرّف تجزئة للمجال $[a,b]$ من الشكل:

$$a < t_1 < \cdots < t_n < b, \quad n \ge 2$$

فإذا كان $\sigma \in \prod_3^2\big([a,b]\big)$ العنصر الوحيد الذي يحقق شروط المبرهنة 11، أيْ:

$$\sigma(t_i) + \frac{1}{\rho} d_i(\sigma) = y_i, \quad 1 \le i \le n$$

فإنّ هذا العنصر، واعتماداً على المبرهنة 10، يكتب بالشكل:

$$\sigma(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \sum_{j=1}^{n} d_j(\sigma) \frac{(t - t_j)_+^3}{3!}$$

حيث تحقق انقطاعات المشتق الثالث $\left(d_i\right)_{1\le i\le n}$ الشرطين:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} d_j t_j = 0$$

بتطبيق الشروط السابقة على التابع σ نحصل على المعادلات الخطيّة التالية:

$$\alpha_0 + \alpha_1 t_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(t_i - t_j)^3}{3!} d_j(\sigma) + \frac{1}{\rho} d_i(\sigma) = y_i, \quad 1 \le i \le n$$

تسمح هذه المعادلات وعددها n بالإضافة للمعادلتين:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} d_j t_j = 0$$

بتعيين الوسطاء α_0, α_1 والانقطاعات $d_1, \ldots, d_n$. نضع

$$\Psi = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6/\rho & 0 & \cdots & 0 \\ (t_2 - t_1)^3 & 6/\rho & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (t_n - t_1)^3 & \cdots & (t_n - t_{n-1})^3 & 6/\rho \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يمكن كتابة جملة المعادلات الخطيّة السابقة بالشكل:

$$\begin{cases} \Phi \cdot \alpha + \Psi \cdot D = Y \\ \Phi^T \cdot D = 0 \end{cases}$$

أو بالشكل المصفوفاتي المكافئ

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & t_1 & \times & & & \\ 1 & t_2 & \times & \times & \Psi & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \times & \\ 1 & t_n & \times & \cdots & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

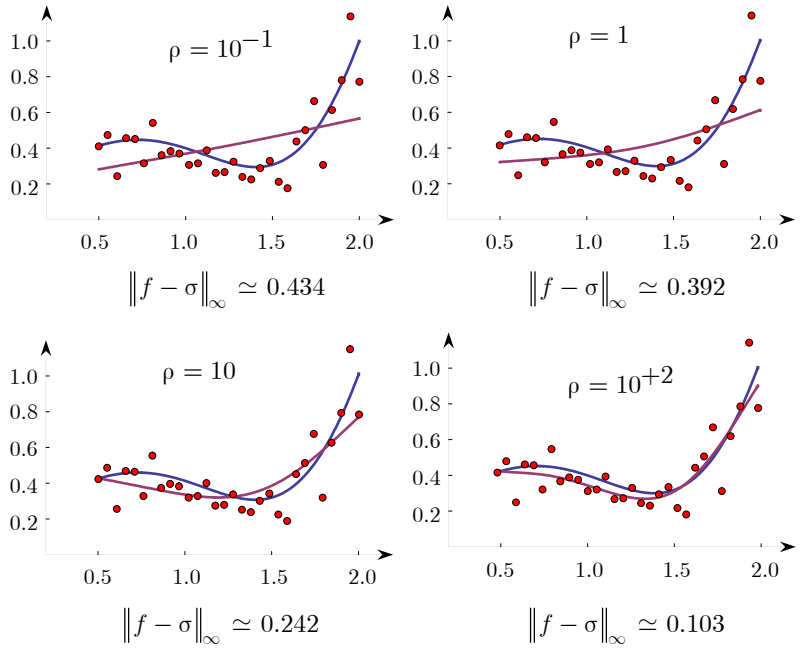
مثال 5

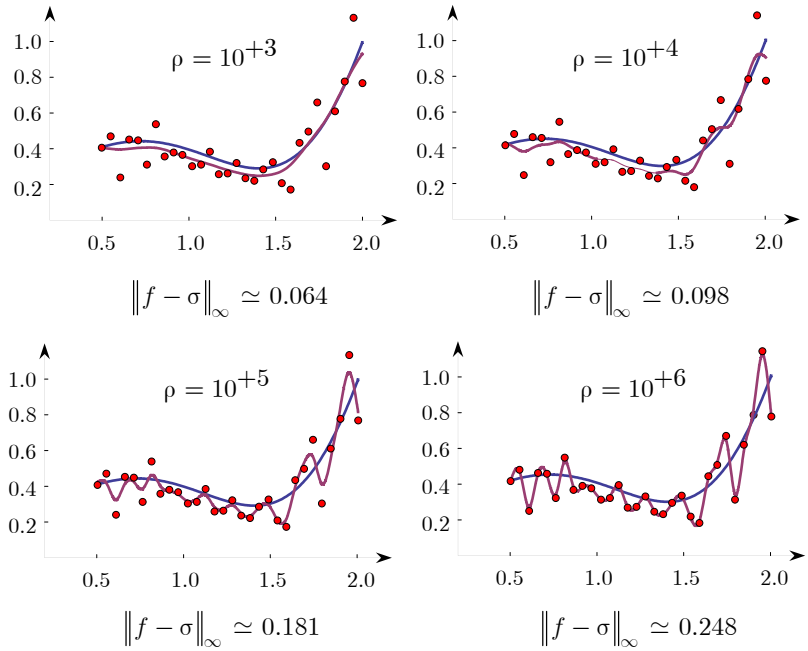
لنطبّق طريقة التمليس (Lissage) المشروحة أعلاه في معالجة معطياتٍ مولّدة وفق الطريقة التي عرضناها في المثال 4 $(n = 30)$.

نعيّن في هذا المثال توابع الـ Splines $\sigma \in \prod_3^2\big([0.5,2.0]\big)$ في الحالات الموافقة لقيم الوسيط:

$$\rho \in \{10^k : -1 \leq k \leq 6\}$$

فنحصل على النتائج المبيّنة في الشكل التالي:





الشكل 8: نتائج المعالجة تبعاً لقيمة الوسيط ρ.

5. مسائل وتمارين

1.5. ليكن التابع الحقيقي $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ والمعرّف بالعلاقة

$$f(x) = |x|$$

أنشئ تابع التقريب المنتظم الأمثل $p^* \in \mathcal{P}_1$ للتابع f على المجال $[-1,2]$.

2.5. عيّن تابع التقريب المنتظم الأمثل $p^* \in \mathcal{P}_n$ للتابع الحقيقي $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k, \quad a_{n+1} \neq 0$$

3.5. ليكن $f \in C^1[a,b]$ و $p(x)$ تابع كثير الحدود بحيث يكون $\|f' - p\|_\infty \leq \varepsilon$ نعرّف التابع

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad a \leq x \leq b$$

(a) بيّن أنّ التابع $q(x)$ هو تابع كثير الحدود ويحقق المتراجحة:

$$\|f - q\|_\infty \leq \varepsilon(b-a)$$

(b) عمّم نتيجة المرحلة (a) إلى الحالة التي يكون فيها التابع $f \in C^n[a,b]$ $(n \geq 2)$ ويكون فيها $p(x)$ تابع كثير الحدود يحقق المتراجحة:

$$\|f^{(n)} - p\|_\infty \leq \varepsilon$$

أوجد صيغة تقريب بكثير حدود $q(x)$ تشتمل على حدّ تكاملي.

(c) نفترض الآن أنّ f تابعٌ من الصفّ $C^\infty[a,b]$. برهن أنّ هناك متتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ من توابع كثيرات الحدود تحقق الخاصّة:

$$\forall j \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|f^{(j)} - p_n^{(j)}\|_\infty = 0$$

4.5. ليكن $f \in C^2[a,b]$ ويحقق الشرط

$$f''(x) > 0, \quad a \leq x \leq b$$

برهن أنّه إذا كان $p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$ أفضل تقريب منتظم للتابع f على المجال $[a,b]$ فإنّ:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{f(a)+f(c)}{2} - \left(\dfrac{a+c}{2}\right)\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \\ a_1 = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{cases}$$

حيث c هو الحلّ الوحيد للمعادلة

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ما قيمة خطأ التقريب $\left\|f - p_1^*\right\|_\infty$؟

5.5. بيّن أنّ أفضل تقريب منتظم للتابع $\sqrt{1+x^2}$ على المجال $[0,1]$ بتابع كثير الحدود $p_1^* \in \mathcal{P}_1$ يعطى بالعلاقة:

$$p_1^*(x) = a_0 + a_1\, x$$

حيث

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{a_1}{2}} \simeq 0.955 \\ a_1 = \sqrt{2} - 1 \simeq 0.414 \end{cases}$$

استخدم هذه النتيجة في إيجاد التقريب التالي:

$$\sqrt{x^2+y^2} \simeq a_0\, y + a_1\, x, \quad 0 < x \leq y$$

واستنتج أفضل تحديد من الأعلى للخطأ في التقريب السابق بدلالة y.

6.5. استخدم طريقة التقريب بالوسطي التربيعي مع تابع الوزن $w(x) \equiv 1$ في إيجاد تقريب للتابع الحقيقي $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = \ln x$$

بتابع كثير الحدود من الدرجة ≥ 1.

7.5. عيّن قيمة الوسيط $\alpha \in \mathbb{R}$ التي نجعل المقدار

$$e(\alpha) = \int_0^1 \left| e^x - \alpha \right| \mathrm{d}\, x$$

أصغر ما يمكن. ما القيمة الصغرى لهذا المقدار؟

8.5. ليكن $f \in C\big([0,\pi]\big)$. أوجد تقريباً للتابع f على المجال $[0,\pi]$ بتابع كثير الحدود مثلّثي من الشكل

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(j\, x)$$

باستخدام طريقة التقريب بالوسطي التربيعي مع تابع وزن $w(x) \equiv 1$.

9.5. ليكن $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً حقيقياً معرّفاً بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

عيّن تابع كثير الحدود $p \in \mathcal{P}_2$ الذي يجعل المقدار

$$\int_{-1}^{1} \big[f(x) - p(x) \big]^2 \, \mathrm{d}\, x$$

أصغر ما يمكن.

10.5. نعرّف متتالية التوابع

$$S_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x), \quad n \geq 0$$

حيث $T_n(x)$ هو كثير حدود تشيبيشف من الدرجة n. تسمّى توابع كثيرات الحدود $S_n(x)$ كثيرات حدود تشيبيشف من النوع الثاني.

أولاً: بيّن أنّ متتالية التوابع $(S_n)_{n\geq 0}$ متعامدة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة للجداء السلّمي الموافق لتابع الوزن $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

ثانياً: بيّن أن متتالية التوابع $(S_n)_{n\geq 0}$ تحقق علاقة التدريج التالية:

$$S_{n+1}(x) = 2x\, S_n(x) - S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

وهي ذات العلاقة التي تحققها التوابع $(T_n)_{n\geq 0}$.

ثالثاً: ليكن $f \in C\big([-1,1]\big)$، ابحث في حلّ المسألة التالية:

$$\min_{p\in\mathcal{P}_n} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\big[f(x)-p(x)\big]^2\,\mathrm{d}\,x$$

11.5. لتكن $\big(\varphi_n\big)_{n\geq 1}$ متتالية من كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[a,b]$ بالنسبة لتابع وزنٍ $w(x)$. ولتكن

$$a < z_n^n < z_{n-1}^n < \cdots < z_1^n < b$$

جذور العنصر φ_n. برهن أنّ جذور العنصر φ_{n+1} تتوزّع في المجال المفتوح $]a,b[$ بحيث يفصل بينها جذور العنصر φ_n على الترتيب، أي:

$$a < z_{n+1}^{n+1} < z_n^n < z_n^{n+1} < \cdots < z_2^{n+1} < z_1^n < z_1^{n+1} < b$$

توجيه: استخدم التدريج على الدرجة n. اكتب φ_n بالشكل:

$$\varphi_n(x) = A_n x^n + \cdots \quad , \quad A_n > 0$$

واستخدم علاقة التدريج التي تحققها كثيرات الحدود المتعامدة في حساب قيمة كثيرات الحدود عند جذور φ_n. لاحظ تغيّر الإشارة للتوابع $\varphi_{n-1}(x)$ و $\varphi_{n+1}(x)$.

12.5. ليكن f تابعاً مستمراً وزوجياً (فردياً) على مجال من الشكل $[-a,a]$.

برهن أنّ أفضل تقريب منتظم بكثير حدود $p_n^* \in \mathcal{P}_n\big([-a,a]\big)$ من المرتبة n للتابع f هو تابعٌ زوجي (فردي على الترتيب) على المجال $[-a,a]$ وذلك بِقَطْع النظر عن كون المرتبة n فرديّة أم زوجيّة.

فهرس المصطلحات ومقابلاتها بالانكليزيّة

الانكليزيّة	العربيّة
الفصل الأول	
floating-point	النقطة العائمة
computer word	وحدة ذاكرة
exponent	الأس
quantum exponent	الأس الكوانتي
significand	الدليل
normal number	عدد نظامي
subnormal number	عدد تحت نظامي
binary formats	الأنماط الاثنانية
decimal formats	الأنماط العشرية
binary encoding	الترميز الإثناني
decimal encoding	الترميز العشري
underflow	ظاهرة نقص الأسْ
overflow	ظاهرة زيادة الأسْ
unit in the last place	وحدة آخر رقم
rounding	تدوير
stability	الاستقرار
sensitivity	الحساسيّة
well-posed problems	مسائلَ جيّدة الطرح
ill-posed problems	مسائلَ سيّئة الطرح

الانكليزيّة	العربيّة
condition number	عدد الحساسيّة
ill-conditioned	سيّئة الحساسيّة
significant digits	أرقامٌ معنويّة
propagation of Errors	انتشار الأخطاء
error estimation	تقدير الخطأ
relative error	الخطأ النسبي
الفصل الثاني	
vector space	فضاء شعاعي
vector subspace	فضاء شعاعي جزئي
base of a vector space	أساس فضاء شعاعي
conjugate transpose	المصفوفة المساعدة
transpose of a matrix	منقول مصفوفة
identity matrix	المصفوفة المطابقة
inverse of a matrix	مقلوب مصفوفة
symetric matrix	مصفوفة متناظرة
hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
unitary matrix	مصفوفة واحديّة
normal matrix	مصفوفة نظاميّة
trace of a matrix	أثر مصفوفة
permutation matrix	مصفوفة تبديل
determinant	محدد مصفوفة

الانكليزيّة	العربيّة
eigenvalue	قيمة ذاتية
eigenvector	شعاع ذاتي
matrix spectrum	طيف مصفوفة
spectral radius	نصف القطر الطيفي
linear maps	تطبيقات خطيّة
diagonal matrix	مصفوفة قطريّة
triangular matrix	مصفوفة مثلّثية
singular value	قيمة مميَّزة
positive definite matrix	مصفوفة معرّفة موجبة
vector norm	نظيم شعاعي
matrix norm	نظيم مصفوفاتي
subordinate matrix norm	نظيم مصفوفاتي ملحق
convex function	تابع محدّب
inner product	الجداء السلّمي
unitary transformation	تحويل واحدي
الفصل الثالث	
LR decomposition	تفريق LR
pivot	المرتكز القطري
orthogonal transformations	تحويلات متعامدة
Householder transformations	تحويلات هاوسهولدر
QR factorization	تفريق QR
least squares	التربيعات الصغرى

الانكليزيّة	العربيّة
الفصل الرابع	
iterative method	طريقة تكراريّة
Jacobi iterative method	طريقة جاكوبي التكراريّة
Gauss-Seidel iterative method	طريقة غاوص–سايدل التكراريّة
successive over-relaxation method	طريقة SOR
convergence speed	سرعة التقارب
rate of convergence	معدّل التقارب
strictly diagonally dominant matrix	مصفوفة ذات قطر مسيطر تماماً
block-tridiagonal matrices	المصفوفات ثلاثية الأقطار كتلياً
block Jacobi method	طريقة جاكوبي الكتليّة
block Gauss-Seidel method	طريقة غاوص–سايدل الكتليّة
block SOR method	طريقة SOR الكتليّة
الفصل الخامس	
sensitivity of eigenvalues	حساسيّة القيم الذاتيّة
sensitivity of eigenvectors	حساسيّة الأشعّة الذاتيّة
power method	طريقة القوى
inverse power method	طريقة القوى المقلوبة
orthogonal iterations method	طريقة التكرار المتعامد
Jacobi method	طريقة جاكوبي
الفصل السادس	
interpolation	الاستيفاء

الانكليزيّة	العربيّة
Lagrange interpolation	استيفاء لاغرانج
Lagrange Interpolation Formula	صيغة استيفاء لاغرانج
Newton Interpolation Formula	صيغة استيفاء نيوتن
divided differences	الفروق المقسومة
Chebyshev polynomials	كثيرات حدود تشيبيشف
Runge phenomenon	ظاهرة رونج
Lebesgue constant	ثابت لوبيغ
Hermite interpolation	استيفاء هرميت
piecewise function	تابع قِطَعي
local interpolation	الاستيفاء المحلّي
global interpolation	الاستيفاء الشامل
spline function	تابع السبلاين
natural cubic spline function	تابع السبلاين التكعيبي الطبيعي
complete cubic spline function	تابع السبلاين التكعيبي التام
periodic cubic spline function	تابع السبلاين التكعيبي الدوري
uniform subdivision	تجزئة منتظمة
energy curvature	طاقة الانحناء
الفصل السابع	
uniform approximation	التقريب المنتظم
Chebyshev alternation theorem	مبرهنة تشيبيشف في التناوب
orthogonal polynomials	كثيرات الحدود المتعامدة
Legendre polynomials	كثيرات حدود لوجندر

الانكليزيّة	العربيّة
Chebyshev polynomials	كثيرات حدود تشيبيشف
Laguerre polynomials	كثيرات حدود لاجر
Hermite polynomials	كثيرات حدود هرميت
least squares approximation	التقريب بالوسطي التربيعي
numerical data processing	معالجة المعطيات العدديّة
least squares	التربيعات الصغرى
smoothing splines method	طريقة التمليس بتوابع السبلاين
الفصل الثامن	
approximation by spline curves	التقريب بمنحنيات السبلاين
interpolation by spline curves	الاستيفاء بمنحنيات السبلاين
open curve	منحني مفتوح
closed curve	منحني مغلق
regularized least-squares	التربيعات الصغرى المُعايَرة
الفصل التاسع	
numerical integration	التكامل العددي
integration formulas	صِيَغ تكاملية
composite integration formulas	صِيَغ تكاملية مركّبة
Newton–Cotes integration formulas	صِيَغ نيوتن–كوتس التكاملية
symmetric integration formulas	صِيَغ تكامليّة متناظرة
degree of precision of integration formula	مرتبة صيغة تكامليّة
mean value	القيمة الوسطيّة
integral mean value	القيمة الوسطيّة التكامليّة

العربيّة	الانكليزيّة
نواة بيانو	Peano kernel
طريقة نقطة الوسط	midpoint method
طريقة شبه المنحرف	trapezoidal method
طريقة سيمبسون	Simpson's method
طريقة غاوص التكامليّة	Gaussian quadrature method
صيغة غاوص–لوجندر	Gauss-Legendre formula
صيغة غاوص–تشيبيشف	Gauss-Chebychev formula
طريقة رومبرغ التكامليّة	Romberg quadrature method
استقراء ريتشاردسون	Richardson Extrapolation
الطريقة التكيّفيّة في التكامل العددي	adaptive numerical quadrature method
التكاملات المعتلّة	improper integrals
الفصل العاشر	
رباعي الأضلاع المعياري	standard quadrilateral
مثلّث معياري	standard triangle
الفصل الحادي عشر	
مسألة كوشي	Cauchy problem
طريقة التقريبات المتتالية	successive approximation method
الطرائق العددية وحيدة الخطوة	one-step numerical methods
طريقة أولر	Euler method
طريقة شبه المنحرف	trapezoidal method
الطرائق الصريحة	explicit methods

العربيّة	الانكليزيّة
الطرائق الضمنيّة	implicit method
طرائق رونج–كوتا	Runge-Kutta methods
خطأ الاقتطاع	truncation error
شرط الاتساق	consistency condition
الطرائق العددية متعددة الخطوات	multi-step numerical methods
جملة معادلات تفاضلية عادية	set of ordinary differential equations
الفصل الثاني عشر	
مسائل القيم المحيطية	boundary value problems
طريقة الفروق المنتهية	finite difference method
طرائق التسديد	shooting methods
شرط ليبتشز	Lipschitz condition
طريقة العناصر المنتهية	finite element method
الفصل الثالث عشر	
المعادلات الجبريّة غير الخطّية	nonlinear algebraic equations
مرتبة التقارب	order of convergence
طرائق النقطة الثابتة وحيدة الخطوة	one-step fixed point methods
طريقة التنصيف	dichotomy method
طريقة الوتر	chord method
طريقة نيوتن	Newton method
طريقة القاطع	secant method
جذر مضاعف	multiple root
منطقة الشك	uncertainty region

الانكليزيّة	العربيّة
roots of polynomials	جذور كثيرات الحدود
Muller's method	طريقة مولر
الفصل الرابع عشر	
optimization	الأمثلة
optimum	حلٍّ أمثلي
maximum	قيمة حديّة عظمى
minimum	قيمة حديّة صغرى
mathematical programming	البرمجة الرياضيّة
operational research	البحوث العملياتيّة
global minimum	نقطة صغرى شاملة
local minimum	نقطة صغرى محليّة
coercive function	تابع قسري
convex set	مجموعة محدّبة
convex function	تابع محدّب
numerical unconstrained optimization	الأمثَلة العددية بدون قيود
critical point	نقطة حرجة
saddle-point	نقطة سرجيّة
directional derivative	مشتق موجّه
descent direction	اتجاه انحدار
steepest descent	انحدار أعظمي
gradient methods	طرائق التدرّج
steepest descent method	طريقة الانحدار الأعظمي

العربيّة	الانكليزيّة
طريقة الانحدار بخطوة ثابتة	fixed-step descent method
المصفوفة اليعقوبيّة	Jacobian matrix
الأمثَلة العددية مع قيود	numerical constrained optimization
منطقة الحل	admissible region
اتجاه مقبول	admissible direction
قيود مؤهّلة	qualified constraints
خوارزميّة التدرّج مع الإسقاط	projected gradient algorithm
نقطة لامتغيّرة	stationary point

المراجع

[1]	Abell Martha L., Braselton James P.,	Differential Equations with Mathematica, Third Edition, Elsevier Academic Press, 2004.
[2]	Aberth Oliver,	Introduction To Precise Numerical Methods, Second Edition, Academic Press Elsevier Inc., 2007.
[3]	Acary V.,	Introduction à L'analyse Numérique, Note De Cours, Février 2003.
[4]	Acton Forman S.,	Numerical Methods That Work, The Mathematical Association of America, 1990.
[5]	Ahn Sung Joon,	Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space, Springer Science + Business Media, Inc., 2005.
[6]	Allaire Grégoire,	Analyse Numérique et Optimisation, Deuxième Edition, Editions De L'Ecole Polytechnique - Octobre 2012.
[7]	Allaire Grégoire, Kaber Sidi Mahmoud,	Numerical Linear Algebra, Springer Science Business Media, 2008.
[8]	Arnold D. N.,	Introduction to Numerical Analysis, Department of Mathematics, Penn State University, 2000.
[9]	Arora R. K.,	Optimization, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.
[10]	Ascher U. M. & Greif C.,	A First Course on Numerical Methods, December 2005.
[11]	Ashino Ryuichi and Vaillancourt Rémi,	Numerical Methods with MATLAB, University of Ottawa.
[12]	Atkinson Kendall E.,	An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 1978, 1989.
[13]	Atkinson Kendall E., Han Weimin, Stewart David,	Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 2009.
[14]	Bakhvalov N.,	Méthodes Numériques, Edition Mir, Moscou 1976.

[15]	Bazaraa Mokhtar S., Sherali Hanif D., Shetty C.M.,	Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, Third Edition John Wiley & Sons, 2006.
[16]	Beilina Larisa, Karchevskii Evgenii, Karchevskii Mikhail,	Numerical Linear Algebra: Theory and Applications, Springer International Publishing Ag 2017.
[17]	Bernstein Dennis S.,	Matrix Mathematics, Princeton University Press, 2009.
[18]	Bhatia Rajendra,	Matrix Analysis, Springer-Verlag New York, 1997.
[19]	Boelkins Matthew R., Goldberg J. L., Potter Merle C.,	Differential Equations with Linear Algebra, Oxford University Press, Inc., 2009.
[20]	Bonnans J. F., Gilbert J. C., Lemaréchal C., Sagastizábal C. A.,	Numerical Optimization, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
[21]	Boyce William E., DiPrima Richard C.,	Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc., 2009.
[22]	Brenner Susanne C.,Scott L. Ridgway,	The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Third Edition, Springer Science Business Media, 2008.
[23]	Brent Richard P., Zimmermann Paul,	Modern Computer Arithmetic, University Press, Cambridge, 2011.
[24]	Burden Richard L.,Faires J. Douglas, Burden Annette M.,	Numerical Analysis, Tenth Edition, Cengage Learning, 2016.
[25]	Butcher J. C.,	Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Second Edition, John Wiley & Sons, Ltd., 2008.
[26]	Chapra Steven C., Canale Raymond P.,	Numerical Methods for Engineers, Seventh Edition, McGraw-Hill Education, 2015.
[27]	Chen Ke,	Matrix Preconditioning Techniques and Applications, Cambridge University Press 2005.
[28]	Cheney Ward, Kincaid David,	Numerical Mathematics and Computing, Sixth Edition, Thomson Brooks/Cole, 2008.
[29]	Chong Edwin K. P., Zak Stanislaw H.,	An Introduction to Optimization, Second Edition, John Wiley & Sons, 2001.
[30]	Chu M. T.,	Numerical Analysis, Lecture Notes.

[31]	Ciarlet P. G.,	Introduction à L'analyse Numériques Matricielle et à L'optimisation, Masson, Paris 1982.
[32]	Cohen Harold,	Numerical Approximation Methods, Springer Science Business Media,2011.
[33]	Dahlquist G. & Björck Å.,	Numerical Mathematics in Scientific Computation, Volume I & II.
[34]	Dahlquist Germund, Björck Åke,	Numerical Methods in Scientific Computing, Siam, Volume i, 2007.
[35]	Dahlquist Germund, Björck Åke,	Numerical Methods in Scientific Computing, Siam, Volume ii, 2009.
[36]	Danaila I., Joly P., Kaber S. M., Postel M.,	An Introduction to Scientific Computing, Springer Science Business Media, 2007.
[37]	Daniels Richard W.,	An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques, Elsevier North-Holland, 1978.
[38]	Davis Philip J.,	Interpolation and Approximation, Brown University, Dover Publications, Inc., 1975.
[39]	Davis Philip J., Rabinowitz Philip,	Methods of Numerical Integration, Second Edition, Academic Press, Inc., 1984.
[40]	Demailly Jean-Pierre,	Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, 2006.
[41]	Demmel James W.,	Applied Numerical Linear Algebra, Siam 1996.
[42]	Deturck D. & Wilf H. S.,	Lectures on Numerical Analysis, Department of Mathematics University of Pennsylvania, 2002.
[43]	Douglas N. Arnold,	A Concise Introduction to Numerical Analysis, 1999-2001.
[44]	Duffy Dean G.,	Advanced Engineering Mathematics, CRC Press, 1998.
[45]	Dukkipati Rao V.,	Numerical Methods, New Age International (P) Ltd., 2010.
[46]	Epperson James F.,	An Introduction to Numerical Methods and Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 2013.
[47]	Erdos L.,	Linear Algebra, Lecture Notes, 2000.
[48]	Faragó István,	Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Lectures Notes, 2013.

[49]	Farin Gerald, Hansford Dianne,	Mathematical Principles for Scientific Computing and Visualization, A K Peters, Ltd., 2008.
[50]	Fletcher R.,	Practical Methods of Optimization, Second Edition, John Wiley & Sons, 2000.
[51]	Fortin André & Garon André,	Les Eléments Finis : De La Théorie à La Pratique, Université Laval, 2014.
[52]	Fortin André,	Analyse Numérique Pour Ingénieurs, Edition De L'école Polytechnique De Montréal, 2005.
[53]	GILLI Manfred,	Méthodes Numériques, Département D'économétrie, Université De Genève, Notes De Cours, 2006.
[54]	Glowinski Roland,	Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
[55]	Goldberg D.,	What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic, Issue of Computing Surveys, 1991.
[56]	Golub Gene H., Van Loan Charles F.,	Matrix Computations, Fourth Edition, The Johns Hopkins University Press, 2013.
[57]	Grivet Jean-Philippe,	Méthodes Numériques Appliquées, EDP Sciences, 2009.
[58]	Hairer E.,	Introduction à L'analyse Numérique, Notes De Cours, Octobre 2005.
[59]	Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.,	Solving Ordinary Differential Equations, vol. I, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
[60]	Hairer E., Wanner G.,	Solving Ordinary Differential Equations, vol. II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
[61]	Handscomb D. C.,	Methods of Numerical Approximation, Lectures Delivered at a Summer School, Pergamon Press, 1966.
[62]	Hauser John R.,	Numerical Methods for Nonlinear Engineering Models, Springer Science Business Media,2009.
[63]	Heath M. T.,	Scientific Computing, an Introductory Survey, Second Edition, 2001.
[64]	Henrici Peter,	Elements of Numerical Analysis, Second Printing, John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[65]	Herbin Raphaèle,	Cours D'analyse Numérique, Licence De Mathématiques, Université Aix Marseille, 2016.
[66]	Hermann M., Saravi M.,	A First Course in Ordinary Differential Equations, Springer India 2014.
[67]	Hildebrand F. B.,	Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Dover Publications, Inc., 1974.
[68]	Hoffman Joe D.,	Numerical Methods for Engineers And Scientists, Second Edition, Marcel Dekker, Inc., 2001.
[69]	Holmes Mark H.,	Introduction to Numerical Methods In Differential Equations, Springer, 2007.
[70]	Householder Alston S.,	Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company,1953.
[71]	Ipsen Ilse C. F.,	Numerical Matrix Analysis: Linear Systems and Least Squares, Siam, 2009.
[72]	Isaacson E., Keller H. B.,	Analysis of Numerical Methods, Dover Publications, inc., New York 1966.
[73]	Iserles A.,	A First Course in The Numerical Analysis of Differential Equations, Cambridge University Press, Second Edition, 2009.
[74]	Iyengar S. R. K., Jain R. K.,	Numerical Methods, New Age International (p) ltd., 2009.
[75]	James Glyn,	Advanced Modern Engineering Mathematics, Fourth Edition, Pearson Education Limited 1993, 2011.
[76]	Jedrzejewski Franck,	Introduction aux Méthodes Numériques, Deuxième Edition, Springer-Verlag France, Paris 2005.
[77]	Kahan W. M.,	Numerical linear algebra, Canadian Mathematical Bulletin, vol. 9, pp. 757-801, 1966.
[78]	Kahan W.,	Lecture Notes on The Status of IEEE Standard 754 For Binary Floating-Point Arithmetic, University of California, Berkeley.
[79]	Kantorovich, L. V.,	"On Newton method", Trudy Steklov Math. Inst., Volume 28, Pages 104–144, 1949.
[80]	Keller H.,	Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Dover, New York, 1992.

[81]	Kelley C. T.,	Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations, Siam, Philadelphia 1995.
[82]	Kiusalaas Jaan,	Numerical Methods in Engineering With MATLAB, Cambridge University Press, 2005.
[83]	Kneusel Ronald T.,	Numbers and Computers, Second Edition, Springer International Publishing Ag 2015, 2017.
[84]	Kress Rainer,	Numerical Analysis, Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
[85]	Lange Kenneth,	Numerical Analysis for Statisticians, Second Edition, Springer Science Business Media, 2010.
[86]	Lascaux P. & Theodore R.,	Analyse Numérique Matricielle Appliquée A L'art De L'ingénieur, Tome 1&2, 2e Edition, Masson, Paris 1994.
[87]	Laurent P. J.,	Approximation et Optimisation, HERMANN, Paris, 1972.
[88]	Legendre Guillaume,	Méthodes Numériques : Introduction à L'analyse Numérique Et au Calcul Scientifique, Notes De Cours, 2015.
[89]	Les S. Jennings,	Computational Linear Algebra, Notes for Third Year and Honors Courses in Numerical Analysis, University Of Western Australia, 2001.
[90]	Levy Doron,	Introduction to Numerical Analysis, Department of Mathematics, University of Maryland 2010.
[91]	Logan J. David,	A First Course in Differential Equations, Springer Science Business Media, 2006.
[92]	Lorentz G. G.,	Approximation of Functions, Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1966.
[93]	Lorentz G. G.,	Bernstein Polynomials, Chelsea Publishing Company, New York, 1986.
[94]	Lui S. H.,	Numerical Analysis of Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 2011.
[95]	Magnus Alphonse,	Analyse Numérique : Approximation, Interpolation, Intégration, Université Catholique De Louvain, 2010.
[96]	Mastroianni Giuseppe, Milovanović Gradimir V.,	Interpolation Processes, Basic Theory and Applications, Springer-Verlag, 2008.

[97]	McDonough J. M.,	Lectures in Basic Computational Numerical Analysis, University of Kentucky, 2001.
[98]	Miller G.,	Numerical Analysis for Engineers and Scientists, Cambridge University Press, 2014.
[99]	Monahan John F.,	Numerical Methods of Statistics, Second Edition, Cambridge University Press, 2011.
[100]	Moody T. Chu,	Numerical Analysis, Lecture Notes.
[101]	Muller Jean-Michel and All,	Handbook of Floating-Point Arithmetic, Birkhäuser Boston, 2010.
[102]	Muller Jean-Michel,	Elementary Functions, Algorithms and Implementation, Third Edition, Birkhäuser 2016.
[103]	Nassif Nabil, Fayyad Dolly Khuwayri,	Analysis and Scientific Computing, CRC Press, 2014.
[104]	Neumaier Arnold,	Introduction To Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2001
[105]	Nocedal Jorge, Wright Stephen J.,	Numerical Optimization, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
[106]	Ortega J.M., Rheinboldt W.C.,	Iterative Solution of Nonlinear Equations In Several Variables, SIAM, 2000.
[107]	Ostrowski A. M.,	Solution of Equations and Systems of Equations, Second Edition, Academic Press Inc., 1966.
[108]	Overton M. L.,	Floating Point Representation, 1996.
[109]	Pav S. E.,	Numerical Methods Course Notes, Lecture Notes, 2005.
[110]	Phillips G.M.M., Taylor Peter J.,	Theory and Applications of Numerical Analysis, Second Edition, Elsevier Science & Technology Books, 1996.
[111]	Phillips George M.,	Interpolation and Approximation by Polynomials, Springer, 2003.
[112]	Quarteroni Alfio,	Numerical Models for Differential Problems, Springer-Verlag Italia, Milan 2009.
[113]	Quarteroni Alfio, Sacco Riccardo, Saleri Fausto,	Méthodes Numériques, Algorithmes, Analyse et Applications, Springer-Verlag Italia, Milano 2007.
[114]	Ralston A., Rabinowitz P.,	A First Course in Numerical Analysis, Dover Publications, 1978.

[115]	Randal J. LeVeque,	Finite Difference Methods for Differential Equations, University of Washington, Lecture Notes, September 2005.
[116]	Rao G. Shanker,	Numerical Analysis, Third Edition, New Age International, 2006.
[117]	Raphaèle Herbin,	Cours D'analyse Numérique, Licence De Mathématiques, Mai 2005.
[118]	Rappaz Jacques, Picasso Marco,	Introduction à L'analyse Numérique, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.
[119]	Ray Santanu Saha,	Numerical Analysis with Algorithms and Programming, CRC Press, 2016.
[120]	Ricardo Henry J.,	A Modern Introduction to Differential Equations, Second Edition, Elsevier Academic Press, 2009.
[121]	Ridgway Scott L.,	Numerical Analysis, Princeton University Press, 2011.
[122]	Ryaben'kii V. S., Tsynkov S. V.,	A Theoritical Introduction to Numerical Analysis, Taylor & Francis Group, 2007.
[123]	Saad Mazen,	Analyse Numérique, Ecole Centrale De Nantes, Notes De Cours, Année Universitaire 2011-2012.
[124]	Saad Y.,	Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition, 2000.
[125]	Saad Y.,	Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Minneapolis, December 1991.
[126]	Samarskii Alexander A., Vabishchevich Peter N.,	Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter De Gruyter Gmbh & Co., 2007.
[127]	Sauer Timothy,	Numerical Analysis, Second Edition, Pearson Education, Inc., 2012.
[128]	Schneiders J. P.,	Introduction à L'analyse Numérique, Notes De Cours, 2005-2006.
[129]	Serre Denis,	Matrices: Theory and Applications, Second Edition, Springer Science Business Media, 2010.
[130]	Stetter Hans J.,	Numerical Polynomial Algebra, Siam, 2004.
[131]	Stewart David E.,	Numerical Analysis: A Graduate Course, Springer Nature Switzerland AG 2022.

[132]	Stoer J. & Bulirsch R.,	Introduction to Numerical Analysis, Third Edition, Springer-Verlag, 2002.
[133]	Strang GILBERT,	Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, 1986.
[134]	Süli Endre and Mayers David F.,	An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.
[135]	Tang K.T.,	Mathematical Methods for Engineers and Scientists, Volume 1, 2, 3, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
[136]	Trefethen Lloyd N., Bau David,	Numerical Linear Algebra, Siam, 1997.
[137]	Vaillancourt Rémi,	Ordinary Differential Equations, Laplace Transforms and Numerical Methods for Engineers, University of Ottawa, 2004.
[138]	Varga Richard S.,	Matrix Iterative Analysis, Second Revised and Expanded Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.
[139]	Viot Pascal,	Méthodes D'analyse Numérique, Laboratoire De Physique Théorique Des Liquides, Notes De Cours, 2007.
[140]	Vorst Henk A. Van der,	Iterative Methods for Large Linear Systems, Mathematical Institute, Utrecht University, 2002.
[141]	Vrabie loan,	Differential Equations, an Introduction to Basic Concepts, Results and Applications, World Scientific Publishing Co., 2004.
[142]	Watkins David S.,	Fundamentals of Matrix Computations, Second Edition, John Wiley & Sons, inc., 2002.
[143]	Werner H., Schaback R.,	Praktische Mathematik II, Springer Verlag, 2. Auflage 1979.
[144]	Young D. M., Gregory R. T.,	A Survey of Numerical Mathematics, volume i & ii, Addison-Wesley Publishing Company. Inc., 1972-1973.
[145]	Zarowski Christopher J.,	An Introduction to Numerical Analysis for Elecrical and Computer Engineers, John Wiley & Sons, 2004.
[146]	Zill Dennis G., Cullen Michael R.,	Differential Equations with Boundary-Value Problems, Seventh Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009.

يعدّ الحساب العلمي أحد فروع الرياضيات التي تهتم بتطوير وتحليل وتطبيق طرائق عددية على صلة وثيقة بمجالات رياضيّة متنوعة مثل التحليل الرياضي، الجبر الخطي، الهندسة الإقليديّة، نظريّة التقريب، المعادلات التابعيّة، الأمثلة أو الحساب التفاضلي، حيث يكون للطرائق العددية دورها الطبيعي في عديدٍ من المسائل المطروحة في مجالات الفيزياء، العلوم البيولوجيّة، العلوم الهندسيّة، الاقتصاد والماليّة.

يتبوأ الحساب العلمي موقعاً هاماً على مفترق العديد من فروع العلوم التطبيقيّة الحديثة تمكّنه من تقديم أدوات تحليل فعّالة نوعاً وكماً؛ ويتعاظم دوره هذا مع التطور المستمر لأجهزة الحساب الرقميّة من جهة، ومع تطور الخوارزميات العدديّة: حيث تسمح إمكانات المعالجة الحاسوبيّة بحل مسائل من حجمٍ كبير وتنفيذ المحاكاة العدديّة لظواهر حقيقيّة.

إن أحد أبرز أهداف هذا الكتاب هو تقديم الأساس الرياضي لمسائل الحساب العلمي من خلال تحليل الخواص النظريّة للطرائق العدديّة مع تبيان نقاط القوة ونقاط الضعف لهذه الطرائق.

إضافةً إلى العرض الرياضي لخوارزميات الحساب ومبرهنات التقارب، نركّز في هذا الكتاب على التنفيذ العملي لهذه الخوارزميات من نواحٍ عديدة: عموميّة التطبيق، الدقّة، الاستقرار العددي فيما يتعلّق بأخطاء التدوير، سرعة الحساب، حجم الذاكرة الحاسوبيّة اللازمة، سهولة برمجتها. يسمح ذلك بمقارنة الطرائق المختلفة وفق معايير عديدة تبعاً لنمط الاستعمال المطلوب.

ISBN 978-9933-9261-8-2
9 789933 926182

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا
Higher Institute for Applied Sciences and Technology
www.hiast.edu.sy